THÈSE DE DOCTORAT
DE L'UNIVERSITÉ PARIS EST

Spécialité : **Génie Civil**

Présentée par

Benjamin Richard

pour obtenir le titre de Docteur
de l'Université Paris Est

Titre

COMPORTEMENT DES ÉLÉMENTS DE STRUCTURES EN BÉTON ARMÉ DÉGRADÉS PAR CORROSION

LA PROBLÉMATIQUE DE LA MODÉLISATION DE L'INTERFACE ACIER/BÉTON EN PRÉSENCE DE CORROSION

soutenue publiquement le 14 septembre 2010, devant le jury composé de :

Jacky MAZARS	*Président*
Christian La Borderie	*Rapporteur*
Alain MILLARD	*Rapporteur*
Raoul FRANCOIS	*Examinateur*
Lucas ADELAIDE	*Examinateur*
Frédéric RAGUENEAU	*Examinateur*
Jean-Louis TAILHAN	*Examinateur*
Christian CREMONA	*Directeur de thèse*

Remerciements

Mon histoire avec le Laboratoire Central des Ponts et Chaussées à Paris (LCPC Paris) a commencé, comme bien d'autres, par hasard. En mai 2006, alors que je suis en recherche de stage, Yannick Mélinge, maître de conférence à l'Institut National des Sciences Appliquées de Rennes (INSA Rennes), à l'époque, m'insuffle l'idée de m'adresser au LCPC. Christian Cremona répond positivement à ma demande et me témoigne une première fois sa confiance en me proposant de réaliser une étude bibliographie portant sur les modèles de l'interface acier/béton en présence de corrosion. Il me proposa ensuite une nouvelle tâche, lors de mon stage de fin d'études en dernière année de l'INSA de Rennes, en me précisant de *bien travailler* lors de la préparation de mon Master Recherche si j'étais intéressé par la préparation d'une thèse de doctorat de troisième cycle. Cela m'a profondément motivé et je suis finalement revenu à Paris pour m'engager dans ce que je qualifierai de grande aventure, intellectuelle, dans le monde de la recherche. Cette chance que Christian Cremona m'a offerte m'a, sans aucun doute, permis non seulement de trouver ma voie dans le monde professionnel mais aussi de m'épanouir en réfléchissant sur des questions d'actualité.

Me voilà, après 4 années passées au LCPC Paris, à rédiger ces sincères remerciements qui s'adressent à tous ceux qui m'ont donné quelque chose. Je ne pourrais admettre que l'on puisse imaginer que cela laisse indifférent. En effet, collègues de travail, amis doctorants, famille..., tant de personnes ont participé à différents niveaux à la bonne réalisation de ce travail que je pense à elles avec beaucoup d'émotion et ma plus grande crainte est d'oublier d'en citer certaines. Je vais donc essayer de faire de mon mieux, d'être le plus exhaustif possible. Je me lance.

Je tiens tout d'abord à remercier Jacky MAZARS d'avoir non seulement accepté de participer à mon jury mais aussi d'en avoir assuré la présidence. Mon plus profond respect ainsi que mes remerciements les plus vifs vont à Christian LA BORDERIE et à Alain MILLARD qui ont accepté, bien volontiers, la lourde tâche de rapporter ce travail. Je leur suis également reconnaissant pour la pertinence des remarques qu'ils m'ont adressées au cours de la soutenance et qui, j'en suis certain, contribueront à parfaire les développements proposés dans le cadre de cette étude. Je tiens également à remercier Frédéric RAGUENEAU pour m'avoir fait profiter de son expertise dans le domaine de la modélisation des matériaux quasi fragiles. Je lui suis également reconnaissant sur le plan humain, pour m'avoir soutenu, conseillé et guidé tout au long de ces trois années. Je ne pourrais oublier Lucas ADELAIDE qui a été à mes cotés de manière quotidienne et qui a répondu présent à chaque fois que j'en ai ressenti le besoin. Mes remerciements vont également à Jean-Louis TAILHAN. Bien qu'il ait suivi ce travail de manière un peu éloignée, il a su me montrer une autre vision de la modélisation. Cela a contribué à m'inciter à prendre un certain recul quant aux outils de modélisation disponibles ; je lui en suis très reconnaissant. Enfin, mes remerciements les plus respectueux et amicaux vont, sans nul doute, à Christian CREMONA qui a été mon maître de stage puis mon directeur de thèse pendant ces trois dernières années. Bien que nous n'ayons pas toujours été d'accord sur les directions et voies de recherche, il m'a toujours laissé m'exprimer et assumer mes choix. Il a également su me transmettre sa passion de la recherche, son ardeur au travail et sa bonne humeur. J'interprète cela comme une marque de confiance et de respect. J'espère que nous aurons l'occasion de collaborer, à nouveau, dans un futur proche.

Mes pensées vont maintenant à l'ensemble des agents du groupe Structures et Durabilité des Ouvrages (SDO), anciennement Structures et Durabilité des Ouvrages d'Art (SDOA). Un grand merci à André ORCESI, Franziska SCHMIDT et Véronique BOUTEILLER pour leur bonne humeur et la convivialité qui s'est instaurée dans nos rapports au cours de ces trois années. Je voudrais également mentionner qu'il m'a été très agréable de travailler avec eux sur des

problématiques communes, pouvant ainsi profiter de leur expertise sur des aspects qui m'étaient peu familiers. Je ne peux oublier Minh ORCESI et Bruno KOUBI pour m'avoir apporter un soutien logistique de qualité. La réalisation d'ordres de mission ou encore de réparation information, parfois même dans l'urgence, n'ont jamais posé de problème et ont toujours été effectuées avec qualité. Je voudrais également remercier mon collègue et voisin de bureau, Jean-François CHERRIER, avec qui j'ai eu plaisir à travailler et à discuter. Enfin, je voudrais remercier Jean-François SEIGNOL qui assure la direction du groupe SOA pour m'avoir permis d'achever la préparation de cette thèse avec efficacité.

Mes remerciements amicaux vont maintenant à mes collègues doctorants et amis : Eric MARTIN (dit l'ours) pour sa joie de vivre, Thierry BORE (dit picon) pour avoir instauré le traditionnel *picon bière* du vendredi soir, Alexandre CURY, Alexandre NASSIOPOULOS, Romain GALLEN, Laetitia MARTINIE, Xiaomeng WANG, Omar KHEMOUDJ, Josselin PETIT et tout ceux auxquels je ne pense pas à l'instant présent mais qui se reconnaitront en lisant ces quelques mots.

Je ne peux conclure cette page de remerciements sans mentionner mes amis proches de longue date, Mael COUCHAUX (dit Couchuxe), Jean-Paul FRITSCH (dit Paulo), Vincent OLIVIER (dit Jimou), Maxime BENOÎT (dit Max), Fabien ESCUDIER, Chloé FABRE, Samuel MENDEZ (dit sam), Emilie COURCOT, Marine et Sébastien VINCE. Tous ont contribué largement à l'achèvement de ce travail non seulement en me prêtant main forte dans les moments difficiles mais aussi et surtout en jouant les joyeux fêtards dans les moments de joie. Merci à tous !

Mes plus tendres remerciements vont à ma famille et surtout à ma mère, Sylviane. Je lui suis reconnaissant non seulement pour son soutien effectif tout au long de ces trois années mais surtout pour sa force de caractère qui nous a permis de surmonter des moments douloureux. Bien qu'il ne soit plus à mes côtés, je remercie mon père, Frédéric, pour toutes les valeurs qu'il a su me transmettre. Papa, maman, un grand merci à tous les deux pour m'avoir aidé à me révéler. Un grand merci également à l'ensemble de ma famille, Dominique, Marie, Louise, Laure, Juliette, François, Elisabeth, Alexandre, Hugues, Anne, Raoul, Muguette, Yves, Dominique, Régine, Virasak, Arnaud, Alice, Tiphaine, Pauline, Timothée, Guilhem, Ludyvine et Eymeric. Un grand merci à tous pour votre soutien.

Il n'y a pas de vérités premières, il n'y a que des erreurs premières.

Gaston Bachelard, La Formation de l'Esprit Scientifique.

Résumé

Un manque significatif d'infrastructures est apparu pendant la période d'après guerre. Face à cette demande pressée et grandissante, les ingénieurs ont été contraints à répondre dans la rapidité, parfois même sans considérer pleinement les aspects liés à la durabilité. De nos jours, l'ensemble de ces infrastructures constitue un héritage qui doit être maintenu en fonction. Néanmoins, les gestionnaires d'ouvrage ont fait état d'importants signes de dégradation causés par l'interaction entre l'environnement extérieur et les matériaux constitutifs des ouvrages existants. Leur durabilité est nettement affectée, pouvant conduire parfois à une perte d'aptitude au service voir jusqu'à une perte de sécurité structurale. Une des causes majeures responsables de cette perte de performance a été identifiée comme étant la corrosion des armatures présentes dans le béton armé. Ce phénomène est susceptible de se développer soit par carbonatation, soit par pénétration des ions chlorures par le béton d'enrobage. C'est alors que des produits de corrosion apparaissent et génèrent des contraintes de traction qui, dès que la résistance en traction est dépassée, favorisent l'apparition de fissures. D'un point de vue pratique, dès que les premières fissures sont remarquées à la surface du béton, la corrosion a généralement atteint un stade avancé et des actions de maintenance doivent être lancées. Cela entraîne d'importants coûts qui auraient pu être évités si une prédiction satisfaisante avait pu être réalisée. Cette étude vise à apporter des éléments de réponse à cette problématique. Deux objectifs essentiels ont été considérés : le premier consiste à proposer des lois de comportement robustes et satisfaisantes permettant de bien décrire le comportement des éléments de structure existants et le second consiste à proposer une méthode probabiliste permettant d'actualiser les paramètres de modèles sur la base de l'information disponible sur le terrain. Un cadre constitutif générique couplant élasticité, endommagement isotrope et glissement interne a été développé. Son admissibilité thermodynamique a été montrée. Cette classe d'équations a été particularisée au cas de l'interface acier/béton en présence de corrosion et au cas du béton. Ces dernières peuvent être utilisées non seulement sous chargement monotone mais aussi sous chargement cyclique. Les lois proposées permettent de prendre en compte les effets hystérétiques, les déformations permanentes et l'effet unilatéral. En outre, ces dernières ont été validées sur différents cas tests. Parfois, il n'est pas justifié de rechercher des informations très locales, c'est alors que le recours à des modèles simplifiés est justifié. Des versions multifibres des lois précédemment mentionnées ont donc été développées. En particulier, une prise en compte du caractère imparfait de l'interface acier/béton au sein du formalisme multifibre a été considérée. L'étape d'identification des paramètres matériaux n'est pas toujours aisée à réaliser en raison d'une part des incertitudes qui entachent ces derniers et, d'autre part, de la méconnaissance des mécanismes locaux. Ainsi, une méthodologie probabiliste complète permettant d'actualiser les paramètres d'entrée sur la base d'observations extérieures a été proposée. Elle s'appuie sur une utilisation conjointe des réseaux bayésiens et de la théorie de la fiabilité. Elle permet de réduire l'écart entre la prédiction numérique et les mesures réalisées sur le terrain. Cette étude devrait contribuer à fournir aux gestionnaires d'ouvrage des outils d'aide à la décision leur permettant de mieux gérer leur parc d'ouvrages.

Abstract

During the post war period, a significant lack of infrastructures appeared. Facing to this growing demand, civil engineers had to conceive promptly, without considering durability. Today, those infrastructures constitute a heritage that has to be kept operational. Stackholders have observed noticeable signs of degradation resulting from interactions between the environment and constitutive materials. Durability tends to decrease till the serviceability becomes affected and, in some cases, till the structural safety is concerned. One of the major causes leading to such a noticeable loss of performance has been identified as being the corrosion phenomena induced either by carbonation or by chloride ions ingress. The corrosion products being expansive, tensile stresses are generated and usually lead to the cover concrete cracking. From a practical point of view, when first observable signs of degradation are noticed on site, it is generally too late and service actions have to be performed. This results in important expenses that could have been avoided if a satisfying prediction had been made. This thesis aims to propose some answers to that problem. Two main objectives have been defined. The first one consists in formulating reliable constitutive models for better understanding of the mechanical behavior of existing structures. The second objective aims to develop a probabilistic approach for updating the mechanical model according to the experimental information available on site. A general constitutive framework has been proposed coupling elasticity, isotropic damage and internal sliding. Its thermodynamical admissibility has been checked. This general framework has been declined in two specific constitutive models : the first one for modeling the steel/concrete interface including corrosion and, the second one, for modeling concrete. Both models have been validated on several discriminating structural cases. They can be used for monotonic and cyclic loadings. Besides, they account for non linear hysteretic effects, quasi unilateral effect, permanent strains, etc. Sometimes, very accurate information is not required and the use of simplified models is sufficient. Hence, simplified versions of the proposed constitutive models have been proposed within the framework of the multifiber beams theory. Especially, in the case of the steel/concrete interface, although a Timoshenko based kinematics is assumed, a non-perfect interface between steel and concrete can be considered locally. The material parameter identification is not always straightforward. Therefore, the use of robust updating methods can improve the accuracy of mechanical models. A complete probabilistic approach based on Bayesian Networks has been proposed. It allows not only considering the uncertainties related to mechanical parameters but also reducing the gap between experimental measurements and numerical predictions. This study shows that coupling reliable constitutive models to robust updating methods provide satisfying predictions that can help stackholders to better plan service actions and better manage budgets constraints.

Table des matières

1 Introduction **25**

2 Motivations, objectifs et état de l'art **29**
2.1 Introduction . . . 29
2.2 Motivations et objectifs . . . 30
2.3 Problème de mécanique et cadre thermodynamique . . . 31
2.3.1 Problème mécanique . . . 31
2.3.2 Cadre thermodynamique . . . 33
2.3.3 Formulation des lois constitutives . . . 35
2.3.4 Bilan . . . 37
2.4 Comportement mécanique de l'interface acier/béton . . . 38
2.4.1 Préambule : une longue histoire . . . 38
2.4.2 Aspects phénoménologiques . . . 41
2.4.3 Outils de prédiction . . . 52
2.4.4 Bilan . . . 60
2.5 Comportement mécanique du béton . . . 62
2.5.1 Préambule : observer de près ou de loin ? . . . 62
2.5.2 Aspects phénoménologiques . . . 62
2.5.3 Outils de prédiction . . . 65
2.5.4 Bilan . . . 84
2.6 Conclusion . . . 85

3 Classe d'équations constitutives couplant élasticité, endommagement isotrope et glissement interne **87**
3.1 Introduction . . . 87
3.2 Problème aux limites discrétisé . . . 88
3.2.1 Formulation faible . . . 88
3.2.2 Discrétisation . . . 88
3.2.3 Schéma de résolution global . . . 90
3.3 Modélisation locale . . . 92
3.3.1 Couplage entre élasticité, endommagement isotrope et glissement interne 92
3.3.2 Application à l'interface acier/béton en présence de corrosion . . . 97
3.3.3 Application au béton . . . 103
3.3.4 Bilan . . . 106
3.4 Modélisation simplifiée . . . 107
3.4.1 Principe général de l'approche . . . 107
3.4.2 Application à l'interface acier/béton en présence de corrosion . . . 108
3.4.3 Application au béton . . . 111
3.4.4 Bilan . . . 113
3.5 Implantation numérique . . . 113

3.5.1 Modèle constitutif de l'interface acier/béton en présence de corrosion . . . 114
3.5.2 Modèle constitutif de béton . . . 117
3.5.3 Modèle simplifié de l'interface acier/béton en présence de corrosion . . . 118
3.5.4 Modèle simplifié du béton . . . 121
3.5.5 Bilan . . . 122
3.6 Identification des paramètres et résultats locaux . . . 122
3.6.1 Identification des paramètres . . . 122
3.6.2 Résultats locaux . . . 126
3.6.3 Bilan . . . 133
3.7 Conclusion . . . 134

4 Evaluation déterministe et probabiliste des éléments de structures en béton armé sains et dégradés par corrosion 137
4.1 Introduction . . . 137
4.2 Description et objectifs des différentes simulations . . . 138
4.3 Simulation d'essais de tirant . . . 140
4.3.1 Essais pull-out de La Borderie . . . 140
4.3.2 Essais de tirants long de Clément . . . 142
4.3.3 Essais pull-out d'Almusallam . . . 144
4.3.4 Bilan . . . 146
4.4 Simulation d'éléments de structures en béton . . . 147
4.4.1 Essais de Schlangen . . . 147
4.4.2 Essai de Hassanzadeh . . . 149
4.4.3 Bilan . . . 151
4.5 Simulation d'éléments de structures en béton armé . . . 152
4.5.1 Essai de Ragueneau . . . 153
4.5.2 Essai de La Borderie . . . 156
4.5.3 Bilan . . . 160
4.6 Simulation d'éléments de structures en béton armé en présence de corrosion . . . 160
4.6.1 Essai de Mangat . . . 161
4.6.2 Essai sur le pont d'Örnsköldsvik . . . 166
4.6.3 Bilan . . . 178
4.7 Conclusion . . . 179

5 Requalification des éléments de structures en béton armé en contexte probabiliste 185
5.1 Introduction . . . 185
5.2 Les réseaux bayésiens . . . 186
5.2.1 Intérêt . . . 186
5.2.2 Formulation, construction et utilisation . . . 187
5.2.3 Exemple didactique . . . 189
5.2.4 Bilan . . . 192
5.3 Théorie de la fiabilité . . . 192
5.3.1 Intérêt . . . 192
5.3.2 Formulation . . . 193
5.3.3 Exemple didactique . . . 199
5.3.4 Bilan . . . 200
5.4 Méthodologie proposée . . . 201
5.4.1 Motivations et objectifs . . . 201
5.4.2 Description . . . 202
5.5 Application aux éléments de structures en béton armé . . . 203

5.5.1 Poutre de Ragueneau 204
5.5.2 Pont d'Örnsköldsvik 206
5.5.3 Bilan 208
5.6 Conclusion 208

6 Conclusion **211**

A Paramètres utilisés pour les simulations numériques **227**

B Condensation des équations tensorielles par dégénération d'éléments classiques **237**

Table des figures

2.1 Réponse uniaxiale des essais de traction pure réalisés sur des barres d'acier corrodées à différents degrés (d'après (Almusallam *et al.*, 1996)). 49
2.2 Réponse uniaxiale des essais de traction pure réalisés sur des barres d'acier entaillées à différentes profondeurs (d'après (Castel, 2001)). 50
2.3 Réponses des essais d'arrachement réalisés sur des éprouvettes corrodées à différents degrés définis en perte de masse (d'après (Sulaimani *et al.*, 1990)). . . . 51
2.4 Réponse en traction cyclique d'un béton ordinaire (d'après (Terrien, 1980)). . . . 63
2.5 Domaine de rupture et d'élasticité d'un béton ordinaire sous sollicitations biaxiales (d'après (Ramtani, 1990)). 64
2.6 Réponse en bi compression d'un béton ordinaire (d'après (Kupfer et Gerstle, 1973)). 64
2.7 Mise en évidence de l'effet unilatéral (d'après (LaBorderie, 1991)). 65

3.1 Principe de l'approche multifibre. 108
3.2 Graphe de la fonction W après identification. 125
3.3 Comparaison de la réponse du modèle avec l'expérience après identification. . . . 125
3.4 Sensibilité de la réponse en mode I aux variations de la fragilité. 127
3.5 Sensibilité de la réponse en mode II aux variations de la fragilité. 127
3.6 Sensibilité de la réponse en mode I aux variations du paramètre de dissymétrisation mode I/II. 127
3.7 Réponse de référence en mode II. 127
3.8 Sensibilité de la réponse en mode II aux variations du module d'écrouissage γ. . 128
3.9 Sensibilité de la réponse en mode II aux variations du module d'écrouissage a. . . 128
3.10 Effets de la corrosion sur la réponse en mode I. 128
3.11 Effets de la corrosion sur la réponse en mode II. 128
3.12 Comparaison des résultats numériques avec les données expérimentales en traction cyclique uniaxiale. 129
3.13 Comparaison des résultats numériques avec les données expérimentales en compression cyclique uniaxiale. 129
3.14 Evolution des directions principales en fonction du chargement. 130
3.15 Evolution des différentes composantes de la matrice des contraintes en fonction du chargement. 130
3.16 Surfaces d'élasticité numérique et expérimentale. 130
3.17 Surfaces de rupture numérique et expérimentale. 130
3.18 Effet unilatéral. 131
3.19 Résultats locaux - sans corrosion monotone 133
3.20 Résultats locaux - avec corrosion monotone 134
3.21 Résultats locaux - sans corrosion cyclique 135

4.1 Schéma de principe des essais de tirant réalisés par (LaBorderie et Pijaudier-Cabot, 1987). 140
4.2 Courbes force/déplacement obtenues pour les différents niveaux de confinement. 141

4.3 Contraintes de cisaillement au pic de résistance pour un confinement de 0 MPa. . 141
4.4 Différents maillages pour l'étude de sensibilité - (a) 10 éléments d'interface, (b) 20 éléments d'interface, (c) 30 éléments d'interface. 142
4.5 Réponse obtenues pour les différents maillages. 143
4.6 Courbes force/déplacement obtenues pour les différents niveaux de confinement. 144
4.7 Cartographie d'endommagement sans modèle d'interface (droite) et avec modèle d'interface (gauche) pour un déplacement imposé de 0,5 mm. 144
4.8 Schéma de principe des essais de tirant réalisés par (Almusallam *et al.*, 1996). . . 145
4.9 Courbes de réaction numériques et expérimentales pour différents degrés de corrosion. 146
4.10 Cartographie d'endommagement obtenue après extraction de la barre d'acier. . . 146
4.11 Poutre simplement entaillée soumise à un chargement de cisaillement asymétrique - toutes les dimensions sont données en millimètres. 148
4.12 Poutre doublement entaillée soumise à un chargement de cisaillement asymétrique - toutes les dimensions sont données en millimètres. 148
4.13 Faciès de fissuration obtenu en fin de chargement pour la poutre simplement entaillée d'après (Schlangen, 1993). 149
4.14 Faciès de fissuration obtenu en fin de chargement pour la poutre doublement entaillée d'après (Schlangen, 1993). 149
4.15 Courbes expérimentale et numérique force/ouverture en surface de l'entaille. . . . 150
4.16 Cartographie d'endommagement obtenue en fin de chargement pour la poutre simplement entaillée. 150
4.17 Cartographie d'endommagement obtenue en fin de chargement pour la poutre doublement entaillée. 151
4.18 Schéma de l'essai réalisé par (Hassanzadeh, 1991). 151
4.19 Maillages utilisés pour les simulations - (a) 400 éléments, (b) 1500 éléments et (c) 9492 éléments. 152
4.20 Courbes expérimentale et numériques force/déplacement. 152
4.21 Cartographie d'endommagement obtenue en fin de chargement pour les différents maillages - (a) 400 éléments, (b) 1500 éléments et (c) 9492 éléments. 153
4.22 Cartographie d'endommagement - interface parfaite. 154
4.23 Cartographie d'endommagement - interface imparfaite. 154
4.24 Courbes de réaction - interface parfaite et imparfaite, expérience. 155
4.25 Courbes de réaction à rupture - 15000 tirages. 156
4.26 Intervalle de confiance à 90 %. 156
4.27 Déplacement imposé en fonction du temps. 157
4.28 Courbe force/flèche obtenue pour la poutre testée par (LaBorderie, 1991) - approche simplifiée. 158
4.29 Cartographie d'endommagement obtenue pour la poutre testée par (LaBorderie, 1991) - approche simplifiée. 158
4.30 Cartographie d'endommagement en fin de chargement obtenue pour la poutre testée par (LaBorderie, 1991) - approche locale. 159
4.31 Courbe force/déplacement obtenue pour le poutre testée par (LaBorderie, 1991) - approche locale. 159
4.32 Mise en évidence de l'effet unilatéral partiel - approche locale. 159
4.33 Résultats obtenus pour les poutres testées par (Mangat et Elgalf, 1999b) - approche simplifiée. 162
4.34 Intérieur du maillage d'un quart de poutre testée par (Mangat et Elgalf, 1999b). 163
4.35 Maillage complet d'un quart de poutre testée par (Mangat et Elgalf, 1999b). . . 163
4.36 Courbe force/déplacement obtenue pour la poutre saine. 165

4.37 Contraintes de Von Mises le long de la barre de renforcement obtenues pour la poutre saine. . . . 165
4.38 Contraintes de cisaillement à l'interface le long de la barre de renforcement obtenues pour la poutre saine. . . . 165
4.39 Endommagement à l'interface le long de la barre de renforcement obtenu pour la poutre saine. . . . 165
4.40 Courbe force/déplacement T_c = 1,25 %. . . . 167
4.41 Courbe force/déplacement T_c = 2,50 %. . . . 167
4.42 Courbe force/déplacement T_c = 3,75 %. . . . 167
4.43 Courbe force/déplacement T_c = 5,00 %. . . . 167
4.44 Courbe force/déplacement T_c = 7,50 %. . . . 167
4.45 Courbe force/déplacement T_c = 10,00 %. . . . 167
4.46 Contrainte de Von Mises le long de la barre T_c = 1,25 %. . . . 168
4.47 Contrainte de Von Mises le long de la barre T_c = 2,50 %. . . . 168
4.48 Contrainte de Von Mises le long de la barre T_c = 3,75 %. . . . 168
4.49 Contrainte de Von Mises le long de la barre T_c = 5,00 %. . . . 168
4.50 Contrainte de Von Mises le long de la barre T_c = 7,50 %. . . . 168
4.51 Contrainte de Von Mises le long de la barre T_c = 10,00 %. . . . 168
4.52 Contrainte de cisaillement le long de la barre T_c = 1,25 %. . . . 169
4.53 Contrainte de cisaillement le long de la barre T_c = 2,50 %. . . . 169
4.54 Contrainte de cisaillement le long de la barre T_c = 3,75 %. . . . 169
4.55 Contrainte de cisaillement le long de la barre T_c = 5,00 %. . . . 169
4.56 Contrainte de cisaillement le long de la barre T_c = 7,50 %. . . . 169
4.57 Contrainte de cisaillement le long de la barre T_c = 10,00 %. . . . 169
4.58 Endommagement à l'interface le long de la barre T_c = 1,25 %. . . . 170
4.59 Endommagement à l'interface le long de la barre T_c = 2,50 %. . . . 170
4.60 Endommagement à l'interface le long de la barre T_c = 3,75 %. . . . 170
4.61 Endommagement à l'interface le long de la barre T_c = 5,00 %. . . . 170
4.62 Endommagement à l'interface le long de la barre T_c = 7,50 %. . . . 170
4.63 Endommagement à l'interface le long de la barre T_c = 10,00 %. . . . 170
4.64 Vue globale du pont d'Örnsköldsvik. . . . 171
4.65 Géométrie du pont d'Örnsköldsvik, d'après les plans originaux de 1956. . . . 171
4.66 Montage de chargement du pont d'Örnsköldsvik. . . . 172
4.67 Maillage utilisé pour l'analyse du pont d'Örnsköldsvik. . . . 172
4.68 Courbe force/flèche obtenue numériquement et comparaison avec les données expérimentales. . . . 173
4.69 Cartographie d'endommagement obtenue pour un déplacement imposé égal à 8 mm. . . . 174
4.70 Cartographie d'endommagement obtenue pour un déplacement imposé égal à 30 mm. . . . 174
4.71 Cartographie d'endommagement obtenue pour un déplacement imposé égal à 100 mm. . . . 175
4.72 Distribution du champ de déformation selon la direction principale 1 à rupture. . . . 175
4.73 Distribution du champ de déformation selon la direction principale 2 à rupture. . . . 175
4.74 Mesures spectrométriques du champ des déformations principales - P = 6 MN. . . . 176
4.75 Mesures spectrométriques du champ des déformations principales - P = 10 MN. . . . 176
4.76 Maillage du pont d'Örnsköldsvik modifié par la mise en place d'éléments joints. . . . 176
4.77 Effets d'une réduction locale de la section d'acier. . . . 176
4.78 Effets d'une réduction locale de l'adhérence acier/béton. . . . 176
4.79 Courbes de réaction du pont en phase linéaire - 10000 tirages. . . . 177

4.80 Fonction de répartition de la flèche en phase linéaire. 177
4.81 Intervalle de confiance à 90 %, réponse numérique moyenne et données expérimentales en phase élastique. 177

5.1 Graphe orienté acyclique et relations causales. 187
5.2 Graphe orienté cyclique et relations causales. 187
5.3 Graphe orienté acyclique et relations causales lié à l'exemple didactique proposé. 190
5.4 Densités de la flèche à mi-travée. 192
5.5 Densités du module d'Young a priori, a posteriori. 192
5.6 Poutre en console. 199
5.7 Schéma de principe de la méthodologie de requalification proposée. 203
5.8 Densité du module d'Young initiale et actualisée - cas de l'ELS. 206
5.9 Densité de la flèche à mi-travée initiale et actualisée - cas de l'ELS. 206
5.10 Densités des variables de cause initiales et actualisées - cas de l'ELU. 206
5.11 Densité de la flèche à mi-travée initiale et actualisée - cas de l'ELU. 206
5.12 Densités du module d'Young du pont en béton armé initiale et actualisée. 207
5.13 Densité de la flèche à mi-travée initiale et actualisée. 207

6.1 Surface d'endommagement. 214
6.2 Surface de fissuration. 214

Liste des tableaux

2.1 Classification et synthèse des études expérimentales de la liaison acier/béton en absence de corrosion. . . . 42
2.2 Classification et synthèse des études expérimentales de la liaison acier/béton en présence de corrosion. . . . 43
2.3 Classification des modèles significatifs d'interface acier/béton proposés dans la littérature. 53
2.4 Classification des modèles significatifs de béton proposés dans la littérature. . . . 66

3.1 Mécanismes dissipatifs considérés et variables associées. . . . 92
3.2 Ensemble des variables flux et forces caractérisant l'état thermodynamique du système matériel considéré. . . . 95
3.3 Description des paramètres matériaux du modèle d'interface acier/béton en présence de corrosion. . . . 123
3.4 Paramètres matériaux du modèle de béton. . . . 125
3.5 Paramètres matériaux du modèle simplifié de l'interface acier/béton en présence de corrosion - l'indice I renvoie aux paramètres liés à l'interface acier/béton et l'indice S à ceux relatifs à l'acier. . . . 132

4.1 Description et aspects étudiés propres à chaque simulation proposée. . . . 139
4.2 Variables aléatoires choisies pour l'étude probabiliste à rupture de la poutre en béton armé. . . . 155

5.1 Lois de probabilité associées à chacune des variables identifiées. . . . 190
5.2 Lois de probabilité associées à chacune des variables identifiées. . . . 199
5.3 Résultats obtenus après analyse de la fiabilité de la poutre. . . . 200
5.4 Lois de probabilité associées à chacune des variables identifiées du modèle de la poutre testée par (Ragueneau, 1999). . . . 204
5.5 Indicateur d'élasticité de la poutre de Ragueneau à l'ELS. . . . 205
5.6 Indicateur d'élasticité de la poutre de Ragueneau à l'ELU. . . . 205

A.1 Paramètres du modèle d'interface acier/béton. . . . 227
A.2 Paramètres du modèle d'acier. . . . 227
A.3 Paramètres du modèle de béton. . . . 228
A.4 Paramètres du modèle d'interface acier/béton. . . . 228
A.5 Paramètres du modèle d'acier. . . . 228
A.6 Paramètres du modèle de béton. . . . 229
A.7 Paramètres du modèle d'interface acier/béton. . . . 229
A.8 Paramètres du modèle d'acier. . . . 229
A.9 Paramètres du modèle de béton. . . . 230
A.10 Paramètres du modèle de béton. . . . 230
A.11 Paramètres du modèle de béton. . . . 230
A.12 Paramètres du modèle de béton. . . . 231
A.13 Paramètres du modèle d'acier. . . . 231

A.14 Paramètres du modèle d'acier. 231
A.15 Paramètres du modèle de béton. 232
A.16 Paramètres du modèle d'acier. 232
A.17 Paramètres du modèle de béton. 232
A.18 Paramètres du modèle d'acier. 232
A.19 Paramètres du modèle d'interface acier/béton. 233
A.20 Paramètres du modèle d'acier. 234
A.21 Paramètres du modèle de béton. 234
A.22 Paramètres du modèle d'acier. 234
A.23 Paramètres du modèle de carbone. 235
A.24 Paramètres du modèle d'interface acier/béton. 235
A.25 Paramètres du modèle de béton. 235

Notations

Les notations essentielles des différentes quantités mathématiques introduites dans ce mémoire sont rassemblées et explicitées dans cette section. Selon le contexte de la présentation, certaines variables sont utilisées en notations soit tensorielle (notations en souligné) soit matricielle (notation en gras). Le sens de ces dernières n'est toutefois précisé qu'une seule fois.

Variables scalaires

Π_i :	Puissance virtuelle des efforts intérieurs
Π_e :	Puissance virtuelle des efforts extérieurs
Π_a :	Puissance virtuelle associée à l'accélération
λ :	Multiplicateur de Lagrange
E :	Énergie interne
K :	Énergie cinétique
Q :	Chaleur
S :	Entropie
T :	Température
ρ :	Masse volumique
e :	Densité d'énergie cinétique
s :	Densité d'entropie
r :	Source de chaleur
Ψ :	Potentiel thermodynamique
Ξ :	Énergie de Gibbs
r :	Source de chaleur
$\mathcal{D}$:	Dissipation intrinsèque volumique
f :	Potentiel de dissipation
λ_d :	Multiplicateur d'endommagement
λ_π :	Multiplicateur de glissement interne
λ_r :	Multiplicateur anélastique
ϕ :	Pseudo-potentiel de dissipation
g :	Potentiel plastique
τ :	Contrainte de cisaillement à l'interface acier/béton
τ_0 :	Contrainte de cisaillement seuil à l'interface acier/béton
$\tau_{\mathbf{max}}$:	Contrainte de cisaillement maximum à l'interface acier/béton
$K_{I,II,III}$:	Facteur d'intensité de contrainte en mode I, II et III
$f_{I,II,III}$:	Fonction poids en mode I, II et III
σ^∞ :	Contrainte en champ lointain
E :	Module d'Young
ν :	Coefficient de Poisson
κ :	Coefficient de compressibilité
μ :	Module de cisaillement
G_f :	Énergie de fissuration (mécanique de la rupture)
f_t :	Résistance en traction (béton)
w_c :	Ouverture de fissure critique
ϕ_g :	Diamètre du plus gros granulat
$\tilde{\epsilon}$:	Déformation équivalente de Mazars
d :	Variable d'endommagement (0 si le matériau est sain, 1 sinon)
d_T :	Variable d'endommagement en traction (0 si le matériau est sain, 1 sinon)
d_C :	Variable d'endommagement en compression (0 si le matériau est sain, 1 sinon)

ϵ_{d0} : Déformation critique de Mazars
T_c : Degré de corrosion
W : Fonction d'adhérence
l_c : Longueur caractéristique de l'approche non locale
$\mathcal{H}_S$: Fonction indicatrice d'une discontinuité cinématique
N_i : Fonction de forme associée au nœud i
a : Paramètre matériau associé à l'écrouissage cinématique
c : Paramètre matériau de dilatance
γ : Paramètre matériau associé à l'écrouissage cinématique
Y : Taux de restitution d'énergie
Y_d : Taux de restitution d'énergie associé à l'endommagement isotrope
Y_π : Taux de restitution d'énergie associé au glissement interne
Y_r : Taux de restitution d'énergie associé aux déformations anélastiques
H : Fonction de consolidation
A_d : Paramètre de fragilité (interface acier/béton)
$q_{i=1,2,3}$: Paramètre du critère de Gurson modifié (interface acier/béton)
α_0 : Paramètre de dissymétrie dans le seuil d'endommagement (interface acier/béton)
Y_0 : Seuil initial d'endommagement
$A_{\mathbf{Dir}}$: Paramètre de fragilité en traction (béton)
$A_{\mathbf{Ind}}$: Paramètre de fragilité en compression (béton)
$f^\star$: Fraction volumique des pores (interface acier/béton)
k : Paramètre matériau lié aux déformations anélastiques
n : Exposant d'écrouissage lié aux déformations anélastiques
$\nu_{\mathbf{ox}}$: Coefficient d'expansion des produits de corrosion
D_0 : Diamètre initial de l'armature
β : Paramètre de dissymétrie dans le seuil d'endommagement (béton)
ϕ_π : Pseudo potentiel lié au glissement interne
$\epsilon_{\mathbf{Tol}}$: Tolérance pour les algorithmes d'intégration locale
η : Facteur de partition (approche multifibre avec interface imparfaite)

Variables vectorielles

$\underline{v}$: Déplacements virtuels
$\underline{\gamma}$: Accélération
$\underline{u}$: Déplacements réels
M : Point matériel
$\underline{n}$: Normale extérieure
$\underline{t}$: Tractions
$\underline{\bar{t}}$: Tractions imposées
$\underline{\bar{u}}$: Déplacements réels imposées
$\underline{q}$: Flux de chaleur
$\mathbf{f^{Int}}$: Forces internes
$\mathbf{f^{Ext}}$: Forces externes
$\mathbf{B}$: Matrice gradient

Variables tensorielles

$\underline{\underline{\sigma}}$:	Contraintes de Cauchy
$\underline{\underline{\epsilon}}$:	Déformations totales linéarisées
$\underline{\underline{\underline{\underline{K}}}}$:	Rigidité total
$\underline{\underline{\underline{\underline{C}}}}^{\mathbf{an}}$:	Module tangent cohérent
$\underline{\underline{\underline{\underline{C}}}}^{f}$:	Module d'adoucissement
$\underline{\underline{\underline{\underline{H}}}}^{f}$:	Compliance en endommagement anisotrope
$\underline{\underline{\underline{\underline{D}}}}$:	Variable d'endommagement anisotrope
$\underline{\underline{\underline{\underline{Y}}}}$:	Taux de restitution d'énergie en endommagement anisotrope
$\underline{\underline{\epsilon}}^{f}$:	Déformation de fissures (approche fissuration diffuse)
$\underline{\underline{\epsilon}}^{m}$:	Déformation du matériau sain (approche fissuration diffuse)
$\underline{\underline{\epsilon}}^{p}$:	Déformation plastique
$\underline{\underline{\epsilon}}^{r}$:	Déformation anélastique associée aux produits de corrosion
$\underline{X}$:	Contrainte de rappel
$\underline{\underline{\epsilon}}^{\pi}$:	Glissement interne
$\underline{\underline{\sigma}}^{\pi}$:	Contrainte de frottement
$\underline{\underline{\sigma}}_{r}$:	Contrainte associée aux déformations anélastiques
σ_M :	Écrouissage associée aux déformations anélastiques
σ_y :	Contrainte seuil associée aux produits de corrosion
$\underline{\alpha}$:	Écrouissage cinématique
z :	Écrouissage isotrope
Z :	Variable force associée à l'écrouissage isotrope
$\underline{\underline{\delta}}$:	Tenseur unité d'ordre deux (de Kronecker)
$\underline{\underline{\epsilon}}^{\mathbf{Dir}}$:	Extensions directes (béton)
$\underline{\underline{\epsilon}}^{\mathbf{Ind}}$:	Extensions induites (béton)

Opérations et opérateurs

$\nabla(.)$:	Gradient
$\mathbf{Div}(.)$:	Divergence pour un tenseur
$\mathcal{L}(.)$:	Loi de comportement générique
$\frac{d}{dt}(.)$:	Dérivée temporelle
$\mathbf{Arg}(.)$:	Argument
$\mathcal{G}(.)$:	Fonctionnelle de Lagrange
$\mathbf{Tr}(A) := A_{kk}$:	Trace
$(A)^{d}_{ij} := A_{ij} - \frac{1}{3}A_{kk}\delta_{ij}$:	Déviateur
$\mathcal{H}(.)$:	Fonction d'Heaviside
$A : B := A_{ij}B_{ji}$:	Produit doublement contracté
$(A.B)_{ij} := A_{ik}B_{kj}$:	Produit simplement contracté
$(A \otimes B)_{ijkl} := A_{ij}B_{kl}$:	Produit tensoriel
$< A >_{+}$:	Partie positive
$< A >_{-}$:	Partie négative
$I_i(A)$:	$i^{\text{ème}}$ Invariant du tenseur A
$J_i(A)$:	$i^{\text{ème}}$ Invariant du tenseur déviateur de A
$\underline{u}\overline{\otimes}\underline{v} := \frac{1}{2}(u_i v_j + u_j v_i)$:	Produit tensoriel symétrisé

$\mathbb{A}$	Opérateur d'assemblage
$\dot{X} := \frac{\partial X}{\partial t}$:	Dérivée de la quantité X, par rapport au pseudo temps t
$\mathbf{max}(.)$:	Maximum
$\mathbf{min}(.)$:	Minimum
$\mathbf{Ln}(.)$:	Logarithme népérien
$\mathbf{ch}(.)$:	Cosinus hyperbolique
$\mathbf{sh}(.)$:	Sinus hyperbolique
$\mathbf{Det}(.)$:	Déterminant
$\mathbf{Sg}(.)$:	Fonction signe
$\mathbf{erfc}(.)$:	Fonction erreur complémentaire
Δ :	Incrément d'une quantité donnée
$\partial_{\underline{\underline{X}}}(\underline{\underline{Y}})$:	Sous différentiel de $\underline{\underline{Y}}$ relativement à $\underline{\underline{X}}$
$(.)_{\mathbf{n}}$:	Projection selon la normale extérieure
$(.)_{\mathbf{t}}$:	Projection selon le vecteur tangent
$(.)_{\mathbf{b}}$:	Projection selon le vecteur binormal
$(.)^{(i),(k)}$:	Grandeur (.) discrétisée à l'itération (i) et au pas de chargement (k)

Ensembles et domaines

Ω :	Domaine matériel
V :	Volume associé à un domaine matériel
$\partial\Omega$:	Frontière de Ω
$\partial\Omega_t$:	Restriction de $\partial\Omega$ où les tractions sont imposées
$\partial\Omega_u$:	Restriction de $\partial\Omega$ où les déplacements sont imposés

Probabilités et fiabilité

$f_{\mathbf{X}}$:	Densité conjointe de probabilité
$\mathbf{X}$:	Vecteur aléatoire
X :	Variable aléatoire
$X_{\pi(i)}$:	Variable aléatoire parent relativement à la variable aléatoire X_i
$P(X)$:	Probabilité de X
$P(X\|Y)$:	Probabilité conditionnelle de X sachant Y
P_f :	Probabilité de défaillance
β :	Indice de fiabilité
g_X :	Fonction de performance ou fonction d'état limite
S^{p_X} :	Élasticité au paramètre p relativement à la variable aléatoire X
$P^\star$:	Point de fonctionnement

Acronymes

$FORM$:	First Order Reliability Method
$SORM$:	Second Order Reliability Method
$VIPP$:	Viaduc à travée Indépendante à Poutres préfabriquées en béton Précontraint
$MCTD$:	Monte Carlo Tirage Directionnel
$MCTI$:	Monte Carlo Tirage d'Importance

$CETE$:	Centre d'Etudes Techniques de l'Équipement
ANR :	Agence Nationale de la Recherche
$APPLET$:	Durée de vie des ouvrages : **A**pproche **P**rédictive **P**erformantiel**LE** et Probabilis**T**e
ENS :	École Normale Supérieure
$LCPC$:	Laboratoire Central des Ponts et Chaussées

Divers

$\breve{\alpha}$:	Variable interne de nature mathématique indéfinie (type flux)
$\breve{A}$:	Variable interne de nature mathématique indéfinie (type force)

Chapitre 1

Introduction

Les ouvrages interagissent avec l'environnement qui les entoure. L'ensemble de ces interactions constitue les conditions de vie de l'ouvrage. Le vent, la mer, les séismes sont des exemples de causes naturelles susceptibles de conduire à d'importants effets pouvant faire diminuer la performance d'un ouvrage. Toutefois, dans de tels cas, l'ouvrage présente majoritairement des signes de dégradation observables assez rapidement. Les choses deviennent plus délicates dès lors que les signes ne sont observables qu'à partir d'un certain seuil de dégradation, caractéristique d'un stade plus ou moins avancé d'une pathologie. Par exemple, la réaction alcali-granulat conduit à l'attaque des agrégats du béton et à la formation de gels hydrophiles. Cette attaque se traduit par une diminution des propriétés mécaniques du béton (résistance à la compression, à la flexion, modification du module d'Young) et par un gonflement caractéristique. Ce dernier n'est observable qu'à partir de l'instant où la pathologie est suffisamment présente. Une problématique similaire peut être énoncée pour le phénomène de corrosion des armatures présentes dans le béton armé qui se produit à l'interface entre l'acier et le béton. Un gonflement caractéristique tend à survenir à l'interface entre l'acier et le béton, pouvant se traduire par l'apparition d'importantes contraintes de traction. Ces dernières sont susceptibles d'initier des fissures, qui ont majoritairement tendance à se propager depuis l'interface vers le béton d'enrobage. Cette description très succincte montre clairement que si des fissures ne sont pas présentes en surface, aucune observation ne peut avoir lieu et, par conséquence, la présence de corrosion est difficilement diagnosticable à l'œil nu. Il faut alors avoir recours à des méthodes de contrôle destructif ou non destructif. Il semble enfin clair, du point de vue de la modélisation, que les résultats de tout calcul sont largement conditionnés par la pertinence du modèle de béton utilisé.

Dans le contexte du vieillissement des patrimoines d'ouvrages d'art et dans un cadre budgétaire contraint, les gestionnaires d'ouvrages se doivent de justifier tout choix d'action de maintenance. Une telle justification nécessite une évaluation instantanée de la performance de l'ouvrage considéré. Pour cela, l'état de dégradation de l'ouvrage doit être connu. De manière plus précise, c'est la connaissance d'une relation entre des signes observables et un état de dégradation local qui doit être connue pour permettre aux gestionnaires d'étayer leur décision et, par suite, d'allouer de manière pertinente les budgets. Actuellement, très peu d'études s'intéressent à expliciter un tel lien.

Une approche satisfaisante doit faire intervenir deux échelles bien séparées : l'échelle microscopique et l'échelle macroscopique. La première échelle correspond à une description fine et pertinente des mécanismes liés au phénomène de corrosion. Cette seule donnée reste cependant insuffisante dès lors qu'un élément de structure, comme une poutre, est considéré. C'est pourquoi la finesse d'une description microscopique doit finalement être globalisée, pour qu'une description satisfaisante des signes de dégradation observables puisse être réalisée. L'échelle macroscopique

devient alors l'échelle à laquelle il faut s'intéresser pour rendre pertinentes les informations pour les gestionnaires d'ouvrages. Une approche multiéchelle apparaît comme acceptable lorsqu'une description robuste des effets du phénomène de corrosion sur les éléments de structures est atteinte. C'est alors que la question du lien entre les résultats d'inspection et un certain état de dégradation peut être posée.

Par ailleurs, les données spécifiques aux matériaux constitutifs d'un élément de structure, comme les différents seuils de résistance ou les données géométriques, sont souvent entachées d'incertitudes. Leur prise en compte nécessite le recours à un cadre probabiliste adapté. La théorie de la fiabilité des structures offre ce cadre de travail rigoureux et propice à la prise en compte des différentes incertitudes qui entachent les variables d'état du système étudié.

L'objectif de cette thèse est double : au delà de la simple modélisation du comportement de l'interface acier/béton et du matériau béton, elle cherche à proposer une démarche de requalification des ouvrages. Le premier objectif repose sur l'introduction d'un cadre d'analyse faisant appel à la thermodynamique des processus irréversibles en vue de prédire les effets mécaniques de la corrosion qui se produisent à l'interface entre le béton et l'acier. Le second introduit une démarche probabiliste pour évaluer la performance des ouvrages et l'actualiser sur la base de mesures de grandeurs physiques.

Pour atteindre ce double objectif, ce mémoire s'articule en quatre parties. La première partie rend compte d'un état de l'art relatant les principaux travaux proposés dans la littérature. En premier lieu, les principaux traits du comportement mécanique de l'interface acier/béton sont exposés à partir de résultats publiés dans la littérature et issus d'importantes campagnes expérimentales. Les principales clés du comportement du matériau béton sont ensuite exposées. Ces deux exposés permettent d'identifier avec précision les différents mécanismes de déformation élémentaires qu'il y a lieu de prendre en compte. En second lieu, une rétrospective des différents modèles de comportement est réalisée aussi bien pour l'interface acier/béton que pour le béton. Cette présentation a le mérite de permettre de nous fixer des objectifs de modélisation et de les justifier.

La seconde partie est consacrée à la présentation des développements réalisés. S'inscrivant dans le cadre rigoureux de la thermodynamique des processus irréversibles, les aspects analytiques liés à la formulation d'une classe de lois de comportement des matériaux élasto-glissant-endommageables sont évoqués. La particularisation de cette classe d'une part au cas de l'interface acier/béton en présence de corrosion et d'autre part, au cas du béton est exposée. Une justification des différents mécanismes dissipatifs pris en compte est proposée. Les aspects numériques ainsi que quelques résultats locaux sont montrés en vue d'apprécier non seulement la robustesse numérique mais aussi le pouvoir prédictif des deux lois de comportement développées.

La troisième partie porte sur la mise en œuvre des lois de comportement proposées sur quelques exemples d'éléments de structures. Plusieurs cas d'application, pour lesquels les résultats expérimentaux sont disponibles, sont étudiés numériquement. Chacun des cas d'application choisi permet de tester un aspect bien précis des modèles proposés. Les résultats numériques sont ensuite confrontés à l'expérience. Ces confrontations visent à apporter des éléments de validation des développements réalisés. Ce chapitre s'achève par l'exposé des cadres d'application des différents modèles proposés. Autrement dit, les forces et faiblesses rencontrées sont clairement mises en perspectives.

La quatrième partie est dédiée à la présentation de la méthodologie d'évaluation des ouvrages

dégradés. En premier lieu, une synthèse bibliographique des travaux proposés dans la littérature permet d'apprécier les avantages à recourir aux réseaux bayésiens. Le cadre théorique des réseaux bayésiens est décrit de manière synthétique. Pour bien préciser et mettre en avant les avantages d'une telle approche, un exemple simple et didactique est traité de manière détaillée. En deuxième lieu, les concepts essentiels de la théorie de la fiabilité sont également présentés. Ces notions sont illustrées sur la base d'un exemple simple d'application. En troisième lieu, la méthodologie de requalification proposée est explicitée. Chaque étape de calcul est justifiée et est explicitée à travers un exemple didactique purement numérique. Enfin, quelques cas tests d'éléments de structures réels sont étudiés et permettent d'évaluer les possibilités offertes par la méthodologie de recalage proposée.

Enfin, des conclusions de l'étude réalisée sont tirées pour préciser les apports des travaux menés et les perspectives de recherches futures.

Chapitre 2

Motivations, objectifs et état de l'art

2.1 Introduction

Le présent chapitre a deux objectifs essentiels : d'une part justifier la démarche de recherche adoptée dans cette étude en donnant les motivations et les enjeux et, d'autre part, présenter un état de l'art le plus exhaustif possible des travaux réalisés jusqu'ici dans le domaine de la modélisation non seulement de l'interface acier/béton mais aussi du béton. Pour cela, ce chapitre s'articule autour de quatre volets. En premier lieu, la démarche adoptée est précisée. Les motivations et les objectifs de cette étude sont clairement présentés. En second lieu, la formulation forte d'un problème classique de mécanique des milieux continus est présentée. La nécessité de postuler une loi de comportement fiable est clairement mise en évidence. Par ailleurs, la méthode de l'état local, permettant la formulation rigoureuse de lois de comportement, est présentée. En particulier, une condition regroupant les premier et second principes de la thermodynamique garantissant l'admissibilité physique d'une loi constitutive est exposée. Outre les aspects purement mathématiques de la formulation, il apparaît qu'une étape essentielle réside dans l'identification précise des mécanismes de dégradation. C'est pourquoi dans la suite de ce chapitre, une attention particulière est accordée à la présentation des aspects expérimentaux concernant d'une part l'interface acier/béton et, d'autre part, le béton. En troisième lieu, le cas de l'interface acier/béton sans/avec corrosion est évoqué. Tout d'abord, une synthèse des travaux expérimentaux est réalisée. Cette dernière permet, tout d'abord, de bien identifier les mécanismes de dégradation de l'interface acier/béton qui seront utiles à la modélisation. En particulier, les différentes phases intervenant au cours du processus de dégradation sont explicitées. Les effets de la corrosion sont ensuite analysés. Le parti d'étudier séparément les actions de la corrosion d'une part sur le béton et, d'autre part, sur l'acier a été retenu. En effet, le phénomène de corrosion modifie clairement le comportement mécanique de manière complexe, conduisant à l'intervention de plusieurs couplages entre les différents effets élémentaires. Cette approche permet alors d'isoler les causes de la variation de l'adhérence acier/béton. A ce stade, pour identifier quelques travaux de modélisation susceptibles de servir de point de départ à nos recherches, une synthèse des modèles proposés dans la littérature est présentée. En dernier lieu, le cas du béton est considéré. Contrairement à l'interface acier/béton, la littérature est riche sur le comportement du béton. C'est pourquoi, la synthèse des travaux expérimentaux est très brève. En revanche, cette richesse de la littérature en matière de modèles de béton conduit à une discussion plus fournie. Les critères de robustesse numérique et d'applicabilité à l'échelle de la structure permettent de retenir certaines classes de modèles comme base de développement.

2.2 Motivations et objectifs

Tout ouvrage placé dans l'environnement extérieur est susceptible d'être la cible de différents agents agressifs. Par exemple, les sels de déverglaçage utilisés en saison hivernale sont déposés sur les chaussées et contiennent massivement des chlorures. Il en est de même pour les milieux salins naturels comme les océans et les mers. Les chlorures sont donc des agents potentiellement susceptibles de favoriser le phénomène de corrosion au sein du béton armé. Ce phénomène s'ajoute à la présence de dioxyde de carbone dans l'atmosphère, également initiateur de corrosion. Il apparaît alors que tout ouvrage en béton armé peut être sujet au développement de la corrosion. Cette dernière se traduit par deux effets essentiels : une réduction de section des armatures uniforme ou par piqûres selon le type d'agent agressif et un gonflement dû à l'apparition de rouille à l'interface acier/béton. Le premier effet induit une fragilisation notable de l'acier. Le second effet donne naissance à d'importantes contraintes de traction, dans le béton, susceptibles d'initier des fissures. C'est alors que l'interface acier/béton se trouve déconfinée, ce qui favorise une perte drastique de l'adhérence entre l'acier et le béton. Le phénomène de corrosion peut donc être considéré comme un des facteurs essentiels pouvant induire une perte de performance à l'échelle de l'ouvrage. Les gestionnaires d'ouvrage étant conduits à maintenir en état de fonctionnement normal et sûr leur patrimoine, ils doivent prendre des décisions vis-à-vis des actions de maintenance préventives, structurales ou encore des actions de réhabilitation. De combien de temps dispose t-on avant que la performance d'un ouvrage atteigne un seuil critique ? Cette problématique est tout à fait cruciale pour les responsables des parcs d'ouvrages. Pour tenter d'apporter des éléments de réponse à cette vaste problématique, une action de modélisation a été lancée par le Laboratoire Central des Ponts et Chaussées (LCPC) dans le cadre du projet ANR, APPLET (Durée de vie des ouvrages : Approche Prédictive PerformantielLE et ProbabilisTe). Dans un contexte d'expérimentation numérique, le pouvoir prédictif des modèles mécaniques pouvant être élaborés est conditionné par l'existence de lois de comportement capables de rendre compte de la réalité physique des processus de déformation qui interviennent dans les matériaux béton et acier. La prise en compte de la corrosion nécessite de plus la prise en considération d'une troisième phase : les produits de corrosion. Pour tirer pleinement profit d'une telle modélisation, les différentes lois de comportement doivent pouvoir donner des prédictions satisfaisantes sous chargement mécanique monotone et cyclique, en présence ou non de corrosion. Il reste essentiel de remarquer que la pertinence de la description du comportement de l'interface acier/béton reste entièrement conditionnée par la qualité du modèle de béton associé.

Dans un tel contexte, le premier objectif de cette étude est de proposer une loi de comportement capable de bien décrire les effets mécaniques de la corrosion à l'interface acier/béton. En particulier, le modèle d'interface doit offrir un cadre numérique robuste et précis, qu'il sera possible d'enrichir en fonction de données expérimentales disponibles. Cet enrichissement concerne d'éventuels paramètres matériaux spécifiques au phénomène de corrosion. En effet, comme cela sera souligné dans l'étude bibliographique, ce phénomène reste encore mal connu. En particulier, les mécanismes de déformation locaux sont encore sujets à d'intenses débats. Le parti de réaliser les développements dans le cadre de la thermodynamique des processus irréversibles a donc été pris. En effet, il assure la cohérence physique des équations proposées et permet de vérifier son admissibilité au regard des grands principes physiques. De plus, parmi les modèles d'interface existants, très peu sont capables d'être utilisés dans des analyses tridimensionnelles. La même remarque peut être faite pour les aspects liés au chargement cyclique. Un autre point qui mérite d'être souligné est le fait qu'un modèle d'interface acier/béton ne peut être pleinement utilisé si le modèle de béton n'est pas suffisamment satisfaisant. Parmi les modèles existants, très peu offrent une prise en compte de l'ensemble des caractéristiques expérimentalement observées. C'est pourquoi, en étroite collaboration avec l'ENS de Cachan, le développement d'une loi de comportement de béton simple, robuste et permettant une prise en compte de l'essentiel des

traits de comportement du béton a été entrepris. Les aspects cycliques ont été naturellement considérés. Le comportement de l'interface acier/béton, tel qu'il peut être identifié sur la base d'essais de tirants, peut être vu comme l'association du comportement de l'acier (ductile) et du béton (fragile). Il existe donc un certain nombre de spécificités communes aux comportements du béton et de l'interface acier/béton. Dans l'objectif de modélisation générique, le parti de proposer une classe de lois de comportement dont on peut décliner une loi d'interface acier/béton et une loi de béton a donc été retenu. Ce chapitre est consacré à exposer les principales conclusions d'une étude bibliographique réalisée pour affiner les choix de modélisation qui s'offrent. Cet exposé repose sur trois axes essentiels : une présentation du cadre thermodynamique, une description des essais et modèles permettant d'identifier le comportement de l'interface acier/béton en présence de corrosion et un bilan des travaux portant sur la modélisation du matériau béton. A l'issu de cet exposé, les mécanismes de déformations locaux à prendre en compte dans une modélisation doivent être identifiés.

2.3 Problème de mécanique et cadre thermodynamique

Dans cette section, les équations gouvernant le processus de déformation d'un milieu matériel sont exposées, sous l'hypothèse de petites perturbations. Une attention particulière est accordée à la présentation du formalisme thermodynamique, qui sera largement utilisé tout au long de ce mémoire. En effet, ce dernier permet de dégager une condition d'admissibilité qui doit être satisfaite par une loi constitutive donnée. La trame permettant de formuler des lois de comportement thermodynamiquement admissibles à partir d'une réflexion sur les mécanismes de dégradation est également détaillée.

2.3.1 Problème mécanique

Soit Ω un milieu matériel de frontière $\partial\Omega$ de normale extérieure $\underline{n}$ et ρ sa masse volumique. Un point quelconque de Ω est noté M dans la suite. Le *principe des puissances virtuelles* permet d'écrire que la somme des puissances virtuelles des efforts intérieurs Π_i et extérieurs Π_e est égale à la puissance virtuelle associée à la quantité d'accélération Π_a. Ainsi, il vient :

$$\Pi_i + \Pi_e = \Pi_a \tag{2.1}$$

De manière plus précise, la puissance virtuelle des efforts intérieurs peut s'exprimer comme :

$$\Pi_i = -\int_\Omega \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}(\underline{v}) dV \tag{2.2}$$

où $\underline{\underline{\sigma}}$ est le tenseur des contraintes de Cauchy, $\underline{\underline{\epsilon}}$ le tenseur des déformations au premier ordre et $\underline{v}$ un champ de vitesses virtuelles cinématiquement admissible. En présence d'un mouvement de type corps rigide, la puissance virtuelle des efforts intérieurs devient nulle. Supposons que le domaine matériel Ω soit soumis à une densité volumique d'efforts $\underline{b}$ et à un champ de traction $\underline{t}$ sur sa frontière. La puissance virtuelle des efforts extérieurs s'exprime par :

$$\Pi_e = \int_\Omega \underline{b}.\underline{v} dV + \int_{\partial\Omega} \underline{t}.\underline{v} dS \tag{2.3}$$

Enfin, la puissance virtuelle associée à la quantité d'accélération $\underline{\gamma}$ s'écrit :

$$\Pi_a = \int_\Omega \rho \underline{\gamma}.\underline{v} dV \tag{2.4}$$

L'application du principe des puissances virtuelles qui se traduit par l'équation 2.1 permet d'aboutir à la forme faible des équations d'équilibre :

$$-\int_\Omega \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}(\underline{v})dV + \int_\Omega \underline{b}.\underline{v}dV + \int_{\partial\Omega} \underline{t}.\underline{v}dS = \int_\Omega \rho\underline{\gamma}.\underline{v}dV \tag{2.5}$$

Le premier terme de 2.5 peut être réécrit de manière à faire apparaître le champ de vitesses virtuelles. Ainsi, il vient :

$$-\int_\Omega \underline{\underline{\sigma}} : \nabla\underline{v}dV + \int_\Omega \underline{b}.\underline{v}dV + \int_{\partial\Omega} \underline{t}.\underline{v}dS = \int_\Omega \rho\underline{\gamma}.\underline{v}dV \tag{2.6}$$

en intégrant par parties le premier terme de l'équation , cette dernière devient :

$$-\int_\Omega \underline{\underline{\sigma}}.\underline{v}.\underline{n}dS + \int_\Omega \mathbf{Div}\underline{\underline{\sigma}}.\underline{v}dV + \int_\Omega \underline{b}.\underline{v}dV + \int_{\partial\Omega} \underline{t}.\underline{v}dS = \int_\Omega \rho\underline{\gamma}.\underline{v}dV \tag{2.7}$$

En regroupant les différents termes liés d'une part au volume du milieu matériau et d'autre part, à sa frontière, il peut être obtenu :

$$\int_\Omega (\mathbf{Div}\underline{\underline{\sigma}} + \underline{b} - \rho\underline{\gamma}).\underline{v}dV + \int_{\partial\Omega} (\underline{t} - \underline{\underline{\sigma}}.\underline{n}).\underline{v}dS = 0 \tag{2.8}$$

L'identité exprimée par l'équation 2.8 doit être vérifiée pour tout champ de vitesses virtuelles $\underline{v}$. Ainsi, il peut être déduit que :

$$\begin{cases} \mathbf{Div}\underline{\underline{\sigma}} + \underline{b} = \rho\underline{\gamma} & \forall M \in \Omega \\ \underline{t} = \underline{\underline{\sigma}}.\underline{n} & \forall M \in \partial\Omega \end{cases} \tag{2.9}$$

Les équations 2.9 constituent la forme forte des équations d'équilibre de tout milieu matériel. A ces dernières, on adjoint classiquement deux autres équations locales permettant de préciser d'une part la cinématique du milieu matériel étudié et d'autre part, son comportement. Dans l'hypothèse des petites perturbations, la cinématique est précisée au travers de la relation suivante :

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \frac{1}{2}(\nabla\underline{u} + \nabla\underline{u}^t) \tag{2.10}$$

où $\underline{u}$ est le champ de déplacement réel défini sur Ω. La loi de comportement associée à Ω s'exprime comme une relation entre le tenseur des contraintes de Cauchy et le tenseur des déformations. Il convient de noter que cette relation peut, et dans bien des cas doit, tenir compte de l'histoire en chargement du milieu matériel considéré. Ainsi, une forme générique de cette relation peut être donnée par :

$$\mathcal{L}(\underline{\underline{\sigma}}, \underline{\underline{\epsilon}}; \breve{\alpha}_1, ..., \breve{\alpha}_n) = \underline{\underline{0}} \tag{2.11}$$

où $\mathcal{L}$ est la loi constitutive considérée, $(\breve{\alpha}_i)_{i=1,...,n}$ sont des variables additionnelles intrinsèques à la loi constitutive permettant de rendre compte de l'histoire du milieu matériel. La notation $\breve{.}$ signifie que la nature mathématique des variables additionnelles n'est pas présupposée. Ainsi, la forme forte d'un problème de mécanique peut s'écrire comme suit :

Trouver $\underline{\underline{\sigma}}$, $\underline{\underline{\epsilon}}$ et $\underline{u}$ tel que :		
$\mathbf{Div}\underline{\underline{\sigma}} + \underline{b} = \rho\underline{\gamma}$	$\forall M \in \Omega$	(2.12)
$\underline{\underline{\epsilon}} = \frac{1}{2}(\nabla\underline{u} + \nabla\underline{u}^t)$	$\forall M \in \Omega$	
$\mathcal{L}(\underline{\underline{\sigma}}, \underline{\underline{\epsilon}}; \breve{\alpha}_1, ..., \breve{\alpha}_n) = \underline{\underline{0}}$	$\forall M \in \Omega$	
$\underline{t} = \underline{\underline{\sigma}}.\underline{n}$	$\forall M \in \partial\Omega$	

Le système d'équations aux dérivées partielles 2.12 requiert, pour qu'il soit bien posé, des conditions aux limites pouvant être de type Dirichlet, Neumann ou mixte. Pour cela, une partition

de la frontière de Ω est considérée telle que $\partial\Omega = \partial\Omega_t \cup \partial\Omega_u$ et $\partial\Omega_t \cap \partial\Omega_u = \{0\}$. En notant $\underline{\bar{t}}$ et $\underline{\bar{u}}$ les vecteurs tractions imposées et les vecteurs déplacements imposés respectivement sur $\partial\Omega_t$ et $\partial\Omega_u$, le problème 2.12 devient :

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{Trouver } \underline{\underline{\sigma}}, \underline{\underline{\epsilon}} \text{ et } \underline{u} \text{ tel que :} & \\ \mathbf{Div}\underline{\underline{\sigma}} + \underline{b} = \rho\underline{\gamma} & \forall M \in \Omega \\ \underline{\underline{\epsilon}} = \frac{1}{2}(\nabla\underline{u} + \nabla\underline{u}^t) & \forall M \in \Omega \\ \mathcal{L}(\underline{\underline{\sigma}}, \underline{\underline{\epsilon}}; \breve{\alpha}_1, ..., \breve{\alpha}_n) = \underline{\underline{0}} & \forall M \in \Omega \\ \underline{\bar{t}} = \underline{\underline{\sigma}}.\underline{n} & \forall M \in \partial\Omega_t \\ \underline{u} = \underline{\bar{u}} & \forall M \in \partial\Omega_u \end{array}} \tag{2.13}$$

L'objectif de la section suivante est de présenter un cadre rigoureux pour la formulation des lois constitutives dans le respect des principes de la physique.

2.3.2 Cadre thermodynamique

Le cadre de la thermodynamique des processus irréversibles vise à offrir une trame de formulation des lois constitutives en respectant les principes de la physique (Lemaître et Chaboche, 1985). A partir des deux premiers principes de la physique, une condition d'admissibilité peut être déduite. Dans cette section, il est rappelé comment cette condition est établie.

Premier principe

Le premier principe de la thermodynamique postule que l'énergie interne associée à un milieu matériel se conserve. Pour formaliser ce principe, il y a lieu de définir les quantités suivantes : l'énergie interne E, l'énergie cinétique K et le taux de chaleur Q. La définition de l'énergie interne repose sur un postulat d'existence d'une densité volumique d'énergie par unité de masse e, encore appelée énergie interne spécifique. Ainsi, l'énergie interface sur l'ensemble du milieu matériel Ω s'écrit :

$$E = \int_\Omega \rho e dV \tag{2.14}$$

En notant $\underline{v}$ le champ de vitesses défini sur le domaine Ω, l'énergie cinétique K peut être définie comme suit :

$$K = \frac{1}{2}\int_\Omega \rho \underline{v}.\underline{v} dV \tag{2.15}$$

Enfin, le taux de chaleur Q est classiquement exprimé à l'aide de deux termes. Le premier permet de prendre en compte les éventuelles sources de chaleur dans Ω et le second, les échanges extérieurs par conduction à travers $\partial\Omega$. Il vient alors :

$$Q = \int_\Omega r dV - \int_{\partial\Omega} \underline{q}.\underline{n} dS \tag{2.16}$$

où r est la densité volumique de chaleur créée dans Ω et $\underline{q}$ un flux de chaleur traversant $\partial\Omega$. Le premier principe s'écrit donc :

$$\frac{d}{dt}(E + K) = \Pi_e + Q \tag{2.17}$$

En développant l'expression 2.17, il vient :

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega (\rho e + \frac{1}{2}\underline{v}.\underline{v}) dV = \int_\Omega (r + \underline{b}.\underline{v}) dV + \int_{\partial\Omega} (\underline{t}.\underline{v} - \underline{q}.\underline{n}) dS \tag{2.18}$$

Pour obtenir une forme forte du premier principe à partir de la forme intégrale 2.18, le principe des puissances virtuelles est appliqué au champ réel. Ainsi, l'équation 2.17 devient :

$$\frac{dE}{dt} + \frac{dK}{dt} = \frac{dK}{dt} - \Pi_i + Q \tag{2.19}$$

En effet, il est possible de remarquer que $\frac{dK}{dt} = \Pi_a$. Le taux de chaleur Q peut être réécrit en utilisant le théorème de la divergence :

$$Q = \int_\Omega r dV - \int_\Omega \mathbf{Div}\underline{q} dV \tag{2.20}$$

Ainsi, le premier principe de la thermodynamique s'écrit :

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega \rho e dV = \int_\Omega \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}(\underline{v}) dV + \int_\Omega r dV - \int_\Omega \mathbf{Div}\underline{q} dV \tag{2.21}$$

L'égalité 2.21 devant être vérifiée pour tout milieu matériel Ω, la forme forte du premier principe de la thermodynamique découle naturellement :

$$\rho\dot{e} = \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\dot{\epsilon}}} + r - \mathbf{Div}\underline{q} \tag{2.22}$$

Deuxième principe

Le deuxième principe de thermodynamique postule que le taux de production d'entropie est toujours supérieur ou égal au taux de chaleur reçue, divisé par la température. Sa formulation repose donc sur l'introduction de deux nouvelles variables, l'entropie S et le champ scalaire de température T. De manière plus précise, on définit l'entropie à partir de sa densité volumique par unité de masse, c'est-à-dire, à partir de la densité d'entropie spécifique s comme suit :

$$S = \int_\Omega \rho s dV \tag{2.23}$$

Le second principe peut donc s'exprimer, sous une forme intégrale :

$$\frac{dS}{dt} \geq \int_\Omega \frac{r}{T} dV - \int_{\partial\Omega} \frac{\underline{\underline{q}}.\underline{n}}{T} dS \tag{2.24}$$

En utilisant le théorème de la divergence et en remarquant que l'identité 2.24 doit être satisfaite pour tous milieux matériels Ω, la forme forte du deuxième principe s'écrit :

$$\rho\frac{ds}{dt} + \mathbf{Div}\frac{\underline{\underline{q}}}{T} - \frac{r}{T} \geq 0 \tag{2.25}$$

A partir des formes fortes du premier et du second principe de la thermodynamique, une condition d'admissibilité peut être obtenue. L'établissement de cette condition est l'objet de la section suivante.

Admissibilité thermodynamique

Une condition d'admissibilité peut être obtenue en substituant la densité de production de chaleur se trouvant dans l'expression 2.25 par celle tirée de l'expression 2.22. Ainsi, il vient :

$$\rho\frac{ds}{dt} + \mathbf{Div}\frac{\underline{\underline{q}}}{T} - \frac{1}{T}(\rho\dot{e} - \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\dot{\epsilon}}} + \mathbf{Div}\underline{q}) \geq 0 \tag{2.26}$$

En utilisant l'identité :

$$\mathbf{Div}(\frac{\underline{\underline{q}}}{T}) = \frac{\mathbf{Div}\underline{q}}{T} - \frac{\underline{\underline{q}}.\nabla T}{T^2} \tag{2.27}$$

et en multipliant l'expression résultante par T, il peut être déduit que :

$$\rho(T\frac{ds}{dt} - \dot{e}) + \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\dot{\epsilon}}} - \underline{q}.\frac{\nabla T}{T} \geq 0 \tag{2.28}$$

L'expression 2.28 constitue la condition d'admissibilité thermodynamique. D'une manière classique, on introduit une nouvelle variable $\Psi = e - Ts$, appelée énergie libre d'Helmholtz. Ainsi, la condition 2.28 devient :

$$\underline{\underline{\sigma}} : \dot{\underline{\underline{\epsilon}}} - \rho(\dot{\Psi} + s\dot{T}) - \underline{q}.\frac{\nabla T}{T} \geq 0 \tag{2.29}$$

L'inégalité 2.29 est connue sous le nom d'*inégalité de Clausius-Duhem-Truesdell*. Dans la suite, l'hypothèse d'un processus de déformation isotherme est postulée. Ainsi, l'inégalité de Clausius-Duhem-Truesdell prend la forme simplifiée suivante :

$$\underline{\underline{\sigma}} : \dot{\underline{\underline{\epsilon}}} - \rho\dot{\Psi} \geq 0 \tag{2.30}$$

2.3.3 Formulation des lois constitutives

Formuler une loi constitutive thermodynamiquement admissible revient donc à construire une application entre l'espace des contraintes de Cauchy et celui des déformations telle que la condition 2.30 soit vérifiée pour tous trajets de chargement. La question qui se pose alors est comment réaliser une telle construction ? L'*axiome de l'état local* permet d'apporter une réponse à cette question. Cet axiome postule que l'état thermodynamique en un point M d'un milieu matériel Ω ne dépend que de la valeur en ce point, à un instant, de certaines variables ne dépendant que du point considéré. Le choix de la nature de ces variables et de leur nombre permet de décrire plus ou moins finement les phénomènes en jeu. Si à chaque instant l'inégalité de Clausius-Duhem-Truesdell est vérifiée, alors la loi constitutive formulée est thermodynamiquement admissible. D'une manière plus précise, on distingue deux ensembles de variables : les variables observables et les variables internes.

Les variables observables sont celles imposées par la formulation du problème de mécanique des milieux continus. Ainsi, dans le cas d'un processus isotherme, les variables observables sont en général les tenseurs des contraintes de Cauchy $\underline{\underline{\sigma}}$ ou des déformations $\underline{\underline{\epsilon}}$.

Les variables internes sont des quantités non imposées par le formalisme de la mécanique. En revanche, la prise en compte de certains phénomènes dissipatifs comme par exemple la plasticité, la viscoplasticité ou l'endommagement, nécessite leur introduction. Une règle essentielle à suivre, permettant de guider le choix de la nature et du nombre de variables internes, est de n'associer à chacune d'entre elles qu'un seul et unique mécanisme dissipatif. De manière plus précise, si un mécanisme de déformation plastique doit être introduit, alors il sera justifié de considérer le tenseur des déformations plastiques $\underline{\underline{\epsilon}}^p$. L'histoire passée du milieu matériel peut aussi être prise en compte en considérant d'autres variables internes pour représenter les différents écrouissages (isotrope, cinématique ou mixte). Dans la suite, les variables internes sont notées de manière générique $(\breve{\alpha}_k)_{k=1,\dots,n}$, où n est le nombre de variables choisies.

Potentiel d'état et équations d'état

Sans entrer dans les détails, les conditions susceptibles d'être déduites du second principe doivent être vérifiées. Pour cela, une solution possible consiste à postuler l'existence d'un potentiel d'état Ψ, convexe par rapport à toutes les variables. Bien qu'il soit possible de travailler avec différents potentiels (énergie d'Helmholtz, énergie de Gibbs, ...), le potentiel d'état est supposé pouvoir être représenté par l'énergie d'Helmholtz. D'une manière générale, ce dernier peut être exprimé comme suit :

$$\Psi = \Psi(\underline{\underline{\epsilon}}, (\breve{\alpha}_k)_{k=1,\dots,n}) \tag{2.31}$$

L'inégalité de Clausius-Duhem-Truesdell peut alors être particularisée de la manière suivante :

$$(\underline{\underline{\sigma}} - \rho\frac{\partial\Psi}{\partial\underline{\underline{\epsilon}}})\dot{\underline{\underline{\epsilon}}} - \rho\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\Psi}{\partial\breve{\alpha}}\dot{\breve{\alpha}}_k \geq 0 \tag{2.32}$$

La condition 2.32 devant être vérifiée pour tout trajet de déformation, il vient :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \rho\frac{\partial\Psi}{\partial\underline{\underline{\epsilon}}} \tag{2.33}$$

ce qui constitue la première loi d'état. Par analogie avec ce résultat, les forces thermodynamiques associées sont définies, $\forall k \in \{1, ..., n\}$, par :

$$\breve{A}_k = \rho\frac{\partial\Psi}{\partial\breve{\alpha}_k} \tag{2.34}$$

Les équations d'état ainsi obtenues permettent de définir la partie réversible d'une loi constitutive. A noter que d'une manière générale, ces équations offrent une mise en relation entre deux espaces duaux l'un de l'autre, encore appelés espace des variables flux $(\underline{\underline{\epsilon}}, (\breve{\alpha}_k)_{k=1,...,n})$ et espace des variables forces $(\underline{\underline{\sigma}}, (\breve{A}_k)_{k=1,...,n})$. En effet, en considérant les variables internes précédemment introduites, il apparaît que les variables forces qui s'en déduisent sont bien définies mais aucune information portant sur la manière avec laquelle ces dernières vont évoluer n'est apportée. Ainsi, il y a lieu d'introduire des lois complémentaires, ce qui est l'objectif de la prochaine section.

Dissipation et règles d'écoulement

La manière dont vont évoluer les variables internes peut être précisée en introduisant des potentiels de dissipation f. Ces derniers s'expriment comme des fonctions scalaires, convexes, positives et nulles à l'origine, fonction des variables forces et éventuellement paramétrées par une ou plusieurs variables flux. Les lois qui vont gouverner l'évolution des variables internes peuvent alors être déduites du principe de la dissipation maximale. Ce dernier repose sur la définition de la dissipation $\mathcal{D}$. Plus précisément, la dissipation peut être exprimée par le terme de gauche de l'inégalité de Clausius-Duhem-Truesdell. Soit un vecteur de variables forces admissibles $\underline{A}$, associé aux variables flux $\underline{\alpha}$. Le principe du maximum de dissipation, introduit par (Lubliner, 1990) et (Maugin, 1992), permet de donner une définition de cet ensemble :

$$\underline{A} = \mathbf{Arg}\{\min_{f(\underline{A}^\star)\leq 0}[-\mathcal{D}(\underline{A}^\star)]\} \tag{2.35}$$

Un problème de minimisation sous contrainte doit alors être résolu. Pour cela, et selon l'usage, une fonctionnelle de Lagrange $\mathcal{G}$ et un multiplicateur de Lagrange $\dot{\lambda}$ sont introduits. Il vient alors :

$$\underline{A} = \mathbf{Arg}\{\max_{\forall\dot{\lambda}\leq 0}\ \min_{\forall\underline{A}^\star}\ \mathcal{G}(\underline{A}^\star, \dot{\lambda})\} \tag{2.36}$$

avec $\mathcal{G}(.) = -\mathcal{D}(.) + \dot{\lambda}f(.)$. Les conditions de stationnarité de la fonctionnelle de Lagrange permettent d'aboutir aux lois d'évolution :

$$\frac{\partial\mathcal{G}(\underline{A})}{\partial\underline{A}} = 0 \Rightarrow -\dot{\underline{\alpha}} + \dot{\lambda}\frac{\partial f(\underline{A})}{\partial\underline{A}} = 0 \Rightarrow \dot{\underline{\alpha}} = \dot{\lambda}\frac{\partial f(\underline{A})}{\partial\underline{A}} \tag{2.37}$$

Il apparaît donc naturel, suite à l'application du principe de maximum de dissipation, que les lois d'écoulement s'expriment sous la forme générale suivante :

$$\dot{\underline{\alpha}} = \dot{\lambda}\frac{\partial f(\underline{A})}{\partial\underline{A}} \tag{2.38}$$

Des conditions supplémentaires peuvent être obtenues à partir des équations de stationnarité de Kuhn-Tucker. Ces dernières prennent la forme suivante :

$$\dot{\lambda} \geq 0 \quad f(\underline{A}) \leq 0 \quad \dot{\lambda} f(\underline{A}) = 0 \tag{2.39}$$

Ces conditions permettent de préciser l'évolution ou le blocage des mécanismes dissipatifs lors de charges/décharges. Le multiplicateur de Lagrange $\dot{\lambda}$ peut être déterminé en considérant la condition de cohérence qui s'exprime comme suit :

$$\dot{\lambda} \dot{f}(\underline{A}) = 0 \tag{2.40}$$

Il apparaît finalement que les lois d'évolution, reliant les variables internes de type flux avec leurs variables duales à travers la définition d'un potentiel de dissipation, suivent une règle de normalité par rapport à celui-ci. On parle d'évolution associée. Cette règle se justifie par le principe du maximum de dissipation. Toutefois, pour certains matériaux comme les sols qui présentent un phénomène de dilatance, la description de certains mécanismes est délicate si les variables internes ne sont autorisées à évoluer que dans la direction du gradient au potentiel de dissipation. Une réponse à cette difficulté est apportée en introduisant un pseudo potentiel de dissipation ϕ, autrement dit, en supposant une évolution non associée. Le pseudo potentiel de dissipation s'exprime comme le potentiel de dissipation et possède les mêmes propriétés. Dans un tel cas, les règles d'écoulement s'écrivent :

$$\underline{\dot{\alpha}} = \dot{\lambda} \frac{\partial \phi(\underline{A})}{\partial \underline{A}} \tag{2.41}$$

Il est essentiel de noter que le multiplicateur de Lagrange $\dot{\lambda}$ doit néanmoins être calculé à partir de la condition de cohérence portant sur le potentiel de dissipation (ou surface seuil) et non à partir du pseudo potentiel de dissipation.

2.3.4 Bilan

Dans cette partie, le formalisme local d'un problème de mécanique des milieux continus a été présenté. Il se présente comme un problème aux limites à 15 équations et 15 inconnues (cf. 2.13). Il est nécessaire de postuler une loi de comportement reliant le tenseur des contraintes de Cauchy et le tenseur des déformations. Les formulations d'un ensemble d'équations constitutives caractérisant la loi de comportement à considérer sont potentiellement nombreuses. La thermodynamique des processus irréversibles permet de dégager, à partir du premier et du second principes, une condition d'admissibilité pour une loi de comportement donnée : c'est l'inégalité de Clausius-Duhem-Truesdell. Cette condition a été établie après avoir présenté les formes fortes des deux premiers principes thermodynamiques. En considérant l'axiome de l'état local, il ressort que l'état global d'un milieu matériel est caractérisé par la connaissance des valeurs de certaines variables descriptives en chacun des points matériels. Le choix et le nombre des variables à considérer restent indexés par la finesse souhaitée de la description des différents phénomènes. Il est d'usage de guider ce choix en analysant les mécanismes dissipatifs en présence. A un seul et unique mécanisme n'est associé qu'une seule et unique variable de description. Dans les sections qui suivent, un certain nombre de résultats expérimentaux capables de caractériser d'une part le comportement de l'interface acier/béton en présence de corrosion et d'autre part le béton, sont présentés. Les principaux modèles permettant de décrire leurs comportements respectifs sont aussi exposés. A l'issue de ce chapitre, il sera possible de dresser d'une part un bilan des mécanismes dissipatifs à considérer tant dans le cas de l'interface acier/béton que du béton, et d'autre part de souligner les manques que présentent les modèles de comportement actuels.

2.4 Comportement mécanique de l'interface acier/béton

2.4.1 Préambule : une longue histoire

La liaison acier/béton saine

« Le béton armé est un objet d'étude singulier. Ambigu, ce terme désigne à la fois un procédé de construction et un matériau. Plus encore, à la différence de la pierre, du bois ou du métal, le béton armé relève de l'invention ». C'est ainsi que l'historien Gwenaël Delhumeau qualifie de manière générale le béton armé. Historiquement, vers 1845, le béton était utilisé abondamment en milieu industriel comme un matériau second dont le but essentiel était de protéger contre le feu certaines parties des structures métalliques comme les connections des assemblages sensibles. C'est dans ce contexte que François Hennebique, constructeur et entrepreneur d'origine belge, dépose, en 1870, le brevet d'un système dont « le principe primordial des solides en fer et béton sera de redistribuer la matière, avec un maximum d'effets utiles avec un poids et une dépense minimum ». La première définition du béton armé, reconnue en tant que telle, apparaît au cours du *Troisième Congrès du Béton et du Ciment Armé* en 1899. Son mode de fonctionnement est alors précisé comme suit : « le béton est un matériau qui résiste admirablement à la compression mais très faiblement à la traction - le métal noyé dans les parties tendues du béton a donc pour but de s'opposer aux efforts de tension et soulager par sa présence le travail du béton à ces efforts ». Une prise de conscience générale de la nécessité de standardiser et réglementer la mise en œuvre de ce nouveau matériau apparaît après l'effondrement d'un bâtiment à Bâle. Cette tâche est assez rapidement confiée aux Ingénieurs des Ponts et Chaussées qui collaborent étroitement avec François Hennebique. Un vaste programme expérimental est alors lancé dans l'optique de mieux appréhender « le fonctionnement naturel du béton armé ».

L'importance de la liaison entre l'acier et le béton est remarquée rapidement lors des premiers travaux de recherche entrepris par Considère en 1900. Ils consistaient à observer la réponse en traction de câbles d'acier noyés dans un mortier. Ce type d'essai a connu quelques variantes mais il est longtemps imposé comme un standard. (Rehm, 1958) tente d'appréhender le phénomène de liaison entre l'acier et le béton. Il met en œuvre, pour la première fois dans l'histoire, des essais d'arrachement. Il parvient notamment à identifier différents modes de rupture des éprouvettes. (Lutz et Gergely, 1967) ont ensuite poursuivi la réalisation d'essais d'arrachement en faisant varier quelques paramètres comme la géométrie des nervures ou encore les sections des barres d'acier. (Lutz et Gergely, 1967) sont les premiers à proposer un mécanisme de dégradation de la liaison en trois phases, sur lequel davantage de précisions sont données dans les sections suivantes. A partir de cet important résultat, la communauté scientifique travaillant sur cette thématique se remet en question : la liaison entre l'acier et le béton n'est pas un phénomène intrinsèque à la barre d'acier mais trouve son origine dans l'interaction entre ces deux matériaux. (Goto, 1971) fournit des résultats très locaux issus de la première étude à l'échelle de la nervure. En effet, cet auteur s'est consacré à comprendre la nature de l'interaction entre une nervure et le béton avoisinant. Les premiers résultats quantitatifs portant sur la fissuration particulière du béton sont obtenus en injectant de l'encre à l'interface, permettant de tracer les différents chemins.

Les premières lois de comportement de l'interface acier/béton apparaissent avec les travaux de (Bresler et Bertero, 1968) et la notion de « couche limite homogénéisée ». Cette couche était supposée avoir des propriétés élastiques diminuées dans un modèle de type tube. Quelques années après, (Tepfers, 1979) présente le premier modèle de prédiction de la résistance en fonction de certaines caractéristiques de la barre d'acier, comme par exemple l'orientation des nervures, leur nombre, etc. Ses travaux sont remarquables car il est le premier à proposer un modèle

faisant intervenir de manière couplée l'effet du confinement et du cisaillement. Il propose que la résistance de la liaison soit déterminée à partir de l'équilibre entre l'effort de cisaillement et l'effort circonférentiel déployé dans le béton. Les quelques travaux de recherche qui viennent d'être exposés peuvent être considérés comme les prémices fondamentales de la recherche portant sur la thématique de la liaison acier/béton.

Depuis les années 1975, le thème de la liaison acier/béton ne cesse d'alimenter d'importants travaux non seulement expérimentaux mais aussi conceptuels et théoriques. Parmi les programmes de recherche expérimentale les plus significatifs, on peut citer les travaux de (Viawanthanatepa, 1979), qui visaient à appréhender l'influence des renforcements passifs sur l'ancrage des armatures actives, sous une condition de chargement cyclique. Les résultats publiés par (Mirza et Houde, 1979) ont contribué à apprécier l'influence du diamètre des barres sur le comportement mécanique de l'interface acier/béton. C'est en 1983 que l'ambitieux programme expérimental lancé par (Eligehausen *et al.*, 1983) voit le jour et permet d'établir de nombreux résultats portant sur l'influence de différents paramètres sous différents chargements. Encore très utilisé aujourd'hui de part sa justesse et sa simplicité, le célèbre modèle d'ancrage d'Eligehausen a été formulé à cette occasion. Les aspects liés aux effets d'échelle et à l'influence du confinement sur la résistance en cisaillement de la liaison acier/béton sont spécifiquement étudiés par (Gambarova et Rosati, 1997). Le cas spécifique des mécanismes de dégradation de la liaison n'est étudié que depuis quelques années. En particulier, on peut citer les essais d'arrachement de (Zuo et Darwin, 2000), les essais sur des plaques confinées et enfin, les critiques de certains états limites à partir d'essais d'arrachement cyclique conduits de 1995 à 2002.

En France, une des premières études significatives réalisée sur la thématique de la liaison acier/béton a été conduite par (Clément, 1987). Les essais réalisés par (LaBorderie et Pijaudier-Cabot, 1987) ont permis, quant à eux, de conforter les connaissances déjà acquises sur l'influence du confinement sur la résistance de la liaison. Différents types de béton ont été étudiés, comme par exemple le cas du béton auto-plaçant étudié par (Daoud, 2003). (Ouglova, 2004) a proposé un essai d'arrachement baptisé essai **P**our l'**I**dentification de l'**A**dhérence et du **F**rottement (P.I.A.F.). La géométrie de l'éprouvette permet d'une part de diminuer le confinement de l'interface et par conséquent, de mesurer véritablement des grandeurs liées à la réponse en cisaillement et d'autre part, de mesurer par des techniques d'imageries numériques les champs de déformations et de déplacements sur l'interface.

Les premiers modèles sont apparus à partir de 1960. Il est possible de remarquer les travaux réalisés par (Rehm, 1961), (Tepfers, 1979) et (Gambarova et Rosati, 1997). Certaines analyses plus mathématiques ont été conduites, par exemple, par (Khalfallah et Hamimed, 2005), dans le cas des membrures tendues en béton armé. La loi de comportement la plus utilisée encore aujourd'hui est celle recommandée par le (CEB-FIB, 1993), inspirée de la proposition de (Eligehausen *et al.*, 1983). Des modèles très similaires ont été proposés par plusieurs équipes comme par exemple celles de (Harajli, 1994) et de (Ozbolt *et al.*, 2002). Depuis 1998, de nombreuses lois de comportement ont été proposées dans différents cadres théoriques. En particulier, on peut citer les cadres de la plasticité, de la mécanique de la rupture, de la mécanique de l'endommagement, etc. Ces différents modèles seront davantage détaillés dans les sections suivantes.

La liaison acier/béton corrodée

Les premières études de l'influence du phénomène de corrosion sur le comportement mécanique de la liaison acier/béton apparaissent à partir de 1990. Elles sont nées de l'expression d'un besoin, des gestionnaires d'ouvrages constatant que le patrimoine d'ouvrage vieillissait, de posséder des outils d'aide à la décision permettant de planifier les actions de maintenance à lancer. En effet,

du besoin de reconstruire vite qui est apparu pendant la période d'après guerre ont résulté des constructions, parfois précipitées, de nombreux ouvrages en béton armé. Au cours du temps, l'environnement extérieur a agi sur ces ouvrages et de nombreuses pathologies se sont développées, comme en particulier, le phénomène de corrosion des armatures dans le béton armé. C'est alors que trois axes de recherche bien distincts ont vu le jour afin d'appréhender ce phénomène, de le prédire et de tenter de le prévenir ou encore de le guérir.

Les études expérimentales de la liaison acier/béton en présence de corrosion peuvent être classées en deux catégories : d'une part les études élémentaires visant à étudier l'influence de la corrosion sur l'acier et la liaison acier/béton de manière distincte et d'autre part, les études plus globales qui s'intéressent à la réponse mécanique d'un élément de structure dans son ensemble.

Parmi les études les plus significatives relatives à l'effet de la corrosion sur le comportement de l'acier, il est possible de citer les travaux de (Almusallam *et al.*, 1996). Des barres d'acier de différents diamètres ont été corrodées sous champ électrique. Ces derniers ont permis de mettre clairement en évidence trois aspects : la perte de ductilité des armatures au cours du développement de la corrosion se traduisant par la diminution de l'élongation à rupture et la conservation de la contrainte à rupture. (Castel, 2001) et (Castel *et al.*, 2002) ont réalisé des essais de traction pure sur des barres d'acier entaillées à différentes profondeurs. Ils ont notamment montré que le potentiel de déformation des barres est réduit de 50% à 75% pour une réduction de section de 6% à 20%. Ils ont expliqué ce phénomène par le fait qu'une concentration de contraintes existe en fond d'entaille. Ainsi, l'armature d'acier plastifie de manière locale, au voisinage de l'entaille, avant que la limite d'élasticité ne soit globalement atteinte. En 2004, (Ouglova, 2004) a proposé une formule empirique reliant la déformation cumulée à rupture au degré de corrosion macroscopique, définie en terme de perte de section. Cette formule a été retrouvée à partir de différentes analyses aux éléments finis dans lesquelles un critère de rupture locale par clivage a été introduit.

Durant la même période, de nombreux chercheurs se sont naturellement intéressés à quantifier les variations de l'adhérence entre l'acier et le béton en présence de corrosion. (Sulaimani *et al.*, 1990) réalisent de nombreux essais d'arrachement sur des éprouvettes corrodées à différents degrés. Ils parviennent à montrer que l'adhérence acier/béton varie en deux phases : une augmentation pour les faibles degrés de corrosion suivie d'une diminution pour les plus forts degrés de corrosion. Les travaux de (Rodriguez *et al.*, 1995) puis ceux de (Cairns *et al.*, 2007) ont permis d'aboutir à la conclusion que la chute de l'adhérence entre l'acier et le béton est essentiellement due à la fissuration du béton d'enrobage qui provoque une chute du confinement de l'interface acier/béton. De plus, la « lubrification » liée à l'apparition de la rouille provoque une chute du coefficient de frottement acier/béton.

Soucieux d'appréhender l'effet de la corrosion à une échelle plus proche de celle à laquelle sont bâtis les ouvrages dans le domaine du génie civil, de nombreux essais ont été réalisés sur des éléments de structure. On distingue les essais liés à l'aptitude au service (E.L.S.) de ceux liés à la sécurité structurale (E.L.U.).

(Castel, 2001) a étudié le comportement mécanique des poutres en béton armé vieillies en ambiance saline pendant 14 ans. Cette étude avait pour objectif de mettre en évidence l'effet couplé de la réduction de l'acier tendu et de la perte d'adhérence acier/béton. L'analyse comparative a montré que la fissuration du béton comprimé n'a pas d'influence sur le comportement en service. (Cabrera et Ghoddoussi, 1992) ont réalisé des essais de flexion sur des corps d'épreuve dont les armatures inférieures ont été corrodées par courant imposé. Ils ont pu quantifier l'augmentation

de la flèche et la perte du moment résistant de service selon le degré de corrosion imposé. (Rodriguez *et al.*, 1997) publient leurs conclusions portant sur l'augmentation de l'ouverture de fissure en fonction du degré de corrosion. (Val *et al.*, 1998) ont simulé le comportement mécanique d'un pont en béton armé sous différents cas de corrosion. Cette étude a notamment permis d'apprécier les effets de la corrosion généralisée sur la phase de comportement en service.

C'est en 1996 que (Cabrera, 1996) publie les premiers résultats portant sur la réduction de la ductilité de poutres en béton armé corrodées. Ces résultats seront confortés par l'apport de (Lee *et al.*, 1998) qui parviennent aux mêmes conclusions. La même année, (Uomoto et Mirsa, 1998) ont conduit un programme expérimental sur des poutres et des poteaux corrodés. Les résultats des essais de flexion montrent que la réduction de la capacité portante des poutres corrodées n'est pas due seulement à la réduction de la section des armatures inférieures mais aussi à la formation des fissures nées de la corrosion. Enfin, parmi les essais les plus significatifs réalisés sur des corps d'épreuve corrodés, il est possible de citer les travaux de (Mangat et Elgalf, 1999a) et (Mangat et Elgalf, 1999b). Ces chercheurs ont réalisé des essais de flexion quatre points sur des corps d'épreuve sous renforcés pour provoquer une rupture globale due à la rupture de la liaison acier/béton. Une formule empirique a été proposée pour déterminer le pourcentage de chute de capacité portante en fonction du degré de corrosion mesuré.

Contrairement à la réponse à un chargement monotone, le comportement cyclique d'éléments de structure corrodés n'a que très peu été étudié. L'étude la plus significative est celle publiée par (Fang *et al.*, 2006). Cette équipe a effectué des essais d'arrachement sur des éprouvettes à différents degrés de corrosion. Le principal résultat réside en la proposition d'une expression analytique d'une variable dite d'endommagement, permettant de quantifier la réduction de la résistance de la liaison en fonction du nombre de cycles appliqués.

La volonté et le besoin de prédire le comportement des éléments de structure dégradés par corrosion sont apparus de manière concomitante à la réalisation des différentes études expérimentales précédemment évoquées. A partir des années 1995, de nombreux modèles sont apparus dans la littérature pour tenter d'apporter des éléments de réponse au besoin de prévision. Il est possible de distinguer deux classes de modèles bien distinctes : d'une part ceux qui s'intéressent uniquement au développement de la corrosion et à son effet sur le béton d'enrobage et d'autre part, ceux qui s'intéressent aux conséquences de la corrosion sur certaines grandeurs spécifiques comme la capacité portante. Les modèles les plus significatifs proposés vont de l'empirisme à la conceptualisation rigoureuse du phénomène de liaison en présence de corrosion. Davantage de détails sont donnés dans les sections suivantes.

2.4.2 Aspects phénoménologiques

Classification

L'étendue et la diversité des travaux expérimentaux publiés dans la littérature rendent délicate une présentation exhaustive de ces derniers. Le parti de ne présenter que les travaux les plus significatifs a donc été retenu. L'absence de classification et d'essais standards pour la caractérisation du comportement de la liaison acier/béton ne simplifie d'ailleurs en rien l'exposé. Dans cette section, il est néanmoins proposé de réaliser une synthèse des principales études expérimentales publiées. Pour cela, il a été choisi d'ordonner l'information disponible sur le comportement mécanique de la liaison acier/béton en absence de corrosion selon le tableau 2.1. Les travaux de recherche visant à caractériser le comportement mécanique de la liaison acier/béton en présence de corrosion sont également relativement diversifiés. Une classification identique à celle du tableau 2.1 ne semble pas adaptée car la liaison fait intervenir les matériaux béton et acier. Il semble

donc plus approprié d'agencer ces travaux selon l'aspect qui est étudié. Ainsi, la classification retenue est présentée dans le tableau 2.2.

Essais d'arrachement	**Essais de tirant à double traction**	**Essais sur éléments de structure**
(Rehm, 1958), (Lutz et Gergely, 1967) (Rehm, 1961)	(Goto, 1971)	(Molina *et al.*, 1993)
(Eligehausen *et al.*, 1983)	(Clément, 1987)	(Turk *et al.*, 2006)
(LaBorderie et Pijaudier-Cabot, 1987)	(Daoud, 2003)	
(Gambarova et Rosati, 1997)		
(Zuo et Darwin, 2000)		
(Viawanthanatepa, 1979)		

TAB. 2.1 – Classification et synthèse des études expérimentales de la liaison acier/béton en absence de corrosion.

Effets de la corrosion sur l'adhérence acier/béton	**Effets de la corrosion sur le comportement de l'acier**	**Effets de la corrosion sur le comportement d'éléments de structure**	
		E.L.S.	*E.L.U.*
(Sulaimani *et al.*, 1990)	(Almusallam *et al.*, 1996)	(Cabrera et Ghoddoussi, 1992)	(Cabrera, 1996) (Lee *et al.*, 1998)
(Rodriguez *et al.*, 1997)	(Castel *et al.*, 2002)	(Rodriguez *et al.*, 1995)	(Val *et al.*, 1998)
(Ghandehari *et al.*, 2000)	(Ouglova, 2004)	(Val *et al.*, 1998)	(Uomoto et Mirsa, 1998)
(Ouglova, 2004)		(Castel *et al.*, 2002)	(Mangat et Elgalf, 1999b)
			(Castel *et al.*, 2002)

TAB. 2.2 – Classification et synthèse des études expérimentales de la liaison acier/béton en présence de corrosion.

