

Développement de méthodes probabilistes pour l'analyse des tolérances des systèmes mécaniques sur-contraints

Antoine Dumas

▶ **To cite this version:**

Antoine Dumas. Développement de méthodes probabilistes pour l'analyse des tolérances des systèmes mécaniques sur-contraints. Génie mécanique [physics.class-ph]. Ecole nationale supérieure d'arts et métiers - ENSAM, 2014. Français. NNT : 2014ENAM0054 . tel-01177079

HAL Id: tel-01177079

https://pastel.hal.science/tel-01177079

Submitted on 16 Jul 2015

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

2014-ENAM-0054

École doctorale n° 432 : Sciences des Métiers de l'Ingénieur

Doctorat ParisTech

T H È S E

pour obtenir le grade de docteur délivré par

l'École Nationale Supérieure d'Arts et Métiers

en co-encadrement avec

l'Institut Français de Mécanique Avancée

Spécialité " Génie Mécanique "

présentée et soutenue publiquement par

Antoine Dumas

le 10 décembre 2014

Développement de méthodes probabilistes pour l'analyse des tolérances des systèmes mécaniques sur-contraints

Directeur de thèse : **Pr. Jean-Yves DANTAN**
Co-encadrant de la thèse : **MCF HdR Nicolas GAYTON**

Jury

M. Bruno SUDRET, Professeur, ETH Zürich	Président
M. Pierre VILLON, Professeur, Laboratoire Roberval, UTC, Compiègne	Rapporteur
M. Luc MATHIEU, Professeur, LURPA, Université Paris Sud	Rapporteur
M. Alex BALLU, MCF HDR, I2M, Université de Bordeaux	Examinateur
M. Thierry YALAMAS, Docteur, PHIMECA Engineering S.A., Paris	Examinateur
M. Jean-Yves DANTAN, Professeur, LCFC, ENSAM, Metz	Examinateur
M. Nicolas GAYTON, MCF HDR, Institut Pascal, IFMA, Clermont-Ferrand	Examinateur
M. Laurent GAUVRIT, Ingénieur, RADIALL, Château-Renault	Invité

Arts et Métiers ParisTech - Centre de Metz
Laboratoire Conception Fabrication Commande

T H È S E

Remerciements

Tout d'abord, je tiens à remercier mes encadrants de thèse Jean-Yves Dantan (professeur à l'ENSAM) et Nicolas Gayton (Maître de Conférences à l'IFMA) pour leur confiance et de m'avoir permis de faire cette thèse dans les meilleures conditions possibles. Grâce à leurs rigueurs et leurs connaissances, j'ai pu progresser dans ma façon de travailler et mener mes recherches à bien. Je les remercie également pour leur bonne humeur et les bons moments passés tout au long des trois années de thèse.

Je remercie également mes rapporteurs. Bien que mes travaux de thèse soient à cheval sur deux domaines de recherche, ils ont tous les deux acceptés le travail de relecture de mon mémoire. Je remercie ainsi Luc Mathieu (Professeur à l'Université Paris Sud) et Pierre Villon (Professeur à L'Université de Technologie de Compiègne), nos échanges pendant l'évaluation du mémoire ont été très intéressants.

Je remercie Bruno Sudret (Professeur à l'ETH Zürich) d'avoir présidé le jury de thèse ainsi que pour son aide dans la rédaction d'une publication. Je remercie Alex Ballu (Maître de conférences à l'Université de Bordeaux) d'avoir accepté le rôle d'examinateur. J'ai apprécié nos échanges que ce soit concernant mes travaux de thèse ou durant les différents séminaires GRT. Mes remerciements vont également à Thierry Yalamas (Directeur général de Phimeca Engineering) pour sa confiance qu'il a placé en moi en m'intégrant au sein de Phimeca.

J'exprime ma reconnaissance à Laurent Gauvrit, Gilles Petitet, et Arnaud Fournier respectivement représentant des sociétés Radiall, Valeo et Pierburg pour leur soutien scientifique et la mise en perspective de mes travaux dans un contexte industriel.

Je remercie également Olivier Rochat (Ingénieur à Airbus CIMPA et ex tuteur de stage) qui m'a poussé et encouragé pour démarrer une thèse à la suite de mon stage de fin d'étude. Je ne le regrette pas !

Je remercie maintenant mes collègues de travail que ce soit à Clermont-Ferrand : Sami, Arnaud, Ben, Benjamin, Guillaume, Kévin, Julien, Kseniya, Maïté, Cédric, Hanh, Ricardo (et j'en oublie certainement) et en particulier Cécile, Simon, William et Doc Polaï pour les bons moments passés en conférence ou ailleurs ! A Metz : Florian, Damien, Charlotte, Roozbeh, Marc, Samantha, Maryline, Bruno, Marc, Olivier, Zak, Josselin, JB, Catalina, Alex, Mathieu, Xavier, Stéphanie, Qing, Fan, Lazhar, Amir (et j'en oublie également) et en particulier mes camarades de salle 148 : Shirin pour sa bonne humeur et sa folie et Etienne et Cyril pour nos échanges sympathiques sur nos travaux ! Je remercie également Alain pour ses encouragements, ses conseils, sa connaissance musicale des années 80 et sa bonne idée pour le tableau du chapitre 3 !

Je tiens à remercier tout particulièrement mes coéquipiers de l'équipe de handball de Montigny sans qui mes deux années à Metz n'auraient pas été pareil : Romain, Renaud, Cédric, Damien, Kiki, JC, Flo, Nico, Vincent, Medhi, Vinc, Ludo, Rom, Simon, Manu, Rémi, Jo, Chris, les deux coachs Michel et JC et bien sur Marion la kiné ! Ils m'ont accueilli à bras ouverts et malgré mes mauvais tirs à l'aile droite m'ont intégré comme si j'étais là depuis toujours.

Je remercie également la Puéro Team (les initiés comprendront) pour les franches rigolades et finalement la motivation qu'on a su se rendre les uns les autres pour aller aussi loin tout au long de ces années : Doc Sylvette, Le futur Doc Binôme, Captain Tartopoil, Jean Becken, Bouddha, Gayguette, Doc Jean Chichon, Gros Puéro, Mini Bodhi, Doc Frankiss, Pimezoom, Kenou et la mascotte Mini Shoot.

Enfin je remercie ma famille et en particulier mes parents et ma soeur qui m'ont soutenu tout au long de ces années d'étude tant sur le plan financier que moral. Ils m'ont toujours encouragé à persévérer et inculqué en moi l'envie de bien faire. J'espère les rendre fiers encore longtemps. Je remercie maintenant ma chérie Claire qui a toujours été là pour moi et qui m'a encouragé pour mes présentations : "c'était mou". Enfin je remercie Rocky pour ses ronrons à la fin de ma rédaction.

Table des matières

Introduction **1**

1 Analyse des tolérances et méthodes d'analyse probabilistes **5**
1.1 Introduction . . . 5
1.2 Formalisation des problèmes d'analyse des tolérances . . . 6
1.2.1 Modèles géométriques des mécanismes . . . 7
1.2.2 Modèle de comportement . . . 11
1.2.3 Typologie des mécanismes . . . 13
1.2.4 Formalisations et approches des problèmes d'analyse des tolérances des mécanismes hyperstatiques . . . 15
1.2.5 Synthèse . . . 23
1.3 Méthodes probabilistes pour l'analyse des tolérances et l'analyse de fiabilité 24
1.3.1 Méthodes d'approximation . . . 25
1.3.2 Méthodes de simulation . . . 30
1.3.3 Techniques de méta-modélisation . . . 34
1.3.4 Synthèse . . . 41
1.4 Conclusion . . . 41

2 Formulation des problèmes d'analyse des tolérances des mécanismes hyperstatiques **43**
2.1 Introduction . . . 44
2.2 Formulation probabiliste pour l'analyse des tolérances . . . 44
2.2.1 Condition d'assemblage - Formulation de la probabilité de non montage . . . 46
2.2.2 Condition fonctionnelle - Formulation de la probabilité de non fonctionnement . . . 46
2.2.3 Synthèse . . . 49
2.3 Linéarisation par morceaux des contraintes d'interface . . . 49
2.3.1 Procédure de linéarisation . . . 50
2.3.2 Application à un exemple académique . . . 53
2.3.3 Synthèse . . . 54
2.4 Problème fonctionnel - Proposition d'une formulation système . . . 54
2.4.1 Décomposition du mécanisme par configurations . . . 55
2.4.2 Formulation système existante . . . 57

2.4.3 Proposition d'une nouvelle formulation système 58
2.4.4 Illustration détaillée sur un exemple académique 61
2.4.5 Synthèse 62
2.5 Problème d'assemblage - Recherche de formulations alternatives 63
2.5.1 Formulation d'un problème d'optimisation auxiliaire 63
2.5.2 Recherche de formulation système 65
2.6 Conclusion 66

3 Méthode de résolution des problèmes d'analyse des tolérances des mécanismes hyperstatiques 67
3.1 Introduction 68
3.2 Méthode MCO - Monte Carlo couplée Optimisation 70
3.2.1 Principe de la méthode MCO 70
3.2.2 Applications académiques de la méthode MCO 72
3.2.3 Applicabilité des méthodes probabilistes alternatives 77
3.2.4 Synthèse 78
3.3 Problème fonctionnel - Résolution de la formulation système 78
3.3.1 Recherche des combinaisons de contraintes actives dominantes . . 79
3.3.2 Résolution par la méthode FORM système 81
3.3.3 Applications de la méthode de résolution système 82
3.3.4 Synthèse 85
3.4 Problème d'assemblage - Procédures adaptatives basées sur la méthode MCO 85
3.4.1 Propriétés du problème d'assemblage 86
3.4.2 Procédure EBS - Estimation d'une Borne Supérieure de P_{da} . . . 88
3.4.3 Procédure EIC - Estimation d'un Intervalle de Confiance de P_{da} . 89
3.4.4 Application des procédure EBS et EIC 91
3.4.5 Synthèse 94
3.5 Conclusion 94

4 Applications 97
4.1 Introduction 97
4.2 Exigence de fonctionnement d'une fiche électrique 98
4.2.1 Modélisation et formulation des problèmes d'assemblage et fonctionnel 98
4.2.2 Résultats 102
4.3 Assemblage d'un connecteur Radiall 105
4.3.1 Modélisation et formulation du problème d'assemblage 106
4.3.2 Résultats 109
4.4 Exigence de fonctionnement d'une pompe à débit variable Pierburg . . . 110
4.4.1 Modélisation et formulation des problèmes d'assemblage et fonctionnel 110
4.4.2 Résultats 115

4.5 Conclusion 117

Conclusions et perspectives **119**

A Table des notations **127**
A.1 Notations générales 127
A.2 Notations relatives à l'analyse des tolérances 127
A.3 Notations relatives aux méthodes probabilistes 128

B Application analytique **129**
B.1 Modélisation géométrique 129
B.2 Valeurs des paramètres 129

C Application appui plan et deux goupilles **131**
C.1 Modélisation géométrique 131
C.1.1 Points et coordonnées 131
C.1.2 Définition des écarts géométriques 132
C.1.3 Définition des jeux 133
C.1.4 Définition du torseur jeu fonctionnel 133
C.1.5 Équations de compatibilité 134
C.1.6 Contraintes d'interface 135
C.1.7 Condition fonctionnelle 137
C.1.8 Calcul des composantes de rotation 137
C.1.9 Formulation 139
C.2 Valeurs des paramètres 140
C.3 Résultats 140

D Fiche électrique **145**
D.1 Modélisation géométrique 145
D.2 Valeurs des paramètres 150

E Connecteur Radiall **151**
E.1 Modélisation géométrique 151
E.2 Valeurs des paramètres 156

F Pompe à débit variable Pierburg **157**
F.1 Modélisation géométrique 157
F.2 Valeurs des paramètres 163

Introduction

Contexte. Cette thèse s'inscrit dans le cadre du projet ANR AHTOLA (*Advanced Hybrid method for the TOLerance Analysis of complex system*) qui a débuté en octobre 2011. Il est financé par l'Agence Nationale de la Recherche et regroupe les laboratoires universitaires LCFC - Arts et Métiers ParisTech, Campus de Metz et l'Institut Pascal - IFMA ainsi que les industriels Phiméca, Pierburg, Radiall et Valeo. Le projet part du constat qu'en analyse des tolérances des mécanismes, la plupart des méthodes existantes à ce jour sont orientées vers le traitement des mécanismes isostatiques. De nombreux outils commerciaux existent et permettent de faire de l'analyse des tolérances de tels mécanismes. Au contraire, il existe peu de méthodes d'analyse des tolérances des mécanismes hyperstatiques avec jeux. Les mécanismes sont composés de pièces rigides non déformables, la montabilité est possible grâce aux jeux entre les pièces. La modélisation de ces mécanismes est souvent simplifiée afin de pouvoir être, en pratique, analysés comme des mécanismes isostatiques. Le deuxième constat concerne les méthodes d'analyse. Celles-ci ne sont traditionnellement pas tournées vers les approches probabilistes mais vers des approches au pire des cas rendant ainsi les résultats des analyses très pessimistes. A partir de ces deux constats, les objectifs de recherche de la thèse ont ainsi été fixés dans le cadre du projet AHTOLA : développer des méthodes probabilistes pour l'analyse des tolérances des mécanismes hyperstatiques. La thèse est co-encadrée par le Pr. Jean-Yves Dantan (Arts et Métiers ParisTech) et le MCf. HdR. Nicolas Gayton (IFMA).

Problématique. Concevoir un produit de qualité revient à maitriser toutes les étapes de son développement, de la phase de conception, en passant par la fabrication, le contrôle et jusqu'à son recyclage. Chaque étape est importante et ne doit pas être négligée. D'après l'axiome de la variabilité en production [Mathieu, 2011], bien que les dimensions cibles soient visées lors de la fabrication d'un produit, il n'est pas possible en pratique d'obtenir une pièce ayant exactement la géométrie cible prévue. Dues aux imperfections de fabrication, un produit fabriqué ne correspond donc pas au produit défini à l'étape de conception. Ces imperfections de fabrication sont limitées par les spécifications géométriques des composantes sensibles de chaque composant. Elles permettent de définir le type et les limites des défauts acceptables du produit. Elles traduisent ainsi les exigences qu'à le concepteur sur le produit.

Il n'est également pas possible de réaliser exactement la même géométrie plusieurs fois. En effet, les imperfections de fabrication sont différentes pour chaque pièce fabriquée. La dispersion des imperfections doit donc être maitrisée afin de réduire les coûts relatifs aux

produits défectueux, en particulier pour les productions en grandes séries.

Un enjeu supplémentaire concerne la réduction des coûts de fabrication. Des tolérances très serrées permettent de garantir un produit de qualité mais impactent fortement son coût de fabrication. En pratique, avoir des tolérances très serrées sur toutes les composantes du mécanisme n'est pas forcément nécessaire. Il faut ajuster les tolérances de façon à avoir un bon compromis entre la qualité du produit et son coût de fabrication.

Lors de la conception, le choix des tolérances est très important car elles influent à tous les niveaux du cycle de vie du produit. Des tolérances appropriées sur des composantes pertinentes permettent de produire des assemblages complexes qui sont fonctionnels à moindre coût. L'analyse des tolérances des mécanismes a justement pour but de vérifier si les tolérances de conception permettent de garantir l'assemblage et la fonctionnalité du mécanisme en estimant un niveau de qualité du produit. L'analyse des tolérances est un élément clé lors de la conception d'un produit car elle permet :

- ◇ **d'améliorer la qualité du produit,**
- ◇ **de diminuer les coûts de fabrication,**
- ◇ **de réduire les rebuts en production.**

En tant qu'outils d'aide à la décision, l'analyse des tolérances doit fournir une information la plus juste possible. Les techniques utilisées pour calculer le niveau de qualité doivent mettre en œuvre des modélisations caractérisant le plus fidèlement possible le comportement du mécanisme et utiliser des méthodes d'analyse fournissant des résultats précis le plus en accord avec la réalité.

La modélisation est d'autant plus complexe si le mécanisme à modéliser est hyperstatique. La présence des jeux dans ces mécanismes complexifie la mise au point du modèle de comportement. Un mécanisme ayant des jeux implique que ses pièces ont une certaine mobilité. Les modèles de comportement et les méthodes de résolution doivent donc prendre en compte cette mobilité dans leurs analyses.

A partir des besoins industriels formulés lors de la définition du projet AHTOLA, nous pouvons formaliser les **exigences** de la thèse :

- ◇ Évaluer des taux de non conformité (TNC) à partir d'une modélisation probabiliste des imperfections de fabrication et d'une analyse au pire des cas des configurations des jeux entre pièces.
- ◇ Ne pas simplifier les modèles de comportement ou si nécessaire en estimant l'impact de cette simplification sur la précision des résultats.
- ◇ Effectuer l'analyse dans des temps de calcul raisonnable étant donné que l'analyse des tolérances est pratiquée lors de plusieurs étapes du développement du produit : lors de la conception jusqu'à la production pour la validation ou la détermination du réglage du système de production. Nous nous restreignons à l'utilisation d'ordinateurs de bureau d'études.

Ces exigences font que naturellement les recherches s'orientent vers des approches probabilistes pour l'analyse des tolérances ou appelées « analyse statistique des tolérances ».

Objectifs. A partir des exigences formulées par le projet, l'objectif de la thèse est de développer des approches hybrides couplant des approches au pire des cas (pour la gestion des jeux) et des approches probabilistes (pour la gestion des défauts). Cet objectif implique de :

- ◇ développer des formulations représentatives des problèmes d'analyse des tolérances. Les formulations doivent se baser sur des modèles de comportement capables de représenter les mécanismes hyperstatiques.
- ◇ développer des méthodes de résolution basées sur des méthodes probabilistes. Le but est de pouvoir calculer la probabilité qu'un mécanisme soit conforme vis-à-vis des exigences qui lui sont assignées. La probabilité calculée correspond au taux de non conformité recherchée par les industriels. Elle est de l'ordre de 10^{-6}. Les méthodes développées doivent être capables de fournir un résultat de façon rapide et précise de sorte qu'elles soient applicables en bureau d'études.
- ◇ illustrer les méthodes proposées sur des exemples académiques et industriels.

Plan du mémoire. Le mémoire de thèse s'organise en quatre chapitres dont le contenu est présenté ci-dessous.

Le premier chapitre a deux objectifs, le premier est de présenter les techniques de modélisation existantes pour l'analyse des tolérances. Les deux approches d'analyse des tolérances sont présentées : accumulation des tolérances et accumulation des déplacements. Le but est de déterminer la technique la plus adaptée par rapport à l'objectif de la thèse. La présentation des approches inclut le développement de la modélisation géométrique du comportement des mécanismes ainsi que la formalisation des problèmes d'analyses des tolérances. Le deuxième objectif du premier chapitre est de présenter un ensemble de méthodes probabilistes utilisées pour l'analyse de fiabilité. Le but est d'identifier des méthodes probabilistes capables de résoudre les problèmes d'analyse des tolérances.

Le second chapitre se focalise sur la présentation des formulations des problèmes d'analyse des tolérances des mécanismes hyperstatiques. Il contient la formulation classique basée sur la définition d'un problème d'optimisation à résoudre pour déterminer la valeur des jeux. Afin de pallier des problèmes liés à l'utilisation d'algorithmes d'optimisation non linéaire, une procédure de linéarisation des contraintes non linéaires du modèle de comportement est proposée. Il est également proposé une formulation originale du problème d'analyse des tolérances sous forme système. Cette nouvelle formulation a pour but de considérer le mécanisme en plusieurs configurations isostatiques afin de s'affranchir des variables jeux. Elle transforme la formulation initiale en une formulation système ce qui permet l'application d'une méthode de fiabilité système. Cette formulation est une des innovations majeures apportées dans le cadre de cette thèse.

Le troisième chapitre est dédié au développement de méthodes de résolution des problèmes d'analyse des tolérances des mécanismes hyperstatiques. La méthode de référence couplant la simulation de Monte Carlo avec un algorithme d'optimisation est présentée. La méthode est notamment appliquée sur un exemple académique permettant d'étudier l'impact de la procédure de linéarisation sur la précision de la probabilité de défaillance.

Ensuite deux méthodes de résolution sont proposées suivant le type de problème à résoudre. Pour le problème d'assemblage du mécanisme, des procédures de calcul itératif sont développées pour calculer les probabilités de défaillance en minimisant l'erreur d'approximation due à la linéarisation. Pour le problème fonctionnel, une méthode de résolution très efficace basée sur la méthode FORM système est proposée.

Le quatrième chapitre est consacré à l'application des méthodes de résolution proposées sur des mécanismes industriels. Les résultats obtenus sont comparés à ceux de la méthode de référence.

Deux exemples académiques présentés en annexe B.1 et C.1 sont utilisés dans les chapitres 2 et 3. Dans le chapitre 2, ils permettent d'illustrer les formulations proposées. Dans le chapitre 3, les méthodes de résolution développées sont appliquées sur ces exemples. Les résultats obtenus sont comparés avec ceux obtenus par la méthode de référence afin d'illustrer les performances des méthodes proposées.

Chapitre 1

Analyse des tolérances et méthodes d'analyse probabilistes

Sommaire

1.1 Introduction 5
1.2 Formalisation des problèmes d'analyse des tolérances 6
1.2.1 Modèles géométriques des mécanismes 7
1.2.2 Modèle de comportement 11
1.2.3 Typologie des mécanismes 13
1.2.4 Formalisations et approches des problèmes d'analyse des tolérances des mécanismes hyperstatiques 15
1.2.5 Synthèse 23
1.3 Méthodes probabilistes pour l'analyse des tolérances et l'analyse de fiabilité 24
1.3.1 Méthodes d'approximation 25
1.3.2 Méthodes de simulation 30
1.3.3 Techniques de méta-modélisation 34
1.3.4 Synthèse 41
1.4 Conclusion 41

1.1 Introduction

Ce premier chapitre présente les approches existantes en analyse des tolérances ainsi que les méthodes probabilistes les plus courantes. Le but est de pouvoir identifier les approches et méthodes permettant de répondre aux exigences du projet AHOTLA. De plus, ce chapitre permet de définir les hypothèses et limites des travaux de thèse.

L'analyse des tolérances a pour but de vérifier si les tolérances spécifiées sur les composantes d'un mécanisme permettent de garantir des conditions d'assemblage et de fonctionnement. Cette vérification nécessite la simulation du comportement du mécanisme avec des défauts géométriques. Elle est sujette à trois problématiques :

1. Modéliser les écarts géométriques inhérents aux processus de fabrication (usure des outils, variabilité des opérateurs,...) et modéliser les jeux entre les pièces du mécanisme.
2. Construire un modèle mathématique qui permet de simuler le comportement du mécanisme en prenant en compte les écarts et les jeux.
3. Développer des méthodes d'analyse pour évaluer le niveau de qualité du mécanisme.

Par rapport à ces trois problématiques, il est possible de distinguer deux approches d'analyse des tolérances : l'accumulation des tolérances et l'accumulation des déplacements. Ces deux approches utilisent le même type de paramétrage géométrique mais se basent sur une méthode d'analyse différente. Bien que la méthode d'analyse soit différente, les deux techniques ont le même objectif qui est d'évaluer la qualité du mécanisme pour des tolérances données :

- ◇ L'accumulation des tolérances se base sur la manipulation de domaines. Elle utilise principalement la méthode du pire des cas définissant les tolérances pour garantir une probabilité de rebut égale à zéro. Cependant, la méthode statistique commence également à être utilisée.
- ◇ L'accumulation des déplacements se base sur la définition de contraintes sur les paramètres géométriques. Elle utilise la méthode statistique ayant pour but de calculer le niveau de qualité des mécanismes via des probabilités de rebut.

Comme stipulé dans l'introduction, les exigences émises lors de la construction du projet AHTOLA sont d'évaluer dans un temps de calcul raisonnable des taux de non conformité à partir d'une modélisation probabiliste des imperfections et d'une analyse au pire des cas des jeux. A partir de ces exigences, des spécifications techniques relatives aux approches peuvent être formulées :

- ◇ L'approche d'analyse des tolérances utilisée doit présenter une modélisation du comportement du mécanisme compatible avec l'application de méthodes probabilistes,
- ◇ La méthode probabiliste doit pouvoir calculer des probabilités de l'ordre de 10^{-6} de façon précise et le plus rapidement possible.

Le chapitre est divisé en deux grandes sections, la première section 1.2 est consacrée à la formalisation des problèmes d'analyse des tolérances. La deuxième section 1.3 est dévouée à la présentation de méthodes probabilistes utilisées pour l'analyse de fiabilité des structures. L'objectif est d'identifier des méthodes capables de résoudre les problèmes d'analyse des tolérances avec précision et rapidité.

1.2 Formalisation des problèmes d'analyse des tolérances

Cette première section a pour but de présenter les différentes façon de formaliser les problèmes d'analyse des tolérances. La section est décomposée de la façon suivante : la sous-section 1.2.1 présente les principales techniques existantes pour modéliser les écarts

géométriques et les jeux dans un mécanisme. La sous-section 1.2.2 décrit la façon de modéliser le comportement des mécanismes. La sous-section 1.2.3 compare les différents types de mécanisme en fonction de leurs modèles de comportement. Enfin la sous-section 1.2.4 s'intéresse à la formalisation des problèmes d'analyse des tolérances. Les deux approches d'analyse des tolérances, accumulation des tolérances et accumulation des déplacements, sont présentées ainsi que les méthodes d'analyse au pire des cas et statistique. Les deux problèmes formalisés concernent la montabilité du mécanisme et son fonctionnement.

1.2.1 Modèles géométriques des mécanismes

Cette section présente la façon de modéliser les écarts géométriques des pièces ainsi que les jeux entre les surfaces des différentes pièces. C'est une première étape essentielle pour pouvoir simuler le comportement du mécanisme.

Les imperfections de fabrication engendrent des défauts de la géométrie des mécanismes. La modélisation des défauts se base sur une modélisation de la pièce avec défauts, celle imaginable après les opérations de fabrication. La géométrie d'une pièce peut être appréhendée via différentes modélisations, voir Figure 1.1 :

- ◇ Surface nominale : surface parfaite (plan, cylindre,...) dont les dimensions et la position correspondent idéalement aux dimensions de conception.
- ◇ Surface non-idéale (*skin model*) : modélisation de la surface obtenue par le processus de fabrication, représentant l'interface entre l'environnement et la matière.
- ◇ Surface de substitution : surface parfaite associée à la surface fabriquée. Cette modélisation néglige les défauts de forme. La surface de substitution peut être choisie tangente à l'intérieure matière, à l'extérieure matière ou encore obtenue par la méthode des moindres carrés.

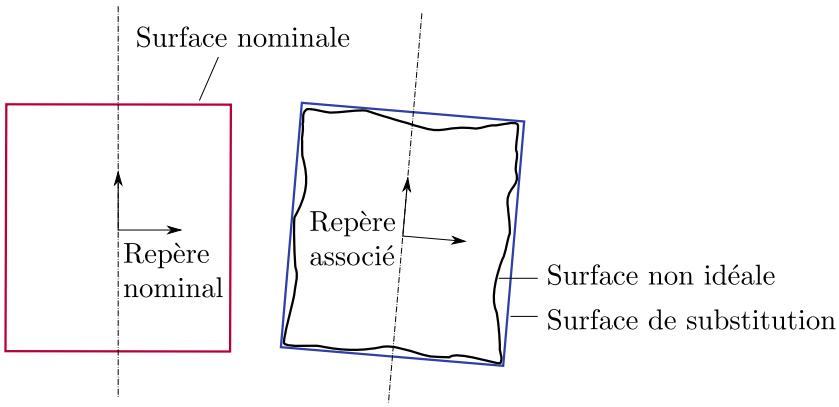


FIGURE 1.1 – Surface nominale et surface de substitution associée à la surface non-idéale.

Le paramétrage des défauts peut être défini entre :

- ◇ la géométrie nominale et une représentation mathématique de la géométrie non idéale [Samper et al., 2009; Schleich et Wartzack, 2014; Anwer et al., 2014].
- ◇ la géométrie nominale et la géométrie de substitution.

Hypothèse de travail : Les défauts de forme sont négligés. Nous nous plaçons dans les cas où les défauts de forme ont un impact négligeable sur le comportement des mécanismes. Cette hypothèse a été en partie validée par Adragna et al. [2010] lorsque les jeux sont d'un ordre de grandeur supérieur.

Dans ce cas, il existe deux types d'écarts géométriques modélisant les défauts, dont voici leurs définitions.

Définition 1.2.1 *Les écarts intrinsèques sont spécifiques à chaque surface de substitution, ils définissent les variations dimensionnelles de la surface. Par exemple, l'écart intrinsèque d'un cylindre de substitution correspond à la variation du diamètre de ce cylindre.*

Définition 1.2.2 *Les écarts de situation définissent l'écart d'orientation et de position d'une surface de substitution par rapport à un repère de référence associé à la géométrie nominale.*

Quels que soient leurs types, les écarts géométriques sont modélisés par des variables notées $\mathbf{x} = \{x_1, \ldots, x_n\}$.

Les tolérances spécifiées sur les composantes particulières du mécanisme ont pour objectif de limiter les écarts géométriques. Suivant la méthode d'analyse des tolérances, les écarts géométriques autorisés vis-à-vis des tolérances sont définis soit via un domaine de variation admissible soit via des variables aléatoires qui modélisent les imperfections de fabrication. Dans le cadre de ces travaux de thèse, la seconde modélisation est préférée car l'objectif est d'utiliser des approches probabilistes.

Étant donné que les écarts géométriques sont modélisés par un vecteur aléatoire, il est nécessaire lors de l'analyse des tolérances de vérifier :

- ◇ La montabilité du mécanisme,
- ◇ le respect des exigences de fonctionnement ou fonctionnelles du mécanisme,
- ◇ le respect des spécifications géométriques.

Contexte et limitations des travaux de thèse : cette troisième vérification « respect des spécifications géométriques »n'est pas abordée dans ces travaux de thèse. Elle a été abordée par des étudiants en master à partir des propositions faites et de l'approche par calibre développée par Dantan et Ballu [2002].

Dans le cas des mécanismes hyperstatiques, pour qu'ils soient montables, la présence de jeux entre les pièces est nécessaire. Il faut donc également pouvoir modéliser ces jeux.

Définition 1.2.3 *Les jeux caractérisent le déplacement possible en position et orientation d'une surface de substitution par rapport à une autre.*

Les jeux sont modélisés par des variables notés $\mathbf{g} = \{g_1, \ldots, g_m\}$. Suivant la méthode d'analyse des tolérances, ils sont modélisés soit par des domaines jeux, soit par des variables libres. Généralement des petits déplacements sont considérés, ils modélisent les

petites mobilités entre les pièces du mécanisme dus aux écarts et aux jeux, ou bien pour les déplacements cinématiques dans les liaisons.

De nombreuses représentations existent dans la littérature pour modéliser les écarts géométriques et les jeux. Ils peuvent être exprimés par toutes les techniques suivantes : formulation cinématique [Desrochers, 2007; Loose et al., 2007], torseurs des petits déplacements [Bourdet et Clément, 1976; Legoff et al., 2004], classe vectorielle [Chase et al., 2004], tolérancement vectorielle [Gao et al., 1998].

Les torseurs des petits déplacements seront utilisés par la suite pour modéliser les écarts et les jeux. Toutefois, les méthodes d'analyse présentées dans ce chapitre ne sont pas limitées à une modélisation spécifique. Pour pouvoir utiliser les torseurs des petits déplacements, deux hypothèses sont posées :

- ◇ le solide est supposé indéformable,
- ◇ les rotations des pièces et des surfaces sont supposées petites.

A partir de ces hypothèses, la particularité des torseurs des petits déplacements est de faire un développement limité à l'ordre un de la matrice de passage des rotations au voisinage de zéro. En analyse des tolérances, les écarts géométriques et les jeux sont supposés très petits de sorte que l'hypothèse des petites rotations n'induit pas d'erreur de modélisation.

Ces propriétés permettent d'utiliser la relation de Varignon permettant d'écrire un torseur en un point d'application différent. Soit $\overrightarrow{t_A}$, le vecteur moment contenant les composantes de translation d'un torseur des petits déplacements écrit au point A et $\overrightarrow{R}$ le vecteur résultante contenant les composantes de rotation de ce même vecteur, alors le vecteur moment de ce torseur écrit au point B s'obtient par la relation suivante :

$$\overrightarrow{t_B} = \overrightarrow{t_A} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{R} \tag{1.1}$$

La formalisation de la modélisation des écarts de situation et des jeux grâce aux torseurs des petits déplacements est expliquée par la suite. Il est également possible d'exprimer la ou les caractéristiques géométriques du mécanisme présentant un intérêt fonctionnel grâce aux torseurs des petits déplacements.

Les écarts de situation. Soit le torseur écart $T_{ia/i}$, défini par l'équation (1.2), il correspond à un torseur des petits déplacements composé des trois composantes de rotation (α, β et γ) et des trois composantes de translation (u, v et w). Chaque composante caractérise l'écart de situation d'une surface de substitution a d'une pièce i par rapport au repère de la pièce i, appliqué en un point particulier dans une base donnée. Le repère de référence correspond souvent au repère associé à la surface nominale mais il peut correspondre à n'importe quel repère.

$$\left\{T_{ia/i}\right\} = \left\{ \begin{array}{cc} \alpha_{iai} & u_{iai} \\ \beta_{iai} & v_{iai} \\ \gamma_{iai} & w_{iai} \end{array} \right\}_{R_0} \tag{1.2}$$

où R_0 est le repère ayant pour origine le point A et muni de la base $\{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}$.

Suivant le type de surface modélisée, les torseurs écarts ont plus ou moins de composantes non nulles. Par exemple, l'expression du torseur écart d'une surface cylindrique d'axe (Az) est donnée en équation (1.3). Les écarts de translation suivant l'axe (Az) et de rotation autour de l'axe (Az) n'ont pas d'influence car ce sont des degrés d'invariance de la surface [Dantan et Ballu, 2002]. Les composantes correspondantes sont donc fixées à zéro.

$$\left\{T_{ia/i}\right\} = \left\{ \begin{array}{cc} \alpha_{iai} & u_{iai} \\ \beta_{iai} & v_{iai} \\ 0 & 0 \end{array} \right\}_{R_0} \tag{1.3}$$

Les composantes des torseurs écarts caractérisent les écarts de situation. Ces composantes et les écarts intrinsèques correspondent aux écarts géométriques notés $\mathbf{x}$.

Les jeux. Soit le torseur jeu $G_{ia/ja}$, écrit en équation (1.4), les composantes du torseur caractérisent le jeu présent entre la surface de substitution a de la pièce i et la surface a de la pièce j. Il est également nécessaire de définir la base et le point d'application du torseur.

$$\left\{G_{ia/ja}\right\} = \left\{ \begin{array}{cc} \alpha_{iaja} & u_{iaja} \\ \beta_{iaja} & v_{iaja} \\ \gamma_{iaja} & w_{iaja} \end{array} \right\}_{R_0} \tag{1.4}$$

Dans le cas des torseurs jeux, les valeurs des composantes sont inconnues, ce sont les variables jeux notées $\mathbf{g}$. Elles doivent être déterminées par la méthode d'analyse et dépendent du type de contact modélisé [Dantan et Ballu, 2002] :

- ◇ flottant : le torseur jeu est complet, toutes les composantes sont présentes et inconnues.
- ◇ glissant : le torseur jeu n'intègre que les déplacements cinématiques de la liaison. Les autres composantes sont fixées soit à zéro (sans jeux), soit fixées à des valeurs spécifiques connues.
- ◇ fixe : la liaison est fixée dans une position particulière par une action mécanique, les composantes sont donc connues et n'ont pas besoin d'être calculées par la méthode d'analyse.

La ou les caractéristiques fonctionnelles. Ce sont des composantes caractérisant les variations en position et/ou orientation de deux surfaces de substitution en relation fonctionnelle. Elles peuvent être définies en utilisant un torseur jeu fonctionnel. Il s'agit d'un torseur jeu dont les composantes correspondent aux caractéristiques fonctionnelles du mécanisme. Le torseur ne comporte donc pas forcément toutes les composantes possibles. Il ne contient que la ou les composantes présentant un intérêt. Un torseur jeu G tel que précédemment défini peut également correspondre au torseur fonctionnel. Dans ce cas, cela revient à considérer une ou plusieurs composantes de ce torseur comme étant la

ou les caractéristiques fonctionnelles du mécanisme. Il n'est donc pas obligatoire de définir spécifiquement un torseur fonctionnel pour une étude fonctionnelle d'un mécanisme.

1.2.2 Modèle de comportement

La construction d'un modèle de comportement permet de décrire mathématiquement comment interagissent les différentes pièces d'un mécanisme entre elles. Le modèle de comportement géométrique des mécanismes traduit deux phénomènes :

- ◇ La composition des déplacements dans les boucles topologiques. Elle permet de lier entre eux les paramètres du mécanisme (écarts géométriques et jeux). Elle décrit l'assemblage des pièces entre elles avec ou sans jeux.
- ◇ La non interpénétration de matière ou les déplacements bloqués au niveau des liaisons.

Les deux points impliquent la définition de plusieurs types d'équations dans le modèle de comportement :

- ◇ **Équation de compatibilité** $C_c(\mathbf{x}, \mathbf{g}) = 0$:
  Ce sont les équations issues des relations de compositions des déplacements dans les diverses boucles topologiques du mécanisme. Elles modélisent le comportement du mécanisme en définissant des équations de compatibilité entre les écarts géométriques et les jeux. L'ensemble des équations de compatibilité forme un système d'équations linéaires. L'équation (1.5) donne le nombre cyclomatique, c'est le nombre de boucles topologiques à considérer.

$$N_{boucles} = N_{liaisons} - N_{pièces} + 1 \tag{1.5}$$

  où le nombre de liaisons $N_{liaisons}$ est le nombre de surfaces en contact sans prendre en compte les liaisons associées aux caractéristiques fonctionnelles.

  Les boucles doivent être choisies judicieusement de sorte que tous les torseurs écarts et torseurs jeux apparaissent au moins une fois parmi toutes les boucles considérées. Chaque boucle prenant en compte les torseurs jeux et écarts engendre six équations de compatibilité en trois dimensions ou trois équations en deux dimensions. Ces équations sont obtenues en écrivant les projections des boucles suivant chaque axe de translation et de rotation. Une contrainte importante lors de l'écriture de ces boucles est que les torseurs doivent être exprimés au même point d'application et dans le même repère. Il faut donc, si besoin, écrire les composantes des torseurs dans le repère choisi en utilisant une matrice de rotation puis écrire le torseur au nouveau point d'application en s'appuyant sur la relation de Varignon, équation (1.1).
- ◇ **Contraintes d'interface** $C_i(\mathbf{x}, \mathbf{g}) \leq 0$ et $C_{i*}(\mathbf{x}, \mathbf{g}) = 0$:
  Les contraintes d'interface définissent des limites au comportement du mécanisme. Elles caractérisent la non interpénétration ou association entre des surfaces de substitution. Le déplacement d'une surface par rapport à l'autre est limité. Dans le cas

d'un contact flottant [Dantan et Ballu, 2002], les positions relatives des surfaces de substitution sont contraintes technologiquement par la non interpénétration. Les contraintes d'interface sont alors des inéquations $C_i \leq 0$. Dans le cas d'un contact fixe ou glissant, les positions relatives sont contraintes technologiquement dans une configuration donnée par une action mécanique. Par conséquent les contraintes d'interface sont des équations notées $C_{i*} = 0$. Une description de l'écriture des contraintes suivant le type de liaison est donnée dans la thèse de Petit [2004].

◇ **Condition fonctionnelle** $C_f(\mathbf{x}, \mathbf{g}) \geq 0$:
La condition fonctionnelle limite l'orientation et/ou la position relative de deux surfaces qui représentent un intérêt fonctionnel. Cette condition se traduit par la définition de contraintes sur une ou plusieurs caractéristiques fonctionnelles. Pour déterminer les expressions des caractéristiques fonctionnelles en fonction des paramètres géométriques, il faut écrire une boucle topologique passant par la liaison fonctionnelle. Il est alors possible d'écrire une ou plusieurs équations de compatibilité prenant en compte la ou les caractéristiques fonctionnelles. Il est envisageable de devoir considérer plusieurs boucles topologiques fonctionnelles si plusieurs surfaces en contact présentent un intérêt fonctionnel.

Si un mécanisme possède une caractéristique fonctionnelle Y. Il est possible de spécifier que cette caractéristique doit être comprise dans un intervalle afin de garantir le bon fonctionnement du mécanisme :

$$Y \in [Y_{min}; Y_{max}] \tag{1.6}$$

Cette appartenance à un intervalle entraine l'écriture de deux conditions fonctionnelles qui doivent être simultanément respectées :

$$C_{f1}(\mathbf{x}, \mathbf{g}) = Y_{max} - Y(\mathbf{x}, \mathbf{g}) \geq 0 \tag{1.7}$$
$$C_{f2}(\mathbf{x}, \mathbf{g}) = Y(\mathbf{x}, \mathbf{g}) - Y_{min} \geq 0 \tag{1.8}$$

Afin d'aider la construction du modèle de comportement, un graphe des liaisons peut être utilisé pour schématiser le mécanisme [Mathieu et Villeneuve, 2007]. Il fait apparaitre :

◇ les pièces du mécanisme,

◇ les repères nominaux associés à chaque pièce,

◇ les surfaces de substitution de chaque pièce,

◇ les liaisons entre les différentes surfaces des pièces du mécanisme,

◇ les liaisons entre les surfaces présentant un intérêt fonctionnel.

Il est plus facile de visualiser les boucles topologiques et les paramètres géométriques à prendre en compte pour l'écriture des équations. Un exemple de graphe est donné en annexe à la figure C.2 p.134.

1.2.3 Typologie des mécanismes

Le modèle de comportement par la partie composition des déplacements correspond aux équations de compatibilité. Cela se nomme également fonction réponse de l'assemblage. Suivant le type de mécanisme, ces fonctions réponses ou équations de compatibilité peuvent être de différentes natures. Cette section propose une classification des mécanismes en fonction du type de fonctions réponses, voir figure 1.2. Cette classification permet de positionner les travaux de thèse et de fixer les limites d'applications des méthodes développées.

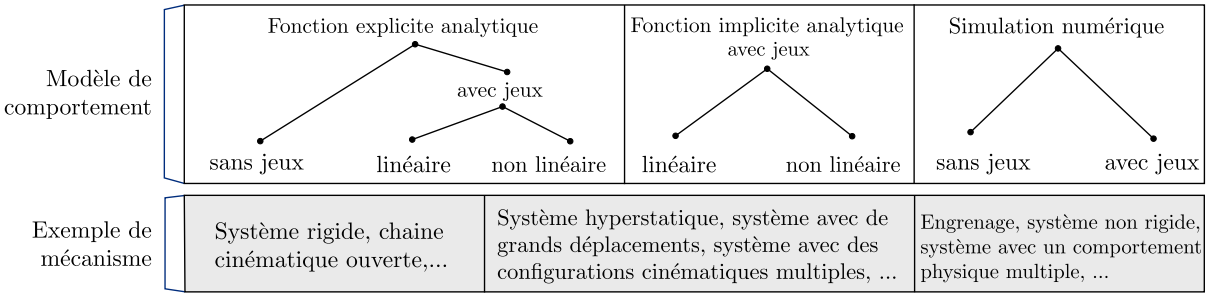


FIGURE 1.2 – Typologie des modèles de comportement des mécanismes.

Les mécanismes peuvent être divisés en deux principales catégories en fonction de leurs degrés de liberté [Ballu et al., 2008] :

◇ « *Isoconstrained mechanisms are quite easy to grasp. Geometrical deviations within such products do not lead to assembly problems ; the deviations are independent and the degrees of freedom catch the deviations. When considering small deviations, functional deviations may be expressed by linear functions of the deviations.* »

◇ « *Considering overconstrained mechanisms is much more complex. Assembly problems occur and the expression of the functional deviations is no more linear. Depending on the value of the manufacturing deviations :*

- *the assembly is feasible or not ;*
- *the worst configuration of contacts is not unique for a given functional deviation.*

For each overconstrained loop, events on the deviations have to be determined :

- *events ensuring assembly,*
- *events corresponding to the different worst configurations of contacts.*

As there are different configurations, the expression of the functional deviation cannot be linear. »

Quel que soit le type de mécanisme, ils peuvent être modélisés soit par des fonctions analytiques soit par des simulations numériques. Les fonctions analytiques explicites permettent de modéliser les mécanismes isostatiques et hyperstatiques simples. La relation

habituellement utilisée pour des mécanismes isostatiques s'écrit sous la forme suivante [Nigam et Turner, 1995] :

$$Y = f(\mathbf{x}) \tag{1.9}$$

où Y est la réponse du système (un paramètre tel qu'un jeu ou une caractéristique fonctionnelle). La fonction réponse f représente l'accumulation des écarts du mécanisme. Pour les mécanismes isostatiques, c'est une expression analytique explicite. L'exemple du mécanisme isostatique sans jeux, figure 1.3, montre que la caractéristique Y se calcule très simplement en fonction des deux écarts géométriques x_1 et x_2 :

$$Y = f(\mathbf{x}) = x_2 - x_1 \tag{1.10}$$

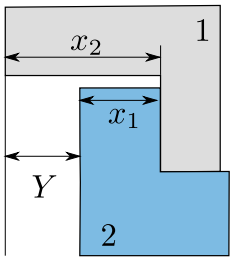


FIGURE 1.3 – Mécanisme isostatique dont la caractéristique fonctionnelle se calcule par une simple chaine de côte en fonction des dimensions x_1 et x_2.

Pour des mécanismes hyperstatiques complexes, la présence des jeux rend la détermination d'une fonction réponse f explicite difficile [Mhenni et al., 2007; Ballu et al., 2008; Dantan et Qureshi, 2009]. La caractéristique fonctionnelle Y s'exprime par une expression analytique implicite dépendant des écarts géométriques $\mathbf{x}$ et des jeux $\mathbf{g}$. Les jeux ne sont pas connus ce qui ne permet pas de déterminer Y explicitement.

La figure 1.4 montre un mécanisme hyperstatique ayant des écarts géométriques x_i, $i = \{1, \ldots, 8\}$ et des jeux g_j, $j = \{1, \ldots, 4\}$. Le modèle de comportement de ce mécanisme comprend des équations de compatibilité ainsi que des contraintes d'interface. L'équation (1.11) correspond à une équation de compatibilité possible du mécanisme.

$$C_c(\mathbf{x}, \mathbf{g}) = x_2 - x_6 - g_1 - g_2 = 0 \tag{1.11}$$

Les contraintes d'interface du mécanisme sont d'avoir les jeux positifs :

$$C_i(\mathbf{x}, \mathbf{g}) = -g_j \leq 0, \forall j = \{1, \ldots, 4\} \tag{1.12}$$

Le troisième modèle de comportement concerne les mécanismes modélisés par des simulations numériques (caractéristique fonctionnelle non géométrique, modèle éléments finis, ...). Ils ne seront pas étudiés.

Limitations des travaux de thèse : Dans le cadre des travaux de thèse, seuls les mécanismes hyperstatiques avec jeux modélisés par des fonctions analytiques implicites

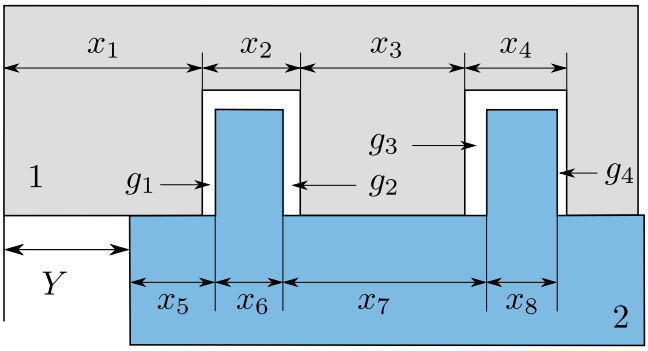


FIGURE 1.4 – Mécanisme hyperstatique avec jeux. L'expression de Y est implicite car elle dépend des écarts géométriques et des jeux.

seront considérés dans la suite du mémoire. Les méthodes développées sont applicables aux mécanismes isostatiques mais sans intérêt puisque des méthodes existantes sont plus efficaces.

1.2.4 Formalisations et approches des problèmes d'analyse des tolérances des mécanismes hyperstatiques

L'objectif principal de l'analyse des tolérances est de pouvoir calculer le niveau de qualité du produit pour des tolérances de conception données. Les méthodes d'analyse doivent donc utiliser une formalisation mathématique la plus représentative de la réalité, capable de prendre en compte les écarts géométriques et les jeux dans le calcul. Il existe deux approches distinctes pour formaliser les problèmes d'analyse des tolérances : l'accumulation des tolérances et l'accumulation des déplacements.

Quelle que soit l'approche utilisée, le calcul du niveau de qualité d'un mécanisme fait intervenir deux notions : celle de la montabilité du mécanisme et celle de sa fonctionnalité. Ces deux conditions sont définies de la façon suivante.

Définition 1.2.4 *Condition d'assemblage : un mécanisme avec jeux doit pouvoir s'assembler malgré les écarts géométriques et sans qu'il y ait d'interpénétration entre ses pièces.*

Définition 1.2.5 *Condition fonctionnelle : les variations maximales et/ou minimales d'une ou plusieurs caractéristiques fonctionnelles, dues aux écarts géométriques et aux jeux, ne doivent pas dépasser un certain seuil pour garantir le bon fonctionnement du mécanisme, à condition qu'il soit montable.*

Les deux approches d'analyse des tolérances se basent sur deux techniques différentes. L'accumulation des tolérances définit des domaines de variation admissibles sur les écarts géométriques et les jeux [Bhide et al., 2005; Davidson et Shah, 2012; Giordano et Duret, 1993; Giordano et al., 2005]. Elle se base principalement sur la méthode d'analyse au pire des cas. Elle est présentée dans la sous-section 1.2.4.1. L'approche d'accumulation des déplacements est décrite dans la sous-section 1.2.4.2. La technique consiste à définir des

contraintes sur les paramètres [Qureshi et al., 2012; Dantan et Qureshi, 2009]. Elle se base sur la méthode d'analyse statistique. La figure 1.5 montre le classement des méthodes actuelles d'analyse des tolérances en fonction du type de mécanisme étudié. Il existe actuellement peu de méthode basées sur des approches probabilistes pour l'analyse des tolérances des mécanismes hyperstatiques, excepté les méthodes développées par Qureshi et al. [2012] et Beaucaire et al. [2013] ainsi que Ballu et al. [2008] dans le cas où la fonction f est explicite.

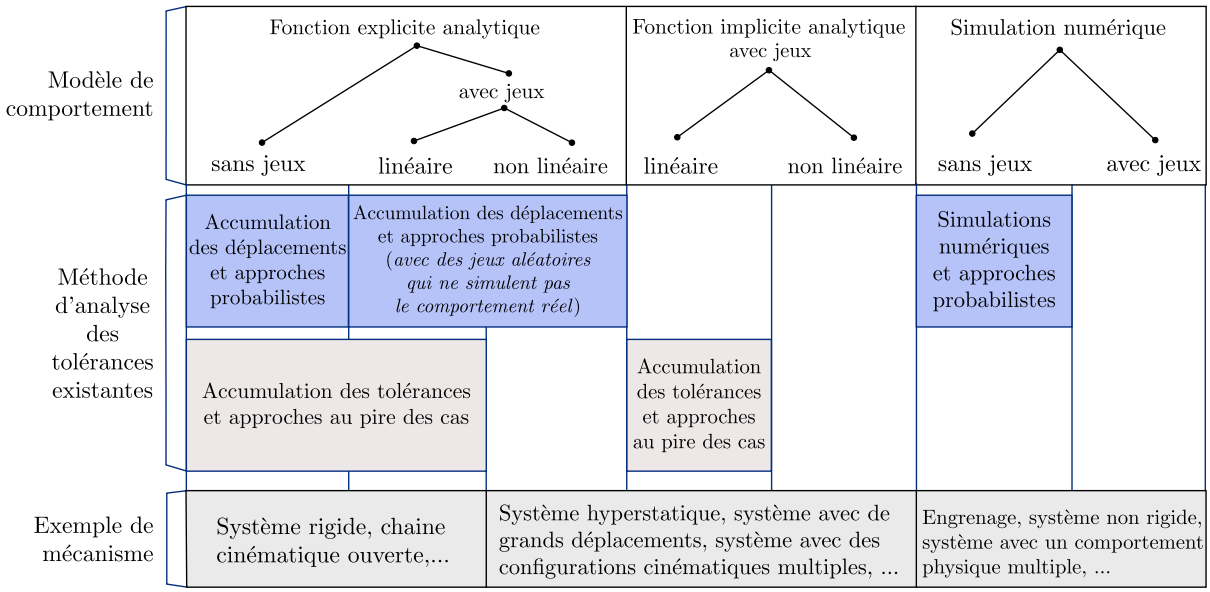


FIGURE 1.5 – Typologie des modèles de comportement des mécanismes et classement des méthodes actuelles d'analyse des tolérances.

1.2.4.1 Accumulation des tolérances

L'accumulation des tolérances a pour but de simuler la composition des tolérances de façon linéaire. Les écarts géométriques admissibles sont établis géométriquement grâce à un domaine de variation admissible. Les bornes de ce domaine sont définies grâce aux tolérances spécifiées sur les composantes du mécanisme. Pour les jeux, un domaine de déplacement admissible garantissant la non pénétration de matière des surfaces en contact est défini. Certaines composantes sont bornées et d'autres non.

Il existe plusieurs techniques pour représenter ces espaces de variations admissibles : les *T-maps*® [Bhide et al., 2005; Davidson et al., 2002; Davidson et Shah, 2012], les domaines écarts et domaines jeux [Giordano et Duret, 1993; Giordano et al., 2005], les *gap spaces* [Zou et Morse, 203; Morse, 2004]. Un *T-maps*® est un hypothétique domaine linéaire Euclidien, le *T-maps*® représente toutes les variations possibles de la composante étudiée. Le domaine se construit en reliant tous les points limites caractérisant la variation possible d'une caractéristique par rapport à sa zone de tolérance. Suivant la dimension du problème, le *T-maps*® peut être une zone délimitée par une aire en 2D, un volume en 3D ou un hyper-volume. Pour les domaines écarts et domaines jeux, le principe est le même.

Ils se basent sur les torseurs des petits déplacements [Bourdet et Clément, 1976; Legoff et al., 2004]. Un domaine de variation est créé en utilisant les composantes variables des torseurs pour représenter le domaine de variation admissible des composantes soit vis-à-vis des tolérances, soit pour garantir la non pénétration de matière.

Quelles que soient les techniques utilisées, elles se basent sur l'utilisation de différents domaines :

◇ **Domaines écarts** $D_e(\mathbf{x})$:
Le domaine écart représente l'espace des variations admissibles des composantes modélisant le déplacement vis-à-vis de leurs zones de tolérance. Des *T-maps*® sont créés pour tous les éléments tolérancés [Davidson et Shah, 2012; Ameta et al., 2012]. Pour les domaines écarts, seules les composantes variables du torseur des petits déplacements sont utilisées pour créer l'espace de variation. L'espace est également défini en utilisant les écarts géométriques intrinsèques. Les valeurs des tolérances fixent les limites des domaines écarts [Ameta et al., 2012].

La figure 1.6 est un exemple de domaine écart pour un plan rectangulaire d'axe normal $\vec{z}$ soumis à une tolérance de localisation de valeur t_l. Le domaine écart limite trois composantes : la translation t_z suivant l'axe $\vec{z}$ et les rotations r_x et r_y autour des axes $\vec{x}$ et $\vec{y}$. Les limites du domaine sont définies par les valeurs de la tolérance t_l et les longueurs a et b des côtés du plan rectangulaire.

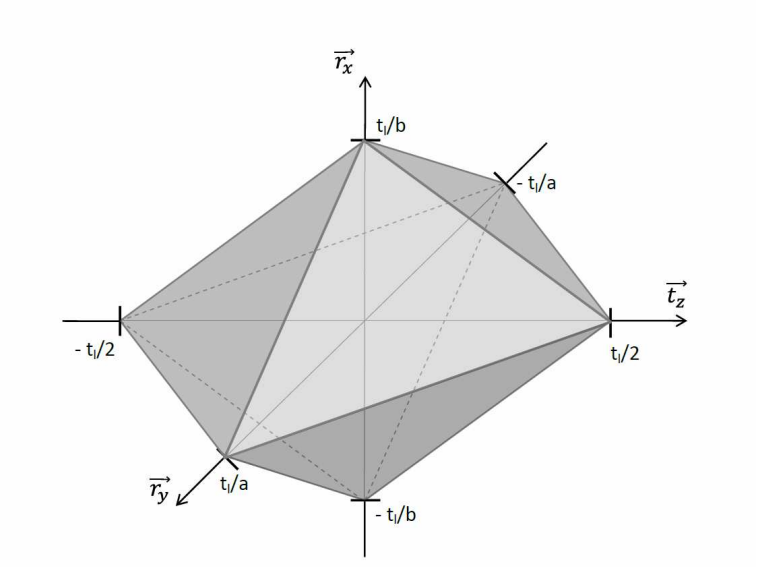


FIGURE 1.6 – Exemple de représentation de domaine écart pour un plan rectangulaire de côté a et b et d'axe normal $\vec{z}$ soumis à une tolérance de localisation de valeur t_l, [Mansuy, 2012].

◇ **Domaines jeux** $D_j(\mathbf{x}, \mathbf{g})$:
Les domaines jeux représentent l'espace des variations admissibles d'une surface par rapport à une autre. Le domaine n'est pas forcément complètement fermé. Il est borné par les contraintes d'interface du modèle de comportement. Par contre

les composantes correspondant aux degrés de liberté de la liaison sont sans limites [Ameta et al., 2012; Mansuy, 2012].

La figure 1.7 montre un domaine jeu d'une liaison cylindre-cylindre d'axe $\vec{z}$ et dont la différence des diamètres est égale à J. Le domaine jeu montre le déplacement possible des composantes de translation t_x, t_y et t_z pour qu'il n'y ait pas d'interpénétration de matière. La composante de translation t_z suivant l'axe $\vec{z}$ de liaison n'est pas bornée car il s'agit d'un degré de liberté de la liaison.

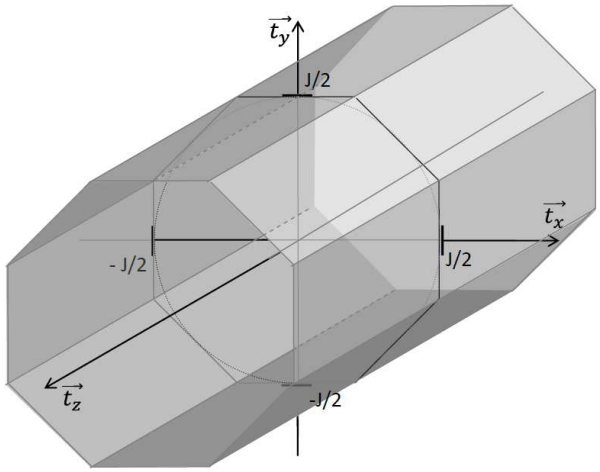


FIGURE 1.7 – Exemple de représentation de domaine jeu discrétisé pour une liaison cylindre-cylindre d'axe $\vec{z}$ et de différence des diamètres J, [Mansuy, 2012].

- ◇ **Domaine fonctionnel** $D_f(\mathbf{x}, \mathbf{g})$:
  Le domaine fonctionnel est un domaine jeu spécifique, il caractérise la condition fonctionnelle. C'est un espace de variation admissible pour la ou les caractéristiques fonctionnelles du mécanisme [Ameta et al., 2012].
- ◇ **Accumulation des domaines** :
  L'influence des défauts et des jeux ne peut pas être étudiée indépendamment les uns des autres. Il faut prendre en compte le mécanisme dans sa globalité. Les équations de compatibilité issues des boucles topologiques du mécanisme sont utilisées pour combiner les domaines écarts et domaines jeux pour construire l'accumulation des domaines appelés domaines jeux résiduels [Mansuy, 2012]. L'intersection des domaines jeux résiduels permet de construire le domaine jeu résultant D_{jr}.

La méthode d'analyse au pire des cas. L'accumulation des tolérances utilise principalement la méthode d'analyse au pire des cas. Cette méthode consiste à définir les dimensions des pièces et les tolérances de telles sortes que toutes les combinaisons possibles des pièces puissent être assemblées, c'est-à-dire que la probabilité qu'un mécanisme ne s'assemble pas soit nulle. Pour l'étude de la condition fonctionnelle, la pire combinaison possible de chaque écart est considérée. Par conséquent, ce type d'analyse implique de définir des tolérances beaucoup plus serrées et donc augmenter les coûts de fabrication en entrainant une possible sur-qualité [Hong et Chang, 2002; Mansuy et al., 2011].

Les conditions d'assemblage et fonctionnelle sont définies comme suit [Ameta et al., 2012; Mansuy, 2012] :

◇ Condition d'assemblage : le mécanisme est montable si le domaine jeu résultant $[D_{jr}]$ existe :

$$[D_{jr}] \neq \emptyset \tag{1.13}$$

◇ Condition fonctionnelle : le mécanisme est fonctionnel si l'intersection du domaine jeu résultant avec le domaine fonctionnel est non vide :

$$[D_{jr}] \cap [D_{fr}] \neq \emptyset \tag{1.14}$$

Les domaines peuvent être représentés de deux façons différentes :

◇ la H-représentation : le domaine est représenté par les équations représentant un demi-hyper-espace limité par un hyper-plan frontière.

◇ la V-représentation : le domaine est représenté par ses sommets correspondant aux intersections des hyper-plans frontières. La liste des coordonnées des sommets est appelée V-représentation.

La méthode de calcul actuelle se base sur l'utilisation des sommes de Minkowski et sur le calcul d'intersection des domaines pour déterminer les domaines résultants. Les sommes de Minkowski utilisent la H-représentation tandis que pour faire les intersections, la V-représentation est préférée.

La figure 1.8 illustre l'opération de somme de Minkowski sur deux domaines $[D_{u+v}] = [D_u] \oplus [D_v]$ où $\oplus$ symbolise la somme de Minkowski.

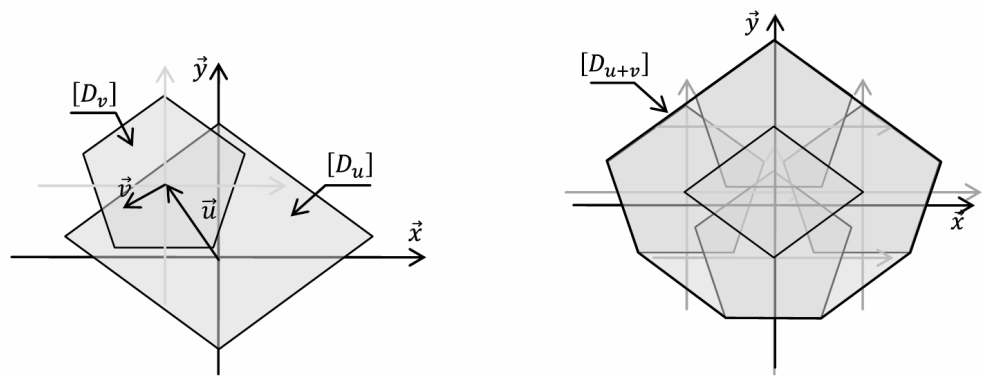


FIGURE 1.8 – Exemple de somme de Minkowski appliquée sur les domaines $[D_u]$ et $[D_v]$. Le domaine résultant est le domaine $[D_{u+v}] = [D_u] \oplus [D_v]$, Mansuy [2012].

Cependant, la méthode statistique est maintenant également utilisée car la somme de Minkowski utilisée dans la méthode au pire des cas est trop coûteuse en temps de calcul. En effet, le calcul des domaines résultants par les sommes de Minkowski est complexe malgré l'amélioration des algorithmes de calcul [Teissandier et Delos, 2011]. Les écarts géométriques, modélisés par des variables aléatoires, remplacent les domaines écarts. Cela permet de calculer une probabilité de défaillance [Mansuy et al., 2012].

1.2.4.2 Accumulation des déplacements

L'objectif de l'accumulation des déplacements est de modéliser l'influence des écarts géométriques sur le comportement du mécanisme. Pour cela, les écarts géométriques sont modélisés par des variables aléatoires et les jeux par des variables libres. Pour des écarts géométriques donnés, la pire des configurations des jeux des pièces doit être considérée pour déterminer la valeur des jeux.

◇ **Les écarts géométriques x**

Les écarts géométriques **x** sont modélisés par des variables aléatoires **X** dont les lois de probabilité et leurs paramètres sont choisis en accord avec le processus de fabrication et/ou les tolérances spécifiées sur les composantes.

La figure 1.9 montre un plan $1a$ d'axe normal $\vec{z}$ soumis à une tolérance de localisation de valeur t. Une modélisation simple de l'écart géométrique de position au point O suivant cet axe par rapport au repère nominal, noté $w_{1a/1}$, consiste à considérer cette composante comme une variable aléatoire de loi normale de moyenne nulle et d'écart-type égal à $t/6$. Cela modélise le déplacement possible du plan suivant l'axe $\vec{z}$ autour de sa valeur nominale avec une probabilité que l'écart géométrique soit dans la tolérance égale à 99.7%. La figure 1.10 illustre cette modélisation. C'est une modélisation simpliste car il faudrait également prendre en compte les rotations possibles autour des axes $\vec{x}$ et $\vec{y}$.

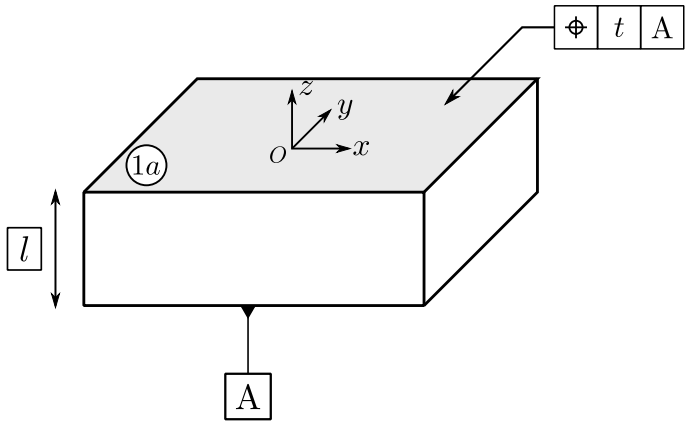


FIGURE 1.9 – Tolérance de localisation appliquée sur une surface plane.

