PIERRE LAIREZ

PÉRIODES D'INTÉGRALES RATIONNELLES ALGORITHMES ET APPLICATIONS

thèse de doctorat
mathématiques

Thèse dirigée par Alin Bostan et Bruno Salvy, soutenue à l'École polytechnique le 12 novembre 2014 pour obtenir le grade de docteur en mathématiques devant le jury composé de :

Frits Beukers	*examinateur,* université d'Utrecht
Mireille Bousquet-Mélou	*présidente du jury,* CNRS, université de Bordeaux
Alin Bostan	*directeur,* Inria Saclay
Gilles Christol	*invité,* institut de mathématiques de Jussieu
Lucia Di Vizio	*examinatrice,* CNRS, univ. de Versailles-St-Quentin
André Galligo	*rapporteur,* université de Nice
Mohab Safey El Din	*rapporteur,* université Pierre et Marie Curie
Bruno Salvy	*directeur,* Inria Rhône-Alpes, ENS Lyon

après lecture des rapports d'André Galligo, Mohab Safey El Din et :

Michael Singer	*rapporteur,* université de Caroline du Nord





Périodes d'intégrales rationnelles
Algorithmes et applications

par Pierre Lairez

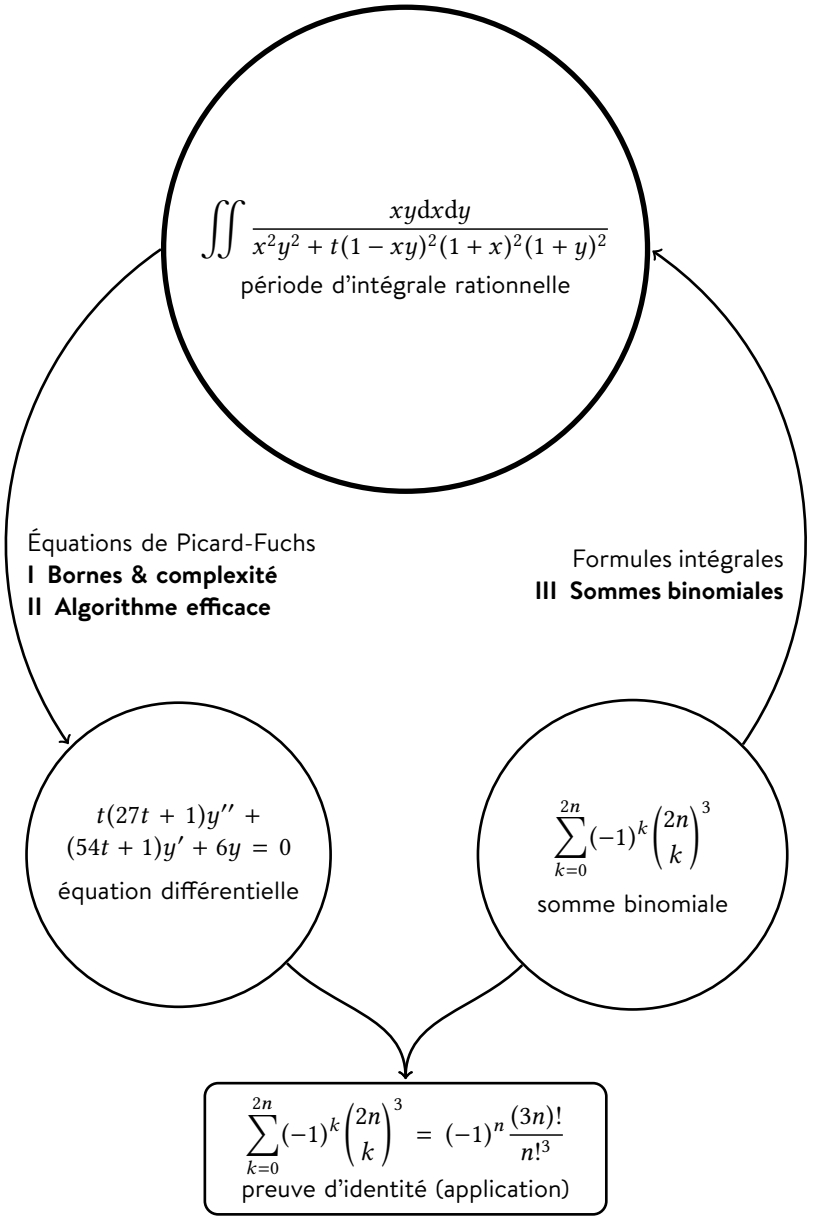


Ce document est distribué selon les termes de la licence **Creative Commons, attribution, partage dans les mêmes conditions, version 3.0, France** dont une copie est disponible à l'adresse suivante : http ://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/fr/

Cette licence garantit à l'acceptant le droit de copier, distribuer et communiquer ce matériel par tous moyens et sous tous formats, d'adapter, transformer et créer à partir de ce matériel, dans la mesure où l'acceptant respecte les droits moraux de l'auteur, réfère au matériel original et à son auteur, et distribue ce matériel et les travaux dérivés sous les termes de cette même license.

Composé par LuaTEX en Linux Libertine et Brandon Text.

Version finale, revue et corrigée le 1er décembre 2014
La dernière version de ce document est disponible sur : http ://pierre.lairez.fr/these.pdf


$\iint \frac{xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^2y^2 + t(1-xy)^2(1+x)^2(1+y)^2}$
période d'intégrale rationnelle
Équations de Picard-Fuchs
I Bornes & complexité
II Algorithme efficace
Formules intégrales
III Sommes binomiales
$t(27t + 1)y'' + (54t + 1)y' + 6y = 0$
équation différentielle
$\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \binom{2n}{k}^3$
somme binomiale
$\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \binom{2n}{k}^3 = (-1)^n \frac{(3n)!}{n!^3}$
preuve d'identité (application)

Résumé

Une période d'intégrale rationnelle est le résultat de l'intégration, par rapport à une ou plusieurs variables, d'une fraction rationnelle le long d'un chemin fermé. Quand la période considérée dépend d'un paramètre, elle est solution d'une équation différentielle linéaire particulière, appelée *équation de Picard-Fuchs*. Ces équations et leur calcul effectif ont un rôle important en calcul formel mais aussi en géométrie algébrique (elles renferment des invariants géométriques), en combinatoire (de nombreuses séries génératrices sont des périodes) ou en physique théorique. Cette thèse propose et étudie des algorithmes pour les calculer.

Le premier chapitre démontre des *bornes* sur la taille des équations de Picard-Fuchs et sur la *complexité* de leur calcul. Certains algorithmes calculant ces équations produisent en même temps des certificats, souvent immenses, qui permettent de vérifier après coup la validité de l'équation. Les bornes obtenues éclairent la nature calculatoire des équations de Picard-Fuchs et montrent en particulier que les certificats ne sont pas des sous-produits nécessaires. La démonstration repose sur l'étude du cas générique et sur la réduction de l'ordre du pôle par la méthode de Griffiths-Dwork.

Le deuxième chapitre propose un algorithme pour calculer les équations de Picard-Fuchs, visant l'*efficacité pratique* plutôt que la maitrise de la complexité. Il permet le calcul de nombreuses intégrales jusque-là non résolues. Il repose sur une méthode de réduction de l'ordre du pôle étendant celle de Griffiths-Dwork et adaptée aux cas singuliers.

Le troisième chapitre établit précisément une correspondance entre les périodes d'intégrales rationnelles et les séries génératrices des *sommes binomiales*, un certain type de sommes discrètes. Combiné avec le calcul des équations de Picard-Fuchs, cela donne une algorithmique souple et efficace pour le calcul des sommes binomiales et la preuve automatique d'identités.

Mots clefs. — Calcul formel, intégration, sommation, période, intégrale rationnelle, création télescopique, équation de Picard-Fuchs, somme binomiale, diagonale, méthode de Griffiths-Dwork, algorithme, complexité.

Remerciements

Je veux remercier en premier lieu mes directeurs de thèse Alin Bostan et Bruno Salvy. Ils m'ont proposé des pistes de recherche fructueuses, m'ont formé au calcul formel et ont toujours pris soin de m'intégrer à la communauté scientifique, toujours avec patience et bienveillance. J'ai beaucoup apprécié qu'ils aient été autant des interlocuteurs que des directeurs.

Je suis très reconnaissant à Mohab Safey El Din, Michael Singer et André Galligo pour avoir rapporté ma thèse avec le plus grand sérieux et à Lucia Di Vizio, Mireille Bousquet-Mélou, Frits Beukers et Gilles Christol pour avoir accepté d'être juré. Tous me font un grand honneur en s'intéressant à mon travail et je ne suis pas peu fier de réunir un tel jury, qui montre, s'il en était besoin, que le calcul formel rapproche des mathématiques variées, comme la géométrie algébrique, la combinatoire ou l'arithmétique.

Gilles Christol a beaucoup influencé cette thèse, par ses propres travaux et par les nombreuses discussions que nous avons eues. Les algorithmes d'intégrations présentés ici lui doivent beaucoup. Je lui exprime toute ma gratitude. Pour s'être intéressé à mon travail et aider à sa diffusion, je remercie vivement Jean-Marie Maillard, Jacques-Arthur Weil, Éric Delaygue, Tanguy Rivoal, Julien Roques, Tristan Vaccon, Xavier Caruso, Guillaume Rond, Tom Coates, Gert Almkvist et Duco van Straten.

L'équipe Specfun et le laboratoire commun MSR-Inria m'ont offert des conditions de travail remarquables : liberté, environnement stimulant et insouciance matérielle. Je ne peux qu'espérer retrouver un jour de telles conditions ! Que soient remerciés pour cela Frédéric Chyzak, Assia Mahboubi, Philippe Dumas, Enrico Tassi, Cyril Cohen, Louis Dumont, Thomas Sibut-Pinote, Jean-Jacques Lévy, Damien Doligez, Pierre-Louis Xech, Tomer Libal, Laurent Massoulié, Martine Thirion, Virginie Collette et Hélène Bessin-Rousseau.

Enfin, un thésard épanoui est un thésard qui s'amuse bien, qui mange *bien* et qui boit *bien*, le tout en bonne compagnie. En la matière, j'ai toujours pu compter sur mes parents, mes sœurs, mes beaux-frères, mes oncles, mes tantes, mes cousins et cousines, et aussi sur Rémy V., Pauline C.-B., Benoit R., Anne-Sophie C., Rémi C., Marion B., Adrien D., Robin S., David R., Samuel B., Marie P., Anne-Camille P., Guillaume St., Étienne R., Rodrigo de R., Adrien M., Henri G., Guillaume Sc., Florian C., Matthieu S., Aurel P., et bien sûr Cécile L, dont la présence a été précieuse.

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION *11*

1 Périodes *13*
2 Considérations analytiques et historiques *18*
3 Contributions *23*
4 Travaux précédents *26*

I BORNES & COMPLEXITÉ *29*

1 Isomorphisme exponentiel *37*
2 Méthode de Griffiths-Dwork *45*
3 Calcul des équations de Picard-Fuchs *57*
4 Analyse des algorithmes *59*

II ALGORITHME EFFICACE *73*

1 Réductions d'ordre supérieur *77*
2 Mise en œuvre *85*
3 Calcul de 210 périodes *93*

III SOMMES BINOMIALES *99*

1 Séries de Laurent multivariées *103*
2 Sommes binomiales comme résidus *111*
3 Sommes binomiales et diagonales *120*
4 Réduction géométrique des résidus *127*
5 Applications *132*

PERSPECTIVES *139*

BIBLIOGRAPHIE *143*

INTRODUCTION

Le calcul formel est le domaine des mathématiques et de l'informatique qui s'intéresse aux algorithmes opérant sur des objets de nature mathématique par le biais de représentations finies et exactes. Par exemple, un nombre entier est représenté de manière finie et exacte par la suite des chiffres de son écriture en base 2. Étant données les représentations de deux nombres entiers, le calcul formel se pose par exemple la question de calculer la représentation du produit de ces deux nombres entiers. En calcul formel, on s'attache à donner des algorithmes avec la démonstration qu'ils terminent en temps fini et la démonstration que le résultat est bien la représentation d'un objet mathématique défini préalablement. Et autant que possible, on essaie d'estimer le nombre total d'opérations élémentaires effectuées par les algorithmes qu'on décrit. Cela permet d'avoir une idée *a priori* du temps d'exécution d'un algorithme, de comparer l'efficacité théorique de différents algorithmes ou encore d'éclairer la nature même du problème.

Certains objets mathématiques peuvent être représentés de manière évidente : les entiers sont représentés en base 2, ou les rationnels par un numérateur et un dénominateur. Certains admettent des conventions de représentations plus subtiles. Par exemple, un polynôme de degré d peut être représenté de manière évidente par la liste de ses $d+1$ coefficients mais aussi par ses évaluations en $d+1$ points distincts. On demande alors un algorithme pour passer d'une convention de représentation à une autre, et une preuve que l'entrée et la sortie de l'algorithme représentent toujours le même objet.

Souvent, un objet peut admettre différentes représentations au sein d'une même convention de représentation, comme 22/7 qui est représenté aussi bien par «22» et «7» que par «44» et «14». Autre exemple, un peu plus compliqué, les expressions «$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$» et «$2^n$» représentent la même suite indicée par l'entier n. On demande alors un algorithme, appelé *test d'égalité*, qui étant données deux représentations répond si oui ou non elles représentent le même objet. Avoir un test d'égalité, c'est pouvoir démontrer des identités, des théorèmes de la forme A = B.

Le lien entre l'objet et la représentation peut être affaibli. Par exemple le nombre réel $\sqrt{2}$ est souvent représenté par le polynôme x^2-2 dont $\sqrt{2}$ est l'une des racines.

Mais alors $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$ ont la même représentation. La représentation n'est donc pas exacte au sens stricte, sauf à redéfinir l'objet qu'elle représente, mais elle suffit tout de même pour répondre de manière exacte à certaines questions. Par exemple, il suffit de savoir que $r^2 = 2$ pour montrer que $(1 + r)^3$ égale $7 + 5r$, ce qui implique aussi bien l'égalité de $(1 + \sqrt{2})^3$ et $7 + 5\sqrt{2}$ que celle de $(1 - \sqrt{2})^3$ et $7 - 5\sqrt{2}$.

Quand il s'agit de manipuler des fonctions, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ disons, il n'y a pas de représentation naturelle. Tout d'abord, choisir une convention de représentation c'est renoncer à toutes les fonctions qui ne sont pas représentables au sein de cette convention, et elles sont toujours nombreuses. Ensuite, l'expressivité — c'est-à-dire la capacité à pouvoir représenter telle ou telle fonction — est encore plus limitée par un compromis nécessaire avec l'effectivité — c'est-à-dire l'existence d'algorithmes réalisant les opérations souhaitées, le test d'égalité en particulier. Par exemple, les fonctions polynomiales à coefficients rationnels sont représentables par la liste de leurs coefficients. C'est très effectif mais peu expressif. À l'opposé, les fonctions définies de manière univoque par une formule de la théorie des ensembles sont représentables par ladite formule. C'est très expressif mais l'égalité est indécidable, il n'existe pas d'algorithme réalisant le test d'égalité. Ce dernier exemple est certes extrême mais l'indécidabilité peut arriver très rapidement dans des situations plus naturelle : prenons les fonctions, comme $x \mapsto \sin(|x| - \sin^2 x)$, que l'on peut écrire avec les opérations $+$, $-$, $\times$ et la composition en partant des fonctions «constante 1», identité, valeur absolue et sinus. L'expressivité parait mesurée, et pourtant l'égalité est indécidable. [1]

Cette thèse s'intéresse à des fonctions représentées par un certain type d'intégrales, simples ou multiples, à paramètre de fractions rationnelles, les *périodes*. Par exemple «$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+t+1}$» représente la fonction $t \mapsto \frac{\pi}{\sqrt{1+t}}$; on donnera beaucoup d'autres exemples montrant l'expressivité de ces fonctions au fil du texte. Par certains aspects, cette représentation est très manipulable : on peut réaliser une intégration par parties ou un changement de variables, on peut dériver sous le signe $\int$, etc. Par d'autres aspects, elle est très déficiente, à commencer par le test d'égalité, qui est difficile. C'est pourquoi il est important de pouvoir passer à une autre convention de représentation, assez classique, au sein de laquelle une fonction est représentée par une équation différentielle linéaire à coefficients polynomiaux dont elle est solution, et par les conditions initiales correspondantes. Par exemple, la fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+t}}$ est représentée par l'équation $(2t + 2)y' = -y$ et la condition initiale $y(0) = 1$. Cette représentation est bonne à tout : test d'égalité, évaluation numérique, développement asymptotique, calcul des singularités et des exposants

1. Théorème de Richardson-Matiyasevich, voir Matiyasevich, *Hilbert's tenth problem*.

aux singularités, etc. Souvent, la représentation intégrale est affaiblie, au sens où les bornes d'intégration ne sont pas précisées : on donne simplement « $\oint \frac{\mathrm{d}x}{x^2+t+1}$ », par exemple, où le signe $\oint$ signifie que le domaine d'intégration est inconnu mais vérifie tout de même certaines propriétés. Du coup, la représentation par équations différentielles sera affaiblie aussi : les conditions initiales seront inconnues.

Ce changement de représentation s'applique, par exemple, à la preuve de certaines identités : on représente des suites numériques par des expressions explicites, comme « 3^n », « $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{2n}{k}^3$ » ou encore « $\sum_{i,j=0}^{n}\binom{i+j}{j}^2\binom{4n-2i-2j}{2n-2i}$ », et à partir de cette représentation, on cherche à démontrer que deux suites sont égales. Pour résoudre ce problème, on passera par les représentations par intégrales puis par équations différentielles.

1 Périodes

§1. — Il s'agit dans cette thèse d'intégrales multiples de fractions rationnelles prises sur un domaine particulier, donnant ce qu'on appelle des *périodes*. Ce qui différencie une période d'une intégrale quelconque, c'est son domaine d'intégration, qui doit être sans bord et ne pas rencontrer les pôles de l'intégrande. Soit $\mathrm{R}(x_1,\dots,x_n)$ une fraction rationnelle à coefficients complexes. Par exemple, si l'intégrande R n'a pas de pôle réel et décroit suffisamment vite à l'infini, l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{R}(x_1,\dots,x_n)\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n,$$

est une période de l'intégrale $\int \mathrm{R}(x_{1\smile n})\mathrm{d}x_{1\smile n}$.[2] Un autre type courant de domaine d'intégration est un cycle dans $\mathbb{C}^n$. À une seule variable, les périodes sont les intégrales de chemin bien connues, prises le long d'une boucle — voir §8 pour les définitions en dimensions supérieures.

Les périodes dépendant d'un paramètre fournissent des fonctions particulièrement intéressantes qui sont les objets centraux de cette thèse. Les intégrales simples donnent des fonctions algébriques du paramètre, à l'image de

$$\frac{\pi}{\sqrt{t}}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+t},\ \text{pour } t>0.$$

Quand on considère des intégrales multiples, on peut obtenir des fonctions transcendantes, comme par exemple

2. $x_{1\smile n}$ est un raccourci pour $x_1,\dots,x_n$ et $\mathrm{d}x_{1\smile n}$ pour $\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n$

$$\frac{\pi^2}{\mathrm{M}(1,t)} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^2+(1+y^2)(1+ty^2)}, \text{ pour } t>0,$$

où $\mathrm{M}(a,b)$ désigne la moyenne arithmético-géométrique de a et b.[3] Un théorème important affirme que toutes les périodes d'intégrales rationnelles dépendant d'un paramètre satisfont à des équations différentielles linéaires, appelées *équations de Picard-Fuchs*.[4] Par exemple, la fonction $t \mapsto 1/\mathrm{M}(1,t)$ est solution de l'équation différentielle

$$(t^3-t)y'' + (3t^2-1)y' + ty = 0 \quad y(1)=1,\ y'(1) = -\frac{1}{2}$$

et cette équation différentielle définit entièrement la fonction. Les deux premiers chapitres sont consacrés à l'étude d'algorithmes calculant de telles équations de Picard-Fuchs, pour les périodes d'intégrales rationnelles.

Voici quelques problèmes où le calcul des périodes des intégrales rationnelles joue un rôle essentiel.

§2 SOMMES BINOMIALES. — Considérons l'identité de Dixon :

$$\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k\binom{2n}{k}^3 = (-1)^n\frac{(3n)!}{n!^3},$$

et prouvons-la. Notons u_n le membre de gauche de l'équation. Grâce aux méthodes exposées au chapitre III on peut calculer une représentation intégrale de la série génératrice :

$$\mathrm{F}(t) \overset{\text{déf}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} u_n t^n = \frac{1}{(2i\pi)^2}\iint_{\gamma}\frac{xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^2y^2+t(1-xy)(1+x)^2(1+y)^2},$$

pour un certain cycle γ. On peut alors calculer une équation différentielle

$$\begin{cases}(27t^2+t)\mathrm{F}'' + (54t+t)\mathrm{F}' + 6\mathrm{F} = 0\\ \mathrm{F}(0)=1,\ \mathrm{F}'(0)=-6\end{cases}$$

dont $\mathrm{F}(t)$ est l'unique solution. Il est immédiat de transformer cette équation différentielle en une relation de récurrence sur la suite (u_n) :

$$\begin{cases}3(3n+1)(3n+2)u_n + (n+1)^2u_{n+1} = 0\\ u_0 = 1,\end{cases}$$

qui prouve l'identité de Dixon. Bien sûr, on peut donner de nombreuses preuves

3. C'est la limite commune des suites adjacentes (u_n) et (v_n) définies par $u_0=a$, $v_0=b$ et les relations de récurrence $u_{n+1}=\frac{u_n+v_n}{2}$ et $v_{n+1}=\sqrt{u_nv_n}$.

4. Il est difficile de trouver le premier énoncé de ce résultat. Voir la section 2 pour quelques références.

de l'identité de Dixon, mais celle-ci présente l'avantage d'être entièrement automatique et représente environ une seconde de temps de calcul.

On peut systématiser le calcul d'une représentation intégrale d'une *somme binomiale* donnée, voir le chapitre III. En associant ce calcul à celui des équations de Picard-Fuchs, on obtient ainsi des moyens algorithmiques pour calculer avec les sommes binomiales : test d'égalité, calcul d'une récurrence, asymptotique, évaluation rapide, etc.

§3 MARCHE ALÉATOIRE SUR UN RÉSEAU. — Dans un champ plus combinatoire, considérons un réseau cubique à faces centrées. C'est le sous-ensemble de l'espace $\mathbb{R}^3$ formé des points de coordonnées entières (p,q,r) tels que $p+q+r$ soit pair. Un point placé en (p,q,r) est un plus proche voisin des douze points de coordonnées $(p\pm1,q\pm1,r)$, $(p\pm1,q,r\pm1)$ et $(p,q\pm1,r\pm1)$, et seulement de ceux-ci. Considérons une marche aléatoire sur ce réseau : c'est une suite aléatoire $(p_n)_{n\geqslant0}$ de points du réseau telle que p_0 est l'origine et telle que p_{n+1} est un plus proche voisin de p_n. On suppose que la marche est uniformément distribuée et sans mémoire (c'est-à-dire que chaque saut est uniformément distribué parmi les plus proches voisins et indépendant des sauts précédents). Quelle est la probabilité, notée R, que la marche repasse par l'origine ? [5]

Considérons le polynôme de Laurent P suivant, formé de douze monômes :

$$\mathrm{P}(x,y,z)=\frac{1}{12}\left(\mathrm{F}(x,y)+\mathrm{F}(y,z)+\mathrm{F}(z,x)\right),\ \text{avec } \mathrm{F}(u,v)=uv+\tfrac{v}{u}+\tfrac{u}{v}+\tfrac{1}{uv}.$$

Après un saut, la probabilité que la marche se trouve au point de coordonnées (p,q,r) est exactement $1/12$ si (p,q,r) est l'un des voisins de l'origine, et zéro sinon. En particulier, cette probabilité égale le coefficient du monôme $x^py^qz^r$ dans le polynôme P. Après n sauts, la probabilité que la marche se trouve au point de coordonnées (p,q,r) vaut exactement le coefficient du monôme $x^py^qz^r$ dans le polynôme P^n. Ainsi, la probabilité que la marche soit à l'origine après n sauts est égale au coefficient constant dans P^n. Notons cette probabilité p_n et notons $\mathrm{A}(t)$ la série génératrice

$$\mathrm{A}(t)\overset{\text{déf}}{=}\sum_{n\geqslant0}p_nt^n.$$

Un calcul de probabilité classique montre que

$$\mathrm{R}=1-\frac{1}{\sum_{n\geqslant0}p_n}=1-\frac{1}{\mathrm{A}(1)}.$$

5. Pour plus de détails sur ces questions, voir par exemple Guttmann, « Lattice Green's functions in all dimensions », et Koutschan, « Lattice Green functions of the higher-dimensional face-centered cubic lattices ».

Pour calculer R il suffit donc de calculer la fonction $\mathrm{A}(t)$. Un calcul de résidus lui aussi classique montre que

$$\mathrm{A}(t) = \frac{1}{(2i\pi)^3} \iiint_\gamma \frac{1}{1 - t\mathrm{P}(x,y,z)} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{xyz},$$

pour un certain cycle γ, ce qui nous ramène à la classe de périodes d'intégrales rationnelles. On calcule alors l'équation différentielle vérifiée par A :

$$2t^2(t-1)(t+3)^2y''' + 3t(t+3)(5t^2+5t-6)y'' \\ + (24t^3+72t^2+18t-18)y' + 6t(t+2)y = 0.$$

Cette équation [6] permet le calcul numérique de R à grande précision :

$$\mathrm{R} \approx 0{,}256318236504648771095030180634 \pm 10^{-30}.$$

La formule intégrale pour A permettrait aussi son calcul numérique, mais beaucoup plus lentement.

§4 PREUVE D'IRRATIONALITÉ. — Apéry [7] a montré l'irrationalité de $\zeta(3)$, défini comme la somme totale de la série $\sum_{n\geqslant 1} n^{-3}$. Il définit pour cela deux suites (a_n) et (b_n), respectivement entière et *presque* entière, telles que le quotient b_n/a_n tende vers $\zeta(3)$. Beukers [8] a donné une interprétation en termes de périodes. Il remarque que la série génératrice $\mathrm{A}(t) = \sum_{n\geqslant 0} a_n t^n$ est une période d'intégrale rationnelle :

$$\mathrm{A}(t) = \oint \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{1-(1-xy)z - txyz(1-x)(1-y)(1-z)}.$$

Il calcule l'équation de Picard-Fuchs de $\mathrm{A}(t)$, disons $\mathcal{L}(\mathrm{A}) = 0$, et montre que

$$\mathcal{L}(\mathrm{B}(t) - \mathrm{A}(t)\zeta(3)) = 6,$$

où $\mathrm{B}(t) = \sum_{n\geqslant 0} b_n t^n$. On voit ainsi un lien entre une période et l'approximation de $\zeta(3)$ par des rationnels. Ici, le calcul de l'équation $\mathcal{L}$ est une étape essentielle. Cet exemple est loin d'être isolé :

> Many, if not almost all proofs of irrationality and transcendence results use periods and their associated differential equations in one form or another. [9]

§5 DIAGONALES DE FRACTIONS RATIONNELLES. — La diagonale d'une série formelle multivariée f est la série univariée de ses coefficients diagonaux. Par

6. Et aussi le fait que $y(t)$ est l'unique solution série telle que $y(0) = 1$, car le polynôme indiciel à l'origine est t^3.

7. Apéry, « Irrationalité de $\zeta(2)$ et $\zeta(3)$ » ; Poorten, « A proof that Euler missed… ».

8. Beukers, « Irrationality of π^2, periods of an elliptic curve and $\Gamma_1(5)$ » ; Beukers et Peters, « A family of K3 surfaces and $\zeta(3)$ ».

9. Kontsevich et Zagier, « Periods ».

exemple, si f égale $\sum_{i,j,k\geqslant 0} a_{ijk}x^i y^j z^k$, alors la diagonale de f est la série $\sum_{i\geqslant 0} a_{iii}t^i$. Les diagonales sont très utiles en combinatoire, lors de la manipulation de séries génératrices. Sous des apparences rustres, les diagonales ont une théorie très riche. On notera en particulier les théorèmes de Furstenberg [10] sur les diagonales de fractions rationnelles, c'est-à-dire que la série dont on prend la diagonale est le développement en série entière d'une fraction rationnelle. Le premier affirme que toute série algébrique est la diagonale d'une fraction rationnelle ; et le second que sur un corps fini, toutes les diagonales de fractions rationnelles sont algébriques. [11] Typiquement, une diagonale de fraction rationnelle ne sera pas algébrique, mais d'après le second théorème, toute ses réductions modulo un premier le seront.

D'une certaine manière, la prise de diagonale est une façon purement formelle de réaliser une intégration. Tout au moins, si $f(x_{1\smile n})$ est une fraction rationnelle, alors la diagonale de f est une période de l'intégrale suivante, dépendant de t :

$$\int f\left(\frac{t}{x_2\cdots x_n}, x_2, \ldots, x_n\right) \mathrm{d}x_2 \cdots \mathrm{d}x_n.$$

Le calcul des périodes d'intégrales rationnelles permet donc le calcul des diagonales de fractions rationnelles.

Le chapitre III établit une équivalence entre certaines sommes combinatoires, comme celle présentée au §2, et les diagonales de fractions rationnelles. Cette équivalence permet d'appliquer le calcul des périodes à ces sommes combinatoires.

§6 SYMÉTRIE MIROIR. — Issue des recherches en physique, la symétrie miroir relie entre elles certaines variétés algébriques. [12] Entre autres relations surprenantes, il est possible de calculer les invariants de Gromov-Witten sur une variété X à partir d'une équation de Picard-Fuchs associée à sa variété miroir X′. La possibilité d'un tel calcul a surpris la communauté scientifique et a motivé le calcul de nombreuses périodes. Cette méthode est un des ingrédients du projet *Fano Search* [13] visant à la classification des variétés de Fano de dimension 4. L'algorithme décrit au chapitre II m'a permis de calculer des périodes venant de ces horizons — voir la section 3 du chapitre II.

§7 THÉORÈME DE KATZ. — À l'intérêt calculatoire des périodes répond la richesse de la théorie. Un exemple frappant est le théorème de Katz sur la conjecture de Grothendieck. Soit $\mathcal{L}$ un opérateur différentiel en t et ∂_t à coefficients dans $\mathbb{Z}$, d'ordre n. Si pour tout premier p, sauf peut-être un nombre fini, l'opérateur $\mathcal{L}$ réduit

10. Furstenberg, « Algebraic functions over finite fields ».
11. Voir les énoncés précis au chapitre III, §15
12. Cox et S. Katz, *Mirror symmetry and algebraic geometry.*
13. Coates, Corti, Galkin, Golyshev et Kasprzyk, *Mirror symmetry and Fano manifolds.*

modulo p admet n solutions algébriques linéairement indépendantes, alors la conjecture de Grothendieck prédit que $\mathcal{L}$ admet n solutions algébriques linéairement indépendantes. Cette conjecture générale reste ouverte mais Katz [14] a démontré l'implication dans le cas où $\mathcal{L}$ est une équation de Picard-Fuchs.

2 Considérations analytiques et historiques

§8. — Définissons plus précisément ce qu'est une période d'intégrale rationnelle. Soit $\mathrm{R}(x_{1\smile n})$ une fraction rationnelle à coefficients complexes. Soit γ un sous-ensemble de $\mathbb{C}$ égal à l'image d'une application différentiable φ de $[0,1]^n$ dans $\mathbb{C}^n$. Supposons que R soit continue sur γ, on définit alors l'intégrale de R sur γ par

$$\int_\gamma \mathrm{R}(x_{1\smile n})\mathrm{d}x_{1\smile n} \overset{\text{déf}}{=} \int_{[0,1]^n} \mathrm{R}(\varphi(t_{1\smile n}))\,\mathrm{jac}\,\varphi(t_{1\smile n})\mathrm{d}t_{1\smile n},$$

où $\mathrm{jac}\,\varphi(t_{1\smile n})$ est le déterminant de la matrice jacobienne formée des dérivées partielles $\partial\varphi_j(t_{1\smile n})/\partial t_i$. Remarquablement, on peut déformer le chemin d'intégration γ, tant que son bord reste fixe et que R reste continue sur γ, sans changer la valeur de l'intégrale. D'abord découvertes et étudiées pour des fonctions univariées, ces intégrales ont transformé les mathématiques :

> C'est à Cauchy que revient la gloire d'avoir fondé la théorie des intégrales prises entre des limites imaginaires ; cette théorie a pour ainsi dire doublé la puissance de l'analyse mathématique et a été le point de départ de tous les travaux qui ont suivi, dans tous les pays où on cultive les sciences exactes. [15]

Parmi les intégrales de chemin, on trouve une classe tout à fait particulière : les *périodes*. Ce sont les intégrales pour lesquelles γ n'a pas de bord. C'est le cas, par exemple, quand γ est le tore paramétré par

$$\varphi : (t_1,\dots,t_n) \in [0,1]^n \to (e^{2i\pi t_1},\dots,e^{2i\pi t_n}) \in \mathbb{C}^n.$$

On distingue ces intégrales sur un chemin sans bord, encore appelé *cycle*, par la notation $\oint_\gamma \mathrm{R}(x_{1\smile n})\mathrm{d}x_{1\smile n}$. L'intégration sur un cycle γ possède de nombreuses propriétés de nature algébrique qui font le lien entre analyse et géométrie. La première est l'annulation des périodes des dérivées de fractions rationnelles : si $\mathrm{C}_1,\dots,\mathrm{C}_n$ sont des fractions rationnelles continues sur le cycle γ, alors

$$\oint_\gamma \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \mathrm{C}_i}{\partial x_i}\mathrm{d}x_{1\smile n} = 0.$$

14. N. M. Katz, « Algebraic solutions of differential equations ».
15. Poincaré, « Sur les résidus des intégrales doubles ».

La seconde est l'annulation des périodes prises sur un *bord*. Soit η une sous-variété réelle à bord η de $\mathbb{C}^n$ de dimension $n+1$ sur laquelle R est continue. Notons $\partial\eta$ son bord. [16] On a alors

$$\oint_{\partial\eta} \mathrm{R}(x_{1\smile n})\mathrm{d}x_{1\smile n} = 0.$$

L'isomorphisme de Rham, qui met ces deux relations en miroir, est l'une des pierres angulaires de ce lien entre analyse et géométrie.

§9 ISOMORPHISME DE RHAM. — Fixons un polynôme f en les variables $x_{1\smile n}$ et considérons l'anneau A_f des fractions de la forme a/f^q, avec a polynomial et q entier. Il est important de fixer le lieu des pôles autorisés et ne pas le faire est source de grandes difficultés. Les faits suivants montrent les liens étroits entre intégrales et topologie :

1. Il existe des cycles $\gamma_1, \dots, \gamma_m$ tels que toute forme linéaire λ sur A_f qui s'annule sur les dérivées partielles d'éléments de A_f est du type
$$\lambda : \mathrm{R} \in \mathrm{A}_f \mapsto \sum_{j=1}^{m} u_j \oint_{\gamma_j} \mathrm{R}(x_{1\smile n})\mathrm{d}x_{1\smile n}$$
pour certains nombres complexes $u_{1\smile m}$.
2. Une fraction rationnelle a/f est de la forme
$$\frac{a}{f} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{c_i}{f^s},$$
où les c_i sont des polynômes et s un entier, si et seulement si $\oint_\gamma a/f\mathrm{d}x$ est nul pour tout cycle γ sur lequel f ne s'annule pas.
3. Il existe des fractions $\mathrm{S}_1, \dots, \mathrm{S}_m \in \mathrm{A}_f$ en nombre fini telles que tout élément de A_f se réécrive comme combinaison linéaire des S_j et de dérivées partielles d'éléments de A_f.
4. Si on choisit les γ_j et les S_i en nombres minimaux, alors la matrice
$$\left(\oint_{\gamma_j} \mathrm{S}_i \mathrm{d}x_{1\smile n}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant m}$$
est carrée et inversible.

L'histoire de ces résultats est faite de méandres. Outre le cas des courbes, les premiers énoncés en petites dimensions ont été donnés par Picard. [17] Dans un

16. Si η est l'image de la boule unité fermée de $\mathbb{R}^{n+1}$ par une immersion, alors $\partial\eta$ est l'image de la sphère unité par cette même immersion.

17. Picard et Simart, *Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes.*

cadre analytique, avec des fonctions infiniment différentiables, la dualité entre cycles et intégrales est due à Rham. [18] Il faut l'isomorphisme de Grothendieck [19] pour retrouver ces résultats avec des fractions rationnelles. Ainsi, les périodes des intégrales rationnelles relient par une dualité un objet topologique, les cycles modulo les bords, avec un objet algébrique, les fractions rationnelles modulo les dérivées.

Au vu du troisième point, les questions suivantes sont naturelles. Étant donnée une fraction a/f^q, comment décider s'il existe des fractions $C_{1\smile n}$ dans A_f, telles que a/f^q égale $\sum_{i=1}^n \partial C_i/\partial x_i$? Étant donné un polynôme f, comment calculer une base du quotient $A_f/\sum_{i=1}^n \partial_i A_f$? Je donne au chapitre II des réponses pratiques à ces questions.

§10 ÉQUATIONS DE PICARD-FUCHS. — On peut faire dépendre une période d'un paramètre. Soit $R_t(x_{1\smile n})$ une fraction rationnelle en les variables x_i et un paramètre t et soit γ_t un cycle dépendant continument de t, quand t parcourt un certain ouvert de $\mathbb{C}$, disons U. Si R_t est continu sur γ_t, alors on peut définir la fonction

$$F : t \in U \mapsto \oint_{\gamma_t} R_t(x_{1\smile n})dx_{1\smile n} \in \mathbb{C},$$

qui est une fonction analytique. Le troisième énoncé du paragraphe précédent garde son sens et reste vrai sur n'importe quel corps de caractéristique nulle, et en particulier sur $\mathbb{C}(t)$. En conséquence, la famille des dérivées $\partial^k R_t/\partial t^k$ est linéairement liée modulo les dérivées. C'est-à-dire qu'il existe des fractions rationnelles $C_i(t, x_{1\smile n})$ et $a_k(t)$ telles que

§10.1
$$\sum_{k=0}^{r} a_k(t)\frac{\partial^k R_t}{\partial t^k} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial C_i}{\partial x_i}.$$

Et si on intègre cette égalité le long de γ, on obtient

$$\sum_{k=0}^{r} a_k(t)F^{(k)}(t) = 0.$$

La fonction F est solution d'une équation différentielle linéaire à coefficients polynomiaux, l'équation différentielle de Picard-Fuchs.

Pour illustrer, considérons une ellipse de grand rayon unitaire et d'excentricité t. Son périmètre est donné par

18. Rham, « Sur l'analysis situs des variétés à n dimensions » ; Griffiths et Harris, *Principles of algebraic geometry*, p. 43.

19. Grothendieck, « On the de Rham cohomology of algebraic varieties ».

$$\mathrm{E}(t) = 2\int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1-t^2x^2}{1-x^2}}\mathrm{d}x.$$

Même si cette fonction n'en a pas les apparences, c'est une période d'intégrale rationnelle. En effet [20]

$$\mathrm{E}(t) = \frac{1}{2i\pi}\oint_{\gamma_t} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{1-\frac{1-t^2x^2}{(1-x^2)y^2}},$$

pour un certain cycle γ_t. Euler [21] a montré que $\mathrm{E}(t)$ est solution de l'équation différentielle linéaire

$$(t-t^3)y'' + (1-t^2)y' + ty = 0,$$

révélant ainsi l'une des premières équations de Picard-Fuchs. Comme l'a montré finalement Liouville, [22] la fonction $\mathrm{E}(t)$ n'est pas algébrique, c'est pourquoi l'étude de cette fonction fut longtemps délicate. L'équation d'Euler lève la plupart des difficultés : elle décrit la fonction entièrement et on peut en extraire des développements en série, des comportements asymptotiques, des identités, etc. Si on admet la représentation de $\mathrm{E}(t)$ sous forme d'intégrale double, il suffit d'observer que

§10.2
$$\left((t-t^3)\partial_t^2 + (1-t^2)\partial_t + t\right)\cdot\left(\frac{1}{1-\frac{1-t^2x^2}{(1-x^2)y^2}}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{t\left(1+x-x^2-x^3\right)y^2\left(3-2x-y^2+x^2\left(2-3t^2+y^2\right)\right)}{\left(1-y^2-x^2(t^2-y^2)\right)^2}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2t\left(1-t^2\right)x\left(1+x^3\right)y^3}{\left(1-y^2-x^2(t^2-y^2)\right)^2}\right),$$

où ∂_t est l'opérateur de dérivation $\partial/\partial t$, pour démontrer l'équation différentielle d'Euler. Les fractions sous les signes $\partial/\partial y$ et $\partial/\partial x$ sont appelées *certificats* car leur existence *certifie* que l'opérateur en t et ∂_t annule la fonction $\mathrm{E}(t)$. Cette thèse étudie des algorithmes pour trouver ce genre d'identité et ainsi calculer des équations différentielles associées à certaines fonctions.

§11 ÉTYMOLOGIE. — Les périodes d'intégrales rationnelles sont appelées ainsi car ce sont les périodes de certaines fonctions. Considérons une intégrale de la forme

$$\mathrm{F}(u) = \int_0^u \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{\mathrm{P}(z)}}$$

20. Un peu d'analyse complexe pour transformer l'intégrale sur $[-1, 1]$ en une intégrale sur un cycle, et un peu de calcul des résidus pour exprimer la racine carrée comme une intégrale rationnelle.

21. Euler, « Specimen de constructione aequationum differentialium sine indeterminatarum separatione » ; Houzel, *La géométrie algébrique.*

22. Liouville, « Mémoire sur les transcendantes elliptiques de première et de seconde espèce, considérées comme fonctions de leur module ».

où $\mathrm{P}(z)$ est un polynôme à racines simples, avec $\mathrm{P}(0) \neq 0$, et u un nombre complexe. C'est une fonction holomorphe au voisinage de 0, et on peut l'inverser à l'origine, c'est-à-dire qu'il existe une fonction G définie sur un voisinage de 0 telle que $\mathrm{G}(\mathrm{F}(u))$ égale u, pour u autour de 0.

Supposons qu'on puisse prolonger la fonction réciproque G en une fonction holomorphe sur le plan complexe. L'égalité

$$\mathrm{G}\left(\int_0^u \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{\mathrm{P}(z)}}\right) = u$$

est alors valable pour tout u dans $\mathbb{C}$, quel que soit le chemin d'intégration entre 0 et u, par prolongement analytique. En particulier, pour u proche de zéro, on peut considérer un chemin qui partant de 0 parcourt d'abord une boucle γ et ensuite va vers u en ligne droite. On obtient alors

$$\mathrm{G}\left(\oint_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{\mathrm{P}(z)}} + \mathrm{F}(u)\right) = u.$$

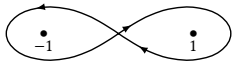
Autrement dit, la fonction G est périodique de période $\oint_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{\mathrm{P}(z)}}$, et ce pour tout cycle γ.

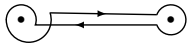
Dans le cas où $\mathrm{P}(z)$ est $1 - z^2$, la fonction F est l'arcsinus et la fonction G est donc le sinus. Les périodes de l'intégrale $\oint \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{1-z^2}}$ sont toutes des multiples entiers de la période fondamentale obtenue sur un cycle lemniscate [23] qu'on peut déformer [24] en collant au segment $[-1, 1]$ pour obtenir la période bien connue du sinus :

$$2\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{1 - z^2}} = 2\pi.$$

On notera qu'un cycle qui ferait un seul tour autour de 1 n'est pas admissible : la fonction $\sqrt{1 - z^2}$ ayant plusieurs déterminations, il faut que les points de départ et d'arrivée du cycle soient sur la même branche.

§12 INTÉGRALES ALGÉBRIQUES. — L'exemple précédent part d'une intégrale de fonction algébrique alors que nous nous sommes restreints aux intégrales rationnelles. En réalité ce n'est pas une restriction. Soit $y(z)$ une fonction algébrique, c'est-à-dire qu'il existe un polynôme non nul $\mathrm{Q}(z, w)$ tel que $\mathrm{Q}(z, y(z))$ est nul. Un calcul des résidus montre que

23. 

24. 

$$y(z) = \frac{1}{2i\pi} \oint_{\gamma_t} \frac{w\partial_w \mathrm{Q}(z,w)}{\mathrm{Q}(z,w)} \mathrm{d}w,$$

pour un cycle γ_t choisi de telle sorte qu'il entoure la racine $y(z)$ de $\mathrm{Q}(z,w)$ et seulement celle-ci. Ainsi, pour traiter l'exemple précédent, on prend Q égal à $\mathrm{P}(z)w^2 - 1$ et on obtient

$$\oint \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{\mathrm{P}(z)}} = \frac{1}{i\pi} \oint \frac{\mathrm{P}(z)w^2}{\mathrm{P}(z)w^2 - 1} \mathrm{d}w\mathrm{d}z.$$

Et bien sûr, on peut faire dépendre y de plusieurs variables. Ainsi une intégrale algébrique par rapport à n variables est toujours égale à une intégrale rationnelle par rapport à $n + 1$ variables.

3 Contributions

La recherche en calcul formel a déjà donné plusieurs algorithmes pouvant calculer les intégrales multiples (voir ci-après). Cette thèse ajoute à ce patrimoine mathématique trois nouveautés, correspondant aux trois chapitres. Les deux premiers traitent du problème de la résolution de l'équation §10.1 : étant donnée une fraction rationnelle R de $\mathbb{Q}(t, x_{1\cup n})$, trouver des polynômes $a_k(t)$ tels qu'il existe des fractions rationnelles C_i telles que

$$\sum_{k=0}^{r} a_k(t) \frac{\partial^k \mathrm{R}}{\partial t^k} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \mathrm{C}_i}{\partial x_i}.$$

Du point de vue du calcul formel, résoudre ce problème c'est calculer une intégrale. On dit que l'opérateur $\sum_{k=0}^{r} a_k(t) \frac{\partial^k}{\partial t^k}$ annule les périodes de l'intégrale $\int \mathrm{R}(\mathrm{d}x_{1\cup n})$. On distingue bien l'opérateur [25], qu'on cherche à calculer, des C_i, qu'on appelle *certificats* car ils permettent de vérifier après coup la validité de l'opérateur. Seul l'opérateur nous intéresse.

§13 BORNES ET COMPLEXITÉ. — Quel que soit l'algorithme utilisé, l'intégration des fractions rationnelles, et à plus forte raison celle des fonctions plus générales, est une opération plutôt couteuse en temps, même sur des exemples de taille raisonnable. C'est pourquoi il est utile d'évaluer la taille des objets intervenant dans les calculs, et notamment la taille de l'opérateur recherché. Si on calcule quelque chose de gros, il est normal d'attendre, mais si on calcule quelque chose de petit, il est bon de savoir où passe le temps. Cela peut permettre de concevoir de meilleurs algorithmes, ou de montrer qu'on ne peut pas en concevoir de meilleur.

25. Souvent appelé *télescopeur*, en calcul formel.

Avec Alin Bostan et Bruno Salvy [26] nous avons étudié la complexité de l'intégration des fractions rationnelles. Soit a/f une fraction rationnelle en t et les $x_{1\smile n}$. Soit N le degré en les $x_{1\smile n}$ de f et d_t le degré en t de a et de f. Pour simplifier, on suppose que le degré de a en les $x_{1\smile n}$ est au plus $\mathrm{N}-n-1$. Alors il existe un opérateur d'ordre au plus N^n qui annule les périodes de $\int \mathrm{R}$. De plus, la borne N^n est essentiellement optimale, même si sur des exemples particuliers, l'ordre de l'opérateur peut être bien moindre. Nous donnons un algorithme qui calcule cet opérateur en $\widetilde{O}(\mathrm{N}^{8n}e^{5n}d_t)$ opérations dans le corps $\mathbb{Q}$, où $\widetilde{O}(\mathrm{A})$ signifie $O(\mathrm{A}\log^k \mathrm{A})$ pour un certain k. Enfin, nous avons montré que le certificat peut être de taille comparable à N^{n^2}. En particulier l'opérateur peut être calculé sans son certificat. Pour donner un point de comparaison, le nombre de monômes dans f^n (en représentation dense) est compris entre $n(\mathrm{N}+1)^n d_t$ et $ne^n(\mathrm{N}+1)^n d_t$. La complexité totale de l'algorithme est donc polynomiale en ce nombre.

Ces résultats reposent sur l'étude du cas générique, auquel on se ramène par une méthode de déformation, et sur la méthode de Griffiths-Dwork. [27] L'idée de la déformation a déjà été utilisée par Christol [28] dans un contexte similaire. L'hypothèse de généricité s'exprime comme la régularité de l'hypersurface définie par f sur le corps $\mathbb{Q}(t)$. Ceci peut surprendre car nous sommes habitués, dans l'école de la création télescopique, à des algorithmes d'intégration qui ignorent la nature géométrique du problème, en partie cachée par leur grande généralité. C'est en partie paradoxal car les problèmes d'intégration ont eu un rôle important dans les fondements de la géométrie algébrique moderne. [29] À l'inverse, l'étude du cas rationnel rend de nouveau particulièrement apparente la nature géométrique. Notre apport a été d'approfondir d'un point de vue algorithmique les méthodes issues de la géométrie algébrique, et notamment les recherches sur la cohomologie de Rham.

§14 ALGORITHME EFFICACE. — Si la complexité de l'algorithme par déformation est maitrisée, il n'en est pas moins très lent en pratique dans les cas singuliers. Or toutes les intégrales rationnelles qu'on rencontre sont singulières. Je me suis donc intéressé au traitement du cas singulier en tant que tel, sans passer par une déformation générique. Le résultat est un algorithme dont on ne sait évaluer la complexité mais dont les performances en pratique sont plutôt satisfaisantes. Son

26. Bostan, Lairez et Salvy, « Creative telescoping for rational functions using the Griffiths–Dwork method ».

27. Dwork, « On the zeta function of a hypersurface », §3, « On the zeta function of a hypersurface : II », §8 ; Griffiths, « On the periods of certain rational integrals ».

28. Christol, « Diagonales de fractions rationnelles et équations de Picard-Fuchs ».

29. Houzel, *La géométrie algébrique.*

implémentation est élémentaire puisqu'elle n'utilise que des bases de Gröbner commutatives et de l'algèbre linéaire. La mise en œuvre de cet algorithme m'a permis de calculer de nombreuses intégrales qui étaient jusque-là inaccessibles. [30] Ici aussi l'apport de la géométrie algébrique a été important : la preuve de la terminaison de l'algorithme repose sur des théorèmes de Dimca. [31]

§15 SOMMES BINOMIALES MULTIPLES. — Enfin, nous avons cherché, avec Alin Bostan et Bruno Salvy, [32] à appliquer à des questions de sommation discrète les résultats pratiques et théoriques obtenus sur les intégrales rationnelles. Nous définissons précisément une classe de suites, les *sommes binomiales*, close pour de nombreuses opérations (somme, produit, sommation indéfinie, etc) et contenant les coefficients binomiaux. On y trouve toutes les sommes binomiales, y compris les sommes multiples, au sens usuel du terme, comme

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n+k}{k} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j}^3 \text{ et } \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} \binom{i+j}{j}^2 \binom{4n-2i-2j}{2n-2i}.$$

Nous obtenons deux résultats. Dans les deux cas, le principe est d'éviter la représentation des sommes binomiales par des systèmes d'équations récurrentes pour lui préférer la représentation des *séries génératrices* des sommes binomiales par des périodes d'intégrales rationnelles. L'idée n'est pas neuve, elle a notamment été exploitée en profondeur par Egorychev [33] mais elle a été ici systématisée et automatisée.

Le premier résultat montre que les sommes binomiales sont les coefficients des diagonales de fractions rationnelles. S'il y a une part d'arbitraire dans la définition des sommes binomiales, ce théorème montre une caractérisation intrinsèque. L'existence d'un tel résultat est soupçonnée depuis longtemps mais c'est, à ma connaissance, le premier énoncé précis d'une équivalence. [34]

Le second résultat est un algorithme pour décider de l'égalité dans la classe des sommes binomiales. On peut donc prouver de manière entièrement automatique, et relativement rapide, des identités comme

$$\sum_{r=0}^{n}\sum_{s=0}^{n}(-1)^{n+r+s}\binom{n}{r}\binom{n}{s}\binom{n+r}{r}\binom{n+s}{s}\binom{2n-r-s}{n} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^4.$$

30. Lairez, *Computing periods of rational integrals*.

31. Dimca, « On the de Rham cohomology of a hypersurface complement », « On the Milnor fibrations of weighted homogeneous polynomials ».

32. Travail encore inédit.

33. Egorychev, *Integral representation and the computation of combinatorial sums*.

34. Un résultat analogue mais de nature assez différente apparait dans la prépublication récente de Garrabrant et Pak, « Counting with irrational tiles ».

De nombreux outils existent déjà pour démontrer ce genre de somme, et même des sommes bien plus générales que les sommes binomiales, mais une intervention humaine est souvent nécessaire pour conclure les preuves. Ce que nous apportons est un test d'égalité automatique de bout en bout sur la classe précisément délimitée des sommes binomiales. Grâce à mon algorithme efficace pour l'intégration des fractions rationnelles et à une procédure, appelée *réduction géométrique*, qui permet de simplifier grandement les représentations intégrales, l'implémentation du test d'égalité sur les sommes binomiales est assez compétitive en pratique.

4 Travaux précédents

§16. — Le calcul des périodes d'intégrales rationnelles et des sommes binomiales a déjà été développé dans de nombreuses directions, et en particulier dans le cadre de la *création télescopique* dont la portée est bien plus grande que les fractions rationnelles et les sommes binomiales. On pourra consulter à ce sujet les revues de Koutschan [35] et Chyzak. [36] Concernant les algorithmes qui traitent en particulier l'intégration multiple des fractions rationnelles, trois familles ont particulièrement été développées. Voici une petite sélection des algorithmes existants.

§17 FASENMAYER, VERBAETEN. — La première est issue des travaux de Fasenmayer [37] et de Verbaeten. [38] Les algorithmes par Wilf et Zeilberger [39] et Apagodu et Zeilberger [40] s'appliquent aux fonctions hyperexponentielles, ce qui inclut les fractions rationnelles. Le principe est de transformer l'équation §10.1 en un système linéaire sur $\mathbb{Q}(t)$ en bornant *a priori* la taille d'une certaine solution. La méthode est intéressante précisément pour ces bornes *a priori*. Malheureusement, le système linéaire à résoudre est bien souvent énorme et la méthode ne peut éviter le calcul du certificat, ce qui limite intrinsèquement son efficacité. L'argument de Lipshitz [41] pour montrer l'existence de certaines équations différentielles appartient aussi à cette catégorie.

35. Koutschan, « Creative telescoping for holonomic functions ».
36. Chyzak, *The ABC of Creative Telescoping : Algorithms, Bounds, Complexity*.
37. Fasenmyer, « Some generalized hypergeometric polynomials ».
38. Verbaeten, « The automatic construction of pure recurrence relations ».
39. Wilf et Zeilberger, « An algorithmic proof theory for hypergeometric (ordinary and "q") multisum/integral identities ».
40. Apagodu et Zeilberger, « Multi-variable Zeilberger and Almkvist-Zeilberger algorithms and the sharpening of Wilf- Zeilberger theory ».
41. Lipshitz, « The diagonal of a D-finite power series is D-finite ».

§18 ZEILBERGER. — «L'algorithme rapide» de Zeilberger [42] a aussi eu une descendance fournie. Le point commun de ces méthodes est de réduire la résolution de l'équation §10.1 au calcul des solutions rationnelles d'un système d'équations différentielles ordinaires linéaires. Picard a en fait utilisé cette méthode bien avant pour calculer des intégrales doubles de fractions rationnelles. [43] Les algorithmes de Chyzak [44] et Koutschan [45] sont de cette famille et s'appliquent à des fonctions définies par un idéal D-fini d'une algèbre de Ore. Les fractions rationnelles et les produits de coefficients binomiaux sont des cas *très* particuliers. L'utilisation de la résolution en fractions rationnelles et des bases de Gröbner non commutatives rend l'analyse de la complexité difficile. Des implémentations solides sont disponibles en Maple (Mgfun) et Mathematica (HolonomicFunctions).

§19 TAKAYAMA. — Une dernière famille, développée notamment par Takayama, [46] mais aussi Galligo, [47] s'appuie sur la théorie des $\mathcal{D}$-modules et a donné de nombreux algorithmes. On notera notamment l'algorithme d'Oaku et Takayama [48] pour le calcul de la cohomologie de Rham — et en particulier le calcul du quotient $\mathrm{A}_f / \sum_i \partial_i \mathrm{A}_f$ — et les algorithmes de Oaku [49] pour calculer des intégrales de fonctions holonomes sur des domaines semi-algébriques. Des implémentations sont disponibles en Risa/Asir.

§20 AUTRES TRAVAUX. — Le cas des intégrales simples de fractions rationnelles a été étudié d'un point de vue algorithmique par Bostan, Chen, Chyzak et Li [50] et le cas des intégrales doubles par Chen, Kauers et Singer. [51] Notons aussi l'étude de Picard [52] dont on peut extraire beaucoup d'idées algorithmiques.