Travaux expérimentaux sur la liaison acier/béton en absence de corrosion

Les essais d'arrachement. Les essais d'arrachement ont largement été utilisés pour l'étude du comportement de la liaison acier/béton. Les éprouvettes de cet essai sont constituées d'un bloc de béton dans lequel se trouve une barre d'acier, lisse ou nervurée. L'essai consiste à appliquer un déplacement en bout de barre. Les résultats obtenus se présentent souvent sous la forme d'une courbe contrainte/glissement. La géométrie de l'éprouvette est déterminée pour que la rupture soit due à l'interface et non au béton ou encore à la plastification de la barre. Ces essais sont principalement mis en œuvre dans le but de déterminer la résistance maximale de la liaison acier/béton. Le faible coût et la simplicité de mise en œuvre font de ces essais les plus utilisés et les plus adaptés à ce jour pour étudier l'ancrage de l'acier dans un corps de béton. Plusieurs critiques peuvent cependant être émises sur ces essais. En premier lieu, ils ne permettent pas l'application de chargements complexes comme de la flexion ou de la torsion. Il semble donc délicat de représenter un cas de fonctionnement mécanique réel. En second lieu, il est difficile de réaliser des mesures objectives vis-à-vis des dimensions de l'éprouvette. En effet, les épaisseurs mises en jeu conduisent souvent à la présence d'un confinement accru, ne correspondant pas aux situations réelles. En dernier lieu, l'interprétation des résultats ne prend généralement pas en compte le caractère fortement hétérogène de la répartition des contraintes le long de la barre d'acier.

Les travaux de recherche mettant en œuvre pour la première fois des essais d'arrachement sont ceux de (Rehm, 1961). Ces essais ont consisté à appliquer un chargement en déplacement monotone croissant en bout d'une barre lisse, noyée dans un corps de béton. Certains modes de rupture parasites ont été évités en augmentant l'épaisseur de béton autour de la barre d'acier. Sur la base de ces travaux, (Lutz et Gergely, 1967) ont répété le même type d'essai avec des barres nervurées en faisant varier l'angle de ces dernières. Ces travaux ont permis d'aboutir à quelques conclusions majeures. En premier lieu, un angle limite ($\sim 40°$) est obtenu pour lequel les barres possédant des nervures avec un angle inférieur à celui-ci se comportent comme des barres lisses. En second lieu, il est remarqué que la résistance ultime des barres nervurées est fortement liée à la résistance en traction du béton. En dernier lieu, (Lutz et Gergely, 1967) parviennent à proposer une décomposition de l'ensemble du processus de dégradation de la liaison. Trois phases sont donc identifiées : une première appelée *phase d'adhérence chimique*, une seconde appelée *première phase de dégradation* et une dernière appelée *seconde phase de dégradation*.

L'étude reconnue comme étant la plus complète et la plus riche réalisée depuis près de 20 ans reste celle publiée par (Eligehausen *et al.*, 1983). Elle offre non seulement des résultats très variés mais elle propose aussi un modèle analytique simple qui a servi de base à de nombreux textes normatifs. Dans le cadre de ce vaste programme, 125 éprouvettes ont été testées. Chacune d'entre elles a été conçue pour représenter une région confinée autour d'un nœud d'ossatures. Plusieurs paramètres ont été étudiés au cours de cette étude : l'effet de l'histoire en chargement sur le comportement de la liaison, l'effet du confinement, le diamètre des armatures et le type de nervures, la résistance à la compression du béton et la vitesse de chargement. Plusieurs résultats, aussi bien dans le cas de chargements monotone que cyclique, ont été obtenus. En condition de chargement monotone, en premier lieu, il est remarqué que la relation contrainte/glissement fait clairement transparaître une variation de la raideur tangente caractéristique de ce type d'essai : une première phase au cours de laquelle la résistance augmente jusqu'à un pic puis une seconde phase durant laquelle cette dernière tend progressivement à s'annuler. En second lieu, les auteurs montrent que la résistance de pic augmente avec le carré de la résistance à la compression du béton. En dernier lieu, la vitesse de sollicitation agit directement sur la résistance au pic et tend à l'augmenter plus celle-ci augmente. Cela a permis de montrer que le comportement de la liaison intègre des effets visqueux. En condition de chargement cyclique, il est noté, en premier

lieu, que quelque soit la forme du chemin de sollicitation, une courbe dite *vierge* est toujours retrouvée. Cette dernière correspond généralement à la réponse en chargement monotone. En second lieu, les auteurs montrent que lors d'un cycle de chargement/déchargement/chargement, la dégradation de la résistance et de la rigidité ne dépend que de la plus grande valeur de glissement atteinte. Ce résultat important peut être interprété comme la preuve de l'existence d'un écrouissage isotrope. Malgré la richesse des résultats fournis, les auteurs proposent plusieurs perspectives de recherche. En particulier, d'importants efforts doivent être déployés pour quantifier l'effet de l'espacement des nervures sur le comportement de la liaison. De plus, les éventuels effets liés aux zones de plastification locales méritent d'être étudiés. Enfin, la propagation des fissures caractéristiques n'a pas été abordée.

Les premiers essais réalisés dans l'optique de construire une loi locale pour représenter le comportement de la liaison acier/béton sont ceux réalisés par (LaBorderie et Pijaudier-Cabot, 1987). Une réflexion sur les dimensions des éprouvettes pour approcher au mieux le comportement d'un volume élémentaire représentatif le plus probable a été conduite. Cette particularité confère aux résultats obtenus par (LaBorderie et Pijaudier-Cabot, 1987) toute la pertinence et la consistance nécessaires afin qu'ils puissent être pleinement utilisables pour identifier les paramètres matériaux d'une loi locale de la liaison acier/béton. Ces essais ont permis de mieux appréhender les effets d'un confinement extérieur sur le comportement de la liaison. Pour cela, plusieurs essais d'arrachement ont été réalisés sous quatre niveaux différents de confinement : 0, 5, 10 et 15 MPa. Pour une variation de 5 MPa du confinement extérieur, il a été observé une variation de 35 % de la résistance maximale de la liaison. Cela montre clairement l'importance de ce paramètre. De plus, cette étude montre que la rupture locale de la liaison n'est pas contrôlée uniquement par le mode II. En effet, la surface de rupture correspond davantage à un cylindre englobant l'acier et la hauteur des nervures que l'acier seul. Ainsi les propriétés de la liaison sont liées au frottement interne du béton. Ce résultat a d'ailleurs été étayé par l'observation de boucles d'hystérésis lors de cycles de charge/décharge.

La dernière étude significative qui est présentée dans cette synthèse est celle réalisée par (Gambarova et Rosati, 1997), (Coronelli, 2002) et (Bamonte *et al.*, 2002). Ces auteurs ont concentré leurs efforts essentiellement autour de deux points particuliers : d'une part les effets du confinement sur le comportement local de la liaison acier/béton et d'autre part, les effets d'échelles sur le comportement global des structures en béton armé. Les éprouvettes confectionnées pour caractériser les effets du confinement extérieur, connues sous le vocable d'*éprouvettes à ancrage court*, ne comprennent qu'une courte barre d'acier. Les coffrages possèdent des séparateurs spéciaux qui favorisent l'apparition de fissures longitudinales. Le bloc de béton agit ainsi comme un étau autour de la barre d'acier. Un confinement extérieur est appliqué en vue de maintenir la cohésion de l'ensemble. Un déplacement a été imposé en bout de barre en vue de caractériser le comportement de la liaison confinée. D'une manière globale, les résultats obtenus par (LaBorderie et Pijaudier-Cabot, 1987) ont été retrouvés. En particulier, la nature de la surface de rupture et l'effet bénéfique du confinement sont les deux points majeurs sur lesquels insistent (Gambarova et Rosati, 1997). En revanche, contrairement aux observations de (Eligehausen *et al.*, 1983), il a été constaté que le diamètre de la barre a une influence non négligeable sur le comportement de la liaison. La principale critique formulée à l'égard de cette étude est celle de (Lowes, 1999). Cette dernière fait remarquer à juste titre que la manière de quantifier et d'appliquer le confinement sur les éprouvettes diffère largement de celle des autres auteurs. En réalité, la pression latérale n'est pas constante le long de la barre d'acier ce qui rend les essais réalisés très peu représentatifs du mode de fonctionnement réel. Dans des travaux plus récents, (Gambarova et Rosati, 1997) se sont consacrés à l'étude des effets d'échelle sur le comportement de la liaison avec d'une part un béton ordinaire et d'autre part, un béton haute performance. Plusieurs essais

d'arrachement ont été réalisés en faisant varier les dimensions géométriques des éprouvettes dans des ratios contrôlés. En particulier, l'effet des variations de l'aire des surfaces de contact d'acier et de béton a été étudié. Les auteurs ont pu mettre en évidence l'existence d'effets d'échelle sur le comportement de la liaison acier/béton mais ne sont pas parvenus à proposer une loi empirique les régissant.

Les essais de tirant à double traction Les tirants en béton armé sont des éprouvettes prismatiques qui se composent d'un bloc de béton et d'une barre d'acier. Les résultats se présentent sous la forme d'une courbe de réponse globale mettant en relation la force appliquée aux deux extrémités de l'armature avec le déplacement mesuré. Le but principal des essais de tirant est l'étude de la fissuration du béton par transfert des efforts de traction depuis l'acier vers ce dernier. L'essai de tirant consiste en général à appliquer une force imposée, ou un déplacement, aux deux extrémités de la barre pour créer un état de contrainte de traction, en vue de se rapprocher du mode de fonctionnement d'une armature inférieure classique. Les efforts de traction sont donc transmis depuis l'acier au béton au travers de la liaison. Il est essentiel de remarquer que les efforts de traction dans l'acier se traduisent par des efforts de cisaillement dans le béton. A partir de l'instant où la contrainte limite de traction est localement atteinte dans le béton, un phénomène de concentration de contraintes apparaît. Il s'en suit l'apparition d'une macrofissure concentrée en zone centrale de l'éprouvette. Cela se traduit par la présence d'une discontinuité sur la courbe force/déplacement. Cette dernière est due à une décharge globale de l'éprouvette avant que la redistribution des efforts n'ait pu se faire. Lorsque l'intensité du chargement progresse, d'autres macrofissures apparaissent et il en résulte donc d'autres discontinuités sur la courbe force/déplacement.

Les travaux de (Goto, 1971) portent sur le transfert des efforts depuis l'acier vers le béton. Cet auteur s'est intéressé à la butée des nervures sur le corps de béton. Un premier résultat que (Goto, 1971) est parvenu à montrer est le fait que la résistance maximale de la liaison acier/béton est conditionnée par la résistance en traction du béton. Par ailleurs, en utilisant de l'encre comme traceur de fissures, ces travaux ont permis d'observer une fissuration du béton caractéristique du transfert d'efforts depuis l'acier vers le béton, appelée *fissuration radiale*.

(Clément, 1987) s'est intéressé à la rupture des éprouvettes par fissuration externe du béton alors que la barre d'acier restait entièrement élastique. Cet auteur est parvenu à identifier clairement des phases caractéristiques du comportement d'un tirant : une première phase linéaire et une seconde non linéaire, qui traduit la perte de rigidité globale due à la dégradation progressive de la liaison acier/béton. Par ailleurs, (Clément, 1987) a remarqué que le comportement d'un tirant fissuré pouvait être rapproché du comportement élastique linéaire d'un acier. Enfin, l'auteur souligne le fait que la liaison acier/béton est dégradée essentiellement sur les quarts extrêmes du tirant. En effet, la liaison reste assez peu endommagée en zone centrale.

Récemment, (Daoud, 2003) a réalisé des essais de tirants avec du béton autoplaçant dans le but de mieux appréhender les effets de la dégradation de la liaison acier/béton sur le comportement global. Les résultats de cette étude n'ont montré aucune différence notable entre ce type de béton et un béton vibré traditionnellement par rapport à la fissuration.

Essais sur éléments de structure Les essais de poutre sont également une précieuse source d'informations pour apprécier les effets de la dégradation de la liaison acier/béton à l'échelle de la structure. Généralement, les éprouvettes sont des poutres en béton armé avec un pourcentage d'armature minimal. En effet, la rupture globale de l'ensemble doit être due à la rupture

de la liaison acier/béton. Les résultats se présentent sous la forme d'une courbe force/flèche. L'apport majeur de ce type d'essai est qu'il permet de générer à l'interface acier/béton un état de contrainte issu de sollicitations complexes. Ainsi, le fonctionnement de la liaison acier/béton coïncide plutôt bien avec un cas de fonctionnement réel. Il est à noter que ces essais correspondent très bien aux besoins des ingénieurs de construction, qui souhaitent avoir des solutions pratiques. Dans la suite, deux programmes récents de recherche mis en place pour étudier spécifiquement la liaison acier/béton sont présentés.

(Molina *et al.*, 1993) se sont concentrés sur les effets d'une dégradation de la liaison acier/béton sur le comportement mécanique de poutres en béton armé. Des essais sur éléments de structure ont donc été réalisés. Les auteurs ont également effectué une étude paramétrique portant sur l'épaisseur d'enrobage, le niveau de confinement, etc. Il a été constaté que, pour une même géométrie, plus la liaison acier/béton est dégradée, plus la flèche augmente. Néanmoins, même en présence d'une forte dégradation de la liaison acier/béton, l'armature a pour effet de rigidifier l'ensemble.

Les travaux récents de (Turk *et al.*, 2006) visent à évaluer la résistance de la liaison acier/béton en fonction de divers paramètres dont la longueur de recouvrement. Cette grandeur a été choisie de telle sorte qu'une fissure longitudinale apparaisse le long du corps d'épreuve lors des essais. Le résultat essentiel auquel aboutissent les auteurs est que la liaison acier/béton développe une résistance maximale en zone de recouvrement. (Turk *et al.*, 2006) expliquent cela par la présence d'un *effet structure* qui apporterait de la résistance à l'ensemble.

Travaux expérimentaux sur la liaison acier/béton en présence de corrosion

Généralités. Le phénomène de corrosion est de nature électrochimique. Il est caractérisé par l'apparition d'un courant électrique en l'absence de toute source extérieure. C'est une attaque destructive d'un métal par le développement de réactions électrochimiques qui conduisent à un transfert d'ions et d'électrons à l'interface métal-solution, en présence d'une différence de potentiel entre ces deux phases. Plusieurs réactions s'effectuent à la surface du métal. Elles interagissent entre elles et sont appelées réactions conjuguées. Plus précisément, on distingue deux réactions primaires (anodique et cathodique) et une secondaire.

Lors de la réaction anodique, le métal tend à s'oxyder. L'ion métallique quitte le réseau cristallin solide et passe en solution. Une quantité équivalente est laissée dans la phase solide. Ainsi, pour la phase fer, la réaction électronique s'écrit de la manière suivante :

$$F_e \rightleftarrows F_e^{n+} + ne^- \tag{2.42}$$

Dans l'équation 2.42, n est un entier qui dépend du type de fer formé. De manière concomitante à la première, une réaction cathodique s'effectue également. Selon l'environnement et la quantité d'oxygène à la cathode, deux types de réaction sont susceptibles d'apparaître :

En l'absence d'oxygène

$$\begin{gathered} 2H_2O + 2e^- \rightleftarrows 2OH^- + H_2 \\ 2H^+ + 2e^- \rightleftarrows H_2 \end{gathered} \tag{2.43}$$

En présence d'oxygène

$$O_2 + 2H_2O + 4e^- \rightleftarrows 4OH^- \tag{2.44}$$

Enfin, en plus des réactions primaires qui viennent d'être présentées, une réaction secondaire s'effectue. Cette dernière se traduit par l'apparition d'un dépôt à la surface du métal. De manière

simplifiée, les équations bilans s'écrivent comme suit :

$$\begin{array}{c} F_e^{n+} + nOH^- \rightarrow F_e(OH)_n \\ 4F_e(OH)_2 + O_2 \rightleftarrows 2F_{e_2}O_3 + 4H_2O \end{array} \tag{2.45}$$

Lorsque l'on considère un élément de structure en béton armé, une solution interstitielle est présente dans les pores du béton. Son pH est classiquement supérieur à 12,5 selon (Longuet *et al.*, 1976). L'acier des armatures est donc recouvert d'un film passif constitué de magnétite ou d'oxyde ferrique, selon le diagramme de Pourbaix. La nature exacte de ce film est grandement influencée par le pH de la solution interstitielle, comme le montrent les travaux de (Sandberg, 1995) et de (Sagoe-Centsil et Glasser, 1990). Lorsque ce film est déposé sur l'armature, on parle de *passivation de l'armature*. Dès lors que l'élément de structure en béton armé est sujet à une agression extérieure, comme par exemple la pénétration de dioxyde de carbone ou d'ions chlorures, le film protecteur tend à disparaître. On parle alors de *dépassivation de l'armature*. Cette dépassivation peut être plus ou moins uniforme le long de l'armature selon le type d'agents agressifs. On distingue classiquement le cas d'une corrosion par carbonatation (pénétration de dioxyde de carbone) et le cas d'une corrosion par chlorures (pénétration des ions chlorure).

Le cas d'une corrosion par carbonatation correspond à la dépassivation de l'armature proche de la surface extérieure du béton. Elle s'effectue généralement de manière plutôt uniforme le long de l'acier. L'air présent dans le milieu extérieur contient un pourcentage de dioxyde de carbone voisin de 0,03 %. Cette teneur moyenne dépend bien entendu de la pression et de la température du milieu. La portlandite réagit avec le dioxyde de carbone pour donner naissance à du carbonate de calcium selon la réaction bilan suivante :

$$CO_2 + C_a(OH)_2 \rightleftarrows C_aCO_3 + H_2O \tag{2.46}$$

Un indicateur majeur et directement accessible à la mesure est le pH de la solution interstitielle. En effet, ce dernier tend à diminuer pour atteindre une valeur voisine de 9. Le film protecteur est alors détruit de manière uniforme et la corrosion peut commencer à se développer. Les produits finaux du processus anodique sont majoritairement le $F_e(OH)_2$ et le $F_e(OH)$. Il est essentiel de noter que les mécanismes précis qui conduisent à la formation de tels composés restent encore mal connus. Dans la littérature, différents mécanismes élémentaires ont été proposés. Il est possible de citer les travaux de (Tuutti, 1982), de (Broomfield, 1997) et de (Raharinaivo *et al.*, 1998). La cinétique du phénomène de corrosion par carbonatation reste elle aussi mal connue. Toutefois, il a clairement été identifié que cette dernière dépend non seulement de l'épaisseur d'enrobage mais aussi de l'humidité relative, selon les travaux de (Baron et Olivier, 1998). Lorsque le béton d'enrobage est fissuré, des chemins de migrations préférentiels sont alors créés et la carbonatation du milieu s'effectue plus rapidement et de manière plus importante. En revanche, lorsque le béton est non fissuré et de bonne qualité, la carbonatation du milieu est très lente.

Le second cas de corrosion correspond à la pénétration des ions chlorures. La dépassivation de l'armature s'effectue de manière localisée. Il est ainsi difficile de distinguer les zones cathodiques des zones anodiques. Les observations montrent que la couche de recouvrement ne protège plus l'armature lorsque que la concentration en ions chlorures a atteint un seuil critique. L'amorçage de la corrosion se fait par l'apparition de piqûres localisées et tend à se généraliser par la suite si la concentration en ions chlorures est la même le long de l'acier. Plusieurs mécanismes sont proposés dans la littérature ; on peut notamment citer les travaux de (Raharinaivo *et al.*, 1998), de (Sagoe-Centsil et Glasser, 1990) et de (Neville, 1983). La quantité critique d'ions chlorure nécessaire à l'activation du phénomène de corrosion est sujet à de nombreuses controverses comme en fait état la littérature sur le sujet.

A partir de cette succincte présentation sur la nature électrochimique du phénomène de corrosion, il est possible d'en déduire d'une manière générale, que les mécanismes physico-chimiques restent encore assez mal connus. En dépit de cette méconnaissance que la littérature semble faire apparaître, de nombreux travaux ont visé à mieux appréhender les effets du phénomène de corrosion sur le comportement mécanique des éléments de structure en béton armé. En effet, un point de vue plus macroscopique est alors adopté. C'est bel et bien à comprendre le fonctionnement mécanique des structures dégradées par corrosion que se sont employés de nombreux chercheurs. Dans ce qui suit, une synthèse des travaux publiés dans la littérature sur ces aspects est réalisée. On peut remarquer que la littérature fait état d'études s'intéressant à l'ensemble des effets de la corrosion sur le comportement mécanique des éléments de structure. Toutefois, dans une optique de modélisation de ce phénomène, il semble plus licite de tenter d'identifier clairement chaque effet élémentaire et non d'apprécier le résultat de leur superposition. Néanmoins, dans ce qui suit, le parti d'un exposé fondé sur les effets identifiés et liés au développement de la corrosion a été retenu. Deux effets jouant un rôle majeur dans la diminution de la performance des ouvrages en béton armé dégradés par corrosion peuvent être identifiés : d'une part la fragilisation des aciers constitutifs des armatures et d'autre part, la perte d'adhérence acier/béton.

Fragilisation de l'acier. Cet effet concerne essentiellement le cas de la corrosion par piqûre, c'est-à-dire par pénétration des ions chlorures dans le béton d'enrobage. D'une manière générale, l'acier tend à se fragiliser sous l'effet des piqûres qui se forment. Il s'en suit une diminution de la déformation équivalente de rupture. Les travaux réalisés par (Almusallam *et al.*, 1996) font clairement état de ce phénomène. Ils constituent la base de données la plus utilisée pour identifier les paramètres des lois de comportement proposées dans la littérature pour rendre compte de cet effet. Des barres d'acier ont été corrodées sous champ électrique de manière à créer des piqûres localisées de différentes profondeurs. Des essais de traction pure ont ensuite été effectués pour caractériser le comportement des corps d'épreuve. La figure 2.1 présente les courbes force/déplacement obtenues par (Almusallam *et al.*, 1996). Il apparaît très clairement une fragilisation de plus en plus marquée en fonction du degré de corrosion, défini en terme de perte de masse. L'étude conduite par (Castel, 2001) visait à caractériser l'effet des piqûres sur

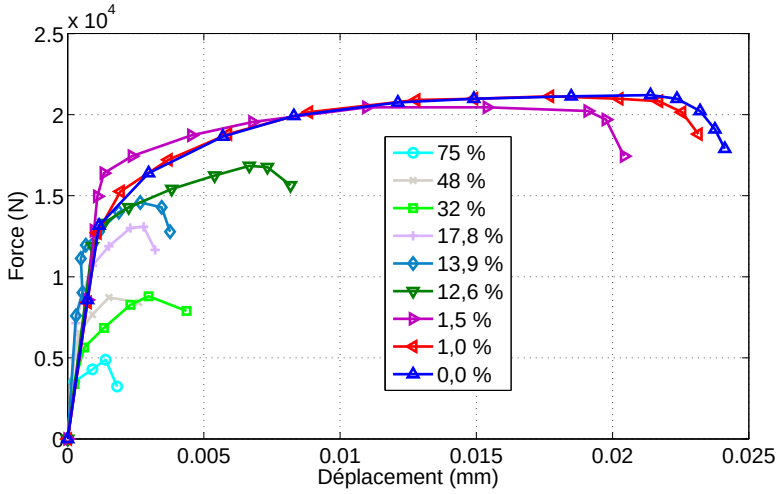


FIG. 2.1 – Réponse uniaxiale des essais de traction pure réalisés sur des barres d'acier corrodées à différents degrés (d'après (Almusallam *et al.*, 1996)).

la ductilité de l'acier. Pour cela, quatre barres d'acier ont été entaillées puis testées. Comme le montre la figure 2.2, il a été mis en évidence que pour des réductions locales de section de 6 %, 11 % et 20 %, le potentiel de déformation à la rupture chute respectivement de 50 %, 70 % et

75 % par rapport au témoin. L'hypothèse de l'existence d'une concentration de contraintes en fond d'entaille a été avancée. Suite à cette étude, (Castel, 2001) a proposé une relation liant le degré de corrosion à la déformation équivalente à rupture. (Ouglova, 2004) a également réalisé

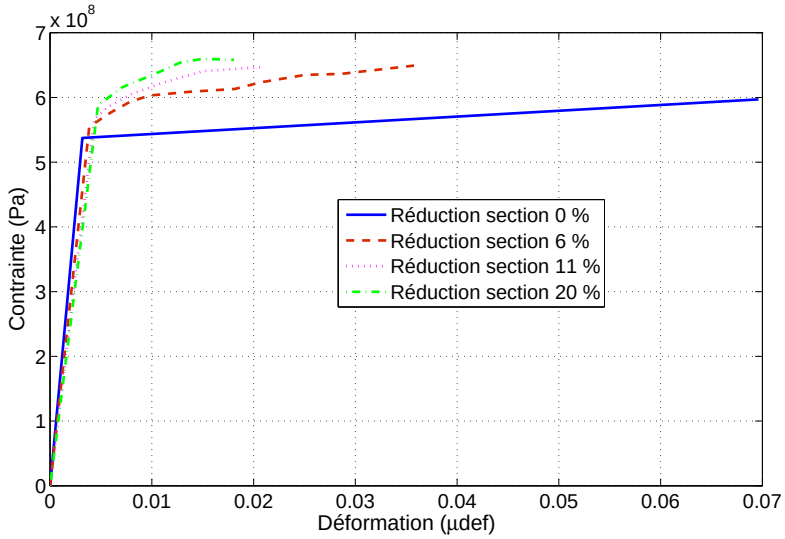


FIG. 2.2 – Réponse uniaxiale des essais de traction pure réalisés sur des barres d'acier entaillées à différentes profondeurs (d'après (Castel, 2001)).

des essais de traction sur des barres d'acier possédant des piqûres à différentes profondeurs. Les résultats obtenus ont permis de dégager une loi empirique reliant la déformation plastique cumulée à rupture au degré de corrosion. Une étude numérique a permis a posteriori de justifier la relation obtenue, qui a été introduite dans une loi de comportement macroscopique couplant endommagement et plasticité. Cette loi sera présentée plus en détail dans la suite.

Variation de l'adhérence acier/béton. Un autre effet essentiel qui résulte du développement de la corrosion dans les structures en béton armé est la variation de l'adhérence entre l'acier et le béton. La corrosion réduit l'adhérence à cause de l'affaiblissement du confinement de l'armature, produit à la fois par la fissuration du béton et par la corrosion de l'armature, comme les travaux de (Rodriguez *et al.*, 1995) le montrent. De plus, une *lubrification* due à la présence des produits de corrosion, apparaît entre l'acier et le béton. Cet aspect a été discuté par (Cairns *et al.*, 2007). (Sulaimani *et al.*, 1990) ont réalisé des essais d'arrachement sur des corps d'épreuve corrodés à différents degrés pour caractériser l'influence de la corrosion et de la fissuration du béton d'enrobage sur l'adhérence. Les résultats obtenus par ces auteurs sont présentés sur la figure 2.3. L'allure générale des courbes force/glissement présentées sur la figure 2.3 mettent clairement en évidence une variation de l'adhérence acier/béton fonction d'une part du diamètre des barres d'acier utilisées et d'autre part, du degré de corrosion. Pour les faibles degrés ($\approx$ 1%), l'adhérence augmente alors que pour les degrés supérieurs, celle-ci diminue. Plusieurs explications ont été avancées dans la littérature pour tenter d'expliquer ces variations. Les auteurs expliquent cela par le fait que le confinement de la barre d'acier est accru tant que les produits de corrosion n'ont pas provoqué la fissuration du béton due à leur expansion. Ainsi, le béton reste élastique. Dès que sa contrainte limite de traction est atteinte, il s'en suit l'apparition de fissures conduisant à une perte de confinement de l'armature qui se traduit par une diminution de l'adhérence acier/béton. D'autres études expérimentales, comme celle réalisée par (Ouglova, 2004), confirment les observations de (Sulaimani *et al.*, 1990). Comme l'exposé réalisé jusqu'ici le montre, de nombreux chercheurs se sont intéressés à comprendre les mécanismes locaux caractéristiques du phénomène de corrosion. A l'identique des recherches effectuées sur

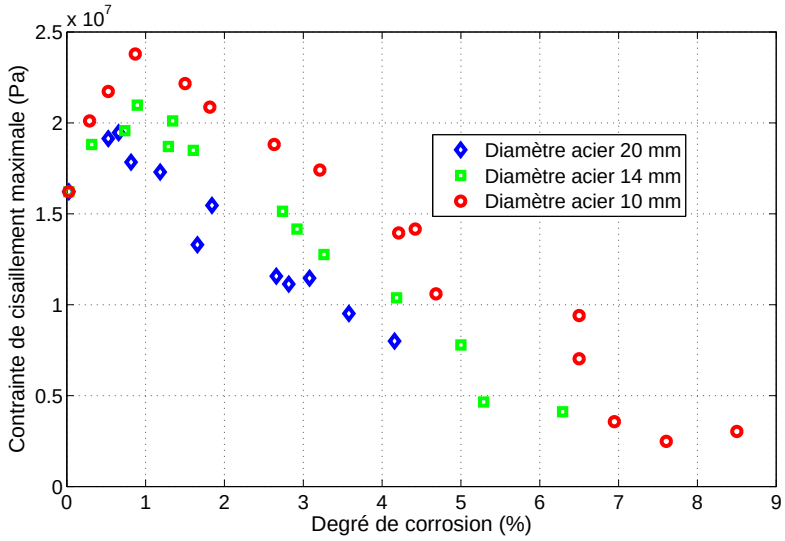


FIG. 2.3 – Réponses des essais d'arrachement réalisés sur des éprouvettes corrodées à différents degrés définis en perte de masse (d'après (Sulaimani *et al.*, 1990)).

la thématique du comportement mécanique de la liaison acier/béton saine, un certain nombre d'équipes s'est consacré à caractériser les effets de la corrosion sur le comportement global d'éléments de structure. D'une manière générale, les résultats de ces études s'intéressent d'une part aux effets de la corrosion sur la flèche d'un élément de structure en fonctionnement et d'autre part, à leur capacité portante. Autrement dit, ce sont les cas des états limites de service (ELS) et ultime (ELU) qui ont été étudiés. Dans la suite, une synthèse des travaux publiés dans la littérature sur ces deux thèmes est présentée.

Comportement d'éléments de structure en service. Des corps d'épreuve conservés en ambiance saline pendant 14 ans ont été étudiés par (Castel, 2001). L'objectif de ces travaux était de mettre en lumière l'effet de la perte de section des armatures couplé avec les variations de l'adhérence acier/béton. Cet auteur a mis en évidence d'une part, que la corrosion qui s'est développée sur les armatures en zone comprimée n'a pas d'influence sur le comportement en service de l'ouvrage. D'autre part, la perte d'adhérence acier/béton en zone tendue est apparue comme le facteur majeur responsable de l'augmentation de la flèche. (Castel, 2001) explique cela par le fait que le béton situé entre les fissures en zone tendue ne participe plus de manière efficace à la reprise des efforts de traction. Cela se traduit par une diminution de la rigidité de flexion. En effet, la section des aciers étant réduite, la redistribution des efforts de traction en zone tendue est modifiée. Les aciers ne pouvant plus reprendre suffisamment d'effort, il apparaît un accroissement local de la courbure moyenne, qui agit directement sur la rigidité en flexion. (Val *et al.*, 1998) ont réalisé des simulations numériques visant à appréhender le comportement en service d'un pont en béton armé sujet à de la corrosion. Ces simulations ont permis aux auteurs de faire apparaître des variations significatives de l'indice de fiabilité au cours du temps. Les deux cas de corrosion (généralisée et par piqûres) ont été pris en compte. Il ressort de ces travaux que le comportement en service tend à être influencé essentiellement par la corrosion généralisée. (Rodriguez *et al.*, 1997) ont confectionné des poutres qu'ils ont ensuite corrodées de manière intensiostatique. Leur résultat majeur réside en la mise en évidence du mode de rupture propre aux éléments de structures corrodés. En effet, ces derniers tendent à atteindre leur rupture par un mode lié au cisaillement (effort tranchant) plutôt que par flexion, comme c'est classiquement le cas lorsque la corrosion est absente. Ces résultats viennent confirmer ceux publiés quelques années auparavant par (Cabrera et Ghoddoussi, 1992).

Comportement ultime d'éléments de structure. Sur les mêmes corps d'épreuve que ceux étudiés en condition de fonctionnement en service, (Castel, 2001) a réalisé une étude à rupture en les testant sous un chargement de flexion. Il est ressorti de cette analyse, qu'à l'échelle de la structure, le phénomène de corrosion se traduit par trois effets essentiels : une perte de raideur, une perte de résistance et une diminution de la ductilité en phase post-pic. Par l'utilisation de son modèle, (Castel, 2001) a montré que la réduction de section des armatures était largement responsable de la perte de la capacité portante des poutres. La perte de ductilité peut être aussi liée à cette même cause, toutefois, (Castel, 2001) émet quelques réserves sur cette hypothèse. Les simulations à rupture conduites par (Val *et al.*, 1998) ont clairement montré que la corrosion par piqûres tend à affecter davantage la capacité portante des structures. (Uomoto et Mirsa, 1998) ont testé des poutres et des poteaux qui ont été corrodés de manière intensiostatique. Ces auteurs ont montré que la perte de capacité portante n'était pas seulement due à une réduction de la section d'acier mais aussi à la formation de fissures due à la corrosion. En particulier, (Uomoto et Mirsa, 1998) ont observé que pour une perte de masse voisine de 2 %, la capacité portante diminuait de 17 %. (Cabrera, 1996) et (Lee *et al.*, 1998) ont mis en évidence que, dans le cas d'une corrosion généralisée, la perte de ductilité est liée à la perte d'adhérence locale entre l'acier et le béton. (Mangat et Elgalf, 1999a), (Mangat et Elgalf, 1999b) ont testé des poutres en flexion, corrodées de manière intensiostatique à différents degrés. Cette étude offre l'intérêt de mettre en œuvre des corps d'épreuve non armés en zone comprimée. Cette caractéristique permet d'assurer que les poutres atteignent leur rupture par détérioration de la liaison acier/béton. Les résultats d'essais montrent que la capacité portante résiduelle est objective par rapport au courant de corrosion appliqué. De plus, selon les auteurs, la perte de capacité portante est due non seulement à la réduction de la section d'acier mais aussi à la perte d'adhérence acier/béton. (Mangat et Elgalf, 1999b) propose finalement une formule empirique pour estimer la capacité portante d'éléments de structure affectés par le phénomène de corrosion.

2.4.3 Outils de prédiction

Classification

Depuis que le thème d'étude de la liaison acier/béton a commencé à intéresser nombre de chercheurs, la problématique liée à la prévision et à la modélisation du comportement mécanique de l'interface acier/béton s'est posée. Tout comme dans le cas des études expérimentales, la littérature fait état d'un nombre conséquent de modèles, fondés sur différentes hypothèses et formulés dans différents cadres théoriques. Il semble donc nécessaire de classer l'information disponible pour permettre une vision globale des développements proposés. Tout d'abord, il est possible de distinguer deux classes de lois de comportement : celles ne permettant pas une prise en compte de la corrosion et celles le permettant. A l'intérieur de chacune de ces classes, différents cadres théoriques de formulation ont été utilisés, dans lesquels plusieurs variantes de lois de comportement ont été proposées. Il est essentiel de remarquer que certains modèles de comportement, visant à représenter les effets de la corrosion, n'ont pas été prévus pour pouvoir être utilisés avec un chargement mécanique extérieur, autre que celui créé par la corrosion elle-même. La classification retenue est synthétisée dans le tableau 2.3.

Cadres théoriques de formulation	**Modèles d'interface sans corrosion**	**Modèles de corrosion**	
		Sans chargement mécanique	Avec chargement mécanique
Empirique	(Rehm, 1958) (Tepfers, 1979) (Gambarova et Rosati, 1997) (Sener *et al.*, 1999)	(Acosta et Sagues, 2000) (Pètre-Lazar et Gérard, 2000) (Maaddawy et Soudki, 2007)	- - - -
Analytique	(Tassios, 1979) (Eligehausen *et al.*, 1983) (CEB-FIB, 1993)	(Bhargava *et al.*, 2005) (Bhargava *et al.*, 2006) (K. Bhargava, 2006) (Wang et Liu, 2006) (Bhargava *et al.*, 2007)	(Ting et Nowak, 1991) (Castel *et al.*, 2002) (Cremona et Houde, 2006)
Mécanique de l'endommagement	(Clément, 1987) (Daoud, 2003) (Dominguez, 2005)	(Andrade *et al.*, 1993) (Molina *et al.*, 1993) (Millard *et al.*, 2004) (Du *et al.*, 2006)	(Coronelli, 2002) (Coronelli et Gambarova, 2004) (Berto *et al.*, 2008)
Théorie de la plasticité	(Cox et Herrmann, 1998) (Cox et Herrmann, 1999) (Desir *et al.*, 1999) (Romdhane et Ulm, 2002)	- - - - - -	(Lundgren, 1999) (Lundgren, 2001) (Lundgren, 2002) (Lundgren, 2005a) (Lundgren, 2005b) -
Mécanique de la rupture	(Gastebled et May, 2000) (Ghandehari *et al.*, 2000)	- -	- -
Éléments finis spéciaux	(Maker et Laursen, 1993) (Maker et Laursen, 1994) (Monti *et al.*, 1997) (D'Ambrisi et Filippou, 1999) (Luccioni *et al.*, 2005)	- - - - -	- - - - -

Tab. 2.3 – Classification des modèles significatifs d'interface acier/béton proposés dans la littérature.

Présentation synthétique des modèles de liaison acier/béton en l'absence de corrosion

Positionnement du problème - choix d'un domaine matériel. La synthèse des travaux expérimentaux réalisée précédemment permet de mettre en lumière le fait que l'interface acier/béton est une zone possédant d'une part des propriétés particulières et d'autre part, un comportement qui lui est propre. En effet, la liaison entre l'acier et le béton se développe dans cette zone. Autrement dit, l'interface acier/béton est une zone de transfert d'effort entre le béton et l'acier. Proposer un modèle d'interface acier/béton se traduit donc par la proposition d'une relation liant le tenseur des contraintes au tenseur des déformations totales ou encore, de manière équivalente, au vecteur saut de déplacement couramment appelé glissement. Pour atteindre cet objectif, il y a d'abord lieu de définir la manière de représenter le domaine occupé par l'interface acier/béton. Deux écoles existent : l'*École de la mesure nulle* et l'*École du troisième corps*. La première possibilité consiste à supposer l'interface acier/béton sans épaisseur. Cela revient à proposer une relation entre le vecteur contrainte et le vecteur saut de déplacement sous la forme d'un opérateur matriciel généralement diagonal d'ordre deux sous la forme suivante :

$$\underline{t} = \underline{\underline{K}}.[\underline{u}] \tag{2.47}$$

Dans l'équation 2.47, $\underline{t}$ représente le vecteur contrainte à l'interface, $\underline{\underline{K}}$ une matrice diagonale et $[\underline{u}]$ le vecteur saut de déplacement. Ce type de loi de comportement est généralement implanté dans des éléments joints, sans épaisseur. Il est à noter que la mise en œuvre de ce type de modèle dans des calculs de structure à grande échelle reste délicate en raison des nombreuses instabilités numériques liées à l'interpénétration potentielle de l'acier et du béton. En revanche, les motivations physiques conduisant certains auteurs à émettre l'hypothèse que l'interface acier/béton n'occupe aucun domaine physique ne semblent pas manquer. D'autres chercheurs ont préféré se concentrer sur une modélisation plus robuste du comportement mécanique de l'interface acier/béton mais moins physique. En effet, l'hypothèse que l'interface acier/béton est un matériau à part entière est alors émise. Cela implique donc l'existence d'un domaine de mesure non nulle qui est occupé par l'interface. Récemment, certains auteurs se sont employés à tenter d'identifier expérimentalement une hauteur caractéristique pour améliorer la prédiction des modèles. Dans ce cas, le modèle de comportement repose sur une relation tensorielle entre d'une part le tenseur des déformations totales et d'autre part, le tenseur des contraintes. Cette dernière prend alors la forme suivante :

$$\dot{\underline{\underline{\sigma}}} = \underline{\underline{\underline{\underline{C}}}}^{\mathbf{an}} : \dot{\underline{\underline{\epsilon}}} \tag{2.48}$$

Dans l'équation 2.48, $\dot{\underline{\underline{\sigma}}}$ représente l'incrément de contraintes, $\underline{\underline{\underline{\underline{C}}}}^{\mathbf{an}}$ est un tenseur d'ordre 4 appelé module tangent et $\dot{\underline{\underline{\epsilon}}}$ est l'incrément de déformations totales à l'interface. Cette approche offre un double intérêt : d'une part une robustesse numérique accrue due au fait que les problèmes d'interpénétration ne se posent plus et d'autre part, une formulation en contraintes/déformations cohérente avec la manière dont se pose classiquement un problème de mécanique.

Les modèles empiriques. Les premiers modèles de comportement relèvent de l'empirisme. En effet, ces derniers sont nés du besoin de mieux appréhender les résultats d'expérience. Les tentatives de mettre en corrélation différents paramètres physiques ont naturellement conduits à des formulations simples, pouvant être aisément incluses dans les textes normatifs. L'essentiel des formulations proposées s'exprime donc en terme de contrainte de cisaillement (contrainte vraie) en fonction du saut de déplacement à l'interface acier/béton. Un des premiers modèles empiriques est celui proposé par (Rehm, 1958). Cet auteur propose une expression très simple de la forme :

$$\tau = \tau_0 + \tau_{\mathbf{max}}[u]^{\alpha} \tag{2.49}$$

Dans cette expression, τ_0, $\tau_{\mathbf{max}}$ et α sont des paramètres à identifier sur la base de résultats expérimentaux de type pull-out. Parfois, τ_0 est interprétée comme une cohésion initiale, c'est-à-dire, une résistance seuil qui doit être franchie pour que le processus de dégradation puisse être activé. Parmi les propositions les plus célèbres, il est possible de citer celle de (Tepfers, 1979). Cet auteur propose une relation de la forme :

$$\tau = S[u] \tag{2.50}$$

Dans la relation 2.50, S est un module baptisé *module de rigidité tangentiel* pouvant varier de $0,5$ MPa à 2000 MPa. Il est intéressant de noter que les paramètres caractérisant les matériaux en présence ne sont pas pris en compte par les formulations présentées précédemment. C'est précisément à ce manque de considération de la physique des phénomènes en jeu que contribuent à répondre (Gambarova et Rosati, 1997) et (Sener *et al.*, 1999). En effet, sur la base des premiers modèles empiriques développés, ces auteurs proposent des formulations intégrant respectivement les effets du confinement et les effets d'échelle.

Les modèles analytiques. Souvent considérée comme une référence en terme de modèle analytique, la proposition de (Tassios, 1979) s'appuie sur *l'analogie du cylindre*. Dans un contexte axisymétrique, l'état de contrainte à l'interface acier/béton est représenté par une seule composante de type tangentielle τ. Le béton est considéré comme un milieu semi-infini dans lequel une barre d'acier a été placée. La théorie de l'élasticité générale permet d'établir une équation différentielle régissant les interactions entre l'acier et le béton. Il est essentiel de noter que ce modèle est formulé pour un cas de chargement très précis correspondant à une mise en traction de l'acier. Aucun effet de confinement, par exemple, n'est pris en compte dans la proposition de (Tassios, 1979). Un autre modèle pouvant être considéré comme une référence est celui proposé par (Eligehausen *et al.*, 1983). Ce dernier s'appuie sur une vaste campagne expérimentale conduite par ces auteurs. Il s'exprime comme suit :

$$\begin{cases} \tau = \tau_{\mathbf{max}}(\frac{s}{s_1})^{\alpha} & \text{si} \quad 0 \leq s < s_1 \\ \tau = \tau_{\mathbf{max}} & \text{si} \quad s_1 \leq s < s_2 \\ \tau = \tau_{\mathbf{max}} - (\tau_{\mathbf{max}} - \tau_{\pi})\frac{s-s_2}{s_3-s_2} & \text{si} \quad s_2 \leq s < s_3 \\ \tau = \tau_{\pi} & \text{si} \quad s \geq s_3 \end{cases} \tag{2.51}$$

Dans ces expressions, s est le glissement entre l'acier et le béton, $(s_i)_{i=1,2,3}$ sont des seuils définissant les différentes étapes de dégradation. $\tau_{\mathbf{max}}$ est la contrainte maximale et τ_{π} est la contrainte de frottement. Un apport notable des travaux de (Eligehausen *et al.*, 1983) est sans aucun doute l'analyse de la réponse de l'interface acier/béton à un chargement cyclique variable. La version monotone du modèle proposé (équations 2.51) peut alors être modifiée pour être adaptée au cas des chargements cycliques en considérant deux variables variant entre 0 et 1 multipliant les précédentes expressions. Selon (Eligehausen *et al.*, 1983), la première variable est liée à un endommagement directement lié au chargement extérieur et la seconde, à un endommagement issu du frottement se développant à l'interface. Toutes deux s'expriment en terme d'énergie dissipée lors de ces deux situations. Cette approche originale a permis de formuler un modèle analytique simple qui, dans le cas de chargements cycliques, peut être utilisé en contrôlant la dissipation. Une version normative du modèle est celle introduite par le code (CEB-FIB, 1993), encore très utilisé aujourd'hui.

Les modèles d'endommagement. Le modèle proposé par (Clément, 1987) s'inscrit clairement dans le cadre de la mécanique de l'endommagement. Cette proposition est en réalité une version modifiée du modèle de béton de (Mazars, 1984). Du fait de l'hypothèse de continuité des déplacements à l'interface acier/béton, le modèle de (Clément, 1987) ne permet pas d'être

utilisé dans des simulations à rupture. En revanche, il convient tout à fait à la prédiction de la première fissure traversante dans le cas d'essais de tirant long par exemple. Quelques années plus tard, (Daoud, 2003) a repris les développements proposés par (Clément, 1987) en améliorant les lois d'évolution de la variable d'endommagement. Un des modèles constitutifs de l'interface acier/béton formulé rigoureusement dans le cadre de la mécanique de l'endommagement est celui proposé par (Ragueneau *et al.*, 2006). Partant sur une hypothèse d'axisymétrie, (Dominguez, 2005) a développé un cadre constitutif général couplant de multiples phénomènes intervenant lors du processus de dégradation de l'interface acier/béton. En effet, les effets de la micro fissuration sont pris en compte en introduisant une variable d'endommagement scalaire dont l'évolution dépend des dégradations apparaissant non seulement en mode I (ouverture) mais aussi en mode II (cisaillement plan). De plus, les effets hystérétiques sont pris en compte en s'appuyant sur les travaux de (Ragueneau, 1999). L'implantation de cette loi constitutive a été réalisée à travers un élément linéaire à quatre nœuds dégénéré (Ibrahimbegovic et Wilson, 1992) assurant une certaine robustesse lors de la mise en œuvre de la loi de comportement dans des simulations à l'échelle de l'élément de structure. Deux défauts essentiels peuvent être identifiés : d'une part la proposition de (Dominguez, 2005) ne permet pas de simuler le comportement de structures 3D et d'autre part, en raison d'une implantation au sein d'un élément dégénéré, il s'avère que la réponse de la loi de comportement est assez sensible aux variations du paramètre de pénalisation assurant la dégénérescence. Toutefois, le cadre théorique posé par (Dominguez, 2005) apparaît comme rigoureux et susceptible de constituer le point de départ de nouvelles recherches en vue d'être étendu.

Les modèles s'appuyant sur la théorie de la plasticité. Les modèles proposés par (Desir *et al.*, 1999) et (Romdhane et Ulm, 2002) s'inscrivent tous deux dans le cadre de la théorie de la plasticité. Les lois constitutives permettent de rendre compte du comportement global de l'interface acier/béton. L'écrouissage négatif lié à la phase post-pic est supposé linéaire. Ces modèles considèrent l'interface acier/béton comme une surface de discontinuité de mesure nulle. La discontinuité en déplacement est gérée de manière diffuse en introduisant des déformations plastiques. Les effets de confinement sont pris en compte via un critère de Drucker-Prager, liant les contraintes normale et tangentielle. Les propositions de (Cox et Herrmann, 1998) et (Cox et Herrmann, 1999) sont assez voisines dans leur formulation de celle qui viennent d'être évoquées. Toutefois, la discontinuité en déplacement est gérée de manière explicite dans la formulation d'un élément fini spécial.

Les modèles s'inscrivant dans le cadre de la mécanique de la rupture. (Gastebled et May, 2000) ont proposé un modèle analytique de tirant formulé à l'aide des concepts de la mécanique linéaire de la rupture. Cette approche est particulièrement intéressante car elle vise à véritablement prédire l'apparition de fissures à l'interface acier/béton. Pour cela, des critères locaux de rupture en contrainte orthoradiale maximale et en énergie dissipée sont utilisés pour la prédiction des fissures transversale et longitudinale respectivement. Ce modèle ne permet pas clairement de représenter des effets très localisés à l'interface acier/béton. En revanche, il a le mérite de distinguer nettement les effets des deux modes de fissuration caractéristiques de la dégradation de l'interface. Les travaux de (Ghandehari *et al.*, 2000) offrent une vision intéressante de la manière dont le comportement spécifique de la liaison acier/béton peut être pris en compte. En effet, ces auteurs proposent un modèle de fissures cohésives visant à représenter la fissuration longitudinale classiquement observée sur des essais de type pull-out. L'apport essentiel de ces travaux réside dans le couplage entre un modèle de béton de type mécanique linéaire de la rupture et le modèle de liaison proposé. Les auteurs évoquent également les problèmes de localisation et d'indépendance au maillage dus à la perte d'ellipticité de la formulation du problème.

Les modèles formulés à l'aide d'éléments finis spéciaux. Les travaux publiés par (Maker et Laursen, 1994) peuvent également être cités. La proposition de ces auteurs pour décrire le comportement de la liaison acier/béton consiste à appréhender ces interactions comme un problème de contact. Un algorithme spécifique gérant le contact entre un solide (barre d'acier) et un milieu continu (béton) doit donc être mis en œuvre en vue d'assurer le respect d'une condition de non interpénétration des solides. Parmi les intérêts les plus significatifs de cette approche, il est possible de souligner la simplicité de la construction du maillage liée à l'absence d'éléments d'interfaces. En revanche, pour des structures complexes, il semble clair que ce type d'approche n'est pas applicable étant donné le coût numérique lié au solveur de contact basé sur l'utilisation de la méthode du Lagrangien augmenté. De plus, dans les simulations proposées par les auteurs, aussi bien l'acier que le béton ont été supposés élastiques linéaires, ce qui d'un point de vue numérique simplifie grandement le problème et d'un point de vue prédictif, ne permet pas la détermination des fissures. Fondé sur la méthode des flexibilités classiquement utilisée en résistance des matériaux, (Monti *et al.*, 1997) proposent un modèle visant à décrire le comportement hystérétique des armatures. Les effets de la dégradation de la liaison sont inclus dans les éléments de renforcement, ce qui facilite grandement la construction de maillages de structures complexes. La mise en œuvre numérique de ce modèle est fondée sur une interpolation en force et non en déplacement. En effet, la raideur homogénéisée de l'ensemble barre-liaison est fonction des efforts déployés à l'interface et de ce fait, il y a lieu de les connaître de manière précise. Ces travaux constituent un apport incontestable vis-à-vis de la prise en compte du caractère imparfait de l'interface dans la modélisation de structures complexes soumises à des chargements de type sismique. Les travaux (D'Ambrisi et Filippou, 1999) s'appuient également sur la théorie des poutres. En effet, leur modèle consiste à décomposer certains éléments de poutre en 4 sous éléments qui permettent, chacun, de représenter un mécanisme particulier : élasticité, plasticité diffuse, dégradation de l'interface et enfin, transmission des efforts de cisaillement. Les effets hystérétiques sont aussi pris en compte en terme de moment/rotation. Une proposition originale afin de prendre en compte le caractère imparfait de l'interface acier/béton apparaît dans les travaux de (Luccioni *et al.*, 2005). Ces derniers ont développé un modèle à fibres dans lequel l'interface acier/béton est prise en compte dans la loi de comportement de l'acier. Le principe de cette approche consiste à décomposer la déformation totale en une partie propre à l'acier et une partie liée au glissement. Cela permet de relâcher les contraintes déployées dans l'acier selon la valeur d'un certain indicateur d'endommagement lié à l'interface. Ce modèle a l'avantage d'une part d'être peu coûteux et d'autre part, de ne pas nécessiter des maillages complexes. En revanche, il n'est pas possible d'obtenir des informations très locales comme des ouvertures de fissures par exemple.

Présentation synthétique des modèles de liaison acier/béton en présence de corrosion sans chargement mécanique

Les modèles empiriques. La prédiction de certaines grandeurs liées au phénomène de corrosion a été appréhendée de plusieurs manières. On peut distinguer quelques modèles empiriques, associant parfois des résultats de la théorie de l'élasticité, qui s'intéressent à l'estimation de grandeurs d'intérêt comme par exemple la quantité critique de rouille nécessaire à l'apparition d'une fissure dans le béton, le temps de remplissage de la zone poreuse autour de l'armature ou encore la durée séparant les phases d'incubation et de propagation de la corrosion. Ces modèles, s'appuyant sur de vastes campagnes expérimentales, sont souvent simples dans la formulation et facilement intégrables dans des textes normatifs mais ils ne permettent pas la réalisation d'études complexes visant, par exemple, à déterminer la capacité portante résiduelle des structures en béton armé existantes. De manière plus précise, (Acosta et Sagues, 2000) proposent un modèle empirique dans le but de prédire la quantité de rouille critique au-delà de laquelle la première fissure du béton d'enrobage apparaît. Une vaste campagne expérimentale a donc

été conduite dans le but de quantifier l'influence de l'épaisseur d'enrobage et du diamètre de la barre de renforcement sur cette quantité critique. Une relation empirique de type puissance est déduite des résultats. Quelques éléments de validation de cette relation empirique sont proposés à l'aide de simulations numériques. Cette relation a été assez discutée dans la littérature du fait d'une certaine insuffisance de la base de données expérimentales utilisée pour la déduire. Les travaux menés par (Pètre-Lazar et Gérard, 2000) ont permis d'aboutir à une expression pour estimer la durée de remplissage de la zone poreuse de béton autour de l'armature. Cette formulation intègre plusieurs paramètres caractéristiques du processus electrochimique intervenant dans le phénomène de corrosion. En revanche, cette dernière n'intègre pas les caractéristiques mécaniques des matériaux tels que le module d'Young ou la résistance en traction du béton, ce qui ne semble pas satisfaisant du point de vue de l'ingénieur. Cependant ce modèle reste très utilisé dans la littérature et a été cité de nombreuses fois. Enfin, parmi les modèles empiriques les plus remarquables, il est possible de citer les travaux de (Maaddawy et Soudki, 2007). Ces auteurs proposent un modèle semi-empirique permettant d'estimer la durée qui sépare l'instant où la corrosion est initiée et l'instant d'apparition de la première fissure. Fondé sur la proposition de (Tassios, 1979), ce modèle prend en compte la corrosion de manière homogène comme une réduction de section d'acier couplée avec une expansion des produits de corrosion. Le raccord entre les différentes couches s'effectue en supposant la continuité des tractions. Ce modèle apparaît comme étant assez prédictif. De plus, c'est un des rares modèles qui intègre les effets du fluage du béton explicitement au travers d'une variation des paramètres élastiques.

Les modèles analytiques. Du fait de la capacité de prédiction limitée qu'offrent les approches empiriques, les efforts se sont alors concentrés vers le développement de modèles analytiques essentiellement fondés pour la plupart sur la proposition de (Tassios, 1979). En effet, les travaux de (Bhargava *et al.*, 2005), (Bhargava *et al.*, 2006), (K. Bhargava, 2006) et (Bhargava *et al.*, 2007) s'appuient largement sur *l'analogie du cylindre*. Sous une hypothèse d'axisymétrie, un modèle de type multicouche est proposé par les auteurs. Les conditions de continuité entre les couches se font soit en traction soit en déplacement. La fissuration est prise en compte par le recours au modèle multi-linéaire CEB-FIB (CEB-FIB, 1993). De plus, à l'aide de relations extérieures au problème d'élasticité tirées de la littérature, une cinétique du phénomène de corrosion est prise en compte et permet d'obtenir une estimation de certaines durées caractéristiques. La proposition de (Wang et Liu, 2006) peut également être citée. Formulés dans un cadre entièrement analytique exact, les travaux de (Wang et Liu, 2006) permettent de reproduire assez fidèlement les variations de l'adhérence à l'interface acier/béton selon le niveau de corrosion appliqué. Il doit toutefois être noté que le modèle proposé par (Wang et Liu, 2006) ne peut être appliqué à des structures complexes, telles que des poutres en béton armé par exemple, en raison de la cinématique restreinte en jeu.

Les modèles d'endommagement. La mécanique de l'endommagement a souvent été utilisée dès lors qu'il fallut simuler les effets du phénomène de corrosion en l'absence de chargement mécanique. De manière plus précise, c'est essentiellement le matériau béton qui a été représenté par un modèle d'endommagement, tandis que le phénomène de corrosion est représenté par une simple couche expansive. Les travaux de (Andrade *et al.*, 1993) et de (Molina *et al.*, 1993) s'inscrivent tout à fait dans un tel cadre. Ces auteurs aspirent à identifier une relation entre l'expansion des produits de corrosion à l'interface et l'ouverture de la première fissure se produisant dans le béton d'enrobage. Pour cela, une vaste étude numérique a été lancée. L'acier est supposé élastique linéaire, la réduction de la section d'acier est négligée. Le béton est modélisé par une loi de type fissuration diffuse (smeared-crack model). L'interface acier/béton n'est considérée qu'afin de pouvoir y appliquer un chargement thermique radial équivalent. Ces auteurs parviennent à formuler une relation entre la somme des ouvertures de fissures à l'interface et l'expansion des

produits de corrosion. Par la suite, il s'est avéré que ce résultat n'était applicable que de manière limitée étant donnée la dispersion des propriétés mécaniques des produits de corrosion. (Millard *et al.*, 2004) ont repris les concepts proposés par les auteurs précédents en considérant le modèle de béton de Mazars (Mazars, 1984) dans sa version non locale. Le faciès de fissuration dû à la corrosion que ces auteurs parviennent à obtenir est tout à fait cohérent avec les observations expérimentales. Toutefois, ces derniers insistent très clairement sur la difficulté à identifier les paramètres mécaniques liés au phénomène de corrosion. Les travaux de (Du *et al.*, 2006) visent à extraire les mécanismes élémentaires de dégradation du béton due à une expansion. Pour cela, plusieurs essais existant ont été simulés. Le béton est modélisé par une loi de fissuration diffuse. Ces auteurs parviennent à mettre en évidence quatre mécanismes élémentaires conduisant à la ruine locale du béton d'enrobage. En premier lieu, on pourra distinguer une phase de *fissuration interne* durant laquelle les fissures s'initient à l'interface. En second lieu, les fissures s'initient sur la surface extérieure du béton d'enrobage. Cela est à rapprocher des effets de flexion induits par l'expansion. Cette phase est appelée par les auteurs phase de *fissuration externe*. En troisième lieu, les fissures tendent à se propager depuis le béton d'enrobage vers l'interface acier/béton : c'est la phase de *propagation de la fissuration*. Enfin, les fissures formées deviennent coalescentes, caractérisant ainsi la phase de *fissuration ultime*.

Présentation synthétique des modèles de liaison acier/béton en présence de corrosion couplée à un chargement mécanique

Les modèles analytiques. Les modèles analytiques rendant possible les calculs de capacité portante résiduelle en présence de corrosion sont très souvent fondés sur la théorie des poutres à laquelle certains ingrédients sont ajoutés. (Ting et Nowak, 1991) proposent un modèle de poutre très simple auquel ils adjoignent les effets de la réduction de la section des armatures en acier. Pour cela, ils considèrent une équation externe qui pilote la réduction de section en fonction du temps. Les travaux de (Castel *et al.*, 2002) offrent une vision intéressante de la formulation d'un modèle global. Fondé sur la théorie des poutres, (Castel *et al.*, 2002) proposent une formulation permettant d'estimer le comportement d'éléments de structure sollicités en flexion. Le modèle nécessite de connaître précisément la distribution des fissures de flexion et de corrosion. En effet, une certaine *longueur de transfert* est introduite dans la formulation afin d'écrire l'équilibre des efforts entre le béton et l'acier. Lorsqu'une fissure traverse l'armature, la longueur de transfert devient moins importante car aucun effort n'est transmis par la fissure. L'ensemble de ces développements a été soutenu par l'étude expérimentale de poutres en béton armé corrodées de manière naturelle pendant plus de 16 ans. Dans le même esprit que les travaux de (Ting et Nowak, 1991), (Cremona et Houde, 2006) proposent un modèle probabiliste pour estimer le comportement ultime de poutres en précontraintes. Le phénomène de corrosion est pris en compte dans le modèle à travers une réduction de la section des armatures. Cette approche, comme celle proposée par (Ting et Nowak, 1991), a plusieurs avantages : en premier lieu elle reste simple, en second lieu elle permet d'obtenir des résultats globaux satisfaisants et enfin, elle prend explicitement en compte les incertitudes de mesure liées aux différentes variables en jeu.

Les modèles d'endommagement. Les travaux de (Coronelli, 2002) et (Coronelli et Gambarova, 2004) peuvent être considérés comme faisant partie des modèles s'appuyant sur la mécanique de l'endommagement au sens large. En effet, les aspects thermodynamiques ne sont pas du tout évoqués. Ces auteurs proposent une loi constitutive de l'interface acier/béton indexée par une mesure du phénomène de corrosion, qui dans ce cas est l'expansion des produits de corrosion. Il est à noter que la proposition de loi est fondée sur l'idée initiale de (Cairns et Abdullah, 1996). Le modèle proposé est motivé de manière rhéologique et s'intègre entièrement dans un cadre éléments finis standard. De plus, cette approche offre le mérite de montrer comment une modélisation du phénomène de corrosion est possible sans pour autant prendre en compte

l'ensemble des effets spécifiques qui lui sont propres (gonflement, anélasticité des produits de corrosion, ...). De manière tout à fait contraire aux auteurs précédents, (Berto *et al.*, 2008) tentent de prendre en compte un grand nombre de traits caractéristiques liés aux effets de la corrosion sur le comportement des différents matériaux constitutifs. Ainsi, le béton est modélisé à partir d'une loi d'endommagement à laquelle une variable d'endommagement d'origine chimique a été ajoutée. Il est essentiel de noter que la définition de deux variables d'endommagement ne peut être justifiée thermodynamiquement et que par suite, la consistance physique d'un tel modèle ne peut être assurée. L'acier est supposé élasto-plastique avec écrouissage isotrope. La section des armatures varie en fonction du degré de corrosion imposé. L'adhérence entre l'acier et le béton est décrite par deux lois : une de type frottant et l'autre de type endommageable. L'effet de la corrosion sur l'adhérence est pris en compte par l'addition d'une variable d'endommagement, variant selon la diminution de la section d'acier. Ainsi, l'adhérence entre l'acier et le béton est explicitement influencée par le degré de corrosion imposé. Les résultats sont comparés à des essais classiques de la littérature et de bonnes corrélations ont été obtenues. Toutefois, il reste essentiel de noter que l'identification des paramètres gérant l'évolution de l'adhérence entre l'acier et le béton en fonction du degré de corrosion requiert en général des essais de type pull-out réalisés à différents degrés de corrosion. Sans de tels résultats, il peut être délicat d'identifier l'ensemble des paramètres du modèle.

Les modèles s'appuyant sur la théorie de la plasticité. Un des modèles constitutifs les plus significatifs qu'il est possible de rencontrer dans la littérature est issu des travaux de (Lundgren, 1999), (Lundgren, 2001), (Lundgren, 2002), (Lundgren, 2005a) et (Lundgren, 2005b). Ce modèle est de loin l'un des plus complets. Formulé dans le cadre de la théorie de la plasticité, ce dernier permet les études éléments finis des éléments de structures en béton armé dégradées par corrosion. C'est un modèle de type multicouche, c'est-à-dire que la réduction de la section d'acier est gérée de manière fortement couplée à l'expansion des produits de corrosion. La rouille est modélisée en compression par une loi de type rigidifiante. En effet, ces mêmes auteurs ont montrer qu'expérimentalement les produits de corrosion se comportaient comme un matériau de type granulaire, ce qui se traduit par le fait que leur rigidité en compression augmente avec l'intensité de l'état de contrainte qui leur est appliqué. A l'opposé de la proposition de (Berto *et al.*, 2008) par exemple, le modèle de Lundgren permet de retrouver les variations de l'adhérence entre l'acier et le béton. Autrement dit, elles ne sont pas explicitement prises en compte dans le modèle mais constituent une grandeur de sortie. Ceci montre clairement la pertinence de l'approche. Cependant, du point de vue du coût numérique la mise en œuvre d'un tel modèle n'est pas très pertinente car l'armature doit être maillée de manière entièrement explicite.

2.4.4 Bilan

Dans cette section, plusieurs aspects liés au comportement de l'interface acier/béton, en l'absence ou non de corrosion, ont tout d'abord été exposés. Après un bref rappel historique des principaux travaux réalisés sur cette thématique, les différents essais mécaniques de caractérisation de l'interface acier/béton ont été détaillés.

En l'absence de corrosion, il apparaît que la dégradation de l'interface acier/béton peut être décomposée en trois phases essentielles : l'*adhérence parfaite*, la *première phase de dégradation* et la *seconde phase de dégradation*. Lors de la première phase, l'adhérence entre l'acier et le béton est d'origine chimique et elle est très faible. Cette phase peut être assimilée à la partie élastique du comportement. La *première phase de dégradation* est caractérisée par l'apparition des premières fissures de cisaillement. De plus, la transition entre petits déplacements et grands déplacements tend à s'opérer. Cette phase prend fin lorsque le pic de résistance a été atteint. La *seconde phase de dégradation* débute à cet instant. Les déplacements sont grands et le béton à l'interface est

totalement broyé. Ce sont les effets du frottement qui prédominent. Le phénomène de corrosion vient en quelque sorte pondérer les mécanismes de dégradation précédemment évoqués. En premier lieu, le comportement de l'acier est modifié. En effet, la section efficace tend à diminuer ainsi que la ductilité. En second lieu, de manière simultanée, des produits de corrosion apparaissent à l'interface acier/béton. Ces derniers tendent à se dilater, conduisant ainsi à la création de contraintes de traction dans le béton. Le béton d'enrobage se fissure selon une cinématique particulière. Il en résulte un déconfinement de l'interface acier/béton se traduisant par une diminution de l'adhérence acier/béton.

La littérature montre que de nombreux efforts ont été déployés en vue de proposer des modèles constitutifs fiables, capables de décrire le comportement de l'interface acier/béton. Pour cela, les cadres théoriques dans lesquels ont été formulés les modèles constitutifs sont très variés.

En l'absence de corrosion, de nombreuses propositions, encore largement utilisées dans les textes normatifs, ont été formulées de manière empirique. Ces dernières permettent une évaluation plus ou moins précise de l'adhérence entre l'acier et le béton. Toutefois, ces modèles ne peuvent pas être utilisés dans le cas d'études complexes sans être inclus dans un formalisme éléments finis. C'est alors que les modèles analytiques, fondés sur de vastes campagnes expérimentales ont été proposés. Bien que très robustes numériquement lorsqu'ils sont implantés, leur simplicité de formulation ne leur permet pas d'être enrichis de manière rigoureuse lorsque certains phénomènes additionnels doivent être inclus, comme la corrosion par exemple. La mécanique de l'endommagement a également été très utilisée. Fondée sur une approche thermodynamique rigoureuse, les modèles proposés sont susceptibles d'être enrichis. Par ailleurs, la formulation du modèle constitutif proposé par (Dominguez, 2005) semble intéressante. En effet, écrite dans un cadre thermodynamique rigoureux, elle semble pouvoir servir de base de développement à la formulation d'un nouveau modèle prenant en compte le phénomène de corrosion. Les formulations proposées dans le cadre de l'élastoplasticité ne s'intéressent souvent pas à décrire la partie post-pic du comportement. Enfin, les approches fondées soit sur la mécanique de la rupture soit sur la construction d'éléments finis spéciaux, sont souvent assez difficiles à mettre en œuvre. En présence de corrosion, les modèles constitutifs sont plus rares dans la littérature. En effet, il est possible de distinguer trois classes de modèles. En premier lieu, on peut noter les modèles empiriques s'intéressant à prédire certains temps caractéristiques, comme le temps d'initiation ou encore la durée d'apparition de la première fissure du béton d'enrobage. Ces derniers ne sont clairement pas adaptés au contexte de la présente étude. En second lieu, on peut distinguer les modèles s'appuyant sur l'analogie du cylindre en pression. L'avantage de cette approche est qu'elle est totalement analytique. Toutefois, l'étude de structures complexes est difficile par ce moyen. En troisième lieu, de nombreux chercheurs ont réalisé des simulations en assimilant la corrosion à un chargement thermique équivalent. Ce type d'approche reste difficile à utiliser lors d'études couplant un chargement lié à la corrosion à des actions extérieures. Enfin, des modèles formulés à l'aide de la théorie de l'élastoplasticité ont été proposés. Les concepts, présentés dans le modèle de Lundgren par exemple, sont intéressants mais semblent manquer d'une justification thermodynamique. De plus, les phénomènes hystérétiques qui apparaissent dans le cas du chargement cyclique ne sont pas pris en compte.

Après cette revue bibliographique, il apparaît que les mécanismes de dégradation de l'interface acier/béton sont assez bien identifiés en l'absence de corrosion. De plus, les effets essentiels de la corrosion sur le comportement mécanique des différents matériaux le sont également. En revanche, le comportement des produits de corrosion reste encore mal connu. Il semble donc justifié que le développement d'un nouveau modèle constitutif s'inscrive dans le cadre de la mécanique de l'endommagement, dont l'admissibilité physique peut être montrée à l'aide des

principes thermodynamiques. Il peut être noté, qu'aucun modèle d'endommagement d'interface acier/béton prenant en compte les effets essentiels de la corrosion, n'a été proposé. De plus, très peu de modèles sont applicables en couplant chargement statique/cyclique et chargement lié à la corrosion.

2.5 Comportement mécanique du béton

2.5.1 Préambule : observer de près ou de loin ?

La description quantitative d'un phénomène physique nécessite en premier lieu de se donner une résolution, c'est-à-dire une *échelle d'observation*. En effet, si la problématique consiste à décrire quantitativement le comportement mécanique d'un matériau naturel ou artificiel, la question du choix de l'échelle d'observation revient à s'interroger sur la pertinence de l'intérêt à accorder à la micro structure du matériau considéré. Dans le cas particulier du matériau béton, la continuité et l'homogénéité macroscopique couramment admise perd tout son sens dès que l'on s'intéresse à sa structure microscopique. Dans un tel contexte, deux échelles peuvent être définies : *l'échelle microscopique* et *l'échelle macroscopique*. Un concept apportant des éléments de réponse à la question du choix de l'échelle d'observation est celui du **V**olume **E**lémentaire **R**eprésentatif (V.E.R.). Cette notion permet de définir implicitement une certaine résolution liée à la qualité de l'observation du comportement d'un matériau donné. Autrement dit, la donnée d'un VER convenable doit permettre d'une part de conserver une certaine homogénéité spatiale pour que les équations aux dérivées partielles régissant le comportement du matériau gardent un sens mathématique et d'autre part, elle doit se positionner assez près du matériau pour que les gradients des grandeurs en jeu soient bien estimés. Il est essentiel de bien noter que le choix d'un VER n'est pas unique et qu'il est guidé par les besoins qui motivent le développement d'une description quantitative du comportement d'un matériau. Certains cas particuliers de matériau ont la bonne propriété de présenter un comportement macroscopique complexe et un comportement microscopique simple. Dans ces conditions, pour un VER bien choisi, il pourrait être intéressant de construire la réponse macroscopique à partir de considérations microscopiques. Ainsi, il est nécessaire de définir des règles de passage entre les échelles. (Gray et Hassanizadeh, 1979a) et (Gray et Hassanizadeh, 1979b) proposent de définir des fonctions poids permettant le transfert des informations entre les différentes échelles. Le plus souvent, les opérateurs de transfert sont construits de telle sorte que la moyenne d'une grandeur microscopique soit égale à son équivalent macroscopique.

2.5.2 Aspects phénoménologiques

L'application d'un chargement de nature quelconque sur les frontières d'un domaine matériel occupé par du béton génère un champ de contraintes local. Dès lors qu'en un point matériel du domaine, la contrainte maximale de traction dépasse la contrainte limite en traction, il se produit une décohésion plus ou moins diffuse selon la nature des défauts qui se trouvent présents. Lorsque l'intensité du chargement augmente, la fissuration diffuse évolue vers de la macrofissuration. A ce stade, les déformations se localisent donc là où la macrofissure apparaît. Cela conduit naturellement à une perte de capacité de résistance locale du matériau au voisinage de la macrofissure, provoquant une redistribution des contraintes autour du point considéré. Dans cette section, il est proposé de décrire les principaux traits comportementaux du béton dans le cas d'un régime de chargement statique ou cyclique (à bas nombres de cycles) et lorsque le stade du jeune âge a été dépassé.

Comportement en traction simple

Une sollicitation de traction simple appliquée à un domaine matériel occupé par du béton a pour effet de créer une certaine évolution complexe de la microstructure. Deux phases sont classiquement observées selon les travaux de (Terrien, 1980) et (Walraven, 1980). En premier lieu, des microfissures se forment de manière tout à fait diffuse. En second lieu, lorsque le pic de résistance est dépassé, les microfissures se localisent et donnent naissance à des macrofissures. La capacité de résistance du matériau diminue clairement et évolue vers une contrainte résiduelle. Un autre point essentiel lié au comportement en traction simple du béton est l'apparition de phénomènes hystérétiques lors de cycles de charge/décharge caractérisés par la présence de boucles (cf. 2.4). Ces phénomènes, fortement non linéaires, sont en général interprétés comme la manifestation d'un frottement entre les lèvres des fissures créées. Enfin, il est possible de remarquer la présence de déformations résiduelles lorsqu'une décharge complète est appliquée.

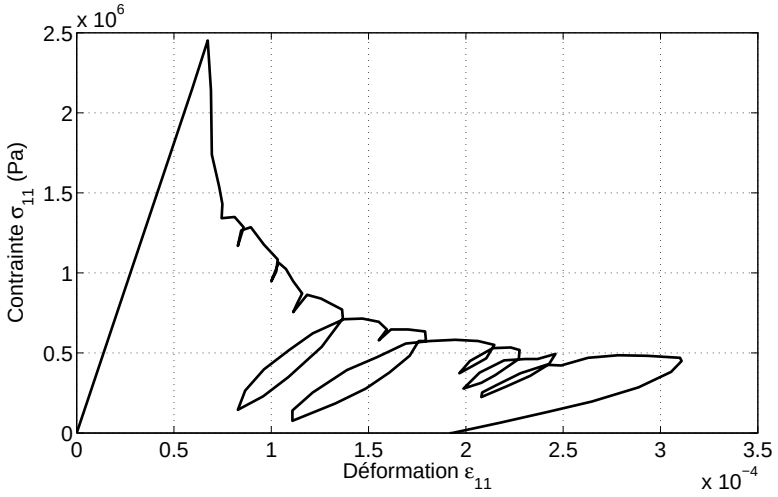


FIG. 2.4 – Réponse en traction cyclique d'un béton ordinaire (d'après (Terrien, 1980)).

Comportement en compression simple

D'une manière générale, le comportement en compression d'un béton n'est pas très différent de celui en traction. En effet, deux phases peuvent être identifiées : une première durant laquelle un réseau de microfissures se forme et une seconde durant laquelle ces dernières se localisent pour conduire à l'apparition de macrofissures. Il peut être noté la présence de déformations résiduelles après décharge. Deux points significatifs sont toutefois à souligner. D'une part la réponse en compression d'un béton montre une ductilité accrue par rapport à celle obtenue en traction et d'autre part, l'intensité des phénomènes hystérétiques est bien plus importante. Ce dernier point peut être expliqué qualitativement par le fait que lorsque des macrofissures sont ouvertes mais tendent à être comprimées, le frottement qu'elles mobilisent entre leurs lèvres est plus intense que ce qu'il ne serait sous une condition de traction simple. L'ensemble des observations évoquées précédemment peut être étayé par les résultats expérimentaux présentés sur la figure 2.5.

Comportement multiaxial

De manière analogue à la plupart des matériaux, l'application de sollicitations triaxiales tend à améliorer la réponse locale. En effet, (Kupfer et Gerstle, 1973) ont étudié le comportement d'un béton sollicité en bi compression. Les résultats expérimentaux obtenus par ces auteurs

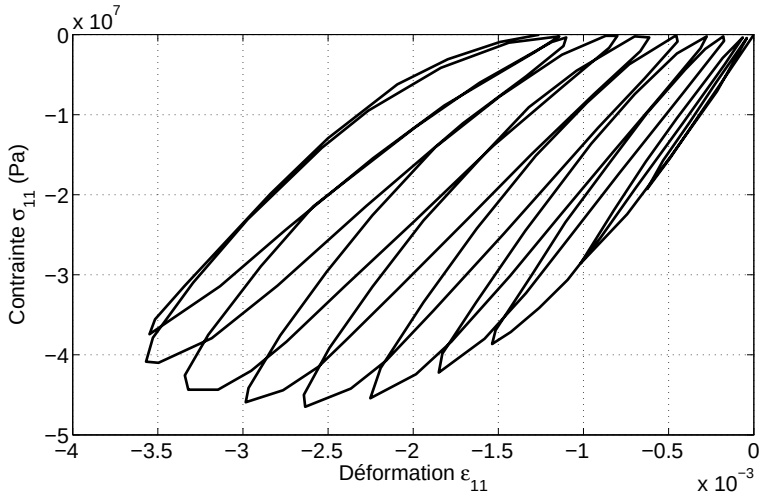


FIG. 2.5 – Domaine de rupture et d'élasticité d'un béton ordinaire sous sollicitations biaxiales (d'après (Ramtani, 1990)).

sont exposés sur la figure 2.6. Ils parviennent à la conclusion qu'une pression latérale stabilise la formation de macrofissures conduisant à la rupture de l'éprouvette. Ainsi, il est possible de montrer expérimentalement que la réponse en compression d'un béton est largement influencée par le niveau de confinement. Cette propriété de sensibilité à la pression hydrostatique joue un rôle important dans la modélisation des éléments de structures car le béton se trouvant entre les cadres est en général plus confiné que le béton d'enrobage.

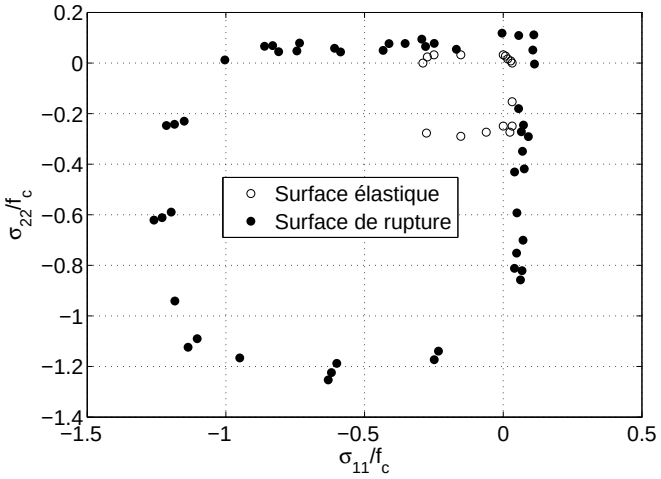


FIG. 2.6 – Réponse en bi compression d'un béton ordinaire (d'après (Kupfer et Gerstle, 1973)).

Comportement unilatéral

En lien avec sa nature quasi-fragile, le béton est sujet à l'*effet unilatéral*. Ce dernier peut être défini comme la capacité d'un béton à restaurer (au moins en partie) sa rigidité initiale selon le type de sollicitations qui lui est appliqué. La plupart des résultats expérimentaux portent sur l'étude uniaxiale de cet effet. Une manière de le mettre clairement en évidence est de faire subir à un volume de béton un cycle de chargement de type traction/compression. Les résultats expérimentaux d'un tel essai sont présentés sur la figure 2.7. Le phénomène de restauration de la rigidité initiale peut être qualitativement expliqué par le fait que les macrofissures créées

en traction tendent à être refermées suite à la sollicitation de compression. Ainsi, bien que le matériau soit intrinsèquement endommagé par la traction, il se comporte en compression de manière quasi indépendante de son histoire en traction.

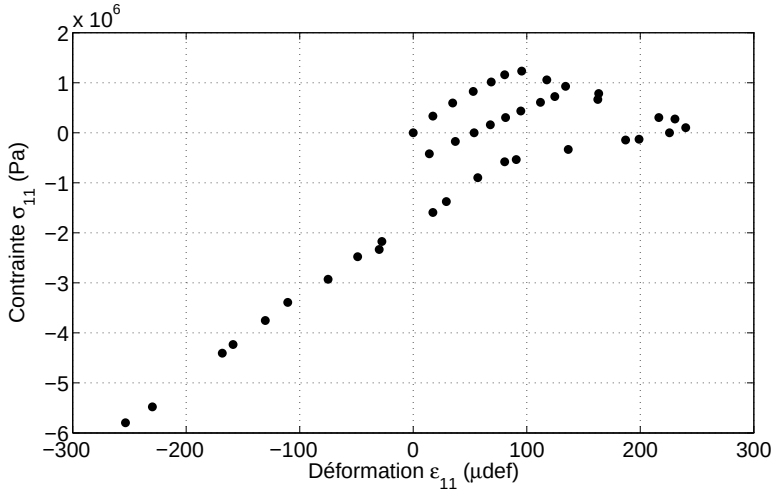


FIG. 2.7 – Mise en évidence de l'effet unilatéral (d'après (LaBorderie, 1991)).

2.5.3 Outils de prédiction

Classification

Du fait de la très forte utilisation du matériau béton dans la construction des ouvrages en génie civil, le besoin de décrire et surtout de prévoir son comportement est naturellement apparu. Les évidences expérimentales présentées précédemment montrent clairement la complexité du comportement du béton. De manière succincte, ce matériau présente les traits de caractère suivants :
– une dissymétrie de comportement en traction et en compression,
– la présence de déformations permanentes,
– la présence d'effets unilatéraux,
– l'apparition de phénomènes hystérétiques locaux,
– une sensibilité à la pression hydrostatique.
Dans cette section, il est proposé de présenter un état de l'art des outils permettant de décrire le comportement d'un béton. La littérature est riche de nombreuses propositions faites par différents auteurs. Dans le but de rendre la plus claire possible cette présentation, il y a lieu de classer l'information disponible. Le tableau 2.4 présente la classification adoptée dans cette section. Pour terminer l'exposé, il sera possible de justifier les actions de recherche entreprises dans le cadre de cette étude afin de mieux appréhender le comportement du béton.

Mécanique linéaire de la rupture

La mécanique linéaire de la rupture est l'une des premières théories développées visant une description analytique du champ de contraintes au voisinage d'une singularité cinématique. Ce cadre théorique requiert l'identification d'une cinématique particulière associée au mode de chargement donnant naissance à une fissure. Classiquement, trois modes sont distingués : le mode I qui fait référence à une ouverture pure, le mode II à un glissement dans le plan du chargement et le mode III à un glissement anti-plan. Une hypothèse fondamentale de mécanique linéaire est que le matériau est supposé rester élastique au loin de la singularité. Ainsi, la solution en contrainte

Classe	**Modèle**	**Références significatives**
Modèles de fissuration	Mécanique linéaire de la rupture	(Lemaître et Chaboche, 1985)
	Mécanique non linéaire de la rupture	
	Théorie de la fissuration discrète	(Ngo et Scordelis, 1967) (Nilson, 1968)
	Théorie de la fissuration distribuée	(Rashid, 1968) (Willam *et al.*, 1987) (Bazant, 1986) (Crisfield et Wills, 1989)
Elastoplasticité	Modèle de Reynouard	(Reynouard, 1974)
	Modèle de Frantzeskakis	(Frantzeskakis, 1987)
	Modèle de Lubliner	(Lubliner *et al.*, 1989) (Lubliner, 1990)
Endommagement	Modèle de Mazars	(Mazars, 1984)
	Modèle de Laborderie	(LaBorderie, 1991)
	Modèle de Simo	(Simo et Ju, 1995)
	Modèle de Desmorat	(Desmorat *et al.*, 2006)
	Modèle de Matallah	(Matallah et LaBorderie, 2009)
Approche probabiliste	Modèle de Rossi	(Rossi et Richer, 1987) (Rossi *et al.*, 1997) (Rossi et Wu, 1992) (Rossi *et al.*, 1996) (Rossi et Ulm, 1997)
Modèle à discontinuité explicite	Méthode des discontinuités fortes	(Oliver, 1996a) (Oliver, 1996b)
	Méthode XFEM	(Dolbow *et al.*, 2001) (Moes et Belytschko, 2002)

TAB. 2.4 – Classification des modèles significatifs de béton proposés dans la littérature.

d'un tel problème est connue sous le nom de solution de Westergaard et peut s'exprimer de manière entièrement analytique sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \text{Mode I} & : \quad \sigma_{22} = K_I(a, \sigma_{22}^{\infty}) f_I(r, \theta) \\ \text{Mode II} & : \quad \sigma_{12} = K_{II}(a, \sigma_{12}^{\infty}) f_{II}(r, \theta) \\ \text{Mode III} & : \quad \sigma_{13} = K_{III}(a, \sigma_{13}^{\infty}) f_{III}(r, \theta) \end{cases}$$

Dans ces expressions, $(K_i)_{i=I,II,III}$ sont les facteurs d'intensité de contrainte, a est le demi rayon de la fissure, $(\sigma_{ij}^{\infty})_{i,j=1,2,3}$ sont les contraintes du champ au loin de la singularité, $(f_i)_{i=I,II,III}$ sont des fonctions poids qui dépendent de r et θ, coordonnées polaires centrées sur la pointe de la fissure du point auquel le champ est recherché.

Muskhelishvili généralise la solution de Westergaard en montrant que les facteurs d'intensité de contrainte pouvaient s'écrire de manière générique sous la forme suivante :

$$K = \sigma^{\infty} \sqrt{\pi a} f \tag{2.52}$$

où f est un facteur de forme dépendant de la géométrie de la fissure, du type de chargement et de la géométrie de la structure.

La mécanique linéaire de la rupture offre aussi des éléments de réponse quant aux conditions d'initiation de la propagation d'une singularité. Plusieurs approches existent, les premières furent proposées par Griffith. L'idée directrice est de considérer que le mécanisme de propagation d'une fissure est en réalité la manifestation d'une dissipation d'énergie. Autrement dit, tant que le solide est capable d'emmagasiner l'énergie potentielle issue du chargement, alors la singularité est stable, aucune dissipation n'a lieu. En revanche, dès que la capacité d'emmagasiner de l'énergie du matériau est dépassée, alors la singularité devient instable et la propagation s'amorce. Ce postulat conduit naturellement à définir un indicateur de l'énergie emmagasinée : le taux de restitution d'énergie G. A cette grandeur est associé un taux de restitution d'énergie critique G_C, au delà duquel la singularité devient instable. Une approche similaire fondée sur des considérations plus statiques consiste à introduire une caractéristique du matériau appelée facteur d'intensité de contrainte critique K_C. Ainsi, connaissant le facteur d'intensité de contrainte associé au mode considéré, la comparaison avec le facteur critique permet de déterminer le régime de propagation. Il est possible de montrer qu'il existe des équivalences entre les quantités G_C et K_C, en introduisant la densité d'énergie de surface γ qui représente la densité d'énergie nécessaire pour créer la décohésion d'une aire unitaire. Enfin, il est possible de noter que d'autres approches fondées sur les intégrales de Rice et Bui existent.

Mécanique non linéaire de la rupture

Dès lors que le matériau étudié n'est plus élastique fragile, la mécanique linéaire de la rupture ne s'applique plus. De manière plus précise, pour un matériau capable de dissiper de l'énergie via des mécanismes locaux de plastification, l'existence d'une zone plastique en pointe de fissure apparaît. La mécanique non linéaire de la rupture tente donc d'apporter des éléments de réponse lorsqu'il s'agit de traiter le cas de tels matériaux. Deux approches essentielles ont été développées : une approche locale fondée sur l'estimation de la zone plastique en pointe de fissure et une approche plus globale qui consiste à considérer le comportement du matériau comme étant élastique non linéaire.

La première approche est fondée sur les travaux d'Irwin qui propose d'introduire une grandeur caractérisant la topologie de la zone plastique : le rayon plastique ρ. Dans le cas spécifique

du mode I, cet auteur avance une expression corrigée pour le facteur d'intensité de contrainte qui prend la forme suivante :

$$K = \sigma^{\infty}\sqrt{\pi(a+\rho)}f \tag{2.53}$$

Les travaux de Dugdale-Barenblatt ont contribué fortement à la construction d'une solution analytique en plasticité plane. Au sens du critère de Tresca, il est possible de déterminer une expression du rayon plastique sous la forme :

$$\rho = \frac{\pi}{16}\frac{K_I^2}{\sigma_Y^2} \tag{2.54}$$

où σ_Y est la limite élastique initiale du matériau considéré au sens du critère de Tresca.

La seconde approche, plus globale, consiste à se donner une loi d'écrouissage non linéaire de la forme :

$$\sigma_{ij} \propto \epsilon_{ij}^{1/M} \tag{2.55}$$

où M est un paramètre matériau à identifier. Le critère de stabilité de la singularité qui doit être considéré s'appuie sur l'intégrale de Rice dont une définition peut être trouvée dans (Lemaître et Chaboche, 1985).

Théorie de la fissuration discrète

Cette approche est fondée sur les travaux de (Ngo et Scordelis, 1967) et (Nilson, 1968). Son principe consiste à considérer que les arêtes des éléments massifs sont des frontières de rupture potentielle. Ainsi, une équation constitutive gérant la relation entre le vecteur traction et le saut de déplacement est introduite sous la forme suivante :

$$\underline{t} = \underline{\underline{C}}^f.[\underline{u}] \tag{2.56}$$

où $\underline{t}$ est le vecteur traction sur la frontière de rupture, $\underline{\underline{C}}^f$ est un module d'adoucissement et $[\underline{u}]$ est le vecteur saut de déplacement à la frontière. La mise en œuvre numérique de cette approche est sujette à de nombreuses difficultés. D'une part, au cours d'un calcul, l'évolution des connectivités entre les éléments pose des difficultés de gestion et d'autre part, les résultats obtenus sont grandement dépendants du maillage. Bien que des techniques spécifiques aient été développées pour remédier à ces difficultés comme par exemple le remaillage, l'utilisation de cette approche reste très coûteuse en temps de calcul et fortement dépendante de la discrétisation.

Théorie de la fissuration distribuée : smeared crack theory

Ce cadre théorique a été initialement proposé par (Rashid, 1968). Par la suite, de nombreux auteurs ont contribué au développement de la notion de fissuration distribuée comme par exemple (Willam *et al.*, 1987), (Bazant, 1986) et (Crisfield et Wills, 1989). Le domaine matériel Ω considéré est supposé posséder une certaine distribution de fissures. L'hypothèse des petites perturbations est retenue. L'incrément de déformation totale $\Delta\underline{\underline{\epsilon}}$ peut être partionné en deux termes de manière additive : un terme lié aux fissures $\Delta\underline{\underline{\epsilon}}^f$ et un terme lié au matériau sain $\Delta\underline{\underline{\epsilon}}^m$. Ainsi, il vient :

$$\Delta\underline{\underline{\epsilon}} = \Delta\underline{\underline{\epsilon}}^f + \Delta\underline{\underline{\epsilon}}^m \tag{2.57}$$

Les fissures sont regroupées en n familles selon leur orientation spatiale qui est caractérisée par un vecteur normal $\underline{n}$ et tangent $\underline{t}$. Ainsi, en considérant un sous domaine de Ω possédant n familles de fissures, il est possible de définir le vecteur saut de déplacement :

$$\Delta[\underline{\xi}] = \sum_{i=1}^{n}\Delta[\underline{\xi}]_i = \sum_{i=1}^{n}((\Delta[\underline{\xi}].\underline{n}_i)\underline{n}_i + (\Delta[\underline{\xi}].\underline{t}_i)\underline{t}_i) \tag{2.58}$$

En considérant un volume V comme étant une mesure du sous domaine de Ω étudié, la relation cinématique liant le tenseur des déformations des fissures avec le saut de déplacement peut être postulée selon la forme suivante :

$$\Delta\underline{\underline{\epsilon}}^f = \frac{1}{V}\sum_{i=1}^{n}\int_{S_i}[\underline{\xi}]\overline{\otimes}\underline{n}_i dS = \sum_{i=1}^{n}\underline{n}_i\overline{\otimes}\Delta\underline{\underline{e}}_i^f \tag{2.59}$$

Dans l'expression 2.59, S_i représente l'aire fissurée associée à la famille de fissures i et $\overline{\otimes}$ représente le produit tensoriel symétrisé. Cette expression fait apparaître le fait que la déformation associée aux fissures est en fait la somme de contributions élémentaires $\Delta\underline{\underline{e}}_i^f$ sur chaque famille. Ces dernières sont appelées déformations de discontinuité. Le vecteur des tractions peut, de manière analogue au vecteur saut de déplacement, être défini comme suit :

$$\Delta\underline{s}_i^f = \sum_{i=1}^{n}\Delta\underline{s}_i^f = \sum_{i=1}^{n}((\Delta\underline{s}^f.\underline{n}_i)\underline{n}_i + (\Delta\underline{s}^f.\underline{t}_i)\underline{t}_i) \tag{2.60}$$

où $\Delta\underline{s}^f$ est le vecteur traction global. Le tenseur des contraintes de Cauchy peut être introduit au travers de la relation statique suivante :

$$\Delta\underline{s}_i^f = \Delta\underline{\underline{\sigma}}.\underline{n}_i \tag{2.61}$$

Les équations constitutives du matériau sain et des fissures doivent maintenant être introduites. Pour le béton sain, un tenseur de rigidité d'ordre 4 est donc introduit :

$$\Delta\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\underline{\underline{D}}}}^m : \Delta\underline{\underline{\epsilon}}^m \tag{2.62}$$

Dans l'expression 2.62, $\underline{\underline{\underline{\underline{D}}}}^m$ est le tenseur de rigidité du matériau sain. L'équation constitutive des fissures s'exprime en termes de vecteur traction et de déformation de fissure :

$$\Delta\underline{s} = \underline{\underline{D}}^f.\Delta\underline{e}_i^f \tag{2.63}$$

où $\underline{\underline{D}}^f$ est le tenseur de rigidité de la fissure dans son plan. En utilisant les équations 2.57, 2.61 et 2.62, il vient :

$$\Delta\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\underline{\underline{D}}}}^m : (\Delta\underline{\underline{\epsilon}} - \sum_{i=1}^{n}\underline{n}_i\overline{\otimes}\underline{\underline{D}}^{f-1}.\Delta\underline{\underline{\sigma}}.\underline{n}_i) \tag{2.64}$$

Après quelques calculs analytiques, la loi de comportement du béton fissuré peut être exprimée sous la forme suivante :

$$\Delta\underline{\underline{\sigma}} = (\underline{\underline{\underline{\underline{I}}}} + \underline{\underline{\underline{\underline{D}}}}^m : \sum_{i=1}^{n}\underline{n}_i\overline{\otimes}\underline{\underline{D}}^{f-1}\otimes\underline{n}_i)^{-1} : \underline{\underline{\underline{\underline{D}}}}^m : \Delta\underline{\underline{\epsilon}} \tag{2.65}$$

L'équation constitutive 2.65 peut être mise sous la forme simplifiée suivante :

$$\Delta\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\underline{\underline{D}}}}^{mf} : \Delta\underline{\underline{\epsilon}} \tag{2.66}$$

Pour illustrer la forme pratique que prend la relation 2.65, une seule fissure plane est considérée. En projetant l'expression 2.66 sur une base du sous domaine d'étude, il vient :

$$\begin{pmatrix}\Delta s_n\\ \Delta s_t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}D_I & 0\\ 0 & D_{II}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Delta\epsilon_n^f\\ \Delta\epsilon_t^f\end{pmatrix} \tag{2.67}$$

Dans cette expression, $(D_i)_{i=I,II}$ représentent les termes de rigidité dans le repère local à la fissure. L'équation incrémentale 2.67 peut être intégrée explicitement pour obtenir une solution

analytique à cette équation en supposant les termes de rigidité normale et tangentielle constants par rapport au pseudo temps. La mise en œuvre des approches fondées sur le cadre théorique qui vient d'être brièvement exposé est délicate. En effet, de nombreuses difficultés de convergence tendent à apparaître, ce qui peut, au moins en partie, être expliqué par le fait que cette approche n'est pas formulée dans un cadre thermodynamique consistant, assurant la stabilité numérique et la cohérence physique.

Modèle d'une seule fissure fixe. La théorie de la fissuration distribuée a été adaptée au fil des années à différents cas de distribution de fissures. Le cas le plus simple est connu sous le nom de *modèle de fissure fixe* ou encore *fixed smeared crack theory*. Cette approche ne s'intéresse qu'à la réponse d'un milieu ne contenant qu'une seule fissure déjà initiée.

Modèle de fissures multiples fixes. Cette approche permet d'introduire des critères d'apparition de nouvelles fissures. En effet, dès lors que localement le critère d'initiation d'une fissure est vérifié, les anciennes fissures sont considérées comme inactives, c'est-à-dire qu'elles conservent leurs directions. Il convient de noter que le matériau devient orthotrope lors de l'initiation de nouvelles fissures dont les directions sont en général déterminées selon celles des contraintes principales. Ainsi, les directions principales entre les tenseurs des contraintes et des déformations ne coïncident en général plus. Des hypothèses fortes doivent alors être émises au sujet du critère d'initiation de nouvelles fissures, donc sur leur orientation, et prendre en compte les effets de cette orthotropie qui se développe. Un des apports notables de cette approche est le fait qu'elle est applicable au cas des chargements non proportionnels.

Modèle de fissuration tournante. Ce modèle issu essentiellement des travaux de (Jirasek et Zimmermann, 1998a) et (Jirasek et Zimmermann, 1998b), consiste à supposer que les directions des fissures peuvent évoluer avec l'intensité du chargement. L'évolution de ces dernières se fait en imposant une condition supplémentaire de manière à conserver la coaxialité des directions principales des tenseurs des contraintes et des déformations. Bien qu'assez peu physique, cette approche permet notamment de surmonter certaines difficultés numériques comme par exemple le blocage en contrainte inhérent à la formulation fixe. Il peut être noté que ce type d'approche reste encore utilisé aujourd'hui.

Approches fondées sur la théorie de la fissuration distribuée

Théorie de la bande de fissuration. Cette approche est essentiellement née des travaux de (Bazant et Oh, 1983) qui se sont intéressés à la fissuration des matériaux fortement hétérogènes. L'idée fondamentale est de postuler l'existence d'une bande de largeur w_c englobant l'ensemble des microfissures pouvant apparaître dans les zones en traction. A cette bande de fissuration est associée un champ de déformation uniforme $\underline{\underline{\epsilon^f}}$. Ainsi, pour une fissure située dans le plan (O, e_1, e_2) de normale e_3, la relation constitutive entre les contraintes totales et les déformations prend la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{E} \begin{pmatrix} 1 & -\nu & -\nu \\ -\nu & 1 & -\nu \\ -\nu & -\nu & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \epsilon^f \end{pmatrix} \tag{2.68}$$

Une relation de type linéaire entre ϵ^f et σ_3 est en général postulée bien qu'il existe plusieurs variantes dans la littérature. Une des formes les plus simples, issue des travaux de (Bazant et Oh, 1983) est :

$$\epsilon^f = \frac{1}{C_f}(f_t - \sigma_3) \tag{2.69}$$

Dans l'expression 2.69, C_f est le module d'adoucissement du matériau et f_t sa résistance en traction. En utilisant les équations 2.68 et 2.69, il est possible de mettre la relation constitutive du matériau sain sous la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{E} \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & \mu^{-1}C_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{pmatrix} \tag{2.70}$$

où $(C_{ij})_{i,j=1,2,3}$ sont les composantes de la matrice de souplesse du matériau sain et μ est un coefficient fonction du module d'adoucissement du matériau. La calibration d'un tel modèle nécessite donc l'identification du module d'adoucissement du matériau. Pour cela, (Bazant et Oh, 1983) introduisent une caractéristique du matériau supplémentaire qui est la largeur de la bande de fissuration w_c.