Ce type de modélisation implique la possibilité d'avoir des dimensions négatives si l'on suppose se placer dans les queues des densités de probabilité. Il est possible de définir des lois de probabilité tronquées pour pallier ce problème. Dans certains cas spécifiques, il est également possible de définir des inéquations afin de limiter les écarts géométriques pour qu'ils soient strictement compris dans l'intervalle de tolérance.

La modélisation résultante des spécifications n'est pas développée dans ces travaux. Les écarts géométriques représentatifs des tolérances spécifiées sur le mécanisme sont supposés connus.

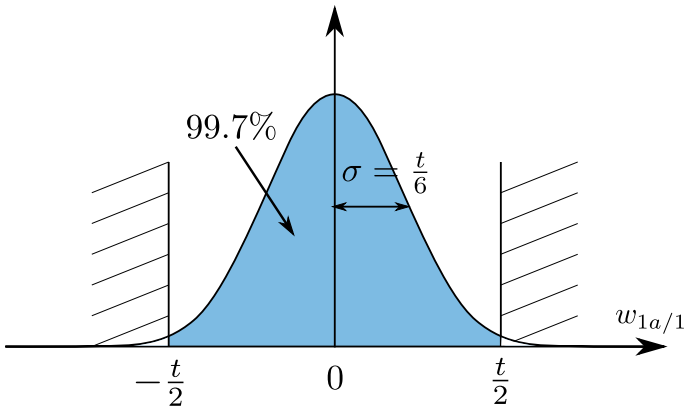


FIGURE 1.10 – Loi de probabilité possible suivie par l'écart géométrique $w_{1a/1}$. En l'occurrence, il s'agit d'une loi normale de moyenne zéro et d'écart-type égal à la valeur de l'intervalle de tolérance divisée par 6.

◇ **Les jeux g**

Les jeux sont modélisés par des variables libres dont la valeur dépend de la configuration du mécanisme et des écarts géométriques. Pour des écarts géométriques donnés, les jeux sont calculés par la méthode d'analyse dans la pire des configurations.

La notion de configuration est importante dans la suite du mémoire, sa définition est donnée ci-dessous.

Définition 1.2.6 *Une configuration particulière d'un mécanisme hyperstatique correspond à un ensemble de points de contact spécifiques entre les différentes pièces le composant de tel sorte que tous les degrés de liberté soient contraints. Le mécanisme est alors dans une configuration isostatique et les jeux peuvent être calculés en fonction des écarts géométriques.*

Dans le mécanisme hyperstatique, montré dans la figure 1.4 p.15, il n'y a qu'un degré de liberté (la translation horizontale) donc un seul point de contact à définir. Il y a quatre configurations de points de contact possibles correspondant à $g_1 = 0$ ou $g_2 = 0$ ou $g_3 = 0$ ou $g_4 = 0$. L'expression de la caractéristique fonctionnelle Y dépend de la configuration. La pire des configurations correspond à la configuration qui donne la pire valeur de la caractéristique fonctionnelle pour des écarts géométriques donnés. Si la condition fonctionnelle associée à la caractéristique Y est $C_{f1}(\mathbf{x}, \mathbf{g}) = Y_{max} - Y(\mathbf{x}, \mathbf{g}) \geq 0$, alors la pire des configurations correspond à celle qui maximise Y, voir figure 1.11. Toutefois, la pire des configurations doit respecter les contraintes d'interface du modèle de comportement garantissant la non interpénétration de matière.

La méthode d'analyse statistique. La technique d'accumulation des déplacements se base sur la méthode d'analyse statistique. Cette méthode a pour but de considérer que les variabilités de fabrication ont une influence suffisamment maitrisée pour garantir

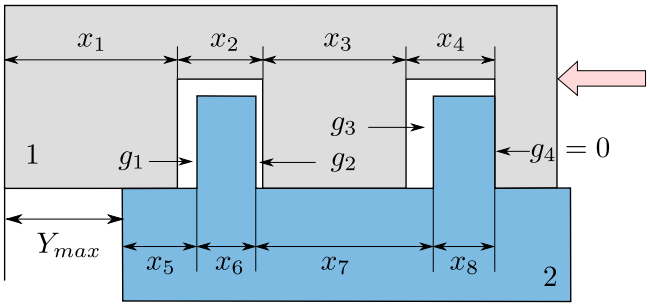


FIGURE 1.11 – Mécanisme hyperstatique dans la pire des configurations des jeux. Cette configuration correspond à la maximisation de Y.

la qualité de production. Dans une production de grande série, cela revient à autoriser une petite proportion des mécanismes à ne pas satisfaire les conditions d'assemblage ou de fonctionnalité. En conséquence, les tolérances de certaines composantes peuvent être augmentées ce qui permet de réduire significativement les coûts de fabrication. L'objectif de l'analyse statistique est de calculer la probabilité que les exigences fonctionnelles et condition de montabilité soient respectées pour des tolérances données [Nigam et Turner, 1995; Beaucaire et al., 2013; Morse, 2004]. Ces probabilités sont les indicateurs du niveau de qualité du mécanisme.

En réalité, la probabilité calculée est la probabilité de rebut : c'est la proportion de mécanismes qui ne seront pas montables ou pas fonctionnels. D'un point de vue industriel, la probabilité recherchée est de l'ordre de quelques pièces par million. On parle alors de Taux de Non Conformité (TNC), exprimé en pièces par million (ppm).

En fonction des équations du modèle de comportement, les conditions d'assemblage et fonctionnelle s'expriment de la façon suivante [Dantan et Ballu, 2002; Qureshi et al., 2012] :

- ◇ Condition d'assemblage : « Il existe une configuration admissible des jeux du mécanisme telle que les équations de compatibilité et les contraintes d'interface soient respectées ». Cette condition se traduit mathématiquement par l'utilisation du quantificateur *il existe* $\exists$:

$$\exists \mathbf{g} \in \mathbb{R}^m : \{C_c(\mathbf{x}, \mathbf{g}) = 0 \cap C_i(\mathbf{x}, \mathbf{g}) \leq 0 \cap C_{i*}(\mathbf{x}, \mathbf{g}) = 0\} \tag{1.15}$$

- ◇ Condition fonctionnelle : « Pour toutes les configurations admissibles du mécanisme, les conditions d'assemblage et la ou les contraintes fonctionnelles doivent être respectées ». Cette condition utilise le quantificateur mathématique *quel que soit* $\forall$:

$$C_f(\mathbf{x}, \mathbf{g}) > 0, \forall \mathbf{g} \in \mathbb{R}^m : \{C_c(\mathbf{x}, \mathbf{g}) = 0 \cap C_i(\mathbf{x}, \mathbf{g}) \leq 0 \cap C_{i*}(\mathbf{x}, \mathbf{g}) = 0\} \tag{1.16}$$

Dans le cas de l'assemblage, vérifier la condition de montabilité revient à vérifier l'existence d'une configuration admissible du mécanisme telle que toutes les contraintes soient satisfaites. Quant à la condition fonctionnelle, elle doit être vérifiée pour toutes

les configurations admissibles. Cependant, il est possible de n'en vérifier qu'une seule. En effet, il suffit de déterminer la configuration admissible du mécanisme correspondant à la pire condition fonctionnelle possible. Si pour cette configuration le mécanisme est fonctionnel, alors il l'est pour toutes les configurations admissibles. La difficulté réside dans la détermination de la pire des configurations.

La méthode de résolution actuelle se base sur le couplage de la simulation de Monte Carlo avec un algorithme d'optimisation pour trouver la pire des configurations. Cette méthode est expliquée dans la section 3.2 du chapitre 3.

1.2.5 Synthèse

Il existe deux approches d'analyse des tolérances : l'une basée sur l'accumulation des tolérances et une autre basée sur l'accumulation des déplacements. Les deux approches sont similaires, les équations ou domaines à définir sont semblables. Par contre, les outils mathématiques utilisés pour l'analyse sont différents. En effet, l'accumulation des tolérances se base sur l'utilisation des domaines tandis que l'accumulation des déplacements manipule des contraintes sur les paramètres géométriques.

L'accumulation des tolérances est principalement basée sur la méthode au pire des cas pour estimer le niveau de qualité. Cette méthode implique de définir des tolérances beaucoup plus serrées pour garantir à coup sûr l'assemblage du mécanisme. Cela entraine une augmentation des coûts de fabrication. Elle est également moins compatible à priori avec l'utilisation des méthodes probabilistes bien que l'approche statistique permettant l'application de méthodes probabilistes commence à être utilisée par Mansuy et al. [2012]. De plus, elle utilise les sommes de Minkowski pour calculer les domaines résultants. Cette opération est coûteuse en temps de calcul et devient très compliquée lorsque la dimension du problème augmente.

L'accumulation des déplacements se base sur l'approche statistique modélisant les écarts géométriques comme des variables aléatoires. L'utilisation de cette approche a pour but de calculer une probabilité de non respect des conditions. Cette modélisation convient parfaitement pour l'application de méthodes probabilistes. En outre, elle permet de réduire sensiblement les tolérances et donc de réduire les coûts de fabrication. A partir de ces constats, les méthodes de résolution d'analyse des tolérances développées dans la suite du mémoire se baseront sur l'accumulation des déplacements.

Antérieurement à ces travaux de thèse, des recherches de méthodes de résolution d'analyse des tolérances basées sur l'accumulation des déplacements ont été menées au sein du consortium d'AHTOLA. Les premières recherches ont été effectuées par Qureshi et al. [2012]. Ils transforment les définitions des conditions d'assemblage et fonctionnelle, équations (1.15) et (1.16), en un problème d'optimisation à résoudre. La résolution du problème permet de répondre aux deux conditions. Dans un premier temps, si une solution au problème est trouvée, cela indique que le mécanisme peut s'assembler. Ensuite, si une solution est trouvée, alors elle correspond à la valeur de condition fonctionnelle dans la pire des configurations du mécanisme. Si cette valeur est négative, alors le mécanisme n'est pas fonctionnel. La probabilité de non respect des conditions est calculée en couplant un

algorithme d'optimisation avec une simulation de Monte Carlo (méthode expliquée dans la sous-section 1.3.2). Cette méthode de résolution est considérée comme la méthode de référence. Elle est décrite dans la section 3.2. Cependant, cette méthode est très coûteuse en temps de calcul. Elle ne permet pas de traiter des mécanismes complexes en un temps de calcul acceptable.

Les autres recherches ont été conduites par Beaucaire et al. [2013] qui ont développé une nouvelle formulation pour l'analyse des tolérances des mécanismes hyperstatiques basée sur l'accumulation des déplacements. La formulation permet de définir le problème comme un problème d'estimation d'une probabilité système. Le but est de considérer une condition fonctionnelle pour chaque configuration isostatique possible du mécanisme en vérifiant si le mécanisme est toujours montable. La formulation proposée devient cependant inutilisable pour des études de mécanismes très complexes car le nombre d'événements de la probabilité système à considérer devient très grand. Malgré cela, leurs recherches ont montré que les problèmes d'analyses des tolérances des mécanismes hyperstatiques sont des problèmes systèmes. Les travaux de thèse se sont appuyés sur ces recherches afin de trouver une nouvelle formulation permettant de traiter les mécanismes complexes. La formulation proposée est décrite dans la section 2.4.

1.3 Méthodes probabilistes pour l'analyse des tolérances et l'analyse de fiabilité

L'objectif de ces travaux de thèses est de développer des méthodes de résolution basées sur des approches probabilistes. L'approche d'accumulation des déplacements modélisant les écarts géométriques par des variables aléatoires est tout à fait adaptée pour l'application de telles méthodes. Au vu de la formalisation des conditions d'assemblage et fonctionnelle donnée dans la sous-section 1.2.4.2, les problèmes d'analyse des tolérances sont très proches des problèmes d'analyse de fiabilité des structures. Malgré cela, dans le cadre de l'analyse des tolérances, les méthodes de fiabilité sont peu utilisées même s'il existe plusieurs applications se basant sur la simulation de Monte Carlo [Qureshi et al., 2012; Nigam et Turner, 1995; Mansuy et al., 2012] ou la méthode FORM [Ballu et al., 2008].

Le but de ce chapitre est d'exposer les méthodes classiquement utilisées pour des analyses de fiabilité afin d'avoir à disposition un ensemble de méthodes applicables à l'analyse des tolérances. Suivant le type de problème et la formulation du problème, la méthode de fiabilité la plus adaptée sera utilisée. Dans la suite de cette section, le vocabulaire employé pour décrire le niveau de qualité sera la probabilité de défaillance afin de rester proche du vocabulaire utilisé pour les méthodes de fiabilité. Deux probabilités pourront être distinguées suivant la condition à vérifier : une probabilité de défaillance fonctionnelle et une probabilité de défaillance d'assemblage.

L'objectif d'un problème de fiabilité ou d'un problème d'analyse des tolérances est de déterminer si une structure ou un mécanisme est capable d'assurer sa fonction pour toutes réalisations des variables aléatoires. Les paramètres incertains sont modélisés par

un vecteur de variables aléatoires $\mathbf{X}(\omega) = \{X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega)\}$ où ω représente l'aléa, à valeurs dans l'espace physique $\mathcal{X}^n \subset \mathbb{R}^n$. Dans le cas de l'analyse des tolérances, ces variables correspondent aux écarts géométriques modélisant les variations dues au processus de fabrication par rapport aux dimensions nominales. Pour un aléa fixé, le vecteur des réalisations d'une variable aléatoire est noté $\mathbf{x} = \{x_1, \ldots, x_n\} \in \mathbb{R}^n$. Il correspond physiquement à un ensemble de valeurs d'écarts géométriques mesurés sur une pièce fabriquée. La notion de sûreté d'une structure ou de fonctionnalité d'un mécanisme est définie grâce à une fonction de performance. Cette fonction est usuellement notée $G(\mathbf{X})$ dans le cadre d'une analyse de fiabilité des structures. Dans le cas de l'analyse des tolérances, la fonction de performance correspond à la condition fonctionnelle $C_f(\mathbf{X}, \mathbf{g})$ définie dans la sous-section 1.2.2. Afin de s'approprier les méthodes de fiabilité pour l'analyse des tolérances, la notation utilisée par la suite pour la fonction de performance sera $C_f(\mathbf{X})$, en supposant que le vecteur des jeux est connu. Deux domaines peuvent alors être définis :

- ◇ le domaine fonctionnel (ou de sûreté) $\mathcal{D}_f = \{\mathbf{X} \in \mathcal{X}^n : C_f(\mathbf{X}) > 0\}$.
- ◇ le domaine de défaillance $\mathcal{D}_d = \{\mathbf{X} \in \mathcal{X}^n : C_f(\mathbf{X}) \leq 0\}$.

La frontière séparant les deux domaines (fonction de performance nulle : $C_f(\mathbf{x}) = 0$) est appelée fonction d'état-limite. L'analyse de fiabilité sera d'autant plus difficile que cette fonction d'état-limite est complexe (non linéaire, continue par morceaux, non connexe). La probabilité de défaillance P_d qui est recherchée s'exprime, en l'absence de jeux $\mathbf{g}$, de la façon suivante :

$$P_d = \text{Prob}\left(C_f(\mathbf{X}) \leq 0\right) \tag{1.17}$$

Il est possible de définir cette probabilité grâce à l'intégrale de la densité conjointe de probabilité $h_{\mathbf{X}}$ de $\mathbf{X}$:

$$P_d = \int_{\mathcal{D}_d} h_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \tag{1.18}$$

Il existe un grand nombre de méthodes de fiabilité permettant de calculer une probabilité de défaillance de ce type, chacune d'elle ayant des avantages et des inconvénients relatifs au domaine d'étude où le calcul de fiabilité est effectué. Les sous-sections suivantes regroupent plusieurs méthodes de fiabilité parmi les plus utilisées : les méthodes d'approximation (FORM, SORM), les méthodes de simulation (Monte Carlo, tirages d'importance) ou encore le couplage des méthodes de simulation avec un méta-modèle (surfaces de réponse, SVM, chaos polynomial, krigeage).

1.3.1 Méthodes d'approximation

Les méthodes d'approximation ont pour but de modifier la fonction d'état-limite par une forme approchée plus simple à manipuler. Elles se basent sur l'évaluation d'un indice de fiabilité défini dans l'espace standard. Il est donc nécessaire dans un premier temps d'expliciter la technique de changement d'espace d'étude. La transformation consiste à passer de l'espace physique des variables aléatoires $\mathbf{X}$ à l'espace standard des variables

Gaussiennes, noté **U**. Ce sont les variables normées centrées non corrélées à moyennes nulles et écart-types unitaires. On note $\mathcal{U}^n$ ce nouvel espace appelé espace standard. La transformation iso-probabiliste permettant de passer d'un espace à l'autre est notée T :

$$\mathbf{U} = T(\mathbf{X}) \tag{1.19}$$

La fonction de performance dans l'espace standard, notée H, s'obtient de la façon suivante :

$$H(\mathbf{U}) \equiv C_f\left(T^{-1}(\mathbf{U})\right) \tag{1.20}$$

L'opération est appelée transformation iso-probabiliste car elle conserve, par définition, la probabilité de défaillance :

$$P_d = \text{Prob}\left(C_f(\mathbf{X}) \leq 0\right) = \text{Prob}\left(H(\mathbf{U}) \leq 0\right) \tag{1.21}$$

De plus, la définition du domaine de défaillance $\mathcal{D}_d = \{U \in \mathcal{U}^n : H(\mathbf{U}) \leq 0\}$ est équivalente à celle énoncée précédemment : $\mathcal{D}_d = \{X \in \mathcal{X}^n : C_f(\mathbf{X}) \leq 0\}$. La figure 1.12 illustre le passage de l'espace réel à l'espace standard. Pour des variables aléatoires Gaus-

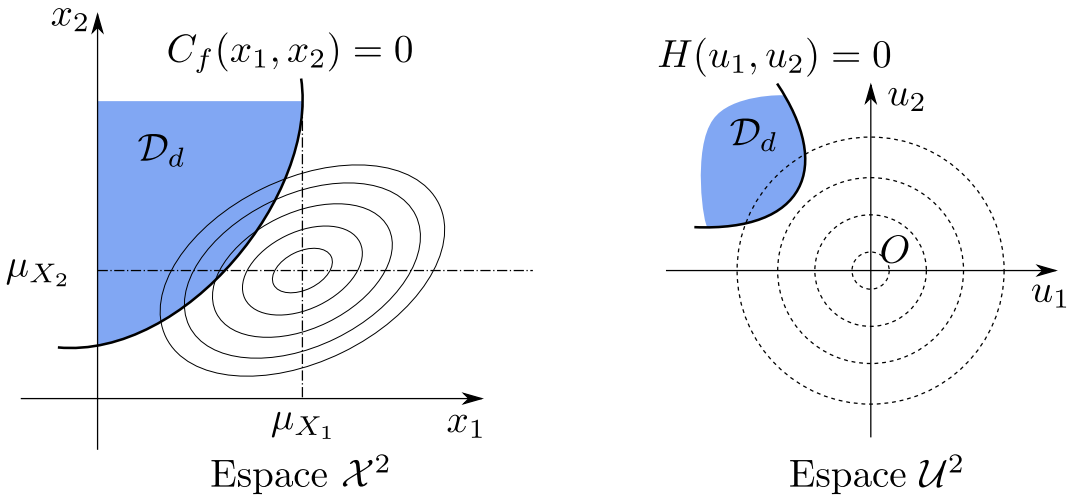


FIGURE 1.12 – Transformation iso-probabiliste de l'espace réel $\mathcal{X}^2$ vers l'espace standard $\mathcal{U}^2$. Dans l'espace réel, les iso-valeurs des probabilités sont représentées par des ellipses tandis que dans l'espace standard les iso-valeurs sont des cercles concentriques.

siennes non-corrélées X_i, la transformation est simple et linéaire :

$$x_i \xrightarrow{T} u_i = \frac{x_i - \mu_i}{\sigma_i} \tag{1.22}$$

où μ_i et σ_i sont respectivement la moyenne et l'écart-type de la variable aléatoire X_i. Dans le cas où la loi de la variable aléatoire indépendante est quelconque, la transformation est de la forme suivante :

$$x_i \xrightarrow{T} u_i = \Phi^{-1}\left(F_{X_i}(x_i)\right) \tag{1.23}$$

où F_{X_i} et Φ sont respectivement les fonctions de répartition des variables X_i et U_i. La transformation dans le cas des variables dépendantes est plus compliquée, il existe la transformation de Rosenblatt [1952] ainsi que la transformation de Nataf [1962] proposée par Der Kiureghian et Liu [1986] qui ne seront pas développées ici.

L'objectif des méthodes d'approximation est de remplacer la fonction d'état-limite réel $C_f(\mathbf{x}) = 0$ par une forme approchée. Ces méthodes se basent sur l'indice de fiabilité β de Hasofer et Lind [1974] qui est défini comme étant la distance entre l'origine O et le point le plus proche de l'origine sur la surface d'état-limite, noté P^*. Ce point est appelé le point de défaillance le plus probable, il correspond au maximum de la densité de probabilité des variables aléatoires dans le domaine de défaillance $\mathcal{D}_d$. Ce point existe également dans l'espace physique via la transformation inverse mais l'indice de fiabilité β est calculé dans l'espace standard. C'est pourquoi la transformation de l'espace est nécessaire. Les coordonnées du point P^* sont notées $\mathbf{u}^* = \{u_1^*, \ldots, u_n^*\} \in \mathcal{U}^n$. Rechercher ce point revient à résoudre le problème d'optimisation sous contraintes suivant :

$$\beta = \min_{\mathbf{u}} \quad \sqrt{\mathbf{u}.\mathbf{u}} \tag{1.24}$$

$$\text{sous} \quad H(\mathbf{u}) \leq 0 \tag{1.25}$$

Il existe différentes techniques pour déterminer la position du point P^*, parmi elles, l'algorithme HLRF (Hasofer-Lind-Rackwitz-Fiessler) [Rackwitz et Fiessler, 1979] est un algorithme d'optimisation du premier ordre adapté spécifiquement à la recherche du point de défaillance le plus probable. Il est très efficace bien que sa convergence ne soit pas assurée dans tous les cas. Une version améliorée de cette algorithme, *improved* HLRF, est proposée par Zhang et Kiureghian [1995]. Elle intègre un pas de descente optimal calculé grâce à la règle d'Armijo. De plus les auteurs ont démontré la convergence inconditionnelle de l'algorithme.

1.3.1.1 Méthode FORM

Le lecteur pourra trouver de plus amples détails dans Lemaire [2009] ou Ditlevsen et Madsen [1996]. La méthode d'approximation FORM (First Order Reliability Method) consiste à remplacer la surface d'état-limite réelle par un hyper-plan au point de défaillance le plus probable P^* dans l'espace standard, voir Figure 1.13.

L'équation de cet hyper-plan tangent en P^* est la suivante :

$$\tilde{H}(\mathbf{u}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i + \beta = 0 \tag{1.26}$$

où α_i représente le cosinus directeur associé à la variable aléatoire U_i. L'hyper-plan est orthogonal à la droite (P^*O) dont la direction est donnée par les cosinus directeurs. La relation suivante entre l'indice de fiabilité et les cosinus directeurs donne les coordonnées du point $\mathbf{u}^*$:

$$u_i^* = -\beta\alpha_i \tag{1.27}$$

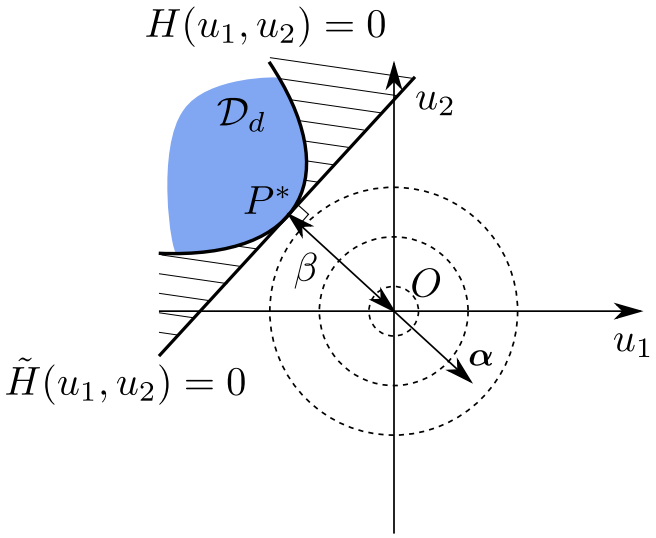


FIGURE 1.13 – Principe de la méthode FORM. La surface d'état-limite réelle $H(\mathbf{u}) = 0$ est approximée par un hyper-plan (une droite en 2 dimensions) tangent à la surface d'état-limite réelle au point P^*. β est la distance entre l'origine et le point P^* et $\boldsymbol{\alpha}$ est le vecteur des cosinus directeurs de la droite (P^*O). Les cercles concentriques représentent les iso-valeurs de la densité de probabilité Gaussienne standard.

La probabilité de défaillance est alors approximée par l'équation suivante :

$$P_f \approx \tilde{P}_f = \Phi(-\beta) \tag{1.28}$$

où Φ est la fonction de répartition de la loi Gaussienne standard.

Avantages et inconvénients de la méthode FORM :

- ◇ Lorsque la fonction de performance est linéaire et fonction de variables aléatoires Gaussiennes, la méthode FORM permet de calculer la valeur exacte de la probabilité de défaillance.
- ◇ La méthode FORM peut retourner une mauvaise approximation de la probabilité de défaillance dans certains cas où la fonction d'état-limite est fortement non linéaire ou si plusieurs points P^* sont à prendre en compte. Une solution habituellement utilisée est de valider les résultats par la méthode de simulation par tirages d'importance (voir sous-section 1.3.2.2).
- ◇ Un atout de cette méthode est que le calcul de l'indice de fiabilité par les algorithmes HLRF ou iHLRF est économique. Le nombre d'appels à la fonction de performance n'est pas excessif car ils convergent assez rapidement (en général moins de 100 itérations). La convergence est fonction du nombre de variables et non de l'ordre de grandeur de la probabilité. C'est une méthode très économique lorsque la fonction de performance est très coûteuse en temps de calcul.
- ◇ Une variante de la méthode FORM par une forme simplifiée analytique est la méthode SORM qui, à l'instar de la méthode FORM, approxime la fonction d'état-limite. Cependant la méthode SORM la remplace par une hyper-surface d'ordre

2 [Lemaire, 2009; Ditlevsen et Madsen, 1996]. La formule de Breitung permet de prendre en compte la courbure de la fonction d'état limite en P^* dans le calcul de P_d. L'amélioration de l'évaluation de la probabilité de défaillance est sensible mais la prise en compte des courbures rend cette méthode plus coûteuse en temps de calcul que la méthode FORM.

1.3.1.2 Méthode FORM système

Le scénario de défaillance peut parfois être décomposé en plusieurs sous-événements. Par exemple un mécanisme hyperstatique peut être considéré dans différentes configurations, ou bien une structure peut avoir plusieurs fonctions de performance caractérisant sa défaillance. Il est alors possible, dans ce cas, d'utiliser une approche système afin de calculer séparément dans un premier temps les indices de fiabilité de chaque sous-événement pour ensuite calculer la probabilité de défaillance globale du système. Plusieurs types de combinaison d'événements peuvent être considérés : combinaisons parallèles, combinaisons séries, combinaisons séries de combinaisons parallèles ou encore combinaisons parallèles de combinaisons séries [Lemaire, 2009; Ditlevsen et Madsen, 1996]. Seules les combinaisons parallèles seront ici étudiées.

Soit N_s le nombre de domaines de défaillance $\mathcal{D}_d^{(s_i)}$ associé au sous-événement s_i. Les fonctions de performance de chaque sous-événement sont notées $C_f^{(s_i)}(\mathbf{x})$, pour $i = \{1, \ldots, N_s\}$, et avec $\mathcal{D}_d^{(s_i)} = \left\{\mathbf{X} \in \mathcal{X}^n : C_f^{(s_i)}(\mathbf{X}) \leq 0\right\}$. La défaillance d'un système parallèle intervient lorsque tous les événements sont défaillants simultanément. La probabilité de défaillance du système, $P_{d,sys}$, est alors la probabilité de l'intersection des événements défaillants :

$$P_{d,sys} = \text{Prob}\left(\bigcap_{i=1}^{N_s} \mathcal{D}_d^{(s_i)}\right) \tag{1.29}$$

Une solution pour calculer cette probabilité peut être obtenue à partir de la densité de la loi multi-normale ϕ_{N_s} en dimension N_s avec l'hypothèse d'une approximation du premier ordre sur chaque sous-événement. Cela nécessite donc de faire N_s calcul FORM, voir Figure 1.14. Le but est de calculer les indices de fiabilité β_i de chaque sous-événement ainsi que leur cosinus directeurs $\boldsymbol{\alpha}^{(i)}$. La probabilité de défaillance s'exprime de la façon suivante :

$$P_{d,sys} \approx \Phi_{N_s}\left(-\boldsymbol{\beta}; [\boldsymbol{\rho}]\right) \tag{1.30}$$

où Φ_{N_s} est la fonction de répartition de la loi multi-normale et $[\boldsymbol{\rho}]$ est la matrice des coefficients de corrélation des état-limites [Lemaire, 2009]. Les composantes ρ_{ij} de cette matrice sont calculées grâce au produit scalaire des cosinus directeurs des différents événements, voir équation (1.31). Elles permettent de prendre en compte les dépendances entre les différents sous-événements.

$$\rho_{ij} = \boldsymbol{\alpha}^{(s_i)}.\boldsymbol{\alpha}^{(s_j)} \tag{1.31}$$

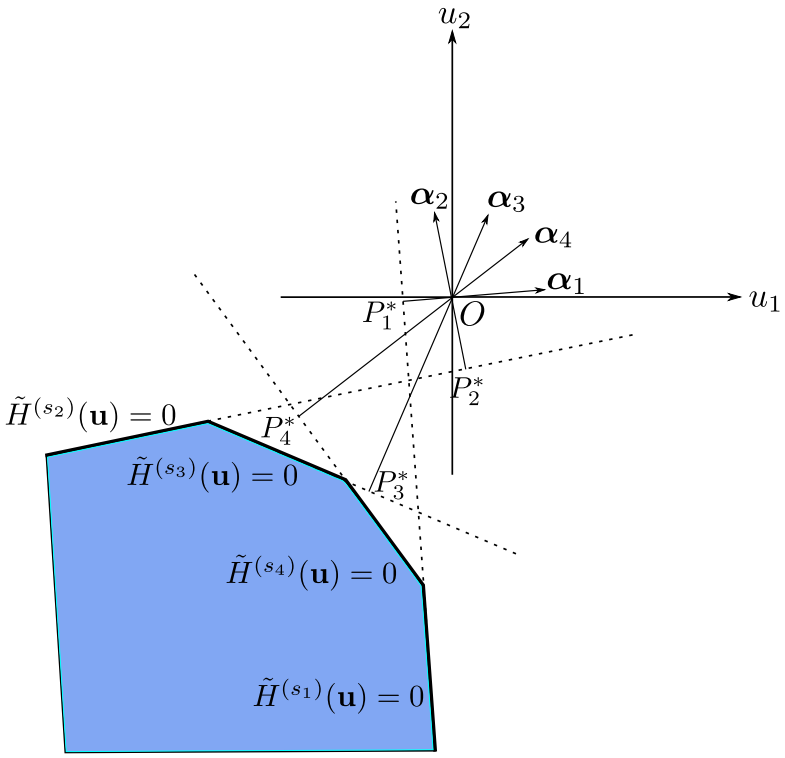


FIGURE 1.14 – Principe de la méthode FORM système appliquée à un problème de fiabilité d'un système parallèle. Chaque surface d'état-limite est approximée par un hyperplan $\tilde{H}^{(s_i)}(\mathbf{u}) = 0$ (une droite en 2 dimensions) tangent à l'état-limite réel au point P_i^*. Un indice de fiabilité β_i et un vecteur des cosinus directeurs $\boldsymbol{\alpha}_i$ sont associés à chaque sous-événement. Le domaine de défaillance est l'intersection de tous les domaines de défaillance.

La fonction de répartition de la loi multi-normale s'exprime sous la forme d'une intégrale en dimension N_s :

$$\Phi_{N_s}\left(-\boldsymbol{\beta};[\boldsymbol{\rho}]\right) = \int_{-\infty}^{-\beta_1} \dots \int_{-\infty}^{-\beta_{N_s}} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N_s}{2}}\sqrt{\det[\boldsymbol{\rho}]}} \exp^{-\frac{1}{2}\mathbf{u}[\boldsymbol{\rho}]^{-1}\mathbf{u}^t} \mathrm{d}u_1 \dots \mathrm{d}u_{N_s} \qquad (1.32)$$

Il n'y a pas de solution analytique à l'intégrale (1.32) mais elle peut être évaluée numériquement. La technique proposée par Genz [1992] permet de la calculer efficacement. De plus un intervalle de confiance associé au résultat est obtenu sans coût de calcul supplémentaire. Cependant, le nombre d'événements N_s influe sur le temps, plus N_s est grand et plus le temps de calcul est grand.

1.3.2 Méthodes de simulation

Il existe plusieurs méthodes de simulation mais la technique de base est la même pour toutes. La technique consiste à tirer un certain nombre de réalisations des variables aléatoires et classer ces réalisations (écarts géométriques) en fonction du signe de la fonction de performance évaluée en ces points. La méthode la plus connue est la simulation de

Monte Carlo. A partir de cette méthode, des variantes ont été développées afin d'améliorer ses performances.

1.3.2.1 Simulation de Monte Carlo

C'est la méthode de référence, elle permet d'avoir une bonne précision sur le résultat. L'objectif de la simulation est d'approximer l'intégrale écrite en équation (1.18) grâce à l'introduction de la fonction indicatrice $\mathbb{1}_{D_d}(\mathbf{u})$:

$$\mathbb{1}_{D_d}(\mathbf{u}) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad H(\mathbf{u}) \leq 0 \\ 0 & \text{si} \quad H(\mathbf{u}) > 0 \end{cases} \tag{1.33}$$

L'intégrale devient :

$$P_d = \int_{\mathbb{U}^n} \mathbb{1}_{D_d}(\mathbf{u})\phi_n(\mathbf{u})\mathrm{d}u_1 \dots \mathrm{d}u_n = \mathrm{E}[\mathbb{1}_{D_d}(\mathbf{U})] \tag{1.34}$$

où ϕ_n est la densité de probabilité de la loi Gaussienne standard en dimension n. L'estimateur de l'espérance de la fonction indicatrice permet d'approcher la probabilité de défaillance par :

$$\tilde{P}_d = \frac{1}{N_{MC}} \sum_{i=1}^{N_{MC}} \mathbb{1}_{D_d}(\mathbf{u}^{(i)}) \tag{1.35}$$

où N_{MC} est le nombre de réalisations des variables aléatoires. Il faut donc N_{MC} évaluations de la fonction de performance pour estimer la probabilité de défaillance. La figure 1.15 illustre la simulation de Monte Carlo, les N_{MC} réalisations sont classées par rapport au signe de la fonction de performance. La probabilité de défaillance est le nombre de points pour lesquels H est négatif divisé par le nombre total de points N_{MC}.

Cet estimateur a pour caractéristique d'être non-biaisé et sa variance s'exprime de la façon suivante :

$$\mathrm{Var}\left[\tilde{P}_d\right] \approx \frac{1}{N_{MC}} \tilde{P}_d \left(1 - \tilde{P}_d\right) \tag{1.36}$$

La qualité de l'estimation de la probabilité de défaillance dépend donc de l'ordre de grandeur de la probabilité et du nombre de réalisations. Il est donc important d'accompagner l'estimation $\tilde{P}_d$ par son intervalle de confiance afin d'avoir une information sur le niveau de précision de la probabilité. L'intervalle de confiance à 95% de l'estimation est donné par :

$$\tilde{P}_d - 1.96\sqrt{\mathrm{Var}\left[\tilde{P}_d\right]} \leq P_d \leq \tilde{P}_d + 1.96\sqrt{\mathrm{Var}\left[\tilde{P}_d\right]} \tag{1.37}$$

Ce qui revient à :

$$\tilde{P}_d \left(1 - 1.96\sqrt{\frac{1-\tilde{P}_d}{N_{MC}\tilde{P}_d}}\right) \leq P_d \leq \tilde{P}_d \left(1 + 1.96\sqrt{\frac{1-\tilde{P}_d}{N_{MC}\tilde{P}_d}}\right) \tag{1.38}$$

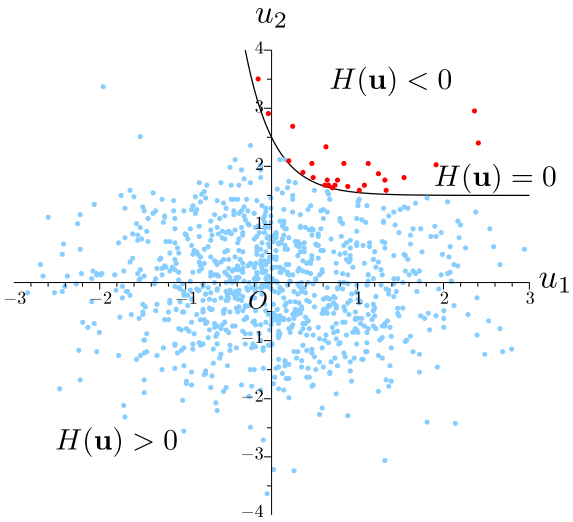


FIGURE 1.15 – Simulation de Monte Carlo. Les points de la simulation sont classés de part et d'autre de la surface d'état-limite $H(\mathbf{u}) = 0$.

Le coefficient de variation de l'estimation de la probabilité est défini par :

$$c_{\tilde{P}_d} = \frac{\sqrt{\mathrm{Var}\left[\tilde{P}_d\right]}}{\mathrm{E}\left[\tilde{P}_d\right]} \approx \sqrt{\frac{1-\tilde{P}_d}{N_{MC}\tilde{P}_d}} \tag{1.39}$$

Il est usuellement requis de viser un coefficient de variation inférieur à 10%. Le nombre de simulations nécessaires pour atteindre ce résultat est $N_{MC} \approx 10^{p+2}$ pour une probabilité visée de l'ordre de 10^{-p}.

1.3.2.2 Simulation par tirages d'importance

Le principal problème de la méthode de Monte Carlo est son temps de calcul prohibitif lorsque des faibles probabilités sont recherchées. La simulation par tirages d'importance a pour objectif de réduire la variance de $\tilde{P}_d$ pour un coût de calcul fixé (*i.e.* N_{MC} fixé). Le but est de tirer les réalisations des variables aléatoires dans une zone plus proche de la zone de défaillance, d'où le nom de tirages d'importance [Melchers, 1990]. Les réalisations sont centrées autour du point P^*, ainsi la proportion des points appartenant au domaine de défaillance augmente. Cela permet d'améliorer considérablement la précision de la probabilité de défaillance, voir Figure 1.16.

L'intégrale à évaluer est alors donnée sous la forme :

$$P_d = \int_{\mathbb{U}^n} \mathbb{1}_{D_d} \frac{\phi_n(\mathbf{u})}{\psi_n(\mathbf{u})} \psi_n(\mathbf{u}) \mathrm{d}u_1 \dots \mathrm{d}u_n \tag{1.40}$$

où $\psi_n(\mathbf{u})$ est la nouvelle fonction densité des réalisations, dite densité instrumentale. Dans le cas où $\psi_n(\mathbf{u})$ est une fonction densité de loi centrée sur le point P^* de coordonnées $\mathbf{u}^*$

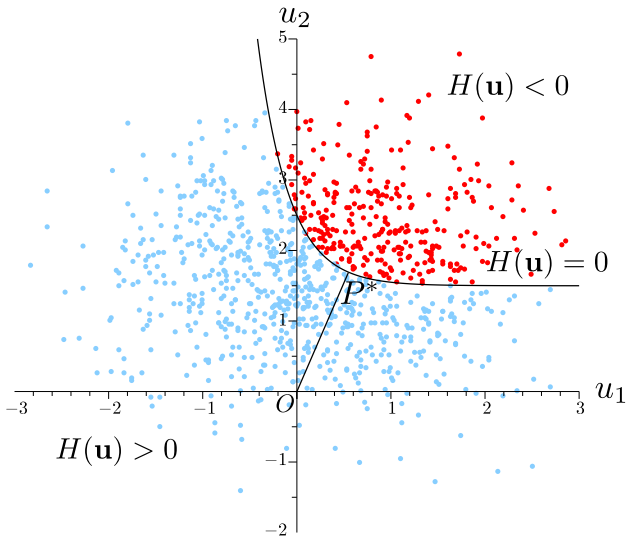


FIGURE 1.16 – Méthode du tirage d'importance. Les réalisations sont centrées sur le point P^*.

et d'écart-type unitaire, une estimation de l'intégrale est donnée par la formule suivante :

$$\tilde{P}_d = \frac{1}{N_{MC}} \sum_{i=1}^{N_{MC}} \left(\mathbb{1}_{D_d}(\tilde{\mathbf{u}}^{(i)}) \exp\left(-\sum_{k=1}^{n} \mathbf{u}_k^* \mathbf{u}_k^{(i)} - \frac{\beta^2}{2} \right) \right) \tag{1.41}$$

où β est l'indice de fiabilité associé au point P^*, donné par $\sqrt{\sum_k \mathbf{u}_k^{*2}}$. Pour simuler les variables aléatoires, $\tilde{\mathbf{u}}$, suivant la densité choisie, il suffit de générer des variables aléatoires standards $\mathbf{u}$ puis d'effectuer un changement de variable $\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u} + \mathbf{u}^*$. Une estimation de la variance de $\tilde{P}_d$ s'exprime de la façon suivante :

$$\mathrm{Var}\left[\tilde{P}_d\right] \approx \frac{1}{N_{MC}-1} \left(\frac{1}{N_{MC}} \sum_{i=1}^{N_{MC}} \left(\mathbb{1}_{D_d}(\tilde{\mathbf{u}}^{(i)}) \left(\exp\left[-\sum_{k=1}^{n} \mathbf{u}_k^* \mathbf{u}_k^{(i)} - \frac{\beta^2}{2} \right] \right)^2 \right) - \tilde{P}_d^2 \right) \tag{1.42}$$

Cette méthode donne des résultats satisfaisants lorsque le point P^* est convenablement identifié et s'il n'y pas de minimum secondaire. Il est courant de coupler cette méthode avec l'approximation FORM. En effet la méthode FORM permet d'obtenir les coordonnées du point P^* de façon économique. Cette méthode permet ensuite de valider le résultat de la probabilité obtenue par la méthode FORM à moindre coût lorsque la surface d'état-limite est fortement non linéaire.

D'autres variantes à ces méthodes de simulation existent telle que la méthode des Susbsets [Au et Beck, 2001] ou la méthode de simulations directionnelles [Lemaire, 2009; Ditlevsen et Madsen, 1996]. Ces méthodes ne sont pour le moment pas envisagées au vu de l'état actuel des développements.

1.3.3 Techniques de méta-modélisation

Un méta-modèle est une fonction permettant de substituer la fonction du modèle réel de comportement par une fonction étant plus économique à évaluer. L'objectif est de prédire en n'importe quel point le résultat d'une fonction coûteuse en temps de calcul, en ayant connaissance uniquement du résultat de quelques points. Ces points connus sont généralement appelés le plan d'expériences. Les méta-modèles sont très intéressant de part leur faculté à être évaluer rapidement par rapport à la fonction réelle. C'est pourquoi ils sont souvent couplés avec des techniques de simulation comme Monte Carlo ou ses variantes. Cependant, la sélection du plan d'expériences est très importante. Le plan d'expériences doit contenir suffisamment de points, garantissant une bonne précision de l'approximation mais le nombre de points du plan d'expériences doit également rester suffisamment petit pour que l'évaluation soit toujours peu coûteuse en temps de calcul. Plusieurs techniques de méta-modélisation sont présentées succinctement : les surfaces de réponse polynomiales, les *Support Vector Machine*, le chaos polynomial et le krigeage.

1.3.3.1 Surfaces de réponse polynomiales

Cette méthode consiste à trouver une expression analytique polynomiale modélisant la fonction de performance du problème. Le type de surface dépend de la qualité de l'approximation voulue ainsi que de la dimension du problème. La surface de réponse de forme quadratique est la plus utilisée, la fonction de substitution $\widehat{C}_f$ de la vraie fonction de performance C_f s'écrit de la façon suivante sans termes croisés :

$$\widehat{C}_f(\mathbf{x}) = c_0 + \sum_{i=1}^{n} c_i x_i + \sum_{i=1}^{n} c_{ii} x_i^2 \tag{1.43}$$

ou bien avec termes croisés :

$$\widehat{C}_f(\mathbf{x}) = c_0 + \sum_{i=1}^{n} c_i x_i + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j \geq i}^{n} c_{ij} x_i x_j \tag{1.44}$$

où n est la dimension de l'espace des variables et c_i, c_{ij} sont les coefficients du polynôme à déterminer. Ces coefficients sont les inconnus du problème et doivent être calculés.

Dans le cadre de l'analyse de fiabilité, cette méthode possède l'avantage de définir une formule analytique ce qui permet de facilement calculer les gradients et hessiens. Ainsi, il est très facile de calculer les indices de fiabilité FORM et/ou SORM sur le méta-modèle. La méthodologie de base est la suivante :

1. déterminer une surface polynomiale au voisinage d'un point de départ en utilisant un plan d'expériences initial,
2. calculer le point de défaillance le plus probable par la méthode FORM ou SORM de façon analytique,
3. déterminer une nouvelle surface polynomiale autour du point de défaillance le plus probable évalué en 2.

Une boucle de calcul est réalisée. Les étapes 2. et 3. sont réitérées jusqu'à convergence de l'algorithme. Cependant, de nombreux points délicats existent puisqu'il faut déterminer le type et le degré de la fonction polynomiale et définir le plan d'expériences. De plus, la surface de réponse présente une certaine « rigidité », *i.e.* la forme de la surface ne pourra par s'adapter avec assez de précision dans certains cas. Enfin, cette méthode nécessite un nombre de calculs qui croît rapidement avec la dimension du problème. Cependant, la littérature fait état de nombreuses recherches afin d'améliorer la qualité de l'estimation de la probabilité de défaillance [Bucher et Bourgund, 1990; Gayton et al., 2003; Allaix et Carbone, 2011; Kaymaz et McMahon, 2005; Nguyen et al., 2009].

1.3.3.2 Support Vector Machines

Les machines à vecteurs de support (*Support Vector Machines, SVM*), ou séparateurs à vaste marge, ont été proposées par Vapnik et Lerner [1963]. Cette méthode fut ensuite améliorée par Boser et al. [1992] et est maintenant de plus en plus utilisée. Son concept repose sur deux notions : celle de marge maximale et celle de fonction noyau. Deux types d'utilisation peuvent être distingués :

- ◇ La première consiste à réaliser des simulations en utilisant la classification. Le but est de séparer une population selon différentes classes. Dans le cadre de la fiabilité, il s'agit de différencier les échantillons appartenant au domaine de sûreté (fonctionnelle ou montable) et ceux appartenant au domaine de défaillance (non fonctionnelle ou non montable). Cette utilisation est très utile pour calculer la probabilité de défaillance.
- ◇ Elle peut également être utilisée pour réaliser une régression permettant d'obtenir une approximation explicite de la fonction d'état-limite. Cette fonction s'apparente à la détermination d'une surface de réponse.

Les deux paragraphes suivants différencient les deux types de méthodes utilisant les vecteurs supports.

Classification. Les SVM ont été créés à l'origine pour résoudre des problèmes de classification. Le but étant de séparer l'espace des variables en classes. Dans le cas de la fiabilité, il s'agit de créer un hyperplan qui sépare les données en deux classes en utilisant le principe de marge maximale. Si l'on considère des points d'apprentissage appartenant aux classes -1 (défaillance) et +1 (sûreté), l'hyperplan maximisant la marge sépare les deux classes des points d'apprentissage telle que la distance entre les points les plus proches de la marge et de l'hyperplan soit maximisée. La figure 1.17 illustre la séparation des domaines de sûreté et de défaillance. Le but est de définir une formule analytique de la frontière des classes. Dans certains cas, le séparateur n'est pas linéaire, il faut alors appliquer une méthode à noyau (*kernel trick*) afin de transformer l'espace de départ en un espace support permettant l'utilisation d'un hyperplan séparateur. La formulation

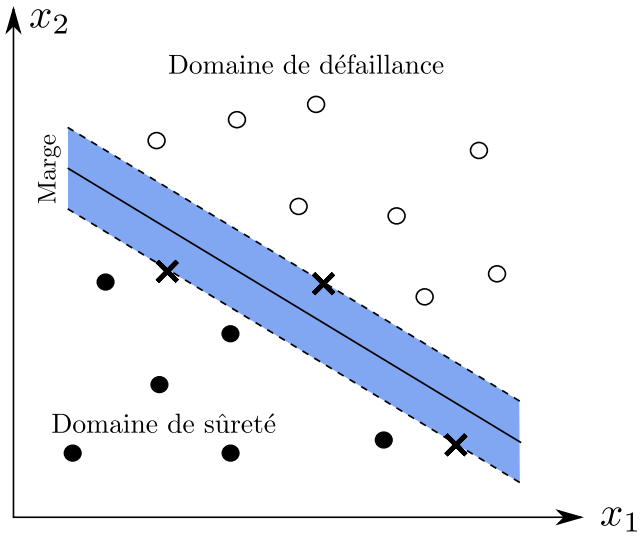


FIGURE 1.17 – Séparateur dans le cas de classes linéairement séparables. Les points croix représentent les vecteurs supports définissant la frontière entre les classes.

classique du séparateur non-linéaire est la suivante :

$$\widehat{c}([\mathbf{x}]) = \operatorname{sgn}\left(\widehat{G}([\mathbf{x}])\right) = \operatorname{sgn}\left(\sum_{i=1}^{s} \alpha_i c_i \left(K([\mathbf{x}], \mathbf{x}^{(i)}) + b\right)\right) \tag{1.45}$$

où $[\mathbf{x}] = \left\{\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(s)}\right\}$ est un échantillon de s réalisations des variables aléatoires qui sont les vecteurs supports de l'hyperplan et b est le seuil. La fonction noyau est donnée par K, les fonctions Radial Basis Function (RBF), polynomiale, fourier et sigmoïdale sont les plus utilisées [Deheeger et Lemaire, 2006]. Afin d'avoir un séparateur précis, la technique nécessite de choisir convenablement la fonction noyau K et d'avoir un bon réglage des hyper paramètres.

On trouve dans la littérature de nombreuses applications utilisant les SVM pour la classification. Dans le cas de la fiabilité des structures, Hurtado [2004] est le premier à introduire l'utilisation des SVM dans ce domaine. Il compare plusieurs techniques de méta-modélisation comme les surfaces de réponses polynomiales, les réseaux de neurones et les SVM. Dans [Hurtado, 2007], il propose le couplage des SVM avec les tirages d'importance. Dans [Hurtado, 2010], il propose une méthode d'apprentissage optimale du plan d'expériences au voisinage de la surface d'état limite. D'autres recherches sont également menées, notamment par Bourinet et al. [2011] qui proposent le calcul de faibles probabilités de défaillance par une méthode combinant les simulations par subset et la classification par SVM. Cette méthode s'appelle ^{2}SMART pour *Subset simulation by Support-vector Margin Algorithm for Reliability esTimation*.

Regression. Les SVM peuvent également être utilisés en régression (SVR), leur utilisation est tout d'abord envisagée par Vapnik [1995]. La méthode des SVM se généralise en se basant sur le cas des classes non séparables. Le concept est de remplacer la marge par une erreur ϵ qui est un paramètre de précision. Le but est de trouver une fonction

$f(\mathbf{x})$ qui dévie au plus de ϵ par rapport à la vraie fonction. Cela signifie que les erreurs sont acceptées à condition qu'elles soient inférieures à ϵ. Un tutoriel donnant une vue d'ensemble des idées de base est proposé par Smola et Schölkopf [2004]. Il existe des applications des SVR pour la fiabilité [Smola et Schölkopf, 2004; Moura et al., 2011], cependant ils sont moins utilisés que les SVM car il est plus aisé de travailler directement par classes que de modéliser la fonction d'état limite.

1.3.3.3 Chaos polynomial

Le chaos polynomial est une méthode de décomposition spectrale d'une variable aléatoire. Il fut introduit à l'origine par Wiener [1938] qui utilisait des polynômes d'Hermite pour modéliser un processus stochastique avec des variables aléatoires Gaussiennes. En effet, toute variable aléatoire X de moment d'ordre 2 fini peut être décomposée de la façon suivante :

$$X = \sum_{i=0}^{\infty} X_i \Psi_i \left(\{U_j\}_{j=1}^{\infty} \right) \tag{1.46}$$

Les Ψ_i constituent une famille de polynômes d'Hermite dont les membres sont orthogonaux relativement à la mesure gaussienne, les U_j sont des variables aléatoires normales standards et indépendantes et les X_i sont des coefficients à déterminer.

Cette décomposition est généralisée pour des variables aléatoires quelconques de variance finie. Dans le cas d'une fonction de performance $C_f(\mathbf{X})$, d'un vecteur de variables aléatoires $\mathbf{X} = \{X_1, \ldots, X_n\}$ indépendantes, de densité conjointe $h_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^{n} h_{X_i}(x_i)$, la fonction de performance se décompose de la façon suivante :

$$C_f(\mathbf{X}) = \sum_{i=0}^{\infty} C_i \phi_i(X_1, \ldots, X_n) \tag{1.47}$$

où $\{\phi_i\}_{i=0}^{\infty}$ est une base orthogonale de l'espace de Hilbert. Cette généralisation permet d'obtenir une base adéquate quelle que soit la densité conjointe de $\mathbf{X}$. En pratique la réponse n'est pas décomposée jusqu'à l'infini et doit être tronquée à un nombre fini de termes p :

$$C_f(\mathbf{X}) \approx \widehat{C}_f(\mathbf{X}) = \sum_{i=0}^{p-1} C_i \phi_i(X_1, \ldots, X_n) \tag{1.48}$$

Des familles de polynômes orthogonaux particuliers peuvent être utilisées pour des densités de probabilité classiques, par exemple des polynômes d'Hermite pour des lois Gaussiennes, de Legendre pour des lois uniformes, de Laguerre pour des lois gamma. Les coefficients C_i sont eux calculés par régression. Le calcul de régression consiste à minimiser le carré de l'erreur moyenne de la réponse approximée. Le nombre des coefficients à déterminer augmente rapidement avec la dimension du problème (*i.e.* avec n), ce qui rend le temps de calcul inacceptable pour certains systèmes. Afin de pallier cet écueil, Blatman et Sudret [2010a] ont développé une méthode qui construit un chaos polynomial

creux. Le but est de détecter les coefficients dominants et donc d'éliminer les autres. Par conséquent, le nombre de calculs nécessaire est nettement diminué comparé au besoin pour un chaos polynomial plein. Cette technique a aussi été proposée par Choi et Grandhi [2004] qui utilisent l'analyse de la variance pour déterminer les composantes clés régissant la variabilité de la réponse.

Une des utilisations les plus fréquentes de la décomposition par un chaos polynomial est l'analyse de sensibilité. En particulier, le calcul des indices de Sobol' est simplifié par cette méthode. En effet, la propriété d'orthogonalité des polynômes permet d'obtenir une expression analytique des indices de sensibilité d'une variable en faisant intervenir uniquement les coefficients des polynômes opérant sur cette même variable. Cette technique est expliquée par Sudret [2008] et Blatman et Sudret [2010b]. L'approximation $\widehat{C}_f(\mathbf{X})$ doit cependant être assez juste afin d'avoir un résultat correct sur les indices de Sobol'. Ces méthodes sont appliquées notamment dans le domaine du nucléaire. Dossantos-Uzarralde et Guittet [2008] quantifient l'effet des coefficients aléatoires sur des modèles de calcul grâce aux indices de Sobol'.

Il est possible de combiner la méthode de simulation de Monte-Carlo et le chaos polynomial afin d'obtenir une méthode plus efficace et plus rapide que la simulation de Monte-Carlo seule [Li et Xiu, 2010]. Paffrath et Wever [2007] utilisent des chaos polynomiaux visant la zone critique, l'un appelé *shifted Hermite expansion* est un chaos polynomial avec un décalage vers le point de défaillance le plus probable. Le second, appelé *windowed Hermite expansion* se restreint à une fenêtre autour du point de défaillance le plus probable dans l'espace standard. Notin et al. [2010] combinent le chaos polynomial et des techniques de ré-échantillonnage pour donner des indicateurs de confiance dans les résultats de l'analyse fiabiliste.

1.3.3.4 Krigeage

Le krigeage est une méthode de modélisation issue de la géostatistique minière. Il fut introduit par l'ingénieur minier sud-africain Krige [1951], le formalisme mathématique est cependant l'œuvre du français Matheron [1962]. Le krigeage possède des variantes telles que le krigeage avec erreurs de mesures [Roustant et al., 2010], le cokrigeage [Wackernagel, 2003], le krigeage d'indicatrices [Journel, 1983] ou encore le krigeage disjonctif [Matheron et al., 1976]. Ces variantes ne seront pas développées par la suite.

Le krigeage est une méthode d'interpolation spatiale qui permet d'obtenir le meilleur prédicteur linéaire non biaisé (*Best Linear Unbiased Predictor, BLUP*). Cette technique possède plusieurs particularités intéressantes :

- ◇ elle interpole exactement les points du plan d'expériences, c'est-à-dire que les prédictions passent obligatoirement par ces points (définissant le modèle de krigeage).
- ◇ elle fournit un estimateur de confiance local sur la valeur prédite via la variance de krigeage.

La fonction C_f est vue comme une réalisation d'un processus Gaussien défini par :

$$\widehat{C}_f(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x}, \boldsymbol{\beta}) + z(\mathbf{x}) \tag{1.49}$$

où :

- ◇ $F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\beta})$ est la partie déterministe qui donne une approximation de la réponse moyenne. Elle représente la tendance de la surface et correspond à un modèle de régression de la forme :

$$F(\mathbf{x}, \boldsymbol{\beta}) = {}^t\mathbf{f}(\mathbf{x})\boldsymbol{\beta} \tag{1.50}$$

  avec ${}^t\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \{f_1(\boldsymbol{x}), \ldots, f_p(\boldsymbol{x})\}$ les fonctions polynomiales et $\boldsymbol{\beta}$ est un vecteur à p coefficients de régression. La fonction F est déterminée par la connaissance *a priori* de l'expérimentateur sur le phénomène à modéliser. Suivant le choix de cette forme de tendance, on distingue trois types de krigeage :

  1. Le krigeage simple : $F(\mathbf{x}, \boldsymbol{\beta}) = \mu$ est une constante scalaire connue.
  2. Le krigeage ordinaire : $F(\mathbf{x}, \boldsymbol{\beta}) = \beta$ est une constante scalaire inconnue. Ce type de krigeage est le plus communément utilisé.
  3. Le krigeage universel : $F(\mathbf{x}, \boldsymbol{\beta}) = \sum_{j=0}^{p} {}^t f_j(\boldsymbol{x})\beta_j$ est une combinaison linéaire de fonctions de la position x.

- ◇ $z(\boldsymbol{x})$ est un processus gaussien stationnaire, de moyenne nulle et de covariance entre deux points de coordonnées $\mathbf{x}$ et $\mathbf{w}$ définie par :

$$\operatorname{cov}\left(z(\mathbf{x}), z(\mathbf{w})\right) = \sigma_z^2 R_\theta(\mathbf{h}) \tag{1.51}$$

  où σ_z^2 est la variance du processus et R_θ la fonction d'auto-corrélation reliant deux points $\mathbf{x}$ et $\mathbf{w}$ définie par son jeu de paramètres $\boldsymbol{\theta}$ et la distance $\boldsymbol{h} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{w}$.

La fonction de corrélation est en pratique inconnue. Il est nécessaire de la choisir en fonction du phénomène à modéliser. Les fonctions de corrélation anisotropes gaussiennes, Matérn et exponentielles sont les plus utilisées. Les paramètres de corrélation $\boldsymbol{\theta}$ sont estimés en utilisant le critère du maximum de vraisemblance ou par validation croisée. La formulation du meilleur prédicteur linéaire non biaisé, noté $\mu_{\widehat{C}_f}$, au point $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ est la suivante :

$$\mu_{\widehat{C}_f}(\mathbf{x}) = \beta + {}^t\mathbf{r}(\mathbf{x})\mathbf{R}_\theta^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{1}\beta) \tag{1.52}$$

où $\mathbf{r}(\mathbf{x}) = \{R_\theta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)\}_{i=1,\ldots,p}$ et $\mathbf{R}_\theta$ est la matrice de corrélation des points $\mathbf{y}$. La variance de krigeage au point $\mathbf{x}$, notée $\sigma^2_{\widehat{C}_f}(\mathbf{x})$, est donnée par :

$$\sigma^2_{\widehat{C}_f}(\mathbf{x}) = \sigma_z^2 \left[1 - {}^t\mathbf{r}\mathbf{R}_\theta^{-1}\mathbf{r} + \frac{\left(1 - {}^t\mathbf{1}\mathbf{R}_\theta^{-1}\mathbf{r}\right)^2}{{}^t\mathbf{1}\mathbf{R}_\theta^{-1}\mathbf{1}}\right] \tag{1.53}$$

La particularité de cette variance est sa nullité aux points du plan d'expériences, elle augmente au fur et à mesure que la distance avec les points du plan d'expériences augmente. Fournir une variance de krigeage (sans coût de calcul supplémentaire) est une spécificité du krigeage qui rend cette technique très attractive. La variance de krigeage est

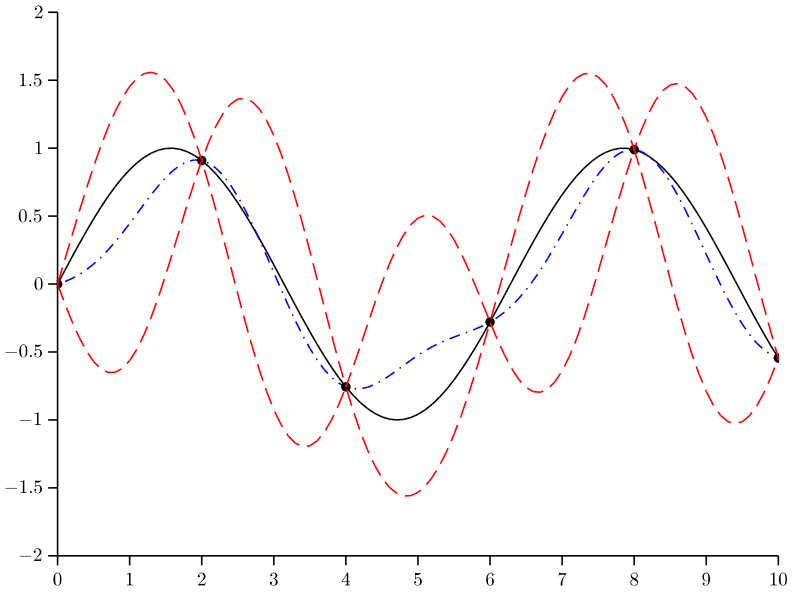


FIGURE 1.18 – Prédiction par krigeage de la fonction $x \mapsto \sin x$ en se basant sur 6 points (ronds noirs) pour créer le modèle. La fonction sinus à approximer est affichée en trait continu noir, les prédictions par krigeage sont en trait mixte bleu et l'intervalle de confiance à 95% sur la prédiction est en trait pointillé rouge.

un indice de confiance local sur les valeurs prédites. La figure 1.18 illustre une prédiction par krigeage d'une fonction en se basant sur 6 points pour créer le modèle. En plus des prédictions, la variance de krigeage permet de définir un intervalle de confiance à 95% sur la prédiction.

La variance de krigeage est particulièrement utilisée pour la construction itérative de plan d'expériences, de nombreux critères d'enrichissement peuvent être déclinés autour de cet indice de confiance. Dans le cadre d'analyses de fiabilité, il existe plusieurs algorithmes spécifiquement dédiés au calcul de la probabilité de défaillance en se basant sur le krigeage. Ces techniques sont couplées avec la simulation de Monte Carlo [Echard et al., 2011; Bichon et al., 2008], ou avec la méthode des tirages d'importance [Echard et al., 2013; Dubourg et al., 2013]. D'autres méthodes sont spécialement développées pour traiter des problèmes de fiabilité système [Fauriat et Gayton, 2014; Bichon et al., 2011]. Toutes ces méthodes sont basées sur le même principe, il s'agit d'enrichir itérativement un plan d'expériences afin de modéliser au mieux la fonction d'état-limite. Les points sélectionnés sont ceux qui apporteront une meilleure modélisation de l'état-limite. Par ailleurs, le krigeage est également utilisé dans des méthodes d'optimisation c'est le cas de la méthode EGO (*Efficient Global Optimization*) [Jones et al., 1998] ou IAGO [Villemonteix et al., 2006] ou encore pour la vérification de la conformité géométrique de pièces de grandes dimensions [Dumas et al., 2013].

1.3.4 Synthèse

Trois types de méthodes d'analyses de fiabilité ont été présentés. L'objectif est de déterminer quelles méthodes sont les plus adaptées pour l'analyse des tolérances des mécanismes hyperstatiques. En se basant sur les travaux antérieurs, rapidement évoqués dans la synthèse de la section 1.2.4, les méthodes doivent pouvoir être couplées avec un algorithme d'optimisation et/ou être capable de traiter des problèmes d'estimation de probabilités systèmes. De plus, les probabilités recherchées sont de l'ordre de 10^{-6}, c'est-à-dire quelques pièces par millions (ppm).

La simulation de Monte Carlo peut être facilement couplée avec un algorithme d'optimisation et est capable de traiter des problèmes systèmes. Elle permet en outre d'estimer de faibles probabilités à condition d'avoir un coefficient de variation suffisamment petit. Dans l'optique d'un gain de temps, la variante du tirage d'importance pourrait être utilisée à condition de pouvoir déterminer correctement le point de défaillance le plus probable.