La méthode de Griffiths-Dwork a déjà été utilisée à de nombreuses reprises, par exemple pour le comptage de points, [53] ou l'étude des applications miroir. [54]

42. Zeilberger, « The method of creative telescoping ».
43. Picard, « Sur les intégrales doubles de fonctions rationnelles dont tous les résidus sont nuls ».
44. Chyzak, « An extension of Zeilberger's fast algorithm to general holonomic functions ».
45. Koutschan, « A fast approach to creative telescoping ».
46. Takayama, « An algorithm of constructing the integral of a module — an infinite dimensional analog of Gröbner basis ».
47. Galligo, « Some algorithmic questions on ideals of differential operators ».
48. Oaku et Takayama, « An algorithm for de Rham cohomology groups of the complement of an affine variety via D-module computation ».
49. Oaku, « Algorithms for integrals of holonomic functions over domains defined by polynomial inequalities ».
50. Bostan, Chen, Chyzak et Li, « Complexity of creative telescoping for bivariate rational functions ».
51. Chen, Kauers et Singer, « Telescopers for Rational and Algebraic Functions via Residues ».
52. Picard et Simart, *Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes.*
53. Abbott, Kedlaya et Roe, « Bounding Picard numbers of surfaces using p-adic cohomology » ; Gerkmann, « Relative rigid cohomology and deformation of hypersurfaces ».
54. Morrison, « Picard-Fuchs equations and mirror maps for hypersurfaces ».

Indépendamment, Christol [55] utilise une construction similaire pour étudier les diagonales de fractions rationnelles.

§21 SOMMES BINOMIALES. — Les algorithmes et les méthodes pour la sommation discrète sont également nombreux, à commencer par ceux exposés par Petkovšek, Wilf et Zeilberger. [56] Citons aussi, pour les sommes multiples, les algorithmes de création télescopique de Wegschaider [57] et encore une fois ceux de Chyzak [58] et Koutschan [59] qui traitent dans un même cadre sommation discrète et intégration. Le point de vue des représentations intégrales, très différent, a été beaucoup étudié par Egorychev. [60]

55. Christol, « Diagonales de fractions rationnelles et equations différentielles ».
56. Petkovšek, Wilf et Zeilberger, A = B.
57. Wegschaider, « Computer generated proofs of binomial multi-sum identities ».
58. Chyzak, « An extension of Zeilberger's fast algorithm to general holonomic functions ».
59. Koutschan, « A fast approach to creative telescoping ».
60. Egorychev, *Integral representation and the computation of combinatorial sums.*

I BORNES & COMPLEXITÉ

§1 PRÉSENTATION DU PROBLÈME. — La question de calculer les périodes des intégrales rationnelles se ramène, pour une part importante, à la question de décider si une fraction rationnelle $\mathrm{R}(x_{1\smile n})$ peut s'écrire ou non sous la forme

§1.1
$$\mathrm{R} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \mathrm{C}_i}{\partial x_i},$$

pour certaines fractions C_i sans autre pôle que ceux de R — voir §8, introduction. Concernant les périodes paramétrées, la question se posera en ces termes : étant donnée une fraction rationnelle R_t en les variables $x_{1\smile n}$ et t, trouver des polynômes $a_0(t), \dots, a_r(t)$ tels que

§1.2
$$\sum_{j=0}^{r} a_j(t) \frac{\partial^j \mathrm{R}_t}{\partial t^j} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \mathrm{C}_i}{\partial x_i},$$

pour certaines fractions C_i sans autre pôle que ceux de R_t. On dit alors que l'opérateur $\sum_j a_j \partial_t^j$ annule les périodes de l'intégrale $\int \mathrm{R}$, ou $\oint \mathrm{R}$ en bref. Si cet opérateur est celui d'ordre minimal, alors c'est *l'équation de Picard-Fuchs* de $\oint \mathrm{R}$. Les C_i sont appelés *certificats* car ils permettent après coup de vérifier que l'opérateur annule bien les périodes de $\int \mathrm{R}$: il suffit de vérifier l'égalité §1.2 entre deux fractions rationnelles. Dans ce chapitre, je m'attache à donner des bornes sur la complexité du calcul des $a_j(t)$ et sur leur degré.

Dans cette formulation algébrique, l'opération analytique d'intégration n'apparait plus, et le corps de base importe peu. Soit $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique nulle. Parfois on le supposera muni d'une dérivation δ, on pourra alors penser que $\mathbb{K}$ est le corps à un paramètre $\mathbb{Q}(t)$ muni de la dérivation usuelle ∂_t. La dérivation δ s'étend à $\mathbb{K}(x_{1\smile n})$ en posant $\delta(x_i) = 0$. La question est alors : étant donnée une fraction rationnelle R en les variables $x_{1\smile n}$ à coefficients dans $\mathbb{K}$, trouver $a_0, \dots, a_r$ dans $\mathbb{K}$ tels que

§1.3
$$\sum_{j=0}^{r} a_j \delta^j(\mathrm{R}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \mathrm{C}_i}{\partial x_i},$$

pour certaines fractions C_i sans autre pôle que ceux de R. On dit alors que l'opérateur $\sum_j a_j \delta^j$ annule les périodes de l'intégrale $\int R$, ou $\oint R$ en bref.

§2 RÉSULTAT PRINCIPAL. — Avec Alin Bostan et Bruno Salvy, [1] nous avons obtenu un résultat de complexité concernant l'intégration multiple des fractions rationnelles. La démonstration de ce résultat est l'objet de ce chapitre.

§2.1 *Théorème (Bostan, Lairez, Salvy, 2013). — Soit* $R = a/f$ *une fraction en les variables* t *et* $x_1, \dots, x_n$*, à coefficients dans* $\mathbb{Q}$*. Soit* N *le maximum de* $\deg_x f$ *et de* $\deg_x a + n + 1$ *et soit* d_t *le maximum de* $\deg_t f$ *et* $\deg_t a$*. Les périodes de l'intégrale* $\int R$ *sont annulées par un opérateur d'ordre au plus* N^n *et de degré au plus* $N^{3n} e^n d_t$*. Cet opérateur peut être calculé avec* $\widetilde{O}(N^{8n} e^{5n} d_t)$ *opérations dans* $\mathbb{Q}$*.*

La notation $\widetilde{O}(A)$ signifie $O(A \log^k A)$ pour un certain k. Les bornes sont uniformes en tous les paramètres, elles restent donc valables pour des valeurs particulières de n ou de N. L'outil principal de ce théorème est la méthode de Griffiths-Dwork qui effectue la réduction des périodes sous une certaine hypothèse de régularité. On se ramène au cas régulier par déformation.

Ce théorème étend en partie ce qui était connu pour les intégrales simples. [2] Des algorithmes traitant d'une manière ou d'une autre les intégrales multiples, [3] c'est le premier dont on puisse prouver que la complexité est polynomiale en N^n et non en N^{n^2}. Si ce résultat n'est pas évident c'est parce que le certificat est en général de taille bien plus importante que l'opérateur $\mathcal{L}$.

En effet, écrivons $\mathcal{L}$ comme $\sum_{k=0}^{r} a_k(t) \partial_t^k$, où r est l'ordre de $\mathcal{L}$. Par définition, il existe des polynômes $b_{1 \smile n}$ tels que

$$\mathcal{L}(R) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{b_i}{f^s}. \tag{§2.2}$$

Le membre de gauche de l'équation §2.2 est une fraction de la forme b/f^{r+1} et si on suppose que f ne renferme aucun carré alors l'exposant $r+1$ est minimal. On peut écrire b comme $(-f')^r a + fc$ pour un certain polynôme c, où f' désigne $\partial_t f$. Il est facile de voir que génériquement le nombre de monômes dans b est au moins égal

1. Bostan, Lairez et Salvy, « Creative telescoping for rational functions using the Griffiths–Dwork method ».

2. Bostan, Chen, Chyzak et Li, « Complexity of creative telescoping for bivariate rational functions ».

3. Apagodu et Zeilberger, « Multi-variable Zeilberger and Almkvist-Zeilberger algorithms and the sharpening of Wilf- Zeilberger theory » ; Chyzak, « An extension of Zeilberger's fast algorithm to general holonomic functions » ; Koutschan, « A fast approach to creative telescoping » ; Lipshitz, « The diagonal of a D-finite power series is D-finite » ; Takayama, « An algorithm of constructing the integral of a module — an infinite dimensional analog of Gröbner basis » ; Zeilberger, « A holonomic systems approach to special functions identities ».

au nombre de monômes dans $(-f')^r$. Toujours génériquement, le polynôme f' est de degré N et donc $(-f')^r$ de degré Nr et renferme donc typiquement $\binom{\mathrm{N}r+n}{n}$ monômes, ce qui est plus grand que $\left(\frac{\mathrm{N}r}{n}+1\right)^n$. On va voir que génériquement l'ordre de $\mathcal{L}$ est à peu près N^n, de sorte que le polynôme b contient au moins N^{n^2} monômes, génériquement et dès que $\mathrm{N} \geqslant n$.

Parallèlement, le membre de droite de l'équation §2.2 ne contient que n dérivations, le nombre de monômes qu'on trouvera au numérateur est donc du même ordre que le nombre des monômes que renferment les b_i. Au final on obtient que le certificat est de taille comparable à N^{n^2}, génériquement.

Dans le domaine de la création télescopique on a observé depuis longtemps que le certificat est en général bien plus gros que l'opérateur calculé. Je crois que l'argument ci-dessus est le premier argument quantitatif en ce sens. Ainsi, tout algorithme qui calcule des certificats sous cette forme voit son efficacité intrinsèquement limitée. Naturellement la question suivante est de savoir si on peut calculer l'opérateur sans le certificat. Là aussi la question était ouverte pour les intégrales multiples et le théorème §2.1 donne une réponse positive.

Notons toutefois que cet argument ne s'applique pas aux algorithmes de *type Chyzak*[4] : ils traitent l'intégration multiple en réalisant des intégrations simples en cascade, chaque étape construit des certificats mais les certificats finaux ne sont pas nécessairement calculés. L'argument ci-dessus ne dit rien sur la taille de ces certificats intermédiaires.

§3 INTÉGRALES SIMPLES. — Le cas des intégrales simples, c'est-à-dire par rapport à une seule variable, est résolu élégamment par la méthode d'Hermite.

> Le procédé élémentaire d'intégration des fractions rationnelles $\frac{\mathrm{F}_1(x)}{\mathrm{F}(x)}$ peut être présenté sous une forme telle, que la résolution de l'équation $\mathrm{F}(x) = 0$ ne soit plus nécessaire pour le calcul de la partie algébrique de l'intégrale, mais seulement pour en obtenir la partie transcendante. [5]

Posons donc $n = 1$. Soit a/f^q une fraction rationnelle de $\mathbb{K}(x)$, avec a et f des polynômes et q un entier. Supposons de plus que f ne contient pas de facteur carré. Les polynômes a et f ne sont pas nécessairement premiers entre eux et toute

4. Chyzak, « An extension of Zeilberger's fast algorithm to general holonomic functions » ; Koutschan, « A fast approach to creative telescoping ».

5. Hermite, « Sur l'intégration des fractions rationnelles ».

fraction se met sous cette forme. En considérant les racines de f dans une clôture algébrique de $\mathbb{K}$, la décomposition en éléments simples de a/f^q s'écrit

$$\frac{a}{f^q} = \underbrace{\sum_{f(\alpha)=0} \frac{r_\alpha}{x-\alpha}}_{\text{pôles simples}} + \underbrace{\sum_{k=2}^{q} \sum_{f(\alpha)=0} \frac{s_{\alpha,k}}{(x-\alpha)^k}}_{\text{pôles multiples}} + \underbrace{\sum_{k\geqslant 0} u_k x^k}_{\text{partie entière}},$$

où les r_α, $s_{\alpha,k}$ et u_k sont des nombres complexes. Il apparait que la partie entière et les pôles multiples sont des dérivées :

$$\frac{a}{f^q} = \sum_{f(\alpha)=0} \frac{r_\alpha}{x-\alpha} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\sum_{k=2}^{q} \sum_{f(\alpha)=0} \frac{1}{1-k} \frac{s_{\alpha,k}}{(x-\alpha)^{k-1}} + \sum_{k\geqslant 0} \frac{u_k}{k+1} x^{k+1} \right).$$

Ainsi, seuls les pôles simples contribuent aux périodes de a/f^q. Définissons

$$\left[\frac{a}{f^q}\right] \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{f(\alpha)=0} \frac{r_\alpha}{x-\alpha},$$

la *forme réduite* de a/f^q. Elle est symétrique en les racines de f, donc elle est à coefficients dans $\mathbb{K}$. La fraction a/f^q ne diffère de sa forme réduite que par la dérivée d'une fraction rationnelle. Analytiquement, pour tout cycle γ ne passant pas par une racine de f

$$\oint_\gamma \frac{a}{f^q} \mathrm{d}x = \oint_\gamma \left[\frac{a}{f^q}\right] \mathrm{d}x.$$

Réciproquement, on se convainc que si deux fractions ont les mêmes périodes, alors elles ont la même forme réduite.

La méthode de réduction d'Hermite permet de calculer $[a/f^q]$ sans calculer les racines de f. Quand q est 1, la forme réduite de a/f est simplement r/f où $a = uf + r$ est la division euclidienne de a par f. Pour $q > 1$, le principe est d'écrire a comme $uf + vf'$, pour certains polynômes u et v et de constater que

§3.1
$$\frac{a}{f^q} = \frac{u + \frac{1}{q-1}v'}{f^{q-1}} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{q-1}\frac{v}{f^{q-1}}\right).$$

Ainsi

$$\left[\frac{a}{f^q}\right] = \left[\frac{u + \frac{1}{q-1}v'}{f^{q-1}}\right],$$

ce qui donne une procédure pour calculer $[a/f^q]$ par récurrence sur l'ordre du pôle. Cette formule peut être interprétée comme l'intégration par parties de a/f^q, avec un choix judicieux des parties.

La réduction d'Hermite résout le problème de décider si une fraction rationnelle

est une dérivée d'une autre fraction, et elle peut aussi être utilisée pour calculer un opérateur annulant les périodes d'une intégrale paramétrée $\int a/f^q$.[6] Soit δ une dérivation sur $\mathbb{K}$. On pose alors $R_0 = [a/f^q]$ et $R_{k+1} = [\delta(R_k)]$, de sorte que R_k est congru à $\delta^k(a/f^q)$ modulo les dérivées. Les R_k sont tous de la forme b/f, avec b un polynôme en x de degré au plus $\deg f - 1$; par conséquent, ils sont linéairement dépendants. On calcule alors une telle équation de liaison

$$\sum_{j=0}^{r} a_j R_j = 0,$$

à coefficients dans $\mathbb{K}$, et l'opérateur $\sum_j a_j \delta^j$ annule les périodes de $\int a/f^q$.

§4 INTÉGRALES MULTIPLES. — À plusieurs variables, il n'existe pas de décomposition en éléments simples. Qu'à cela ne tienne, le principe de la réduction d'Hermite reste valable. Et si a se décompose en $uf + \sum_{i=1}^n v_i \partial_i f$, alors

$$\frac{a}{f^q} = \frac{u + \frac{1}{q-1}\sum_i \partial_i v_i}{f^{q-1}} - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{q-1} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{v_i}{f^{q-1}},$$

formule analogue à l'équation §3.1. On est alors tenté de définir

$$\left[\frac{a}{f^q}\right] = \left[\frac{u + \frac{1}{q-1}\sum_i \partial_i v_i}{f^{q-1}}\right].$$

Si on peut obtenir quelques succès avec cette définition, elle reste très insatisfaisante. Premièrement, on ne dispose pas de la division euclidienne, ainsi on ne peut pas réduire le degré du numérateur quand $q = 1$. Deuxièmement, et c'est plus grave, on ne peut pas en général décomposer a comme $uf + \sum_{i=1}^n v_i \partial_i f$. Le fait qu'il existe pour tout a une telle réduction est équivalent à une propriété de nature géométrique sur le lieu des points de $\mathbb{K}^n$ où s'annule f : la régularité.

Le premier point appelle à considérer des polynômes homogènes : si a et f sont homogènes, et si a égale $uf + \sum_{i=1}^n v_i \partial_i f$, on peut toujours supposer que les v_i sont homogènes de degré $\deg a - \deg f + 1$, ce qui permet de contrôler les degrés tout au long de la réduction. Le second point est une difficulté plus profonde.

§5 HOMOGÉNÉISATION. — Soit S une fraction homogène en les variables $x_{0 \smile n}$ telle que $S_{|x_0=1}$ égale R. Une fraction homogène est le quotient de deux polynômes homogènes. On suppose de plus que S est de degré $-n-1$, c'est-à-dire que la différence des degrés du numérateur et du dénominateur égale $-n-1$. Ces hypothèses

6. Bostan, Chen, Chyzak et Li, « Complexity of creative telescoping for bivariate rational functions ».

(homogénéité et degré $-n-1$) sont équivalentes au fait que S vérifie la relation d'Euler

$$-(n+1)\mathrm{S} = \sum_{i=0}^{n} x_i \partial_i \mathrm{S}.$$

Dans ces conditions, si S est de la forme $\sum_{i=0}^{n} \partial_i \mathrm{C}_i$, pour certaines fractions rationnelles C_i sans autre pôle que ceux de S, alors R est de la forme $\sum_{i=1}^{n} \partial_i \mathrm{C}_i'$, pour certaines fractions rationnelles C_i' sans autre pôle que ceux de R. Si de plus x_0 divise le dénominateur de S, alors il y a équivalence. Ce sera prouvé au §10. Ceci justifie de ne s'intéresser qu'au cas homogène : le cas affine s'y ramène. Le degré $-n-1$ est choisi pour que $\mathrm{S}\mathrm{d}x_0 \cdots \mathrm{d}x_n$ soit homogène de degré nul, et qu'ainsi l'intégrale $\int \mathrm{S}\mathrm{d}x_0 \cdots \mathrm{d}x_n$ soit invariante par la dilatation des variables $(x_0, \ldots, x_n)$ changeant en $(\lambda x_0, \ldots, \lambda x_n)$.

§6 MÉTHODE DE GRIFFITHS-DWORK. — On note A l'anneau $\mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]$ et A_f l'anneau $\mathrm{A}[1/f]$. Soit N le degré de f. À l'instar de la réduction d'Hermite, on cherche à définir une application de réduction [ ] transformant un élément de A_f en un autre avec un pôle d'ordre inférieur.

Soit a/f^q une fraction homogène de degré $-n-1$, c'est-à-dire que a est un polynôme de degré $q\mathrm{N}-n-1$. On décompose a comme $r + \sum_{i=0}^{n} v_i \partial_i f$, où r est choisi minimal pour un certain ordre monomial fixé. Comme a et les $\partial_i f$ sont des polynômes homogènes, on peut toujours choisir r homogène de degré $q\mathrm{N}-n-1$ et chaque v_i homogène de degré $(q-1)\mathrm{N}-n$. En particulier, si $q=1$ alors les v_i sont nuls.

On pose alors, par récurrence sur l'ordre du pôle q

$$\left[\frac{a}{f^q}\right] \overset{\text{déf}}{=} \frac{r}{f^q} + \left[\frac{1}{q-1}\frac{\sum_{i=0}^{n} \partial_i v_i}{f^{q-1}}\right].$$

Si q vaut 1, le second terme est nul. À la différence de la réduction d'Hermite, l'ordre du pôle n'est pas toujours réductible, ainsi la partie en r/f^q est nécessaire. On pourrait décomposer a en $r + uf + \sum_{i=0}^{n} v_i \partial_i f$, mais ce serait redondant car $\mathrm{N}f$ égale $\sum_i x_i \partial_i f$, par homogénéité.

Sous une hypothèse de régularité, Griffiths a montré que la réduction $[a/f^q]$ est nulle si et seulement si a/f^q est une somme de dérivées, c'est-à-dire un élément de $\sum_i \partial_i \mathrm{A}_f$. On obtient donc un parfait analogue de la réduction d'Hermite, à la fois dans les méthodes et dans les propriétés.

Il y a une ambiguïté dans la définition de la réduction de Griffiths-Dwork, puisqu'aucune contrainte n'est imposée sur les v_i. On pourrait en fixer une mais en fait $[a/f^q]$ ne dépend que de l'ordre monomial par rapport auquel on minimise r.

Ce point est toutefois important puisqu'il est à la base du nouvel algorithme de réduction présenté au chapitre II.

§7 THÉORÈMES DE GRIFFITHS. — La démonstration du théorème §2.1 repose sur deux théorèmes de Griffiths.[7] Soit $f \in \mathbb{K}[x_{0\smile n}]$ un polynôme homogène. Le premier décrit l'ordre des pôles dans les certificats :

§7.1 *Théorème (Griffiths). — Si* $\mathrm{V}(f)$ *est régulier dans* $\mathbb{P}^n$*, alors pour toute fraction rationnelle* a/f^q*, homogène de degré* $-n-1$*, s'il existe des polynômes* $b_{0\smile n}$ *et un entier* s *tels que* $a/f^q = \sum_i \partial_i(b_i/f^s)$ *alors il existe des polynômes* $b'_{0\smile n}$ *tels que* $a/f^q = \sum_i \partial_i(b'_i/f^{q-1})$.

Ce théorème est en soi une solution au problème de décision : si a/f^q est homogène de degré $-n-1$, alors on peut supposer que les b'_i/f^{q-1}, s'ils existent, sont homogènes de degré $-n$, et donc que les b_i sont des polynômes homogènes de degré $(q-1)\deg f - n$. Ainsi, le problème de décider si a/f^q est une somme de dérivées se ramène à la résolution d'un système d'équations linéaires.

Le second décrit jusqu'où peut être poussée la réduction de l'ordre du pôle :

§7.2 *Théorème (Griffiths). — Si* $\mathrm{V}(f)$ *est régulier dans* $\mathbb{P}^n$*, alors pour toute fraction rationnelle* a/f^q*, il existe une autre fraction* a'/f^n*, homogène de degré* $-n-1$*, des polynômes* $b_{0\smile n}$ *et un entier* s *tels que*

$$a/f^q = a'/f^n + \sum_{i=0}^{n} \partial_i(b_i/f^s).$$

Nous verrons que ces deux théorèmes permettent de décrire précisément la réduction de Griffiths-Dwork, sous l'hypothèse de régularité : pour toute fraction a/f^q homogène de degré $-n-1$, la réduction $[a/f^q]$ est nulle si et seulement si a/f^q est une somme de dérivées ; de plus, l'ordre du pôle de $[a/f^q]$ est au plus n.

§8 CAS SINGULIERS. — L'hypothèse de régularité dans les théorèmes de Griffiths est très contraignante en pratique : je n'ai jamais croisé une intégrale digne d'intérêt qui s'y conforme. C'est au premier abord surprenant car tout exemple *générique* — c'est-à-dire pris au hasard dans l'ensemble des polynômes homogènes d'un degré fixé — est régulier. Le cas usuel correspond plus au cas *général* qu'au cas générique. La propriété de généricité de l'hypothèse de régularité implique néanmoins qu'on peut toujours s'y ramener par une déformation convenable.

7. Griffiths, « On the periods of certain rational integrals », §4.

On procède comme suit. Étant donnée a/f une fraction homogène à intégrer, ne vérifiant pas l'hypothèse de régularité, on change f en f_λ :

$$f_\lambda \overset{\text{déf}}{=} f + \lambda \sum_{i=0}^{n} x_i^{\deg f},$$

où λ est une nouvelle variable libre. Sur le corps $\mathbb{K}(\lambda)$, ce nouveau f_λ satisfait toujours l'hypothèse de régularité. On peut ainsi lui appliquer la méthode de Griffiths-Dwork et ensuite spécialiser λ en 0. Ainsi, toutes les bornes obtenues par la méthode de Griffiths-Dwork dans le cas générique se transfèrent au cas général par cette méthode de déformation.

§9 ISOMORPHISME EXPONENTIEL. — Pour mettre en œuvre la réduction de Griffiths, il est pratique de représenter une fraction a/f^q par le polynôme $a\mathrm{T}^q$, où T est une nouvelle variable. Si on fait des sommes, on se retrouve alors avec des polynômes en T. Et on peut prendre en compte les éventuelles simplifications du type $fa/f^{q+1} = a/f^q$ en travaillant modulo la relation $f\mathrm{T} = 1$. Puisqu'on travaille avec des fractions homogènes de degré fixé, la variable T n'est pas nécessaire : si a/f^q est une fraction homogène de degré $-n-1$, alors a est un polynôme homogène de degré $q\mathrm{N} - n - 1$, on peut donc retrouver q à partir du degré de a. La fraction $\partial_i(b/f^q)$ valant $\partial_i b/f^q - qb\partial_i f/f^{q+1}$, pour b/f^q une fraction homogène de degré $-n$, est représentée par le polynôme $\partial_i b - qb\partial_i f$.

L'isomorphisme exponentiel affirme que dans cette représentation, il n'est pas besoin de prendre en compte les simplifications par f puisque ces simplifications peuvent s'exprimer comme des congruences modulo les dérivées. En renormalisant les composantes homogènes, on obtient l'énoncé suivant : une fraction a/f^q homogène de degré $-n-1$ est de la forme $\sum_i \partial_i(b_i/f^s)$ pour certains polynômes b_i si et seulement si a est de la forme $\sum_i(\partial_i b_i' - b_i'\partial_i f)$ pour certains polynômes b_i'.

Le qualificatif *exponentiel* vient du fait que

$$\sum_i (\partial_i b_i' - b_i'\partial_i f)e^{-f} = \sum_i \partial_i(b_i' e^{-f}).$$

Autrement dit a/f^q est de la forme $\sum_i \partial_i(b_i/f^s)$ si et seulement si ae^{-f} est de la forme $\sum_i \partial_i(b_i' e^{-f})$. Ces quelques préliminaires algébriques et d'autres points qui s'y rapportent sont l'objet de la section 1.

1 Isomorphisme exponentiel

§10 HOMOGÉNÉISATION. — Cette section met en place une reformulation, en deux étapes, du problème du calcul des périodes. La première étape est l'homogénéisation. Il y a une petite subtilité à propos du degré d'homogénéisation qui apparait dans la preuve du lemme suivant.

§10.1 *Lemme. — Soit* R *une fraction rationnelle en les variables* $x_{1\smile n}$*, écrite sous la forme* b/g^q*. Soit* S *l'homogénéisation de* R *en degré* $-n-1$ *:*

$$\mathrm{S} \overset{\text{déf}}{=} x_0^{-n-1}\mathrm{R}(x_1/x_0,\dots,x_n/x_0).$$

Écrivons S *comme* a/f^q*, avec* a *et* f *des polynômes homogènes tels que* $f_{|x_0=1}$ *égale* g*. Si* S *s'écrit comme une somme* $\sum_{i=0}^n \partial_i(c_i/f^s)$*, pour certains polynômes* c_i*, alors* R *s'écrit comme* $\sum_{i=1}^n \partial_i(c_i'/g^{s'})$*, pour d'autres polynômes* c_i'*.*

De plus, si x_0 *divise* f*, alors la réciproque est vraie.*

Notons qu'on peut toujours supposer que x_0 divise f, quitte à remplacer a/f^q par $x_0^q a/(x_0 f)^q$.

Démonstration. Supposons que S s'écrive comme une somme $\sum_{i=0}^n \partial_i(c_i/f^s)$. En évaluant x_0 à 1, l'équation devient

$$\mathrm{R} = \sum_{i=1}^n \partial_i(c_i(1,x_{1\smile n})/f^s) + (\partial_0(c_0/f^s))_{|x_0=1}\,.$$

Le dernier terme semble poser problème. Cependant, comme S est homogène de degré $-n-1$, on peut supposer que les c_i/f^s sont homogènes de degré $-n$. En particulier, la relation d'Euler implique

$$-nc_0/f^s = \sum_{i=0}^n x_i\partial_i(c_0/f^s) = x_0\partial_0(c_0/f^s) + \sum_{i=1}^n (\partial_i(x_ic_0/f^s) - c_0/f^s)\,.$$

Ce qui donne finalement

$$\mathrm{R} = \sum_{i=1}^n \partial_i(c_i(1,x_{1\smile n})/g^s - x_ic_0(1,x_{1\smile n})/g^s).$$

Réciproquement, supposons que x_0 divise f. Si $\mathrm{R} = \sum_{i=1}^n \partial_i(c_i/g^s)$, alors, par homogénéisation

$$\mathrm{S} = \sum_{i=1}^n \partial_i(x_0^{-n}c_i(\tfrac{x_1}{x_0},\dots,\tfrac{x_n}{x_0})/f^s).$$

Les dénominateurs des fractions sous les signes ∂_i peuvent renfermer un facteur x_0 ; mais si f s'écrit $x_0 h$, avec h un polynonôme, on peut faire disparaitre ce facteur dans la puissance de f en écrivant $\frac{1}{x_0}$ comme $\frac{h}{f}$, ce que l'on voulait. □

§11 FORMULATION EXPONENTIELLE. — L'objet de la suite de cette section est la mise en place de quelques définitions importantes et la preuve de l'*isomorphisme exponentiel*. C'est un isomorphisme entre deux cohomologies dont l'énoncé précis et la démonstration sont donnés au §14. On peut en donner la formulation élémentaire suivante. Soit a/f^q une fraction rationnelle *homogène* de degré $-n-1$ en les variables $x_{0\smile n}$. Sont équivalents :

– il existe des fractions rationnelles $b_{0\smile n}/f^s$ telles que

$$a/f^q = \sum_{i=0}^{n} \partial_i(b_i/f^s); \tag{§11.1}$$

– il existe des polynômes $\tilde{b}_{0\smile n}$ de degré au plus $(s \deg f - n - 1)$ tels que, dans l'anneau des séries formelles en les variables $x_{0\smile n}$,

$$ae^{-f} = \sum_{i=0}^{n} \partial_i(\tilde{b}_i e^{-f}); \tag{§11.2}$$

– il existe des polynômes $\tilde{b}_{0\smile n}$ de degré au plus $(s \deg f - n - 1)$ tels que

$$a = \sum_{i=0}^{n} \left(\partial_i \tilde{b}_i - \tilde{b}_i \partial_i f\right). \tag{§11.3}$$

La nature même du problème à résoudre n'est pas modifiée par cette équivalence et il serait sans doute possible de s'en passer ; cependant l'algèbre parait simplifiée et l'implémentation des algorithmes est plus directe. En effet, la relation de simplification $fa/f^{q+1} = a/f^q$ implique qu'une fraction avec un pôle d'ordre *apparent* $q+1$ peut être égale à une fraction avec un pôle d'ordre q sans être nulle, alors que par ailleurs, un polynôme homogène de degré donné ne peut pas être égal à un polynôme homogène de degré moindre sans être nul. En pratique, travailler avec la troisième égalité plutôt que la première permet de remplacer des égalités modulo f par des égalités strictes. Notons que la deuxième et la troisième assertion sont des reformulations directes l'une de l'autre.

Les notations suivantes sont utilisées dans toute la suite : $\mathbb{K}$ est un corps de caractéristique nulle et A est l'anneau de polynômes $\mathbb{K}[x_{0\smile n}]$, où n est un entier strictement positif ; la lettre f désigne un élément homogène de A et N son degré ; l'idéal jacobien de f, noté J_f, est l'idéal de A engendré par les dérivées

partielles $\partial_0 f, \dots, \partial_n f$; enfin, l'anneau des fractions dont le dénominateur est une puissance de f est noté A_f.

§12 FORMES DIFFÉRENTIELLES. — J'utilise le langage des formes différentielles. Il est particulièrement adapté à l'étude des intégrales puisqu'il a été créé pour cela. Son intérêt pratique sera, je l'espère, évident. De plus, les formes différentielles permettent de décrire de très jolies structures de double complexe et de suite spectrale — voir §15.

Soit Ω^1 le module libre sur A de rang $n+1$, dont une base est donnée par les symboles $\mathrm{d}x_0, \dots, \mathrm{d}x_n$. L'application différentielle d, de A dans Ω^1 est définie par

$$\mathrm{d}p = \sum_{i=0}^{n} (\partial_i p)\mathrm{d}x_i \in \Omega^1.$$

La A-algèbre, associative et unitaire, des formes différentielles, notée Ω est l'algèbre extérieure de Ω^1. Elle est engendrée sur A par les $\mathrm{d}x_i$ et est soumise aux relations d'anticommutation $\mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j = -\mathrm{d}x_j \wedge \mathrm{d}x_i$. Le A-module des p-formes, noté Ω^p est le sous-module de Ω engendré par les monômes $\mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_p}$. Il est libre de rang $\binom{n+1}{p}$. Le module des 0-formes est identifié à A. En tant que module Ω se décompose en $\oplus_{p=0}^{n} \Omega^p$.

Les $(n+1)$-formes et les n-formes nous intéressent particulièrement. Le module Ω^{n+1} est de rang 1 et engendré par $\mathrm{d}x_0 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_n$, qui est noté ω. Le module Ω^n est de rang $n+1$ et est librement engendré par les éléments ξ_i définis par

$$\xi_i \overset{\text{déf}}{=} (-1)^i \mathrm{d}x_0 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i-1} \wedge \mathrm{d}x_{i+1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_n.$$

L'algèbre Ω est naturellement une algèbre graduée : 0-formes, 1-formes, etc. Cependant, on donne à Ω un autre degré, en posant $\deg x_i = 1$ et $\deg \mathrm{d}x_i = 1$. Le produit de deux formes homogènes de degrés respectifs p et q est homogène de degré $p+q$.

L'application différentielle $\Omega^0 \to \Omega^1$ se prolonge de manière unique en un endomorphisme de Ω, la *différentielle extérieure*, tel que pour tout α dans Ω^p et tout β dans Ω

$$\mathrm{d}(\alpha \wedge \beta) = \mathrm{d}\alpha \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge \mathrm{d}\beta.$$

En particulier $\mathrm{d}(\Omega^p)$ est inclus dans Ω^{p+1} et $\mathrm{d}^2 = 0$. Pour une n-forme β écrite comme $\sum_i b_i \xi_i$, on vérifie que $\mathrm{d}\beta$ égale $(\sum_i \partial_i b_i)\,\omega$. La différentielle extérieure donne un complexe exact, appelé complexe de Rham,

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\mathrm{d}} \Omega^1 \xrightarrow{\mathrm{d}} \cdots \xrightarrow{\mathrm{d}} \Omega^n \xrightarrow{\mathrm{d}} \Omega^{n+1} \longrightarrow 0.$$

§13 SYZYGIES. — Le produit extérieur à gauche avec la 1-forme $\mathrm{d}f$ donne des applications $\Omega^p \to \Omega^{p+1}$, et comme $\mathrm{d}f \wedge \mathrm{d}f$ s'annule, on obtient un complexe

$$\mathcal{K}(\mathrm{d}f) : 0 \longrightarrow \mathrm{A} \xrightarrow{\mathrm{d}f} \Omega^1 \xrightarrow{\mathrm{d}f} \cdots \xrightarrow{\mathrm{d}f} \Omega^n \xrightarrow{\mathrm{d}f} \Omega^{n+1} \longrightarrow 0,$$

appelé *complexe de Koszul*. Sa cohomologie $\mathrm{H}\mathcal{K}(\mathrm{d}f)$ est définie par

$$\mathrm{H}^p\mathcal{K}(\mathrm{d}f) \overset{\text{déf}}{=} \frac{\Omega^p \cap \ker \mathrm{d}f}{\mathrm{d}f \wedge \Omega^{p-1}}.$$

Pour une n-forme β, écrite comme $\sum_i b_i \xi_i$, le produit extérieur $\mathrm{d}f \wedge \beta$ égale $(\sum_i b_i \partial_i f)\,\omega$. Ainsi $\mathrm{H}^{n+1}\mathcal{K}(\mathrm{d}f)$ est isomorphe au quotient A/J_f, à un décalage près dans la graduation, à savoir $n+1$.

La cohomologie au niveau n nous intéresse particulièrement. On note Syz l'espace des *syzygies* (de la suite $\partial_0 f, \ldots, \partial_n f$) : ce sont les les éléments β de Ω^n tels que $\mathrm{d}f \wedge \beta$ s'annule. On note Syz′ l'espace des *syzygies triviales*, défini comme $\mathrm{d}f \wedge \Omega^{n-1}$. Comme $\mathrm{d}f \wedge \mathrm{d}f = 0$, c'est un sous-espace de Syz. Par définition $\mathrm{H}^n\mathcal{K}(\mathrm{d}f)$ est égal au quotient Syz/Syz′.

En coordonnées, les syzygies correspondent aux suites de polynômes $b_{0\frown n}$ telles que $\sum_{i=0}^n b_i \partial_i f$ s'annule. Les syzygies triviales sont données par des b_i eux-mêmes de la forme $b_i = \sum_{j=0}^n c_{ij} \partial_j f$ pour des polynômes c_{ij} tels que c_{ij} vaille $-c_{ji}$. Il est clair que si les b_i sont sous cette forme, ils forment une syzygie.

§14 COMPLEXE EXPONENTIEL. — Pour des entiers p et q, notons T^p_q le sous-espace de Ω^p des éléments homogènes de degré qN. Soient T^p la somme directe $\oplus_q \mathrm{T}^p_q$ et $\mathrm{F}_q\mathrm{T}^p$ la somme directe $\oplus_{q' \leqslant q} \mathrm{T}^p_{q'}$. Le *poids* d'un élément α de T^p est le plus petit q tel qu'α appartienne à $\mathrm{F}_q\mathrm{T}^p$. La composante homogène de degré qN d'un élément α de T^p est notée α_q. La différentielle extérieure envoie T^p_q dans T^{p+1}_q tandis que le produit extérieur par $\mathrm{d}f$ envoie T^p_q sur T^{p+1}_{q+1}. Soit $\mathcal{S}$ (resp. $\mathcal{S}'$) l'intersection de T^n avec Syz (resp. Syz′).

Enfin, la différentielle *tordue* D_f est l'application $\mathrm{T}^p \to \mathrm{T}^{p+1}$ définie par

$$\mathrm{D}_f\alpha \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{d}\alpha - \mathrm{d}f \wedge \alpha.$$

La règle d'anticommutation $\mathrm{d}f \wedge \mathrm{d}\alpha = -\mathrm{d}(\mathrm{d}f \wedge \alpha)$ permet de montrer que D_f^2 s'annule. Autrement dit, les T^p munis de la différentielle D_f forment un complexe. De manière équivalente D_f peut se définir par

$$\mathrm{D}_f\alpha = e^f \mathrm{d}(\alpha e^{-f}),$$

où αe^{-f} est une forme différentielle en les $x_{0\frown n}$ à coefficients séries formelles et d la différentielle définie ci-dessus et prolongée à ces formes différentielles par continuité. Ce que j'appelle *isomorphisme exponentiel* est le résultat suivant :

§14.1 *Théorème (Dimca). — Pour tout* $p \geqslant 1$

$$\mathrm{H}^{p+1}\mathrm{T} \simeq \mathrm{H}^{p}_{Rham}(\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}} \setminus \mathrm{V}(f)).$$

Le p^{e} espace de cohomologie $\mathrm{H}^p\mathrm{T}$ se définit comme $(\mathrm{T}^p \cap \ker \mathrm{D}_f)/\mathrm{D}_f(\mathrm{T}^{p-1})$. Le membre de droite de l'isomorphisme est le p^{e} espace de cohomologie de Rham de la variété $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}} \setminus \mathrm{V}(f)$. C'est une variété affine, donc outre leur définition analytique usuelle, ces espaces peuvent se définir comme la cohomologie du complexe des formes différentielles *algébriques*.[8]

La première démonstration publiée semble être due à Dimca.[9] Malgrange et Deligne[10] semblaient connaitre ce résultat indépendamment. Des variantes de cet isomorphisme et de la formulation exponentielle ont été utilisée plus tôt, par exemple par Dwork,[11] Katz[12] ou encore Monsky.[13]

Vu le type d'intégrale qui nous intéresse, c'est en fait le cas $p = n$ de l'isomorphisme exponentiel qui s'applique et que je vais expliciter. Soit h l'application linéaire de T^{n+1} dans A_f définie par

$$h(a\omega) \overset{\text{déf}}{=} \sum_{q \geqslant 0} (q-1)!\, a_{q\mathrm{N}-n-1}/f^q,$$

où $a_{q\mathrm{N}-n-1}$ désigne la composante de degré $q\mathrm{N} - n - 1$ du polynôme a.

§14.2 *Théorème. — L'application h passe aux quotients en un morphisme de l'espace $\mathrm{T}^{n+1}/\mathrm{D}_f(\mathrm{T}^n)$ dans $\mathrm{A}_f/\sum_i \partial_i \mathrm{A}_f$. De plus, ce morphisme induit un isomorphisme entre $\mathrm{T}^{n+1}/\mathrm{D}_f(\mathrm{T}^n)$ et la composante de degré $-n-1$ de $\mathrm{A}_f/\sum_i \partial_i \mathrm{A}_f$*

Notons que l'espace $\mathrm{H}^n_{\mathrm{Rham}}(\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}} \setminus \mathrm{V}(f))$ est isomorphe à la composante de degré $-n-1$ de $\mathrm{A}_f/\sum_i \partial_i \mathrm{A}_f$, qui est le sous-espace du quotient $\mathrm{A}_f/\sum_i \partial_i \mathrm{A}_f$ engendré par les fractions homogènes de degré $-n-1$. Ainsi, cet énoncé est bien équivalent la spécialisation en $p = n$ du théorème §14.1.

Ce théorème donne bien l'équivalence annoncée au §11. Il suffit de voir que a/f^q est $h(a\omega)/(q-1)!$. Donc §11.3 implique §11.1 car $h(\mathrm{D}_f\mathrm{T}^n) \subset \sum_i \partial_i \mathrm{A}_f$ et réciproquement car $h^{-1}(\sum_i \partial_i \mathrm{A}_f) \subset \mathrm{D}_f\mathrm{T}^n$, ces deux inclusions étant des reformulations du passage au quotient de h et de l'injectivité du morphisme qui en résulte, respectivement.

8. Grothendieck, « On the de Rham cohomology of algebraic varieties ».
9. Dimca, « On the Milnor fibrations of weighted homogeneous polynomials ».
10. Deligne, Malgrange et Ramis, *Singularités irrégulières*, lettres des 26 et 30 avril 1991.
11. Dwork, « On the zeta function of a hypersurface ».
12. N. M. Katz, « On the differential equations satisfied by period matrices », théorème I.12.
13. Monsky, « Finiteness of de Rham cohomology ».

Démonstration. Il faut d'abord voir que $h(\mathrm{D}_f(\mathrm{T}^n))$ est inclus dans $\sum_{i=0}^n \partial_i \mathrm{A}_f$ pour montrer que l'application passe aux quotients. De fait, pour $\beta = \sum_{i=0}^n b_i \xi_i$ un élément de T^n_q,

$$\begin{aligned} h\left(\mathrm{D}_f\left(\sum_{i=0}^n b_i\xi_i\right)\right) &= \sum_{i=0}^n h(\partial_i b\omega) - h(b_i\partial_i f\omega) \\ &= \sum_{i=0}^n (q-1)!\frac{\partial_i b_i}{f^q} - q!\frac{b_i\partial_i f}{f^{q+1}} \\ &= (q-1)!\sum_{i=0}^n \partial_i\left(\frac{b_i}{f^q}\right). \end{aligned}$$

La surjectivité est évidente. Montrons l'injectivité. Soit $\alpha \in \mathrm{T}^{n+1}$ tel que $h(\alpha)$ s'écrive comme $\sum_{i=0}^n \partial_i(b_i/f^s)$ pour un entier s et des polynômes b_i. Comme $h(\alpha)$ est homogène de degré $-n-1$, on peut supposer que les b_i/f^s sont homogènes de degré $-n$, car les dérivations ∂_i envoient les fractions homogènes de degré p sur des fractions homogènes de degré $p-1$, pour tout p. Si β est la n-forme $\frac{1}{(s-1)!}\sum_i b_i\xi_i$ alors

$$h(\mathrm{D}_f\beta) = h\left(\frac{1}{(s-1)!}\sum_i(\partial_i b_i - b_i\partial_i f)\right) = \sum_i \frac{\partial_i b_i}{f^s} - s\frac{b_i\partial_i f}{f^{s+1}} = \sum_i \partial_i\left(\frac{b_i}{f^s}\right),$$

et ainsi $h(\alpha - \mathrm{D}_f\beta)$ vaut zéro. Ceci montre que $h^{-1}(\sum_i \partial_i \mathrm{A}_f)$ est la somme de $\mathrm{D}_f(\mathrm{T}^n)$ et de $\ker h$. Le lemme suivant montre alors que $h^{-1}(\sum_i \partial_i \mathrm{A}_f)$ égale $\mathrm{D}_f(\mathrm{T}^n)$, ce qui conclut la preuve du théorème. □

§14.3 *Lemme.* — $\ker h \subset \mathrm{D}_f(\mathrm{T}^n)$.

Démonstration. Soit α une forme de $\ker h$. Raisonnons par récurrence sur le poids de α. Si α est de poids nul, elle est nécessairement nulle, car $\mathrm{F}_0\mathrm{T}^{n+1} = 0$, et donc dans $\mathrm{D}_f(\mathrm{T}^n)$.

Hérédité. L'annulation de $\sum_k (k-1)!\alpha_k/f^k$ montre que α_q, où q est le poids de α, est divisible par f. Disons $\alpha_q = fc\omega$, où c est un polynôme homogène de degré $(q-1)\mathrm{N} - n - 1$. Comme f est homogène

$$\mathrm{N}f = \sum_i x_i\partial_i f.$$

En particulier, si $\beta = \frac{1}{\mathrm{N}}\sum_i x_i c\xi_i$, alors

$$\mathrm{D}_f\beta = \frac{1}{\mathrm{N}}\sum_i(\partial_i(x_i c) - x_i c\partial_i f)\omega$$

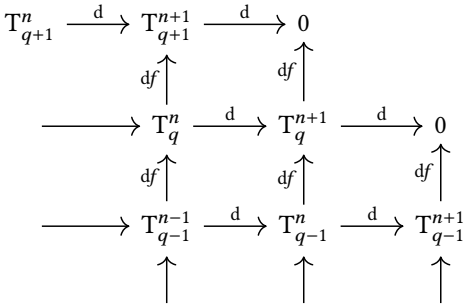


Figure 1. Double complexe de Rham–Koszul

$$= \frac{1}{\mathrm{N}} \sum_i (x_i \partial_i c + c)\omega - f c\omega$$
$$= (q-1)c\omega - \alpha_q \qquad \text{par la relation d'Euler.}$$

Donc $\alpha + \mathrm{D}_f\beta$ est de poids au plus $q-1$, et comme $\mathrm{D}_f(\mathrm{T}^n)$ est dans $\ker h$, c'est encore un élément de $\ker h$. Par hypothèse de récurrence, la forme $\alpha + \mathrm{D}_f\beta$ est dans $\mathrm{D}_f(\mathrm{T}^n)$, et donc α aussi. □

§15 SUITE SPECTRALE. — On peut disposer les T^p_q dans une grille — voir la figure 1 — on obtient alors le double complexe de Rham–Koszul : chacune des lignes est un complexe, chacune des colonnes est un complexe et tous les carrés anti-commutent, c'est-à-dire que $\mathrm{d}f \wedge \mathrm{d}\beta$ est l'opposé de $\mathrm{d}(\mathrm{d}f \wedge \beta)$. Ce diagramme est très pratique et peut aider à visualiser certaines des preuves de cette thèse.

Cette structure de double complexe donne lieu à une *suite spectrale*.[14] Soit $\mathrm{E}^r_{p,q}$ le quotient des $(p+q)$-formes de poids au plus q qui sont *presque* fermées modulo les formes de poids $q-1$ et les différentielles des $(p+q-1)$-formes de poids au plus $q+r-2$:

$$\mathrm{E}^r_{p,q} \overset{\text{déf}}{=} \frac{\left\{\alpha \in \mathrm{F}_q\mathrm{T}^{p+q} \;\middle|\; \mathrm{D}_f\alpha \in \mathrm{F}_{q-r+1}\mathrm{T}^{p+q+1}\right\}}{\left(\mathrm{D}_f\mathrm{F}_{q+r-2}\mathrm{T}^{p+q-1}\right) \cap \mathrm{F}_q\mathrm{T}^{p+q} + \mathrm{F}_{q-1}\mathrm{T}^{p+q}}.$$

On vérifie plusieurs choses. D'une part $\mathrm{E}^0_{p,q}$ est $\mathrm{F}_q\mathrm{T}^{p+q}/\mathrm{F}_{q-1}\mathrm{T}^{p+q}$, ce qui est naturellement isomorphe à T^{p+q}_q. D'autre part, les $\mathrm{E}^r_{p,q}$ sont de dimension finie et $\mathrm{E}^{r+1}_{p,q}$ est le quotient d'un sous-espace vectoriel de $\mathrm{E}^r_{p,q}$; en particulier, les $\mathrm{E}^r_{p,q}$ à p et q

14. Voir Weibel, *An introduction to homological algebra*, chap. 5, pour les démonstrations.

fixés deviennent constants à partir d'un certain rang quand r tend vers l'infini. Notons $\mathrm{E}^{\infty}_{p,q}$ cet espace limite. Il est clair que

$$\mathrm{E}^{\infty}_{p,q} = \frac{\left\{\alpha \in \mathrm{F}_q\mathrm{T}^{p+q} \;\middle|\; \mathrm{D}_f\alpha = 0\right\}}{(\mathrm{D}_f\mathrm{T}^{p+q-1}) \cap \mathrm{F}_q\mathrm{T}^{p+q} + \mathrm{F}_{q-1}\mathrm{T}^{p+q}}.$$

Si on note $\mathrm{F}_q\mathrm{H}^p\mathrm{T}$ le sous-espace de $\mathrm{H}^p\mathrm{T}$ engendré par les formes de poids au plus q, et $\mathrm{Gr}_q\,\mathrm{H}^p\mathrm{T}$ le quotient $\mathrm{F}_q\mathrm{H}^p\mathrm{T}/\mathrm{F}_{q-1}\mathrm{H}^p\mathrm{T}$, on a alors

$$\mathrm{E}^{\infty}_{p,q} \simeq \mathrm{Gr}_q\,\mathrm{H}^{p+q}\mathrm{T}.$$

En ce sens, les $\mathrm{E}^{r}_{p,q}$ sont des approximations successives du gradué de l'homologie de T. Une question essentielle est de savoir pour quel r les espaces $\mathrm{E}^{r}_{p,q}$ et $\mathrm{E}^{\infty}_{p,q}$ sont égaux. Je reviendrai là-dessus au chapitre II.

Regardons les premiers termes de la suite spectrale. Nous avons déjà vu que $\mathrm{E}^{0}_{p,q}$ s'identifie à T^{p+q}_{q}, l'espace des $(p+q)$ formes homogènes de poids q. Concernant E^1 :

$$\mathrm{E}^{1}_{p,q} = \frac{\left\{\alpha \in \mathrm{F}_q\mathrm{T}^{p+q} \;\middle|\; \mathrm{D}_f\alpha \in \mathrm{F}_q\mathrm{T}^{p+q+1}\right\}}{\left(\mathrm{D}_f\mathrm{F}_{q-1}\mathrm{T}^{p+q-1}\right) + \mathrm{F}_{q-1}\mathrm{T}^{p+q}}.$$

Si α est une $(p+q)$-forme de poids q, alors $\mathrm{D}_f\alpha$ est congru à $\mathrm{d}f\wedge\alpha_q$ modulo $\mathrm{F}_{q-1}\mathrm{T}^{p+q}$. Et si β est une forme de $\mathrm{F}_{q-1}\mathrm{T}^{p+q-1}$, alors $\mathrm{D}_f\beta$ est congru à $\mathrm{d}f\wedge\beta$ modulo $\mathrm{F}_{q-1}\mathrm{T}^{p+q}$; par suite

$$\mathrm{E}^{1}_{p,q} \simeq \frac{\left\{\alpha \in \mathrm{T}^{p+q}_{q} \;\middle|\; \mathrm{d}f\wedge\alpha = 0\right\}}{\mathrm{d}f \wedge \mathrm{T}^{p+q-1}_{q-1}},$$

et on reconnait la composante de degré qN de l'homologie de Koszul :

§15.1 *Proposition.* — $\mathrm{E}^{1}_{p,q} \simeq \left(\mathrm{H}^{p+q}\mathcal{K}(\mathrm{d}f)\right)_{q\mathrm{N}}$.

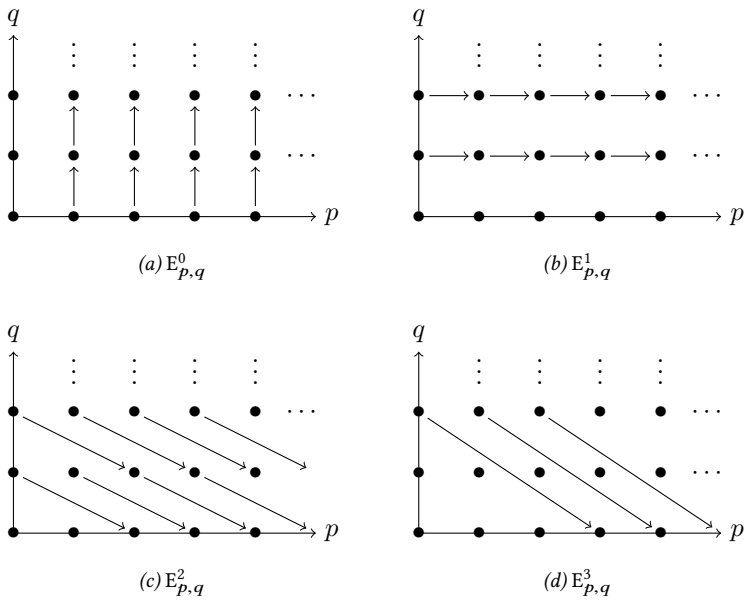
Autrement dit, les $\mathrm{E}^{1}_{p,q}$ sont l'homologie des complexes *verticaux*. Une propriété spectaculaire des suites spectrales est la généralisation de cette propriété pour tout r : les $\mathrm{E}^{r+1}_{p,q}$ s'obtiennent comme l'homologie des $\mathrm{E}^{r}_{p,q}$ pour une certaine différentielle. Plus précisément, notons $\mathrm{d}^{p,q}_r$ l'application induite par D_f sur les $\mathrm{E}^{r}_{p,q}$:

$$\mathrm{d}_r : \alpha \in \mathrm{E}^{r}_{p,q} \mapsto \mathrm{D}_f\alpha \in \mathrm{E}^{r}_{p+r,q-r+1}.$$

Il suffit d'écrire les définitions pour vérifier que cette application est bien définie. Comme D_f^2 est nul, il est clair que $\mathrm{d}^{p+r,q-r+1}_r \circ \mathrm{d}^{p,q}_r$ est nul, on obtient ainsi des complexes pour chaque r — voir figure 2. On a alors [15]

§15.2 *Proposition.* — $\mathrm{E}^{r+1}_{p,q} \simeq \ker d^{p,q}_r / \operatorname{im}\mathrm{d}^{p-r,q+r-1}_r$.

15. Weibel, *An introduction to homological algebra*, §5.4.6.



(a) $\mathrm{E}_{p,q}^{0}$ (b) $\mathrm{E}_{p,q}^{1}$

(c) $\mathrm{E}_{p,q}^{2}$ (d) $\mathrm{E}_{p,q}^{3}$

Figure 2. Différentielle d_r dans la suite spectrale.

Par exemple, on obtient que

$$\mathrm{E}_{p,q}^{2} \simeq \frac{\left\{\alpha \in \mathrm{T}_{q}^{p+q} \;\middle|\; \mathrm{d}f \wedge \alpha = 0 \text{ et } \exists \gamma : \mathrm{d}\alpha = \mathrm{d}f \wedge \gamma\right\}}{\left\{\mathrm{d}\beta \;\middle|\; \beta \in \mathrm{T}_{q}^{p+q-1} \text{ et } \mathrm{d}f \wedge \beta = 0\right\}}.$$

2 Méthode de Griffiths-Dwork

§16. — Comme pour la réduction d'Hermite, le principe guidant la méthode de Griffiths-Dwork est la réduction de l'ordre du pôle, ou plutôt, dans notre cadre exponentiel, la réduction du poids.

Pour une n-forme de poids q, la définition $\mathrm{D}_f\beta = \mathrm{d}\beta - \mathrm{d}f \wedge \beta$, relie, modulo les différentielles, une forme de poids q avec une autre de poids $q+1$:

$$\mathrm{d}f \wedge \beta \equiv \mathrm{d}\beta \mod \mathrm{D}_f\mathrm{T}^n.$$

Ainsi, si $a\omega$ est une forme de poids $q+1$ et que a appartient à l'idéal jacobien de f, alors $a\omega$ est équivalent, modulo les différentielles, à une forme de poids q. En effet,

il est équivalent de dire que a est dans J_f et que $a\omega$ est de la forme $\mathrm{d}f \wedge \beta$ pour une n-forme β homogène de poids q. Griffiths [16] a prouvé la réciproque dans le cas où l'hypersurface projective $\mathrm{V}(f)$ définie par f est régulière. C'est une hypothèse de nature géométrique. Quand le corps de base est $\mathbb{C}$, la régularité de $\mathrm{V}(f)$ est équivalente au fait que $\mathrm{V}(f)$ est en tout point difféomorphe à un ouvert de $\mathbb{C}^n$.

§16.1 *Théorème (Griffiths). — Soit α une $(n+1)$-forme de poids q. Si l'hypersurface projective $\mathrm{V}(f)$ est régulière, alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) il existe une forme α' de poids $q-1$ telle que α égale α' modulo $\mathrm{D}_f\mathrm{T}^n$;

(ii) il existe une n-forme β de poids $q-1$ telle que α_q égale $\mathrm{d}f \wedge \beta$.