Le module d'adoucissement devient alors identifiable sous réserve de connaître la résistance en traction et l'énergie de fissuration du matériau :

$$C_f = \frac{f_t^2 w_c}{2G_f} \tag{2.71}$$

où G_f est l'énergie de fissuration du matériau considéré. Il est à noter que plusieurs auteurs ont tenté de rapprocher la valeur de la largeur de la bande de fissuration de la taille moyenne de l'hétérogénéité caractéristique du matériau. On peut citer par exemple les travaux de (Olivier, 1989), (Bazant et Pijaudier-Cabot, 1989) et (Fokwa et Berthaud, 1993). Les conclusions de ces auteurs tendent à montrer que, dans le cas du béton, cette largeur de bande peut être prise égale à $3\varphi_g$, où φ_g est la taille caractéristique de l'hétérogénéité, c'est-à-dire du granulat.

Modèle d'intéraction de microfissures. Ce modèle a été proposé par (Bazant, 1994) et (Ozbolt et Bazant, 1996). La motivation de cette action de recherche a été essentiellement due au fait que les modèles proposés jusqu'alors ne prenaient pas en compte les intéractions qui peuvent exister entre les différentes microfissures qui apparaissent dans les zones en traction. Le principe de cette approche consiste à construire un milieu équivalent à celui étudié qui a la propriété d'être non local. Lors d'un pas de chargement courant, l'incrément de contrainte $\Delta\underline{\underline{\sigma}}$ est déterminé à partir de l'expression suivante, rendant le milieu non local :

$$\Delta\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) =< \Delta\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) >_V + \int_{\{\underline{\xi}\in V\}} \Lambda(||\underline{x} - \underline{\xi}||)\Delta\underline{\underline{\sigma}}(\underline{\xi})dV \tag{2.72}$$

où $< . >_V$ est l'opérateur de moyenne dans un certain voisinage du point matériel $\underline{x}$ considéré, Λ est une fonction poids caractérisant les interactions entre les microfissures et $\Delta\underline{\underline{\sigma}}$ est l'incrément de contrainte local. Ainsi, il est possible de noter, d'après la relation 2.72, que le calcul de la contrainte en un point donné $\underline{x}$ requiert des informations sur son voisinage. Sans entrer davantage dans les détails de présentation de cette approche, cette dernière est reconnue comme étant complexe, numériquement coûteuse et difficile à mettre en œuvre sur le plan pratique. En effet, la calibration de fonction Λ requiert l'identification de coefficients d'influence qui, dans la majorité des cas, reste difficile à réaliser.

Modèles formulés dans le cadre de l'élastoplasticité

Au début des années 1970, de nombreux auteurs se sont attachés à proposer des formulations élastoplastiques pour modéliser le comportement du béton. La plupart des modèles constitutifs élastoplastiques s'articulent comme suit :
– un comportement de type fragile en traction,

– un comportement plus ductile en compression.
Ainsi, la plasticité n'est introduite dans le modèle que sur la partie liée à la compression. Les différences essentielles d'un modèle constitutif à l'autre restent le choix des surfaces de charge et la nature de la loi d'évolution (associée ou non associée). De manière plus précise, cette classe de modèles s'intègre aisément dans le cadre théorique de la thermodynamique des processus irréversibles (Lemaître et Chaboche, 1985). Ainsi un potentiel d'état Ψ, convexe, différentiable et nul à l'origine est souvent considéré de la forme :

$$\rho\Psi = \frac{1}{2}(\underline{\underline{\epsilon}} - \underline{\underline{\epsilon}}^p) : \underline{\underline{\underline{\underline{C}}}} : (\underline{\underline{\epsilon}} - \underline{\underline{\epsilon}}^p) \tag{2.73}$$

où ρ est la masse volumique du matériau. Pour un processus de déformation isotherme, de l'écriture de l'inégalité de Clausius-Duhem-Truesdell, il vient :

$$\mathcal{D} = \underline{\underline{\sigma}} : \dot{\underline{\underline{\epsilon}}} - \rho\dot{\Psi} \tag{2.74}$$

En développant l'expression 2.74, il vient :

$$\mathcal{D} = (\underline{\underline{\sigma}} - \frac{\partial\Psi}{\partial\underline{\underline{\epsilon}}}) : \dot{\underline{\underline{\epsilon}}} - \rho\frac{\partial\Psi}{\partial\underline{\underline{\epsilon}}^p} : \dot{\underline{\underline{\epsilon}}}^p \geq 0 \tag{2.75}$$

La condition 2.75, si elle est vérifiée, assure l'admissibilité thermodynamique de la loi de comportement. Pour qu'elle soit satisfaite, la première équation d'état est définie comme suit :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \frac{\partial\Psi}{\partial\underline{\underline{\epsilon}}} \tag{2.76}$$

Ainsi, l'équation 2.75 devient :

$$\mathcal{D} = \underline{\underline{\sigma}} : \dot{\underline{\underline{\epsilon}}}^p \geq 0 \tag{2.77}$$

Les lois d'écoulement de la déformation plastique suivent une règle de normalité. Ainsi, la vitesse des déformations plastiques est proportionnelle au gradient d'un potentiel f. D'une manière plus générale, on dit que la vitesse de déformation plastique appartient au sous-différentiel de f.

$$\dot{\underline{\underline{\epsilon}}}^p \in \partial_{\underline{\underline{\sigma}}} f(\underline{\underline{\sigma}}) \tag{2.78}$$

Le concept de sous-différentiel permet de généraliser naturellement la notion de gradient lorsque des points singuliers sont à traiter (critère de Coulomb par exemple). Si l'évolution est associée, alors le potentiel d'écoulement coïncide avec le critère de plasticité. En revanche, si l'évolution est non associée, alors il n'y a plus de normalité par rapport au critère de plasticité. Un potentiel plastique doit être introduit. Sans entrer davantage dans les détails, il est possible d'enrichir le cadre qui vient d'être proposé par des écrouissages isotrope, cinématique ou mixte. L'ensemble des modèles qui sont discutés dans les sections suivantes s'intègrent pleinement dans ce cadre.

Quelques modèles élastiques fragiles plastiques. Le modèle constitutif proposé par (Reynouard, 1974) est l'un des premiers à avoir été développé. En traction, cet auteur propose un comportement élastique linéaire jusqu'à ce que la limite en traction soit dépassée. Au-delà de celle-ci, une fissure est supposée traverser l'élément et par suite, sa rigidité est annulée dans la direction perpendiculaire à la fissure. Le critère local de ruine est formulé en déformation. En compression, le mécanisme de plasticité est introduit de manière associée. Lors de ses travaux de thèse, (Frantzeskakis, 1987) propose un modèle de comportement qui reprend les principaux traits de celui développé par (Reynouard, 1974). Les surfaces de charge changent et le critère de ruine en traction est différent.

Un précurseur des modèles endommageables. Les travaux de (Lubliner *et al.*, 1989) ont donné naissance à un modèle précurseur des traditionnels modèles endommageables. En effet, ces auteurs proposent d'adopter l'ensemble d'équations d'état suivant :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \underline{\underline{\sigma}} & = & \underline{\underline{\underline{\underline{C}}}} : (\underline{\underline{\epsilon}} - \underline{\underline{\epsilon}}^p) \\ \dot{\underline{\underline{\epsilon}}}^p & = & \dot{\lambda}^p \frac{\partial g_p}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} \\ \dot{\kappa} & = & \underline{\underline{\phi}}(\underline{\underline{\sigma}}, c, \kappa) : \dot{\underline{\underline{\epsilon}}}^p \\ \dot{c} & = & \eta(\underline{\underline{\sigma}}, c, \kappa)\dot{\kappa} \end{array}\right. \tag{2.79}$$

Dans les expressions 2.79, g_p est le potentiel plastique de Mohr-Coulomb, κ une variable interne variant de 0 à 1, c la cohésion, ϕ et η des fonctions à valeurs tensorielles d'ordre 2 et scalaires respectivement. La surface de charge liée à la plasticité est un critère de Drucker-Prager. Ce modèle ne tient clairement pas compte de la dégradation de la rigidité élastique du matériau. Toutefois, la variable interne κ, qui est une mesure d'anélasticité, est liée à la cohésion. Lorsque $\kappa = 0$, on a $c = c_0$, où c_0 est la cohésion initiale. En revanche, lorsque $\kappa = 1$, la cohésion devient nulle, c'est-à-dire que le matériau est totalement rompu. Ainsi, la variable κ est comprise comme une variable d'endommagement

Modèles formulés dans le cadre de la mécanique de l'endommagement

La mécanique de l'endommagement constitue un cadre de développement de lois constitutives très utilisé encore aujourd'hui. Initialement introduite par (Kachanov, 1958) dans le cas du fluage, elle a été appliquée au cas du comportement de l'acier par (Lemaître et Chaboche, 1985) puis particularisée au cas du béton par (Mazars, 1984). Depuis, de nombreux travaux s'inscrivent dans cette lignée. Dans cette section, une présentation des modèles les plus significatifs est proposée. Le principe de cette mécanique, appliquée au béton, est de considérer que l'évolution de la microfissuration du béton dans les zones en traction peut être représentée par une évolution continue des paramètres élastiques. Pour cela, une variable interne dont l'évolution est bornée, permet d'assurer la décroissance continue de ces paramètres.

Le modèle de Mazars. Dans ces travaux de thèse, (Mazars, 1984) propose un des premiers modèles endommageables pour décrire le comportement du béton. Ce dernier s'appuie sur les travaux de (Marigo, 1981) qui a proposé une forme de potentiel d'état. Ce dernier est supposé pouvoir être représenté par l'énergie libre de Helmholtz sous la forme suivante :

$$\rho\Psi = \frac{1}{2}(1-d)\underline{\underline{\epsilon}} : \underline{\underline{\underline{\underline{C}}}} : \underline{\underline{\epsilon}} \tag{2.80}$$

où d est une variable scalaire d'endommagement variant entre 0 (matériau vierge) et 1 (matériau totalement rompu). Les lois d'état découlent de l'écriture de l'inégalité de Clausius-Duhem-Truesdell :

$$\mathcal{D} = (\underline{\underline{\sigma}} - \rho\frac{\partial\Psi}{\partial\underline{\underline{\epsilon}}}) : \dot{\underline{\underline{\epsilon}}} - \rho\frac{\partial\Psi}{\partial d}\dot{d} \tag{2.81}$$

Ainsi, la première loi d'état s'écrit naturellement :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \rho\frac{\partial\Psi}{\partial\underline{\underline{\epsilon}}} = (1-d)\underline{\underline{\underline{\underline{C}}}} : \underline{\underline{\epsilon}} \tag{2.82}$$

La dissipation devient :

$$\mathcal{D} = -\rho\frac{\partial\Psi}{\partial d}\dot{d} \tag{2.83}$$

Par analogie à la première équation d'état, une force thermodynamique Y appelée taux de restitution d'énergie est associée à la variable d'endommagement et est définie par :

$$Y = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial d} = -\underline{\underline{\epsilon}} : \underline{\underline{\underline{\underline{C}}}} : \underline{\underline{\epsilon}} \tag{2.84}$$

La dissipation peut donc être réécrite comme suit :

$$\mathcal{D} = -Y\dot{d} \tag{2.85}$$

La condition assurant l'admissibilité thermodynamique des équations constitutives est que la dissipation doit rester positive quelque soit le trajet de chargement, c'est-à-dire que $\mathcal{D} \geq 0$. Ainsi, la seule condition qui doit être vérifiée est :

$$\dot{d} \geq 0 \tag{2.86}$$

Autrement dit, l'endommagement ne peut que croître, ce qui semble avoir un sens physique. La surface seuil de l'endommagement f_d est formulée en déformations :

$$f_d = \tilde{\epsilon} - \epsilon_{d0} \leq 0 \tag{2.87}$$

où $\tilde{\epsilon}$ est la déformation équivalente et ϵ_{d0} un seuil initial qui peut être identifié en fonction de la résistance en traction du béton considéré.

La déformation équivalente est une mesure de l'intensité des extensions directes (traction) ou induites par effet Poisson (compression). La loi d'évolution de la variable d'endommagement est donnée de manière explicite et ne suit pas les règles de normalité usuelles. Cette dernière prend la forme suivante :

$$d = \xi d_T + (1 - \xi) d_C \tag{2.88}$$

où ξ est un indicateur permettant de savoir si un état de contrainte de traction ou de compression est appliqué, d_T et d_C sont des variables d'endommagement calibrées en traction et en compression respectivement. C'est par cette définition de la loi d'évolution que ce modèle permet de prendre en compte la dissymétrie de comportement en traction/compression. Ce modèle, encore très utilisé aujourd'hui, est reconnu pour sa fiabilité et sa robustesse numérique. Néanmoins, il ne prend en compte ni les déformations permanentes, ni l'effet unilatéral et ne s'intègre pas dans le cadre thermodynamique.

Le modèle de La Borderie. Le modèle proposé par (LaBorderie, 1991) s'inscrit dans la continuité des travaux réalisés par (Mazars, 1984). En effet, comme il a été mentionné précédemment, le modèle de (Mazars, 1984) ne prend pas en compte l'effet unilatéral lié à la refermeture des fissures lors d'un cycle de chargement traction/compression. De plus, ce dernier ne tient également pas compte des déformations permanentes. Le modèle de Laborderie vise à prendre en compte ces deux effets. Pour cela, plusieurs concepts sont avancés. L'effet unilatéral est piloté par le signe du chargement en considérant deux variables d'endommagement distinctes et les déformations permanentes sont introduites comme des fonctions de l'état d'endommagement. C'est pourquoi (LaBorderie, 1991) propose de travailler à l'aide du potentiel de Gibbs qui s'écrit sous la forme suivante :

$$\Xi = \Xi_e + \Xi_{an} \tag{2.89}$$

où Ξ_e est la partie élastique du potentiel et $\Xi_{\mathbf{an}}$ la partie anélastique permettant de gérer les déformations permanentes. Ces derniers s'expriment par :

$$\begin{array}{lcl} 2\Xi_e & = & \frac{<\underline{\underline{\sigma}}>_+ : <\underline{\underline{\sigma}}>_+}{E(1-d_1)} + \frac{<\underline{\underline{\sigma}}>_- : <\underline{\underline{\sigma}}>_-}{E(1-d_2)} + \frac{\nu}{E}(\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\sigma}} - \mathbf{Tr}^2\underline{\underline{\sigma}}) \\ 2\Xi_{an} & = & \frac{\beta_1 d_1}{E(1-d_1)} f(\mathbf{Tr}\underline{\underline{\sigma}}) + \frac{\beta_2 d_2}{E(1-d_2)} \mathbf{Tr}\underline{\underline{\sigma}} \end{array} \tag{2.90}$$

où d_1 et d_2 sont deux variables d'endommagement (traction et compression respectivement), β_1 et β_2 des paramètres matériaux à identifier, f est une fonction de refermeture des fissures, $< . >_+$ et $< . >_-$ sont les opérateurs parties positives et négatives respectivement.

Les lois d'évolution des deux variables d'endommagement sont exprimées en fonction des taux de restitution d'énergie et comprennent deux variables d'écrouissage isotrope distinctes. Ce modèle est essentiellement utilisable dans l'approche de type simplifié (unidimensionnel et uniaxial) en raison des difficultés d'implantation en plusieurs dimensions. De manière plus précise, en raison de la définition du potentiel anélastique, les déformations permanentes restent toujours sphériques et ceci génère des difficultés de la mise en œuvre numérique en plusieurs dimensions. Néanmoins ce modèle a été le premier à proposer des solutions pour prendre en compte la dissymétrie en traction/compression, les déformations permanentes et l'effet unilatéral. Il reste encore très utilisé aujourd'hui.

Le modèle de Desmorat. (Desmorat *et al.*, 2006) proposent un cadre rigoureux permettant de formuler des modèles d'endommagement anisotrope. Fondé sur les travaux de (Ladevèze et Lemaître, 1984), ce modèle anisotrope s'inscrit pleinement dans le cadre thermodynamique, assurant ainsi d'une part sa cohérence physique et d'autre part, sa robustesse numérique. Le potentiel d'état est pris sous la forme de l'enthalpie libre de Gibbs :

$$\rho\Xi = \frac{1+\nu}{2E}\mathbf{Tr}(\underline{\underline{H}}.\underline{\underline{\sigma}}^d.\underline{\underline{H}}.\underline{\underline{\sigma}}^d) + \frac{1-2\nu}{6E}(\frac{<\mathbf{Tr}\underline{\underline{\sigma}}>_+^2}{1-\mathbf{Tr}\underline{\underline{d}}} + <\mathbf{Tr}\underline{\underline{\sigma}}>_-^2) \tag{2.91}$$

où $\underline{\underline{H}} = (\underline{\underline{\delta}} - \underline{\underline{d}})^{-\frac{1}{2}}$ et $(.)^d$ est l'opérateur déviatorique tel que $(.)^d = (.) - \frac{1}{3}\mathbf{Tr}(.)\underline{\underline{\delta}}$. Ce potentiel a la bonne propriété de permettre de définir une contrainte effective indépendante du coefficient de Poisson.

La première loi d'état s'écrit donc :

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \rho\frac{\partial\Xi}{\partial\underline{\underline{\sigma}}} = \frac{1+\nu}{E}\underline{\underline{\tilde{\sigma}}} - \frac{\nu}{E}\mathbf{Tr}\underline{\underline{\tilde{\sigma}}}\ \underline{\underline{\delta}} \tag{2.92}$$

où $\underline{\underline{\tilde{\sigma}}}$ est la contrainte effective définie par :

$$\underline{\underline{\tilde{\sigma}}} = (\underline{\underline{H}}.\underline{\underline{\sigma}}^d.\underline{\underline{H}})^d + \frac{1}{3}(\frac{<\mathbf{Tr}\underline{\underline{\sigma}}>_+}{1-\mathbf{Tr}\underline{\underline{d}}} + <\mathbf{Tr}\underline{\underline{\sigma}}>_-)\underline{\underline{\delta}} \tag{2.93}$$

Le taux de restitution d'énergie est donné par :

$$\underline{\underline{Y}} = \rho\frac{\partial\Xi}{\partial\underline{\underline{d}}} \tag{2.94}$$

La consistance thermodynamique de ce cadre constitutif a été montré par le même auteur (Desmorat, 2006). Une étude portant sur le choix de la fonction seuil associée à l'endommagement a été publiée récemment par (Ragueneau *et al.*, 2008). Il apparaît que ce cadre constitutif s'avère thermodynamiquement consistant et numériquement robuste. De plus, il est capable de prendre en compte un effet quasi unilatéral en ne faisant pas porter l'endommagement sur la partie négative de la partie sphérique du comportement. Toutefois, il ne prend en compte ni les déformations permanentes ni les effets hystérétiques liés au frottement interne entre les fissures. Un problème important qui mérite d'être soulevé est comment borner la variable d'endommagement. En effet, dans le cas scalaire, il est assez aisé d'assurer le fait que la variable d'endommagement varie de manière continue entre 0 et 1. En revanche, lorsque cette dernière

n'est plus scalaire mais tensorielle, deux choix doivent être faits. En effet, une solution pourrait être de borner toutes les composantes de $\underline{\underline{d}}$ à 1. (Desmorat *et al.*, 2006) proposent de borner les valeurs propres de $\underline{\underline{d}}$ à une certaine valeur D_c, proche de 1 et ensuite, dans les directions pour lesquelles cette valeur est atteinte, de projeter la loi d'évolution perpendiculairement à ces dernières. Cette approche s'avère assez robuste numériquement et elle a surtout un sens physique.

Le modèle de Matallah. Lors de ses travaux de thèse, (Matallah et LaBorderie, 2009) ont développé un modèle couplant endommagement isotrope et anélasticité pour décrire le comportement du béton sous chargements complexes (cycliques). Ce modèle s'inscrit dans le cadre de la thermodynamique des processus irréversibles et s'appuie sur la relation d'état suivante :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\underline{\underline{C}}}} : (\underline{\underline{\epsilon}} - d\underline{\underline{\epsilon}}^f S) \tag{2.95}$$

où d est une variable d'endommagement scalaire, $\underline{\underline{\epsilon}}^f$ est un tenseur de déformations anélastiques liées aux fissures et S une fonction de refermeture des fissures pour prendre en compte de manière totale l'effet unilatéral.

Sans entrer dans les détails de la formulation de ce modèle, les comportements en traction et compression sont bien pris en compte. Cela est réalisé au moyen de critère multi-surfaces qui sont raccordés par la règle de Koiter. L'évolution des déformations anélastiques est gérée de manière couplée à un écrouissage cinématique. Cela permet d'annuler la partie non linéaire de la relation d'état sans pour autant annuler d. Toute la force et l'originalité du modèle sont présentes dans ce point précis : une distinction entre endommagement et fissure est possible. Autrement dit, la présence d'endommagement est nécessaire pour que des fissures apparaissent mais n'est pas suffisant. Inversement, lors d'un cycle de traction/compression, l'endommagement reste égale à sa valeur atteinte en traction alors que les fissures (au travers de $\underline{\underline{\epsilon}}^f$) se referment. (Matallah et LaBorderie, 2009) montre l'applicabilité du modèle proposé non seulement dans le cas de structures en béton mais aussi dans le cas de structures en béton armé. Pour conclure sur ce modèle, il est possible de dire que c'est un des modèles les plus originaux, capable de fonctionner en 3D sous des chargements complexes (cisaillement, cycliques).

Difficultés numériques liées à la localisation des déformations

Plusieurs modèles constitutifs visant à décrire le comportement du béton ont été présentés. Il ressort de cet exposé qu'aussi bien en traction qu'en compression, la majorité des modèles est de type adoucissant. L'expérience numérique acquise a mis en évidence certaines difficultés numériques inhérentes à ce type de lois constitutives. Une des plus célèbres et des plus restrictives est le phénomène de localisation des déformations. Dans cette section, une synthèse des travaux publiés dans la littérature visant à mieux appréhender cette difficulté est tout d'abord présentée. En particulier, les conditions de localisation des déformations sont établies dans le cas tridimensionnel. Enfin, les techniques les plus significatives permettant d'apporter des éléments de réponse à ce problème sont brièvement décrites. Dans cette section, seul le cas des lois constitutives indépendantes du temps est considéré.

Conditions de localisation. L'établissement de conditions de localisation est essentiellement dû aux travaux de (Hadamard, 1903), (Hill, 1958), (Hill, 1962), (Thomas, 1961), (Mandel, 1966) et (Rice, 1976). Soit Ω un milieu matériel de frontière $\partial\Omega$ orienté par sa normale extérieure $\underline{n}$, tel que $\partial\Omega = \partial\Omega_t \cup \partial\Omega_u$ et $\partial\Omega_t \cap \partial\Omega_u = \{0\}$. On considère que Ω est soumis à des efforts volumiques $\underline{b}$, à des efforts de traction $\underline{\overline{t}}$ et à des déplacements imposés $\underline{\overline{u}}$. Soit $\underline{u}$ le champ déplacements

cinématiquement admissible défini sur Ω. Par ailleurs, la loi constitutive est supposée, sans perte de généralité, pouvoir s'exprimer de manière incrémentale par :

$$\dot{\underline{\underline{\sigma}}} = \underline{\underline{\underline{\underline{L}}}} : \dot{\underline{\underline{\epsilon}}} \tag{2.96}$$

où $\underline{\underline{\underline{\underline{L}}}}$ est un tenseur du quatrième ordre, encore appelé module tangent. Ce dernier s'exprime de manière générale par :

$$\underline{\underline{\underline{\underline{L}}}} = \begin{cases} \underline{\underline{\underline{\underline{C}}}} & \text{si le matériau se comporte de manière élastique} \\ \underline{\underline{\underline{\underline{H}}}} & \text{si le matériau se comporte de manière anélastique} \end{cases}$$

Les équations de compatibilité en déplacement s'écrivent classiquement :

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \frac{1}{2}(\nabla \underline{u} + \nabla \underline{u}^t) \tag{2.97}$$

et les équations d'équilibre deviennent, sous forme incrémentale :

$$\mathbf{Div}(\underline{\underline{\underline{\underline{H}}}} : \dot{\underline{\underline{\epsilon}}}) + \dot{\underline{b}} = \underline{0} \tag{2.98}$$

Il peut être remarqué que le module tangent est pris égale à $\underline{\underline{\underline{\underline{H}}}}$ étant donné que la localisation n'est susceptible de se produire qu'en régime non linéaire. Enfin, les conditions aux limites peuvent s'écrire comme suit :

$$\begin{cases} \dot{\underline{t}} &= \dot{\underline{\underline{\sigma}}}.\underline{n} \quad \forall M \in \partial\Omega_t \\ \dot{\underline{u}} &= \dot{\underline{u}} \quad \forall M \in \partial\Omega_u \end{cases} \tag{2.99}$$

Soit $\underline{v}$ un champ de déplacement cinématiquement admissible à 0. L'application du principe des puissances virtuelles permet d'aboutir à :

$$\int_\Omega \dot{\underline{\underline{\sigma}}} : \dot{\underline{\underline{\epsilon}}}(\underline{v}) dV = \int_{\partial\Omega_t} \dot{\underline{t}}.\underline{v} dS + \int_\Omega \underline{v}.\dot{\underline{b}} dV \tag{2.100}$$

Étudier le phénomène de localisation des déformations revient en réalité à s'intéresser à l'unicité de la solution de l'équation 2.100. Ainsi, supposons deux champs de déplacement solutions $\underline{v}_1$ et $\underline{v}_2$. Les champs de contrainte qui peuvent leur être associés sont notés $\underline{\underline{\sigma}}_1$ et $\underline{\underline{\sigma}}_2$ respectivement. Il vient alors :

$$\int_\Omega (\dot{\underline{\underline{\sigma}}}_1 - \dot{\underline{\underline{\sigma}}}_2) : \dot{\underline{\underline{\epsilon}}}(\underline{v}) dV = 0 \tag{2.101}$$

L'équation 2.101 est vérifiée pour tout champ de déplacement cinématiquement admissible, donc en particulier, pour le champ $\underline{v} = \underline{v}_1 - \underline{v}_2$. Cela conduit donc à :

$$\int_\Omega (\dot{\underline{\underline{\sigma}}}_1 - \dot{\underline{\underline{\sigma}}}_2) : (\dot{\underline{\underline{\epsilon}}}(\underline{v}_1) - \dot{\underline{\underline{\epsilon}}}(\underline{v}_2)) dV = 0 \tag{2.102}$$

En combinant les équations 2.96 et 2.102, il vient :

$$\int_\Omega (\underline{\underline{\underline{\underline{L}}}}_1 : \dot{\underline{\underline{\epsilon}}}(\underline{v}_1) - \underline{\underline{\underline{\underline{L}}}}_2 : \dot{\underline{\underline{\epsilon}}}(\underline{v}_2)) : (\dot{\underline{\underline{\epsilon}}}(\underline{v}_1) - \dot{\underline{\underline{\epsilon}}}(\underline{v}_2)) dV = 0 \tag{2.103}$$

où $\underline{\underline{\underline{\underline{L}}}}_1$ et $\underline{\underline{\underline{\underline{L}}}}_2$ sont les modules tangents cohérents associés aux champs de déplacement $\underline{v}_1$ et $\underline{v}_2$ respectivement. La fonctionnelle $\mathcal{I}$ peut être définie comme suit :

$$\mathcal{I}(\underline{v}_1, \underline{v}_2) = \int_\Omega (\underline{\underline{\underline{\underline{L}}}}_1 : \dot{\underline{\underline{\epsilon}}}(\underline{v}_1) - \underline{\underline{\underline{\underline{L}}}}_2 : \dot{\underline{\underline{\epsilon}}}(\underline{v}_2)) : (\dot{\underline{\underline{\epsilon}}}(\underline{v}_1) - \dot{\underline{\underline{\epsilon}}}(\underline{v}_2)) dV \tag{2.104}$$

L'unicité de la solution est donc assurée si les conditions suivantes sont respectées :

$$\mathcal{I}(\underline{v}_1, \underline{v}_2) \neq 0 \quad \text{et} \quad \underline{v}_1 \neq \underline{v}_2 \tag{2.105}$$

Plus généralement, les conditions d'unicité d'une solution en déplacement peuvent s'écrire comme suit, pour tout champ de déplacement cinématiquement admissible :

$$\mathcal{I}(\underline{v}_1, \underline{v}_2) > 0 \quad \text{et} \quad \underline{v}_1 \neq \underline{v}_2 \tag{2.106}$$

(Hill, 1958) et (Hill, 1962) montrent que la fonctionnelle $\mathcal{I}$ est toujours supérieure à une fonctionnelle $\mathcal{H}$. Cette dernière est écrite en considérant le milieu matériel Ω linéaire de comparaison en supposant qu'il ne puisse pas subir de décharge. Ainsi, il vient :

$$\mathcal{I}(\underline{v}_1, \underline{v}_2) > \mathcal{H}(\underline{v}_1, \underline{v}_2) = \int_\Omega (\underline{\underline{\dot{\epsilon}}}(\underline{v}_1) - \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}(\underline{v}_2)) : \underline{\underline{\underline{\underline{H}}}} : (\underline{\underline{\dot{\epsilon}}}(\underline{v}_1) - \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}(\underline{v}_2)) dV \tag{2.107}$$

Le critère de Hill fait donc apparaître une condition d'unicité suffisante. En effet, l'identité 2.107 prouve que si l'unicité de la solution en déplacement est obtenue sur le domaine matériel de comparaison, c'est-à-dire linéaire, alors l'unicité de la solution en déplacement est également obtenue sur le domaine matériel réel. Une condition plus forte consiste donc à imposer :

$$\underline{\underline{\epsilon}}(\underline{v}) : \underline{\underline{\underline{\underline{H}}}} : \underline{\underline{\epsilon}}(\underline{v}) > 0 \quad \forall M \in \Omega \tag{2.108}$$

La condition est satisfaite si le module $\underline{\underline{\underline{\underline{H}}}}$ est défini positif. Le critère de Hill prend donc sa forme bien connue :

$$\exists \underline{n} \quad | \quad \mathbf{Det}(\underline{n}.\underline{\underline{\underline{\underline{H}}}}.\underline{n}) = 0 \tag{2.109}$$

Cette condition fournit donc une borne inférieure de bifurcation dans le cas de solides linéaires mais également dans le cas de solides réels. En réalité, elle correspond à une perte d'ellipticité des équations d'équilibre. Cela entraîne donc une très forte dépendance de la solution en déplacement au pas de temps choisi lorsqu'une résolution de type itérative-incrémentale est conduite ainsi qu'au maillage. De nombreuses méthodes ont été proposées dans la littérature pour limiter la localisation des déformations, autrement dit, pour limiter la perte d'ellipticité des équations d'équilibre. Ces méthodes sont connues sous le vocable de *limiteurs de localisation*. Dans la section suivante, une brève présentation des principaux limiteurs de localisation est réalisée.

Limiteurs de localisation

Conservation de l'énergie de fissuration. Cette technique a initialement été proposée par (Dugdale, 1960) et (Barenblatt, 1962) puis formalisée sous sa forme moderne par (Hillerborg, 1985). Elle consiste à contrôler l'énergie de fissuration dissipée en fonction de la taille de l'élément fini de manière à assurer une certaine objectivité de la solution par rapport au maillage. (Bazant et Oh, 1983) introduisent donc une longueur caractéristique l_c. Dans le cas des matériaux de type quasi-fragile, la loi constitutive liée à une discontinuité peut être mise sous la forme suivante :

$$\underline{t} = f(\underline{w}) \tag{2.110}$$

où $\underline{t}$ est le vecteur des tractions, $\underline{w}$ est le vecteur ouverture et enfin f est une fonction régulière caractérisant la loi constitutive de la discontinuité. L'aire sous f représente l'énergie de fissuration, c'est-à-dire l'énergie par unité d'aire de discontinuité pour obtenir une complète décohésion. L'avantage essentiel de cette approche, qui est toujours utilisée de nos jours, réside dans sa simplicité de mise en œuvre. Toutefois, cette technique impose un certain formalisme de la loi constitutive, faisant apparaître explicitement l'énergie de fissuration.

Régularisation dynamique. L'apparition de zones de localisation met en jeu d'importantes vitesses induites. Le fait de considérer les effets de vitesse dans les équations d'équilibre les rend naturellement hyperboliques. Ainsi, dans le cas d'un problème statique ou quasi statique, l'introduction d'une viscosité tend à conférer à la longueur caractéristique des vertus régularisantes puissantes. Ce type d'approche a été largement développé par (Needlemann, 1988) dans le cas des matériaux élasto-plastiques puis par (Dubé *et al.*, 1996) dans le cas des matériaux élasto-endommageables. La difficulté essentielle de cette approche réside dans le choix du paramètre de viscosité. En effet, ce dernier a certes des vertus régularisantes mais son sens physique reste néanmoins à justifier.

Milieux non-locaux. (Pijaudier-Cabot et Bazant, 1987) ont initialement proposé un moyen de rendre le milieu matériel Ω non-local. Cela signifie que l'état thermodynamique en un point matériel est supposé dépendre des autres points matériels situés dans un certain voisinage défini par une longueur caractéristique l_c. Soit $\breve{\alpha}$ une variable locale de nature non supposée. (Pijaudier-Cabot et Bazant, 1987) proposent de définir sa variable non-locale associée par :

$$\bar{\breve{\alpha}} = \int_{\Omega(\underline{x})} \breve{\alpha}(\underline{x}) w(\underline{x}, \underline{s}) d\underline{s} \tag{2.111}$$

où w est une fonction poids à définir et $\bar{\breve{\alpha}}$ la variable non-locale associée à $\breve{\alpha}$. Cette dernière est très souvent supposée de forme gaussienne :

$$w(\underline{x}, \underline{s}) = e^{-\frac{||\underline{x}-\underline{s}||^2}{2l_c^2}} \tag{2.112}$$

Cette technique est l'une des plus utilisées de nos jours. Cependant, plusieurs remarques peuvent être formulées. En premier lieu, il apparaît que cette dernière tend à violer l'axiome de localité introduit précédemment. En second lieu, le choix de la longueur caractéristique est loin d'être trivial et de plus, son identification expérimentale n'a encore pas été montrée. En troisième lieu, bien que la solution obtenue par cette technique reste assez objective par rapport au maillage pour une fonction poids donnée, une autre solution peut être obtenue en changeant cette dernière. Enfin, l'implantation numérique de cette méthode est loin d'être triviale car un calcul de voisinage doit être réalisé en chaque point d'intégration.

Introduction d'un second gradient. Il existe deux classes de modèles à gradient qui ont été proposées dans la littérature. D'une part, la théorie du second gradient et d'autre part, les modèles à gradient de variables internes.

La théorie du second gradient consiste à intervenir dans l'écriture des équations d'équilibre de manière à forcer la conservation de leur caractère elliptique. Autrement dit, l'expression de la puissance interne d'un milieu matériel Ω doit être modifiée. De manière plus précise, en plus de la variable cinématique classique $\underline{\underline{\epsilon}} = \frac{1}{2}(\nabla\underline{u} + \nabla\underline{u}^t)$, on considère l'ajout du gradient de déformation $\nabla\nabla\underline{u}$. Associés à ces deux champs cinématiques, deux champs duaux sont définis : le tenseur des contraintes de Cauchy $\underline{\underline{\sigma}}$ et un tenseur des contraintes d'ordre 3 que l'on notera $\underline{\underline{\underline{\tau}}}$. La puissance des efforts internes s'écrit donc :

$$\Pi_i = -\int_\Omega \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\epsilon}} + \underline{\underline{\underline{\tau}}} : \nabla\nabla\underline{u} dV \tag{2.113}$$

L'application du principe des puissances virtuelles permet d'obtenir, en statique, la forme forte des équations d'équilibre suivante :

$$\mathbf{Div}\underline{\underline{\sigma}} - \mathbf{DivDiv}\underline{\underline{\underline{\tau}}} + \underline{b} = \underline{0} \tag{2.114}$$

Les conditions aux limites se trouvent aussi modifiées :

$$\begin{cases} (\underline{\underline{\sigma}} - \mathbf{Div}\underline{\underline{\tau}}).\underline{n} = \underline{\bar{t}} \\ \underline{\underline{\tau}}.\underline{n} = \underline{m} \end{cases} \tag{2.115}$$

où $\underline{m}$ prend le sens d'une densité surfacique de moment.

Le recours à une telle méthode a pour effet de régulariser le problème suite à l'enrichissement de la cinématique. En revanche, il doit être noté que ce type d'approche alourdit considérablement les calculs. De plus, l'évaluation des conditions aux limites n'est pas triviale. Enfin, la mise en œuvre de cette théorie nécessite des éléments finis appropriés, spécifiques au calcul du second gradient.

L'approche par gradient de variables internes peut se présenter en deux catégories. D'une part le cas des gradients explicites et d'autre part, celui des gradients implicites. La première technique a été initialement proposée par (Muhlhaus et Aïfantis, 1991) et (de Borst et Muhlhaus, 1992). Il s'agit d'introduire les gradients de certaines variables internes dans les équations constitutives du modèle. Par exemple, en considérant un potentiel de dissipation f s'exprimant en fonction d'une variable d'écrouissage, cette technique consiste à introduire le laplacien de cette dernière dans l'expression du seuil. Le multiplicateur de Lagrange associé est toujours déduit de la condition de cohérence mais cette dernière apparaît comme une équation différentielle à résoudre. Il se pose alors le problème du choix des conditions car il est difficile d'estimer la taille de la zone de localisation. Enfin, cette approche est entièrement consistante. En effet, lorsqu'aucune zone localisée n'apparaît, il peut être montré que les termes d'ordre supérieur introduits dans les équations constitutives deviennent nuls. Les équations d'origine sont retrouvées. L'approche par gradient implicite a initialement été proposée par (Peerlings *et al.*, 1996). Dans ce cas, il s'agit de définir les variables non locales comme solution d'une équation différentielle du second ordre :

$$\begin{cases} \bar{\breve{\alpha}} - l_c^2 \Delta \bar{\breve{\alpha}} = \breve{\alpha} & \forall M \in \Omega \\ \frac{\partial \bar{\breve{\alpha}}}{\partial \underline{n}} = \underline{0} & \forall M \in \partial\Omega \end{cases} \tag{2.116}$$

Il peut être montré que cette approche est strictement l'approche non-locale intégrale si la fonction poids est prise égale à la fonction de Green. Bien que cette technique régularise clairement les équations du problème, le problème du traitement des conditions aux limites se pose toujours.

Discussion. Dans cette section, les difficultés numériques liées à la mise en œuvre des modèles constitutifs de type adoucissant ont été évoquées. En présentant brièvement quelques travaux de la littérature visant à mieux comprendre les causes de ces difficultés, il ressort que ces dernières sont étroitement liées à une perte d'ellipticité des équations d'équilibre. Cela a pour effet de rendre la solution en déplacement du problème aux limites non unique et par suite, dépendante du maillage. Ces dernières années, de nombreux travaux ont été réalisés pour tenter d'apporter des solutions. Des limiteurs de localisations ont donc été développés. Parmi les nombreuses techniques proposées et exposées précédemment, il ressort que trois classes de méthodes existent : la régularisation par l'énergie de fissuration, le non-local intégral et les formulations au gradient. La première nécessite d'exprimer les équations constitutives en fonction de l'énergie de fissuration et de contrôler cette quantité en introduisant une relation de dépendance à une taille caractéristique de l'élément fini. La seconde nécessite l'introduction d'une longueur caractéristique dont le choix reste délicat. Enfin, les techniques aux gradients nécessitent d'une part l'introduction d'une longueur caractéristique et d'autre part, une gestion délicate des conditions aux limites associées au problème de diffusion. Dans ce travail de thèse, le parti de recourir à la technique non-locale intégrale a été retenu. En effet, malgré la difficulté liée au choix de la longueur caractéristique, cette dernière permet de ne pas modifier les équations constitutives considérées.

Approche probabiliste

Le modèle a été développé à la fin des années 1980, suite à la thèse de Richer (Rossi et Richer, 1987). Ce modèle appartient à la famille des modèles déterministes à données probabilistes utilisant la méthode des éléments finis. Les hypothèses physiques sont :

1. de considérer le béton comme un matériau hétérogène dans lequel les caractéristiques mécaniques locales (module élastique et résistance à la traction) sont aléatoires et dépendent de l'échelle d'observation et donc de la modélisation du matériau,

2. de considérer que l'endommagement du matériau est dû à la création de plans de rupture locaux apparaissant de manière aléatoire dans la structure.

L'analyse du caractère aléatoire des propriétés mécaniques locales est issue d'observations expérimentales. De larges campagnes d'essais de traction directe ont été réalisées au LCPC par (Rossi *et al.*, 1997). Elles ont montré que, du fait de l'hétérogénéité du matériau, les valeurs moyennes et les dispersions des modules et des résistances sont fonctions de la différence de propriétés mécaniques entre la pâte et les granulats et de la présence de défauts au sein de la pâte (ou de l'interface pâte/granulats). Dès lors, la qualité de la pâte et l'hétérogénéité principale (à savoir le plus gros granulat) ont été choisis comme paramètres du modèle. Ils sont pris en compte formellement par la résistance à la compression normalisée (comme indicateur de qualité de pâte) et par le diamètre du plus gros granulat (comme indicateur de l'hétérogénéité). Des fonctions empiriques ont été proposées à l'issue des expérimentations pour illustrer l'évolution des valeurs moyennes et écart types des résistances et modules pour différents volumes de matière sollicités et différents bétons. Le modèle mécanique est alors très simple (Rossi et Wu, 1992). Il est basé sur une hypothèse forte qui considère que les mécanismes de fissuration sont indépendants de l'échelle d'observation. Dans ce contexte, ce qui a été observé à l'échelle d'éprouvettes de laboratoire est extrapolé à l'échelle de l'élément fini. Le maillage de béton endommagé est composé d'éléments massifs interfacés d'éléments de contact. Les caractéristiques mécaniques sont distribuées aléatoirement selon des lois qui tiennent compte de l'hétérogénéité du matériau et des effets d'échelle conformément aux observations expérimentales. Bien que pensé dans le contexte d'une fissuration en ouverture pure, le modèle a également été amélioré pour tenir compte des cisaillements locaux dans le cas de chargement de compression (Rossi *et al.*, 1996) et donne de bons résultats pour des chargements biaxiaux (Rossi et Ulm, 1997).

Bien que ce modèle a le mérite d'être prédictif, son applicabilité reste limitée. En effet, d'une part les maillages sont délicats à réaliser et d'autre part, le coût de calcul nécessaire est souvent prohibitif en raison de la finesse du maillage qu'il est nécessaire de considérer en vue d'obtenir des résultats satisfaisants. Toutefois, ce modèle peut être utilisé dans certaines zones d'intérêts en vue d'obtenir de l'information très locale. Il peut être mentionné que de récents développements ont été proposés par (Tailhan *et al.*, 2010) en vue d'améliorer la stabilité numérique du modèle vis-à-vis de la gestion des éléments de contact.

Modèles à discontinuités explicites

Méthode des discontinuités fortes : Embedded Finite Element Method. La méthode dite des *discontinuités fortes* a été initialement proposée par (Oliver, 1996a) et (Oliver, 1996b). Cette technique permet de prendre en compte une discontinuité du champ de déplacement de manière explicite. Soit Ω un domaine matériel de frontière $\partial\Omega$. L'existence d'une surface de discontinuité S, repérée par sa normale extérieure $\underline{n}$, est postulée. Ω est partitionné en deux sous-ensembles Ω^+ et Ω^-. La fonction indicatrice de Ω, notée $\mathcal{H}_S$ est définie telle que $\mathcal{H}_S(\underline{x}, t) = 1$ si

$\underline{x} \in \Omega^+$ et $\mathcal{H}_S(\underline{x},t) = 0$ sinon. Le champ de déplacement est postulé sous la forme suivante :

$$\underline{u}(\underline{x},t) = \underline{\bar{u}}(\underline{x},t) + \mathcal{H}_S[\underline{u}](\underline{x},t) \tag{2.117}$$

où $\underline{u}(\underline{x},t)$ est le champ de déplacement total, $\underline{\bar{u}}(\underline{x},t)$ est la partie continue du champ de déplacement, $[\underline{u}] = \underline{u}|_{\underline{x}\in S^+} - \underline{u}|_{\underline{x}\in S^-}$ est la discontinuité en déplacement, $\underline{x}$ est un point matériel de Ω et t est le pseudo temps courant. Le champ de déformations peut être déduit :

$$\underline{\underline{\epsilon}}(\underline{x},t) = \frac{1}{2}(\nabla\underline{u}(\underline{x},t) + \nabla\underline{u}(\underline{x},t)^t) = \underline{\underline{\bar{\epsilon}}}(\underline{x},t) + \frac{1}{2}\delta_S([\underline{u}]\otimes\underline{n} + [\underline{u}]\otimes\underline{n}^t) \tag{2.118}$$

où $\underline{\underline{\epsilon}}(\underline{x},t)$ est le champ de déformation totale, $\underline{\underline{\bar{\epsilon}}}(\underline{x},t)$ est le champ de déformation continu et δ_S est la fonction de Dirac provenant de la dérivation de la fonction indicatrice $\mathcal{H}_S$. Il apparaît donc clairement que la détermination du champ de contraintes requiert la connaissance non seulement d'une loi de comportement de type continu mais aussi d'une loi de comportement de type discrète. Cette dernière peut être formulée de manière classique dans le cadre de la thermodynamique des processus irréversibles. L'existence d'un potentiel d'état est alors postulée $[\Psi]$. La variable observable est souvent prise égale à la discontinuité du champ de déplacement $[\underline{u}]$. En supposant que variables internes interviennant dans la formulation de la loi de comportement $(\breve{\alpha}_k)_{k=1,\dots,n}$, $n \in \mathbb{N}^\star$, sont regroupées dans un vecteur $[\underline{\alpha}]$, l'énergie d'Helmholtz peut prendre la forme suivante :

$$[\Psi] = [\Psi]([\underline{u}],[\underline{\alpha}]) \tag{2.119}$$

Les lois d'état peuvent être obtenues à partir de l'inégalité de Clausius-Duhem-Truesdell :

$$[\mathcal{D}]([\underline{A}]) = \underline{t}_S.[\dot{\underline{u}}] - [\dot{\Psi}] = (\underline{t}_S - \frac{\partial[\Psi]}{\partial[\underline{u}]}).[\dot{\underline{u}}] - \frac{\partial[\Psi]}{\partial[\underline{\alpha}]}.[\dot{[\underline{\alpha}]}] \tag{2.120}$$

où $[\underline{\alpha}]$ est un vecteur regroupant l'ensemble des variables internes et $\underline{t}_S$ est le vecteur des tractions sur la surface de discontinuité. La première loi d'état peut donc être déduite :

$$\underline{t}_S = \frac{\partial[\Psi]}{\partial[\underline{u}]} \tag{2.121}$$

L'inégalité de Clausius-Duhem-Truesdell devient donc :

$$[\mathcal{D}]([\underline{\alpha}]) = -\frac{\partial[\Psi]}{\partial[\underline{\alpha}]}.[\dot{\underline{\alpha}}] \tag{2.122}$$

Les variables forces thermodynamiques associées aux variables internes $(\breve{\alpha}_k)_{k=1,\dots,n}$ sont regroupées dans un vecteur $[\underline{A}]$ et peuvent être définies comme suit :

$$[\underline{A}] = -\frac{\partial[\Psi]}{\partial[\underline{\alpha}]} \tag{2.123}$$

L'écoulement anélastique est géré au moyen d'un potentiel de dissipation $f([\underline{A}]) \leq 0$. Les lois d'évolution peuvent être déduites du principe de maximum de la dissipation qui permet de définir un jeu de variables duales convenables, maximisant la dissipation :

$$[\underline{A}] = \mathbf{Arg}\{\min_{f([\underline{A}^\star])\leq 0}[-[\mathcal{D}]([\underline{A}^\star])]\} \tag{2.124}$$

La fonctionnelle de Lagrange $\mathcal{G}$ et un multiplicateur de Lagrange $[\dot{\lambda}]$ sont introduits pour résoudre ce problème. Il s'en suit :

$$[\underline{A}] = \mathbf{Arg}\{\max_{\forall[\dot{\lambda}]\leq 0}\min_{\forall[\underline{A}^\star]}\mathcal{G}([\underline{A}^\star],[\dot{\lambda}])\} \tag{2.125}$$

avec $\mathcal{G}(.) = -[\mathcal{D}](.) + [\dot{\lambda}]f(.)$. Les conditions de stationnarité de la fonctionnelle de Lagrange permettent d'aboutir aux lois d'évolution :

$$\frac{\partial \mathcal{G}([\underline{A}])}{\partial [\underline{A}]} = 0 \Rightarrow -[\dot{\underline{\alpha}}] + [\dot{\lambda}]\frac{\partial f([\underline{A}])}{\partial [\underline{A}]} = 0 \Rightarrow [\dot{\underline{\alpha}}] = [\dot{\lambda}]\frac{\partial f([\underline{A}])}{\partial [\underline{A}]} \tag{2.126}$$

Les lois d'écoulement s'expriment donc sous la forme générale suivante :

$$[\dot{\underline{\alpha}}] = [\dot{\lambda}]\frac{\partial f([\underline{A}])}{\partial [\underline{A}]} \tag{2.127}$$

Toutefois, des conditions supplémentaires sont également récupérées en considérant les conditions de Kuhn-Tucker. Ces dernières s'écrivent classiquement :

$$[\dot{\lambda}] \geq 0 \quad f([\underline{A}]) \leq 0 \quad [\dot{\lambda}]f([\underline{A}]) = 0 \tag{2.128}$$

L'implantation numérique de ce type d'approche est assez simple car elle ne requiert pas de modifications lourdes du code de calcul. En effet, l'enrichissement a lieu au niveau élémentaire. Le calcul des inconnues supplémentaires peut être conduit localement en réalisant une condensation statique (Brancherie, 2003). Cependant, quelques difficultés liées à la non régularité de la partie discontinue du champ de déplacement restent à être traitées. De plus, la continuité du chemin de fissuration n'est pas assurée a priori.

Méthode des éléments finis étendue : eXtended Finite Element Method. Récemment, la *méthode des éléments finis étendus* (eXtended Finite Element Method - XFEM) s'est largement développée. Initialement proposée par (Belytschko et Black, 1999), (Dolbow *et al.*, 2001) et (Moes et Belytschko, 2002), le principe de cette approche consiste à ajouter des degrés de liberté additionnels en certains nœuds. Le champ de déplacement enrichi peut s'écrire de manière générale :

$$\underline{u}(\underline{x},t) = \sum_{i\in\mathcal{I}} \underline{u}_i(t)\phi_i(\underline{x}) + \sum_{j\in\mathcal{J}} \underline{b}_j(t)\phi_j(\underline{x})\mathcal{H}(f(\underline{x})) + \sum_{k\in\mathcal{K}} \phi_k(\underline{x})(\sum_{l=1}^{m} \underline{c}_k^l(t)F_l(\underline{x})) \tag{2.129}$$

Le premier terme représente l'interpolation classique du champ de déplacements usuels. En effet, $\mathcal{I}$ représente l'ensemble des nœuds appartenant au maillage. Les degrés de liberté classiques sont notés $\underline{u}_i$ et les fonctions de forme usuelles ϕ_i. Le second terme porte sur les éléments traversés par la discontinuité. Les nœuds correspondants sont regroupés dans l'ensemble $\mathcal{J}$. Les degrés de libertés additionnels sont les $\underline{b}_j$. $\mathcal{H}$ est une fonction de saut telle que $\mathcal{H}(\underline{x}) = 1$ si $\underline{x}$ est situé d'un côté de la discontinuité et $\mathcal{H}(\underline{x}) = -1$ si $\underline{x}$ est situé de l'autre. f est une fonction de niveau, permettant de partionner le domaine total en trois sous domaines : la discontinuité et deux sous-domaines de part et d'autre de celle-ci. Le troisième terme est relatif aux nœuds appartenant aux éléments contenant la pointe de la fissure. Les degrés de liberté concernés sont notés par $\underline{c}_k^l(t)$ et les fonctions d'enrichissement sont les F_l. Le choix de ces fonctions donne lieu à plusieurs variantes de la technique. D'après (Moes et Belytschko, 2002), ces dernières s'expriment comme suit :

$$\{F_l(r,\theta)\}_{l=1,\ldots,4} = \{\sqrt{r}\mathbf{sin}(\frac{\theta}{2}), \sqrt{r}\mathbf{cos}(\frac{\theta}{2}), \sqrt{r}\mathbf{sin}(\frac{\theta}{2})\mathbf{sin}(\theta), \sqrt{r}\mathbf{cos}(\frac{\theta}{2})\mathbf{sin}(\theta)\} \tag{2.130}$$

Cette technique a largement prouvé sont efficacité pour décrire la propagation de discontinuités dans un milieu continu. Cependant, les applications tridimensionnelles restent encore assez rares. De plus, son implantation numérique n'est pas aisée. En effet, elle nécessite des modifications importantes du code de calcul voire même une réécriture importante.

2.5.4 Bilan

Dans cette section, les principaux mécanismes dissipatifs qui entrent en jeu dans le comportement du béton ont tout d'abord été exposés. Il ressort que le béton manifeste un comportement complexe, fortement dissymétrique en traction et en compression. De plus, lors de cycles de charge/décharge, il apparaît que ce matériau présente des phénomènes hystérétiques. Ces derniers se traduisent par la récupération de la raideur initiale lors d'un cycle de traction/compression. Cela peut être expliqué par le fait que les fissures créées en traction tendent à se refermer en compression. Par ailleurs, des déformations permanentes apparaissent en traction/compression cyclique. Enfin, la décharge ne s'effectue généralement pas sans dissipation d'énergie. En effet, la présence, essentiellement en compression, de boucles d'hystérésis liées au frottement interne entre les lèvres des fissures peut être montrée. L'ensemble de ces mécanismes permet d'identifier les différents traits comportementaux du béton qu'il est nécessaire de prendre en compte dans une modélisation macroscopique.

Ensuite, une brève rétrospective des principales approches proposées dans la littérature, en vue de décrire le comportement du béton, a été exposée. Les modèles s'inscrivant dans le cadre de la mécanique de la rupture (linéaire ou non-linéaire) s'intéressent à la description de la propagation d'une fissure isolée. Ainsi, ils ne permettent pas de décrire l'ensemble du comportement d'une structure en béton depuis l'initiation d'une fissure jusqu'à l'état de ruine. Les modèles de fissuration diffuse (smeared crack models) s'inscrivent dans un cadre théorique rigoureux. Cependant, ces derniers sont souvent sujets à d'importants problèmes numériques de mise en œuvre (blocage en contrainte, ...). De plus, leur formulation tridimensionnelle reste assez délicate à mettre en place. Les modèles de fissuration distribuée, tel que celui de la bande de fissuration, apparaissent comme étant très complexes. De plus, lorsque la multifissuration se développe, la gestion conjointe des différentes fissures pose des problèmes numériques. Le cadre de l'élastoplasticité a permis le développement de nombreux modèles constitutifs. Cependant, leur justification physique reste délicate étant donné l'absence de plasticité dans le comportement du béton. De plus, l'effet de la microfissuration est généralement mal pris en compte. Encore très utilisés aujourd'hui, les modèles formulés dans le cadre de la mécanique de l'endommagement apparaissent comme étant physiquement motivés et numériquement robustes. Plusieurs modèles ont été présentés, formulés aussi bien de manière isotrope que de manière anisotrope. Cette classe de modèle est de loin la plus à même de décrire le comportement de structures de grande échelle. De plus, les problèmes liés à la dépendance au maillage peuvent être, au moins partiellement, résolus du fait de la compatibilité de ces modèles avec de nombreux limiteurs de localisation, comme par exemple l'approche non locale intégrale. Pour achever cette rétrospective, les approches dites à discontinuité explicite ont été évoquées. D'une part la méthode des discontinuités fortes et, d'autre part, la technique XFEM ont été présentées. Il apparaît que ces deux approches sont capables de prendre en compte une discontinuité cinématique dans un milieu continu. La première approche présente d'importants effets de maillage alors que la technique XFEM présente moins de sensibilité au maillage mais demande des modifications importantes du code de calcul pour être implantée.

Après cette étude bibliographique, il apparaît judicieux et réaliste de proposer un modèle de béton formulé dans le cadre de la mécanique de l'endommagement s'appuyant sur les principaux traits de comportement liés au béton. En effet, ce cadre est d'une part physiquement justifié car il s'appuie sur les principes thermodynamiques et, d'autre part, applicable à des structures de grandes échelles, éventuellement en trois dimensions. Pour des raisons de robustesse numérique, l'isotropie de l'endommagement est supposée. Ainsi, les variations des paramètres élastiques sont réalisées à travers celles d'une variable scalaire, variant de manière continue entre 0 et 1. Les développements d'un tel modèle sont exposés dans le chapitre suivant.

2.6 Conclusion

Ce chapitre a été consacré à une revue bibliographique portant sur plusieurs aspects. En premier lieu, les équations intervenant dans la formulation d'un problème de mécanique des milieux continus ont été rappelées. Le principe des puissances virtuelles a permis d'établir les équations d'équilibre locales. En invoquant l'hypothèse des petites perturbations, les équations cinématiques ont été introduites. En réalisant le bilan des inconnues du problème, il apparaît de manière naturelle qu'une loi de comportement doit être introduite. Le système d'équations aux dérivées partielles se présente alors comme un problème aux limites, nécessitant de considérer des conditions aux limites. Le degré de liberté essentiel du problème réside donc dans la définition de la loi de comportement. C'est alors que la méthode de l'état local a été présentée. Reposant sur les principes de la thermodynamique, cette technique offre un cadre rigoureux, propice aux développements d'une loi constitutive physiquement consistante. Sa mise en œuvre comprend deux phases essentielles : d'une part l'identification des mécanismes élémentaires de dégradation et, d'autre part, la formulation de la loi constitutive en s'appuyant sur les principes thermodynamiques. Il apparaît donc naturellement que, pour un matériau donné, une étude expérimentale permettant cette identification doit être conduite.

C'est pourquoi, en second lieu, une revue bibliographique visant à présenter les résultats expérimentaux essentiels portant sur le comportement mécanique de l'interface acier/béton sans/avec corrosion a été exposée. En effet, il ressort de cette étude que l'interface acier/béton se dégrade selon trois phases : adhérence parfaite, première phase de dégradation et seconde phase de dégradation. Le phénomène de corrosion agit à la fois sur l'acier et sur le béton. En effet, l'acier voit sa section ainsi que sa ductilité diminuer. Les produits de corrosion qui apparaissent se dilatent et provoquent l'apparition de contraintes de traction dans le béton, qui se traduisent par la fissuration du béton d'enrobage. Après avoir réalisé une synthèse des travaux de modélisation proposés dans la littérature, il apparaît que très peu d'entre eux sont susceptibles de gérer à la fois un chargement statique/cyclique extérieur couplé avec un chargement équivalent à la corrosion. De plus, leur admissibilité thermodynamique n'est parfois pas montrée de manière claire. Une analyse similaire a été réalisée dans le cas du béton.

Matériau quasi-fragile, le béton présente un comportement complexe. La littérature montre clairement ses traits de comportement les plus significatifs. Il apparaît donc que le béton est fragile en traction, plutôt ductile en compression et est sujet aux phénomènes unilatéraux lors de cycles traction/compression. Par ailleurs, il présente des déformations permanentes et des effets hystérétiques liés aux frottements internes entre les lèvres des fissures dans le cas de chargements cycliques. Parmi la grande variété des modèles constitutifs proposés dans la littérature, il ressort que deux classes restent encore très utilisées : d'une part les modèles formulés dans le cadre de la mécanique de l'endommagement et, d'autre part, les modèles gérant de manière explicite la présence de discontinuité.

Outre les informations quantitatives que ce chapitre a permis de dégager, les objectifs liés à la partie de modélisation mécanique de la présente recherche ont pu être affinés. Concernant l'interface acier/béton en présence de corrosion, le modèle constitutif proposé doit s'inscrire dans le cadre de la thermodynamique des processus irréversibles, tridimensionnel, doit être capable de gérer les chargements cycliques et enfin, doit pouvoir être utilisé lorsqu'un chargement mécanique classique est couplé à un chargement équivalent lié à la corrosion. Concernant la modélisation du béton, il est proposé de formuler une loi simple et robuste s'appuyant sur la mécanique de l'endommagement, capable de représenter le plus fidèlement possible l'ensemble des traits de comportements identifiés. Dans le chapitre suivant, les développements analytiques des deux modèles constitutifs proposés sont exposés. Les schémas d'intégration locaux sont

également précisés, puis enfin, les propositions sont illustrées à l'échelle du point de Gauss.

Chapitre 3

Classe d'équations constitutives couplant élasticité, endommagement isotrope et glissement interne

3.1 Introduction

Ce chapitre vise à présenter les équations constitutives proposées pour décrire le comportement de l'interface acier/béton, en présence de corrosion, et du béton. Quelques résultats locaux sont également donnés. Pour cela, celui-ci est divisé en cinq axes.

En premier lieu, la formulation faible du problème aux limites de mécanique des milieux continus est établie. Les techniques de résolution sont également rappelées. Cette présentation a pour but de situer clairement à quel niveau de la méthodologie des éléments finis les développements proposés dans cette section s'inscrivent.

Il ressort du chapitre précédent qu'aussi bien le comportement de l'interface acier/béton que celui du béton présente un couplage entre élasticité, endommagement et glissement interne (Adelaide *et al.*, 2010). L'élasticité est toujours présente dans tous les comportements dès que les atomes constitutifs de la matière sont libres de rejoindre leur position d'équilibre. L'endommagement est la traduction macroscopique de la croissance de cavités conduisant au développement de macrofissures. Enfin, le glissement interne est un mécanisme qui donne lieu à une interprétation différente dans le cas de l'interface acier/béton et dans le cas du béton (Richard *et al.*, 2009a). En effet, ce mécanisme peut être interprété comme un réel glissement relatif, par exemple entre l'acier et le béton, dans le cas de l'interface acier/béton. En revanche, dans le cas du béton, ce mécanisme est la signature du frottement mobilisé entre les lèvres des fissures, donnant lieu à l'apparition des effets hystérétiques dans le cas des chargements cycliques. C'est pourquoi, en second lieu, la formulation des lois constitutives de l'interface acier/béton et du béton sont présentées comme la particularisation d'une classe de lois de comportement dite élasto-endommageable-glissant.

La formulation de lois constitutives locales fines requiert généralement, pour tirer pleinement parti de leurs vertus prédictives, l'utilisation d'éléments finis massifs. Cela a pour effet d'engendrer des coûts de calcul importants non seulement lorsqu'on s'intéresse à des cas d'étude complexes mais aussi lorsque l'échelle de la structure étudiée est importante. Par ailleurs, dans le cas de l'interface acier/béton, il y a lieu de mettre en place dans le maillage des éléments spécifiques, rendant sa réalisation souvent délicate. C'est pour cela, qu'en troisième lieu, une simplification des lois constitutives proposées s'inscrivant dans le formalisme multifibre est présentée.

En quatrième lieu, les aspects liés à l'implantation numérique des différentes lois sont présentés. Dans un premier temps, afin de situer le niveau de l'intervention au sein du code de calcul aux éléments finis, la formulation faible du problème aux limites est exposée ainsi que sa discrétisation. Dans un second temps, les schémas numériques utilisés pour l'intégration locale des lois constitutives de l'interface acier/béton et du béton sont détaillés.

En dernier lieu, quelques résultats locaux sont présentés. En particulier, les effets de la variation des paramètres matériaux sur la réponse des différentes lois de comportement sont analysés.

3.2 Problème aux limites discrétisé

3.2.1 Formulation faible

Au chapitre précédent, le problème de mécanique des milieux continus a été posé sous sa forme forte. Sa formulation allie les équations d'équilibre, les équations de compatibilité et les équations constitutives. Pour garantir qu'il soit bien posé, des conditions aux limites de type Dirichlet et Neumann doivent être adjointes. Soit Ω un sous domaine non vide de $\mathbb{R}^3$ occupé par un milieu matériel, de frontière régulière $\partial\Omega$. Cette dernière est supposée être partionnée telle que $\partial\Omega = \partial\Omega_t \cup \partial\Omega_u$ et $\partial\Omega_t \cap \partial\Omega_u = \{0\}$. En notant $\underline{\overline{t}}$ et $\underline{\overline{u}}$ les vecteurs traction imposée et déplacement imposé, respectivement sur $\partial\Omega_t$ et $\partial\Omega_u$, le problème s'écrit sous sa forme forte comme suit :

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{Trouver } \underline{\underline{\sigma}},\ \underline{\underline{\epsilon}} \text{ et } \underline{u} \text{ tels que :} & \\ \mathbf{Div}\underline{\underline{\sigma}} + \underline{b} = \rho\underline{\gamma} & \forall M \in \Omega \\ \underline{\underline{\epsilon}} = \frac{1}{2}(\nabla\underline{u} + \nabla\underline{u}^t) & \forall M \in \Omega \\ \mathcal{L}(\underline{\underline{\sigma}}, \underline{\underline{\epsilon}}; \breve{\alpha}_1, ..., \breve{\alpha}_n) = \underline{\underline{0}} & \forall M \in \Omega \\ \underline{\overline{t}} = \underline{\underline{\sigma}}.\underline{n} & \forall M \in \partial\Omega_t \\ \underline{u} = \underline{\overline{u}} & \forall M \in \partial\Omega_u \end{array}} \tag{3.1}$$

L'obtention d'une solution analytique est généralement difficile dans la majorité des cas. Une technique permettant la construction d'une solution approchée est la méthode des éléments finis. Pour être appliquée, cette dernière nécessite la construction préalable d'une formulation faible du problème 3.1. La formulation faible du problème découle naturellement du principe des puissances virtuelles. En négligeant les effets d'inertie, il vient :

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Trouver } \underline{u} \text{ tel que } \forall \underline{v} \in V := \{w \text{ régulier sur } \Omega | w = \underline{\overline{u}} \text{ sur } \partial\Omega_u\} : \\ \int_\Omega \underline{\underline{\sigma}}(\underline{u}) : \underline{\underline{\epsilon}}(\underline{v}) dV - \int_\Omega \underline{b}.\underline{v} dV - \int_{\partial\Omega_t} \underline{\overline{t}}.\underline{v} dS = 0 \end{array}} \tag{3.2}$$

3.2.2 Discrétisation

Interpolation des champs

Dans cette section, le choix d'une présentation sous forme matricielle est adoptée pour des raisons de concision et de clarté. Plusieurs méthodes peuvent être utilisées pour résoudre le problème 3.2. Dans le cadre de la présente étude, seule la méthode des éléments finis est considérée. Pour cela, le domaine Ω est subdivisé en une suite de sous-domaines $(\Omega_e)_{e=1,...,ne}$ appelés éléments finis. Chaque élément fini est supposé posséder n_{en} nœuds. Les champs de déplacement réels et virtuels sont approchés de manière élémentaire sur chaque élément fini en introduisant des fonctions de forme $(N_a(\boldsymbol{\xi}))_{a=1,...,n_{en}}$. Le vecteur $\boldsymbol{\xi}$ représente les coordonnées locales de l'élément fini. Ainsi, les champs de déplacement sont approchés par les champs $\boldsymbol{u}^h$ et $\boldsymbol{v}^h$ respectivement comme suit :

$$\boldsymbol{u}^h(\boldsymbol{\xi}, t)|_{\Omega_e} = \boldsymbol{N}(\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{d}(t)|_{\Omega_e} \tag{3.3}$$

$$\boldsymbol{v}^h(\boldsymbol{\xi},t)|_{\Omega_e} = \boldsymbol{N}(\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{v}(t)|_{\Omega_e} \tag{3.4}$$

où $\boldsymbol{N}(\boldsymbol{\xi})$ est la matrice des fonctions de forme, $\boldsymbol{d}(t)|_{\Omega_e}$ et $\boldsymbol{v}(t)|_{\Omega_e}$ les vecteurs des degrés de liberté associés au déplacement total (cumulé) et au déplacement virtuel respectivement, t représente le pseudo temps courant. Pour un élément fini donné, les fonctions de forme sont classiquement choisies sous une forme polynomiale de degré le plus faible possible et respectant la propriété de partition de l'unité, c'est-à-dire devant vérifier :

$$N_a(\boldsymbol{\xi}_b) = \delta_{ab} \tag{3.5}$$

La fonction de forme N_a doit donc valoir 1 au nœud a et 0 aux autres nœuds de l'élément fini. La question de la discrétisation de la géométrie reste encore à être évoquée. En effet, la géométrie peut être a priori interpolée de manière totalement indépendante des champs de déplacement. Toutefois, la littérature montre que l'utilisation d'éléments finis isoparamétriques contribue à la stabilité de la méthode. Cela signifie que les interpolations géométriques sont choisies de manière identiques aux interpolations retenues pour les champs de déplacement. La géométrie de chaque élément est donc interpolée comme suit :

$$\boldsymbol{x}^h(\boldsymbol{\xi})|_{\Omega_e} = \boldsymbol{N}(\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{x}|_{\Omega_e} \tag{3.6}$$

où $\boldsymbol{x}$ représente le vecteur des coordonnées nodales associées à l'élément Ω_e. A l'aide de l'expression 3.3, le champ de déformation approché s'écrit naturellement :

$$\boldsymbol{\epsilon}^h(\boldsymbol{\xi},t)|_{\Omega_e} = \frac{1}{2}(\nabla \boldsymbol{u}^h(\boldsymbol{\xi},t) + \nabla \boldsymbol{u}^h(\boldsymbol{\xi},t)^t)|_{\Omega_e} \tag{3.7}$$

Il peut être noté que seuls les opérateurs gradient agissent uniquement sur les fonctions de forme. Ainsi, le champ de déformation s'écrit :

$$\boldsymbol{\epsilon}^h(\boldsymbol{\xi},t)|_{\Omega_e} = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{d}(t)|_{\Omega_e} \tag{3.8}$$

où $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{\xi})$ est la matrice traduisant la relation de compatibilité restreinte à l'élément fini courant. De manière plus précise, la matrice de compatibilité peut être calculée comme suit :

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{\xi}) = \frac{d\boldsymbol{N}(\boldsymbol{\xi})}{d\boldsymbol{\xi}}\boldsymbol{J}^{-1}(\boldsymbol{\xi}) \tag{3.9}$$

où $\boldsymbol{J}^{-1}(\boldsymbol{\xi})$ est la matrice jacobienne calculée à partir des interpolations géométriques.

Construction du problème discrétisé

Lorsqu'il n'y a pas de confusion possible, les dépendances des quantités d'intérêt au pseudo temps et aux coordonnées courantes de l'élément fini sont omises. La forme faible du problème aux limites 3.2 peut être discrétisée en tenant compte des différentes approximations présentées dans le section précédente. D'une manière plus précise, l'équation discrétisée du problème peut s'écrire sous la forme générique suivante :

$$\mathop{\mathbb{A}}_{e=1}^{n}(\mathbf{f}^{\mathbf{Int},e} - \mathbf{f}^{\mathbf{Ext},e}) = \mathbf{0} \tag{3.10}$$

où $\mathbf{f}^{\mathbf{Int},e}$ et $\mathbf{f}^{\mathbf{Ext},e}$ sont respectivement les vecteurs de forces internes et externes et $\mathbb{A}$ est l'opérateur d'assemblage. D'après l'équation 3.2, les vecteurs de forces internes et externes s'expriment en notations matricielles par :

$$\mathbf{f}^{\mathbf{Ext},e} = \int_{\Omega_e} \mathbf{N}^t\mathbf{b}\mathbf{v}^t dV + \int_{\partial\Omega_{t,e}} \mathbf{N}^t\bar{\mathbf{t}}\mathbf{v}^t dS \tag{3.11}$$

$$\mathbf{f}^{\mathbf{Int},e} = \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^t \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\epsilon}^h) \mathbf{v}^t dV \tag{3.12}$$

En reportant les équations 3.11 et 3.12 dans l'équation 3.10, on obtient :

$$\int_{\Omega_e} \mathbf{B}^t \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\epsilon}^h) \mathbf{v}^t dV = \int_{\Omega_e} \mathbf{N}^t \mathbf{b} \mathbf{v}^t dV + \int_{\partial\Omega_{t,e}} \mathbf{N}^t \bar{\mathbf{t}} \mathbf{v}^t dS \tag{3.13}$$

En remarquant que cette équation doit être vérifiée pour tous les déplacements virtuels cinématiquement admissibles, on obtient le problème discrétisé suivant :

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Trouver } \mathbf{d}^h \text{ tels que :} \\ \mathop{\mathbb{A}}_{e=1}^{n} \left(\int_{\Omega_e} \mathbf{B}^t \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{d}^h) dV - \int_{\Omega_e} \mathbf{N}^t \mathbf{b} dV - \int_{\partial\Omega_{t,e}} \mathbf{N}^t \bar{\mathbf{t}} dS \right) = \mathbf{0} \end{array}} \tag{3.14}$$

Les intégrales sont calculées numériquement, généralement à l'aide de la formule de quadrature de Gauss. En effet, cette technique d'intégration est adaptée à ce cas d'application en raison du caractère polynomial des fonctions de forme. Une solution exacte peut être obtenue.

3.2.3 Schéma de résolution global

La résolution d'un tel problème peut être abordée à l'aide d'une approche de type itératif incrémental. Cette dernière comprend deux phases : une première phase durant laquelle les contraintes sont déterminées à partir d'une solution initiale en déplacement et une seconde phase qui consiste à résoudre les équations d'équilibre pour obtenir une nouvelle solution meilleure que la précédente. Ce procédé est réitéré pour chaque pas de chargement extérieur jusqu'à ce qu'un critère de convergence soit vérifié. Soit $\boldsymbol{x}$ un point de Gauss et $[0, T]$ l'ensemble dans lequel varie le pseudo temps t. Cet intervalle peut être discrétisé tel que :

$$[0, T] = \bigcup_{n=1}^{m} [t_{n-1}, t_n] \tag{3.15}$$

où par convention $t_0 = 0$ et $t_m = T$. La première étape de la résolution peut donc être formulée comme suit :

$$\boxed{\begin{array}{lcl} \text{Étant donnés} & : & \boldsymbol{\epsilon}_n^h(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\epsilon}^h(\boldsymbol{x}, t_n),\ \breve{\boldsymbol{\alpha}}_n(\boldsymbol{x}) = \breve{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{x}, t_n) \\ \text{Trouver} & : & \boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^h(\boldsymbol{x}),\ \breve{\boldsymbol{\alpha}}_{n+1}(\boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{\sigma}_{n+1}(\boldsymbol{x}) \\ \text{Tels que} & : & \text{les conditions d'admissibilité soient vérifiées} \end{array}} \tag{3.16}$$

Le détail des algorithmes utilisés pour réaliser cette étape de résolution est présenté dans la suite de ce chapitre, appliqué au cas particulier des modèles constitutifs proposés. Dès lors que les contraintes ont été trouvées en chacun des points d'intégration, les équations d'équilibre 3.10 doivent être résolues pour déterminer une nouvelle solution en déplacement. Le problème peut donc être formulé comme suit :

$$\boxed{\begin{array}{lcl} \text{Étant donnés} & : & \boldsymbol{\sigma}_{n+1}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x}, t_{n+1}) \\ \text{Trouver} & : & \boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^{h,(i)}(\boldsymbol{x}) \\ \text{Tel que} & : & \mathbf{r}(\mathbf{d}_{n+1}^{h,(i)}, .) = \mathop{\mathbb{A}}_{e=1}^{n} (\mathbf{f}^{\mathbf{Int},e}(\mathbf{d}_{n+1}^{h,(i)}, .) - \mathbf{f}^{\mathbf{Ext},e}) = \mathbf{0} \\ & & \mathbf{d}_{n+1}^{h,(i)}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{d}^{h,(i)}(\boldsymbol{x}, t_{n+1}) \end{array}} \tag{3.17}$$

Pour résoudre cette équation, comme mentionné précédemment, une méthode itérative de type Newton est généralement utilisée. Si à l'itération (i) les équations d'équilibre ne sont pas vérifiées,

alors il s'agit de trouver une valeur améliorée de la déformation totale $\boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^{h,(i+1)}(\boldsymbol{x})$. Pour cela, il y a lieu de trouver un déplacement incrémental $\mathbf{u}_{n+1}^{h,(i+1)}$, d'actualiser le déplacement total $\mathbf{d}_{n+1}^{(i+1)}(\boldsymbol{x})$ puis de recalculer la déformation totale $\boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^{h,(i+1)}(\boldsymbol{x})$. Pour cela, les équations d'équilibre doivent être linéarisées :

$$\mathbf{r}_{n+1}^{(i+1)} = \mathbf{r}_{n+1}^{(i)} + \mathop{\mathbb{A}}_{e=1}^{n} \frac{\partial \mathbf{f}^{\mathbf{Int},e}(\mathbf{d}_{n+1}^{h,(i)},.)}{\partial \mathbf{d}_{n+1}^{h,(i)}} \mathbf{u}_{n+1}^{h,(i+1)} \tag{3.18}$$

L'opérateur tangent $\frac{\partial \mathbf{f}^{\mathbf{Int},e}(\mathbf{d}_{n+1}^{h,(i)},.)}{\partial \mathbf{d}_{n+1}^{h,(i)}}$ peut être déterminé à partir du module tangent issu des équations constitutives. Autrement dit, ce dernier est évalué par :

$$\frac{\partial \mathbf{f}^{\mathbf{Int},e}(\mathbf{d}_{n+1}^{h,(i)},.)}{\partial \mathbf{d}_{n+1}^{h,(i)}}|_{\Omega_e} = \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^t \mathbf{C}^{(i+1)}(\boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^{h,(i+1)}, \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{h,(i+1)}) \mathbf{B} dV \tag{3.19}$$

où $\mathbf{C}^{(i+1)} = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{h,(i+1)}}{\partial \boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^{h,(i+1)}}$ est le module tangent fonction des variables internes. Dans bien des cas d'applications, il est préféré de le maintenir constant au module élastique initial. Cette stratégie nécessite davantage d'itérations mais augmente la robustesse des calculs. Lorsque le déplacement incrémental $\mathbf{u}_{n+1}^{h,(i+1)}$ est calculé, le déplacement total peut être actualisé $\mathbf{d}_{n+1}^{h,(i+1)} = \mathbf{d}_{n+1}^{h,(i)} + \mathbf{u}_{n+1}^{h,(i+1)}$ pour que les nouvelles déformations totales soient déterminées. Le schéma de résolution est présenté de manière synthétique par l'algorigramme 1.

Entrée : Maillage, chargement, paramètres numériques et matériaux
Sortie : Déplacements nodaux, contraintes

pour $n \leftarrow 1$ **à** n_{incr} **faire**
  $\mathbf{f}_{n+1}^{\mathbf{Ext}} = \mathbf{f}_{n}^{\mathbf{Ext}} + \Delta \mathbf{f}_{n}^{\mathbf{Ext}}$;
  pour $i \leftarrow 1$ **à** n_{iter} **faire**
    Calcul des déformations;
    Calcul des contraintes;
    Calcul des efforts internes $\mathbf{f}_{n+1}^{\mathbf{Int},(i+1)}$;
    Calcul du résidu $\boldsymbol{r}_{n+1}^{(i+1)}$;
    si $||\boldsymbol{r}_{n+1}^{(i+1)}|| \geq \epsilon_{Tol}$ **alors**
      Calcul de l'incrément de déplacements $\mathbf{u}_{n+1}^{h,(i+1)}$;
      $\mathbf{d}_{n+1}^{h,(i+1)} = \mathbf{d}_{n+1}^{h,(i)} + \mathbf{u}_{n+1}^{h,(i+1)}$;
      i=i+1;
    sinon
      Sortir;
    fin
  fin
fin

Algorithme 1 : Algorithme de résolution.

3.3 Modélisation locale

3.3.1 Couplage entre élasticité, endommagement isotrope et glissement interne

Mécanismes dissipatifs et potentiel d'état

Dans le but de construire un potentiel thermodynamique qui rend possible la détermination de lois d'état satisfaisantes, un bilan des mécanismes dissipatifs à considérer doit être effectué. Tout d'abord, pour des processus de déformation de très faible ampleur, les lois classiques de l'élasticité régissent la déformation du corps solide. Ces dernières traduisent le mouvement des atomes autour de leur position d'équilibre. Ensuite, dès lors que l'état de contrainte appliqué franchit un certain seuil critique, des non linéarités apparaissent. Le type de non linéarité doit être rapproché de la nature du matériau considéré. En effet, pour un béton comme pour l'interface acier/béton, les non linéarités matérielles sont la signature de la fissuration. C'est alors que la théorie de l'endommagement apparaît comme adaptée pour rendre compte de la dégradation progressive de la rigidité du matériau. Enfin, le mécanisme de glissement est considéré. Il permet de rendre compte des non linéarités matérielles issues du frottement entre les lèvres des fissures dans le cas du béton. Pour le cas de l'interface acier/béton, ce mécanisme traduit le glissement relatif qui apparaît entre l'acier et le béton.

A chacun de ces deux mécanismes dissipatifs, un écrouissage particulier est associé. Concernant le mécanisme d'endommagement, un écrouissage isotrope est considéré. Ce dernier traduit le fait que le domaine de comportement élastique évolue au cours de la dégradation. Effectivement, ce constat se retrouve dans le fait qu'après dissipation de l'énergie et formation de macrofissuresf, les zones avoisinantes se déchargent et redeviennent progressivement élastiques. Le mécanisme de glissement, quant à lui, est à mettre en relation avec un éventuel frottement qui est susceptible d'être mobilisé entre les lèvres des fissures dans le cas du béton ou entre l'acier et le béton dans celui de l'interface. C'est alors qu'une contrainte de rappel apparaît, empêchant ainsi toute possibilité de retour en arrière en l'absence d'effort appliqué. Un écrouissage de type cinématique est alors introduit. Ce dernier permet en outre une gestion efficace du comportement hystérétique en compression. A chacun des mécanismes qui viennent d'être évoqués, une variable est associée. L'ensemble des variables permettant la description de l'état thermodynamique du corps solide considéré peut donc être résumé dans le tableau 3.1 :

Mécanisme	**Variable observable**	**Variable interne**
Déformation totale	$\underline{\underline{\epsilon}}(\underline{x},t)$	
Élasticité		$\underline{\underline{\epsilon}}_e(\underline{x},t)$
Glissement		$\underline{\underline{\epsilon}}_\pi(\underline{x},t)$
Endommagement		$d(\underline{x},t)$
Écrouissage isotrope		$z(\underline{x},t)$
Écrouissage cinématique		$\underline{\underline{\alpha}}(\underline{x},t)$

TAB. 3.1 – Mécanismes dissipatifs considérés et variables associées.

Dans le but de clarifier la manière dont est construit le potentiel d'état, chaque étape est présentée en détail. L'énergie libre d'Helmholtz est retenue comme potentiel d'état qui est alors

une fonction des variables flux du système. Il vient alors 3.20 :

$$\Psi = \Psi(\underline{\underline{\epsilon}}(\underline{x},t), \underline{\underline{\epsilon}}_{\pi}(\underline{x},t), d(\underline{x},t), z(\underline{x},t), \underline{\underline{\alpha}}(\underline{x},t)) \tag{3.20}$$

En ne considérant que le mécanisme d'élasticité linéaire, l'énergie libre prend la forme classique suivante 3.21 :

$$\rho\Psi = \frac{1}{2}\underline{\underline{\epsilon}} : \underline{\underline{\underline{\underline{C}}}} : \underline{\underline{\epsilon}} \tag{3.21}$$

Dans cette expression, $\underline{\underline{\underline{\underline{C}}}}$ est le tenseur du quatrième ordre d'élasticité de Hooke. Pour affiner la construction d'un potentiel d'état satisfaisant, la décomposition entre les énergies liées aux effets sphérique et déviatorique du processus de déformation est invoquée. Il vient alors 3.22 :

$$\rho\Psi = \frac{\kappa}{6}\mathbf{Tr}^2\underline{\underline{\epsilon}} + \mu\underline{\underline{\epsilon}}^d : \underline{\underline{\epsilon}}^d \tag{3.22}$$

Dans cette expression, κ et μ représentent les paramètres élastiques du matériau considéré. La forme 3.22 de l'énergie libre peut être enrichie pour prendre en compte de l'endommagement de la manière suivante 3.23 :

$$\rho\Psi = (1-d)\frac{\kappa}{6}\mathbf{Tr}^2\underline{\underline{\epsilon}} + (1-d)\mu\underline{\underline{\epsilon}}^d : \underline{\underline{\epsilon}}^d \tag{3.23}$$

A ce stade des développements, il est possible de recourir à la décomposition en parties positive et négative de la contribution hydrostatique du tenseur des déformations. Cet ingrédient permet d'écrire l'effet unilatéral de manière partielle en faisant porter l'endommagement d'une part sur la partie positive de la partie sphérique du tenseur des déformations et d'autre part sur la partie déviatorique du tenseur des déformations totales. Il vient alors 3.24 :

$$\rho\Psi = \frac{\kappa}{6}((1-d) < \mathbf{Tr}\underline{\underline{\epsilon}} >_+^2 - < -\mathbf{Tr}\underline{\underline{\epsilon}} >_+^2) + (1-d)\mu\underline{\underline{\epsilon}}^d : \underline{\underline{\epsilon}}^d \tag{3.24}$$

Dans cette expression, l'opérateur déviatorique noté $(.)^d$ est défini par $(.)^d = (.) - \frac{1}{3}\mathbf{Tr}(.)\underline{\underline{\delta}}$. Le mécanisme de glissement peut être alors introduit. L'hypothèse d'un glissement associé aux effets déviatoriques est retenu. Physiquement, cette hypothèse peut être justifiée par le fait qu'entre les surfaces susceptibles d'être en cntact, la notion de glissement n'a de sens que si l'on considère un déplacement relatif d'une surface par rapport à une autre. C'est alors que du frottement est susceptible d'être mobilisé. En accord avec l'hypothèse formulée, le tenseur de glissement $\underline{\underline{\epsilon}}_{\pi}$ est supposé être de trace nulle, ou autrement dit, ce dernier est supposé être purement déviatorique. Dans ces conditions, l'énergie libre s'écrit :

$$\rho\Psi = \frac{\kappa}{6}((1-d) < \mathbf{Tr}\underline{\underline{\epsilon}} >_+^2 - < -\mathbf{Tr}\underline{\underline{\epsilon}} >_+^2) + (1-d)\mu\underline{\underline{\epsilon}}^d : \underline{\underline{\epsilon}}^d + d\mu(\underline{\underline{\epsilon}}^d - \underline{\underline{\epsilon}}_{\pi}) : (\underline{\underline{\epsilon}}^d - \underline{\underline{\epsilon}}_{\pi}) \tag{3.25}$$

Pour terminer la construction du potentiel d'état, il faut prendre en compte l'énergie élastique bloquée par écrouissage isotrope et cinématique. Cela revient à introduire une fonction de consolidation bien choisie ainsi qu'un terme quadratique en variable flux associée à la contrainte de rappel. Enfin, l'énergie libre prend la forme suivante 3.26 :

$$\begin{aligned} \rho\Psi \quad = \quad & \tfrac{\kappa}{6}((1-d) < \mathbf{Tr}\underline{\underline{\epsilon}} >_+^2 - < -\mathbf{Tr}\underline{\underline{\epsilon}} >_+^2) + (1-d)\mu\underline{\underline{\epsilon}}^d : \underline{\underline{\epsilon}}^d + d\mu(\underline{\underline{\epsilon}}^d - \underline{\underline{\epsilon}}_{\pi}) : (\underline{\underline{\epsilon}}^d - \underline{\underline{\epsilon}}_{\pi}) + \\ & \tfrac{1}{2}\gamma\underline{\underline{\alpha}} : \underline{\underline{\alpha}} + H(z) \end{aligned} \tag{3.26}$$

La forme de l'énergie libre précisée par l'expression 3.26 contient l'ensemble des mécanismes dissipatifs considérés. Notons que le potentiel ainsi défini respecte les conditions d'admissibilité. En effet, ce dernier est assez régulier, convexe et nulle à l'origine. Les lois d'état peuvent alors être formulées en respectant la condition déduite des deux principes thermodynamiques, c'est-à-dire la positivité de la dissipation intrinsèque volumique.

Lois d'état

L'inégalité de Clausius-Duhem-Truesdell, dans l'hypothèse des petites perturbations en régime isotherme statique ou quasi statique, prend la forme suivante 3.27 :

$$\mathcal{D} = \underline{\underline{\sigma}} : \dot{\underline{\underline{\epsilon}}} - \rho\dot{\Psi} \geq 0 \tag{3.27}$$

En développant cette expression, il peut être obtenu l'expression suivante 3.28 :

$$\mathcal{D} = \underline{\underline{\sigma}} : \dot{\underline{\underline{\epsilon}}} - \rho\frac{\partial\Psi}{\partial\underline{\underline{\epsilon}}} : \dot{\underline{\underline{\epsilon}}} - \rho\frac{\partial\Psi}{\partial\underline{\underline{\epsilon}}_{\pi}} : \dot{\underline{\underline{\epsilon}}}_{\pi} - \rho\frac{\partial\Psi}{\partial d}\dot{d} - \rho\frac{\partial\Psi}{\partial z}\dot{z} - \rho\frac{\partial\Psi}{\partial\underline{\underline{\alpha}}} : \dot{\underline{\underline{\alpha}}} \tag{3.28}$$

Écrite autrement, la relation 3.28 devient 3.29 :

$$\mathcal{D} = (\underline{\underline{\sigma}} - \rho\frac{\partial\Psi}{\partial\underline{\underline{\epsilon}}}) : \dot{\underline{\underline{\epsilon}}} - \rho(\frac{\partial\Psi}{\partial\underline{\underline{\epsilon}}}_{\pi} : \dot{\underline{\underline{\epsilon}}}_{\pi} + \frac{\partial\Psi}{\partial d}\dot{d} + \frac{\partial\Psi}{\partial z}\dot{z} + \frac{\partial\Psi}{\partial\underline{\underline{\alpha}}} : \dot{\underline{\underline{\alpha}}}) \tag{3.29}$$

De l'expression 3.29, il est possible de déduire la première loi d'état reliant le tenseur des contraintes de Cauchy et le tenseur des déformations totales. En effet, il vient 3.30 :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \frac{\partial\rho\Psi}{\partial\underline{\underline{\epsilon}}} \tag{3.30}$$

La dissipation prend alors la forme suivante 3.31 :

$$\mathcal{D} = -\rho(\frac{\partial\Psi}{\partial\underline{\underline{\epsilon}}}_{\pi} : \dot{\underline{\underline{\epsilon}}}_{\pi} + \frac{\partial\Psi}{\partial d}\dot{d} + \frac{\partial\Psi}{\partial z}\dot{z} + \frac{\partial\Psi}{\partial\underline{\underline{\alpha}}} : \dot{\underline{\underline{\alpha}}}) \tag{3.31}$$

Les lois d'état se rapportant aux variables internes peuvent être déduites par analogie à la première loi d'état en posant 3.32 :

$$\begin{cases} \underline{\underline{\sigma}}_{\pi} = -\rho\frac{\partial\Psi}{\partial\underline{\underline{\epsilon}}_{\pi}} \\ Y = -\rho\frac{\partial\Psi}{\partial d} \\ Z = \rho\frac{\partial\Psi}{\partial z} \\ \underline{\underline{X}} = \rho\frac{\partial\Psi}{\partial\underline{\underline{\alpha}}} \end{cases} \tag{3.32}$$

La dissipation s'écrit finalement :

$$\mathcal{D} = \underline{\underline{\sigma}}_{\pi} : \dot{\underline{\underline{\epsilon}}}_{\pi} + Y\dot{d} - \underline{\underline{X}} : \dot{\underline{\underline{\alpha}}} - Z\dot{z} \tag{3.33}$$

Cette condition doit être respectée pour que la loi de comportement soit thermodynamiquement admissible. En tenant compte de l'expression du potentiel d'état, les lois d'état peuvent être exprimées selon 3.34 :

$$\begin{cases} \underline{\underline{\sigma}} = \frac{\kappa}{3}((1-d) < \mathbf{Tr}\underline{\underline{\epsilon}} >_{+} - < -\mathbf{Tr}\underline{\underline{\epsilon}} >_{+})\underline{\underline{\delta}} + 2\mu(1-d)\underline{\underline{\epsilon}}^{d} + 2\mu d(\underline{\underline{\epsilon}}^{d} - \underline{\underline{\epsilon}}_{\pi}) \\ \underline{\underline{\sigma}}_{\pi} = 2\mu d(\underline{\underline{\epsilon}}^{d} - \underline{\underline{\epsilon}}_{\pi}) \\ Y = \frac{\kappa}{6} < \mathbf{Tr}\underline{\underline{\epsilon}} >_{+}^{2} + \mu\underline{\underline{\epsilon}}^{d} : \underline{\underline{\epsilon}}^{d} - \mu(\underline{\underline{\epsilon}}^{d} - \underline{\underline{\epsilon}}_{\pi}) : (\underline{\underline{\epsilon}}^{d} - \underline{\underline{\epsilon}}_{\pi}) \\ Z = \frac{dH(z)}{dz} \\ \underline{\underline{X}} = \gamma\underline{\underline{\alpha}} \end{cases} \tag{3.34}$$

L'ensemble des lois d'état ayant été dérivé, il est possible de se concentrer sur l'évolution des variables flux caractérisant les non linéarités matérielles. Les variables flux ainsi que leurs duales, les variables forces, sont regroupées dans le tableau ci-dessous 3.2 :

Sens des variables flux	Variables Flux	Variables Forces	Sens des variables forces
Déformation totale	$\underline{\underline{\epsilon}}(\underline{x},t)$	$\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x},t)$	Contrainte totale
Glissement	$\underline{\underline{\epsilon}}_{\pi}(\underline{x},t)$	$\underline{\underline{\sigma}}_{\pi}(\underline{x},t)$	Contrainte de frottement
Endommagement	$d(\underline{x},t)$	$Y(\underline{x},t)$	Taux de restitution d'énergie
Écrouissage isotrope	$z(\underline{x},t)$	$Z(\underline{x},t)$	Énergie bloquée
Écrouissage cinématique	$\underline{\underline{\alpha}}(\underline{x},t)$	$\underline{\underline{X}}(\underline{x},t)$	Contrainte de rappel

TAB. 3.2 – Ensemble des variables flux et forces caractérisant l'état thermodynamique du système matériel considéré.

Lois complémentaires

Le principe du maximum de la dissipation enseigne que parmi l'ensemble des variables internes admissibles, l'unique solution est caractérisée par une dissipation maximale. La classe d'équations constitutives développée repose sur le postulat d'appartenance d'un matériau élasto-endommageable-glissant à la classe des matériaux standards généralisés. Ce postulat entraîne naturellement l'existence de potentiels et pseudo potentiels de dissipation devant respecter les conditions d'admissibilité thermodynamique. Dans cette section, il est proposé d'une part de présenter les potentiels de dissipation retenus et d'autre part, de décrire la forme des lois d'évolution qu'il est possible de déduire.

Endommagement et écrouissage isotrope. L'endommagement et l'écrouissage isotrope sont supposés pouvoir être caractérisés par deux variables flux de nature scalaire. La première, notée d variant entre 0 (matériau sain) et 1 (matériau totalement rompu), représente les effets de la fissuration sur la rigidité du matériau. La seconde variable, notée z, permet de représenter l'écrouissage isotrope. L'évolution de ces mécanismes est supputée associée. Il existe alors une loi de normalité entre les variations des variables flux et les gradients à un certain potentiel de dissipation, noté f_d, exprimé dans l'espace des variables forces. Ce dernier est pris sous la forme d'un critère en énergie. Son expression est la suivante 3.35 :

$$f_d(\bar{Y}, Z; Y_0) = \bar{Y} - (Z + Y_0) \tag{3.35}$$

où $\bar{Y}$ est l'énergie dissipée par endommagement et Y_0 un seuil initial. L'expression de $\bar{Y}$ est à particulariser selon le matériau que l'on considère. Du principe du maximum de la dissipation, il est possible de déduire les lois complémentaires suivantes 3.36 :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{d} = \dot{\lambda}_d \frac{\partial f_d}{\partial \bar{Y}} \\ \dot{z} = \dot{\lambda}_d \frac{\partial f_d}{\partial Z} \end{array} \right. \tag{3.36}$$

En développant les expressions 3.36 à partir de l'équation 3.35, il vient 3.37 :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{d} = \dot{\lambda}_d \\ \dot{z} = -\dot{\lambda}_d \end{array} \right. \tag{3.37}$$

Le multiplicateur de Lagrange associé au potentiel de dissipation f_d est déterminé à partir des conditions d'admissibilité plastique issues des équations de Kuhn-Tucker 3.38 :

$$\begin{cases} f_d < 0 \\ \dot{\lambda}_d > 0 \\ \dot{\lambda}_d f_d = 0 \end{cases} \tag{3.38}$$

Pour poursuivre les développements, il y a lieu de préciser la forme de la fonction de consolidation relative à l'écrouissage isotrope. Un choix est présenté dans la suite de l'exposé.

Glissement interne et écrouissage cinématique. Un mécanisme dissipatif est introduit pour représenter le glissement soit entre les lèvres des fissures dans le cas d'un béton, soit entre l'acier et le béton dans le cas de l'interface acier/béton. Le glissement interne et l'écrouissage cinématique sont caractérisés par deux variables internes, notées $\underline{\underline{\epsilon}}_\pi$ et $\underline{\underline{\alpha}}$. Elles représentent respectivement le tenseur de glissement et une variable interne tensorielle d'ordre deux associée à l'écrouissage cinématique. Cette dernière permettra de définir un tenseur des contraintes de rappel pour prendre en compte les non linéarités associées au glissement. Une évolution non associée est postulée. Il n'existe donc a priori pas de lois de normalité par rapport à un potentiel de dissipation f_π. Cependant, cette dernière peut être écrite par rapport à un pseudo potentiel de dissipation ϕ_π qui doit être précisé. Le potentiel de dissipation est choisi sous la forme d'un critère de Drucker-Prager sans seuil initial :

$$f_\pi = J_2(\underline{\underline{\sigma}}_\pi - \underline{\underline{X}}) + cI_1(< \underline{\underline{\sigma}} >_-) \tag{3.39}$$

où c est un paramètre de dilatance à identifier. Le pseudo potentiel de dissipation est choisi selon la proposition de (Armstrong et Frederick, 1996). Ce dernier s'exprime comme suit :

$$\phi_\pi = J_2(\underline{\underline{\sigma}}_\pi - \underline{\underline{X}}) + \frac{a}{2}\underline{\underline{X}} : \underline{\underline{X}} \tag{3.40}$$

où a est un paramètre à identifier. Les lois complémentaires s'écrivent donc naturellement :

$$\begin{cases} \dot{\underline{\underline{\epsilon}}}_\pi = \dot{\lambda}_\pi \frac{\partial f_\pi}{\partial \underline{\underline{\sigma}}_\pi} \\ \dot{\underline{\underline{\alpha}}} = -\dot{\lambda}_\pi \frac{\partial \phi_\pi}{\partial \underline{\underline{X}}} \end{cases} \tag{3.41}$$

Le multiplicateur de Lagrange associé au potentiel de dissipation f_π est déterminé à partir des conditions d'admissibilité plastique :

$$\begin{cases} f_\pi < 0 \\ \dot{\lambda}_\pi > 0 \\ \dot{\lambda}_\pi f_\pi = 0 \end{cases} \tag{3.42}$$

Il est important de remarquer que le glissement sera susceptible de mobiliser du frottement si et seulement si il y a contact entre les deux surfaces en présence. Autrement dit, il est possible d'avoir du glissement sans mobiliser de frottement. Ceci peut être géré assez simplement en définissant différents coefficients γ et a respectivement dans les lois d'état et d'évolution de l'écrouissage cinématique. Ainsi, il vient 3.43 :

$$\begin{cases} \gamma = \gamma_0(1 - \mathcal{H}(\mathbf{Tr}\underline{\underline{\epsilon}})) \\ a = a_0(1 - \mathcal{H}(\mathbf{Tr}\underline{\underline{\epsilon}})) \end{cases} \tag{3.43}$$

Dans cette expression, les coefficients γ_0 et a_0 sont à identifier. Les aspects portant sur l'implantation numérique de telles conditions seront évoqués dans la suite. Cette approche a été retenue pour sa simplicité, il peut toutefois être noté que cette dissymétrie aurait être introduite directement dans le potentiel d'état. Cette dernière approche semblerait permettre de conserver la continuité des dérivées par rapport à la déformation totale et éviter ainsi un traitement numérique adapté. Il pourrait donc être intéressant d'étudier cet aspect de manière approfondie.

