

Contribution à la détection, à la localisation d'endommagements par des méthodes d'analyse dynamique des modifications structurales d'une poutre avec tension : application au suivi des câbles du génie civil

Thi Thu Ha Le

▶ **To cite this version:**

Thi Thu Ha Le. Contribution à la détection, à la localisation d'endommagements par des méthodes d'analyse dynamique des modifications structurales d'une poutre avec tension : application au suivi des câbles du génie civil. Autre. Université Paris-Est, 2014. Français. NNT : 2014PEST1028 . tel-01127429

HAL Id: tel-01127429
https://pastel.hal.science/tel-01127429

Submitted on 14 Apr 2015

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



THÈSE DE DOCTORAT

pour l'obtention du diplôme de

DOCTEUR
DE
L'UNIVERSITÉ PARIS-EST

Spécialité : *Dynamique et Structure*

présentée par

Thi Thu Ha LE PETIT

Contribution à la détection et à la localisation d'endommagements par des méthodes d'analyse dynamique des modifications structurales d'une poutre avec tension. Application au suivi des câbles du génie civil

soutenue le 04 avril 2014

Devant le jury composé de :

Président :	JC. GOLINVAL	(ULg)
Rapporteurs :	F. BOLAERS	(URCA)
	F. THOUVEREZ	(ECL)
Examinateurs :	L. GARIBALDI	(POLITO)
	JC. GOLINVAL	(ULg)
Directeur de thèse :	P. ARGOUL	(ENPC)
Co-Directeur de thèse :	L. DIENG	(IFSTTAR)
Conseillère scientifique :	N. POINT	(ENPC)

Remerciements

J'exprime d'abord ma profonde gratitude envers ma conseillère Nelly Point qui m'a fait profiter de sa grande qualité scientifique et m'a apporté une aide précieuse dans la rédaction de mon mémoire de thèse.

Je remercie aussi mes deux directeurs de thèse Pierre Argoul et Lamine Dieng qui ont dirigé le travail et m'ont fait confiance. C'est à eux que je dois cette opportunité de travailler sur cette thèse. Je tiens à rendre hommage leurs qualités scientifiques et expérimentales.

J'adresse mes remerciements à mes collègues Gwendal Cumunel et Gian-Luca Ruocci qui m'ont fait partager leurs avis intéressants sur la partie expérimentale et qui m'ont aidé à réaliser des essais expérimentaux sur la poutre au laboratoire Navier.

Je remercie également l'ensemble du laboratoire de l'IFSTTAR à Nantes qui m'a accueilli chaleureusement et surtout l'équipe des techniciens qui m'a permis de réaliser d'autres essais expérimentaux sur le câble.

Mes sincères remerciements vont aux deux rapporteurs Fabrice Bolaers et Fabrice Thouverez qui m'ont consacré leur temps et m'ont fait bénéficier de leur expertise pour finaliser mon travail. J'adresse mon vif remerciement à Jean-Claude Golinval pour m'avoir fait l'honneur de présider mon jury de thèse. Je remercie sincèrement l'examinateur Luigi Garibaldi qui a traversé les Alpes pour moi.

Je remercie chaleureusement l'ensemble du laboratoire Navier qui m'a permis de découvrir le monde de la recherche, ainsi que l'IFSTTAR qui a financé cette thèse.

Enfin, je tiens à remercier du fond du coeur ma famille au Vietnam pour leur soutien psychologique, ainsi que ma famille en France avec laquelle j'ai partagé aussi bien les moments les plus difficiles que les plus heureux.

Table des matières

1 État de l'art **8**
1.1 Les câbles utilisés dans les ouvrages d'art . . . 8
1.1.1 Généralités sur les câbles utilisés dans les ouvrages d'art . . . 8
1.1.2 Endommagements des câbles . . . 11
1.1.3 Modèle vibratoire du câble . . . 13
1.1.4 Synthèse . . . 14
1.2 Bibliographie des méthodes de détection et de localisation de l'endommagement . . . 14
1.2.1 Méthodes basées sur les fréquences . . . 15
1.2.2 Méthodes basées sur des déformées modales . . . 16
1.2.2.1 Méthodes basées directement sur des déformées modales . . . 16
1.2.2.2 Méthodes basées sur la courbure modale . . . 17
1.2.2.3 Méthodes basées sur la flexibilité . . . 18
1.2.2.4 Méthodes basées sur la rigidité modale . . . 18
1.2.3 Méthodes dans le domaine des fréquences . . . 20
1.2.4 Méthodes dans le domaine temps-fréquence . . . 20
1.2.5 Synthèse . . . 22
1.3 Bibliographie des méthodes d'identification modale . . . 22
1.3.1 Classification des méthodes d'identification modale . . . 22
1.3.2 Identification modale des systèmes mécaniques linéaires . . . 24
1.3.2.1 Méthodes dans le domaine temporel . . . 24
1.3.2.2 Méthodes dans le domaine fréquentiel . . . 25
1.3.2.3 Méthodes dans le domaine temps-fréquence . . . 25
1.3.3 Synthèse . . . 26

2 Modèle du comportement du câble sain **27**
2.1 Poutre d'Euler Bernoulli avec tension . . . 27
2.1.1 Problème aux valeurs propres . . . 28
2.1.2 Cas particulier : EI, μ sont constants . . . 30
2.1.2.1 Cas bi-appuyées . . . 31
2.1.2.2 Cas bi-encastrées . . . 31
2.1.3 Distinction des domaines de comportement : corde, poutre avec ou sans tension . . . 32
2.1.3.1 Critère1 : comparaison des fréquences . . . 32
2.1.3.2 Critère2 : Utilisation du coefficient γ_n . . . 35
2.1.4 Distinction des paramètres modaux selon deux conditions aux bords . . . 36
2.1.4.1 Valeurs propres . . . 36
2.1.4.2 Modes propres . . . 36
2.1.4.3 Courbures modales . . . 37
2.1.4.4 Synthèse . . . 42
2.1.5 Aspects énergétiques . . . 43
2.1.5.1 Energie mécanique et bilan énergétique . . . 43

2.1.5.2 Energie modale et énergie globale . . . 45
2.2 Discrétisation par éléments finis . . . 46
2.2.1 Méthode des éléments finis . . . 46
2.2.1.1 Discrétisation en espace . . . 46
2.2.1.2 Equation vibratoire du système discret . . . 48
2.2.2 Problème aux valeurs propres . . . 51
2.2.2.1 Equation du problème aux valeurs propres . . . 51
2.2.2.2 Orthogonalité des modes . . . 52
2.2.3 Réponse modale $q_n(t)$ . . . 53
2.2.4 Energie modal et énergie global . . . 54
2.3 Conclusion . . . 55

3 Essais expérimentaux et les endommagements étudiés 56
3.1 Présentation des essais expérimentaux réalisés . . . 56
3.1.1 Câble monotoron du laboratoire Ifsttar à Nantes . . . 57
3.1.2 Poutre tendue (ENPC) . . . 58
3.2 Simulations numériques à l'état sain du câble de Nantes . . . 61
3.2.1 Paramètres modaux avec différentes conditions aux bords . . . 61
3.2.2 Distribution de l'énergie modale . . . 64
3.2.3 Comparaisons de la réponse simulée avec celle mesurée expérimentalement . . . 68
3.3 Introduction de l'endommagement dans le modèle vibratoire . . . 72
3.3.1 Présentation de certains modèles existants pour la fissure de la poutre . . . 72
3.3.2 Propositions des modèles d'endommagements dans le câble . . . 73
3.4 Conclusion . . . 76

4 Identification modale fondée sur la POD ou la SOD à partir de la réponse libre 77
4.1 POD, SOD, rappels et conditions d'utilisation . . . 78
4.1.1 Autocorrélation . . . 78
4.1.1.1 Définitions générales . . . 78
4.1.1.2 Autocorrélation d'une matrice de mesures . . . 79
4.1.2 Rappels des méthodes POD et SOD . . . 81
4.1.2.1 POD (Proper orthogonal decomposition) . . . 81
4.1.2.2 SOD (Smooth orthogonal decomposition) . . . 83
4.1.2.3 Comparaison des deux méthodes précédentes . . . 85
4.1.3 Proposition de conditions d'application . . . 86
4.1.3.1 Choix du pas de temps . . . 86
4.1.3.2 Choix du temps d'observation . . . 87
4.2 Sensibilité de la méthode SOD aux conditions de mesure . . . 88
4.2.1 Sensibilité par rapport au nombre des points de mesure . . . 89
4.2.2 Sensibilité par rapport aux positions des points de mesure . . . 92
4.3 Identification modale sur des données expérimentales . . . 95
4.3.1 Le câble de Nantes . . . 95
4.3.1.1 SOD . . . 95
4.3.1.2 Méthode de "peak-picking" . . . 98
4.3.1.3 Transformation en ondelettes (TO) . . . 99
4.3.1.4 Comparaison et synthèse . . . 99
4.3.2 Application à la poutre bi-encastrée sans tension . . . 100
4.3.2.1 SOD . . . 100
4.3.2.2 Transformation en ondelettes . . . 103
4.3.2.3 Comparaison et synthèse . . . 104
4.4 Conclusion . . . 104
4.5 Annexe . . . 105

4.5.1 Cas sans amortissement . . . 105
4.5.1.1 Matrice $[r_{ij}]$ . . . 105
4.5.1.2 Matrice $[\dot{r}_{ij}]$ . . . 106
4.5.2 Cas avec amortissement . . . 107
4.5.2.1 Matrice $[r_{ij}]$ . . . 107
4.5.2.2 Matrice $[\dot{r}_{ij}]$ . . . 111

5 Variation relative des paramètres modaux entre un état sain et un état modifié - Application à la détection, la localisation et la quantification des défauts 112
5.1 Changement des paramètres modaux de l'état sain à l'état modifié . . . 112
5.1.1 Estimation analytique de la variation des paramètres modaux . . . 113
5.1.1.1 Avec des modifications du modèle 1 : ΔT, $\Delta EI(x)$, $\Delta\mu(x)$ . . . 113
5.1.1.2 Avec des modifications du modèle 2 : ΔT, $\Delta\mu(x)$, ressort de rotation de flexiblité c_b . . . 117
5.1.2 Sensibilité des paramètres modaux par rapport aux changements des caractéristiques 119
5.1.2.1 Changement de la tension . . . 120
5.1.2.2 Changement de la masse linéique . . . 120
5.1.2.3 Changement de la rigidité . . . 124
5.1.3 Synthèse . . . 126
5.2 Localisation et quantification à partir de deux essais . . . 127
5.2.1 Présentation de la méthode . . . 127
5.2.2 Poutres sans tension de la littérature . . . 129
5.2.2.1 Présentation des données expérimentales . . . 130
5.2.2.2 Localisation . . . 132
5.2.2.3 Quantification . . . 135
5.2.2.4 Influence de la position . . . 138
5.2.3 Poutre avec tension de l'ENPC . . . 142
5.3 Détection et localisation à partir d'une série d'essais . . . 143
5.3.1 Présentation de la méthode . . . 143
5.3.1.1 Détection . . . 143
5.3.1.2 Localisation . . . 144
5.3.2 Poutre avec tension de l'ENPC . . . 146
5.3.2.1 Détection . . . 148
5.3.2.2 Localisation . . . 150
5.4 Conclusion . . . 152
5.5 Annexes . . . 153

6 Méthode de détection et de localisation des défauts en utilisant la SVD 156
6.1 Présentation de la technique . . . 157
6.1.1 Rappels sur la SVD . . . 157
6.1.2 Utilisation de la SVD pour la détection et la localisation . . . 157
6.1.2.1 Détection avec la matrice des valeurs propres . . . 159
6.1.2.2 Détection et localisation avec la matrice des déformées modales . . . 159
6.2 Application à des données numériques . . . 160
6.2.1 Détection et localisation . . . 160
6.2.2 Sensibilité de la méthode par rapport au nombre de points de mesure . . . 167
6.2.3 Sensibilité de la méthode par rapport au nombre de défauts . . . 168
6.3 Conclusion . . . 172
6.4 Annexe . . . 173

7 Applications aux données expérimentales **177**
7.1 Le câble de Nantes . . . 177
7.1.1 Identification des paramètres modaux . . . 178
7.1.1.1 Méthode de peak-picking . . . 178
7.1.1.2 Méthode fondée sur la TO . . . 182
7.1.2 Détection et localisation par la méthode fondée sur la variation relative des fréquences 189
7.1.2.1 Détection . . . 189
7.1.2.2 Localisation . . . 189
7.1.3 Détection et localisation par la méthode utilisant la SVD . . . 193
7.2 La poutre avec tension de l'ENPC . . . 197
7.2.1 Identification des paramètres modaux . . . 197
7.2.1.1 Méthode de "peak-picking" . . . 197
7.2.1.2 Méthode fondée sur la TO . . . 199
7.2.2 Détection et localisation par la méthode fondée sur la variation relative des fréquences 199
7.2.2.1 Détection . . . 199
7.2.2.2 Localisation . . . 201
7.2.3 Détection et localisation par la méthode utilisant la SVD . . . 201
7.3 Conclusion . . . 204

Introduction générale

De nombreux câbles métalliques sont présents dans le domaine du génie civil, tels que les haubans, les suspentes ou encore les câbles de précontrainte. Au cours de leur existence, ces câbles subissent différentes formes de dégradation comme des ruptures de fils, de la fissuration ou de la corrosion... L'objectif de cette thèse est de mettre au point des méthodes pour détecter, localiser, quantifier et suivre l'évolution de l'endommagement dans le câble à partir de mesures vibratoires.

Il existe plusieurs méthodes d'évaluation de l'endommagement comme les méthodes acoustiques ou à ultrasons, les méthodes de champ magnétique, la radiographie, la méthode des courants Foucault ou les méthodes de champ thermique (Doherty, 1997). Toutes ces techniques exigent que la proximité du dommage soit connue et que la partie de la structure à inspecter soit facilement accessible. Dans cette thèse, nous nous limitons aux méthodes qui utilisent la réponse vibratoire.

L'idée de base réside dans le fait que les paramètres modaux mesurés dépendent des propriétés physiques de la structure (rigidité, masse, amortissement). De ce fait, les modifications pouvant intervenir sur les propriétés physiques ou mécaniques doivent être détectables au travers des changements des paramètres modaux. C'est pourquoi, dans cette thèse, nous nous intéressons aussi aux méthodes d'identification des paramètres modaux et en particulier à deux méthodes : la décomposition aux valeurs propres (ou POD en anglais) et la Décomposition Orthogonale Régularisée (ou SOD en anglais)

Afin de mettre au point des techniques pour détecter, localiser, quantifier et suivre l'évolution de l'endommagement dans le câble, nous nous intéressons d'abord au problème direct : le comportement vibratoire du câble à l'état sain et les changements de comportement à l'état modifié. Pour cela, nous utilisons le modèle 1 D linéaire de la poutre d'Euler Bernoulli avec tension. En pratique, il est difficile de maîtriser les conditions aux bords, nous nous intéressons donc seulement à deux conditions aux bords (bi-encastrées et bi-appuyées) et à savoir comment elles influencent les paramètres modaux.

Concernant l'étude du comportement du câble à l'état endommagé, afin de simuler l'endommagement, nous nous inspirons de deux modèles classiques de fissure dans la poutre de la littérature : une modification de la rigidité dans la zone endommagée ou l'apparition d'un ressort de rotation au niveau du défaut. Pour chacun de ces deux modèles, nous proposons une estimation analytique au premier ordre des variations des fréquences en fonction des modifications structurelles. Pour utiliser ces estimations analytiques et développer des méthodes de localisation, nous proposons ensuite deux cas d'étude : seulement deux essais correspondant à deux états (sain et endommagé) et une série d'essais (plusieurs essais de l'état sain à l'état endommagé). Pour ce second cas, nous nous intéressons à un autre outil mathématique, la décomposition en valeur singulière (SVD en anglais) et nous proposons une nouvelle méthode de détection et de localisation utilisant cet outil.

Au cours de la thèse, nous réalisons également deux expériences : la première sur un câble monotoron à l'IFSTTAR Nantes et la deuxième sur une poutre tendue en aluminium à l'ENPC. Nous appliquons ensuite les méthodes proposées sur les données expérimentales issues de ces deux expériences.

Ce mémoire est constitué de sept chapitres.

Le premier chapitre est consacré à un état de l'art concernant principalement les câbles, certaines méthodes d'identification des paramètres modaux et certaines méthodes d'identification de l'endommagement. Il est divisé en trois paragraphes. Dans le premier paragraphe, nous introduisons les propriétés

générales des câbles utilisés dans les ouvrages d'art ainsi que les principaux endommagements qu'ils subissent au cours du temps. Nous rappelons ensuite différents modèles de vibration du câble et faisons le choix du modèle 1D linéaire d'une poutre d'Euler-Bernoulli avec tension pour simuler le comportement du câble. Dans le deuxième paragraphe, les méthodes et outils mathématiques pour l'identification de l'endommagement sont résumés. Enfin, dans le dernier paragraphe, nous rappelons certaines méthodes classiques d'identification des paramètres modaux.

Le deuxième chapitre présente l'étude du comportement du câble à l'état sain en utilisant le modèle de poutre d'Euler Bernoulli avec tension. Dans ce modèle, les influences de la rigidité et de la tension sur le comportement du câble sont prises en compte. En négligeant l'influence de la rigidité ou de la tension, on obtient respectivement le modèle d'une corde et le modèle d'une poutre d'Euler Bernoulli sans tension. Nous comparons les trois modèles (corde, poutre avec tension, poutre sans tension) afin de distinguer leurs domaines d'application respectifs en fonction d'un paramètre dépendant de la tension, de la rigidité en flexion et de la longueur. Nous étudions les paramètres modaux pour deux conditions aux bords différentes (bi-encastrées ou bi-appuyées). Enfin, nous nous intéressons aux aspects énergétiques comme le bilan énergétique et l'énergie modale.

Dans le troisième chapitre, nous présentons les deux séries d'essais effectuées pendant la thèse : un câble à IFSTTAR Nantes et une poutre tendue à l'ENPC. Puis, des simulations numériques du câble sont réalisées afin d'étudier la différence des paramètres modaux due aux conditions aux limites, la redistribution des énergies modales et aussi pour comparer la réponse simulée avec la réponse mesurée expérimentalement. Enfin, deux modèles d'endommagement existants pour simuler un défaut dans une poutre sont présentés et pour le cas du câble, nous proposons des modèles pour introduire des endommagements dans l'équation vibratoire.

Dans le quatrième chapitre, nous étudions l'utilisation de la POD et de la SOD pour identifier les paramètres modaux. Nous comparons ces deux techniques d'identification et nous proposons ensuite des conditions d'utilisation portant sur le choix de la durée d'observation et du pas de temps. Ensuite, nous nous intéressons plus particulièrement à la méthode SOD. Des applications numériques sont réalisées pour étudier la sensibilité de cette méthode par rapport aux conditions de mesure (nombre et distribution des points de mesure). Enfin, nous présentons les résultats de l'application de cette méthode sur les données expérimentales d'un câble et d'une poutre et nous les comparons avec ceux provenant d'autres méthodes telles que le "peak picking" ou celle fondée sur la transformation en ondelettes.

Dans le cinquième chapitre, nous présentons les résultats de l'approximation au premier ordre de la variation des fréquences en fonction des modifications pour les deux modèles d'endommagements présentés dans le chapitre 3. Grâce à cette approximation, nous proposons une méthode de localisation à partir de deux essais correspondant à deux états différents de la structure (sain et endommagé). Des applications numériques et expérimentales sur des cas de poutres sont réalisées. Une méthode est également proposée pour la détection et la localisation, mais cette fois-ci, à partir d'une suite d'essais : cas où l'évolution de la tension en fonction des essais varie beaucoup et où la variation des fréquences dûe à l'endommagement peut être noyée dans la variation due à la tension. Cette méthode peut permettre de détecter l'apparition du défaut avant de le localiser. Nous testons aussi cette méthode sur le modèle numérique d'une poutre tendue.

Le sixième chapitre est consacré à une autre méthode de détection et de localisation à partir d'une série d'essais, fondée sur la SVD. L'idée est d'utiliser la SVD pour détecter le changement dû à l'endommagement, qui reste permanent après l'apparition du défaut. Les applications de la SVD sur des matrices d'évolution dans le temps des fréquences et des modes peuvent permettre de détecter et de localiser l'endommagement.

Dans le septième chapitre, nous présentons des applications des deux méthodes de détection et de localisation proposées dans les chapitres 5 et 6, sur deux expériences : le câble de IFSTTAR Nantes et la poutre de l'ENPC.

Enfin, le manuscrit est clos par une conclusion générale et plusieurs perspectives envisageables après notre étude.

Chapitre 1

État de l'art

1.1 Les câbles utilisés dans les ouvrages d'art

Cette première section concerne la "Bibliographie des câbles", elle commence par rappeler les propriétés générales des câbles utilisés dans les ouvrages d'art. Ensuite, le problème de la dégradation des câbles au cours du temps et les conséquences de l'endommagement sur les caractéristiques mécaniques du câbles seront abordés. Enfin, nous nous intéresserons aux modèles vibratoires du câble.

1.1.1 Généralités sur les câbles utilisés dans les ouvrages d'art

Les câbles métalliques sont utilisés depuis plus de 150 ans pour des applications industrielles, ainsi qu'en génie civil. Ils ont la particularité de présenter une grande résistance à la traction tout en restant suffisamment souples pour être enroulés avant et après leur utilisation. De plus, comme ils sont constitués de plusieurs fils, ils offrent l'avantage de ne pas rompre brutalement.



(a) The Golden Gate Bridge (Pont suspendu, câbles monotorons)



(b) Pont de Normandie (Pont à haubans, câbles monotorons)



(c) Pont de l'Ile de Ré (Béton précontraint)

FIG. 1.1 – Différents types d'ouvrages d'art utilisant des câbles métalliques

Dans le génie civil, il existe principalement trois types d'ouvrages d'art constitués de câbles : les ponts à haubans, les ponts suspendus et les ponts en béton précontraint. La fonction principale des câbles dans un ouvrage d'art est de transmettre les charges du tablier vers les piles d'appuis (ponts suspendus et ponts à haubans) ou de mettre en compression le béton (précontrainte) (Fig.1.1).

Pour les ponts suspendus, les charges du pont sont transmises du tablier aux appuis par l'intermédiaire de suspentes ancrées par des colliers à un câble porteur d'allure parabolique. Les câbles porteurs sont ancrés dans des massifs à poids auto stables ou bien aux extrémités du tablier (Fig.1.2).

Dans les ponts à haubans, le tablier est supporté par des câbles inclinés ou haubans reliant directement le tablier aux pylônes. Transversalement, les haubans sont disposés soit suivant une nappe unique située

dans l'axe du tablier, soit suivant deux nappes, parallèles ou convergentes (Fig.1.3).

Dans les ponts précontraints, les câbles induisent des efforts initiaux (compression) dans le béton. Ils peuvent présenter une contrainte intérieure où les câbles sont entièrement noyés dans le béton mais également une précontrainte extérieure où les câbles cheminent le long de la structure avec des points de fixation locaux (Fig.1.4).

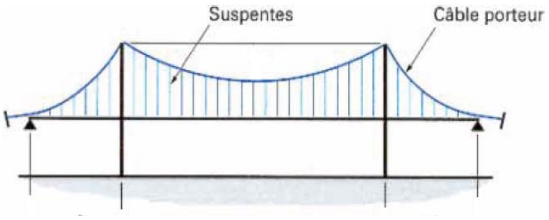


FIG. 1.2 – Pont suspendu

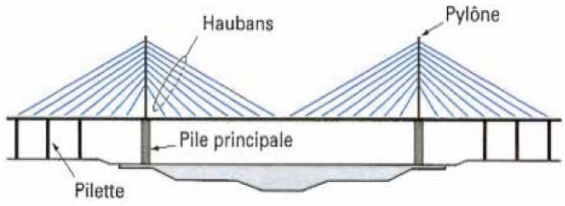
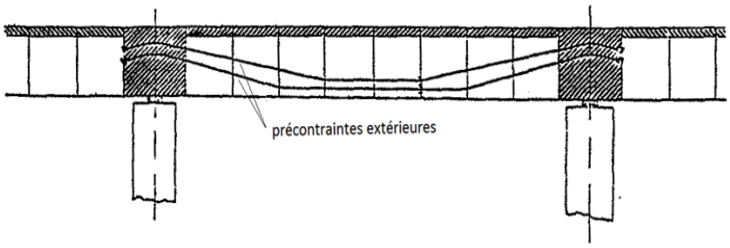


FIG. 1.3 – Pont à haubans



(a)



(b)

FIG. 1.4 – Pont avec précontrainte extérieure

Les câbles métalliques utilisés dans les ouvrages d'art peuvent se présenter sous diverses formes mais ont tous pour élément de base des fils cylindriques ou des fils de forme (Z, I) en aciers non alliés tréfilés ou en aciers laminés à chaud puis traités thermiquement. Une partie des fils a été mise en oeuvre après avoir été revêtue de zinc ou d'alliage zinc / aluminium par immersion dans un bain de métal fondu. Au câblage (fabrication des torons sept fils ou multicouches), un produit de remplissage lubrifiant ou non lubrifiant peut avoir été introduit entre les fils (ce produit étant défini essentiellement pour éviter la pénétration d'eau et la dissolution des aciers).

Géométriquement, un câble est construit par un ou plusieurs torons qui ont des fils enroulés les uns sur les autres. On distingue deux types de torons :

- Les torons "ordinaires" qui sont formés de couches successives comportant des fils de même diamètre mais en nombres différents (Fig. 1.5(a)). Chacune des couches est enroulées avec un pas d'hélice différent.

Lorsque l'on passe d'une couche à la couche extérieure, on augmente le nombre de fils de 6. Lorsqu'il n'y a qu'une seul couche de fils enroulés autour de l'âme, le toron est appelé toron monocouche, sinon, on parle de toron multicouche.

- Les torons à "fils parallèles" qui comportent des fils de diamètres différents soit d'une couche à l'autre (toronnage Seale), soit au sein d'une même couche (toronnage Warrington) (Fig. 1.5(b)). Ainsi, il est possible d'avoir le même pas d'hélice pour tous les fils. De plus, ce toronnage permet d'avoir des contacts linéiques entre les fils, ce qui favorise le glissement relatif et diminue la pression interfilaire.



(a) Toron ordinaire de 37 fils (b) Torons à fils parallèles

FIG. 1.5 – Différents types de torons

Concernant la construction du câble à partir des torons, différentes catégories de câbles sont distinguées :

- Le *câble monotoron-monocouche* est formé d'un toron monocouche ce qui constitue la géométrie la plus simple. Il est composé d'un fil central (l'âme du toron) autour duquel six autres fils viennent s'enrouler en forme d'hélice. Le toron T15.7 (un toron comportant 7 fils de section 150 mm^2) est couramment utilisé aujourd'hui en précontrainte ou pour les haubans.

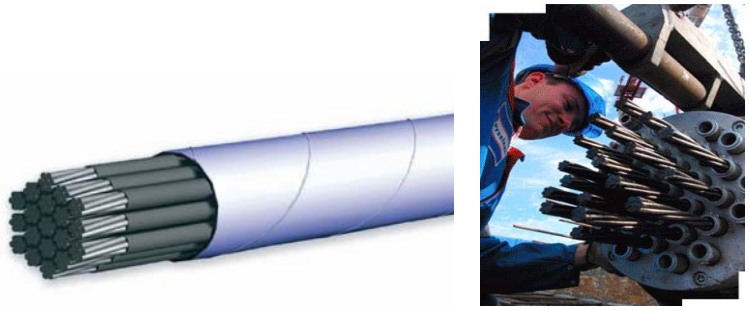
- Le *câble monotoron-multicouches* est formé d'un toron multicouche. Il est utilisé pour les câbles porteurs des ponts suspendus et pour certains ponts à haubans. Il est constitué de fils de 4 à 5 mm de diamètre, on a donc un diamètre total qui varie entre 40 et 100 mm. Le module d'élasticité de ce type de câble est inférieur de 15 à 25 % à celui du fil constitutif, on obtient donc une gamme de 150 à 180 GPa suivant le pas de toronnage choisi. De plus, certains d'entre eux sont clos, c'est-à-dire que les couches externes sont constituées de fils en forme de Z ce qui avait pour but de protéger le câble contre les entrées d'eau (Fig. 1.6).

- Le *câble à torons parallèles* qui est constitué d'un ensemble de de 7 à 57 torons à 3 ou 5 fils tendus en parallèle (Fig. 1.7). Chaque toron est ancré dans une plaque par coincement de clavettes dans un trou tronconique. Il est souvent utilisé pour la précontrainte ainsi que pour les ponts à haubans plus récents. Le module d'élasticité de ces câbles est de l'ordre de 200 GPa.

- Le *câble à torons torsadés* ou *multitorons* qui est constitué de torons disposés en hélice en une ou plusieurs couches sur une âme centrale dont la composition peut varier. Ce type de câble est plutôt rencontré dans les câbles synthétiques.



FIG. 1.6 – Câble clos monotoron-multicouche



(a) (b)

FIG. 1.7 – Câble à torons parallèles

En général, les câbles de précontrainte sont utilisés à 70-80% de la contrainte de rupture qui est au-dessus du seuil de contrainte d'apparition des phénomènes de fissuration ; alors que la contrainte moyenne appliquée aux haubans, suspentes et paraboles est inférieure à ce seuil, soit entre 30-40% de la contrainte de rupture.

1.1.2 Endommagements des câbles

Les câbles peuvent au cours du temps subir des dégradations liées à leurs conditions de service, à leur environnement, etc. Selon [12, 25, 71], les deux principales causes d'endommagement de ces câbles sont la corrosion et le fretting-fatigue.

Corrosion

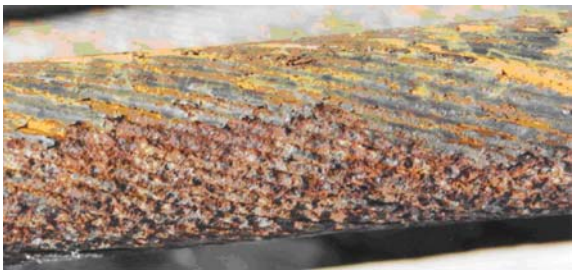
La corrosion est un phénomène d'oxydation d'un métal sous l'action d'un environnement agressif. Les ouvrages d'art comportant des câbles sont soumis aux conditions climatiques (pluie, neige), à l'environnement dans lequel ils se trouvent qui peut être un environnement marin, industriel, etc. ainsi qu'aux éventuels sels de déverglaçage répandus lors des périodes hivernales. Toutes ces conditions créent un environnement corrosif pour l'ouvrage et plus particulièrement pour les câbles. La corrosion externe et interne est provoquée par l'infiltration d'eau et le manque de lubrification. Quand l'eau pénètre dans les couches internes des câbles elle produit une oxydation de l'acier. La corrosion dépend de la présence des agents agressif tels que des chlorures, des sulfates, des acide, etc. Les ruptures de fils élémentaires se produisent de plusieurs façons en fonction du mécanisme générateur.

Le premier mode de dégradation est la corrosion uniforme ou par dissolution (Fig.1.8(a)). Ceci peut entraîner une perte de section plus ou moins homogène sur les fils et une réduction de la force à la rupture du câble. Cette dissolution peut être également plus localisée et prendre la forme de caractères qui ont le même effet que la forme de corrosion précédente mais en plus diminuent la déformation à la rupture des fils et favorisent la fissuration par fatigue (Fig.1.8(b)). Ces deux modes de corrosion peuvent engendrer des ruptures de torons par dépassement de la contrainte admissible. Ces ruptures sont de type ductile.

Ces aciers sont également sensibles à la corrosion sous contrainte, sensibilité d'autant plus importante que la contrainte de service est élevée. La charge de rupture est réduite de même que l'allongement à la rupture. Cette dernière peut se produire sans aucune déformation plastique (aspect semi-fragile des ruptures). Les câbles de précontrainte, en particulier, sont utilisés au-dessus du seuil de contrainte d'apparition des phénomènes de fissuration, alors que la contrainte moyenne appliquée aux haubans, suspentes et paraboles est inférieure à ce seuil (Fig.1.8(c)).

Fretting-fatigue

La principale cause de rupture des fils en fatigue des câbles est associée au frottement interfilaire entre couches au voisinage des extrémités non libres. Quand ces déplacements sont provoqués par des



(a) Dissolution "homogène" des fils avec pertes de section pouvant atteindre 90%



(b) Cratère de dissolution (section réduite localement de 50%)



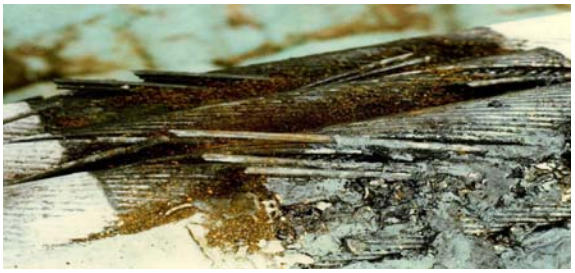
(c) Rupture par corrosion fissurante sous contrainte



(d) Ruptures de fatigue toron multicouche



(e) Cas de fretting fatigue frottements torons / torons.



(f) Cas de fretting fatigue frottements torons / colliers

FIG. 1.8 – Différents types d'endommagements issus de [12]

sollicitations de fatigue, on parle de "fretting-fatigue" ou de fatigue induite en petits débattements. Dans les câbles, sous une sollicitation externe (trafic, vent, etc.), il peut se produire des petits déplacements entre les fils en contact, et donc des phénomènes de frottement entre les fils constitutifs du câbles. Ces endommagements par fretting-fatigue peuvent également observés au niveau des contacts entre les fils du câble et les pièces fixes de l'ouvrage (ancrage, collier, selle de déviation).

Ce phénomène résulte des interactions de deux surfaces en contact soumises à des déplacements relatifs faible amplitude. Plusieurs phases peuvent être distinguées dans le comportement en fatigue du câble. Premièrement, une dégradation plus ou moins importante et rapide des surfaces avec formation de débris d'usure (troisième corps) dont une partie peut être éjectée du contact. Lors de la deuxième phase, on note l'apparition de microfissures, amorcées au niveau des contacts qui participent à la formation de débris plus importante accentuant ainsi la dégradation des surfaces. La dernière phase correspond à la propagation de certaines de ces fissures sous l'effet des forces volumiques entraînant la rupture de l'un des éléments du contact lorsque l'une des fissures atteint une dimension critique liée à la ténacité du matériau concerné. Trois figures Fig.1.8(d), 1.8(e), 1.8(f), représentent plusieurs types de dégradation du câble par fretting-fatigue.

1.1.3 Modèle vibratoire du câble

Les câbles métalliques sont utilisés dans les ouvrages d'art depuis plus de 150 ans et la simulation du comportement vibratoire des câbles fait l'objet d'études de plusieurs chercheurs ainsi que des ingénieurs.

En observant la réponse vibratoire du câble, on trouve qu'en général le comportement vibratoire du câble est non linéaire et amorti. D'après des expériences ([73]), au moins deux sources de pertes d'énergie peuvent être identifiées dans un câble vibrant : celle qui est due au frottement entre les fils, et celle qui est due à l'amortissement visqueux de la matière dont sont faits les fils ([51]). La première est fonction de l'amplitude, mais indépendante de la fréquence, tandis que la seconde est indépendante de l'amplitude et dépendante de la fréquence. Dans plusieurs documents, en général, l'amortissement visqueux peut être négligé devant les effets de frottement ([99, 102]).

Pour étudier le comportement vibratoire transversal d'un câble long avec grande déformation, un modèle complexe de 3D est présenté dans [10, 86]. Dans cette thèse, nous ne nous intéressons pas aux câbles longs avec grande déformation (par exemple des haubans) dont l'endommagement se situe souvent au niveau des ancrages mais aux câbles courts (par exemple les suspentes des ponts suspendus) dont l'endommagement peut être partout.

Un modèle 1D assez simple est d'abord pris en compte : une corde tendue vibrante ([78, 84, 91]). Supposons que le câble, qui est fixé en ses deux extrémités, a un mouvement qui reste dans un plan transversal et que la tension $T(x)$ dans le câble est uniforme : $T(x) = T$. Appelons $\mu(x)$ la masse linéaire et $v(x,t)$ le déplacement du câble par rapport à sa position d'équilibre sous son poids propre à l'abscisse x et à l'instant t. L'équation régissant la dynamique d'une corde tendue vibrante est écrite par l'équation aux dérivées partielles ci-dessous :

$$\mu(x)\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} + C(x)\frac{\partial v}{\partial t} - T\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} = p(x,t) \tag{1.1}$$

Dans le modèle de corde, on néglige l'influence de la rigidité en flexion sur le comportement vibratoire du câble. Pour tenir compte de la rigidité en flexion dans le comportement du câble court, nous utilisons un autre modèle : le modèle linéaire d'une poutre d'Euler-Bernoulli avec tension ([102, 103]). L'équation dynamique du modèle linéaire d'une poutre d'Euler-Bernoulli avec tension s'écrit comme suit :

$$\boxed{\mu(x)\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} + C(x)\frac{\partial v}{\partial t} - T\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI(x)\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial^2 x}\right) = p(x,t)} \tag{1.2}$$

avec les conditions initiales et les conditions aux bords :

- Bi-appuyées : $\quad v(0,t) = 0 \quad , \quad v(L,t) = 0 \quad , \quad \dfrac{\partial v(0,t)}{\partial x} = 0 \quad , \quad \dfrac{\partial v(L,t)}{\partial x} = 0$

- Bi-encastrées : $\quad v(0,t) = 0 \quad , \quad v(L,t) = 0 \quad , \quad \dfrac{\partial^2 v(0,t)}{\partial x^2} = 0 \quad , \quad \dfrac{\partial^2 v(L,t)}{\partial x^2} = 0$

Dans ce modèle, la rigidité et la tension interviennent toutes deux sur le comportement du câble. En supprimant les termes concernant la rigidité ou la tension dans l'équation vibratoire de ce modèle, nous obtenons respectivement l'équation vibratoire du modèle d'une corde vibrante ou du modèle d'une poutre d'Euler Bernoulli classique sans tension.

1.1.4 Synthèse

Les câbles métalliques du génie civil peuvent se présenter sous diverses formes mais géométriquement, un câble est construit par un ou plusieurs torons qui ont des fils enroulés les uns sur les autres. Ils sont souvent utilisés dans trois types d'ouvrage d'arts principaux : les ponts à haubans, les ponts suspendus et les ponts en béton précontraint. Au cours du temps, les câbles peuvent subir des dégradations liées à leurs conditions de service, à leur environnement, etc. L'endommagement dans le câble est souvent rencontré sous la forme de corrosion ou de rupture brutale des fils (ou le mélange des deux).

Pour simuler le comportement du câble, il existe un modèle 3D complexe non linéaire ([10, 86])pour les câbles longs avec grand déformation tels que les haubans. Dans cette thèse, nous nous intéressons aux câbles courts comme les suspentes des ponts suspendus et nous avons choisi un modèle moins complexe : le modèle 1D linéaire d'une poutre d'Euler Bernoulli avec tension.

1.2 Bibliographie des méthodes de détection et de localisation de l'endommagement

La capacité de surveiller et de détecter une structure endommagée pour assurer la sécurité des usagers est un enjeu très important en génie civil. Il existe plusieurs méthodes d'évaluation de l'endommagement comme les méthodes acoustiques ou à ultrasons, les méthodes de champ magnétique, la radiographie, la méthode des courants Foucault ou les méthodes de champ thermique (Doherty, 1997). Toutes ces techniques exigent que la proximité du dommage soit connue et que la partie de la structure à inspecter soit facilement accessible. Le besoin de méthodes quantitatives globales d'identification des endommagements pouvant être appliquées à des structures complexes a conduit au développement et à la recherche de méthodes examinant les changements des caractéristiques vibratoires de la structure.

Plusieurs développements réalisés dans les années 1970 et au début des années 1980 sont utilisés dans l'industrie pétrolière offshore, par exemple, Vandiver 1975 [92], Loland 1976 [55], Coppolino 1980 [21], Nataraja 1983 [66]. Plus tard, les méthodes de détection d'endommagement à partir des réponses vibratoires sont approuvées et sont très utilisées pour de nombreux types de structures. Nous pouvons citer ici des applications en industrie, par exemple pour les charpentes d'avions West 1986 [94], Tsyfansky2000[90], Trendafilova 2008 [89], ou pour les roulements à billes Dron 2004 [28], Chiementin 2008 [18], ou les machines tournantes Gomez 2004 [42] etc. En particulier, les méthodes vibratoires sont souvent appliquées dans le domaine génie civil, par exemple pour détecter des endommagements dans les ponts ou les poutres : Yuen 1985[100], Chance 1994 [16], Doebling1997 [26], Farrar1994 [33], Farrar1997 [34] etc.

Selon Rytter 1993 [81], l'identification des endommagements peut être classée en quatre niveaux :
- Niveau 1 : Détection de la présence de l'endommagement
- Niveau 2 : Localisation de l'endommagement
- Niveau 3 : Quantification de l'endommagement
- Niveau 4 : Evolution de l'endommagement

Jusqu'à maintenant, la plupart des méthodes d'identification d'endommagements basées sur la réponse vibratoire ne permettent que des identifications de niveau 1 et de niveau 2 ([27]). Dans la section **1.2** du chapitre 1, nous allons présenter l'ensemble des méthodes de détection actuelles en les classant dans les catégories suivantes :

1. Méthodes fondées sur les fréquences propres
2. Méthodes fondées sur les déformées modales
   - Méthodes fondées directement sur les déformées modales
   - Méthodes fondées sur les courbures modales

- Méthodes fondées sur la flexibilité
- Méthodes fondées sur l'énergie de déformation modale

3. Méthodes dans le domaine des fréquences (frequency response function (FRF))
4. Méthodes dans le domaine temporel et temps-fréquence(HHT et TO)

Les données des réponses vibratoires utilisées pour d'identifier l'endommagement peuvent être classées en 3 types différents :

- Type 1 : deux essais vibratoires correspondant à deux états (l'état sain et l'état à vérifier). L'objectif est de comparer les 2 états pour vérifier s'il y a un défaut dans le deuxième état et ensuite le localiser et le quantifier.
- Type 2 : un essai vibratoire. L'endommagement apparaît pendant la mesure. L'objectif est de localiser le défaut en temps (trouver l'instant où apparait le défaut) et le localiser en espace. Ces méthodes mettent en oeuvre des techniques trop différentes de celles utilisées dans cette thèse.
- Type 3 : une série d'essais au cours de la vie de la structure. L'endommagement n'apparait pas pendant un essai mais entre deux essais successifs. L'objectif est de détecter le défaut en temps (à partir de quel essai le défaut apparait) et le localiser en espace.

Les trois premiers groupes de méthodes sont plutôt appliqués sur des données de type 1. Les méthodes du groupe 4 sont déjà utilisées pour des données de type 1 et 2. Pour ce qui suit, nous présentons les quatre groupes de méthodes d'identification de l'endommagement.

1.2.1 Méthodes basées sur les fréquences

Depuis des années 1970, la variation des fréquences à cause du changement de la masse et de la rigidité est utilisée pour développer des techniques d'identification d'endommagements. Plusieurs chercheurs ont utilisé les fréquences propres comme un indicateur pour l'identification d'endommagements. Salawu 1997 [82] a résumé 65 articles sur la détection d'endommagements à partir du changement des fréquences.

Une raison impotante d'utilisation des techniques d'identification d'endommagements à partir des fréquences est que les fréquences propres sont sensibles aux différents types d'endommagement (local ou global) ; et elles peuvent être déterminées facilement dans beaucoup d'applications en utilisant seulement un capteur. Cependant, la difficulté est qu'elles peuvent être facilement influencées par des variations de l'environnement comme la température ou l'humidité ce qui pose un problème pour la détection de l'endommagement des structures réelles. Selon [22], il est nécessaire que le changement des fréquences propres causé par l'endommagement soit supérieur à 5% pour faire confiance aux résultats de détection. Cependant, des changements significatifs des seules fréquences n'impliquent pas systématiquement l'existence d'un endommagement puisque dans certains cas, on a observé en une seule journée des variations des fréquences dues aux conditions ambiantes de plus de 5% pour des ponts en béton ou en acier [3].

Pour localiser l'endommagement, comme les fréquences modales sont une propriété globale de la structure, il n'est pas évident que les changements de ces paramètres puissent être utilisés pour localiser spatialement les défauts. Autrement dit, les fréquences ne peuvent généralement pas fournir des informations spatiales sur les changements structurels. Cependant, des changements de multiples fréquences peuvent fournir des informations spatiales sur les dommages structurels car les changements dans la structure à différents endroits causeront des combinaisons différentes de changements dans les fréquences modales. Cawley et Adams (1979) [15] ont présenté une méthode de détection et localisation d'endommagement à partir des fréquences. L'idée est que le ratio de changement des fréquences de 2 modes est une fonction pour localiser l'endommagement. Pour localiser le défaut, les changements théoriques des fréquences dues à différentes positions de défauts sont calculés et comparés avec les valeurs mesurées. Des applications de cette méthode pour les poutres en béton précontraint et en acier ont montré qu'il faut au moins 9 fréquences pour obtenir une précision raisonnable [14]. En plus, la précision de cette méthode dépend

de la qualité du modèle théorique et de la géométrie d'endommagement [8]. Pour certains types d'endommagements, cette méthode est appréciée cependant, pour d'autres configurations, elle peut ne pas fonctionner. Des résultats similaires sont présentés par Adam et al (1978) [1] ; Banks et al (1996) [8].

Friswell, et al. (1994) [39] présentent les résultats d'une tentative d'identification des endommagements basés sur un catalogue connu des endommages potentiels. Les auteurs ont présumé que le modèle existant de la structure était très précis. En utilisant ce modèle, ils ont calculé plusieurs fréquences à la fois pour la structure saine et avec endommagements hypothétiques. Puis, tous les rapports des variations de fréquences ont été calculés. Avec des données expériementales, les mêmes ratios ont été calculés et une relation en loi de puissance a été ajustée à ces deux séries. Lorsque les données sont sans bruit, et lorsque l'endommagement se trouve dans la catégorie présumée, le bon type de dommage doit produire un ajustement qui est une droite de pente unité. Pour tous les autres types de dommages, l'ajustement sera inexact.

D'autres résultats sont présentés par : Maeck 2003 [56]. Il a remarqué que ces méthodes ne sont pas capable de distinguer 2 défauts symétriques dans une structure symétrique et aussi la limite des ces méthodes lorsque le nombre des fréquences disponibles est inférieur au nombre de paramètres inconnus. Cependant, la majeure difficulté de l'application de ces méthodes sur des structures réelles est que la valeur des fréquences est facilement influencée par les conditions environnementales. Certaines observations sur le choix d'utiliser les premières fréquences ou celles plus élevées sont présentées par Friswell et Mottershead 2001 [37].

Morassi 2007 [65] présente une technique inverse pour localiser les effets d'entailles dans des poutres en acier en utilisant les changements de fréquence modale. Sous l'hypothèse qu'il n'y a pas de modification de la masse, les changements des fréquences sont corrélés avec des coefficients de Fourier de la variation de rigidité qui est inconnue. Cette méthode a donné des résultats satisfaisants aussi bien pour la détection que pour la localisation en espace des défauts.

1.2.2 Méthodes basées sur des déformées modales

1.2.2.1 Méthodes basées directement sur des déformées modales

Les déformées modales représentent la description spaciale de l'amplitude de chaque fréquence résonante. Il existe plusieurs techniques d'identification d'endommagement basées directement sur des déformées modales ou leurs dérivées.

Allemang et Brown 1983 [4] ont présenté une méthode, appelée "modal assurance criterion" (MAC) se basant sur la comparaison entre 2 suites de déformées modales correspondant à 2 états différents, pour détecter l'endommagement. Le coefficient MAC est considéré comme l'indice de similarité entre 2 modes. Supposons que Φ^A de taille $n \times m_A$ et Φ^B de taille $n \times m_B$ qui représentent 2 collections des déformées modales correspondant aux 2 états différents où n est le nombre de degrées de liberté, m_A m_B le nombre des modes à considérer de l'état A et B. Le coefficient MAC est définie par :

$$MAC_{j,k} = \frac{|\sum_{i=1}^{n} \Phi_{i,j}^A \Phi_{i,k}^B|^2}{\sum_{i=1}^{n}(\Phi_{i,j}^A)^2 . \sum_{i=1}^{n}(\Phi_{i,k}^B)^2} \quad (\forall j = 1, \dots m_A \ \ , \ \ \forall k = 1, \dots m_B) \tag{1.3}$$

La valeur $MAC_{j,j}$ peut être utilisée comme un indicateur d'endommagment. Lorsque le coefficient MAC est égal à 1, les deux modes sont parfaitement corrélés ; au contraire lorque le coefficient MAC est égal à 0, les deux modes sont complètement décorrélés.

Chez Lieven et Ewin 1988 [54], dans le cas $m_A = m_B = m$, les coefficients "coordinate modal assurance criterion" (CoMAC) sont utilisés pour localiser l'endroit où les déformées modales ne sont pas

corrélées :

$$CoMAC_i = \frac{|\sum_{j=1}^{m} \Phi_{i,j}^A \Phi_{i,j}^B|^2}{\sum_{j=1}^{m}(\Phi_{i,j}^A)^2 . \sum_{j=1}^{m}(\Phi_{i,j}^B)^2} \quad (\forall i = 1, \dots m) \tag{1.4}$$

L'utilisation de ces deux techniques pour l'identification d'endommagement a donné de bons résultats dans certains cas. Cependant, ces techniques sont principalement appliquées sur des données numériques et tendent aujourd'hui à être remplacées par d'autres méthodes plus sensibles.

1.2.2.2 Méthodes basées sur la courbure modale

Plutôt que d'utiliser les déformées modales directement pour obtenir des informations sur le défaut (la source des changements vibratoires), une autre façon est d'étudier leurs dérivées secondes ou les courbures modales. Pour le cas d'une poutre, la relation entre la courbure et le moment fléchissant en un point s'écrit : $v"(x) = \frac{M(x)}{EI(x)}$ où $v(x)$ est le déplacement transversal.

Les courbures modales peuvent être calculées à partir des déformées modales par la formule suivante :

$$\phi"_j(i) = \frac{\phi_j(i+1) - 2\phi_j(i) + \phi_j(i-1)}{l^2} \tag{1.5}$$

où j est le numéro du mode, i le numéro du noeud et l la distance entre 2 noeuds.

Plusieurs études ont confirmé que la courbure modale est un indicateur plus sensible que les coefficients MAC et $CoMAC$ des déformées modales (Pandey, Biswas Samman 1991) [68].

Yoon et all(2001) [98] ont appliqué le "gapped smoothing method" (Ratcliffe 2000 [74], Ratcliffe et Bagaria [75]) sur des déformées modales. Par exemple, pour le cas d'une poutre, la fonction analytique des modes s'écrit :

$$\phi_n(x) = A(\cos\beta_n x + ch\beta_n x) + B(\sin\beta_n x + sh\beta_n x) \tag{1.6}$$

Les coefficients A, B et β_n peuvent être estimés en utilisant les modes identifiés expérimentalement. Les courbures modales sont obtenues en faisant la dérivée seconde des fonctions des modes propres qu'on vient d'estimer. Pour identifier l'endommagement, ils ont utilisé l'indice d'endommagement pour un mode ϵ et pour l'ensemble des modes qui sont définies par :

$$\begin{aligned} \delta_n &= \phi"_n^{(d)} - \phi"_n \\ \delta_s &= \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \frac{\phi"_n^{(d)} - \phi"_n}{max|\phi"_n^{(d)} - \phi"_n|} \end{aligned} \tag{1.7}$$

où N est le nombre de modes à considérer. Avec deux applications correspondant aux 2 type défauts : fins et larges, les résultats sont probants. Cependant, les cas de défauts multiples ne sont pas étudiés.

Helfrick et al. [45] ont présenté une autre technique utilisant des courbures modales pour l'identification d'endommagement. Les courbures modales sont approximées par (1.5). Ils ont proposé l'indicateur d'endommagement défini par :

$$D_j(i) = p_j(i) - \phi''_j(i) \tag{1.8}$$

où $p_j(i)$ est la valeur au point i d'un polynôme de 3 degrés qui passe par 4 points voisins : $\phi''_j(i-2)$, $\phi''_j(i-1)$, $\phi''_j(i+1)$ et $\phi''_j(i+2)$. Ils ont appliqué cette méthode sur des données expérimentales d'une poutre en porte-à-faux. Les résultats de l'identification de l'endommagent dépendent évidemment de l'importance du défaut. Cette méthode est capable de détecter et de localiser un défaut local avec une perte

de rigidité de 40% mais pas de 17%.

D'autres applications des méthodes utilisant des courbures modales sont présentées par Maeck et al. 1999 [58], Maeck et al. 2002 [57], Hamey et al. 2004 [44].

1.2.2.3 Méthodes basées sur la flexibilité

L'idée des ces méthodes est d'utiliser la matrice de flexibilité pour estimer le changement de la structure. Comme la matrice de flexibilité est définie comme l'inverse de la matrice de rigidité, chaque colonne représente le déplacement causé par une force d'unité appliquée à un degrée de liberté. La matrice de flexibilité peut être estimée à partir des modes propres normalisés par rapport à la matrice de masse ($\Phi^T M \Phi = I$), et les fréquences propres correspondantes :

$$F = \Phi \Lambda^{-1} \Phi^T = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\omega_j^2} \phi_j \phi_j^T \tag{1.9}$$

où $\Lambda = diag(\omega_i^2)$ est la matrice des valeurs propres. L'endommagement peut être détecté en comparant la matrice de flexibilité estimée à partir des modes mesurés de l'état endommagé avec celle estimée à partir des modes de l'état sain qui peuvent être déterminés avec la méthode des éléments finis.

La valeur complète de la matrice de flexibilité exige des mesures de tous les modes et de toutes les fréquences propres. En pratique, la matrice de flexibilité ne peut être approximée qu'avec certains premiers modes. A cause de la relation inverse avec le carrée des fréquences, la matrice de flexibilité estimée converge rapidement avec l'augmentation de la valeur des fréquences. Donc, une bonne estimation de la matrice de flexibilité peut être obtenue avec quelques uns des premiers modes (Pandey et Biswas 1994 [67]) et l'identification de l'endommagent en utilisant la matrice de flexibilité est plus sensible aux changements des modes de basse fréquence (Maeck 2003 [56]). L'utilisation de la matrice de flexibilité comme un indicateur d'endommagement a donné de bon résultats. Cependant, cette technique est appliquée plutôt sur des données numériques avec un seul défaut. Zhao et DeWolf [101] ont comparé différents indicateurs de l'endommagement tels que les fréquences propres, les modes propres et les flexibilités modales dans une application numérique d'une structure de 5 dégrés. Ils ont trouvé que la flexibilité modale est le critère le plus sensible au défaut.

Bernal 2002 [11] a présenté une autre méthode utilisant des vecteurs de localisation d'endommagement (damage locating vector (DLV).

Choi et al. 2008 [20] ont développé un nouvel indice en combinant la méthode de flexibilité et la méthode DI (damage indicator) (cf. section suivante). Cette méthode est testée sur des données numériques et des essais expérimentaux avec multi-défauts. Les résultats montrent que cette méthode est capable de localiser simultanément 4 défauts pour une poutre simple.

1.2.2.4 Méthodes basées sur la rigidité modale

L'idée est d'utiliser la différence relative de la rigidité modale entre avant et après l'endommagement pour détecter, localiser et aussi quantifier le défaut.

Quelque modification d'algorithme sont développées dans la méthode DI (damage indicator) par Stubbs et al. 1995 [88] . Considérant une poutre d'Euler Bernoulli, la rigidité modale du mode i s'écrit :

$$\mathbf{k}_i = \int_0^L EI(\phi_i''(x))^2 dx \tag{1.10}$$

Si la poutre est discrétisée en N éléments, la contribution de l'élément j à la rigidité modale du mode i peut s'écrire :

$$\mathbf{k}_{ij} = \int_{\Omega_j} (EI)_j (\phi_i''(x))^2 dx \tag{1.11}$$

Le ratio de rigidité modale de l'élément Ω_j est défini par :

$$F_{ij} = \frac{\mathbf{k}_{ij}}{\mathbf{k}_i} \tag{1.12}$$

Comme $F_{i,j} \ll 1$ et $F_{i,j}^{(d)} \ll 1$ (par exemple, pour une poutre discrétisée en 50 éléments, $F_{i,j} \approx 0.02$ et $F_{i,j}^{(d)} \approx 0.02$) ils considèrent que $(1 + F_{i,j})/(1 + F_{i,j}^{(d)}) \approx 1$. Et en faisant l'hypothèse que la rigidité en flexion est constante sur toute la longueur de l'élément Ω_j ; on a :

$$\frac{(EI)_j}{(EI)_j^{(d)}} \approx \frac{\left(\int_{\Omega_j} (\phi_i''^{(d)}(x))^2 dx + \int_0^L (\phi_i''^{(d)}(x))^2 dx\right) / \left(\int_0^L (\phi_i''^{(d)}(x))^2 dx\right)}{\left(\int_{\Omega_j} (\phi_i''(x))^2 dx + \int_0^L (\phi_i''(x))^2 dx\right) / \left(\int_0^L (\phi_i''(x))^2 dx\right)} \tag{1.13}$$

Les auteurs introduisent l'indicateur d'endommagement β_{ij} :

$$\beta_{ij} = \frac{f_{ij}^{(d)}}{f_{ij}} \quad \text{avec :} \quad f_{ij} = \left(\int_{\Omega_j} (\phi_i''(x))^2 dx + \int_0^L (\phi_i''(x))^2 dx\right) / \left(\int_0^L (\phi_i''(x))^2 dx\right) \tag{1.14}$$

Pour créer une indice en utilisant n modes différents, ils introduisent l'indicateur d'endommagement β_j :

$$\beta_j = \frac{\sum_{i=1}^n f_{ij}^{(d)}}{\sum_{i=1}^n f_{ij}} \tag{1.15}$$

Pour que l'indicateur d'endommagement soit indépendant du type de structure, ils proposent l'indicateur d'endommagement Z_j :

$$Z_j = \frac{\beta_j - \overline{\beta}}{\sigma_\beta} \tag{1.16}$$

où $\overline{\beta}$ est la moyenne et σ_β l'écart type de la suite β_j. Des vecteur de l'indice d'endommagement Z_j sont utilisés pour localiser et quantifier le défaut. La faisabilité et la précision de cette méthode dépend du nombre de points de mesure (c'est à dire du nombre de capteurs).

Cette méthode présente certaines limites (Dackerman 2009 [23]). Par exemple les noeuds de modes peuvent créer de faux endommagements détectés ou parfois des situations non détectables . Lorsque le défaut est proche des appuis, la localisation des défauts n'est plus précise. Certains problèmes peuvent être améliorés en utilisant la somme des DI, cependant les résultats de cette méthode dépendent beaucoup du nombre et de la qualité des modes utilisés Pereyra et al. 1999 [70]. Dans la thèse de Dackerman 2009 [23], ils ont prososé l'application de PCA (principal component analyse) sur les valeurs DI pour réduire les incertitudes.

Choi et al 2007 [19] ont développé la méthode MDI (modified damage index) pour identifier l'endommagement d'une poutre en bois. Des modes propres sont reconstruits à partir de ceux identifiés expérimentalement en utilisant l'interpolation polynomiale degré 3 par morceaux (ou "spline cubique" en anglais). Puis, ils font la dérivée seconde des modes propres reconstruits pour obtenir des courbures modales dont ils se servent pour calculer des DI. La méthode proposée est capable de localiser l'endommagement avec des données expérimentales dans certains cas. Pour des cas de défauts multiples, l'utilisation des modes propres élevés est plus efficace pour localiser l'endommagement.

1.2.3 Méthodes dans le domaine des fréquences

Plutôt que d'utiliser les paramètres modaux pour obtenir des informations sur le défaut, une autre façon est d'étudier directement les réponses en fréquence ou FRF (frequency response function).

Wang et al 1997 [93] ont proposé une nouvelle technique basée sur la FRF pour identifier des endommagements d'une structure avec des barres en acier. L'application de cette méthode sur des données numériques a donnée de bons résultats. Cependant, avec des données expérimentales, les résultats sont moins satisfaisants. Les auteurs ont conclu que la méthode proposée n'est pas applicable pour certains petits défauts (par ex : fissures).

Sampaio et al 1999 [83] ont présenté une méthode utilisant la différence de la courbure des FRF de l'état sain et endommagé. La courbure des FRF est donnée par :

$$\alpha''(\omega)_{i,j} = \frac{\alpha''(\omega)_{i+1,j} - 2\alpha''(\omega)_{i,j} + \alpha''(\omega)_{i-1,j}}{h^2} \tag{1.17}$$

où $\alpha''_{i,j}$ est la "receptance FRF" mesurée au point i due à une force au point j. La somme des differences absolues des FRF pour plusieurs fréquences sont calculées :

$$\Delta\alpha''_{i,j} = \sum_{\omega} |\alpha''(\omega)^{(d)}_{i,j} - \alpha''(\omega)_{i,j}| \tag{1.18}$$

Finalement, la somme pour plusieurs forces est calculée et utilisée comme un indicateur d'identification d'endommagent :

$$S_i = \sum_{j} \Delta\alpha''_{i,j} \tag{1.19}$$

Les résultats sur des données numériques ont montré la capacité de la méthode à localiser le défaut même en présence de bruit. En comparant avec d'autres méthodes (par ex méthode DI) sur un cas réel, cette méthode semble plus performante.

Maîa et al 2003 [59] ont proposé une nouvelle technique, appelée "FRF based damage index" (FRF_DI), basée sur la FRF avec une indice d'identification d'endommagent qui est calculé par la formule ci-dessous :

$$FRF_DI_i = \sum_{\omega} \sum_{j} \beta_{i,j}(\omega) \tag{1.20}$$

avec :

$$\beta_{i,j}(\omega) = \frac{\left((\alpha''^{(d)}_{i,j}(\omega))^2 + \sum_{k=1}^{N}(\alpha''^{(d)}_{k,j}(\omega))^2\right)\sum_{k=1}^{N}(\alpha''_{k,j}(\omega))^2}{\left((\alpha''_{i,j}(\omega))^2 + \sum_{k=1}^{N}(\alpha''_{k,j}(\omega))^2\right)\sum_{k=1}^{N}(\alpha''^{(d)}_{k,j}(\omega))^2} \tag{1.21}$$

Ils ont comparé la méthode FRF_DI avec d'autres méthodes basées sur des modes propres ou des courbures modales et la méthode DI, sur des applications numériques et expérimentales d'une poutre avec un seul défaut. Ils trouvent que la méthode FRF_DI est plus performante pour la localisation du défaut.

Furukawa et al. 2006 [40] ont présenté d'autres méthodes basées sur la FRF avec une technique qui permet de minimiser les erreurs dues au bruit. Ils ont conclu que la méthode proposée permet une localisation assez précise même avec un bruit assez important.

1.2.4 Méthodes dans le domaine temps-fréquence

L'avantage de ces méthodes est que les données peuvent être obtenues directement à partir des réponses vibratoires en temps indépendemment du domaine modal. Les deux techniques les plus utilisée sont la transformation de Hilbert-Huang (HHT) et la transformation en ondelettes (TO).

• Yang et al. 2004 [96] ont proposé deux méthodes pour tirer des informations sur l'endommagement à partir de la réponse vibratoire. (le défaut est apparu brutalement à un instant pendant la mesure de la réponse). La première méthode est basée sur "empirical mode decomposition" (EMD) pour décomposer le signal en "intrinsic mode function" (IMF). Pour avoir la première IMF, la procédure est de construire l'enveloppe en bas et en haut d'un signal $u(t)$ avec l'interpolation polynomiale par morceaux (ou spline). La moyenne m des deux enveloppes est soustrait du signal :

$$\begin{aligned} &u_{1,1} = u - m_{1,1} \\ &u_{1,2} = u_{1,1} - m_{1,2} \\ &... \\ &u_{1,k} = u_{1,k-1} - m_{1,k-1} \quad (\text{où} \quad m_{1,j} \quad \text{est la moyenne des deux enveloppes du signal} \quad u_{1,j}) \end{aligned} \tag{1.22}$$

La procédure est répétée jusqu'à ce que la différence entre deux itérations successives soit petite. Autrement dit, l'indice SD_k est petit avec SD_k défini par la formule suivante :

$$SD_k = \frac{\sum_{t=0}^{T} |u_{1,k} - u_{1,k-1}|^2}{\sum_{t=0}^{T} u_{1,k-1}^2(t)} \tag{1.23}$$

Dans [72], les auteurs proposent $SD = 0.2$ ou 0.3.

La première IMF est obtenue par : $c_1(t) = h_{1,k}(t)$. Pour obtenir la deuxième IFM $c_2(t)$, les mêmes procédures sont répétées pour le signal $r_1 = u - c_1$. Ces procédures sont répétées pour obtenir n IMF :

$$u(t) = \sum_{j=1}^{n} c_j(t) + r_n(t) \tag{1.24}$$

En utilisant les résultats d'EMD, l'endommagement peut être détecté en temps et localisé en espace mais la précision dépend de l'importance du défaut et du niveau du bruit.

• La deuxième méthode combine la méthode EMD et la transformation de Hilbert. La transformation de Hilbert est appliquée sur des IMFs obtenues avec la EMD. En observant la relation "temps fréquence", l'endommagement peut être détecté en temps même dans le cas d'un bruit plus important, cas où la première méthode n'arrive pas à détecter. Cependant, la localisation du défaut n'est pas abordée.

• Yan et al. 2010 [95] ont proposé une nouvelle technique d'identification en utilisant la transformation en ondelettes (TO). L'idée est d'appliquer la TO sur la réponse vibratoire libre sans amortissement $\mathbf{M}\ddot{u}(t) + \mathbf{K}u(t) = 0$, on obtient :

$$\mathbf{M}W_{(\ddot{\psi},\ddot{u})}(a,b) + \mathbf{K}W_{(\ddot{\psi},u)}(a,b) = 0 \tag{1.25}$$

En utilisant la relation $W_{(\ddot{\psi},u)}(a,b) = a^2 W_{(\psi,\ddot{u})}(a,b)$, l'équation 1.25 se réécrit :

$$\frac{1}{a^2}\mathbf{M}W_{(\ddot{\psi},\ddot{u})}(a,b) + \mathbf{K}W_{(\psi,\ddot{u})}(a,b) = 0 \tag{1.26}$$

Dans le cas où il y a le défaut, l'équation précédente peut être réécrite :

$$-\frac{1}{a^2}\Delta\mathbf{M}W_{(\ddot{\psi},\ddot{u}^{(d)})}(a,b) - \Delta\mathbf{K}W_{(\psi,\ddot{u}^{(d)})}(a,b) = \frac{1}{a^2}\mathbf{M}W_{(\ddot{\psi},\ddot{u}^{(d)})}(a,b) + \mathbf{K}W_{(\psi,\ddot{u}^{(d)})}(a,b) \tag{1.27}$$

En utilisant le résultat $RWF(a,b) = \frac{1}{a^2}\mathbf{M}W_{(\ddot{\psi},\ddot{u}^{(d)})}(a,b) + \mathbf{K}W_{(\psi,\ddot{u}^{(d)})}(a,b)$, l'endommagement peut être détecté en temps et localisé en espace.

Ils ont proposé également deux indices $DLIRWF_i(a)$ et $NDLIRWF_i$ pour localiser le défaut :

$$\begin{aligned} DLIRWF_i(a) &= \sum_b |RWF_i(a,b)| \\ NDLIRWF_i(a) &= \frac{DLIRWF_i(a) - \overline{DLIRWF}(a)}{\sigma(a)} \end{aligned} \tag{1.28}$$

où : i représente l'indice d'un degré de liberté ; $RWF_i(a,b)$ est le composant i du vecteur $RWF(a,b)$; $\overline{DLIRWF}(a)$ et $\sigma(a)$ sont la moyenne et l'écart type des composants du vecteur $DLIRWF(a)$.

En réalité, la structure est souvent amortie et sous l'excitation du bruit $F(t)$ qui est supposée non corrélée avec les réponses. Donc pour tenir compte de ce phénomène, la méthode adaptée est proposée en appliquant la TO et les procédures similaires sur l'équation suivante :

$$\mathbf{M}\mathbf{R}_{\ddot{x}x_i}(\tau) + \mathbf{C}\mathbf{R}_{\dot{x}x_i}(\tau) + \mathbf{K}\mathbf{R}_{xx_i}(\tau) = \mathbf{R}_{Fx_i}(\tau) \tag{1.29}$$

Soit :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{R}}_{xx_i}(\tau) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{R}}_{xx_i}(\tau) + \mathbf{K}\mathbf{R}_{xx_i}(\tau) = 0 \tag{1.30}$$

où $\mathbf{R}(.)$ est la corrélation entre 2 fonctions.

Les auteurs ont fait des applications de cette méthode sur des données numériques des réponses libres ou sous l'excitation du bruit. Les résultats montrent que la méthode est capable de détecter et localiser même avec de multiples défauts. Cependant la précision des résultats dépend du modèle choisi et de la technique pour ajuster le modèle de la FEM.

1.2.5 Synthèse

Nous avons présenté des méthodes d'identification de l'endommagement utilisant les réponses vibratoires de la structure. Pour identifier les défauts, les chercheurs utilisent plusieurs paramètres différents : les paramètres modaux (fréquences propres, modes propres courbures modales), les FRFs et des données en domaine de temps.

Dans le cadre de cette thèse, nous nous intéressons à l'utilisation des paramètres modaux (fréquences, modes, courbure) pour l'identification d'endommagements. Dans la suite de la thèse, au chapitre 5, nous proposons une méthode de détection et de localisation basée sur la variation relative des fréquences et des déformées modales à l'état sain. Au chapitre 6, nous présentons notre deuxième méthode utilisant la SVD (singular value decomposition).

1.3 Bibliographie des méthodes d'identification modale

Dans ce paragraphe, nous présentons une synthèse bibliographique sur des méthodes d'identification modale. D'abord, on se place dans le contexte général des méthodes d'identification modale. Ensuite, nous rappelons des méthodes d'identification modale pour les systèmes mécaniques linéaires.

1.3.1 Classification des méthodes d'identification modale

Depuis les années 70, beaucoup de techniques d'identification ont été proposées. La classification d'un si grand nombre de méthodes est très difficile. Maia et al. [60] ont fait une classification suivant le domaine

où les données sont traitées i.e., temps, fréquence. Pour sa thèse, Le [52] a ajouté à la classification un groupe contenant les méthodes dans le domaine temps-fréquence (Fig. 1.9).