Autrement dit

$$(\mathrm{D}_f\mathrm{T}^n) \cap \mathrm{F}_q\mathrm{T}^{n+1} + \mathrm{F}_{q-1}\mathrm{T}^{n+1} = \mathrm{d}f \wedge \mathrm{F}_{q-1}\mathrm{T}^n + \mathrm{F}_{q-1}\mathrm{T}^{n+1}.$$

Pour apprécier la puissance de ce théorème, il faut remarquer que des deux assertions, l'une est ce qu'on cherche à faire — réduire le poids — et l'autre est très facile à tester algorithmiquement, il s'agit simplement de tester l'appartenance à l'idéal J_f. Je propose une preuve de ce théorème au §19 et une autre, due à Dimca, au §21. Les deux ne sont que des reformulations de la preuve de Griffiths et reposent sur l'étude des syzygies. À ce sujet, rappelons qu'on note Syz l'espace des syzygies (de la suite $\partial_0 f, \dots, \partial_n f$), ce sont les éléments β de Ω^n tels que $\mathrm{d}f \wedge \beta$ s'annule, et qu'on note Syz′ l'espace des syzygies triviales, défini comme $\mathrm{d}f \wedge \Omega^{n-1}$. On note aussi $\mathcal{S}$ (resp. $\mathcal{S}'$) l'intersection de T^n avec Syz (resp. Syz′).

La formulation géométrique de l'hypothèse de régularité admet de nombreuses formulations équivalentes, toutes classiques :

§16.2 *Théorème. — Les hypothèses suivantes sont équivalentes :*

(a) l'hypersurface projective définie par f est régulière ;

(b) il existe un entier s tel que $(x_0^s, \dots, x_n^s) \subset \mathrm{J}_f$;

(c) le quotient A/J_f est de dimension finie sur $\mathbb{K}$;

(d) la suite $\partial_0 f, \dots, \partial_n f$ est régulière dans A ;

(e) l'application multiplication $\mathrm{d}f : \mathrm{T}^n_n \to \mathrm{T}^{n+1}_{n+1}$ est surjective ;

(f) $(x_0, \dots, x_n)^{(n+1)\mathrm{N}-n} \subset \mathrm{J}_f$;

(g) les syzygies sont toutes triviales, c'est-à-dire $\mathrm{H}^n\mathcal{K}(\mathrm{d}f) = 0$;

(h) $\mathrm{H}^p\mathcal{K}(\mathrm{d}f) = 0$ pour tout $p \leqslant n$;

(i) pour tout q, les syzygies homogènes de poids q sont triviales, c'est-à-dire $\mathcal{S} = \mathcal{S}'$.

On dira que f est *régulier* s'il satisfait à l'une de ces conditions.

16. Griffiths, « On the periods of certain rational integrals », proposition 4.6.

Démonstration. L'équivalence de (a) et (b) n'est autre que le critère jacobien sur la régularité des variétés définies par équations. [17]

Il est clair que (b) implique (c). On peut montrer la réciproque grâce à l'homogénéité de J_f : Si A/J_f est de dimension finie, il existe, pour chaque i, un polynôme univarié P non nul à coefficients dans $\mathcal{K}$ tel que $\mathrm{P}(x_i)$ appartienne à J_f. Comme J_f est un idéal homogène, chacune des composantes homogènes de $\mathrm{P}(x_i)$, c'est-à-dire chacun des monômes, est dans J_f, donc x_i^s appartient à J_f pour un certain s.

Pour l'équivalence entre (c) et (d), notons J_i l'idéal $(\partial_0 f, \dots, \partial_{i-1} f)$, de sorte que $\mathrm{J}_0 = 0$ et $\mathrm{J}_{n+1} = \mathrm{J}_f$. Comme les $\partial_i f$ sont homogènes, on vérifie que $\dim \mathrm{J}_{i+1} \geqslant \dim \mathrm{J}_i - 1$, avec égalité si et seulement si $\partial_i f$ est simplifiable dans A/J_i. Comme J_0 est de dimension $n+1$, la conjonction de ces inégalités implique que la dimension J_{n+1} est au moins 0, mais aussi, et surtout, qu'il y a égalité si et seulement si chaque $\partial_{i+1} f$ est simplifiable dans A/J_i, ce qui correspond, par définition, au fait que la suite $\partial_{0 \smile n} f$ est régulière.

L'équivalence de (e) et (f) est évidente car

$$\mathrm{d}f \wedge \mathrm{T}_n^n = \mathrm{T}_{n+1}^{n+1} \cap (\mathrm{J}_f)\omega \quad \text{et} \quad \langle \mathrm{T}_{n+1}^{n+1} \rangle = (x_0, \dots, x_n)^{(n+1)\mathrm{N}-n}\omega.$$

L'équivalence de (b) et (f) est un théorème dû à Macaulay. [18]

L'équivalent de (g) et (h) est classique. [19] Que (g) implique (i) est évident, et l'implication (d) vers (g) est classique. [20] Reste à prouver que (i) implique (c). Par localisation du complexe de Koszul, on voit que l'annulateur dans A de $\mathrm{H}^n\mathcal{K}(\mathrm{d}f)$ est inclus dans $\sqrt{\mathrm{J}_f}$. Ainsi, la dimension de $\mathrm{H}^n\mathcal{K}(\mathrm{d}f)$ est supérieure à celle de J_f. L'hypothèse (i) implique que les composantes de $\mathrm{H}^n\mathcal{K}(\mathrm{d}f)$ de degré $q\mathrm{N}$, pour q entier, sont nulles, donc que $\dim \mathrm{H}^n\mathcal{K}(\mathrm{d}f)$ est nul, et par suite que $\dim \mathrm{J}_f$ est nul aussi. □

Griffiths [21] a prouvé un second théorème qui sera d'une grande importance pour la suite :

§16.3 *Théorème (Griffiths). — Si f est régulier alors toute forme de T^{n+1} est congrue, modulo $\mathrm{D}_f\mathrm{T}^n$, à une forme de poids au plus n.*

Démonstration. Il suit de (e) que pour tout $q \geqslant n+1$ la multiplication par $\mathrm{d}f$,

17. Eisenbud, *Commutative algebra*, corollaire 16.20.

18. Macaulay, *The algebraic theory of modular systems*, chap. 1 ; voir aussi Lazard, « Algèbre linéaire sur $\mathrm{K}[\mathrm{X}_1, \dots, \mathrm{X}_n]$, et élimination », corollaire, p. 196.

19. Eisenbud, *Commutative algebra*, théorème 17.6.

20. Dwork, « On the zeta function of a hypersurface », p. 36 ; Eisenbud, *Commutative algebra*, corollaire 17.5, le cas local donne immédiatement le cas homogène.

21. Griffiths, « On the periods of certain rational integrals », théorème 4.2.

de T^n_{q-1} dans T^{n+1}_q, est surjective. Donc si α est une forme de poids $q > n$, alors α_q égale $\mathrm{d}f \wedge \beta$ pour un certain $\beta \in \mathrm{T}^n_{q-1}$ et le sens facile du théorème §16.1 permet de conclure que α est congrue à une forme α' de poids $q-1$. On conclut par récurrence sur q. Au final, ce théorème est une conséquence assez directe de la borne de Macaulay. □

§17 NOMBRE D'INTÉGRALES INDÉPENDANTES. — Le théorème §16.1 donne une description assez précise de $\mathrm{H}^{n+1}\mathrm{T}$, suffisamment précise pour pouvoir calculer sa dimension.

§17.1 *Théorème. — Si f est régulier, alors*

$$\dim_{\mathbb{K}} \mathrm{H}^{n+1}\mathrm{T} = \frac{1}{\mathrm{N}}\left((\mathrm{N}-1)^{n+1} + (-1)^{n+1}(\mathrm{N}-1)\right).$$

Démonstration. La dimension de $\mathrm{H}^{n+1}\mathrm{T}$ est égale à la dimension de son gradué, pris par rapport à la filtration par le poids :

$$\dim_{\mathbb{K}} \mathrm{H}^{n+1}\mathrm{T} = \sum_{q=0}^{\infty} \dim_{\mathbb{K}} \left(\frac{\mathrm{F}_q\mathrm{H}^{n+1}\mathrm{T}}{\mathrm{F}_{q-1}\mathrm{H}^{n+1}\mathrm{T}}\right).$$

Et comme conséquence du théorème §16.1, on peut calculer explicitement le gradué, c'est principalement un exercice de décodage des notations :

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{F}_q\mathrm{H}^{n+1}\mathrm{T}}{\mathrm{F}_{q-1}\mathrm{H}^{n+1}\mathrm{T}} &= \frac{\mathrm{F}_q\mathrm{T}^{n+1}}{\mathrm{D}_f(\mathrm{T}^n) \cap \mathrm{F}_q\mathrm{T}^{n+1}} \Big/ \frac{\mathrm{F}_{q-1}\mathrm{T}^{n+1}}{\mathrm{D}_f(\mathrm{T}^n) \cap \mathrm{F}_{q-1}\mathrm{T}^{n+1}} \\
&\simeq \frac{\mathrm{F}_q\mathrm{T}^{n+1}}{\mathrm{D}_f(\mathrm{T}^n) \cap \mathrm{F}_q\mathrm{T}^{n+1} + \mathrm{F}_{q-1}\mathrm{T}^{n+1}} \\
&\simeq \frac{\mathrm{F}_q\mathrm{T}^{n+1}}{\mathrm{d}f \wedge \mathrm{T}^n_{q-1} + \mathrm{F}_{q-1}\mathrm{T}^{n+1}}, \text{ par le théorème §16.1} \\
&\simeq \frac{\mathrm{T}^{n+1}_q}{\mathrm{d}f \wedge \mathrm{T}^n_{q-1}} = \left(\frac{\Omega^{n+1}}{\mathrm{d}f \wedge \Omega^n}\right)_{q\mathrm{N}}.
\end{aligned}$$

On va s'attacher à calculer la dimension de ce dernier espace à l'aide du complexe de Koszul et de séries génératrices. Notons $\theta(t)$ la série génératrice

$$\theta(t) \overset{\text{déf}}{=} \sum_{m \geqslant 0} \dim \left(\frac{\Omega^{n+1}}{\mathrm{d}f \wedge \Omega^n}\right)_m t^m.$$

Pour extraire les coefficients en degré multiple de N, et obtenir ainsi la dimension de $\mathrm{H}^{n+1}\mathrm{T}$, il suffit de moyenner $\theta(t)$ sur les racines N^{e} de l'unité :

$$\S17.2 \qquad \dim \mathrm{H}^{n+1}\mathrm{T} = \sum_{q=0}^{\infty} \left(\frac{\Omega^{n+1}}{\mathrm{d}f \wedge \Omega^n} \right)_{q\mathrm{N}} = \frac{1}{\mathrm{N}} \sum_{\varepsilon^{\mathrm{N}}=1} \theta(\varepsilon).$$

Considérons le complexe de Koszul — voir §13 — en degré m fixé

$$0 \longrightarrow \mathrm{A}_{m-(n+1)\mathrm{N}} \xrightarrow{\mathrm{d}f} \Omega^1_{m-n\mathrm{N}} \xrightarrow{\mathrm{d}f} \cdots \xrightarrow{\mathrm{d}f} \Omega^n_{m-\mathrm{N}} \xrightarrow{\mathrm{d}f} \Omega^{n+1}_m \longrightarrow 0.$$

Sous l'hypothèse de régularité et par le critère (h) du théorème §16.2, l'homologie de ce complexe est nulle sauf peut-être en Ω^{n+1}_m. Comme pour tout complexe, la somme alternée des dimensions des parties égale la somme alternée des dimensions de l'homologie. Dans ce cas précis,

$$\begin{aligned} \sum_{p=0}^{n+1} (-1)^p \dim \Omega^{n+1-p}_{m-p\mathrm{N}} &= \sum_{p=0}^{n+1} (-1)^p \dim \mathrm{H}^{n+1-p} \mathcal{K}(\mathrm{d}f)_{m-p\mathrm{N}} \\ &= \dim \mathrm{H}^{n+1} \mathcal{K}(\mathrm{d}f)_m = \dim \left(\frac{\Omega^{n+1}}{\mathrm{d}f \wedge \Omega^n} \right)_m, \end{aligned}$$

où la seconde égalité est la conséquence de l'annulation de la cohomologie, et la troisième une définition. Les monômes de Ω^p_{p+q} sont de la forme $x^{\mathrm{J}}\mathrm{d}x^{\mathrm{I}}$, en notation multi-indice, avec $|\mathrm{I}| = p$ et $|\mathrm{J}| = q$, et les coefficients de I étant 0 ou 1. La dimension de Ω^p_{p+q} est donc $\binom{q+n}{n}\binom{n+1}{p}$. En prenant la série génératrice par rapport à m, on obtient

$$\begin{aligned} \theta(t) &= \sum_{m \geqslant 0} t^m \sum_{p=0}^{n+1} (-1)^p \dim \Omega^{n+1-p}_{m-p\mathrm{N}} \\ &= \sum_{p=0}^{n+1} (-1)^p \binom{n+1}{p} \sum_{m \geqslant 0} \binom{m-p(\mathrm{N}-1)-1}{n} t^m \\ &= \sum_{p=0}^{n+1} (-1)^p \binom{n+1}{p} \frac{t^{n+1+p(\mathrm{N}-1)}}{(1-t)^{n+1}} \text{ car } \sum_{m \geqslant 0} \binom{m-u}{a} t^m = t^{a+u}/(1-t)^{a+1} \\ &= \left(\frac{t - t^{\mathrm{N}}}{1-t} \right)^{n+1} \text{ par la formule du binôme.} \end{aligned}$$

(Ici, les coefficients binomiaux $\binom{a}{b}$ sont par convention nuls si $a < 0$.) On obtient ainsi, *via* l'équation §17.2, le théorème. Le terme $\theta(1)$ contribue en $(\mathrm{N}-1)^{n+1}/\mathrm{N}$, tandis que chacun des $\mathrm{N}-1$ termes $\theta(\varepsilon)$, pour $\varepsilon \neq 1$, contribue pour $(-1)^{n+1}/\mathrm{N}$. □

Notons que le fait que $\theta(t)$ soit un polynôme de degré $(n+1)(\mathrm{N}-1)$ donne une

preuve du critère (f) du théorème §16.2 (la borne de Macaulay), en admettant le critère (h).

§18 ALGORITHME DE RÉDUCTION. — Ces théorèmes de Griffiths donnent des algorithmes pour le calcul des périodes dans le cas régulier. Soit $\mathcal{G}$ une base de Gröbner [22] de l'idéal J_f pour un certain ordre monomial gradué $\prec$. Cette base de Gröbner permet de calculer la forme réduite d'un polynôme a de A modulo J_f : c'est le reste de la division multivariée de a par $\mathcal{G}$, notons-la $\mathrm{rem}_{\mathcal{G}}\, a$. Cette réduction dépend linéairement de a, elle est homogène si a est homogène, et son noyau est exactement J_f. Si en plus on dispose des *cofacteurs* de la base $\mathcal{G}$, qui sont les polynômes $u_{g,i}$ tels que pour tout élément g de $\mathcal{G}$

$$g = \sum_{i=0}^{n} u_{g,i}\partial_i f,$$

alors on peut décomposer tout polynôme a comme

$$a = \mathrm{rem}_{\mathcal{G}}\, a + \sum_{i=0}^{n} b_i \partial_i f$$

pour certains polynômes b_i qui dépendent linéairement de a. [23] Si a est un polynôme homogène de degré D, alors on peut toujours supposer que les b_i sont homogènes de degré $\mathrm{D} - \mathrm{N} + 1$. En utilisant les formes différentielles, cette décomposition se réécrit en

§18.1 $$a\omega = (\mathrm{rem}_{\mathcal{G}}\, a)\omega + \mathrm{d}f \wedge \beta,$$

pour la n-forme $\beta = \sum_i b_i \xi_i$, telle que $\mathrm{d}f \wedge \beta$ n'est pas nul, sauf si β l'est. De plus, si $a\omega$ est homogène de poids q, alors on peut supposer que β est homogène de poids $q - 1$.

Soit $\alpha = a\omega$ un élément homogène de T^{n+1}. On définit la réduction (de Griffiths-Dwork) de α par

§18.2 $$[\alpha]_1 \overset{\text{déf}}{=} (\mathrm{rem}_{\mathcal{G}}\, a)\omega + [\mathrm{d}\beta]_1.$$

C'est une définition par récurrence sur le poids de α. En effet, si α est de poids q alors β et donc $\mathrm{d}\beta$ sont de poids $q - 1$. La récurrence termine car les formes de poids négatif sont nulles, et on pose $[0]_1 = 0$. On étend la définition de $[\,]_1$ à tous les éléments de T^{n+1} par linéarité. L'algorithme 1 reprend la procédure, s'il en était besoin.

22. Voir Cox, Little et O'Shea, *Using algebraic geometry*, pour toutes les définitions et les propriétés des bases de Gröbner.

23. Voir aussi §14, chapitre II, pour une implémentation du calcul des b_i.

Algorithme 1 Réduction de Griffiths-Dwork.

Entrée — $a\omega$, une $(n+1)$-forme homogène
Sortie — $[a\omega]_1$, tel que défini au §18

fonction $[\,]_1(a\omega)$
  si $a = 0$
    renvoyer 0
  sinon
    calculer $a = r + \sum_{i=0}^{n} b_i \partial_i f$ avec une base de Gröbner de J_f
    renvoyer $r\omega + [\sum_{i=0}^{n} \partial_i b_i \omega]_1$

La présence de l'indice 1 dans la notation $[\,]_1$ sera justifiée au chapitre II où on définira une famille de réductions $[\,]_r$, dont $[\,]_1$ sera le premier élément.

Il y a une légère ambiguïté sur le choix de β et donc sur la définition de $[\,]_1$. Une fois pour toutes on fixe un choix de β pour chaque α. Il importe seulement que β dépende linéairement de α, qu'il soit homogène de poids $q-1$ quand α est homogène de poids q et que $\mathrm{d}f \wedge \beta$ ne soit nul que si β est nul.

§18.3 *Lemme.* — *Si β est une n-forme homogène de poids q alors il existe une syzygie β' homogène de poids q telle que*

$$[\mathrm{d}f \wedge \beta]_1 = [\mathrm{d}(\beta + \beta')]_1.$$

Démonstration. Simplement par définition de $[\,]_1$, si $[\mathrm{d}f \wedge \beta]_1$ égale $[\mathrm{d}\beta_1]$ pour une certaine forme β_1 telle que $\mathrm{d}f \wedge \beta = \mathrm{d}f \wedge \beta_1$. En particulier $\beta_1 - \beta$ est une syzygie. □

§18.4 *Proposition.* — $\alpha \equiv [\alpha]_1 \pmod{\mathrm{D}_f \mathrm{T}^n}$ *et* $[[\alpha]_1]_1 = [\alpha]_1$ *pour tout* α *dans* T^{n+1}.

Démonstration. Par récurrence sur le poids de α :

$$\begin{aligned}
[\alpha]_1 &= (\mathrm{rem}_{\mathcal{G}}\, a)\omega + [\mathrm{d}\beta]_1 && \text{par définition}\\
&\equiv (\mathrm{rem}_{\mathcal{G}}\, a)\omega + \mathrm{d}\beta \mod \mathrm{D}_f \mathrm{T}^n && \text{par hyp. de récurrence}\\
&\equiv (\mathrm{rem}_{\mathcal{G}}\, a)\omega + \mathrm{d}f \wedge \beta \mod \mathrm{D}_f \mathrm{T}^n && \text{car } \mathrm{d}\beta = \mathrm{d}f \wedge \beta + \mathrm{D}_f\beta\\
&\equiv \alpha \mod \mathrm{D}_f \mathrm{T}^n && \text{par §18.1,}
\end{aligned}$$

ce qui montre le premier point. Le second est conséquence du fait que $\mathrm{rem}_{\mathcal{G}}$ est lui-même idempotent. □

Les théorèmes de Griffiths se reformulent ainsi :

§18.5 *Théorème (Griffiths). — Si f est régulier, alors le noyau de la réduction $[\,]_1$ est exactement $\mathrm{D}_f\mathrm{T}^n$ et l'image de $[\,]_1$ est incluse dans $\mathrm{F}_n\mathrm{T}^{n+1}$.*

Démonstration. Par la proposition §18.4, il est clair que le noyau de $[\,]_1$ est inclus dans $\mathrm{D}_f\mathrm{T}^n$. Réciproquement, soit α un élément de $\mathrm{D}_f\mathrm{T}^n$. Par le théorème de Griffiths §16.1, il existe une n-forme β telle que $\alpha_q = \mathrm{d}f \wedge \beta$, c'est-à-dire que $\mathrm{rem}_{\mathcal{G}}\,\alpha_1$ égale 0. Donc $[\alpha_q]_1$ est de poids au plus $q-1$, et $[\alpha]_1$ aussi comme $[\alpha]_1$ égale $[\alpha - \alpha_q]_1 + [\alpha_q]_1$. Or $[\alpha]_1$ est encore un élément de $\mathrm{D}_f\mathrm{T}^n$, par la proposition §18.4. Par récurrence sur le poids de α, on peut supposer que $[[\alpha]_1]_1$ est nul. Donc $[\alpha]_1$ est nul, par l'idempotence de $[\,]_1$, proposition §18.4.

Concernant le second point, soit α dans T^{n+1} et α' dans $\mathrm{F}_n\mathrm{T}^{n+1}$, donné par le théorème §16.3, tels que α et α' sont congrus modulo $\mathrm{D}_f\mathrm{T}^n$. Alors $[\alpha - \alpha']_1$ est nul, par ce qui précède, et donc $[\alpha]_1$ égale $[\alpha']_1$, qui est dans $\mathrm{F}_n\mathrm{T}^{n+1}$. □

En conséquence de ce théorème, si f est régulier, alors la définition de $[\,]_1$ ne dépend pas du choix particulier de β. En effet, si

$$\alpha = (\mathrm{rem}_{\mathcal{G}}\, a)\omega + \mathrm{d}f \wedge \beta',$$

alors $[\alpha]_1$ égale $[(\mathrm{rem}_{\mathcal{G}}\, a)\omega]_1 + [\mathrm{d}f \wedge \beta']_1$. Or $[(\mathrm{rem}_{\mathcal{G}}\, a)\omega]_1$ égale $(\mathrm{rem}_{\mathcal{G}}\, a)\omega$ et $\mathrm{d}f \wedge \beta'$ est congru, modulo $\mathrm{D}_f\mathrm{T}^n$, à $\mathrm{d}f\beta'$, donc, par le théorème précédent,

§18.6 $$[\alpha]_1 = (\mathrm{rem}_{\mathcal{G}}\, a)\omega + [\mathrm{d}\beta']_1.$$

§19 SYSTÈME DE RÉÉCRITURE. — Dans la définition de la réduction de Griffiths-Dwork, équation §18.2, le choix de β est *a priori* arbitraire car il n'y a pas unicité d'un β tel que

$$a\omega = (\mathrm{rem}_{\mathcal{G}}\, a)\omega + \mathrm{d}f \wedge \beta,$$

comme le pose l'équation §18.1. C'est précisément dans le fait que le choix de β est sans importance que réside le théorème de Griffiths.

Les éléments de T^{n+1} sont de la forme $a\omega$, où a est un polynôme de A. L'ordre monomial sur A s'étend naturellement à T^{n+1} : on pose $x^{\mathrm{I}}\omega \prec x^{\mathrm{J}}\omega$ si $x^{\mathrm{I}} \prec x^{\mathrm{J}}$. Soient α et α' deux éléments de T^{n+1}. On note $\alpha \prec \alpha'$ si le monôme de tête de $\alpha - \alpha'$ n'est pas dans α. Cette définition prolonge l'ordre monomial en un ordre partiel strict sur tout T^{n+1}. On vérifie sans mal que toute chaine décroissante pour cet ordre est stationnaire. Remarquons que si α est $a\omega$, alors $(\mathrm{rem}_{\mathcal{G}}\, a)\omega$ est le plus petit élément de T^{n+1} qui est congru à α modulo $\mathrm{d}f \wedge \mathrm{T}^n$.

On dit que α se réécrit en α', noté $\alpha \to \alpha'$, si $\alpha \succ \alpha'$ et s'il existe un $\beta \in \mathrm{T}^n$ homogène tel que $\mathrm{d}f \wedge \beta$ n'est pas nul et tel que $\alpha' = \alpha + \mathrm{D}_f\beta$. Vu la condition de décroissance, il n'existe pas de suite infinie $(\alpha_i)_{i\geqslant 0}$ telle que $\alpha_i \to \alpha_{i+1}$ pour

tout i. Notons aussi que, par construction, si $\alpha \to \alpha'$, alors α et α' sont congrus modulo $\mathrm{D}_f \mathrm{T}^n$.

Un élément α de T^{n+1} est une *forme normale* s'il n'existe pas de $\alpha' \in \mathrm{T}^{n+1}$ tel que $\alpha \to \alpha'$. On note $\to^*$ la clôture transitive et réflexive de $\to$. C'est-à-dire $\alpha \to^* \alpha'$ si et seulement si $\alpha = \alpha'$ ou bien $\alpha \to \alpha_1 \to \cdots \to \alpha_m \to \alpha'$ pour certains $\alpha_{1 \smile m}$.

La condition $\mathrm{d}f \wedge \beta \neq 0$ dans la définition de la relation $\to$ assure que

§19.1 *Lemme.* — *Soit α une $(n+1)$-forme de poids q. Il existe une $(n+1)$-forme α' de poids au plus $q-1$ telle que $\alpha \to^* \alpha'$ si et seulement si α_q est de la forme $\mathrm{d}f \wedge \beta$, avec β une n-forme homogène de poids $q-1$.*

Démonstration. Soit α' tel que $\alpha \to \alpha'$. Par définition, $\alpha' = \alpha + \mathrm{D}_f\beta$ pour un certain β homogène tel que $\mathrm{d}f \wedge \beta$ n'est pas nul. Comme $\alpha' \prec \alpha$, il est clair que α' et $\mathrm{D}_f\beta$ sont de poids au plus q. Donc α'_q égale $\alpha_q + \mathrm{d}f \wedge \beta_{q-1}$.

Si maintenant $\alpha \to^* \alpha'$, on a toujours $\alpha'_q = \alpha_q + \mathrm{d}f \wedge \gamma$ pour un certain γ homogène de poids $q-1$, par récurrence sur la longueur de la chaine de réécriture passant de α à α'. Ainsi, si α' est de poids moindre que q, alors $\alpha_q = -\mathrm{d}f \wedge \gamma$, ce que l'on voulait.

Réciproquement, si α_q égale $\mathrm{d}f \wedge \gamma$, alors α se réécrit en $\alpha + \mathrm{D}_f\gamma$ et ce dernier est de poids au plus $q-1$. □

Comme toute chaine de réécriture est finie, il est clair que pour tout α dans T^{n+1}, il existe une forme normale α' telle que $\alpha \to^* \alpha'$. Un tel α' est une *forme normale de* α. Cependant cette forme normale n'est pas nécessairement unique. L'objectif de ce paragraphe est d'une part de montrer que si f est régulier, alors pour tout α il existe une unique forme normale α' telle que $\alpha \to \alpha'$; et d'autre part de montrer le lien avec le théorème de Griffiths.

Il n'est pas dur de calculer une forme normale :

§19.2 *Proposition.* — *Pour $\alpha \in \mathrm{T}^{n+1}$, la réduction $[\alpha]_1$ est une forme normale de α.*

Démonstration. Soit $\alpha' = [\alpha]_1$. Alors $\mathrm{rem}_{\mathcal{G}}\, \alpha' = \alpha'$. Et donc $\alpha \preccurlyeq \alpha - \mathrm{d}f \wedge \beta$ pour tout β dans T^n homogène. En conséquence, si $\mathrm{d}f \wedge \beta \neq 0$, on ne peut avoir l'inégalité $\alpha > \alpha + \mathrm{D}_f\beta$. Ainsi α' est une forme normale.

Il reste à montrer que $\alpha \to^* [\alpha]_1$. Raisonnons par récurrence sur le poids de α. Soit β une n-forme homogène de poids $q-1$ telle que

$$\alpha = (\mathrm{rem}_{\mathcal{G}}\, a)\omega + \mathrm{d}f \wedge \beta,$$

et $\mathrm{d}f \wedge \beta$ non nul. La forme $\alpha + \mathrm{D}_f\beta$ est $(\mathrm{rem}_{\mathcal{G}}\, a)\omega + \mathrm{d}\beta$, ce qui est inférieur à α. Donc $\alpha \to (\mathrm{rem}_{\mathcal{G}}\, a)\omega + \mathrm{d}\beta$. Par hypothèse de récurrence $\mathrm{d}\beta \to^* [\mathrm{d}\beta]_1$, et il est facile de vérifier que cela implique

$$(\mathrm{rem}_{\mathcal{G}}\, a)\omega + \mathrm{d}\beta \to^* (\mathrm{rem}_{\mathcal{G}}\, a)\omega + [\mathrm{d}\beta]_1$$

comme $(\mathrm{rem}_{\mathcal{G}}\, a)\omega$ est homogène de poids q. Par suite

$$\alpha \to^* (\mathrm{rem}_{\mathcal{G}}\, a)\omega + [\mathrm{d}\beta]_1,$$

le membre de droite étant $[\alpha]_1$, par définition. □

Pour α dans T^{n+1}, notons $f \cdot \alpha$ la forme

$$f \cdot \alpha \overset{\text{déf}}{=} \sum_{q \geqslant 1} \frac{1}{q} f\alpha_q,$$

et pour $s > 1$ entier, on pose par récurrence

$$f^{s+1} \cdot \alpha \overset{\text{déf}}{=} f \cdot (f^s \cdot \alpha).$$

Notons que $h(f^s \cdot \alpha)$ égale $h(\alpha)$, où h est l'application du §14. L'application qui transforme α en $f \cdot \alpha$ est l'analogue de celle qui *transforme* (le mot est un peu fort) la fraction a/f^q en fa/f^{q+1}.

§19.3 *Lemme.* — *Si α est une $(n+1)$-forme de poids q, alors $f \cdot \alpha$ est de poids $q+1$ et il existe une n-forme β de poids q telle que $\alpha + \mathrm{D}_f\beta = f \cdot \alpha$.*

Démonstration. Comme $f \cdot \alpha - \alpha$ est annulé par h, le lemme est une conséquence du lemme §14.3, la borne sur le poids de β étant claire dans la preuve de ce dernier. □

§19.4 *Proposition.* — *Si β une n-forme de poids q telle que $\mathrm{D}_f\beta$ soit de poids $q+1$, alors $\mathrm{D}_f\beta \to^* 0$.*

Démonstration. Raisonnons par récurrence sur q. C'est évident si $q = 0$. Soit β une n-forme de poids q. Le fait que $\mathrm{D}_f\beta$ est de poids $q+1$ signifie que $\mathrm{d}f \wedge \beta_q$ n'est pas nul. Ainsi $\mathrm{D}_f\beta$ se réécrit en $\mathrm{D}_f\beta - \mathrm{D}_f\beta_q$, c'est-à-dire $\mathrm{D}_f\beta \to \mathrm{D}_f\beta'$, où β' est $\beta - \beta_q$, une n-forme de poids au plus $q-1$. Si $\mathrm{D}_f\beta'$ est de poids q, alors on conclut par l'hypothèse de récurrence que $\mathrm{D}_f\beta' \to^* 0$ et donc que $\mathrm{D}_f\beta \to^* 0$.

Si $(q-1)\mathrm{N} < n$, alors β' est nul, ce qui conclut. On suppose donc $(q-1)\mathrm{N} \geqslant n$. Si $\mathrm{D}_f\beta'$ est de poids moindre que $q-1$, c'est-à-dire si $\mathrm{d}f \wedge \beta_{q-1}$ est nul, on procède comme suit. Soit γ un élément de T^{n-1}_{q-1} tel que $\mathrm{d}f \wedge \mathrm{d}\gamma$ n'est pas nul. On peut prendre $x_0^{q\mathrm{N}-n+1}\mathrm{d}x_2 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_n$, par exemple, si on suppose que $\partial_0 f$ n'est pas nul. Soit $\tilde{\beta}$ la forme $\beta + \mathrm{D}_f\gamma$. On vérifie sans peine que $\mathrm{D}_f\tilde{\beta}$ égale $\mathrm{D}_f\beta$, que $\tilde{\beta}_q$

égale $\beta_q - \mathrm{d}f \wedge \gamma$ et que $\tilde{\beta}_{q-1}$ égale $\beta_{q-1} + \mathrm{d}\gamma$. En particulier $\mathrm{d}f \wedge \tilde{\beta}_q$ égale $\mathrm{d}f \wedge \beta_q$, donc n'est pas nul, et $\mathrm{d}f \wedge \tilde{\beta}_{q-1}$ égale $-\mathrm{d}f \wedge \mathrm{d}\gamma$, donc n'est pas nul, par définition de γ et parce que $\mathrm{d}f \wedge \beta_{q-1}$ est nul. Ainsi

$$\mathrm{D}_f\tilde{\beta} \to \mathrm{D}_f\left(\tilde{\beta} - \tilde{\beta}_q\right),$$

comme précédemment, et cette fois, on peut appliquer l'hypothèse de récurrence à $\tilde{\beta} - \tilde{\beta}_q$. Donc $\mathrm{D}_f\tilde{\beta} \to^* 0$. Comme $\mathrm{D}_f\tilde{\beta}$ et $\mathrm{D}_f\beta$ sont égaux, cela conclut. □

§19.5 *Proposition. — Soit β une n-forme. Il existe un entier s tel que $f^s \cdot \mathrm{D}_f\beta \to^* 0$.*

Démonstration. Soit q le poids de β et q' le poids de $\mathrm{D}_f\beta$, qui est au plus $q+1$. Par le lemme §19.3, il existe une n-forme γ de poids q telle que $f^{q+1-q'} \cdot \mathrm{D}_f\beta$ égale $\mathrm{D}_f(\beta + \gamma)$. La forme $\beta + \gamma$ est de poids q et $f^{q+1-q'} \cdot \mathrm{D}_f\beta$ est de poids $q+1$. La proposition §19.4 conclut. □

§20 CONFLUENCE. — Ce système de réécriture et ses quelques propriétés de base ne dépend d'aucune hypothèse spécifique sur f. Dans le cas où f est régulier on peut montrer la propriété de confluence et son corollaire : l'unicité de la forme normale.

§20.1 *Théorème. — Si f est régulier, alors $\to^*$ est confluente, c'est-à-dire pour tout α, α' et δ dans T^{n+1}, si $\delta \to^* \alpha$ et $\delta \to^* \alpha'$, alors il existe un ε dans T^{n+1} tel que $\alpha \to^* \varepsilon$ et $\alpha' \to^* \varepsilon$.*

Démonstration. D'après le lemme de Newman,[24] il suffit de vérifier que toute chaine de réécriture est finie, ce qui est déjà fait, et que pour tout α, α' et δ dans T^{n+1}, si $\delta \to \alpha$ et $\delta \to \alpha'$, alors il existe un ε dans T^{n+1} tel que $\alpha \to^* \varepsilon$ et $\alpha' \to^* \varepsilon$. Soit α, α' et δ comme ci-dessus.

Par définition $\alpha = \delta + \mathrm{D}_f\beta$ et $\alpha' = \delta + \mathrm{D}_f\beta'$ pour certaines n-formes homogènes β et β' de poids respectifs q et q' telles que $\mathrm{d}f \wedge \beta$ et $\mathrm{d}f \wedge \beta'$ ne sont pas nulles.

Supposons d'abord que q et q' sont différents, disons $q < q'$. Le monôme de tête de $\mathrm{D}_f\beta'$ n'est pas dans α', car $\alpha' \prec \delta$. Or ce monôme est de poids $q'+1$, donc il n'est pas non plus dans $\alpha + \mathrm{D}_f\beta'$ car cette dernière est congrue à α' modulo $\mathrm{F}_{q+1}\mathrm{T}^{n+1}$. Donc $\alpha + \mathrm{D}_f\beta' \prec \alpha$ et, par suite, α se réécrit en $\alpha + \mathrm{D}_f\beta'$. Notons α'' cette forme.

On vérifie sans mal qu'il existe un (unique) u de $\mathbb{K}$ tel que si ε est la forme $u\alpha' + (1-u)\alpha''$, alors $\varepsilon \preccurlyeq \alpha'$ et $\varepsilon \preccurlyeq \alpha''$. Or ε égale $\alpha' + (1-u)\mathrm{D}_f\beta$, donc $\alpha' \to \varepsilon$; et ε égale

24. Huet, « Confluent reductions : abstract properties and applications to term rewriting systems » ; Newman, « On theories with a combinatorial definition of "equivalence." »

aussi $\alpha'' - u\mathrm{D}_f\beta$, donc $\alpha'' \to \varepsilon$. Et comme $\alpha \to \alpha''$, on a ce que l'on voulait : $\alpha \to^* \varepsilon$ et $\alpha' \to^* \varepsilon$.

Considérons maintenant le cas où q et q' sont égaux. Soit $u \in \mathbb{K}$ tel que si ε égale $u\alpha + (1-u)\alpha'$ alors $\varepsilon \preccurlyeq \alpha$ et $\varepsilon \preccurlyeq \alpha'$. Soit γ la différence $\beta - \beta'$, qui est une forme homogène de poids q. On vérifie que

$$\varepsilon = \alpha - (1-u)\mathrm{D}_f\gamma = \alpha' + u\mathrm{D}_f\gamma.$$

Donc si $\mathrm{d}f \wedge \gamma$ n'est pas nul, alors α et α' se réécrivent en ε. Si $\mathrm{d}f \wedge \gamma$ est nul, alors la régularité de f implique que γ est de la forme $\mathrm{d}f \wedge \eta$, pour un η dans T^{n-1}_{q-1}. En particulier

$$\mathrm{D}_f\gamma = -\mathrm{d}f \wedge \mathrm{d}\eta = \mathrm{D}_f(\mathrm{d}\eta).$$

On peut supposer que $\mathrm{D}_f\gamma$ n'est pas nul (sinon $\alpha = \alpha'$ et le résultat est trivial), auquel cas $\mathrm{d}f \wedge \mathrm{d}\eta$ n'est pas nul et donc α, α' et ε sont tous trois égaux. □

Il suit immédiatement de la confluence l'unicité de la forme normale d'une forme δ donnée : si α et α' sont des formes normales de δ, alors $\delta \to^* \alpha$ et $\delta \to^* \alpha'$ donc il existe un ε tel que $\alpha \to^* \varepsilon$ et $\alpha' \to^* \alpha$; comme α et α' sont des formes normales, il est nécessaire que α, α' et ε soient tous trois égaux.

La première partie du théorème §18.5 se démontre alors comme suit. Soit α un élément de $\mathrm{D}_f\beta$. Par la proposition §19.5, il existe un entier s tel que $f^s \cdot \alpha \to^* 0$. Or $f^s \cdot \alpha \to^* \alpha$, par le lemme §19.3. Par la propriété de confluence, ceci implique que $\alpha \to^* 0$, c'est-à-dire que 0 est une forme normale de α. Comme $[\alpha]_1$ en est une autre, l'unicité de la forme normale implique que $[\alpha]_1 = 0$.

§21 DÉGÉNÉRESCENCE DE LA SUITE SPECTRALE. — La suite spectrale définie au §15 permet de donner une autre interprétation intéressante du théorème de Griffiths. Comme on l'a vu avec la proposition §15.1, le terme E^1 est fait de certains sous-espaces de la cohomologie de Koszul. Si on met en regard le critère (h) du théorème §16.2 avec la proposition §15.1, on voit que $\mathrm{E}^1_{p,q}$ est nul dès que $p+q$ est différent de $n+1$. Comme $\mathrm{E}^r_{p,q}$, pour $r \geqslant 1$, est un sous-quotient de $\mathrm{E}^1_{p,q}$, on en déduit que $\mathrm{E}^r_{p,q}$ est nul si $p+q \neq n+1$. En particulier, soit le but, soit la source de chacune des applications $\mathrm{d}^{p,q}_r$, pour $r \geqslant 1$, est nul ; et par suite, les applications $\mathrm{d}^{p,q}_r$ elles-mêmes sont nulles. Vu la proposition §15.2, ceci implique que $\mathrm{E}^\infty_{p,q}$ est égal à $\mathrm{E}^1_{p,q}$. On dit que la suite spectrale *dégénère* en E^1.

C'est équivalent au théorème §16.1 car $\mathrm{E}^1_{n+1-q,q}$ égale $\mathrm{E}^\infty_{n+1-q,q}$ si et seulement si

$$\mathrm{D}_f\mathrm{F}_{q-1}\mathrm{T}^n + \mathrm{F}_{q-1}\mathrm{T}^{p+q} = (\mathrm{D}_f\mathrm{T}^n) \cap \mathrm{F}_q\mathrm{T}^{n+1} + \mathrm{F}_{q-1}\mathrm{T}^{n+1},$$

or le membre de gauche est aussi égal à $\mathrm{d}f \wedge \mathrm{F}_{q-1}\mathrm{T}^n + \mathrm{F}_{q-1}\mathrm{T}^{n+1}$, par définition de D_f. On reconnait ainsi l'énoncé du théorème §16.1.

§22 DÉFORMATION GÉNÉRIQUE. — Soit g_λ le polynôme homogène à coefficients dans le corps $\mathbb{K}(\lambda)$, où λ est une nouvelle variable libre, défini par

$$g_\lambda = f + \lambda \sum_i x_i^{\mathrm{N}}.$$

L'intérêt premier de ce polynôme est qu'il est toujours régulier sur le corps $\mathbb{K}(\lambda)$, quel que soit f.

§22.1 *Proposition. — Le polynôme g_λ est régulier sur le corps $\mathbb{K}(\lambda)$.*

Démonstration. Posons $h_\lambda = \lambda g_{1/\lambda}$, et vérifions le critère (e) du théorème §16.2 pour h_λ. La surjectivité de l'application est équivalente au fait qu'un mineur maximal de la matrice de cette application ne soit pas nul. Ces mineurs maximaux sont des polynômes en λ. Et pour $\lambda = 0$, au moins l'un d'eux n'est pas nul car le polynôme $\sum_i x_i^{\mathrm{N}}$ vérifie le critère (b) et donc le critère (e) aussi. □

On peut ainsi appliquer la méthode de Griffiths-Dwork à g_λ, et ce qu'on peut calculer avec g_λ se transfère en un calcul sur f :

§22.2 *Lemme. — Pour toute $(n+1)$-forme α à coefficients dans $\mathbb{K}[\lambda]$, si $\alpha = \mathrm{D}_{g_\lambda}\beta$, pour une certaine n-forme β polynomiale à coefficients dans $\mathbb{K}(\lambda)$, alors il existe une n-forme β' polynomiale à coefficients dans $\mathbb{K}$ telle que $\alpha|_{\lambda=0} = \mathrm{D}_f\beta'$.*

Démonstration. Il s'agit simplement de spécialiser λ à zéro, mais comme les coefficients de β sont rationnels en λ, il peut y avoir un pôle. Soit s un entier tel que $\lambda^s\beta$ n'ait pas de pôle en $\lambda = 0$.

On note $\alpha^{\partial_\lambda}$ la dérivation par rapport à λ coefficient par coefficient de α, et $\partial_\lambda \cdot \alpha$ la dérivation *tordue* $\alpha^{\partial_\lambda} - f^{\partial_\lambda}\alpha$, qui commute avec D_f. On a alors

$$\alpha = \frac{1}{s!}\partial_\lambda^s \cdot \alpha = \mathrm{D}_f(\partial_\lambda^s \cdot \lambda^s\beta).$$

Ici $\partial_\lambda^s \cdot \lambda^s\beta$ n'a pas de pôle en $\lambda = 0$, donc la spécialisation en 0 donne le résultat. □

3 Calcul des équations de Picard-Fuchs

§23. — Supposons maintenant que le corps de base $\mathbb{K}$ soit muni d'une dérivation δ. La dérivation δ s'étend à A_f en posant $\delta x_i = 0$. On obtient alors une dérivation qui

commute avec les dérivations partielles ∂_i, de sorte que δ induise une dérivation sur le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $A_f/\sum_i \partial_i A_f$.

On définit, pour tout forme α,

$$\delta\alpha \overset{\text{déf}}{=} \alpha^\delta - f^\delta\alpha,$$

où α^δ et f^δ sont les dérivations coefficient par coefficient. On vérifie sans peine que δ ainsi défini commute avec la différentielle tordue D_f. On se souvient de l'application h, définie au §14, de $T^{n+1}/D_f T^n$ dans $A_f/\sum_i \partial_i A_f$. On vérifie que $h(\delta\alpha)$ égale $\delta h(\alpha)$.

Soit a/f^q une fraction homogène de degré $-n-1$. Pour tout opérateur $\mathcal{L}$ de $\mathbb{K}\langle\delta\rangle$, il est donc équivalent que $\mathcal{L}(a/f^q)$ soit dans $\sum_i \partial_i A_f$ et que $\mathcal{L}(a\omega)$ soit dans $D_f T^n$.

§24. — Supposons que f soit régulier. Soit α un élément de T^{n+1}. Posons

§24.1 $$\rho_0 = [\alpha]_1 \text{ et } \rho_{k+1} = [\delta\rho_k]_1.$$

Par récurrence sur m et en utilisant le théorème §18.5 et la commutation de δ et D_f, il est clair que ρ_k est congru modulo $D_f T^n$ à $\delta^m \cdot \alpha$. Ainsi, pour toute suite (a_i) d'éléments de $\mathbb{K}$,

$$\sum_{k=0}^{m} a_k \delta^m \cdot \alpha \in \sum_i \partial_i A_f \;\Leftrightarrow\; \sum_{k=0}^{m} a_k \rho_k = 0.$$

Ceci donne immédiatement un moyen de calculer les équations de Picard-Fuchs : il suffit de calculer les éléments de la suite (ρ_k) jusqu'à trouver une équation de liaison entre eux. Ceci arrivera nécessairement car les ρ_k sont dans $F_n T^{n+1}$ qui est un espace vectoriel de dimension finie. L'algorithme 2 récapitule la procédure.

§24.2 *Théorème. — Si f est régulier, alors l'algorithme 2 appliqué à une fraction homogène* R *de degré $-n-1$ termine et renvoie l'équation de Picard-Fuchs de* $\oint$ R.

§25 CAS GÉNÉRAL. — En mettant bout-à-bout l'homogénéisation, la déformation et le traitement du cas régulier, on obtient un algorithme pour calculer une équation différentielle satisfaite par les périodes d'une intégrale rationnelle.

Soit b/g une fraction rationnelle en les variables $x_{1\smile n}$, à coefficients dans le corps $\mathbb{K}$. L'homogénéisation, §10, donne une fraction a/f homogène de degré $-n-1$, en les variables $x_{0\smile n}$ dont la spécialisation en $x_0 = 1$ coïncide avec b/g. Enfin, la déformation générique, §22, donne une fraction a/f_λ homogène de degré $-n-1$ sur le corps $\mathbb{K}(\lambda)$ dont la spécialisation $\lambda = 0$ coïncide avec a/f et telle que f_λ soit régulier. On peut donc appliquer l'algorithme 2 à la fraction a/f_λ, et on obtient un opérateur $\mathcal{L}$ en δ, à coefficients dans $\mathbb{K}(\lambda)$, qui annule les périodes de $\int a/f_\lambda$. Quitte

Algorithme 2 Calcul de l'équation de Picard-Fuchs, cas régulier.

Entrée — $a/f^q \in \mathbb{K}(x_{0\smile n})$, une fraction homogène de degré $-n-1$, tel que $\mathrm{V}(f) \subset \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ soit régulier
Sortie — $\mathcal{L} \in \mathbb{K}\langle\delta\rangle$ l'équation de Picard-Fuchs de $\oint a/f^q$

fonction PicardFuchs(a/f^q)
  $\rho_0 \leftarrow [a\omega]_1$
  pour m de 0 à ∞
    si $\mathrm{rg}_{\mathbb{K}}(\rho_0, \dots, \rho_m) = m+1$
      $\rho_{m+1} \leftarrow [\delta\rho_m]_1$
    sinon
      résoudre $\sum_{k=0}^{m-1} a_k\rho_k = \rho_m$ par rapport aux a_i, dans $\mathbb{K}$
      renvoyer $\delta^m - \sum_{k=0}^{m-1} a_k\delta^k$

à multiplier $\mathcal{L}$ par une puissance de λ, on peut supposer que l'évaluation en $\lambda = 0$ de $\mathcal{L}$ n'est ni nulle ni singulière. Par les lemmes §22.2 et §10.1, l'opérateur $\mathcal{L}_{|\lambda=0}$ annule les périodes de $\int b/g$.

§25.1 *Théorème.* — *L'algorithme 3 appliqué à une fraction* R *dans* $\mathbb{K}(x_{1\smile n})$ *termine et renvoie un opérateur annulant les périodes de* $\int \mathrm{R}$.

Cependant, rien n'indique que l'opérateur ainsi calculé soit minimal. On pourrait imaginer calculer le minimal en calculant différents opérateurs pour différentes déformations, puis en calculant un plus grand commun diviseur ; mais je ne dispose d'aucun argument montrant qu'on peut obtenir l'équation de Picard-Fuchs de cette manière.

4 Analyse des algorithmes

§26 PARAMÈTRES IMPORTANTS. — Je m'intéresse maintenant à la complexité de l'algorithme 3 dans le cas où le corps $\mathbb{K}$ est $\mathbb{Q}(t)$, ce qui est le plus commun. La dérivation δ est ∂_t mais on pourrait aussi choisir $t\partial_t$: la seule propriété particulière utilisée sera que la dérivée d'un polynôme en t est encore un polynôme en t dont le degré est inférieur ou égal. On cherche à borner dans ce cas le nombre d'opérations effectuées dans le corps $\mathbb{Q}$ par cet algorithme. Pour cela il faut d'abord étudier les algorithmes 1 et 2. L'ensemble donnera une preuve du théorème §2.1.

Dans toute cette section 4, on se donne une fraction a/f homogène en les

Algorithme 3 Calcul d'un opérateur annulant les périodes d'une intégrale rationnelle, cas singulier.

Entrée — $\mathrm{R} \in \mathbb{K}(x_{1_n})$, une fraction rationnelle
Sortie — $\mathcal{L} \in \mathbb{K}\langle\delta\rangle$ une équation différentielle pour $\oint \mathrm{R}$

fonction AnnulateurPériodes(R)
$a/f \leftarrow x_0^{-n-1}\mathrm{R}(x_1/x_0, \dots, x_n/x_0)$
$f_\lambda \leftarrow f + \lambda \sum_{i=0}^{n} x_i^{\deg f}$
$\mathcal{L} \leftarrow$ PicardFuchs$(a/f_\lambda) \in \mathbb{K}(\lambda)\langle\delta\rangle$
$\mathcal{L} \leftarrow \lambda^s \mathcal{L}$ où s est l'unique entier qui ne rend l'évaluation en $\lambda = 0$ ni nulle ni singulière
renvoyer $\mathcal{L}_{|\lambda=0}$

variables x_{0_n} à coefficients dans le corps $\mathbb{K}$ et homogène de degré $-n-1$, avec f un polynôme régulier. Sans perdre en généralité, on suppose que f et a dépendent polynomialement de t. Comme précédemment, on note N le degré de f, et on suppose que $\mathrm{N} > 1$, sinon tout est trivial. On note d_t le maximum du degré en t de a et de f.

Outre d_t, le paramètre important est la dimension de $\mathrm{F}_{n+1}\mathrm{T}^{n+1}$, que nous noterons L (pour *lignes*). La dimension de $\mathrm{F}_n\mathrm{T}^n$, notée C (pour *colonnes*) est un paramètre secondaire. En utilisant les majorations [25]

$$\binom{n}{k} \leqslant \left(\frac{en}{k+3/2}\right)^k \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{p} k^n \leqslant \frac{1}{n+1}\left(p+\tfrac{1}{2}\right)^{n+1},$$

on obtient les bornes suivantes :

§26.1
$$\begin{cases} \mathrm{L} = \dim \mathrm{F}_{n+1}\mathrm{T}^{n+1} = \displaystyle\sum_{q=0}^{n+1} \binom{q\mathrm{N}-1}{n} \leqslant \tfrac{5}{4} e^n \mathrm{N}^n \\ \mathrm{C} = \dim \mathrm{F}_n \mathrm{T}^n = \displaystyle\sum_{q=0}^{n} (n+1)\binom{q\mathrm{N}}{n} \leqslant (n+\tfrac{1}{2}) e^n \mathrm{N}^n, \end{cases}$$

où $e \approx 2{,}718$ est la base du logarithme naturel. Par ailleurs la minoration de $\log \mathrm{L}$ par $n \log \mathrm{N}$ montre que $\mathrm{C} = \widetilde{O}(\mathrm{L})$, c'est pourquoi dans les estimations de complexité le paramètre C sera remplacé par L.

§27 COMPLEXITÉ DE L'ALGÈBRE LINÉAIRE. — L'outil essentiel de cette ana-

25. La première se montre par récurrence sur le triangle de Pascal, la seconde en utilisant une comparaison somme–intégrale.

lyse de complexité est l'algèbre linéaire sur des matrices à coefficients polynomiaux. On utilisera sans retenue les remarquables résultats sur la complexité, obtenus ces vingt dernières années par Jeannerod, Villard, Storjohann, Zhou, etc.

Notons ω un réel positif tel qu'il est possible de multiplier deux matrices carrées de taille p en $O(p^\omega)$ opérations dans le corps des coefficients. On sait que ω est nécessairement supérieur à 2 et peut être choisi inférieur à 2,373. [26]

Soient A et B deux matrices de taille $p\times p$ et $p\times q$ dont les coefficients sont des polynômes de $\mathbb{Q}[t]$ de degré au plus d. Le produit AB est une matrice de taille $p\times q$ dont les coefficients sont des polynômes de degré au plus $2d$. Il est possible de calculer le produit AB en $\widetilde{O}(\max(p,q)^\omega d)$ opérations dans $\mathbb{Q}$, par évaluation-interpolation.

Si le déterminant de A n'est pas nul, l'inverse de A est une matrice dont les coefficients sont rationnels. Cette matrice peut s'écrire sous la forme $\mathrm{M}/\det \mathrm{A}$ où M est une matrice à coefficients polynomiaux et $\det \mathrm{A}$ un polynôme. Le degré de $\det \mathrm{A}$ est au plus pd. La matrice M est en fait la matrice des cofacteurs de A, qui sont des déterminants de sous-matrices carrées de taille $(p-1)$ de A. Ainsi, les coefficients de M sont des polynômes de degré au plus $(p-1)d$. Il est possible de calculer M et P en en $\widetilde{O}(p^3 d)$ opérations dans $\mathbb{Q}$. [27]

Soit r le rang de B. On appelle *profil des colonnes* de B la plus petite suite d'entiers $(i_{1\smile r})$, pour l'ordre lexicographique, telle que les colonnes de B aux indices $i_{1\smile r}$ forment une base du sous-espace engendré par les colonnes de B. On définit de manière analogue le *profil des lignes*. Il est possible de calculer le profil des colonnes de B en $\widetilde{O}(pqr^{\omega-2}d)$ opérations dans $\mathbb{Q}$. [28]

§28 CALCUL DE LA RÉDUCTION. — Le but de ce paragraphe, et du suivant, est d'étudier le calcul d'une matrice pour l'endomorphisme de $\mathrm{F}_{n+1}\mathrm{T}^{n+1}$ issu de la restriction de $[\,]_1$.

§28.1 *Proposition.* — *La matrice de* $[\,]_1$ *dans la base monomiale de* $\mathrm{F}_{n+1}\mathrm{T}^{n+1}$ *s'écrit* M_1/P *où* P *est un polynôme en* t *de degré au plus* $\mathrm{L}d_t$ *et où* M_1 *est une matrice à coefficients polynomiaux de degré au plus* $(\mathrm{L}-1)d_t$. *Elle peut être calculée en* $\widetilde{O}\left(\mathrm{L}^{\omega+1}d_t\right)$ *opérations dans* $\mathbb{Q}$.

Plutôt que le calcul d'une base de Gröbner de l'idéal jacobien (et des cofacteurs),

26. Coppersmith et Winograd, « Matrix multiplication via arithmetic progressions » ; Le Gall, « Powers of tensors and fast matrix multiplication ».

27. Jeannerod et Villard, « Essentially optimal computation of the inverse of generic polynomial matrices » ; Zhou, « Fast order basis and kernel basis computation and related problems ».

28. Zhou, « Fast order basis and kernel basis computation and related problems ».

la première étape est le calcul d'un pseudo-inverse de la multiplication par $\mathrm{d}f$ de $\mathrm{F}_n\mathrm{T}^n$ dans $\mathrm{F}_{n+1}\mathrm{T}^{n+1}$. C'est une application φ, de $\mathrm{F}_{n+1}\mathrm{T}^{n+1}$ dans $\mathrm{F}_n\mathrm{T}^n$ telle que

§28.2
$$\begin{cases} \varphi(\mathrm{d}f \wedge \varphi(\alpha)) = \varphi(\alpha), \text{ pour tout } \alpha \text{ dans } \mathrm{F}_{n+1}\mathrm{T}^{n+1} \\ \mathrm{d}f \wedge \varphi(\mathrm{d}f \wedge \beta) = \mathrm{d}f \wedge \beta, \text{ pour tout } \beta \text{ dans } \mathrm{F}_n\mathrm{T}^n. \end{cases}$$

Notons π l'endomorphisme de $\mathrm{F}_{n+1}\mathrm{T}^{n+1}$ défini par

$$\pi(\alpha) \overset{\text{déf}}{=} \alpha - \mathrm{d}f \wedge \varphi(\alpha).$$

C'est un endomorphisme idempotent, comme conséquence des équations §28.2, et de plus $\varphi \circ \pi = 0$. Toute forme α de poids au plus $n+1$ se décompose en

$$\alpha = \pi(\alpha) + \mathrm{d}f \wedge \varphi(\alpha),$$

et $\pi(\alpha)$ est nul si et seulement si α est dans $\mathrm{d}f \wedge \mathrm{T}^n$. On obtient donc grâce à φ ce qu'on obtenait grâce à une base de Gröbner de l'idéal jacobien et ses cofacteurs.