Les méthodes d'approximation FORM, SORM et FORM système sont capables de calculer des faibles probabilités. Ce sont les méthodes les plus économiques parmi celles présentées. La version système nécessite par contre de connaître les fonctions de performance associées à chaque sous-événement. La formalisation actuelle ne permet pas de les connaitre.

La dernière technique présentée permet de remplacer une fonction de performance qui serait trop coûteuse (en l'occurrence l'algorithme d'optimisation) par un méta-modèle. Les méthodes basées sur le krigeage sont *a priori* les plus adéquates pour traiter les problèmes d'analyse des tolérances. Les méthodes AK-MCS, AK-IS, AK-SYS et EGRA sont très performantes et peuvent être utilisées pour résoudre des problèmes d'analyse des tolérances. Un inconvénient important de l'utilisation de ces méta-modèles est celui de la malédiction de la dimension. En effet, plus la dimension du problème est grande, plus la construction du méta-modèle est difficile, augmentant ainsi le temps de calcul. La précision des méta-modèles en est également affectée. Dans le cas des problèmes systèmes, le nombre d'événements à considérer peut également être un facteur limitant. La construction de plusieurs centaines de méta-modèles peut nécessiter un temps de calcul important ce qui réduit l'intérêt d'utiliser ces techniques.

1.4 Conclusion

Les deux approches d'analyse des tolérances (accumulation des tolérances et accumulation des déplacements) ont été présentées dans ce chapitre. La méthode d'accumulation des déplacements se base sur l'approche statistique modélisant les écarts géométriques par des variables aléatoires, le but étant de calculer une probabilité de non-respect des conditions d'assemblage et de fonctionnalité. Cette approche convient parfaitement pour l'application des méthodes probabilistes, c'est pourquoi il a été choisi d'utiliser l'approche d'accumulation des déplacements. Les chapitres suivants sont orientés vers le développement de formulations et de méthodes de résolution des problèmes d'analyse des tolérances

de mécanismes hyperstatiques. La modélisation des paramètres des mécanismes se fera grâce aux torseurs des petits déplacements, les écarts géométriques et les jeux sont ainsi modélisés de façon similaire. Deux conditions sont à étudier pour garantir la qualité d'un mécanisme : une condition d'assemblage et une condition fonctionnelle. Quelle que soit la condition, l'objectif est de calculer une probabilité de défaillance ou Taux de Non Conformité (TNC) d'ordre de grandeur 10^{-6}. Elle s'exprime en pièces par million (ppm).

Les méthodes de fiabilité présentées dans ce chapitre doivent permettre de calculer ces probabilités de façon économique, y compris pour des mécanismes complexes, fortement hyperstatiques. Les méthodes doivent être capables de traiter des problèmes systèmes, soit avec la connaissance des fonctions de performance, soit en modélisant une surface d'état-limite très complexe. A partir de la vue d'ensemble des méthodes, plusieurs techniques semblent adaptées pour la résolution des problèmes d'analyse des tolérances de mécanismes hyperstatiques :

- ◇ La simulation de Monte Carlo. Cette méthode, bien que coûteuse en temps de calcul, est capable de traiter un grand nombre de problèmes, elle sera utilisée comme méthode de référence afin de comparer les résultats obtenus avec les méthodes proposées.
- ◇ La méthode FORM système. Cette méthode permet de calculer efficacement une probabilité de défaillance d'un problème système à condition de connaitre les fonctions de performance associées à chaque sous-événement.
- ◇ Les méthodes couplant le krigeage et la simulation de Monte Carlo. En particulier, la méthode AK-SYS permet de traiter des problèmes systèmes, il faut cependant également connaitre les fonctions de performance de chaque sous-événement. De plus, le krigeage sera limité par la dimension du problème, il ne sera pas possible de considérer un très grand nombre d'écarts géométriques. Cette piste a été explorée lors des travaux de thèse, les premiers résultats ont montré les limites de cette technique pour des modèles complexes ayant un grand nombre d'écarts géométriques et un grand nombre de configurations à considérer.

Chapitre 2

Formulation des problèmes d'analyse des tolérances des mécanismes hyperstatiques

Sommaire

2.1 Introduction 44

2.2 Formulation probabiliste pour l'analyse des tolérances . . . 44

2.2.1 Condition d'assemblage - Formulation de la probabilité de non montage 46

2.2.2 Condition fonctionnelle - Formulation de la probabilité de non fonctionnement 46

2.2.3 Synthèse 49

2.3 Linéarisation par morceaux des contraintes d'interface . . . 49

2.3.1 Procédure de linéarisation 50

2.3.2 Application à un exemple académique 53

2.3.3 Synthèse 54

2.4 Problème fonctionnel - Proposition d'une formulation système 54

2.4.1 Décomposition du mécanisme par configurations 55

2.4.2 Formulation système existante 57

2.4.3 Proposition d'une nouvelle formulation système 58

2.4.4 Illustration détaillée sur un exemple académique 61

2.4.5 Synthèse 62

2.5 Problème d'assemblage - Recherche de formulations alternatives 63

2.5.1 Formulation d'un problème d'optimisation auxiliaire 63

2.5.2 Recherche de formulation système 65

2.6 Conclusion 66

2.1 Introduction

La définition des problèmes d'analyse des tolérances des mécanismes a été présentée dans la 1re partie du chapitre 1. Elle se base sur la prise en compte de deux types de variable, les écarts géométriques et les jeux, modélisés par les torseurs des petits déplacements et par des écarts intrinsèques. Le modèle de comportement du mécanisme est caractérisé par un ensemble d'équations et d'inéquations prenant en compte ces variables. En se basant sur le modèle de comportement, l'objectif de l'analyse des tolérances est de calculer la probabilité de défaillance du mécanisme pour des tolérances et dimensions données. Pour cela, deux conditions ont été définies, une condition porte sur la montabilité du mécanisme et une autre est liée à la fonctionnalité de celui-ci. Ces deux conditions, écrites dans la sous-section 1.2.4.2, sont définies par des domaines solutions. Il faut donc transformer ces définitions en formulations mathématiques pour pouvoir appliquer les méthodes probabilistes.

Ce chapitre se concentre uniquement sur les différentes formulations mathématiques des problèmes d'analyse des tolérances. Deux formulations peuvent être distinguées : une formulation basée sur un problème d'optimisation à résoudre et une formulation basée sur une formulation système.

Le chapitre est organisé de la façon suivante : la section 2.2 présente la première approche développée par Qureshi et al. [2012], elle se base sur la définition d'un problème d'optimisation. La section 2.3 montre les stratégies de linéarisation appliquées au modèle de comportement lorsque celui-ci est défini par des équations non-linéaires. La section 2.4 développe la formulation système utilisée pour traiter uniquement le cas des problèmes fonctionnels. Enfin, la section 2.5 regroupe les recherches effectuées dans le cas du problème d'assemblage afin de développer une autre formulation. Afin de mieux comprendre les formulations présentées, une application académique simple sert d'illustration pour chaque cas.

2.2 Formulation probabiliste pour l'analyse des tolérances

Cette section développe la formulation basée sur un problème d'optimisation à résoudre pour traiter le problème d'analyse des tolérances à la fois pour l'assemblage et pour la fonctionnalité. Les formulations mathématiques de la condition d'assemblage et de la condition fonctionnelle sont explicitées respectivement dans les sous-sections 2.2.1 et 2.2.2.

Avant de présenter les formulations, il convient de rappeler les équations caractérisant le modèle de comportement d'un mécanisme. Quatre types d'équations sont définis :

- ◇ les équations de compatibilité $C_c(\mathbf{x}, \mathbf{g}) = 0$,
- ◇ les contraintes d'interface flottantes $C_i(\mathbf{x}, \mathbf{g}) \leq 0$,
- ◇ les contraintes d'interface glissantes ou fixes $C_{i*}(\mathbf{x}, \mathbf{g}) = 0$,

◇ les conditions fonctionnelles $C_f(\mathbf{x}, \mathbf{g}) \leq 0$.

avec $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ et $\mathbf{g} \in \mathbb{R}^m$.

Afin de simplifier l'écriture des expressions mathématiques, le modèle va être réécrit pour ne considérer que les conditions fonctionnelles et les contraintes d'interface C_i. En effet, le mécanisme a la possibilité d'avoir plusieurs configurations, cela implique que le nombre d'équations d'égalité, $N_{C_c} + N_{C_{i*}}$, est inférieur au nombre de jeux m, [Ballot, 1995]. En se basant uniquement sur ces équations, il n'est pas possible de déterminer la valeur des jeux en utilisant un algorithme de type pivot de Gauss car le problème est sous-contraint. Cependant, une résolution partielle du système d'équations linéaires est envisageable ce qui permet de réduire le nombre de variables inconnues $\mathbf{g}$ à déterminer en exprimant certaines variables en fonction des autres. Il est alors possible de réécrire le modèle de comportement en n'ayant que des inéquations correspondant aux contraintes d'interface et aux conditions fonctionnelles.

L'application simple suivante illustre la réécriture du modèle de comportement. Considérons le modèle suivant :

$$\begin{array}{rcll} C_c^{(1)}(x, \mathbf{g}) & = & 2g_1 - g_2 + g_3 + x - 1 & = 0 \\ C_c^{(2)}(x, \mathbf{g}) & = & -g_1 + g_2 + 2g_3 - x - 1 & = 0 \\ C_i(x, \mathbf{g}) & = & g_1 + g_2 + 5g_3 + x + 1 & \leq 0 \\ C_f(x, \mathbf{g}) & = & -3g_1 + 2g_2 + g_3 + x + 2 & \leq 0 \end{array} \tag{2.1}$$

où $\mathbf{g} = \{g_1, g_2, g_3\} \in \mathbb{R}^3$. Dans cet exemple, $m = 3$, $N_{C_c} = 2$, $N_{C_i} = 1$ et $N_{C_{i*}} = 0$, il y a donc trois variables pour seulement deux équations d'égalité. Il n'est pas possible de résoudre entièrement ce système mais il est possible d'exprimer deux variables en fonction de la troisième. Les deux équations C_c^1 et C_c^2 permettent d'écrire les expressions de g_1 et g_2 en fonction de g_3 :

$$g_1 = -3g_3 + 2 \tag{2.2}$$

$$g_2 = -5g_3 + x + 3 \tag{2.3}$$

En injectant les expressions de ces variables dans la condition fonctionnelle et dans la contrainte restante, le modèle de comportement d'origine est équivalent au modèle suivant :

$$\begin{array}{rcll} C_i(x, \tilde{\mathbf{g}}) & = & -3g_3 + 2x + 6 & \leq 0 \\ C_f(x, \tilde{\mathbf{g}}) & = & -15g_3 + 3x + 2 & \leq 0 \end{array} \tag{2.4}$$

où $\tilde{\mathbf{g}} = \{g_3\}$.

Dans la suite du chapitre, le modèle de comportement est supposé écrit sous cette forme, n'ayant que des contraintes d'interface et des conditions fonctionnelles (s'il s'agit d'un problème fonctionnel). Les jeux seront représentés par la variable $\tilde{\mathbf{g}} \in \mathbb{R}^p$, avec $p = m - N_{C_c} - N_{C_{i*}}$, ce qui traduit la prise en compte des équations d'égalité dans les inéquations restantes.

2.2.1 Condition d'assemblage - Formulation de la probabilité de non montage

Comme expliqué dans la sous-section 1.2.4.2, le problème d'analyse des tolérances porte sur deux conditions à vérifier. La première concerne la montabilité du mécanisme, elle est définie par l'équation (1.15) réécrite ci-dessous sous la nouvelle forme.

$$\exists \tilde{\mathbf{g}} \in \mathbb{R}^p : \{C_i(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{g}}) \leq 0\} \tag{2.5}$$

La définition associée à cette formulation est donnée ci-dessous.

Définition 2.2.1 *Un mécanisme est montable si, pour un ensemble d'écarts géométriques* $\mathbf{x}$ *donné, il existe au moins un vecteur de valeurs des jeux* $\tilde{\mathbf{g}} \in \mathbb{R}^p$ *tel que les contraintes d'interfaces soient respectées. Cela revient à trouver une position des pièces du mécanisme de sorte qu'il puisse s'assembler.*

La définition telle qu'elle est écrite permet d'utiliser un outil de preuve d'existence d'une configuration admissible [Qureshi, 2011]. Pour cela, il est nécessaire d'utiliser une autre formulation basée sur un problème d'optimisation. La formulation utilisée est donnée dans l'équation (2.6), il s'agit de minimiser une contrainte d'interface sous toutes les contraintes caractérisant le modèle de comportement y compris la contrainte d'interface à minimiser. Cette formulation est un artifice. Le résultat de la minimisation n'a pas d'importance, seule l'existence ou non d'une solution importe. Une solution signifie qu'il existe bien une configuration des jeux telle que les contraintes soient respectées. Au contraire, s'il n'y a pas de solution, alors il n'existe pas de valeur des jeux telles que les équations du modèle soient respectées donc le mécanisme ne peut pas s'assembler.

$$\begin{aligned} R_a(\mathbf{x}) = \min_{\tilde{\mathbf{g}} \in \mathbb{R}^p} \quad & C_i^1(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{g}}) \\ \text{sous} \quad & C_i^{(k)}(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{g}}) \leq 0 \quad \forall k = \{1, \ldots, N_{C_i}\} \end{aligned} \tag{2.6}$$

où N_{C_i} est le nombre de contraintes d'interface. Soit l'événement $\mathrm{E}_a(\mathbf{x})$ suivant : « Pour un vecteur $\mathbf{x}$ donné, il n'existe pas de vecteur jeux $\tilde{\mathbf{g}} \in \mathbb{R}^p$ tel que $R_a(\mathbf{x})$ ait une solution ». Basée sur cet événement, l'expression de la probabilité de défaillance d'assemblage, P_{da}, est donnée dans l'équation (2.7).

$$P_{da} = \mathrm{Prob}\left(\mathrm{E}_a(\mathbf{X}(\omega))\right) \tag{2.7}$$

2.2.2 Condition fonctionnelle - Formulation de la probabilité de non fonctionnement

La deuxième condition du problème d'analyse des tolérances à vérifier concerne la fonctionnalité du mécanisme. Il est important de noter que certains mécanismes n'ont pas de conditions fonctionnelles à proprement dits, leur fonctionnalité dépend uniquement de leur faculté à s'assembler. Dans ce cas, seule la condition d'assemblage est à vérifier. Pour les mécanismes ayant une réelle exigence fonctionnelle sur une ou plusieurs

caractéristiques du mécanisme, la définition de fonctionnalité d'un mécanisme est donnée dans la sous-section 1.2.4.2 par l'équation (1.16), réécrite ci-dessous sous forme simplifiée.

$$C_f(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{g}}) > 0, \forall \tilde{\mathbf{g}} \in \mathbb{R}^p : \{C_i(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{g}}) \leq 0\} \tag{2.8}$$

La signification de cette expression est donnée ci-après.

Définition 2.2.2 *Pour un ensemble d'écarts géométriques* $\mathbf{x}$ *fixé, la fonctionnalité du mécanisme est garantie si la condition fonctionnelle* $C_f > 0$ *est respectée quelles que soient les configurations admissibles du mécanisme, c'est-à-dire telles que toutes les contraintes du modèle de comportement soient vérifiées.*

Cependant, il n'est pas envisageable de considérer toutes les configurations admissibles du mécanisme et, pour toutes, vérifier si la condition fonctionnelle est respectée ou non. En effet, il est plus aisé de trouver la configuration du mécanisme qui fournit la pire valeur de la caractéristique fonctionnelle. Si cette pire valeur de la caractéristique fonctionnelle indique que le mécanisme est fonctionnel alors il le sera pour toutes les autres configurations admissibles. D'après les notations choisies, le mécanisme est considéré fonctionnel si la condition fonctionnelle C_f est positive, la pire valeur de la caractéristique fonctionnelle est donc trouvée lorsque C_f est minimisée. C'est pourquoi le problème est reformulé différemment, selon le point de vue de la non fonctionnalité. C'est d'autant plus cohérent avec l'objectif qui est de calculer une probabilité de défaillance fonctionnelle. Un mécanisme est considéré non fonctionnel s'il existe au moins une configuration admissible telle que la condition fonctionnelle C_f est négative ou nulle :

$$\exists \tilde{\mathbf{g}} \in \mathbb{R}^p : \{C_i(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{g}}) \leq 0\} \wedge C_f(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{g}}) \leq 0 \tag{2.9}$$

Pour un ensemble d'écarts géométriques $\mathbf{x}$ donné, cela revient à chercher le pire des cas de la condition fonctionnelle en minimisant sa valeur de sorte que toutes les contraintes du modèle de comportement soient respectées. La formulation du problème d'optimisation sous contraintes est donnée dans l'équation (2.10).

$$\begin{aligned} R_f(\mathbf{x}) = \min_{\tilde{\mathbf{g}} \in \mathbb{R}^p} \quad & C_f(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{g}}) \\ \text{sous} \quad & C_i^{(k)}(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{g}}) \leq 0 \quad \forall k = \{1, \ldots, N_{C_i}\} \end{aligned} \tag{2.10}$$

L'expression de la formulation de la probabilité de défaillance fonctionnelle, P_{df}, est donnée dans l'équation (2.11). C'est la probabilité que le résultat de la minimisation sous contraintes soit négatif ou nul.

$$P_{df} = \text{Prob}\left(R_f(\mathbf{X}(\omega)) \leq 0\right) \tag{2.11}$$

Cette probabilité calculée correspond à la probabilité que le mécanisme soit fonctionnel ET montable.

N.B. : La vérification de la condition fonctionnelle de cette façon permet également de vérifier la condition d'assemblage. En effet, l'optimisation se fait exactement sous le respect des mêmes contraintes que dans le cas du problème d'optimisation d'assemblage, équation (2.6). L'existence d'une solution à ce problème d'optimisation permet d'obtenir le pire des cas de C_f mais cela signifie aussi qu'il existe au moins une configuration telle que le mécanisme est montable. Au contraire, s'il n'y a pas de solution possible alors le mécanisme n'est pas montable. L'étude de la fonctionnalité des mécanismes par cette formule permet de vérifier les deux conditions en même temps. Il est donc possible de calculer :

- ◇ la probabilité que le mécanisme soit fonctionnel et montable, notée P_{df}.
- ◇ la probabilité que le mécanisme soit fonctionnel sachant qu'il est montable :

$$P_{df|a} = \frac{P_{df}}{1 - P_{da}} \tag{2.12}$$

Cas de plusieurs conditions fonctionnelles. Certains mécanismes peuvent avoir besoin de vérifier plusieurs caractéristiques afin de garantir le bon fonctionnement du mécanisme. Dans ce cas, les formulations de chaque condition fonctionnelle associée à chaque caractéristique doivent être définies comme écrit dans l'équation (2.10). Cependant, l'expression de la probabilité de défaillance est différente. Deux cas peuvent être distingués :

- ◇ Une caractéristique Y doit être comprise dans un intervalle :

$$Y(\mathbf{x}, \mathbf{g}) \in [Y_{min}; Y_{max}] \tag{2.13}$$

Cette appartenance à un intervalle entraine l'écriture de deux conditions fonctionnelles $C_f^{(1)}$ et $C_f^{(2)}$ auxquelles sont associés deux problèmes d'optimisation $R_f^{(1)}$ et $R_f^{(2)}$.

$$C_f^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{g}) = Y_{max} - Y(\mathbf{x}, \mathbf{g}) > 0 \tag{2.14}$$

$$C_f^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{g}) = Y(\mathbf{x}, \mathbf{g}) - Y_{min} > 0 \tag{2.15}$$

La probabilité que Y n'appartienne pas à l'intervalle donné s'écrit :

$$\begin{aligned} P_{df} &= \text{Prob}\left(Y(\mathbf{X}, \mathbf{g}) \notin [Y_{min}; Y_{max}]\right) \\ &= \text{Prob}\left(R_f^{(1)}(\mathbf{X}) \leq 0 \cup R_f^{(2)}(\mathbf{X}) \leq 0\right) \\ &= \text{Prob}\left(R_f^{(1)}(\mathbf{X}) \leq 0\right) + \text{Prob}\left(R_f^{(2)}(\mathbf{X}) \leq 0\right) \end{aligned} \tag{2.16}$$

Les deux événements sont disjoints car il n'est pas possible d'avoir une valeur de la caractéristique Y à la fois inférieure à Y_{min} et supérieure à Y_{max} donc la probabilité de l'intersection des deux événements est nulle :

$$\text{Prob}\left(R_f^{(1)}(\mathbf{X}) \leq 0 \cap R_f^{(2)}(\mathbf{X}) \leq 0\right) = 0 \tag{2.17}$$

◇ Plusieurs caractéristiques Y_i, $i = \{1, \ldots, N_Y\}$, ne doivent pas dépasser des valeurs seuils qui leur sont associées. Des conditions fonctionnelles $C_f^{(i)} > 0$, peuvent donc s'écrire de la même manière que précédemment ainsi que des problèmes d'optimisation $R_f^{(i)}$ avec $i = \{1, \ldots, N_Y\}$. La probabilité de défaillance s'écrit toujours :

$$P_{df} = \text{Prob}\left(\bigcup_{i=1}^{N_Y} R_f^{(i)}(\mathbf{X}) \leq 0\right) \tag{2.18}$$

Cependant les événements ne sont cette fois pas forcément disjoints. Calculer la probabilité de la somme de tous les événements permet uniquement de déterminer un majorant de la probabilité recherchée. Pour obtenir une expression exacte, il est nécessaire d'utiliser la formule de Poincaré :

$$\begin{aligned} P_{df} &= \sum_{i=1}^{N_Y} \text{Prob}\left(R_f^{(i)}(\mathbf{X}) \leq 0\right) \\ &- \sum_{i<k} \text{Prob}\left(R_f^{(i)}(\mathbf{X}) \leq 0 \bigcap R_f^{(k)}(\mathbf{X}) \leq 0\right) \\ &+ \ldots \\ &+ (-1)^{N_Y - 1} \text{Prob}\left(\bigcap_{i=1}^{N_Y} R_f^{(i)}(\mathbf{X}) \leq 0\right) \end{aligned} \tag{2.19}$$

2.2.3 Synthèse

Cette section présente les formulations mathématiques caractérisant les conditions d'assemblage et fonctionnelle. Les deux formulations mathématiques sont définies par des minimisations sous contraintes. Un algorithme d'optimisation est donc requis afin de résoudre ces problèmes d'optimisation. Cependant, suivant le type de problème d'optimisation, sa résolution est plus ou moins complexe et est plus ou moins gourmande en temps de calcul. Pour des problèmes d'optimisation linéaires sous contraintes linéaires, un algorithme de type simplexe [Bertsimas et Tsitsiklis, 1997] permet très rapidement de trouver la solution. Au contraire, dès lors que des contraintes non linéaires sont à prendre en compte, la résolution est plus complexe. Il est possible que la solution globale du problème ne soit pas trouvée, que l'algorithme ne converge pas vers une solution ou encore que l'algorithme converge vers des solutions ayant des contraintes non respectées. Ce dernier problème a été rencontré par Qureshi et al. [2012] malgré l'utilisation de plusieurs algorithmes de résolution. C'est pourquoi il a été choisi d'appliquer une procédure de linéarisation des contraintes non linéaires du modèle de comportement. Ces considérations sont développées dans la section 2.3.

2.3 Linéarisation par morceaux des contraintes d'interface

Les formulations mathématiques des conditions d'assemblage et fonctionnelle s'écrivent sous la forme d'une minimisation sous contraintes. Or, la prise en compte de contraintes

non linéaires rend la résolution du problème d'optimisation beaucoup plus complexe. Qureshi et al. [2012] ont notamment constaté que dans certains cas, le résultat n'était pas acceptable car des contraintes n'étaient pas satisfaites. Lors de simulations numériques, 10% des résultats dans le pire des cas n'étaient pas acceptables. Il n'est donc pas envisageable de faire des simulations sur de très grandes populations avec un pourcentage de perte aussi élevé. Deux solutions sont envisageables, la première est de rechercher un algorithme d'optimisation performant. La deuxième consiste à linéariser les contraintes non linéaires simplifiant la résolution du problème d'optimisation. Par ailleurs, Beaucaire et al. [2013] ont montré que le problème d'analyse des tolérances peut s'écrire sous la forme d'une probabilité système. La décomposition du mécanisme en plusieurs configurations, nécessaire pour avoir la possibilité de développer une formulation système, implique d'avoir un modèle linéaire. C'est pourquoi, la solution choisie consiste à linéariser les contraintes non linéaires.

Cette section a pour objectif de décrire la procédure utilisée pour linéariser les équations non-linéaires du modèle de comportement. La sous-section 2.3.1 détaille les différentes stratégies envisagées. Une illustration de linéarisation sur un modèle de comportement est donnée dans la sous-section 2.3.2. L'illustration se base sur l'exemple comprenant un appui plan et deux goupilles, exemple entièrement détaillé dans l'annexe C.1.

2.3.1 Procédure de linéarisation

L'écriture du modèle de comportement du mécanisme peut impliquer la définition de contraintes non linéaires. C'est le cas lorsque la distance entre deux points de deux surfaces doit être calculée, cela conduit à écrire une équation sous forme quadratique. De façon générale, la distance entre deux points A et B de coordonnées en 2D respectives (x_A, y_A) et (x_B, y_B) s'exprime de la façon suivante :

$$d(A,B) = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} \tag{2.20}$$

Afin de ne pas travailler avec la fonction racine carrée, il est préférable de considérer le carré de la distance et donc ainsi fournir une forme quadratique. Le modèle de comportement détaillé dans la sous-section C.1 montre que les expressions des contraintes d'interface des liaisons pivots s'écrivent sous forme quadratique. La procédure de linéarisation est appliquée sur ce type d'équation non linéaire. Soit l'équation (2.21), une fonction caractéristique correspondant à une contrainte d'interface sous forme quadratique :

$$C_i(u,v) = u^2 + v^2 - \Delta R^2 \tag{2.21}$$

où u et v sont les jeux suivants deux axes $\vec{x}$ et $\vec{y}$ et ΔR est la différence des rayons. L'équation (2.21) correspond à l'écriture d'une contrainte d'interface pour une liaison pivot d'axe $\vec{z}$ mais, de façon générale, la procédure expliquée ci-dessous est similaire pour d'autres axes de rotation.

Afin de transformer cette équation quadratique en équation linéaire, les stratégies choisies se basent sur une linéarisation au premier ordre de la fonction C_i au point de

linéarisation de l'équation (2.21) en u, v dont les coordonnées sont données ci-dessous :

$$\left\{ \begin{array}{c} x_{P_k} = \Delta R \cos\theta_k \\ y_{P_k} = \Delta R \sin\theta_k \\ 0 \end{array} \right\}_{\{\vec{x},\vec{y},\vec{z}\}} \tag{2.22}$$

avec

$$\theta_k = \frac{2k\pi}{N_d}, k = \{1, \ldots, N_d\}$$

où θ_k est un angle dont le paramètre N_d permet d'ajuster la densité de linéarisation. L'opération de linéarisation au premier ordre est détaillée ci-dessous :

$$\begin{aligned} C_i(u,v) &= C_i(x_{P_k}, y_{P_k}) + \nabla C_i(x_{P_k}, y_{P_k}) \cdot \left(\begin{array}{c} u - x_{P_k} \\ v - y_{P_k} \end{array} \right) \\ &= \Delta R^2 \cos^2\theta_k + \Delta R^2 \sin^2\theta_k - \Delta R^2 + \left| \begin{array}{c} 2x_{P_k} \\ 2y_{P_k} \end{array} \right. \cdot \left| \begin{array}{c} u - x_{P_k} \\ v - y_{P_k} \end{array} \right. \\ &= 2x_{P_k}(u - x_{P_k}) + 2y_{P_k}(v - y_{P_k}) \\ &= 2u \cdot x_{P_k} - 2x_{P_k}^2 + 2v \cdot y_{P_k} - 2y_{P_k}^2 \\ &= 2u \cdot \Delta R \cos\theta_k - 2\Delta R^2 \cos^2\theta_k + 2v \cdot \Delta R \sin\theta_k - 2\Delta R^2 \sin^2\theta_k \\ &= 2u \cdot \Delta R \cos\theta_k + 2v \cdot \Delta R \sin\theta_k - 2\Delta R^2 \\ &= 2\Delta R (u \cos\theta_k + v \sin\theta_k - \Delta R) \end{aligned} \tag{2.23}$$

En pratique, cette distance correspond à une contrainte qui doit être négative ou nulle, il est donc possible de la simplifier par $2\Delta R$:

$$C_i(u,v) = u \cos\theta_k + v \sin\theta_k - \Delta R \tag{2.24}$$

Cette procédure de linéarisation correspond à une discrétisation du cercle en un polygone circonscrit dont le nombre de facettes est défini par le paramètre N_d. Au total trois stratégies, qui sont fonction du type de polygone, sont considérées, voir figure 2.1 :

- ◇ Polygone inscrit au cercle.
- ◇ Polygone moyen qui est la moyenne des polygones inscrit et circonscrit.
- ◇ Polygone circonscrit au cercle dont l'équation est fournie en (2.24).

L'équation (2.24) correspond à la linéarisation suivant la stratégie du polygone circonscrit. Afin de déterminer l'équation de la contrainte dans le cas du polygone inscrit, la technique utilisée consiste à calculer le rayon du cercle inscrit au polygone inscrit, voir figure 2.2. Soit ΔR le rayon du cercle de la contrainte réelle, et ΔR_i le rayon du cercle inscrit au polygone inscrit, defini par :

$$\Delta R_i = \Delta R \cos\frac{\theta_1}{2} \tag{2.25}$$

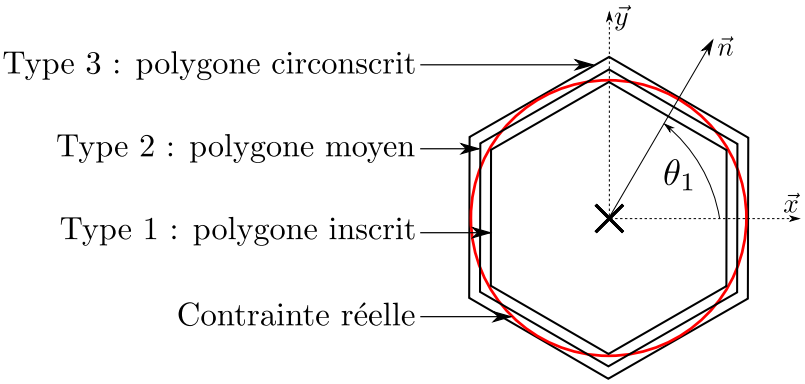


FIGURE 2.1 – Les trois types de discrétisation de la contrainte quadratique : polygone inscrit, moyen et circonscrit. Ici $N_d = 6$, les polygones ont six facettes.

avec $\theta_1 = \dfrac{2\pi}{N_d}$.

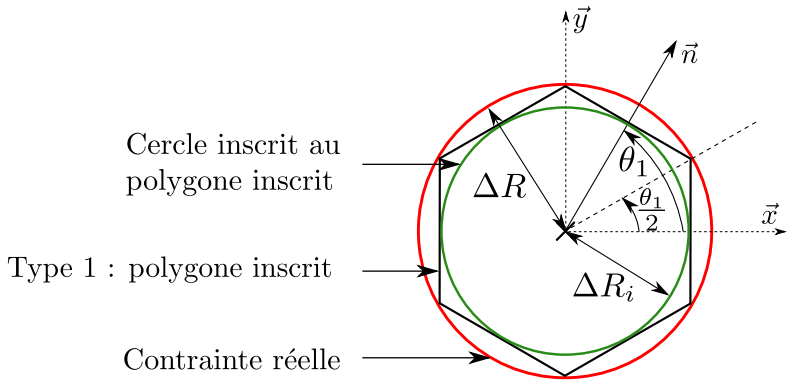


FIGURE 2.2 – Schéma du cercle inscrit du polygone inscrit de la contrainte réelle.

La stratégie du polygone moyen s'obtient en calculant la moyenne des cercles de la contrainte réelle et du cercle inscrit. Soit ΔR_m, le rayon du cercle inscrit au polygone moyen, l'expression du rayon est la suivante :

$$\Delta R_m = \frac{\Delta R + \Delta R_i}{2} = \frac{\Delta R\left(1 + \cos\frac{\theta_1}{2}\right)}{2} \tag{2.26}$$

A partir de ces calculs, les expressions des équations quadratiques linéarisées en fonction du type de stratégie sont données par :

Type 1 : discrétisation suivant le polygone inscrit :

$$C_i^{(k)}(u,v) = u\cos\theta_k + v\sin\theta_k - \Delta R\cos\frac{\theta_1}{2} \leq 0$$

Type 2 : discrétisation suivant le polygone moyen :

$$C_i^{(k)}(u,v) = u\cos\theta_k + v\sin\theta_k - \frac{\Delta R}{2}\left(1 + \cos\frac{\theta_1}{2}\right) \leq 0$$

Type 3 : discrétisation suivant le polygone circonscrit :

$$C_i^{(k)}(u,v) = u\cos\theta_k + v\sin\theta_k - \Delta R \leq 0$$

avec

$$\theta_k = \frac{2k\pi}{N_d}, k = 1, \ldots, N_d$$

2.3.2 Application à un exemple académique

Le modèle de comportement du mécanisme présenté dans l'annexe C.1 comporte quatre contraintes d'interface quadratiques, équations (C.10) et (C.11). L'une d'elle est réécrite ci-dessous :

$$C_i^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{g}) = u_{3b1b}^2 + v_{3b1b}^2 - \left(\frac{d_{1b} - d_{3b}}{2}\right)^2 \leq 0 \tag{2.27}$$

où $\mathbf{x} = \{d_{1b}, d_{3b}\}$ et $\mathbf{g} = \{u_{3b1b}, v_{3b1b}\}$. La contrainte d'interface quadratique correspond à la définition d'un cercle délimitant la zone de déplacement admissible, voir figure 2.3.

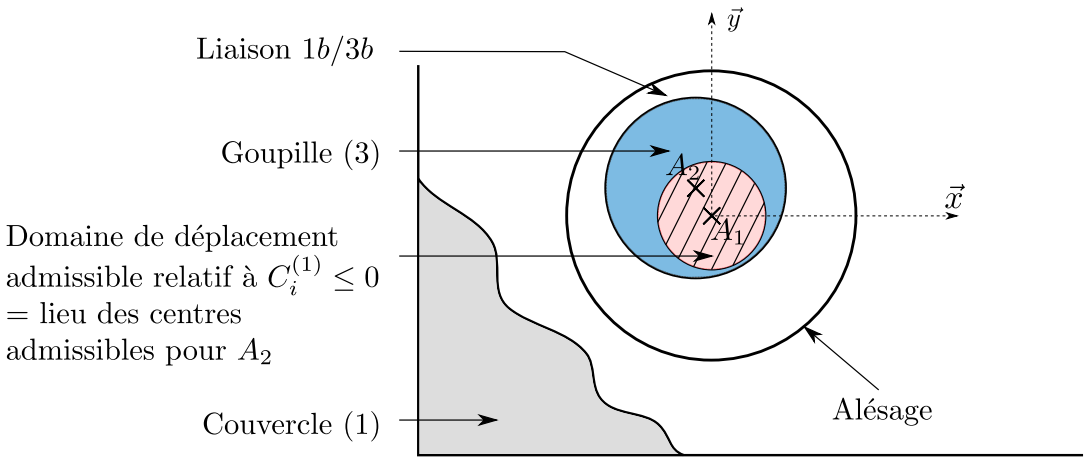


FIGURE 2.3 – Déplacement admissible de la goupille dans son logement sans interpénétration. Le schéma montre un zoom sur la liaison $1b/3b$ avec des écarts volontairement agrandis. La zone rouge hachurée correspond à la zone admissible des déplacements sans interpénétration de matière entre le couvercle et la goupille. Les points A_1 et A_2 représentent respectivement le point A pour le couvercle (1) et la goupille (3) avec prise en compte des écarts géométriques, ces deux points étant nominalement confondus.

La procédure de linéarisation est donc appliquée à ces contraintes. Dans le cas de cette contrainte, la variable notée ΔR correspond à la moitié de la différence des diamètres :

$$\Delta R = \frac{d_{1b} - d_{3b}}{2} \tag{2.28}$$

Les contraintes linéarisées ont, en fonction de la stratégie choisie, les expressions suivantes :

Type 1 : discrétisation suivant le polygone inscrit :

$$C_i^{(k)}(\mathbf{x},\mathbf{g}) = u_{3b1b}\cos\theta_k + v_{3b1b}\sin\theta_k - \left(\frac{d_{1b}-d_{3b}}{2}\right)\cos\frac{\theta_1}{2} \leq 0$$

Type 2 : discrétisation suivant le polygone moyen :

$$C_i^{(k)}(\mathbf{x},\mathbf{g}) = u_{3b1b}\cos\theta_k + v_{3b1b}\sin\theta_k - \frac{(d_{1b}-d_{3b})}{4}\left(1+\cos\frac{\theta_1}{2}\right) \leq 0$$

Type 3 : discrétisation suivant le polygone circonscrit :

$$C_i^{(k)}(\mathbf{x},\mathbf{g}) = u_{3b1b}\cos\theta_k + v_{3b1b}\sin\theta_k - \left(\frac{d_{1b}-d_{3b}}{2}\right) \leq 0$$

avec

$$\theta_k = \frac{2k\pi}{N_d}, k = \{1,\ldots,N_d\}$$

2.3.3 Synthèse

Quel que soit le type de linéarisation, cette opération approxime le modèle de comportement original par un modèle simplifié. Cette approximation peut avoir des conséquences sur le calcul des probabilités de défaillance du mécanisme. Les probabilités de défaillances peuvent être sur-évaluées (résultat conservatif) ou sous-évaluées ce qui fausse l'évaluation du niveau de qualité de la conception. Dans ce contexte, il est important de savoir quelle stratégie est la meilleure afin d'obtenir les résultats les plus satisfaisants. Par ailleurs, le choix de la valeur du paramètre N_d est crucial, plus sa valeur est grande, plus la linéarisation est dense ce qui permet de se rapprocher de la vraie contrainte. En conséquence, plus N_d est grand, plus l'erreur d'approximation due à la linéarisation est réduite. Cependant, une grande valeur de N_d implique une augmentation conséquente du nombre de contraintes du problème d'optimisation, complexifiant le modèle de comportement. Lors de l'application de la procédure de linéarisation, il faut donc choisir une valeur permettant d'avoir un compromis acceptable entre l'approximation du résultat et la complexification du modèle. Dans ce cadre, une étude de l'impact de la linéarisation sur les probabilités de défaillance d'assemblage et fonctionnelle est détaillée dans la sous-section 3.2.2.2.

2.4 Problème fonctionnel - Proposition d'une formulation système

La formulation globale du problème d'optimisation proposée dans la sous-section 2.2.2 a pour avantage d'être facile à coupler à une méthode de simulation (voir section 1.3.2) pour calculer la probabilité de défaillance fonctionnelle. Cependant, comme il est expliqué ci-dessous, traiter un problème d'analyse des tolérances de mécanismes hyperstatiques revient à calculer une probabilité système. Nous souhaitons donc développer une formulation système équivalente à la formulation d'origine ce qui permettrait d'appliquer

des méthodes de fiabilité système. Le développement de cette formulation est l'objet de cette section. A noter que la formulation présentée dans cette section permet de traiter uniquement le problème fonctionnel du mécanisme.

De très faibles déplacements sont autorisés aux pièces d'un mécanisme hyperstatique avec jeux. Suivant la position des pièces entre elles, plusieurs configurations du mécanisme peuvent être considérées. Ne sachant pas, *a priori*, quelle est la configuration de fonctionnement du mécanisme, il est nécessaire de se placer dans le pire des cas. Parmi toutes les configurations possibles des pièces du mécanisme, il s'agit de trouver la pire configuration des jeux dont la définition est donnée ci-dessous.

Définition 2.4.1 *La pire configuration des jeux est la configuration du mécanisme qui, pour des écarts géométriques donnés, fournit la pire valeur de la caractéristique fonctionnelle. En fonction des écarts géométriques, la pire configuration des jeux peut être différentes.*

Trouver cette pire configuration des jeux pour des écarts géométriques donnés est l'objectif de la minimisation sous contraintes, équation (2.10). Cette formulation permet de considérer le mécanisme dans sa globalité. Or suivant la valeur des écarts géométriques, la pire configuration des jeux peut correspondre à plusieurs configurations différentes du mécanisme. La figure 2.4 illustre ce phénomène : le pire des cas pour la caractéristique Y correspond à deux configurations possibles du mécanisme. Il peut donc y avoir autant de pires configurations des jeux qu'il existe de configurations possibles du mécanisme. Le fait de considérer plusieurs configurations des jeux implique que le problème d'analyse des tolérances des mécanismes hyperstatiques est en réalité un problème d'estimation d'une probabilité système [Beaucaire et al., 2013]. L'objectif de cette section est de développer une nouvelle formulation système, différente de celle proposée par Beaucaire et al. [2013] mais basée sur la même décomposition du mécanisme par configuration.

Afin de pouvoir développer une nouvelle formulation basée sur la décomposition par configuration, il est important de déterminer à quoi correspond mathématiquement une configuration. L'objectif de la section 2.4.1 est d'expliquer le lien entre les configurations d'un mécanisme et le modèle de comportement, en particulier avec les contraintes d'interface. La section 2.4.2 présente la formulation système proposée par Beaucaire et al. [2013]. La section 2.4.3 développe la nouvelle formulation système. Une illustration de cette formulation est donnée dans la section 2.4.4.

2.4.1 Décomposition du mécanisme par configurations

La connaissance des configurations du mécanisme est un élément clé pour le développement de la formulation système. Il est important de savoir à quoi correspond une configuration d'un mécanisme à la fois physiquement et mathématiquement. Cette sous-section a pour objectif d'expliquer en détail comment est définie mathématiquement une configuration particulière d'un mécanisme grâce aux équations du modèle de comportement. En particulier, les contraintes d'interface C_i sont les plus importantes dans ce contexte.

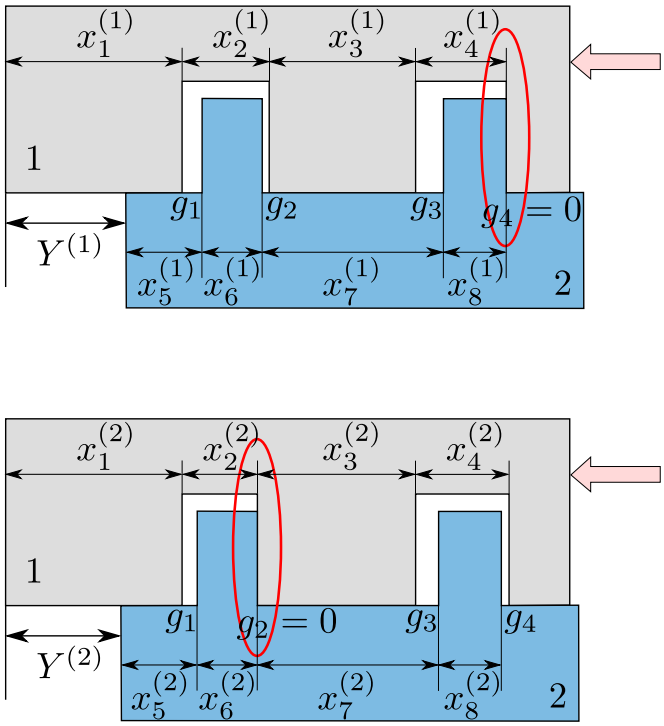


FIGURE 2.4 – Deux configurations d'un même mécanisme hyperstatique mais avec des écarts géométriques différents. Le pire des cas est considéré lorsque la caractéristique Y est maximisée. Pour deux vecteurs de réalisations des écarts géométriques $\left\{x_i^{(j)}, i = 1, \ldots, 8; j = 1, 2\right\}$, la pire des configurations change : contact au niveau de la goupille de droite pour j=1, contact au niveau de la goupille de gauche pour j=2.

Les contraintes d'interface caractérisent la non interpénétration des surfaces les unes dans les autres. Elles spécifient que la distance entre deux points particuliers du mécanisme doit être supérieure ou égale à zéro. Par convention, ces contraintes sont écrites avec le signe inférieur ou égal $C_i \leq 0$. On peut alors distinguer deux cas :

1. $C_i < 0$: les deux surfaces de la liaison ne sont pas en contact.
2. $C_i = 0$: les deux surfaces de la liaison sont en contact au point où est calculée la contrainte. Les contraintes d'interface égales à zéro sont appelées contraintes actives.

Ces contraintes sont très importantes car ce sont elles qui garantissent la mobilité du mécanisme et la possibilité de considérer le mécanisme dans plusieurs configurations.

Comme écrit ci-dessus, une contrainte active définit un point de contact particulier dans le mécanisme. Or une configuration particulière des pièces du mécanisme correspond à un ensemble spécifique de points de contact dans le mécanisme. Il est donc possible d'associer une combinaison particulière de contraintes actives avec une configuration du mécanisme, par exemple $\{C_i^{(1,2,5,7,8,9)}(\mathbf{x}, \mathbf{g}) = 0\}$ qui signifie $\{C_i^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{g}) = 0\}$, $\{C_i^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{g}) = 0\}$, etc. Il peut y avoir un maximum de six contraintes d'interface actives, fixant les six degrés de liberté du mécanisme. Sachant qu'il y a au total N_{C_i} contraintes d'interface de mobilité, le nombre maximum N_s de combinaisons de contraintes et donc

de configurations est donné par le coefficient binomial suivant :

$$N_s = C^6_{N_{C_i}} = \frac{N_{C_i}!}{6!\,(N_{C_i}-6)!} \tag{2.29}$$

Si le mécanisme est fixé dans une configuration donnée, alors il est possible de déterminer la valeur des jeux en fonction des écarts géométriques. Il suffit de résoudre le système d'équations linéaires formé par les équations de compatibilité et les contraintes d'interfaces actives. Par exemple, supposons la configuration $s_1 = \{1, 2, 5, 7, 8, 9\}$ où les nombres sont les indices des contraintes actives associés à cette configuration, alors il est possible de déterminer la valeur des jeux pour cette configuration, notée $\mathbf{g}^{(s_1)}$. Les jeux n'étant plus des variables libres inconnues, la condition fonctionnelle peut donc être définie en fonction uniquement des écarts géométriques, dans ce cas $C_f^{(s_1)}(\mathbf{x}) = C_f(\mathbf{x}, \mathbf{g}^{(s_1)})$. Considérons maintenant les N_s configurations possibles du mécanisme, il est alors possible de définir N_s conditions fonctionnelles uniquement fonction des écarts géométriques :

$$C_f^{(s_j)}(\mathbf{x}) = C_f(\mathbf{x}, \mathbf{g}^{(s_j)}), j = \{1, \ldots, N_s\} \tag{2.30}$$

Les deux formulations systèmes présentées ci-après se basent sur la décomposition du mécanisme comme expliquée dans cette sous-section. La première formulation a été proposée par Beaucaire et al. [2013], elle permet l'utilisation d'une méthode de fiabilité système mais son utilisation reste difficile pour traiter des cas complexes. La nouvelle formulation système proposée est plus simple et permet de gérer les modèles de comportement complexes.

2.4.2 Formulation système existante

La formulation proposée par Beaucaire et al. [2013] consiste à considérer toutes les configurations possibles s_j pour $j = \{1, \ldots, N_s\}$ et de vérifier si la condition fonctionnelle $C_f^{(s_j)}$ est respectée pour chaque configuration. De plus, les contraintes d'interface non actives qui n'appartiennent pas à la configuration s_j, *i.e.* les $N_{C_i} - 6$ inéquations, doivent être respectées afin de garantir la non interpénétration. La probabilité de défaillance fonctionnelle est l'union de chaque configuration défaillante, voir équation (2.31).

$$P_{df} = \text{Prob}\left(\bigcup_{j=1}^{N_s}\left[C_f^{(s_j)}(\mathbf{X}) \leq 0 \bigcap C_i^{(\bar{s_j})}(\mathbf{X}) < 0\right]\right) \tag{2.31}$$

où $\bar{s_j}$ contient les indices des contraintes d'interface non actives. L'expression de la probabilité est ensuite développée grâce à la formule de Poincaré, l'union de l'intersection

d'événements devient la somme d'intersection d'événements :

$$\begin{aligned} P_{df} &= \sum_{j=1}^{N_s} \text{Prob}\left[C_f^{(s_j)}(\mathbf{X}) \leq 0 \bigcap C_i^{(\bar{s_j})}(\mathbf{X}) < 0\right] \\ &- \sum_{j<k} \text{Prob}\left[C_f^{(s_j)}(\mathbf{X}) \leq 0 \bigcap C_i^{(\bar{s_j})}(\mathbf{X}) < 0 \ldots \right. \\ &\quad \left. \bigcap C_f^{(s_k)}(\mathbf{X}) \leq 0 \bigcap C_i^{(\bar{s_k})}(\mathbf{X}) < 0\right] \\ &+ \ldots \\ &+ (-1)^{N_s-1}\text{Prob}\left[\bigcap_{j=1}^{N_s}\left(C_f^{(s_j)}(\mathbf{X}) \leq 0 \bigcap C_i^{(\bar{s_j})}(\mathbf{X}) < 0\right)\right] \end{aligned} \tag{2.32}$$

Cette formulation de la probabilité n'est plus fonction des jeux, ce qui permet d'appliquer une méthode de fiabilité système. Cependant, la formule de Poincaré fait apparaitre un nombre conséquent de probabilité d'intersections d'événements. Pour des mécanismes complexes ayant un nombre de configurations N_s très grand, le nombre de combinaisons possibles d'intersections d'événements à calculer due à la formule de Poincaré rend cette formulation inutilisable. Cette approche proposée par Beaucaire et al. [2013] permet néanmoins de montrer que le problème d'analyse des tolérances des mécanismes hyperstatiques peut s'écrire sous forme d'une probabilité système. L'objectif est alors porté sur l'amélioration, la simplification ou la découverte d'une nouvelle formulation système capable de traiter les mécanismes complexes. C'est l'objet de la sous-section suivante.

2.4.3 Proposition d'une nouvelle formulation système

La formulation système proposée se base sur une propriété de la programmation linéaire permettant d'écrire un problème d'optimisation primal sous sa forme duale.

Soit un problème d'optimisation, équation (2.33), caractérisant un problème fonctionnel.

$$\begin{aligned} R_f(\mathbf{x}) = \min_{\tilde{\mathbf{g}} \in \mathbb{R}^p} \quad & C_f(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{g}}) \\ \text{sous} \quad & C_i^{(k)}(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{g}}) \leq 0 \quad \forall k = \{1, \ldots, N_{C_i}\} \end{aligned} \tag{2.33}$$

La condition fonctionnelle est une combinaison linéaire de plusieurs composantes jeux. Les contraintes d'interfaces sont pour la plupart également des fonctions linéaires des jeux. Certaines contraintes sont cependant non linéaires mais une procédure de linéarisation est appliquée à ces contraintes, comme expliqué dans la sous-section 2.3. D'après ces hypothèses, le problème d'optimisation appartient à la catégorie de la programmation linéaire. De plus, la condition fonctionnelle C_f est supposée différentiable partout. Soit $\mathbf{x} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ un ensemble de réalisations des variables aléatoires $\mathbf{X}$, il est possible de définir le Lagrangien associé au problème d'optimisation :

$$L(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{g}}, \boldsymbol{\lambda}) = C_f(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{g}}) + \sum_{k=1}^{N_{C_i}} \lambda_k C_i^{(k)}(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{g}}) \tag{2.34}$$

où $\boldsymbol{\lambda}$ est le vecteur des N_{C_i} multiplicateurs de Lagrange. Soit la proposition suivante [Bonnans et al., 2006] :

Proposition 2.4.1 *Dans le cas présent, $\tilde{\mathbf{g}}^*$ est une solution optimale du problème d'optimisation si et seulement si il existe $\boldsymbol{\lambda}^* \geq 0$ tel que $(\tilde{\mathbf{g}}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)$ est un point-selle de la fonction de Lagrange, équation 2.34. En particulier, le problème d'optimisation est soluble si et seulement si L possède des points-selle, et si c'est le cas, alors le problème d'optimisation et son dual de Lagrange sont solubles avec des valeurs optimales égales.*

Soit le programme linéaire suivant, représentatif d'un problème d'analyse des tolérances, écrit sous forme matricielle :

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{\tilde{\mathbf{g}} \in \mathbb{R}^p} & C_f(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{g}}) = \mathbf{a}^T\mathbf{x} + \mathbf{b}^T\tilde{\mathbf{g}} + c_0 \\ \text{sous} & C_i^{(k)}(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{g}}) = \mathbf{d}_k^T\mathbf{x} - \mathbf{e}_k^T\tilde{\mathbf{g}} + c_k \leq 0 \end{array} \tag{2.35}$$

pour $k = \{1, \ldots, N_{C_i}\}$ et pour $\tilde{\mathbf{g}} \in \mathbb{R}^p$. Le Lagrangien est défini par :

$$\begin{aligned} L(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{g}}, \boldsymbol{\lambda}) &= C_f(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{g}}) + \sum_{k=1}^{N_{C_i}} \lambda_k C_i^{(k)}(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{g}}) \\ &= \left[\mathbf{b} - \sum_{k=1}^{N_{C_i}} \lambda_k \mathbf{e}_k\right]^T \tilde{\mathbf{g}} + \sum_{k=1}^{N_{C_i}} \lambda_k \left(\mathbf{d}_k^T\mathbf{x} + c_k\right) + \mathbf{a}^T\mathbf{x} + c_0 \end{aligned} \tag{2.36}$$

Le dual de Lagrange s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{array}{ll} \max\limits_{\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^{N_{C_i}}} & C_{f,dual}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = \left([\mathbf{d}]^T\mathbf{x} + \mathbf{c}\right)^T \boldsymbol{\lambda} + \mathbf{a}^T\mathbf{x} + c_0 \\ \text{sous} & \sum\limits_{k=1}^{N_{C_i}} \lambda_k \mathbf{e}_k = \mathbf{b} \\ & \boldsymbol{\lambda} \geq 0 \end{array} \tag{2.37}$$

La forme duale est intéressante parce que la fonction objectif n'est plus fonction des jeux. De plus, d'après la proposition, si une solution existe, alors les deux problèmes, écrits équations 2.35 et 2.37, ont la même valeur optimale. Les contraintes d'optimisation sont maintenant constituées de p équations d'égalité à satisfaire et les multiplicateurs de Lagrange doivent être positifs. Le nombre de contraintes d'interface N_{C_i} étant très grand par rapport à la dimension p de $\tilde{\mathbf{g}}$, le problème dual d'optimisation est sous-contraint : il y a plus de multiplicateurs de Lagrange $\boldsymbol{\lambda}$ que de contraintes d'égalité. Afin de trouver les valeurs admissibles des multiplicateurs de Lagrange satisfaisant les contraintes, toutes les combinaisons possibles doivent être testées. Cependant, certaines combinaisons sont impossibles, elles sont listées dans le tableau 2.1.

En réalité, il faut avoir autant de λ différents de zéro qu'il y a de jeux à trouver, *i.e.* un ensemble $\{\lambda_{s_k^{(1)}}, \ldots, \lambda_{s_k^{(6)}}\} \neq 0$ où s_k contient les indices des multiplicateurs de Lagrange différents de zéro de la k^{e} combinaison possible. Il existe donc $N_s = C_{N_{C_i}}^6$

Situation impossible	Interprétation physique
• Tous les $\boldsymbol{\lambda}$ égaux à zéro car $\mathbf{b}$ est non nul. La contrainte d'optimisation, équation (2.37), ne serait pas satisfaite.	• Cela revient à considérer qu'il n'y a aucun point de contact entre les pièces du mécanisme car aucune contrainte d'interface ne doit être active.
• Tous les $\boldsymbol{\lambda}$ différents de zéro car $N_{C_i} >> m$. Dans la contrainte d'optimisation, équation (2.37), il y aurait trop de variables et pas assez d'équations pour pouvoir résoudre le système.	• Cela revient à considérer qu'il y a contact à tous les points possibles du mécanisme simultanément, car toutes les contraintes d'interface doivent être actives.

Tableau 2.1 – Liste des combinaisons impossibles pour calculer les valeurs des multiplicateurs de Lagrange.

combinaisons possibles maximum. Ce nombre correspond également au nombre de configurations possibles du mécanisme introduit dans la sous-section 2.4.1. Cependant, toutes les combinaisons ne sont pas forcément admissibles vis à vis des contraintes du problème d'optimisation dual, équation (2.37). Introduisons N_{as}, le nombre de combinaisons admissibles satisfaisant les contraintes et soit $C^{(s_k)}_{f,dual}(\mathbf{x}) = C_{f,dual}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}_{s_k})$ l'expression de la condition fonctionnelle duale relative à la combinaison s_k. Il y a alors N_{as} solutions possibles au problème de maximisation, équation (2.37), qui peut donc s'écrire de la façon suivante :

$$C^*_{f,dual}(\mathbf{x}) = \max\left(C^{(s_1)}_{f,dual}(\mathbf{x}), \ldots, C^{(s_{N_{as}})}_{f,dual}(\mathbf{x})\right) \tag{2.38}$$

De plus, d'après la proposition 2.4.1, les valeurs optimales des problèmes primal et dual sont égales, *i.e.* les deux expressions des conditions fonctionnelles sont égales :

$$C^*_f(\mathbf{x}) = C^*_{f,dual}(\mathbf{x}) = \max\left(C^{(s_1)}_f(\mathbf{x}), \ldots, C^{(s_{N_{as}})}_f(\mathbf{x})\right) \tag{2.39}$$

Considérer les combinaisons admissibles permet d'exprimer la forme duale par un maximum discret. L'objectif final est de déterminer la probabilité de défaillance fonctionnelle, il s'agit de calculer la probabilité que le résultat de l'optimisation soit inférieur à zéro. La probabilité s'écrit finalement de la façon suivante :

$$\begin{aligned} P_{df} &= \text{Prob}\left(\max\left(C^{(s_1)}_f(\mathbf{X}), \ldots, C^{(s_{N_{as}})}_f(\mathbf{X})\right) \leq 0\right) && (2.40)\\ &= \text{Prob}\left(\left\{C^{(s_1)}_f(\mathbf{X}) \leq 0\right\} \cap \ldots \cap \left\{C^{(s_{N_{as}})}_f(\mathbf{X}) \leq 0\right\}\right) && (2.41)\\ &= \text{Prob}\left(\bigcap_{i=1}^{N_{as}} C^{(s_i)}_f(\mathbf{X}) \leq 0\right) && (2.42) \end{aligned}$$

La probabilité calculée correspond bien à celle initiale, à savoir la probabilité que le mécanisme soit fonctionnel et montable.

La sous-section suivante illustre sur un exemple simple les étapes de transformation jusqu'à l'obtention de la formulation système.

2.4.4 Illustration détaillée sur un exemple académique

Supposons que le problème primal d'optimisation corresponde à celui de l'application analytique donné dans l'annexe B.1. Le problème d'optimisation est réécrit ci-dessous. La transformation s'effectue pour des écarts géométriques $\mathbf{x}$ fixés.

$$\begin{array}{rll} R_f(\mathbf{x}) = \min\limits_{\tilde{\mathbf{g}}\in\mathbb{R}^2} & C_f(\mathbf{x},\tilde{\mathbf{g}}) = x_1 + x_2 + 1 + g_1 + 2g_2 \\ \text{sous} & C_i^1(\mathbf{x},\mathbf{g}) = x_1 - 1 - g_1 \leq 0 \\ & C_i^2(\mathbf{x},\tilde{\mathbf{g}}) = x_2 + 2 - g_2 \leq 0 \\ & C_i^3(\mathbf{x},\tilde{\mathbf{g}}) = x_1 - x_2 - 2g_1 \leq 0 \\ & C_i^4(\mathbf{x},\tilde{\mathbf{g}}) = 2x_1 + x_2 + g_1 - 2g_2 \leq 0 \end{array} \tag{2.43}$$

Dans ce problème, $p = 2$ et $N_{C_i} = 4$, le problème est bien sur-contraint. A partir de la définition du dual de Lagrange donnée équation 2.37, la forme duale du problème d'optimisation s'écrit de la façon suivante :

$$\begin{array}{rll} R_{fdual}(\mathbf{x}) = \max\limits_{\boldsymbol{\lambda}\in\mathbb{R}^4} & C_{f,dual}(\mathbf{x},\boldsymbol{\lambda}) = & \lambda_1(x_1-1) + \lambda_2(x_2+2) + \lambda_3(x_1-x_2) \\ & & +\lambda_4(2x_1+x_2) + x_1 + x_2 + 1 \\ \text{sous} & \lambda_1 + 2\lambda_3 - \lambda_4 = 1 & \\ & \lambda_2 + 2\lambda_4 = 2 & \\ & \lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4 \geq 0 & \end{array} \tag{2.44}$$

Le nombre de multiplicateurs de Lagrange $\boldsymbol{\lambda}$ est plus grand que le nombre de contraintes d'égalité. Plusieurs possibilités doivent être testées mais seulement en considérant les cas où deux λ sont différents de zéro en même temps (et les autres sont fixés à zéro), *i.e.* un nombre de combinaisons possibles égales à $N_s = C_4^2 = 6$. Les valeurs des multiplicateurs de Lagrange sont déterminées en résolvant le système linéaire des contraintes d'égalité. Le tableau 2.2 répertorie les possibilités et montre si le résultat est admissible ou pas. Parmi les six combinaisons possibles, seules quatre sont admissibles au regard des contraintes : $N_{as} = 4$. La situation s_2 permettrait de calculer une expression de C_f mais la valeur de λ_4 est négative donc ce n'est pas un optimum. Cette solution n'est pas un maximum possible donc elle est éliminée. La situation s_5 entraine l'écriture d'une contradiction dans les contraintes, cette combinaison n'est pas envisageable.

A partir des situations admissibles données dans le tableau 2.2, le problème d'optimisation s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} C_f^*(\mathbf{x}) &= \max\left(C_f^{s_1}(\mathbf{x}), C_f^{s_3}(\mathbf{x}), C_f^{s_4}(\mathbf{x}), C_f^{s_6}(\mathbf{x})\right) \\ &= \max\left(4x_1 + x_2 + 1, \frac{3x_1+5x_2}{2} + 5, 5x_1 + 2x_2 - 1, 2x_1 + 3x_2 + 4\right) \end{aligned} \tag{2.45}$$

L'expression de la probabilité de défaillance devient alors uniquement fonction des écarts géométriques modélisés par des variables aléatoires $\mathbf{X}$ identiques au problème d'origine :

$$P_{df} = \text{Prob}\left(\begin{array}{l} \{4X_1 + X_2 + 1 \leq 0\} \cap \left\{\dfrac{3X_1+5X_2}{2} + 5 \leq 0\right\} \\ \cap\{5X_1 + 2X_2 - 1 \leq 0\} \cap \{2X_1 + 3X_2 + 4 \leq 0\} \end{array}\right) \tag{2.46}$$

Hypothèse de situation	Résultat	Expression de C_f
s_1 : $\lambda_{3,4} \neq 0$, $\lambda_{1,2} = 0$	$\lambda_3 = 1$, $\lambda_4 = 1$	$C_f^{s_1} = 4x_1 + x_2 + 1$
s_2 : $\lambda_{2,4} \neq 0$, $\lambda_{1,3} = 0$	$\lambda_4 = -1 < 0$, $\lambda_2 = 4$	n'est pas un optimum
s_3 : $\lambda_{2,3} \neq 0$, $\lambda_{1,4} = 0$	$\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 1/2$	$C_f^{s_3} = \frac{3x_1 + 5x_2}{2} + 5$
s_4 : $\lambda_{1,4} \neq 0$, $\lambda_{2,3} = 0$	$\lambda_1 = 2$, $\lambda_4 = 1$	$C_f^{s_4} = 5x_1 + 2x_2 - 1$
s_5 : $\lambda_{1,3} \neq 0$, $\lambda_{2,4} = 0$	Contrainte éq. 2.44 $\Rightarrow 2 = 0$	Impossible
s_6 : $\lambda_{1,2} \neq 0$, $\lambda_{3,4} = 0$	$\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$	$C_f^{s_6} = 2x_1 + 3x_2 + 4$

Tableau 2.2 – Liste des combinaisons possibles pour calculer les valeurs de multiplicateurs de Lagrange.

Pour information, avec la formulation système développée par Beaucaire et al. [2013], l'expression de la probabilité de défaillance s'écrirait :

$$P_{df} = \text{Prob}\left(\begin{array}{l} \{(4X_1 + X_2 + 1 \leq 0) \cap (X_1 + X_2 - 2 \leq 0) \cap (-5X_1 + 3X_2 + 8 \leq 0)\} \\ \cup \left\{\left(\frac{3X_1 + 5X_2}{2} + 5 \leq 0\right) \cap (X_1 + X_2 - 2 \leq 0) \cap (5X_1 - 3X_2 - 8 \leq 0)\right\} \\ \cup \{(5X_1 + 2X_2 - 1 \leq 0) \cap (-3X_1 + X_2 + 5 \leq 0) \cap (-X_1 - X_2 + 2 \leq 0)\} \\ \cup \{(2X_1 + 3X_2 + 4 \leq 0) \cap (-X_1 - X_2 + 2 \leq 0) \cap (3X_1 - X_2 - 5 \leq 0)\} \end{array}\right) \tag{2.47}$$

La figure 2.5 montre les quatre conditions fonctionnelles obtenues ainsi que le domaine non fonctionnel. Le calcul de cette probabilité par la méthode de fiabilité système est illustré dans la section 3.3. Les résultats sont comparés avec la méthode de référence tant en terme de précision que de rapidité de calcul.

2.4.5 Synthèse

La formulation système proposée par Beaucaire et al. [2013], équation (2.31), est trop complexe, à cause du développement de l'union par la formule de Poincaré. La nouvelle formulation proposée, équation (2.42), est beaucoup plus simple. Elle ne fait intervenir qu'une seule intersection d'événements à calculer. La formulation système telle que proposée permet d'appliquer une méthode de fiabilité système très efficacement comme la méthode FORM système, voir sous-section 1.3.1.2.

