



Contrôle des ondes de flexion dans les plaques

Marc Dubois

► To cite this version:

Marc Dubois. Contrôle des ondes de flexion dans les plaques. Physique [physics]. Université Paris Diderot - Paris 7- Sorbonne Paris Cité, 2014. Français. NNT : . tel-01074740

HAL Id: tel-01074740

<https://pastel.hal.science/tel-01074740>

Submitted on 15 Oct 2014

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Université Paris Diderot - Paris 7 - Sorbonne Paris Cité

ED 518 - Matière Condensée et Interfaces

Institut Langevin - Ondes et Images

Pour obtenir le grade de

Docteur de l'Université Paris 7

Spécialité

Physique

Présentée par

Marc Dubois

Sujet de la thèse :

**Contrôle de la propagation des ondes de flexion
dans les plaques**

Control of flexural waves propagation in thin plates

Thèse dirigée par Patrick Sebbah

Soutenue le 01 Octobre 2014

devant le jury composé de :

M.	FINK Mathias	Président
MM.	HLADKY-HENNION Anne-Christine	Rapporteur
M.	PAGNEUX Vincent	Rapporteur
M.	COUDER Yves	Examineur
M.	GUENNEAU Sébastien	Examineur
M.	LEROSEY Geoffroy	Examineur
M.	SEBBAH Patrick	Directeur de thèse
M.	WEGENER Martin	Examineur
M.	GRANSART Sylvain	Invité

Remerciements

Ces remerciements ponctuent mes travaux de thèse ainsi que quatre années d'épanouissement total. Je souhaite remercier la direction générale de l'armement pour le financement et la confiance qui m'ont été octroyés. Ces travaux se sont déroulés au laboratoire de l'Institut Langevin à l'ESPCI dont je tiens à remercier chaleureusement tous les membres.

Je souhaite exprimer en premier lieu, ma profonde reconnaissance envers Patrick Sebbah qui représente maintenant bien plus qu'un directeur de thèse. Il fait désormais partie de la longue liste de personnes qui ont rythmé mon parcours personnel et auxquelles je dois beaucoup. Je me rends compte aujourd'hui seulement de l'importance de la décision que nous avons prise durant l'hiver 2011. Patrick a su maintenir un équilibre subtil de rigueur scientifique et de bienveillance qui m'ont permis de me dépasser au quotidien. Encore merci.

Les différents travaux présentés sont les fruits de nombreuses collaborations : un grand merci à Sébastien Guenneau pour son enthousiasme et pour sa collaboration enrichissante. Je voudrais également saluer Emmanuel Bossy et lui souhaiter bon courage pour ses futurs projets. Je tiens également à remercier Geoffroy Lerosey, Ros Kiri Ing, Marcel Filoche, Michael Atlan, Stefan Enoch, Younes Achaoui, Abdelhak Souilah et Étienne Herth pour les derniers projets mis en place. Je remercie Gautier Lefebvre pour cette dernière année passée en équipe, bon courage pour la suite.

Je souhaite remercier Mathias Fink pour avoir accepté de présider mon jury de thèse. Je remercie vivement Anne Christine Hladky et Vincent Pagneux pour avoir rapporté ce manuscrit de thèse. Je souhaite remercier Martin Wegener, Yves Couder, Geoffroy Lerosey, Sébastien Guenneau et Sylvain Gransart pour leur présence dans mon jury de thèse, j'en suis profondément honoré.

Un énorme merci à l'ensemble de personnes que j'ai pu côtoyer dans mon quotidien à l'Institut Langevin. Une liste exhaustive me paraît difficile à tenir, mais je souhaiterais remercier certaines personnes essentielles à la vie du laboratoire. Merci Patricia, Emmanuel, Jérôme, Marie, Christelle, Laurine, Khadija.

La qualité d'un laboratoire s'exprime à travers ses chercheurs, je souhaite donc remercier le plus possible d'entre eux pour leur soutien et leur disponibilité. Merci Fabrice, Alexandre, Jérôme, Yannick, Arnaud, Rémi, Valentina, Romain, Sébastien, Xiaoping, Olivier, Samuel, Claire, Julien, Jean-Luc, Jean-Marie, Sylvain.

Un grand merci également aux doctorants et aux postdoctorants avec lesquels j'ai pu partager de très bons souvenirs. Je vais souhaiter un bon courage à Daria, Ariadna, Baptiste et Olivier pour le début de la fin de la rédaction. J'en profite pour saluer également mes officemates passés, présents et futurs : Miguel, Kevin, Alexeï, Mariana, Emilie, Salma.

D'un choix délibéré, je ne classe pas Nicolas Bachelard et Alexandre Cazé dans ces différentes listes. Ils sont devenus des amis et des soutiens bien au-delà des frontières du laboratoire. Merci à vous deux.

Pour finir, un énorme merci aux tocards de Centrale Marseille 2011 qui survivent à la capitale. Un gros bisou à ceux qui sont restés méridionaux et nous permettent de revenir au soleil régulièrement.

Merci du fond du cœur à mes parents et ma famille pour leur soutien inconditionnel et un grand merci à Marine, ma moitié, qui continue de m'accompagner et partage avec moi les épreuves de la vie.

Table des matières

Introduction Générale	vii
1 Ondes élastiques dans les plaques fines - Modélisation, détection et génération	1
1.1 Introduction	3
1.2 Théorie des ondes élastiques dans les plaques minces	3
1.2.1 Élasticité tri-dimensionnelle	3
1.2.2 Ondes élastiques guidées	6
1.3 Modélisation théorique des ondes de flexion	11
1.4 Simulations numériques	13
1.4.1 Simulations FDTD	13
1.4.2 Méthode des éléments finis	14
1.5 Génération et Détection des ondes de flexion	15
1.5.1 Génération d'onde acoustique ou élastique	15
1.5.2 Détection optique des ondes de flexion	17
1.6 Conclusion	23
I Propagation d'ondes de flexion dans les plaques structurées	25
2 Focalisation d'ondes de flexion par un cristal phononique	27
2.1 Introduction	28
2.2 Réfraction négative par un cristal	29
2.2.1 Notions de Cristallographie	30
2.2.2 Théorème de Bloch	30
2.2.3 Milieux cristallins et ondes classiques	31
2.2.4 Réfraction des ondes à l'interface d'un cristal et d'un milieu libre	33
2.3 Conception d'une lentille plate par un milieu périodique	35
2.3.1 Loi de Snell-Descartes et contours équifréquences	35
2.3.2 All Angle Negative Refraction	36
2.3.3 Réalisation de la lentille plate	37
2.4 Focalisation d'ondes de flexion par un cristal phononique	39

2.4.1	Focalisation par un cristal à maille carrée	39
2.4.2	Adaptation d'indice par l'épaisseur	41
2.4.3	Mise en oeuvre expérimentale	43
2.4.4	Résultats expérimentaux et numériques	44
2.5	Conclusion et perspectives	47
3	Super focalisation des ondes de flexion en régime temporel	49
3.1	Introduction	50
3.1.1	Cas d'un cristal à réfraction négative	50
3.1.2	Cas d'un milieu d'indice négatif	52
3.1.3	Évolution temporelle de la super résolution	53
3.2	Suivi temporel de la focalisation	54
3.2.1	Transformée de Fourier spatiale	56
3.2.2	Construction du point focal sub-longueur d'onde	62
3.3	Fonctions super oscillantes	63
3.3.1	Création d'une tache focale super oscillante	65
3.3.2	Formation d'une tache focale super oscillante au cours du temps	66
3.4	Amélioration de la résolution en régime temporel	70
3.4.1	Récurrence des taches focales en régime temporel	72
3.4.2	Effet de la durée de l'impulsion	73
3.4.3	Effet de la position de la source	74
3.5	Conclusion et perspectives	75
4	Métamatériaux pour les ondes de flexion	77
4.1	Introduction	78
4.1.1	Indice négatif : Premiers résultats expérimentaux	78
4.1.2	Métamatériaux acoustiques et élastiques	80
4.1.3	Hybridation et paramètres effectifs négatifs	80
4.2	Double négativité en ondes acoustiques et élastiques	82
4.2.1	Ondes acoustiques	82
4.2.2	Ondes élastiques	83
4.3	Un résonateur pour les ondes de flexion : le trou borgne	85
4.3.1	État de l'art	85
4.3.2	Calcul des fréquences de résonances	86
4.4	Métamatériau à indice négatif : le trou "aveugle"	87
4.4.1	Étude prospective	87
4.4.2	Vers une réalisation expérimentale	91
4.4.3	Optimisation du facteur de qualité des résonances	92
4.4.4	Conception des échantillons	94
4.5	Conclusion et perspectives	95

5	Localisation des ondes de flexion dans les milieux localement résonants désor-	97
	donnés	
5.1	Introduction	98
5.1.1	Diffusion élastique résonante	99
5.1.2	Réduction de la densité d'état	100
5.2	Étude expérimentale	101
5.2.1	Fabrication des échantillons	101
5.2.2	Résultats expérimentaux	101
5.3	Étude numérique	105
5.3.1	Démarche logique	105
5.3.2	Premiers résultats	106
5.4	Localisation par couplage champ proche	109
5.5	Influence de la distance d'exclusion	111
5.6	Conclusion et perspectives	114
II	Phénomènes ondulatoires exotiques appliqués	
	aux ondes de flexion	117
6	Quantum revival pour les ondes de flexion	119
6.1	Introduction	120
6.2	Choix des ondes de flexion	123
6.2.1	Conditions aux bords de la plaque	124
6.3	Étude dynamique	126
6.3.1	Fabrication des échantillons et conditions expérimentales	126
6.3.2	Excitation au centre de la plaque	128
6.3.3	Excitation au tiers de la diagonale	129
6.3.4	Excitation arbitraire	130
6.4	Calcul du temps de revival	131
6.4.1	Influence de la position de la source	133
6.5	Études complémentaires	136
6.5.1	Influence de la fréquence centrale	136
6.5.2	Cas des membranes souples	137
6.6	Conclusions et perspectives	139
7	Maxwell Fisheye pour les ondes de flexion	141
7.1	Introduction	142
7.1.1	Physique des transformations	142
7.1.2	Réintroduction du Maxwell fisheye	143
7.1.3	Réalisations expérimentales	145

7.1.4	Origine de la super résolution du Maxwell fisheye	147
7.2	Conception du fisheye pour les ondes de flexion	149
7.2.1	Variation de l'épaisseur	149
7.3	Validation expérimentale	151
7.3.1	Conception d'un Maxwell fisheye ouvert	151
7.3.2	Étude temporelle de la focalisation	153
7.4	Conclusion et perspectives	154
8	Mécanisme universel pour la localisation d'ondes	157
8.1	Introduction	158
8.1.1	Application aux ondes classiques	160
8.2	Validation expérimentale	162
8.3	Vers une ingénierie de la localisation	163
8.3.1	Réalisation pratique	164
8.3.2	Résultats expérimentaux	165
8.4	Conclusion et perspectives	169
	Conclusion Générale	171
	Références	175

Introduction Générale

Nombreuses sont les révolutions technologiques majeures qui proviennent principalement de la maîtrise de la propagation des ondes dans les milieux complexes. Le domaine de l'électronique, par exemple, s'est développé grâce à l'utilisation des matériaux semi-conducteurs. Ces milieux cristallins ont permis de maîtriser la propagation ou le stockage des électrons. Les applications informatiques provenant de ces travaux ont bouleversé notre quotidien.

Le domaine de la photonique émerge vers la fin des années 1980. Par analogie avec les milieux cristallins, les cristaux photoniques se construisent par une modulation périodique des propriétés optiques d'un matériau. Comme les semi-conducteurs avant eux, ces matériaux possèdent la capacité de guider, piéger ou stopper les ondes électromagnétiques. L'utilisation de ces propriétés dans les fibres optiques ou pour l'imagerie permet d'atteindre des performances jusqu'alors inenvisageables.

Les cristaux photoniques ne sont pas les seuls milieux complexes étudiés. Dans une certaine mesure, ces milieux périodiques peuvent être considérés comme des milieux complexes "simples" car quelques paramètres permettent de les décrire entièrement. Le comportement de ces cristaux peut être modifié en présence de désordre. La propagation d'ondes électromagnétiques dans les milieux désordonnés permet d'accéder à de nouveaux régimes de propagation tels que la diffusion multiple ou la localisation d'Anderson. Ces effets sont exploités pour améliorer l'efficacité des cellules photovoltaïques ou pour créer des lasers aléatoires.

L'utilisation d'éléments résonants permet également d'enrichir les propriétés des milieux périodiques et ouvre la voie des métamatériaux. Ces matériaux artificiels sont construits à partir d'un arrangement de résonateurs dont la taille est très petite devant la longueur d'onde à leur fréquence résonance. Le choix judicieux des résonateurs utilisés permet d'obtenir des propriétés macroscopiques inédites et artificielles comme la réalisation d'un indice de réfraction négatif.

Le domaine de l'optique de transformation peut également intégrer cette liste non exhaustive de milieux complexes. À l'inverse des métamatériaux, ces milieux contrôlent la propagation des ondes électromagnétiques lorsque la longueur d'onde est petite devant la structuration du milieu. Plusieurs systèmes à gradient d'indice tel que la lentille fisheye de Maxwell démontrent la puissance et la versatilité de cette approche.

La communauté des ondes mécaniques va également s'intéresser à ces différents systèmes complexes. Le début des années 1990 marque l'avènement des structures périodiques pour les ondes mécaniques, communément appelé cristaux phononiques. Ces matériaux sont construits à partir d'une modulation périodique des propriétés mécaniques d'un milieu comme la masse volumique ou la rigidité. Le contrôle des ondes mécaniques par ces milieux complexes promet lui aussi un nombre important d'applications. Les premières démonstrations des propriétés de ces milieux sont réalisées pour les ondes acoustiques ou ondes de pression. La modélisation de ces ondes est simplifiée par leur nature scalaire. Plusieurs travaux démontrent la possibilité de guider, focaliser, ou bloquer ces ondes de pression et proposent des applications à fort potentiel comme l'isolation sonore ou l'amélioration des techniques d'imagerie médicales échographiques. La fabrication de métamatériaux acoustiques et l'étude de la propagation acoustique dans les milieux désordonnés apportent également de nouvelles propriétés telles que le confinement et le guidage des ondes acoustiques sur de petites échelles.

L'extension de ces principes au cas des ondes élastiques dans les solides est en plein essor. La nature vectorielle des ondes élastiques nécessite un traitement analytique complexe et une attention particulière aux propriétés du milieu, en effet, deux modes de propagation élastique coexistent et interagissent dans les milieux solides : les ondes longitudinales et les ondes transverses. La maîtrise de la propagation des ondes dans les milieux complexes est un défi important, à ce défi important sont associés des objectifs qui le sont tout autant. Les applications potentielles visent le contrôle des ondes sismiques dans la croûte terrestre à une fréquence de quelques dizaines de Hz jusqu'à la maîtrise des phonons dans les systèmes quantiques autour du THz. Les travaux présentés dans ce manuscrit contribuent au développement des structures complexes pour les ondes élastiques.

Une plaque rigide est un milieu solide dont l'une des dimensions caractéristiques est fortement réduite. Lorsque la longueur d'onde élastique est grande devant l'épaisseur de la plaque, le déplacement vertical de la plaque est en grande partie assuré par le mode de flexion. Ce mode de flexion ou mode A0 peut être modélisé analytiquement et permet une mise en oeuvre expérimentale aisée.

Notre démarche a consisté à concevoir différents systèmes complexes tels que les cristaux phononiques, les métamatériaux ou les milieux désordonnés dans les plaques minces. Nous allons voir que ces différents systèmes nous ont permis de mettre en évidence quelques propriétés originales des ondes élastiques dans les plaques et d'explorer une physique nouvelle des ondes en milieux complexes.

- Le chapitre 1 aborde les prérequis théoriques concernant la propagation des ondes élastiques dans les solides puis dans les plaques. Nous présenterons également les outils de modélisation numérique et les différents moyens expérimentaux de génération et de détection des ondes de flexion dans les plaques.

La première partie du manuscrit concerne la propagation des ondes de flexion dans les plaques structurées. Ces plaques sont construites à partir de la répétition périodique ou désordonnée d'un diffuseur ou d'un résonateur.

- Dans le chapitre 2, nous démontrerons expérimentalement la focalisation des ondes de flexion par une lentille plate à réfraction négative. Le concept de cette lentille plate est initialement proposé en 1968 par Victor Veselago. Cette réfraction négative est observée dans un arrangement périodique de trous traversant dans une plaque de duraluminium.
- Le chapitre 3 présente l'étude temporelle de la résolution de la lentille. Les travaux de Victor Veselago ont été étendus par John Pendry en 2000. Il démontre qu'une lentille à indice de réfraction négatif peut focaliser une onde en dessous de la limite de diffraction grâce à un mécanisme d'amplification des ondes évanescentes. Nous étudierons dans ce chapitre la dynamique de la focalisation en proposant une analyse des modes propres de la lentille plate.
- Le chapitre 4 aborde la conception d'un métamatériau pour les ondes de flexion. Les métamatériaux sont des milieux construits à partir d'un arrangement périodique de résonateurs. Nous présenterons les propriétés résonantes du trou borgne ou trou non débouchant pour les ondes de flexion. Puis nous proposerons la réalisation d'un métamatériau à indice négatif obtenu à partir des résonances du trou borgne.
- Le chapitre 5 concerne la diffusion des ondes de flexion par un arrangement désordonné de trous borgnes. Nous verrons que l'on peut atteindre le régime de localisation forte ou localisation d'Anderson grâce aux résonances collectives des trous borgnes. Ce régime de localisation se traduit par le confinement des modes propres de vibration sur des distances de quelques longueurs d'onde.

La seconde partie du manuscrit aborde l'étude de phénomènes ondulatoires originaux appliqués aux ondes de flexion. Contrairement à la première partie, ces applications ne nécessitent pas la répétition d'un élément particulier. Nous allons voir que l'on peut exploiter les propriétés naturelles des ondes de flexion dans les plaques rigides.

- Le chapitre 6 présente l'observation expérimentale de l'effet revival pour les ondes de flexion. L'effet revival correspond à la reconstruction périodique d'un paquet d'ondes quantique dans un puits infini. Cet effet dynamique provient de la relation de dispersion quadratique liée à l'équation de Schrödinger. Nous verrons que les ondes de flexion à basse fréquence présentent également une relation de dispersion quadratique. Nous verrons que l'on peut reproduire la dynamique de l'effet revival dans une plaque carrée à bords rigides et observer les multiples reconstructions d'un pulse au cours du temps.
- Le chapitre 7 concerne l'application des techniques de transformation d'équations aux ondes de flexion dans les plaques. L'exemple présenté dans ce chapitre se nomme le Maxwell fisheye.

Ce système présenté sous la forme d'un disque plan à gradient d'indice permet un stigmatisme rigoureux entre deux points diamétralement opposés. La formule de modulation de l'indice de réfraction dans le plan, initialement démontrée par James Clerk Maxwell en 1854, correspond à la projection stéréographique d'une coque sphérique sur son plan équatorial. Nous verrons que la modulation locale de l'épaisseur d'une plaque permet de reproduire la variation d'indice proposé par J.C. Maxwell. Les mesures expérimentales confirment la focalisation des ondes de flexion par un tel système.

- Le chapitre 8 présente un nouveau mécanisme capable de prévoir l'apparition de modes localisés dans des structures complexes. Ce mécanisme est basé sur le calcul d'une fonction "paysage" dont les minima locaux permettent de prévoir le phénomène de localisation d'Anderson. Nous présenterons la démonstration expérimentale de ce mécanisme pour les ondes de flexion dans une plaque à géométrie complexe. La seconde partie de ce chapitre aborde la résolution du problème inverse, nous verrons qu'il est possible de concevoir une plaque à géométrie complexe afin de localiser les modes propres de vibration dans des zones souhaitées du système.

Chapitre 1

Ondes élastiques dans les plaques fines - Modélisation, détection et génération

Table des matières

1.1	Introduction	3
1.2	Théorie des ondes élastiques dans les plaques minces	3
1.2.1	Élasticité tri-dimensionnelle	3
	Simplification du tenseur des rigidités	4
	Équation de Navier pour un solide homogène isotrope	5
	Solutions de l'équation de Navier dans un solide	5
1.2.2	Ondes élastiques guidées	6
	Ondes de surface	6
	Ondes dans les plaques fines	7
	Équation de Rayleigh-Lamb	7
	Comportement asymptotique basse fréquence	10
1.3	Modélisation théorique des ondes de flexion	11
	Modèle de Kirchhoff	11
	Modèle de Mindlin	12
1.4	Simulations numériques	13
1.4.1	Simulations FDTD	13
1.4.2	Méthode des éléments finis	14
1.5	Génération et Détection des ondes de flexion	15
1.5.1	Génération d'onde acoustique ou élastique	15
	Génération mécanique	15
	Génération optique	16
1.5.2	Détection optique des ondes de flexion	17
	Interférométrie optique hétérodyne	18

Mesure optique hétérodyne du déplacement vertical	18
Mesure optique hétérodyne de la vitesse de déplacement vertical	20
Mesure holographique hétérodyne du déplacement vertical	21
1.6 Conclusion	23

1.1 Introduction

Les ondes élastiques dans les plaques représentent la plateforme commune aux différents travaux réalisés au cours de cette thèse. Dans ce premier chapitre, nous verrons comment ces ondes peuvent être modélisées, simulées, générées et détectées. La première partie est consacrée à la modélisation théorique des ondes élastiques. Nous aborderons la théorie de l'élasticité tri-dimensionnelle et son application au cas des plaques fines. La seconde partie présentera les outils numériques utilisés afin de simuler la propagation d'ondes élastiques dans des structures complexes. La dernière partie abordera les aspects expérimentaux liés à la génération et à la détection de ces ondes dans différentes gammes de fréquences.

1.2 Théorie des ondes élastiques dans les plaques minces

1.2.1 Élasticité tri-dimensionnelle

Les démonstrations et les démarches abordées dans cette section sont majoritairement extraites de l'ouvrage "Ondes Élastiques dans les milieux solides : Tome 1, Propagation libre et guidée" réalisé par Daniel Royer et Eugène Dieulesaint [1]. L'équation décrivant la propagation linéaire des ondes élastiques dans les solides, appelée équation de Navier, est obtenue à partir de trois relations fondamentales :

- l'équation du mouvement, provenant de la relation fondamentale de la dynamique (1.1), avec ρ la masse volumique, f la résultante des forces volumiques, u le champ de déplacement, et σ le tenseur des contraintes.

$$\rho \frac{\delta^2 \vec{u}}{\delta t^2} = \text{div}(\sigma) + \rho \vec{f} \quad (1.1)$$

- la loi de Hooke ou relation contrainte-déformation (1.2) écrite en convention d'Einstein, avec ϵ le tenseur des déformations et c_{ijkl} le tenseur des rigidités.

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} \epsilon_{kl} \quad (1.2)$$

- la relation de Cauchy ou relation déplacement-déformation (1.3) avec u_i les composantes du champ de déplacement u et x_i les directions de l'espace.

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\delta u_i}{\delta x_j} + \frac{\delta u_j}{\delta x_i} \right) \quad (1.3)$$

Simplification du tenseur des rigidités

La nature élastique d'un matériau est contenue dans l'expression du tenseur c_{ijkl} . Ce tenseur d'ordre 4 possède initialement 81 éléments. Par des arguments de symétries concernant les tenseurs de contrainte et de déformation, on sait que les éléments du tenseur des rigidités obtenus par la relation (1.2) vont être redondants. On peut alors simplifier le tenseur des rigidités en une matrice 6x6. Dans l'hypothèse de déformation élastique, où le solide reprend son état initial en l'absence d'action extérieure, on peut montrer que cette matrice 6x6 est également symétrique par rapport à la diagonale principale. Il reste donc 21 éléments à déterminer pour caractériser totalement la réponse élastique d'un milieu solide. Dans le cas d'un milieu homogène isotrope, on peut démontrer que seul un couple de coefficient c_{11} et c_{12} permet de décrire la matrice 6x6 (1.4).

$$c_{ij} = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{12} & c_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{c_{11}-c_{12}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{c_{11}-c_{12}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{c_{11}-c_{12}}{2} \end{vmatrix} \quad (1.4)$$

Ce couple peut être exprimé par plusieurs jeux de paramètres tels que les coefficients de Lamé (λ, μ) ou le couple module d'Young et coefficient de Poisson (E, ν) . Le tableau 1.1 donne les relations de passages entre les différents couples de paramètres usuels.

	(λ, μ)	(E, ν)	c_{11}, c_{12}
E	$\frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}$	E	$c_{11} - 2\frac{c_{12}^2}{c_{11}+c_{12}}$
ν	$\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}$	ν	$\frac{c_{12}}{c_{11}+c_{12}}$
λ	λ	$\frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)}$	c_{12}
μ	μ	$\frac{E}{2(1+\nu)}$	$\frac{c_{11}-c_{12}}{2}$

Table 1.1 – Relations de passage entre les différents couples décrivant le comportement élastique d'un solide homogène isotrope.

Équation de Navier pour un solide homogène isotrope

Dans le cadre d'un solide homogène isotrope la relation de Hooke se simplifie (1.5) avec δ_{ij} le symbole de Kronecker et ϵ_{kk} la somme des éléments diagonaux de ϵ (trace de ϵ)

$$\sigma_{ij} = \lambda \epsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij} \quad (1.5)$$

En remplaçant cette expression dans la formule de Cauchy (1.3) puis dans l'équation du mouvement (1.1), on retrouve la formule de l'élastodynamique de Navier (1.6) définie pour chaque composante de déplacement u_i .

$$(\lambda + \mu) \frac{\delta^2 u_j}{\delta x_j \delta x_i} + \lambda \frac{\delta^2 u_i}{\delta x_j^2} + \rho f_i = \rho \frac{\delta^2 u_i}{\delta t^2} \quad (1.6)$$

Dans le cas où l'on néglige les termes de forces volumiques f l'équation peut s'exprimer sous la forme suivante (1.9).

$$(\lambda + \mu) \vec{grad}(\text{div}(\vec{u})) + \mu \Delta \vec{u} = \rho \frac{\delta^2 \vec{u}}{\delta t^2} \quad (1.7)$$

Solutions de l'équation de Navier dans un solide

On recherche les solutions de cette équation sous la forme d'une somme d'un potentiel scalaire irrotationnel ϕ et d'un potentiel vectoriel incompressible ψ .

$$\vec{u} = \vec{grad}(\phi) + \vec{rot}(\vec{\psi}) \quad (1.8)$$

En injectant cette information dans l'équation (1.9), on obtient la relation suivante

$$\vec{grad} \left[(\lambda + 2\mu) \Delta \phi - \rho \frac{\delta^2 \phi}{\delta t^2} \right] + \vec{rot} \left[\mu \Delta \vec{\psi} - \rho \frac{\delta^2 \vec{\psi}}{\delta t^2} \right] = 0 \quad (1.9)$$

On fait alors apparaître deux relations de D'Alembert découplées pour chacun des potentiels avec des vitesses de propagation différentes.

$$\Delta \phi - \frac{1}{c_L^2} \frac{\delta^2 \phi}{\delta t^2} = 0, \quad \Delta \vec{\psi} - \frac{1}{c_T^2} \frac{\delta^2 \vec{\psi}}{\delta t^2} = 0 \quad (1.10)$$

Le potentiel ϕ est associé aux ondes de compression (ondes P) avec une polarisation longitudinale. On obtient également l'expression de la vitesse de propagation des ondes de compression $c_L = \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}$. Cette onde correspond aux ondes scalaires de pression obtenue dans les milieux fluides. Le potentiel $\vec{\psi}$ est associé aux ondes transversales (ondes S) qui possèdent une polarisation transverse, perpendiculaire à la direction de propagation. La vitesse de propagation des ondes transverses s'exprime par la relation suivante $c_T = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$. Cette polarisation n'existe pas dans

les milieux fluides qui ne possèdent pas de résistance aux efforts en cisaillement ou lors d'une déformation sans variation de volume. Le module de compression μ est nul dans les fluides parfaits.

1.2.2 Ondes élastiques guidées

Les ondes longitudinales et transverses sont appelées ondes de volume et décrivent la propagation des ondes élastiques dans un solide infini. Lors de la modélisation de cas réels, il est nécessaire de prendre en compte la discontinuité des paramètres mécaniques aux interfaces entre deux ou plusieurs milieux. La présence d'interfaces va faire apparaître une nouvelle famille d'ondes élastiques appelée ondes guidées. Cette section va nous permettre de décrire le comportement des ondes élastiques en présence d'une ou de plusieurs interfaces dans le milieu étudié.

Ondes de surface

Les ondes de surface les plus étudiées sont les ondes de Rayleigh. Ces ondes se propagent exclusivement le long d'une interface vide-solide avec une polarisation elliptique. Cette polarisation est le résultat d'un couplage en quadrature de phase entre les polarisations longitudinale et transverse verticale. Le champ de déplacement lié à cette onde est confiné à l'interface entre le milieu solide et le vide, il décroît exponentiellement dans l'épaisseur du solide sur une profondeur d'environ une longueur d'onde. La vitesse de propagation des ondes de Rayleigh est obtenue par l'équation de Navier (1.6) dans le cas où les contraintes normales à la surface s'annulent au niveau de l'interface, on parle de condition de traction libre. Dans le cas d'un solide homogène isotrope, la formule de Viktorov (1.11) donne une approximation de la vitesse de propagation des ondes de Rayleigh notée c_R .

$$c_R = c_T \frac{0.436 + \frac{c_{11}}{c_{12}}}{0.5 + \frac{c_{11}}{c_{12}}} \quad (1.11)$$

Les ondes de Rayleigh peuvent être généralisées pour des interfaces plus complexes. On obtient les ondes de Stoneley dans le cas d'une interface entre deux solides. Le cas d'une interface fluide-solide fait apparaître les ondes de Scholte. Une autre polarisation peut donner lieu à une nouvelle famille d'onde de surface. Il s'agit de la polarisation transverse horizontale, polarisée dans le plan de l'interface. Dans chacun des cas, ces ondes sont confinées à l'interface entre deux milieux semi-infinis. On les qualifie d'ondes de surface en opposition aux ondes de volume. Nous allons aborder maintenant le cas des plaques où deux interfaces sont proches.

Ondes dans les plaques fines

Un milieu est considéré comme une plaque lorsque l'une des dimensions est fortement réduite devant les autres. Deux types de propagation existent dans ces systèmes :

- le mode SH pour *shear horizontal* qui correspond à une polarisation transverse horizontale dans le plan de la plaque. Dans le cas d'une couche fine solidaire d'un substrat rigide, ce mode de propagation est appelé onde de Love.
- les modes de Lamb apparaissent par couplage des polarisations longitudinale et transverse verticale. Le mécanisme de couplage est proche de celui à l'origine des ondes de Rayleigh. On a vu que les déplacements associés aux ondes de Rayleigh s'atténuent exponentiellement sur une profondeur de l'ordre d'une longueur d'onde. Dès lors que la deuxième interface se situe à une distance inférieure à cette longueur d'onde, on observe un couplage entre les deux ondes de Rayleigh confinées sur chacune des interfaces vide/solide. Ce couplage des ondes de surface aux deux interfaces fait apparaître les différents modes de Lamb.

Équation de Rayleigh-Lamb

L'équation de Rayleigh-Lamb donne la relation de dispersion des ondes de Lamb. La figure 1.1 représente le schéma d'une plaque d'épaisseur h .

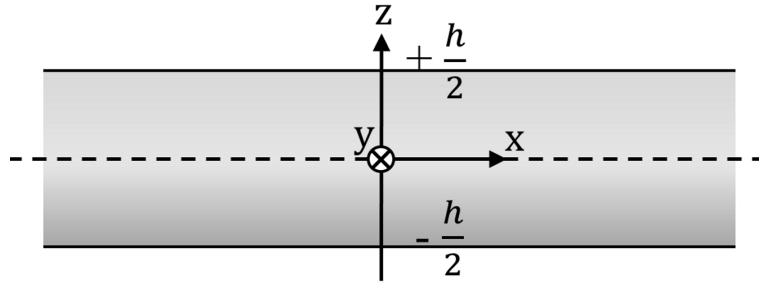


Figure 1.1 – Schéma d'une plaque homogène isotrope d'épaisseur h de dimensions latérales infinies.

Afin d'établir cette relation de dispersion nous allons reprendre les équations décomposées en potentiels (1.10). Nous allons chercher les solutions de ces équations pour des hypothèses particulières :

- l'hypothèse de déformation plane est nécessaire à l'établissement de la relation de dispersion. On ne prend en compte que les déformations dans le plan xOz . Le déplacement selon Oy et les dérivées partielles $\frac{\delta}{\delta y}$ sont nuls.
- les solutions sont harmoniques de pulsation ω et en régime sinusoïdal selon l'axe Ox tel que $\frac{\delta}{\delta x} = -ik$.

Pour ces deux hypothèses, les potentiels ϕ et $\psi = \psi_y$ prennent les formes suivantes :

$$\phi = \phi(z)e^{i(kx-\omega t)}, \quad \psi = \psi(z)e^{i(kx-\omega t)} \quad (1.12)$$

On injecte ces solutions dans l'équation (1.10) afin d'obtenir les équations suivantes calculées précédemment.

$$\frac{\delta^2 \phi}{\delta z^2} + p^2 \phi = 0, \quad \frac{\delta^2 \psi}{\delta z^2} + q^2 \psi = 0 \quad (1.13)$$

avec

$$p^2 = \frac{\omega^2}{c_L^2} - k^2, \quad q^2 = \frac{\omega^2}{c_T^2} - k^2 \quad (1.14)$$

Les composantes O_x et O_z du champ de déplacement s'écrivent

$$u_x = \frac{\delta \phi}{\delta x} - \frac{\delta \psi}{\delta z} \quad (1.15)$$

$$u_z = \frac{\delta \phi}{\delta z} + \frac{\delta \psi}{\delta x} \quad (1.16)$$

On cherche désormais les solutions de l'équation (1.13) dans le cas où les contraintes σ_{zz} et σ_{xz} s'annulent en $z = \pm \frac{h}{2}$. On a vu pour les ondes de Rayleigh que l'annulation des contraintes normales aux interfaces nécessite une relation de quadrature de phase entre les fonctions ϕ et ψ . Elles prennent donc les valeurs suivantes

$$\phi(z) = A \cos(pz + \alpha), \quad \psi(z) = B \sin(qz + \alpha) \quad (1.17)$$

Le paramètre α admet les valeurs 0 et $\frac{\pi}{2}$ en fonction des parités des contraintes aux interfaces. Les différentes composantes du déplacement u s'écrivent maintenant

$$u_x = [ikA \cos(pz + \alpha) - qB \cos(qz + \alpha)]e^{i(kx-\omega t)} \quad (1.18)$$

$$u_z = [-A \sin(pz + \alpha) + ikB \sin(qz + \alpha)]e^{i(kx-\omega t)} \quad (1.19)$$

Les deux valeurs du paramètre α nous mènent à deux familles de modes de Lamb ayant des composantes de déplacement distinctes :

- les modes symétriques pour $\alpha = 0$ où la composante u_x est symétrique de part et d'autre du plan médian alors que la composante u_z s'inverse. Les modes symétriques possèdent une polarisation quasi-longitudinale avec une composante u_z faible.

- les modes antisymétriques pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$ où la composante u_x s'inverse entre les deux interface tandis que la composante u_z est de même signe. Ces modes sont appelés modes de flexion car le déplacement moyen de la plaque est normal au plan médian.

Nous allons pouvoir aboutir à la relation de dispersion des ondes de Lamb en réutilisant le fait que les contraintes normales σ_{zz} et σ_{xz} s'annulent en $z = \pm \frac{h}{2}$.

$$(k^2 - q^2)A \cos(p \frac{h}{2} + \alpha) + 2ikqB \cos(q \frac{h}{2} + \alpha) = 0 \quad (1.20)$$

$$(q^2 - k^2)A p \sin(p \frac{h}{2} + \alpha) - 2ikpA \sin(q \frac{h}{2} + \alpha) = 0 \quad (1.21)$$

L'annulation du déterminant de ce système nous permet de retrouver l'équation de Rayleigh-Lamb (1.22).

$$\frac{\omega^4}{c_T^4} = 4k^2 q^2 \left(1 - \frac{p \tan(p \frac{h}{2} + \alpha)}{q \tan(q \frac{h}{2} + \alpha)} \right) \quad (1.22)$$

Cette équation nous permet de tracer les relations des différents modes de Lamb. Les relations de dispersions correspondent à un couple (ω, k) solutions de l'équation (1.22) dans les cas $\alpha = 0$ ou $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Plusieurs méthodes numériques ou analytiques permettent de déterminer le spectre complexe des modes de Lamb pour une plaque [2]. La figure 1.2, extraite de [3], représente les 3 premiers modes antisymétriques en noir et les 3 premiers modes symétriques en gris.

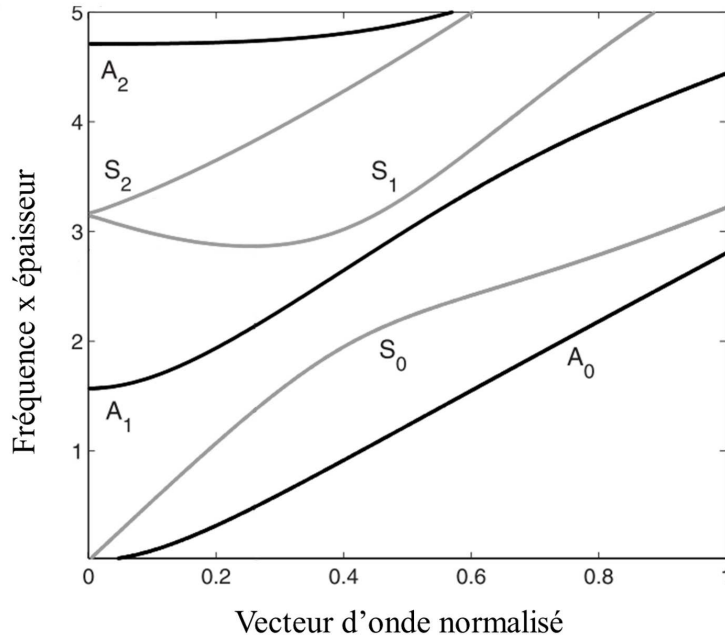


Figure 1.2 – Relation de dispersion des 3 premiers modes antisymétriques obtenus en trait noir et les 3 premiers modes symétriques en trait gris. Extrait de [3]

Les courbes de dispersion nous montrent que ces modes sont dispersifs car elles ne correspondent pas à des droites. De ce fait, les vitesses de phase et de groupe définies par $V_\phi = \frac{\omega}{k}$ et $V_g = \frac{\delta\omega}{\delta k}$ ne sont pas constantes en fonction de la pulsation ω . La deuxième observation est que les deux premiers modes A_0 et S_0 sont les seuls à ne pas présenter de fréquence de coupure. Chacun des modes d'ordre supérieur A_n et S_n possède une fréquence de coupure en dessous de laquelle ils ne sont pas excités.

Comportement asymptotique basse fréquence

Pour des plaques de Silicium d'une épaisseur de $410\mu\text{m}$, les deux premières fréquences de coupure sont $f_c(A_1) = 7\text{MHz}$ et $f_c(S_1) = 10\text{MHz}$. Ces fréquences ne seront jamais atteintes au cours des différentes analyses effectuées dans la suite du manuscrit. Nous nous intéresserons exclusivement au cas basse fréquence dans lequel seuls les modes A_0 et S_0 peuvent exister en plus du mode SH. Dans l'approximation basse fréquence, il est possible de linéariser l'équation de Rayleigh-Lamb avec $k \rightarrow 0$ et $\omega \rightarrow 0$. Nous allons déterminer le comportement asymptotique à basse fréquence des deux premiers modes A_0 et S_0 .

Pour le mode S_0 correspondant au cas où $\alpha = 0$, on peut linéariser les expressions suivantes

$$\tan(p \frac{h}{2}) \rightarrow p \frac{h}{2} \quad (1.23)$$

$$\tan(q \frac{h}{2}) \rightarrow q \frac{h}{2} \quad (1.24)$$

On obtient alors

$$\omega^2 \approx 4k^2 \left(\frac{1}{c_T^2} - \frac{1}{c_L^2} \right) \quad (1.25)$$

On remarque que l'on obtient un caractère non dispersif du mode S_0 à basse fréquence avec

$$V_\phi = V_g = 2c_T \sqrt{1 - \frac{c_T^2}{c_L^2}} \quad (1.26)$$

On définit une grandeur appelée vitesse de plaque c_P à partir du terme de droite $c_P = 2c_T \sqrt{1 - \frac{c_T^2}{c_L^2}}$.

Pour le mode A_0 correspondant au cas où $\alpha = \frac{\pi}{2}$, on peut également linéariser les expressions suivantes :

$$\tan(p \frac{h}{2} + \frac{\pi}{2}) = -\cotan(p \frac{h}{2}) \rightarrow -\frac{2}{ph} + \frac{ph}{6} \quad (1.27)$$

$$\tan(q \frac{h}{2} + \frac{\pi}{2}) = -\cotan(q \frac{h}{2}) \rightarrow -\frac{2}{qh} + \frac{qh}{6} \quad (1.28)$$

On obtient alors

$$\omega^4 \approx 4c_T^4 k^2 q^2 \left(1 - \frac{1 + q^2 \frac{h^2}{12}}{1 + q^2 \frac{h^2}{12}} \right) \approx \frac{4}{12} h^2 k^2 q^2 (p^2 - q^2) \quad (1.29)$$

En remplaçant les coefficients p et q , on retrouve la loi suivante

$$\omega = \frac{c_P}{\sqrt{12}} k^2 h \quad (1.30)$$

On remarque que la relation de dispersion du mode A_0 est quadratique dans l'approximation basse fréquence. Les vitesses de phase et de groupe dépendent de la fréquence, par conséquent ce mode est dispersif.

1.3 Modélisation théorique des ondes de flexion

Au cours des différents travaux effectués dans la thèse, nous nous sommes principalement intéressés à la propagation des ondes de flexion à basse fréquence. L'approximation basse fréquence correspond au cas où la longueur d'onde des ondes de flexion est grande devant l'épaisseur de la plaque. Cette section présente les différents modèles théoriques utilisés analytiquement ou numériquement dans le but de modéliser plus facilement la propagation du mode A_0 . Deux modèles seront présentés, le modèle de Kirchhoff [4] et le modèle de Mindlin [5]. Les deux approches permettent de modéliser une plaque fine par un système à deux dimensions, l'épaisseur devient un paramètre du milieu.

Modèle de Kirchhoff

Le modèle de Kirchhoff est le modèle classique le plus souvent utilisé pour modéliser le premier mode de flexion. Il traduit le passage en deux dimensions de l'équation d'Euler-Bernoulli qui régit le comportement des poutres rigides en flexion pure. Le modèle de Kirchhoff repose sur la série d'hypothèses suivante [4] :

- le matériau est considéré homogène et isotrope
- la plaque est initialement plane
- un segment de la plaque initialement perpendiculaire au plan moyen le reste lors de la déformation (hypothèse de Kirchhoff-Love). La déformation est en flexion pure, il n'y a pas de cisaillement dans le plan.
- les déformations verticales sont faibles et linéaires

L'équation de propagation est établie pour la composante verticale du déplacement $u_z = w(x, y)$. Dans le cas des hypothèses de Kirchhoff, on peut montrer que w est solution de l'équation bi-harmonique (1.31)

$$\frac{D}{\rho h} \Delta^2 w + \frac{\delta^2 w}{\delta t^2} = 0 \quad (1.31)$$

où Δ^2 est l'opérateur bi-laplacien et $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ la rigidité de flexion d'une plaque d'épaisseur h , de masse volumique ρ , de module d'Young E et de coefficient de Poisson ν . Dans le cas d'une onde flexion harmonique, on définit la pulsation de l'onde ω et le vecteur d'onde k associés. On

obtient alors l'équation suivante

$$\left(k^4 \frac{D}{\rho h} - \omega^2\right) w = 0 \quad (1.32)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{\rho h}} k^2 \quad (1.33)$$

Un calcul simple montre que la grandeur $\sqrt{\frac{D}{\rho h}}$ est égale au rapport $\frac{c_{Ph}}{\sqrt{(12)}}$. La relation de dispersion obtenue par le modèle de Kirchhoff (1.33) est donc identique à celle obtenue par l'équation de Rayleigh-Lamb dans l'approximation basse fréquence (1.30). Ce modèle scalaire 2D permet d'obtenir une modélisation fidèle des ondes de flexion à basse fréquence. Le passage d'un modèle 3D à 2D permet un gain de mémoire et de temps de calcul important dans le cas de simulations numériques.

Modèle de Mindlin

La théorie de Mindlin développée en 1951 par Raymond Mindlin permet de prendre en compte les effets de cisaillement transverse et d'inertie de rotation [5]. Le modèle devient désormais une équation vectorielle 2D dans laquelle le champ de déplacement s'exprime en fonction de w le déplacement normal, Π_r et Π_θ les rotations autour de O_r et O_z (en coordonnées cylindriques) [6].

$$u_r = -z\Pi_r(r, \theta), \quad u_\theta = -z\Pi_\theta(r, \theta), \quad u_z = w(r, \theta) \quad (1.34)$$

Comme dans le cas de la théorie d'élasticité tri-dimensionnelle, on peut décomposer les composantes du déplacement en potentiels incompressible et irrotationnel. Ces potentiels vont être solutions d'une équation de Helmholtz classique et nous permettent de définir les relations de dispersions de chacun des potentiels. On remonte ainsi à la formule de la relation de dispersion du mode de flexion dans le modèle de Mindlin (1.35).

$$k_{Mindlin} = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\omega}{c_P} \right)^2 + \left(\frac{\omega}{c_T} \right)^2 \right) + \sqrt{k_{Kirchhoff} + \frac{1}{4} \left(\left(\frac{\omega}{c_P} \right)^2 + \left(\frac{\omega}{c_T} \right)^2 \right)} \quad (1.35)$$

La figure 1.3 est extraite du manuscrit de thèse d'Olivier Xéridat, effectuée au Laboratoire de physique de la matière condensée à Nice et soutenue en 2011. La figure 1.3 présente les relations de dispersion du premier mode de flexion pour un wafer de Silicium d'épaisseur $410\mu\text{m}$ obtenues à partir des deux modèles. Elles sont à comparer avec la relation obtenue par l'équation de Rayleigh-Lamb tracée en rouge. On remarque que le modèle de Mindlin approche la solution exacte sur un domaine de fréquence plus large.

Comme le modèle de Kirchhoff, le modèle de Mindlin permet de réaliser une simulation 2D de la

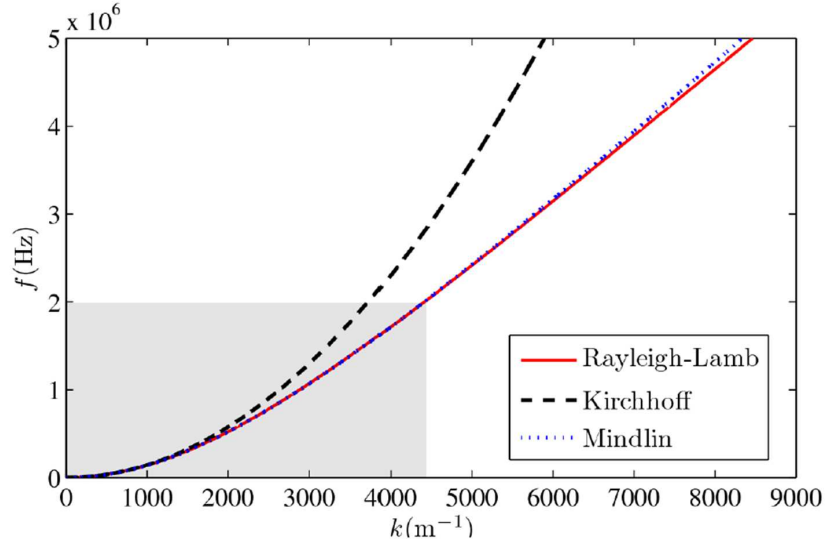


Figure 1.3 – Tracé des relations de dispersion du mode de flexion pour un wafer de Silicium d'épaisseur $410\mu\text{m}$ obtenues à partir de : modèle de Kirchhoff en tirets, modèle de Mindlin en pointillés et équation de Rayleigh-Lamb en rouge. Extrait de la thèse d'Olivier Xéridat, LPMC, Nice.

propagation des ondes de flexion. On l'utilisera notamment dans le cadre des calculs de modes propres ou de courbes de dispersion par éléments finis.

1.4 Simulations numériques

Dans nos travaux, nous avons systématiquement comparé l'expérience aux simulations numériques lorsque cela était possible. Une fois validé, le modèle numérique permet d'explorer l'espace des paramètres, souplesse que n'offre pas l'expérience. Nous allons introduire les différents outils numériques que l'on retrouvera au long des travaux présentés. Ces outils numériques sont classés en deux catégories :

- une approche temporelle de la propagation d'ondes de flexion basée sur la méthode Finite Difference Time Domain (FDTD) dans laquelle les coordonnées spatiales et temporelles sont discrétisées
- une approche spectrale basée sur la méthode aux éléments finis (FEM).

1.4.1 Simulations FDTD

Les ondes de flexion dans les plaques ainsi que les autres types d'ondes acoustiques et élastiques permettent de mesurer une réponse résolue temporellement. Cet aspect temporel est plus complexe dans le cas optique où les mesures sont réalisées sur des grandeurs moyennées telles que l'intensité. Le schéma numérique FDTD permet de simuler la réponse d'un matériau en fonction du temps. Une discrétisation fine de l'espace et du temps permet de linéariser les équations aux

dérivées partielles en temps et en espace. Nous utiliserons exclusivement le logiciel SimSonic (<http://www.simsonic.fr>) dans sa version SimSonic3D [7]. La simulation est basée sur la linéarisation des deux équations de l'élastodynamique : l'équation du mouvement et la loi de Hooke. La relation (1.36) présente la linéarisation de la dérivée partielle d'une fonction $f(a)$ autour d'une valeur a_0 .

$$\frac{\delta f}{\delta a}(a_0) \approx \frac{f(a_0 + \frac{\Delta a}{2}) - f(a_0 - \frac{\Delta a}{2})}{\Delta a} \quad (1.36)$$

Cette approximation est réalisée sur chacune des dérivées premières des équations de l'élastodynamique. Cette méthode est initialement développée dans le schéma numérique de Kane Yee [8] pour les ondes électromagnétiques et sera adaptée par Jean Virieux à l'élastodynamique [9].

Pour des raisons de convergence numérique la FDTD impose une relation entre l'échantillonnage spatial et l'échantillonnage temporel. Cette relation s'appelle la condition de Courant, Friedrichs et Levy (CFL) et s'exprime de la façon suivante (1.37)

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{\sqrt{d} c_{max}} \quad (1.37)$$

où $d=1,2,3$ en fonction du nombre de dimensions spatiales utilisées. Le cas des plaques impose $c_{max} = c_L$ la vitesse de propagation des ondes de compression dans le milieu considéré. Sous réserve d'un maillage suffisamment fin, la résolution numérique pas à pas permet de simuler la propagation d'une onde de flexion dans une plaque quelconque, le logiciel SimSonic 3D peut prendre en compte les hétérogénéités et l'anisotropie du milieu. La viscosité et les effets non linéaires liés aux forts déplacements ne sont pas présents. Nous verrons que les résultats obtenus pour les ondes de flexion à basse fréquence sont en très bon accord avec les observations expérimentales, en revanche le calcul nécessite des ressources informatiques importantes.

1.4.2 Méthode des éléments finis

La méthode des éléments finis permet de calculer numériquement le comportement d'objets complexes en recherchant les solutions approchées d'équations aux dérivées partielles décrivant les phénomènes mis en jeu (propagation d'onde, déformation statique, ...). La résolution nécessite un domaine fermé, discrétisé, avec des conditions aux bords précises. Les équations aux dérivées partielles doivent également être linéaires. Il existe un grand nombre de logiciels utilisant cette méthode de résolution numérique. Nous utiliserons exclusivement le logiciel Comsol Multiphysics (version 3.5). Deux modèles sont adaptés à nos problématiques, le modèle 3D élastique en formulation déformation-contrainte, et le modèle de Mindlin pour les simulations en 2D. Nous utiliserons la méthode des éléments finis afin de calculer les relations de dispersion de milieux périodiques. Le calcul de modes propres stationnaires sera également effectué lors de certains chapitres du manuscrit. Cette méthode FEM assure des temps de calcul courts et réalisables sur

un ordinateur standard.

1.5 Génération et Détection des ondes de flexion

1.5.1 Génération d'onde acoustique ou élastique

La génération d'ondes acoustiques ou élastiques est le plus souvent réalisée par des transducteurs piézoélectriques. Ces transducteurs sont composés de matériaux piézoélectriques capables de traduire une tension appliquée en déplacement mécanique. On les retrouve dans les barrettes échographiques pour l'imagerie médicale réalisée par des ondes de compression dans un milieu fluide. Pour la génération des ondes élastiques, ces transducteurs possèdent le désavantage de nécessiter un contact mécanique avec le système.

Génération mécanique

La génération mécanique nécessite un contact entre l'élément piézoélectrique et la plaque. Ce contact est généralement maintenu sur le système pendant la mesure des déplacements. Or la fixation de cet élément peut perturber le système que l'on souhaite étudier. Nous allons voir qu'il est possible de réduire cette influence en fonction de l'application souhaitée.

Pour les excitations basses fréquences dans des plaques en duraluminium de 1mm à 2mm d'épaisseur, nous utiliserons des pastilles piézoélectriques très fines présentant une masse faible. L'adhésion à la plaque est réalisée à partir d'un sel de salicylate de phényle (salol). Ce matériau présente un point de fusion autour de $41^{\circ}C$. Lors du refroidissement, la reprise de la croissance cristalline assure un contact solide entre la pastille et la plaque. La figure 1.4a présente une photographie d'une pastille PKS1-4A1 MuRata Shock Sensor. Ces pastilles sont efficaces pour des fréquences d'excitation de quelques dizaines de kHz. On peut les asservir aussi bien par des pulses courts que des trains d'onde plus longs. Les signaux utilisés seront des pulses à enveloppe gaussienne dont la fréquence porteuse sera comprise entre 5kHz et 60kHz. Les signaux sont synthétisés sur ordinateur et sont amplifiés avant d'être transmis à la pastille piézoélectrique.

Pour les mesures à des fréquences plus élevées, de 60kHz jusqu'à 1MHz, nous utiliserons un transducteur piézoélectrique de contact modèle Panametrics M109 présenté dans la figure 1.4b. Ces fréquences seront nécessaires lors de la génération d'ondes de flexion dans des wafers de Silicium d'épaisseur $500\mu m$. Cette fois, on ne peut pas envisager de contact direct entre le transducteur et le wafer. Le transducteur est surmonté d'une pointe de silice afin d'appliquer le champ de déplacement ponctuellement. Le diamètre de l'apex de la pointe est de l'ordre de 1mm. Nous utilisons également le sel de salol afin de maintenir un contact solide entre la pointe et la surface du transducteur. Contrairement à la pastille piézoélectrique, le transducteur ne peut pas être

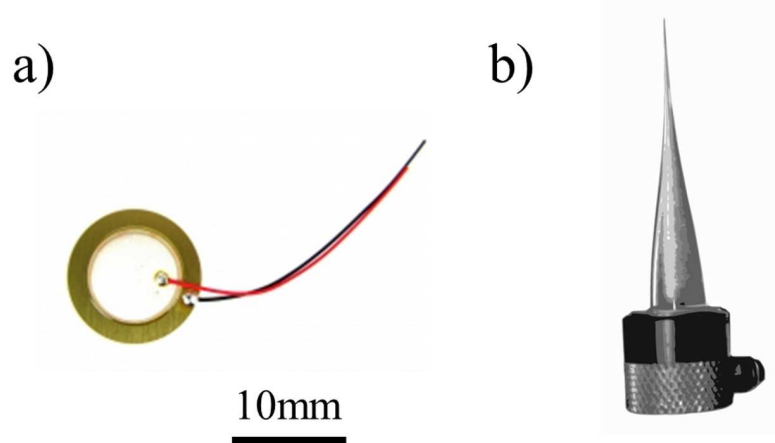


Figure 1.4 – a) Photographie des pastilles piézoélectriques PKS1-4A1 MuRata Shock Sensor. b) Photographie du transducteur impulsionnel Panametrics M109 surmonté d'une pointe en silice.

excité par un train d'ondes trop long. Les vitesses de déplacement mises en jeu à ces fréquences entraînent un échauffement important qui peut endommager les transducteurs. Les signaux utilisés sont des pulses à enveloppe gaussienne produit par un générateur de fonction Agilent 33120A. La fréquence porteuse est fixée à 500kHz et la durée de l'enveloppe gaussienne est de $6\mu s$ soit une largeur spectrale à mi hauteur de 400kHz. Ce pulse gaussien est amplifié par un amplificateur large bande (bande passante de 100kHz à 50MHz pour une puissance de 100W) avant d'être transmis au transducteur.

Pour ces deux sources, le déplacement imposé par le point source permet une excitation efficace du premier mode de flexion A_0 . À basse fréquence, le déplacement vertical de la plaque est en grande partie contenu dans ce mode. L'excitation de la plaque par un champ de déplacement vertical permet alors une excitation sélective de ce mode de flexion. Afin de supprimer le contact entre la source et l'échantillon nous allons voir que l'on peut utiliser la lumière laser pour générer des ondes de flexion dans une plaque.

Génération optique

La génération optique ou la détection optique des ondes élastiques ont été proposées assez rapidement après l'avènement du laser. Le premier Laser est fabriqué par Theodore Maiman [10] à partir d'un cristal de rubis pompé par une lampe flash. Cette émission cohérente et intense de lumière est utilisée à peine trois ans plus tard afin de générer des ondes élastiques sur des substrats métalliques [11, 12]. L'absence de contact entre la source de déplacement et le milieu solide représente un atout majeur dans l'étude de phénomènes physiques liés aux ondes élastiques. Elle permet par exemple d'étudier les vibrations de structures à haute température. La génération optique d'ondes acoustiques est également à l'origine d'un nouveau moyen d'imagerie médicale

nommé photo-acoustique [13].

L'efficacité de cette génération dépend à la fois des paramètres du faisceau laser utilisé : longueur d'onde, durée de l'impulsion, taille du faisceau et des propriétés optiques et thermiques du milieu élastique. La génération optique est décomposée en plusieurs étapes. Le premier phénomène met en jeu l'absorption de l'énergie lumineuse, cette absorption se traduit en un échauffement local du milieu. Suite à cet échauffement, on observe une dilatation locale de la matrice solide du milieu. Cette dilatation thermique transitoire est à l'origine de la génération d'ondes élastiques dans le milieu solide.

La conversion de l'intensité lumineuse en source de déplacement mécanique n'est pas une relation linéaire. Il existe un seuil appelé seuil d'ablation à partir duquel l'énergie déposée par le faisceau laser est trop importante. L'échauffement intense entraîne alors une fusion puis une évaporation de la matière dans la zone illuminée, on parle de régime d'ablation. Dans ce régime, la génération des déplacements normaux est efficace mais entraîne une détérioration de l'échantillon. Nous prendrons soin de rester sous le seuil d'ablation, dans le régime thermoélastique.

L'absence de contact et l'excitation large bande sont deux intérêts majeurs de cette génération optique d'ondes élastiques. On s'attend à quelques inconvénients dans l'application à la génération d'ondes de flexion dans les plaques fines. Dans le régime thermoélastique, la lumière est absorbée très rapidement et pénètre peu en profondeur de la plaque. Le laser utilisé dans notre montage est un laser impulsionnel Q-switch (modèle ULTRA de la marque Quantel), Nd :YAG doublé (532nm), fournissant des impulsions de durée 8ns avec une énergie maximale de l'ordre de 30mJ. La fréquence de répétition des tirs est réglable de 1Hz à 20Hz. Pour une longueur d'onde de 532nm, avec un faisceau de 2mm de diamètre, éclairant une plaque de Silicium de 500 μ m d'épaisseur, la profondeur de pénétration du faisceau est de l'ordre de 1 μ m. La dilatation thermique a donc lieu principalement à la surface de la plaque et la déformation est principalement contenue dans le plan de la plaque. L'excitation du mode A_0 est donc moins sélective que dans le cas d'un transducteur en contact. Nous allons voir que cette faible excitation peut être compensée par une détection optique extrêmement sensible des déplacements verticaux.

1.5.2 Détection optique des ondes de flexion

En parallèle de la génération optique, la fabrication de lasers à grande cohérence temporelle permet le développement d'un grand nombre de techniques de mesures interférométrique optique. En 1968, Gail A. Massey développe la première sonde interférométrique hétérodyne (décalée en fréquence) capable de mesurer la variation de phase d'un faisceau laser réfléchi par un objet en vibration [14]. Nous allons présenter les différents montages optiques expérimentaux utilisés pour la détection des ondes de flexion au cours de nos différents travaux.

Interférométrie optique hétérodyne

La nécessité des techniques optiques interférométriques provient du fait que l'on ne peut pas mesurer la phase optique d'un signal oscillant autour de la centaine de THz. Les mesures optiques sont généralement réalisées sur des grandeurs moyennées comme l'intensité. Il est nécessaire de créer une interférence entre un faisceau sonde et un faisceau référence émis afin d'obtenir cette phase. Ces interférences permettent d'obtenir un réseau de franges sombres et claires dépendant de la différence de marche des deux faisceaux. Lorsque la plaque se déplace verticalement, la différence de marche entre le signal référence et le signal sonde évolue. On observe alors un défilement des franges d'interférence. Le défilement de ces franges est mesurable par un capteur photosensible unique tel qu'une photodiode.

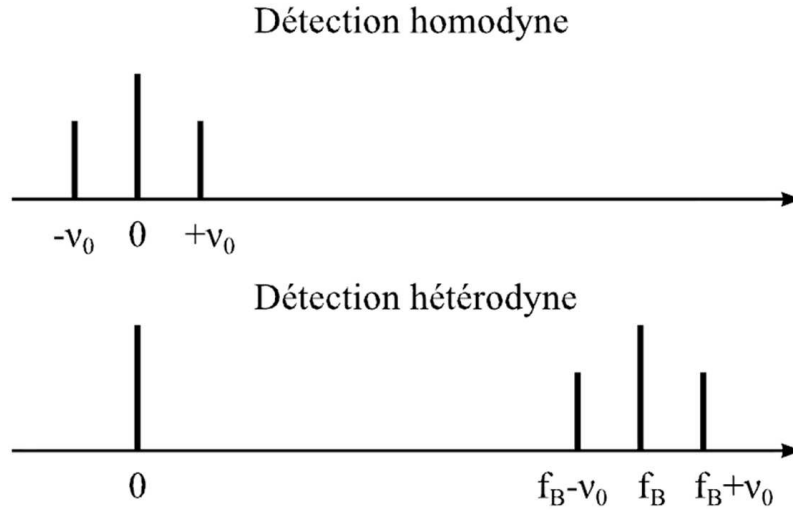


Figure 1.5 – Spectre de l'intensité en sortie de la photodiode dans les cas d'une détection homodyne et d'une détection hétérodyne.

La mesure est améliorée par un décalage en fréquence d'un des bras de l'interféromètre. Ce décalage d'une fréquence f_b nous permet de réaliser le traitement électronique du courant de la photodiode à une fréquence de travail de l'ordre du MHz. Les opérations de filtrage permettant de remonter au déplacement élastique sont éloignées du bruit basse fréquence lié à la phase statique entre les deux bras de l'interféromètre. La figure 1.5 présente les spectres de l'intensité du courant en sortie de la photodiode. Les interférences suppriment la fréquence f_0 de la porteuse du laser commune aux deux faisceaux. Dans le cas d'une détection homodyne l'information sur le déplacement notée ν_0 se retrouve proche des basses fréquences. Dans le cas de la détection hétérodyne, cette information est décalée de la fréquence d'hétérodyne f_b .

Mesure optique hétérodyne du déplacement vertical

La sonde utilisée pour ce montage est une version commerciale de celle utilisée en 1986 par Daniel Royer et Eugène Dieulesaint [15]. Cette sonde est construite à partir d'un interféromètre Mach-

Zender, le laser utilisé pour la détection est un laser continu Nd :YAG doublé (532nm), le décalage en fréquence du faisceau sonde est réalisé par un modulateur acousto-optique fonctionnant à une fréquence $f_b=70\text{MHz}$. La figure 1.6 présente le schéma de la partie optique de la sonde interférométrique. Un objectif en sortie de l'interféromètre permet la focalisation du faisceau sonde en un point de la surface de l'échantillon. Dans le cas d'échantillons ayant un bon état de surface et une bonne réflectivité, la sensibilité de la mesure est de $10^{-2} \frac{\text{pm}}{\sqrt{\text{Hz}}}$ sur le déplacement vertical.

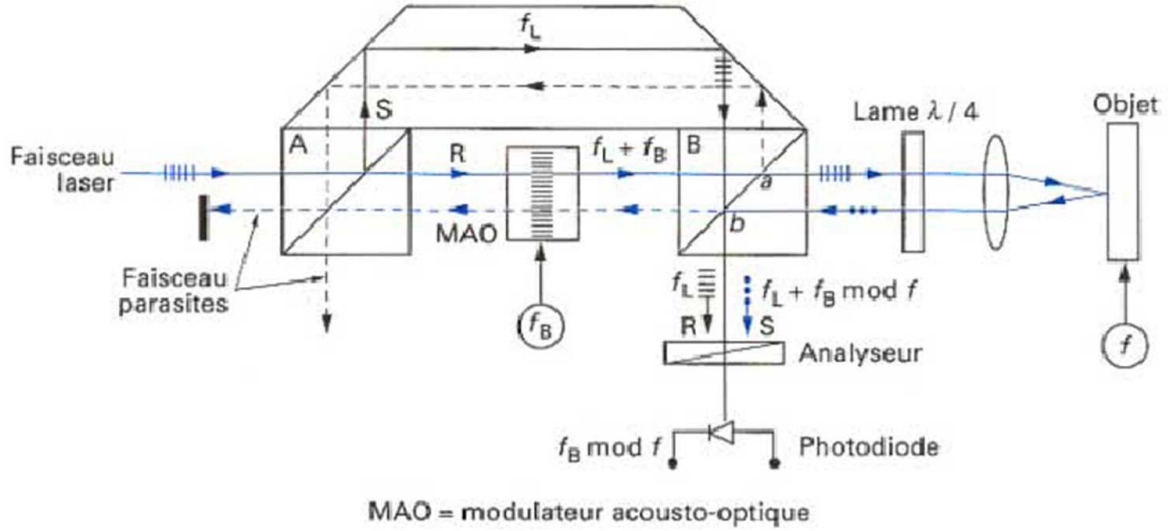


Figure 1.6 – Schéma de la partie optique de la sonde interférométrique, extrait de [15]

À partir du schéma 1.6, on peut décrire l'expression des champs électriques associés au faisceau référence E_R et au faisceau sonde E_S :

$$E_R = E_0 e^{i(\omega_L t + \theta_R)} \quad (1.38)$$

$$E_S = E_0 e^{i((\omega_L + \omega_B)t + \theta_S + \Delta\Phi(t))} \quad (1.39)$$

où ω_L est la pulsation du laser continu, ω_B la pulsation d'hétérodynage, $\Delta\Phi(t)$ est le déphasage dynamique lié au déplacement vertical de la plaque, θ_R et θ_S sont des termes de phase constants. Le courant émis par la photodiode $I_S(t)$ est relié à l'intensité des interférences produites par ces deux faisceaux, il s'exprime :

$$I_S(t) = |E_R + E_S|^2 = I_0 [1 + \cos(\omega_B t + \theta_S - \theta_R + \Delta\Phi(t))] \quad (1.40)$$

avec $\Delta\Phi(t) = 2k_L w(t)$ où k_L est le vecteur d'onde du laser et $w(t)$ le déplacement vertical. La détection optique est résumée dans cette section, la partie électronique de la sonde est responsable de la démodulation de phase du signal $I(t)$ afin de remonter au déplacement vertical de l'échantillon.

Si l'on considère un déplacement vertical harmonique $w(t) = u \cos(\omega_0 t + \phi)$ à la pulsation ω_0 .

Dans le cas où le déplacement vertical u est petit devant la longueur d'onde du laser, le courant délivré par la photodiode s'écrit :

$$Is(t) = I_0 [\cos(\omega_B t + \theta_S - \theta_R) + k_L u \cos((\omega_B + \omega_0)t + \theta_S - \theta_R + \phi) - k_L u \cos((\omega_B - \omega_0)t + \theta_S - \theta_R + \phi)] \quad (1.41)$$

Le spectre de cette fonction présente une raie centrale d'amplitude 1 en $\omega = \omega_B$ puis deux raies à $\omega = \omega_B \pm \omega_0$. Le rapport d'amplitude entre les raies latérales et la raie centrale permet alors de remonter au déplacement vertical u .

Il faut veiller à ce que la condition $|w(t)| \ll \lambda_L$ soit satisfaite. Le déplacement vertical situé hors de cette limite est décalé à une pulsation $\omega = \omega_B \pm 2\omega_0$. Il n'est plus situé dans la gamme de fréquence filtrée par l'électronique et le signal va montrer une saturation.

Cette sonde sera utilisée pour mesurer l'évolution temporelle du déplacement vertical au cours du temps dans des systèmes dont la taille caractéristique est de quelques cm. Les mesures expérimentales des chapitres 5 et 6 sont réalisées avec cette sonde.

Mesure optique hétérodyne de la vitesse de déplacement vertical

Afin de réaliser des mesures sur des objets plus imposants dont la taille caractéristique est de plusieurs dizaines de cm, nous utilisons le dispositif expérimental mis en place par Ros Kiri Ing. La sonde utilisée est commercialisée par la société Polytec. Cet interféromètre mesure la vitesse de déplacement vertical. La configuration optique est identique à la sonde précédente, à l'exception du laser et du modulateur acousto-optique utilisés. Il s'agit d'un laser continu He-Ne(633nm) et l'hétérodyne f_b est de 40MHz.

La différence par rapport au dispositif précédent se situe au niveau du traitement électronique réalisé sur l'intensité de la photodiode. Ce type de sonde est appelée Vibromètre Laser Doppler. Le traitement numérique cherche à extraire la modulation de fréquence imposée par le mouvement de la plaque sur le faisceau sonde, cette modulation est obtenue par effet Doppler.