Précisons un peu le calcul du pseudo-inverse. Supposons la base monomiale de $\mathrm{F}_{n+1}\mathrm{T}^{n+1}$ ordonnée de manière décroissante pour l'ordre monomial $\prec$. Soit $(i_{1\smile r})$ le profil des lignes de la matrice de la multiplication par $\mathrm{d}f$, de $\mathrm{F}_n\mathrm{T}^n$ dans $\mathrm{F}_{n+1}\mathrm{T}^{n+1}$. Ce profil $(i_{1\smile r})$ correspond à certains monômes de $\mathrm{F}_{n+1}\mathrm{T}^{n+1}$. Les autres monômes de $\mathrm{F}_{n+1}\mathrm{T}^{n+1}$ forment une base du quotient $\mathrm{F}_{n+1}\mathrm{T}^{n+1}/\mathrm{d}f \wedge \mathrm{F}_n\mathrm{T}^n$, et c'est la plus petite base monomiale pour l'ordre lexicographique sur les sous-ensembles des monômes de T^{n+1}, ces derniers étant ordonnés par l'ordre monomial $\prec$.

Quitte à réordonner les bases à la source et au but, on peut toujours se ramener au cas où les profils des lignes et des colonnes de la matrice de la multiplication par $\mathrm{d}f$ sont $(1, 2, \ldots, r)$. La sous-matrice carrée $r \times r$ à l'intersection de ces profils est un mineur inversible de rang maximal. Ainsi, on peut supposer que cette matrice $\mathrm{L} \times \mathrm{C}$ est de la forme $\left(\begin{smallmatrix} \mathrm{A}_{11} & \mathrm{A}_{12} \\ \mathrm{A}_{21} & \mathrm{A}_{22} \end{smallmatrix}\right)$, où A_{11} est une sous-matrice carrée inversible de rang maximal. Ceci implique que A_{22} égale $\mathrm{A}_{21}\mathrm{A}_{11}^{-1}\mathrm{A}_{12}$ en effet

$$\left(\begin{smallmatrix} \mathrm{I} & 0 \\ -\mathrm{A}_{21}\mathrm{A}_{11}^{-1} & \mathrm{I} \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} \mathrm{A}_{11} & \mathrm{A}_{12} \\ \mathrm{A}_{21} & \mathrm{A}_{22} \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} \mathrm{A}_{11} & \mathrm{A}_{12} \\ 0 & \mathrm{A}_{22} - \mathrm{A}_{21}\mathrm{A}_{11}^{-1}\mathrm{A}_{12} \end{smallmatrix}\right),$$

et le rang du membre de droite est encore égal à r, et comme la matrice A_{11} est déjà de rang r, la matrice en bas à droite est nécessairement nulle.

On pose alors, dans les bases monomiales réordonnées de $\mathrm{F}_n\mathrm{T}^n$ et $\mathrm{F}_{n+1}\mathrm{T}^{n+1}$,

§28.3
$$\mathrm{Mat}\,\varphi \overset{\text{déf}}{=} \left(\begin{smallmatrix} \mathrm{A}_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right).$$

Ceci définit bien un pseudo-inverse de la multiplication par $\mathrm{d}f$. La matrice de π dans la base monomiale réordonnée de $\mathrm{F}_{n+1}\mathrm{T}^{n+1}$ est alors

§28.4
$$\mathrm{Mat}\,\pi = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ -\mathrm{A}_{21}\mathrm{A}_{11}^{-1} & \mathrm{I} \end{smallmatrix}\right).$$

Le calcul de φ se fait en $\widetilde{O}(\mathrm{LC}r^{\omega-2}d_t)$ opérations dans $\mathbb{Q}$ pour le calcul des profils et $\widetilde{O}(r^3 d_t)$ opérations pour le calcul de l'inverse du mineur A_{11}. Comme C et r sont des $\widetilde{O}(\mathrm{L})$ et comme $\omega \leqslant 3$, on obtient une complexité totale de $\widetilde{O}(r^3 d_t)$.

Ce pseudo-inverse ainsi choisi jouit de propriétés supplémentaires.

§28.5 *Lemme.* — $\pi(\alpha) = (\mathrm{rem}_{\mathcal{G}}\, a)\omega$ *pour tout* $\alpha = a\omega$ *dans* $\mathrm{F}_{n+1}\mathrm{T}^{n+1}$. *De plus, si* α *est homogène de poids* q, *alors* $\varphi(\alpha)$ *est homogène de poids* $q-1$.

Démonstration. Vu l'équation §28.4, l'image de π est engendrée par les monômes dont l'indice dans la base de $\mathrm{F}_{n+1}\mathrm{T}^{n+1}$ n'est pas dans le profil des lignes de la matrice de la multiplication par $\mathrm{d}f$. Or ces monômes, comme on l'a remarqué ci-dessus, sont la base monomiale minimale du quotient $\mathrm{F}_{n+1}\mathrm{T}^{n+1}/\mathrm{d}f \wedge \mathrm{F}_n\mathrm{T}^n$. Ainsi π et $\mathrm{rem}_{\mathcal{G}}$ ont même image. Ils ont aussi même noyau et sont tous deux idempotents, donc ils sont égaux.

Le second point se prouve par une propriété de minimalité similaire. □

§29. — Reprenons à la décomposition de α comme $\pi(\alpha) + \mathrm{d}f \wedge \varphi(\alpha)$, pour tout α dans $\mathrm{F}_{n+1}\mathrm{T}^{n+1}$. Par le lemme §28.5, la forme $\varphi(\alpha)$ est de poids moindre que celui d'α, il en est donc de même pour $\mathrm{d}\varphi(\alpha)$. Comme f est régulier, et par l'équation §18.6

§29.1 $$[\alpha]_1 = \pi(\alpha) + [\mathrm{d}\varphi(\alpha)]_1.$$

§29.2 *Lemme.* — *L'image de* $\mathrm{F}_{n+1}\mathrm{T}^{n+1}$ *par* $[\,]_1$ *est engendrée par des monômes.*

Démonstration. Cette image, notons-la E, est exactement l'image de π. En effet, la relation §29.1 montre, par récurrence sur le poids, que E est inclus dans l'image de π. Réciproquement, on voit que $[\pi(\alpha)]_1$ égale $\pi(\alpha)$ (par récurrence sur le poids toujours), ce qui montre l'autre inclusion. Or l'endormorphisme π coïncide avec la normalisation par une base de Gröbner de l'idéal jacobien, voir le lemme §29.2. Il est bien connu que l'image d'une telle normalisation est engendrée par les monômes *sous l'escalier*. On peut aussi constater cela sur la matrice de π, voir l'équation §28.4. □

Soit Θ l'endomorphisme de $\mathrm{F}_{n+1}\mathrm{T}^{n+1}$ défini par

$$\Theta(\alpha) \stackrel{\text{déf}}{=} \pi(\alpha) + \mathrm{d}\varphi(\alpha).$$

En itérant Θ on obtient la réduction de Griffiths-Dwork :

§29.3 *Lemme.* — $[\alpha]_1 = \Theta^q(\alpha)$, *pour tout* $\alpha \in \mathrm{F}_q\mathrm{T}^{n+1}$ *et tout* $q \leqslant n+1$.

Démonstration. Raisonnons par récurrence sur le poids de α, l'énoncé étant trivial si α est de poids nul. Si α est de poids $q+1$, on a vu que $\varphi(\alpha)$ est de poids au plus q et que

$$[\alpha]_1 = \pi(\alpha) + [\mathrm{d}\varphi(\alpha)]_1 = \pi(\alpha) + \Theta^q(\mathrm{d}\varphi(\alpha)),$$

où la seconde égalité est l'hypothèse de récurrence. Comme $\varphi(\pi(\alpha))$ s'annule et que π^2 vaut π, la forme $\Theta(\pi(\alpha))$ égale $\pi(\alpha)$ et finalement

$$[\alpha]_1 = \Theta^q(\pi(\alpha) + \mathrm{d}\varphi(\alpha)) = \Theta^{q+1}(\alpha),$$

ce que l'on voulait. □

Grâce à cette construction, on s'intéresse maintenant à borner le degré de la matrice de $[\,]_1$. Écrivons φ comme $\tilde{\varphi}/\mathrm{Q}$, où Q est un polynôme de degré minimal et où $\tilde{\varphi}$ est un endomorphisme dont la matrice dans la base monomiale est à coefficients polynomiaux. Vu la définition de φ, équation §28.3, il est clair que Q divise $\det \mathrm{A}_{11}$, ainsi son degré est majoré par $\mathrm{L}d_t$. On peut écrire φ comme $\tilde{\varphi}/\mathrm{Q}$, où $\tilde{\varphi}$ est un endomorphisme dont la matrice est à coefficients polynomiaux. Le degré des coefficients de $\tilde{\varphi}$ est au plus $(\operatorname{rg} \mathrm{A}_{11} - 1)d_t$, par la formule de la comatrice. Comme $\operatorname{rg} \mathrm{A}_{11}$ est au plus L, le degré des coefficients de $\tilde{\varphi}$ est au plus $(\mathrm{L}-1)d_t$

La matrice de Θ s'écrit sous la forme $\tilde{\Theta}/\mathrm{Q}$, avec $\tilde{\Theta}$ une matrice polynomiale de degré au plus $\deg_t \tilde{\varphi} + \deg_t f$, ce qui est majoré par $\mathrm{L}d_t$. En effet, la matrice de φ s'écrit comme $\tilde{\varphi}/\mathrm{Q}$ et donc

$$\mathrm{Q}\Theta(\alpha) = \mathrm{Q}\alpha - \mathrm{d}f \wedge \tilde{\varphi}(\alpha) + \mathrm{d}\tilde{\varphi}(\alpha).$$

Comme $[\alpha]_1 = \Theta^{n+1}(\alpha)/\mathrm{Q}^{n+1}$, pour α dans $\mathrm{F}_{n+1}\mathrm{T}^{n+1}$, la matrice de $[\,]_1$ dans la base monomiale peut être calculée par exponentiation binaire en au plus $2\log_2(n+1)$ multiplications matricielles de matrices polynomiales de taille L et de degré au plus $(n+1)\mathrm{L}d_t$. Cela peut se faire en $\widetilde{O}(\mathrm{L}^{\omega+1}d_t)$ opérations dans $\mathbb{Q}$.

En prenant en compte la filtration par le poids, on peut obtenir des bornes un peu plus fines sur le degré de la matrice de $[\,]_1$. Si on n'est intéressé que par les majorations en *grand O*, ceci n'est pas utile. Notons φ_q la restriction de φ à T^{n+1}_q. Notons L_q la dimension de T^{n+1}_q, valant $\binom{q\mathrm{N}-1}{n}$. De la même manière qu'on a majoré le degré des coefficients de φ, on peut majorer le degré de φ_q et on obtient que φ_q s'écrit comme $\mathrm{B}_q/\mathrm{P}_q$ pour un certain polynôme P_q de degré au plus $(\mathrm{L}_q - 1)d_t$ et B_q une matrice à coefficients polynomiaux de degré au plus $\mathrm{L}_q d_t$. Notons Θ_q l'application linéaire

$$\Theta_q : \alpha \in \mathrm{F}_{n+1}\mathrm{T}^{n+1} \mapsto \alpha - \mathrm{d}f \wedge \varphi_q(\alpha_q) + \mathrm{d}(\varphi_q(\alpha_q)) \in \mathrm{F}_{n+1}\mathrm{T}^{n+1},$$

où α_q est la composante homogène de poids q de λ. La matrice de Θ_q dans une

base monomiale s'écrit $\tilde{\Theta}_q/\mathrm{P}_q$ avec $\tilde{\Theta}_q$ une matrice à coefficients polynomiaux de degré au plus $\mathrm{L}_q d_t$. On peut reprendre la démonstration du lemme §29.3 pour montrer que pour tout α dans $\mathrm{F}_{n+1}\mathrm{T}^{n+1}$

$$[\alpha]_1 = (\Theta_1 \circ \cdots \circ \Theta_{n+1})(\alpha).$$

En conséquence, la matrice de $[\,]_1$ restreint à $\mathrm{F}_{n+1}\mathrm{T}^{n+1}$ s'écrit $\mathrm{M}_1/\prod_{k=1}^{n+1}\mathrm{P}_k$, avec M_1 une matrice à coefficients polynomiaux de degré au plus $\sum_{q=1}^{n+1}\mathrm{L}_q d_t$. Or l'entier $\sum_{q=1}^{n+1}\mathrm{L}_q$ n'est autre que L.

Comme on a supposé $\mathrm{N} > 1$, aucun élément non nul $\mathrm{F}_1\mathrm{T}^n$ est de la forme $\mathrm{d}f \wedge \beta$, donc en fait $\varphi_1 = 0$ et Θ_q est l'identité. Les coefficients M_1 sont donc de degré au plus $\sum_{q=2}^{n+1}\mathrm{L}_q d_t$, ce qui est majoré par $(\mathrm{L}-1)d_t$. Ceci conclut la preuve de la proposition §28.1, en prenant pour P le produit des P_q, qui n'est autre que $\det \mathrm{A}_{11}$.

§30 BORNES, CAS RÉGULIER. — Passons à l'analyse de l'algorithme 2. Un autre paramètre important apparait : c'est la dimension de $\mathrm{H}^{n+1}\mathrm{T}$ dans le cas régulier, notée R. Le théorème §17.1 donne la valeur précise de R, dont on vérifie qu'elle est inférieure à N^n :

$$\mathrm{R} \overset{\text{déf}}{=} \frac{1}{\mathrm{N}}\left((\mathrm{N}-1)^{n+1} + (-1)^{n+1}(\mathrm{N}-1)\right) < \mathrm{N}^n.$$

§30.1 *Proposition. — Si f est régulier, l'algorithme 2 appliqué à la fraction a/f renvoie un opérateur différentiel d'ordre au plus* R *et de degré au plus*

$$\left(\tfrac{1}{2}\mathrm{R}(\mathrm{R}+1)\mathrm{L} + \mathrm{R}\right) d_t \leqslant \tfrac{5}{8} e^n \mathrm{N}^{3n} d_t + e^n \mathrm{N}^n d_t.$$

Il effectue

$$\widetilde{O}\left(\mathrm{L}^{\omega+1} d_t + \mathrm{R}^{\omega+1}\mathrm{L} d_t\right) = \widetilde{O}\left(e^{(\omega+1)n}\mathrm{N}^{(\omega+1)n} d_t + e^n \mathrm{N}^{(\omega+2)n} d_t\right)$$

opérations dans $\mathbb{Q}$.

Sauf quand $\mathrm{N} = 2$, le second terme dans le $\widetilde{O}$ domine le premier. La preuve de cette proposition occupe ce paragraphe et les deux suivants.

Rappelons que dans l'algorithme 2 la suite (ρ_i) est définie par $\rho_0 = [\alpha]_1$ et la récurrence $\rho_{i+1} = [\delta\rho_i]_1$, où $\delta\rho_i$ égale $\rho_i^\delta - f^\delta \rho_i$, l'exposant δ marquant la dérivation coefficient par coefficient. Comme α est dans $\mathrm{F}_1\mathrm{T}^{n+1}$, sa réduction $[\alpha]_1$ est α lui-même car $\varphi(\alpha)$ est dans $\mathrm{F}_0\mathrm{T}^{n+1}$, qui est l'espace nul. Donc $\rho_0 = \alpha$.

Soit E l'image par $[\,]_1$ de $\mathrm{F}_{n+1}\mathrm{T}^{n+1}$. Par le lemme §29.2, elle est engendrée par des monômes. Cette image est facile à calculer : il suffit de retenir les monômes de $\mathrm{F}_{n+1}\mathrm{T}^{n+1}$ tels que la ligne correspondante dans la matrice de $[\,]_1$ n'est pas nulle. Par les théorèmes §16.1 et §16.3 l'espace E est isomorphe à $\mathrm{H}^{n+1}\mathrm{T}$.

Notons Ξ l'endomorphisme $\alpha \in \mathrm{E} \mapsto [f^\delta \alpha]_1 \in \mathrm{E}$. La matrice de Ξ dans la base

monomiale de E est obtenue par le produit de M_1 avec la matrice de la multiplication par f^δ, de E dans $F_{n+1}T^{n+1}$. C'est un produit de matrices polynomiales en dimension au plus L et en degré au plus Ld_t, ce qui se fait en complexité $\widetilde{O}(L^{\omega+1}d_t)$. La matrice de Ξ s'écrit M_Ξ/P où M_Ξ est une matrice à coefficients polynomiaux de degré au plus Ld_t et où P est le P de la proposition §28.1.

§31. — Les ρ_i sont des vecteurs de l'espace vectoriel E. Comme E est engendré par des monômes, les dérivations coefficient par coefficient ρ_i^δ sont aussi dans E, ils sont donc invariants par la réduction $[\,]_1$. En particulier

$$\rho_{i+1} = \rho_i^\delta - \Xi(\rho_i).$$

Comme ρ_0, qui égale α, est une forme à coefficients polynomiaux de degré au plus d_t, on en déduit immédiatement que ρ_i s'écrit

$$\rho_i = \tilde{\rho}_i/P^i,$$

où $\tilde{\rho}_i$ est une forme à coefficients polynomiaux de degré au plus $(iL+1)d_t$. Notons D_i le degré en t de $\tilde{\rho}_i$ et D le plus grand des D_i, pour $0 \leqslant i \leqslant R$. On a $D \leqslant (RL+1)d_t$.

L'algorithme calcule les ρ_i jusqu'à trouver une équation de liaison entre eux. Comme ce sont tous des éléments de E, il est clair que les ρ_i ne sont pas calculés au-delà du rang R, la dimension de E. Calculer les ρ_i par des produits matrice–vecteur est inefficace car les degrés en t des facteurs sont déséquilibrés : naïvement, on peut seulement borner la complexité de chacun des ces produits par $\widetilde{O}\left(R^2D\right)$, ce qui est $\widetilde{O}(R^3Ld_t)$.

D'où l'idée classique d'écrire $\tilde{\rho}_i$ comme

$$\tilde{\rho}_i = \sum_{k=0}^{R-1} t^{kLd_t}\,\tilde{\rho}_{i,k},$$

où chaque $\tilde{\rho}_{i,k}$ est une forme à coefficients polynomiaux de degré au plus $(L+1)d_t$. On déduit le produit $M_\Xi \cdot \tilde{\rho}_i$ de l'ensemble des produits $M_\Xi \cdot \tilde{\rho}_{i,k}$ par quelques additions. Et ces produits se ramènent bien sûr à un seul produit de deux matrices carrées de taille R et de degré au plus $(L+1)d_t$, la première étant M_Ξ et la seconde la matrice dont les colonnes sont les $\rho_{i,k}$. Ce produit nécessite seulement $\widetilde{O}\left(R^\omega Ld_t\right)$ opérations dans $\mathbb{Q}$. C'est bien un gain car $\omega < 3$. Le calcul de tous les ρ_i, pour $i \geqslant R$ utilise ainsi $\widetilde{O}(R^{\omega+1}Ld_t)$ opérations sur $\mathbb{Q}$.

À m fixé, tester si les $\rho_{0\sim m}$ sont liés est assez rapide en pratique puisqu'on peut le faire de manière probabiliste en donnant une valeur aléatoire au paramètre t. En revanche, c'est assez couteux de le faire de manière déterministe ; et le faire pour chaque m ferait de ce test l'étape dominante en termes de complexité. Ce

que je propose est donc de calculer l'intégralité des $\rho_{0\smile \mathrm{R}}$ et de construire la matrice carrée B dont les colonnes sont les $\tilde{\rho}_i$. On calcule ensuite le profil $(i_{1\smile r})$ des colonnes de B, en $\widetilde{O}(\mathrm{R}^{\omega}\mathrm{D})$ opérations dans $\mathbb{Q}$. Ce profil est nécessairement de la forme $(0,\dots,r-1)$ pour un certain entier r inférieur ou égal à R : si ρ_i est dans l'espace engendré par les ρ_j pour $j<i$ alors tous les ρ_{i+k} le sont aussi.

On peut alors chercher l'unique solution du système linéaire

§31.1
$$\rho_r = \sum_{k=0}^{r-1} a_k \rho_k,$$

avec a_k dans $\mathbb{Q}(t)$, et l'opérateur renvoyé par l'algorithme 2 est alors

$$\delta^r - \sum_{k=0}^{r-1} a_k \delta^k.$$

Comme d'habitude, il faut se ramener à un système à coefficients polynomiaux. Attachons-nous alors à résoudre le système

§31.2
$$\tilde{\rho}_r = \sum_{k=0}^{r-1} \tilde{a}_k \tilde{\rho}_k,$$

avec $\tilde{a}_k$ dans $\mathbb{Q}(t)$. La transformation $\tilde{a}_k \mapsto \tilde{a}_k/\mathrm{P}^{r-k}$ fait correspondre les solutions des deux systèmes.

La résolution du système §31.2 est équivalente au calcul du noyau de la matrice B′ définie comme étant la matrice de taille $\mathrm{R}\times r$ dont les colonnes sont $\tilde{\rho}_{0\smile r}$. Par construction, les coefficients de cette matrice sont polynomiaux de degré au plus D et elle admet un noyau de dimension un qui peut être calculé en $\widetilde{O}(\mathrm{R}r^{\omega-1}\mathrm{D})$ opérations dans $\mathbb{Q}$. La complexité totale de l'algorithme est donc $\widetilde{O}(\mathrm{L}^{\omega+1}d_t)$ opérations pour le calcul de la matrice de $[\,]_1$, $\widetilde{O}(\mathrm{R}^{\omega+1}\mathrm{L}d_t)$ opérations pour le calcul des ρ_i, pour $0\leqslant i\leqslant \dim \mathrm{E}$, $\widetilde{O}(\mathrm{R}^{\omega+1}\mathrm{L}d_t)$ opérations pour le calcul du profil des ρ_i et $\widetilde{O}(\mathrm{R}r^{\omega-1}\mathrm{D})$ opérations pour le calcul de l'équation minimale. Ce qui donne le résultat de complexité de la proposition §30.1, en majorant r par R. La procédure est récapitulée par l'algorithme 4.

§32. — Il reste à borner le degré de l'opérateur calculé. En tant que solutions du système linéaire §31.1 on peut écrire les a_k grâce à la règle de Cramer. Le système §31.1 a R équations et r inconnues, et admet une unique solution. Quitte à supprimer quelques équations, on se ramène à un système régulier à r équations et r inconnues avec toujours une unique solution. Plus précisément, il existe des monômes m_i de E, pour $0\leqslant i<r$, tels que la matrice C, dont le coefficient C_{ij} est le coefficient de m_i dans $\tilde{\rho}_j$, soit inversible. Notons C_i la matrice obtenue en

Algorithme 4 Calcul de l'équation de Picard-Fuchs, cas régulier par algèbre linéaire.

Entrée — $a/f \in \mathbb{K}(x_{0\text{-}n})$, une fraction homogène de degré $-n-1$, tel que $\mathrm{V}(f) \subset \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ soit régulier
Sortie — $\mathcal{L} \in \mathbb{K}\langle\delta\rangle$ l'équation de Picard-Fuchs de $\oint a/f$

fonction PicardFuchsBis(a/f^q)
  calculer la matrice de $[\,] : \mathrm{F}_{n+1}\mathrm{T}^{n+1} \to \mathrm{F}_{n+1}\mathrm{T}^{n+1}$.
  $\mathrm{R} \leftarrow \frac{1}{\deg f}\left((\deg f - 1)^{n+1} + (-1)^{n+1}(\deg f - 1)\right)$
  $\rho_0 \leftarrow a\omega$
  pour m de 0 à R
    $\rho_m \leftarrow [\delta\rho_{m-1}]_1$
  $r \leftarrow \mathrm{rg}_{\mathbb{K}}(\rho_0, \dots, \rho_{\mathrm{R}})$
  résoudre $\sum_{k=0}^{r-1} a_k\rho_k = \rho_r$ par rapport aux a_i, dans $\mathbb{K}$
  renvoyer $\delta^m - \sum_{k=0}^{r-1} a_k\delta^k$

remplaçant la colonne j de C par le vecteur $[m_i]\rho_r$, avec $0 \leqslant i < r$. On a alors, par la règle de Cramer,

$$\tilde{a}_k = \det \mathrm{C}_i / \det \mathrm{C},$$

et au final, l'opérateur renvoyé, après nettoyage des dénominateurs, s'écrit

§32.1
$$(\mathrm{P}^r \det \mathrm{C})\delta^r - \sum_{k=0}^{r-1} (\mathrm{P}^i \det \mathrm{C}_i)\delta^i,$$

à un facteur commun près dans les coefficients. Par suite le degré de l'opérateur renvoyé est majoré par

$$\max_{0\leqslant i\leqslant r}\left(i \deg_t \mathrm{P} + \sum_{k=0}^{r} \mathrm{D}_k - \mathrm{D}_i\right).$$

où D_i est le degré en t de $\tilde{\rho}_i$. Comme $\mathrm{D}_i \leqslant (i\mathrm{L}+1)d_t$ et $\deg_t \mathrm{P} \leqslant \mathrm{L}d_t$, on a

$$\begin{aligned} i \deg_t \mathrm{P} + \sum_{k=0}^{r} \mathrm{D}_k - \mathrm{D}_i &\leqslant i\mathrm{L}d_t + \left(\tfrac{1}{2}r(r+1)\mathrm{L} + (r+1)\right) d_t - (i\mathrm{L}+1)d_t \\ &= \tfrac{1}{2}r(r+1)\mathrm{L}d_t + rd_t; \end{aligned}$$

et on obtient ainsi la borne de la proposition §30.1, ce qui termine la preuve.

§33 BORNES, CAS GÉNÉRAL. — Terminons avec l'analyse de l'algorithme 3, qui donnera une preuve du théorème §2.1. Rappelons que a/f est donné comme l'homogénéisation d'une fraction b/g, et que f n'est pas nécessairement régulier.

On déforme alors f en

$$f_\lambda \overset{\text{déf}}{=} f + \lambda \sum_{i=0}^{N} x_i^N,$$

où λ est une nouvelle indéterminée. Ce polynôme est régulier sur $\mathbb{K}_\lambda$, voir §22. Et on calcule l'équation de Picard-Fuchs $\mathcal{L}_\lambda$ de a/f_λ sur le corps $\mathbb{Q}(t,\lambda)$. Quitte à multiplier $\mathcal{L}_\lambda$ par une puissance de λ, la spécialisation en $\lambda = 0$ de $\mathcal{L}_\lambda$ n'est ni nulle ni singulière et donne un opérateur de $\mathbb{K}(t)\langle\partial_r\rangle$ annulant les périodes de a/f, voir le lemme §22.2.

À première vue, il suffirait de répéter l'analyse de l'algorithme 2 avec $\mathbb{Q}(t,\lambda)$ pour corps de base $\mathbb{K}$. Outre le souci d'éviter les redondances, cela ne semble pas être faisable si facilement car les résultats connus de complexité sur les primitives d'algèbre linéaire sur le corps $\mathbb{Q}(t,\lambda)$ ne sont pas aussi bons que ceux sur le corps $\mathbb{Q}(t)$. Cependant, un moyen rapide de se ramener à la proposition §30.1 est l'évaluation-interpolation.

Notons $\mathbb{K}_\lambda$ le corps $\mathbb{Q}(\lambda,t)$ muni de la dérivation par rapport à t, notée δ. Le polynôme f_λ est régulier, et de plus, pour tout rationnel u sauf peut-être un nombre fini, le polynôme f_u, obtenu en évaluant λ en u dans f_λ, est régulier sur le corps $\mathbb{K}$. Notons $\mathcal{L}_\lambda$ l'équation de Picard-Fuchs de $\oint a/f_\lambda$. C'est l'opérateur de $\mathbb{Q}(\lambda)\langle t,\partial_t\rangle$ renvoyé par l'algorithme 2 appliqué sur le corps $\mathbb{K}_\lambda$ à la fraction a/f_λ. Pour u dans $\mathbb{K}$, notons $\mathcal{L}_u$ l'équation de Picard-Fuchs de $\oint a/f_u$. Quand f_u est régulier, c'est l'opérateur de $\mathbb{Q}(t)\langle\partial_t\rangle$ renvoyé par l'algorithme 2 appliqué, sur le corps $\mathbb{K}$, à la fraction a/f_u. Enfin, notons $\mathcal{L}_{\lambda\to u}$ le résultat de la spécialisation de λ en u dans $\mathcal{L}_\lambda$.

La technique d'évaluation-interpolation est la suivante. On calcule d'abord des bornes *a priori* sur le degré en λ de l'opérateur $\mathcal{L}_\lambda$. Ensuite, autant de fois que nécessaire, on calcule pour un rationnel u l'équation de Picard-Fuchs $\mathcal{L}_u$ de $\int a/f_u \mathrm{d}x$ et on montre que $\mathcal{L}_u$ égale $\mathcal{L}_{\lambda\to u}$, sauf pour certains u qu'on sait repérer. Ces évaluations permettent donc de reconstruire $\mathcal{L}_{\lambda\to u}$. On spécialise λ à zéro dans cet opérateur et on obtient un opérateur annulant les périodes de $\int a/f$.

§34. — Les bornes sur le degré obtenues au §32 restent valables si on remplace le degré en t par le degré en λ. En effet, on a seulement utilisé le fait que la dérivation ∂_t envoie un polynôme de $\mathbb{Q}[t]$ sur un autre polynôme de degré inférieur ou égal. Sur le corps $\mathbb{Q}(t,\lambda)$ muni de la dérivation ∂_t, la dérivée d'un polynôme en λ est encore un polynôme en λ dont le degré n'a pas augmenté. Comme le degré en λ de f est 1, on obtient ainsi

§34.1 *Lemme.* — *Le degré en* λ *de* $\mathcal{L}_\lambda$*, écrit sous forme polynomiale irréductible, est au plus* $\frac{1}{2}\mathrm{R}(\mathrm{R}+1)\mathrm{L}+\mathrm{R}$ *et le degré en* t *est au plus* $(\frac{1}{2}\mathrm{R}(\mathrm{R}+1)\mathrm{L}+\mathrm{R})d_t$.

§35. — On s'attache maintenant à donner des conditions suffisantes sur un élément u de $\mathbb{Q}$ pour que f_u soit régulier et que $\mathcal{L}_u$ égale $\mathcal{L}_{\lambda\to u}$.

§35.1 *Proposition.* — *Si* $\mathcal{L}_u$ *et* $\mathcal{L}_{\lambda\to u}$ *sont de même ordre et écrits sous forme unitaire, alors ils sont égaux à un scalaire près. De plus, le nombre de* $u \in \mathbb{K}$ *tels que ou bien* f_u *n'est pas régulier ou bien* $\mathcal{L}_u$ *est d'ordre strictement inférieur à l'ordre de* $\mathcal{L}_\lambda$ *est au plus* $\mathrm{R}^2\mathrm{L}+2\mathrm{L}$.

Démonstration. La première affirmation est claire car $\mathcal{L}_u$ est l'opérateur annulateur minimal des périodes de a/f_u et $\mathcal{L}_{\lambda\to u}$ est un opérateur annulateur. Donc le premier divise le second, et s'ils sont de même ordre ils sont égaux, à un scalaire près.

Par le théorème §16.2, on peut vérifier la régularité de f_u en vérifiant que la matrice de la multiplication par $\mathrm{d}f_u$, de T_n^n dans T_{n+1}^{n+1}, est de rang plein. Comme f_λ est régulier, la matrice de la multiplication par $\mathrm{d}f_\lambda$ est de rang plein. Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[t,\lambda]$ le déterminant d'un mineur inversible de rang maximal de la multiplication par $\mathrm{d}f_\lambda$ entre ces espaces. La spécialisation $\mathrm{P}(t,u)$ est le déterminant d'un mineur maximal de la matrice de la multiplication par $\mathrm{d}f_u$. Donc si $\mathrm{P}(t,u)$ n'est pas nul, cette matrice est de rang plein et f_u est régulier. Le degré de P en λ est au plus L, le polynôme f_u n'est pas régulier pour au plus L valeurs de u.

Soit u dans $\mathbb{Q}$ tel que f_u est régulier. Reprenons le §28 et la construction d'une matrice pour la réduction de Griffiths-Dwork. On construit d'un côté $[\,]_1$ pour le polynôme f_λ et de l'autre $[\,]_1|_{\lambda\to u}$ pour le polynôme f_u. On souhaite bien sûr que

$$[\alpha]_1|_{\lambda\to u} = [\alpha|_{\lambda\to u}]_1,$$

pour tout α dans $\mathrm{F}_{n+1}\mathrm{T}^{n+1}$ à coefficients dans $\mathbb{K}_\lambda$. Pour cela, il suffit que $\mathrm{A}_{11}|_{\lambda\to u}$ soit inversible. Comme $\det \mathrm{A}_{11}$ est de degré au plus L en λ, il y a au plus L mauvais points. On peut les détecter car les profils de la matrice de la multiplication par $\mathrm{d}f_u$, si u est un mauvais point, ne coïncideront par avec ceux des matrices associées aux $\mathrm{d}f_v$, pour v des bons points.

Supposons donc que la réduction $[\,]_1$ commute à la spécialisation $\lambda \to u$. Par conséquent, les ρ_i de l'algorithme 2 appliqué à a/f_u sont les ρ_i de ce même algorithme appliqué à a/f_λ et spécialisés en $\lambda = u$.

Soit r l'ordre de $\mathcal{L}_\lambda$. Comme $\mathcal{L}_\lambda$ est l'opérateur minimal, les $\rho_{0\smile r-1}$ sont libres. Soit P le déterminant d'un mineur maximal de la matrice des $\rho_{0\smile r-1}$. C'est un polynôme non nul en t et λ de degré au plus $r\mathrm{RL}$ en λ, car les coefficients des ρ_i sont de degré au plus RL, voir §32. Si $\mathrm{P}(t,u)$ n'est pas nul, alors les $\rho_{0\smile r-1}|_{\lambda\to u}$

Algorithme 5 Calcul d'un opérateur annulant les périodes d'une intégrale rationnelle, cas singulier par évaluation-interpolation

Entrée — $\mathrm{S} \in \mathbb{K}(x_{1\sim n})$, une fraction rationnelle
Sortie — $\mathcal{L} \in \mathbb{K}\langle\delta\rangle$ une équation différentielle pour $\oint \mathrm{S}$

fonction AnnulateurPériodesBis(R)
  $a/f \leftarrow x_0^{-n-1}\mathrm{S}(x_1/x_0, \dots, x_n/x_0)$
  $f_\lambda \leftarrow f + \lambda \sum_{i=0}^{n} x_i^{\deg f}$
  $\mathrm{R} \leftarrow \frac{1}{\deg f}\left((\deg f - 1)^{n+1} + (-1)^{n+1}(\deg f - 1)\right)$
  $\mathrm{L} \leftarrow \dim \mathrm{F}_{n+1}\mathrm{T}^{n+1}$
  pour u de 1 à $(2\mathrm{R}^2 + \mathrm{R} + 2)\mathrm{L} + 2\mathrm{R} + 1$
    $\mathcal{L}_u \leftarrow$ PicardFuchs$(a/f_u) \in \mathbb{K}\langle\delta\rangle$
    $\mathcal{M}_u \leftarrow$ base de $[\mathrm{F}_{n+1}\mathrm{T}^{n+1}]_1$
  jeter les u pour lesquels $\mathcal{M}_u$ est exceptionnel
  jeter les u pour lesquels l'ordre de $\mathcal{L}_u$ est exceptionnel
  reconstruire $\mathcal{L}_\lambda$ avec les $\mathcal{L}_u$ restants
  renvoyer $\mathcal{L}_\lambda|_{\lambda=0}$

sont libres, et donc $\mathcal{L}_u$ est d'ordre r aussi. Donc il y a au plus rRL mauvais points. Comme $r \leqslant \mathrm{R}$, on obtient le résultat. □

Soit s l'entier

$$s = \mathrm{R}(\mathrm{R}+1)\mathrm{L} + 2\mathrm{R} + 1 + \mathrm{R}^2\mathrm{L} + 2\mathrm{L}.$$

Soit U l'ensemble des entiers de 1 à s. Notons que $s = O(\mathrm{R}^2\mathrm{L})$. Parmi les éléments u de U, excluons ceux tels que f_u n'est pas régulier. Cette opération coute $\widetilde{O}(\mathrm{R}^2\mathrm{L}^{\omega+1}d_t)$ opérations dans $\mathbb{K}$. Parmi les u restants calculons $\mathcal{L}_u$. D'après la proposition §30.1, cela coute

$$\widetilde{O}\left(\mathrm{R}^2\mathrm{L}(\mathrm{L}^{\omega+1} + \mathrm{R}^{\omega+1}\mathrm{L})d_t\right).$$

Lors de ces calculs, on calcule les profils des matrices de la multiplication par $\mathrm{d}f_u$. Tous ces profils seront égaux entre eux, sauf peut-être pour au plus L points u, qu'on jette. Et parmi ces opérateurs $\mathcal{L}_u$ obtenus, tous auront le même ordre, sauf peut-être pour au plus $\mathrm{R}^2\mathrm{L}$ points u qu'on jette aussi. Par la proposition précédente, il en reste au moins $\mathrm{R}(\mathrm{R}+1)\mathrm{L} + 2\mathrm{R} + 1$ et ils correspondent à des u tels que $\mathcal{L}_u$ égale $\mathcal{L}_{\lambda\to u}$. Par la proposition §35.1, c'est assez pour reconstruire $\mathcal{L}_\lambda$, et ensuite calculer $\mathcal{L}_{\lambda\to 0}$. Je conclus par un dernier détour : plutôt que de reconstruire $\mathcal{L}_\lambda$ tout entier, on peut, en meilleure complexité, calculer $\mathcal{L}_{\lambda\to 0}$ seulement :

§35.2 *Lemme. — Soit* $\mathrm{R} = \mathrm{P}/\mathrm{Q}$ *un élément de* $\mathbb{K}(x,y)$*, tel que le degré en* x *de* P *et* Q *est borné par* d_x *et celui en* y *borné par* d_y*. Étant données les évaluation* $\mathrm{R}(x,v) \in \mathbb{K}(x)$ *pour* $2d_y+1$ *éléments* v *de* $\mathbb{K}$*, la fraction* $\mathrm{R}(x,0)$ *— ou* ∞ *si* $\mathrm{Q}(x,0)$ *est nul — peut être calculée en* $\widetilde{O}(d_x d_y)$ *opérations dans* $\mathbb{K}$*.*

Démonstration. Soit V l'ensemble des points d'évaluation. Soit U un ensemble arbitraire de $2d_x+1$ éléments de $\mathbb{K}$. On peut calculer les $\mathrm{R}(u,v)$, pour $u \in \mathrm{U}$ et $v \in \mathrm{V}$ en $\widetilde{O}(d_x|\mathrm{V}|)$ opérations dans $\mathbb{K}$, grâce aux algorithmes d'évaluation multipoints. [29] En utilisant l'interpolation rationnelle univariée, on peut calculer les $\mathrm{R}(u,y) \in \mathbb{K}(y)$, pour $u \in \mathrm{U}$, en $\widetilde{O}(d_y|\mathrm{U}|)$ opérations dans $\mathbb{K}$. Enfin, la reconstruction de $\mathrm{R}(x,0)$ à partir des $\mathrm{R}(u,0)$ peut se faire en $\widetilde{O}(d_x)$ opérations dans $\mathbb{K}$.

Remarquons qu'il se peut que $\mathrm{Q}(u,y) = 0$, pour un certain u dans U, ce n'est pas un problème, les algorithmes d'interpolation savent gérer cela. □

Il y a autant de fractions en t et λ à reconstruire que l'ordre de $\mathcal{L}_\lambda$ (c'est-à-dire au plus R) et chacune de ces fractions est de degré $O(\mathrm{R}^2\mathrm{L}d_t)$ en t et $O(\mathrm{R}^2\mathrm{L})$ en λ. Par le lemme §35.2, la complexité totale de la reconstruction est donc $\widetilde{O}(\mathrm{R}^5\mathrm{L}^2 d_t)$. Au final, la complexité totale de l'algorithme est $\widetilde{O}(\mathrm{R}^2\mathrm{L}^{\omega+1}d_t)$ pour éliminer les f_u singuliers, $\widetilde{O}(\mathrm{R}^2\mathrm{L}^{\omega+2} + \mathrm{R}^{\omega+3}\mathrm{L}^2 d_t)$ pour le calcul de $\mathcal{L}_u$ et $\widetilde{O}(\mathrm{R}^5\mathrm{L}^2 d_t)$ pour la reconstruction de $\mathcal{L}_{\lambda\to 0}$. En notant que $\omega+3 \geqslant 5$, on obtient $\widetilde{O}(\mathrm{R}^2\mathrm{L}^{\omega+2}d_t + \mathrm{R}^{\omega+3}\mathrm{L}^2 d_t)$. L'algorithme 5 récapitule la procédure.

§35.3 *Théorème. — Soit* a/f *une fraction de* $\mathbb{Q}(t, x_{0\frown n})$ *homogène de degré* $-n-1$ *en les* $x_{0\frown n}$*. Soit* N *le degré de* f *en les* $x_{0\frown n}$ *et* d_t *le plus grand du degré de* a *et du degré de* f *en* t*. Il existe un opérateur* $\mathcal{L}(t,\partial_t)$ *annulant les périodes de* $\oint \mathrm{R}$ *d'ordre au plus* N^n *et de degré au plus*

$$\tfrac{5}{8}e^n\mathrm{N}^{3n}d_t + e^n\mathrm{N}^n d_t.$$

De plus, il peut être calculé en

$$\widetilde{O}\left(e^{(\omega+2)n}\mathrm{N}^{(\omega+4)n}d_t + e^{2n}\mathrm{N}^{(\omega+5)n}d_t\right)$$

opérations dans $\mathbb{Q}$*.*

29. Gathen et Gerhard, *Modern computer algebra*, §10 ; Bostan, « Algorithmique efficace pour des opérations de base en Calcul formel », chapitre 5.

II ALGORITHME EFFICACE

§1. — Si le résultat de complexité obtenu au chapitre précédent est satisfaisant, l'efficacité pratique ne l'est pas. Le problème est la méthode de déformation : souvent l'intégrale qu'on cherche à calculer a beaucoup de structure et l'ordre de son équation différentielle est bien moinde que la borne générique N^n. Cependant, après une déformation générique, l'opérateur annulateur sera effectivement d'ordre N^n, ce qui est catastrophique pour l'efficacité.

Ce chapitre traite d'un nouvel algorithme conçu pour traiter les cas singuliers directement, sans déformation. L'efficacité pratique de cet algorithme est bonne puisqu'il m'a permis de calculer des périodes qui étaient jusque-là inaccessibles. L'implémentation est au final assez élémentaire : elle repose sur des bases de Gröbner commutatives et de l'algèbre linéaire. Comme l'algorithme évite la déformation, il se comporte beaucoup mieux quand la taille de l'objet calculé est petite.

Comme au chapitre précédent, $\mathbb{K}$ est un corps de caractéristique nulle et A l'anneau de polynômes $\mathbb{K}[x_{0\sim n}]$, pour un certain entier n. Soient f un élément homogène de A et N son degré. La localisation $\mathrm{A}[1/f]$ est notée A_f.

On cherche à définir un algorithme de réduction calculant une projection linéaire $\mathrm{R} \mapsto [\mathrm{R}]$, de A_f dans lui-même, dont le noyau serait exactement $\sum_{i=0}^{n} \partial_i \mathrm{A}_f$, c'est-à-dire le sous-espace des fractions qui s'écrivent comme sommes de dérivées partielles d'éléments de A_f. Nous avons vu que ce problème est résolu par la réduction d'Hermite quand n est 1 et par la réduction de Griffiths-Dwork en dimension quelconque mais seulement quand f est régulier. À cette fin, je définis une famille d'applications, notées $[\,]_r$, dépendant d'un paramètre $r \geqslant 1$ entier, telle que $[\,]_1$ est la réduction de Griffiths-Dwork et telle que $[\,]_{r+1}$ est un raffinement de $[\,]_r$. Je donne un algorithme rapide pour calculer ces applications. De manière conjecturale, l'application $[\,]_{n+1}$ est une solution au problème. Toutefois, même sans cette conjecture, il est possible d'obtenir un algorithme pour le calcul des équations de Picard-Fuchs dont la terminaison est prouvée.

Avant de reprendre le formalisme du chapitre précédent, avec les formes différentielles et le complexe exponentiel, attachons-nous à donner une présentation aussi claire que possible des idées donnant le nouvel algorithme.

§2 RÉDUCTION DE GRIFFITHS-DWORK. — Rappelons en un mot le principe de cette réduction. Elle part de l'observation que la formule de différentiation

$$\sum_{i=0}^{n} \partial_i \left(\frac{b_i}{f^{q-1}} \right) = \frac{\sum_{i=0}^{n} \partial_i b_i}{f^{q-1}} - (q-1) \frac{\sum_{i=0}^{n} b_i \partial_i f}{f^q} \tag{§2.1}$$

implique, en la lisant de droite à gauche, que si a est un polynôme de l'idéal jacobien $\mathrm{J}_f = (\partial_{0 \smile n} f)$ et si $q > 1$ alors a/f^q égale a'/f^{q-1}, modulo les dérivées partielles, pour un certain polynôme a'. À savoir, si a égale $\sum_i b_i \partial_i f$ alors

$$\frac{a}{f^q} \equiv \frac{\frac{1}{q-1} \sum_{i=0}^{n} \partial_i b_i}{f^{q-1}} \mod \sum_{i=0}^{n} \partial_i \mathrm{A}_f.$$

Griffiths [1] a prouvé la réciproque dans le cas où f est un polynôme régulier [2] : sous cette hypothèse, si $q > 1$ et si a/f^q égale a'/f^{q-1}, modulo les dérivées partielles, pour un certain polynôme a', alors a est dans J_f. Par récurrence sur le poids, cela donne un algorithme pour décider si un élément de A_f est une somme de dérivées.

§3 CAS SINGULIER. — En présence de singularités, la conclusion du théorème de Griffiths I §16.1 n'est jamais vérifiée. Par exemple, si f est $xy^2 - z^3$, qui définit la plus simple des courbes projectives singulières, alors

$$\frac{x^3}{f^2} = \partial_x \left(\frac{\frac{2}{7} x^4}{f^2} \right) - \partial_y \left(\frac{\frac{1}{7} x^3 y}{f^2} \right). \tag{§3.1}$$

Mais x^3 n'est pas dans l'idéal jacobien J_f, ici égal à (xy, y^2, z^2). Détaillons le calcul :

$$\partial_x \left(\frac{\frac{2}{7} x^4}{f^2} \right) - \partial_y \left(\frac{\frac{1}{7} x^3 y}{f^2} \right) = \frac{\frac{8}{7} x^3 - \frac{1}{7} x^3}{f^2} - 2 \frac{\boxed{\frac{2}{7} x^4 \partial_x f - \frac{1}{7} x^3 y \partial_y f}}{f^3},$$

et la partie encadrée est nulle. De manière plus générale, on observe que

$$\sum_{i=0}^{n} b_i \partial_i f = 0 \Rightarrow \sum_{i=0}^{n} \partial_i \left(\frac{b_i}{f^q} \right) = \frac{\sum_{i=0}^{n} \partial_i b_i}{f^q}. \tag{§3.2}$$

Rappelons qu'une suite de polynômes $b_{0 \smile n}$ est appelée *syzygie* (de la suite $\partial_{0 \smile n} f$) si $\sum_{i=0}^{n} b_i \partial_i f$ s'annule. Il suit de l'implication §3.2 que pour obtenir une réduction aussi forte que possible de l'ordre du pôle, nous devons non seulement considérer les éléments de l'idéal J_f mais aussi les éléments de la forme $\sum_i \partial_i b_i$, où $b_{0 \smile n}$ est une syzygie. Ces éléments sont appelés des *différentielles de syzygies*.

1. Griffiths, « On the periods of certain rational integrals ».
2. Voir section 2, chap. I, pour la définition et pour l'énoncé du théorème de Griffiths.

Il se peut que ça ne soit pas suffisant. Par exemple, si f égale $x_0^4x_1 - x_0^2x_1x_2^2 + x_0x_2^4$ alors

$$\frac{x_1^7}{f^2} = \frac{1062347}{276480}\frac{89x_0^2 + 96x_0x_1 + 712x_2^2}{f} + \sum_{i=0}^{2}\partial_i\left(\frac{b_i}{f^3}\right),$$

pour certains polynômes b_i, trop longs pour être reproduits ici, alors que x_1^7 n'est pas dans l'espace engendré par J_f et les différentielles des syzygies. Notez en particulier la puissance troisième qui apparait dans $\partial_i(b_i/f^3)$: alors que dans l'équation §3.1 il y avait une simplification atypique par f, il y en a ici deux.

§4 RELATIONS D'ORDRE SUPÉRIEUR. — Soit M_q l'ensemble des fractions rationnelles de la forme a/f^q. Soit W_q^1 le sous-ensemble de $\mathrm{M}_q \times \mathrm{M}_{q-1}$ défini par

$$\mathrm{W}_q^1 = \left\{ \left((q-1)\frac{\sum_{i=0}^n b_i\partial_i f}{f^q}, \frac{\sum_{i=0}^n \partial_i b_i}{f^{q-1}} \right) \;\middle|\; b_i \in \mathrm{A} \right\},$$

de telle sorte que pour tout (R,R') dans W_q^1, le premier élément R a un pôle d'ordre au plus q et est congru, modulo les dérivées, au second élément R′, dont le pôle est d'ordre au plus $q-1$. On peut alors écrire le théorème de Griffiths ainsi :

§4.1 *Théorème (Griffiths). — Si f est régulier, alors pour tout* R *dans* M_q*, homogène de degré $-n-1$, les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. R *est congru modulo les dérivées à un* R′ *dont le pôle est d'ordre au plus $q-1$;*
2. *il existe* R′ *dans* M_{q-1} *tel que* (R,R') *est dans* W_q^1.

Le point de départ de la méthode dans le cas général est l'observation que W_q^1 contient des paires de la forme $(0,\mathrm{R}')$: si $b_{0\smile n}$ est une syzygie alors $(0, \sum_i \partial_i b_i/f^{q-1})$ est dans W_q^1. Pour toute paire $(0,\mathrm{R}')$ de ce type, la fraction R′ est dans $\sum_i \partial_i \mathrm{A}_f$ puisqu'elle est congrue à 0 modulo les dérivées. On peut interpréter W_q^1 comme le graphe de la réduction de Griffiths-Dwork : si (R,R') est dans W_q^1, alors la réduction de Griffiths-Dwork réécrit R en R′. Les couples $(0,\mathrm{R}')$ représentent alors l'équivoque dans la réduction de Griffiths-Dwork, qui apparait dans le choix des cofacteurs.

Cependant, il est possible, comme on l'a vu ci-dessus, que R′ ne fasse pas partie d'une paire $(\mathrm{R}',\mathrm{R}'')$ de W_{q-1}^1. Ceci amène à définir W_q^2 comme

$$\mathrm{W}_q^2 \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{W}_q^1 + \left\{ (\mathrm{R},0) \;\middle|\; (0,\mathrm{R}) \in \mathrm{W}_{q+1}^1 \right\}.$$

Et bien sûr, on peut répéter cette construction :

$$\mathrm{W}_q^{r+1} \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{W}_q^r + \left\{ (\mathrm{R},0) \;\middle|\; (0,\mathrm{R}) \in \mathrm{W}_{q+1}^r \right\}.$$

Cette récurrence préserve une propriété fondamentale : si (R,R') est dans W_q^r, alors

le premier élément R a un pôle d'ordre au plus q et est congru, modulo les dérivées, au second élément R′ dont le pôle est d'ordre au plus $q-1$. À l'instar de W_q^1, on peut interpréter W_q^r comme le graphe d'une nouvelle réduction. *L'équivoque dans cette réduction donne des relations d'ordre supérieur sur les fractions avec un pôle d'ordre inférieur.*

Cette construction est exhaustive, au sens suivant :

§4.2 *Théorème. — Il existe un entier $r \geqslant 1$, qui dépend seulement de f, tel que pour tout q et tout* R *dans* M_q*, homogène de degré $-n-1$, les assertions suivantes soient équivalentes :*

1. R *est congru, modulo les dérivées, à un* R′ *dans* M_{q-1} *;*
2. *il existe* R′ *dans* M_{q-1} *tel que* (R,R') *est dans* W_q^r*.*

L'algorithme présenté dans ce chapitre est principalement une méthode efficace pour calculer les espaces W_q^r.

§5 SYZYGIES TRIVIALES. — L'espace W_q^2 est engendré par W_q^1 et les éléments de la forme $(\sum_i \partial_i b_i/f^q, 0)$, où $b_{0\smile n}$, est une syzygie. Parmi les syzygies les *syzygies triviales* n'apportent aucune relation nouvelle à celles que W_q^1 contient déjà. Rappelons qu'une suite $b_{0\smile n}$ est une *syzygie triviale* s'il existe une famille de polynômes $c_{i,j}$ tels que $c_{ij} = -c_{ji}$ et

$$b_i = \sum_{j=0}^{n} c_{i,j}\partial_j f.$$

La propriété d'antisymétrie implique qu'une syzygie triviale est une syzygie, et de plus

$$\sum_{i=0}^{n} \partial_i b_i = \sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{i=0}^{n} \partial_i c_{ij}\right)\partial_j f + \underbrace{\sum_{i,j=0}^{n} c_{i,j}\partial_i\partial_j f}_{=0}.$$

Ainsi, la différentielle d'une syzygie triviale est un élément de l'idéal J_f. Et comme

$$\sum_j \partial_j\left(\sum_i \partial_i c_{ij}\right) = 0,$$

il suit que la paire $(\sum_i \partial_i b_i/f^q, 0)$ est dans W_q^1. Ainsi, pour calculer W_q^2, il n'est pas nécessaire de prendre en compte les syzygies triviales. Quantitativement, les syzygies triviales sont nombreuses parmi les syzygies — voir, par exemple, le tableau 2 — et s'en débarrasser est crucial.

§6 ALGORITHME DE RÉDUCTION. — Soit $\mathrm{R} = a/f^q$ un élément de M_q. La forme réduite $[\mathrm{R}]_q$ est définie par récurrence sur q de la manière suivante. Soit S

l'élément *minimal* — par rapport à un ordre monomial, disons — de M_q tel qu'il existe un R' dans M_{q-1} tel que $(R - S, R')$ soit dans W_q^r. Alors $[R]_r$ est défini comme $S + [R']_r$. Une contrainte sur le degré d'homogénéité de R assurera que R' est nul à un moment donné de la récurrence.

Pour $r = 1$, l'élément S se calcule grâce à une base de Gröbner. Pour les $r > 1$, il n'y a plus de structure d'idéal et le calcul de S se fait par élimination gaussienne.

§7 THÉORÈMES DE DIMCA. — Enfin, deux théorèmes de Dimca [3] sont à la base théorique de l'algorithme et permettent de prouver sa terminaison. Ce sont des généralisations des théorèmes de Griffiths — voir §7, chapitre I.

§7.1 *Théorème (Dimca). — Il existe un entier r, qui dépend seulement de f, tel que pour toute fraction rationnelle a/f^q, homogène de degré $-n-1$, s'il existe des polynômes $b_{0\smile n}$ et un entier s tels que $a/f^q = \sum_i \partial_i(b_i/f^s)$ alors il existe des polynômes $b'_{0\smile n}$ tels que $a/f^q = \sum_i \partial_i(b'_i/f^{q+r-2})$.*

Dans le cas régulier, le théorème de Griffiths affirme que $r = 1$ convient. Par opposition, l'entier r n'est pas explicite ici. La preuve de Dimca l'exprime en fonction d'une résolution des singularités de la variété projective définie par f. En principe c'est effectif mais c'est sans espoir en pratique, d'autant plus que la borne obtenue sur r serait sans doute très mauvaise. Dimca conjecture que $r = n + 1$ convient.

Sans borne effective sur r, le second théorème de Dimca est indispensable. C'est une généralisation à l'identique du second théorème de Griffiths, mais sa preuve est sensiblement plus dure.