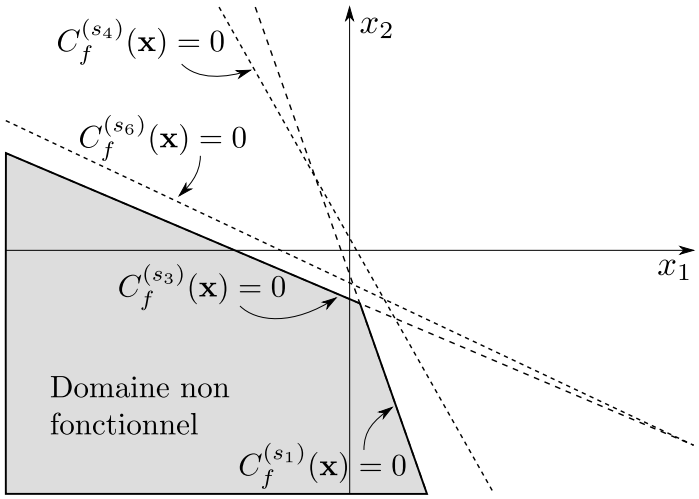


FIGURE 2.5 – Illustration du domaine non fonctionnel. Il s'agit de l'intersection des conditions fonctionnelles. En réalité, seulement deux situations sont dominantes.

2.5 Problème d'assemblage - Recherche de formulations alternatives

Comme pour le calcul de la probabilité de défaillance fonctionnelle P_{df}, le calcul de la probabilité de défaillance d'assemblage P_{da} s'avère être le calcul d'une probabilité système due aux multiples configurations possibles du mécanisme. La différence entre les deux problèmes provient de leur définition : dans le cas du problème fonctionnel, la condition est portée sur une valeur à comparer tandis que pour le problème d'assemblage, la condition porte sur l'existence d'une configuration du mécanisme telle que l'assemblage soit possible. Le problème d'optimisation défini équation (2.6) p.46 caractérise cette condition. Une solution indique que le mécanisme s'assemble, au contraire s'il n'y a pas de solution alors le mécanisme ne peut pas s'assembler. Cette utilisation particulière rend difficile le développement d'une formulation système similaire à celle présentée dans la sous-section 2.4.3 pour le problème fonctionnel. Malgré des recherches actives menées dans cette optique, il n'a pas été possible de mettre au point une formulation système pour l'assemblage. Les pistes étudiées sont résumées dans les sous-sections suivantes. La sous-section 2.5.1 présente la première piste qui consiste à écrire un problème d'optimisation auxiliaire correspondant à la phase 1 de l'algorithme du simplexe. La deuxième piste, discutée en sous-section 2.5.2, regroupe les difficultés observées liées au développement d'une formulation système.

2.5.1 Formulation d'un problème d'optimisation auxiliaire

La condition d'assemblage générale du problème d'analyse des tolérances comme elle est définie dans la sous-section 1.2.4.2 spécifie que le mécanisme est montable s'il existe une valeur des jeux telle que toutes les équations de compatibilité et les contraintes d'interface soient vérifiées. L'objectif n'est pas de savoir quelle sera la valeur des jeux $\mathbf{g}$ la

meilleure suivant un critère particulier, mais de savoir s'il existe au moins une valeur admissible. Cet objectif est également celui de la phase 1 de l'algorithme du simplexe [Bertsimas et Tsitsiklis, 1997]. Le but est de déterminer une solution réalisable d'un programme linéaire permettant ainsi de démarrer l'algorithme avant la recherche de l'optimum. Cela correspond au cas du problème d'assemblage, car seule la recherche d'une solution réalisable est nécessaire.

Soit, pour des réalisations des écarts géométriques $\mathbf{x}$ données, un mécanisme dont le comportement géométrique est modélisé par les équations suivantes :

$$C_i^{(k)}(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{g}}) \leq 0 \quad \forall k = \{1, \ldots, N_{C_i}\}$$

avec $\tilde{\mathbf{g}} \in \mathbb{R}^p$. Le domaine $\mathcal{D}_a$ définit le domaine d'assemblage.

$$\mathcal{D}_a = \{\tilde{\mathbf{g}} \in \mathbb{R}^p : C_i(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{g}}) \leq 0\} \tag{2.48}$$

Toutes les équations sont supposées linéaires ou linéarisées (voir section 2.3.1), les contraintes du domaine $\mathcal{D}_a$ correspondent donc à celles d'un programme linéaire. La phase 1 du simplexe peut être mise en œuvre sous ces hypothèses. Il consiste en l'écriture d'un problème d'optimisation auxiliaire, dont une solution de base réalisable est connue ce qui permet de démarrer l'algorithme. Suivant le résultat de ce problème auxiliaire, il est possible de conclure sur l'existence ou non d'une solution réalisable.

Afin de pouvoir écrire le problème auxiliaire, les contraintes doivent être écrites sous forme standard : $\mathbf{A}\tilde{\mathbf{g}} = \mathbf{b}$, $\tilde{\mathbf{g}} \geq 0$. La première étape consiste à transformer de façon équivalente l'ensemble des équations du modèle de comportement. Les règles de transformation à appliquer sont les suivantes :

- ◇ Inéquation → équation : il faut ajouter une variable d'écart e :

$$\mathbf{a}\tilde{\mathbf{g}} \leq b \Longleftrightarrow \mathbf{a}\tilde{\mathbf{g}} + e = b, e \geq 0 \tag{2.49}$$

- ◇ Variable réelle → variable non négative : tout nombre réel peut être écrit comme la différence de deux nombres positifs :

$$\tilde{g} \in \mathbb{R} \rightarrow \begin{cases} \tilde{g} = \tilde{g}^+ - \tilde{g}^- \\ \tilde{g}^+, \tilde{g}^- \geq 0 \end{cases} \tag{2.50}$$

Dans un premier temps, des variables d'écart sont ajoutées aux inéquations du modèle de comportement puis chaque variable $\tilde{g}$ est décomposée en deux variables $\tilde{g}^+$ et $\tilde{g}^-$ comme dans la deuxième règle. L'ensemble des équations à vérifier s'écrit :

$$C_i^{(k)}(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{g}}^+, \tilde{\mathbf{g}}^-, \mathbf{e}) = 0 \quad \forall k = \{1, \ldots, N_{C_i}\} \tag{2.51}$$

La transformation des équations sous la forme standard entraine une augmentation du nombre de variables d'optimisation, le nombre de variables N_{vo} est maintenant égale à :

$$N_{vo} = 2p + N_{C_i} \tag{2.52}$$

Le problème d'optimisation auxiliaire s'écrit de la façon suivante :

$$R_{aux}(\mathbf{x}) = \min_{\tilde{\mathbf{g}}^+,\tilde{\mathbf{g}}^-,\mathbf{e},\mathbf{a}\in\mathbb{R}^{N_{voa}}} \sum_{k=1}^{N_{C_i}} a_i \quad \text{sous} \quad \begin{array}{l} C_i^{(k)}(\mathbf{x},\tilde{\mathbf{g}}^+,\tilde{\mathbf{g}}^-,\mathbf{e}) + a_k = 0 \quad \forall k = \{1,\ldots,N_{C_i}\} \\ \tilde{\mathbf{g}}^+,\tilde{\mathbf{g}}^-,\mathbf{e},\mathbf{a} \geq 0 \end{array} \tag{2.53}$$

avec $N_{voa} = N_{vo} + N_{C_i} = 2(p + N_{C_i})$. Il y a deux résultats possibles à ce problème d'optimisation :

- ◇ $R_{aux}(\mathbf{x}) = 0$ alors il existe une solution réalisable $\tilde{\mathbf{g}} \in \mathbb{R}^p$ telle que le domaine $\mathcal{D}_a$ existe : le mécanisme est montable.
- ◇ $R_{aux}(\mathbf{x}) > 0$ alors il n'existe pas de solution réalisable $\tilde{\mathbf{g}} \in \mathbb{R}^p$ telle que le domaine $\mathcal{D}_a$ existe : le mécanisme n'est pas montable.

Ce problème d'optimisation caractéristique de la condition d'assemblage présente deux avantages par rapport au problème d'optimisation d'origine proposé équation (2.6) :

- ◇ il est possible d'avoir un résultat numérique lorsqu'il n'y pas de solution réalisable ce qui n'est pas le cas avec le problème d'origine. Le fait d'avoir un résultat permet d'avoir des informations sur les combinaisons de contraintes actives dans les cas de défaillance.
- ◇ La fonction $R_{aux}(\mathbf{x})$ est continue.

Cependant l'expression de ce problème d'optimisation fait augmenter très nettement le nombre de variables d'optimisation rendant sa résolution plus complexe. Le temps de calcul pour résoudre ce problème est donc plus important que celui requis pour résoudre le problème d'optimisation d'origine équation (2.6).

La sous-section suivante s'intéresse au développement d'une formulation système pour le problème d'assemblage.

2.5.2 Recherche de formulation système

La mise en place d'une formulation système telle que développée pour le problème fonctionnel nécessite de connaitre les configurations de défaillance du mécanisme. Dans le cas fonctionnel, les configurations correspondent directement aux combinaisons de contraintes actives du problème d'optimisation. Dans le cas de l'assemblage, le problème d'optimisation d'origine à résoudre a pour but de vérifier l'existence ou non d'une solution. Lorsqu'il n'y a pas de solution, c'est-à-dire lorsque le mécanisme ne s'assemble pas, aucune information n'est disponible sur les configurations ou contraintes qui ne sont pas satisfaites. Le problème auxiliaire proposé ci-dessus permet de pallier cet écueil. Cependant l'écriture de ce problème introduit un grand nombre de variables supplémentaires et modifie les contraintes. Les combinaisons de contraintes actives trouvées grâce à cette formulation ne correspondent donc plus directement aux configurations. A partir de là, il est difficile de faire correspondre des combinaisons de contraintes avec des configurations particulières de points de contact. Par ailleurs, afin d'appliquer une méthode de fiabilité

système telle que FORM pour les systèmes, il faut pouvoir définir des fonctions de performance continues. Le problème auxiliaire proposé ci-dessus permettrait de résoudre ce problème. Cela reste conditionné par l'aptitude à déterminer les bonnes combinaisons de contraintes actives à sélectionner. Des pistes ont été testées dans cette voie sans succès jusqu'à présent. La recherche d'une formulation système pour le problème d'assemblage est une perspective de travail intéressante pour la suite de cette thèse.

2.6 Conclusion

L'objectif de ces travaux de thèse est de pouvoir estimer le niveau de qualité d'un mécanisme lors de la conception de celui-ci en fonction des tolérances qui sont spécifiées sur les composantes des pièces du mécanisme. Pour cela, deux conditions sont vérifiées, l'une porte sur l'assemblage du mécanisme et l'autre sur sa fonctionnalité. Le niveau de qualité est déterminé par l'estimation d'une probabilité de défaillance pour chacune des conditions. Ce chapitre définit en détail les formulations mathématiques proposées pour le calcul de ces probabilités. Il est possible de distinguer deux approches distinctes : une approche globale et une approche système.

La première approche mène à la définition de deux problèmes d'optimisation, un pour l'assemblage et un pour la fonctionnalité. Ces problèmes d'optimisation permettent de déterminer la valeur des jeux du mécanisme, modélisés par des variables libres. Pour le problème fonctionnel, l'optimisation a pour but de trouver la configuration du mécanisme engendrant la pire valeur de la condition fonctionnelle. Pour le problème d'assemblage, l'optimisation est un artifice dont le but est de pouvoir vérifier s'il existe un ensemble de valeurs des jeux tel que l'assemblage du mécanisme soit possible. Ces deux formulations peuvent être très facilement couplées à des méthodes de simulation telle que Monte Carlo comme il est montré dans le chapitre suivant.

Cependant, calculer la probabilité de défaillance de mécanismes hyperstatiques s'avère difficile car il faut en réalité calculer une probabilité système. Or les formulations de l'approche globale ne permettent en aucun cas de connaitre directement les événements relatifs à la probabilité système. C'est pourquoi, une formulation système a été mise au point afin de pouvoir appliquer une méthode de fiabilité système. L'approche système n'est valable par contre que pour traiter le problème fonctionnel.

Par ailleurs, afin de s'affranchir des problèmes liés à des équations non linéaires, une procédure de linéarisation a été définie. La simplification du modèle de comportement due à cette linéarisation n'est pas à négliger, c'est pourquoi une étude de son impact sur l'estimation des probabilités de défaillance est proposée dans la section 3.2.2.2. De plus, dans le cas du problème d'assemblage, deux procédures itératives permettant d'estimer la probabilité de défaillance de façon précise sans se soucier de la densité de linéarisation requise, ont été mises au point. Elles sont présentées dans le chapitre suivant.

Chapitre 3

Méthode de résolution des problèmes d'analyse des tolérances des mécanismes hyperstatiques

Sommaire

3.1 Introduction 68
3.2 Méthode MCO - Monte Carlo couplée Optimisation 70
3.2.1 Principe de la méthode MCO 70
3.2.2 Applications académiques de la méthode MCO 72
3.2.3 Applicabilité des méthodes probabilistes alternatives 77
3.2.4 Synthèse 78
3.3 Problème fonctionnel - Résolution de la formulation système 78
3.3.1 Recherche des combinaisons de contraintes actives dominantes . 79
3.3.2 Résolution par la méthode FORM système 81
3.3.3 Applications de la méthode de résolution système 82
3.3.4 Synthèse 85
3.4 Problème d'assemblage - Procédures adaptatives basées sur la méthode MCO 85
3.4.1 Propriétés du problème d'assemblage 86
3.4.2 Procédure EBS - Estimation d'une Borne Supérieure de P_{da} . . 88
3.4.3 Procédure EIC - Estimation d'un Intervalle de Confiance de P_{da} 89
3.4.4 Application des procédure EBS et EIC 91
3.4.5 Synthèse 94
3.5 Conclusion 94

3.1 Introduction

Ce chapitre s'intéresse au développement de méthodes de résolution capables de calculer les probabilités de défaillance d'assemblage et fonctionnelle des mécanismes. Pour cela, les méthodes proposées sont basées sur les formulations mathématiques définies dans le chapitre précédent. Deux types de formulations peuvent être distingués : une formulation basée sur un problème d'optimisation, équations (2.7) et (2.11), et une formulation système, équation (2.42). A partir de ces définitions, il est maintenant possible d'appliquer des méthodes probabilistes parmi celles proposées dans la section 1.3. Les deux types de formulations se basent sur des approches différentes, les méthodes appliquées doivent donc être adaptées à la formulation utilisée. L'objectif de ce chapitre est de montrer quelles méthodes peuvent être utilisées et comment elles sont appliquées en fonction de la formulation retenue.

Les méthodes probabilistes choisies ne peuvent pas forcément être appliquées directement telles qu'elles sont définies dans la section 1.3. Il est parfois nécessaire de les intégrer au sein d'une procédure de calcul ou d'appliquer un pré-traitement. Par exemple, le fait de linéariser les contraintes non linéaires entrainent des difficultés quant à la connaissance de la meilleure stratégie à choisir. C'est pourquoi des procédures itératives ont été développées afin de pouvoir estimer la probabilité de défaillance en minimisant l'erreur due à l'approximation. D'autre part, la formulation système, proposée section 2.4.3, décompose le mécanisme en plusieurs configurations de points de contact. Cependant, le nombre de configurations peut être très grand et chaque configuration n'a pas forcément d'impact sur la probabilité de défaillance. Avant de pouvoir appliquer une méthode de fiabilité système, il est donc nécessaire d'utiliser une technique de sélection des configurations dominantes ce qui permet également un gain en temps de calcul.

Ce chapitre est divisé en trois sections : la section 3.2 présente la méthode de résolution MCO qui couple la simulation de Monte Carlo avec un algorithme d'optimisation. C'est la méthode la plus simple à mettre en œuvre. Elle sert de référence lors des comparaisons des résultats avec les autres méthodes de résolution. La méthode de résolution du problème fonctionnel sous forme système est décrite dans la section 3.3. La méthode FORM système est utilisée pour calculer la probabilité système. Cette section contient également l'algorithme de sélection des configurations dominantes. Enfin la section 3.4 se focalise sur le problème d'assemblage. Dans cette section sont développées les procédures itératives basées sur la méthode MCO. Elles permettent d'estimer la probabilité de défaillance d'assemblage précisément sans se soucier de la stratégie de linéarisation choisie. Dans chaque section, la méthode développée est appliquée aux deux exemples académiques déjà utilisés et détaillés en annexes B.1 et C.1. Les résultats sont comparés avec ceux obtenus avec la méthode MCO. La figure 3.1 montre la classification des méthodes de résolution en fonction des formulations utilisées.

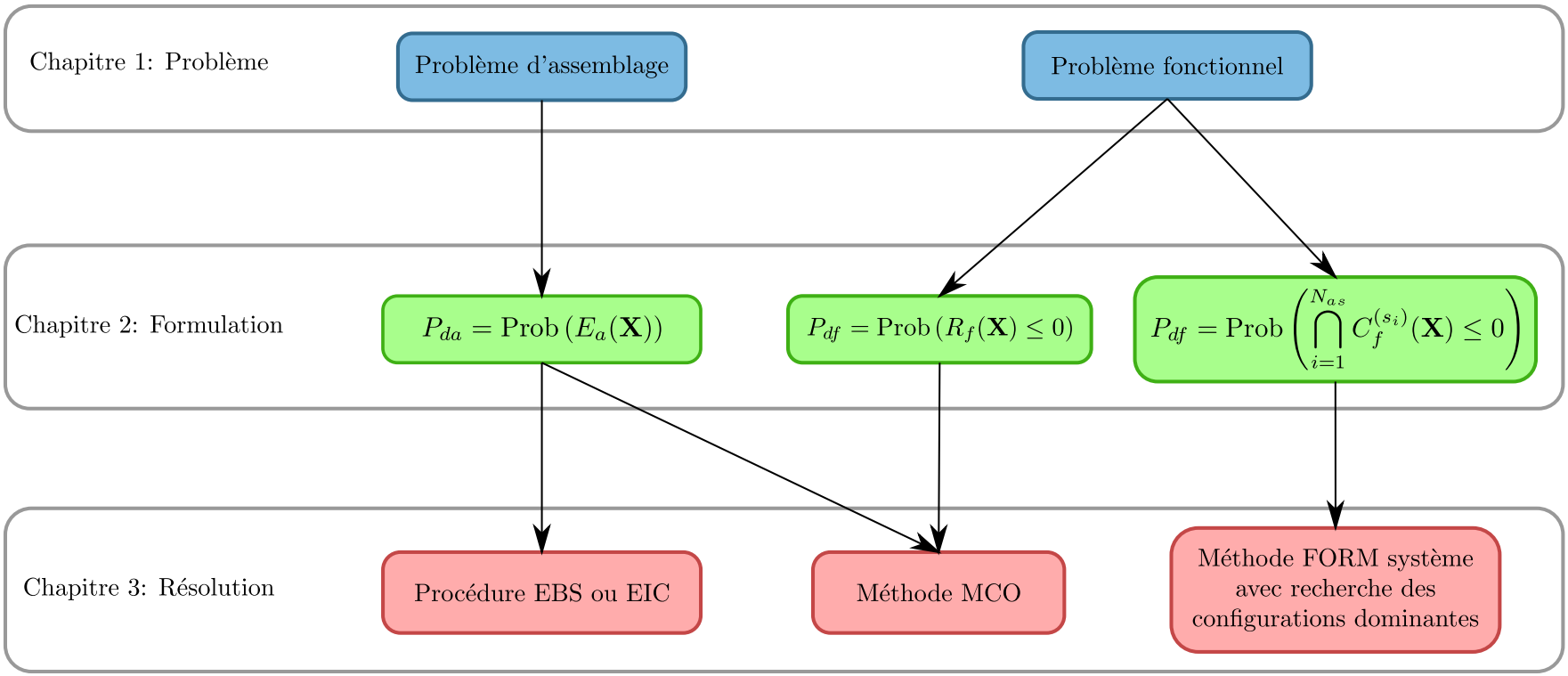


FIGURE 3.1 – Schéma liant les différentes formulations des problèmes d'analyse des tolérances avec les méthodes de résolution développées dans le chapitre trois.

3.2 Méthode MCO - Monte Carlo couplée Optimisation

Cette section se base sur les formulations avec des problèmes d'optimisation à résoudre, c'est-à-dire R_f et/ou E_a. La méthode de résolution utilisée dans cette section est la simulation de Monte Carlo couplée avec un algorithme d'optimisation. Elle permet de calculer les probabilités de défaillance d'assemblage et fonctionnelle. C'est la méthode de référence car elle est capable de fournir des résultats précis quel que soit le problème étudié à condition de choisir un nombre suffisamment grand de tirages des variables aléatoires. L'objectif de cette section est de présenter cette méthode pour l'analyse des tolérances et d'illustrer son application sur des exemples académiques.

La section est organisée de la façon suivante : la sous-section 3.2.1 montre comment sont adaptées les formulations des probabilités en vue de l'application de la simulation de Monte Carlo. Pour chaque problème d'analyse des tolérances, les expressions des probabilités de défaillance, version MCO, sont détaillées avec en particulier la fonction indicatrice associée à chaque problème. La section 3.2.2 illustre l'application de la méthode MCO sur les deux exemples académiques. La première illustration permet notamment de visualiser que la surface d'état-limite est continue par morceaux, caractéristique importante d'un problème système. La seconde illustration nécessite l'application de la procédure de linéarisation. Une étude de l'impact du choix de la stratégie sur la précision de la probabilité est alors proposée. Enfin, la section 3.2.3 est une discussion sur les possibilités d'appliquer d'autres méthodes probabilistes (hors méthodes systèmes) pour calculer les probabilités de défaillance.

3.2.1 Principe de la méthode MCO

Les formulations des probabilités caractérisant les problèmes d'assemblage et fonctionnel sont définies par des problèmes d'optimisation sous contraintes à résoudre. Elles sont réécrites ci-dessous dans le cas où une condition fonctionnelle est présente (ce qui permet également de définir la probabilité de défaillance d'assemblage, voir sous-section 2.2.2) :

$$P_{da} = \mathrm{Prob}\left(\mathrm{E}_a(\mathbf{X}(\omega))\right) \tag{3.1}$$

$$P_{df} = \mathrm{Prob}\left(R_f(\mathbf{X}(\omega)) \leq 0\right) \tag{3.2}$$

avec

$$\begin{aligned} R_f\left(\mathbf{x}\right) = \min_{\tilde{\mathbf{g}} \in \mathbb{R}^p} \quad & C_f(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{g}}) \\ \text{sous} \quad & C_i^{(k)}(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{g}}) \leq 0 \quad \forall k = \{1, \ldots, N_{C_i}\} \end{aligned} \tag{3.3}$$

et où $\mathrm{E}_a(\mathbf{x})$ est l'événement : « Pour un vecteur $\mathbf{x}$ donné, il n'existe pas de vecteur jeux $\mathbf{g} \in \mathbb{R}^m$ tel que le problème d'optimisation $R_f(\mathbf{x})$ ait une solution ».

Il est aussi possible de définir le domaine d'assemblage $\mathcal{D}_a$:

$$\mathcal{D}_a = \{\mathbf{g} \in \mathbb{R}^p : C_i(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{g}}) \leq 0\} \tag{3.4}$$

Les deux formulations P_{da} et P_{df} sont tout à fait adaptées pour l'utilisation de méthodes de simulation telle que Monte Carlo, voir sous-section 1.3.2. La technique initialement proposée par Dantan et Qureshi [2009] consiste à coupler la simulation de Monte Carlo avec un algorithme d'optimisation. Comme il a été expliqué dans la section 2.3.1, afin de simplifier le problème d'optimisation et d'éviter des problèmes de non satisfaction de contraintes observés par Qureshi et al. [2012], les équations non-linéaires définissant le problème d'optimisation sont linéarisées. Cela permet d'utiliser un algorithme d'optimisation linéaire comme l'algorithme du simplexe [Bertsimas et Tsitsiklis, 1997] qui a comme avantage de toujours converger vers la solution si celle-ci existe.

L'objectif de l'algorithme du simplexe est de partir d'une solution admissible en se plaçant sur un des sommets du polytope entourant le domaine $\mathcal{D}_a$ puis de chercher un sommet voisin qui améliore la valeur de la fonction objectif C_f. Il existe des règles de pivotage afin de guider le choix sur un sommet plutôt qu'un autre. C'est un algorithme itératif qui s'arrête lorsque la fonction objectif ne peut plus être améliorée. Pour un vecteur des réalisations $\mathbf{x}$ donné, cet algorithme permet, d'une part, de savoir s'il existe ou non une solution (vérification de l'assemblage) et d'autre part, s'il y a une solution, de calculer la valeur minimale de C_f.

La simulation de Monte Carlo couplée à cet algorithme d'optimisation est très simple à mettre en œuvre. Un nombre N_{MC} de réalisations des variables aléatoires est tiré aléatoirement puis, pour chaque tirage, l'algorithme d'optimisation permet de déterminer si le mécanisme est montable et fonctionnel. Il y a donc N_{MC} appels à l'algorithme d'optimisation. La probabilité de défaillance est estimée grâce à l'utilisation de la fonction indicatrice qui est différente suivant le problème traité :

◇ Problème d'assemblage :

$$\tilde{P}_{da} = \frac{1}{N_{MC}} \sum_{i=1}^{N_{MC}} \mathbb{1}_{D_a}(\mathbf{x}^{(i)}) \tag{3.5}$$

avec

$$\mathbb{1}_{D_a}(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{si } R_f(\mathbf{x}) \text{ n'a pas de solution} \\ 0 & \text{si } R_f(\mathbf{x}) \text{ a une solution} \end{cases} \tag{3.6}$$

◇ Problème fonctionnel :

$$\tilde{P}_{df} = \frac{1}{N_{MC}} \sum_{i=1}^{N_{MC}} \mathbb{1}_{D_f}(\mathbf{x}^{(i)}) \tag{3.7}$$

avec

$$\mathbb{1}_{D_f}(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{si } R_f(\mathbf{x}) \leq 0 \\ 0 & \text{si } R_f(\mathbf{x}) > 0 \text{ ou s'il n'y a pas de solution} \end{cases} \tag{3.8}$$

La probabilité calculée est la probabilité que le mécanisme soit fonctionnel ET montable. Il est également possible de calculer la probabilité que le mécanisme soit fonctionnel sachant qu'il est montable par :

$$P_{df|a} = \frac{P_{df}}{1 - P_{da}} \tag{3.9}$$

Cette méthode fonctionne dans un très grand nombre de cas et permet d'obtenir des résultats précis à condition que le coefficient de variation de la probabilité soit suffisamment petit comme expliqué dans la sous-section 1.3.2. Plus la probabilité cible est faible plus le nombre de tirages N_{MC} doit être élevé pour avoir un résultat précis. Cela rend cette méthode très coûteuse en temps de calcul pour des mécanismes très hyperstatiques où la résolution du problème d'optimisation est difficile à obtenir. L'étape d'optimisation est également d'autant plus complexe que les contraintes non linéaires sont linéarisées en un grand nombre de facettes N_d. Avec cette méthode MCO, il n'est pas possible d'avoir une information relative à l'erreur d'approximation due à la linéarisation. C'est pourquoi, dans le cas de l'assemblage, deux procédures itératives sont proposées dans la section 3.4 pour avoir une information sur la qualité du résultat obtenu.

3.2.2 Applications académiques de la méthode MCO

Cette sous-section montre l'application de la méthode MCO sur les deux exemples académiques détaillés dans les annexes B.1 et C.1. Le but est de montrer que cette méthode est très coûteuse en temps de calcul lorsque des faibles probabilités sont recherchées. En effet, les industriels cherchent à atteindre des probabilités de l'ordre de 10^{-6}, le nombre de tirages N_{MC} doit donc dépasser plusieurs dizaines de millions pour garantir une bonne précision du résultat. Le deuxième exemple présente en outre l'impact de la procédure de linéarisation sur la précision des probabilités de défaillance et le temps de calcul.

3.2.2.1 Application analytique

L'application analytique est détaillée dans l'annexe B.1. Les caractéristiques de cette application sont résumées par :

- $\diamond$ $\tilde{\mathbf{g}} \in \mathbb{R}^2$,
- $\diamond$ $\mathbf{X} \in \mathcal{X}^2 \sim \mathcal{N}(\mu_X, \sigma_X)$, 3 jeux de paramètres sont définis pour les moyennes et écart-types des variables aléatoires,
- $\diamond$ 1 condition fonctionnelle,
- $\diamond$ 4 contraintes d'interface linéaires.

L'application ne concerne que la vérification du problème fonctionnelle. La méthode MCO est utilisée pour calculer les probabilités de défaillance fonctionnelle du mécanisme pour les trois jeux de paramètres proposés. Le nombre de tirages N_{MC} est défini de façon à avoir un coefficient de variation inférieur à 5%.

Les résultats sont donnés dans le tableau 3.1. Ils montrent bien l'impact de l'ordre de grandeur de la probabilité sur le temps de calcul. Il faut quelques secondes pour la

probabilité la plus élevée alors qu'il faut plus de six heures de calcul pour la probabilité la plus faible. Sachant que les probabilités recherchées par les industriels sont de l'ordre de 10^{-6}, il est clair que cette méthode n'est pas envisageable sur des problèmes plus complexes.

Paramètres	P_{df}	N_{MC}	$c_{\tilde{P}_{df}}$	Temps de calcul
1	4.23×10^{-2}	1×10^{4}	4.7 %	4 s
2	3.07×10^{-4}	1.5×10^{6}	4.6 %	11 min
3	9.06×10^{-6}	5×10^{7}	4.7 %	6.2 h

Tableau 3.1 – Résultats obtenus avec la méthode MCO sur l'application analytique.

La figure 3.2 montre la répartition des tirages en fonction du résultat obtenu pour le premier jeu de paramètres. Les points bleus représentent le domaine fonctionnel tandis que les points rouges correspondent au domaine non fonctionnel. Sur cette figure la surface d'état-limite, séparant les deux domaines, est une droite continue par morceaux corroborant le fait que c'est un problème d'estimation d'une probabilité système.

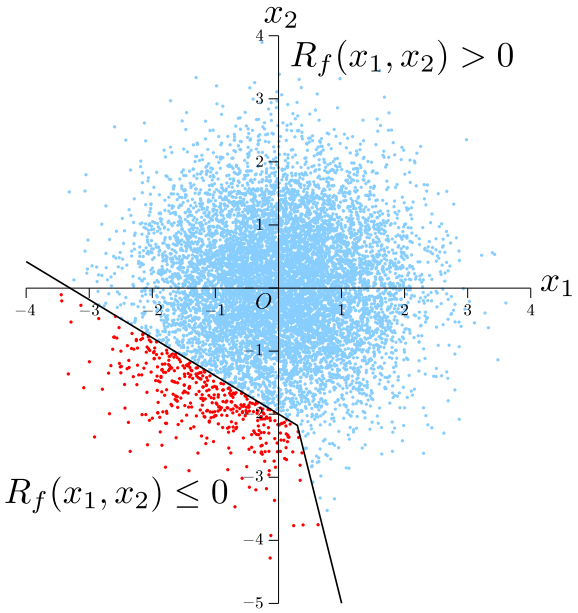


FIGURE 3.2 – Méthode MCO appliquée sur l'application analytique. Les points rouges sont les points non fonctionnels. La surface d'état-limite est clairement définie par morceaux.

3.2.2.2 Application appui plan et deux goupilles : étude de l'impact de la linéarisation

Le deuxième exemple d'application est le mécanisme composé d'un appui plan et de deux goupilles détaillé dans l'annexe C.1. Dans cet exemple, les problèmes d'assemblage et fonctionnel sont étudiés. Les caractéristiques de cette application sont résumées par :

- ◇ $\mathbf{g} \in \mathbb{R}^{17}$,
- ◇ $\mathbf{X} \in \mathcal{X}^{38} \sim \mathcal{N}(\mu_X, \sigma_X)$, 3 jeux de paramètres sont définis pour les moyennes et écart-types des variables aléatoires,
- ◇ 1 condition fonctionnelle,
- ◇ 14 équations de compatibilité,
- ◇ 4 contraintes d'interfaces quadratiques.

Cet exemple présente l'intérêt d'avoir un modèle de comportement avec des contraintes d'interface quadratiques qui sont donc linéarisées suivant la procédure évoquée dans la section 2.3.1. Comme expliqué dans le principe de la méthode MCO, il n'est pas possible de connaitre en avance quelle est la stratégie ni le nombre de linéarisations N_d qui minimisent suffisamment l'erreur d'approximation. C'est pourquoi plusieurs simulations, avec le même germe de tirage des variables aléatoires, sont effectuées afin de voir l'impact des stratégies et du paramètre N_d sur les probabilités de défaillance d'assemblage et fonctionnelle. Plusieurs points sont étudiés :

- ◇ le temps de calcul,
- ◇ l'erreur d'approximation,
- ◇ l'importance de l'ordre de grandeur de la probabilité.

Les trois jeux de paramètres proposés dans l'annexe C.2 sont utilisés pour cette étude mais seule une partie des courbes résultats est présentée dans cette sous-section. Le reste des résultats de l'étude de l'impact de la linéarisation ainsi que les valeurs numériques sont fournis dans l'annexe C.3.

Impact sur le temps de calcul. Le tableau 3.2 et la figure 3.3 montrent l'évolution du temps de calcul pour évaluer la probabilité de défaillance fonctionnelle pour les trois jeux de paramètres en fonction du nombre de linéarisations. Il varie de quelques minutes pour la probabilité la plus élevée à six jours pour la probabilité la plus faible avec un nombre de linéarisations $N_d = 60$. Pour un nombre de linéarisations fixé, le type de stratégie (polygone inscrit, moyen ou circonscrit) n'a pas d'importance sur le temps de calcul. Cependant, le temps requis augmente considérablement pour un grand nombre de linéarisations car le problème d'optimisation sous contraintes à résoudre à chaque itération est plus complexe. Le choix du paramètre N_d n'est donc pas négligeable par rapport au temps de calcul.

Impact sur la précision des probabilités. Il a été choisi de ne montrer que les résultats correspondant au deuxième jeu de paramètres. Les conclusions sont cependant identiques pour les autres jeux de paramètres. Les valeurs des probabilités de défaillance d'assemblage et fonctionnelle en fonction du nombre de linéarisations N_d sont données dans le tableau 3.3. Les résultats sont également présentés dans les deux figures 3.4 et 3.5. Ces figures montrent l'impact de la stratégie choisie et de la valeur de N_d sur la précision des probabilités de défaillance d'assemblage et fonctionnelle.

N_d	$P_{df} \approx 10^{-2}$ Temps (heures)	$P_{df} \approx 10^{-4}$ Temps (heures)	$P_{df} \approx 10^{-6}$ Temps (heures)
4	0.009	0.94	15.6
8	0.013	1.27	21.2
12	0.016	1.63	27.2
20	0.025	2.47	41.2
30	0.037	3.68	61.3
40	0.051	5.04	84.2
50	0.068	6.77	113
60	0.086	8.6	143

Tableau 3.2 – Temps de calcul de la méthode MCO pour les trois jeux de paramètres de l'exemple appui plan et deux goupilles en fonction du nombre de linéarisations N_d.

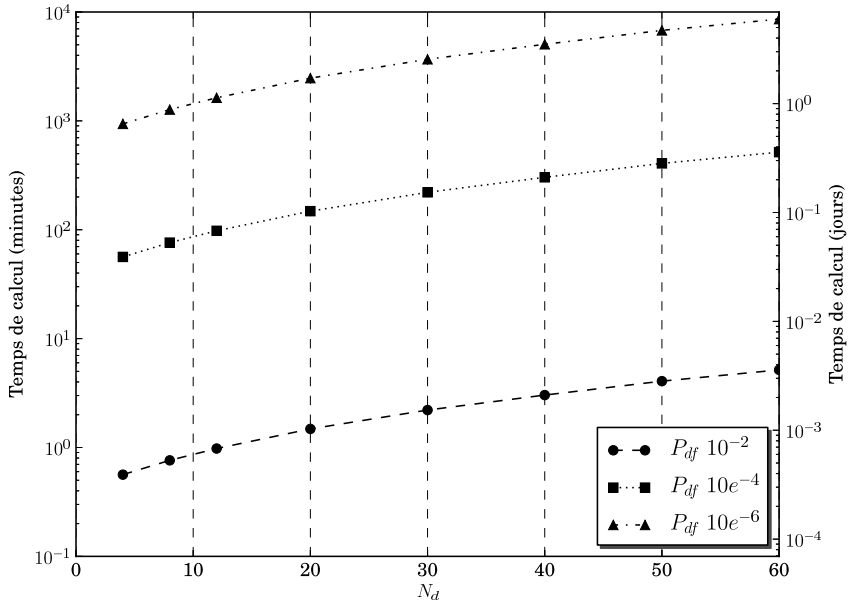


FIGURE 3.3 – Évolution du temps de calcul en fonction du nombre de linéarisations N_d et pour trois ordres de grandeur différents de probabilité.

En fonction de la stratégie de linéarisation, les courbes ont des profils différents qui convergent vers la même valeur. Suivant le problème considéré, une stratégie est préférable car elle fournit des résultats conservatifs (la probabilité est sur-estimée) :

◇ la stratégie du polygone inscrit pour le problème d'assemblage,

◇ la stratégie du polygone circonscrit pour le problème fonctionnel.

De plus, graphiquement on peut observer que la combinaison des stratégies des polygones inscrits et circonscrits permet de définir un intervalle de confiance de la probabilité recherchée (valable pour les deux problèmes). Cette intervalle de confiance est d'autant plus petit que le paramètre N_d est grand. Quant à la stratégie du polygone moyen, les ré-

	P_{da} (x10^{-4})			P_{df} (x10^{-4})		
N_{MC}	$3e6$			$3e6$		
c_{P_d}	$\sim 2\%$			$\sim 4.8\%$		
95% IC	~ 0.65			~ 0.28		
N_d	inscrit	moyen	circonscrit	inscrit	medium	circonscrit
4	34.3	10.2	4.07	0.07	3.48	53.4
8	10.3	7.88	6.24	0.79	1.69	3.6
12	9.04	8.04	7.19	1.05	1.46	2.1
20	8.35	8.04	7.68	1.26	1.42	1.61
30	8.16	8.01	7.87	1.38	1.48	1.57
40	8.1	8	7.9	1.42	1.47	1.52
50	8.08	8.01	7.95	1.42	1.47	1.50
60	8.05	8.01	7.96	1.45	1.47	1.49

Tableau 3.3 – Résultats des probabilités de défaillance d'assemblage et de fonctionnalité pour l'exemple appui plan et deux goupilles avec le deuxième jeu de paramètres.

sultats sont logiquement les plus proches de la valeur de la probabilité après convergence. Cependant, les approximations des probabilités ne sont pas obligatoirement conservatives. Cette stratégie peut être privilégiée pour obtenir une approximation de la probabilité.

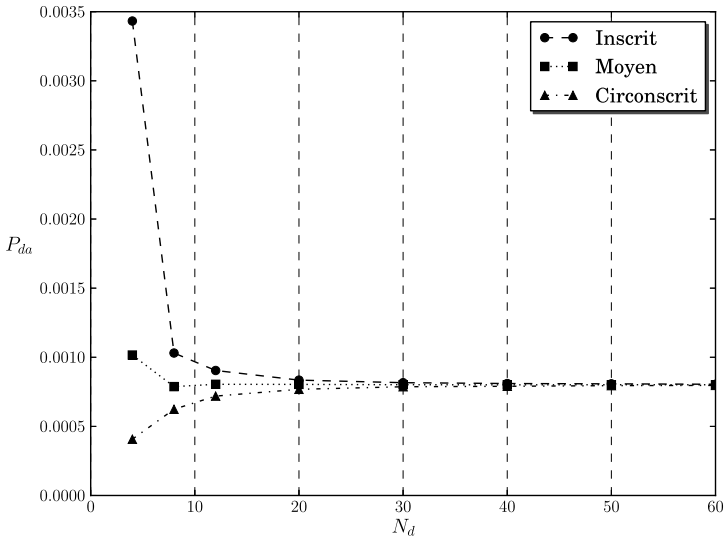


FIGURE 3.4 – Évolution de la probabilité de défaillance d'assemblage en fonction du nombre de linéarisations. Courbes obtenues pour l'exemple académique appui plan et deux goupilles avec le deuxième jeu de paramètres.

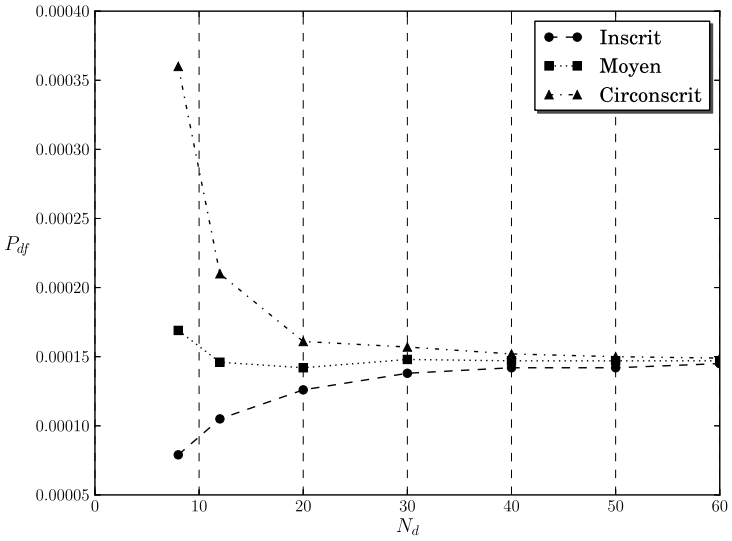


FIGURE 3.5 – Évolution de la probabilité de défaillance fonctionnelle en fonction du nombre de linéarisations. Courbes obtenues pour l'exemple académique appui plan et deux goupilles avec le deuxième jeu de paramètres.

3.2.3 Applicabilité des méthodes probabilistes alternatives

La simulation de Monte Carlo permet d'estimer les probabilités de défaillance recherchées mais c'est la méthode la plus coûteuse comparée à ses variantes ou aux méthodes couplant un méta-modèle avec la simulation de Monte Carlo. L'objet de cette brève sous-section est de savoir s'il est possible de réduire le temps de calcul en utilisant ces autres méthodes pour le calcul des probabilités de défaillance basées sur la résolution du problème d'optimisation. Deux pistes sont possibles :

1. la première porte sur la méthode de simulation : utiliser les variantes de la simulation de Monte Carlo ou la méthode d'approximation FORM.
2. la deuxième porte sur l'algorithme d'optimisation : remplacer l'appel à l'algorithme d'optimisation par un méta-modèle.

Il a été expliqué dans la section 2.4 que les problèmes d'analyse des tolérances des mécanismes hyperstatiques sont en réalité des problèmes d'estimation de probabilités systèmes. Cette spécificité a pour conséquence de définir la surface d'état-limite comme une surface continue par morceaux, comme illustrée par la figure 3.2. Cette particularité rend difficile l'application de méthodes probabilistes alternatives à la simulation de Monte Carlo. En effet, la surface d'état-limite étant définie par morceaux, il n'est pas envisageable d'utiliser la méthode FORM couplée optimisation sauf si un point P^* est prépondérant. L'erreur d'approximation ne sera pas négligeable et les algorithmes de recherche du point de défaillance le plus probable peuvent ne pas converger car il y aura plusieurs points à considérer. De la même manière, la méthode du tirage d'importance sera difficile à appliquer sans connaitre le point où centrer la nouvelle distribution des

variables aléatoires. Enfin, les techniques permettant de coupler la simulation de Monte Carlo avec un méta-modèle permettant de remplacer l'appel à l'algorithme d'optimisation auront de grandes difficultés à construire le méta-modèle d'une fonction de performance système telle qu'écrite sous la forme du problème d'optimisation. Cette difficulté est d'autant plus grande que le problème à traiter est complexe (grande dimension, nombre de discontinuités élevées). Pour pallier ces difficultés, la formulation système a été développée dans le but de pouvoir utiliser une méthode de résolution système beaucoup plus rapide que la méthode MCO.

3.2.4 Synthèse

Les deux exemples académiques présentés montrent que la méthode MCO permet bien de résoudre les deux problèmes d'analyse des tolérances (assemblage et fonctionnelle). Cependant, elle est très coûteuse en temps de calcul. De plus, le fait de linéariser les contraintes quadratiques entraine une source d'approximation supplémentaire. La méthode MCO, seule, n'est pas capable de garantir un niveau de précision suffisant vis-à-vis de cette approximation. C'est pourquoi, pour remédier à ces deux problèmes, une méthode de résolution système pour le problème fonctionnel et des procédures itératives pour traiter le problème d'assemblage sont proposées dans les section 3.3 et 3.4.

3.3 Problème fonctionnel - Résolution de la formulation système

Cette section s'intéresse maintenant au développement d'une méthode pour la résolution du problème fonctionnel écrit sous forme système. L'obtention de la formulation système est expliquée dans la section 2.4. La probabilité de défaillance s'écrit désormais comme une intersection d'événements. Cette probabilité pourrait être calculée en utilisant la simulation de Monte Carlo mais utiliser cette méthode ne serait pas pertinent car le but est d'utiliser une méthode probabiliste plus rapide. Dans la section 1.3, plusieurs méthodes de fiabilité pour des problèmes systèmes ont été présentées. En particulier la méthode FORM système semble la plus appropriée. L'objectif de cette section est de montrer comment cette méthode est appliquée dans le cas présent.

En pratique, avant de faire le calcul de la probabilité, il est nécessaire dans un premier temps de réduire le nombre d'événements de l'intersection, équation (2.42) p. 60, pour gagner en temps de calcul. Cela revient à rechercher les configurations de défaillance dominantes du mécanisme. Or il a été vu dans la section 2.4.1 qu'une configuration correspond à une combinaison particulière de contraintes actives trouvée lors de l'appel à l'algorithme d'optimisation. Il faut donc déterminer les combinaisons de contraintes actives les plus importantes. Ce sont celles qui impactent le plus la probabilité de défaillance. Pour trouver ces combinaisons dominantes, un algorithme de recherche sélectif proposé par Kim et al. [2013] est utilisé, il est présenté dans la sous-section 3.3.1. Ensuite, la sous-section 3.3.2 montre l'application de la méthode FORM système dans le cas de la

résolution du problème fonctionnel écrit sous forme système. Enfin, dans la sous-section 3.3.3, cette méthode de résolution est appliquée sur les exemples académiques déjà étudiés auparavant. Les résultats sont comparés avec ceux obtenus par la méthode MCO.

3.3.1 Recherche des combinaisons de contraintes actives dominantes

Cette sous-section décrit l'algorithme de recherche des combinaisons dominantes, c'est à dire des configurations de défaillance dominantes du mécanisme. Cette étape préliminaire est essentielle avant de pouvoir calculer la probabilité via la méthode FORM système. Elle permet de diminuer le nombre de calculs FORM à réaliser ainsi que la dimension de la fonction de répartition de la loi multi-normale pour le calcul FORM système, voir sous-section 1.3.1.2. Cette diminution permet d'avoir un temps de calcul plus faible comparé à celui requis si toutes les combinaisons admissibles étaient considérées.

La formulation de la probabilité de défaillance fonctionnelle sous forme système s'écrit de la façon suivante (voir sous-section 2.4.3) :

$$P_{df} = \text{Prob}\left(\bigcap_{i=1}^{N_{as}} C_f^{(s_i)}(\mathbf{X}) \leq 0\right) \tag{3.10}$$

Dans cette expression, le nombre d'intersections d'événements est égale à N_{as}. C'est le nombre de combinaisons admissibles satisfaisant les contraintes d'optimisation du problème d'optimisation dual. Ces combinaisons peuvent être trouvées en calculant les valeurs des multiplicateurs de Lagrange dans les N_s cas possibles et en sélectionnant uniquement les cas admissibles. Cette opération peut être effectuée seulement si un petit nombre de cas à tester existe (quelques centaines au maximum). Cependant, pour les mécanismes complexes ayant des contraintes linéarisées, le nombre de cas N_s peut excéder plusieurs dizaines de milliers. De plus, certaines combinaisons admissibles peuvent ne pas avoir d'influence sur la valeur de la probabilité de défaillance. Pour ces deux raisons, trouver et prendre en compte les N_{as} combinaisons admissibles n'est pas envisageable. C'est pourquoi un algorithme de recherche est requis pour sélectionner un nombre N_{ds} de combinaisons de contraintes dominantes parmi les N_{as} admissibles. La probabilité de défaillance est donc approximée :

$$P_{df} \approx \text{Prob}\left(\bigcap_{i=1}^{N_{ds}} C_f^{(s_i)}(\mathbf{X}) \leq 0\right) \tag{3.11}$$

L'algorithme de sélection des combinaisons dominantes utilisé est proposé par Kim et al. [2013]. C'est un algorithme de recherche sélectif basé sur une simulation avec une opération de recherche de type algorithme génétique. Il a été spécifiquement développé pour trouver les modes de défaillance dominants d'une structure parmi un grand nombre de modes possibles. Dans le cas de l'analyse des tolérances, les modes de défaillance correspondent aux configurations du mécanisme menant à la non fonctionnalité de celui-ci. Cela revient à chercher les combinaisons de contraintes actives dans les cas de défaillance.

Kim et al. [2013] partent du principe que dans l'espace standard des variables, les combinaisons de défaillance dominantes sont situées le plus proche de l'origine. C'est pourquoi ils proposent une recherche vers l'extérieur de l'espace standard : partir de points sur une hypersphère proche de l'origine et aller vers des points situés à une distance plus grande. Pour un rayon d'hypersphère donné, plusieurs directions de recherche sont définies pseudo-aléatoirement, voir figure 3.6. Les points menant à une situation de défaillance sont retenus comme chromosomes parents et une opération évolutionnaire est appliquée. Le but de cette opération est de trouver des situations de défaillance menant à des combinaisons de contraintes actives différentes de celles déjà obtenues. L'étape évolutionnaire comprend un croisement des gènes pour la recherche locale et une mutation des gènes pour la recherche globale. Cette étape est répétée tant que des nouvelles combinaisons sont trouvées. Le rayon de l'hypersphère est augmenté itérativement afin de chercher de plus en plus loin dans l'espace standard. L'algorithme s'arrête lorsque le rayon de l'hypersphère est suffisamment grand ou lorsque le nombre de combinaisons dominantes N_{ds} trouvé est suffisamment élevé.

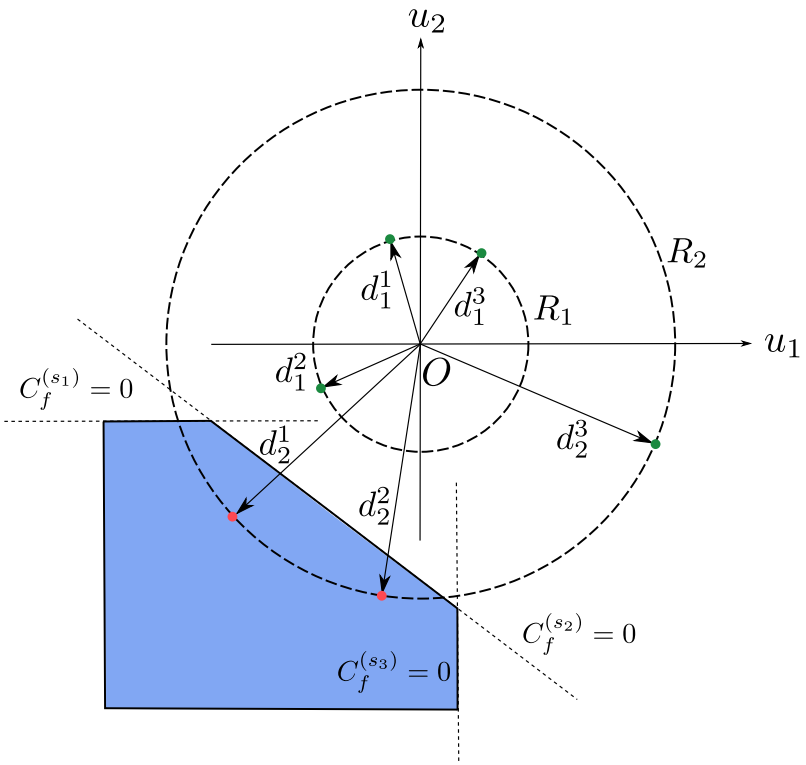


FIGURE 3.6 – Illustration de la recherche des combinaisons de contraintes actives dominantes pour un problème système. Pour chaque rayon d'hypersphère R_i, $i = 1, 2$, donné, trois directions de recherche sont présentées d_i^j, $j = 1, \ldots, 3$. Pour $i = 1$, aucun des trois points ne mène à une situation de défaillance. Pour $i = 2$, les points définis par les directions $j = 1$ et $j = 2$ correspondent à deux situations de défaillance. Les combinaisons de contraintes actives associées à ces situations sont sauvegardées et les points sont retenus pour l'opération évolutionnaire.

3.3.2 Résolution par la méthode FORM système

Une fois les combinaisons dominantes sélectionnées, le nombre d'événements est considérablement réduit, il est possible de calculer la probabilité en appliquant la méthode FORM système, voir section 1.3.1.2. La formulation du problème fonctionnel sous forme système s'écrit de la façon suivante :

$$P_{df} \approx \text{Prob}\left(\bigcap_{i=1}^{N_{ds}} C_f^{(s_i)}(\mathbf{X}) \leq 0\right) \tag{3.12}$$

En appliquant la méthode FORM système, cette probabilité s'exprime alors de la façon suivante :

$$P_{df} \approx \Phi_{N_{ds}}\left(-\boldsymbol{\beta}; [\boldsymbol{\rho}]\right) \tag{3.13}$$

où $\Phi_{N_{ds}}$ est la fonction de répartition de la loi multi-normale, $\beta^{(s_i)}$ est l'indice de fiabilité associé à la condition fonctionnelle $C_f^{(s_i)}$ et $[\boldsymbol{\rho}]$ est la matrice des coefficients de corrélation des états-limites. La sélection des combinaisons dominantes a deux avantages :

- ◇ elle permet de réduire le nombre de calculs FORM à effectuer pour calculer les indices de fiabilité de chaque combinaison,
- ◇ elle permet de diminuer la dimension de la fonction de répartition de la loi multi-normale qui est utilisée pour calculer la probabilité de défaillance. Avoir une plus petite dimension de la fonction de répartition permet un calcul plus rapide et plus précis de la probabilité.

Toutefois, sélectionner un nombre trop faible de combinaisons dominantes peut entrainer une mauvaise approximation de la probabilité. Comme il s'agit du calcul d'une probabilité d'intersection d'événements, un manque de combinaisons dominantes entraine le calcul d'une probabilité qui est sur-estimée. Le résultat reste donc conservatif.

Les étapes de calcul de la probabilité de défaillance par la méthode de résolution système sont résumées dans la figure 3.7.

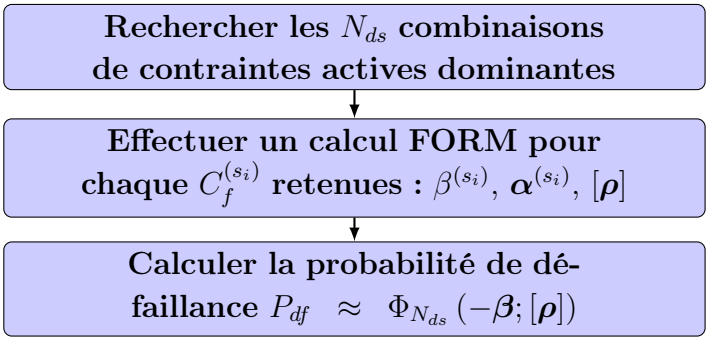


FIGURE 3.7 – Schéma de la procédure de résolution du problème fonctionnel sous forme système.

Le calcul FORM peut être fait analytiquement dans le cas où les écarts géométriques sont des variables aléatoires Gaussiennes. En effet, les état-limites linéaires dans l'espace

physique seront également linéaires dans l'espace standard $\mathcal{U}$. Les indices de fiabilité et cosinus directeurs peuvent donc être calculés de façon analytique. Si les variables ne sont pas Gaussiennes, il est possible d'utiliser les algorithmes HLRF [Rackwitz et Fiessler, 1979] ou iHLRF [Zhang et Kiureghian, 1995] pour déterminer les points $P*$ de chaque combinaison. Cette méthode peut néanmoins montrer ses limites si après la transformation iso-probabiliste, les état-limites deviennent fortement non linéaires. Le calcul de l'intersection peut alors entrainer un résultat trop approximatif.

N.B. : La méthode FORM système pose le même soucis qu'avec la simulation de Monte Carlo lorsque le modèle de comportement contient des contraintes d'interface linéarisées. Il n'est pas possible de connaitre en avance quelle stratégie ni quelle valeur du nombre de linéarisations N_d il faut choisir. Cette difficulté est toutefois moins problématique car les temps de calcul, comme montré dans les illustrations de la sous-section 3.3.3, sont beaucoup moins importants. Il est donc tout à fait envisageable de faire plusieurs calculs de la probabilité de défaillance avec des valeurs de N_d différentes sans que ce soit pénalisant du point de vue du temps de calcul.

3.3.3 Applications de la méthode de résolution système

La méthode FORM système pour résoudre les problèmes fonctionnels est testée sur les deux exemples académiques déjà étudiés dans ce chapitre et présentés dans les annexes B.1 et C.1. Les résultats sont comparés avec ceux obtenus par la méthode MCO.

3.3.3.1 Application analytique

Le premier exemple de problème fonctionnel testé est l'application analytique. Il a également servi d'illustration pour la transformation du problème d'optimisation de la forme primale à la forme duale, voir sous-section 2.4.4. Les caractéristiques de l'application sont résumées ci-dessous :

- $\diamond$ $\tilde{\mathbf{g}} \in \mathbb{R}^2$,
- $\diamond$ $\mathbf{X} \in \mathcal{X}^2 \sim \mathcal{N}(\mu_X, \sigma_X)$, 3 jeux de paramètres sont définis pour les moyennes et écart-types des variables aléatoires dans l'annexe B.2,
- $\diamond$ 1 condition fonctionnelle,
- $\diamond$ 4 contraintes d'interfaces linéaires,
- $\diamond$ $N_s = 6$ combinaisons possibles,
- $\diamond$ $N_{as} = 4$ combinaisons admissibles,
- $\diamond$ $N_{ds} = 2$ combinaisons dominantes.

Les indices de fiabilité et les cosinus directeurs calculés par la méthode FORM pour le premier jeu de paramètres sont montrés dans le tableau 3.3.3.1. La matrice de corrélation obtenue à partir des cosinus directeurs est donnée équation (3.14).

Combinaison défaillante		s_1	s_3
β		0.24	1.71
α	X_1	0.97	0.51
	X_2	0.24	0.86

Tableau 3.4 – Indices de fiabilité et cosinus directeurs obtenus par la méthode FORM pour l'application analytique avec le premier jeu de paramètres.

$$[\boldsymbol{\rho}] = \begin{bmatrix} 1 & 0.707 \\ 0.707 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.14}$$

Les valeurs des probabilités pour les trois jeux de paramètres sont présentées dans le tableau 3.5. Les résultats obtenus avec la méthode MCO sont également reportés dans ce tableau. Les valeurs obtenues avec la méthode FORM système sont quasiment identiques à celles obtenues avec la méthode MCO. Le temps de calcul est, quant à lui, très faible, et reste constant même si une faible probabilité est recherchée. Par ailleurs, il a été montré lors de l'illustration de la transformation de la formulation sous forme système que le nombre de combinaisons admissibles est $N_{as} = 4$ parmi les six combinaisons possibles. Or, grâce à l'algorithme de recherche des combinaisons dominantes, seules deux combinaisons ont été sélectionnées ce qui montre l'intérêt de cet algorithme y compris pour un exemple simple.

	FORM			MCO			
Param.	P_{df}	N_{ds}	Temps	P_{df}	N_{MC}	95%IC	Temps
1	4.12×10^{-2}	2	3 s	4.23×10^{-2}	10^4	0.8×10^{-2}	4 s
2	3.01×10^{-4}	2	3 s	3.07×10^{-4}	1.5×10^6	0.57×10^{-4}	11 min
3	9.03×10^{-6}	2	3 s	9.06×10^{-6}	5×10^7	1.7×10^{-6}	6.2 h

Tableau 3.5 – Résultats obtenus avec la méthode de résolution système pour l'application analytique.

3.3.3.2 Mécanisme appui plan et deux goupilles

La méthode de résolution proposée est très efficace sur l'exemple précédent. Elle est maintenant appliquée, sur le problème fonctionnel uniquement, à l'exemple académique appui plan et deux goupilles, voir annexe C.1. Les caractéristiques de cette application sont résumées ci-dessous :

- $\mathbf{g} \in \mathbb{R}^{17}$,
- $\mathbf{X} \in \mathcal{X}^{38} \sim \mathcal{N}(\mu_X, \sigma_X)$, 3 jeux de paramètres sont définis pour les moyennes et écart-types des variables aléatoires,
- 1 condition fonctionnelle,
- 14 équations de compatibilité,

◇ 4 contraintes d'interfaces quadratiques.

Il a été choisi de comparer les résultats avec ceux obtenus par la méthode MCO pour un nombre de linéarisations $N_d = 40$ et avec la stratégie circonscrite car ces résultats sont conservatifs. De la même manière que précédemment, les trois jeux de paramètres sont utilisés afin d'avoir trois ordres de grandeur de la probabilité de défaillance fonctionnelle. Les nombres de tirages pour la méthode MCO sont respectivement $N_{MC} = \{3 \times 10^4, 3 \times 10^6, 5 \times 10^7\}$ pour les paramètres 1, 2 et 3. Les résultats sont présentés dans le tableau 3.6. Le nombre de combinaisons dominantes maximum à sélectionner est fixé à trois valeurs différentes : $N_{ds} = \{5, 100, 200\}$, sachant que le nombre de combinaisons possibles est $N_s = C_{160}^3 = 669920$.

	FORM				MCO		
Param.	P_{df}	N_{ds}	$N_{optim.}$	Temps	P_{df}	95%IC	Temps
1	2.29×10^{-2}	5	1130	22 s	1.79×10^{-2}	0.31×10^{-2}	3 min
	1.82×10^{-2}	100	3437	66 s			
	1.82×10^{-2}	200	6089	129 s			
2	2.82×10^{-4}	5	3138	23 s	1.52×10^{-4}	0.28×10^{-4}	5 h
	1.56×10^{-4}	100	3718	67 s			
	1.54×10^{-4}	200	5590	135 s			
3	16×10^{-6}	5	3973	26 s	9.4×10^{-6}	1.7×10^{-6}	3.5 j
	9.3×10^{-6}	100	5271	73 s			
	9.1×10^{-6}	200	6670	141 s			

Tableau 3.6 – Résultats obtenus avec la méthode de résolution système pour l'exemple académique appui plan et deux goupilles.

D'après les résultats, plusieurs observations peuvent être faites :

◇ La précision des probabilités est très bonne y compris pour estimer des faibles probabilités. Attention toutefois, la précision se dégrade dans les cas où le nombre de combinaisons dominantes sélectionnées est trop faible. Cependant, comme expliqué dans la méthode, la probabilité calculée est sur-estimée. Le résultat est donc conservatif. Dans le cas du troisième paramètre, les résultats donnés par la méthode FORM ne semblent pas conservatif vis-à-vis de celui obtenu avec la méthode MCO mais ils sont contenus dans l'intervalle de confiance à 95% de Monte Carlo.

◇ Les temps de calcul sont considérablement réduits par rapport à la méthode MCO, surtout pour le troisième jeu de paramètres qui engendre la plus faible probabilité. De plus, les temps de calcul sont constants, de l'ordre de la minute, quel que soit l'ordre de grandeur de la probabilité. La variation de temps est liée uniquement au nombre de combinaisons dominantes sélectionnées. En effet, cela entraine une augmentation du nombre de calculs FORM et augmente le temps de calcul de la fonction de répartition de la loi multi-normale $\Phi_{N_{ds}}$.

◇ Pour la recherche des combinaisons de contraintes actives, il faut faire appel à l'algorithme d'optimisation pour résoudre le problème d'optimisation initial. Le

nombre d'appels à l'algorithme d'optimisation est inférieur à 10000 quelle que soit la probabilité recherchée. C'est cette capacité qui permet à la méthode d'avoir un temps de calcul constant. C'est un avantage par rapport à la méthode MCO où il est nécessaire d'augmenter le nombre de tirages pour garder la même précision.

3.3.4 Synthèse

La méthode de résolution FORM système couplée avec la recherche des combinaisons dominantes est très efficace. Elle est capable de calculer des probabilités très faibles avec précision. De plus, pour atteindre ces faibles probabilités, elle ne souffre pas d'une augmentation considérable de son temps de calcul. Le temps de calcul reste constant car le nombre d'optimisations requis est quasiment identique quel que soit l'ordre de grandeur de la probabilité. Cependant, cette méthode peut montrer ses limites si les surfaces d'état-limites dans l'espace standard deviennent fortement non-linéaires. Le calcul de l'intersection peut entrainer des approximations sur le résultat final.

3.4 Problème d'assemblage - Procédures adaptatives basées sur la méthode MCO

Cette section est consacrée au développement des procédures itératives basées sur la méthode MCO pour traiter les problèmes d'assemblage. Le problème fonctionnel ne sera pas évoqué ici.

Afin de remédier à des potentiels problèmes de convergence du calcul lors de l'appel à l'algorithme d'optimisation, les contraintes non linéaires du modèle de comportement sont linéarisées. Plusieurs stratégies de linéarisation sont envisagées, elles sont expliquées dans la sous-section 2.3.1. L'application de cette procédure permet d'utiliser un algorithme de résolution dédié à l'optimisation de problèmes linéaires. Cependant, la procédure implique de choisir la stratégie (polygone inscrit, moyen, circonscrit) ainsi que le degré de linéarisation, géré via le paramètre N_d.

La méthode MCO telle que proposée ne permet pas de déterminer quelle est la meilleure stratégie à utiliser avec quelle valeur de N_d afin d'avoir un résultat précis de la probabilité. Aucune information ne peut être obtenue sur l'erreur d'approximation due à la linéarisation avec une seule simulation. Il faut donc prévoir au minimum deux simulations avec des choix de paramètres différents pour confirmer ou infirmer le résultat précédent.