Cette technique est basée sur l'extraction de la dérivée de la fréquence instantanée $\frac{d\Omega}{dt}$ du courant de la photodiode.

$$Is(t) = I_0 [1 + \cos(\omega_B t + \theta_S - \theta_R + \Delta\Phi(t))] \quad (1.42)$$

$$\Omega(t) = \omega_B t + \Delta\Phi(t) \quad (1.43)$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = \omega_B + \frac{d\Delta\Phi(t)}{dt}. \quad (1.44)$$

On remarque alors que le signal $\frac{d\Delta\Phi(t)}{dt}$ est proportionnel à la vitesse de déplacement vertical $V_z(t) = \frac{dw(t)}{dt}$. Cette démodulation en fréquence peut être effectuée à partir d'une boucle à phase asservie (PLL).

La sensibilité autour de 10kHz est de quelques $\frac{nm}{\sqrt{Hz}}$ plus faible que pour l'interféromètre précédent. En revanche, il n'y a pas de problème de saturation vis à vis de la longueur d'onde du laser. Les vitesses verticales mesurées peuvent atteindre plusieurs $\frac{mm}{s}$. De plus, le faisceau sonde n'est pas focalisé ce qui permet de travailler à grande distance de l'échantillon.

Cette sonde sera utilisée dans les chapitres 2, 3 pour la lentille plate à cristal phononique et dans le chapitre 7 pour l'étude du Maxwell fisheye.

Mesure holographique hétérodyne du déplacement vertical

Ce montage développé au laboratoire par Michael Atlan permet une mesure holographique instantanée des vibrations d'une structure mécanique [16]. Comme pour les montages précédents, il s'agit d'une mesure optique hétérodyne interférométrique du déplacement vertical.

La méthode holographique permet de réaliser une cartographie étendue du déplacement vertical de la plaque en temps réel tandis que les sondes précédentes mesurent le champ en un point et nécessitent un balayage de la surface de l'échantillon. En revanche, la mesure holographique est bande étroite, c'est à dire qu'il est nécessaire d'imposer une excitation harmonique à une fréquence précise, contrairement aux sondes focalisées qui réalisent une mesure large bande résolue en temps. Nous utiliserons la méthode holographique afin de mesurer les modes propres d'une plaque à géométrie complexe dans le chapitre 8.

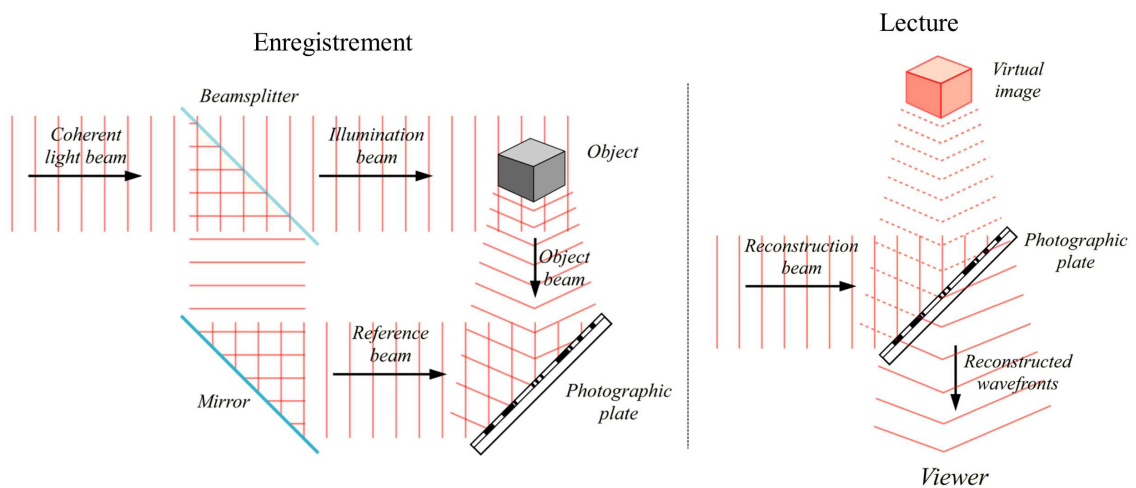


Figure 1.7 – Principe de fonctionnement de la méthode holographique à partir des interférences sur un matériau photo-réfractif. Propriété Bob Mellish.

L'holographie a été développée par Dénes Gabor [17]. Le principe de l'holographie est présenté dans la figure 1.7, elle nécessite deux étapes. La première consiste en l'enregistrement de la figure

d'interférence entre un faisceau référence et le champ diffusé par un objet quelconque. La lecture de l'hologramme est réalisée dans un deuxième temps en éclairant la figure d'interférence enregistrée par le même faisceau de référence. Ce faisceau va se diffracter sur la figure d'interférence enregistrée et reproduire une image virtuelle de l'objet initial.

Le montage expérimental réalisé au laboratoire fonctionne à partir de ce principe, l'enregistrement de la figure d'interférence n'est pas réalisé sur un milieu photoréfractif mais sur une matrice de pixel CCD reliée à un ordinateur. Pour l'instant l'objet n'est pas mis en vibration, mais le premier réglage consiste à obtenir une image nette statique de la zone que l'on va observer.

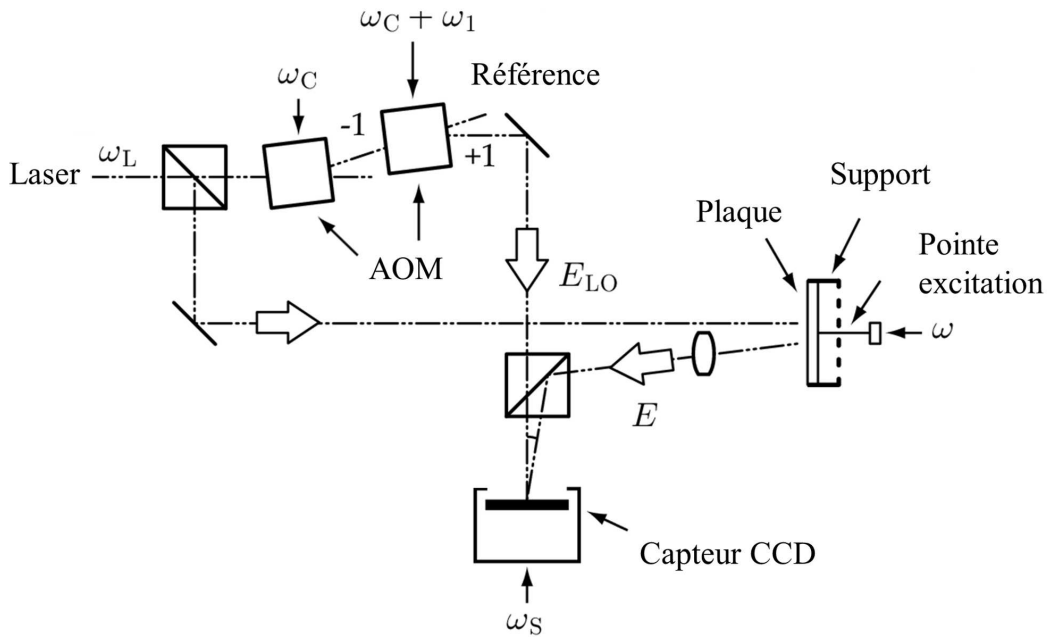


Figure 1.8 – Schéma du dispositif d'holographie hétérodyne. AOM : modulateur acousto-optique de lumière AA Opto-Electronic MT200-BG9-532-FIO-SM-J1-S-s). Le capteur CCD est une caméra Ximea MQ042MG-CM, 2048x2048 pixels de côté $5,5\mu\text{m}$. L'excitation harmonique de fréquence ω est assurée par un actionneur Thorlabs AE0203D04F

Le Laser utilisé est un laser continu Cobolt Samba-TFB-150 à 532nm. Le bras référence présente 2 modulateurs acousto-optiques(AOM) de lumière, la lumière en sortie est collectée selon un angle de diffraction précis, de telle sorte que seule l'ordre de diffraction négatif "-1" soit conservé, on a donc une pulsation $\omega_L - \omega_C$ en sortie du premier AOM. Le deuxième AOM est orienté afin de conserver l'ordre de diffraction positif "+1", on ajoute alors la pulsation indiquée sur le schéma afin d'obtenir un faisceau référence LO de pulsation $\omega_{LO} = \omega_L + \omega_1$.

Le faisceau sonde est étendu (jusqu'à une surface de 10cm^2) afin d'éclairer l'ensemble de la plaque. Le champ optique est défléchi par la plaque excitée par un actionneur piézoélectrique Thorlabs AE0203D04F qui fournit un déplacement vertical harmonique à la pulsation ω . La pulsation du faisceau sonde est décalée par ces vibrations : $\omega_{sonde} = \omega_L + \omega$. Ce faisceau est collecté et redirigé vers le capteur CCD où il interfère avec le champ référence. Les termes en ω_L vont être supprimés et il reste alors les battements entre ω_1 la pulsation d'hétérodyne et ω la pulsation

des vibrations.

Contrairement aux sondes précédentes utilisant une photodiode à large bande passante, la caméra utilisée ne peut acquérir que 24 images par secondes, soit $\omega_s = 150,8 \frac{rad}{s}$. Il est donc nécessaire d'appliquer un hétérodynage du faisceau référence tel que : $\omega_1 = \omega + d\omega$ avec $d\omega < \frac{\omega_s}{2}$. Cette méthode permet alors d'enregistrer l'interférence du champ défléchi par les vibrations à la pulsation ω , le champ provenant des parties statiques est éliminé.

Le motif enregistré par la caméra CCD correspond à l'hologramme de la partie mobile de l'échantillon. La phase de lecture de l'hologramme est ensuite réalisée numériquement par un algorithme basé sur la diffraction de Fresnel (diffraction en champ proche). Cet algorithme permet de retrouver l'image de l'objet à partir du champ diffracté et de la distance qui le sépare de la matrice CCD. L'étape de reconstruction numérique nous permet alors d'obtenir une image des vibrations de la structure à la fréquence de l'actionneur.

On peut maintenant balayer la pulsation ω imposée par l'actionneur afin d'obtenir la réponse stationnaire de la plaque à chaque pas de fréquence. Ce balayage en fréquence est généralement beaucoup plus rapide à effectuer que la cartographie spatiale avec les interféromètres ponctuels.

1.6 Conclusion

Ce chapitre constitue le socle primordial des différents travaux qui seront présentés dans la suite du manuscrit. Ce chapitre nous a permis d'aborder la théorie de l'élastodynamique. Nous avons ensuite étudié l'application de cette théorie au problème des plaques minces menant à l'équation de Rayleigh-Lamb. Les différentes méthodes de modélisation à 2D ont été présentées.

La seconde partie du chapitre concerne la présentation des outils numériques mis en jeu dans les différents projets menés pendant cette thèse. Deux méthodes de simulations seront principalement utilisées : les simulations dans le domaine temporel par FDTD et les simulations dans le domaine spectral par FEM.

Ce chapitre présente les moyens expérimentaux mis en place pour la génération des ondes de flexion. Les générations par contact mécanique ou par impulsion laser sont comparées, on précisera les choix effectués dans chacun des prochains chapitres.

La dernière partie de ce chapitre introductif concerne les méthodes de détection expérimentales des ondes de flexion. Les travaux menés s'appuient exclusivement sur des détections interférométriques hétérodynes. Toutefois différents montages seront utilisés afin de réaliser une mesure ponctuelle du déplacement vertical ou de la vitesse de déplacement au cours du temps. Une méthode holographique est également introduite, elle permet de mesurer le déplacement sur la totalité du système en une seule acquisition pour une fréquence donnée. De même que pour le

choix de la génération des ondes de flexion, le choix de la méthode de détection sera discuté en fonction des objectifs fixés par les différents projets menés.

Première partie

Propagation d'ondes de flexion dans les plaques structurées

Chapitre 2

Focalisation d'ondes de flexion par un cristal phononique

Table des matières

2.1	Introduction	28
2.2	Réfraction négative par un cristal	29
2.2.1	Notions de Cristallographie	30
2.2.2	Théorème de Bloch	30
2.2.3	Milieux cristallins et ondes classiques	31
	Anisotropie de la maille élémentaire	32
	Courbes de dispersion	32
2.2.4	Réfraction des ondes à l'interface d'un cristal et d'un milieu libre	33
2.3	Conception d'une lentille plate par un milieu périodique	35
2.3.1	Loi de Snell-Descartes et contours équifréquences	35
2.3.2	All Angle Negative Refraction	36
2.3.3	Réalisation de la lentille plate	37
2.4	Focalisation d'ondes de flexion par un cristal phononique	39
2.4.1	Focalisation par un cristal à maille carrée	39
	Relation de dispersion analytique - Modèle de poutres	39
	Zone AANR pour un cristal à maille carrée	40
2.4.2	Adaptation d'indice par l'épaisseur	41
2.4.3	Mise en oeuvre expérimentale	43
2.4.4	Résultats expérimentaux et numériques	44
	Influence de la position de la source	46
	Étude de la bande passante du système	47
2.5	Conclusion et perspectives	47

2.1 Introduction

Dans ce chapitre nous allons nous intéresser aux milieux à indice de réfraction négatif. Le concept est proposé pour les ondes électromagnétiques par Victor Veselago en 1968 [18]. L'énoncé du principe est le suivant : si un matériau possède simultanément une permittivité électrique ϵ et une perméabilité magnétique μ négative alors l'indice de réfraction n du matériau devient négatif.

V. Veselago propose alors plusieurs applications de ces milieux à indice négatif également appelés milieux main gauche. L'utilisation d'une lame d'un milieu d'indice négatif comme lentille à bords plats sera l'application la plus exploitée. En 2000 John Pendry démontre la capacité de "superfocalisation" d'une lentille à indice négatif [19]. La superfocalisation désigne la capacité d'un système à focaliser une onde sur une échelle plus petite que sa demi-longueur d'onde. Cette propriété va motiver un nombre important de travaux théoriques, numériques et expérimentaux.

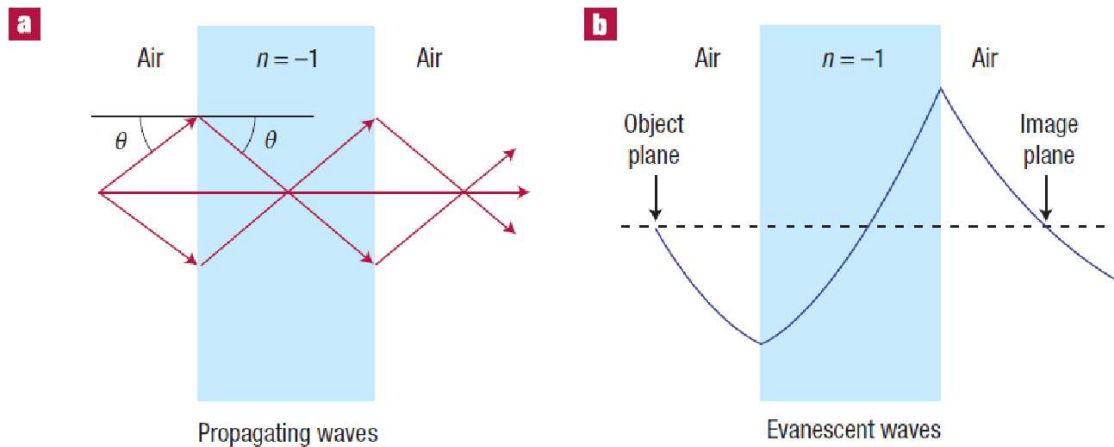


Figure 2.1 – Schéma de principe pour la propagation d'ondes à travers une lentille plate d'indice négatif extrait de [20] a) Tracé de rayons pour les ondes propagatives b) Amplitude des ondes évanescentes en fonction de la position

La figure 2.1 extraite de [20] schématise la propagation des ondes propagatives et l'amplitude des ondes évanescentes en fonction de la distance à l'objet. Pour un système focal classique seule la partie propagative du champ émanant de l'objet est transmise. Les grands vecteurs d'ondes qui contiennent l'information des détails fins de l'objet sont évanescents et s'atténuent exponentiellement sur une distance courte. Ils ne participent pas à la formation de l'image. La reconstruction du point image est donc réalisée uniquement par la partie propagative du champ.

John Pendry démontre qu'une lame à bords plats d'indice négatif permet d'amplifier le champ évanescent afin de le transmettre au point image. La résolution dans le plan image est donc plus fine que celle obtenue par un système classique. Les systèmes réalisant la focalisation d'une onde prennent le nom de "superlentille".

Les superlentilles peuvent donner lieu à des applications technologiques nombreuses notamment pour l'amélioration des techniques d'imagerie mais aussi de photolithographie utilisée dans la fabrication de composants électroniques miniatures comme les micro-processeurs. Malheureusement, les milieux à indice négatif n'existent pas à l'état naturel. Il est donc nécessaire de les concevoir artificiellement. Deux approches ont été développées en parallèle afin de réaliser une démonstration expérimentale d'une expérience de réfraction négative : les structures cristallines et les métamatériaux.

2.2 Réfraction négative par un cristal

L'étude de la propagation d'ondes en milieu périodique s'est beaucoup développée au cours du XXème siècle. En premier lieu appliquée en physique du solide pour l'étude de fonctions d'ondes électroniques dans des milieux cristallins, la théorie de Bloch a été étendue à un grand nombre de phénomènes ondulatoires comme les ondes électromagnétiques ou acoustiques se propageant dans des milieux périodiques. Le phénomène de "bande interdite" est une manifestation universelle de la périodicité d'un milieu. Il s'agit de l'impossibilité d'une onde à se propager dans un milieu périodique lorsque sa longueur d'onde est de l'ordre de la périodicité du milieu. L'effet de bande interdite peut être interprété comme une interférence destructive des ondes transmises et une interférence constructive des ondes réfléchies par le cristal. L'analyse de la propagation dans ces milieux devient complexe dans le cas où la périodicité est réalisée sur plusieurs dimensions comme le présente la figure 2.2.

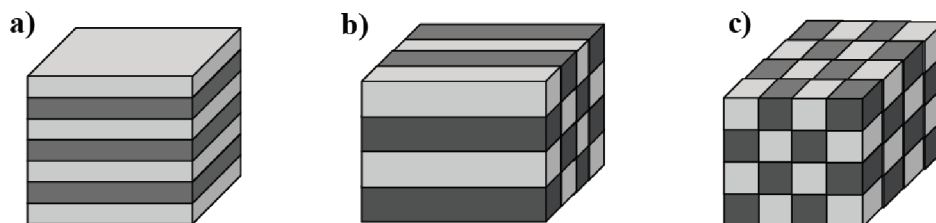


Figure 2.2 – Structures périodiques à deux constituants organisées selon a) 1 dimension b) 2 et c) 3 dimensions.

2.2.1 Notions de Cristallographie

On utilise les outils de la cristallographie et de la physique du solide afin de représenter de façon précise et complète les propriétés des milieux périodiques. Une structure cristalline est composée d'un réseau direct de Bravais. Il s'agit de la répétition d'un motif élémentaire selon une base de vecteur de translations que l'on nomme les vecteurs primitifs a_i , $i = [1, 2, 3]$. On associe à ce réseau direct un réseau réciproque dont les vecteurs primitifs b_j , $j = [1, 2, 3]$ sont définis tels que $b_i \cdot a_j = 2\pi\delta_{ij}$. La première zone de Brillouin est obtenue à partir du réseau réciproque. Pour des raisons de symétrie, on peut réduire cette aire jusqu'à la zone irréductible de Brillouin qui contient les points de haute symétrie ou points critiques du réseau. Le point Γ représente l'origine du réseau réciproque quelle que soit la maille du réseau. La figure 2.3 présente les différentes étapes nécessaires à l'obtention de la zone irréductible pour deux types de maille à deux dimensions que l'on retrouvera dans la suite du manuscrit, la maille carrée et la maille triangulaire.

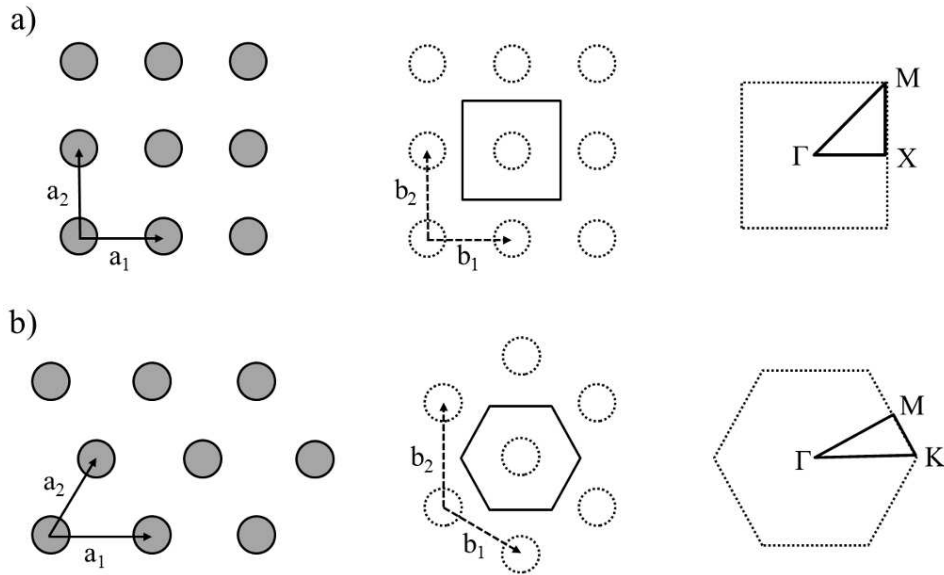


Figure 2.3 – Représentation du réseau direct, du réseau réciproque et de la première zone de Brillouin puis la zone irréductible de Brillouin avec les points critiques pour a) une maille carrée et b) une maille triangulaire.

2.2.2 Théorème de Bloch

Énoncé en 1928, le théorème de Bloch est initialement utilisé pour décrire les fonctions d'ondes électroniques dans un potentiel périodique. Le théorème est énoncé de la façon suivante [21], les fonctions d'ondes $\Psi(r)$ au sein d'un potentiel périodique de période r_0 s'écrivent

$$\Psi(r) = e^{ik \cdot r} u_k(r)$$

avec u_k une fonction périodique de période r_0 telle que

$$u_k(r + r_0) = u_k(r)$$

Le couple k et u_k n'est pas unique. On peut cependant le forcer à appartenir à la première zone de Brillouin. En effet, si le réseau direct possède une périodicité r_0 , le réseau réciproque contient une périodicité $k_0 = 2\pi/r_0$. La fonction d'onde s'écrit alors comme le produit d'une fonction périodique dans l'espace direct de période r_0 et d'un vecteur d'onde k appartenant à la première zone de Brillouin. On peut donc obtenir la réponse d'un cristal infini en ayant uniquement calculé le comportement du cristal dans sa première zone de Brillouin. Pour représenter le comportement d'un cristal, on trace généralement sa relation de dispersion, c'est à dire la relation qui lie un vecteur d'onde particulier à l'énergie dans le cas de fonctions d'ondes quantiques.

2.2.3 Milieux cristallins et ondes classiques

La théorie abordée dans la section précédente peut également s'appliquer aux ondes dites "classiques" comme les ondes électromagnétiques ou acoustiques. Ces ondes sont gouvernées par l'équation d'Helmholtz. Or la résolution de cette équation dans un milieu périodique est analogue à celle de l'équation de Schrödinger pour les fonctions d'ondes électroniques. On peut appliquer le théorème de Bloch aux différents champs mis en jeu dans l'équation de Helmholtz : les champs électrique et magnétique pour les ondes électromagnétiques ou bien les champs de déplacement ou de pression pour les ondes acoustiques. Les milieux périodiques sont créés par des inclusions d'indice ou d'impédance différents. On parle désormais de cristaux photoniques [22] et phononiques [23]. Les relations de dispersion représentent maintenant la relation liant le vecteur d'onde k avec la pulsation ω . Les cristaux phononiques ont également été appliqués au cas des ondes de Lamb dans les plaques [24].

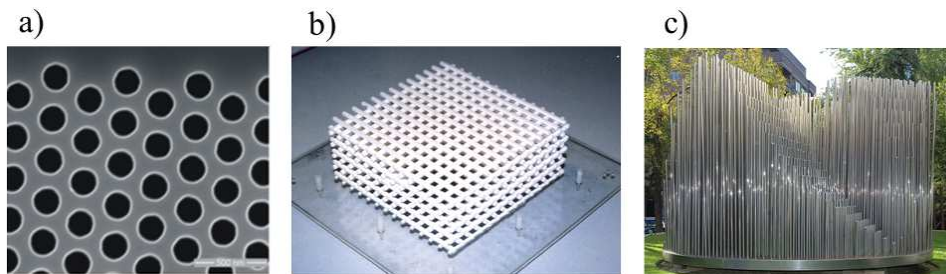


Figure 2.4 – a) Cristal Photonique 2D dans la gamme optique : inclusions cylindriques d'air dans une couche de Silicium (Photonic research group, Gent). b) Cristal photonique 3D dans la gamme micro-ondes, structure "Woodpile" avec des barreaux en céramique (équipe CELANE, Université MacQuarie, Sydney). c) Cristal phononique 2D pour les ondes acoustiques dans l'air, arrangement périodique de barres de métal (Eusebio Sempere, *Órgano*, extrait de [25]).

Anisotropie de la maille élémentaire

Les cristaux à 2 ou 3 dimensions présentent des propriétés anisotropes, c'est à dire que la réponse du cristal à une fréquence donnée dépend de la direction de propagation. L'importance de cette anisotropie dépend de la maille élémentaire utilisée. L'anisotropie d'un cristal à maille carrée à deux dimensions avec une inclusion circulaire peut être appréciée sur la figure 2.5. On représente les arrangements cristallins 1D correspondant à deux directions distinctes : normale au côté de la maille ou selon sa diagonale. On sait que les propriétés des milieux cristallins dépendent des rapports de remplissage et de la périodicité du milieu. Dans le cas de la propagation diagonale le rapport de remplissage de l'inclusion en gris foncé n'est plus que de 35% contre 50% pour la propagation normale. On peut en déduire que la position et la largeur des bandes interdites associées à ces directions de propagation vont être différentes.

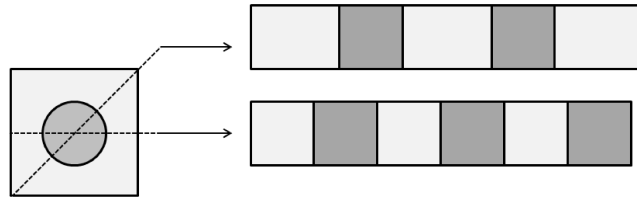


Figure 2.5 – Représentation de l'anisotropie d'une maille élémentaire carrée selon deux directions de propagation

Courbes de dispersion

Afin de prendre en compte la réponse du milieu pour tous les vecteurs d'onde compris dans la première zone de Brillouin, on représente la dispersion du milieu sur les segments formés à partir des points critiques de la zone irréductible, respectivement ΓX , ΓM et XM pour une maille carrée. La figure 2.6 présente une courbe de dispersion obtenue pour un réseau carré de trous au sein d'une plaque de duraluminium ($E=74.9\text{GPa}$, $\rho=2790\text{kg/m}^3$, $\nu=0.334$) d'épaisseur 1mm, le paramètre de maille est de 15mm et le diamètre des inclusions est de 12mm soit un facteur de remplissage de 50%. On remarque que l'anisotropie de la maille se retrouve sur cette figure entre les segments ΓX et ΓM , respectivement propagation normale et diagonale à la maille élémentaire. On observe une bande interdite au niveau du point X autour de 10kHz alors que le repliement au point M se situe autour de 16kHz, ce qui confirme les remarques obtenues à partir de la figure 2.5.

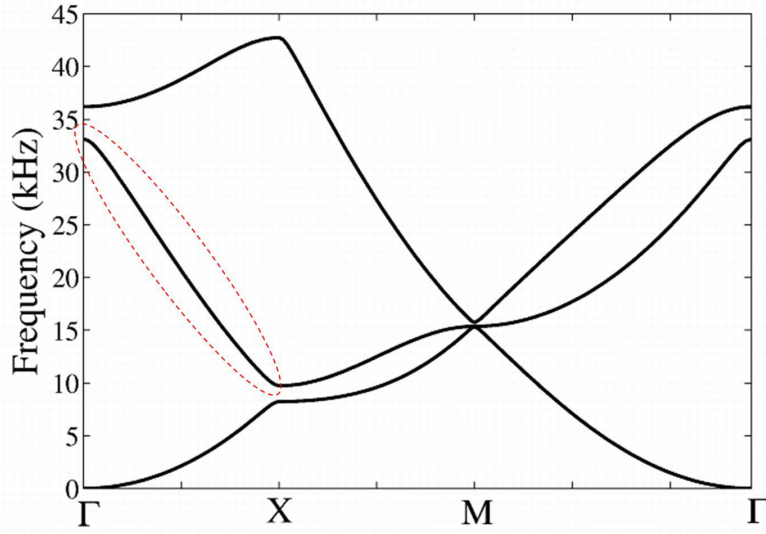


Figure 2.6 – Diagramme de dispersion d'un mode de flexion d'un cristal phononique dans une plaque de 1mm d'épaisseur. Le cristal possède une maille carrée de 15mm de côté avec une inclusion d'air circulaire de diamètre 12mm, obtenue avec COMSOL v3.5, Méthode des Éléments Finis 3D Élastique. L'ellipse rouge indique la présence d'une pente négative où la fréquence est croissante lorsque la norme du vecteur d'onde diminue.

2.2.4 Réfraction des ondes à l'interface d'un cristal et d'un milieu libre

La loi de Snell-Descartes gouverne le comportement d'une onde à l'interface entre deux milieux. Selon cette loi, la composante tangentielle du vecteur d'onde incident est conservée lors du passage à l'interface. Il en résulte une courbure du rayon incident selon la règle $n_1 \sin(\theta_1) = n_2 \sin(\theta_2)$. Le tracé de rayon correspondant à la réfraction d'un rayon à l'interface de deux milieux d'indice n_1 et n_2 positifs est présenté sur la figure 2.7a. La relation suivante $\vec{V}_g \cdot \vec{k} > 0$ est vérifiée pour les milieux à indice de réfraction n positif.

La formule de Snell-Descartes est toujours vérifiée dans le cas de la réfraction à l'interface de deux milieux de signes opposés. La figure 2.7b présente le tracé de rayon obtenu, la conservation de la composante tangentielle est toujours satisfaite. Victor Veselago démontre que la vitesse de groupe et le vecteur d'onde sont de signe opposé tel que $\vec{V}_g \cdot \vec{k} < 0$ [18]. Il est donc nécessaire de changer le sens du vecteur d'onde réfracté $\vec{k}_2$ qui est désormais dirigé vers l'interface. L'autre solution où l'on change le sens de la vitesse de groupe $\vec{V}_{G2}$ n'est pas physique. La vitesse de groupe dicte la direction du vecteur de Poynting auquel on associe la propagation de l'énergie de l'onde. Pour des raisons de causalité, ce vecteur de Poynting doit nécessairement s'éloigner de l'interface.

Les courbes de dispersion présentées dans la figure 2.6 nous donnent accès à la vitesse de phase et à la vitesse de groupe des ondes dans le cristal infini. La vitesse de phase V_ϕ est définie par la

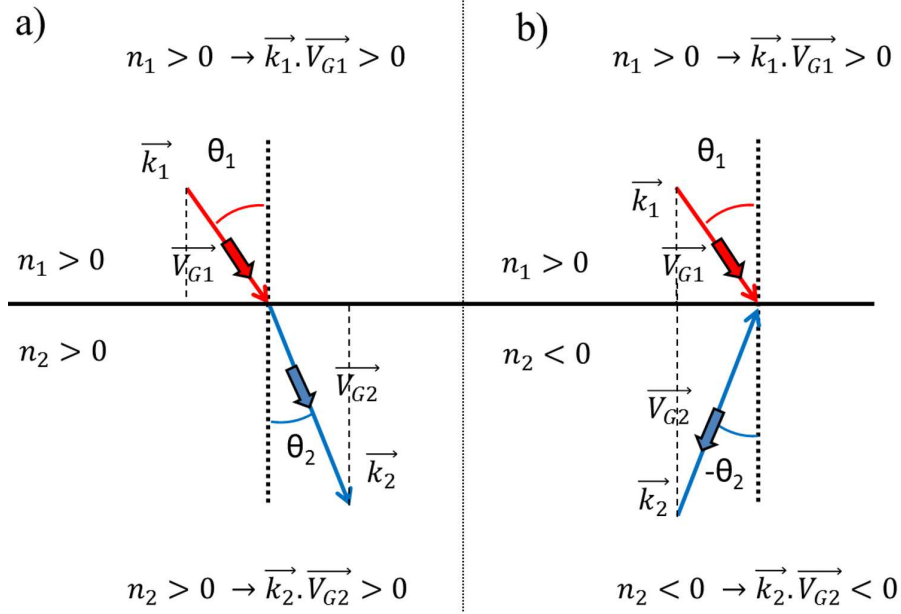


Figure 2.7 – Représentation graphique de la loi de Snell-Descartes. Réfraction d'un rayon incident $\vec{k}_1$ à l'interface entre deux milieux d'indice n_1 et n_2 : a) pour n_1 et n_2 positif et b) n_1 positif et n_2 négatif. Les lignes pointillées verticales montrent la conservation de la partie tangentielle des vecteurs d'ondes $\vec{k}_1$ et $\vec{k}_2$.

relation suivante

$$V_\phi = \frac{\omega}{k} \quad (2.1)$$

La vitesse de groupe V_g est obtenue par la formule suivante

$$V_g = \frac{\delta\omega}{\delta k} \quad (2.2)$$

La deuxième bande du segment ΓX entourée de pointillés rouges présente une pente négative : la pulsation ω est croissante quand la norme du vecteur d'onde k diminue. Cet effet est dû au repliement de spectre par la périodicité du milieu. Pour ces fréquences où la pente de la courbe de dispersion est négative, la vitesse de groupe et la vitesse de phase (colinéaire au vecteur d'onde) vont présenter des signes opposés. On va donc pouvoir modéliser le comportement du cristal à ces fréquences par un indice négatif.

La réfraction négative à l'interface entre un milieu périodique et un milieu homogène a été démontrée expérimentalement pour les ondes électromagnétiques [26], acoustiques [27] et élastiques [28]. Ces différents travaux mettent en évidence un angle de réfraction négatif lorsque la fréquence d'excitation est située au niveau d'une pente négative de la courbe de dispersion. Il s'agit de la première étape vers la fabrication d'une lentille plate à réfraction négative.

La lentille plate à indice négatif réalise l'image d'un point source. Afin d'obtenir une image de ce point source, il faut s'assurer que tous les rayons émis subissent une réfraction négative. On a

vu que les cristaux possèdent une anisotropie, c'est à dire que les propriétés du cristal dépendent de l'angle d'incidence de l'onde. La réalisation d'un cristal permettant une réfraction négative des rayons quel que soit l'angle d'incidence, appelée All Angle Negative Refraction (AANR), nécessite une maîtrise plus fine des propriétés du cristal.

2.3 Conception d'une lentille plate par un milieu périodique

2.3.1 Loi de Snell-Descartes et contours équi fréquences

Il est possible de représenter la loi de Snell-Descartes par le biais des contours équi fréquences. Les contours équi fréquences sont une coupe horizontale des courbes de dispersion à la pulsation ω de l'onde étudiée. Pour un milieu homogène isotrope, il s'agit de cercles concentriques dont le rayon correspond à l'indice du milieu. Ce type de représentation est commun dans l'étude de la réfraction des ondes élastiques car les différentes polarisations possèdent des vitesses de phase différentes. Cette représentation s'avère très utile pour l'étude de la réfraction par un milieu anisotrope, elle permet de prendre en compte la variation de l'indice de réfraction en fonction de la direction de propagation.

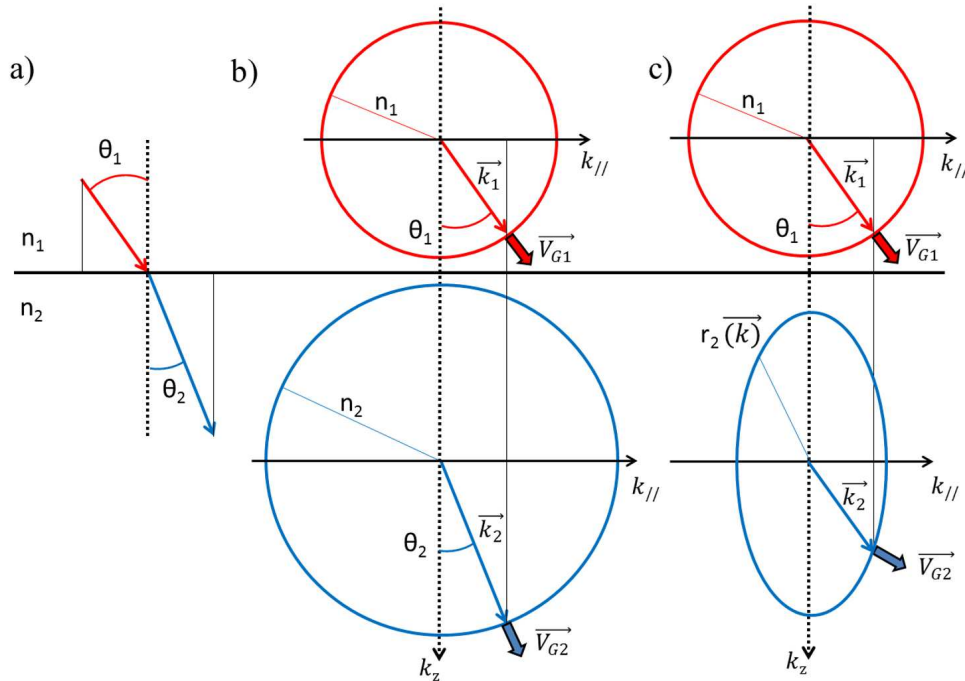


Figure 2.8 – a) Tracé de rayon obtenu par la loi de Snell-Descartes. b) Tracé de rayon obtenu par les contours équi fréquence. c) Réfraction dans le cas où le milieu 2 est anisotrope.

Cette représentation permet également d'accéder à la direction de la vitesse de groupe par la

relation suivante $\vec{V}_g = \vec{\nabla}_{\vec{k}} \omega(\vec{k})$. Cette équation se traduit de façon géométrique : la vitesse de groupe est donnée par la normale sortante au contour équiréquence. Pour les figures 2.8a,b les milieux sont homogènes et isotropes, les contours équiréquences sont circulaires ω et le vecteur d'onde $\vec{k}$ est toujours colinéaire et de même sens que la vitesse de groupe $\vec{V}_g$.

La figure 2.8c présente la réfraction obtenue lorsque le milieu 2 présente une anisotropie (matériau fictif). Le contour équiréquence du milieu 2, $r_2(\vec{k})$ dépend de l'orientation du vecteur d'onde $\vec{k}$. On remarque désormais que la vitesse de groupe et le vecteur d'onde ne sont plus colinéaires. Cependant le produit scalaire $\vec{V}_{g2} \cdot \vec{k}_2$ est toujours positif pour tout vecteur $\vec{k}_2$ car l'indice reste positif.

2.3.2 All Angle Negative Refraction

Historiquement deux mailles élémentaires à deux dimensions ont été largement utilisées afin d'obtenir une zone AANR. Il s'agit de focalisation avec : une maille carrée ou avec une maille triangulaire. Dans cette section nous aborderons le deuxième exemple, la focalisation par la première bande d'une maille carrée sera développée dans la partie suivante.

Comme pour la démonstration de la réfraction négative selon une direction, la focalisation sur la deuxième bande d'un cristal utilise le repliement provenant de la périodicité du milieu afin d'obtenir une courbe à pente négative. On cherche donc à obtenir :

- un contour équiréquence le plus circulaire possible, qui nous apporte un indice de réfraction indépendant de la direction.
- une pente négative selon toutes les directions de propagation.

On a vu que l'indice du milieu est considéré comme négatif si le produit scalaire $\vec{V}_g \cdot \vec{k}$ prend une valeur négative. Cette condition se traduit par le choix de la normale vers les contours à fréquence croissante. La normale à la surface doit être rentrante.

La figure 2.9 présente la courbe de dispersion et les contours équiréquences de la relation de dispersion des ondes de pression au sein d'un réseau triangulaire de barres d'acier immergées dans du méthanol, extrait de [29]. Trois contours équiréquences sont présentés sur la figure 2.9b à 545kHz, 610kHz et 680 kHz. Ces contours sont tracés dans la première zone de Brillouin du cristal. On remarque que les contours équiréquences formés sont parfaitement circulaires, ce qui nous assure un indice isotrope. De plus, le rayon des cercles se réduit lorsque la fréquence augmente. Cette propriété est équivalente à la notion de pente négative présentée sur la figure 2.9a. Par définition, la vitesse de groupe est maintenant opposée au vecteur d'onde, cette opposition est propre au milieu à indice négatif. On peut alors décrire ce matériau par un indice négatif pour ces trois fréquences.

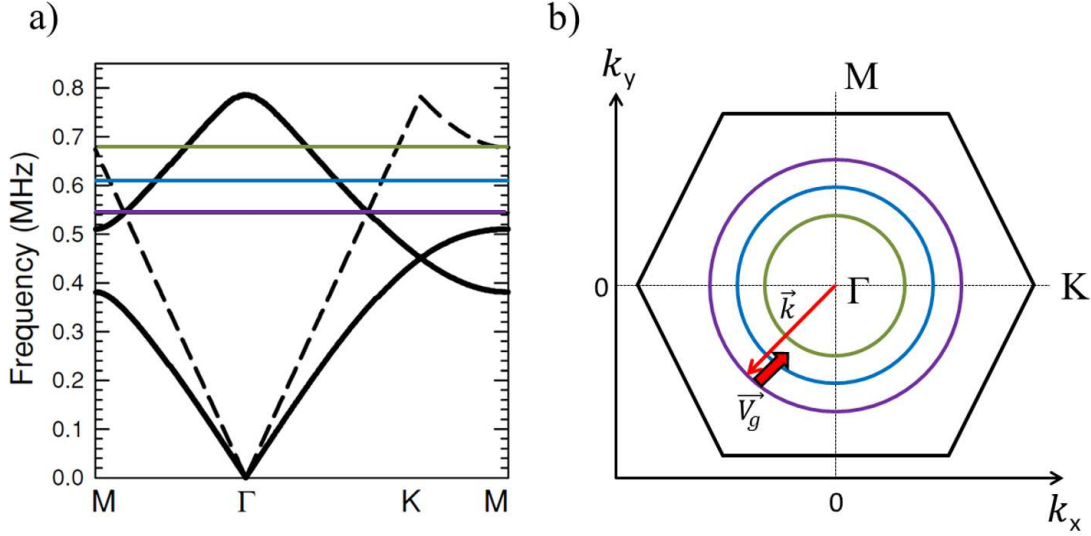


Figure 2.9 – a) Courbes de dispersion des ondes de pression pour un réseau triangulaire de barres d'acier immergées dans du méthanol, extrait de [29]. b) Tracé des contours équi-fréquences pour trois fréquences prises dans la seconde bande, on représente également le tracé d'un vecteur d'onde $\vec{k}$ et la vitesse de groupe $\vec{V}_g$ associée à cette direction. La courbe pointillée présente la relation de dispersion de l'eau.

2.3.3 Réalisation de la lentille plate

La présence de zone AANR dans les cristaux à maille triangulaires a été démontrée expérimentalement pour différents types d'ondes : les ondes électromagnétiques aux fréquences infrarouges [30], aux fréquences micro ondes [31], les ondes acoustiques ultrasonores [32], les ondes élastiques de surface [33]. Les expériences menées nécessitent une lame de cristal périodique (deux interfaces) placée dans un milieu hôte homogène. Le cristal est excité par une source ponctuelle pour une fréquence comprise dans la zone AANR.

La lentille plate décrite par V. Veselago nécessite que la norme de l'indice négatif obtenu soit égale à l'indice du milieu hôte. Cette relation n'est pas toujours satisfaite pour les zones AANR des cristaux. L'écart entre les indices se traduit géométriquement par des contours équi-fréquences ayant des dimensions différentes. La figure 2.10 propose une représentation des cas de figure énoncés ci-dessus.

La figure 2.10a présente le cas où le milieu hôte possède un indice n_1 et le cristal un indice n_2 négatif. Lorsque la norme de n_2 est plus petite que l'indice du milieu hôte, on remarque que seul une partie des vecteurs d'ondes incidents peut se propager dans le cristal. En effet, les vecteurs d'ondes ayant une composante tangentielle trop grande ne sont plus projetés sur le contour équi-fréquence du cristal. Ces rayons sont réfléchis à la première interface. L'effet est similaire à une réflexion totale. Dans le tracé 2.10b, on fixe la condition d'accord d'indice $n_2 = -|n_1|$. On observe alors le schéma de la lentille plate de Veselago qui est donnée en version épurée sur la figure 2.10c. On observe l'apparition d'une image du point source de l'autre côté de la lentille,

et une autre au sein même du cristal.

Cette adaptation de l'indice de réfraction d'un cristal phononique a été réalisée expérimentalement par l'équipe de John Page [34]. Le cristal phononique utilisé est constitué d'un réseau triangulaire de barres d'acier. Dans une première expérience, les barres sont plongées directement dans une cuve contenant de l'eau. L'indice de réfraction du cristal est bien négatif mais sa norme est plus faible que celui de l'eau. On se trouve alors dans la configuration de la figure 2.10a, la taille de la tache focale obtenue en sortie du système est de 1.15λ . On peut interpréter la perte de résolution comme diminution de l'ouverture numérique du système.

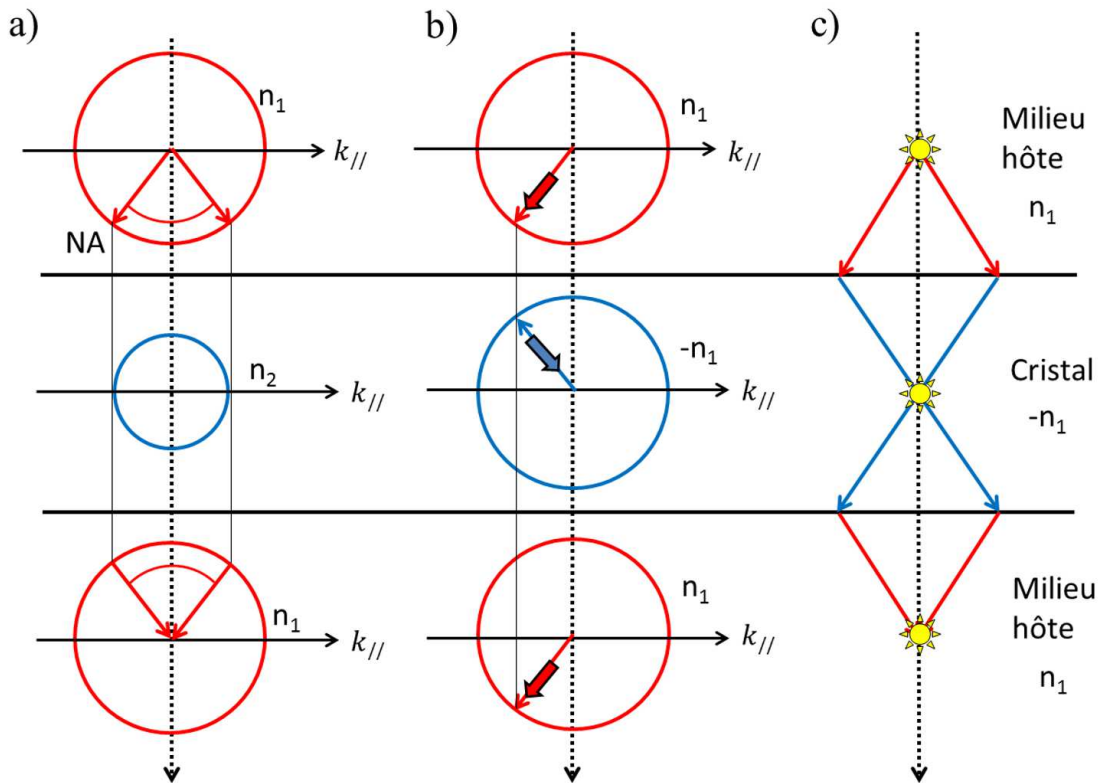


Figure 2.10 – Réfraction aux interfaces d'une lame de cristal au sein d'un milieu hôte. a) Cas où $|n_2| < n_1$. b) Cas où les indices sont strictement opposés, on présente la propagation d'un vecteur d'onde et les vitesses de groupe associées. c) Tracé de rayon équivalent au cas b), on retrouve bien le comportement d'une lentille plate de Veselago avec une image dans le cristal et une image en sortie du cristal.

Afin d'obtenir un bon accord d'indice entre le cristal et le milieu hôte, le réseau de barres est enveloppé d'un film plastique et du méthanol est introduit dans le réseau. Les ondes de compression dans le méthanol présentent une vitesse de propagation plus faible que celle dans l'eau ce qui va nous permettre d'adapter l'indice du cristal. L'ensemble, réseau de barres et méthanol, est ensuite immergé dans une cuve contenant de l'eau pour réaliser la mesure expérimentale. On se situe maintenant dans la situation présentée en figure 2.10b. La résolution atteint alors 0.55λ , ce qui confirme que l'adaptation d'indice entre le milieu hôte et le cristal possède un rôle primordial sur la résolution [34].

2.4 Focalisation d'ondes de flexion par un cristal phononique

2.4.1 Focalisation par un cristal à maille carrée

Historiquement les premières lentilles plates à réfraction négative ont été réalisées dans la zone AANR située dans la première bande d'un cristal à maille carrée. Cette première bande ne présente pas de courbes de dispersion à pente négative. La réfraction négative est uniquement liée à l'anisotropie de la maille. Cette propriété a été exploitée pour des cristaux photoniques dans la gamme GHz [26, 35], cristaux phononiques [36] et dans un cristal pour les ondes à la surface de l'eau [37]. La figure 2.11 représente les courbes de dispersion du mode A0 d'un cristal phononique à maille carrée. Le cristal est construit à partir d'un arrangement périodique de trous cylindriques dans une plaque de duraluminium.

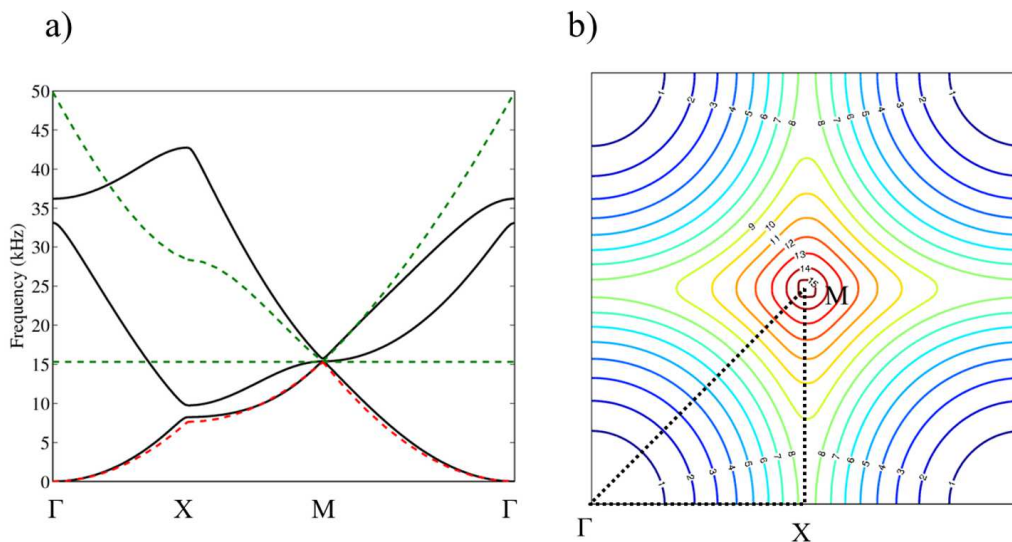


Figure 2.11 – a) Trait plein noir : Diagramme de dispersion du mode A0 d'une plaque contenant un cristal phononique composé d'une maille carrée de 15mm avec une inclusion d'air circulaire de diamètre 12mm dans une plaque de 1mm d'épaisseur. Calcul réalisé par méthode FEM 3D. Trait pointillé : Modèle analytique valide pour la première bande. Le réseau de trous est modélisé par un réseau de poutres. b) Représentation des contours équi-fréquences de la première bande par marche de 1kHz, la zone irréductible de Brillouin est représentée en pointillés

Relation de dispersion analytique - Modèle de poutres

La figure 2.11a présente les courbes de dispersion du réseau de trous obtenues par deux méthodes distinctes. Les courbes en trait plein sont obtenues par une résolution par éléments finis en utilisant un modèle 3D élastique. La méthode employée est la suivante : après le dessin de la maille élémentaire, il est nécessaire d'appliquer les conditions de Bloch aux bords de la maille

pour les trois composantes du vecteur déplacement. On calcule ensuite les fréquences associées aux différents vecteurs d'ondes pour tracer la dispersion du cristal infini.

Notre collaboration avec Mohamed Farhat, Sébastien Guenneau et Stefan Enoch de l'Institut Fresnel a permis de valider une méthode permettant d'obtenir une expression analytique de la première bande du cristal phononique. Le réseau de trous circulaires est modélisé par un réseau de poutres formant des inclusions carrées dans une plaque. La vibration des poutres en flexion pure est gouvernée par l'équation de Bernoulli-Euler (2.3).

$$\frac{\delta^4 w}{\delta t^4} - \frac{\omega^2}{\Xi^4} w = 0 \quad (2.3)$$

Avec w le déplacement vertical des poutres, $\Xi = \frac{EI}{\rho S}$ où E représente le module d'Young, ρ la masse volumique, $S = bh$ la section de la poutre, b la largeur, h l'épaisseur, I le moment d'inertie ayant pour formule $I = \frac{bh^3}{12}$. Les solutions de cette équation se présentent sous la forme suivante (2.4)

$$w(x) = a \cos\left(\frac{\sqrt{\omega}}{\Xi} x\right) + b \sin\left(\frac{\sqrt{\omega}}{\Xi} x\right) + c \cosh\left(\frac{\sqrt{\omega}}{\Xi} x\right) + d \sinh\left(\frac{\sqrt{\omega}}{\Xi} x\right) \quad (2.4)$$

En appliquant le théorème de Bloch sur le déplacement vertical aux frontières de la maille élémentaire et en assurant la continuité et la dérivabilité du déplacement au centre de la maille, on obtient l'expression analytique des courbes de dispersion du cristal (2.5).

$$\sin(\beta l)(\cos(k_x l) + \cos(k_y l) - 2\cos(\beta l))(\cos(k_x l) + \cos(k_y l) - 2\cosh(\beta l)) = 0 \quad (2.5)$$

Avec β la fréquence réduite ayant pour expression $\beta^2 = \omega \sqrt{\frac{12\rho(1-\nu^2)}{Eh^2}}$. La résolution de cette équation, pour les couples (k_x, k_y) appartenant à la zone irréductible de Brillouin, donne les courbes pointillés tracées sur la figure 2.11a. L'accord avec la solution numérique est bon pour la première bande du cristal. Pour les fréquences supérieures, le modèle asymptotique réalisé à partir du réseau de poutres ne permet plus de décrire correctement la dispersion du milieu.

Ce désaccord traduit le fait qu'à plus haute fréquence l'approximation géométrique du réseau de trous cylindriques par un réseau de poutres n'est plus valable. De la même manière, l'équation 2.5 nous permet d'obtenir analytiquement les contours équi-fréquences de la première bande que l'on utilise dans la section suivante.

Zone AANR pour un cristal à maille carrée

Les contours équi-fréquences permettent de décrire le comportement du cristal à une fréquence donnée. La figure 2.11b présente les contours équi-fréquences de la maille carrée.

Pour une fréquence inférieure à 8kHz, les contours équi-fréquences sont des cercles centrés autour

du point Γ , la normale au contour est sortante. Le milieu se comportera comme une plaque homogène isotrope d'indice positif. L'allure des contours équifréquences est modifiée pour des fréquences supérieures à 8kHz. On remarque que les contours se réduisent vers le point M . On retrouve une propriété liée à la réfraction négative : les cercles équifréquences se réduisent quand la fréquence augmente. La vitesse de groupe va donc pointer vers le centre des contours, c'est à dire vers le point M .

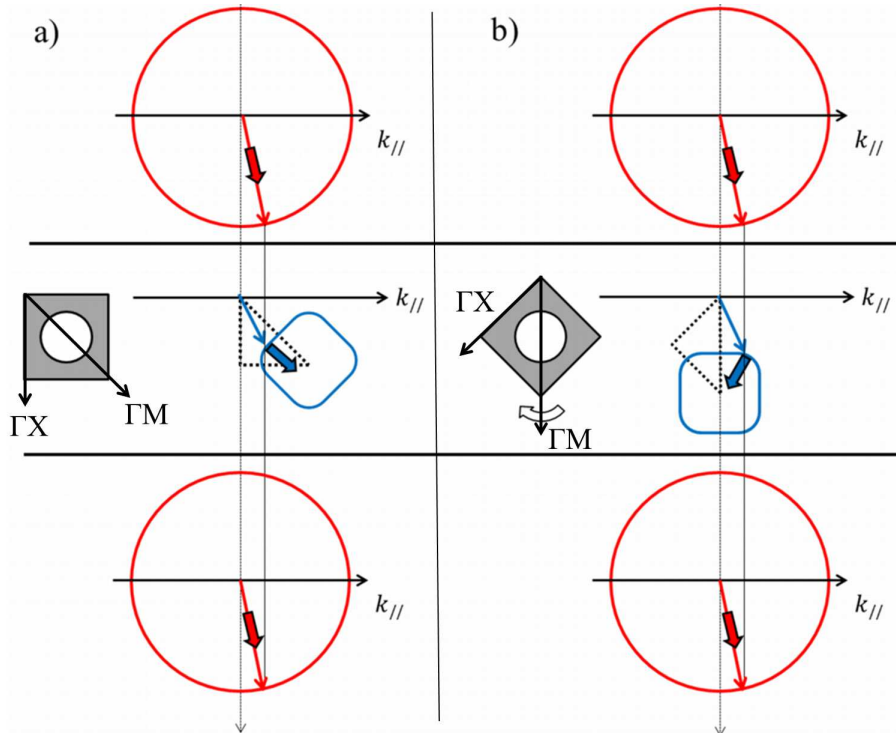


Figure 2.12 – a) Réfraction par une lame de cristal phononique formé de trous sur une maille carrée, le milieu hôte est une plaque de duraluminium de 1mm d'épaisseur. b) Réfraction obtenue dans le cas où la maille élémentaire a été orientée, on retrouve le tracé de rayon de la lentille plate.

Afin d'obtenir une zone AANR, il est nécessaire d'opérer une rotation de la maille élémentaire de 45° , de telle sorte que l'incidence normale soit dirigée selon ΓM . La figure 2.12 présente l'effet de cette rotation pour une fréquence d'excitation de 10kHz. L'effet de réfraction négative est alors obtenu dans un milieu dont l'indice reste positif car le produit scalaire $\vec{V}_g \cdot \vec{k}$ est positif. La réfraction négative provient uniquement de l'anisotropie de la maille carrée.

2.4.2 Adaptation d'indice par l'épaisseur

La figure 2.12b nous montre que les rayons des contours équifréquences de la plaque homogène et du cristal sont différents. L'ouverture numérique de ce système est faible. On a vu qu'il est nécessaire d'adapter l'indice des deux milieux afin d'améliorer la résolution. Dans le cas des ondes acoustiques scalaires, la relation de dispersion du milieu dépend uniquement des propriétés mécaniques du matériau. Il faut alors utiliser un autre milieu avec une densité ou une compressibilité

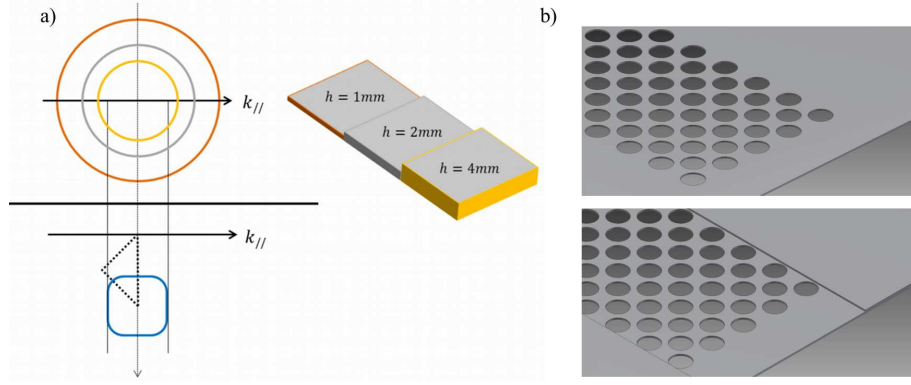


Figure 2.13 – a) Représentation de la réduction des contours équi-fréquences en modifiant l'épaisseur du milieu extérieur. Il s'agit du cercle obtenu pour une fréquence fixée à 10kHz dans chaque cas. b) Représentation artistique des deux plaques réalisées afin de valider expérimentalement le gain en résolution par adaptation de l'épaisseur. La plaque du dessus est d'épaisseur constante 1mm, celle de dessous présente une marche de 1mm, le profil d'épaisseur est 2mm-1mm-2mm.

différente pour modifier la vitesse de propagation d'une onde. Dans le cas de la propagation d'ondes de flexion dans une plaque, l'épaisseur de la plaque influence cette vitesse de propagation. L'épaisseur de la plaque constitue un degré de liberté supplémentaire facilement accessible.

Dans l'approximation basse fréquence, la théorie de Kirchhoff-Love nous donne une expression analytique de la relation de dispersion des ondes de flexion (2.6)

$$\omega = \frac{c_P}{\sqrt{12}} h k^2 \quad (2.6)$$

avec $c_P = \sqrt{\frac{E}{\rho(1-\nu^2)}}$ où E représente le module d'Young, ρ la masse volumique, h l'épaisseur et ν le coefficient de Poisson. Cette équation nous permet d'obtenir une expression de la vitesse de phase des ondes de flexion (2.7). L'indice de réfraction de la plaque peut être défini comme l'inverse de la vitesse de phase.

$$v_\phi = \frac{\omega}{k} = \sqrt[4]{\frac{E h^2 \omega^2}{12 \rho (1 - \nu^2)}} \quad (2.7)$$

On remarque alors que l'augmentation de l'épaisseur d'une plaque permet de réduire le rayon des contours équi-fréquences. Nous allons utiliser cet effet afin d'adapter les rayons des contours équi-fréquences du cristal et de la plaque homogène extérieure. La figure 2.13a présente la réduction de ces contours en fonction de l'épaisseur de la plaque extérieure au cristal pour une fréquence de 10kHz. On choisit de modifier l'épaisseur de la plaque extérieure au réseau.

La réduction du contour équi-fréquence entraîne également une augmentation de la longueur d'onde. Pour une augmentation de l'épaisseur d'un facteur 4, la longueur d'onde est doublée. Ces grandes longueurs d'ondes vont nécessiter l'utilisation de plaques trop encombrantes. L'usinage des trous est difficile à réaliser pour des plaques dont la surface est trop importante.

Nous décidons d'utiliser une épaisseur de 2mm pour la plaque extérieure et une épaisseur de 1mm pour la partie contenant le cristal phononique. Ce cristal se compose d'une maille carrée tournée à 45° de paramètre de maille $a = 15\text{mm}$ contenant un trou cylindrique de diamètre $d = 12\text{mm}$. La figure 2.13b représente les deux plaques fabriquées afin de valider expérimentalement la focalisation d'ondes de flexion. On comparera également les performances en résolution des deux systèmes avec et sans modification de l'épaisseur.

2.4.3 Mise en oeuvre expérimentale

Les réseaux de trous sont percés dans des plaques de dimensions 500mm x 300mm. La zone percée contenant le réseau mesure 98mm x 250mm. Pour la création de la plaque avec modification de l'épaisseur, nous avons préalablement réduit l'épaisseur d'une plaque de 2mm de moitié dans la zone du cristal puis réalisé le perçage des trous.

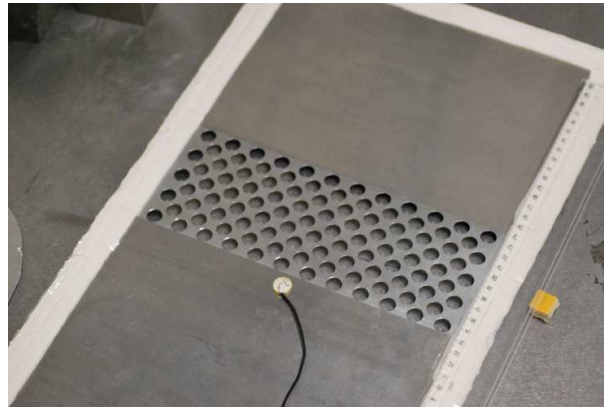


Figure 2.14 – Photographie de la plaque avec modification de l'épaisseur. On peut apprécier l'orientation de la maille élémentaire, la pastille piézoélectrique servant de source, ainsi que la pâte adhésive utilisée comme absorbant aux bords de la plaque. La plaque est posée sur six tampons en feutre (1cm^2) afin de ne pas être en contact avec le support.

La figure 2.14 présente une photo de la plaque réalisée par la société GREM, Paris. On peut y observer la pastille piézoélectrique (PKS1-4A1 MuRata Shock Sensor) de diamètre 1cm. La pastille piézoélectrique nous permet d'exciter les ondes de flexions dans la plaque. Elle est fixée à la plaque par un sel de Phenyl-salicylate (ou Salol). Le Salol est commercialisé sous forme de poudre cristalline, il possède un point de fusion à 41°C . Lors du refroidissement, la reprise de la croissance cristalline permet de fixer la pastille à la plaque par un contact solide. Les bords de la plaque ont été recouverts par une bande de 2cm de pâte adhésive afin d'absorber une partie de l'onde incidente et d'éviter les réflexions sur les bords de la plaque. L'efficacité de l'absorption a été évaluée à 3dB d'atténuation pour une fréquence de l'ordre de 10kHz.

La mesure optique de la vitesse de déplacement verticale est réalisée par vibrométrie Laser à effet Doppler. L'installation se compose d'une sonde optique Polytec OFV505 montée sur un système de déplacement 2 axes et d'un contrôleur OFV5000 du même fabricant. Un pulse gaussien :

$S(t) = \sin(2\pi f_0 t) e^{-\frac{(t-t_0)^2}{2\sigma^2}}$ centré en f_0 avec pour écart-type σ est synthétisé numériquement, transmis par un convertisseur numérique analogique Agilent U2542A (500kS/s), puis amplifié par un amplificateur large bande ProSystem US300 avant d'être transmis à la pastille piézoélectrique. Le convertisseur numérique analogique est également utilisé afin de récupérer la tension aux bornes du contrôleur sur un laps de temps fixé par l'utilisateur. On réalise une mesure temporelle de la vitesse verticale de déplacement en chaque point de la plaque. Les dimensions des scans sont les suivantes : 440mm x 260mm avec un échantillonnage spatial de 2mm. L'échantillonnage temporel est fixée par les cartes d'acquisition à $2\mu s$. Les mesures en chaque point sont moyennées sur 10 réalisations afin d'obtenir un bon rapport signal sur bruit. Une journée de mesure est nécessaire afin d'obtenir la carte spatio-temporelle de la vitesse de déplacement verticale sur toute la plaque.

2.4.4 Résultats expérimentaux et numériques

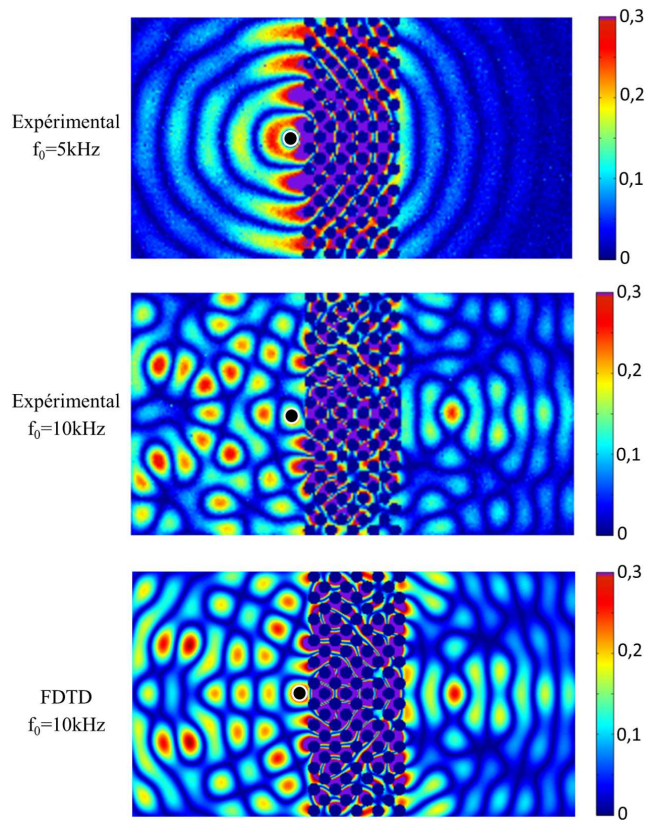


Figure 2.15 – Représentation instantanée de la norme des vitesses de déplacement vertical à $t = 780\mu s$ pour la plaque dont l'épaisseur est modifiée entre le cristal et la plaque extérieure. Les deux premières cartes sont des mesures expérimentales pour des pulses gaussiens centrés en 5kHz et 10kHz. La dernière carte représente le résultat obtenu par FDTD pour un pulse centré en 10kHz. Les cercles noirs indiquent l'emplacement de la source. Les vitesses de déplacement vertical dans le réseau sont trop importantes et saturent la représentation.

La figure 2.15 présente la norme de la vitesse déplacement vertical à $t=780\mu s$ pour la plaque

dont l'épaisseur a été modifiée. La première carte présente les résultats expérimentaux pour un pulse gaussien centré en $f_0=5\text{kHz}$ de largeur $\sigma=1.5\text{kHz}$. Une deuxième mesure expérimentale est réalisée pour un pulse gaussien centré en $f_0=10\text{kHz}$ de largeur $\sigma=2.1\text{kHz}$. La dernière carte présente les résultats numériques obtenus par simulation Finite Difference Time Domain (FDTD) pour un pulse gaussien centré en $f_0=10\text{kHz}$ de largeur $\sigma=2.1\text{kHz}$.

Le comportement du réseau à 5kHz correspond aux propriétés des contours équi-fréquences. En dessous de 8kHz, les contours équi-fréquences sont des cercles, le réseau se comporte comme un matériau isotrope homogène. On remarque que les fronts d'ondes cylindriques émis par le point source sont conservés lors de la propagation dans le cristal. Pour une fréquence centrale $f_0=10\text{kHz}$, la focalisation du pulse est observée à la fois expérimentalement et numériquement. L'amplitude de la tache focale obtenue expérimentalement représente 27% de l'amplitude maximale émise par le point source.