§7.2 *Théorème (Dimca). — Pour toute fraction rationnelle a/f^q homogène de degré $-n-1$, il existe une autre fraction a'/f^n, homogène de degré $-n-1$, des polynômes $b_{0\smile n}$ et un entier s tels que*

$$a/f^q = a'/f^n + \sum_{i=0}^{n} \partial_i(b_i/f^s).$$

1 Réductions d'ordre supérieur

§8. — Reprenons les idées exposées ci-dessus dans le formalisme du chapitre précédent. L'espace M_q devient T_q^{n+1} et le produit $M_q \times M_{q-1}$ peut être remplacé

3. Dimca, « On the de Rham cohomology of a hypersurface complement », Theorem B and Corollary 2, « On the Milnor fibrations of weighted homogeneous polynomials », Theorem 2.7.

par la somme directe $\mathrm{T}^{n+1}_q + \mathrm{T}^{n+1}_{q-1}$. On définit par récurrence sur r

§8.1
$$\begin{cases} \mathrm{W}^1_q \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{D}_f(\mathrm{T}^n_{q-1}) = \left\{-\mathrm{d}f \wedge \beta + \mathrm{d}\beta \;\middle|\; \beta \in \mathrm{T}^n_{q-1}\right\} \\ \mathrm{W}^{r+1}_q \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{W}^1_q + \mathrm{W}^r_{q+1} \cap \mathrm{F}_q\mathrm{T}^{n+1}. \end{cases}$$

§8.2 *Proposition.* — *Pour tout $r \geqslant 1$ et $q \geqslant 0$,*

$$\mathrm{W}^r_q = \mathrm{D}_f\Big(\sum_{k=1}^{r} \mathrm{T}^n_{q+k-2}\Big) \bigcap \mathrm{F}_q\mathrm{T}^{n+1}.$$

Démonstration. Pour $r = 1$, c'est la définition. Il suffit ensuite de prouver que le membre de droite de l'égalité satisfait la relation de récurrence définissant W^r_q, c'est-à-dire

$$\mathrm{D}_f(\mathrm{T}^n_{q-1}) + \mathrm{D}_f\Big(\sum_{k=1}^{r} \mathrm{T}^n_{q+k-1}\Big) \bigcap \mathrm{F}_q\mathrm{T}^{n+1} = \mathrm{D}_f\Big(\sum_{k=1}^{r+1} \mathrm{T}^n_{q+k-2}\Big) \bigcap \mathrm{F}_q\mathrm{T}^{n+1},$$

où $\mathrm{F}_{q+1}\mathrm{T}^{n+1} \cap \mathrm{F}_q\mathrm{T}^{n+1}$ a été simplifié en $\mathrm{F}_q\mathrm{T}^{n+1}$. L'inclusion de droite à gauche est claire. Réciproquement, soit β un élément de $\sum_{k=1}^{r+1} \mathrm{T}^n_{q+k-2}$ tel que $\mathrm{D}_f\beta$ est dans $\mathrm{F}_q\mathrm{T}^{n+1}$. Soit β' la différence $\beta - \beta_{q-1}$, où β_{q-1} est la composante de poids $q-1$ de β. La forme $\mathrm{D}_f\beta'$ est dans $\mathrm{F}_q\mathrm{T}^{n+1}$, car pour $k > q$, $(\mathrm{D}_f\beta')_k$ égale $(\mathrm{D}_f\beta)_k$, ce qui est nul par hypothèse. Donc $\mathrm{D}_f\beta'$ est dans $\mathrm{D}_f\big(\sum_{k=1}^{r} \mathrm{T}^n_{q+k-1}\big) \cap \mathrm{F}_q\mathrm{T}^{n+1}$. De plus $\mathrm{D}_f\beta_{q-1}$ est dans $\mathrm{D}_f(\mathrm{T}^n_{q-1})$, ce qui conclut car $\mathrm{D}_f\beta$ égale $\mathrm{D}_f\beta' + \mathrm{D}_f\beta_{q-1}$. □

§8.3 *Corollaire.* — *Soit α une $(n+1)$-forme de poids q. Sont équivalents :*

(i) il existe une forme α' de poids au plus $q-1$ telle que $\alpha \equiv \alpha' \mod \mathrm{D}_f\left(\mathrm{F}_{q+r-2}\mathrm{T}^n\right)$;

(ii) α est dans $\mathrm{W}^r_q + \mathrm{F}_{q-1}\mathrm{T}^{n+1}$.

Démonstration. Le point (ii) implique (i) car l'espace W^q_r est inclus dans $\mathrm{D}_f(\mathrm{F}_{q+r-2}\mathrm{T}^n)$, par la proposition §8.2. Réciproquement, soit β un élément de $\mathrm{F}_{q+r-2}\mathrm{T}^n$ tel que α égale $\mathrm{D}_f\beta + \alpha'$, avec $\alpha' \in \mathrm{F}_{q-1}\mathrm{T}^{n+1}$. La forme β se décompose en $\beta' + \varepsilon$ avec β' dans $\sum_{k=1}^{r} \mathrm{T}^n_{q+k-2}$ et ε dans $\mathrm{F}_{q-2}\mathrm{T}^n$. La forme $\mathrm{D}_f\varepsilon$ est dans $\mathrm{F}_{q-1}\mathrm{T}^{n+1}$, donc $\mathrm{D}_f\beta'$ est dans $\mathrm{F}_q\mathrm{T}^{n+1}$ comme $\mathrm{D}_f\beta$ l'est. Ainsi, la forme $\mathrm{D}_f\beta'$ est dans W^r_q, et $\alpha \equiv \alpha' + \mathrm{D}_f\varepsilon \pmod{\mathrm{W}^r_q}$. □

§8.4 *Exemple.* — Si $f = xy^2 - z^3$, on calcule que $\mathrm{W}^1_1 = 0$ et

$$\mathrm{W}^1_2 = \left\langle x^2y, xy^2, y^3, xyz, y^2z, xz^2, yz^2, z^3, 1\right\rangle \omega.$$

Ainsi $\mathrm{W}^1_2 \cap \mathrm{F}_1\mathrm{T}^3$ égale $\langle\omega\rangle$ et W^2_1 égale $\langle\omega\rangle$. On calcule aussi que W^2_2 égale $\mathrm{W}^2_1 + \langle x^3\omega\rangle$. C'est à mettre en regard avec l'exemple du §3.

q	0	1	2	3	4	$q > 4$
$\dim \mathrm{E}_q^0$	0	10	165	680	1771	$\binom{6q-1}{3} \sim 36q^3$
$\dim \mathrm{E}_q^1$	0	10	86	102	120	$18q + 48$
$\dim \mathrm{E}_q^2$	0	10	7	6	6	6
$\dim \mathrm{E}_q^3$	0	9	1	0	0	0

Tableau 1. Quelques dimensions reliées au polynôme $2x_1x_2x_3(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3) - x_0^3(x_0^3 - x_0^2x_3 + x_1x_2x_3)$.

Vu la proposition §8.2, introduisons

$$\mathrm{E}_q^r \overset{\text{déf}}{=} \frac{\mathrm{F}_q\mathrm{T}^{n+1}}{\mathrm{W}_r^q + \mathrm{F}_{q-1}\mathrm{T}^{n+1}} = \frac{\mathrm{F}_q\mathrm{T}^{n+1}}{\mathrm{D}_f(\mathrm{F}_{q+r-2}\mathrm{T}^n) \cap \mathrm{F}_q\mathrm{T}^{n+1} + \mathrm{F}_{q-1}\mathrm{T}^{n+1}}.$$

Pour $r = 0$, on pose $\mathrm{W}_q^0 = 0$. Cet espace n'est autre que $\mathrm{E}_{n+1-q,q}^r$ introduit au §15, chapitre I. Il est clair que E_q^0 est $\mathrm{F}_q\mathrm{T}^{n+1}/\mathrm{F}_{q-1}\mathrm{T}^{n+1}$, ce qui est isomorphe à T_q^{n+1}. Ainsi E_q^r mesure les formes de poids q qu'on ne peut pas réduire avec des différentielles de n-formes de poids au plus $q + r - 2$.

§8.5 *Exemple.* — Soit f le polynôme

$$f \overset{\text{déf}}{=} 2x_1x_2x_3(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3) - x_0^3(x_0^3 - x_0^2x_3 + x_1x_2x_3).$$

Il intervient dans une intégrale pour les nombres d'Apéry.[4] Dans ce cas n est 3 et N est 6. La dimension du lieu singulier de $\mathrm{V}(f)$ dans $\mathbb{P}^3_{\mathbb{K}}$ est 1.

Le tableau 1 donne les dimensions des E_q^r pour les premières valeurs de r. Ceci illustre les chutes successives des dimensions. Pour $r = 3$, l'égalité $\dim \mathrm{E}_1^3 = 9$ signifie que $\dim \mathrm{W}_1^3/\mathrm{F}_{q-1}\mathrm{T}^{n+1}$ est 1. En effet, cet espace est engendré par la 4-forme $(2x_1^2 - 2x_2^2 - x_0(x_1 - x_2))\omega$ de poids 1. On vérifie qu'elle est la différentielle d'une certaine 3-forme β de poids 2, trop imposante pour être reproduite ici, mais d'aucune 3-forme de poids inférieur.

On peut calculer une base de W_q^r par de l'algèbre linéaire élémentaire, que ce soit par la définition §8.1 ou la caractérisation de la proposition §8.2. Il est possible d'être bien plus efficace. Les deux paragraphes suivants raffinent successivement la construction des W_q^r pour aboutir, au paragraphe §11, à un calcul rapide.

§9 UTILISATION DE LA RÉDUCTION DE GRIFFITHS-DWORK. — Grâce à l'utilisation des bases de Gröbner, la réduction de Griffiths-Dwork est efficace et

4. Voir l'introduction, §4.

facile à implémenter. Dans le cas singulier, elle n'est pas suffisante pour voir toutes les relations modulo $\mathrm{D}_f\mathrm{T}^n$ mais elle en donne déjà beaucoup. Plus précisément, la dimension de E_q^0 est $\binom{\mathrm{N}q-1}{n}$ ce qui est équivalent à $\mathrm{N}^n q^n/n!$ quand $q \to \infty$. En revanche, la dimension de E_q^1 est $O(q^\nu)$, où ν est la dimension du lieu singulier de l'hypersurface projective $\mathrm{V}(f)$. Il est donc naturel d'essayer d'améliorer le calcul des W_q^r en réutilisant autant que possible la réduction de Griffiths-Dwork.

On définit

§9.1
$$\begin{cases} \dot{\mathrm{W}}_q^1 \overset{\text{déf}}{=} [\mathrm{d}(\mathcal{S}_{q-1})]_1 \\ \dot{\mathrm{W}}_q^{r+1} \overset{\text{déf}}{=} \dot{\mathrm{W}}_q^1 + \dot{\mathrm{W}}_{q+1}^r \cap \mathrm{F}_q\mathrm{T}^{n+1}. \end{cases}$$

Rappelons que $\mathcal{S}_{q-1}$ est le sous-espace de T_{q-1}^n des n-formes β telles que $\mathrm{d}f \wedge \beta$ est nul. La dimension de $\dot{\mathrm{W}}_q^r$ est plus petite que celle de W_q^1, donc le cout de l'algèbre linéaire pour calculer le premier est moindre que pour calculer le second, au détriment du temps passé à calculer la réduction $[\,]_1$.

§9.2 *Lemme.* — $\dot{\mathrm{W}}_q^r = \left[\mathrm{W}_q^r\right]_1$, *pour tout* $r \geqslant 1$ *et tout* $q \geqslant 0$.

Démonstration. Par récurrence sur r. Pour $r = 1$, comme $\mathrm{d}\mathcal{S}_{q-1}$ est inclus dans W_q^r, l'inclusion de $\dot{\mathrm{W}}_q^r$ dans $[\mathrm{W}_q^r]_1$ est claire. Réciproquement, soit α dans W_q^r, c'est-à-dire α égale $\mathrm{D}_f\beta$ pour un certain β dans T_{q-1}^n. Alors $[\alpha]_1$ égale $[\mathrm{d}\beta]_1 - [\mathrm{d}f \wedge \beta]_1$. Or $[\mathrm{d}f \wedge \beta]_1$ égale $[\mathrm{d}(\beta + \beta')]$ pour une syzygie β, par le lemme I §18.3. Ainsi $[\alpha]_1$ égale $[\mathrm{d}(\beta')]_1$. Ceci prouve que $[\alpha]_1$ est dans $\dot{\mathrm{W}}_q^1$.

Hérédité. Montrons que $\dot{\mathrm{W}}_q^{r+1} \subset \left[\mathrm{W}_q^{r+1}\right]_1$. Par ce qui précède,

$$\dot{\mathrm{W}}_q^1 = \left[\mathrm{W}_q^1\right]_1 \subset \left[\mathrm{W}_q^{r+1}\right]_1.$$

Soit donc α dans $\dot{\mathrm{W}}_{q+1}^r \cap \mathrm{F}_q\mathrm{T}^{n+1}$. Par hypothèse de récurrence α s'écrit $[\alpha']_1$ pour un α' dans W_{q+1}^r. Il existe une n-forme β de poids au plus q tel que $[\alpha']_1$ égale $\alpha' + \mathrm{D}_f\beta$. Comme $[\alpha']_1$ est de poids au plus q, $\alpha' + \mathrm{D}_f\beta_q$ aussi. Or $\mathrm{D}_f\beta_q$ est dans W_{q+1}^1 et donc dans W_{q+1}^r. Par suite $\alpha' + \mathrm{D}_f\beta_q$ est dans l'intersection $\mathrm{W}_{q+1}^r \cap \mathrm{F}_q\mathrm{T}^{n+1}$, et la décomposition

$$\alpha = [\alpha' + \mathrm{D}_f\beta_q]_1 - [\mathrm{D}_f\beta_q]_1$$

montre que α est dans $\left[\mathrm{W}_q^{r+1}\right]_1$.

Réciproquement,

$$\left[\mathrm{W}_q^{r+1}\right]_1 = \left[\mathrm{W}_q^1\right]_1 + \left[\mathrm{W}_q^{r+1} \cap \mathrm{F}_q\mathrm{T}^{n+1}\right]_1 \subset \left[\mathrm{W}_q^1\right]_1 + \left[\mathrm{W}_q^{r+1}\right]_1 \cap \mathrm{F}_q\mathrm{T}^{n+1} = \dot{\mathrm{W}}_q^{r+1},$$

ce qui conclut la preuve. □

§10 SYZYGIES TRIVIALES. — Les syzygies triviales n'apportent aucune nouvelle

relation. On peut les ignorer sans conséquence. Soit A_q un supplémentaire de $\mathcal{S}'_q$ dans $\mathcal{S}_q$. C'est-à-dire que A_q est un certain espace de syzygies non triviales, distinguées d'une manière ou d'une autre, qui engendre le quotient $\mathcal{S}_q/\mathcal{S}'_q$. On définit alors

§10.1
$$\begin{cases} \ddot{\mathrm{W}}^1_q \overset{\text{déf}}{=} [\mathrm{d}(\mathrm{A}_{q-1})]_1 \\ \ddot{\mathrm{W}}^{r+1}_q \overset{\text{déf}}{=} \ddot{\mathrm{W}}^1_q + \ddot{\mathrm{W}}^r_{q+1} \cap \mathrm{F}_q\mathrm{T}^{n+1}. \end{cases}$$

Notez la différence avec la définition de W^r_q, équation §9.1. La dimension de $\ddot{\mathrm{W}}^1_q$ est moindre que la dimension de $\dot{\mathrm{W}}^1_q$, le gain dans les opérations d'algèbre linéaire est encore amplifié, au prix du calcul de l'espace A_{q-1}.

§10.2 *Proposition.* — $\ddot{\mathrm{W}}^r_q + [\mathrm{d}\mathcal{S}'_{q-1}]_1 = \dot{\mathrm{W}}^r_q$, *pour tout* $r \geqslant 1$ *et tout* $q \geqslant 0$.

Démonstration. Montrons d'abord que $[\mathrm{d}\mathcal{S}'_q]_1 \subset [\mathrm{d}\mathcal{S}_{q-1}]_1$, pour tout q. Soit $\beta \in \mathcal{S}'_q$, c'est-à-dire que β égale $\mathrm{d}f \wedge \gamma$ pour un $\gamma \in \mathrm{T}^{n-1}_{q-1}$. D'après le lemme I §18.3, on a alors

$$[\beta] = \left[\mathrm{d}\left(\mathrm{d}\gamma + \beta'\right)\right]_1 = [\mathrm{d}\beta']_1,$$

pour une syzygie $\beta' \in \mathcal{S}_{q-1}$, ce que l'on voulait.

Montrons le lemme par récurrence sur r. Pour $r = 1$, c'est simplement la décomposition de $\mathcal{S}_{q-1}$ en $\mathrm{A}_{q-1} + \mathcal{S}'_{q-1}$. Hérédité :

$$\begin{aligned} \dot{\mathrm{W}}^{r+1}_q &= \dot{\mathrm{W}}^1_q + \dot{\mathrm{W}}^r_{q+1} \cap \mathrm{F}_q\mathrm{T}^{n+1} && \text{par définition} \\ &= [\mathrm{d}\mathcal{S}'_{q-1}]_1 + \ddot{\mathrm{W}}^1_q + \ddot{\mathrm{W}}^r_{q+1} \cap \mathrm{F}_q\mathrm{T}^{n+1} + [\mathrm{d}\mathcal{S}'_q]_1 && \text{par récurrence.} \end{aligned}$$

Or $[\mathrm{d}\mathcal{S}'_q]_1$ est inclus dans $[\mathrm{d}\mathcal{S}_{q-1}]_1$, qui lui-même se décompose en $[\mathrm{dA}_{q-1}]_1 + [\mathrm{d}\mathcal{S}'_{q-1}]_1$. Le premier terme égale $\ddot{\mathrm{W}}^1_q$. Donc $\dot{\mathrm{W}}^{r+1}_q$ égale $[\mathrm{d}\mathcal{S}'_{q-1}]_1 + \ddot{\mathrm{W}}^{r+1}_q$. □

§10.3 *Exemple.* — Continuant l'exemple §8.5, le tableau 2 illustre le gain obtenu en ignorant les syzygies triviales. Calculer $\dot{\mathrm{W}}^2_q$ nécessite le calcul de réductions $[\,]_1$ puis de l'algèbre linéaire sur $\dim \mathcal{S}_q$ vecteurs différents. En comparaison, le calcul de $\ddot{\mathrm{W}}^2_q$ implique seulement $\dim \mathcal{S}_q/\mathcal{S}'_q$ vecteurs. Le cout du calcul de A_q est négligeable en pratique comparé au cout du calcul des réductions de Griffiths-Dwork et de l'algèbre linéaire.

Ce nombre $\dim \mathcal{S}_q/\mathcal{S}'_q$ est à comparer avec la différence $\dim \mathrm{E}^1_q - \dim \mathrm{E}^2_q$ comptant le nombre de nouvelles relations qui ont été obtenues avec les syzygies. On peut montrer qu'on vérifie toujours les comportements asymptotiques suivants pour $q \to \infty$:

$$\dim \mathcal{S}_q \sim (n+1)\mathrm{N}^n q^n/n! \quad \text{et} \quad \dim \mathcal{S}_q/\mathcal{S}'_q = O(q^\nu).$$

q	0	1	2	3	4	$q > 4$
$\dim \mathcal{S}_q$	0	21	522	2429	6604	$\sim 144q^3$
$\dim \mathcal{S}_q/\mathcal{S}'_q$	0	1	92	132	168	$36q + 24$
$\dim \mathrm{E}^1_q - \dim \mathrm{E}^2_q$	0	0	79	96	114	$18q + 42$

Tableau 2. Nombre de syzygies, de syzygies non triviales et de nouvelles relations obtenues par elles.

§10.4 *Proposition. — Soit α une $(n+1)$-forme de poids q. Sont équivalents :*
(i) il existe une forme α' de poids $q-1$ telle que α égale α' modulo $\mathrm{D}_f(\mathrm{F}_{q+r-2}\mathrm{T}^n)$;
(ii) $[\alpha]_1 \equiv 0 \mod \ddot{\mathrm{W}}^r_q + \mathrm{F}_{q-1}\mathrm{T}^{n+1}$.

§11 ALGORITHME DE RÉDUCTION. — La construction de $\ddot{\mathrm{W}}^r_q$ permet de définir la réduction d'ordre r, notée $[\,]_r$, pour $r > 1$. Soient α une $(n+1)$-forme de poids q et ρ la réduction $[\alpha]_1$. Soit ρ' le plus petit élément de T^{n+1} — pour l'ordre $\prec$ défini au §19 — tel que $\rho_q \equiv \rho'$ modulo $\ddot{\mathrm{W}}^r_q$. En pratique c'est simplement de l'élimination gaussienne : on dispose d'une base échelonnée de $\ddot{\mathrm{W}}^r_q$ et on élimine par combinaison linéaire les monômes de ρ_q qui sont des monômes de tête des éléments de la base.

On définit alors, par récurrence sur q,

$$[\alpha]_r \overset{\text{déf}}{=} \rho'_q + [(\rho' - \rho'_q) + (\rho - \rho_q)]_r.$$

On vérifie sans mal que la réduction $[\,]_r$ est idempotente. On vérifie aussi que $[\alpha]_{r+1}$ égale $[[\alpha]_r]_{r+1}$. La propriété essentielle est

§11.1 *Proposition. —* $[\alpha]_r \equiv \alpha \pmod{\mathrm{D}_f(\mathrm{T}^n)}$, *pour tout* $\alpha \in \mathrm{T}^{n+1}$.

Démonstration. Par récurrence sur le poids de α, on peut supposer que

$$[(\rho' - \rho'_q) + (\rho - \rho_q)]_r \equiv (\rho' - \rho'_q) + (\rho - \rho_q) \mod \mathrm{D}_f(\mathrm{T}^n).$$

De plus $\rho_q \equiv \rho' \pmod{\mathrm{D}_f(\mathrm{T}^n)}$ car $\ddot{\mathrm{W}}^r_q$ est inclus dans $\mathrm{D}_f(\mathrm{T}^n)$, et $[\alpha]_1 \equiv \rho$, par la proposition I §18.4. Et finalement

$$[\alpha]_r \equiv \rho' + (\rho - \rho_q) \equiv \rho \equiv \alpha \mod \mathrm{D}_f(\mathrm{T}^n). \qquad \square$$

En étant un peu plus précis, on calcule que $[\alpha]_r \equiv \alpha$ modulo $\mathrm{D}_f(\mathrm{F}_{q+r-2}\mathrm{T}^n)$.

§11.2 *Théorème. — Pour tout $r \geqslant 1$, $q \geqslant 0$ et $\alpha \in \mathrm{F}_q\mathrm{T}^{n+1}$, la réduction $[\alpha]_r$ est de poids strictement inférieur à q si et seulement si α est dans* $\mathrm{D}_f\left(\mathrm{F}_{q+r-2}\mathrm{T}^{n+1}\right) + \mathrm{F}_{q-1}\mathrm{T}^{n+1}$.

Algorithme 6 Calcul de $[\,]_r$

Entrée — $r \geqslant 1$ et $q \geqslant 0$ des entiers
Sortie — une base de $\ddot{\mathrm{W}}^r_q$, tel que défini au §10
procédure BasisW(r, q)
  si $r = 1$
    renvoyer $\left\{[\mathrm{d}\beta]_1 \;\middle|\; \beta \in (\text{une base de } \mathrm{Syz}_{q-1}/\mathrm{Syz}'_{q-1})\right\}$
  sinon
    $\mathrm{U} \leftarrow$ BasisW$(1, q)$
    $\mathrm{W} \leftarrow$ BasisW$(r-1, q+1)$
    renvoyer Echelon$(\mathrm{U} \cup \{\alpha \in \mathrm{W} \mid \deg\alpha = q\mathrm{N}\})$

Entrée — $\alpha \in \mathrm{T}^{n+1}$, $r \geqslant 1$ un entier
Sortie — $[\alpha]_r$ tel que défini au §11
procédure Réduction(α, r)
  $q \leftarrow \deg\alpha/\mathrm{N}$ $\rho \leftarrow [\alpha]_1$
  $\rho' \leftarrow$ Rem$(\rho_q$, BasisW$(r, q))$
  renvoyer $\rho'_q +$ Réduction$(\rho' - \rho'_q + \rho - \rho_q, r)$

Démonstration. C'est un corollaire immédiat de ce qui précède pour l'implication directe, et de la proposition §10.4 pour l'application réciproque. En effet, si α est dans $\mathrm{D}_f\left(\mathrm{F}_{q+r-2}\mathrm{T}^{n+1}\right) + \mathrm{F}_q\mathrm{T}^{n+1}$, alors $[\alpha]_1$ est dans $\ddot{\mathrm{W}}^r_q + \mathrm{F}_{q-1}\mathrm{T}^{n+1}$, par la proposition §10.4. Par conséquent, la forme ρ' est dans $\mathrm{F}_{q-1}\mathrm{T}^{n+1}$, et finalement $[\alpha]_r$ est dans $\mathrm{F}_{q-1}\mathrm{T}^{n+1}$. □

§11.3 *Corollaire.* — *Pour tout $r \geqslant 1$, le noyau de la réduction est inclus dans $\mathrm{D}_f\mathrm{T}^n$. De plus, pour tout $\beta \in \mathrm{F}_q\mathrm{T}^n$ alors $[\mathrm{D}_f\beta]_{q+1} = 0$. En particulier*

$$\bigcup_{r\geqslant 1} \ker[\,]_r = \mathrm{D}_f\mathrm{T}^n.$$

Démonstration. Soit s le poids de $\mathrm{D}_f\beta$, qu'on peut supposer strictement positif. Tautologiquement, $\mathrm{D}_f\beta$ est dans $\mathrm{D}_f(\mathrm{F}_{s+(q-s+2)-2}\mathrm{T}^n)$. Donc $[\mathrm{D}_f\beta]_{q-s+2}$ est de poids au plus $s-1$, par le théorème §11.2. Et par ce qui précède, $[\mathrm{D}_f\beta]_{q-s+2}$ est encore dans $\mathrm{D}_f(\mathrm{F}_q\mathrm{T}^n)$. Par récurrence sur s, on peut supposer que $[[\mathrm{D}_f\beta]_{q-s+2}]_{q+1}$ est nul. Or $[[\mathrm{D}_f\beta]_{q-s+2}]_{q+1}$ égale $[\mathrm{D}_f\beta]_{q+1}$ car $q - s + 2 \leqslant q + 1$. □

La procédure pour calculer $[\,]_r$ est récapitulée par l'algorithme 6. Le pseudo-code utilise deux primitives d'algèbre linéaire : Echelon(U) qui prend en argument un ensemble fini U d'éléments de T^{n+1} et renvoie une base échelonnée de l'espace engendré par U ; et Rem(α, U) qui prend en argument un $\alpha \in \mathrm{T}^{n+1}$ et un ensemble

fini U d'éléments de T^{n+1} et renvoie un élément de T^{n+1} congru à α modulo Vect U et dont aucun monôme n'est le monôme de tête d'un élément de U (cet élément est unique si U est une base échelonnée du sous-espace qu'il engendre).

§12 THÉORÈMES DE DIMCA. — Les réductions $[\,]_r$ ne répondent pas au problème de décider si une forme $\alpha \in \mathrm{T}^{n+1}$ est ou non dans $\mathrm{D}_f(\mathrm{T}^n)$, car quand bien même $[\alpha]_{100}$ ne serait pas nul, il se peut que $[\alpha]_{101}$ le soit. Les théorèmes de Dimca, voir §7, permettent d'aller plus loin que cette simple observation. Dans le cadre exponentiel, le premier théorème se reformule ainsi :

§12.1 *Théorème (Dimca). — Il existe un entier r, qui ne dépend que de f, tel que pour tout entier q*

$$\mathrm{D}_f(\mathrm{T}^n) \cap \mathrm{F}_q\mathrm{T}^{n+1} = \mathrm{D}_f(\mathrm{F}_{q+r-2}\mathrm{T}^n) \cap \mathrm{F}_q\mathrm{T}^{n+1}.$$

Notons r_f le plus petit entier qui convienne. Grâce au théorème §11.2, on conclut que

§12.2 *Corollaire. — $[\mathrm{D}_f\beta]_{r_f} = 0$ pour tout β dans T^n.*

La valeur explicite de r_f n'est pas facile à calculer : dans la preuve de Dimca une borne est donnée en termes d'une résolution des singularités de la variété $\mathrm{V}(f)$. Et la borne obtenue par cette construction n'est pas nécessairement précise. Dimca [5] a conjecturé que

§12.3 *Conjecture (Dimca). — $r_f \leqslant n + 1$.*

§12.4 *Exemple. —* Pour le polynôme f de l'exemple §8.5 il semblerait que r_f vaille 3.

Quant au second théorème de Dimca, il se reformule ainsi :

§12.5 *Théorème. — $\mathrm{D}_f(\mathrm{T}^n) + \mathrm{F}_n\mathrm{T}^{n+1} = \mathrm{T}^{n+1}$.*

Et en combinant tout cela :

§12.6 *Corollaire. — Pour tout forme α dans T^{n+1} la réduction $[\alpha]_{r_f}$ est de poids au plus n. Elle est nulle si et seulement si α est dans $\mathrm{D}_f(\mathrm{T}^n)$.*

Pour autant que je sache, les calculs sur des exemples explicites confirment la conjecture de Dimca. De plus, la borne $r_f \leqslant n+1$ est optimale quand n est 2, comme le montre l'exemple au §3. Une preuve aurait des conséquences remarquables : l'algorithme de réduction s'étend sans problème au calcul de toute l'homologie de T, qui est isomorphe à la cohomologie de Rham du complémentaire dans $\mathbb{P}^n$ de $\mathrm{V}(f)$. Seule la borne $r_f \leqslant n + 1$ manque pour obtenir un algorithme complet.

5. Dimca, « On the de Rham cohomology of a hypersurface complement ».

§13 ALGORITHME POUR LES PÉRIODES À PARAMÈTRE. — Même sans preuve de la conjecture §12.3 on peut utiliser les réductions $[\,]_r$ pour calculer un opérateur annulant une période à paramètre. L'absence de borne réellement effective sur r_f est un obstacle au calcul de l'équation minimale mais nous allons voir que le corollaire §12.6 est un substitut suffisant pour le calcul d'un opérateur non minimal.

Soit δ une dérivation sur le corps $\mathbb{K}$, qu'on étend à T^{n+1} comme au §23, chapitre I. Soit a/f^q une fraction rationnelle $\mathbb{K}(x_{0\smile n})$ homogène de degré $-n-1$. On cherche donc à calculer un opérateur $\mathcal{L} \in \mathbb{K}\langle\delta\rangle$ tel que $\mathcal{L}\,(a\omega) = \mathrm{D}_f\beta$, pour un certain β dans T^n.

Rappelons que dans le cas où f est régulier, nous définissions ρ_0 par $[a\omega]_1$ et $\rho_{k+1} = [\delta\cdot\rho_k]_1$ puis calculions une relation de liaison entre les ρ_k, ce qui donnait l'opérateur cherché $\mathcal{L}$. Dans le cas singulier, il suffit de remplacer $[\,]_1$ par $[\,]_r$ pour un r bien choisi. Avec une difficulté supplémentaire : comment choisir r sans connaitre r_f ? Pour tout r, nous avons l'alternative suivante : ou bien tous les ρ_k sont de poids au plus n, auquel cas ils sont confinés en dimension finie et ils finiront par être linéairement dépendants ; ou bien l'un des ρ_k est de poids strictement supérieur à n. Le second cas ne peut se produire que si $r < r_f$, par le corollaire §12.6.

Ainsi, si on fixe r et que la seconde alternative se présente, il suffit d'augmenter r et de recommencer. La seconde alternative ne peut se produire qu'un nombre fini de fois : tant que $r < r_f$. Malheureusement, la minimalité de l'opérateur calculé n'est pas assurée car il se peut qu'une équation de liaison soit trouvée alors même que $r < r_f$. L'algorithme 7 détaille la procédure. Si la conjecture §12.3 était prouvée il suffirait de poser $r = n + 1$ pour avoir l'opérateur minimal. Cela donne de bons résultats en pratique mais l'absence de preuve est gênante.

§13.1 *Théorème. — L'algorithme 7 termine et renvoie un opérateur annulant les périodes de* $\int \mathrm{R}$.

2 Mise en œuvre

L'algorithme 7 a été mis en œuvre au sein du système Magma, [6] sur le corps $\mathbb{Q}(t)$ muni de la dérivation usuelle. [7] Pour pouvoir s'attaquer à des problèmes de taille importante — tels que ceux présentés au §21 — l'explosion des coefficients (qui sont des éléments de $\mathbb{Q}(t)$) dans les calculs intermédiaires rend nécessaire une approche

6. Bosma, Cannon et Playoust, « The Magma algebra system. I. The user language ».
7. Le code est disponible sur `http://github.com/lairez/periods`.

Algorithme 7 Calcul d'un opérateur annulant les périodes d'une fraction rationnelle

Entrée — a/f^q une fraction homogène de $\mathbb{K}(x_{0\smile n})$ de degré $-n-1$
Sortie — $\mathcal{L} \in \mathbb{K}\langle\delta\rangle$ un opérateur annulant $\oint \mathrm{R}$
procédure AnnulateurPériodes(a/f^q)
  pour r de 1 à ∞
    $\rho_0 \leftarrow [a\,\omega]_r$
    pour m de 0 à ∞ tant que $\deg \rho_m \leqslant n \deg f$
      si $\operatorname{rank}_{\mathbb{K}}(\rho_0, \dots, \rho_m) = m+1$
        $\rho_{m+1} \leftarrow [\rho_m^\delta - f^\delta \rho_m]_r$
      sinon
        résoudre $\sum_{k=0}^{m-1} a_k \rho_k = \rho_m$ par rapport aux $a_{0\smile m-1}$ dans $\mathbb{K}$
        renvoyer $\delta^m - \sum_{k=0}^{m-1} a_k \delta$

par évaluation-interpolation. On remplace ainsi un calcul important sur $\mathbb{Q}(t)$ par de nombreux calculs plus petits sur des corps finis. On réassemble ensuite les multiples résultats en un résultat sur $\mathbb{Q}(t)$. Cependant, nous ne disposons pas de bornes *a priori* assez précises sur la taille de l'opérateur à calculer — ordre, degré, taille des coefficients. L'étape de reconstruction ne peut être certifiée correcte, mais la probabilité d'erreur peut être rendue arbitrairement petite. Notons aussi qu'il existe de nombreux moyens heuristiques pour vérifier qu'un opérateur calculé est effectivement correct — voir §22.

§14 IMPLÉMENTATION AVEC DES BASES DE GRÖBNER. — Soit M le module $\Omega^{n+1} + \Omega^n$, c'est un module libre sur A engendré par ω et les ξ_i. Un moyen pratique d'implémenter les réductions $[\,]_r$ utilise une base de Gröbner réduite,[8] notons-la G, du sous-module p de M engendré par les éléments $\partial_i f\omega - \xi_i$, c'est-à-dire $\mathrm{d}f \wedge \xi_i - \xi_i$. On choisit sur M un ordre monomial, noté $\succ$, tel que pour tout multi-indice I et J, et tout entier j,

§14.1 $$|\mathrm{I}| + 1 \geqslant |\mathrm{J}| + \mathrm{N} \Longrightarrow x^{\mathrm{I}}\omega \succ x^{\mathrm{J}}\xi_j.$$

Tout ordre du type position-avant-terme[9] avec $\omega \succ \xi_0 \succ \xi_1 \succ \cdots$ convient. Un ordre du type terme-avant-position[10] avec $\omega \succ \xi_0 \succ \xi_1 \succ \cdots$, qui étend un ordre gradué convient aussi. Cela autorise de la flexibilité dans l'implémentation de l'algorithme. Notons $\mathrm{rem}_{\mathrm{G}}$ le reste de la division par G. La condition §14.1 sur

8. Voir Cox, Little et O'Shea, *Using algebraic geometry*, chap. 5, pour les détails sur les bases de Gröbner de modules, l'algorithme de division, les ordres monomiaux, etc.

9. *Position-over-term (POT)* en anglais. On choisit un ordre sur A et une base ordonnée $u_{1\smile m}$ du module libre, et on définit $x^{\mathrm{I}}u_i \prec x^{\mathrm{J}}u_j$ si $i < j$ ou si $i = j$ et $x^{\mathrm{I}} \prec x^{\mathrm{J}}$.

10. *Term-over-position (TOP)* en anglais. On définit $x^{\mathrm{I}}u_i \prec x^{\mathrm{J}}u_j$ si $x^{\mathrm{I}} \prec x^{\mathrm{J}}$ ou $x^{\mathrm{I}} = x^{\mathrm{J}}$ et $i < j$.

l'ordre $\succ$ est suffisante pour assurer que cet ordre se comporte comme un ordre éliminant ω.

En effet, si on donne à ω le degré 1 et à chaque ξ_i le degré N, alors P est un sous-module homogène de M. Ainsi, toute base de Gröbner réduite de P ne contient que des éléments homogènes, quel que soit l'ordre monomial, et le reste de la division par G d'un élément homogène de degré d est encore homogène de degré d.

§14.2 *Lemme. — Soit α un élément de Ω^{n+1}. Le coefficient de ω dans $\mathrm{rem}_G\,\alpha$ est nul si et seulement si α est dans $\mathrm{d}f \wedge \Omega^n$. Dans ce cas $\alpha = \mathrm{d}f \wedge \mathrm{rem}_G\,\alpha$.*

Démonstration. Par définition de G, il existe des polynômes $c_{0\smile n}$ tels que

$$\alpha = \mathrm{rem}_G(a\omega) + \sum_{i=0}^{n} c_i(\mathrm{d}f \wedge \xi_i - \xi_i).$$

Si le coefficient de ω dans $\mathrm{rem}_G(\alpha)$ est nul, alors $\mathrm{rem}_G(\alpha)$ est dans Ω^n. L'identification des coefficients donne alors

$$\alpha = \mathrm{d}f \wedge \sum_{i=0}^{n} c_i\xi_i = \left(\sum_{i=0}^{n} c_i\partial_i f\right)\omega \quad \text{et} \quad \mathrm{rem}_G(\alpha) = \sum_{i=0}^{n} c_i\xi_i.$$

Réciproquement, supposons que α égale $\mathrm{d}f \wedge \beta$ pour une certaine n-forme β. On peut supposer que α est homogène de degré d et que β est homogène de degré $d-\mathrm{N}$. La forme $\alpha - \beta$ est dans P et $\mathrm{rem}_G(\alpha-\beta)$ est nul, comme G est une base de Gröbner de P. Et par linéarité $\mathrm{rem}_G(\alpha)$ égale $\mathrm{rem}_G(\beta)$.

Pour la graduation définie ci-dessus, les formes α et β sont homogènes de degré $d-n$, donc $\mathrm{rem}_G(\beta)$ aussi. De plus, le monôme de tête de $\mathrm{rem}_G(\beta)$ n'est pas plus grand que le monôme de tête de β, qui est de la forme $x^{\mathrm{I}}\xi_i$ avec $|\mathrm{I}| = d-\mathrm{N}-n$. Le lemme suit car aucun des monômes de la forme $x^{\mathrm{J}}\omega$ de degré $d-n$ (pour la graduation alternative) n'est plus petit que $x^{\mathrm{I}}\xi_i$, grâce à l'hypothèse §14.1, et donc le coefficient de ω dans $\mathrm{rem}_G(\alpha)$ est nul. □

De la même manière, on prouve que

§14.3 *Lemme. — L'intersection de $\mathrm{G} \cap \Omega^n$ est une base de Gröbner de* Syz.

Une base du quotient $\mathcal{S}_q/\mathcal{S}'_q$ peut être calculée à l'aide de cette base de Gröbner et d'une base de Gröbner de Syz′ de la manière suivante. On calcule l'ensemble

$$\mathrm{S} \overset{\text{déf}}{=} \left\{\mathrm{mt}(\alpha) \;\middle|\; \alpha \in \mathrm{Syz}_{q\mathrm{N}}\right\} \setminus \left\{\mathrm{mt}(\alpha) \;\middle|\; \alpha \in \mathrm{Syz}'_{q\mathrm{N}}\right\},$$

où $\mathrm{mt}(\alpha)$ désigne le monôme de tête d'α. Ensuite, pour chaque α dans S, on choisit un et un seul élément de $\mathrm{Syz}_{q\mathrm{N}}$ dont le monôme de tête est α. Ces éléments forment une base de $\mathcal{S}_q/\mathcal{S}'_q$.

Les bases de Gröbner dans le module M peuvent être *émulées* par des bases de Gröbner dans l'anneau de polynômes A augmenté de deux variables, disons u et v. Soit A′ l'anneau $\mathrm{A}[u,v]$. Notons ω' le monôme u^{n+1} et ξ'_i le monôme $u^{n-i}v^{i+1}$. Soit M′ le A-sous-module de A′ engendré par ω' et les ξ'_i. Soit P′ l'idéal de A′ engendré par les $\partial_i f\omega' - \xi'_i$ et tous les monômes $u^p v^q$, avec $p+q = n+2$. Soit φ l'application A-linéaire de M′ dans M qui envoie ω' sur ω et ξ'_i sur ξ_i. Enfin, soit G′ une base de Gröbner par rapport à n'importe quel ordre monomial gradué tel que $u \succ v \succ x_0 \succ \cdots \succ x_n$. Prenons par exemple l'ordre gradué lexicographique inverse.

Si l'ordre monomial $\succ$ sur M est l'ordre TOP proposé ci-dessus, alors

$$\varphi(\mathrm{rem}_{\mathrm{G}'}\,\alpha) = \mathrm{rem}_{\mathrm{G}}\,\varphi(\alpha).$$

§15 PRINCIPE DE L'ÉVALUATION-INTERPOLATION. — Soit $h(t)$ un élément de $\mathbb{Q}(t)$ qu'on écrit comme p/q, avec q un polynôme unitaire. Soit d le plus grand de $\deg p$ et $\deg q$, et soit M le maximum des valeurs absolues des numérateurs et dénominateurs des coefficients de p et q. Étant donnés des nombres premiers $p_{1\smile n}$ distincts, des nombres rationnels $u_{1\smile n}$ distincts et les évaluations

$$a_{ij} \equiv h(u_i) \mod p_j,$$

la fraction h peut être recouvrée si aucun p_i ne divise le dénominateur de l'un des coefficients de q, si aucun u_j n'annule q, si $\prod_{i=1}^{m} p_i > 2\mathrm{M}$ et si $m > 2d$. Il suffit en effet de calculer les a_i dans $\mathbb{F}_{p_i}(t)$ tels que $a_i \equiv h \pmod{p_i}$, grâce à une interpolation de Cauchy [11] ; ensuite, par le théorème des restes chinois, on calcule $\mathrm{A}(t)$ tel que $\mathrm{A} \equiv h \pmod{\prod_i p_i}$; enfin, en appliquant la reconstruction rationnelle [12] à chacun des coefficients de A, on retrouve h. Sans bornes *a priori* sur h, il est tout de même possible d'appliquer cette méthode. Supposons qu'on obtienne un résultat h', et notons M′ et d' les analogues de M et d pour h'. Sous des hypothèses d'indépendance, plus $\prod_{i=1}^{m} p_i - 2\mathrm{M}'$ et $m - 2d'$ sont grands, plus la probabilité que $h' = h$ est grande.

Tout algorithme qui prend en entrée des éléments de $\mathbb{Q}(t)$, qui renvoie des éléments de $\mathbb{Q}(t)$ et qui n'effectue que des opérations de corps — addition, multiplication, soustraction, test à zéro, inversion — dans $\mathbb{Q}(t)$ peut être transformé en

11. Gathen et Gerhard, *Modern computer algebra*, §5.8.
12. Ibid., §5.10.

un algorithme par évaluation-interpolation, simplement en évaluant les entrées en un point $t = u$, dans un corps fini $\mathbb{F}_p$, pour de nombreuses valeurs de u et de p, et en exécutant l'algorithme sur $\mathbb{F}_p$. En effet, les opérations que l'algorithme effectue commutent avec l'évaluation dans $\mathbb{F}_p$, à l'exception du test à zéro. Mais les valeurs de u et de p qui annulent un élément donné de $\mathbb{Q}(t)$ sont exceptionnelles. En dehors de ces valeurs, le résultat de l'algorithme effectué sur les entrées évaluées est donc le même que l'évaluation du résultat de l'algorithme effectué sur $\mathbb{Q}(t)$. On peut donc appliquer la méthode de reconstruction. Il est bien sûr important de savoir repérer les mauvaises valeurs de p et de u.

Le nombre de points d'évaluation (p, u) peut être choisi *a priori* si on dispose de bornes sur l'objet à reconstruire. Il peut être aussi choisi à la volée : la reconstruction se fait au fur et à mesure, et quand les nouveaux points confirment les reconstructions précédentes, il y a de fortes chances pour qu'elle soit correcte. Avec cette dernière méthode, le nombre de point d'interpolation est directement proportionnel à la taille de l'objet calculé. C'est intéressant quand les bornes *a priori* dont on dispose sont trop pessimistes. Le risque d'erreur n'est pas nul mais peut être rendu arbitrairement petit. Cette approche par évaluation-interpolation est commune en calcul formel pour éviter le problème de la croissance des coefficients dans les calculs intermédiaires.

L'algorithme 7 dépend de la dérivation δ, qui n'est pas une opération de corps. La méthode de l'évaluation-interpolation n'est donc pas applicable telle quelle.

§16 MISE EN ŒUVRE. — Soit u un rationnel et p un nombre premier. Soit ν la fonction partielle $\mathbb{Q}(t) \to \mathbb{F}_p$ qui évalue t en u et réduit le résultat modulo p. On étend la fonction ν coefficient par coefficient à $\mathbb{Q}(t)[x_{0\frown n}]$, à Ω, aux matrices, etc.

Soient f un polynôme dans $\mathbb{Z}[t, x_{0\frown n}]$ et $\nu(f)$ son évaluation dans $\mathbb{F}_p[x_{0\frown n}]$. On peut considérer les fonctions de réduction $[\,]_r$ associées à f mais aussi ces mêmes fonctions associées à $\nu(f)$ sur $\mathbb{F}_p$, notées $[\,]_r^\nu$. Pour un $\alpha \in \mathrm{T}^{n+1}$ donné et des valeurs génériques de u et p, les évaluations $\nu(\alpha)$ et $\nu([\alpha]_r)$ sont définies et on a

$$\nu([\alpha]_r) = [\nu(\alpha)]_r^\nu.$$

Reprenons le paragraphe §13 et l'algorithme 7. Soit $\mathrm{R} = a/f^q$ une fraction rationnelle de $\mathbb{Q}(t)(x_{0\frown n})$, homogène de degré $-n-1$ en les $x_{0\frown n}$. Soit α la forme $a\omega$. Une fois la valeur de r fixée, l'algorithme 7 calcule les termes de la suite définie par $\rho_0 = [\alpha]_r$ et $\rho_{k+1} = [\delta(\rho_k)]_r$ jusqu'à trouver une équation de liaison entre les ρ_k. Étant donnés un premier p et un rationnel u, peut-on calculer $\nu(\rho_i)$ à partir de $\nu(\alpha)$? La réponse est négative à cause de l'utilisation de la dérivation δ qui n'est pas une opération de corps.

On peut contourner cette difficulté en calculant la matrice de l'application linéaire, appelons-la m, telle que

$$\rho_{k+1} = \rho_k^\delta + m(\rho_k),$$

où ρ_k^δ désigne la dérivation coefficient par coefficient. Un telle application existe et sa matrice peut être calculée par évaluation-interpolation.

§17 LA MATRICE DE δ. — Soit J_r l'image $[\mathrm{T}^{n+1}]_r$ de la réduction $[\,]_r$. Par construction, la réduction $[\,]_r$ est idempotente, c'est-à-dire que $[\alpha]_r = \alpha$ pour tout α dans J_r. La méthode par évaluation-interpolation repose sur une propriété particulière de $[\,]_r$:

§17.1 *Proposition. — L'espace J_r est stable par dérivation coefficient par coefficient.*

Idée de la démonstration. Cela découle du fait que J_r est engendré par des monômes. En effet, le calcul de $[\,]_r$ n'est finalement qu'un procédé d'élimination gaussienne. Par suite, si α est dans J_r, alors tous les monômes de α sont dans J_r et donc tous les monômes de α^δ sont dans J_r aussi, et par conséquent α^δ aussi. □

En conséquence $[\tilde{\delta}(\rho)]_r = \delta(\rho) - [\delta(f)\rho]_r$, pour tout $\rho \in \mathrm{J}_r$.

Soit $\mathcal{M}$ le plus petit ensemble de monômes de T^{n+1} tel que Vect $\mathcal{M}$ contienne ρ_0 et soit stabilisé par l'application $m : \rho \mapsto [f^\delta \rho]_r$. Soit A la matrice de $\mathbb{Q}(t)^{\mathcal{M}\times\mathcal{M}}$ de l'application m restreinte à Vect $\mathcal{M}$ dans la base $\mathcal{M}$. Pour des valeurs génériques de p et de u, la base $\mathcal{M}$, la matrice $\nu(\mathrm{A})$ et ρ_0 sont tous calculables à partir de $\nu(f^\delta)$ et de $\nu(\alpha)$ avec des opérations dans $\mathbb{F}_p$. Et une fois que A et ρ_0 sont reconstruits sur $\mathbb{Q}(t)$, les ρ_k sont obtenus facilement par la récurrence $\rho_{k+1} = \rho_k^\delta - m(\rho_k)$, et l'opérateur minimal $\mathcal{L} = \sum_k a_k(t)\delta^i$ tel que $\sum_k a_k(t)\rho_k = 0$ en est déduit.

Il semble intéressant de reconstruire A d'abord sur $\mathbb{F}_p(t)$ et de calculer $\mathcal{L}$ modulo p, et d'utiliser plusieurs modulos pour reconstruire ensuite $\mathcal{L}$ sur $\mathbb{Q}(t)$. La procédure est récapitulée par l'algorithme 8.

§18 ESTIMATION DE LA PROBABILITÉ DE SUCCÈS. — Soient $\mathcal{M}$, ρ_0 et $\mathrm{A} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{M}}\, m$ comme au paragraphe précédent, et calculés sur $\mathbb{Q}(t)$. Pour un certain rationnel u et un certain premier p, soient $\mathcal{M}'$, ρ_0' et A′ les objets analogues calculés sur $\mathbb{F}_p$. Il n'est pas difficile de vérifier que $\nu(\ker[\,]_r)$ égale $\ker[\,]_r^\nu$, où $\nu(\ker[\,]_r)$ est l'espace de tous les $\nu(\alpha)$, avec α dans $\ker[\,]_r$, tels que l'évaluation est bien définie.

§18.1 *Lemme. — Si $\mathcal{M} = \mathcal{M}'$ alors $\mathrm{A}' = \nu(\mathrm{A})$ et $\rho_0' = \nu(\rho_0)$.*

Idée de la démonstration. Le noyau de $\ker[\,]_r^\nu$ est $\nu(\ker[\,]_r)$. Rien ne dégénère si l'ensemble des monômes de tête des éléments de $\nu(\ker[\,]_r)$ et de $\ker[\,]_r$ sont égaux.

Algorithme 8 Calcul d'un opérateur annulant les périodes d'une fraction rationnelle, méthode par évaluation-interpolation non déterministe.

Entrée — $\mathrm{R} = a/f^q$ une fraction rationnelle $\mathbb{Q}(t)(x_{0\frown n})$, homogène de degré $-n-1$
Sortie — $\mathcal{L} \in \mathbb{K}\langle\delta\rangle$ un opérateur annulateur de $\oint \mathrm{R}$, avec haute probabilité
procédure AnnulateurPériodesBis(a/f^q)
boucler
$p \leftarrow$ nombre premier aléatoire
Calculer $\mathcal{M}$, ρ_0 et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{M}}\, m$, comme défini au §17, sur $\mathbb{F}_p(t)$ par différentes évaluations de t puis interpolation rationnelle.
Calculer $\rho_0, \rho_1, \dots$ sur $\mathbb{F}_p(t)$, avec $\rho_{k+1} = \rho_k^\delta - m(\rho_k)$, jusqu'à trouver une équation de liaison $\rho_n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i \rho_i = 0$ sur $\mathbb{F}_p(t)$.
En utilisant le théorème des restes chinois et plusieurs modulos p, essayer de reconstruire les a_i dans $\mathbb{Q}(t)$.
si succès
renvoyer la reconstruction.

Or le complémentaire de ces ensembles (dans l'ensemble des monômes de T^{n+1}) sont $\mathcal{M}'$ et $\mathcal{M}$ respectivement. Donc si $\mathcal{M} = \mathcal{M}'$, alors $\nu([\alpha]_r) = [\nu(\alpha)]_r^\nu$ pour tout α dans T^{n+1}. Comme le calcul de A et ρ_0 n'utilise que $[\,]_r$, on conclut facilement. □

Soit P la probabilité que $\mathcal{M}' = \mathcal{M}$. Supposons, pour simplifier que α est dans $\mathrm{F}_n\mathrm{T}^{n+1}$ et que J_r est inclus dans $\mathrm{F}_n\mathrm{T}^{n+1}$. Soit V le sous-espace $\ker[\,]_r \cap \mathrm{F}_{n+1}\mathrm{T}^{n+1}$ et soit $\mathcal{B}$ une base échelonnée de V formée d'éléments de T^{n+1} à coefficients dans $\mathbb{Z}[t]$. Pour que $\mathcal{M}$ égale $\mathcal{M}'$, il est suffisant que pour tout b dans $\mathcal{B}$, l'évaluation $\nu(\mathrm{ct}\, b)$ du coefficient de tête de b ne soit pas nulle.

Sous l'hypothèse, un peu abusive mais correspondant au pire cas, que pour un premier p et un rationnel u aléatoires les $\nu(\mathrm{ct}(b))$ sont indépendants et uniformément distribués dans $\mathbb{F}_p$, la probabilité P égale $(1-\frac{1}{p})^{\#\mathcal{B}}$. Comme

$$\#\mathcal{B} \leqslant \dim \mathrm{F}_{n+1}\mathrm{T}^{n+1} \leqslant \tfrac{5}{4} e^n \mathrm{N}^n,$$

on obtient que

§18.2
$$\mathrm{P} \geqslant \left(1-\frac{1}{p}\right)^{\frac{5}{4}e^n\mathrm{N}^n} \geqslant \exp\left(-\frac{5e^n\mathrm{N}^n}{2p}\right).$$

On choisira donc p un peu plus grand que $e^n\mathrm{N}^n$.

L'ensemble $\mathcal{M}$ n'est jamais calculé, seul $\mathcal{M}'$ l'est, il n'est donc pas possible de

comparer les deux. Cependant, de nombreux $\mathcal{M}'$ sont calculés, pour des valeurs différentes de p et de u. Typiquement, la plupart vont être égaux entre eux — et probablement égaux à $\mathcal{M}$ — et quelques-uns vont différer. Jetons simplement les (p,u) donnant des $\mathcal{M}'$ différents.

§19 CALCUL DES CERTIFICATS. — Rappelons que si $\mathcal{L} \in \mathbb{Q}(t)\langle\delta\rangle$ est un opérateur annulateur des périodes de $\int a/f$, alors les certificats de $\mathcal{L}$ sont des fractions C_i, dont le dénominateur divise une puissance de f, telles que

$$\mathcal{L}(a/f) = \sum_{i=0}^{n} \partial_i C_i.$$

Il peut parfois sembler souhaitable d'avoir ces certificats car leur existence prouve le fait que $\mathcal{L}$ est un opérateur annulateur, indépendamment de l'algorithme utilisé pour le calculer. Or nous avons vu au chapitre précédent, §2, que les certificats d'un opérateur annulateur donné d'une intégrale rationnelle sont génériquement de taille bien plus importante que l'opérateur lui-même. Le coût de leur calcul est donc nécessairement élevé.

Un compromis est possible : on peut certifier le calcul des réductions ρ_k en donnant des β_k tels que

$$\rho_k = \begin{cases} \alpha + \mathrm{d}f \wedge \beta_0 & \text{si } k = 0 \\ \delta(\rho_{k-1}) + \mathrm{d}f \wedge \beta_k & \text{si } k \geqslant 1. \end{cases} \tag{§19.1}$$

Ainsi, pour vérifier que l'opérateur calculé $\mathcal{L} = \sum_{k=0}^{n} a_k(t)\delta^k$ annule les périodes de $\int a/f$, il suffit de vérifier l'équation §19.1, pour $k \leqslant r$, et de vérifier que $\sum_k a_k \rho_k$ est nul. Ces vérifications impliquent que $\mathcal{L}(\alpha)$ est dans $\mathrm{D}_f(\mathrm{T}^n)$ et donc que $\mathcal{L}$ annule $\oint a/f$. Comme les ρ_k sont de poids au plus n, les β_k sont de poids au plus $n + r$, ce qui assure que leur taille reste raisonnable.

En reprenant les notations du §17, avec un $r \geqslant 1$ donné, il s'agit de calculer la base $\mathcal{M}$, la première réduction ρ_0 et la matrice de l'endomorphisme m de $\mathrm{Vect}\,\mathcal{M}$ défini par $m(\rho) = [f^\delta \rho]_r$, de sorte que $[\delta(\rho)]_r$ égale $\rho^\delta + m(\rho)$, le tout avec quelques informations supplémentaires : un $\beta \in \mathrm{T}^n$ tel que ρ_0 égale $\alpha + \mathrm{d}f \wedge \beta$, et des γ_μ, pour μ dans $\mathcal{M}$, tels que $m(\mu)$ égale $f^\delta \mu + \mathrm{d}f \wedge \gamma_\mu$. Comme ρ_k égale $\rho_{k-1}^\delta + m(\rho_{k-1})$, on peut en déduire une combinaison linéaire β des γ_μ telle que

$$\rho_k = \underbrace{\rho_{k-1}^\delta + f^\delta \rho_{k-1}}_{\delta(\rho_{k-1})} + \mathrm{d}f \wedge \beta.$$

Dans le cas d'une implémentation par évaluation-interpolation, il faut aussi reconstruire ces certificats sur $\mathbb{Q}(t)$.