De plus, appliquer la procédure de linéarisation avec une valeur de N_d élevée complexifie le modèle de comportement en ajoutant un nombre conséquent de contraintes d'optimisation. Bien que cela permette de réduire l'erreur d'approximation, ce choix entraine une augmentation du temps de convergence de l'algorithme d'optimisation qui est d'autant plus problématique à cause du couplage avec la simulation de Monte Carlo. Il est donc nécessaire de trouver un compromis entre le degré de linéarisation et le temps de calcul ce qui n'est pas envisageable avec la méthode MCO directement.

Les procédures proposées dans cette section sont dédiées à la résolution du problème d'assemblage uniquement. Elles ont pour but de s'affranchir de la stratégie de linéarisation et du choix du nombre de linéarisations N_d. Elles sont basées sur une particularité du problème d'assemblage qui est expliquée dans la sous-section 3.4.1. La première procédure, appelée EBS et présentée dans la sous-section 3.4.2, a pour but d'estimer une borne supérieure de la vraie probabilité. La valeur de la borne évolue itérativement afin de diminuer l'écart avec la vraie probabilité. Cette procédure permet de calculer un résultat conservatif précis quel que soit l'ordre de grandeur de la probabilité. La deuxième procédure, appelée EIC et présentée dans la sous-section 3.4.3, permet de gérer l'erreur d'approximation de la probabilité en calculant un intervalle de confiance encadrant la vraie probabilité. Les deux procédures sont appliquées sur l'exemple académique appui plan et deux goupilles dans la sous-section 3.4.4. Les résultats sont comparés avec ceux obtenus par la méthode MCO.

3.4.1 Propriétés du problème d'assemblage

Pour rappel, la procédure de linéarisation transforme la contrainte réelle en un polygone dont le nombre de facettes est déterminé par le paramètre N_d. Les stratégies envisagées impliquent de définir des polygones inscrits ou circonscrits au cercle ou encore de définir un polygone qui est la moyenne des deux premiers. Les procédures définies dans cette section se fondent sur deux propriétés relatives aux stratégies des polygones inscrits et circonscrits.

La première caractéristique concerne la stratégie du polygone inscrit, elle est définie dans la proposition 3.4.1 et est illustrée par la figure 3.8.

Proposition 3.4.1 *Supposons que la stratégie du polygone inscrit soit choisie avec un nombre de linéarisations fixé à $N_d = N_{d1}$ et si pour un vecteur de réalisations $\mathbf{x}$ le mécanisme est considéré montable alors il sera toujours considéré montable avec la même stratégie pour un nombre de linéarisation $N_d = N_{d2} > N_{d1}$, à condition que les sommets des deux polygones coïncident.*

La deuxième propriété est liée à la stratégie circonscrite, elle est définie dans la proposition 3.4.2 et est illustrée dans la figure 3.9

Proposition 3.4.2 *Supposons que la stratégie du polygone circonscrit soit choisie avec un nombre de linéarisations fixé à $N_d = N_{d1}$ et si pour un vecteur de réalisations $\mathbf{x}$ le mécanisme est considéré non montable alors il sera toujours considéré non montable avec la même stratégie pour un nombre de linéarisations $N_d = N_{d2} > N_{d1}$, à condition que les côtés des deux polygones coïncident.*

En combinant les deux stratégies des polygones inscrits et circonscrits pour un même nombre de linéarisations, il est possible d'en déduire une zone d'incertitude. L'incertitude est relative à la classification des points selon s'ils sont toujours montables ou non avec un nombre de linéarisations plus grand. Cette zone se situe à l'extérieur du polygone inscrit et à l'intérieur du polygone circonscrit, voir figure 3.10.

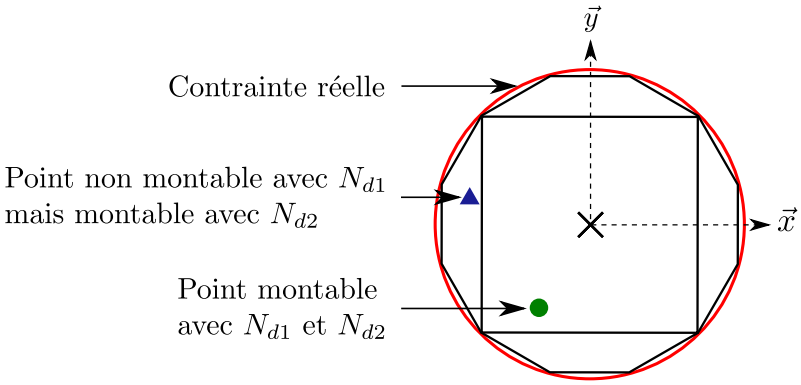


FIGURE 3.8 – Deux procédures de linéarisation basées sur la stratégie inscrite avec $N_{d1} = 4$ et $N_{d2} = 12$. Le point à l'intérieur du polygone à 4 facettes (rond vert) est également à l'intérieur du polygone à 12 facettes tandis que l'inverse n'est pas forcément vrai à l'image du point situé à l'extérieur du premier polygone mais à l'intérieur du deuxième (triangle bleu).

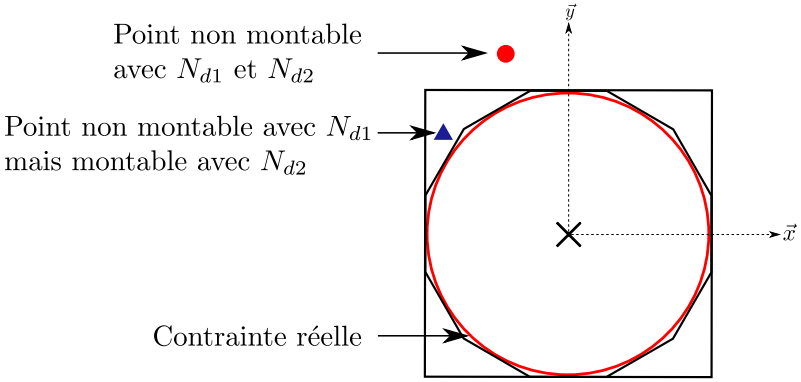


FIGURE 3.9 – Deux procédures de linéarisation basées sur la stratégie circonscrite avec $N_{d1} = 4$ et $N_{d2} = 12$. Le point à l'extérieur du polygone à 4 facettes (rond rouge) est également à l'extérieur du polygone à 12 facettes tandis que l'inverse n'est pas forcément vrai comme le montre le point situé à l'intérieur du premier polygone mais à l'extérieur du deuxième (triangle bleu).

En se basant sur ces deux propriétés, l'objectif des deux procédures itératives est de faire une simulation de Monte Carlo couplée optimisation complète avec une stratégie itérative donnant des résultats approximatifs (N_d petit) puis ensuite de réévaluer uniquement les points dont la classification n'est pas certaine pour affiner le résultat de la probabilité. Faire varier la valeur N_d permet d'obtenir plusieurs modèles de comportement avec des niveaux de confiance différents.

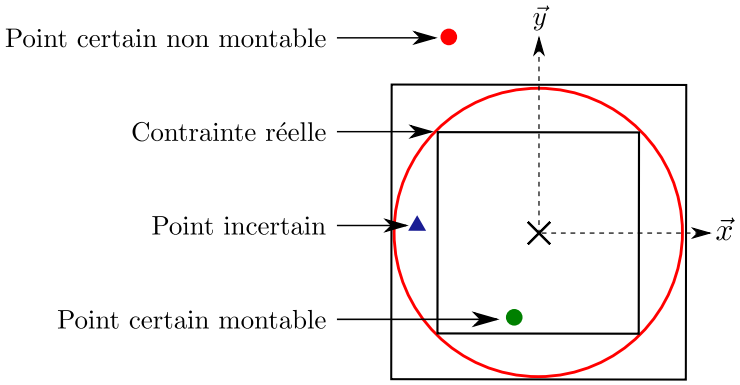


FIGURE 3.10 – Deux procédures de linéarisation avec les stratégies inscrites et circonscrites avec $N_{d1} = 4$. Les points à l'intérieur du polygone inscrit (rond vert) et à l'extérieur du polygone circonscrit (rond rouge) sont bien classés même si le nombre de linéarisations N_d augmente. Par contre le point entre les deux polygones (triangle bleu) est incertain.

3.4.2 Procédure EBS - Estimation d'une Borne Supérieure de P_{da}

La première procédure proposée se base uniquement sur la première proposition 3.4.1, axée sur la stratégie du polygone inscrit. Choisir cette stratégie permet de déterminer une borne supérieure de la probabilité de défaillance d'assemblage P_{da} recherchée et ainsi avoir un résultat conservatif. En effet, dans ce cas, des réalisations $\mathbf{x}$ ne sont pas considérées montables alors qu'elles le sont en réalité, la probabilité de défaillance d'assemblage est donc surestimée.

L'objectif de la procédure EBS est de réaliser une simulation de Monte Carlo couplée optimisation avec la stratégie du polygone inscrit et un faible nombre de linéarisations. Les réalisations jugées non montables sont retenues puis réévaluées avec la même stratégie mais avec un nombre de linéarisations plus élevé. Cette opération est réitérée jusqu'à convergence de la probabilité. Ainsi, l'erreur d'approximation sera réduite itérativement et la probabilité estimée sera toujours conservative. Les étapes de la procédure pour résoudre le problème d'assemblage sont présentées dans la figure 3.11.

1. **Appliquer la méthode MCO** avec une procédure de linéarisation type inscrit et un faible nombre de linéarisations, *e.g.* $N_d^{(0)} = 4$. Une probabilité de défaillance conservative peut être estimée mais l'erreur d'approximation est élevée car N_d est petit. Cependant, comme N_d est petit, la complexité du modèle de comportement est minimisée donc le temps de calcul pour résoudre le problème d'optimisation est réduit.

2. **Stocker les points x non montables.** Les réalisations des variables aléatoires qui ont conduit à un résultat non montable sont sauvegardées dans un ensemble $\mathcal{D}_{nm}^{(0)}$ pour pouvoir être réévaluées ultérieurement et obtenir une classification plus précise.

3. **Démarrer une boucle d'amélioration de la classification.** Définir l'indice

d'itération $k = 1$.

(a) **Augmenter le nombre de linéarisations.** D'après la façon de linéariser les contraintes quadratiques, expliquée section 2.3.1, pour que les sommets coïncident, il faut $N_d^{(k)} = 3N_d^{(k-1)}$.

(b) **Réévaluer les points stockées :** consiste à faire une nouvelle évaluation via l'algorithme d'optimisation des points non montables de la simulation précédente $\mathcal{D}_{nm}^{(k-1)}$ en gardant toujours la procédure de linéarisation type inscrit. Une nouvelle probabilité de défaillance peut être estimée. Elle est toujours conservative et présente une erreur d'approximation plus faible car $N_d^{(k)} > N_d^{(k-1)}$.

(c) **Stocker les points x non montables.** Cette étape consiste à mettre à jour les réalisations des variables aléatoires considérées comme non montables dans l'ensemble $\mathcal{D}_{nm}^{(k)}$.

(d) **Calculer l'écart relatif.** L'écart relatif entre deux probabilités de défaillance à deux itérations successives est calculé :

$$e = \frac{\left| P_{da}^{(k-1)} - P_{da}^{(k)} \right|}{P_{da}^{(k)}}$$

Un écart relatif faible indique que la précision sur la probabilité est bonne. A noter qu'ici $P_{da}^{(k-1)}$ est toujours supérieure à $P_{da}^{(k)}$ donc les valeurs absolues ne sont pas nécessaires.

(e) **Tester le critère d'arrêt.** La condition d'arrêt s'écrit $e < e_{max}$ où e_{max} est une valeur à fixée par l'utilisateur, *e.g.* 1%. Lorsque l'écart relatif e devance e_{max} alors la boucle s'arrête, sinon la procédure repart à l'étape 3.(a) avec $k = k + 1$.

4. **Fin.** Une fois la procédure achevée, une probabilité de défaillance est fournie. Il est alors possible de calculer le coefficient de variation et/ou l'intervalle de confiance de Monte Carlo associé à cette probabilité.

N.B. : Une fois la procédure arrêtée, il est possible de déterminer la valeur de la probabilité de défaillance d'assemblage avec la stratégie circonscrite. Il suffit de réévaluer les points sauvegardés avec la stratégie circonscrite et le nombre de linéarisations en cours $N_d^{(k)}$.

3.4.3 Procédure EIC - Estimation d'un Intervalle de Confiance de P_{da}

Cette deuxième procédure tire partie des deux propositions 3.4.1 et 3.4.2. Le but est de déterminer, pour un nombre de linéarisations donné, un intervalle de confiance encadrant la vraie probabilité. Les bornes inférieures et supérieures de l'intervalle correspondent respectivement aux probabilités de défaillance estimées avec les stratégies circonscrites et inscrites. Comme montré dans la figure 3.10, la classification d'un certain nombre de

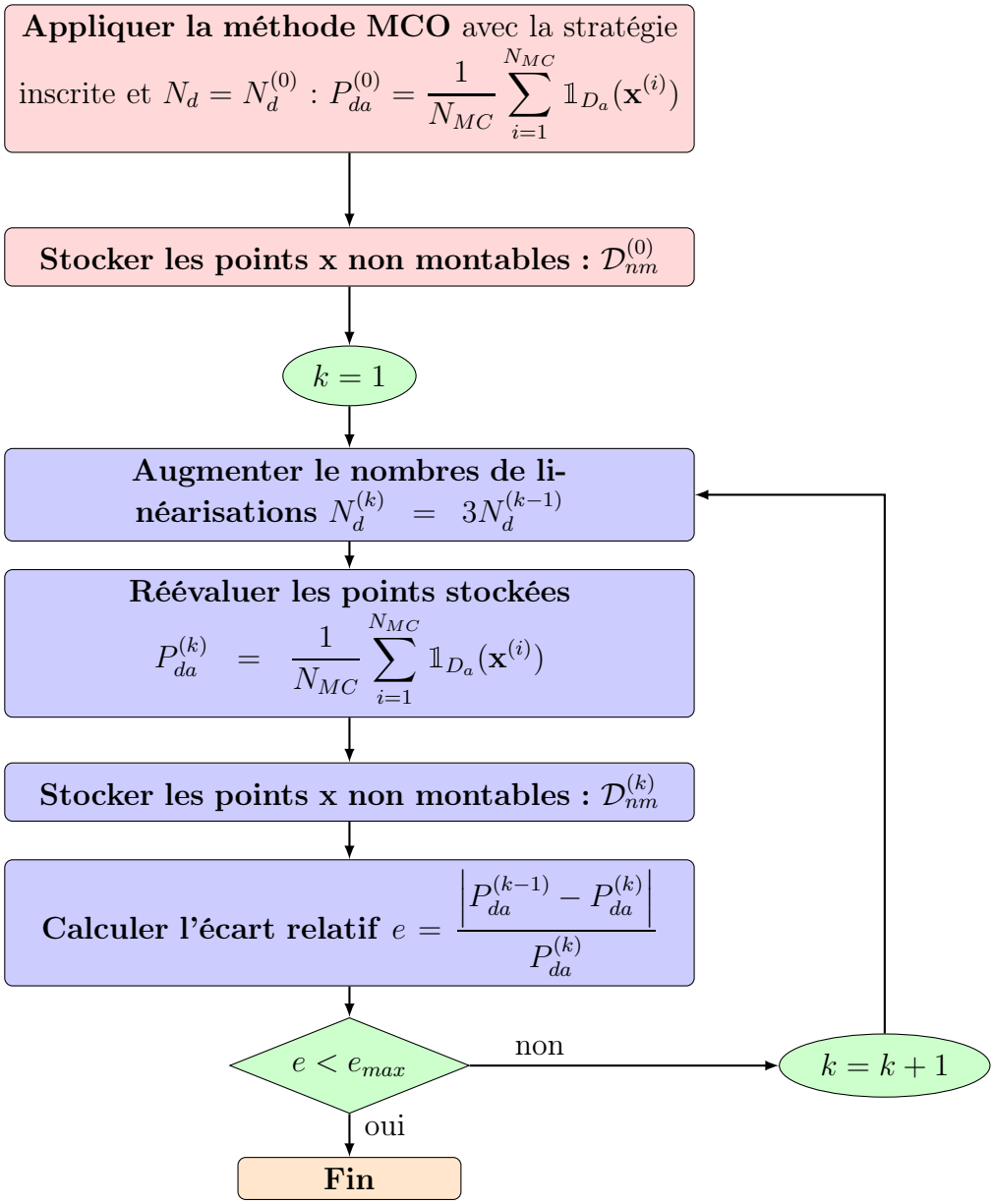


FIGURE 3.11 – Procédure de calcul EBS pour l'estimation d'une borne supérieure de la probabilité de défaillance d'assemblage basée sur la stratégie du polygone inscrit.

points $\mathbf{x}$ est considérée incertaine. La taille de l'intervalle de confiance est directement liée au nombre de points incertains. Il suffit alors d'augmenter la valeur du nombre de linéarisations et de réévaluer ces points pour améliorer leur classification. Ainsi, de nouvelles probabilités de défaillance peuvent être estimées pour chaque stratégie et réduire la taille de l'intervalle de confiance encadrant la probabilité recherchée. Cette opération est répétée jusqu'à avoir un intervalle suffisamment petit. La procédure est illustrée dans la figure 3.12 et les étapes sont :

1. **Définir une population $\mathcal{P}_{MC}$ de Monte Carlo initiale.** Un ensemble de réalisations $\{\mathbf{x}^{(j)} = \{x_1^{(j)}, \ldots, x_n^{(j)}\}^t, j = 1, \ldots, N_{MC}\}$ est défini afin d'être classées en fonction de leur montabilité.

2. **Définir le nombre de linéarisations initial.** Il faut choisir un petit nombre de linéarisations, *e.g.* $N_d^{(0)} = 4$.
3. **Démarrer une boucle de réduction de l'intervalle de confiance.** L'indice d'itération est $k = 1$.
   (a) **Évaluation avec le polygone inscrit.** Il s'agit de vérifier la montabilité de la population $\mathcal{P}_{MC}$ en utilisant la stratégie du polygone inscrite. La probabilité de défaillance d'assemblage inscrit $P_{dai}^{(k)}$ est estimée.
   (b) **Mettre à jour la population $\mathcal{P}_{MC}$.** Les réalisations considérées montables avec la stratégie du polygone inscrit sont éliminées.
   (c) **Évaluation avec le polygone circonscrit.** Il s'agit d'évaluer si la population $\mathcal{P}_{MC}$ mise à jour est montable en utilisant la stratégie du polygone circonscrit. La probabilité de défaillance d'assemblage circonscrite $P_{dac}^{(k)}$ est estimée.
   (d) **Mettre à jour la population $\mathcal{P}_{MC}$.** Les réalisations considérées non montables avec la stratégie du polygone circonscrit sont éliminées. Les points restants correspondent aux points incertains.
   (e) **Calculer la taille de l'intervalle de confiance relatif.** Les bornes de l'intervalle de confiance sont les deux probabilités précédemment calculées. L'expression de l'écart relatif de l'intervalle de confiance est :
   $$e_{IC} = \frac{P_{dai}^{(k)} - P_{dac}^{(k)}}{P_{dai}^{(k)}}$$
   (f) **Tester le critère d'arrêt :** consiste à vérifier si la condition d'arrêt est respectée $e_{IC} < e_{max}$ où e_{max} est une valeur fixée par l'utilisateur, *e.g.* $e_{max} = 5\%$. Si la condition d'arrêt est respectée alors la procédure s'arrête, sinon la procédure repart à l'étape 3.(a) avec $N_d^{(k+1)} = 3N_d^{(k)}$.
4. **Fin.** Une fois la procédure achevée, deux probabilités de défaillance sont proposées encadrant la probabilité de défaillance recherchée : $P_{da} \in [P_{dac}; P_{dai}]$.

N.B. : Il est possible d'améliorer la précision de l'intervalle de confiance en incorporant le coefficient de variation de Monte Carlo sur chaque probabilité. Les bornes prenant en compte l'intervalle de confiance à 95% des probabilités s'écrivent alors ainsi :

$$P_{da} \in [P_{dac} - 1.96 P_{dac} c_{\tilde{P}_{dac}}; P_{dai} + 1.96 P_{dai} c_{\tilde{P}_{dai}}] \tag{3.15}$$

3.4.4 Application des procédure EBS et EIC

Les deux procédures sont appliquées dans cette partie sur le problème d'assemblage de l'exemple académique composé de l'appui plan et deux goupilles, voir l'annexe C.1. Cet exemple possède quatre contraintes quadratiques traitées avec les procédures décrites. Seuls les résultats obtenus avec le deuxième jeu de paramètres sont présentés dans cette

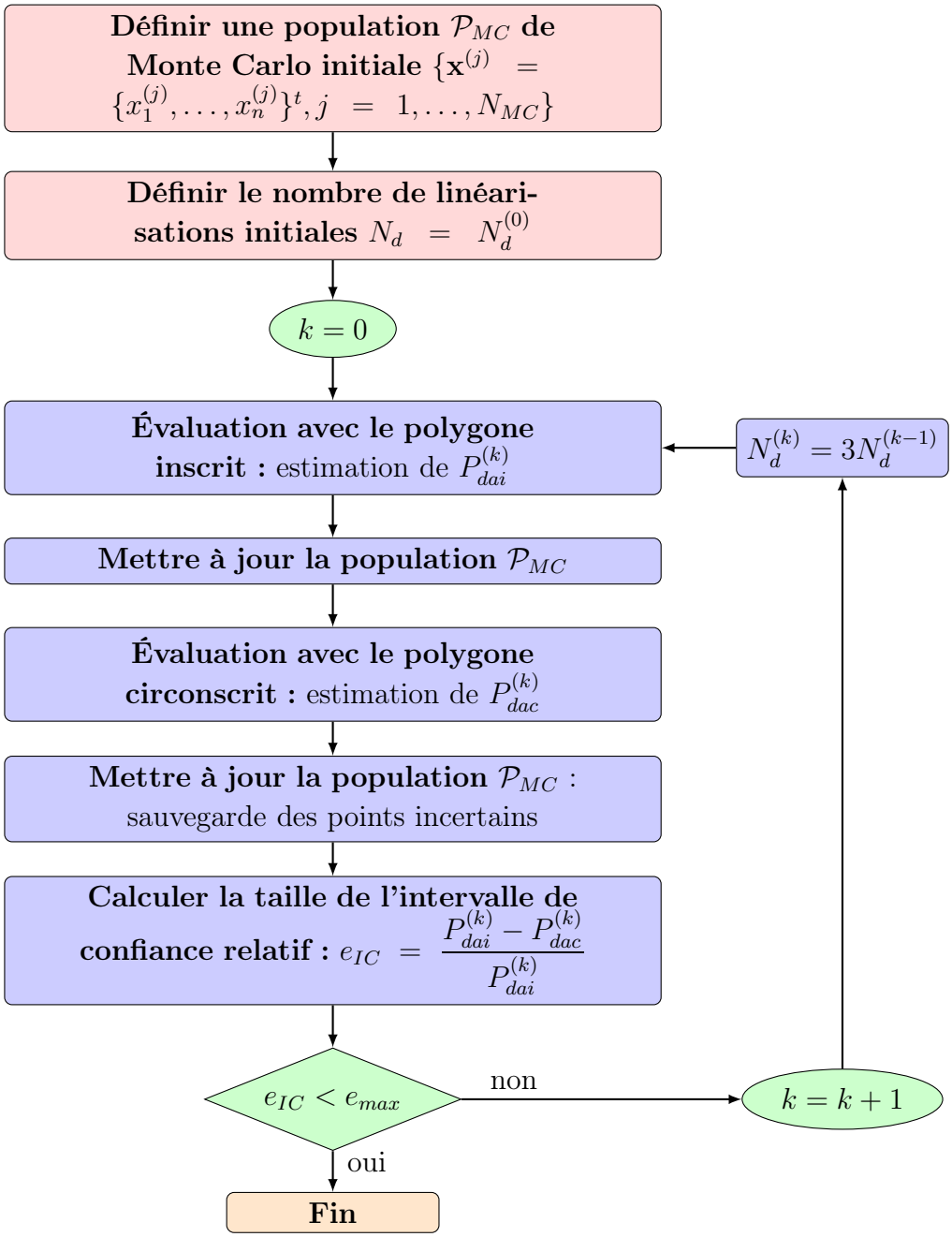


FIGURE 3.12 – Procédure de calcul EIC pour l'estimation d'un intervalle de confiance encadrant la probabilité de défaillance d'assemblage basée sur les stratégies des polygones inscrits et circonscrits.

section, voir tableau 3.7. L'ensemble des résultats est donné dans l'annexe C.3. Les résultats sont comparés avec ceux obtenus avec la méthode MCO pour $N_{MC} = 3 \times 10^6$. En particulier, le temps de calcul requis pour avoir une précision équivalente est observé.

D'après le tableau 3.7, les procédures s'arrêtent après quatre ou cinq itérations. Le nombre de linéarisations augmente très rapidement donc la classification des points est très bonne après quelques itérations seulement. On peut remarquer que le temps de calcul requis est faible comparé au temps de calcul nécessaire pour la méthode MCO avec

Méthode	$P_{dac} \times 10^{-4}$	$P_{dai} \times 10^{-4}$	N_d (itérations)	Temps
MCO	4.07	34.3	4	2×56 min
MCO	7.96	8.05	60	2×303 min
EBS	-	7.96	324 (5)	64 min
EIC	7.95	7.97	108 (4)	57 min

Tableau 3.7 – Comparaison des résultats obtenus avec les procédures itératives EBS et EIC et la méthode MCO pour le problème d'assemblage de l'exemple académique appui plan et deux goupilles (deuxième jeu de paramètres). La méthode MCO ne permet de calculer qu'une probabilité à la fois, c'est pourquoi le temps de calcul est le double.

$N_d = 60$. La précision sur le résultat est pourtant meilleure car le nombre de linéarisations final est supérieur à 60. Le temps de calcul est légèrement supérieur à celui requis pour une seule simulation avec la méthode MCO réalisée avec un nombre de linéarisations égal à $N_d^{(0)}$. Cette observation est logique car il est nécessaire dans un premier temps de faire une simulation de Monte Carlo complète avec ce nombre de linéarisations. Ensuite le nombre de points incertains à réévaluer est beaucoup plus faible et il diminue itérativement. Ainsi, lorsque le nombre de linéarisations N_d est le plus grand, le nombre de points à classer est très petit, comme montré dans le tableau 3.8.

Itération	N_d	$N_{optim.}$ EBS	$N_{optim.}$ EIC	
			Strat. inscrite	Strat. circonscrite
1	4	3×10^6	3×10^6	10316
2	12	10227	9086	1476
3	36	2721	552	264
4	108	2430	60	34
5	324	2392		
Total (hors initiale)		17770	21788	

Tableau 3.8 – Nombre d'optimisations requis à chaque itération pour les procédures EBS et EIC. Dans le cas de EIC, le nombre d'appels est partagé en deux. Le premier nombre correspond aux évaluations avec la stratégie inscrite et le deuxième avec la stratégie circonscrite.

Les résultats dans le tableau 3.8 montrent le nombre d'appels à l'algorithme d'optimisation en fonction du nombre de linéarisations appliqué. Pour la procédure EBS, la première étape consiste en une simulation complète, soit 3×10^6 calcul. Ensuite, à chaque itération, le nombre d'appels à l'algorithme d'optimisation diminue car seuls les points non montables sont réévalués. Pour la procédure EIC, le nombre d'appels à l'algorithme d'optimisation pour un nombre de linéarisations donné correspond au nombre d'optimisations effectuées avec la stratégie inscrite plus les optimisations effectuées avec la stratégie circonscrite. Initialement à $N_d = 4$, la simulation est complète donc 3×10^6 calculs sont effectués avec la stratégie inscrite puis les points non montables (10316) sont réévalués avec la stratégie circonscrite. Au total, $3 \times 10^6 + 10316$ appels à l'algorithme

d'optimisation pour $N_d = 4$ sont effectués. A l'étape suivante pour $N_d = 12$, les points incertains (9086) sont réévalués avec la stratégie inscrite et les points non montables parmi les incertains (1476) sont réévalués avec la stratégie circonscrite, et ainsi de suite. Comme pour la première procédure, le nombre d'appels à l'algorithme d'optimisation diminue à chaque itération.

Des observations sont possibles d'après le tableau 3.8 :

- ◇ Pour les deux procédures, les nombres d'appels à l'algorithme d'optimisation avec les modèles les plus complexes, pour $N_d = 108$ et $N_d = 324$, sont les plus faibles. C'est pourquoi le temps de calcul est peu augmenté par rapport à celui requis avec la méthode MCO avec le nombre de linéarisations initial.
- ◇ Le nombre total d'optimisations supplémentaires à la simulation initiale pour la procédure EIC est plus grand que pour la procédure EBS, pourtant la procédure EIC est plus rapide (57 min contre 64 min, voir tableau 3.7). De plus, le nombre d'optimisations avec le modèle le plus complexe est plus faible pour la procédure EIC que EBS. Il est donc plus important de réduire le nombre d'appels au modèle le plus complexe car c'est le plus coûteux en temps de calcul. C'est pourquoi la procédure EIC est légèrement plus rapide.

3.4.5 Synthèse

L'objectif de cette section était de développer une méthode capable de déterminer précisément et le plus rapidement possible la probabilité de défaillance d'assemblage lorsque le mécanisme nécessite l'application de la procédure de linéarisation. Pour cela, deux procédures sont proposées, il s'agit de deux approches à multi-niveaux de fidélité des modèles. Elles permettent toutes les deux de calculer la probabilité de défaillance précisément sans avoir à se soucier de la stratégie à employer ni du nombre de linéarisations à fixer. De plus, le temps de calcul est réduit. Il correspond environ au temps de calcul nécessaire avec la méthode MCO réalisée avec le modèle le plus simple et le plus approximatif.

En pratique, la procédure EIC est la procédure la plus efficace. En effet, bien que le nombre total d'appels à l'algorithme d'optimisation soit plus important qu'avec la procédure EBS, le nombre d'appels à l'algorithme d'optimisation pour les modèles complexes est plus faible pour la procédure EIC. Cela permet à la procédure EIC de converger plus rapidement. Elle permet en outre d'obtenir la même estimation de la borne supérieure conservative de la probabilité fourni par la procédure EBS.

3.5 Conclusion

Dans ce chapitre ont été présentées les méthodes de résolution pour calculer les probabilités de défaillance relatives aux problèmes d'assemblage et fonctionnel. Les méthodes sont basées sur deux principales techniques : la simulation de Monte Carlo couplée optimisation et la méthode FORM système.

La première méthode, appelée MCO, consiste à réaliser une simulation de Monte Carlo couplée avec un algorithme d'optimisation linéaire. Bien que cette méthode permette de traiter les problèmes d'analyse des tolérances d'assemblage et fonctionnel, elle est très limitée lorsqu'il faut étudier des mécanismes dont l'appel à l'algorithme d'optimisation est coûteux. Le temps de calcul devient prohibitif, il n'est plus envisageable d'utiliser cette méthode qui peut nécessiter plusieurs jours de calculs.

Le modèle de comportement des mécanismes est simplifié de part l'application de la procédure de linéarisation. Cette étape entraine une approximation de l'estimation des probabilités de défaillance. La méthode MCO n'est pas capable de fournir une information sur la qualité de l'estimation ou sur l'erreur d'approximation. Il a été montré dans ce chapitre que cette procédure de linéarisation a un réel impact sur la précision de la probabilité. Elle impacte également le temps de calcul qui croit rapidement lorsque le nombre de linéarisations (N_d) augmente. Le choix de la stratégie de linéarisation n'est donc pas anodin.

Pour pallier ce problème de choix de stratégie de linéarisation, deux procédures itératives, appelées EBS et EIC, basées sur la méthode MCO ont été proposées pour traiter le problème d'assemblage uniquement. Elles permettent de s'affranchir du choix de la stratégie et du nombre de linéarisations. Les procédures sont capables de fournir une probabilité de défaillance précise avec un temps de calcul réduit. La procédure EBS fournit un résultat conservatif en estimant une borne supérieure de la vraie probabilité. La procédure EIC estime un intervalle de confiance encadrant la vraie probabilité. Le temps de calcul correspond environ au temps requis pour appliquer la méthode MCO avec le modèle le plus approximatif (N_d le plus faible). En pratique, la procédure EIC est préférée car elle converge plus rapidement tout en fournissant également la borne supérieure conservative.

Dans le cas du problème fonctionnel, ces deux procédures ne peuvent pas être utilisées. Cependant, grâce à la formulation système développée au chapitre précédent, il est possible d'appliquer une méthode de fiabilité système. Dans cette optique, la méthode FORM système est utilisée. Une étape préliminaire permet de réduire le nombre d'événements de l'intersection en choisissant uniquement les configurations de défaillance dominantes du mécanisme. Ensuite la méthode FORM système peut être appliquée. Sur les exemples académiques, cette méthode a montré des résultats particulièrement intéressants. Elle permet de calculer des faibles probabilités avec précision en un temps de calcul proche de la minute comparé aux plusieurs jours requis avec la méthode MCO. Il faut cependant que la condition fonctionnelle soit linéaire pour pouvoir utiliser la méthode système.

Chapitre 4

Applications

Sommaire

4.1 Introduction 97

4.2 Exigence de fonctionnement d'une fiche électrique 98

4.2.1 Modélisation et formulation des problèmes d'assemblage et fonctionnel 98

4.2.2 Résultats 102

4.3 Assemblage d'un connecteur Radiall 105

4.3.1 Modélisation et formulation du problème d'assemblage 106

4.3.2 Résultats 109

4.4 Exigence de fonctionnement d'une pompe à débit variable Pierburg 110

4.4.1 Modélisation et formulation des problèmes d'assemblage et fonctionnel 110

4.4.2 Résultats 115

4.5 Conclusion 117

4.1 Introduction

Ce chapitre a pour objectif d'appliquer les méthodes présentées au chapitre 3 sur des problèmes issus de mécanismes industriels. Pour rappel, trois méthodes sont disponibles pour résoudre le problème d'assemblage : la méthode MCO (simulation de Monte Carlo couplée avec un algorithme d'optimisation) et les procédures itératives EBS et EIC qui sont également basées sur une simulation de Monte Carlo et l'optimisation. Lorsque la procédure de linéarisation doit être appliquée sur des contraintes quadratiques, les procédures itératives EBS et EIC permettent de gérer l'erreur d'approximation et de calculer la probabilité de défaillance d'assemblage précisément. Pour résoudre le problème fonctionnel, deux méthodes sont disponibles : la méthode MCO et la méthode de résolution système basée sur la méthode FORM système.

Trois mécanismes sont étudiés. Le premier, présenté dans la section 4.2, est une fiche électrique ayant une exigence fonctionnelle liée au débattement maximale de la partie mâle. La section 4.3 s'intéresse à l'assemblage d'un connecteur de la société Radiall. Ce mécanisme n'a pas d'exigence fonctionnelle sur une caractéristique particulière. Sa fonctionnalité dépend uniquement de sa capacité à s'assembler. La section 4.4 est dévouée à l'étude d'une pompe à débit variable de la société Pierburg. La pompe possède des ailettes qui doivent être bien positionnées entre elles pour garantir le bon fonctionnement de la pompe.

Le connecteur Radiall présente seulement un problème d'assemblage à résoudre donc la méthode MCO et les procédures itératives EBS et EIC peuvent uniquement être appliquées. Pour la fiche électrique et la pompe à débit variable qui ont un problème d'assemblage et un problème fonctionnel à résoudre, toutes les méthodes proposées au chapitre 3 sont appliquées : méthode MCO, procédures EBS et EIC et méthode de résolution système pour le problème fonctionnel.

4.2 Exigence de fonctionnement d'une fiche électrique

Le mécanisme est adapté d'un produit de la société Radiall. Il s'agit d'une fiche électrique, schématisée dans la figure 4.1. Ce mécanisme est composé de deux parties en mouvement relatif : l'enveloppe (1) et le contact mâle (2). L'enveloppe est en réalité composée de l'enveloppe elle-même et d'une embase permettant au contact mâle de s'insérer dans l'enveloppe. L'enveloppe et l'embase sont supposées fixes l'une par rapport à l'autre. Pour que le contact mâle puisse s'insérer sans soucis dans l'enveloppe, du jeu est prévu entre ces deux parties. Cependant, pour que la fiche électrique soit fonctionnelle, il faut que les axes du petit cylindre du contact mâle et celui du cylindre extérieur de l'enveloppe aient un débattement maximum. L'exigence de fonctionnalité de ce mécanisme spécifie que le débattement maximum du petit cylindre du contact mâle par rapport au cylindre extérieur de l'enveloppe suivant les axes $\vec{x}$ et $\vec{y}$ ne dépasse une valeur maximale. Comme les défauts de forme sont négligés, cela se traduit par une exigence au niveau de l'extrémité du contact mâle (point E). L'étude de ce mécanisme implique la définition d'une condition d'assemblage et d'une condition fonctionnelle.

4.2.1 Modélisation et formulation des problèmes d'assemblage et fonctionnel

Cette sous-section est consacrée à la présentation des étapes importantes pour la modélisation du comportement de la fiche électrique. L'ensemble des équations du modèle de comportement est donné en annexe D.1

Surfaces de substitution. Le mécanisme est composé de deux pièces, l'enveloppe (1) et le contact mâle (2), qui possèdent plusieurs surfaces de substitution à prendre en compte, voir figure 4.1 :

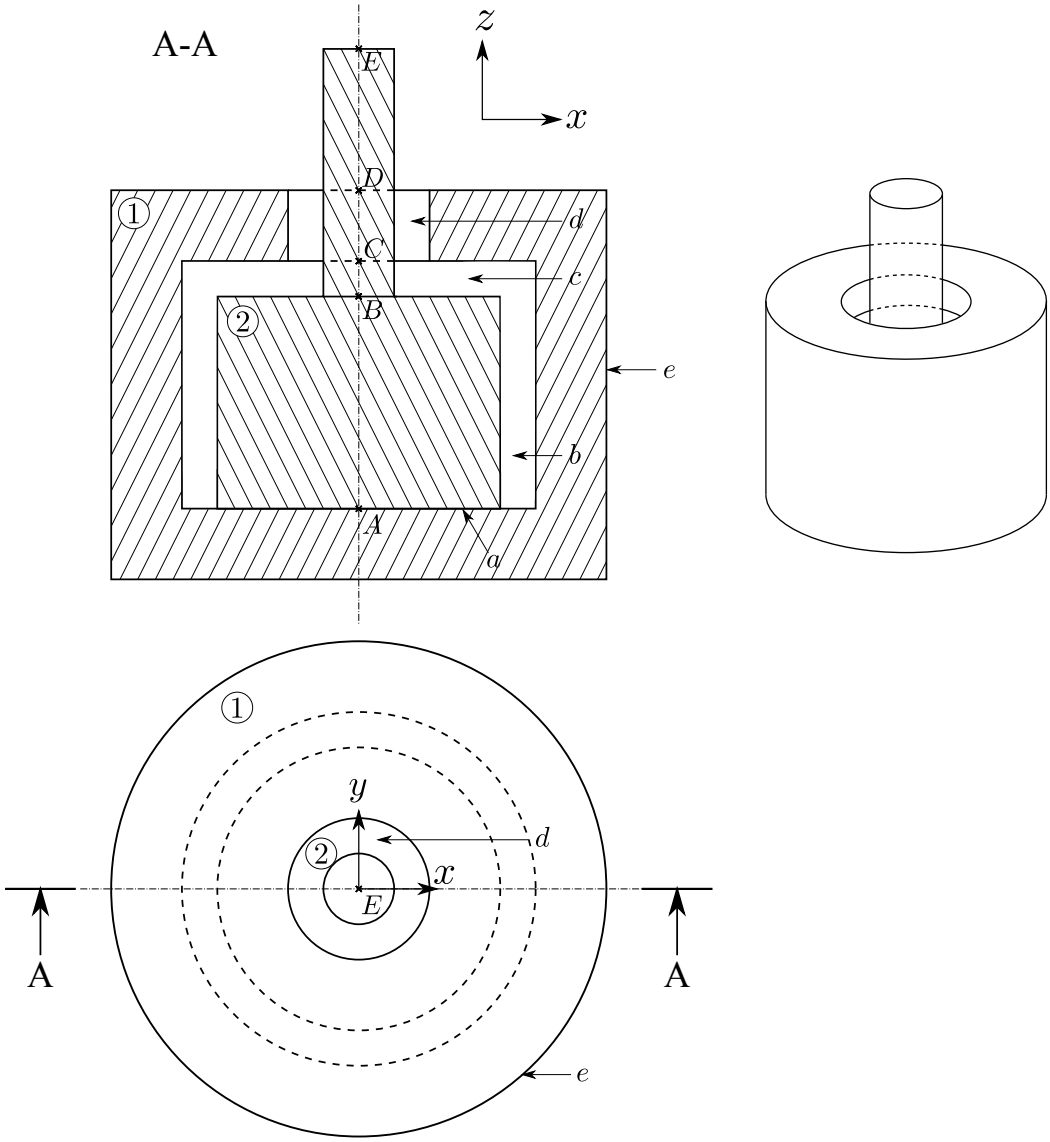


FIGURE 4.1 – Fiche électrique en vue du dessus, vue en coupe et représentation 3D.

- ◇ surface plane circulaire : $1a, 2a, 1c, 2c$.
- ◇ surface cylindrique : $1b, 2b, 1d, 2d, 1e$.

Un torseur écart est défini pour chaque surface de substitution ainsi que des écarts intrinsèques pour les diamètres des surfaces cylindriques.

Boucles topologiques. Le graphe des liaisons représentatif du mécanisme est présenté dans la figure 4.2. Il y a au total 4 liaisons (sans celle de la condition fonctionnelle), pour 2 pièces. Le nombre cyclomatique donnant le nombre de boucles topologiques à écrire est égal à $N_{boucles} = 4 - 2 + 1 = 3$. Ces boucles permettent d'écrire au total 18 équations de compatibilité.

Liaisons géométriques. Plusieurs liaisons sont prises en compte dans la modélisation :

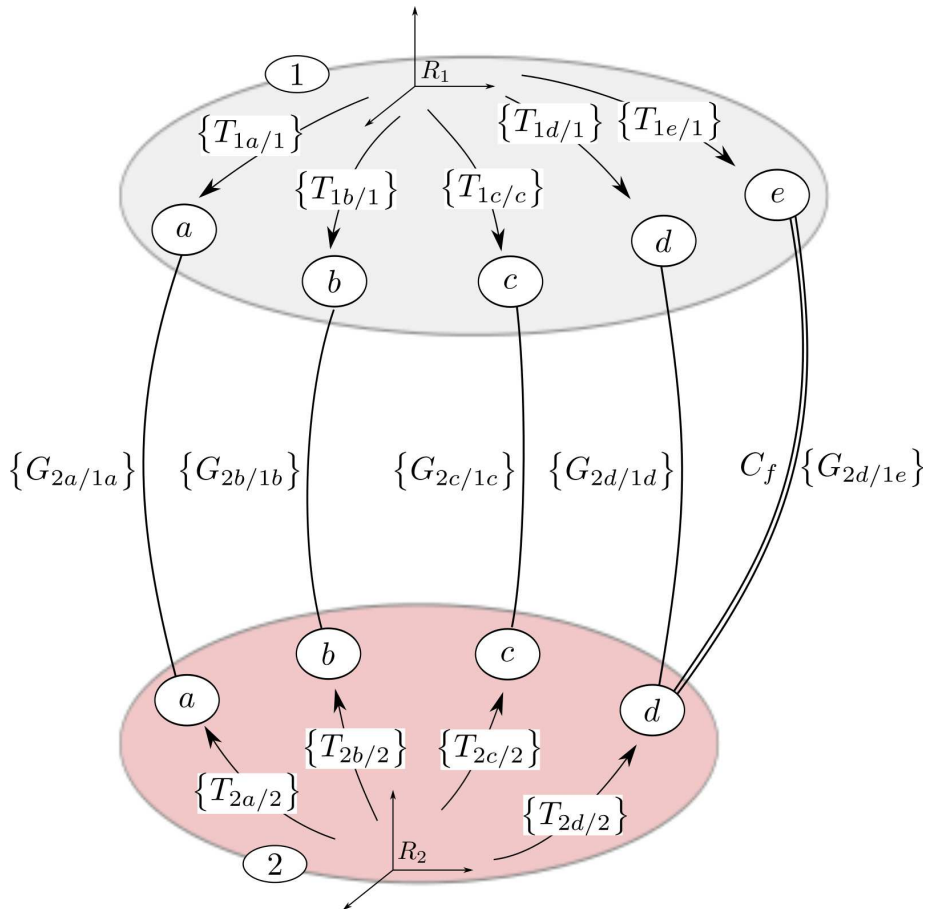


FIGURE 4.2 – Graphe des liaisons de la fiche électrique.

- ◇ les liaisons appuis plans circulaires $1a/2a$ et $1c/2c$: les liaisons nécessitent de discrétiser la surface en un polygone afin de définir des points d'application pour les contraintes d'interface. Ces liaisons permettent de définir $2 \times N_{da}$ contraintes d'interface où N_{da} est le nombre de facettes du polygone discrétisant la surface circulaire.
- ◇ les liaisons pivots glissants $1b/2b$ et $1d/2d$: le contact mâle peut tourner autour de l'axe $\vec{z}$. Ces liaisons entrainent l'écriture de quatre contraintes d'interface quadratiques qui sont linéarisées grâce à la procédure de linéarisation proposée dans la section 2.3.1. Le nombre de contraintes d'interface pour ces liaisons est donc égal à $4 \times N_d$.

Il est choisi d'avoir les paramètres N_{da} et N_d égaux dans les calculs. En particulier pour les procédures itératives EBS et EIC, les deux nombres évoluent de façon identique.

Condition fonctionnelle. Comme énoncée dans la présentation du mécanisme, l'exigence fonctionnelle concerne l'étude du débattement du point E du contact mâle par rapport au cylindre extérieur $1e$ suivant les axes $\vec{x}$ et $\vec{y}$. Les caractéristiques fonctionnelles choisies sont les deux composantes de déplacements suivant les axes $\vec{x}$ et $\vec{y}$: u_{2d1e} et v_{2d1e}. Une boucle topologique passant par la liaison fonctionnelle permet de relier ces

paramètres aux autres paramètres du mécanisme. Cela permet d'écrire deux équations de compatibilité supplémentaires.

La fonctionnalité du mécanisme est assurée si le débattement de l'extrémité du contact mâle n'excède pas une tolérance t. La condition fonctionnelle porte sur les déplacements maximum et minimum du point E suivant les axes $\vec{x}$ et $\vec{y}$. Les déplacements doivent chacun être maintenu dans un intervalle pour garantir la fonctionnalité du mécanisme :

$$u_{2d1e} \in \left[-\frac{t}{2}; \frac{t}{2}\right] \tag{4.1}$$

$$v_{2d1e} \in \left[-\frac{t}{2}; \frac{t}{2}\right] \tag{4.2}$$

Il y a donc quatre conditions fonctionnelles à respecter :

$$\begin{aligned} C_f^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{g}) &= \frac{t}{2} - u_{2d1e} \geq 0 \\ C_f^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{g}) &= -\frac{t}{2} + u_{2d1e} \geq 0 \\ C_f^{(3)}(\mathbf{x}, \mathbf{g}) &= \frac{t}{2} - v_{2d1e} \geq 0 \\ C_f^{(4)}(\mathbf{x}, \mathbf{g}) &= -\frac{t}{2} + v_{2d1e} \geq 0 \end{aligned} \tag{4.3}$$

Formulation des problèmes d'assemblage et fonctionnel. Il y a quatre conditions fonctionnelles, il faut donc définir quatre problèmes d'optimisation différents. Les problèmes d'optimisation sont cependant tous soumis aux mêmes contraintes. Ils sont définis de la façon suivante :

$$\begin{aligned} R_f^{(k)}(\mathbf{x}) = \min_{\mathbf{g} \in \mathbb{R}^{26}} \quad & C_f^{(k)}(\mathbf{x}, \mathbf{g}) \\ \text{sous} \quad & C_c^{(j)}(\mathbf{x}, \mathbf{g}) = 0 \quad \forall j = \{1, \ldots, 20\} \\ & C_i^{(l)}(\mathbf{x}, \mathbf{g}) \leq 0 \quad \forall l = \{1, \ldots, 2 \times N_{da} + 4 \times N_d\} \end{aligned} \tag{4.4}$$

avec $k = \{1, \ldots, 4\}$ et où N_{da} est le nombre de discrétisations des surfaces planes circulaires a et c et N_d est le nombre de linéarisations des contraintes quadratiques.

Les expressions des probabilités de défaillance d'assemblage et fonctionnelle s'écrivent de la façon suivante :

$$\begin{aligned} P_{df} &= \text{Prob}\left(\bigcup_{k=1}^{4} R_f^{(k)}(\mathbf{X}) \leq 0\right) \\ P_{da} &= \text{Prob}\left(E_a(\mathbf{X})\right) \end{aligned} \tag{4.5}$$

où $E_a(\mathbf{x})$ est l'événement suivant : « Pour un vecteur $\mathbf{x}$ donné, il n'existe pas de vecteur jeux $\mathbf{g} \in \mathbb{R}^{26}$ tel que $R_f^{(1)}(\mathbf{x})$ ait une solution ». En l'occurrence, les quatre problèmes d'optimisation sont soumis aux mêmes contraintes donc tous les problèmes d'optimisation peuvent être utilisés pour calculer la probabilité de défaillance d'assemblage. Il est donc suggéré de considérer $R_f^{(1)}$ pour tester l'existence de la solution.

Plusieurs conditions fonctionnelles sont considérées donc la probabilité de défaillance fonctionnelle est une union d'événements comme évoquée dans la section 2.2.2.

4.2.2 Résultats

Le calcul de la probabilité de défaillance d'assemblage est effectué avec la méthode MCO et les procédures itératives EBS et EIC. Pour le problème fonctionnel, la méthode MCO peut être appliquée également en effectuant la résolution des quatre problèmes d'optimisation à chaque itération. En pratique, la résolution des quatre problèmes d'optimisation est nécessaire seulement si aucun des résultats ne retourne de valeur négative significative de non fonctionnalité. L'utilisation de cette méthode est donc très coûteuse car le nombre d'appels à l'algorithme d'optimisation peut être multiplié par quatre au maximum à chaque itération puisqu'il y a quatre exigences fonctionnelles.

En revanche, pour pouvoir utiliser la méthode de résolution système, il faut développer la formulation de l'union par la formule de Poincaré. En effet la méthode de résolution système transforme la formulation en une intersection d'événements. Il faut donc calculer une union d'intersections d'événements. C'est pourquoi l'expression de P_{df}, équation (4.5), est développée. Soit $E_f^{(k)}$, l'événement « $R_f^{(k)}(\mathbf{X}) \leq 0$ »avec $k = \{1, \ldots, 4\}$, l'expression de la probabilité se développe de la façon suivante :

$$
\begin{aligned}
P_{df} &= \text{Prob}\left(\bigcup_{k=1}^{4} E_f^{(k)}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{4} \text{Prob}\left(E_f^{(k)}\right) \\
&\quad -\text{Prob}\left(E_f^{(1)} \cap E_f^{(2)}\right) - \text{Prob}\left(E_f^{(1)} \cap E_f^{(3)}\right) - \text{Prob}\left(E_f^{(1)} \cap E_f^{(4)}\right) \\
&\quad -\text{Prob}\left(E_f^{(2)} \cap E_f^{(3)}\right) - \text{Prob}\left(E_f^{(2)} \cap E_f^{(4)}\right) - \text{Prob}\left(E_f^{(3)} \cap E_f^{(4)}\right) \\
&\quad +\text{Prob}\left(E_f^{(1)} \cap E_f^{(2)} \cap E_f^{(3)}\right) + \text{Prob}\left(E_f^{(1)} \cap E_f^{(2)} \cap E_f^{(4)}\right) \\
&\quad +\text{Prob}\left(E_f^{(1)} \cap E_f^{(3)} \cap E_f^{(4)}\right) + \text{Prob}\left(E_f^{(2)} \cap E_f^{(3)} \cap E_f^{(4)}\right) \\
&\quad -\text{Prob}\left(E_f^{(1)} \cap E_f^{(2)} \cap E_f^{(3)} \cap R_f^{(4)}\right)
\end{aligned}
\tag{4.6}
$$

Cette expression peut être simplifiée étant donné que certains événements sont disjoints. En effet, pour les événements $E_f^{(1)}$ et $E_f^{(2)}$, la condition fonctionnelle porte sur la même caractéristique fonctionnelle. Cette caractéristique doit rester dans un intervalle, or il n'est pas possible que cette caractéristique soit simultanément supérieure à la borne supérieure et inférieure à la borne inférieure de l'intervalle. Les événements $E_f^{(1)}$ et $E_f^{(2)}$ sont donc disjoints. Le même raisonnement peut être appliqué pour les événements $E_f^{(3)}$ et $E_f^{(4)}$. L'expression de la probabilité développée par la formule de Poincaré peut donc

être simplifiée de la façon suivante :

$$\begin{aligned} P_{df} &= \text{Prob}\left(\bigcup_{k=1}^{4} E_f^{(k)}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{4} \text{Prob}\left(E_f^{(k)}\right) \\ &\quad -\text{Prob}\left(E_f^{(1)} \cap E_f^{(3)}\right) - \text{Prob}\left(E_f^{(1)} \cap E_f^{(4)}\right) \\ &\quad -\text{Prob}\left(E_f^{(2)} \cap E_f^{(3)}\right) - \text{Prob}\left(E_f^{(2)} \cap E_f^{(4)}\right) \end{aligned} \tag{4.7}$$

Cette formule augmente le nombre de probabilités à évaluer par la méthode de résolution système. Cependant, pour le calcul des probabilités des intersections d'événements, la procédure entière n'a pas besoin d'être appliquée. En effet, les combinaisons de contraintes actives dominantes (*i.e.* les configurations dominantes) sont les mêmes que pour les probabilités des événements seuls à calculer. L'algorithme de recherche des combinaisons dominantes n'a donc besoin d'être exécuté que quatre fois, une pour chaque événement. De la même manière, le calcul des indices de fiabilité n'est effectué qu'une fois pour chaque événement. Ensuite, seul le calcul de la fonction de répartition de la loi multi-normale a besoin d'être effectué plusieurs fois, pour calculer chaque probabilité de l'expression équation (4.7). Il suffit alors de sélectionner les indices de fiabilité calculés au préalable correspondant aux événements de la probabilité à évaluer.

A noter également que le problème peut être résolu en 2D due à la symétrie de révolution du mécanisme. De plus, comme les lois des variables aléatoires sont des lois normales, les probabilités $\text{Prob}(E_f^{(1)} \cap E_f^{(3)})$ et $\text{Prob}(E_f^{(2)} \cap E_f^{(4)})$ sont égales ainsi que les probabilités $\text{Prob}(E_f^{(1)} \cap E_f^{(4)})$ et $\text{Prob}(E_f^{(2)} \cap E_f^{(3)})$.

Les valeurs numériques des paramètres des lois des variables aléatoires et des dimensions sont données en annexe D.2.

Résultat pour le problème d'assemblage. Les résultats pour la résolution du problème d'assemblage sont présentés dans le tableau 4.1, les probabilités sont données en ppm (10^{-6}). Le nombre de tirages pour la méthode MCO et les procédures itératives est fixé à $N_{MC} = 8 \times 10^6$ ce qui donne un coefficient de variation sur le résultat d'environ 6.5%. Les critères d'arrêt pour les procédures EBS et EIC sont fixés tous les deux à 1%. Les nombres de linéarisations N_d et de discrétisations des appuis plans circulaires N_{da} sont choisis égaux.

Les procédures EBS et EIC s'arrêtent après cinq itérations. L'erreur d'approximation de la probabilité de défaillance d'assemblage due à la linéarisation est quasiment nulle étant donné que les bornes inférieures et supérieures sont égales. Le temps de calcul est réduit comparé à celui nécessaire à la méthode MCO pour obtenir les deux bornes avec une précision équivalente. En effet, la méthode MCO ne permet de calculer qu'une seule probabilité à la fois, c'est pourquoi le temps de calcul est doublé comme indiqué dans le tableau 4.1. Ces résultats confirment les conclusions déduites avec les exemples

Méthode	P_{dac} (ppm)	P_{dai} (ppm)	N_d (itérations)	Temps
MCO	9.8	2500	4	2×7.25 h
MCO	28	30	36	2×25 h
EBS	-	29	324 (5)	7.33 h
EIC	29	29	324 (5)	7.33 h

Tableau 4.1 – Résultats obtenus avec la méthode MCO et les procédures itératives EBS et EIC pour la résolution du problème fonctionnel de la fiche électrique. Le temps de calcul pour la méthode MCO est doublé car elle ne permet de calculer qu'une probabilité à la fois.

académiques. Les procédures itératives EBS et EIC permettent d'obtenir les probabilités de défaillance d'assemblage précisément en contrôlant le nombre de linéarisations requis. Les résultats sont obtenus en un temps de calcul équivalent au temps de calcul nécessaire avec la méthode MCO pour le modèle le plus simplifié.

Pour cette application, les procédures EBS et EIC sont équivalentes en terme d'efficacité malgré des différences au niveau du nombre d'appels à l'algorithme d'optimisation. Le tableau 4.2 montre que le nombre d'appels supplémentaires à l'algorithme d'optimisation est le double pour la procédure EIC, en revanche le nombre d'appels à l'algorithme d'optimisation avec le modèle le plus complexe est plus petit. D'une façon générale pour les deux méthodes, les nombres d'optimisations supplémentaires nécessaires avec les modèles complexes sont suffisamment petits devant N_{MC} pour que cela n'impacte pas fortement le temps de calcul.

Itération	N_d	$N_{optim.}$ EBS	$N_{optim.}$ EIC	
			Strat. inscrite	Strat. circonscrite
1	4	8×10^6	8×10^6	19961
2	12	19961	19882	300
3	36	379	197	62
4	108	244	17	5
5	324	232	3	1
Total (hors initiale)		28816	40428	

Tableau 4.2 – Nombre d'optimisations requis à chaque itération pour les procédures EBS et EIC pour le problème d'assemblage de la fiche électrique. Dans le cas de EIC, le nombre d'appels est partagé en deux, le premier nombre correspond aux évaluations avec la stratégie inscrite et le deuxième avec la stratégie circonscrite.

Résultat pour le problème fonctionnel. Les résultats obtenus avec la méthode MCO et FORM système sont présentés dans le tableau 4.3. Les paramètres de résolution sont :

- ◇ le nombre de linéarisations des contraintes quadratiques et le nombre de discrétisations des appuis plans circulaires sont fixés à $N_d = N_{da} = 40$ avec une stratégie

circonscrite,

- ◇ le nombre de tirages pour la méthode MCO est fixé à $N_{MC} = 4 \times 10^6$, permettant d'avoir un coefficient de variation sur la probabilité de 4.4%,
- ◇ le nombre de combinaisons dominantes à sélectionner pour la méthode FORM système est fixé à 150 pour chaque condition fonctionnelle

	FORM système				MCO		
C_f	P_{df} (ppm)	N_{ds}	$N_{optim.}$	Temps	P_{df} (ppm)	95%IC	Temps
$C_f^{(1)}$	34.2	150	2225	207 s	30	11	42.1 h
$C_f^{(2)}$	34.4	150	1885	200 s	33.8	11	40.8 h
$C_f^{(3)}$	34.4	150	2264	208 s	32.8	11	40.3 h
$C_f^{(4)}$	34.4	150	2666	214 s	32	11	42.7 h
$\cup_{k=1}^{4} C_f^{(k)}$	137		9040	13.8 min	129	23	6.9 j

Tableau 4.3 – Résultats obtenus avec la méthode MCO et la méthode FORM système pour la résolution du problème fonctionnel de la fiche électrique.

La probabilité obtenue avec la méthode MCO est de 129 ppm avec un intervalle de confiance à 95% de 23 ppm. La méthode FORM système estime la probabilité de défaillance fonctionnelle à 137 ppm. Les résultats confirment ceux obtenus avec les applications académiques : la méthode FORM système permet d'obtenir une estimation de la probabilité de défaillance fonctionnelle cohérente avec l'estimation de référence fournie par la méthode MCO. Sur cette exemple, il s'avère que les probabilités des intersections à retrancher tendent vers zéro car avec la méthode MCO il n'y a pas de points simultanément défaillants pour deux conditions fonctionnelles. La probabilité de défaillance correspond donc à la somme des probabilités de défaillance associées à chaque condition fonctionnelle. Les probabilités des intersections calculées avec la méthode FORM système sont de l'ordre de 1.5×10^{-9}, ce qui confirme que ces probabilités n'ont pas une influence significative sur la probabilité totale.

Le temps de calcul pour obtenir cette estimation est également considérablement réduit. La méthode MCO requiert presque 7 jours de calcul alors que la méthode de résolution système ne nécessite qu'environ 14 min. L'avantage de cette méthode est d'avoir un nombre réduit d'appels à l'algorithme d'optimisation, ici 9040 optimisations comparé aux plusieurs millions nécessaires avec la méthode MCO.

4.3 Assemblage d'un connecteur Radiall

Cette section s'intéresse à l'étude du montage des parties mâle et femelle d'un connecteur produit par la société Radiall. L'étude de ce mécanisme porte uniquement sur la vérification de la condition d'assemblage. Il n'y a pas de caractéristique fonctionnelle à vérifier, sa fonctionnalité dépend uniquement de sa capacité à s'assembler.

Le mécanisme est composé de deux pièces qui s'imbriquent l'une dans l'autre, voir figure 4.3. La partie mâle possède deux goupilles de guidage qui doivent rentrer dans

leurs logements. Cette partie possède également des détrompeurs, en l'occurrence cinq clavettes, qui doivent pénétrer dans les rainures de la partie femelle. Ce mécanisme est hyperstatique de degré 31. Il y a treize liaisons à considérer ce qui entraînent l'écriture de beaucoup d'équations de compatibilité et de contraintes d'interface.

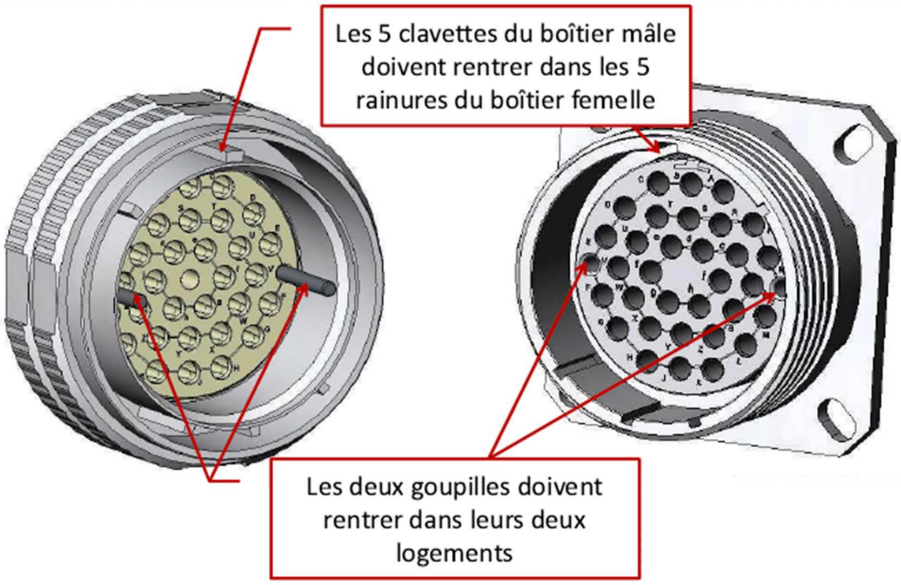


FIGURE 4.3 – Connecteur Radiall, (image Radiall).

4.3.1 Modélisation et formulation du problème d'assemblage

Cette sous-section présente les principales informations relatives à la modélisation du comportement du mécanisme. L'ensemble du modèle de comportement est donné en annexe E.1.

Seuls les éléments qui interviennent dans le montage sont considérés : les deux goupilles, les cinq clavettes et la base où sont fixées les goupilles et les clavettes, voir figure 4.4. Pour les clavettes, les surfaces latérales sont supposées être les seules pouvant entrer en contact. Les surfaces supérieures et les extrémités sont supposées suffisamment éloignées de sorte qu'il ne peut pas y avoir de pénétration de matière. De plus, la partie mâle et la partie femelle sont supposées arriver en butée au niveau de la surface c. Le mécanisme est donc contraint technologiquement dans une position particulière. La figure 4.4 schématise le mécanisme étudié. Toutes les clavettes sont positionnées grâce à un angle $\theta_c^{(k)}$, $k = \{1, \ldots, 5\}$.

Surfaces de substitution. Le connecteur est uniquement composé de deux pièces mais de nombreuses surfaces sont répertoriées :

- ◇ surfaces cylindriques $1a, 2a, 1b, 2b$,
- ◇ surfaces planes $1c, 2c, 1e_k, 2e_k, 1f_k, 2f_k$ avec $k = \{1, \ldots, 5\}$.