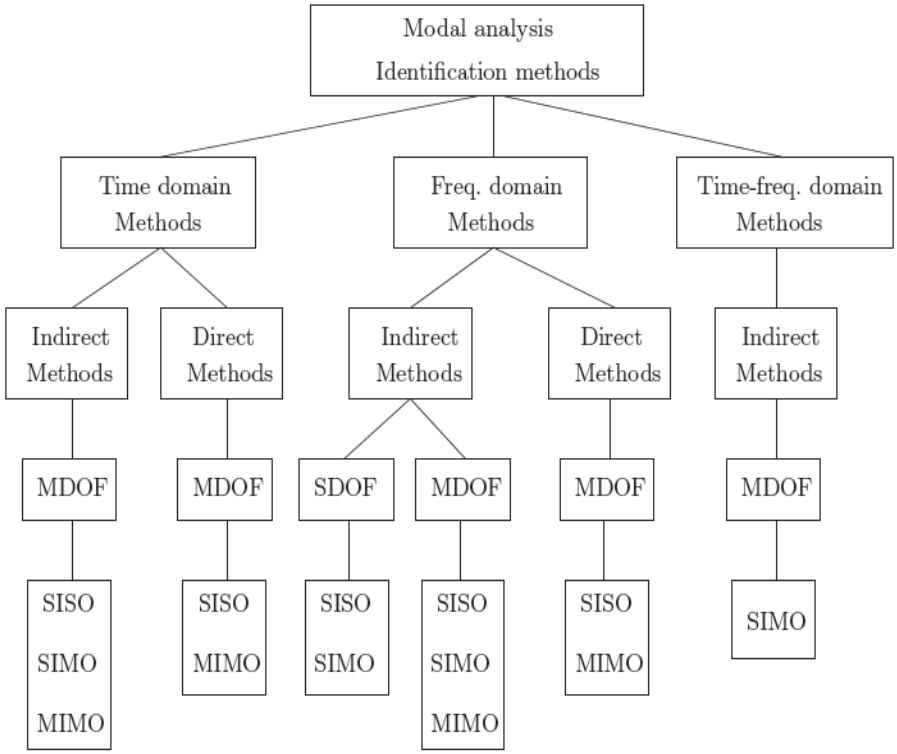


Fig. 1.9 – Classification des méthodes d'identification modale issue de Le [52]

Les méthodes dans le domaine temporel et fréquentiel peuvent encore être divisées en méthodes indirectes et en méthodes directes. La méthode indirecte permet d'identifier les paramètres modaux (fréquences naturelles, taux d'amortissement, déformées modales). La méthode directe donne les caractéristiques mécaniques (masse, rigidité) du modèle spatial.

Une division supplémentaire concerne le nombre de modes qui peuvent être analysés. Si un seul mode est considéré dans l'analyse, c'est l'analyse à un degré de liberté (SDOF : single degree of freedom). Si plusieurs modes sont pris en compte, c'est l'analyse à multiple degrés de liberté (MDOF : multiple degree of freedom). Dans le domaine temporel, il n'y a que l'analyse MDOF mais dans le domaine fréquentiel, il existe les deux types d'analyse : SDOF et MDOF. La méthode directe ne travaille que sur l'analyse MDOF.

Habituellement, quand la structure est testée, non seulement les réponses brutes sont enregistrées mais les FRFs (frequency response function) sont aussi calculées par l'analyseur à partir des réponses et excitations mesurées. Les méthodes d'analyse modale qui s'appliquent seulement à une seule FRF, sont appelées méthodes à une FRF ou à une entrée - une sortie (SISO : single input-single output). D'autres méthodes permettent l'analyse simultanée de quelques FRFs avec les réponses mesurées à différents endroits de la structure soumise à la même excitation. Elles sont appelées méthodes globales ou une entrée - multiples sorties (SIMO : single input-multi output). La philosophie de ces méthodes est que, dans le cas

linéaire et stationnaire, les fréquences naturelles et les taux d'amortissement sont des propriétés globales et ne varient pas d'une FRF à une autre. Ils doivent être égaux pour chaque FRF. Finalement, il existe d'autres méthodes qui peuvent traiter en même temps toutes les FRFs possibles qui sont obtenues à partir de différents endroits d'excitation et de réponses de la structure. Elles sont appelées polyréférence ou multiples entrées - multiples sorties (MIMO : multi input-multi output).

Les méthodes dans le domain temps-fréquence permettent l'identification modale avec le modèle indirect, de type MDOF et SIMO.

1.3.2 Identification modale des systèmes mécaniques linéaires

Pour les systèmes linéaires, la réponse vibratoire de plusieurs excitations simultanément appliquées est égale à la somme des réponses vibratoires dues par chaque excitation séparément. L'équation vibratoire d'un système linéaire peut s'écrire comme suit :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{f}(t) \tag{1.31}$$

où $\mathbf{M}, \mathbf{K}, \mathbf{C}$ sont les matrices de masse, de rigidité et d'amortissement ;
$\mathbf{x}$, $\dot{\mathbf{x}}$ et $\ddot{\mathbf{x}}$ sont la réponse de déplacement, de vitesse et d'accélération
$\mathbf{f}$ est le vecteur de force extérieure appliquée.

Il existe beaucoup de techniques d'identification des systèmes linéaires. On recense ici les méthodes les plus courantes. Ces techniques sont répertoriées en temps, en fréquence ou en temps-fréquence.

1.3.2.1 Méthodes dans le domaine temporel

Traditionnellement, les deux méthodes souvent étudiées dans le domaine temporel sont la méthode d'Ibrahim Time Domain (ITD) et la méthode de Least Squares Complex Exponential (LSCE).

La méthode d'ITD est proposée par Ibrahim [47] et appliquée aux réponses libres de la structure. C'est une méthode indirecte, MDOF et SIMO. Elle se base sur la matrice du système reliant la réponse libre de la structure au temps t à celle au temps $(t + \Delta t)$. Les valeurs propres de cette matrice du système donnent les fréquences propres et les taux d'amortissement tandis que les vecteurs propres associés sont les déformées modales. Le facteur MCF (modal confidence factor) est proposé pour éliminer les modes non-physiques. Les avantages de cette méthode sont l'efficacité de calcul pour les systèmes dont les modes sont proches et la vérification de qualité de calcul via le MCF. Son inconvénient est la grande sensibilité aux signaux bruités en ce qui concerne la détermination des taux d'amortissement.

La méthode LSCE est introduite comme une extension de la méthode de Prony dans la référence [13]. La méthode de Prony ou la méthode Exponentielle Complexe (CE : complex exponential) est une méthode indirecte, MDOF et SISO. Elle travaille sur une RIF (impulse response function) tandis que la méthode LSCE utilise plusieurs RIFs en même temps et donc de type SIMO. Partant du modèle modal de RIF dans le temps, la méthode de Prony détermine les coefficients d'un polynôme dont les solutions sont les exponentielles des pôles du système multipliés par Δt. La prise en compte de plusieurs RIFs dans la méthode LSCE conduit à l'obtention de ces coefficients au sens de moindres carrés. Comme la méthode CE, la difficulté de la méthode LSCE consiste dans l'estimation correcte du nombre de modes.

Récemment, Feeny et al. 1998, 2003 [35, 36] , Kershen et Golinval 2002 [49], Elias et al. 2012 [31] ont présenté l'application de la décomposition orthogonale en valeur propre (POD : proper orthogonal decomposition) pour identifier des paramètres modaux du système mécanique linéaire à partir de la réponse libre. Les résultats de leurs méthodes montrent que les modes propres orthogonaux (POMs : proper orthogonal modes) convergent vers les modes propres de la structure. Dans [31], les auteurs ont démontré

mathématiquement que la POD peut être utilisée pour des systèmes dynamiques dont la matrice de masse n'est pas proportionnelle à la matrice identité. Ils ont aussi étudié des conditions de la durée d'observation et du pas de temps pour assurer la précision du résultat. Cependant, en pratique, l'application de la POD pour l'identification modale rencontre des limites et des difficultés. En effet, les POMs sont orthogonaux, cependant les modes propres sont orthogonaux par rapport à la matrice de masse ; pour l'application en pratique, il faut soit que la matrice soit proportionnelle à l'identité soit la connaître.

Chelidze et Zhou 2006 [17] ont proposé une nouvelle méthode appelée Décomposition orthogonale Lisse (SOD : smooth orthogonal decomposition). D'autres applications de la SOD pour identifier les paramètres modaux à partir de la réponse vibratoire sous l'excitation ambiante est proposée par Farooq et Feeny 2008 [32]. Pour la méthode SOD, contrairement à la méthode POD, il n'est pas nécessaire de connaître la matrice de masse pour identifier les paramètres modaux. La performance de cette méthode en fonction des conditions de mesure sera étudiée dans le chapitre 4 de la thèse.

1.3.2.2 Méthodes dans le domaine fréquentiel

Les méthodes en fréquence utilisent souvent les FRFs pour l'identification des paramètres modaux. Il existe des méthodes bien connues de type 1DDL comme le Peak Picking, le Circle fitting... En ce qui concerne le type MDDL et SIMO, une méthode classique est la méthode Global Rational Fraction Polynomial (GRFP). C'est une extension de la méthode Rational Fraction Polynomial (RFP) qui est appliquée sur une seule FRF [76]. La FRF dans la méthode RFP s'écrit sous forme d'un rapport de deux polynômes dont le numérateur a des coefficients a_k et le dénominateur des coefficients b_k. La minimisation entre la FRF du modèle et la FRF mesurée permettra de déterminer les coefficients a_k et b_k. A partir des b_k, on déduit les fréquences propres et les taux d'amortissement. A partir des a_k et des pôles précédemment déterminés, on trouve les constantes modales et les phases. La méthode GRFP combine plusieurs FRFs mesurées afin d'estimer les paramètres modaux. A noter que les fréquences propres et les taux d'amortissement sont égaux pour les différentes FRFs (les propriétés globales) ; par contre, les constantes modales et les phases dépendent de chaque FRF (les propriétés locales). La méthode GRFP cherche d'abord les propriétés globales i.e, les coefficients b_k en regroupant toutes les FRFs et puis les propriétés locales sont déterminées sur chaque FRF indépendamment.

1.3.2.3 Méthodes dans le domaine temps-fréquence

Les techniques de traitement du signal temps-fréquence ont été appliquées en identification modale à partir des années 90. On peut citer ici la transformation en ondelettes utilisée par Staszewski [87], Ruzzene et al. [80], Argoul et al. [5, 6, 7, 97], Lardies et al. [43, 50], Le et Argoul [53], Marchesiello et al [63], Rouby et al. [79]. La transformation en ondelettes est appropriée au signal de multi-composantes, ce qui est souvent rencontré dans la réponse libre des structures en vibration. Staszewski [87] propose trois méthodes de détermination de taux d'amortissement basées sur la transformation en ondelettes. Ruzzene et al. [80] démontre que la transformation en ondelettes améliore la technique utilisant la transformation de Hilbert grâce au rôle de filtre de l'ondelette mère. Le signal d'une structure sous excitation ambiante a été utilisé pour la validation. Les signaux bruts sont traités par la méthode de décrément aléatoire pour avoir la réponse libre de la structure qui sera effectivement traitée par la transformation en ondelettes. Les fréquences propres et les taux d'amortissement sont extraits et donnent une bonne concordance avec d'autres méthodes. Argoul et al. [5, 6] utilise les réponses libres d'une structure à plusieurs ddl et propose la procédure de détermination des fréquences propres, des taux d'amortissement et des déformées modales. Le et Argoul [53] proposent un choix de l'ondelette mère et de la localisation temps-fréquence dans le contexte de traitement des signaux réels modulés en amplitude et en fréquence. Trois types d'ondelettes (ondelettes de Morley, de Cauchy et harmonique) sont comparées et deux ondelettes (Morley et Cauchy) sont retenues. Les auteurs proposent un facteur Q défini par le rapport entre le centre de fréquence et la bande de fréquence. Lorsque le coefficient Q tend vers l'infini, les résultats avec ces deux ondelettes coïncident.

1.3.3 Synthèse

Nous avons fait un résumé des méthodes d'identification modale (dans les domaines temporel, fréquentiel et temps-fréquence) d'un système linéaire. Dans le cadre de la thèse, nous étudions uniquement l'utilisation de la POD et de la SOD pour identifier les paramètres modaux pour un système linéaire. Un chapitre de la thèse sera consacré aux études sur la performance de cette méthode en fonction du nombre de mesures en espace et en temps, et en fonction de l'importance de l'amortissement du système. Nous testerons cette méthode sur deux expériences : un câble et une poutre.

Chapitre 2

Modèle du comportement du câble sain

Dans ce chapitre, nous étudions le comportement du câble à l'état sain en utilisant le modèle linéaire de poutre d'Euler Bernoulli avec tension.

La première partie concerne le système continu. D'abord, nous nous intéressons au problème aux valeurs propres et nous montrons les résultats analytiques ou semi-analytiques concernant les paramètres modaux pour un cas particulier où la section du câble est constante. Ensuite, nous réalisons des études pour distinguer des domaines de comportement (corde, poutre avec et sans tension). Nous nous intéressons aussi à la variation des paramètres modaux due à des conditions aux bords différentes (bi-appuyées ou bi-encastrées) car en pratique, les conditions aux bords sont difficiles à préciser. Enfin, nous développons une analyse concernant le bilan énergétique et l'énergie modale.

La deuxième partie présente la discrétisation par la méthode des éléments finis pour transformer le système continu (système initial) en système discret. Nous nous intéressons aussi au problème aux valeurs propres, à la réponse modale et aux aspects énergétiques modal et global pour le système discret.

2.1 Poutre d'Euler Bernoulli avec tension

L'équation aux dérivées partielles du modèle linéaire avec amortissement visqueux s'écrit comme suit :

$$\boxed{\mu(x)\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} + C(x)\frac{\partial v}{\partial t} - T\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI(x)\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial^2 x}\right) = p(x,t)} \tag{2.1}$$

avec les conditions aux bords différentes :

- Cas appuyé - appuyé :

$$v(0,t)=0 \quad , \quad v(L,t)=0 \quad , \quad \frac{\partial v(0,t)}{\partial x}=0 \quad , \quad \frac{\partial v(L,t)}{\partial x}=0$$

-Cas encastré - encastré :

$$v(0,t)=0 \quad , \quad v(L,t)=0 \quad , \quad \frac{\partial^2 v(0,t)}{\partial x^2}=0 \quad , \quad \frac{\partial^2 v(L,t)}{\partial x^2}=0$$

où $v(x,t)$ est le déplacement de la poutre à l'abscisse x et à l'instant t ; T, $\mu(x)$, $EI(x)$, $C(x)$ sont respectivement la tension, la masse linéique, la rigidité en flexion et le coefficient d'amortissement visqueux.

Dans cette partie, nous présentons d'abord le problème aux valeurs propres. Puis, nous nous intéressons au cas particulier où la section est constante et la poutre est homogène, autrement dit les paramètres μ et EI sont constants. Nous étudions les modes propres et les fréquences propres avec deux conditions aux bords différentes (bi-appuyé et bi-encastré) et les comparons. Enfin, nous nous intéressons aux aspects énergétiques : le bilan énergétique et l'énergie modale.

2.1.1 Problème aux valeurs propres

En utilisant la méthode de séparation des variables, l'équation différentielle du $4^{ème}$ degré du mode propre $\phi_n(x)$ s'écrit comme suit :

$$(EI(x)\phi_n''(x))'' - T\phi_n''(x) - \mu(x)\lambda_n\phi_n(x) = 0 \tag{2.2}$$

avec des conditions aux bords différentes :

- Cas appuyé - appuyé : $\quad \phi_n(0)=\phi_n(L)=0 \quad \text{et} \quad \phi_n''(0)=\phi_n''(L)=0$

- Cas encastré - encastré : $\quad \phi_n(0)=\phi_n(L)=0 \quad \text{et} \quad \phi_n'(0)=\phi_n'(L)=0$

Pour toute fonction $u \in H^2(0,L)$ justifiant les mêmes conditions aux bords, nous avons :

$$\int_0^L \left(EI(x)\phi_n''(x)u''(x) + T\phi_n'(x)u'(x) - \lambda_n\mu(x)\phi_n(x)u(x)\right) dx = 0 \tag{2.3}$$

En choisissant $u(x) = \phi_k(x)$ dans l'équation (2.3), nous obtenons :

$$\int_0^L (EI(x)\phi_n''(x)\phi_k''(x) + T\phi_n'(x)\phi_k'(x) - \lambda_n \mu(x)\phi_n(x)\phi_k(x))\, dx = 0 \tag{2.4}$$

De même, nous avons :

$$\int_0^L (EI(x)\phi_k''(x)\phi_n''(x) + T\phi_k'(x)\phi_n'(x) - \lambda_k \mu(x)\phi_k(x)\phi_n(x))\, dx = 0 \tag{2.5}$$

Nous en déduisons donc que les modes propres correspondant aux deux valeurs propres différentes $\lambda_n \neq \lambda_k$ sont orthogonaux par rapport à la masse :

$$\int_0^L \mu(x)\phi_n(x)\phi_k(x) = 0 \qquad (\forall n \neq k) \tag{2.6}$$

et nous avons également :

$$\int_0^L EI(x)\phi_n''(x)\phi_k''(x)dx + \int_0^L T\phi_n'(x)\phi_k'(x)dx = 0 \qquad (\forall n \neq k) \tag{2.7}$$

De même, en choisissant $u(x) = \phi_n(x)$ dans l'équation (2.3), nous avons :

$$\lambda_n \int_0^L \mu(x)\phi_n^2(x)dx = \int_0^L EI(x)\phi_n''^2(x)dx + \int_0^L T\phi_n'^2(x)dx \tag{2.8}$$

Nous remarquons que $\int_0^L \mu(x)\phi_n^2(x)dx$ et $\int_0^L EI(x)\phi_n''^2(x)dx + \int_0^L T\phi_n'^2(x)dx$ représentent respectivement la masse modale et la rigidité modale. Le coefficient γ_n défini comme suit :

$$\gamma_n = \frac{\int_0^L EI(x)\phi_n''^2(x)dx}{\int_0^L T\phi_n'^2(x)dx} \tag{2.9}$$

représente donc le rapport entre la rigidité modale due à EI et celle due à la tension T.

D'après Eq. 2.8, la valeur propre λ_n peut se réécrire en fonction de γ_n et T ou en fonction de γ_n et $EI(x)$:

$$\lambda_n = (1+\gamma_n)\frac{\int_0^L T\phi_n'^2(x)dx}{\int_0^L \mu(x)\phi_n^2(x)dx} = \frac{(1+\gamma_n)}{\gamma_n}\frac{\int_0^L EI(x)\phi_n''^2(x)dx}{\int_0^L \mu(x)\phi_n^2(x)dx} \tag{2.10}$$

Nota : Pour le cas général (avec ou sans tension), l'équation (2.6) montre l'orthogonalité des modes propres par rapport à la masse. Lorsque $T = 0$, d'après Eq.(2.8), nous avons l'orthogonalité des courbures par rapport à la rigidité.

2.1.2 Cas particulier : EI, μ sont constants

Le problème aux valeurs propres du système continu (Eq.2.2) ne peut pas être résolu analytiquement dans le cas général où les paramètres EI et μ ne sont pas constants. Dans cette partie, nous nous intéressons uniquement au cas où les coefficients EI et μ sont constants.

Le coefficient γ_n défini par Eq.(2.9) peut se réécrire comme suit :

$$\gamma_n = \xi^2 L^2 \frac{\int_0^L \phi_n''^2(x)dx}{\int_0^L \phi_n'^2(x)dx} = \xi^2 \frac{L^2\|\phi_n''^2\|_2^2}{\|\phi_n'^2\|_2^2} \qquad \text{avec} \qquad \xi = \sqrt{\frac{EI}{TL^2}} \tag{2.11}$$

Et l'expression Eq.(2.10) des valeurs propres se réécrit :

$$\lambda_n = (1+\gamma_n)\frac{T}{\mu L^2}\frac{L^2\|\phi_n'^2\|_2^2}{\|\phi_n^2\|_2^2} = \frac{(1+\gamma_n)}{\gamma_n}\frac{EI}{\mu L^4}\frac{L^4\|\phi_n''^2\|_2^2}{\|\phi_n^2\|_2^2} \tag{2.12}$$

Nous allons étudier ci-dessous les paramètres modaux et le coefficient γ_n suivant les deux conditions aux bords différentes (bi-appuyées et bi-encastrées) et ensuite les comparer.

2.1.2.1 Cas bi-appuyées

Avec des conditions aux bords bi-appuyées, le *n-ième* mode propre est proportionnel à la fonction sinusoïdale :

$$\boxed{\phi_n(x) = \sin(\frac{n\pi x}{L})} \tag{2.13}$$

Nous avons donc $\gamma_n = \xi^2 \frac{L^2 \|\phi_n''^2\|_2^2}{\|\phi_n'^2\|_2^2} = n^2\pi^2\xi^2$ et l'expression Eq.(2.12) se réécrit :

$$\lambda_n = (1 + n^2\pi^2\xi^2)n^2\pi^2\frac{T}{\mu L^2} = \frac{(1 + n^2\pi^2\xi^2)}{n^2\pi^2\xi^2} n^4\pi^4\frac{EI}{\mu L^4} \tag{2.14}$$

- Lorsque ξ tend vers 0, le câble se comporte comme une corde et la *n-ième* valeur propre du câble tend vers la *n-ième* valeur propre de la corde $\lambda_n^{corde} = n^2\pi^2\frac{T}{\mu L^2}$.

- Lorsque ξ tend vers l'infini, le câble se comporte comme une poutre et la *n-ième* valeur propre du câble tend vers la *n-ième* valeur propre de la poutre $\lambda_n^{poutre} = n^4\pi^4\frac{EI}{\mu L^4}$.

2.1.2.2 Cas bi-encastrées

Avec des condition aux bords bi-encastrée, le *n-ième* mode propre est proportionnel à la fonction suivante :

$$\boxed{\phi_n(x) = -\frac{\cosh(\beta_n L) - \cos(\alpha_n L)}{\sinh(\beta_n L) + \frac{\beta_n}{\alpha_n}\sin(\alpha_n L)}\left[\sinh(\beta_n x) - \frac{\beta_n}{\alpha_n}\sin(\alpha_n x)\right] + \cosh(\beta_n x) - \cos(\alpha_n x)} \tag{2.15}$$

où α_n et β_n sont les solutions de l'équation transcendante suivante :

$$\boxed{2(\alpha_n L)(\beta_n L)[1 - \cos(\alpha_n L)\cosh(\beta_n L)] + (\beta_n^2 L^2 - \alpha_n^2 L^2)\sin(\alpha_n L)\sinh(\beta_n L) = 0} \tag{2.16}$$

avec :

$$\alpha_n L = \frac{1}{\xi\sqrt{2}}\sqrt{\sqrt{1+4\xi^4\frac{\mu L^4\lambda_n}{EI}}-1}$$

$$\beta_n L = \frac{1}{\xi\sqrt{2}}\sqrt{\sqrt{1+4\xi^4\frac{\mu L^4\lambda_n}{EI}}+1}$$

2.1.3 Distinction des domaines de comportement : corde, poutre avec ou sans tension

En supprimant des termes concernant à la rigidité ou à la tension dans l'équation vibratoire Eq.(2.1) du modèle poutre d'Euler Bernoulli avec tension, nous obtenons respectivement l'équation vibratoire du modèle d'une corde vibrante ou du modèle d'une poutre d'Euler Bernoulli classique sans tension. Dans cette partie, nous nous intéressons à la distinction des domaines de comportement : corde, poutre avec tension, poutre sans tension. Nous présentons ici deux critères pour la distinction. Le premier critère se base sur la comparaison des fréquences entre différents modèles. Le deuxième critère, que nous proposons, utilise le rapport γ_n entre la rigidité modale due à la rigidité en flexion EI et celle due à la tension.

2.1.3.1 Critère1 : comparaison des fréquences

Dans [103], H.Zui et al. ont étudié des rapports des fréquences propres de différents modèles : $\eta_n = \frac{f_n}{f_n^c}$ et $\chi_n = \frac{f_n}{f_n^p}$ (pour $n = 1, 2$), où f_n ou f_n^p est la *n-ième* fréquence du modèle d'une poutre d'Euler Bernoulli bi-encastrée avec ou sans tension et f_n^c est la *n-ième* fréquence du modèle d'une corde vibrante. Deux rapports η_n, χ_n dépendent de n et du paramètre ξ. Les auteurs ont conclu que plus ξ est petit, la fréquence du câble est proche de celle la corde et au contraire, plus ξ est grand, la fréquence du câble est proche de celle de la poutre d'Euler Bernoulli sans tension.

Avec la même idée que dans [103], sur les Fig.2.1, Fig.2.2, nous traçons deux rapports η_n, χ_n en fonction de ξ pour $n = 1, ...7$. Nous trouvons que :

- Lorsque ξ est assez petit, inférieur à un certain seuil ξ_c, appelé le seuil du modèle d'une corde vibrante, on a : $\mid \eta_n - 1 \mid \leq \varepsilon$ avec $\varepsilon \approx 0$, soit $\eta_n \approx 1$ ou bien $f_n \approx f_n^c$ $(n = 1, 2, ..., k)$; nous pouvons donc considérer que le câble se comporte comme une corde vibrante (Fig. 2.1).

- Lorsque ξ est assez grand, supérieur à un certain seuil ξ_p, appelé le seuil du modèle d'une poutre d'Euler Bernoulli sans tension, on a $\mid \chi_n - 1 \mid \leq \varepsilon$ avec $\varepsilon \approx 0$, soit $\chi_n \approx 1$ ou bien $f_n \approx f_n^p$ $(n = 1, 2, ..., k)$;

nous pouvons donc considérer que le câble se comporte comme une poutre d'Euler Bernoulli sans tension. (Fig. 2.2).

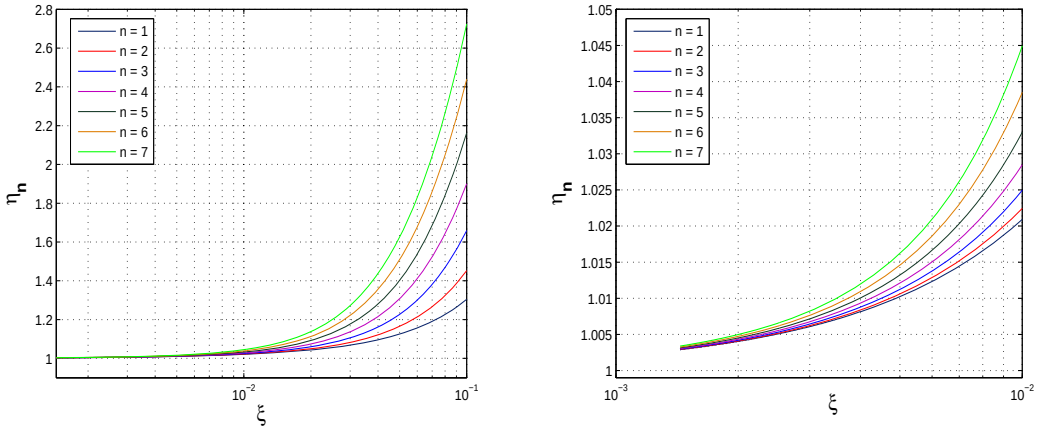
- Lorsque le paramètre ξ a une valeur intermédiaire, soit $\xi_c < \xi < \xi_p$, nous considérons que le câble se comporte comme une poutre d'Euler Bernoulli avec tension.

Le choix des seuils ξ_c et ξ_p dépend de k et ε, où k est le nombre des modes à considérer et ε est utilisé dans les conditions $\mid \eta_n - 1 \mid \leq \varepsilon$ ou $\mid \chi_n - 1 \mid \leq \varepsilon$.

Dans [78], Robert et al. ont proposé le seuil du modèle de corde $\xi_c = 5.10^{-3}$ et ils ont considéré que le câble se comporte comme une corde lorsque $\xi < \xi_c = 5.10^{-3}$. Dans [84, 85], les auteurs ont utilisé aussi ce seuil pour prendre le modèle de corde dans leurs applications. Avec ce modèle de corde, ils ont une formule analytique donnant la relation entre les fréquences propres et la tension. Ils utilisent cette relation pour estimer la tension dans les câbles à partir des fréquences identifiées expérimentalement grâce à une formule analytique pour le modèle de corde qui exprime la relation entre les fréquences et la tension. Dans [78, 84, 85], les auteurs s'intéressent plutôt à la première fréquence (k=1) et le seuil $\xi_c = 5.10^{-3}$ utilisé correspond à l'erreur $\varepsilon \approx 1\%$.

Dans cette thèse, l'objectif est de détecter des défauts des câbles et nous nous intéressons non seulement aux paramètres modaux du premier mode mais aussi à ceux des modes plus élevés. De plus, des modes retenus doivent avoir assez d'énergie pour que nous puissions les identifier assez précisément à partir de la réponse vibratoire. Pour cette raison, nous choisissons plutôt $k = 7$, et nous proposons le seuil du modèle d'une corde vibrante $\xi_c = 2.10^{-3}$ qui correspond à l'erreur $\varepsilon \approx 0.5\%$.

Dans la littérature, le seuil du modèle d'une poutre d'Euler Bernoulli ξ_p n'est pas trop abordé et n'est pas encore proposé. De façon identique pour le choix du seuil $\xi_c = 2.10^{-3}$, nous proposons le seuil du modèle d'une poutre d'Euler Bernoulli $\xi_p = 2$ en considérant le 7 premiers modes (k=7) avec l'erreur $\varepsilon \approx 0.5\%$.



(a) η_n en fonction de ξ (b) Zoom de η_n

FIG. 2.1 – Rapport $\eta_n = \dfrac{f_n}{f_n^c}$ en fonction de ξ

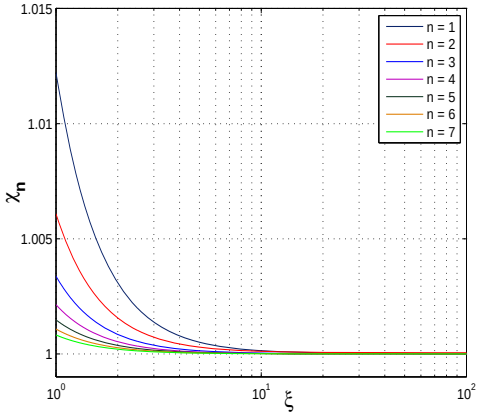


FIG. 2.2 – Rapport $\chi_n = \dfrac{f_n}{f_n^p}$ en fonction de ξ

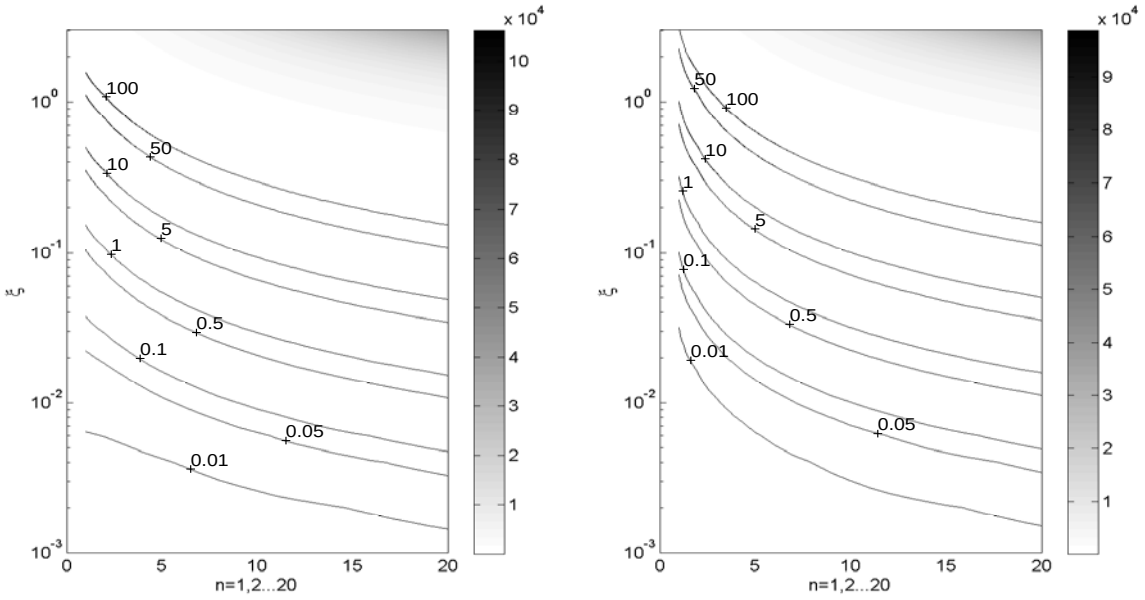
2.1.3.2 Critère2 : Utilisation du coefficient γ_n

Dans la Fig.2.3, nous traçons les isovaleurs $\gamma_n(\xi)$ en fonction de n et de ξ pour deux conditions aux bords différentes (bi-appuyées et bi-encastrées). Pour $n = 1, ...10$, nous avons :

- Pour $\xi < 0.002$, $\gamma_n < 1/100 \ll 1$. La rigidité modale due à la rigidité en flexion EI est négligeable par rapport à celle due à la tension. Le modèle de poutre considéré est donc proche de celui d'une corde.

- Pour $\xi > 2$, $\gamma_n > 100 \gg 1$. La rigidité modale due à à la tension est négligeable par rapport à celle due à la rigidité en flexion EI. Le modèle de poutre considéré est donc proche de celui d'une poutre sans tension.

Ces remarques justifient le choix des seuils $\xi_c = 2.10^{-3}$ et $\xi_p = 2$ que nous avons proposé au **2.1.3.1**.



(a) Cas bi-encastré

(b) Cas bi-appuyé

FIG. 2.3 – Isovaleurs $\gamma_n(\xi)$ en fonction de n et de ξ

2.1.4 Distinction des paramètres modaux selon deux conditions aux bords

Dans cette partie, nous comparons les paramètres modaux pour deux conditions aux bords différentes (bi-appuyées ou bi-encastrées) en fonction de l'ordre du mode n et du paramètre ξ précédemment introduit. Nous étudions d'abord le rapport des valeurs propre $\frac{\lambda_{enc}}{\lambda_{app}}$ où "enc" désigne le cas bi-encastré et "app" désigne le cas bi-appuyé. Ensuite, nous comparons les modes propres ϕ_i^{enc}, ϕ_i^{app} et enfin, les courbures modales $\phi_i''^{\text{enc}}$, $\phi_i''^{\text{app}}$.

2.1.4.1 Valeurs propres

Les isovaleurs du rapport $\frac{\lambda_{enc}}{\lambda_{app}}$ en fonction de n et de ξ sont tracées sur la Fig. 2.4(a). Nous traçons aussi sur la Fig.2.4(b) ce rapport $\frac{\lambda_{enc}}{\lambda_{app}}$ en fonction de n pour 3 cas : (1) poutre sans tension ($\xi = \infty$), (2) la poutre avec tension de l'ENPC ($\xi = 0.0545$) qui sera présentée dans la partie **3.1.2**, (3) le câble de Nantes ($\xi = 0.0124$) qui sera présenté dans la partie **3.1.1**. Nous trouvons que :

- Les valeurs propres de la poutre avec des conditions aux bords bi-encastrées sont toujours plus élevées que celles bi-appuyées. Pour les valeurs propres d'ordre plus élevé, la différence due aux bords est moins importante. Autrement dit, ce rapport $\frac{\lambda_{enc}}{\lambda_{app}}$ se rapproche de 1.

- Pour $\xi \ll 1$, il y a très peu de différence entre les deux conditions aux bords, par exemple la différence relative des valeurs propres correspondant aux deux conditions est inférieure à 1% pour $\xi < \xi^{corde} = 0.002$, et 5% pour $\xi < 0.01$. Pour ξ plus grand, la différence est plus nette, par exemple elle est supérieure à 50% pour $\xi > 0.1$ ($n = 1, 2...5$).

2.1.4.2 Modes propres

Sur la Fig. 3.5(a), nous traçons les modes propres d'un câble monotoron ($\xi = 0.0124$) pour les deux conditions aux bords (bi-encastrés et cas bi-appuyé). Comme la forme des modes propres pour les deux conditions aux bords est assez proche, l'idée est d'étudier la corrélation des modes du cas bi-encastré avec ceux du cas bi-appuyé à l'aide du MAC :

$$MAC_{\text{mode}}(i,j) = \frac{\langle \phi_i^{\text{enc}}, \phi_j^{\text{app}} \rangle}{\|\phi_i^{\text{enc}}\| \|\phi_j^{\text{app}}\|} \tag{2.17}$$

avec $\langle g, h \rangle = \int_0^L g(x)h(x)dx$, $\|g\| = \sqrt{\langle g, g \rangle}$.

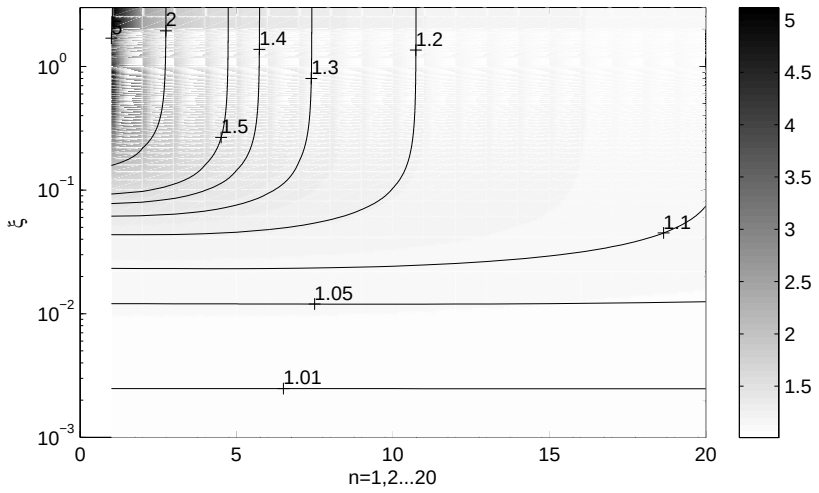
Les Fig.2.5 et 2.6 montrent que plus ξ est petit, plus les modes sont corrélés. Par exemple, pour le câble avec $\xi = 0.0124$, les modes sont bien corrélés ($n = 1, 2...10$).

2.1.4.3 Courbures modales

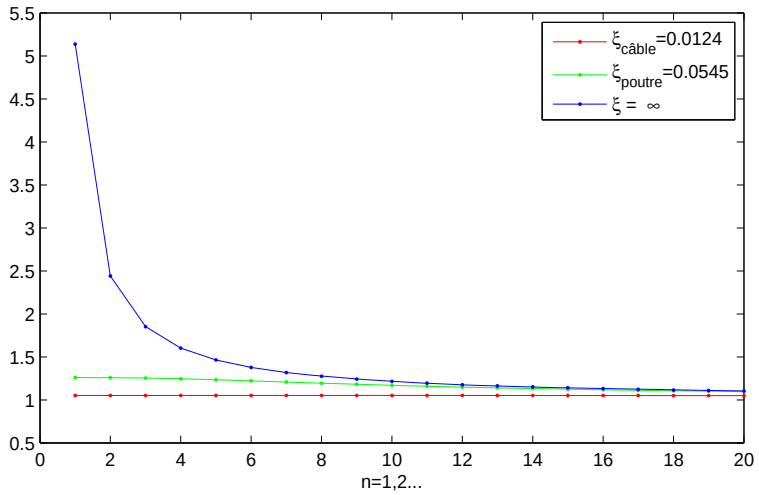
Sur la Fig. 3.5(b), nous traçons les courbures modales d'un câble monotoron ($\xi = 0.0124$) pour les deux conditions aux bords (bi-encastrés et cas bi-appuyé). Nous trouvons que les courbures sont mal corrélées, surtout pour les premiers modes à cause de différentes conditions aux bords. A l'oeil, les courbures sont très différentes aux bords mais semblables dans la zone centrale. Cela s'explique par le fait que la zone centrale est moins influencée par les conditions aux bords. En conséquence, les courbures calculées pour les conditions aux bords bi-appuyées donnent une bonne approximation dans cette zone. Nous étudions donc la corrélation des courbures pour les deux conditions aux bords, dans la zone centrale, par exemple $\Omega_1 = [\frac{L}{20} \quad \frac{19L}{20}]$ (Fig. 2.9 et 2.10) et $\Omega_2 = [\frac{L}{10} \quad \frac{9L}{10}]$ (Fig. 2.11 et 2.12) à l'aide du MAC :

$$MAC_{\text{courbe}}(i,j) = \frac{\langle \phi_i''^{\text{enc}}, \phi_j''^{\text{app}} \rangle_\Omega}{\|\phi_i''^{\text{enc}}\|_\Omega \|\phi_j''^{\text{app}}\|_\Omega} \tag{2.18}$$

avec $\langle g, h \rangle_\Omega = \displaystyle\int_\Omega g(x)h(x)dx$, $\|g\|_\Omega = \sqrt{\langle g, g \rangle_\Omega}$

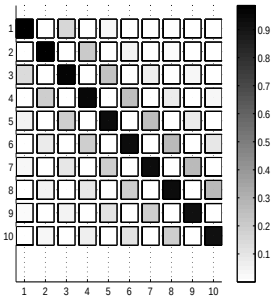


(a) Isovaleurs $\frac{\lambda_{enc}}{\lambda_{app}}$ en fonction de n et de ξ

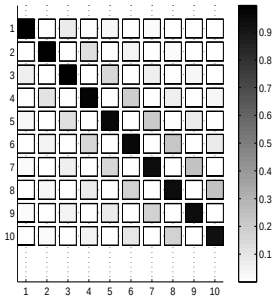


(b) 3 cas : câble($\xi = 0.0124$), poutre($\xi = 0.0545$), poutre sans tension($\xi = \infty$)

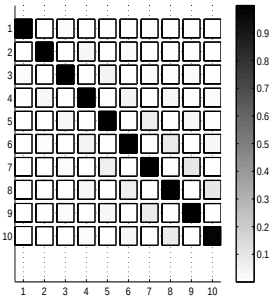
FIG. 2.4 – $\frac{\lambda_n^{enc}}{\lambda_n^{app}}$: rapport des valeurs propres entre le cas bi-encastré et le cas bi-appuyé



(a) Poutre sans tension($\xi = \infty$)

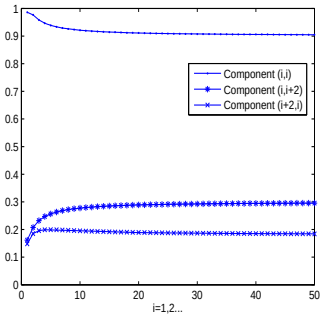


(b) Poutre tendue($\xi = 0.0545$)

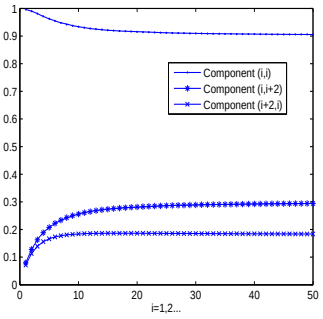


(c) Câble tendu($\xi = 0.0124$)

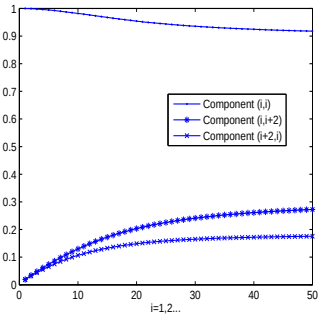
FIG. 2.5 – Matrice MAC_{mode}



(a) Poutre sans tension($\xi = \infty$)

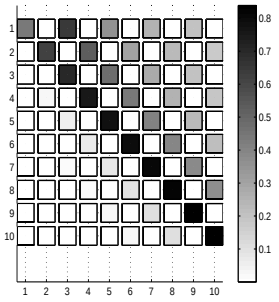


(b) Poutre tendue($\xi = 0.0545$)

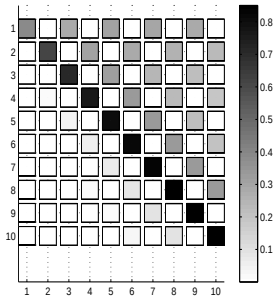


(c) Câble tendu ($\xi = 0.0124$)

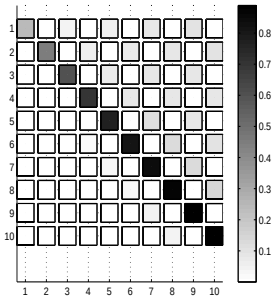
FIG. 2.6 – Composantes diagonales de la matrice MAC_{mode}



(a) Poutre sans tension($\xi = \infty$)

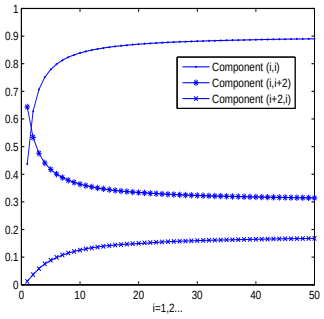


(b) Poutre tendue($\xi = 0.0545$)

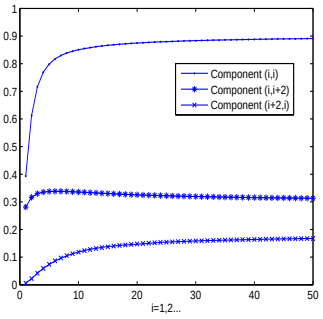


(c) Câble tendu($\xi = 0.0124$)

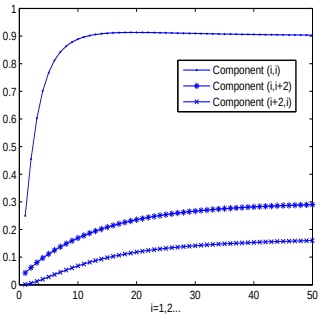
FIG. 2.7 – Matrice $MAC_{courbure}$



(a) Poutre sans tension($\xi = \infty$)

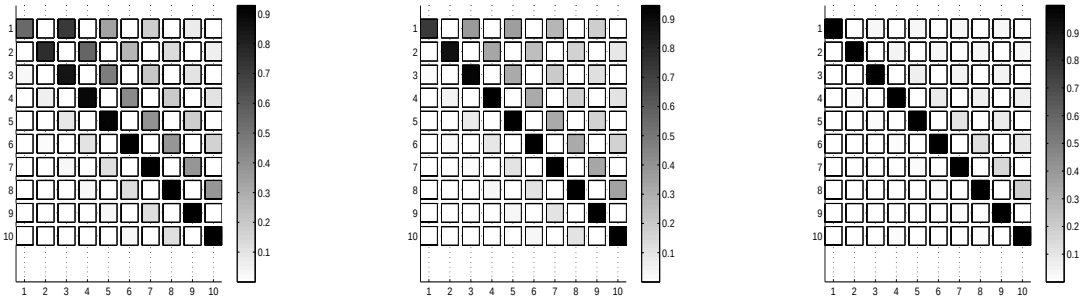


(b) Poutre tendue($\xi = 0.0545$)



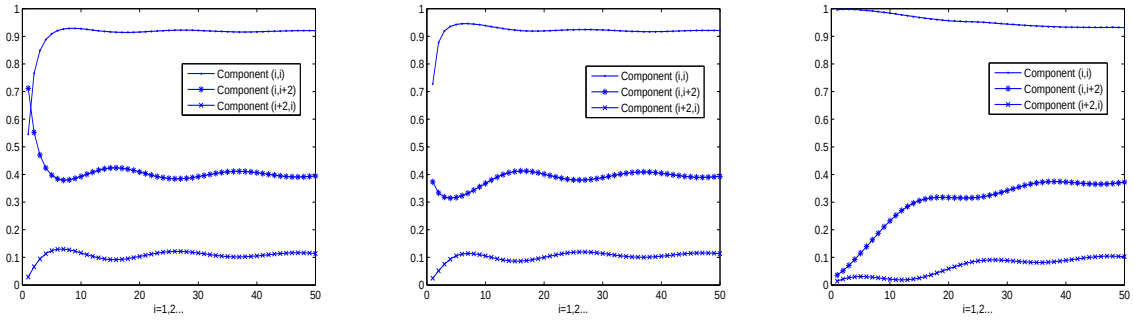
(c) Câble tendu ($\xi = 0.0124$)

FIG. 2.8 – Composantes diagonales de la matrice $MAC_{courbure}$



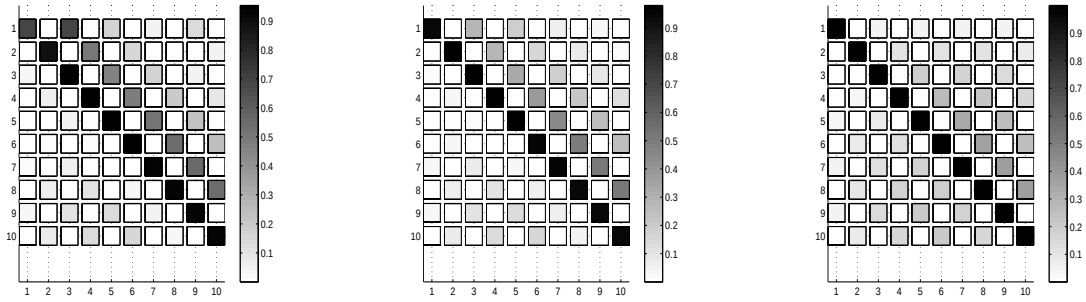
(a) Poutre sans tension($\xi = \infty$) (b) Poutre tendue($\xi = 0.0545$) (c) Câble tendu($\xi = 0.0124$)

FIG. 2.9 – Matrice $MAC_{courbure}$ avec $\Omega_1 = [\frac{L}{20} \quad \frac{19L}{20}]$



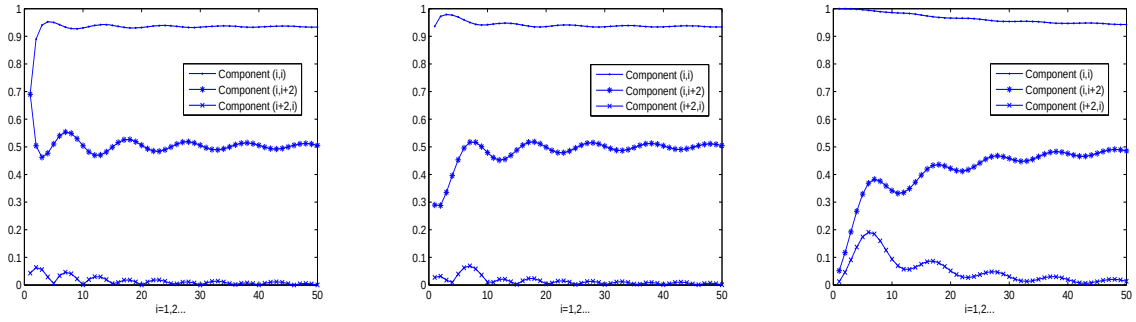
(a) Poutre sans tension($\xi = \infty$) (b) Poutre tendue($\xi = 0.0545$) (c) Câble tendu ($\xi = 0.0124$)

FIG. 2.10 – Composantes diagonales de la matrice $MAC_{courbure}$ avec $\Omega_1 = [\frac{L}{20} \quad \frac{19L}{20}]$



(a) Poutre sans tension($\xi = \infty$) (b) Poutre tendue($\xi = 0.0545$) (c) Câble tendu($\xi = 0.0124$)

FIG. 2.11 – Matrice $MAC_{courbure}$ avec $\Omega_2 = [\frac{L}{10} \quad \frac{9L}{10}]$



(a) Poutre sans tension($\xi = \infty$) (b) Poutre tendue($\xi = 0.0545$) (c) Câble tendu ($\xi = 0.0124$)

FIG. 2.12 – Composantes diagonales de la matrice $MAC_{courbure}$ avec $\Omega_2 = [\frac{L}{10} \quad \frac{9L}{10}]$

2.1.4.4 Synthèse

En conclusion, les conditions aux bords du câble sont difficiles à préciser (bi-encastrées ou bi-appuyées). Les études réalisées montrent que plus ξ est petit, c'est à dire plus le câble est proche d'une corde, moins les différences dues aux conditions aux bords sont importantes. Par contre, plus ξ est grand, c'est à dire plus le comportement du câble est proche de celui d'une poutre sans tension, plus les différences dues aux bords deviennent importantes.

2.1.5 Aspects énergétiques

2.1.5.1 Energie mécanique et bilan énergétique

L'énergie cinétique est la somme des énergies cinétiques de chaque élément infinitésimal. Nous pouvons alors écrire :

$$E_c(t) = \frac{1}{2}\int_0^L \mu(x)\left(\frac{\partial v(x,t)}{\partial t}\right)^2 dx \tag{2.19}$$

L'énergie potentielle à chaque instant t qui intervient dans la déformation de la poutre vaut :

$$E_p(t) = \frac{1}{2}\int_0^L T\left(\frac{\partial v(x,t)}{\partial x}\right)^2 dx + \frac{1}{2}\int_0^L EI(x)\left(\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2}\right)^2 dx \tag{2.20}$$

L'énergie mécanique du câble à l'instant t est la somme de l'énergie cinétique $E_c(t)$ et de l'énergie potentielle $E_p(t)$:

$$E_m(t) = E_c(t)+E_p(t) = \frac{1}{2}\int_0^L \mu(x)\left(\frac{\partial v(x,t)}{\partial t}\right)^2 dx+\frac{1}{2}\int_0^L T\left(\frac{\partial v(x,t)}{\partial x}\right)^2 dx+\frac{1}{2}\int_0^L EI(x)\left(\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2}\right)^2 dx \tag{2.21}$$

Nous dérivons Eq.2.21 par rapport au temps :

$$\frac{\partial E_m(t)}{\partial t} = \int_0^L \mu(x)\frac{\partial v(x,t)}{\partial t}.\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2}dx + T\int_0^L \frac{\partial v(x,t)}{\partial x}.\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x\partial t}dx + \int_0^L EI(x)\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2}.\frac{\partial^3 v(x,t)}{\partial x^2\partial t}dx \tag{2.22}$$

En utilisant une intégration par parties et en utilisant les conditions aux bords, nous obtenons :

$$T\int_0^L \frac{\partial v(x,t)}{\partial x}.\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x\partial t}dx = -T\int_0^L \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2}.\frac{\partial v(x,t)}{\partial t}dx \tag{2.23}$$

$$\int_0^L EI(x)\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2}.\frac{\partial^3 v(x,t)}{\partial x^2\partial t}dx = \int_0^L \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI(x)\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2}\right).\frac{\partial v(x,t)}{\partial t}dx \tag{2.24}$$

On en déduit :

$$\frac{\partial E_m(t)}{\partial t} = \int_0^L \mu(x)\frac{\partial v(x,t)}{\partial t}.\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2}dx - T\int_0^L \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2}.\frac{\partial v(x,t)}{\partial t}dx + \int_0^L \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI(x)\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2}\right).\frac{\partial v(x,t)}{\partial t}dx \tag{2.25}$$

Soit :

$$\frac{\partial E_m(t)}{\partial t} = \int_0^L \left[\mu(x)\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} - T\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI(x)\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2}\right)\right]\frac{\partial v(x,t)}{\partial t}dx \tag{2.26}$$

En utilisant l'équation (2.1), nous avons donc :

$$\frac{\partial E_m(t)}{\partial t} = \int_0^L \left(p(x,t) - C\frac{\partial v(x,t)}{\partial t}\right)\frac{\partial v(x,t)}{\partial t}dx \tag{2.27}$$

En prenant l'intégrale en t entre t_0 et t_P de l'équation (2.27), nous obtenons le bilan de l'énergie suivant :

$$\boxed{\underbrace{E_m(t_P)}_{\text{énergie à l'instant } t_P} = \underbrace{E_m(t_0)}_{\text{énergie initiale}} + \underbrace{\int_0^L\int_{t_0}^{t_P} p(x,t)\frac{\partial v}{\partial t}dtdx}_{\text{énergie produite par l'excitation}} - \underbrace{\int_0^L\int_{t_0}^{t_P} C\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2 dtdx}_{\text{énergie dissipée par l'amortissement}}} \tag{2.28}$$

Dans le cas des vibrations libres et d'un système conservatif ($p(x,t) = 0$ et $C = 0$), nous avons *l'équation de conservation de l'énergie* :

$$\boxed{\underbrace{E_m(t_P)}_{\text{énergie à l'instant } t_P} = \underbrace{E_m(t_0)}_{\text{énergie initiale}}} \tag{2.29}$$

2.1.5.2 Energie modale et énergie globale

La réponse $v(x,t)$ peut se décomposer sur la base des modes $\{\phi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$: $v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x) q_n(t)$.

D'après 2.19, l'énergie cinétique à l'instant t peut se réécrire comme suit :

$$E_c(t) = \frac{1}{2} \int_0^L \mu(x) \left(\sum_1^{\infty} \ddot{q}_n(t) \phi_n(x) \right)^2 dx = \sum_1^{\infty} \ddot{q}_n^2(t) \left(\int_0^L \mu(x) \phi_n^2(x) \right) \tag{2.30}$$

De même, d'après 2.20, l'énergie potentielle à l'instant t peut se réécrire comme suit :

$$E_p(t) = \frac{1}{2} \int_0^L T \left(\sum_1^{\infty} q_n(t) \phi_n'(x) \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L EI(x) \left(\sum_1^{\infty} q_n(t) \phi_n''(x) \right)^2 dx \tag{2.31}$$

Soit :

$$\begin{aligned} E_p(t) =& \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} q_n^2(t) \left(\int_0^L T \phi_n'^2(x) dx + \int_0^L EI(x) \phi_n''^2(x) dx \right) + \\ &+ \sum_{n=1, m>n}^{\infty} q_n(t) q_m(t) \left(\int_0^L T \phi_n'(x) \phi_m'(x) dx + \int_0^L EI(x) \phi_n''(x) \phi_m''(x) dx \right) \end{aligned} \tag{2.32}$$

D'autre part, d'après 2.7, nous avons :

$$\int_0^L T \phi_n'(x) \phi_m'(x) dx + \int_0^L EI(x) \phi_n''(x) \phi_m''(x) dx = 0 \qquad \text{pour} \qquad n \neq m \tag{2.33}$$

Nous en déduisons donc :

$$E_p(t) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n^2 q_n^2(t) \left(\int_0^L \mu(x) \phi_n^2(x) dx \right) \tag{2.34}$$

Ainsi, l'énergie mécanique à chaque instant t peut se réécrire par :

$$E_m(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \left(\int_0^L \mu \phi_n^2(x) dx \right) \left(\dot{q}_n^2(t) + \omega_n^2 q_n^2(t) \right) \tag{2.35}$$

Posons $E_m(n,t) = \frac{1}{2}\left(\int_0^L \mu\phi_n^2(x)dx\right)\left(\dot{q}_n^2(t) + \omega_n^2 q_n^2(t)\right)$ qui représente l'énergie modale du mode n. Nous avons donc que l'énergie mécanique est la somme infinie de l'énergie modale de chacun des modes :

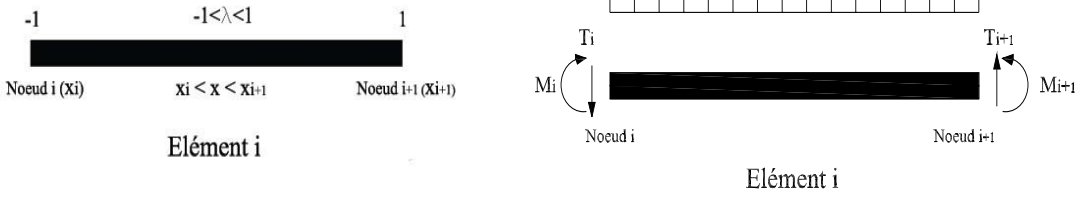
$$E_m(t) = \sum_{n=1}^{\infty} E_m(n,t) \tag{2.36}$$

2.2 Discrétisation par éléments finis

Dans ce paragraphe, nous présentons d'abord l'utilisation de la méthode des éléments finis pour transformer le système initial qui a une infinité de degrés de liberté (système continu) en un système différentiel qui a un nombre réduit de degrés de liberté (système discret). Ensuite, nous étudions le problème aux valeurs propres du système discret et nous comparons l'orthogonalité des modes entre le système continu et le système discret. Puis, nous présentons le calcul pour déterminer les réponses modales. Enfin, nous nous intéressons aux aspects énergétiques modal et global pour le système discret.

2.2.1 Méthode des éléments finis

2.2.1.1 Discrétisation en espace



Discrétisons le câble de longueur L en N éléments. Pour cela, découpons l'intervalle $[0, L]$ en N sous

- intervalles $[x_i, x_{i+1}]$ $(i = 1, 2, ..., N)$. Chaque noeud a 2 degrés de liberté (déplacement $v_i(t)$ et rotation $\theta_i(t)$).

Nous posons $u_i(t) = [v_i(t) \;\; \theta_i(t) \;\; v_{i+1}(t) \;\; \theta_{i+1}(t)]^T$ le vecteur formé du déplacement et de la rotation aux deux noeuds de l'élément i.

Idem pour $u_i^*(t)$ le vecteur formé du déplacement virtuel et de la rotation virtuelle.

Nous allons construire la fonction de réponse $v(x,t)$ de classe C^1 à partir de la réponse discrétisée en espace aux noeuds $v(x_i,t)$ et $\frac{\partial v(x,t)}{\partial x}|_{x_i}$, soit $v_i(t)$ et $\theta_i(t)$.

Pour x appartenant à l'élément i $[x_i \;\; x_{i+1}]$, x est paramétré par $\lambda = -1 + 2\dfrac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}$ $(\lambda \in [-1 \;\; 1])$. On a $dx = \dfrac{\Delta_i}{2} d\lambda$.

Le déplacement v au point x peut être représenté par la formule suivante :

$v = N^T u_i(t)$; $v^* = N^T u_i^*(t)$ avec $N^T = [N_1 \;\; N_2 \;\; N_3 \;\; N_4]$, où les fonctions N_i sont de classe C^1, en fonction de la longeur x ou du paramètre λ et elles doivent vérifier les conditions suivantes :

$$\begin{cases} N_1(x)|_{x_i} = 1, \;\; \frac{dN_1(x)}{dx}|_{x_i} = 0, \;\; N_1(x)|_{x_{i+1}} = 0, \;\; \frac{dN_1(x)}{dx}|_{x_{i+1}} = 0 \\ N_2(x)|_{x_i} = 0, \;\; \frac{dN_2(x)}{dx}|_{x_i} = 1, \;\; N_2(x)|_{x_{i+1}} = 0, \;\; \frac{dN_2(x)}{dx}|_{x_{i+1}} = 0 \\ N_3(x)|_{x_i} = 0, \;\; \frac{dN_3(x)}{dx}|_{x_i} = 0, \;\; N_3(x)|_{x_{i+1}} = 1, \;\; \frac{dN_3(x)}{dx}|_{x_{i+1}} = 0 \\ N_4(x)|_{x_i} = 0, \;\; \frac{dN_4(x)}{dx}|_{x_i} = 0, \;\; N_4(x)|_{x_{i+1}} = 0, \;\; \frac{dN_4(x)}{dx}|_{x_{i+1}} = 1 \end{cases}$$

Soit :

$$\begin{cases} N_1(\lambda)|_{-1} = 1, \quad \frac{dN_1(\lambda)}{d\lambda}|_{-1} = 0, \quad N_1(\lambda)|_1 = 0, \quad \frac{dN_1(\lambda)}{d\lambda}|_1 = 0 \\ N_2(\lambda)|_{-1} = 0, \quad \frac{dN_2(\lambda)}{d\lambda}|_{-1} = \frac{\Delta_i}{2}, \quad N_2(\lambda)|_1 = 0, \quad \frac{dN_2(\lambda)}{d\lambda}|_1 = 0 \\ N_3(\lambda)|_{-1} = 0, \quad \frac{dN_3(\lambda)}{d\lambda}|_{-1} = 0, \quad N_3(\lambda)|_1 = 1, \quad \frac{dN_3(\lambda)}{d\lambda}|_1 = 0 \\ N_4(\lambda)|_{-1} = 0, \quad \frac{dN_4(\lambda)}{d\lambda}|_{-1} = 0, \quad N_4(\lambda)|_1 = 0, \quad \frac{dN_4(\lambda)}{d\lambda}|_1 = \frac{\Delta_i}{2} \end{cases}$$

Nous avons choisi les fonctions $N_i(\lambda)$ suivantes :

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{4}(1-\lambda)^2(2+\lambda) \\ N_2 &= \frac{\Delta_i}{8}\ (1-\lambda^2)(1-\lambda) \\ N_3 &= \frac{1}{4}(1+\lambda)^2(2-\lambda) \\ N_4 &= \frac{\Delta_i}{8}(-1+\lambda^2)(1+\lambda) \end{aligned} \tag{2.37}$$

2.2.1.2 Equation vibratoire du système discret

L'expression du principe des travaux virtuels s'écrit :

$$\delta W^e_{int} + \delta W^e_{ext} = 0$$

Soit pour l'élément i et pour toute fonction $v(x,t)$:

$$\begin{aligned} \int_{x_i}^{x_{i+1}} v^* \mu dx \ \ (-\ddot{v}) \ \ + \ \ \int_{x_i}^{x_{i+1}} v^* C(-\dot{v}) dx \ \ + \ \ \int_{x_i}^{x_{i+1}} v^{*''}(EI) \ \ (-v'') dx \ \ + \\ + \int_{x_i}^{x_{i+1}} v^{*'} T \ \ (-v') dx \ \ + \ \ \int_{x_i}^{x_{i+1}} v^* p \ \ dx \ \ + \ \ u^{*T} r_i \ \ = 0 \end{aligned}$$

avec $\quad r_i^T \ = \ [-T_i \ \ -M_i \ \ T_{i+1} \ \ M_{i+1}]^T$

où :

- μ_i et $(EI)_i$ sont la masse linéique et la rigidité locale dans l'élément i

- $p(x,t)$ est la force d'excitation linéique

- T_i et M_i sont l'effort tranchant et le moment au noeud i

- T est la tension dans le câble.

On en déduit l'équation différentielle suivante :

$$\boxed{m_i\ddot{u}_i + c_i\dot{u}_i + k_i u_i = f_i + r_i}$$

où :

m_i, k_i, c_i sont les matrices élémentaires de masse, de rigidité et d'amortissement. f_i est le vecteur des forces extérieures.

m_i, k_i, c_i et f_i sont définies par les équations suivantes :

$$\begin{aligned}
m_i &= \int_{-1}^{1} \frac{\Delta_i}{2} N\mu_i N^T d\lambda \\
k_i &= \int_{-1}^{1} \frac{\Delta_i}{2} N''(EI)(N'')^T d\lambda \quad + \quad \int_{-1}^{1} \frac{\Delta_i}{2} N'T(N')^T d\lambda \\
c_i &= \frac{\Delta_i}{2} \int_{-1}^{1} NCN^T d\lambda \\
f_i &= \int_{-1}^{1} Np\frac{\Delta_i}{2} d\lambda
\end{aligned}$$

où $N^T = [N_1 \;\; N_2 \;\; N_3 \;\; N_4]$ et les fonctions N_i sont données dans Eq. 6.10.
Nous avons : $N' = \dfrac{dN}{dx} = \dfrac{1}{\Delta_i}\dfrac{dN}{d\lambda}$ et $N'' = \dfrac{d^2N}{dx^2} = \dfrac{1}{\Delta_i^2}\dfrac{d^2N}{d\lambda^2}$.

Dans le cas où la rigidité et la masse d'un élément sont des constantes et respectivement égales à $(EI)_i$ et μ_i pour le sous - intervalles $[x_i, x_{i+1}]$, on obtient (cf. Dhatt 1990 [24].) :

$$k_i = \frac{(EI)_i}{\Delta_i^3}\begin{pmatrix} 12 & 6\Delta_i & -12 & 6\Delta_i \\ & 4\Delta_i^2 & 6\Delta_i & 2\Delta_i^2 \\ sym & & 12 & -6\Delta_i \\ & & & 4\Delta_i^2 \end{pmatrix} + \tag{2.38}$$

$$+\frac{T}{30\Delta_i}\begin{pmatrix} 36 & 3\Delta_i & -36 & 3\Delta_i \\ & 4\Delta_i^2 & -3\Delta_i & -\Delta_i^2 \\ sym & & 36 & -3\Delta_i \\ & & & 4\Delta_i^2 \end{pmatrix}$$

$$m_i = \frac{\mu_i\Delta_i}{420}\begin{pmatrix} 156 & 22\Delta_i & 54 & -13\Delta_i \\ & 4\Delta_i^2 & 13\Delta_i & -3\Delta_i^2 \\ sym & & 156 & -22\Delta_i \\ & & & 4\Delta_i^2 \end{pmatrix}$$

En utilisant la technique d'assemblage, nous obtenons l'équation vibratoire du système discret sous

la forme matricielle suivante :

$$\boxed{\mathbf{M}\ddot{U}(t) + \mathbf{C}\dot{U}(t) + \mathbf{K}U(t) = F(t)} \tag{2.39}$$

Où :

M, **K**, **C** : matrices de masse, de rigidité et d'amortissement de dimension $(2N-2)\times(2N-2)$ pour le cas bi-encastré et $2N \times 2N$ pour le cas bi-appuyé.

F : vecteur dû aux forces d'excitation linéiques

2.2.2 Problème aux valeurs propres

Dans cette partie, nous allons chercher les paramètres modaux du "système discret" et ensuite comparer ou chercher la relation avec ceux du "système continu".

2.2.2.1 Equation du problème aux valeurs propres

Le problème aux valeurs propres s'écrit comme suit :

$$(\mathbf{K} - \lambda_n \mathbf{M})\psi_n = 0 \tag{2.40}$$

Grâce à la symétrie de **K** et **M**, on montre que deux modes propres distincts sont orthogonaux par rapport à la matrice **M** et aussi par rapport à **K** (cf. [60] pp.54).

On a :

$$\psi_n^T \mathbf{M} \psi_k = \psi_n^T \mathbf{K} \psi_k = 0 \quad \text{si} \quad n \neq k \tag{2.41}$$

et :

$$\frac{\psi_n^T \mathbf{K} \psi_n}{\psi_n^T \mathbf{M} \psi_n} = \omega_n^2 \tag{2.42}$$

Dans l'analyse modale, on utilise souvent des modes propres normalisés par rapport à la matrice de masse, autrement dit :

$$\psi_n^T \mathbf{M} \psi_n = 1 \quad \text{et} \quad \psi_n^T \mathbf{K} \psi_n = \omega_n^2 \tag{2.43}$$

2.2.2.2 Orthogonalité des modes

L'orthogonalité des modes par rapport à la masse s'écrit pour le système continu (2.6) par :

$$\int_0^L \mu(x)\phi_n(x)\phi_k(x) = 0 \qquad (\forall n \neq k) \tag{2.44}$$

et pour le système discret par :

$$\psi_n^T \mathbf{M} \psi_k = 0 \tag{2.45}$$

Lorsque la masse linéique $\mu(x)$ est constante, d'après Eq.2.6, les modes $\phi_n(x)$ du système continu sont deux à deux orthogonaux. Cependant, comme la matrice de masse M n'est pas proportionnelle à la matrice identité bien que $\mu(x)$ soit constante ; les modes propres ψ_n du système discret ne sont pas orthogonaux. Cela parait paradoxal, et nous allons donc étudier le lien de l'orthogonalité des modes entre les deux cas continu et discret.