Admissibilité thermodynamique

En vue de garantir l'admissibilité thermodynamique de la classe d'équations constitutives qui vient d'être présentée, il y a lieu de montrer que la positivité intrinsèque volumique reste positive pour tout trajet de chargement (Adelaide *et al.*, 2010). De l'équation 3.33, il vient :

$$\mathcal{D} = \underline{\underline{\sigma}}_{\pi} : \dot{\underline{\underline{\epsilon}}}_{\pi} + Y\dot{d} - \underline{\underline{X}} : \dot{\underline{\underline{\alpha}}} - Z\dot{z} \tag{3.44}$$

En utilisant les lois d'évolution 3.36 et 3.41, la dissipation s'écrit :

$$\mathcal{D} = \dot{\lambda}_{\pi}\underline{\underline{\sigma}}_{\pi} : \frac{\partial f_{\pi}}{\partial \underline{\underline{\sigma}}_{\pi}} + \dot{\lambda}_d Y + \dot{\lambda}_{\pi}\underline{\underline{X}} : \frac{\partial \phi_{\pi}}{\partial \underline{\underline{X}}} + \dot{\lambda}_d Z \tag{3.45}$$

En calculant les dérivées des différents potentiels, il vient :

$$\mathcal{D} = \frac{3}{2}\dot{\lambda}_{\pi}\underline{\underline{\sigma}}_{\pi} : \frac{\underline{\underline{\sigma}}_{\pi} - \underline{\underline{X}}}{J_2(\underline{\underline{\sigma}}_{\pi} - \underline{\underline{X}})} + \dot{\lambda}_d Y + \dot{\lambda}_{\pi}\underline{\underline{X}} : (-\frac{3}{2}\frac{\underline{\underline{\sigma}}_{\pi} - \underline{\underline{X}}}{J_2(\underline{\underline{\sigma}}_{\pi} - \underline{\underline{X}})} + a\underline{\underline{X}}) + \dot{\lambda}_d Z \tag{3.46}$$

En factorisant les différents termes, l'expression suivante peut être obtenue :

$$\mathcal{D} = \frac{3}{2}\dot{\lambda}_{\pi}\frac{(\underline{\underline{\sigma}}_{\pi} - \underline{\underline{X}}) : (\underline{\underline{\sigma}}_{\pi} - \underline{\underline{X}})}{J_2(\underline{\underline{\sigma}}_{\pi} - \underline{\underline{X}})} + a\dot{\lambda}_{\pi}\underline{\underline{X}} : \underline{\underline{X}} + \dot{\lambda}_d(Y + Z) \tag{3.47}$$

Tous les termes sont clairement positifs excepté le taux de restitution d'énergie Y qui mérite d'être étudié plus en détail. Ce dernier s'exprime par :

$$Y = \frac{\kappa}{6} < \mathbf{Tr}\underline{\underline{\epsilon}} >_{+}^{2} + \mu\underline{\underline{\epsilon}}^{d} : \underline{\underline{\epsilon}}^{d} - \mu(\underline{\underline{\epsilon}}^{d} - \underline{\underline{\epsilon}}_{\pi}) : (\underline{\underline{\epsilon}}^{d} - \underline{\underline{\epsilon}}_{\pi}) = Y_N^{+} + Y_d - Y_{\pi} \tag{3.48}$$

En remarquant que Y_N^{+} est positif, il suffit de montrer que $Y_d - Y_{\pi}$ est positif. Pour cela, il est judicieux d'écrire les équations incrémentales correspondantes sur un intervalle de pseudo temps $[t_0, t_f]$:

$$Y_d - Y_{\pi} = \int_{t_0}^{t_f} \dot{Y}_d - \dot{Y}_{\pi} dt = 2\mu \int_{t_0}^{t_f} \underline{\underline{\epsilon}}^{d} : \dot{\underline{\underline{\epsilon}}}^{d} - (\underline{\underline{\epsilon}}^{d} - \underline{\underline{\epsilon}}_{\pi}) : (\dot{\underline{\underline{\epsilon}}}^{d} - \dot{\underline{\underline{\epsilon}}}_{\pi}) dt \tag{3.49}$$

En notant que l'écrouissage cinématique sature, il peut être déduit, qu'à chaque pas de temps, après convergence de l'algorithme d'intégration locale, il vient :

$$\dot{\underline{\underline{\epsilon}}}^{d} = \dot{\underline{\underline{\epsilon}}}_{\pi} \tag{3.50}$$

Si l'on reporte la condition 3.50 dans 3.49, il peut être déduit que :

$$Y_d - Y_{\pi} = 2\mu \int_{t_0}^{t_f} \underline{\underline{\epsilon}}^{d} : \dot{\underline{\underline{\epsilon}}}^{d} dt = \mu\underline{\underline{\epsilon}}^{d} : \underline{\underline{\epsilon}}^{d} \geq 0 \tag{3.51}$$

Finalement, le taux de restitution d'énergie reste positif pour tout trajet de chargement. Il s'en suit que la dissipation intrinsèque volumique est positive, c'est-à-dire que :

$$\mathcal{D} \geq 0 \tag{3.52}$$

3.3.2 Application à l'interface acier/béton en présence de corrosion

Dans cette section, il est proposé de particulariser les équations constitutives précédemment présentées au cas du comportement de l'interface acier/béton en présence de corrosion. Pour cela, dans un premier temps, la partie mécanique (en l'absence de corrosion) de la loi constitutive proposée est présentée puis, dans un second temps, une manière de prendre en compte le phénomène de corrosion est exposé. L'ensemble des travaux présentés dans cette section peut être trouvé dans (Richard *et al.*, 2010g), (Ragueneau *et al.*, 2010), (Richard *et al.*, 2009d) et (Richard *et al.*, 2009c).

Interface acier/béton en l'absence de corrosion

Mécanismes élémentaires. Il existe deux modes de rupture essentiels. Ces derniers sont appelés mode I (ouverture) et mode II (glissement par cisaillement). Le premier apparaît surtout lorsqu'un phénomène extérieur a pour effet de générer des contraintes radiales de traction à l'interface comme par exemple la corrosion. Le second mode, quant à lui, est sollicité dans la plupart des cas de fonctionnement d'éléments de structure en béton armé dès lors que l'armature se trouve mise en traction. Il peut être remarqué qu'il existe une dissymétrie entre ces deux modes de dégradation. En effet, la résistance de pic exhibée en mode I est bien inférieure à celle exhibée en mode II. Par ailleurs, il peut être noté que lors d'un mode de refermeture radiale (mode I inversé), l'interface acier/béton se dégrade de manière tout à fait négligeable. C'est en ce sens qu'elle peut être considérée comme sujette aux effets unilatéraux. Un des facteurs majeurs agissant sur l'apparition de ces modes de rupture est le confinement, qu'il soit de nature active (étreintes) ou passive (aciers transversaux). Il y a donc lieu de le considérer.

Énergie dissipée par endommagement. Dans la section précédente, il a été montré que l'énergie dissipée par endommagement doit être particularisée selon la nature du comportement que l'on souhaite modéliser. Dans le cas de l'interface acier/béton, une dissymétrie entre les modes I et II existe. Pour prendre en compte ce trait de comportement, l'approche proposée par (Ragueneau *et al.*, 2006) a été retenue. Un critère de Drucker-Prager écrit en terme de taux d'énergie est considéré. Ainsi, il vient :

$$\bar{Y} = \alpha_0 Y_N^+ + Y_d \tag{3.53}$$

où α_0 est un paramètre matériau à identifier gérant la dissymétrie entre les énergies dissipées en mode I et II, Y_N^+ est le taux d'énergie dissipée en mode I et Y_d le taux d'énergie dissipée en mode II. Ces deux taux d'énergie peuvent être exprimés par :

$$\left\{ \begin{array}{l} Y_N^+ = \frac{\kappa}{6} < \mathbf{Tr}\underline{\underline{\epsilon}} >_+^2 \\ Y_d = \mu \underline{\underline{\epsilon}}^d : \underline{\underline{\epsilon}}^d \end{array} \right. \tag{3.54}$$

Le potentiel de dissipation s'exprime de la manière suivante :

$$f_d(\bar{Y}; Z, Y_0) = \alpha_0 Y_N^+ + Y_d - (Z + Y_0) \tag{3.55}$$

Fonction de consolidation. Le choix d'une expression de la fonction de consolidation H est nécessaire pour définir entièrement le mécanisme d'endommagement. Le choix proposé par (La-Borderie, 1991) semble être simple, physiquement acceptable et il permet l'intégration explicite des lois d'évolution relatives aux variables d'endommagement et d'écrouissage isotrope. Ainsi, la fonction de consolidation s'exprime par :

$$H(z) = \frac{1}{A_d}(-z + \mathbf{ln}(1+z)) \tag{3.56}$$

où A_d est un paramètre qui gère la fragilité du comportement. Ainsi, la force thermodynamique associée à l'écrouissage isotrope devient :

$$Z = \frac{dH(z)}{dz} = \frac{-z}{A_d(1+z)} \tag{3.57}$$

Les lois d'évolution des variables d'endommagement et d'écrouissage isotrope peuvent donc être intégrées de manière explicite en utilisant la condition de cohérence :

$$\dot{f}_d(\bar{Y}; Z, Y_0) = 0 \tag{3.58}$$

En développant puis en intégrant la condition de cohérence, l'expression suivante de la variable d'endommagement peut être obtenue :

$$d = 1 - \frac{1}{1 + A_d(\alpha_0 Y_N^+ + Y_d - Y_0)} \tag{3.59}$$

Synthèse des équations constitutives. L'ensemble des équations constitutives permettant de décrire le comportement mécanique de l'interface acier/béton en l'absence de corrosion est résumé ci-dessous.

Lois d'état

$$\begin{array}{lcl} \underline{\underline{\sigma}} & = & \frac{\kappa}{3}((1-d) < \mathbf{Tr}\underline{\underline{\epsilon}} >_+ + < \mathbf{Tr}\underline{\underline{\epsilon}} >_-)\underline{\underline{\delta}} + 2\mu(1-d)\underline{\underline{\epsilon}}^d + 2\mu d(\underline{\underline{\epsilon}}^d - \underline{\underline{\epsilon}}_\pi) \\ \underline{\underline{\sigma}}_\pi & = & 2\mu d(\underline{\underline{\epsilon}}^d - \underline{\underline{\epsilon}}_\pi) \\ Y & = & \frac{\kappa}{6} < \mathbf{Tr}\underline{\underline{\epsilon}} >_+^2 + \mu\underline{\underline{\epsilon}}^d : \underline{\underline{\epsilon}}^d - \mu(\underline{\underline{\epsilon}}^d - \underline{\underline{\epsilon}}_\pi) : (\underline{\underline{\epsilon}}^d - \underline{\underline{\epsilon}}_\pi) \\ Z & = & \frac{-z}{A_d(1+z)} \\ \underline{\underline{X}} & = & \gamma\underline{\underline{\alpha}} \end{array} \tag{3.60}$$

Lois d'évolution

$$\begin{array}{lcl} d & = & 1 - \frac{1}{1+A_d(\alpha_0 Y_N^+ + Y_d - Y_0)} \\ z & = & -1 + \frac{1}{1+A_d(\alpha_0 Y_N^+ + Y_d - Y_0)} \\ \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}_\pi & = & \dot{\lambda}_\pi \frac{\partial f_\pi(\underline{\underline{\sigma}}_\pi ; \underline{\underline{X}})}{\partial \underline{\underline{\sigma}}_\pi} \\ \underline{\underline{\dot{\alpha}}} & = & -\dot{\lambda}_\pi \frac{\partial \phi_\pi(\underline{\underline{\sigma}}_\pi ; \underline{\underline{X}})}{\partial \underline{\underline{X}}} \end{array} \tag{3.61}$$

Interface acier/béton en présence de corrosion

Démarche adoptée et difficultés. Nous nous intéressons maintenant à la prise en compte du phénomène de corrosion. Parmi l'ensemble des effets de ce phénomène sur le comportement mécanique de l'interface acier/béton, ceux relatifs au comportement de l'acier ne sont pas considérés. En effet, il est supposé que ces derniers sont pris en compte dans le modèle constitutif d'acier, comme proposé par (Ouglova, 2004). Ainsi, trois effets sont considérés : les variations de l'adhérence acier/béton, le caractère granulaire des produits de corrosion et le gonflement des produits de corrosion.

Avant de présenter la démarche de modélisation adoptée, il semble essentiel de préciser comment il est possible de quantifier l'intensité de la corrosion. Il est d'usage dans la littérature de considérer une quantité macroscopique, appelée degré de corrosion, généralement notée T_c. Plusieurs définitions existent. Parmi les plus utilisées, notons-en deux :

$$T_c(t) = 100(1 - \frac{S(t)}{S(t_0)}) \tag{3.62}$$

où, t est le temps considéré, $S(t)$ est la section d'acier au temps t et $S(t_0)$ est la section d'acier initiale. Autrement dit, le degré de corrosion peut être exprimé en terme de perte de section d'acier, ou encore :

$$T_c(t) = 100(1 - \frac{m(t)}{m(t_0)}) \tag{3.63}$$

où $m(t)$ est la masse de l'élément de structure considérée au temps t et $m(t_0)$ sa masse initiale. Quelque soit sa forme, cet indicateur macroscopique renseigne sur l'intensité du phénomène de

corrosion. Dans la suite de cette étude, cet indicateur est considéré comme une mesure macroscopique de l'état d'avancement de la corrosion.

La démarche adoptée se décompose en trois parties. En premier lieu, les variations de l'adhérence acier/béton sont prises en compte via le mécanisme d'endommagement. En effet, un élargissement ou un rétrécissement initial de cette surface seuil permet de gérer une augmentation ou une diminution de l'adhérence acier/béton. En second lieu, le caractère granulaire des produits de corrosion est pris en compte en introduisant une hypothèse sur la nature de ce mécanisme. En effet, l'expérience a permis de mettre en évidence que les produits de corrosion tendent à se rigidifier avec l'intensité de l'état de contrainte auquel ils sont soumis. Cela peut s'expliquer en supposant que la rouille remplit non seulement les pores du béton voisin de l'interface mais devient aussi de plus en plus compacte sous l'effet des contraintes de compression. Ainsi, l'approche proposée par (Burlion *et al.*, 2000) pour modélisation de la compaction du béton en dynamique a été adaptée. Cette dernière repose sur l'utilisation du critère de Gurson, initialement proposé par (Gurson, 1977) puis modifié par (Needleman et Tvergaard, 1984). Davantage de détails portant sur la formulation de ce mécanisme sont donnés dans la suite. En dernier lieu, le gonflement des produits de corrosion pouvant provoquer la fissuration du béton est considéré. Il doit être introduit de manière couplé aux deux effets précédents. Pour cela, il est possible d'introduire un nouveau tenseur de déformation, supposé sphérique, que l'on décompose en deux parties : l'une liée au gonflement (extension) et l'autre liée aux déformations anélastiques des produits de corrosion lorsqu'ils sont soumis à un état de contrainte de compression. La prise en compte d'un tel phénomène soulève le problème de la cohérence de l'échelle de temps lors de la conduite d'un calcul.

En effet, comme il a été mentionné précédemment, le phénomène de corrosion est supposé pouvoir être mesuré par un degré de corrosion dépendant du temps observable (généralement exprimé en années). Autrement dit, le gonflement des produits de corrosion à l'interface n'intervient pas sur la même échelle de temps que celle liée au chargement mécanique classique (force imposée, déplacement imposé). Ainsi, pour que la formulation proposée soit thermodynamiquement cohérente, il est nécessaire de distinguer ces deux échelles de temps : temps observable et pseudo temps. Plus de détails sont donnés dans ce qui suit. Un calcul complet, dans le sens où les trois traits de comportement sont considérés, doit donc être conduit en deux phases : une première phase durant laquelle un gonflement est appliqué à l'interface et une seconde phase durant laquelle un chargement mécanique peut être appliqué.

Déformations associées aux produits de corrosion et potentiel d'état enrichi. Le mécanisme de déformation associé aux produits de corrosion est représenté par un tenseur de déformation $\underline{\underline{\epsilon}}_r(t,\underline{x})$. En supposant que la corrosion agit essentiellement de manière radiale, ce tenseur peut être supposé purement sphérique. Ainsi, il vient :

$$\underline{\underline{\epsilon}}_r(t,\underline{x}) = \frac{1}{3}\mathbf{Tr}\underline{\underline{\epsilon}}_r(t,\underline{x})\underline{\underline{\delta}} \tag{3.64}$$

Précédemment, il a été mentionné que les produits de corrosion pouvaient être sujets d'une part à une extension et, d'autre part, à une contraction dans le cas d'un état de contrainte de compression. Ainsi, la décomposition en parties positive et négative est utilisée :

$$\underline{\underline{\epsilon}}_r(t,\underline{x}) = \frac{1}{3}(< \mathbf{Tr}\underline{\underline{\epsilon}}_r(t,\underline{x}) >_+ + < \mathbf{Tr}\underline{\underline{\epsilon}}_r(t,\underline{x}) >_-)\underline{\underline{\delta}} \tag{3.65}$$

La partie positive représente donc une extension et la partie négative, une contraction. L'extension est la signature du gonflement des produits de corrosion et, par conséquent, elle ne dépend

pas du pseudo temps mais du temps observable t_0. Ainsi, l'équation 3.65 devient :

$$\underline{\underline{\epsilon}}_r(t,\underline{x}) = \frac{1}{3}(< \mathbf{Tr}\underline{\underline{\epsilon}}_r(t_0,\underline{x}) >_+ + < \mathbf{Tr}\underline{\underline{\epsilon}}_r(t,\underline{x}) >_-)\underline{\underline{\delta}} \tag{3.66}$$

Grâce à cette décomposition, le terme lié au gonflement peut être géré à l'aide d'une équation extérieure tandis que le second terme l'est par une loi d'évolution classique. Pour prendre en compte cette nouvelle variable interne, le potentiel d'état doit être enrichi. En se fondant sur le potentiel d'état proposé dans le cas de la thermoélasticité linéaire (Lemaître et Chaboche, 1985), l'expression 3.26 peut être enrichie comme suit :

$$\begin{array}{l}\rho\Psi = \frac{\kappa}{6}((1-d) < \mathbf{Tr}\underline{\underline{\epsilon}} >_+^2 + < \mathbf{Tr}(\underline{\underline{\epsilon}} - \underline{\underline{\epsilon}}_r) >_-^2) + (1-d)\mu\underline{\underline{\epsilon}}^d : \underline{\underline{\epsilon}}^d + \\ d\mu(\underline{\underline{\epsilon}}^d - \underline{\underline{\epsilon}}_\pi) : (\underline{\underline{\epsilon}}^d - \underline{\underline{\epsilon}}_\pi) + \frac{1}{2}\gamma\underline{\underline{\alpha}} : \underline{\underline{\alpha}} + H(z) + \frac{\kappa}{6}\mathbf{Tr}\underline{\underline{\epsilon}} < \mathbf{Tr}\underline{\underline{\epsilon}}_r(t_0) >_+\end{array} \tag{3.67}$$

Dans les notations, le pseudo temps t a été omis lorsqu'il n'y a pas de confusion possible. En revanche, pour bien distinguer le terme fonction du temps observable t_0, ce dernier a été noté explicitement. Il peut être remarqué qu'un couplage d'état intervient entre la partie sphérique de la déformation totale et le tenseur de déformation associé aux produits de corrosion.

Lois d'état. Considérant le potentiel d'état exprimé par l'équation 3.67, les lois d'état supplémentaires qui peuvent être déduites sont les suivantes :

$$\left\{\begin{array}{lcl}\underline{\underline{\sigma}} = \rho\frac{\partial\Psi}{\partial\underline{\underline{\epsilon}}} & = & \frac{\kappa}{3}((1-d) < \mathbf{Tr}\underline{\underline{\epsilon}} >_+ + < \mathbf{Tr}(\underline{\underline{\epsilon}} - \underline{\underline{\epsilon}}_r) >_-)\underline{\underline{\delta}} + 2\mu(1-d)\underline{\underline{\epsilon}}^d + \\ & & 2\mu d(\underline{\underline{\epsilon}}^d - \underline{\underline{\epsilon}}_\pi) + \frac{\kappa}{3} < \mathbf{Tr}\underline{\underline{\epsilon}}(t_0) >_+ \underline{\underline{\delta}} \\ \underline{\underline{\sigma}}_r = -\rho\frac{\partial\Psi}{\partial\underline{\underline{\epsilon}}_r} & = & \frac{\kappa}{3} < \mathbf{Tr}(\underline{\underline{\epsilon}} - \underline{\underline{\epsilon}}_r) >_- \underline{\underline{\delta}}\end{array}\right. \tag{3.68}$$

Il est possible de remarquer que l'expression des contraintes de Cauchy est enrichie par deux termes additionnels. Le premier est lié à l'anélasticité des produits de corrosion lorsqu'ils sont sujets à un état de contrainte de compression et le second représente une pression hydrostatique initiale liée au gonflement des produits de corrosion. Naturellement, un nouveau tenseur des contraintes lié aux produits de corrosion peut être défini. Ce dernier sera utilisé pour gérer l'évolution des déformations anélastiques.

Evolution du tenseur des déformations associées aux produits de corrosion. La notion de loi d'évolution, dans un contexte où aucun effet différé n'est considéré, est liée aux variables internes fonction du pseudo temps. Dans le cas particulier du tenseur des déformations associées aux produits de corrosion, il vient :

$$\dot{\underline{\underline{\epsilon}}}_r(t,\underline{x}) = \frac{1}{3} < \mathbf{Tr}\dot{\underline{\underline{\epsilon}}}_r(t,\underline{x}) >_- \underline{\underline{\delta}} \tag{3.69}$$

Ainsi, seule la partie instantanée est gérée de manière classique, c'est-à-dire, en introduisant un potentiel de dissipation et en s'appuyant sur le principe du maximum de dissipation. La partie fonction du temps observable est donc gérée par une équation externe. Dans la suite, l'évolution de ces deux termes est précisée.

Le tenseur des déformations anélastiques, fonction du pseudo temps, doit permettre de représenter le caractère rigidifiant des produits de corrosion lorsque ces derniers sont soumis à un état de contrainte de compression. Cela peut être réalisé en se fondant sur l'approche proposée par (Burlion *et al.*, 2000), élaborée pour décrire le comportement du béton en compaction en présence d'effets dynamiques. Ainsi, le potentiel de dissipation s'exprime comme suit :

$$f_r(\underline{\underline{\sigma}}_r;\sigma_M,f^\star,(q_i)_{i=1,2,3}) = \frac{3J_2(\underline{\underline{\sigma}}_r)}{\sigma_M^2} + 2q_1f^\star\mathbf{ch}(q_2\frac{I_1(\underline{\underline{\sigma}}_r)}{2\sigma_M}) - (1+(q_3f^\star)^2) \tag{3.70}$$

où $(q_i)_{i=1,2,3}$ sont des paramètres matériaux à identifier, σ_M la contrainte d'écrouissage et $f^\star$ la fraction volumique des vides à l'interface. L'expression 3.70 peut être simplifiée en utilisant le fait que le tenseur des déformations anélastiques est sphérique :

$$f_r(\underline{\underline{\sigma}}_r;\sigma_M,f^\star,(q_i)_{i=1,2,3}) = 2q_1f^\star\mathbf{ch}(q_2\frac{I_1(\underline{\underline{\sigma}}_r)}{2\sigma_y}) - (1+(q_3f^\star)^2) \tag{3.71}$$

Le principe du maximum de la dissipation permet de déduire la forme des lois d'évolution pour chacune des variables σ_M, $f^\star$ et $\underline{\underline{\epsilon}}_r$:

$$\left\{\begin{array}{l} \dot{\underline{\underline{\epsilon}}}_r = \dot{\lambda}_r\frac{\partial f_r}{\partial \underline{\underline{\sigma}}_r} \\ \dot{\epsilon_M} = \dot{\lambda}_r\frac{\partial f_r}{\partial \sigma_M} \\ \dot{f^\star} = kf^\star(1-f^\star) < \mathbf{Tr}(\dot{\underline{\underline{\epsilon}}}_r) >_- \end{array}\right. \tag{3.72}$$

Notons que la loi d'évolution gérant la fraction volumique des pores $f^\star$, peut être vue comme une équation externe. Il peut être remarqué qu'aucune règle d'écrouissage n'a été introduite jusqu'ici. Pour cela, le principe d'équivalence énergétique entre les échelles microscopique et mésoscopique introduit par (Needleman et Tvergaard, 1984) est invoqué :

$$\underline{\underline{\sigma}}_r : \dot{\underline{\underline{\epsilon}}}_r = (1-f^\star)\sigma_M\dot{\epsilon_M} \tag{3.73}$$

Ce principe traduit le fait que toute l'énergie est dissipée dans la matrice cimentaire. La règle d'écrouissage est postulée sous la forme suivante :

$$\left\{\begin{array}{lcll} \sigma_M & = & E\epsilon_M & \text{si} \quad \sigma_M \leq \sigma_y \\ \sigma_M & = & \sigma_y(\frac{E\epsilon_M}{\sigma_y})^{\frac{1}{n}} & \text{si} \quad \sigma_M > \sigma_y \end{array}\right. \tag{3.74}$$

Les caractéristiques élastiques de l'interface κ_0 et μ_0 sont supposées variables avec la fraction volumique des pores dans le but de bien représenter le comportement rigidifiant des produits de corrosion sollicités en compression. Ainsi, d'après la théorie de Mori et Tanaka, les paramètres élastiques homogénéisés peuvent être calculés explicitement pour un coefficient de Poisson égal à $0,2$. Ils s'expriment donc comme suit :

$$\left\{\begin{array}{l} \kappa(f^\star) = \frac{4\kappa_0\mu_0(1-f^\star)}{4\mu_0+3\kappa_0f^\star} \\ \mu(f^\star) = \frac{\mu_0(1-f^\star)}{1+\frac{6\kappa_0+12\mu_0}{9\kappa_0+8\mu_0}f^\star} \end{array}\right. \tag{3.75}$$

où κ_0 et μ_0 sont respectivement le coefficient de compressibilité et le module de cisaillement correspondant à la fraction volumique initiale des vides (souvent prise égale à $0,2$ par analogie au béton).

L'évolution des déformations de gonflement initiales est gérée par une équation externe, faisant intervenir le degré de corrosion macroscopique ainsi que le coefficient d'expansion des produits de corrosion $\nu_{\mathbf{ox}}$. En faisant l'hypothèse que la corrosion se traduit par une expansion uniforme sur l'ensemble du pourtour d'une section droite, l'expression reliant la déformation de gonflement au degré de corrosion s'exprime par :

$$< \underline{\underline{\epsilon}}_r(t_0) >_+ = \frac{\nu_{\mathbf{ox}}}{2e}D_0\sqrt{T_c(t_0)} \tag{3.76}$$

où e est une épaisseur, D_0 est le diamètre initial de l'armature, $T_c(t_0)$ le degré de corrosion exprimé en perte de masse au temps t_0. Le coefficient de gonflement est généralement pris égale à 2. Il peut être noté que ce paramètres peut, dans certains cas, être délicat à identifier. Par ailleurs, l'épaisseur e n'a pas besoin d'être identifiée explicitement car elle est intégrée dans l'expression des coefficients élastiques dans le cas d'une formulation de type élément joint sans épaisseur.

Evolution de l'endommagement. Précédemment, il a été mentionné que les variations de l'adhérence entre l'acier et le béton pouvaient être prises en compte en élargissant ou en rétrécissant la surface seuil initiale gérant l'endommagement. Cela a pour effet de créer soit un retard dans l'évolution de l'endommagement soit au contraire, un endommagement initial. Pour cela, le potentiel de dissipation est modifié comme suit :

$$f_d(\bar{Y}; Z, Y_0, Y_r(t_0)) = \alpha_0 Y_N^+ + Y_d - (Z + Y_0 + W(Y_r(t_0))) \tag{3.77}$$

où Y_r est le taux d'énergie associé aux déformations de gonflement et W une fonction à identifier. De manière plus précise, le taux d'énergie associé aux déformations de gonflement, peut être défini comme suit :

$$Y_r(t_0) = \frac{\kappa}{6} < \mathbf{Tr}\underline{\underline{\epsilon}}_r(t_0) >_+^2 \tag{3.78}$$

Une difficulté majeure réside dans l'identification de la fonction W. Ce point est discuté en détail dans la section 3.6. L'expression de la variable d'endommagement est donc modifiée. En effet, en procédant à l'intégration explicite de la condition de cohérence, il vient :

$$d = 1 - \frac{1}{1 + A_d(\alpha_0 Y_N^+ + Y_d - (Y_0 + W(Y_r(t_0))))} \tag{3.79}$$

Synthèse des équations constitutives. L'ensemble des équations constitutives permettant de décrire le comportement mécanique de l'interface acier/béton en présence de corrosion est résumé ci-dessous.

Lois d'état

$$\begin{array}{lcl}
\underline{\underline{\sigma}} & = & \frac{\kappa}{3}((1-d) < \mathbf{Tr}\underline{\underline{\epsilon}} >_+ + < \mathbf{Tr}(\underline{\underline{\epsilon}} - \underline{\underline{\epsilon}}_r) >_-)\underline{\underline{\delta}} + 2\mu(1-d)\underline{\underline{\epsilon}}^d + \\
 & & 2\mu d(\underline{\underline{\epsilon}}^d - \underline{\underline{\epsilon}}_\pi) + \frac{\kappa}{3} < \mathbf{Tr}\underline{\underline{\epsilon}}_r(t_0) >_+ \\
\underline{\underline{\sigma}}_\pi & = & 2\mu d(\underline{\underline{\epsilon}}^d - \underline{\underline{\epsilon}}_\pi) \\
\underline{\underline{\sigma}}_r & = & \frac{\kappa}{3} < \mathbf{Tr}(\underline{\underline{\epsilon}} - \underline{\underline{\epsilon}}_r) >_- \underline{\underline{\delta}} \\
Y & = & -\frac{\kappa}{6} < \mathbf{Tr}\underline{\underline{\epsilon}} >_+^2 - \mu\underline{\underline{\epsilon}}^d : \underline{\underline{\epsilon}}^d + \mu(\underline{\underline{\epsilon}}^d - \underline{\underline{\epsilon}}_\pi) : (\underline{\underline{\epsilon}}^d - \underline{\underline{\epsilon}}_\pi) \\
Z & = & \frac{-z}{A_d(1+z)} \\
\underline{\underline{X}} & = & \gamma\underline{\underline{\alpha}}
\end{array} \tag{3.80}$$

Lois d'évolution

$$\begin{array}{lcl}
d & = & 1 - \frac{1}{1+A_d(\alpha_0 Y_N^+ + Y_d - (Y_0 + W(Y_r(t_0))))} \\
z & = & -1 + \frac{1}{1+A_d(\alpha_0 Y_N^+ + Y_d - (Y_0 + W(Y_r(t_0))))} \\
\dot{\underline{\underline{\epsilon}}}_\pi & = & \dot{\lambda}_\pi \frac{\partial f_\pi(\underline{\underline{\sigma}}_\pi; \underline{\underline{X}})}{\partial \underline{\underline{\sigma}}_\pi} \\
\dot{\underline{\underline{\alpha}}} & = & -\dot{\lambda}_\pi \frac{\partial \phi_\pi(\underline{\underline{\sigma}}_\pi; \underline{\underline{X}})}{\partial \underline{\underline{X}}} \\
< \dot{\underline{\underline{\epsilon}}}_r >_- & = & \dot{\lambda}_r \frac{\partial f_r}{\partial \underline{\underline{\sigma}}_r} \\
< \underline{\underline{\epsilon}}_r(t_0) >_+ & = & \frac{\nu_{ox}}{2e} D_0 \sqrt{T_c(t)}
\end{array} \tag{3.81}$$

3.3.3 Application au béton

Dans cette section, il est proposé de s'intéresser au cas du béton. Les équations constitutives couplant élasticité, endommagement et glissement interne présentées précédemment sont donc particularisées. L'ensemble est travaux présentés dans cette section peut être trouvé dans (Richard *et al.*, 2010h), (Ragueneau *et al.*, 2010), (Richard *et al.*, 2009e) et (Richard *et al.*, 2009b).

Mécanismes élémentaires

Le béton est de loin un des matériaux quasi-fragiles les plus répandus. Il présente une dissymétrie de comportement entre la traction et la compression. Fragile en traction et plus ductile en compression, le béton est un matériau dont la principale cause de dégradation est la fissuration. Le premier mécanisme de dégradation qu'il y a lieu de prendre en compte est l'endommagement. Il peut être noté que ce dernier doit être géré de manière dissymétrique pour bien rendre compte des observations expérimentales. Par ailleurs, lorsque le béton est soumis à des cycles de charge/décharge, des déformations résiduelles se manifestent. Ces dernières constituent une caractéristique importante à prendre en compte. Dans le cas particulier d'un cycle de traction/compression, les fissures créées en traction tendent à se refermer, conduisant à une restauration de la rigidité élastique initiale. Enfin, essentiellement dans un cas de chargement de compression cyclique, des phénomènes hystérétiques apparaissent comme la signature d'un frottement issu d'un glissement ayant lieu entre les lèvres des fissures. L'ensemble de ces mécanismes rendent le comportement du béton complexe à modéliser. Il semble néanmoins nécessaire, dans le but de posséder des modèles constitutifs prédictifs, de proposer une formulation qui prend en compte le plus fidèlement possible ces différentes caractéristiques.

Énergie dissipée par endommagement

Dans le but de gérer de manière efficace la dissymétrie en traction/compression, il est proposé de relier l'endommagement aux extensions. Pour cela, les extensions directes (traction) sont distinguées des extensions induites (effets Poisson en compression). Ainsi, il est proposé de considérer le taux d'énergie dissipé par endommagement suivant :

$$\bar{Y} = \beta Y_{\mathbf{Dir}} + Y_{\mathbf{Ind}} \tag{3.82}$$

où $Y_{\mathbf{Dir}}$ est le taux d'énergie dissipé lié aux extensions directes, $Y_{\mathbf{Ind}}$ le taux d'énergie dissipé lié aux extensions induites et β un paramètre matériau permettant de mieux gérer la réponse multiaxiale. Ces taux d'énergie peuvent être définis comme suit :

$$\begin{aligned} Y_{\mathbf{Dir}} &= \tfrac{1}{2}\underline{\underline{\epsilon}}_{\mathbf{Dir}} : \underline{\underline{\underline{\underline{C}}}} : \underline{\underline{\epsilon}}_{\mathbf{Dir}} \\ Y_{\mathbf{Ind}} &= \tfrac{1}{2}\underline{\underline{\epsilon}}_{\mathbf{Ind}} : \underline{\underline{\underline{\underline{C}}}} : \underline{\underline{\epsilon}}_{\mathbf{Ind}} \end{aligned} \tag{3.83}$$

où $\underline{\underline{\epsilon}}_{\mathbf{Dir}}$ est le tenseur des extensions directes et $\underline{\underline{\epsilon}}_{\mathbf{Ind}}$ le tenseur des extensions induites. Ces deux tenseurs peuvent être évalués à partir du tenseur des déformations totales comme suit :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\epsilon}}_{\mathbf{Dir}} &= <\underline{\underline{\epsilon}}>_+ \mathcal{H}(<\underline{\underline{\epsilon}}>_+ : <\underline{\underline{\sigma}}>_+) \\ \underline{\underline{\epsilon}}_{\mathbf{Ind}} &= <\underline{\underline{\epsilon}}>_+ (1 - \mathcal{H}(<\underline{\underline{\epsilon}}>_+ : <\underline{\underline{\sigma}}>_+)) \end{aligned} \tag{3.84}$$

où $\mathcal{H}$ est la fonction d'Heaviside. Il est toutefois essentiel de noter que les tenseurs d'extensions sont déterminés à partir de de la contrainte de test. En effet, ce choix nous permet de conserver la caractère explicite de l'endommagement. Bien que nous ne l'ayons pas constaté dans le cadre de la présente étude, certains états de contraintes complexes pourraient nécessité de considérer la contrainte actualisée, entraînant la perte du caractère explicite de l'endommagement. Afin d'illustrer les définitions des tenseurs d'extensions directes et induites, considérons le cas d'un chargement uniaxial de traction caractérisé par une contrainte $\sigma_0 > 0$. Les tenseurs des contraintes de Cauchy et des déformations totales prennent les formes respectives :

$$[\sigma_{ij}] = \begin{pmatrix} \sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad [\epsilon_{ij}] = \begin{pmatrix} \epsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{22} \end{pmatrix} \tag{3.85}$$

où $\epsilon_{11} > 0$ et $\epsilon_{22} < 0$. En utilisant les définitions 3.84, les tenseurs d'extensions directes et induites s'écrivent :

$$[(\epsilon_{\mathbf{Dir}})_{ij}] = \begin{pmatrix} \epsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad [(\epsilon_{\mathbf{Ind}})_{ij}] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.86}$$

Si un chargement de compression est maintenant considéré, c'est-à-dire $\sigma_0 < 0$, le tenseur des déformations totales conserve la même forme que celle présentée par les équations 3.85 avec $\epsilon_{11} < 0$ et $\epsilon_{22} > 0$.

$$[(\epsilon_{\mathbf{Dir}})_{ij}] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad [(\epsilon_{\mathbf{Ind}})_{ij}] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{22} \end{pmatrix} \tag{3.87}$$

Il est donc possible de remarquer que lors d'un chargement de traction, on a $Y_{\mathbf{Dir}} > 0$ et $Y_{\mathbf{Ind}} = 0$ et, réciproquement, lors d'un chargement de compression, on a $Y_{\mathbf{Dir}} = 0$ et $Y_{\mathbf{Ind}} > 0$. Cette propriété résulte directement de la définition des tenseurs des extensions directes et induites. Elle permet d'une part une bonne gestion de la dissymétrie traction/compression et, d'autre part, une identification plus simple des paramètres. Ce point sera discuté dans la suite. Finalement, le potentiel de dissipation lié à l'endommagement s'écrit :

$$f_d(\bar{Y}; Z, Y_0, \beta) = \beta Y_{\mathbf{Dir}} + Y_{\mathbf{Ind}} - (Z + Y_0) \tag{3.88}$$

Fonction de consolidation

La fonction de consolidation considérée dans le cas du béton s'appuie sur la forme de celle précédemment évoquée dans le cas de l'interface acier/béton. En effet, une étude de sensibilité a permis d'identifier le rôle prépondérant du paramètre A_d, présent dans l'équation 3.56. Un choix simple et robuste permettant de gérer la dissymétrie de comportement en traction/compression est de proposer la fonction suivante :

$$H(z) = (-z + \mathbf{ln}(1+z))(\frac{\mathcal{H}(\mathbf{Tr}\underline{\underline{\epsilon}})}{A_{\mathbf{Dir}}} + \frac{1 - \mathcal{H}(\mathbf{Tr}\underline{\underline{\epsilon}})}{A_{\mathbf{Ind}}}) \tag{3.89}$$

où $A_{\mathbf{Dir}}$ et $A_{\mathbf{Ind}}$ sont respectivement les fragilités liées aux extensions directes et aux extensions induites à identifier en traction et en compression. La variable force thermodynamique liée à l'écrouissage isotrope est donc :

$$Z = \frac{dH(z)}{dz} = \frac{-z}{1+z}(\frac{\mathcal{H}(\mathbf{Tr}\underline{\underline{\epsilon}})}{A_{\mathbf{Dir}}} + \frac{1 - \mathcal{H}(\mathbf{Tr}\underline{\underline{\epsilon}})}{A_{\mathbf{Ind}}}) \tag{3.90}$$

Enfin, en utilisant la condition de cohérence :

$$\dot{f}_d(\bar{Y}; Z, Y_0, \beta) = 0 \tag{3.91}$$

les lois d'évolution de la variable d'endommagement peuvent être intégrées directement. La variable d'endommagement s'exprime donc comme suit :

$$d = 1 - \frac{1}{1 + A_{\mathbf{Dir}}\mathcal{H}(\mathbf{Tr}\underline{\underline{\epsilon}})(\beta Y_{\mathbf{Dir}} - Y_0) + A_{\mathbf{Ind}}(1 - \mathcal{H}(\mathbf{Tr}\underline{\underline{\epsilon}}))(Y_{\mathbf{Ind}} - Y_0)} \tag{3.92}$$

Régularisation

Le béton, aussi bien en traction qu'en compression, se comporte de manière adoucissante. Il est donc nécessaire de régulariser le modèle lors de calculs à l'échelle de la structure en vue de limiter les phénomènes de dépendances au maillage. Dans la présente étude, l'approche non locale proposée par (Pijaudier-Cabot et Bazant, 1987) a été retenue. Le taux de restitution d'énergie gérant le mécanisme d'endommagement est rendu non local comme suit :

$$\bar{Y}^{\mathbf{nl}} = \frac{\int_{\Omega(\underline{x})} \bar{Y}(\underline{x}) w(\underline{x}, \underline{s}) d\underline{s}}{\int_{\Omega(\underline{x})} w(\underline{x}, \underline{s}) d\underline{s}} \tag{3.93}$$

où w est une fonction poids prise sous la forme d'une gaussienne. Le domaine au sein duquel est rendu non local chacune des grandeurs nécessite l'introduction d'une longueur caractéristique, généralement identifiée à partir de la taille de l'hétérogénéité maximale dans le béton. Le taux d'énergie local $\bar{Y}$ est ensuite remplacé par le taux d'énergie non local $\bar{Y}^{\mathbf{nl}}$. Cette approche, bien que consommatrice en terme de coût de calcul, permet de limiter la dépendance au maillage des résultats obtenus à la suite d'une analyse à l'échelle de la structure.

Synthèse des équations constitutives

L'ensemble des équations constitutives permettant de décrire le comportement mécanique du béton est résumé ci-dessous.

Lois d'état

$$\begin{array}{l}
\underline{\underline{\sigma}} = \frac{\kappa}{3}((1-d) < \mathbf{Tr}\underline{\underline{\epsilon}} >_+ + < \mathbf{Tr}\underline{\underline{\epsilon}} >_-)\underline{\underline{\delta}} + 2\mu(1-d)\underline{\underline{\epsilon}}^d + 2\mu d(\underline{\underline{\epsilon}}^d - \underline{\underline{\epsilon}}_\pi) \\
\underline{\underline{\sigma}}_\pi = 2\mu d(\underline{\underline{\epsilon}}^d - \underline{\underline{\epsilon}}_\pi) \\
Y = -\frac{\kappa}{6} < \mathbf{Tr}\underline{\underline{\epsilon}} >_+^2 - \mu\underline{\underline{\epsilon}}^d : \underline{\underline{\epsilon}}^d + \mu(\underline{\underline{\epsilon}}^d - \underline{\underline{\epsilon}}_\pi) : (\underline{\underline{\epsilon}}^d - \underline{\underline{\epsilon}}_\pi) \\
Z = \frac{-z}{1+z}(\frac{\mathcal{H}(\mathbf{Tr}\underline{\underline{\epsilon}})}{A_{\mathbf{Dir}}} + \frac{1-\mathcal{H}(\mathbf{Tr}\underline{\underline{\epsilon}})}{A_{\mathbf{Ind}}}) \\
\underline{\underline{X}} = \gamma\underline{\underline{\alpha}}
\end{array} \tag{3.94}$$

Lois d'évolution

$$\begin{array}{l}
d = 1 - \frac{1}{1+A_{\mathbf{Dir}}\mathcal{H}(\mathbf{Tr}\underline{\underline{\epsilon}})(\beta Y_{\mathbf{Dir}} - Y_0) + A_{\mathbf{Ind}}(1-\mathcal{H}(\mathbf{Tr}\underline{\underline{\epsilon}}))(Y_{\mathbf{Ind}} - Y_0)} \\
z = -1 + \frac{1}{1+A_{\mathbf{Dir}}\mathcal{H}(\mathbf{Tr}\underline{\underline{\epsilon}})(\beta Y_{\mathbf{Dir}} - Y_0) + A_{\mathbf{Ind}}(1-\mathcal{H}(\mathbf{Tr}\underline{\underline{\epsilon}}))(Y_{\mathbf{Ind}} - Y_0)} \\
\dot{\underline{\underline{\epsilon}}}_\pi = \dot{\lambda_\pi}\frac{\partial f_\pi(\underline{\underline{\sigma}}_\pi; \underline{\underline{X}})}{\partial \underline{\underline{\sigma}}_\pi} \\
\dot{\underline{\underline{\alpha}}} = -\dot{\lambda_\pi}\frac{\partial \phi_\pi(\underline{\underline{\sigma}}_\pi; \underline{\underline{X}})}{\partial \underline{\underline{X}}}
\end{array} \tag{3.95}$$

3.3.4 Bilan

La présente section a été consacrée à la présentation de la formulation des lois constitutives d'une part de l'interface acier/béton et, d'autre part, du béton. En premier lieu, un cadre générique permettant de coupler élasticité, endommagement isotrope et glissement interne a été présenté. Les lois d'état ainsi que les équations d'évolution ont été exposées. La consistance physique de cet ensemble d'équations constitutives a été vérifiée en montrant que la dissipation restait positive pour tout trajet de chargement. Cette propriété est obtenue grâce au fait que l'écrouissage cinématique sature. En second lieu, une particularisation de ce cadre a été proposée pour permettre la description du comportement mécanique de l'interface acier/béton en présence de corrosion. Tout d'abord, un modèle constitutif sans corrosion a été exposé puis, en introduisant

une nouvelle variable interne, les trois effets essentiels liés à la corrosion ont été considérés. En dernier lieu, un modèle constitutif simple permettant de décrire les principales caractéristiques du béton a été proposé. Ces deux lois de comportement s'appuient sur un formalisme éléments finis massifs car elles tiennent compte d'une cinématique complète. Parfois, dans certains cas d'application, il n'y a pas lieu de vouloir obtenir des informations très précises. C'est pourquoi le recours à des modèles dits simplifiés est justifié. Dans la prochaine section, une adaptation des lois constitutives présentées dans cette section est exposée dans le cadre multifibre.

3.4 Modélisation simplifiée

3.4.1 Principe général de l'approche

Parfois, lorsque des informations locales précises ne sont pas de première importance, il n'est ni nécessaire ni justifié de recourir à une modélisation de type éléments finis massifs. C'est alors que se tourner vers des approches dites simplifiées peut apparaître comme étant pertinent. Depuis 15 ans, l'approche multifibre s'est largement développée et apparaît comme une alternative aux analyses non-linéaires éléments finis classiques très coûteuses en terme de coût de calcul. En effet, les travaux menés par plusieurs équipes comme (Guedes *et al.*, 1994), (Spacone *et al.*, 1996), (Ghavamian et Mazars, 1998), (Petrangeli *et al.*, 1999) et plus récemment par (Kotronis *et al.*, 2004), (Kotronis *et al.*, 2005), (Mazars *et al.*, 2006) ont contribué à rendre l'approche multifibre fiable, robuste et peu consommatrice en terme de coût de calcul.

L'approche multifibre s'appuie sur une cinématique du type poutre Timoshenko ou Euler-Bernoulli. Un élément de structure présente donc deux niveaux de discrétisation. Le premier niveau est réalisé à travers des éléments poutre et, le second niveau consiste à discrétiser chaque section à l'aide d'éléments finis massifs classiques. Ainsi, au premier niveau, il est possible de définir les déformations généralisées (courbures, rotations, déplacements) et les contraintes généralisées (effort normal, effort tranchant, moment fléchissant), le lien entre ces deux quantités étant fait au moyen de termes de raideurs.

Les déformations de la fibre moyenne peuvent être reliées aux déformations et aux courbures de chacune des sections droites. Ainsi, les déformations axiales s'écrivent :

$$\begin{cases} \epsilon_{xx} = \overline{\epsilon}_{xx} - y\phi_z + z\phi_y \\ \gamma_{xy} = \overline{\gamma}_{xy} - z\phi_x \\ \gamma_{xz} = \overline{\gamma}_{xz} + y\phi_x \end{cases} \tag{3.96}$$

où $\overline{\epsilon}_{xx}$ est la déformation axiale, $\overline{\gamma}_{xy}$ et $\overline{\gamma}_{xz}$ sont les déformations de la fibre neutre et ϕ_x, ϕ_y et ϕ_z les courbures définies par :

$$\begin{cases} \phi_x = \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \\ \phi_y = \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \\ \phi_z = \frac{\partial \theta_z}{\partial x} \end{cases} \tag{3.97}$$

où les $(\theta_i)_{i=x,y,z}$ sont les rotations de la section $S(x)$ par rapport aux axes correspondants. En supposant la donnée de lois de comportement locales permettant de déduire les contraintes normales σ_x et de cisaillement τ_{xy} et τ_{xz}, les contraintes généralisées peuvent être déterminées

par les relations d'équivalence contraintes-sollicitations :

$$\begin{cases} N = \int_{S(x)} \sigma_x dS \\ T_y = \int_{S(x)} \tau_{xy} dS \\ T_z = \int_{S(x)} \tau_{xz} dS \\ M_x = \int_{S(x)} y\tau_{xz} - z\tau_{xy} dS \\ M_y = \int_{S(x)} z\sigma_x dS \\ M_z = -\int_{S(x)} y\sigma_x dS \end{cases} \tag{3.98}$$

Ainsi, les équations d'équilibre global peuvent être résolues à nouveau pour continuer le processus itératif de résolution. Cette approche permet de rendre compte convenablement du comportement mécanique global lors de sollicitations de traction/compression et/ou de flexion. En revanche, la prise en compte du cisaillement n'est pas trivial du fait de la cinématique imposée. La prise en compte d'une distribution de contraintes de cisaillement non uniforme est réalisée au travers des coefficients de réduction α_y et α_z, exactement égaux à $\frac{5}{6}$. Ces derniers sont introduits comme des parties multiplicatives des modules de cisaillement dans les directions y et z respectivement. La figure 3.1 illustre les propos précédents.

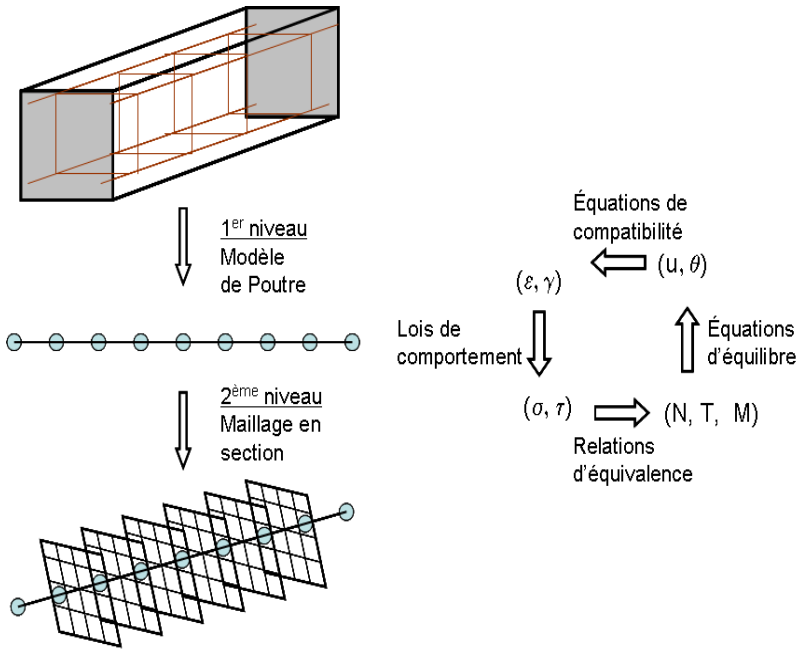


FIG. 3.1 – Principe de l'approche multifibre.

3.4.2 Application à l'interface acier/béton en présence de corrosion

Approche multifibre avec interface imparfaite

Dans la section précédente, il a été montré que l'approche multifibre nécessite de postuler des modèles constitutifs unidirectionnels pour représenter le comportement de chaque matériau en présence (en général du béton et de l'acier). Par ailleurs, l'hypothèse d'une cinématique de type poutre implique donc que les sections droites initialement planes doivent le rester. Cependant, elles ne sont pas contraintes à être perpendiculaires à la fibre moyenne. De cette hypothèse résulte le caractère parfait de l'interface entre l'acier et le béton. La prise en compte explicite du caractère imparfait de l'interface n'est donc pas autorisée par le cadre théorique de l'approche

multifibre. Toutefois, (Wang *et al.*, 2007) et (Combescure et Wang, 2007) proposent une alternative permettant de contourner le problème lié à la cinématique de type poutre. Ces auteurs appliquent cette approche au cas de l'étude à rupture des structures complexes sous chargement dynamique sévère (séisme). L'exposé réalisé dans cette section est également reporté dans (Richard *et al.*, 2010b), (Richard *et al.*, 2010f) et (Jason *et al.*, 2010).

De manière plus précise, le caractère imparfait de l'interface est pris en compte au niveau de la fibre d'acier. Soit ϵ_{xx} la déformation totale de cette fibre. Le principe de l'approche consiste à la décomposer en la somme de deux contributions : un terme de déformation propre $\epsilon_{xx}^{\mathbf{A}}$ et un terme de glissement $\epsilon_{xx}^{\mathbf{I}}$. Pour cela, un facteur de partition, noté η, est introduit comme suit :

$$\epsilon_{xx} = \eta\epsilon_{xx} + (1-\eta)\epsilon_{xx} = \epsilon_{xx}^{\mathbf{A}} + \epsilon_{xx}^{\mathbf{I}} \tag{3.99}$$

Le problème consiste donc à déterminer le facteur de partition de telle sorte que, localement, les efforts repris par l'acier et ceux déployés par l'interface acier/béton soient en équilibre. Cela peut donc être formulé comme suit :

$$\int_{S(x)} \sigma(s)dS - l_c \int_{\partial S(x)} \tau(s)d\Gamma = 0 \tag{3.100}$$

où $S(x)$ est la section courante à l'abscisse x, σ la contrainte normale associée à la déformation propre de l'armature, l_c une longueur d'ancrage (généralement prise égale à la taille de l'élément poutre courant), $\partial S(x)$ le périmètre de la section d'acier courante et enfin, τ la contrainte de cisaillement associée à la déformation de glissement de l'interface acier/béton. Il peut être noté que cette longueur aurait éventuellement pu être prise de manière variable en fonction de plusieurs paramètres tels que le taux de corrosion, l'endommagement du béton ou encore celui lié à l'interface acier/béton. Toutefois, pour des raisons de simplicité et d'absence de résultats expérimentaux de référence, cette longueur a été considérée comme constante dans le cadre de cette étude. En notant $\mathcal{L}^{\mathbf{A}}(.)$ et $\mathcal{L}^{\mathbf{I}}(.)$ les opérateurs de comportement respectivement de l'acier et de l'interface acier/béton, l'équation 3.100 devient :

$$\int_{S(x)} \mathcal{L}^{\mathbf{A}}(\epsilon_{xx}, \eta)dS - l_c \int_{\partial S(x)} \mathcal{L}^{\mathbf{I}}(\epsilon_{xx}, \eta)d\Gamma = 0 \tag{3.101}$$

Soit encore en supposant ϵ_{xx} et η constants dans l'élément :

$$\mathcal{L}^{\mathbf{A}}(\epsilon_{xx}, \eta)S(x) - l_c\mathcal{L}^{\mathbf{I}}(\epsilon_{xx}, \eta)P(x) = 0 \tag{3.102}$$

où $S(x)$ et $P(x)$ représentent respectivement l'aire de la section courante et son périmètre. L'équation 3.102 prend donc la forme d'une équation scalaire non linéaire $f(\eta) = 0$ et peut donc être résolue par une méthode de type Newton. La prochaine section est dévouée à présenter la loi d'interface acier/béton simplifiée en présence de corrosion. Cela revient donc à définir l'opérateur de comportement $\mathcal{L}^{\mathbf{I}}(.)$.

Loi de comportement simplifiée de l'interface acier/béton en présence de corrosion

La loi constitutive de l'interface acier/béton en présence de corrosion présentée précédemment nécessite donc d'être adaptée à la formulation multifibre. Pour ce faire, le seul effet dû à la corrosion qu'il est possible de considérer est la réduction d'adhérence acier/béton.

Lois d'état. Le potentiel d'état peut être pris sous la forme de l'énergie libre d'Helmholtz :

$$\rho\Psi = (1-d)\mu\epsilon_{xx}^{\mathbf{I}}\epsilon_{xx}^{\mathbf{I}} + d\mu(\epsilon_{xx}^{\mathbf{I}} - \epsilon_{xx}^{\pi,\mathbf{I}})(\epsilon_{xx}^{\mathbf{I}} - \epsilon_{xx}^{\pi,\mathbf{I}}) + \frac{\gamma}{2}\alpha\alpha + H(z) \tag{3.103}$$

où $\epsilon_{xx}^{\pi,\mathbf{I}}$ est la variable scalaire de glissement interne. Les autres notations ont été précisées précédemment. Sans revenir sur les développements de la dissipation qui ont été présentés précédemment, la première loi d'état s'écrit donc :

$$\tau = \rho\frac{\partial\Psi}{\partial\epsilon_{xx}^{\mathbf{I}}} = 2\mu(1-d)\epsilon_{xx}^{\mathbf{I}} + 2\mu d(\epsilon_{xx}^{\mathbf{I}} - \epsilon_{xx}^{\pi,\mathbf{I}}) \tag{3.104}$$

La contrainte de frottement par cisaillement liée au glissement interne s'exprime par :

$$\tau^{\pi} = -\rho\frac{\partial\Psi}{\partial\epsilon_{xx}^{\pi,\mathbf{I}}} = 2\mu d(\epsilon_{xx}^{\mathbf{I}} - \epsilon_{xx}^{\pi,\mathbf{I}}) \tag{3.105}$$

Le taux de restitution d'énergie lié à l'endommagement s'écrit :

$$Y = -\rho\frac{\partial\Psi}{\partial d} = \mu\epsilon_{xx}^{\mathbf{I}}\epsilon_{xx}^{\mathbf{I}} - \mu(\epsilon_{xx}^{\mathbf{I}} - \epsilon_{xx}^{\pi,\mathbf{I}})(\epsilon_{xx}^{\mathbf{I}} - \epsilon_{xx}^{\pi,\mathbf{I}}) \tag{3.106}$$

La contrainte de rappel est :

$$X = \rho\frac{\partial\Psi}{\partial\alpha} = \gamma\alpha \tag{3.107}$$

Enfin, la force thermodynamique associée à l'écrouissage isotrope est :

$$Z = \rho\frac{\partial\Psi}{\partial z} = \frac{dH(z)}{dz} \tag{3.108}$$

Lois d'évolution de l'endommagement et de l'écrouissage isotrope. Le mécanisme d'endommagement est géré de manière associée par une surface seuil f_d prenant la forme suivante :

$$f_d(\bar{Y}; Y_0, Z, Y_r(t_0)) = \bar{Y} - (Y_0 + Z + W(T_c(t_0))) \tag{3.109}$$

où $\bar{Y}$ s'exprime par :

$$\bar{Y} = \mu\epsilon_{xx}^{\mathbf{I}}\epsilon_{xx}^{\mathbf{I}} \tag{3.110}$$

Comme exposé précédemment, la fonction de consolidation est choisie sous la forme suivante :

$$H(z) = \frac{1}{A_d}(-z + \mathbf{ln}(1+z)) \tag{3.111}$$

Dans ces conditions, les lois d'évolution des variables d'endommagement et d'écrouissage isotrope sont les suivantes :

$$\begin{cases} \dot{d} = \dot{\lambda}_d\frac{\partial f_d(\bar{Y};Y_0,Z,W(T_c(t_0))}{\partial\bar{Y}} = \dot{\lambda}_d \\ \dot{z} = \dot{\lambda}_d\frac{\partial f_d(\bar{Y};Y_0,Z,W(T_c(t_0))}{\partial Z} = -\dot{\lambda}_d \end{cases} \tag{3.112}$$

Grâce à la forme de la fonction de consolidation H, les équations 3.112 peuvent être intégrées de manière explicite en utilisant la condition de cohérence $\dot{f}_d(\bar{Y}; Y_0, Z, W(T_c(t_0))) = 0$:

$$\begin{cases} d = 1 - \frac{1}{1+A_d(\bar{Y}-(Y_0+W(T_c(t_0))))} \\ z = -1 + \frac{1}{1+A_d(\bar{Y}-(Y_0+W(T_c(t_0))))} \end{cases} \tag{3.113}$$

Lois d'évolution du glissement interne et de l'écrouissage cinématique. Le glissement interne et l'écrouissage cinématique sont gérés de manière non associée, pour les mêmes raisons que celles évoquées précédemment. Pour cela, une surface seuil ayant la forme d'un critère de Von Mises est postulée :

$$f_\pi(\tau^\pi; X) = |\tau^\pi - X| \tag{3.114}$$

La loi d'évolution du glissement interne suit donc la loi de normalité déduite du principe du maximum de dissipation :

$$\dot{\epsilon}^{\pi,\mathbf{I}}_{xx} = \dot{\lambda}_\pi \frac{\partial f_\pi(\tau^\pi; X)}{\partial \tau^\pi} \tag{3.115}$$

La loi d'évolution de l'écrouissage cinématique requiert donc l'introduction d'un pseudo potentiel de dissipation ϕ_π :

$$\phi_\pi(\tau^\pi; X) = |\tau^\pi - X| + \frac{a}{2} XX \tag{3.116}$$

Ainsi, la loi d'évolution de l'écrouissage cinématique s'écrit :

$$\dot{\alpha} = -\dot{\lambda}_\pi \frac{\partial \phi_\pi(\tau^\pi; X)}{\partial X} \tag{3.117}$$

Les détails liés à l'implantation de cette loi sont donnés dans la suite de ce chapitre.

Synthèse des équations constitutives. Les équations constitutives permettant de décrire le comportement de l'interface acier/béton en présence de corrosion sont donc les suivantes :

Lois d'état

$$\boxed{\begin{array}{l} \tau = 2\mu(1-d)\epsilon^{\mathbf{I}}_{xx} + 2\mu d(\epsilon^{\mathbf{I}}_{xx} - \epsilon^{\pi,\mathbf{I}}_{xx}) \\ \tau^\pi = 2\mu d(\epsilon^{\mathbf{I}}_{xx} - \epsilon^{\pi,\mathbf{I}}_{xx}) \\ X = \gamma\alpha \\ Z = \frac{-z}{A_d(1+z)} \end{array}} \tag{3.118}$$

Lois d'évolution

$$\boxed{\begin{array}{l} d = 1 - \frac{1}{1+A_d(\bar{Y}-(Y_0+W(T_c(t_0))))} \\ z = -1 + \frac{1}{1+A_d(\bar{Y}-(Y_0+W(T_c(t_0))))} \\ \dot{\epsilon}^{\pi,\mathbf{I}}_{xx} = \dot{\lambda}_\pi \frac{\partial f_\pi(\tau^\pi;X)}{\partial \tau^\pi} \\ \dot{\alpha} = -\dot{\lambda}_\pi \frac{\partial \phi_\pi(\tau^\pi;X)}{\partial X} \end{array}} \tag{3.119}$$

3.4.3 Application au béton

Cette section a pour but de présenter les équations constitutives liées au modèle simplifié de béton.

Lois d'état

Le potentiel d'état exprimé à l'aide de l'énergie libre d'Helmholtz est postulé sous la forme suivante :

$$\begin{array}{rcl} \rho\Psi & = & \frac{E}{2}((1-d) < \epsilon_{xx} >^2_+ + < \epsilon_{xx} >^2_-) + \\ & & (1-d)\mu\boldsymbol{\epsilon}.\boldsymbol{\epsilon} + \mu d(\boldsymbol{\epsilon} - \boldsymbol{\epsilon}^\pi).(\boldsymbol{\epsilon} - \boldsymbol{\epsilon}^\pi) + \frac{\gamma}{2}\boldsymbol{\alpha}.\boldsymbol{\alpha} \\ & & + H(z) \end{array} \tag{3.120}$$

où $\boldsymbol{\epsilon}$ est le vecteur des demi distorsions $\boldsymbol{\epsilon} = (\epsilon_{xy}\ \epsilon_{xz})^t$, $\boldsymbol{\epsilon}^\pi$ le vecteur des demi distorsions de glissement interne $\boldsymbol{\epsilon}^\pi = (\epsilon^\pi_{xy}\ \epsilon^\pi_{xz})^t$, $\boldsymbol{\alpha}$ le vecteur des variables d'écrouissage cinématique $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_{xy}\ \alpha_{xz})$ et l'opérateur (.) représente le produit scalaire usuel dans $\mathbb{R}^2$. Ainsi, les lois d'état définissant les contraintes de Cauchy s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{xx} = \rho\frac{\partial\Psi}{\partial\epsilon_{xx}} = E((1-d) < \epsilon_{xx} >_+ + < \epsilon_{xx} >_-) \\ \boldsymbol{\tau} = \rho\frac{\partial\Psi}{\partial\boldsymbol{\epsilon}} = 2(1-d)\mu\boldsymbol{\epsilon} + 2\mu d(\boldsymbol{\epsilon} - \boldsymbol{\epsilon}^\pi) \end{array} \right. \tag{3.121}$$

où $\boldsymbol{\tau}$ est le vecteur des contraintes tangentielles tel que $\boldsymbol{\tau} = (\tau_{xy}\ \tau_{xz})^t$. Le vecteur des contraintes de frottement liées aux composantes de glissement interne entre les lèvres des fissures sont les suivantes :

$$\boldsymbol{\tau}^\pi = -\rho\frac{\partial\Psi}{\partial\boldsymbol{\epsilon}^\pi} = 2\mu d(\boldsymbol{\epsilon} - \boldsymbol{\epsilon}^\pi) \tag{3.122}$$

où $\boldsymbol{\tau}^\pi = (\tau^\pi_{xy}\ \tau^\pi_{xz})^t$. Le taux de restitution d'énergie dû à l'endommagement s'écrit :

$$Y = -\rho\frac{\partial\Psi}{\partial d} = \frac{E}{2} < \epsilon_{xx} >^2_+ + \mu\boldsymbol{\epsilon}.\boldsymbol{\epsilon} - \mu(\boldsymbol{\epsilon} - \boldsymbol{\epsilon}^\pi).(\boldsymbol{\epsilon} - \boldsymbol{\epsilon}^\pi) \tag{3.123}$$

Les contraintes de rappel sont les suivantes :

$$\boldsymbol{X} = \rho\frac{\partial\Psi}{\partial\boldsymbol{\alpha}} = \gamma\boldsymbol{\alpha} \tag{3.124}$$

Enfin, la force thermodynamique associée à l'écrouissage isotrope s'écrit :

$$Z = \rho\frac{\partial\Psi}{\partial z} = \frac{dH(z)}{dz} \tag{3.125}$$

Lois d'évolution

Endommagement et écrouissage isotrope. Le mécanisme d'endommagement est géré de manière associée par une surface seuil f_d prenant la forme suivante :

$$f_d(\bar{Y}; Y_0, Z) = \bar{Y} - (Y_0 + Z) \tag{3.126}$$

où $\bar{Y} = \frac{E}{2}\epsilon_{xx}\epsilon_{xx}$. Les équations d'évolution s'écrivent donc comme suit :

$$\begin{cases} \dot{d} = \dot{\lambda}_d\frac{\partial f_d(\bar{Y};Y_0,Z)}{\partial\bar{Y}} = \dot{\lambda}_d \\ \dot{z} = \dot{\lambda}_d\frac{\partial f_d(\bar{Y};Y_0,Z)}{\partial Z} = -\dot{\lambda}_d \end{cases} \tag{3.127}$$

La fonction de consolidation est définie par :

$$H(z) = \frac{-z + \mathbf{ln}(1+z)}{\mathcal{H}(\epsilon_{xx})A_{\mathbf{Dir}} + (1 - \mathcal{H}(\epsilon_{xx}))A_{\mathbf{Ind}}} \tag{3.128}$$

Ainsi, en intégrant explicitement les lois d'évolution à partir de la condition de cohérence, il vient :

$$\begin{cases} d = 1 - \frac{1}{1+\mathcal{H}(\epsilon_{xx})A_{\mathbf{Dir}}(\bar{Y}-Y_0)+(1-\mathcal{H}(\epsilon_{xx}))A_{\mathbf{Ind}}(\bar{Y}-Y_0)} \\ z = -1 + \frac{1}{1+\mathcal{H}(\epsilon_{xx})A_{\mathbf{Dir}}(\bar{Y}-Y_0)+(1-\mathcal{H}(\epsilon_{xx}))A_{\mathbf{Ind}}(\bar{Y}-Y_0)} \end{cases} \tag{3.129}$$

Glissement interne et écrouissage cinématique. Le glissement interne et l'écrouissage cinématique sont gérés de manière non associée. La fonction seuil postulée est la suivante :

$$f_\pi(\boldsymbol{\tau}^\pi; \boldsymbol{X}) = ||\boldsymbol{\tau}^\pi - \boldsymbol{X}||_2 \tag{3.130}$$

où $||.||_2$ est la norme Euclidienne. La loi d'évolution du glissement interne suit donc la loi de normalité déduite du principe du maximum de dissipation :

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^\pi = \dot{\lambda}_\pi\frac{\partial f_\pi(\boldsymbol{\tau}^\pi; \boldsymbol{X})}{\partial\boldsymbol{\tau}^\pi} \tag{3.131}$$

La loi d'évolution de l'écrouissage cinématique nécessite un pseudo potentiel de dissipation ϕ_π :

$$\phi_\pi(\boldsymbol{\tau}^\pi; \boldsymbol{X}) = ||\boldsymbol{\tau}^\pi - \boldsymbol{X}||_2 + \frac{a}{2}\boldsymbol{X}.\boldsymbol{X} \tag{3.132}$$

La loi d'évolution de l'écrouissage cinématique s'écrit donc comme suit :

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}} = -\dot{\lambda}_\pi\frac{\partial\phi_\pi(\boldsymbol{\tau}^\pi; \boldsymbol{X})}{\partial\boldsymbol{X}} \tag{3.133}$$

Synthèse des équations constitutives

Les équations constitutives simplifiées permettant de décrire le comportement du béton sont donc les suivantes.

Lois d'état

$$\begin{array}{l}\sigma_{xx} = E((1-d) < \epsilon_{xx} >_+ + < \epsilon_{xx} >_-) \\ \boldsymbol{\tau} = 2(1-d)\mu\boldsymbol{\epsilon} + 2\mu d(\boldsymbol{\epsilon} - \boldsymbol{\epsilon}^\pi) \\ \boldsymbol{\tau}^\pi = 2\mu d(\boldsymbol{\epsilon} - \boldsymbol{\epsilon}^\pi) \\ Y = \frac{E}{2} < \epsilon_{xx} >_+^2 + \mu\boldsymbol{\epsilon}.\boldsymbol{\epsilon} - \mu(\boldsymbol{\epsilon} - \boldsymbol{\epsilon}^\pi).(\boldsymbol{\epsilon} - \boldsymbol{\epsilon}^\pi) \\ \boldsymbol{X} = \gamma\boldsymbol{\alpha} \\ Z = \frac{-z}{1+z}\frac{1}{\mathcal{H}(\epsilon_{xx})A_{\mathbf{Dir}} + (1-\mathcal{H}(\epsilon_{xx}))A_{\mathbf{Ind}}}\end{array} \tag{3.134}$$

Lois d'évolution

$$\begin{array}{l} d = 1 - \frac{1}{1+\mathcal{H}(\epsilon_{xx})A_{\mathbf{Dir}}(Y-Y_0)+(1-\mathcal{H}(\epsilon_{xx}))A_{\mathbf{Ind}}(Y-Y_0)} \\ z = -1 + \frac{1}{1+\mathcal{H}(\epsilon_{xx})A_{\mathbf{Dir}}(Y-Y_0)+(1-\mathcal{H}(\epsilon_{xx}))A_{\mathbf{Ind}}(Y-Y_0)} \\ \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^\pi = \dot{\lambda}_\pi \frac{\partial f_\pi(\boldsymbol{\tau}^\pi;\boldsymbol{X})}{\partial \boldsymbol{\tau}^\pi} \\ \dot{\boldsymbol{\alpha}} = -\dot{\lambda}_\pi \frac{\partial \phi_\pi(\boldsymbol{\tau}^\pi;\boldsymbol{X})}{\partial \boldsymbol{X}}\end{array} \tag{3.135}$$

3.4.4 Bilan

Dans certains cas d'application où le besoin d'informations locales fines n'est pas requis, l'utilisation de modèles constitutifs sophistiqués peut être évitée. Autrement dit, une économie des coûts de calculs pouvant être prohibitifs peut être réalisée. C'est pourquoi, dans cette section, les versions simplifiées des modèles constitutifs de l'interface acier/béton et du béton ont été présentées. Ces lois simplifiées s'appuient sur l'approche multifibre dont les principes ont été brièvement présentés au début de cette section. En particulier, il a été mentionné que la cinématique imposée par ce formalisme ne permet pas naturellement de considérer une interface imparfaite entre l'acier et le béton. Toutefois, en s'appuyant sur des travaux récents, il a été montré qu'il est possible de relaxer les contraintes dans la barre d'acier selon l'état de dégradation de l'interface acier/béton. La prise en compte de la corrosion a dû être adaptée, seule son influence sur l'adhérence acier/béton n'a pu être conservée. Une version, plus classique, a également été proposée pour le modèle constitutif de béton. Dans la prochaine section, il est proposé de s'intéresser à l'implantation numérique des différents modèles constitutifs locaux et simplifiés.

3.5 Implantation numérique

Dans cette section, l'implantation numérique des différents modèles constitutifs présentés est détaillée. Le point de vue adopté est donc le suivant. On se positionne à un instant t_n, à une itération i de la méthode de Newton et en un point de Gauss $\underline{x}^h$. Le problème est alors le suivant :

$$\begin{array}{lll} \text{Étant donnés} & : & \boldsymbol{\epsilon}_n^{(i)}(\underline{x}^h) = \boldsymbol{\epsilon}^{(i)}(\underline{x}^h, t_n),\ \breve{\boldsymbol{\alpha}}_n^{(i)}(\underline{x}^h) = \breve{\boldsymbol{\alpha}}^{(i)}(\underline{x}^h, t_n), \\ & & \boldsymbol{\sigma}_n^{(i)}(\underline{x}^h) = \boldsymbol{\sigma}_n^{(i)}(\underline{x}^h, t_n), \Delta\boldsymbol{\epsilon}_n^{(i)}(\underline{x}^h) = \boldsymbol{\epsilon}_n^{(i+1)}(\underline{x}^h) - \boldsymbol{\epsilon}_n^{(i)}(\underline{x}^h) \\ \text{Trouver} & : & \boldsymbol{\epsilon}_n^{(i+1)}(\underline{x}^h),\ \breve{\boldsymbol{\alpha}}_n^{(i+1)}(\underline{x}^h),\ \boldsymbol{\sigma}_n^{(i+1)}(\underline{x}^h) \\ \text{Tels que} & : & \text{les conditions d'admissibilité soient vérifiées (cohérence,} \\ & & \text{nullité du potentiel de dissipation, ...)} \end{array} \tag{3.136}$$

Ce problème peut être résolu en utilisant une technique combinant prédiction/correction. En effet, l'idée maîtresse est tout d'abord de réaliser une prédiction des contraintes de Cauchy puis, en cherchant à vérifier les conditions d'admissibilité et de cohérence, à corriger la prédiction faite. Dans la suite, il est proposé de détailler la méthodologie retenue pour effectuer cette suite de prédiction/correction. La dépendance des variables aux coordonnées du point de Gauss courant est omise en vue de simplifier les notations.

3.5.1 Modèle constitutif de l'interface acier/béton en présence de corrosion

La loi constitutive complète de l'interface acier/béton en présence de corrosion a été implantée dans un élément joint sans épaisseur. Les contraintes de Cauchy sont donc représentées par un vecteur exprimé dans un repère local à l'élément dont une base est $(\mathbf{n}, \mathbf{t}, \mathbf{b})$, où $\mathbf{n}$ est la normale extérieure, $\mathbf{t}$ le vecteur tangent et $\mathbf{b}$ le vecteur binormal. Au vecteur des déformations totales, un vecteur de déplacements relatifs exprimé dans le repère local évoqué précédemment lui est associé. La condensation des équations formulées en termes de contraintes-déformations vers une relation formulée en termes de contraintes-déplacements relatifs est détaillée en annexe B. Ainsi, les vecteurs des contraintes et des déplacements relatifs s'expriment par :

$$\boldsymbol{\sigma}_n^{(i)} = \begin{pmatrix} \sigma_{\mathbf{n},n}^{(i)} \\ \sigma_{\mathbf{t},n}^{(i)} \\ \sigma_{\mathbf{b},n}^{(i)} \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{u}_n^{(i)} = \begin{pmatrix} u_{\mathbf{n},n}^{(i)} \\ u_{\mathbf{t},n}^{(i)} \\ u_{\mathbf{b},n}^{(i)} \end{pmatrix} \tag{3.137}$$

Enfin, les paramètres élastiques ne s'expriment plus en terme de coefficient de compressibilité et de module de cisaillement mais en terme de raideurs normale $K_{\mathbf{n}}$, tangentielle $K_{\mathbf{t}}$ et binormale $K_{\mathbf{b}}$. La manière dont on peut identifier ces paramètres est détaillée dans la suite. Par ailleurs, le problème reste le même et la consistance de la loi n'est pas affectée. Les déplacements actualisés sont :

$$\boldsymbol{u}_n^{(i+1)} = \boldsymbol{u}_n^{(i)} + \Delta \boldsymbol{u}_n^{(i)} \tag{3.138}$$

Prédiction en contraintes. En utilisant l'exposant **Trial** pour repérer la contrainte prédite, la prédiction des contraintes de Cauchy peut être réalisée comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \sigma_{\mathbf{n},n}^{\mathbf{Trial},(i+1)} & = & K_{\mathbf{n}}((1-d_n^{(i)}) < u_{\mathbf{n},n}^{(i+1)} >_+ + < u_{\mathbf{n},n}^{(i+1)} - u_{r,\mathbf{n},n}^{(i)} >_-) \\ \sigma_{\mathbf{t},n}^{\mathbf{Trial},(i+1)} & = & 2(1-d_n^{(i)}) K_{\mathbf{t}} u_{\mathbf{t},n}^{(i+1)} + 2d_n^{(i)} K_{\mathbf{t}} (u_{\mathbf{t},n}^{(i+1)} - u_{\pi,\mathbf{t},n}^{(i)}) \\ \sigma_{\mathbf{b},n}^{\mathbf{Trial},(i+1)} & = & 2(1-d_n^{(i)}) K_{\mathbf{b}} u_{\mathbf{b},n}^{(i+1)} + 2d_n^{(i)} K_{\mathbf{b}} (u_{\mathbf{b},n}^{(i+1)} - u_{\pi,\mathbf{b},n}^{(i)}) \end{array} \right. \tag{3.139}$$

Les contraintes liées au glissement interne peuvent également être prédites :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \sigma_{\pi,\mathbf{t},n}^{\mathbf{Trial},(i+1)} & = & 2d_n^{(i)} K_{\mathbf{t}} (u_{\mathbf{t},n}^{(i+1)} - u_{\pi,\mathbf{t},n}^{(i)}) \\ \sigma_{\pi,\mathbf{b},n}^{\mathbf{Trial},(i+1)} & = & 2d_n^{(i)} K_{\mathbf{b}} (u_{\mathbf{b},n}^{(i+1)} - u_{\pi,\mathbf{b},n}^{(i)}) \end{array} \right. \tag{3.140}$$

Les contraintes liées à l'anélasticité des produits de corrosion s'écrivent :

$$\sigma_{r,\mathbf{n},n}^{\mathbf{Trial},(i+1)} = K_{\mathbf{n}} < u_{\mathbf{n},n}^{(i+1)} - u_{r,\mathbf{n},n}^{(i)} >_- \tag{3.141}$$

Il peut être noté que le terme lié au gonflement des produits de corrosion n'a pas été mentionné. En effet, ce dernier représentant un état thermodynamique initial, il n'intervient plus dans l'intégration des équations constitutives.

Endommagement et écrouissage isotrope. Pour évaluer la valeur de la variable d'endommagement, la fonction seuil est donc estimée. Pour cela, les différents taux d'énergie dissipée sont évalués :

$$\left\{\begin{array}{lcl} Y_{N,n}^{+,(i+1)} & = & \frac{K_{\mathbf{n}}}{2} < u_{\mathbf{n},n}^{(i+1)} >_+^2 \\ Y_{d,n}^{(i+1)} & = & Y_{d,\mathbf{t},n}^{(i+1)} + Y_{d,\mathbf{b},n}^{(i+1)} = u_{\mathbf{t},n}^{(i+1)} K_{\mathbf{t}} u_{\mathbf{t},n}^{(i+1)} + u_{\mathbf{b},n}^{(i+1)} K_{\mathbf{b}} u_{\mathbf{b},n}^{(i+1)} \end{array}\right. \tag{3.142}$$

Le seuil est ensuite évalué par :

$$f_{d,n}^{(i+1)}(\bar{Y}_n^{(i+1)}; Y_0, Z_n^{(i)}, W_0) = \alpha_0 Y_{N,n}^{+,(i+1)} + Y_{d,n}^{(i+1)} - (Y_0 + Z_n^{(i)} + W_0) \tag{3.143}$$

où $W_0 = W(Y_r(t_0))$. Si $f_{d,n}^{(i+1)} < 0$ alors l'endommagement n'évolue pas, c'est le mécanisme dissipatif suivant qu'il y a lieu d'évaluer. En revanche, si $f_{d,n}^{(i+1)} \geq 0$ alors la variable d'endommagement et la force thermodynamique associée à l'écrouissage isotrope sont actualisées comme suit :

$$\left\{\begin{array}{lcl} d_n^{(i+1)} & = & 1 - \frac{1}{1+A_d(\alpha_0 Y_{N,n}^{+,(i+1)} + Y_{d,n}^{(i+1)} - (Y_0+W_0))} \\ Z_n^{(i+1)} & = & \alpha_0 Y_{N,n}^{+,(i+1)} + Y_{d,n}^{(i+1)} - (Y_0 + W_0) \end{array}\right. \tag{3.144}$$

Glissement interne et écrouissage cinématique. Les équations gérant le mécanisme de glissement interne sont intégrées de manière implicite en utilisant un algorithme de type return mapping, initialement proposé par (Ortiz et Simo, 1986). Il peut être noté que la fonction seuil est non négative. La seule condition pour que le glissement interne évolue est que l'endommagement soit strictement positif. Dans ce cas, en indexant les itérations internes à l'algorithme return mapping par l'entier k, la linéarisation de la fonction seuil s'écrit :

$$f_{\pi,n}^{(i+1),(k+1)} = f_{\pi,n}^{(i+1),(k)} + \frac{\partial f_{\pi,n}^{(i+1),(k)}}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{\pi,n}^{(i+1),(k)}} . \Delta \boldsymbol{\sigma}_{\pi,n}^{(i+1),(k)} + \frac{\partial f_{\pi,n}^{(i+1),(k)}}{\partial \boldsymbol{X}_n^{(i+1),(k)}} . \Delta \boldsymbol{X}_n^{(i+1),(k)} \approx 0 \tag{3.145}$$

Les contraintes de frottement ainsi que les contraintes de rappel peuvent donc être actualisées grâce aux lois d'évolution selon :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \Delta\sigma_{\pi,\mathbf{t},n}^{(i+1),(k)} & = & -2K_{\mathbf{t}} d_n^{(i+1)} \Delta\lambda_{\pi,n}^{(k+1)} \frac{\partial \phi_{\pi,n}^{(i+1),(k)}}{\partial \sigma_{\pi,\mathbf{t},n}^{(i+1),(k)}} \\ \Delta\sigma_{\pi,\mathbf{b},n}^{(i+1),(k)} & = & -2K_{\mathbf{b}} d_n^{(i+1)} \Delta\lambda_{\pi,n}^{(k+1)} \frac{\partial \phi_{\pi,n}^{(i+1),(k)}}{\partial \sigma_{\pi,\mathbf{b},n}^{(i+1),(k)}} \\ \Delta \boldsymbol{X}_n^{(i+1),(k)} & = & -\gamma \Delta\lambda_{\pi,n}^{(k+1)} \frac{\partial \phi_{\pi,n}^{(i+1),(k)}}{\partial \boldsymbol{X}_n^{(k)}} \end{array}\right. \tag{3.146}$$

Les dérivées peuvent être calculées à partir de l'expression de la surface seuil de glissement interne :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \frac{\partial f_{\pi,n}^{(i+1),(k)}}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{\pi,n}^{(i+1),(k)}} & = & \frac{3}{2} \frac{\boldsymbol{\sigma}_{\pi,n}^{(i+1),(k)} - \boldsymbol{X}_n^{(i+1),(k)}}{J_2(\boldsymbol{\sigma}_{\pi,n}^{(i+1),(k)} - \boldsymbol{X}_n^{(i+1),(k)})} \\ \frac{\partial f_{\pi,n}^{(i+1),(k)}}{\partial \boldsymbol{X}_{\pi,n}^{(i+1),(k)}} & = & -\frac{3}{2} \frac{\boldsymbol{\sigma}_{\pi,n}^{(i+1),(k)} - \boldsymbol{X}_n^{(i+1),(k)}}{J_2(\boldsymbol{\sigma}_{\pi,n}^{(i+1),(k)} - \boldsymbol{X}_n^{(i+1),(k)})} \\ \frac{\partial \phi_{\pi,n}^{(i+1),(k)}}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{\pi,n}^{(i+1),(k)}} & = & \frac{3}{2} \frac{\boldsymbol{\sigma}_{\pi,n}^{(i+1),(k)} - \boldsymbol{X}_n^{(i+1),(k)}}{J_2(\boldsymbol{\sigma}_{\pi,n}^{(i+1),(k)} - \boldsymbol{X}_n^{(i+1),(k)})} \\ \frac{\partial \phi_{\pi,n}^{(i+1),(k)}}{\partial \boldsymbol{X}_{\pi,n}^{(i+1),(k)}} & = & -\frac{3}{2} \frac{\boldsymbol{\sigma}_{\pi,n}^{(i+1),(k)} - \boldsymbol{X}_n^{(i+1),(k)}}{J_2(\boldsymbol{\sigma}_{\pi,n}^{(i+1),(k)} - \boldsymbol{X}_n^{(i+1),(k)})} + a \boldsymbol{X}_n^{(i+1),(k)} \end{array}\right. \tag{3.147}$$

En considérant les équations 3.145 et 3.146, on obtient l'expression du multiplicateur de Lagrange suivante :

$$\Delta\lambda_{\pi,n}^{(i+1),(k+1)} = \frac{f_{\pi,n}^{(i+1),(k)}}{2d_n^{(i+1)} (K_{\mathbf{t}} \frac{\partial f_{\pi,n}^{(i+1),(k)}}{\partial \sigma_{\pi,\mathbf{t},n}^{(i+1),(k)}} \frac{\partial \phi_{\pi,n}^{(i+1),(k)}}{\partial \sigma_{\pi,\mathbf{t},n}^{(i+1),(k)}} + K_{\mathbf{b}} \frac{\partial f_{\pi,n}^{(i+1),(k)}}{\partial \sigma_{\pi,\mathbf{b},n}^{(i+1),(k)}} \frac{\partial \phi_{\pi,n}^{(i+1),(k)}}{\partial \sigma_{\pi,\mathbf{b},n}^{(i+1),(k)}}) + \gamma \frac{\partial f_{\pi,n}^{(i+1),(k)}}{\partial \boldsymbol{X}_n^{(i+1),(k)}} . \frac{\partial \phi_{\pi,n}^{(i+1),(k)}}{\partial \boldsymbol{X}_n^{(i+1),(k)}}} \tag{3.148}$$

Les itérations continuent jusqu'à ce qu'un critère de convergence soit vérifié. Dans cette étude, deux critères ont été considérés : le premier permet de limiter la valeur du multiplicateur de Lagrange pour ne pas qu'elle devienne trop petite et le second, s'assure que la valeur initiale de la fonction seuil f_π a été diminuée de plusieurs ordres de grandeurs. Ainsi, ces deux critères s'écrivent :

$$\left\{\begin{array}{lcl} |\frac{f_{\pi,n}^{(i+1),(k)}}{f_{\pi,n}^{(i+1),(0)}}| & \leq & \varepsilon_{\mathbf{Tol}}^{(1)} \\ |\Delta\lambda_{\pi,n}^{(k)}| & \leq & \varepsilon_{\mathbf{Tol}}^{(2)} \end{array}\right. \tag{3.149}$$

où $\varepsilon_{\mathbf{Tol}}^{(1)}$ est la tolérance sur la valeur initiale de la fonction seuil généralement prise égale à 10^{-5} et $\varepsilon_{\mathbf{Tol}}^{(2)}$ est une valeur permettant de limiter la valeur du multiplicateur de Lagrange souvent prise voisine de 10^{-10}.

Anélasticité des produits de corrosion. Le dernier mécanisme dissipatif à intégrer est celui gérant l'anélasticité des produits de corrosion. Pour cela, le même algorithme d'intégration implicite que celui présenté précédemment a été mis en place. Si la fonction seuil est négative alors, les déformations anélastiques, la fraction volumique des vides et l'écrouissage n'évoluent pas. En revanche, si elle est positive, alors il y a évolution de ces différentes variables. Ainsi, la fonction seuil est linéarisée comme suit :

$$\begin{array}{rcl} f_{r,n}^{(i+1),(k+1)} & = & f_{r,n}^{(i+1),(k)} + \frac{\partial f_{r,n}^{(i+1),(k)}}{\partial f_n^{\star,(i+1),(k)}}\Delta f_n^{\star,(i+1),(k)} + \frac{\partial f_{r,n}^{(i+1),(k)}}{\partial \sigma_{M,n}^{(i+1),(k)}}\Delta\sigma_{M,n}^{(i+1),(k)} + \\ & & \frac{\partial f_{r,n}^{(i+1),(k)}}{\partial \sigma_{r,\mathbf{n},n}^{(i+1),(k)}}\Delta\sigma_{r,\mathbf{n},n}^{(i+1),(k)} \approx 0 \end{array} \tag{3.150}$$

Les équations d'évolution conduisent naturellement aux expressions suivantes :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \Delta\sigma_{r,\mathbf{n},n}^{(i+1),(k)} & = & -\Delta\lambda_{r,n}^{(k+1)} K_{\mathbf{n}} \frac{\partial f_{r,n}^{(i+1),(k)}}{\partial \sigma_{r,\mathbf{n},n}^{(i+1),(k)}} \\ \Delta f_n^{\star,(i+1),(k)} & = & \Delta\lambda_{r,n}^{(k+1)} k f_n^{\star,(i+1),(k)}(1 - f_n^{\star,(i+1),(k)}) \frac{\partial f_{r,n}^{(i+1),(k)}}{\partial \sigma_{r,\mathbf{n},n}^{(i+1),(k)}} \\ \Delta\sigma_{M,n}^{(i+1),(k)} & = & \Delta\lambda_{r,n}^{(k+1)} \frac{E_n^{\star,(i+1),(k)}}{(1-f_n^{\star,(i+1),(k)})\sigma_{M,n}^{(i+1),(k)}} \frac{\partial f_{r,n}^{(i+1),(k)}}{\partial \sigma_{r,\mathbf{n},n}^{(i+1),(k)}} \sigma_{r,\mathbf{n},n}^{(i+1),(k)} \end{array}\right. \tag{3.151}$$

Les dérivées peuvent être évaluées de manière exacte à partir de l'expression de la fonction seuil :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \frac{\partial f_{r,n}^{(i+1),(k)}}{\partial f_n^{\star,(i+1),(k)}} & = & -\frac{q_1 q_2 f_n^{\star,(i+1),(k)} \sigma_{r,\mathbf{n},n}^{(i+1),(k)}}{(\sigma_{M,n}^{(i+1),(k)})^2} \mathbf{sh}(\frac{q_2 \sigma_{r,\mathbf{n},n}^{(i+1),(k)}}{2\sigma_{M,n}^{(i+1),(k)}}) \\ \frac{\partial f_{r,n}^{(i+1),(k)}}{\partial \sigma_{M,n}^{(i+1),(k)}} & = & 2q_1 \mathbf{ch}(\frac{q_2 \sigma_{r,\mathbf{n},n}^{(i+1),(k)}}{2\sigma_{M,n}^{(i+1),(k)}}) - 2q_3^2 f_n^{\star,(i+1),(k)} \\ \frac{\partial f_{r,n}^{(i+1),(k)}}{\partial \sigma_{r,\mathbf{n},n}^{(i+1),(k)}} & = & \frac{q_1 q_2}{\sigma_{M,n}^{(i+1),(k)}} \mathbf{sh}(\frac{q_2 \sigma_{r,\mathbf{n},n}^{(i+1),(k)}}{2\sigma_{M,n}^{(i+1),(k)}}) \end{array}\right. \tag{3.152}$$

En utilisant les équations 3.150 et 3.151, le multiplicateur de Lagrange peut être isolé et la relation suivante peut être obtenue :

$$\Delta\lambda_{r,n}^{(i+1),(k+1)} = \frac{f_{r,n}^{(i+1),(k)}}{K_{\mathbf{n}}(\frac{\partial f_{r,n}^{(i+1),(k)}}{\partial \sigma_{r,\mathbf{n},n}^{(i+1),(k)}})^2 - \frac{\partial f_{r,n}^{(i+1),(k)}}{\partial f_n^{\star,(i+1),(k)}} k f_n^{\star,(i+1),(k)}(1-f_n^{\star,(i+1),(k)}) \frac{\partial f_{r,n}^{(i+1),(k)}}{\partial \sigma_{r,\mathbf{n},n}^{(i+1),(k)}} - \frac{E_n^{\star,(i+1),(k)}}{(1-f_n^{\star,(i+1),(k)})\sigma_{M,n}^{(i+1),(k)}} \frac{\partial f_{r,n}^{(i+1),(k)}}{\partial \sigma_{r,\mathbf{n},n}^{(i+1),(k)}} \sigma_{r,\mathbf{n},n}^{(i+1),(k)} \frac{\partial f_{r,n}^{(i+1),(k)}}{\partial \sigma_{M,n}^{(i+1),(k)}}} \tag{3.153}$$

Dans cette expression, un module tangent lié à l'écrouissage $E_n^{\star,(i+1),(k)}$ apparaît. Ce dernier s'exprime par :

$$\frac{1}{E_n^{\star,(i+1),(k)}} = \frac{1}{E_n^{t,(i+1),(k)}} - \frac{1}{K_{\mathbf{n}}} \tag{3.154}$$

avec :

$$\frac{1}{E_n^{t,(i+1),(k)}} = \frac{n}{K_{\mathbf{n}}}(\frac{\sigma_{M,n}^{(i+1),(k)}}{\sigma_y})^{n-1} \tag{3.155}$$

L'expression du multiplicateur de Lagrange $\Delta\lambda_{r,n}^{(i+1),(k+1)}$ peut être alors utilisée pour réactualiser les différentes variables à partir des équations d'évolution. Ce procédé est itératif et est arrêté lorsqu'un critère de convergence est vérifié. Dans le cas présent, le critère de convergence porte sur trois grandeurs. En premier lieu, la valeur relative de la fonction seuil, en second lieu la valeur du multiplicateur de Lagrange et en dernier lieu, la valeur de la fraction volumique des vides. Ainsi, les différents critères s'expriment comme suit :

$$\left\{\begin{array}{lcl} |\frac{f_{r,n}^{(i+1),(k)}}{f_{r,n}^{(i+1),(0)}}| & \leq & \varepsilon_{\mathbf{Tol}}^{(3)} \\ |\Delta\lambda_{r,n}^{(i+1),(k)}| & \leq & \varepsilon_{\mathbf{Tol}}^{(4)} \\ f_n^{\star,(i+1),(k)} & \leq & \varepsilon_{\mathbf{Tol}}^{(5)} \end{array}\right. \tag{3.156}$$

où $\varepsilon_{\mathbf{Tol}}^{(3)}$ est une tolérance prise égale à 10^{-5}, $\varepsilon_{\mathbf{Tol}}^{(4)}$ voisine de 10^{-10} et enfin $\varepsilon_{\mathbf{Tol}}^{(5)}$ égale à 10^{-4}. En effet, il a été constaté que lorsque la valeur de la fraction volumique des vides tend à devenir trop faible, cela entraîne une divergence de l'algorithme d'intégration local. Dès que le critère de convergence a été vérifié, les paramètres élastiques peuvent être réactualisés en utilisant les relations 3.75. Les contraintes totales sont ensuite actualisées en considérant la première loi d'état.

3.5.2 Modèle constitutif de béton

Dans cette section, l'implantation numérique de la loi constitutive de béton proposée est présentée dans le cas tridimensionnel. Des notations matricielles sont adoptées par commodité d'écriture. La déformation totale est donc actualisée comme suit :

$$\boldsymbol{\epsilon}_n^{(i+1)} = \boldsymbol{\epsilon}_n^{(i)} + \Delta\boldsymbol{\epsilon}_n^{(i)} \tag{3.157}$$

Prédiction en contraintes. Les contraintes peuvent être prédites à l'aide des équations d'état. Ainsi, il vient :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \boldsymbol{\sigma}_n^{\mathbf{Trial},(i+1)} & = & \frac{\kappa}{3}((1-d_n^{(i)}) < \mathbf{Tr}\boldsymbol{\epsilon}_n^{(i+1)} >_+ + < \mathbf{Tr}\boldsymbol{\epsilon}_n^{(i+1)} >_-)\boldsymbol{\delta} + \\ & & 2\mu(1-d_n^{(i)})\boldsymbol{\epsilon}_n^{d,(i+1)} + 2\mu d_n^{(i)}(\boldsymbol{\epsilon}_n^{d,(i+1)} - \boldsymbol{\epsilon}_{\pi,n}^{(i)}) \\ \boldsymbol{\sigma}_{\pi,n}^{\mathbf{Trial},(i+1)} & = & 2\mu d_n^{(i)}(\boldsymbol{\epsilon}_n^{d,(i+1)} - \boldsymbol{\epsilon}_{\pi,n}^{(i)}) \end{array}\right. \tag{3.158}$$

Endommagement et écrouissage isotrope. La surface seuil gérant l'évolution du mécanisme d'endommagement doit être évaluée pour déterminer s'il y a évolution ou non. Pour cela, les différents termes dont elle dépend sont calculés selon :

$$\begin{array}{l} Y_{\mathbf{Dir},n}^{(i+1)} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{Dir},n}^{(i+1)}.\boldsymbol{C}.\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{Dir},n}^{(i+1)} \\ Y_{\mathbf{Ind},n}^{(i+1)} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{Ind},n}^{(i+1)}.\boldsymbol{C}.\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{Ind},n}^{(i+1)} \end{array} \tag{3.159}$$

Les vecteurs des extensions directes et induites peuvent être déterminés par :

$$\begin{array}{l} \boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{Dir},n}^{(i+1)} = < \boldsymbol{\epsilon}_n^{(i+1)} >_+ \mathcal{H}(< \boldsymbol{\epsilon}_n^{(i+1)} >_+ . < \boldsymbol{\sigma}_n^{(i+1)} >_+) \\ \boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{Ind},n}^{(i+1)} = < \boldsymbol{\epsilon}_n^{(i+1)} >_+ (1 - \mathcal{H}(< \boldsymbol{\epsilon}_n^{(i+1)} >_+ . < \boldsymbol{\sigma}_n^{(i+1)} >_+)) \end{array} \tag{3.160}$$

Si $f_{d,n}^{(i+1)} < 0$ alors il n'y a aucune évolution de l'endommagement. En revanche, si $f_{d,n}^{(i+1)} \geq 0$ alors la variable d'endommagement évolue et la force thermodynamique associée à l'écrouissage isotrope est actualisée :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} d_n^{(i+1)} & = & 1 - \frac{1}{1+(A_{\mathbf{Dir}}\mathcal{H}(\mathbf{Tr}\boldsymbol{\epsilon}_n^{(i+1)})+A_{\mathbf{Ind}}(1-\mathcal{H}(\mathbf{Tr}\boldsymbol{\epsilon}_n^{(i+1)})))(\beta Y_{\mathbf{Dir},n}^{(i+1)}+Y_{\mathbf{Ind},n}^{(i+1)}-Y_0)} \\ Z_n^{(i+1)} & = & \beta Y_{\mathbf{Dir},n}^{(i+1)} + Y_{\mathbf{Ind},n}^{(i+1)} - Y_0 \end{array} \right. \tag{3.161}$$

Glissement interne et écrouissage cinématique. Après évaluation de la surface seuil du glissement interne, si cette dernière est positive alors le glissement interne évolue. Pour cela, le même algorithme que celui présenté précédemment est utilisé. Les dérivées du critère sont calculées :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \frac{\partial f_{\pi,n}^{(i+1),(k)}}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{\pi,n}^{(i+1),(k)}} & = & \frac{3}{2}\frac{\boldsymbol{\sigma}_{\pi,n}^{(i+1),(k)}-\boldsymbol{X}_n^{(i+1),(k)}}{J_2(\boldsymbol{\sigma}_{\pi,n}^{(i+1),(k)}-\boldsymbol{X}_n^{(i+1),(k)})} \\ \frac{\partial f_{\pi,n}^{(i+1),(k)}}{\partial \boldsymbol{X}_n^{(i+1),(k)}} & = & -\frac{3}{2}\frac{\boldsymbol{\sigma}_{\pi,n}^{(i+1),(k)}-\boldsymbol{X}_n^{(i+1),(k)}}{J_2(\boldsymbol{\sigma}_{\pi,n}^{(i+1),(k)}-\boldsymbol{X}_n^{(i+1),(k)})} \\ \frac{\partial \phi_{\pi,n}^{(i+1),(k)}}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{\pi,n}^{(i+1),(k)}} & = & \frac{3}{2}\frac{\boldsymbol{\sigma}_{\pi,n}^{(i+1),(k)}-\boldsymbol{X}_n^{(i+1),(k)}}{J_2(\boldsymbol{\sigma}_{\pi,n}^{(i+1),(k)}-\boldsymbol{X}_n^{(i+1),(k)})} \\ \frac{\partial \phi_{\pi,n}^{(i+1),(k)}}{\partial \boldsymbol{X}_n^{(i+1),(k)}} & = & -\frac{3}{2}\frac{\boldsymbol{\sigma}_{\pi,n}^{(i+1),(k)}-\boldsymbol{X}_n^{(i+1),(k)}}{J_2(\boldsymbol{\sigma}_{\pi,n}^{(i+1),(k)}-\boldsymbol{X}_n^{(i+1),(k)})} + a\boldsymbol{X}_n^{(i+1),(k)} \end{array} \right. \tag{3.162}$$

En considérant la linéarisation de la surface seuil, le multiplicateur de Lagrange peut être obtenu :

$$\Delta\lambda_{\pi,n}^{(i+1),(k+1)} = \frac{f_{\pi,n}^{(i+1),(k)}}{2d_n^{(i+1)}\mu\frac{\partial f_{\pi,n}^{(i+1),(k)}}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{\pi,n}^{(i+1),(k)}}\frac{\partial \phi_{\pi,n}^{(i+1),(k)}}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{\pi,n}^{(i+1),(k)}} + \gamma\frac{\partial f_{\pi,n}^{(i+1),(k)}}{\partial \boldsymbol{X}_n^{(i+1),(k)}}.\frac{\partial \phi_{\pi,n}^{(i+1),(k)}}{\partial \boldsymbol{X}_n^{(i+1),(k)}}} \tag{3.163}$$

Les corrections des contraintes de frottement et de rappel sont ensuite déterminées :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \Delta\boldsymbol{\sigma}_{\pi,n}^{(i+1),(k)} & = & -2\mu d_n^{(i+1)}\Delta\lambda_{\pi,n}^{(i+1),(k+1)}\frac{\partial \phi_{\pi,n}^{(i+1),(k)}}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{\pi,n}^{(i+1),(k)}} \\ \Delta\boldsymbol{X}_n^{(i+1),(k)} & = & -\gamma\Delta\lambda_{\pi,n}^{(i+1),(k+1)}\frac{\partial \phi_{\pi,n}^{(i+1),(k)}}{\partial \boldsymbol{X}_n^{(i+1),(k)}} \end{array} \right. \tag{3.164}$$

Les itérations continuent tant qu'au moins un des critères de convergence exprimé par les équations 3.149 n'est pas vérifié. Les contraintes totales sont enfin actualisées en considérant la première loi d'état.