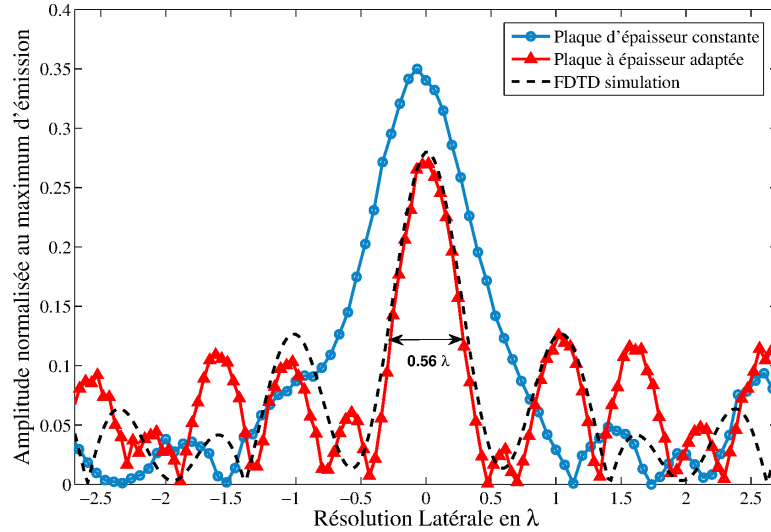


Figure 2.16 – Coupe latérale de la carte de champ de vitesse au temps $t = 830\mu\text{s}$, l'axe des abscisses est normalisé par la longueur d'onde. La courbe en bleu marquée par les cercles représente la largeur de la tache focale obtenue pour une excitation centrée en 10kHz dans une plaque d'épaisseur constante 1mm. La courbe en rouge marquée par les triangles donne le profil de la tache focale pour la même excitation dans le système où l'épaisseur est modifiée. La courbe en pointillés présente le résultat numérique obtenu dans des conditions d'épaisseur modifiée. La résolution latérale est mesurée à mi hauteur de la tache focale.

Afin d'étudier la résolution latérale obtenue, il est nécessaire de représenter une coupe transversale passant par le maximum d'amplitude de la tache focale. Ces coupes sont représentées sur la figure 2.16, l'axe des abscisses est normalisé par la longueur d'onde dans la plaque. Pour une fréquence de 10kHz, la longueur d'onde dans une plaque d'épaisseur 1mm est de $\lambda(1\text{mm}) = 31.6\text{mm}$ tandis que la longueur d'onde dans une plaque d'épaisseur 2mm vaut $\lambda(2\text{mm}) = 44.6\text{mm}$. Le gain en résolution latérale par adaptation de l'épaisseur est important. La résolution obtenue pour le système à épaisseur constante est de 1.05λ . On atteint une résolution de 0.56λ , proche de la

limite de diffraction, en adaptant les indices de la plaque et du cristal par une modification locale de l'épaisseur.

Ce résultat publié dans la revue Applied Physics Letters [38] est la première démonstration expérimentale de focalisation d'ondes de flexion par une lentille plate à réfraction négative. Les prochaines sections vont présenter la robustesse de l'effet de focalisation en fonction de paramètres tels que la position de la source ou la fréquence centrale du pulse gaussien.

Influence de la position de la source

La position de point source peut jouer un rôle important vis à vis des performances en résolution. Cet article [32] démontre expérimentalement que la résolution s'améliore pour un point source placé en face d'une inclusion. L'étude théorique de ces effets n'est pas facile à mener car elle nécessite de prendre en compte la taille finie du cristal. Or les calculs des courbes de dispersion par FEM réalisés jusqu'à maintenant décrivent le comportement d'un cristal infini.

Plusieurs travaux traitent de ces effets d'interface, dans le cadre de création de guide d'onde pour la collimation d'onde électromagnétique [39], d'autres travaux mentionnent également l'effet Goos-Hänchen lors de la réflexion totale d'une onde plane par un cristal photonique [40].

Nous allons vérifier si le placement de la source dans un intervalle ou en face d'un trou possède une influence sur la résolution. Pour la suite des analyses, nous représenterons directement l'amplitude du signal au cours du temps. L'enveloppe du signal en un point varie lentement comparée à sa porteuse fixée par la fréquence d'excitation. On peut extraire le signal d'enveloppe par une technique de filtrage basée sur la transformée de Hilbert [41].

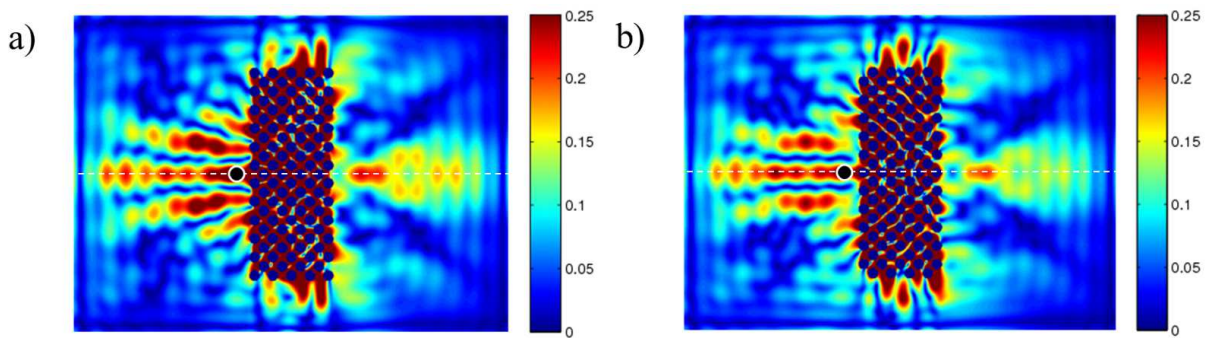


Figure 2.17 – Représentation de l'amplitude de vitesse de déplacement verticale à $t=800\mu s$ pour un pulse centré en 10kHz. a) la source est placée en face d'un intervalle b) la source est placée en face d'un trou. Les cercles noirs indiquent l'emplacement de la source.

La figure 2.17 présente deux cartes d'amplitude de vitesse verticale de déplacement à $t=800\mu s$ obtenues par FDTD. Des conditions absorbantes équivalentes à celles utilisées dans les mesures expérimentales sont placées aux bords de la plaque simulée. Un pulse centré en 10kHz est utilisé dans les deux simulations, la source est placée sur l'axe médian de la carte marqué en pointillés

blanc. On remarque que la distribution spatiale de l'amplitude au niveau de la tache focale varie peu. On peut noter une légère amélioration de la transmission dans la figure 2.17a où la source est placée en face d'un intervalle. Cette étude nous permet d'affirmer que la position de la source ne joue pas un rôle déterminant pour notre système.

Étude de la bande passante du système

La bande passante d'un système est une donnée intéressante afin d'évaluer son efficacité. La figure 2.18 représente trois vues instantanées de l'amplitude du champ de vitesse obtenues numériquement par FDTD. Nous décidons de mettre en place des conditions d'absorption optimales afin de supprimer totalement les réflexions aux bords de la plaque. Il ne s'agit pas de conditions PML (Perfectly Matched Layer) souvent utilisées dans les simulations numériques. Nous utilisons un empilement successif de milieux de plus en plus absorbants afin d'éviter un contraste d'impédance trop important. L'atténuation est de 50dB pour une épaisseur totale d'absorbant de deux fois la longueur d'onde de la fréquence d'incidence.

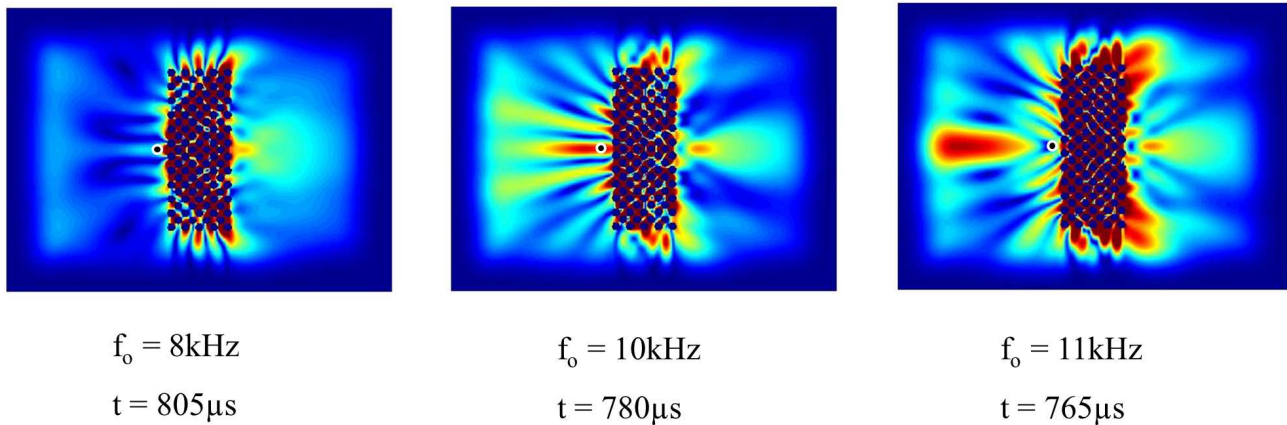


Figure 2.18 – Représentation instantanée de l'enveloppe du signal temporel en chaque point de la carte. Les trois cartes correspondent à des fréquences centrales de 8kHz, 10kHz et 11kHz. Les vues sont prises au temps où l'amplitude de la tache focale est maximale. L'échelle de couleur est normalisée pour chacune des cartes. Les cercles noirs indiquent l'emplacement de la source.

Une tache focale est présente pour chacune des cartes de la figure 2.18. L'effet de focalisation par le cristal est efficace sur une bande de $\Delta f = 3\text{kHz}$ de large centrée en $f_0 = 9\text{kHz}$ soit une bande passante de $\frac{\Delta f}{f_0} = 30\%$. Les cristaux photoniques ou phononiques présentent généralement une large bande passante car la réfraction négative est liée à un effet de diffraction.

2.5 Conclusion et perspectives

Ce chapitre aborde la démonstration expérimentale de la focalisation des ondes de flexion par une lentille plate à réfraction négative. La première partie du chapitre présente l'origine de cette

réfraction négative au sein de milieux périodiques.

La deuxième partie présente la fabrication d'une lentille plate à réfraction négative pour les ondes de flexion dans une plaque. La lentille est une lame de cristal phononique présentant une propriété de réfraction négative autour d'une fréquence de 10kHz. Le cristal phononique étudié et fabriqué se compose d'un réseau carré de trous percés dans une plaque de duraluminium.

Nous avons démontré expérimentalement qu'une modification locale de l'épaisseur de la plaque permet d'adapter la vitesse de phase des ondes de flexion et d'obtenir une résolution de 0.55λ proche de la limite de diffraction classique.

La réponse des lentilles plates est le plus souvent étudiée en régime harmonique avec une source continue. Plusieurs travaux théoriques démontrent l'existence d'un régime transitoire au cours duquel la résolution de la lentille s'améliore [42]. Les travaux menés par l'équipe de Jean Jacques Greffet vont plus loin et démontrent théoriquement que l'utilisation d'une source pulsée permet un gain en résolution par rapport au régime harmonique [43]. Nous apporterons une démonstration expérimentale de ces effets dans le prochain chapitre.

Historiquement, deux approches ont été utilisées afin d'obtenir un milieu à indice négatif. Les milieux cristallins permettent d'obtenir cette propriété à partir de l'anisotropie ou du repliement de bande liés à la périodicité. La deuxième démonstration utilise les métamatériaux [44]. Ces métamatériaux sont composés d'un arrangement périodique de résonateurs. Ce sont désormais les résonances du milieu qui apportent un indice négatif. Le chapitre 3 abordera la conception d'un métamatériau pour les ondes de flexion.

Chapitre 3

Super focalisation des ondes de flexion en régime temporel

Table des matières

3.1	Introduction	50
3.1.1	Cas d'un cristal à réfraction négative	50
3.1.2	Cas d'un milieu d'indice négatif	52
3.1.3	Évolution temporelle de la super résolution	53
3.2	Suivi temporel de la focalisation	54
3.2.1	Transformée de Fourier spatiale	56
	Extraction des modes propres	59
	Extraction du champ rayonné par la lentille	61
3.2.2	Construction du point focal sub-longueur d'onde	62
	Super résolution sans information évanescence	62
3.3	Fonctions super oscillantes	63
3.3.1	Création d'une tache focale super oscillante	65
3.3.2	Formation d'une tache focale super oscillante au cours du temps	66
3.4	Amélioration de la résolution en régime temporel	70
3.4.1	Réurrence des taches focales en régime temporel	72
3.4.2	Effet de la durée de l'impulsion	73
3.4.3	Effet de la position de la source	74
3.5	Conclusion et perspectives	75

3.1 Introduction

L'origine de la super résolution obtenue par une lentille plate réside dans sa capacité à transmettre et amplifier le champ évanescent émanant d'un objet source [19]. La focalisation de la partie propagative de l'information est assurée par la correction de la phase accumulée lors du parcours afin d'obtenir une interférence constructive au point image. En revanche, le champ évanescent ne se propage pas, il ne possède donc pas de phase. Il est nécessaire de l'amplifier afin de le transmettre d'un point source à un point image. La transmission des ondes évanescentes jusqu'au plan image n'est pas réalisée par le même mécanisme dans un cristal périodique ou un métamatériau à indice négatif [45, 46].

3.1.1 Cas d'un cristal à réfraction négative

Certains modes de la lentille plate réalisée à partir d'un cristal de dimensions finies peuvent avoir des vecteurs d'onde plus grands que ceux du milieu hôte. On parle de modes liés à la lame de cristal car ils sont étendus dans le cristal mais évanescents dans le milieu homogène extérieur. Il est nécessaire de prendre en compte les dimensions finies de la lame de cristal afin de les faire apparaître.

Il est alors nécessaire de réaliser le calcul des courbes de dispersion sur une super-cellule, plus étendue que la cellule élémentaire. Cette super-cellule peut prendre en compte la présence d'interfaces entre le cristal et le milieu homogène extérieur. Les figures 3.1a et 3.1b présentent les courbes de dispersion obtenues sur une cellule élémentaire et sur une super-cellule. La taille finie du cristal entraîne un nombre important de bandes.

Le fait que le système possède des modes à grands vecteurs d'onde pour une fréquence donnée est primordial dans la recherche de la super résolution. Cette démarche a été démontrée théoriquement [47] et expérimentalement [34, 32] dans le cadre de cristaux phononiques pour les ondes acoustiques ultrasonores, ce sont ces grands vecteurs d'ondes transverses qui apportent la super résolution. La figure 3.1c présente les différents scénarios en fonction de la fréquence d'excitation. La meilleure résolution est obtenue lorsque la fréquence de travail est comprise entre la fréquence où les modes à grands vecteurs d'onde sont présents (dans la zone grise). La résolution obtenue est meilleure dans le cas $f < 544\text{kHz}$ que $f = 544\text{kHz}$.

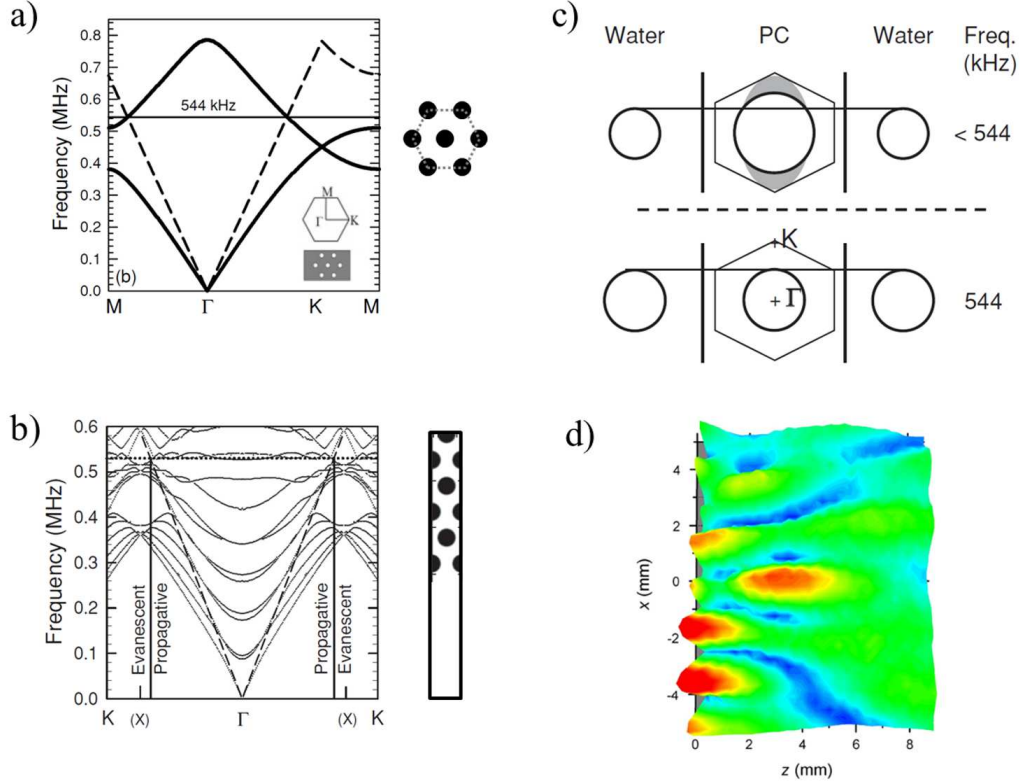


Figure 3.1 – a) Courbe de dispersion d'un cristal infini tracé sur la zone irréductible de Brillouin. La dispersion tracée en traits pointillés correspond à la dispersion du milieu extérieur. Extrait de [32]. b) Courbe de dispersion obtenue à partir de la super cellule prenant en compte l'interface entre le cristal et le milieu homogène extérieur. Extrait de [29]. c) Tracé des contours équifréquences pour deux fréquences $f=544\text{kHz}$ et une fréquence $f<544\text{kHz}$. La zone grisée représente la position des modes liés au réseau. La composante tangentielle de leur vecteur d'onde est plus importante que celle du milieu extérieur, ils sont évanescents à l'extérieur du cristal mais existent dans le cristal fini. Extrait de [29]. d) Mesure expérimentale du champ de pression en sortie du système pour une fréquence d'excitation de 530kHz . Extrait de [32].

Ces modes possèdent des vecteurs d'ondes ayant une grande composante tangentielle, ils sont évanescents dans le milieu extérieur. Il est donc nécessaire de rapprocher la source du bord du cristal afin de pouvoir les exciter. Pour les mêmes raisons, la tache focale doit également rester suffisamment près de l'interface afin d'observer la contribution du champ évanescent rayonné par ces modes.

Cette démarche est démontrée expérimentalement par le groupe de John Page. Pour une source éloignée du bord de la lentille, la résolution atteinte est de $0,55\lambda$ [34]. En rapprochant cette source du bord de la lentille, la résolution a pu être améliorée jusqu'à $0,37\lambda$ car les modes évanescents ont pu être excités. Il s'agit de la première démonstration expérimentale de la super focalisation des ondes acoustiques.

Malgré leurs contributions évanescences, ces modes ne permettent pas d'obtenir une résolution arbitrairement fine. Les modes liés au cristal doivent respecter la structure du cristal. La résolution est limitée au rapport entre le paramètre de maille utilisé et la longueur d'onde considérée

[47]. Afin d'obtenir une résolution indépendante de la structure, il est nécessaire de travailler avec un métamatériau qui va permettre l'obtention d'un indice négatif par des effets résonants [46].

3.1.2 Cas d'un milieu d'indice négatif

Dans le cas d'un milieu à indice négatif présenté par John Pendry [19], l'amplification du champ évanescent est réalisée par un phénomène résonant. Ces modes résonants sont confinés à l'interface entre les milieux d'indice positif et négatif. À la manière d'un plasmon de surface, ces modes possèdent des vecteurs d'onde à très grande composante transverse et sont évanescents de part et d'autre de l'interface. L'excitation de tels modes permet d'atteindre des résolutions plus fines que celles observées dans le cas de milieux périodiques.

La figure 3.2 présente ces modes d'interface, ainsi que le couplage résonant des deux bords de la lentille. C'est ce phénomène de couplage, agissant comme un relai, qui permet l'amplification de l'information évanescente dans la lentille menant à la super résolution. L'existence de ces modes a été démontrée théoriquement pour différents types d'ondes comme les ondes électromagnétiques [42, 48] et les ondes acoustiques [49].

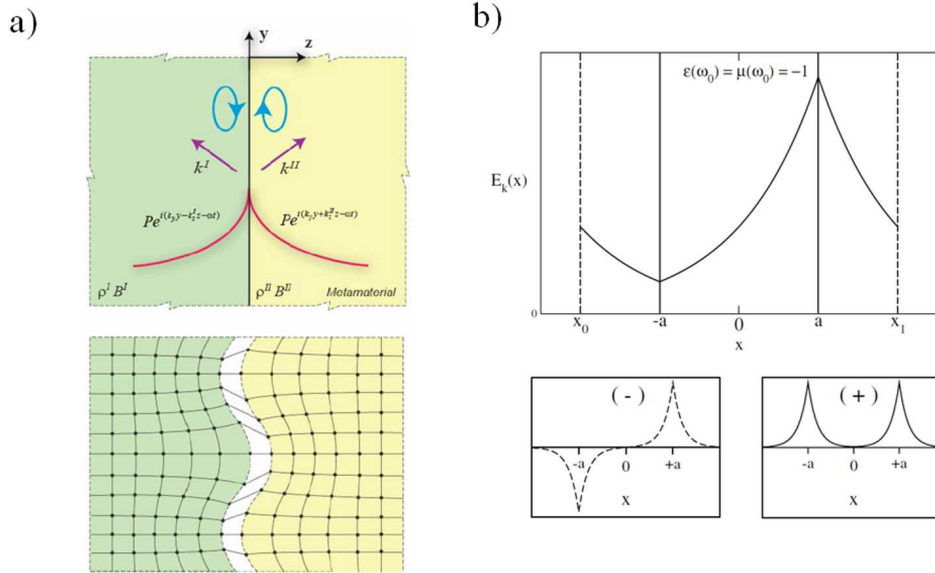


Figure 3.2 – a) Représentation de la décroissance du champ de pression lié au mode d'interface entre un milieu I(vert) d'indice positif et un milieu II(jaune) métamatériau à indice négatif. Le schéma dessous représente la polarisation elliptique du mode confiné à l'interface. Extrait de [49] b) Couplage résonant des modes confinés sur les deux interfaces d'une lentille plate dans le cas d'ondes électromagnétiques. La courbe du cadran supérieur donne l'amplitude du champ évanescent en fonction de la position. Les deux cadrans inférieurs présentent l'hybridation des modes d'interface en un mode symétrique et un mode antisymétrique. La somme de ces deux modes donne la transmission totale. Extrait de [42].

3.1.3 Évolution temporelle de la super résolution

L'observation expérimentale de cette amplification du champ évanescent présente de nouveaux défis. La première contrainte concerne les pertes par absorption. Les pertes associées aux phénomènes résonants ne permettent qu'un gain limité pour l'amplification du champ évanescent. Il sera donc nécessaire d'avoir un objet et une image proche des bords de la lentille. Une deuxième contrainte que l'on va discuter plus en détails concerne l'aspect temporel. L'étude des lentilles plates à réfraction négative est le plus souvent réalisée avec une excitation monochromatique. La super focalisation requiert des résonances avec des facteurs de qualité importants afin d'obtenir une amplification efficace du champ évanescent. Ces modes confinés à l'interface sont difficiles à exciter depuis le milieu extérieur. Cette excitation difficile se traduit par un régime transitoire dont la durée est proportionnelle au facteur de qualité du mode [42, 48]. Une résolution parfaite (transmission totale du champ évanescent) nécessite alors un régime transitoire de durée infinie.

Pour ces raisons, la dénomination de lentille "parfaite" utilisée dans [19] a été corrigée en super-lentille ou lentille à super-résolution. L'étude du régime transitoire a été réalisée en ajoutant une propriété causale à l'excitation : fonction de Heaviside ou fonction échelon. Les calculs théoriques et numériques [50] montrent que ces modes résonants évanescents prennent plus de temps pour s'établir. En conséquence, la résolution de la lentille s'améliore au cours du temps. La limite de résolution de ces systèmes est alors fixée par le ratio entre les pertes et ce temps caractéristique d'établissement des modes.

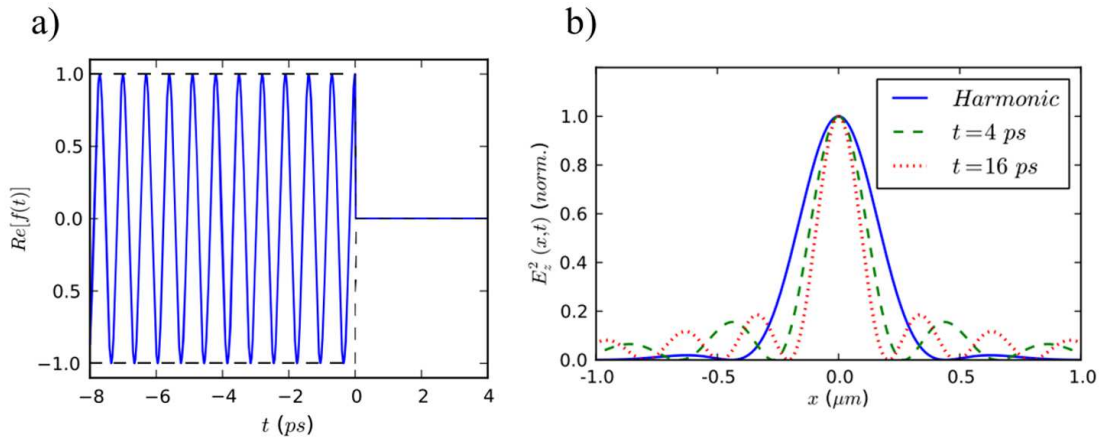


Figure 3.3 – a) Représentation de la fonction de Heaviside retournée temporellement, puis multipliée à une fonction sinusoïdale, l'extinction est à $t=0ps$. b) Représentation des coupes latérales de l'intensité au niveau du point focal pendant l'excitation en trait plein, puis en pointillés à $t=4ps$ et à $t=16ps$ après extinction. L'amplitude est normalisée pour les trois coupes afin de comparer les largeurs. Extrait de [43].

Le principe d'excitation dépendante du temps a été exploité par l'équipe de Jean-Jacques Grefet. Dans leurs travaux [43], la fonction Heaviside est retournée dans le temps afin d'observer l'évolution de la résolution après l'extinction d'une source monochromatique comme le montre la figure 3.3a. Lorsque le régime est établi, la résolution obtenue correspond à la contribution de

chacun des champs rayonnés par les différentes résonances. A l'extinction de la source, l'énergie stockée par les résonances va décroître au cours du temps. La vitesse de décroissance est reliée au facteur de qualité des résonances. Les modes à vecteurs d'onde importants possèdent des facteurs de qualité importants, ils vont donc décroître moins rapidement. La tache focale va évoluer vers une structure dont la résolution latérale s'améliore à mesure que l'amplitude associée aux faibles vecteurs d'onde transverses diminue.

L'évolution de la résolution au cours du temps est présentée sur la figure 3.3b, le trait plein correspond à la tache focale observée, les pointillés montrent l'amélioration de la résolution latérale pour des durées après extinction. L'amplitude des trois courbes est normalisée afin de pouvoir comparer leurs largeurs. Ce gain en résolution n'est pas sans coût, à mesure que le temps progresse l'amplitude de la tache focale diminue ce qui peut être critique dans des applications où le rapport signal à bruit est faible.

3.2 Suivi temporel de la focalisation

L'observation expérimentale de ces effets est difficile à mettre en place pour les fréquences optiques, car les temps caractéristiques sont de l'ordre de la picoseconde. Une mise en oeuvre expérimentale dans le domaine des ondes acoustiques ou élastiques est envisageable car l'échantillonnage temporel nécessaire est moindre pour les fréquences ultrasonores. L'étude que l'on va aborder a pour but de suivre l'évolution temporelle de la résolution de notre système de la naissance de la tache focale jusqu'à son déclin.

Dans le chapitre précédent, nous avons vu que la position du point focal et son temps de construction peuvent être modifiés. Il est nécessaire de posséder un algorithme capable de déterminer la position exacte de la tache focale afin de mesurer la résolution latérale en chaque pas de temps. On extrait l'enveloppe du signal temporel en chaque point en utilisant la transformée de Hilbert, cette étape nous permet de supprimer la fréquence porteuse du signal et d'obtenir l'amplitude des vitesses de déplacement vertical au cours du temps.

La première étape consiste à repérer le point d'amplitude maximale image dans l'axe longitudinal de la plaque passant par le point source. Une fois cette position connue pour chaque pas de temps, on réalise une coupe transversale à travers ce point afin d'obtenir le profil latéral de la tache focale. Ce profil nous permet de mesurer la résolution latérale en chaque pas de temps.

La figure 3.4a présente la résolution obtenue au cours du temps pour une excitation gaussienne de largeur $\sigma=2.1\text{kHz}$ et de fréquence centrale f_0 de 9kHz et 10kHz. Les données expérimentales et numériques sont exploitées. On remarque que dans les deux cas, la résolution s'améliore au cours du temps. La droite en pointillés permet de situer la limite de diffraction classique. On remarque que pour une excitation centrée en 9kHz, la résolution latérale devient plus fine que la limite de Rayleigh et atteint un maximum de $0,35\lambda$ au temps $t=1150\mu s$. Ce résultat démontre

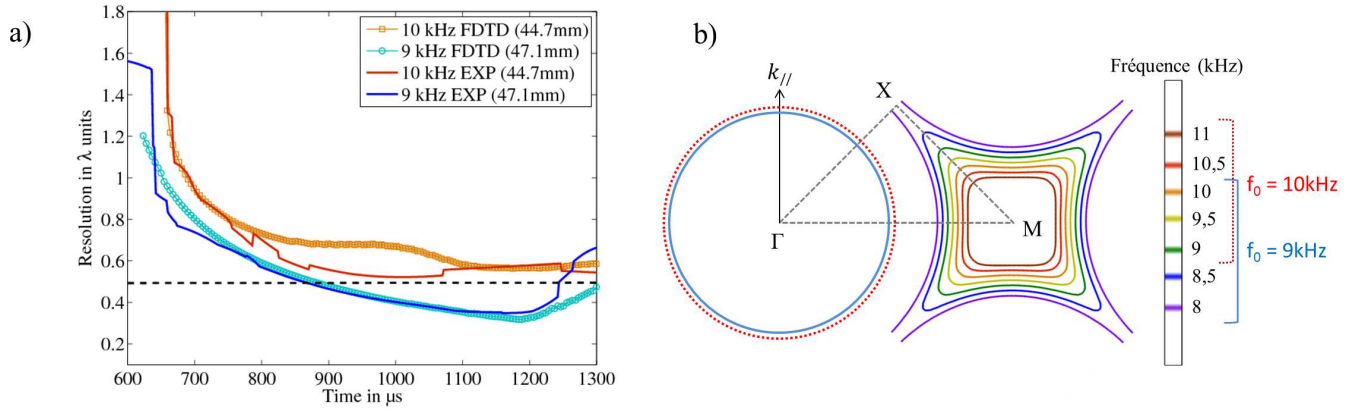


Figure 3.4 – a) Représentation de la résolution en fonction du temps. Les courbes rouges présentent les résultats expérimentaux (trait plein) et numériques (marqués) pour un pulse centré en 10kHz.. Les courbes bleues présentent les résultats pour une fréquence centrale de 9kHz. La droite horizontale pointillée permet de placer la limite de diffraction classique à 0.5λ . b) Tracé des contours équi-fréquences mis en jeu pour les deux excitations. Les cercles autour de Γ donnent la dispersion du milieu extérieur pour les deux fréquences centrales utilisées 9kHz en bleu et 10kHz en pointillés rouge. Les accolades sur la droite de l'échelle de couleur montrent la largeur des pulses utilisés dans les différents essais expérimentaux et numériques.

expérimentalement l'amélioration de la résolution d'une lentille plate au cours du temps. Dans le cas d'un pulse gaussien centré en $f_0=9\text{kHz}$, le régime de super-résolution est atteint par une lame de cristal phononique à maille carrée.

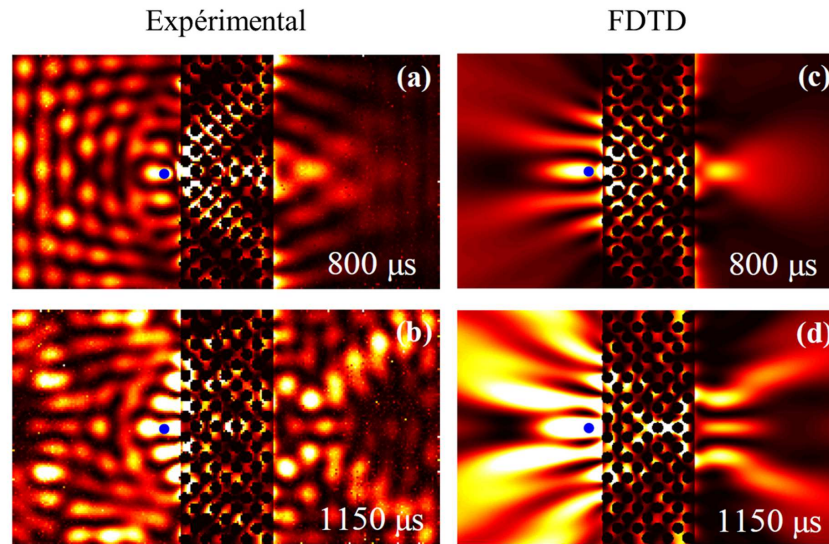


Figure 3.5 – a) Carte d'intensité de vitesse de déplacement verticale expérimentale à $t=800\mu s$ b) Carte d'intensité expérimentale à $t=1150\mu s$ c) Carte d'intensité numérique à $t=800\mu s$ d) Carte d'intensité numérique à $t=1150\mu s$. Les simulations numériques sont effectuées avec des bords parfaitement absorbants. Les points bleus indiquent la position de la source sur chacune des cartes. L'intensité dans le réseau est divisée par un facteur 9 afin d'éviter la saturation.

La figure 3.5 présente les cartes obtenues expérimentalement et numériquement pour une fré-

quence centrale $f_0=9\text{kHz}$ au temps $t=800\text{ }\mu\text{s}$ où l'amplitude de la tache focale est maximum et au temps $t=1150\text{ }\mu\text{s}$ où la résolution est la plus fine. Les simulations FDTD sont réalisées avec des bords très absorbants pour limiter l'influence des réflexions. La courbe de l'excitation à 10kHz possède une tendance similaire. On observe une amélioration de la résolution aux temps courts mais le régime de super focalisation n'est pas atteint.

La figure 3.4b présente les contours équi-fréquences excités dans le réseau pour les deux excitations. Les largeurs des pulses utilisés sont représentées par les accolades à droite de l'échelle de couleur. Les cercles autour du point Γ représentent la dispersion de la plaque extérieure (2mm d'épaisseur) autour de la fréquence considérée. Ce schéma permet d'expliquer la meilleure performance en résolution de l'essai à $f_0=9\text{kHz}$.

Les contours équi-fréquences excités par le pulse à 9kHz présentent des zones où la composante tangentielle des vecteurs d'ondes $k_{//}$ est plus importante que dans le cas $f_0=10\text{kHz}$. L'ouverture angulaire de la lentille plate est plus grande pour un pulse gaussien centré en 9kHz . On obtient logiquement une résolution plus fine. En revanche, la représentation des contours équi-fréquences ne peut expliquer ni l'apparition de la super résolution, ni l'évolution temporelle de la résolution. Il est nécessaire d'étudier le comportement dynamique du cristal fini.

3.2.1 Transformée de Fourier spatiale

Le comportement dynamique de la lentille peut être vu comme l'interaction des différentes résonances excitées dans la lentille plate. L'étude de ce comportement dynamique débute par la description de ces résonances. L'approche classique consiste à étudier les propriétés spectrales de la lentille plate.

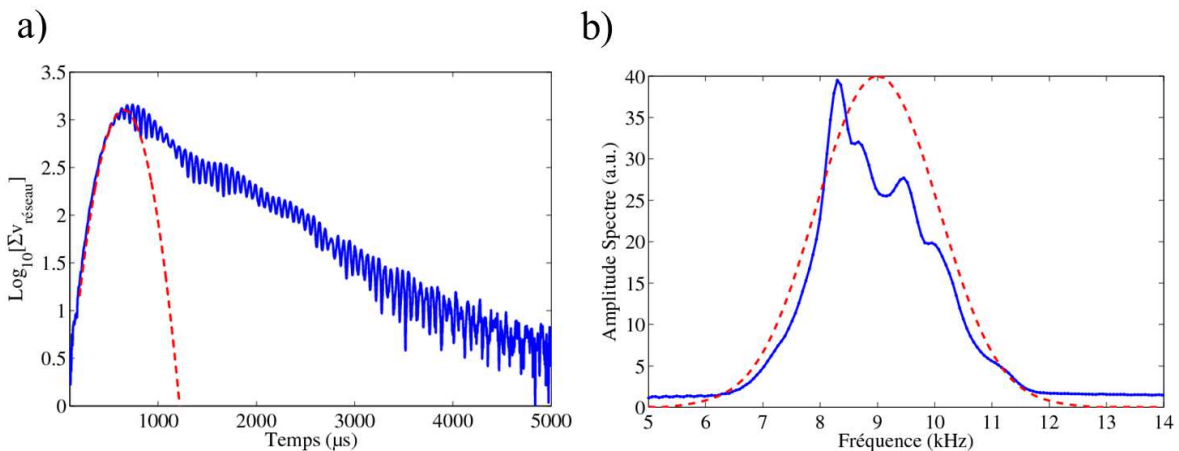


Figure 3.6 – a) Décroissance de la vitesse de déplacement vertical intégrée dans la lentille représentée en échelle logarithmique en fonction du temps. La courbe en pointillés rouges donne une indication de la largeur du pulse utilisé. b) Amplitude du spectre intégré dans la lentille. La courbe en pointillés rouges donne le spectre du pulse gaussien utilisé.

La figure 3.6a présente la décroissance temporelle de la vitesse de déplacement intégrée sur toute la surface de la lentille. La courbe rouge pointillée présente l'enveloppe du pulse gaussien utilisé. Cette décroissance exponentielle est caractéristique de la présence de résonances dans le système. On peut réaliser une transformée de Fourier de la vitesse de déplacement dans la lentille afin d'observer ces résonances.

La figure 3.6b présente le spectre intégré sur toute la surface de la lentille. La courbe rouge pointillée présente la transformée de Fourier du pulse Gaussien utilisé. On remarque que la densité modale est élevée dans la gamme de fréquence étudiée. Les modes ne sont pas résolus car leurs largeurs sont trop importantes. Il paraît donc impossible de déterminer précisément les propriétés des résonances du cristal fini par une transformée de Fourier temporelle.

Nous proposons alors d'utiliser une transformée de Fourier spatiale afin de discriminer les différentes résonances présentes dans la lentille. Les modes d'un système se différencient par une fréquence propre et par le vecteur d'onde associé à leur distribution spatiale. Cette approche a été utilisée dans plusieurs travaux [51, 33, 52]. On réalise une transformée de Fourier sur les deux coordonnées de l'espace afin d'obtenir une cartographie des vecteurs d'ondes présent dans notre milieu pour chaque pas de temps.

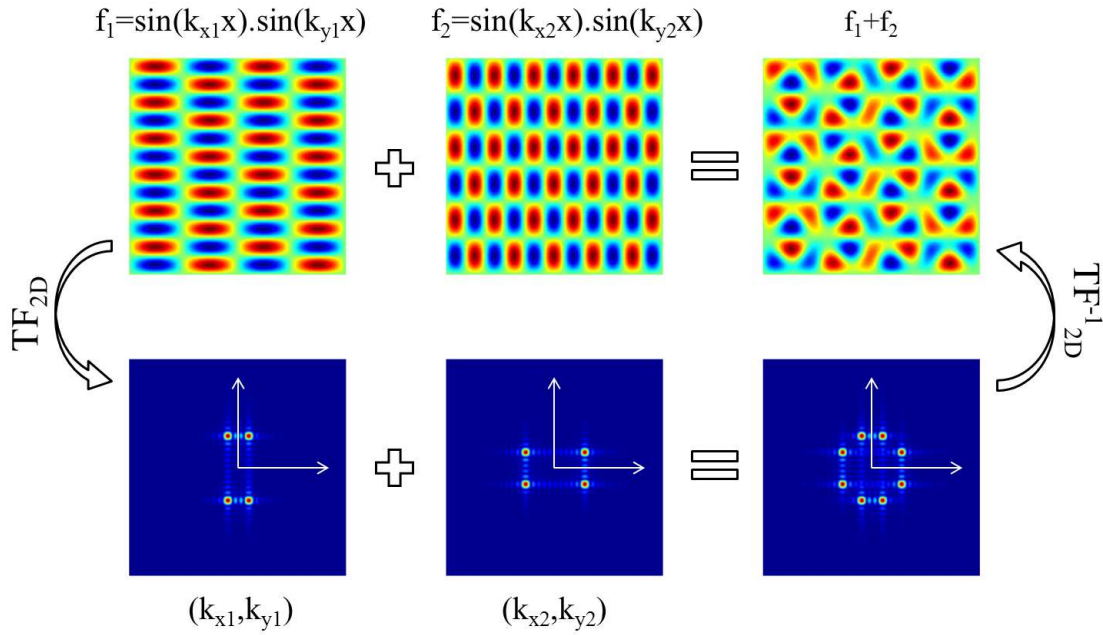


Figure 3.7 – Principe de l'analyse par transformée de Fourier spatiale. Les cartes sur la partie supérieure présente les champs dans l'espace réel. On représente deux fonctions f_1 et f_2 ainsi que leur somme. Les cartes de la partie inférieure présentent les spectres obtenus par transformée de Fourier spatiale. L'origine de l'espace réciproque est au centre de la carte. La carte correspondant à la somme des deux fonctions dans l'espace réel est difficile à interpréter. En revanche, le spectre obtenu par transformée de Fourier spatiale permet de déterminer facilement les différents vecteurs d'ondes présents.

La figure 3.7 présente l'application de cette technique à la décomposition d'une image composée de deux vecteurs d'onde différents $\vec{k}_1 = (k_{x1}, k_{y1})$ et $\vec{k}_2 = (k_{x2}, k_{y2})$. La distribution spatiale du

champ correspondant à ces vecteurs d'ondes peut s'écrire

$$f_i(x, y) = \sin(k_{xi} \cdot x) \cdot \sin(k_{yi} \cdot y) \quad (3.1)$$

avec $i=1,2$. On remarque que la distribution spatiale obtenue par la somme des deux fonctions dans l'espace réel est difficilement exploitable. En revanche, son analyse se simplifie lorsque l'on exploite l'information de l'espace réciproque associé. Le spectre fait apparaître deux pics dans le premier cadran. Ces pics correspondent aux deux vecteurs d'ondes utilisés.

Le traitement effectué sur les signaux expérimentaux se décompose selon les étapes suivantes. On effectue la transformée de Fourier sur les deux coordonnées de l'espace pour chaque pas de temps mesurés : $\hat{V}(k_x, k_y, t) = TF_{x,y}(v(x, y, t))$. En chaque point de $\hat{V}(k_x, k_y, t)$, le signal se décompose comme une enveloppe variant lentement que multiplie une fonction sinusoidale à la fréquence du mode. On utilise à nouveau la technique basée sur la transformée de Hilbert afin d'extraire l'enveloppe du signal. On obtient ainsi la carte représentant les nombres d'ondes des différents modes excités dans la lentille au cours du temps.

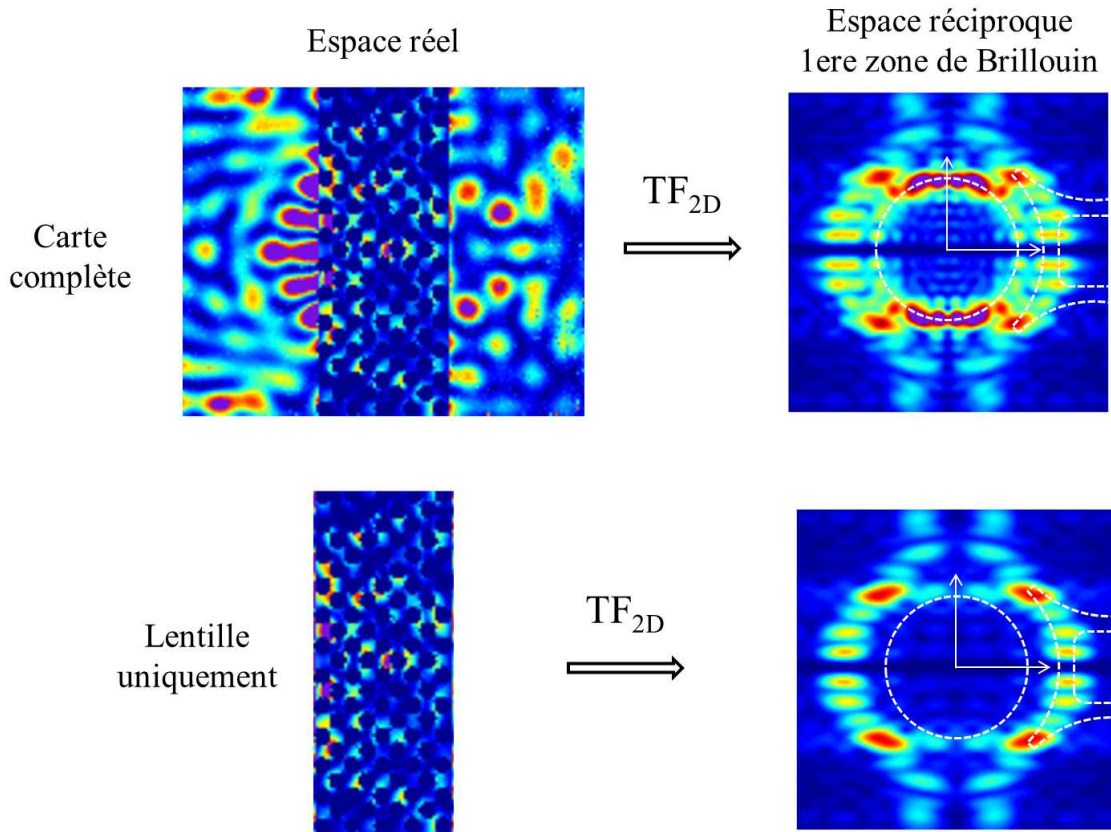


Figure 3.8 – Transformée de Fourier spatiale réalisée sur les signaux expérimentaux au temps $t=1176\mu s$ pour un pulse gaussien centré en $f_0=9kHz$. La première colonne présente la norme de la vitesse de déplacement vertical dans l'espace réel. La seconde colonne donne la représentation de ces deux cartes dans l'espace réciproque. On ne représente que l'information contenue la 1ere zone de Brillouin. Les courbes blanches pointillées donnent les contours équifréquences du milieu extérieur (plaque d'épaisseur 2mm) et du cristal.

La figure 3.8 présente les résultats de la transformée de Fourier spatiale sur les données expérimentales au temps $t=1176\mu\text{s}$. Les contours équi-fréquences sont superposés à l'espace réciproque. Le cercle blanc pointillé donne le contour équi-fréquence de la plaque extérieure au réseau à $f_0=9\text{kHz}$. On représente également les contours équi-fréquences du cristal à $f=8.5\text{kHz}$ et $f=10.5\text{kHz}$ qui sont centrés autour du point M pour ces fréquences.

Le traitement est effectué sur deux cartes différentes, une comprend le cristal et la plaque extérieure, tandis que l'autre est restreinte à la lentille. On remarque que ces deux cartes ne présentent pas le même spectre. Le champ situé à l'extérieur du cristal satisfait la relation de dispersion de la plaque homogène. Pour une fréquence $f_0=9\text{kHz}$, cette relation de dispersion est représentée dans l'espace réciproque par un contour équi-fréquence circulaire. On comprend ainsi que le spectre de la carte restreinte à la lentille ne présente pas d'information sur le cercle équi-fréquence de la plaque homogène. On remarque que le spectre réalisé sur la lentille présente plusieurs pics situés sur les contours équi-fréquences du cristal. Ils correspondent aux résonances de la lentille excitées par le pulse gaussien. Ces différents pics sont également présents dans le spectre de la carte complète. Cette méthode basée sur la transformée de Fourier spatiale nous permet de distinguer les différentes modes propres de la lentille finie.

Extraction des modes propres

Maintenant que les modes de la lentille sont résolus spectralement, on peut les isoler du reste de la carte afin de réaliser une transformée de Fourier inverse et obtenir les distributions spatiales des modes dans l'espace réel.

La figure 3.9 indique les positions des différents modes dans le spectre, ainsi que la distribution spatiale dans l'espace réel de chacun des modes. Le contour équi-fréquence de la plaque homogène extérieure nous permet de fixer la frontière entre modes propagatifs et modes évanescents. Cette frontière est matérialisée par les lignes pointillées horizontales. Les modes situés au delà de ces lignes possèdent une composante tangentielle trop élevée pour être transmis à l'interface entre le cristal et la plaque extérieure. En revanche, ces modes sont excités par la source qui est placée en champ proche du cristal.

Les distributions spatiales des modes dans l'espace réel sont obtenues comme suit : on extrait le vecteur d'onde lié à chacun des modes de la lentille. On réalise ensuite l'étape de transformée de Fourier spatiale inverse pour obtenir la carte de champ dans l'espace réel. Le filtrage réalisé agit comme un filtre passe bas qui interpole le champ de vitesse de déplacement dans les trous, c'est la raison pour laquelle les trous ont disparu des cartes réelles présentées dans la figure 3.9.

Les simulations numériques nous permettent d'obtenir les fréquences propres de chacun des modes présentées dans le tableau 3.10. Il est nécessaire d'utiliser des excitations plus étroites spectralement afin de ne pas exciter trop de modes simultanément. L'étude expérimentale avec

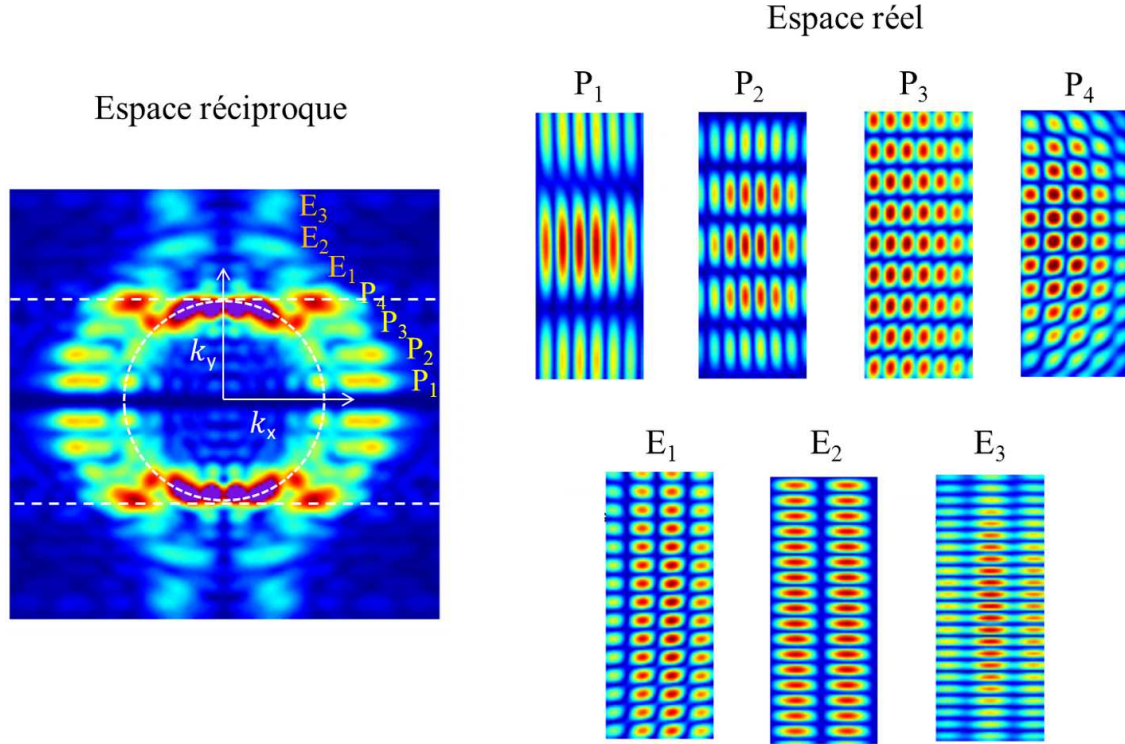


Figure 3.9 – Représentation des cartes réelles des modes discrets présents dans l'espace réciproque au temps $t=1176\mu s$. Le cercle pointillé donne le contour équifréquence du milieu extérieur au réseau pour une fréquence de 9kHz. Les deux lignes pointillées horizontales situent la limite entre modes propagatifs et modes évanescents. On compte 7 différents modes, 4 modes propagatifs notés $P_{1,2,3,4}$ et 3 modes évanescents notés $E_{1,2,3}$. Les échelles de couleurs sont normalisées pour chacune des cartes.

de telles excitations est impossible à cause des réflexions aux bords. L'outil numérique nous permet de supprimer les réflexions grâce aux conditions absorbantes.

	Lignes	Colonnes	Fréquence	Mode
7,5 kHz	15	4	7,7 kHz	$E1$
8,5 kHz	5	6	8,2 kHz	$P2$
	11	5	8,1 kHz	$P4$
	17	2	8,2 kHz	$E2$
9,5 kHz	2	6	9,8 kHz	$P1$
	23	3	9,8 kHz	$E3$
10,7 kHz	9	6	10,7 kHz	$P3$

Figure 3.10 – Tableau indiquant les fréquences propres associées à chacun des modes de la lentille. La première colonne coïncide avec la couleur de la ligne, il s'agit de la fréquence centrale de l'impulsion numérique utilisée. Les impulsions gaussiennes sont beaucoup plus étroites spectralement, $\sigma=0.7\text{kHz}$ contre $\sigma=2.1\text{kHz}$ dans les conditions précédentes. Le nombre de lobes en lignes et colonnes permettent d'identifier clairement les différents modes.

Extraction du champ rayonné par la lentille

Les modes de la lentille sont maintenant identifiés, nous allons voir comment cette information peut être utilisée afin de reconstruire les interférences à l'origine de l'apparition d'un point focal image. La figure 3.11 présente 4 vues instantanées de l'espace réciproque au cours du temps calculé sur le cristal et la plaque extérieure. On remarque une différence dans la structure du spectre pendant l'émission de la source et une fois que le système évolue librement. Le pulse gaussien centré en $f_0=9\text{kHz}$ possède une durée de $850\mu\text{s}$. Lors de l'émission, le point source émet un champ isotrope dans l'espace, contenant tous les vecteurs d'ondes. On obtient alors un spectre continu dans l'espace réciproque à $t=250\mu\text{s}$ et $t=500\mu\text{s}$.

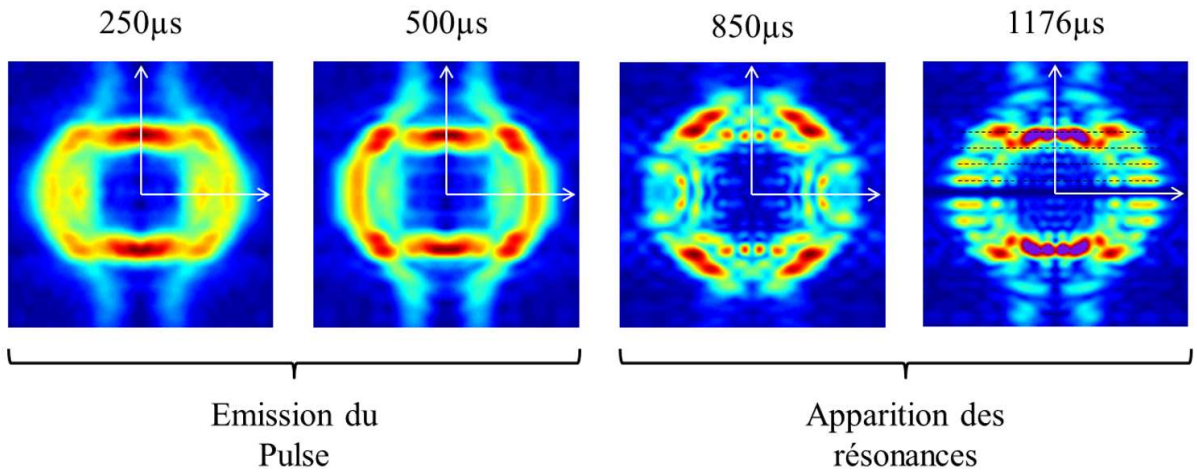


Figure 3.11 – Représentations instantanées de l'espace réciproque aux temps $250\mu\text{s}$, $500\mu\text{s}$, $850\mu\text{s}$, et $1176\mu\text{s}$. Les lignes pointillées noires dans la carte associée au temps $t=1176\mu\text{s}$ montrent les projections horizontales des modes du cristal lors du passage de l'interface entre la lentille et le milieu extérieur.

Une fois la source éteinte, seuls les vecteurs d'ondes correspondants aux modes du cristal vont apparaître sur les contours équiréquences du cristal. Le cristal agit comme un réservoir et fournit le champ observé dans la plaque extérieure. La loi de Snell-Descartes précise que la transmission d'une onde à travers un dioptre nécessite la conservation de la composante tangentielle du vecteur d'onde. Le champ rayonné par un mode de la lentille se trouve donc au niveau de la projection horizontale du vecteur d'onde du mode sur le cercle correspondant au milieu extérieur. Les traits pointillés noirs sur le spectre au temps $t=1150\mu\text{s}$ indiquent les projections horizontales qui relient le mode du cristal au champ rayonné dans la plaque extérieure.

On peut alors réaliser une étape de filtrage et de transformée de Fourier inverse afin d'obtenir la représentation du rayonnement de chacun des modes dans l'espace réel. Le traitement consiste à isoler une bande horizontale comprenant à la fois le mode de la lentille et le champ rayonné situés à la même valeur de k_y . Cette étape est réalisée pour chacun des modes P_i et E_i . On peut alors réaliser une coupe latérale dans le plan focal afin de suivre l'amplitude et la phase des champs rayonnés par ces modes à chaque pas de temps.

3.2.2 Construction du point focal sub-longueur d'onde

Super résolution sans information évanescente

Le point focal est construit par les interférences issues de ces différents champs rayonnés. On peut désormais faire le lien entre l'évolution temporelle du point focal et les résonances excitées dans le cristal.

La figure 3.12a présente l'évolution temporelle de l'amplitude du champ rayonné par chacun des modes. L'amplitude est prise au niveau de la tache focale en chaque pas de temps. On remarque que les amplitudes rayonnées par les modes évanescent $E_{1,2,3}$ sont très faibles. Les profils latéraux présentés dans la figure 3.12 sont pris à $t=1176\mu s$. Pour ce temps, la résolution du système est maximale.

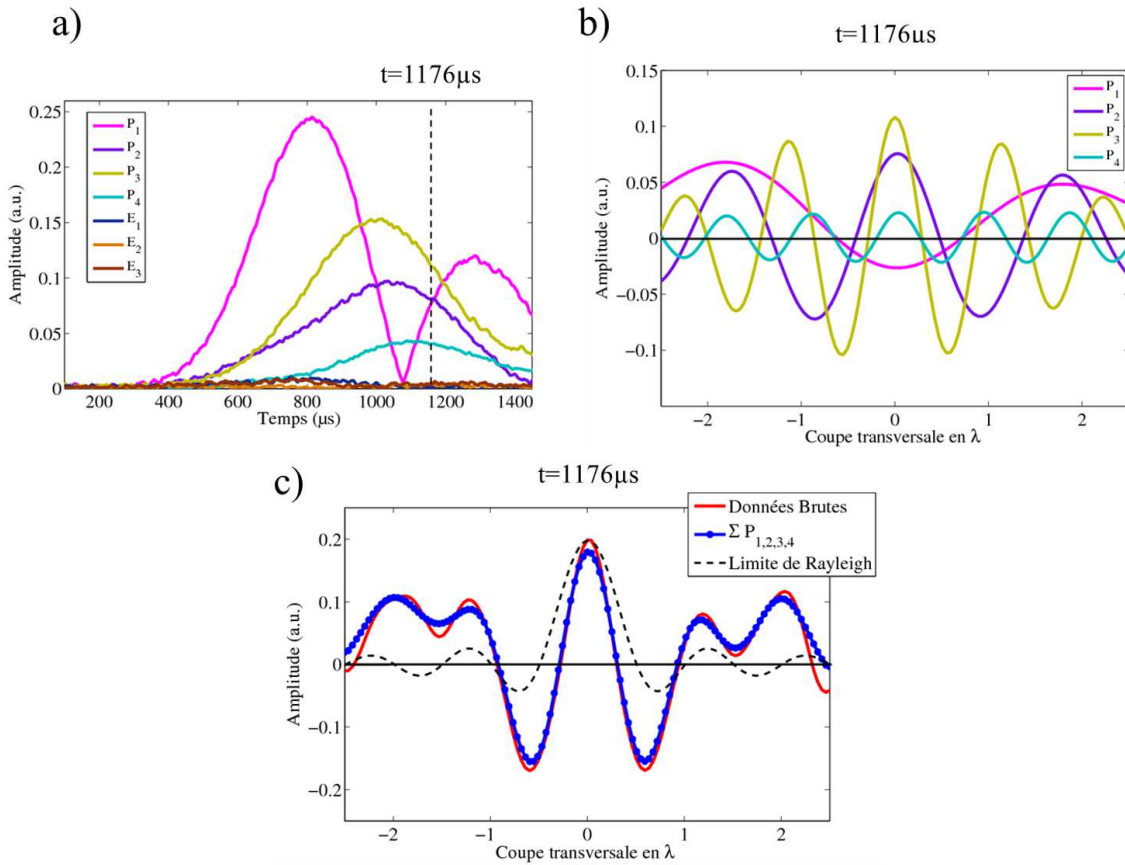


Figure 3.12 – a) Amplitude présente au point focal au cours du temps. Le champ rayonné par chacun des modes est représenté. b) Coupe latérale à $t=1176\mu s$, les modes évanescents ne sont pas représentés car leurs amplitudes sont trop faibles. On remarque que les différents champs ne sont pas en phase. c) Représentation de la coupe latérale du signal brut, puis de la somme des 4 fonctions $P_{1,2,3,4}$, la limite de Rayleigh est tracé sous la forme d'un sinus cardinal de largeur 0.5λ . La longueur d'onde utilisée comme référence est de 47.1mm correspondant à la longueur d'onde dans une plaque de 2mm d'épaisseur pour une fréquence de 9kHz.

La figure 3.12b présente les profils latéraux des champs rayonnés par les modes propagatifs $P_{1,2,3,4}$, au niveau du point focal, pour $t=1176\mu s$. On ne représente pas les champs rayonnés par

les modes évanescents. Cette figure montre que les champs rayonnés par les différents modes ne sont pas en phase.

La figure 3.12c présente la comparaison entre le profil latéral du point focal obtenu sans traitement spectral (en rouge) et le profil latéral obtenu par la somme complexe des 4 champs rayonnés par les modes propagatifs de la lentille (en bleu). On parle de somme complexe car la phase des champs rayonnés est prise en compte. Les deux profils latéraux sont pris au temps $t=1176\mu s$. On ajoute la fonction sinus cardinal qui décrit le profil latéral d'une tache focale de résolution $\frac{\lambda}{2}$ en pointillés noirs.

On remarque que la quasi totalité du champ est retrouvée lorsque l'on somme les quatre rayonnements issus des modes propagatifs. Cette tache focale représente une résolution de 0.35λ . Or, nous avons montré que les champs rayonnés par les trois modes évanescents $E_{1,2,3}$ n'interviennent pas dans la construction de ce point focal. Ce résultat est en contradiction avec les observations théoriques et expérimentales réalisées [47, 32] dans lesquels le rôle du champ évanescent est prépondérant. Il est nécessaire de trouver un autre mécanisme capable de présenter une tache focale super-résolue sans contribution du champ évanescent.

3.3 Fonctions super oscillantes

D'autres techniques comme la microscopie de champ proche [53], les éclairissements structurés [54] ou les techniques de STED [55] permettent d'obtenir des résolutions en dessous de la limite de diffraction classique.

L'équipe de Yakir Aharonov démontre qu'une fonction mathématique est capable d'osciller plus rapidement que sa plus haute composante de Fourier [56]. Ces fonctions sont appelées fonctions "super oscillantes". Une étude menée par Michael Berry et Sandu Popescu démontre que les fonctions super oscillantes peuvent être construites par interférences entre plusieurs ondes planes. La construction de ces interférences permet alors d'atteindre une super résolution en l'absence de champ évanescent et peut donc être obtenue en champ lointain d'une source [57].

Les travaux pionniers de Giuliano Torraldo di Francia [58] sont repris par l'équipe de Nikolay Zheludev qui apporte une démonstration expérimentale de la construction de ces fonctions super oscillantes à partir de la diffraction d'ondes planes par un réseau quasi cristallin de trous nanométriques [59]. La structure est représentée sur la figure 3.13b. Le motif obtenu par diffraction est présenté sur la figure 3.13c. La flèche rouge indique la position de la tache sub-longueur d'onde.

Une étude théorique en préambule de l'article [59] propose la construction d'une fonction super oscillante à partir d'une somme complexe de six harmoniques sinusoïdales : $f(x) = \sum_{n=0}^5 a_n \cos(2\pi nx)$ avec les coefficients a_n suivants $a_0 = 1$, $a_1 = 13\,295\,000$, $a_2 = -30\,802\,818$, $a_3 = 26\,581\,909$, $a_4 = -10\,836\,909$ et $a_5 = 1\,762\,818$. La figure 3.13a donne le tracé de cette fonction en trait bleu.

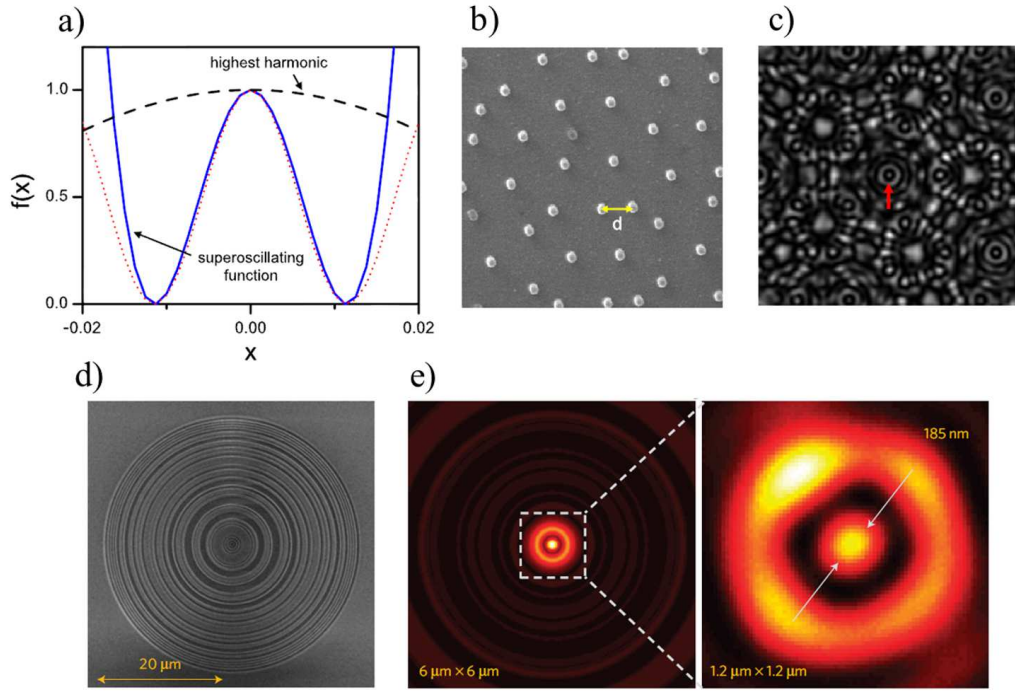


Figure 3.13 – a) Tracé de la fonction super-oscillante $f(x) = \sum_{n=0}^5 a_n \cos(2\pi nx)$ en trait bleu plein. Le tracé pointillé noir présente l'oscillation de la plus haute harmonique. b) Observation par un microscope électronique à balayage des trous nanométriques sur une maille quasi cristalline. La séparation minimale entre trous est de $d=1.2\mu\text{m}$. les trous sont gravés sur une couche d'Aluminium de 100nm déposée sur un substrat de silice. c) Mesure du champ diffracté par le système à une distance de $9\mu\text{m}$ du plan contenant la gravure. d) Observation de la lentille par microscopie électronique à balayage. e) Mesure du champ diffracté par la lentille, la formation de la tache focale super-oscillante est obtenue à une distance de $10.3\mu\text{m}$ de la lentille. Les figures a,b et c sont extraites de [59]. Les figures d et e sont extraites de [60].

On remarque que le pic en $x=0$ est neuf fois plus fin que la plus haute harmonique (traits noirs pointillés) utilisée dans la somme réalisée.

La contrepartie de la construction d'une fonction super oscillante est que la quantité d'énergie présente dans la tache focale est très faible. Par exemple, l'amplitude des lobes secondaires, non représentés dans la figure 3.13a, est de l'ordre de 10^7 . Cette proposition est une preuve de concept qui réalise une résolution de $\frac{\lambda}{18}$. Nous allons voir que pour des résolutions moins fines le contraste entre les lobes secondaires et la tache centrale s'améliore.

La même équipe réalise cinq ans plus tard la conception d'une lentille capable de créer des super oscillations en champ lointain [60]. La figure 3.13d présente la lentille gravée sur un film d'aluminium de 100nm d'épaisseur déposé sur un substrat de silice. La gravure de 25 anneaux concentriques d'épaisseurs différentes permet de contrôler l'amplitude et la phase des ondes planes transmises. Pour une longueur d'onde $\lambda=640\text{nm}$, un point focal super-oscillant est obtenu à une distance de $10.3\mu\text{m}$ du film. La figure 3.13e présente la tache focale obtenue. La résolution obtenue est de $\frac{\lambda}{4.5}$. Le gain en résolution étant raisonnable, les lobes secondaires ne présentent plus une intensité trop importante vis à vis de la tache centrale.