D'après la partie **2.2.1.1**, les modes propres du système continu peuvent être approchés à partir des modes du système discret par la formule suivante :

$$\phi_k(x) = N^T(\lambda)\psi_{k[i]} \qquad \text{pour} \qquad x \in [x_i, x_{i+1}] \qquad (i = 1, 2, \ldots N) \tag{2.46}$$

où :

N est le nombre des éléments

$\lambda = (x - \dfrac{x_i + x_{i+1}}{2})\dfrac{2}{x_{i+1} - x_i}$ soit $x = \dfrac{1-\lambda}{2}x_i + \dfrac{1+\lambda}{2}x_{i+1}$

$\psi_{k[i]}$ est le vecteur des composantes (formé du déplacement et de la rotation) du mode propre ψ_k sur les deux noeuds de l'élément i (noeud i et noeud $i+1$) ; soit :

$\psi_{k[i]} = [\psi_k(2i-1) \quad \psi_k(2i) \quad \psi_k(2i+1) \quad \psi_k(2i+2)]^T$ où ψ_k : mode propre k du système discret

Nous avons donc :

$$\begin{aligned}\int_0^L \mu(x)\phi_m(x)\phi_n(x)dx &= \sum_{i=1}^{N}\int_{x_i}^{x_{i+1}} \mu(x)\phi_m(x)\phi_n(x)dx = \sum_{i=1}^{N}\int_{x_i}^{x_{i+1}} \mu(x)\psi_{m[i]}^T(i)NN^T\psi_{n[i]}(i)dx \\ &= \sum_{i=1}^{N}\psi_{m[i]}^T\left(\int_{x_i}^{x_{i+1}}\mu(x)NN^Tdx\right)\psi_{n[i]} = \sum_{i=1}^{N}\psi_{m[i]}^T m_i\psi_{n[i]} \\ &= \psi_m^T\mathbf{M}\psi_n = 0 \qquad (si \;\; m \neq n)\end{aligned} \tag{2.47}$$

L'équation 2.47 montre la correspondance entre l'orthogonalité des modes propres par rapport à la masse pour le système continu et le système discret.

2.2.3 Réponse modale $q_n(t)$

La réponse temporelle $U(t)$ peut se décomposer sur la base des modes propres ψ_i :

$$U(t) = \sum_{n=1}^{N}\psi_n q_n(t)$$

où N est le nombre total des modes du "système discrétisé".

Dans le cas de l'hypothèse d'amortissement de Basile ou de Rayleigh ($\mathbf{C} = \alpha\mathbf{M} + \beta\mathbf{K}$), les modes propres distints sonts orthogonaux par rapport à la matrice $\mathbf{C}$: $\psi_n^T\mathbf{C}\psi_k = 0 \quad (n \neq k)$. C'est à dire d'amortissements découplés dans la base des modes propres. Autrement dit, les modes propres du système sans amortissement sont aussi ceux du système avec amortissement. Cette hypothèse est justifiée sous certaines conditions, la plus importante étant celle de modes non voisins ; traduit par le facteur de séparation en fréquence $\frac{\omega_n^2}{\omega_k^2} - 1$ qui ne doit pas être trop petit (cf. [41]).

L'équation matricielle 2.39 se décompose en N équations scalaires découplées :

$$\ddot{q}_n(t) + 2\zeta_n\omega_n\dot{q}_n(t) + \omega_n^2 q_n(t) = \tilde{F}_n(t) \tag{2.48}$$

avec les conditions initiales $q_n(0) = \psi_n^T U(0)$ et $\dot{q}_n(0) = \psi_n^T\dot{U}(0)$.

Où : $\zeta_n = \dfrac{\psi_n^T C\psi_n}{2\omega_n}, \quad \tilde{F}_n(t) = \psi_n^T F_n(t)$

L'amplitude $q_n(t)$ peut être déterminée analytiquement par l'intégrale de Duhamel (Eq. (2.49)) ou numériquement.

Nota : L'intégrale de Duhamel (pour $\zeta_n < 1$, $q_n(t)$) est définie comme suit([69]) :

$$\boxed{q_n(t) = \left[\frac{\dot{q}_n(0) + \zeta_n\omega_n q_n(0)}{\omega_{Dn}} + q_n(0)\cos(\omega_{Dn}t)\right] e^{-\zeta_n\omega_n t} + \frac{1}{\omega_{Dn}}\int_0^t \widetilde{F}_n(\tau)e^{-\zeta_n\omega_n(t-\tau)}\sin\left[\omega_{Dn}(t-\tau)\right]d\tau} \tag{2.49}$$

avec $\omega_{Dn} = \omega_n\sqrt{1-\zeta_n^2}$.

2.2.4 Energie modal et énergie global

L'énergie mécanique du système discret vaut :

$$\boxed{E_m(t) = E_c(t) + E_p(t) = \frac{1}{2}\dot{U}^T\mathbf{M}\dot{U} + \frac{1}{2}U^T\mathbf{K}U} \tag{2.50}$$

Nous avons : $U(t) = \sum_{n=1}^{N}\psi_n q_n(t)$ et $\dot{U}(t) = \sum_{n=1}^{N}\psi_n\dot{q}_n(t)$ où N le nombre de degrés de liberté.

En utilisant la relation $\psi_n^T\mathbf{M}\psi_m = 0$ (si $m \neq n$), nous en déduisons donc :

$$\boxed{E_m(t) = \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{2}\left(\psi_n^T\mathbf{M}\psi_n\right)\left(\dot{q}_n^2(t) + \omega_n^2 q_n^2(t)\right)} \tag{2.51}$$

Posons $E_m(n,t) = \frac{1}{2}\left(\psi_n^T\mathbf{M}\psi_n\right)\left(\dot{q}_n^2(t) + \omega_n^2 q_n^2(t)\right)$ qui représente l'énergie modale du mode n. Nous pouvons écrire que l'énergie globale est la somme de l'énergie modale correspondant aux N modes :

$$E_m(t) = \sum_{n=1}^{N} E_m(n,t) \tag{2.52}$$

2.3 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié le comportement vibratoire du câble en utilisant le modèle d'une poutre d'Euler Bernoulli avec tension. Pour distinguer les domaines de comportement (corde, poutre avec ou sans tension), nous avons proposé deux critères dont le premier est fondé sur la comparaison des fréquences et le seconde sur le coefficient γ_n. Nous avons introduit le paramètre $\xi = \frac{EI}{TL^2}$ qui permet de distinguer les domaines de comportement et le choix du seuil de comportement (ξ^c et ξ^p) d'après deux critères est compatible. Nous avons ensuite utilisé le paramètre ξ afin de distinguer les paramètres modaux en fonction des conditions aux bords différentes (bi-encastrées et bi-appuyées). L'étude montre que plus ξ est petit, moins les différences dues aux conditions aux bords sont importantes.

Nous avons utilisé la méthode des éléments finis pour modéliser numériquement et pour obtenir ainsi une base données qui nous permettra de tester le modèle retenu en comparant les réponses simulées avec les mesures expérimentales . Nous avons étudié également l'aspect énergétique comme l'énergie modale qui va nous servir ensuite pour l'étude sur la redistribution des énergies modales.

Chapitre 3

Essais expérimentaux et les endommagements étudiés

Dans la première partie de ce chapitre, nous présentons deux expériences réalisées pendant la thèse dont la première concerne un câble à Nantes et la deuxième une poutre tendue à l'ENPC. La deuxième partie traite des simulations du comportement du câble à Nantes à l'état sain pour étudier les paramètres modaux suivant des conditions aux bords différentes. Nous étudions également la redistribution des énergies modales et nous comparons les réponses simulées (en utilisant le modèle poutre d'Euler Bernoulli) avec les réponses mesurées. Enfin, dans la troisième partie, nous nous intéressons aux modèles permettant d'introduire de l'endommagement dans le comportement vibratoire.

3.1 Présentation des essais expérimentaux réalisés

Dans cette partie, nous présentons les deux expériences réalisées pendant la thèse :

La première expérience a été faite au laboratoire Ifsttar à Nantes. Nous avons réalisé une collection d'essais vibratoires d'un câble monotoron à l'état sain et aux états endommagés (2 états endommagés) excité sous choc d'un marteau. Ces essais nous serviront pour 2 objectifs : vérifier si le modèle théorique correspond bien à l'expérience (comparer les réponses simulées avec les réponses expérimentales) et aussi pour tester expérimentalement des méthodes de détection des défauts qui vont être proposées dans les chapitres 5 et 6.

La deuxième expérience a été faite au laboratoire Navier de l'ENPC. Nous avons réalisé une collection d'essais vibratoires à l'état sain et à plusieurs états endommagés (3 états endommagés) d'une poutre bi-encastrée avec tension excitée sous choc. Ces essais nous serviront pour tester expérimentalement les méthodes de détection des défauts proposées.

3.1.1 Câble monotoron du laboratoire Ifsttar à Nantes

Nous réalisons des essais vibratoires sur un câble monotoron de 7 fils gainés de longueur $L = 5.125m$, de diamètre $d = 15.7mm$ (avec section d'acier de $150mm^2$ et masse linéique $\mu = 1.2887kg/m$). Le câble est tendu par un vérin avec la tension initiale $T_0 = 98.070kN$.

Une partie du câble est non accessible et ne peut pas être instrumentée. La partie accessible de longueur $3.725m$ est équipée de 10 accéléromètres. L'espacement entre deux capteurs successifs est constant et égal à $0.35m$. Les 10 capteurs accéléromètres ne sont pas tous du même type : quatre capteurs sont plus gros et les 6 autres plus petits. Nous utilisons également 2 capteurs de déplacement laser sans contact qui sont situés à l'endroit du défaut que nous allons créer plus tard.

Le câble est mis en vibration par des chocs d'un marteau instrumenté avec un embout mou (moins énergétique pour éviter de saturer les capteurs). Il y a 18 positions distinctes du choc (une dans chaque intervalle entre deux capteur et une à côté de chaque capteur, ce qui fait un pas d'échantillon de $0.17m$).

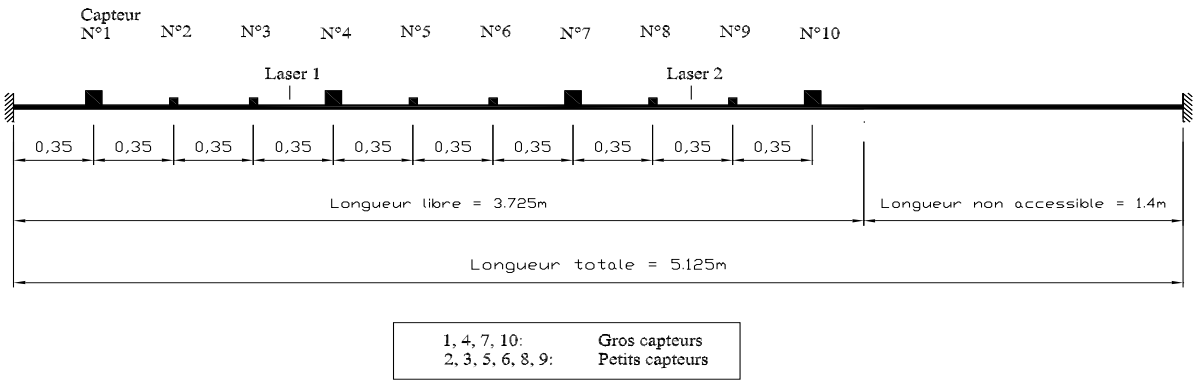


FIG. 3.1 – Schéma du câble avec les capteurs

Les essais du câble se produisent suivant 3 configurations :

- Configuration 1 (Etat 0) : Le câble est sain. Nous réalisons 180 tests, soit 18 séries de 10 tests. Les 18 séries correspondent aux 18 positions du choc. Pour chaque position du choc, on frappe 10 fois ce qui correspondent aux 10 tests de chaque série.

- Configuration 2 (Etat 1) : Nous faisons un défaut en coupant un fil à l'abscisse $x_1 = 1.22m$. Cela entraine une baise de tension de $14kN$ dans le câble. Nous ajustons alors la tension pour retrouver la tension de l'état sain. Ensuite, nous réalisons 180 tests comme dans la configuration 1.

- Configuration 3 (Etat 2) : Nous ajoutons un deuxième défaut à l'abscisse $x_2 = 2.97m$. Comme précédemment, nous ajustons la tension pour retrouver la valeur initiale et nous réalisons 180 tests.

Chaque test dure $8.96s$ avec la fréquence d'échantillonnage de $2400Hz$. Les résultats de chaque test sont enregistrés sous la forme d'une matrice de 21504×17. La $1^{\text{ère}}$, $2^{\text{ème}}$ et $3^{\text{ème}}$ colonne représentent respectivement le temps, la tension du câble et la force du marteau pendant un essai. Les $4^{\text{ème}}$ à $13^{\text{ème}}$ colonnes représentent l'accélération mesurée par 10 accéléromètres. La $15^{\text{ème}}$ et $16^{\text{ème}}$ colonnes sont les réponses en déplacements mesurées par les 2 capteurs laser.

Le premier capteur n'a pas fonctionné. Pour les réponses mesurées, nous ne tenons compte que de 9 capteurs (de 2 à 10).

3.1.2 Poutre tendue (ENPC)

Nous réalisons 660 essais vibratoires sur une poutre en aluminium $b \times h \times L = 25 \times 2 \times 440mm$ avec un côté encastré sur 4cm, l'autre côté est tendu par un vérin. Les 10 accéléromètres sont espacés régulièrement chaque 40mm.

Les 300 premiers essais sont effectués sur la poutre sans défaut. Ensuite, une entaille de $1mm \times 1mm$ est réalisée à l'abscisse $x_1 = 270mm$. De nouveaux essais vibratroires sont effectués (essais 301 à 420). Puis, nous amplifions le défaut existant $x_2 = x_1 = 270mm$. Les essais 421 à 540 sont alors effectués. Enfin, nous ajoutons un autre défaut à l'abscisse $x_3 = 68mm$ et les essais 540 à 660 sont effectués.

La tension dans la poutre est imposée par le vérin. Elle est constante au cours de chaque essai mais variable d'un essai à l'autre. La tension imposée par le vérin est représenté sur la Fig.7.17.



(a) 1er point de vue



(b) 2ème point de vue



(c) Zone non accessible des capteurs

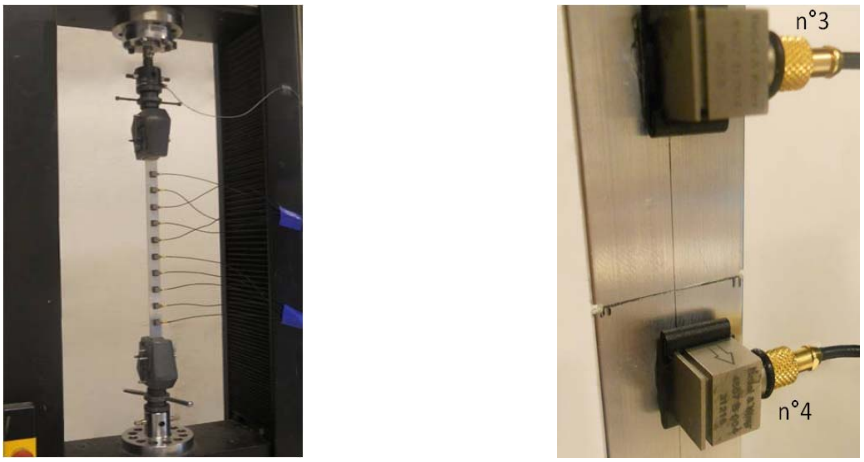


(d) Petit accéléromètre



(e) Grand accéléromètre

FIG. 3.2 – Photo des essais



(a) Distribution des capteurs (b) Zoom

FIG. 3.3 – Position des capteurs, entaille

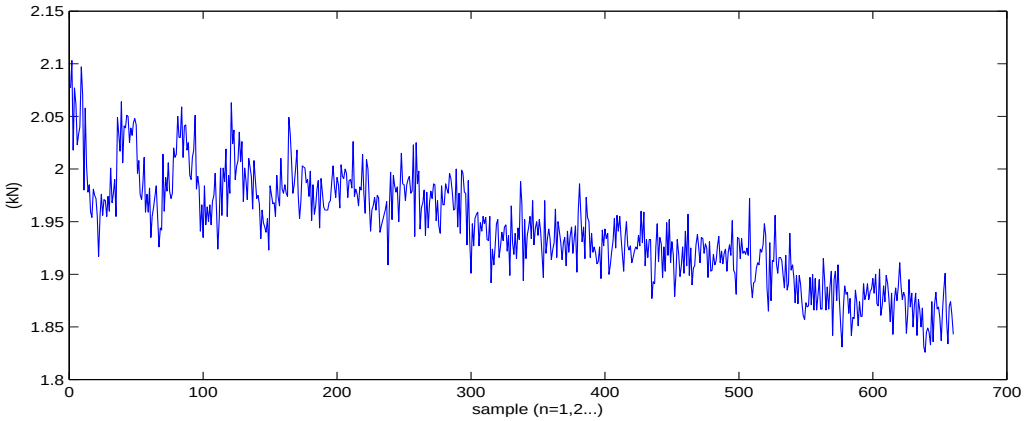


FIG. 3.4 – Evaluation de la tension dans la poutre

3.2 Simulations numériques à l'état sain du câble de Nantes

Dans cette partie, nous étudions numériquement le comportement vibratoire seulement à l'état sain du câble utilisé dans les essais réalisés à Nantes.

Dans la première application, nous calculons des paramètres modaux du câble en utilisant le modèle d'une poutre d'Euler Bernoulli avec deux conditions aux bords différentes (bi-appuyées ou bi-encastrées) et nous comparons les paramètres modaux obtenus.

Ensuite, nous réalisons une simulation numérique de la réponse vibratoire du câble sous un choc pour étudier la distribution de l'énergie de chaque mode.

Enfin, dans la dernière application, nous choisissons un essai expérimental et nous faisons une simulation de cet essai en utilisant la force du marteau mesurée comme force d'excitation. Le poids ajouté par des capteurs et l'amortissement sont également pris en compte dans la simulation. Nous comparons la réponse simulée avec celle mesurée.

3.2.1 Paramètres modaux avec différentes conditions aux bords

Le câble étudié est celui utilisé dans les essais réalisés à Nantes ($L = 5.125m$, $\mu = 1.2887kg/m$, $T = 98.070kN$). La rigidité en flexion du câble vaut $EI = 200.10^9 \frac{2}{3}.\frac{\pi d^4}{64}$ (avec $d = 15.7mm$). Le câble étudié a le paramètre $\xi = \sqrt{\frac{EI}{TL^2}} = 0.0124$ qui est bien dans la bande d'utilisation du modèle d'une poutre avec précontrainte. ($0.002 < \xi < 2$).

Maintenant, nous comparons les paramètres modaux du câble avec deux conditions aux bords différentes : **bi-encastrées** ou **bi-appuyées**. Les paramètres modaux sont déterminés par la méthode des éléments finis. Le câble est discrétisé en 500 éléments.

Le tableau 3.1 représente les fréquences propres du câble pour des conditions aux bords différentes (bi-encastrées ou bi-appuyées). Nous vérifions que la différence relative est petite (environ 2.5%) comme nous l'avions mentionné au 2.1.4.4.

Nous comparons aussi les déformées modales et les courbures modales du cas bi-encastrées avec celles

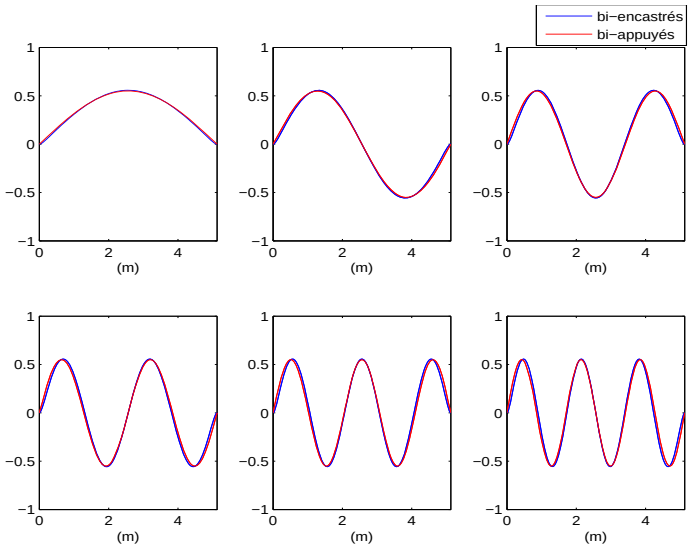
	Cas bi-appuyées	Cas bi-encastrées	Différence relative
n	$f_n^{\text{bi-app}}(Hz)$	$f_n^{\text{bi-enc}}$ (Hz)	$\frac{f_n^{\text{bi-enc}} - f_n^{\text{bi-app}}}{f_n^{\text{bi-app}}}$ (%)
1	26.93	27.62	2.55
2	53.99	55.37	2.55
3	81.29	83.37	2.55
4	108.96	111.74	2.56
5	137.11	140.61	2.56
6	165.85	170.10	2.56
7	195.30	200.31	2.57

TAB. 3.1 – Sept premières fréquences du modèle d'une poutre avec précontrainte (cas bi-appuyées et cas bi-encastrées) et leur différence relative

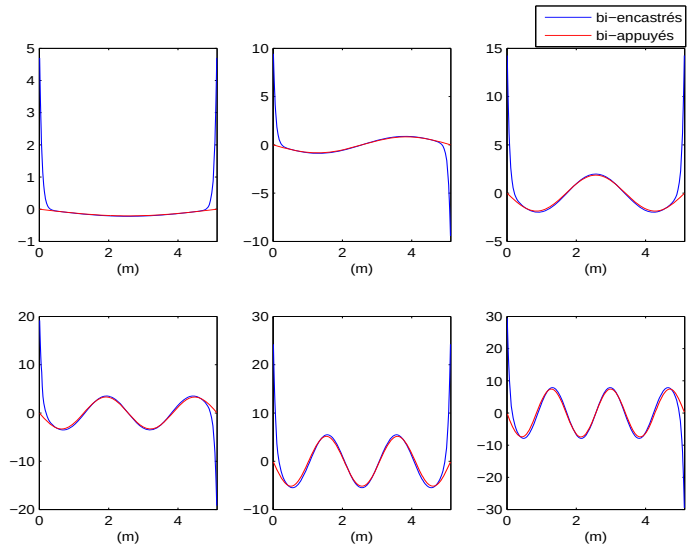
du cas bi-appuyées.

- Sur la Fig.3.5(a), nous trouvons que les déformées modales du cas bi-encastrées sont assez proches de celles du cas bi-appuyées, très proches de la forme sinusoïdale. Nous voyons plus de différence dans les zones à côté des bords. Nous avons tracé aussi la corrélation des déformées modales avec 2 conditions aux bords différentes (Fig. 2.5c, 2.6c).

- Sur la Fig. 3.5(b), nous trouvons également que la courbure modale (ou la dérivée seconde de la déformée modale) du cas bi-encastrées est également assez proche de celle du cas bi-appuyées dans la zone au milieu du câble. Cependant, aux bords du câble bi-encastrées, la valeur de la courbure est très importante, contrairement à celle du cas bi-appuyées, qui est nulle aux bords. Cela est justifié car le moment aux bords est nul dans le cas bi-appuyées et important dans le cas bi-encastrées. Nous avons tracé aussi la corrélation des courbures modales avec 2 conditions aux bords différentes dans les Fig. 2.7c, 2.8c, 2.9c, 2.10c, 2.11c, 2.12c.



(a) Trois premières déformées modales du câble



(b) Trois premières courbures modales du câble

FIG. 3.5 – Déformées modales (a) et courbures modales (b)

3.2.2 Distribution de l'énergie modale

Nous allons faire une simulation numérique de la réponse vibratoire sans amortissement du câble précédent (avec des conditions aux bords : bi-encastrées) sous le choc d'un marteau. L'objectif est d'étudier la distribution de l'énergie de chaque mode.

Supposons qu'un coup de marteau est appliqué au point x_0 et au temps t_0. Nous considérons que la force $p(x,t)$ de cette action est le produit d'une impulsion de Dirac de x en x_0 et d'une impulsion de Dirac de t en t_0 :

$$p(x,t) = K\delta(x-x_0).\,\delta(t-t_0) \tag{3.1}$$

Pour approcher numériquement l'impulsion de Dirac $\delta(t-t0)$ et $\delta(x-x_0)$, on peut utiliser des fonctions triangulaires $\Lambda(t-t_0)$ et $\Lambda(x-x_0)$ d'aire unité :

$$\begin{aligned}
\Lambda(t-t_0) &= \begin{cases} \dfrac{t-t_0+\epsilon_t}{\epsilon_t^2} & \text{si } t_0-\epsilon_t \le t \le t_0 \\ \dfrac{t_0+\epsilon_t-t}{\epsilon_t^2} & \text{si } t_0 \le t \le t_0+\epsilon_t \end{cases} \\
\Lambda(x-x_0) &= \begin{cases} \dfrac{x-x_0+\epsilon_x}{\epsilon_x^2} & \text{si } x_0-\epsilon_x \le x \le x_0 \\ \dfrac{x_0+\epsilon_x-x}{\epsilon_x^2} & \text{si } x_0 \le x \le x_0+\epsilon_x \end{cases}
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Avec (3.2), la force $p(x,t)$ approchée écrit alors :

$$p(x,t) = K.\Lambda(x-x_0).\Lambda(t-t_0) \tag{3.3}$$

Nous avons choisi : $K = 0.2Ns$, $x_0 = 1.225m$, $\epsilon_x = 0.005m$, $t_0 = 3s$, $\epsilon_t = 1/240s$

Synthèse :

La Fig.3.7 représente la réponse temporelle (déplacement, vitesse, accélération) au point $x_0 = 2.0m$.
Nous étudions la distribution de l'énergie modale (Fig.3.8 et Tab. 3.2). Nous trouvons que dans ce cas

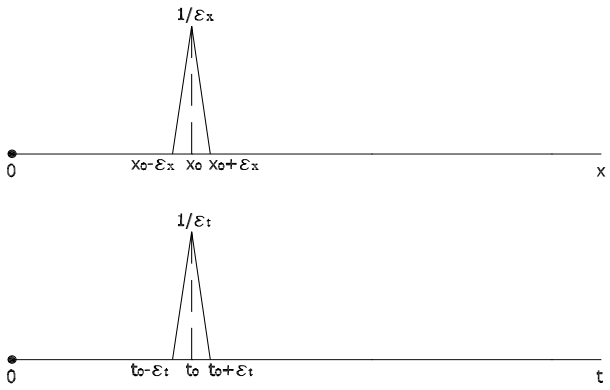
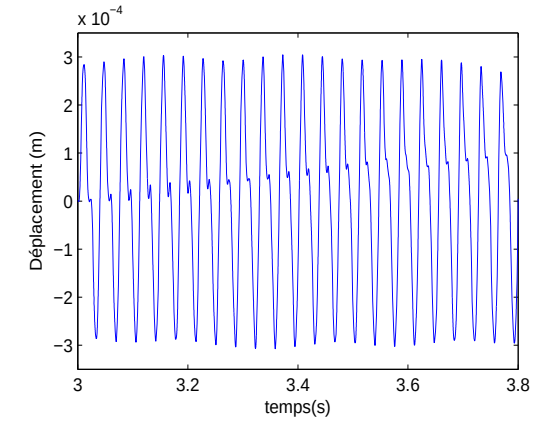


FIG. 3.6 – Impulsions triangulaires en espace et en temps

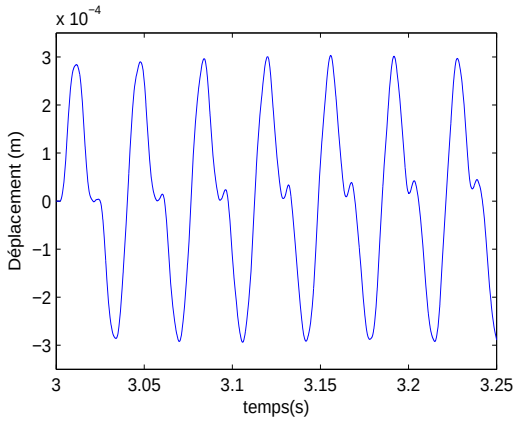
(choc en $x_0 = 1.225m$ avec longueur totale du câble $L = 5.125m$), les 3 premiers modes représentent 94.0% de l'énergie et les 7 premiers modes environ 99.7%. En pratique, on estime que les 7 premiers modes représentent plus de 98% de l'énergie totale.

n	Distribution de l'énergie modale $\frac{\omega_n^2 \lvert q_n \rvert^2}{\sum_{i=1}^{100} \omega_i^2 \lvert q_i \rvert^2}$ (%)
1	35.4888
2	48.2429
3	10.2876
4	0.7089
5	4.0148
6	1.0265
7	0.0166
8	0.0029
9	0.0141
10	0.0502
11	0.0037
12	0.0543
13	0.0509
14	0.0035
15	0.0000
16	0.0030
17	0.0153
18	0.0042
19	0.0007
20	0.0013

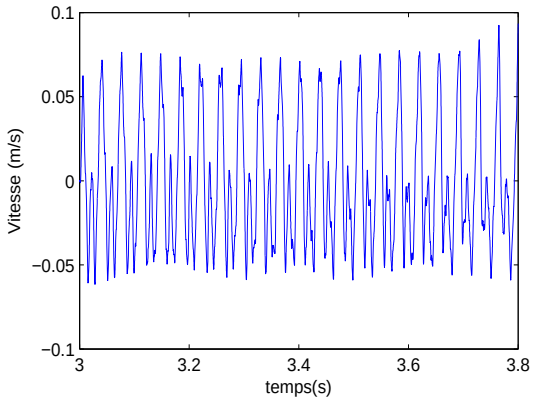
TAB. 3.2 – Distribution de l'énergie modale



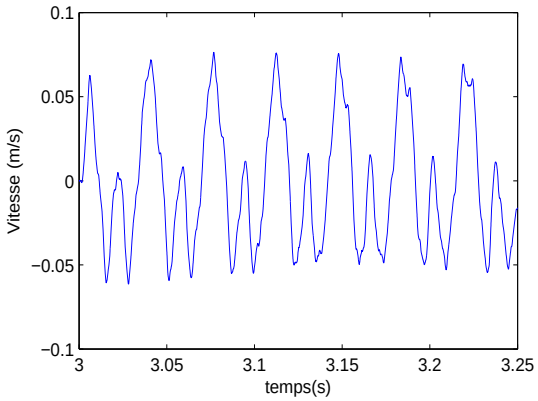
(a) Réponse de déplacement



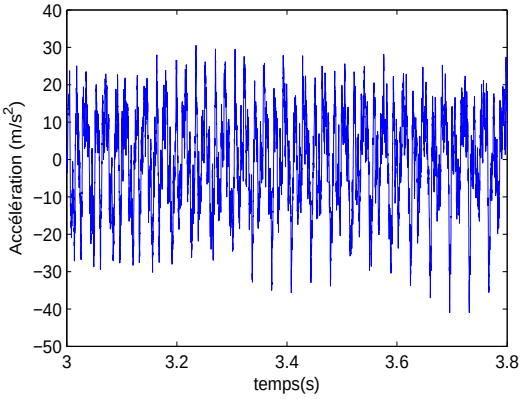
(b) Zoom



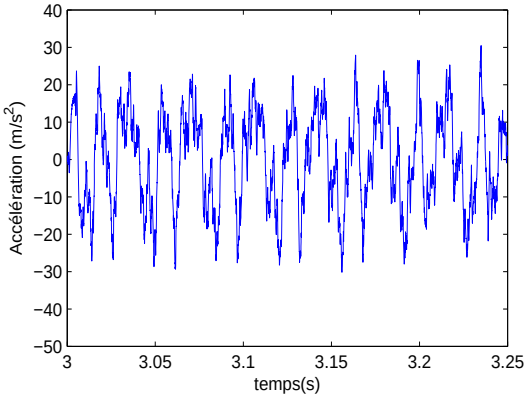
(c) Réponse de vitesse



(d) Zoom



(e) Réponse d'accélération



(f) Zoom

FIG. 3.7 – Réponse temporelle sans amortissement au point $x_0 = 2.0m$

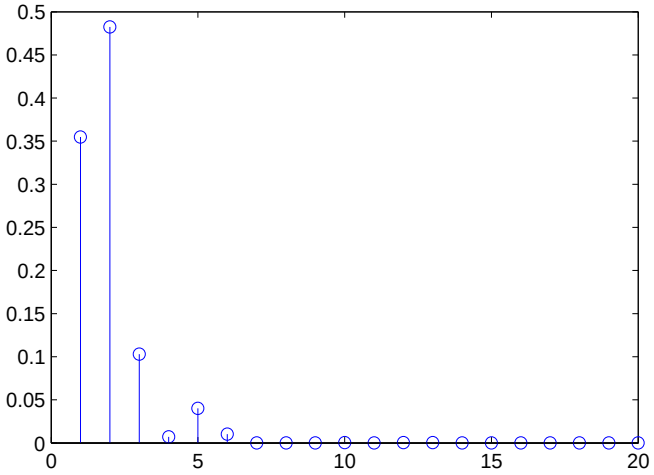
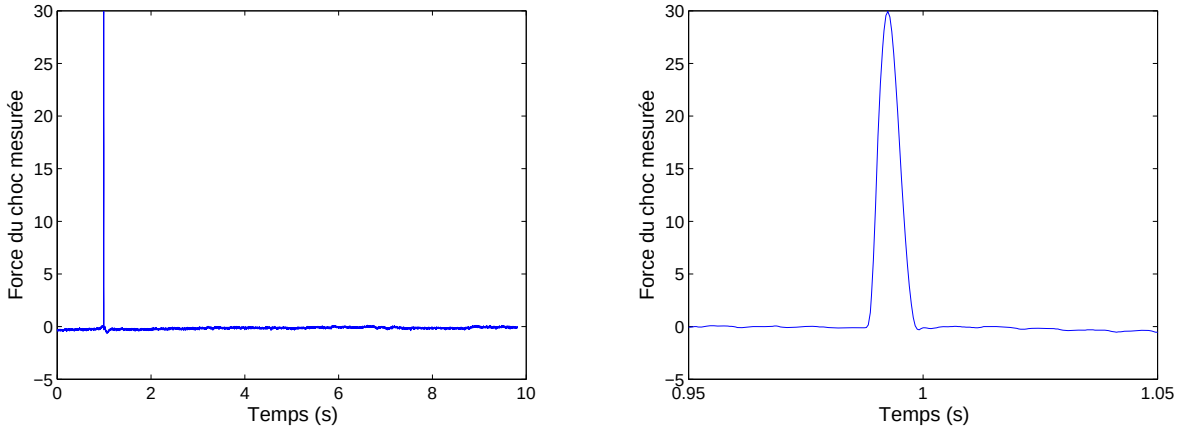


FIG. 3.8 – Distribution de l'énergie modale $\frac{\omega_n^2|q_n|^2}{\sum_{i=1}^{100}\omega_i^2|q_i|^2}$

3.2.3 Comparaisons de la réponse simulée avec celle mesurée expérimentalement

Dans cette application, nous choisissons un essai expérimental et nous faisons une simulation de cet essai en utilisant la force du marteau mesurée comme force d'excitation et en tenant compte de l'amortissement et aussi du poids ajouté par les capteurs (4 gros capteurs de 150 gramme chacun et 6 petits capteurs de 40 gramme chacun). Nous comparons la réponse simulée avec celle mesurée. Dans l'essai choisi (état sain : essai numéro 1 de la série 6), le choc est appliqué au point $x_{choc} = 1.4m$ (juste à côté du capteur numéro 4) et la force du choc du marteau est présentée sur la Fig. 3.9.



(a) Force du choc mesurée par le marteau

(b) Zoom

FIG. 3.9 – Force du choc mesurée par le marteau

Au niveau de la force d'excitation, au lieu de considérer que la force de cette action $p(x,t)$ est un produit d'une impulsion de Dirac de x et d'une impulsion de Dirac de t ($p(x,t) = K\delta(x - x_0).\delta(t - t_0)$) comme dans l'application précédente, nous utilisons la force du choc mesurée par le marteau, et la force $p(x,t)$ est alors donnée par la formule suivante :

$$p(x,t) = F_{marteau}(t).\Lambda(x - x_0) \tag{3.4}$$

où $F_{marteau}(t)$ est la force mesurée par le marteau, et $\Lambda(x - x_0)$ est la fonction triangulaire qui approche l'impulsion de Dirac ($x_0 = x_{choc} = 1.22m$, $\epsilon_x = 0.005m$). La fréquence d'échantillonnage de la mesure est

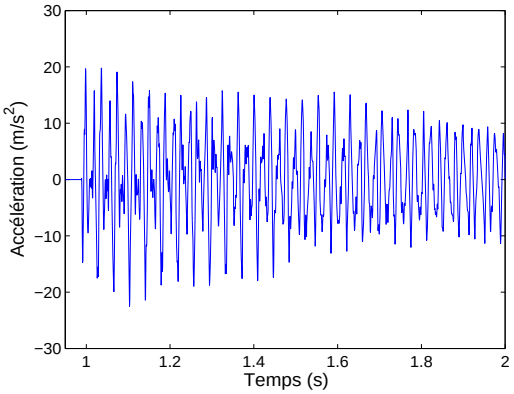
$2400Hz$, c'est à dire, la force du marteau est mesurée chaque 1/2400 s.

Pour calculer la réponse numérique du câble, nous discrétisons le câble en 500 éléments (chaque élément a une longueur d'un cm) et discrétisons en temps en 24000 échantillons avec un pas de temps de 1/24000 s (soit un temps d'observation de 1s). Comme le pas de temps de la simulation est 10 fois plus petit que celui du capteur qui mesure la force du marteau, dans la simulation, les données de la force du marteau qui se situent entre deux instants mesurés par le capteur sont interpolées linéairement.

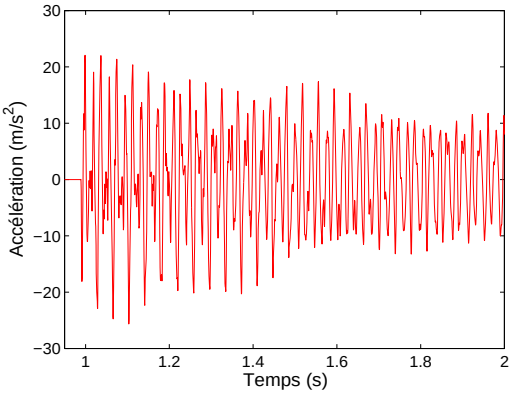
Dans la simulation, nous tenons compte de l'amortissement de la vibration du câble avec des coefficients d'amortissement modaux : $\varsigma_1 = 0.18\%$, $\varsigma_2 = 0.14\%$, $\varsigma_3 = 0.18\%$, $\varsigma_4 = 0.08\%$, $\varsigma_5 = 0.09\%$, $\varsigma_1 = 0.09\%$. (Ces coefficients d'amortissement modaux sont estimés à partir des réponses mesurées expérimentalement).

Synthèse :

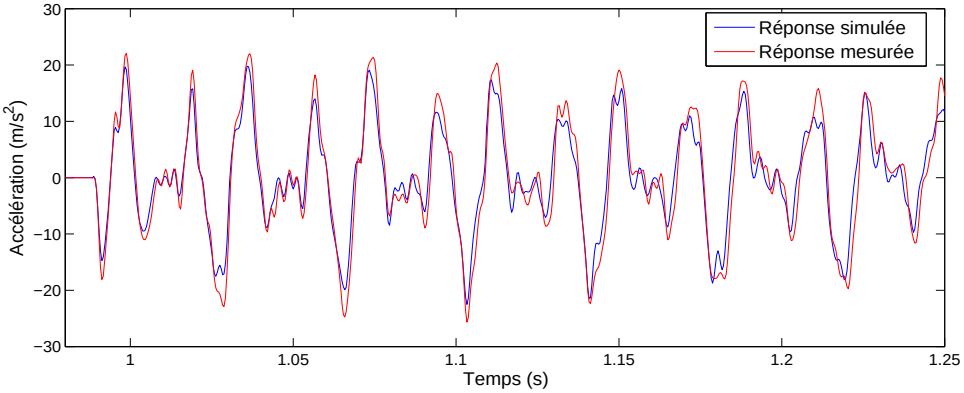
En observant la réponse simulée numériquement et celle mesurée expérimentalement par des capteurs, nous trouvons que l'amplitude de la réponse mesurée expérimentalement et celle simulée numériquement ont le même ordre grandeur et elles ont la même tendance d'évolution en fonction du temps. En regardant attentivement dans les Fig.3.10c, 3.11c, on trouve que les réponses simulées sont bien corrélées avec les réponses mesurées expérimentalement.



(a) Accélération simulée

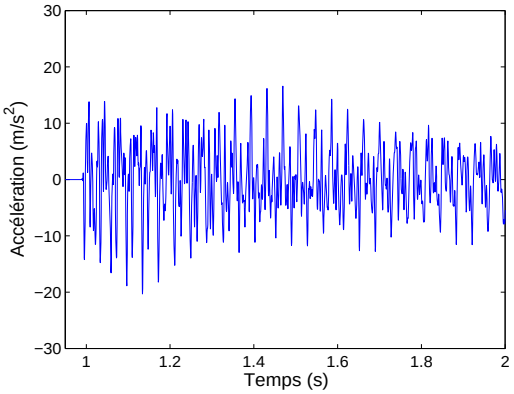


(b) Accélération mesurée expérimentalement

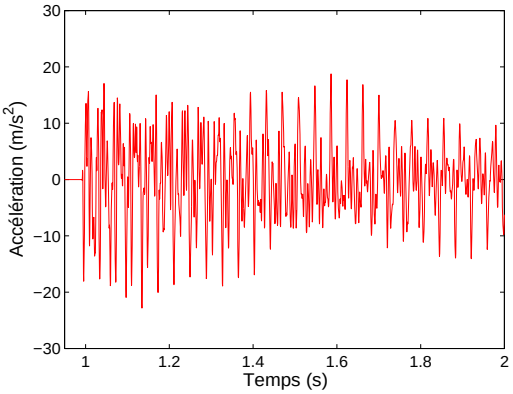


(c) Comparaison de la réponse d'accélération simulée avec celle mesurée

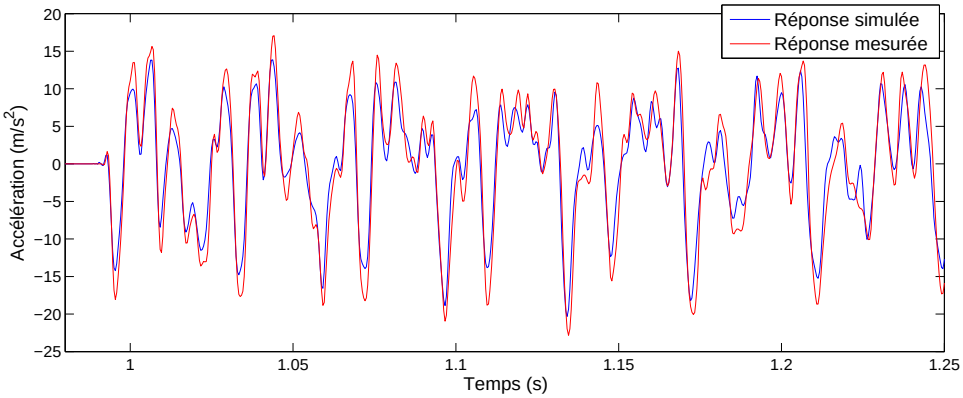
FIG. 3.10 – Accélérations expérimentale et simulée au niveau du capteur n°3



(a) Accélération simulée



(b) Accélération mesurée expérimentalement



(c) Comparaison de la réponse d'accélération simulée avec celle mesurée

FIG. 3.11 – Accélérations expérimentale et simulée au niveau du capteur n°8

3.3 Introduction de l'endommagement dans le modèle vibratoire

Dans cette partie, nous nous intéressons à la question suivante : *Comment introduire l'endommagement dans le modèle vibratoire ?* Dans le cas du câble, cette question est très peu abordée. Cependant, pour le cas de la poutre, il existe plusieurs études sur le modèle de la fissure. Nous présentons d'abord des modèles existants pour la fissure dans la poutre. Ensuite, nous proposons des modèles adaptés pour le cas du câble.

3.3.1 Présentation de certains modèles existants pour la fissure de la poutre

On trouve dans la littérature ([38]) deux approches classiques pour modéliser la fissure de la poutre .

• Dans la première approche (Fig.3.12a), la fissure est simulée par la modification (généralement la réduction) de la rigidité dans la zone endommagée qui est influencée par la fissure. Les auteurs négligent souvent la perturbation locale de la masse. L'équation vibratoire de la poutre à l'état endommagé s'écrit alors par :

$$\mu(x)\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\widetilde{EI}(x)\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial^2 x}\right) = p(x,t) \tag{3.5}$$

où $\widetilde{EI}(x)$ est la rigidité de la poutre à l'état endommagé.

• Dans la deuxième approche (Fig.3.12b), la poutre est séparée en deux parties par la fissure. Au niveau de la fissure, un ressort de rotation (avec la flexibilité c_b à l'endroit où se trouve l'endommagement) est utilisé pour modéliser la fissure.

La réponse vibratoire $w(x,t)$ de la classe $C^4(x \in (0\,x_0) \cup (x_0\,L))$ doit respecter la continuité $(x \in (0\,L))$ de déplacement, de moment et de l'effort tranchant :

$$w(x_0^+,t) = w(x_0^-,t),\ \ \frac{\partial^2 w(x_0^+,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w(x_0^-,t)}{\partial x^2},\ \ \frac{\partial^3 w(x_0^+,t)}{\partial x^3} = \frac{\partial^3 w(x_0^-,t)}{\partial x^3} \tag{3.6}$$

et la relation de la discontinuité de la rotation avec le moment à l'endroit x_0 où se situe le ressort :

$$w(x_0^+,t) - w(x_0^-,t) = c_b M(x_0,t),\ \text{ soit : } w(x_0^+,t) - w(x_0^-,t) = c_b EI\frac{\partial^2 w(x_0,t)}{\partial x^2} \tag{3.7}$$

Par conséquent, les modes propres $\widetilde{\phi_n}(x)$ de la classe $C^4(\in\ (0\ x_0) \cup (x_0\ L))$ doivent respecter les

conditions suivantes :

$$\begin{aligned}&\widetilde{\phi_n}(x_0^+) = \widetilde{\phi_n}(x_0^-),\ \widetilde{\phi_n''}(x_0^+) = \widetilde{\phi_n''}(x_0^-),\ \widetilde{\phi_n'''}(x_0^+) = \widetilde{\phi_n'''}(x_0^-)\\&\widetilde{\phi_n'}(x_0^+) - \widetilde{\phi_n'}(x_0^-) = c_b EI \widetilde{\phi_n''}(x_0)\end{aligned} \tag{3.8}$$

Nota *: La flexibilité c_b dépend des caractéristiques du matériau (coefficient de Poisson ν), la forme, la taille de fissure et aussi la forme de la section de la poutre.*



(a) Réduction de la rigidité EI dans la zone influencée par la fissure

(b) Ressort de rotation à l'endroit de la fissure

FIG. 3.12 – Modèles simples pour modéliser la fissure dans la poutre

3.3.2 Propositions des modèles d'endommagements dans le câble

L'endommagement dans le câble est souvent rencontré sous la forme de corrosion ou de rupture brutale des fils (ou le mélange des deux).

L'endommagement peut entraîner un changement global (par exemple une baisse de la tension dans le câble à cause de la redistribution des charges de la structure entre les câbles) et également des changements locaux des caractéristiques dans la zone endommagée. Le choix du modèle pour simuler les changements locaux dépend donc du type d'endommagement.

Par exemple, pour le cas de la corrosion, dans la zone corrodée, il y a un changement de la masse linéique $\Delta\mu$ qui peut être négatif ou positif (Fig. 3.13(a) et 3.13(b)). Au niveau de la rigidité, l'endommagement peut être simulé par une perte de rigidité en flexion ($\Delta EI(x) < 0$) pas nécessairement constante partout dans cette zone.

De même, pour le cas de la rupture des fils du câble, comme la fissure de la poutre, la rupture du câble peut être simulée par des perturbations $\Delta\mu$ et ΔEI, ou une perturbation de masse $\Delta\mu$ avec un

ressort (avec la flexibilité c_b) à l'endroit de la rupture. Cependant, le choix des valeurs $\Delta\mu$ et ΔEI ou c_b devient encore plus compliqué que dans le cas de la poutre.

En effet, lorsqu'un fil se casse, deux côtés du fil vont reculer et cela va créer une ouverture dans le câble. La zone influencée par la rupture contient cette ouverture et aussi deux zones de réancrage correspondant aux deux côtés de l'ouverture. La zone de réancrage considérée est celle sur laquelle un fil rompu a la capacité de se réancrer. Sa longueur vaut de 1 à 2.5 fois le pas de toronnage [29]). Nous considérons donc que la zone endommagée est égale à la zone d'ouverture plus deux fois la longueur de réancrage. Par exemple, sur la Fig. 3.14, un fil sur sept d'un monotoron est cassé ; par conséquence, une ouverture d'une longueur de 3cm est créée. Le pas de toronnage de ce monotoron est de 0.32m ; nous pouvons donc faire l'hypothèse que la longueur de la zone endommagée vaut entre $0.03+2*0.32 = 0.67m$ et $0.03 + 2 * 2.5 * 0.32 = 1.63m$.

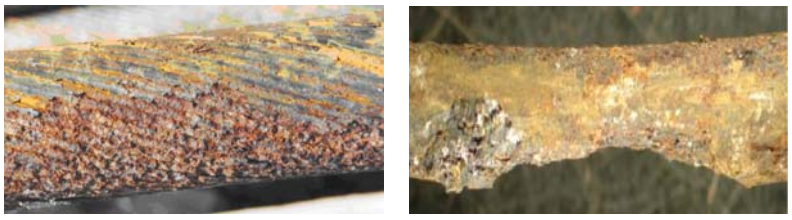
Au niveau de la masse, il n'y a pas de changement de la masse globale du câble. Plus précisément : dans la zone d'ouverture, il y a une perte locale de masse, et la masse perdue dans cette zone est distribuée sur les deux zones de réancrage. Dans la littérature, les chercheurs négligent souvent la perturbation locale de la masse pour la fissure de la poutre et ils considèrent seulement un changement de la rigidité qui est modélisé par la modification de la rigidité en flexion ΔEI ou par l'apparition du ressort (avec la flexibilité c_b). Pour le cas du câble, comment modéliser la rupture d'un fil ?

Au niveau de la rigidité, dans la zone ouverte, nous considérons une perte de rigidité à cause de la perte de section. De plus, les fils dans la zone endommagée (zone ouverte plus les deux zones de réancrage) ne travaillent pas ensemble. Il y a donc une perte de rigidité dans les deux zones de réancrage, bien qu'il n'y ait pas de perte de section. Cependant, il n'est pas facile d'évaluer la perte de rigidité $\Delta EI(x)$. Nous rencontrons la même difficulté pour définir la flexibilité c_b pour le modèle du ressort.

En bref, pour simuler l'endommagement dans le câble (corrosion ou rupture ou mélange des deux), nous nous intéressons à 2 modèles :

- Modèle 1 : Changement global de tension ΔT + perturbation locale de masse $\Delta\mu$ + perturbation locale de rigidité $\Delta EI(x)$ dans la zone endommagée.

- Modèle 2 : Changement global de tension ΔT + perturbation locale de masse $\Delta\mu$ + apparition du ressort de rotation (avec la flexibilité c_b) au niveau de la zone endommagée.



(a) (b)

FIG. 3.13 – Endommagements liés à la corrosion



FIG. 3.14 – Rupture d'un sur sept fils d'un mono-toron

3.4 Conclusion

Les résultats des études numériques justifient les remarques que nous avons faites au 2.1.4.4 : plus ξ est petit, c'est à dire plus le câble est proche d'une corde, moins les différences dues aux conditions aux bords sont visibles. L'étude sur la distribution de l'énergie modale du câble sous un choc montre que les sept premiers modes récupèrent plus de 98% de l'énergie totale. La comparaison entre les réponses vibratoires simulées et celles mesurées donnent des résultats très satisfaisants. Le modèle linéaire de poutre d'Euler Bernoulli avec tension permet de bien simuler le comportement du câble étudié.

Pour ce qui concerne l'endommagement, nous utilisons deux modèles existants de la fissure de la poutre pour proposer des modèles adaptés pour les endommagements du câble. Nous avons analysé des cas particuliers d'endommagements (corrosion ou rupture d'un fil), et nous trouvons que la détermination des valeurs des paramètres ($\Delta EI(x)$ ou c_b) du modèle de l'endommagement choisi pour simuler des endommagements dans le comportement vibratoire reste un sujet difficile et ouvert.

Chapitre 4

Identification modale fondée sur la POD ou la SOD à partir de la réponse libre

Dans ce chapitre, nous présentons l'utilisation de la POD (proper orthogonal decomposition) et la SOD (smooth orthogonal decomposition) sur la réponse libre de structures mécaniques pour l'identification des paramètres modaux. L'idée commune de ces deux méthodes est de l'utilisation de l'autocorrélation de la réponse libre.

La méthode d'identification fondée sur la POD utilise directement la matrice d'auto-corrélation de la réponse vibratoire. En calculant les vecteurs propres et les valeurs propres de cette matrice, on peut déterminer les modes propres et leur énergie correspondante. Dans [31], [49], les auteurs ont démontré que les modes propres orthogonaux (POMs : proper orthogonal modes) convergent vers des modes propres de la structure lorsque la matrice de masse est proportionnelle à la matrice identité. Dans le cas où la matrice de masse n'est pas proportionnelle à la matrice identité, ils ont démontré mathématiquement que la POD peut être utilisée pour identifier des paramètres modaux à condition de connaître la matrice de masse.

La méthode d'identification appelée SOD a été proposée par Chelidze et Zhou 2006 [17]. L'idée est d'utiliser la relation entre l'auto-corrélation du déplacement et l'auto-corrélation de la vitesse d'une réponse libre afin de déterminer les fréquences propres et les modes propres associés. Une autre application de la SOD pour identifier des paramètres modaux sur la réponse vibratoire sous l'excitation aléatoire est proposée par Farooq et Feeny 2008 [32]. Contrairement à la méthode POD, la méthode SOD ne nécessite

pas la connaissance de la matrice de masse pour identifier les modes propres. De plus, elle permet d'obtenir les fréquences propres, ce que ne permet pas la POD.

Dans la littérature, en général les auteurs concluent que les méthodes POD ou SOD peuvent être appliquées sur le système vibratoire sans amortissement ou avec amortissement léger mais sans proposer des conditions précises. Dans [31], les auteurs ont proposé des conditions sur le pas de temps et la durée de temps d'observation pour assurer la précision du résultat avec la méthode POD. Cependant, la condition proposée sur la durée de temps d'observation est suffisante très stricte.

L'objectif de ce chapitre est d'abord de rappeler les deux méthodes (POD et SOD). Ensuite, nous allons étudier et proposer des conditions sur le choix de la durée du temps d'observation ou du pas d'échantillonnage en temps. Puis, nous appliquons la méthode SOD seule à des données numériques pour étudier la sensibilité de cette méthode aux conditions de mesures. Enfin, nous testons la méthode SOD sur des données expérimentales et nous comparons les paramètres modaux identifiés par la SOD avec ceux calculés par d'autres méthodes comme la méthode du "peak-picking" ou la transformation en ondelettes (TO).

4.1 POD, SOD, rappels et conditions d'utilisation

Dans cette partie, nous présentons la théorie de deux méthodes d'identification des paramètres modaux à partir de la réponse libre : la POD et la SOD. L'idée commune de deux techniques est d'utiliser l'auto-corrélation de la réponse libre.

4.1.1 Autocorrélation

4.1.1.1 Définitions générales

L'autocorrélation est un outil mathématique souvent utilisé en probabilité. C'est la corrélation croisée d'un signal par lui-même. Pour un signal donnée $v(t)$, l'autocorrélation continue $R_v(\tau)$, est la corrélation croisée continue de $v(t)$ avec lui-même, au temps τ, et elle se définit comme l'espérance suivante :

$$R_v(\tau) = E[v(t)\bar{v}(t-\tau)] \tag{4.1}$$

où $\bar{v}$ représente le complexe conjugué ; pour une fonction réelle : $\bar{v} = v$.

En traitement du signal on peut définir $R_v(\tau)$ comme :

$$R_v(\tau) = \lim_{T \longrightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T v(t)\bar{v}(t-\tau)dt \tag{4.2}$$

Si le signal est réel et en $\tau = 0$, on a alors :

$$R_v(0) = \lim_{T \longrightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T v^2(t)dt \tag{4.3}$$

L'intégrale précédente peut être approchée par :

$$\frac{1}{T} \int_0^T v^2(t)dt \approx \frac{1}{m\Delta t} \sum_{i=1}^{m} v^2(t_i)\Delta t \tag{4.4}$$

avec $t_i = i\Delta t$.

Ce qui conduit à définir l'auto-corrélation du vecteur $\mathbf{v}$ par :

$$\Sigma_{\mathbf{v}} = \frac{1}{m}\mathbf{v}^T\mathbf{v} \tag{4.5}$$

avec $\mathbf{v}^T = [v(t_1) \quad v(t_2) \quad \dots \quad v(t_m)]$

4.1.1.2 Autocorrélation d'une matrice de mesures

On suppose que les réponses libres du système sont mesurées en des points $x_1, \dots x_n$ de la structure et en des temps $t_1, \dots t_m$ avec $t_{i+1} - t_i = \Delta t$ fixé. La matrice des mesures est définie par :

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} v(x_1,t_1) & v(x_1,t_2) & \cdots & v(x_1,t_{N_t-1}) & v(x_1,t_m) \\ v(x_2,t_1) & v(x_2,t_2) & \cdots & v(x_2,t_{N_t-1}) & v(x_2,t_m) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ v(x_n,t_1) & v(x_n,t_2) & \cdots & v(x_n,t_{N_t-1}) & v(x_n,t_m) \end{pmatrix}$$

où la réponse vibratoire étudiée $v(x,t)$ est en fait la somme infinie des réponses modales du système continu :

$$v(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(x) r_i(t) \tag{4.6}$$

L'auto-corrélation $\mathbf{\Sigma_X} = \frac{1}{m}\mathbf{X}\mathbf{X}^T$ étant une matrice $n \times n$, il ne sera possible de déterminer à partir de $\mathbf{\Sigma_X}$ qu'au plus n modes propres.

En considérant une approximation à l'aide de ces n modes de la réponse vibratoire étudiée, nous écrivons que :

$$v(x,t) \approx \sum_{i=1}^{n} \phi_i(x) r_i(t) \tag{4.7}$$

On remarque que :

$$\mathbf{X} = \mathbf{\Phi}\mathbf{R}^T \tag{4.8}$$

avec :

$$\mathbf{\Phi} = \begin{pmatrix} \phi_1(x_1) & \phi_2(x_1) & \cdots & \phi_n(x_1) \\ \phi_1(x_2) & \phi_2(x_2) & \cdots & \phi_n(x_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \phi_1(x_n) & \phi_2(x_n) & \cdots & \phi_n(x_n) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} r_1(t_1) & r_2(t_1) & \cdots & r_n(t_1) \\ r_1(t_2) & r_2(t_2) & \cdots & r_n(t_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ r_1(t_m) & r_2(t_m) & \cdots & r_n(t_m) \end{pmatrix}$$

L'auto-corrélation $\mathbf{\Sigma_X}$ de la réponse $\mathbf{X}$ et l'auto-corrélation $\mathbf{\Sigma_{\dot{X}}}$ de sa dérivée $\dot{\mathbf{X}}$ se réécrivent comme suit :

$$\mathbf{\Sigma_X} = \frac{1}{m}\mathbf{X}\mathbf{X}^T = \frac{1}{m}\mathbf{\Phi}\mathbf{R}^T\mathbf{R}\mathbf{\Phi}^T \tag{4.9}$$

$$\mathbf{\Sigma_{\dot{X}}} = \frac{1}{m}\dot{\mathbf{X}}\dot{\mathbf{X}}^T = \frac{1}{m}\mathbf{\Phi}\dot{\mathbf{R}}^T\dot{\mathbf{R}}\mathbf{\Phi}^T \tag{4.10}$$

4.1.2 Rappels des méthodes POD et SOD

4.1.2.1 POD (Proper orthogonal decomposition)

L'idée de base de la technique d'identification basée sur la POD est que les modes propres et l'énergie correspondante à chaque mode peuvent être déterminés en calculant les vecteurs propres et les valeurs propres de l'auto-corrération de la réponse vibratoire mesurée.

Rappelons (d'après Eq. (4.9)) que l'autocorrélation de la réponse vibratoire s'écrit :

$$\mathbf{\Sigma_X} = \frac{1}{m}\mathbf{X}\mathbf{X}^T = \frac{1}{m}\mathbf{\Phi}\mathbf{R}^T\mathbf{R}\mathbf{\Phi}^T \tag{4.11}$$

Pour un pas d'échantillon Δt tendant vers 0, la composante de la ligne i et de colonne j de la matrice $\frac{1}{m}\mathbf{R}^T\mathbf{R}$ tend vers la valeur d'une intégrale :

$$\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} r_i(t_k)r_j(t_k) \;\rightarrow \frac{1}{T}\int_0^T r_i(t)r_j(t)dt \tag{4.12}$$

L'amplitude modale temporelle $r_i(t)$ pour le cas simple de vibration libre sans amortissement s'écrit :

$$r_i(t) = a_i \sin(\omega_i t + \theta_i) \tag{4.13}$$

Pour une durée de temps d'observation tendant vers l'infini, nous avons :

$$\frac{1}{T}\int_0^T r_i(t)r_j(t)dt \;\rightarrow \delta_{ij}\frac{a_i a_j}{2} \tag{4.14}$$

avec $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$ et $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$.

Pour Δt "assez petit" et T "assez grand" (ou encore pour Δt "assez petit" et m "assez grand"), nous en

déduisons l'approximation suivante :

$$\mathbf{\Sigma_X} = \frac{1}{m}\mathbf{\Phi R}^T\mathbf{R\Phi}^T \approx \mathbf{\Phi}\begin{bmatrix} \ddots & & \\ & \frac{a_i^2}{2} & \\ & & \ddots \end{bmatrix}\mathbf{\Phi}^T \tag{4.15}$$

D'autre part, nous savons que les modes propres sont orthogonaux par rapport à la matrice de masse $\mathbf{M}$ et à la matrice de rigidité $\mathbf{K}$. En analyse modale, on utilise souvent des modes propres normalisés par rapport à la matrice de masse (Cf. [60]) :

$$\mathbf{\Phi}^T\mathbf{M\Phi} = \mathbf{I_d} \tag{4.16}$$

- Lorsque la matrice de masse est proportionelle à la matrice identité, les modes propres sont orthogonaux. En utilisant l'équation (4.15), nous en déduisons que des POMs (proper orthogonal modes) de l'autocorrélation de déplacement $\mathbf{\Sigma_X}$ convergent vers des modes propres de la structure.

- Dans le cas général, la matrice de masse n'est pas proportionnelle à la matrice identité. Comme la matrice de masse est symétrique et positive, $\mathbf{M}^{-1/2}$ est bien définie et nous pouvons utiliser la transformation de coordonnée $\mathbf{X} = \mathbf{M}^{-1/2}\widetilde{\mathbf{X}}$ soit $\widetilde{\mathbf{X}} = \mathbf{M}^{1/2}\mathbf{X}$.

La matrice d'autocorrélation $\mathbf{\Sigma}_{\widetilde{\mathbf{X}}}$ s'écrit par :

$$\mathbf{\Sigma}_{\widetilde{\mathbf{X}}} = \frac{1}{m}\widetilde{\mathbf{X}}\widetilde{\mathbf{X}}^T = \frac{1}{m}(\mathbf{M}^{1/2}\mathbf{\Phi})\mathbf{R}^T\mathbf{R}(\mathbf{\Phi}^T\mathbf{M}^{1/2}) = \frac{1}{m}\widetilde{\mathbf{\Phi}}\mathbf{R}^T\mathbf{R}\widetilde{\mathbf{\Phi}}^T \tag{4.17}$$

avec $\widetilde{\mathbf{\Phi}} = \mathbf{M}^{-1/2}\mathbf{\Phi}$.

Nous avons : $\widetilde{\mathbf{\Phi}}^T\widetilde{\mathbf{\Phi}} = \mathbf{\Phi}^T\mathbf{M\Phi} = \mathbf{I_d}$. Nous en déduisons que la matrice des POMs $\widetilde{\mathbf{U}}$ de l'autocorrélation $\mathbf{\Sigma}_{\widetilde{\mathbf{X}}}$ converge vers la matrice des modes propres dans la nouvelle base $\widetilde{\mathbf{\Phi}} = \mathbf{M}^{1/2}\mathbf{\Phi}$. Nous pouvons donc approcher la matrice des modes propres $\mathbf{\Phi}$ par $\mathbf{M}^{-1/2}\widetilde{\mathbf{U}}$ (où $\widetilde{\mathbf{U}}$ est la matrice des POMs de la matrice d'autocorrélation $\mathbf{\Sigma}_{\widetilde{\mathbf{X}}}$ avec $\widetilde{\mathbf{X}} = \mathbf{M}^{1/2}\mathbf{X}$).

Lorsqu'on a la matrice des modes propres Φ, l'amplitude temporelle modale $\mathbf{R}$ peut être déterminée en résolvant l'équation $\mathbf{X} = \mathbf{\Phi R}^T$. En regardant le vecteur colonne i de la matrice $\mathbf{R}$, nous pouvons en déduire le coefficient d'amortissement du mode correspondant.

Nota : Les auteurs ont utilisé la relation $\mathbf{\Phi}^T\mathbf{M\Phi} = \mathbf{I_d}$, qui n'est vrai que dans le cas où les mode propres discrétisés sont considérés comme les modes propres du système discrétisé. Autrement dit, on considère que la réponse discrétisée mesurée (sur laquelle on applique la technique POD) comme la réponse du système discrétisé. Par exemple, dans le modèle des éléments finis pour le câble tendu, à chaque point discrétisé, il y a 2 degrés de liberté (le déplacement et la rotation) ; et la réponse vibratoire du système discrétisé donne le déplacement et la rotation. Donc, pour appliquer cette technique, à chaque point de mesure, il faut connaître le déplacement et la rotation ; et les modes propres obtenus sont des modes propres du système discrétisé (déplacement et rotation à chaque point discrétisé en espace).

4.1.2.2 SOD (Smooth orthogonal decomposition)

L'idée de base de la technique d'identification basée sur la SOD est d'utiliser la relation entre l'autocorrélation de déplacement et de vitesse pour déterminer les modes propres et les fréquences propres associées.

L'autocorrélation de la réponse vibratoire $\mathbf{X}$ et l'autocorrélation de sa dérivée $\dot{\mathbf{X}}$ s'écrivent :

$$\begin{aligned} \mathbf{\Sigma_X} &= \frac{1}{m}\mathbf{X}\mathbf{X}^T = \frac{1}{m}\mathbf{\Phi}\mathbf{R}^T\mathbf{R}\mathbf{\Phi}^T \\ \mathbf{\Sigma_{\dot{X}}} &= \frac{1}{m}\dot{\mathbf{X}}\dot{\mathbf{X}}^T = \frac{1}{m}\mathbf{\Phi}\dot{\mathbf{R}}^T\dot{\mathbf{R}}\mathbf{\Phi}^T \end{aligned} \tag{4.18}$$

Pour un pas en temps Δt tendant vers 0, la composante de la ligne i et de colonne j de la matrice $\frac{1}{m}\mathbf{R}^T\mathbf{R}$ et de la matrice $\frac{1}{m}\dot{\mathbf{R}}^T\dot{\mathbf{R}}$ se comportent comme suit :

$$\begin{aligned} \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} r_i(t_k)r_j(t_k) &\rightarrow \frac{1}{T}\int_0^T r_i(t)r_j(t)dt \\ \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} \dot{r}_i(t_k)\dot{r}_j(t_k) &\rightarrow \frac{1}{T}\int_0^T \dot{r}_i(t)\dot{r}_j(t)dt \end{aligned} \tag{4.19}$$

L'amplitude modale temporelle $r_i(t)$ et sa dérivée $\dot{r}_i(t)$ pour le cas simple de vibratoire libre sans amortissement s'écrivent :

$$\begin{aligned} r_i(t) &= a_i \sin(\omega_i t + \theta_i) \\ r_i(t) &= \omega_i a_i \cos(\omega_i t + \theta_i) \end{aligned} \tag{4.20}$$

où ω_i est la pulsation du *n-ième* mode, a_i son amplitude et θ_i son déphasage.

Pour une durée de temps d'observation tendant vers l'infini, nous avons :

$$\begin{aligned} \frac{1}{T}\int_0^T r_i(t) r_j(t) dt &\rightarrow \delta_{ij} \frac{a_i a_j}{2} \\ \frac{1}{T}\int_0^T \dot{r}_i(t) \dot{r}_j(t) dt &\rightarrow \delta_{ij} \frac{(\omega_i a_i)(\omega_j a_j)}{2} \end{aligned} \tag{4.21}$$

Pour Δt "assez petit" et T "assez grand" (ou encore pour Δt "assez petit" et m "assez grand"), nous en déduisons l'approximation suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{\Sigma_X} = \frac{1}{m}\mathbf{\Phi R}^T\mathbf{R\Phi}^T &\approx \mathbf{\Phi} \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & \frac{a_i^2}{2} & \\ & & \ddots \end{bmatrix} \mathbf{\Phi}^T \\ \mathbf{\Sigma_{\dot{X}}} = \frac{1}{m}\mathbf{\Phi}\dot{\mathbf{R}}^T\dot{\mathbf{R}}\mathbf{\Phi}^T &\approx \mathbf{\Phi} \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & \frac{\omega_i^2 a_i^2}{2} & \\ & & \ddots \end{bmatrix} \mathbf{\Phi}^T \end{aligned} \tag{4.22}$$

L'autocorrélation de la réponse $\mathbf{X}$ et l'auto-corrélation de sa dérivée $\dot{\mathbf{X}}$ sont donc liées par la relation suivante :

$$\boxed{\mathbf{\Sigma_{\dot{X}}}(\mathbf{\Phi}^T)^{-1} = \mathbf{\Sigma_X}(\mathbf{\Phi}^T)^{-1}\mathbf{\Lambda}} \tag{4.23}$$

avec $\mathbf{\Lambda} = diag(\omega_i^2)$, la matrice diagonale des ω_i^2.