3.5.3 Modèle simplifié de l'interface acier/béton en présence de corrosion

Dans cette section, l'implantation numérique du modèle simplifié de l'interface acier/béton en présence de corrosion est présentée. Ce dernier permet de relaxer dans une certaine mesure les contraintes dans la fibre d'acier. Pour cela, on se place en un point de Gauss lié à une fibre d'acier. On suppose donc avoir accès au facteur de partition obtenu à l'itération précédente $\eta_n^{(i)}$. Les itérations courantes au point de Gauss pour déterminer $\eta_n^{(i+1)}$ sont indexées par l'indice p. Ainsi, le facteur de partition est noté $\eta_n^{(i),(p)}$. La déformation totale est donc actualisée par :

$$\epsilon_{xx,n}^{(i+1)} = \epsilon_{xx,n}^{(i)} + \Delta\epsilon_{xx,n}^{(i)} \tag{3.165}$$

Les contributions liées respectivement à l'acier et au glissement sont donc calculées :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \epsilon_{xx,n}^{\mathbf{A},(i+1),(p)} & = & \eta_n^{(i),(p)}\epsilon_{xx,n}^{(i+1)} \\ \epsilon_{xx,n}^{\mathbf{I},(i+1),(p)} & = & (1-\eta_n^{(i),(p)})\epsilon_{xx,n}^{(i+1)} \end{array} \right. \tag{3.166}$$

Contraintes liées à l'acier

Les contraintes normales dans l'acier peuvent être déterminées d'après sa loi constitutive. Ainsi, il vient :

$$\sigma_{xx,n}^{\mathbf{A},(i+1),(p)} = \mathcal{L}^{\mathbf{A}}(\epsilon_{xx,n}^{(i+1)}, \eta_n^{(i),(p)}) \tag{3.167}$$

Contraintes liées à l'interface acier/béton

Prédiction en contraintes. Les contraintes de Cauchy sont prédites en utilisant la première loi d'état :

$$\tau_n^{\mathbf{Trial},(i+1),(p)} = 2\mu(1-d_n^{(i),(p)})\epsilon_{xx,n}^{\mathbf{I},(i+1),(p)} + 2\mu d_n^{(i),(p)}(\epsilon_{xx,n}^{\mathbf{I},(i+1),(p)} - \epsilon_{xx,n}^{\pi,\mathbf{I},(i+1),(p)}) \tag{3.168}$$

Les contraintes de frottement s'écrivent :

$$\tau_n^{\pi,\mathbf{Trial},(i+1),(p)} = 2\mu d_n^{(i),(p)}(\epsilon_{xx,n}^{\mathbf{I},(i+1),(p)} - \epsilon_{xx,n}^{\pi,\mathbf{I},(i),(p)}) \tag{3.169}$$

Endommagement et écrouissage isotrope. La fonction seuil d'endommagement est évaluée. Pour cela, le taux d'énergie dissipée est estimé :

$$\bar{Y}_n^{(i+1),(p)} = \mu\epsilon_{xx,n}^{\mathbf{I},(i+1),(p)}\epsilon_{xx,n}^{\mathbf{I},(i+1),(p)} \tag{3.170}$$

Si $f_{d,n}^{(i+1),(p)} = \bar{Y}_n^{(i+1),(p)} - (Y_0 + Z_n^{(i),(p)} + W_0)$ est négative, alors l'endommagement n'évolue pas. En revanche, si la fonction seuil est positive, alors il y a évolution de l'endommagement et de la force thermodynamique associée à l'écrouissage isotrope :

$$\left\{\begin{array}{lcl} d_n^{(i+1),(p)} & = & 1 - \frac{1}{1+A_d(\bar{Y}_n^{(i+1),(p)} - (Y_0+W_0))} \\ Z_n^{(i+1),(p)} & = & \bar{Y}_n^{(i+1),(p)} - (Y_0+W_0) \end{array}\right. \tag{3.171}$$

Glissement interne et écrouissage cinématique. La surface seuil de glissement interne peut être estimée. Si cette dernière est nulle, alors il n'y a pas d'évolution. Si elle est positive, alors un algorithme return mapping est utilisé. Les itérations internes sont indexées par l'indice k. La surface est linéarisée :

$$\begin{array}{rcl} f_{\pi,n}^{(i+1),(p),(k+1)} & = & f_{\pi,n}^{(i+1),(p),(k)} + \frac{\partial f_{\pi,n}^{(i+1),(p),(k)}}{\partial \tau_n^{\pi,(i+1),(p),(k)}}\Delta\tau_n^{\pi,(i+1),(p),(k)} + \\ & & \frac{\partial f_{\pi,n}^{(i+1),(p),(k)}}{\partial X_n^{(i+1),(p),(k)}}\Delta X_n^{(i+1),(p),(k)} \approx 0 \end{array} \tag{3.172}$$

Les incréments de contraintes de frottement et de rappel s'expriment en utilisant les lois d'évolution par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \Delta\tau_n^{\pi,(i+1),(p),(k)} & = & -2\mu d_n^{(i+1),(p)}\Delta\lambda_{\pi,n}^{(i+1),(p),(k)}\frac{\partial\phi_{\pi,n}^{(i+1),(p),(k)}}{\partial\tau_n^{\pi,(i+1),(p),(k)}} \\ \Delta X_n^{(i+1),(p),(k)} & = & -\gamma\Delta\lambda_{\pi,n}^{(i+1),(p),(k)}\frac{\partial\phi_{\pi,n}^{(i+1),(p),(k)}}{\partial X_n^{(i+1),(p),(k)}} \end{array}\right. \tag{3.173}$$

Les dérivées sont déterminées en utilisant les expressions des potentiels et pseudo potentiels de dissipation. Ainsi, il vient :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \frac{\partial f_{\pi,n}^{(i+1),(p),(k)}}{\partial\tau_n^{\pi,(i+1),(p),(k)}} & = & \mathbf{sg}(\tau_n^{\pi,(i+1),(p),(k)} - X_n^{(i+1),(p),(k)}) \\ \frac{\partial f_{\pi,n}^{(i+1),(p),(k)}}{\partial X_n^{(i+1),(p),(k)}} & = & -\mathbf{sg}(\tau_n^{\pi,(i+1),(p),(k)} - X_n^{(i+1),(p),(k)}) \\ \frac{\partial\phi_{\pi,n}^{(i+1),(p),(k)}}{\partial\tau_n^{\pi,(i+1),(p),(k)}} & = & \mathbf{sg}(\tau_n^{\pi,(i+1),(p),(k)} - X_n^{(i+1),(p),(k)}) \\ \frac{\partial\phi_{\pi,n}^{(i+1),(p),(k)}}{\partial X_n^{(i+1),(p),(k)}} & = & -\mathbf{sg}(\tau_n^{\pi,(i+1),(p),(k)} - X_n^{(i+1),(p),(k)}) + aX_n^{(i+1),(p),(k)} \end{array}\right. \tag{3.174}$$

où **sg** est la fonction signe.

En combinant les équations 3.172 et 3.173, on obtient l'expression du multiplicateur de Lagrange :

$$\Delta\lambda_{\pi,n}^{(i+1),(p),(k)} = \frac{f_{\pi,n}^{(i+1),(p),(k)}}{2\mu d_n^{(i+1),(p)} \frac{\partial f_{\pi,n}^{(i+1),(p),(k)}}{\partial \tau_n^{\pi,(i+1),(p),(k)}} \frac{\partial \phi_{\pi,n}^{(i+1),(p),(k)}}{\partial \tau_n^{\pi,(i+1),(p),(k)}} + \gamma \frac{\partial f_{\pi,n}^{(i+1),(p),(k)}}{\partial X_n^{(i+1),(p),(k)}} \frac{\partial \phi_{\pi,n}^{(i+1),(p),(k)}}{\partial X_n^{(i+1),(p),(k)}}} \tag{3.175}$$

Les itérations locales pour l'algorithme d'intégration implicite continuent tant que les critères de convergence ne sont pas satisfaits. Ces derniers s'expriment par les équations 3.149. Les contraintes totales peuvent donc être actualisées en utilisant l'équation 3.168.

Actualisation du facteur de partition

Le facteur de partition est actualisé en déterminant une correction $\Delta\eta_n^{(i),(p)}$. Cette dernière est estimée en linéarisant l'équation d'équilibre entre les efforts repris par l'acier et ceux repris par l'interface acier/béton. De manière générique, l'équation d'équilibre est mise sous la forme $f(\eta_n^{(i),(p+1)}) = 0$. Sa linéarisation s'écrit comme suit :

$$f(\eta_n^{(i+1),(p+1)}) = f(\eta_n^{(i+1),(p)}) + \frac{\partial f(\eta_n^{(i+1),(p)})}{\partial \eta_n^{(i+1),(p)}} \Delta\eta_n^{(i+1),(p)} \approx 0 \tag{3.176}$$

d'où on tire l'expression de la correction du facteur de partition :

$$\Delta\eta_n^{(i+1),(p)} = -\frac{f(\eta_n^{(i+1),(p)})}{\frac{\partial f(\eta_n^{(i+1),(p)})}{\partial \eta_n^{(i+1),(p)}}} \tag{3.177}$$

De manière plus précise, pour des raisons de stabilité numérique, il a été constaté qu'il valait mieux conserver une raideur initiale constante et avoir quelques itérations de plus. Autrement dit, c'est une méthode de Newton modifiée et non de Newton-Raphson qui est utilisée. La raideur est donc calculée à partir des lois élastiques linéaires d'une part de l'acier et d'autre part, de l'interface acier/béton. Ainsi, la correction du facteur de partition s'écrit :

$$\Delta\eta_n^{(i+1),(p)} = -\frac{f(\eta_n^{(i+1),(p)})}{\pi R l_c \mu + \pi R^2 E^{\mathbf{A}}} \tag{3.178}$$

où R est le rayon de la barre d'acier et $E^{\mathbf{A}}$ le module d'Young de l'acier. Le nouveau facteur de partition est alors actualisé par :

$$\eta_n^{(i+1),(p+1)} = \eta_n^{(i+1),(p)} + \Delta\eta_n^{(i+1),(p)} \tag{3.179}$$

Le processus est itératif jusqu'à ce que l'équation d'équilibre soit vérifiée à une tolérance près. De nouveau, pour des raisons de robustesse et de stabilité numérique, un critère de convergence relatif sur le résidu de l'équation d'équilibre a été considéré. Ce dernier s'exprime par :

$$\frac{|f(\eta_n^{(i+1),(p+1)})|}{|f(\eta_n^{(i+1),(0)})|} \leq \varepsilon_{\mathbf{Tol}}^{(6)} \tag{3.180}$$

où $\varepsilon_{\mathbf{Tol}}^{(6)}$ est une tolérance fixée à 10^{-6}.

3.5.4 Modèle simplifié du béton

L'implantation numérique du modèle simplifié de béton est réalisée de manière classique. Pour cela, on se place en un point de Gauss d'une section de béton. Les déformations sont donc actualisées :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \epsilon_{xx,n}^{(i+1)} & = & \epsilon_{xx,n}^{(i)} + \Delta\epsilon_{xx,n}^{(i)} \\ \boldsymbol{\epsilon}_n^{(i+1)} & = & \boldsymbol{\epsilon}_n^{(i)} + \Delta\boldsymbol{\epsilon}_n^{(i)} \end{array} \right. \tag{3.181}$$

Prédiction en contraintes. Les contraintes totales sont prédites grâce à la première loi d'état :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \sigma_{xx,n}^{\mathbf{Trial},(i+1)} & = & E((1-d_n^{(i)}) < \epsilon_{xx,n}^{(i+1)} >_+ + < \epsilon_{xx,n}^{(i+1)} >_-) \\ \boldsymbol{\tau}_n^{\mathbf{Trial},(i+1)} & = & 2(1-d_n^{(i)})\mu\boldsymbol{\epsilon}_n^{(i+1)} + 2\mu d_n^{(i)}(\boldsymbol{\epsilon}_n^{(i+1)} - \boldsymbol{\epsilon}_n^{\pi,(i+1)}) \end{array} \right. \tag{3.182}$$

Les contraintes prédites associées au frottement s'écrivent :

$$\boldsymbol{\tau}_n^{\pi,\mathbf{Trial},(i+1)} = 2\mu d_n^{(i)}(\boldsymbol{\epsilon}_n^{(i+1)} - \boldsymbol{\epsilon}_n^{\pi,(i+1)}) \tag{3.183}$$

Endommagement et écrouissage isotrope. La surface seuil gérant l'évolution de l'endommagement est évaluée. Le taux d'énergie $\bar{Y}_n^{(i+1)}$ est donc calculé. Si la fonction seuil est négative, alors il n'y a aucune évolution. En revanche, si elle est positive, alors il y a évolution. Dans ce cas, la variable d'endommagement et la force thermodynamique associée à l'écrouissage isotrope sont déterminées :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} d_n^{(i+1)} & = & 1 - \frac{1}{1+\mathcal{H}(\epsilon_{xx,n}^{(i+1)})A_{\mathbf{Dir}}(\bar{Y}_n^{(i+1)}-Y_0)+(1-\mathcal{H}(\epsilon_{xx,n}^{(i+1)}))A_{\mathbf{Ind}}(\bar{Y}_n^{(i+1)}-Y_0)} \\ Z_n^{(i+1)} & = & \bar{Y}_n^{(i+1)} - Y_0 \end{array} \right. \tag{3.184}$$

Glissement interne et écrouissage cinématique. Comme précédemment, la surface seuil est linéarisée autour du point de fonctionnement courant. Il vient alors :

$$f_{\pi,n}^{(i+1),(k+1)} = f_{\pi,n}^{(i+1),(k)} + \frac{\partial f_{\pi,n}^{(i+1),(k)}}{\partial \boldsymbol{\tau}_n^{\pi,(i+1),(k)}}\Delta\boldsymbol{\tau}_n^{\pi,(i+1),(k)} + \frac{\partial f_{\pi,n}^{(i+1),(k)}}{\partial \boldsymbol{X}_n^{(i+1),(k)}}\Delta\boldsymbol{X}_n^{(i+1),(k)} \approx 0 \tag{3.185}$$

En utilisant les lois d'évolution, les différents incréments de contrainte de frottement et de rappel peuvent être calculés :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \Delta\boldsymbol{\tau}_n^{\pi,(i+1),(k)} & = & -2\mu d_n^{(i+1)}\Delta\lambda_\pi^{(i+1),(k)}\frac{\partial\phi_{\pi,n}^{(i+1),(k)}}{\partial\boldsymbol{\tau}_n^{\pi,(i+1),(k)}} \\ \Delta\boldsymbol{X}_n^{(i+1),(k)} & = & -\gamma\Delta\lambda_\pi^{(i+1),(k)}\frac{\partial\phi_{\pi,n}^{(i+1),(k)}}{\partial\boldsymbol{X}_n^{(i+1),(k)}} \end{array} \right. \tag{3.186}$$

Les dérivées sont calculées analytiquement grâce aux expressions des potentiel et pseudo potentiel de dissipation :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \frac{\partial f_{\pi,n}^{(i+1),(k)}}{\partial\boldsymbol{\tau}_n^{\pi,(i+1),(k)}} & = & \frac{\boldsymbol{\tau}_n^{\pi,(i+1),(k)} - \boldsymbol{X}_n^{(i+1),(k)}}{||\boldsymbol{\tau}_n^{\pi,(i+1),(k)} - \boldsymbol{X}_n^{(i+1),(k)}||_2} \\ \frac{\partial f_{\pi,n}^{(i+1),(k)}}{\partial\boldsymbol{X}_n^{(i+1),(k)}} & = & -\frac{\boldsymbol{\tau}_n^{\pi,(i+1),(k)} - \boldsymbol{X}_n^{(i+1),(k)}}{||\boldsymbol{\tau}_n^{\pi,(i+1),(k)} - \boldsymbol{X}_n^{(i+1),(k)}||_2} \\ \frac{\partial \phi_{\pi,n}^{(i+1),(k)}}{\partial\boldsymbol{\tau}_n^{\pi,(i+1),(k)}} & = & \frac{\boldsymbol{\tau}_n^{\pi,(i+1),(k)} - \boldsymbol{X}_n^{(i+1),(k)}}{||\boldsymbol{\tau}_n^{\pi,(i+1),(k)} - \boldsymbol{X}_n^{(i+1),(k)}||_2} \\ \frac{\partial \phi_{\pi,n}^{(i+1),(k)}}{\partial\boldsymbol{X}_n^{(i+1),(k)}} & = & -\frac{\boldsymbol{\tau}_n^{\pi,(i+1),(k)} - \boldsymbol{X}_n^{(i+1),(k)}}{||\boldsymbol{\tau}_n^{\pi,(i+1),(k)} - \boldsymbol{X}_n^{(i+1),(k)}||_2} + a\boldsymbol{X}_n^{(i+1),(k)} \end{array} \right. \tag{3.187}$$

En utilisant les expressions 3.185 et 3.186, le multiplicateur de Lagrange peut être déterminé :

$$\Delta\lambda_{\pi,n}^{(i+1),(k)} = \frac{f_{\pi,n}^{(i+1),(k)}}{2\mu d_n^{(i+1)}\frac{\partial f_{\pi,n}^{(i+1),(k)}}{\partial\boldsymbol{\tau}_n^{\pi,(i+1),(k)}}\cdot\frac{\partial\phi_{\pi,n}^{(i+1),(k)}}{\partial\boldsymbol{\tau}_n^{\pi,(i+1),(k)}} + \gamma\frac{\partial f_{\pi,n}^{(i+1),(k)}}{\partial\boldsymbol{X}_n^{(i+1),(k)}}\cdot\frac{\partial\phi_{\pi,n}^{(i+1),(k)}}{\partial\boldsymbol{X}_n^{(i+1),(k)}}} \tag{3.188}$$

Les itérations sont arrêtées lorsqu'un critère de convergence identique à celui exprimé par les équations 3.149 est vérifié. Les contraintes totales peuvent ensuite être actualisées.

3.5.5 Bilan

Dans cette section, l'implantation numérique des modèles constitutifs proposés a été présentée. D'une manière générale, le passage d'un état à l'autre, pour un pas de temps, en un point de Gauss fixé, est réalisé en couplant intégrations explicite et implicite. Cela confère stabilité et robustesse numérique à la procédure d'intégration locale des lois d'écoulement. En premier lieu, l'implantation du modèle d'interface acier/béton dans sa version la plus complète a été présentée. Pour cela, le choix d'un élément d'épaisseur nul a été retenu. Bien que la définition des paramètres élastiques varie (rigidité par mètre et non rigidité seule), la formulation globale reste cohérente par rapport aux développements présentés précédemment. Ce choix a été retenu comme étant le plus robuste après de nombreux tests sous chargements complexes. En second lieu, l'implantation numérique de la loi constitutive de béton a été présentée dans le cas tridimensionnel. En troisième lieu, l'implantation du modèle simplifié de l'interface acier/béton a été présentée. Il peut être noté que la nécessité de déterminer un facteur de partition tel que les équations d'équilibre soient localement vérifiées implique la mise en place d'un algorithme d'intégration supplémentaire. Cela a pour effet d'alourdir le calcul en chaque point de Gauss. Par ailleurs, le choix de la longueur d'ancrage peut parfois entraîner la divergence de cet algorithme. En dernier lieu, l'implantation de la version multifibre du modèle simplifié du béton a été exposée. Bien qu'aucune spécificité particulière ne soit à mentionner par rapport à l'existant, la robustesse et la stabilité numérique du schéma d'intégration peuvent être soulignées.

3.6 Identification des paramètres et résultats locaux

3.6.1 Identification des paramètres

Dans cette section, il est proposé de s'intéresser à l'identification des paramètres matériaux des différents modèles constitutifs présentés précédemment. Pour cela, les modèles constitutifs exposés sont revus en insistant sur les différents paramètres, leur sens physique et enfin, la méthodologie permettant de déterminer leur valeur nominale. Il peut être noté que les cas particuliers des différentes versions ne sont pas détaillés. En effet, la méthodologie employée pour identifier les paramètres reste indépendante de la version du modèle, en revanche leur valeur nominale est affectée.

Paramètres matériaux liés au modèle d'interface acier/béton

D'après les sections précédentes, les paramètres matériaux liés au modèle constitutif de l'interface acier/béton en présence de corrosion peuvent être récapitulés dans le tableau 3.3. D'après le tableau 3.3, le modèle comprend 16 paramètres matériaux à identifier. Dans sa version tridimensionnelle, 3 paramètres sont associés à l'élasticité $(K_i)_{i=\mathbf{n},\mathbf{t},\mathbf{b}}$, 3 paramètres Y_0, A_d, α_0 et une fonction W permettent la gestion de l'endommagement, 3 paramètres γ, a et c correspondent à l'écrouissage cinématique pour la gestion du glissement interne et enfin, 6 paramètres σ_y, $(q_i)_{i=1,2,3}$, k et n permettent de gérer l'anélasticité des produits de corrosion lorsqu'ils sont soumis à un état de contrainte de compression.

Notation	Sens physique	Valeur nominale	Unité
$K_{\mathbf{n}}$	Rigidité normale	$3,6.10^{10}$	Pa.m^{-1}
$K_{\mathbf{t}}$	Rigidité tangentielle	$1,5.10^{10}$	Pa.m^{-1}
$K_{\mathbf{b}}$	Rigidité binormale	$1,5.10^{10}$	Pa.m^{-1}
Y_0	Seuil initial en énergie pour l'endommagement	200	J.m^{-3}
A_d	Fragilité	$7,5.10^{-5}$	$\text{J}^{-1}\text{.m}^3$
α_0	Dissymétrie mode I/mode II	6	-
W	Fonction d'adhérence	cf. section 3.6	J.m^{-3}
γ	Module d'écrouissage cinématique	10^9	Pa
a	Module d'écrouissage cinématique associé à la partie non linéaire	5.10^{-7}	Pa^{-1}
c	Dilatance	$0,09$	-
σ_y	Contrainte seuil pour le remplissage des vides	-10^6	Pa
q_1	Paramètre 1 du critère de Gurson	$3,5$	-
q_2	Paramètre 2 du critère de Gurson	$0,9$	-
q_3	Paramètre 3 du critère de Gurson	$0,1$	-
k	Module d'évolution des vides	10^{10}	-
n	Exposant d'écrouissage	2	-

TAB. 3.3 – Description des paramètres matériaux du modèle d'interface acier/béton en présence de corrosion.

Identification des paramètres élastiques. Parce que le modèle d'interface acier/béton a été implanté dans un élément sans épaisseur, sa formulation n'est plus en termes de contraintes/déformations mais en termes de contraintes/déplacements relatifs. Ainsi, les paramètres élastiques peuvent être interprétés comme des densités de rigidité par mètre. Par ailleurs, du fait de l'absence d'épaisseur de l'élément d'interface, il se peut qu'il y ait des problèmes liés à l'interpénétration des surfaces. Ce problème est résolu d'une part en imposant que la raideur normale soit supérieure d'un ou deux ordres de grandeur aux raideurs tangentielles et d'autre part, grâce à la rigidification produite par les produits de corrosion à l'interface acier/béton. Enfin, du fait du manque d'informations expérimentales disponibles, les rigidités tangentielle et binormale sont supposées égales. Ainsi, les contraintes sur le choix des paramètres élastiques sont les suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} K_{\mathbf{n}} & > & K_{\mathbf{t}} \\ K_{\mathbf{n}} & > & K_{\mathbf{b}} \\ K_{\mathbf{t}} & = & K_{\mathbf{b}} \end{array} \right. \tag{3.189}$$

Les travaux de (Daoud, 2003) et, plus récemment, ceux de (Dominguez, 2005) font état du fait que les propriétés élastiques de l'interface acier/béton peuvent être considérées comme voisines de celles du béton constitutif de l'élément de structure considéré. Ainsi, dans cette étude, le calage des paramètres élastiques liés à l'interface acier/béton a toujours été réalisé sur la base des valeurs des paramètres élastiques du béton, à savoir, module de compressibilité et coefficient de cisaillement.

Identification des paramètres liés à l'endommagement. Le premier paramètre lié à l'endommagement est un seuil initial, exprimé en terme de taux d'énergie, qu'il est nécessaire de dépasser pour permettre au mécanisme d'endommagement d'évoluer. L'expérience numérique acquise sur ce modèle permet d'affirmer que ce dernier peut être choisi voisin de l'énergie de

fissuration du béton, soit $Y_0 \approx 200$ J.m^{-3}. Le second paramètre qu'il est nécessaire d'identifier est lié à la fragilité et est noté A_d. Sa valeur peut être estimée en effectuant une analyse inverse au point de Gauss en retenant comme critère d'identification la résistance au pic de cisaillement. Il doit être noté que ce paramètre peut être identifié pour représenter le comportement de l'interface acier/béton soit avec un acier lisse (réponse plutôt ductile) soit avec un acier cranté (réponse plutôt fragile). Le troisième paramètre α_0 permet de gérer la dissymétrie entre les modes de dégradation I et II/III. D'après les travaux effectués par (Ragueneau *et al.*, 2006), ce paramètre peut être pris égal à 6. Cela implique un rapport voisin de 2 entre les résistances au pic en mode I et II/III, celle en mode II/III étant plus importante.

Identification des paramètres liés au glissement interne. Les paramètres liés à la gestion du glissement interne sont assez sensibles et ne doivent pas être trop modifiés afin d'éviter les risques de divergence de l'algorithme d'intégration implicite des équations d'évolution. Le paramètre γ permet d'agir sur la taille des boucles d'hystérésis en chargement cyclique et donc, sur l'intensité des déformations permanentes. En revanche, le paramètre a permet de contrôler la non linéarité de la transition entre les modules sécant et élastique lors d'une décharge. Autrement dit, la transition peut être effectuée de manière plus ou moins linéaire selon la valeur de ce paramètre. Enfin, le paramètre de dilatance c permet de donner plus ou moins de poids à l'effet du confinement extérieur. Ainsi, selon les prescriptions proposées par (Ragueneau, 1999), les valeurs nominales de ces paramètres peuvent être choisies telles que $\gamma \approx 7.10^9$ Pa, $a \approx 7.10^{-7}$ Pa^{-1} et $c \approx 0,09$.

Identification des paramètres liés à l'anélasticité des produits de corrosion. Le choix d'un critère de Gurson modifié pour rendre compte du caractère rigidifiant des produits de corrosion implique l'introduction de 6 paramètres matériaux à identifier. Un tel critère a été retenu en raison des travaux réalisés par (Burlion *et al.*, 2000). Ces auteurs présentent un modèle constitutif permettant de décrire le comportement du béton en compaction sous sollicitations dynamiques. En outre, ils proposent d'utiliser un tel critère pour représenter la rigidification du béton. Cette approche a donc été adaptée au cas présent. Par ailleurs, (Burlion *et al.*, 2000) ont réalisé une étude de sensibilité complète qui a été utilisée pour l'identification des valeurs nominales de chacun des paramètres matériaux. Ainsi, dans la présente étude, les valeurs de ces paramètres ont été choisies d'après cette étude de sensibilité.

Identification de la fonction W. La fonction W a été introduite dans la fonction seuil de l'endommagement pour tenir compte de l'effet de la corrosion sur l'adhérence acier/béton. En effet, cette fonction permet de créer soit un retard lors de l'activation du mécanisme d'endommagement, soit un endommagement initial. Son identification précise est délicate en raison de l'importance des données expérimentales nécessaires. De plus, proposer une expression analytique de cette fonction reste également délicat en raison de la méconnaissance du comportement intrinsèque des produits de corrosion et de leur effet sur le béton d'enrobage. Néanmoins, cette dernière peut être définie point par point en considérant les résultats d'essai pull-out effectués à différents degrés de corrosion. En supposant posséder de tels résultats, la fonction W peut donc être définie de manière discrète en considérant comme critère d'identification la contrainte de cisaillement au pic de résistance. Dans la suite, une identification possible de la fonction W à l'aide des données expérimentales tirées de (Sulaimani *et al.*, 1990) est montrée. Les valeurs entre les points identifiés sont interpolées de manière linéaire. La figure 3.2 donne une représentation de la forme de la fonction W après identification. Une comparaison après identification entre les valeurs expérimentales et les résultats numériques est présentée sur la figure 3.3.

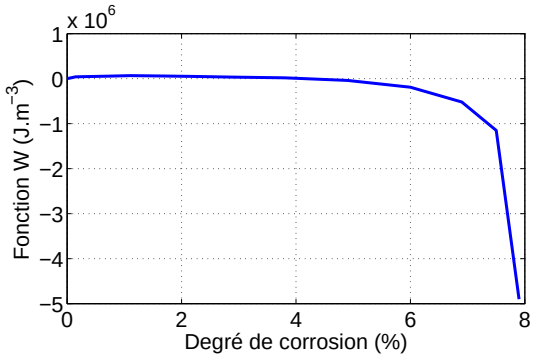


FIG. 3.2 – Graphe de la fonction W après identification.

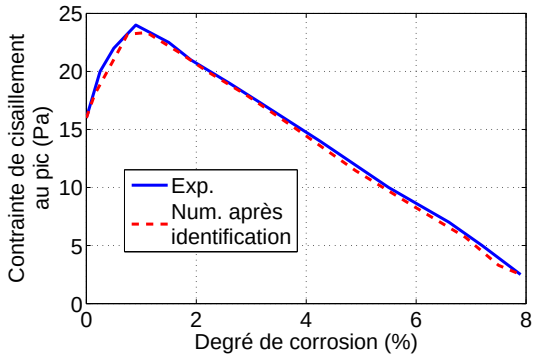


FIG. 3.3 – Comparaison de la réponse du modèle avec l'expérience après identification.

Paramètres matériaux liés au modèle de béton

Les paramètres matériaux liés au modèle constitutif de béton sont rassemblés dans le tableau 3.4. Les développements exposés précédemment ont montré que les équations constitutives du modèle de béton comprennent 9 paramètres matériaux à identifier. L'élasticité nécessite 2 paramètres κ et μ qui sont respectivement le coefficient de compressibilité et le module de cisaillement. Le mécanisme d'endommagement comprend 4 paramètres Y_0, $A_{\mathbf{Dir}}$, $A_{\mathbf{Ind}}$ et β. Ces derniers représentent respectivement un seuil initial, les fragilités dues aux extensions directes (traction) et induites (effets Poisson en compression) et enfin, un paramètre permettant de dissymétriser la fonction seuil associée au mécanisme d'endommagement. Trois paramètres matériaux γ, a et c permettent de gérer l'évolution de l'écrouissage cinématique. Le paramètre de dilatance c a également été codé en dur ; il a été remarqué qu'une très faible variation de ce dernier pouvait entraîner la divergence des algorithmes d'intégration locale.

Notation	Sens physique	Valeur nominale	Unité
κ	Coefficient de compressibilité	20000.10^6	Pa
μ	Module de cisaillement	15000.10^6	Pa
Y_0	Seuil initial en énergie pour l'endommagement	200	$\mathrm{J.m^{-3}}$
$A_{\mathbf{Dir}}$	Fragilité en traction	$1,0.10^{-2}$	$\mathrm{J^{-1}.m^3}$
$A_{\mathbf{Ind}}$	Fragilité en compression	$8,0.10^{-5}$	$\mathrm{J^{-1}.m^3}$
β	Paramètre de dissymétrie du seuil	152	-
γ	Module d'écrouissage cinématique	$7,0.10^9$	Pa
a	Module d'écrouissage associé à la partie non linéaire	$7,0.10^{-7}$	$\mathrm{Pa^{-1}}$
c	Dilatance	$1,23$	-

TAB. 3.4 – Paramètres matériaux du modèle de béton.

Identification des paramètres élastiques. Les valeurs nominales des coefficients de compressibilité et du module de cisaillement peuvent être déduites du module d'Young et du coefficient de Poisson. Ces derniers peuvent être identifiés de manière classique, à l'aide d'essais mécaniques de compression et/ou d'essais de traction directe ou indirecte (fendage, traction par

flexion, ...).

Identification des paramètres liés à l'endommagement. Le premier paramètre à identifier est le seuil d'endommagement. Ce paramètre peut être estimé en fonction de la résistance moyenne en traction f_t par la relation $Y_0 = \frac{f_t^2}{2E}$. Les fragilités en traction et en compression nécessitent des essais mécaniques respectivement en traction et en compression avec un suivi de la déformation au cours du pseudo temps. Par analyse inverse, ces paramètres peuvent être déterminés sans difficulté particulière. Enfin, le dernier paramètre concernant le mécanisme d'endommagement, noté β, peut être évalué à l'aide d'essais multiaxiaux. L'expérience numérique, sur la base de ce modèle, a permis de proposer une valeur nominale telle que $\beta \approx 152$.

Identification des paramètres liés au glissement interne. Les paramètres liés au frottement dans le cas du modèle constitutif de béton sont identifiés de la même manière que ceux évoqués dans le cas du modèle constitutif de l'interface acier/béton. Des valeurs nominales proches de celles exposées précédemment sont donc proposées. La valeur du paramètre c a été déterminée de manière à retrouver la réponse multiaxiale expérimentale.

3.6.2 Résultats locaux

Dans cette section, il est proposé de montrer quelques résultats locaux à l'échelle du point de Gauss. De plus, en vue d'apprécier les effets d'une variation des paramètres matériaux sur la réponse des modèles constitutifs en terme de contraintes/déformations, une étude de sensibilité est aussi présentée. Quelques comparaisons avec l'expérience sont aussi formulées.

Modèle constitutif de l'interface acier/béton en présence de corrosion

Seule la sensibilité de la réponse aux variations des paramètres matériaux principaux en mode I et en mode II est étudiée, le mode III étant équivalent au mode II. Pour cela, les paramètres ont été pris égaux à leurs valeurs nominales, présentées dans le tableau 3.3, excepté ceux qui font l'objet de l'étude dont les valeurs sont clairement précisées.

Fragilité. Le premier paramètre que l'on se propose d'étudier est la fragilité. La figure 3.4 permet de mettre en évidence le rôle de ce dernier. En premier lieu, il peut être observé que plus la fragilité diminue, plus la réponse de l'interface est fragile. Cela est d'autant plus vrai en mode I qu'en mode II. En second lieu, du fait de la dissymétrie créée en mode I/II par le biais du paramètre α_0, les contraintes au pic de résistance en mode I et II sont pratiquement dans un rapport de 2. En dernier lieu, il peut être remarqué que la contrainte de cisaillement en mode II tend asymptotiquement vers une contrainte non nulle, égale à la contrainte de frottement résiduelle. En revanche, en mode I, du fait que le mécanisme de glissement interne ne mobilise pas de frottement, la contrainte normale tend asymptotiquement vers 0.

Paramètre de dissymétrisation des mode I et mode II. Le paramètre de dissymétrisation α_0 permet de créer une dissymétrie entre les réponses en mode I et en mode II. Ce paramètre agit donc comme une constante de pénalisation sur le taux d'énergie dissipée en mode I et permet de l'accentuer. Sa valeur n'a aucun effet sur la réponse en mode II. La figure 3.6 montre différentes réponses en mode I obtenues pour trois valeurs de ce paramètre. Plus ce dernier est élevé, plus la réponse est fragile, comme attendu. La figure 3.7 montre que la réponse en mode II n'est pas affectée.

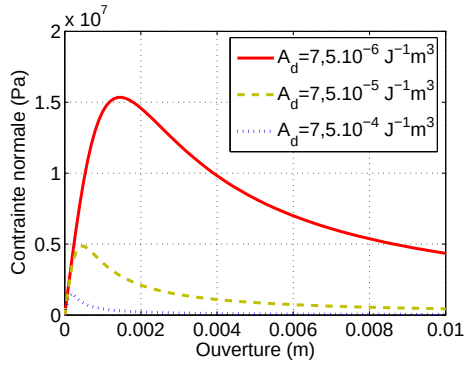


FIG. 3.4 – Sensibilité de la réponse en mode I aux variations de la fragilité.

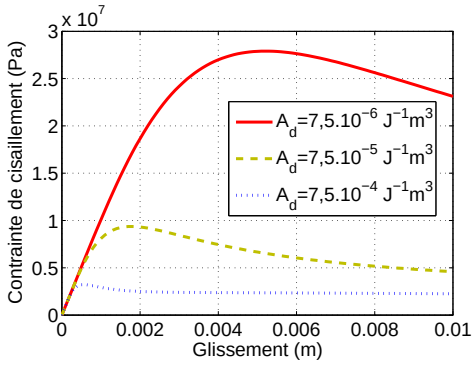


FIG. 3.5 – Sensibilité de la réponse en mode II aux variations de la fragilité.

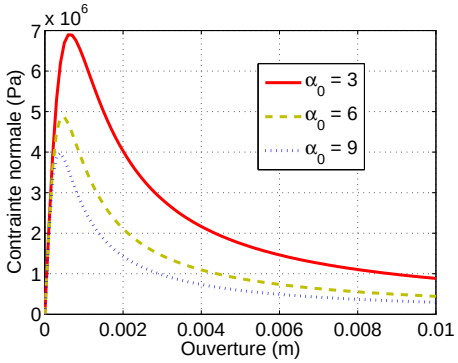


FIG. 3.6 – Sensibilité de la réponse en mode I aux variations du paramètre de dissymétrisation mode I/II.

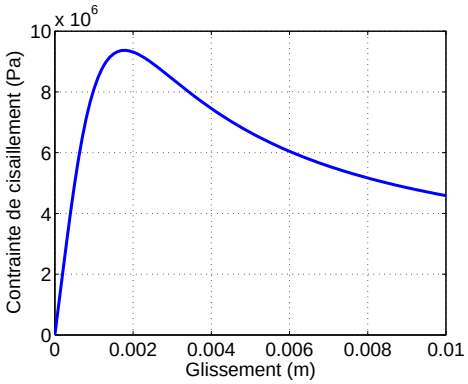


FIG. 3.7 – Réponse de référence en mode II.

Modules d'écrouissage cinématique. Les modules d'écrouissage cinématique permettent de contrôler d'une part l'intensité des boucles d'hystérésis dans le cas du chargement cyclique et d'autre part, l'intensité des déformations permanentes. Ainsi, pour mettre en évidence le rôle de ces deux paramètres, le cas d'un chargement cyclique en mode II est considéré. Il est rappelé qu'en mode I, le mécanisme de glissement interne ne mobilise pas de frottement. Il en résulte donc qu'aucun effet hystérétique n'est décrit. En premier lieu, la figure 3.8 permet d'observer la sensibilité de la réponse en mode II aux variations du paramètre γ. Il apparaît clairement que plus ce paramètre diminue, plus le glissement interne a tendance à agir sans mobiliser de frottement. Autrement dit, c'est l'aire des boucles d'hystérésis qui est modifiée : c'est-à-dire que davantage d'énergie est dissipée par frottement interne. En second lieu, la figure 3.9 permet d'observer que plus le paramètre a diminue, plus la transition entre le module élastique initial et sécant se produit de manière progressive. Cela se traduit donc par l'apparition de déformations résiduelles plus importantes. Il est toutefois essentiel de noter que la plage de variation admissible (qui n'entraîne pas la divergence de l'algorithme d'intégration locale) de ces deux paramètres est assez restreinte. Leur choix doit donc être fait avec prudence et corroboré par une étude à l'échelle du point de Gauss avant d'intégrer le modèle d'interface à un modèle éléments finis complet.

Degré de corrosion. Dans le but de représenter les effets du phénomène de corrosion sur l'adhérence entre l'acier et le béton, un degré de corrosion macroscopique T_c a été introduit

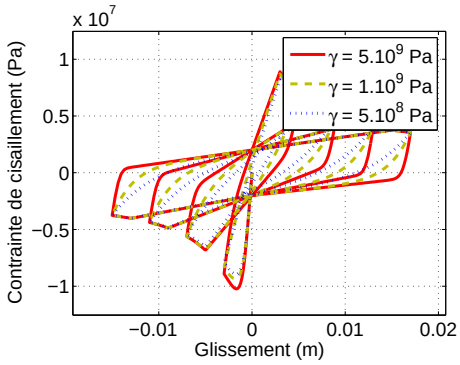


FIG. 3.8 – Sensibilité de la réponse en mode II aux variations du module d'écrouissage γ.

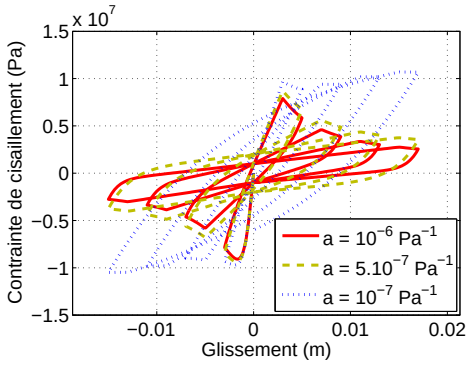


FIG. 3.9 – Sensibilité de la réponse en mode II aux variations du module d'écrouissage a.

pour indexer la fonction W. Dans ce paragraphe, les réponses en mode I et en mode II sont données pour plusieurs degrés de corrosion afin de montrer précisément comment l'adhérence entre l'acier et le béton est réduite. Les figures 3.10 et 3.11 présentent les réponses du modèle respectivement en mode I et II. Il est possible d'observer que le cadre numérique proposé est capable de prendre en compte les variations de l'adhérence acier/béton (augmentation puis diminution). Par ailleurs, les réponses en mode I et II sont toujours dissymétriques.

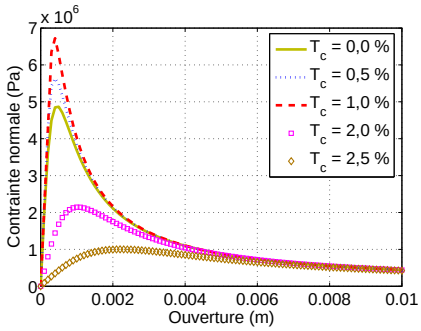


FIG. 3.10 – Effets de la corrosion sur la réponse en mode I.

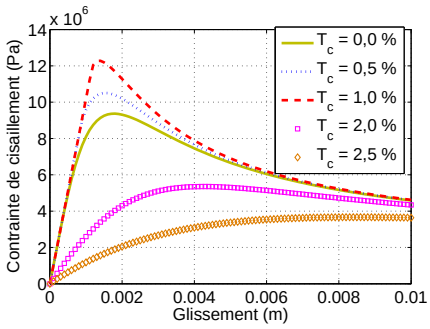


FIG. 3.11 – Effets de la corrosion sur la réponse en mode II.

Modèle constitutif de béton

Dans cette section, quelques réponses locales propres au modèle constitutif de béton proposé sont montrées. En particulier, les différents traits de comportement qui sont pris en compte via le modèle proposé sont présentés et commentés. Quelques comparaisons entre résultats numériques et expérimentaux sont formulées. Les valeurs nominales des différents paramètres sont données dans le tableau 3.4.

Réponses uniaxiales. Dans le but d'évaluer la pertinence du modèle constitutif de béton proposé, sa capacité à représenter localement un état de traction et de compression cyclique uniaxial a été testé. Pour cela, les résultats expérimentaux de (Terrien, 1980) et (Ramtani, 1990) ont été considérés. Ces auteurs n'ont toutefois pas utilisé les mêmes formulations de béton pour réaliser leurs études respectives. Ainsi, en ce qui concerne l'essai de traction cyclique, le module d'Young a été pris égal à 39600 MPa et la résistance en traction à $2,5$ MPa. Les autres paramètres matériaux sont donnés dans le tableau 3.4. En revanche, en ce qui concerne l'essai de compression

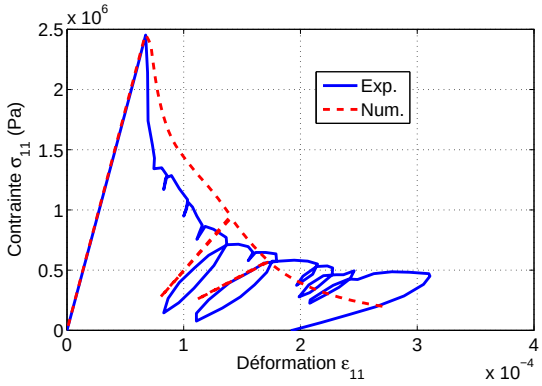


FIG. 3.12 – Comparaison des résultats numériques avec les données expérimentales en traction cyclique uniaxiale.

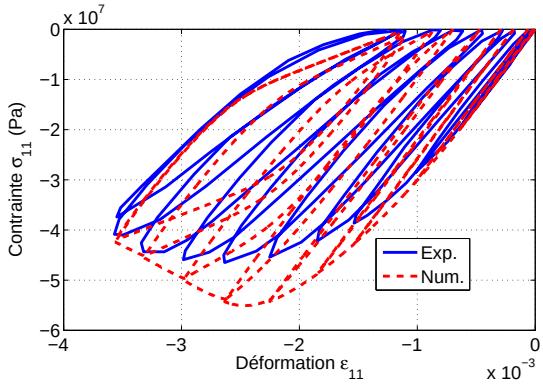


FIG. 3.13 – Comparaison des résultats numériques avec les données expérimentales en compression cyclique uniaxiale.

cyclique, le module d'Young a été pris égal à 30000 MPa. Les autres paramètres matériaux sont pris égaux à leurs valeurs nominales respectives. La figure 3.12 présente la comparaison des résultats numériques et expérimentaux. Plusieurs remarques peuvent être faites. En premier lieu, un comportement fortement adoucissant dès que le pic de résistance est dépassé est décrit. Le pic de résistance correspond à une contrainte d'environ $2,5$ MPa pour une déformation de $0,75.10^{-4}$, ce qui est en accord avec l'expérience. En second lieu, lors des deux décharges, le module effectif est égal au module endommagé. Cela provient du fait que le glissement entre les lèvres des fissures ne mobilise pas de frottement. Il reste essentiel de noter qu'une telle comparaison suppose que le comportement d'un point matériel du domaine occupé par le béton est assimilable à celui d'un certain volume jugé représentatif. Cela reste bien entendu sujet à discussion. La figure 3.13 montre la comparaison entre les résultats expérimentaux et numériques. De nouveau, la corrélation est satisfaisante. En premier lieu, il est possible de noter qu'une réponse plus ductile que celle en traction est décrite. Un pic de résistance correspondant à une contrainte de -54 MPa et à une déformation de $-2,20.10^{-3}$ est obtenue numériquement, ce qui correspond aux ordres de grandeur expérimentaux. En second lieu, les effets hystérétiques sont représentés avec précision, de même que les déformations permanentes.

Essai de Willam. Un test intéressant qui permet de discriminer les modèles constitutifs de béton est celui proposé par (Willam *et al.*, 1987). Bien que ce test soit purement numérique, il reste un des plus utilisés dans la littérature. Il permet d'évaluer d'une part la capacité d'un modèle constitutif de béton à suivre les rotations des axes principaux du tenseur des contraintes de Cauchy et, d'autre part, sa robustesse numérique. Par ailleurs, la gestion de l'anisotropie induite (liée dans le cas présent au couplage élasticité, endommagement et glissement interne) peut également être quantifiée. D'une manière générale, ce test numérique est réalisé en deux étapes distinctes. En premier lieu, un état de traction uniaxiale est simulé jusqu'à ce que le pic de résistance soit atteint. Les composantes de la matrice des déformations $(\epsilon_{11}, \epsilon_{22}, \epsilon_{12})$ sont donc proportionnelles à $(1, -\nu, 0)$. En second lieu, à la suite de l'état de déformation obtenu, un chargement en déformations imposées est réalisé de manière proportionnelle à $(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1)$. Ce type de chargement est totalement équivalent à une bi extension suivie d'un glissement ; cela induit donc une rotation des axes principaux. L'évolution des directions principales est représentée sur la figure 3.14 par la donnée des angles $\theta_{\underline{\underline{\epsilon}}}$, $\theta_{\underline{\underline{\sigma}}}$ et $\theta_{\underline{\underline{\sigma}}^{\pi}}$. Ces derniers représentent les angles entre les directions principales majeures des tenseurs des déformations, des contraintes de Cauchy et du tenseur de frottement respectivement, par rapport à la direction de chargement. Il peut être noté que les évolutions de ces angles ne sont pas les mêmes, ce qui peut être interprété

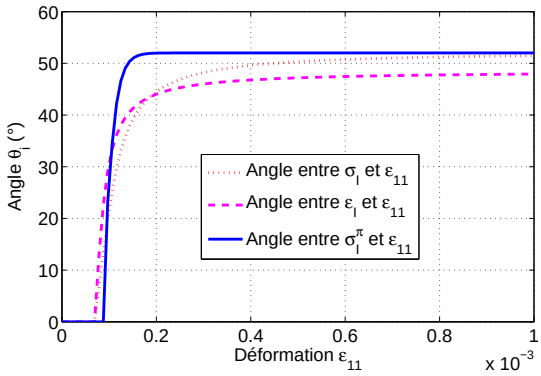


FIG. 3.14 – Evolution des directions principales en fonction du chargement.

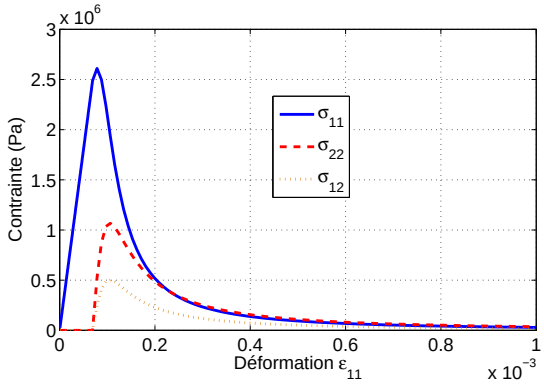


FIG. 3.15 – Evolution des différentes composantes de la matrice des contraintes en fonction du chargement.

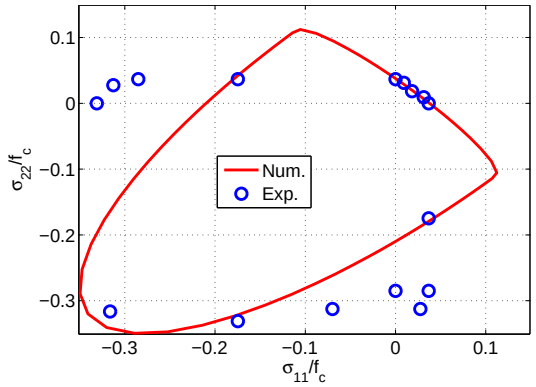


FIG. 3.16 – Surfaces d'élasticité numérique et expérimentale.

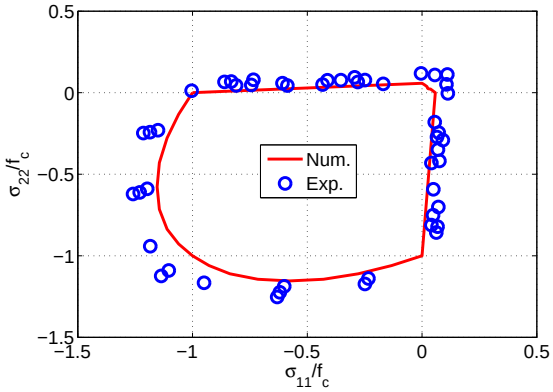


FIG. 3.17 – Surfaces de rupture numérique et expérimentale.

comme la signature de l'anisotropie induite. Cette caractéristique est à souligner étant donnée la nature scalaire de la variable d'endommagement. Elle est liée d'une part au couplage entre l'endommagement isotrope et le glissement interne et, d'autre part, à la prise en compte partielle de l'effet unilatéral. La figure 3.15 permet une observation qualitative des différentes composantes de la matrice représentative du tenseur des contraintes de Cauchy.

Réponses multiaxiales. Un autre point intéressant réside dans la capacité d'un modèle constitutif de béton à représenter de manière satisfaisante les surfaces expérimentales d'élasticité et de rupture lors d'un chargement multiaxial. Cet aspect a donc été étudié. Les résultats sont présentés sur les figures 3.16 et 3.17. Le paramètre β a été identifié de manière à ce que les surfaces numériques et expérimentales soient en accord. L'instant de rupture a été défini comme étant égal à l'instant auquel le pic de résistance est atteint (traction ou compression). Il peut être noté que le caractère bénéfique lié au confinement est bien pris en compte grâce au critère de Drucker-Prager associé au glissement interne. En effet, lors d'un chargement de bi compression, l'augmentation de la surface de rupture est décrite de manière satisfaisante. En revanche, la réponse en bi traction n'est pas totalement satisfaisante. Cela n'est toutefois pas très préjudiciable compte tenu du mode de sollicitation des structures réelles en génie civil. En effet, les sollicitations sont souvent complexes (flexion composée, torsion, ...) et ne favorisent donc que très rarement un mode de type bi traction.

Réponse quasi-unilatérale. La prise en compte de l'effet unilatéral a été testée en ne considérant que le modèle d'endommagement. Pour cela, une simulation d'un essai de traction/compression a été réalisée. Les résultats sont présentés sur la figure 3.18. Il est possible de remarquer que le modèle proposé permet de prendre en compte partiellement l'effet unilatéral à cause de la nature scalaire de la variable d'endommagement.

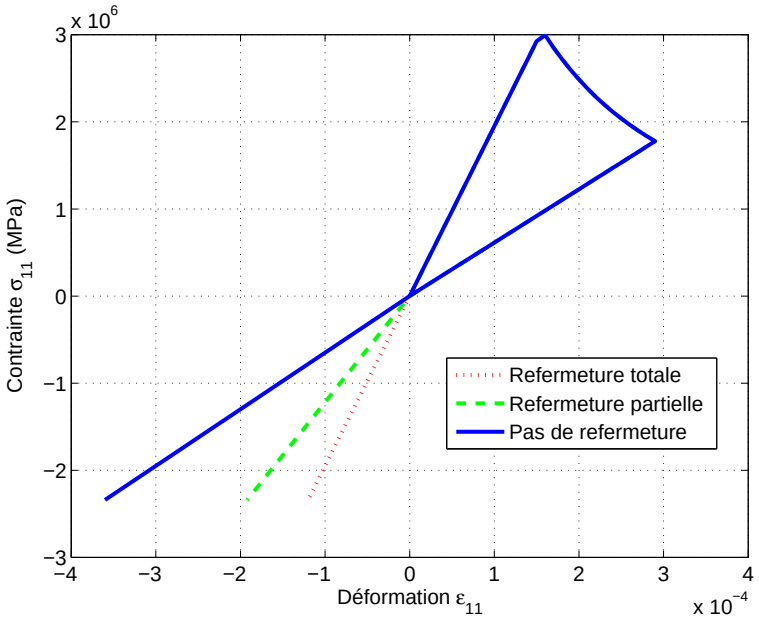


FIG. 3.18 – Effet unilatéral.

Modèle simplifié de l'interface acier/béton en présence de corrosion

Dans cette section, quelques résultats locaux liés au modèle simplifié de l'interface acier/béton sont exposés et commentés. Trois aspects essentiels sont abordés. En premier lieu, l'effet de l'interface imparfaite sur le comportement de l'acier est étudié. En particulier, il est montré que l'utilisation d'un tel modèle permet d'obtenir un comportement moyen résultant du couplage des deux comportements élémentaires (interface acier/béton et acier seul). En second lieu, l'effet de la corrosion est étudié. Pour cela, le degré de corrosion est augmenté et les conséquences sur le comportement résultant sont discutées. En dernier lieu, le cas du chargement cyclique est abordé. Aucune remarque liée à l'identification des paramètres n'est formulée car ces derniers sont identifiables d'après les commentaires déjà présentés dans les sections précédentes. Les valeurs des paramètres sont précisées dans le tableau 3.5. Le modèle d'acier utilisé est celui développé par (Ouglova, 2004), qui a été implanté dans un cadre multifibre et tridimensionnel. Les simulations réalisées consistent à imposer des incréments de déformation totale à l'ensemble interface acier/béton - acier afin d'observer comment il réagit. Aucun effet lié à la corrosion n'a été considéré. Les résultats sont montrés sur les figures 3.19, 3.20 et 3.21. Plusieurs quantités ont été suivies. En premier lieu, la réponse en terme de contrainte/glissement peut être observée. Cette quantité a été suivie au cours de la simulation car elle donne une information quantitative sur l'état de dégradation de l'interface acier/béton. En second lieu, la réponse globale est donnée en terme de contrainte normale dans l'acier/déformation totale (somme pondérée des déformations propres à l'acier et au glissement). En dernier lieu, l'évolution du facteur de partition au cours des pas de chargement est montrée. Cela permet de quantifier le poids de l'acier et de l'interface acier/béton sur la réponse globale de l'ensemble.

Notation	Sens physique	Valeur nominale	Unité
E_S	Module d'Young	200000.10^6	Pa
ν_S	Coefficient de Poisson	$0,3$	-
D_S	Endommagement critique	$0,2$	-
σ_S	Limite élastique	400.10^6	Pa
m_S	Exposant d'écrouissage	$2,786$	-
K_S	Module d'écrouissage	500.10^6	Pa
G_I	Module de cisaillement	15000.10^6	Pa
ϵ_I	Déformation seuil	$1,0.10^{-4}$	-
a_I	Module d'écrouissage associé à la partie non linéaire	$5,0.10^{-7}$	Pa^{-1}
γ_I	Module d'écrouissage cinématique	$7,0.10^9$	Pa
A_I	Fragilité	$7,0.10^{-7}$	$J^{-1}.m^3$
l_I^c	Longueur d'ancrage	0,10	m
T_C	Degré de corrosion	$0,0$	-

TAB. 3.5 – Paramètres matériaux du modèle simplifié de l'interface acier/béton en présence de corrosion - l'indice I renvoie aux paramètres liés à l'interface acier/béton et l'indice S à ceux relatifs à l'acier.

Comportement monotone résultant interface acier/béton - acier sans corrosion. La première simulation a été réalisée sous l'hypothèse d'un chargement monotone sans corrosion. Les résultats sont montrés sur la figure 3.19. Il peut être noté que l'interface acier/béton atteint un état d'endommagement important. Cela se traduit naturellement sur la réponse de l'acier. En effet, pour que l'équilibre de l'ensemble soit assuré, l'acier tend à se décharger de manière naturelle (observable à partir d'une déformation voisine de $0,06$). Par ailleurs, l'évolution du facteur de partition au cours des pas de chargement indique clairement que trois phases peuvent être distinguées. D'abord, c'est l'interface acier/béton qui prédomine (le facteur tend vers 0), puis l'acier devient prépondérant (le facteur tend vers 1) pour enfin laisser la place de nouveau à l'interface acier/béton.

Comportement monotone résultant interface acier/béton - acier avec corrosion. Dans ce paragraphe, l'effet de la corrosion est étudié. Pour cela, un degré de corrosion correspondant à une résistance de pic d'environ 6 MPa a été choisi. Les résultats sont présentés sur la figure 3.20. Il apparaît très clairement que du fait que l'interface acier/béton peut reprendre beaucoup moins d'effort que dans le cas précédent, l'acier n'a pas la possibilité de se charger et d'atteindre la plastification. En effet, afin que l'équilibre de l'ensemble soit assuré, l'acier n'a la possibilité que de fonctionner dans sa phase élastique. Autrement dit, c'est bel et bien l'interface acier/béton qui tend à prédominer. Cela devient net dès lors qu'on observe l'évolution du facteur de partition qui tend rapidement vers 0.

Comportement cyclique résultant interface acier/béton - acier sans corrosion. Le dernier point qui est abordé dans cette section concerne la réponse cyclique de l'ensemble interface acier/béton - acier sans corrosion. Les résultats sont montrés sur la figure 3.21. La réponse propre de l'interface acier/béton fait apparaître deux boucles d'hystérésis qui sont la signature d'un frottement qui est mobilisé. Cela se traduit naturellement sur la réponse de l'acier par l'apparition de deux boucles. Il est essentiel de noter que le modèle constitutif d'acier ne permet pas de manière intrinsèque d'obtenir une telle réponse. Ceci prouve donc que le comportement de l'acier est en réalité le résultat d'un ensemble (interface acier/béton et acier). Par ailleurs,

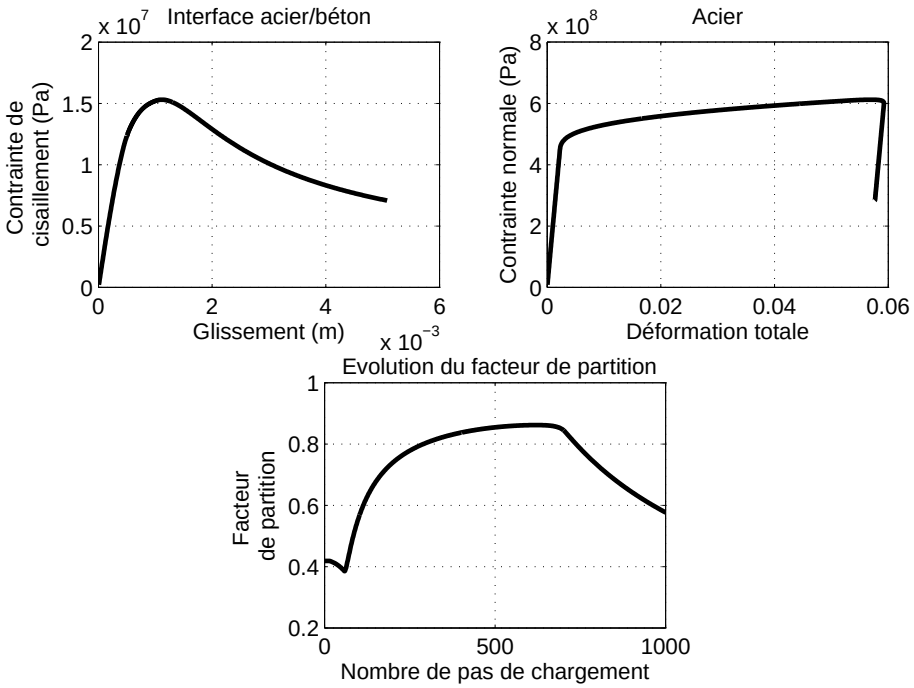


FIG. 3.19 – Résultats locaux - sans corrosion monotone

l'acier a tendance à se décharger pour les mêmes raisons que celles évoquées précédemment. L'évolution du facteur de partition montre clairement que lors de la branche de décharge d'une boucle, le comportement de l'interface acier/béton prédomine alors que lors d'une branche de recharge, c'est le comportement de l'acier qui tend à s'imposer de nouveau.

3.6.3 Bilan

Dans cette section, les aspects liés à l'identification des paramètres matériaux ont été discutés et quelques résultats locaux ont été montrés. Dans un premier temps, les paramètres liés aux différents modèles ont été présentés. Leur sens physique, quand il existe, a été souligné. Les valeurs nominales de ces paramètres ont été données. Dans le cas particulier du modèle constitutif de béton, il apparaît que les paramètres sont assez bien identifiables. Il peut être noté que ceux relatifs à la prise en compte du glissement interne ne requiert pas d'importantes modifications d'un béton à un autre. Dans le cas du modèle d'interface acier/béton, deux jeux de paramètres ont été distingués : d'une part ceux liés à la partie mécanique du modèle et, d'autre part, ceux liés à la prise en compte de la corrosion. Il apparaît que les paramètres matériaux liés à la partie mécanique peuvent être identifiés assez naturellement en effectuant une analyse inverse d'essais de tirants par exemple. En revanche, ceux liés à la prise en compte du phénomène de corrosion sont identifiables de manière moins directe. En effet, un grand nombre de données expérimentales est généralement requis pour pouvoir identifier la fonction d'adhérence. Pour cela, des essais de tirant à différents degrés de corrosion doivent être réalisés. Par ailleurs, en ce qui concerne les paramètres liés à l'anélasticité des produits de corrosion, ils n'ont pas besoin d'être modifiés de manière trop importante. Leurs valeurs nominales ont été tirées d'une importante étude de sensibilité publiée dans la littérature. Enfin, dans le cas du modèle simplifié d'interface acier/béton en présence de corrosion, les paramètres à identifier sont globalement les mêmes que ceux présents dans les modèles locaux. La méthodologie d'identification reste donc la même. Un paramètre est néanmoins présent et peut être interprété comme une longueur d'ancrage. Cette grandeur permet de donner davantage de poids au modèle d'acier ou, au contraire, au modèle d'interface

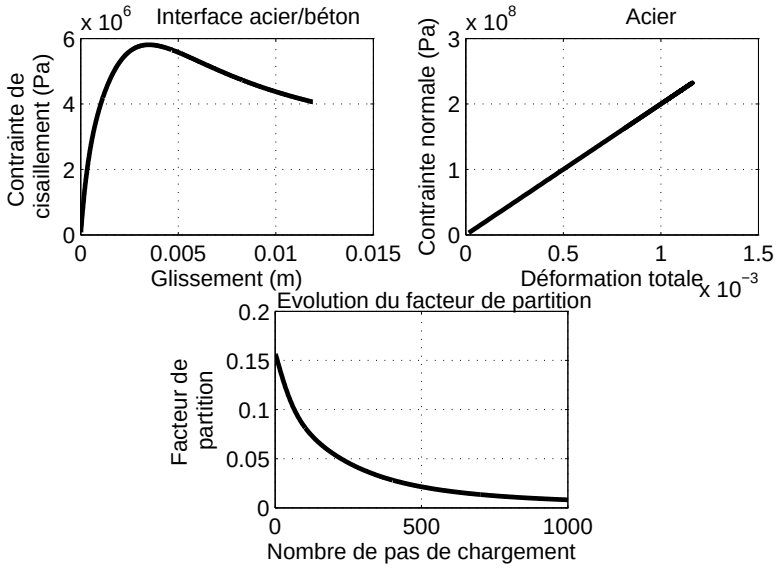


FIG. 3.20 – Résultats locaux - avec corrosion monotone

acier/béton. Elle est généralement prise égale à la taille moyenne d'un élément. Dans un second temps, quelques résultats locaux ont été montrés et commentés. Une étude de sensibilité de la réponse aux variations des paramètres du modèle local d'interface acier/béton a été montrée. En effet, aucune comparaison avec l'expérience n'a été réalisée compte tenu de l'absence de résultats purement locaux. Plusieurs comparaisons seront présentées dans le chapitre suivant en s'appuyant sur des cas structuraux. Concernant le modèle local de béton, plusieurs éléments de comparaison sont montrés. En premier lieu, les réponses uniaxiales en traction cyclique et compression cyclique obtenues numériquement sont comparées à des résultats classiques d'essais. Une bonne adéquation est constatée. En particulier, les déformations permanentes sont prises en compte de manière satisfaisante dans le cas de la compression cyclique. Afin d'évaluer la robustesse numérique des algorithmes d'intégration locale et la capacité du modèle à représenter l'anisotropie induite, le test numérique de Willam a été simulé. Il apparaît que la robustesse numérique est assurée. Par ailleurs, en raison de l'isotropie de l'endommagement, l'anisotropie induite obtenue est assez faible. Il doit être noté que la faible anisotropie induite résultant du couplage endommagement/glissement interne doit être considérée comme un atout par rapport aux modèles endommageables isotropes classiques. La réponse multiaxiale du modèle a aussi été étudiée. Il apparaît que les surfaces d'élasticité et de rupture sont en adéquation avec l'expérience, sauf dans le cas de la bi traction due à la formulation en énergie de la surface seuil du mécanisme d'endommagement. Enfin, la prise en compte de l'effet unilatéral est commentée. Il apparaît que plus l'endommagement en traction est important, plus cet effet est difficilement rendu. Cela est à rapprocher de la nature scalaire de la variable d'endommagement. Quelques résultats liés au modèle simplifié d'interface acier/béton ont été montrés. D'une manière générale, il apparaît que la condition d'équilibre entre les efforts liés à l'interface acier/béton et ceux propres à l'acier a pour effet de relaxer les contraintes dans ce dernier. Par ailleurs, du fait de ce couplage, certains traits spécifiques à l'interface acier/béton se retrouvent sur la réponse de l'acier (boucles d'hystérésis). Cela démontre donc qu'un comportement d'ensemble est obtenu.

3.7 Conclusion

Ce chapitre avait pour objectif de présenter plusieurs aspects liés à la formulation d'une classe d'équations constitutives couplant élasticité, endommagement isotrope et glissement interne.

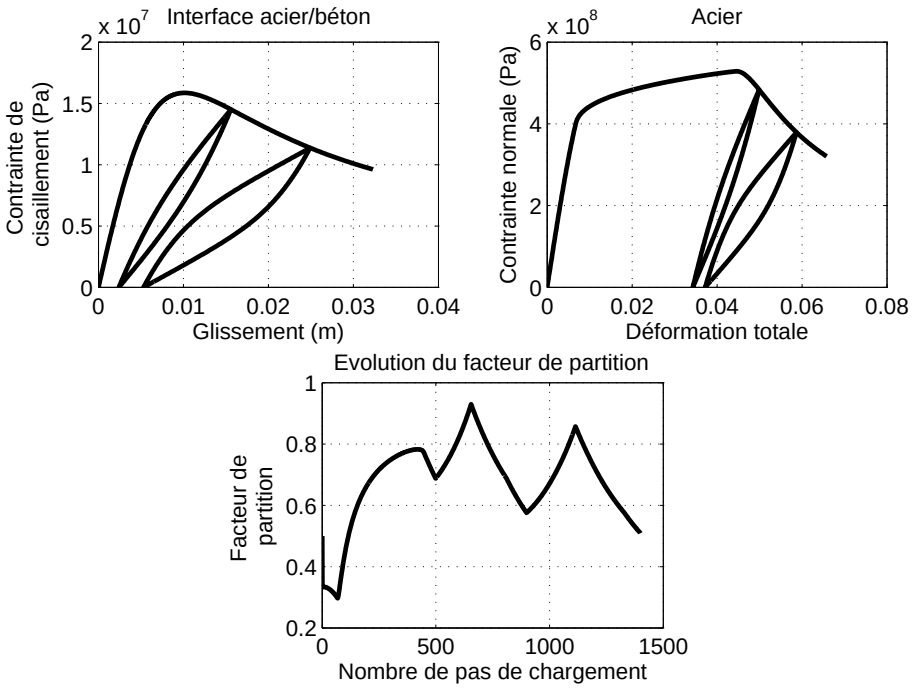


FIG. 3.21 – Résultats locaux - sans corrosion cyclique

En premier lieu, un rappel de la formulation variationnelle en déplacements est réalisé. Afin de préciser la nature du problème qui est résolu dans toute analyse aux éléments finis, une discrétisation du problème est donnée.

En second lieu, la formulation à proprement dite d'une telle classe d'équations est exposée. En particulier, la positivité de la dissipation intrinsèque est discutée. Les équations génériques sont ensuite appliquées aux cas du béton et de l'interface acier/béton en présence de corrosion.

En troisième lieu, les versions simplifiées de ces deux modèles locaux sont explicitées en s'appuyant sur le formalisme multifibre. Pour cela, quelques aspects génériques liés à ce cadre théorique sont donnés avant que toute l'attention ne soit centrée sur les cas de l'interface acier/béton et du béton. En ce qui concerne ce dernier cas, une approche originale utilisée en dynamique a été adoptée dans le but de prendre en compte le caractère imparfait de l'interface acier/béton dans un cadre multifibre. Cette approche consiste à imposer la vérification d'une condition d'équilibre local entre les efforts déployés par l'acier et ceux repris par l'interface acier/béton.

En quatrième lieu, l'implantation numérique des différents modèles est précisée. Pour cela, tant pour l'interface que pour le béton, intégrations explicites et implicites au moyen d'un algorithme return mapping sont utilisées de manière couplée, ce qui confère une grande robustesse numérique. L'ensemble des développements a été réalisé dans le code de calcul Cast3M développé par le Commissariat à l'Énergie Atomique. En dernier lieu, les aspects liés à l'identification des paramètres matériaux ont été discutés et quelques résultats locaux ont été montrés. L'identification des paramètres matériaux a été discutée. En particulier, concernant ceux relatifs à la prise en compte de la corrosion, il apparaît que leur identification est délicate compte tenu du grand nombre de données expérimentales nécessaires. Des valeurs nominales des différents paramètres ont été proposées. Dans le but de valider la bonne implantation des différents modèles,

quelques résultats locaux ont été commentés. Les premiers résultats locaux ont en outre permis de mettre en évidence la robustesse numérique des schémas d'intégration. Les premières comparaisons entre expérience et modèle semblent satisfaisantes. Néanmoins, la pertinence des différents modèles reste à être évaluée sur des structures à grande échelle, ce qui est l'objectif du prochain chapitre.

Chapitre 4

Evaluation déterministe et probabiliste des éléments de structures en béton armé sains et dégradés par corrosion

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, les domaines d'applicabilité des modèles constitutifs développés sont étudiés. Pour cela, plusieurs cas d'étude visant à mettre en évidence non seulement les points forts mais aussi les points faibles des différentes lois de comportement sont considérés. Les aspects que chaque cas d'étude permettent de mettre en évidence sont clairement spécifiés. D'une manière générale, les cas d'étude ont été choisis dans la littérature en fonction de la qualité des informations expérimentales disponibles liées au protocole. Les éléments de structures considérés sont variés, concernent différentes échelles et sont soumis à des chargements mécaniques bien identifiés en vue de tester la réponse des modèles proposés. Tout d'abord, quelques essais de tirants sont considérés. Les aspects liés à la prise en compte de l'effet bénéfique du confinement sont discutés. Pour cela, des essais de tirants courts à plusieurs niveaux de confinement ont été simulés. La sensibilité au maillage avec plusieurs éléments d'interface est analysée. Une étude de la fissuration du béton est également proposée sur la base d'essai de tirant long. Pour mettre en évidence le rôle du modèle d'interface acier/béton, des simulations avec et sans modèle spécifique d'interface sont présentés et discutés. Une modélisation fine (tridimensionnelle massive) d'essais de tirant réalisés à différents niveaux de corrosion est donnée. Les résultats obtenus permettent de mettre en évidence un certain nombre de qualités du modèle d'interface lorsque le phénomène de corrosion doit être pris en compte. Ensuite, les possibilités du modèle de béton développé sont évaluées à travers un certain nombre de cas discriminants ne faisant intervenir que des structures en béton (sans acier). En particulier, des poutres simplement et doublement entaillées ont été simulées en vue d'apprécier la performance du modèle de béton proposé à suivre les rotations du repère principal. Une étude de sensibilité au maillage est proposée sur la base d'un essai de traction directe. Il est montré sur cet exemple que l'utilisation couplée du modèle de béton proposé avec le limiteur de localisation non local intégral permet de diminuer grandement la dépendance de la réponse numérique au maillage. Après, un certain nombre d'éléments de structures en béton armé sans corrosion est étudié sous chargement répété et cyclique. Les résultats numériques permettent d'apprécier les capacités du modèle de béton proposé à décrire le comportement cyclique d'éléments de structures en béton armé. Enfin, le cas d'éléments de structures en béton armé dégradés par corrosion est considéré. D'une part, des

poutres en béton armé sous renforcées soumises à un chargement de flexion quatre points monotone sont étudiées. Ces dernières ont le mérite d'avoir été expérimentalement testées à différents degrés de corrosion. Elles apparaissent donc comme appropriées pour tester les capacités du modèle d'interface acier/béton proposé dans une analyse fine en présence de corrosion. D'autre part, en vue d'évaluer les possibilités des modèles proposés sur la base d'une structure à l'échelle réelle, un pont en béton armé a été modélisé. Cette analyse a été complétée par une étude de sensibilité en considérant la présence de corrosion en certaines zones bien identifiées. A l'issue de cette présentation, les cadres d'application des modèles proposés sont discutés.

4.2 Description et objectifs des différentes simulations

Les cadres d'application des différents modèles développés dans cette étude sont évalués dans ce chapitre à travers différents exemples bien connus de la littérature. Dans le but de bien cibler les objectifs de chacune des simulations proposées, ces dernières sont présentées dans le tableau 4.1. Le type de simulation, les modèles de béton et d'interface acier/béton utilisés ainsi que les aspects de chaque simulation étudiée sont clairement précisés.

Simulation	**Type**	**Loi de béton**	**Loi d' interface**	**Aspect étudié**
Pull-out de La Borderie (LaBorderie et Pijaudier-Cabot, 1987)	Massive Axisymétrique	Linéaire élastique	Proposée	Confinement extérieur - sensibilité au maillage
Tirant long de Clément (Clément, 1987)	Massive Axisymétrique	Proposée	Parfaite et Proposée	Avec/sans modèle d'interface
Pull-out de Almusallam (Almusallam *et al.*, 1996)	Massive 3D	Mazars	Proposée	Variations d'adhérence
Poutre de Schlangen (Schlangen, 1993)	Massive 3D (épaisseur 1 élément)	Proposée	-	Rotation du repère principal
Dalle de Hassanzadeh (Hassanzadeh, 1991)	Massive 3D (épaisseur 1 élément)	Proposée	-	Sensibilité au maillage
Poutre de Ragueneau (Ragueneau, 1999)	Simplifiée	Proposée	Parfaite et Proposée	Avec/sans modèle d'interface - Réponse sous chargement répété
Poutre de La Borderie (LaBorderie, 1991)	Simplifiée et Massive 2D	Proposée	Parfaite	Réponse sous chargement cyclique
Poutre de Mangat (Mangat et Elgalf, 1999b)	Simplifiée et Massive 3D	Mazars	Proposée	Avec corrosion - Réponse en flexion
Pont d'Örnsköldsvik (Vervuurt et Leegwater, 2008)	Massive 2D	Proposée	Proposée	Modélisation à l'échelle 1 - sensibilité à la présence de corrosion

TAB. 4.1 – Description et aspects étudiés propres à chaque simulation proposée.

4.3 Simulation d'essais de tirant

Dans cette section, trois simulations sont discutées. En premier lieu, les essais de (LaBorderie et Pijaudier-Cabot, 1987) sont étudiés. Ces derniers permettent en outre d'étudier l'effet d'un confinement extérieur sur la résistance de la liaison acier/béton. Une étude de sensibilité de la réponse au maillage est également présentée. En second lieu, les tirants longs étudiés par (Clément, 1987) font l'objet d'une étude numérique. Ce cas d'étude est particulièrement intéressant car il permet de mettre en évidence les avantages à considérer un modèle d'interface imparfaite. En dernier lieu, les essais réalisés par (Almusallam *et al.*, 1996) sont commentés. Ces derniers permettent d'étudier l'effet d'un chargement mécanique en présence de corrosion.

4.3.1 Essais pull-out de La Borderie

Description du protocole expérimental

En 1987, (LaBorderie et Pijaudier-Cabot, 1987) ont réalisé des essais de tirant à différents niveaux de confinement. Le but de tels essais est de quantifier l'influence d'un confinement sur les mécanismes de dégradation de l'interface acier/béton. Cette étude avait pour but de fournir des informations locales pour la construction de lois d'interface.

Les éprouvettes de béton utilisées sont de forme prismatique de 80 mm de côté. Une telle géométrie a été choisie pour approcher au mieux la taille du volume élémentaire représentatif de l'interface acier/béton. Le module d'Young du béton est de 15500 MPa, sa résistance en compression de 14,5 MPa et son coefficient de Poisson égal à 0,2. La barre d'acier utilisée est de 8 mm de diamètre avec une longueur d'ancrage de 45 mm. Un contrôle précis de cette dernière a été assuré par la mise en place de téflon entre l'armature et le béton pour garantir aucune adhérence. Un schéma de principe des essais est donné sur la figure 4.1. L'extraction de la barre

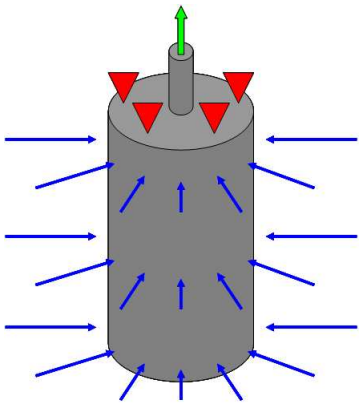


FIG. 4.1 – Schéma de principe des essais de tirant réalisés par (LaBorderie et Pijaudier-Cabot, 1987).

d'acier a été réalisée en imposant un déplacement à son extrémité et en bloquant la surface supérieure de l'éprouvette. Ainsi, les phases pré-pic et post-pic ont pu être capturées. Plusieurs essais ont été réalisés à différents niveaux de confinement 0, 5, 10 et 15 MPa.

Modélisation par éléments finis

Les essais de (LaBorderie et Pijaudier-Cabot, 1987) ont été modélisés pour étudier les aspects précédemment mentionnés. Pour cela, un maillage axisymétrique comportant 7356 éléments triangulaires à trois nœuds a été réalisé. Le calcul a été conduit en deux phases : une première

durant laquelle la pression latérale a été appliquée et une seconde durant laquelle un déplacement a été imposé à l'extrémité de la barre d'acier. L'acier ainsi que le béton ont été supposés élastiques linéaires en vue de concentrer les non-linéarités à l'interface acier/béton. Cela permet une identification des paramètres plus aisée. Les paramètres élastiques du béton et de l'acier ont été choisis conformément aux prescriptions expérimentales. Les paramètres liés à l'interface acier/béton ont été identifiés par analyse inverse étant donné le manque d'informations locales sur le comportement de cette dernière. Le jeu de paramètres utilisé est donné en annexe 1 dans les tableaux A.1, A.2 et A.3 pour l'interface, l'acier et le béton respectivement. Les résultats sont donnés par les figures 4.2 et 4.3. En premier lieu, en observant les différentes courbes de réaction ob-

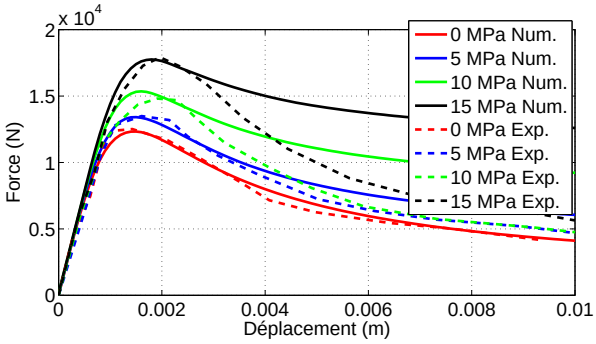


FIG. 4.2 – Courbes force/déplacement obtenues pour les différents niveaux de confinement.

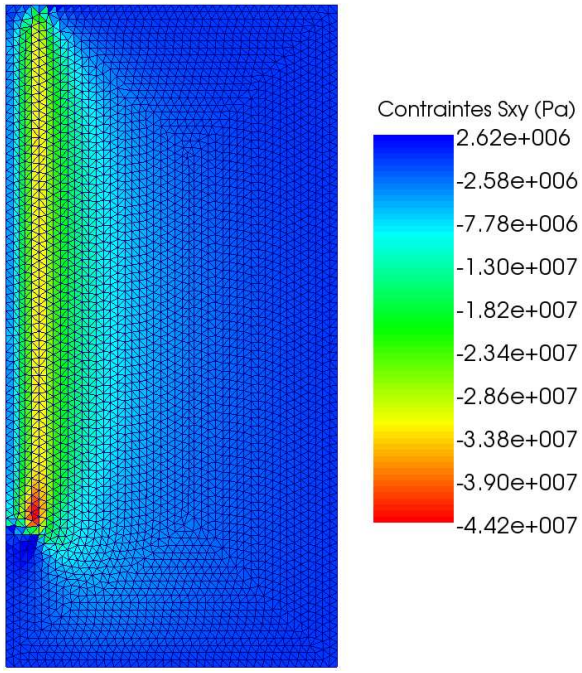


FIG. 4.3 – Contraintes de cisaillement au pic de résistance pour un confinement de 0 MPa.

tenues, il est possible de remarquer d'une part que les résistances de pic pour les différents niveaux de confinement sont bien décrites et, d'autre part, qu'une contrainte résiduelle tend à persister dans la zone post-pic. Cette contrainte résiduelle est due à la formulation du modèle d'interface qui prend en compte le glissement interne. Ces contraintes résiduelles de frottement deviennent d'autant plus importantes que le niveau de confinement l'est. Ceci provient du fait que cet effet est pris en compte grâce au mécanisme de glissement interne, dont l'activation est plus ou moins retardée selon le niveau de la pression extérieure. La présence d'une contrainte résiduelle constitue donc un point faible du modèle d'interface acier/béton proposé. Néanmoins, si l'on s'intéresse à la résistance de pic, cette dernière est bien décrite. En second lieu, il peut être remarqué que les contraintes de cisaillement sont concentrées essentiellement à l'interface acier/béton. Cela aurait été délicat à obtenir si aucun modèle d'interface n'avait été pris en compte pour modéliser de tels essais. Cela justifie donc de considérer une loi de comportement spécifique pour gérer le mécanisme de dégradation de l'interface acier/béton.

Dans le but de tester la sensibilité de la réponse lorsque le nombre d'éléments d'interface varie, l'essai de tirant à confinement nul a été simulé à l'aide de trois maillages différents. Ces derniers sont présentés sur la figure 4.4. Ils comportent respectivement 10, 20 et 30 éléments d'interface.

Le béton ainsi que l'acier sont supposés élastiques linéaires.

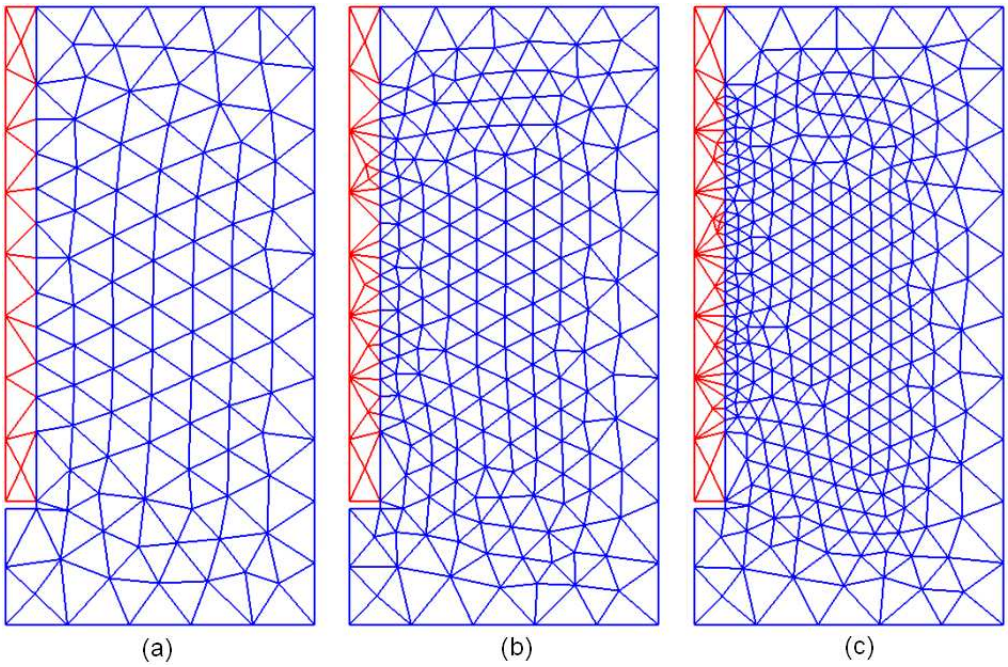


FIG. 4.4 – Différents maillages pour l'étude de sensibilité - (a) 10 éléments d'interface, (b) 20 éléments d'interface, (c) 30 éléments d'interface.

Les courbes de réaction obtenues pour les différents maillages sont présentées sur la figure 4.5. Il peut être noté que les réponses sont indépendantes du nombre d'éléments d'interface utilisés. Ces résultats montrent donc que la réponse numérique est objective par rapport au maillage. Il est important de mentionner qu'une manière naturelle de rendre le modèle d'interface indépendant du maillage porte sur l'introduction d'un gradient de contrainte. En effet, il peut être montrer que cette approche possède des vertus régularisantes. Cette piste semble être une perspective d'étude intéressante pour la suite de cette étude.

4.3.2 Essais de tirants long de Clément

Description du protocole expérimental

En 1987, (Clément, 1987) a réalisé des essais de tirants longs. Ces essais avaient pour objectif d'étudier la fissuration du béton lorsque l'interface acier/béton est sollicitée en mode II.

Les éprouvettes de béton sont de forme prismatique et possèdent une géométrie de $10\times10\times68$ cm^3. Les armatures sont de type HA et ont un diamètre de 10 mm. L'extraction de la barre d'acier a été réalisée en contrôlant ses extrémités en déplacement. Chaque essai a été arrêté dès l'apparition de la première fissure dans une région située entre 21 et 31,5 cm de l'extrémité du spécimen. Le béton utilisé a un module d'Young de 31000 MPa, un coefficient de Poisson de 0,2 et une résistance à la traction de 3,1 MPa. L'acier a un module d'Young de 210000 MPa et un coefficient de Poisson de 0,3.

Modélisation par éléments finis

Dans le but d'évaluer la pertinence d'une utilisation du modèle d'interface acier/béton proposé couplée à celle du modèle de béton proposé, les essais réalisés par (Clément, 1987) ont été simulés. En effet, contrairement au cas précédent, nous avons accès à l'ensemble des données liées au

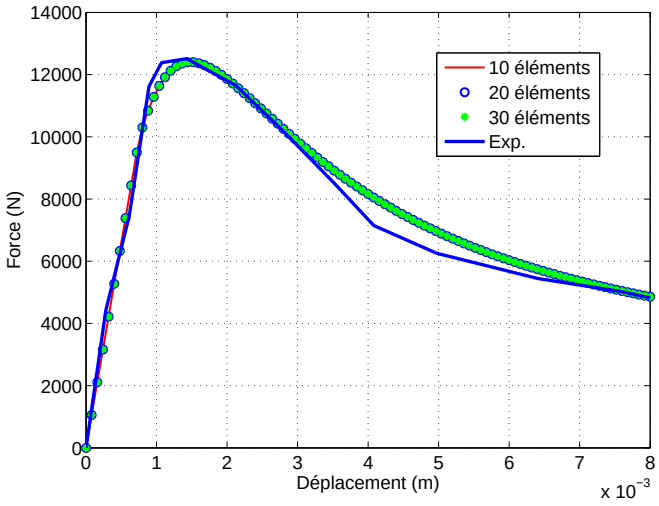


FIG. 4.5 – Réponse obtenues pour les différents maillages.

faciès de fissuration. Ainsi, l'utilisation d'un modèle de béton gérant la fissuration est pleinement justifiée. Deux simulations ont donc été réalisées : la première en supposant une interface parfaite et, la seconde, en gérant le comportement de l'interface par le modèle proposé. L'acier a été supposé élastique linéaire dans les deux simulations car aucune plasticité de ce dernier n'a été remarquée expérimentalement. Les paramètres du béton et de l'acier ont été identifiés à partir des données expérimentales. En vue de tenir compte du caractère hétérogène du béton, la résistance en traction a été distribuée aléatoirement sur le maillage selon une loi normale de moyenne 3,1 MPa et un coefficient de variation de 5 %. Ceux liés à l'interface acier/béton ont été identifiés par analyse inverse. Un maillage axisymétrique comportant 3000 éléments de type quadrangle à quatre nœuds a été réalisé. Les paramètres sont donnés en annexe A dans les tableaux A.4, A.5 et A.6 pour l'interface, l'acier et le béton respectivement. Les résultats sont présentés sur les figures 4.6 et 4.7 en termes de courbes force/déplacement et de cartographie d'endommagement respectivement. En premier lieu, dans le cas des deux simulations, les courbes forces/déplacement sont en très bonne adéquation avec les résultats expérimentaux. Plus précisément, il peut être remarqué que sur la courbe force/déplacement obtenue en considérant une interface acier/béton parfaite, un décroché en effort pour un déplacement de $3{,}6.10^{-1}$ mm environ apparaît. Cela est la signature de l'apparition brutale de fissures dans le béton. Par ailleurs, il peut être noté que tous les éléments de béton proches de l'acier sont endommagés. En second lieu, dans le cas d'une interface représentée par le modèle proposé, on peut remarquer l'absence de décroché en effort. Cela est lié au fait que la totalité de l'énergie ne se dissipe plus seulement dans le béton mais aussi dans interface acier/béton. En terme de cartographie d'endommagement, cela se traduit par un espacement des fissures. De plus, il peut également être noté une certaine diffusion de l'endommagement, celle-ci étant due à la répartition aléatoire de la résistance en traction du béton sur le maillage. Ces résultats permettent de justifier la pertinence de l'utilisation couplée d'un modèle d'interface à un modèle d'endommagement du béton lors de la simulation de ces essais. Par ailleurs, l'adéquation quantitative entre les résultats numériques et expérimentaux contribue à démontrer, au moins en partie, l'efficacité des modèles proposés.

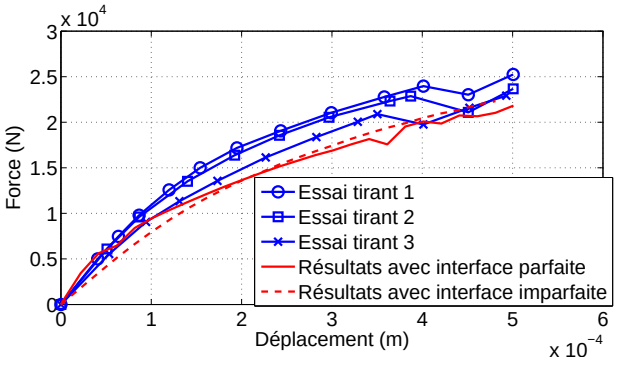


FIG. 4.6 – Courbes force/déplacement obtenues pour les différents niveaux de confinement.

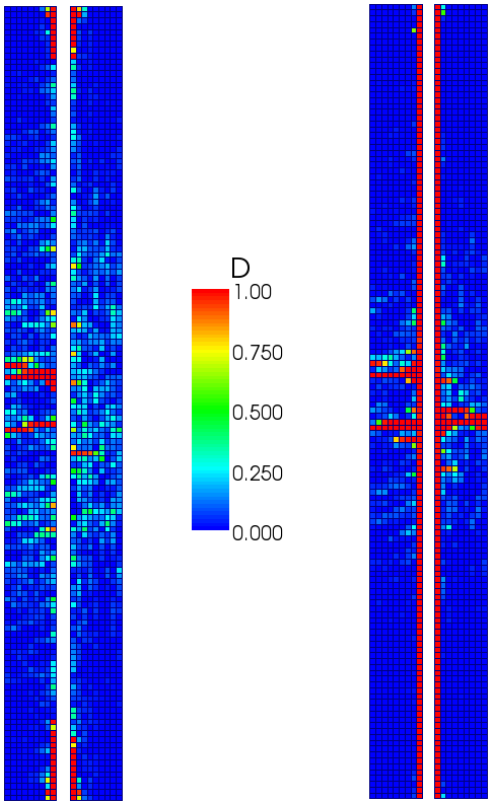


FIG. 4.7 – Cartographie d'endommagement sans modèle d'interface (droite) et avec modèle d'interface (gauche) pour un déplacement imposé de 0,5 mm.

4.3.3 Essais pull-out d'Almusallam

Description du protocole expérimental

En 1996, (Almusallam *et al.*, 1996) rapportent les résultats obtenus en effectuant des essais de tirants à différents degrés de corrosion. Cette campagne expérimentale avait pour objectif de quantifier l'influence de la corrosion des armatures sur les propriétés de frottement et de glissement à l'interface acier/béton.

Le béton utilisé a été confectionné pour atteindre une résistance à la compression à 28 jours de 30 MPa. Un ciment de type Portland classique a été utilisé. Du sable chargé en chlorures ainsi que des granulats dont la taille des plus gros est de 19 mm ont été considérés. Un rapport de 2 entre le plus gros granulat et le plus fin a été mesuré. Les éprouvettes de béton utilisées sont de forme parallélépipédique et possèdent une géométrie de $152\times254\times279$ mm^3. La barre d'acier possède un diamètre de 12 mm et est située à 63,5 mm de la face supérieure de l'éprouvette. En vue d'éliminer la plupart des effets de bords susceptibles de se manifester, l'armature a été enrobée de teflon de telle sorte que la longueur d'ancrage effective soit égale à 102 mm en zone centrale. Le chargement est réalisé en deux phases distinctes. En premier lieu, l'armature a été corrodée de manière intensiostatique jusqu'à atteindre une perte de masse donnée. Plusieurs éprouvettes ont été sujettes à ce protocole afin de préfissurer le béton entourant l'armature à différents niveaux. En second lieu, un chargement mécanique en déplacement a été imposé à l'extrémité de la barre. Les conditions aux limites consistent à bloquer de manière linéïque le

bord inférieur de l'éprouvette ainsi que son symétrique par rapport au centre de l'éprouvette. L'essai de tirant est connu sous le nom de ASTM C234. Ce dernier présente plusieurs avantages comparé aux essais existants à l'époque et il est l'un des plus utilisés. Il est réputé pour représenter un état de contrainte similaire à celui rencontré dans les éléments de structures soumis à de la flexion. En outre, les gradients de déformations qui apparaissent au cours de l'essai sont assimilables à ceux rencontrés dans les éléments de structures utilisés sur site. Ce protocole permet d'obtenir différents modes de rupture selon le poids relatif donné au glissement, au moment de flexion créé et à l'adhérence. Ces grandeurs peuvent être contrôlées simplement en agissant d'une part sur la géométrie de l'éprouvette (longueur d'ancrage, bras de levier, ...) et, d'autre part, sur les conditions aux limites. Du point de vue financier, la réalisation de tels essais est économique et ne requiert pas de machines d'essais particulières. Le nombre de barres d'acier ainsi que le taux de renforcements transverses peuvent être ajustés sans perdre les propriétés précédemment citées. Enfin, la barre de renforcement longitudinale peut être protégée des effets d'un confinement extérieur parasite ou, tout au moins, assure que ce dernier soit constant dans une mesure acceptable. Elles sont représentées sur le schéma de principe présenté sur la figure 4.8. Les résultats expérimentaux s'expriment en termes de force/déplacement (de l'extrémité de l'armature).