3.3.1 Création d'une tache focale super oscillante

Qu'elle soit super oscillante ou non, la formation d'une tache focale résulte de l'interférence des différents vecteurs d'onde qui se propagent dans le milieu. La fonction sinus cardinal est souvent utilisée pour décrire le champ obtenu dans le plan focal d'une lentille. L'ouverture numérique de cette lentille fixe la composante transverse maximale des vecteurs d'onde que l'on peut faire interférer. Le sinus cardinal est obtenu lorsque la même amplitude est attribuée aux différents vecteurs d'ondes. On peut représenter cette amplitude $a(k_y)$ dans la figure 3.14a. La fonction $a(k_y)$ est alors constante entre les bornes $[\pm k_{y,max}]$. Le profil latéral obtenu est proportionnel à la transformée de Fourier de cette fonction $a(k_y)$. La figure 3.14a nous permet alors de tracer la fonction sinus cardinal obtenu dans le plan focal. On retrouve le fait que la fonction sinus cardinal est la transformée de Fourier d'une fonction "porte". La résolution est alors de $\frac{2\pi}{k_{y,max}}$ ou $\frac{\lambda}{2}$ si $k_{y,max} = |k|$.

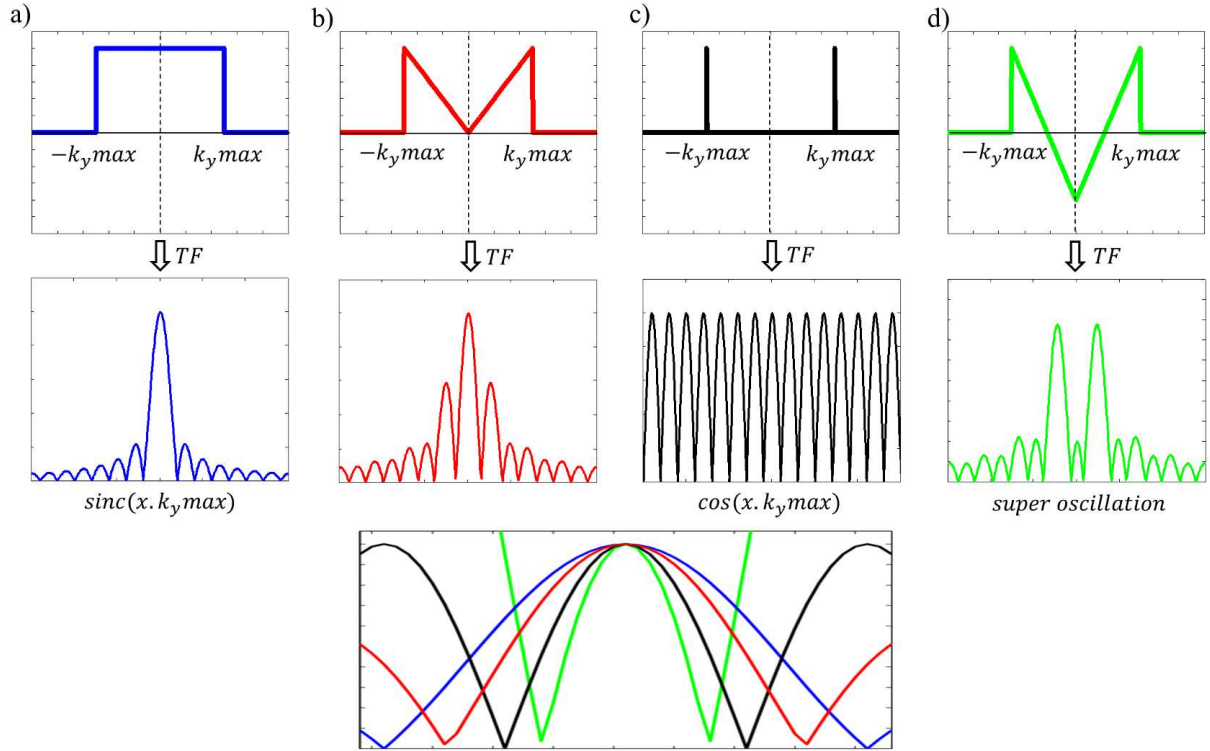


Figure 3.14 – Schéma représentant la relation entre les amplitudes complexes des vecteurs d'ondes et le profil latéral obtenu lors de la focalisation. Différentes fonctions $a(k_y)$ sont représentées, il s'agit de l'amplitude complexe tenant compte de la phase. On associe le profil latéral obtenu par focalisation à chaque fonction. On compare les taches focales des différents profils latéraux dans la figure inférieure.

La figure 3.14 présente ensuite les profils latéraux obtenus pour des fonction $a(k_y)$ différentes. Elles sont en revanche bornée par le même intervalle $[\pm k_{y,max}]$. La figure 3.14b présente un cas où l'amplitude complexe associée aux k_y faibles est réduite. Le profil focal est alors une fonction arbitraire présentant une meilleure résolution que le cas précédent. On remarque par contre que le contraste entre la tache focale et les lobes secondaires a diminué. La figure 3.14c présente le

cas limite où seul la composante k_{ymax} est présente. On obtient maintenant une fonction cosinus dans le plan focal. La résolution est égale à $\frac{\pi}{k_{ymax}}$, en revanche le contraste est nul car les lobes secondaires sont de même amplitude que la tache centrale.

La figure 3.14d présente une fonction $a(k_y)$ à valeurs négatives pour les faibles k_y . L'amplitude complexe négative signifie que les vecteurs d'onde à faible k_y et ceux à grand k_y sont en opposition de phase. Le profil latéral dans le plan focal présente une tache focale de faible amplitude, en revanche la résolution obtenue est non seulement meilleure que celle de la fonction sinus cardinal (figure 3.14a) mais également meilleure que celle obtenue dans le cas où la plus grande composante transverse est seule dans le milieu (figure 3.14c). L'inconvénient de cette démarche est que le contraste est désormais négatif car les lobes secondaires sont plus élevés que la tache centrale.

Cette partie donne une interprétation personnelle du phénomène de super-oscillation dans le cas de la construction d'une tache focale. Les concepts mathématiques associés à ces fonctions sont plus fondamentaux. Ils sont exposés dans les travaux suivants [56, 61, 62, 57].

3.3.2 Formation d'une tache focale super oscillante au cours du temps

Le champ rayonné par la lentille peut être décrit par la somme complexe de quatre champs rayonnés par la structure. Ces quatre champs font apparaître quatre fonctions sinusoïdales dans le plan focal de notre lentille et le profil latéral $f(x)$ s'écrit

$$f(x) = \sum_{i=1}^4 a_i \cos(k_y(P_i).x) \quad (3.2)$$

avec a_i l'amplitude complexe de chaque composante. On a vu que la phase associée aux différents vecteurs d'onde joue un rôle important dans la création de la tache focale.

On représente alors l'amplitude complexe a_i associée à chacune des composantes P_i dans le plan focal de la lentille au cours du temps sous la forme de phaseurs. Ces diagrammes permettent de lire simultanément l'amplitude, la phase et la fréquence d'une oscillation. L'amplitude est donnée par la norme du vecteur, la phase correspond à l'angle compris entre $[0, 2\pi]$ et la fréquence propre correspond à la vitesse de rotation du vecteur dans ce diagramme.

La figure 3.15 présente les phaseurs au temps $718\mu s$, $882\mu s$ et $1176\mu s$. Ces temps correspondent à trois régimes de focalisation différents :

- à $t=718\mu s$ pendant la formation de la tache focale
- à $t=882\mu s$ où la limite de diffraction est atteinte
- à $t=1176\mu s$ quand la résolution est maximale

La projection des vecteurs sur l'axe horizontal du phaseur nous permet d'obtenir les amplitudes

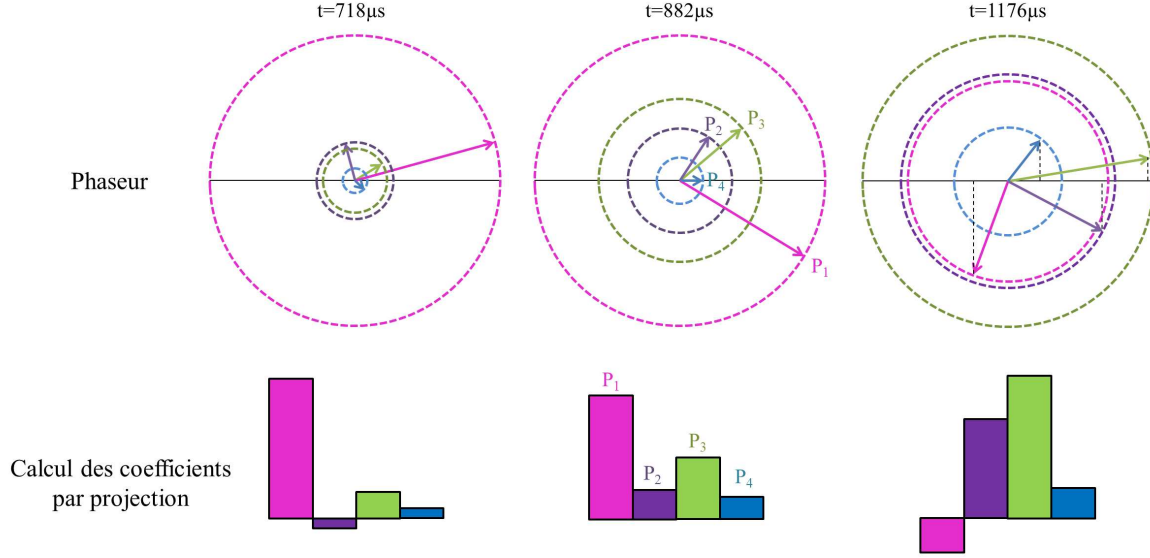


Figure 3.15 – Représentation de l'amplitude et de la phase des modes rayonnés sous la forme de phaseur pour trois temps $t=718\mu s$, $t=882\mu s$ et $t=1176\mu s$. Le rayon des cercles correspond à l'amplitude du champ, la phase est donnée par l'angle du vecteur. La fréquence propre des modes est donnée par leur vitesse de rotation. On réalise la projection de ces vecteurs sur l'axe horizontal afin de déterminer les coefficients a_i associés aux champs rayonnés par les modes P_i pour chaque temps.

complexes a_i pour ces trois temps. On représente les valeurs des coefficients a_i dans les histogrammes situés sous les phaseurs. On remarque qu'au temps $t=1176\mu s$, la contribution du mode P_1 (représentée en rose) est en opposition de phase. L'opposition de phase est décrite comme un produit scalaire négatif entre le vecteur associé au mode P_1 et les autres vecteurs $P_{2,3,4}$. Cette opposition de phase se traduit alors par un coefficient $a_1(1176\mu s) < 0$.

Les valeurs des composantes tangentielles associées à chacun des champs rayonnés sont relevées à partir de leur position dans l'espace réciproque, on obtient alors les valeurs suivantes : $k_y(P_1) = 35.1 \text{ rad.m}^{-1}$, $k_y(P_2) = 74 \text{ rad.m}^{-1}$, $k_y(P_3) = 116 \text{ rad.m}^{-1}$ et $k_y(P_4) = 140.1 \text{ rad.m}^{-1}$. On peut maintenant reconstruire analytiquement les profils latéraux observés expérimentalement dans le plan focal $f(x)$ par la formule suivante

$$f(x) = \sum_{i=1}^4 a_i \cos(k_y(P_i).x). \quad (3.3)$$

La figure 3.16 présente les profils latéraux obtenus dans le plan focal au temps $t=718\mu s$, $t=882\mu s$ et $t=1176\mu s$. La coupe latérale effectuée sur les données brutes, sans traitement par transformée de Fourier spatiale, est représentée en rouge. La coupe latérale obtenue lorsque l'on supprime la contribution des vecteurs d'ondes évanescents par filtrage dans l'espace réciproque est représentée en bleu. La coupe latérale reconstruite analytiquement à partir de la fonction $f(x)$ est représentée en gris. La limite de résolution classique est tracée en pointillés noirs sous la forme d'une fonction

sinus cardinal. Le cadran en bas à droite présente la résolution latérale relative (écart entre résolution observée et limite classique) et le contraste de la tache focale au cours du temps.

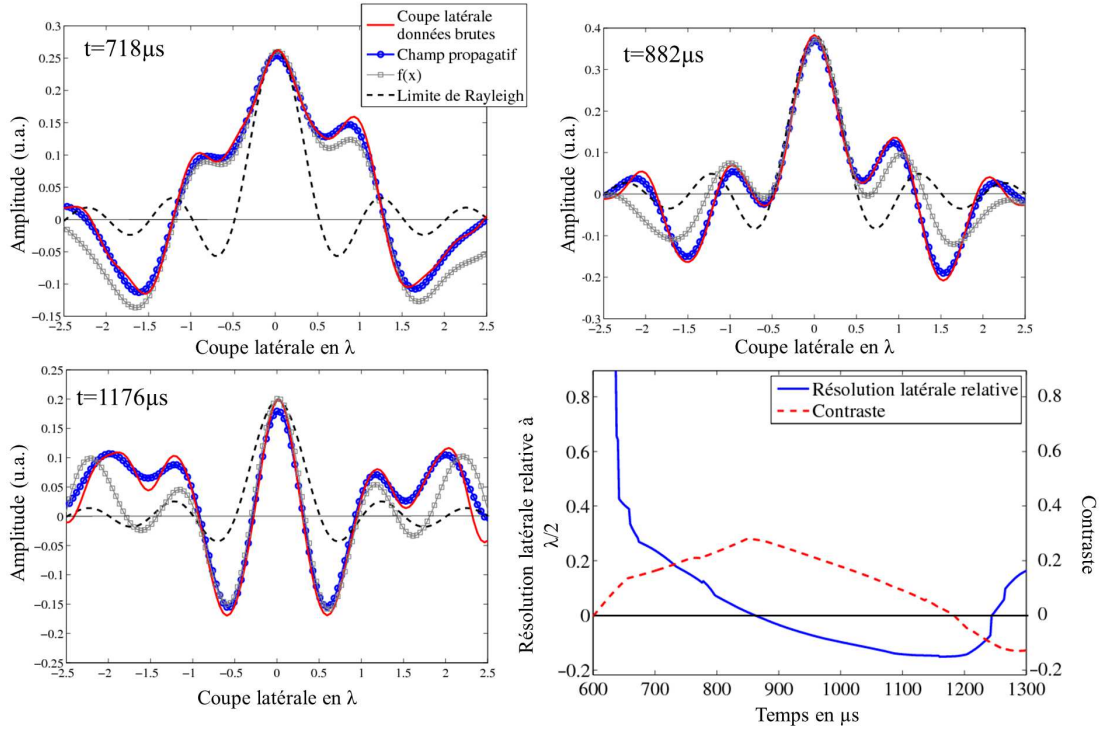


Figure 3.16 – Représentation pour trois temps $t=718\mu s$, $t=882\mu s$ et $t=1176\mu s$ du profil latéral passant par le point focal. La coupe latérale effectuée sur les données initiales est représentée en rouge. La coupe latérale obtenue lorsque l'on supprime la contribution des vecteurs d'ondes évanescents par filtrage dans l'espace réciproque est représentée en bleu. La coupe latérale reconstruite analytiquement à partir de la fonction $f(x)$ est représentée en gris. La limite de résolution classique est tracée en pointillés noirs sous la forme d'une fonction sinus cardinal. Le cadran en bas à droite présente la résolution latérale relative (écart entre résolution observée et limite classique) et le contraste de la tache focale au cours du temps.

On remarque dans un premier temps que la reconstruction des profils latéraux par la fonction $f(x)$ est proche des profils observés expérimentalement. Cette similarité permet de valider la démarche poursuivie dans ces travaux. Cette figure 3.16 nous permet de faire le lien entre l'évolution temporelle de la résolution et l'évolution temporelle de la distribution des coefficients a_i .

Le temps $t=718\mu s$ correspond au début de la formation de la tache focale. La figure 3.15 nous montre que la contribution du mode P_1 est prédominante. Cette contribution va s'imposer lors de la construction de la tache focale. On a vu que le mode P_1 correspond à une faible valeur de k_y et donc à une oscillation lente dans le plan focal. Le profil latéral de la tache focale $f(x) = \sum_{i=1}^4 a_i \cos(k_y(P_i).x)$ va présenter une résolution faible. Cette information est confirmée sur la figure 3.16, le profil latéral de la tache focale à $t=718\mu s$ est plus large que la fonction sinus cardinal, la résolution est donc moins fine.

L'extinction de la source à partir de $t=850\mu s$ va permettre d'obtenir un équilibre des amplitudes associées à chacun des modes. L'histogramme des coefficients a_i à $t=882\mu s$ sur la figure 3.15

présente une distribution plus homogène qu'au temps précédent. On remarque que le profil latéral obtenu sur la figure 3.16 à $t=882\mu s$ est semblable à une fonction sinus cardinal. La résolution associée est proche de la limite de diffraction.

L'extinction de la source possède à la fois un effet sur l'amplitude des modes mais également sur leur phase. Le tableau 3.10 donne les fréquences propres associées à chacun des modes P_i . Ces fréquences sont associées aux vitesses de rotations des vecteurs présentée dans la figure 3.15. Une fois la source éteinte, les différents modes P_i vont parcourir le phaseur avec des vitesses de rotation différentes. On assiste alors à une évolution au cours du temps des écarts de phase entre les différentes composantes.

La relation de phase entre les modes va évoluer au cours du temps jusqu'à $t=1176\mu s$ où la composante P_1 présente une contribution négative présentée sur la figure 3.15. À ce temps $t=1176\mu s$, la fonction $f(x)$ peut être décrite comme une fonction super oscillante. La pondération des coefficients a_i est telle que l'amplitude du coefficient a_3 est la plus grande ce qui entraîne nécessairement une augmentation de la résolution par rapport au temps $t=882\mu s$. À cela s'ajoute la contribution négative du mode P_1 qui nous permet d'obtenir une tache focale super oscillante présentée dans la figure 3.16. L'apparition spontanée de cette fonction super oscillante au cours du temps permet de comprendre l'origine de la super-résolution observée sans contribution du champ évanescent.

Cette observation est appuyée par l'évolution temporelle du contraste de la tache focale présentée dans la figure 3.16. Le contraste de la tache focale, tracé en pointillés rouge, présente une valeur maximale autour de $t=882\mu s$ car les amplitudes des champs rayonnés sont peu éloignés et les différentes contributions sont en phase, autrement dit les coefficients a_i sont positifs. L'apparition d'une fonction super oscillante est liée au déphasage prononcé du mode P_1 dont la contribution est négative au temps $t=1176\mu s$. Cette contribution négative entraîne l'amélioration de la résolution de la tache focale ainsi qu'un contraste négatif observé dans la figure 3.16 à partir de $t=1176\mu s$.

L'organisation spontanée des champs rayonnés par les modes de la lentille vers une fonction super oscillante est un résultat inattendu. Les travaux récents sur la création d'une tache focale super oscillante insistent sur la maîtrise des amplitudes et des phases des différents champs utilisés [63, 64].

L'étude des résonances de la lentille par transformée de Fourier spatiale va nous permettre d'analyser avec précision le comportement et la résolution de la lentille en fonction de paramètres tels que la fréquence centrale de l'excitation, la position de la source ou la durée de l'impulsion. La première étude menée concerne la comparaison des résolutions obtenues pour une excitation pulsée ou une excitation monochromatique.

3.4 Amélioration de la résolution en régime temporel

La majorité des études expérimentales des lentilles plates à réfraction négative sont réalisées en régime monochromatique. L'étude de la super résolution réalisée dans la section précédente démontre que la réponse dynamique de ces systèmes peut jouer un rôle crucial. Nous avons exploré en détails le cas particulier d'une excitation gaussienne centrée en $f_0=9\text{kHz}$ de largeur $\sigma=2.1\text{kHz}$. Pour cette excitation, nous avons montré que les amplitudes et phases des différents champs rayonnés évoluent spontanément vers la création d'une tache focale super oscillante dont la résolution est inférieure à la limite classique de diffraction. Le but de cette section est de comparer la réponse de la lentille excitée par : un signal monochromatique de fréquence f_0 ou un signal gaussien de même fréquence porteuse. Nous comparerons ces réponses pour des fréquences f_0 allant de 8kHz à 10kHz.

L'étude expérimentale de la réponse de la lentille par une excitation monochromatique n'est pas envisageable à cause de la faible efficacité des absorbants aux bords de la plaque. En revanche, l'étude numérique est parfaitement réalisable grâce à l'utilisation de conditions absorbantes parfaites. Les comparaisons des résultats expérimentaux et numériques réalisées dans les figures 3.4 et 3.5 assurent la validité des simulations numériques FDTD.

La figure 3.17 présente les deux signaux sources utilisés ainsi que la résolution latérale au cours du temps pour cinq fréquences porteuses différentes : $f_0=8\text{kHz}$, 8.5kHz, 9kHz, 9.5kHz et 10kHz. Les enveloppes des signaux sources sont identiques pour chaque simulation, on ne change que la fréquence de la porteuse. Le signal monochromatique se compose d'une demi-enveloppe gaussienne qui reste constante une fois sa valeur maximale atteinte. Dans chacune des figures, la courbe pleine présente la résolution obtenue par une excitation monochromatique et la courbe en pointillés la résolution obtenue par une excitation gaussienne.

On remarque que la résolution atteinte par les excitations gaussiennes est plus fine pour toutes les fréquences centrales f_0 utilisées. On remarque que la résolution obtenue avec les sources monochromatiques tend vers une valeur constante. Cette valeur apparaît une fois que le régime stationnaire est établi. Ce régime stationnaire correspond à une solution où l'amplitude du champ reste constante au cours du temps en chaque point. Nous allons utiliser l'analyse par transformée de Fourier spatiale afin d'observer les modes excités dans la lentille pour les deux types excitations.

L'excitation monochromatique ne signifie pas l'excitation d'un seul mode de la lentille. On a vu que les modes propres de notre lentille possèdent une largeur spectrale importante, on va donc exciter les mêmes modes avec une excitation gaussienne ou monochromatique.

La figure 3.18 présente les espaces réciproques associés aux deux types excitations pour une fréquence $f_0=9\text{kHz}$. On représente l'espace réciproque lié à l'excitation gaussienne au temps $t=1190\mu\text{s}$ (résolution numérique maximale) et à $t=1660\mu\text{s}$ dans le régime stationnaire associé à

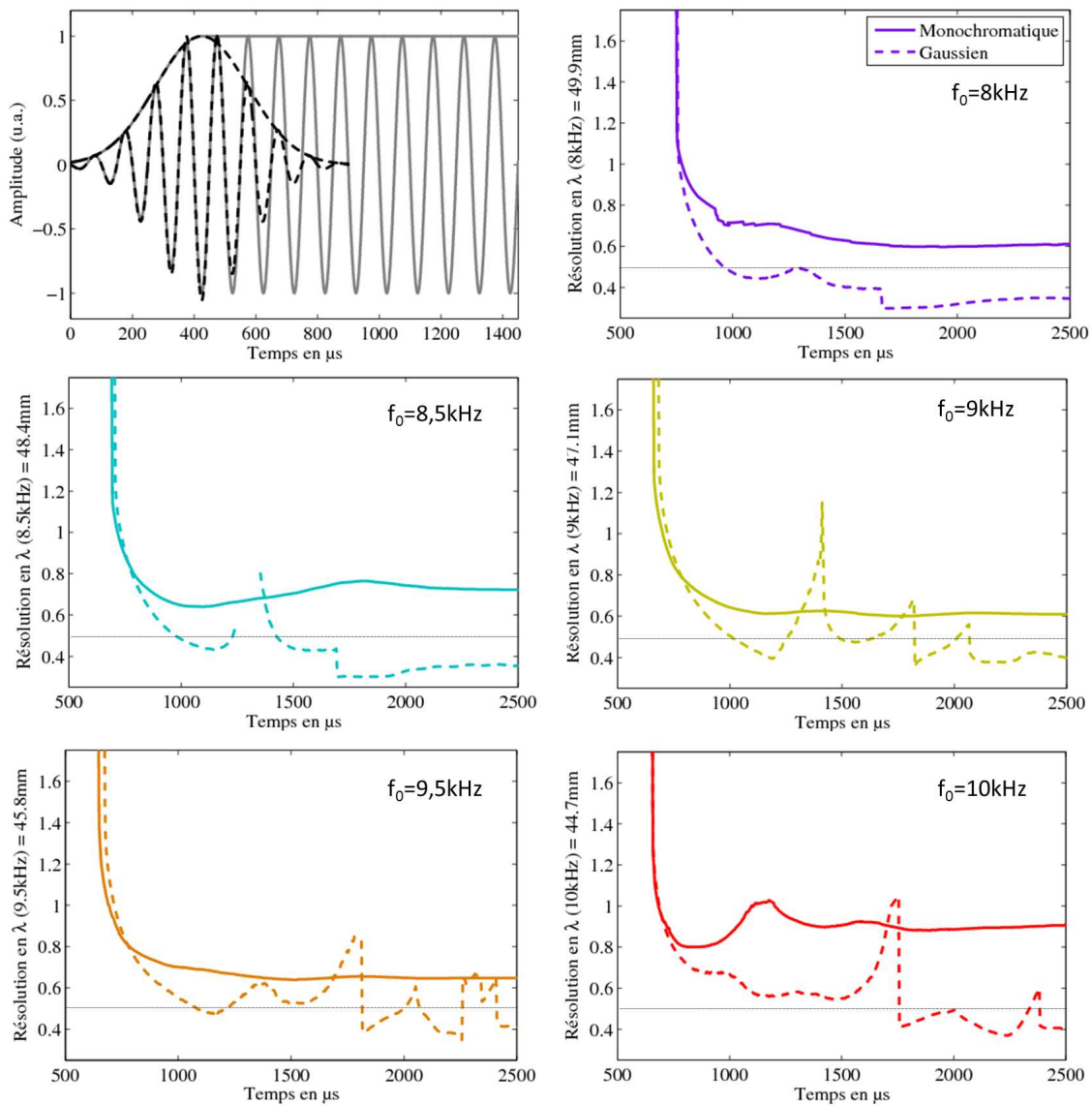


Figure 3.17 – Représentation en haut à gauche des deux types de signaux utilisés dans les différentes simulations. Le tracé en pointillés représente le pulse gaussien d'une largeur de $\sigma = 2.1\text{kHz}$ et la courbe en trait plein représente le signal utilisé comme source monochromatique. Le signal monochromatique se compose d'une demi-enveloppe gaussienne, identique au cas pulsé, qui reste constante une fois sa valeur maximale atteinte. Dans chacune des simulations la fréquence porteuse prend la valeur f_0 indiquée. Le trait fin positionne la limite de diffraction classique calculée pour la longueur d'onde donnée sur l'axe des ordonnées.

l'excitation monochromatique. On remarque que les résonances multiples de la lentille sont excitées par les deux sources utilisées. La figure 3.18 présente également les phaseurs associés aux rayonnements des modes propagatifs présents dans l'espace réciproque. On remarque que l'amplitude et la phase associées aux champs rayonnés sont différentes dans le cas monochromatique et dans le cas pulsé.

On a vu que pour une excitation pulsée, l'évolution du profil latéral de la tache focale est la conséquence des variations de l'amplitude et de la phase des champs rayonnés par les différentes

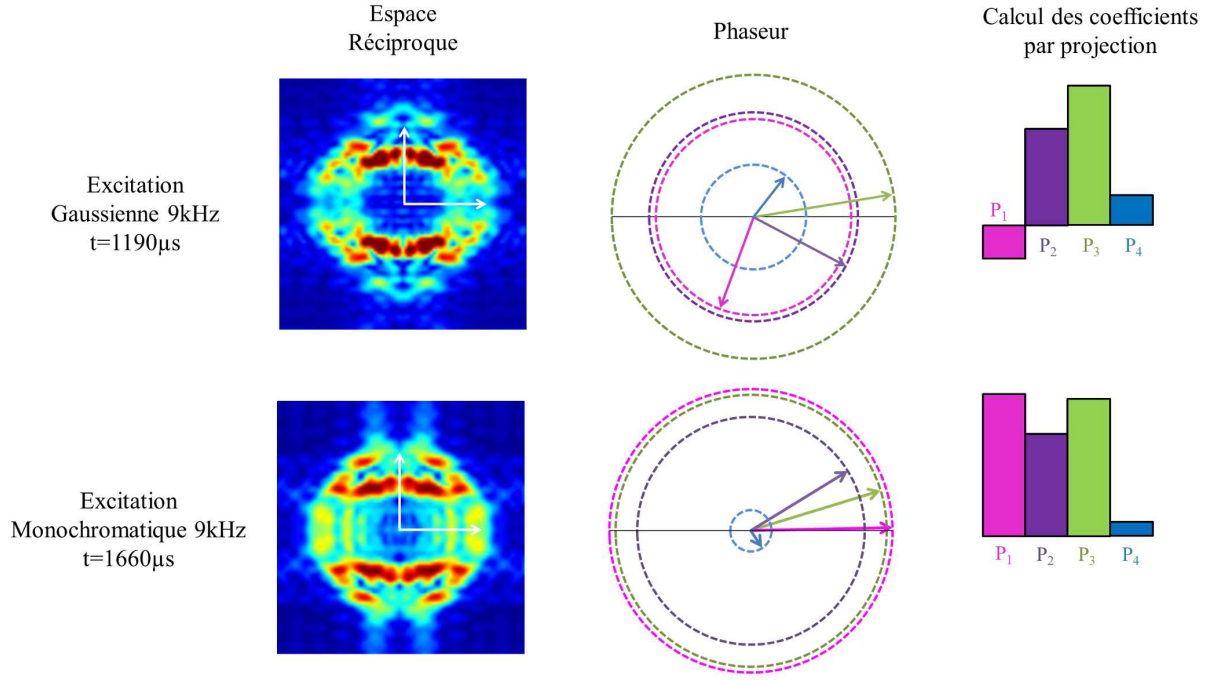


Figure 3.18 – Représentation des espaces réciproques associés aux deux excitations pour une fréquence porteuse $f_0=9\text{kHz}$. Les phaseurs et les projections des modes sont également présentés.

résonances de la lentille. Au moment où la source gaussienne s'éteint, les résonances de la lentille peuvent osciller à leur fréquence propre. Les vecteurs présentés dans le phaseur possèdent donc leur propre vitesse de rotation. Les coefficients a_i vont donc évoluer au cours du temps.

Dans le cas d'une excitation monochromatique, le régime stationnaire correspond au cas où les amplitudes et les phases associées aux différentes résonances n'évoluent plus car la fréquence d'oscillation des résonances est forcée par la présence de la source monochromatique. Autrement dit, les quatre vecteurs représentés sur le phaseur correspondant à l'excitation monochromatique possèdent tous la même vitesse de rotation. Les coefficients a_i associés aux champs rayonnés sont constants tant que la source monochromatique émet. Le profil latéral de la tache focale est stationnaire et la résolution est fixée.

On remarque alors que pour chaque fréquence centrale f_0 , l'évolution spontanée du système, une fois la source gaussienne éteinte, permet de modifier la contribution des différents champs rayonnés et d'atteindre une meilleure résolution latérale.

3.4.1 Récurrence des taches focales en régime temporel

On remarque que les résolutions obtenues en régime pulsé et en régime monochromatique dépendent de la fréquence f_0 . Cette dépendance vient du fait que les coefficients associés aux résonances de la lentille varient en fonction la fréquence d'excitation. L'évolution temporelle des résolutions dans le régime pulsé dépendent également de la fréquence centrale du pulse gaussien car les résonances excitées dans la lentille ne sont pas identiques pour les cinq fréquences

f_0 étudiées. En revanche, les différentes évolutions temporelles des résolutions en régime pulsé présentent toutes des oscillations au cours du temps.

On peut prendre comme exemple la figure 3.17 avec $f_0=9\text{kHz}$. On observe, dans le cas d'une excitation pulsée, une résolution au cours du temps qui présente plusieurs rebonds successifs séparés de $420\mu\text{s}$. Cette période correspond au battement entre les modes P_2 et P_3 qui présentent une amplitude proche tout au long de la simulation. Ces deux résonances possèdent des fréquences propres différentes, lorsque ces modes interfèrent dans le plan focal, on obtient une modulation temporelle du signal liée à leur différence de phase. Cette modulation temporelle de la différence de phase est reliée à l'inverse de l'écart en fréquence séparant ces deux résonances. Au cours de cette modulation, on passe périodiquement d'une différence de phase permettant la création d'un point focal bien résolu à une différence de phase qui détériore la résolution du point focal.

D'après le tableau 3.10, les fréquences propres des modes P_2 et P_3 sont séparées de $\delta f=2.45\text{kHz}$. L'inverse de cet écart en fréquence nous donne la période de battement T entre les deux modes : $T = \frac{1}{\delta f}=410\mu\text{s}$. On retrouve ainsi la période des oscillations observées dans la figure 3.17 pour $f_0=9\text{kHz}$. Cet effet de battement ou de récurrence a été théoriquement prédit dans l'article de Michael Berry et Sandu Popescu consacré au comportement temporel des super oscillations [57].

3.4.2 Effet de la durée de l'impulsion

La figure 3.19 présente l'évolution temporelle de la résolution obtenue pour des pulses gaussiens de différentes durées. La durée du pulse permet de contrôler la largeur du spectre contenu dans l'émission. Les courbes sont obtenues pour des pulses centrés en $f_0=9\text{kHz}$ avec les écart-types suivants : $\sigma=1.5\text{kHz}$, $\sigma=2.1\text{kHz}$, $\sigma=2.7\text{kHz}$ et $\sigma=3.8\text{kHz}$. Les durées des pulses sont données dans la légende de la figure. On remarque que la résolution maximale atteinte est quasi-identique pour les quatre simulations. L'effet du gain en résolution en régime temporel est conservé pour des durées d'impulsions variant de $500\mu\text{s}$ à $1300\mu\text{s}$.

Pour chaque durée d'impulsion, la résolution s'améliore progressivement jusqu'à une résolution maximale. Cette résolution maximale correspond à une relation de phase et d'amplitude particulière entre les champs rayonnés par la lentille. Une fois que cette condition n'est plus satisfaite la taille de la tache focale augmente à nouveau entraînant une baisse de la résolution de la lentille.

La chute brutale de la résolution observée pour les trois durées les plus courtes correspond à l'émergence d'une nouvelle tache focale. On rappelle que la résolution est prise au niveau de la valeur maximale présente sur l'axe longitudinal. Il arrive que la lentille présente deux taches focales le long de l'axe longitudinal comme le montre la figure 3.20. Le saut dans la résolution correspond au moment où le maximum d'amplitude passe de l'une à l'autre.

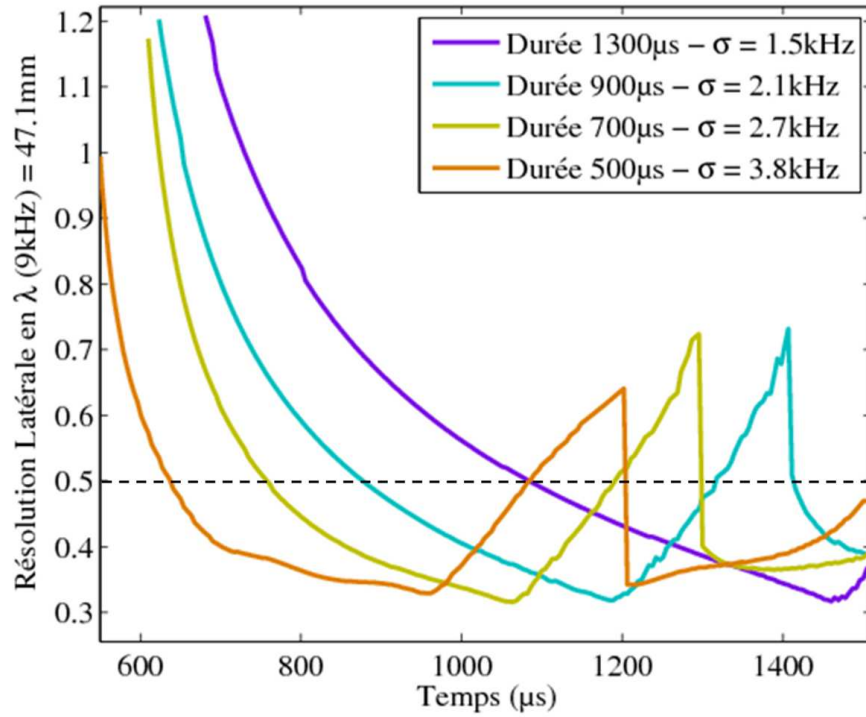


Figure 3.19 – Représentation de la résolution latérale au cours du temps pour des impulsions de différentes durées. Chaque pulse gaussien est centré en $f_0=9\text{kHz}$ et est associée avec un écart-type de $\sigma=1.5\text{kHz}$, $\sigma=2.1\text{kHz}$, $\sigma=2.7\text{kHz}$ et $\sigma=3.8\text{kHz}$. La ligne pointillée horizontale positionne la limite de diffraction à $\lambda/2$ avec $\lambda(9\text{kHz})=47.1\text{mm}$.

3.4.3 Effet de la position de la source

Nous allons étudier l'influence de la distance entre le point source et le bord de la lentille. Le pulse gaussien utilisé est identique à celui de la démonstration expérimentale : $f_0=9\text{kHz}$ et $\sigma=2.1\text{kHz}$. Les différentes sources sont placées à une distance $L/6$, $L/3$ et $L/2$ du bord de la lentille, avec $L=98\text{mm}$ l'épaisseur de la lentille. La figure 3.20 représente l'amplitude du déplacement vertical pour ces trois positions au temps $t=450\mu\text{s}$ pendant l'émission du pulse gaussien et à $t=1190\mu\text{s}$ au temps où la résolution latérale est maximale.

On remarque que le déplacement du point source n'affecte pas la résolution latérale du système. Cette propriété est propre aux fonctions super oscillantes. On a vu que la super-résolution réalisée par la lentille ne fait pas intervenir de champ évanescent. Il n'est donc pas nécessaire de placer la source au bord de la lentille. La figure 3.20 nous permet d'affirmer que la position initiale de la source ne perturbe pas la construction spontanée d'une tache focale super oscillante.

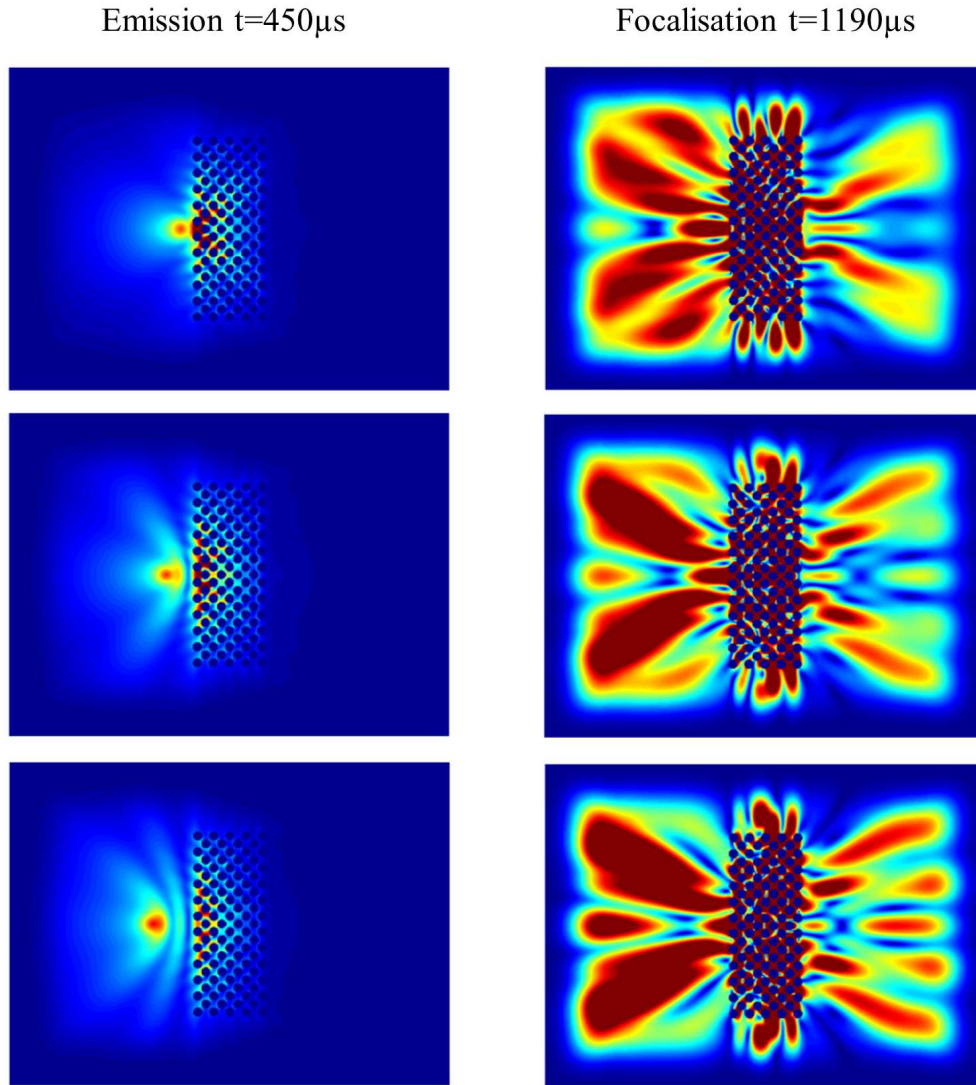


Figure 3.20 – Représentation des cartes d’amplitude de vitesse de déplacement normal lors de l’émission du pulse à $t=450\mu s$ et lors de la focalisation à $t=1190\mu s$. De bas en haut les sources sont placées à $L/6$, $L/3$ et $L/2$ où $L=98\text{mm}$ représente l’épaisseur de la lentille.

3.5 Conclusion et perspectives

Ce chapitre présente l’étude de la résolution d’une lentille plate à réfraction négative au cours du temps. Les techniques expérimentales acoustiques et élastiques permettent de mettre en place une excitation dépendante du temps et de mesurer l’évolution temporelle de la résolution de la lentille. Nous avons démontré expérimentalement l’amélioration de la résolution de la lentille grâce à une excitation pulsée. Pour certaines fréquences centrales d’excitation, le système présente une résolution en dessous de la limite de diffraction classique.

L’analyse des modes propres de la lentille finie permet de modéliser l’évolution temporelle de la résolution et de comprendre les mécanismes liés à la super résolution observée. L’analyse spectrale par transformée de Fourier spatiale nous permet de suivre les contributions des différentes

résonances de la lentille à chaque pas de temps.

La seconde partie présente un nouveau mécanisme menant à la super résolution : les fonctions super oscillantes. Ces fonctions possèdent la capacité de présenter des oscillations plus rapides que la plus haute composante de Fourier du signal. Après une brève introduction, nous démontrons que l'évolution temporelle spontanée de l'amplitude et de la phase des résonances de la lentille permet d'obtenir une tache focale super oscillante. Cette super résolution est obtenue sans contribution des modes évanescents présents dans la lentille. Cette propriété permet d'obtenir une super résolution pour une source éloignée du bord de la lentille.

La dernière partie démontre numériquement que l'amélioration de la résolution de la lentille par l'utilisation d'une excitation dépendante du temps a lieu sur toute la gamme de fréquence de travail correspondant à la zone AANR du cristal phononique utilisé.

Au cours de ce chapitre nous proposons un nouvel outil capable d'analyser les propriétés dynamiques des lentilles plates à réfraction négative. L'ingénierie de l'évolution temporelle de l'amplitude et de la phase des résonances de la lentille peut nous permettre d'atteindre des résolutions latérales plus fines, mais également de déplacer les lobes secondaires afin de réaliser une réelle expérience d'imagerie [63]. Il est également intéressant de pouvoir contrôler le temps d'arrivée ou le taux de répétition des taches focales sub-longueur d'onde.

Chapitre 4

Métamatériaux pour les ondes de flexion

Table des matières

4.1	Introduction	78
4.1.1	Indice négatif : Premiers résultats expérimentaux	78
4.1.2	Métamatériaux acoustiques et élastiques	80
4.1.3	Hybridation et paramètres effectifs négatifs	80
4.2	Double négativité en ondes acoustiques et élastiques	82
4.2.1	Ondes acoustiques	82
4.2.2	Ondes élastiques	83
	Cas des milieux solides à trois dimensions	83
	Cas des plaques	84
4.3	Un résonateur pour les ondes de flexion : le trou borgne	85
4.3.1	État de l'art	85
4.3.2	Calcul des fréquences de résonances	86
4.4	Métamatériau à indice négatif : le trou "aveugle"	87
4.4.1	Étude prospective	87
4.4.2	Vers une réalisation expérimentale	91
4.4.3	Optimisation du facteur de qualité des résonances	92
4.4.4	Conception des échantillons	94
	Choix du réseau et de la maille élémentaire	94
	Fabrication des échantillons	95
4.5	Conclusion et perspectives	95

4.1 Introduction

La définition d'un métamatériau est la suivante : il s'agit d'un milieu composé d'un ensemble périodique de résonateurs dont la taille est très petite devant la longueur d'onde à résonance. On traite généralement ces milieux comme des milieux homogènes. La réponse du métamatériau peut alors être décrite par un paramètre macroscopique, il n'est plus nécessaire de prendre en compte les détails fins de la structure. Ces paramètres macroscopiques peuvent être définis pour des matériaux usuels. Par exemple, l'indice de réfraction d'un milieu permet de décrire la propagation de la lumière sans faire référence à la structure microscopique du milieu.

La conception et la maîtrise du métamatériau à l'échelle microscopique ou mésoscopique permet de contrôler précisément les propriétés macroscopiques du milieu. L'utilisation de matériaux naturels n'autorise qu'un spectre discret de propriétés macroscopiques. L'utilisation des métamatériaux va permettre d'accéder à une valeur arbitraire de ces paramètres. Ces métamatériaux vont également permettre de transcender les propriétés des milieux naturels avec par exemple l'accès à un indice de réfraction négatif.

4.1.1 Indice négatif : Premiers résultats expérimentaux

Victor Veselago démontre théoriquement que l'indice de réfraction négatif est obtenu lorsque les deux paramètres constitutifs du matériau : la permittivité diélectrique ϵ et la perméabilité magnétique μ sont négatifs simultanément [18].

La résonance plasma des métaux nobles permet d'obtenir une permittivité diélectrique négative aux fréquences optiques. Cependant, il n'existe pas de matériaux naturels présentant une perméabilité magnétique négative à ces fréquences. Il est nécessaire de trouver une gamme de fréquence où les valeurs négatives des deux paramètres coïncident.

La pulsation de la résonance plasma ω_p d'un gaz d'électron est décrite par la relation suivante (4.1).

$$\omega_p^2 = \frac{ne^2}{m_{eff}\epsilon_0} \quad (4.1)$$

où e représente la charge électrique élémentaire, n la densité électronique, ϵ_0 la permittivité diélectrique du vide et m_{eff} la masse effective des électrons. En 1996, John Pendry et ses collègues proposent un moyen de contrôler la fréquence de cette résonance plasma [65]. Ils étudient la réponse électromagnétique d'une matrice de fils métalliques fins. Ce matériau se comporte comme un métal dilué et permet de diminuer la fréquence de la résonance plasma jusqu'à des fréquences autour du GHz. À ces fréquences, certains résonateurs comme les anneaux métalliques fendus présentent une perméabilité magnétique négative.

La première démonstration expérimentale d'un milieu à indice négatif est réalisée par David Smith et ses collègues [66, 44] dans la gamme du GHz. Deux éléments sont assemblés afin d'obtenir les valeurs négatives des paramètres ϵ et μ :

- Un réseau de tiges métalliques est responsable de la négativité de la permittivité diélectrique.
- Un réseau d'anneaux métalliques fendus est responsable de la négativité de la perméabilité magnétique.

La figure 4.1a présente une photographie de ce milieu. La démonstration de l'indice négatif est réalisée par la réfraction négative d'une onde plane incidente sur ce métamatériau à une fréquence de 10.5GHz. Une comparaison est effectuée avec un prisme de Teflon d'indice positif.

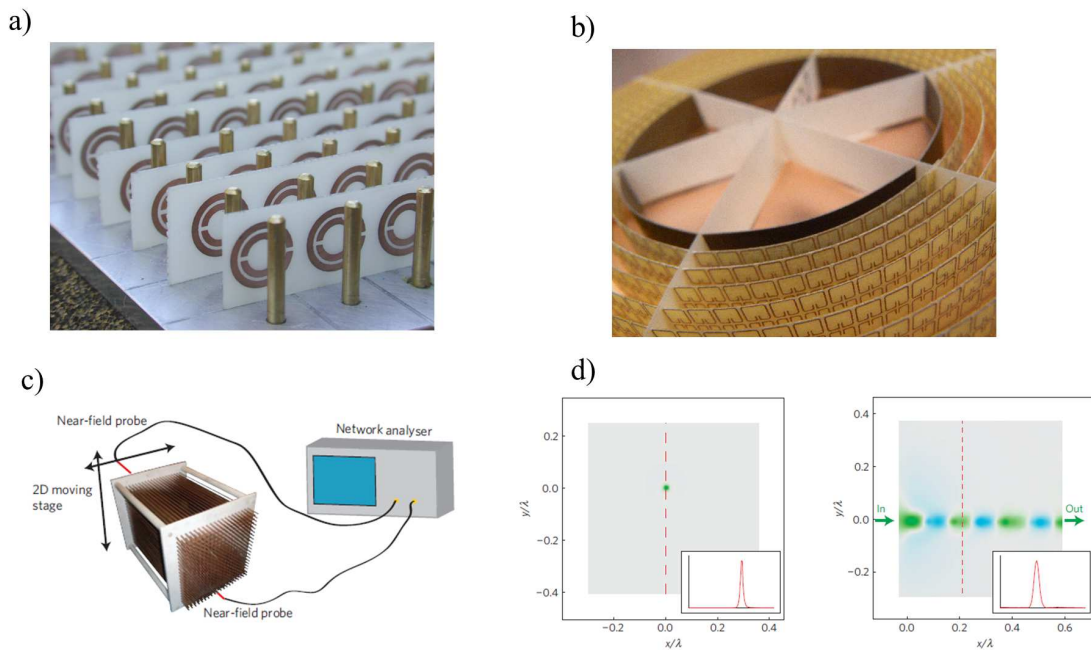


Figure 4.1 – a) Photographie du milieu d'indice négatif fabriqué à partir de tige métalliques et d'anneaux fendus extrait de [66] b) Métamatériau composé de couches successives d'anneaux fendus, application au camouflage ou "cloaking" d'un objet pour les micro-ondes, extrait de [67]. c) Représentation du montage expérimental développé à l'Institut Langevin au cours de la thèse de Fabrice Lemoult. Le milieu se compose d'un arrangement périodique, sub-longueur d'onde, de fils de cuivre. d) Représentation du champ mesuré, dans le cas de l'introduction d'un défaut menant au confinement extrême des ondes, ou d'une ligne de défauts permettant de guider une onde avec un confinement important, extrait de [68]

Cette première démonstration expérimentale est à l'origine du développement important des métamatériaux ces dernières années. La recherche d'un indice négatif ne représente qu'une seule application de ces milieux. L'intérêt majeur réside dans la capacité de concevoir un matériau possédant des propriétés effectives souhaitées à partir d'une structure microscopique. Cette maîtrise des propriétés des métamatériaux va permettre la réalisation d'un nombre important d'applications comme le guidage des ondes pour le camouflage [67], le confinement et le guidage des ondes à petite échelle [68], la miniaturisation de systèmes [69], ou l'absorption haute-performance [70].

4.1.2 Métamatériaux acoustiques et élastiques

Le principe des métamatériaux peut se transposer à tout type d'ondes. Les ondes acoustiques et élastiques représentent, après les ondes électromagnétiques, le second domaine d'application des métamatériaux. Historiquement, les premiers métamatériaux acoustiques sont étudiés par le groupe de Ping Sheng [71]. La dénomination employée à l'époque est "milieu localement résonnant". Le terme métamatériau sera appliqué plus tard mais les deux notions sont parfaitement équivalentes, il s'agit d'un matériau composé d'un ensemble périodique de résonateurs dont la taille est petite devant la longueur d'onde à résonance. On qualifie ces résonateurs de sub-lambda ou sub-longueur d'onde.

Dans ces travaux datant de 2000 [71], le groupe de Ping Sheng utilise un métamatériau composé d'un cristal cubique de billes de plomb de 5mm de rayon recouvertes d'une couche de 2.5mm de caoutchouc. Les billes sont intégrées dans une matrice de résine epoxy rigide afin de les maintenir en position. Ce résonateur présente deux résonances fortes à des fréquences de 380Hz et 1350Hz. Le calcul des courbes de dispersion du cristal 3D fait apparaître deux bandes interdites situées autour de ces résonances. L'absence de transmission est uniquement liée à la présence de résonances car les effets de Bragg liés à la périodicité du milieu ont lieu à des fréquences beaucoup plus élevées. On parle alors de bande interdite d'hybridation introduites par le couplage entre les résonateurs et une onde plane [68].

4.1.3 Hybridation et paramètres effectifs négatifs

L'apparition d'une valeur négative des propriétés effectives est liée à la réponse des résonateurs en opposition de phase. Ce principe provient de l'étude des résonateurs en régime d'oscillations forcées. La figure 4.2a extraite de [68] présente l'amplitude et la phase de la réponse d'un résonateur en fonction de la fréquence d'excitation. À la fréquence de résonance f_0 le résonateur répond en quadrature de phase avec un gain maximal. Si l'on excite le résonateur au dessus de cette fréquence f_0 , le gain en amplitude demeure important mais la réponse du résonateur est désormais en légère opposition de phase. Lorsque la réponse du résonateur est opposée au stimulus, on peut décrire le comportement d'un résonateur à cette fréquence précise par un paramètre

négatif. Ce paramètre négatif disparaît lorsque l'on s'éloigne trop de la fréquence de résonance car le gain du résonateur diminue rapidement. Ce mécanisme est capable de reproduire la perte de transmission à travers une assemblée de résonateurs observée dans [71].

La propagation des ondes dans ces milieux peut être modélisée par une interférence de Fano [72, 73, 74] dont le principe est présenté dans la figure 4.2b. La transmission résulte de l'interférence entre une onde incidente non perturbée et le rayonnement du résonateur. L'asymétrie de la réponse vient de l'interaction entre un mode discret du résonateur avec le continuum de mode de l'espace libre (ondes planes). On remarque que cette interférence va être destructive dans la gamme de fréquence où la réponse du résonateur est en opposition de phase avec le chemin direct. La figure 4.2c présente la transmission obtenue à travers une assemblée à une dimension de 40 résonateurs. On observe bien la chute de la transmission pour les fréquences supérieures à la fréquence propre f_0 . La largeur de la bande interdite est alors liée au facteur de qualité de la résonance et à la densité de résonateurs.

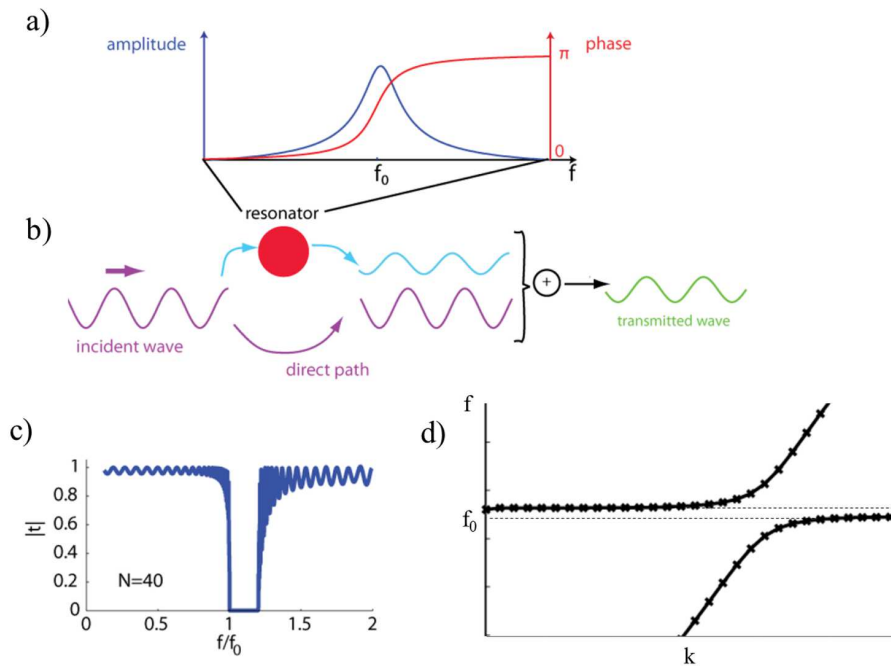


Figure 4.2 – a) Représentation de l'amplitude et de la phase de la réponse d'un résonateur en fonction de la fréquence d'excitation. b) Principe des interférences de Fano. La transmission résulte de l'interférence entre le champ rayonné par le résonateur et le champ incident. c) Tracé de la transmission théorique obtenue pour une assemblée 1D de 40 résonateurs. La transmission est coupée lorsque l'on excite le système au dessus de f_0 , la fréquence propre du résonateur. d) Tracé de la relation de dispersion d'un milieu 1D infini, on obtient une bande interdite autour de la résonance. Les figures a) b) et c) sont extraites de [68].

La figure 4.2d présente la relation de dispersion d'un milieu 1D infini incluant un résonateur dans la maille élémentaire. On observe l'apparition d'une bande interdite d'hybridation à partir de f_0 , la fréquence propre du résonateur. Cette bande interdite est responsable de la chute de la transmission dans la figure 4.2c. La perte de transmission, l'apparition d'une bande interdite,

et la valeur négative d'un paramètre macroscopique sont plusieurs manifestations d'un phénomène identique lié à l'interférence de Fano entre le champ incident et le champ rayonné par les résonateurs [68].

4.2 Double négativité en ondes acoustiques et élastiques

4.2.1 Ondes acoustiques

La vitesse de propagation d'une onde acoustique dans un milieu fluide dépend de la masse volumique ρ et de la compressibilité κ du milieu. Par analogie avec un milieu électromagnétique, un milieu acoustique à indice négatif nécessite une négativité simultanée de ces paramètres. Les travaux des dernières années se sont concentrés sur la recherche de structures présentant des résonances capables d'apporter une valeur négative pour chacun des paramètres [75].

Les premiers métamatériaux à masse volumique négative sont conçus à partir d'un noyau massif entouré d'une coquille souple [71]. Le résonateur est présenté dans la figure 4.3c. La première résonance de ces systèmes est une résonance dipolaire. La figure 4.3a, extraite de [76], donne une interprétation de la réponse du résonateur lorsqu'il est excité au dessus de sa fréquence propre. On remarque que l'accélération du résonateur $\vec{a}$ (représentée en bleue) est opposée à la force appliquée $\vec{F}$ (représentée en rouge). La masse volumique ρ est le paramètre reliant force et accélération, on peut donc lui affecter une valeur négative afin de modéliser la réponse du résonateur à cette fréquence [70, 77].

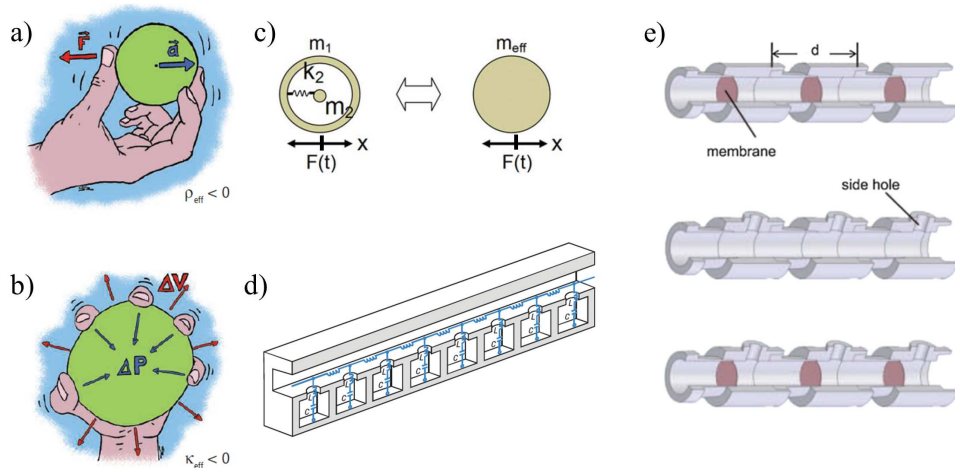


Figure 4.3 – a) Représentation schématique des réponses en opposition de phase donnant les paramètres acoustiques effectifs négatifs. Extrait de [76] b) Représentation des résonateurs noyau-enveloppe menant à la masse volumique négative c) Représentation de la chaîne de résonateurs de Helmholtz menant à la compressibilité négative. Extrait de [78]. d) Schéma du montage expérimental, utilisant membranes et résonateurs ouverts afin d'obtenir un guide d'onde d'indice négatif. Extrait de [79].

Le premier métamatériau à compressibilité négative est réalisé en 2006 par l'équipe de Xiang Zhang [78], il s'agit d'un arrangement périodique à une dimension de résonateurs de Helmholtz présentés sur la figure 4.3d. La première résonance du résonateur de Helmholtz est une résonance monopolaire. Elle fait intervenir une variation de volume du fluide dans la partie réservoir. La figure 4.3b donne une interprétation du comportement du résonateur lorsqu'il est excité au dessus de sa fréquence propre. On remarque que la variation de volume ΔV est opposée à la pression appliquée ΔP . La compressibilité κ est le paramètre reliant ces deux grandeurs, on peut alors lui affecter une valeur négative afin de modéliser la réponse du résonateur à cette fréquence [78].

Comme dans le cas électromagnétique, la construction d'un milieu possédant ces deux résonances à même fréquence permet de cumuler la négativité des deux paramètres et d'obtenir un milieu à indice négatif [79]. Une réalisation expérimentale est proposée en 2010 par l'équipe de Chul Koo Chim. Le prototype expérimental est présenté dans la figure 4.3e. Il est réalisé pour un arrangement à une dimension de deux éléments :

- Les membranes tendues dans le tube présentent une résonance menant à une masse volumique négative.
- Les trous percés dans la paroi du tube présentent une résonance menant à une compressibilité négative dans la même gamme de fréquence.

L'addition des deux résonateurs dans une unique structure permet d'obtenir un indice négatif. Dans le cas 1D, la mesure réalisée montre que la vitesse de phase d'une onde se propageant dans ce milieu est négative. Cet effet n'est observé que pour le cas où les deux résonateurs sont jumelés dans une même structure.

4.2.2 Ondes élastiques

Cas des milieux solides à trois dimensions

Les ondes élastiques dans les solides sont vectorielles et possèdent différentes polarisations. Les conditions nécessaires à l'obtention d'un indice négatif vont devenir plus complexes. La démarche consiste à exploiter la relation de dispersion des différentes ondes présentes dans le milieu. Dans le cas d'un milieu solide, deux polarisations coexistent : les ondes de compression polarisées longitudinalement et les ondes de cisaillement polarisées transversalement. Les deux types d'ondes possèdent des vitesses de propagation et des relations de dispersion qui leurs sont propres. Ces relations font intervenir différentes caractéristiques du milieu élastique : la masse volumique ρ , le module d'Young E et le module de cisaillement μ .

Les travaux de Yiqun Ding et ses collègues présentent un métamatériau élastique 3D possédant un indice négatif pour les ondes de compression uniquement [80]. Le métamatériau étudié se

compose d'inclusions fluides et d'inclusions solides arrangées selon deux structures cubiques à face centrée décalées également appelée structure zinc blende.

Le principe des inclusions est équivalent à celui présenté dans la figure 4.3, les inclusions fluides dites "souples" présentent une résonance monopolaire qui va autoriser une valeur négative du module d'Young effectif. Le module d'Young peut être relié à l'inverse de la compressibilité κ . Les inclusions solides vont induire une résonance dipolaire responsable de la négativité de la masse volumique. Le motif assemblé présente un indice négatif pour les ondes de compression.

Le module de cisaillement n'est pas influencé par ces résonances. En revanche, les ondes transverses présenteront une bande interdite à la fréquence de la résonance dipolaire car la masse volumique ρ est négative à cette fréquence tandis que le module de cisaillement μ est positif [80]. Des travaux simultanés présentent un matériau à module de cisaillement négatif [81, 82, 83]. L'utilisation d'une maille composite présentant une résonance dipolaire et une résonance de type quadrupolaire permettent aux paramètres de masse volumique ρ et de module de cisaillement μ de prendre des valeurs négatives pour une fréquence commune.

Cas des plaques

Les travaux que nous avons menés concernent la conception et la réalisation d'un métamatériau à indice négatif pour les ondes de flexion (premier mode antisymétrique) dans une plaque fine. Dans le cas où la longueur d'onde utilisée est grande devant l'épaisseur de la plaque, la théorie de Kirchhoff-Love permet de décrire la relation de dispersion des ondes de flexion par une fonction quadratique (4.2) avec $c_P = \sqrt{\frac{E}{\rho(1-\nu^2)}}$ où E représente le module d'Young, ρ la masse volumique, h l'épaisseur et ν le coefficient de Poisson. Cette équation nous permet d'obtenir une expression de la vitesse de phase des ondes de flexion (4.3).

$$\omega = \frac{c_P}{\sqrt{12}} h k^2 \quad (4.2)$$

$$V_\phi(\omega) = \frac{\omega}{k} = \sqrt[4]{\frac{12(1-\nu^2)}{h^2}} \sqrt[4]{\frac{\rho}{E}} \sqrt{\omega} \quad (4.3)$$

On retrouve les paramètres E module d'Young et ρ la masse volumique, le coefficient de Poisson ν traduit le couplage entre les deux polarisations. Dans les milieux élastiques usuels, le coefficient de Poisson est strictement compris entre 0 et $\frac{1}{2}$. En fonctionnant par analogie, il est légitime de penser que les valeurs négatives simultanées du module d'Young et de la masse volumique nous permettent d'obtenir un milieu d'indice négatif pour les ondes de flexion.

Afin d'assurer cette double négativité il est nécessaire de proposer un résonateur pour les ondes de flexion. Plusieurs équipes ont utilisé un arrangement périodique de piliers [84, 85, 86] afin d'obtenir des bandes interdites hybrides de propagation pour les ondes de flexion. Notre approche

est basée sur un autre résonateur pour les ondes de flexion, le trou borgne.

4.3 Un résonateur pour les ondes de flexion : le trou borgne

La fabrication d'un trou borgne ou trou non traversant, consiste à percer la plaque tout en laissant une fine membrane au fond du trou. Cette fine membrane présente plusieurs fortes résonances. Les deux premières résonances d'un trou borgne sont les résonances monopolaire et dipolaire que l'on souhaite utiliser pour la conception d'un métamatériau à indice négatif pour les ondes de flexion.

4.3.1 État de l'art

La diffusion des ondes de Lamb par des hétérogénéités a été largement étudiée par la communauté du Contrôle Non Destructif (CND). Cette méthode permet de réaliser un contrôle non invasif de la qualité d'une pièce mécanique comme les panneaux de fuselage en aéronautique ou les tuyaux pour les applications pétrolières ou nucléaires. Le CND repose sur l'analyse des différents échos que peut produire une hétérogénéité lors de son interaction avec une onde élastique incidente. Parmi les différentes hétérogénéités rencontrées, la diffusion d'une onde élastique par les fissures, les trous ou les inclusions rigides a été étudiée en détails.

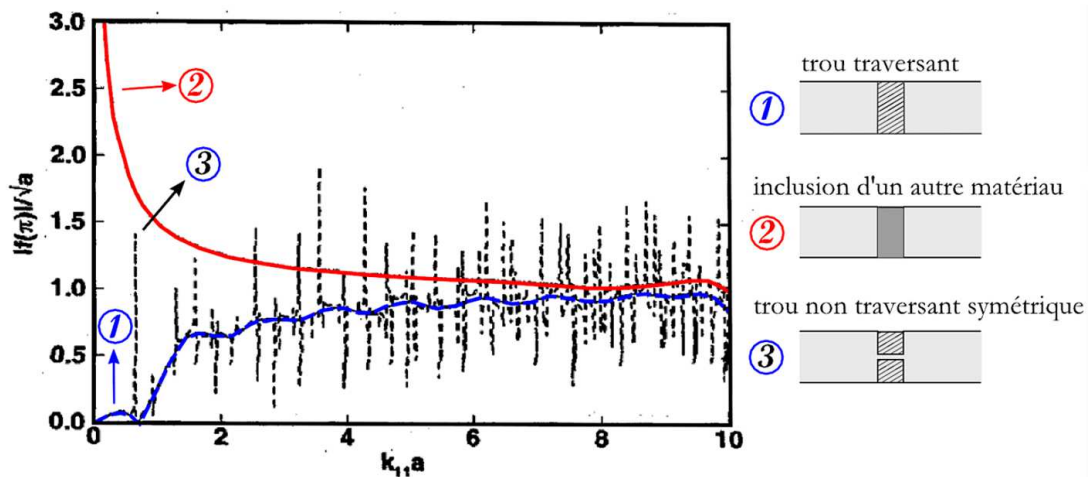


Figure 4.4 – Représentation de l'amplitude de l'onde de flexion rétro diffusée en fonction du produit $k_{11}a$ où k_{11} est la norme du vecteur d'onde incident et a le diamètre de l'inclusion. Trois cas de figure sont étudiés : 1) Cas d'un trou traversant, 2) Cas d'une inclusion rigide et 3) Cas d'un trou borgne avec une membrane dont l'épaisseur représente $\frac{1}{25}$ de l'épaisseur totale de la plaque. Extrait de [6].

Chandrasekar Vemula et Andrew Norris présentent une étude théorique de la diffusion d'une

onde de flexion par des défauts cylindriques [6]. La figure 4.4 présente l'amplitude de l'onde de flexion rétro diffusée par un défaut cylindrique en fonction de la longueur d'onde de l'onde incidente. Trois types de défauts sont présentés, le trou traversant, l'inclusion rigide, et le trou borgne avec une membrane dont l'épaisseur représente $\frac{1}{25}$ de l'épaisseur totale de la plaque. On remarque que la nature de l'inclusion fait varier son interaction avec l'onde élastique incidente, l'inclusion rigide est très diffusante à basse fréquence tandis que le trou traversant est quasi transparent. À haute fréquence spatiale, les deux inclusions ont un comportement très proche. La comparaison des cas 1 et 3 est intéressante, les pics pointillés correspondent aux résonances successives de la membrane dans le trou. En dehors de ces résonances, on remarque que le trou borgne se comporte exactement comme un trou traversant. On en conclut que la présence de la fine membrane ne modifie pas les propriétés du trou traversant en dehors des fréquences de résonance.