Autrement dit, les deux matrices $(\mathbf{\Phi}^T)^{-1}$ et $\mathbf{\Lambda}$ sont respectivement la matrice des vecteurs propres et la matrice des valeurs propres de la matrice $\mathbf{\Sigma}_{\mathbf{X}}^{-1}\mathbf{\Sigma}_{\dot{\mathbf{X}}}$. Nous pouvons donc en déduire les fréquences propres et les modes propres à condition que Δt soit petit et que le nombre de mesure m soit grand.

De même la méthode d'identification fondée sur la POD, lorsqu'on a la matrice des modes propres Φ, l'amplitude temporelle modale $\mathbf{R}$ peut être déterminée par la résolution de l'équation $\mathbf{X} = \mathbf{\Phi}\mathbf{R}^T$. En regardant le vecteur colonne i de la matrice $\mathbf{R}$, nous pouvons estimer le coefficient d'amortissement correspondant comme précédemment.

4.1.2.3 Comparaison des deux méthodes précédentes

- Lorsque les points de mesure sont bien placés, c'est-à-dire que la masse de la structure est bien répartie, alors la matrice de masse est proportionnelle à la matrice identité et les POM convergent vers les modes propres. Autrement, la méthode d'identification basée sur la POD nécessite la connaissance de la matrice de masse correspondant aux points de mesure discrétisés. Pour résumer, la méthode d'identification basée sur la POD dépend du modèle vibratoire et de la méthode des éléments finis utilisés pour déterminer la matrice de masse. Contrairement à la méthode POD, la méthode SOD ne nécessite pas la connaissance de la matrice de masse pour identifier des modes propres.

- Dans la technique basée sur le POD, d'après les Eqs.(4.15) et (4.17), les valeurs propres de l'autocorrélation $\mathbf{\Sigma}_{\mathbf{X}}$ ou $\mathbf{\Sigma}_{\widetilde{\mathbf{X}}}$ (avec $\widetilde{\mathbf{X}} = \mathbf{M}^{1/2}\mathbf{X}$) sont proportionnelles au carré de l'amplitude ($a_i^2/2$ est l'énergie) des modes propres correspondants. Tandis que dans la technique fondée sur le SOD, les valeurs propres de la matrice $\mathbf{\Sigma}_{\mathbf{X}}^{-1}\mathbf{\Sigma}_{\dot{\mathbf{X}}}$ approchent les valeurs propres λ_i du système vibratoire, qui sont proportionnelles au carrée de la fréquence $\lambda_i = \omega_i^2 = (2\pi f_i)^2$.

4.1.3 Proposition de conditions d'application

Les deux techniques d'identification basées sur la POD et SOD peuvent être appliquées sur la réponse libre sans amortissement ou avec un "léger" amortissement. Pour assurer la précision des résultats, pour les deux méthodes, il faut que la matrice $\frac{1}{m}\mathbf{R}^T\mathbf{R}$ (covariance de la matrice des amplitudes modales) converge vers une matrice diagonale. Pour respecter cette condition, dans [31], les auteurs proposent des conditions sur le choix de la durée d'observation et aussi sur le choix du pas de temps. Dans les deux sections suivantes, nous rappelons d'abord la condition sur le choix du pas de temps proposée dans [31]. Ensuite, d'autres conditions différentes de celles dans [31] sur le choix de la durée de temps d'observation seront proposées.

4.1.3.1 Choix du pas de temps

Pour estimer les composantes de la matrice $\frac{1}{m}\mathbf{R}^T\mathbf{R}$ ou $\frac{1}{m}\dot{\mathbf{R}}^T\dot{\mathbf{R}}$ dans Eq. (4.19), nous utilisons la relation suivante :

Pour toutes les fonctions continues $g(t)$ sur l'intervalle $[0 \;\; T]$, avec $t_k = k\Delta t$ et $T = m\Delta t$:

$$\frac{1}{m\Delta t}\left[\sum_{k=1}^{m} g(t_k)\right]\Delta t \;\; \xrightarrow[m\to\infty]{} \;\; \frac{1}{T}\int_0^T g(t)dt \tag{4.24}$$

Le théorème de Nyquist-Shannon dit que, pour qu'un signal échantillonné contienne toute l'information du signal d'origine, la fréquence d'échantillonnage doit être supérieure au double de la plus haute fréquence contenue dans le signal d'origine.

Donc, la condition nécessaire pour que $\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} g(t_k)$ tende vers la valeur moyenne de la fonction $g(t)$ sur $[0 \;\; T]$ est, en notant f_i les fréquences du signal :

$$\boxed{\frac{1}{\Delta t} \geq 2 \max_{1\leq i\leq n}\{f_i\}} \tag{4.25}$$

4.1.3.2 Choix du temps d'observation

Pour établir la relation entre l'autocorrélation de déplacement et de vitesse (Eq. (4.23)), nous avons utilisé les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{1}{T}\int_0^T r_i(t)r_j(t)dt &\xrightarrow[T\to\infty]{} \delta_{ij}\frac{a_i a_j}{2} \\ \frac{1}{T}\int_0^T \dot{r}_i(t)\dot{r}_j(t)dt &\xrightarrow[T\to\infty]{} \delta_{ij}\frac{(\omega_i a_i)(\omega_j a_j)}{2} \end{aligned} \tag{4.26}$$

Ces relations dans Eq. (4.26) sont justifiées pour le système vibratoire libre sans amortissement lorsque la durée de temps d'observation T tend vers l'infini. Pour T "assez grand", les deux matrices $\frac{1}{m}\mathbf{R}^T\mathbf{R}$ et $\frac{1}{m}\dot{\mathbf{R}}^T\dot{\mathbf{R}}$ peuvent être donc considérées comme des matrices diagonales.

Dans le cas général de vibrations avec amortissement, ces relations dans Eq. (4.26) ne sont plus justes lorsque T tend vers l'infini. Cependant, deux matrices $\frac{1}{m}\mathbf{R}^T\mathbf{R}$ et $\frac{1}{m}\dot{\mathbf{R}}^T\dot{\mathbf{R}}$ peuvent être encore considérées comme des matrices diagonales sous certains conditions de la durée de temps d'observation T.

Notons ε, l'erreur relative souhaitée pour que les matrices $\frac{1}{m}\mathbf{R}^T\mathbf{R}$ et $\frac{1}{m}\dot{\mathbf{R}}^T\dot{\mathbf{R}}$ (que l'on note par $[r_{ij}]$ et $[\dot{r}_{ij}]$) convergent vers des matrices diagonales. L'erreur relative souhaitée ε est définie comme suit :

$$\frac{|r_{ij}|}{\sqrt{r_{ii}r_{jj}}} \leq \varepsilon \quad ; \quad \frac{|\dot{r}_{ij}|}{\sqrt{\dot{r}_{ii}\dot{r}_{jj}}} \leq \varepsilon \tag{4.27}$$

L'objectif est de trouver la condition sur T en fonction de ε pour que les conditions dans l'Eq. (4.27) soient respectées. Nous allons étudier deux cas : sans amortissement et avec amortissement (cf partie **4.5**).

- Dans le cas de vibrations sans amortissement, l'erreur relative souhaitée ε peut prendre n'importe quelle valeur, et la condition sur le temps d'observation T s'écrit :

$$\frac{\frac{3\eta}{2}}{1-\eta} \leq \varepsilon \qquad \text{avec} \qquad \eta = \frac{1}{\widetilde{\omega}T} \quad , \quad \widetilde{\omega} = \min_{i,j}(|\omega_i - \omega_j|, \omega_i) \tag{4.28}$$

- Dans le cas de vibrations avec amortissement, ε ne peut pas être choisi n'importe comment mais doit respecter la condition suivante :

$$\left(\frac{2\omega_k}{\min|\omega_i-\omega_j|}+1\right)\zeta(1+\zeta)\leq\varepsilon \tag{4.29}$$

où $\zeta=\max_i \zeta_i$ avec ζ_i coefficient d'amortissement du mode i et k : le nombre des modes (obtenus par la technique SOD) qu'on considère comme fiables. Par exemple, avec $\zeta=0.2\%$, $k=3$, nous avons $\varepsilon\approx 1.4\%$.

En fonction de la valeur de ε choisie : $\varepsilon=\left(\frac{2\omega_k}{\min|\omega_i-\omega_j|}+1\right)\zeta(1+\zeta)(1+\widetilde{\epsilon})^2$, nous avons la condition suivante sur T :

$$e^{-2\zeta\omega_1 T}<\widetilde{\varepsilon} \tag{4.30}$$

Nota : La condition suffisante sur la valeur de l'erreur relative ε que nous avons proposée dans Eq.(4.29) est moins stricte que celle proposée dans [31] : $\sqrt{\frac{\zeta\omega_n}{\omega_1}}\leq\varepsilon$, avec n le nombre des points de mesure.

4.2 Sensibilité de la méthode SOD aux conditions de mesure

Comme nous l'avons écrit précédemment, au contraire de la méthode d'identification basée sur la POD, la SOD ne nécessite la connaissance de la matrice de masse. Nous ne nous intéressons donc dans ce paragraphe qu'à la méthode SOD.

Comme on l'a vu précédemment la précision du calcul des modes propres dépend du nombre n de mesures. Dans cette partie, nous allons étudier la sensibilité de la méthode SOD tout d'abord par rapport au nombre de mesures dans le cas où les points sont régulièrement répartis et ensuite par rapport à la position des points de mesure selon leur répartition.

Les données utilisées sont les données calculées par la MEF du câble de Nante présenté au **3.1.1**. Les caractéristiques de ce câble sont rappelées ci-dessous :

- Longueur $L=5.125m$, diamètre $d=15.7mm$, masse linéique $\mu=1.2887kg/m$,
- Force de tension $T=98.07KN$,
- Conditions aux bords : bi-encastrées

La force d'excitation utilisée dans la simulation numérique est identique à la force du marteau que nous avons effectuée expérimentalement à l'abcisse $x_0 = 1.225m$. La réponse vibratoire du câble est calculée par la méthode des éléments finis (MEF) en discrétisant le câble en 500 éléments, et chaque noeud a deux degrés de liberté. Le pas de temps utilisé dans cette simulation est $\Delta t = 1/2400s$. La durée de temps de la vibration libre $T = m\Delta t = 1s$ (soit $m = 2400$).

Nota :

- Pour un système vibratoire continu, par exemple pour le câble, la réponse vibratoire contient une infinité des réponses modales. Cependant, en pratique, une base formée par les 7 premiers modes permet de bien approcher la réponse complète. Dans le calcul numérique programmé sur Matlab, nous calculons les 20 premières réponses modales correspondant aux 20 premiers modes.

- A partir de la réponse du système discrétisé (rotations et déplacements de 499 points discrétisés), nous extrayons la réponse en déplacement de certains points discrétisés qui représentent les points de mesure des capteurs. Sur cette matrice, nous allons appliquer la technique SOD afin d'identifier des paramètres modaux.

4.2.1 Sensibilité par rapport au nombre des points de mesure

Dans cette partie, pour étudier la sensibilité de la méthode SOD au nombre des points de mesure, nous étudions trois cas différents où les capteurs sont régulièrement espacés le long du câble. Nous prenons d'abord 19 points (tous les $\frac{L}{20}$), puis 9 points (tous les $\frac{L}{10}$) et enfin 4 points (tous les $\frac{L}{5}$).

Synthèse :

Lorsqu'on a la matrice des modes propres Φ avec la technique SOD, l'amplitude temporelle modale $\mathbf{R}$ peut être déterminée par la résolution de l'équation $\mathbf{X} = \mathbf{\Phi R}^T$. En utilisant le vecteur colonne i de la matrice $\mathbf{R}$, qui représente l'amplitude temporelle du mode i, nous pouvons retirer l'énergie modale $\omega_i^2 |r_i|^2$.

Nous classons les fréquences et les modes correspondants obtenus dans l'ordre décroissant de l'énergie modale et nous ne pouvons faire confiance qu'aux modes dont l'énergie est assez importante. Par exemple, d'après les résultats présentés sur la Tab.4.2(a) et (b) correspondant aux cas avec 19 et 9 points

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
f_n (Hz)	27.62	55.37	83.37	111.74	140.61	170.10	200.31	231.35	263.33

TAB. 4.1 – Les fréquences théoriques

(a) $n = 19$ points

i	f_i^{SOD}	$\omega_i^2 \lvert r_i \rvert^2 / \left(\sum_{j=1}^{9} \omega_j^2 \lvert r_j \rvert^2 \right)$
1	55.44	48.96 %
2	27.73	30.72 %
3	83.48	18.29 %
4	140.60	0.71 %
5	111.85	0.53 %
6	170.16	0.52 %
...	...	<0.3 %

(b) $n = 9$ points

i	f_i^{SOD}	$\omega_i^2 \lvert r_i \rvert^2 / \left(\sum_{j=1}^{9} \omega_j^2 \lvert r_j \rvert^2 \right)$
1	55.44	48.95 %
2	27.73	30.67 %
3	83.48	18.33 %
4	140.64	0.72 %
5	111.87	0.53 %
6	170.28	0.53 %
...	...	< 0.3%

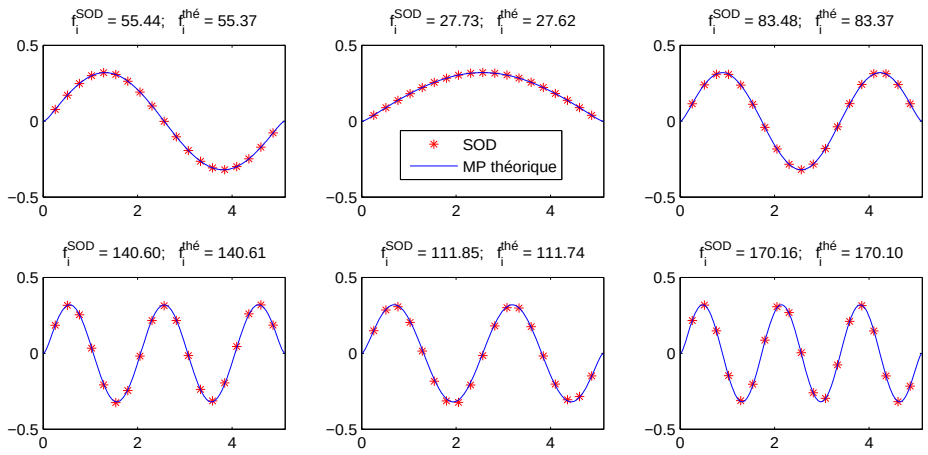
(c) $n = 4$ points

i	f_i^{SOD}	$\omega_i^2 \lvert r_i \rvert^2 / \left(\sum_{j=1}^{9} \omega_j^2 \lvert r_j \rvert^2 \right)$
1	55.45	49.29 %
2	27.74	30.63 %
3	83.86	19.04 %
4	129.00	1.04 %

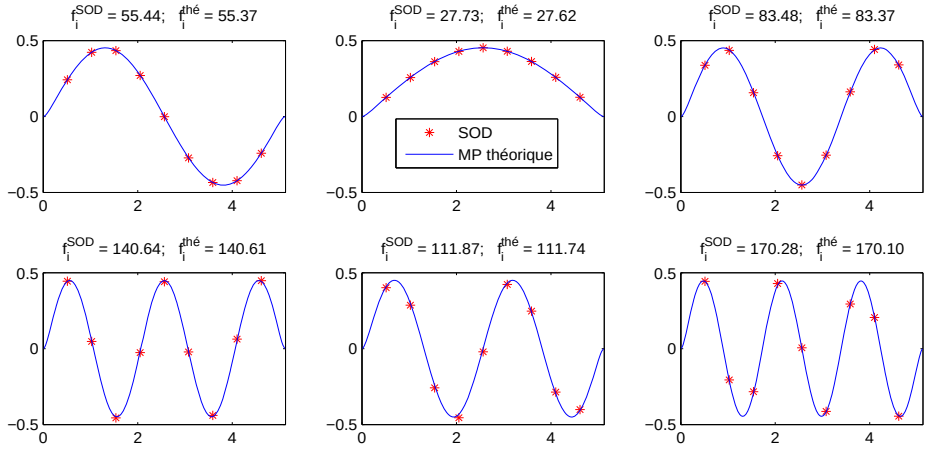
TAB. 4.2 – Les fréquences identifiées par la méthode SOD avec 19, 9 ou 4 points de mesure

de mesure, nous nous intéressons donc aux six premières fréquences selon le classement de l'énergie. Nous comparons donc les premiers modes propres calculés par SOD avec les modes propres théoriques correspondants (Fig. 4.1(a), 4.1(b), 4.1(c)).

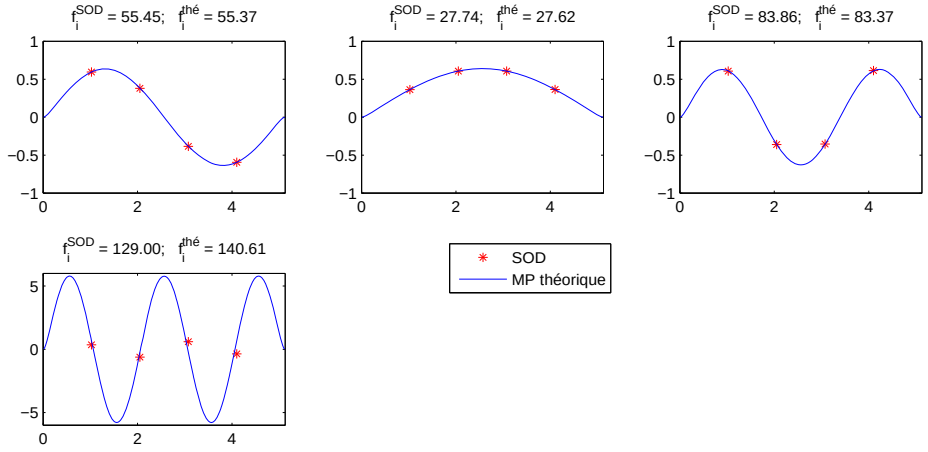
- Les résultats de la technique SOD permettent d'approximer des données (contenant 20 réponses modales) par une base de n modes calculés par la méthode SOD, où n est le nombre des points de mesure. En pratique, une base des 7 premiers modes peut bien approximer la réponse complète. Cela explique pourquoi avec 9 ou 19 points de mesure, nous avons des résultats assez satisfaisants : les six premiers modes sont bien identifiés. (Fig.4.1(a), Fig.4.1(b)).



(a) 19 points



(b) 9 points



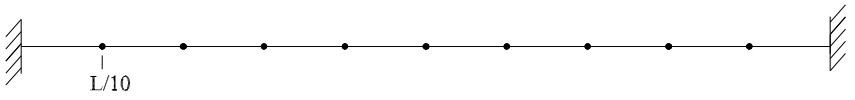
(c) 4 points

FIG. 4.1 – Modes propres (MP) calculés par l'application de la SOD sur la réponse en déplacements avec 19, 9 ou 4 points de mesure et MPs théoriques calculés par la MEF

4.2.2 Sensibilité par rapport aux positions des points de mesure

Lors d'essais expérimentaux, il n'est pas toujours possible d'instrumenter régulièrement le câble (ou la poutre) étudié. Dans cette partie, nous allons effectuer une étude numérique de la sensibilité de la méthode SOD à la répartition des points de mesure.

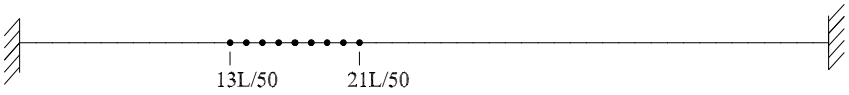
Nous fixons à 9 le nombre de points de mesure et nous les positionnons différemment comme indiqué sur la figure 4.2. Trois cas sont étudiés avec des espacements de $\frac{L}{10}$, $\frac{7L}{100}$, $\frac{L}{50}$ respectivement.



(a) Cas1 : $\frac{L}{10}, \frac{2L}{10}, ..., \frac{9L}{10}$



(b) Cas2 : $\frac{14L}{100}, \frac{21L}{100}, ..., \frac{70L}{100}$



(c) Cas3 : $\frac{13L}{50}, \frac{14L}{50}, ..., \frac{21L}{50}$

FIG. 4.2 – Positions de 9 points discrétisés

(a) Cas 1

i	f_i^{SOD}	$\omega_i^2\|r_i\|^2 / \left(\sum_{j=1}^{9} \omega_j^2\|r_j\|^2\right)$
1	55.4364	48.95 %
2	27.7294	30.67 %
3	83.4784	18.33 %
4	140.6422	0.72 %
5	111.8667	0.53 %
6	170.2830	0.53 %
...	...	$< 0.3\%$

(b) Cas 2

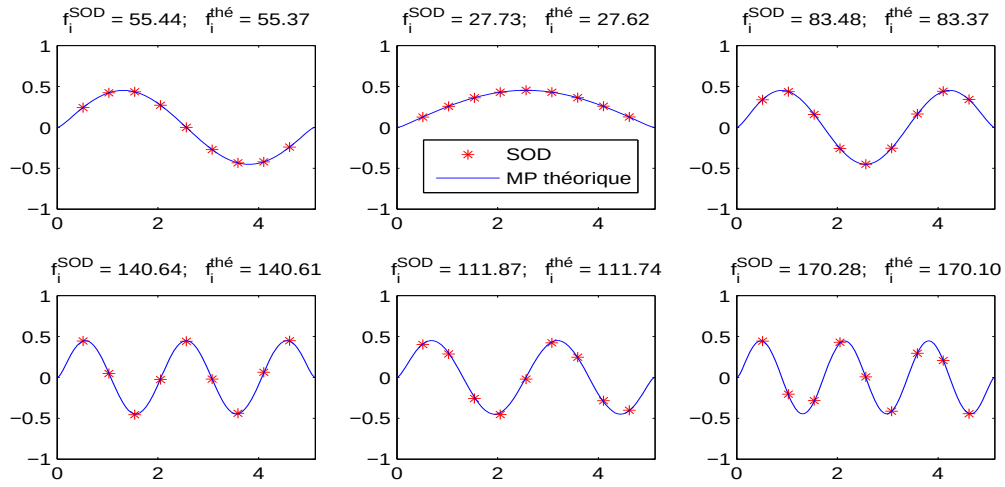
i	f_i^{SOD}	$\omega_i^2\|r_i\|^2 / \left(\sum_{j=1}^{9} \omega_j^2\|r_j\|^2\right)$
1	55.5177	46.4450%
2	27.7522	36.5376%
3	83.8206	15.5013%
4	126.2703	0.6191%
5	158.1392	0.5501%
6	189.8617	0.2732%
...	...	$< 0.1\%$

(c) Cas 3

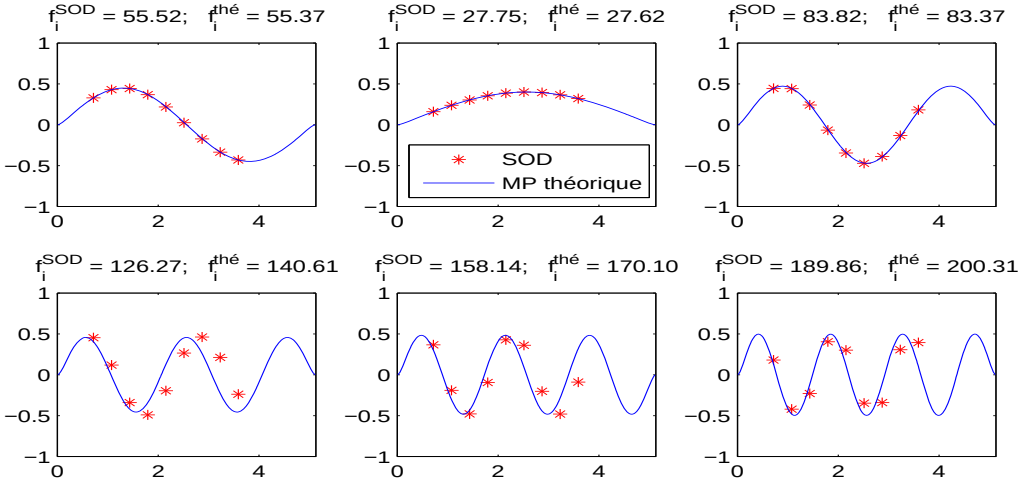
i	f_i^{SOD}	$\omega_i^2\|r_i\|^2 / \left(\sum_{j=1}^{9} \omega_j^2\|r_j\|^2\right)$
1	58.5109	48.1489 %
2	29.2863	44.9026 %
3	88.7321	5.8688 %
4	153.1453	0.8104 %
5	202.5028	0.2421 %
6	308.1373	0.0165 %
...	...	$<0.1\%$

TAB. 4.3 – Résultats de l'application de la SOD sur les données numériques avec 9 points de mesure

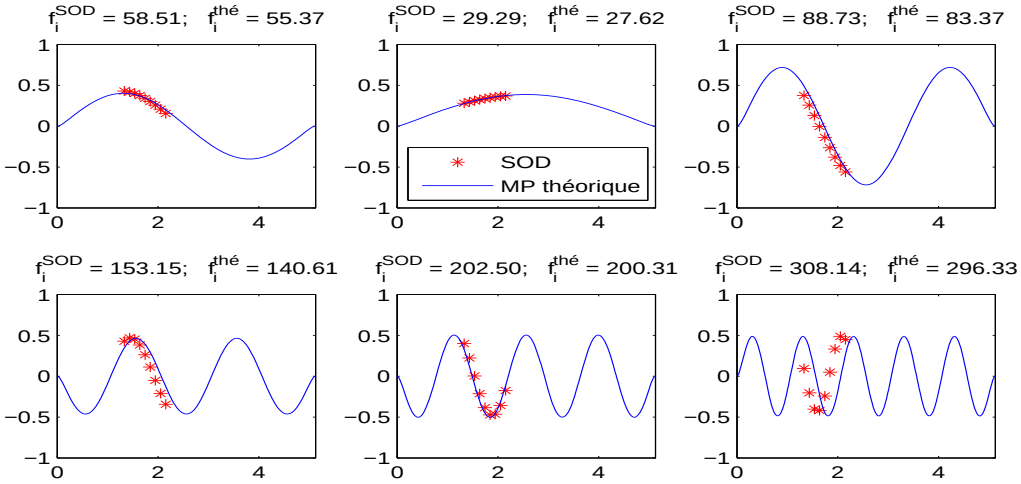
D'après les résultats présentés sur la Fig. 4.3, nous trouvons qu'avec un même nombre des points de mesure, la méthode SOD donne de meilleurs résultats lorsque les points de mesure sont répartis sur toute la structure (cas 1), autrement dit les points de mesure sont plus représentatifs pour les déformées modales.



(a) Cas 1



(b) Cas 2



(c) Cas 3

FIG. 4.3 – Comparaison des modes propres calculés par SOD sur des données avec 9 points de mesure avec ceux théoriques calculés par MEF

4.3 Identification modale sur des données expérimentales

4.3.1 Le câble de Nantes

Lors de l'expérience à Nantes, les mesures sont obtenues avec des capteurs d'accélérations répartis comme dans le cas 2 vu précédemment. Les données utilisées correspondent aux 10 tests de la série 3 du câble à l'état sain. Ces essais sont numérotés de 21 à 30 dans notre base d'essais. Nous allons présenter ci-dessous les paramètres modaux identifiés par la méthode SOD, par la méthode du "peak-picking" et par la méthode de transformation en ondelettes.

4.3.1.1 SOD

Comme la SOD nécessite de connaitre une mesure et sa dérivée, nous allons choisir de tester deux façons d'utiliser la SOD. Tout d'abord, nous appliquons la SOD sur le déplacement et la vitesse des points de mesure, puis nous utilisons l'accélération et sa dérivée (appelée Jerk). Pour cela, avant de dériver l'accélération, nous la filtrons en utilisant la fonction *butter* de Matlab :

n=2 ;

fs=2400 ;

Wn= [10 1000]/fs ;

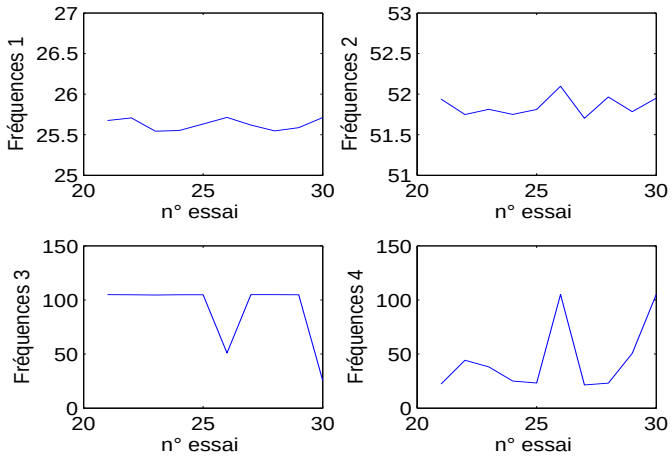
[b, a]= butter(n,Wn) ;

signal1 = filter (b,a, signal) ;

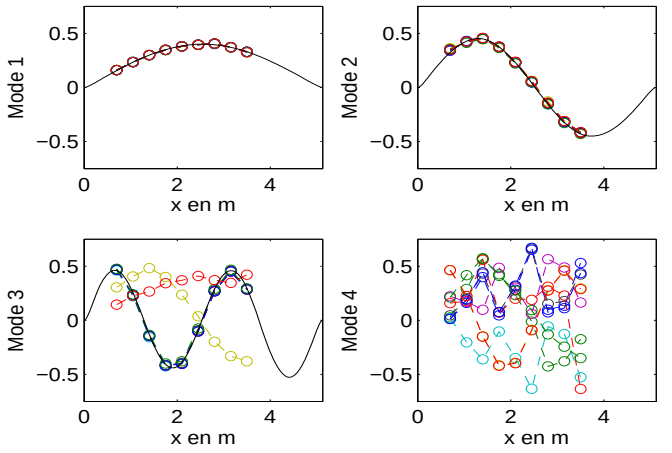
où : *signal* est le signal avant le filtrage et *signal1* est le signal après le filtrage

La Fig.4.4 présente les résultats de l'application de la SOD sur le déplacement et la vitesse.

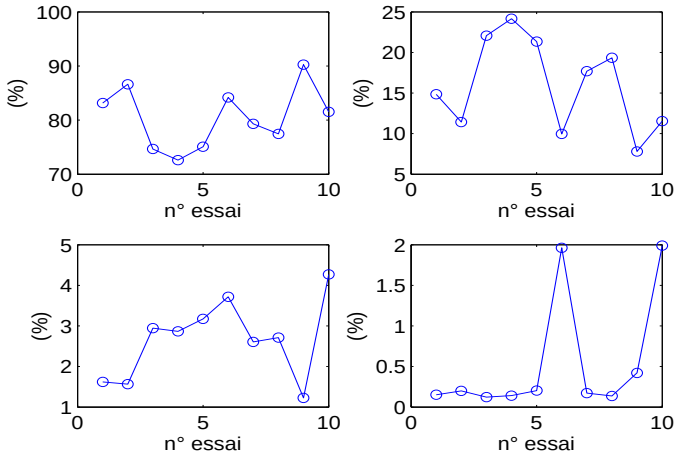
La Fig.4.5 présente les résultats de l'application de la SOD sur l'accélération et sa dérivée.



(a) 4 fréquences classées dans l'ordre décroissant de l'énergie modale

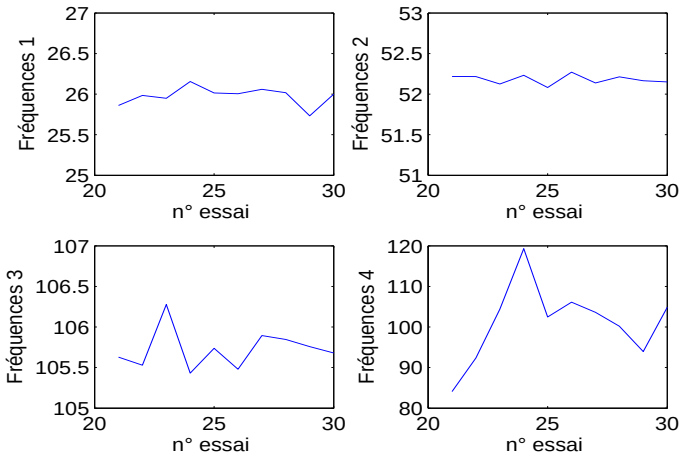


(b) 4 déformées modales expérimentales correspondantes (courbes –o) et celles numériques (courbe continue en noir)

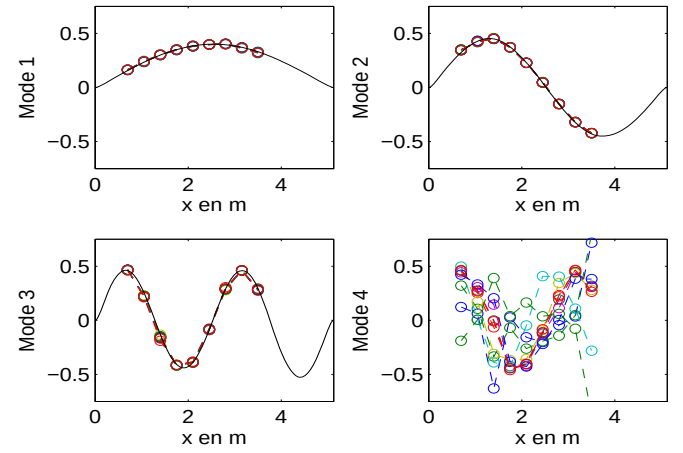


(c) Pourcentage des énergies modales correspondantes

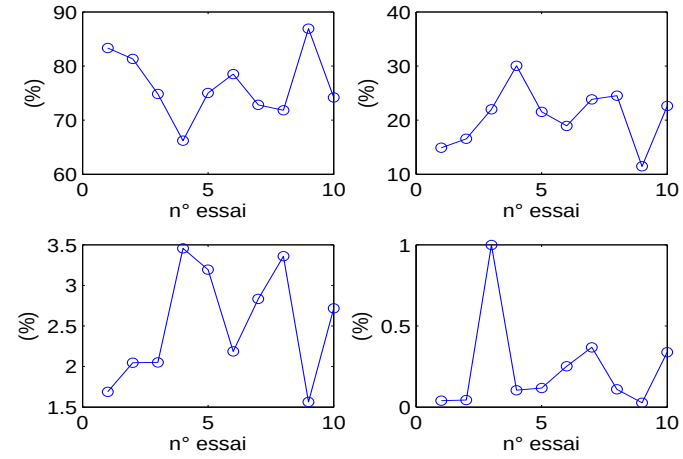
FIG. 4.4 – Application de la SOD au déplacement et à la vitesse (les paramètres modaux sont présentés dans l'ordre décroissant de l'énergie modale)



(a) 4 fréquences classées dans l'ordre décroissant de l'énergie modale



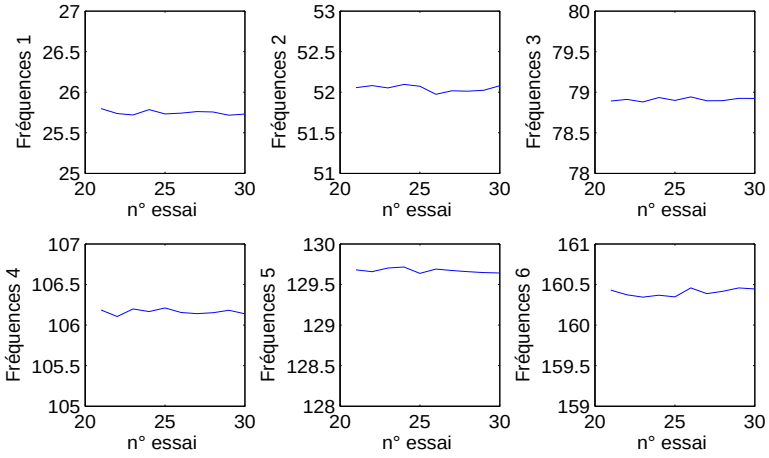
(b) 4 déformées modales correspondantes



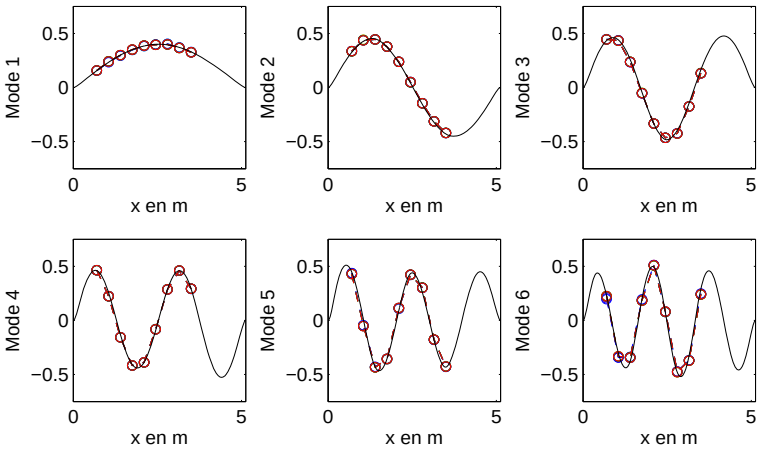
(c) Pourcentage des énergies modales correspondantes

FIG. 4.5 – Application de la SOD à l'accélération et à sa dérivée (les paramètres modaux sont présentés dans l'ordre décroissant de l'énergie modale)

4.3.1.2 Méthode de "peak-picking"



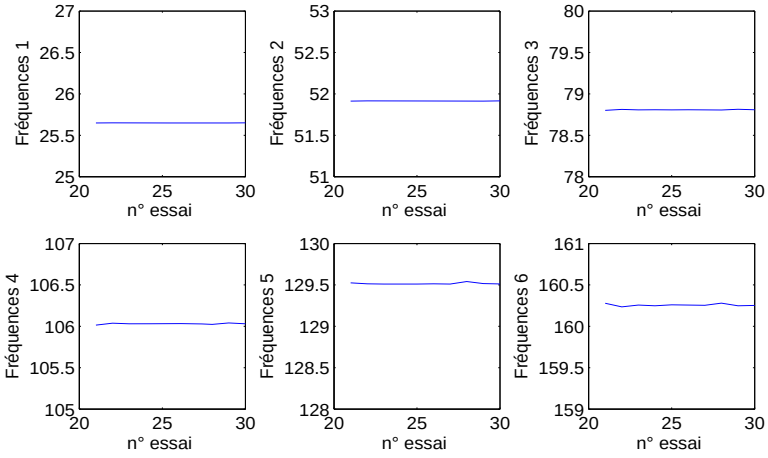
(a) Six premières fréquences



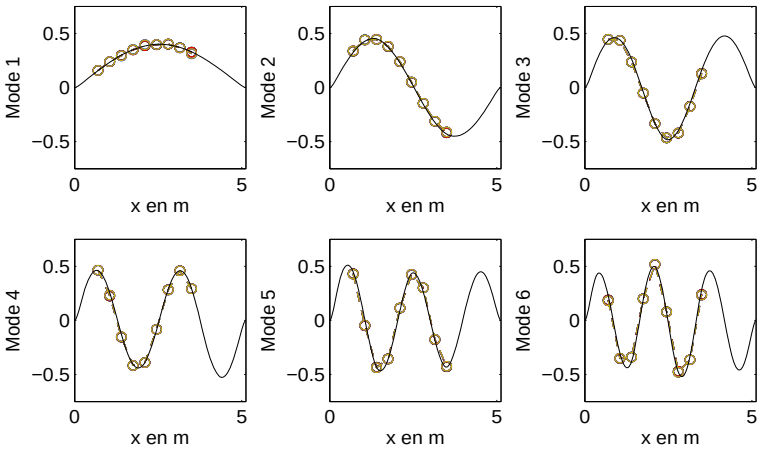
(b) Six première déformées modales correspondantes

FIG. 4.6 – Six premières fréquences et six premiers modes propres correspondant identifiés par la méthode du "peak-picking"

4.3.1.3 Transformation en ondelettes (TO)



(a) Six premières fréquences



(b) Six première déformées modales correspondantes

FIG. 4.7 – Six premières fréquences et six premiers modes propres correspondant identifiés par la TO

4.3.1.4 Comparaison et synthèse

Les résultats des modes et des fréquences identifiés par la SOD sur le câble de Nantes sont moins satisfaisant que ceux obtenus par la méthode du "peak-picking" ou la TO. Cela est lié au nombre des capteurs utilisés et aussi à la répartition des capteurs sur la structure comme dans le cas 2 au 4.2.2.

Pour mieux comprendre, dans la partie suivante, nous allons tester la méthode SOD sur des essais

expérimentaux d'une autre poutre, qui est équipée de plus de capteurs que dans l'étude précédente. De plus, les capteurs sont bien régulièrement répartis sur toute la longueur de la poutre.

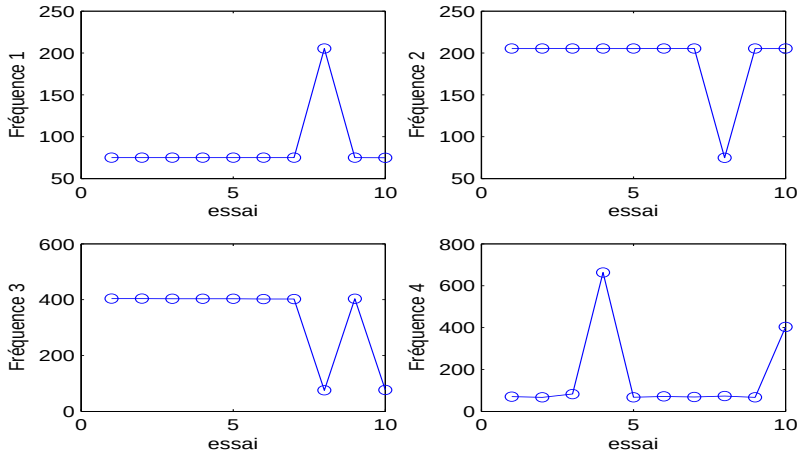
4.3.2 Application à la poutre bi-encastrée sans tension

Dans cette application, nous utilisons des données expérimentales des essais de vibration d'une poutre bi-encastrée sans tension ($b \times h \times L = 0.04m \times 0.0081m \times 0.705m$) qui ont été réalisés par D. Najm à l'ENPC. La poutre est équipée de 11 accéléromètres et elle est mise en vibration par chocs de marteau. Nous utilisons dans cette application 10 tests à l'état sain ; chaque essai dure $1s$ avec la fréquence d'échantillonnage de $fs = 10240Hz$.

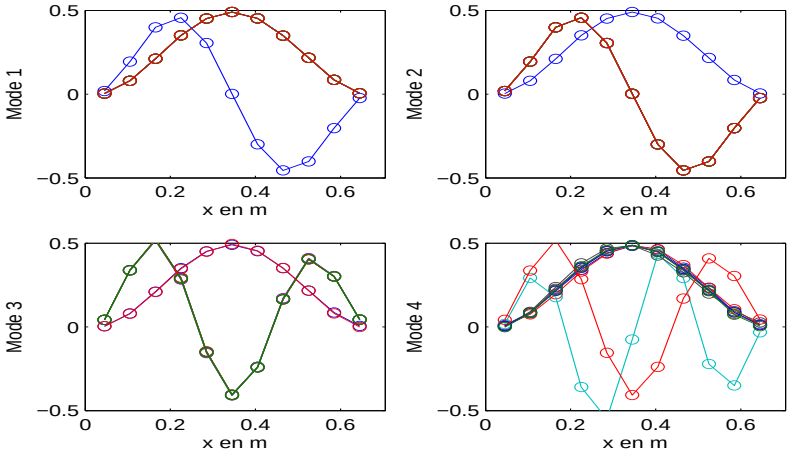
Nous présentons ci-dessous les paramètres modaux obtenus par la méthode SOD et ensuite ceux obtenus par la TO.

4.3.2.1 SOD

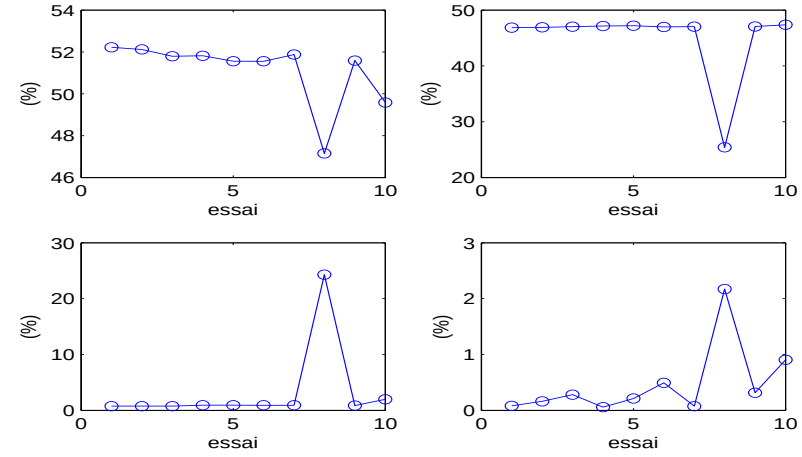
Nous appliquons la SOD sur le déplacement et la vitesse des points de mesure, puis nous utilisons l'accélération et sa dérivée. Pour cela, avant de dériver l'accélération, nous la filtrons en utilisant la fonction *butter* de Matlab comme au 4.3.1.1 , avec *fs=10240* et *Wn= [40 10000]/fs*.



(a) 4 fréquences classées dans l'ordre décroissant de l'énergie modale

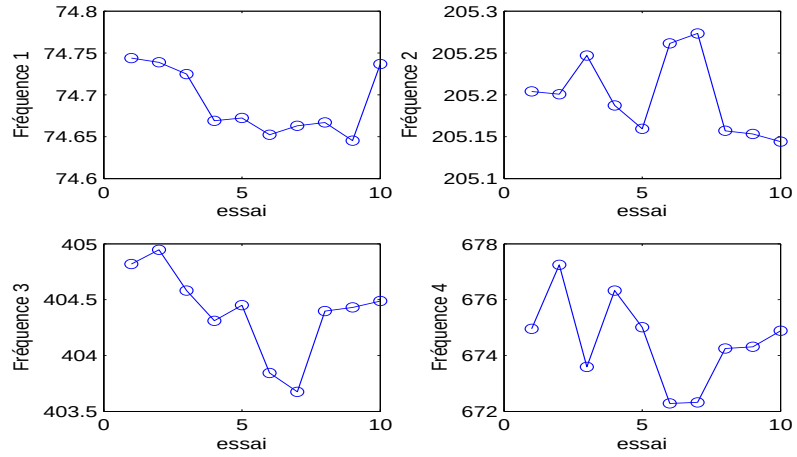


(b) 4 déformées modales correspondantes

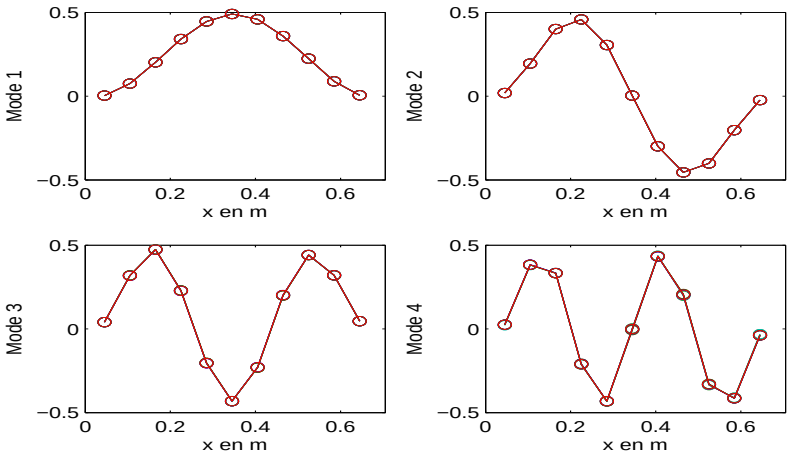


(c) Pourcentage des énergies modales correspondantes

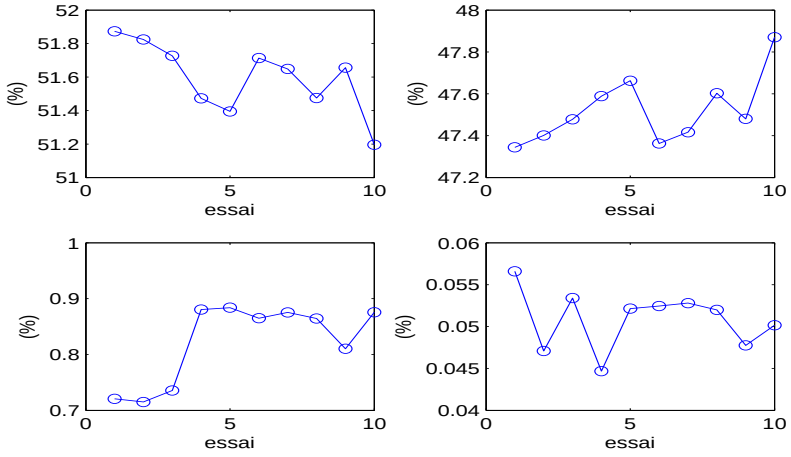
FIG. 4.8 – Application de la SOD au déplacement et à la vitesse (les paramètres modaux sont présentés dans l'ordre décroissant de l'énergie modale)



(a) 4 fréquences



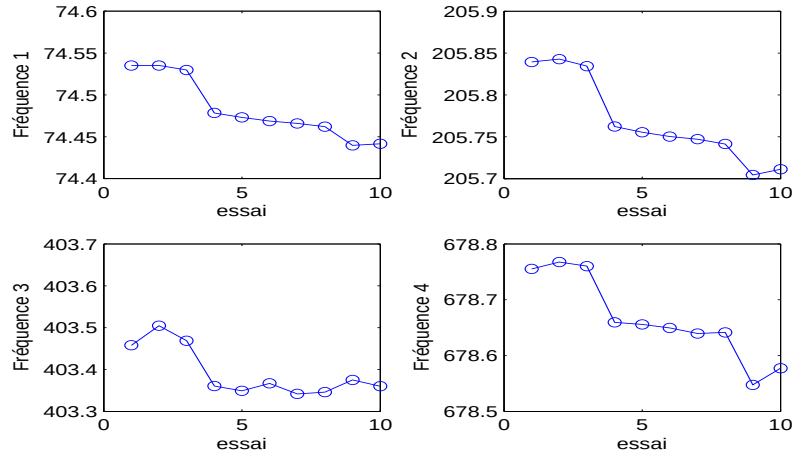
(b) 4 modes



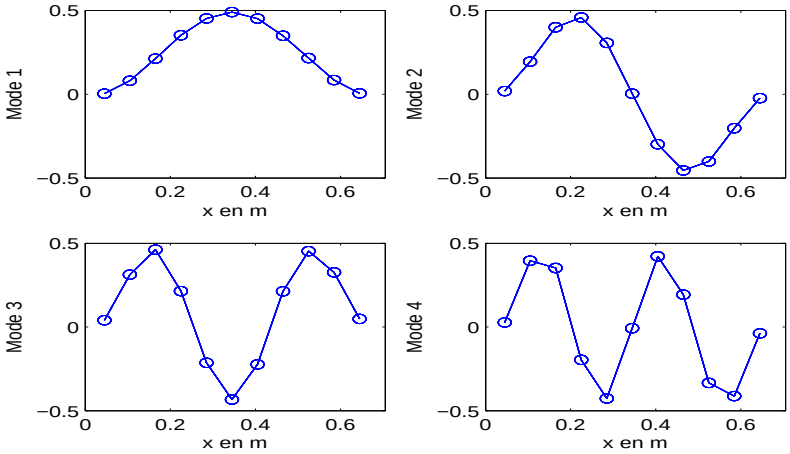
(c) Pourcentage des énergies modales

FIG. 4.9 – Application de la SOD à l'accélération et à sa dérivée (les paramètres modaux sont présentés dans l'ordre décroissant de l'énergie modale)

4.3.2.2 Transformation en ondelettes



(a) 4 fréquences



(b) 4 modes

FIG. 4.10 – Quatre premières fréquences et quatre premiers modes propres correspondants identifiés par la TO

4.3.2.3 Comparaison et synthèse

D'après les résultats présentés ci-dessus, nous trouvons que, avec des mesures d'accéléromètres, on obtient de meilleurs résultats en appliquant la SOD sur l'accélération et sa dérivée qu'en l'appliquant sur le déplacement et la vitesse. Les modes propres et les fréquences obtenus sont assez satisfaisants et les résultats sont proches de ceux calculés par la méthode TO.

En comparant avec les paramètres modaux identifiés du câble par la SOD dans la partie 4.3.1, nous trouvons que les résultats obtenus sur la poutre sont grandement améliorés. Cela est lié au nombre des capteurs et la distribution des capteurs sur la structure. Dans le cas de la poutre, il y a plus capteurs et ils sont bien répartis sur toute la longueur de la poutre, ce qui explique les bons résultats obtenus.

4.4 Conclusion

Les résultats numériques et expérimentaux de l'application de la SOD montrent que l'utilisation de cette technique doit suivre certaines règles. La performance de la méthode dépend d'abord du nombre de points de mesure et aussi de la distribution des points de mesure sur la structure. Un plus grand nombre de points et plus de points de mesure bien répartis et représentatifs la structure (ou les déformées modales de la structure), plus performants seront les résultats. La performance de cette méthode dépend aussi de la façon de choisir les données (l'accélération et sa dérivée ou le déplacement et sa dérivée) et également de la façon de filtrer les données avant leur utilisation.

4.5 Annexe

4.5.1 Cas sans amortissement

Pour le cas de vibrations libres sans amortissement, l'amplitude modale temporelle $r_i(t)$ et sa dérivée $\dot{r}_i(t)$ s'écrivent :

$$\begin{aligned} r_i(t) &= a_i \sin(\omega_i t + \theta_i) \\ \dot{r}_i(t) &= \omega_i a_i \cos(\omega_i t + \theta_i) \end{aligned} \tag{4.31}$$

4.5.1.1 Matrice $[r_{ij}]$

- Pour $i = j$:

$$r_{ii} = \frac{1}{T}\int_0^T a_i^2 \sin^2(\omega_i t + \theta_i)dt = \frac{a_i^2}{T}\int_0^T \frac{1 - cos(2\omega_i t + 2\theta_i)}{2}dt = \frac{a_i^2}{2}\left[1 + \frac{\sin(2\theta_i) - \sin(2\omega_i T + 2\theta_i)}{2\omega_i T}\right] \tag{4.32}$$

Nous avons donc :

$$\frac{a_i^2}{2}\left(1 - \frac{1}{\omega_i T}\right) \leq r_{ii} \leq \frac{a_i^2}{2}\left(1 + \frac{1}{\omega_i T}\right) \tag{4.33}$$

- Pour $i \neq j$:

$$\begin{aligned} r_{ij} &= \frac{1}{T}\int_0^T a_i a_j \sin(\omega_i t + \theta_i)\sin(\omega_j t + \theta_j)dt \\ &= \frac{a_i a_j}{T}\int_0^T \frac{\cos[(\omega_i - \omega_j)t + (\theta_i - \theta_j)] - \cos[(\omega_i + \omega_j)t + (\theta_i + \theta_j)]}{2}dt \\ &= \frac{a_i a_j}{2}\left[\frac{\sin[(\omega_i - \omega_j)T + (\theta_i - \theta_j)] - \sin(\theta_i - \theta_j)}{2(\omega_i - \omega_j)T} - \frac{\sin[(\omega_i + \omega_j)T + (\theta_i + \theta_j)] - \sin(\theta_i + \theta_j)}{2(\omega_i + \omega_j)T}\right] \end{aligned} \tag{4.34}$$

Nous avons donc :

$$\frac{|r_{ij}|}{|a_i a_j|/2} \leq \frac{1}{|\omega_i - \omega_j|T} + \frac{1}{(\omega_i + \omega_j)T} \tag{4.35}$$

Des Eqs. (4.33) et (4.35), nous déduisons que :

$$\frac{|r_{ij}|}{\sqrt{r_{ii} r_{jj}}} \leq \frac{\frac{1}{|\omega_i - \omega_j|T} + \frac{1}{(\omega_i + \omega_j)T}}{\sqrt{\left(1 - \frac{1}{\omega_i T}\right)\left(1 - \frac{1}{\omega_j T}\right)}} \tag{4.36}$$

En posant $\widetilde{\omega} = \min_{i,j}(|\omega_i - \omega_j|, \omega_i)$, nous obtenons :

$$\frac{|r_{ij}|}{\sqrt{r_{ii} r_{jj}}} \leq \frac{\frac{3}{2\widetilde{\omega}T}}{1 - \frac{1}{\widetilde{\omega}T}} \tag{4.37}$$

Nous avons donc la condition suffisant sur T ($\eta = \dfrac{1}{\widetilde{\omega}T}$) :

$$\boxed{\frac{\frac{3\eta}{2}}{1 - \eta} \leq \varepsilon} \tag{4.38}$$

avec $\eta = \frac{1}{\widetilde{\omega}T}$.

4.5.1.2 Matrice $[\dot{r}_{ij}]$

Nous avons la même condition suffisante que celle de l'Eq.(4.38).

4.5.2 Cas avec amortissement

La réponse de déplacement avec amortissement :

$$r_i = a_i e^{-\zeta_i \omega_i t} \sin(\omega_i t + \theta_i) \tag{4.39}$$

4.5.2.1 Matrice $[r_{ij}]$

- Composant diagonal r_{ii}

$$r_{ii} = \frac{1}{T}\int_0^T a_i^2 e^{-2\zeta_i \omega_i t} \sin^2(\omega_i t + \theta_i) dt = \frac{a_i^2}{T}\int_0^T e^{-2\zeta_i \omega_i t}\left[\frac{1 - \cos(2\omega_i t + 2\theta_i)}{2}\right] dt \tag{4.40}$$

- Composant non diagonal r_{ij}

$$\begin{aligned} r_{ij} &= \frac{1}{T}\int_0^T a_i a_j \quad e^{-(\zeta_i \omega_i + \zeta_j \omega_j)t} \sin(\omega_i t + \theta_i)\sin(\omega_j t + \theta_j) dt \\ &= \frac{a_i a_j}{T}\int_0^T e^{-(\zeta_i \omega_i + \zeta_j \omega_j)t}\left[\frac{\cos((\omega_i - \omega_j)t + (\theta_i - \theta_j)) - \cos((\omega_i + \omega_j)t + (\theta_i + \theta_j))}{2}\right] \end{aligned} \tag{4.41}$$

Nous avons que :

$$\begin{aligned} &\int_0^T e^{-\alpha t}\cos(\beta t + \theta) = \left[\frac{1}{\beta}e^{-\alpha t}\sin(\beta t + \theta)\right]_0^T + \int_0^T \frac{\alpha}{\beta}e^{-\alpha t}\sin(\beta t + \theta) dt \\ &= \left[\frac{1}{\beta}e^{-\alpha t}\sin(\beta t + \theta)\right]_0^T + \left[\frac{-\alpha}{\beta^2}e^{-\alpha t}\cos(\beta t + \theta)\right]_0^T - \int_0^T \frac{\alpha^2}{\beta^2}e^{-\alpha t}\cos(\beta t + \theta) dt \end{aligned} \tag{4.42}$$

Nous en déduisons que :

$$\int_0^T e^{-\alpha t}\cos(\beta t + \theta) = \frac{1}{1 + \frac{\alpha^2}{\beta^2}}\left[-\frac{1}{\beta}\sin\theta + \frac{\alpha}{\beta^2}\cos\theta + \frac{1}{\beta}e^{-\alpha T}\sin(\beta T + \theta) - \frac{\alpha}{\beta^2}e^{-\alpha T}\cos(\beta T + \theta)\right] \tag{4.43}$$

Nous allons chercher des conditions pour que la matrice $[r_{ij}]$ converge vers une matrice diagonale (pour que le *k-ième* mode obtenu par la méthode SOD puisse être considéré comme fiable). C'est à dire :

- Pour $i \leq k$ ou $j \leq k$:

$$\frac{|r_{ij}|}{\sqrt{r_{ii}r_{jj}}} \leq \varepsilon \tag{4.44}$$

- Pour $i, j \geq k$:

$$\frac{|r_{ij}|}{r_{kk}} \leq \varepsilon \tag{4.45}$$

- Pour $i \leq k, j > k$ (idem pour $i > k, j \leq k$) :

$$\frac{|r_{ij}|}{\sqrt{r_{ii}r_{kk}}} \leq \varepsilon \tag{4.46}$$

Démonstration :

Des Eqs.(4.43) et Eq. (4.41), nous déduisons que :

$$|r_{ij}| \leq \frac{|a_i a_j|}{2T}(1 + e^{-(\zeta_i\omega_i + \zeta_j\omega_j)T}) \left[\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{(\zeta_i\omega_i + \zeta_j\omega_j)^2}{(\omega_i - \omega_j)^2}}} \frac{1}{|\omega_i - \omega_j|} + \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{(\zeta_i\omega_i + \zeta_j\omega_j)^2}{(\omega_i + \omega_j)^2}}} \frac{1}{|\omega_i + \omega_j|} \right] \tag{4.47}$$

D'après Eq.(4.43) et Eq. (4.40), nous avons :

$$\begin{aligned} \frac{a_i^2}{2T} \left[\frac{1}{2\zeta_i\omega_i}(1 - e^{-2\zeta_i\omega_i T}) - \frac{1}{\sqrt{1+\zeta_i^2}} \frac{1}{2\omega_i}(1 + e^{-2\zeta_i\omega_i T}) \right] &\leq r_{ii} \\ \leq \frac{a_i^2}{2T} \left[\frac{1}{2\zeta_i\omega_i}(1 - e^{-2\zeta_i\omega_i T}) + \frac{1}{\sqrt{1+\zeta_i^2}} \frac{1}{2\omega_i}(1 + e^{-2\zeta_i\omega_i T}) \right] & \end{aligned} \tag{4.48}$$

- Calcul $\frac{|r_{ij}|}{\sqrt{r_{ii}r_{jj}}}$ (avec $i, j \leq k$) :

En posant $\zeta = \max(\zeta_i)$, lorsque T est assez grand pour que $e^{-\omega_1 T} = \widetilde{\epsilon} \ll 1$, nous avons

$$\frac{|r_{ij}|}{\sqrt{r_{ii}r_{jj}}} \leq \frac{(1+\widetilde{\epsilon})\left[\frac{1}{|\omega_i-\omega_j|}+\frac{1}{|\omega_i+\omega_j|}\right]}{\sqrt{\frac{1}{2\zeta\omega_i}(1-\widetilde{\epsilon})-\frac{1}{2\omega_i}(1+\widetilde{\epsilon})}\sqrt{\frac{1}{2\zeta\omega_j}(1-\widetilde{\epsilon})-\frac{1}{2\omega_j}(1+\widetilde{\epsilon})}} \tag{4.49}$$

Soit :

$$\frac{|r_{ij}|}{\sqrt{r_{ii}r_{jj}}} \leq \left(\frac{2\sqrt{\omega_i\omega_j}}{|\omega_i-\omega_j|}+\frac{2\sqrt{\omega_i\omega_j}}{|\omega_i+\omega_j|}\right)\zeta(1+\zeta)(1+\widetilde{\epsilon})^2 \tag{4.50}$$

Comme $\omega_i, \omega_j < \omega_k$, nous avons donc :

$$\frac{|r_{ij}|}{\sqrt{r_{ii}r_{jj}}} \leq \left(\frac{2\omega_k}{\min|\omega_i-\omega_j|}+1\right)\zeta(1+\zeta)(1+\widetilde{\epsilon})^2 \tag{4.51}$$

- Calcul $\frac{|r_{ij}|}{r_{kk}}$ (avec $i,j \geq k$) :
De même, nous avons :

$$\frac{|r_{ij}|}{r_{kk}} \leq \frac{|a_ia_j|}{a_k^2}\frac{(1+\widetilde{\epsilon})\left[\frac{1}{|\omega_i-\omega_j|}+\frac{1}{|\omega_i+\omega_j|}\right]}{\frac{1}{2\zeta\omega_k}(1-\widetilde{\epsilon})-\frac{1}{2\omega_k}(1+\widetilde{\epsilon})} \tag{4.52}$$

Avec l'hypothèse $|a_k| > |a_i|$ $(\forall i > k)$, nous en déduisons que :

$$\frac{|r_{ij}|}{\sqrt{r_{ii}r_{jj}}} \leq \left(\frac{2\omega_k}{\min|\omega_i-\omega_j|}+1\right)\zeta(1+\zeta)(1+\widetilde{\epsilon})^2 \tag{4.53}$$

- Calcul $\frac{|r_{ij}|}{\sqrt{r_{ii}r_{kk}}}$ (avec $i \leq k, j > k$) :

De même, nous avons :

$$\frac{|r_{ij}|}{\sqrt{r_{ii}r_{kk}}} \leq \frac{|a_ia_j|}{|a_ia_k|}\frac{(1+\widetilde{\epsilon})\left[\frac{1}{|\omega_i-\omega_j|}+\frac{1}{|\omega_i+\omega_j|}\right]}{\sqrt{\frac{1}{2\zeta\omega_i}(1-\widetilde{\epsilon})-\frac{1}{2\omega_i}(1+\widetilde{\epsilon})}\sqrt{\frac{1}{2\zeta\omega_k}(1-\widetilde{\epsilon})-\frac{1}{2\omega_k}(1+\widetilde{\epsilon})}} \tag{4.54}$$

Soit :

$$\frac{|r_{ij}|}{\sqrt{r_{ii}r_{kk}}} \leq \frac{|a_ia_j|}{|a_ia_k|}\left(\frac{2\sqrt{\omega_i\omega_k}}{|\omega_i-\omega_j|}+\frac{2\sqrt{\omega_i\omega_k}}{|\omega_i+\omega_j|}\right)\zeta(1+\zeta)(1+\widetilde{\epsilon})^2 \tag{4.55}$$

En utilisant $\omega_j > \omega_k$, et $|a_j| > |a_k|$, nous avons :

$$\frac{|r_{ij}|}{\sqrt{r_{ii}r_{kk}}} \leq \left(\frac{2\omega_k}{\min|\omega_i-\omega_j|}+1\right)\zeta(1+\zeta)(1+\widetilde{\epsilon})^2 \tag{4.56}$$

Nous en déduisons la condition suffisante de la valeur ε choisie :

$$\boxed{\left(\frac{2\omega_k}{\min|\omega_i-\omega_j|}+1\right)\zeta(1+\zeta) \leq \varepsilon} \tag{4.57}$$

4.5.2.2 Matrice $[\dot{r}_{ij}]$

La réponse d'accélération avec amortissement :

$$\begin{aligned} \dot{r}_i &= a_i \omega_i e^{-\zeta_i \omega_i t} (\cos(\omega_i t + \theta_i) - \zeta_i \sin(\omega_i t + \theta_i)) \\ &= a_i \sqrt{1 + \zeta_i^2} \;\; e^{-\zeta_i \omega_i t} \omega_i \cos(\omega_i t + \tilde{\theta}_i) \end{aligned} \tag{4.58}$$

où $\tilde{\theta}_i = \theta_i + \alpha_i$ avec $\alpha_i = arctg(\zeta_i)$

Comme précédemment, nous avons la même condition suffisante.

Chapitre 5

Variation relative des paramètres modaux entre un état sain et un état modifié - Application à la détection, la localisation et la quantification des défauts

Ce chapitre se compose de trois parties. Dans la première partie, nous étudions la variation des paramètres modaux de l'état sain à l'état modifié avec une estimation analytique et nous faisons aussi des calculs numériques par la FEM pour comparer avec l'approximation analytique.

Dans la deuxième partie, en utilisant des résultats de la première partie, nous proposons une *méthode de localisation et de quantification des modifications à partir de deux essais*, un sur la structure "saine" et un sur la structure modifiée ou "endommagée".

Dans la dernière partie, nous proposons une *méthode de détection et de localisation à partir d'une série d'essais*, qui est similaire à la méthode présentée dans la deuxième partie et qui est aussi basée sur des résultats de la première partie.

5.1 Changement des paramètres modaux de l'état sain à l'état modifié

L'objectif de cette partie est d'étudier le changement des paramètres modaux de l'état sain à l'état endommagé. D'abord, nous présentons une approximation analytique au premier ordre de la

variation des paramètres modaux (fréquences propres et modes propres) en fonction du changement des caractéristiques. Ensuite, nous faisons certaines applications numériques pour comparer les variations des paramètres modaux calculés par la FEM avec celles obtenues par l'estimation analytique. Nous étudions également la sensibilité de ces variations par rapport aux différents changements (tension, rigidité, masse).

5.1.1 Estimation analytique de la variation des paramètres modaux

Dans cette partie, nous étudions la variation des paramètres modaux à cause de l'endommagement en utilisant les deux modèles (qui sont présentés au 3.3.2) :

- Modèle 1 : Changement global de tension ΔT + perturbation locale de masse $\Delta\mu(x)$ + perturbation locale de rigidité $\Delta EI(x)$ dans la zone endommagée.

- Modèle 2 : Changement global de tension ΔT + perturbation locale de masse $\Delta\mu(x)$ + apparition d'un ressort au niveau de la zone endommagée.

5.1.1.1 Avec des modifications du modèle 1 : ΔT, $\Delta EI(x)$, $\Delta\mu(x)$

Nous proposons ci-dessous une approximation du premier ordre de la variation des paramètres modaux en fonction des petites perturbations ΔT, $\Delta EI(x)$ et $\Delta\mu(x)$.