Ainsi, on ne produit pas de certificat pour l'opérateur $\mathcal{L}$ lui-même mais seulement pour les réductions intermédiaires ρ_k. Les certificats sont beaucoup plus petits et la vérification plus rapide, même si elle est moins directe. On peut pousser le compromis plus loin en s'arrêtant au calcul des certificats pour ρ_0 et l'application m. En effet, tous les calculs qui suivent (calcul de ρ_k et d'une équation de liaison) peuvent être fait de manière déterministe, il n'y a donc pas lieu de douter du résultat.

§20 COMPLEXITÉ. — L'absence de borne *a priori* sur la valeur que peut prendre r dans l'algorithme 7 empêche une analyse de complexité en fonction seulement du nombre de variables et du degré de l'intégrande comme cela a été fait au chapitre précédent. On pourrait essayer de faire une analyse à r fixé. Il semble aussi judicieux de faire intervenir la dimension du lieu singulier de $\mathrm{V}(f)$, en ce qu'elle détermine le nombre des syzygies. Quoiqu'il en soit, je doute qu'on puisse obtenir par l'analyse de l'algorithme 7 une borne de complexité sensiblement meilleure que celle obtenue au chapitre précédent, il semble difficile d'éviter le facteur N^n.

3 Calcul de 210 périodes

§21. — Batyrev et Kreuzer [13] ont construit récemment une famille de 210 variétés de Calabi-Yau lisses, de dimension trois et de nombre de Hodge $h^{1,1}$ égal à un. Leur méthode part de variétés toriques associées à certains polytopes réflexifs. Une famille à un paramètre de variétés est associée à chacune de ces variétés, c'est la famille miroir. Ils regardent plus particulièrement une période distinguée définie sur cette famille à paramètre et cherchent à calculer l'équation de Picard-Fuchs. Ce calcul est la première étape vers le calcul d'invariants géométriques, comme les nombres *instantons*, l'application miroir, etc. [14] Les 210 variétés se rangent à difféomorphisme près en 68 topologies différentes. [15] Les périodes principales associées à des variétés difféomorphes ne coïncident pas nécessairement, mais typiquement elle diffèreront par un changement de variables rationnel.

13. Batyrev et Kreuzer, « Constructing new Calabi-Yau 3-folds and their mirrors via conifold transitions ».

14. Voir Batyrev et Straten, « Generalized hypergeometric functions and rational curves on Calabi-Yau complete intersections in toric varieties » ; Cox et S. Katz, *Mirror symmetry and algebraic geometry*, pour une introduction à ce domaine.

15. Batyrev et Kreuzer, « Constructing new Calabi-Yau 3-folds and their mirrors via conifold transitions », tableau 3.

En termes concrets, on se donne un polynôme de Laurent $g(x_{1\smile 4})$ et on cherche à calculer l'équation différentielle vérifiée par

§21.1
$$\mathrm{F}(t) \overset{\text{déf}}{=} \oint_{\gamma} \frac{1}{1 - tg(x_{1\smile 4})} \frac{\mathrm{d}x_1}{x_1} \frac{\mathrm{d}x_2}{x_2} \frac{\mathrm{d}x_3}{x_3} \frac{\mathrm{d}x_4}{x_4},$$

où le cycle γ est le tore $|x_i| = \varepsilon$ pour un ε assez petit. Plus particulièrement, le polynôme de Laurent g est de la forme $\sum_v x^v$, où la somme court sur les sommets d'un polytope réflexif. Pour chacun des 210 polytopes considérés, Batyrev et Kreuzer affirment que $\mathrm{F}(t)$ satisfait une équation différentielle d'ordre 4, comme conséquence directe du fait que $h^{1,1}$ est 1. De plus, cette équation devrait être maximalement unipotente à l'origine.

Le développement en série de l'intégrande par rapport à t montre immédiatement que

§21.2
$$\mathrm{F}(t) = \sum_n \mathrm{tc}(g^n) t^n,$$

où $\mathrm{tc}(g^n)$ est le terme constant de g^n. Batyrev et Kreuzer ont calculé les équations de Picard-Fuchs des polytopes associés aux topologies n$^{\text{os}}$ 37, 40 et 43–68 de leur liste. Ils ont utilisé la méthode de reconstruction [16] : après avoir calculé suffisamment de coefficients du développement en série de $\mathrm{F}(t)$, grâce à la formule §21.2, ils cherchent une solution non nulle au système d'équations linéaires

$$\left(\sum_{i=0}^{4} \sum_{j=0}^{d} a_{i,j} t^j \theta^i \right) \cdot \mathrm{F}(t) = O(t^{5(d+1)+1}),$$

dont les $5(d+1)$ inconnues sont les $a_{i,j}$. Le problème de cette méthode n'est pas tant la résolution du système, faisable rapidement dans ce cas, que le calcul du développement en série de $\mathrm{F}(t)$: le nombre de monômes dans g^k est $\Theta(k^4)$, donc le calcul de N termes de $\mathrm{F}(t)$ utilise $\Theta(\mathrm{N}^5)$ opérations dans $\mathbb{Z}$, et on peut ajouter un ordre de grandeur pour refléter la complexité binaire. Il n'est pas possible en général de prouver que l'opérateur calculé est correct. L'application stricte des bornes *a priori* dont on pourrait disposer conduirait généralement à devoir calculer des milliards de coefficients, ce qui n'est pas faisable.

Metelitsyn [17] a calculé quatre équations de plus, pour les topologies n$^{\text{os}}$ 24, 38, 39 et 41. Il utilise aussi la méthode de reconstruction mais en utilisant un algorithme astucieux et soigneusement programmé sur GPU. La complexité en temps n'est pas améliorée, mais l'utilisation de la mémoire diminue.

16. Aussi appelée *devinette* ou *guessing*.
17. Metelitsyn, « How to compute the constant term of a power of a Laurent polynomial efficiently ».

De plus, Almkvist [18] rapporte que Straten, Metelitsyn et Schömer ont calculé un opérateur pour la topologie n° 17. Pour autant que je sache, aucun calcul n'a été mené à bout pour les topologies restantes (nos 1–16, 18–23, 25–36 et 42). Avec le nouvel algorithme et son implémentation en Magma, je suis parvenu à calculer une équation différentielle pour les 136 intégrales restantes. [19]

§22 ÉQUATIONS MINIMALES ET CONTRE-VÉRIFICATION. — Les équations obtenues par le nouvel algorithme ne sont pas toujours minimales, pour deux raisons. Premièrement, elles ont été obtenues avec $r = 2$, une valeur plus élevée de ce paramètre peut donner une équation plus petite. Deuxièmement, l'algorithme calcule une équation différentielle qui annule *toutes* les périodes d'une intégrale donnée, alors que $\mathrm{F}(t)$ est une période particulière. Ainsi, même avec un r suffisamment grand, l'équation n'est pas nécessairement l'équation minimale de $\mathrm{F}(t)$.

Qu'à cela ne tienne, on peut obtenir l'équation minimale à partir d'une équation non minimale. Si on a calculé un opérateur $\mathcal{L}$ tel que $\mathcal{L}(\mathrm{F}) = 0$, on peut traduire cette relation en une récurrence sur les $\mathrm{tc}(g^n)$. En calculant explicitement les conditions initiales, il est alors possible de calculer des milliers de termes du développement en série de F en quelques secondes. Et on peut alors essayer de reconstruire l'opérateur minimal $\mathcal{L}_0$. Par opposition à la *devinette*, il est possible de prouver que $\mathcal{L}_0$ est correct : il suffit de vérifier qu'il divise $\mathcal{L}$ à droite et qu'il annule les premiers termes [20] du développement en série de $\mathrm{F}(t)$. Si le développement en série ne permet pas de trouver un opérateur d'ordre moindre que celui de $\mathcal{L}$, on peut conjecturer que $\mathcal{L}$ est minimal. Les méthodes de Hoeij [21] permettent alors de le prouver : elles donnent une borne (assez fine en pratique) sur le nombre de coefficients nécessaires pour reconstruire l'opérateur minimal $\mathcal{L}_0$, étant donné un opérateur annulateur $\mathcal{L}$. Le tout permet de calculer certitude l'opérateur minimal avec certitude — voir §23 pour un exemple.

Comme l'algorithme 8 n'est pas déterministe et peut renvoyer un résultat faux si le hasard est contre nous, il est souhaitable de pouvoir vérifier la vraisemblance du résultat. [22] Plusieurs critères sont applicables. Premièrement, et ceci est valable pour toute équation de Picard-Fuchs, les singularités doivent être régulières, les exposants rationnels et la p-courbure nilpotente pour tout p, sauf peut-être un

18. Almkvist, « The art of finding Calabi-Yau differential equations ».
19. Les résultats sont disponibles sur `http://pierre.lairez.fr/supp/periods`.
20. Jusqu'à la plus grande racine entière du polynôme indiciel à l'origine du quotient de $\mathcal{L}$ par $\mathcal{L}_0$.
21. Hoeij, « Factorization of differential operators with rational functions coefficients ».
22. En pratique c'est surtout les erreurs humaines dont on cherche à se prémunir.

nombre fini. [23] Ces propriétés sont assez rigides et suffisent en pratique à détecter les erreurs grossières dans la reconstruction. Dans le cas spécifique des fonctions dont on peut calculer un développement en série indépendamment de l'équation de Picard-Fuchs, il est intéressant de vérifier que l'opérateur calculé est effectivement annulateur à une précision donnée. Enfin, un dernier critère encore plus spécifique : si on sait que le développement en série est à coefficients entiers, on peut vérifier que la récurrence induite par la relation $\mathcal{L}(\mathrm{F}) = 0$ engendre bien des nombres entiers. C'est en pratique une propriété extrêmement forte qui ne laisse pas l'ombre d'un doute.

§23 DESCRIPTION DES RÉSULTATS. — L'étude en profondeur des opérateurs calculés est encore en cours. Donnons tout de même deux exemples représentatifs : les polytopes v25.59 et v23.289. [24]

TOPOLOGIE NO. 42, POLYTOPE V25.59 La période $\mathrm{F}(t)$ est définie par l'équation §21.1 et le polynôme de Laurent

$$g = wxyz + wxy + \frac{1}{wxy} + wxz + \frac{1}{wxz} + \frac{wy}{z} + \frac{z}{wy} + wy + \frac{1}{wy} + \frac{1}{wz} + w + \frac{1}{w} + \frac{xz}{y} + \frac{y}{xz} + \frac{1}{xy} + xz + \frac{1}{xz} + x + \frac{1}{x} + \frac{z}{y} + \frac{y}{z} + y + \frac{1}{y} + z + \frac{1}{z}.$$

On calcule

$$\mathrm{F}(t) = 1 + 22t^2 + 204t^3 + 3474t^4 + 57000t^5 + 1031080t^6 + 19368720t^7 + O(t^8).$$

J'ai obtenu l'opérateur annulateur suivant :

$$\begin{aligned}
&1849\theta^4 - 43t\theta(142\theta^3 + 890\theta^2 + 574\theta + 129) \\
&\quad - t^2(647269\theta^4 + 2441818\theta^3 + 3538503\theta^2 + 2423953\theta + 650848) \\
&\quad - t^3(7200000\theta^4 + 34423908\theta^3 + 65337898\theta^2 + 57379329\theta + 19251960) \\
&\quad - t^4(37610765\theta^4 + 220029964\theta^3 + 499781264\theta^2 + 511393545\theta + 194039928) \\
&\quad - 2t^5(\theta + 1)(54978121\theta^3 + 324737370\theta^2 + 665066226\theta + 466789876) \\
&\quad - t^6(\theta + 2)(\theta + 1)(185181547\theta^2 + 915931425\theta + 1176131796)
\end{aligned}$$

23. N. M. Katz, « Nilpotent connections and the monodromy theorem : Applications of a result of Turrittin ».

24. Il y a deux numérorations différentes. La première, utlisée dans le tableau 3 de Batyrev et Kreuzer, « Constructing new Calabi-Yau 3-folds and their mirrors via conifold transitions », numérote les 68 topologies différentes, classées par ordre croissant du nombre $h^{1,2}$, correspondant aux 210 variétés de Calabi–Yau. La seconde, utilisée dans la base de données `http://hep.itp.tuwien.ac.at/~kreuzer/math/0802`, numérote sous la forme vx.y les 198849 polytopes réflexifs de dimension 4 qui satisfont une certaine propriété. La lettre x indique le nombre de sommets du polytope.

$$- 1212t^7(138979\theta + 413408)(\theta+3)(\theta+2)(\theta+1)$$
$$- 64266300t^8(\theta+4)(\theta+3)(\theta+2)(\theta+1),$$

où θ désigne $t\partial_t$. Cette équation est une *équation différentielle de Calabi–Yau* au sens où elle satisfait aux conditions énoncées par Almkvist, Enckevort, Straten et Zudilin. [25] Elle est nouvelle au sens où elle n'apparait pas dans la base de données de ces auteurs. [26] Le calcul a pris 80 secondes et 30 mégaoctets de mémoire sur un ordinateur personnel.

Remarquons que la formule §21.1, et l'homogénéisation, donne une fraction rationnelle a/f avec f de degré 8 par rapport aux variables d'intégrations. Le changement de variables qui change x en $1/x$ et w en w/y ramène ce nombre à 5 et fait ainsi gagner un temps considérable. Ce genre de changement de variables monomial peut être trouvé par une heuristique *gloutonne* : on essaie tous les changements de variables élémentaires, [27] on sélectionne ceux qui font le plus baisser le degré et on itère. À chaque itération, on supprime des candidats aléatoirement de manière à limiter le nombre de changements de variables explorés.

Les bornes obtenues au chapitre I, même dans leur version non simplifiée de la proposition §30.1, affirment l'existence d'un opérateur annulateur d'ordre au plus 204 et de degré au plus 326 823 504. Ces bornes sont généralement décevantes car les exemples intéressants sont, presque par essence, ceux dont l'équation de Picard-Fuchs est particulièrement petite. Si on part d'un polytope quelconque, l'équation de Picard-Fuchs sera d'ordre bien plus élevé. En dehors des cas génériques, il n'y a pas grand chose à attendre des bornes *a priori*.

TOPOLOGIE NO. 27, POLYTOPE V23.389 La période $\mathrm{F}(t)$ est définie par l'équation §21.1 et le polynôme de Laurent

$$f = \frac{1}{w} + w + \frac{1}{x} + \frac{w}{x} + x + \frac{x}{w} + \frac{1}{y} + \frac{w}{y} + \frac{1}{xy} + \frac{w}{xy} + y + \frac{y}{w} + \frac{xy}{w} + \frac{1}{z} + \frac{w}{z} + \frac{x}{z} + \frac{1}{yz} + \frac{w}{yz} + \frac{w}{xyz} + z + \frac{z}{w} + \frac{z}{x} + \frac{z}{wx},$$

On calcule

$$\mathrm{F}(t) = 1 + 18t^2 + 138t^3 + 2070t^4 + 29040t^5 + 452610t^6 + 7308000t^7 + O(t^8).$$

25. Almkvist, Enckevort, Straten et Zudilin, *Tables of Calabi–Yau equations*.
26. Straten, *Calabi-Yau Operators Database*.
27. $x_i \mapsto 1/x_i$ ou $x_i \mapsto x_i x_j^{\pm 1}$

J'ai obtenu un opérateur annulateur d'ordre 6 et de degré 29 trop imposant pour être reproduit ici. Notons-le $\mathcal{L}_6$. Cet opérateur n'est pas d'ordre 4. Est-ce l'opérateur minimal ? Van Hoeij a démontré [28] que si $\mathcal{L}_6$ admet un facteur à droite d'ordre 4, alors les degrés des coefficients de ce facteur sont au plus 88. Ainsi, en admettant que $\mathcal{L}_6$ est en effet un opérateur annulateur de $\mathrm{F}(t)$, si l'opérateur minimal annulant $\mathrm{F}(t)$ est d'ordre 4, alors son degré est au plus 88. Comme le système linéaire

$$\sum_{i=0}^{4}\sum_{j=0}^{88} a_{i,j}t^j f^{(i)}(t) = O(t^{405}),$$

d'inconnues les $a_{i,j}$, n'admet que la solution nulle, cela prouve que l'annulateur minimal de $\mathrm{F}(t)$ n'est pas d'ordre 4. Le même argument traite les ordres 1, 2, 3, et 5 avec les bornes sur les degrés respectifs 10, 16, 45 et 125. C'est plutôt surprenant car cela contredit l'affirmation de Batyrev et Kreuzer. Le polytope v18.16766, topologie n° 17, montre le même phénomène. Cela a été rapporté précédemment par Almkvist, [29] qui se réfère à un calcul de Straten, Metelitsyn and Schömer. Almkvist écrit à ce sujet «this example leaves some doubts about the reflexive polytopes». Je ne peux qu'appuyer le propos. Les autres opérateurs n'ont pas encore été étudiés mais il semblerait que des 137 périodes nouvellement calculées une seule admette un opérateur minimal d'ordre 4.

28. En utilisant les méthodes dans Hoeij, « Factorization of differential operators with rational functions coefficients ».

29. Almkvist, « The art of finding Calabi-Yau differential equations ».

III SOMMES BINOMIALES

§1. — En calcul formel, la *création télescopique*[1] est le cadre classique pour le calcul des sommes définies telles que

$$\text{§1.1} \qquad \sum_{k=0}^{n} \frac{4^n}{\binom{2k}{k}}, \quad \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{j=0}^{k} \binom{n}{j} \right)^3 \text{ ou } \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} \binom{i+j}{j}^2 \binom{4n-2i-2j}{2n-2i}.$$

Pour calculer la somme sur k d'une suite $u_{n,k}$, la méthode consiste à chercher une identité de la forme

$$p_0(n)u_{n+p,k} + \cdots + p_d(n)u_{n,k} = v_{n,k+1} - v_{n,k}.$$

Si on peut sommer cette identité par rapport à k, le membre de droite se *télescope*. Si la suite $v_{n,k}$ s'annule aux bornes de sommation, alors cette identité donne une relation de récurrence sur la somme, disons s_n :

$$p_0(n)s_{n+p} + \cdots + p_d(n)s_n = 0.$$

Cette récurrence est appelée *télescopeur* tandis que la suite $v_{n,k}$ est le *certificat*. Pour traiter des sommes multiples, on cherchera des identités de la forme

$$p_0(n)u_{n+p,k_1,\ldots,k_r} + \cdots + p_d(n)u_{n,k_1,\ldots,k_r} = v^{(1)}_{n,k_1+1,k_2,\ldots} - v^{(1)}_{n,k_1,k_2,\ldots} + \cdots + v^{(r)}_{n,k_1,\ldots,k_r+1} - v^{(r)}_{n,k_1,\ldots,k_r}.$$

Si la situation est favorable, alors on peut sommer sur les k_i et les termes de bord s'annulent, donnant ainsi une récurrence pour la somme. L'une des difficultés pratiques de cette méthode est précisément de vérifier ces conditions de sommabilité. Souvent, elles ne sont pas satisfaites, alors il faut éviter les points problématiques et les traiter à part.

Ce problème de sommation discrète est en plusieurs points analogue au problème d'intégration étudié dans les chapitres précédents (les fonctions sont remplacées par des suites, les dérivées par des différences finies et les intégrales par des sommes).

1. Wilf et Zeilberger, « An algorithmic proof theory for hypergeometric (ordinary and "q") multisum/integral identities » ; Zeilberger, « A holonomic systems approach to special functions identities », « The method of creative telescoping ».

Dans le cas des périodes d'intégrales rationnelles, nous avons vu qu'aucune vérification sur le certificat n'est nécessaire et qu'il est même possible de ne pas le calculer.

Les suites peuvent être manipulées par le biais de leurs séries génératrices, et l'algorithmique des suites se reflète dans l'algorithmique des fonctions. Et *certaines* suites correspondent à *certaines* fonctions. Dans ce chapitre, nous mettons en correspondance les *sommes binomiales* — des suites construites à partir des coefficients binomiaux et du symbole de sommation — avec les périodes d'intégrales rationnelles. L'algorithmique des périodes développée dans les chapitres précédents permet de donner des algorithmes pour les sommes binomiales de nature assez différente de la création télescopique. Tout comme les périodes d'intégrales rationnelles sont très particulières parmi les fonctions, les sommes binomiales sont très particulières parmi les suites. Par exemple, parmi les suites §1.1, la deuxième et la troisième sont des sommes binomiales mais la première ne l'est pas, car le coefficient binomial apparait inversé. Si les trois suites peuvent être traitées par la création télescopique, seules les deux dernières pourront l'être par les méthodes exposées ici.

§2. — Ce chapitre présente un travail encore inédit effectué avec mes directeurs Alin Bostan et Bruno Salvy. Nous donnons une définition précise de ces *sommes binomiales* comme l'ensemble des suites obtenues par quelques opérations de clôture (sommation indéfinie, changement de variables, combinaison linéaire, etc.) à partir de quelques briques de base (les coefficients binomiaux, les suites géométriques). En se basant sur des représentations intégrales des séries génératrices de ces suites, nous proposons un test d'égalité sur les sommes binomiales, au sens le plus strict. En plus des preuves d'identités, la représentation intégrale permet de calculer des relations de récurrence satisfaites par les sommes binomiales. Cela est utile pour obtenir des asymptotiques ou des procédures d'évaluation rapides, par exemple.

Nous montrons aussi une correspondance entre les sommes binomiales et les diagonales de fractions rationnelles : les séries génératrices des sommes binomiales d'une variable sont des diagonales de fractions rationnelles, et réciproquement. Ceci permet de donner un caractère intrinsèque aux sommes binomiales, indépendamment de l'arbitraire des définitions.

Le point fort de la méthode concerne les sommes multiples : parfois malaisées en création télescopique, elles sont traitées indifféremment des sommes simples par cette méthode. La nature des calculs est au final très différente des approches par création télescopique pour les sommes multiples, [2] et ce dès les définitions : dans

2. Chyzak, « An extension of Zeilberger's fast algorithm to general holonomic functions » ; Weg-

l'approche intégrale, le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ est défini comme le coefficient de x^k dans $(1+x)^n$; dans l'approche par création télescopique, il est défini par récurrences linéaires et conditions initiales. Si la création télescopique est plus générale, l'approche intégrale évite certains problèmes, comme celui des récurrences singulières (c'est-à-dire les récurrences qui donnent $0 = 0$ pour certaines valeurs des indices), ou celui des certificats difficiles à sommer. C'est ce qui permet d'avoir un test d'égalité, au sens strict du terme, mais aussi ce qui limite fondamentalement la méthode.

Le test d'égalité est rendu efficace en pratique par la procédure de *réduction géométrique* qui permet de réduire le nombre de variables dans une intégrale multiple rationnelle grâce à la prise en compte du cycle d'intégration. Dans le cas des représentations intégrales des sommes binomiales, ce cycle est connu explicitement.

Aucune de ces idées n'est vraiment neuve, elles apparaissent notamment dans le travail d'Egorychev, [3] et les identités qu'on prouve ainsi étaient déjà connues. La contribution est la systématisation des représentations sur une classe précisément délimitée. Le résultat est une méthode efficace, souple, simple à implémenter et particulièrement adaptée aux sommes multiples. La réduction géométrique, bien qu'élémentaire, se révèle être extrêmement utile. Si cette étape n'apporte rien à la théorie, elle est cruciale en pratique pour obtenir des intégrables calculables rapidement.

§3 UN EXEMPLE. — La méthode est bien illustrée dans son ensemble par la preuve de l'identité de Dixon [4] :

$$\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \binom{2n}{k}^3 = (-1)^n \frac{(3n)!}{n!^3}.$$

La stratégie est la suivante : trouver une représentation intégrale de la série génératrice du membre de gauche ; simplifier cette représentation intégrale par des intégrations partielles ; calculer une équation différentielle vérifiée par la série génératrice grâce à la représentation intégrale et à l'algorithme du chapitre précédent ; transformer cette équation en relation de récurrence et résoudre cette récurrence.

Tout d'abord, l'entier $\binom{n}{k}$ est le coefficient de x^k dans $(1+x)^n$, polynôme ou série entière selon le signe de n. La formule intégrale de Cauchy assure que

schaider, « Computer generated proofs of binomial multi-sum identities ».

3. Egorychev, *Integral representation and the computation of combinatorial sums*.

4. Dixon, « On the sum of the cubes of the coefficients in a certain expansion by the binomial theorem ».

$$\binom{n}{k} = \frac{1}{2i\pi} \oint_{|x|=\frac{1}{2}} \frac{(1+x)^n}{x^k} \frac{\mathrm{d}x}{x}.$$

Dès lors, le cube d'un coefficient binomial s'exprime comme une intégrale triple :

$$\binom{2n}{k}^3 = \frac{1}{(2i\pi)^3} \oint_{|x_i|=\frac{1}{2}} \frac{(1+x_1)^{2n}}{x_1^k} \frac{(1+x_2)^{2n}}{x_2^k} \frac{(1+x_3)^{2n}}{x_3^k} \frac{\mathrm{d}x_1}{x_1} \frac{\mathrm{d}x_2}{x_2} \frac{\mathrm{d}x_3}{x_3}.$$

Par suite, la série génératrice du membre de gauche s'écrit

$$\begin{aligned} y(t) &\overset{\text{déf}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} t^n \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \binom{2n}{k}^3 \\ &= \frac{1}{(2i\pi)^3} \oint_{|x_i|=\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{2n} \left(t \prod_{i=1}^{3} (1+x_i)^2 \right)^n \left(\frac{-1}{x_1 x_2 x_3} \right)^k \frac{\mathrm{d}x_1}{x_1} \frac{\mathrm{d}x_2}{x_2} \frac{\mathrm{d}x_3}{x_3} \\ &= \frac{1}{(2i\pi)^3} \oint \frac{\left(x_1 x_2 x_3 - t \prod_{i=1}^{3} (1+x_i)^2 \right) \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \mathrm{d}x_3}{\left(x_1^2 x_2^2 x_3^2 - t \prod_{i=1}^{3} (1+x_i)^2 \right) \left(1 - t \prod_{i=1}^{3} (1+x_i)^2 \right)}. \end{aligned}$$

L'intégrale partielle par rapport à x_3, le long du cercle $|x_3| = \frac{1}{2}$, est la somme des résidus de l'intégrande aux pôles de modules inférieurs à $\frac{1}{2}$. Quand x_1 et x_2 sont de module $\frac{1}{2}$ et quand $|t|$ est assez petit les racines du premier facteur du dénominateur, vu comme polynôme en x_3, sont toutes de module inférieur à $\frac{1}{2}$: elle se comportent comme $|t|^{1/2}$. À l'inverse, les racines du second facteur sont toutes de module supérieur : elles se comportent comme $|t|^{-1/2}$. Cette propriété de *tout ou rien* vérifiée sur chacun des facteurs implique que l'intégrale partielle par rapport à x_3 de l'intégrande est une fraction rationnelle. Et on trouve

$$y(t) = \frac{1}{(2i\pi)^2} \oint \frac{x_1 x_2 \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2}{x_1^2 x_2^2 - t(1+x_1)^2(1+x_2)^2(1-x_1x_2)^2}.$$

Cette formule rappelle la preuve originale de Dixon qui exprime le membre de gauche de son identité comme le coefficient de $(xy)^{4n}$ dans $[(1-y^2)(1-z^2)(1-y^2z^2)]^{2n}$. Mon algorithme, chapitre II, ou tout autre algorithme réalisant l'intégration des fractions rationnelles, calcule une équation différentielle satisfaite par $y(t)$:

$$t(27t+1)y'' + (54t+1)y' + 6y = 0.$$

En extrayant le coefficient de t^n dans cette égalité, on obtient immédiatement

$$3(3n+2)(3n+1)u_n + (n+1)^2 u_{n+1} = 0,$$

où $u_n = \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \binom{2n}{k}^3$. Comme $u_0 = 1$, on en déduit, par récurrence sur n, l'identité de Dixon.

1 Séries de Laurent multivariées

§4 DÉFINITIONS. — Dans toute la suite $\mathbb{K}$ est un corps effectif de caractéristique nulle. Soit $\mathbb{L}_d$ le corps des séries de Laurent itérées en d variables :

$$\mathbb{L}_d \overset{\text{déf}}{=} \mathbb{K}(\!(z_d)\!)(\!(z_{d-1})\!)\cdots(\!(z_2)\!)(\!(z_1)\!).$$

Pour f dans $\mathbb{L}_d$ et $\underline{n}$ dans $\mathbb{Z}^d$, on définit le coefficient de $\underline{z}^{\underline{n}}$ dans f comme

$$[\underline{z}^{\underline{n}}]f \overset{\text{déf}}{=} [z_d^{n_d}]\ldots[z_1^{n_1}]f.$$

On extrait d'abord le coefficient par rapport à z_1, puis par rapport à z_2, etc. La notation $\underline{z}^{\underline{n}}$ signifie $\prod_{i=1}^{d} z_i^{n_i}$. Un élément de $\mathbb{L}_d$ est entièrement déterminé par la fonction coefficient

$$\underline{n} \in \mathbb{Z}^d \mapsto [\underline{z}^{\underline{n}}]f \in \mathbb{K}.$$

Mais toute fonction de $\mathbb{Z}^d$ dans $\mathbb{K}$ ne détermine pas un élément de $\mathbb{L}_d$. Notons $\prec$ l'ordre lexicographique sur $\mathbb{Z}^d$, c'est un ordre total. Pour deux monômes $\underline{z}^{\underline{n}}$ et $\underline{z}^{\underline{m}}$, on note $\underline{z}^{\underline{n}} \prec \underline{z}^{\underline{m}}$ si $\underline{m} \prec \underline{n}$. (Notez l'inversion.) Il faut imaginer que z_d est infinitésimal devant 1, que z_{d-1} est infinitésimal devant z_d, etc. Et alors $\underline{z}^{\underline{n}}$ est infinitésimal devant $\underline{z}^{\underline{m}}$ si et seulement si $\underline{m} \prec \underline{n}$. Par exemple, $z_1^2 z_2^{-4} \prec z_1 z^{10}$, ou encore $\underline{z}^{\underline{n}} \prec 1$ si et seulement si $\underline{n} \neq 0$ et la première coordonnée non nulle de $\underline{n}$ est positive. [5]

§4.1 *Lemme. — Une fonction $\mathbb{Z}^d \to \mathbb{K}$ est la fonction coefficient d'un élément de $\mathbb{L}_d$ si et seulement si son support est bien ordonné.* [6]

Démonstration. On procède par récurrence sur d. Les parties bien ordonnées de $\mathbb{Z}$ sont les parties minorées, donc pour $d = 1$, le lemme suit de la définition de $\mathbb{K}(\!(z_1)\!)$.

Pour $d > 1$, soit S une partie bien ordonnée de $\mathbb{Z}^d$. Pour chaque k, l'ensemble

$$\mathrm{S}_k = \left\{ \underline{n} \in \mathbb{Z}^{d-1} \;\middle|\; (k, \underline{n}) \in \mathrm{S} \right\}$$

est une partie bien ordonnée de $\mathbb{Z}^d$ car S l'est. Par hypothèse de récurrence, c'est donc le support d'un certain élément g_k de $\mathbb{K}(\!(z_d)\!)\cdots(\!(z_2)\!)$. Comme S est une partie bien ordonnée, elle est minorée, et donc il existe un $\mathrm{N} \in \mathbb{Z}$ tel que pour tout $\underline{u}$ dans S on ait $n_1 \geqslant \mathrm{N}$. La somme $\sum_{k \geqslant \mathrm{N}} g_k z_1^k$ définit alors un élément de $\mathbb{L}_d$ dont le support est exactement S.

Réciproquement, soit f un élément de S. Soit $\left(\underline{n}^{(k)}\right)_{k \geqslant 0}$ une suite décroissante du support de f. Comme f est une série de Laurent en z_1, la suite des $n_1^{(k)}$ est

5. À propos du lien entre formulation formelle et formulation analytique, voir aussi le §12.

6. C'est-à-dire que tout sous-ensemble des points où la fonction n'est pas nulle admet un plus petit élément. Par exemple, l'ensemble $\mathbb{N}^d$ est bien ordonné pour l'ordre $\prec$.

minorée. Comme elle est déjà décroissante, elle stationne. Notons N la limite. Soit $g \in \mathbb{K}(\!(z_d)\!)\cdots(\!(z_2)\!)$ le coefficient de z_1^{N} dans f. À partir du rang où $n_1^{(k)}$ stationne en N, la suite

$$k \mapsto \left(n_2^{(k)}, \dots, n_d^{(k)}\right)$$

est décroissante et est à valeur dans le support de g. Par hypothèse de récurrence, elle stationne, ce qui conclut. □

Comme les supports des éléments de $\mathbb{L}_d$ sont bien ordonnés, on peut définir la *valuation* d'un élément f de $\mathbb{L}_d$, notée $v(f)$, comme le plus petit $\underline{n} \in \mathbb{Z}^d$ tel que $[\underline{z}^{\underline{n}}]f$ n'est pas nul. On note $\mathrm{mt}(f)$ le monôme $\underline{z}^{v(f)}$, appelé *monôme de tête*, ou encore *terme initial*.

Il est possible que les monômes d'un élément donné de $\mathbb{L}_d$ contiennent des puissance négatives arbitrairement grande. Par exemple, la série

$$f = \sum_{k \geqslant 0} z_1^k z_2^{-k!}$$

est bien un élément de $\mathbb{L}_d$, car la suite $k \mapsto (k, -k!)$ est croissante pour l'ordre lexicographique. Le terme initial de cette série est 1.

§5 CONSTRUCTIONS DE BASE. — Commençons par les dérivations. Soit f un élément de $\mathbb{L}_d$. Le support de la fonction

$$\underline{n} \in \mathbb{Z}^d \longmapsto (n_i + 1)[\underline{z}^{\underline{n}}]\,(f/z_i) \in \mathbb{K}$$

est bien ordonné puisqu'il est inclus dans le support de f/z_i. Cette fonction est donc la fonction coefficient d'un unique élément de $\mathbb{L}_d$. On note $\partial_i f$ cet élément. On vérifie bien sûr que l'application ∂_i ainsi définie coïncide avec la dérivation usuelle sur les polynômes. On peut montrer (c'est un peu plus technique mais facile) que $\partial_i(fg)$ égale $f\partial_i g + g\partial_i f$. Ces deux propriétés impliquent que ∂_i coïncide avec dérivation usuelle sur les fractions rationnelles.

Passons à une formule utile pour la suite. Si f ne dépend pas de z_1 (c'est-à-dire que le support de f est inclus dans le sous-ensemble de $\mathbb{Z}^d$ des points de première coordonnée nulle), alors $z_1 f \neq 1$ et on peut décrire explicitement la fonction coefficient de $g/(1 - z_1 f)$, pour $g \in \mathbb{L}_d$:

$$\text{§5.1} \qquad \left[z_1^{n_1}\cdots z_d^{n_d}\right]\left(\frac{g}{1-z_1 f}\right) = \begin{cases} \left[z_2^{n_2}\cdots z_d^{n_d}\right] g f^{n_1} & \text{si } n_1 \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

En effet, il suffit de vérifier que le support de la fonction définie par le membre de droite est bien ordonné, définissant ainsi un élément h de $\mathbb{L}_d$, et que $(1 - z_1 f)h = g$.

Enfin, définissons les changements de variables monomiaux. Soit $\varphi : \mathbb{Z}^d \mapsto \mathbb{Z}^d$

une fonction strictement croissante. Elle est en particulier injective. Le support de la fonction

$$\underline{n} \in \mathbb{Z}^d \longmapsto \begin{cases} \left[\underline{z}^{\varphi^{-1}(\underline{n})}\right] f & \text{si } \underline{n} \in \varphi(\mathbb{Z}^d) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

est exactement $\varphi(\operatorname{supp} f)$, il est donc bien ordonné. Il définit ainsi un élément, noté f^φ, de $\mathbb{L}_d$. Dans le cas particulier où φ est un morphisme de groupe, il existe des monômes $w_{1\smile d}$ tels que $\varphi(\underline{n})$ est précisément $v(w_1^{n_1} \cdots w_d^{n_d})$, pour tout $\underline{n}$ dans $\mathbb{Z}^d$. On note alors f^φ sous la forme d'une composition $f(w_{1\smile d})$. On montre que l'application $f \in \mathbb{L}_d \mapsto f(w_{1\smile d}) \in \mathbb{L}_d$ est un morphisme d'anneaux. Par ailleurs, il est clair que $f(w_{1\smile d})$ coïncide avec la composition usuelle quand f est un polynôme. La propriété de morphisme permet alors de montrer que c'est encore le cas quand f est une fraction rationnelle. Insistons sur le fait que cette composition n'est pas définie pour n'importe quels monômes, la condition de croissance de φ impose des conditions sur les w_i.

§6 RÉSIDUS D'UNE SÉRIE. — Si z_i est une variable, on définit le résidu par rapport à z_i d'un élément f de $\mathbb{L}_d$, noté $\operatorname{res}_{z_i} f$, comme l'élément de $\mathbb{L}_d$ obtenu en supprimant dans $z_i f$ tous les monômes contenant z_i à une puissance non nulle. C'est-à-dire

$$[\underline{z}^{\underline{n}}] \left(\operatorname*{res}_{z_i} f \right) \stackrel{\text{déf}}{=} \begin{cases} [\underline{z}^{\underline{n}}] z_i f & \text{si } n_i = 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Si f est une fraction rationnelle, on notera bien la différence entre le résidu rationnel pris en $z_i = 0$, qui est le coefficient de $1/z_i$ dans la décomposition en éléments simples de f, et le résidu $\operatorname{res}_{z_i} f$ qu'on vient de définir. Toutefois ce dernier peut s'exprimer en termes du premier, voir §19, et à l'instar du premier, il s'annule sur les dérivées :

§6.1 *Lemme.* — *Si f est un élément de $\mathbb{L}$, alors* $\operatorname{res}_{z_i} \partial_i f = 0$.

Si α est un ensemble de variables $\{z_{i_1}, \ldots, z_{i_r}\}$, on note $\operatorname{res}_\alpha f$ le résidu itéré

$$\operatorname*{res}_\alpha f \stackrel{\text{déf}}{=} \operatorname*{res}_{z_{i_1}} \cdots \operatorname*{res}_{z_{i_r}} f.$$

Bien sûr, cette définition ne dépend pas de l'ordre des z_{i_k}. Cette remarque et le lemme §6.1 impliquent

§6.2 *Lemme.* — *Si f_v, pour $v \in \alpha$ sont des éléments de $\mathbb{L}$, alors*

$$\operatorname*{res}_\alpha \sum_{v \in \alpha} \frac{\partial f_v}{\partial v} = 0.$$

On peut donc calculer les résidus des fractions rationnelles avec les mêmes algorithmes que ceux calculant les intégrales : si les périodes d'une intégrale rationnelle $\oint \mathrm{R}\mathrm{d}z_1 \dots \mathrm{d}z_n$ sont nulles, alors le résidu $\operatorname{res}_{z_{1\smile n}} \mathrm{R}$ est nul. Donc les méthodes des chapitres précédents s'appliquent Si $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$, on peut même écrire un résidu de fraction rationnelle comme une période d'intégrale rationnelle au sens analytique, voir §12.

§6.3 *Lemme. — Soient f et g deux éléments de $\mathbb{L}_d$ et α et β des ensembles de variables. Si f ne dépend pas des variables dans β et si g ne dépend pas des variables dans α alors*

$$\Big(\operatorname*{res}_{\alpha} f\Big)\Big(\operatorname*{res}_{\beta} g\Big) = \operatorname*{res}_{\alpha\cup\beta} fg.$$

Démonstration. $\operatorname{res}_{\alpha\cup\beta} fg = \operatorname{res}_{\alpha}\operatorname{res}_{\beta} fg = \operatorname{res}_{\alpha}\Big(f \operatorname{res}_{\beta} g\Big) = \Big(\operatorname{res}_{\alpha} f\Big)\Big(\operatorname{res}_{\beta} g\Big)$. □

À titre d'exemple, montrons que la diagonale d'un élément de $\mathbb{L}_d$ est le résidu d'un autre élément de $\mathbb{L}_d$: soit $f(z_{1\smile d}) \in \mathbb{L}_d$, alors

$$\text{§6.4}\qquad (\operatorname{diag} f)(z_1) \overset{\text{déf}}{=} \sum_{n\in\mathbb{Z}} [z_1^n \cdots z_d^n](f) z_1^n = \operatorname*{res}_{\{z_{2\smile d}\}} \frac{1}{z_2\cdots z_d} f\left(\frac{z_1}{z_2\cdots z_d}, z_{2\smile d}\right).$$

Il suffit de constater que la composition est bien définie, de sorte que le membre de droite se développe en série. Et pour chaque monôme,

$$\operatorname*{res}_{\{z_{2\smile d}\}} \left(\frac{1}{z_2\cdots z_d}\left(\frac{z_1}{z_2\cdots z_d}\right)^{k_1} z_2^{k_2}\cdots z_d^{k_d}\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } k_1 = \cdots = k_d \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

§7 SÉRIES RATIONNELLES. — Comme $\mathbb{L}_d$ contient le corps des fractions rationnelles en les $z_{1\smile d}$, cela permet de définir la notion de coefficient d'un monôme dans une fraction rationnelle. [7] Il faut garder à l'esprit que la valeur des coefficients dépend de l'ordre des variables. Dans $\mathbb{L}_2$, le coefficient de 1 dans $z_2/(z_1+z_2)$ est 1, alors que dans $z_1/(z_1+z_2)$ il est nul. En effet

$$\frac{z_2}{z_1+z_2} = 1 - \frac{1}{z_2} z_1 + O(z_1^2),$$

alors que

$$\frac{z_1}{z_1+z_2} = \frac{1}{z_2} z_1 + O(z_1^2).$$

7. Pour le développement en série multivariée des fractions rationnelles, voir aussi Gel′fand, Kapranov et Zelevinsky, *Discriminants, resultants, and multidimensional determinants*, chap. 6.

Dans la suite, on aura un certain nombre de variables $z_{1\frown d}$ (parfois nommées différemment) et on notera par $z_1 \prec \cdots \prec z_d$ le fait qu'on se place dans le corps $\mathbb{L}_d$ avec cet ordre sur les variables pour définir les fonctions coefficients, résidus, etc. Pour simplifier, les variables seront toujours ordonnées par ordre croissant d'indice. On note aussi $t_{1\frown d} \prec z_{1\frown e}$ l'ordre $t_1 \prec \cdots \prec t_d \prec z_1 \prec \cdots \prec z_e$. L'ordre des variables est primordial, pas seulement pour poser une convention mais dans la nature même des objets calculés. Par exemple, soit $\mathrm{F}(z_1, z_2)$ une fraction rationnelle, avec $z_1 \prec z_2$. Alors $\operatorname{res}_{z_1} \mathrm{F}$ est une fraction rationnelle en z_2. En effet, si $-n_1$ est l'exposant de z_1 dans $\mathrm{mt}(\mathrm{F})$, supposé strictement négatif, alors

$$\operatorname*{res}_{z_1} \mathrm{F} = \tfrac{1}{(n_1-1)!}\partial_1^{n_1-1}\left(z_1^{n_1}\mathrm{F}\right)|_{z_1=0}.$$

À l'inverse, le résidu par rapport une variable autre que la plus petite n'a aucune raison d'être rationnel. C'est l'essence même de ce chapitre puisqu'on va représenter des séries génératrices de sommes binomiales — lesquelles séries ne sont en générale ni rationnelles ni algébriques — comme des résidus de fractions rationnelles.

On appelle *série rationnelle* un élément de $\mathbb{L}_d$ qui est le quotient de deux polynômes ; et *série entière rationnelle* une série rationnelle dont les monômes ne contiennent pas d'exposant strictement négatif.

§8 TOPOLOGIE. — On peut munir $\mathbb{L}_d$ d'une structure d'espace vectoriel topologique sur $\mathbb{K}$, lui-même muni de la topologie discrète, au sein de laquelle les polynômes de Laurent sont denses dans $\mathbb{L}_d$. Cela permet certaines constructions sur les séries formelles par prolongement par continuité à partir des polynômes de Laurent, ce qui est souvent plus simple que donner explicitement la fonction coefficient. La construction de la topologie n'est pas immédiate, j'ai donc fait en sorte qu'elle ne soit pas nécessaire à la suite en isolant dans les paragraphes précédents les énoncés utilisés.

Soit $\mathcal{U}$ la partie de l'ensemble des parties de $\mathbb{Z}^d$ définie comme

$$\mathcal{U} \overset{\text{déf}}{=} \left\{ \mathrm{V} \subset \mathbb{Z}^d \;\middle|\; {}^c(-\mathrm{V}) \text{ est bien ordonné pour l'ordre lexicographique } \prec \right\},$$

où ${}^c(-\mathrm{V})$ est le complémentaire de l'ensemble des opposés des éléments de V. Il est facile de voir que $\mathcal{U}$ est stable par intersection finie et si $\mathrm{W} \subset \mathbb{Z}^d$ est un sur-ensemble d'un élément de $\mathcal{U}$, alors W est lui-même dans $\mathcal{U}$. Ces deux propriétés font de $\mathcal{U}$ un *filtre* sur $\mathbb{Z}^d$. Les éléments de $\mathcal{U}$ sont caractérisés par le lemme suivant :

§8.1 *Lemme. — Une partie* V *de* $\mathbb{Z}^d$ *est dans* $\mathcal{U}$ *si et seulement si pour toute partie bien ordonnée* W *de* $\mathbb{Z}^d$ *l'intersection* ${}^c\mathrm{V} \cap \mathrm{W}$ *est finie.*

Démonstration. Si V est dans $\mathcal{U}$ et si W est bien ordonné alors l'ensemble ${}^c\mathrm{V} \cap \mathrm{W}$ et son opposé ${}^c(-\mathrm{V}) \cap (-\mathrm{W})$ sont bien ordonnés, c'est donc un ensemble fini.

Réciproquement, soit $\mathrm{V} \subset \mathbb{Z}^d$ tel que pour toute partie bien ordonnée W de $\mathbb{Z}^d$ l'intersection ${}^c\mathrm{V} \cap \mathrm{W}$ soit finie et montrons que V est dans $\mathcal{U}$. Soit $(\gamma_n)_{n\geqslant 0}$ une suite croissante de ${}^c\mathrm{V}$. L'ensemble $\mathrm{W} = \{\gamma_n\}_{n\geqslant 0}$ est bien ordonné, et donc ${}^c\mathrm{V} \cap \mathrm{W}$ est fini. Comme W est inclus dans ${}^c\mathrm{V}$, cela montre que W est fini et donc que γ_n stationne. □

Pour $\mathrm{V} \in \mathcal{U}$, posons

$$\mathrm{U_V} \overset{\text{déf}}{=} \{f \in \mathbb{L}_d \mid \operatorname{supp}(f) \subset \mathrm{V}\}\,.$$

L'ensemble de tout les $\mathrm{U_V}$, pour V dans $\mathcal{U}$, forme un filtre sur $\mathbb{L}_d$. De plus, on constate aisément que $\mathrm{U_V} + \mathrm{U_V} \subset \mathrm{U_V}$ et que $\lambda \mathrm{U_V} = \mathrm{U_V}$ pour tout λ dans $\mathbb{K}$. Il existe donc une unique topologie sur $\mathbb{L}_d$ qui fait de $\mathbb{L}_d$ un espace vectoriel topologique et dans laquelle les voisinages de 0 sont exactement les ensembles $\mathrm{U_V}$.[8] Cette topologie est un peu abstraite mais on peut donner une caractérisation naturelle de la convergence pour cette topologie.

§8.2 *Proposition. — Soit $(f_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de $\mathbb{L}_d$. La suite f_n converge vers* 0 *si et seulement si*

(i) il existe un sous-ensemble de $\mathbb{Z}^d$ bien ordonné pour $\prec$ tel que pour tout $n \geqslant 0$, le support de f_n est inclus dans S *;*

(ii) pour tout $\underline{k} \in \mathbb{Z}^d$, la suite $n \mapsto [\underline{z}^{\underline{k}}]f_n$ est nulle à partir d'un certain rang.

Démonstration. Supposons d'abord que $f_n \to 0$, c'est-à-dire que pour tout $\mathrm{V} \in \mathcal{U}$ il existe un N tel que $\operatorname{supp} f_n \subset \mathrm{V}$ pour tout $n \geqslant \mathrm{N}$. Montrons le point *(i)*, c'est-à-dire que l'union, notée S, des $\operatorname{supp}(f_n)$ est bien ordonnée. À ce but, soit $(\alpha_k)_{k\geqslant 0}$ une suite décroissante d'éléments de S et posons

$$\mathrm{V} = \mathbb{Z}^d \setminus \{\alpha_k\}_{k\geqslant 0}\,.$$

L'ensemble ${}^c(-\mathrm{V})$ est l'ensemble des valeurs d'une suite croissante, il est donc bien ordonné. Donc $\mathrm{V} \in \mathcal{U}$ et par hypothèse, il existe un $\mathrm{N} \geqslant 0$ tel que $\operatorname{supp} f_n \subset \mathrm{V}$ pour tout $n \geqslant \mathrm{N}$. Comme aucun des α_k n'est dans V, on conclut que

$$\{\alpha_k\}_{k\geqslant 0} \subset \bigcup_{0\leqslant n\leqslant \mathrm{N}} \operatorname{supp} f_n.$$

Or une union finie d'ensembles bien ordonnés est bien ordonnée. Donc α_n stationne. Montrons le point *(ii)*. Pour tout $\underline{k} \in \mathbb{Z}^d$, l'ensemble ${}^c\{\underline{k}\}$ est un élément de $\mathcal{U}$

8. Bourbaki, « Groupes topologiques », proposition 1.

qui ne contient pas $\underline{k}$. Or $\mathrm{supp}(f_n)$ est inclus dans ${}^c\{\underline{k}\}$ pour n assez grand, ce qui signifie que la suite $n \mapsto [\underline{z}^{\underline{k}}]f_n$ est nulle à partir d'un certain rang.

Réciproquement, supposons les points *(i)* et *(ii)*. Soit $\mathrm{V} \in \mathcal{U}$. Par le premier point, il existe un ensemble bien ordonné $\mathrm{S} \subset \mathbb{Z}^d$ tel que $\mathrm{supp}(f_n)$ est inclus dans S pour tout n. L'intersection $\mathrm{S} \cap {}^c\mathrm{V}$ est finie, par le lemme §8.1. Or pour tout $\underline{k} \in \mathbb{Z}^k$, la suite $n \mapsto [\underline{z}^{\underline{k}}]f_n$ est nulle à partir d'un certain rang. On en déduit qu'il existe un N tel que $[\underline{z}^{\underline{k}}]f_n$ est nul dès que $n \geqslant \mathrm{N}$ et que $\underline{k}$ est dans l'ensemble fini $\mathrm{S} \cap {}^c\mathrm{V}$. Autrement dit $\mathrm{supp}(f_n)$ est inclus dans V dès que $n \geqslant \mathrm{N}$, ce qu'on voulait démontrer. □

Ainsi, la topologie sur $\mathbb{L}_d$ rend continues les fonctions coefficients $f \in \mathbb{L}_d \mapsto [\underline{z}^n]f \in \mathbb{K}$. Cependant elle est strictement plus fine que la moins fine des topologies rendant continues ces fonctions. Cette dernière n'est pas complète : la suite des sommes partielles $\sum_{k=0}^{n} z_1^{-k}$ est une suite de Cauchy au sens de la dernière mais n'a pas de limite dans $\mathbb{L}_d$.

La valuation v donne aussi une topologie sur $\mathbb{L}_d$,[9] plus fine que la nôtre. Dès que $d > 1$, elle est strictement plus fine, et même trop fine pour que les polynômes de Laurent soient denses.

§8.3 *Proposition. — $\mathbb{L}_d$ est séparé*[10] *et complet.*

Démonstration. Soient f et g deux éléments distincts de $\mathbb{L}_d$. Il existe un $\underline{k}$ dans $\mathbb{Z}^d$ tel que $[\underline{z}^{\underline{k}}]f$ est différent de $[\underline{z}^{\underline{k}}]g$. L'ensemble $\mathrm{V} = {}^c\{\underline{k}\}$ est un élément de $\mathcal{U}$ qui ne contient pas $\underline{k}$. Donc $f + \mathrm{U_V}$ et $g + \mathrm{U_V}$ sont des voisinages de f et g respectivement et sont disjoints. Donc $\mathbb{L}_d$ est séparé.

Soit $(f_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de Cauchy dans $\mathbb{L}_d$, c'est-à-dire que pour tout $\mathrm{V} \in \mathcal{U}$, il existe un $\mathrm{N} \geqslant 0$ tel que pour tous $n, m \geqslant \mathrm{N}$, la différence $f_n - f_m$ soit dans $\mathrm{U_V}$. Montrons que (f_n) converge. En prenant $m = n + 1$, on voit que la suite $f_{n+1} - f_n$ tend vers zéro. Avec la proposition §8.2, on obtient qu'il existe un ensemble $\mathrm{S} \subset \mathbb{Z}^d$ bien ordonné tel que $\mathrm{supp}(f_{n+1} - f_n)$ est inclus dans S. En sommant, on obtient que $\mathrm{supp}(f_n - f_0)$ est inclus dans S, et quitte à remplacer S par $\mathrm{S} \cup \mathrm{supp}(f_0)$, on peut supposer que $\mathrm{supp}(f_n)$ est inclus dans S. Avec le second point de la proposition §8.2, on obtient que pour tout $\underline{k} \in \mathbb{Z}^d$ la suite $n \mapsto [\underline{z}^{\underline{k}}](f_{n+1} - f_n)$ est nulle à partir d'un certain rang. On peut ainsi définir la fonction

$$\underline{k} \in \mathbb{Z}^d \longmapsto \left[\underline{z}^{\underline{k}}\right] f_0 + \sum_{n=0}^{\infty} \left[\underline{z}^{\underline{k}}\right] (f_{n+1} - f_n).$$

9. C'est la topologie où les voisinages de zéro sont engendrés par les les $\{f \in \mathbb{L}_d \mid v(f) \geqslant \gamma\}$, pour $\gamma \in \mathbb{Z}^d$.

10. Au sens de l'axiome T_2 : deux points distincts admettent des voisinages disjoints.

Le support de cette fonction est inclus dans S et est donc bien ordonné. C'est alors la fonction coefficient d'un élément de g. En utilisant la proposition §8.2, il est facile de démontrer que $f_n \to g$, ce qui montre que $\mathbb{L}_d$ est complet. □

On a montré en passant qu'une série dont le terme général tend vers zéro est sommable :

§8.4 *Lemme. — Soit $(f_n)_{n\geqslant 0}$ une suite d'éléments de $\mathbb{L}_d$ qui tend vers zéro. Alors la somme $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ est convergente.*

On montre sans difficulté que la valeur de la somme ne dépend pas de l'ordre de sommation et on peut alors considérer des sommes indicées par n'importe quel ensemble dénombrable. En particulier, on a l'identité suivante, en un sens topologique et non seulement notationnel :

§8.5 *Proposition. —* $f = \sum_{\underline{n}\in\mathbb{Z}^d} [\underline{z}^{\underline{n}}](f)\, \underline{z}^{\underline{n}}$, *pour tout* $f \in \mathbb{L}_d$.

Démonstration. Soit $(\gamma_n)_{n\geqslant 0}$ une suite énumérant sans répétition les éléments de $\operatorname{supp} f$. D'après le critère de convergence §8.2, il est évident que $\underline{z}^{\gamma_n} \to 0$. Et donc d'après le lemme §8.4, la série

$$\sum_{n\geqslant 0} [\underline{z}^{\gamma_n}](f)\, \underline{z}^{\gamma_n}$$

est convergente. Il reste à vérifier que la limite est bien f mais c'est évident coefficient par coefficient. □

§8.6 *Corollaire. — L'anneau $\mathbb{K}[z_1^{\pm 1}, \ldots, z_d^{\pm 1}]$ des polynômes de Laurent est une partie dense de $\mathbb{L}_d$.*

Terminons par quelques affirmations que je donne sans leurs preuves car elles allongeraient de trop cette digression.

On vérifie que si $v(f) > 0$ alors f^n tend vers zéro quand $n \to \infty$. Donc la série $\sum_{n\geqslant 0} f^n$ est convergente et on peut bien sûr vérifier que

$$\frac{1}{1-f} = \sum_{n\geqslant 0} f^n.$$

C'est un cas particulier de la composition des éléments de $\mathbb{L}_d$:

§8.7 *Proposition. — Soient f et $g_{1\smile d}$ des éléments de $\mathbb{L}_d$. Si l'application*

$$\varphi : \underline{n} \in \mathbb{Z}^d \mapsto v\left(g_1^{n_1} \cdots g_d^{n_d}\right) \in \mathbb{Z}^d$$

est strictement croissante, alors la série suivante est convergente :

$$\sum_{\underline{n}\in\mathbb{Z}^d} [\underline{z}^{\underline{n}}](f)\, g_1^{n_1}\cdots g_d^{n_d}.$$

De plus, si f est une fraction rationnelle, alors la limite de cette série coïncide avec l'évaluation de cette fraction en $g_{1\smile d}$.

Enfin, si $d > 1$, alors la multiplication de $\mathbb{L}_d \times \mathbb{L}_d$ dans $\mathbb{L}_d$ n'est pas une fonction continue et donc $\mathbb{L}_d$ n'est pas un anneau topologique La multiplication est toutefois séquentiellement continue, et elle est continue quand on fixe l'un des facteurs : pour tout $f \in \mathbb{L}_d$, la fonction $g \in \mathbb{L}_d \mapsto fg \in \mathbb{L}_d$ est continue.