4.3.2 Calcul des fréquences de résonances

Les résonances de la membrane en fond de trou peuvent être modélisées en première approximation comme les modes de vibration d'une plaque circulaire clampée. Les fréquences de résonance de ces modes sont calculables dans le cadre des hypothèses de Kirchhoff-Love [87]. La résolution est effectuée dans un repère cylindrique à deux dimensions (r, θ) . L'équation biharmonique décrit le déplacement normal de la plaque w . Pour un repère cylindrique, les solutions de cette équation pour une plaque circulaire prennent la forme suivante (4.4)

$$w_n(r, \theta) = [A_n J_n(\beta r) + B_n I_n(\beta r)] \cos(n\theta) \quad (4.4)$$

où n représente le nombre de diamètres nodaux du mode considéré, J_n est la fonction de Bessel de première espèce d'ordre n , I_n est la fonction de Bessel modifiée de première espèce d'ordre n , β est la fréquence spatiale réduite de formule $\beta^4 = \frac{\rho h \omega^2}{D}$ où la rigidité de flexion D s'exprime $D = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)}$. Les coefficients A_n et B_n sont les inconnus du problème et dépendent des conditions aux bords. Dans le cas d'une plaque circulaire clampée, le déplacement et la dérivée du déplacement sont nuls aux bords de la plaque. La prise en compte de ces conditions mène à la relation suivante (4.5)

$$J_n(\xi)I_{n+1}(\xi) + I_n(\xi)J_{n+1}(\xi) = 0 \quad (4.5)$$

avec $\xi = \beta R$ où R est le rayon du trou. Cette équation admet un ensemble discret de solutions, ces solutions sont tabulées : pour tout entier n on associe un autre entier s qui représente le nombre de cercles nodaux. Les solutions $\xi_{n,s}^2$ sont présentées dans la figure 4.5.

On obtient alors les différentes fréquences de résonance $f_{n,s}$ par la relation suivante (4.6)

$$f_{n,s} = \xi_{n,s}^2 \frac{h}{2\pi R^2} \sqrt{\frac{E}{12\rho(1-\nu^2)}} \quad (4.6)$$

s	λ^2 for values of n of—										
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0.....	10.2158	21.26	34.88	51.04	69.6659	90.7390	114.2126	140.0561	168.2445	198.7561	231.5732
1.....	39.771	60.82	84.58	111.01	140.1079	171.8029	206.0706	242.8782	282.1977	324.0036	368.2734
2.....	89.104	120.08	153.81	190.30	229.5186	271.4283	316.0015	363.2097	-----	-----	-----
3.....	158.183	199.06	242.71	289.17	338.4113	390.3896	-----	-----	-----	-----	-----
4.....	247.005	297.77	351.38	407.72	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
5.....	355.568	416.20	479.65	545.97	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
6.....	483.872	554.37	627.75	703.95	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
7.....	631.914	712.30	795.52	881.67	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
8.....	799.702	889.95	983.07	1079.0	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
9.....	987.216	1087.4	1190.4	1296.2	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

Figure 4.5 – Valeurs tabulées des $\xi_{n,s}$ solutions de l'équation 4.5 élevées au carré. n représente le nombre de diamètre nodaux et s le nombre de cercles nodaux. Extrait de [87].

où h représente l'épaisseur du fond de trou et R le rayon du trou. Les deux modes que l'on va utiliser sont associés aux valeurs $\xi_{0,0}^2=10,26$ pour le mode monopolaire et $\xi_{1,0}^2=21,26$ pour le mode dipolaire. Il y a quasiment un rapport 2 entre les fréquences modes monopolaire et dipolaire. Le trou borgne seul ne permet pas d'obtenir une bande de fréquence où les deux résonances sont simultanées. L'idée est donc de faire évoluer la maille élémentaire vers une nouvelle structure contenant deux membranes par trou : le trou "aveugle". Le choix indépendant de l'épaisseur de chacune des membranes va nous permettre d'ajuster les fréquences des résonances souhaitées. La possibilité d'inclure les deux résonances au même emplacement est un atout important de notre résonateur.

4.4 Métamatériau à indice négatif : le trou "aveugle"

4.4.1 Étude prospective

La figure 4.6 présente la structure que l'on va étudier numériquement. La structure initiale se compose d'une maille carrée de 4,5mm de paramètre de maille, le rayon du trou est de 2mm, l'épaisseur totale de la plaque est de 1,5mm, les deux membranes sont respectivement d'épaisseur 75 μ m et 34 μ m. La première partie de l'étude consiste à vérifier numériquement que les fréquences monopolaire et dipolaire des deux membranes coïncident.

On choisi une plaque hôte en Duraluminium : $E=74,9$ GPa, $\rho=2790 \frac{kg}{m^3}$ et $\nu=0,334$. L'équation (4.6) nous permet d'obtenir les fréquences de résonances associées aux deux épaisseurs : $f_m=48,320$ kHz pour la résonance monopolaire dans la membrane à 75 μ m et $f_d=46,980$ kHz pour la résonance dipolaire dans la membrane à 34 μ m .

On calcule d'abord les courbes de dispersion des deux métamatériaux formés à partir de trous

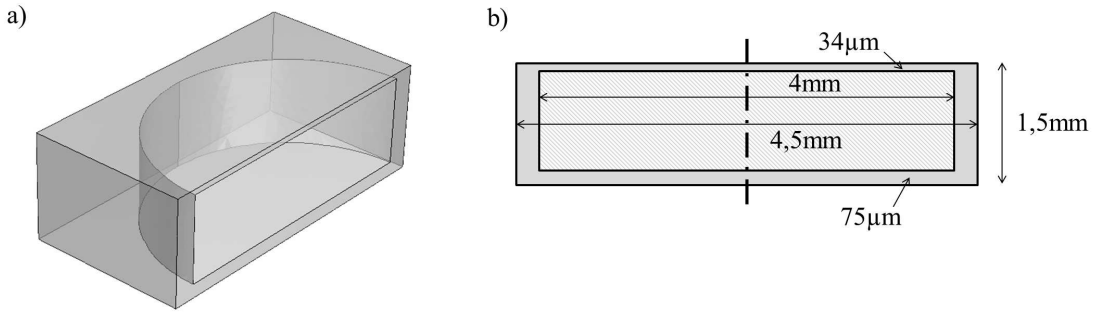


Figure 4.6 – a) Représentation virtuelle de la moitié de la maille élémentaire. b) Représentation schématique de la coupe de la maille avec les dimensions (échelle non respectée)

borgnes possédant chacune des membranes décrites. Ces courbes de dispersion vont nous permettre de confirmer la présence des résonances par l'existence de bandes interdites hybrides aux fréquences f_m et f_d . Cette étude permet également d'avoir une valeur plus précise des fréquences propres des deux résonances en modélisant la réponse des trous borgnes dans le modèle de Mindlin (modèle 2D vectoriel) moins restrictif que les hypothèses de Kirchhoff-Love (modèle 2D scalaire).

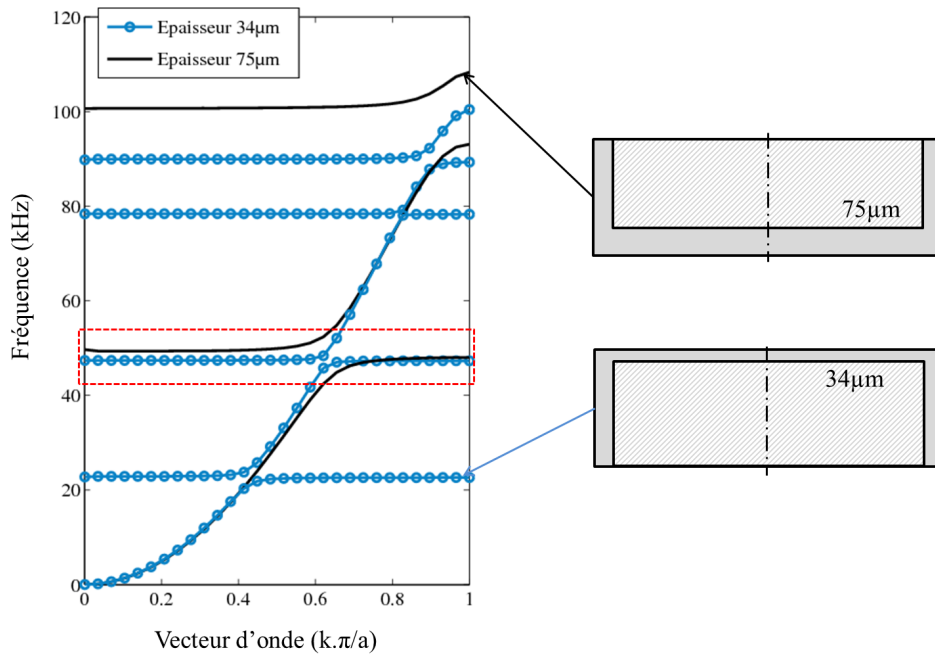


Figure 4.7 – Tracé des courbes de dispersion pour un réseau carré de trou borgne, en bleu la dispersion pour une membrane de 34μm d'épaisseur et en noir la dispersion pour une membrane de 75μm d'épaisseur. Le cadre rouge pointillés indique la zone où les résonances monopolaire et dipolaire se situent.

La figure 4.7 présente en trait noir la dispersion selon ΓX d'un métamatériau formé à partir d'un réseau carré de trou borgnes possédant une membrane épaisse (75μm) et en trait bleu cerclés la dispersion du réseau ayant une membrane fine (34μm). Le cadre rouge pointillé permet de situer

la zone d'intérêt où les fréquences monopolaire et dipolaire coïncident.

Les fréquences de résonance obtenues par cette méthode sont : $f_m=47,99\text{kHz}$ et $f_d=47,320\text{kHz}$. L'écart entre les deux résonances reste faible avec une résolution numérique du problème de Mindlin. On remarque que le modèle de plaque circulaire clampée donne une bonne approximation analytique des fréquences propres des membranes.

On va calculer la dispersion d'un métamatériau réalisé à partir d'un réseau carré incluant les deux membranes dans le trou. Le modèle 2D de Mindlin ne permet plus le calcul de la relation de dispersion du trou aveugle car il n'est pas possible d'affecter deux valeurs différentes d'épaisseur pour un même point de la carte. On va donc utiliser le modèle 3D élastique formulé en déformation-contrainte. La même finesse de maillage ne peut pas être atteinte dans le cas 3D car trop gourmande en mémoire. On va observer un décalage vers des fréquences plus élevées mais l'analyse qualitative n'est pas détériorée.

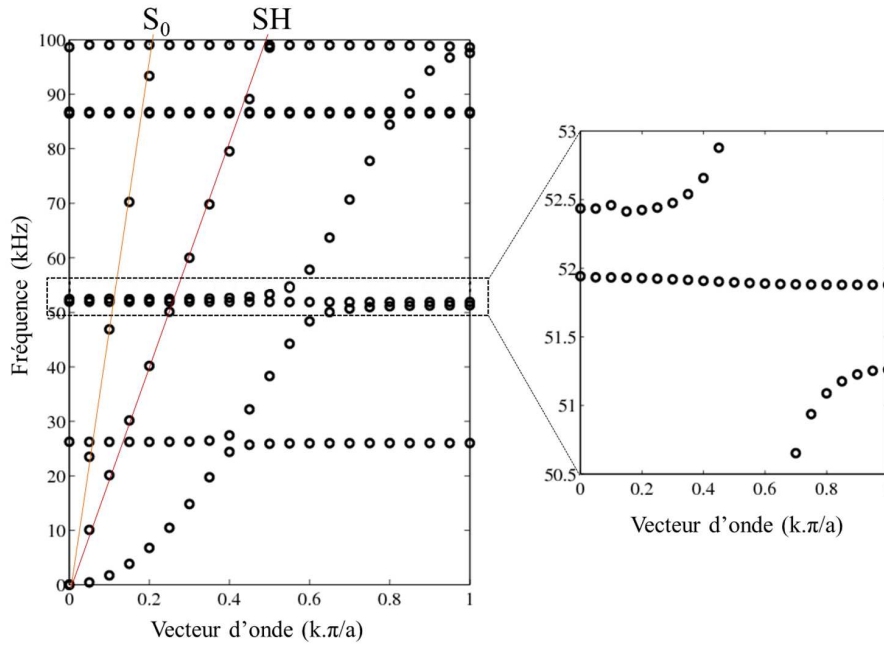


Figure 4.8 – Tracé de la courbe de dispersion d'un métamatériau réalisé à partir d'un réseau carré de trous aveugle. Un agrandissement de la zone d'intérêt est présenté sur la droite de la figure. Le calcul des relations de dispersion par le modèle 3D élastique fait apparaître le premier mode symétrique S_0 ainsi que le mode transverse horizontal SH, ces modes sont identifiables par leur dispersion linéaire. Le mode de flexion A_0 possède une dispersion quadratique caractéristique.

La figure 4.8 présente la relation de dispersion d'un réseau carré dont la maille contient le trou aveugle formé par les deux membranes précédemment étudiées. La résolution numérique 3D des relations de dispersion fait apparaître les autres polarisations présentes dans les plaques fines, il s'agit du premier mode symétrique S_0 ainsi que le mode transverse horizontal SH. Leur dispersion à basse fréquence est linéaire ce qui permet de les distinguer du mode A_0 qui présente un profil quadratique.

Un agrandissement de la zone où les résonances coïncident nous permet d'observer une bande

propagative à pente négative située au sein de la bande interdite ouverte entre 51,3 kHz et 52,4 kHz. Cette pente est qualifiée de négative car la fréquence augmente tandis que la norme du vecteur d'onde diminue. La présence de cette bande à pente négative nous permet d'affirmer la présence d'un indice négatif dans le milieu autour de la fréquence 51,9 kHz.

Cette étude numérique confirme l'obtention d'un milieu indice négatif pour les ondes de flexion. Cet indice négatif est lié à la double négativité des paramètres du milieu provenant des résonances monopolaire et dipolaire des deux membranes du trou aveugle.

La courbe de dispersion présentée dans la figure 4.8 présente le comportement du métamatériau selon la direction ΓX normale à la maille. La figure 4.9 représente la dispersion du réseau sur la zone irréductible de Brillouin. Le cadre pointillé indique la gamme de fréquence où l'indice du milieu est considéré comme négatif. Dans cette zone, Les deux directions ΓX et ΓM présentent une pente négative : la fréquence augmente tandis que la norme vecteur d'onde diminue en se rapprochant du point Γ .

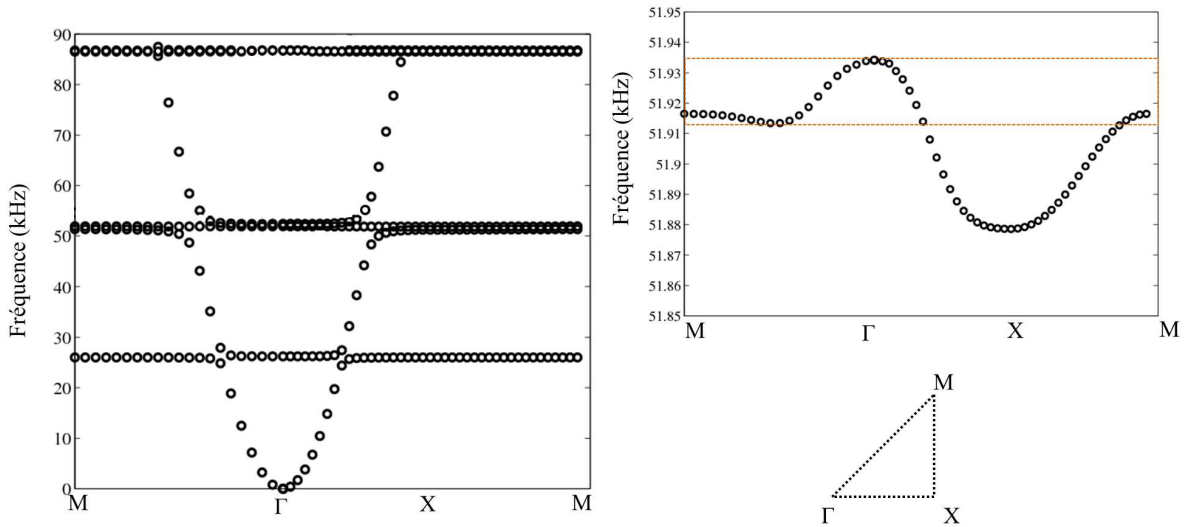


Figure 4.9 – Tracé des courbes de dispersion sur la zone irréductible de Brillouin. Le grandissement sur la figure de droite nous permet d'apprécier la pente négative de la bande résonante. Le cadre pointillé marque la gamme de fréquence où l'indice négatif existe. Les modes S_0 et SH ont été effacés pour la clarté de la figure.

On remarque que l'anisotropie de la maille limite cette largeur. Le comportement de la bande négative n'est pas identique pour les directions ΓM et ΓX . On peut réduire cette anisotropie en utilisant un réseau à maille triangulaire. Un autre aspect important est la largeur de la bande de fréquence où l'indice est négatif. Cette largeur est liée au facteur de qualité des résonances mises en jeu.

Les phénomènes résonants sont associés à des bandes de dispersion possédant une très faible pente. Dans notre cas, la membrane d'épaisseur fine présente des résonances avec un facteur de qualité important. Les phénomènes associés à ces résonances vont exister dans une gamme de

fréquence étroite autour de la fréquence de résonance. La gamme de fréquence associée à l'indice négatif est de 20 Hz autour d'une fréquence centrale de 51,925 kHz. Il va être nécessaire de réduire le facteur de qualité des résonances si l'on souhaite obtenir un indice négatif sur une bande passante plus large.

4.4.2 Vers une réalisation expérimentale

Nous allons étudier l'effet d'une imprécision de fabrication sur la membrane d'épaisseur fine. La figure 4.10 présente les courbes de dispersion de trois métamatériaux à trous aveugles dont l'épaisseur de la membrane fine est perturbée. On présente ici trois simulations avec des épaisseurs de $33\mu\text{m}$, $34\mu\text{m}$ et $36\mu\text{m}$. La bande à pente négative est obtenue pour l'épaisseur de $34\mu\text{m}$ utilisée jusqu'à présent. En revanche une épaisseur de $33\mu\text{m}$ réduit la fréquence propre du mode dipolaire qui n'apparaît plus dans la bande interdite. On note l'apparition d'une nouvelle bande interdite autour de 49 kHz. Pour une épaisseur de $36\mu\text{m}$, la résonance dipolaire est toujours située dans la bande interdite, par contre la pente n'est pas strictement négative, ce qui va diminuer la qualité et la bande passante de l'indice négatif.

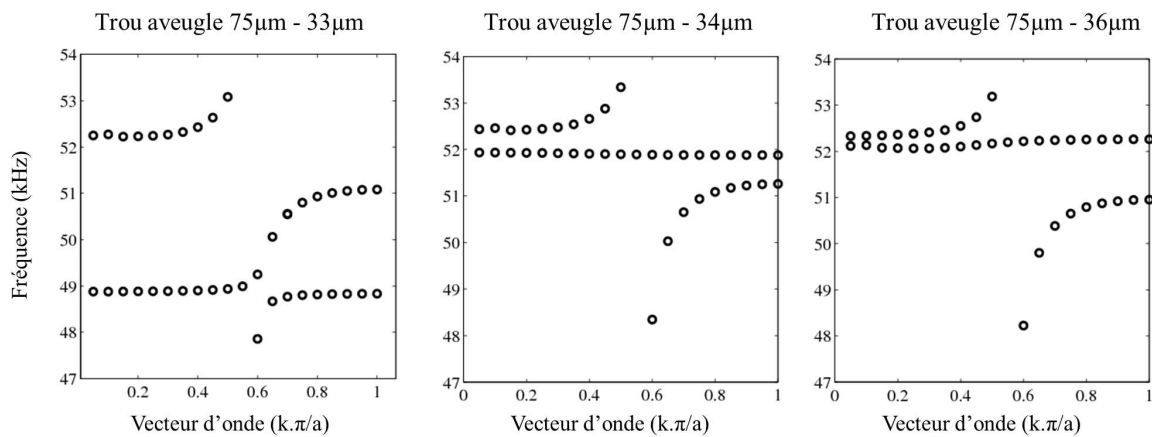


Figure 4.10 – Tracé des courbes de dispersion pour des épaisseurs de membrane fines de $33\mu\text{m}$, $34\mu\text{m}$ et $36\mu\text{m}$.

La piste d'une fabrication par usinage d'une plaque de duraluminium a donc été abandonnée car l'usinage mécanique ne permet pas d'atteindre des précisions de l'ordre du micromètre. La fabrication de trous borgnes a été abordée lors de la thèse d'Olivier Xéridat encadrée par Patrick Sebbah au LPMC, Nice. L'usinage mécanique étant exclu, les techniques de gravure sur semi-conducteur ont été envisagées car elles présentent une flexibilité adaptée à nos besoins. Le principe est donc de graver les trous non traversants dans un wafer de silicium cristallin. Le procédé de gravure plasma sèche a été entrepris en collaboration avec le LAAS, Toulouse. Deux difficultés sont importantes : la gravure anisotrope (profondeur et diamètre de trou différents) et l'arrêt de la gravure à la profondeur souhaitée. La première contrainte a été levée grâce à l'utilisation du procédé Bosch qui passive les bords du trou lors de la gravure en profondeur. Le fût du trou est

donc bien cylindrique avec un diamètre constant. En revanche, l'imprécision sur la profondeur de la gravure atteint près de 5% ce qui ne permet pas d'envisager une fabrication précise des trous borgnes par cette méthode.

L'amélioration apportée au cours de la thèse concerne le substrat utilisé. La gravure est désormais effectuée sur des wafers SOI (Silicon On Insulator). Ces wafers sont constitués de deux couches de silicium cristallin séparées par une fine couche d'oxyde, la figure 4.11 présente la procédure de fabrication de ces dispositifs, extraite de la plaquette du groupe *SOITEC*. La fine couche

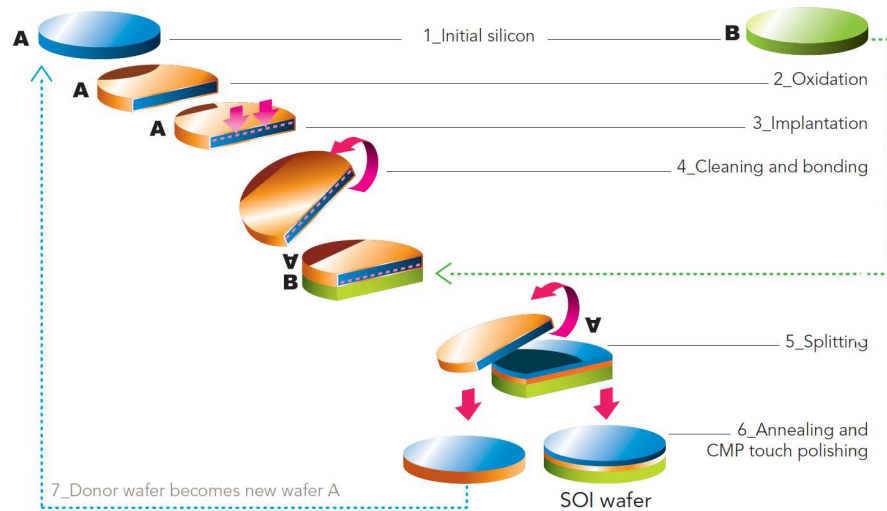


Figure 4.11 – Principe de fabrication des wafer SOI. Extrait de la plaquette du groupe *SOITEC*.

d'oxyde ne réagit pas à la gravure, elle va nous permettre de stopper sélectivement la profondeur de gravure. Nous allons pouvoir contrôler avec plus de précision les épaisseurs des membranes en fond de trou. Les gravures sont réalisées par Etienne Herth du laboratoire FemtoST, Besançon. Les wafers utilisés mesurent 4" de diamètre et possèdent une épaisseur totale de l'ordre de 500 μ m. L'épaisseur d'oxyde séparant les deux couches cristallines est de l'ordre de 1 μ m. Les épaisseurs des deux couches cristallines peuvent être choisies de façon arbitraire. Ces wafers sont généralement utilisés pour la fabrication de transistors, il n'est donc pas rare d'avoir une des épaisseurs plus fine que l'autre.

4.4.3 Optimisation du facteur de qualité des résonances

L'étude prospective préliminaire a montré que le facteur de qualité des résonances joue un rôle important dans la conception du milieu à indice négatif. L'ouverture de la bande interdite et la pente de la bande à vitesse de groupe négative sont directement liées aux facteurs de qualité des résonances. La formule analytique de la fréquence de résonance (4.6) ne fait pas intervenir l'épaisseur de la plaque dans laquelle le trou est percé. C'est ce rapport entre l'épaisseur en fond de trou et la plaque totale va nous permettre de modifier le facteur de qualité des résonances

de la membrane. La figure 4.12a montre numériquement l'évolution de la section efficace de diffusion lorsque l'on modifie l'épaisseur de la plaque extérieure en gardant le rayon et l'épaisseur membrane du trou borgne constants. On remarque que le facteur de qualité dépend de façon importante de ce rapport d'épaisseur tandis que la fréquence de résonance du mode monopolaire reste identique pour les trois cas. Les facteurs de qualité associés sont : pour la courbe jaune $Q=150$ avec un rapport d'épaisseur de $\frac{1}{23}$, pour la courbe orange $Q=97$ avec un rapport d'épaisseur de $\frac{1}{18}$ et pour la courbe rouge $Q=47$ avec un rapport d'épaisseur de $\frac{1}{13}$.

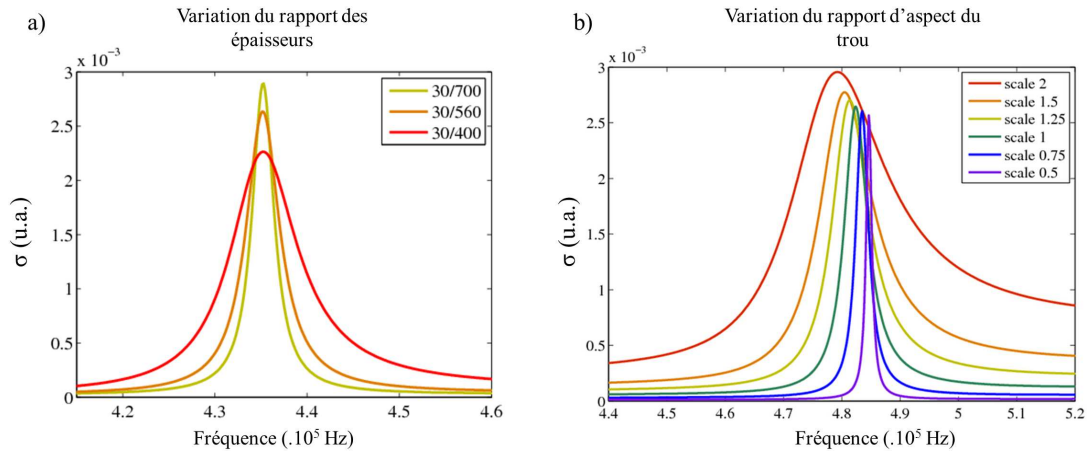


Figure 4.12 – a) Représentation de la section efficace de diffusion autour de la première fréquence de résonance d'un trou borgne de diamètre 1mm et une membrane de $30\mu\text{m}$ en fond de trou. La légende indique les rapports d'épaisseur entre la membrane fixée à $30\mu\text{m}$ et l'épaisseur du wafer gravé en μm également. b) Représentation de la section efficace pour un trou borgne dont le rapport d'aspect est modifié par un paramètre *scale* de la formule (4.7).

Cependant la modification de l'épaisseur de la plaque extérieure perturbe la pente du mode A0 observé dans le calcul des courbes de dispersion. Cette méthode ne permet pas un contrôle libre des paramètres du système. Nous avons vu que le facteur de qualité dépend principalement du rapport entre les épaisseurs de la membrane en fond de trou et de la plaque extérieure. L'équation (4.6) nous montre que la fréquence de résonance est proportionnelle au rapport de l'épaisseur en fond de trou h et de la surface du trou πR^2 . Ces deux paramètres vont nous permettre de modifier le facteur de qualité des résonances sans modifier les propriétés de la plaque extérieure. La modification consiste à appliquer un facteur multiplicatif *scale* à l'épaisseur de la membrane et au rayon du trou (4.7). Ce paramètre permet de modifier le facteur de qualité de la résonance sans déplacer la fréquence de résonance monopolaire. La figure 4.12b présente les sections efficaces de diffusion d'un trou borgne dont le rapport d'aspect est modifié par le paramètre *scale*.

$$f_0 = \alpha \frac{h}{R^2} = \alpha \frac{\text{scale} \cdot h}{(\sqrt{\text{scale}} \cdot R)^2} \quad (4.7)$$

4.4.4 Conception des échantillons

Choix du réseau et de la maille élémentaire

La maîtrise des facteurs de qualité nous permet d'améliorer la largeur de la bande à vitesse de groupe négative. Nous allons utiliser une maille triangulaire afin de réduire l'anisotropie entre les différentes directions de propagations dans le métamatériau. L'option finale est représentée dans la figure 4.13, il s'agit d'un réseau triangulaire de trous aveugles.

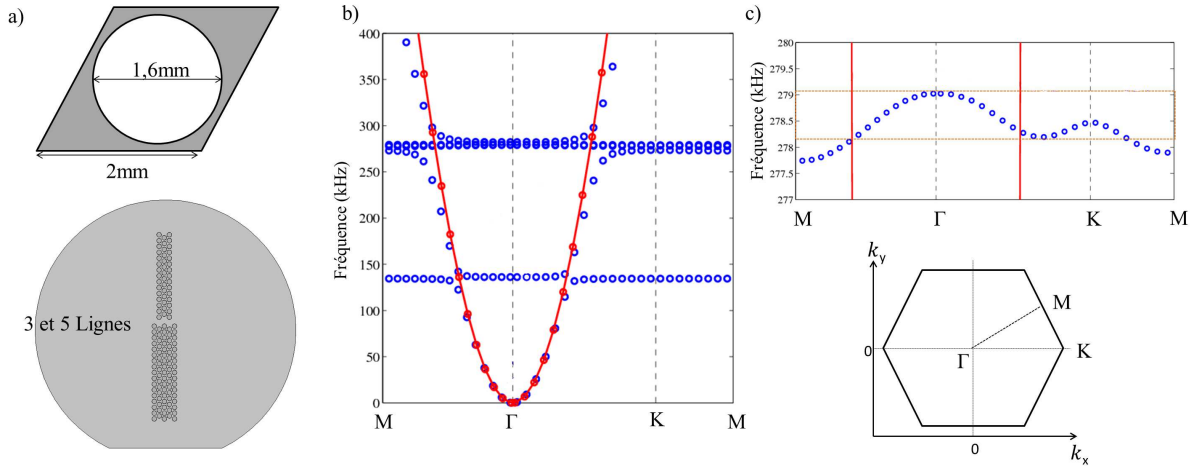


Figure 4.13 – a) Schéma de la maille élémentaire triangulaire et exemple de masque en cours de réalisation. Le masque comporte deux épaisseurs de réseau différentes. b) Courbe de dispersion du métamatériau en cercles bleus, la courbe rouge présente la relation de dispersion du mode A0 d'un wafer sans gravure. Les modes S_0 et SH ont été effacés pour la clarté de la figure. c) Agrandissement de la bande à vitesse de groupe négative. On présente également la première zone de Brillouin du cristal triangulaire.

Le paramètre de maille est de 2mm pour un diamètre de trou de 1,6mm. L'épaisseur totale de la plaque représente $500\mu\text{m}$, la membrane épaisse (résonance monopolaire) fait $40\mu\text{m}$ et la membrane fine (résonance dipolaire) $19\mu\text{m}$. Le métamatériau possède un indice négatif sur une gamme de fréquence de 1kHz autour de 278,5kHz. La bande passante négative atteint une largeur de 0,36% de la fréquence centrale. Cette bande passante est importante comparée au 0,04% du système présenté dans la première étude. La figure 4.13c démontre également l'existence d'un point de fonctionnement où la dispersion du mode A0 en rouge croise la dispersion du métamatériau en bleu. Pour cette fréquence, les indices de phase des deux milieux sont exactement opposés. La condition de la lentille plate de Veselago est alors réalisée.

Plusieurs épaisseurs de réseaux sont testées, le masque de gravure est présenté en figure 4.13a. La conception du cristal fini est plus difficile à mettre en oeuvre car l'outil de simulation FDTD ne peut pas être utilisé pour ces systèmes. Les membranes en fond de trou possèdent une épaisseur très fine devant les autres dimensions incluses dans le wafer. Pour un rapport entre l'épaisseur de la membrane fine et du wafer totale de $\frac{1}{25}$, le temps de calcul d'une simulation équivalente est multiplié par 25^4 soit 390625.

Fabrication des échantillons

La gravure des trous borgnes va être réalisée sur deux wafers SOI différents, puis les deux réseaux de trous borgnes seront scellés gravure contre gravure formant ainsi le réseau de trous aveugles.

Les épaisseurs des membranes : $40\mu\text{m}$ et $19\mu\text{m}$ ont été choisies car disponibles chez le fournisseur *UltraSil*. Les spécifications des deux lots utilisés sont les suivantes : $500/0.5/40\mu\text{m}$ et $670/1/19\mu\text{m}$ (couche épaisse/oxyde/couche fine).

La première étape consiste à affiner les wafers par polissage afin d'obtenir une épaisseur totale de $250\mu\text{m}$. Une fois cette étape réalisée nous possédons deux wafer ayant les dimensions suivantes : $209.5/0.5/40\mu\text{m}$ et $230/1/19\mu\text{m}$ (couche épaisse/oxyde/couche fine). La gravure du motif présenté dans la figure 4.13 est réalisée sur la couche épaisse des wafers.

L'étape suivante consiste à déposer une couche de résine par spin-coat. Cette couche résine est lithographiée par insolation UV à travers le masque de gravure. La gravure plasma (procédé Bosch) est réalisée jusqu'à atteindre la couche d'oxyde. Les échantillons gravés sont nettoyés afin de retirer la résine protectrice et l'oxyde en fond de trou. Il reste alors à les sceller l'un contre l'autre gravure contre gravure afin d'obtenir les échantillons souhaités. Ces échantillons sont en cours de fabrication à Besançon. La validation expérimentale de la présence d'un indice négatif sera réalisée très prochainement.

4.5 Conclusion et perspectives

Ce chapitre nous permet d'introduire le concept des métamatériaux. Nous avons vu comment certaines résonances locales peuvent être exploitées afin d'obtenir un paramètre effectif négatif pour le milieu macroscopique. Ce phénomène est lié aux interférences de Fano que l'on retrouve pour de nombreux systèmes électromagnétiques, acoustiques ou élastiques.

La deuxième partie du chapitre présente les résonances nécessaires à l'obtention d'un indice négatif pour les ondes de flexion dans les plaques fines. Nous avons introduit le trou borgne comme résonateur efficace pour les ondes de flexion. Les résonances de la membrane en fond de trou permettent d'obtenir numériquement une relation de dispersion caractéristique de la présence d'un indice négatif.

La dernière partie du chapitre est consacrée aux aspects expérimentaux. L'utilisation de wafers SOI nous permet un gain de précision important dans la fabrication des trous borgnes. Les détails de la fabrication et les prochaines expériences sont également décrites.

La validation expérimentale nous permettra d'observer la focalisation des ondes de flexion par une lentille plate à indice négatif. Le comportement temporel de cette lentille pourra également être étudié dans de prochaines expériences.

Chapitre 5

Localisation des ondes de flexion dans les milieux localement résonants désordonnés

Table des matières

5.1	Introduction	98
5.1.1	Diffusion élastique résonante	99
5.1.2	Réduction de la densité d'état	100
5.2	Étude expérimentale	101
5.2.1	Fabrication des échantillons	101
5.2.2	Résultats expérimentaux	101
5.3	Étude numérique	105
5.3.1	Démarche logique	105
5.3.2	Premiers résultats	106
5.4	Localisation par couplage champ proche	109
5.5	Influence de la distance d'exclusion	111
	Formation de pseudos bandes interdites	112
5.6	Conclusion et perspectives	114

5.1 Introduction

Ce chapitre traite des propriétés de diffusion multiple des ondes dans les milieux localement résonants désordonnés. Le désordre peut être introduit sur plusieurs paramètres du milieu, nous traiterons le cas du désordre spatial où le milieu est formé d'une assemblée de résonateurs identiques placés aléatoirement. Nous allons voir que l'on peut distinguer plusieurs régimes de propagation ou de transport en fonction de la densité de diffuseurs introduits.

Lorsque cette densité est faible, le transport est balistique. Les processus de diffusion sont rares et la collimation d'un faisceau traversant le milieu reste bonne. Si l'on parvient à augmenter la densité de diffuseurs, le transport devient diffusif. L'onde subit de nombreuses collisions qui vont lui faire explorer un domaine spatial important de façon chaotique. La propagation de l'onde peut être vue comme un processus de diffusion et peut être modélisée par une marche aléatoire. Pour des densités très importantes de diffuseurs, on peut observer un ralentissement et un arrêt du processus de diffusion. L'onde est piégée dans un domaine spatial fini du système, on parle alors de régime localisé ou localisation d'Anderson. Cette localisation est l'expression du caractère ondulatoire de la propagation. La localisation est due aux multiples interférences entre les différents chemins de diffusion.

Ce phénomène est étudié théoriquement pour la première fois par Philip Warren Anderson [88] afin d'expliquer la transition métal-isolant par la localisation des fonctions d'ondes électroniques. La démonstration expérimentale de la localisation des électrons demeure complexe car elle nécessite la suppression des effets parasites tels que les interactions phonon-électron ou électron-électron. Il faudra attendre quelques années afin d'envisager la localisation des ondes classiques comme les ondes acoustiques ou électromagnétiques.

Les travaux de P.W. Anderson [89] et de Sajeew John [90] abordent la localisation des photons et posent les bases de plusieurs décennies de travaux expérimentaux et théoriques. La localisation des ondes élastiques [91, 92, 84, 93], des ondes élastiques dans les milieux granulaires [94] et des micro-ondes [95, 96] ont été observées récemment. La localisation de la lumière a été observée dans des guides d'ondes désordonnés [97, 98]. L'observation de la localisation de la lumière est plus délicate pour les milieux à trois dimensions [99, 100, 101]. Contrairement aux milieux 1D et 2D, on ne peut plus observer directement les modes localisés car ils sont enfouis dans la matrice diffusante. Il est alors nécessaire d'interpréter les effets de la localisation par des grandeurs

statistiques mesurées depuis l'extérieur des milieux. Ces interprétations sont complexes car les phénomènes d'absorption ou de génération d'harmonique non linéaire affectent également ces grandeurs [102, 103].

5.1.1 Diffusion élastique résonante

Afin d'étudier l'effet du désordre sur la propagation d'une onde, il est nécessaire de quantifier la force du désordre. Le paramètre communément utilisé afin d'évaluer un milieu diffusant se nomme le libre parcours moyen élastique l_e . On peut interpréter cette grandeur comme la distance parcourue entre deux événements de diffusion successifs. La définition du libre parcours moyen dans les milieux dilués fait intervenir la densité volumique de diffuseur N et la section efficace de diffusion d'un diffuseur σ_{scat} .

$$l_e = \frac{1}{N\sigma_{scat}} \quad (5.1)$$

Pour un système de taille caractéristique L , on peut alors définir les différents régimes présentés dans la partie précédente. Les régimes balistique puis diffusif sont obtenus quand le libre parcours moyen devient plus petit que la taille du système. Lorsque le libre parcours moyen diminue fortement et devient comparable à la longueur d'onde, on peut atteindre le régime de localisation d'Anderson.



Figure 5.1 – Représentation des lieux des différents régimes de propagation en fonction du libre parcours moyen du milieu l_e , λ la longueur d'onde et L la taille du système.

L'augmentation de la densité de diffuseurs ne permet pas toujours d'atteindre le régime de localisation où l_e est comparable à la longueur d'onde. Une grande partie des travaux réalisés visant à observer la localisation des ondes classiques utilisent des diffuseurs résonants. Ces diffuseurs présentent une augmentation importante de leur section efficace de diffusion σ_{scat} lorsque l'on s'approche des résonances. On observe alors que le libre parcours moyen élastique diminue fortement si la fréquence de l'onde est proche des fréquences de résonance.

Pour un système à deux dimensions, on peut définir la longueur de localisation ξ_{loc} .

$$\xi_{loc} = l_e e^{\frac{\pi k}{2} l_e} \quad (5.2)$$

L'observation de la localisation est possible quand $\xi_{loc} \ll L$. Cette condition peut être atteinte proche des résonances quand l_e est faible.

Ce chapitre concerne la diffusion multiple des ondes de flexion au sein d'un arrangement désordonné de trous borgnes gravés dans un wafer de Silicium. Au cours du chapitre précédent, nous avons vu que le trou borgne possède des résonances importantes. Nous allons exploiter ces résonances afin d'observer la localisation des ondes de flexion pour des fréquences proches des résonances du trou borgne.

5.1.2 Réduction de la densité d'état

Une autre approche, développée dans les travaux de John Edwards et David Thouless, consiste à observer les propriétés spectrales des modes propres afin d'en déduire les propriétés de localisation [104]. Dans le cas d'un système fini, la distribution des modes est discrète, seuls certains vecteurs d'onde peuvent interférer constructivement dans la cavité. La description du phénomène de localisation est réalisée pour un milieu possédant une frontière perméable. Lorsqu'un mode propre est situé proche du bord du système, il présente des pertes importantes car l'énergie peut fuir à travers la frontière. Ces pertes se traduisent par un élargissement $\delta\omega$ du spectre du mode. À l'inverse les modes localisés dans le système ne sont plus sensibles aux bords ouverts, ils possèdent donc une largeur spectrale $\delta\omega$ fine. Ces considérations mènent au critère de Thouless : les modes d'un système sont localisés si la largeur $\delta\omega$ des modes est plus petite que leur espacement en fréquence $\Delta\omega$. La figure 5.2 propose une représentation graphique des deux cas de figure.

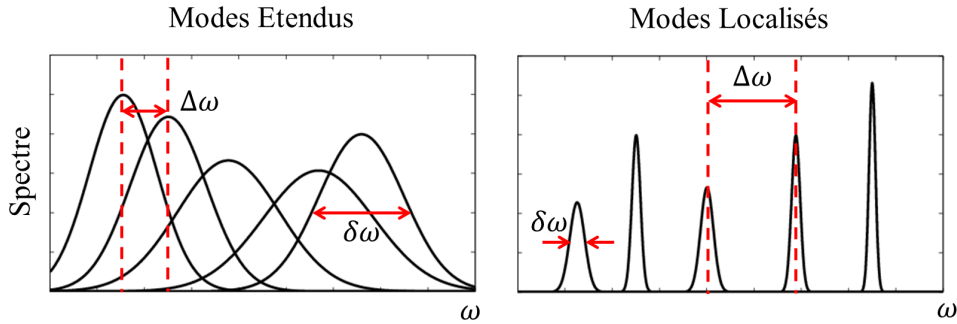


Figure 5.2 – Représentation graphique du critère de Thouless.

La grandeur $\Delta\omega$ est reliée à la densité d'états par la formule suivante

$$DOS = \frac{1}{\Delta\omega L^2} \quad (5.3)$$

On remarque alors qu'une baisse de la densité d'états permet d'augmenter l'écart entre les modes $\Delta\omega$. Le critère de Thouless est alors satisfait plus facilement.

L'utilisation d'un milieu dont la densité d'états est réduite est proposée par S. John dans ces travaux de 1987 [105]. La bande interdite de Bragg d'un cristal périodique correspondant à une densité d'états nulle. En présence de désordre la condition d'interférence destructive nécessaire à l'obtention d'une bande interdite parfaite n'est plus réalisée. En revanche, il démontre que la

densité d'états présente toujours une forte baisse dans cette gamme de fréquence. Les modes localisés sont alors situés proche de cette diminution de la densité d'états. De plus, il est maintenant démontré que la longueur de localisation est d'autant plus courte que la densité d'états est réduite [106]. La corrélation du désordre dans les structures photoniques désordonnées permet de faire varier cette chute de la densité d'états et de contrôler ainsi la longueur de localisation du milieu [107].

Nous avons vu dans le chapitre précédent que l'utilisation d'un arrangement périodique de trous borgnes permet l'apparition de bandes interdites liées à l'hybridation des résonances. Nous allons voir au cours de ce chapitre comment se comporte la densité d'états de cet arrangement en présence de désordre. Nous verrons que l'étude des métamatériaux réalisée dans le chapitre précédent permet d'analyser les propriétés de localisation des arrangements désordonnés de trous borgnes.

5.2 Étude expérimentale

5.2.1 Fabrication des échantillons

La procédure de fabrication des échantillons est identique à celle présentée dans le chapitre précédent. Les trous borgnes sont gravés dans un wafer SOI (silicon on insulator) afin d'obtenir une bonne précision sur les épaisseurs des membranes en fond de trou. L'échantillon a été réalisé par Etienne Herth au laboratoire FemtoST à Besançon. Le wafer SOI utilisé possède les dimensions suivantes : $560\mu\text{m}$ d'épaisseur totale et $30\mu\text{m}$ d'épaisseur en fond de trou. La figure 5.3 présente une photographie du wafer après la gravure. Les trous font 1mm de diamètre, la distance d'exclusion entre trous est fixée à $100\mu\text{m}$. Le diamètre total du wafer est de 4" soit 10cm environ.

L'excitation ponctuelle est réalisée au centre du wafer par un transducteur piézoélectrique surmonté d'une pointe de silice ou par effet thermoélastique à l'aide d'un laser pulsé nanoseconde. La mesure du déplacement normal au cours du temps est réalisée point par point par interférométrie optique hétérodyne. L'excitation étant très courte dans le temps, on obtient la réponse impulsionnelle du système sur une bande de fréquence de 20kHz à 1MHz .

5.2.2 Résultats expérimentaux

La figure 5.4 présente les résultats expérimentaux obtenus avec une excitation par transducteur piézoélectrique. L'échantillonnage spatial de la mesure est de $150\mu\text{m}$, le diamètre de la carte mesurée est de 40.5mm soit un peu moins de la moitié de celui du système total. Lorsque l'on s'approche des résonances des trous borgnes le déplacement vertical de la membrane en fond de trou est important par rapport à celui observé en dehors des trous. On représente alors le

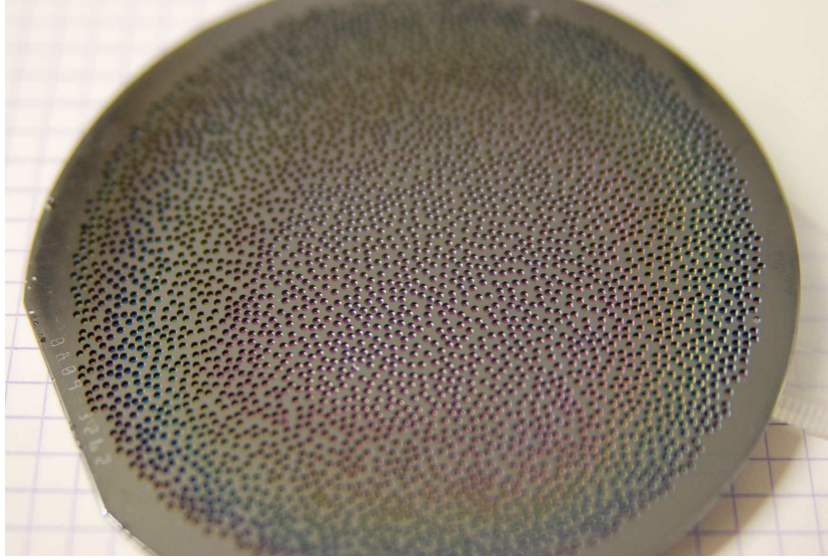


Figure 5.3 – Photographie du wafer contenant l'arrangement désordonné de trous borgnes, distance d'exclusion de $100\mu\text{m}$, diamètre des trous 1mm .

déplacement vertical selon trois échelles de magnitudes différentes : déplacement normalisé par le maximum de déplacement, déplacement normalisé par le maximum de déplacement en dehors des trous, et norme du déplacement en masquant le signal dans les trous.

Une transformée de Fourier est effectuée en chaque point de la carte afin d'obtenir la réponse du système pour chaque fréquence. On représente dans le pied de la figure 5.4, le spectre moyenné sur la carte ainsi que l'Inverse Participation Ratio (IPR) associé au déplacement vertical. Cette fonction IPR nous permet de mesurer quantitativement l'étalement spatial de l'information grâce à la formule suivante 5.4 où w représente le déplacement vertical en chaque point.

$$IPR(\omega) = \frac{\sum_{x,y} |w(\omega, x, y)|^2}{[\sum_{x,y} |w(\omega, x, y)|]^2} \quad (5.4)$$

La fonction IPR prend une valeur maximale de 1 lorsque le déplacement est concentré sur un seul pixel de la carte. À l'inverse, il prend une valeur $\frac{1}{N^2}$ quand l'information est uniformément répartie sur tous les pixels de la carte $N \times N$.

Les pics du spectre à basse fréquence (0-400kHz) sont associés à une faible valeur de l'IPR. Les réponses observées sont étendues sur la zone mesurée. La première carte présentée à $f=350\text{kHz}$ (cercle violet) nous montre que l'amplitude de déplacement dans les trous est proche de celle dans la plaque. La fréquence est éloignée de la première résonance des trous borgnes.

Les premières résonances liées aux trous borgnes apparaissent à partir de 400kHz. Elles correspondent aux fluctuations de l'IPR à partir de 400kHz. On observe un pic important dans la fonction IPR autour de 480kHz. Les réponses à $f=482\text{kHz}$ (triangle vert) et $f=486\text{kHz}$ (carré bleu) sont présentées dans la figure 5.4. On observe une localisation du déplacement vertical proche du point source (au centre de la carte). Le déplacement normalisé nous montre qu'un

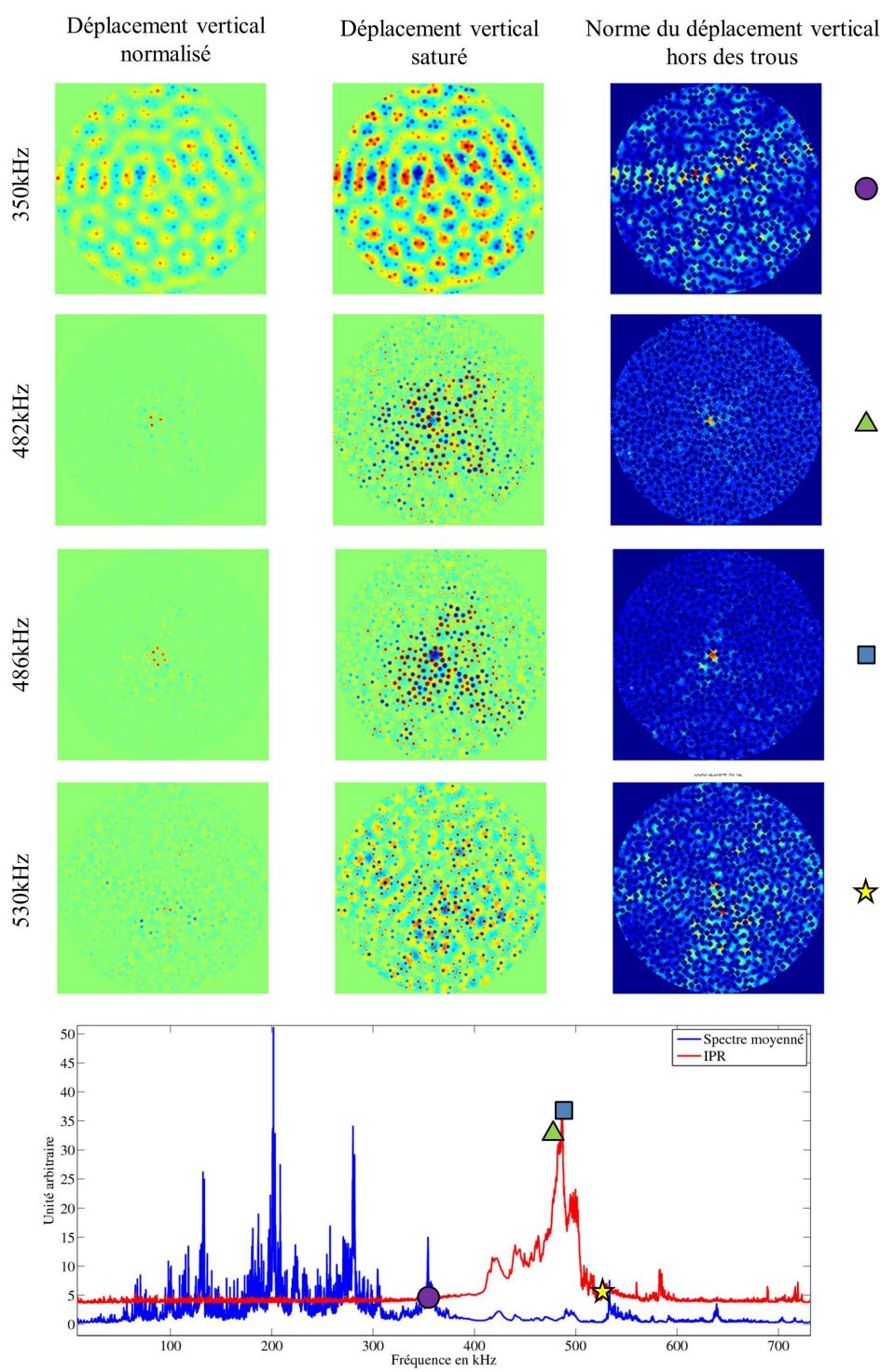


Figure 5.4 – Représentation des résultats expérimentaux pour 4 fréquences différentes. La colonne de gauche présente le déplacement vertical normalisé par le maximum de déplacement, la colonne centrale présente la carte normalisée par le déplacement maximal entre les trous (saturation du champ dans les trous), la colonne de droite présente la norme du déplacement entre les trous (un masque permet de dissimuler le champ de déplacement dans les trous). Deux réponses sont étendues avant et après résonance : 350kHz et 530kHz et deux réponses sont localisées : 482kHz et 486kHz. Le pied de la figure présente le spectre moyenné sur la carte et l'IPR calculé pour chaque fréquence.

faible nombre de trous présentent un déplacement vertical important. On remarque également une localisation efficace du champ de déplacement entre les trous.

La dernière carte à $f=530\text{kHz}$ (étoile jaune) présente une distribution étendue du déplacement vertical entre les résonateurs. Comme on a pu le voir dans l'introduction, la localisation est envisageable dans la gamme de fréquence où les résonateurs présentent une section efficace de diffusion importante. Cette gamme de fréquence est observable sur la courbe d'IPR présentée sur la figure 5.4. Elle correspond à la hausse de l'IPR entre 410kHz et 510kHz. On remarque que l'IPR chute rapidement après l'apparition des réponses localisées. On retrouve alors des réponses étendues spatialement.

La colonne centrale de la figure 5.4 nous permet de comparer la phase du déplacement dans les trous borgnes par rapport à la phase du déplacement à l'extérieur des trous. Dans la carte à $f=350\text{kHz}$ on observe que le déplacement des membranes en fond de trou et de la plaque extérieur sont en phase. On peut alors affirmer que l'on se situe avant la résonance monopolaire du trou borgne. En revanche, les deux réponses localisées à $f=482\text{kHz}$ et $f=486\text{kHz}$ ainsi que la réponse étendue à $f=530\text{kHz}$ se situent après cette résonance. Pour ces trois cas, on peut observer que la vibration des membranes des trous proches du point source est en opposition de phase avec le déplacement dans la plaque épaisse. Pour la réponse à $f=530\text{kHz}$, chacune des membranes est en opposition de phase avec le champ de déplacement dans la plaque.

Cette opposition de phase entre la réponse du résonateur et le champ incident est caractéristique des bandes interdites d'hybridation des métamatériaux présentés dans le chapitre précédent. Lorsque l'on cherche à exciter un résonateur au dessus de sa fréquence de résonance, sa réponse est en opposition de phase. Les interférences entre l'onde incidente et le champ rayonné par le résonateur vont être destructives. Ce phénomène d'interférence appelé interférence de Fano permet d'expliquer l'apparition de bandes interdites d'hybridation situées juste au-dessus de la fréquence de résonance du résonateur.

À cette bande interdite d'hybridation est associée une densité d'état nulle. Lorsque l'on va introduire un désordre dans le positionnement des trous borgnes, certains modes vont peupler cette bande interdite. La densité d'état ne prend plus une valeur nulle mais reste très faible. On peut utiliser le formalisme de S. John, en qualifiant cette configuration de pseudo bandes interdites d'hybridation.

Dans cette pseudo bande interdite, la densité d'état faible peut être reliée à un écart $\Delta\omega$ important entre les fréquences des différents modes propres.

$$DOS = \frac{1}{\Delta\omega L^2} \quad (5.5)$$

On conçoit alors que le critère de Thouless $\frac{\delta\omega}{\Delta\omega} < 1$ est plus facilement vérifié dans cette pseudo bande interdite d'hybridation.

Cette comparaison nous permet d'expliquer le décalage entre la fréquence des modes localisés et la fréquence de résonance du résonateur seul. Ce décalage en fréquence a été observé dans plusieurs travaux utilisant des diffuseurs résonants afin d'observer la localisation d'Anderson [96]. L'étude des métamatériaux permet d'apporter de nouveaux outils pour l'étude des milieux localement résonants désordonnés. On a vu que la bande interdite d'hybridation apparaît au dessus de f_0 la fréquence de résonance. La pseudo bande interdite obtenue dans un arrangement désordonné est toujours présente au dessus de f_0 .

Ces premiers résultats expérimentaux nous permettent de démontrer la localisation d'Anderson des ondes de flexion par un arrangement désordonné de trous borgnes. Les prochains travaux concerneront l'influence de la distance d'exclusion entre trous borgnes. Nous envisageons également de faire varier les propriétés des wafers SOI utilisés pour la gravure afin de modifier les fréquences de résonances des trous borgnes. Une étude dynamique du phénomène de localisation est également prévue.

5.3 Étude numérique

5.3.1 Démarche logique

Les différents résultats numériques présentés dans cette section sont obtenus par résolution du problème aux valeurs propres par le logiciel d'éléments finis Comsol (version 3.5). L'utilisation d'un modèle 3D élastique sur des échantillons de cette taille nécessite des ressources informatiques beaucoup trop importantes. Le modèle de Mindlin est un modèle à deux dimensions d'une plaque fine où l'épaisseur est utilisée comme un paramètre. Ce modèle nous permet de réaliser le calcul des modes propres d'une plaque contenant un ensemble désordonné comprenant jusqu'à 300 trous borgnes.

La génération des positions aléatoires est également un aspect important des travaux entrepris. Notre démarche consiste à générer un désordre dit homogène. La figure 5.5 présente plusieurs cartes désordonnées générées. Bien que les positions soient aléatoires, on remarque que la carte 5.5a présente une régularité importante dans l'espacement entre les trous. On parle de désordre homogène. Cette régularité est obtenue en imposant une distance d'exclusion entre plus proches voisins. À l'inverse la carte 5.5b présente une densité de trou qui varie en fonction de la position dans la carte. Cette carte est générée en fixant la fraction surfacique de trou borgne et en imposant une distance d'exclusion très faible.

Les modes propres associés à ces deux cartes vont nécessairement se comporter différemment [107]. Le but fixé à travers la carte 5.5a est de ne pas trop élargir la distribution des distances entre les plus proches voisins afin de ne pas faire varier trop de paramètres simultanément.

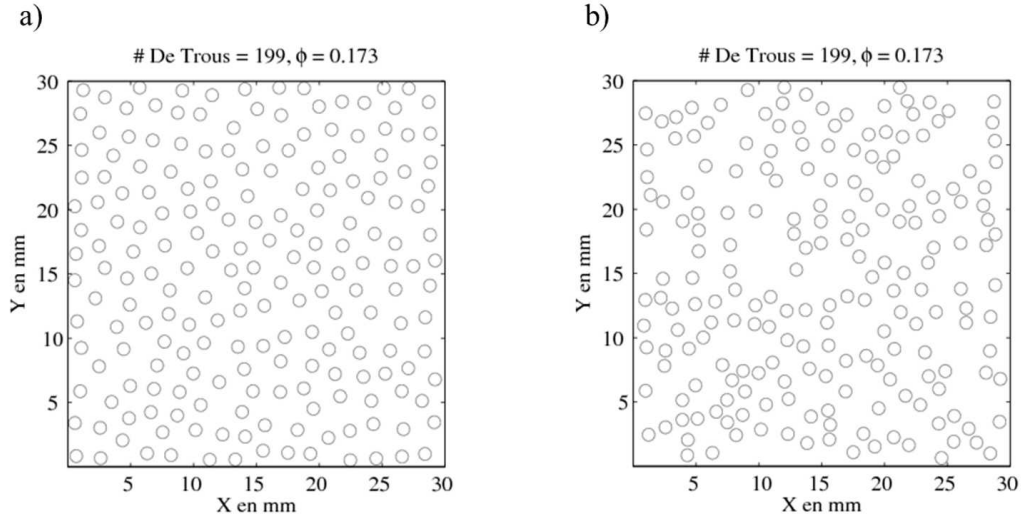


Figure 5.5 – a) Carte des trous dans le cas d'un désordre homogène, la distance d'exclusion est fixée à $750\mu\text{m}$. Les trous sont placés jusqu'à converger vers la fraction surfacique Φ maximale. b) Carte obtenue dans le cas d'un désordre hétérogène. La distance d'exclusion est de $100\mu\text{m}$, on stoppe le placement des trous lorsque la fraction surfacique atteint celle du film de gauche. Dans les deux cartes, les trous mesurent 1mm de diamètre.

5.3.2 Premiers résultats

Les arrangements désordonnés de trous borgnes sont étudiés numériquement dans un wafer de silicium à bords rigides dont l'épaisseur totale est de $560\mu\text{m}$. L'épaisseur des membranes en fond de trou est de $30\mu\text{m}$ et le diamètre des trous est de 1mm . Pour les paramètres ci-dessus, la première résonance des membranes en fond de trou se situe à $f_0 = 565\text{kHz}$. On calcule un nombre de modes important (150 à 250 par configuration) autour de cette fréquence de résonance.

La figure 5.6 présente la fréquence des modes propres calculés autour de la première résonance des trous borgnes dans le cas d'un arrangement périodique (cercle violet) et d'un arrangement aléatoire (triangle vert) avec $100\mu\text{m}$ d'exclusion entre les trous. La conservation de la bande interdite d'hybridation est assurée malgré l'introduction du désordre de position. On observe cependant une réduction de la largeur de la bande interdite obtenue pour l'arrangement désordonné. Cette modification de la bande interdite est due au fait que la longueur d'onde à résonance est comparable à la taille du résonateur. Notre système présente les longueurs caractéristiques suivantes : $\lambda_0 = 4\text{mm}$ à 560kHz pour un diamètre $d = 1\text{mm}$. Pour les deux arrangements présentés, on ne peut pas traiter le milieu comme un milieu homogène. Le désordre perturbe alors la largeur de la bande interdite d'hybridation.

La figure 5.7 présentent les cartes de champ de déplacement vertical de certains modes propres calculés sur la distribution désordonnée. Nous utiliserons une procédure identique pour la représentation du déplacement vertical dans les trous et entre les trous. Comme pour l'analyse des données expérimentales, l'IPR de chacun des modes propres calculés est représenté en bas de la figure. La courbe verte présente l'IPR des modes propres de la structure désordonnée. La courbe

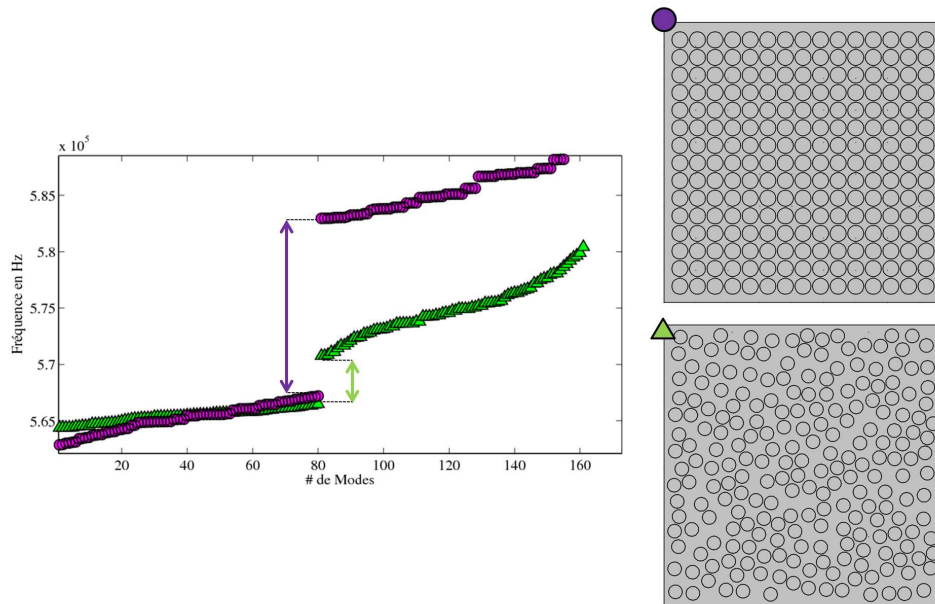


Figure 5.6 – Représentation des modes calculés autour de la première fréquence de résonance dans le cas d'un arrangement périodique et d'un arrangement aléatoire. La distance d'exclusion entre trous est fixée à $100\mu\text{m}$. Les doubles flèches représentent la largeur des bandes interdites obtenues pour les deux configurations.

en violet présente l'IPR des modes propres de la structure périodique. La figure 5.7 présente deux modes propres situés avant la résonance monopolaire et deux modes propres situés après cette résonance. Comme dans le cas des données expérimentales, l'opposition de phase entre le déplacement dans le trou et le déplacement dans la plaque permet d'identifier la position d'un mode propre vis à vis de la résonance monopolaire. Les déplacements sont en phase lorsque le mode est situé avant la résonance (cercle et triangle). Lorsque l'on dépasse cette résonance, la plaque extérieure et la membrane du trou sont en opposition de phase (carré et étoile).

La figure 5.7 présente deux modes propres étendus avant et après résonance (cercle $f=563\text{kHz}$ et étoile $f=579\text{kHz}$). Ces modes propres sont logiquement associés à une valeur faible de l'IPR. La figure 5.7 présente également deux modes propres où le déplacement vertical est localisé (triangle $f=566\text{kHz}$ et carré $f=571\text{kHz}$). On remarque une longueur de localisation plus courte dans le cas du mode propre $f=571\text{kHz}$ situé après la résonance. Cette observation est appuyée par la forte hausse de l'IPR dans cette gamme de fréquence de 570kHz à 576kHz . Lorsque l'on s'éloigne trop de cette gamme, les modes reprennent une extension spatiale importante et un IPR faible comme le montre le mode propre à $f=579\text{kHz}$. Le mode propre localisé après résonance présente une allure proche des modes observés expérimentalement. En revanche, le mode propre localisé avant résonance à $f=566\text{kHz}$ est uniquement présent dans l'étude numérique. Il possède une allure différente du mode localisé après résonance. On remarque notamment une oscillation spatiale rapide du champ de déplacement à l'extérieur des résonateurs. Cette oscillation spatiale est forcée par la présence des résonateurs et ne correspond pas à la longueur d'onde dans la plaque extérieure que l'on peut apprécier sur le mode localisé à $f=571\text{kHz}$. La prochaine section

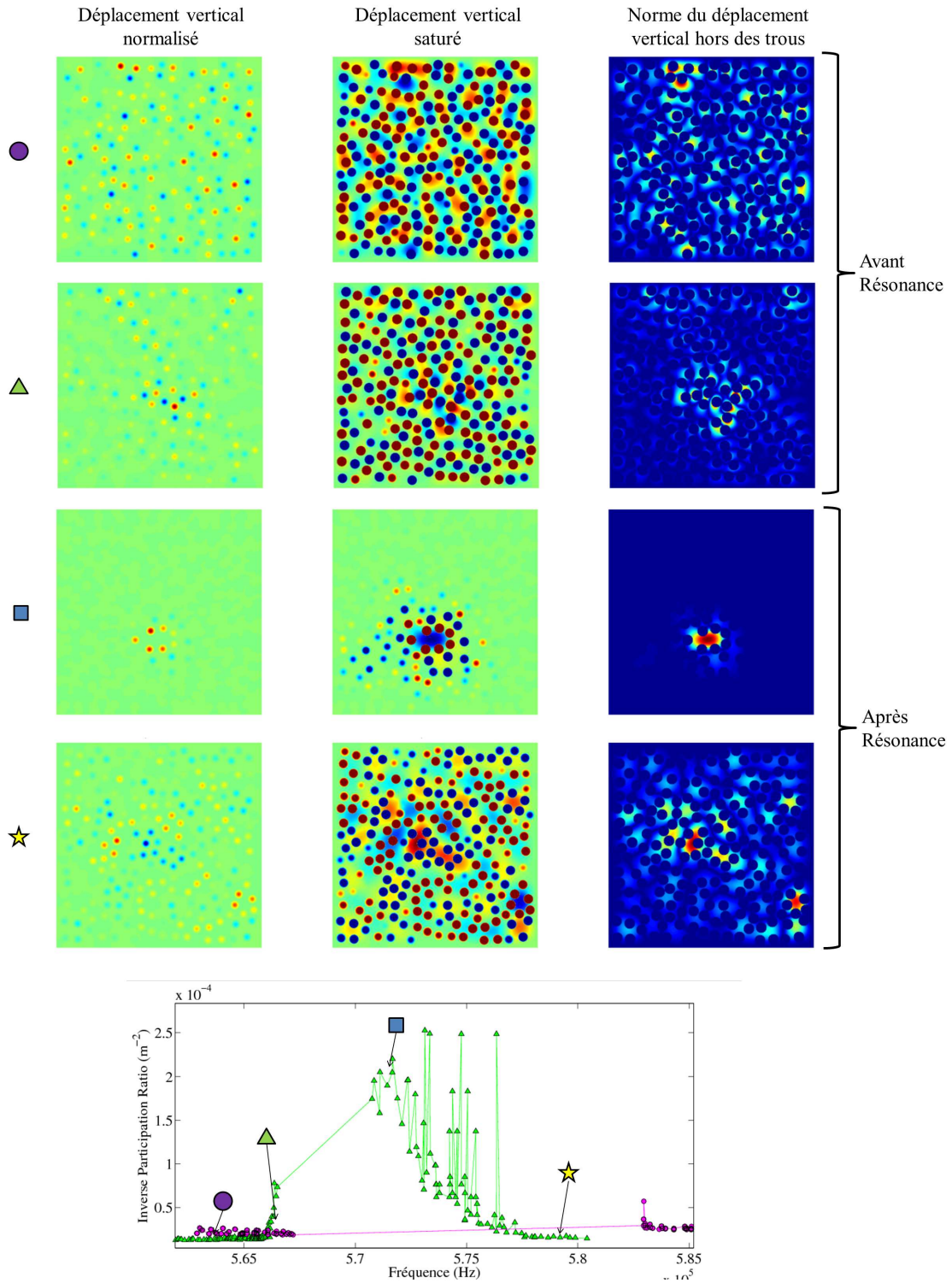


Figure 5.7 – Représentation de 4 modes propres calculés, chaque ligne présente un mode propre selon trois échelles : la colonne de gauche présente le déplacement vertical normalisé par le maximum de déplacement, la colonne centrale présente la carte normalisée par le déplacement maximal entre les trous, la colonne de droite présente la norme du déplacement entre les trous. Le bas de la figure représente l'IPR de la norme du déplacement entre les trous dans le cas d'une répartition aléatoire (triangle vert) et d'une répartition périodique (cercle rose). Les 4 symboles indiquent les fréquences des modes représentés au dessus.

concerne l'origine de ce mode propre localisé particulier.