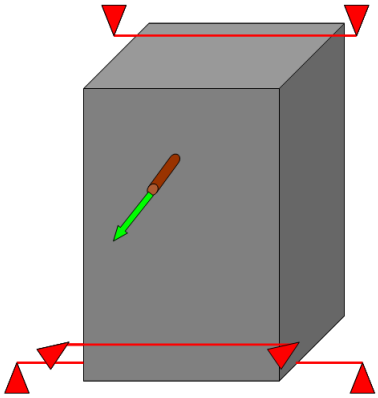


FIG. 4.8 – Schéma de principe des essais de tirant réalisés par (Almusallam *et al.*, 1996).

Modélisation par éléments finis

Pour évaluer la capacité du modèle d'interface acier/béton non seulement en présence de corrosion mais aussi d'un chargement mécanique, les essais réalisés par (Almusallam *et al.*, 1996) ont été simulés. Pour cela, une approche tridimensionnelle massive a été considérée en vue de tester le modèle d'interface dans son intégralité. Pour cela, le béton et l'acier ont été maillés avec des éléments finis prismatiques à six nœuds (35560 et 260 éléments finis respectivement). L'interface acier/béton a été maillée avec 240 éléments de type joint à quatre nœuds sans épaisseur. La simulation a été conduite en deux temps : en premier lieu un gonflement a été appliqué jusqu'à un certain niveau dicté par le degré de corrosion considéré et, en second lieu, un déplacement a été imposé à l'extrémité de la barre d'acier. Le béton a été modélisé avec la loi de Mazars locale, l'acier a été supposé élastique linéaire et l'interface acier/béton est décrite par la loi proposée. Il peut être noté que le choix d'utiliser la loi de Mazars a été retenu en vue d'assurer que ce cas test soit discriminant uniquement par rapport à la loi constitutive d'interface proposée. Les paramètres mécaniques liés aux matériaux constitutifs béton et acier ont été identifiés par rapport aux données expérimentales disponibles. Les paramètres liés à l'interface acier/béton ont été identifiés par analyse inverse, essentiellement en ce qui concerne la fonction d'adhérence W. L'ensemble des paramètres matériaux est donné en annexe1 et le jeu de paramètres utilisé en

annexe 1 dans les tableaux A.7, A.8 et A.9 pour l'interface, l'acier et béton respectivement. En particulier, il peut être noté que la résistance en traction du béton a été tirée aléatoirement en vue de tenir compte de son hétérogénéité. Les résultats obtenus sont présentés sur les figures 4.9 et 4.10 en terme de courbes de réaction pour plusieurs degrés de corrosion et de faciès de fissuration en fin d'extraction de la barre d'acier. Tout d'abord, une bonne adéquation entre les courbes force/déplacement numériques et expérimentales a été obtenue. Enfin, la cartographie d'endommagement obtenue est cohérente non seulement avec le faciès de fissuration expérimental mais aussi avec celle obtenue par (Lundgren, 2005a). Les résultats obtenus, suite à la modélisation de cet essai, permettent de conclure que le modèle d'interface acier/béton permet une description satisfaisante de la réponse expérimentale. Bien que ces résultats contribuent à la validation du modèle d'interface acier/béton proposé, il est important de noter que le mode de dégradation de l'interface est essentiellement le mode II. Ainsi, aucune conclusion ne peut être tirée quant à la pertinence du modèle proposé lorsque les modes I, II et III sont sollicités de manière couplée.

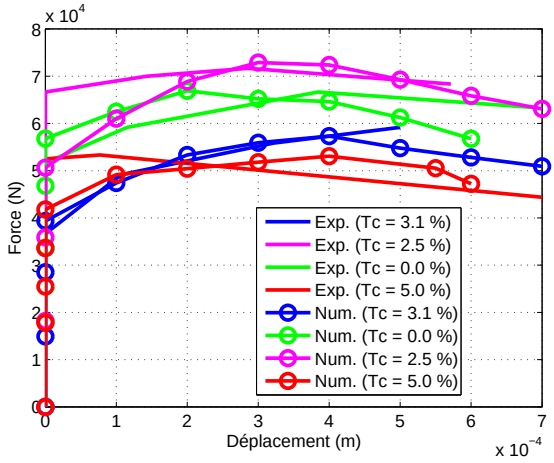


FIG. 4.9 – Courbes de réaction numériques et expérimentales pour différents degrés de corrosion.

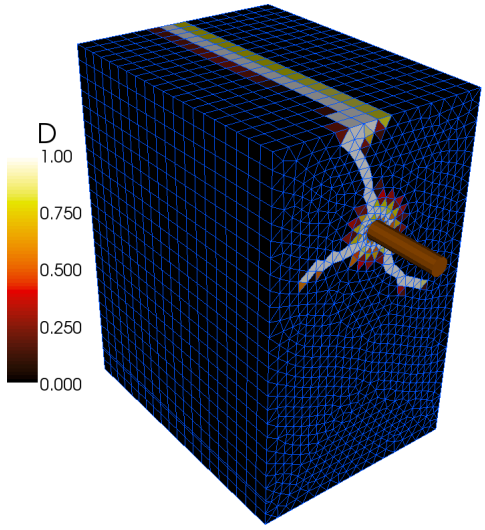


FIG. 4.10 – Cartographie d'endommagement obtenue après extraction de la barre d'acier.

4.3.4 Bilan

Dans cette section, les simulations d'essais de tirant sous différentes conditions ont été présentées. En premier lieu, les essais réalisés par (LaBorderie et Pijaudier-Cabot, 1987) ont été étudiés. Ces derniers ont été effectués en l'absence de corrosion mais sous différents niveaux de confinement. Les résultats numériques obtenus ont fait apparaître d'une part la capacité du modèle proposé à bien rendre compte des effets liés au confinement et, d'autre part, la présence d'une contrainte résiduelle de frottement. Ce dernier point est dû à la formulation intrinsèque des équations constitutives du modèle d'interface et doit donc être considéré comme un point faible sur lequel un travail supplémentaire pourrait être réalisé. Néanmoins, si l'on s'intéresse à la résistance de l'interface, le pic de résistance est bien décrit pour les différents niveaux de confinement. En second lieu, les essais conduits par (Clément, 1987) ont été considérés. Ces derniers avaient pour but d'étudier la fissuration du béton lorsque l'interface acier/béton est sollicitée en mode II. Les simulations numériques réalisées en utilisant les modèles développés dans cette thèse ont permis de mettre en évidence l'intérêt de considérer une loi d'interface acier/béton pour obtenir des réponses non seulement quantitatives mais aussi qualitatives précises et plus proches des observations expérimentales. Les résultats numériques obtenus contribuent donc à valider le modèle proposé. En dernier lieu, dans le but d'évaluer la capacité du modèle d'interface

lorsqu'un élément de structures est sujet à un chargement mécanique et à la corrosion, les essais expérimentaux effectués par (Almusallam *et al.*, 1996) ont été simulés grâce à une modélisation tridimensionnelle massive. Les résultats obtenus sont satisfaisants et contribuent à la validation du modèle proposé. Néanmoins, comme dans le cas précédent, l'interface acier/béton est essentiellement sollicitée en mode II. Les résultats numériques obtenus ne permettent donc pas de conclure à la validation du modèle sous chargement complexe, c'est-à-dire sous des sollicitations induisant un couplage entre les modes de rupture I et II/III. Un point essentiel qu'il y a lieu de mentionner concerne l'identification des paramètres matériaux liés à la corrosion. Étant donné l'absence d'informations spécifiques portant sur la corrosion, ces derniers ont dû être identifiés par analyse inverse. Par suite, il s'agit davantage d'une calibration que d'une validation du modèle proposé qui a le mérite de montrer qu'un cadre numérique permettant d'obtenir de tels résultats a été proposé. Les paramètres calibrés peuvent a priori être utilisés pour simuler d'autre cas tests si toutefois les propriétés du béton et de l'acier sont voisines de celles retenues par (Almusallam *et al.*, 1996).

4.4 Simulation d'éléments de structures en béton

Dans cette section, deux simulations d'éléments de structure en béton sont présentées. En premier lieu, les poutres expérimentalement testées par (Schlangen, 1993) sont étudiées. Ces dernières ont été soumises à un chargement de type cisaillement asymétrique et entaillées (simplement et doublement) en vue de favoriser la rotation du repère principal. Ces essais sont particulièrement discriminants dès qu'il s'agit d'évaluer les capacités d'un modèle de béton à suivre la rotation du repère principal au cours du chargement. En second lieu, une étude de sensibilité au maillage est présentée sur la base de l'essai de traction directe réalisé par (Hassanzadeh, 1991). L'utilisation couplée du limiteur de localisation non-local avec le modèle de béton proposé est présentée et discutée.

4.4.1 Essais de Schlangen

Description du protocole expérimental

En 1993, (Schlangen, 1993) lors de ses travaux de thèse a mené une vaste campagne expérimentale visant à étudier les mécanismes de fissuration du béton sous chargements complexes. Ces essais sont de nos jours connus pour être discriminants lorsque les capacités d'un modèle de béton sont évaluées. Plus particulièrement, les capacités du modèle de béton à bien décrire le comportement d'éléments de structures lorsque le repère principal tourne au cours du chargement peuvent être testées.

Parmi les essais réalisés par (Schlangen, 1993), deux poutres en béton ont été étudiées. La première est de forme prismatique et comporte une entaille initiale. La seconde est également de forme prismatique et comporte deux entailles initiales. Ces deux éléments de structure ont été soumis à un chargement de cisaillement asymétrique au moyen d'un chevêtre. Les figures 4.11 et 4.12 donnent une représentation schématique des protocoles d'essais mis en jeu. Le chargement a été contrôlé en déplacement imposé et a été appliqué sur le chevêtre de telle sorte que les efforts résultants soient dans un rapport de $\frac{1}{11}$ et $\frac{10}{11}$. Le béton utilisé a été caractérisé mécaniquement par un module d'Young de 35000 MPa et un coefficient de Poisson égale à 0,2. La résistance en traction du béton est de l'ordre de 2,1 MPa. Les résultats expérimentaux quantitatifs s'expriment pour les deux poutres en termes de force/déplacement en mode I en face supérieure de l'entaille. Les faciès de fissuration sont également disponibles.

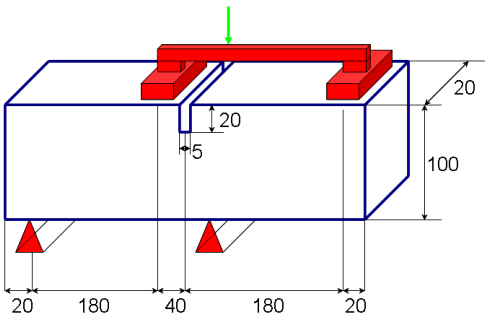


FIG. 4.11 – Poutre simplement entaillée soumise à un chargement de cisaillement asymétrique - toutes les dimensions sont données en millimètres.

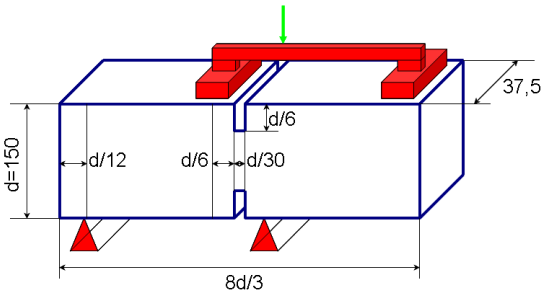


FIG. 4.12 – Poutre doublement entaillée soumise à un chargement de cisaillement asymétrique - toutes les dimensions sont données en millimètres.

Modélisation par éléments finis

En vue de tester la capacité du modèle de béton proposé à décrire le comportement d'éléments de structures sous chargements complexes, les deux poutres étudiées par (Schlangen, 1993) et évoquées précédemment ont été simulées. Pour cela, les géométries et les conditions aux limites présentées sur les schémas 4.11 et 4.12 ont été prises en compte. Pour la première poutre 26142 éléments finis de type triangle à trois nœuds ont été utilisés et, pour la seconde poutre, 35793 éléments finis de même type ont été considérés. Proche des conditions aux limites bloquées, des patins rigides de 20 mm de longueur et de 5 mm de hauteur ont été considérés. Le chevêtre a été modélisé par un corps rigide pour éviter toute dissipation à ce niveau. Aucun modèle particulier de glissement/frottement n'a été considère entre les patins et la poutre en béton étant donné qu'aucune information expérimentale n'était disponible à ce sujet. Le béton a été modélisé par le modèle proposé dans cette étude. Les paramètres matériaux ont été identifiés par rapport aux informations expérimentales disponibles et sont présentés en annexe 1 dans le tableau A.10. Afin de réduire les problèmes liés à la dépendance au maillage, l'approche non-locale (Pijaudier-Cabot et Bazant, 1987) a été considérée. Pour les deux poutres, une longueur caractéristique égale à 7 mm a été considérée. Celle-ci a été identifiée d'après les recommandations habituelles. Les résultats numériques obtenus sont présentés dans les paragraphes suivants. Les faciès de fissuration obtenus expérimentalement par (Schlangen, 1993) sont présentés sur les figures 4.13 et 4.14.

Poutre simplement entaillée. Concernant la poutre simplement entaillée, les résultats numériques obtenus sont en adéquation satisfaisante avec les données expérimentales non seulement sur le plan quantitatif mais aussi sur le plan qualitatif. La courbe numérique force/ouverture de l'entaille est comparée au fuseau expérimental sur la figure 4.15. La cartographie d'endommagement obtenue en fin de chargement est donnée sur la figure 4.16. Selon le rapport expérimental, une première fissure s'initie près de l'entaille et se propage vers la face inférieure de la poutre. Cette fissure est visible sur la figure 4.13. Au cours de la propagation, une seconde zone fissurante s'est révélée expérimentalement. Cette dernière s'initie près du patin simplement appuyé. Cette zone n'est pas représentée sur le faciès expérimental mais a été constatée numériquement, comme le montre la cartographie d'endommagement donnée sur la figure 4.16. La cinématique de fissuration décrite dans les travaux de (Schlangen, 1993) semble donc être en accord avec les observations numériques. Les résultats obtenus, en considérant l'élément de structure retenu dans ce paragraphe, contribuent donc à valider le modèle de béton proposé lorsque le repère principal tourne au cours du chargement.

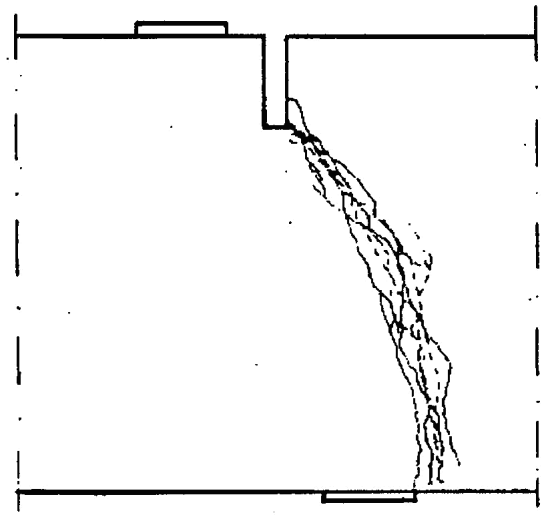


FIG. 4.13 – Faciès de fissuration obtenu en fin de chargement pour la poutre simplement entaillée d'après (Schlangen, 1993).

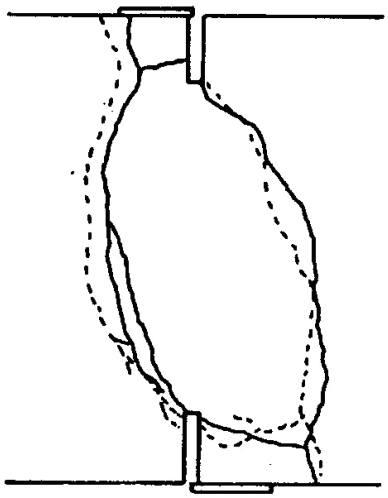


FIG. 4.14 – Faciès de fissuration obtenu en fin de chargement pour la poutre doublement entaillée d'après (Schlangen, 1993).

Poutre doublement entaillée. Concernant la poutre doublement entaillée, seuls des résultats qualitatifs ont été en accord avec l'expérience en respectant les paramètres matériaux fournis par (Schlangen, 1993). Nous expliquons cela par l'absence de modèles spécifiques gérant le frottement et le glissement des patins d'appuis entre le bâti et la poutre. En effet, le rapport expérimental fait état qu'un important frottement au patin a été constaté durant l'essai. Ces observations ont également été remarquées par (Geers *et al.*, 2000) dans leurs travaux. Les résultats qualitatifs obtenus sont présentés sur la figure 4.17 et peuvent être rapprochés du faciès de fissuration expérimentalement observé en fin de chargement montré sur la figure 4.14. Les résultats numériques obtenus sur la base de ce cas test ne sont donc pas complètement satisfaisants sur le plan quantitatif. Néanmoins, la cinématique de rupture a bien été reproduite, conformément aux observations expérimentales.

4.4.2 Essai de Hassanzadeh

Description du protocole expérimental

Un essai de traction directe a été réalisé par (Hassanzadeh, 1991) sur une éprouvette de béton. Ce matériau étant fragile en traction, cet essai constitue donc un cas idéal pour évaluer la dépendance au maillage de la réponse d'un modèle constitutif de béton. Les simulations réalisées sur la base de ce cas test ont donc pour but de montrer qu'en utilisant le modèle de béton proposé couplé avec l'approche non-locale, les équations du problème peuvent être régularisées pour réduire les instabilités dues à la localisation des déformations.

Un schéma du protocole expérimental est donné sur la figure 4.18. L'éprouvette de béton utilisée est en forme d'os. Cette dernière a été entaillée en vue d'assurer la constance du champ des contraintes en zone centrale. Les conditions aux limites consistent en des appuis simples sur la face inférieure de l'éprouvette et en un chargement contrôlé en déplacement et appliqué sur la face supérieure. Le béton utilisé a un module d'Young de 36000 MPa, un coefficient de Poisson de 0,2, une résistance à la compression de 50 MPa et une résistance à la traction de 3,2 MPa.

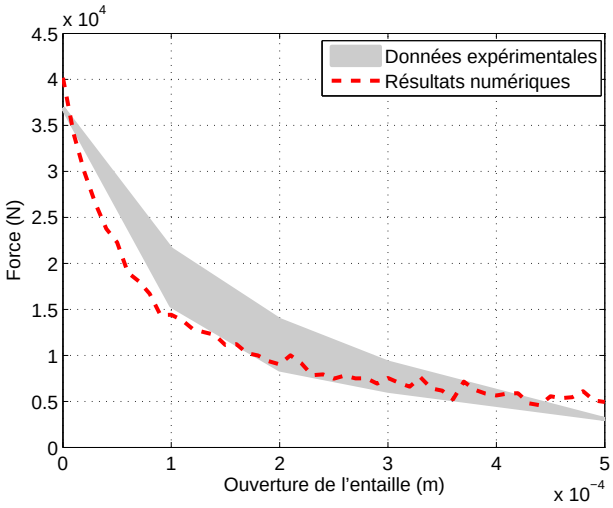


FIG. 4.15 – Courbes expérimentale et numérique force/ouverture en surface de l'entaille.

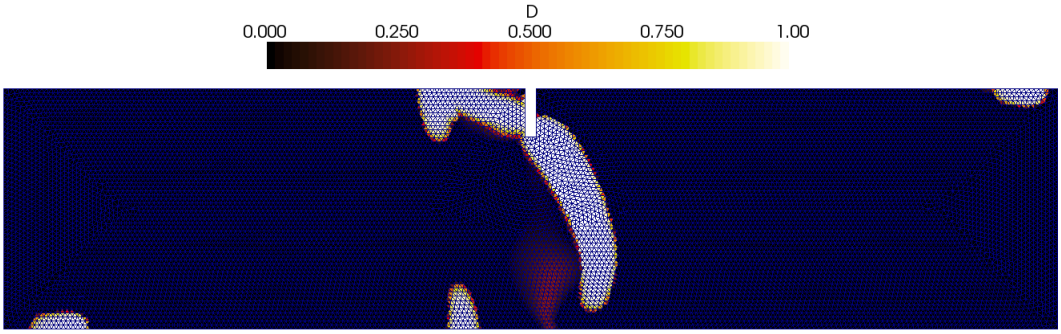


FIG. 4.16 – Cartographie d'endommagement obtenue en fin de chargement pour la poutre simplement entaillée.

Modélisation par éléments finis

Dans le but de vérifier l'indépendance au maillage en utilisant le modèle de béton proposé, trois simulations éléments finis ont été réalisées sous l'hypothèse des déformations planes. Seule la zone centrale entaillée a été modélisée. Trois différentes finesses de maillage ont été considérées à l'aide d'éléments finis de type triangles à trois nœuds : 400, 1500 et 9492 éléments finis. Les trois maillages utilisés sont donnés sur la figure 4.19. Les paramètres du modèle de béton ont été identifiés à l'aide des informations expérimentales disponibles et sont donnés en annexe 1 dans le tableau A.11. La longueur caractéristique liée à l'approche non-locale a été choisie égale à 12 mm, ce qui correspond à la définition d'un voisinage contenant 3-4 éléments finis pour le maillage le plus grossier. Les résultats obtenus pour les différentes simulations sont présentés sur les figures 4.20 et 4.21. En premier lieu, il est possible d'observer que les réponses quantitatives, s'exprimant en terme de force/déplacement, obtenues pour les trois maillages sont identiques. Cela montre qu'en utilisant de manière couplée le modèle de béton proposé avec l'approche non-locale, les résultats obtenus sont objectifs par rapport au maillage. En second lieu, les cartographies d'endommagement obtenues en fin de chargement pour les trois maillages sont similaires. Cependant, le faciès de fissuration expérimental est mal représenté en raison du fait que la longueur caractéristique n'a pas été identifiée pour favoriser une description fine de la fissuration. En effet, le but de ces simulations était de montrer l'indépendance de la réponse au maillage. Ainsi, les résultats obtenus sur la base de cas test permettent de conclure que les équations d'équilibre peuvent être régularisées lorsque le modèle de béton proposé est utilisé

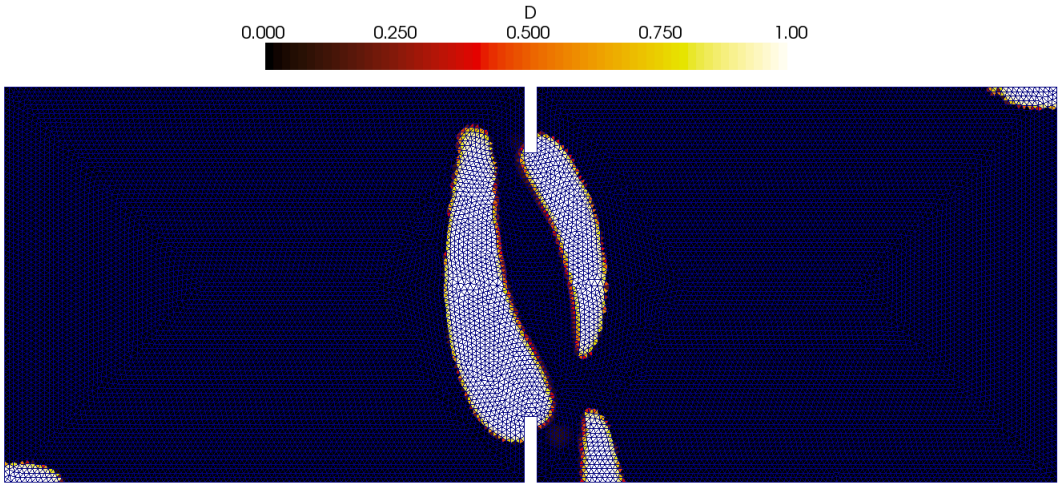


FIG. 4.17 – Cartographie d'endommagement obtenue en fin de chargement pour la poutre doublement entaillée.

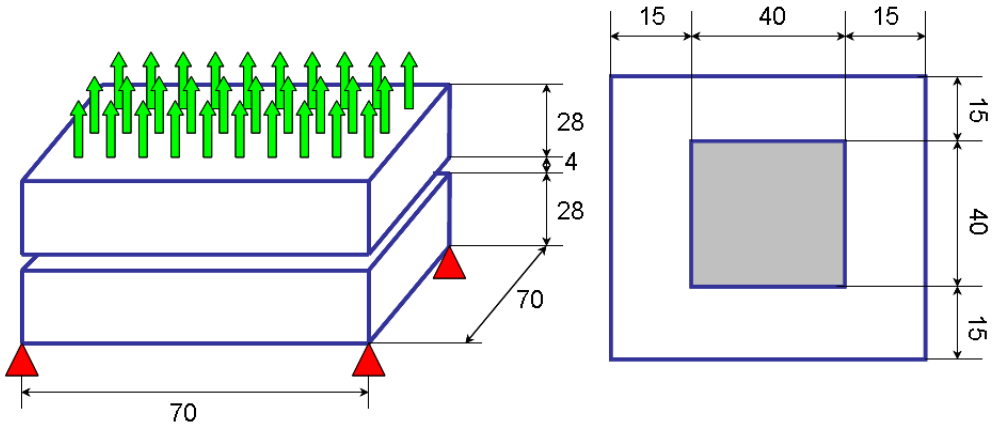


FIG. 4.18 – Schéma de l'essai réalisé par (Hassanzadeh, 1991).

avec l'approche non-locale (Pijaudier-Cabot et Bazant, 1987).

4.4.3 Bilan

Dans cette section, le modèle de béton proposé a été évalué en considérant des structures en béton. En premier lieu, des poutres simplement et doublement entaillées testées par (Schlangen, 1993) ont été simulées. Ces éléments de structures ont été soumis à un chargement de cisaillement asymétrique en vue de provoquer la rotation du repère des contraintes principales au cours du chargement. Concernant la poutre simplement entaillée, les résultats numériques obtenus ont pu être corrélés aux données expérimentales d'une manière satisfaisante. En particulier, la cinématique de rupture constatée expérimentalement a été retrouvée numériquement. En revanche, concernant la poutre doublement entaillée, les résultats quantitatifs exprimés en terme de force/déplacement n'ont pu être numériquement retrouvés. Cela peut s'expliquer par la présence d'importants effets de glissement/frottement entre les patins d'appuis et la poutre. La cartographie d'endommagement obtenue peut néanmoins être rapprochée de celle rapportée par l'expérience. Les résultats obtenus ont donc permis, au moins en partie, de valider le modèle de béton proposé à suivre les rotations du repère principal au cours du chargement. En second lieu, en vue d'évaluer la dépendance au maillage lorsque le modèle de béton proposé est

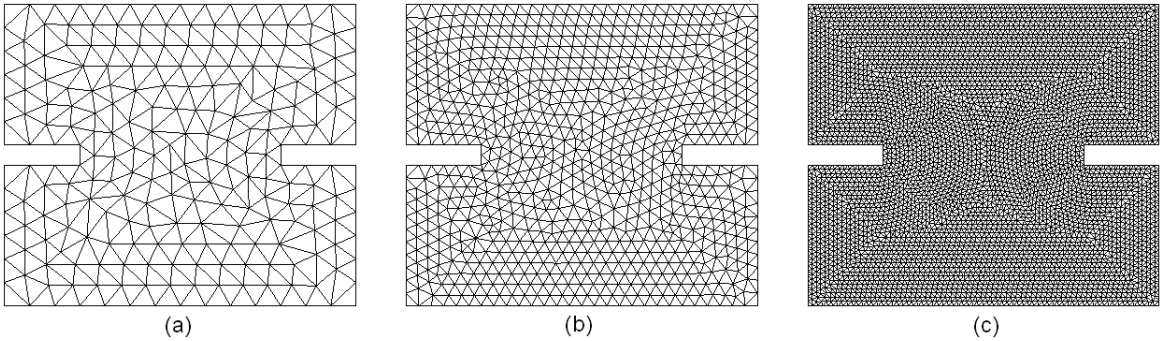


FIG. 4.19 – Maillages utilisés pour les simulations - (a) 400 éléments, (b) 1500 éléments et (c) 9492 éléments.

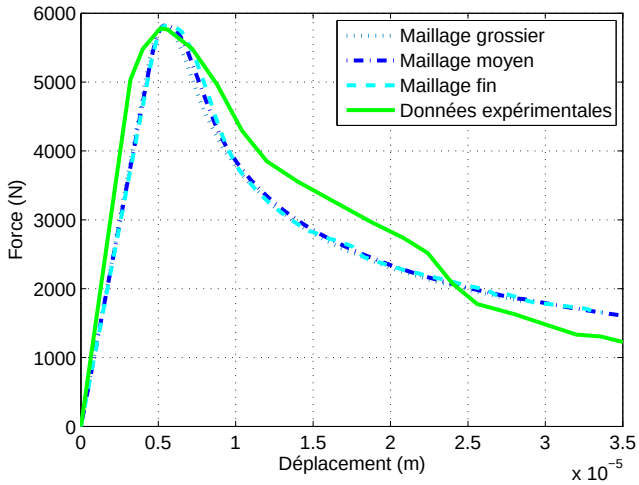


FIG. 4.20 – Courbes expérimentale et numériques force/déplacement.

utilisé, les essais de tractions directes réalisés par (Hassanzadeh, 1991) ont été simulés. Pour cela, différentes finesses de maillages ont été considérées. L'approche non-locale a été utilisée de manière couplée au modèle de béton proposé. Trois simulations, en conservant une longueur caractéristique fixe, ont été réalisées. Les résultats numériques obtenus montrent clairement que la réponse est indépendante du maillage utilisé. De plus, les résultats quantitatifs obtenus par l'expérience ont été retrouvés. En revanche, le faciès de fissuration expérimental n'a pas été retrouvé. Cela peut s'expliquer par le fait que la longueur caractéristique n'a pas été identifiée pour cela. En effet, une cartographie plus proche de celle expérimentalement constatée aurait été perçue si un maillage plus fin, avec une plus petite longueur caractéristique, avait été considéré.

4.5 Simulation d'éléments de structures en béton armé

Quelques simulations d'éléments de structures en béton armé sont présentées dans cette section en vue d'étudier les capacités des modèles proposés à bien décrire leur réponse structurale sous chargement cyclique. En premier lieu, un essai de flexion trois points répétée réalisé sur une poutre en béton armé par (Ragueneau, 1999) a été étudié. Ce dernier a été modélisé de manière simplifiée à l'aide de la version multifibre des lois proposées (béton et interface acier/béton). En vue d'évaluer l'effet des incertitudes sur la réponse mécanique à rupture d'un tel élément de structure, une étude probabiliste a été conduite. En outre, les intervalles de confiance à 90 % ont été déterminés. Deux cas de simulation sont présentés, l'un avec une interface acier/béton

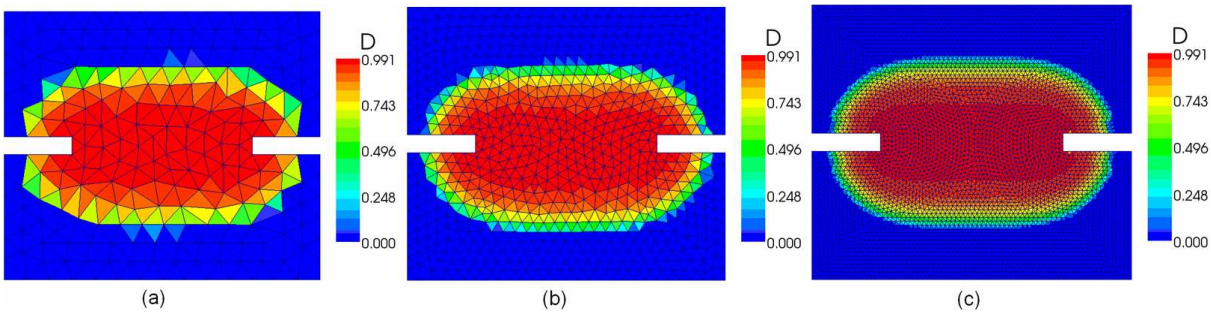


FIG. 4.21 – Cartographie d'endommagement obtenue en fin de chargement pour les différents maillages - (a) 400 éléments, (b) 1500 éléments et (c) 9492 éléments.

parfaite et, l'autre, avec une interface acier/béton imparfaite. Les résultats sont comparés et discutés. En second lieu, une poutre faiblement chargée en flexion trois points cyclique alternée a été étudiée. Cet élément de structure est étudié d'une part à l'aide d'une modélisation simplifiée et, d'autre part, à l'aide d'une modélisation locale massive. Les résultats sont comparés et discutés.

4.5.1 Essai de Ragueneau

Description du protocole expérimental

Au cours de ses travaux de thèse, (Ragueneau, 1999) a réalisé deux essais de flexion trois points sur des poutres en béton armé dont un réalisé en chargement répété. Ces essais avaient pour but d'évaluer l'intensité du couplage entre la fissuration et la dissipation cyclique. Ces essais sont donc particulièrement bien adaptés pour évaluer la pertinence de la prise en compte des effets hystérétiques.

Le corps d'épreuve est une poutre en béton armé de 1500 mm de longueur totale et de 1400 mm de longueur entre appuis. Quatre armatures ont été considérées. Les deux armatures supérieures ont un diamètre de 8 mm et les armatures inférieures un diamètre de 14 mm. L'épaisseur d'enrobage est homogène autour de la section et égale à 10 mm. La poutre est simplement appuyée et le chargement est contrôlé en effort. Il a été appliqué en différents paliers 10 kN, 30 kN, 50 kN, 70 kN et 90 kN. A chaque palier, 10 cycles ont été effectués. Un petit nombre de cycles a été retenu en vue d'éviter tout phénomène de fatigue. Le béton constitutif de la poutre a un module d'Young de 28000 MPa, une résistance à la compression de 40 MPa et une résistance à la traction de 2,7 MPa. Les aciers ont un module d'Young de 200000 MPa et une limite d'élasticité de 450 MPa.

Modélisation simplifiée

Dans le but d'évaluer la pertinence des modèles proposés lorsque l'on s'intéresse à la capacité portante d'éléments de structures en béton armé, l'essai de flexion trois points répétée réalisé par (Ragueneau, 1999) a été modélisé. Expérimentalement, aucune donnée liée à la fissuration n'a été reportée. Une modélisation simplifiée s'appuyant sur l'approche multifibre est justifiée. Deux cas ont été considérés : en premier lieu, l'interface entre l'acier et le béton a été supposée parfaite et, en second lieu, une interface imparfaite a été considérée au sens de l'approche simplifiée présentée dans le chapitre précédent. Le chargement a été contrôlé en déplacement imposé en vue d'augmenter la robustesse numérique des simulations et d'assurer une bonne description de la phase de plastification des aciers. Afin que la comparaison entre les résultats obtenus dans les deux cas précédemment mentionnés ne porte que sur la manière de considérer

l'interface acier/béton, les maillages utilisés lors des deux simulations sont les mêmes. Le béton a été modélisé par la loi proposée, l'acier par une loi élasto-plastique avec écrouissage isotrope et l'interface acier/béton par la loi proposée sous sa forme simplifiée. Le jeu de paramètres utilisé est donné en annexe 1 dans les tableaux A.12, A.13 et A.14 pour le béton, l'acier avec interface parfaite et l'acier avec interface imparfaite respectivement.

Les cartographies d'endommagement obtenues dans les cas d'une interface acier/béton parfaite et imparfaite sont présentées sur les figures 4.22 et 4.23. D'une manière générale, les cartographies d'endommagement sont assez similaires. Néanmoins, il peut être noté que la zone endommagée semble plus homogène dans le cas d'une interface parfaite. De plus, la rupture de l'éprouvette est caractérisée par d'une part un endommagement assez localisée en zone de traction et, d'autre part, une zone endommagée en compression. Cela correspond à une rupture en pivot B, selon la terminologie habituellement utilisée en béton armé. Dans le cas d'une interface imparfaite, le mode de rupture est différent. D'une part la zone d'endommagement en traction est moins haute et est plus étalée selon la direction longitudinale. Elle semble suivre les barres de renforcement inférieures. De plus, l'endommagement dans la zone en compression n'apparaît plus selon le même mode que dans le cas précédent. En effet, l'endommagement se propage depuis la zone en traction vers la zone en compression. Autrement dit, on assiste à une rupture en pivot A. Ces différents modes de rupture ont pu être obtenus en raison du caractère imparfait de l'interface acier/béton. Les résultats quantitatifs obtenus pour les deux cas étudiés sont présentés sur la

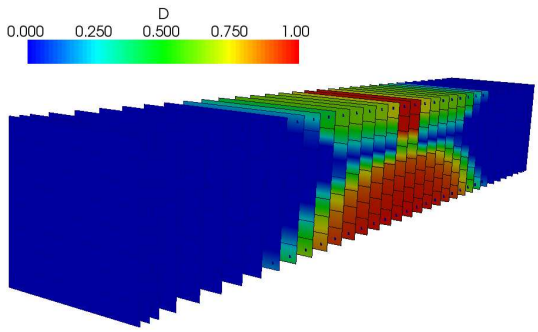


FIG. 4.22 – Cartographie d'endommagement - interface parfaite.

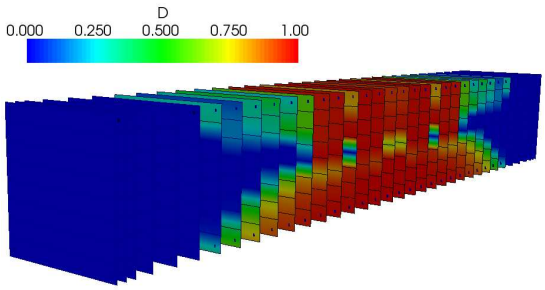


FIG. 4.23 – Cartographie d'endommagement - interface imparfaite.

figure 4.24. Il peut être observé que les résultats expérimentaux sont globalement retrouvés. En revanche, lorsque l'on observe les déplacements résiduels, il peut être noté que les résultats obtenus dans les deux cas surestiment les résultats expérimentaux. Par ailleurs, en phase de tension stiffening, des oscillations en effort peuvent être notées dans le cas de l'interface acier/béton imparfaite. Ceci est dû au fait que l'acier reprend moins d'efforts parce que l'interface acier/béton se détériore. L'équilibre global devant être respecté, c'est le béton qui va reprendre plus d'efforts et qui va donc se fissurer davantage que dans le cas où l'interface est considérée comme parfaite. Ainsi, les résultats obtenus sur la base de ce cas test contribuent d'une part à valider le modèle simplifié d'interface acier/béton sans corrosion et, d'autre part, la loi simplifiée de béton. D'avantage d'investigations sont nécessaires pour apporter des éléments de validation vis-à-vis de la prise en compte de la corrosion.

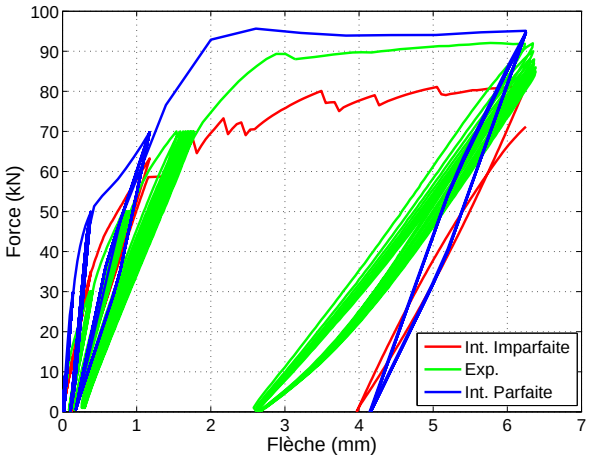


FIG. 4.24 – Courbes de réaction - interface parfaite et imparfaite, expérience.

Etude probabiliste

Dans la section précédente, une modélisation déterministe a été proposée. L'expérience montre que les paramètres matériaux sont souvent entachés d'incertitudes. Ces dernières doivent alors être prises en compte pour évaluer la sensibilité de la réponse du modèle aux variations des différents paramètres. Une étude probabiliste a donc été conduite pour déterminer les intervalles de confiance à 90 %. Le modèle probabiliste comporte trois variables aléatoires qui sont la limite en traction du béton, la limite d'élasticité des aciers et l'épaisseur d'enrobage. Les paramètres ainsi que les lois choisies sont présentées dans le tableau 4.2. Pour résoudre le problème stochas-

Variable	**Loi de probabilité**	**Moyenne**	**Coefficient de variation**
Résistance en traction du béton	Lognormale	$3,15$ MPa	10 %
Épaisseur d'enrobage	Lognormale	$1,0$ cm	10 %
Limite d'élasticité des aciers	Lognormale	450 MPa	10 %

TAB. 4.2 – Variables aléatoires choisies pour l'étude probabiliste à rupture de la poutre en béton armé.

tique qui se pose, la méthode de Monte Carlo a été utilisée. Cette technique, bien que coûteuse en temps de calcul, a le mérite de permettre un contrôle de la convergence en temps réel et de fournir un historique complet de la réponse. Ainsi, 15000 tirages ont été effectués. Contrairement au cas précédent, pour réduire au maximum les temps de calcul, seule la courbe enveloppe a été considérée. Ceci est totalement justifié étant donné que le protocole expérimental assure la quasi inexistence des phénomènes de fatigue. L'ensemble des tirages réalisé est présenté sur la figure 4.25.
Les tirages ont été traités statistiquement pour déterminer les intervalles de confiance. En effet, en chacun des points (flèche/force), la fonction de répartition a été calculée à partir des histogrammes correspondants. Les intervalles de confiance à 90 % ont donc pu être déterminés en considérant les fractiles à 5 % et 95 %. Les résultats sont présentés sur la figure 4.26.
Il est possible de remarquer que les phases linéaires et de plastification des aciers sont bien contenues dans l'intervalle de confiance. En revanche, la phase de fissuration du béton ne l'est pas. Ceci peut s'expliquer en raison d'une mauvaise identification des paramètres régissant la

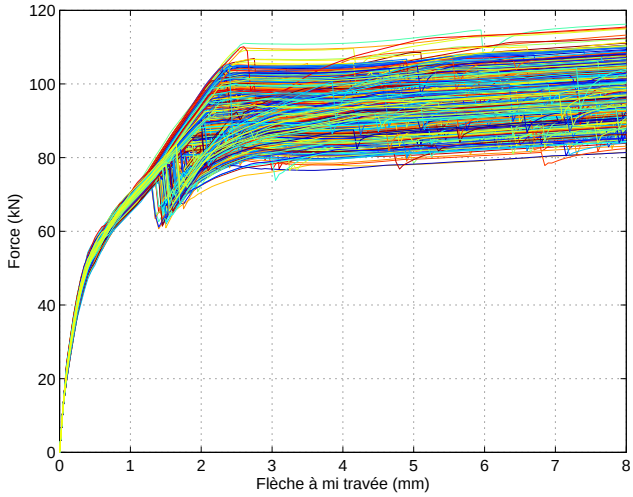


FIG. 4.25 – Courbes de réaction à rupture - 15000 tirages.

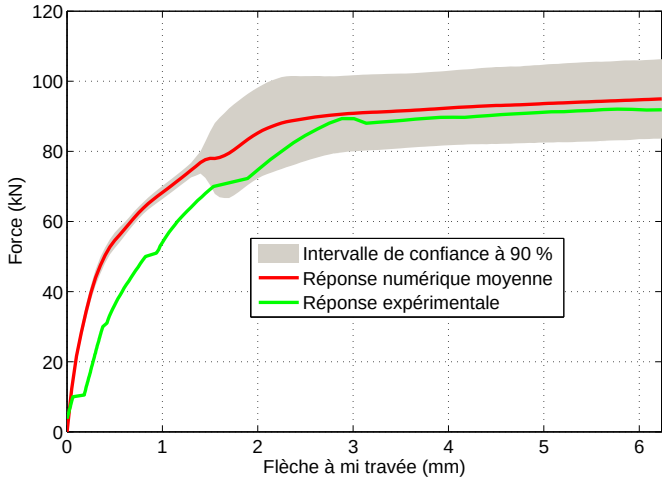


FIG. 4.26 – Intervalle de confiance à 90 %.

vitesse d'endommagement du béton. En effet, aucune information locale n'a été fournie (courbe contrainte/déformation). Seuls les seuils et les modules ont pu être finement identifiés. Par ailleurs, il peut également être noté que la sensibilité de la réponse devient plus importante lorsque l'on se rapproche de la rupture. Cela semble avoir du sens étant donné que les variables aléatoires choisies contrôlent précisément la rupture. Les résultats obtenus à la suite de cette étude probabiliste ont clairement montré que le modèle proposé est largement influencé par les variations des paramètres mécaniques. Une telle étude permet de quantifier l'incertain et donc de donner des indicateurs supplémentaires quant à la pertinence de la réponse moyenne par rapport aux résultats expérimentaux, essentiellement grâce à la détermination des intervalles de confiance.

4.5.2 Essai de La Borderie

Description du protocole expérimental

Lors de ses travaux de thèse, (LaBorderie, 1991) a réalisé des essais de flexion cyclique à bas niveau de chargement sur des poutres en béton armé. Ces essais avaient pour but de mettre en évidence l'effet unilatéral lié à la refermeture des fissures créées dans le béton lors d'un cycle trac-

tion/compression. L'essentiel des résultats expérimentaux est disponible ainsi que le protocole expérimental mis en œuvre. Ces essais constituent donc une référence lorsqu'il s'agit d'évaluer les performances d'un modèle de béton en chargement cyclique.

Les corps d'épreuve sont des poutres en béton armé. Les effets d'échelle ont été évités en choisissant les dimensions des corps d'épreuve les plus proches possibles de celles utilisées dans l'industrie. Les poutres ont une longueur totale de 1700 mm, 1500 mm entre appuis, une hauteur de 200 mm et une largeur de 150 mm. Les éprouvettes cylindriques ont été réalisées au LCPC Paris afin de caractériser le béton durci. Ainsi, 3 cylindres (16-16-32) ont été confectionnés et destinés à des essais de compression et 3 cylindres (16-16-32) a des essais de traction par fendage. Par ailleurs, 3 cylindres (forme en os) de diamètre 140 mm ont été testés en traction directe et 3 prismes (10-10-40) ont été sujets à des essais de flexion quatre points. L'ensemble des cages d'armature a été réalisé à l'ENS de Cachan. Celles-ci se composent de 4 aciers longitudinaux de diamètre 12 mm et 3 cadres en zone de moment négatif pour éviter la rupture en cisaillement. Le béton présente une résistance à la traction de 2,6 MPa, un module d'Young de 30000 MPa et une résistance à la compression de 40 MPa. Les aciers ont un module d'Young de 200000 MPa et une limite d'élasticité de 450 MPa. Le montage d'essai est constitué d'une dalle rigide autour de laquelle un portique de réaction a été positionné. Un vérin d'une capacité de 150 kN et d'une course maximale de 150 mm a été placé en zone centrale de l'éprouvette. Le chargement est contrôlé en déplacement via le vérin. Son évolution est décrite sur la figure 4.27.

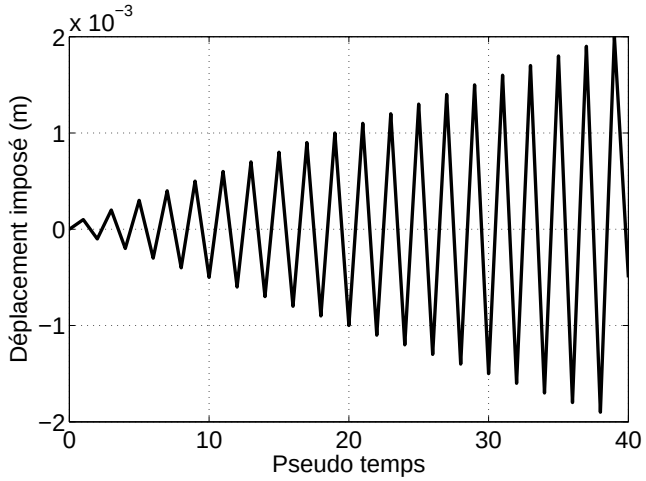


FIG. 4.27 – Déplacement imposé en fonction du temps.

Il est possible de remarquer que le chargement appliqué comporte des cycles d'amplitude variable. En effet, ce type de chargement est reconnu comme étant caractéristique d'un séisme (LaBorderie, 1991). Par ailleurs, le déplacement maximal prescrit est assez faible. Cela est à rapprocher du fait que la plastification des aciers n'était pas souhaitée pour étudier le phénomène de dégradation du béton. Ce type de chargement est donc complexe et permet de tester de manière avancée les performances des modèles proposés. A titre comparatif, deux modélisations ont été effectuées : une modélisation simplifiée et une modélisation locale. Les résultats obtenus sont présentés dans les sections suivantes. Bien que les résultats numériques présentés aient été obtenus pour un grand nombre de cycles, ces derniers sont comparés à la courbe enveloppe des résultats expérimentaux. Ce choix a été retenu en raison du fait que nous n'avions pas accès au fichier de résultats expérimentaux pour un grand nombre de cycles mais seulement pour deux cycles. Dans ses travaux, (LaBorderie, 1991) a montré qu'en l'absence de phénomènes de fatigue, la courbe force/déplacement obtenue pour deux cycles enveloppe est bien celle obtenue pour un plus grand nombre de cycles.

Modélisation simplifiée

L'interface acier/béton a été considérée comme étant parfaite. Une modélisation multifibre a donc été réalisée en considérant 18 éléments poutre maillés par des quadrangles en section. Un seul élément dans l'épaisseur a été considéré. Cette approche peut donc être assimilée à une approche de type multi-couches. Les conditions aux limites résident en des appuis simples ainsi qu'un déplacement vertical imposé à mi-travée. L'évolution de ce dernier a été définie selon la description réalisée sur la figure 4.27. Les paramètres matériaux sont donnés en annexe 1 dans les tableaux A.15 et A.16 pour le béton et l'acier respectivement. Les résultats obtenus en terme de courbe de réaction et de cartographie d'endommagement sont montrés sur les figures 4.28 et 4.29 respectivement.

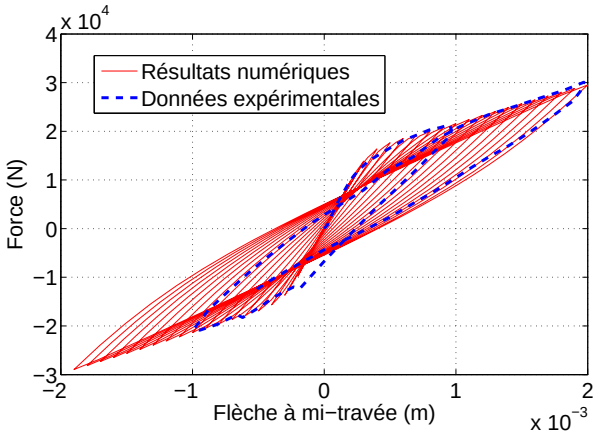


FIG. 4.28 – Courbe force/flèche obtenue pour la poutre testée par (LaBorderie, 1991) - approche simplifiée.

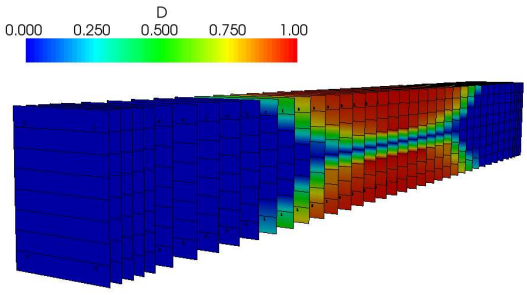


FIG. 4.29 – Cartographie d'endommagement obtenue pour la poutre testée par (LaBorderie, 1991) - approche simplifiée.

En observant les résultats issus de la modélisation simplifiée, il apparaît que la prédiction est satisfaisante. Les résultats quantitatifs numériques sont globalement contenus dans l'enveloppe expérimentale. Par ailleurs, la cartographie d'endommagement présente deux zones endommagées. Ces dernières ont été sujettes à de la traction de manière alternée, ce qui explique cette forme. Du point de vue expérimental, le faciès présente des fissures expérimentales près des vérins. Bien que décrit de manière très diffuse, ce constat a été retrouvé.

Modélisation locale

Dans le but d'évaluer les possibilités offertes par le modèle de béton proposé pour traiter le cas des chargements cycliques alternés, une modélisation massive a été réalisée. Des éléments finis de type quadrangle à quatre nœuds ont été utilisés. Le chargement considéré a été l'enveloppe du chargement décrit sur la figure 4.27 pour limiter les coûts de calculs prohibitifs. Cela semble justifié étant donné l'absence de phénomène de fatigue. En effet, dans un tel cas, le nombre de cycles n'a pas d'influence sur l'enveloppe de la réponse obtenue. Les paramètres matériaux sont donnés en annexe 1 dans les tableaux A.17 et A.18 pour le béton et l'acier respectivement. La cartographie d'endommagement obtenue en fin de chargement ainsi qu'une comparaison de la réponse force/déplacement avec l'expérience sont présentées sur les figures 4.30 et 4.31 respectivement. Il peut être observé que la cartographie d'endommagement ne permet pas de distinguer clairement les fissures. Ces observations ont également été mentionnées dans (Matallah et LaBorderie, 2009). En effet, dans l'étude publiée par ces auteurs, une distinction est réalisée entre endommagement et fissures. Il apparaît nettement que les zones endommagées ne présentent

pas obligatoirement de fissures. Le modèle proposé dans le cadre de la présente étude ne permet

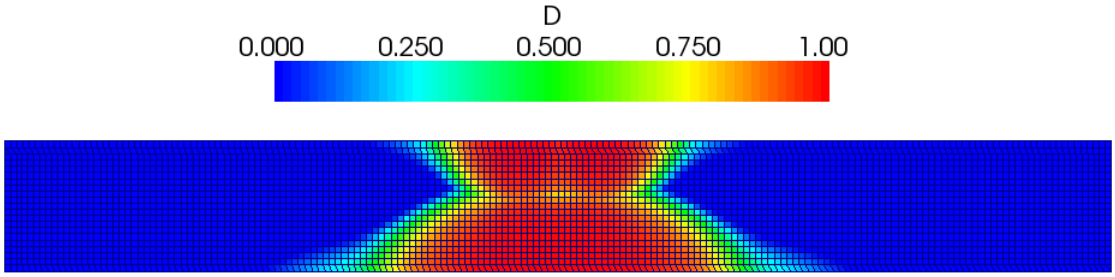


FIG. 4.30 – Cartographie d'endommagement en fin de chargement obtenue pour la poutre testée par (LaBorderie, 1991) - approche locale.

pas une telle distinction. Néanmoins, une typologie d'endommagement similaire est retrouvée. Enfin, il est à noter que la présente cartographie d'endommagement peut être rapprochée de celle obtenue à l'aide des modèles simplifiés.

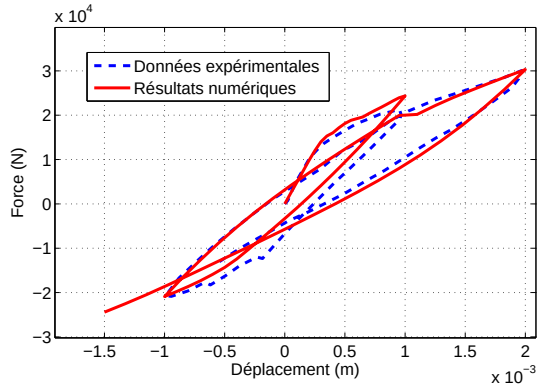


FIG. 4.31 – Courbe force/déplacement obtenue pour le poutre testée par (LaBorderie, 1991) - approche locale.

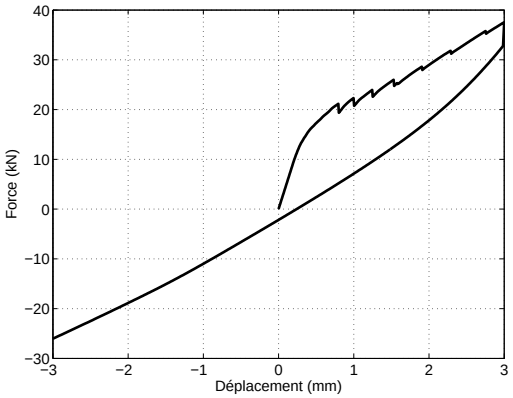


FIG. 4.32 – Mise en évidence de l'effet unilatéral partiel - approche locale.

Il est possible d'observer que la réponse globale en terme de force/déplacement est en adéquation avec les données expérimentales. Toutefois, si la poutre est chargée de manière plus importante, il apparaît que l'effet unilatéral partiel ne suffit plus : un effet unilatéral total est requis. Cette remarque est étayée par le résultat présenté sur la figure 4.32. En effet, pour illustrer le caractère partiel de l'effet unilatéral, la même simulation a été réalisée mais à un niveau de chargement plus important (35 kN). Une décharge a été réalisée jusqu'à atteindre un déplacement à mi-travée de signe opposé. Il peut être constaté que la refermeture des fissures ne s'effectue plus de manière pertinente, une perte d'environ 10 kN est constatée. Cela permet donc de mettre en lumière le fait que, dans le cas des chargements d'intensité importante, un effet unilatéral partiel ne suffit plus.

Les résultats, non seulement qualitatifs mais aussi quantitatifs, apparaissent comme satisfaisants par rapport à l'expérience. Néanmoins, comme cela a été signalé, ces constats sont en partie dus au fait que la poutre est faiblement chargée et que la prise en compte d'un unilatéral partiel suffit. Cela n'est plus vrai dès lors que le chargement devient plus important.

4.5.3 Bilan

Dans cette section, deux éléments de structures en béton armé ont été analysés. En premier lieu, une étude simplifiée d'une poutre en béton armé testée en flexion trois points cyclique répétée par (Ragueneau, 1999) a été présentée. Dans le but de comparer les modèles simplifiés avec et sans prise en compte d'une interface imparfaite, deux cas de simulation ont été réalisés : sans et avec interface imparfaite. Il apparaît que les résultats expérimentaux sont globalement retrouvés. En réalité, ces derniers sont encadrés par les résultats numériques obtenus dans les deux cas mentionnés. Par ailleurs, les cartographies d'endommagement correspondantes sont différentes. Les fissures sont davantage visibles dans le cas où l'interface acier/béton est imparfaite. Pour évaluer la sensibilité de la réponse aux incertitudes qui entâchent les données d'entrée du modèle, une étude probabiliste a été conduite. En outre, l'intervalle de confiance à 90 % a été calculé. Il apparaît que la réponse expérimentale n'est contenue à l'intérieur ni en phase élastique ni en phase de tension stiffening. En revanche, en phase de plastification des aciers, les données expérimentales sont bien contenues dans l'intervalle de confiance à 90 %. Sur la base de cet exemple d'élément de structure, des éléments de validation des modèles simplifiés proposés ont donc été obtenus. En second lieu, dans le but de tester les possibilités offertes dans le cas de chargements cycliques alternés, une poutre soumise à de la flexion trois points a été analysée. Deux simulations ont été conduites, une première à l'aide de modèles simplifiés avec interface parfaite et une seconde à l'aide de modèles locaux. D'une manière générale, il apparaît que les résultats numériques quantitatifs obtenus à l'aide des deux approches sont en accord avec l'expérience. Néanmoins, dans le cas de l'approche locale, il est apparu que la réponse numérique présente une sensibilité importante à la finesse du maillage choisie. De plus, l'effet unilatéral partiel ne suffit plus si le chargement est augmenté de manière plus importante que celui prescrit dans les travaux de (LaBorderie, 1991). Les cartographies d'endommagement obtenues dans les deux cas de simulation sont voisines et peuvent être rapprochées de celles de (Matallah et LaBorderie, 2009). Néanmoins, contrairement au cas du modèle proposé par (Matallah et LaBorderie, 2009), aucune distinction entre zones endommagée et fissurée n'est possible avec le modèle de béton proposé. Cela explique, au moins en partie, pourquoi les fissures n'ont pu être visualisées avec précision. Les résultats acquis sur la base de cet exemple permettent d'apporter quelques éléments de validation des modèles proposés dans le cas de chargements cycliques répétés et alternés.

4.6 Simulation d'éléments de structures en béton armé en présence de corrosion

Dans cette section, deux cas d'éléments de structures sont étudiés en intégrant les effets de la corrosion. En premier lieu, les essais de flexion quatre points réalisés par (Mangat et Elgalf, 1999b) sont étudiés. Ces derniers visent à évaluer l'effet de l'intensité du phénomène de corrosion sur le comportement ultime des éléments de structure en béton armé. Ces derniers ont été numériquement étudiés non seulement à l'aide d'une modélisation locale tridimensionnelle mais aussi à l'aide d'une modélisation simplifiée. Les résultats obtenus par les deux approches sont comparés et discutés. L'ensemble de cette étude a été reporté dans (Richard *et al.*, 2010e). En second lieu, dans le but d'étudier les capacités des modèles proposés à être appliqués aux structures réelles, un pont en béton armé testé en cisaillement dans le cadre du projet Européen *Sustainable Bridges* a été modélisé. Une étude de sensibilité à la présence de corrosion est présentée.

4.6.1 Essai de Mangat

Description du protocole expérimental

Afin d'évaluer les capacités des modèles proposés à bien décrire le comportement mécanique ultime des éléments de structures en béton armé corrodés, les essais réalisés par (Mangat et Elgalf, 1999b) ont été étudiés. Ces derniers consistent en des essais de flexion quatre points monotone réalisés sur des poutres en béton armé corrodées. Cette campagne expérimentale avait pour but de quantifier l'effet du phénomène de corrosion sur le comportement ultime des éléments de structures en béton armé.

Un total de 111 poutres en béton armé a été fabriqué de manière industrielle. Elles ont été soumises à un procédé intensiostatique pour créer un état initial de corrosion. Pour cela, deux sources de courant externes ont été considérées. Le degré de corrosion macroscopique a été défini comme étant égal au rapport $\frac{2RT}{D}$, où R est la vitesse de corrosion en mm.année^{-1}, T est la durée (en années) qui sépare l'instant courant de l'instant d'initiation de la corrosion et D est le diamètre nominal des aciers longitudinaux. Les poutres ont été volontairement sous-renforcées en vue de garantir que la rupture globale soit conditionnée par la rupture locale de l'interface acier/béton ou, autrement dit, par la perte d'adhérence entre l'acier et le béton. Les corps d'épreuve ont une forme prismatique de 910 mm, une section droite de 150 mm de profondeur et de 100 mm de largeur. Chaque poutre a été renforcée en partie inférieure avec deux aciers longitudinaux ayant un diamètre égal à 10 mm. Des cadres ont été également considérés dans certaines poutres pour quantifier leur effet sur le comportement global. Les auteurs rapportent que la présence de cadres a interférée avec la phase d'initiation de la corrosion car il fut délicat de les isoler électriquement des aciers longitudinaux. En effet, cette condition a été requise en vue d'assurer une certaine homogénéité de la corrosion le long des aciers inférieurs. La même remarque au sujet des aciers supérieurs a été formulée par les auteurs, ainsi aucun acier supérieur n'a été considéré. Un collier métallique a été placé en zone centrale (entre-appuis). Cet aspect n'est cependant pas clairement décrit dans l'article publié par (Mangat et Elgalf, 1999b). Le parti de ne pas tenir compte du collier a donc été pris.

Le ciment utilisé est de type Portland classique. Les plus gros granulats ont une dimension caractéristique égale à 10 mm. Chaque matériau a été mécaniquement testé. Ainsi, le béton présente une résistance à la compression égale à 40 MPa, une résistance à la traction de 2,7 MPa et un module d'Young de 28500 MPa. Les aciers longitudinaux ont un diamètre égal à 10 mm, un module d'Young de 206000 MPa et une limite d'élasticité égale à 520 MPa. Un module d'écrouissage de 1,0 % (par rapport au module élastique initial) a été supposé. Plusieurs poutres ont été testées par (Mangat et Elgalf, 1999b). En outre, les effets de la densité de courant imposée ont été étudiés. Dans le cadre de la présente étude, seules les poutres corrodées à une densité de courant égale à 2 mA.cm^{-2} ont été considérées. Ce choix a été fait en accord avec les recommandations des auteurs en raison de la bonne répétabilité des essais.

Modélisation numérique

Un certain nombre des 111 poutres en béton armé sous-renforcées testées par (Mangat et Elgalf, 1999b) ont été numériquement analysées. Le but de cette étude est de valider le modèle d'interface acier/béton proposé en présence de corrosion. Pour cela, deux types d'approche ont été retenues : d'une part une approche simplifiée et, d'autre part, une approche locale. L'approche simplifiée consiste à réaliser une modélisation multifibre avec interface imparfaite tandis que l'approche locale réside en une modélisation massive tridimensionnelle d'un quart de poutre. Aucune information n'a été fournie par les auteurs concernant le faciès de fissuration obtenus après les essais de flexion. Ainsi, le parti de concentrer les analyses numériques sur les aspects

quantitatifs a été retenu. Le comportement à rupture en présence de corrosion est donc l'aspect qui est spécifiquement étudié. Un maillage moyen a donc été considéré pour limiter les coûts de calcul. Les paramètres matériaux sont donnés en annexe 1 dans les tableaux A.19, A.20 et A.21 pour l'interface, l'acier et le béton respectivement. Les résultats numériques obtenus grâce aux deux approches précédemment mentionnées sont présentés et discutés dans les paragraphes suivants.

Modélisation simplifiée. Une modélisation multifibre de la poutre entière a été réalisée. Elle comporte 30 éléments de type poutre Timoshenko. Les fibres de béton suivent la loi proposée et l'acier, un modèle élasto-plastique avec écrouissage non linéaire gérant la corrosion. Ce modèle a été proposé par (Ouglova, 2004) et a été implanté dans Cast3M dans sa version unidimensionnelle. Les paramètres matériaux de ce modèle ont été identifiés d'après l'étude de sensibilité réalisée par (Ouglova, 2004). L'interface acier/béton est prise en compte selon l'approche simplifiée précédemment évoquée. Les paramètres matériaux liés à l'interface acier/béton ont été identifiés par analyse inverse car aucune information n'est fournie au sujet de l'adhérence. Les calculs ont été contrôlés en déplacement imposé pour améliorer leur robustesse numérique. Les résultats quantitatifs obtenus en terme de force/déplacement sont présentés sur la figure 4.33.

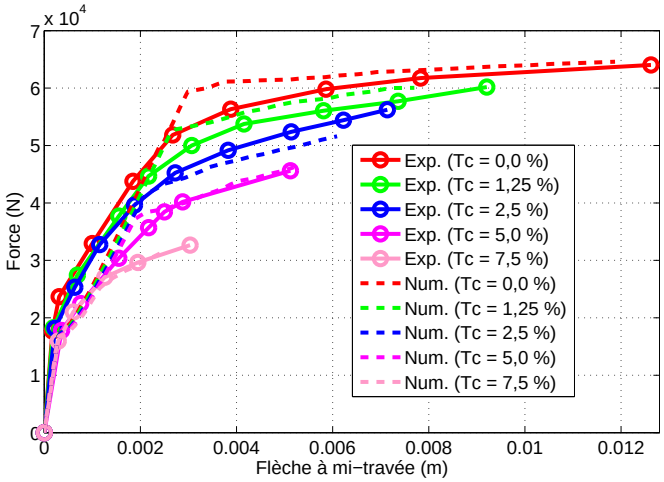


FIG. 4.33 – Résultats obtenus pour les poutres testées par (Mangat et Elgalf, 1999b) - approche simplifiée.

D'une manière générale, il est possible de remarquer que les résultats numériques obtenus grâce à l'approche simplifiée sont cohérents avec les données expérimentales. En effet, les différentes phases du comportement des éléments de structures sont bien décrites et ce, pour les différents degrés de corrosion considérés. Il doit être noté toutefois que les paramètres matériaux liés à la prise en compte de la corrosion (fonction W) ont été identifiés par analyse inverse, c'est-à-dire, que la fonction a été calée pour retrouver les résultats expérimentaux. Cette fonction pourrait néanmoins être réutilisée pour des éléments de structures aux propriétés mécaniques comparables. Un autre aspect qui doit être mentionné est que le temps de calcul nécessaire à l'obtention des réponses numériques pour l'ensemble de l'élément de structure reste bien inférieur à ceux requis lorsque des analyses fines sont conduites. Le maillage est également plus simple à réaliser en raison du caractère *intégré* de l'interface. Par ailleurs, il doit être mentionné que ce cas test permet davantage une calibration du modèle proposé qu'une validation en raison du fait que la fonction W a été obtenue par analyse inverse. Toutefois, ce cas test montre qu'un cadre numérique robuste, s'appuyant sur le formalisme multifibre, a été proposé pour modéliser les éléments de structures corrodés.

Modélisation locale. Dans ce paragraphe, une modélisation locale des poutres précédemment citées est exposée. Il est rappelé qu'en l'absence de données expérimentales portant sur le faciès de fissuration, le parti de ne pas réaliser les simulations avec un maillage fin a été pris. Des éléments de type cube à 8 nœuds ont été utilisés pour décrire le domaine occupé par le béton ainsi que l'armature. L'interface acier/béton a été modélisée à l'aide d'éléments d'interface tridimensionnels sans épaisseur. Une représentation du maillage est donnée sur les figures 4.34 et 4.35. L'intérieur et l'extérieur du quart de poutre ont été représentés.

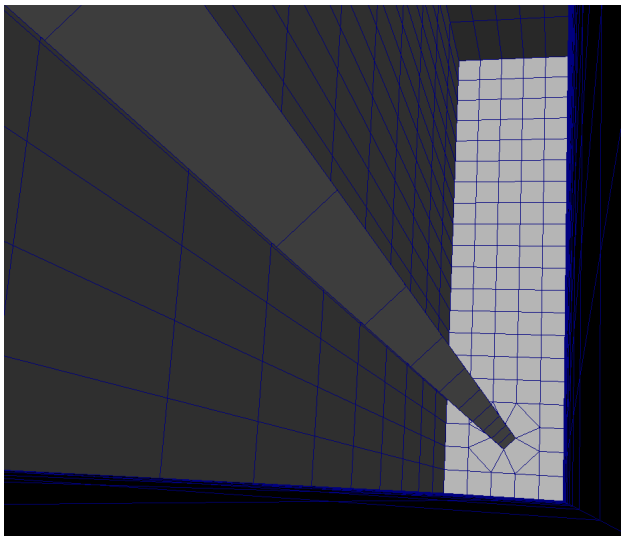


FIG. 4.34 – Intérieur du maillage d'un quart de poutre testée par (Mangat et Elgalf, 1999b).

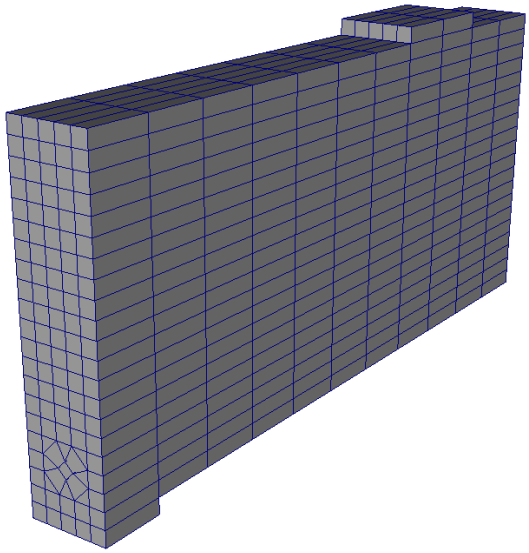


FIG. 4.35 – Maillage complet d'un quart de poutre testée par (Mangat et Elgalf, 1999b).

L'acier est supposé suivre un comportement de type élasto-plastique avec écrouissage isotrope, le béton a été modélisé par le modèle de Mazars dans sa version non locale et l'interface acier/béton à l'aide de la loi développée dans la présente étude. Le choix d'utiliser un modèle de béton de référence a été pris pour que ce cas test ne soit discriminant que par rapport à la loi d'interface acier/béton proposée. L'ensemble des paramètres matériaux a été identifié grâce aux données fournies à l'exception de ceux liés à la prise en compte de la corrosion. De manière plus précise, les paramètres liés au critère de Gurson modifié ont été choisis selon leurs valeurs nominales respectives. Les paramètres liés à la réduction de l'adhérence acier/béton ont été identifiés par analyse inverse. Le gonflement des produits de corrosion a été négligé, le parti de prendre en compte la réduction d'adhérence de manière uniforme et globale a été retenu. Il est important de noter que cette approche reste globale, en effet, les états de contraintes locaux à l'interface acier/béton pourraient ne pas être suffisamment précis. La réduction de la section d'acier a été prise en compte de manière explicite en modifiant le diamètre initial de la barre de renforcement longitudinale. L'ensemble des poutres sujet à une densité de courant de corrosion égale à 2mA.cm^{-2} a été simulé. Les résultats sont présentés dans ce qui suit, d'abord pour la poutre saine (témoin) puis, pour les poutres corrodées. Il doit être noté que pour la poutre saine, une interface imparfaite a été considérée. Les calculs ont été contrôlés en déplacement imposé sur un patin d'application de charge supposée élastique rigide. Une importante sensibilité au maillage a été constatée. En effet, pour une faible variation de la longueur caractéristique, le mode de rupture obtenu est différent. Le maillage ainsi que la longueur caractéristique ont donc été calés pour obtenir le mode de rupture souhaité (importante dégradation de l'interface acier/béton).

Poutre saine Les résultats quantitatifs acquis pour la poutre saine sont présentés sur les figures 4.36 à 4.39 et s'expriment respectivement en terme de courbe force/déplacement, de contraintes de Von Mises le long de la barre, de contraintes de cisaillement à l'interface le long de la barre et d'endommagement à l'interface le long de la barre. En premier lieu, la courbe force/déplacement obtenue numériquement est en adéquation avec celle mesurée expérimentalement. Elle présente toutefois une discontinuité lors du passage de la phase élastique à la phase où la fissuration du béton est prépondérante. Cela peut être rapproché du fait qu'une fissure isolée est créée au droit du patin d'application des charges. La suite du calcul se déroule comme attendu après ce point particulier (redistribution des contraintes dans le béton). En second lieu, les contraintes de Von Mises calculées le long de la barre de renforcement pour différents niveaux de charges décrivent bien le mécanisme de plastification de l'armature. La zone plastique est initiée au centre de la poutre et se propage vers les extrémités. Ce mécanisme est caractéristique de ce type d'élément de structure chargé en flexion. En troisième lieu, la distribution des contraintes de cisaillement le long de la barre montre que la zone la plus sujette à un glissement est celle située proche de l'appui à l'extrémité. En effet, cela s'explique par des raisons de symétrie. En zone centrale, un très faible glissement apparaît à l'interface acier/béton alors que loin de cette zone, le glissement est plus prononcé. En l'absence de glissement, aucune contrainte de cisaillement ne peut être déployée. Cela explique pourquoi les contraintes de cisaillement en zone centrale sont quasi nulles. En dernier lieu, les mêmes remarques peuvent être émises au sujet de la distribution d'endommagement. Il peut néanmoins être remarqué qu'un endommagement maximal voisin de 0,18 a été noté.

Poutre corrodées Après avoir identifié les paramètres liés aux variations de l'adhérence entre l'acier et le béton à cause de la présence de rouille, différents cas ont été simulés. D'une simulation à l'autre, l'ensemble des paramètres a été maintenu constant à l'exception d'une part du diamètre de barre de renforcement et, d'autre part, du degré de corrosion macroscopique. Les résultats acquis en terme de courbe de réaction sont présentés sur les figures 4.40 à 4.45. D'une manière générale, l'adéquation avec les données expérimentales est satisfaisante. Néanmoins, il peut être noté que, dans le cas de forts degrés de corrosion, non seulement la raideur initiale est mal estimée mais aussi que les instabilités numériques deviennent plus importantes. Le fait que la raideur initiale est mal estimée peut être rapproché du fait que la phase de gonflement des produits de corrosion a été négligée. L'augmentation des instabilités numériques avec le degré de corrosion peut être rapprochée, quant à elle, du fait que l'adhérence devient assez faible. Cela crée donc une difficulté supplémentaire pour trouver l'état d'équilibre global.

Les distributions des contraintes de Von Mises sont présentées sur les figures 4.46 à 4.51 pour chaque degré de corrosion. Il peut être remarqué que plus le degré de corrosion augmente, moins la barre de renforcement entre en plasticité. En effet, cela peut se vérifier en observant que la limite d'élasticité est de moins en moins atteinte plus le degré de corrosion augmente. Cela peut s'expliquer par le fait que l'adhérence entre l'acier et le béton devenant de moins en moins importante, le transfert des contraintes, depuis le béton vers l'acier, peut de moins en moins s'effectuer. Cela entraîne donc une difficulté de la barre de renforcement à se charger et, par conséquence, à entrer en plasticité. Autrement dit, les résultats numériques montrent que l'on assiste au passage d'un mode de rupture de type béton armé (avec plastification des aciers) à un mode de rupture de type béton non armé (sans plastification des aciers). Il doit être noté que les ancrages n'ont pas été pris en compte dans le modèle. En effet, si ces derniers avaient été pris en compte, un palier plastique aurait été constaté numériquement car les efforts auraient transité depuis l'acier vers le béton.

Les distributions des contraintes de cisaillement à l'interface sont exposées sur les figures 4.52

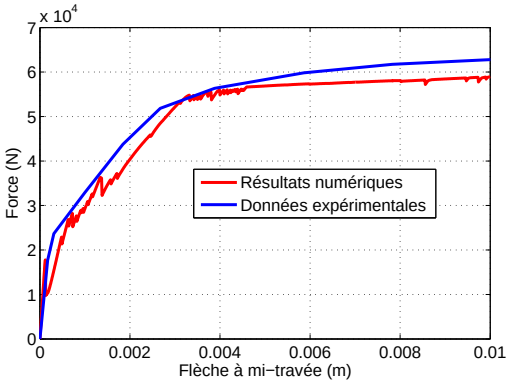


FIG. 4.36 – Courbe force/déplacement obtenue pour la poutre saine.

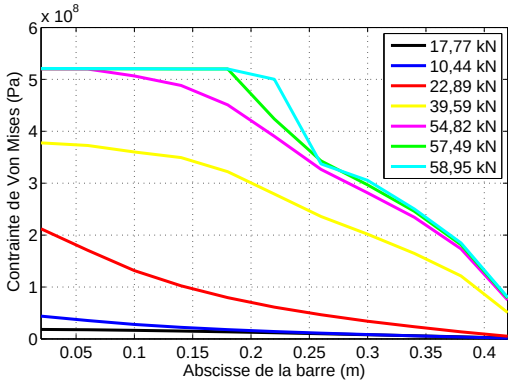


FIG. 4.37 – Contraintes de Von Mises le long de la barre de renforcement obtenues pour la poutre saine.

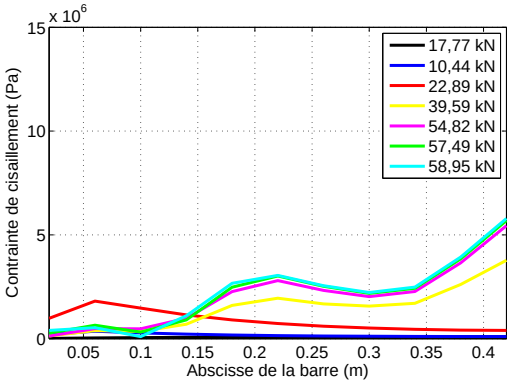


FIG. 4.38 – Contraintes de cisaillement à l'interface le long de la barre de renforcement obtenues pour la poutre saine.

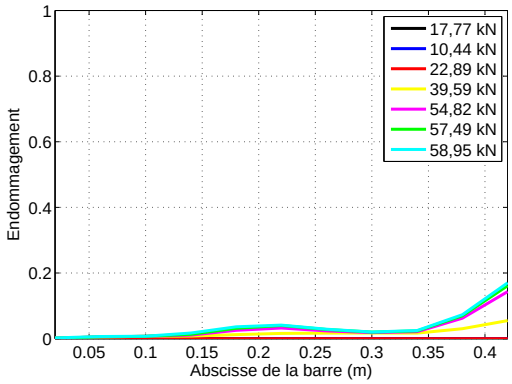


FIG. 4.39 – Endommagement à l'interface le long de la barre de renforcement obtenu pour la poutre saine.

à 4.57. D'une part, à l'identique du cas de la poutre saine précédemment discutée, il peut être observé que le glissement apparaît essentiellement aux extrémités. Cela peut s'expliquer par les mêmes raisons que celles déjà avancées. D'autre part, le glissement tend à devenir quasi uniforme (pour un niveau de charge donné) lorsque le degré de corrosion augmente. En effet, cela provient du fait que plus le degré de corrosion est élevé, plus l'endommagement initial à l'interface acier/béton est important. Par suite, la barre de renforcement devient de moins en moins adhérente au béton, le glissement ainsi que la contrainte résiduelle deviennent donc homogènes.

Pour terminer, les distributions de la variable d'endommagement à l'interface acier/béton sont montrées sur les figures 4.58 à 4.63 pour les différents cas de corrosion. Ces résultats ont le mérite de montrer clairement comment sont prises en compte les variations d'adhérence entre l'acier et le béton. En effet, plus le degré de corrosion est important, plus l'endommagement tend à être constant. Pour les forts degrés de corrosion, l'endommagement initial est si important que l'augmenter provoque d'importants glissements. Cela ne peut se produire, d'une part en raison des niveaux de charge considérés et, d'autre part, en raison des instabilités numériques qui ne pourraient pas être surmontées.

Dans cette section, une étude de poutres en béton armé dégradées par corrosion a été présentée.

En premier lieu, les résultats obtenus en adoptant une approche de type simplifiée ont permis d'aboutir à une bonne estimation du comportement global des éléments pour différents degrés de corrosion. Il doit être noté que cette approche permet de mettre en œuvre un coût de calcul raisonnable. En revanche, l'accès à des informations locales pertinentes reste limité. En second lieu, une approche locale tridimensionnelle a été considérée. En raison d'un manque d'informations expérimentales lié au faciès de fissuration après chargement, le parti de considérer un maillage moyen et non fin a été retenu. En conséquence, aucune information liée à la cartographie d'endommagement n'a été présentée. Un quart de poutre a été modélisé de manière massive et a permis d'obtenir des résultats locaux comme les distributions de contraintes de cisaillement, d'endommagement et de contraintes de Von Mises le long de l'armature. Ces résultats ont été discutés et ont permis de montrer qu'un certain nombre de propriétés est bien décrit par l'utilisation du modèle d'interface acier/béton proposé.

4.6.2 Essai sur le pont d'Örnsköldsvik

Contexte

Ces dernières années, il a été constaté en Europe une augmentation importante du trafic sur les ponts rails. L'évaluation des ponts rails existants est donc devenue nécessaire. En premier lieu, les ponts rails doivent de plus en plus souvent supporter des charges de trafic supérieures aux charges pour lesquelles ils ont été conçus. De plus, la fréquence de passages de convois exceptionnels tend aussi à augmenter. En second lieu, nombreux sont les ponts rails qui souffrent de maintes dégradations dues soit à l'environnement extérieur, soit à l'augmentation des charges de trafic. Il s'agit donc de vérifier si ces derniers peuvent encore aujourd'hui supporter de telles sollicitations pour un niveau de confiance donné. En dernier lieu, l'évolution des textes normatifs a conduit à une diminution de la probabilité qu'une défaillance survienne. Autrement dit, le niveau de sécurité requis a été augmenté. Ainsi, comme souligné précédemment, il s'agit de s'assurer que les ponts rails existants respectent bien les nouvelles spécifications réglementaires.

En 2003, le projet Européen *Sustainable Bridges*, financé dans le cadre du sixième Plan Cadre Recherche et Développement, avait pour objectif d'étudier les effets de l'augmentation du trafic sur la capacité portante et la durée de vie des ponts rails existants. Dans le but de valider de nouvelles méthodes d'analyse fines développées dans le cadre de ce projet Européen, des ponts rails ont été testés mécaniquement. En particulier, le pont d'Örnsköldsvik en Suède a été évalué. Une vue globale de ce pont est présentée sur la figure 4.64.

Géométrie et protocole expérimental

Le pont se compose de deux travées et de trois piles. Sa géométrie est donnée sur la figure 4.65. La position des armatures a été déduite des plans originaux datant de 1956. Le pont a été soumis à un chargement combinant cisaillement et flexion. Le chargement a été appliqué en mettant en place un portique de chargement ancré dans le sol par des câbles à 8 m de profondeur. Par l'intermédiaire de vérins, le chargement a été appliqué sur le pont. La figure 4.66 représente le montage d'essai. Pour cela, une force ponctuelle a été appliquée au milieu de la plus longue travée au moyen d'un patin en acier. Au cours du chargement, la réponse structurale en terme de force/flèche a été suivie. Par ailleurs, les déformations dans les aciers longitudinaux ont également été mesurées afin d'obtenir une indication sur l'état de sollicitation de certaines sections. L'ensemble des matériaux constitutifs a été testé en considérant plusieurs éprouvettes. Des mesures spectrométriques ont également été réalisées pour obtenir le champ de déformation en surface avant rupture. Un important travail de dépouillement a également été entrepris pour évaluer la présence de corrosion le long des armatures. Les inspections ont révélé que le pont ne souffrait pas de corrosion. Seules quelques traces ont été détectées mais en trop faible quantité

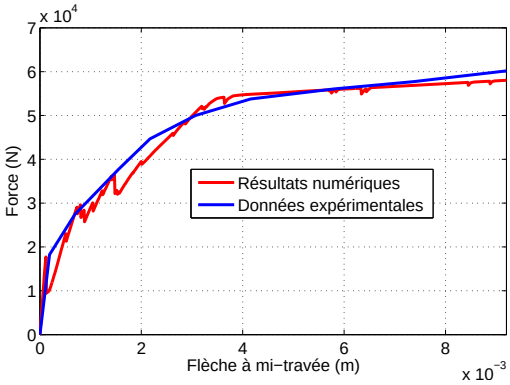


FIG. 4.40 – Courbe force/déplacement T_c = 1,25 %.

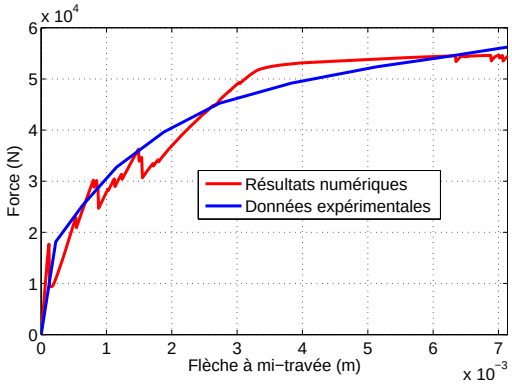


FIG. 4.41 – Courbe force/déplacement T_c = 2,50 %.

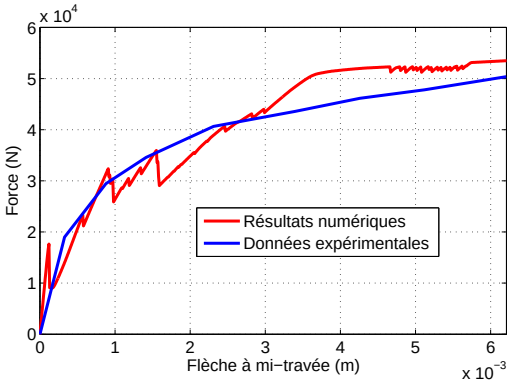


FIG. 4.42 – Courbe force/déplacement T_c = 3,75 %.

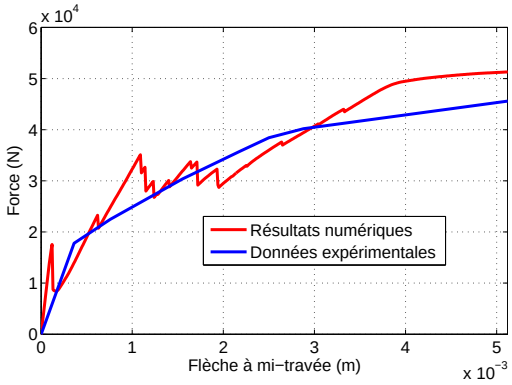


FIG. 4.43 – Courbe force/déplacement T_c = 5,00 %.

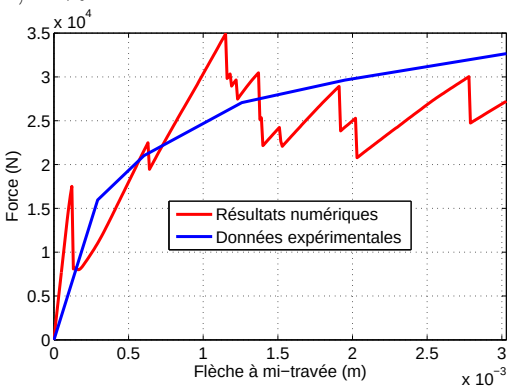


FIG. 4.44 – Courbe force/déplacement T_c = 7,50 %.

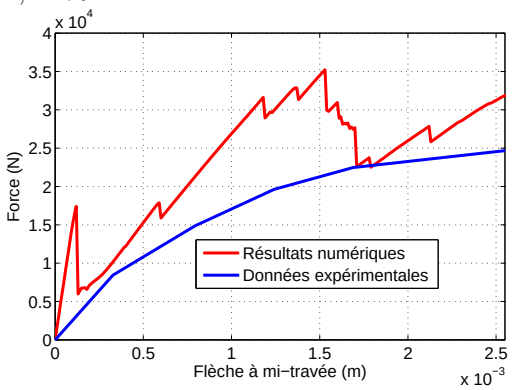


FIG. 4.45 – Courbe force/déplacement T_c = 10,00 %.

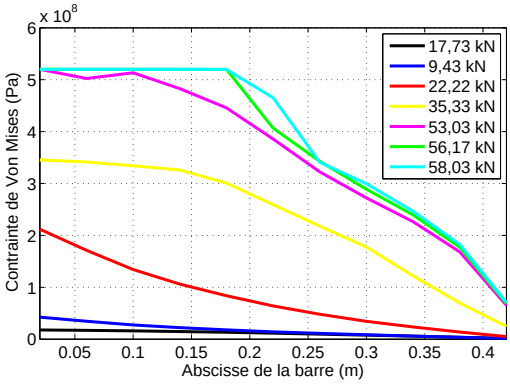


FIG. 4.46 – Contrainte de Von Mises le long de la barre $T_c = 1{,}25$ %.

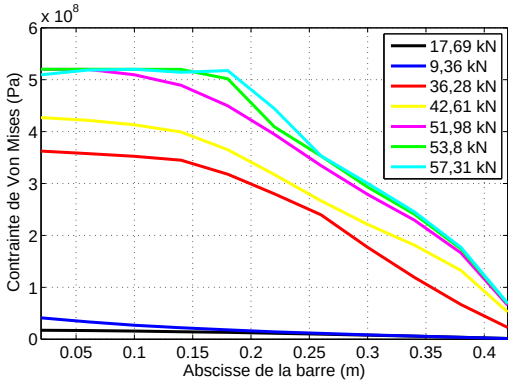


FIG. 4.47 – Contrainte de Von Mises le long de la barre $T_c = 2{,}50$ %.

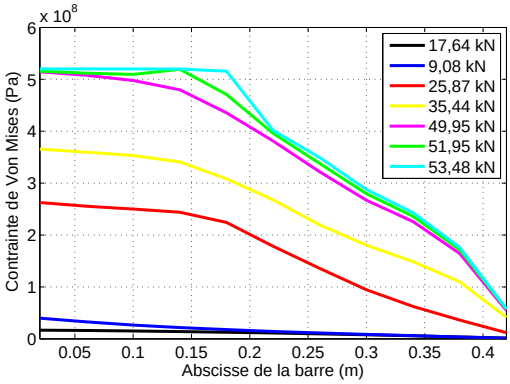


FIG. 4.48 – Contrainte de Von Mises le long de la barre $T_c = 3{,}75$ %.

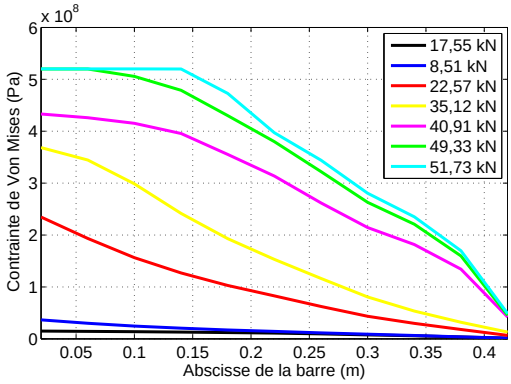


FIG. 4.49 – Contrainte de Von Mises le long de la barre $T_c = 5{,}00$ %.

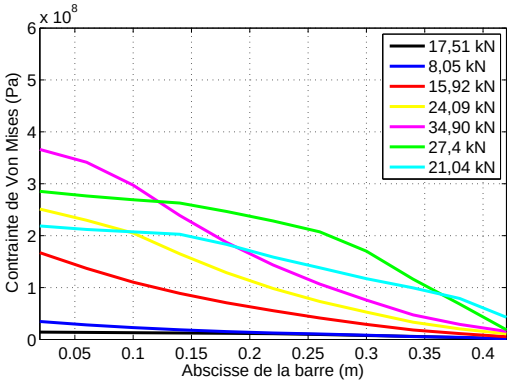


FIG. 4.50 – Contrainte de Von Mises le long de la barre $T_c = 7{,}50$ %.

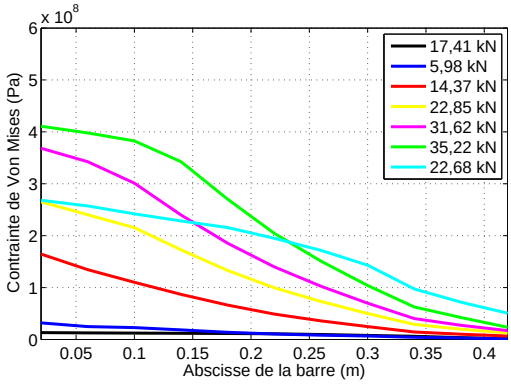


FIG. 4.51 – Contrainte de Von Mises le long de la barre $T_c = 10{,}00$ %.

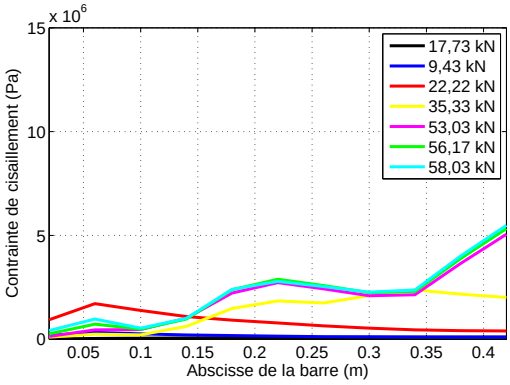


FIG. 4.52 – Contrainte de cisaillement le long de la barre $T_c = 1{,}25$ %.

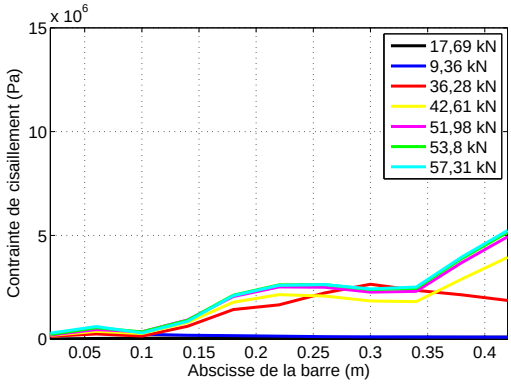


FIG. 4.53 – Contrainte de cisaillement le long de la barre $T_c = 2{,}50$ %.

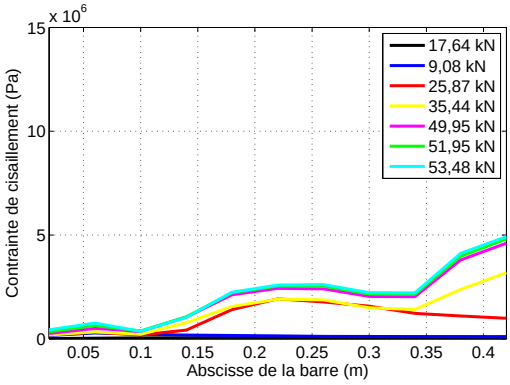


FIG. 4.54 – Contrainte de cisaillement le long de la barre $T_c = 3{,}75$ %.

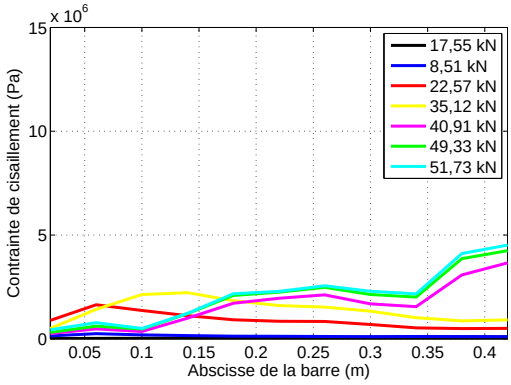


FIG. 4.55 – Contrainte de cisaillement le long de la barre $T_c = 5{,}00$ %.

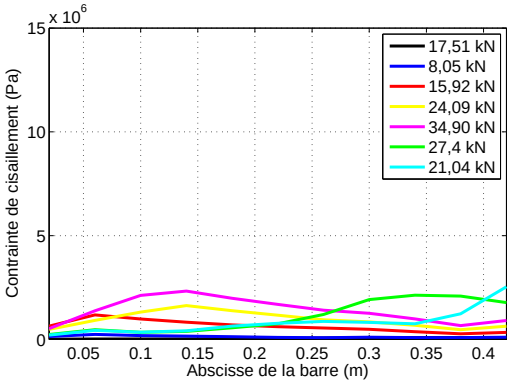


FIG. 4.56 – Contrainte de cisaillement le long de la barre $T_c = 7{,}50$ %.

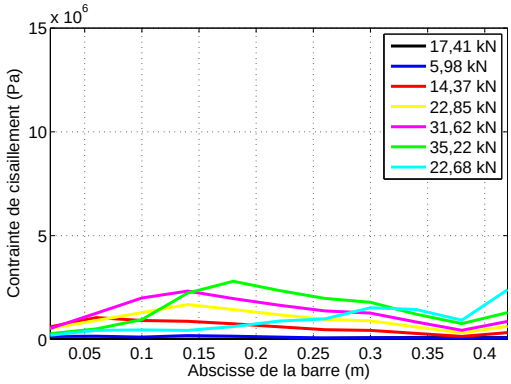


FIG. 4.57 – Contrainte de cisaillement le long de la barre $T_c = 10{,}00$ %.

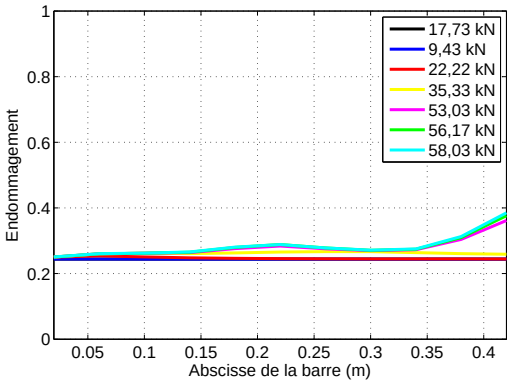


FIG. 4.58 – Endommagement à l'interface le long de la barre $T_c = 1{,}25$ %.

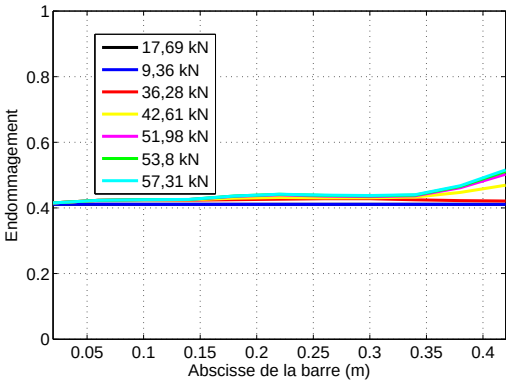


FIG. 4.59 – Endommagement à l'interface le long de la barre $T_c = 2{,}50$ %.

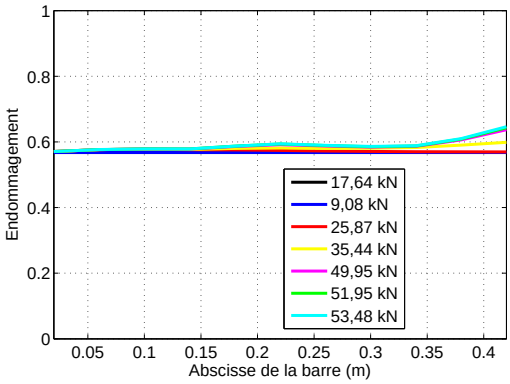


FIG. 4.60 – Endommagement à l'interface le long de la barre $T_c = 3{,}75$ %.