2 Sommes binomiales comme résidus

§9 DÉFINITION DES SOMMES BINOMIALES. — Pour deux entiers relatifs n et k, le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ est défini comme le coefficient de x^k dans la série formelle $(1+x)^n$. En particulier, il peut prendre des valeurs non nulles même si n est négatif. Pour tous entiers a et b, on définit la *somme signée*, notée $\sum'_{k=a}{}^{b} u_k$ par

$$\sum_{k=a}^{b}{}' u_k = \begin{cases} \sum_{k=a}^{b} u_k & \text{si } a \leqslant b \\ 0 & \text{si } a = b+1 \\ -\sum_{k=b+1}^{a-1} u_k & \text{si } a > b+1. \end{cases}$$

Par contraste, la somme $\sum_{k=a}^{b} u_k$ est nulle, par convention, si $a > b$. Cette définition permet d'avoir la relation de Chasles inconditionnellement :

$$\sum_{k=a}^{b}{}' u_k + \sum_{k=b+1}^{c}{}' u_k = \sum_{k=a}^{c}{}' u_k,$$

ou encore d'avoir la somme géométrique

$$\sum_{k=a}^{b}{}' r^k = \frac{r^a - r^{b+1}}{1-r},$$

pour $r \neq 1$, quel que soit l'ordre relatif de a et de b.

Dans toute la suite $\mathbb{K}$ est un corps effectif de caractéristique nulle. On note $\mathcal{S}_d$ la $\mathbb{K}$-algèbre des suites $\mathbb{Z}^d \to \mathbb{K}$, où les opérations sont faites termes à termes. Les éléments de $\mathbb{Z}^d$ seront notés soulignés, comme $\underline{n}$. Par commodité plus que par besoin, on identifie $\mathcal{S}_d$ à un sous-ensemble de $\mathcal{S}_{d+1}$, *via* l'inclusion $\underline{n} \in \mathbb{Z}^d \mapsto (\underline{n}, 0) \in \mathbb{Z}^{d+1}$, et on note $\mathcal{S}$ l'union de tous les $\mathcal{S}_d$. De même, on note $\mathcal{S}_d^+$ la $\mathbb{K}$-algèbre

des suites $\mathbb{N}^d \to \mathbb{K}$, qu'on identifie à une sous-algèbre de $\mathcal{S}_d$, et $\mathcal{S}^+$ l'union de tous les $\mathcal{S}_d^+$. On assimile $\mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}^e$ à $\mathbb{Z}^{d+e}$.

L'algèbre des *sommes binomiales*, notée $\mathcal{B}$, est la plus petite sous-algèbre de $\mathcal{S}$ telle que :

(a) la fonction $\delta : \mathbb{Z} \to \mathbb{K}$, définie par $\delta_0 = 1$ et $\delta_n = 0$ pour $n \neq 0$, est dans $\mathcal{B}$;
(b) les suites géométriques $n \to \mathrm{C}^n$, pour $\mathrm{C} \in \mathbb{K}^\times$, sont dans $\mathcal{B}$;
(c) le coefficient binomial $(n,k) \to \binom{n}{k}$ (élément de $\mathcal{S}_2$) est dans $\mathcal{B}$;
(d) si $\lambda : \mathbb{Z}^d \to \mathbb{Z}^e$ est une application affine et si u est dans $\mathcal{B}$, alors la suite composée $\underline{n} \in \mathbb{Z}^d \mapsto u_{\lambda(\underline{n})}$ est dans $\mathcal{B}$;
(e) si u est dans $\mathcal{B}$, alors la somme indéfinie v est dans $\mathcal{B}$, où

$$v : (\underline{n}, m) \in \mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z} \mapsto \sum_{k=0}^{m}{}' u_{\underline{n},k} \in \mathbb{K}$$

De nombreux exemples sont donnés en section 5. Voir aussi la figure 3 pour un exemple de construction d'une somme binomiale classique.

§10 EXEMPLES IMPORTANTS. — Donnons quelques exemples de sommes binomiales, dont certains seront utilisés dans les démonstrations.

Toutes les fonctions polynomiales $\mathbb{Z}^d \to \mathbb{K}$ sont des sommes binomiales. En effet, pour tout $k \in \mathbb{N}$, les fonctions $n \in \mathbb{Z} \mapsto \binom{n}{k}$ sont des sommes binomiales par les points (c) et (d). Du coup, toutes les fonctions $n \in \mathbb{Z} \to n^k$ sont des sommes binomiales, ce qui donne ensuite tous les polynômes en une ou plusieurs variables.

Soit H la fonction $\mathbb{Z} \to \mathbb{K}$ telle que H_n est 1 si $n \geqslant 0$ et zéro sinon. La formule

$$\mathrm{H}_n = \sum_{k=0}^{n}{}' \delta_k$$

fait de H une somme binomiale. Ce qui donne aussi la partie positive n_+, définie comme le maximum de n et 0, car $n_+ = n\mathrm{H}_n$. Avec la fonction H, on retrouve la somme classique à partir de la somme signée :

$$\sum_{k=0}^{m} u_{\underline{n},k} = \mathrm{H}_m \sum_{k=0}^{m}{}' u_{\underline{n},k}.$$

En appliquant les règles (e) et (d), on obtient comme éléments de $\mathcal{B}$ les sommes prises en des bornes dépendant linéairement des paramètres : si u est dans $\mathcal{B}$, et si λ et μ sont des applications affines $\mathbb{Z}^d \to \mathbb{Z}$ alors la suite suivante est dans $\mathcal{B}$:

§10.1
$$v : \underline{n} \in \mathbb{Z}^d \mapsto \sum_{k=\lambda(\underline{n})}^{\mu(\underline{n})}{}' u_{\underline{n},k} \in \mathbb{K}.$$

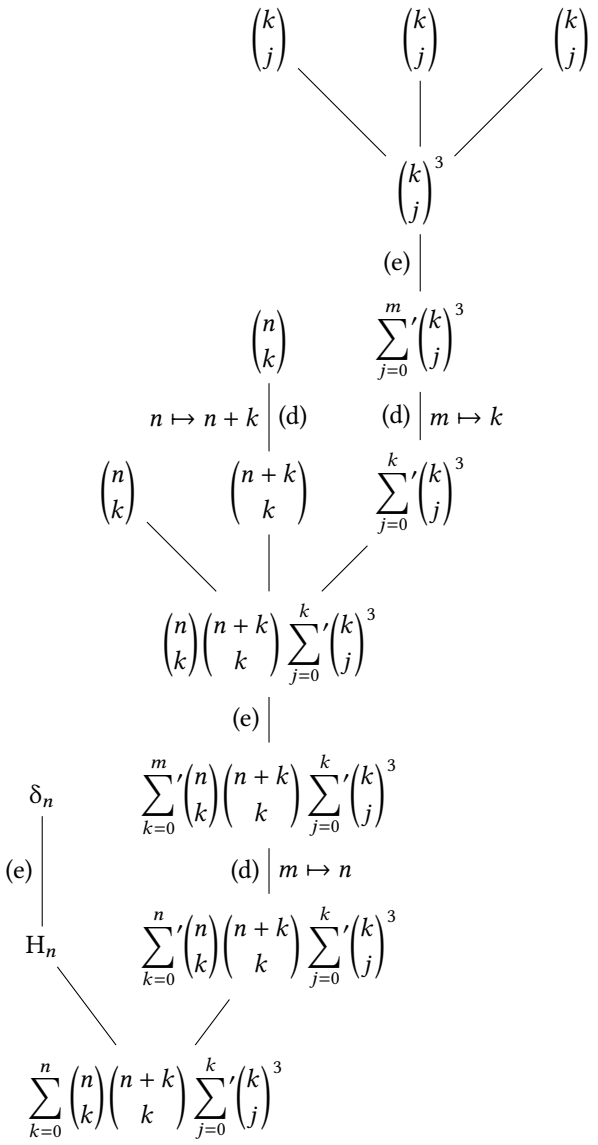


Figure 3. Construction d'une somme binomiale. La dernière étape consiste à remplacer la somme signée par une somme ordinaire pour ne conserver que les valeurs en $n \geqslant 0$, voir §10.

§11 REPRÉSENTATIONS PAR RÉSIDUS. — La proposition suivante est utile aussi bien à la théorie qu'à la pratique. La démonstration est un algorithme.

§11.1 *Proposition. — Toute somme binomiale est une combinaison linéaire de suites de la forme*

$$\underline{n} \in \mathbb{Z}^d \mapsto [1]\left(\mathrm{R}_0 \prod_{i=1}^{d} \mathrm{R}_i^{n_i}\right),$$

où les $\mathrm{R}_{0\smile d}$ *sont des fractions rationnelles en certaines variables ordonnées* $z_{1\smile r}$.

Démonstration. On vérifie que δ_n égale $[1]z^n$, que C^n égale $[1]\mathrm{C}^n$ et que $\binom{n}{k}$ est $[1](1+z)^n z^{-k}$. Il suffit donc de montrer que l'ensemble des combinaisons linéaires des suites données dans l'énoncé est une sous-algèbre de $\mathcal{S}$ qui satisfait aux règles de clôture définissant les sommes binomiales. Commençons par la stabilité par produit. Si on a des fractions rationnelles $\mathrm{R}_{0\smile d}$ et $\mathrm{R}'_{0\smile d}$ en les variables $z_{1\smile r}$ et $z'_{1\smile r'}$ respectivement, alors

$$[1]\left(\mathrm{R}_0 \prod_{i=1}^{d} \mathrm{R}_i^{n_i}\right)[1]\left(\mathrm{R}'_0 \prod_{i=1}^{d} \mathrm{R}_i'^{n_i}\right) = [1]\left(\mathrm{R}_0\mathrm{R}'_0 \prod_{i=1}^{d} (\mathrm{R}_i\mathrm{R}'_i)^{n_i}\right),$$

avec l'ordre des variables $z_{1\smile r} \prec z'_{1\smile r'}$, par exemple.

Pour montrer la clôture par changement de variables, on réarrange les facteurs :

$$[1]\left(\mathrm{R}_0 \prod_{i=1}^{d} \mathrm{R}_i^{\sum_{j=1}^{e} a_{ij}n_j + b_i}\right) = [1]\left(\left(\mathrm{R}_0 \prod_{i=1}^{d} \mathrm{R}_i^{b_i}\right) \prod_{j=1}^{e} \left(\prod_{i=1}^{d} \mathrm{R}_i^{a_{ij}}\right)^{n_j}\right).$$

Seule reste à montrer la clôture par somme partielle. Soit u une suite de la forme

$$(\underline{n}, k) \in \mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z} \mapsto [1]\left(\mathrm{T}^k \mathrm{R}_0 \prod_{i=1}^{d} \mathrm{R}_i^{n_i}\right),$$

avec T et les R_i des fractions rationnelles. Si T égale 1, alors

$$\sum_{k=0}^{m}{}' u_{\underline{n},k} = [1]\left((m+1)\mathrm{R}_0 \prod_{i=1}^{d} \mathrm{R}_i^{n_i}\right) = [1]\left(\frac{(1+v)\mathrm{R}_0}{v}(1+v)^m \prod_{i=1}^{d} \mathrm{R}_i^{n_i}\right),$$

où v est une variable qui n'apparait pas dans les R_i, car $m+1$ est le coefficient de v dans $(1+v)^{m+1}$. Si T est différent de 1 alors

$$\sum_{k=0}^{m}{}' u_{\underline{n},k} = [1]\left(\frac{\mathrm{R}_0}{1-\mathrm{T}} \prod_{i=1}^{d} \mathrm{R}_i^{n_i}\right) - [1]\left(\frac{\mathrm{R}_0\mathrm{T}}{1-\mathrm{T}}\mathrm{T}^{m+1} \prod_{i=1}^{d} \mathrm{R}_i^{n_i}\right),$$

ce qui conclut la preuve. □

§11.2 *Proposition. — Soit u une somme binomiale. Il existe une fraction rationnelle* S *en des variables $t_{1\smile d}$ et $z_{1\smile r}$, avec $t_{1\smile d} \prec z_{1\smile r}$, telle que $u_{\underline{n}} = [\underline{t}^{\underline{n}}]\mathrm{S}$ pour tout $\underline{n} \in \mathbb{N}^d$.*

Démonstration. D'après la proposition précédente, on peut supposer que u_n égale $[1]\left(\mathrm{R}_0 \prod_{i=1}^d \mathrm{R}_i^{n_i}\right)$, où les R_i sont des fractions rationnelles en des variables $z_{1\smile r}$. Soient $t_{1\smile d}$ des nouvelles variables, avec $t_{1\smile d} \prec z_{1\smile r}$. On vérifie alors que

$$[1]\left(\mathrm{R}_0 \prod_{i=1}^d \mathrm{R}_i^{n_i}\right) = [\underline{t}^{\underline{n}}]\mathrm{R}_0 \prod_{i=1}^d \frac{1}{1 - t_i \mathrm{R}_i},$$

en utilisant l'égalité §5.1 plusieurs fois. □

En changeant S en $\frac{\mathrm{S}}{z_1 \cdots z_r}$, on obtient la forme suivante :

§11.3 *Théorème. — Soit u une somme binomiale. Il existe une fraction rationnelle* S *en des variables $t_{1\smile d}$ et $z_{1\smile r}$, avec $t_{1\smile d} \prec z_{1\smile r}$, telle que*

$$\sum_{\underline{n} \in \mathbb{N}^d} u_{\underline{n}} t^{\underline{n}} = \operatorname*{res}_{z_{1\smile e}} \mathrm{S}(t_{1\smile d}, z_{1\smile r}).$$

Les réciproques des propositions §11.1, §11.2 et du théorème §11.3 sont toutes vraies : on va montrer au §16 que les séries génératrices des suites de la forme $[\underline{t}^{\underline{n}}]\mathrm{S}$, comme dans la proposition §11.2, sont des diagonales de séries entières rationnelles. Puis on montrera au §18 que ces diagonales sont des séries de sommes binomiales, ce qui fermera la boucle.

§12 FORMULES ANALYTIQUES. — La manipulation des résidus se fait bien avec des séries formelles et le lemme §6.2 sur l'annulation des résidus des dérivées suffit pour appliquer les chapitres précédents au calcul de ces résidus formels. Quand le corps $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$, il est toutefois intéressant de pouvoir faire le lien entre le point de vue formel et le point de vue analytique.

§12.1 *Proposition. — Soit* R *une fraction rationnelle à coefficients complexes en des variables $t_{1\smile d}$ et les $z_{1\smile e}$, avec un ordre $t_{1\smile d} \prec z_{1\smile e}$, telle que le dénominateur de* R *n'est pas nul en $t_1 = \cdots = t_d = 0$. Il existe des réels strictement positifs $s_{1\smile d}$ et $r_{1\smile e}$ tels que si $|t_i| \leqslant s_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant d$ alors*

$$\operatorname*{res}_{z_{1\smile d}} \mathrm{R} = \frac{1}{(2i\pi)^e} \oint_\gamma \mathrm{R}(t_{1\smile d}, z_{1\smile e}) \mathrm{d}z_{1\smile e},$$

où γ est le cycle $\{z \in \mathbb{C}^e \mid \forall 1 \leqslant i \leqslant e, |z_i| = r_i\}$.

Démonstration. Si R est un monôme $\underline{t}^{\underline{n}}\underline{z}^{\underline{m}}$, alors la formule est claire car, par définition, $\mathrm{res}_{z_{1\smile d}}\, \underline{t}^{\underline{n}}\underline{z}^{\underline{m}}$ vaut $\underline{t}^{\underline{n}}$ si $\underline{m}$ est $(-1,\dots,-1)$ et 0 sinon ; et parallèlement,

$$\frac{1}{(2i\pi)^e}\oint_{\Upsilon}\underline{t}^{\underline{n}}\underline{z}^{\underline{m}}\mathrm{d}z_{1\smile e}=\underline{t}^{\underline{n}}\prod_{i=1}^{e}\frac{1}{2i\pi}\oint_{|z_i|=r_i}z_i^{m_i}\mathrm{d}z_i$$

ce qui vaut aussi $\underline{t}^{\underline{n}}$ si $\underline{m}$ est $(-1,\dots,-1)$ et 0 sinon.

Notons $u_i = t_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant d$ et $u_{d+i} = z_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant e$. Écrivons R comme un quotient de polynômes a/f et f comme $\underline{u}^{\underline{m}}(1-g)$ où g est un polynôme de Laurent dont tous les monômes sont $\prec 1$, c'est-à-dire que dans chaque monôme, le premier u_i apparaissant à une puissance non nulle apparait à une puissance positive. Le monôme $\underline{u}^{\underline{m}}$ est simplement le monôme de tête de f.

Posons $a_{j,\mathrm{N}} = \exp(-\exp(\mathrm{N}/j))$, pour des entiers strictement positifs j et N, de sorte que $a_{j,\mathrm{N}}$ soit strictement positif et que $a_{j,\mathrm{N}}^{p} = o(a_{i,\mathrm{N}}^{q})$ quand $\mathrm{N}\to\infty$ pour tout $i<j$ et tous réels positifs p et q.

Si $\underline{u}^{\underline{n}}$ est un monôme $\prec 1$, alors $\prod_{i=1}^{d+e} a_{i,\mathrm{N}}^{n_i}$ tend vers zéro quand N tend vers ∞, car le premier n_i non nul est positif. Par suite, comme g ne contient qu'un nombre fini de monômes, tous $\prec 1$, il existe un N tel que

$$\mathrm{G}(a_{1,\mathrm{N}},\dots,a_{d+e,\mathrm{N}})<\tfrac{1}{2},$$

où G est le polynôme de Laurent $\sum_{\underline{n}\in\mathbb{Z}^{d+e}}|[\underline{u}^{\underline{n}}]g|\,\underline{u}^{\underline{n}}$. En particulier, si $|u_i| = a_{i,\mathrm{N}}$, pour $1 \leqslant i \leqslant d+e$, alors $|g| < \frac{1}{2}$. [11] Soit U la partie de $\mathbb{C}^{d+e}$ suivante :

$$\left\{\underline{u}\in\mathbb{C}^{d+e}\;\middle|\;\forall i\in\{1,\dots,d\},|u_i|\leqslant a_{i,\mathrm{N}}\text{ et }\forall i\in\{d+1,\dots,d+e\},|u_i|=a_{i,\mathrm{N}}\right\}.$$

Montrons que $|g| < \frac{1}{2}$ sur tout U. L'hypothèse que f n'est pas nul en $t_{1\smile d} = 0$ implique que son monôme de tête ne contient aucun des t_i, et donc qu'aucun t_i n'apparait à une puissance négative dans les monômes de g. En particulier, si $\underline{u}^{\underline{n}}$ est un monôme de g, et si $\underline{u}\in\mathrm{U}$, alors alors

$$\left|\prod_{i=1}^{d+e}u_i^{n_i}\right|\leqslant\prod_{i=1}^{d+e}a_{i,\mathrm{N}}^{n_i}$$

car les n_i concernés par l'inégalité sont positifs. Sur U, on conclut alors à l'inégalité $|g| \leqslant \mathrm{G}(a_{1,\mathrm{N}},\dots,a_{d+e,\mathrm{N}}) < \frac{1}{2}$. Ainsi, la série

$$\mathrm{R}=\frac{a}{\underline{u}^{\underline{m}}}\frac{1}{1-g}=\frac{a}{\underline{u}^{\underline{m}}}\sum_{n\geqslant 0}g^n=\frac{1}{\underline{u}^{\underline{m}}}\sum_{\underline{n}\in\mathbb{Z}^{d+e}}[\underline{u}^{\underline{n}}](\mathrm{R})\underline{u}^{\underline{n}+\underline{m}}$$

est convergente en deux sens différents : elle converge uniformément sur U comme série de fonctions en les u_i et elle converge dans le corps $\mathbb{L}_{d+e}$.

11. Que le lecteur pardonne l'identification d'un polynôme avec la fonction polynomiale associée.

La première convergence montre qu'on peut intervertir $\sum$ et $\mathrm{res}_{z_{1\sim d}}$, et la seconde montre qu'on peut intervertir $\sum$ et $\oint$. On se ramène ainsi au cas où R est un monôme. □

Si on avait choisi un corps de séries formelles différent, on obtiendrait un résultat analogue mais avec un cycle d'intégration différent.

§13 IMPLÉMENTATION. — La mise en œuvre effective du théorème §11.3 est particulièrement simple dans un système de calcul symbolique qui, comme Maple, dispose déjà de fonctionnalités pour traiter les sommes symboliques. L'algorithme 9 propose une implémentation en quelques lignes. Elle est basée sur la proposition §11.1, à une légère modification près : on considère des expressions de la forme

$$\underline{n} \in \mathbb{Z}^d \mapsto [1]\left(p(\underline{n})\mathrm{R}_0 \prod_{i=1}^{d} \mathrm{R}_i^{n_i}\right),$$

où p est un polynôme à d variables. Cela permet d'éviter la dicussion sur la raison des suites géométriques. Par facilité, l'implémentation proposée utilise la fonction *sum* de Maple mais seulement pour sommer les sommes géométriques généralisées $\sum_k p(k)r^k$, avec p un polynôme, et non des sommes binomiales, bien entendu.

La fonction *SumToRes* prend en entrée une somme binomiale U, un nom de variable v et un entier i (dont la valeur par défaut est 1, ce paramètre est utilisé dans les appels récursifs). Il s'agit simplement d'une récurrence sur l'arbre syntaxique avec une disjonction de cas : une somme binomiale peut être une somme finie de sommes binomiales, un produit, un δ_n, un $\binom{n}{k}$, une somme $\sum$ ou autre chose, qui se représente elle-même, comme 2^n. Elle renvoie une expression R en les variables libres de U et les $v_{i\sim i+d}$, pour un certain d, tel que $\mathrm{U} = \mathrm{res}_{v_{i\sim i+d}} \mathrm{R}$. Si U n'a pas de variable libre discrète (les variables qui peuvent apparaitre dans les bornes de sommation et dans les exposants), alors R est une fraction rationnelle. Par exemple :

```
> SumToRes(Sum(Binomial(n,k)*Binomial(n+k,k), k=0..n), z);
```

$$-\frac{(1+z_1)^n(1+z_2)^n\left(\left(\frac{1+z_2}{z_1z_2}\right)^{n+1}-1\right)}{z_1z_2-z_2-1}$$

```
> F := SumToRes(Sum(t^n*Sum(Binomial(n,k)*Binomial(n+k,k), k=0..n),
                                                    n=0..infinity), z);
```

$$\frac{1}{(tz_1z_2^2+2tz_1z_2+tz_2^2+tz_1+2tz_2-z_1z_2+t)(tz_1z_2+tz_1+tz_2+t-1)}$$

Algorithme 9 Calcul d'une représentation intégrale d'une somme binomiale. Implémentation Maple 17.

```
SumToRes := proc(U, v :: name, num :: integer := 1)
 local L, first, rest, rat_first, num_first, i;
 if type(U, '+') then
   return normal(map(SumToRes, U, v, num));
 elif type(U, '*') or type(U, '^'(anything, posint)) then
   first := op(1, U); # le premier facteur
   if type(U, '*') then
     rest := subsop(1=1, U); # le reste du produit
   else
     rest := first^(op(2, U) - 1);
   end if;
   rat_first := SumToRes(first, v, num);
   num_first := max(num - 1, op(map(op, indets(rat_first, specindex(v)))));
   return normal(rat_first*SumToRes(rest, v, num_first + 1));
 elif type(U, specfunc(Delta)) then
   return v[num]^op(U);
 elif type(U, specfunc(Binomial)) then
   return (1+v[num])^op(1, U)/v[num]^(op(2, U)+1);
 elif type(U, specfunc(Sum)) then
   return normal(sum(expand(SumToRes(op(1, U), v, num)), op(2, U)));
 else
   return U;
 end if;
end proc;
```

Ce qui signifie que

$$\sum_{n\geqslant 0} t^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n+k}{k} = \operatorname*{res}_{z_1,z_2} \mathrm{F},$$

où F est la fraction rationnelle ci-dessus. Et on peut vérifier les premiers termes de cette représentation intégrale :

```
> map(residue, map(residue, series(R, t, 9), z[1]=0), z[2]=0);
```

$$1 + 3t + 13t^2 + 63t^3 + 321t^4 + 1683t^5 + 8989t^6 + 48639t^7 + 265729t^8 + \mathrm{O}(t^9)$$

Bien sûr, on peut ajouter à loisir de nouvelles briques de base et donner des variantes pour celles existantes. Dans l'implémentation que j'utilise, les briques de base sont les suivantes :

§13.1
$$\binom{n}{k} = \operatorname*{res}_z \frac{1}{(1-z)^{k+1} z^{n-k+1}}$$

§13.2
$$\binom{i+j}{i}' \overset{\text{déf}}{=} \operatorname*{res}_{x,y} \frac{x^{-i-1}y^{-j-1}}{1-x-y},$$

où $\binom{i+j}{i}'$ est le coefficient binomial *naturel*, qui est nul si l'un des i et j est strictement négatif et qui vaut $\binom{i+j}{i}$ sinon. Il s'exprime comme un résidu d'une fraction à deux variables, là où le binôme n'en utilise qu'une. La procédure de réduction du nombre de variables, voir la section 4, annule souvent cet inconvénient.

Notons enfin que *SumToRes* se révèle assez lent et que l'appel de la fonction *sum* de Maple est un facteur limitant. Il convient d'écrire sa propre routine spécifiquement adaptée aux sommes hypergéométriques qu'on rencontre.

§14 SOMMATION INFINIE. — Nous n'avons considéré jusqu'ici que des sommes binomiales dont les bornes des signes $\sum$ sont finies et explicites. Il est possible, et même souhaitable, de considérer des sommes infinies, cela donne souvent des représentations intégrales plus simples. L'algorithme 9 accepte sans faillir des sommes dont les bornes sont infinies, cependant il convient de prendre quelques précautions pour que le résultat reste correct.

Par exemple, dans la somme $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$ la borne n n'est pas vraiment utile et on peut tout aussi bien écrire $\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n}{k}$. Cependant, l'algorithme 9 appliqué à cette somme binomiale renvoie la fraction $\frac{(1+z)^n}{z-1}$, dont le résidu en z est nul. Ce résultat n'est pas conforme aux attentes car Maple a sommé symboliquement une série formelle qui ne converge pas dans le corps des séries formelles. Si on décompose le calcul, il s'agit d'écrire

$$\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{\infty}\operatorname*{res}_z \frac{(1+z)^n}{z^{k+1}},$$

puis d'intervertir $\sum$ et res_z. Cependant, la série $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(1+z)^n}{z^{k+1}}$ ne converge pas dans $\mathbb{L}_1$: la valuation du terme général décroit. L'algorithme 9 doit donc être modifié pour rejeter cette somme.

On peut contourner ce problème de deux manières équivalentes. La première consiste simplement à changer la somme en $\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n}{n-k}$. On calcule alors

$$\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n}{n-k} = \sum_{k=0}^{\infty}\operatorname*{res}_z \frac{(1+z)^n}{z^{n-k+1}} = \operatorname*{res}_z \frac{(1+z)^n}{z^{n+1}(z-1)}.$$

L'autre méthode, équivalente mais plus pratique, consiste à changer la définition de base du coefficient binomial. Si on prend la formule §13.1, alors le problème n'apparait pas. Bien sûr il réapparaitra si l'on essaie de sommer $\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n}{n-k}$ avec cette formule.

3 Sommes binomiales et diagonales

§15 DIAGONALES DE FRACTIONS RATIONNELLES. — Soit R une fraction rationnelle en les variables $z_{1\smile d}$, qu'on suppose développable en série entière, c'est-à-dire que son dénominateur ne s'annule pas en $z_1 = \cdots = z_d = 0$. Écrivons donc le développement

$$\mathrm{R} = \sum_{\underline{n} \in \mathbb{N}^d} a_{\underline{n}} \underline{z}^{\underline{n}}.$$

La *diagonale* de R est la série formelle univariée

$$\mathrm{diag}(\mathrm{R})(t) \overset{\text{déf}}{=} \sum_{n \in \mathbb{N}} a_{n,n,\ldots,n} t^n.$$

§15.1 *Théorème. — Soit u une suite $\mathbb{N} \to \mathbb{K}$. La suite u est une somme binomiale si et seulement si sa série génératrice $\sum_{n \geqslant 0} u_n t^n$ est la diagonale d'une série entière rationnelle.*

Voir §16 et §18 pour la démonstration. Les diagonales de fractions rationnelles ont de nombreuses propriétés remarquables. [12] Grâce au théorème §15.1, elles se transfèrent directement aux sommes binomiales. On notera en particulier ces deux théorèmes de Furstenberg. [13]

§15.2 *Théorème (Furstenberg). — Soit $f \in \mathbb{K}[\![t]\!]$ une série formelle. La série f est algébrique, c'est-à-dire qu'il existe un polynôme $\mathrm{P}(t,x)$ non nul tel que $\mathrm{P}(t,f) = 0$, si et seulement si f est la diagonale d'une fraction rationnelle à deux variables.*

§15.3 *Théorème (Furstenberg). — Soit $f \in \mathbb{Z}[\![t]\!]$ une série formelle à coefficients entiers. Si f est la diagonale d'une fraction rationnelle, alors $f \pmod p$ est une série algébrique.*

Notons aussi la conjecture de Christol. [14] Elle est très ouverte.

§15.4 *Conjecture (Christol).* — Soit $f \in \mathbb{Z}[\![t]\!]$ une série formelle à coefficients entiers. Si le rayon de convergence de f est strictement positif et s'il existe un opérateur différentiel polynomial $\mathcal{L} \in \mathbb{Q}[t]\langle \partial_t \rangle$ tel que $\mathcal{L}(f) = 0$, alors f est la diagonale d'une fraction rationnelle.

12. Voir, par exemple, Adamczewski et Bell, « Diagonalization and rationalization of algebraic Laurent series » ; Christol, « Diagonales de fractions rationnelles », « Diagonales de fractions rationnelles et équations de Picard-Fuchs », « Diagonales de fractions rationnelles et equations différentielles » ; Denef et Lipshitz, « Algebraic power series and diagonals » ; Furstenberg, « Algebraic functions over finite fields » ; Lipshitz, « The diagonal of a D-finite power series is D-finite ».

13. Furstenberg, « Algebraic functions over finite fields ».

14. Christol, « Diagonales de fractions rationnelles ».

§16 SOMMES BINOMIALES COMME DIAGONALES. — Le théorème §11.3 permet, en inversant la formule §6.4, d'écrire la série génératrice d'une somme binomiale (à une variable libre) comme une diagonale d'une fraction rationnelle, mais celle-ci peut avoir un pôle à l'origine. Il faut donc travailler un peu plus pour obtenir la première moitié du théorème §15.1 Ce paragraphe est consacré à la preuve que la série génératrice d'une somme binomiale est la diagonale d'une série entière rationnelle. Cette démonstration donne aussi un algorithme.

Soit u une somme binomiale dans $\mathcal{S}_1$. Soit S_0 la fraction rationnelle, donnée par la proposition §11.2, en des variables $z_{1\smile d}$, de sorte que $u_n = [z_1^n]\mathrm{S}_0$. Écrivons S_0 comme le quotient de deux polynômes a/f.

§16.1 *Exemple.* — Illustrons cette démonstration avec la somme binomiale

$$u_n \overset{\text{déf}}{=} \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\binom{i+j}{j}^2\binom{4n-2i-2j}{2n-2i},$$

On démontre au §25 que si $t \prec x \prec y$ alors

$$u_n = [t^n]\frac{x(y-1)y^4}{(t-y^2(y-1)^2)((x-1)t-xy^2(y^2+x-1))}$$

Pour $i < j$, notons η_{ij} l'isomorphisme croissant de $\mathbb{Z}_d$ défini par

$$\eta_{ij}(n_{1\smile d}) \overset{\text{déf}}{=} (n_1,\dots,\underbrace{n_i}_{i^{\text{e}}\text{ pos.}},\dots,\underbrace{n_j+n_i}_{j^{\text{e}}\text{ pos.}},\dots,n_d).$$

La suite utilise la notation f^φ, pour $f \in \mathbb{L}_d$ et φ un endomorphisme croissant de $\mathbb{Z}^d$, qui a été introduite au §5. En particulier $z_k^{\eta_{ij}}$ égale z_k si $k \neq i$ et $z_i z_j$ si $k = i$.

§16.2 *Lemme. — Il existe un isomorphisme φ de $\mathbb{Z}^d$ composé d'un certain nombre de η_{ij} tel que f^φ égale $\mathrm{C}\underline{z}^{\underline{m}}(1+g)$ pour un $\underline{m}$ dans $\mathbb{N}^d$, un polynôme g nul à l'origine et une constante $\mathrm{C} \in \mathbb{K}$ non nulle.*

Démonstration. Soit $\underline{z}^{\underline{m}}$ le monôme de tête de f ($\underline{m}$ est donc le plus petit des exposants pour l'ordre lexicographique). Soit E l'ensemble

$$\mathrm{E} \overset{\text{déf}}{=} \left\{\underline{m}' - \underline{m} \in \mathbb{Z}^d \;\middle|\; \underline{z}^{\underline{m}'} \text{ est un monôme de } f\right\}.$$

Par définition, la première coordonnée non nulle de chaque élément de E est positive. Si tous les éléments de E ont toutes leurs coordonnées positives, cela signifie que $\underline{z}^{\underline{m}}$ divise tous les monômes de f, et alors f s'écrit $\mathrm{C}\underline{z}^{\underline{m}}(1+g)$ comme souhaité où C est le coefficient de $\underline{z}^{\underline{m}}$ dans f.

Pour tout i et j, remplacer f par $f^{\eta_{ij}}$ remplace E par $\eta_{ij}(\mathrm{E})$. Soit $\underline{n}$ un vecteur de E tel que n_i soit sa première coordonnée non nulle. Alors pour tout entier naturel a

$$\eta_{i,i+1}^{a} \circ \cdots \circ \eta_{i,d}^{a} = (0, \ldots, n_i, n_{i+1} + an_i, \ldots, n_d + an_i).$$

Comme n_i est strictement positif, il existe un entier positif a tel que toutes les coordonnées de ce vecteur soient positives. Et si on applique cette transformation à un vecteur qui est déjà à coordonnées positives, alors il reste à coordonnées positives. Ainsi, par récurrence sur le nombre de vecteurs de E dont au moins une coordonnée est strictement négative, il existe une composition φ d'un certain nombre de η_{ij} telle que tous les vecteurs de $\varphi(\mathrm{E})$ soient à coordonnées positives, ce qui achève la démonstration. □

§16.3 *Exemple.* — Dans notre exemple, le dénominateur est

$$f = (-y^2 + 2y^3 - y^4 + t)(-xy^4 + xy^2 - x^2y^2 - t + tx),$$

le plus grand monôme est xy^4. On a donc $\underline{m} = (0, 1, 4)$. En factorisant xy^4 :

$$f = -xy^4\Big(1 - 2y + 2y^3 - y^4 - x + 2xy - xy^2 \\ - \tfrac{t}{xy^2} + 2\tfrac{t}{xy} - 2\tfrac{t}{y} + 2t + \tfrac{xt}{y^2} - \tfrac{t}{x} + \tfrac{t^2}{xy^4} - \tfrac{t^2}{y^4}\Big).$$

Le changement de variables $\eta_{1,2}\eta_{1,3}^2$ qui change t en txy^2, rend polynomial le facteur entre parenthèses.

Pour $1 \leqslant i \leqslant d$, soit w_i le monôme z_i^{φ}. Comme l'application $h \mapsto h^{\varphi}$ est un isomorphisme de $\mathbb{L}_d$, on a

$$\mathrm{S}_0^{\varphi} = \frac{a^{\varphi}}{f^{\varphi}} = \frac{a^{\varphi}}{\mathrm{C}\underline{z}^{\underline{m}}(1+g)},$$

et S_0^{φ} est simplement la composée $\mathrm{S}_0(w_{1\smile d})$, comme expliqué au §5. Et par définition $u_n = [w_1^n]\mathrm{S}_0(w_{1\smile d})$, pour $n \geqslant 0$. Soit R la série entière rationnelle $a^{\varphi}/\mathrm{C}(1+g)$. La série $\mathrm{S}_0(w_{1\smile d})$ égale $\mathrm{R}/\underline{z}^{\underline{m}}$ et $u_n = [w_1^n]\mathrm{R}/\underline{z}^{\underline{m}}$, pour tout $n \geqslant 0$.

Montrons qu'on peut supposer $\underline{m}$ nul. Soit i la première coordonnée non nulle de $\underline{m}$, le cas échéant. La spécialisation $\mathrm{R}_{|z_i=0}$ est une série entière rationnelle et $\mathrm{R} - \mathrm{R}_{|z_i=0}$ égale $z_i\mathrm{T}$, pour une certaine série entière rationnelle T. Pour $n \geqslant 0$, le coefficient de w_1^n dans $\mathrm{R}_{|z_i=0}/\underline{z}^{\underline{m}}$ est nul, car l'exposant de z_1 dans w_1^n est positif, alors qu'il est strictement négatif dans tous les monômes de $\mathrm{R}_{|z_i=0}/\underline{z}^{\underline{m}}$. Ainsi

$$u_n = [w_1^n]\frac{\mathrm{T}}{\underline{z}^{\underline{m}}/z_i},$$

et on peut remplacer R par T et retrancher 1 à la première coordonnée non nulle

de $\underline{m}$, ce qui fait diminuer strictement $\underline{m}$ pour l'ordre lexicographique. En itérant ce procédé, on se ramène au cas où $\underline{m}$ est nul et on obtient que $u_n = [w_1^n]\mathrm{T}$ pour une certaine série entière rationnelle T.

Écrivons w_1 comme $\prod_{i=1}^n z_i^{a_i}$. Si tous les a_i valaient 1, alors les $[w_1^n]\mathrm{T}$ seraient les coefficients diagonaux de T, ce qui conclurait la preuve. Comme ce n'est pas toujours le cas, considérons la série entière rationnelle suivante :

$$\mathrm{U} = \frac{1}{a_1 \cdots a_d} \sum_{\varepsilon_1^{a_1}=1} \cdots \sum_{\varepsilon_d^{a_d}=1} \mathrm{T}(\varepsilon_1 z_1, \ldots, \varepsilon_d z_d),$$

où les ε_i courent sur les racines a_i^{e} de l'unité, respectivement. Par construction, si m est un monôme en les en les $z_i^{a_i}$, alors $[m]\mathrm{U} = [m]\mathrm{T}$. Et en particulier $u_n = [w_1^n]\mathrm{U}$.

On peut considérer T (et donc U) comme un élément de l'extension du corps $\mathbb{K}(z_1^{a_1}, \ldots, z_d^{a_d})$ par les racines des polynômes $\mathrm{X}^{a_i} - z_i$, pour $1 \leqslant i \leqslant d$. Par construction, la fraction rationnelle U est invariante par les automorphismes de cette extension. C'est donc un élément du corps $\mathbb{K}(z_1^{a_1}, \ldots, z_d^{a_d})$. Écrivons alors U comme $\mathrm{S}(z_1^{a_1}, \ldots, z_d^{a_d})$, pour une certaine série entière rationnelle S. On vérifie que $u_n = [z_1^n \cdots z_d^n]\mathrm{S}$, et par suite, que

$$\sum_{n \geqslant 0} u_n t^n = \mathrm{diag}(\mathrm{S})(t).$$

§16.4 *Exemple.* — Dans notre exemple, on a, après le changement de variables

$$u_n = [t^n x^n y^{2n}] \left(\frac{1-y}{((1-y)^2 - tx)\,(1 + tx - y^2 - t - x)} \right).$$

L'étape de suppression de l'éventuelle puissance négative n'est pas nécessaire. En revanche, la dernière étape l'est, à cause du carré dans txy^2. Si T est la fraction entre parenthèses, on pose alors

$$\mathrm{U} \overset{\text{déf}}{=} \frac{1}{2}\left(\mathrm{T} + \mathrm{T}_{y=-y}\right) = \frac{1 - tx + y^2}{(1 + tx - t - x - y^2)\,((1-y^2)^2 + t^2x^2 - 2tx(1+y^2))}.$$

C'est une fraction en t, x et y^2. En remplaçant y^2 par y on obtient :

$$\sum_{n \geqslant 0} u_n t^n = \mathrm{diag}\left(\frac{1 - tx + y}{(1 + tx - t - x - y)\,((1-y)^2 + t^2x^2 - 2tx(1+y))} \right).$$

§17 SOMMATION SUR UN POLYÈDRE. — Pour démontrer la réciproque, nous aurons besoin de généraliser la règle (e) sur la clôture des sommes binomiales par sommation indéfinie. Soit u une somme binomiale. Soit Γ un *polyèdre rationnel* de $\mathbb{R}^{d+e}$. C'est l'intersection d'un nombre fini de demi-espaces rationnels de $\mathbb{R}^{d+e}$;

autrement dit, il existe un ensemble fini Λ d'application affines $\mathbb{R}^{d+e} \to \mathbb{R}$ à coefficients entiers telles que

$$\Gamma = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} \left\{ x \in \mathbb{R}^{d+e} \;\middle|\; \lambda(x) \geqslant 0 \right\}.$$

§17.1 *Proposition. — Si pour tout $\underline{n}$ dans $\mathbb{Z}^d$, les $\underline{m}$ dans $\mathbb{Z}^e$ tels que $(\underline{n},\underline{m}) \in \Gamma$ sont en nombre fini, alors la suite*

$$v : \underline{n} \in \mathbb{Z}^d \mapsto \sum_{\underline{m}\in\mathbb{Z}^e} u_{\underline{n},\underline{m}} \mathbb{1}_\Gamma(\underline{n},\underline{m})$$

est une somme binomiale.

Ce paragraphe est consacré à la démonstration de cette proposition. La fonction $\mathbb{1}_\Gamma(\underline{n},\underline{m})$ est l'indicatrice de Γ, qui vaut 1 si $(\underline{n},\underline{m}) \in \Gamma$ et 0 sinon. Tout d'abord, rappelons que la suite H, définie par $\mathrm{H}_n = 1$ si $n \geqslant 0$ et $\mathrm{H}_n = 0$ sinon, est une somme binomiale — voir §10. Ainsi l'indicatrice $\mathbb{1}_\Gamma$ est une somme binomiale car

$$\mathbb{1}_\Gamma(\underline{n}) = \prod_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{H}_{\lambda(\underline{n})},$$

et chacun des facteurs du produit est une somme binomiale, par la règle (d) de changement de variable.

Le problème est que la sommation définissant v court sur un ensemble infini, ce qui ne rentre pas directement dans le cadre de la règle (e), ni même de sa généralisation §10.1.

Pour $\underline{n}$ dans $\mathbb{Z}^d$, notons $\mathrm{B}_{\underline{n}}$ le réel

$$\mathrm{B}_{\underline{n}} \stackrel{\text{déf}}{=} \max\left\{ |\underline{m}|_\infty \;\middle|\; \underline{m} \in \mathbb{R}^e \text{ et } (\underline{n},\underline{m}) \in \Gamma \right\},$$

où $|\underline{m}|_\infty$ est le maximum des valeurs absolues des coordonnées. Un polyèdre rationnel est borné si et seulement s'il contient un nombre fini de points entiers ; ainsi, l'hypothèse de finitude sur Γ, implique que $\mathrm{B}_{\underline{n}}$ est fini (ou $-\infty$ si le maximum est pris sur un ensemble vide).

§17.2 *Lemme. — Il existe un réel $\mathrm{C} > 0$ tel que $\mathrm{B}_{\underline{n}} \leqslant \mathrm{C}(1 + |n|_\infty)$, pour tout $\underline{n}$ de $\mathbb{Z}^d$.*

Démonstration. Supposons que $\mathrm{B}_{\underline{n}}$ ne soit pas borné linéairement. C'est-à-dire qu'il existe une suite $\underline{p}_k = (\underline{n}_k, \underline{m}_k)$ dans Γ telle que $|\underline{m}_k|_\infty / |\underline{n}_k|_\infty$ tende vers ∞. En particulier $|\underline{m}_k|_\infty$ tend vers ∞. Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que $\underline{m}_k / |\underline{m}_k|_\infty$ converge. Notons $\ell \in \mathbb{R}^e$ la limite, qui n'est pas nulle. Pour tout α dans $[0,1]$ et pour tout $k \geqslant 0$, le point $\underline{p}_0 + \alpha(\underline{p}_k - \underline{p}_0)$ est dans Γ, par convexité.

Soit $u > 0$ et prenons, $\alpha_k = u/|\underline{m}_k|_\infty$. C'est bien un réel positif, et inférieur à 1 pour k assez grand. On calcule que

$$\underline{p}_0 + \alpha_k(\underline{p}_k - \underline{p}_0) \underset{k\to\infty}{\to} (\underline{n}_0, \underline{m}_0 + u\ell).$$

Or la limite est un point de Γ puisque Γ est fermé. Et par définition $|\underline{m}_0 + u\ell|_\infty \leqslant \mathrm{B}_{\underline{n}_0}$. Comme u est quelconque, ceci contredit la finitude de $\mathrm{B}_{\underline{n}_0}$. □

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{Z}^d$,

$$v_{\underline{n}} = \sum_{\substack{\underline{m}\in\mathbb{Z}^e \\ |\underline{m}|\leqslant \mathrm{C}(1+|\underline{n}|_\infty)}} u_{\underline{n},\underline{m}} \mathbb{1}_\Gamma(\underline{n},\underline{m}).$$

Pour $1 \leqslant i \leqslant d$, soit $w^{i,+}$ la suite définie par

$$w^{i,+}_{\underline{n}} \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{H}_{n_i} \prod_{j=1}^{i-1} (\mathrm{H}_{n_i-n_j-1}\mathrm{H}_{n_i+n_j-1}) \prod_{j=i+1}^{d} (\mathrm{H}_{n_i-n_j}\mathrm{H}_{n_i+n_j}),$$

de sorte que $w^{i,+}_{\underline{n}}$ vaille 1 si n_i est positif, si $n_i = |n|_\infty$ et si $|n_j| < |n_i|$ pour $j < i$; et zéro sinon. De même, définissons $w^{i,-}$ par

$$w^{i,-}_{\underline{n}} \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{H}_{-n_i-1} \prod_{j=1}^{i-1} (\mathrm{H}_{-n_i-n_j-1}\mathrm{H}_{-n_i+n_j-1}) \prod_{j=i+1}^{d} (\mathrm{H}_{-n_i-n_j}\mathrm{H}_{-n_i+n_j}),$$

de sorte que $w^{i,-}_{\underline{n}}$ vaille 1 si n_i est strictement négatif, si $-n_i = |n|_\infty$ et si $|n_j| < |n_i|$ pour $j < i$; et zéro sinon. Les suites $w^{i,+}$ et $w^{i,-}$ sont des sommes binomiales qui partitionnent l'espace : pour tout $\underline{n}$ dans $\mathbb{Z}^d$

$$1 = \sum_{i=1}^{d} w^{i,+}_{\underline{n}} + \sum_{i=1}^{d} w^{i,-}_{\underline{n}}.$$

Il suffit de décoder les notations pour vérifier que

$$\begin{aligned} v_{\underline{n}} = \sum_{i=1}^{d} w^{i,+}_{\underline{n}} \sum_{m_1=-\mathrm{C}(1+n_i)}^{\mathrm{C}(1+n_i)} \cdots \sum_{m_e=-\mathrm{C}(1+n_i)}^{\mathrm{C}(1+n_i)} u_{\underline{n},\underline{m}} \mathbb{1}_\Gamma(\underline{n},\underline{m}) \\ + \sum_{i=1}^{d} w^{i,-}_{\underline{n}} \sum_{m_1=-\mathrm{C}(1-n_i)}^{\mathrm{C}(1-n_i)} \cdots \sum_{m_e=-\mathrm{C}(1-n_i)}^{\mathrm{C}(1-n_i)} u_{\underline{n},\underline{m}} \mathbb{1}_\Gamma(\underline{n},\underline{m}), \end{aligned}$$

ce qui termine la preuve de la proposition §17.1, car cette fois-ci les bornes des sommations sont des fonctions affines à coefficients entiers de n.

§18 DIAGONALES COMME SOMMES BINOMIALES. — Montrons maintenant

la seconde partie du théorème §15.1. Soit R une série entière rationnelle en les variables $z_{1\smile d}$. Montrons que la suite définie par

$$u_n \overset{\text{déf}}{=} [z_1^n \cdots z_d^n]\mathrm{R},$$

est une somme binomiale. Quitte à faire des combinaisons linéaires, on peut supposer que le numérateur de R est un monôme. Écrivons donc

$$\mathrm{R} = \frac{\underline{z}^{\underline{m}_0}}{1 + \sum_{k=1}^{e} a_k \underline{z}^{\underline{m}_k}},$$

où les $\underline{m}_k$ sont à coefficients positifs ou nuls, et $\underline{m}_k$ n'est pas nul si $k > 0$. Soient $y_{0\smile e}$ des nouvelles variables et S la série entière rationnelle

$$\mathrm{S}(y_{0\smile e}) \overset{\text{déf}}{=} \frac{y_0}{1 + \sum_{k=1}^{e} a_k y_k} = y_0 \sum_{\underline{k} \in \mathbb{N}^e} \underbrace{\binom{k_1 + \cdots + k_e}{k_1, \ldots, k_e} a_1^{k_1} \cdots a_d^{k_d}}_{\mathrm{C}_{\underline{k}}} y_1^{k_1} \cdots y_d^{k_d}.$$

La suite $\mathrm{C}_{\underline{k}}$ des coefficients de ce développement en série est une somme binomiale, car le coefficient multinomial peut s'écrire comme produit de coefficients binomiaux :

$$\binom{k_1 + \cdots + k_e}{k_1, \ldots, k_e} = \binom{k_1 + \cdots + k_e}{k_1} \binom{k_2 + \cdots + k_e}{k_2} \cdots \binom{k_{e-1} + k_e}{k_{e-1}}.$$

Soit Γ le polyèdre convexe de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^e$ défini par

$$\Gamma \overset{\text{déf}}{=} \left\{ (n, \underline{k}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^e \;\middle|\; k_1 \geqslant 0, \ldots, k_e \geqslant 0 \text{ et } \underline{m}_0 + \sum_{i=1}^{e} k_i \underline{m}_i = (n, \ldots, n) \right\}.$$

Par construction, la fraction R égale $\mathrm{S}(\underline{z}^{\underline{m}_0}, \ldots, \underline{z}^{\underline{m}_e})$ et l'image d'un monôme $y_0 y_1^{k_1} \cdots y_d^{k_d}$ par cette spécialisation donne un monôme diagonal $z_1^n \cdots z_d^n$ si et seulement si $(n, \underline{k})$ est dans Γ. Ainsi

$$[z_1^n \cdots z_d^n]\mathrm{R} = \sum_{k \in \mathbb{Z}^e} \mathrm{C}_{\underline{k}} \mathbb{1}_\Gamma(n, \underline{k}).$$

Il reste à appliquer la proposition §17.1 pour montrer que u_n est une somme binomiale. Il suffit pour cela de vérifier que pour tout $n \in \mathbb{Z}$ il n'y a qu'un nombre fini de $\underline{k} \in \mathbb{Z}^e$ tels que $(n, \underline{k})$ est dans Γ. Vu les conditions de positivité sur les k_i, la non nullité et la posivité des $\underline{m}_i$, c'est évident.

4 Réduction géométrique des résidus

§19 CAS RATIONNEL. — Les fractions renvoyées par l'algorithme 9 ont souvent un grand nombre de variables, ce qui rend assez lente l'application des algorithmes d'intégration. Néanmoins leur structure n'est pas quelconque : en particulier, le dénominateur est souvent composé de petits facteurs. Ce paragraphe présente une condition suffisante à laquelle un résidu $\mathrm{res}_v \mathrm{F}$ d'une fraction rationnelle est encore une fraction rationnelle, ce qui permet de transformer un résidu itéré de fraction rationnelle en un autre avec une ou plusieurs variables en moins. Ce critère est très efficace sur les fractions qui nous intéressent et permet de réduire considérablement le nombre de variables.

Conceptuellement, la procédure de simplification est assez simple : en termes d'intégrales, il s'agit de calculer des intégrales partielles dans certains cas où celles-ci sont rationnelles. Cependant, la nature rationnelle ou non des intégrales partielles dépend du cycle d'intégration, donnée que la plupart des algorithmes d'intégration ignorent. C'est pour cela que nous avons appelé *réduction géométrique* cette procédure de réduction du nombre de variables. Ici le cycle d'intégration sous-tend la notion de résidu, voir §12. On peut donner une interprétation analytique de la réduction géométrique, en regardant les pôles en dedans ou en dehors d'un certain cercle, comme on l'a fait dans l'exemple introductif §3 ; on préfèrera ici une description basée sur les séries formelles.

Considérons des variables v et $z_{1\smile d}$, ordonnées de manière quelconque. Soit F une fraction rationnelle en ces variables, écrite comme a/f avec a et f des polynômes. En général $\mathrm{res}_v \mathrm{F}$ n'est pas une fraction rationnelle des $z_{1\smile d}$, à moins que v ne soit la plus petite des variables. Il existe néanmoins un critère simple qui permet d'assurer que le résidu est rationnel et de le calculer.

Soit $\rho \in \mathbb{L}_d$ une série en les $z_{1\smile d}$. Le résidu *rationnel* de la fraction F en $v = \rho$, noté $\mathrm{Res}_{v=\rho} \mathrm{F}$, est défini comme le coefficient de $1/(v-\rho)$ dans la décomposition en éléments simples de F vue comme une fraction de $\mathbb{L}_d(v)$. On note que $\mathrm{Res}_{v=\rho} \frac{\partial}{\partial v}\mathrm{F}$ est nul. À la différence du résidu *formel* $\mathrm{res}_v \mathrm{F}$, le résidu rationnel est toujours un élément du corps engendré par les coefficients de F et par ρ. Son calcul effectif est simple : si ρ n'est pas une racine de f, alors $\mathrm{Res}_{v=\rho} \mathrm{F}$ est nul ; si ρ est une racine simple, alors $\mathrm{Res}_{v=\rho} \mathrm{F}$ égale $((v-\rho)\mathrm{F})\,|_{v=\rho}$; et si ρ est une racine d'ordre r, alors

$$\operatorname*{Res}_{v=\rho} \mathrm{F} = \frac{1}{(r-1)!} \left(\frac{\partial^{r-1}(v-\rho)^r \mathrm{F}}{\partial v^{r-1}} \right)_{|v=\rho}.$$

Comme le résidu rationnel d'une dérivée est nul, on peut ainsi se ramener au cas

d'un pôle simple avec la réduction d'Hermite.

La réduction géométrique s'applique de manière la plus élémentaire quand f se factorise en un produit de facteurs de degré 1 par rapport à v :

$$f = \mathrm{C}(z_{1\smile d}) \prod_{\rho\in\mathrm{U}} (v-\rho)^{n_\rho},$$

où U est l'ensemble des fractions rationnelles ρ telles que $f_{|v=\rho}$ est nul. Dans ce cas, on peut écrire la décomposition en éléments simples

$$\mathrm{F} = \sum_{\rho\in\mathrm{U}} \left(\frac{a_\rho}{v-\rho} + \sum_{k>1} \frac{b_{\rho,k}}{(v-\rho)^k} \right) + \mathrm{P}(v),$$

où $a_\rho \in \mathbb{K}(z_{1\smile d})$ est le résidu $\mathrm{Res}_{v=\rho} \frac{a}{f}$, où les $b_{\rho,k}$ sont des fractions rationnelles en les $z_{1\smile d}$, et où $\mathrm{P}(v)$ est un polynôme en v à coefficients dans $\mathbb{K}(z_{1\smile d})$. Soit $\rho \in \mathrm{U}$, qu'on considère comme une série de $\mathbb{L}_d$. Les pôles multiples en ρ sont des dérivées :

$$\frac{b_{\rho,k}}{(v-\rho)^k} = \frac{1}{1-k} \frac{\partial}{\partial v} \frac{b_{\rho,k}}{(v-\rho)^{k-1}},$$

donc leurs résidus formels res_v sont nuls, et de même pour la partie polynomiale. Étudions les pôles simples. Si $v \succ \mathrm{mt}(\rho)$, alors le monôme de tête de ρ/v est plus petit que 1, et donc

$$\frac{a_\rho}{v-\rho} = \frac{a_\rho}{v} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\rho}{v}\right)^n.$$

Et en particulier, le résidu $\mathrm{res}_v \frac{a_\rho}{v-\rho}$ égale a_ρ. À l'inverse, si $v \prec \mathrm{mt}(\rho)$, alors le monôme de tête de v/ρ est plus petit que 1, donc

$$\frac{a_\rho}{v-\rho} = -\frac{a_\rho}{\rho} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{v}{\rho}\right)^n,$$

et par suite $\mathrm{res}_v \frac{a_\rho}{v-\rho}$ est nul. Nous avons donc montré que

§19.1
$$\operatorname*{res}_v \mathrm{F} = \sum_{\rho \text{ pôle de F}} [\mathrm{mt}(\rho) \prec v] \operatorname*{Res}_{v=\rho} \mathrm{F},$$

où le crochet représente 1 si l'inégalité qu'il renferme est vérifiée et 0 sinon. En particulier, le membre de droite est une fraction rationnelle qu'on peut calculer facilement par la factorisation de f.