5.4 Localisation par couplage champ proche

La théorie de Fano permet d'interpréter le comportement des métamatériaux comme un couplage entre le continuum de modes d'un milieu hôte infini et la résonance discrète d'un élément résonant [73]. Cette approche est valide dans le cas où les interactions de champ proche entre résonateurs sont faibles. Plusieurs travaux abordent l'effet du désordre dans le cas d'un système où les résonateurs sont uniquement couplés par ondes évanescentes [98, 108]. On décrit le comportement de ces milieux par la théorie de liaison forte ou "tight-binding". La liaison forte représente le couplage de deux systèmes dont les niveaux d'énergie sont discrets, contrairement aux interférences de Fano qui font intervenir le continuum de modes du milieu hôte. L'étude d'une chaîne de résonateurs identiques couplés par champ proche montre l'apparition d'une bande passante autour de la fréquence de résonance. La largeur de cette bande passante est proportionnelle à la force du couplage entre les résonateurs. Ce couplage peut être gouverné par la distance entre éléments. On peut introduire un désordre sur les distances entre éléments et perturber les modes présents dans la bande passante. Cette approche est développée en 2008 par l'équipe de Yaron Silberberg qui utilise un couplage évanescent désordonné sur une centaine de guides d'onde optiques juxtaposés [98].

La partie supérieure de la figure 5.8 présente un schéma des systèmes utilisés ainsi que les mesures expérimentales réalisées dans [98]. On observe le confinement transverse d'un faisceau émis dans le plan xOz après introduction du désordre. Les courbes de la partie inférieure présentent la relation de dispersion du milieu ainsi que les différents types de modes localisés. La figure 5.8a montre la bande passante créée par le couplage entre guides d'onde. Dans le cas d'un couplage identique, les modes sont étendus sur la totalité du système. L'introduction d'un désordre dans le couplage entre guides d'ondes fait apparaître des modes localisés aux deux extrémités de la bande passante : Les modes "flat phased" (1) où les différents guides d'onde répondent en phase situés sur la partie basse de la bande passante. Les modes "staggered" (2) sur l'extrémité haute fréquence de la bande passante où la phase varie de $+\pi$ à $-\pi$ sur chaque sites voisins. Le désordre affecte peu les modes situés au centre de la bande passante(3). Nous allons voir que ce couplage champ proche peut être mis en évidence pour des trous borgnes situés suffisamment proches.

La figure 5.9 présente le couplage évanescent de deux trous borgnes pour une distance d'exclusion variable. Les trous sont placés dans une plaque rectangulaire à bords rigides pour laquelle la première fréquence de résonance est plus élevée que la première résonance des trous f_0 . On s'assure ainsi que le champ rayonné par les résonateurs est évanescent dans la cavité. Le couplage entre les trous est alors exclusivement évanescent. Le couplage des deux résonances discrètes va faire apparaître un mode liant à $f_L < f_0$ où les deux membranes vont être en phase (rectangle

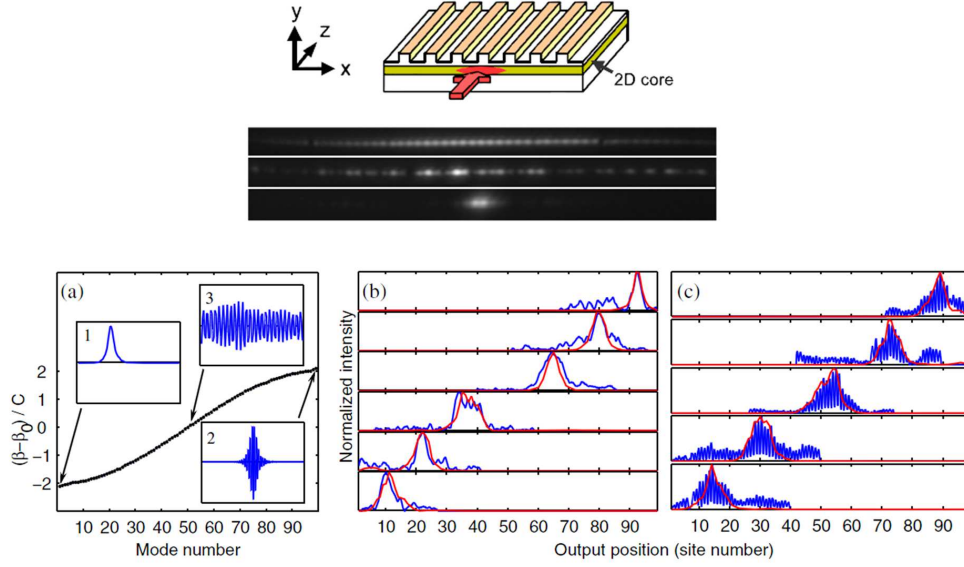


Figure 5.8 – Les figures supérieures présentent un schéma du dispositif expérimental ainsi que des exemples de mesure de propagation d'un faisceau laser collimaté. La ligne inférieure présente : a) la relation de dispersion du système b) et c) les différents modes localisés pour des fréquences situées en bords de bandes. Le couplage champ proche fait apparaître deux types de modes localisés aux deux extrémités de la bande passante : Les modes "flat phased" (1,b) sur l'extrémité basse fréquence de la bande passante. Les modes "staggered" (2,c) sur l'extrémité haute fréquence de la bande passante où la phase varie de $+\pi$ à $-\pi$ sur chaque guides voisins. Les figures b) et c) montrent que la localisation dépend de la fréquence et peu du point d'excitation. Extrait de [98].

bleu) et un mode anti-liant à $f_{AL} > f_0$ où les membranes sont en opposition de phase (rectangle rouge). La force du couplage est ensuite déterminée par l'écart entre les fréquences f_L et f_{AL} . On observe une augmentation de l'écart en fréquence des modes liants et anti-liants lorsque l'on diminue la distance d'exclusion de 2mm à 100 μ m. Ce comportement est la preuve de l'existence d'un terme de couplage champ proche dans un arrangement suffisamment dense de trous borgnes.

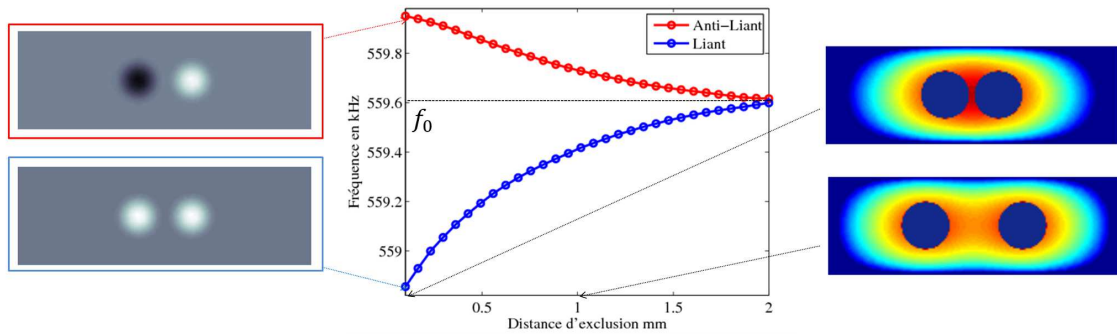


Figure 5.9 – Représentation des fréquences des modes liants et anti-liants lorsque l'on augmente la distance d'exclusion entre deux trous au sein d'une plaque ne permettant pas le couplage par un mode propagatif. Les cartes sur la droite de la figure présente le champ de déplacement évanescents entre les trous en échelle logarithmique.

Dans le cas d'un arrangement désordonné, la distance entre plus proches voisins n'est pas

constante. En conséquence, le couplage évanescents entre les résonateurs est désordonné. Cette distribution désordonnée du couplage va permettre l'apparition de modes propres localisés "anti-liants" semblables à ceux observés dans la figure 5.8c. Les modes localisés associés à ce phénomène vont être proches du bord inférieur de la bande interdite. En bords de bande interdite, la baisse de la densité d'état est moins prononcée, on va donc observer une longueur de localisation plus importante. Cette observation est confirmée par la figure 5.7. On observe que les modes localisés situés avant résonance présentent un IPR plus faible que ceux observés après résonance situés au centre de la pseudo bande interdite où la densité d'états est minimale.

5.5 Influence de la distance d'exclusion

Nous allons maintenant étudier l'effet de la distance d'exclusion entre les résonateurs sur les modes localisés après résonance. Plusieurs arrangements désordonnés ont été générés avec des distances d'exclusion variables. Nous présenterons les résultats obtenus pour cinq distances d'exclusion allant de $100\mu\text{m}$ à 1mm . Les paramètres d'épaisseurs, le matériau utilisé, et le diamètre des trous sont identiques.

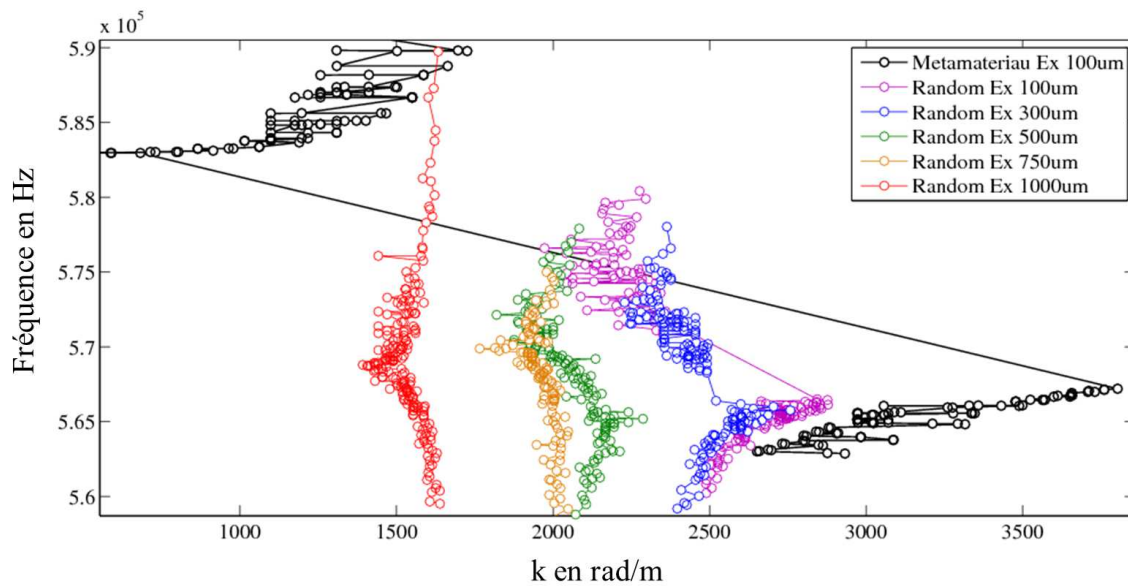


Figure 5.10 – Relation de dispersion tracée à partir de la norme du vecteur d'onde k et la fréquence des modes propres. Les différents cas sont : en noir un milieu périodique, puis en couleur les relations de dispersion des différents arrangements désordonnés où la distance d'exclusion varie.

On utilise une transformée de Fourier spatiale du champ de déplacement afin de déterminer la norme du vecteur d'onde associée à chaque mode propre. La figure 5.10 présente les différentes relations de dispersion calculées pour un système périodique et pour les systèmes désordonnés à distance d'exclusion variable. La courbe noire présente la relation de dispersion du milieu

périodique avec une distance d'exclusion de $100\mu\text{m}$ entre trous. Les courbes colorées représentent les relations de dispersion de chacun des systèmes désordonnés. Nous avons vu précédemment que l'échantillon désordonné avec une distance d'exclusion de $100\mu\text{m}$ présente toujours une bande interdite. La relation de dispersion associée à $300\mu\text{m}$ d'exclusion (en bleu) présente également une bande interdite plus fine entre 566kHz et 568kHz . À partir d'une distance d'exclusion de $500\mu\text{m}$ (en vert) les modes propres forment une bande continue et la bande interdite hybride disparaît. Malgré la perte de la bande interdite, on peut observer que le comportement d'hybridation est toujours présent. Les relations de dispersion à $500\mu\text{m}$, $750\mu\text{m}$ et 1mm d'exclusion présentent une "rétrogradation" de la courbe de dispersion caractéristique de l'hybridation des résonances et du mode A_0 de la plaque extérieure. Cette rétrogradation correspond à la diminution du vecteur propre bien que la fréquence propre des modes reste croissante. Nous allons voir comment la longueur de localisation évolue pour les différentes distances d'exclusion.

Pour chacun des arrangements désordonnés, un mode propre localisé est présenté dans la figure 5.11. Les modes propres possèdent tous une fréquence comprise entre 568kHz et 570kHz . Les échelles de couleurs utilisées sont identiques aux cartes de champ des figures précédentes. On représente le champ de déplacement normalisé par le maximum de déplacement, puis par le maximum de déplacement en dehors des trous. Les cartes sur la colonne de droite correspondent à la norme du déplacement dans le cas où les trous sont masqués. On observe une diminution du confinement des modes propres lorsque la distance d'exclusion entre les résonateurs augmente.

Formation de pseudos bandes interdites

La modification de la longueur de localisation dans les pseudos bandes interdites a été observée récemment dans des travaux concernant la localisation de la lumière dans des cristaux photoniques désordonnés [106, 107]. Ces travaux montrent que l'introduction d'un désordre spatial perturbe fortement les bandes interdites de Bragg liées à la périodicité du milieu. Malgré la disparition des bandes interdites de Bragg, ces travaux observent une baisse de la densité d'état pour des fréquences situées dans la bande interdite initialement présente. Cette gamme de fréquence est alors appelée pseudo bande interdite. Les modes présents dans cette pseudo bande interdite possèdent une longueur de localisation d'autant plus courte que la densité d'états est faible. Ces travaux confirment les prédictions théoriques réalisées par S. John en 1987 [105]. Nos travaux abordent la formation des pseudos bandes interdites et la réduction de la densité d'états à partir des bandes interdites d'hybridation.

On a vu que l'utilisation de résonateurs sub-longueur d'onde permet d'obtenir des bandes interdites d'hybridation. La perturbation de ces bandes interdites par l'introduction d'un désordre de position dépend essentiellement de la qualité sub-longueur de la résonance utilisée. Dans le cas de résonateurs extrêmement sub-longueur d'onde, le milieu est qualifié de milieu homogène. Le désordre spatial n'influence pas la position et la largeur des bandes interdites d'hybridation.

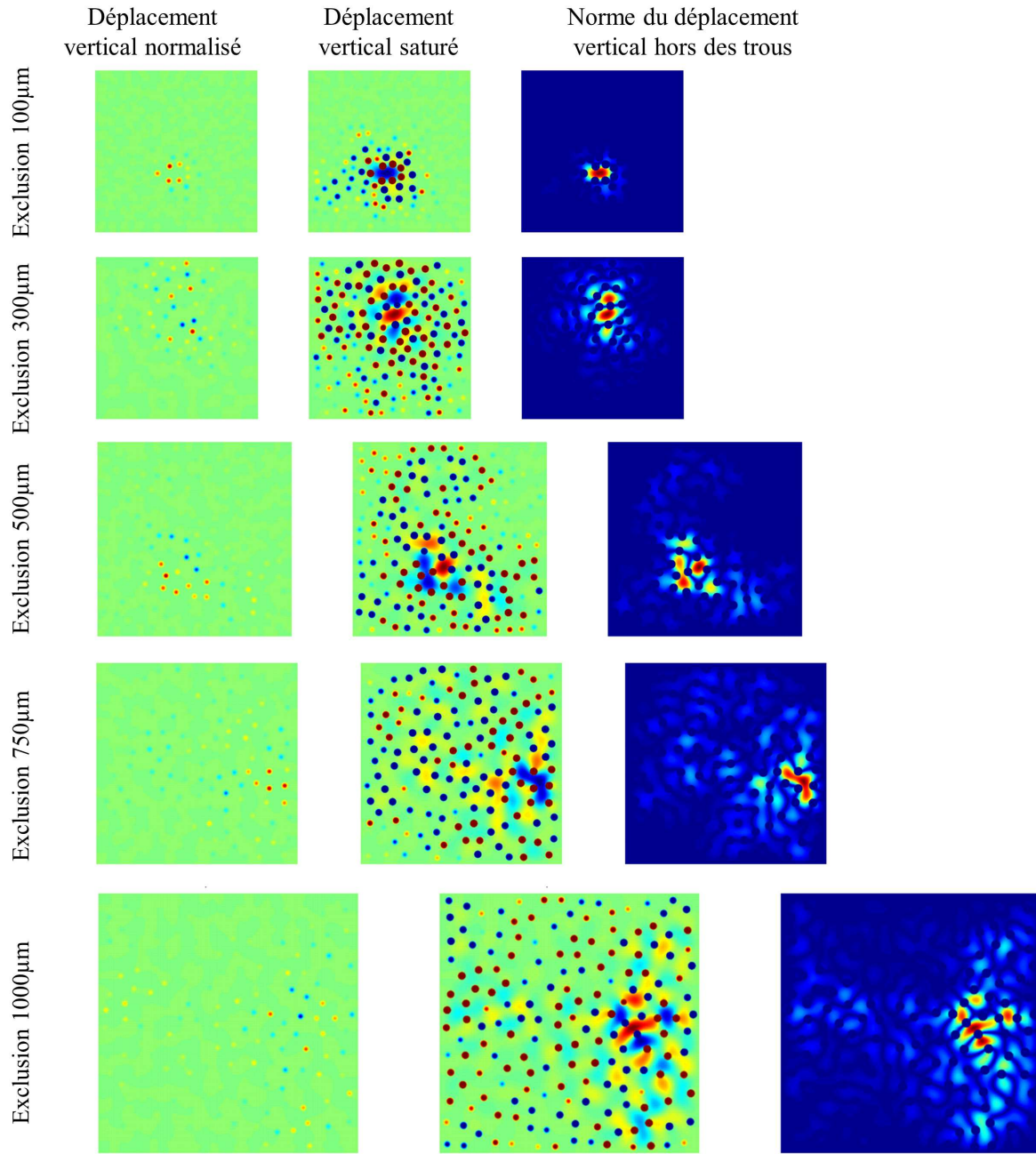


Figure 5.11 – Représentation des modes localisés pour les différentes distances d'exclusion utilisées. Les cartes sont mises à l'échelle, il est nécessaire de prendre une surface plus grande pour garder un nombre de résonateurs constant. On remarque que la longueur de localisation augmente à mesure que le système est dilué.

Notre étude aborde la localisation des ondes de flexion dans un arrangement désordonné de trous borgnes peu sub-longueur d'onde : le diamètre du trou d est de $d = \frac{\lambda}{4}$ avec λ la longueur d'onde dans la plaque à la fréquence de la résonance monopolaire des trous borgnes. Dans ce régime, la distance d'exclusion entre résonateurs permet de contrôler la densité d'états et la longueur de localisation dans le milieu.

On remarque que les longueurs de localisation sont très faibles pour les arrangements à $100\mu\text{m}$

et $300\mu\text{m}$. Nous avons vu que les relations de dispersion associées à ces deux cartes présentent toujours une bande interdite. On s'attend donc à une densité d'états faible et une longueur de localisation courte. Cette démarche est confirmée par les confinements très efficaces observés dans la figure 5.11. On remarque que le champ de déplacement est confiné par un faible nombre de résonateurs.

Pour les trois autres cartes à $500\mu\text{m}$, $750\mu\text{m}$ et 1mm de distance d'exclusion. Les bandes interdites d'hybridation disparaissent et les relations de dispersion associées sont continues. Les modes localisés se situent alors dans les pseudos bandes interdites. Ces pseudos bandes interdites sont associées à une densité d'états plus élevée que celle observée pour des distances d'exclusion plus courtes. On s'attend alors à une augmentation de la longueur de localisation des modes propres. Cette augmentation est visible dans la figure 5.11 sur les cartes présentant la norme du déplacement. On remarque désormais que le champ de déplacement explore une aire plus importante et que les modes localisés font intervenir un nombre plus important de résonateurs.

Le cas limite de cette étude correspond à une distance d'exclusion encore plus grande. On s'attend alors à ce que la densité d'états dans les pseudos bandes interdites soit identique à celle d'une plaque homogène. Les modes propres seront alors étendus spatialement sur toute la carte.

5.6 Conclusion et perspectives

Ce chapitre nous permet d'aborder les propriétés des milieux localement résonants désordonnés. La diffusion multiple des ondes de flexion par un arrangement désordonné de trous borgnes nous permet d'atteindre le régime de localisation d'Anderson autour de la fréquence de résonance monopolaire.

La première partie du chapitre concerne l'observation expérimentale de la localisation des ondes de flexion au sein d'un arrangement désordonné de trous borgnes. Cette localisation est obtenue lorsque l'on s'approche de la résonance monopolaire des trous borgnes.

Les diffuseurs résonants sont souvent utilisés par la communauté étudiant les phénomènes de localisation par le désordre. Ces résonateurs permettent de réduire fortement le libre parcours moyen de diffusion d'une onde lorsque l'on s'approche des résonances. L'étude des métamatériaux réalisée dans le chapitre précédent nous permet d'apporter une approche différente concernant la diminution de la densité d'états dans le système. L'hybridation du mode de flexion et des résonances des trous borgnes permet d'obtenir des pseudos bandes interdites où la densité d'états est très faible.

La seconde partie du chapitre aborde l'étude numérique de la localisation dans ces systèmes. Le calcul des modes propres par méthode aux éléments finis nous permet de discerner différents mécanismes menant à la localisation. Cette étude nous permet de mettre en valeur l'existence

de modes propres localisés par couplage champ proche entre les trous.

La suite de l'étude numérique concerne la modification de la longueur de localisation en fonction de la distance d'exclusion entre résonateurs. L'augmentation de la distance d'exclusion mène à une réduction de la bande interdite puis à l'apparition d'une pseudo bande interdite. Cette modification de la densité d'états entraîne une augmentation de la longueur de localisation.

Les perspectives de ces travaux consistent en la démonstration expérimentale du lien entre la longueur de localisation et la distance d'exclusion. L'observation expérimentale des modes propres localisés par couplage champ proche présente également un défi important. L'étude de la réponse du milieu autour des résonances dipolaires présente également une perspective intéressante.

L'étude de la dynamique de la localisation d'Anderson est également une perspective de ces travaux. Nous avons vu précédemment que les dispositifs expérimentaux utilisés permettent une observation temporelle de la propagation des ondes de flexion. Nous envisageons d'étudier le comportement d'un pulse court dans les régimes diffusif ou localisé.

Deuxième partie

Phénomènes ondulatoires exotiques
appliqués aux ondes de flexion

Chapitre 6

Quantum revival pour les ondes de flexion

Table des matières

6.1	Introduction	120
6.2	Choix des ondes de flexion	123
6.2.1	Conditions aux bords de la plaque	124
6.3	Étude dynamique	126
6.3.1	Fabrication des échantillons et conditions expérimentales	126
6.3.2	Excitation au centre de la plaque	128
6.3.3	Excitation au tiers de la diagonale	129
6.3.4	Excitation arbitraire	130
6.4	Calcul du temps de revival	131
6.4.1	Influence de la position de la source	133
	Interprétation spectrale	134
6.5	Études complémentaires	136
6.5.1	Influence de la fréquence centrale	136
6.5.2	Cas des membranes souples	137
6.6	Conclusions et perspectives	139

6.1 Introduction

Le phénomène de quantum revival, que l'on pourrait traduire par récurrence quantique, est un phénomène dynamique prédit et observé en mécanique quantique. Il s'agit de la reconstruction périodique d'un paquet d'onde émis dans un système fermé régulier comme un puits quantique infini où une cavité parfaite [109, 110, 111].

Un paquet d'onde est construit à partir d'une excitation ponctuelle et finie dans le temps. On peut le définir comme une somme cohérente des différents états propres du système étudié.

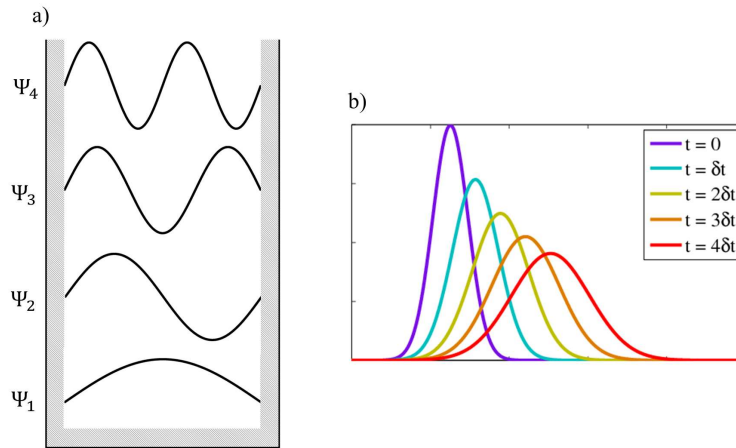


Figure 6.1 – a) Tracé des quatre premiers états propres du puits infini. b) Étalement spatial d'un paquet d'ondes au cours du temps.

La figure 6.1a représente les quatre premiers états propres Ψ_n solutions de l'équation de Schrödinger $-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi_n = E_n\Psi_n$ dans un puits infini. Ces fonctions s'écrivent sous la forme de fonction sinusoïdale $\Psi_n(x) = \sin(k_n \cdot x)$ avec $k_n = \frac{n\pi}{L}$ pour un puits infini de taille L . L'expression des niveaux d'énergie E_n donne la relation de dispersion quadratique caractéristique des fonctions d'ondes quantiques

$$E_n = \frac{\hbar^2 k_n^2}{2m} = \frac{n^2 \hbar^2 \pi^2}{2mL^2}. \quad (6.1)$$

Cette relation quadratique entraîne la dispersion des paquets d'ondes excités car la vitesse de groupe, proportionnelle à la dérivée de la relation de dispersion, n'est pas constante. La figure 6.1b présente l'étalement d'un paquet d'onde au cours du temps.

Lorsque le paquet d'onde est excité dans un puits 1D infini, on peut observer le comportement de ce paquet d'onde selon deux échelles de temps [112]. La première échelle de temps est fixée par le temps classique T_{cl} défini par la relation suivante

$$T_{cl} = \frac{2\pi\hbar}{\frac{\delta E_n}{\delta n}}. \quad (6.2)$$

Ce temps classique est relié à la vitesse de groupe du paquet d'onde, il correspond au mouvement d'aller et retour du paquet d'onde dans le puits. La deuxième échelle caractéristique est fixée par le temps de revival T_{rev} défini par la relation suivante

$$T_{rev} = \frac{4\pi\hbar}{\frac{\delta^2 E_n}{\delta n^2}}. \quad (6.3)$$

Ce temps de revival est relié à la qualité dispersive du milieu. La figure 6.2 présente les résultats numériques de l'évolution temporelle d'un paquet d'onde sur une orbite circulaire [113]. On représente le carré de la corrélation de l'amplitude initiale du paquet d'onde et de l'amplitude au temps t . On représente également la distribution spatiale du paquet d'onde sur son orbite circulaire aux temps indiqués. Le paquet d'onde excité initialement est un paquet d'onde gaussien centré autour du niveau n_0 d'énergie E_{n_0} .

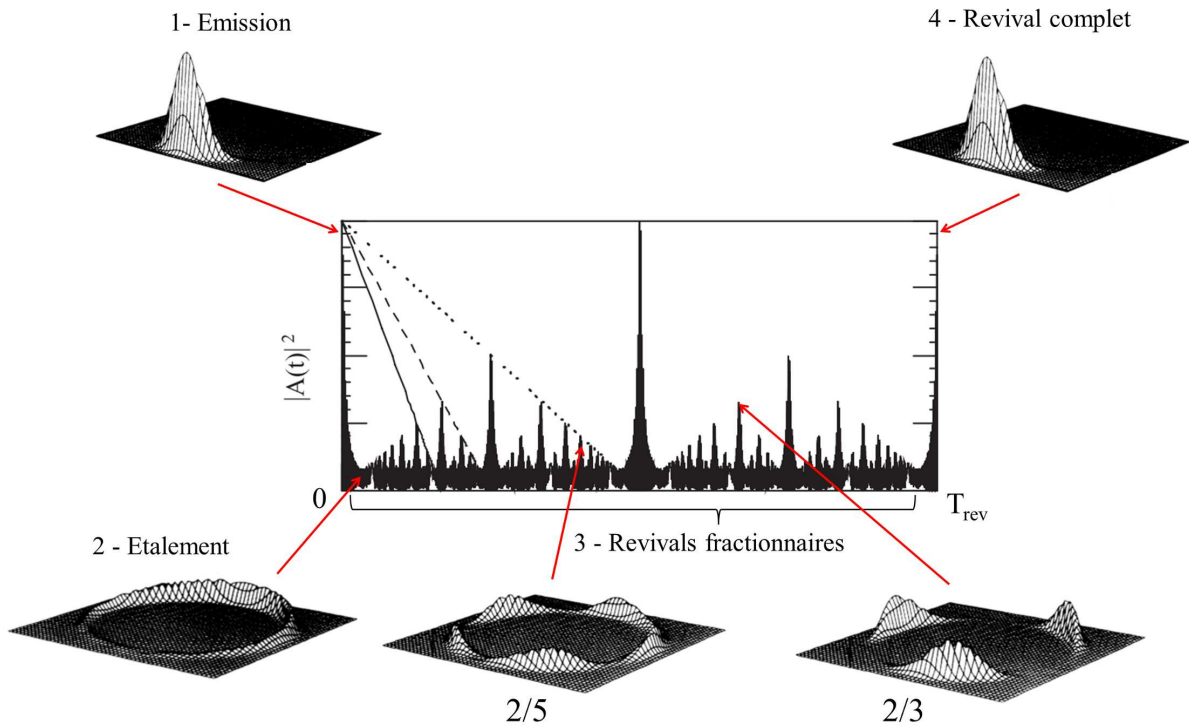


Figure 6.2 – La courbe au centre de la figure représente la corrélation au carré de l'amplitude paquet d'onde initiale et de l'amplitude au temps t . Extrait de [112]. On représente la distribution spatiale du paquet d'onde sur son orbite circulaire aux temps indiqués par les flèches rouges. Extrait de [113]

On remarque que cette fonction de corrélation présente une forte modulation. Les valeurs élevées

indiquent que la distribution spatiale du paquet d'onde est proche de sa distribution initiale. Cet effet de reconstruction partielle puis totale du paquet d'onde initial est la définition du quantum revival.

L'évolution temporelle du paquet d'onde peut être décrite par le scénario suivant :

1 - Émission du paquet d'onde sur l'orbite 1D.

2 - La dynamique aux temps courts est fixé par le temps classique T_{cl} . Cette période est beaucoup plus courte que le temps de revival T_{rev} . Ce temps classique correspond à la fréquence porteuse située sous la courbe de corrélation. L'évolution temporelle correspond à un mouvement de rotation sur l'orbite 1D puis à un étalement du paquet d'onde initial lié à la dispersion.

3 - Apparition des revivals fractionnaires, on remarque que la fonction de corrélation présente des pics situés à des fractions particulières du temps de revival T_{rev} . La figure 6.2 présente les distributions spatiales de deux revivals fractionnaires à $\frac{2}{5}T_{rev}$ et $\frac{2}{3}T_{rev}$. Ces revival fractionnaires sont décrit comme des "clones" du paquet d'onde initial. Leurs distributions spatiales sont réparties de façon périodique dans la cavité.

4 - Au bout de $t=T_{rev}$, on observe le revival complet du paquet d'onde à sa position initiale.

On observe également un fort pic de la fonction corrélation à $\frac{1}{2}T_{rev}$. On peut montrer que le paquet d'onde est reconstruit en opposition de phase [112]. Cette opposition de phase n'est pas prise en compte par la fonction de corrélation élevée au carré.

Le quantum revival a été prédit théoriquement pour les fonctions d'ondes électroniques décrites par l'équation de Schrödinger [109, 110, 111]. Les premières observations expérimentales sont présentées dans le début des années 1990 [114, 115] grâce à l'avènement de nouvelles techniques expérimentales comme les techniques laser pompe-sonde ultra-rapides. Ces travaux observent la reconstruction de paquets d'onde électroniques excités au sein d'atomes de Rydberg. D'autres observations expérimentales sont réalisées avec des paquets d'onde construits à partir des vibrations moléculaires d'une molécule de Dibrome (Br_2) [116]. Ces expériences réalisent une mesure dynamique d'états quantiques. Elles nécessitent un appareillage conséquent et une grande maîtrise de l'état initial des atomes ou des molécules que l'on vient sonder.

Certains phénomènes propres aux ondes classiques tels que l'effet Talbot possède des similarités avec l'effet de quantum revival. En 1836, Henri Fox Talbot [117] expose ses travaux concernant la formation d'images successives d'un réseau de diffraction. Cet effet est observé lorsque l'on illumine un réseau de diffraction par une onde plane, l'image du réseau se reforme plusieurs fois à distance régulière du réseau. La distance de reconstruction se nomme maintenant la distance de Talbot $L_t = \frac{2a^2}{\lambda}$. Elle dépend de la période du réseau a ainsi que de la longueur d'onde optique λ . La figure 6.3 présente les motifs de diffraction obtenus en fonction de la distance d'observation.

Dans ce chapitre, nous proposons une analogie de cet effet quantum revival pour les ondes classiques. La reconstruction dynamique et spontanée d'une impulsion brève se propageant dans

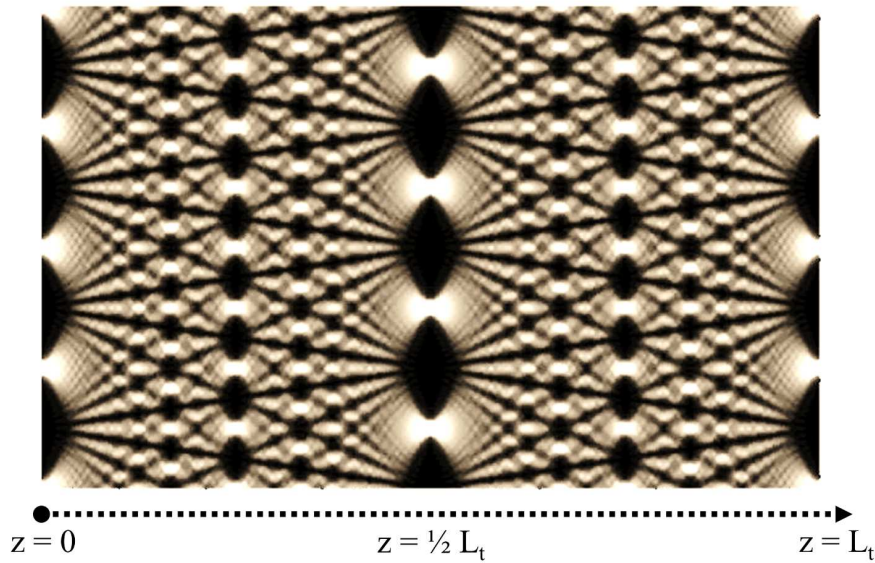


Figure 6.3 – Figure de diffraction en fonction de la distance d’observation pour une incidence normale monochromatique. L’axe inférieur indique la distance de Talbot où se reforme l’image du réseau de diffraction.

un milieu dispersif est une propriété remarquable. On peut envisager de contrôler la dispersion des fibres optiques ou d’autres systèmes guidés. On perçoit également un lien important avec d’autres phénomènes dynamiques tel que retournement temporel des ondes développé au laboratoire. Nous proposons d’étudier l’évolution temporel d’un paquet d’onde ou pulse gaussien d’ondes de flexion au sein d’une plaque rigide.

6.2 Choix des ondes de flexion

Nous avons vu dans l’introduction que le temps de revival d’un paquet d’onde est lié à la dérivée seconde de la relation de dispersion du milieu. Une relation de dispersion quadratique permet de s’assurer que cette dérivée seconde est une fonction constante. Dans ce cas précis, le temps de revival obtenu est alors indépendant de la fréquence ou du niveau d’énergie moyen du paquet d’onde.

Les ondes de flexion au sein d’une plaque présente une relation de dispersion quadratique à basse fréquence, c’est à dire lorsque la longueur d’onde plus grande que l’épaisseur de la plaque. Cette relation quadratique est le résultat de la théorie de Kirchhoff des plaques fines. On peut montrer que w le déplacement vertical dans la plaque est solution de l’équation biharmonique où Δ^2 est l’opérateur bilaplacien (6.4)

$$\frac{D}{\rho h} \Delta^2 w + \frac{\delta^2 w}{\delta t^2} = 0 \quad (6.4)$$

avec $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ la rigidité de flexion pour une plaque d'épaisseur h , de masse volumique ρ , de module d'Young E et de coefficient de Poisson ν . Cette équation mène à la relation de dispersion suivante (6.5)

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{\rho h}} k^2. \quad (6.5)$$

Les ondes de flexion possèdent une relation de dispersion quadratique qui va nous permettre de reproduire l'effet revival pour les ondes de flexion dans une plaque rigide.

6.2.1 Conditions aux bords de la plaque

La dispersion quadratique décrit la propagation des ondes planes dans une plaque de dimensions infinies. Afin de réaliser l'expérience de revival pour les ondes de flexion, il est nécessaire de créer une cavité fermée. Cette section est consacrée aux différentes conditions limites d'une plaque de dimensions finies.

Dans le cadre des ondes acoustiques scalaires, la propagation du champ est décrite par un opérateur laplacien. Les conditions aux limites sont fixées à partir de la valeur du champ aux bords (conditions limites de Dirichlet) ou bien à partir de la valeur de la dérivée du champ aux bords (conditions limites de Neumann). Les solutions stationnaires de l'équation sont alors des fonctions sinusoïdales.

On a vu que la propagation des ondes de flexion à basse fréquence est décrite par un opérateur bilaplacien $\Delta^2 w - k^4 w = 0$. Les solutions stationnaires vont faire intervenir les fonctions hyperboliques. Les solutions s'écrivent sous la forme suivante

$$w(x) = A \cos(k.x) + B \sin(k.x) + C \cosh(k.x) + D \sinh(k.x). \quad (6.6)$$

Afin d'obtenir les solutions de cette équation, il est nécessaire de fixer les valeurs de deux grandeurs aux bords du système. On peut alors décrire trois conditions aux limites à partir du déplacement normal et de la rotation dans le plan sagittale :

- la condition libre avec déplacement normal libre et rotation libre
- la condition d'appui simple avec déplacement normal nul et rotation libre
- la condition rigide ou clampé avec déplacement normal nul et rotation nulle

La figure 6.4 présente les relations de dispersion discrètes obtenues numériquement pour une plaque carrée de duraluminium de dimensions 40x40x0.5mm en fonction des conditions aux limites.

On remarque que les modes propres de la plaque avec des conditions clampées ou des conditions

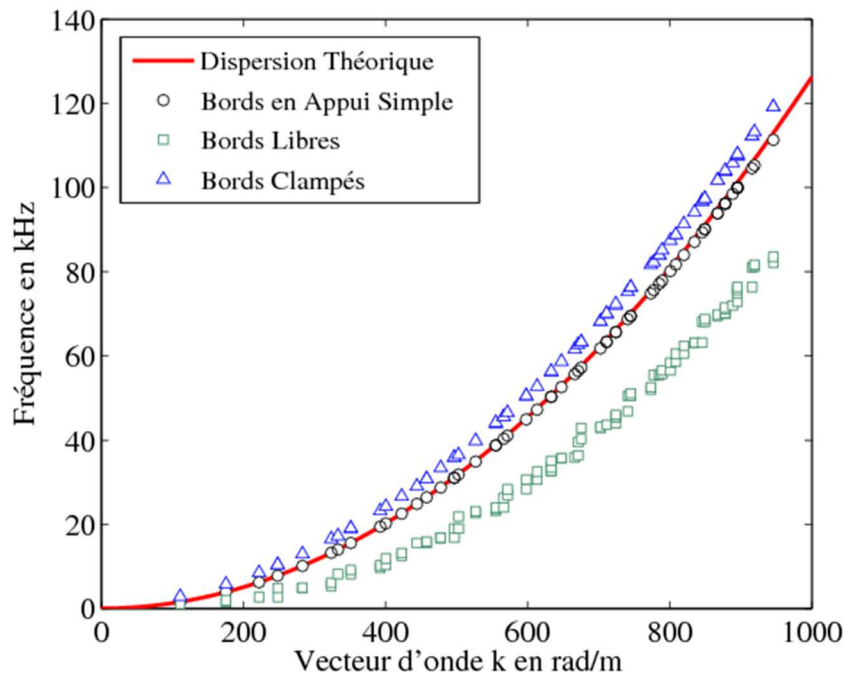


Figure 6.4 – Relations de dispersion discrètes obtenues par éléments finis pour une plaque de 40x40mm de Duraluminium d'épaisseur 0,5mm. Le tracé théorique est réalisé à partir de la relation de dispersion obtenue par l'équation biharmonique.

libres ne sont pas situés strictement sur la courbe de dispersion théorique du milieu infini. On peut interpréter cette déviation comme une modification locale des propriétés de la plaque proche des bords. Dans le cas des bords libres, cette modification peut créer des résonances au bords de la plaque [118]. On observe que les modes propres d'une plaque en appui simple respectent scrupuleusement la relation de dispersion du milieu libre. La condition d'appui simple est un cas particulier où les coefficients C et D associés aux fonctions hyperboliques s'annulent. Ces conditions sont idéales afin d'observer l'effet revival dans une plaque.

D'un point de vue expérimental, les conditions de bords libres et de bords rigides sont communément utilisées. En revanche, la mise en place des conditions limites d'appui simple est difficile pour une plaque d'épaisseur 0.5mm [119, 120]. Nous décidons d'utiliser une plaque à bords rigides comme cavité pour les ondes de flexion car les modes propres présentent une faible déviation par rapport la loi quadratique.

Richard Robinett a étudié l'influence d'une légère déviation de la relation de dispersion d'une loi purement quadratique [112]. La figure 6.5 compare la corrélation de la distribution spatiale d'un paquet d'onde dans un puits infini 1D au cours du temps, en présence ou non d'une anharmonicité de la relation de dispersion des états propres. L'anharmonicité est introduite par l'ajout d'un terme d'ordre 3 dans la relation de dispersion.

On remarque que l'ajout d'une anharmonicité dans la relation de dispersion entraîne une reconstruction imparfaite du paquet d'onde. En effet, la fonction de corrélation n'atteint plus sa

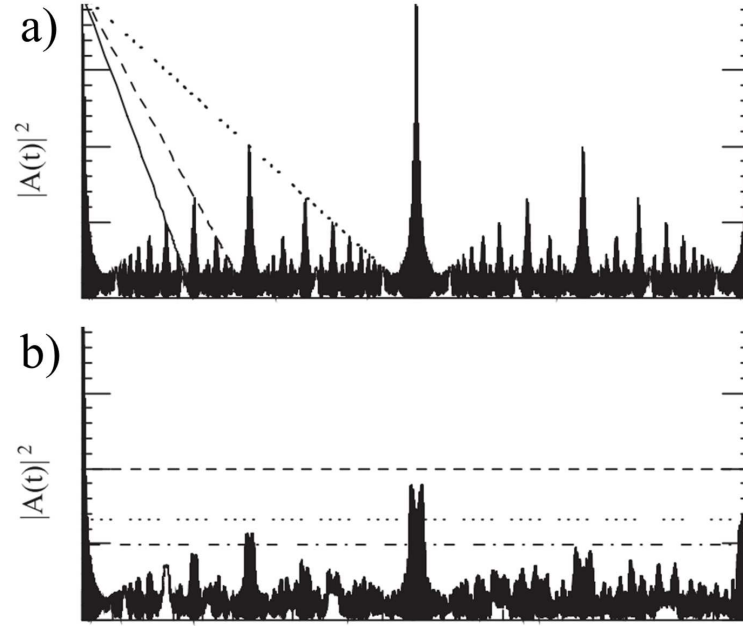


Figure 6.5 – Représentation de la corrélation de la distribution spatiale d'un paquet d'onde dans un puits infini 1D au cours du temps, en présence ou non d'une anharmonicité de la relation de dispersion des états.

valeur initiale lors du revival complet. En revanche les fluctuations observées au cours du temps sont caractéristiques de la présence de revivals fractionnaires et de revival complet. Le choix des conditions rigides semble être un bon compromis.

6.3 Étude dynamique

Les outils utilisés dans les chapitres précédents nous permettent d'étudier l'effet revival dans des plaques carrées à bords rigides. Les mesures expérimentales du déplacement vertical au cours du temps sont réalisées par interférométrie optique hétérodyne. Les simulations numériques temporelles seront effectuées grâce au logiciel FDTD Simsonic3D. Ces deux outils nous permettent de suivre temporellement la déformation verticale de la plaque et d'observer l'effet revival pour les ondes de flexion.

6.3.1 Fabrication des échantillons et conditions expérimentales

La figure 6.6a présente un schéma du système fabriqué au laboratoire par Abdelhak Souilah. Les conditions de bords rigides sont assurées par le blocage des bords de la plaque fine entre deux cadres épais représentés en rouge. La zone pointillée correspond à la surface libre de la plaque que l'on va observer.

L'excitation est réalisée par un transducteur piézoélectrique surmonté d'une pointe de verre.

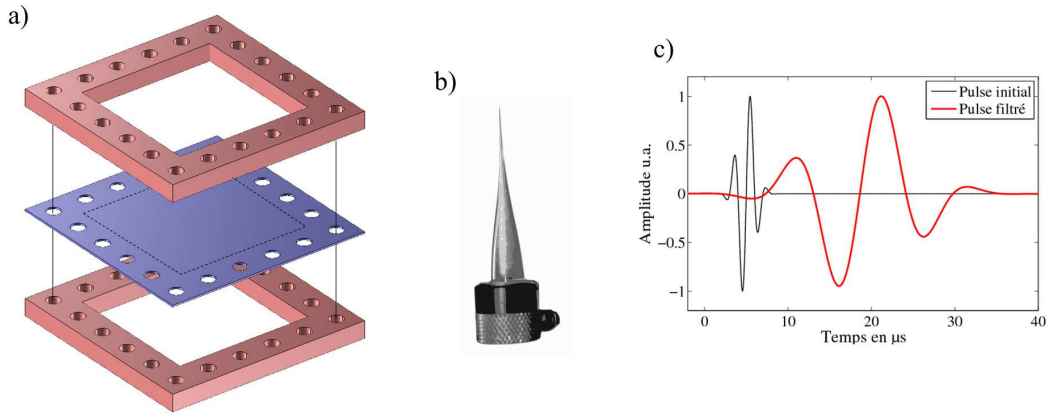


Figure 6.6 – a) Représentation schématique du setup expérimental. La plaque excitée d'épaisseur 0.5mm est représentée en bleu, prise en sandwich par deux cadres d'épaisseur 5mm représentés en rouge. L'ensemble est maintenu solidaire par des vis. La mesure est réalisée dans la zone pointillée : une plaque de 40x40x0.5mm avec des bords rigides. b) Représentation du transducteur de contact impulsif surmonté d'une pointe de verre. c) Représentation des signaux source. Le pulse gaussien expérimental, centré en 500kHz, est représenté en noir. Le pulse tracé en rouge correspond au signal obtenu après le filtrage effectué autour de 110kHz.

L'ensemble est présenté dans la figure 6.6b. Ce montage assure une excitation ponctuelle de la plaque. Trois positions initiales du point source ont été étudiées :

- Point source situé au centre de la plaque
- Point source situé au tiers de la diagonale du carré
- Point source placé arbitrairement hors des axes de symétrie

Le signal source utilisé est tracé en noir dans la figure 6.6c. Il s'agit d'un pulse gaussien d'une durée de $6\mu s$ centré en $f_0 = 500kHz$. Ce pulse très court nous permet de mesurer la réponse de la plaque sur une gamme de fréquence allant de 20kHz à 1MHz. Un filtrage est effectué autour de 110kHz avec une largeur à mi hauteur de 80kHz afin de réduire la bande passante du signal d'excitation et d'obtenir une longueur d'onde centrale adaptée à la taille de la plaque. La figure 6.6c présente, en rouge, le pulse gaussien obtenu après le filtrage.

La détection des épisodes de revival complet et de revivals fractionnaires dans les résultats expérimentaux et numériques va être réalisée grâce au calcul de l'Inverse Participation Ratio (IPR) au cours du temps 6.7.

$$IPR(t) = \frac{\sum_{x,y} A(t, x, y)^2}{[\sum_{x,y} A(t, x, y)]^2} \quad (6.7)$$

Cette fonction rend compte de l'étendue spatiale de la déformation verticale à chaque pas de temps. Elle est égale à l'unité lorsque tout le déplacement est concentré sur un pixel de la carte, et elle prend la valeur $\frac{1}{N^2}$ lorsque le déplacement est uniformément réparti sur la carte de NxN pixels. L'effet revival va se traduire par des fluctuations régulières de cette fonction IPR(t) aux temps de revivals fractionnaires et de revival complet. On pourra ensuite extraire les cartes de

déplacement vertical ces temps précis pour observer les reconstructions partielles et totale du pulse initial.

La fréquence porteuse des signaux temporels est beaucoup plus rapide que l'évolution de l'enveloppe du signal. On réalise alors une extraction de cette enveloppe par une technique basée sur la transformée de Hilbert. La fonction $IPR(t)$ est calculée à partir de l'enveloppe du signal en chaque pas de temps.

6.3.2 Excitation au centre de la plaque

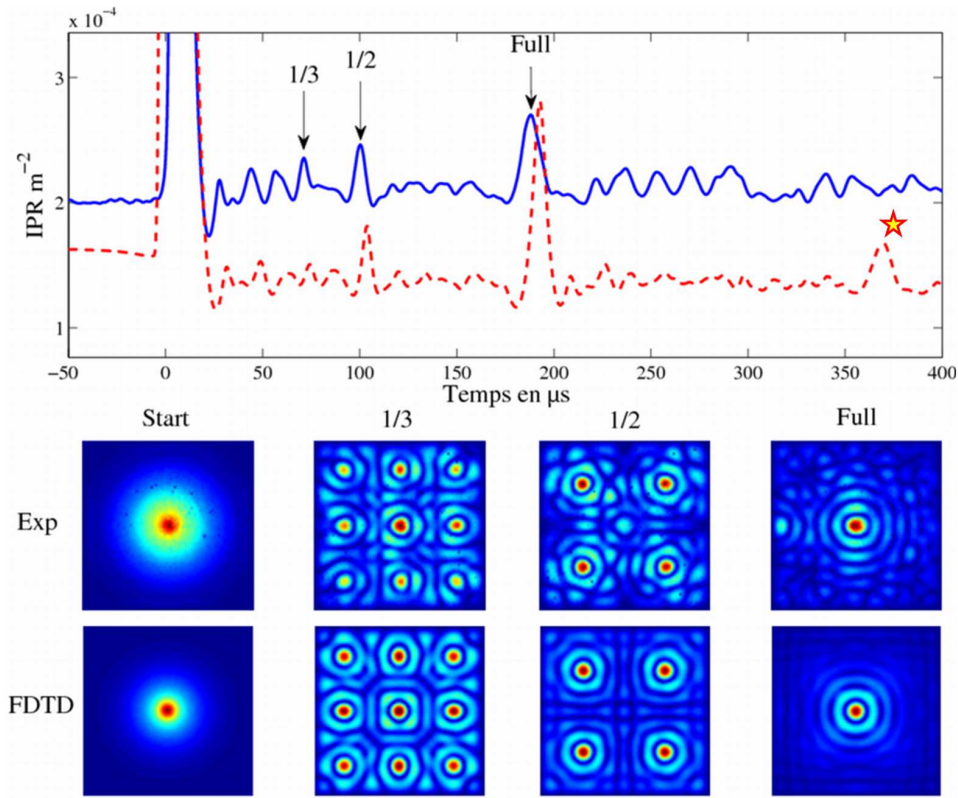


Figure 6.7 – Représentation de l'IPR au cours du temps, le signal expérimental est représenté en bleu, le résultat numérique est donnée en pointillés rouges. Les flèches indiquent les temps de revivals fractionnaires et complet. Le temps de revival complet associé à l'excitation au centre est $T_{rev}^{cent} = 183\mu s$. Les cartes situées dans la partie inférieure représentent les vues instantanées de l'amplitude de déplacement vertical au temps indiqués par les flèches.

La figure 6.7 présente les résultats obtenus dans le cas d'une source positionnée au centre de la plaque. On représente l'IPR au cours du temps des résultats expérimentaux en trait plein et des résultats numériques en trait pointillé rouges. Les pics observés dans l'IPR correspondent à la concentration du déplacement vertical sur une zone réduite. On représente les cartes d'enveloppe du déplacement vertical à ces temps précis.

On obtient un revival complet pour au temps $t = T_{rev}^{cent} = 183\mu s$. On note également la présence de revivals fractionnaires à $t = \frac{1}{3}T_{rev}^{cent}$ et $t = \frac{1}{2}T_{rev}^{cent}$. Ces résultats valident expérimentalement la

démarche proposée et présentent la première réalisation d'un effet analogue au quantum revival pour les ondes de flexion dans une cavité carrée à bords rigides.

On remarque que la reconstruction du pulse (expérimentale et numérique) à $t = T_{rev}^{cent}$ présente des lobes secondaires absents dans le paquet d'onde initial. Ce phénomène est lié aux interférences lorsque l'on reconstruit le pulse. Ces interférences sont similaires à celles observées lors des expériences de retournement temporel dans les plaques fines [121]. Ce motif stationnaire est créé par interférence entre les fronts d'onde qui convergent et divergent du point focal. On retrouve également ce motif stationnaire au sein des revivals fractionnaires.

Les résultats numériques permettent de distinguer un deuxième revival complet pour un temps $t = 2T_{rev}^{cent}$ indiqué par l'étoile sur la courbe en pointillés rouges.

6.3.3 Excitation au tiers de la diagonale

La figure 6.8 présente l'IPR obtenu pour lorsque la source est située au tiers de la diagonale de la cavité.

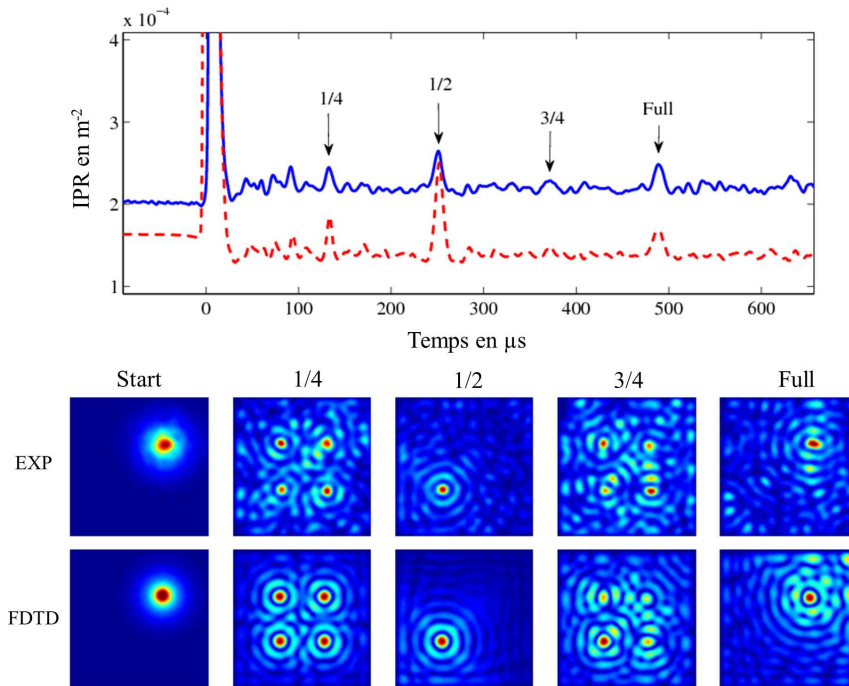


Figure 6.8 – Représentation de l'IPR au cours du temps, le signal expérimental est représenté en bleu, le résultat numérique est donné en pointillés rouges. Les flèches indiquent les temps de revivals fractionnaires et complet. Le temps de revival complet associé à l'excitation diagonale est $T_{rev}^{diag} = 487 \mu s$. Les cartes situées dans la partie inférieure représentent les vues instantanées de l'amplitude de déplacement vertical au temps indiqués par les flèches.

La représentation des résultats est identique à celle utilisée dans la figure précédente. La position de la source au tiers de la diagonale donne un temps de revival complet $T_{rev}^{diag} = 487 \mu s$. On représente les revivals fractionnaires à $t = \frac{1}{4}T_{rev}^{diag}$, $t = \frac{1}{2}T_{rev}^{diag}$ et $t = \frac{3}{4}T_{rev}^{diag}$. Pour une source en

dehors du centre de la plaque, le demi-revival correspond à la reconstruction du pulse initial au point de symétrie centrale du point source. Cette observation est en accord avec les prédictions théoriques [112]. On retrouve également le fait que le revival fractionnaire à $t = \frac{1}{4}T_{rev}^{diag}$ et à $t = \frac{3}{4}T_{rev}^{diag}$ présentent 4 "clones" symétriques du pulse initial.

On remarque que l'anharmonicité liée aux bords rigides de la plaque détériore la reconstruction du pulse au temps de revival complet. Il ne s'agit pas d'un artefact de mesure car les signaux expérimentaux et numériques présentent la même tendance. On observe un étalement spatial plus important à $t = T_{rev}^{diag}$ par rapport à celui observé à $t = \frac{1}{2}T_{rev}^{diag}$. Il est intéressant de remarquer que cette perturbation se cumule dans le temps. Les premiers revivals fractionnaires à $t = \frac{1}{4}T_{rev}^{diag}$ et $t = \frac{3}{4}T_{rev}^{diag}$ ne subissent pas trop d'étalement spatial par rapport aux épisodes de revival suivants.

6.3.4 Excitation arbitraire

La figure 6.9 présente l'IPR obtenu lorsque la source est située hors des axes de symétrie. La représentation des résultats est identique à celle utilisée dans la figure précédente.

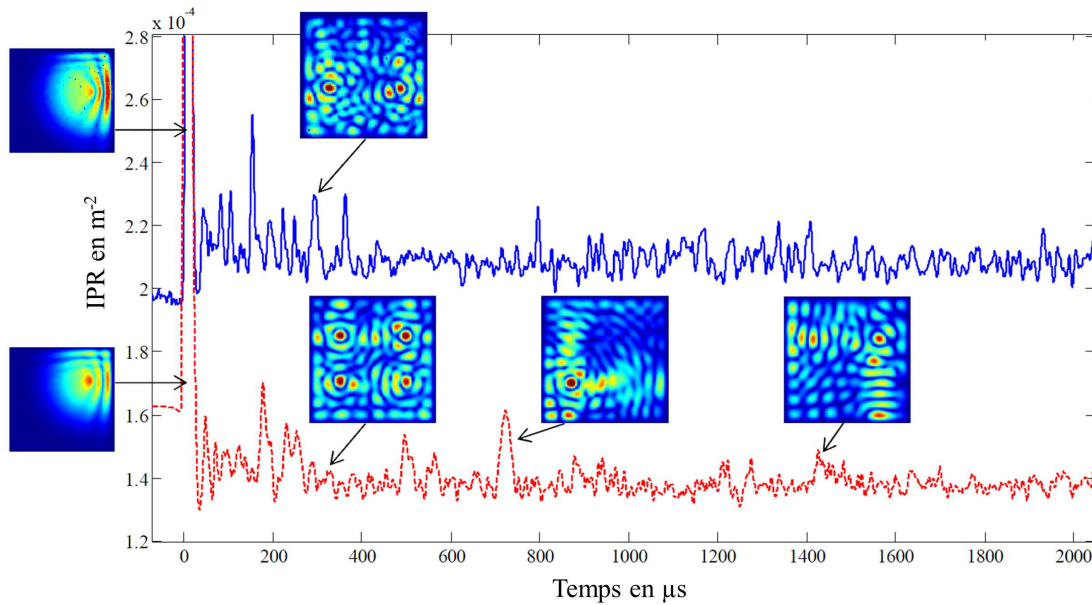


Figure 6.9 – Représentation de l'IPR au cours du temps, l'IPR expérimental est représenté en bleu, l'IPR numérique est donné en pointillés rouges. Les cartes représentent les vues instantanées de l'amplitude du déplacement vertical aux temps indiqués par les flèches.

Pour cette position initiale la mesure expérimentale ne fait pas apparaître de revival complet. En revanche les fluctuations aux temps courts semblent confirmer la présence d'un effet revival. On retrouve difficilement la signature d'un quart de revival à $t = 370\mu s$ (quatre points chauds symétriques par rapport au point initial).

Les résultats numériques confirment la difficulté d'observation du revival complet pour une source placée hors des axes de symétrie. On observe par contre la présence du quart de revival à $t = 363\mu s$

et du demi revival à $t=730\mu s$. Le temps de revival complet du système rigide peut être estimé : $T_{rev} \approx 1450\mu s$.

Cette fois ci l'erreur cumulative introduite par l'anharmonicité de la relation de dispersion entraîne une perturbation importante des pulses reconstruits par effet revival. Ces résultats expérimentaux et numériques confirment la présence de cet effet revival pour les ondes de flexion dans une plaque carrée à bords rigides. Nous avons vu que le temps de revival est modifié par la position initiale du pulse source :

- $T_{rev}^{cent} = 183\mu s$ pour une source positionnée au centre de la plaque
- $T_{rev}^{diag} = 487\mu s$ pour une source positionnée au tiers de la diagonale de la plaque
- $T_{rev} \approx 1450\mu s$ pour une source positionnée hors d'un axe de symétrie

La réduction du temps de revival en fonction de la position de la source dans une cavité carrée a été démontrée théoriquement par Doncheski *et al* [122]. Le positionnement de la source au centre de la cavité réduit le temps de revival d'un facteur 8. Les temps de revivals observés dans nos expériences permettent de retrouver cette valeur :

$$\frac{T_{rev}}{T_{rev}^{cent}} = 7.92 \quad (6.8)$$

D'après le même article, le positionnement de la source au tiers de la diagonale de la cavité doit réduire le temps de revival d'un facteur 3. Les temps de revivals observés expérimentalement permettent de retrouver cette valeur :

$$\frac{T_{rev}}{T_{rev}^{diag}} = 2.97 \quad (6.9)$$

À notre connaissance, il s'agit de la première démonstration expérimentale de cette propriété. La suite du chapitre propose une approche permettant de généraliser le calcul du temps de revival en prenant en compte la position initiale du pulse source.

6.4 Calcul du temps de revival

Le temps de revival est proportionnel à la dérivée seconde de la relation de dispersion. On peut adapter la formule du temps de revival extraite de [112] à la relation de dispersion des ondes classiques $w = f(k)$. On obtient la relation suivante (6.10) avec L le coté de la cavité carrée.

$$T_{rev} = \frac{4L^2}{\pi \frac{\delta^2 \omega}{\delta k^2}} \quad (6.10)$$

Ce calcul peut être effectué pour une plaque à bords simplement supportés car la relation de dispersion discrète est toujours quadratique. Dans le cas d'une plaque à bords rigides il n'existe pas de formule analytique de la dispersion discrète. On ne peut donc pas calculer le temps de revival d'une plaque à bords rigides. De plus, cette équation est indépendante de la position initiale du pulse source. Nous proposons alors une nouvelle approche afin de calculer le temps de revival d'une cavité quelconque en prenant en compte la position du point source initial.

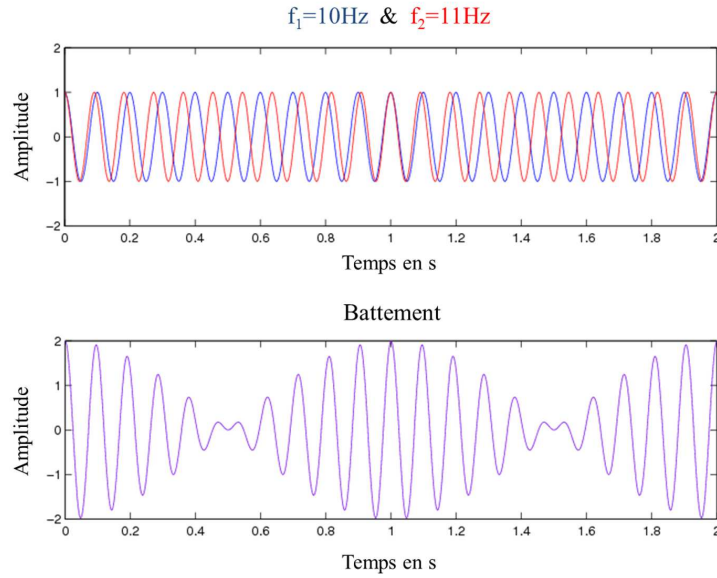


Figure 6.10 – Phénomène de battement entre deux fonctions sinusoïdales de fréquence 10Hz et 11Hz présentées dans la courbe supérieure. La courbe inférieure présente la somme des deux fonctions. L'enveloppe possède une fréquence de $f_{env} = f_2 - f_1 = 1Hz$ et la porteuse $f_{por} = \frac{f_1+f_2}{2} = 10.5Hz$.

Pour une excitation ponctuelle et courte dans le temps, une quantité importante de modes propres va être excitée. Le champ dans la cavité est obtenu à partir des interférences des différents modes propres au cours du temps. La dynamique de l'enveloppe du signal va correspondre aux battements temporels entre les différents modes. Les périodes de ces battements sont liées à l'écart en fréquence entre chacun des modes. La figure 6.10 représente le phénomène de battement entre deux fonctions sinusoïdales de fréquences $f_1=10Hz$ et $f_2=11Hz$. On remarque que l'enveloppe du signal présente une période inversement proportionnelle à l'écart des deux fréquences.

Ces battements vont être complexes lorsque l'on excite un grand nombre de fonctions sinusoïdales correspondant aux différentes modes propres de la cavité. Les fréquences propres les plus proches vont faire apparaître les périodes de battement les plus longues et vont décrire la dynamique du système aux temps longs. Il est nécessaire que ces différents battements soient en phase au moment du temps de revival complet. On peut alors définir une condition nécessaire à l'observation du revival :

Les écarts entre plus proches fréquences propres doivent être des multiples entiers d'une même valeur. Cette valeur correspond alors à l'inverse du temps de revival.

Nous allons étudier la distribution de ces plus petits écarts en fréquence pour les modes propres d'une plaque carrée à bords en appui simple et pour ceux d'une plaque carrée à bords clampés. La figure 6.11 présente la distribution des écarts en fréquence des plus proches voisins pour les 100 premiers modes de la plaque en fonction des conditions aux bords.

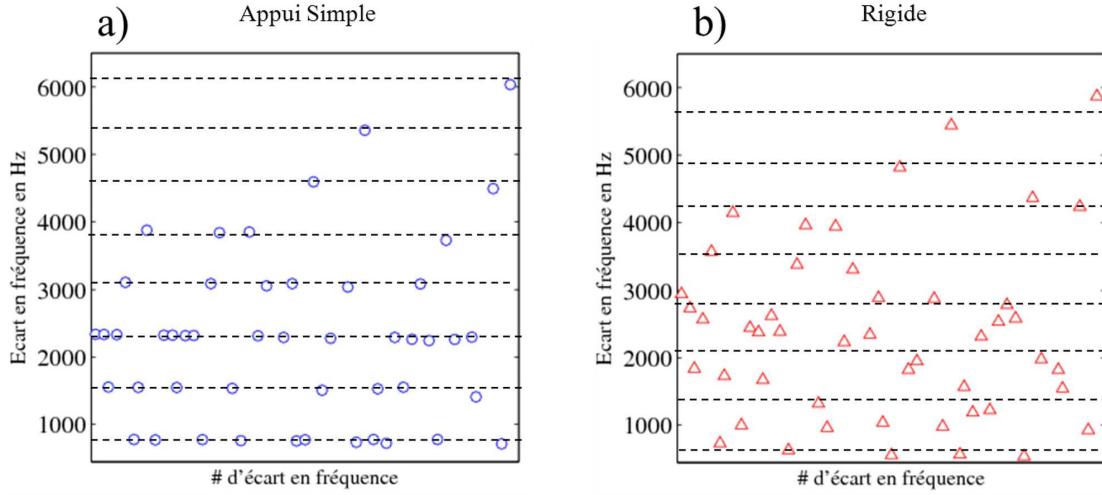


Figure 6.11 – Distribution des écarts en fréquence entre plus proche voisins parmi les 100 premières fréquences propres calculées numériquement. L'écart en fréquence d'indice i correspond à $\Delta f_i = f_{i+1} - f_i$. La figure a) correspond à une plaque à bords en appui simple. Les lignes pointillées horizontales indiquent une distribution régulière des écarts en fréquence. La première ligne correspond à un écart $\delta f_{AS}=778\text{Hz}$, les autres lignes sont les multiples entiers de cet écart minimum. La figure b) correspond à une plaque à bords rigides. Les lignes pointillées sont placées pour un écart en fréquence obtenu à partir de l'inverse du temps de revival approximé dans la section précédente. $T_{rev} \approx 1450\mu s$ nous donne $\delta f_R=695\text{Hz}$

On remarque que la distribution des écarts en fréquence obtenue pour la condition d'appui simple est régulière. Tous les écarts entre fréquences propres sont multiples de la même fréquence de base $\delta f_{AS}=778\text{Hz}$. Cette fréquence de base correspond bien au calcul analytique du temps de revival que l'on peut mener par la formule (6.10). À ce temps précis, tous les battements entre les différents modes propres ont effectué un nombre entier de périodes, on observe alors la reconstruction du pulse initial.

La figure 6.11b est consacrée aux conditions limite rigides, elle ne montre aucune structure particulière. On peut relier cette absence de régularité au fait que le revival complet soit difficilement observable dans le cas d'une plaque à bords rigides. Nous allons voir dans la prochaine section que cette distribution d'écarts en fréquence peut être contrôlée par la position initiale du paquet d'onde.