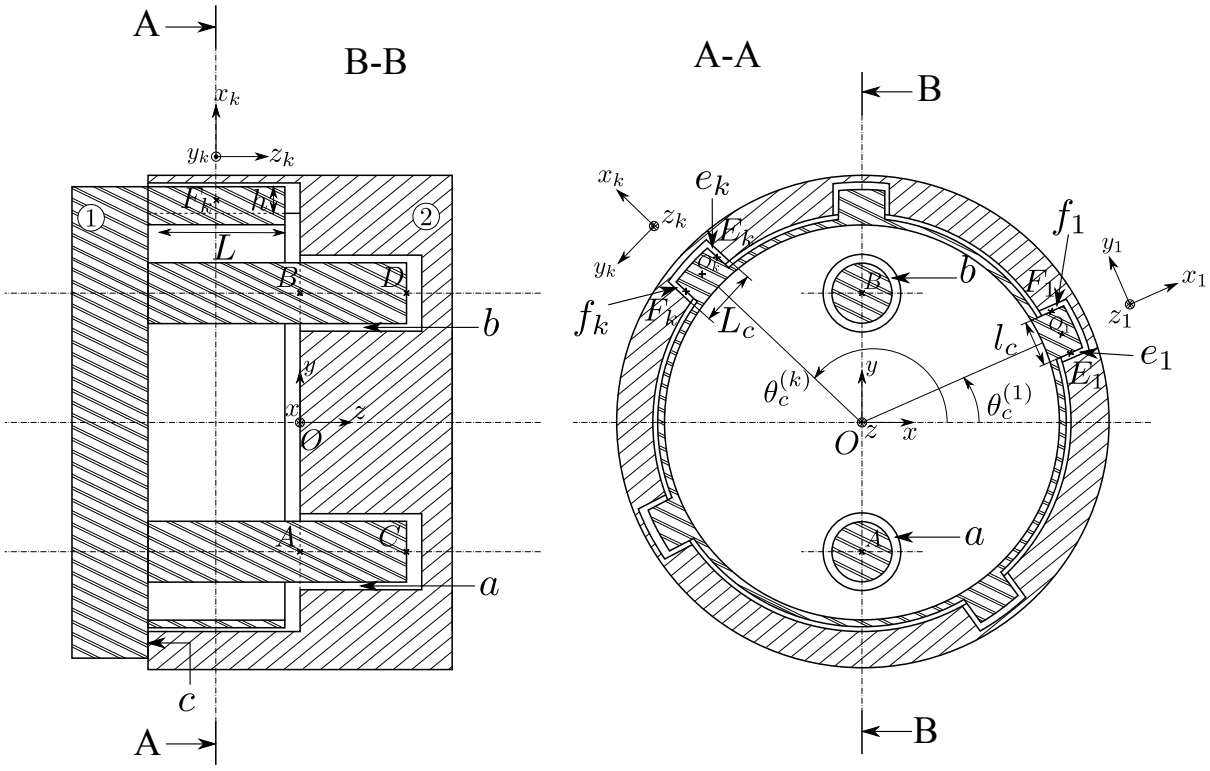


FIGURE 4.4 – Vues en coupe du connecteur Radiall. Les clavettes sont positionnées grâce à un angle $\theta_c^{(k)}$.

Pour chaque surface de substitution, un torseur écart est défini en fonction du type de la surface. Des écarts intrinsèques sont également définis pour les diamètres des surfaces cylindriques.

Boucles topologiques. Le graphe des liaisons caractéristique du connecteur est présenté dans la figure 4.5. Il y a treize liaisons pour seulement deux pièces. Le nombre de boucles topologiques à écrire est donné par le nombre cyclomatique : $N_{boucles} = 13-2+1 = 12$. Au total, ces boucles permettent d'écrire 72 équations de compatibilité.

Afin de simplifier l'écriture des contraintes d'interface au niveau des clavettes, des repères locaux sont définis comme présenté sur le schéma du mécanisme, figure 4.4. Ces repères impliquent d'utiliser une matrice de passage pour réécrire les torseurs écarts et torseurs jeux dans le repère global, ce qui complexifient l'écriture des équations de compatibilité.

Liaisons géométriques. Il y a au total treize liaisons dans le mécanisme à considérer :

- ◇ les liaisons pivots glissants $1a/2a$ et $1b/2b$: ce sont les liaisons des goupilles dans leurs logements. Elles impliquent l'écriture de 4 contraintes d'interface quadratiques qui sont linéarisées suivant la procédure de linéarisation proposée dans la section 2.3.1. Il y a donc au total $4 \times N_d$ contraintes d'interface.
- ◇ la liaison appui plan $1c/2c$: cette liaison est supposée sans jeux excepté ceux relatifs

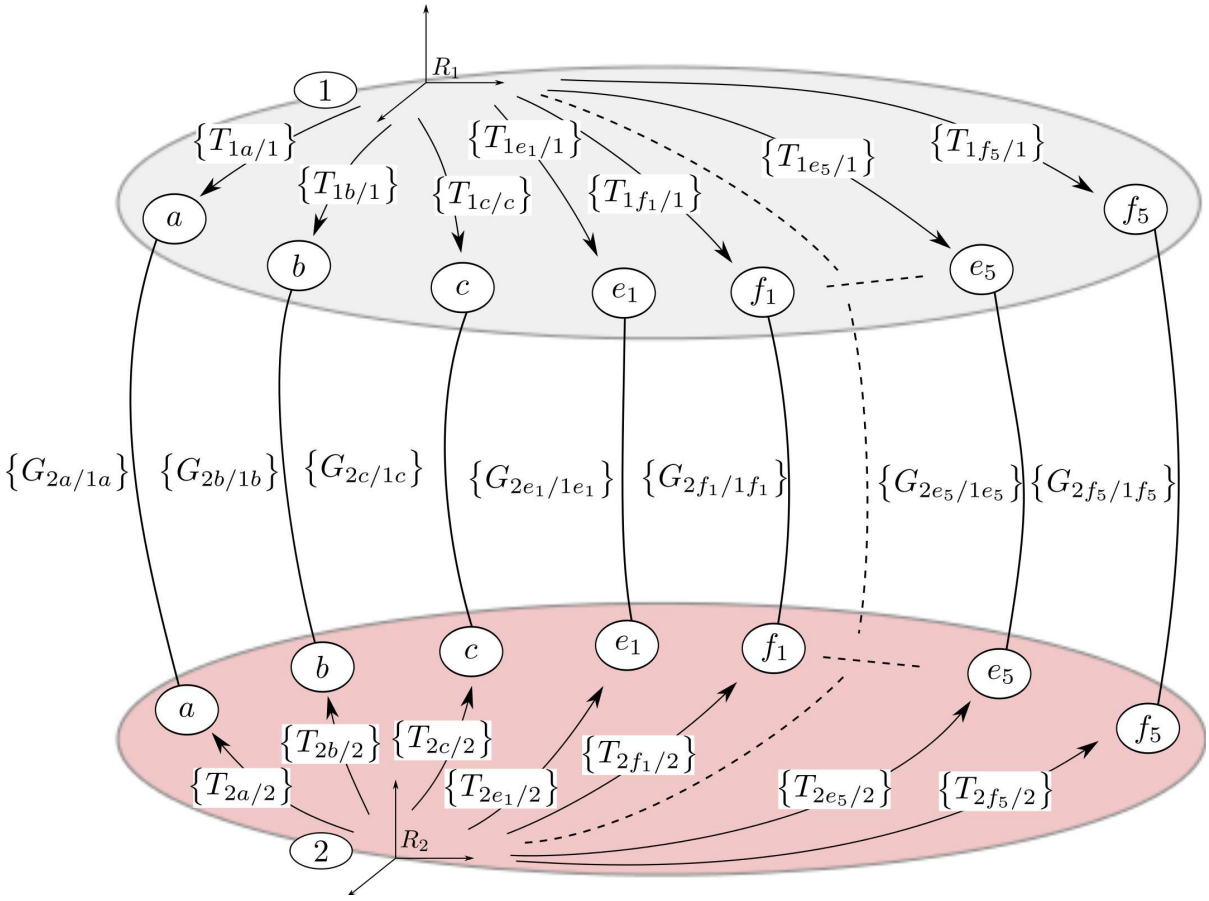


FIGURE 4.5 – Graphe des liaisons du connecteur.

aux déplacements cinématiques de la liaison. Elle modélise le fait que les parties mâle et femelle sont en butée au niveau de la surface c. Il n'y a donc pas de contraintes d'interface à écrire.

- ◇ les liaisons appuis plans rectangulaires $1e_k/2e_k$ et $1f_k/2f_k$ pour $k = \{1, \ldots, 5\}$. Il y a donc 10 liaisons appui plan à prendre en compte. Chaque liaison entraîne l'écriture de 4 contraintes d'interface aux coins des surfaces planes.

Formulation du problème d'assemblage. L'étude de ce mécanisme concerne uniquement la vérification de l'assemblage des deux pièces du mécanisme. Il faut donc définir un problème d'optimisation R_a permettant de vérifier la montabilité du mécanisme. Comme proposée dans la section 2.2.1, le problème d'optimisation s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned} R_a^{(k)}(\mathbf{x}) = \min_{\mathbf{g}\in\mathbb{R}^{75}} \quad & C_i^1(\mathbf{x},\mathbf{g}) \\ \text{sous} \quad & C_c^{(k)}(\mathbf{x},\mathbf{g}) = 0 \quad \forall k = \{1,\ldots,72\} \\ & C_i^{(l)}(\mathbf{x},\mathbf{g}) \leq 0 \quad \forall l = \{1,\ldots,4\times N_d + 40\} \end{aligned} \tag{4.8}$$

où N_d est le nombre de linéarisations des contraintes d'interface quadratiques.

L'expression de la probabilité de défaillance d'assemblage s'écrit de la façon suivante :

$$P_{da} = \text{Prob}\left(E_a(\mathbf{X})\right) \tag{4.9}$$

où $E_a(\mathbf{x})$ est l'événement suivant : « Pour un vecteur $\mathbf{x}$ donné, il n'existe pas de vecteur jeux $\mathbf{g} \in \mathbb{R}^{75}$ tel que $R_a(\mathbf{x})$ ait une solution ».

4.3.2 Résultats

L'étude de ce mécanisme concerne uniquement la vérification de la montabilité. La méthode de résolution système ne peut donc pas être utilisée. Seules la méthode MCO et les procédures EBS et EIC peuvent être appliquées.

Les valeurs numériques prises par les paramètres des lois des variables aléatoires et des dimensions sont fournies en annexe E.2. Les données étant confidentielles, les valeurs numériques fixées ne correspondent pas au mécanisme réel. Les résultats sont donnés dans le tableau 4.4, les probabilités sont données en ppm (10^{-6}). Le nombre de tirages est fixé à $N_{MC} = 3 \times 10^6$, le coefficient de variation de Monte Carlo sur la probabilité est égale à 6.1%. Les critères d'arrêt pour les procédures EBS et EIC sont fixés tous les deux à 1%.

Méthode	P_{dac} (ppm)	P_{dai} (ppm)	N_d (itérations)	Temps
MCO	22	185	4	2×8.45 h
MCO	88.3	88.7	36	2×22.6 h
EBS	-	88.3	108 (4)	8.46 h
EIC	88.3	88.7	36 (3)	8.45 h

Tableau 4.4 – Résultats pour le problème d'assemblage du connecteur Radiall avec la méthode MCO et les procédures itératives EBS et EIC. Le temps de calcul pour la méthode MCO est doublé car elle ne permet de calculer qu'une probabilité à la fois.

Les résultats montrent à nouveau que les procédures itératives EBS et EIC permettent un gain de précision et de temps important par rapport à l'utilisation de la méthode MCO. En effet, le temps de calcul requis par la méthode MCO avec $N_d = 36$ permettant d'avoir un résultat précis est d'environ 22.6h tandis que les procédures EBS et EIC nécessitent 8.45h pour le même niveau de précision. Ce temps correspond au temps nécessaire pour appliquer la méthode MCO avec le nombre de linéarisations $N_d = 4$ pour obtenir une seule probabilité. Cela confirme que les itérations des procédures itératives n'ont que très peu d'influence sur le temps de calcul mais permettent d'améliorer la précision de la probabilité considérablement.

A nouveau, pour cette application le temps de calcul entre les deux procédures EBS et EIC est quasiment identique. Le tableau 4.5 montre que les nombres totaux d'appels à l'algorithme d'optimisation (hors simulation initiale) sont très proches. De plus, à chaque itération, ces nombres sont également proches et très faibles comparé au trois millions nécessaires à la simulation initiale. C'est pourquoi, malgré le fait que le modèle est plus complexe, le temps de calcul est très peu impacté. La procédure EIC est toutefois la plus performante car elle converge plus rapidement et fournit de toute façon également une borne supérieure.

Itération	N_d	$N_{optim.}$ EBS	$N_{optim.}$ EIC	
			Strat. inscrite	Strat. circonscrite
1	4	3×10^6	3×10^6	555
2	12	555	489	207
3	36	273	56	49
4	108	266		
Total (hors initiale)		1094	1356	

Tableau 4.5 – Nombre d'optimisations requis à chaque itération pour les procédures EBS et EIC pour le problème d'assemblage du connecteur Radiall. Dans le cas de EIC, le nombre d'appels est partagé en deux, le premier nombre correspond aux évaluations avec la stratégie inscrite et le deuxième avec la stratégie circonscrite.

4.4 Exigence de fonctionnement d'une pompe à débit variable Pierburg

Cette application consiste à vérifier la fonctionnalité d'une pompe à débit variable de la société Pierburg. Le mécanisme, voir figure 4.6, est composé d'un bâti (1), d'un disque de contrôle (2) et de neuf ailettes. Le disque de contrôle permet de gérer l'ouverture des ailettes. En effet, le disque peut tourner autour de son axe, la rotation entraîne un mouvement des ailettes grâce à un petit ergot situé sur la partie basse de l'ailette. L'ergot se déplace dans un trou oblong du disque de contrôle. L'espacement entre les ailettes est plus ou moins grand, ce qui modifie le débit la pompe.

Pour ce mécanisme, un problème d'assemblage et un problème fonctionnel sont à résoudre, il faut donc calculer une probabilité de défaillance d'assemblage et une probabilité de défaillance fonctionnelle. L'exigence fonctionnelle de la pompe porte sur la position relative des ailettes entre elles, et cela quelle que soit la position du disque de contrôle. L'expression réelle de cette exigence étant confidentielle, elle est supposée fonction de l'angle relatif des ailettes entre elles. Afin de simplifier l'étude, uniquement deux ailettes sont considérées dans le mécanisme ainsi qu'un seul réglage du disque de contrôle. Il s'agit de vérifier que l'angle relatif autour de l'axe $\vec{z}$ entre les deux ailettes (3) et (4) reste compris dans un intervalle donné.

4.4.1 Modélisation et formulation des problèmes d'assemblage et fonctionnel

Cette sous-section présente succinctement la modélisation de comportement du mécanisme. L'ensemble des équations du modèle de comportement est donné en annexe F.1.

Pièces et surfaces de substitution. Le mécanisme est composé de quatre pièces :

- ◇ le bâti (1),

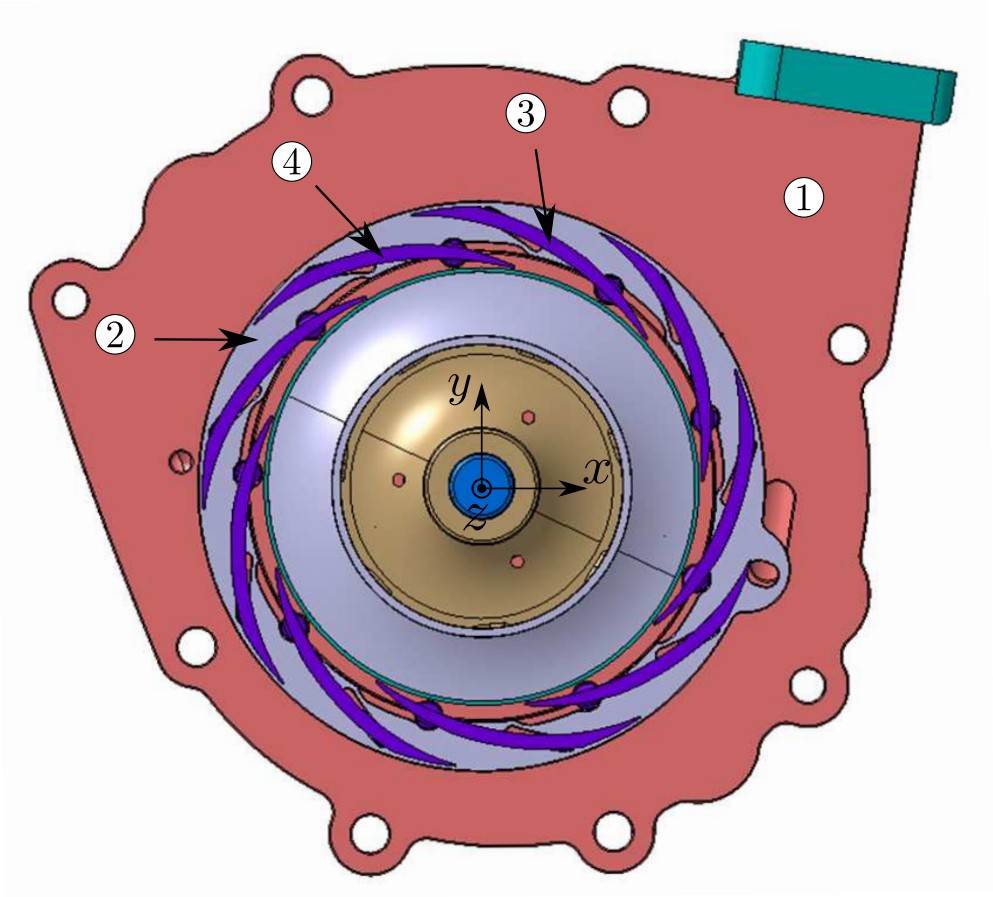


FIGURE 4.6 – Vue de la pompe à débit variable avec toutes les pièces.

◇ le disque de contrôle (2),

◇ les ailettes (3) et (4), voir figure 4.7.

Plusieurs surfaces de substitution doivent être prises en compte pour la modélisation du comportement du mécanisme, voir figures 4.7 et 4.8 :

◇ surfaces planes : $1a, 2a, 2h, 3h_3, 4h_4, 2e_3, 2e_4$.

◇ surfaces cylindriques : $1b, 2b, 1d_3, 3d_3, 1d_4, 4d_4, 3e_3, 4e_4$.

◇ surfaces quelconques : $3i, 4i$.

A noter que les surfaces planes $2e_3$ et $2e_4$ sont en réalité les cotés de deux trous oblongs du disque de contrôle dont les extrémités sont supposées suffisamment éloignées pour qu'il n'y ait pas de possible pénétration de matière.

Un torseur écart est défini pour chaque surface de substitution ainsi que des écarts intrinsèques pour les diamètres des surfaces cylindriques.

Boucles topologiques. Le graphe des liaisons correspondant à l'étude de la pompe est montré figure 4.9. Il y a au total huit liaisons (sans compter celle de la condition fonctionnelle), pour quatre pièces. Le nombre cyclomatique donnant le nombre de boucles topologiques à écrire est égal à $N_{boucles} = 8 - 4 + 1 = 5$, ce qui permet d'écrire 30

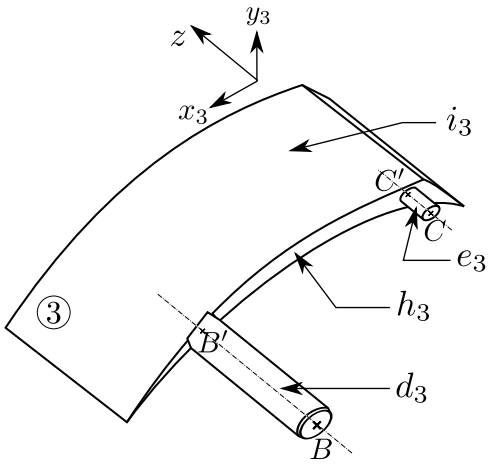


FIGURE 4.7 – Représentation de l'ailette (3) de la pompe. L'ailette (4) est identique, seuls les indices des surfaces et des axes du repère changent.

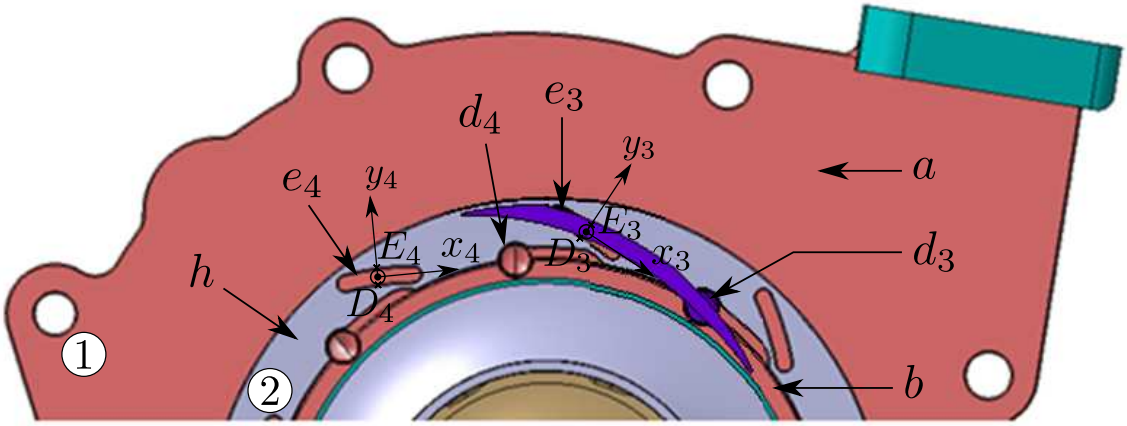


FIGURE 4.8 – Vue de la pompe avec le bâti et le disque de contrôle.

équations de compatibilité. A cause de l'utilisation de repères locaux, l'écriture de ces équations nécessite d'utiliser des matrices de passage pour déterminer l'expression de certains torseurs dans le repère global. Cependant, l'utilisation des repères locaux permet de simplifier l'écriture des contraintes d'interface, en particulier pour les ailettes.

Liaisons géométriques. De nombreuses liaisons sont répertoriées dans le mécanisme de la pompe :

- ◇ la liaison appui plan entre le bâti et le disque de contrôle $1a/2a$: elle est supposée sans jeux (sauf jeux relatif au déplacement cinématique de la liaison : translation suivant les axes $\vec{x}$ et $\vec{y}$ et rotation autour de $\vec{z}$) de sorte que le disque de contrôle est en permanence appuyé sur le bâti. Il n'y a donc pas de contraintes d'interface issues de cette liaison.
- ◇ la liaison pivot glissant entre le bâti et le disque de contrôle $1b/2b$: il est prévu de vérifier la fonctionnalité de la pompe pour un seul réglage du disque de contrôle

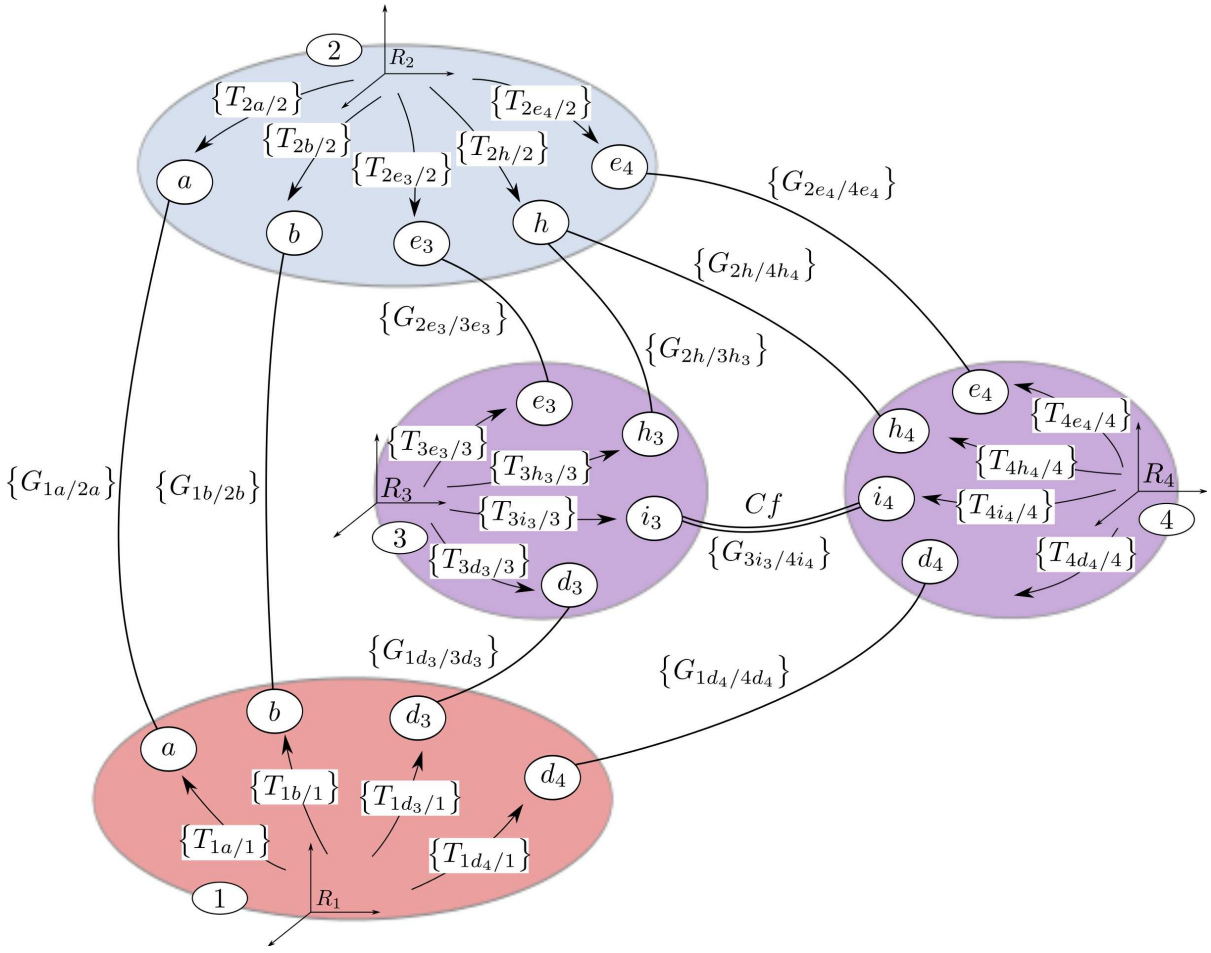


FIGURE 4.9 – Graphe des liaisons de la pompe à débit variable.

donc la rotation du disque de contrôle est fixée dans une position donnée. Cette liaison permet d'écrire deux contraintes d'interface quadratiques qui sont linéarisées suivant la procédure proposée dans la section 2.3.1. De plus, une contrainte d'interface d'égalité C_{i*} permet de fixer la rotation du disque de contrôle.

- ◇ les liaisons pivots glissants entre le bâti et les ailettes $1d_3/3d_3$ et $1d_4/4d_4$: les ailettes peuvent tourner autour de l'axe $\vec{z}$, ce qui permet d'augmenter ou diminuer l'espacement entre les ailettes. Par contre, il n'y a pas de contact possible entre les ailettes et le bâti au niveau de l'extrémité de l'ergot. Les liaisons permettent d'écrire quatre contraintes quadratiques supplémentaires qui sont également linéarisées suivant la procédure de linéarisation.
- ◇ les liaisons appuis plans entre le disque de contrôle et les ailettes $2h/3h_3$ et $2h/4h_4$: ces liaisons sont supposées sans jeux (excepté les jeux relatifs au déplacement cinématique) de sorte que les ailettes sont toujours appuyées sur le disque de contrôle. La rotation des ailettes autour de l'axe $\vec{z}$ est donc toujours possible. Aucune contrainte d'interface n'est issue de cette liaison.
- ◇ les liaisons glissières (réalisées via un ergot entre deux plans) entre le disque de contrôle et les ailettes $2e_3/3e_3$ et $2e_4/4e_4$: l'ouverture des ailettes via le disque de

contrôle s'effectue grâce à l'ergot positionné dans les trous oblongs du disque de contrôle. Ces liaisons entraînent l'écriture au total de huit contraintes d'interface linéaires.

Condition fonctionnelle. L'exigence fonctionnelle du mécanisme concerne l'angle relatif entre les deux ailettes autour de l'axe $\vec{z}$. Cet angle, noté γ_{3i4i}, correspond à la caractéristique fonctionnelle du mécanisme. Le fonctionnement de la pompe est assurée si cet angle reste compris dans un intervalle :

$$\gamma_{3i4i} \in [-r_{\text{seuil}}; r_{\text{seuil}}] \tag{4.10}$$

Il faut donc définir deux conditions fonctionnelles à vérifier :

$$\begin{array}{rcl} C_f^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{g}) & = & r_{\text{seuil}} - \gamma_{3i4i} \geq 0 \\ C_f^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{g}) & = & -r_{\text{seuil}} + \gamma_{3i4i} \geq 0 \end{array} \tag{4.11}$$

Formulation des problèmes d'assemblage et fonctionnel. L'étude de ce mécanisme concerne la vérification de la montabilité et de son fonctionnement. Il faut donc calculer deux probabilités de défaillance, une pour l'assemblage et une pour l'exigence fonctionnelle.

Pour la vérification de l'exigence fonctionnelle, deux conditions fonctionnelles sont définies, il faut donc définir deux problèmes d'optimisation à considérer dans une approche système. Ces deux problèmes sont soumis aux mêmes contraintes :

$$\begin{array}{rlll} R_f^{(k)}(\mathbf{x}) = \min\limits_{\mathbf{g} \in \mathbb{R}^{40}} & C_f^k(\mathbf{x}, \mathbf{g}) & & \\ \text{sous} & C_c^{(j)}(\mathbf{x}, \mathbf{g}) & = 0 & \forall j = \{1, \ldots, 31\} \\ & C_i^{(l)}(\mathbf{x}, \mathbf{g}) & = 0 & \forall l = \{1, \ldots, 6 \times N_d + 8\} \end{array} \tag{4.12}$$

avec $k = \{1, 2\}$.

Les expressions des probabilités de défaillance d'assemblage et fonctionnelle s'écrivent de la façon suivante :

$$\begin{array}{rcl} P_{df} & = & \text{Prob}\left(\bigcup\limits_{k=1}^{2} R_f^{(k)}(\mathbf{X}) \leq 0\right) \\ P_{da} & = & \text{Prob}\left(E_a(\mathbf{X})\right) \end{array} \tag{4.13}$$

où $E_a(\mathbf{x})$ est l'événement suivant : « Pour un vecteur $\mathbf{x}$ donné, il n'existe pas de vecteur jeux $\mathbf{g} \in \mathbb{R}^{40}$ tel que $R_f^{(1)}(\mathbf{x})$ ait une solution ». En l'occurrence, les deux problèmes d'optimisation sont soumis aux mêmes contraintes donc les deux problèmes d'optimisation peuvent être utilisés pour calculer la probabilité de défaillance d'assemblage. Il est choisi d'utiliser le problème d'optimisation $R_f^{(1)}$.

4.4.2 Résultats

La probabilité de défaillance d'assemblage est calculée par la méthode MCO et les procédures itératives EBS et EIC. Pour le calcul de la probabilité défaillance fonctionnelle, la méthode MCO et la méthode de résolution système sont appliquées. Avec la méthode MCO, pour chaque réalisation des variables aléatoires, deux optimisations sont nécessaires pour vérifier les deux conditions fonctionnelles. En pratique, si la première condition fonctionnelle n'est pas respectée, alors le mécanisme n'est pas fonctionnel. Il n'est pas utile de vérifier la deuxième condition fonctionnelle. Dans le cas de la méthode de résolution système, pour pouvoir utiliser la méthode FORM système, il faut développer l'expression de la formulation par la formule de Poincaré :

$$\begin{aligned} P_{df} &= \text{Prob}\left(\bigcup_{k=1}^{2} R_f^{(k)}(\mathbf{X}) \leq 0\right) \\ &= \text{Prob}\left(R_f^{(1)}(\mathbf{X}) \leq 0\right) + \text{Prob}\left(R_f^{(2)}(\mathbf{X}) \leq 0\right) \\ &\quad -\text{Prob}\left(R_f^{(1)}(\mathbf{X}) \leq 0 \cap R_f^{(2)}(\mathbf{X}) \leq 0\right) \end{aligned} \tag{4.14}$$

Néanmoins, les deux événements de l'union sont disjoints car les conditions fonctionnelles se basent sur la même caractéristique fonctionnelle. Cette caractéristique doit rester dans un intervalle donné pour garantir la fonctionnalité de la pompe. Il n'est donc pas possible que les deux conditions soient simultanément non respectées. L'expression de la probabilité de défaillance fonctionnelle peut être simplifiée comme étant la somme des probabilités de défaillance associées à chaque condition fonctionnelle :

$$P_{df} = \text{Prob}\left(R_f^{(1)}(\mathbf{X}) \leq 0\right) + \text{Prob}\left(R_f^{(2)}(\mathbf{X}) \leq 0\right) \tag{4.15}$$

Résultats pour le problème d'assemblage. Les résultats obtenus sur le problème d'assemblage sont présentés dans le tableau 4.6. Les critères d'arrêt pour les procédures EBS et EIC sont fixés tous les deux à 1%. Le nombre de tirages est fixé à $N_{MC} = 10^7$, le coefficient de variation sur le résultat est égal 5.5%.

Méthode	P_{dac} (ppm)	P_{dai} (ppm)	N_d (itérations)	Temps
MCO	12.8	3126	4	2×9.5 h
MCO	32.7	34.9	36	2×64 h
EBS	-	33.2	324 (5)	9.7 h
EIC	33.1	33.3	108 (4)	9.63 h

Tableau 4.6 – Résultats obtenus avec la méthode MCO et les procédures itératives EBS et EIC pour la résolution du problème d'assemblage de la pompe à débit variable. Le temps de calcul pour la méthode MCO est doublée car elle ne permet de calculer qu'une probabilité à la fois.

Les résultats obtenus confirment les observations faites avec les autres applications. Les procédures itératives requièrent un temps de calcul proche de celui requis par la

méthode MCO avec $N_d = 4$ pour le calcul d'une probabilité, environ 9.5h pour cette application. La précision du résultat est très bonne alors qu'il faut compter 64h pour avoir la même précision avec la méthode MCO. La procédure EIC est à nouveau légèrement plus rapide que la procédure EBS. Pourtant, dans le tableau 4.7, le nombre d'appels total à l'algorithme d'optimisation avec la procédure EIC est le double de celui requis avec la procédure EBS. Dans cette application, les résultats montrent clairement qu'il faut diminuer le nombre d'optimisations pour le modèle le plus complexe. La procédure EBS est beaucoup plus impactée en temps de calcul par les 333 résolutions avec le modèle à $N_d = 324$ que la procédure EIC avec 31266 résolutions supplémentaires à $N_d = 4$.

Itération	N_d	$N_{optim.}$ EBS	$N_{optim.}$ EIC	
			Strat. inscrite	Strat. circonscrite
1	4	1×10^7	1×10^7	31266
2	12	31266	31138	417
3	36	545	269	73
4	108	349	22	6
5	324	333		
Total (hors initiale)		32493	63191	

Tableau 4.7 – Nombre d'optimisations requis à chaque itération pour les procédures EBS et EIC pour le problème d'assemblage de la pompe à débit variable. Dans le cas de EIC, le nombre d'appels est partagé en deux, le premier nombre correspond aux évaluations avec la stratégie inscrite et le deuxième avec la stratégie circonscrite.

Résultats pour le problème fonctionnel. Les résultats pour la résolution du problème fonctionnel sont présentés dans le tableau 4.8. Les paramètres de résolution sont :

- ◇ le nombre de linéarisations des contraintes quadratiques fixé à $N_d = 36$ avec une stratégie circonscrite car c'est la stratégie qui fournit un résultat conservatif.
- ◇ le nombre de tirages pour la méthode MCO fixé à $N_{MC} = 10^7$,
- ◇ le nombre de combinaisons dominantes à sélectionner pour la méthode FORM système fixé à $N_{ds} = \{10, 50, 100\}$ afin de voir l'impact sur la précision de la probabilité.

Le nombre de linéarisations N_d est fixé à une seule valeur pour cette étude car le but est de comparer l'efficacité des méthodes MCO et système. En se basant sur l'étude de l'impact de N_d sur la probabilité de défaillance, section 3.2.2.2, le choix de $N_d = 36$ permet d'avoir un résultat suffisamment précis pour que la comparaison des méthodes soit pertinente.

Les résultats montrent que la méthode FORM système permet d'obtenir une estimation de la probabilité très proche de celle obtenue par la méthode de référence MCO. Le temps de calcul par la méthode FORM système est considérablement réduit, environ une dizaine de minutes, alors qu'il faut plus de cinq jours avec la méthode MCO. L'utilisation de cette méthode est très pénalisante du fait d'avoir deux problèmes d'optimisation à résoudre à chaque itération.

FORM système				MCO		
P_{df} (ppm)	N_{ds}	$N_{optim.}$	Temps	P_{df} (ppm)	95%IC (ppm)	Temps
108	10	9200	4.6 min			
86	50	9281	7.3 min	83	2.9	5.3 j
84	100	9341	10 min			

Tableau 4.8 – Résultats obtenus avec la méthode MCO et la méthode FORM système pour la résolution du problème fonctionnel de la pompe à débit variable.

Avec la méthode FORM système, le nombre d'appels à l'algorithme d'optimisation est inférieur à 10000, soit environ 5000 optimisations pour trouver les combinaisons dominantes associées à chaque condition fonctionnelle. L'estimation d'une faible probabilité n'a pas d'influence sur ce nombre. En revanche, il est lié au nombre de conditions fonctionnelles à vérifier.

Le choix du nombre de combinaisons dominantes N_{ds} impacte la précision de la probabilité de défaillance. Il ne faut donc pas en sélectionner un trop faible nombre. Ce nombre dépend du nombre de linéarisations des contraintes quadratiques. Plus le nombre de linéarisations est élevé, plus il faut sélectionner de combinaisons dominantes. Le choix de la valeur de N_{ds} est important. Dans les exemples traités, choisir $N_{ds} > 100$ permet d'avoir un résultat très précis.

Cette application confirme que la méthode proposée permet un gain de temps conséquent pour évaluer la probabilité de défaillance fonctionnelle tout en fournissant un résultat précis.

4.5 Conclusion

Dans cette section, trois applications issues de mécanismes industriels ont été étudiées. Une probabilité de défaillance d'assemblage a été calculée pour les trois mécanismes. Les trois modèles de comportement ont nécessité l'application de la procédure de linéarisation des contraintes quadratiques. Les procédures itératives EBS et EIC ont donc pu être utilisées pour calculer ces probabilités. Les résultats sont comparés avec ceux obtenus avec la méthode MCO. Pour tous les cas étudiés, les deux procédures ont permis de calculer la probabilité de défaillance d'assemblage de façon précise et beaucoup plus rapidement que la méthode MCO pour le même niveau de précision. Le temps de calcul pour les procédures itératives est équivalent au temps nécessaire pour appliquer la méthode MCO avec un faible nombre de linéarisations. Dans ces applications la procédure EIC est légèrement plus efficace que la procédure EBS, les temps de calcul sont très proches voire identiques. Toutefois, la procédure EIC est à privilégier car elle fournit la même borne supérieure de la probabilité que la procédure EBS. De plus, elle converge plus rapidement en faisant moins d'appels à l'optimisation pour des modèles complexes ce qui la rend plus performante dans le cas où l'optimisation pour le modèle complexe est vraiment très coûteux en temps de calcul.

Deux mécanismes ont nécessité le calcul d'une probabilité de défaillance fonctionnelle. La méthode de résolution système a été appliquée et les résultats sont comparés à ceux de la méthode MCO. Pour ces mécanismes, plusieurs conditions fonctionnelles étaient définies ce qui pénalisent d'autant plus la méthode MCO. Les valeurs des probabilités de défaillance obtenues avec la méthode de résolution système sont très proches des valeurs de référence obtenues avec la méthode MCO. Les temps de calcul sont fortement réduits de l'ordre de quelques minutes comparé à plusieurs jours de calculs requis avec la méthode MCO. La méthode de résolution fonctionnelle est très performante mais nécessite que la condition fonctionnelle soit linéaire.

Cette condition de linéarité peut toutefois être obtenue en linéarisant l'expression de la condition fonctionnelle. Pour le cas d'étude de la fiche électrique, quatre conditions fonctionnelles ont été définies. Il s'agissait de vérifier les déplacements du point extrême E du contact mâle suivant les axes $\vec{x}$ et $\vec{y}$. Une solution plus complexe consiste à définir une condition fonctionnelle quadratique contraignant le déplacement de ce point extrême de façon circulaire dans le plan $(E, \vec{x}, \vec{y})$. Afin de pouvoir appliquer la méthode FORM système, il faudrait linéariser cette condition fonctionnelle quadratique en plusieurs conditions fonctionnelles linéaires.

Conclusions et perspectives

L'objectif des travaux de thèse dans le contexte du projet AHTOLA est de développer des méthodes probabilistes pour l'analyse des tolérances des mécanismes hyperstatiques. Ces méthodes doivent pouvoir traiter des systèmes complexes et calculer le niveau de qualité des produits via un indicateur qui est le taux de non conformité (*i.e.* probabilité de défaillance). Le but est d'avoir une modélisation probabiliste des défauts de fabrication afin de pouvoir calculer cet indicateur par des méthodes probabilistes. Les jeux sont cependant non aléatoires afin de correspondre au mieux à la réalité. La pire des configurations des jeux entre les pièces doit être déterminée pour calculer la valeur des jeux. L'évaluation du taux de non conformité doit s'effectuer dans un temps de calcul convenable et réalisable sur des ordinateurs présents dans les bureaux d'études. Pour réaliser cet objectif, les travaux de thèse se sont concentrés sur deux domaines de recherche : l'analyse des tolérances et les méthodes probabilistes. La difficulté est de réussir à relier ces deux domaines afin de pouvoir répondre aux exigences du projet AHTOLA. Les travaux de recherche se sont donc axés sur trois principaux points :

- ◇ la modélisation du comportement du mécanisme hyperstatique (pas d'apport pour ce point),
- ◇ la formulation des expressions des probabilités de défaillance pour l'assemblage et la fonctionnalité,
- ◇ le développement de méthodes de résolution pour évaluer les probabilités de défaillances.

L'objectif est de construire un modèle de comportement probabiliste réaliste afin de pouvoir ensuite appliquer une méthode de résolution probabiliste.

Le premier chapitre de ce mémoire de thèse s'est focalisé sur les approches d'analyse des tolérances et les méthodes probabilistes existantes. Le but est de déterminer quelles sont les meilleures approches et méthodes permettant de calculer un probabilité de défaillance le plus rapidement et précisément possible. Dans le cas de l'analyse des tolérances, l'approche d'accumulation des déplacements correspond aux attentes du projet AHTOLA. Cette technique se base sur l'approche statistique modélisant les écarts géométriques par des variables aléatoires tandis que les jeux sont des variables libres. L'objectif de cette approche est de calculer la probabilité que les conditions d'assemblage et fonctionnelle soient non respectées. Le modèle de comportement se base sur l'utilisation des torseurs des petits déplacements pour modéliser les paramètres (écarts géométriques et jeux). Toutefois, les défauts de forme sont négligés de sorte que les surfaces sont sup-

posées de formes géométriques parfaites. Les dimensions, positions et orientations sont les seuls défauts considérés. Plusieurs types d'équation sont définies afin de modéliser le mécanisme : des équations de compatibilité caractérisant le comportement du mécanisme, des contraintes d'interface modélisant les liaisons entre les différentes surfaces des pièces du mécanisme et des conditions fonctionnelles traduisant les exigences de fonctionnement du mécanisme.

La modélisation du mécanisme basée sur l'accumulation des déplacements et l'approche statistique permet d'utiliser des méthodes probabilistes pour calculer les probabilités de défaillance. Cependant, la difficulté concernant les mécanismes hyperstatiques est la gestion des jeux. En effet, les jeux sont des variables libres qui ne peuvent pas être modélisées par des variables aléatoires afin de représenter au mieux la réalité. Il faut donc tout d'abord déterminer la valeur des jeux pour pouvoir calculer les probabilités de défaillance. Suivant la condition à vérifier, les jeux n'ont pas le même impact. Pour vérifier la condition d'assemblage, il faut trouver une valeur des jeux permettant l'assemblage du mécanisme. Pour le problème fonctionnel, la pire configuration des pièces du mécanisme doit être considérée pour calculer les jeux. Des travaux de recherche antérieurs à cette thèse ont mis au point une formulation basée sur l'utilisation d'un problème d'optimisation à résoudre [Qureshi et al., 2012]. Le but est, pour des écarts géométriques fixés, de minimiser la condition fonctionnelle de façon à trouver la valeur des jeux correspondant au pire des cas. De plus, si le problème d'optimisation n'a pas de solution alors cela signifie que le mécanisme n'est pas montable pour ces écarts géométriques donnés. La méthode de résolution proposée par Qureshi et al. [2012] consiste à coupler une simulation de Monte Carlo avec un algorithme d'optimisation. Cette méthode est cependant très coûteuse en temps de calcul. De plus, il est apparu que l'utilisation d'algorithmes d'optimisation non linéaires ne garantit pas d'obtenir le pire des cas sans avoir des contraintes d'interface non satisfaites, *i.e.* de pénétration de matière.

Une première solution proposée dans les travaux de thèse est de linéariser les équations non linéaires du modèle de comportement afin de pouvoir utiliser un algorithme d'optimisation linéaire. Cette simplification du modèle de comportement n'étant pas sans conséquence sur la précision des probabilités calculées, une étude de son impact a été menée. L'étude montre que la linéarisation a bien évidemment un impact sur la précision de la probabilité. En revanche, suivant la stratégie de linéarisation utilisée, il est possible d'obtenir un résultat conservatif. La probabilité de défaillance n'est donc pas sous-estimée. De plus, il est possible de combiner plusieurs stratégies de linéarisation afin d'obtenir un intervalle de confiance encadrant la probabilité recherchée. Le problème est de savoir quelle densité de linéarisation il faut choisir. Par ailleurs, plus le modèle est densément linéarisé, plus la résolution du problème d'optimisation est longue. Il faut donc trouver un compromis entre le temps de calcul et la précision de la probabilité en réglant la densité de linéarisation au mieux. L'inconvénient avec la méthode classique couplant la simulation de Monte Carlo avec un algorithme d'optimisation (méthode MCO) est qu'il n'est pas possible de déterminer quelle densité de linéarisation garantit d'avoir un résultat précis.

Dans le cas de la vérification de la condition d'assemblage, deux procédures itératives sont proposées. Les deux procédures, basées sur la méthode MCO, permettent de calculer la probabilité de défaillance d'assemblage de façon précise sans avoir à définir la densité de linéarisation et quel que soit l'ordre de grandeur de la probabilité. La première procédure, baptisée EBS, permet d'estimer une borne supérieure de la probabilité recherchée. La seconde procédure, nommée EIC, a pour but de calculer un intervalle de confiance encadrant la probabilité recherchée. Les deux procédures évoluent itérativement en affinant les approximations calculées jusqu'à convergence vers la probabilité réelle. En pratique, les cas traités ont montré que la procédure EIC est légèrement plus efficace car le nombre d'appels à l'algorithme d'optimisation avec le modèle de comportement le plus densément linéarisé est réduit par rapport à la procédure EBC. De ce fait, la procédure EIC est légèrement plus rapide. Toutefois, l'inconvénient de ces deux procédures est la nécessité de réaliser dans un premier temps une simulation de Monte Carlo complète. Bien que ce soit le modèle le moins densément linéarisé qui est utilisé, cette étape requiert un temps de calcul non négligeable.

Pour la vérification des exigences fonctionnelles, des travaux de recherche effectués par Beaucaire et al. [2013] ont montré qu'il est possible de traiter le problème d'estimation de la probabilité de défaillance fonctionnelle comme un problème d'estimation d'une probabilité système. La technique consiste à décomposer le mécanisme en configurations dominantes et à définir des conditions fonctionnelles associées à chacune de ces configurations. La formulation développée par Beaucaire et al. [2013] ne peut cependant pas être utilisée pour des mécanismes complexes ayant de nombreuses configurations à prendre en compte. De plus, les analyses sont restreintes à une étude en deux dimensions. Dans ces travaux de thèse, une nouvelle formulation système est proposée. Cette formulation transforme l'expression initiale de la probabilité en une probabilité d'intersection d'événements, où chaque événement est lié à la condition fonctionnelle d'une configuration dominante. Une procédure de résolution système est proposée pour calculer la probabilité de défaillance fonctionnelle. La première étape de la procédure consiste à déterminer les configurations dominantes parmi toutes les configurations possibles. Pour cela, un algorithme de recherche sélectif issu d'un algorithme proposé par Kim et al. [2013] est utilisé. Lorsque les configurations dominantes sont trouvées, la probabilité est calculée par la méthode FORM système très rapidement. En pratique, cette méthode de résolution est très efficace. Elle permet de calculer en quelques minutes la probabilité de défaillance de l'ordre de quelques *ppm* alors que la méthode de référence MCO nécessite plusieurs jours. L'inconvénient de la méthode système est qu'elle nécessite d'avoir un modèle de comportement linéaire afin de pouvoir transformer la formulation initiale en formulation système. Par ailleurs, le nombre de configurations dominantes à sélectionner dépend du mécanisme étudié. Sélectionner un trop faible nombre de configurations engendrera une erreur d'approximation sur la probabilité mais la probabilité sera toutefois conservative. Au contraire, sélectionner un trop grand nombre de configurations entraine un temps de calcul plus important. A noter que l'augmentation du temps de calcul n'est pas considérable, il est donc préférable d'avoir trop de configurations dominantes plutôt

que pas suffisamment. En pratique, dans les cas étudiés, la sélection d'une centaine de configurations permet d'avoir un résultat précis. Enfin la densité de linéarisation impacte également la précision de la probabilité défaillance. Il peut être nécessaire d'effectuer plusieurs calculs avec des densités de linéarisation différentes pour garantir une précision suffisante de la probabilité. Toutefois, le temps de calcul étant réduit à quelques minutes, vérifier la précision en faisant plusieurs calculs avec la méthode système est moins contraignant que si elle était effectuée avec la méthode MCO.

Perpectives. Réussir à évaluer le niveau de qualité du mécanisme le plus précisément possible et être cohérent avec la réalité de la fabrication est difficile. Les modélisations et méthodes de résolution peuvent toujours être améliorées. Concernant les travaux de thèse, plusieurs pistes d'amélioration peuvent être envisagées à tous les niveaux (modélisation, formulation, méthode) :

- ◇ Actuellement, la modélisation du comportement du mécanisme se base sur une hypothèse forte : les défauts de forme sont négligés. Cette hypothèse implique de modifier la pièce réelle en proposant une version simplifiée des défauts des surfaces fabriquées. Il serait intéressant de pouvoir intégrer ces défauts dans le modèle de comportement afin de pouvoir avoir une modélisation du mécanisme la plus réaliste possible. Par ailleurs, les pièces des mécanismes sont considérées comme indéformables. En pratique, certains mécanismes ont des éléments déformables permettant ainsi la montabilité du mécanisme. La prise en compte des déformations ou de comportement multi-physique dans le modèle de comportement est un axe de recherche important en vue d'une modélisation toujours plus réaliste. Une idée possible pour la prise en compte des déformations consiste à autoriser une légère pénétration de matière dans les contraintes d'interface, *i.e.* $C_i(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{g}}) \leq \epsilon$, en fonction de la rigidité de la pièce.
- ◇ Les écarts géométriques sont modélisés par des variables aléatoires dont les lois sont représentatives du processus de fabrication. Or, la connaissance de ces lois et des paramètres nécessitent un grand nombre de mesures statistiques. C'est un travail à long terme mais nécessaire afin d'obtenir un résultat par les méthodes probabilistes cohérent avec la fabrication. Par ailleurs, les méthodes développées dans ces travaux de thèse utilisent l'ensemble des variables aléatoires pour le calcul des probabilités. Une étape préliminaire visant à rechercher les composantes les plus influentes via une analyse de sensibilité peut être envisagée. Cette étape permettrait de réduire la dimension du problème et ainsi de réduire le temps de calcul sans diminuer la précision du calcul.
- ◇ La formulation système développée pour le problème fonctionnel permet d'utiliser une méthode de résolution système très efficacement. Des recherches ont été menées pour trouver également une formulation système pour le problème d'assemblage, jusqu'alors sans succès. Il faut continuer les recherches dans cette voie. Une telle formulation permettrait d'utiliser une méthode de résolution système tel que FORM système et ainsi de réduire le temps de calcul considérablement.

- ◇ La formulation système développée pour le problème fonctionnel nécessite d'avoir un modèle de comportement linéaire (ou linéarisé). De plus amples recherches pourraient être conduites afin de déterminer si une formulation système pourrait être obtenue à partir d'un modèle non linéaire (condition fonctionnelle non linéaire et/ou contraintes d'interface non linéaires). A plus court terme, des algorithmes itératifs peuvent être développés pour obtenir la probabilité de défaillance de façon précise sans avoir besoin de choisir la densité de linéarisation ou le nombre de configurations dominantes à sélectionner.
- ◇ L'analyse des tolérances permet de vérifier la qualité de la conception pour des tolérances données. La synthèse des tolérances a pour but de déterminer la valeur des tolérances pour un objectif de qualité fixé. Cette technique permet ainsi d'optimiser la conception tout en respectant les exigences de qualité imposées. La méthode de résolution système pour le problème fonctionnel réduit considérablement les temps de calcul, il est donc envisageable de mener des recherches afin de mettre en place la synthèse des tolérances. En parallèle de la synthèse des tolérances, il est intéressant de pouvoir effectuer une analyse de sensibilité des tolérances vis à vis de la probabilité calculée. Cela permettrait d'augmenter la valeur des tolérances non influentes et ainsi réduire les coûts de fabrication.

Bilan

Apports :

- ◇ Étude de l'impact de la linéarisation des contraintes quadratiques sur la précision des probabilités de défaillance d'assemblage et fonctionnelle. Suivant la stratégie adoptée, il est possible d'obtenir un résultat conservatif et/ou de déterminer un intervalle de confiance encadrant la probabilité recherchée.
- ◇ Proposition d'une nouvelle formulation système de la probabilité de défaillance fonctionnelle. La formulation est plus simple que celle proposée par Beaucaire et al. [2013], c'est une intersection d'événements dont les événements sont liés à des configurations particulières du mécanisme.
- ◇ Développement de deux procédures itératives EBS et EIC pour le calcul de la probabilité de défaillance d'assemblage permettant de réduire le temps de calcul par rapport à la méthode de référence MCO (Monte Carlo couplée optimisation).
- ◇ Développement d'une méthode de résolution système utilisant la formulation système pour calculer la probabilité de défaillance fonctionnelle. La méthode inclut la recherche des configurations de défaillance dominantes et la méthode FORM système pour évaluer la probabilité.

Publications dans des revues :

- ◇ A. Dumas, J.-Y. Dantan et N. Gayton. Impact of a behavior model linearization strategy on the tolerance analysis of over-constrained mechanisms. *Computer-Aided Design, sous presse.*
- ◇ A. Dumas, J.-Y. Dantan, N. Gayton, T. Bles et R. Loebl. An iterative statistical tolerance analysis procedure to deal with linearized behavior models. *Journal of Zhejiang University - Science A, sous presse.*
- ◇ A. Dumas, N. Gayton, J.-Y. Dantan et B. Sudret. A new system formulation for the tolerance analysis of overconstrained mechanisms. *Probabilistic Engineering Mechanics, sous presse.*

Publications dans des conférences :

- ◇ A. Dumas, N. Gayton and J.-Y. Dantan. The use of Kriging for the tolerance analysis of complex systems. *11th International Conference on Structural Safety & Reliability*, June 2013, Columbia University, New York, NY.
- ◇ A. Dumas, J.-Y. Dantan and N. Gayton. Analyse des tolérances - Impact de la linéarisation par morceaux du modèle de comportement sur la probabilité de défaillance. *21st Congrès Français de Mécanique*, August 2013, ENSEIRB-MATMECA, Bordeaux.
- ◇ A. Dumas, N. Gayton and J.-Y. Dantan. *The use of Kriging to compute non-conformity rate of a mechanical system.* 21st Congrès Français de Mécanique, August 2013, ENSEIRB-MATMECA, Bordeaux.

◇ A. Dumas, N. Gayton and J.-Y. Dantan. *Développement d'une approche système pour le calcul de probabilité de défaillance de mécanismes hyperstatiques*. 8th Journées Fiabilité des Matériaux & des Structures, April 2014, Irstea, Aix-en-Provence.

◇ A. Dumas, J.-Y. Dantan, N. Gayton, T. Bles and R. Loebl. Tolerance analysis procedure to minimise the approximation error due to the linearisation of the behaviour model. *13th CIRP Conference on Computer Aided-Tolerancing*. May 2014, Hangzhou, China.

Annexe A

Table des notations

A.1 Notations générales

$\mathbf{V}$	Vecteur colonne
${}^t\mathbf{V}$	Vecteur ligne
V_i	i^{e} composante du vecteur $\mathbf{V}$
$[\mathbf{V}]$	Matrice
$\bigcap$ et $\bigcup$	Intersection et union

A.2 Notations relatives à l'analyse des tolérances

x	Écart géométrique
g	jeu
n	Nombre d'écarts géométriques
m	Nombre de jeux
Y	Caractéristique fonctionnelle
C_c	Équation de compatibilité
C_i	Contrainte d'interface
C_f	Condition fonctionnelle
$C_f^{(s_j)}$	Condition fonctionnelle dans la configuration s_j
R_a	Problème d'optimisation pour la condition d'assemblage
R_f	Problème d'optimisation pour la condition fonctionnelle
E_a	Événement définissant la non montabilité
N_{C_c}	Nombre d'équations de compatibilité
N_{C_i}	Nombre de contraintes d'interface
N_s	Nombre de configurations possibles d'un mécanisme
	= Nombre de combinaisons des contraintes actives possibles
N_{as}	Nombre de combinaisons des contraintes actives admissibles
N_{ds}	Nombre de combinaisons des contraintes actives dominantes
N_d	Nombre de linéarisations des contraintes quadratiques
N_{da}	Nombre de discrétisations d'un plan de forme circulaire

A.3 Notations relatives aux méthodes probabilistes

$\mathbf{X}$	Vecteur des variables aléatoires
$\mathbf{x}$	Réalisation du vecteur aléatoire $\mathbf{X}$
$\mathbf{U}$	Vecteur des variables aléatoires standard Gaussiennes
$\mathbf{u}$	Réalisation du vecteur aléatoire standard Gaussien $\mathbf{U}$
$\mathcal{X}^n$	Espace physique à n dimensions
$\mathcal{U}^n$	Espace standard à n dimensions
$C_f(\mathbf{X})$	Fonction de performance dans l'espace physique
$H(\mathbf{U})$	Fonction de performance dans l'espace standard
$\mathcal{D}_f$	Domaine fonctionnelle
$\mathcal{D}_a$	Domaine d'assemblage
$\mathcal{D}_d$	Domaine de défaillance
P_{df}	Probabilité de défaillance fonctionnelle
P_{da}	Probabilité de défaillance d'assemblage
μ_X	Moyenne de X
σ_X	Écart-type de X
N_{MC}	Nombre de tirages pour la simulation de Monte Carlo
$\mathbb{1}_{D_d}$	Fonction indicatrice
$c_{\tilde{P}_d}$	Coefficient de variation de Monte Carlo
Φ	Fonction de répartition de la loi normale
Φ_n	Fonction de répartition de la loi multi-normale en dimension n
ϕ	Fonction densité de la loi normale
ϕ_n	Fonction densité de la loi multi-normale en dimension n
β	Indice de fiabilité
$\boldsymbol{\alpha}$	Cosinus directeur
$[\boldsymbol{\rho}]$	Matrice de corrélation des état-limites
P^*	Point de défaillance le plus probable
$\mathbf{u}^*$	Coordonnées du point de défaillance le plus probable

Annexe B

Application analytique

B.1 Modélisation géométrique

Un modèle géométrique analytique très simple est utilisé pour pouvoir tester les formulations et méthodes proposées. Cette exemple possède deux écarts géométriques (variables aléatoires) x_1 et x_2. Il y a également deux variables jeux g_1 et g_2. Afin de ne pas complexifier le modèle, il ne comporte que des contraintes d'interface. Il est ainsi supposé écrit sous forme réduite, comme expliqué dans la sous-section 2.4.3. Le problème d'optimisation du problème fonctionnel est donné dans l'équation (B.1). Le problème d'assemblage ne peut pas être testé sur cette application car la probabilité de non assemblage est nulle.

$$\begin{aligned} R_f(\mathbf{x}) = \min_{\tilde{\mathbf{g}} \in \mathbb{R}^2} \quad & C_f(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{g}}) = x_1 + x_2 + 1 + g_1 + 2g_2 \\ \text{sous} \quad & C_i^1(\mathbf{x}, \mathbf{g}) = x_1 - 1 - g_1 \leq 0 \\ & C_i^2(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{g}}) = x_2 + 2 - g_2 \leq 0 \\ & C_i^3(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{g}}) = x_1 - x_2 - 2g_1 \leq 0 \\ & C_i^4(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{g}}) = 2x_1 + x_2 + g_1 - 2g_2 \leq 0 \end{aligned} \tag{B.1}$$

B.2 Valeurs des paramètres

Les variables aléatoires suivent une loi normale $X \sim \mathcal{N}(\mu_X, \sigma_X)$. Trois jeux de paramètres sont prévus afin d'obtenir trois ordres de grandeur de probabilité. Les valeurs des paramètres sont données dans le tableau B.1. Les moyennes et écart-types des deux variables aléatoires sont identiques pour chaque jeux de paramètres.

Paramètres	μ_{X_1} μ_{X_2}	σ_{X_1} σ_{X_2}
1	0	1
2	0	0.5
3	0	0.4

Tableau B.1 – Valeurs des trois jeux de paramètres des variables aléatoires de l'appplication analytique.

Annexe C

Application appui plan et deux goupilles

C.1 Modélisation géométrique

La construction du modèle de comportement d'un exemple académique étudié en trois dimensions est détaillée dans cette annexe. La figure C.1 représente le mécanisme à modéliser, le graphe des liaisons associé est illustré dans la figure C.2. Le mécanisme est composé de quatre pièces : un socle (2), deux goupilles (3) et (4) et un couvercle (1). On suppose que les deux goupilles (3) et (4) sont encastrées dans le socle (2). Les goupilles et le socle font en réalité partis du même sous-système, il n'y a donc que deux pièces en mouvement relatif. La liaison appui plan du socle (2) avec le couvercle (1) est supposée parfaite. Seuls les jeux relatifs au déplacement cinématique de la liaison sont considérés. Le mécanisme est supposé fonctionnel si le déplacement du couvercle (1) par rapport au socle (2) calculé au point G ne dépasse pas une valeur maximale. Le fait de considérer du jeu entre les goupilles et le couvercle rend ce mécanisme hyperstatique. Le modèle de comportement est décrit ci-dessous étape par étape.

C.1.1 Points et coordonnées

Le point A est utilisé comme point d'origine pour localiser les autres points. Leurs coordonnées sont paramétrées par des variables l_i, $i = 1, \ldots, 11$, dans le repère $R_1 = (A, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$. Ces points sont supposés être nominalement confondus, il n'y a pas à ce niveau de différenciation entre le point A de la pièce (1) et le point A de la pièce (2) par exemple. La prise en compte des différences se fait grâce aux écarts géométriques

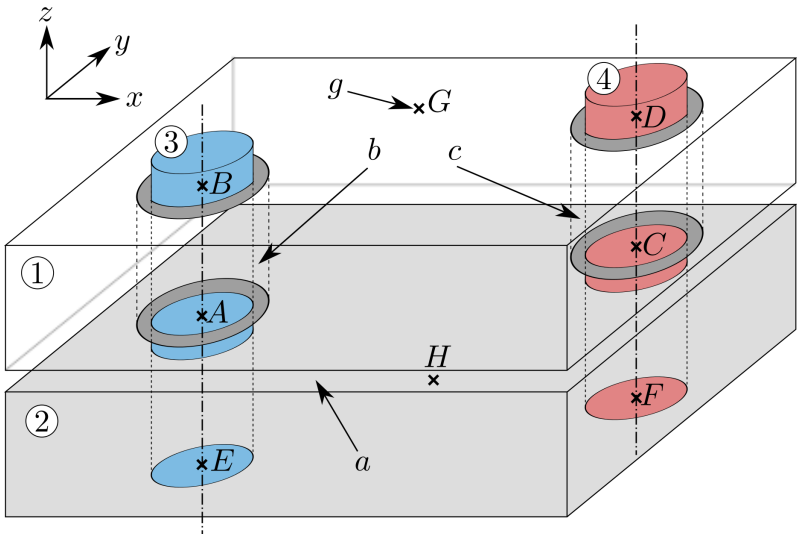


FIGURE C.1 – Mécanisme appui plan et deux goupilles vu du dessus étudié en trois dimensions.

modélisés par les torseurs écarts.

$$\overrightarrow{AC} = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ 0 \end{bmatrix} \overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_3 \end{bmatrix} \overrightarrow{CD} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_4 \end{bmatrix} \overrightarrow{AE} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -l_5 \end{bmatrix} \overrightarrow{CF} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -l_6 \end{bmatrix} \overrightarrow{AG} = \begin{bmatrix} l_7 \\ l_8 \\ l_9 \end{bmatrix} \overrightarrow{AH} = \begin{bmatrix} l_{10} \\ l_{11} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{(C.1)}$$

C.1.2 Définition des écarts géométriques

Les deux types d'écarts géométriques sont à prendre en compte pour ce mécanisme, les surfaces de substitution sont listées ci-dessous :

- ◇ surface plane a,
- ◇ surface cylindrique b,
- ◇ surface cylindrique c,
- ◇ surface fonctionnelle g.

Les variations des diamètres des goupilles et des alésages des surfaces b et c par rapport à leurs dimensions théoriques sont modélisées par des écarts géométriques intrinsèques :

- ◇ d_{1b} : écart intrinsèque du diamètre du trou de goupille du couvercle (1) au niveau de la surface b.
- ◇ d_{3b} : écart intrinsèque du diamètre de la goupille (3).
- ◇ d_{1c} : écart intrinsèque du diamètre du trou de goupille du couvercle (1) au niveau de la surface c.
- ◇ d_{4c} : écart intrinsèque du diamètre de la goupille (4).