5.1.1.1.a Cas général

Lorsque le défaut apparaît, la rigidité et la masse sont modifiées et respectivement notées par $\widetilde{EI}(x)$ et $\widetilde{\mu}(x)$ avec :

$$\begin{aligned} \widetilde{EI}(x) &= EI(x) + \Delta EI(x) \\ \widetilde{\mu}(x) &= \mu(x) + \Delta\mu(x) \end{aligned} \tag{5.1}$$

Il y a aussi une variation de tension dans le câble $\widetilde{T} = T + \Delta T$. Les changements de la rigidité, de la masse et aussi de la tension dans le câble entrainent une perturbation des fréquences propres et des modes propres :

$$\begin{aligned} \widetilde{\phi}_n(x) &= \phi_n(x) + \Delta\phi_n(x) \\ \widetilde{\lambda}_n &= \lambda_n + \Delta\lambda_n \end{aligned} \tag{5.2}$$

L'équation aux valeurs propres des modes propres du câble s'écrit :

$$(\widetilde{EI}(x)\widetilde{\phi}_n''(x))'' - \widetilde{T}\widetilde{\phi}_n''(x) - \widetilde{\lambda}_n\widetilde{\mu}(x)\widetilde{\phi}_n(x) = 0 \tag{5.3}$$

avec les mêmes conditions aux bords qu'à l'état sain :

- Bi-appuyé : $\widetilde{\phi}_n(0) = \widetilde{\phi}_n(L) = 0$ et $\widetilde{\phi}_n''(0) = \widetilde{\phi}_n''(L) = 0$.
- Bi-encastré : $\widetilde{\phi}_n(0) = \widetilde{\phi}_n(L) = 0$ et $\widetilde{\phi}_n'(0) = \widetilde{\phi}_n'(L) = 0$.

Pour toute fonction $u(x)$ ayant les mêmes conditions aux bords, nous avons :

$$\int_0^L \left(\widetilde{EI}(x)\widetilde{\phi}_n''(x)u''(x) + \widetilde{T}\widetilde{\phi}_n'(x)u'(x) - \widetilde{\lambda}_n\widetilde{\mu}(x)\widetilde{\phi}_n(x)u(x)\right)dx = 0 \tag{5.4}$$

En choisissant $u(x) = \widetilde{\phi}_n(x)$, l'équation (5.4) se réécrit :

$$\int_0^L \widetilde{EI}(x)\widetilde{\phi}_n''^2(x)dx + \widetilde{T}\int_0^L \widetilde{\phi}_n'^2(x)dx = \widetilde{\lambda}_n\int_0^L \widetilde{\mu}(x)\widetilde{\phi}_n^2(x)dx \tag{5.5}$$

En négligeant les petits d'ordre plus 1 et utilisant (2.8), (5.1), (5.2), l'équations (5.5) devient comme suit :

$$\begin{aligned}\int_0^L \Delta EI(x)\phi_n''^2(x)dx + 2\int_0^L EI(x)\Delta\phi_n''(x)\phi_n''(x)dx + \Delta T\int_0^L \phi_n'^2(x)dx + 2T\int_0^L \Delta\phi_n'(x)\phi_n'(x)dx = \\ \Delta\lambda_n\int_0^L \mu(x)\phi_n^2(x)dx + \lambda_n\int_0^L \Delta\mu(x)\phi_n^2(x)dx + 2\lambda_n\int_0^L \mu(x)\Delta\phi_n(x)\phi_n(x)dx\end{aligned} \tag{5.6}$$

La variation $\Delta\phi_i(x)$ peut se décomposer sur une base des modes propres du système à l'état sain $\Delta\phi_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\alpha_{nk}\phi_k(x)$. En utilisant les équations (2.6), (2.7), (2.8), nous avons donc :

$$\int_0^L EI(x)\Delta\phi_n''(x)\phi_n''(x)dx + T\int_0^L \Delta\phi_n'(x)\phi_n'(x)dx = \lambda_n\int_0^L \Delta\phi_n(x)\phi_n(x)dx \tag{5.7}$$

Nous en déduisons donc :

$$\int_0^L \Delta EI(x)\phi_n''^2(x)dx + \Delta T\int_0^L \phi_n'^2(x)dx - \lambda_n\int_0^L \Delta\mu(x)\phi_n^2(x)dx = \Delta\lambda_n\int_0^L \mu(x)\phi_n^2(x)dx \tag{5.8}$$

En utilisant Eq.(2.11), l'expression (5.8) peut se réécrire :

$$\frac{\Delta\lambda_n}{\lambda_n} \approx \frac{1}{(1+\gamma_n)}\frac{\Delta T}{T} + \frac{\gamma_n}{1+\gamma_n}\frac{\int_0^L \Delta EI(x)\phi_n''(x)^2 dx}{\int_0^L EI(x)\ \left(\phi_n''(x)\right)^2 dx} - \frac{\int_0^L \Delta\mu(x)\phi_n^2(x)dx}{\int_0^L \mu(x)\phi_n^2(x)dx} \tag{5.9}$$

Comme $f_n = \frac{\sqrt{\lambda_n}}{2\pi}$, nous en déduisons :

$$\boxed{\frac{\Delta f_n}{f_n} \approx \frac{1}{2}\frac{\Delta\lambda_n}{\lambda_n} \approx \frac{1}{2}\left[\frac{1}{(1+\gamma_n)}\frac{\Delta T}{T} + \frac{\gamma_n}{(1+\gamma_n)}\frac{\int_0^L \Delta EI(x)\phi_n''(x)^2 dx}{\int_0^L EI(x)\ \left(\phi_n''(x)\right)^2 dx} - \frac{\int_0^L \Delta\mu(x)\phi_n^2(x)dx}{\int_0^L \mu(x)\phi_n^2(x)dx}\right]} \tag{5.10}$$

5.1.1.1.b Cas particulier : poutre de section constante avec un défaut très localisé $\Delta L \ll L$

Si la poutre est de section constante et la poutre est homogène, alors $EI(x)$ et $\mu(x)$ sont constants initialement et l'expression (5.10) peut se réécrire comme suit :

$$\frac{\Delta f_n}{f_n} \approx \frac{1}{2}\left[\frac{1}{(1+\gamma_n)}\frac{\Delta T}{T} + \frac{\gamma_n}{1+\gamma_n}\frac{\int_0^L \Delta EI(x)\phi_n''^2(x)dx}{EI\|\phi_n''\|_2^2} - \frac{\int_0^L \Delta\mu(x)\phi_n^2(x)dx}{\mu\|\phi_n\|_2^2}\right] \tag{5.11}$$

Lorsque la taille de défaut ΔL est assez petit, nous supposons que $\phi_n(x)$ et $\phi_n''(x)$ sont constants pour $x \in [x_0 - \frac{\Delta L}{2}\ \ x_0 + \frac{\Delta L}{2}])$. Nous déduisons donc :

$$\frac{\Delta f_n}{f_n} \approx \frac{1}{2}\left[\frac{1}{(1+\gamma_n)}\frac{\Delta T}{T} + \frac{\gamma_n}{1+\gamma_n}\frac{\int_0^L \Delta EI(x)dx}{EIL}.\frac{L\phi_n''^2(x_0)}{\|\phi_n''\|_2^2} - \frac{\int_0^L \Delta\mu(x)dx}{\mu L}\frac{L\phi_n^2(x_0)}{\|\phi_n\|_2^2}\right] \tag{5.12}$$

Dans le cas où les variations $\Delta EI(x)$ et $\Delta\mu(x)$ sont supposées ayant la forme d'une fenêtre rectangulaire, Eq. (5.12) peut se réécrire :

$$\boxed{\frac{\Delta f_n}{f_n} \approx \frac{1}{2}\left[\frac{1}{(1+\gamma_n)}\frac{\Delta T}{T} + \frac{\gamma_n}{1+\gamma_n}\frac{\Delta EI\Delta L}{EIL}\frac{L\phi_n''^2(x_0)}{\|\phi_n''\|_2^2} - \frac{\Delta\mu\Delta L}{\mu L}\frac{L\phi_n^2(x_0)}{\|\phi_n\|_2^2}\right]} \tag{5.13}$$

Nous trouvons qu'avec un même **défaut de rigidité** qui se déplace le long du câble, la variation relative des fréquences $|\frac{\Delta f_n}{f_n}|$ atteint la valeur maximale (ou minimale) lorsque le défaut est concentré sur un ventre (ou un noeud) de la **courbure modale** correspondant $\phi_n''(x)$. De même, avec un même **défaut de**

masse qui se déplace le long du câble, $|\frac{\Delta f_n}{f_n}|$ atteint la valeur maximale (ou minimale) lorsque le défaut est concentré sur un ventre (ou un noeud) du **mode** correspondant.

Nous étudions 2 cas avec des conditions aux bords différentes : bi-appuyées et bi-encastrées. Nous allons démontrer que les termes $\frac{\gamma_n}{1+\gamma_n}\frac{L\phi_n''^2(x_0)}{\|\phi_n''\|_2^2}$ et $\frac{L\phi_n^2(x_0)}{\|\phi_n\|_2^2}$ sont bornés.

• *Conditions aux bords bi-appuyées*

Comme les modes propres sont de forme sinusoïdale $\phi_n(x) = A\sin\frac{n\pi x}{L}$, nous avons : $\frac{L\phi_n''^2(x_0)}{\int_0^L \phi_n''^2(x)dx} = 2\sin^2\frac{n\pi x_0}{L}$, $\gamma_n = n^2\pi^2\xi^2$. L'expression (5.13) peut se réécrire comme suit :

$$\frac{\Delta f_n}{f_n} \approx \frac{1}{2}\left[\frac{1}{(1+n^2\pi^2\xi^2)}\frac{\Delta T}{T} + \frac{2n^2\pi^2\xi^2}{1+n^2\pi^2\xi^2}\sin^2\frac{n\pi x_0}{L}\frac{\Delta EI\Delta L}{EIL} - 2\sin^2\frac{n\pi x_0}{L}\frac{\Delta\mu\Delta L}{\mu L}\right] \tag{5.14}$$

Nous avons : $\frac{\gamma_n}{1+\gamma_n}\frac{L\phi_n''^2(x_0)}{\|\phi_n''\|_2^2} = \frac{2n^2\pi^2\xi^2}{1+n^2\pi^2\xi^2}\sin^2\frac{n\pi x_0}{L} \leq 2$ et $\frac{L\phi_n^2(x_0)}{\|\phi_n\|_2^2} = 2\sin^2\frac{n\pi x_0}{L} \leq 2$.

• *Conditions aux bords bi-encastrées*

Pour le cas avec des conditions aux bords bi-encastrées, la forme des modes propres est plus compliquée et elle dépend de n et du paramètre ξ. Sans utiliser l'expression analytique des modes propres, avec l'équation du problème aux valeurs propres, nous pouvons démontrer que :

$$\frac{\gamma_n}{1+\gamma_n}\frac{L\phi_n''^2(x_0)}{\|\phi_n''\|_2^2} \leq 4 \quad \text{et} \quad \frac{L\phi_n^2(x_0)}{\|\phi_n\|_2^2} \leq 4 \tag{5.15}$$

◦ Pour que $\phi_n^2(x_0)$ atteigne la valeur maximale sur $(0 \quad L)$, il faut $\phi_n'(x_0) = 0$. D'après l'Eq. (5.57) dans l'annexe, nous avons :

$$-\frac{1}{2}EI\phi_n''^2(x_0) + \frac{1}{2}EI\phi_n''^2(0) - \frac{1}{2}\mu\lambda_n\phi_n^2(x_0) = 0$$

Nous en déduisons donc : $\phi_n^2(x_0) \leq \frac{EI}{\mu\lambda_n}\phi_n''^2(0)$.

D'après les Eqs. (5.59), (5.60), nous avons également : $\int_0^L \phi_n^2(x)dx > \frac{EI}{\mu\lambda_n}\frac{\phi_n''^2(0)L}{4}$. Donc nous pouvons en déduire : $\frac{L\phi_n^2(x_0)}{\int_0^L \phi_n^2(x)dx} \leq 4$.

$\circ$ Pour que $\phi_n''^2(x_0)$ atteigne la valeur maximale sur $(0 \quad L)$, il faut $\phi_n'''(x_0) = 0$. D'après l'Eq.(5.57) dans l'annexe, nous avons :

$$-\frac{1}{2}EI\phi_n''^2(x_0) + \frac{1}{2}EI\phi_n''^2(0) - \frac{1}{2}T\phi_n'^2(x_0) - \frac{1}{2}\mu\lambda_n\phi_n^2(x_0) = 0$$

Nous avons donc : $\phi_n''^2(x_0) \leq \phi_n''^2(0)$.

D'après les Eqs. (5.59), (5.60), nous en déduisons $\frac{1+\gamma_n}{\gamma_n} EI \int_0^L \phi_n''^2(x)dx = \mu\lambda_n \int_0^L \phi_n^2(x)dx > \frac{1}{4}EI\phi_n''^2(0)L$. Soit : $\frac{1+\gamma_n}{\gamma_n} \int_0^L \phi_n''^2(x)dx > \frac{1}{4}\phi_n''^2(0)L$.

Nous en déduisons donc : $\frac{\gamma_n}{1+\gamma_n} \frac{L\phi_n''^2(x_0)}{\int_0^L \phi_n''^2(x)dx} \leq 4$.

Nota : Pour la poutre sans tension ($T = 0$), on a $\gamma_n \to \infty$ et $\frac{\gamma_n}{1+\gamma_n} \to 1$. Le calcul numérique donne $\max_{x_0} \frac{L\phi_n''^2(x_0)}{\int_0^L \phi_n''^2(x)dx} \approx 4$ et $\max_{x_0} \frac{L\phi_n^2(x_0)}{\int_0^L \phi_n^2(x)dx} \approx 2.5$.

5.1.1.2 Avec des modifications du modèle 2 : ΔT, $\Delta\mu(x)$, ressort de rotation de flexiblité c_b

Les modifications ΔT, $\Delta\mu(x)$ et l'apparition du ressort de flexiblité c_b causent une perturbation des fréquences propres et des modes propres :

$$\begin{aligned} \widetilde{\phi}_n(x) &= \phi_n(x) + \Delta\phi_n(x) \\ \widetilde{\lambda}_n &= \lambda_n + \Delta\lambda_n \end{aligned} \tag{5.16}$$

L'équation des modes propres $\widetilde{\phi}_n(x)$ de classe $C^4((0 \ x_0) \cup (x_0 \ L))$ à l'état endommagé s'écrit :

$$(EI(x)\widetilde{\phi}_n''(x))'' - \widetilde{T}\widetilde{\phi}_n''(x) - \widetilde{\lambda}_n\widetilde{\mu}(x)\widetilde{\phi}_n(x) = 0 \tag{5.17}$$

avec les mêmes conditions aux bords qu'à l'état sain. Il faut ajouter 3 équations de continuité du déplacement, du moment et de l'effort tranchant, et une équation de discontinuité de la rotation au

niveau x_0, endroit où se situe le ressort :

$$\begin{aligned}
&\widetilde{\phi}_n(x_0^+) = \widetilde{\phi}_n(x_0^-), \qquad \widetilde{\phi}''_n(x_0^+) = \widetilde{\phi}''_n(x_0^-), \qquad \widetilde{\phi}'''_n(x_0^+) = \widetilde{\phi}'''_n(x_0^-) \\
&\widetilde{\phi}'_n(x_0^+) - \widetilde{\phi}'_n(x_0^-) = c_b EI \widetilde{\phi}''_n(x_0)
\end{aligned} \tag{5.18}$$

De façon identique à la partie 5.1.1, nous multiplions l'équation 5.17 par $\widetilde{\phi}_n(x)$ et ensuite nous effectuons l'intégration sur l'intervalle $[0\ L]$, nous avons :

$$[EI(x)\widetilde{\phi}''_n(x)\widetilde{\phi}'_n(x)]_{x_0^-}^{x_0^+} + \int_0^L EI(x)\widetilde{\phi}''^2_n(x)dx + \widetilde{T}\int_0^L \widetilde{\phi}'^2_n(x)dx = \widetilde{\lambda_n}\int_0^L \widetilde{\mu}(x)\widetilde{\phi}^2_n(x)dx \tag{5.19}$$

soit :

$$-c_b(EI(x_0))^2\widetilde{\phi}''_n(x_0) + \int_0^L EI(x)\widetilde{\phi}''^2_n(x)dx + \widetilde{T}\int_0^L \widetilde{\phi}'^2_n(x)dx = \widetilde{\lambda_n}\int_0^L \widetilde{\mu}(x)\widetilde{\phi}^2_n(x)dx \tag{5.20}$$

En négligeant les termes petits d'ordre plus 1 et en utilisant (2.8), (5.1), (5.2), l'équations (5.5) devient comme suit :

$$\begin{aligned}
-c_b(EI(x_0))^2\widetilde{\phi}''_n(x_0) + 2\int_0^L EI(x)\Delta\phi''_n(x)\phi''_n(x)dx + \Delta T\int_0^L \phi'^2_n(x)dx + 2T\int_0^L \Delta\phi'_n(x)\phi'_n(x)dx = \\
\Delta\lambda_n\int_0^L \mu(x)\phi^2_n(x)dx + \lambda_n\int_0^L \Delta\mu(x)\phi^2_n(x)dx + 2\lambda_n\int_0^L \mu(x)\Delta\phi_n(x)\phi_n(x)dx
\end{aligned} \tag{5.21}$$

La variation $\Delta\phi_i(x)$ peut se décomposer sur une base des modes propres $\Delta\phi_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\alpha_{nk}\phi_k(x)$. En utilisant les équations (2.6), (2.7), (2.8), nous avons donc :

$$\int_0^L EI(x)\Delta\phi''_n(x)\phi''_n(x)dx + T\int_0^L \Delta\phi'_n(x)\phi'_n(x)dx = \lambda_n\int_0^L \Delta\phi_n(x)\phi_n(x)dx \tag{5.22}$$

Nous en déduisons donc :

$$-c_b(EI(x_0))^2\phi''^2_n(x_0) + \Delta T\int_0^L \phi'^2_n(x)dx - \int_0^L \Delta\mu(x)\phi^2_n(x)dx = \Delta\lambda_n\int_0^L \mu(x)\phi^2_n(x)dx \tag{5.23}$$

L'Eq.5.23 peut se réécrire :

$$\frac{\Delta\lambda_n}{\lambda_n} \approx -\frac{\gamma_n}{1+\gamma_n}\frac{c_b(EI(x_0))^2\phi''^2_n(x_0)}{\int_0^L EI(x)\ \left(\phi''_n(x)\right)^2 dx} + \frac{1}{(1+\gamma_n)}\frac{\Delta T}{T} - \frac{\int_0^L \Delta\mu(x)\phi^2_n(x)dx}{\int_0^L \mu(x)\phi^2_n(x)dx} \tag{5.24}$$

Comme $f_n = \frac{\sqrt{\lambda_n}}{2\pi}$, nous en déduisons donc :

$$\boxed{\frac{\Delta f_n}{f_n} \approx \frac{1}{2}\left[\frac{1}{(1+\gamma_n)}\frac{\Delta T}{T} - \frac{\gamma_n}{1+\gamma_n}\frac{c_b(EI(x_0))^2\phi_n''^2(x_0)}{\int_0^L EI(x)\ (\phi_n''(x))^2\,dx} - \frac{\int_0^L \Delta\mu(x)\phi_n^2(x)dx}{\int_0^L \mu(x)\phi_n^2(x)dx}\right]} \tag{5.25}$$

Dans le cas où la section est constante ($EI(x) = EI$, $\mu(x) = \mu$), la zone endommagée est de petite taille ($\Delta L \ll L$) et la variation $\Delta\mu(x)$ est supposée ayant la forme d'une porte rectangulaire, l'Eq. (5.25) peut se réécrire :

$$\boxed{\frac{\Delta f_n}{f_n} \approx \frac{1}{2}\left[\frac{1}{(1+\gamma_n)}\frac{\Delta T}{T} - \frac{\gamma_n}{1+\gamma_n}\frac{c_b EI\phi_n''^2(x_0)}{|\phi_n''|^2} - \frac{\int_0^L \Delta\mu(x)\phi_n^2(x)dx}{\mu|\phi_n|^2}\right]} \tag{5.26}$$

Dans le cas particulier de la poutre sans tension ($\gamma_n = \infty$), et sans tenir compte du changement de masse, nous obtenons la relation suivante, identique à celle de Morassi ([64]) qui s'écrit comme suit :

$$\Delta\lambda_n \approx -\frac{(EI(x_0))^2\phi_n''^2(x_0)}{K_R} \tag{5.27}$$

où K_R est la rigidité du ressort $K_R = \frac{1}{c_b}$, $\phi_n(x)$ est le *n-ième* mode propre normalisé par rapport à la masse $\int_0^L \mu(x)\phi_n^2(x) = 1$. En utilisant la relation $\int_0^L EI(x)\phi_n''^2(x) = \lambda_n \int_0^L \mu(x)\phi_n^2(x)$ et en faisant l'hypothèse qu'à l'état sain $EI(x)$ soit constant, l'Eq. 5.27 se réécrit :

$$\frac{\Delta\lambda_n}{\lambda_n} \approx -\frac{c_b EI\phi_n''^2(x_0)}{\|\phi_n''\|_2^2} \tag{5.28}$$

5.1.2 Sensibilité des paramètres modaux par rapport aux changements des caractéristiques

Dans cette partie, nous faisons des simulations numériques à l'état sain et à l'état endommagé en modifiant séparément les paramètres suivants : la tension, la masse linéique et la rigidité en flexion. On utilise le modèle élément fini du câble de Nantes présenté dans le chapitre 3. Les caractéristiques initiales sont rappelées ci-dessous :

- Longueur $L = 5.125m$, masse linéaire de $\mu = 1.2887kg/m$, diamètre $d = 0.0157m$,
et rigidité $EI = 200.10^9\frac{2}{3}.\frac{\pi d^4}{64}$

- Force de tension $T = 98070N$

- Coefficient $\xi = \sqrt{\frac{EI}{TL^2}} = 0.0124$.

Les conditions aux bords sont supposées **bi-encastrées**.

Dans cette partie, nous présentons la variation des fréquences propres due à ΔT (ou $\Delta\mu(x)$ ou $\Delta EI(x)$), calculée par la FEM, et nous la comparons avec l'approximation analytique. Avec la modification de masse $\Delta\mu(x)$ (ou de rigidité $\Delta EI(x)$), nous nous intéressons aussi à la sensibilité de la variation des fréquences propres par rapport à la position et à la taille de la zone endommagée. La variation des modes propres et la variation de leurs dérivées avec différentes positions et différentes tailles sont aussi présentées.

5.1.2.1 Changement de la tension

D'après Eq.5.10, l'estimation de la variation relative des fréquences lorsqu'il y a seulement une perturbation de tension se réécrit par : $\frac{\Delta f_n}{f_n} \approx \frac{1}{2(1+\gamma_n)} \frac{\Delta T}{T}$.

Sur la tableau 5.1, nous présentons la variation relative des fréquences calculés par FEM, son estimation analytique $\frac{\Delta f_n}{f_n} \approx \frac{1}{2(1+\gamma_n)} \frac{\Delta T}{T}$ pour une variation relative de la tension de 1% et une estimation de $\frac{\Delta f_n}{f_n}$ où γ_n est remplacé par $n^2\pi^2\xi^2$. En effet, pour le câble étudié, nous avons $\xi = 0.0124$ qui est faible et dans la zone où les différences dues aux bords sont peu importantes (encore très proche de la zone du modèle de la corde (Fig2.4)) et donc nous considérons que $\gamma_n \approx n^2\pi^2\xi^2$. Par ailleurs, pour $n \leq 10$, et $\xi = 0.0124$, $n^2\pi^2\xi^2 \leq 0.15 \ll 1$ et on constate que $\frac{\Delta f_n}{f_n} \approx \frac{1}{2}\frac{\Delta T}{T}$.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\frac{\Delta f_n}{f_n}$ (%)	0.4853	0.4830	0.4793	0.4741	0.4677	0.4600	0.4513	0.4417	0.4313	0.4203
$\frac{1}{2(1+\gamma_n)}\frac{\Delta T}{T}$ (%)	0.4875	0.4852	0.4814	0.4762	0.4697	0.4621	0.4533	0.4437	0.4332	0.4221
$\frac{1}{2(1+n^2\pi^2\xi^2)}\frac{\Delta T}{T}$ (%)	0.4992	0.4970	0.4932	0.4881	0.4817	0.4740	0.4653	0.4556	0.4451	0.4339

TAB. 5.1 – Variations relatives des valeurs fréquences (due à la variation de tension 1%) calculées par la MEF et approximées par $\frac{1}{2(1+\gamma_n)}\frac{\Delta T}{T}$ ou par $\frac{1}{2(1+n^2\pi^2\xi^2)}\frac{\Delta T}{T}$

5.1.2.2 Changement de la masse linéique

D'après Eq.(5.13), l'estimation de la variation relative des fréquences lorsqu'il y a une modification de masse de petite taille ($\Delta L \ll L$) se réécrit : $\frac{\Delta f_n}{f_n} \approx -\frac{1}{2}\frac{\Delta\mu\Delta L}{\mu L}\frac{L\phi_n^2(x_0)}{\|\phi_n\|_2^2}$. Dans cette application, nous étu-

dions la variation des fréquences propres due au changement de la masse linéique. Nous nous intéressons à la sensibilité de cette variation $\frac{\Delta f_n}{f_n}$ par rapport à la position et à la taille de la zone modifiée. Nous étudions aussi la variation des déformées modales et leurs dérivées pour des modifications de différentes tailles et à différentes positions.

• D'abord, nous étudions la variation relative des fréquences propres due à un même défaut de masse à différentes positions. La variation relative de la masse totale est fixée à 1% ($\frac{\Delta\mu\Delta L}{\mu L} = -1\%$ avec $\Delta\mu = -20\%\mu$ et $\Delta L = 0.05L$). Nous traçons la variation relative des fréquences en fonction de la position du défaut x_0 (Fig. 5.1). Les points rouges représentent la variation relative des fréquences calculée par la MEF en déplaçant le défaut ($x_0 = \frac{L}{6}, \frac{L}{5}, \frac{L}{4}, \frac{3L}{10}, \frac{L}{3}, \frac{3L}{8}, \frac{2L}{5}, \frac{5L}{12}, \frac{L}{2}$). La courbe verte est l'approximation analytique $\frac{\Delta f_n}{f_n} \approx -\frac{1}{2}.\frac{\Delta m}{m}.\frac{L\phi_n^2(x_0)}{\|\phi_n\|_2^2}$ où $\phi_n(x)$ est le *n-ième* mode propre calculé par MEF pour le cas bi-encastré. La courbe bleue est l'approximation analytique pour le cas bi-appuyé $\frac{\Delta f_n}{f_n} \approx -\frac{\Delta m}{m}\sin^2\frac{n\pi x_0}{L}$. Nous trouvons que l'estimation analytique donne des résultats très satisfaisants.

• Ensuite, nous étudions la sensibilité par rapport à la taille de la zone endommagée. Supposons que le centre du défaut se situe à la position $x_0 = 2m$, la zone endommagée est l'intervalle $[x_0 - \frac{\Delta L}{2} \quad x_0 + \frac{\Delta L}{2}]$. La variation relative de la masse totale est toujours $\frac{\Delta\mu\Delta L}{\mu L} = -1\%$ mais la taille du défaut ΔL varie ($\Delta L = 0.02L, 0.05L, 0.1L, 0.2L$).

Sur la Fig 5.2, nous traçons la variation relative des fréquences en fonction de n pour les différentes valeurs de ΔL. Les points représentent les résultats calculés par la MEF. Nous traçons aussi l'approximation analytique pour le cas bi-appuyé : $\frac{\Delta f_n}{f_n} \approx \frac{\Delta\mu\Delta L}{\mu L}\sin^2(n\pi x_0/L)$ et son enveloppe $y = \frac{\Delta\mu\Delta L}{\mu L}$ (la courbe et la ligne en noir). L'approximation analytique pour le cas bi-appuyé : $\frac{\Delta f_n}{f_n} \approx \frac{\Delta\mu\Delta L}{\mu L}\sin^2(n\pi x_0/L)$ explique les résultats calculés par FEM : les variations $|\frac{\Delta f_n}{f_n}|$ sont bornées par $|\frac{\Delta\mu\Delta L}{\mu L}|$.

Nous trouvons aussi que l'estimation analytique est plus satisfaisante pour les premières fréquences propres (par exemple pour $n = 1, 2$), autrement dit lorsque la taille du défaut ΔL est encore petite devant la distance entre deux noeuds consécutifs de la déformée modale correspondante.

• Sur la Fig.5.3, nous présentons la déformée modale et ses dérivées corrspondant à la deuxième fréquence propre (Fig.5.3 a), et leur variation à l'état modifié selon la taille ΔL pour $x_0 = L/4$ et pour

$x_0 = L/2$. Nous trouvons que, à l'endroit du défaut, la variation des courbures modales $\Delta\Phi_n''$ est plus visible que la variation des modes propres $\Delta\Phi_n$. Nous remarquons aussi que avec un même défaut, qui se positionne à 2 endroits différents : au ventre $x_0 = L/4$ et au noeud $x_0 = L/2$ du deuxième mode, l'ordre de grandeur des variations $\Delta\Phi_2''$ est 10 fois plus grande.

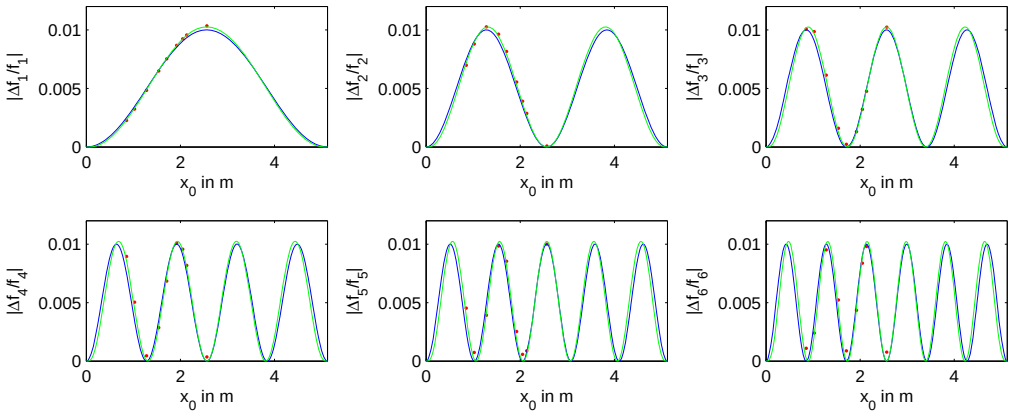


FIG. 5.1 – Comparaison de la variation relative des fréquences calculée par FEM (points en rouge) et celle estimée analytiquement (courbe continue en vert)

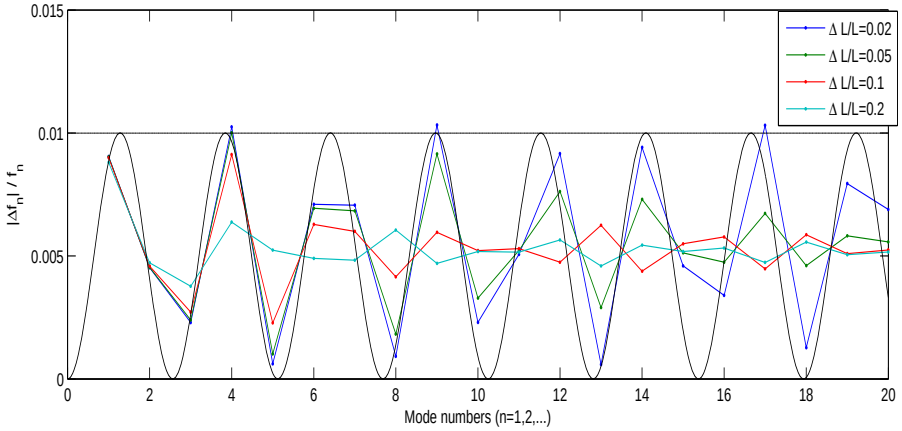
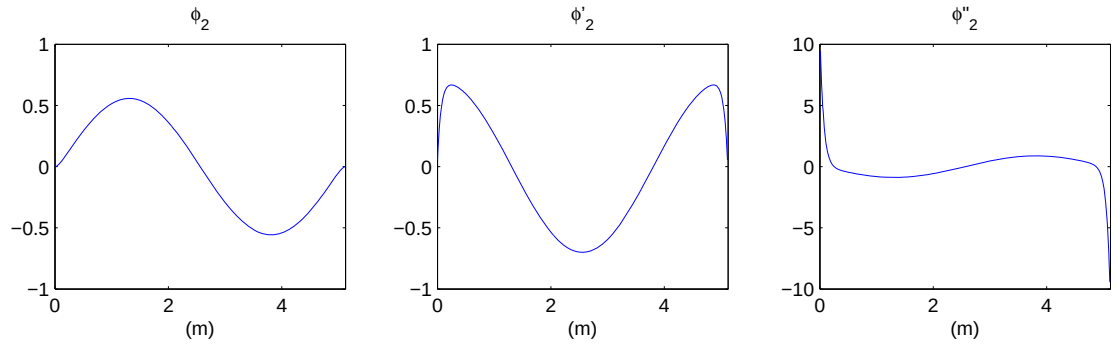
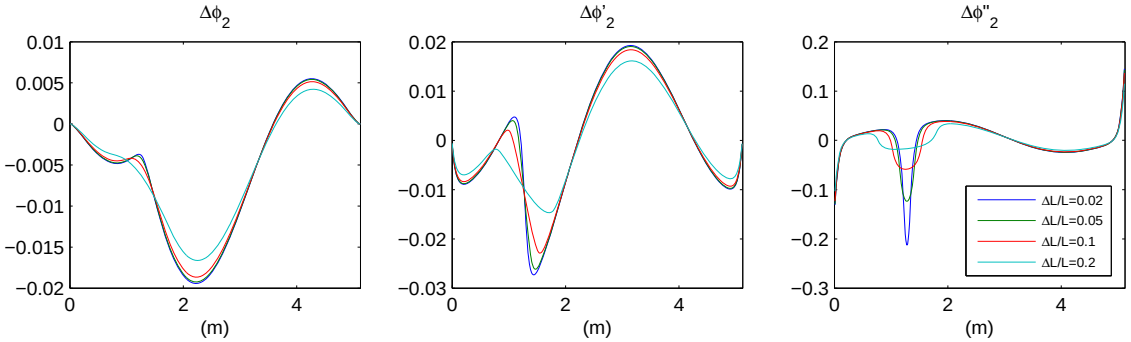


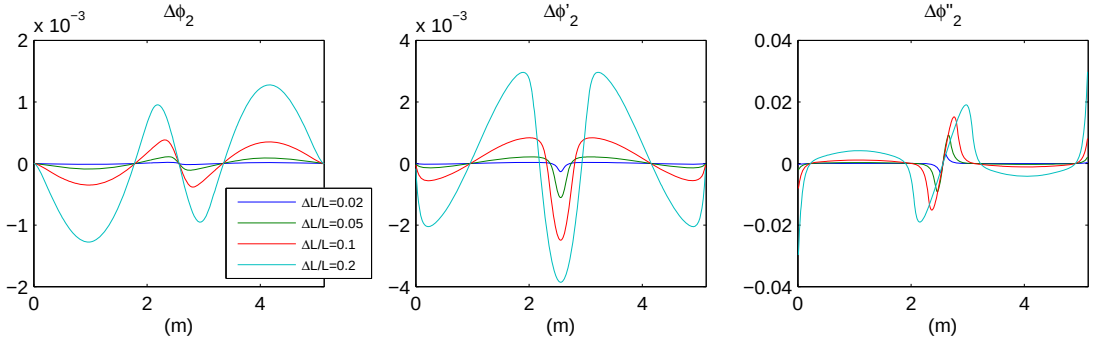
FIG. 5.2 – $\frac{\Delta f_n}{f_n}$ selon ΔL en fonction de n calculé par FEM et l'estimation analytique $\frac{\Delta f_n}{f_n} \approx \frac{\Delta\mu\Delta L}{\mu L}\sin^2(n\pi x_0/L)$ et son enveloppe $y = \frac{|\Delta\mu\Delta L|}{\mu L}$ (en noir)



(a) 2ème mode et ses dérivée de l'état sain



(b) Variation selon ΔL du deuxième mode propre et de ses dérivées pour un défaut de masse en $x_0 = L/4$



(c) Variation selon ΔL du deuxième mode propre et de ses dérivées pour un défaut de masse en $x_0 = L/2$

FIG. 5.3 – $\Phi_2(x)$, $\Phi_2'(x)$, $\Phi_2''(x)$ de l'état sain et leurs variations à l'état modifié

5.1.2.3 Changement de la rigidité

D'après Eq.(5.13), l'estimation de la variation relative des fréquences lorsqu'il y a une modification de rigidité de petite taille ($\Delta L \ll L$) se réécrit par : $\frac{\Delta f_n}{f_n} \approx \frac{1}{2}\frac{\gamma_n}{1+\gamma_n}\frac{\Delta EI\Delta L}{EIL}\frac{L\phi_n''^2(x_0)}{\|\phi_n''\|_2^2}$. Dans cette application, nous étudions la variation des fréquences propres due au changement de la rigidité en flexion. Nous nous intéressons à la sensibilité de cette variation $\frac{\Delta f_n}{f_n}$ par rapport à la position et à la taille de la zone modifiée. Nous étudions aussi la variation des déformées modales et leurs dérivées pour des modifications de différentes tailles et à différentes positions.

• D'abord, nous étudions la variation relative des fréquences propres due à un même défaut de rigidité à différentes positions. La variation globale de la rigidité est fixée à 1% ($\frac{\Delta EI\Delta L}{EIL} = -1\%$ avec $\Delta EI = -20\%EI$ et $\Delta L = 0.05L$). Nous traçons la variation relative des fréquences en fonction de la position du défaut x_0 (Fig. 5.4). Les points rouges représentent la variation relative des fréquences calculée par la MEF en déplaçant le défaut ($x_0 = \frac{L}{6}, \frac{L}{5}, \frac{L}{4}, \frac{3L}{10}, \frac{L}{3}, \frac{3L}{8}, \frac{2L}{5}, \frac{5L}{12}, \frac{L}{2}$). La courbe verte est l'approximation analytique pour le cas bi-encastré $\frac{\Delta f_n}{f_n} \approx \frac{\gamma_n}{2(1+\gamma_n)}.\frac{\Delta EI\Delta L}{EIL}.\frac{L\phi_n''^2(x_0)}{\|\phi_n''\|_2^2}$. La courbe bleue est l'approximation analytique pour le cas bi-appuyé $\frac{\Delta f_n}{f_n} \approx \frac{n^2\pi^2\xi^2}{1+n^2\pi^2\xi^2}\frac{\Delta EI\Delta L}{EIL}\sin^2\frac{n\pi x_0}{L}$. Nous trouvons que l'estimation analytique donne des résultats assez satisfaisants.

• Ensuite, nous étudions la sensibilité par rapport à la taille de la zone endommagée. Supposons que le centre du défaut se situe à la position $x_0 = 2m$, la zone endommagée est l'intervalle $[x_0 - \frac{\Delta L}{2} \quad x_0 + \frac{\Delta L}{2}]$. La variation globale de la rigidité est toujours $\frac{\Delta EI\Delta L}{EIL} = -1\%$ mais la taille du défaut ΔL varie ($\Delta L = 0.02L, 0.05L, 0.1L, 0.2L$).

Sur la Fig 5.5, nous traçons la variation relative des fréquences en fonction de n pour les différentes valeurs de ΔL. Les points représentent les résultats calculés par la MEF. Nous traçons aussi l'approximation analytique pour le cas bi-appuyé : $\frac{\Delta f_n}{f_n} \approx \frac{n^2\pi^2\xi^2}{1+n^2\pi^2\xi^2}\frac{\Delta EI\Delta L}{EIL}\sin^2\frac{n\pi x_0}{L}$ et son enveloppe $y = \frac{n^2\pi^2\xi^2}{1+n^2\pi^2\xi^2}\frac{\Delta EI\Delta L}{EIL}$ (2 courbes en noir). L'approximation analytique pour le cas bi-appuyé : $\frac{\Delta f_n}{f_n} \approx \frac{n^2\pi^2\xi^2}{1+n^2\pi^2\xi^2}\frac{\Delta EI\Delta L}{EIL}\sin^2\frac{n\pi x_0}{L}$ explique les résultats calculés par FEM : les variations $|\Delta\frac{f_n}{f_n}|$ sont bornées par $|\frac{n^2\pi^2\xi^2}{1+n^2\pi^2\xi^2}\frac{\Delta EI\Delta L}{EIL}|$ (sauf que pour le cas $\Delta L/L = 0.02$, nous avons $\Delta EI/EI = -50\%$, la perte de rigidité en flexion est importante, l'estimation est moins précise).

• Sur la Fig.5.6, nous présentons la déformée modale et ses dérivées corrspondant à la deuxième fré-

quence (Fig.5.3 a), et leur variation à l'état modifié selon la taille ΔL pour $x_0 = L/4$ et pour $x_0 = L/2$. Nous trouvons que, à l'endroit du défaut, la variation des courbures modales $\Delta\Phi_n''$ est plus visible que la variation des modes propres $\Delta\Phi_n$. Nous remarquons aussi que, avec un même défaut, qui se positionne à deux endroits différents : au ventre $x_0 = L/4$ et au noeud $x_0 = L/2$ du deuxième mode, l'ordre de grandeur des variations $\Delta\Phi_2''$ est 10 fois plus grande.

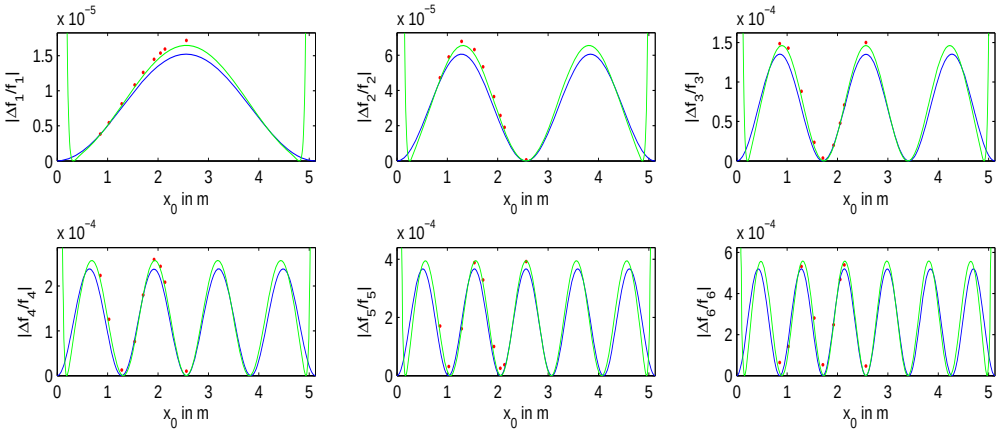


FIG. 5.4 – Variation relative des fréquences par rapport à la position du défaut de rigidité

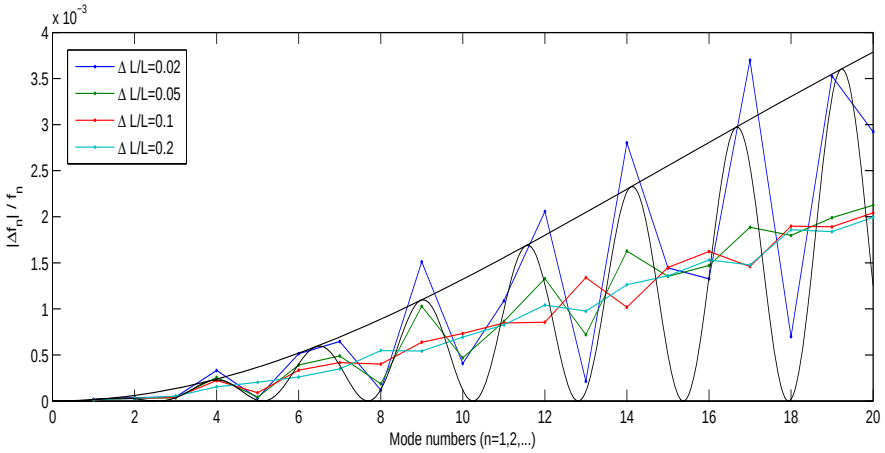
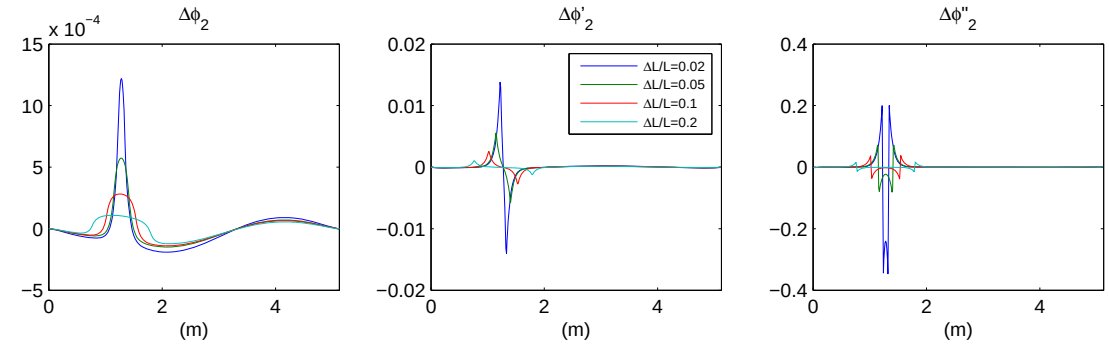
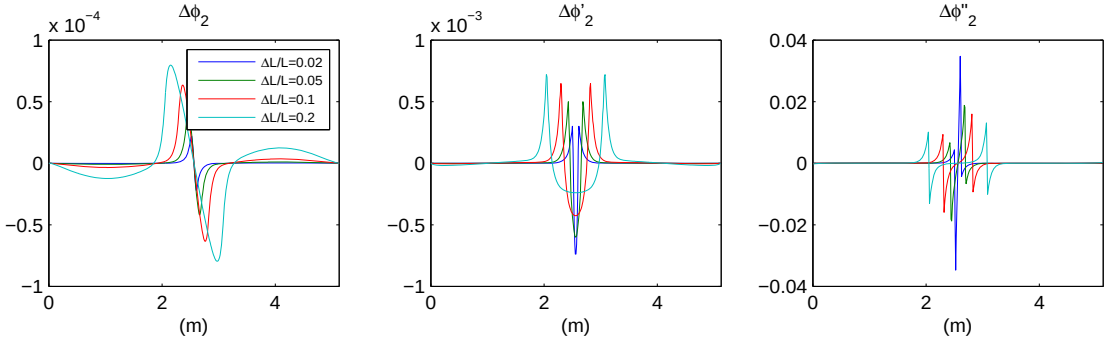


FIG. 5.5 – $\frac{\Delta f_n}{f_n}$ selon ΔL en fonction de n calculé par FEM et l'estimation analytique $\frac{\Delta f_n}{f_n} \approx \frac{n^2\pi^2\xi^2}{1+n^2\pi^2\xi^2}\frac{\Delta EI\Delta L}{EIL}\sin^2\frac{n\pi x_0}{L}$ et son enveloppe $y = \frac{n^2\pi^2\xi^2}{1+n^2\pi^2\xi^2}\frac{|\Delta EI\Delta L|}{EIL}$ (en noir)



(a) Variation selon ΔL du deuxième mode propre et de ses dérivées pour un défaut de rigidité en $x_0 = L/4$



(b) Variation selon ΔL du deuxième mode propre et de ses dérivées pour un défaut de rigidité en $x_0 = L/2$

FIG. 5.6 – Variations $\Delta\Phi_2(x)$, $\Delta\Phi_2'(x)$, $\Delta\Phi_2''(x)$

5.1.3 Synthèse

Nous avons présenté deux modèles pour simuler un endommagement. Dans le premier modèle, l'endommagement est introduit par des perturbations globales comme la tension (ΔT), et locales comme la masse linéique ($\Delta\mu(x)$) et la rigidité en flexion $\Delta EI(x)$ dans la zone endommagée. Dans le deuxième modèle, l'endommagement est également modélisé par des perturbations (ΔT et $\Delta\mu(x)$) ; et en plus au lieu d'utiliser la perturbation de rigidité $\Delta EI(x)$, nous introduisons un ressort de rotation de flexibilité c_b pour modéliser le changement de la rigidité du à l'endommagement. Pour une poutre avec tension, le deuxième modèle est conseillé dans le cas des fissures. Dans le cas des câbles, c'est plus compliqué de choisir un bon modèle car lorsqu'il y a la rupture des fils, il y a une perte rigidité EI (ou perte de l'inertie I) dans la zone de réancrage où des fils ne travaillent pas tous ensemble. Nous avons proposé une estimation analytique de la variation des fréquences correspondant à ces deux modèles.

Nous avons fait des applications numériques avec des endommagements du premier modèle (ΔT, $\Delta\mu(x)$,

$\Delta EI(x)$) et nous avons comparé les variations des fréquences calculées par la FEM avec celles obtenues par l'estimation analytique. Nous trouvons que l'estimation analytique donne des résultats satisfaisants et elle explique très bien les résultats obtenus par la FEM : avec une seule modification de masse (ou de rigidité) les variations $|\frac{\Delta f_n}{f_n}|$ sont bornées par $|\frac{\Delta\mu\Delta L}{\mu L}|$ (ou $|\frac{n^2\pi^2\xi^2}{1+n^2\pi^2\xi^2}\frac{\Delta EI\Delta L}{EIL}|$). Il resterait à faire des applications numériques avec des endommagements du deuxième modèle (ΔT, $\Delta\mu(x)$, c_b) pour comparer avec l'estimation analytique proposée.

De plus, les variations des modes propres ($\Delta\phi_n$) et leurs dérivées ($\Delta\phi_n'$, $\Delta\phi_n''$) calculées par la FEM montrent que la variation des courbures ($\Delta\phi_n''$) due à l'endommagement est plus lisible que celle des modes propres ($\Delta\phi_n$). Les courbures sont donc conseillées pour localiser le défaut lorsqu'elles peuvent être estimées. Dans le paragraphe suivant nous allons proposer une méthode différente pour localiser le défaut et qui est basée sur l'utilisation des relations (5.13) et (5.26).

5.2 Localisation et quantification à partir de deux essais

5.2.1 Présentation de la méthode

La réponse vibratoire de la structure est supposée connue pour deux états : l'état sain et l'état endommagé. Nous nous intéressons maintenant au problème de la localisation et de la quantification de l'endommagement à partir des paramètres modaux de ces 2 états. Dans ce paragraphe, nous proposons une méthode utilisant des ***variations relatives des fréquences*** *et les* ***déformées modales*** *correspondantes ou leurs dérivées secondes (c'est à dire des* ***courbures modales****) de l'état de référence.*

L'estimation de la variation des fréquences $\frac{\Delta f_n}{f_n}$ pour l'endommagement de petite taille ($\Delta L \ll L$) (Eq. 5.13 ou 5.26) peut se réécrire comme suit :

$$\Delta(n) \approx G(x_0)\frac{\Delta EI\Delta L}{EIL} - H(x_0)\frac{\Delta\mu\Delta L}{\mu L} \tag{5.29}$$

ou :

$$\Delta(n) \approx G(x_0)\frac{c_b EI}{L} - H(x_0)\frac{\Delta\mu\Delta L}{\mu L} \tag{5.30}$$

avec :

$$\Delta(n) = \frac{\Delta f_n}{f_n} - \frac{1}{2(1+\gamma_n)}\frac{\Delta T}{T}, \quad G_n(x) = \frac{\gamma_n}{2(1+\gamma_n)}\frac{L\phi_n''^2(x)}{\|\phi_n''\|_2^2}, \quad H_n(x) = \frac{1}{2}\frac{L\phi_n^2(x)}{\|\phi_n\|_2^2} \tag{5.31}$$

Supposons que la variation de la tension $\frac{\Delta T}{T}$ *soit connue. Comme la variation des fréquences peut être mesurée, le terme à gauche* $\Delta(n)$ *dans l'Eq.5.29 (ou 5.30) est donc connue. Les fonctions* $G_n(x)$, $H_n(x)$ *dépendant des modes propres sont supposées connues. Pour localiser le défaut, l'idée est d'éliminer les quantités* $\frac{\Delta EI\Delta L}{EIL}$ *(ou* $\frac{c_b EI}{L}$*) et* $\frac{\Delta\mu\Delta L}{\mu L}$ *pour trouver* x_0*.*

L'équation (5.29) se réécrit pour deux fréquences différentes $n \neq m$:

$$\Delta(n) \approx \frac{\Delta EI\Delta L}{EIL}G_n(x_0) - \frac{\Delta\mu\Delta L}{\mu L}H_n(x_0) \tag{5.32}$$

$$\Delta(m) \approx \frac{\Delta EI\Delta L}{EIL}G_m(x_0) - \frac{\Delta\mu\Delta L}{\mu L}H_m(x_0) \tag{5.33}$$

On élimine la quantité $\frac{\Delta\mu\Delta L}{\mu L}$ entre (5.32) et (5.33) :

$$\Delta(n)H_m(x_0) - \Delta(m)H_n(x_0) \approx \frac{\Delta EI\Delta L}{EIL}\left(G_n(x_0)H_m(x_0) - G_m(x_0)H_n(x_0)\right) \tag{5.34}$$

De même, on écrit pour un autre couple de fréquences $n \neq k$:

$$\Delta(n)H_k(x_0) - \Delta(k)H_n(x_0) \approx \frac{\Delta EI\Delta L}{EIL}\left(G_n(x_0)H_k(x_0) - G_k(x_0)H_n(x_0)\right) \tag{5.35}$$

On élimine la quantité $\frac{\Delta\mu\Delta L}{\mu L}$ entre (5.34) et (5.35) :

$$\frac{\Delta(n)H_m(x_0) - \Delta(m)H_n(x_0)}{\Delta(n)H_k(x_0) - \Delta(k)H_n(x_0)} \approx \frac{G_n(x_0)H_m(x_0) - G_m(x_0)H_n(x_0)}{G_n(x_0)H_k(x_0) - G_k(x_0)H_n(x_0)} \tag{5.36}$$

Comme la fonction $G_n(x)H_k(x) - G_k(x)H_n(x)$ peut prendre des valeurs nulles, pour localiser le défaut, nous cherchons donc x_0 pour que $F(m,n,k,x_0)$ soit nul, où $F(m,n,k,x)$ est défini par :

$$\begin{aligned} F(m,n,k,x) = &[\Delta(n)H_m(x) - \Delta(m)H_n(x)][G_n(x)H_k(x) - G_k(x)H_n(x)] \\ &-[\Delta(n)H_k(x) - \Delta(k)H_n(x)][G_n(x)H_m(x) - G_m(x)H_n(x)] \end{aligned} \tag{5.37}$$

En utilisant différents triplets (m,n,k) de fréquences, pour trouver x_0, on a de multiples informations redondantes. En pratique, avec l premières fréquences mesurées, pour localiser le défaut, nous cherchons x_0 qui minimise $Q_l(x) = \sum_{1\leq m,n,k\leq l} |F(m,n,k,x)|$.

Pour chaque valeur de x, les fonctions $Q_l(x)$ croissent avec le niveau d'importance de l'endommagement et aussi avec le nombre des fréquences utilisées l. Comme la performance de la méthode dépend du choix du nombre des fréquences utilisées et pour mieux comparer nous utilisons la fonction normée $\widehat{Q}_l(x) = \frac{Q_l(x)}{\|Q_l\|_\infty}$. Avec la fonction $\widehat{Q}_l(x)$ variant entre 0 et 1, nous pouvons comparer plus facilement l'efficacité et la précision obtenue pour localiser x_0, la position de l'endommagement. Plus le minimum de la courbe $Q_l(x)$ est net et pointu et plus la valeur du minimum est proche de zéro, plus la localisation est précise. Théoriquement $\widehat{Q}_l(x_0) = 0$, une estimation de la localisation est donc obtenue pour $x_m = Argmin\widehat{Q}_l(x)$. Nous noterons que la précision de la localisation augmente avec le nombre l des fréquences utilisées.

5.2.2 Poutres sans tension de la littérature

Dans cette partie, nous présentons l'application de la méthode proposée à des données expérimentales trouvées dans la littérature. Dans tous les exemples de cette partie, seulement la variation de la rigidité en flexion est considérée. Nous avons donc :

$$\Delta_n = \frac{\Delta f_n}{f_n} \approx \frac{\Delta EI \Delta L}{EIL} G_n(x_0) \qquad \text{ou} \qquad \Delta_n = \frac{\Delta f_n}{f_n} \approx \frac{c_b EI}{L} G_n(x_0) \tag{5.38}$$

avec $G_n(x) = \frac{1}{2}\frac{L\phi_n''^2(x)}{\|\phi_n''\|_2^2}$.

Et afin de localiser la variation nous avons besoin d'au moins deux modes, et nous devons chercher

le minimum de la fonction $Q_l(x)$ définie par :

$$Q_l(x) = \sum_{1 \leq n,m \leq l} |F_{m,n}(x)|$$

avec :

$$F_{m,n}(x_0) = \frac{\Delta f_n}{f_n} G_m(x) - \frac{\Delta f_m}{f_m} G_n(x) \tag{5.39}$$

Dans ce qui suit, nous présentons les données expérimentales tirées de la littérature sur lesquelles nous allons appliquer notre méthode de localisation. L'objectif est d'abord de vérifier la performance de notre méthode pour la localisation selon le niveau d'importance de l'endommagement et le nombre des fréquences mesurables utilisées. Ensuite, nous nous intéressons à évaluer le niveau d'importance de l'endommagement. Enfin, nous étudions l'influence de la position de l'endommagement sur les résultats de la localisation.

5.2.2.1 Présentation des données expérimentales

Dans ce paragraphe, nous rappelons les données expérimentales de la littérature que nous allons utiliser. Deux conditions aux bords différentes sont envisagées : libre-libre et encastré-libre.

• Les données expérimentales concernant la poutre **libre-libre** sont décrites et utilisées dans l'article de Morassi (partie 5.2, "Damage detection and generalized Fourier coefficients" cf.[65]). La poutre a été suspendue au moyen de deux ressorts souples, de manière à simuler les conditions aux bords libre-libre. Les endommagements se composaient de deux entailles symétriques sur la section transversale à 0.255 m de l'extrémité gauche, voir Fig.5.7. Leur profondeur était progressivement augmentée de 1mm (D1) à 6 mm (D6) des deux côtés de la section transversale. Pour chaque niveau d'endommagement, les sept premières fréquences propres ont été mesurées et elles sont présentées dans le Tab. 5.2.

• Pour la poutre **encastré-libre**, le premier exemple utilisé dans cette partie est basé sur des résultats expérimentaux obtenus par Rizos et al. 1990 [77] qui sont utilisés dans un article de M.I. Friswell (cf.[38]). C'est une poutre en acier de section $0,020m \times 0,020m$ et de longueur $0.300m$. Le tableau 5.3 représente les fréquences propres mesurées avant et après la création de la fissure. La position de la fissure

est à 0,080 m du bord encastré de la poutre et des profondeurs de 2 et 6 mm sont considérées.

• Le deuxième exemple de poutre **encastré-libre** utilisé dans cette partie est basé sur des résultats expérimentaux obtenus par Agarwall et al. (2013) [2]. C'est une poutre en aluminium de longueur $L = 0.8m$, de largeur $b = 0.05m$ et de hauteur $h = 0.006m$. Les fréquences propres mesurées sont présentées dans le tableau 5.4 et correspondent à différentes positions ($0.2m$, $0.4m$ et $0.6m$ de l'extrémité fixe) d'une fissure de profondeur de $0.003m$.

	Undamaged	1 mm	2 mm	3 mm	4 mm	5 mm	6 mm
n	f_n	$\widetilde{f}_n$	$\widetilde{f}_n$	$\widetilde{f}_n$	$\widetilde{f}_n$	$\widetilde{f}_n$	$\widetilde{f}_n$
1	72.19	72.19	72.16	72.16	72.06	71.94	71.53
2	198.40	198.31	198.06	197.68	196.44	194.69	189.25
3	387.73	387.50	386.84	385.33	381.56	374.97	360.96
4	639.72	639.38	638.41	636.28	630.81	623.78	607.03
5	951.47	951.31	950.75	950.03	947.03	943.47	935.16
6	1320.56	1320.56	1320.34	1320.25	1319.97	1319.97	1319.16
7	1747.03	1746.81	1746.63	1746.13	1742.88	1739.41	1728.28

TAB. 5.2 – Fréquences expérimentales avec des entailles de différente profondeur pour la poutre libre-libre (cf.[65])

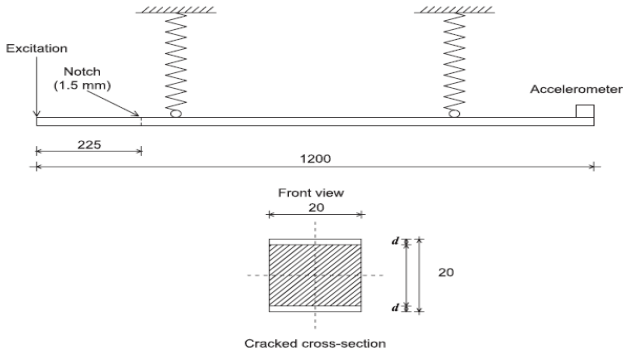


FIG. 5.7 – Configurations expérimentales de la poutre libre-libre (Longueurs en mm)

	Undamaged	Damage 1 (2mm crack)		Damage 2 (6mm crack)	
n	f_n	$\widetilde{f}_n$	$\frac{\Delta f_n}{f_n}\%$	$\widetilde{f}_n$	$\frac{\Delta f_n}{f_n}\%$
1	185.2	184	-0.65	174.7	-5.67
2	1160.6	1160	-0.05	1155.3	-0.46
3	3259.1	3245	-0.43	3134.8	-3.81

TAB. 5.3 – Fréquences expérimentales de la poutre encastré-libre réalisée par Rizos et al. (cf. [38, 77])

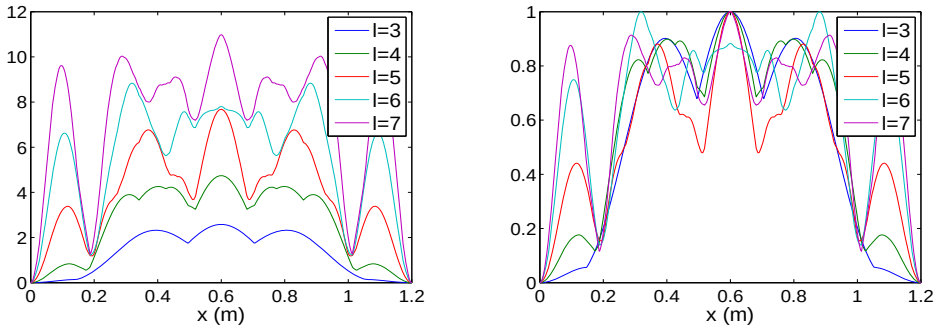
	Undamaged	Location $x_{01} = 0.2m$		Location $x_{02} = 0.4m$		Location $x_{03} = 0.6m$	
n	f_n	$\widetilde{f}_n$	$\frac{\Delta f_n}{f_n}\%$	$\widetilde{f}_n$	$\frac{\Delta f_n}{f_n}\%$	$\widetilde{f}_n$	$\frac{\Delta f_n}{f_n}\%$
1	7.4824	7.3881	-1.26	7.4186	-0.85	7.4670	-0.21
2	46.632	46.5690	-0.14	45.8671	-1.64	46.4006	-0.50
3	130.9776	129.514	-1.12	130.8512	-0.10	128.4103	-1.96

TAB. 5.4 – Fréquences expérimentales de la poutre encastré-libre de longueur $0.8m$, avec la fissure située à $0.2m$, $0.4m$ et $0.6m$ à partir du bord encastré réalisée par Agarwall et al. [2]

5.2.2.2 Localisation

Dans cette partie, nous nous intéressons uniquement au problème de la localisation.

• Nous considérons d'abord le cas de la poutre **libre-libre** décrite précédemment et nous étudions seulement le cas d'une entaille de 3 mm.



(a) $Q_l(x)$ (b) $\widehat{Q}_l(x)$

FIG. 5.8 – Q_l et $\widehat{Q}_l$ $(l = 3, 4, 5, 6, 7)$ pour l'entaille de 3mm de profondeur

Dans la Fig. 5.8, les fonctions Q_l et $\widehat{Q}_l$ sont présentées pour $l = 3, 4, 5, 6, 7$. Comme le problème est symétrique, on trouve 2 minimums x_m placés à $0.2m$ des deux extrémités. La localisation de x_m n'est pas bonne si moins de 5 fréquences sont utilisées. Pour $l \geq 5$, on peut observer que la précision de la localisation de x_m augmente avec l.

Dans l'article de la Morassi (cf.[65]), l'objectif était de localiser la modification par l'estimation de la rigidité en flexion le long de la poutre à l'aide d'une série de Fourier. Le développement partiel utilise de 2 à 7 fréquences. L'entaille détectée correspond à la variation maximale de la rigidité en flexion. Les résultats obtenus pour l'entaille de profondeur de 3 mm sont présentés sur la Fig. 5.9 et la localisation

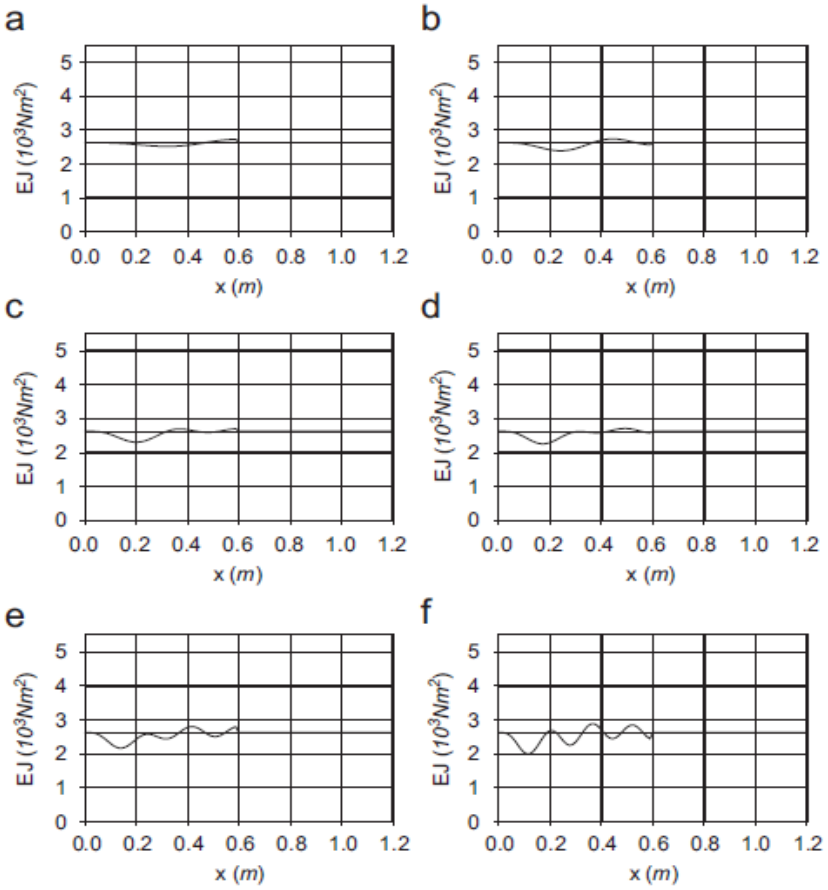
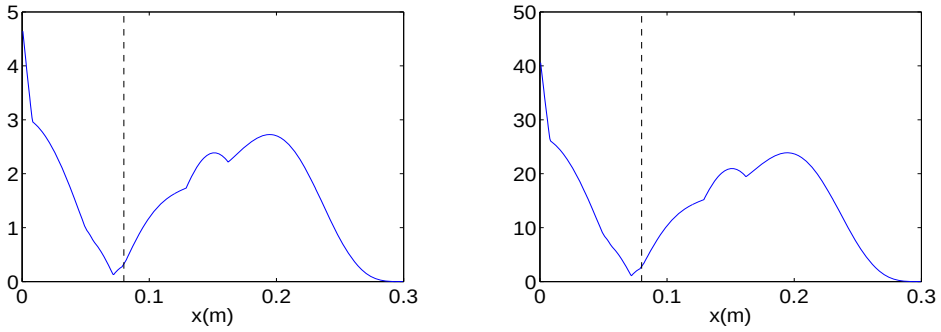


FIG. 5.9 – Rigidité en flexion estimée pour l'entaille de 3mm avec le nombre des fréquences utilisées l=2 (a), $l = 3$ (b), $l = 4$ (c), $l = 5$ (d), $l = 6$ (e) et $l = 7$ (f).
Position de l'entaille $x_0 = 0.225m$

est obtenue pour $l = 3, 4$ et 5 mais elle est complètement erronée pour $l = 2, 6, 7$. Lorsque le nombre des fréquences utilisées augmente, alors beaucoup de perturbations apparaissent dans l'estimation de la rigidité en flexion. De plus, sa méthode ne réussit pas à localiser de petites entailles ($d \leq 3mm$). En comparant avec les résultats de localisation de notre méthode, nous trouvons que notre méthode permet de localiser de petites entailles que sa méthode n'arrive pas à localiser. Avec notre méthode, l'utilisation de plus de fréquences permet d'améliorer la localisation et à partir de 5 fréquences, la localisation est bien nette.

• Maintenant, nous appliquons notre méthode à une autre expérience d'une poutre **encastré-libre** réalisée par Rizos et al. Nous calculons $Q_l(x) = \sum_{1 \leq m,n \leq l} |F_{m,n}(x)|$ avec $l = 3$ pour localiser la position de la fissure.

Comme le système n'est pas symétrique, une seule position est détectée en tant que position de la fissure (Fig.5.10). La fonction $Q_3(x)$ est égale à zéro à l'extrémité libre de la poutre et il a un minimum en $x_m = 0.072m$ alors que la position réelle est $x_0 = 0.08m$. Les variations de la fonction $Q_3(x)$ sont très similaires pour les deux profondeurs différentes. Les deux fonctions normées $\widehat{Q}_l(x) = \frac{Q_l(x)}{\|Q_l\|_\infty}$ sont tracées sur la Fig.5.11 et il est très intéressant de constater que les deux fonctions normés sont totalement identiques .



(a) Crack depth of $0.002m$ (b) Crack depth of $0.006m$

FIG. 5.10 – $Q_3(x)$ pour la poutre de longueur $0.300m$ avec une fissure à $0.080m$

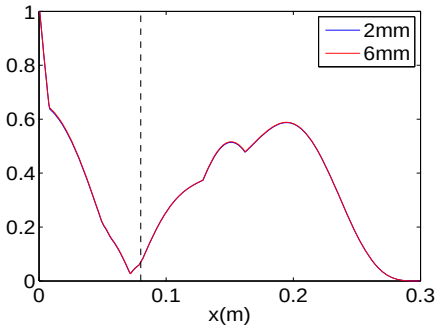


FIG. 5.11 – $\widehat{Q}_l(x) = \frac{Q_l(x)}{\|Q_l\|_\infty}$ (Position de la fissure $x_0 = 0.08m$)

5.2.2.3 Quantification

Ici, nous cherchons un moyen pour évaluer le niveau d'importance de l'endommagement.