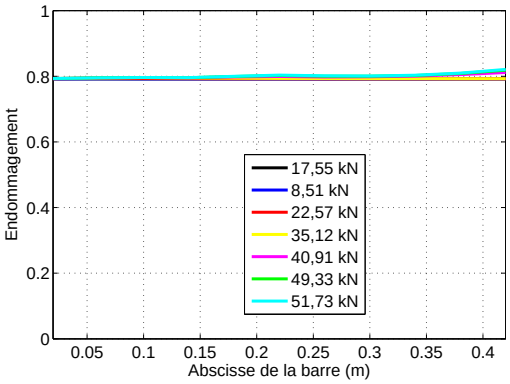


FIG. 4.61 – Endommagement à l'interface le long de la barre $T_c = 5{,}00$ %.

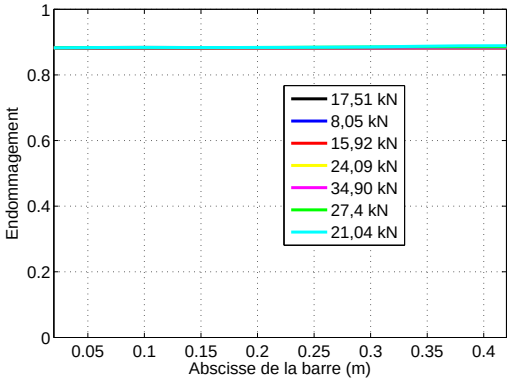


FIG. 4.62 – Endommagement à l'interface le long de la barre $T_c = 7{,}50$ %.

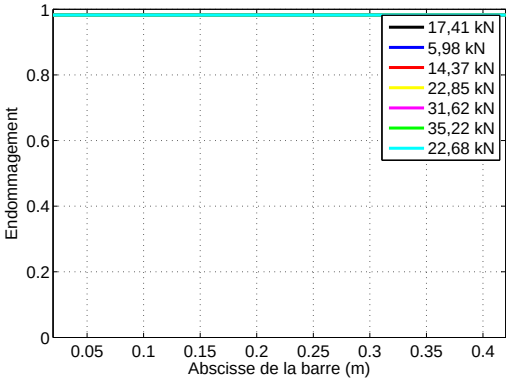


FIG. 4.63 – Endommagement à l'interface le long de la barre $T_c = 10{,}00$ %.



FIG. 4.64 – Vue globale du pont d'Örnsköldsvik.

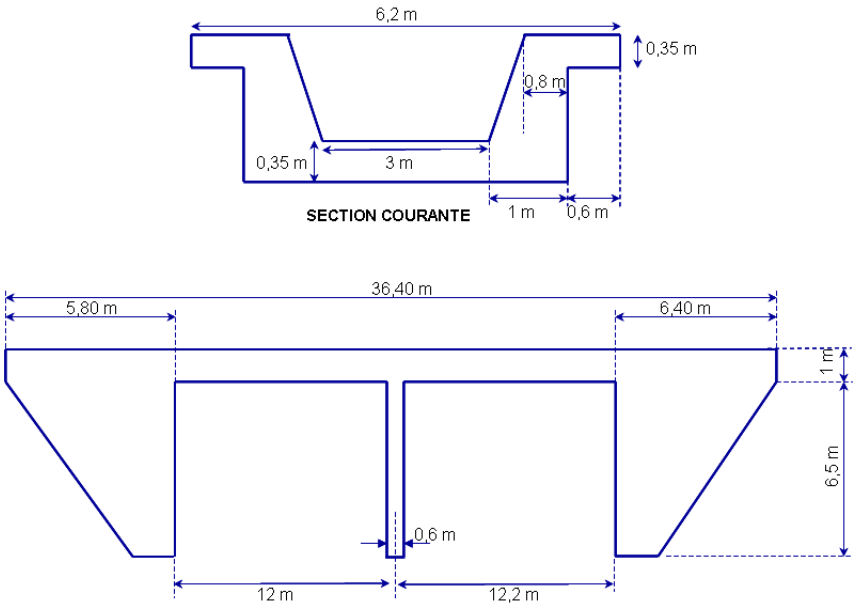


FIG. 4.65 – Géométrie du pont d'Örnsköldsvik, d'après les plans originaux de 1956.

pour pouvoir conclure que la capacité portante du pont était influencée de manière significative. Les résultats sont consignés dans le rapport (Vervuurt et Leegwater, 2008). En vue d'éviter une rupture par flexion au droit du patin, la travée sollicitée a été renforcée de manière externe par des barres de renforcement en carbone à haute limite d'élasticité. Ainsi, 18 barres ont été collées dans des rainures réalisées à cet effet sur la face inférieure de la travée sollicitée.

Modélisation avec interface acier/béton parfaite

Les propos relatés dans cette section sont essentiellement tirés de (Richard *et al.*, 2010d) et (Epaillard *et al.*, 2009). Dans le but de tester le pouvoir prédictif des modèles proposés (interface acier/béton et béton), le pont d'Örnsköldsvik a été modélisé. Plus précisément, cette étude a deux objectifs essentiels : le premier est de valider le modèle de béton proposé et, le second, d'étudier l'applicabilité du modèle d'interface acier/béton sur une structure possédant une échelle classique dans le domaine du génie civil.

Seule la section longitudinale des deux poutres latérales a été considérée sous l'hypothèse d'un état plan de contrainte. Ce choix a été motivé par deux raisons essentielles : en premier lieu,



FIG. 4.66 – Montage de chargement du pont d'Örnsköldsvik.

comme le chargement mécanique a été appliqué directement sur les poutres, ce sont ces dernières qui ont été principalement sollicitées et, en second lieu, le coût de calcul requis pour une analyse complète tridimensionnelle n'aurait pas été raisonnable. Ce point est néanmoins encore sujet à d'importantes discussions, essentiellement à cause d'un effet potentiellement non négligeable du moment de torsion hors plan.

La géométrie présentée sur le schéma 4.65 a été respectée. Les armatures longitudinales ainsi que les barres de renforcement ont été considérées explicitement. Pour des raisons techniques liées à la construction du maillage, les cadres n'ont pu être considérés explicitement. Néanmoins, les aires des sections des armatures inclinées ont été augmentées de l'aire de la section du cadre qui les croise. Ainsi, il est possible de considérer que les cadres ont été pris en compte de manière diffuse. Les contraintes dans les barres de renforcement longitudinales n'ont donc pas pu être évaluées avec précision ; seul un ordre de grandeur a pu être obtenu en raison du choix de la manière de prendre en compte les cadres. Ainsi, 39817 éléments finis de type quadrangle à quatre nœuds ont été considérés pour mailler la partie béton et 4046 éléments barres pour les armatures de renforcement (acier et carbone confondus). Un patin de chargement a été mis en place au point d'application de la force concentrée. Des zones élastiques ont été considérées au voisinage des conditions aux limites en vue d'améliorer la robustesse numérique de l'analyse. Le maillage qui a été réalisé est montré sur la figure 4.67. L'élasticité du sol a été négligée, ainsi les conditions aux limites consistent à encastrer les faces inférieures des piles. Le chargement a été appliqué

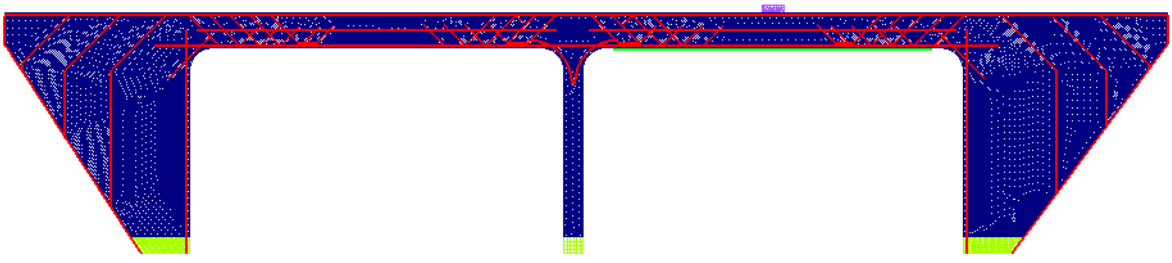


FIG. 4.67 – Maillage utilisé pour l'analyse du pont d'Örnsköldsvik.

en considérant un contrôle en déplacement. Ce choix a été retenu d'une part pour améliorer la robustesse du calcul et, d'autre part, pour bien décrire la phase post-pic. De plus, afin de réduire les problèmes liés aux dépendances au maillage, l'approche non locale a été utilisée. La longueur caractéristique a été considérée égale à 25 mm, conformément aux prescriptions habituelles. L'ensemble des paramètres utilisés dans les simulations est donné en annexe 1 dans les tableaux

A.22, A.23, A.24 et A.25 pour l'acier, les renforcements en carbone, l'interface acier/béton et le béton respectivement.

Force/flèche. Les résultats numériques en terme de force/flèche sont présentés sur la figure 4.68. Une très bonne adéquation entre les résultats expérimentaux et numériques peut être notée. En effet, les charges et les déplacements à rupture sont très voisins de ceux obtenus expérimentalement. Par ailleurs, il peut également être remarqué que les résultats obtenus dans la présente étude se situent entre ceux obtenus expérimentalement et ceux obtenus dans le cadre du projet Européen *Sustainable Bridges*. Pour expliquer cela, deux raisons peuvent être avancées. En premier lieu, le modèle de béton utilisé prend en compte de manière partielle les effets unilatéraux alors que celui utilisé par l'équipe qui est intervenue dans *Sustainable Bridges* les néglige entièrement. Cela se traduit donc par une sous-estimation des contraintes dans le cas où l'effet unilatéral n'est pas pris en compte. Bien que le chargement soit globalement monotone, en raison des phénomènes de redistribution des contraintes sous l'effet du développement de l'endommagement, localement, le chargement peut devenir cyclique avec un certain nombre de charges et de décharges. En second lieu, le fait que le modèle de béton utilisé dans le cadre du projet *Sustainable Bridges* ne prenne pas en compte les effets de frottement conduit aussi à sous-estimer les contraintes. Ces deux raisons contribuent à expliquer la différence entre les résultats obtenus.

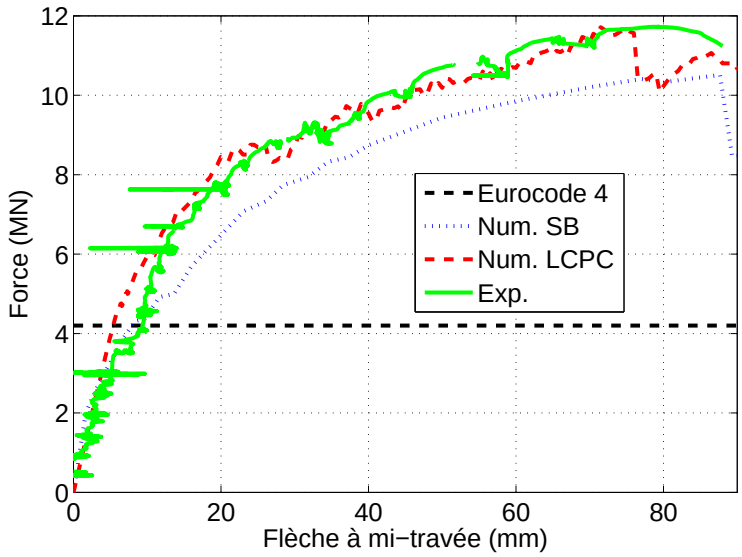


FIG. 4.68 – Courbe force/flèche obtenue numériquement et comparaison avec les données expérimentales.

Cartographie d'endommagement. Les cartographies d'endommagement obtenues pour différentes valeurs du déplacement imposé sont présentées sur les figures 4.69, 4.70 et 4.71. Il peut être remarqué que les zones sujettes à fissuration sont correctement décrites. Toutefois, la seule analyse de la cartographie d'endommagement ne permet pas de tirer des conclusions pertinentes par rapport au mécanisme de rupture du pont. Ainsi, le parti d'étudier la distribution des déformations principales en surface a été pris.

Distribution des déformations principales. Les champs des déformations principales dans chacune des directions sont représentés sur les figures 4.72 et 4.73. Il apparaît clairement que le mode de rupture prédominant est le cisaillement. En effet, il peut être observé sur la figure 4.73

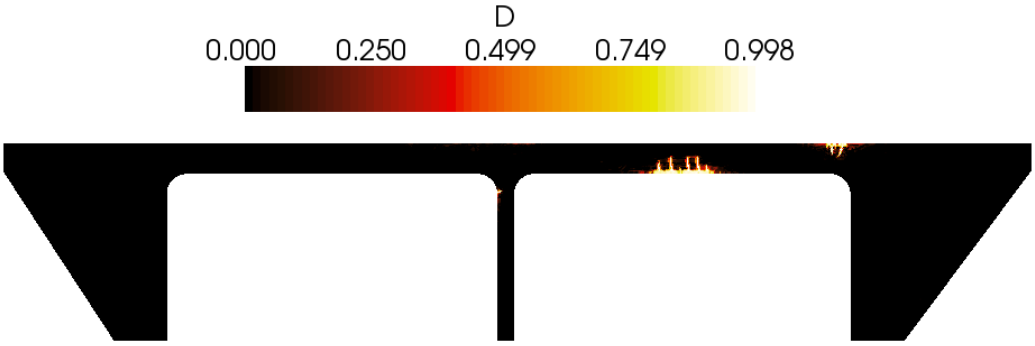


FIG. 4.69 – Cartographie d'endommagement obtenue pour un déplacement imposé égal à 8 mm.

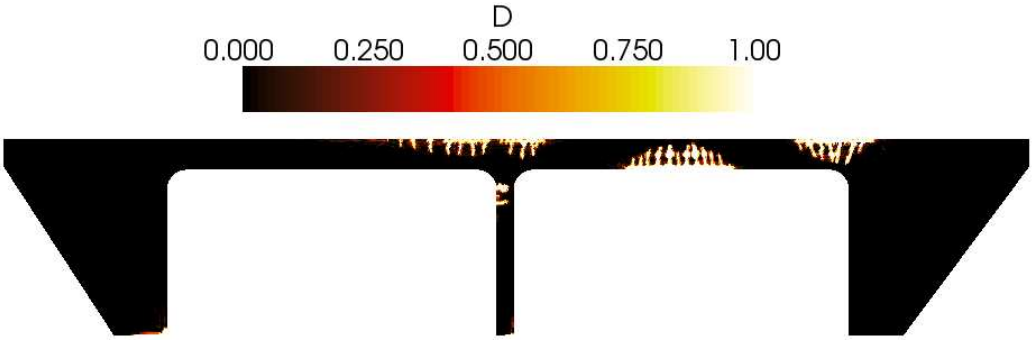


FIG. 4.70 – Cartographie d'endommagement obtenue pour un déplacement imposé égal à 30 mm.

que les déformations principales sont inclinées. Cela est la signature des effets du cisaillement. De plus, expérimentalement, la rupture a eu lieu dans la zone à droite du patin d'application du chargement.
Les résultats obtenus en terme de champ de déformation à rupture peuvent être rapprochés de ceux mesurés par une technique spectrophotométrique. En effet, ces derniers sont présentés sur les figures 4.74 et 4.75 pour des charges de 6 MN et 10 MN respectivement. Le mécanisme de rupture est bien retrouvé. Ce dernier peut être interprété comme la coalescence de plusieurs fissures bien distinctes vers une macrofissure de cisaillement. Les résultats présentés apportent donc des éléments de validation du modèle de béton proposé.

Modélisation avec interface acier/béton imparfaite

La possibilité d'une utilisation couplée des modèles de béton et d'interface acier/béton proposés a été étudiée en réalisant une étude de sensibilité de l'influence d'une dégradation locale sur la réponse globale du pont. Il est important de noter le caractère purement qualitatif de cette étude étant donné le manque de données relatives au comportement de l'interface acier/béton. L'étude de sensibilité a été conduite en deux temps. En premier lieu, l'influence d'une perte locale de section des armatures longitudinales a été évaluée et, en second lieu, les effets liés à la réduction de l'adhérence entre l'acier et le béton ont été étudiés. Pour conduire cette étude, un certain nombre d'éléments joints a été considéré. Ces derniers ont été placés de part et d'autre des armatures longitudinales les plus chargées. La figure 4.76 permet de rendre compte des modifications du maillage. Il peut être noté qu'une épaisseur non nulle n'a été considérée que pour des raisons de commodité de représentation graphique.

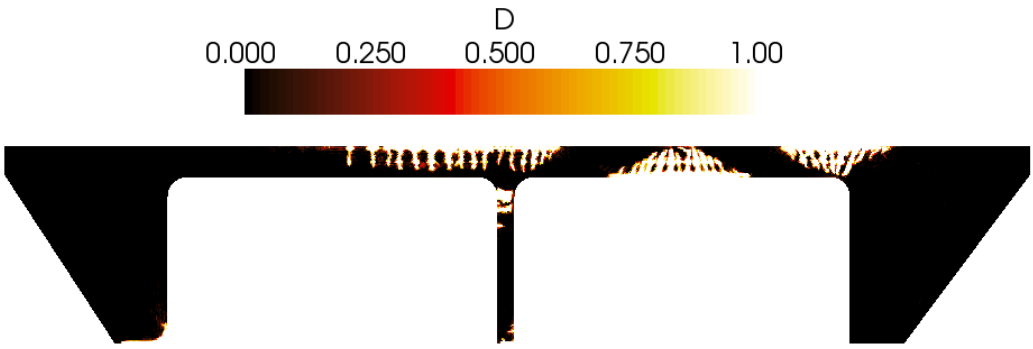


FIG. 4.71 – Cartographie d'endommagement obtenue pour un déplacement imposé égal à 100 mm.

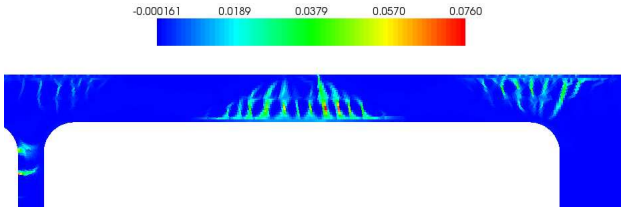


FIG. 4.72 – Distribution du champ de déformation selon la direction principale 1 à rupture.

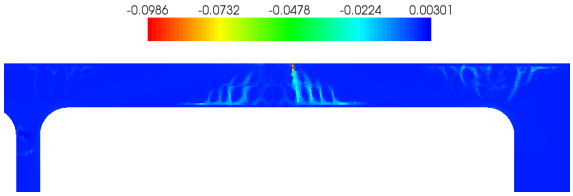


FIG. 4.73 – Distribution du champ de déformation selon la direction principale 2 à rupture.

Influence d'une réduction locale de la section des armatures longitudinales. L'influence d'une réduction de section locale sur le comportement global du pont d'Örnsköldsvik a été étudiée. Ce pont est situé dans une zone voisine de la mer Baltique. Ainsi, si le phénomène de corrosion s'était réellement développé le long des armatures du pont, il se serait manifesté sous la forme de piqûres. Pour représenter cela, les réductions de section ont été tirées aléatoirement avec un coefficient de variation de 1 %. Les valeurs moyennes de la section d'acier ont été choisies égales à 85 %, 65 % et 50 % de la valeur saine. Seules les barres longitudinales les plus chargées en zone sollicitée ont été considérées. Les résultats obtenus sont présentés sur la figure 4.77. Il est possible de remarquer que la chute de la capacité portante du pont apparaît comme proportionnelle au pourcentage de réduction de la section d'acier. Bien que qualitatifs, les résultats obtenus dans la présente étude ont déjà été remarqués expérimentalement par (Ouglova, 2004) mais à une échelle plus petite (celle de la poutre). Il est donc possible de conclure que les résultats obtenus sont cohérents avec ceux publiés dans la littérature.

Influence d'une réduction locale de l'adhérence acier/béton. Les effets liés à une réduction locale de l'adhérence acier/béton ont été étudiés. Le modèle d'interface acier/béton proposé a été utilisé. Ses paramètres ont été identifiés par analyse inverse sur la base des essais de tirant mettant en jeu le béton et une barre d'acier dont les propriétés sont voisines de celles des matériaux du pont d'Örnsköldsvik. En définissant un degré de corrosion en terme de perte de masse, différents niveaux d'adhérence acier/béton ont été considérés. Comme dans le cas précédent, l'hétérogénéité liée à la présence potentielle d'ions chlorures a été prise en compte en répartissant aléatoirement les degrés de corrosion le long des armatures longitudinales avec un coefficient de variation de 1 %. Les résultats obtenus sont présentés sur la figure 4.78. Il est possible de remarquer que quelque soit le degré de corrosion considéré, les courbes de réaction du pont semblent toutes tendre vers une même asymptote, malgré le très faible niveau d'adhérence.

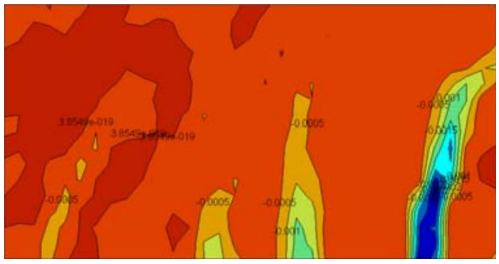


FIG. 4.74 – Mesures spectrométriques du champ des déformations principales - P = 6 MN.



FIG. 4.75 – Mesures spectrométriques du champ des déformations principales - P = 10 MN.

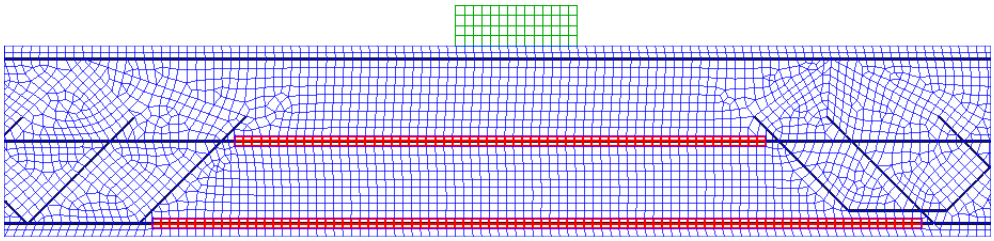


FIG. 4.76 – Maillage du pont d'Örnsköldsvik modifié par la mise en place d'éléments joints.

Cela peut s'expliquer en remarquant que bien que le niveau d'adhérence est très faible, la section d'acier résiduelle est loin d'être nulle. Ces constats ont été observés par (Vu, 2008). Ainsi, en dépit du caractère qualitatif des résultats présentés, ces derniers sont néanmoins cohérents par rapport aux observations publiées dans la littérature.

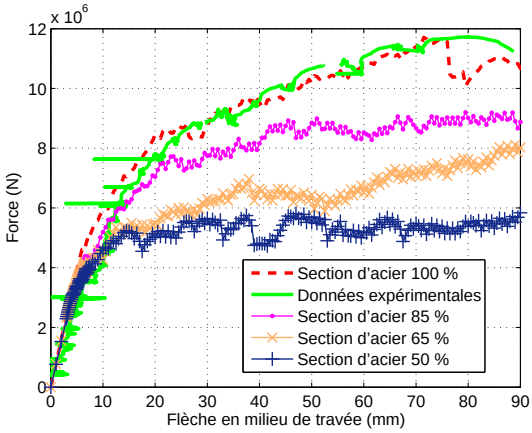


FIG. 4.77 – Effets d'une réduction locale de la section d'acier.

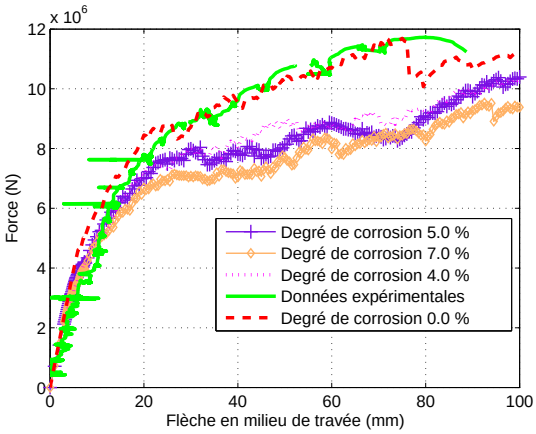


FIG. 4.78 – Effets d'une réduction locale de l'adhérence acier/béton.

Etude probabiliste en phase linéaire

Dans le but de prendre en compte les incertitudes liées aux paramètres mécaniques, une étude probabiliste a été conduite. Pour des raisons de temps de calcul, seule la phase linéaire du comportement du pont a été considérée. La variable qui a un rôle majeur est donc le module d'Young du béton. Ce dernier a donc été considéré comme une variable aléatoire de loi lognormale, de moyenne 25400 MPa et de coefficient de variation 15 %.

La méthode de Monte Carlo a été utilisée afin de conserver un historique des réponses structurales. Ce point sera détaillé dans le chapitre suivant. Ainsi, 10000 tirages ont été effectués. Du fait du caractère linéaire du comportement, un contrôle en force a été considéré. La réponse s'exprime donc en terme de flèche en milieu de travée. La fonction de répartition a été déterminée à partir de la base de données statistiques pour pouvoir déduire les fractiles à 5 % et 95 %. Les résultats sont présentés sur les figures 4.79 et 4.80. L'intervalle de confiance numérique à 90 % est représenté sur la figure 4.81, de même que les données expérimentales et la réponse numérique moyenne. D'une manière générale, il est délicat de tirer des conclusions quant au choix de la valeur moyenne du module d'Young du béton compte tenu de la forte dispersion des données expérimentales. Toutefois, il semble que ce dernier soit légèrement sous-estimé. Ce point est discuté dans le chapitre suivant.

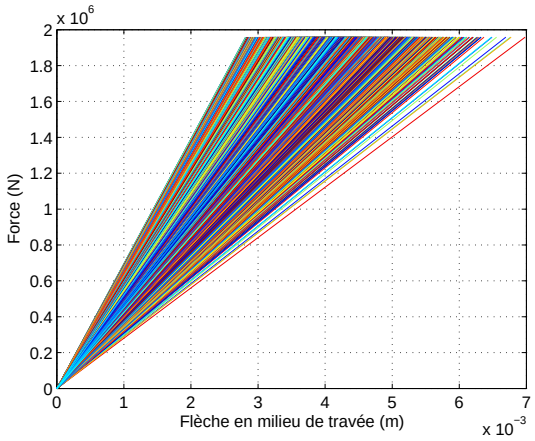


FIG. 4.79 – Courbes de réaction du pont en phase linéaire - 10000 tirages.

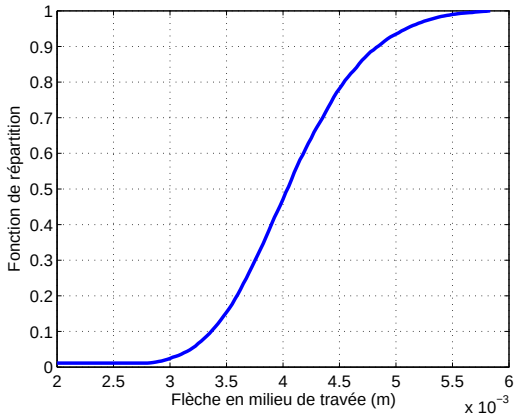


FIG. 4.80 – Fonction de répartition de la flèche en phase linéaire.

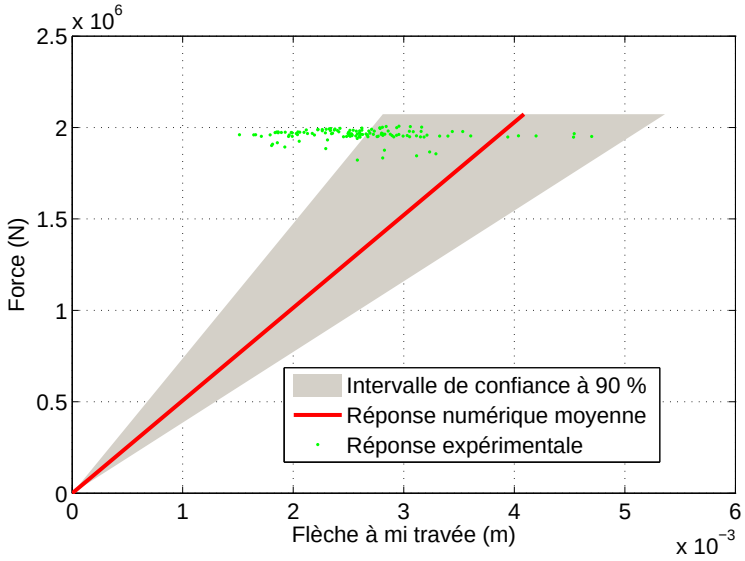


FIG. 4.81 – Intervalle de confiance à 90 %, réponse numérique moyenne et données expérimentales en phase élastique.

4.6.3 Bilan

Dans cette section, plusieurs cas d'études s'appuyant sur des éléments de structures ou d'ouvrages en béton armé ont été présentés. Ces analyses ont pour but d'apporter des éléments de validation des modèles développés lorsque des éléments de structures de béton armé dégradés par corrosion sont étudiés, essentiellement du point de vue de la capacité portante. Pour cela, deux cas ont été traités : les poutres dégradées par corrosion artificielle testées en flexion quatre points par (Mangat et Elgalf, 1999b) et le pont d'Örnsköldsvik, sollicité par un chargement combinant flexion et cisaillement.

En premier lieu, une présentation des résultats obtenus en analysant les poutres de (Mangat et Elgalf, 1999b) a été réalisée. Celle-ci est particulièrement intéressante car elle a permis d'évaluer non seulement les capacités de l'approche simplifiée proposée mais aussi celles du modèle constitutif de l'interface acier/béton en présence de corrosion dans sa version tridimensionnelle. Les résultats obtenus par ces deux approches ont été exposés et discutés. Les deux approches se sont révélées capables de décrire correctement le comportement global de ces éléments de structure. Néanmoins, aucune information locale n'a pu être obtenue par l'approche simplifiée en raison de sa formulation. L'approche locale, s'appuyant sur la modélisation d'un quart de poutre de manière massive, s'est avérée capable de décrire correctement les mécanismes locaux qui apparaissent pour les différents degrés de corrosion. En raison du fait qu'aucune information expérimentale n'a été fournie par (Mangat et Elgalf, 1999b), le parti de ne pas s'intéresser à ces aspects a été retenu. Il ressort donc de cette première analyse que les modèles proposés sont capables de décrire correctement le fonctionnement mécanique d'éléments de structure de type poutre chargés en flexion et dégradés par corrosion.

En second lieu, les possibilités de description du comportement mécanique d'un ouvrage de taille réelle ont été explorées. Pour cela, le cas d'un pont en béton armé situé à Örnsköldsvik en Suède a été retenu. Cet ouvrage a été testé mécaniquement par un chargement combinant cisaillement et flexion dans le cadre du projet Européen *Sustainable Bridges*. L'ensemble des résultats expérimentaux ont été mis à disposition du public sur un site, à partir duquel nous y avons eu accès. L'étude comporte deux parties : une modélisation locale du pont sain ainsi qu'une analyse de sensibilité de l'effet de la présence de corrosion sur le comportement global de l'ouvrage. Il s'est avéré que le modèle de béton proposé a donné des résultats satisfaisants. En effet, les courbes de réaction globale numérique et expérimentale, les cartographies d'endommagement ainsi que celles des déformations principales ont été comparées aux mesures expérimentales. Une adéquation satisfaisante est apparue. Dans le but d'évaluer les effets des incertitudes qui entachent les paramètres mécaniques, une étude probabiliste a été conduite. L'intervalle de confiance à 90 % a été déterminé ainsi que la réponse moyenne. Il a été délicat de tirer une conclusion compte tenu de l'importance de la dispersion de valeurs expérimentales. Néanmoins, la dispersion de la réponse numérique a été quantifiée. Pour évaluer les capacités du modèle d'interface à être utilisé sur des ouvrages de taille réelle, une étude qualitative a été conduite. L'adhérence entre les barres de renforcement les plus chargées et le béton environnant a été diminuée de manière aléatoire. L'effet d'une réduction de la section des aciers longitudinaux a aussi été quantifié. Les résultats sont apparus cohérents en terme d'ordre de grandeur avec ceux obtenus par d'autres équipes. Par ailleurs, les différentes simulations se sont montrées robustes sur le plan numérique. Le caractère qualitatif d'une telle étude doit être souligné car, en réalité, le pont ne souffrait pas de corrosion. Cela s'est d'ailleurs retrouvé dans les ordres de grandeurs obtenus en considérant une dégradation locale.

L'ensemble des résultats acquis dans cette section a donc contribué à valider les modèles proposés lorsque des éléments de structures en béton armé dégradés par corrosion sont étudiés.

4.7 Conclusion

Ce chapitre visait à exposer un cadre d'application des différents modèles développés dans la présente étude. Pour cela un certain nombre d'éléments de structures ont été considérés et analysés numériquement. Chaque exemple d'application présenté a permis d'évaluer les capacités des modèles impliqués dans l'analyse en ne considérant qu'un seul aspect bien spécifique. L'ensemble des aspects sur lesquels nous nous sommes concentrés a été clairement exposé.

Les cas tests étudiés dans ce chapitre peuvent être regroupés en quatre classes : les essais de tirant avec/sans corrosion, les essais sur des structures en béton, les essais sur des structures en béton armé sans corrosion et enfin, les essais sur des structures en béton armé avec corrosion. Les résultats numériques obtenus dans chacun des cas ont été présentés et discutés. Les essais présentés et analysés dans la présente étude ont été puisés dans la littérature en raison de la qualité des informations liées au protocole expérimental. Une attention particulière a été apportée, quand cela a été possible (relativement au coût de calcul nécessaire), à l'étude de l'effet des incertitudes sur la réponse des modèles. Ainsi, plusieurs cas de structures ont été sujets à des études probabilistes permettant d'aboutir à l'intervalle de confiance à 90 %. L'ensemble des résultats obtenus complété par l'expérience numérique portant sur les modèles proposés et acquis au cours de cette thèse ont permis de tirer des cadres d'application. Les éléments essentiels qu'il a été possible de tirer de la précédente analyse sont rassemblés ci-dessous pour chacun des modèles. Les conclusions proposées intègrent l'ensemble de l'expérience numérique, liée à l'utilisation des modèles développés et acquise durant la préparation de cette thèse. Elles intègrent les exemples exposés précédemment.

Cadre d'application du modèle local d'interface acier/béton

Le modèle d'interface acier/béton s'appuie sur la mécanique de l'endommagement. Les traits de caractère, évoqués au chapitre 1, du comportement cyclique de l'interface acier/béton ainsi que l'effet de la corrosion ont été considérés. Cette loi a été implantée au sein d'éléments de type joint sans épaisseur en deux et trois dimensions. Ce modèle a été testé sur plusieurs cas et a su montrer des points forts mais aussi des points faibles qui mériteront d'être travaillés dans de futures recherches.

Points forts.

Comportement monotone Les cas tests traités en chargement monotone montrent que le modèle d'interface acier/béton sans corrosion est capable de reproduire la réponse structurale obtenue lors d'essais de tirant (court et long). Les essais de flexion trois/quatre points ont également montré que le modèle proposé permet d'obtenir des résultats satisfaisants et que les simulations se sont déroulées de manière robuste (du point de vue de l'intégration locale).

Comportement cyclique La réponse cyclique du modèle a été essentiellement testée à l'échelle du point de Gauss. Il apparaît que le modèle proposé constitue un cadre numérique propice à la modélisation de ce type d'essai. Néanmoins, compte tenu du manque d'informations disponibles dans la littérature à ce sujet, les possibilités offertes par le modèle n'ont pas pu être testées pleinement.

Comportement en présence de corrosion Le comportement d'éléments de structures en présence de corrosion a été testé sur des essais de tirant, sur des essais de flexion sur poutre et sur le pont. Il apparaît, dans le cas d'un chargement monotone, que le modèle proposé est capable de décrire les réponses des différentes structures (pour un jeu de paramètres matériaux admissible).

Sensibilité au maillage Le modèle, implanté dans des éléments de type joint 2D/3D, n'a pas présenté une forte sensibilité au maillage (nombre d'éléments joints).

Prise en compte du confinement Les effets du confinement sont pris en compte de manière satisfaisante par le modèle proposé. Néanmoins, la littérature ne présente pas de nombreux résultats expérimentaux permettant de tirer des conclusions utiles à la construction de lois locales. L'identification des paramètres liés au confinement pourrait être à revoir dans certains cas (propriétés du béton et de l'acier trop éloignées de celles considérées dans (LaBorderie et Pijaudier-Cabot, 1987).

Points faibles.

Identification des paramètres L'identification des différents paramètres liés au modèle d'interface acier/béton reste délicate. Cela s'explique d'une part par la finesse des mécanismes pris en compte (anélasticité des produits de corrosion) et, d'autre part, par le manque d'informations expérimentales disponibles dans la littérature. La question de la représentativité des essais de tirant d'un comportement local de l'interface reste ouverte et par suite, les questions liées à la pertinence des développements d'un modèle d'interface acier/béton le restent également.

Stabilité de l'algorithme gérant les déformations anélastiques L'anélasticité des produits de corrosion est gérée par un critère de Gurson modifié. Ce dernier permet de rigidifier le comportement de l'interface en compression. L'expérience numérique acquise nous fait aboutir à la conclusion qu'une trop importante compression peut entraîner la divergence de l'algorithme d'intégration. En effet, la rigidification du comportement provoque une augmentation importante des contraintes. Lorsqu'un certain seuil en déplacement (pénétration) est dépassé, les contraintes normales deviennent trop importantes et ne permettent plus le calcul de l'état d'équilibre de la structure.

Réalisation du maillage Inhérent à l'utilisation d'éléments joints, la réalisation des maillages demande une grande attention et requiert un temps considérable. L'expérience numérique acquise montre, par exemple, qu'il est très délicat de modéliser une poutre en béton armé avec interface imparfaite sur sa longueur totale. En effet, cela entraîne des problèmes de raccord des éléments joints au reste du maillage dans les zones situées hors appuis.

Coût de calcul Les variables internes devant être stockées d'un pas de calcul à l'autre sont nombreuses, surtout lorsque le modèle est utilisé dans sa version 3D. Les simulations complexes, en présence d'une interface imparfaite, nécessitent donc d'importantes ressources. Cela est étayé par le fait que les aciers doivent être maillés explicitement pour tirer pleinement parti de l'analyse.

Cadre d'application du modèle simplifié d'interface acier/béton

Dans le but de réduire les temps de calcul par rapport à une approche massive locale et d'améliorer la faisabilité des maillages, un modèle d'interface simplifié a été développé. Pour cela, le formalisme multifibre a été utilisé. Le principe de ce modèle est, à l'échelle du point de Gauss d'une section de fibre d'acier, de déterminer une partition entre les déformations propres de l'acier et le glissement. Cette étape est réalisée en supposant l'équilibre entre les efforts à l'interface et ceux déployés dans l'acier. Ce modèle a été testé sur trois cas tests au cours de cette thèse : tirant, poutre en chargement cyclique et poutre corrodée en chargement monotone. Les conclusions suivantes peuvent être tirées.

Points forts.

Chargement monotone Les cas tests testés (tirant et poutre en chargement répété) montrent que ce modèle peut être utilisé. Les résultats obtenus sont satisfaisants et le déroulement des calculs s'est réalisé de manière robuste.

Chargement cyclique Concernant le cas du chargement cyclique répété, les mêmes remarques que les précédentes peuvent être tirées. En revanche, ce modèle n'a pas été testé dans le cas d'un chargement cyclique alterné. A priori, ce type d'analyse ne devrait pas poser de problème numérique particulier. Néanmoins, il est recommandé de prendre garde aux modèles d'acier et de béton utilisés. En effet, ces derniers doivent prendre en compte les aspects cycliques de manière appropriée.

Prise en compte de la corrosion Sous réserve d'être capable d'identifier les paramètres liés à la prise en compte de la corrosion, le modèle simplifié proposé est capable de bien décrire la réponse d'éléments de structures corrodés.

Points faibles.

Sensibilité numérique La partition entre les déformations propres à l'acier et le glissement entre l'acier et le béton nécessite la résolution numérique, par une méthode de Newton modifiée, de l'équation d'équilibre précédemment mentionnée. Dans certains cas, il a été constaté que cet algorithme est instable si la solution de départ est mal choisie. Une attention particulière doit donc être apportée à ce choix.

Coûts de calcul Bien que les coûts de calcul soient inférieurs à ceux requis par une approche locale massive, ils restent néanmoins importants par rapport à une analyse multifibre classique. En effet, la résolution de l'équation d'équilibre peut demander un nombre important d'itérations.

Longueur d'ancrage La formulation du modèle d'interface acier/béton dans sa version simplifiée fait apparaître une longueur caractéristique interprétable comme une longueur équivalente d'ancrage. Il a été constaté que la réponse du modèle est conditionnée par sa valeur. En effet, ce paramètre permet de donner plus ou moins de poids dans le calcul soit à l'acier, soit à l'interface. Ainsi, sa détermination et son calage peuvent, dans certains cas, demander une analyse inverse fine.

Rigidité initiale Il a été constaté que la rigidité initiale obtenue en combinant les comportements, propre à l'acier d'une part, et propre à l'interface acier/béton via une équation d'équilibre en effort d'autre part, est souvent inférieure à la rigidité de l'acier seul. Cela constitue un point faible qui est inhérent à l'approche retenue. En effet, la rigidité initiale résultant de cette combinaison de rigidités ayant des ordres de grandeur différents est influencé par la plus faible des deux, c'est-à-dire celle liée à l'interface. Cela peut entraîner un écart avec les mesures issues de l'expérience. Une surestimation légère de la rigidité de l'interface (10 % à 15 %) est recommandée dans certains cas.

Cadre d'application du modèle local de béton

La loi locale de béton proposée a été formulée dans le cadre de la mécanique de l'endommagement isotrope. A l'identique du modèle d'interface, un couplage entre glissement/frottement et endommagement a été introduit pour décrire le comportement cyclique du béton. Ce modèle présente plusieurs traits de caractère : une dissymétrie entre la traction et la compression, des déformations permanentes, des boucles hystérétiques et un effet quasi-unilatéral. Cette loi de comportement a été testée sur divers exemples d'éléments de structures. Un bilan des observations est présenté dans ce qui suit.

Points forts.

Chargement monotone Le modèle proposé a été testé à plusieurs reprises sur des éléments de structures soumis à un chargement de type monotone. Il ressort que les résultats obtenus dans le cas de la traction (directe et induite) sont satisfaisants. Le cas de la flexion a aussi été traité de manière acceptable.

Chargement cyclique Le cas d'un chargement cyclique répété et alterné a été traité sur deux cas tests. En premier lieu, une des simulations réalisées dans le cadre benchmark du projet national CEOS.fr l'a été avec des cycles de décharge en fin de chaque palier de chargement. Le modèle proposé s'est avéré pertinent et robuste. En second lieu, le cas du chargement cyclique alterné a été évalué. Un exemple a été présenté dans ce chapitre. Des résultats très satisfaisants ont été obtenus et ils montrent qu'une prise en compte de l'effet unilatéral partiel suffit lorsque le chargement reste modéré.

Chargement de cisaillement Plusieurs éléments de structures expérimentalement testés essentiellement en cisaillement ont été simulés. Sur le plan qualitatif, le modèle proposé à permis d'obtenir des mécanismes de ruine très proches de ceux rapportés expérimentalement. En revanche, sur la plan quantitatif, il a parfois été délicat d'identifier les paramètres du modèle pour obtenir des résultats satisfaisants.

Sensibilité au maillage La sensibilité au maillage a été analysée. Il ressort que les réponses obtenues par le modèle proposé deviennent peu sensibles au maillage lorsque ce dernier est utilisé de manière couplée à un limiteur de localisation. Il a été remarqué que la longueur caractéristique doit être choisie légèrement supérieure à celle identifiée dans le cas du modèle de Mazars.

Points faibles.

Chargement cyclique Le modèle proposé n'est pas capable de fournir des résultats satisfaisants dans le cas du chargement cyclique alterné sous haut niveau de chargement. Cela provient du fait que l'effet unilatéral n'est pris en compte que de manière partielle. Une solution pourrait consister à considérer un mécanisme d'endommagement anisotrope (Desmorat *et al.*, 2006) ou encore une fonction de refermeture des fissures (LaBorderie, 1991).

Dissymétrie de frottement Pour être en accord avec des évidences expérimentales discutées dans le chapitre 1, une dissymétrie du mécanisme de glissement interne a été considérée. Cette dernière se manifeste par le fait qu'en l'absence de compression, la décharge s'effectuera selon le module sécant. Autrement dit, aucune boucle d'hystérésis n'apparaîtra. A l'échelle du point de Gauss, lors d'un passage compression vers traction, des instabilités légères de l'algorithme d'intégration local ont été constatées. Cela provient du fait qu'une seule surface gère les deux cadrans (traction et compression). Ces effets numériques parasites pourraient vraisemblablement être évités en considérant un critère de type multisurface pour gérer le frottement. Cette perspective peut faire l'objet de futurs développements.

Effet unilatéral L'effet unilatéral est pris en compte par un couplage d'état adapté et de manière partielle. Autrement dit, le niveau d'endommagement atteint en traction influence nettement le module lors d'un passage en compression. L'expérience numérique acquise par l'utilisation de ce modèle a montré que la partie déviatorique du comportement a davantage de poids que la partie sphérique. Il s'en suit que la prise en compte partielle de l'effet unilatéral sur la partie sphérique uniquement n'est pas optimale. Toutefois, pour des chargements modérés (40 % à 50 % de la charge de plastification des aciers), cette approche semble suffire et elle apparaît comme étant robuste. Néanmoins, cette prise en compte de l'effet unilatéral non optimale constitue un des points essentiels qui mérite d'être travaillée davantage.

Réponse en bi-traction Dans le but d'évaluer les possibilités du modèle de béton sous des chargements locaux multiaxiaux, le cas de la bi traction a été analysé. Il apparaît que la réponse obtenue n'est pas satisfaisante. Cela pourrait provenir de la formulation énergétique gérant le mécanisme d'endommagement. Un critère en contrainte pourrait être testé afin d'améliorer cette réponse.

Cadre d'application du modèle simplifié de béton

Dans le but de pouvoir réaliser des calculs préliminaires dans le cadre d'études d'avant-projet, une version multifibre du modèle de béton proposé a été développée. Une motivation essentielle qui a suscité son développement a été la volonté de pouvoir réaliser des études probabilistes en vue de quantifier les effets des incertitudes entachant les différentes variables d'entrée. Cette version du modèle de béton est fondée sur les mêmes principes que la version locale mais est sujette à quelques hypothèses cinématiques supplémentaires.

Points forts.

Chargement monotone Le modèle simplifié de béton proposé a montré que des résultats satisfaisants pouvaient être obtenus sur la base d'éléments de structures soumis à un chargement monotone.

Chargement cyclique Le cas du chargement cyclique a été analysé ; quelques exemples ont été montrés dans ce chapitre. Il est ressorti que non seulement des résultats en accord avec l'expérience pouvaient être acquis mais aussi que les calculs se déroulent de manière robuste.

Effet unilatéral Tout comme dans le cas de la version locale du modèle, l'effet unilatéral est pris en compte de manière partielle et cela est suffisant tant que le chargement reste modéré.

Points faibles. Hormis les points faibles inhérents à l'approche de type multifibre à cause de sa cinématique réduite, les remarques précédemment mentionnées s'appliquent également à la version unidimensionnelle de la loi constitutive de béton.

Chapitre 5

Requalification des éléments de structures en béton armé en contexte probabiliste

5.1 Introduction

De nombreux ouvrages existants, faisant partie du patrimoine national, ont été bâtis après la dernière guerre. Ces derniers ont donc été sujets aux effets non seulement de l'environnement extérieur mais aussi à ceux liés aux charges de fonctionnement normal. Ainsi, cela entraîne leur vieillissement qui se traduit dans une premier temps par une perte de durabilité des matériaux constitutifs (essentiellement le béton), puis, dans un second temps, par une perte de l'aptitude au service pour enfin s'exposer à une perte de sécurité structurale. Autrement dit, ces ouvrages voient leur performance diminuer au cours du temps. Une destruction suivie d'une reconstruction massive nécessiterait un support financier déraisonnable que les institutions publiques ne pourraient pas assumer, surtout en période de restriction budgétaire. Une solution réside donc dans le maintien en fonctionnement normal de ces ouvrages en définissant des politiques de maintenance appropriée. Pour cela, il est nécessaire de requalifier les ouvrages existants pour s'assurer qu'ils respectent les critères de dimensionnement actuels. Il est donc nécessaire d'accéder aux caractéristiques mécaniques actuelles des éléments de structures considérés. Ces données sont classiquement utilisées comme des grandeurs d'entrée aux procédures de requalification et de recalcul existantes. Un aspect essentiel qui a lieu d'être considéré est lié aux incertitudes qui entachent les différents paramètres mécaniques (module d'Young, résistance en traction, position des renforcements, ...). A titre d'exemple, les résistances en traction mesurées présentent des coefficients de variation compris entre 15 % et 20 %. Il semble donc nécessaire de tenir compte de ces incertitudes. Ce chapitre vise à présenter une méthodologie de requalification des éléments de structures existants en contexte probabiliste. Pour cela, les outils utilisés sont présentés et discutés. La méthodologie proposée repose à la fois sur les réseaux bayésiens et sur les principes de la théorie de la fiabilité. Les principes de ces outils sont tout d'abord présentés puis illustrés sur quelques cas didactiques. Ensuite, le canevas de la méthodologie proposée est exposé. Chaque étape est détaillée et justifiée. Pour illustrer d'une part les outils utilisés et, d'autre part, la méthodologie de requalification proposée, des exemples simples ont été traités. Enfin, dans le but d'apporter des éléments de validation des développements réalisés, plusieurs cas d'éléments de structures plus complexes sont traités. La poutre de Ragueneau est traitée non seulement à l'ELS mais aussi à l'ELU et le pont d'Örnsköldsvik dont une présentation a été effectuée dans le chapitre précédent a été analysé.

5.2 Les réseaux bayésiens

Dans cette section, un des outils sur lequel s'appuie la méthodologie de requalification proposée est présentée, à savoir les réseaux Bayésiens. Pour cela, les motivations liées au choix d'un tel outil sont tout d'abord clairement précisées. En effet, d'autres techniques bien maîtrisées existent dans la littérature et permettent, dans certains cas d'application, de répondre à des problématiques similaires. Ensuite, les principes théoriques ainsi que la formulation des réseaux bayésiens est exposée à partir d'une revue bibliographique de la littérature. Dans le but d'illustrer l'utilisation pratique de cet outil, un exemple très simple est proposé.

5.2.1 Intérêt

Les réseaux bayésiens sont, de nos jours, un outil devenu largement utilisé non seulement dans plusieurs domaines mais aussi pour apporter des éléments de réponse à des problèmes de natures différentes. A titre d'exemple, dans le domaine de la médecine, les réseaux Bayésiens sont très utilisés pour représenter de manière synthétique les larges bases de données liées aux maladies graves. Les propriétés des réseaux bayésiens sont ensuite mises à contribution pour automatiser les diagnostiques en considérant les symptômes observables sur les patients et y inclure d'éventuels facteurs favorisant le développement de certaines pathologies. De cette manière, le médecin peut avoir accès à la probabilité qu'une certaine maladie soit contractée chez un patient. C'est donc de manière tout à fait naturelle que le caractère incertain est pris en compte dans l'analyse grâce au cadre théorique offert par les Réseaux Bayésiens. Récemment, ce type d'outil a été utilisé avec profit pour répondre à des problématiques de type durabilité, faisant intervenir en outre le phénomène de diffusion des ions chlorures dans le béton (Deby, 2008).

Plus précisément, les réseaux bayésiens sont un moyen pour représenter de manière condensée de larges bases de données en incluant d'éventuelles relations de dépendance qui sont spécifiées de manière floue. Ainsi, en considérant une problématique de type durabilité ou requalification d'ouvrages existants, cet outil peut être utilisé pour lier les données statistiques relatives aux matériaux constitutifs avec celles liées aux informations observables. La construction de la relation de dépendance peut être réalisée en s'appuyant sur un modèle mécanique supposé fiable. Un réseau bayésien offre une propriété d'inférence, fondée sur le théorème bien connu de Bayes. Ce cadre théorique permet donc d'inverser la relation de dépendance entre les variables caractéristiques des matériaux constitutifs et la réponse structurale observée. Il est donc possible d'inclure dans le réseau des informations additionnelles provenant soit d'observations in situ soit de jugements d'experts, jouant le rôle de référence. Ces données peuvent être utilisées pour actualiser les variables liées aux matériaux constitutifs de l'ouvrage. C'est précisément en ce sens que les réseaux bayésiens peuvent être utilisés pour répondre à des problématiques de type requalification d'ouvrages existants.

Les réseaux bayésiens ont donc été utilisés dans la présente étude car ils offrent l'intérêt de permettre de réactualiser les paramètres d'un modèle mécanique uniquement sur la base d'informations observables. Le parti d'utiliser ce type d'outil au lieu d'une approche bayésienne classique (Melchers, 1999) a été pris en raison de la volonté de réactualiser non seulement la réponse structurale moyenne de l'ouvrage mais aussi, et surtout, les paramètres d'entrée du modèle mécanique. Cela n'est pas permis en utilisant des méthodes de réactualisation classiques en raison de leur cadre d'application restreint (Melchers, 1999).

5.2.2 Formulation, construction et utilisation

Formulation

Un réseau bayésien est une représentation concise et condensée d'une fonction de densité conjointe de probabilité sur un domaine donné, défini par un ensemble de variables aléatoires regroupées dans un vecteur aléatoire $\boldsymbol{X} = (X_1, \cdots, X_m)^t$. A priori, chaque variable est connue par une fonction de densité de probabilité marginale. Un réseau bayésien consiste en un graphe orienté et acyclique. Le vocable orienté est lié au fait que le graphe est directionnel. Le terme acyclique signifie que le graphe ne doit pas présenter de cycle. Ces deux points sont illustrés à l'aide des figure 5.4 et 5.5. La figure 5.4 offre une représentation d'un graphe pouvant être utilisé comme le support d'un réseau bayésien en raison de son caractère orienté et acyclique. En revanche, la figure 5.5 montre un graphe qui ne peut pas être utilisé pour supporter une telle structure de données.

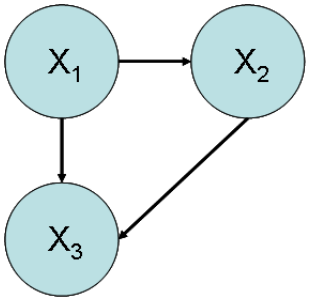


FIG. 5.1 – Graphe orienté acyclique et relations causales.

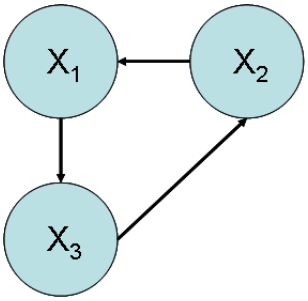


FIG. 5.2 – Graphe orienté cyclique et relations causales.

Le réseau possède de plus un nombre donné de probabilités conditionnelles, $p(X_i|\boldsymbol{X}_{\pi(i)})$ pour chaque variable X_i, sachant l'état des variables dites *parents* dans le graphe. La notion $\pi(i)$ permet de repérer la variable *parent* de la variable X_i. En effet, dû au caractère orienté du graphe représentatif du réseau, il est possible d'établir une relation dite *enfant/parent* entre les différentes variables en fonction de l'orientation de la relation de dépendance qui les lie. La structure graphique (graphe acyclique orienté) ainsi que chaque fonction de densité de probabilité marginale, noté f_{X_i}, permet de définir une unique fonction de densité de probabilité conjointe sous une forme factorisée. Cette dernière est donnée par l'équation 5.1.

$$f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{X}) = \prod_{i=1}^{m} p(X_i|\boldsymbol{X}_{\pi(i)}) \tag{5.1}$$

D'une manière pratique, chaque variable aléatoire doit être discrétisée pour que les calculs numériques puissent être réalisés. Ce point est abordé dans le paragraphe suivant. Comme il a été mentionné précédemment, un réseau bayésien permet d'agencer l'information selon une structure de données bien définie incluant des relations de dépendance orientées. Ainsi, si l'état d'une variable est modifié alors l'ensemble du réseau sera perturbé de telle manière que le théorème de Bayes soit vérifié. Il est donc possible d'inclure dans un réseau bayésien de l'information provenant de l'extérieur permettant soit de compléter la base de données existante, soit d'envisager un scénario. Il semble donc clair que l'ensemble des variables sujettes à de telles modifications doivent être discrétisées. Pour des raisons de clarté de présentation, le parti de ne pas exposer les principes théoriques de discrétisation a été pris. En revanche, cette étape essentielle est précisée clairement sur la base d'un exemple simple.

Construction

Les réseaux bayésiens s'appuient sur un graphe acyclique orienté incluant un certain nombre de relations de dépendance. A partir de l'état initial du réseau, une observation peut être entrée en un nœud. Cette dernière va perturber l'ensemble du réseau pour donner naissance à un nouvel état. D'après (Naïme *et al.*, 2007), la construction du réseau s'effectue selon les étapes suivantes :

1. Identification des variables et de leurs espaces d'état
2. Définition de la structure du réseau
3. Définition de la loi de probabilité conjointe des variables

Dans la première étape, il s'agit de définir l'ensemble des variables qui va être intégré au réseau. Dans le cas de systèmes complexes, l'identification des variables pertinentes peut être réalisée en rajoutant une étape 0 qui consiste à analyser le poids de chacune d'entre elles sur la réponse globale du système. Par exemple, cela peut s'effectuer à l'aide de la théorie de la fiabilité des structures. Ce point est abordé en détail dans la suite de ce chapitre. Après avoir identifié les variables pertinentes, il s'agit de définir les espaces des valeurs possibles. Bien que ces dernières aient un caractère aléatoire, de simples considérations d'expert peuvent être mises à profit pour définir des bornes. Une variable donnée pourra prendre n'importe quelle valeur comprise entre ces bornes. Il y a lieu de noter qu'une variable peut être considérée comme étant déterministe. Sa probabilité de réalisation est donc binaire, 1 si la variable est dans un état correspondant à sa valeur moyenne et 0 sinon. Il existe de nombreux logiciels gratuits, capables de supporter la construction d'un réseau bayésien. La majorité d'entre eux s'appuie sur des variables discrètes, dont la distribution est connue généralement sous la forme d'un diagramme des fréquences cumulées. La définition de la discrétisation en classes de chacune des variables identifiées reste une étape délicate. En effet, comme souligné par (Naïme *et al.*, 2007) et (Deby, 2008), cette étape doit être réalisée judicieusement. Autrement dit, un compromis entre la précision des observations (nombre de classes) et la saturation de l'espace mémoire disponible sur une machine de calcul doit être trouvé.

La seconde étape consiste à définir la topologie du réseau, c'est-à-dire, les relations de dépendance entre les différents nœuds. Généralement, les jugements d'experts sont mis à contribution pour assurer la pertinence de cette étape. Il s'agit de relier les variables de cause et d'effet. Soit A une variable de cause et B une variable d'effet, leur relation de dépendance s'orientera de A vers B. Une modification des états de A entraînera donc une modification des états de B et réciproquement. Ce double sens de propagation de l'information permet de mettre en évidence le caractère qualitatif de la représentation de l'information.

La dernière étape consiste à définir les distributions de chacune des variables identifiées. Si ces dernières n'ont pas de parent (variables de cause) alors la donnée d'un histogramme suffit. En revanche, si les variables sont imbriquées au sein d'une relation de dépendance (variables d'effet), il faudra définir la table de probabilité conditionnelle. Généralement, la détermination de cette table est coûteuse en raison de la base de données importante qu'il y a lieu de posséder pour la définir avec précision. De plus, sa taille est directement liée à la manière de discrétiser les variables de cause ainsi qu'à leur nombre. Cette remarque souligne l'importance de l'étape de discrétisation. En particulier, les tables de probabilités conditionnelles peuvent être déterminées soit grâce à une relation déterministe liant les différentes variables, soit par des simulations de Monte Carlo. Cette table met en évidence le caractère quantitatif de la représentation de la connaissance.

Utilisation

L'utilisation d'un réseau bayésien revient à calculer la probabilité d'une hypothèse connaissant un certain nombre d'observations. Comme il a été mentionné précédemment, il n'y a pas vraiment de sorties ni d'entrées dans un réseau bayésien car tous les nœuds agissent les uns sur les autres. Un des intérêts pratiques qui peut être noté repose sur la capacité d'inférence d'un réseau. En effet, supposons une variable de cause A liée à une variable d'effet B. La donnée d'une relation déterministe (modèle de prédiction) de A vers B permet de déterminer les états de B sachant ceux de A, ces derniers étant fournis par un expert. Maintenant, si l'on considère un ensemble d'observations de B, il est possible d'actualiser les paramètres (moyenne et écart type) de A sur cette base. Cette remarque montre donc les caractères dynamique et adaptable d'un réseau bayésien et sera illustrée en détail dans le prochain paragraphe.

La question qui se pose maintenant consiste à comprendre comment sont actualisées les variables de causes connaissant un ensemble de données d'observation. D'après (Naïme *et al.*, 2007), le principe général consiste à calculer l'état *a posteriori* comme le produit d'un état *a priori* par sa *vraisemblance*. Autrement dit, lors de l'introduction de nouvelles observations dans le réseau, la connaissance a priori est transformée en connaissance a posteriori en fonction de la vraisemblance de ces dernières. Cela se traduit encore par le fait que plus les exemples observés s'éloignent de l'état initial de la connaissance, plus la vraisemblance est modifiée. De manière plus précise, le théorème de Bayes permet d'actualiser les variables sachant un ensemble d'observations :

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum_j P(B|A_j)P(A_j)} \tag{5.2}$$

où $P(A_i)$ est la probabilité a priori de A_i antérieure à toute information sur B, $P(A_i|B)$ est la probabilité a posteriori de A_i sachant B et enfin, $P(B|A_i)$ est la fonction de vraisemblance de A_i. L'application de cette relation est illustrée à travers un exemple simple, donné dans la prochaine section.

5.2.3 Exemple didactique

Dans le but d'illustrer les possibilités d'ordre pratique offertes par les réseaux bayésiens, il est proposé de traiter un exemple simple. Ce dernier consiste en une poutre simplement appuyée sollicitée par une charge concentrée à mi-travée. Le comportement de cet élément de structure est supposé être élastique linéaire. L'idée directrice est d'utiliser un réseau bayésien pour synthétiser la connaissance en tenant compte des incertitudes et surtout, de pouvoir corriger l'a priori en considérant des observations supposées réalisées in-situ.

Identification des variables. Dans cet exemple, on s'intéresse à une description du comportement mécanique à l'échelle de la structure. Le cadre de la théorie des poutres semble donc adapté pour fournir une estimation de la flèche à mi-travée, sachant l'ensemble des caractéristiques liées d'une part à la géométrie de la poutre et, d'autre part, au matériau constitutif. En réalisant un calcul élémentaire de résistance des matériaux, on peut aboutir à l'équation d'état 5.3 :

$$u_y = \frac{PL^3}{48EI} \tag{5.3}$$

où u_y est la flèche à mi-travée, P la charge concentrée, L la longueur de la travée de la poutre, E le module d'Young du matériau constitutif et I l'inertie de la section. D'après l'expérience ou encore un certain nombre de jugements d'experts, les lois de distribution des différentes variables peuvent être identifiées. Dans le cas présent, seul le module d'Young de la poutre a été considéré comme variable aléatoire.

Dans le but d'évaluer les possibilités offertes par les réseaux bayésiens pour répondre à des problématiques d'actualisation de modèles mécaniques, le module d'Young est supposé suivre deux lois distinctes (repérées loi 1 et loi 2). Dans un premier temps, les distributions correspondantes de la flèche à mi-travée seront calculées en utilisant l'équation d'état du système qui est précisée dans la section suivante. Dans un second temps, en supposant les valeurs de la flèches calculées à partir de la loi 2 du module d'Young comme étant des observations in-situ, les paramètres de la loi 1 pourront être actualisés. Les résultats seront dits satisfaisants si, après actualisation, la loi 1 actualisée du module d'Young coincide avec la loi 2.

Les lois des différentes variables sont reportées dans le tableau 5.1.

Variable	**Loi de probabilité**	**Moyenne**	**Coefficient de variation**
Module d' Young 1	Lognormale	36000 MPa	10 %
Module d' Young 2	Lognormale	30000 MPa	10 %
Charge	Déterministe	200 kN	-
Longueur	Déterministe	1 m	-
Inertie	Déterministe	$1,33.10^{-4}$ m^4	-

TAB. 5.1 – Lois de probabilité associées à chacune des variables identifiées.

Construction du réseau bayésien. Les relations de dépendance qui permettent de définir le support graphique du réseau peuvent être identifiées d'après le modèle déterministe qui s'exprime par la relation 5.3. Il est donc possible de conclure que les variables E et u_y sont interprétables respectivement comme des variables de cause et d'effet. Le graphe résultant de ces considérations est présenté sur la figure 5.3.

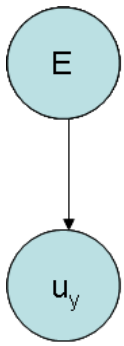


FIG. 5.3 – Graphe orienté acyclique et relations causales lié à l'exemple didactique proposé.

Il reste donc à définir la loi de probabilité marginale pour la variable u_y. Pour cela, la table des probabilités conditionnelles associée doit être déterminée. Autrement dit, il s'agit de construire une table donnant la probabilité que u_y soit dans une classe donnée sachant que E appartient à une classe donnée. Cette table peut être obtenue par la méthode de Monte Carlo, en appliquant la relation d'état décrite précédemment par l'équation 5.3. De manière plus précise, la distribution

marginale de la variable u_y est calculée à partir de la relation 5.4 :

$$P(u_y) = \sum_E P(u_y|E)P(E) \tag{5.4}$$

Les variables doivent être discrétisées en classes en vue de permettre la réalisation des différents calculs. Pour cela, après avoir réalisé une étude de sensibilité appropriée, nous proposons les classes suivantes :

Module d'Young Cette variable a été discrétisée en 20 classes de pas constant. Les valeurs extrêmes sont 25 GPa et 50 GPa,

Flèche à mi-travée Cette variable a été discrétisée en 20 classes de pas constant. Les valeurs extrêmes sont 0,5 mm et 1,57 mm.

La construction du réseau bayésien a été réalisée à l'aide du logiciel gratuit NETICA développé par la société NORSYS. Ce logiciel est téléchargeable sur internet et se présente sous la forme de deux versions : l'une limitée mais gratuite et l'autre plus riche mais payante. Le parti de n'utiliser dans la présente étude que la version d'évaluation gratuite a été retenu. Les états initiaux correspondants à la variable de cause (module d'Young) ont été générés à partir de la technique de Monte Carlo ; 10000 tirages ont été nécessaires pour bien estimer les distributions correspondantes. Il peut être noté que le nombre de tirage lié à la méthode de Monte Carlo influence directement les paramètres des lois de la variable de cause (moyenne et écart type). En effet, ce nombre de tirage doit être choisi suffisamment grand pour que les paramètres statistiques des lois soient estimés correctement.

Utilisation du réseau bayésien. Le réseau bayésien construit précédemment peut maintenant être utilisé. Dans ce paragraphe, nous nous intéressons uniquement d'une part à l'estimation des lois marginales de la variable d'effet (flèche à mi-travée)correspondant aux lois 1 et 2 du module d'Young et, d'autre part, à la capacité d'inférence du réseau. Les paramètres statistiques des lois marginales de la flèche à mi-travée sont 0,876 mm pour la moyenne et 0,092 mm pour l'écart type concernant le cas 1 et, 1,06 mm pour la moyenne et 0,11 mm pour l'écart type concernant le cas 2.

Comme il a été mentionné précédemment, la capacité d'inférence du réseau bayésien est illustrée sur la base de cet exemple simple en considérant les valeurs de la flèche à mi-travée correspondant à la loi 2 du module d'Young comme étant des observations réalisées in-situ. Ces observations peuvent donc être entrées dans le réseau bayésien et permettent de définir un état de la variable d'effet (flèche à mi-travée) a posteriori. La distribution a posteriori de la variable de cause peut être actualisée selon la relation 5.5 :

$$P(E|u_y) = \frac{P(u_y|E)P(E)}{P(u_y)} \tag{5.5}$$

La figure 5.4 permet de montrer les densités de la flèche à mi-travée correspondant aux lois 1 et 2 du module d'Young. Ces dernières ont été calculées à par de la relation 5.3 présentée précédemment. La figure 5.5 permet de montrer d'une part les densités des lois du module d'Young 1 et 2 et, d'autre part, la densité de la loi 1 actualisée sur la base des informations disponibles en terme de flèche à mi-travée, déterminées à partir de la loi 2. Il peut être noté que la densité 1 actualisée du module d'Young coincide de manière satisfaisante avec la densité actualisée de la loi 2. La propriété d'inférence propre aux réseaux bayésien a donc été illustrée et les résultats sont satisfaisants. Dans un contexte de requalification d'ouvrage existants, de tels résultats sont particulièrement intéressants car ils permettent d'aboutir, à partir d'observations in-situ, à une valeur corrigée du module d'Young qui est inférieure celle initialement postulée. Cette valeur corrigée peut alors être interprétée comme étant la valeur dégradée du module d'Young, qu'il a y lieu de prendre en compte dans les procédures de recalcul.

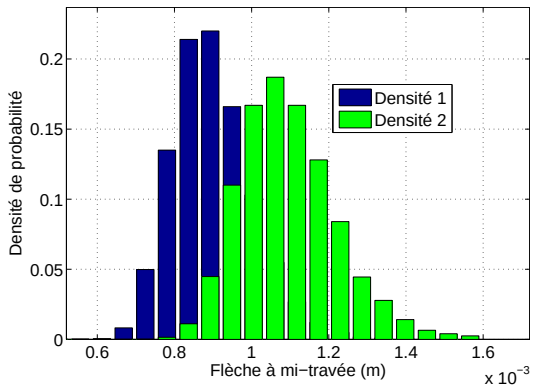


FIG. 5.4 – Densités de la flèche à mi-travée.

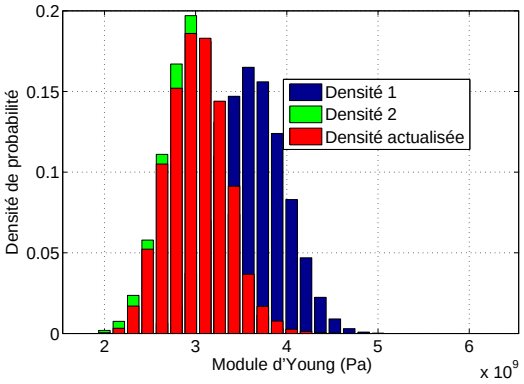


FIG. 5.5 – Densités du module d'Young a priori, a posteriori.

5.2.4 Bilan

Cette section a été dédiée à la présentation des réseaux bayésiens. Cet outil permet de représenter de manière naturelle l'information non seulement sur la plan qualitatif (à l'aide d'un graphe acyclique et orienté) mais aussi sur le plan quantitatif (tables de probabilités conditionnelles). Cette représentation est réalisée en contexte probabiliste et a donc le mérite de permettre la prise en compte des incertitudes liées aux différentes variables identifiées.

En premier lieu, la formulation des réseaux bayésiens a été brièvement précisée. Celle-ci donne un aperçu du cadre théorique utilisé. Dans le but d'illustrer les concepts abordés, un exemple didactique a en second lieu été traité. Ce dernier consiste en une poutre élastique linéaire simplement appuyée et chargée à mi-travée. Outre le caractère très simple du cas traité, ce dernier a le mérite de pouvoir être détaillé aisément. La méthodologie propre à la définition du réseau associé a été précisée en explicitant ses étapes fondamentales : identification, construction et utilisation. Ces dernières ont été suivies dans l'exemple présenté. Un scénario d'inférence a été considéré en supposant la donnée d'observations extérieures fournies par un expert. Celui-ci a permis de montrer à quels résultats il est possible de parvenir et surtout, quels pouvaient être les applications pratiques d'un tel outil pour apporter des éléments de réponse à des problématiques de type requalification d'ouvrages existants ou actualisation de paramètres de modèles mécaniques.

5.3 Théorie de la fiabilité

Dans cette section, une présentation brève des notions fondamentales de la théorie de la fiabilité des structures est réalisée, essentiellement d'après les notes de cours dispensées à l'École Nationale des Ponts et Chaussées par (Cremona, 2005). Ce champ disciplinaire est né du besoin de définir un cadre rigoureux permettant de traiter le caractère aléatoire des différents variables intervenant dans un système mécanique. En premier lieu, quelques éléments liés à la formulation de la théorie de la fiabilité sont rappelés. En second lieu, dans le but d'illustrer ces propos, un exemple d'application simple est traité. En dernier lieu, les éléments essentiels introduits dans le présent chapitre sont synthétisés.

5.3.1 Intérêt

La manière avec laquelle une structure donnée va répondre à une sollicitation extérieure, quelque soit sa nature, va dépendre en outre de sa rigidité, de sa capacité portante et de l'intensité de cette sollicitation. Lorsque la réponse d'une structure est dite satisfaisante, cela signifie que

certaines exigences sont respectées. Ces critères portent généralement sur une limitation de l'endommagement (ouverture de fissures), de la contrainte de traction (pour le béton) ou encore de la flèche. Chacun de ces critères peut être formulé en terme d'état limite. La violation d'un ou plusieurs critères, si elle se produit, est susceptible d'entraîner la défaillance globale de la structure et, par suite, de ne plus permettre son fonctionnement normal.

Étudier la fiabilité d'une structure, c'est d'une part calculer et, d'autre part, prévoir la probabilité qu'un ou plusieurs états limites soient dépassés. La probabilité qu'une telle occurrence se produise est donc une mesure de la chance qu'elle apparaisse. Par ailleurs, les données nécessaires pour alimenter les modèles de calcul sont le plus souvent issues de l'expérience. Ainsi, elles sont sujettes parfois à d'importantes variabilités qu'il y a lieu de prendre en compte. Les données expérimentales des grandeurs physiques d'entrée des modèles, telles que le chargement ou encore les caractéristiques des matériaux constitutifs, permettent une estimation des densités marginales de probabilité des lois de chacune d'entre elles. Si le problème est fonction du temps, l'analyse sera qualifiée de *fiabilité temporelle*. Dans ce cas, l'évolution de ces densités au cours du temps sera recherchée. Dans un cas purement statique, ou quasi-statique, l'analyse sera qualifiée de *fiabiliste*. Nous conduirons cette présentation avec l'hypothèse que la structure étudiée est statique ou quasi-statique, impliquant ainsi la non-dépendance du temps des variables d'entrée.

La théorie de la fiabilité apparaît donc comme un cadre rigoureux permettant d'évaluer la sensibilité d'un modèle aux incertitudes qui entachent les différentes variables d'entrée. En particulier, cette théorie permet d'accéder à des indicateurs de sensibilité dont la connaissance est très utile pour réaliser un choix des variables à probabiliser. Dans la présente étude, ces indicateurs sont mis à profit dans la phase d'identification des variables à considérer dans un réseau bayésien. De cette manière, le choix des variables pertinentes ne repose plus que sur des jugements d'experts mais aussi sur des indicateurs quantitatifs. La combinaisons de ces deux types de stratégies de détermination permet d'aboutir à une identification des variables justifiée et plus optimale.

5.3.2 Formulation

Positionnement du problème

D'une manière générale, la théorie de la fiabilité mécanique vise à déterminer la probabilité de défaillance d'une structure ou d'un système de structures. Dans un problème de fiabilité, les variables d'entrée, encore appelées *variables physiques* X, sont considérées comme étant des variables aléatoires. Une réalisation de X sera notée x. Notons que les variables d'entrée sont en général regroupées dans un seul et même vecteur, appelé *vecteur aléatoire des variables de base*. Ces variables définissent les vecteurs de base d'un espace appelé l'*espace d'entrée* ou encore *espace physique*. Introduisons maintenant la notion de *fonction de performance*, notée $g_X(x)$. Cette donnée permet la réalisation d'une partition de l'espace physique en deux domaines, appelés *domaines de sécurité* et *de défaillance*, pour lesquels nous avons respectivement $g_X(x) > 0$ et $g_X(x) < 0$. Il existe donc une frontière appelée *état limite* sur laquelle $g_X(x) = 0$. Si l'on suppose que $n > 1$ variables aléatoires interviennent dans le problème, alors l'état limite est une hypersurface (dimension $n - 1$) de l'espace physique. A ce stade, deux cas sont à distinguer : l'état limite explicite et l'état limite implicite. Le fait de pouvoir expliciter la fonction d'état limite est loin d'être systématique, bien au contraire. Dans la majorité des cas d'étude, cette fonction n'est connue que de manière implicite ; il s'agit alors d'essayer de l'expliciter.

Pour résoudre un problème de fiabilité, deux approches peuvent être mises en avant. D'une part, il existe des méthodes de niveau II. La forme de l'état limite est alors essentielle, ce qui implique de disposer de l'écriture explicite de cet état limite, ou à défaut d'une approximation.

Tout le problème consiste à estimer la valeur de l'intégrale 5.6, définissant la *probabilité de défaillance* P_f de la structure considérée.

$$P_f = \int\limits_{g_X(x)<0} p_X(x)dx \tag{5.6}$$

Dans la relation 5.6, $p_X(x)$ représente la densité conjointe des variables physiques. Cette probabilité peut être estimée par des méthodes analytiques du type F.O.R.M., S.O.R.M. ou encore synthétiques comme les simulations de Monte Carlo, sur lesquelles nous reviendrons dans la partie suivante. Toutefois, il est à noter qu'une bonne estimation de cette intégrale peut être réalisée en considérant non pas l'intégralité du domaine de défaillance mais seulement un certain voisinage du point de l'état limite, où la fonction densité conjointe est la plus forte, appelé *point de fonctionnement* le plus probable. Il existe aussi les méthodes de niveau III et, dans ce cas, la forme de l'état limite n'est alors plus essentielle dans la détermination de la probabilité de défaillance. Considérée comme une variable aléatoire, la fonction de performance permet de définir la probabilité de défaillance par 5.7.

$$P_f = P(g_X(x) < 0) \tag{5.7}$$

La résolution d'un problème de fiabilité fait appel habituellement à la construction d'une estimation de l'intégrale 5.6. Pour cela, des méthodes de niveau II sont couramment utilisées. La formulation des méthodes F.O.R.M. et S.O.R.M. nécessite que l'ensemble des variables physiques suive une loi normale centrée réduite. Pour se ramener à ce cas, il est d'usage de recourir à des transformations isoprobabilistes, ce qui constitue l'objet de la section suivante.

Transformations isoprobabilistes

Toute application permettant de substituer la métrique de l'espace physique par une métrique euclidienne, tout en conservant la valeur de la probabilité en chacun des points de cet espace, sera appelée *transformation isoprobabiliste*. Pour cela, les variables physiques X, qui suivent a priori une loi quelconque et qui sont a priori corrélées, sont transformées en des variables aléatoires centrées réduites et indépendantes U. Ces dernières définissent les vecteurs de base de l'*espace normé* ou *espace gaussien*. Cet espace est parfaitement adapté à une conduite simple des calculs. D'une part, les difficultés liées aux domaines de définition des densités des variables physiques sont ainsi évitées étant donné que la densité gaussienne est à support infini. D'autre part, celles liées à une différence trop importante entre les ordres de grandeurs des valeurs moyennes des variables en jeu ne se posent plus. Enfin, comme nous l'avons mentionné précédemment, la métrique de l'espace normé est la métrique euclidienne. C'est pourquoi l'indice de fiabilité prend alors une signification géométrique. Nous reviendrons sur ce point dans la suite.

Transformation de Rosenblatt. Cette transfomation permet d'opérer une transformation marginale des variables de l'espace normé vers l'espace physique. La transformation de Rosenblatt n'est applicable que si la densité conjointe de toutes les variables aléatoires est connue. Son principe réside dans l'hypothèse que la distribution multivariable $P_{X_1,\cdots,X_n}(x_1,\cdots,x_n)$ est équivalente à $P_{X_1}(x_1)\ P_{X_2|X_1}(x_2 \mid x_1)\ \cdots\ P_{X_n|X_1,\cdots,X_{n-1}}(x_n \mid x_1,\cdots,x_{n-1})$. Dans la pratique, la difficulté majeure dans l'application de cette transformation réside dans la détermination des probabilités conditionnelles en jeu. De plus, la densité conjointe des variables physiques n'est pas toujours connue.

Pour concrétiser ces propos, considérons le cas de variables de lois normales $N(\mu,\sigma)$. L'application de la transformée de Rosenblatt conduit à la relation 5.8.

$$X = \mu + \sigma U \tag{5.8}$$

En revanche, pour des variables de l'espace physique de lois lognormales $LN(\mu, \sigma)$, nous obtiendrons la transformation marginale 5.9.

$$X = e^{U\sqrt{1+(\frac{\sigma}{\mu})^2}} \frac{\mu}{\sqrt{ln(1+(\frac{\sigma}{\mu})^2)}} \tag{5.9}$$

Transformation de Nataf. La transformation de Nataf ne requiert pas la connaissance de la densité conjointe des variables physiques. En revanche, leurs densités marginales ainsi que la matrice de corrélation ρ_{ij} sont connues. Son principe consiste à considérer une suite de variables centrées réduites $Z = (Z_1, \cdots, Z_n)^t$, issues de la transformation 5.10, où Φ représente la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite. z représente le vecteur des réalisations des variables intermédiaires.

$$z_i = \Phi^{-1}(P_{X_i}(x_i)) \tag{5.10}$$

Il est à noter que les variables intermédiaires Z ne sont pas décorrélées. Et, leur corrélation est a priori différente de la corrélation des variables physiques X. D'une manière exacte, les corrélations des variables intermédiaires ρ^*_{ij} sont solutions de l'équation intégrale 5.11, dans laquelle ϕ_2 représente la densité de la loi binormale.

$$\rho_{ij} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x_i - \mu_i}{\sigma_i}\frac{x_j - \mu_j}{\sigma_j}\phi_2(z_i, z_j, \rho^*_{ij})dz_i dz_j \tag{5.11}$$

Dans la pratique, des relations empiriques fournissant des estimations acceptables des corrélations des variables intermédiaires sont utilisées. La matrice de décorrélation des variables physiques est alors construite à partir de la matrice de corrélation des variables intermédiaires en considérant sa décomposition spectrale, ou encore sa décomposition de Cholesky. Les coordonnées des variables physiques dans l'espace normé peuvent alors être déterminées.

Transformation d'Hermite. La transformation d'Hermite est parfois utilisée pour développer une variable aléatoire de loi a priori quelconque. En effet, il est possible de montrer que toute variable aléatoire peut être développée comme une combinaison linéaire des polynômes d'Hermite multivariables Γ_k, prenant en argument des variables centrées réduites et indépendantes. Cette transformation peut être considérée comme la projection des variables physiques dans un espace normé de dimension infinie, dont une base serait $(\Gamma_0, \Gamma_1(U_{k_1}), \Gamma_2(U_{k_1}, U_{k_2}), \cdots)$ prenant la forme 5.12.

$$X = a_0\Gamma_0 + \sum_{i_1=1}^{\infty} a_{i_1}\Gamma_1(U_{i_1}) + \sum_{i_1=1}^{\infty}\sum_{i_2=1}^{\infty} a_{i_1}a_{i_1 i_2}\Gamma_2(U_{i_1}, U_{i_2}) + \cdots \tag{5.12}$$

Évidemment, dans la pratique, les sommes sont tronquées et de bonnes estimations des fonctions de répartition des variables physiques sont obtenues à partir de variables centrées réduites et indépendantes. Il est à noter que l'utilisation de cette transformation implique une augmentation de la dimension de l'espace normé, ce qui constitue un atout essentiel lorsque des approches par classification, telles que les machines à vecteurs supports, sont employées. Mais, ce point précis sera abordé dans la suite. Nous pouvons donc nous ramener au cas de variables centrées réduites indépendantes par l'utilisation de transformations isoprobabilistes. Ainsi, il est possible de recourir à des méthodes de niveau II pour résoudre le problème de fiabilité considéré, autrement dit déterminer les grandeurs permettant une quantification de la fiabilité du système étudié. Dans la section suivante, nous nous proposons de présenter le principe des méthodes F.O.R.M. et S.O.R.M.. Lorsqu'il n'y aura pas de confusion possible, la fonction de performance sera notée de la même manière qu'elle soit exprimée dans l'espace physique ou normé, pour alléger les notations.

Les méthodes F.O.R.M. et S.O.R.M.

Formulation fondamentale. Après application d'une transformation isoprobabiliste, il est possible de recourir aux méthodes F.O.R.M. et S.O.R.M. dont une description détaillée peut être trouvée dans les travaux de Melchers (Melchers, 1999). Elles consistent tout d'abord à trouver une approximation de la fonction de performance $g_U(u)$, notée $\tilde{g_U}(u)$, par un développement en série de Taylor autour d'un point donné u_0. Il est aisé d'obtenir 5.13.

$$\tilde{g}_U(u) = g_U(u_0) + a^t(u-u_0) + \frac{1}{2}(u-u_0)^t H(u-u_0) + \underset{u\sim u_0}{o}((u-u_0)^t(u-u_0)) \tag{5.13}$$

Dans la relation 5.13, a et H représentent respectivement le gradient de la fonction d'état limite ainsi que la matrice Hessienne, évalués tous deux en u_0.

Méthode F.O.R.M. L'approximation au premier ordre de la fonction d'état limite consiste à négliger les termes de second ordre. A cela s'ajoute qu'un point u_0 particulier est choisi ; il s'agit du point où la fonction densité conjointe est maximale, appelé *point de fonctionnement* et noté u^*. Le point de fonctionnement est déterminé en recherchant le point de l'état limite le plus proche de l'origine de l'espace normé. Ainsi, le point de fonctionnement est solution du problème d'optimisation 5.14.

$$\begin{cases} \text{Minimiser :} & \beta = \sqrt{u^t u} \\ \text{tel que :} & g_U(u) = 0 \end{cases} \tag{5.14}$$

Dans la relation 5.14, β représente l'*indice de fiabilité* au sens de Hasofer et Lind (Hasofer et Lind, 1974). Cet indice diffère de celui de Basler et Cornell qui ne retiennent que le point moyen. La définition proposée par ces deux derniers auteurs est rarement retenue dans la pratique en raison du manque d'invariance quant à la manière de formuler la fonction d'état limite. L'indice de fiabilité, grandeur scalaire, permet de rendre compte de la fiabilité d'une structure. En effet, plus cet indice est élevé, plus la probabilité de défaillance sera faible car le point de fonctionnement, très éloigné de l'origine de l'espace normé, tend à être présent dans les zones de densité très faible appelées queues de distribution. Le résultat de ce problème de minimisation sous contraintes peut être mis sous la forme 5.15, où w représente le gradient normalisé de la fonction d'état limite, évalué au point de fonctionnement u^*. Dans la suite de cette étude, nous présenterons l'algorithme de Rackwitz-Fiessler (Abdo et Rackwitz, 1990; Rackwitz et Fiessler, 1978), couramment utilisé dans la pratique pour la résolution de ce type de problème.

$$\beta = w^t u^* \tag{5.15}$$

En reportant la relation 5.15 dans 5.13, nous obtenons l'équation de l'hyperplan tangent au point de fonctionnement 5.16, où $< ., . >$ représente le produit scalaire usuel dans $\mathbb{R}^d$.

$$\tilde{g}_U(u) = < w, u > -\beta \tag{5.16}$$

A l'aide de cette approximation au premier ordre, il est possible de montrer la relation 5.17, dans laquelle Φ représente la fonction de répartition de la loi gaussienne centrée et réduite.

$$P_f \approx \Phi(-\beta) \tag{5.17}$$

Il est à noter que dans le cas d'une fonction d'état limite possédant une forte courbure, l'approximation au point de fonctionnement par un hyperplan tangent n'est évidemment plus adaptée. Il est alors nécessaire de recourir à une approximation au second ordre.

Méthode S.O.R.M. L'approximation au second ordre nécessite de considérer les termes de la relation 5.13 auparavant laissés de côté. La matrice Hessienne doit aussi être déterminée puis diagonalisée pour que les courbures principales κ_i puissent être connues. Ces dernières constituent le supplément d'information contenu dans la formulation S.O.R.M. par rapport à F.O.R.M.. La résolution du problème aux valeurs propres qui se pose est en général délicat, surtout dans le cas des zones de faibles gradients. L'approximation S.O.R.M. prend la forme d'un hyperparaboloïde tangent au point de fonctionnement, pouvant s'exprimer par la relation 5.18.

$$\tilde{g}_U(u) = u_n - \beta - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1} \kappa_i u_i^2 \tag{5.18}$$

Pour terminer cette section, il est essentiel de remarquer que l'application des méthodes F.O.R.M. ou S.O.R.M., dans le cas d'un état limite implicite, requiert soit la construction d'une approximation de la fonction d'état limite au voisinage du point de fonctionnement, soit l'évaluation numérique de gradients et de matrices hessiennes par un nombre réduit de calculs déterministes.

Les méthodes Monte Carlo

Les méthodes de type Monte Carlo visent à la construction d'une estimation de la probabilité de défaillance. Des tirages aléatoires sont effectués et l'évaluation de la réponse de la structure est effectuée pour chaque jeu de données. Il existe plusieurs variantes de ces méthodes, visant à optimiser les stratégies de tirs dans le but de réduire le coût de calcul lié essentiellement au nombre d'appels du code de calcul aux éléments finis. Nous nous proposons tout d'abord de présenter la formulation sur laquelle se fondent toutes ces méthodes, puis ensuite, de préciser quelques une d'entre elles.

Formulation fondamentale. Définissons tout d'abord la fonction indicatrice du domaine de défaillance $\gamma_F(x)$. La relation 5.6 peut alors être mise sous la forme 5.19.

$$P_f = \int_{\mathbb{R}^d} \gamma_F(x) p_X(x) dx \tag{5.19}$$

Écrite autrement, nous obtenons la relation 5.20.

$$P_f = E(\gamma_F(X)) \tag{5.20}$$

Dans la relation 5.20, $E(.)$ représente l'espérance de $\gamma_F(x)$, et il est donc licite de faire appel à l'estimateur classique 5.21.

$$P_f \approx \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \gamma_F(x_i) \tag{5.21}$$

Remarquons que n évaluations de la fonction d'état limite sont nécessaires à la construction d'une bonne estimation de la probabilité de défaillance. De nombreuses relations empiriques, permettant de prédire le nombre de tirages n, existent. Une relation couramment employée est $n = \frac{C}{P_f}$. La constante C représente le niveau de confiance avec lequel on souhaite connaître P_f. Une valeur typique de C est 1000. Pour réduire le nombre de tirages, plusieurs stratégies de tirs ont été développées. Nous nous proposons dans la suite de présenter le principe de deux d'entre elles, à savoir le *tirage d'importance* et le *tirage directionnel*.

Tirage d'importance. La relation 5.19 peut être mise sous la forme suivante 5.22, dans laquelle $h(x)$ est une densité de probabilité, a priori inconnue, qui devra être choisie telle que les tirages soient effectués dans la région participant le plus à l'intégrale 5.6.

$$P_f = \int_{\mathbb{R}^d} \gamma_F(x) \frac{p_X(x)}{h(x)} h(x) dx \tag{5.22}$$

Comme précédemment, il est possible, pour approcher cette intégrale, de recourir à l'estimateur 5.23 où les v_i sont obtenues aléatoirement selon la distribution $h(x)$.

$$P_f \approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \gamma_F(v_i) \frac{p_X(v_i)}{h(v_i)} \tag{5.23}$$

Une approximation du point de fonctionnement est tout d'abord construite en effectuant par exemple quelques tirages et en ne retenant que le point appartenant au domaine de défaillance le plus proche de l'origine de l'espace normé. Ensuite, la densité du tirage d'importance $h(x)$ peut être estimée et centrée en ce point. C'est alors qu'un tir de précision peut être réalisé. Notons cependant que d'importants problèmes se posent lorsque la dimension de l'espace physique augmente. En effet, le nombre de tirages nécessaires à une bonne estimation de la probabilité de défaillance croît exponentiellement avec la dimension. Cela est, bien entendu, à relier avec le fait que, pour un nombre de tirages fixé, lorsque la dimension de l'espace physique augmente, la densité de tirages chute. Autrement dit, la densité de tirages reflète la quantité d'informations contenue dans leur réponse.

Tirage directionnel. Le fondement du tirage directionnel réside dans la notion de probabilité conditionnelle. En effet, la relation 5.6 peut être mise sous la forme suivante 5.24 dans laquelle Ω_d, A et R représentent respectivement l'hypersphère unitaire centrée en l'origine de l'espace normé de dimension d, un vecteur aléatoire unitaire dont les réalisations sont choisies uniformément depuis le centre de Ω_d vers l'extérieur et enfin, la solution de l'équation $g_{R,A}(ra) = 0$.

$$P_f = \int_{a \in \Omega_d} P(g_{R,A}(ra) < 0) p_A(a) da \tag{5.24}$$

Ainsi, la probabilité de défaillance peut être approchée par l'estimateur 5.25.

$$P_f \approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} P(g_{R,A_i}(ra_i) < 0) \tag{5.25}$$

Il est à noter que la densité du tirage d'importance peut être utilisée avec le tirage directionnel. En effet, dans un tel cas, la densité en question n'est pas située au voisinage du point de fonctionnement mais dirigée vers lui. Comme la densité n'est pas placée sur le point de fonctionnement, elle ne peut donc être considérée comme optimale en ce sens. Cela a le mérite d'atténuer le problème de l'augmentation exponentielle du nombre de tirages avec la dimension. Toutefois, la résolution de l'équation $g(ra) = 0$ peut devenir complexe dans le cas d'un état limite implicite.

Au terme de cette brève présentation, nous pouvons affirmer que ces méthodes permettent de ne pas faire l'hypothèse d'une forme particulière de la fonction d'état limite. En effet, seul le signe de la fonction de performance est nécessaire à la conduite d'un calcul. Ainsi, les difficultés liées à la présence de formes particulières de la fonction d'état limite, comme par exemple de fortes non linéarités, ne sont pas pénalisantes pour l'application des méthodes Monte Carlo. Cependant, l'obtention de résultats pertinents nécessite un lourd coût de calcul dû, essentiellement, au fait qu'aucune expression analytique de la fonction d'état limite n'entre en jeu.

5.3.3 Exemple didactique

Dans ce paragraphe, il est proposé de traiter un exemple simple afin d'illustrer les différentes approches qui ont été présentées. Il y aura donc lieu de définir un modèle mécanique nominal, un modèle probabiliste et un solveur stochastique. Pour cela, une poutre en console est considérée. Sa géométrie est décrite à l'aide de la figure 5.6. Un chargement de type charge répartie, notée W, a été considéré.

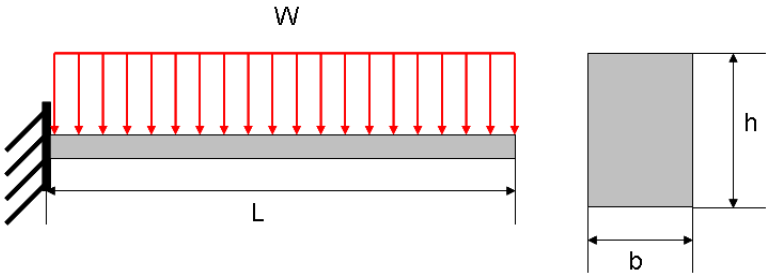


FIG. 5.6 – Poutre en console.

Modèle mécanique. Cette poutre est supposée se comporter de manière élastique linéaire. La théorie des poutres permet donc de tirer l'équation d'état de ce système mécanique, reliant la flèche à l'extrémité au chargement. Cette dernière s'écrit sous la forme de l'équation 5.26 :

$$u_y(x = L) = \frac{wbL^4}{8E\frac{bh^3}{12}} \tag{5.26}$$

où E est le module d'Young.

Modèle probabiliste. A partir de la donnée du modèle moyen, il y a lieu de définir le modèle probabiliste. Ce dernier est pleinement défini d'une part par le choix de variables qui seront considérées comme aléatoires dont les densités de probabilité nécessitent d'être identifiées à partir de l'expérience ou de jugements d'experts et, d'autre part, par le choix d'une fonction d'état limite. Dans cet exemple, les variables aléatoires choisies sont présentées dans le tableau 5.2 :

Variable	**Loi de probabilité**	**Moyenne**	**Coefficient de variation**
Module d' Young	Déterministe	200 GPa	-
Largeur	Déterministe	1 m	-
Hauteur	Lognormale	0,02 m	15 %
Longueur	Déterministe	6 m	-
Chargement	Lognormale	10 kN.m^{-1}	20 %

TAB. 5.2 – Lois de probabilité associées à chacune des variables identifiées.

Comme traditionnellement lors de l'étude probabiliste d'éléments de structures, la fonction d'état limite est choisie sous la forme d'une marge de sécurité écrite en déplacement. Son expression est précisée par l'équation 5.27 :

$$g_{W,H}(w, h) = u_0 - \frac{wbL^4}{8E\frac{bh^3}{12}} = 0 \tag{5.27}$$

où u_0 est un seuil en déplacement, supposé avoir été identifié à partir des textes normatifs ou de recommandations techniques. Lors d'une étude de fiabilité complète, allant jusqu'à la détermination des intervalles de confiance, ce seuil n'est pas constant mais il est choisi égal à différentes valeurs dans le but d'obtenir les fonctions de répartition. Dans cet exemple, il est proposé de déterminer les différentes grandeurs caractéristiques que la théorie de la fiabilité permet d'obtenir, à savoir, la probabilité de défaillance, le point de fonctionnement et l'indice de fiabilité.

Solveur stochastique. Pour déterminer les grandeurs d'intérêt que nous nous sommes fixées, plusieurs techniques ont été utilisées. Ces dernières sont présentes dans la boite à outils RELIAB-TBX, développée au LCPC sous la direction de Christian Cremona. Le seuil en déplacement u_0 a été fixé à 30 mm.

Technique de résolution	**Indice de fiabilité**	**Point de fonctionnement**	**Probabilité de défaillance**
F.O.R.M.	1,81	0,034	$[2.10^{11}\ 1\ 0{,}15\ 6\ 1{,}13.10^{4}]$
S.O.R.M.	Non convergée	Non convergée	Non convergée
M.C.T.I.	1,81	0,034	$[2.10^{11}\ 1\ 0{,}15\ 6\ 1{,}13.10^{4}]$
M.C.T.D.	1,13	0,12	$[2.10^{11}\ 1\ 0{,}15\ 6\ 1{,}13.10^{4}]$
Analytique	1,81	0,034	$[2.10^{11}\ 1\ 0{,}15\ 6\ 1{,}13.10^{4}]$

TAB. 5.3 – Résultats obtenus après analyse de la fiabilité de la poutre.

Les résultats obtenus montrent que les techniques usuelles ne permettent pas d'aboutir aux mêmes conclusions. En premier lieu, la technique F.O.R.M. permet de donner une bonne estimation des résultats, qui sont en adéquation avec ceux obtenus par tirage d'importance (M.C.T.I.). En effet, ces techniques sont connues pour leur robustesse. Par ailleurs, lorsque la méthode F.O.R.M. ne permet pas de d'aboutir à des résultats pertinents, cela est généralement dû au fait que les dérivées de la fonction d'état limite sont mal évaluées en raison de non linéarités trop importantes. En second lieu, la technique S.O.R.M. n'a pas convergée. Cela est essentiellement dû au fait que les courbures n'ont pu être estimées numériquement. En effet, l'évaluation de ces quantités reste sujette à de nombreuses instabilités numériques, parfois délicates à surmonter. Enfin, le tirage conditionnel ne permet pas d'obtenir des résultats satisfaisants. Cela est dû au fait que la résolution de l'équation $g(ra) = 0$ est parfois difficile en raison des non linéarités contenues dans la fonction d'état limite. Dans la suite de cette étude, le parti de retenir la technique F.O.R.M. pour les états limite explicites a été pris. En revanche, si des états limite implicites sont traités, le parti d'avoir recours à des techniques de type surface de réponse (Melchers, 1999) a été privilégié.

5.3.4 Bilan

Dans cette section, quelques notions de la théorie de la fiabilité ont été exposées. En premier lieu, son intérêt a été discuté et les résultats auxquels cette technique permet d'aboutir ont été précisés. En particulier, il a été mentionné que ce cadre théorique permet d'obtenir une analyse de sensibilité de la réponse d'un système aux variations des paramètres d'entrée. Par ailleurs, il permet de quantifier le poids respectif de chaque paramètre sur la réponse globale. Ce dernier point sera mis à profit dans la méthodologie de requalification décrite dans la section suivante. En second lieu, un bref exposé des concepts de base de la théorie de la fiabilité a été réalisé. Sa formulation générale ainsi que les grandeurs caractéristiques qui entrent en jeu ont été définies et discutées. Les techniques classiques de résolution ont également été présentées. En dernier

lieu, afin d'illustrer les concepts présentés, un exemple à but didactique a été proposé et traité. Les résultats acquis par les différentes techniques ont été présentés et comparés entre eux. Sur la base de cet exemple simple, le choix des techniques de résolution utilisées dans la suite, au moins en partie, a été justifié.