Chaque surface étant associée à deux pièces, il y a deux torseurs écarts à considérer pour chaque surface, soit au total huit. Tous les torseurs sont exprimés dans la même base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, par contre leurs points d'application sont différents :

$$\{T_{1b/1}\} = \begin{Bmatrix} \alpha_{1b1} & u_{1b1} \\ \beta_{1b1} & v_{1b1} \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_A \quad \{T_{2b/2}\} = \begin{Bmatrix} \alpha_{2b2} & u_{2b2} \\ \beta_{2b2} & v_{2b2} \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_A \quad \{T_{1a/1}\} = \begin{Bmatrix} \alpha_{1a1} & 0 \\ \beta_{1a1} & 0 \\ 0 & w_{1a1} \end{Bmatrix}_A$$

$$\{T_{2a/2}\} = \begin{Bmatrix} \alpha_{2a2} & 0 \\ \beta_{2a2} & 0 \\ 0 & w_{2a2} \end{Bmatrix}_A \quad \{T_{1c/1}\} = \begin{Bmatrix} \alpha_{1c1} & u_{1c1} \\ \beta_{1c1} & v_{1c1} \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_C \quad \{T_{2c/2}\} = \begin{Bmatrix} \alpha_{2c2} & u_{2c2} \\ \beta_{2c2} & v_{2c2} \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_C$$

$$\{T_{1g/1}\} = \begin{Bmatrix} \alpha_{1g1} & u_{1g1} \\ \beta_{1g1} & v_{1g1} \\ \gamma_{1g1} & w_{1g1} \end{Bmatrix}_G \quad \{T_{2g/2}\} = \begin{Bmatrix} \alpha_{2g2} & u_{2g2} \\ \beta_{2g2} & v_{2g2} \\ \gamma_{2g2} & w_{2g2} \end{Bmatrix}_G$$

C.1.3 Définition des jeux

Les liaisons à considérer sont l'appui plan entre (1) et (2) et les pivots glissants des goupilles (3) et (4) dans leurs logements du couvercle (1). La liaison appui plan est supposé parfaite donc le torseur est de type glissant, seuls les déplacements cinématiques sont présents. Les jeux au niveau des goupilles sont supposés flottants donc les torseurs sont complets. Par contre, d'après l'hypothèse d'encastrement des goupilles (3) et (4) dans le socle (4), les jeux entre ces liaisons sont nulles. Les expressions des torseurs jeux non nuls sont données ci-dessous :

$$\{G_{1a/2a}\} = \begin{Bmatrix} 0 & u_{1a2a} \\ 0 & v_{1a2a} \\ \gamma_{1a2a} & 0 \end{Bmatrix}_A \quad \{G_{3b/1b}\} = \begin{Bmatrix} \alpha_{3b1b} & u_{3b1b} \\ \beta_{3b1b} & v_{3b1b} \\ \gamma_{3b1b} & w_{3b1b} \end{Bmatrix}_A \quad \{G_{4c/1c}\} = \begin{Bmatrix} \alpha_{4c1c} & u_{4c1c} \\ \beta_{4c1c} & v_{4c1c} \\ \gamma_{4c1c} & w_{4c1c} \end{Bmatrix}_C \tag{C.2}$$

C.1.4 Définition du torseur jeu fonctionnel

D'un point de vue fonctionnel, on s'intéresse au déplacement maximal du couvercle par rapport à l'ensemble socle et goupilles. Cela se traduit par l'étude du déplacement du point G, il ne doit pas dépasser une valeur maximale afin de garantir le bon fonctionnement du mécanisme. Dans cet exemple il est choisi de s'intéresser à la somme du déplacement suivant les deux axes $\vec{x}$ et $\vec{y}$, le torseur fonctionnel du mécanisme contient donc uniquement les composantes de translation u et v. Elles correspondent aux carac-

téristiques fonctionnelles du mécanisme.

$$\{G_{2g/1g}\} = \left\{ \begin{array}{cc} - & u_{2g1g} \\ - & v_{2g1g} \\ - & - \end{array} \right\}_G \tag{C.3}$$

Une fois que tous les torseurs caractérisant le mécanisme sont définis, il est possible de schématiser le mécanisme via le graphe des liaisons et écarts, il est montré figure C.2.

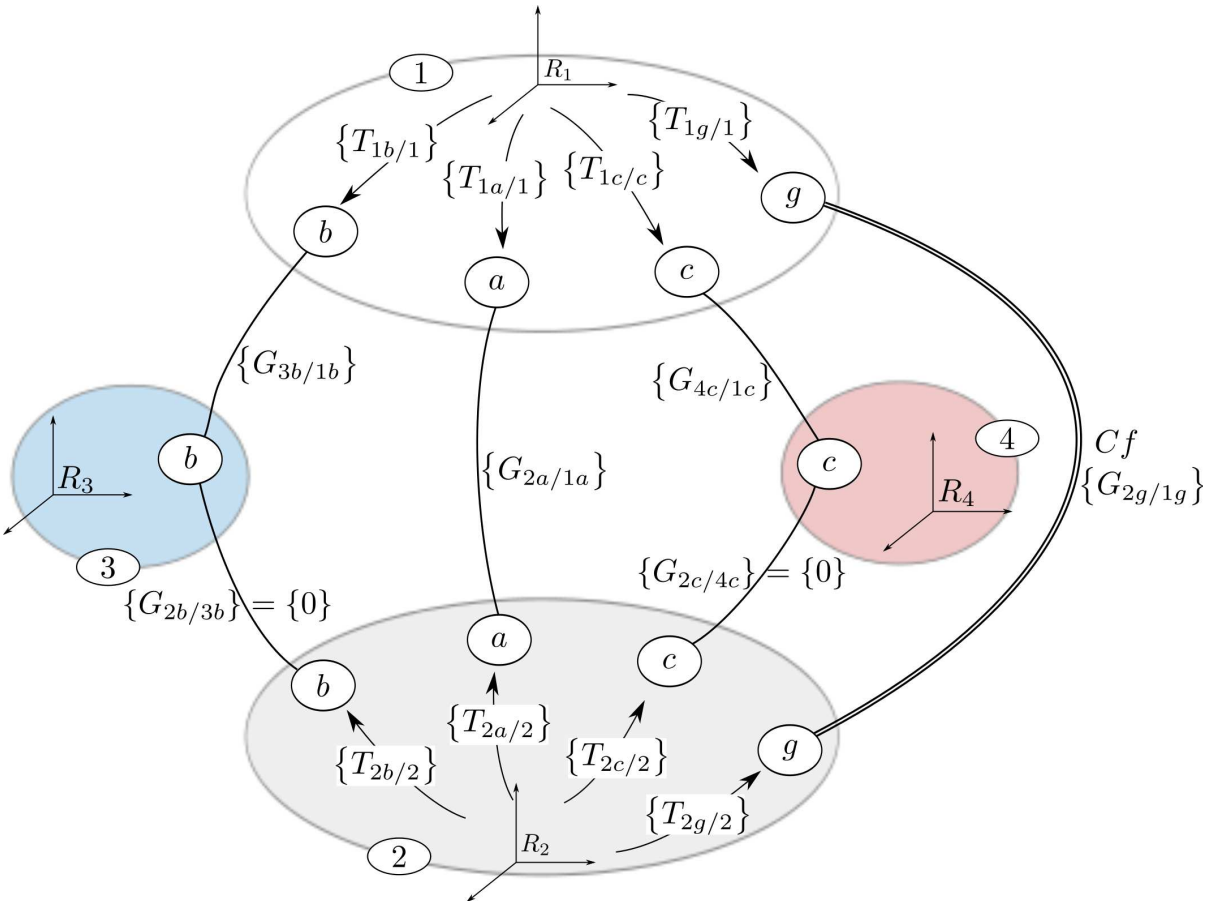


FIGURE C.2 – Graphe des liaisons et des écarts représentatif du mécanisme appui plan et deux goupilles étudié en trois dimensions.

C.1.5 Équations de compatibilité

Les équations de compatibilité sont les équations $C_c(\mathbf{x}, \mathbf{g}) = 0$, elles sont obtenues en écrivant l'égalité à zéro des boucles topologiques du mécanisme. Dans cet exemple, il y a cinq liaisons et quatre pièces, le nombre cyclomatique de boucles à écrire est donné par la formule équation (1.5) : $N_{boucles} = 5 - 4 + 1 = 2$. Il y a donc deux boucles à écrire. Les boucles étudiées sont les boucles (1)/(2)/(3) et (1)/(3)/(2)/(4). Chacune de ces boucles fournissent 6 équations, il y a donc un total de 12 équations de compatibilité.

Boucle (1)/(2)/(3)**, écrite au point** A **:**

$$\begin{aligned}\left\{T_{1/1}\right\}_A &= \{0\} \\ &= \left\{T_{1/1b}\right\} + \left\{G_{1b/3b}\right\} + \left\{G_{3b/2b}\right\} + \left\{T_{2b/2}\right\} + \left\{T_{2/2a}\right\} + \left\{G_{2a/1a}\right\} + \left\{T_{1a/1}\right\}\end{aligned} \tag{C.4}$$

Tous les torseurs intervenants dans l'équation sont écrits au point A. Les équations de compatibilités sont :

$$\begin{aligned}
C_c^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{g}) &= -\alpha_{1b1} - \alpha_{3b1b} + \alpha_{2b2} - \alpha_{2a2} + \alpha_{1a1} = 0 \\
C_c^{(2)}(\mathbf{x},\mathbf{g}) &= -\beta_{1b1} - \beta_{3b1b} + \beta_{2b2} - \beta_{2a2} + \beta_{1a1} = 0 \\
C_c^{(3)}(\mathbf{x},\mathbf{g}) &= -\gamma_{3b1b} - \gamma_{1a2a} = 0 \\
C_c^{(4)}(\mathbf{x},\mathbf{g}) &= -u_{1b1} - u_{3b1b} + u_{2b2} - u_{1a2a} = 0 \\
C_c^{(5)}(\mathbf{x},\mathbf{g}) &= -v_{1b1} - v_{3b1b} + v_{2b2} - v_{1a2a} = 0 \\
C_c^{(6)}(\mathbf{x},\mathbf{g}) &= -w_{3b1b} - w_{2a2} + w_{1a1} = 0
\end{aligned} \tag{C.5}$$

où $\mathbf{x}$ est le vecteur contenant toutes les composantes des torseurs écarts et $\mathbf{g}$ est le vecteur contenant toutes les composantes des torseurs jeux.

Boucle (1)/(3/(2)/(4)**, écrite au point** A **:**

$$\begin{aligned}\left\{T_{1/1}\right\}_A &= \{0\} \\ &= \left\{T_{1/1b}\right\} + \left\{G_{1b/3b}\right\} + \left\{G_{3b/2b}\right\} + \left\{T_{2b/2}\right\} \\ &= +\left\{T_{2/2c}\right\} + \left\{G_{2c/4c}\right\} + \left\{G_{4c/1c}\right\} + \left\{T_{1c/1}\right\}\end{aligned} \tag{C.6}$$

Les torseurs $\left\{T_{2/2c}\right\}$, $\left\{G_{4c/1c}\right\}$ et $\left\{T_{1c/1}\right\}$ sont écrits au point C, il faut donc écrire ces torseurs au point A grâce à la relation de Varignon (1.1). Les équations de compatibilités sont :

$$\begin{aligned}
C_c^{(7)}(\mathbf{x},\mathbf{g}) &= -\alpha_{1b1} - \alpha_{3b1b} + \alpha_{2b2} - \alpha_{2c2} + \alpha_{4c1c} + \alpha_{1c1} = 0 \\
C_c^{(8)}(\mathbf{x},\mathbf{g}) &= -\beta_{1b1} - \beta_{3b1b} + \beta_{2b2} - \beta_{2c2} + \beta_{4c1c} + \beta_{1c1} = 0 \\
C_c^{(9)}(\mathbf{x},\mathbf{g}) &= -\gamma_{3b1b} + \gamma_{4c1c} = 0 \\
C_c^{(10)}(\mathbf{x},\mathbf{g}) &= -u_{1b1} - u_{3b1b} + u_{2b2} - u_{2c2} + u_{4c1c} + l_2\gamma_{4c1c} + u_{1c1} = 0 \\
C_c^{(11)}(\mathbf{x},\mathbf{g}) &= -v_{1b1} - v_{3b1b} + v_{2b2} - v_{2c2} + v_{4c1c} - l_1\gamma_{4c1c} + v_{1c1} = 0 \\
C_c^{(12)}(\mathbf{x},\mathbf{g}) &= -w_{3b1b} - l_1\beta_{2c2} + l_2\alpha_{2c2} + w_{4c1c} + l_1\beta_{4c1c} - l_2\alpha_{4c1c} + l_1\beta_{1c1} - l_2\alpha_{1c1} = 0
\end{aligned} \tag{C.7}$$

où $\mathbf{x}$ est le vecteur contenant toutes les composantes des torseurs écarts et $\mathbf{g}$ est le vecteur contenant toutes les composantes des torseurs jeux.

C.1.6 Contraintes d'interface

Le mécanisme possède deux liaisons où des contraintes d'interface doivent être écrites, il s'agit des liaisons pivots entre les goupilles et leurs logement $1b/3b$ et $1c/4c$. Les deux conditions de non interpénétration pour les deux liaisons sont explicitées ci-dessous.

Non interpénétration de $1b/3b$**.** Cette condition se traduit par les inégalités suivantes :

$$\overrightarrow{D_{3b/1b,A}} \cdot \vec{n} \leq \frac{d_{1b} - d_{3b}}{2} \tag{C.8}$$

$$\overrightarrow{D_{3b/1b,B}} \cdot \vec{n} \leq \frac{d_{1b} - d_{3b}}{2} \tag{C.9}$$

où $\overrightarrow{D_{3b/1b,A}}$ est le déplacement possible entre les surfaces $1b$ et $3b$ au point A sans interpénétration de matière et $\vec{n}$ est un vecteur normal à l'axe de la goupille. Ce déplacement doit être inférieur à la différence des rayons des deux goupilles. Dans le cas de la liaison pivot cela se traduit par l'inéquation quadratique $C_i^{(1)}$ donnée équation (C.10). La figure C.3 représente sur le mécanisme la zone de déplacement admissible de la goupille caractérisée par la contrainte $C_i^{(1)}$.

$$\begin{aligned} C_i^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{g}) = & \quad u_{3b1b}^2 + v_{3b1b}^2 - \left(\frac{d_{1b} - d_{3b}}{2}\right)^2 \leq 0 \\ C_i^{(2)}(\mathbf{x},\mathbf{g}) = & \quad (u_{3b1b} + l_3 b_{3b1b})^2 + (v_{3b1b} - l_3 a_{3b1b})^2 - \left(\frac{d_{1b} - d_{3b}}{2}\right)^2 \leq 0 \end{aligned} \tag{C.10}$$

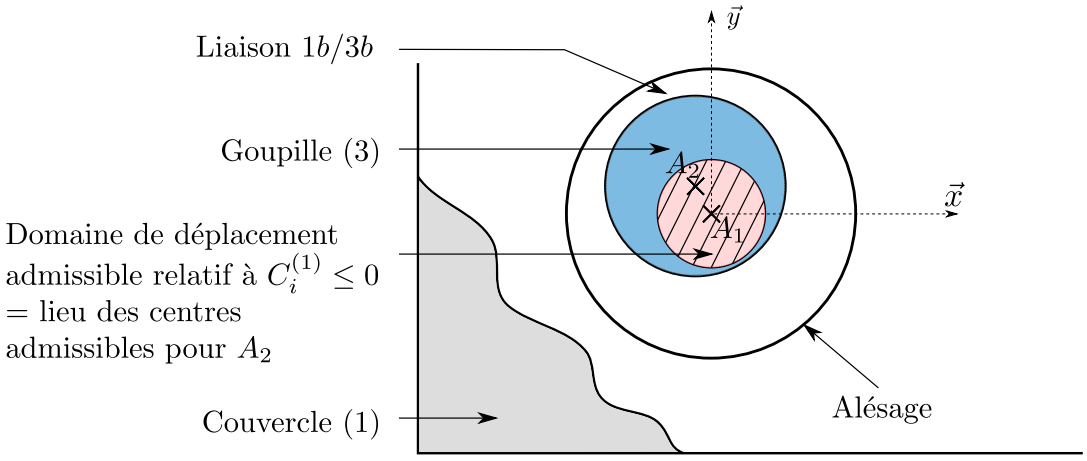


FIGURE C.3 – Déplacement admissible de la goupille dans son logement sans interpénétration. Le schéma montre un zoom sur la liaison $1b/3b$ avec des écarts volontairement agrandis. La zone rouge hachurée correspond à la zone admissible des déplacements sans interpénétration de matière entre le couvercle et la goupille. Les points A_1 et A_2 représentent respectivement le point A pour le couvercle (1) et la goupille (3) avec prise en compte des écarts géométriques, ces deux points étant nominalement confondus.

Non interpénétration de $1c/4c$**.** Les expressions des contraintes d'interface sont obtenues de la même manière que précédemment. Il s'agit de limiter le déplacement possible

entre les surfaces $1c$ et $4c$ au point C et D du mécanisme montré figure C.1 :

$$\begin{array}{rcll} C_i^{(3)}(\mathbf{x},\mathbf{g}) = & u_{4c1c}^2 + v_{4c1c}^2 - \left(\dfrac{d_{1c}-d_{4c}}{2}\right)^2 & \leq 0 \\ C_i^{(4)}(\mathbf{x},\mathbf{g}) = & (u_{4c1c} + l_4 b_{4c1c})^2 + (v_{4c1c} - l_4 a_{4c1c})^2 - \left(\dfrac{d_{1c}-d_{4c}}{2}\right)^2 & \leq 0 \end{array} \tag{C.11}$$

C.1.7 Condition fonctionnelle

Pour prendre en compte la condition fonctionnelle C_f, il faut écrire les expressions des équations liant les caractéristiques fonctionnelles aux autres paramètres (écarts et jeux). Pour cela, une boucle topologique du mécanisme passant par la condition fonctionnelle doit être écrite. En l'occurrence, la boucle $(1)/(3)/(2)/C_f$ est utilisée. Elle est écrite au point G parce qu'il est ainsi plus facile d'extraire une expression des caractéristiques fonctionnelles u_{2g1g} et v_{2g1g} si besoin. L'expression de la boucle en fonction des torseurs des petits déplacements est donnée ci-dessous :

$$\begin{array}{rcl} \left\{T_{1/1}\right\}_G & = & \{0\} \\ & = & \left\{T_{1/1b}\right\} + \left\{G_{1b/3b}\right\} + \left\{G_{3b/2b}\right\} + \left\{T_{2b/2}\right\} + \left\{T_{2/2g}\right\} + \left\{G_{2g/1g}\right\} + \left\{T_{1g/1}\right\} \end{array} \tag{C.12}$$

Comme précédemment, les torseurs $\left\{T_{1/1b}\right\}$, $\left\{G_{1b/3b}\right\}$ et $\left\{T_{2b/2}\right\}$ sont définis au point A, ils sont donc réécrits au point G via la relation de Varignon, équation (1.1). Les projections suivants les deux axes de translation permettent d'obtenir deux équations de compatibilité supplémentaires liant les deux jeux fonctionnels u_{2g1g} et v_{2g1g} aux autres paramètres :

$$\begin{array}{rll} C_c^{(13)}(\mathbf{x},\mathbf{g}) = & -u_{1b1} - l_9\beta_{1b1} - u_{3b1b} + l_8\gamma_{3b1b} - l_9\beta_{3b1b} + u_{2b2} & \\ & +l_9\beta_{2b2} - u_{2g2} + u_{2g1g} + u_{1g1} & = 0 \\ C_c^{(14)}(\mathbf{x},\mathbf{g}) = & -v_{1b1} + l_9\alpha_{1b1} - v_{3b1b} + l_9\alpha_{3b1b} - l_7\gamma_{3b1b} + v_{2b2} & \\ & -l_9\alpha_{2b2} - v_{2g2} + v_{2g1g} + v_{1g1} & = 0 \end{array} \tag{C.13}$$

La caractéristique fonctionnelle correspond à la somme des jeux $u_{2g1g} + v_{2g1g}$. Grâce aux deux équations précédemment écrites, il est possible de connaitre l'expression de la caractéristique en fonction des autres paramètres si besoin. Sinon, il suffit d'intégrer les équations de compatibilité obtenues au modèle de comportement. Cette caractéristique fonctionnelle ne doit pas dépasser une valeur maximale, notée d_{max}, afin de garantir le bon fonctionnement du mécanisme. L'expression de la condition fonctionnelle est donnée équation (C.14).

$$C_f(\mathbf{x},\mathbf{g}) = d_{max} - (u_{2g1g} + v_{2g1g}) \tag{C.14}$$

C.1.8 Calcul des composantes de rotation

Les composantes de rotation des torseurs écarts des goupilles ne suivent pas directement une loi de probabilité. Elles sont en réalité calculées en fonction des déplacements

tirés aléatoirement au sommet et à la base des goupilles. Le but est d'avoir un modélisation des écarts géométriques plus cohérente avec un alésage réel. La même technique est utilisée pour les composantes de rotation des plans en utilisant les déplacements de trois points du plan. Les expressions des composantes de rotations sont les suivantes :

$$\begin{aligned}
\alpha_{1a1} &= \frac{l_1}{l_1 l_{11} - l_2 l_{10}} w_{1a1,H} + \frac{l_{10} - l_1}{l_1 l_{11} - l_2 l_{10}} w_{1a1} - \frac{l_{10}}{l_1 l_{11} - l_2 l_{10}} w_{1a1,C} \\
\beta_{1a1} &= \frac{l_2}{l_1 l_{11} - l_2 l_{10}} w_{1a1,H} + \frac{l_{11} - l_2}{l_1 l_{11} - l_2 l_{10}} w_{1a1} - \frac{l_{11}}{l_1 l_{11} - l_2 l_{10}} w_{1a1,C} \\
\alpha_{2a2} &= \frac{l_1}{l_1 l_{11} - l_2 l_{10}} w_{2a2,H} + \frac{l_{10} - l_1}{l_1 l_{11} - l_2 l_{10}} w_{2a2} - \frac{l_{10}}{l_1 l_{11} - l_2 l_{10}} w_{2a2,C} \\
\beta_{2a2} &= \frac{l_2}{l_1 l_{11} - l_2 l_{10}} w_{2a2,H} + \frac{l_{11} - l_2}{l_1 l_{11} - l_2 l_{10}} w_{2a2} - \frac{l_{11}}{l_1 l_{11} - l_2 l_{10}} w_{2a2,C} \\
\beta_{1b1} &= \frac{u_{1b1,B} - u_{1b1}}{l_3} \\
\alpha_{1b1} &= \frac{v_{1b1} - v_{1b1,B}}{l_3} \\
\beta_{2b2} &= \frac{-u_{2b2,E} + u_{2b2}}{l_5} \\
\alpha_{2b2} &= \frac{-v_{2b2} + v_{2b2,E}}{l_5} \\
\beta_{1c1} &= \frac{u_{1c1,D} - u_{1c1}}{l_4} \\
\alpha_{1c1} &= \frac{v_{1c1} - v_{1c1,D}}{l_4} \\
\beta_{2c2} &= \frac{-u_{2c2,F} + u_{2c2}}{l_6} \\
\alpha_{2c2} &= \frac{-v_{2c2} + v_{2c2,F}}{l_6}
\end{aligned} \tag{C.15}$$

Cette étape implique de considérer d'autres écarts géométriques comme variables aléatoires à la place des composantes de rotation. Ce sont des écarts géométriques de déplacements appliqués en point particulier. Ils sont listés ci-dessous :

$$\begin{bmatrix} u_{1a1,C} & u_{2a2,C} & u_{1b1,B} & u_{1c1,D} & u_{1a1,H} & u_{2a2,H} & u_{2b2,E} & u_{2c2,F} \\ v_{1a1,C} & v_{2a2,C} & v_{1b1,B} & v_{1c1,D} & v_{1a1,H} & v_{2a2,H} & v_{2b2,E} & v_{2c2,F} \end{bmatrix}$$

C.1.9 Formulation

En se basant sur l'ensemble des équations et inéquations écrites pour modéliser le comportement du mécanisme, la formulation du problème fonctionnelle et donc d'assemblage (voir sous-section 2.2.2) s'écrit de la façon suivante :

$$P_{df} = \text{Prob}\left(R_f(\mathbf{X}) \leq 0\right) \tag{C.16}$$

$$P_{da} = \text{Prob}\left(E_a(\mathbf{X})\right) \tag{C.17}$$

avec

$$\begin{array}{rlll}
R_f(\mathbf{x}) = \min\limits_{\mathbf{g}\in\mathbb{R}^{17}} & C_f(\mathbf{x},\mathbf{g}) = & d_{max} - (u_{2g1g} + v_{2g1g}) & \\
\text{sous} & C_c^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{g}) = & -\alpha_{1b1} - \alpha_{3b1b} + \alpha_{2b2} - \alpha_{2a2} + \alpha_{1a1} & = 0 \\
& C_c^{(2)}(\mathbf{x},\mathbf{g}) = & -\beta_{1b1} - \beta_{3b1b} + \beta_{2b2} - \beta_{2a2} + \beta_{1a1} & = 0 \\
& C_c^{(3)}(\mathbf{x},\mathbf{g}) = & -\gamma_{3b1b} - \gamma_{1a2a} & = 0 \\
& C_c^{(4)}(\mathbf{x},\mathbf{g}) = & -u_{1b1} - u_{3b1b} + u_{2b2} - u_{1a2a} & = 0 \\
& C_c^{(5)}(\mathbf{x},\mathbf{g}) = & -v_{1b1} - v_{3b1b} + v_{2b2} - v_{1a2a} & = 0 \\
& C_c^{(6)}(\mathbf{x},\mathbf{g}) = & -w_{3b1b} - w_{2a2} + w_{1a1} & = 0 \\
& C_c^{(7)}(\mathbf{x},\mathbf{g}) = & -\alpha_{1b1} - \alpha_{3b1b} + \alpha_{2b2} - \alpha_{2c2} + \alpha_{4c1c} + \alpha_{1c1} & = 0 \\
& C_c^{(8)}(\mathbf{x},\mathbf{g}) = & -\beta_{1b1} - \beta_{3b1b} + \beta_{2b2} - \beta_{2c2} + \beta_{4c1c} + \beta_{1c1} & = 0 \\
& C_c^{(9)}(\mathbf{x},\mathbf{g}) = & -\gamma_{3b1b} + \gamma_{4c1c} & = 0 \\
& C_c^{(10)}(\mathbf{x},\mathbf{g}) = & -u_{1b1} - u_{3b1b} + u_{2b2} - u_{2c2} + u_{4c1c} + l_2\gamma_{4c1c} + u_{1c1} & = 0 \\
& C_c^{(11)}(\mathbf{x},\mathbf{g}) = & -v_{1b1} - v_{3b1b} + v_{2b2} - v_{2c2} + v_{4c1c} - l_1\gamma_{4c1c} + v_{1c1} & = 0 \\
& C_c^{(12)}(\mathbf{x},\mathbf{g}) = & -w_{3b1b} - l_1\beta_{2c2} + l_2\alpha_{2c2} + w_{4c1c} + l_1\beta_{4c1c} & \\
& & -l_2\alpha_{4c1c} + l_1\beta_{1c1} - l_2\alpha_{1c1} & = 0 \\
& C_c^{(13)}(\mathbf{x},\mathbf{g}) = & -u_{1b1} - l_9\beta_{1b1} - u_{3b1b} + l_8\gamma_{3b1b} - l_9\beta_{3b1b} + u_{2b2} & \\
& & +l_9\beta_{2b2} - u_{2g2} + u_{2g1g} + u_{1g1} & = 0 \\
& C_c^{(14)}(\mathbf{x},\mathbf{g}) = & -v_{1b1} + l_9\alpha_{1b1} - v_{3b1b} + l_9\alpha_{3b1b} - l_7\gamma_{3b1b} + v_{2b2} & \\
& & -l_9\alpha_{2b2} - v_{2g2} + v_{2g1g} + v_{1g1} & = 0 \\
& C_i^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{g}) = & u_{3b1b}^2 + v_{3b1b}^2 - \left(\dfrac{d_{1b} - d_{3b}}{2}\right)^2 & \leq 0 \\
& C_i^{(2)}(\mathbf{x},\mathbf{g}) = & (u_{3b1b} + l_3 b_{3b1b})^2 + (v_{3b1b} - l_3 a_{3b1b})^2 - \left(\dfrac{d_{1b} - d_{3b}}{2}\right)^2 & \leq 0 \\
& C_i^{(3)}(\mathbf{x},\mathbf{g}) = & u_{4c1c}^2 + v_{4c1c}^2 - \left(\dfrac{d_{1c} - d_{4c}}{2}\right)^2 & \leq 0 \\
& C_i^{(4)}(\mathbf{x},\mathbf{g}) = & (u_{4c1c} + l_4 b_{4c1c})^2 + (v_{4c1c} - l_4 a_{4c1c})^2 - \left(\dfrac{d_{1c} - d_{4c}}{2}\right)^2 & \leq 0
\end{array} \tag{C.18}$$

où $\mathbf{g} = \{u_{1a2a}, v_{1a2a}, \gamma_{1a2a}, u_{1b3b}, v_{1b3b}, \gamma_{1b3b}, u_{1c4c}, v_{1c4c}\}$ dont u_{1c4c} et v_{1c4c} sont les jeux de la caractéristique fonctionnelle et les écarts géométriques sont :
$\mathbf{x} = \{u_{1a1}, v_{1a1}, u_{1b1}, v_{1b1}, u_{1c1}, v_{1c1}, \gamma_{1c1}, u_{4a4}, v_{4a4}, u_{4b4}, v_{4b4}, u_{4c4}, v_{4c4}, \gamma_{4c4}\}$ et avec $E_a(\mathbf{x})$ l'évènement suivant : « Pour un vecteur $\mathbf{x}$ donné, il n'existe pas de vecteur jeux $\mathbf{g} \in \mathbb{R}^17$ tel que $R_f(\mathbf{x})$ ait une solution ».

C.2 Valeurs des paramètres

Les longueurs nominales sont données dans le tableau C.1.

l_1	l_2	l_3	l_4	l_5	l_6	l_7	l_8	l_9	l_{10}	l_{11}
100	40	30	30	20	20	120	50	40	50	-30

Tableau C.1 – Valeurs des dimensions nominales du mécanisme appui plan et deux goupilles.

Les variables aléatoires suivent une loi normale $X \sim \mathcal{N}(\mu_X, \sigma_X)$. Trois jeux de paramètres sont prévus afin d'obtenir trois ordres de grandeur de probabilité. Les valeurs des paramètres sont données dans le tableau C.2.

Paramètres	d_{max}	$\mu_{d_{ext}}$	$\sigma_{d_{ext}}$	$\mu_{d_{int}}$	$\sigma_{d_{int}}$	μ_{X_t}	σ_{X_t}	μ_{X_r}	σ_{X_r}
1	0.25	20	0.06	19.8	0.06	0	0.01	0	0.001
2	0.28	20	0.03	19.8	0.03	0	0.01	0	0.001
3	0.29	20	0.02	19.8	0.02	0	0.01	0	0.001

Tableau C.2 – Valeurs des trois jeux de paramètres des variables aléatoires du mécanisme appui plan et deux goupilles.

Dans le tableau C.2, d_{ext} désigne les diamètres des trous de goupilles, d_{int} désigne les diamètres des goupilles, X_t désigne les écarts géométriques de translation et X_r désigne les écarts géométriques de rotation :

$$d_{ext} = \{d_{1b}, d_{1c}\}$$

$$d_{int} = \{d_{3b}, d_{4c}\}$$

$$\begin{aligned} X_t = \; & \{w_{1a1}, w_{1a1,C}, w_{1a1,H}, w_{2a2}, w_{2a2,C}, w_{2a2,H}, \\ & u_{1b1}, v_{1b1}, u_{1b1,B}, v_{1b1,B}, u_{2b2}, v_{2b2}, u_{2b2,E}, v_{2b2,E}, \\ & u_{1c1}, v_{1c1}, u_{1c1,D}, v_{1c1,D}, u_{2c2}, v_{2c2}, u_{2c2,F}, v_{2c2,F}, \\ & u_{1g1}, v_{1g1}, w_{1g1}, u_{2g2}, v_{2g2}, w_{2g2}\} \end{aligned}$$

$$X_r = \{\alpha_{1g1}, \beta_{1g1}, \gamma_{1g1}, \alpha_{2g2}, \beta_{2g2}, \gamma_{2g2}\}$$

C.3 Résultats

Les résultats de l'impact du nombre de linéarisations sur la probabilité de défaillance d'assemblage et fonctionnelle sont donnés ici avec les courbes correspondantes pour les jeux de paramètres 1 et 3.

	Paramètres 1					
	P_{da} (x10^{-2})			P_{df} (x10^{-2})		
N_{MC}	$3e4$			$3e4$		
c_{P_d}	$\sim 2.2\%$			$\sim 4.4\%$		
95% IC	~ 0.54			~ 0.3		
N_d	inscrit	moyen	circonscrit	inscrit	medium	circonscrit
4	8.37	6.42	5.41	0.3	2.46	8.53
8	6.47	6.17	5.92	1.25	1.82	2.54
12	6.27	6.15	6.02	1.49	1.78	2.07
20	6.18	6.15	6.09	1.62	1.74	1.85
30	6.14	6.11	6.1	1.71	1.75	1.79
40	6.13	6.11	6.11	1.72	1.75	1.78
50	6.12	6.11	6.11	1.73	1.74	1.77
60	6.12	6.11	6.11	1.75	1.75	1.77

Tableau C.3 – Résultats des probabilités de défaillance d'assemblage et de fonctionnalité pour l'exemple appui plan et deux goupilles avec le premier jeu de paramètres.

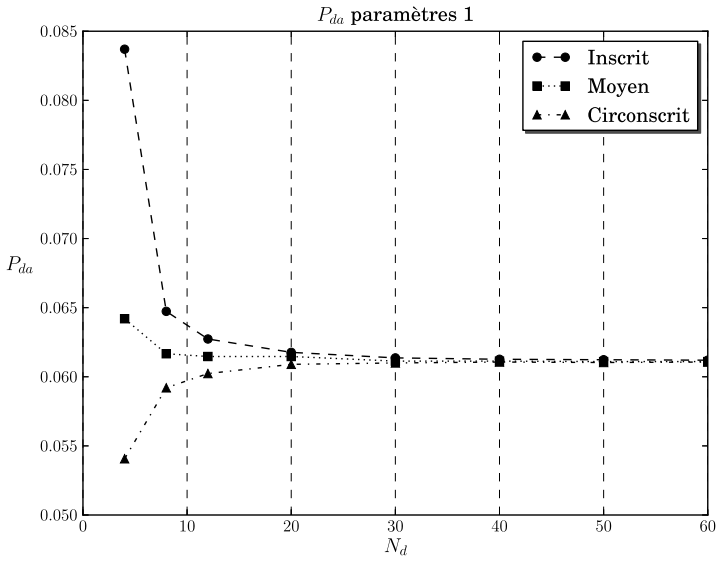


FIGURE C.4 – Évolution de la probabilité de défaillance d'assemblage en fonction du nombre de linéarisations. Courbes obtenues pour l'exemple académique appui plan et deux goupilles avec le premier jeu de paramètres.

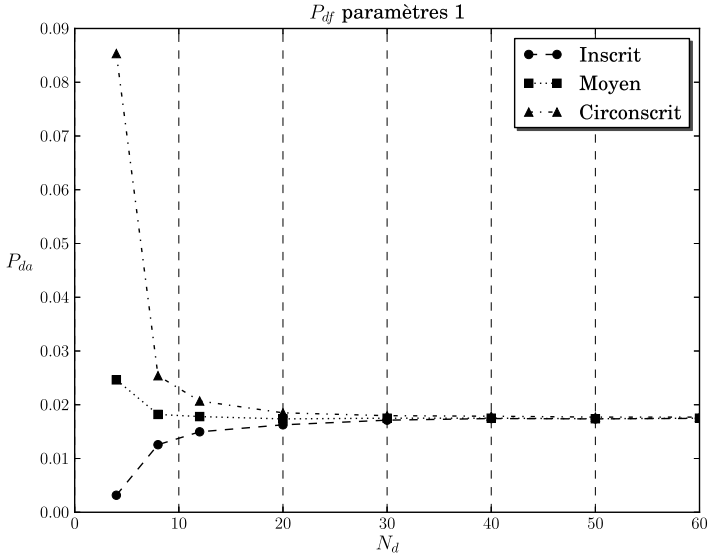


FIGURE C.5 – Évolution de la probabilité de défaillance fonctionnelle en fonction du nombre de linéarisations. Courbes obtenues pour l'exemple académique appui plan et deux goupilles avec le premier jeu de paramètres.

	Paramètres 3					
	P_{da} (x10^{-5})			P_{df} (x10^{-6})		
N_{MC}	$5e7$			$5e7$		
c_{P_d}	$\sim 2.2\%$			$\sim 4.7\%$		
95% IC	~ 0.36			~ 1.7		
N_d	inscrit	moyen	circonscrit	inscrit	medium	circonscrit
4	46.2	4.03	0.49	0.46	2.57	821
8	5.41	3.07	1.69	3.84	1.03	20.5
12	4.96	3.87	3.05	5.5	9	12.9
20	4.49	4.14	3.79	7.42	8.6	9.84
30	4.33	4.17	4.02	8.46	8.88	9.58
40	4.22	4.14	4.06	8.7	8.92	9.22
50	4.27	4.15	4.09	8.72	8.9	9.15
60	4.19	4.16	4.13	8.8	8.9	9.1

Tableau C.4 – Résultats des probabilités de défaillance d'assemblage et de fonctionnalité pour l'exemple appui plan et deux goupilles avec le troisième jeu de paramètres.

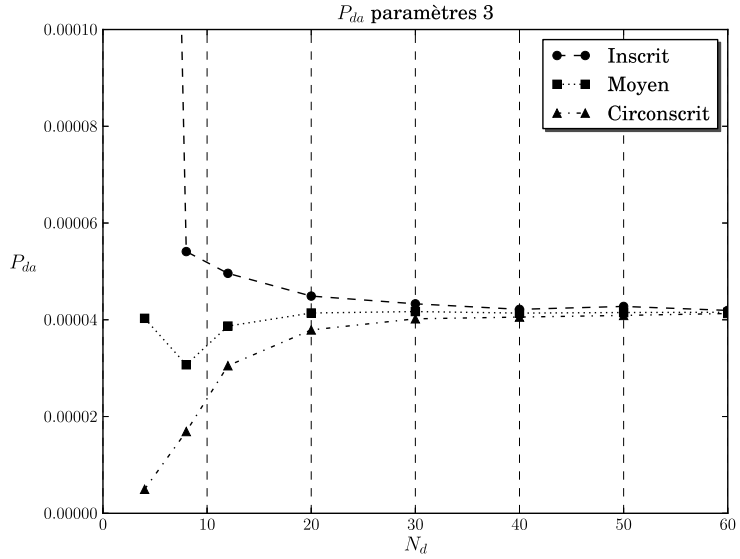


FIGURE C.6 – Évolution de la probabilité de défaillance d'assemblage en fonction du nombre de linéarisations. Courbes obtenues pour l'exemple académique appui plan et deux goupilles avec le troisième jeu de paramètres.

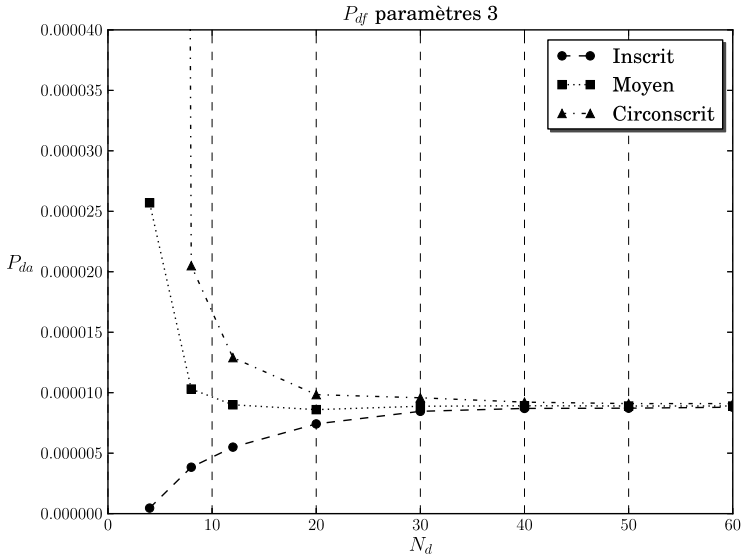


FIGURE C.7 – Évolution de la probabilité de défaillance fonctionnelle en fonction du nombre de linéarisations. Courbes obtenues pour l'exemple académique appui plan et deux goupilles avec le troisième jeu de paramètres.

Annexe D

Fiche électrique

D.1 Modélisation géométrique

Points et coordonnées. Le point A est utilisé comme point d'origine pour localiser les autres points. Les coordonnées sont paramétrées par des variables l_i, $i = \{1, 2, 3, 4\}$, dans le repère $R_1 = (A, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.

$$\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_1 \end{bmatrix} \overrightarrow{AC} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_2 \end{bmatrix} \overrightarrow{CD} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_3 \end{bmatrix} \overrightarrow{BE} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_4 \end{bmatrix} \tag{D.1}$$

Définition des écarts géométriques. Les surfaces de substitution du mécanisme sont :

- ◇ surface plane a,
- ◇ surface cylindrique b,
- ◇ surface plane c,
- ◇ surface cylindrique d,
- ◇ surface cylindrique e.

Pour les surfaces cylindriques b et d, des écarts intrinsèques doivent être définis :

- ◇ d_{1b} : écart du diamètre de l'alésage de l'enveloppe au niveau de la surface b.
- ◇ d_{2b} : écart du diamètre du contact mâle au niveau de la surface b.
- ◇ d_{1d} : écart du diamètre de l'alésage de l'enveloppe au niveau de la surface d.
- ◇ d_{2d} : écart du diamètre du contact mâle au niveau de la surface d.

Un torseur écart est associé à chaque surface de substitution (et pour chaque pièce). La forme du torseur dépend du type de surface associé. Les torseurs sont exprimés dans la même base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ mais avec des points d'application différents :

$$\{T_{1a/1}\} = \left\{ \begin{array}{cc} \alpha_{1a1} & 0 \\ \beta_{1a1} & 0 \\ 0 & w_{1a1} \end{array} \right\}_A \{T_{1b/1}\} = \left\{ \begin{array}{cc} \alpha_{1b1} & u_{1b1} \\ \beta_{1b1} & v_{1b1} \\ 0 & 0 \end{array} \right\}_A \{T_{1c/1}\} = \left\{ \begin{array}{cc} \alpha_{1c1} & 0 \\ \beta_{1c1} & 0 \\ 0 & w_{1c1} \end{array} \right\}_B$$

$$\left\{T_{2a/2}\right\} = \left\{\begin{array}{cc} \alpha_{2a2} & 0 \\ \beta_{2a2} & 0 \\ 0 & w_{2a2} \end{array}\right\}_A \quad \left\{T_{2b/2}\right\} = \left\{\begin{array}{cc} \alpha_{2b2} & u_{2b2} \\ \beta_{2b2} & v_{2b2} \\ 0 & 0 \end{array}\right\}_A \quad \left\{T_{2c/2}\right\} = \left\{\begin{array}{cc} \alpha_{2c2} & 0 \\ \beta_{2c2} & 0 \\ 0 & w_{2c2} \end{array}\right\}_B$$

$$\left\{T_{1d/1}\right\} = \left\{\begin{array}{cc} \alpha_{1d1} & u_{1d1} \\ \beta_{1d1} & v_{1d1} \\ 0 & 0 \end{array}\right\}_C \quad \left\{T_{2d/2}\right\} = \left\{\begin{array}{cc} \alpha_{2d2} & u_{2d2} \\ \beta_{2d2} & v_{2d2} \\ 0 & 0 \end{array}\right\}_C \quad \left\{T_{1e/1}\right\} = \left\{\begin{array}{cc} \alpha_{1e1} & u_{1e1} \\ \beta_{1e1} & v_{1e1} \\ 0 & 0 \end{array}\right\}_E$$

Définition de jeux. Il y a quatre liaisons dans le mécanisme à considérer : deux liaisons appui plan au niveau des surfaces a et c et deux liaisons pivot glissant au niveau des surfaces b et d. Tous les jeux sont de type flottant donc les torseurs jeux associés aux liaisons sont complets :

$$\begin{array}{ll} \left\{G_{2a/1a}\right\} = \left\{\begin{array}{cc} \alpha_{2a1a} & u_{1a2a} \\ \beta_{2a1a} & v_{1a2a} \\ \gamma_{1a2a} & w_{1a2a} \end{array}\right\}_A & \left\{G_{2b/1b}\right\} = \left\{\begin{array}{cc} \alpha_{3b1b} & u_{3b1b} \\ \beta_{3b1b} & v_{3b1b} \\ \gamma_{3b1b} & w_{3b1b} \end{array}\right\}_A \\ \left\{G_{2c/1c}\right\} = \left\{\begin{array}{cc} \alpha_{4c1c} & u_{4c1c} \\ \beta_{4c1c} & v_{4c1c} \\ \gamma_{4c1c} & w_{4c1c} \end{array}\right\}_B & \left\{G_{2d/1d}\right\} = \left\{\begin{array}{cc} \alpha_{4d1d} & u_{4d1d} \\ \beta_{4d1d} & v_{4d1d} \\ \gamma_{4d1d} & w_{4d1d} \end{array}\right\}_C \end{array} \tag{D.2}$$

Définition du torseur jeu fonctionnel. Comme énoncée dans la présentation du mécanisme, l'étude du déplacements du point E par rapport au cylindre extérieur e. Le torseur fonctionnel contient les deux composantes de déplacements suivant les axes $\vec{x}$ et $\vec{y}$:

$$\left\{G_{2d/1e}\right\} = \left\{\begin{array}{cc} - & u_{2d1e} \\ - & v_{2d1e} \\ - & - \end{array}\right\}_E \tag{D.3}$$

Les deux composantes u_{2d1e} et v_{2d1e} correspondent aux caractéristiques fonctionnelles du mécanisme.

Définition des équations de compatibilité. Dans cette partie, seules les boucles topologiques permettant d'écrire les équations de compatibilité sont données. L'ensemble des équations de compatibilité est regroupé dans la formulation du problème d'optimisation relatif au problème fonctionnel équation (D.11).

Ce mécanisme est composé de deux pièces et il y a quatre liaisons (hors liaison fonctionnelle). Le nombre cyclomatique est donné par la formule équation (1.5) : $N_{boucles} = 4 - 2 + 1 = 3$. Les boucles utilisées pour écrire les équations de compatibilité sont les suivantes :

◇ Boucle $1a/2a/2b/1b$ écrite au point A :

$$\begin{aligned}\left\{T_{1/1}\right\}_A &= \{0\} \\ &= \left\{T_{1/1a}\right\} + \left\{G_{1a/2a}\right\} + \left\{T_{2a/2}\right\} + \left\{T_{2/2b}\right\} + \left\{G_{2b/1b}\right\} + \left\{T_{1b/1}\right\}\end{aligned} \tag{D.4}$$

Cette boucle entraine l'écriture des équations de compatibilité $C_c^{(k)}$, $k = \{1, \ldots, 6\}$.

◇ Boucle $1a/2a/2c/1c$ écrite au point A :

$$\begin{aligned}\left\{T_{1/1}\right\}_A &= \{0\} \\ &= \left\{T_{1/1a}\right\} + \left\{G_{1a/2a}\right\} + \left\{T_{2a/2}\right\} + \left\{T_{2/2c}\right\} + \left\{G_{2c/1c}\right\} + \left\{T_{1c/1}\right\}\end{aligned} \tag{D.5}$$

Cette boucle entraine l'écriture des équations de compatibilité $C_c^{(k)}$, $k = \{7, \ldots, 12\}$.

◇ Boucle $1a/2a/2d/1d$ écrite au point A :

$$\begin{aligned}\left\{T_{1/1}\right\}_A &= \{0\} \\ &= \left\{T_{1/1a}\right\} + \left\{G_{1a/2a}\right\} + \left\{T_{2a/2}\right\} + \left\{T_{2/2d}\right\} + \left\{G_{2d/1d}\right\} + \left\{T_{1d/1}\right\}\end{aligned} \tag{D.6}$$

Cette boucle entraine l'écriture des équations de compatibilité $C_c^{(k)}$, $k = \{13, \ldots, 18\}$.

Les torseurs définis en un point différent de A sont transférés au point A via la relation de Varignon, équation (1.1) p. 9.

Définition des contraintes d'interface. Les quatre liaisons du mécanisme entrainent l'écriture de contraintes d'interface dépendant du type de liaison :

◇ Les liaisons $2a/1a$ et $2c/1c$ sont des liaisons appui plan circulaire, la surface est donc discrétisée en N_{da} facettes afin de pouvoir définir des points de calcul pour les contraintes. Les inéquations $C_i^{(k)}$, pour $k = 1$ et $k = 2$, correspondent à ces contraintes d'interface.

◇ Les liaisons $2b/1b$ et $2d/1d$ sont des liaisons pivots glissants impliquant l'écriture de contraintes d'interface quadratiques. La procédure de linéarisation présentées dans la section 2.3.1 est donc appliquée sur ces contraintes. Elles correspondent aux contraintes d'interface $C_i^{(k)}$, $k = \{3, \ldots, 6\}$.

Les expressions des contraintes sont écrites dans la formulation du problème d'optimisation équation (D.11). Afin de faire correspondre la linéarisation des contraintes quadratiques et la discrétisation du plan, $N_d = N_{da}$.

Définition de la condition fonctionnelle. Pour que les caractéristiques fonctionnelles soient reliées aux autres paramètres géométriques, il faut écrire les équations de compatibilité d'une boucle topologique passant par le torseur jeu fonctionnel. La boucle $1d/2d/1e$ est écrite au point E :

$$\begin{aligned}\left\{T_{1/1}\right\}_E &= \{0\} \\ &= \left\{T_{1/1d}\right\} + \left\{G_{1d/2d}\right\} + \left\{G_{2d/1e}\right\} + \left\{T_{1e/1}\right\}\end{aligned} \tag{D.7}$$

Les déplacements doivent chacun rester dans un intervalle pour garantir la fonctionnalité du mécanisme :

$$u_{2c1e} \in \left[-\frac{t}{2}; \frac{t}{2}\right] \tag{D.8}$$

$$v_{2c1e} \in \left[-\frac{t}{2}; \frac{t}{2}\right] \tag{D.9}$$

Il y a donc quatre conditions fonctionnelles à définir :

$$\begin{array}{rcl} C_f^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{g}) & = & \frac{t}{2} - u_{2d1e} \geq 0 \\ C_f^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{g}) & = & -\frac{t}{2} + u_{2d1e} \geq 0 \\ C_f^{(3)}(\mathbf{x}, \mathbf{g}) & = & \frac{t}{2} - v_{2d1e} \geq 0 \\ C_f^{(4)}(\mathbf{x}, \mathbf{g}) & = & -\frac{t}{2} + v_{2d1e} \geq 0 \end{array} \tag{D.10}$$

Formulation des problèmes fonctionnel et d'assemblage. Quatre problèmes d'optimisation différents sont définis. Ils sont cependant tous soumis aux mêmes contraintes. Ils sont définis de la façon suivante :

$$
\begin{aligned}
R_f^{(k)}(\mathbf{x}) = \min_{\mathbf{g}\in\mathbb{R}^{26}} \quad & C_f^k(\mathbf{x},\mathbf{g}) \\
\text{sous} \quad & C_c^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{g}) = -\alpha_{1a1} - \alpha_{2a1a} + \alpha_{2a2} - \alpha_{2b2} + \alpha_{2b1b} + \alpha_{1b1} = 0 \\
& C_c^{(2)}(\mathbf{x},\mathbf{g}) = -\beta_{1a1} - \beta_{2a1a} + \beta_{2a2} - \beta_{2b2} + \beta_{2b1b} + \beta_{1b1} = 0 \\
& C_c^{(3)}(\mathbf{x},\mathbf{g}) = -\gamma_{2a1a} + \gamma_{2b1b} = 0 \\
& C_c^{(4)}(\mathbf{x},\mathbf{g}) = -u_{2a1a} - u_{2b2} + u_{2b1b} + u_{1b1} = 0 \\
& C_c^{(5)}(\mathbf{x},\mathbf{g}) = -v_{2a1a} - v_{2b2} + v_{2b1b} + v_{1b1} = 0 \\
& C_c^{(6)}(\mathbf{x},\mathbf{g}) = -w_{1a1} - w_{2a1a} + w_{2a2} + w_{2b1b} = 0 \\
& C_c^{(7)}(\mathbf{x},\mathbf{g}) = -\alpha_{1a1} - \alpha_{2a1a} + \alpha_{2a2} - \alpha_{2c2} + \alpha_{2c1c} + \alpha_{1c1} = 0 \\
& C_c^{(8)}(\mathbf{x},\mathbf{g}) = -\beta_{1a1} - \beta_{2a1a} + \beta_{2a2} - \beta_{2c2} + \beta_{2c1c} + \beta_{1c1} = 0 \\
& C_c^{(9)}(\mathbf{x},\mathbf{g}) = -\gamma_{2a1a} + \gamma_{2c1c} = 0 \\
& C_c^{(10)}(\mathbf{x},\mathbf{g}) = -u_{2a1a} + u_{2c1c} - l_1\beta_{2c1c} = 0 \\
& C_c^{(11)}(\mathbf{x},\mathbf{g}) = -v_{2a1a} + v_{2b1b} + l_1\alpha_{2c1c} = 0 \\
& C_c^{(12)}(\mathbf{x},\mathbf{g}) = -w_{1a1} - w_{2a1a} + w_{2a2} - w_{2c2} + w_{2c1c} + w_{1c1} = 0 \\
& C_c^{(13)}(\mathbf{x},\mathbf{g}) = -\alpha_{1a1} - \alpha_{2a1a} + \alpha_{2a2} - \alpha_{2d2} + \alpha_{2d1d} + \alpha_{1d1} = 0 \\
& C_c^{(14)}(\mathbf{x},\mathbf{g}) = -\beta_{1a1} - \beta_{2a1a} + \beta_{2a2} - \beta_{2d2} + \beta_{2d1d} + \beta_{1d1} = 0 \\
& C_c^{(15)}(\mathbf{x},\mathbf{g}) = -\gamma_{2a1a} + \gamma_{2d1d} = 0 \\
& C_c^{(16)}(\mathbf{x},\mathbf{g}) = -u_{2a1a} - u_{2d2} + l_2\beta_{2d2} + u_{2b1b} - l_2\beta_{2d1d} + u_{1d1} - l_2\beta_{1d1} = 0 \\
& C_c^{(17)}(\mathbf{x},\mathbf{g}) = -v_{2a1a} - v_{2b2} - l_2\alpha_{2d2} + v_{2b1b} + l_2\alpha_{2d1d} + v_{1d1} + l_2\alpha_{1d1} = 0 \\
& C_c^{(18)}(\mathbf{x},\mathbf{g}) = -w_{1a1} - w_{2a1a} + w_{2a2} + w_{2d1d} = 0 \\
& C_c^{(19)}(\mathbf{x},\mathbf{g}) = l_4\beta_{1c1} - u_{2c1c} + l_4\beta_{2c1c} + u_{2c1e} + u_{1e1} = 0 \\
& C_c^{(20)}(\mathbf{x},\mathbf{g}) = -l_4\alpha_{1c1} - v_{2c1c} - l_4\alpha_{2c1c} + v_{2c1e} + v_{1e1} = 0 \\
& C_i^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{g}) = -\left(w_{2a1a} - \beta_{2a1a}\frac{d_{2b}}{2}\cos\theta_u + \alpha_{2a1a}\frac{d_{2b}}{2}\sin\theta_u\right) \leq 0 \\
& C_i^{(2)}(\mathbf{x},\mathbf{g}) = w_{2c1c} - \beta_{2c1c}\frac{d_{2c}}{2}\cos\theta_u + \alpha_{2c1c}\frac{d_{2c}}{2}\sin\theta_u - (l_2 - l_1) \leq 0 \\
& C_i^{(3)}(\mathbf{x},\mathbf{g}) = u_{2b1b}^2 + v_{2b1b}^2 - \left(\frac{d_{1b} - d_{2b}}{2}\right)^2 \leq 0 \\
& C_i^{(4)}(\mathbf{x},\mathbf{g}) = (u_{2b1b} + l_1\beta_{2b1b})^2 + (v_{2b1b} - l_1\alpha_{2b1b})^2 - \left(\frac{d_{1b} - d_{2b}}{2}\right)^2 \leq 0 \\
& C_i^{(5)}(\mathbf{x},\mathbf{g}) = u_{2d1d}^2 + v_{2d1d}^2 - \left(\frac{d_{1d} - d_{2d}}{2}\right)^2 \leq 0 \\
& C_i^{(6)}(\mathbf{x},\mathbf{g}) = (u_{2d1d} + l_3\beta_{2d1d})^2 + (v_{2d1d} - l_3\alpha_{2d1d})^2 - \left(\frac{d_{1d} - d_{2d}}{2}\right)^2 \leq 0
\end{aligned}
\tag{D.11}
$$

avec $\theta_u = \frac{2u\pi}{N_{da}}$, $u = \{1, \ldots, N_{da}\}$ où N_{da} est le nombre de discrétisations des surfaces planes circulaires a et c.

D.2 Valeurs des paramètres

Les valeurs des dimensions nominales et de la tolérance t sont données dans le tableau D.1.

l_1	l_2	l_3	l_4	t
10	10.1	3	8	0.3

Tableau D.1 – Valeurs des dimensions nominales de la fiche électrique et de la tolérance t.

Les variables aléatoires suivent une loi normale $X \sim \mathcal{N}(\mu_X, \sigma_X)$. Les valeurs des paramètres sont données dans le tableau D.2.

$\mu_{d_{1b}}$	$\sigma_{d_{1b}}$	$\mu_{d_{2b}}$	$\sigma_{d_{2b}}$	$\mu_{d_{1d}}$	$\sigma_{d_{1d}}$	$\mu_{d_{2d}}$	$\sigma_{d_{2d}}$	μ_{X_t}	σ_{X_t}	μ_{X_r}	σ_{X_r}
12.1	0.001	12	0.001	6.1	0.001	6	0.001	0	0.009	0	0.0009

Tableau D.2 – Valeurs des variables aléatoires de la fiche électrique.

Dans le tableau D.2, X_t désigne les écarts géométriques de translation et X_r désigne les écarts géométriques de rotation :

$$X_t = \{w_{1a1}, u_{1b1}, v_{1b1}, w_{1c1}, u_{1d1}, v_{1d1}, w_{2a2}, u_{2b2}, v_{2b2}, w_{2c2}, u_{2d2}, v_{2d2}, u_{1e1}, v_{1e1}\}$$

$$\begin{aligned} X_r = \; & \{\alpha_{1a1}, \beta_{1a1}, \alpha_{1b1}, \beta_{1b1}, \alpha_{1c1}, \beta_{1c1}, \alpha_{1d1}, \beta_{1d1} \\ & \alpha_{2a2}, \beta_{2a2}, \alpha_{2b2}, \beta_{2b2}, \alpha_{2c2}, \beta_{2c2}, \alpha_{2d2}, \beta_{2d2}, \alpha_{1e1}, \beta_{1e1}\} \end{aligned}$$

Annexe E

Connecteur Radiall

E.1 Modélisation géométrique

Toutes les clavettes sont positionnées grâce à un angle $\theta_c^{(k)}$, $k = \{1, \ldots, 5\}$. Il suffit de changer l'indice k relatif à la clavette pour obtenir toutes les équations.

Définition des repères. Un repère local $R_k = \{O_k, \vec{x_k}, \vec{y_k}, \vec{z_k}\}$ associé à chaque clavette est défini. Les axes du repère global $R = \{O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}$ sont choisis de sorte qu'ils correspondent aux axes du repère R_1 car pour les goupilles, l'orientation des axes radiaux n'a pas d'influence sur la définition des contraintes.

Points et coordonnées. Les coordonnées des points sont tous définis dans le repère global $R = \{O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}$. Ils sont paramétrées par des variables l_i, $i = \{1, \ldots, 23\}$.

$$\begin{gathered} \overrightarrow{OA} = \begin{bmatrix} 0 \\ l_1 \\ 0 \end{bmatrix} \overrightarrow{OB} = \begin{bmatrix} 0 \\ l_1 \\ 0 \end{bmatrix} \overrightarrow{BD} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_2 \end{bmatrix} \overrightarrow{AC} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_3 \end{bmatrix} \\ \overrightarrow{OE_1} = \begin{bmatrix} l_4 \\ l_5 \\ -l_{c1}/2 \end{bmatrix} \overrightarrow{OF_1} = \begin{bmatrix} l_6 \\ l_7 \\ -l_{c1}/2 \end{bmatrix} \end{gathered} \tag{E.1}$$

Les autres points E_k et F_k, $k = \{2, \ldots, 5\}$ sont repérés de la même manière que les points OE_1 et OF_1 avec les coordonnées l_i, $i = \{8, \ldots, 23\}$. De plus la largeur des goupilles est paramétrée par une variable notée l_{ck} dépendant de la clavette k.

Définition des écarts géométriques. Les surfaces de substitution du mécanisme sont :

- ◇ surface cylindrique a,
- ◇ surface cylindrique b,
- ◇ surface plane c,
- ◇ surfaces planes e_k, $k = \{1, \ldots, 5\}$,

◇ surfaces planes f_k, $k = \{1, \ldots, 5\}$.

Les surface cylindriques a et b nécessitent la définition d'écarts intrinsèques :

◇ d_{1a} : écart du diamètre de la partie mâle au niveau de la surface a.

◇ d_{2a} : écart du diamètre de l'alésage de la partie femelle au niveau de la surface a.

◇ d_{1b} : écart du diamètre de la partie mâle au niveau de la surface b.

◇ d_{2b} : écart du diamètre de l'alésage de la partie femelle au niveau de la surface b.

Un torseur écart pour chaque surface de substitution et pour chaque pièce est défini. Les torseurs sont exprimés soit la base du repère global soit dans les bases des repères locaux.

$$\{T_{1a/1}\} = \left\{ \begin{array}{cc} \alpha_{1a1} & u_{1a1} \\ \beta_{1a1} & v_{1a1} \\ 0 & 0 \end{array} \right\}_{A,R} \quad \{T_{2a/2}\} = \left\{ \begin{array}{cc} \alpha_{2a2} & u_{2a2} \\ \beta_{2a2} & v_{2a2} \\ 0 & 0 \end{array} \right\}_{A,R}$$

$$\{T_{1b/1}\} = \left\{ \begin{array}{cc} \alpha_{1b1} & u_{1b1} \\ \beta_{1b1} & v_{1b1} \\ 0 & 0 \end{array} \right\}_{B,R} \quad \{T_{2b/2}\} = \left\{ \begin{array}{cc} \alpha_{2b2} & u_{2b2} \\ \beta_{2b2} & v_{2b2} \\ 0 & 0 \end{array} \right\}_{B,R}$$

$$\{T_{1e_k/1}\} = \left\{ \begin{array}{cc} \alpha_{1e_k1} & u_{1e_k1} \\ \beta_{1e_k1} & v_{1e_k1} \\ 0 & 0 \end{array} \right\}_{E_k,R_k} \quad \{T_{2e_k/2}\} = \left\{ \begin{array}{cc} \alpha_{2e_k2} & u_{2e_k2} \\ \beta_{2e_k2} & v_{2e_k2} \\ 0 & 0 \end{array} \right\}_{E_k,R_k}$$

$$\{T_{1f_k/1}\} = \left\{ \begin{array}{cc} \alpha_{1f_k1} & u_{1f_k1} \\ \beta_{1f_k1} & v_{1f_k1} \\ 0 & 0 \end{array} \right\}_{F_k,R_k} \quad \{T_{2f_k/2}\} = \left\{ \begin{array}{cc} \alpha_{2f_k2} & u_{2f_k2} \\ \beta_{2f_k2} & v_{2f_k2} \\ 0 & 0 \end{array} \right\}_{F_k,R_k}$$

Définition des jeux. Il y a au total treize liaisons dans le mécanisme à considérer : deux liaisons cylindriques pour les surfaces a et b, dix liaisons appui plan pour les surfaces e_k et f_k, $k = \{1, \ldots, 5\}$. Les jeux de ces liaisons sont de type flottant donc les torseurs jeux associé à ces liaisons sont complets. La dernière liaison est la liaison au niveau de la surface c qui est supposée sans jeux excepté les mobilités liées au déplacement cinématique de la liaison.

$$\left\{G_{2a/1a}\right\} = \left\{\begin{array}{cc} \alpha_{2a1a} & u_{1a2a} \\ \beta_{2a1a} & v_{1a2a} \\ \gamma_{1a2a} & w_{1a2a} \end{array}\right\}_{A,R} \qquad \left\{G_{2b/1b}\right\} = \left\{\begin{array}{cc} \alpha_{3b1b} & u_{3b1b} \\ \beta_{3b1b} & v_{3b1b} \\ \gamma_{3b1b} & w_{3b1b} \end{array}\right\}_{B,R}$$

$$\left\{G_{2e_k/1e_k}\right\} = \left\{\begin{array}{cc} \alpha_{2e_k1e_k} & u_{2e_k1e_k} \\ \beta_{2e_k1e_k} & v_{2e_k1e_k} \\ \gamma_{2e_k1e_k} & w_{2e_k1e_k} \end{array}\right\}_{E_k,R_k} \qquad \left\{G_{2f_k/1f_k}\right\} = \left\{\begin{array}{cc} \alpha_{2f_k1f_k} & u_{2f_k1f_k} \\ \beta_{2f_k1f_k} & v_{2f_k1f_k} \\ \gamma_{2f_k1f_k} & w_{2f_k1f_k} \end{array}\right\}_{F_k,R_k}$$

$$\left\{G_{2c/1c}\right\} = \left\{\begin{array}{cc} 0 & u_{2c1c} \\ 0 & v_{2c1c} \\ \gamma_{2c1c} & 0 \end{array}\right\}_{O,R} \tag{E.2}$$

Définition des équations de compatibilité. Le nombre de boucles topologiques nécessaires est donné par le nombre cyclomatique, équation (1.5) :

$$N_{boucles} = N_{liaisons} - N_{pices} + 1 = 13 - 2 + 1 = 12 \tag{E.3}$$

Les boucles topologiques passant par les surfaces a, b et c sont écrites au point O dans le repère global R. Les autres boucles topologiques passant par les surfaces des clavettes sont écrites dans les repère locaux des clavettes afin de simplifier l'écriture des équations de compatibilité. Pour toutes les boucles, la liaison appui plan de la surface c est toujours utilisée car le torseur jeux est défini en O dans le repère R. De plus le torseur n'est pas complet donc le transfert des torseurs dans les repère locaux et aux autres points d'application est plus simple. Les boucles passant par les clavettes sont toutes identiques, il suffit d'en définir une puis de faire varier l'indice $k = \{1, \ldots, 5\}$. Voici les boucles utilisées :

◇ Boucles $2c/1c/1a/2a$

$$\begin{array}{rcl} \left\{T_{2/2}\right\}_{O,R} & = & \{0\} \\ & = & \left\{T_{2/2c}\right\} + \left\{G_{2c/1c}\right\} + \left\{T_{1c/1}\right\} + \left\{T_{1/1a}\right\} + \left\{G_{1a/2a}\right\} + \left\{T_{2a/2}\right\} \end{array} \tag{E.4}$$

Cette boucle entraine l'écriture les équations de compatibilité suivante :

$$\begin{array}{rcl} C_c^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{g}) = & -\alpha_{2c2} + \alpha_{1c1} - \alpha_{1a1} - \alpha_{2a1a} + \alpha_{2a2} & = 0 \\ C_c^{(2)}(\mathbf{x},\mathbf{g}) = & -\beta_{2c2} + \beta_{1c1} - \beta_{1a1} - \beta_{2a1a} + \beta_{2a2} & = 0 \\ C_c^{(3)}(\mathbf{x},\mathbf{g}) = & \gamma_{2c1c} - \gamma_{2a1a} & = 0 \\ C_c^{(4)}(\mathbf{x},\mathbf{g}) = & l_3\beta_{2c2} + u_{2c1c} - l_3\beta_{1c1} - u_{1a1} - u_{2a1a} + l_1\gamma_{2a1a} + u_{2a2} & = 0 \\ C_c^{(5)}(\mathbf{x},\mathbf{g}) = & -l_3\alpha_{2c2} + v_{2c1c} + l_3\alpha_{1c1} - v_{1a1} - v_{2a1a} + v_{2a2} & = 0 \\ C_c^{(6)}(\mathbf{x},\mathbf{g}) = & -w_{2c2} + w_{1c1} - l_1\alpha_{1a1} - w_{2a1a} - l_1\alpha_{2a1a} + l_1\alpha_{2a2} & = 0 \end{array} \tag{E.5}$$

◇ Boucles $2c/1c/1b/2b$

$$\begin{aligned}\left\{T_{2/2}\right\}_{O,R} &= \{0\} \\ &= \left\{T_{2/2c}\right\} + \left\{G_{2c/1c}\right\} + \left\{T_{1c/1}\right\} + \left\{T_{1/1b}\right\} + \left\{G_{1b/2b}\right\} + \left\{T_{2b/2}\right\}\end{aligned} \tag{E.6}$$

Les équations de compatibilité, $C_c^{(j)}$ $j = \{7, \ldots, 12\}$, obtenues sont identiques à celles écrites avec la boucle précédente, seul le signe du terme l_1 est changé pour son opposé.