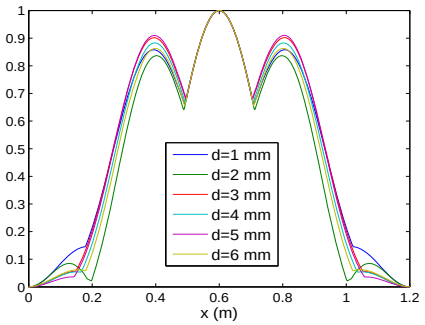
Nous étudions d'abord le cas de la poutre **libre-libre** pour des entailles de différente profondeur d. Notons Q_l^d la fonction correspondant à une profondeur d. On peut d'abord remarquer que la variation de la fonction normalisée $\widehat{Q}_l^d$ est presque indépendante de la profondeur des entailles (Fig. 5.12). Ces fonctions $\widehat{Q}_l(x)$ sont égales à zéro aux deux extrémités et pour $l \geq 4$ le minimum sur l'intervalle ouvert $]0, L[$ est obtenu pour $x_m = 0.2m$ avec une précision assez bonne et sa valeur n'est jamais supérieure à 0,2. Il apparaît que l'utilisation des cinq premières fréquences suffit pour localiser l'endommagement : la position est trouvée $x_m = 0.2m$ alors que la position réelle est à l'abscisse $x_0 = 0.225m$ et le même résultat est obtenu, même pour les "petites" entailles.

La deuxième remarque est que les normes $\|Q_l^d\|_\infty$ varient régulièrement avec la profondeur d de l'entaille et l, le nombre des fréquences utilisées (Fig. 5.13). Nous proposons une approximation comme suit : $\|Q_l^d\| \approx c l^a d^b$. Les valeurs estimées dans ce cas sont $c = 0.0092$, $a = 1.44$, $b = 3.7$ et ainsi :

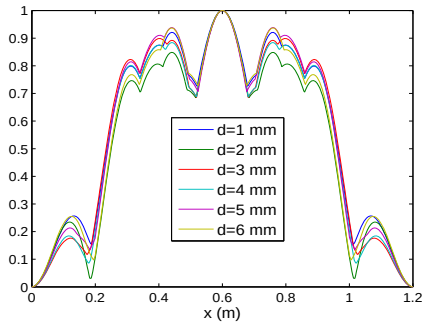
$$\|Q_l^d\|_\infty \approx 0.0092 \;\; l^{1.44} \;\; d^{3.7} \tag{5.40}$$

avec d la profondeur en mm et l le nombre de fréquences utilisées. Les courbes sont tracées sur la Fig.5.14.

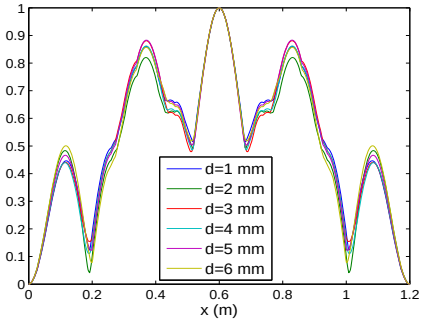
Maintenant, nous étudions le cas de la poutre **encastrée-libre** de Rizos et al. présentée ci-dessus, il apparaît clairement que le maximum de la fonction $Q_3(x)$ augmente avec l'importance de la fissure. Ici pour une fissure de $0.002m$ le maximum de $Q_3(x)$ est $\|Q_3\|_\infty = 4.64$, et pour une fissure de $0.006m$ alors $\|Q_l\|_\infty = 40.58$. Cette fissure est 3 fois plus profonde que la précédente et nous pouvons observer que $\|Q_l\|_\infty$ est presque multiplié par 3^2. La relation est différente de la relation obtenue pour la poutre libre-libre. Mais, nous notons que les deux poutres n'ont pas la même section : la première a une section en I tandis que la seconde a une section rectangulaire, d'où le fait que l'effet est pas le même lorsque la profondeur de la fissure augmente.



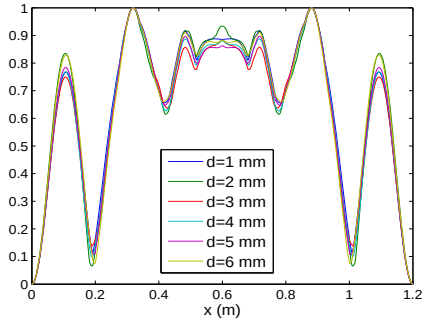
(a) l=3)



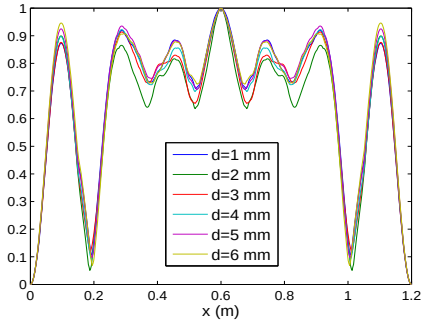
(b) l=4)



(c) l=5)



(d) l=6)



(e) l=7)

FIG. 5.12 – $\widehat{Q}_l(x) = \frac{Q_l(x)}{\|Q_l\|_\infty}$ (Position of l'entaille $x_0 = 0.225m$)

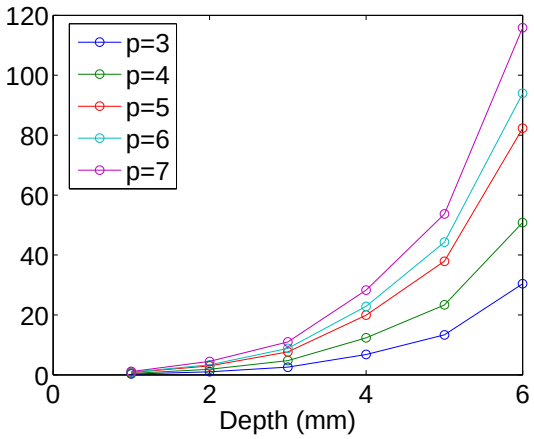


FIG. 5.13 – $\|Q_l\|_\infty$ en fonction de la profondeur de la fissure

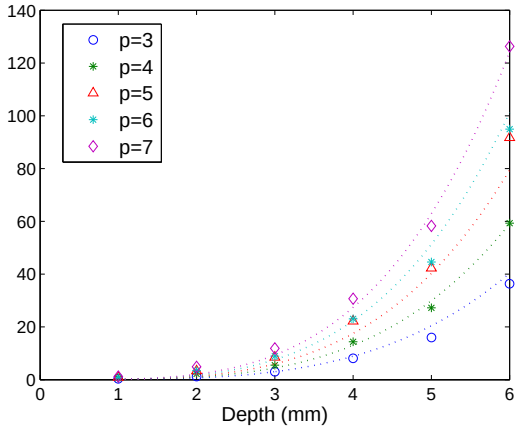
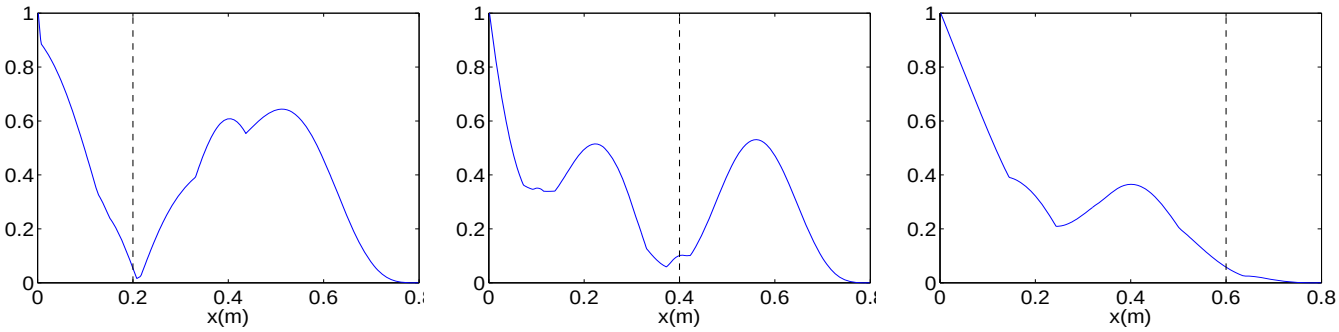


FIG. 5.14 – $\|Q_l\|_\infty$ en fonction de la profondeur de la fissure et $cl^a d^b$ ($c = 0.0092$, $a = 1.4382$, $b = 3.7151$)

5.2.2.4 Influence de la position

Ici, nous nous intéressons à l'influence de la position de l'endommagement sur la performance des résultats de localisation.

• D'abord, nous présentons les résultats de l'application de notre méthode de localisation sur des données expérimentales de la poutre **encastré-libre** réalisées par Agarwall et al.[2]. Avec seulement les trois premières fréquences mesurées, nous calculons la fonction $Q_3(x)$. Et puisqu'une seule profondeur de la fissure est considérée ici, nous traçons donc directement la fonction normée $\widehat{Q}_3(x) = \frac{Q_3(x)}{\|Q_3\|_\infty}$ pour localiser le défaut.



(a) Position 1 $x_{01} = 0.20m$ (b) Position 2 $x_{02} = 0.40m$ (c) Position 3 $x_{03} = 0.60m$

FIG. 5.15 – $\widehat{Q}_l(x) = \frac{Q_l(x)}{\|Q_l\|_\infty}$ pour différentes positions de la fissure

La Fig.5.15 montre que, dans le cas d'une poutre encastré-libre, un défaut est facilement localisé avec cette méthode lorsque la fissure est loin de l'extrémité libre. Mais cela devient moins facile lorsque le défaut se rapproche de l'extrémité libre. Plus précisément, pour $x_{01} = 0.2m$, le minimum de $\widehat{Q}_3(x)$ est égal à 0.02 en $x_{m1} = 0.21m$ et pour $x_{02} = 0.4m$, le minimum de $\widehat{Q}_3(x)$ est égal à 0.06 en $x_{m2} = 0.37m$, mais avec une précision qui n'est pas aussi bonne qu'en $x_{m1} = 0.21m$ car le minimum n'est pas si net et si pointu. Dans le dernier cas pour $x_{03} = 0.6m$, il n'y a pas de minimum local puisque, la fonction $\widehat{Q}_3(x)$ tend vers zéro quand x tend vers l'extrémité libre.

Afin de comprendre la raison de ce comportement et d'améliorer la méthode, nous traçons les trois premières fonctions G_n pour cette poutre encastré-libre dans la Fig. 5.16. Nous trouvons que la fonction

$G_1(x)$ est très faible dans le dernier tiers de la poutre. Comme la variation relative de la n-ième fréquence est proportionnelle à $G_n(x_0)$, cela indique que la première fréquence ne peut pas être très utile dans le cas où le défaut se situe dans le dernier tiers de la poutre. Ainsi, au lieu de définir la fonction $Q_3(x)$ comme avant, nous allons omettre la première fréquence et utiliser la fonction $Q_{2-l}(x)$ définie comme suit :

$$Q_{2-l}(x) = \sum_{2 \leq n,m \leq l} |F_{m,n}(x)|$$

Dans ce cas, nous n'utilisons que les deuxième et troisième modes et nous traçons $\widehat{Q}_{2-3}(x)$ (Fig. 5.17). Cette fonction présente un minimum en $0.638m$ qui n'est pas loin de la position réelle du défaut $x_{03} = 0.6m$. Deux autres minimas apparaissent près de $0.2m$, mais ces positions peuvent être rejetés car ils ne sont pas des minimas pour la fonction $\widehat{Q}_3(x)$ selon les trois modes.

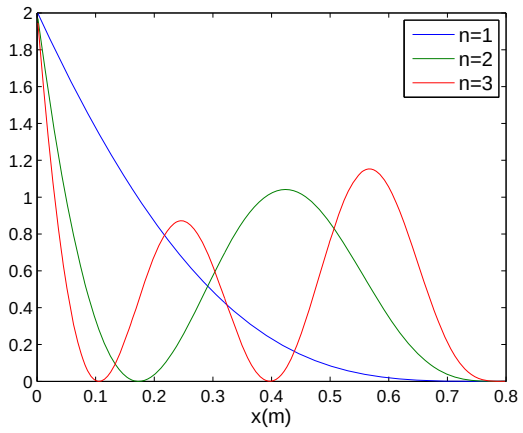


FIG. 5.16 – $G_n(x) = \frac{L\phi_n''^2(x)}{\|\phi_n''\|_2^2}$ en fonction de x (avec $n = 1, 2, 3$)

• Pour étudier plus l'influence de la position de l'endommagement sur la performance des résultats de localisation, ici, nous faisons une simulation numérique sur Matlab de cette poutre. La fissure avec la profondeur de 3mm est simulée par une perte $\Delta EI = (-1 + (\frac{h_d}{h})^3)EI \approx -87\%EI$ sur une zone endommagée de longueur 3mm. La fissure est placée à différents endroits $\frac{L}{8}$, $\frac{L}{4}$, $\frac{L}{2}$, $\frac{3L}{4}$, $\frac{7L}{8}$. Le tableau 5.5 représente des fréquences de la poutre saine et avec fissure. Nous allons appliquer notre méthode de localisation sur ces données numériques.

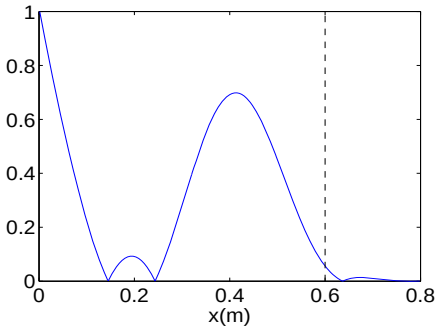


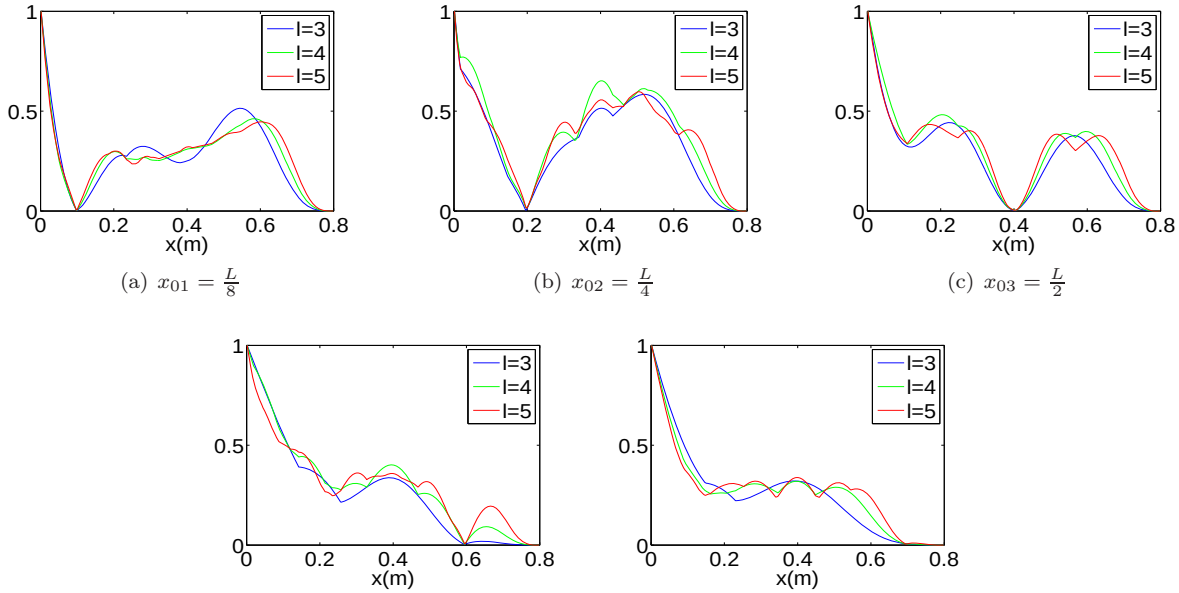
FIG. 5.17 – $\widehat{Q}_{2-3}(x) = \frac{Q_{2-3}(x)}{\|Q_{2-3}\|_\infty}$

	Undamaged	$x_{01} = \frac{L}{8}$	$x_{02} = \frac{L}{4}$	$x_{03} = \frac{L}{2}$	$x_{04} = \frac{3L}{4}$	$x_{05} = \frac{7L}{8}$
n	f_n	$\widetilde{f}_n$	$\widetilde{f}_n$	$\widetilde{f}_n$	$\widetilde{f}_n$	$\widetilde{f}_n$
1	7.71	7.50	7.57	7.68	7.71	7.71
2	48.32	48.01	48.29	47.30	47.95	48.29
3	135.31	135.29	133.45	135.31	132.32	134.70
4	265.16	264.52	261.03	259.82	260.34	262.17
5	438.32	434.33	437.03	438.31	437.11	430.34
6	654.78	645.21	653.04	642.04	652.59	641.03

TAB. 5.5 – Fréquences numériques

Sur la Fig.5.18, nous traçons la fonction $\widehat{Q}_l(x)$ en utilisant 3, 4 ou 5 fréquences (l=3,4 ou 5). Nous trouvons que lorsque le défaut se trouve près du bord encastré, avec 3 premières fréquences, nous arrivons bien à localiser l'endommagement (Fig.5.18 a,b,c). Cependant lorsque le défaut se trouve près du bord, il faut plus fréquences (l=4 ou 5) pour le localiser (Fig.5.18d). Dans le où cas le défaut se trouve très près du bord libre, nous n'arrivons plus à le localiser même avec 5 fréquences (Fig.5.18e). Nous traçons également les fonctions $\widehat{Q}_{2-l}(x)$ pour différentes positions de la fissure (Fig.5.19). Nous trouvons que les résultats de localisation avec des fonctions $\widehat{Q}_{2-l}(x)$ ne sont pas améliorés et qu'avec 5 fréquences, nous n'arrivons pas non plus à localiser la fissure qui est vraiment près du bord libre $x_{05} = \frac{7L}{8}$. Pour améliorer la localisation des endommagements près du bord libre, il faut plutôt utiliser plus de fréquences.

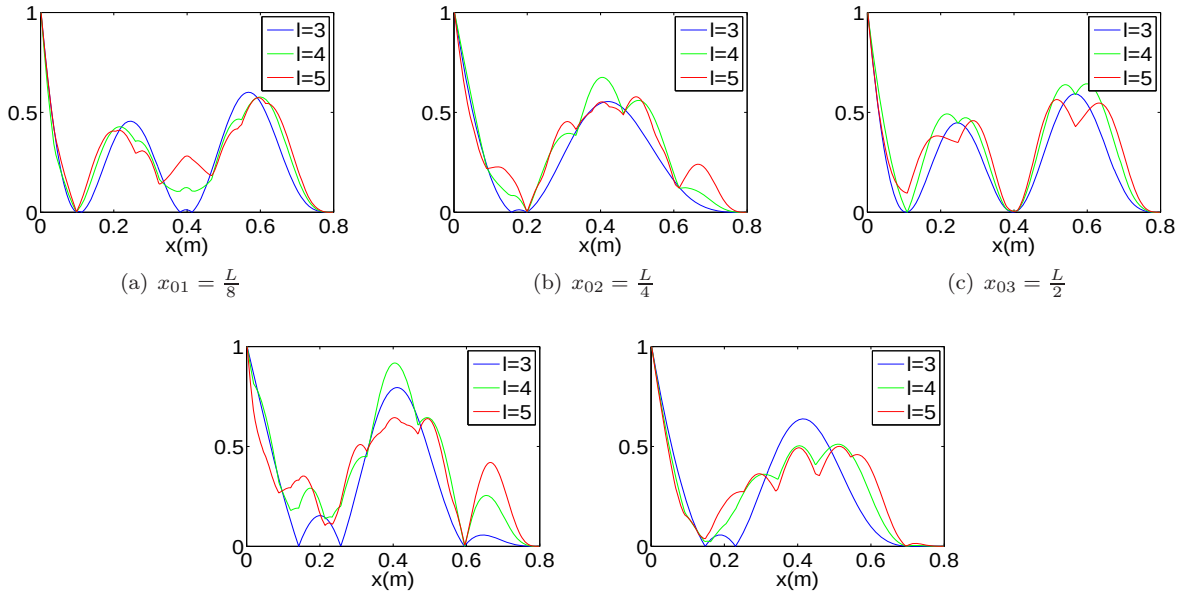
Nous n'avons pour l'instant testé notre méthode de localisation des modifications à partir des variations relatives des fréquences que sur des poutres sans tension (libre-libre ou encastrée-libre). Nous allons maintenant étudier cette méthode dans le cas d'une poutre avec tension.



(a) $x_{01} = \frac{L}{8}$ (b) $x_{02} = \frac{L}{4}$ (c) $x_{03} = \frac{L}{2}$

(d) $x_{04} = \frac{3L}{4}$ (e) $x_{05} = \frac{7L}{8}$

FIG. 5.18 – $\widehat{Q}_l(x)$ $(l = 3, 4, 5)$ pour différentes positions de la fissure



(a) $x_{01} = \frac{L}{8}$ (b) $x_{02} = \frac{L}{4}$ (c) $x_{03} = \frac{L}{2}$

(d) $x_{04} = \frac{3L}{4}$ (e) $x_{05} = \frac{7L}{8}$

FIG. 5.19 – $\widehat{Q}_{2-l}(x)$ $(l = 3, 4, 5)$ pour différentes positions de la fissure

5.2.3 Poutre avec tension de l'ENPC

Ici, nous présentons une application de notre méthode sur des données numériques de la poutre avec tension de l'ENPC. A l'état modifié, il y a simultanément les variations de tension, de masse et de rigidité en flexion. Les caractéristiques initiales de cette poutre sont rappelées ci-dessous :

- Section : $b \times h = 0.025m \times 0.002m$, longueur $L = 0.440m$, $E = 69 * 10^9 Pa$
- Masse linéique $\mu = b * h * \rho = 0.025 * 0.002 * 2700 = 0.135kg/m$, masse totale $m = \mu * L = 0.0594kg$
- Conditions aux bords : bi-encastrées

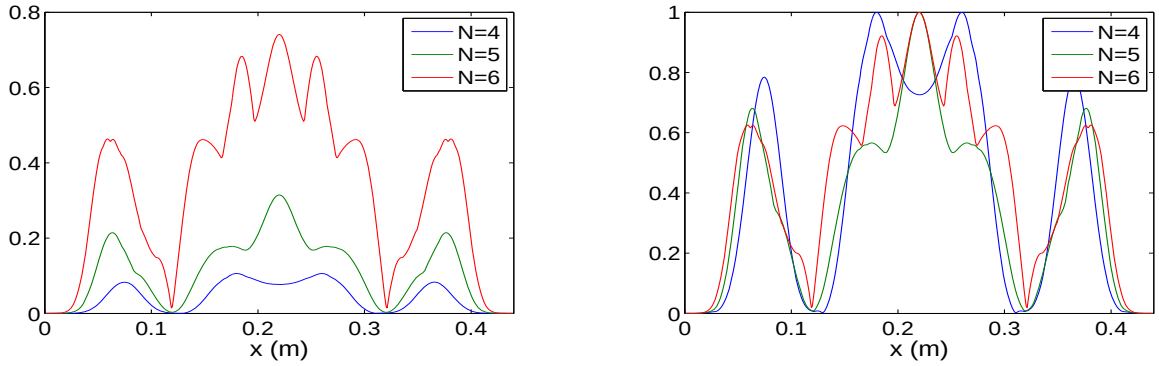
A l'état sain, la force de tension vaut $T = 2000N$. A l'état modifié, la force de tension vaut $\widetilde{T} = 1980$ (soit $\frac{\Delta T}{T} = 1\%$) et il y a des modification $\Delta EI = -0.27EI$, $\Delta\mu = -0.10\mu$ dans la zone endommagée $[x_0 - \frac{\Delta L}{2} \quad x_0 + \frac{\Delta L}{2}] = [0.1175 \quad 0.1225]$ ($x_0 = 0.12m$, $\Delta L = 0.005m$).

Le Tableau 5.6 présente les six premières fréquences de la poutre, calculées par la FEM.

	Etat sain	Etat modifié	
n	f_n	$\widetilde{f}_n$	$\frac{\Delta f_n}{f_n}\%$
1	157.49	156.91	-0.37
2	328.01	326.96	-0.32
3	522.37	520.64	-0.33
4	748.44	746.24	-0.29
5	1011.44	1008.53	-0.29
6	1314.80	1310.67	-0.31

TAB. 5.6 – Fréquences avant et après la modification

La variation de la tension est connue et il y a deux modifications inconnues : la masse et la rigidité. Pour éliminer ces deux inconnues, il faut utiliser au minimum trois fréquences et les formes modales correspondantes du cas de référence. Donc, afin de localiser les modifications, nous devons utiliser la fonction $Q_l(x) = \sum_{1 \le m,n,k \le l} |F_{m,n,k}(x)|$ définie par Eq.(5.37) et nous avons besoin d'au moins trois fréquences et des modes correspondants. Nous traçons ci-dessous les fonctions $Q_l(x)$ et $\widehat{Q}_l(x)$ dans la Fig.5.20 pour $l = 4$, $l = 5$ et $l = 6$. Nous trouvons que deux minimums symétriques sont détectés. Ceci est du à la symétrie du problème de la poutre bi-encastrée. On trouve que la localisation est assez précise avec 6 fréquences.



(a) $Q_l(x)$ (b) $\widehat{Q}_l(x)$

FIG. 5.20 – $Q_l(x)$ et $\widehat{Q}_l(x)$, modification around $x_0 = 0.12m$

5.3 Détection et localisation à partir d'une série d'essais

En général, le niveau de santé d'une structure est surveillé périodiquement par des essais vibratoires au cours de la vie. Chaque essai représente un état de santé. La réponse vibratoire de la structure est supposée connue pour une série d'essais. Nous supposons aussi qu'un endommagement apparaît entre deux essais consécutifs, autrement dit, il n'y a pas de modification des caractéristiques de la structure avant et après l'apparition de l'endommagement. Nous nous intéressons maintenant au problème de la détection et de la localisation de l'endommagement à partir d'une série d'essais. Dans ce paragraphe, nous proposons une méthode qui est similaire à la méthode présentée dans le paragraphe précédent et fondée elle aussi sur l'utilisation de la relation 5.13 et 5.25.

5.3.1 Présentation de la méthode

Nous supposons que nous avons une collection d'essais vibratoires de la structure et que, pour chaque essai, la tension est mesurable et les fréquences sont identifiables expérimentalement.

5.3.1.1 Détection

D'après la partie 7.2(c), la relation entre la variation des fréquences $\frac{\Delta f_n}{f_n}$ et la perturbation ΔT, $\Delta EI(x)$, $\Delta\mu(x)$ pour le cas général :

$$\frac{\Delta f_n}{f_n} - \frac{1}{2(1+\gamma_n)}\frac{\Delta T}{T} \approx \frac{\gamma_n}{2(1+\gamma_n)}\frac{\int_0^L \Delta EI(x)\phi_n''^2(x)dx}{EI\|\phi_n''\|_2^2} - \frac{1}{2}\frac{\int_0^L \Delta\mu(x)\phi_n^2(x)dx}{\mu\|\phi_n\|_2^2} \tag{5.41}$$

S'il y a seulement la perturbation de tension, $\frac{\Delta f_n}{f_n} - \frac{1}{2(1+\gamma_n)}\frac{\Delta T}{T} \approx 0$ et $\frac{\Delta f_n}{f_n} - \frac{1}{2(1+\gamma_n)}\frac{\Delta T}{T} \neq 0$ lorsqu'il y a des modifications physiques (comme masse ou rigidité).

Notons :

$$R^{(i)}(n) = \frac{\Delta f_n^{(i)}}{f_n} - \frac{1}{2(1+\gamma_n)}\frac{\Delta T^{(i)}}{T} \tag{5.42}$$

où : $\Delta f_n^{(i)}$ et $\Delta T^{(i)}$ sont respectivement la variation de la n-ième fréquence et la variation de la tension dans la poutre de l'essai i par rapport à l'essai de référence ; f_n et T sont respectivement la n-ième fréquence et la tension dans la poutre de l'essai de référence. (En pratique, nous choisissons souvent le premier essai comme l'essai de référence).

Dans le cas où il y a plusieurs défauts qui apparaissent l'un après l'autre, autrement dit il y a plusieurs états (état sain et premier état endommagé avec 1 seul défaut, deuxième état endommagé avec un 2ème défaut ajouté,...), pour les différents essais i du même état, les $R^{(i)}(n)$ varient autour d'une constante. Pour chaque n, on suppose que le défaut apparait à l'instant (ou à l'essai) où on voit un saut ou une chute de la courbe $R^{(i)}(n)$ en fonction de i.

Nota : *La méthode de détection présentée ci-dessus peut être appliquée pour détecter des défauts répartis (ΔL n'est pas petit devant L) ou des défauts concentrés $\Delta L \ll L$.*

5.3.1.2 Localisation

Après avoir détecté les endommagements, nous pouvons distiguer la collection d'essais par les états différents :

- L'état 0 contient tous les essais avant l'apparition du premier défaut

- L'état 1 contient tous les essais après l'apparition du premier défaut et avant l'apparition du deuxième défaut

...

- L'état r contient tous les essais après l'apparition du r *ième* défaut et avant l'apparition du $r+1$ *ième* défaut.

Notons $\overline{R}^{\text{état } r}(n)$, la valeur moyenne de $R^{(i)}(n)$ pour tous les essais de l'état r et posons :

$$\Delta^r(n) = \overline{R}^{\text{état } r}(n) - \overline{R}^{\text{état } r-1}(n) \tag{5.43}$$

Nous avons :

$$\Delta^r(n) \approx \frac{\gamma_n}{2(1+\gamma_n)} \frac{\int_0^L \Delta EI^{\text{défaut } r}(x)\phi_n''^2(x)dx}{EI\|\phi_n''\|_2^2} - \frac{1}{2}\frac{\int_0^L \Delta\mu^{\text{défaut } r}(x)\phi_n^2(x)dx}{\mu\|\phi_n\|_2^2} \tag{5.44}$$

où : $EI^{\text{défaut } r}(x)$ et $\mu^{\text{défaut } r}(x)$ sont respectivement les modifications dues au r *ième* défaut.

$\Delta^r(n)$ représente la perturbation relative de la fréquence n due au r *ième* défaut.

Pour localiser le r ième défaut, nous utilisons donc la même méthode présentée dans la partie 5.2.1 : nous cherchons x_{rm} pour minimiser $Q_l(x) = \sum_{1\le m,n,k\le l} |F(m,n,k,x)|$ où $F(m,n,k,x)$ est défini par :

$$\begin{aligned} F(m,n,k,x) = &[\Delta(n)H_m(x) - \Delta(m)H_n(x)][G_n(x)H_k(x) - G_k(x)H_n(x)] \\ &-[\Delta(n)H_k(x) - \Delta(k)H_n(x)][G_n(x)H_m(x) - G_m(x)H_n(x)] \end{aligned} \tag{5.45}$$

avec :

$$\Delta(n) = \Delta^r(n), \quad G_n(x) = \frac{\gamma_n}{2(1+\gamma_n)}\frac{L\phi_n''^2(x)}{\|\phi_n''\|_2^2}, \quad H_n(x) = \frac{1}{2}\frac{L\phi_n^2(x)}{\|\phi_n\|_2^2} \tag{5.46}$$

Nota : *La méthode de localisation présentée ci-dessus peut être utilisée seulement pour le cas où le défaut est très concentré (autrement dit, le défaut est de petite taille $\Delta L \ll L$)*

5.3.2 Poutre avec tension de l'ENPC

Dans ce paragraphe, nous présentons l'application de la méthode présentée sur des données numériques de la poutre avec tension de l'ENPC qui est présentée au 3.1.2. Les tensions prises dans le modèle numérique sont issues des 660 essais expérimentaux. L'évaluation de la tension en fonction du numéro des simulations est présentée dans la Fig.5.21.

Les 300 premières simulations sont faites sur la poutre sans défaut. Puis, nous ajoutons le premier défaut de la même taille : $\Delta L = 0.005m$ à l'abscisse $0.12m$ avec des modifications $\Delta EI = -0.4EI$, $\Delta\mu = -0.1\mu$. De nouvelles simulations (301 à 420) sont effectuées. Nous ajoutons le deuxième défaut, qui a la même taille avec les mêmes modifications que le premier à l'abscisse $0.18m$. Les simulations 421 à 540 sont alors réalisées. Le troisième défaut, qui a aussi la même taille avec les mêmes modifications que le premier, est ajouté à l'abscisse $0.3m$. Nous faisons 120 dernières simulations (540 à 660).

L'évaluation des 8 premières fréquences calculées numériquement est présentée dans la Fig.5.22.

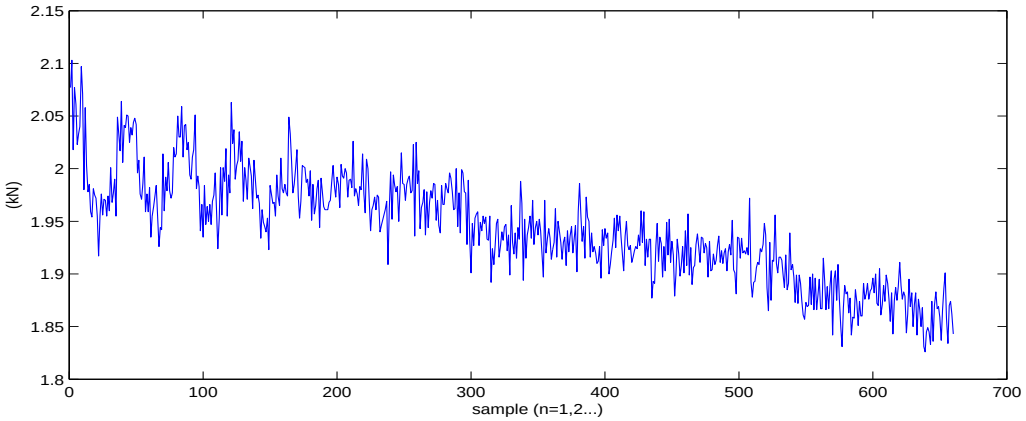


FIG. 5.21 – Evolution de la tension dans la poutre

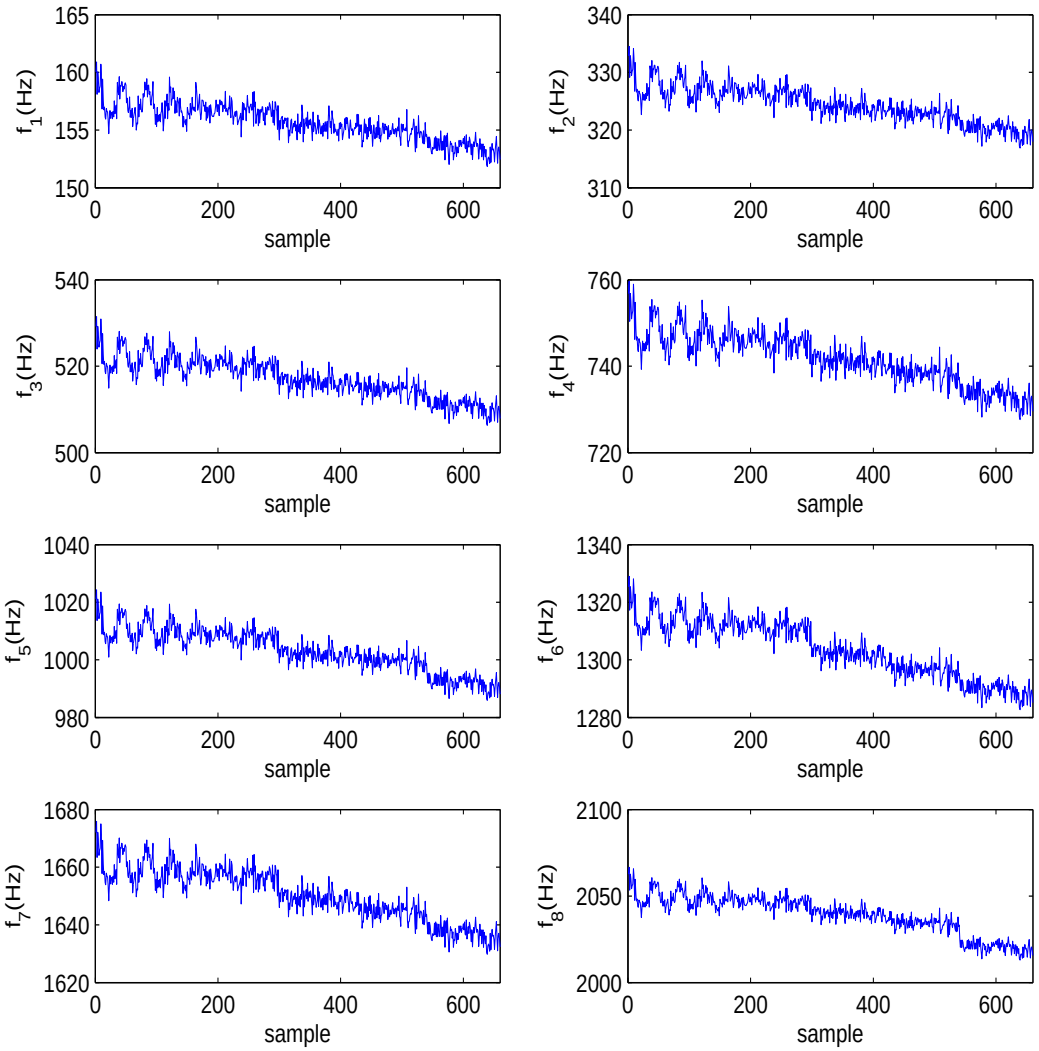


FIG. 5.22 – Evolution de huit premières fréquences

5.3.2.1 Détection

Sur la Fig.5.23, nous traçons pour $n = 1, ..8$, l'évolution de $R^{(i)}(n) = \frac{\Delta f_n^{(i)}}{f_n} - \frac{1}{2(1+\gamma_n)}\frac{\Delta T^{(i)}}{T}$ en fonction de i le numéro de simulations,

où : f_n et T sont respectivement la n-ième fréquence et la tension dans la poutre de l'essai 1, qui est choisi comme l'essai de référence, $\Delta f_n^{(i)} = f^{(i)}(n) - f^{(1)}(n)$ et $\Delta T^{(i)} = T^{(i)} - T^{(1)}$ sont respectivement la variation de la n-ième fréquence et la variation de la tension dans la poutre de l'essai i par rapport à l'essai de référence.

En observant Fig.5.23, nous détectons 3 défauts et la suite de 660 essais peut être découpée en 4 états : état 0 (essais n° 1 à 300), état 1 (essais n° 301 à 420), état 2 (essais n° 421 à 540), état 3 (essais n° 541 à 660).

Nous remarquons que pour $n = 4$, nous ne pouvons pas détecter le 1er défaut, et pour $n = 5$, nous ne pouvons pas détecter le 2 ème défaut. Cela peut être expliqué par l'effet que le 1er défaut se situe près du noeud du 4ème mode ($x_1 = 0.12m \approx \frac{L}{4}$) et le 2ème défaut est près du noeud du 5ème mode ($x_2 = 0.18m \approx \frac{2L}{5}$).

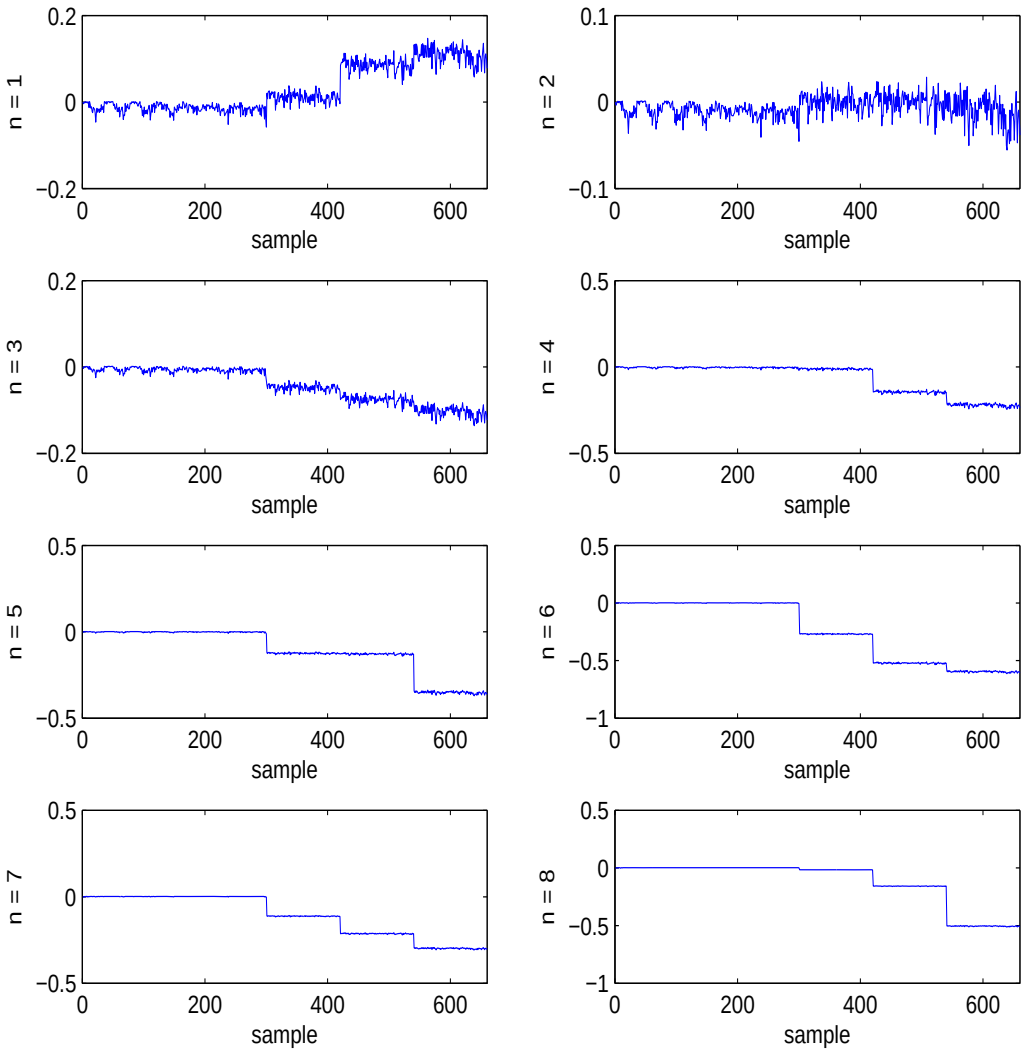


FIG. 5.23 – Evaluation de $R^{(i)}(n) = \dfrac{\Delta f_n^{(i)}}{f_n} - \dfrac{1}{2(1+\gamma_n)}\dfrac{\Delta T^{(i)}}{T}$ (en %) pour les 8 premières fréquences

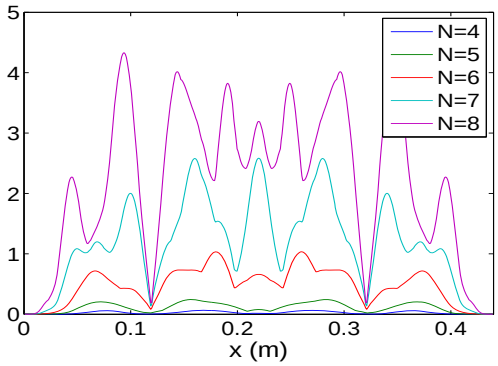
5.3.2.2 Localisation

Sur le tableau 5.7, nous présentons la perturbation relative des fréquences due aux différents défauts $\Delta^r(n)$ $(r = 1, 2, 3)$.

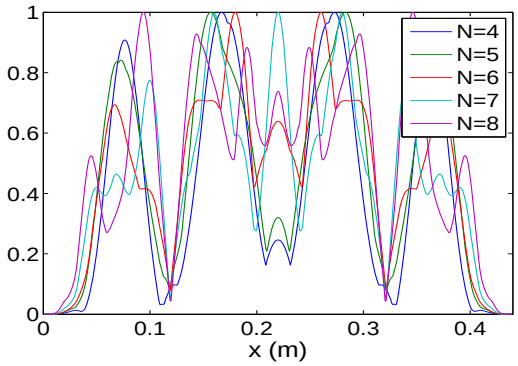
n	1	2	3	4	5	6	7	8
$\Delta^1(n)$	0,03	0,01	-0,04	-0,01	-0,12	-0,27	-0,11	-0,02
$\Delta^2(n)$	0,07	0,00	-0,03	-0,13	0,00	-0,25	-0,10	-0,14
$\Delta^3(n)$	0,02	-0,01	-0,03	-0,08	-0,22	-0,07	-0,09	-0,35

TAB. 5.7 – $\Delta^r(n)$ (r=1,2,3 correspondant à 3 défauts)

Sur les Fig. 5.24, 5.25, 5.26, nous traçons les fonctions $Q_l(x)$ $(l = 4, ..8)$ et $Q_l(x) = \frac{Q_l(x)}{\|Q_l\|_\infty}$ pour 3 défauts. Comme la structure est symétrique, pour chaque défaut, nous localisons deux abscisses symétriques dont une coïncide bien au défaut réel ($x_{01} = 0.12m$, $x_{02} = 0.18m$, $x_{03} = 0.30m$).

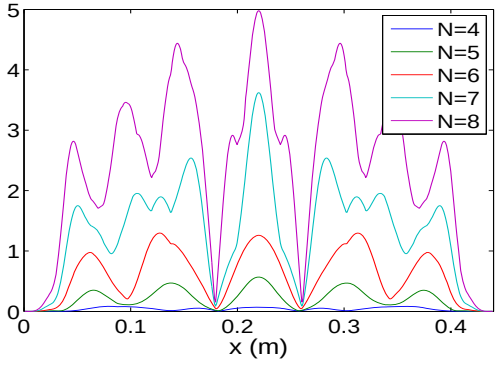


(a) $Q_l(x)$ $(l = 4, ..8)$

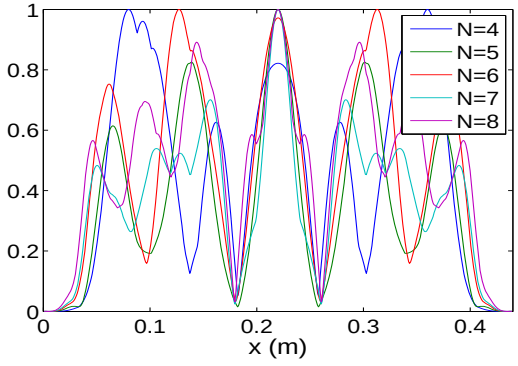


(b) $\widehat{Q}_l(x)$ $(l = 4, ..8)$

FIG. 5.24 – Localisation pour le premier défaut $(x_1 = 0.12m)$

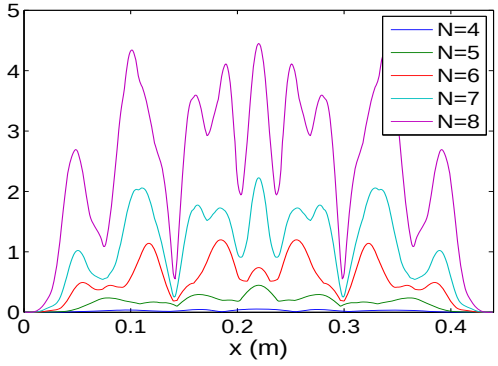


(a) $Q_l(x)$ $(l = 4, ..8)$

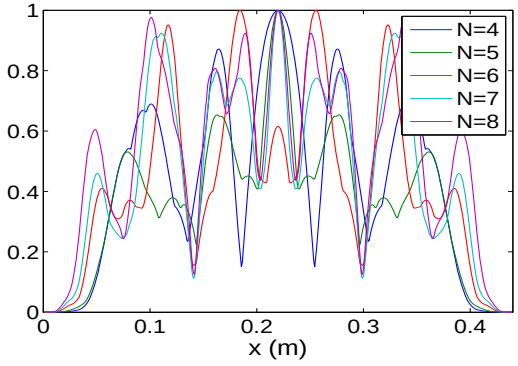


(b) $\widehat{Q}_l(x)$ $(l = 4, ..8)$

FIG. 5.25 – Localisation pour le deuxième défaut $(x_2 = 0.18m)$



(a) $Q_l(x)$ $(l = 4, ..8)$



(b) $\widehat{Q}_l(x)$ $(l = 4, ..8)$

FIG. 5.26 – Localisation pour le troisième défaut $(x_3 = 0.30m)$

5.4 Conclusion

Dans ce paragraphe, nous avons d'abord établi une estimation au premier ordre permettant de relier les variations relatives de fréquences, de rigidité en flexion et de tension entre deux état voisins d'une poutre avec tension. Les modifications considérées sont supposées localisées autour d'un point x_0 de la poutre. La relation est établie pour chaque fréquence et elle utilise la connaissance (analytique ou par simulation) de la forme de la déformée modale correspondante de l'état initial ou de référence. Une relation similaire est établie dans le contexte d'une fissure où la variation de la rigidité en flexion est remplacée par un coefficient de flexibilité (c_b).

Comme cette relation dépend de la position x_0 de la modification et qu'elle est valable pour chaque mode, en éliminant les inconnues, il est possible d'obtenir une fonction qui s'annule théoriquement en x_0. Cette propriété nous a permis de proposer une méthode originale, qui a été présentée dans le deuxième paragraphe, de localisation de la modification à partir de deux essais. Nous avons vérifié sur différentes données expérimentales de la littérature et aussi sur des données numériques la validité de cette méthode et nous avons proposé des améliorations dans le cas difficile où l'endommagement est situé près du bord. Il est aussi important de noter qu'il est d'une part possible de localiser x_0 en cherchant $Argmin\widehat{Q}_l$ où $\widehat{Q}_l$ est la fonction normalisée et d'autre part de pouvoir comparer l'importance de la modification (profondeur de l'entaille...) grâce à la norme $\|Q_l\|_\infty$.

Nous avons proposé aussi la méthode de détection et de localisation à partir d'une série d'essais. Cette méthode est aussi basée sur l'estimation analytique qui a été présentée dans le premier paragraphe. Nous avons vérifié cette méthode sur des données numériques obtenues à partir de la poutre avec tension de l'ENPC et les résultats de détections et de localisation sont satisfaisants.

5.5 Annexes

En utilisant la méthode de séparation des variables, nous déduisons que les modes propres sont les solutions de l'équation différentielle du $4^{ème}$ degré suivante :

$$(EI(x)\phi_n''(x))'' - T\phi_n''(x) - \mu(x)\omega_n^2\phi_n(x) = 0 \tag{5.47}$$

A l'état sain $EI(x)$ et $\mu(x)$ sont constants, nous pouvons donc écrire :

$$EI\phi_n^{(4)}(x) - T\phi_n''(x) - \mu\lambda_n\phi_n(x) = 0 \tag{5.48}$$

avec des conditions aux bords :

- Cas appuyé - appuyé : $\phi_n(0) = \phi_n(L) = 0 \quad \text{et} \quad \phi_n''(0) = \phi_n''(L) = 0$

- Cas encastré - encastré : $\phi_n(0) = \phi_n(L) = 0 \quad \text{et} \quad \phi_n'(0) = \phi_n'(L) = 0$

On multiplie Eq. (5.48) par ϕ_n''' et on intègre sur l'intervalle $[0\,,\,x]$

$$\int_0^x EI\phi_n^{(4)}\phi_n''' - \int_0^x T\phi_n''\phi_n''' - \mu\lambda_n\int_0^x \phi_n\phi_n''' = 0 \tag{5.49}$$

Nous avons donc :

$$\frac{1}{2}EI\phi_n'''^2(x) - \frac{1}{2}T\phi_n''^2(x) - \left(\frac{1}{2}EI\phi_n'''^2(0) - \frac{1}{2}T\phi_n''^2(0)\right) - \mu\lambda_n\phi_n(x)\phi_n''(x) + \frac{1}{2}\mu\lambda_n\phi_n'^2(x) = 0 \tag{5.50}$$

En multipliant cette équation par 2 et en calculant l'intégrale sur l'intervalle $[0 \;\; L]$, on a :

$$EI\int_0^L \phi_n'''^2(x)dx - T\int_0^L \phi_n''^2(x)dx - [EI\phi_n'''^2(0) - T\phi_n''^2(0)]L + 3\mu\lambda_n\int_0^L \phi_n'^2(x)dx = 0 \tag{5.51}$$

On multiplie Eq. (5.48) par ϕ_n'' et on intègre sur l'intervalle $[0\,,\,L]$

$$EI\int_0^L \phi_n^{(4)}(x)\phi_n''(x)dx - T\int_0^L \phi_n''(x)\phi_n''(x)dx - \mu\lambda_n\int_0^L \phi_n(x)\phi_n''(x)dx = 0 \tag{5.52}$$

Nous en déduisons :

$$EI\phi_n'''(L)\phi_n''(L) - EI\phi_n'''(0)\phi_n''(0) - EI\int_0^L \phi_n'''^2(x)dx - T\int_0^L \phi_n''^2(x)dx + \mu\lambda_n\int_0^L \phi_n'^2(x)dx = 0 \tag{5.53}$$

Comme le câble a des conditions aux bords symétriques, on a : $\phi_n'''(L)\phi_n''(L) = -\phi_n'''(0)\phi_n''(0)$, l'expression précédente peut se réécrire :

$$-2EI\phi_n'''(0)\phi_n''(0) - EI\int_0^L \phi_n'''^2(x)dx - T\int_0^L \phi_n''^2(x)dx + \mu\lambda_n\int_0^L \phi_n'^2(x)dx = 0 \tag{5.54}$$

D'après Eq.(5.51) et (5.54), nous avons :

$$\boxed{-2T\int_0^L \phi_n''^2(x)dx + 4\mu\lambda_n\int_0^L \phi_n'^2(x)dx = [EI\phi_n'''^2(0) - T\phi_n''^2(0)]L + 2EI\phi_n'''(0)\phi_n''(0)} \tag{5.55}$$

On multiplie Eq. (5.48) par ϕ_n' et on intègre sur l'intervalle $[0\,,\,x]$

$$\int_0^x EI\phi_n^{(4)}\phi_n' - \int_0^x T\phi_n''\phi_n' - \mu\lambda_n\int_0^x \phi_n\phi_n' = 0 \tag{5.56}$$

Nous avons donc :

$$EI\phi_n'''(x)\phi_n'(x) - \frac{1}{2}EI\phi_n''^2(x) + \frac{1}{2}EI\phi_n''^2(0) - \frac{1}{2}T\phi_n'^2(x) - \frac{1}{2}\mu\lambda_n\phi_n^2(x) = 0 \tag{5.57}$$

En multipliant cette équation précedente par 2 et en calculant l'intégrale sur l'intervalle $[0\ \ L]$, on a :

$$\boxed{-3EI\int_0^L \phi_n''^2(x)dx - T\int_0^L \phi_n'^2(x)dx - \mu\lambda_n\int_0^L \phi_n^2(x)dx = -EI\phi_n''^2(0)L} \tag{5.58}$$

On multiplie Eq. (5.48) par ϕ_n et on intègre sur l'intervalle $[0\,,\,L]$

$$\boxed{EI\int_0^L \phi_n''^2(x)dx + T\int_0^L \phi_n'^2(x)dx - \mu\lambda_n\int_0^L \phi_n^2(x)dx = 0} \tag{5.59}$$

Nous avons donc un système de trois équations (5.55), (5.58), (5.59) à 3 inconnues $\int_0^L \phi_n''^2(x)dx$, $\int_0^L \phi_n'^2(x)dx$, $\int_0^L \phi_n^2(x)dx$.

D'après Eq. (5.58) et (5.59), nous en déduisons :

$$4EI\int_0^L \phi_n''^2(x)dx + 2T\int_0^L \phi_n'^2(x)dx = EI\phi_n''^2(0)L \tag{5.60}$$

D'après Eq. (5.55) et (5.60), nous en déduisons :

$$\int_0^L \phi_n''^2(x)dx = \frac{-[EI\phi_n'''^2(0) - T\phi_n''^2(0)]TL - 2TEI\phi_n'''(0)\phi_n''(0) + 2\mu\lambda_n EI\phi_n''^2(0)L}{2T^2 + 8EI\mu\lambda_n} \tag{5.61}$$

et :

$$\int_0^L \phi_n'^2(x)dx = \frac{2EI[EI\phi_n'''^2(0) - T\phi_n''^2(0)]L + 4(EI)^2\phi_n'''(0)\phi_n''(0) + TEI\phi_n''^2(0)L}{8EI\mu\lambda_n + 2T^2} \tag{5.62}$$

Chapitre 6

Méthode de détection et de localisation des défauts en utilisant la SVD

Dans le précédent chapitre, nous avons proposé une *méthode de de détection et de localisation à partir d'une série d'essais* qui est fondée sur l'estimation relative des fréquences. Dans ce chapitre, nous proposons une nouvelle méthode pour détecter et localiser l'endommagement en utilisant la SVD (singular value decomposition).

D'abord, nous rappelons rapidement ce qu'est la SVD avec son interprétation géométrique et nous présentons l'utilisation de la SVD sur la collection des paramètres modaux (d'une suite d'essais) pour la détection et pour la localisation de l'endommagement.

Ensuite, nous testons cette technique sur des données numériques pour vérifier la faisabilité et aussi la sensibilité de cette méthode par rapport au nombre des points de mesure ou au nombre d'endommagements.

Enfin, nous présentons quelques conclusions à retenir.

6.1 Présentation de la technique

6.1.1 Rappels sur la SVD

La SVD est un processus algébrique qui permet de décomposer une matrice $\mathbf{A}$ réelle de dimension $n \times m$ quelconque en un produit de trois matrices :

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\Sigma\mathbf{V}^T \tag{6.1}$$

où $\mathbf{U}$ et $\mathbf{V}$ sont des matrices orthogonales, respectivement de dimension $n \times n$ et $m \times m$ et Σ est une matrice diagonale avec des composants diagonaux σ_1, σ_2,...,σ_r appelés valeurs singulières de la matrice $\mathbf{A}$ (ou de $\mathbf{A}^T$) avec $r = \min(m, n)$. Le rang de la matrice $\mathbf{A}$ est égal au nombre des valeurs singulières positifs de cette matrice. Les r premières colonnes de $\mathbf{V} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r)$ et $\mathbf{U} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_r)$ sont respectivement appelés vecteurs singuliers à droite et vecteurs singuliers à gauche de $\mathbf{A}$. $(\mathbf{U}, \Sigma\Sigma^T)$ et $(\mathbf{V}, \Sigma^T\Sigma)$ représentent respectivement les décompositions en valeurs propres de la matrice $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$ et $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$. Enfin, comme les valeurs singulières de $\mathbf{A}$ sont classées dans l'ordre décroissant $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq ... \geq \sigma_r$, l'indice i de σ_i est appelé le numéro d'ordre de la valeur singulière.

Une interprétation géométrique est donnée par D. Kalman [48] et M. Bergmann [9]. La matrice $\mathbf{A}$ de dimension $n \times m$ peut être considérée comme une collection de coordonnées de m points P_1, P_2,..., P_m dans un espace vectoriel de dimension n. Quel que soit $k \leq n$, on cherche une base du sous-espace de dimension k tel que la distance quadratique moyenne de l'ensemble de ces points à ce sous-espace soit minimisé (autrement dit $\sum_{i=1}^{k} |H_i P_i|^2$ soit minimisée où H_i est la projection orthogonale du point P_i sur le sous-espace). Le sous-espace désiré est l'espace créé par les k premiers vecteurs singuliers à gauche de la matrice $\mathbf{A}$.

6.1.2 Utilisation de la SVD pour la détection et la localisation

L'idée de cette technique de détection est d'appliquer la SVD sur une matrice $\mathbf{A}$ représentant une collection des données aux différentes essais le long de la vie de la structure. Chaque vecteur colonne est la donnée d'un essai qui peut être par exemple des valeurs propres ou une déformée modale ; la matrice $\mathbf{A}$

correspondante est appelée respectivement matrice de collection des valeurs propres et matrice de collection d'une déformée modale (ou plus simplement *matrices des valeurs propres* et *matrice des déformées modales*). La matrice $\mathbf{A}$ de la taille $n \times m$ avec m représentant *le nombre des essais* (autrement dit le nombre d'échantillons sur une grande échelle de temps) et n représentant *la dimension des données choisies*. Par exemple pour la matrices des valeurs propres, n est le nombre de valeurs propres utilisées et pour la matrices des déformées modales, n est le nombre de points discrétisés de la déformée modale (autrement dit nombre de points de mesure ou le nombre de capteurs).

Le premier vecteur singulier à gauche représente la tendance principale de l'ensemble des vecteurs colonnes de la matrice $\mathbf{A}$ ou la tendance principale de la collection des données d'une suite d'essais. D'autres vecteurs singuliers à gauche représentent des tendances secondaires de la collection. La première valeur singulière σ_1 et les autres σ_2, σ_3,... représentent respectivement l'importance de la tendance principale et des tendances secondaires (en général $\sigma_1 \gg \sigma_2, \sigma_3, \ldots$). Le premier vecteur singulier à droite représente l'amplitude associée à la tendance principale et cette amplitude est fonction des essais (ou fonction du temps au cours de la vie de la structure). Les autres vecteurs singuliers à droite représentent l'amplitude associée aux tendances secondaires.

Pour *détecter* l'endommagement dans le temps, nous utilisons les *vecteurs singuliers à droite* (de la matrices des valeurs propres et de la matrice des déformées modales). Autrement dit, nous observons l'amplitude en fonction du temps associée aux tendances secondaires de la matrices des valeurs propres ou de la matrice des déformées modales. Souvent, nous pouvons détecter l'instant où l'endommagement se produit grâce à une forte variation (un saut ou une chute de la courbe de ces vecteurs en fonction du temps).

Cependant, pour *localiser* l'endommagement, les *vecteurs singuliers à gauche* (sauf le premier) de la matrice des déformées modales sont utilisés. Autrement dit, nous observons les tendances secondaires de la collection des déformée modales d'un mode. Souvent, le défaut peut être localisé grâce à un pic de la courbe de ces vecteurs qui se trouve à l'endroit du défaut.

6.1.2.1 Détection avec la matrice des valeurs propres

Nous notons $\lambda_i^{(j)}$ la $i^{\text{ème}}$ valeur propres de l'essai j. La matrice des valeurs propres notée par $\mathbf{A}_\lambda$ est définie comme suit :

$$\mathbf{A}_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1^{(1)} & \lambda_1^{(2)} & \cdots & \lambda_1^{(m)} \\ \lambda_2^{(1)} & \lambda_2^{(2)} & \cdots & \lambda_2^{(m)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_n^{(1)} & \lambda_n^{(2)} & \cdots & \lambda_n^{(m)} \end{pmatrix} = [\ell^{(1)} \quad \ell^{(2)} \quad \ldots \quad \ell^{(m)}] \tag{6.2}$$

avec $\ell^{(j)} = [\lambda_1^{(j)} \quad \lambda_2^{(j)} \quad \ldots \quad \lambda_n^{(j)}]^T$ la collection de n premières valeurs propres à l'essai j.
A l'état initial, nous notons la tension dans le câble T_0 et la collection des valeurs propres par ℓ. La tension dans le câble à l'essai j est noté par T_j avec $T_j = T_0 + \Delta T_j$.

Supposons que l'endommagement apparait à l'essai j_0. D'après Eq.(6.21), nous avons :

- Avant l'apparition du défaut $(j < j_0)$: $\ell^{(j)} \approx \ell + \dfrac{\Delta T_j}{T_0}\ell^{(\text{tens})}$
- Après l'apparition du défaut $(j \geq j_0)$: $\ell^{(j)} \approx \ell + \Delta\ell^{(d)} + \dfrac{\Delta T_j}{T_0}\ell^{(\text{tens})}$

La matrice des valeurs propres peut se réécrire par :

$$\mathbf{A}_\lambda \approx [\ell \quad \ldots \quad \ell] + [\underbrace{0 \quad \ldots \quad 0}_{j_0-1} \quad \underbrace{\Delta\ell^{(d)} \quad \ldots \quad \Delta\ell^{(d)}}_{m-j_0+1}] + \left[\frac{\Delta T_1}{T_0}\ell^{(\text{tens})} \quad \ldots \quad \frac{\Delta T_m}{T_0}\ell^{(\text{tens})}\right] \tag{6.3}$$

Pour détecter l'apparition du défaut (à l'essai j_0), des vecteurs singuliers à droite seront observés. L'instant où l'endommagement se produit peut être souvent aperçu par une forte variation (un saut ou une chute de la courbe de ces vecteurs en fonction du temps).

6.1.2.2 Détection et localisation avec la matrice des déformées modales

Nous notons $\psi_i^{(j)}$ le $i^{\text{ème}}$ mode propre de l'essai j. La matrice des déformées modales notée par $\mathbf{A}_{\psi_i}$ est définie comme suit :

$$\mathbf{A}_{\psi_i} = [\psi_i^{(1)} \quad \psi_i^{(2)} \quad \ldots \quad \psi_i^{(m)}] \tag{6.4}$$

D'après Eq.(6.16), nous avons :

- Avant l'apparition du défaut $(j < j_0)$: $\psi_i^{(j)} \approx \psi_i + \dfrac{\Delta T_j}{T_0}\psi_i^{(\text{tens})}$

– Après l'apparition du défaut ($j \geq j_0$) : $\psi_i^{(j)} \approx \psi_i + \Delta\psi_i^{(d)} + \dfrac{\Delta T_j}{T_0}\psi_i^{(\text{tens})}$

La matrice des déformées modales peut se réécrire par :

$$\mathbf{A}_{\psi_i} \approx [\psi_i \quad \dots \quad \psi_i] + [\underbrace{0 \quad \dots \quad 0}_{j_0-1} \quad \underbrace{\Delta\psi_i^{(d)} \quad \dots \quad \Delta\psi_i^{(d)}}_{m-j_0+1}] + \left[\frac{\Delta T_1}{T_0}\psi_i^{(\text{tens})} \quad \dots \quad \frac{\Delta T_m}{T_0}\psi_i^{(\text{tens})}\right] \tag{6.5}$$

De même, pour détecter l'apparition du défaut, nous utilisons des vecteurs singuliers à droite.

En plus, nous pouvons aussi localiser le défaut en analysant des vecteurs singuliers à gauche. Le défaut peut être localisé grâce à un pic de la courbe de ces vecteurs et le pic se situe généralement à l'endroit du défaut.

6.2 Application à des données numériques

Les données numériques utilisées sont la collection des paramètres modaux calculés par FEM d'un câble monotoron, qui est présenté dans la partie 3.1.1. Nous présentons ci-dessous trois cas numériques utilisant la méthode proposée. L'objectif du premier cas est d'étudier la faisabilité de la détection et de la localisation. Dans le deuxième cas, nous nous intéressons à la sensibilité de cette méthode par rapport au nombre de points de mesure (nombre des capteurs). Puis, dans le troisième cas, nous testons cette méthode dans le cas de défauts multiples.

6.2.1 Détection et localisation

Nous faisons des simulations numériques pour obtenir une collection de paramètres modaux d'une suite de 200 essais au cours de la vie du câble. A long terme (au cours de la vie du câble), le comportement du câble est instationnaire, autrement dit, la tension dans le câble n'est pas la même pour deux essais différents. Cependant, à court terme (pendant chaque essai), nous supposons que le comportement du câble est stationnaire, autrement dit, la tension reste constante. Ici, les effets de la variation des charges et de la variation des conditions environnementales au cours de la vie du câble sont simulés par une variation aléatoire de la tension. L'évaluation de la tension dans le câble à l'essai j ($j = 1, 2, \dots 200$) s'écrit comme suit :

$$T_j = T_0(1 + \epsilon(j)) \quad \text{avec} \quad \epsilon = 0.02 * rand(1, 200) \tag{6.6}$$

A partir de l'essai $j_0 = 101$, un défaut est introduit et il reste permanent dans le câble. L'endommagement introduit représente la rupture d'un des sept fils dans le câble dans l'intervalle $[1,21 \;\; 1.23]m$. Il est modélisé par une perte locale de 17% de la masse linéique et une perte locale de 17% de la rigidité dans la zone endommagée. Pour chaque essai, les déformées modales et les fréquences propres sont calculées par la FEM.

L'évolution de la tension et des six premières fréquences propres pour 200 essais au cours de la vie du câbles est présentée ci-dessous (Fig.6.1 et Fig.6.2). En observant les fréquences propres dans Fig.6.2, on ne peut pas savoir l'instant où apparait le défaut. Si on trace les déformées modales de 200 essais (ce qu'on ne présente pas ici), elles sont toutes parfaitement superposées, et à l'oeil nu l'endommagement ne peut pas être ni détecté, ni localisé.