6.4.1 Influence de la position de la source

La cavité carrée présente plusieurs axes de symétrie. Ces axes de symétries sont des lieux où un grand nombre de modes propres de la plaque présentent un noeud de déplacement. Lorsque la

source est positionnée sur ces axes de symétrie, les modes ayant un noeud de déplacement ne vont pas être excités.

La déformée des modes propres d'une plaque carrée pour des conditions aux limites rigides ou en appui simple peut être approximée par la fonction suivante

$$w_{n,m}(x, y) = \sin\left(\frac{n\pi}{L}.x\right)\sin\left(\frac{m\pi}{L}.y\right) \quad (6.11)$$

Les grandeurs n et m représentent les nombres de ventres de vibrations pour chacune des dimensions de la plaque.

On remarque alors que tous les modes $w_{n,m}$ avec n ou m pair présentent un noeud au centre de la plaque. Ces modes ne seront donc pas excités par une source positionnée au centre de la plaque. L'absence des modes pairs va modifier la distribution des écarts en fréquence et donc la dynamique de l'effet revival.

Par un raisonnement identique, on comprend que les modes $w_{n,m}$ avec n ou m multiple de 3 présentent un noeud au tiers de la diagonale. Cette position particulière du point source possède également une influence sur la distribution des écarts et sur le temps de revival.

Interprétation spectrale

Afin d'apprécier la modification du spectre par le positionnement de la source, nous allons observer l'autocorrélation des spectres obtenus expérimentalement et numériquement. Cette autocorrélation du spectre nous permet de repérer si les écarts entre les modes présentent une structure régulière.

La figure 6.12 présente cette fonction d'autocorrélation pour les résultats expérimentaux en trait épais et les résultats numériques en trait fin. Les spectres obtenus expérimentalement sont moins résolus car les signaux expérimentaux s'atténuent plus rapidement dans le temps à cause des pertes. L'accord entre les résultats expérimentaux et numériques a été démontré sur les signaux temporels dans les figures 6.7 et 6.8. L'information spectrale obtenue numériquement est pertinente.

La première figure tracée en bleu représente le cas d'une source placée hors des axes de symétrie. L'autocorrélation du spectre ne présente pas de structure particulière. Cette observation fait écho à la distribution désordonnée des écarts en fréquence des modes propres d'une plaque à bords rigides présentée dans la figure 6.11b. Les traits pointillés verticaux marquant l'espacement théorique des modes sont placés d'après le temps de revival approximé $T_{rev} \approx 1450\mu s$ ce qui nous donne $\delta f = 695\text{Hz}$.

Les figures correspondant à des positions particulières du point source présentent des structures régulières caractéristiques de l'existence de l'effet revival. On remarque que les données expéri-

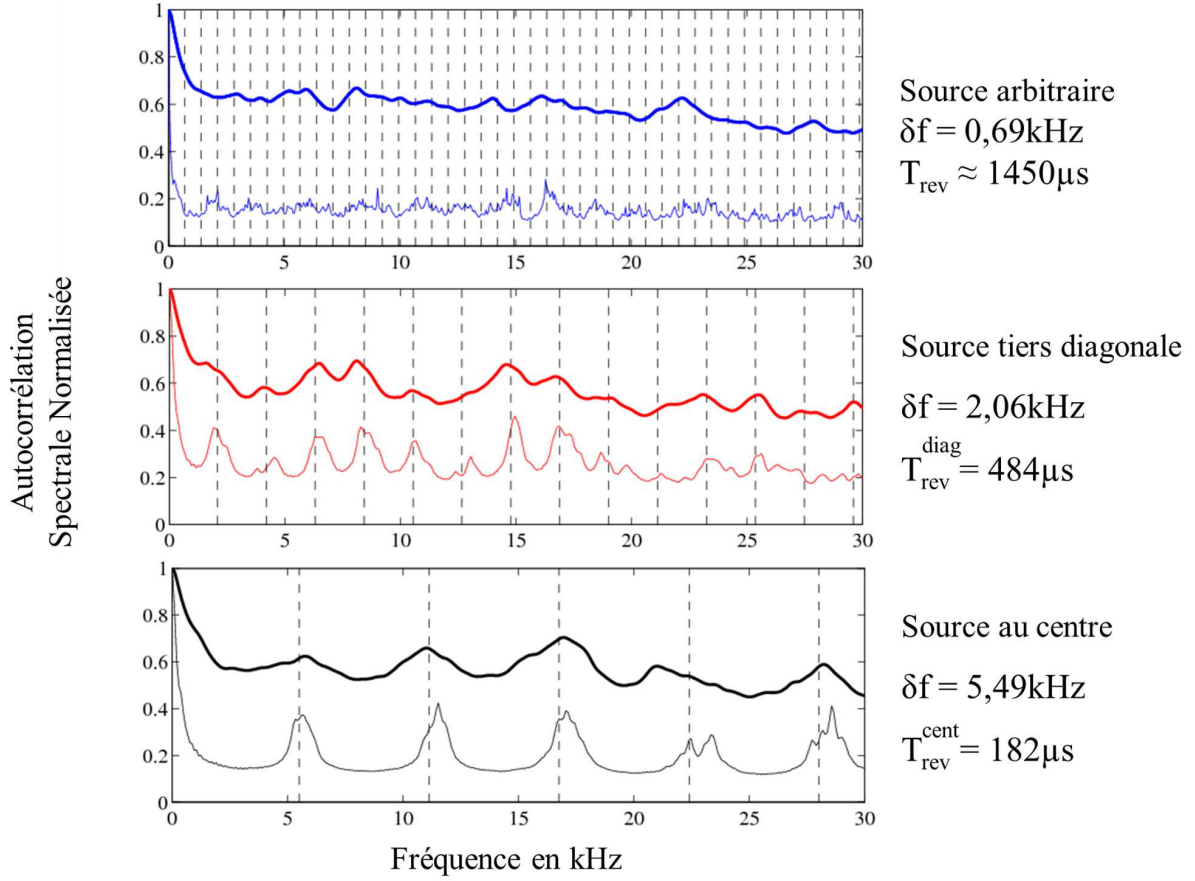


Figure 6.12 – Autocorrélation du spectre moyen obtenu expérimentalement (trait épais) et numériquement (trait fin). Les traits pointillés verticaux marquent la répétition des espacements entre les différents pics de la fonction d'autocorrélation. La grandeur δf donne la valeur de l'écart représenté. La grandeur T_{rev} correspond au temps de revival calculé comme l'inverse de δf .

mentales présentent une légère modulation un accord avec les observations numériques. Dans ces deux cas, les traits pointillés sont placés afin de respecter la structure périodique de la fonction d'autocorrélation. La valeur correspondant à cet espacement régulier δf est donnée sur la droite de la figure. Cette valeur nous permet de remonter au temps de revival associé par la formule suivante : $T_{\text{rev}} = \frac{1}{\delta f}$. Cette méthode nous permet de retrouver des temps de revival observés dans l'étude temporelle.

La figure 6.12 tracée en rouge présente l'autocorrélation du spectre obtenu pour une source positionnée au tiers de la diagonale du carré. On remarque que la fonction d'autocorrélation présente également des pics régulièrement espacés. On peut montrer que les écarts entre les modes sont multipliés par 3 en positionnant la source au tiers de la diagonale du carré. Cet argument nous permet de retrouver le fait que le temps de revival d'une cavité carrée 2D est divisé par 3 lorsque le paquet d'onde initial est situé au tiers de la diagonale.

La figure 6.12 tracée en bleu présente l'autocorrélation du spectre obtenu pour une source positionnée au centre de la plaque. Dans ce cas précis, on observe les écarts entre les modes sont multipliés par un facteur 8. On retrouve alors un temps de revival divisé par 8 lorsque la source

est située au centre de la plaque.

Cette nouvelle approche basée sur l'étude de la distribution des écarts en fréquences des différents modes excités dans la cavité permet de retrouver les propriétés démontrées dans [122]. Elle pourra nous permettre d'étudier les propriétés de cavités plus complexes que la cavité carrée.

6.5 Études complémentaires

Dans cette section, nous allons discuter de certains aspects secondaires de l'effet revival dans les plaques. Nous aborderons d'abord de l'influence de la fréquence centrale du paquet d'onde sur le temps de revival. Le second point est consacré à l'étude de l'effet revival dans le cas des membranes souples. Contrairement aux plaques rigides, les vibrations des membranes ne possèdent pas une relation de dispersion quadratique, nous allons voir comment cette modification affecte l'effet revival.

6.5.1 Influence de la fréquence centrale

Nous avons vu que le temps de revival est relié à la dérivée seconde de la relation de dispersion. Une dispersion purement quadratique permet donc de conserver une dérivée seconde constante quelle que soit la fréquence d'excitation. Dans cette partie nous allons étudier l'influence de la fréquence centrale du pulse sur la dynamique de l'effet revival.

On a vu que la mesure effectuée nous permet d'obtenir la réponse de la plaque sur une gamme de fréquence très large. Une opération de filtrage a été réalisée pour représenter les résultats expérimentaux et numériques. Nous allons étudier l'influence de la fréquence centrale du filtrage dans le cas d'un point source positionné au tiers de la diagonale du carré.

La figure 6.13 présente les fonctions IPR obtenus pour des fréquences centrales f_0 allant de 80kHz à 140kHz, la largeur à mi hauteur du filtrage est constante : 80kHz.

Le cas présenté dans la figure 6.8 correspond à la courbe tracée en vert pour $f_0=110\text{kHz}$. On remarque que l'évolution temporelle de l'IPR est conservée lorsque l'on change de la fréquence centrale du pulse initial. Le temps de revival complet ainsi que les temps de revivals fractionnaires sont stables.

Cette étude nous permet démontrer expérimentalement que les temps de revivals observés sont indépendants de la fréquence centrale du pulse initial. Cette propriété rapproche notre système d'une analogie parfaite de l'effet quantum revival.

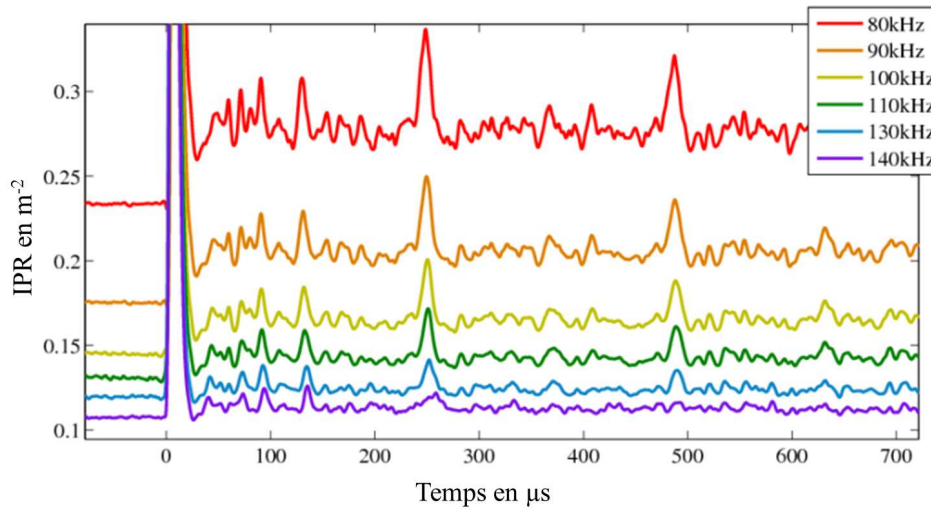


Figure 6.13 – Représentation de l'IPR en fonction du temps dans le cas d'une source située au tiers de la diagonale. Les fréquences centrales f_0 associées à chacune des courbes sont données dans la légende de la figure.

6.5.2 Cas des membranes souples

La différence entre les modèles de plaque rigide et de membrane souple correspond qualitativement à celle observée entre une corde et une poutre dans un cas 1D. Les cordes (1D) et les membranes (2D) nécessitent l'application d'une tension extérieure statique afin d'observer la propagation d'ondes élastiques. Les modèles de poutres et de plaques prennent en compte la rigidité interne du milieu qui n'a plus besoin d'être mis en tension pour présenter ces vibrations.

Des travaux récents traitent de la vibration du tympan chez les criquets [123]. Ces travaux visent à déterminer si la modélisation du tympan requiert un modèle de membrane souple ou un modèle de plaque rigide. Les deux modèles sont basés sur des équations différentielles différentes :

- les ondes élastiques dans les membranes sont décrites par une équation de Helmholtz
- le modèle de Kirchhoff pour les ondes de flexion à basse fréquence dans les plaques fait intervenir l'équation bi-harmonique.

Ces deux équations différentielles aboutissent à des relations de dispersions différentes. Pour les ondes élastiques dans les membranes, la relation de dispersion est linéaire décrite par l'équation suivante (6.12).

$$\omega = \sqrt{\frac{T}{\rho h}} k \quad (6.12)$$

Elle dépend de la tension appliquée T , de la masse volumique ρ et de l'épaisseur h . On remarque alors qu'une membrane n'est pas un milieu dispersif car la relation de dispersion est linéaire.

En revanche, la dispersion des ondes de flexion dans les plaques est quadratique à basse fréquence. La relation de dispersion est la suivante (6.13) avec $c_P = \sqrt{\frac{E}{\rho(1-\nu^2)}}$ où E représente le module

d'Young, et ν le coefficient de Poisson.

$$\omega = \frac{c_P}{\sqrt{12}} h k^2 \quad (6.13)$$

Nous allons alors comparer numériquement la propagation d'un pulse dans une cavité carrée présentant un comportement de membrane souple ou un comportement de plaque rigide. La figure 6.14 présente l'IPR au cours du temps ainsi que l'autocorrélation du spectre obtenu dans le cas d'une source située au tiers de la diagonale d'une cavité carrée. Les résultats obtenus pour un système de plaque sont tracés en traits rouges épais, le trait bleu fin présente ceux obtenus pour un modèle de membrane.

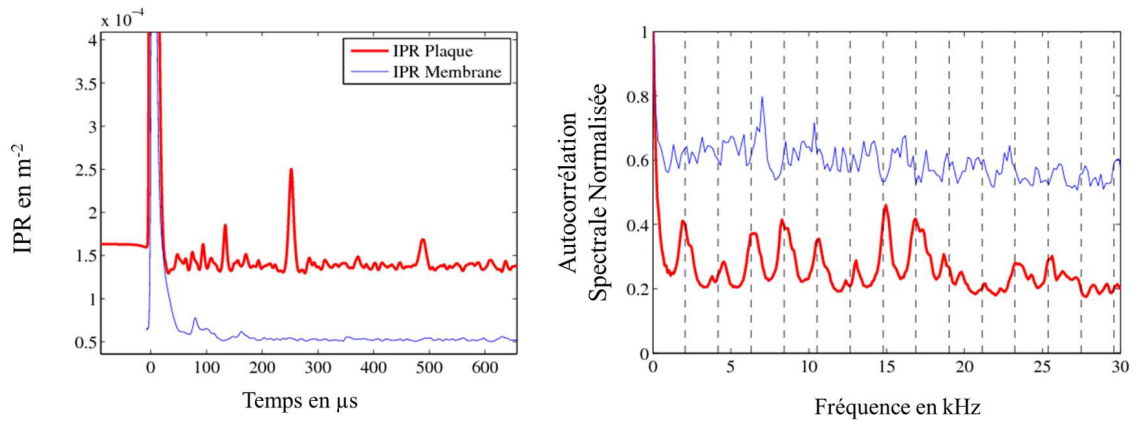


Figure 6.14 – Représentation de l'inverse participation ratio au cours du temps ainsi que l'autocorrélation du spectre obtenu dans le cas d'une source située au tiers de la diagonale d'une cavité carrée. Le cas de la plaque rigide est tracé en rouge épais, le modèle de membrane est présenté en trait bleu fin.

L'IPR au cours du temps indique l'absence d'effet revival dans le cas d'une membrane carrée. L'autocorrélation des spectres obtenus confirment l'absence de structure régulière dans le cas de la membrane souple. On peut en conclure que la dispersion quadratique est essentielle à l'apparition d'un effet revival dans une cavité carrée.

On peut expliquer ce résultat à partir de la base formée par les vecteurs propres d'une cavité carrée. On utilise à nouveau le dénombrement des modes propres par un couple (n, m) où les entiers n et m donnent le nombre de ventres dans chacune des directions. Les vecteurs d'ondes prennent les valeurs suivantes :

$$k_{n,m} = \sqrt{k_n^2 + k_m^2} \text{ avec } k_i = \frac{\pi}{L} i$$

$$k_{n,m} = \frac{\pi}{L} \sqrt{n^2 + m^2} \quad (6.14)$$

Dans le cas d'une relation de dispersion quadratique $\omega = \alpha k^2$, on remarque que les pulsations propres $\omega_{n,m}$ vont être des multiples entiers d'une pulsation de base $\omega_0 = \alpha \frac{\pi^2}{L^2}$. On retrouve alors la condition d'existence du revival : les écarts en fréquences sont tous des multiples entiers d'une

fréquence de base.

Dans le cas d'une relation de dispersion linéaire $\omega = \alpha k$, on remarque que la quasi majorité des pulsations propres ne sont plus des multiples entiers d'une pulsation ω_0 : $\omega_{1,1} = \alpha \frac{\pi}{L} \sqrt{2}$ ou $\omega_{2,1} = \alpha \frac{\pi}{L} \sqrt{5}$. La condition d'existence du revival ne peut alors pas être validée.

Cette étude permet de mettre en évidence la spécificité des ondes de flexion dans les plaques rigides et le rôle déterminant de la relation de dispersion quadratique.

6.6 Conclusions et perspectives

Ce chapitre présente un analogue classique de l'effet quantum revival réalisé à partir d'onde de flexion dans une plaque carrée à bords rigides. Cet effet se traduit par la reconstruction périodique d'un paquet d'onde dans une cavité fermée régulière.

La première partie du chapitre introduit l'effet quantum revival dans un formalisme quantique. Il a été démontré que cet effet dynamique provient de la relation de dispersion quadratique propre aux systèmes quantiques. Le choix des ondes de flexion dans les plaques est motivé par la présence de cette relation de dispersion quadratique à basse fréquence.

Après une discussion concernant le choix des conditions aux limites, les résultats expérimentaux et numériques présentent la propagation d'un pulse court d'ondes de flexion dans une plaque carrée à bords rigides. On observe alors la reproduction des effets dynamiques du quantum revival : la reconstruction du pulse initial associée au revival complet et l'apparition de structures secondaires associées revivals fractionnaires.

La suite du chapitre présente une discussion sur le rôle de la position initiale du pulse source vis à vis du temps de revival. Une nouvelle approche basée sur les battements temporels entre les modes propres excités permet de retrouver les résultats théoriques de réduction du temps de revival lorsque la source est située sur des points de symétrie de la plaque.

La dernière partie présente deux études complémentaires. La première concerne l'influence de la fréquence centrale du pulse sur le temps de revival. On démontre alors expérimentalement que le temps de revival obtenu ne dépend pas de la fréquence centrale sur l'intervalle [80kHz, 140kHz]. La seconde étude concerne le cas des membranes souples, nous démontrons numériquement que l'effet revival n'apparaît pas pour un milieu 2D dont la relation de dispersion est linéaire.

Ces travaux présentent de nombreuses perspectives, la mise en place expérimentale des conditions limites d'appui simple nous permet d'envisager la réduction de la déviation de la relation de dispersion due aux bords rigides. On prévoit alors d'observer le revival complet en tout point de la plaque. Il est également envisageable d'utiliser des pulses à plus grande bande passante afin d'observer les revivals fractionnaires d'ordres inférieurs : $\frac{1}{5}T_{rev}$, $\frac{1}{6}T_{rev}$, ...

Nous envisageons également d'étudier l'effet revival dans des cavités à géométrie complexe. Le critère d'existence de l'effet revival basée sur les écarts entre plus proches fréquences propres permet d'étudier un système quelconque. L'exemple des cavités chaotiques ergodiques est intéressant car elles présentent une rigidité spectrale qui contraint la distribution des écarts entre fréquences propres.

Chapitre 7

Maxwell Fisheye pour les ondes de flexion

Table des matières

7.1	Introduction	142
7.1.1	Physique des transformations	142
7.1.2	Réintroduction du Maxwell fisheye	143
7.1.3	Réalisations expérimentales	145
7.1.4	Origine de la super résolution du Maxwell fisheye	147
7.2	Conception du fisheye pour les ondes de flexion	149
7.2.1	Variation de l'épaisseur	149
7.3	Validation expérimentale	151
7.3.1	Conception d'un Maxwell fisheye ouvert	151
7.3.2	Étude temporelle de la focalisation	153
7.4	Conclusion et perspectives	154

7.1 Introduction

Ce chapitre concerne la transposition d'un système optique complexe appelé "Maxwell fisheye" aux ondes élastiques dans les plaques fines. Ce système à gradient d'indice est décrit pour la première fois dans les travaux de James Clerk Maxwell [124]. Dans ces travaux appliqués à l'optique géométrique, J.C. Maxwell imagine un système optique capable de contraindre tous les rayons lumineux émanant d'un point source à coïncider en un point image. Tous ces rayons doivent également posséder une trajectoire circulaire. La résolution de ce problème entraîne la conception d'un milieu optique dont l'indice de réfraction est modulé spatialement selon une loi précise. J.C. Maxwell démontre alors la formule suivante (7.1) est solution du problème, avec r la distance au centre du système.

$$n(r) = \frac{2}{1 + r^2} \quad (7.1)$$

Au cours de l'année 1944, Rudolf Karl Luneburg interprète la formule donnée par J. C. Maxwell comme la projection stéréographique d'une sphère d'indice $n=1$ sur un plan [125]. En effet, si l'on contraint les rayons lumineux à parcourir uniquement la surface d'une sphère, tous les rayons émis par un point source possèdent une trajectoire circulaire et coïncident au point diamétralement opposé (ou point antipodal). Dans le même ouvrage, R.K. Luneburg introduit une catégorie plus générale de systèmes à gradient d'indice possédant des propriétés remarquables.

7.1.1 Physique des transformations

Les systèmes à gradient d'indice tels que le Maxwell fisheye peuvent être intégrés dans un domaine physique plus large que l'on nomme théorie de la transformation. Le terme transformation fait référence à une déformation des coordonnées de l'espace. Cette déformation de l'espace est employée afin de reproduire la propagation d'une onde dans un espace virtuel. Elle est reproduite dans l'espace réel par une modification locale des propriétés du matériau comme l'indice de réfraction. Dans le cas du Maxwell fisheye le milieu réel est le plan équatorial où l'indice de réfraction dépend de la position et le milieu virtuel est la surface d'une sphère d'indice constant.

Cette méthode est basée sur le fait que les équations de Maxwell (pour l'électromagnétisme) sont invariantes par déformation de l'espace. Cette propriété est à l'origine de nombreux travaux

concernant la cape d'invisibilité [126, 67] ou le tapis d'invisibilité [127, 128] appliqués aux ondes électromagnétiques. L'application des techniques de transformation aux ondes élastiques débute par les travaux de l'équipe de Graeme Milton [129]. Un article de revue publié en 2010 par l'équipe de Che Ting Chan reprend en détails l'application des théories de la transformation aux équations d'ondes acoustiques et élastiques [130].

La nature vectorielle des ondes élastiques dans les solides ne permet pas d'obtenir une équation invariante par transformation de l'espace [129]. Le cas spécifique des ondes de flexions dans les plaques minces est abordé par Mohamed Farhat, Sébastien Guenneau, Stefan Enoch et Alexander Movchan en 2009 [131]. Dans l'approximation basse fréquence (longueur d'onde grande devant l'épaisseur), la théorie de Kirchhoff-Love permet de décrire la propagation des ondes de flexion par une équation bi-harmonique [1]. Ces travaux démontrent l'invariance de l'équation bi-harmonique par transformation de l'espace. La suite de l'article [131] aborde la fabrication d'une cape d'invisibilité à partir d'un système mécanique où le module d'Young est anisotrope et la masse volumique ne varie que selon le rayon. La validation expérimentale de ces travaux est réalisée en 2012 par l'équipe de Martin Wegener [132] au sein d'une plaque fine structurée en polychlorure de vinyle (PVC) et polydiméthylsiloxane (PDMS).

7.1.2 Réintroduction du Maxwell fisheye

En 2009, Ulf Leonhardt publie des travaux théoriques et numériques concernant la capacité de super focalisation du Maxwell fisheye [133]. La première partie de l'article présente l'historique et la conception d'un Maxwell fisheye de dimensions finies. La figure 7.1a présente un schéma géométrique correspondant à la projection stéréographique de la surface d'une sphère sur un plan équatorial. Ce schéma permet de comprendre le lien entre la projection stéréographique et la modulation spatiale de l'indice de réfraction.

La première étape est la projection d'un élément de la surface de la sphère sur le plan équatorial. Le cône représenté sur la figure 7.1a réalise la projection du cercle rouge à la surface de la sphère sur le plan équatorial. Le ratio des périmètres des cercles obtenus $\frac{\mathcal{C}_{sphere}}{\mathcal{C}_{plan}}$ donne l'indice de réfraction à implémenter dans le plan équatorial. Cette méthode permet de distinguer deux domaines du plan équatorial : la partie intérieure de la sphère et la partie extérieure de la sphère.

On considère la projection de la surface d'une sphère d'indice n_1 . L'hémisphère nord se projette sur la totalité de la partie extérieure. La projection des éléments de la sphère donne un contour plus long que celui présenté sur la sphère. L'indice de réfraction dans le plan va donc prendre une valeur $n(r)$ inférieure à n_1 à l'extérieur de la sphère. À l'inverse, la projection d'un élément de l'hémisphère sud de la sphère donne un cercle projeté sur le plan plus petit que celui observé sur la surface de la sphère. L'indice de réfraction dans le plan équatorial va donc prendre une valeur $n(r)$ supérieure à n_1 à l'intérieur de la sphère.

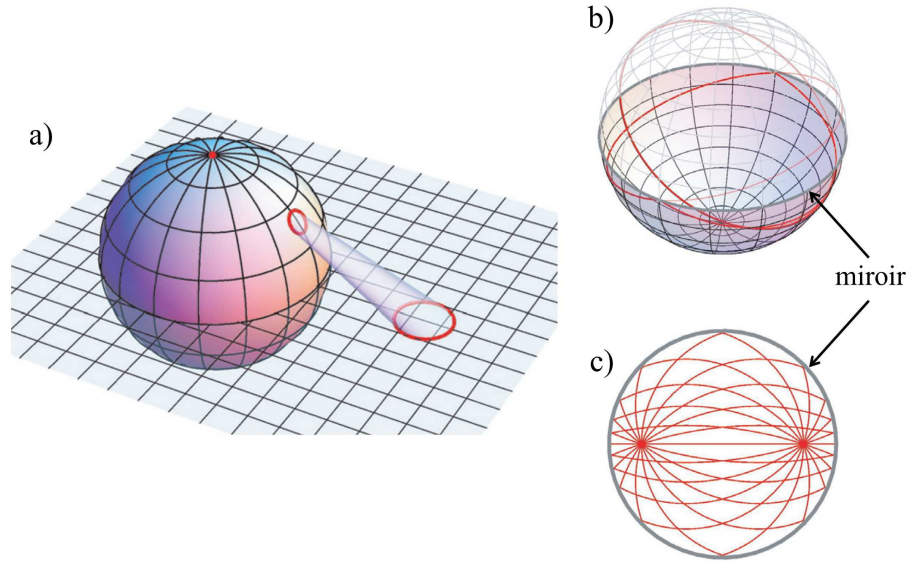


Figure 7.1 – a) Représentation schématique de la projection stéréographique. On modifie localement l'indice de réfraction dans le plan équatorial afin de reproduire la surface de la sphère sur ce plan. Le ratio des périmètres $\frac{\mathcal{C}_{sphere}}{\mathcal{C}_{plan}}$ des éléments projetés indique l'indice de réfraction à utiliser dans le plan. b) Tracé de rayon à la surface d'une sphère dans le cas où un miroir est placé au niveau de l'équateur de la sphère. Les rayons ne parcourent plus que l'hémisphère sud de la surface de la sphère. c) Tracé de rayon après projection stéréographique de l'hémisphère sud sur le plan équatorial. Ce plan équatorial possède le même rayon que la sphère mais l'indice de réfraction dépend de la position. Il est également borné par un miroir. Extrait de [133]

En poursuivant l'analyse géométrique, le théorème de Thalès nous montre que la projection du pôle sud sur le plan équatorial donne un indice $n(0) = 2n_1$. A l'inverse, un élément infinitésimal situé au pôle nord de la sphère est projeté à l'infini, entraînant un indice de réfraction dont la limite à l'infini est nulle. Cet indice nul entraîne une vitesse de propagation infinie de la lumière difficilement réalisable.

U. Leonhardt propose alors l'idée suivante : Les rayons lumineux ne se propagent que dans l'hémisphère sud de la sphère. Cette étape consiste à placer un miroir au niveau de l'équateur de la sphère. La figure 7.1b présente le tracé de rayon sur l'hémisphère sud d'une sphère dans le cas où un miroir est positionné sur l'équateur. Les rayons forment désormais des arcs de cercles mais leur coïncidence en un point image est toujours garantie. La figure 7.1c présente le tracé de rayons équivalent dans l'espace réel où l'indice est localement modulé, après la projection stéréographique de la demi-sphère. L'avantage de cette structure que l'on appellera "Maxwell fisheye miroir" est qu'elle ne nécessite plus d'indice de réfraction inférieur à celui de la sphère initiale et possède une taille finie.

Le système réel se construit de la façon suivante : le domaine circulaire est entouré par un miroir, la variation d'indice à l'intérieur du système est donnée par l'équation 7.2 avec a le rayon du

système et $n_1 = n(a)$ l'indice de réfraction en $r = a$. Le rayon r étant compris entre 0 et a .

$$n(r) = 2n_1 \frac{a^2}{a^2 + r^2} \quad (7.2)$$

Dans son article, U. Leonhardt insiste sur la faible modulation d'indice de réfraction nécessaire $\frac{n(0)}{n(a)} = 2$ qui est réalisable aux fréquences optiques pour certains matériaux semi-conducteurs [133].

7.1.3 Réalisations expérimentales

Suite à ces travaux, plusieurs groupes se sont intéressés à la fabrication de systèmes à gradient d'indice tel que le Maxwell fisheye. En 2011, l'équipe de U. Leonhardt réalise le système fisheye miroir pour les ondes électromagnétiques dans la gamme du GHz [134]. La conception du fisheye fait intervenir 3 diélectriques différents afin de produire une version discrète (19 niveaux) de la variation d'indice de réfraction (7.2). La figure 7.2a présente une photographie du système final. La figure 7.2b représente la distribution du champ électrique au sein du système fisheye miroir. Les deux pics correspondent au point source et au point focal pour une fréquence d'excitation monochromatique de 10GHz.

L'équipe de Daniel Mittleman réalise expérimentalement un Maxwell fisheye pour les ondes électromagnétiques dans la gamme du THz [135]. Le système se compose d'un guide d'onde métallique dont la hauteur varie en fonction du rayon afin de reproduire la variation de l'indice de phase du 1er mode transverse électrique (7.2).

Les ondes électromagnétiques représentent le domaine d'application le plus important pour les systèmes à gradient d'indice tels que le fisheye. Un article publié en 2012 par l'équipe de Paul Kinsler montre la réalisation d'un système fisheye miroir pour les ondes à la surface de l'eau [136]. Le gradient d'indice est imposé par une modification de la profondeur du bassin utilisé. La vitesse de phase des ondes à la surface de l'eau est reliée à la profondeur du bassin par la relation suivante (7.3) avec g l'accélération de la pesanteur et $d(r)$ la profondeur variable du bassin.

$$v_\phi(r) = \sqrt{g \cdot d(r)} \quad (7.3)$$

Le profil $d(r)$ est obtenu à partir des équations du fisheye (7.2) et de la relation de dispersion des ondes à la surface de l'eau (7.3). La focalisation des ondes à la surface de l'eau est démontrée expérimentalement par ce système. Cette application du fisheye est une des rares applications hors du domaine des ondes électromagnétiques.

L'étude du Maxwell fisheye a permis d'apporter un regain d'intérêt expérimental et théorique sur un nombre important de systèmes à gradient d'indice tels que la lentille de Luneburg [125] ou la lentille de Eaton [139]. La lentille de Luneburg est un système circulaire capable de focaliser une

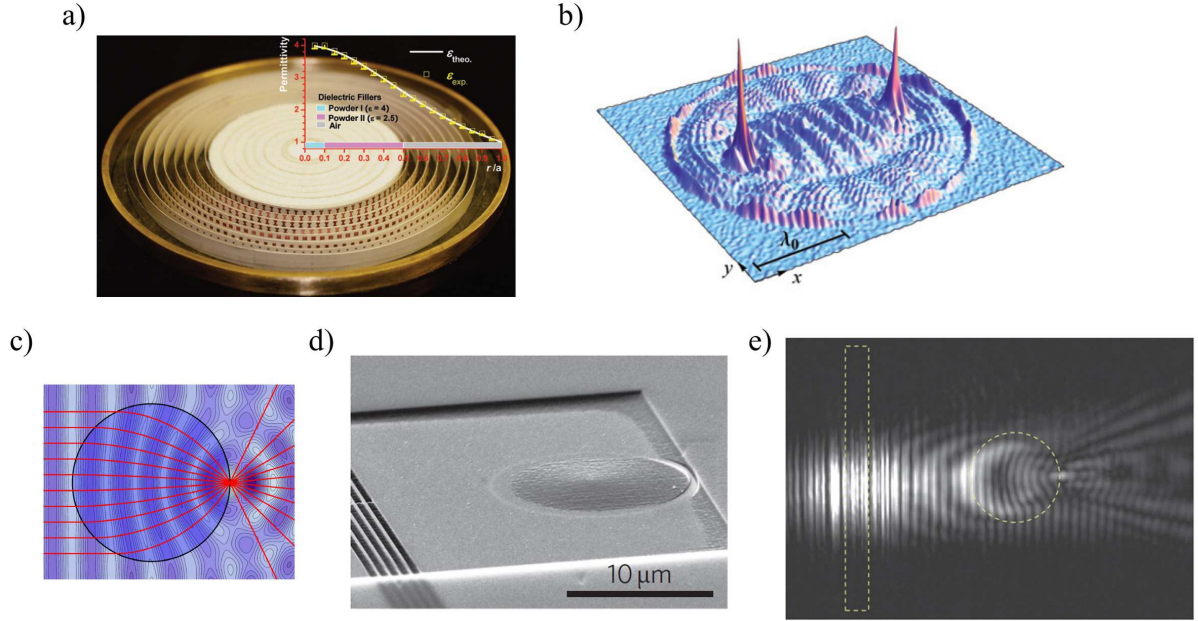


Figure 7.2 – a) Photographie du système fisheye miroir, b) Représentation de la distribution spatiale du champ électrique à $f=10\text{GHz}$ au sein du fisheye miroir. Extrait de [134]. c) Schéma du principe de la lentille de Luneburg. Extrait de [137]. d) Représentation de la lentille de Luneburg pour les plasmons de surface. e) Distribution spatiale du champ électrique pour une source à $\lambda = 800\text{nm}$. La zone pointillée donne la zone de génération des ondes plane. On remarque un point focal sur la droite de la lentille. Extrait de [138].

onde plane indépendamment de son angle d'incidence. Contrairement aux lentilles convergentes classiques sa forme circulaire est plus facilement réalisable, il est cependant nécessaire d'y faire varier l'indice de réfraction selon la loi suivante (7.4) où $n_1 = n(a)$ correspond à l'indice de réfraction en $r = a$. Le rayon r est compris entre 0 et a . Ce système ne fait pas intervenir de miroir, l'indice en dehors du cercle de rayon a est maintenu constant à la valeur $n(a)$ [125].

$$n(r) = n(a) \sqrt{2 - \left(\frac{r}{a}\right)^2} \quad (7.4)$$

La lentille de Eaton permet de dévier une onde plane d'un angle souhaité. Le gradient d'indice mis en place varie en fonction de la valeur de cet angle. La redirection d'un faisceau à angle droit nécessite la variation d'indice suivante (7.5) [139].

$$n(r)^2 = \frac{a}{nr} + \sqrt{\left(\frac{a}{nr}\right)^2 - 1} \quad (7.5)$$

L'équipe de Xiang Zhang réalise expérimentalement une lentille de Luneburg et une lentille de Eaton pour les plasmons de surface se propageant à la surface d'un substrat d'or recouvert d'un polymère [138]. La vitesse de phase des plasmons est modifiée par l'épaisseur de polymère recouvrant la couche métallique. La figure 7.2c représente le fonctionnement de la lentille de Luneburg. Les figures 7.2d,e présentent une vue au microscope électronique de la lentille réalisée

et une mesure expérimentale de la réponse de la lentille.

La lentille de Luneburg a été également réalisée expérimentalement au sein d'un guide d'onde optique en silice par l'équipe de U. Leonhardt [137]. Ces milieux à faible gradient d'indice possèdent la capacité de guider ou focaliser la lumière en réduisant la diffusion hors plan. La réduction des pertes par diffusion est un enjeu important pour la fabrication de systèmes photoniques miniatures intégrés.

7.1.4 Origine de la super résolution du Maxwell fisheye

La deuxième partie des travaux théoriques publiés par U. Leonhardt concerne la démonstration d'une super résolution au foyer image d'un Maxwell fisheye miroir [133]. Cette démonstration a alimenté un débat important. Cette section a pour but de présenter les démarches théoriques et expérimentales empruntées dans le but d'obtenir une super résolution par un Maxwell fisheye miroir.

Dans ces travaux, J.C. Maxwell décrit le fisheye comme un instrument optique absolu (rigoureusement stigmatique). Cette définition est valide en optique géométrique. Elle vient du fait que tous les rayons émis par un point source convergent vers un foyer image ponctuel. Lorsque la nature ondulatoire de la lumière est prise en compte, la construction d'un point image est le résultat d'une interférence constructive des différentes ondes convergentes. Ce phénomène d'interférence fait naître une tache focale dont la dimension dépend de la longueur d'onde utilisée. En 1873, Ernst Karl Abbe démontre l'existence d'une résolution optimale d'un microscope (7.6) avec n l'indice du matériau accueillant l'objectif et θ le demi diamètre apparent de l'objectif vu par le point focal. Cette règle s'applique à toutes les techniques d'imagerie conventionnelles.

$$d = \frac{\lambda}{2n \sin(\theta)} \quad (7.6)$$

Dans le système fisheye miroir, le point source possède un diamètre apparent de π car tous les rayons émis par le point source atteignent le foyer image. La résolution de la tache focale est donc limitée à $\frac{\lambda_0}{2n}$. λ_0 est la longueur d'onde associée à la fréquence d'excitation f_0 dans un milieu d'indice égal à 1. La longueur d'onde en tout point du fisheye est donnée par la relation suivante $\lambda(r) = \frac{\lambda_0}{n(r)}$. On retrouve alors la limite de résolution classique $\frac{\lambda(r)}{2}$.

Il semble surprenant que le système fisheye miroir apporte une résolution plus fine que cette limite. Nous avons vu dans la première partie de la thèse que la super résolution peut avoir de multiples origines, telles que l'amplification des ondes évanescentes par la lentille de Pendry à indice négatif [19] ou les fonctions super-oscillantes [56]. L'astuce utilisée dans les travaux numériques et expérimentaux de U. Leonhardt consiste à insérer un canal de fuite au niveau du point image. Ce point de fuite permet de collecter le champ convergent vers le point image et de l'extraire du système avant la construction des interférences. Dès lors que les interférences sont

supprimées, la résolution du système n'est plus limitée par la formule de Abbe. Cette approche rappelle les travaux menés au laboratoire par Julien De Rosny et Mathias Fink [140].

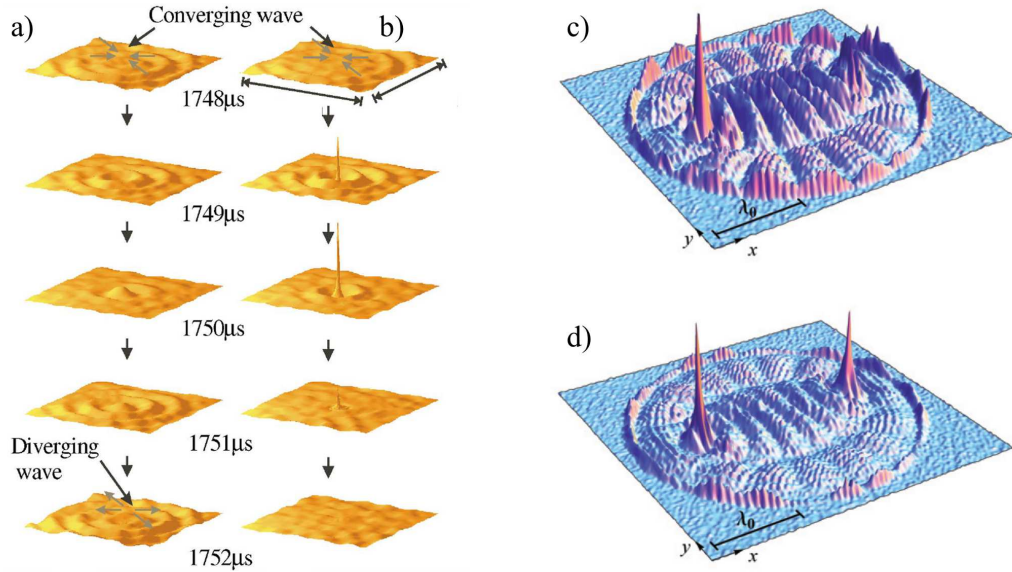


Figure 7.3 – a) Évolution temporelle de la distribution spatiale du déplacement sans terme source retourné, la résolution maximale observée est limitée par interférence des ondes convergentes et divergentes. b) Évolution temporelle de la distribution spatiale du déplacement avec ajout d'un terme source retourné, la résolution maximale observée atteint $\frac{\lambda}{14}$. Cette valeur correspond à la dimension de la pointe en contact avec la plaque. c) Représentation de la distribution spatiale du champ électrique au sein du fisheye miroir sans canal de fuite, la résolution au point image est limitée par interférence des ondes convergentes et divergentes. d) Représentation de la distribution spatiale du champ électrique au sein du fisheye miroir avec canal de fuite, la résolution au point image est limitée à la taille du point de fuite. Extrait de [134].

Ces travaux démontrent une résolution sub-longueur d'onde lors d'un processus de retournement temporel auquel on ajoute le terme source initial retourné temporellement. Comme dans le cas du fisheye miroir, le processus de retournement temporel au sein d'une cavité ergodique permet de faire converger l'ensemble des ondes émises vers leur lieu d'excitation initial. Cette coïncidence spatiale et temporelle est observée pour la première fois en 1997, pour les ondes de flexion dans une plaque fine [121]. La résolution est limitée à la limite de diffraction à cause des interférences entre les fronts d'onde qui convergent et divergent du point focal.

La résolution sub-longueur d'onde est atteinte dans les travaux de 2002 par l'ajout d'une source retournée temporellement. Cette nouvelle source permet de supprimer les ondes divergentes au moment de la focalisation. L'absence d'interférences permet alors d'obtenir une résolution en dessous de la limite de diffraction. Les figures 7.3a,b présentent le champ de déplacement vertical au cours du temps avec et sans source retournée temporellement, extrait de [140]. Les figures 7.3c,d présentent la distribution du champ électrique obtenue avec et sans canal de fuite dans le cas du fisheye miroir, extrait de [134]. Dans les deux travaux, on remarque une nette amélioration de la résolution lorsque l'on supprime la partie divergente qui apparaît habituellement lors du processus de focalisation.

7.2 Conception du fisheye pour les ondes de flexion

Ces différents travaux nous permettent d'aborder la réalisation d'un système Maxwell fisheye pour les ondes de flexion au sein d'une plaque fine de duraluminium. Ce projet est mené en collaboration avec Younes Achaoui et Sébastien Guenneau de l'Institut Fresnel.

La conception d'un système Maxwell fisheye débute par l'expression de la relation de dispersion des ondes de flexion dans une plaque fine. Cette relation de dispersion nous permet d'extraire la vitesse de phase d'une onde en fonction de la fréquence d'excitation et des paramètres du milieu. Dans le cadre de la théorie de Kirchhoff-Love, la relation de dispersion des ondes de flexion est une fonction quadratique (7.7)

$$\omega = \frac{c_P}{\sqrt{12}} h k^2 \quad (7.7)$$

avec $c_P = \sqrt{\frac{E}{\rho(1-\nu^2)}}$ où E représente le module d'Young, ρ la masse volumique, h l'épaisseur et ν le coefficient de Poisson. Cette équation nous permet d'obtenir une expression de la vitesse de phase des ondes de flexion (7.8).

$$v_\phi = \frac{\omega}{k} = \sqrt[4]{\frac{E h^2 \omega^2}{12 \rho (1 - \nu^2)}} \quad (7.8)$$

L'indice de réfraction est défini en optique car la vitesse de la lumière possède une valeur maximale. Cette définition n'existe pas pour les ondes mécaniques, en revanche on peut définir la variation de l'indice de réfraction. Cette variation de l'indice de réfraction est reliée à l'inverse la variation de la vitesse de phase par la relation suivante (7.9) pour tout r compris entre 0 et a avec a le rayon du fisheye.

$$\frac{n(r)}{n(a)} = \frac{v_\phi(a)}{v_\phi(r)} \quad (7.9)$$

7.2.1 Variation de l'épaisseur

La relation (7.8) fait intervenir les différents paramètres mécaniques du milieu tels que le module d'Young, la masse volumique et le coefficient de Poisson. Dans l'hypothèse d'une conception expérimentale, il est difficile d'envisager une variation d'un seul de ces paramètres mécaniques indépendamment des deux autres. En revanche, la modulation de l'épaisseur de la plaque est accessible et indépendante du matériau utilisé. Nous allons donc modifier localement l'épaisseur d'une plaque homogène afin de reproduire la variation de vitesse de phase nécessaire à la fabrication du Maxwell fisheye. La relation (7.8) nous permet d'exprimer la variation de la vitesse de

phase en fonction de la variation d'épaisseur de la plaque.

$$\frac{n(r)}{n(a)} = \frac{v_\phi(a)}{v_\phi(r)} = \sqrt{\frac{h(a)}{h(r)}} \quad (7.10)$$

En remplaçant le terme $\frac{n(r)}{n(a)}$ par la formule du Maxwell fisheye (7.11), on obtient la variation d'épaisseur de plaque en fonction de la position r et du rayon du système a .

$$\frac{n(r)}{n(a)} = 2 \frac{a^2}{a^2 + r^2} \quad (7.11)$$

$$h(r) = \left(1 + \left(\frac{r}{a}\right)^2\right)^2 \frac{h(a)}{4} \quad (7.12)$$

La fabrication d'un système où l'épaisseur varie continument selon le rayon est complexe. Il est nécessaire de discrétiser la fonction (7.12). Afin d'éviter des précisions d'usinage trop fines, nous avons décidé de ne pas échantillonner la variable r mais directement la fonction $h(r)$. Pour une plaque initiale d'épaisseur 2mm, les épaisseurs utilisées sont comprises entre $h(0) = 0,5mm$ et $h(a) = 2mm$ pour $a=100mm$. La fonction $h(r)$ est échantillonnée en 16 pas de 0,1mm. Les rayons extérieurs de chacun des domaines s'expriment alors par la relation suivante (7.13) avec $h(a) = 2mm$ et $a = 100mm$.

$$r(h) = a \sqrt{\sqrt{\frac{4h}{h(a)}} - 1} \quad (7.13)$$

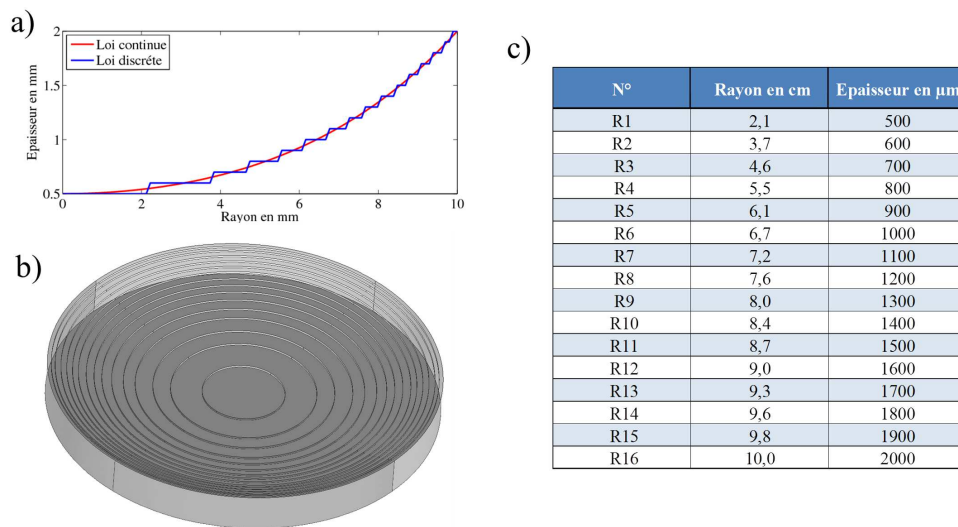


Figure 7.4 – a) Représentation du profil continu et du profil discrétisé en 16 niveaux d'épaisseur allant de $500\mu m$ à $2000\mu m$ par pas de $100\mu m$. b) Représentation schématisée du système réalisé. Attention, l'axe Z est agrandi 10 fois. c) Tableau récapitulatif des valeurs des rayons de chaque anneau.

La figure 7.4a présente la discrétisation réalisée grâce à la formule (7.13). La figure 7.4b présente une vue schématique de la structure. L'axe vertical est agrandi 10 fois afin d'apprécier la variation d'épaisseur. La figure 7.4c présente un tableau des rayons des différents anneaux et des épaisseurs concernées.

La première validation numérique est réalisée pour un Maxwell fisheye miroir dans une plaque de duraluminium. On ajoute des conditions rigides aux frontières extérieures du système présenté dans la figure 7.4b. Les résultats numériques obtenus par simulation FDTD sont présentés dans la figure 7.5 pour un pulse gaussien d'une durée de $200\mu s$ centrée en $f_0 = 30kHz$. La figure 7.5a présente le champ de vitesse verticale de déplacement pendant l'émission du pulse, au temps $t=110\mu s$. La figure 7.5b présente le champ de vitesse verticale déplacement au cours de la focalisation, au temps $t=330\mu s$. Les fronts d'onde reformés lors de la focalisation sont cylindriques et semblables à ceux observés lors de l'émission. Cette similarité nous permet d'apprécier le bon fonctionnement du système et la validité de la démarche.

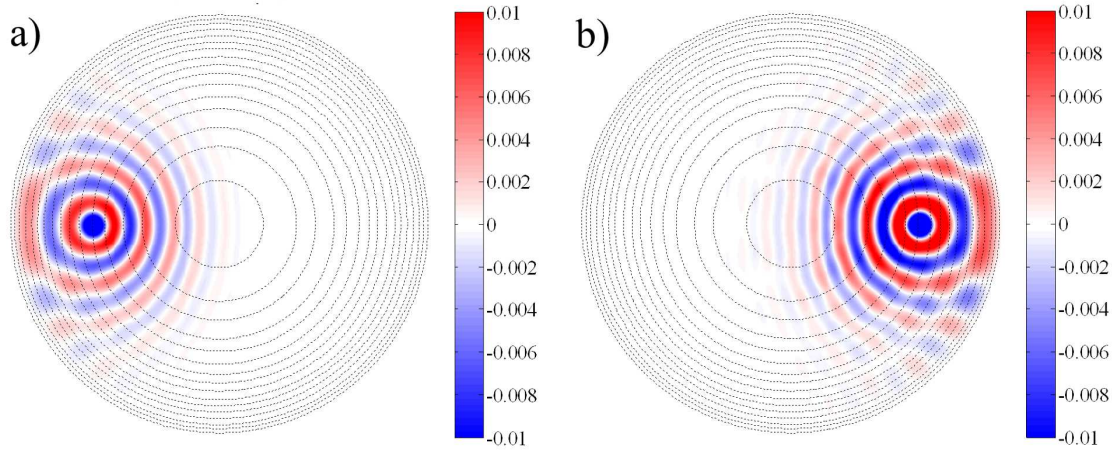


Figure 7.5 – a) Distribution spatiale de la vitesse verticale de déplacement au temps $t=110\mu s$. b) Distribution spatiale de la vitesse verticale de déplacement au temps $t=330\mu s$. Les pointillés noirs permettent de visualiser les anneaux successifs. Les frontières du domaine sont rigides.

7.3 Validation expérimentale

7.3.1 Conception d'un Maxwell fisheye ouvert

Cette section aborde le cas d'un système Maxwell fisheye ouvert. Le Maxwell fisheye est inclus dans une plaque homogène d'épaisseur constante $h(r) = h(a)$ pour $r > a$. Dans ce cas précis, seuls les points en $r = a$ possèdent un point focal diamétralement opposé. La figure 7.6 présente la plaque usinée aux ateliers Coreti, Gardanne (Bouches-du-Rhône). La variation d'épaisseur réalisée correspond à celle présentée dans la figure 7.4. Une couche de pâte adhésive est déposée entre la plaque et le cadre afin d'absorber une partie des ondes de flexion incidentes. La mesure optique de la vitesse de déplacement est réalisée sur l'autre face de la plaque.

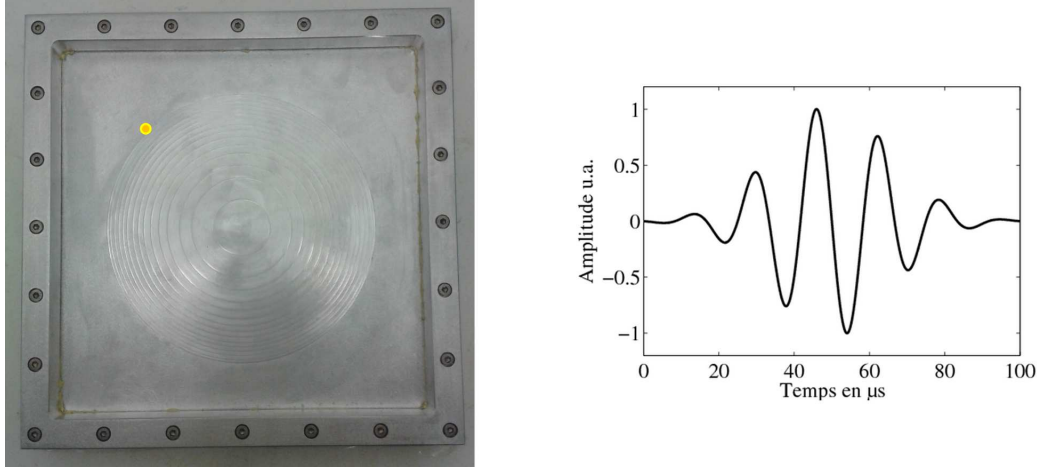


Figure 7.6 – Photographie de la plaque usinée, le cadre nous permet d'exercer une pression entre la plaque et la pâte adhésive afin d'améliorer l'absorption des ondes de flexion aux bords du système. Le point jaune indique la position du point source. La figure de droite présente le pulse source utilisé, il s'agit d'un pulse gaussien centré en $f_0=60\text{kHz}$ d'une durée de $100\mu s$ correspondant à une bande passante de 25kHz .

La mesure de la vitesse verticale de déplacement est réalisée avec un vibromètre Laser. L'acquisition est réalisée point par point avec un échantillonnage spatial de 1mm . Le montage expérimental permet un échantillonnage temporel de $2\mu s$. On observe la propagation des ondes de flexion au cours du temps dans le Maxwell fisheye ouvert. La génération des ondes de flexion est réalisée par une pastille piézoélectrique fixée à la plaque par un sel de salol. Le signal source utilisé est représenté dans la figure 7.6. Il s'agit d'un pulse gaussien centré en $f_0=60\text{kHz}$ d'une durée de $100\mu s$, soit un spectre de largeur à mi hauteur de 25kHz . La figure 7.7 présente le champ de vitesse de déplacement vertical à $t=56\mu s$ pendant l'émission du pulse source et à $t=226\mu s$ pendant la focalisation. Ces représentations nous permettent d'apprécier l'efficacité du Maxwell fisheye ouvert réalisé.

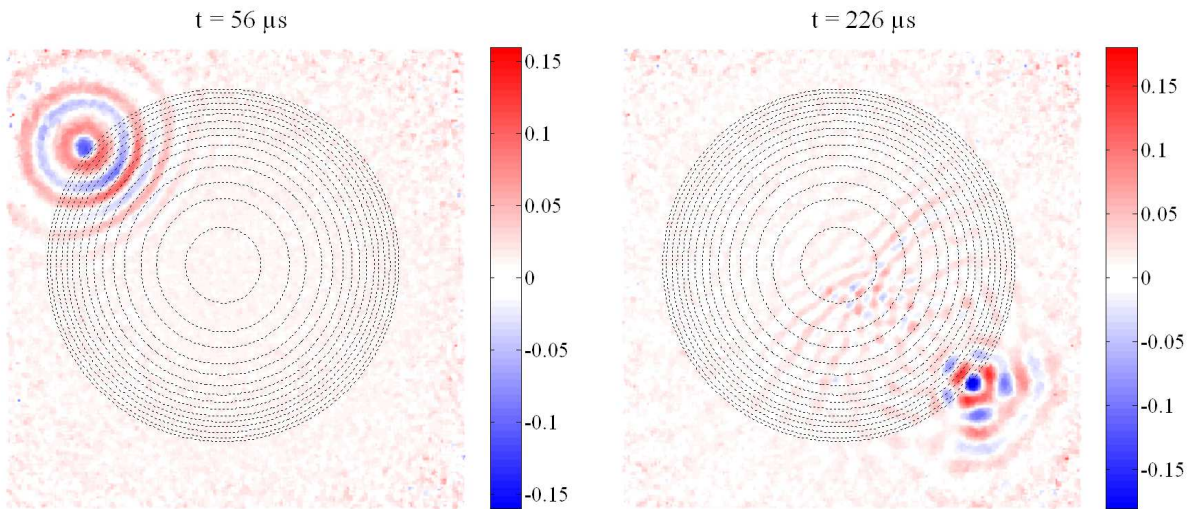


Figure 7.7 – Représentation du champ de vitesse de déplacement vertical mesuré à $t=56\mu s$ pendant l'émission du pulse source et à $t=226\mu s$ pendant la focalisation.

L'utilisation d'un pulse court nous permet de confirmer l'efficacité large bande du système. On a vu que la variation d'épaisseur dans la plaque est indépendante de la fréquence centrale du pulse utilisé. Toutes les fréquences contenues dans le spectre d'émission (largeur à mi hauteur = 25kHz) sont focalisés au point diamétralement opposé à la source. On remarque également que la position du point focal est identique pour les deux fréquences centrales.

7.3.2 Étude temporelle de la focalisation

Afin d'approfondir l'étude de l'aspect large bande, nous allons réaliser une expérience similaire pour un pulse d'une fréquence centrale $f_0=30\text{kHz}$. La figure 7.8 présente les cartes de vitesse de déplacement vertical obtenue expérimentalement au temps $t=58\mu\text{s}$ pendant l'émission du pulse source et à $t=300\mu\text{s}$ pendant la focalisation. On remarque que la focalisation par une lentille Maxwell fisheye ouverte est toujours efficace pour une fréquence plus faible.

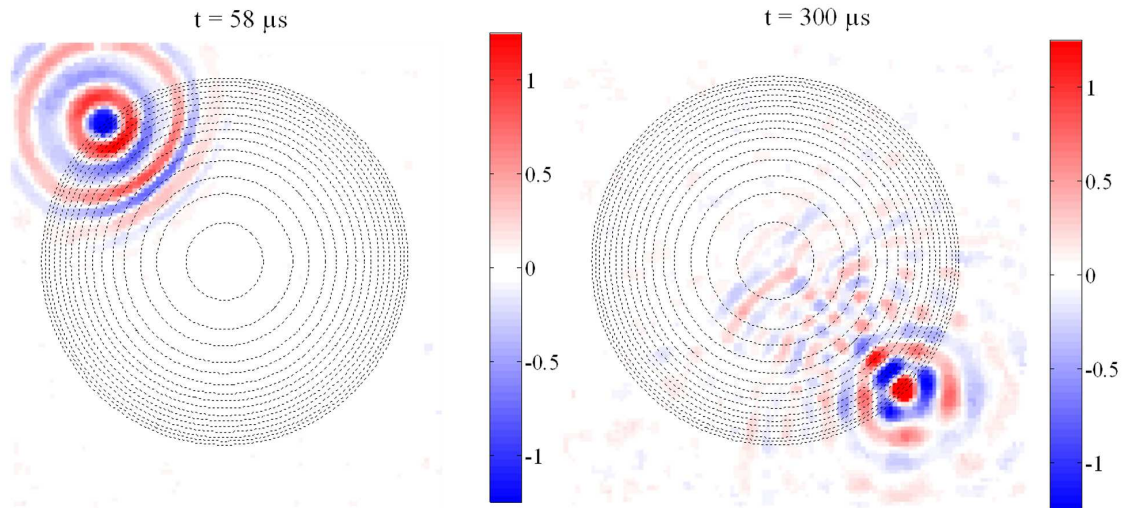


Figure 7.8 – Représentation du champ de vitesse de déplacement vertical pour un pulse gaussien centré en $f_0=30\text{kHz}$, mesuré à $t=58\mu\text{s}$ pendant l'émission du pulse source et à $t=300\mu\text{s}$ pendant la focalisation.

On peut noter que la focalisation n'arrive pas au même temps pour des fréquences centrales différentes : $t_{focal}=226\mu\text{s}$ pour $f_0=60\text{kHz}$ et $t_{focal}=300\mu\text{s}$ pour $f_0=30\text{kHz}$. Le système Maxwell fisheye impose un tracé de rayon identique quelle que soit la fréquence utilisée. En revanche, la nature dispersive des ondes de flexion est toujours présente. Les vitesses de groupe des différentes fréquences ne sont pas identiques. Le délai entre l'émission et la focalisation va donc évoluer en fonction de la fréquence.

Cette dispersion se manifeste si l'on regarde la vitesse de déplacement vertical au cours du temps en un point. La figure 7.9 présente l'évolution temporelle de la vitesse verticale de déplacement au niveau du point source et au niveau du point focal avec un pulse gaussien centré en 60kHz. La qualité dispersive du milieu est visible dans l'allure du signal au niveau du point focal. On

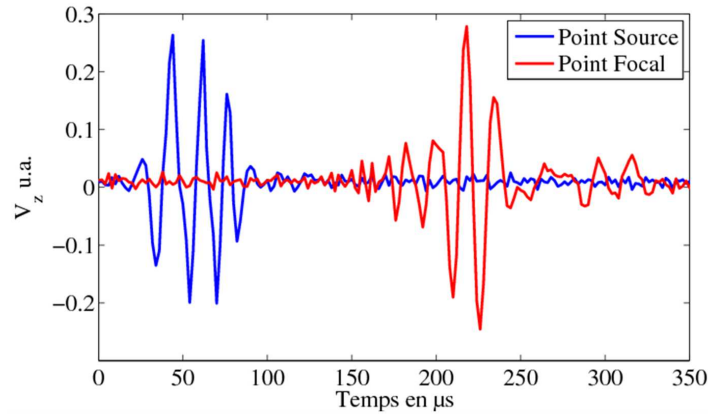


Figure 7.9 – Champ de vitesse de déplacement vertical en fonction du temps pour un pulse gaussien centré en $f_0=60\text{kHz}$. Le signal est pris : au point source (tracé en bleu) et au point focal (tracé en rouge).

remarque que les hautes fréquences contenues dans le pulse initial atteignent plus rapidement le point focal. On observe alors une modulation linéaire de la fréquence instantanée du signal au niveau du point focal. Ce type de signal est communément appelé signal Chirp.

7.4 Conclusion et perspectives

Ce chapitre aborde l'application des techniques de transformations d'équation au cas des ondes de flexion dans les plaques. La première démonstration concerne la réalisation d'un Maxwell fisheye pour les ondes de flexion. La modulation de la vitesse de phase nécessaire est réalisée par une modulation locale de l'épaisseur de la plaque.

La première partie du chapitre est consacrée aux aspects théoriques liés à ce système particulier. Nous avons voulu inclure ces systèmes à gradient d'indice dans une thématique d'actualité : la théorie de la transformation.

La deuxième partie du chapitre présente l'application du Maxwell fisheye aux ondes de flexion. L'épaisseur de la plaque se révèle être un levier avantageux pour la modulation de la vitesse de phase des ondes de flexion.

La dernière partie du chapitre présente les propriétés expérimentales du Maxwell fisheye dans sa configuration "ouverte". La maîtrise de la génération et de la détection optique des ondes de flexion permettent une démonstration expérimentale aisée. La focalisation spatiale et temporelle des ondes de flexion par un Maxwell fisheye est démontrée.

Devant la maniabilité de ce montage expérimental, un grand nombre de perspectives sont envisagées. La première sera la possibilité d'installer une frontière rigide autour du Maxwell fisheye afin d'étudier la focalisation des ondes de flexion par un Maxwell fisheye miroir.

Nous envisageons de placer un puits élastique pour les ondes de flexion au niveau du point focal afin d'obtenir une super focalisation des ondes de flexion. Cette approche combine l'utilisation du Maxwell fisheye et l'introduction d'une source secondaire au niveau du point focal.

Nous envisageons également l'application aux ondes de flexion de plusieurs systèmes à gradient d'indice tel que la lentille de Luneburg ou le tapis d'invisibilité.

Chapitre 8

Mécanisme universel pour la localisation d'ondes

Table des matières

8.1	Introduction	158
	Construction de la fonction paysage	158
	Lien entre paysage et localisation	159
	Apparition des modes étendus	160
8.1.1	Application aux ondes classiques	160
	Cas des ondes élastiques	161
8.2	Validation expérimentale	162
8.3	Vers une ingénierie de la localisation	163
	Définition du problème inverse	164
8.3.1	Réalisation pratique	164
8.3.2	Résultats expérimentaux	165
	Profondeur du paysage	168
8.4	Conclusion et perspectives	169

8.1 Introduction

Ce chapitre aborde une nouvelle approche concernant la localisation des ondes dans les systèmes complexes. Ces travaux sont menés en collaboration avec Marcel Filoche, du laboratoire PMC de l'École Polytechnique et Svitlana Mayboroda, de l'université de Minnesota. Les travaux numériques et expérimentaux que l'on va aborder dans ce chapitre sont initiés par deux de leurs articles [141, 142]. Les travaux publiés en 2009 dans la revue *Physical Review Letters* démontrent numériquement l'existence de modes propres de flexion localisés dans une plaque fine rectangulaire à bords rigides au sein de laquelle on impose une condition rigide en un seul point à l'intérieur du domaine. La localisation des modes propres de flexion se fait alors de part et d'autre de ce point où le déplacement est annulé. L'article présente les conditions nécessaires à l'obtention de ces modes localisés en fonction de la position du point clampé et du rapport d'aspect du rectangle. Les travaux publiés en 2012 dans la revue *PNAS* se consacrent à la démonstration théorique de ce phénomène pour des systèmes plus complexes. Ces travaux novateurs proposent une nouvelle approche universelle capable de prédire l'existence de modes localisés ainsi que leurs positions dans le système à partir d'une fonction appelée "paysage de localisation".

Construction de la fonction paysage

Le point central de la théorie, développée par Marcel Filoche et Svitlana Mayboroda, se situe dans la construction du "paysage de localisation". Cette fonction est unique pour un système donné et ne dépend que des variables de l'espace. Elle est solution de l'opérateur différentiel du système auquel on impose un terme source uniforme dans l'espace et constant dans le temps. Les minima locaux de cette fonction forment un réseau de "vallées" indiquant les lieux de localisation des modes propres. La première partie de l'article [142] présente un exemple de calcul et d'application de cette fonction paysage pour les fonctions d'ondes électroniques.

On étudie les états propres d'une cavité 2D carrée fermée qui a été discrétisée en 400 sous-domaines réguliers (20x20). Un potentiel aléatoire V est appliqué en chacun de ces sous-domaines. la figure 8.1a présente le tirage aléatoire du potentiel V . Deux calculs sont effectués sur ce système : la diagonalisation de l'Hamiltonien $(-\Delta + V)$ qui permet d'obtenir les états propres $\psi(\vec{x})$ du système (8.1) et la résolution du même problème avec un second terme constant et

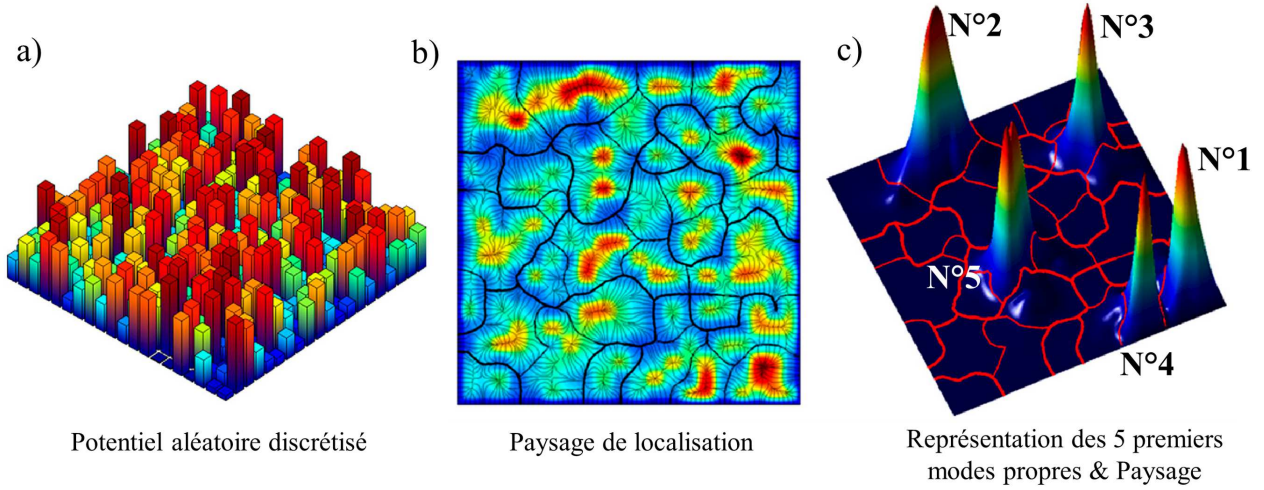


Figure 8.1 – a) Représentation du potentiel aléatoire $V(\vec{x})$. b) Représentation de la fonction paysage $u(\vec{x})$, les vallées sont construites par connexion des minima du paysage, elles sont tracées en noir. c) Représentation des 5 premiers états propres du système classés par ordre d'énergie croissante. Le réseau de vallées est superposé en rouge. Extrait de [142].

uniforme qui nous donne $u(\vec{x})$, la fonction paysage (8.2).

$$(-\Delta + V)\psi = E\psi \text{ avec } \psi|_{\partial\Omega} = 0 \quad (8.1)$$

$$(-\Delta + V)u = 1 \text{ avec } u|_{\partial\Omega} = 0 \quad (8.2)$$

La figure 8.1b présente la fonction $u(\vec{x})$ obtenue par la résolution de l'équation (8.2). On remarque que cette fonction présente un réseau continu de minima locaux tracés en traits noirs. Ce réseau est appelé le réseau de "vallées", il partage le système initial en sous-domaines séparés par une valeur minimale de la fonction paysage. La figure 8.1c présente une carte comprenant les 5 premiers états propres $\psi(\vec{x})$ classés par ordre d'énergie croissante (1 pic par mode). On remarque que ces états propres sont localisés et respectent précisément les délimitations formées par le réseau de vallées représenté en rouge.