◇ Boucles $2c/1c/1e_k/2e_k$

$$\begin{aligned}\left\{T_{2/2}\right\}_{E_k,R_k} &= \{0\} \\ &= \left\{T_{2/2c}\right\} + \left\{G_{2c/1c}\right\} + \left\{T_{1c/1}\right\} + \left\{T_{1/1e_k}\right\} + \left\{G_{1e_k/2e_k}\right\} + \left\{T_{2e_k/2}\right\}\end{aligned} \tag{E.7}$$

Cette boucle entraine l'écriture des équations de compatibilité suivante :

$$\begin{aligned}
C_c^{(13)}(\mathbf{x},\mathbf{g}) = \; & -\alpha_{2c2}\cos\theta_k + \beta_{2c2}\sin\theta_k + \alpha_{1c1}\cos\theta_k - \beta_{1c1}\sin\theta_k \\
& -\alpha_{1e_11} - \alpha_{2e_k1e_k} + \alpha_{2e_k2} = 0 \\
C_c^{(14)}(\mathbf{x},\mathbf{g}) = \; & -\alpha_{2c2}\sin\theta_k - \beta_{2c2}\cos\theta_k + \alpha_{1c1}\sin\theta_k + \beta_{1c1}\cos\theta_k - \beta_{2e_k1e_k} = 0 \\
C_c^{(15)}(\mathbf{x},\mathbf{g}) = \; & -\gamma_{2c1c} - \gamma_{1e_k1} + \gamma_{2e_k1e_k} + \gamma_{2e_k2} = 0 \\
C_c^{(16)}(\mathbf{x},\mathbf{g}) = \; & -\tfrac{L}{2}(\alpha_{2c2}\sin\theta_k + \beta_{2c2}\cos\theta_k) - u_{2c1c}\cos\theta_k + v_{2c1c}\sin\theta_k \\
& +l_5\gamma_{2c1c} + \tfrac{L}{2}(\alpha_{1c1}\sin\theta_k + \beta_{1c1}\cos\theta_k) - u_{2e_k1e_k} = 0 \\
C_c^{(17)}(\mathbf{x},\mathbf{g}) = \; & \tfrac{L}{2}(\alpha_{2c2}\cos\theta_k - \beta_{2c2}\sin\theta_k) - u_{2c1c}\sin\theta_k - v_{2c1c}\cos\theta_k \\
& -l_4\gamma_{2c1c} - \tfrac{L}{2}(\alpha_{1c1}\cos\theta_k - \beta_{1c1}\sin\theta_k) - v_{1e_k1} - v_{2e_k1e_k} + v_{2e_k2} = 0 \\
C_c^{(18)}(\mathbf{x},\mathbf{g}) = \; & -w_{2c2} + l_4(\alpha_{2c2}\sin\theta_k + \beta_{2c2}\cos\theta_k) - l_5(\alpha_{2c2}\cos\theta_k - \beta_{2c2}\sin\theta_k) \\
& +w_{1c1} - l_4(\alpha_{1c1}\sin\theta_k + \beta_{1c1}\cos\theta_k) \\
& +l_5(\alpha_{1c1}\cos\theta_k - \beta_{1c1}\sin\theta_k) - w_{2e_k1e_k} = 0
\end{aligned} \tag{E.8}$$

Les équations de compatibilité pour les quatre autres clavettes sont identiques à la différence que les longueurs l_4 et l_5 doivent être fonctions de la clavette prise en compte.

◇ Boucles $2c/1c/1f_k/2f_k$

$$\begin{aligned}\left\{T_{2/2}\right\}_{F_k,R_k} &= \{0\} \\ &= \left\{T_{2/2c}\right\} + \left\{G_{2c/1c}\right\} + \left\{T_{1c/1}\right\} + \left\{T_{1/1f_k}\right\} + \left\{G_{1f_k/2f_k}\right\} + \left\{T_{2f_k/2}\right\}\end{aligned} \tag{E.9}$$

Les équations de compatibilité sont similaires à celles de la boucle précédente.

Définition des contraintes d'interface. Le mécanisme possède plusieurs types de liaisons :

◇ Les liaisons $2a/1a$ et $2b/1b$ sont des liaisons pivot glissant, ce qui implique l'écriture de contraintes d'interface quadratiques. La procédure de linéarisation est appliquée sur ces contraintes. Les contraintes d'interface s'écrivent de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
C_i^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{g}) = &\quad u_{2a1a}^2 + v_{2a1a}^2 - \left(\frac{d_{2a}-d_{1a}}{2}\right)^2 &\leq 0\\
C_i^{(2)}(\mathbf{x},\mathbf{g}) = &\quad (u_{2a1a} + l_2\beta_{2a1a})^2 + (v_{2a1a} - l_2\alpha_{2a1a})^2 - \left(\frac{d_{2a}-d_{1a}}{2}\right)^2 &\leq 0\\
C_i^{(3)}(\mathbf{x},\mathbf{g}) = &\quad u_{2b1b}^2 + v_{2b1b}^2 - \left(\frac{d_{2b}-d_{1b}}{2}\right)^2 &\leq 0\\
C_i^{(4)}(\mathbf{x},\mathbf{g}) = &\quad (u_{2b1b} + l_2\beta_{2b1b})^2 + (v_{2b1b} - l_2\alpha_{2b1b})^2 - \left(\frac{d_{2b}-d_{1b}}{2}\right)^2 &\leq 0
\end{aligned} \tag{E.10}$$

◇ Les liaisons $2e_k/1e_k$ et $2f_k/1f_k$, avec $k = \{1,\ldots,5\}$, sont des liaisons appui plan rectangulaire. Il faut donc écrire quatre contraintes d'interface par liaison. Les contraintes d'interface s'écrivent de la façon suivante pour les surfaces e_k :

$$\begin{aligned}
C_i^{(5)}(\mathbf{x},\mathbf{g}) = &\quad -v_{2e_k1e_k} - \frac{L}{2}\alpha_{2e_k1e_k} + \frac{h}{2}\gamma 2e_k1e_k - \frac{L_{ck}-l_{ck}}{2} &\leq 0\\
C_i^{(6)}(\mathbf{x},\mathbf{g}) = &\quad -v_{2e_k1e_k} + \frac{L}{2}\alpha_{2e_k1e_k} + \frac{h}{2}\gamma 2e_k1e_k - \frac{L_{ck}-l_{ck}}{2} &\leq 0\\
C_i^{(7)}(\mathbf{x},\mathbf{g}) = &\quad -v_{2e_k1e_k} + \frac{L}{2}\alpha_{2e_k1e_k} - \frac{h}{2}\gamma 2e_k1e_k - \frac{L_{ck}-l_{ck}}{2} &\leq 0\\
C_i^{(8)}(\mathbf{x},\mathbf{g}) = &\quad -v_{2e_k1e_k} - \frac{L}{2}\alpha_{2e_k1e_k} - \frac{h}{2}\gamma 2e_k1e_k - \frac{L_{ck}-l_{ck}}{2} &\leq 0
\end{aligned} \tag{E.11}$$

Pour les surfaces f_k, les contraintes d'interface s'écrivent de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
C_i^{(9)}(\mathbf{x},\mathbf{g}) = &\quad v_{2f_k1f_k} - \frac{L}{2}\alpha_{2f_k1f_k} + \frac{h}{2}\gamma 2f_k1f_k - \frac{L_{ck}-l_{ck}}{2} &\leq 0\\
C_i^{(10)}(\mathbf{x},\mathbf{g}) = &\quad v_{2f_k1f_k} + \frac{L}{2}\alpha_{2f_k1f_k} + \frac{h}{2}\gamma 2f_k1f_k - \frac{L_{ck}-l_{ck}}{2} &\leq 0\\
C_i^{(11)}(\mathbf{x},\mathbf{g}) = &\quad v_{2f_k1f_k} + \frac{L}{2}\alpha_{2f_k1f_k} - \frac{h}{2}\gamma 2f_k1f_k - \frac{L_{ck}-l_{ck}}{2} &\leq 0\\
C_i^{(12)}(\mathbf{x},\mathbf{g}) = &\quad v_{2f_k1f_k} - \frac{L}{2}\alpha_{2f_k1f_k} - \frac{h}{2}\gamma 2f_k1f_k - \frac{L_{ck}-l_{ck}}{2} &\leq 0
\end{aligned} \tag{E.12}$$

La liaison $2c/1c$ n'entraine pas l'écriture de contraintes d'interface car la liaison est supposée parfaite sans jeux.

Formulation du problème d'assemblage. L'étude de ce mécanisme concerne uniquement la vérification de l'assemblage des deux pièces du mécanisme. Le problème d'op-

timisation s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned} R_a^{(k)}(\mathbf{x}) = \min_{\mathbf{g}\in\mathbb{R}^{75}} \quad & C_i^1(\mathbf{x},\mathbf{g}) \\ \text{sous} \quad & C_c^{(k)}(\mathbf{x},\mathbf{g}) = 0 \quad \forall k = \{1,\ldots,72\} \\ & C_i^{(l)}(\mathbf{x},\mathbf{g}) \leq 0 \quad \forall l = \{1,\ldots,4\times N_d + 40\} \end{aligned} \tag{E.13}$$

où N_d est le nombre de linéarisations des contraintes d'interface quadratiques.

E.2 Valeurs des paramètres

Les valeurs des dimensions nominales et de la tolérance t sont données dans le tableau E.1.

l_1	l_2	l_3	l_4	l_5	l_6	l_7	l_8	l_9	l_{10}	l_{11}
13.5	5.33	-5	17.99	-14.75	17.99	-12.25	3.25	3.58	-13.67	-2.03
l_{12}	l_{13}	l_{14}	l_{15}	l_{16}	l_{17}	l_{18}	l_{19}	l_{20}	l_{21}	l_{22}
-14.68	-2.82	3.01	4.85	-17.91	-18.28	-16.67	-18.64	6.78	-30.65	7.28
l_{23}	L	h	L_{c1}	l_{c1}	L_{c2-5}	l_{c2-5}				
-29.46	3	2.02	3.235	2.505	1.635	1.285				

Tableau E.1 – Valeurs des dimensions nominales du connecteur Radiall.

Les variables aléatoires suivent une loi normale $X \sim \mathcal{N}(\mu_X, \sigma_X)$. Les valeurs des paramètres sont données dans le tableau E.2.

$\mu_{d_{int}}$	$\sigma_{d_{int}}$	$\mu_{d_{ext}}$	$\sigma_{d_{ext}}$	μ_{X_t}	$\sigma_{X_{t1}}$	$\sigma_{X_{t2}}$	$\sigma_{X_{t3}}$	μ_{X_r}	σ_{X_r}
2.01	0.005	2.175	0.005	0	0.025	0.03	0.01	0	0.001

Tableau E.2 – Valeurs des variables aléatoires de la fiche électrique.

Dans le tableau E.2, d_{ext} désigne les diamètres des trous de goupilles, d_{int} désigne les diamètres des goupilles, X_{t1}, X_{t2} et X_{t3} désignent les écarts géométriques de translation et X_r désigne les écarts géométriques de rotation :

$$d_{ext} = \{d_{2a}, d_{2b}\}$$

$$d_{int} = \{d_{1a}, d_{1b}\}$$

$$X_{t1} = \{u_{1a1}, v_{1a1}, u_{1b1}, v_{1b1}\}$$

$$X_{t2} = \{u_{2a2}, v_{2a2}, u_{2b2}, v_{2b2}, v_{1e_k1}, v_{2e_k2}, v_{1f_k1}, v_{2f_k2}\}$$

$$X_{t3} = \{w_{1c1}, w_{2c2}\}$$

$$\begin{aligned} X_r = \; & \{\alpha_{1a1}, \beta_{1a1}, \alpha_{1b1}, \beta_{1b1}, \alpha_{1c1}, \beta_{1c1}, \alpha_{1e_k1}, \gamma_{1e_k1}, \alpha_{1f_k1}, \gamma_{1f_k1} \\ & \alpha_{2a2}, \beta_{2a2}, \alpha_{2b2}, \beta_{2b2}, \alpha_{2c2}, \beta_{2c2}, \alpha_{2e_k2}, \gamma_{2e_k2}, \alpha_{2f_k2}, \gamma_{2f_k2}\} \end{aligned}$$

Annexe F

Pompe à débit variable Pierburg

F.1 Modélisation géométrique

Définition des repères. Des repères locaux sont définisau niveau des surfaces e_3 et $e4$, ils sont représentés dans la figure 4.8, p. 112. Les repères R_3 et R_4 ont respectivement leurs axes $\vec{x_3}$ et $\vec{x_4}$ tangent aux trous oblongs avec pour origine, un point de l'axe de l'ergot des ailettes.

Points et coordonnées. Les coordonnées des points sont définis dans le repère global $R = \{O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}$ ou les repères locaux R_3 et R_4. Ils sont paramétrées par des variables l_i, $i = \{1, \ldots, 19\}$.

$$\overrightarrow{AB_3} = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{bmatrix} \overrightarrow{AC_3} = \begin{bmatrix} l_4 \\ l_5 \\ l_6 \end{bmatrix} \overrightarrow{AD_3} = \begin{bmatrix} l_7 \\ l_8 \\ l_9 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB_4} = \begin{bmatrix} l_{10} \\ l_{11} \\ l_{12} \end{bmatrix} \overrightarrow{AC_4} = \begin{bmatrix} l_{13} \\ l_{14} \\ l_{15} \end{bmatrix} \overrightarrow{AD_4} = \begin{bmatrix} l_{16} \\ l_{17} \\ l_{18} \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{AF} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_{19} \end{bmatrix} \overrightarrow{AA'} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_{1b} \end{bmatrix} \overrightarrow{B_3B_3'} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_{3d} \end{bmatrix} \overrightarrow{B_4B_4'} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_{4d} \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{C_3C_3''} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_{3e} \end{bmatrix} \overrightarrow{C_4C_4''} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_{4e} \end{bmatrix} \overrightarrow{D_3E_3} = \begin{bmatrix} 0 \\ h_{3d} \\ 0 \end{bmatrix}_{R_3} \overrightarrow{D_4E_4} = \begin{bmatrix} 0 \\ h_{4d} \\ 0 \end{bmatrix}_{R_4}$$

Définition des écarts géométriques. Les surfaces de substitution du mécanisme sont :

- ◇ surfaces planes : $1a, 2a, 2h, 3h_3, 4h_4, 2e_3, 2e_4$.
- ◇ surfaces cylindriques : $1b, 2b, 1d_3, 3d_3, 1d_4, 4d_4, 3e_3, 4e_4$.
- ◇ surfaces quelconques : $3i, 4i$.

Les surface cylindriques b, d_3 et d_4 nécessitent la définition d'écarts intrinsèques :

◇ d_{1b} : écart du diamètre du cylindre de la surface b.

◇ d_{2b} : écart du diamètre de l'alésage de la surface b.

◇ d_{3d_3} : écart du diamètre de la surface d_3.

◇ d_{1d_3} : écart du diamètre de l'alésage de la surface d_3.

◇ d_{4d_4} : écart du diamètre de la surface d_4.

◇ d_{1d_4} : écart du diamètre de l'alésage de la surface d_4.

Un torseur écart pour chaque surface de substitution et pour chaque pièce est défini. Les torseurs sont exprimés soit la base du repère global soit dans les bases des repères locaux.

$$\{T_{1a/1}\} = \begin{Bmatrix} \alpha_{1a1} & 0 \\ \beta_{1a1} & 0 \\ 0 & w_{1a1} \end{Bmatrix}_{A,R} \quad \{T_{2a/2}\} = \begin{Bmatrix} \alpha_{2a2} & 0 \\ \beta_{2a2} & 0 \\ 0 & w_{2a2} \end{Bmatrix}_{A,R}$$

$$\{T_{1b/1}\} = \begin{Bmatrix} \alpha_{1b1} & u_{1b1} \\ \beta_{1b1} & v_{1b1} \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{A,R} \quad \{T_{2b/2}\} = \begin{Bmatrix} \alpha_{2b2} & u_{2b2} \\ \beta_{2b2} & v_{2b2} \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{A,R}$$

$$\{T_{1d_3/1}\} = \begin{Bmatrix} \alpha_{1d_31} & u_{1d_31} \\ \beta_{1d_31} & v_{1d_31} \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{B_3,R} \quad \{T_{1d_4/1}\} = \begin{Bmatrix} \alpha_{1d_41} & u_{1d_41} \\ \beta_{1d_41} & v_{1d_41} \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{B_4,R}$$

$$\{T_{3d_3/3}\} = \begin{Bmatrix} \alpha_{3d_33} & u_{3d_33} \\ \beta_{3d_33} & v_{3d_33} \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{B_3,R} \quad \{T_{4d_4/4}\} = \begin{Bmatrix} \alpha_{4d_44} & u_{4d_44} \\ \beta_{4d_44} & v_{4d_44} \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{B_4,R}$$

$$\{T_{3e_3/3}\} = \begin{Bmatrix} \alpha_{3e_33} & u_{3e_33} \\ \beta_{3e_33} & v_{3e_33} \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{C_3,R_3} \quad \{T_{4e_4/4}\} = \begin{Bmatrix} \alpha_{4e_44} & u_{4e_44} \\ \beta_{4e_44} & v_{4e_44} \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{C_4,R_4}$$

$$\{T_{2e_3/2}\} = \begin{Bmatrix} \alpha_{2e_32} & 0 \\ 0 & v_{2e_32} \\ \gamma_{2e_32} & 0 \end{Bmatrix}_{C_3,R_3} \quad \{T_{2e_4/2}\} = \begin{Bmatrix} \alpha_{2e_42} & 0 \\ 0 & v_{2e_42} \\ \gamma_{2e_42} & 0 \end{Bmatrix}_{C_4,R_4}$$

$$\{T_{2h/2}\} = \begin{Bmatrix} \alpha_{2h2} & 0 \\ \beta_{2h2} & 0 \\ 0 & w_{2h2} \end{Bmatrix}_{F,R}$$

$$\{T_{3h_3/3}\} = \begin{Bmatrix} \alpha_{3h_33} & 0 \\ \beta_{3h_33} & 0 \\ 0 & w_{3h_33} \end{Bmatrix}_{H_3,R} \quad \{T_{4h_4/4}\} = \begin{Bmatrix} \alpha_{4h_44} & 0 \\ \beta_{4h_44} & 0 \\ 0 & w_{4h_44} \end{Bmatrix}_{H_4,R}$$

$$\{T_{3i/3}\} = \begin{Bmatrix} \alpha_{3i3} & u_{3i3} \\ \beta_{3i3} & v_{3i3} \\ \gamma_{3i3} & w_{3i3} \end{Bmatrix}_{H_3,R_3} \quad \{T_{4i/4}\} = \begin{Bmatrix} \alpha_{4i4} & u_{4i4} \\ \beta_{4i4} & v_{4i4} \\ \gamma_{4i4} & w_{4i4} \end{Bmatrix}_{H_4,R_4}$$

Définition des jeux. Il y a au total huit liaisons dans le mécanisme à considérer :

$$\left\{G_{1a/2a}\right\} = \left\{\begin{array}{cc} 0 & u_{1a2a} \\ 0 & v_{1a2a} \\ \gamma_{1a2a} & 0 \end{array}\right\}_{A,R} \qquad \left\{G_{1b/2b}\right\} = \left\{\begin{array}{cc} \alpha_{1b2b} & u_{1b2b} \\ \beta_{1b2b} & v_{1b2b} \\ \gamma_{1b2b} & w_{1b2b} \end{array}\right\}_{A,R}$$

$$\left\{G_{1d_3/3d_3}\right\} = \left\{\begin{array}{cc} \alpha_{1d_33d_3} & u_{1d_33d_3} \\ \beta_{1d_33d_3} & v_{1d_33d_3} \\ \gamma_{1d_33d_3} & w_{1d_33d_3} \end{array}\right\}_{B_3,R} \qquad \left\{G_{1d_4/4d_4}\right\} = \left\{\begin{array}{cc} \alpha_{1d_44d_4} & u_{1d_44d_4} \\ \beta_{1d_44d_4} & v_{1d_44d_4} \\ \gamma_{1d_44d_4} & w_{1d_44d_4} \end{array}\right\}_{B_4,R}$$

$$\left\{G_{2e_3/3e_3}\right\} = \left\{\begin{array}{cc} \alpha_{2e_33e_3} & u_{2e_33e_3} \\ \beta_{2e_33e_3} & v_{2e_33e_3} \\ \gamma_{2e_33e_3} & w_{2e_33e_3} \end{array}\right\}_{C_3,R_3} \qquad \left\{G_{2e_4/4e_4}\right\} = \left\{\begin{array}{cc} \alpha_{2e_44e_4} & u_{2e_44e_4} \\ \beta_{2e_44e_4} & v_{2e_44e_4} \\ \gamma_{2e_44e_4} & w_{2e_44e_4} \end{array}\right\}_{C_4,R_4}$$

$$\left\{G_{2h/3h_3}\right\} = \left\{\begin{array}{cc} 0 & u_{2h3h_3} \\ 0 & v_{2h3h_3} \\ \gamma_{2h3h_3} & 0 \end{array}\right\}_{F,R} \qquad \left\{G_{2h/4h_4}\right\} = \left\{\begin{array}{cc} 0 & u_{2h4h_4} \\ 0 & v_{2h4h_4} \\ \gamma_{2h4h_4} & 0 \end{array}\right\}_{F,R} \tag{F.1}$$

Définition du torseur jeu fonctionnel. Le torseur fonctionnel contient la composante de rotation autour de l'axe $\vec{z}$.

$$\left\{G_{3i/4i}\right\} = \left\{\begin{array}{cc} - & - \\ - & - \\ \gamma_{3i4i} & - \end{array}\right\}_{H_3,R} \tag{F.2}$$

Définition des équations de compatibilité. Il y a au total huit liaisons (sans celle de la condition fonctionnelle), pour quatre pièces. Le nombre cyclomatique donnant le nombre de boucles topologiques à écrire est égal à $N_{boucles} = 8 - 4 + 1 = 5$. Cela permet d'écrire 30 équations de compatibilité. Voici les boucles utilisées :

◇ Boucles $1a/2a/2b/1b$

$$\begin{array}{rcl} \left\{T_{1/1}\right\}_{A,R} & = & \{0\} \\ & = & \left\{T_{1/1a}\right\} + \left\{G_{1a/2a}\right\} + \left\{T_{2a/2}\right\} + \left\{T_{2/2b}\right\} + \left\{G_{2b/1b}\right\} + \left\{T_{1b/1}\right\} \end{array} \tag{F.3}$$

Cette boucle permet l'écriture les équations de compatibilité suivante :

$$\begin{array}{rcl} C_c^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{g}) = & -\alpha_{1a1} + \alpha_{2a2} - \alpha_{2b2} - \alpha_{1b2b} + \alpha_{1b1} & = 0 \\ C_c^{(2)}(\mathbf{x},\mathbf{g}) = & -\beta_{1a1} + \beta_{2a2} - \beta_{2b2} - \beta_{1b2b} + \beta_{1b1} & = 0 \\ C_c^{(3)}(\mathbf{x},\mathbf{g}) = & \gamma_{1a2a} - \gamma_{1b2b} & = 0 \\ C_c^{(4)}(\mathbf{x},\mathbf{g}) = & u_{1a2a} - u_{2b2} - u_{1b2b} + u_{1b1} & = 0 \\ C_c^{(5)}(\mathbf{x},\mathbf{g}) = & v_{1a2a} - v_{2b2} - v_{1b2b} + v_{1b1} & = 0 \\ C_c^{(6)}(\mathbf{x},\mathbf{g}) = & -w_{1a1} + w_{2a2} - w_{1b2b} & = 0 \end{array} \tag{F.4}$$

◇ Boucles $1a/2a/2e_3/3e_3/3d_3/1d_3$

$$\begin{aligned}\left\{T_{1/1}\right\}_{A,R} &= \{0\}\\ &= \left\{T_{1/1a}\right\}+\left\{G_{1a/2a}\right\}+\left\{T_{2a/2}\right\}+\left\{T_{2/2e_3}\right\}+\left\{G_{2e_3/3e_3}\right\}+\left\{T_{3e_3/3}\right\}\\ &\quad+\left\{T_{3/3d_3}\right\}+\left\{G_{3d_3/1d_3}\right\}+\left\{T_{1d_3/1}\right\}\end{aligned} \tag{F.5}$$

Cette boucle permet l'écriture les équations de compatibilité suivante :

$$\begin{aligned}
C_c^{(7)}(\mathbf{x},\mathbf{g}) = \quad & -\alpha_{1a1}+\alpha_{2a2}+\alpha_{2e_32}\cos\theta_3+\alpha_{2e_33e_3}\cos\theta_3-\beta_{2e_33e_3}\sin\theta_3\\
& +\alpha_{3e_33}\cos\theta_3-\beta_{3e_33}\sin\theta_3-\alpha_{3d_33}-\alpha_{1d_33d_3}+\alpha_{1d_31} = 0\\
C_c^{(8)}(\mathbf{x},\mathbf{g}) = \quad & -\beta_{1a1}+\beta_{2a2}+\alpha_{2e_32}\sin\theta_3+\alpha_{2e_33e_3}\sin\theta_3-\beta_{2e_33e_3}\cos\theta_3\\
& +\alpha_{3e_33}\sin\theta_3-\beta_{3e_33}\cos\theta_3-\beta_{3d_33}-\beta_{1d_33d_3}+\beta_{1d_31} = 0\\
C_c^{(9)}(\mathbf{x},\mathbf{g}) = \quad & \gamma_{1a2a}-\gamma_{2e_32}+\gamma_{2e_33e_3}-\gamma_{3d_31d_3} = 0\\
C_c^{(10)}(\mathbf{x},\mathbf{g}) = \quad & u_{1a2a}+v_{2e_32}\sin\theta_3-l_5\gamma_{2e_32}+l_6\alpha_{2e_32}\sin\theta_3+u_{2e_33e_3}\cos\theta_3\\
& -v_{2e_33e_3}\sin\theta_3+l_5\gamma_{2e_33e_3}-l_6(\alpha_{2e_33e_3}\sin\theta_3+\beta_{2e_33e_3}\cos\theta_3)\\
& +u_{3e_33}\cos\theta_3-v_{3e_33}\sin\theta_3-l_6(\alpha_{3e_33}\sin\theta_3+\beta_{3e_33}\cos\theta_3)\\
& -u_{3d_33}+l_3\beta_{3d_33}-u_{1d_33d_3}-l_2\gamma_{1d_33d_3}\\
& +l_3\beta_{1d_33d_3}+u_{1d_31}-l_3\beta_{1d_31} = 0\\
C_c^{(11)}(\mathbf{x},\mathbf{g}) = \quad & v_{1a2a}-v_{2e_32}\cos\theta_3+l_4\gamma_{2e_32}-l_6\alpha_{2e_32}\cos\theta_3+u_{2e_33e_3}\sin\theta_3\\
& +v_{2e_33e_3}\cos\theta_3-l_4\gamma_{2e_33e_3}+l_6(\alpha_{2e_33e_3}\cos\theta_3-\beta_{2e_33e_3}\sin\theta_3)\\
& +u_{3e_33}\sin\theta_3+v_{3e_33}\cos\theta_3+l_6(\alpha_{3e_33}\cos\theta_3-\beta_{3e_33}\sin\theta_3)\\
& -v_{3d_33}-l_3\alpha_{3d_33}-v_{1d_33d_3}-l_3\alpha_{1d_33d_3}\\
& +l_1\gamma_{1d_33d_3}+v_{1d_31}+l_3\alpha_{1d_31} = 0\\
C_c^{(12)}(\mathbf{x},\mathbf{g}) = \quad & w_{1a2a}+w_{2a2}+l_5\alpha_{2e_32}\cos\theta_3-l_4\alpha_{2e_32}\sin\theta_3+w_{2e_33e_3}\\
& +l_4(\alpha_{2e_33e_3}\sin\theta_3+\beta_{2e_33e_3}\cos\theta_3)-l_5(\alpha_{2e_33e_3}\cos\theta_3\\
& -\beta_{2e_33e_3}\sin\theta_3)+l_4(\alpha_{3e_33}\sin\theta_3+\beta_{3e_33}\cos\theta_3)\\
& -l_5(\alpha_{3e_33}\cos\theta_3-\beta_{3e_33}\sin\theta_3)-l_1\beta_{3d_33}+l_2\alpha_{3d_33}\\
& -w_{1d_33d_3}-l_1\beta_{1d_33d_3}+l_2\alpha_{1d_33d_3}+l_1\beta_{1d_31}-l_2\alpha_{1d_31} = 0
\end{aligned} \tag{F.6}$$

◇ Boucles $1a/2a/2e_4/4e_4/4d_4/1d_4$ Les équations de compatibilité, $C_c^{(j)}$ $j=\{13,\ldots,18\}$, obtenues sont identiques à celles écrites avec la boucle précédente à la différence qu'il s'agit de l'ailette indicée 4 avec l'angle θ_4. De plus, les longueurs l_i, $i=1,\ldots,6$ sont changées respectivement par l_i, $i=10,\ldots,15$.

◇ Boucles $1a/2a/2h/3h_3/3d_3/1d_3$

$$\begin{aligned}\left\{T_{1/1}\right\}_{A,R} &= \{0\}\\ &= \left\{T_{1/1a}\right\}+\left\{G_{1a/2a}\right\}+\left\{T_{2a/2}\right\}+\left\{T_{2/2h}\right\}+\left\{G_{2h/3h_3}\right\}+\left\{T_{3h_3/3}\right\}\\ &\quad+\left\{T_{3/3d_3}\right\}+\left\{G_{3d_3/1d_3}\right\}+\left\{T_{1d_3/1}\right\}\end{aligned} \tag{F.7}$$

Cette boucle permet l'écriture des équations de compatibilité suivante :

$$\begin{aligned}
C_c^{(19)}(\mathbf{x},\mathbf{g}) = \quad & -\alpha_{1a1}+\alpha_{2a2}-\alpha_{2h2}+\alpha_{3h_33}-\alpha_{3d_33}-\alpha_{1d_33d_3}+\alpha_{1d_31} && = 0\\
C_c^{(20)}(\mathbf{x},\mathbf{g}) = \quad & -\beta_{1a1}+\beta_{2a2}-\beta_{2h2}+\beta_{3h_33}-\beta_{3d_33}-\beta_{1d_33d_3}+\beta_{1d_31} && = 0\\
C_c^{(21)}(\mathbf{x},\mathbf{g}) = \quad & \gamma_{1a2a}+\gamma_{2h3h_3}-\gamma_{3d_31d_3} && = 0\\
C_c^{(22)}(\mathbf{x},\mathbf{g}) = \quad & u_{1a2a}+l_{19}\beta_{2h2}+u_{2h3h_3}-l_{19}\beta_{3h_33}-u_{3d_33} &&\\
& +l_3\beta_{3d_33}-u_{1d_33d_3}-l_2\gamma_{1d_33d_3}+l_3\beta_{1d_33d_3}+u_{1d_31}-l_3\beta_{1d_31} && = 0\\
C_c^{(23)}(\mathbf{x},\mathbf{g}) = \quad & v_{1a2a}-l_{19}\alpha_{2h2}+v_{2h3h_3}+l_{19}\alpha_{3h_33}-v_{3d_33} &&\\
& -l_3\alpha_{3d_33}-v_{1d_33d_3}-l_3\alpha_{1d_33d_3}+l_1\gamma_{1d_33d_3}+v_{1d_31}+l_3\alpha_{1d_31} && = 0\\
C_c^{(24)}(\mathbf{x},\mathbf{g}) = \quad & w_{1a2a}+w_{2a2}-w_{2h2}+w_{3h_33}-l_1\beta_{3d_33}+l_2\alpha_{3d_33}-w_{1d_33d_3} &&\\
& -l_1\beta_{1d_33d_3}+l_2\alpha_{1d_33d_3}+l_1\beta_{1d_31}-l_2\alpha_{1d_31} && = 0
\end{aligned} \tag{F.8}$$

◇ Boucles $1a/2a/2h/4h_4/4d_4/1d_4$ Les équations de compatibilité, $C_c^{(j)}$ $j=\{25,\ldots,30\}$, obtenues sont identiques à celles écrites avec la boucle précédente à la différence qu'il s'agit de l'ailette indicée 4 avec l'angle θ_4. De plus, les longueurs l_i, $i=1,\ldots,6$ sont changées respectivement par l_i, $i=10,\ldots,15$.

Définition des contraintes d'interface. Le mécanisme possède plusieurs types de liaisons :

◇ Les liaisons $1b/2b$, $1d/3d_3$ et $1d/4d_4$ sont des liaisons pivot glissant, ce qui implique l'écriture de contraintes d'interface quadratiques. La procédure de linéarisation est appliquée sur ces contraintes. Les contraintes d'interface s'écrivent de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
C_i^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{g}) = \quad & u_{1b2b}^2+v_{1b2b}^2-\left(\frac{d_{2b}-d_{1b}}{2}\right)^2 && \leq 0\\
C_i^{(2)}(\mathbf{x},\mathbf{g}) = \quad & \left(u_{1b2b}+l_{1b}\beta_{1b2b}\right)^2+\left(v_{1b2b}-l_{1b}\alpha_{1b2b}\right)^2-\left(\frac{d_{2b}-d_{1b}}{2}\right)^2 && \leq 0\\
C_i^{(3)}(\mathbf{x},\mathbf{g}) = \quad & u_{1d3d_3}^2+v_{1d3d_3}^2-\left(\frac{d_{3d}-d_{3d_3}}{2}\right)^2 && \leq 0\\
C_i^{(4)}(\mathbf{x},\mathbf{g}) = \quad & \left(u_{1d3d_3}+l_{3d}\beta_{1d3d_3}\right)^2+\left(v_{1d3d_3}-l_{3d}\alpha_{1d3d_3}\right)^2-\left(\frac{d_{3d}-d_{3d_3}}{2}\right)^2 && \leq 0\\
C_i^{(5)}(\mathbf{x},\mathbf{g}) = \quad & u_{1d4d_4}^2+v_{1d4d_4}^2-\left(\frac{d_{4d}-d_{4d_4}}{2}\right)^2 && \leq 0\\
C_i^{(6)}(\mathbf{x},\mathbf{g}) = \quad & \left(u_{1d4d_4}+l_{4d}\beta_{1d4d_4}\right)^2+\left(v_{1d4d_4}-l_{4d}\alpha_{1d4d_4}\right)^2-\left(\frac{d_{4d}-d_{4d_4}}{2}\right)^2 && \leq 0
\end{aligned} \tag{F.9}$$

◇ Les liaisons $2e_3/3e_3$ et $2e_4/4e_4$ sont des liaisons équivalentes à deux liaisons linéaires annulaires. Il faut donc écrire deux fois deux contraintes d'interface par liaison. Les

contraintes d'interface s'écrivent de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
C_i^{(7)}(\mathbf{x},\mathbf{g}) &= v_{2e3e_3} - \frac{h_{3e}-d_{3e}}{2} &\leq 0\\
C_i^{(8)}(\mathbf{x},\mathbf{g}) &= v_{2e3e_3} - l_{3e}\alpha_{2e3e_3} - \frac{h_{3e}-d_{3e}}{2} &\leq 0\\
C_i^{(9)}(\mathbf{x},\mathbf{g}) &= -v_{2e3e_3} - \frac{h_{3e}-d_{3e}}{2} &\leq 0\\
C_i^{(10)}(\mathbf{x},\mathbf{g}) &= -v_{2e3e_3} + l_{3e}\alpha_{2e3e_3} - \frac{h_{3e}-d_{3e}}{2} &\leq 0\\
C_i^{(11)}(\mathbf{x},\mathbf{g}) &= v_{2e4e_4} - \frac{h_{4e}-d_{4e}}{2} &\leq 0\\
C_i^{(12)}(\mathbf{x},\mathbf{g}) &= v_{2e4e_4} - l_{4e}\alpha_{2e4e_4} - \frac{h_{4e}-d_{4e}}{2} &\leq 0\\
C_i^{(13)}(\mathbf{x},\mathbf{g}) &= -v_{2e4e_4} - \frac{h_{4e}-d_{4e}}{2} &\leq 0\\
C_i^{(14)}(\mathbf{x},\mathbf{g}) &= -v_{2e4e_4} + l_{4e}\alpha_{2e4e_4} - \frac{h_{4e}-d_{4e}}{2} &\leq 0
\end{aligned} \tag{F.10}$$

Définition de la condition fonctionnelle. La boucle $2h/3h_3/3i/4i/4h_4/2h$ est choisie pour écrire une équation de compatibilité prenant en compte à la caractéristique fonctionnelle γ_{3i4i} :

$$\begin{aligned}
\left\{T_{1/1}\right\}_E &= \{0\}\\
&= \left\{G_{2h/3h_3}\right\} + \left\{T_{3h_3/3}\right\} + \left\{T_{3/3i}\right\} + \left\{G_{3i/4i}\right\} + \left\{T_{4i/4}\right\} + \left\{T_{4/4h_4}\right\} + \left\{G_{4h_4/2h}\right\}
\end{aligned} \tag{F.11}$$

L'équation de compatibilité obtenue est la suivante :

$$C_c^{(31)}(\mathbf{x},\mathbf{g}) = \gamma_{2h3h_3} - \gamma_{3i3} + \gamma_{3i4i} + \gamma_{4i4} - \gamma_{2h4h_4} = 0 \tag{F.12}$$

La caractéristique γ_{3i4i} doit rester dans un intervalle pour garantir la fonctionnalité du mécanisme :

$$\gamma_{3i4i} \in [-r_{\text{seuil}}; r_{\text{seuil}}] \tag{F.13}$$

Il y a deux conditions fonctionnelles à définir :

$$\begin{aligned}
C_f^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{g}) &= r_{\text{seuil}} - \gamma_{3i4i} \geq 0\\
C_f^{(2)}(\mathbf{x},\mathbf{g}) &= -r_{\text{seuil}} + \gamma_{3i4i} \geq 0
\end{aligned} \tag{F.14}$$

Formulation du problème d'assemblage. Deux problèmes d'optimisation sont définis, un associé à chaque condition fonctionnelle. Ils sont tous les deux soumis aux mêmes contraintes. Ils sont définis de la façon suivante :

$$\begin{aligned} R_f^{(k)}(\mathbf{x}) = \min_{\mathbf{g}\in\mathbb{R}^{40}} \quad & C_f^k(\mathbf{x},\mathbf{g}) \\ \text{sous} \quad & C_c^{(k)}(\mathbf{x},\mathbf{g}) = 0 \quad \forall k = \{1,\ldots,31\} \\ & C_i^{(l)}(\mathbf{x},\mathbf{g}) \leq 0 \quad \forall l = \{1,\ldots,6\times N_d + 8\} \end{aligned} \tag{F.15}$$

où N_d est le nombre de linéarisations des contraintes d'interface quadratiques.

F.2 Valeurs des paramètres

Les valeurs des dimensions nominales et de la tolérance t sont données dans le tableau F.1.

l_1	l_2	l_3	l_4	l_5	l_6	l_7	l_8	l_9	l_{10}	l_{11}
56.38	-2.46	-13.35	55.79	32.03	0.15	54.29	31.97	2.65	44.77	34.54
l_{12}	l_{13}	l_{14}	l_{15}	l_{16}	l_{17}	l_{18}	l_{19}	l_{1b}	l_{3d}	l_{4d}
-13.35	22.14	60.4	0.15	21.03	59.39	2.65	2.65	2.5	16	16
l_{3e}	l_{4e}	h_{3e}	h_{4e}	r_{seuil}						
2.5	2.5	3	3	0.1						

Tableau F.1 – Valeurs des dimensions nominales de la pompe.

Les variables aléatoires suivent une loi normale $X \sim \mathcal{N}(\mu_X, \sigma_X)$. Les valeurs des paramètres sont données dans le tableau F.2.

$\mu_{d_{1b}}$	$\sigma_{d_{1b}}$	$\mu_{d_{2b}}$	$\sigma_{d_{2b}}$	$\mu_{d_{3d}}$	$\sigma_{d_{3d}}$	$\mu_{d_{1d_3}}$	$\sigma_{d_{1d_3}}$
112.7	0.0008	112.9	0.0013	5.976	0.00066	6.01	0.0016
$\mu_{d_{4d}}$	$\sigma_{d_{4d}}$	$\mu_{d_{1d_4}}$	$\sigma_{d_{1d_4}}$	$\mu_{d_{3e}}$	$\sigma_{d_{3e}}$	$\mu_{d_{4e}}$	$\sigma_{d_{4e}}$
5.976	0.00066	6.01	0.0016	2.9	0.0005	2.9	0.0005
μ_{X_t}	$\sigma_{X_{t1}}$	$\sigma_{X_{t2}}$	$\sigma_{X_{t3}}$	$\sigma_{X_{t4}}$	μ_{X_r}	σ_{X_r}	
0	0.009	0.018	0.036	0.0045	0	0.00018	

Tableau F.2 – Valeurs des variables aléatoires de la fiche électrique.

Dans le tableau F.2, X_{t1}, X_{t2}, X_{t3} et X_{t4} désignent les écarts géométriques de translation et X_r désigne les écarts géométriques de rotation :

$$X_{t1} = \{w_{1a1}, w_{2a2}, w_{2h2}, u_{2b2}, v_{2b2}, u_{3d3}, v_{3d3}, u_{4d4}, v_{4d4}, u_{3e3}, v_{3e3}, u_{4e4}, v_{4e4}, v_{2e_32}, v_{2e_42}\}$$

$$X_{t2} = \{u_{1b1}, v_{1b1}, u_{1d3}, v_{1d3}, u_{1d4}, v_{1d4}\}$$

$$X_{t3} = \{u_{3i3}, v_{3i3}, w_{3i3}, u_{4i4}, v_{4i4}, w_{4i4}\}$$

$$X_{t4} = \{w_{3h3}, w_{4h4}\}$$

$$
\begin{aligned}
X_r = \quad & \{\alpha_{1a1}, \beta_{1a1}, \alpha_{1b1}, \beta_{1b1}, \alpha_{2a2}, \beta_{2a2}, \alpha_{2b2}, \beta_{2b2}, \alpha_{2h2}, \beta_{2h2}, \alpha_{3h3}, \beta_{3h3}, \alpha_{4h4}, \beta_{4h4} \\
& \alpha_{1d3}, \beta_{1d3}, \alpha_{1d4}, \beta_{1d4}, \alpha_{3d3}, \beta_{3d3}, \alpha_{4d4}, \beta_{4d4}, \alpha_{3e3}, \beta_{3e3}, \alpha_{4e4}, \beta_{4e4} \\
& \alpha_{2e_3 2}, \gamma_{2e_3 2}, \alpha_{2e_4 2}, \gamma_{2e_4 2}, \alpha_{3i3}, \beta_{3i3}, \gamma_{3i3}, \alpha_{4i4}, \beta_{4i4}, \gamma_{4i4}\}
\end{aligned}
$$

Bibliographie

P.-A. Adragna, S. Samper, et H. Favreliï¿½re. How form errors impact on 2D precision assembly with clearance ? *Precision Assembly Technologies and Systems*, 315 :50–59, 2010.

D.L. Allaix et V.I. Carbone. An improvement of the response surface method. *Structural Safety*, 33 :165–172, 2011.

G. Ameta, S. Samper, et M. Giordano. Comparison of spatial math models for tolerance analysis : Tolerance-maps, deviation domain, and ttrs. *Journal of Computing and Information Science in Engineering*, 12 :1–10, 2012.

N. Anwer, B. Schleich, L. Mathieu, et S. Wartzack. From solid modelling to skin model shapes : Shifting paradigms in computer-aided tolerancing. *CIRP Annals - Manufacturing Technology*, 63 :137–140, 2014.

S.-K. Au et J.L. Beck. Estimation of small failure probabilities in high dimensions by subset simulation. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 16(4) :263–277, 2001.

E. Ballot. *Lois de comportement gï¿½omï¿½trique des mï¿½canismes pour le tolï¿½rancement*. PhD thesis, Cachan, ï¿½cole Normale Supï¿½rieure, 1995.

A. Ballu, J.-Y. Plantec, et L. Mathieu. Geometrical reliability of overconstrained mechanisms with gaps. *CIRP Annals - Manufacturing Technology*, 57 :159–162, 2008.

P. Beaucaire, N. Gayton, E. Duc, et J.-Y. Dantan. Statistical tolerance analysis of overconstrained mechanisms with gaps using system reliability methods. *Computer-Aided Design*, 45 :1547–1555, 2013.

D. Bertsimas et J.N. Tsitsiklis. *Introduction to Linear Optimization*. Athena Scientific, 1997.

S. Bhide, G. Ameta, J.K. Davidson, et J.J. Shah. Tolerance-maps applied to the straightness and orientation of an axis. *CD ROM Proc., 9th CIRP International Seminar on Computer-Aided Tolerancing, Arizona State University, Tempe, AZ, USA*, 2005.

Barron J. Bichon, John M. McFarland, et Sankaran Mahadevan. Efficient surrogate models for reliability analysis of systems with multiple failure modes. *Reliability Engineering & System Safety*, 96(10) :1386 – 1395, 2011.

B.J. Bichon, M.S. Eldred, L.P. Swiler, S. Mahadevan, et J.M. McFarland. Efficient global reliability analysis for non linear implicit performance functions. *AIAA Journal*, 46 (10) :2459–68, 2008.

G. Blatman et B Sudret. An adaptive algorithm to build up sparse polynomial chaos expansions for stochastic finite element analysis. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 25(2) :183–197, 2010a.

G. Blatman et B. Sudret. Efficient computation of global sensitivity indices using sparse polynomial chaos expansions. *Reliability Engineering & System Safety*, 95(11) :1216–1229, 2010b.

J.-F. Bonnans, J.-C. Gilbert, C. Lemarï¿½chal, et C. A. Sagastizábal. *Numerical Optimization - Theoretical and Practical Aspects*. Springer, 2006.

B.E. Boser, I.M. Guyon, et V.N. Vapnik. A training algorithm for optimal margin classifiers. *5th Annual ACM Workshop on COLT*, 1992.

P. Bourdet et A. Clément. Controlling a complex surface with a 3 axis measuring machine. *Annals of the CIRP*, 25 :359–364, 1976.

J.-M. Bourinet, F. Deheeger, et M. Lemaire. Assessing small failure probabilities by combined subset simulation and support vector machines. *Structural Safety*, 33 :343–353, 2011.

C.G. Bucher et U. Bourgund. A fast and efficient response surface approach for structural reliability problems. *Structural Safety*, 7 :57–66, 1990.

K.W. Chase, S.P. Magleby, et C.G. Glancy. *Tolerance Analysis of 2-D and 3-D Mechanical Assemblies with Small Kinematic Adjustments*, volume 218, pages 1869–1873. Advanced Tolerancing Techniques Zhang H. C. Ed. : Wiley, 2004.

S.-K. Choi et R.V. Grandhi. Polynomial chaos expansion with latin hypercube sampling for estimating response variability. *AIAA Journal*, 42(6) :1191–1198, 2004.

J.Y. Dantan et A. Ballu. Assembly specification by gauge with internal mobilities (G.I.M) : A specification semantics deduced from tolerance synthesis. *Journal of Manufacturing Systems*, 21(2) :218–235, 2002.

J.Y. Dantan et J. Qureshi. Worse case and statistical tolerance analysis based on quantified constraint satisfaction problems and monte carlo simulation. *Computer Aided Design*, 41(1) :1–12, 2009.

J.K. Davidson et J.J. Shah. Modeling of geometric variations for line-profiles. *Journal of Computing and Information Science in Engineering*, 12 :1–10, 2012.

J.K. Davidson, A. Mujezinovic, et J.J. Shah. A new mathematical model for geometric tolerances as applied to round faces. *Journal of Mechanical Design*, 124 :609–622, 2002.

F. Deheeger et M. Lemaire. Reliability analysis using support vector machine classification. *3rd International ASRANet Colloquium*, 2006.

A. Der Kiureghian et P.L. Liu. Structural reliability under incomplete probability information. *Journal of Engineering Mechanics*, 112(1) :85–104, 1986.

A. Desrochers. *Geometrical variations management in a multidisciplinary environment with the Jacobian-Torsor model*, pages 75–84. Davidson J. K., Models for Computer Aided Tolerancing in Design and Manufacturing, 2007.

O. Ditlevsen et H.O. Madsen. *Structural Reliability Methods*. Wiley, 1996.

P.J. Dossantos-Uzarralde et A. Guittet. A polynomial chaos approach for nuclear data uncertainties evaluations. *Nuclear Data Sheets*, 109 :2894–2899, 2008.

V. Dubourg, B. Sudret, et F. Deheeger. Metamodel-based importance sampling for structural reliability analysis. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 33 :47–57, 2013.

A. Dumas, B. Echard, N. Gayton, O. Rochat, J.-Y. Dantan, et S. Van Der Veen. AK-ILS : An Active learning method based on Kriging for the Inspection of Large Surfaces. *Precision Engineering*, 37 :1–9, 2013.

A. Dumas, J.-Y. Dantan, et N. Gayton. Impact of a behavior model linearization strategy on the tolerance analysis of over-constrained mechanisms. *Computer-Aided Design*, 2014, sous presse.

A. Dumas, J.-Y. Dantan, N. Gayton, T. Bles, et R. Loebl. An iterative statistical tolerance analysis procedure to deal with linearized behavior models. *Journal of Zhejiang University - Science A*, 2015, sous presse.

A. Dumas, N. Gayton, J.-Y. Dantan, et B. Sudret. A new system formulation for the tolerance analysis of overconstrained mechanisms. *Probabilistic Engineering Mechanics*, accepté.

B. Echard, N. Gayton, et M. Lemaire. Ak-mcs : An active learning reliability method combining kriging and monte carlo simulation. *Structural Safety*, 33 :145–154, 2011.

B. Echard, N. Gayton, M. Lemaire, et N. Relun. A combined importance sampling and kriging reliability method for small failure probabilities with time-demanding numerical models. *Reliability Engineering & System Safety*, 111(0) :232 – 240, 2013.

W. Fauriat et N. Gayton. Ak-sys : An adaptation of the ak-mcs method for system reliability. *Reliability Engineering and System Safety*, 123 :137–144, 2014.

J. Gao, K.W. Chase, et S.P. Magleby. Generalized 3-d tolerance analysis of mechanical assemblies with small kinematic adjustments. *IIE Transactions*, 30 :367–377, 1998.

N. Gayton, J.M. Bourinet, et M. Lemaire. CQ2RS : a new statistical approach to the response surface method for reliability analysis. *Structural Safety*, 25 :99–121, 2003.

A. Genz. Numerical computation of multivariate normal probabilities. *Journal of Computational and Graphical Statistics*, pages 141–149, 1992.

M. Giordano et D. Duret. Clearance space and deviation space : Application to three-dimensional chain of dimensions and positions. *3rd CIRP Design Seminar on Computer-Aided Tolerancing*, 1993.

M. Giordano, S. Samper, et J.P. Petit. Tolerance analysis and synthesis by means of deviation domains, axi-symmetric cases. *9th CIRP International Seminar on Computer-Aided Tolerancing, Arizona State University, Tempe, AZ, USA*, 2005.

A. Hasofer et N. Lind. Exact and invariant second-moment code format. *Journal of Engineering Mechanics*, 100(1) :111–121, 1974.

Y.S. Hong et T.C. Chang. A comprehensive review of tolerancing research. *International Journal of Production Research*, 40 :2425–59, 2002.

J.E. Hurtado. An examination of methods for approximating implicit limit state functions from the viewpoint of statistical learning theory. *Structural Safety*, 26 :271–293, 2004.

J.E. Hurtado. Filtered importance sampling with support vector margin : A powerful method for structural reliability analysis. *Structural Safety*, 29 :2–15, 2007.

J.E. Hurtado. An optimization method for learning statistical classifiers in structural reliability. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 25 :26–34, 2010.

D.R. Jones, M. Schonlau, et W.J. Welch. Efficient global optimization of expensive black-box functions. *Journal of Global Optimization*, 13 :455–492, 1998.

A.G. Journel. Nonparametric estimation of spatial distributions. *Mathematical Geology*, 15(3) :445–468, 1983.

I. Kaymaz et C.A. McMahon. A response surface method based on weighted regression for structural reliability analysis. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 20 :11–17, 2005.

D.-S. Kim, S.-Y. Ok, J. Son, et H.-M Koh. System reliability analysis using dominant failure modes identified by selective searching technique. *Reliability Engineering and System Safety*, 119 :316–331, 2013.

D.G. Krige. A statistical approach to some basic mine valuation problems on the witwatersrand. *Journal of the Chemical, Metallurgical and Mining Society of South Africa*, 52(6) :119–139, 1951.

O. Legoff, S. Tichadou, et J.Y. Hascoet. Manufacturing errors modelling : two three-dimensional approaches. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers Part B-Journal of Engineering Manufacture*, 218 :1869–1873, 2004.

M. Lemaire. *Structural Reliability*. ISTE/Wiley, 2009.

J. Li et D. Xiu. Evaluation of failure probability via surrogate models. *Journal of Computational Physics*, 229 :8966–8980, 2010.

J.P. Loose, S.Y. Zhou, et D. Ceglarek. Kinematic analysis of dimensional variation propagation for multistage machining processes with general fixture layouts. *Ieee Transactions on Automation Science and Engineering*, 4 :141–152, 2007.

M. Mansuy. *Aide au toli¿½rancement tridimensionnel : Modi¿½le des domaines*. PhD thesis, Laboratoire SYMME, Universiti¿½ de Grenoble, 2012.

M. Mansuy, M. Giordano, et P. Hernandez. A new calculation method for the worst case tolerance analysis and synthesis in stack-type assemblies. *Computer-Aided Design*, 43 : 1118–1125, 2011.

M. Mansuy, M. Giordano, et P. Hernandez. A generic method for the worst case and statistical tridimensional tolerancing analysis. In Elsevier, editor, *Procedia Engineering*, pages 10p, presented at : 12th CIRP International Seminar on Computer–Aided Tolerancing, Huddersfield, UK, 2012.

G. Matheron. *Traité de géostatistique appliquée*, volume 9. Editions Technip, 1962.

G. Matheron, M. Guarascio, M. David, C. Huijbregts, et J.M. McFarland. A simple substitute for conditional expectation : the disjunctive kriging. *Advanced Geostatistics in the Mining Industry*, pages 221–236, 1976.

L. Mathieu. *Contribution i¿½ la mai¿½trise des variations gi¿½omi¿½triques des produits le long de leur cycle de vie*. Thi¿½se d'habilitation i¿½ diriger des recherches, LURPA, 2011.

L. Mathieu et F. Villeneuve. *Toli¿½rancement gi¿½omi¿½trique des produits*. Lavoisier, 2007.

R.E. Melchers. Radial importance sampling for structural reliability. *Journal of Engineering Mechanics*, 116(1) :189–203, 1990.

F. Mhenni, P. Serri¿½, A. Mlika, L Romdhane, et A Rivii¿½re. Dependency between dimensional deviations in overconstrained mechanisms. *Conception et Production inti¿½gri¿½es*, pages 22–4, 2007.

E.P. Morse. Statistical analysis of assemblies having dependent fitting conditions. In ASME, editor, *International Mechanical Engineering Congress and Exposition*, pages 1–5, 2004.

M.C. Moura, E. Zio, I.D. Lins, et E. Droguett. Failure and reliability prediction by support vector machines regression of time series data. *Reliability Engineering and System Safety*, 96 :1527–1534, 2011.

A. Nataf. Dï¿½termination des distributions dont les marges sont donnï¿½es. *Comptes rendus de l'Acadï¿½mie des Sciences*, 225 :42–43, 1962.

X.S. Nguyen, A. Sellier, F. Duprat, et G. Pons. Adaptive response surface method based on a double weighted regression technique. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 24 : 135–143, 2009.

S.D. Nigam et J.U. Turner. Review of statistical approaches of tolerance analysis. *Computer Aided Design*, 27 :6–15, 1995.

A. Notin, N. Gayton, J.L. Dulong, M. Lemaire, et P. Villon. RPCM : A strategy to perform reliability analysis using polynomial chaos and resampling - application to fatigue design. *European Journal of Computational Mechanics*, pages 795–830, 2010.

M. Paffrath et U. Wever. Adapted polynomial chaos expansion for failure detection. *Journal of Computational Physics*, 226 :263–281, 2007.

J.-P. Petit. *Spï¿½cification gï¿½omï¿½trique des produits : mï¿½thode d'analyse des tolï¿½rances, Application en conception assistï¿½e par ordinateur.* PhD thesis, LMï¿½ca, Universitï¿½ de Savoie, 2004.

J. Qureshi. *Contributions ï¿½ la maï¿½trise de la robustesse des produits : Formalisation par logique formelle, applications ï¿½ la conception ensembliste et au tolï¿½rancement.* PhD thesis, LCFC, Arts et Métiers ParisTech, 2011.

J. Qureshi, J.Y. Dantan, V. Sabri, P. Beaucaire, et N. Gayton. A statistical tolerance analysis approach for over-constrained mechanism based on optimization and monte carlo simulation. *Computer Aided Design*, 44 :132–142, 2012.

R. Rackwitz et B. Fiessler. Structural reliability under combined random load sequences. *Computers and Structures*, 9 :489–494, 1979.

M. Rosenblatt. Remarks on a multivariate transformation. *Annals of Mathematical Statistics*, 23(3) :470–472, 1952.

O. Roustant, D. Ginsbourger, et Y. Deville. Dicekriging, diceoptim : Two r packages for the analysis of computer experiments by kriging-based metamodeling and optimization. *Journal of statistical software*, VV(2) :52, 2010.

S. Samper, P.-A. Adragna, H. Favreliere, et M. Pillet. Modeling of 2D and 3D assemblies taking into account form errors of plane surfaces. *Journal of Computing and Information Science in Engineering*, 4 :1–12, 2009.

B. Schleich et S. Wartzack. A discrete geometry approach for tolerance analysis of mechanism. *Mechanism and Machine Theory*, 77 :148–163, 2014.

A.J. Smola et B. Schölkopf. A tutorial on support vector regression. *Journal Statistics and Computing*, 14(3) :199–222, 2004.

B. Sudret. Global sensitivity analysis using polynomial chaos expansions. *Reliability Engineering & System Safety*, 93(7) :964–979, 2008.

D. Teissandier et V. Delos. Algorithme to calculate the minkowski sums of 3-polytopes based on normal fans. *Computer-Aided Design*, 43 :1567–1576, 2011.

V. Vapnik. *The Nature of Statistical Learning Theory*. Springer, 1995.

V. Vapnik et A. Lerner. Pattern recognition using generalized portrait method. *Automation and Remote Control*, 24, 1963.

J. Villemonteix, E. Vázquez, et E. Walter. An informational approach to the global optimization of expensive-to-evaluate functions. *Computing Research Repository*, abs/cs/0611143 :31, 2006.

H. Wackernagel. *Multivariate Geostatistics : an Introduction with Applications*. Springer-Verlag, Berlin, 2003.

N. Wiener. The homogeneous chaos. *American Journal of Mathematics*, 60(4) :897–936, 1938.

Y. Zhang et A. Kiureghian. Two improved algorithms for reliability analysis. In Rüdiger Rackwitz, Guiliano Augusti, et Antonio Borri, editors, *Reliability and Optimization of Structural Systems*, The International Federation for Information Processing, pages 297–304. Springer US, 1995.

Z. Zou et E.P. Morse. Applications of the gapspace model for multidimensional mechanical assemblies. *Journal of Computing and Information Science in Engineering*, 12 : 22–30, 203.

DEVELOPPEMENT DE METHODES PROBABILISTES POUR L'ANALYSE DES TOLERANCES DES SYSTEMES MECANIQUES SUR-CONTRAINTS

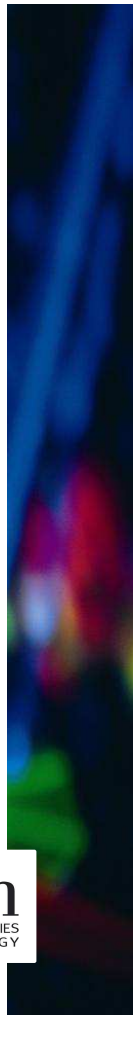
RESUME : L'analyse des tolérances des mécanismes a pour but d'évaluer la qualité du produit lors de sa phase de conception. La technique consiste à déterminer si, dans une production de grandes séries, le taux de rebuts des mécanismes défaillants est acceptable. Deux conditions doivent être vérifiées: une condition d'assemblage et une condition fonctionnelle. La méthode existante se base sur le couplage de la simulation de Monte Carlo avec un algorithme d'optimisation qui est très couteuse en temps de calcul. L'objectif des travaux de thèse est de développer des méthodes plus efficaces basées sur des approches probabilistes. Dans un premier temps, il est proposé une linéarisation des équations non linéaires du modèle de comportement afin de simplifier l'étape faisant appel à l'algorithme d'optimisation. Une étude de l'impact de cette opération sur la qualité de la probabilité est menée. Afin de minimiser l'erreur d'approximation, deux procédures itératives pour traiter le problème d'assemblage sont proposées. Ils permettent de calculer la probabilité de défaillance d'assemblage de façon précise en un temps de calcul réduit. En outre, les travaux de thèse ont permis le développement d'une nouvelle méthode de résolution basée sur la méthode de fiabilité système FORM (First Order Reliability Method) système. Cette méthode permet de traiter uniquement le problème fonctionnel. Elle a nécessité la mise au point d'une nouvelle formulation du problème d'analyse des tolérances sous forme système. La formulation décompose le mécanisme hyperstatique en plusieurs configurations isostatiques, le but étant de considérer les configurations dominantes menant à une situation de défaillance. La méthode proposée permet un gain de temps considérable en permettant d'obtenir un résultat en quelques minutes, y compris pour atteindre des faibles probabilités.

Mots clés : analyse des tolérances, fiabilité système, mécanisme hyperstatique, simulation de Monte Carlo, FORM, optimisation, linéarisation.

DEVELOPMENT OF PROBABILISTIC METHODS FOR THE TOLERANCE ANALYSIS OF OVERCONSTRAINED MECHANISMS

ABSTRACT : Tolerance analysis of mechanism aims at evaluating product quality during its design stage. Technique consists in computing a defect probability of mechanisms in large series production. An assembly condition and a functional condition are checked. Current method mixes a Monte Carlo simulation and an optimization algorithm which is too much time consuming. The objective of this thesis is to develop new efficient method based on probabilistic approach to deal with the tolerance analysis of overconstrained mechanism. First, a linearization procedure is proposed to simplify the optimization algorithm step. The impact of such a procedure on the probability accuracy is studied. To overcome this issue, iterative procedures are proposed to deal with the assembly problem. They enable to compute accurate defect probabilities in a reduced computing time. Besides, a new resolution method based on the system reliability method FORM (First Order Reliability Method) for systems was developed for the functional problem. In order to apply this method, a new system formulation of the tolerance analysis problem is elaborated. Formulation splits up the overconstrained mechanism into several isoconstrained configurations. The goal is to consider only the main configurations which lead to a failure situation. The proposed method greatly reduces the computing time allowing getting result within minutes. Low probabilities can also be reached and the order of magnitude does not influence the computing time.

Keywords : tolerance analysis, system reliability, overconstrained mechanism, Monte Carlo simulation, FORM, optimization, linearization.



ARTS ET MÉTIERS ParisTech

ParisTech
INSTITUT DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES
PARIS INSTITUTE OF TECHNOLOGY