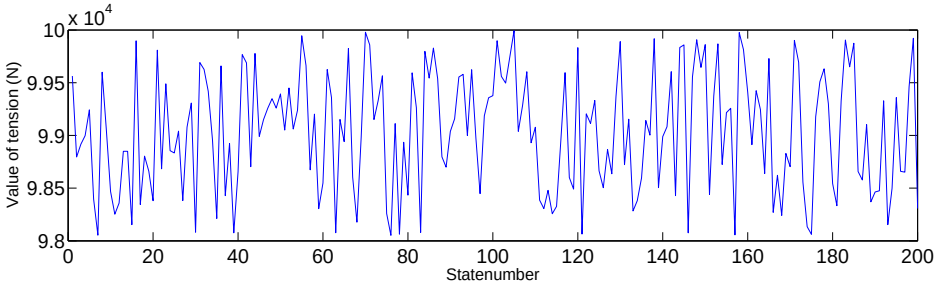


FIG. 6.1 – Evolution de la tension dans le câble

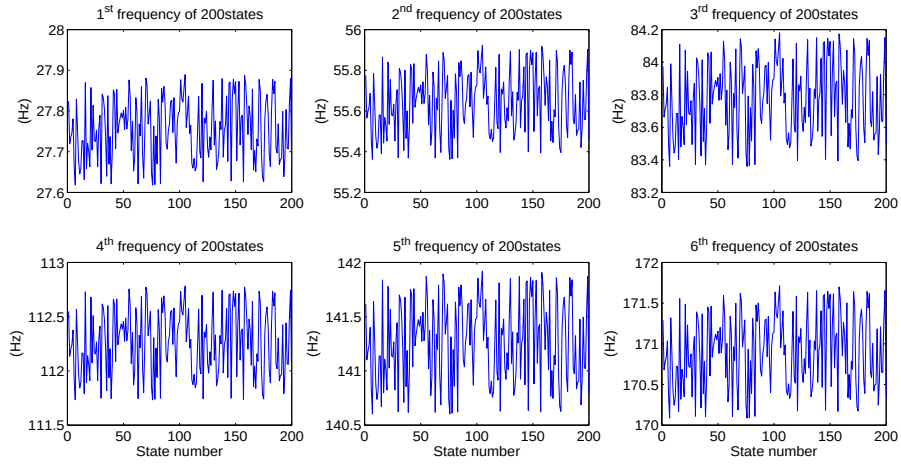


FIG. 6.2 – Evolution des fréquences

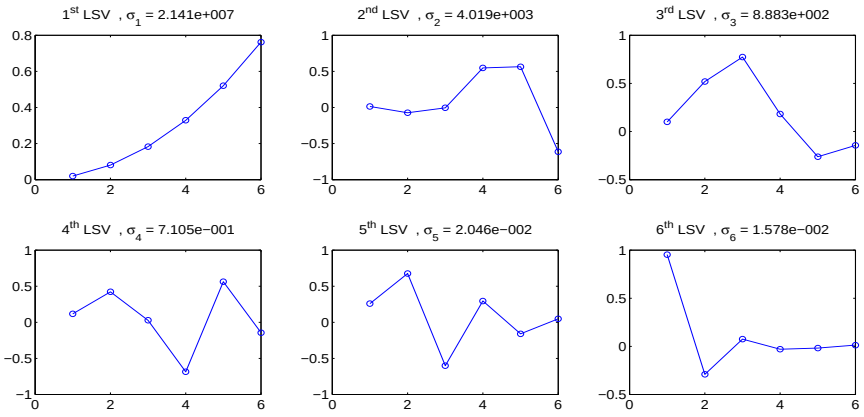


FIG. 6.3 – Six premiers vecteurs singuliers à gauche (LSV : left singular vector) de la matrice des valeurs propres $\mathbf{A}_{\lambda}^{(1:200)}$

La matrice des valeurs propres $\mathbf{A}_{\lambda}^{(1:200)} = [\ell^{(1)} \quad \ell^{(2)} \quad \dots \quad \ell^{(200)}]$ choisie est de dimension 6×200, où 6 est le nombre des valeurs propres utilisées et 200 est le nombre d'essais. Dans le calcul FEM, le câble est discrétisé en 500 éléments, soit 499 noeuds sur $]0\ L[$, mais les données des déformées modales sur lesquelles la technique SVD est appliquée ici contient seulement 99 points de mesure espacés régulièrement sur $]0\ L[$. La matrice des déformées modales $\mathbf{A}_{\psi_i}^{(1:200)} = [\psi_i^{(1)} \quad \psi_i^{(2)} \quad \dots \quad \psi_i^{(200)}]$ est donc de dimension 99×200.

Nous présentons d'abord l'application de la SVD sur la matrice des valeurs propres $\mathbf{A}_{\lambda}^{(1:200)}$. En observant le premier vecteur singulier à gauche Fig.6.3, nous trouvons que la tendance principale des valeurs propres en fonction du numéro d'ordre est une parabole $\lambda_i \approx i^2\lambda_1$ ou $f_i \approx i.f_1$. Des vecteurs singuliers à droite Fig.6.4 révèlent que l'endommagement apparaît entre deux essais 100 et 101. Nous appliquons aussi la technique SVD sur la matrice des valeurs propres $\mathbf{A}_{\lambda}^{(1:100)} = [\ell^{(1)} \quad \ell^{(2)} \quad \dots \quad \ell^{(100)}]$ qui contient seulement les 100 premiers essais avant l'apparition de l'endommagement. Nous observons aucune chute dans les courbe des vecteurs singuliers à droite (Fig.6.5). Cela confirme ainsi que le défaut n'apparaît pas avant l'essai 101.

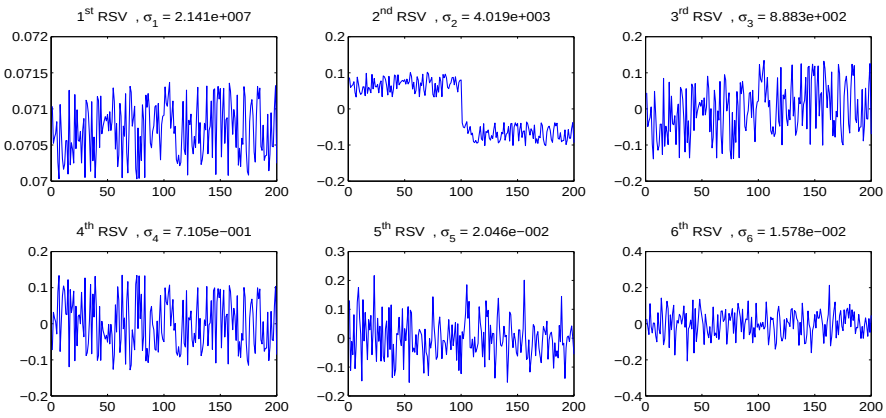


FIG. 6.4 – Six premiers vecteurs singuliers à droite (RSV : right singular vector) de la matrice $\mathbf{A}_\lambda^{(1:200)}$

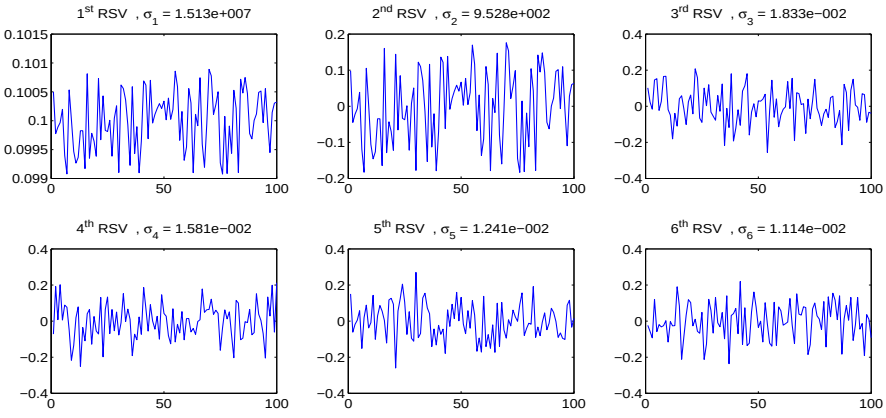


FIG. 6.5 – Six premiers vecteurs singuliers à droite (RSV : right singular vector) de la matrice des valeurs propres avant l'apparition du défaut $\mathbf{A}_\lambda^{(1:100)}$

Maintenant, nous allons appliquer la SVD sur la matrice des déformées modales de dimension 99×200 $\mathbf{A}_{\psi_2}^{(1:200)} = [\psi_2^{(1)} \quad \psi_2^{(2)} \quad \dots \quad \psi_2^{(200)}]$, une collection du $2^{\text{ème}}$ mode propre des 200 essais. En observant les vecteurs singuliers à droite de cette matrice (Fig.6.6), nous pouvons également détecter le défaut en temps. De plus, en analysant l'évolution des vecteurs singuliers à gauche de cette matrice, nous pouvons localiser l'endommagement. L'endroit du défaut (intervalle $[1.21 \quad 1.23]m$) coïncide avec le pic (Fig. 6.7).

Comme précédemment, nous appliquons également la SVD sur une matrice de collection des déformées modales $\mathbf{A}_{\psi_2}^{(1:100)} = [\psi_2^{(1)} \quad \psi_2^{(2)} \quad \dots \quad \psi_2^{(100)}]$ qui contient seulement les 100 premiers essais avant l'apparition de l'endommagement. Les vecteurs singuliers à droite et les vecteurs singuliers à gauche de cette matrice sont représentés respectivement sur Fig. 6.8 et 6.9. Nous trouvons qu'il n'y a pas de chute dans la Fig.6.8 et il n'y pas de pic non plus dans la Fig.6.9. Cela confirme ainsi que le défaut n'apparaît pas avant l'essai 101.

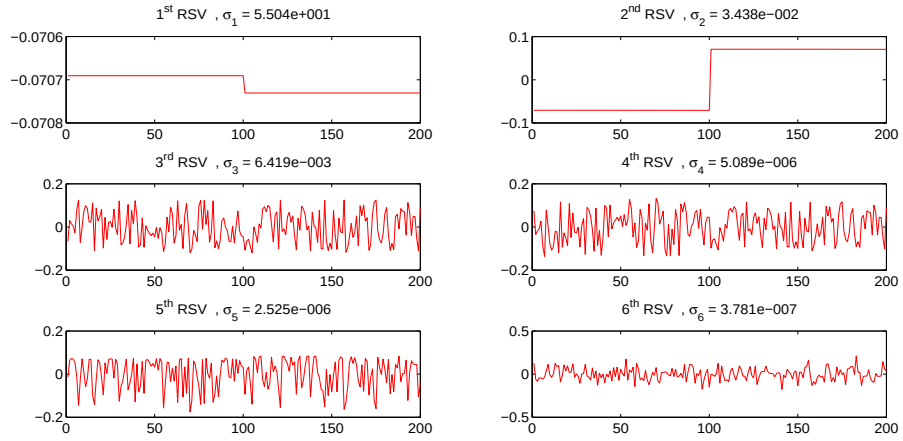


FIG. 6.6 – Six premiers vecteurs singuliers à droite (RSV : right singular vector) de la matrice des modes propres $\mathbf{A}_{\psi_2}^{(1:200)}$

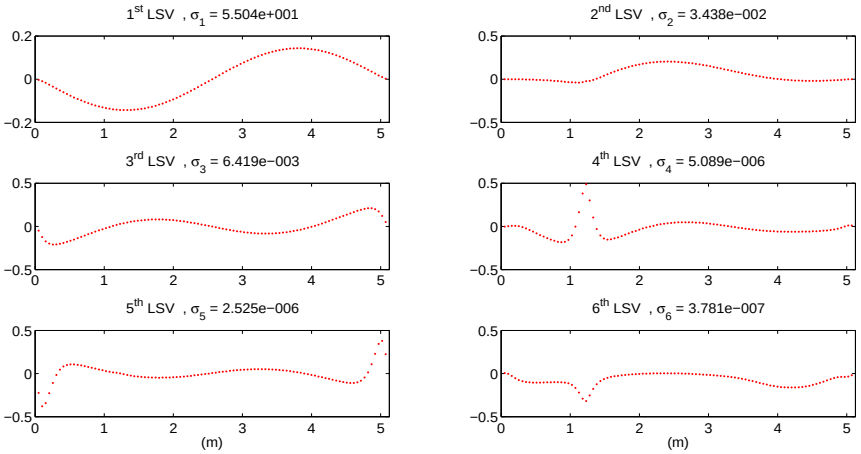


FIG. 6.7 – Six premiers vecteurs singuliers à gauche (LSV : left singular vector) de la matrice $\mathbf{A}_{\psi_2}^{(1:200)}$

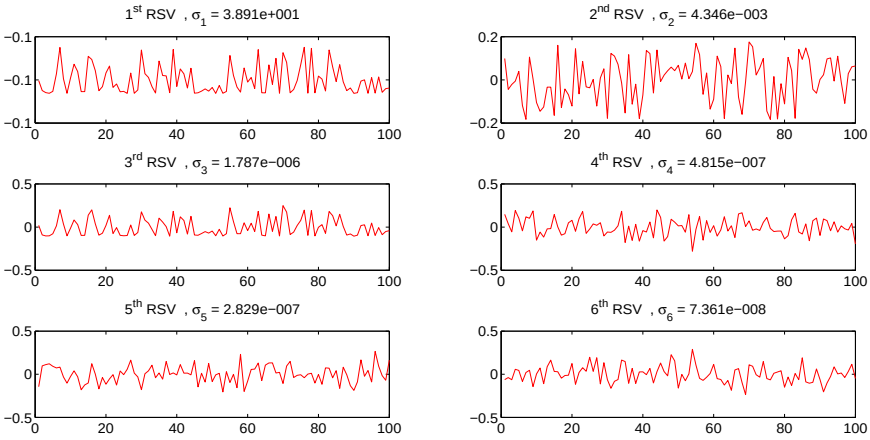


FIG. 6.8 – Six premiers vecteurs singuliers à droite (RSV : right singular vector) de la matrice des modes propres avant l'apparition du défaut $\mathbf{A}_{\psi_2}^{(1:100)}$

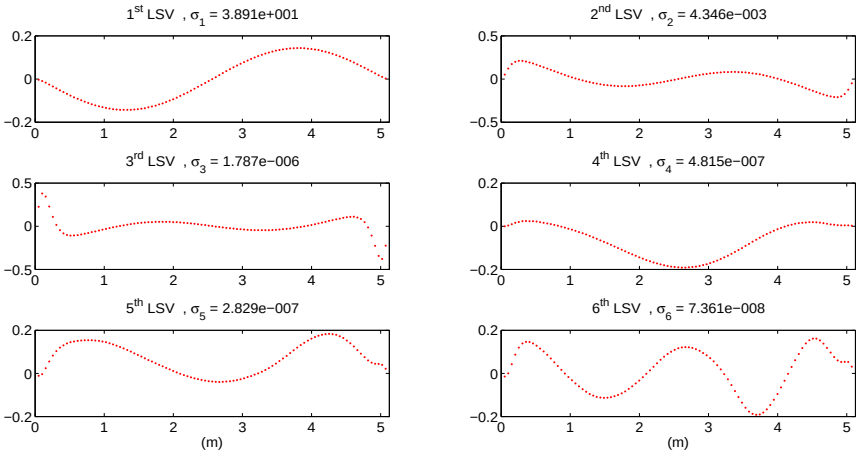


FIG. 6.9 – Six premiers vecteurs singuliers à gauche (LSV : left singular vector) de la matrice des modes propres avant l'apparition du défaut $\mathbf{A}_{\psi_2}^{(1:100)}$

6.2.2 Sensibilité de la méthode par rapport au nombre de points de mesure

Rappelons que la matrice des déformées modales $\mathbf{A}_{\psi_2}^{(1:200)}$ est de dimension $n \times 200$, où n est le nombre des points de mesure et 200 est le nombre d'essais. Observer les vecteurs singuliers à gauche de cette matrice permet de localiser l'endommagement. La performance de la localisation dépend évidemment du nombre de points de mesure. Dans cette partie, nous étudions donc la sensibilité de la méthode par rapport au nombre de points de mesure.

Les données utilisées sont extraites de la même simulation numérique que dans la partie précédente. Les déformées modales sont discrétisées en 49, 19 ou 9 points de mesures qui sont régulièrement espacés sur $]0\ L[$ et la matrice des déformées modales $\mathbf{A}_{\psi_2}^{(1:200)}$ est donc de dimension 49×200, 19×200 ou 9×200. Les Fig.6.10, 6.11, 6.12 représentent les six premiers vecteurs singuliers à gauche de la matrice $\mathbf{A}_{\psi_2}^{(1:200)}$ avec respectivement 49, 19 ou 9 points de mesure.

Les résultats montrent que si les points de mesure ne sont pas nombreux, par exemple 9 points (Fig. 6.12), cette méthode ne fonctionne plus. Cependant, cette méthode est efficace pour localiser les endommagements avec 19 points de mesure. La position où l'endommagement est détecté est proche du point $x = 1.28m$ (Fig.6.11), ce qui est proche de la position réelle du défaut (à l'abscisse $x = 1.22m$).

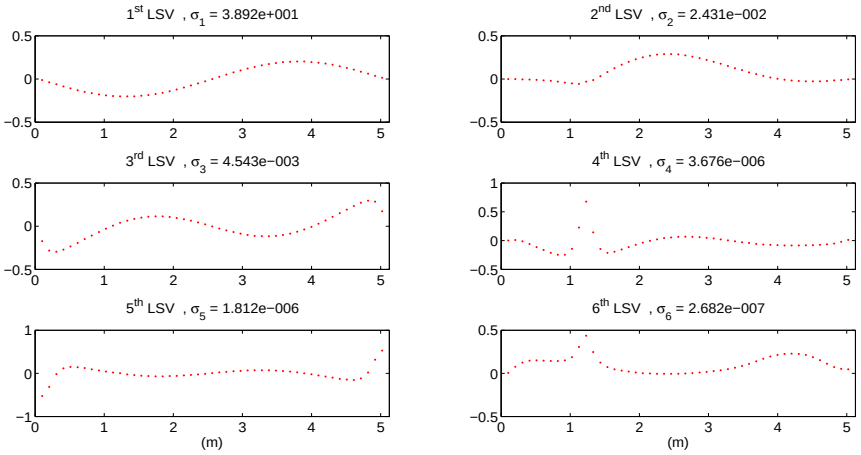


FIG. 6.10 – Six premiers vecteurs singuliers à gauche (LSV : left singular vector) de la matrice $\mathbf{A}_{\psi_2}^{(1:200)}$ (avec 49 points de mesure)

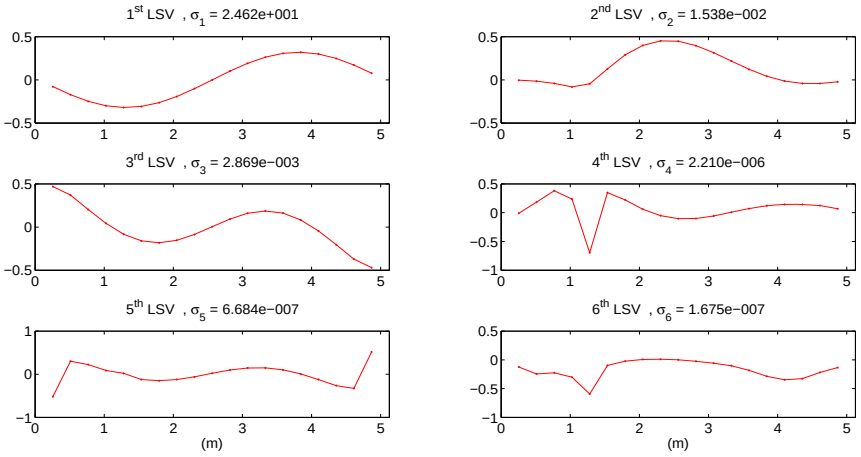


FIG. 6.11 – Six premiers vecteurs singuliers à gauche (LSV : left singular vector) de la matrice $\mathbf{A}_{\psi_2}^{(1:200)}$ (avec 19 points de mesure)

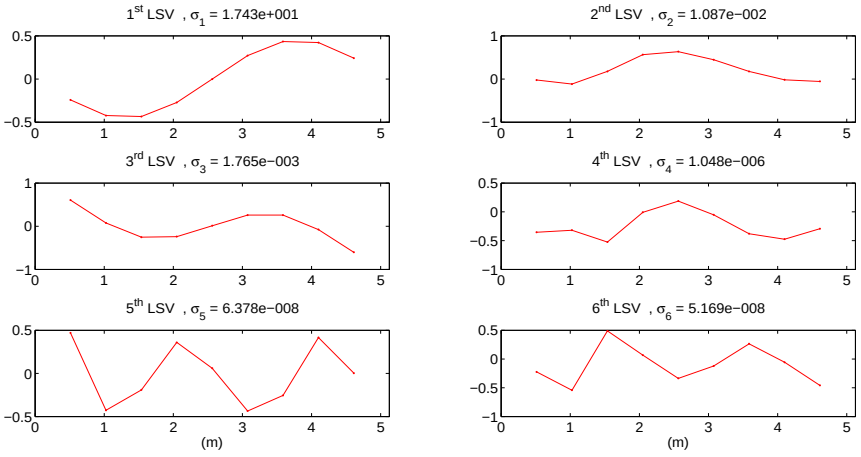


FIG. 6.12 – Six premiers vecteurs singuliers à gauche (LSV : left singular vector) de la matrice $\mathbf{A}_{\psi_2}^{(1:200)}$ (avec 9 points de mesure)

6.2.3 Sensibilité de la méthode par rapport au nombre de défauts

Supposons que les défauts apparaissent l'un après l'autre, autrement dit, il y a au maximum un seul défaut qui peut apparaître entre deux essais (ou deux essais) consécutifs. Supposons que dans la collection d'une suite d'essais, il y a plusieurs endommagements qui apparaissent à des instants différents. L'objectif est de tester si cette méthode est encore efficace pour détecter et localiser. Nous effectuons une simulation

de 250 essais. L'évolution de la variation de la tension pour 250 essais est simulée par :

$$T(j) = T_0(1 + \epsilon(j)) \quad \text{avec} \quad \epsilon = 0.02 * rand(1, 250) \tag{6.7}$$

Le premier défaut est le même que dans l'application précédente : il apparaît entre deux essais 100 et 101 et par conséquent, il y a une perte locale de la rigidité et aussi de la masse linéique d'environ 17% dans la zone endommagée (intervalle $[1.21 \quad 1.23]m$). Le deuxième défaut est introduit entre l'essai 200 et l'essai 201. Il est identique au premier défaut, la zone endommagée est située dans l'intervalle $[2.97 \quad 2.99]m$. Pour chaque essai, nous calculons les déformées modales et les fréquences propres associées. Le nombre de points de mesure utilisé est 19. Les données numériques utilisées sont la matrice des fréquences $\mathbf{A}_{\lambda}^{(1:250)}$ de dimension 6×250 et les matrices des déformées modales $\mathbf{A}_{\psi_i}^{(1:250)}$ de dimension 19×250 :

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{\lambda}^{(1:250)} &= [\ell^{(1)} \quad \ell^{(2)} \quad \dots \quad \ell^{(250)}] \\ \mathbf{A}_{\psi_i}^{(1:250)} &= [\psi_i^{(1)} \quad \psi_i^{(2)} \quad \dots \quad \psi_i^{(250)}] \end{aligned} \tag{6.8}$$

En observant les Fig. 6.13 et 6.15 qui représentent respectivement les six premiers vecteurs singuliers à droite de $\mathbf{A}_{\lambda}^{(1:250)}$ ou de $\mathbf{A}_{\psi_2}^{(1:250)}$, nous pouvons détecter deux instants où apparaissent les endommagements : entre les deux essais 100 et 101 pour le premier et entre les deux essais 200 et 201 pour le deuxième.

En observant la Fig. 6.14 qui représente les six premiers vecteurs singuliers à gauche de la matrice $\mathbf{A}_{\psi_2}^{(1:250)}$, nous trouvons deux endroits où la courbe des vecteurs est pointue, moins régulière : $x_1 = 1.28m$ (noeud 5) et $x_2 = 3.07m$ (noeud 12) . Cependant, la localisation de l'abscisse $x_2 = 3.07m$ n'est pas très nette. Pour justifier les résultats de localisation, une procédure en deux étapes est proposée comme suite :

- D'abord, nous appliquons la SVD sur la matrice $\mathbf{A}_{\psi_2}^{(1:200)}$ (collection des 200 premiers essais) pour localiser le premier défaut. Les résultats obtenus sont les mêmes que ceux présentés dans la deuxième application (partie **6.2.2** (Fig.6.11), L'endroit localisé est à l'abscisse $1.28m$ qui est très proche de la position réelle du premier défaut à l'abscisse $x = 1.22m$.
- Ensuite, nous appliquons la SVD sur la matrice $\mathbf{A}_{\psi_2}^{(101-250)} = [\psi_2^{(101)} \quad \psi_2^{(102)} \quad \dots \quad \psi_2^{(250)}]$ (collection de 150 derniers essais) pour localiser le deuxième défaut (Fig. 6.16). L'endroit localisé est à l'abscisse $x = 3,07$ qui est également très proche de la position réelle du deuxième défaut à l'abscisse

$x = 2.98m$.

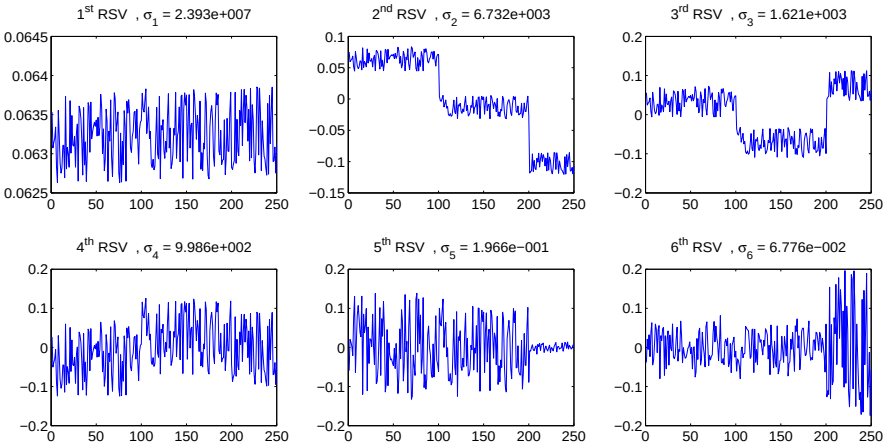


FIG. 6.13 – Six premiers vecteurs singuliers à droite (RSV : right singular vector) de la matrice $\mathbf{A}_{\lambda}^{(1:250)}$

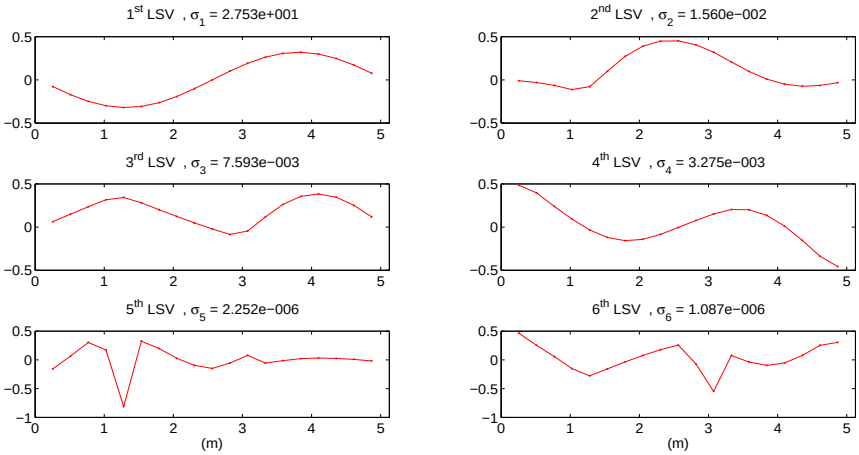


FIG. 6.14 – Six premiers vecteurs singuliers à gauche (LSV : left singular vector) de la matrice $\mathbf{A}_{\psi_2}^{(1:250)}$

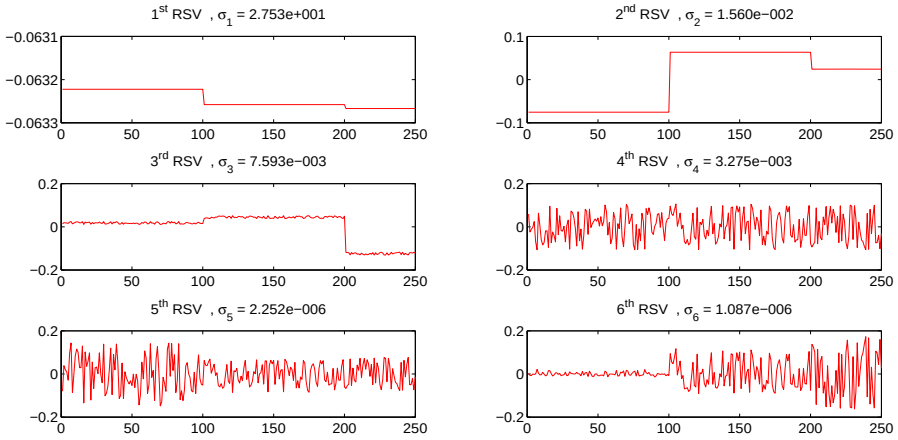


FIG. 6.15 – Six premiers vecteurs singuliers à droite (RSV : right singular vector) de la matrice $\mathbf{A}_{\psi_2}^{(1:250)}$

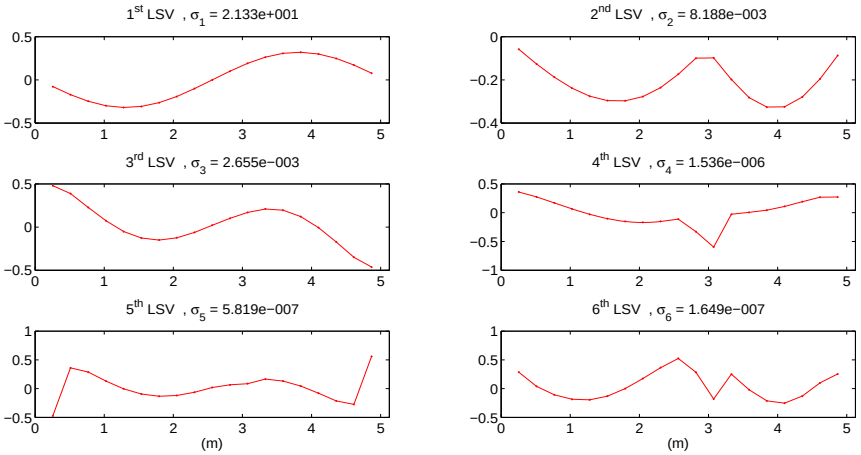


FIG. 6.16 – Six premiers vecteurs singuliers à gauche (LSV : left singular vector) de la matrice $\mathbf{A}_{\psi_2}^{(101-250)}$

6.3 Conclusion

Les résultats des applications numériques de la méthode de détection et de localisation utilisant la SVD montrent qu'elle est efficace pour détecter le défaut en temps. Pour localiser le défaut en espace, cette méthode est sensible au nombre des points de mesure, et donc nécessite un nombre suffisant des capteurs. Dans le cas de l'apparition successive de plusieurs défauts, la première étape consiste à détecter les essais (ou les instants) où apparaissent les endommagements. Grâce aux résultats de détection, la suite d'essais peut être découpée en différents états : état sain (ou état 0), état 1 (avec le premier défaut ajouté), état 2 (avec le premier défaut et un deuxième nouveau ajouté), ... état i (avec $i-1$ premiers défauts et un *ième* nouveau ajouté. Dans la deuxième étape, il s'agit d'extraire une collection d'essai aux deux états consécutifs. En appliquant la SVD sur ces données, nous pouvons localiser le défaut qui apparaît entre ces 2 états consécutifs choisis.

Pour localiser le défaut en espace, il s'agit d'appliquer la SVD sur la collection des caractéristiques de la structure en espace, qui peut être la collection des modes propres, ou la collection des courbures. L'efficacité de la technique SVD dépend de la sensibilité des caractéristiques par rapport au défaut. Les calculs numériques au 5.1.3 montrent que la courbure change plus que les modes défaut à l'endroit du défaut. Cependant, en pratique, il est difficile d'obtenir la courbure correctement à partir des modes propres expérimentaux. C'est pourquoi dans les applications de cette méthode sur des données expérimentales qui seront présentées dans le chapitre suivant, nous utilisons la matrice des modes propres pour localiser les défauts.

6.4 Annexe

Changements des paramètres modaux dûs aux modifications (tension, masse, rigidité) pour le système discret

Les modifications de la tension ΔT, de la rigidité $\Delta EI(x)$ et de la masse $\Delta\mu(x)$ entrainent des modifications des matrices de masse $\Delta\mathbf{M}$ et de rigidité $\Delta\mathbf{K}$ du système discret.

Rappelons que d'après le chapitre 2 (2.2), les matrices élémentaires de masse $[\mathbf{m}_i]$ et de rigidité $[\mathbf{k}_i]$ de l'élément i (intervalle $[x_i \quad x_{i+1}]$) s'écrivent :

$$\begin{aligned}
[\mathbf{m}_i] &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} N\mu N^T dx \\
[\mathbf{k}_i] &= \underbrace{\int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{d^2N}{dx^2} EI(x) \left(\frac{d^2N}{dx^2}\right)^T dx}_{[\mathbf{k}_i]^{(\mathrm{EI})}} \quad + \quad \underbrace{\int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{dN}{dx} T \left(\frac{dN}{dx}\right)^T dx}_{[\mathbf{k}_i]^{(\mathrm{tens})}}
\end{aligned} \tag{6.9}$$

où $N^T = [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4]$, et les fonctions N_1, N_2, N_3 et N_4 sont définies comme suit :

$$\begin{aligned}
N_1 &= \frac{1}{4}(1-\lambda)^2(2+\lambda) \\
N_2 &= \frac{\Delta_i}{8}\ (1-\lambda^2)(1-\lambda) \\
N_3 &= \frac{1}{4}(1+\lambda)^2(2-\lambda) \\
N_4 &= \frac{\Delta_i}{8}(-1+\lambda^2)(1+\lambda)
\end{aligned} \tag{6.10}$$

avec $\lambda = -1 + 2\dfrac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \quad (\lambda \in [-1 \quad 1])$

Les modifications élémentaires $[\Delta\mathbf{m}_i]$ et $[\Delta\mathbf{k}_i]$ de l'état modifié sont déterminées comme suit :

$$\begin{aligned}
[\Delta\mathbf{m}_i] &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} N\Delta\mu(x) N^T dx \\
[\Delta\mathbf{k}_i] &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{d^2N}{dx^2} \Delta EI(x) \left(\frac{d^2N}{dx^2}\right)^T dx \quad + \quad \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{dN}{dx} \Delta T \left(\frac{dN}{dx}\right)^T dx
\end{aligned} \tag{6.11}$$

Donc, les modifications des matrices globales $\Delta\mathbf{M}$ et $\Delta\mathbf{K}$ peuvent se écrire :

$$\begin{aligned} \Delta\mathbf{K} &= \Delta\mathbf{K}^{(\text{tens})} + \Delta\mathbf{K}^{(d)} \\ \Delta\mathbf{M} &= \Delta\mathbf{M}^{(d)} \end{aligned} \tag{6.12}$$

où :

- $\Delta\mathbf{K}^{(\text{tens})}$ est la modification due à la variation de la tension et $\Delta\mathbf{K}^{(\text{tens})} = \dfrac{\Delta T}{T_0}\mathbf{K}^{(\text{tens})}$ avec $\mathbf{K}^{(\text{tens})}$, la matrice de rigidité due à la tension T_0 à l'état de référence.
- $\Delta\mathbf{K}^{(d)}$ et $\Delta\mathbf{M}^{(d)}$ sont des modifications dues à l'endommagement (des modifications physiques comme la masse ou la rigidité). Les composants sont nuls partout sauf pour ceux correspondant aux éléments dans la zone endommagée (Fig. 6.17).

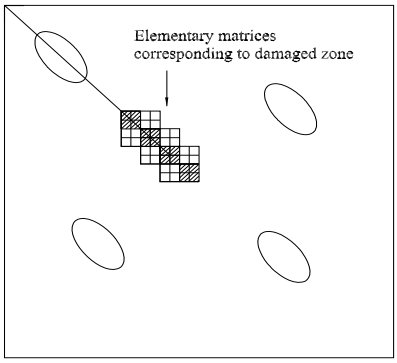


FIG. 6.17 – $\Delta\mathbf{M}^{(d)}$ or $\Delta\mathbf{K}^{(d)}$

Les modifications des matrices de masse et de rigidité entrainent des modifications des fréquences propres et des modes propres :

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_i &= \psi_i + \Delta\psi_i \\ \tilde{\lambda}_i &= \lambda_i + \Delta\lambda_i \end{aligned} \tag{6.13}$$

D'après W. Heylen et al. [46], les variations des paramètres modaux dues aux perturbations de la matrice

de masse et de rigidité peuvent être estimées par l'équation suivante :

$$\begin{aligned}\Delta\lambda_i &\approx \psi_i^T(\Delta\mathbf{K} - \lambda_i\Delta\mathbf{M})\psi_i \\ \Delta\psi_i &\approx -\frac{\psi_i^T\mathbf{M}\psi_i}{2}\psi_i + \sum_{r=1,r\neq i}^{n}\frac{\psi_r^T(\Delta\mathbf{K} - \lambda_i\Delta\mathbf{M})\psi_i}{\lambda_i - \lambda_r}\psi_r\end{aligned} \tag{6.14}$$

En utilisant la relation de l'Eq.(6.12), les variations des paramètres modeux peuvent se réécrire :

$$\boxed{\Delta\lambda_i \approx \Delta\lambda_i^{(\text{tens})} + \Delta\lambda_i^{(d)} = \tfrac{\Delta T}{T_0}\lambda_i^{(\text{tens})} + \Delta\lambda_i^{(d)}} \tag{6.15}$$

et :

$$\boxed{\Delta\psi_i \approx \Delta\psi_i^{(\text{tens})} + \Delta\psi_i^{(d)} = \tfrac{\Delta T}{T_0}\psi_i^{(\text{tens})} + \Delta\psi_i^{(d)}} \tag{6.16}$$

où :

– $\Delta\lambda_i^{(\text{tens})}$, $\Delta\psi_i^{(\text{tens})}$ sont dus à la variation de la tension

$$\Delta\lambda_i^{(\text{tens})} = \frac{\Delta T}{T_0}\lambda_i^{(\text{tens})} = \frac{\Delta T}{T_0}\psi_i^T\mathbf{K}^{(\text{tens})}\psi_i \tag{6.17}$$

$$\Delta\psi_i^{(\text{tens})} = \frac{\Delta T}{T_0}\psi_i^{(\text{tens})} = \frac{\Delta T}{T_0}\sum_{r=1,r\neq i}^{n}\frac{\psi_r^T\mathbf{K}^{(\text{tens})}\psi_i}{\lambda_i - \lambda_r}\psi_r \tag{6.18}$$

– $\Delta\lambda_i^{(d)}$, $\Delta\psi_i^{(d)}$ sont dus à l'endommagement

$$\Delta\lambda_i^{(d)} = \psi_i^T(\Delta\mathbf{K}^{(d)} - \lambda_i\Delta\mathbf{M}^{(d)})\psi_i \tag{6.19}$$

$$\Delta\psi_i^{(d)} = -\frac{\psi_i^T\Delta\mathbf{M}^{(d)}\psi_i}{2}\psi_i + \sum_{r=1,r\neq i}^{n}\frac{\psi_r^T(\Delta\mathbf{K}^{(d)} - \lambda_i\Delta\mathbf{M}^{(d)})\psi_i}{\lambda_i - \lambda_r}\psi_r \tag{6.20}$$

Notons $\ell = [\lambda_1 \;\; \lambda_2 \;\; \ldots \;\; \lambda_n]^T$, "vecteur des valeurs propres", nous pouvons écrire alors :

$$\Delta\ell \approx \Delta\ell^{(\text{tens})} + \Delta\ell^{(d)} = \frac{\Delta T}{T_0}\ell^{(\text{tens})} + \Delta\ell^{(d)} \tag{6.21}$$

$$\ell^{(\text{tens})} = \begin{bmatrix} \psi_1^T \mathbf{K}^{(\text{tens})} \psi_1^T \\ \psi_2^T \mathbf{K}^{(\text{tens})} \psi_2^T \\ \cdots \\ \psi_n^T \mathbf{K}^{(\text{tens})} \psi_n^T \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad \Delta\ell^{(d)} = \begin{bmatrix} \psi_1^T \Delta\mathbf{M}^{(d)} \psi_1^T \\ \psi_2^T \Delta\mathbf{M}^{(d)} \psi_2^T \\ \cdots \\ \psi_n^T \Delta\mathbf{M}^{(d)} \psi_n^T \end{bmatrix} \tag{6.22}$$

Chapitre 7

Applications aux données expérimentales

Dans ce chapitre, nous présentons des applications de deux méthodes de détection et de localisation de défaut. La première est fondée sur la variation relative des fréquences et la deuxième utilise la SVD. Chacune de ces méthodes a été testée pour deux séries d'expériences : l'une effectuée sur le câble de Nantes et l'autre effectuée sur la poutre avec tension de l'ENPC.

7.1 Le câble de Nantes

Les essais sur le câble de Nantes ont été présentés au 3.1.1. En résumé, nous avons fait 540 tests dont les 180 premiers essais portaient sur l'état sain, les 180 essais suivant sur l'état 1 (avec une rupture d'un fil sur sept à l'abscisse $x_1 = 1.22m$) et les 180 derniers essais sur l'état 2 (avec un deuxième défaut ajouté, une rupture d'un fil à l'abscisse $x_2 = 2.97m$). La tension est imposée par un vérin et la Fig. 7.1 représente son évolution au cours des essais.

Nous avons utilisé deux méthodes pour identifier les paramètres modaux : la méthode de "peak-picking" et la transformation en ondelettes (TO). Pour détecter et localiser le défaut nous avons appliqué chacune des deux méthodes proposés : la première fondée sur la variation relative des fréquences et la deuxième utilisant la SVD.

7.1.1 Identification des paramètres modaux

7.1.1.1 Méthode de peak-picking

Sur la Fig. 7.2, nous présentons les résultats de la FFT du test numéro 41, c'est à dire le premier test de la série 5, pour 3 états (état sain, état1 et état2). Nous remarquons que les fréquences sont bien découplées et le comportement du câble paraît linéaire. Nous remarquons aussi que le quatrième mode est très peu excité parce que la position du marteau est proche d'un noeud de ce mode $\frac{L}{4} = \frac{5.125}{4} \approx 1.225$.

Sur la Fig. 7.3 nous traçons l'évolution des six premières fréquences propres qui sont mesurées par la méthode "peak-picking". Nous trouvons qu'il y un saut ou une chute de fréquence et aussi de tension au niveau des essais 180 et 360. Cependant, la question qui se pose est " Est-ce que le saut de fréquence est dû à l'endommagement (modifications physiques comme masse ou rigidité) ou seulement dû au saut de la tension ?"

Sur la Fig. 7.4, en trait continu bleu sont tracés les 6 premiers modes théoriques de l'état sain calculés par FEM. Ensuite, les points bleus représentent les modes identifiées par la méthode de "peak-picking" pour les 180 essais de l'état sain. Puis les points verts correspondent aux 180 essais de l'état 1 et les points rouges aux 180 essais de l'état 2. Les 9 capteurs n'ont pas pu être répartis sur toute la longueur du câble ce qui explique qu'il n'y ait pas de points tout le long du câble.

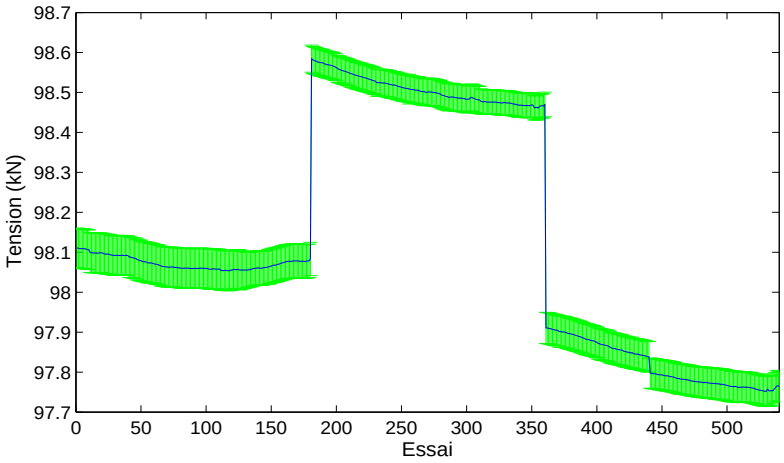
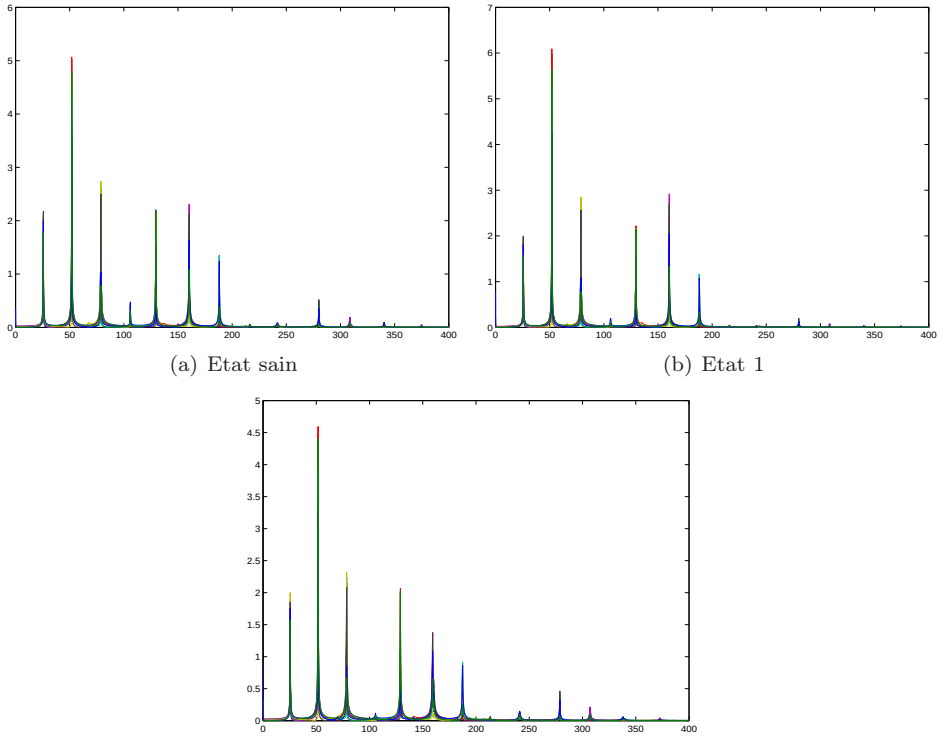


FIG. 7.1 – Evolution de la tension (en bleu) avec écarte-type (en vert) en fonction des essais



(a) Etat sain

(b) Etat 1

(c) Etat 2

FIG. 7.2 – Résultats de la FFT du test numéro 41 avec choc du marteau à l'abscisse $1.225m$

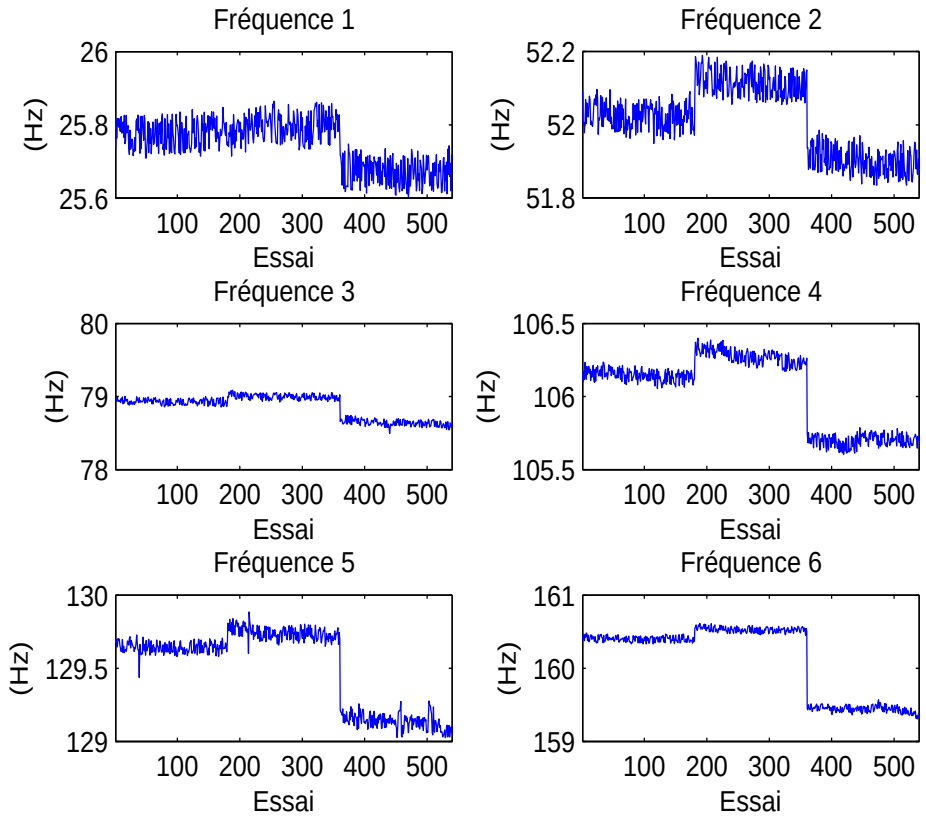


FIG. 7.3 – Six premières fréquences propres calculées par la méthode "peak-picking"

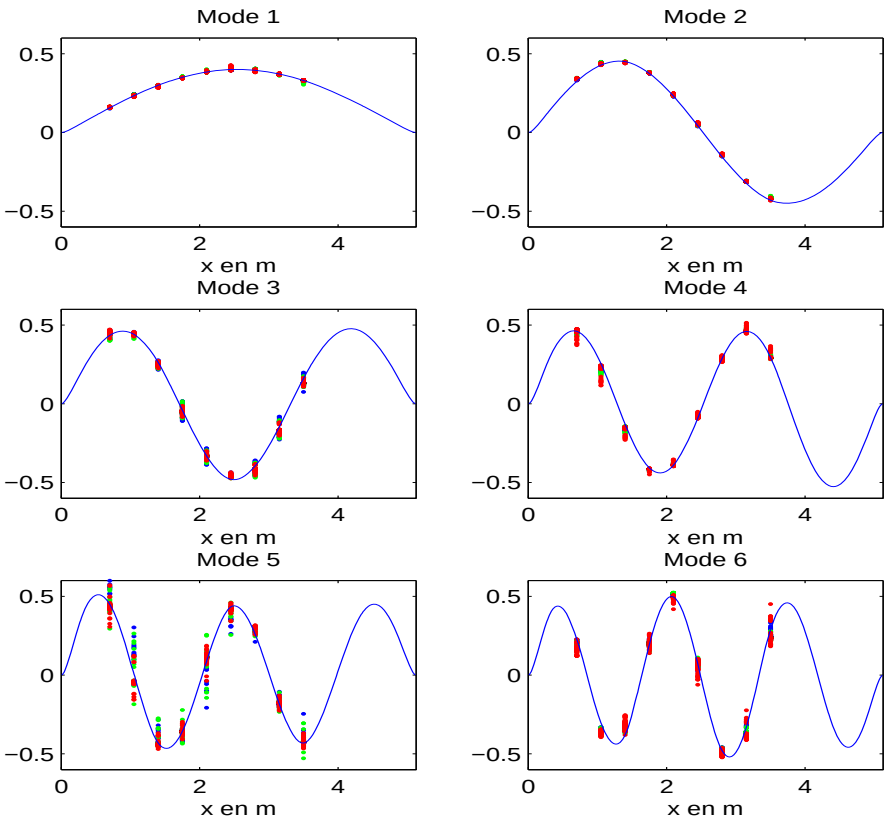
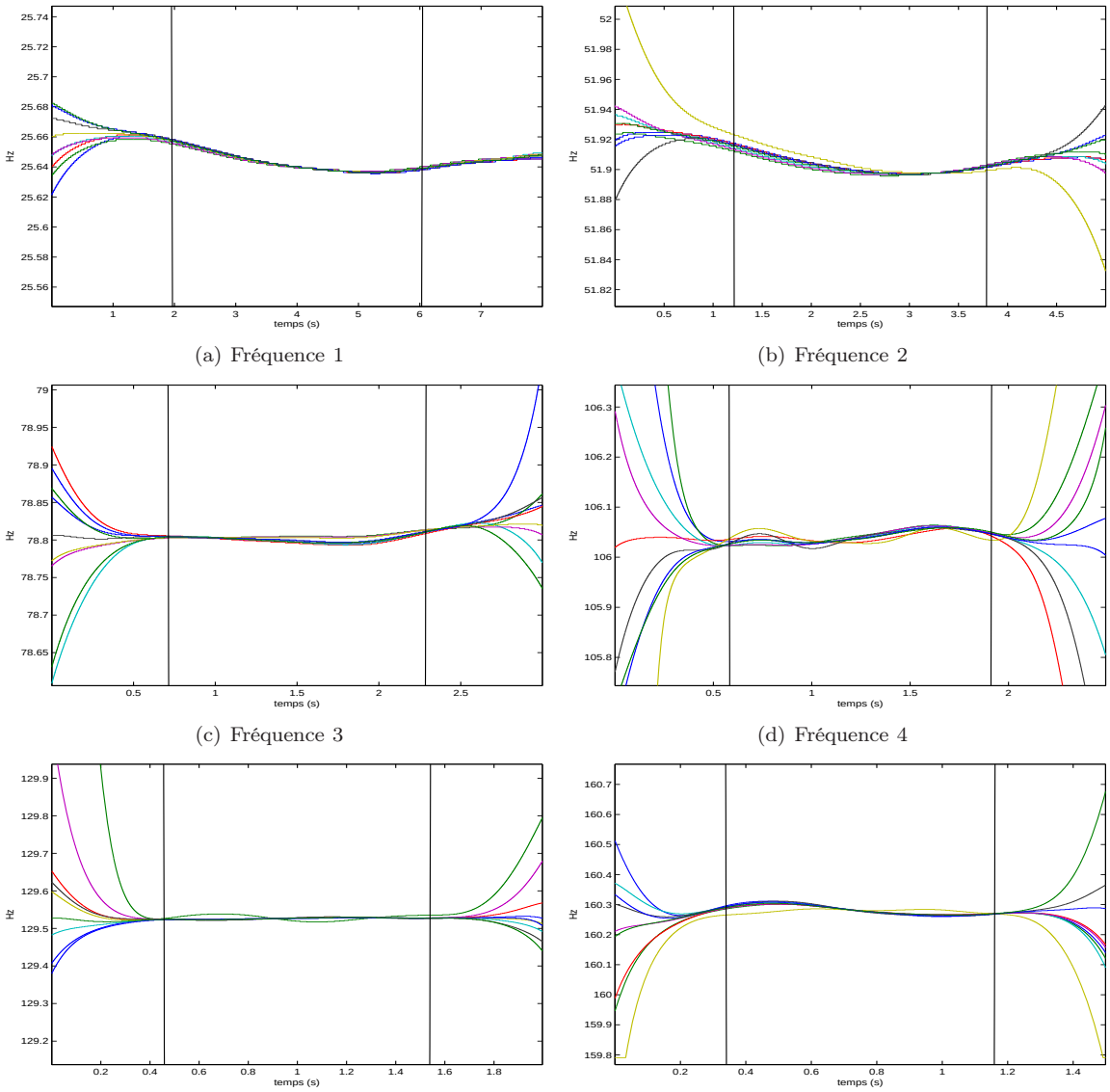


FIG. 7.4 – Six premiers modes propres théoriques calculés par la FEM (trait continu bleu) et les modes identifiés par la méthode de "peak-picking" de 540 essais dont 180 essais de l'état sain (points . bleus), 180 essais de l'état 1 (points . verts) et 180 essais de l'état 2 (points . rouges)

7.1.1.2 Méthode fondée sur la TO

En regardant les résultats de la TO du test numéro 41 de 3 états (Fig.7.5, 7.6, 7.7), nous trouvons que le comportement du câble est quasiment linéaire et la perturbation des fréquences au cours du temps d'un essai est inférieure à 0.1%. La perturbation plus nette pour la quatrième fréquence à l'état 1 (Fig. 7.6d) vient du fait que le quatrième mode n'est pas bien excité (Fig. 7.2b). Si nous regardons les résultats de TO du câble à l'état 1 de l'autre test, par exemple test numéro 71 (Fig. 7.8), il y a très peu de perturbation de la quatrième fréquence mais il y a beaucoup de perturbation de la troisième fréquence car le troisième mode n'est pas bien excité (la position de la force est proche d'un noeud du troisième mode $\frac{L}{3} \approx 1.75m$).

Nous présentons sur la Fig. 7.9 l'évolution de la deuxième, troisième et quatrième fréquence pour les 360 premiers essais (dont 180 à l'état sain et 180 à l'état 1) et sur la Fig.7.10 la collection de modes correspondants aux 360 essais.



(a) Fréquence 1

(b) Fréquence 2

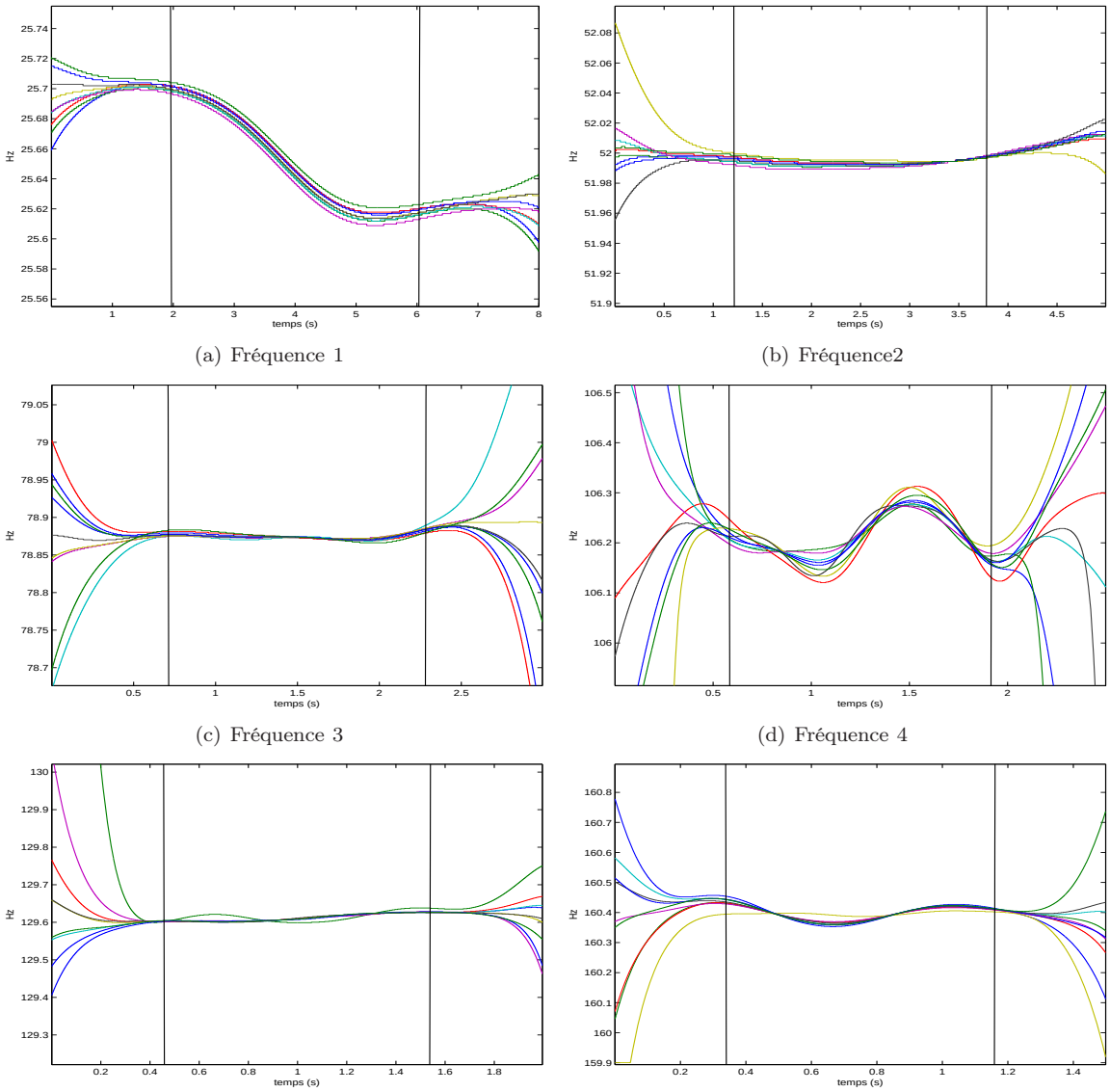
(c) Fréquence 3

(d) Fréquence 4

(e) Fréquence 5

(f) Fréquence 6

FIG. 7.5 – Résultats de la TO du test numéro 41 de l'état sain



(a) Fréquence 1

(b) Fréquence2

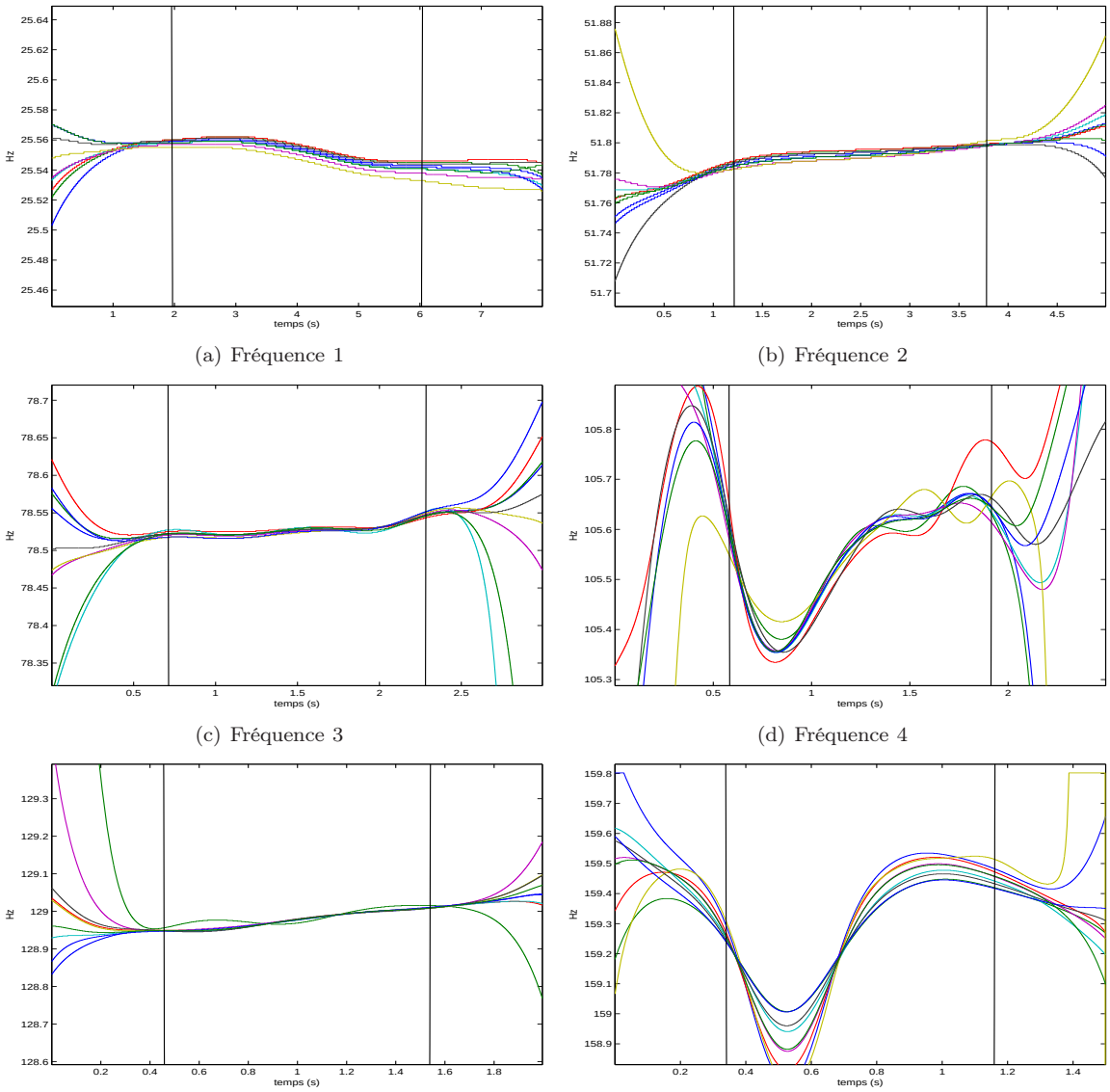
(c) Fréquence 3

(d) Fréquence 4

(e) Fréquence 5

(f) Fréquence 6

FIG. 7.6 – Résultats de la TO du test numéro 41 de l'état 1



(a) Fréquence 1

(b) Fréquence 2

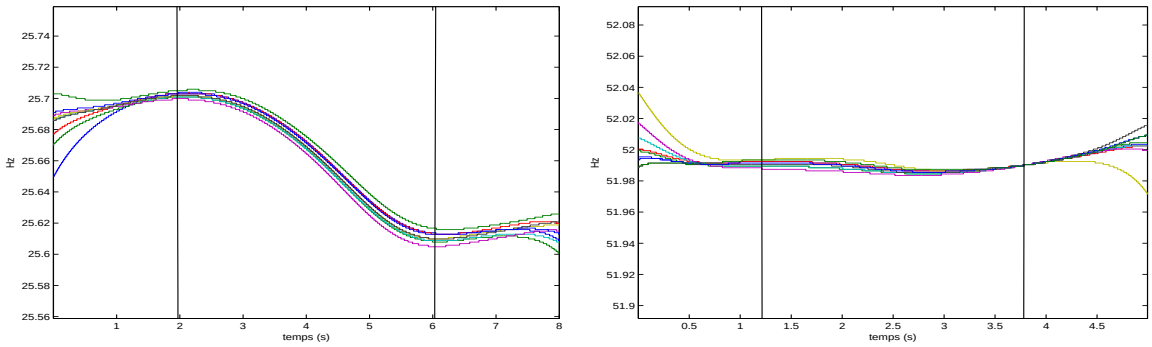
(c) Fréquence 3

(d) Fréquence 4

(e) Fréquence 5

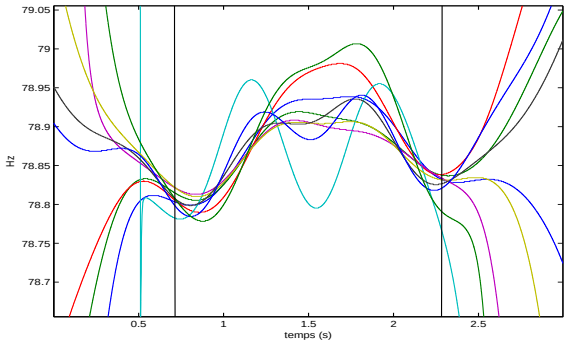
(f) Fréquence 6

FIG. 7.7 – Résultats de la TO du test numéro 41 de l'état 2

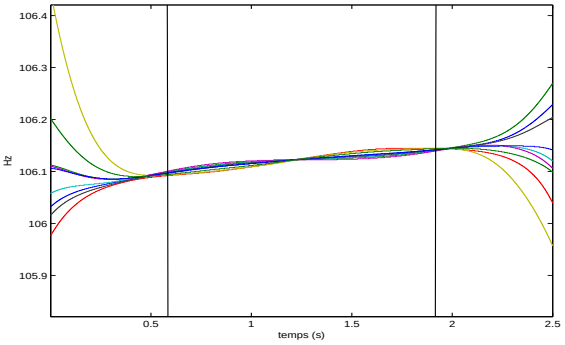


(a) Fréquence 1

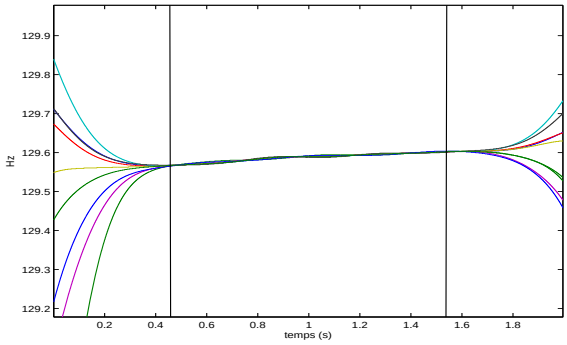
(b) Fréquence 2



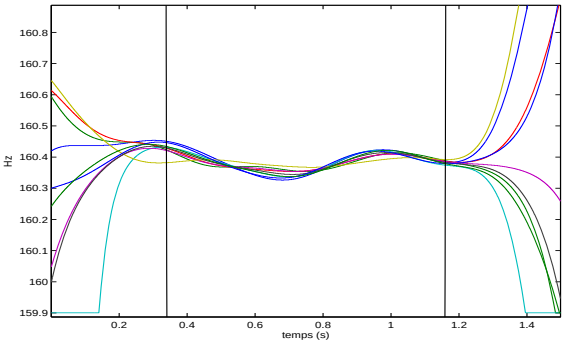
(c) Fréquence 3



(d) Fréquence 4

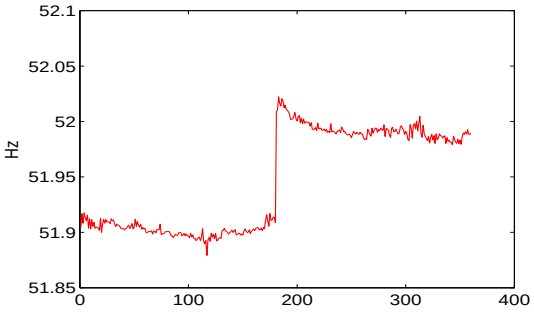


(e) Fréquence 5

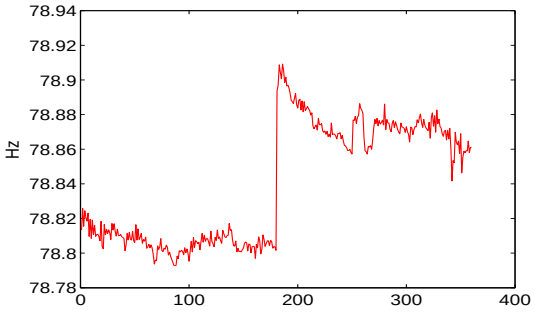


(f) Fréquence 6

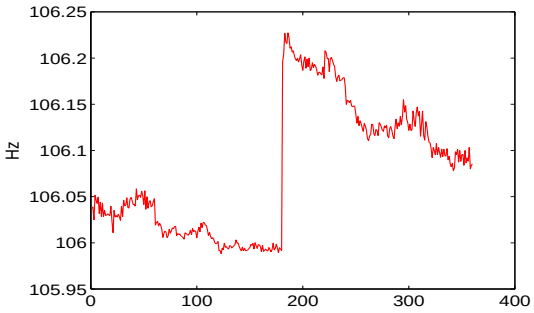
FIG. 7.8 – Résultats de la TO du test numéro 71 (premier essai de la série 8) de l'état 1, choc à l'abscisse $1.75m$



(a) Fréquence 2

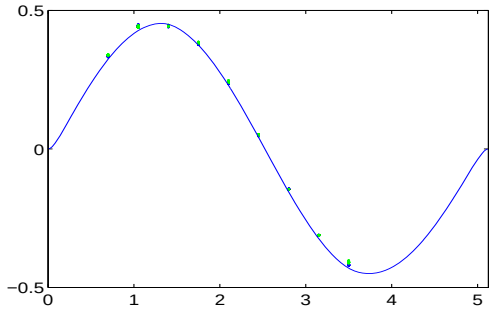


(b) Fréquence 3

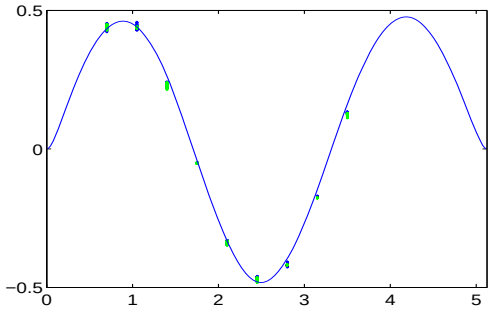


(c) Fréquence 4

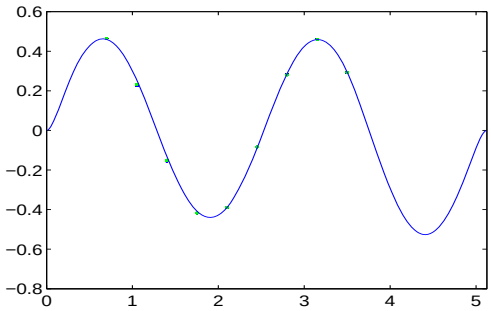
FIG. 7.9 – Evolution des fréquences propres de 360 essais dont 180 essais à l'état 0, 180 essais à l'état 1



(a) Mode 2



(b) Mode 3



(c) Mode 4

FIG. 7.10 – Collection des modes propres de 360 essais dont 180 essais à l'état 0 (points . en bleu), 180 essais à l'état 1 (points . en vert) et les modes théoriques calculés par FEM (courbes en bleu)

7.1.2 Détection et localisation par la méthode fondée sur la variation relative des fréquences

7.1.2.1 Détection

Dans ce paragraphe, nous présentons les résultats de détection et de localisation en utilisant la méthode fondée sur la variation relative des fréquences.