Lien entre paysage et localisation

Le lien entre la localisation des états propres du système et la fonction paysage est déterminé par l'inégalité suivante (8.3) où E est l'énergie propre associée à l'état propre $\psi(\vec{x})$. La démonstration mathématique de cette inégalité est présentée dans l'appendice de l'article [142]. Cette relation est valable pour les états propres ψ en tout point $\vec{x}$ du domaine.

$$|\psi(\vec{x})| \leq Eu(\vec{x}) \quad (8.3)$$

Cette équation se traduit par le fait que les états propres $\psi(\vec{x})$ possèdent des amplitudes faibles quand la fonction $u(\vec{x})$ est proche d'un minimum. Les sous-domaines irréguliers délimités par le

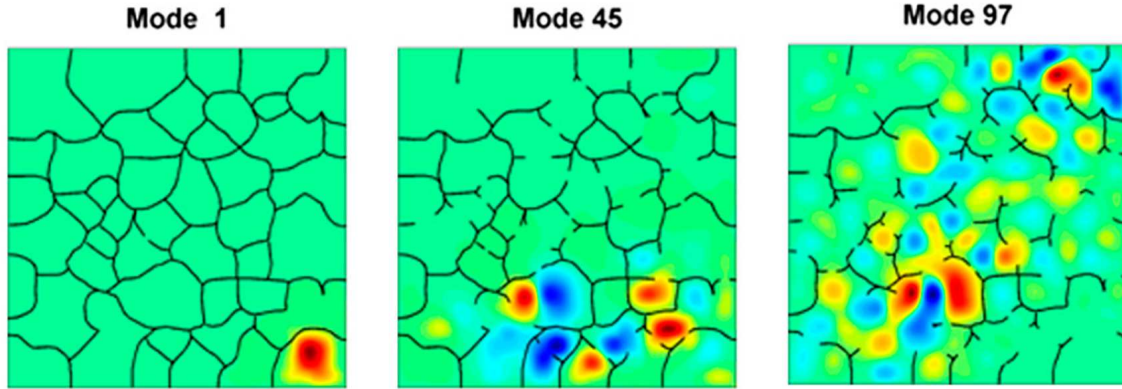


Figure 8.2 – Représentation des modes numérotés 1, 45 et 97 calculés sur le système désordonné, classés par ordre d'énergie croissante. On représente en trait noir le réseau de vallées effectif correspondant à l'énergie du mode considéré. Extrait de [142].

réseau de vallées vont alors se comporter comme des domaines quasi-indépendants possédant des niveaux d'énergies discrets.

La figure 8.2 présente le premier état propre qui est localisé dans le coin inférieur droit. L'inégalité (8.3) oblige le mode à prendre une valeur faible au voisinage de la frontière définie par le réseau de vallées tracé en noir. En revanche, l'inégalité ne garantit pas la diminution de l'amplitude de $\psi(\vec{x})$ dans les deux sous-domaines adjacents. Cette localisation s'explique par la différence des niveaux d'énergie discrets entre sous-domaines adjacents. Le mode 1 possède une énergie propre qui ne correspond pas aux niveaux discrets des sous-domaines adjacents. Par conséquent, ce mode reste confiné par la fonction paysage.

Apparition des modes étendus

La séparation des sous-domaines par le réseau de vallées va se réduire à mesure que l'énergie E des états propres successifs va augmenter. On remarque que la contrainte imposée par la fonction $Eu(\vec{x})$ va diminuer lorsque $u(\vec{x})$ devient grand devant $\frac{1}{E}$. La figure 8.2 présente trois états propres d'énergie croissante. On représente également le réseau de vallées effectif $Eu(\vec{x})$ à l'énergie considérée. On remarque que le réseau de vallées s'ouvre au fur et à mesure que l'énergie E augmente. L'apparition de modes étendus sur le système correspond alors à la disparition progressive des frontières formées par la fonction paysage initiale.

8.1.1 Application aux ondes classiques

Le calcul de la fonction paysage représente une approche universelle pour la localisation des ondes quantiques ou classiques. Il est cependant nécessaire de posséder un système dont les paramètres ne varient pas en fonction de la fréquence. La fonction paysage est calculée de façon identique

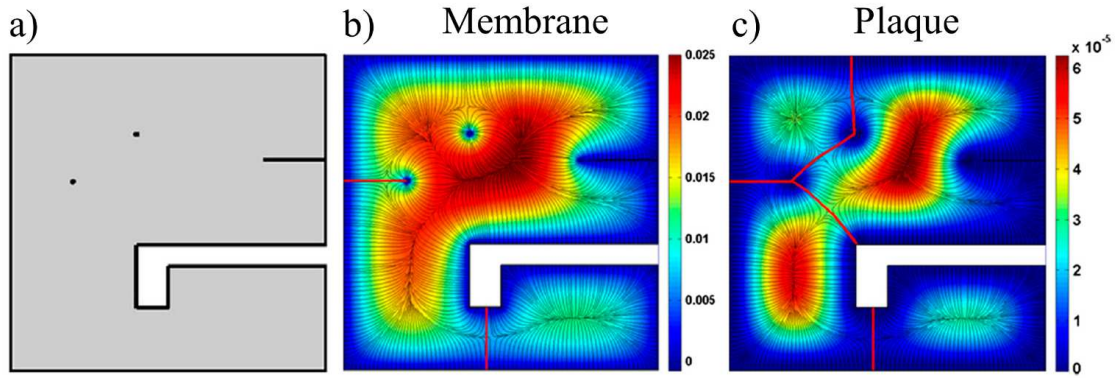


Figure 8.3 – a) Représentation des frontières du système étudié. Le contour et les points tracés en noir sont des points fixes, le déplacement vertical y est nul. b) Carte de paysage obtenue pour un opérateur Laplacien (cas des membranes). Le tracé en rouge correspond au réseau de vallées. c) Carte de paysage obtenue pour un opérateur bi-Laplacien (cas des plaques). Le réseau de vallée permet de séparer le système en 4 sous-domaines. Extrait de [142].

(8.2) en remplaçant l'Hamiltonien $(-\Delta + V)$ par un opérateur classique. La fonction paysage possède alors les mêmes propriétés que celles présentées dans la section précédente.

Cas des ondes élastiques

La première application de cette théorie aux ondes classiques proposée dans l'article [142] est réalisée pour les ondes élastiques dans une structure à deux dimensions. La démonstration numérique est menée en parallèle pour un modèle de membrane et d'un modèle de plaque. Le cas des membranes fait intervenir un opérateur Laplacien Δ , tandis que le modèle de plaque sous l'hypothèse de Kirchhoff fait intervenir un bi-Laplacien Δ^2 . La différence entre les opérateurs utilisés va influencer la fonction paysage et les propriétés de localisation des modes propres.

Le système étudié est présenté dans la figure 8.3a, il s'agit d'un domaine 2D borné par des conditions rigides. Les points et la ligne, représentés en noir, situés dans le domaine sont également rigides. Les cartes 8.3b et 8.3c donnent la fonction paysage calculée à partir du même système pour chacun des opérateurs.

On remarque que le paysage obtenu dans le cas du modèle de membrane permet uniquement le tracé de deux vallées (en rouge) dont une seule réalise une véritable séparation du domaine total en sous-domaines indépendants. Dans le cas du modèle de plaque, la profondeur des vallées obtenues par les points fixes est plus prononcée. Il est désormais possible de découper le système total en 4 sous-domaines.

La figure 8.4 présente les premiers modes propres de vibration calculés pour les deux modèles. Ils sont classés par ordre de fréquence croissante. Cette figure permet d'apprécier le rôle déterminant de la fonction paysage. Les modes propres calculés dans le cas d'un modèle de membrane sont situés dans les deux sous-domaines séparés par la fonction paysage. Les modes propres obtenus

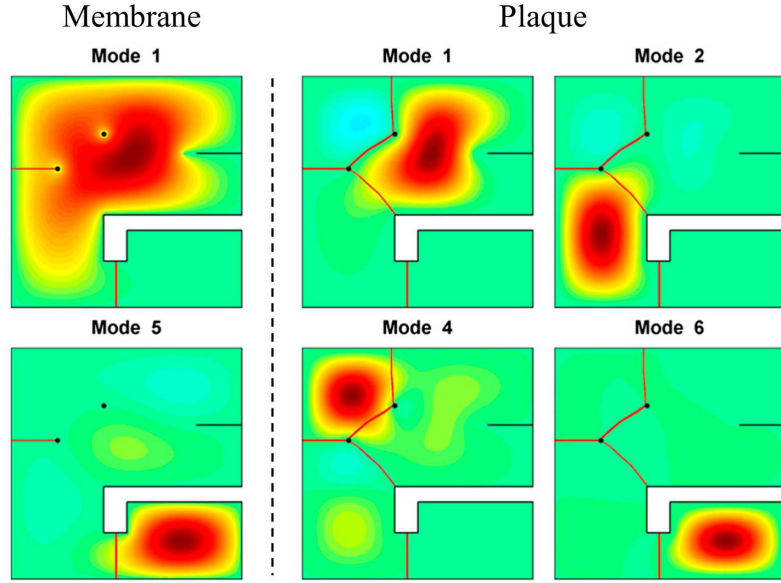


Figure 8.4 – Représentation des premiers modes calculés pour les deux modèles. Sur la gauche de la figure le modèle de membrane, sur la droite de la figure le modèle de plaque. Le réseau de vallées est superposé en rouge aux cartes de modes. Extrait de [142].

par le modèle de plaque se situent bien dans les quatre sous-domaines indiqués par le réseau de vallées. Le cas des ondes élastiques permet également de donner une signification physique à la fonction paysage. Cette fonction correspond à la déformation du système soumis à une pression statique. La pression statique correspond au terme source uniforme et constant présent dans l'équation (8.4).

$$\Delta^2 u = 1 \text{ avec } u|_{\partial\Omega} = 0 \quad (8.4)$$

8.2 Validation expérimentale

Les travaux menés à l'Institut Langevin en collaboration avec Michael Atlan apportent une validation expérimentale des travaux exposés dans la section précédente. Nous avons décidé de reproduire le système présentés dans la figure 8.3a au sein d'une plaque fine en duraluminium. Il est cependant plus difficile de réaliser un cadre respectant les motifs présentés. Nous avons décidé d'utiliser un bloc d'Aluminium de 5mm d'épaisseur et de l'évider jusqu'à obtenir une plaque de $500\mu\text{m}$ au fond du massif. Les dimensions du massif total sont $60 \times 60 \times 5\text{mm}$, la plaque gravée à l'intérieur mesure $40 \times 40 \times 0.5\text{mm}$. La figure 8.5 présente sur la gauche un schéma et une photo du système réalisé au laboratoire. Nous nous intéresserons à la localisation des modes au sein de la partie "goulot de bouteille" située dans le coin inférieur droit de la plaque.

Le montage expérimental utilisé est différent de l'interféromètre hétérodyne employé dans les chapitres précédents. Cette technique d'holographie hétérodyne mise au point par Michael Atlan

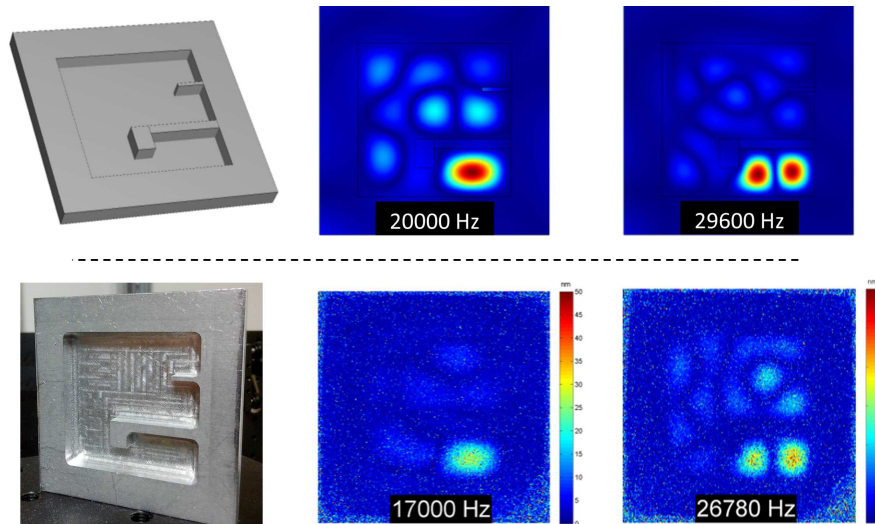


Figure 8.5 – Représentation de l’amplitude de déplacement vertical des résultats numériques et expérimentaux pour les systèmes présentés sur gauche la figure. La mesure expérimentale est réalisée par holographie hétérodyne tandis que les simulations sont effectuées par une méthode aux éléments finis. Les fréquences propres sont indiquées sur les cartes.

permet une mesure du champ de déplacement vertical harmonique sur la totalité du système [16]. Il n’est plus nécessaire de faire une cartographie point par point comme pour les mesures précédentes. En revanche, ce montage ne permet pas de réaliser le suivi temporel de la déformation. Il est nécessaire d’appliquer une excitation monochromatique. Les actuateurs piézoélectriques utilisés permettent de fournir une excitation monochromatique efficace sur une gamme de fréquence allant de 100Hz à 150kHz.

L’actuateur piézoélectrique est surmonté d’une aiguille de seringue afin de réaliser un contact ponctuel avec le système. On place alors le point d’excitation dans la partie "bouteille" et on réalise une mesure des déformées stationnaires autour des fréquences prévues par éléments finis. Cette méthode nous permet d’obtenir les cartes de champ de déplacement présentées dans la figure 8.5. On remarque un bon accord entre simulations numériques et mesures expérimentales. La qualité de la localisation est réduite par rapport au Mode 6 présenté dans la figure 8.2. Cette perte du confinement des ondes de flexion est due au fait que les bords épais (5mm) ne constituent pas de réelles conditions rigides pour la plaque fine. Cette baisse du confinement est observée à la fois sur les résultats expérimentaux et numériques. Ces résultats encourageants vont motiver la suite des travaux réalisés en collaboration avec Marcel Filoche et Svitlana Mayboroda.

8.3 Vers une ingénierie de la localisation

Nous avons vu que la connaissance du paysage de localisation nous permet de déduire avec précision les sites de localisation des modes propres au sein d’une géométrie complexe. Dans cette partie, nous proposons d’aborder la résolution du problème inverse : Est-il possible de

définir une géométrie particulière nous permettant de confiner les vibrations dans une région précise de la plaque ?

Définition du problème inverse

Ce projet a été mené au laboratoire en collaboration avec un groupe d'étudiants de l'École Polytechnique. La résolution du problème inverse se base sur le positionnement adéquat de points fixes au sein d'une cavité carrée dont les bords sont également rigides. La démarche repose sur la réflexion suivante : Quelles sont les positions optimales d'un nombre N de points clampés afin de confiner un mode propre dans une région souhaitée ?

Nous avons vu que la localisation est gouvernée par les minima de la fonction paysage. Nous allons donc chercher à optimiser les minima de cette fonction. Le paysage idéal $u(\vec{x})^*$ est construit par un ensemble infini de points formant une frontière continue autour de la zone que l'on souhaite isoler. Dans ce cas précis, les modes sont confinés dans un sous-domaine par une valeur nulle continue de la fonction paysage.

L'optimisation effectuée consiste à minimiser les valeurs de la fonction paysage pour un nombre de points fixes N petit. Afin de réaliser l'optimisation, il est nécessaire de déterminer la distance qui sépare un paysage discret $u(\vec{x})$ du paysage idéal $u(\vec{x})^*$. Cette distance $\|u(\vec{x})^* - u(\vec{x})\|$ est calculée grâce l'équation suivante (8.5).

$$\|u(\vec{x})^* - u(\vec{x})\| = \int_{\Omega} [\nabla^2(u(\vec{x})^* - u(\vec{x}))]^2 d\vec{x} \quad (8.5)$$

À chaque étape de l'optimisation, le paysage discret $u(\vec{x})$ est calculé par un logiciel basé sur la méthode aux éléments finis. On évalue ensuite la distance qui le sépare du paysage idéal $u(\vec{x})^*$ puis on déplace un ou plusieurs points fixes avant de répéter l'opération jusqu'à obtenir la distance minimale entre le paysage discret $u(\vec{x})$ du paysage idéal $u(\vec{x})^*$.

8.3.1 Réalisation pratique

La figure 8.6 présente le principe de mise en place des échantillons ainsi que 3 réalisations de paysages discrets optimisés. La plaque possède les dimensions suivantes 100x100x0.5mm. Les conditions rigides aux bords sont appliquées par le cadre représenté au dessus de la plaque. Cette plaque est percée au niveau des points fixes dont les positions sont obtenues suite à l'optimisation numérique. Ces points sont fixés par une vis venant traverser la plaque et le fond du coffre représenté en bas de la vue éclatée, un écrou maintient l'ensemble solidaire. Des entretoises sont placées sous les trous de la plaque afin d'apporter un support et d'éviter une déformation de la plaque lors du serrage. Ce système amovible permet de tester plusieurs configurations en changeant uniquement la plaque percée.

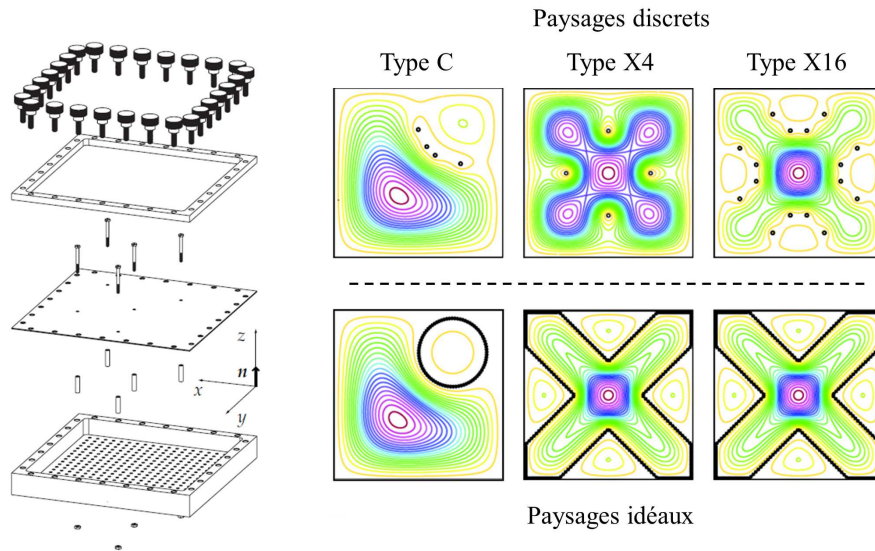


Figure 8.6 – Représentation en vue éclatée du dispositif expérimental. Les trois étages importants sont (de haut en bas) : un cadre carré utilisé pour clamper les bords extérieurs de la plaque, la plaque située entre le cadre et le coffre situé en fond. Quatre trous répartis dans la plaque permettent de créer 4 points de clampe maintenus par des vis. La partie droite de la figure présente trois types de paysages optimisés. Les trois figures inférieures présentent les paysages idéaux formés par un ensemble continu de points fixes (représentés en noir). Les trois figures supérieures présentent les paysages optimisés pour les configurations suivantes : type C (localisation dans un coin de la plaque avec 4 points fixes), type X4 (localisation en forme de X avec 4 points fixes) et type X16 (localisation en X avec 16 points fixes). Les positions des points fixes sont indiquées par des disques noirs.

La partie droite de la figure 8.6 présente les résultats de l'optimisation du paysage pour trois configurations différentes. La première consiste à localiser les vibrations dans le coin supérieur droit de la plaque, on compare le paysage discret formé par 4 points obtenus par optimisation avec le paysage idéal formé d'un ensemble continu de points fixes. Les deux autres configurations vont nous permettre d'obtenir des modes de vibration formant un X dans la plaque. Deux optimisations sont réalisées : une avec 4 points fixes et une avec 16 points fixes. La position de chaque point fixe est représentée par un disque noir. Les trois plaques sont réalisées avec les trous aux positions indiquées par l'optimisation.

8.3.2 Résultats expérimentaux

La mesure holographique hétérodyne nous permet d'obtenir une représentation instantanée du champ de déplacement vertical dans la plaque pour une fréquence imposée. On réalise alors une mesure du déplacement vertical harmonique dans la plaque pour des fréquences allant de 0 à 15kHz par pas de 10Hz. L'amplitude de la réponse harmonique en fonction de la fréquence présente des pics lorsque l'on s'approche des fréquences propres du système. Les cartes expérimentales présentées dans les prochaines figures sont enregistrées à ces fréquences précises. La figure 8.7 présente le spectre moyenné et les cartes de déplacement vertical pour une plaque

à bords rigides. Cette plaque ne contient pas de points fixes. Les réponses harmoniques sont étendues sur tout le domaine.

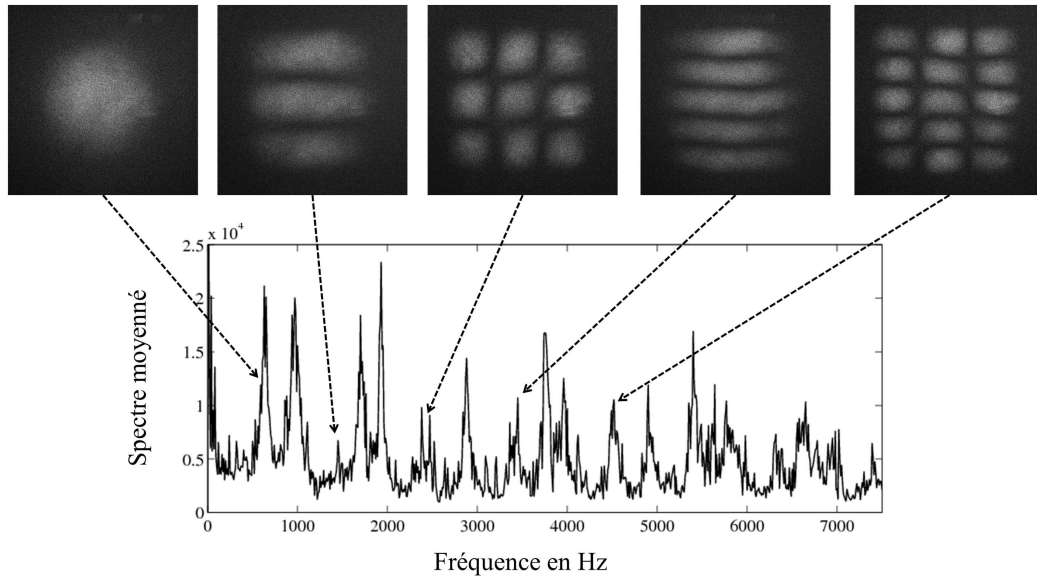


Figure 8.7 – Représentation du spectre moyenné sur une plaque vierge à bords rigides. Le spectre moyenné est tracé entre 0 et 7500Hz. Les cartes en nuances de gris présentent la norme du déplacement vertical aux fréquences indiquées par les flèches correspondantes.

On place maintenant la plaque "type C" dans le dispositif expérimental. L'optimisation réalisée a pour but d'isoler le coin supérieur droit des vibrations du reste de la plaque. La figure 8.8 présente la réponse harmonique de la plaque "type C" pour différentes fréquences d'excitation et pour deux positions du point source. Les figures 8.8a et 8.8b sont obtenues pour une excitation ponctuelle située en dehors du domaine isolé par les 4 points fixes. Les figures 8.8c et 8.8d sont obtenues avec une source située à l'intérieur du domaine isolé. Cette expérience confirme l'efficacité de la résolution du problème inverse.

On remarque que les minima du paysage de localisation permettent de séparer la plaque en deux sous-domaines quasi-indépendants. Cette séparation présente un double avantage vis à vis de la position de la source. On peut utiliser le même paysage pour isoler une source de vibration (figure 8.8c et 8.8d) ou protéger un domaine particulier d'un environnement bruyant (figure 8.8a et 8.8b). On peut constater un bon accord entre les calculs numériques des modes propres et les mesures expérimentales.

Les figures 8.9 et 8.10 présentent les résultats obtenus avec les plaques de typeX4 et typeX16 possédant 4 ou 16 points fixes respectivement. La représentation des résultats est identique au cas précédent, on met en relation le mode propre calculé par méthodes aux éléments finis et la réponse harmonique de la plaque à la fréquence indiquée. Dans les deux figures, la position de la source est située dans la zone centrale de la plaque. On remarque également un bon accord entre les modes propres calculés et les réponses harmoniques mesurées. Les réponses harmoniques mesurées respecte bien les paysages de localisation présentés dans la figure 8.6. On comprend

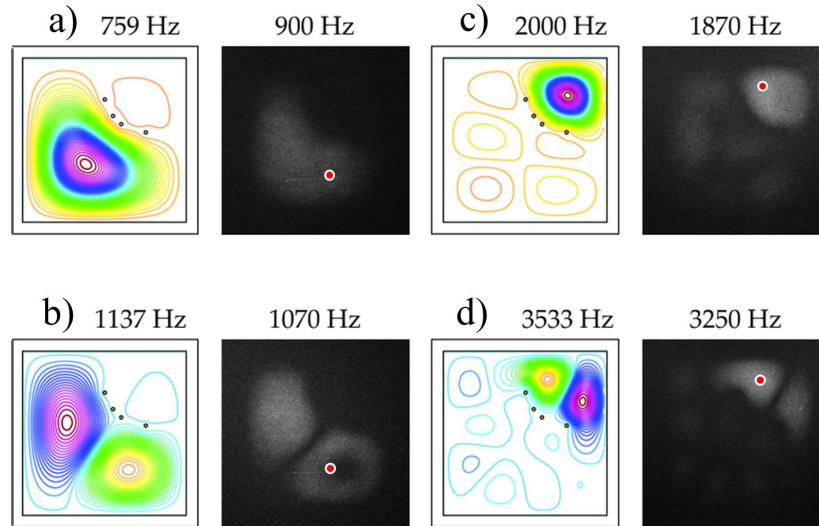


Figure 8.8 – Représentation de la norme du déplacement harmonique de la plaque type C en fonction de la fréquence et de la position de la source indiquée par le point rouge. Les modes propres obtenus numériquement (lignes de couleurs) sont en relation avec les cartes de déplacement vertical mesurées (nuances de gris).

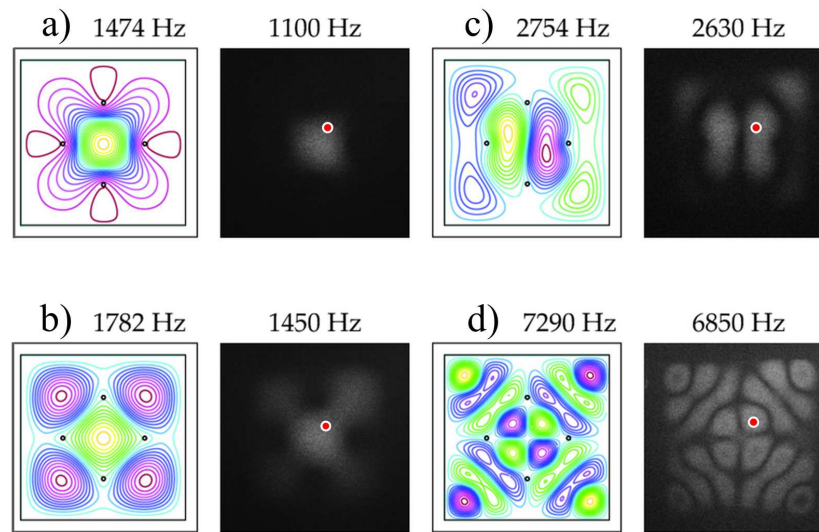


Figure 8.9 – Représentation de la norme du déplacement harmonique de la plaque type X4 en fonction de la fréquence. Les modes propres obtenus numériquement (lignes de couleurs) sont en relation avec les cartes de déplacement vertical mesurées (nuances de gris). La position du point source est indiquée par le point rouge.

intuitivement que le réseau de vallées formé avec 16 points fixes va être plus profond que celui à 4 points fixes. Cette profondeur des vallées permet de conserver des modes propres localisés à des fréquences plus élevées. La fréquence des modes propres de flexion est équivalente aux énergies propres des fonctions d'ondes électroniques présentées dans la première partie. La prochaine étude concerne l'apparition des modes propres de flexion étendus à partir d'une fréquence où le réseau de vallées effectif est discontinu.

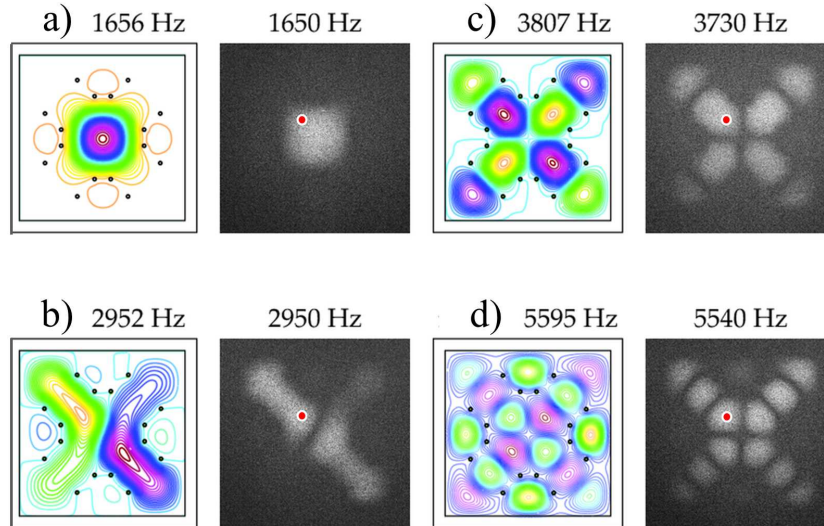


Figure 8.10 – Représentation de la norme du déplacement harmonique de la plaque type X16 en fonction de la fréquence. Les modes propres obtenus numériquement (lignes de couleurs) sont en relation avec les cartes de déplacement vertical mesurées (nuances de gris). La position du point source est indiquée par le point rouge.

Profondeur du paysage

La figure 8.9d présente une distribution étendue des vibrations de la plaque. Cette figure permet d'observer la disparition du paysage effectif avec l'augmentation de la fréquence de l'excitation. Pour une fréquence supérieure à 6850Hz, le paysage effectif obtenu dans la plaque de type X4 n'est plus suffisamment profond pour localiser les vibrations. La figure 8.11 présente les cartes de déplacement vertical obtenues pour des fréquences d'excitation élevées dans la plaque de type X16. Le système type X16 présente des modes localisés dans la zone d'intérêt jusqu'à 7600Hz. Il faut atteindre une fréquence de 8300Hz pour observer un étalement spatial des modes propres sur l'ensemble du système. Cette étude nous permet de démontrer expérimentalement le lien entre l'apparition des modes étendus et la disparition du paysage effectif. Le système possédant 16 points fixes permet la réalisation d'un paysage plus profond, la localisation des vibrations est efficace jusqu'à une fréquence plus élevée.

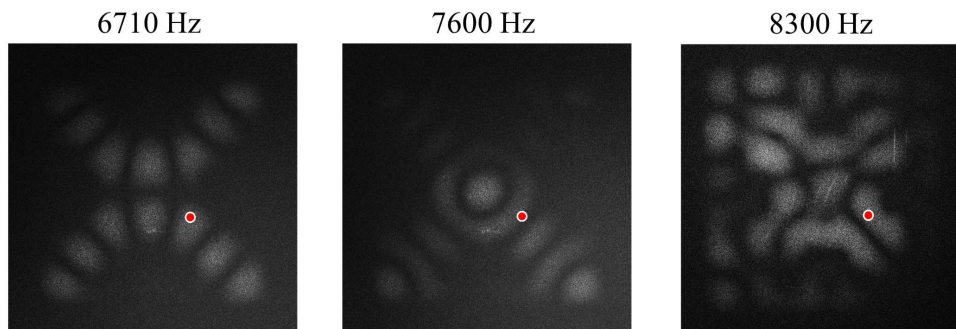


Figure 8.11 – Représentation des réponses harmoniques de la plaque type X16 en fonction de la fréquence. La position du point source est indiquée par le point rouge.

8.4 Conclusion et perspectives

Ce chapitre nous permet d'aborder un mécanisme universel, développé par Marcel Filoche et Svitlana Mayboroda, capable de prédire l'existence et les positions des modes propres localisés à partir d'une seule fonction : le paysage de localisation. Cette fonction est calculable pour tout système dont les paramètres ne varient pas avec la fréquence. Les minima locaux de cette fonction forment alors un réseau de vallées indiquant les lieux potentiels de localisation.

La validation expérimentale de cette théorie est effectuée à partir ondes de flexion dans les plaques. Elle a été réalisée à l'Institut Langevin en collaboration avec Michael Atlan. Cette première preuve expérimentale a permis l'élaboration du projet présenté dans la seconde partie du chapitre concernant la résolution du problème inverse.

Le problème inverse consiste à optimiser la conception géométrique d'un milieu afin d'obtenir le paysage de localisation souhaité. Ce projet est mené au laboratoire avec un groupe d'élèves de l'École Polytechnique. L'holographie hétérodyne permet une mesure instantanée du champ de déplacement en chaque point de la plaque. Plusieurs optimisations sont réalisées et validées expérimentalement.

La mesure expérimentale du paysage de localisation est une des perspectives de ces travaux. Nous avons vu que dans le cas des ondes élastiques, la fonction paysage correspond à la déformation statique du système soumis à une pression uniforme et constante. On peut envisager de mesurer cette déformation statique et obtenir ainsi une mesure expérimentale du paysage de localisation.

La résolution du problème inverse pour des structures plus complexes se présente également comme perspective de ces travaux. L'utilisation d'une plaque inhomogène et non symétrique permettrait de résoudre un problème inverse moins simple que celui proposé dans la seconde partie du chapitre.

Ces travaux s'inscrivent dans une thématique large du contrôle des ondes dans des structures complexes. La localisation des vibrations entraîne une concentration l'énergie mécanique sur un domaine réduit et peut causer des endommagements importants. Le calcul du paysage de localisation permet d'anticiper ces effets de localisation des vibrations pour un grand nombre de systèmes mécaniques complexes.

Conclusion Générale

Au cours de ce manuscrit, nous avons étudié l'application de différents milieux complexes au cas des ondes de flexion dans les plaques. Ces ondes de flexion sont une première étape vers la généralisation de ces dispositifs pour les ondes élastiques dans les milieux solides.

Le chapitre 1 introduit la théorie de l'élastodynamique tri-dimensionnelle ainsi que la propagation d'ondes dans les plaques. La suite de ce chapitre concerne les différents outils utilisés tout au long du manuscrit. Nous avons abordé la modélisation analytique puis numérique de la propagation des ondes de flexion. Les différents moyens expérimentaux de détection et de génération des ondes de flexion sont également présentés.

Au cours du chapitre 2 nous démontrons expérimentalement la focalisation des ondes de flexion par une lentille plate à réfraction négative construite à partir d'un cristal phononique. Nous avons vu que ces milieux périodiques peuvent présenter une propriété de réfraction négative liée à l'anisotropie ou au repliement de Bragg. Il a également été montré que l'on peut améliorer les performances de cette lentille en modifiant localement l'épaisseur de la plaque.

Le chapitre 3 présente l'étude dynamique de la résolution de la lentille plate. Dans notre cas, les ondes de flexion permettent une mesure temporelle du champ à l'extérieur et à l'intérieur de la lentille. Cette mesure nous permet d'extraire les résonances de la lentille. L'étude de l'arrangement spontané des résonances pour une excitation pulsée a mis en évidence l'apparition de fonction super oscillante capable de présenter une super résolution sans contribution évanescence.

Le chapitre 4 présente la conception d'un métamatériau à indice négatif pour les ondes de flexion. Ce métamatériau est construit à partir d'un élément résonant pour les ondes de flexion : le trou borgne. Ce trou non débouchant présente de fortes résonances lorsque la membrane en fond de trou est fine devant l'épaisseur de la plaque. Nous proposons un métamatériau conçu à partir de ce résonateur. Cette structure possède un indice de réfraction négatif lorsque l'on s'approche des fréquences de résonance du trou borgnes.

Le chapitre 5 aborde la diffusion multiple des ondes de flexion par un arrangement de trous borgnes désordonné. Ces expériences nous permettent de mettre en évidence la localisation forte ou localisation d'Anderson des ondes de flexion. L'étude des métamatériaux effectuée précédemment nous permet d'analyser le lien entre la longueur de localisation et la densité de résonateurs

utilisée.

Ces chapitres présentent les propriétés des plaques dites "structurées" qui nécessitent la répétition périodique ou désordonnée d'un élément particulier. Les prochains chapitres utilisent les propriétés naturelles des ondes de flexion dans les plaques.

Le chapitre 6 présente un analogue "classique" de l'effet quantum revival réalisé à partir d'onde de flexion dans une plaque carrée à bords rigides. Cet effet se traduit par la reconstruction périodique d'un paquet d'onde dans une cavité fermée régulière. Le choix des ondes de flexion dans les plaques est motivé par la présence d'une relation de dispersion quadratique à basse fréquence similaire à la relation de dispersion de l'équation de Schrödinger. On observe alors la reproduction des effets dynamiques du quantum revival : la reconstruction du pulse initial ou revival complet et l'apparition de structures secondaires ou revivals fractionnaires au cours du temps.

Le chapitre 7 présente l'application des techniques de transformations d'équation au cas des ondes de flexion. La conception d'un système Maxwell Fisheye est une démonstration de l'efficacité de cette technique de transformation. Cette structure à gradient d'indice est obtenue à partir d'une modulation particulière de l'épaisseur d'une plaque. Nous démontrons expérimentalement la capacité de focalisation des ondes de flexion par ce système.

Le chapitre 8 présente la démonstration expérimentale d'une nouvelle approche concernant le contrôle de la localisation des ondes dans les structures à géométrie complexe. Ce mécanisme universel fait intervenir une fonction particulière appelée "paysage de localisation". Les minimas de cette fonction permettent de prévoir les lieux de localisation des modes propres d'une structure complexe. Ce chapitre présente la démonstration expérimentale de cette théorie appliquée aux ondes de flexion dans une plaque à géométrie complexe. La résolution du problème inverse montre que l'on peut optimiser ce "paysage" afin de contraindre les vibrations mécaniques dans un domaine précis de la plaque.

Les perspectives de ces différents travaux sont à la fois appliqués et fondamentales. Les cristaux phononiques permettent de guider ou focaliser efficacement les vibrations mécaniques. Ces effets apparaissent lorsque la longueur d'onde est du même ordre que la périodicité du milieu. L'application de ces techniques aux filtres à onde de surface (filtres SAW) fonctionnant à haute fréquence est parfaitement réalisable et permet d'envisager de nouvelles fonctionnalités.

L'application des cristaux phononiques aux grandes longueurs d'onde comme les séismes semble compromise vis à vis de la taille des structures à mettre en place. En revanche, les métamatériaux élastiques conçus à partir de résonateurs sont efficaces dans ce régime où la longueur d'onde est très grande devant la structuration du milieu. On imagine pouvoir contrôler la propagation des ondes élastiques à basses fréquences sur des distances très courtes afin de le rediriger ou de les atténuer. Ce principe de méta surface représente un développement important des métamatériaux ces dernières années.

Le dernier chapitre abordé présente également un fort potentiel d'application. La localisation des vibrations dans une structure complexe entraîne une concentration l'énergie mécanique sur un domaine réduit et peut causer des endommagements importants. Le calcul du paysage de localisation sur cette structure permet d'anticiper ces effets de localisations et d'y remédier. Un grand nombre de systèmes mécaniques soumis à des vibrations permanentes comme les plateformes pétrolières pourrait bénéficier de ce principe.

D'un point de vue fondamental, les ondes de flexion dans les plaques permettent la fabrication de dispositifs expérimentaux macroscopiques afin d'étudier des phénomènes complexes comme la localisation d'Anderson ou l'effet quantum revival. La mesure résolue en temps permet d'étudier l'aspect dynamique de ces phénomènes. Beaucoup de nouveaux phénomènes physiques fondamentaux peuvent être étudiés par les dispositifs présentés dans ce manuscrit tels que la construction des fonctions super oscillantes, l'utilisation d'un puits élastique pour atteindre le régime de super focalisation dans le système Maxwell fisheye ou l'étude de l'effet quantum revival dans des plaques à géométrie complexe.

Bibliographie

- [1] D. Royer and E. Dieulesaint, *Ondes élastiques dans les solides Propagation libre et guidée*. 1996.
- [2] V. Pagneux and A. Maurel, “Determination of Lamb mode eigenvalues,” *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 110, no. 3, p. 1307, 2001.
- [3] C. Prada, D. Clorennec, and D. Royer, “Local vibration of an elastic plate and zero-group velocity Lamb modes,” *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 124, pp. 203–12, July 2008.
- [4] S. Timoshenko and J. N. Goodier, *Theory of Elasticity*, vol. 49. 1986.
- [5] R. D. Mindlin, “Thickness-Shear and Flexural Vibrations of Crystal Plates,” *Journal of Applied Physics*, vol. 22, no. 3, p. 316, 1951.
- [6] C. Vemula and A. Norris, “Flexural wave propagation and scattering on thin plates using Mindlin theory,” *Wave Motion*, vol. 26, pp. 1–12, Aug. 1997.
- [7] E. Bossy, M. Talmant, and P. Laugier, “Three-dimensional simulations of ultrasonic axial transmission velocity measurement on cortical bone models,” *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 115, no. 5, p. 2314, 2004.
- [8] K. Yee, “Numerical solution of initial boundary value problems involving maxwell’s equations in isotropic media,” *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 14, pp. 302–307, 1966.
- [9] J. Virieux, “P-SV wave propagation in heterogeneous media : Velocity-stress finite-difference method,” *Geophysics*, vol. 51, no. 4, 1986.
- [10] T. H. Maiman, “Stimulated Optical Radiation in Ruby,” *Nature*, vol. 187, pp. 493–494, Aug. 1960.
- [11] R. M. White, “Elastic Wave Generation by Electron Bombardment or Electromagnetic Wave Absorption,” *Journal of Applied Physics*, vol. 34, no. 7, p. 2123, 1963.
- [12] R. M. White, “Generation of Elastic Waves by Transient Surface Heating,” *Journal of Applied Physics*, vol. 34, no. 12, p. 3559, 1963.
- [13] L. V. Wang and S. Hu, “Photoacoustic tomography : in vivo imaging from organelles to organs,” *Science (New York, N.Y.)*, vol. 335, pp. 1458–62, Mar. 2012.

- [14] G. Massey, "An optical heterodyne ultrasonic image converter," *Proceedings of the IEEE*, vol. 56, no. 12, pp. 2157–2161, 1968.
- [15] D. Royer and E. Dieulesaint, "Optical probing of the mechanical impulse response of a transducer," *Applied Physics Letters*, vol. 49, no. 17, p. 1056, 1986.
- [16] B. Samson, F. Verpillat, M. Gross, and M. Atlan, "Video-rate laser Doppler vibrometry by heterodyne holography," *Optics letters*, vol. 36, pp. 1449–51, Apr. 2011.
- [17] D. Gabor, "A New Microscopic Principle," *Nature*, vol. 161, pp. 777–778, May 1948.
- [18] V. G. Veselago, "The electrodynamics of substances with simultaneously negative values of permittivity and permeability," *Soviet Physics Uspekhi*, vol. 10, pp. 509–514, Apr. 1968.
- [19] J. Pendry, "Negative refraction makes a perfect lens," *Physical review letters*, vol. 85, pp. 3966–9, Oct. 2000.
- [20] X. Zhang and Z. Liu, "Superlenses to overcome the diffraction limit.," *Nature materials*, vol. 7, pp. 435–41, June 2008.
- [21] C. Kittel, *Physique de l'état solide*. 2007.
- [22] E. Yablonovitch, "Inhibited spontaneous emission in solid-state physics and electronics," *Physical Review Letters*, vol. 58, no. 20, pp. 2059–2062, 1987.
- [23] M. Kushwaha, P. Halevi, L. Dobrzynski, and B. Djafari-Rouhani, "Acoustic band structure of periodic elastic composites.," Sept. 1993.
- [24] J. Vasseur, P. Deymier, B. Djafari-Rouhani, Y. Pennec, and A.-C. Hladky-Hennion, "Absolute forbidden bands and waveguiding in two-dimensional phononic crystal plates," *Physical Review B*, vol. 77, p. 085415, Feb. 2008.
- [25] R. Martínez-Sala, J. Sancho, J. V. Sánchez, V. Gómez, J. Llinares, and F. Meseguer, "Sound attenuation by sculpture," *Nature*, vol. 378, pp. 241–241, Nov. 1995.
- [26] E. Cubukcu, K. Aydin, O. Ekmel, S. Foteinopoulou, and C. M. Soukoulis, "Negative refraction by photonic crystals," *Nature*, vol. 423, no. JUNE, pp. 604–605, 2003.
- [27] L. Feng, X.-P. Liu, M.-H. Lu, Y.-B. Chen, Y.-F. Chen, Y.-W. Mao, J. Zi, Y.-Y. Zhu, S.-N. Zhu, and N.-B. Ming, "Acoustic Backward-Wave Negative Refractions in the Second Band of a Sonic Crystal," *Physical Review Letters*, vol. 96, p. 014301, Jan. 2006.
- [28] J. Pierre, O. Boyko, L. Belliard, J. O. Vasseur, and B. Bonello, "Negative refraction of zero order flexural Lamb waves through a two-dimensional phononic crystal," *Applied Physics Letters*, vol. 97, no. 12, p. 121919, 2010.
- [29] J.-F. Robillard, J. Bucay, P. a. Deymier, A. Shelke, K. Muralidharan, B. Merheb, J. O. Vasseur, A. Sukhovich, and J. H. Page, "Resolution limit of a phononic crystal superlens," *Physical Review B*, vol. 83, p. 224301, June 2011.
- [30] A. Berrier, M. Mulot, M. Swillo, M. Qiu, L. Thylén, A. Talneau, and S. Anand, "Negative Refraction at Infrared Wavelengths in a Two-Dimensional Photonic Crystal," *Physical Review Letters*, vol. 93, p. 073902, Aug. 2004.

- [31] Z. Lu, C. Chen, C. a. Schuetz, S. Shi, J. a. Murakowski, G. J. Schneider, and D. W. Prather, "Subwavelength imaging by a flat cylindrical lens using optimized negative refraction," *Applied Physics Letters*, vol. 87, no. 9, p. 091907, 2005.
- [32] A. Sukhovich, B. Merheb, K. Muralidharan, J. Vasseur, Y. Pennec, P. Deymier, and J. Page, "Experimental and Theoretical Evidence for Subwavelength Imaging in Phononic Crystals," *Physical Review Letters*, vol. 102, p. 154301, Apr. 2009.
- [33] I. a. Veres, T. Berer, O. Matsuda, and P. Burgholzer, "Focusing and subwavelength imaging of surface acoustic waves in a solid-air phononic crystal," *Journal of Applied Physics*, vol. 112, no. 5, p. 053504, 2012.
- [34] A. Sukhovich, L. Jing, and J. Page, "Negative refraction and focusing of ultrasound in two-dimensional phononic crystals," *Physical Review B*, vol. 77, p. 014301, Jan. 2008.
- [35] P. Parimi, W. Lu, P. Vodo, and S. Sridhar, "Photonic crystals : Imaging by flat lens using negative refraction," *Nature*, vol. 426, p. 404, Nov. 2003.
- [36] X. Zhang and Z. Liu, "Negative refraction of acoustic waves in two-dimensional phononic crystals," *Applied Physics Letters*, vol. 85, no. 2, p. 341, 2004.
- [37] X. Hu, Y. Shen, X. Liu, R. Fu, and J. Zi, "Superlensing effect in liquid surface waves," *Physical Review E*, vol. 69, p. 030201, Mar. 2004.
- [38] M. Dubois, M. Farhat, E. Bossy, S. Enoch, S. Guenneau, and P. Sebbah, "Flat lens for pulse focusing of elastic waves in thin plates," *Applied Physics Letters*, vol. 103, no. 7, p. 071915, 2013.
- [39] V. Mocella, S. Cabrini, A. Chang, P. Dardano, L. Moretti, I. Rendina, D. Olynick, B. Harteneck, and S. Dhuey, "Self-Collimation of Light over Millimeter-Scale Distance in a Quasi-Zero-Average-Index Metamaterial," *Physical Review Letters*, vol. 102, p. 133902, Apr. 2009.
- [40] D. Felbacq, A. Moreau, and R. Smaïli, "Goos-Hänchen effect in the gaps of photonic crystals.," *Optics letters*, vol. 28, pp. 1633–5, Sept. 2003.
- [41] J. O. Smith, *Mathematics of the Discrete Fourier Transform*. 2007.
- [42] G. Gómez-Santos, "Universal Features of the Time Evolution of Evanescent Modes in a Left-Handed Perfect Lens," *Physical Review Letters*, vol. 90, p. 077401, Feb. 2003.
- [43] A. Archambault, M. Besbes, and J.-J. Greffet, "Superlens in the Time Domain," *Physical Review Letters*, vol. 109, p. 097405, Aug. 2012.
- [44] R. Shelby, D. R. Smith, and S. Schultz, "Experimental verification of a negative index of refraction.," *Science*, vol. 292, pp. 77–9, Apr. 2001.
- [45] V. G. Veselago and E. E. Narimanov, "The left hand of brightness : past, present and future of negative index materials.," *Nature materials*, vol. 5, pp. 759–62, Oct. 2006.
- [46] L. Fok, M. Ambati, and X. Zhang, "Acoustic Metamaterials," *MRS Bulletin*, vol. 33, no. October, pp. 7–9, 2008.

- [47] C. Luo, S. Johnson, J. Joannopoulos, and J. Pendry, “Subwavelength imaging in photonic crystals,” *Physical Review B*, vol. 68, p. 045115, July 2003.
- [48] W. H. Wee and J. B. Pendry, “Universal Evolution of Perfect Lenses,” *Physical Review Letters*, vol. 106, p. 165503, Apr. 2011.
- [49] M. Ambati, N. Fang, C. Sun, and X. Zhang, “Surface resonant states and superlensing in acoustic metamaterials,” *Physical Review B*, vol. 75, p. 195447, May 2007.
- [50] L. Zhou, X. Huang, and C. Chan, “A time-dependent Green’s function approach to study the transient phenomena in metamaterial lens focusing,” *Photonics and Nanostructures - Fundamentals and Applications*, vol. 3, pp. 100–106, Dec. 2005.
- [51] R. J. P. Engelen, Y. Sugimoto, H. Gersen, N. Ikeda, K. Asakawa, and L. K. Kuipers, “Ultrafast evolution of photonic eigenstates in k-space,” *Nature Physics*, vol. 3, pp. 401–405, Apr. 2007.
- [52] P. H. Otsuka, K. Nanri, O. Matsuda, M. Tomoda, D. M. Profunser, I. a. Veres, S. Danworaphong, A. Khelif, S. Benchabane, V. Laude, and O. B. Wright, “Broadband evolution of phononic-crystal-waveguide eigenstates in real- and k-spaces,” *Scientific reports*, vol. 3, p. 3351, Jan. 2013.
- [53] E. A. Ash and G. Nicholls, “Super-resolution Aperture Scanning Microscope,” *Nature*, vol. 237, pp. 510–512, June 1972.
- [54] B. Bailey, D. L. Farkas, D. L. Taylor, and F. Lanni, “Enhancement of axial resolution in fluorescence microscopy by standing-wave excitation,” *Nature*, vol. 366, pp. 44–8, Nov. 1993.
- [55] S. W. Hell and J. Wichmann, “Breaking the diffraction resolution limit by stimulated emission : stimulated-emission-depletion fluorescence microscopy,” *Optics letters*, vol. 19, pp. 780–2, June 1994.
- [56] Y. Aharonov, J. Anandan, S. Popescu, and L. Vaidman, “Superpositions of time evolutions of a quantum system and a quantum time-translation machine,” *Physical Review Letters*, vol. 64, pp. 2965–2968, June 1990.
- [57] M. V. Berry and S. Popescu, “Evolution of quantum superoscillations and optical super-resolution without evanescent waves,” *Journal of Physics A : Mathematical and General*, vol. 39, pp. 6965–6977, June 2006.
- [58] G. D. Francia, “Super-gain antennas and optical resolving power,” *Il Nuovo Cimento (1943-1954)*, no. 1, 1952.
- [59] F. M. Huang, Y. Chen, F. J. Garcia de Abajo, and N. I. Zheludev, “Optical super-resolution through super-oscillations,” *Journal of Optics A : Pure and Applied Optics*, vol. 9, pp. S285–S288, Sept. 2007.
- [60] E. T. F. Rogers, J. Lindberg, T. Roy, S. Savo, J. E. Chad, M. R. Dennis, and N. I. Zheludev, “A super-oscillatory lens optical microscope for subwavelength imaging,” *Nature materials*, vol. 11, pp. 432–5, May 2012.

- [61] A. Kempf, “Black holes, bandwidths and Beethoven,” *Journal of Mathematical Physics*, vol. 41, no. 4, p. 2360, 2000.
- [62] M. S. Calder and A. Kempf, “Analysis of superoscillatory wave functions,” *Journal of Mathematical Physics*, vol. 46, no. 1, p. 012101, 2005.
- [63] A. M. H. Wong and G. V. Eleftheriades, “An optical super-microscope for far-field, real-time imaging beyond the diffraction limit.,” *Scientific reports*, vol. 3, p. 1715, Jan. 2013.
- [64] E. T. F. Rogers and N. I. Zheludev, “Optical super-oscillations : sub-wavelength light focusing and super-resolution imaging,” *Journal of Optics*, vol. 15, p. 094008, Sept. 2013.
- [65] J. Pendry, A. Holden, W. Stewart, and I. Youngs, “Extremely low frequency plasmons in metallic mesostructures.,” *Physical review letters*, vol. 76, pp. 4773–4776, June 1996.
- [66] D. Smith, W. Padilla, D. Vier, S. Nemat-Nasser, and S. Schultz, “Composite medium with simultaneously negative permeability and permittivity,” *Physical review letters*, vol. 84, pp. 4184–7, May 2000.
- [67] D. Schurig, J. J. Mock, B. J. Justice, S. A. Cummer, J. B. Pendry, A. F. Starr, and D. R. Smith, “Metamaterial electromagnetic cloak at microwave frequencies.,” *Science*, vol. 314, pp. 977–80, Nov. 2006.
- [68] F. Lemoult, N. Kaina, M. Fink, and G. Lerosey, “Wave propagation control at the deep subwavelength scale in metamaterials,” *Nature Physics*, vol. 9, pp. 55–60, Nov. 2012.
- [69] N. Yu and F. Capasso, “Flat optics with designer metasurfaces.,” *Nature materials*, vol. 13, pp. 139–50, Mar. 2014.
- [70] Z. Yang, J. Mei, M. Yang, N. Chan, and P. Sheng, “Membrane-Type Acoustic Metamaterial with Negative Dynamic Mass,” *Physical Review Letters*, vol. 101, p. 204301, Nov. 2008.
- [71] Z. Liu, Z. Yang, Y.-W. Mao, Y.-Y. Zhu, C. Chan, and P. Sheng, “Locally Resonant Sonic Materials,” *Science*, vol. 289, pp. 1734–1736, Sept. 2000.
- [72] U. Fano, “Effects of Configuration Interaction on Intensities and Phase Shifts,” *Physical Review*, vol. 124, pp. 1866–1878, Dec. 1961.
- [73] C. Goffaux, J. Sánchez-Dehesa, A. Yeyati, P. Lambin, A. Khelif, J. Vasseur, and B. Djafari-Rouhani, “Evidence of Fano-Like Interference Phenomena in Locally Resonant Materials,” *Physical Review Letters*, vol. 88, p. 225502, May 2002.
- [74] A. E. Miroshnichenko, S. Flach, and Y. S. Kivshar, “Fano resonances in nanoscale structures,” *Reviews of Modern Physics*, vol. 82, pp. 2257–2298, Aug. 2010.
- [75] J. Li and C. Chan, “Double-negative acoustic metamaterial,” *Physical Review E*, vol. 70, p. 055602, Nov. 2004.
- [76] T. Brunet, J. Leng, and O. Mondain-Monval, “Materials science. Soft acoustic metamaterials.,” *Science*, vol. 342, pp. 323–4, Oct. 2013.
- [77] J. Mei, Z. Liu, W. Wen, and P. Sheng, “Effective Mass Density of Fluid-Solid Composites,” *Physical Review Letters*, vol. 96, p. 024301, Jan. 2006.

- [78] N. Fang, D. Xi, J. Xu, M. Ambati, W. Srituravanich, C. Sun, and X. Zhang, “Ultrasonic metamaterials with negative modulus.,” *Nature materials*, vol. 5, pp. 452–6, June 2006.
- [79] S. H. Lee, C. M. Park, Y. M. Seo, Z. G. Wang, and C. K. Kim, “Composite Acoustic Medium with Simultaneously Negative Density and Modulus,” *Physical Review Letters*, vol. 104, p. 054301, Feb. 2010.
- [80] Y. Ding, Z. Liu, C. Qiu, and J. Shi, “Metamaterial with Simultaneously Negative Bulk Modulus and Mass Density,” *Physical Review Letters*, vol. 99, p. 093904, Aug. 2007.
- [81] Y. Wu, Y. Lai, and Z.-Q. Zhang, “Effective medium theory for elastic metamaterials in two dimensions,” *Physical Review B*, vol. 76, p. 205313, Nov. 2007.
- [82] Y. Wu, Y. Lai, and Z.-Q. Zhang, “Elastic Metamaterials with Simultaneously Negative Effective Shear Modulus and Mass Density,” *Physical Review Letters*, vol. 107, p. 105506, Sept. 2011.
- [83] Y. Lai, Y. Wu, P. Sheng, and Z.-Q. Zhang, “Hybrid elastic solids.,” *Nature materials*, vol. 10, pp. 620–4, Aug. 2011.
- [84] L. Ye, G. Cody, M. Zhou, P. Sheng, and A. Norris, “Observation of bending wave localization and quasi mobility edge in two dimensions,” *Physical review letters*, vol. 69, no. 21, pp. 3080–3083, 1992.
- [85] Y. Pennec, B. Djafari-Rouhani, H. Larabi, J. Vasseur, and A. Hladky-Hennion, “Low-frequency gaps in a phononic crystal constituted of cylindrical dots deposited on a thin homogeneous plate,” *Physical Review B*, vol. 78, p. 104105, Sept. 2008.
- [86] Y. Achaoui, V. Laude, S. Benchabane, and A. Khelif, “Local resonances in phononic crystals and in random arrangements of pillars on a surface,” *Journal of Applied Physics*, vol. 114, no. 10, p. 104503, 2013.
- [87] A. W. Leissa, *Vibrations of plate*. 1969.
- [88] P. W. Anderson, “Absence of Diffusion in Certain Random Lattices,” *Physical Review*, vol. 109, pp. 1492–1505, Mar. 1958.
- [89] P. W. Anderson, “The question of classical localization A theory of white paint ?,” *Philosophical Magazine Part B*, vol. 52, pp. 505–509, Sept. 1985.
- [90] S. John, “Electromagnetic Absorption in a Disordered Medium near a Photon Mobility Edge,” *Physical Review Letters*, vol. 53, pp. 2169–2172, Nov. 1984.
- [91] R. Weaver, “Anderson localization of ultrasound,” *Wave Motion*, vol. 12, pp. 129–142, Mar. 1990.
- [92] O. I. Lobkis and R. L. Weaver, “Anderson localization of ultrasound in plates : further experimental results.,” *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 124, pp. 3528–33, Dec. 2008.

- [93] H. Hu, A. Strybulevych, J. H. Page, S. E. Skipetrov, and B. a. van Tiggelen, “Localization of ultrasound in a three-dimensional elastic network,” *Nature Physics*, vol. 4, pp. 945–948, Oct. 2008.
- [94] A.-C. Hladky-Hennion, G. Allan, and M. de Billy, “Localized modes in a one-dimensional diatomic chain of coupled spheres,” *Journal of Applied Physics*, vol. 98, no. 5, p. 054909, 2005.
- [95] A. Chabanov, M. Stoytchev, and A. Genack, “Statistical signatures of photon localization,” *Nature*, vol. 404, pp. 850–3, Apr. 2000.
- [96] D. Laurent, O. Legrand, P. Sebbah, C. Vanneste, and F. Mortessagne, “Localized Modes in a Finite-Size Open Disordered Microwave Cavity,” *Physical Review Letters*, vol. 99, p. 253902, Dec. 2007.
- [97] T. Schwartz, G. Bartal, S. Fishman, and M. Segev, “Transport and Anderson localization in disordered two-dimensional photonic lattices,” *Nature*, vol. 446, pp. 52–5, Mar. 2007.
- [98] Y. Lahini, A. Avidan, F. Pozzi, M. Sorel, R. Morandotti, D. Christodoulides, and Y. Silberberg, “Anderson Localization and Nonlinearity in One-Dimensional Disordered Photonic Lattices,” *Physical Review Letters*, vol. 100, p. 013906, Jan. 2008.
- [99] D. Wiersma, P. Bartolini, A. Lagendijk, and R. Righini, “Localization of light in a disordered medium,” *Nature*, vol. 390, no. December, pp. 671–673, 1997.
- [100] M. Störzer, P. Gross, C. Aegerter, and G. Maret, “Observation of the Critical Regime Near Anderson Localization of Light,” *Physical Review Letters*, vol. 96, p. 063904, Feb. 2006.
- [101] T. Sperling, W. Bührer, C. M. Aegerter, and G. Maret, “Direct determination of the transition to localization of light in three dimensions,” *Nature Photonics*, vol. 7, pp. 48–52, Dec. 2012.
- [102] F. Scheffold, R. Lenke, R. Tweer, and G. Maret, “Localization or classical diffusion of light?,” *Nature*, vol. 72, no. 1998, 1999.
- [103] F. Scheffold and D. Wiersma, “Inelastic scattering puts in question recent claims of Anderson localization of light,” *Nature Photonics*, vol. 7, pp. 934–934, Nov. 2013.
- [104] J. T. Edwards and D. J. Thouless, “Numerical studies of localization in disordered systems,” *Journal of Physics C : Solid State Physics*, vol. 5, pp. 807–820, Apr. 1972.
- [105] S. John, “Strong localization of photons in certain disordered dielectric superlattices,” *Physical review letters*, vol. 58, no. 23, pp. 2486–2489, 1987.
- [106] J.-K. Yang, C. Schreck, H. Noh, S.-F. Liew, M. I. Guy, C. S. O’Hern, and H. Cao, “Photonic-band-gap effects in two-dimensional polycrystalline and amorphous structures,” *Physical Review A*, vol. 82, p. 053838, Nov. 2010.
- [107] G. M. Conley, M. Burrelli, F. Pratesi, K. Vynck, and D. S. Wiersma, “Light Transport and Localization in Two-Dimensional Correlated Disorder,” *Physical Review Letters*, vol. 112, p. 143901, Apr. 2014.

- [108] S. Mookherjea, J. S. Park, S.-H. Yang, and P. R. Bandaru, "Localization in silicon nanophotonic slow-light waveguides," *Nature Photonics*, vol. 2, pp. 90–93, Jan. 2008.
- [109] N. Narozhny, J. Sanchez-Mondragon, and J. Eberly, "Coherence versus incoherence : Collapse and revival in a simple quantum model," *Physical Review A*, vol. 23, no. 1, 1981.
- [110] J. Parker and C. Stroud, "Coherence and decay of Rydberg wave packets," *Physical review letters*, vol. 56, no. 7, pp. 1–4, 1986.
- [111] I. Averbukh and N. Perelman, "Fractional revivals : Universality in the long-term evolution of quantum wave packets beyond the correspondence principle dynamics," *Physics Letters A*, vol. 139, no. 9, pp. 449–453, 1989.
- [112] R. Robinett, "Quantum wave packet revivals," *Physics Reports*, vol. 392, pp. 1–119, Mar. 2004.
- [113] Z. Gaeta and C. Stroud, "Classical and quantum-mechanical dynamics of a quasiclassical state of the hydrogen atom," *Physical Review A*, vol. 42, pp. 6308–6313, Dec. 1990.
- [114] J. Yeazell, M. Mallalieu, and C. Stroud, "Observation of the collapse and revival of a Rydberg electronic wave packet," *Physical Review Letters*, vol. 64, pp. 2007–2010, Apr. 1990.
- [115] J. Wals, H. Fielding, J. Christian, L. Snoek, W. van der Zande, and H. van Linden van den Heuvell, "Observation of Rydberg wave packet dynamics in a Coulombic and magnetic field," *Physical Review Letters*, vol. 72, pp. 3783–3786, June 1994.
- [116] M. Vrakking, D. Villeneuve, and A. Stolow, "Observation of fractional revivals of a molecular wave packet.," *Physical review. A*, vol. 54, pp. R37–R40, July 1996.
- [117] H. Talbot, "Facts relating to optical science," *Phil Mag*, vol. 9, pp. 401,407, 1836.
- [118] V. Pagneux, "Revisiting the edge resonance for Lamb waves in a semi-infinite plate," *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 120, no. 2, p. 649, 2006.
- [119] J. B. Ochs and J. C. Snowdon, "Transmissibility across simply supported thin plates. I. Rectangular and square plates with and without damping layers," *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 58, no. 4, p. 832, 1975.
- [120] Y. Champoux, S. Brunet, and A. Berry, "On the construction of a simply supported rectangular plate for noise and vibration studies," *Experimental Techniques*, vol. 20, pp. 24–26, Jan. 1996.
- [121] C. Draeger and M. Fink, "One-Channel Time Reversal of Elastic Waves in a Chaotic 2D-Silicon Cavity," *Physical Review Letters*, vol. 79, pp. 407–410, July 1997.
- [122] M. a. Doncheski, S. Heppelmann, R. W. Robinett, and D. C. Tussey, "Wave packet construction in two-dimensional quantum billiards : Blueprints for the square, equilateral triangle, and circular cases," *American Journal of Physics*, vol. 71, no. 6, p. 541, 2003.

- [123] R. Malkin, T. R. McDonagh, N. Mhatre, T. S. Scott, and D. Robert, “Energy localization and frequency analysis in the locust ear.,” *Journal of the Royal Society, Interface / the Royal Society*, vol. 11, p. 20130857, Jan. 2014.
- [124] J. C. Maxwell, *The Cambridge and Dublin Mathematical*. 1854.
- [125] R. K. Luneburg, *Mathematical Theory of Optics*. 1944.
- [126] U. Leonhardt, “Optical conformal mapping.,” *Science (New York, N.Y.)*, vol. 312, pp. 1777–80, June 2006.
- [127] R. Liu, C. Ji, J. J. Mock, J. Y. Chin, T. J. Cui, and D. R. Smith, “Broadband ground-plane cloak.,” *Science*, vol. 323, pp. 366–9, Jan. 2009.
- [128] T. Ergin, N. Stenger, P. Brenner, J. B. Pendry, and M. Wegener, “Three-dimensional invisibility cloak at optical wavelengths.,” *Science*, vol. 328, pp. 337–9, Apr. 2010.
- [129] G. W. Milton, M. Briane, and J. R. Willis, “On cloaking for elasticity and physical equations with a transformation invariant form,” *New Journal of Physics*, vol. 8, pp. 248–248, Oct. 2006.
- [130] H. Chen and C. T. Chan, “Acoustic cloaking and transformation acoustics,” *Journal of Physics D : Applied Physics*, vol. 43, p. 113001, Mar. 2010.
- [131] M. Farhat, S. Guenneau, S. Enoch, and A. Movchan, “Cloaking bending waves propagating in thin elastic plates,” *Physical Review B*, vol. 79, p. 033102, Jan. 2009.
- [132] N. Stenger, M. Wilhelm, and M. Wegener, “Experiments on Elastic Cloaking in Thin Plates,” *Physical Review Letters*, vol. 108, p. 014301, Jan. 2012.
- [133] U. Leonhardt, “Perfect imaging without negative refraction,” *New Journal of Physics*, vol. 11, p. 093040, Sept. 2009.
- [134] Y. G. Ma, S. Sahebdivan, C. K. Ong, T. Tyc, and U. Leonhardt, “Evidence for subwavelength imaging with positive refraction,” *New Journal of Physics*, vol. 13, p. 033016, Mar. 2011.
- [135] J. Liu, R. Mendis, and D. M. Mittleman, “A Maxwell’s fish eye lens for the terahertz region,” *Applied Physics Letters*, vol. 103, no. 3, p. 031104, 2013.
- [136] P. Kinsler, J. Tan, T. C. Y. Thio, C. Trant, and N. Kandapper, “Maxwell’s fishpond,” *European Journal of Physics*, vol. 33, pp. 1737–1750, Nov. 2012.
- [137] A. D. Falco, S. C. Kehr, and U. Leonhardt, “Luneburg lens in silicon photonics.,” *Optics express*, vol. 19, pp. 5156–5162, Mar. 2011.
- [138] T. Zentgraf, Y. Liu, M. H. Mikkelsen, J. Valentine, and X. Zhang, “Plasmonic Luneburg and Eaton lenses.,” *Nature nanotechnology*, vol. 6, pp. 151–5, Mar. 2011.
- [139] J. Eaton, “On spherically symmetric lenses,” *Transactions of the IRE Professional Group on Antennas and Propagation*, vol. 4, pp. 66–71, Dec. 1952.

-
- [140] J. de Rosny and M. Fink, “Overcoming the Diffraction Limit in Wave Physics Using a Time-Reversal Mirror and a Novel Acoustic Sink,” *Physical Review Letters*, vol. 89, p. 124301, Aug. 2002.
 - [141] M. Filoche, “Strong Localization Induced by One Clamped Point in Thin Plate Vibrations,” *Physical Review Letters*, vol. 103, p. 254301, Dec. 2009.
 - [142] M. Filoche and S. Mayboroda, “Universal mechanism for Anderson and weak localization.,” *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, vol. 109, pp. 14761–6, Sept. 2012.