§19.2 *Exemple.* — Soit d un entier positif. Considérons la somme binomiale donnée par $u_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{dk}{n}$. On calcule que

$$\sum_{n\geqslant 0} u_n t^n = \operatorname*{res}_{z_1,z_2} \frac{z_2}{(z_2 - t(1+z_1))(z_1 z_2 + t(1+z_1)(1+z_2)^d)},$$

avec $t \prec z_1 \prec z_2$. Notons F le membre de droite. Chacun des facteurs du dénominateur est de degré 1 par rapport à z_1. On peut donc appliquer la formule §19.1. Les racines du dénominateur sont

$$\rho_1 = \frac{z_2}{t} - 1 \quad \text{et} \quad \rho_2 = \frac{-1}{1 + \frac{z_2}{t(1+z_2)^d}}.$$

Le terme initial de la première est z_2/t, ce qui est $\succ z_1$, et celui de la seconde est t/z_2, ce qui est $\prec z_1$. Ainsi $\operatorname{res}_{z_1}(\mathrm{F})$ égale $\operatorname{Res}_{z_1=\rho_2}(\mathrm{F})$. Et par suite

$$\sum_{n\geqslant 0} u_n t^n = \operatorname*{res}_{z_2} \operatorname*{res}_{z_1} \mathrm{F} = \operatorname*{res}_{z_2} \frac{1}{t(1+z_2)^d + z_2 - t}.$$

Si $d > 2$, le dénominateur de cette dernière fraction ne se scinde pas en facteurs de degré 1 et la réduction s'achève là pour le moment. Cependant, les racines non rationnelles peuvent aussi être étudiées et on peut pousser la réduction plus loin.

§20 CAS ALGÉBRIQUE. — La formule §19.1 s'étend au cas général, c'est-à-dire sans l'hypothèse sur la factorisation de f. Il faut pour cela décrire une clôture algébrique du corps $\mathbb{L}_d$. Soit $\mathbb{L}_{d,\mathrm{N}}$ le corps défini par

$$\mathbb{L}_{d,\mathrm{N}} \overset{\text{déf}}{=} \mathbb{K}(\!(z_d^{1/\mathrm{N}})\!)(\!(z_{d-2}^{1/\mathrm{N}})\!)\dots(\!(z_2^{1/\mathrm{N}})\!)(\!(z_1^{1/\mathrm{N}})\!).$$

C'est l'extension de $\mathbb{L}_d$ par les $z_i^{1/\mathrm{N}}$, et elle est isomorphe à $\mathbb{L}_d$ *via* la composition

$$f \in \mathbb{L}_{d,\mathrm{N}} \mapsto f\left(z_1^{\mathrm{N}}, \dots, z_d^{\mathrm{N}}\right) \in \mathbb{L}_d.$$

Soit $\mathbb{L}_{d,\infty}$ l'union de tous les $\mathbb{L}_{d,\mathrm{N}}$. Et soit $\overline{\mathbb{K}} \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{L}_{d,\infty}$ le corps obtenu en ajoutant à $\mathbb{L}_{d,\infty}$ les éléments algébriques sur $\mathbb{K}$. Un élément de ce corps peut être écrit comme une série dont les coefficients appartiennent à une extension finie de $\mathbb{K}$.

§20.1 *Lemme (Théorème de Puiseux itéré). — Le corps $\overline{\mathbb{K}} \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{L}_{d,\infty}$ est une clôture algébrique de $\mathbb{L}_d$.* [15]

On notera donc simplement $\overline{\mathbb{L}_d}$ pour $\overline{\mathbb{K}} \otimes \mathbb{L}_{d,\infty}$. On prolonge la valuation v définie sur $\mathbb{L}_d$ en une valuation v de $\overline{\mathbb{L}_d}$ à valeurs dans $\mathbb{Q}^d$, ordonné par l'ordre lexicographique. On définit de même $\mathrm{mt}(f)$ par $z^{v(f)}$. L'argument du paragraphe précédent s'applique à l'identique et on montre ainsi que

§20.2
$$\operatorname*{res}_v \mathrm{F} = \sum_{\rho \text{ pôle de F}} [\mathrm{mt}(\rho) \prec v] \operatorname*{Res}_{v=\rho} \mathrm{F},$$

où cette fois-ci les pôles sont des éléments de $\overline{\mathbb{L}_d}$.

15. Voir, par exemple, Rayner, « Algebraically closed fields analogous to fields of Puiseux series », pour une construction générale de la clôture algébrique d'un corps de séries formelles.

La formule semble avoir un intérêt moindre puisqu'en général le membre de droite est un élément de $\overline{\mathbb{L}_d}$ et non une fraction rationnelle. Cependant, si tous les crochets $[\mathrm{mt}(\rho) \prec v]$ sont nuls, alors la somme totale est nulle, ce qui est intéressant. À l'inverse, si tous les crochets valent 1, alors on obtient la somme de tous les résidus de a/f, ce qui est le résidu à l'infini de a/f

$$\operatorname*{res}_v \frac{a}{f} = \operatorname*{Res}_{v=\infty} \frac{a}{f} \overset{\text{déf}}{=} \operatorname*{Res}_{v=0} \left(\frac{1}{v^2} \frac{a_{|v=1/v}}{f_{|v=1/v}} \right).$$

C'est un critère *tout ou rien* : si les crochets sont tous nuls ou tous non nuls, le résidu $\operatorname{res}_v \frac{a}{f}$ est rationnel.

En fait, il suffit que $[\mathrm{mt}(\rho) \prec v]$ et $[\mathrm{mt}(\rho') \prec v]$ soient égaux pour toutes racines *conjuguées* ρ et ρ'. En effet, on peut écrire f comme $\prod_{k=1}^{r} f_k^{n_k}$ où les $f_{1\smile r}$ sont des polynômes irréductibles de $\mathbb{K}(z_{1\smile d})[v]$. La décomposition en éléments simples permet d'écrire a/f comme

$$\frac{a}{f} = \sum_{k=1}^{r} \frac{a_k}{f_k^{n_k}} + \mathrm{P}(v),$$

et la formule §20.2 s'applique à chacun des termes de cette somme. En notant U_k l'ensemble des racines de f_k on a

$$\operatorname*{res}_v \frac{a}{f}\frac{a}{f} = \sum_{k=1}^{r} \sum_{\rho \in \mathrm{U}_k} [\mathrm{mt}(\rho) \prec v] \operatorname*{Res}_{v=\rho} \frac{a_k}{f_k^{n_k}},$$

et on peut appliquer le critère *tout ou rien* à chacune des sous-sommes. On a donc montré la proposition suivante :

§20.3 *Proposition. — Avec les notations prédentes, supposons qu'il existe des entiers* $\varepsilon_{1\smile k}$*, tels que* $[\mathrm{mt}(\rho) \prec v] = \varepsilon_k$ *pour tout* ρ *dans* U_k*. Alors*

$$\operatorname*{res}_v \frac{a}{f} = \sum_{k=1}^{r} \varepsilon_k \operatorname*{Res}_{v=\infty} \frac{a_k}{f_k^{n_k}}.$$

Pour appliquer la proposition §20.3, il reste à expliquer comment calculer le monôme de tête des solutions dans $\overline{\mathbb{L}_d}$ d'une équation algébrique $f(z_{1\smile d}, v) = 0$, où f est un polynôme.

Si d est 1, c'est la méthode classique du polygône de Newton pour la résolution en série de Puiseux des équations algébriques en deux variables. [16] Quand d est 2 ou plus, on applique cette méthode par récurrence, en considérant $\overline{\mathbb{L}_d}$ comme un sous-corps des séries de Puiseux à coefficients dans $\overline{\mathbb{L}_{d-1}}$. L'algorithme 10 propose

16. Voir Walker, *Algebraic Curves* ; voir aussi Cutkosky, *Resolution of singularities*, §2.1.

Algorithme 10 Calcul du critère *tout ou rien*

Entrée — S un sous-ensemble fini de $\mathbb{N}^{d+1}$ et k un entier

Sortie — Soit $\mathrm{P} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{\underline{m}\in\mathbb{N}^d} a_{n,\underline{m}} v^n \underline{z}^{\underline{m}} \in \mathbb{K}[z_{1\smile d}][v]$ un polynôme. Les variables sont ordonnées par $z_1 \prec \cdots \prec z_d$ et $z_k \prec v \prec z_{k+1}$. Si S est $\{(n,\underline{m}) \mid a_{n,\underline{m}} \neq 0\}$ alors $\mathrm{TOR}(\mathrm{S},k)$ un ensemble qui contient *dehors* (resp. *dedans*) si et seulement s'il existe une racine non nulle $\rho \in \overline{\mathbb{L}_d}$ de $\mathrm{P}(v)$ telle que $\mathrm{mt}(\rho) \succ v$ (resp. $\mathrm{mt}(\rho) \prec v$).

fonction $\mathrm{TOR}(\mathrm{S},k)$
  si $\max_{m\in\mathrm{S}} m_1 = \min_{m\in\mathrm{S}} m_2$
    renvoyer $\varnothing$
  si $k \leqslant 0$ ou $\mathrm{S} \subset \mathbb{N}^1$
    renvoyer {dehors}
  $\mu \leftarrow \min_{m\in\mathrm{S}} m_2$
  $\mathrm{M} \leftarrow \left\{(m_1, m_{3\smile n}) \in \mathbb{N}^d \;\middle|\; m \in \mathrm{S} \text{ et } m_2 = \mu\right\}$
  $r \leftarrow \mathrm{TOR}(\mathrm{M}, k-1)$
  si $\max_{m\in\mathrm{S}} m_1 > \max_{m\in\mathrm{M}} m_1$
    $r \leftarrow r \cup$ {dehors}
  si $\min_{m\in\mathrm{S}} m_1 < \min_{m\in\mathrm{M}} m_1$
    $r \leftarrow r \cup$ {dedans}
  renvoyer r

une méthode pour calculer les $[\mathrm{mt}(\rho) \prec v]$ associés aux racines non nulles ρ d'un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}[z_{1\smile d}]$.

§20.4 *Exemple.* — Reprenons l'exemple §19.2. Nous en étions à calculer $\operatorname{res}_z \mathrm{F}_1$, avec $t \prec z$, où F_1 est la fraction $1/(t(1+z)^d + z - t)$. Son dénominateur se factorise en zg, et les monômes dans g sont 1 et les tz^k, pour $0 \leqslant k < d$. Ainsi, le terme initial d'une racine de g doit être $t^{-\frac{1}{d-1}}$, ce qui n'est pas $\prec z$. Le critère *tout ou rien* est satisfait : toutes les racines de g donnent un crochet nul et la racine nulle donne un crochet non nul. Par suite

$$\operatorname*{res}_z \mathrm{F}_1 = \operatorname*{Res}_{z=0} \mathrm{F}_1,$$

ce qui permet de conclure que

$$\sum_{n\geqslant 0} u_n t^n = \frac{1}{1+dt},$$

Algorithme 11 Réduction géométrique

Entrée — F une fraction rationnelle en v et $z_{1\smile d}$
Sortie — Échec ou bien S une fraction rationnelle $z_{1\smile d}$ telle que $\operatorname{res}_v \mathrm{F} = \mathrm{S}$

fonction RedGéom(F)
Décomposer F comme $\sum_{k=1}^{r} a_k/f_k^{n_k} + \mathrm{P}(v)$ où les f_k sont des polynômes irréductibles de $\mathbb{K}[z_{1\smile d}, v]$, les a_k sont dans $\mathbb{K}(z_{1\smile d})[v]$ et P est un polynôme en v à coefficients dans $\mathbb{K}(z_{1\smile d})$
S ← 0
pour k de 1 à r
τ ← TOR({exposants des monômes de f_k}, pos. de v parmi les variables)
si τ ⊂ {dedans}
S ← $\operatorname{Res}_{v=\infty}(a_k/f_k^{n_k})$
si #τ ⩾ 2
renvoyer Échec
renvoyer S

et, par suite, que

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{dk}{n} = (-d)^n.$$

Cet exemple est particulièrement intéressant car la réduction géométrique suffit à calculer entièrement une intégrale double. Si, pour un d donné, nous avions appliqué un algorithme d'intégration, le mien ou un autre, qui ne prenne pas en compte le cycle d'intégration, alors nous aurions trouvé une équation différentielle d'ordre $d-1$, dont $\frac{1}{1+dt}$ est solution, mais aussi toutes les autres périodes de $\int \mathrm{F}_1 \mathrm{d}z$. La réduction géométrique permet de distinguer une période parmi d'autres.

L'algorithme 11 reprend en détail la procédure de réduction géométrique pour éliminer, si possible, une variable. Il convient de l'appliquer successivement sur toutes les variables jusqu'à qu'aucune ne puisse être éliminée.

5 Applications

§21 CALCUL D'UNE RÉCURRENCE. — Le calcul des représentations intégrales s'applique à de nombreux problèmes concernant les sommes binomiales. Le premier d'entre eux est le calcul d'une récurrence : étant donné une somme binomiale u,

dépendant d'un seul paramètre, calculer des polynômes $a_{0\smile r}$, non tous nuls, tels que pour tout entier n

§21.1 $$a_0(n)u_{n+r} + \cdots + a_r(n)u_n = 0.$$

Supposons, pour simplifier que u_n est nul pour les valeurs négatives de n. Dans ce cas, la somme binomiale u est entièrement déterminée par la série génératrice

$$f \overset{\text{déf}}{=} \sum_{n\geqslant 0} u_n t^n.$$

Par le théorème §11.3, il existe une fraction rationnelle $\mathrm{S}(t, z_{1\smile e})$ telle que f égale $\mathrm{res}_{z_{1\smile e}} \mathrm{S}$. Avec les méthodes présentées aux chapitres précédents, ou n'importe quel autre algorithme d'intégration, on calcule un opérateur $\mathcal{L}(t, \partial_t)$ tel qu'il existe des fractions rationnelles $\mathrm{C}_{1\smile e}$ telles que

$$\mathcal{L}(\mathrm{S}) = \sum_{i=1}^{e} \partial_i \mathrm{C}_i,$$

dans $\mathbb{L}_{d+1}$. En particulier $\mathcal{L}(f) = 0$, dans $\mathbb{L}_1$, car $\mathrm{res}_{z_{1\smile e}}$ commute avec $\mathcal{L}$. En extrayant formellement le coefficient de t^n dans $\mathcal{L}(f)$ et en écrivant qu'il est nul, on obtient une relation du type §21.1.

§22 SOLUTIONS EN SÉRIES D'UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE. — Le test d'égalité pour les sommes binomiales repose sur un théorème d'unicité de la solution d'une équation différentielle, sous certaines contraintes. [17]

Soit $\mathcal{L} \in \mathbb{Q}[t]\langle\partial_t\rangle$ un opérateur en ∂_t à coefficients polynomiaux en t. Il existe un unique entier n et un unique polynôme $b_{\mathcal{L}} \in \mathbb{Q}[a]$ tel que pour tout $a \in \mathbb{Z}$

$$\mathcal{L}(t^a) = b_{\mathcal{L}}(a)t^{a+n} + o(t^{a+n}).$$

Le polynôme $b_{\mathcal{L}}$ est appelé *polynôme indiciel de $\mathcal{L}$ en $t = 0$*.

§22.1 *Proposition. — Soit $f \in \mathbb{Q}[\![t]\!]$ une série formelle. Si $\mathcal{L}(f) = 0$ et si $[t^n]f$ est nul pour toute racine entière positive n de $b_{\mathcal{L}}$, alors $f = 0$.*

Soit Z l'ensemble des racines entières positives de $b_{\mathcal{L}}$. On se donne des nombres rationnels a_n pour chaque n dans Z et on suppose qu'il existe une série formelle f qui annule $\mathcal{L}$ et telle que $[t^n]f = a_n$ pour tout $n \in \mathrm{Z}$. Alors on peut calculer un nombre arbitraire de coefficients de f : il suffit de transformer la relation $\mathcal{L}(f) = 0$ en une équation de récurrence sur les $[t^n]f$. La donnée des $[t^n]f$ pour $n \in \mathrm{Z}$ donnera les conditions initiales pour la récurrence, précisément là où elles seront nécessaires. Ainsi, la donnée de l'opérateur différentiel non nul $\mathcal{L}$ et des nombres

17. Pour ce paragraphe, la référence est Ince, *Ordinary Differential Equations*.

rationnels a_n pour chacune des racines entières positives de $b_{\mathcal{L}}$ (que j'appellerai simplement *conditions initiales suffisantes*) est une excellente représentation de la série formelle f : elle la détermine entièrement et permet de calculer f à précision arbitraire.

Soit $f \in \mathbb{Q}[\![t]\!]$ une série formelle donnée par un opérateur $\mathcal{L}$ et les conditions initiales suffisantes. Soit $\mathcal{M}$ un autre opérateur différentiel. On peut décider si $\mathcal{M}(f) = 0$ de la manière suivante. Premièrement, on calcule le p.g.c.d. à droite de $\mathcal{M}$ et $\mathcal{L}$, c'est l'opérateur de plus grand degré $\mathcal{D}$ tel que $\mathcal{M} = \mathcal{M}'\mathcal{D}$ et $\mathcal{L} = \mathcal{L}'\mathcal{D}$, pour certains opérateurs $\mathcal{M}'$ et $\mathcal{L}'$ à coefficients rationnels. Si f annule $\mathcal{M}$ et $\mathcal{L}$, alors il annule aussi $\mathcal{D}$. Ensuite, il suffit de calculer les racines entières positives du polynôme indiciel $b_{\mathcal{L}'}$ et, pour chacune de ces racines ρ, calculer le coefficient t^ρ correspondant dans $\mathcal{D}(f)$. Si on ne trouve que zéro, alors $\mathcal{M}(f) = 0$, sinon $\mathcal{M}(f) \neq 0$. En effet, l'opérateur $\mathcal{M}$ annule f si et seulement si $\mathcal{D}$ annule f. Or $\mathcal{L}'$ annule $\mathcal{D}(f)$. Donc pour décider si $\mathcal{D}(f)$ est nul, on peut appliquer la proposition §22.1 : il suffit de calculer le coefficient de t^ρ dans $\mathcal{D}(\rho)$ pour toute racine ρ de $b_{\mathcal{L}'}$, on a donc ce que l'on voulait. Soit maintenant $g \in \mathbb{Q}[\![t]\!]$ une série formelle donnée par un opérateur $\mathcal{M}$ et les conditions initiales suffisantes. Pour prouver que $f = g$, il suffit de vérifier que $\mathcal{M}(f) = 0$, par la méthode ci-dessus, et que les coefficients de f et g aux racines de $b_{\mathcal{M}}$ sont égaux.

§23 TEST D'ÉGALITÉ. — Voyons maintenant comment prouver que deux sommes binomiales sont égales. Commençons par étudier le cas où les sommes binomiales ne dépendent que d'une variable.

Soit u une somme binomiale d'une seule variable. Quitte à considérer séparément les sommes binomiales $\mathrm{H}_n u_n$ et $\mathrm{H}_n u_{-n}$, il suffit de s'intéresser au cas où u_n est nul si $n < 0$. Dans ce cas, la somme binomiale u est entièrement déterminée par la série génératrice

$$f \overset{\text{déf}}{=} \sum_{n \geqslant 0} u_n t^n.$$

Comme au §21, on calcule un opérateur $\mathcal{L}$ en t et ∂_t tel que $\mathcal{L}(f) = 0$. Comme u est une somme binomiale donnée explicitement, on peut calculer ses premières valeurs. On peut donc calculer les conditions initiales suffisantes.

Si v est une deuxième somme binomiale, on obtient de même un opérateur $\mathcal{M}$ annulant la série génératrice $\sum_{n \geqslant 0} v_n t^n$ ainsi que les conditions initiales suffisantes. Pour décider si $u = v$, il suffit d'appliquer le test d'égalité sur les séries formelles données par équation différentielle et conditions initiales suffisantes.

§24 TEST D'ÉGALITÉ, SUITE. — Étudions le cas des sommes binomiales dépendant de plusieurs variables par récurrence sur le nombre de variables. Soit u une

somme binomiale dépendant de d variables et supposons qu'on sait décider de l'égalité des sommes binomiales dépendant de $d-1$ variables.

On suppose, comme précédemment que $u_{\underline{n}}$ est nul si l'un des n_i est strictement négatif. Quitte à étudier les suites

$$\mathrm{H}_{n_1}\cdots\mathrm{H}_{n_d}u_{\varepsilon_1 n_1,\ldots,\varepsilon_d n_d}$$

pour tout $\varepsilon_i = \pm 1$, on peut toujours être dans ce cadre. Dans ce cas, la somme binomiale u est entièrement déterminée par la série génératrice

$$f(t_{1\backsim d}) \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{\underline{n}\in\mathbb{N}^d} u_{\underline{n}}\underline{t}^{\underline{n}} \in \mathbb{L}_d.$$

Par le théorème §11.3, il existe une fraction rationnelle $\mathrm{S}(t_{1\backsim d}, z_{1\backsim e})$ telle que f égale $\mathrm{res}_{z_{1\backsim e}}\,\mathrm{S}$. Avec les méthodes présentées aux chapitres précédents appliquées sur le corps $\mathbb{Q}(t_{1\backsim d})$ muni de la dérivation ∂_{t_d} par rapport à t_d, on calcule un opérateur $\mathcal{L}(t_{1\backsim d}, \partial_{t_d})$ tel qu'il existe des fractions rationnelles $\mathrm{C}_{1\backsim e}$ telles que

$$\mathcal{L}(\mathrm{S}) = \sum_{i=1}^{e} \partial_i \mathrm{C}_i.$$

Ceci donne une équation différentielle pour f vu comme une série en t_d à coefficients dans $\mathbb{L}_{d-1}$. Soit Z l'ensemble des racines entières et positives du polynôme indiciel $b_{\mathcal{L}}$ — qui est donc un polynôme à coefficients dans $\mathbb{Q}(t_{1\backsim d-1})$.

Les conditions initiales suffisantes sont les éléments de $\mathbb{L}_{d-1}$ donnés par

$$\sum_{\underline{n}\in\mathbb{N}^{d-1}} u_{\underline{n},k}\underline{t}^{\underline{n}},$$

pour k dans Z. Ce sont donc des séries génératrices de sommes binomiales dépendant de $d-1$ variables. Par récurrence, on peut décider de l'égalité de ces sommes binomiales, et donc appliquer le test d'égalité sur les séries formelles données par équation différentielle et conditions initiales suffisantes pour décider de l'égalité de deux sommes binomiales dépendant de d variables.

§25 IDENTITÉ D'ANDREWS-PAULE. — Montrons en détail l'identité suivante :

§25.1
$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\binom{i+j}{j}^2\binom{4n-2i-2j}{2n-2i} = (2n+1)\binom{2n}{n}^2.$$

Notons u_n le terme de gauche. Il peut s'écrire comme une somme infinie :

$$u_n = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\binom{i+j}{j}'^2\binom{(2n-2i)+(2n-2j)}{2n-2i}',$$

où $\binom{n}{k}'$ est le coefficient binomial *naturel* défini au §13. En utilisant la représentation §13.2 de ce coefficient, on obtient la représentation intégrale

$$\sum_{n\geqslant 0} u_n t^n = \operatorname*{res}_{z_{1\sim 6}} \frac{z_1 z_2}{(z_1^2 z_2^2 - t)(z_4 z_6 - z_1^2)(z_3 z_5 - z_2^2)(1 - z_3 - z_4)(1 - z_5 - z_6)(1 - z_1 - z_2)},$$

avec l'ordre $t \prec z_1 \prec z_2 \prec z_3 \prec z_4 \prec z_5 \prec z_6$. La réduction géométrique s'applique successivement par rapport aux variables z_1, z_3, z_4 et z_5. Par exemple, pour la première réduction, les pôles en z_1, regroupés en classes de conjugaison, sont $\left\{\pm t z_2^{-\frac{1}{2}}\right\}$, $\left\{\pm z_4^{\frac{1}{2}} z_6^{\frac{1}{2}}\right\}$ et $\{1 - z_2\}$. La première paire de racines conjuguées est $\prec z_1$, alors que la deuxième est $\succ z_1$. La racine rationnelle est $\succ z_1$. Ainsi

$$\sum_{n\geqslant 0} u_n t^n = \operatorname*{res}_{z_{2\sim 6}} \frac{(1 - z_2) z_2^3}{\left(t - (1 - z_2)^2 z_2^2\right)(1 - z_3 - z_4)\left(z_2^2 - z_3 z_5\right)(1 - z_5 - z_6)\left(t - z_2^2 z_4 z_6\right)}.$$

Au final, on obtient que

$$\sum_{n\geqslant 0} u_n t^n = \operatorname*{res}_{z_4, z_6} \frac{(z_6 - 1) z_6^3}{(t - z_6^2 (z_6 - 1)^2)((z_4 - 1)t - z_4 z_6^2 (z_6^2 + z_4 - 1))}.$$

L'algorithme du chapitre II permet de calculer (en une seconde environ) un opérateur différentiel annulant la série génératrice :

$$\begin{aligned} f &16t^4(256t^2 + 736t + 81)(16t - 1)^2 \partial_t^6 \\ &+ 16t^3(16t - 1)(86016t^3 + 256256t^2 + 20976t - 1053)\partial_t^5 \\ &+ 4t^2(36601856t^4 + 113760256t^3 + 6103168t^2 - 908088t + 14823)\partial_t^4 \\ &+ 16t(22691840t^4 + 75716608t^3 + 6677824t^2 - 459552t + 3645)\partial_t^3 \\ &+ (305827840t^4 + 1109626112t^3 + 139138736t^2 - 4247073t + 9720)\partial_t^2 \\ &+ (60272640t^3 + 244005120t^2 + 42117840t - 374625)\partial_t + 691200t^2 + 3369600t + 996300 \end{aligned}$$

Les racines du polynôme indiciel sont 0, 1, $-\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2}$. C'est une situation plutôt rare : l'opérateur semble bien être l'opérateur minimal annulant les périodes de la fraction qui nous intéresse, mais ce n'est pas l'opérateur minimal de la série. Bien sûr, ce n'est pas important en ce qui concerne la preuve de l'identité §25.1.

Concernant le membre de droite de l'identité, on trouve la formule

$$\sum_{n\geqslant 0} (2n + 1)\binom{2n}{n}^2 t^n = \operatorname*{res}_{z_1, z_2} \frac{t + u_2(u_2 - 1)u_1(u_1 - 1)}{(t - u_2(u_2 - 1)u_1(u_1 - 1))^2},$$

à laquelle le critère de simplification ne s'applique pas. On calcule (en 0,1s environ) un opérateur annulateur :

$$t(16t-1)\partial_t^2 + (48t-1)\partial_t + 12.$$

L'identité d'Andrews-Paule suit par le test d'égalité expliqué au §22.

Les paragraphes suivants prouvent d'autres identités sur le même modèle. Les représentations intégrales sont obtenues avec l'implémentation et ses variantes décrites au §13. J'ai seulement mis en évidence les éléments importants. Les séries génératrices ont toutes été obtenues avec la méthode automatisée présentée ici. Les temps de calcul des opérateurs sont tous inférieurs à 4 secondes.

§26 STREHL. $-\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2\binom{n+k}{k}^2 = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n+k}{k}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}^3$

s.g.m.g. [18] $= \operatorname*{res}_{z_{1\sim 3}} \dfrac{1}{(1-z_1)(1-z_2)(1-z_3)z_1z_2z_3 - t(z_1+z_2z_3-z_1z_2z_3)}$

s.g.m.d. [19] $= \operatorname*{res}_{z_{1\sim 3}} \frac{1}{(1-z_1)(1-z_2)(1-z_3)z_1z_2z_3-t(1-z_3-z_2(1-(2+z_1(1-z_2)(1-z_3))z_3))}$

op. ann. [20] $= t^2(t^2-34t+1)\partial_t^3 + 3t(2t^2-51t+1)\partial_t^2 + (7t^2-112t+1)\partial_t + t - 5$

Voir Strehl, « Binomial identities ».

§27. $-\displaystyle\sum_{r\geqslant 0}\sum_{s\geqslant 0}(-1)^{n+r+s}\binom{n}{r}\binom{n}{s}\binom{n+s}{s}\binom{n+r}{r}\binom{2n-r-s}{n} = \sum_{k\geqslant 0}\binom{n}{k}^4$

s.g.m.g. $= \operatorname*{res}_{z_{1\sim 3}} \dfrac{1}{(1-z_1)(1-z_2)(1-z_3)z_1z_2z_3 + (z_2-z_3)(z_1-z_3)t}$

s.g.m.d. $= \operatorname*{res}_{z_{1\sim 3}} \frac{1}{(1-z_1)(1-z_2)(1-z_3)z_1z_2z_3+(1-z_1-z_2)z_3t-(1-z_1)(1-z_2)t}$

op. ann. $= t^2(t^2-34t+1)\partial_t^3 + 3(2t^2-51t+1)\partial_t^2 t + (7t^2-112t+1)\partial_t + t - 5$

Voir Graham, Knuth et Patashnik, *Concrete mathematics*, p. 33, et Wegschaider, « Computer generated proofs of binomial multi-sum identities », §5.7.6.

§28. $-\displaystyle\sum_{k=0}^{n_1+2n_2}\sum_{j\geqslant 0}(-1)^j\binom{k}{j}\binom{2n_2+n_1-k}{2n_2-j}\binom{n_1}{k-j} = 2^{n_1}\binom{n_1+n_2}{n_1}$, avec $n_1, n_2 \geqslant 0$.

s.g.m.d. = s.g.m.g. $= \dfrac{1}{1-2t_1-t_2}$

Ici, la série génératrice est rationnelle et la réduction géométrique permet de la calculer entièrement, il n'y a pas besoin de calculer une intégrale.

18. Série génératrice du membre gauche
19. Série génératrice du membre droit
20. Opérateur annulateur

Voir Wegschaider, « Computer generated proofs of binomial multi-sum identities », p. 90.

§29 DIXON. — $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k\binom{2n}{k}^3 = (-1)^n\frac{(3n)!}{n!^3}$

s.g.m.g. $= \operatorname*{res}_{z_1\rightsquigarrow 2} \dfrac{(1-z_2)(1-z_1)z_1z_2}{z_1^2z_2^2(1-z_2)^2(1-z_1)^2-(1-z_1-z_2)^2t}$

s.g.m.d. $= \operatorname*{res}_{z_1\rightsquigarrow 3} \dfrac{1}{t+z_1z_2(1-z_1-z_2)}$

op. ann. $= t(27t+1)\partial_t^2 + (54t+1)\partial_t + 6$

Voir Dixon, « On the sum of the cubes of the coefficients in a certain expansion by the binomial theorem ».

§30 MORIARTY. — $\displaystyle\sum_{k=n_1}^{n_2}(-4)^k\binom{k}{m}\frac{n}{n+k}\binom{n+k}{2k} = (-1)^n4^m\frac{n}{n+m}\binom{n+m}{2m}$

Ce n'est pas clairement une somme binomiale, cependant, si on constate que

$$\frac{n}{n+k}\binom{n+k}{2k} = \binom{n+k-1}{2k} + \frac{1}{2}\binom{n+k-1}{2k-1},$$

alors c'est évident.

s.g.m.d. = s.g.m.g. $= \dfrac{1}{2}\dfrac{(1-t_1)(1+t_1)}{t_1^2+4t_1t_2+2t_1+1}$

Voir Egorychev, *Integral representation and the computation of combinatorial sums*, p. 11.

PERSPECTIVES

À court terme, la première question qui se pose est la généralisation des algorithmes d'intégrations présentés aux chapitres I et II à des fonctions de la forme Re^f, où R est une fraction rationnelle et f une fonction, qui pourrait être une forme linéaire, un polynôme, ou même une fraction rationnelle. Cela semble accessible sans changer beaucoup les méthodes puisque l'intégration, telle que présentée ici, d'une fraction a/f passe en fait par l'intégration de ae^f. Il faudra ensuite étudier comment les correspondances du chapitre III entre intégrales rationnelles et sommes binomiales s'étendent si l'on considère des intégrales plus générales. On peut imaginer pouvoir traiter des sommes hypergéométriques, et non plus seulement des sommes binomiales.

Concernant le travail sur les bornes, une amélioration semble possible sur l'étude de degré des équations de Picard-Fuchs. Rappelons que nous avons obtenu que le degré de l'équation de Picard-Fuchs d'une intégrale $\oint a/f$ à n variables et un paramètre est un $O(\mathrm{N}^{3n}d_t)$ quand N tend vers ∞, où N est le degré de la fraction par rapport aux variables d'intégration, et d_t le degré par rapport au paramètre — pour l'énoncé précis, voir chapitre I, théorème §2.1. Pour $n = 1$, cette borne devient $O(\mathrm{N}^3 d_t)$. Or il est démontré [1] dans ce cas que le degré est seulement $O(\mathrm{N}^2 d_t)$. Il semble que pour un n général, le degré soit $O(\mathrm{N}^{2n} d_t)$. Comment le démontrer ? Une amélioration de cette borne pourrait ensuite se refléter dans la complexité. Il est possible de relier le degré de l'équation de Picard-Fuchs à l'ordre des pôles de son wronskien, ce qui donne à la fois une formulation plus intrinsèque de cette question et une piste pour y répondre.

Un problème beaucoup plus difficile est la conjecture de Dimca, [2] ou plutôt comment la contourner. J'ai montré comment utiliser des bases de Gröbner commutatives et de l'algèbre linéaire pour calculer des intégrales de fractions rationnelles. Les mêmes méthodes s'appliquent pour le calcul de toute la cohomologie de Rham des hypersurfaces projectives, ce qui est un objectif intéressant, mais on se heurte alors à la conjecture de Dimca. Par ailleurs, la théorie des $\mathcal{D}$-modules a produit des

1. Bostan, Chen, Chyzak et Li, « Complexity of creative telescoping for bivariate rational functions ».
2. Dimca, « On the de Rham cohomology of a hypersurface complement » ; voir aussi chap. II, §12.3.

algorithmiques remarquables, dont certains s'appliquent au calcul de la cohomologie de Rham, mais leur implémentation est délicate et leur efficacité souffre de l'utilisation de bases de Gröbner non commutatives (qui n'ont pas encore connu les mêmes progrès que les bases de Gröbner commutatives). En revanche, leur correction n'est pas conjecturale. *Peut-on s'inspirer de ces méthodes pour suppléer au cas par cas à la conjecture de Dimca, au prix de calculs supplémentaires mais raisonnables ?*

Concernant les sommes binomiales, la question de la reconstruction en forme close des suites entières m'interpelle. En calcul formel, on sait parfois reconstruire un objet à partir d'une information partielle. Mettons, par exemple, que le calcul numérique de l'aire d'un pentagone régulier de côté 1 donne l'approximation

$$\mathrm{A} \simeq 1{,}7204774005889669228.$$

À partir de cette approximation à vingt chiffres, on peut *deviner*, de manière automatique, en quelques millisecondes, qu'il pourrait s'agir du nombre algébrique

$$\mathrm{A} \stackrel{?}{=} \tfrac{1}{4}\sqrt{25 + 10\sqrt{5}},$$

que l'on trouve comme solution de l'équation $256\mathrm{A}^4 - 800\mathrm{A}^2 + 125 = 0$. Autrement dit, on reconstruit une forme close à partir d'une approximation. On peut ensuite essayer de démontrer que ce nombre est exactement l'aire du pentagone considéré. Cette démonstration est une tout autre affaire, mais connaitre à l'avance le résultat peut aider. Cette démarche, consistant à reconstruire une forme close ou une équation, par n'importe quel moyen, puis essayer de prouver que l'objet reconstruit est correct, a eu de nombreuses applications en mathématiques.

De la même manière, imaginons qu'on s'intéresse au nombre M_n, qui compte le nombre de façons différentes de tracer des cordes disjointes entre n points disposés sur un cercle.[3] Je peux écrire un programme très naïf qui calcule ces nombres par énumération directe. Il sera trop inefficace pour calculer M_{1000}, mais assez rapide pour calculer les quinze premières valeurs :

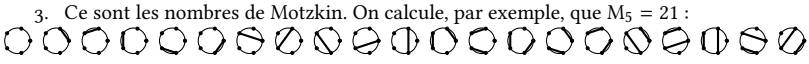
$$1, 1, 2, 4, 9, 21, 51, 127, 323, 835, 2188, 5798, 15511, 41835, 113634 \ldots$$

Et ces premières valeurs suffisent pour *deviner* la relation de récurrence

$$(n+2)\mathrm{M}_n = (2n+1)\mathrm{M}_{n-1} + (3n-3)\mathrm{M}_{n-2}.$$

On peut ensuite essayer de prouver rigoureusement cette égalité. (Ce qui permettra

3. Ce sont les nombres de Motzkin. On calcule, par exemple, que $\mathrm{M}_5 = 21$:



ensuite de calculer très rapidement M_{1000}.) Quel que soit la complexité de la récurrence, si elle existe et si elle est linéaire et à coefficients polynomiaux alors on pourra la reconstruire pour autant qu'on dispose d'assez de valeurs. Mais comment deviner que

$$M_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \left(\binom{2k+2}{k+1} - \binom{2k+2}{k+2} \right) ?$$

Si on parvient à reconstruire cette formule, d'une manière ou d'une autre, rigoureuse ou non, alors on peut la démontrer rigoureusement : il suffit de vérifier que M_n et la somme binomiale *devinée* vérifient la même récurrence et les mêmes conditions initiales.

L'équivalence entre sommes binomiales et diagonales permet de reformuler la question : pour reconstruire une somme binomiale, on peut passer par la reconstruction d'une diagonale. Dans le cas des nombres de Motzkin, on peut imaginer *deviner* que

$$\sum_{n \geqslant 0} M_n t^n = \operatorname{diag} \left(\frac{1 - x + 2xy - x^2 + x^2 y}{(1 - y - xy - x^2 y)(1 - y)} \right),$$

et retrouver ensuite la somme binomiale ci-dessus. *Comment reconstruire la fraction rationnelle dont la diagonale est une série donnée ?* Une première approche consiste à fixer un nombre de variables, un degré pour le dénominateur et un autre pour le numérateur, déterminant ainsi un nombre fini de coefficients indéterminés. Pour chaque n, l'égalité de M_n avec le n^{e} coefficient diagonal donnera une équation. Il suffira alors de trouver une solution à ce système d'équations algébriques. C'est quelque chose que l'on sait faire. Malheureusement, le nombre de coefficients devient rapidement important et la taille des équations astronomique, ce qui rend l'approche impraticable en l'état.

La réponse à cette question complèterait le paysage déjà fourni de l'algorithmique des suites d'entiers — voir la figure 4 — et aurait de nombreuses applications : la découverte d'identité bien sûr, mais aussi la démonstration de certaines propriétés arithmétiques. Par exemple, la question de démontrer, le cas échéant, qu'une suite définie par récurrence (linéaire et à coefficients polynomiaux) et conditions initiales ne prend que des valeurs entières est une question difficile. On ne sait traiter qu'au cas par cas, alors que pour une suite donnée comme diagonale de fraction rationnelle, c'est souvent évident.

Pour quelles suites peut-on espérer pouvoir reconstruire une diagonale ? C'est l'objet de la conjecture de Christol : elle présume que si une série entière, à coefficients entiers, a un rayon de convergence non nul et est solution d'une équation différentielle linéaire à coefficients polynomiaux, alors c'est la diagonale d'une

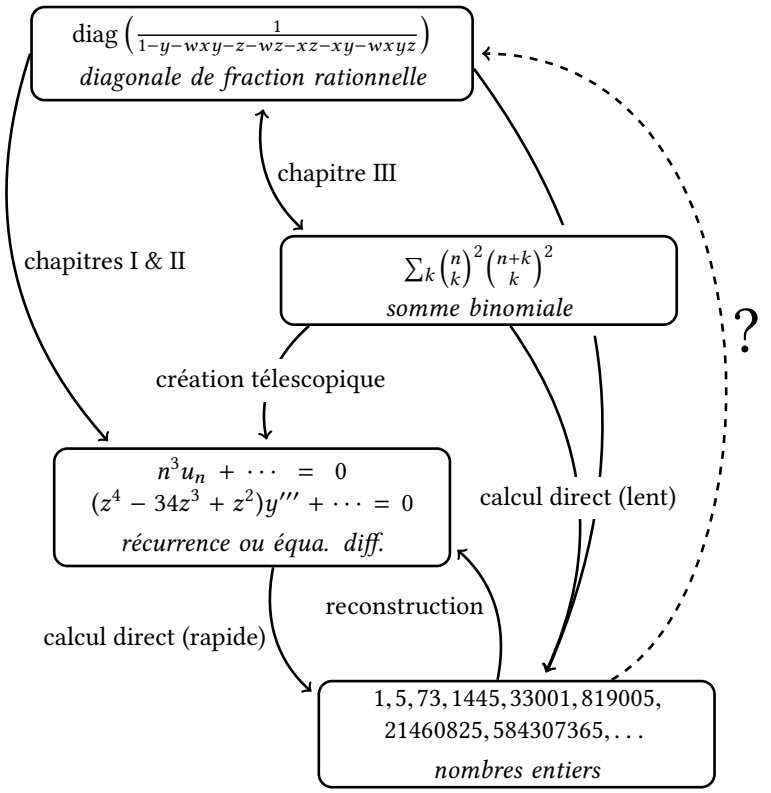


Figure 4. Différentes représentations des suites d'entiers et les transformations qui les relient.

fraction rationnelle. Si la conjecture de Christol est vraie, alors la reconstruction de diagonale a une portée très générale. (Le fait que la conjecture existe lui donne déjà une portée appréciable.) Pour le moment la conjecture est très ouverte, même dans des cas qu'on imagine simples, comme la série hypergéométrique suivante, exhibée par Christol, dont on ne sait pas si c'est une diagonale de fraction rationnelle :

$$ {}_3\mathrm{F}_2\left(\begin{matrix}\frac{1}{9} & \frac{4}{9} & \frac{5}{9} \\ \frac{1}{3} & 1\end{matrix} \;\middle|\; 3^6 t\right) \overset{\text{déf}}{=} \sum_{n=0}^{n} \frac{3^{6n}(1/9)_n(4/9)_n(5/9)_n}{(1/3)_n(1)_n} \frac{t^n}{n!}, $$

où $(a)_n$ désigne $\prod_{k=0}^{n-1}(k+a)$.

BIBLIOGRAPHIE

Timothy G. Abbott, Kiran S. Kedlaya et David Roe, « Bounding Picard numbers of surfaces using p-adic cohomology », *Arithmetics, geometry, and coding theory (AGCT 2005)*, t. 21, Sémin. Congr. Paris : Soc. Math. France, 2010, p. 125–159.

Boris Adamczewski et Jason P. Bell, « Diagonalization and rationalization of algebraic Laurent series », *Ann. Sci. École Norm. Sup.* 4^{e} sér. 46.6 (2013), p. 963–1004.

Gert Almkvist, « The art of finding Calabi-Yau differential equations », *Gems in experimental mathematics*, t. 517, Contemp. Math. Providence, RI : Amer. Math. Soc., 2010, p. 1–18.

Gert Almkvist, Christian van Enckevort, Duco van Straten et Wadim Zudilin, *Tables of Calabi–Yau equations*, arXiv :math/0507430, 2010.

Moa Apagodu et Doron Zeilberger, « Multi-variable Zeilberger and Almkvist-Zeilberger algorithms and the sharpening of Wilf- Zeilberger theory », *Adv. in Appl. Math.* 37.2 (2006), p. 139–152.

Roger Apéry, « Irrationalité de $\zeta(2)$ et $\zeta(3)$ », *Astérisque* 61.11–13 (1979).

Victor Batyrev et Maximilian Kreuzer, « Constructing new Calabi-Yau 3-folds and their mirrors via conifold transitions », *Adv. Theor. Math. Phys.* 14.3 (2010), p. 879–898.

Victor Batyrev et Duco van Straten, « Generalized hypergeometric functions and rational curves on Calabi-Yau complete intersections in toric varieties », *Comm. Math. Phys.* 168.3 (1995), p. 493–533.

Frits Beukers, « Irrationality of π^2, periods of an elliptic curve and $\Gamma_1(5)$ », *Diophantine approximations and transcendental numbers (Luminy, 1982)*, t. 31, Progr. Math. Mass. : Birkhäuser Boston, 1983, p. 47–66.

Frits Beukers et C. A. M. Peters, « A family of K3 surfaces and $\zeta(3)$ », *J. Reine Angew. Math.* 351 (1984), p. 42–54.

Wieb Bosma, John Cannon et Catherine Playoust, « The Magma algebra system. I. The user language », *J. Symbolic Comput.* 24.3-4 (1997), Computational algebra and number theory (London, 1993), p. 235–265.

Alin Bostan, « Algorithmique efficace pour des opérations de base en Calcul formel », thèse de doct., École polytechnique, 2003.

Alin Bostan, Shaoshi Chen, Frédéric Chyzak et Ziming Li, « Complexity of creative telescoping for bivariate rational functions », *Proceedings of the 35th international symposium on symbolic and algebraic computation*, ISSAC '10, Munich, Germany : ACM, 2010, p. 203–210.

Alin Bostan, Pierre Lairez et Bruno Salvy, « Creative telescoping for rational functions using the Griffiths–Dwork method », *Proceedings of the 38th international symposium on symbolic and algebraic computation*, ISSAC '13, Boston, Maine, USA : ACM, 2013, p. 93–100.

Nicolas Bourbaki, « Groupes topologiques », *Topologie générale*, Éléments de mathématiques, Hermann, 1971, chap. III.

Shaoshi Chen, Manuel Kauers et Michael F. Singer, « Telescopers for Rational and Algebraic Functions via Residues », *Proceedings of the 37th International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation*, sous la dir. de Joris van der Hoeven et Mark van Hoeij, 2012, p. 130–137.

Gilles Christol, « Diagonales de fractions rationnelles », *Séminaire de Théorie des Nombres, Paris 1986–87*, t. 75, Progr. Math. Boston, MA : Birkhäuser Boston, 1988, p. 65–90.

– « Diagonales de fractions rationnelles et équations de Picard-Fuchs », *Study group on ultrametric analysis, 12th year, 1984/85, No. 1*, Paris : Secrétariat Math., 1985, Exp. No. 13, 12.

– « Diagonales de fractions rationnelles et equations différentielles », *Study group on ultrametric analysis, 10th year : 1982/83, No. 2*, Paris : Inst. Henri Poincaré, 1983, Exp. No. 18, 10.

Frédéric Chyzak, « An extension of Zeilberger's fast algorithm to general holonomic functions », *Discrete Math.* 217.1-3 (2000), Formal power series and algebraic combinatorics (Vienna, 1997), p. 115–134.

– *The ABC of Creative Telescoping : Algorithms, Bounds, Complexity*, Mémoire d'habilitation à diriger les recherches, 2014.

Tom Coates, Alessio Corti, Sergey Galkin, Vasily Golyshev et Alexander Kasprzyk, *Mirror symmetry and Fano manifolds*, 2012, arXiv : `abs/1212.1722`.

Don Coppersmith et Shmuel Winograd, « Matrix multiplication via arithmetic progressions », *J. Symbolic Comput.* 9.3 (1990), p. 251–280.

David A. Cox et Sheldon Katz, *Mirror symmetry and algebraic geometry*, Mathematical Surveys and Monographs 68, Providence, RI : American Mathematical Society, 1999.

David A. Cox, John Little et Donal O'Shea, *Using algebraic geometry*, GTM, New York, NY, USA : Springer, 1998.

Steven Dale Cutkosky, *Resolution of singularities*, t. 63, Graduate Studies in Mathematics, Providence, RI : American Mathematical Society, 2004, p. viii+186.

Pierre Deligne, Bernard Malgrange et Jean-Pierre Ramis, *Singularités irrégulières : correspondances et documents*, Documents mathématiques 5, Paris : Société mathématique de France, 2007.

Jan Denef et Leonard Lipshitz, « Algebraic power series and diagonals », *J. Number Theory* 26.1 (1987), p. 46–67.

Alexandru Dimca, « On the de Rham cohomology of a hypersurface complement », *Amer. J. Math.* 113.4 (1991), p. 763–771.

– « On the Milnor fibrations of weighted homogeneous polynomials », *Compositio Math.* 76.1-2 (1990), p. 19–47.

Alfred C. Dixon, « On the sum of the cubes of the coefficients in a certain expansion by the binomial theorem », *Messenger of mathematics* 20 (1891), p. 79–80.

Bernard Dwork, « On the zeta function of a hypersurface », *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* 12 (1962), p. 5–68.

– « On the zeta function of a hypersurface : II », *Ann. of Math.* 2^{e} sér. 80 (1964), p. 227–299.

Georgy P. Egorychev, *Integral representation and the computation of combinatorial sums*, t. 59, Translations of Mathematical Monographs, Providence, RI : American Mathematical Society, 1984.

David Eisenbud, *Commutative algebra : with a view toward algebraic geometry*, Graduate Texts in Mathematics 150, New York : Springer-Verlag, 1995.

Leonhard Euler, « Specimen de constructione aequationum differentialium sine indeterminatarum separatione », *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae* 6 (1733), (Opera omnia, 1^{e} série, t. XX), p. 168–174.

Mary Celine Fasenmyer, « Some generalized hypergeometric polynomials », *Bull. Amer. Math. Soc.* 53 (1947), p. 806–812.

Harry Furstenberg, « Algebraic functions over finite fields », *J. Algebra* 7 (1967), p. 271–277.

André Galligo, « Some algorithmic questions on ideals of differential operators », *EUROCAL '85, Vol. 2 (Linz, 1985)*, t. 204, Lecture Notes in Comput. Sci. Berlin : Springer, 1985, p. 413–421.

Scott Garrabrant et Igor Pak, « Counting with irrational tiles », Prépublication, 2014.

Joachim von zur Gathen et Jürgen Gerhard, *Modern computer algebra*, New York : Cambridge University Press, 1999, p. xiv+753.

Israel M. Gel′fand, Mikhail M. Kapranov et Andrei V. Zelevinsky, *Discriminants, resultants, and multidimensional determinants*, Mathematics : Theory & Applications, Boston, MA : Birkhäuser Boston Inc., 1994, p. x+523.

Ralf Gerkmann, « Relative rigid cohomology and deformation of hypersurfaces », *Int. Math. Res. Pap. IMRP* 1 (2007), Art. ID rpm003, 67.

Ronald L. Graham, Donald E. Knuth et Oren Patashnik, *Concrete mathematics*, A foundation for computer science, Addison-Wesley Publishing Company, Advanced Book Program, Reading, MA, 1989, p. xiv+625.

Phillip A. Griffiths, « On the periods of certain rational integrals », *Ann. of Math.* 2^{e} sér. 90 (1969), p. 460–541.

Phillip A. Griffiths et Joseph Harris, *Principles of algebraic geometry*, New York, NY, USA : Wiley-Interscience, 1978.

Alexandre Grothendieck, « On the de Rham cohomology of algebraic varieties », *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* 29 (1966), p. 95–103.

Anthony J. Guttmann, « Lattice Green's functions in all dimensions », *J. Phys. A* 43.30 (2010), p. 305205, 26.

Charles Hermite, « Sur l'intégration des fractions rationnelles », *Ann. Sci. École Norm. Sup.* 2^{e} sér. 1 (1872), p. 215–218.

Mark van Hoeij, « Factorization of differential operators with rational functions coefficients », *J. Symbolic Comput.* 24.5 (1997), p. 537–561.

Christian Houzel, *La géométrie algébrique*, Librairie scientifique et technique, Paris : Albert Blanchard, 2002.

Gérard Huet, « Confluent reductions : abstract properties and applications to term rewriting systems », *J. Assoc. Comput. Mach.* 27.4 (1980), p. 797–821.

Edward L. Ince, *Ordinary Differential Equations*, Dover Publications, New York, 1944.

Claude-Pierre Jeannerod et Gilles Villard, « Essentially optimal computation of the inverse of generic polynomial matrices », *J. Complexity* 21.1 (2005), p. 72–86.

Nicholas M. Katz, « Algebraic solutions of differential equations : p-curvature and the Hodge filtration », *Invent. Math.* 18 (1972), p. 1–118.

– « Nilpotent connections and the monodromy theorem : Applications of a result of Turrittin », *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* 39 (1970), p. 175–232.
– « On the differential equations satisfied by period matrices », *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* 35 (1968), p. 223–258.

Maxim Kontsevich et Don Zagier, « Periods », *Mathematics unlimited : 2001 and beyond*, Springer, 2001, p. 771–808.

Christoph Koutschan, « A fast approach to creative telescoping », *Math. Comput. Sci.* 4.2-3 (2010), p. 259–266.
– « Creative telescoping for holonomic functions », sous la dir. de Carsten Schneider et Johannes Blümlein, Texts & Monographs in Symbolic Computation, Springer, 2013, p. 171–194.
– « Lattice Green functions of the higher-dimensional face-centered cubic lattices », *J. Phys. A* 46.12 (2013), p. 125005, 14.

Pierre Lairez, *Computing periods of rational integrals*, 2014, arXiv : `abs/1404.5069`.

Daniel Lazard, « Algèbre linéaire sur $K[X_1, \ldots, X_n]$, et élimination », *Bull. Soc. Math. France* 105.2 (1977), p. 165–190.

François Le Gall, « Powers of tensors and fast matrix multiplication », *Proceedings of the 39th international symposium on symbolic and algebraic computation*, 2014.

Joseph Liouville, « Mémoire sur les transcendantes elliptiques de première et de seconde espèce, considérées comme fonctions de leur module », *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées* 5 (1840), p. 441–464.

Leonard Lipshitz, « The diagonal of a D-finite power series is D-finite », *J. Algebra* 113.2 (1988), p. 373–378.

Francis S. Macaulay, *The algebraic theory of modular systems*, Cambridge tracts in mathematics and mathematical physics 19, Cambridge, England : University Press, 1916.

Yuri V. Matiyasevich, *Hilbert's tenth problem*, Foundations of Computing Series, Translated from the 1993 Russian original by the author, Cambridge, MA, USA : MIT Press, 1993.

Pavel Metelitsyn, « How to compute the constant term of a power of a Laurent polynomial efficiently », *CoRR* (2012), arXiv : `abs/1211.3959`.

Paul Monsky, « Finiteness of de Rham cohomology », *Amer. J. Math.* 94 (1972), p. 237–245.

David R. Morrison, « Picard-Fuchs equations and mirror maps for hypersurfaces », *Essays on mirror manifolds*, Int. Press, Hong Kong, 1992, p. 241–264.

Maxwell H. A. Newman, « On theories with a combinatorial definition of "equivalence." », *Ann. of Math.* 2e sér. 43 (1942), p. 223–243.

Toshinori Oaku, « Algorithms for integrals of holonomic functions over domains defined by polynomial inequalities », *J. Symbolic Comput.* 50 (2013), p. 1–27.

Toshinori Oaku et Nobuki Takayama, « An algorithm for de Rham cohomology groups of the complement of an affine variety via D-module computation », *J. Pure Appl. Algebra* 139.1-3 (1999), Effective methods in algebraic geometry (Saint-Malo, 1998), p. 201–233.

Marko Petkovšek, Herbert S. Wilf et Doron Zeilberger, A = B, With a foreword by Donald E. Knuth, With a separately available computer disk, A K Peters, Ltd., Wellesley, MA, 1996, p. xii+212.

Émile Picard, « Sur les intégrales doubles de fonctions rationnelles dont tous les résidus sont nuls », *Bulletin des sciences mathématiques, série 2* 26 (1902).

Émile Picard et Georges Simart, *Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes*, 2 t., Gauthier-Villars et fils, 1897–1906.

Henri Poincaré, « Sur les résidus des intégrales doubles », *Acta Math.* 9.1 (1887), p. 321–380.

Alfred van der Poorten, « A proof that Euler missed… : Apéry's proof of the irrationality of ζ(3), an informal report », *Math. Intelligencer* 1.4 (1978/79), p. 195–203.

Francis J. Rayner, « Algebraically closed fields analogous to fields of Puiseux series », *J. London Math. Soc.* 2e sér. 8 (1974), p. 504–506.

Georges de Rham, « Sur l'analysis situs des variétés à *n* dimensions », thèse de doct., Faculté des sciences de Paris, 1931.

Duco van Straten, *Calabi-Yau Operators Database*, URL : `http://www.mathematik.uni-mainz.de/CYequations/db/`.

Volker Strehl, « Binomial identities : Combinatorial and algorithmic aspects », *Discrete Math.* 136.1-3 (1994), Trends in discrete mathematics, p. 309–346.

Nobuki Takayama, « An algorithm of constructing the integral of a module — an infinite dimensional analog of Gröbner basis », *Proceedings of the 15th International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation*, Tokyo, Japan : ACM, 1990, p. 206–211.

Peter Verbaeten, « The automatic construction of pure recurrence relations », *SIGSAM Bull.* 8.3 (août 1974), p. 96–98.

Robert J. Walker, *Algebraic Curves*, Princeton University Press, 1950.

Kurt Wegschaider, « Computer generated proofs of binomial multi-sum identities », mém.de mast., Johannes Kepler Universität, Linz, Österreich, 1997.

Charles A. Weibel, *An introduction to homological algebra*, t. 38, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Cambridge : Cambridge University Press, 1994.

Herbert S. Wilf et Doron Zeilberger, « An algorithmic proof theory for hypergeometric (ordinary and "q") multisum/integral identities », *Invent. Math.* 108.3 (1992), p. 575–633.

Doron Zeilberger, « A holonomic systems approach to special functions identities », *J. Comput. Appl. Math.* 32.3 (1990), p. 321–368.

– « The method of creative telescoping », *J. Symbolic Comput.* 11.3 (1991), p. 195–204.

Wei Zhou, « Fast order basis and kernel basis computation and related problems », thèse de doct., University of Waterloo, 2013.