Les fréquences utilisées ici sont calculées par la méthode de "peak-picking" (Fig. 7.3). Nous remarquons qu'il y un saut (ou une chute) de fréquence à l'essai 180 et à l'essai 360. Cependant, on ne sait pas si cela est du à l'endommagement ou seulement au saut (ou à la chute) de la tension.

Nous calculons $R^{(i)}(n) = \frac{\Delta f_n^{(i)}}{f_n} - \frac{1}{2(1+\gamma_n)}\frac{\Delta T^{(i)}}{T}$ qui représente la différence entre la variation relative totale de la fréquence et la variation relative de la fréquence du à la variation de la tension. Autrement dit, $R^{(i)}(n)$ représente la variation relative de la fréquence du aux modifications physiques. Dans la Fig.7.11, nous traçons pour $n = 1, ..6$ la quantité $R^{(i)}(n)$ (en %) en fonction de i, le numéro de l'essai. Nous observons en $i = 180$ et $i = 360$ des chutes, particulièrement nettes pour n=5 et n=6. Nous pouvons donc confirmer qu'il y a l'apparition du premier défaut au niveau d'essai 180 et du deuxième défaut au niveau de l'essai 360.

7.1.2.2 Localisation

D'après les résultats de détection, nous pouvons distinguer 540 essais par 3 états : l'état sain (180 premiers essais), l'état 1 avec un premier défaut ajouté (180 essais suivant) et l'état 2 avec le premier défaut et un deuxième ajouté.

Nous calculons $\Delta^r(n)$, qui est définie dans Eq.5.43 :

$$\Delta^r(n) = \overline{R}^{\text{état } r}(n) - \overline{R}^{\text{état } r-1}(n) \tag{7.1}$$

avec $\overline{R}^{\text{état } r}(n)$, la valeur moyenne de $R^{(i)}(n)$ pour tous les essais de l'état r.

$\Delta^r(n)$ représente la variation relative de la fréquence n dues à un seul défaut r. Sur le Tab. 7.1, nous

présentons $\Delta^r(n)$ $(n = 1, ..6)$ pour $r = 1, 2$ correspondant au premier et au deuxième défaut.

n	1	2	3	4	5	6
$\Delta^1(n)$	-0.14	-0.04	-0.12	-0.09	-0.13	-0.13
$\Delta^2(n)$	-0.14	-0.07	-0.12	-0.21	-0.13	-0.35

TAB. 7.1 – $\Delta^r(n)$(en %), avec $r = 1, 2$ correspondant à deux défauts

Sur les Fig.7.12, 7.13, nous traçons la fonction $Q_l(x)$ (avec $l = 3..6$) pour deux défauts. Les résultats ne nous permettent pas de localiser le défaut. Cela peut être expliqué par la raison suivante : La méthode de localisation que nous avons proposée utilise l'hypothèse que l'endommagement est concentré (autrement dit la taille $\Delta L \ll L$). Dans le cas de la fissure d'un fil, cette hypothèse peut ne pas être vérifiée (cf. 3.3.2).

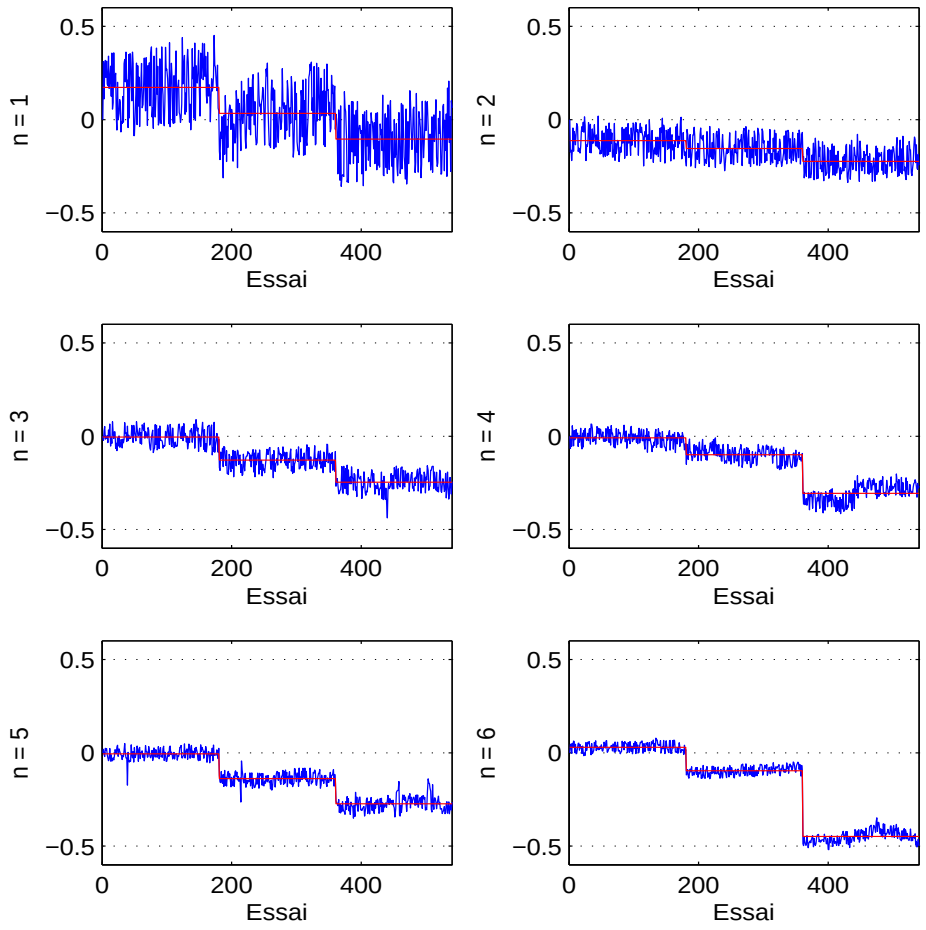


FIG. 7.11 – Evolution de $R^{(i)}(n) = \dfrac{\Delta f_n^{(i)}}{f_n} - \dfrac{1}{2(1+\gamma_n)}\dfrac{\Delta T^{(i)}}{T}$ (en %) en fonction de i ($i = 1, ..540$)

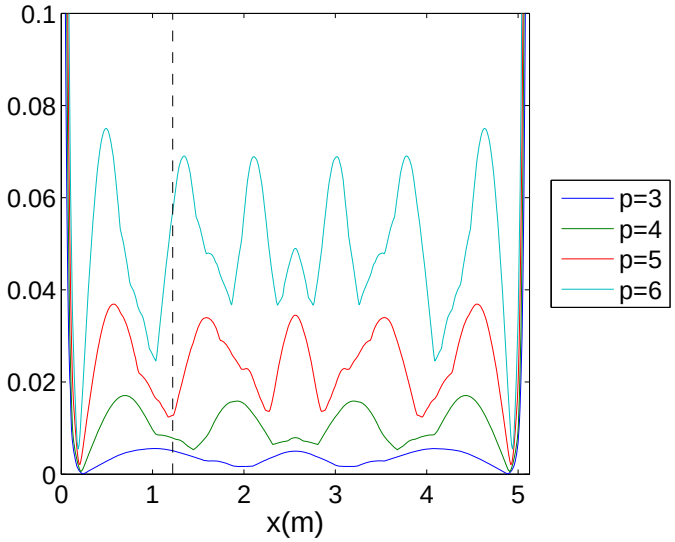


FIG. 7.12 – $Q_l(x)$ (avec $l = 3, ..6$) pour le premier endommagement (position réelle $x_{01} = 1.22m$)

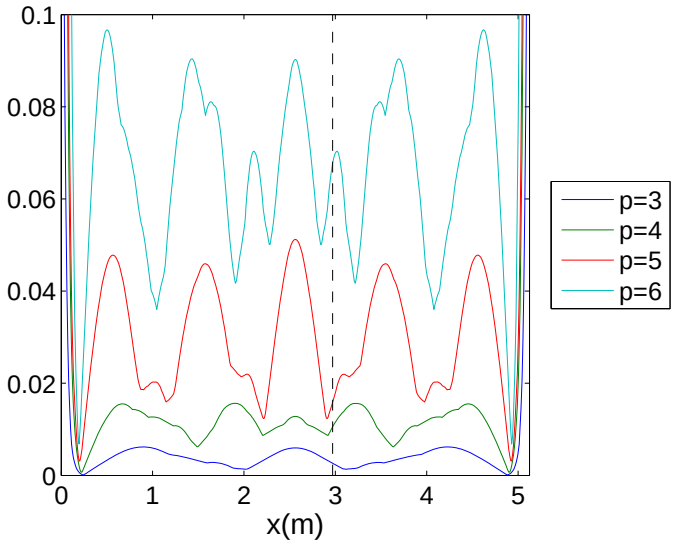


FIG. 7.13 – $Q_l(x)$ (avec $l = 3, ..6$) pour le deuxième endommagement (position réelle $x_{02} = 2.97m$)

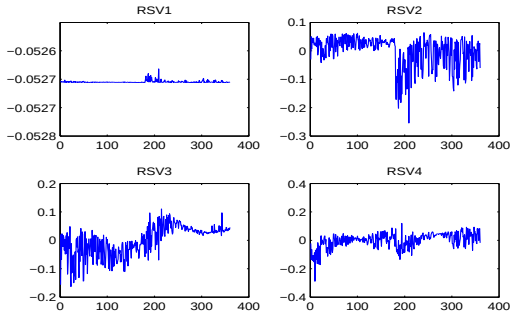
7.1.3 Détection et localisation par la méthode utilisant la SVD

L'application de la SVD sur la matrice des fréquences permet de détecter le changement des fréquences du au défaut (qui reste permanent après l'apparition du défaut) même si ce changement est noyé dans l'évolution aléatoire des fréquences lié en partie à la variation de la tension. A l'oeil nu, nous pouvons voir déjà l'instant où apparait le changement brutal des fréquences (Fig. 7.3 ,7.9) mais on ne sait pas si cet effet est dû au changement brutal de la tension ou dû au défaut. Donc, ici, nous n'avons pas d'intérêt à utiliser la SVD sur la matrice des fréquences.

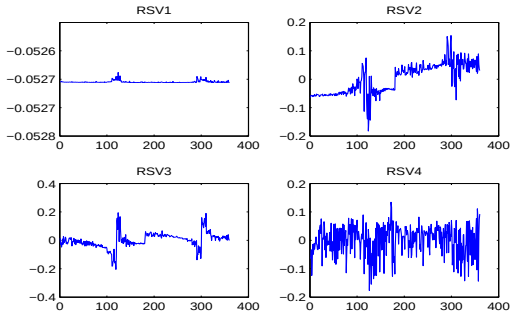
Avec les déformées modales (Fig. 7.4, 7.10), à l'oeil nu nous ne pouvons pas détecter l'endommagement. Nous allons donc appliquer la SVD sur la matrice des déformées modales pour détecter l'endommagement.

Sur les Figs. 7.14(a), 7.14(b), 7.14(c) et 7.14(d), nous traçons les vecteurs singuliers à droite respectivement de la collection du premier mode, du deuxième mode, du troisième mode et du quatrième mode des 360 premiers essais (dont 180 de l'état sain et 180 de l'état 1) qui sont calculés par la méthode de "peak-picking". Nous n'arrivons pas à détecter l'endommagement.

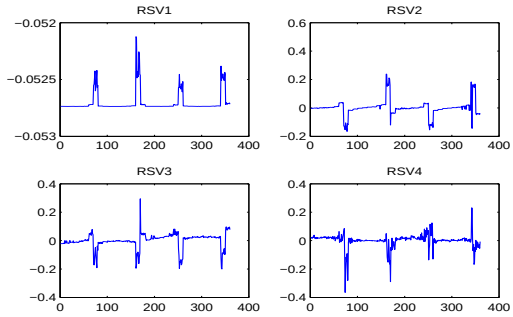
Nous traçons sur les Figs. 7.15(a), 7.15(b) et 7.15(c), les vecteurs singuliers à droite respectivement de la collection du deuxième mode, troisième mode et du quatrième mode de 360 premiers essais qui sont calculés par la méthode de TO. Avec le collection du deuxième et du quatrième mode, nous pouvons détecter l'endommagement qui apparait vers l'essai numéro 180. Nous traçons ensuite les vecteurs singuliers à gauche (Fig.7.16). Nous n'arrivons pas à localiser l'endommagement dont la position réelle est à l'abscisse $1.22m$. Cela peut être expliqué par le nombre limité des capteurs (9 capteurs). Rappelons que, dans l'application numérique au 6.2.2, nous avons pas pu non plus localiser l'endommagement avec 9 capteurs.



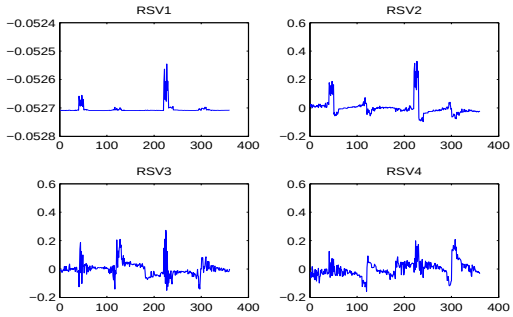
(a) RSVs de la collection du premier mode



(b) RSVs de la collection du deuxième mode

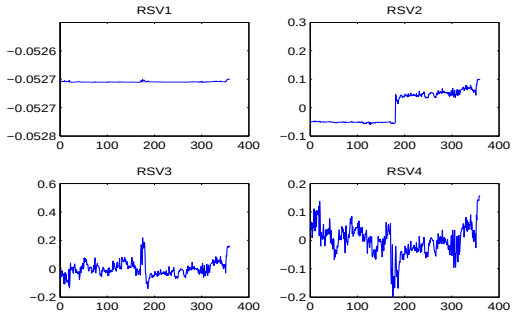


(c) RSVs de la collection du troisième mode

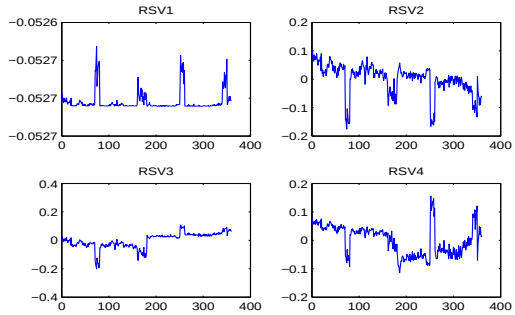


(d) RSVs de la collection du quatrième mode

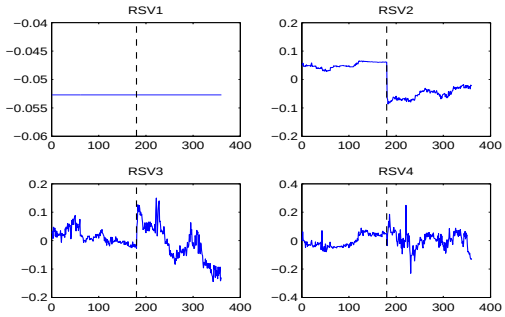
FIG. 7.14 – Quatre premiers vecteurs singuliers à droite (RSV : right singular vector) de la matrice de collection des déformées modales calculées par la méthode de "peak-picking"



(a) RSVs de la collection du deuxième mode

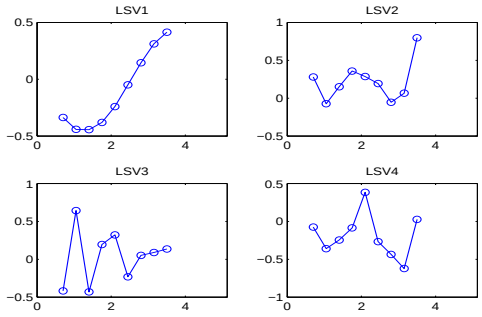


(b) RSVs de la collection du troisième mode

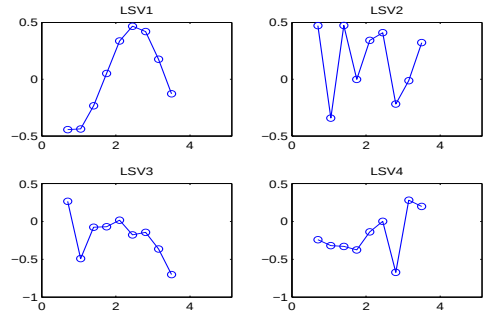


(c) RSVs de la collection du quatrième mode

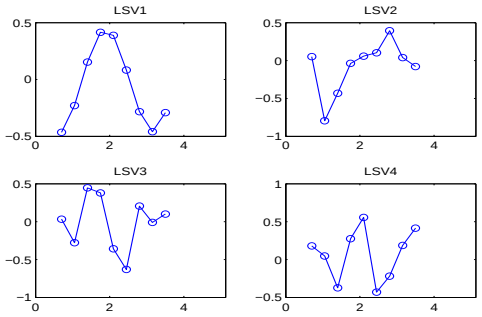
FIG. 7.15 – Quatre premiers vecteurs singuliers à droite (RSV : right singular vector) de la matrice de collection des déformées modales calculées par la méthode de TO



(a) RSVs de la collection du deuxième mode



(b) RSVs de la collection du troisième mode



(c) RSVs de la collection du quatrième mode

FIG. 7.16 – Quatre premiers vecteurs singuliers à gauche (LSV : left singular vector) de la matrice de collection des déformées modales calculées par la méthode de TO

7.2 La poutre avec tension de l'ENPC

Les essais la poutre avec tension de l'ENPC sont présentés au 3.1.2. En résumé, nous avons fait 660 essais dont 300 premiers essais à l'état sain, ensuite 120 essais à l'état 1 (avec une première entaille à l'abscisse $x_1 = 270mm$), puis 120 essais à l'état 2 (avec un deuxième défaut ajouté à l'abscisse $x_2 = x_1 = 270mm$) et enfin 120 derniers essais à l'état 3 (avec un troisième défaut ajouté à l'abscisse $x_3 = 68mm$). La Fig.7.17 représente l'évolution de la tension dans la poutre en fonction des essais.

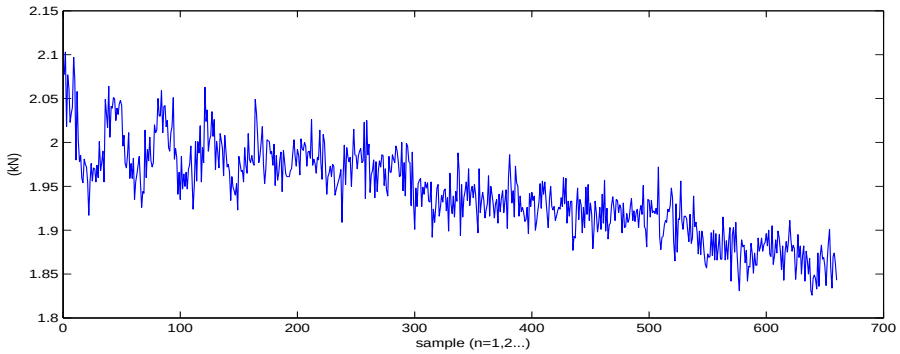


FIG. 7.17 – Evolution de la tension dans la poutre

7.2.1 Identification des paramètres modaux

7.2.1.1 Méthode de "peak-picking"

Sur la Fig. 7.18 nous traçons l'évolution de six premières fréquences propres qui sont calculées par la méthode du "peak-picking".

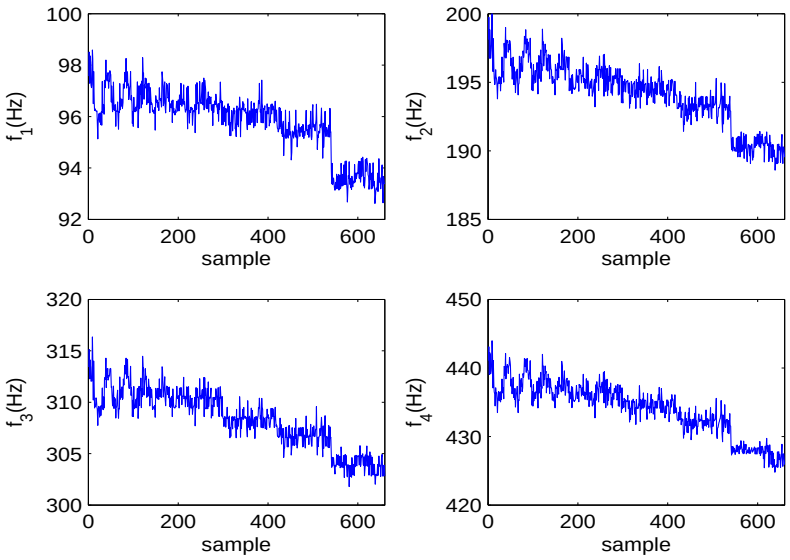
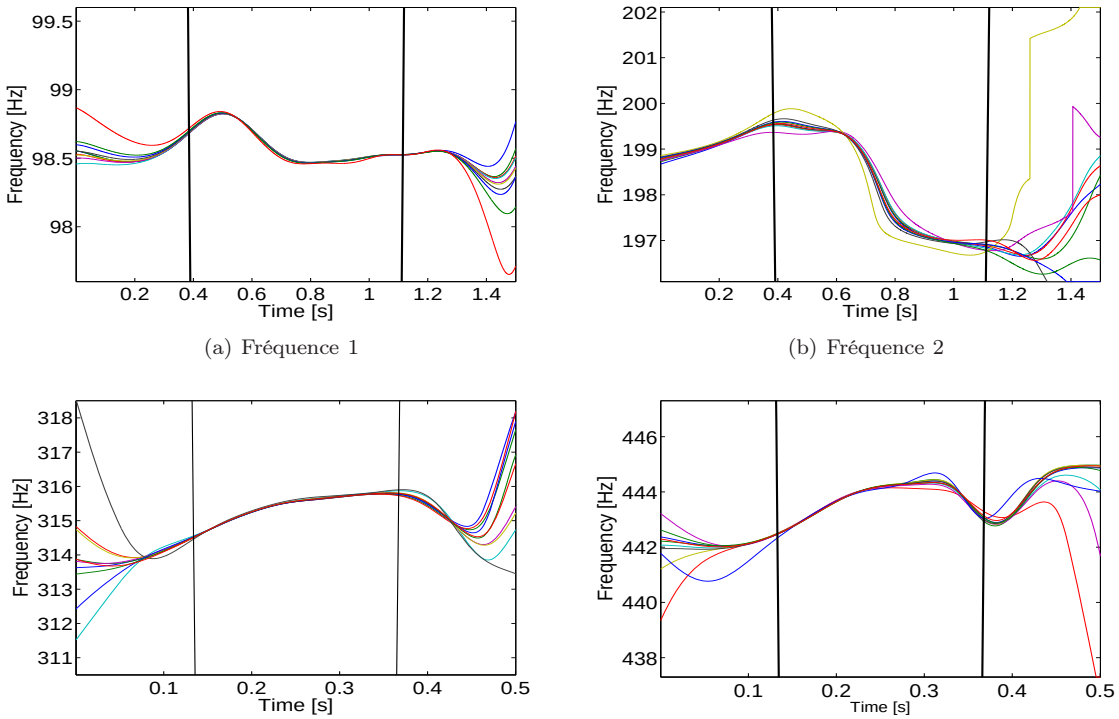


FIG. 7.18 – Evolution des fréquences

7.2.1.2 Méthode fondée sur la TO

En regardant les résultats de la TO appliquée à un test de l'état sain (Fig.7.19), nous trouvons que le comportement de la poutre est plutôt non linéaire et que la variation des fréquences au cours du temps est assez importante, supérieure à 1%.



(a) Fréquence 1

(b) Fréquence 2

(c) Fréquence 3

(d) Fréquence 4

FIG. 7.19 – Résultats de la TO d'un test à l'état sain

7.2.2 Détection et localisation par la méthode fondée sur la variation relative des fréquences

7.2.2.1 Détection

En observant l'évolution des fréquences (Fig. 7.18), nous notons bien deux chutes de fréquence assez nettes aux essais 420 et 540. Cependant, en observant l'évolution de la tension, en Fig.7.17, nous ne voyons pas de chute de tension. Donc, à l'oeil nu, nous pouvons déjà détecter les deux derniers endommagements.

Maintenant, nous appliquons la méthode de détection fondée sur la variation relative des fréquences.

Nous traçons pour différents $n = 1, ..6$, $R^{(i)}(n) = \dfrac{\Delta f_n^{(i)}}{f_n} - \dfrac{1}{2(1+\gamma_n)}\dfrac{\Delta T^{(i)}}{T}$ (en %) en fonction de i, le numéro d'essai ($i = 1, ..660$) (Fig.7.20). Nous détectons, sur le deuxième mode, 4 instants différents : essais n° 180, 300, 420, 540. Les trois derniers instants détectés correspondent bien aux instants où nous avons ajouté des entailles. Cependant, au premier instant détecté (essai n°180), il n'y a pas eu d'entaille en réalité. Cet instant détecté peut être lié à d'autres modifications, comme par exemple la modification des conditions aux bords...

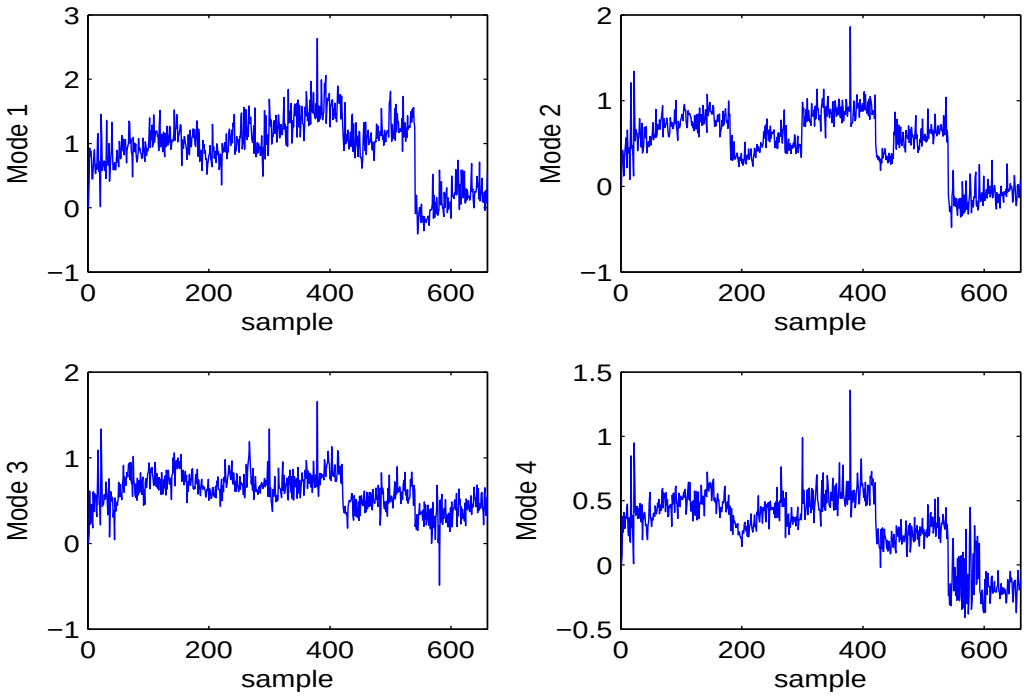


FIG. 7.20 – Evaluation de $R^{(i)}(n) = \dfrac{\Delta f_n^{(i)}}{f_n} - \dfrac{1}{2(1+\gamma_n)}\dfrac{\Delta T^{(i)}}{T}$ (avec $n = 1, ..4$) en % en fonction de i, le numéro d'essai ($i = 1, ..660$)

7.2.2.2 Localisation

Nous nous intéressons à la localisation du deuxième et du troisième défaut. Nous déterminons la moyenne de $R^{(i)}(n)$ pour chaque état (Fig.7.21).

Nous calculons $\Delta^r(n) = \overline{R}^{\text{état } r}(n) - \overline{R}^{\text{état } r-1}(n)$ qui représente la variation relative de la fréquence n due à un seul défaut r. Sur le Tab. 7.1, nous présentons $\Delta^r(n)$ $(n = 1, ..6)$ pour $r = 1, 2$ correspondant au deuxième et au troisième défaut.

Sur les Fig.7.22, 7.23, nous traçons la fonction $Q_l(x)$ (avec $l = 2, ..4$) pour le deuxième et le troisième défaut. Les résultats ne nous permettent pas de localiser le défaut. En effet, la méthode utilisée est fondée sur l'estimation au premier ordre de la variation relative des fréquences en fonction du changement (tension, masse, rigidité) pour le modèle linéaire d'une poutre avec tension. Cependant, les analyses en TO montrent que la poutre ne se comporte pas de façon linéaire. A l'état sain, pendant un essai, la variation des fréquences peut atteindre 1%, ce qui n'est pas négligeable par rapport à la variation relative des fréquences entre 2 essais.

n	1	2	3	4
$\Delta^2(n)$	-0.29	-0.34	-0.22	-0.30
$\Delta^3(n)$	-1.03	-0.65	-0.15	-0.39

TAB. 7.2 – $\Delta^r(n)$(en %), avec $r = 1, 2$ correspondant aux deux derniers défauts

7.2.3 Détection et localisation par la méthode utilisant la SVD

Comme nous l'avons mentionné, en regardant l'évolution des fréquences, nous pouvons détecter les deux derniers endommagements. Pour détecter les endommagements nous allons maintenant appliquer la SVD sur la matrice de collection des fréquences propres des 420 premiers essais. Les résultats de la SVD (Fig. 7.24) permettent de détecter deux autres instants différents : essais n° 180 et 300 dont le premier détecté (essai n°180) n'est pas lié à une modification physique réelle. Nous avons les mêmes résultats de détection que par la méthode utilisant la variation relative des fréquences.

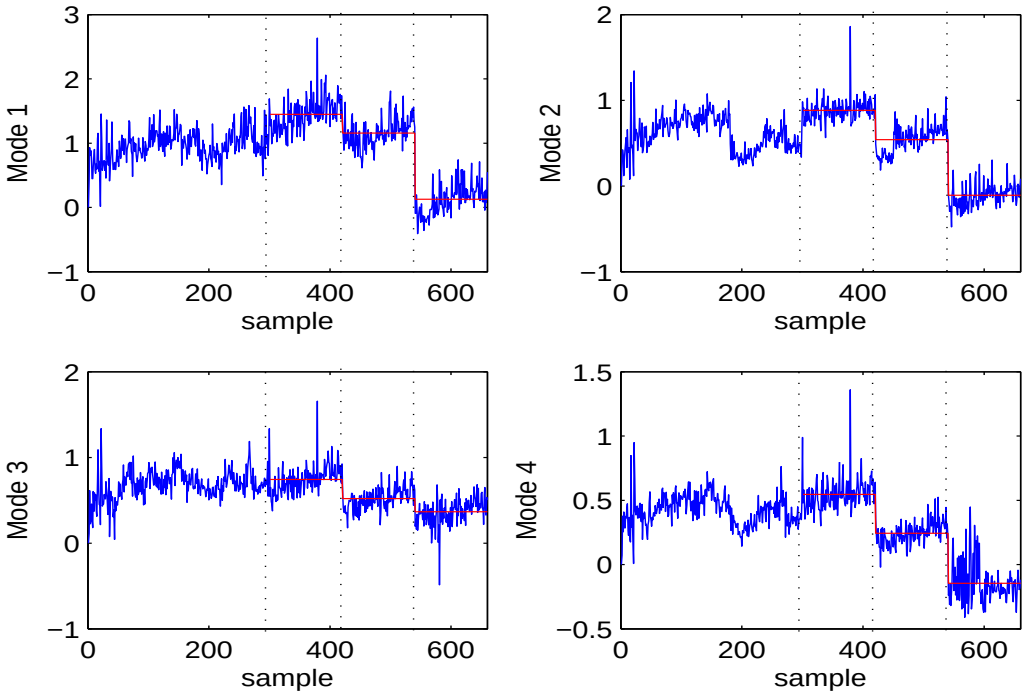


FIG. 7.21 – Evaluation de $R^{(i)}(n)$ en % en fonction de i (courbes en bleu) et les moyennes $\overline{R}^{\text{état } r}(n)$ pour les essais d'un même état (lignes en rouge)

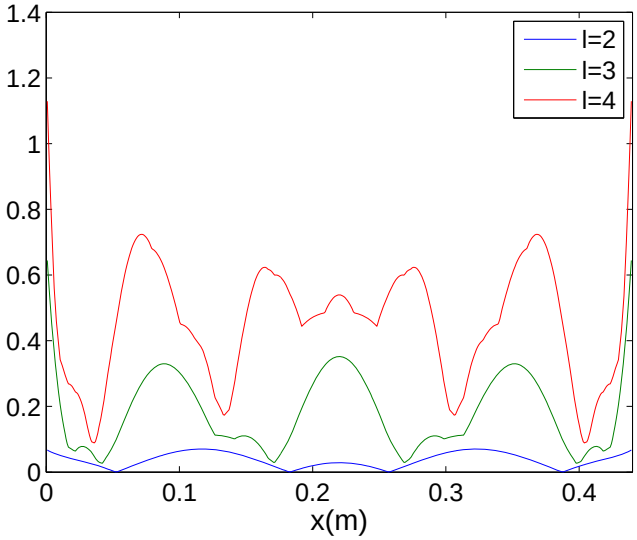


FIG. 7.22 – $Q_l(x)$ (avec $l = 2, 3, 4$) pour le deuxième endommagement (position réelle $x_{02} = 0.27mm$)

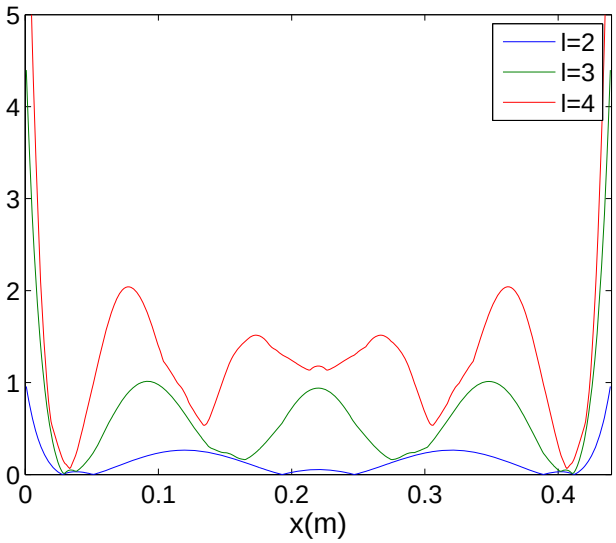
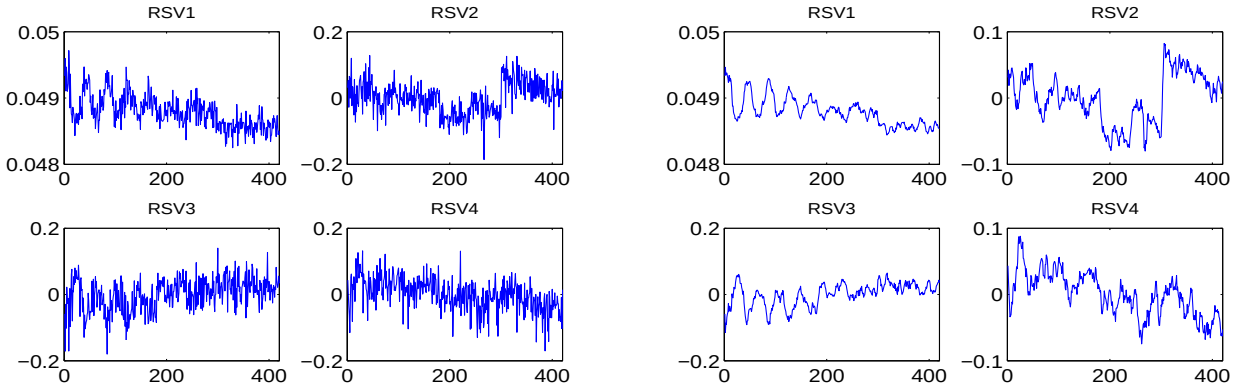


FIG. 7.23 – $Q_l(x)$ (avec $l = 2, 3, 4$) pour le troisième endommagement (position réelle $x_{03} = 0.068m$)



(a) Quatre premiers vecteurs singuliers à droite de la collection des 4 premières fréquences des 420 premiers essais

(b) Les moyennes mobiles simples sur 5 valeurs pour les vecteurs singuliers à droite

FIG. 7.24 – Quatre premiers vecteurs singuliers à droite (RSV : right singular vector) de la collection des 4 premières fréquences des 420 premiers essais

7.3 Conclusion

Nous avons appliqué deux méthodes de détection et de localisation sur des données expérimentales : le câble de Nantes et la poutre de l'ENPC. Pour ces deux expériences, les deux méthodes nous permettent de détecter l'endommagement cependant nous ne pouvons pas le localiser.

La méthode de localisation fondée sur la variation relative des fréquences ne marche pas pour la poutre de l'ENPC car cette méthode utilise l'estimation au premier ordre de la variation des fréquences en fonction des changements (tension, masse, rigidité) du modèle linéaire de poutre avec tension. Or, les résultats d'analyse en TO montrent que la poutre ne se comporte pas de façon linéaire. La perturbation des fréquences pendant un essai n'est pas négligeable par rapport à la variation des fréquences entre deux essais. De plus, nous pensons que cette méthode ne marche pas sur le câble de Nantes car la localisation obtenue avec cette méthode se fonde sur l'hypothèse que l'endommagement est bien localisé ou concentré or la rupture d'un fil sur sept d'un monotoron peut entrainer des modifications dans une zone assez large (l'ouverture due à la rupture du fils et deux zones de réancrages de part et d'autre).

La localisation par la méthode utilisant la SVD ne donne pas de bons résultats sur le câble de Nantes car le nombre de capteurs n'est pas suffisant. L'application numérique au 6.2.2 a déjà montré qu'avec 9 capteurs, nous ne pouvons pas localiser l'endommagement.

Donc, pour valider la localisation avec ces deux méthodes expérimentalement, il faudrait refaire des essais avec plus de capteurs sur le câble (par exemple 20 capteurs) et avec une poutre au comportement plus linéaire. De plus, les endommagements créés doivent être de petite taille.

Conclusion générale et perspectives

L'objectif principal de la thèse était de mettre au point des méthodes pour détecter, localiser, quantifier et suivre l'évolution de l'endommagement dans les câbles courts (par exemple des suspentes des ponts suspendus) à partir de réponses vibratoires.

Afin de modéliser ces câbles, nous avons choisi le modèle de la poutre d'Euler-Bernoulli avec tension. Il permet de modéliser une large gamme de structures allant de la corde sans rigidité de flexion ($\xi = \sqrt{\frac{EI}{TL^2}}$ tend vers 0) à la poutre sans tension (ξ tend vers l'infini) en passant par le câble.

Nous nous sommes intéressés aux variations des paramètres modaux pour différentes conditions aux bords. Expérimentalement, il est cependant difficile de bien maîtriser les conditions aux bords. Ainsi, il est intéressant de savoir que plus ξ est petit, proche d'une corde, moins les différences des déformées modales dues aux conditions aux bords sont importantes.

L'identification des modes propres à partir de la réponse libre étant nécessaire, nous nous sommes intéressés à ce problème. Nous avons présenté en particulier deux méthodes : la POD et la SOD. Comme la POD ne permet pas d'obtenir les fréquences et qu'elle nécessite des conditions restrictives pour identifier les déformées modales, nous avons plus particulièrement étudié la SOD. La SOD permet, sous certaines conditions, d'identifier à la fois les fréquences et les déformées modales. Nous avons étudié numériquement et expérimentalement les performances de la SOD. La précision des résultats augmente avec le nombre de points de mesure et avec une bonne répartition de ces points le long de la structure.

Il existe d'autres méthodes permettant d'identifier les modes propres comme, par exemple, la transformée en ondelettes (particulièrement utile dans les cas non-linéaires ou pour suivre l'évolution des fréquences instantanées au cours du temps).

Afin d'étudier les variations des paramètres mécaniques entre deux états voisins de la structure, nous avons établi une *estimation analytique au premier ordre* de la variation relative de chaque fréquence en fonction des variations relatives de la densité linéique, de la rigidité en flexion et de la tension. Cette

relation utilise la connaissance (analytique ou par simulation) de la déformée modale de l'état initial ou de référence. Dans le cas où les modifications sont localisées autour d'un point x_0 d'une poutre ou d'un câble, cette relation fait intervenir, pour chaque fréquence, les valeurs de la déformée modale et de la dérivée seconde du mode (ou courbure modale) de l'état initial en x_0. Une relation similaire a été établie dans le contexte d'une fissure où la variation de la rigidité en flexion est remplacée par un coefficient de flexibilité.

Grâce à ces estimations analytiques des variations des fréquences en fonctions de modifications physiques, nous avons proposé une méthode originale de *localisation de la modification à partir de deux essais*. En effet, comme cette relation dépend de la position x_0 de la modification et qu'elle est valable pour chaque mode, en utilisant cette relation pour différentes fréquences afin d'éliminer les quantités inconnues (variations relatives de la masse et de la rigidité), il est possible d'obtenir une fonction qui s'annule théoriquement en x_0. Cette méthode permet de localiser x_0 simplement grâce à la connaissances des 3 ou 4 premières fréquences avant et après modification. La prise en compte d'un plus grand nombre de fréquences augmente la précision de la localisation de x_0. La méthode a été validée sur différentes données expérimentales de la littérature ainsi qu'avec des données numériques. Nous avons proposé des améliorations dans le cas plus complexe d'une poutre encastrée-libre où le défaut serait situé près du bord libre. De surcroît, la norme de la fonction permettant la localisation, permet également d'évaluer l'*importance quantitative* de la modification considérée.

Une méthode de *détection* et de *localisation* à partir d'une *série d'essais au cours du temps* a aussi été développée, toujours grâce à l'estimation analytique développée dans la thèse. Nous avons vérifié cette méthode sur des données numériques d'une poutre avec tension et avons obtenu des résultats de détection et de localisation satisfaisants.

Enfin, nous avons proposé une autre méthode de *détection* et de *localisation* à partir d'une *série d'essais* utilisant cette fois-ci *la SVD*. L'application de la SVD sur la matrice de l'évolution des fréquences au cours du temps permet de détecter le changement des fréquences du au défaut (permanent après l'apparition du défaut) même si cette variation est noyée dans l'évolution aléatoire des fréquences liée en partie à la variation de la tension. L'application de la SVD sur la matrice de l'évolution des déformées modales au cours du temps permet non seulement de détecter le défaut mais aussi de le localiser. Nous avons appliqué cette méthode sur des données numériques d'un câble. Il s'avère que le résultat dépend du nombre de points de mesure et demande donc un nombre minimal de capteurs. Les applications

numériques montrent également qu'il est possible de localiser l'endommagement avec 20 capteurs mais pas avec moins de 10 capteurs.

Deux expériences ont été réalisées au cours de la thèse : l'une sur un câble, l'autre sur une poutre. Il est à noter que ces expériences ont été faites avant le développement des méthodes de détection et de localisation proposées dans la thèse.

Pour ces expériences, l'application des deux méthodes développées au cours de la thèse donne d'assez bons résultats pour la détection en temps. En revanche, les conclusions pour la localisation en espace sont plus difficiles pour les deux méthodes appliquées sur les essais réalisés.

En ce qui concerne la méthode de localisation fondée sur l'estimation analytique des variations des fréquences en fonction des modifications, la non localisation du défaut sur le cas du câble est probablement dû au fait que l'endommagement n'est pas très localisé. Il y a interaction des fils intacts sur une zone assez longue autour du défaut (zone de réancrage). Pour le cas de la poutre, son comportement était manifestement non linéaire, le cadre d'application de cette méthode n'était alors plus respecté. Cependant, cette méthode donne des résultats très satisfaisants dans le cas de données numériques obtenues à partir d'un modèle linéaire de poutre. De plus, sur les données expérimentales issues de la littérature, la localisation a donné de très bons résultats, ce qui permet de penser que cette méthode est valable.

Quant à la méthode SVD, une des causes de la non localisation est le faible nombre de capteurs. Ce résultat était prévisible au vue des applications numériques faites au préalable.

Pour conclure, les deux méthodes proposées pour la détection et la localisation de défauts à partir d'une suite d'essais semblent prometteuses même si elles n'ont pas donné de très bons résultats sur les deux expériences étudiées qui n'étaient pas "optimales".

Faute de temps, nous n'avons pas pu pousser plus loin nos investigations concernant les méthodes proposées. Nous présentons ci-dessous quelques points que nous aurions aimé développer.

Concernant la relation entre les variations des déformées modales ($\Delta\phi_n$) et des modifications (ΔT, $\Delta\mu(x)$, $\Delta EI(x)$ ou c_b), nous pouvons déterminer théoriquement $\Delta\phi_n$ en les décomposant sur la base des modes propres à l'état sain ($\Delta\phi_n = \Sigma_{k=1}^{\infty}\alpha_{nk}\phi_k$) et nous avons pu calculé les coefficients α_{nk}. L'utilisation de cette relation permet peut-être de localiser l'endommagement ?

De plus, les études numériques du chapitre 4 ont montré qu'à l'endroit du défaut, les courbures modales varient plus que les déformées modales. Théoriquement, l'application de la SVD sur la matrice

des courbures modales doit donc donner de meilleurs résultats. En pratique, il est difficile d'obtenir correctement les courbures modales à partir des modes propres. Dans le cadre de cette thèse, nous n'avons pu tester expérimentalement cette méthode que sur les déformées modales. Il serait donc intéressant de la tester sur les courbures modales.

Un autre problème que nous n'avons pas eu le temps d'explorer suffisamment est la quantification des modifications. Lorsque la localisation est réussie, l'objectif suivant est d'estimer le niveau d'importance des variations, par exemple le changement de masse ($\frac{\Delta m}{m} = \frac{\Delta \mu \Delta L}{\mu L}$) ou le changement de rigidité ($\frac{\Delta EI \Delta L}{EIL}$ ou c_b). Cette question a été étudiée dans le cas d'un système discret à n degrés de liberté (c.f. Ranas Elias et al. [30]). Une série d'expériences ont été faites à l'ENPC et il a été possible d'estimer la variation de masse d'un degré de liberté grâce aux variations relatives des 5 ou 6 premières fréquences.

Enfin il est important de noter que la relation entre les variations relatives des fréquences propres, de la tension, de la densité linéique et de la rigidité en flexion est valable pour tout système dynamique du second ordre. Elle peut donc être utilisée dans un contexte beaucoup plus vaste que la détection d'un endommagement. En particulier, elle peut permettre de prévoir de petites modifications structurelles (ajout ou retrait de masse par exemple) afin d'éviter certaines fréquences propres. Elle peut donc s'avérer utile dans des problèmes de contrôle des fréquences (c.f. [61, 62]).

Il y a donc divers développements envisageables suite à cette étude non seulement dans le cadre de la détection et du suivi de l'endommagement dans des câbles mais plus généralement dans le cadre de l'étude de la corrélation entre les petites modifications structurelles et les propriétés modales d'une structure dynamique.

Bibliographie

[1] R.D. Adams, P. Cawley, C.J. Pye, and B.J. Stone. A vibration technique for non-destructively assessing the integrity of structures. *Journal of Mechanical Engineering Science*, 20(2) :93–100, 1978.

[2] D.K. Agarwalla and D.R. Parhi. Effect of crack on modal parameters of a cantilever beam subjected to vibration. *Procedia Engineering*, 51 :665–669, 2013.

[3] A.E. Aktan, K.L. Lee, C. Chuntavan, and T. Aksel. Modal testing for structural identification and condition assessment of constructed facilities. In *Proceedings of SPIE - The International Society for Optical Engineering*, pages 462–462, 1994.

[4] R.J. Allemang and D.L. Brown. Correlation coefficient for modal vector analysis. *Proceedings of 1st International Modal Analysis Conference*, pages 692–695, 1983.

[5] P. Argoul, S. Hans, F. Conti, and C. Boutin. Time–frequency analysis of free oscillations of mechanical structures. application to the identification of the mechanical behaviour of buildings under shocks. In *Proceeding of the COST F3 conference : System Identification and Structural Health Monitoring, Madrid, Spain.,(283–292)*, 2000.

[6] P. Argoul, S. Hans, T.P. Le, and C. Boutin. Analyse temps-fréquence de réponses de bâtimentsa des essais de chocs. In *Actes du 5e Colloque Nationale en Calcul des Structures*, volume 2, 2001.

[7] P. Argoul and T.P. Le. Wavelet analysis of transient signals in civil engineering. *Novel Approaches in Civil Engineering, Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics, Springer-Verlag*, 14 :311–318, 2004.

[8] H.T. Banks, D.J. Inman, D.J. Leo, and Y. Wang. An experimentally validated damage detection theory in smart structures. *Journal of Sound and Vibration*, 191(5) :859–880, 1996.

[9] M. Bergmann. *Optimisation aérodynamique par réduction de modèle POD et contrôle optimal : application au sillage laminaire d'un cylindre circulaire*. PhD thesis, Vandoeuvre-les-Nancy, INPL, 2004.

[10] A. Berlioz and C.H. Lamarque. A non-linear model for the dynamics of an inclined cable. *Journal of Sound and Vibration*, 279(3) :619–639, 2005.

[11] D. Bernal. Load vectors for damage localization. *Journal of Engineering Mechanics*, 128(1) :7–14, 2002.

[12] P. Brevet. Pathologie des haubans et câbles : fatigue-corrosion. *Journée câbles 2005*, 2005.

[13] D.L. Brown, R.J. Allemang, R. Zimmerman, and M. Mergeay. Parameter estimation techniques for modal analysis. *SAE paper*, 790221, 1979.

[14] J.M.W. Brownjohm. *Assessment of structural integrity by dynamic measurements*. PhD thesis, University of Bristol, 1988.

[15] P. Cawley and R.D. Adams. The location of defects in structures from measurements of natural frequencies. *The Journal of Strain Analysis for Engineering Design*, 14(2) :49–57, 1979.

[16] J. Chance, G.R. Tomlinson, and K. Worden. A simplified approach to the numerical and experimental modelling of the dynamics of a cracked beam. In *Proceedings of SPIE - The International Society for Optical Engineering*, pages 778–778, 1994.

[17] D. Chelidze and W. Zhou. Smooth orthogonal decomposition-based vibration mode identification. *Journal of Sound and Vibration*, 292(3) :461–473, 2006.

[18] X. Chiementin, F. Bolaers, L. Rasolofondraibe, and J-P. Dron. Localization and quantification of vibratory sources : Application to the predictive maintenance of rolling bearings. *Journal of Sound and Vibration*, 316(1) :331–347, 2008.

[19] F.C. Choi, J. Li, B. Samali, and K. Crews. An experimental study on damage detection of structures using a timber beam. *Journal of mechanical science and technology*, 21(6) :903–907, 2007.

[20] F.C. Choi, J. Li, B. Samali, and K. Crews. Application of the modified damage index method to timber beams. *Engineering structures*, 30(4) :1124–1145, 2008.

[21] R.N. Coppolino and S.N. Rubin. Detectability of structural failures in offshore platforms by ambient vibration monitoring. In *12th Annual Offshore Technology Conference*, pages 101–110, 1980.

[22] S.G. Creed. Assessment of large engineering structures using data collected during in-service loading. *Structural Assessment*, pages 55–62.

[23] U. Dackerman. *Vibration-based Damage Identification Methods for Civil Engineering Structures Using Artificial Neural Networks*. PhD thesis, Faculty of Engineering and Information Technology, Sydney, 2009.

[24] G. Dhatt and J.L. Batoz. *Modélisation des structures par éléments finis : poutres et plaques*, volume 2. 1990 ; pp. 80–100.

[25] L. Dieng, V. Périer, L. Gaillet, and C. Tessier. Mécanismes de dégradation et moyens de protection des câbles du génie civil. *Mécanique & Industries*, 10(01) :33–42, 2009.

[26] S.W. Doebling, C.R Farrar, and R.S Goodman. Effects of measurement statistics on the detection of damage in the alamosa canyon bridge. In *Proceedings of SPIE - The International Society for Optical Engineering*, pages 919–929. Citeseer, 1997.

[27] S.W. Doebling, C.R. Farrar, and M.B. Prime. A summary review of vibration-based damage identification methods. *Shock and Vibration Digest*, 30(2) :91–105, 1998.

[28] J.P. Dron, F. Bolaers, and I. Rasolofondraibe. Improvement of the sensitivity of the scalar indicators (crest factor, kurtosis) using a de-noising method by spectral subtraction : application to the detection of defects in ball bearings. *Journal of Sound and Vibration*, 270(1) :61–73, 2004.

[29] S.M Elachachi, D. Breysse, S. Yotte, and C. Crémona. Analyse multi-échelle de la résistance du câble porteur d'un pont suspendu : Description de la corrosion et de ses effets par une approche probabiliste. *Revue européenne de génie civil*, 9(4) :455–496, 2005.

[30] R. Elias. Pour l'évaluation des modifications des caractéristiques d'un système dynamique. 2013.

[31] R. Elias, N. Point, J. Bodgi, and P. Argoul. How to retrieve the normal modes using the proper orthogonal decomposition (pod). EDF-Clamart, France, 2012.

[32] U. Farooq and B.F. Feeny. Smooth orthogonal decomposition for modal analysis of randomly excited systems. *Journal of Sound and Vibration*, 316(1) :137–146, 2008.

[33] C.R Farrar, W.E. Baker, T.M. Bell, K.M. Cone, T.W. Darling, T.A. Duffey, A. Eklund, and A. Migliori. Dynamic characterization and damage detection in the i-40 bridge over the rio grande. Technical report, Los Alamos National Lab., NM (United States), 1994.

[34] C.R Farrar, S.W Doebling, P.J Cornwell, and E.G Straser. Variability of modal parameters measured on the alamosa canyon bridge. In *Proceedings of SPIE - The International Society for Optical Engineering*, pages 257–263, 1997.

[35] B.F. Feeny and R. Kappagantu. On the physical interpretation of proper orthogonal modes in vibrations. *Journal of Sound and Vibration*, 211(4) :607–616, 1998.

[36] B.F. Feeny and Y. Liang. Interpreting proper orthogonal modes of randomly excited vibration systems. *Journal of Sound and Vibration*, 265(5) :953–966, 2003.

[37] M.I. Friswell and J.E. Mottershead. Inverse methods in structural health monitoring. *Key Engineering Materials*, 204 :201–210, 2001.

[38] M.I. Friswell and J.E.T. Penny. Crack modeling for structural health monitoring. *Structural Health Monitoring*, 1(2) :139–148, 2002.

[39] M.I. Friswell, J.E.T. Penny, and D.A.L. Wilson. Using vibration data and statistical measures to locate damage in structures. *Modal Analysis : The International Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis*, 9(4) :239–254, 1994.

[40] A. Furukawa, H. Otsuka, and J. Kiyono. Structural damage detection method using uncertain frequency response functions. *Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering*, 21(4) :292–305, 2006.

[41] A. Girard. *Dynamique des structures*. Ed. Techniques Ingénieur, 1997.

[42] J. Gomez-Mancilla, J-J. Sinou, V.R. Nosov, F. Thouverez, and A. Zambrano. The influence of crack-imbalance orientation and orbital evolution for an extended cracked jeffcott rotor. *Comptes Rendus Mecanique*, 332(12) :955–962, 2004.

[43] S. Gouttebroze and J. Lardies. On using the wavelet transform in modal analysis. *Mechanics Research Communications*, 28(5) :561–569, 2001.

[44] C.S. Hamey, W. Lestari, P. Qiao, and G. Song. Experimental damage identification of carbon/epoxy composite beams using curvature mode shapes. *Structural Health Monitoring*, 3(4) :333–353, 2004.

[45] M.N. Helfrick, P. Pingle, C. Niezreck, and P. Avitabile. Using full-field vibration measurement techniques for damage detection. *Proceeding of the IMAC-XXVII*, 2009.

[46] W. Heylen, S. Lammens, and P. Sas. *Modal Analysis Theory and Testing*. KU Leuven, Department of Mechanical Engineering (eds.), 1995.

[47] S.R. Ibrahim and E.C. Mikulcik. A method for the direct identification of vibration parameters from the free response. 1977.

[48] D. Kalman. A singularly valuable decomposition : The SVD of a matrix. *preprint, College*, 2002.

[49] G. Kerschen and J.C. Golinval. Physical interpretation of the proper orthogonal modes using the singular value decomposition. *Journal of Sound and Vibration*, 249(5) :849–865, 2002.

[50] J. Lardies and S. Gouttebroze. Identification of modal parameters using the wavelet transform. *International Journal of Mechanical Sciences*, 44(11) :2263–2283, 2002.

[51] B.J. Lazan. *Damping of materials and members in structural mechanics*, volume 42. Pergamon press Oxford, 1968.

[52] T.P. Le. *Auscultation dynamique des structures à l'aide de l'analyse continue en ondelettes*. PhD thesis, Ecole des Ponts ParisTech, 2003.

[53] T.P. Le and P. Argoul. Continuous wavelet transform for modal identification using free decay response. *Journal of sound and vibration*, 277(1) :73–100, 2004.

[54] N.A.J. Lieven and D.J. Ewin. Spatial correlation of modespaces : the coordinate modal assurance criterion. *6th International Modal Analysis Conference*, pages 1063–1070, 1988.

[55] O. Loland and C.J. Dodds. Experiences in developing and operating integrity monitoring systems in the north sea. In *Presented at the Eighth Annual Offshore Technology Conference, Houston, Texas, May 3-6, 1976.*, number V2, OTC 2551 Proceeding, 1976.

[56] J. Maeck. *Damage assessment of civil engineering structures by vibration monitoring*. PhD thesis, Katholieke Universiteit Leuven, Belgium, 2003.

[57] J. Maeck and G. De Roeck. Damage assessment of a gradually damaged rc beam using dynamic system identification. In *Proceedings of the 20th International Modal Analysis Conference (IMAC-XX)–CD-ROM, Los Angeles, California*, 2002.

[58] J. Maeck, M. Wahab, and G. De Roeck. Damage localization in reinforced concrete beams by dynamic stiffness determination. In *Society for Experimental Mechanics, Inc, 17 th International Modal Analysis Conference.*, volume 2, pages 1289–1295, 1999.

[59] N.M.M. Maia, J.M.M. Silva, E.A.M. Almas, and R.P.C. Sampaio. Damage detection in structures : from mode shape to frequency response function methods. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 17(3) :489–498, 2003.

[60] N.M.M. Maia, J.M.M. Silva, J. He, N.A. Lieven, R.M. Lin, G.W. Skingle, W.M. To, et al. *Theoretical and experimental modal analysis*, volume 67. 1997.

[61] L. Majkut. Eigenvalue based inverse model of beam for structural modification and diagnostics : examples of using. *Latin American Journal of Solids and Structures*, 7(4) :437–456, 2010.

[62] L. Majkut. Eigenvalue based inverse model of beam for structural modification and diagnostics : theoretical formulation. *Latin American Journal of Solids and Structures*, 7(4) :423–436, 2010.

[63] S. Marchesiello, S. Bedaoui, L. Garibaldi, and P. Argoul. Time-dependent identification of a bridge-like structure with crossing loads. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 23(6) :2019–2028, 2009.

[64] A. Morassi. Crack-induced changes in eigenparameters of beam structures. *Journal of Engineering Mechanics*, 119(9) :1798–1803, 1993.

[65] A. Morassi. Damage detection and generalized fourier coefficients. *Journal of Sound and Vibration*, 302(1) :229–259, 2007.

[66] R. Nataraja. Structural integrity monitoring in real seas. In *Offshore Technology Conference*. Offshore Technology Conference, 1983.

[67] A.K. Pandey and M. Biswas. Damage detection in structures using changes in flexibility. *Journal of sound and vibration*, 169(1) :3–17, 1994.

[68] A.K. Pandey, M. Biswas, and M.M. Samman. Damage detection from changes in curvature mode shapes. *Journal of sound and vibration*, 145(2) :321–332, 1991.

[69] A. Pecker. *Dynamque des structures et des ouvrages*. Cours Ecole National des Ponts et Chaussées, 2006.

[70] L.R. Pereyra, R.A. Osegueda, C.J. Carrasco, and C.M. Ferregut. Damage detection in a stiffened plate using modal strain energy differences. In *Nondestructive Evaluation Techniques for Aging Infrastructures & Manufacturing*, pages 211–222. International Society for Optics and Photonics, 1999.

[71] V. Perier. Etude de l'influence des conditions environnementales sur le comportement en fretting, fatigue et fretting-fatigue des cables du genie civil. *Thèse de doctorat de l'Ecole centrale de Lyon*, 2010.

[72] D. Pines and L. Salvino. Structural health monitoring using empirical mode decomposition and the Hilbert phase. *Journal of sound and vibration*, 294(1) :97–124, 2006.

[73] I. Pivovarov and O.G. Vinogradov. The phenomenon of damping in stranded cables. In *Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference, 26 th, Orlando, FL*, pages 232–237, 1985.

[74] C.P. Ratcliffe. A frequency and curvature based experimental method for locating damage in structures. *Journal of vibration and acoustics*, 122(3) :324–329, 2000.

[75] C.P. Ratcliffe and W.J. Bagaria. Vibration technique for locating delamination in a composite beam. *Aiaa Journal*, 36(6) :1074–1077, 1998.

[76] M.H. Richardson and D.L. Formenti. Parameter estimation from frequency response measurements using rational fraction polynomials. In *Proceedings of the 1st International Modal Analysis Conference*, volume 1, pages 167–186, 1982.

[77] P.F. Rizos, N. Aspragathos, and A.D. Dimarogonas. Identification of crack location and magnitude in a cantilever beam from the vibration modes. *Journal of sound and vibration*, 138(3) :381–388, 1990.

[78] J.L. Robert, D. Bruhat, J.P. Gervais, and J. Chatelain. Mesure de la tension des cables par methode vibratoire. *Laboratoire des Ponts et Chausseés*, 173(3) :109–114, 1991.

[79] C. Rouby, D. Remond, and P. Argoul. Orthogonal polynomials or wavelet analysis for mechanical system direct identification. *Annals of Solid and Structural Mechanics*, 1(1) :41–58, 2010.

[80] M. Ruzzene, A. Fasana, L. Garibaldi, and B. Piombo. Natural frequencies and dampings identification using wavelet transform : application to real data. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 11(2) :207–218, 1997.

[81] A. Rytter. *Vibration based inspection of civil engineering structures*. PhD thesis, University of Aalborg, Denmark, 1993.

[82] O.S. Salawu. Detection of structural damage through changes in frequency : a review. *Engineering structures*, 19(9) :718–723, 1997.

[83] R.P.C. Sampaio, N.M.M. Maia, and J.M.M. Silva. Damage detection using the frequency-response-function curvature method. *Journal of Sound and Vibration*, 226(5) :1029–1042, 1999.

[84] D. Siegert, M.M. Choinska, P. Brevet, D. Bruhat, and F. Toutlemonde. Détermination de la tension des câbles à partir des fréquences de vibration. *Revue française de génie civil*, 8(9-10) :1157–1176, 2004.

[85] D. Siegert, L. Dieng, and M. Goursat. Frequency monitoring of stay-cables. In *Proceedings of the 25th International Modal Analysis Conference (IMAC–XXV), Orlando, Fl.", Paper*, volume 150, 2007.

[86] S. Soltane, O. Ben Mekki, S. Montassar, and F. Auricchio. Contrôle des vibrations transversales des câbles des ponts à haubans par des alliages à mémoire de forme. In *Proceedings of the "Colloque National Matériaux Sols et Structures" MS2*, Hammamet, Tunisia, 2009.

[87] W.J. Staszewski. Identification of damping in mdof systems using time-scale decomposition. *Journal of Sound and Vibration*, 203(2) :283–305, 1997.

[88] N. Stubbs, J.T. Kim, and C.R. Farrar. Field verification of a nondestructive damage localization and severity estimation algorithm. In *Proceedings of SPIE - The International Society for Optical Engineering*, pages 210–210, 1995.

[89] I. Trendafilova, M.P. Cartmell, and W. Ostachowicz. Vibration-based damage detection in an aircraft wing scaled model using principal component analysis and pattern recognition. *Journal of Sound and Vibration*, 313(3) :560–566, 2008.

[90] S.L. Tsyfansky and V.I. Beresnevich. Non-linear vibration method for detection of fatigue cracks in aircraft wings. *Journal of sound and vibration*, 236(1) :49–60, 2000.

[91] C. Valette and C. Cuesta. *Mécanique de la corde vibrante*. Hermes, 1993.

[92] J.K. Vandiver. Detection of structural failure on fixed platforms by measurement of dynamic response. In *Proceedings of 7th Annual Offshore Technical Conference*, pages 243–252. Offshore Technology Conference, 1975.

[93] Z. Wang, R.M. Lin, and M.K. Lim. Structural damage detection using measured frf data. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 147(1) :187–197, 1997.

[94] W.M. West. Illustration of the use of modal assurance criterion to detect structural changes in an orbiter test specimen. In *Proceedings of 4th International Modal Analysis Conference the Air Force Conference on Aircraft Structural Integrity*, volume 1, pages 1–6, Los Angeles, CA, 1986.

[95] G. Yan, Z. Duan, J. Ou, and A. De Stefano. Structural damage detection using residual forces based on wavelet transform. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 24(1) :224–239, 2010.

[96] J.N. Yang, Y. Lei, S. Lin, and N. Huang. Hilbert-Huang based approach for structural damage detection. *Journal of Engineering Mechanics*, 130(1) :85–95, 2003.

[97] H.P. Yin and P. Argoul. Transformations intégrales et identification modale. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences-Series IIB-Mechanics-Physics-Astronomy*, 327(8) :777–783, 1999.

[98] M.K. Yoon, D. Heider, J.W. Gillespie, C.P. Ratcliffe, and R.M. Crane. Local damage detection using the two-dimensional gapped smoothing method. *Journal of Sound and Vibration*, 279(1) :119–139, 2005.

[99] A. Yu. *Vibration damping of stranded cable*. PhD thesis, Lehigh University, 1949.

[100] M.M.F. Yuen. A numerical study of the eigenparameters of a damaged cantilever. *Journal of sound and vibration*, 103(3) :301–310, 1985.

[101] J. Zhao and J.T. DeWolf. Sensitivity study for vibrational parameters used in damage detection. *Journal of structural engineering*, 125(4) :410–416, 1999.

[102] M. Zhong. *Dynamic analysis of cables with variable flexural rigidity*. PhD thesis, University of Hawaii at Manoa, 2003.

[103] H. Zui, T. Shinke, and Y. Namita. Practical formulas for estimation of cable tension by vibration method. *Journal of structural engineering*, 122 :651–656, 1996.

Titre : Contribution à la détection et à la localisation d'endommagements par des méthodes d'analyse dynamique des modifications structurales d'une poutre avec tension - Application au suivi des câbles du génie civil.

Résumé : L'objectif de ce travail est de mettre au point des méthodes pour détecter, localiser, quantifier et suivre l'évolution de l'endommagement dans les câbles courts, tels que les suspentes des ponts suspendus, à partir de leurs réponses vibratoires. Afin de modéliser ces câbles, un modèle linéaire 1D de poutre d'Euler Bernoulli avec tension est utilisé. Ce modèle permet de modéliser une large gamme de structures, allant de la corde vibrante à la poutre sans tension. Pour le câble, l'endommagement est introduit dans l'équation vibratoire par des modifications locales de la masse linéique et de la rigidité en flexion et par un changement global de la tension. De plus, pour introduire une "fissure" dans l'équation vibratoire d'une poutre, la modification de la rigidité peut être remplacée par un ressort de rotation au niveau de la fissure. Pour ces deux modèles d'introduction d'endommagements, une estimation analytique au premier ordre des variations des paramètres modaux en fonction des modifications est établie. Grâce aux estimations analytiques obtenues pour la variation relative des fréquences en fonctions des modifications physiques, nous développons des techniques de *localisation* pour deux cas d'étude : *deux essais seuls correspondants à deux états* (sain et endommagé) et *une série d'essais* (plusieurs essais de l'état sain à l'état endommagé). Pour ce second cas, une autre méthode de *détection* et de *localisation* utilisant cette fois *la SVD* est proposée. Les méthodes proposées sont testées sur des données numériques et sur des données expérimentales existant dans la littérature ou effectuées pendant la thèse.

Mots clés : dynamique des structures, poutre d'Euler Bernoulli, poutre avec tension, détection et localisation d'endommagement, SVD, identification modale POD, SOD.

Titre : Contribution to the detection and localization of damage by dynamic analysis methods for structural changes in a beam with tension - Application to the monitoring of civil engineering cables.

Summary : The objective of this work is to develop methods to detect, localize, quantify and follow the evolution of the damage in short cables, such as suspenders of the suspension bridges, using their vibratory responses. To simulate these cables, a 1D Euler Bernoulli beam linear model with tension is used. This model allows to study a wide range of structures from the vibrating string to the beam without tension. For cables, damage is introduced into the vibratory equation by local changes of the linear density and the bending stiffness and a global change in the tension. To introduce a crack in the vibrating beam equation, the change in the rigidity may be replaced by a pinned joint at the location of the crack. For both these models, a first order analytical estimation of the variation of modal parameters due to theses changes is established. Using these analytical estimations of the relative frequency variations in functions of the physical changes, we develop methods of *localization* for two cases : only *two tests corresponding to two states* (healthy and damaged) and *a series of tests* (several tests on the healthy state and several tests on the damaged state). For the second case, we propose another method of *detection* and *localization* which uses *the SVD tool* . These methods are tested on numerical data and experimental data from literature or from tests performed during the phD.

Key words : structural dynamics, Euler-Bernoulli beam, beam with tension, detection and localization of damage, SVD, modal analysis POD, SOD.