5.4 Méthodologie proposée

Cette section est dévouée à la présentation d'une méthodologie de requalification des éléments de structures existants. Pour cela, les objectifs que nous nous fixons sont tout d'abord précisés. Par ailleurs, le cadre d'application est également présenté. Ensuite, une description de la méthodologie proposée est effectuée de manière générique. Dans le but d'illustrer son application sur la base d'un cas d'étude simple, un exemple entièrement artificiel (les données expérimentales ont été simulées) est considéré. L'exposé présenté dans la présente section a été reporté dans (Richard *et al.*, 2010a) et (Richard *et al.*, 2011).

5.4.1 Motivations et objectifs

La majorité des ouvrages existants deviennent vieillissants et nécessitent donc d'être entretenus de manière vigilante. Ainsi, les gestionnaires d'ouvrages doivent décider de déclencher, à un instant donné, des actions de maintenance. Cette décision ne peut être réalisée sans posséder un certain nombre de critères de décision étant donné les moyens importants mobilisés, aussi bien financiers qu'humains. Après réalisation de ce type d'action, il y a lieu de s'assurer que l'ouvrage respecte les critères de sécurité prescrits par les textes normatifs. Dans la majorité des cas, cette vérification demande une estimation des paramètres mécaniques à l'instant courant. Ces derniers sont donc des grandeurs d'entrée aux procédures de requalification classiques. Généralement, un modèle mécanique (souvent aux éléments finis) est conçu pour estimer le comportement d'un ouvrage existant. Cependant, ce modèle requiert la connaissance des paramètres caractérisant les matériaux constitutifs de l'ouvrage ou de l'élément de structure considéré. La variabilité que présentent ces paramètres rend généralement délicate leur estimation précise. C'est alors qu'il devient intéressant d'être en mesure de faire dialoguer le modèle mécanique avec les mesures in-situ dans le but d'actualiser les paramètres d'entrée. Autrement dit, il y a lieu de requalifier, tout ou partie, des caractéristiques des matériaux constitutifs afin de mieux tirer parti des informations que le modèle mécanique est susceptible de fournir.

Dans cette étude, une méthodologie de requalification des ouvrages est proposée et il semble nécessaire de préciser les objectifs visés. En premier lieu, pour des raisons de mise en œuvre pratique, le développement d'une approche non intrusive est visé. En effet, les codes de calculs aux éléments finis sont aujourd'hui devenus non seulement riches mais aussi complexes à modifier. Ce constat motive pleinement notre premier objectif. En second lieu, dans le but de tenir compte des différentes incertitudes qui entachent les différentes variables en jeu, il est souhaité que la méthodologie proposée s'inscrive dans un contexte probabiliste. Ainsi, les informations liées à la propagation des incertitudes dans le modèle mécanique considéré peuvent être mises à profit comme outils d'aide à la décision. En troisième lieu, les données d'entrée de la méthodologie doivent pouvoir être mesurables dans le but d'assurer une connaissance statistique suffisante. Autrement dit, les grandeurs pour lesquelles les données statistiques sont insuffisantes ne sont pas concernées par la méthodologie proposée.

5.4.2 Description

Identification

Il est rare que l'ensemble des variables d'un modèle nécessitent d'être actualisé. Il s'agit donc de ne retenir que les variables les plus pertinentes. Pour cela, il convient de proposer des critères de choix qui pourront guider cette prise de décision. Dans le cadre de cette étude, nous proposons trois critères bien distincts dont on pourra tirer profit en raison du recoupement des résultats qu'ils fournissent.

En premier lieu, une connaissance statistique suffisante des variables à actualiser doit être assurée. Par exemple, si l'on décide d'actualiser un paramètre caché, il sera délicat de tirer des conclusions quant à la pertinence des résultats obtenus si ce dernier reste mal connu. En second lieu, de simples considérations de type ingénieur (ou jugements d'experts) peuvent être mises à profit pour décider. Pour clarifier cette situation, considérons le cas d'un modèle très influencé par le diamètre des aciers et peu par la résistance en traction du béton. Ces deux grandeurs peuvent être connues statistiquement de manière suffisante ; le critère précédent ne permet donc pas a priori de les distinguer. En revanche, les experts auront tendance à abonder dans le sens du fait que le diamètre des aciers est garanti par les fournisseurs et que, par suite, cette grandeur est mieux maîtrisée que la résistance en traction du béton. En effet, le diamètre peut être imposé lors de la production des armatures, ce qui n'est pas aussi vrai pour la résistance en traction du béton, qui est sujette à d'importantes variabilités. Ainsi, le recours à des jugements d'experts permet de ne pas considérer le diamètre des aciers au profit de la résistance en traction du béton. En dernier lieu, après avoir éliminé certaines variables en considérant les deux critères qui viennent d'être mentionnés, il s'agit de contrôler le poids respectif des différentes variables retenues jusqu'ici sur la réponse de ce dernier. En effet, si certaines d'entres elles ont une trop forte influence, ou au contraire une influence trop faible, l'actualisation aura tendance à être orientée. Pour quantifier le poids respectif des variables, des indicateurs sont nécessaires. Ceux considérés dans la présente approche proviennent des travaux réalisés par (Lemaire, 2005). Ces indicateurs sont appelés *élasticité* et permettent de quantifier l'influence d'un paramètre statistique d'une variable donnée sur la fiabilité de la réponse. La forme générique de ce type d'indicateurs s'exprime par l'équation 5.28 :

$$S^{p_X} = \frac{p_X}{\beta}\frac{\partial \beta}{\partial p_X}|_{P^\star} \tag{5.28}$$

où S^{p_X} est l'élasticité associée au paramètre statistique p et à la variable X, β l'indice de fiabilité et $P^\star$ le point de fonctionnement.

Ces indicateurs permettent donc de quantifier la sensibilité de la fiabilité d'un système mécanique au choix, d'une part de la valeur moyenne d'une variable donnée et, d'autre part, de l'écart type. Il peut être remarqué que même si les ordres de grandeurs des valeurs moyennes des différentes variables sont très différents, les indicateurs peuvent néanmoins être comparés car ils sont normés par le premier terme situé dans l'équation 5.28. Par conséquent, ils peuvent être comparés l'un à l'autre.

L'ensemble des critères présentés dans ce paragraphe permet de réaliser un choix des variables à actualiser qui est justifié non seulement par des arguments qualitatifs (jugements d'experts) mais aussi par des arguments quantitatifs (indicateurs d'élasticités).

Principe

La méthodologie proposée s'articule autour de trois entités dont les rôles sont bien identifiés. La première d'entre elles (sans ordre hiérarchique) est appelée *entité de prédiction*. Elle se présente dans la plupart des cas sous la forme d'un modèle mécanique aux éléments finis. Il est essentiel d'insister sur le fait que le modèle mécanique est supposé satisfaisant a priori mais non optimal. La seconde entité est appelée *entité d'actualisation*. Cette dernière permet de faire le lien entre les informations en réponse du modèle mécanique et celles provenant de l'expérience, sur la base desquelles cette dernière va pouvoir actualiser les paramètres d'entrée du modèle considéré. Dans le cas de la présente étude, les réseaux bayésiens ont été retenus pour assurer cette fonction. Les propriétés de cet outil, qui ont été présentées précédemment, justifient donc son choix. Enfin, la troisième et dernière entité est appelée *entité d'observation*. Cette dernière permet, généralement à partir de l'expérience ou de jugements d'experts, de fournir un certain nombre d'observations nécessaires à l'entité d'actualisation. Les trois entités mentionnées dialoguent l'une avec l'autre dans le but de rendre la prédiction du modèle mécanique plus optimale. Pour cela, la réponse est actualisée à travers l'actualisation des variables d'entrée du modèle, sur la base d'observations mesurables. Un schéma de principe est donné sur la figure 5.7.

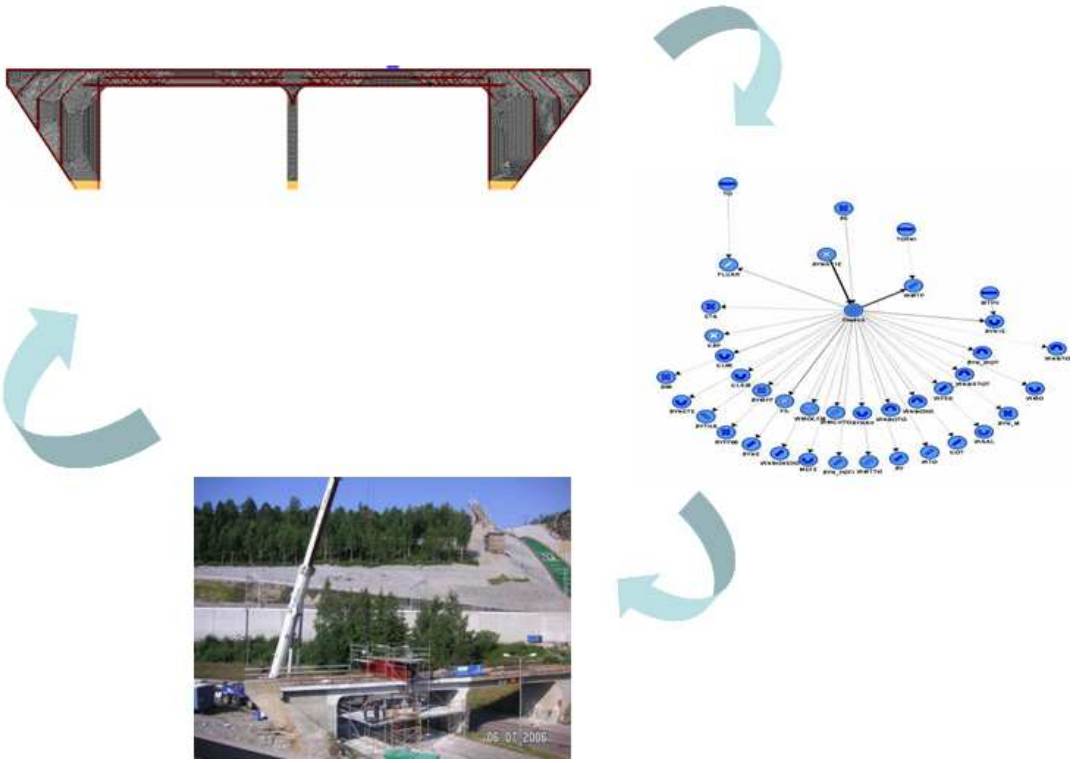


FIG. 5.7 – Schéma de principe de la méthodologie de requalification proposée.

5.5 Application aux éléments de structures en béton armé

Dans cette section, un certain nombre de cas d'application de la méthodologie de requalification proposée sont traités dans le but de montrer clairement son applicabilité à différents types de problèmes réels. En premier lieu, la poutre de Ragueneau est considérée. Cet élément de structure a déjà été présenté dans le chapitre précédent pour apporter des éléments de validation aux modèles proposés. Cet exemple d'application est traité d'un part à l'ELS et, d'autre part, à l'ELU. En second lieu, nous nous intéressons au pont en béton armé d'Örnsköldsvik dans sa

phase linéaire. L'étude vise à requalifier le module d'Young du béton par rapport aux données expérimentales disponibles.

5.5.1 Poutre de Ragueneau

Dans ce paragraphe, la poutre de Ragueneau (Ragueneau, 1999) présentée dans le chapitre précédent est sujette à une étude bayésienne pour illustrer les possibilités offertes par l'approche proposée. Le but de cet exemple est d'apporter des éléments de validation sur la base d'un exemple réel. Il est essentiel de noter que cet élément de structure est sain, et que par conséquent il y a lieu de parler de réactualisation plutôt que de requalification. Par ailleurs, cet exemple est traité d'une part en considérant un état limite de type ELS et, d'autre part, un état limite de type ELU. Dans le premier cas, la fonction d'état limite s'exprime comme la marge de sécurité en intégrant une flèche limite de 2,3 mm. Cela correspond à la fin de la phase de fissuration du béton. En revanche, dans le second cas, la fonction d'état limite a été écrite en terme de force de réaction car on s'intéresse davantage à la capacité portante de l'élément de structure. Une force limite de 90 kN a été considérée.

Modèle mécanique. Le modèle mécanique a déjà été introduit au chapitre précédent. Les paramètres matériaux sont inchangés. Toutefois, le calcul n'a pas été conduit de la même manière selon le type d'état limite considéré. Dans le cas d'un état limite de type ELS, les simulations ont été contrôlées en force imposée alors que dans le cas d'un état limite de type ELU, ces dernières l'ont été en déplacement imposé pour des raisons de robustesse numérique. Les cycles de charge/décharge n'ont pas été pris en compte pour limiter le coût de calcul de l'analyse, seule la courbe enveloppe a été prise en compte.

Identification. Les lois de probabilité des différents paramètres matériaux ont été identifiées à partir des données expérimentales disponibles. L'ensemble des informations est présenté dans le tableau 5.4.

Variable	**Loi de probabilité**	**Moyenne**	**Coefficient de variation**
Module d'Young du béton	Lognormale	28000 MPa	15 %
Contrainte limite de traction du béton	Lognormale	3,15 MPa	10 %
Diamètre des aciers sup.	Lognormale	0,014 m	10 %
Épaisseur d' enrobage	Lognormale	0,010 MPa	10 %
Limite élastique des aciers	Lognormale	450 MPa	10 %

TAB. 5.4 – Lois de probabilité associées à chacune des variables identifiées du modèle de la poutre testée par (Ragueneau, 1999).

Deux cas de fonctionnement doivent être distingués : le cas de l'ELS et le cas de l'ELU. A l'ELS, à partir de considération ingénieurs, les variables suivantes ont été retenus a priori : module d'Young du béton, contrainte limite de traction et l'épaisseur d'enrobage. Un choix plus fin a pu être réalisé en calculant les coefficients d'élasticité en vue d'évaluer la sensibilité des paramètres statistiques des lois initiales aux variations de ces variables. Les résultats sont présentés dans le

tableau 5.5. Le choix de considérer uniquement le module d'Young dans l'analyse a finalement été retenu.

Variable	**Élasticité à la moyenne**	**Élasticité à l'écart type**
Module d'Young du béton	-3,25	-0,97
Contrainte limite de traction du béton	-0,0049	$0{,}462.10^{-5}$
Épaisseur d' enrobage	0,0422	$-5{,}35.10^{-4}$

TAB. 5.5 – Indicateur d'élasticité de la poutre de Ragueneau à l'ELS.

A l'ELU, la poutre de Ragueneau fonctionne très proche de la rupture. Les paramètres liés à la gestion du comportement non linéaire sont donc de première importance. Il est cependant délicat à partir de considérations simples de formuler un choix étayé. Les indicateurs d'élasticité ont donc été calculés et les résultats sont présentés dans le tableau 5.6. Au regard des résultats obtenus, le module d'Young ainsi que le diamètre des aciers ont été écartés de l'analyse. En effet, le module d'Young n'a aucun poids dans l'analyse et le diamètre des aciers supérieurs concentre tout le poids.

Variable	**Élasticité à la moyenne**	**Élasticité à l'écart type**
Module d'Young du béton	0,00	0,00
Contrainte limite de traction du béton	0,3146	-0,0033
Épaisseur d' enrobage	-0,6571	0,0056
Limite élastique des aciers	9,55	-0,27
Diamètre des aciers sup.	20,84	1,01

TAB. 5.6 – Indicateur d'élasticité de la poutre de Ragueneau à l'ELU.

Réseau bayésien et résultats. Dans le but de réaliser l'actualisation des paramètres statistiques du modèle mécanique de la poutre considérée, deux réseaux bayésiens ont été construits. Le premier est relatif au cas de l'ELS et le second au cas de l'ELU. Les variables de cause sont celles qui ont été identifiées et dont les lois de probabilité sont présentées dans le tableau 5.4. Dans les deux cas, la variable d'effet est la flèche à mi-travée. Comme il a été mentionné précédemment, la méthode de Monte Carlo a été utilisée pour la détermination des tables de probabilité conditionnelles liées à chacun des réseaux. Pour cela, 15000 tirages ont été nécessaires. Les informations expérimentales disponibles (courbe force/flèche) ont été introduites dans les réseaux bayésiens dans le but de recaler les paramètres statistiques des lois de probabilité des variables de cause. Une étude de fiabilité a été conduite a posteriori pour calculer les densités actualisées.

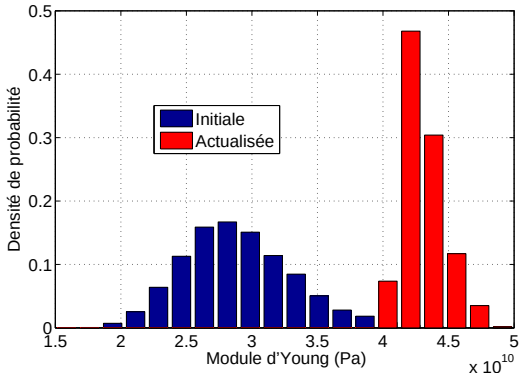


FIG. 5.8 – Densité du module d'Young initiale et actualisée - cas de l'ELS.

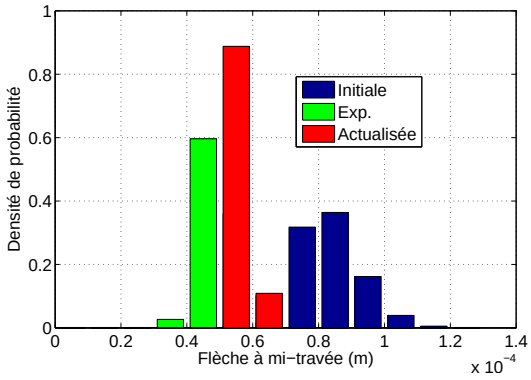


FIG. 5.9 – Densité de la flèche à mi-travée initiale et actualisée - cas de l'ELS.

Les résultats obtenus dans le cas de l'ELS sont présentés sur les figures 5.8 et 5.9. Il peut être noté que la densité du module d'Young a été actualisée de manière notable. Cela conduit à un écart entre les réponses numériques et expérimentales moyennes d'environ 9 % au lieu de 60 % comme initialement. Les résultats semblent donc satisfaisants. Dans le cas de l'ELU, les densités a priori et a posteriori sont présentées sur la figure 5.10. D'une manière générale, il peut être constaté que les valeurs des paramètres statistiques a posteriori conduisent à une diminution de la résistance globale de la poutre. Cela peut également s'observer sur la figure 5.11. La capacité portante moyenne actualisée se situe à un niveau plus proche des résultats expérimentaux. Par rapport au cas initial, l'écart entre les valeurs expérimentales moyennes et numériques moyennes n'est plus que de 10 % (initialement 21 %). Par ailleurs, il peut être remarqué que le gain obtenu dans le cas de l'ELS est bien supérieur à celui obtenu dans le cas de l'ELU. Cela peut s'expliquer en raison du caractère (quasi) linéaire du comportement mécanique de la poutre. Il peut être conclu que les résultats obtenus dans les deux cas sont satisfaisants et apportent donc des éléments de validation quant à l'approche proposée.

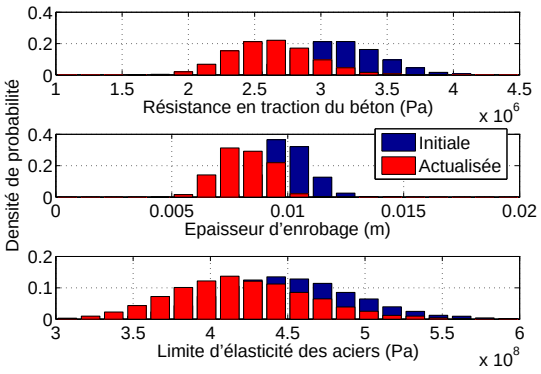


FIG. 5.10 – Densités des variables de cause initiales et actualisées - cas de l'ELU.

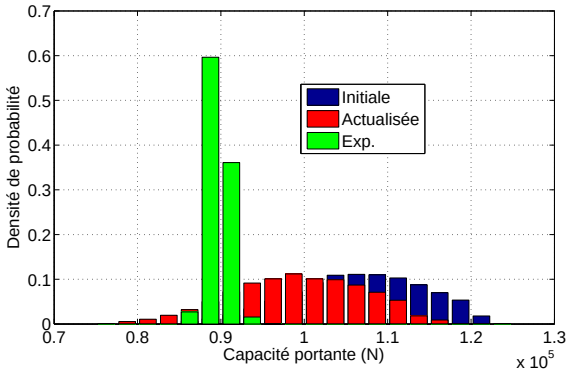


FIG. 5.11 – Densité de la flèche à mi-travée initiale et actualisée - cas de l'ELU.

5.5.2 Pont d'Örnsköldsvik

Les possibilités de l'approche proposée ont été évaluées sur la base du pont en béton armé analysé dans le chapitre précédent. Cet exemple nous a semblé particulièrement intéressant d'une part en raison de son échelle et d'autre part, en raison des importantes incertitudes qui portent sur les données expérimentales. En effet, parce que cet ouvrage existe, les paramètres mécaniques actuels

nominaux ont été identifiés par des essais mécaniques classiques (essais de compression, essai de traction, etc.). Appliquer l'approche de réactualisation proposée pourrait donc conduire à une meilleure estimation de ces propriétés sur la base des informations expérimentales disponibles. Le contexte ainsi que les différentes informations essentielles concernant cet ouvrage ont été présentés dans le chapitre précédent.

Modèle mécanique. Tout comme le cas d'étude précédent, le modèle mécanique moyen qui a été développé et exposé dans le chapitre précédent a été conservé. Dans le but de simuler un essai de chargement (passage de poids lourd sans effet dynamique), seule la partie linéaire élastique du comportement est considérée. Par ailleurs, contrairement au cas précédent, les simulations ont été contrôlées en force en non plus en déplacement.

Identification. Pour les mêmes raisons que celles évoquées dans le cas précédent, seul le module d'Young a été considéré comme variable aléatoire dans l'analyse. La loi de probabilité de cette variable a été identifiée par rapport aux informations fournies dans le rapport expérimental (Vervuurt et Leegwater, 2008). Une loi de type lognormale de moyenne 25400 MPa et de coefficient de variation de 15 % a été retenue. Le chargement est supposé déterministe et la variable observée est la flèche à mi-travée.

Réseau bayésien et résultats. Le réseau Bayésien qui correspond au cas d'une variable de cause (module d'Young) et d'une variable d'effet (flèche mi-travée) a été construit. Pour cela, la méthode de Monte Carlo avec 10000 tirages a été utilisée pour obtenir la table de probabilité conditionnelle. Les informations expérimentales en terme de courbe force/flèche ont été introduites pour effectuer le recalage. Les résultats sont présentés sur les figures 5.12 et 5.13. Il peut être remarqué que le module d'Young moyen initial semble avoir été expérimentalement sous-estimé. En effet, un module nominal de 25400 MPa a été initialement identifié alors que le module actualisé moyen est de 30000 MPa avec un coefficient de variation de 11,3 %. Cela conduit naturellement à une flèche à mi-travée moyenne de 3,41 mm. Ce résultat devient plus proche des données expérimentales. Il est toutefois essentiel de noter qu'il est délicat de définir une valeur moyenne du module d'Young sur l'ensemble de l'ouvrage étant donné le caractère, fortement hétérogène du béton, constaté sur le site de l'essai. Les résultats obtenus sont tout de même satisfaisants en considérant que l'actualisation a conduit à une meilleure estimation du comportement global de la structure.

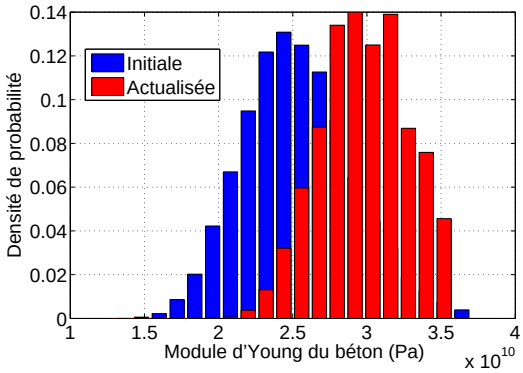


FIG. 5.12 – Densités du module d'Young du pont en béton armé initiale et actualisée.

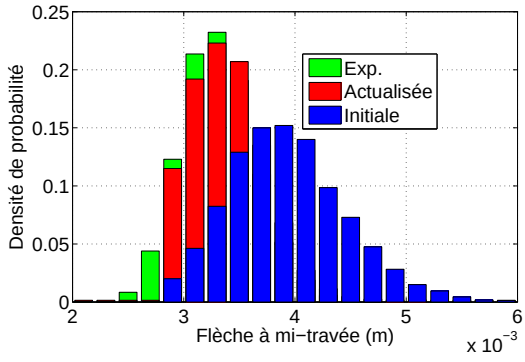


FIG. 5.13 – Densité de la flèche à mi-travée initiale et actualisée.

5.5.3 Bilan

Dans cette section, trois cas d'éléments de structures ont été sujets à une étude bayésienne. En effet, l'approche de requalification proposée a été utilisée dans son intégralité pour dégager des éléments de validation. En premier lieu, le cas de la poutre de Ragueneau armé chargée jusqu'à rupture a été considéré. Cet élément de structure a été étudié sur le plan mécanique dans le chapitre précédent ; le modèle développé a donc été réutilisé. Deux cas ont été pris en compte : le cas de l'ELS et le cas de l'ELU. Un tel choix a été fait dans le but d'apporter des éléments de validation de l'approche proposée lorsque l'on s'intéresse au comportement à rupture d'un élément de structure. Les résultats obtenus se sont avérés satisfaisants, en particulier dans le cas de l'ELS en raison du caractère faiblement non linéaire du comportement mécanique de la poutre. En second lieu, le cas du pont d'Örnsköldsvik a été considéré. Dans le but de se rapprocher des conditions d'un essai de chargement (passage de poids lourds), seule la phase linéaire du comportement a été considérée. Le modèle utilisé a été présenté dans le chapitre précédent. Les résultats obtenus sont satisfaisants. Il s'agit toutefois de bien noter qu'il reste très délicat de définir des caractéristiques moyennes pour l'ensemble de l'ouvrage compte tenu de son échelle. De manière générale, les différents exemples de structures qui ont été sujets à l'analyse bayésienne proposée ont permis de faire apparaître des éléments de validation de l'approche proposée. Cette dernière s'avère donc prometteuse et pertinente tant que son cadre d'application qui a été précisé reste respecté.

5.6 Conclusion

Dans ce chapitre, une méthodologie de requalification a été présentée. Cette dernière s'appuie sur une utilisation couplée des réseaux bayésiens et de la théorie de la fiabilité et permet d'actualiser les paramètres d'un modèle mécanique sur la base de l'information expérimentale disponible. Par ailleurs, elle s'intègre de manière naturelle dans un cadre probabiliste et permet donc une prise en compte des incertitudes qui entachent les différents paramètres du modèle. En premier lieu, le cadre théorique des réseaux bayésiens a été présenté. Il est ressorti de l'exposé que ce type d'outil permet une représentation de l'information à la fois qualitative (graphe acyclique et orienté) et quantitative (table de probabilité conditionnelle). Ce dernier permet également une prise en compte de l'information extérieure et peut être utilisé de manière non intrusive. En second lieu, une attention particulière a été accordée à la présentation des concepts essentiels de la théorie de la fiabilité. De manière plus précise, les différentes grandeurs classiquement utilisées dans une telle analyse ont été présentées et discutées. En troisième lieu, l'approche proposée a été exposée de manière détaillée. Son principe a été discuté et il est ressorti que trois entités bien identifiées ont été mises en relation : l'entité de prédiction, l'entité d'actualisation et enfin, l'entité d'observation. Leurs rôles respectifs ont été discutés. Une interface informatique a été développée de manière générique (indépendante du code de calcul) dans le but d'automatiser le dialogue entre les trois entités précédemment mentionnées. Une réflexion a été conduite quant au choix des variables à considérer dans l'analyse. En effet, dans le but d'apporter des éléments d'aide à la décision, un certain nombre de critères a été proposé pour permettre un choix non seulement plus aisé mais aussi justifié. Pour illustrer de manière simple l'intégralité de l'approche de requalification proposée, un exemple didactique a été traité. En dernier lieu, davantage d'éléments de validation ont été recherchés à travers une étude de cas faisant intervenir des éléments de structures de nature variée. La poutre de Ragueneau a tout d'abord été étudiée. Cette structure avait déjà été analysée mécaniquement dans le chapitre précédent. Les résultats obtenus sur la base de ce cas test ont montré que l'approche proposée peut être avantageusement mise en œuvre lorsque l'on s'intéresse au comportement à rupture d'un élément de structure. Ensuite, le cas du pont d'Örnsköldsvik a été considéré. Pour des raisons de coût de calcul évidentes, seule la phase élastique linéaire du comportement a été sujette à l'étude. Des

résultats pertinents ont été obtenus, toutefois, il semble assez peu physique de considérer un seul et unique module d'Young pour l'ensemble de l'ouvrage étant donné son échelle importante. Les résultats se sont avérés globalement satisfaisants. Il s'en suit donc que l'approche proposée et présentée dans ce chapitre semble être apte à fournir des résultats convenables dès lors que son cadre d'application est respectée.

Chapitre 6

Conclusion

Cette étude a porté sur « la modélisation des éléments de structures en béton armé dégradés par corrosion » et s'est intéressée particulièrement à « la problématique de l'interface acier/béton ». Notre contribution à ce sujet a été développée en quatre axes :

Le premier axe a été consacré à l'exposition d'une revue des travaux publiés dans la littérature. L'objectif de ce chapitre était d'identifier les mécanismes dissipatifs élémentaires liés non seulement à l'interface acier/béton mais aussi au béton. Les modèles les plus représentatifs des travaux publiés ont été présentés et discutés en vue de dégager un certain nombre d'objectifs ;

Le deuxième axe a été dédié à la présentation d'un cadre constitutif permettant de coupler élasticité, endommagement isotrope et glissement interne. Cette classe de lois de comportement a été particularisée d'une part au cas de l'interface acier/béton et, d'autre part, au cas du béton. L'ensemble des schémas d'intégration locaux a été explicité ;

Le troisième axe a permis de montrer quelques éléments de validation des modèles proposés. Pour cela, plusieurs cas d'éléments de structures, dégradés ou sains, ont été simulés. Chaque simulation a été réalisée dans l'objectif de tester un aspect du comportement bien identifié. Les différents résultats ont, en outre, permis de dégager un cadre d'application des différents modèles ;

Le quatrième axe présente une méthodologie de requalification des éléments de structures dégradés. L'approche proposée s'appuie sur une utilisation couplée des réseaux bayésiens avec la théorie de la fiabilité. Cette dernière permet de réactualiser en contexte probabiliste les variables d'entrée d'un modèle mécanique donné sur la base des informations observables disponibles. Les possibilités qu'elle offre ont été illustrées au travers plusieurs exemples d'éléments de structures.

L'évaluation des éléments de structures dégradés par corrosion reste une problématique d'actualité. Son importance est d'ailleurs renforcée de nos jours étant donné le caractère vieillissant de la majorité des ouvrages en béton armé du parc national. En outre, le phénomène de corrosion des armatures présentes dans le béton armé est clairement reconnu comme l'un des facteurs majeurs favorisant la perte de performance des ouvrages existants. Le chapitre 2 a permis, dans un premier temps, de mettre en lumière, à partir de travaux publiés dans la littérature, différents mécanismes dissipatifs liés à l'interface acier/béton et au béton. Ces derniers ont, dans un second temps, été confrontés aux modèles existants. Cela a permis de dégager un certain nombre d'objectifs en terme de modélisation mécanique. Il est ressorti de l'analyse bibliographique que les nombreux modèles constitutifs proposés dans la littérature ne permettaient souvent pas une description fine du comportement de l'interface acier/béton en présence de corrosion et sous chargement complexe. Ceci n'est pas seulement dû à une carence de modélisation mais essentiellement à une mauvaise connaissance des mécanismes dissipatifs locaux en présence de corrosion.

Le parti de développer un cadre numérique générique robuste a donc été retenu. Ce dernier est apte à recevoir davantage d'informations provenant de l'expérience grâce à certains paramètres matériaux globalisant (fonction W). Une partie de l'étude est consacrée au matériau béton. Il est ressorti que la classe d'équations constitutives proposée pouvait être mise à contribution pour formuler un modèle de béton simple et robuste, capable de prendre en compte la dissymétrie entre la traction et la compression, les déformations anélastiques, les effets hystérétiques et enfin, au moins de manière partielle, l'effet unilatéral.

Les développements théoriques liés à la classe d'équations constitutives proposée ont été présentés dans le chapitre 3 dans le cadre de la thermodynamique des processus irréversibles. Cette présentation a le mérite de montrer la consistance des équations proposées par rapport aux principes physiques de conservation et d'évolution. Chacun des mécanismes dissipatifs pris en compte a été décrit et justifié. Le cadre proposé a été adapté d'une part au cas de l'interface acier/béton en présence de corrosion et, d'autre part, au cas du béton. Dans le but d'offrir la possibilité de réaliser des calculs préliminaires qui ne demandent pas un coût prohibitif, le parti de proposer des versions simplifiées a été pris. Pour cela, le cadre de l'approche multifibre a été retenu. En particulier, une version du modèle d'interface acier/béton a été développée en s'appuyant sur une approche utilisée en dynamique des structures. Ainsi, le caractère imparfait de l'interface acier/béton a pu être pris en compte à partir de considérations simples au niveau de la fibre d'acier. Une étude de sensibilité locale des différents modèles a été présentée. Une attention particulière a été accordée à l'identification du rôle de chacun des paramètres matériaux présents dans les différentes lois. L'effet de leur variation sur la réponse locale qu'il est possible d'obtenir a été quantifié et des valeurs nominales ont été spécifiées. Lorsque cela a été possible (sous réserve de données disponibles), des comparaisons entre les réponses locales expérimentales et numériques ont été réalisées. Il est ressorti de cette analyse que la majorité des traits de caractère visés ont bien été pris en compte. Néanmoins, des éléments de validation et d'illustration plus discriminants des différents modèles ont été recherchés dans le but de dresser clairement leur cadre d'application.

Le chapitre 4 a été destiné à la présentation de plusieurs éléments de validation des modèles développés. Pour cela, plusieurs cas d'éléments de structures ont été choisis dans la littérature en fonction des aspects qu'ils permettaient d'étudier. D'une manière globale, quatre groupes de simulations ont été exposés. En premier lieu, dans le but de valider le modèle d'interface sur la base d'éléments de structures simples, un certain nombre d'essais de tirant (courts et longs) ont été simulés. Cela a conduit à valider la loi d'interface en présence d'états de contrainte simples. Les résultats obtenus ont été globalement satisfaisants. En second lieu, nous nous sommes concentrés à apporter des éléments de validation du modèle de béton proposé au travers de structures en béton sans acier. En particulier, des essais de cisaillement asymétrique ont été simulés et une étude de sensibilité au maillage a été exposée. En troisième lieu, le cas de structures en béton armé sans corrosion sous chargement cyclique a été analysé. Les résultats ont montré la pertinence des modèles proposés. Néanmoins, le fait que l'effet unilatéral ne soit pas pris en compte que de manière partielle implique que le cas des cycles traction/compression à forte intensité de chargement ne peut pas être décrit efficacement. L'introduction d'une fonction de refermeture des fissures doit alors être considérée. En dernier lieu, le cas d'éléments de structures en béton armé sujets au phénomène de corrosion a été étudié. Pour cela, des poutres en béton armé testées dans le cadre d'une large campagne expérimentale ont été simulées à différents degrés de corrosion d'une part à l'aide de l'approche simplifiée et, d'autre part, à l'aide de l'approche locale. Les résultats obtenus ont été discutés et la pertinence de l'approche simplifiée proposée a été mise en lumière. Pour terminer cette étude de cas, un pont en béton armé sujet à un essai mécanique dans le cadre d'un projet européen *Sustainable Bridges* a été simulé. Bien que

cet ouvrage n'ait pas été reconnu comme souffrant de la corrosion, une étude qualitative visant à évaluer l'effet d'une dégradation locale sur la réponse numérique globale de l'ouvrage a été conduite. L'allure des résultats obtenus a permis, qualitativement, de corroborer ceux publiés par d'autres auteurs. Ce chapitre s'est achevé en soulignant clairement le cadre d'application de chacun des modèles proposés. En particulier, dans le cas de l'interface acier/béton, quelques problèmes numériques lors de l'intégration du critère de Gurson ont été soulevés. L'identification des paramètres matériaux liés au phénomène de corrosion reste également une difficulté. Dans le cas du modèle de béton dans sa version complète, le cas de la prise en compte limitée du phénomène unilatéral a été discuté.

Le chapitre 5 a été dédié à la présentation d'une méthodologie de requalification des éléments de structures dégradés. Cette dernière vise à actualiser les paramètres d'entrée d'un modèle mécanique supposé satisfaisant mais non optimal grâce à l'information disponible pouvant provenir soit de jugements d'experts soit directement de l'expérience. L'approche proposée s'intègre de manière naturelle dans un contexte probabiliste, ce qui permet de prendre en compte les incertitudes qui entachent les différentes variables d'entrée. Après un bref exposé non seulement des réseaux bayésiens mais aussi de quelques concepts de la théorie de la fiabilité, une présentation détaillée de la méthodologie proposée a été donnée. En particulier, trois entités génériques ont été bien identifiées : une entité de prédiction, d'actualisation et d'observation. Ces trois entités communiquent entre elles grâce à une interface qui a été développée à cet effet. Les aspects liés au choix des variables aléatoires qu'il y a lieu de prendre en considération dans un processus d'actualisation ont été détaillés. En effet, dans bien des cas, le choix des variables à prendre en compte est réalisé de manière arbitraire. Dans le cadre de la présente étude, une attention particulière a été consacrée à fournir un certain nombre de critères de décision fondés sur les concepts de la théorie de la fiabilité. Plusieurs cas d'éléments de structures ont été traités pour illustrer cette approche. les résultats obtenus ont globalement été satisfaisants. Néanmoins, il peut être noté que la pertinence de cette approche est étroitement liée à la qualité des connaissances statistiques des variables impliquées dans l'analyse. Étant donné la méconnaissance, même statistique, des mécanismes locaux liés au phénomène de corrosion, il semble délicat de traiter des éléments de structures sujets à de la corrosion par l'approche proposée. Néanmoins, en supposant suffisante l'information disponible, le cadre de recalage robuste proposé semble approprié et prometteur.

La présente étude a permis d'aboutir à différents modèles de comportement qui ont été développés, implantés et testés sur plusieurs cas d'étude. Associés à la méthodologie de recalage robuste proposée, ces produits constituent donc les apports originaux de ce travail de thèse qu'il y a lieu de préciser. En premier lieu, un modèle d'interface acier/béton en présence de corrosion a été proposé. Deux versions ont été développées : une version locale et une version simplifiée, s'appuyant sur le formalisme multifibre. En second lieu, un modèle de béton a été développé en collaboration avec l'ENS de Cachan. De manière identique au cas de l'interface acier/béton, deux versions ont été développée : une version locale et une version multifibre. En dernier lieu, une méthodologie de recalage robuste fondée sur une utilisation couplée des réseaux bayésiens et de la théorie de la fiabilité a été proposée.

La pertinence des développements réalisés jusqu'ici peut être améliorée en considérant plusieurs perspectives de travail. Ces dernières peuvent être classées en deux catégories : d'une part les perspectives liées au cadre de comportement développé et, d'autre part, les perspectives liées à la détermination des ouvertures de fissures.

En premier lieu, une des faiblesses essentielles de la classe de loi de comportement développée

réside dans la prise en compte de l'effet unilatéral lors de cycle de traction/compression. Pour des raisons de simplicité et de consistance thermodynamique, cet effet n'est considéré que de manière partielle. Une perspective intéressante pourrait être de formuler une fonction de refermeture de fissure dans le but de prendre en compte cet effet de manière totale. En second lieu, un travail important reste à être réaliser sur l'identification de la fonction d'adhérence W. En effet, cette dernière n'a pu être identifiée que sur la base de quelques cas tests. A partir des résultats issus d'une campagne expérimentale mettant en jeu des essais de tirant réalisés à différents niveaux de corrosion, une identification plus générale de la fonction W pourrait être faite. Ces deux axes de travail nécessitent d'une part une étude analytique précise des équations constitutives proposée et, d'autre part, des moyens humains et financiers conséquents. Ils pourraient donc constituer le cœur de futures recherches.

L'information observable liée aux ouvertures de fissures est clairement de première importance. En effet, si de telles grandeurs avaient pu être prises en compte explicitement, elles auraient pu être introduites dans les calculs d'actualisation en s'appuyant sur la méthodologie proposée qui, jusqu'à ce jour, n'ont été réalisés que sur la base de mesures de flèches. La difficulté à laquelle nous sommes confrontés pour déterminer des ouvertures de fissures est liées à la nature continue des modèles constitutifs développés. Pour tenter d'apporter des éléments de réponse à une telle problématique, le développement d'une approche éléments discrets/finis faiblement couplée a été lancée en collaboration avec l'ENS de Cachan (Delaplace *et al.*, 2010), (Richard *et al.*, 2010c). L'idée maîtresse consiste dans un premier temps, à partir d'un calcul grossier de type éléments finis avec un modèle de type endommagement, à repérer les régions d'intérêts (fortement endommagées). Dans un second temps, ces régions sont maillées à l'aide d'éléments discrets et un recalcul est réalisé. La compatibilité entre les calculs discrets et continus est assurée en imposant le champ de déplacement calculé par éléments finis sur la frontière de la zone discrète. Les ouvertures de fissures sont alors accessibles de manière naturelle. Dans une perspective de rendre le couplage fort, un estimateur d'erreur a été développé. Un travail important reste à être réalisé pour d'une part automatiser le couplage (pour le rendre fonctionnel sur le terrain) et d'autre part, pour intégrer les résultats en terme d'ouvertures de fissure dans la méthodologie d'actualisation proposée. Bien qu'en cours de développement, cette approche couplée semble prometteuse. En effet, elle permet de bénéficier conjointement de la finesse de description des mécanismes de dégradation propre aux modèles continus et d'une description naturelle de la fissuration issue du caractère discret d'une partie de l'approche. A titre d'illustration, les résultats de la simulation de l'essai PCT3D proposée par (Feist et Hofstetter, 2007) sont présentés sur les figures 6.1 et 6.2. Ces dernières permettent de montrer la correspondance entre la surface d'endommagement et de fissuration.

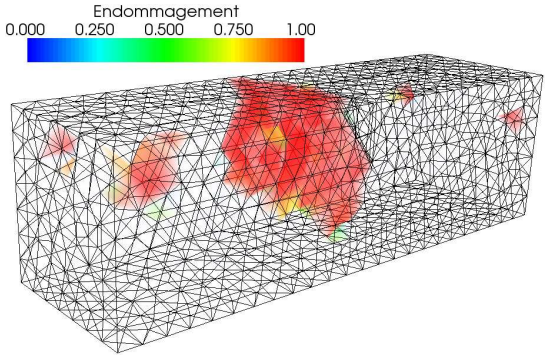


FIG. 6.1 – Surface d'endommagement.

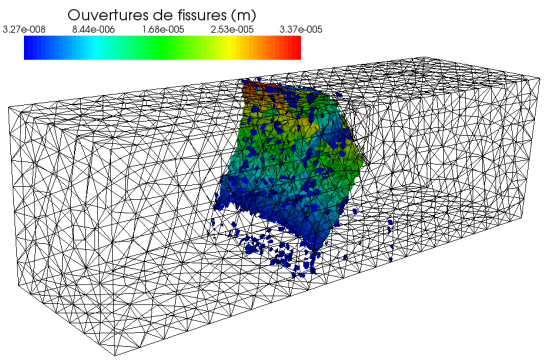


FIG. 6.2 – Surface de fissuration.

Bibliographie

T. Abdo et R. Rackwitz : A new beta-point algorithm for large time-invariant and time variant reliability problems. Reliability and optimization of structures, 3th WG 7.5 IFIB conference, 1990. Berkeley, USA.

A.A. Acosta et A.A. Sagues : Concrete cover cracking with localized corrosion of reinforcing steel. *In* V.M. Malhotra, éditeur : *5th CONMAT/ACI International Conference on Durability of Concrete*, 2000. Farmington Hills, USA.

L. Adelaide, B. Richard, F. Ragueneau et C. Cremona : Thermodynamical admissibility of a class of constitutive equation coupling elasticity, isotropic damage and internal sliding. *Comptes Rendus Mécanique*, 338:158–163, 2010.

A. Almusallam, A.S. Al-Gahtani et A.R. Aziz : Effect of reinforcement corrosion on bond strength. *Construction and building materials*, 10:123–129, 1996.

C. Andrade, C. Alonso et F.J. Molina : Cover cracking as a function of bar corrosion : Part 1-experimental test. *Materials ans Structures*, 26:453–464, 1993.

P.J. Armstrong et C.O. Frederick : A mathematical representation of the multiaxial bauschinger effect. Rapport technique, Chalmers University of Technology Göteborg Sweden, 1996. G.E.G.B., Report RD/B/N.

P. Bamonte, D. Coronelli et P.G. Gambarova : Size effets in high-bond bars. pages 43–52. International Conference on Bond in Concrete held at the Budapest University of Technology and Economics, 2002. Budapest, Hungary.

G.I. Barenblatt : The mathematical theory of equilibrium crack in the brittle fracture. *Advances in Applied Mechanics*, 7:55–125, 1962.

J. Baron et J. Olivier : *La durabilité des bétons*. Presses des Ponts et Chaussées, 1998.

Z.P. Bazant : Mechanics of distributed cracking. *Applied Mevhanic Riview*, 39(5), 1986. 31 pages.

Z.P. Bazant : Nonlocal damage theory based on micromechanic of crack interaction. *ACSE Engineering Mechanics*, 120:593–617, 1994.

Z.P. Bazant et B.H. Oh : Crack band theory for fracture of concrete. *Materials and structures*, 16(93):155–177, 1983.

Z.P. Bazant et G. Pijaudier-Cabot : Measurement of characteristic length of non local continuum. *J. Engrng. Mech.*, 115(4):755–767, 1989.

T. Belytschko et T. Black : Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing. *Int. J. Numer. Methods Engrg.*, 45(5):601–620, 1999.

L. Berto, P. Simioni et A. Saetta : Numerical modelling of bond behaviour in rd structures affected by reinforcement corrosion. *Engineering Structures*, 30:1375–1385, 2008.

K. Bhargava, A.K. Ghosh, Y. Mori et S. Ramanujam : Modeling of time to corrosion-induced cover cracking in reinforced concrete structures. *Cement and Concrete Research*, 35:2203–2218, 2005.

K. Bhargava, A.K. Ghosh, Y. Mori et S. Ramanujam : Model for cover cracking due to rebar corrosion in rc structures. *Engineering Structures*, 28:1093–1109, 2006.

K. Bhargava, A.K. Ghosh, Y. Mori et S. Ramanujam : Corrosion-induced bond strength degradation in reinforced concrete-analytical and empirical models. *Nuclear Engineering and Design*, 237:1140–1157, 2007.

D. Brancherie : *Modèles continus et discrets pour les problèmes de localisation et de rupture fragile et/ou ductile*. Thèse de doctorat, Ecole Normale Supérieure de Cachan, Cachan, France, 2003.

B. Bresler et V. Bertero : Behaviour of reinforced concrete under repeated load. *ASCE Journal of Structural Division - Proceedings of the American Society of Civil Engineering*, 94 (ST6):1567–1590, 1968.

J. Broomfield : *Corrosion of steel in concrete. Understanding, investigation and repair*. Editure E & FN, 1997.

N. Burlion, F. Gatingt, G. Pijaudier-Cabot et L. Daudeville : Compaction and tensile damage in concrete : constitutive modelling and application to dynamics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 183:291–308, 2000.

J.G. Cabrera : Deterioration of concrete due to reinforcement steel corrosion. *Cement and Concrete Composite*, 18:47–59, 1996.

J.G. Cabrera et P. Ghoddoussi : The effect of reinforcement corrosion on the strength of the steel/concrete bond. In International Conference on Bond in Concrete, 1992. Riga, Latvia.

J. Cairns et R.B. Abdullah : Bond strength of black epoxy-coated reinforcement - a theoretical approach. *ACI Material Journal*, 93(4):363–369, 1996.

J. Cairns, Y. Du et D. Law : Influence of corrosion on the friction characteristics of the steel-concrete interface. *Construction and Building Materials*, 21(1):190–197, 2007.

A. Castel : *Couplage mécanique et corrosion dans les éléments de béton armé*. Thèse de doctorat, Université Paul Sabatier, Toulouse, France, 2001.

A. Castel, R. François et G. Arliguie : Modèle de comportement mécanique du béton armé corrodé. *C.R. Académie des Sciences de Paris*, 330:45–50, 2002.

CEB-FIB : Ceb-fib model code 1990. design code. Rapport technique, Comité Euro-international du Béton, 1993.

J.L. Clément : *Interface acier-béton et comportement des structures en béton armé : caractérisation - modélisation*. Thèse de doctorat, Ecole Normale Supérieure de Cachan, Cachan, France, 1987.

D. Combescure et F. Wang : Assesments of existing rc structures under severe dynamic loading using non linear modelling. CONSEC 07, 2007. Tours, France.

D. Coronelli : Corrosion cracking and bond strength modeling for corroded bars in reinforced concrete. *ACI Structural Journal*, 99(3):267–276, 2002.

D. Coronelli et P. Gambarova : Structural assessment of corroded reinforced concrete beams : Modeling guidelines. *ASCE Journal of Structural Engineering*, 130(8):1214–1224, 2004.

J.V. Cox et L.R. Herrmann : Development of a plasticity bond model for reinforcement. *Mechanics of Cohesive-Frictional Materials*, 3:155–180, 1998.

J.V. Cox et L.R. Herrmann : Validation of a plasticity bond model for reinforcement. *Mechanics of Cohesive-Frictional Materials*, 4:361–389, 1999.

C. Cremona : *Cours de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées : Sécurité structurale des ouvrages*. Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 2005.

C. Cremona et M.J. Houde : Benchmark des poutres de la rance - modélisation déterministe et probabiliste du comportement mécanique simplifié du corps d'épreuve. *Revue européenne de Genie Civil*, 2006.

M.A. Crisfield et J. Wills : Analysis of r/c panels using different concrete models. *Engineering Mechanics ASCE*, 115:578–597, 1989.

A. D'Ambrisi et F.C. Filippou : Modeling of cyclic shear behaviour in rc members. *ASCE Journal of Structural Engineering*, 125(10):1143–1150, 1999.

A. Daoud : *Etude expérimentale de la liaison entre l'acier et le béton autoplaçant - contribution à la modélisation numérique de l'interface*. Thèse de doctorat, Institut National des Sciences Appliquées de Toulouse, Toulouse, France, 2003.

R. de Borst et H. Muhlhaus : Gradient dependent plasticity : formulation and algorithmic aspects. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 35:521–540, 1992.

F. Deby : *Approche probabiliste de la durabilité des béton en environnement marin*. Thèse de doctorat, Laboratoire Matériaux et Durabilité des Constructions, Toulouse, France, 2008.

A. Delaplace, B. Richard et F. Ragueneau : Combining finite elements and discrete elements methods for fine crack description. *International journal of Solids and Structures*, en soumission, 2010.

J.M. Desir, M.R.B. Romdhane, F.J. Ulm et E.M.R. Fairbairn : Steel-concrete interface : revisiting constitutive and numerical modeling. *Computers and structures*, 71:489–503, 1999.

R. Desmorat : Positivité de la dissipation intrinsèque d'une classe de modèles d'endommagement anisotropes non standards. *C.R. Mécanique*, 334:587–592, 2006.

R. Desmorat, F. Gatuingt et F. Ragueneau : Nonlocal anisotropic damage model and related computational aspects for quasi-brittle materials. *Engineering Fracture Mechanics*, 74:1539–1560, 2006.

J. Dolbow, N. Moes et T. Belytschko : An extended finite element method for modeling crack growth with frictional contact. *Computers methods in applied mechanics and engineering*, 190:6825–6846, 2001.

N. Dominguez : *Etude de la liaison acier-béton : De la modélisation du Phénomène à la Formulation d'un Elément Finis enrichi « Béton Armé »*. Thèse de doctorat, Ecole Normale Supérieure de Cachan, Cachan, France, 2005.

Y.G. Du, A.H.C. Chan et L.A. Clark : Finite element analysis of the effects of radial expansion of corroded reinforcement. *Computers and Structures*, 84:917–929, 2006.

J.F. Dubé, G. Pijaudier-Cabot et C. LaBorderie : A rate dependent damage model for concrete in dynamics. *Journal of Engineering Mechanics ASCE*, pages 939–947, 1996.

D.S. Dugdale : Yielding of steel sheets containing slits. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 8:100–104, 1960.

R. Eligehausen, E.P. Popov et V.V. Bertero : Local bond stress-slip relationships of deformed bars under generalized excitations. Rapport technique, National Science Foundation, 1983.

S. Epaillard, B. Richard, C. Cremona et L. Elfgren : Non linear finite element analysis of a 50 year old reinforced concrete bridge : comparison with experimental data and sensitivity analysis. IABMAS 2010, 2009. Philadelphia, USA.

C. Fang, K. Gylltoft, K. Lundgren et M. Plos : Effect of corrosion on bond in reinforced concrete under cyclic loading. *Structural Engineering and Mechanics*, 19(3):337–346, 2006.

C. Feist et G. Hofstetter : Validation of 3d crack propagation in plain concrete. part i : Experimental investigation - the pct3d test. *Computers and concrete*, 4(1):49–66, 2007.

D. Fokwa et Y. Berthaud : *Matériaux hétérogènes : analyse expérimentale et modélisation numérique par une approche hiérarchique*. Thèse de doctorat, Université Paris 6, Paris, France, 1993.

C. Frantzeskakis : *Contribution à la modélisation des structures en béton armé par la méthodes des éléments finis*. Thèse de doctorat, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, Champs sur Marnes, France, 1987.

P.G. Gambarova et G.P. Rosati : Bond and splitting in bar pull-out : behavioural laws and concrete cover role. *Magazine of Concrete Research*, 49(179):99–110, 1997.

O.J. Gastebled et I.M. May : Numerical simulation of pulled specimens. *ACI Structural Journal*, 97(2):308–315, 2000.

M.G.D. Geers, R. de Borst et R.H.J. Peerlings : Damage and crack modelling in single-edge and double-edge notched concrete beams. *Engineering Fracture Mechanics*, 65:247–261, 2000.

M. Ghandehari, S. Krishnaswamy et S. Shah : Bond-induced longitudinal fracture in reinforced concrete. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 67:740–748, 2000.

S. Ghavamian et J. Mazars : Stratégie de calculs simplifiés pour l'analyse du comportement des structures en ba : le code eficos. *Revue Française de Génie Civil*, 2(1):61–90, 1998.

Y. Goto : Cracks formed in concrete around bars. *ACI Journal*, 68(4):740–748, 1971.

W.G. Gray et S.M. Hassanizadeh : General conservation equations for multiphase systems : 1. averaging technique. *Advanced Water Research*, 2:131–144, 1979a.

W.G. Gray et S.M. Hassanizadeh : General conservation equations for multiphase systems : 2. mass, momenta, energy and entropy transfer. *Advanced Water Research*, 2:191–203, 1979b.

J. Guedes, P. Pegon et A. Pinto : A fibre timoshenko beam element in castem2000. Special publication Nr. I.94.31, J.R.C., I-21020, Joint Research Center, 1994. Ispra, Italy.

A.L. Gurson : Continuum theory of ductile rupture by void nucleation and growth : Part i-yield criteria and flow rules for porous ductile media. *Engineering Materials and Technology*, 99:461–490, 1977.

J. Hadamard : *Leçons sur la propagation des ondes et les équations de l'hydrodynamique*. Hermann, Paris, 1903.

M.H. Harajli : Development/splice strength of reinforcing bars embedded in plain and fiber reinforced concrete. *ACI structural Journal*, 91(5):511–520, 1994.

A.M. Hasofer et C. Lind : Exact and invariant second-moment code format. *Journal of the Engineering Mechanics division*, 100, 1974.

M. Hassanzadeh : *Behavior of fracture process zones in concrete influenced by simultaneously applied normal and shear displacements*. Thèse de doctorat, Lund Institute of Technology, Lund, Sweden, 1991.

R. Hill : A general theory of uniqueness and stability in elasticplastic solids. *Journal of Mechanics and Physics of solids*, 6:236–249, 1958.

R. Hill : Acceleration waves in solids. *Journal of Mechanics and Physics of solids*, 10:1–16, 1962.

A. Hillerborg : The theoretical basis of a method to determine the fracture energy g_f of concrete. *Materials and structures*, 18(4):291–296, 1985.

A. Ibrahimbegovic et E.L. Wilson : Unified computational model for static and dynamic frictional contact analysis. *International Journal for NUmerical Methods in Engineering*, 34:233–247, 1992.

L. Jason, C. LaBorderie, C. Giry, B. Richard, M. Chambart et G. Thillard : Benchmark on the cracking simulation of reinforced concrete ties. FRAMCOS'10, 2010. Seoul, Korea.

M. Jirasek et T. Zimmermann : Analyse or rotating crack model. *ACSE Engineering Mechanics*, 124(8):842–851, 1998a.

M. Jirasek et T. Zimmermann : Rotating crack model with transition to scalar damage. *ACSE Engineering Mechanics*, 124(3):227–283, 1998b.

Y. Mori S. Ramanujam K. Bhargava, A.K. Ghosh : Analytical model for time to cover cracking in rc structures due to rebar corrosion. *Nuclear engineering and Design*, 236:1123–1139, 2006.

L.M. Kachanov : Time of the rupture process under creep conditions. *Izvestiya Akademii Nauk SSR Otd Tekh*, 8:26–31, 1958.

S. Khalfallah et S. Hamimed : Bond slip analysis of reinforced concrete members. *European Journal of Environmental and Civil Engineering*, 9(4):509–521, 2005.

P. Kotronis, L. Davenne et J. Mazars : Poutre 3d multifibre timoshenko pour la modélisation des structures en béton armé soumises à des chargements sévères. *Revue Française de Génie Civil*, 8(9-3):285–306, 2004.

P. Kotronis, F. Ragueneau et J. Mazars : A simplified modelling strategy for r/c walls satisfying ps92 and ec8 design. *Engineering Structures*, 27:1197–1208, 2005.

H.B. Kupfer et K.H. Gerstle : Behaviour of concrete under biaxial stresses. *ASCE Engineering Mechanics*, 99:853–856, 1973.

C. LaBorderie : *Phénomènes Unilatéraux dans un Matériau Endommageable : Modélisation et Application à l'Analyse de Structures en Béton.* Thèse de doctorat, Ecole Normale Supérieure de Cachan, Cachan, France, 1991.

C. LaBorderie et G. Pijaudier-Cabot : Etude expérimentale des matériaux renforcés - détermination des lois de comportement de l'interface fibre/béton. Rapport technique, ENS Cachan/LMT, 1987.

P. Ladevèze et J. Lemaître : Damage effective stress in quasi unilateral conditions. 16th International congress of theoretical and applied mechanics, 1984. Lyngby, Denmark.

H.S. Lee, F. Tomossawa et T. Noguchi : Fundamental study on evaluation of structural performance of reinforced concrete beam damaged by corrosion if longitudinal tensile main rebar by finite element method. *Jour. of Struct. et Conct. Ing.*, 506:43–50, 1998.

M. Lemaire : *Structural reliability.* Hermes Science, 2005.

J. Lemaître et J.L. Chaboche : *Mécanique des Matériaux Solides.* Dunod, 1985.

P. Longuet, L. Burglen et A. Zelwer : La phase liquide du ciment hydraté. *Revue du Matér. Constr.*, 676:35–41, 1976.

L.N. Lowes : *Finite element modeling of reinforced concrete beam-columm bridge connections.* Thèse de doctorat, University of California, Berkeley, USA, 1999.

J. Lubliner : *Plasticity theory.* Mac-Millan, 1990.

J. Lubliner, J. Olivier, S. Oller et E. Onate : A plastic-damage for concrete. *Int. J. Solids structures*, 25:299–326, 1989.

B.M. Luccioni, D.E. López et R.F. Danesi : Bond-slip in reinforced concrete elements. *ASCE Journal of Structural Engineering*, 131:1690–1700, 2005.

K. Lundgren : *Three-Dimensional Modelling of Bond in Reinforced Concrete : Theoretical Model, Experiments and Applications.* Thèse de doctorat, Chalmers University of Technology, Göteborg, Sweden, 1999.

K. Lundgren : Bond between corroded reinforcement and concrete. Rapport technique, Chalmers University of Technology Göteborg Sweden, 2001.

K. Lundgren : Modelling the effect of corrosion on bond in reinforced concrete. *Magazine of Concrete Research*, 54(3):165–173, 2002.

K. Lundgren : Bond between ribbed bars and concrete. part 1 : Modified model. *Magazine of Concrete Research*, 57(7):371–382, 2005a.

K. Lundgren : Bond between ribbed bars and concrete. part 2 : The effect of corrosion. *Magazine of Concrete Research*, 57(7):383–395, 2005b.

L.A. Lutz et P. Gergely : Mechanics of bond and slip of deformed bars in concrete. *ACI Journal*, 64(11):711–721, 1967.

T.E. Maaddawy et K. Soudki : A model for prediction of time from corrosion initiation to corrosion cracking. *Cement and concrete composites*, 29:168–175, 2007.

B.N. Maker et T.A. Laursen : A continuum-based finite element formulation for the implicit solution of multibody, large deformation frictional contact problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 36:3451–3485, 1993.

B.N. Maker et T.A. Laursen : A finite element formulation for rod/continuum interactions : the one-dimensional slideline. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 37:1–18, 1994.

J. Mandel : Conditions de stabilitée et postulat de drucker. In J. Kravtchenko et P.M. Sirieys, editors, Rheology and Soil Mechanics, 1966. Grenoble, France.

P.S. Mangat et M.S. Elgalf : Bond characteristics of corroding reinforcement in concrete beams. *At. Struc.*, 32:89–97, 1999a.

P.S. Mangat et M.S. Elgalf : Flexural strength of concrete beams with corroding reinforcement. *ACI Struc. Jour.*, 96:149–158, 1999b.

J.J. Marigo : Formulation d'une loi d'endommagement d'un matériau élastique. *Comptes Rendus Mécanique*, 292, 1981.

M. Matallah et C. LaBorderie : Inelasticity-damage based model for numerical modeling of concrete cracking. *Engineering Fracture Mechanics*, 76:1087–1108, 2009.

G.A. Maugin : *The thermodynamics of plasticity and fracture.* Cambridge University Press, 1992.

J. Mazars : *Application de la mécanique de l'endommagement au comportement non-linéaire et à la rupture du béton de structure.* Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie (Paris VI), 1984.

J. Mazars, P. Kotronis, F. Ragueneau et G. Casaux : Using multifiber beams to account for shear and torsion applications to concrete structural elements. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 195:7264–7281, 2006.

R.E. Melchers : *Structural reliability, Analysis and Prediction.* Wiley, 1999.

A. Millard, V. L'Hostis, K. Beddiar, Y. Berthaud et S. Care : Modelling the cracking of a reinforced concrete structure sumitted to corrosion of steel - first validation of a damage model based on experimental results. RILEM-DOCE, 2004. Barcelona, Spain.

S.M. Mirza et J. Houde : Study of bond stress-slip relationship in reinforced concrete. *ACI Journal Symposium Paper*, 76(2):19–46, 1979.

N. Moes et T. Belytschko : Extended finite element method for cohesive crack growth. *Engineering fracture mechanics*, 69:813–833, 2002.

F.J. Molina, C. Alonso et C. Andrade : Cover cracking as a function of bar corrosion : Part 2-numerical model. *Materials ans Structures*, 26:532–548, 1993.

G. Monti, F.C. Filippou et E. Spacone : Analysis of hysteretic behaviour of anchored reinforcing bars. *ACI Structural Journal*, 94(2):248–261, 1997.

H.B. Muhlhaus et E.C. Aïfantis : A variational principle for gradient plasticity. *International Journal of Solids and Structures*, 28:845–857, 1991.

P. Naïme, P.H. Wuillemin, P. Leray, O. Pourret et A. Becker : *Réseaux Bayésiens.* Eyrolles, 2007.

A. Needleman et V. Tvergaard : An analysis of ductile rupture in notched bars. *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, 32:461–490, 1984.

A. Needlemann : Material rate dependence and mesh sensitivity in localization problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 63:69–85, 1988.

A. Neville : Corrosion of reinforcement. *Concrete*, pages 135–190, 1983.

D. Ngo et A.C. Scordelis : Finite elements analysis of reinforced concrete beams. *American Concrete Institute*, 64(14):152–163, 1967.

A.H. Nilson : Nonlinear analysis of reinforced concrete by the finite element method. *American Concrete Institute*, 65(9):757–766, 1968.

J. Oliver : Modelling strong discontinuities in solid mechanics via strain softening constitutive equations. part 1 : fundamentals. *International journal for numerical methods in engineering*, 39:3575–3600, 1996a.

J. Oliver : Modelling strong discontinuities in solid mechanics via strain softening constitutive equations. part 2 : numerical simulation. *International journal for numerical methods in engineering*, 39:3601–3623, 1996b.

J. Olivier : A consistent characteristic length for smeared cracking models. *Int. J. Num. Methods Eng.*, 28:461–478, 1989.

M. Ortiz et J.C. Simo : An analysis of a new class of integration algorithms for elastoplastic constitutive relations. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, 23:353–366, 1986.

A. Ouglova : *Etude du comportement mécanique des structures en béton armé atteintes part la corrosion.* Thèse de doctorat, Ecole Normale Supérieure de Cachan, Cachan, France, 2004.

J. Ozbolt et Z.P. Bazant : Numerical smeared fracture analysis : Non local microcrack interaction approach. *Int. J. of Numerical Methods in Engineering*, 39(4):163–179, 1996.

J. Ozbolt, S. Lettow et I. Kozar : Discrete bond element for 3d finite element analysisof reinforced concrete structures. pages 9–19. International Conference on Bond in Concrete held at the Budapest University of Technology and Economics, 2002. Budapest, Hungary.

R.H.J. Peerlings, R. de Borst, W.A.M. Brekelmans et J.H.P. de Vree : Gradient-enhanced damage for quasi-brittle materials. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, 39:3391–3403, 1996.

M. Petrangeli, P.E. Pinto et V. Ciampi : Fiber element for cyclic bending and shear of rc structures. i : Theory. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 125(9):994–1001, 1999.

G. Pijaudier-Cabot et Z.P. Bazant : Non-local damage theory. *Journal of Engineering Mechanics ASCE*, 113:1512–1533, 1987.

I. Pètre-Lazar et B. Gérard : Mechanical behaviour of corrosion products formed at the steel-concrete interface. testing and modelling. *In Condition monitoring of materials and structures*, 2000.

R. Rackwitz et B. Fiessler : Structural reliability under combined random load sequences. *Computers and structures*, 9, 1978.

F. Ragueneau : *Fonctionnement dynamique des structures en béton.* Thèse de doctorat, Ecole Normale Supérieure de Cachan, 1999.

F. Ragueneau, R. Desmorat et F. Gatuingt : Anisotropic damage modelling of biaxial behaviour and rupture of concrete structures. *Computers and Concrete*, 5(4):417–434, 2008.

F. Ragueneau, N. Dominguez et A. Ibrahimbegovic : Thermodynamic-based interface model for cohesive brittle materials : Application to bond slip in rc structures. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 195(52):7249–7263, 2006.

F. Ragueneau, B. Richard, C. Cremona et Y. Berthaud : Damage mechanics applied to the modelling of corroded reinforced concrete structures : steel, concrete and steel-concrete interface. *European Journal of Environemental and Civil Engineering*, accepté, 2010.

A. Raharinaivo, J. Arliguie, T. Chaussadent, G. Grimaldi, G. Pollet et V. Taché : *La corrosion et la protection des aciers dans le béton.* Presses des Ponts et Chaussées, 1998.

S. Ramtani : *Contribution à la modélisation multiaxiale du béton incluant les effets unilatéraux.* Thèse de doctorat, Université Paris 6, Paris, France, 1990.

Y.R. Rashid : Analysis prestressed concrete pressure vessels. *Nuclear Engng. and design*, 7:334–344, 1968.

G. Rehm : The fundamental law of bond. In proceedings of the symposium on Bond and Crack Formation in Reinforced Concrete, 1958. Paris, France.

G. Rehm : The basic principle of bond between steel and concrete. *Deustcher Ausschuss für Stahlbeton*, 138, 1961.

J.M. Reynouard : *Structures planes en béton armé. Elaboration d'un modèle de comportement jusqu'à la ruine et résolution numérique.* Thèse de doctorat, Université Claude Bernard, Lyon, France, 1974.

J.R. Rice : The localization of plastic deformation. In Theoretical and Applied Mechanics. Proceedings of the 14th IUTAM Congress, 1976. Delft, The Netherlands.

B. Richard, C. Cremona et L. Adelaide : An efficient robust updating methodology based on bayesian networks : application to existing structures. *Reliability Engineering and System Safety*, en soumission, 2010a.

B. Richard, C. Cremona et L. Adelaide : A coupling bayesian/reliability approach for robust updating applications. ICASP'11, 2011. Zurich, Switzerland.

B. Richard, C. Cremona, F. Ragueneau et L. Adelaide : A simplified multifiber approach for assessing the load carrying capacity of reinforced concrete structures subjected to corrosion. *ASCE Engineering Mechanics*, en soumission, 2010b.

B. Richard, A. Delaplace, C. Cremona et F. Ragueneau : Combining finite/discrete element models : a post-processing tool for fine crack in concrete structures. FRAMCOS'10, 2010c. Seoul, Korea.

B. Richard, S. Epaillard, C. Cremona, L. Elfgren et L. Adelaide : Non linear finite element analysis of a 50 years old reinforced concrete trough bridge. *Engineering Structures*, accepté, 2010d.

B. Richard, E. Martin, F. Ragueneau, C. Cremona et L. Adelaide : Three-dimensional numerical analysis of reinforced concrete beams subjected to corrosion. ECCM'10, 2010e. Paris, France.

B. Richard, F. Ragueneau, L. Adelaide, C. Cremona et J.L. Tailhan : Contribution à la modélisation des ouvrages dégradés par corrosion. Rencontres AFGC GC'09, 2009a. Cachan, France.

B. Richard, F. Ragueneau, L. Adelaide, C. Cremona et J.L. Tailhan : Formulation thermodynamique d'une loi de comportement d'un matériau quasi-fragile couplant élasticité, endommagement et frottement : le béton. CFM'09, 2009b. Marseille, France.

B. Richard, F. Ragueneau, L. Adelaide, C. Cremona et J.L. Tailhan : Modélisation du comportement de l'interface acier/béton en présence de corrosion. CFM'09, 2009c. Marseille, France.

B. Richard, F. Ragueneau, C. Cremona et L. Adelaide : A multifiber approach to describe the ultimate behaviour of corroded reinforced concrete structures. Euro-C 2010, 2010f. Rohmoos/Schladming, Austria.

B. Richard, F. Ragueneau, C. Cremona et L. Adelaide : A three-dimensional steel-concrete interface model including corrosion effects. *Engineering Fracture Mechanics*, 77:951–973, 2010g.

B. Richard, F. Ragueneau, C. Cremona, L. Adelaide et J.L. Tailhan : Isotropic damage model coupled to frictional sliding to model the cylic behaviour of reinforced concrete elements. COMPLASX'09, 2009d. Barcelona, Spain.

B. Richard, F. Ragueneau, C. Cremona, L. Adelaide et J.L. Tailhan : A new formulation based on thermodynamical assessments to model steel-concrete interface behaviour including corrosion effects. COMPLASX'09, 2009e. Barcelona, Spain.

B. Richard, F. Ragueneau, C. Cremona, L. Adelaide et J.L. Tailhan : Isotropic continuum damage mechanics for concrete under cyclic loading : stiffness recovery, inelastic strains and frictional sliding. *Engineering Fracture Mechanics*, 77:1203–1223, 2010h.

J. Rodriguez, L.M. Ortega et J. Casal : Load carrying capacity of concrete structures with corroded reinforcement. *Construction and Building Materials*, 11:239–248, 1997.

J. Rodriguez, L.M. Ortega, F. Munoz et A.M. Garcia : Corrosion des armatures et durée de service des construction en béton. In Symposium International CEFRACOR -Diagnostic 98, 1995. Saint Rémy les Chevreuses, France.

M.R.B. Romdhane et F.J. Ulm : Computational mechanics of the steel-concrete interface. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 26:99–120, 2002.

P. Rossi et S. Richer : Numerical modelling of concrete cracking based on a stochastic approach. *Materials and Structures*, 20:334–337, 1987.

P. Rossi et F.-J. Ulm : Size effects in the biaxial tensile-compressive behaviour of concrete : physical mechanisms and modelling. *Materials and Structures*, 30:210–216, 1997.

P. Rossi, F.-J. Ulm et F. Hachi : Compressive behavior of concrete : physical mechanisms and modeling. *Journal of Engineering Mechanics ASCE*, 11:1038–1043, 1996.

P. Rossi et X. Wu : Probabilistic model for material behaviour analysis and appraisement of concrete structures. *Magazine of concrete research*, 44(161):271–280, 1992.

P. Rossi, X. Wu, F. Le Maou et A. Belloc : Scale effect of concrete in tension. *Materials and Structures*, 20:437–444, 1997.

K.K. Sagoe-Centsil et F.P. Glasser : Analysis of the steel : concrete interface. pages 74–86. Elsevier Science Publishers, 1990. London, UK.

P. Sandberg : Critical evaluation of factors affeting chloride initiated reinforcement corrosion in concrete. Rapport technique, Division of Building Materials, Lund Institute of Technology, Sweden, 1995.

E. Schlangen : *Experimental and numerical analysis of fracture processes in concrete.* Thèse de doctorat, Delft University of Technology, Delft, The Netherlands, 1993.

S. Sener, Z.P. Bazant et E. Becq-Giraudon : Size effet on failure of bond splices of steel bars in concrete beams. *ASCE Journal of Structural Engineering*, 125(6):653–660, 1999.

J.C. Simo et J.W. Ju : Strain and stress based continuum damage models i - formulation. *Int. J. Solids structures*, 23(7):821–840, 1995.

E. Spacone, F.C. Filippou et F.F. Taucer : Fiber beam column model for nonlinear analysis of rc frames. i : Formulation. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 25(7):711–725, 1996.

A. Sulaimani, K. Kaleemullah, I.A. Basunbul et M. Rasheeduzzafar : Influence of corrosion and cracking on bond behaviour and strength of reinforced concrete members. *ACI Structure Journal*, 87:220–231, 1990.

J.L. Tailhan, S. DalPont et P. Rossi : From local to global probabilistic modeling of concrete cracking. *Anals of Solids and Structural Mechanics*, 1(2):103–115, 2010.

T.P. Tassios : Properties of bond between concrete and steel under load cycles idealizing seismic actions. Rapport technique, Comité Euro-international du Béton, 1979.

R. Tepfers : Cracking of concrete cover along anchored deformed reinforcing bars. *Magazine of Concrete Research*, 31(106):3–12, 1979.

M. Terrien : Emission acoustique et comportement mécanique post critique d'un béton sollicité en traction. *BLPC*, 105:65–72, 1980.

T.Y. Thomas : *Plastic flow and fracture of solids.* Academic Press, New York, 1961.

S.C. Ting et A.S. Nowak : Effect of reinforcing steel area loss on flexural behavior of reinforced concrete beams. *ACI Structural Journal*, 88(3):309–314, 1991.

K. Turk, S. Caliskan et M.S. Yildirim : Influence of loading conditions and reinforcement size on the concrete/reinforcement bond strength. *Cement and Concrete Research*, 36:548–555, 2006.

K. Tuutti : Corrosion of steel in concrete. Rapport technique, CBI forsking research, Sweden, 1982.

T. Uomoto et S. Mirsa : Behaviour of concrete beams and columns in marine environment when corrosion of reinforcing bars take place. *ACI Special Publication*, SP-109:127–145, 1998.

D.V. Val, M.G. Stewart et R.E. Melchers : Effect of reinforcement corrosion on reliability of highway bridges. *Engineer Structures*, 11:1010–1019, 1998.

A.H.J.M. Vervuurt et G. Leegwater : Tno report 2008-d-r0010. tno built environment sustainable bridges sb7.3 field test of a concrete bridge in Örnsköldsvik. Rapport technique, Delft University, The Netherlands, 2008.

S. Viawanthanatepa : *Bond deterioration of reinforced bars embedded in confined concrete blocks*. Thèse de doctorat, University of California, Berkeley, USA, 1979.

N.A. Vu : *Etude du comportement mécanique de poutres en béton armé dégradées par corrosion*. Thèse de doctorat, Institut National des Sciences Appliquées de Toulouse, Toulouse, France, 2008.

J.C. Walraven : *Aggregate interlock : a theoretical and experimental analysis*. Thèse de doctorat, TU, Delft, The Netherlands, 1980.

F. Wang, S. Lavarenne, T. Chaudat, D. Combescure, T. Payen et B. Fouré : Simulation analysis of static and shaking table tests on rc columns with insufficient lap splices. SMIRT 19th Conference, 2007. Toronto, Canada.

X. Wang et X. Liu : Bond strength modeling for corroded reinforcements. *Construction and Building Materials*, 20:177–186, 2006.

K. Willam, E. Pramono et S. Sture : Fundamental issues of smeared crack models. pages 192–207. In International Conference on Fracture of concrete and rock,, 1987. Bethel, USA.

J. Zuo et D. Darwin : Bond slip of high relative rib area bars under cyclic loading. *ACI Journal*, 97(2):331–334, 2000.

Annexe A

Paramètres utilisés pour les simulations numériques

Dans cet annexe, les paramètres matériaux identifiés pour réaliser l'ensemble des simulations présentées dans cette étude ont été regroupés dans les différents tableaux qui suivent.

Notation	**Sens physique**	**Valeur nominale**	**Unité**
$K_{\mathbf{n}}$	Rigidité normale	$8,2.10^{10}$	Pa.m^{-1}
$K_{\mathbf{t}}$	Rigidité tangentielle	$5,0.10^{10}$	Pa.m^{-1}
$K_{\mathbf{b}}$	Rigidité binormale	$5,0.10^{10}$	Pa.m^{-1}
Y_0	Seuil initial en énergie pour l'endommagement	200	J.m^{-3}
A_d	Fragilité	$3,5.10^{-5}$	$\text{J}^{-1}\text{.m}^3$
α_0	Dissymétrie mode I/mode II	6	-
W	Fonction d'adhérence	-	J.m^{-3}
γ	Module d'écrouissage cinématique	10^9	Pa
a	Module d'écrouissage cinématique associé à la partie non linéaire	5.10^{-7}	Pa^{-1}
c	Dilatance	$0,09$	-
σ_y	Contrainte seuil pour le remplissage des vides	-10^6	Pa
q_1	Paramètre 1 du critère de Gurson	$3,5$	-
q_2	Paramètre 2 du critère de Gurson	$0,9$	-
q_3	Paramètre 3 du critère de Gurson	$0,1$	-
k	Module d'évolution des vides	10^{10}	-
n	Exposant d'écrouissage	2	-

Tab. A.1 – Paramètres du modèle d'interface acier/béton.

Notation	**Sens physique**	**Valeur nominale**	**Unité**
E	Module d'Young	200.10^9	Pa
ν	Coefficient de Poisson	$0,3$	-

Tab. A.2 – Paramètres du modèle d'acier.

Notation	Sens physique	Valeur nominale	Unité
E	Module d'Young	$15,5.10^9$	Pa
ν	Coefficient de Poisson	$0,2$	-

TAB. A.3 – Paramètres du modèle de béton.

Notation	Sens physique	Valeur nominale	Unité
$K_{\mathbf{n}}$	Rigidité normale	$3,6.10^{10}$	Pa.m^{-1}
$K_{\mathbf{t}}$	Rigidité tangentielle	$1,5.10^{10}$	Pa.m^{-1}
$K_{\mathbf{b}}$	Rigidité binormale	$1,5.10^{10}$	Pa.m^{-1}
Y_0	Seuil initial en énergie pour l'endommagement	200	J.m^{-3}
A_d	Fragilité	$8,0.10^{-4}$	$\text{J}^{-1}\text{.m}^3$
α_0	Dissymétrie mode I/mode II	6	-
W	Fonction d'adhérence	-	J.m^{-3}
γ	Module d'écrouissage cinématique	2.10^9	Pa
a	Module d'écrouissage cinématique associé à la partie non linéaire	7.10^{-7}	Pa^{-1}
c	Dilatance	$0,09$	-
σ_y	Contrainte seuil pour le remplissage des vides	-10^6	Pa
q_1	Paramètre 1 du critère de Gurson	$3,5$	-
q_2	Paramètre 2 du critère de Gurson	$0,9$	-
q_3	Paramètre 3 du critère de Gurson	$0,1$	-
k	Module d'évolution des vides	10^{10}	-
n	Exposant d'écrouissage	2	-

TAB. A.4 – Paramètres du modèle d'interface acier/béton.

Notation	Sens physique	Valeur nominale	Unité
E	Module d'Young	210.10^9	Pa
ν	Coefficient de Poisson	$0,3$	-

TAB. A.5 – Paramètres du modèle d'acier.

Notation	Sens physique	Valeur nominale	Unité
κ	Coefficient de compressibilité	20000.10^6	Pa
μ	Module de cisaillement	15000.10^6	Pa
Y_0	Seuil initial en énergie pour l'endommagement	$123,5$	$\mathrm{J.m^{-3}}$
$A_{\mathbf{Dir}}$	Fragilité en traction	$1,0.10^{-2}$	$\mathrm{J^{-1}.m^3}$
$A_{\mathbf{Ind}}$	Fragilité en compression	$4,0.10^{-4}$	$\mathrm{J^{-1}.m^3}$
β	Paramètre de dissymétrie du seuil	100	-
γ	Module d'écrouissage cinématique	$7,0.10^9$	Pa
a	Module d'écrouissage associé à la partie non linéaire	$7,0.10^{-7}$	$\mathrm{Pa^{-1}}$
c	Dilatance	$1,23$	-

Tab. A.6 – Paramètres du modèle de béton.

Notation	Sens physique	Valeur nominale	Unité
$K_{\mathbf{n}}$	Rigidité normale	$3,6.10^{10}$	$\mathrm{Pa.m^{-1}}$
$K_{\mathbf{t}}$	Rigidité tangentielle	$1,5.10^{10}$	$\mathrm{Pa.m^{-1}}$
$K_{\mathbf{b}}$	Rigidité binormale	$1,5.10^{10}$	$\mathrm{Pa.m^{-1}}$
Y_0	Seuil initial en énergie pour l'endommagement	200	$\mathrm{J.m^{-3}}$
A_d	Fragilité	$9,5.10^{-5}$	$\mathrm{J^{-1}.m^3}$
α_0	Dissymétrie mode I/mode II	6	-
W	Fonction d'adhérence	cf. fichier $W_L undgren$	$\mathrm{J.m^{-3}}$
γ	Module d'écrouissage cinématique	1.10^9	Pa
a	Module d'écrouissage cinématique associé à la partie non linéaire	5.10^{-7}	$\mathrm{Pa^{-1}}$
c	Dilatance	$0,09$	-
σ_y	Contrainte seuil pour le remplissage des vides	-10^6	Pa
q_1	Paramètre 1 du critère de Gurson	$3,5$	-
q_2	Paramètre 2 du critère de Gurson	$0,9$	-
q_3	Paramètre 3 du critère de Gurson	$0,1$	-
k	Module d'évolution des vides	10^{10}	-
n	Exposant d'écrouissage	2	-

Tab. A.7 – Paramètres du modèle d'interface acier/béton.

Notation	Sens physique	Valeur nominale	Unité
E	Module d'Young	200.10^9	Pa
ν	Coefficient de Poisson	$0,3$	-

Tab. A.8 – Paramètres du modèle d'acier.

Notation	Sens physique	Valeur nominale	Unité
E	Module d'Young	30000.10^6	Pa
ν	Coefficient de Poisson	$0,3$	-
B_T	Fragilité en traction	1500	-
B_C	Fragilité en compression	10000	-
A_T	Contraintes résiduelles en traction	$1,0$	-
A_C	Contraintes résiduelles en compression	$1,2$	-
ϵ_{d0}	Seuil	$1,0.10^{-4}$	-
β	Coefficient de cisaillement	$1,06$	-

TAB. A.9 – Paramètres du modèle de béton.

Notation	Sens physique	Valeur nominale	Unité
κ	Coefficient de compressibilité	19444.10^6	Pa
μ	Module de cisaillement	14583.10^6	Pa
Y_0	Seuil initial en énergie pour l'endommagement	$122,5$	$\mathrm{J.m^{-3}}$
$A_{\mathbf{Dir}}$	Fragilité en traction	$1,0.10^{-2}$	$\mathrm{J^{-1}.m^3}$
$A_{\mathbf{Ind}}$	Fragilité en compression	$8,0.10^{-4}$	$\mathrm{J^{-1}.m^3}$
β	Paramètre de dissymétrie du seuil	100	-
γ	Module d'écrouissage cinématique	$7,0.10^6$	Pa
a	Module d'écrouissage associé à la partie non linéaire	$7,0.10^{-7}$	$\mathrm{Pa^{-1}}$
c	Dilatance	$1,23$	-

TAB. A.10 – Paramètres du modèle de béton.

Notation	Sens physique	Valeur nominale	Unité
κ	Coefficient de compressibilité	20000.10^6	Pa
μ	Module de cisaillement	15000.10^6	Pa
Y_0	Seuil initial en énergie pour l'endommagement	$330,63$	$\mathrm{J.m^{-3}}$
$A_{\mathbf{Dir}}$	Fragilité en traction	$7,0.10^{-3}$	$\mathrm{J^{-1}.m^3}$
$A_{\mathbf{Ind}}$	Fragilité en compression	$8,0.10^{-4}$	$\mathrm{J^{-1}.m^3}$
β	Paramètre de dissymétrie du seuil	100	-
γ	Module d'écrouissage cinématique	$7,0.10^7$	Pa
a	Module d'écrouissage associé à la partie non linéaire	$7,0.10^{-7}$	$\mathrm{Pa^{-1}}$
c	Dilatance	$1,23$	-

TAB. A.11 – Paramètres du modèle de béton.

Notation	Sens physique	Valeur nominale	Unité
κ	Coefficient de compressibilité	15556.10^6	Pa
μ	Module de cisaillement	11667.10^6	Pa
Y_0	Seuil initial en énergie pour l'endommagement	$462,8$	$\mathrm{J.m^{-3}}$
$A_{\mathbf{Dir}}$	Fragilité en traction	$2,0.10^{-3}$	$\mathrm{J^{-1}.m^3}$
$A_{\mathbf{Ind}}$	Fragilité en compression	$2,0.10^{-5}$	$\mathrm{J^{-1}.m^3}$
β	Paramètre de dissymétrie du seuil	100	-
γ	Module d'écrouissage cinématique	$5,0.10^9$	Pa
a	Module d'écrouissage associé à la partie non linéaire	$7,0.10^{-7}$	$\mathrm{Pa^{-1}}$
c	Dilatance	$1,23$	-

TAB. A.12 – Paramètres du modèle de béton.

Notation	Sens physique	Valeur nominale	Unité
E	Module d'Young	200.10^9	Pa
ν	Coefficient de Poisson	$0,3$	-
H	Module d'écrouissage	200.10^7	-
σ_y	Limite d'élasticité	450.10^6	-

TAB. A.13 – Paramètres du modèle d'acier.

Notation	Sens physique	Valeur nominale	Unité
E_S	Module d'Young	200000.10^6	Pa
ν_S	Coefficient de Poisson	$0,3$	-
D_S	Endommagement critique	$0,2$	-
σ_S	Limite élastique	450.10^6	Pa
m_S	Exposant d'écrouissage	$2,786$	-
K_S	Module d'écrouissage	600.10^6	Pa
G_I	Module de cisaillement	15000.10^6	Pa
ϵ_I	Déformation seuil	$1,0.10^{-4}$	-
a_I	Module d'écrouissage associé à la partie non linéaire	$5,0.10^{-7}$	$\mathrm{Pa^{-1}}$
γ_I	Module d'écrouissage cinématique	$7,0.10^9$	Pa
A_I	Fragilité	$5,0.10^{-7}$	$\mathrm{J^{-1}.m^3}$
l_I^c	Longueur d'ancrage	0,30	m
T_C	Degré de corrosion	$0,0$	-

TAB. A.14 – Paramètres du modèle d'acier.

Notation	Sens physique	Valeur nominale	Unité
κ	Coefficient de compressibilité	16667.10^6	Pa
μ	Module de cisaillement	12500.10^6	Pa
Y_0	Seuil initial en énergie pour l'endommagement	$225,33$	$\mathrm{J.m^{-3}}$
$A_{\mathbf{Dir}}$	Fragilité en traction	$5,0.10^{-3}$	$\mathrm{J^{-1}.m^3}$
$A_{\mathbf{Ind}}$	Fragilité en compression	$2,0.10^{-5}$	$\mathrm{J^{-1}.m^3}$
β	Paramètre de dissymétrie du seuil	100	-
γ	Module d'écrouissage cinématique	$7,0.10^9$	Pa
a	Module d'écrouissage associé à la partie non linéaire	$7,0.10^{-7}$	$\mathrm{Pa^{-1}}$
c	Dilatance	$1,23$	-

TAB. A.15 – Paramètres du modèle de béton.

Notation	Sens physique	Valeur nominale	Unité
E	Module d'Young	200.10^9	Pa
ν	Coefficient de Poisson	$0,3$	-
H	Module d'écrouissage	200.10^7	-
σ_y	Limite d'élasticité	450.10^6	-

TAB. A.16 – Paramètres du modèle d'acier.

Notation	Sens physique	Valeur nominale	Unité
κ	Coefficient de compressibilité	16667.10^6	Pa
μ	Module de cisaillement	12500.10^6	Pa
Y_0	Seuil initial en énergie pour l'endommagement	$225,33$	$\mathrm{J.m^{-3}}$
$A_{\mathbf{Dir}}$	Fragilité en traction	$8,0.10^{-3}$	$\mathrm{J^{-1}.m^3}$
$A_{\mathbf{Ind}}$	Fragilité en compression	$1,0.10^{-5}$	$\mathrm{J^{-1}.m^3}$
β	Paramètre de dissymétrie du seuil	100	-
γ	Module d'écrouissage cinématique	$8,12.10^9$	Pa
a	Module d'écrouissage associé à la partie non linéaire	$7,0.10^{-7}$	$\mathrm{Pa^{-1}}$
c	Dilatance	$1,23$	-

TAB. A.17 – Paramètres du modèle de béton.

Notation	Sens physique	Valeur nominale	Unité
E	Module d'Young	200.10^9	Pa
ν	Coefficient de Poisson	$0,3$	-
H	Module d'écrouissage	200.10^7	-
σ_y	Limite d'élasticité	450.10^6	-

TAB. A.18 – Paramètres du modèle d'acier.

Notation	Sens physique	Valeur nominale	Unité
$K_{\mathbf{n}}$	Rigidité normale	$2,85.10^{10}$	Pa.m^{-1}
$K_{\mathbf{t}}$	Rigidité tangentielle	$1,87.10^{10}$	Pa.m^{-1}
$K_{\mathbf{b}}$	Rigidité binormale	$1,87.10^{10}$	Pa.m^{-1}
Y_0	Seuil initial en énergie pour l'endommagement	200	J.m^{-3}
A_d	Fragilité	$9,5.10^{-5}$	J^{-1}.m^3
α_0	Dissymétrie mode I/mode II	6	-
W	Fonction d'adhérence	cf. fichier W_Mangat	J.m^{-3}
γ	Module d'écrouissage cinématique	1.10^5	Pa
a	Module d'écrouissage cinématique associé à la partie non linéaire	5.10^{-7}	Pa^{-1}
c	Dilatance	$0,09$	-
σ_y	Contrainte seuil pour le remplissage des vides	-10^6	Pa
q_1	Paramètre 1 du critère de Gurson	$3,5$	-
q_2	Paramètre 2 du critère de Gurson	$0,9$	-
q_3	Paramètre 3 du critère de Gurson	$0,1$	-
k	Module d'évolution des vides	10^{10}	-
n	Exposant d'écrouissage	2	-

TAB. A.19 – Paramètres du modèle d'interface acier/béton.

Notation	Sens physique	Valeur nominale	Unité
E	Module d'Young	206.10^9	Pa
ν	Coefficient de Poisson	$0,3$	-
K	Module d'écrouissage	510.10^6	-
σ_y	Limite d'élasticité	510.10^6	-
m	Exposant d'écrouissage	$2,416$	-
D_c	Endommagement critique	$0,2$	-
T_c	Degré de corrosion	Selon le cas	-

TAB. A.20 – Paramètres du modèle d'acier.

Notation	Sens physique	Valeur nominale	Unité
E	Module d'Young	28500.10^6	Pa
ν	Coefficient de Poisson	$0,3$	-
B_T	Fragilité en traction	1000	-
B_C	Fragilité en compression	10000	-
A_T	Contraintes résiduelle en traction	$1,0$	-
A_C	Contraintes résiduelle en compression	$1,0$	-
ϵ_{d0}	Seuil	$9,47.10^{-5}$	-
β	Coefficient de cisaillement	$1,06$	-

TAB. A.21 – Paramètres du modèle de béton.

Notation	Sens physique	Valeur nominale	Unité
E	Module d'Young	$198,3.10^9$	Pa
ν	Coefficient de Poisson	$0,3$	-
H	Module d'écrouissage	$198,3.10^8$	-
σ_y	Limite d'élasticité	$411,3.10^6$	-

TAB. A.22 – Paramètres du modèle d'acier.

Notation	Sens physique	Valeur nominale	Unité
E	Module d'Young	260.10^9	Pa
ν	Coefficient de Poisson	$0,3$	-
H	Module d'écrouissage	39.10^9	-
σ_y	Limite d'élasticité	2500.10^6	-

TAB. A.23 – Paramètres du modèle de carbone.

Notation	Sens physique	Valeur nominale	Unité
$K_{\mathbf{n}}$	Rigidité normale	$2,54.10^{10}$	Pa.m^{-1}
$K_{\mathbf{t}}$	Rigidité tangentielle	$1,58.10^{10}$	Pa.m^{-1}
$K_{\mathbf{b}}$	Rigidité binormale	$1,58.10^{10}$	Pa.m^{-1}
Y_0	Seuil initial en énergie pour l'endommagement	434	J.m^{-3}
A_d	Fragilité	$2,0.10^{-5}$	$\text{J}^{-1}\text{.m}^3$
α_0	Dissymétrie mode I/mode II	$0,01$	-
W	Fonction d'adhérence	cf. fichier W_{Pont}	J.m^{-3}
γ	Module d'écrouissage cinématique	7.10^9	Pa
a	Module d'écrouissage cinématique associé à la partie non linéaire	7.10^{-7}	Pa^{-1}
c	Dilatance	$0,0$	-
σ_y	Contrainte seuil pour le remplissage des vides	-10^6	Pa
q_1	Paramètre 1 du critère de Gurson	$3,5$	-
q_2	Paramètre 2 du critère de Gurson	$0,9$	-
q_3	Paramètre 3 du critère de Gurson	$0,1$	-
k	Module d'évolution des vides	10^{10}	-
n	Exposant d'écrouissage	2	-

TAB. A.24 – Paramètres du modèle d'interface acier/béton.

Notation	Sens physique	Valeur nominale	Unité
κ	Coefficient de compressibilité	14111.10^6	Pa
μ	Module de cisaillement	10580.10^6	Pa
Y_0	Seuil initial en énergie pour l'endommagement	$731,3$	J.m^{-3}
$A_{\mathbf{Dir}}$	Fragilité en traction	$5,0.10^{-3}$	$\text{J}^{-1}\text{.m}^3$
$A_{\mathbf{Ind}}$	Fragilité en compression	$1,05.10^{-4}$	$\text{J}^{-1}\text{.m}^3$
β	Paramètre de dissymétrie du seuil	100	-
γ	Module d'écrouissage cinématique	1.10^{10}	Pa
a	Module d'écrouissage associé à la partie non linéaire	$6,0.10^{-7}$	Pa^{-1}
c	Dilatance	$1,23$	-

TAB. A.25 – Paramètres du modèle de béton.

Annexe B

Condensation des équations tensorielles par dégénération d'éléments classiques

Dans cet annexe, il est montré comment la formulation d'une loi constitutive en contraintes-déformations peut être dégénérée vers une formulation en contraintes-déplacements relatifs. Pour simplifier l'exposé, seul le cas bidimensionnel est considéré. Soient $\underline{u}$ et $\underline{\epsilon}$ les vecteurs des champs de déplacements et de déformations respectivement. Ces quantités sont liées par la matrice représentative de la relaton cinématique B, qui ne dépend que des fonctions de forme :

$$\underline{u} = B\underline{\epsilon} \tag{B.1}$$

La matrice B s'écrit sous la forme :

$$B = LN \tag{B.2}$$

où L est l'opération différentiel associé au gradient :

$$[L_{ij}] = \begin{pmatrix} \frac{\partial(.)}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial(.)}{\partial y} \\ \frac{\partial(.)}{\partial y} & \frac{\partial(.)}{\partial x} \end{pmatrix} \tag{B.3}$$

et N est la matrice des fonctions de forme exprimée dans l'espace naturel à l'aide des coordonnées (ξ, η) :

$$[N_{ij}] = \begin{pmatrix} N_1(\xi,\eta) & 0 & \cdots & N_8(\xi,\eta) & 0 \\ 0 & N_1(\xi,\eta) & 0 & \cdots & N_8(\xi,\eta) \end{pmatrix} \tag{B.4}$$

Dans le but de déterminer la matrice B, il est nécessaire d'introduire la matrice jacobienne J :

$$[J_{ij}] = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{pmatrix} \tag{B.5}$$

telle que :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial(.)}{\partial x} \\ \frac{\partial(.)}{\partial y} \end{pmatrix} = J^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial(.)}{\partial \xi} \\ \frac{\partial(.)}{\partial \eta} \end{pmatrix} \tag{B.6}$$

En considérant un élément fini de type quadrangle à quatre nœuds et après quelques calculs analytiques, il vient :

$$[\epsilon_i] = \frac{2}{t} \begin{pmatrix} \frac{t}{L}\frac{\partial N_1(\xi,\eta)}{\partial \xi} & 0 & \cdots & \frac{t}{L}\frac{\partial N_8(\xi,\eta)}{\partial \xi} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1(\xi,\eta)}{\partial \eta} & 0 & \cdots & \frac{\partial N_8(\xi,\eta)}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_1(\xi,\eta)}{\partial \xi} & \frac{\partial N_1(\xi,\eta)}{\partial \eta} & \cdots & \frac{\partial N_8(\xi,\eta)}{\partial \eta} & \frac{\partial N_8(\xi,\eta)}{\partial \xi} \end{pmatrix} [u_i] \tag{B.7}$$

où t et L représentent respectivement la longueur de l'élément finis et son épaisseur. La condition pour dégénérer cinématiquement cet élément fini s'écrit :

$$\frac{t}{L} << 1 \tag{B.8}$$

Ainsi, l'équation B.7 devient :

$$[\epsilon_i] = \frac{2}{t} \begin{pmatrix} \approx 0 & 0 & \cdots & \approx 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1(\xi,\eta)}{\partial \eta} & 0 & \cdots & \frac{\partial N_8(\xi,\eta)}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_1(\xi,\eta)}{\partial \xi} & \approx 0 & \cdots & \frac{\partial N_8(\xi,\eta)}{\partial \eta} & \approx 0 \end{pmatrix} [u_i] \tag{B.9}$$

En développant l'équation B.9, il vient :

$$[\epsilon_i] = \frac{1}{t} \begin{pmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ 2\epsilon_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \approx 0 \\ 2u_2 \end{pmatrix} \tag{B.10}$$

où u_1 et u_2 sont les déplacements relatifs entre les deux faces de l'éléments. Les développements réalisés dans cet annexe montrent donc comment à partir d'un relation formulée en contraintes-déformations, il est possible de la condenser pour obtenir une relation en contraintes-déplacements relatifs. Cela permet donc une implantation numérique au sein d'un élément de type joint sans épaisseur.