UNIVERSITÉ PARIS-EST

École doctorale SIE

Modélisation non-linéaire des interactions vague-structure appliquée à des flotteurs d'éoliennes off-shore

THÈSE

présentée et soutenue publiquement le 12 juin 2015

pour l'obtention du

Doctorat de l'Université Paris-Est

(Spécialité : Mécanique des fluides)

par

Emmanuel DOMBRE

Composition du jury

Président :	Prof. Stéphan Grilli	(Univ. Rhode Island, USA)
Rapporteurs :	Prof. Frédéric Dias	(Univ. College Dublin, Ireland)
	Prof. Pierre Ferrant	(Ecole Centrale Nantes)
Examinateurs :	Dr. Sime Malenica	(Bureau Veritas)
	Dr. Yves-Marie Scolan	(ENSTA Bretagne)
Invité :	Christophe Peyrard	(Labo Saint-Venant et EDF R&D)
Directeur de thèse :	Dr. Damien Violeau	(Labo Saint-Venant et EDF R&D)
Co-directeur de thèse :	Prof. Michel Benoit	(Labo Saint-Venant et EDF R&D)

Laboratoire d'Hydraulique Saint-Venant (EDF R&D, ENPC, Cerema)

Mis en page avec la classe thesul.



Thèse effectuée au sein du **Laboratoire d'Hydraulique Saint-Venant**
de l'Université Paris-Est
6, quai Watier
BP 49
78401 Chatou cedex
France

Résumé

Cette thèse est consacrée à l'étude numérique des interactions non-linéaires entre des vagues et un corps rigide perçant la surface libre. La méthode développée repose sur un modèle d'éléments de frontière qui réduit la dimensionnalité du problème d'une dimension. Dans un premier temps, un modèle 2D est appliqué à des géométries simples et permet de démontrer la pertinence de l'approche envisagée pour la prédiction des mouvements d'une structure flottante soumise à des vagues monochromatiques régulières. Dans un second temps, en nous inspirant d'un modèle potentiel non-linéaire 3D développé par Grilli *et al.* [1], nous proposons une généralisation de la méthode pour des maillages triangulaires non-structurés de surfaces 3D. Le modèle développé permet de traiter des configurations arbitraires de plusieurs cylindres verticaux en interaction avec les vagues. Nous présentons des cas de validation de nature académique qui permettent d'apprécier le comportement du modèle numérique. Puis nous nous tournons vers l'application visée par EDF R&D, qui concerne le dimensionnement d'éoliennes off-shore flottantes. Un flotteur de type semi-submersible est évalué à l'aide du modèle non-linéaire.

Mots-clé :
Mécanique des fluides numérique, interactions vagues-structures non-linéaire, éléments de frontière.

Nonlinear modelling of wave-structure interactions applied to offshore wind turbine platforms

Abstract

This PhD work is devoted to the study of nonlinear interactions between waves and floating rigid structures. The developed model relies on a boundary element method which reduces the dimensionality of the problem by one. First, a 2D model is applied to basic geometries and allows us to demonstrate the validity of the method for predicting the motion of a floating structrure subject to incoming monochromatic regular waves. Secondly, getting inspired by the 3D fully nonlinear potential flow model of Grilli *et al.* [1], we propose a novel model which generalizes the method for unstructured triangular meshes of 3D surfaces. The proposed model is able to deal with arbitrary configurations of multiple vertical cylinders interacting with the waves. We present academic validation test cases which show how the model works and behaves. Finally, we study situations of interest for EDF R&D related to floating off-shore wind turbines. A semi-submersible platform is evaluated with the nonlinear model.

Keywords:
Computational fluid dynamics, nonlinear wave-structure interactions, boundary elements method.

Remerciements

En premier lieu, je tiens à remercier vivement mes encadrants Michel Benoît, Damien Violeau et Christophe Peyrard, pour m'avoir accompagné tout au long de ce parcours parfois sinueux mais plein de satisfactions. Merci encore pour nos nombreux échanges, vos conseils et relectures minutieuses (cette liste n'est pas exhaustive!) et pour avoir rendu ces 3 ans et 5 mois riches de défis et de rebondissements scientifiques! Je remercie aussi chaleureusement Frédéric Dias, Pierre Ferrant, Yves-Maris Scolan, Sime Malenica et Stephan T.Grilli pour avoir accepté de poser un œil expert sur ce travail et pour leurs commentaires et questions avant et pendant la soutenance de thèse. Mes remerciements s'adressent également à l'ensemble du groupe P74 et au département LNHE pour avoir rendu ce projet possible dans de très bonnes conditions. J'en profite aussi pour remercier les ingénieurs-chercheur de l'éolien-offshore Nicolas Relun, Pierre Bousseau, Sarah Levy, Yvan Bercovitz et Raffaello Antonutti. Je remercie l'ANRT pour avoir financé partiellement cette thèse CIFRE sous le contrat # 2011-1724. Je souhaite également remercier l'Ecole Doctorale SIE de l'Université Paris-Est. Je tiens aussi à remercier vivement Stephan T. Grilli et Jeffrey C. Harris qui m'ont initié aux arcanes de la méthode BEM, et pour les nombreux échanges tout au long de la thèse. Comme il me serait difficile de tenir un compte rigoureux de toutes les personnes du Laboratoire Saint-Venant que j'ai rencontrées au cours de ma thèse, je me contenterai d'adresser un remerciement général aux stagiaires, doctorants, post-doctorants, et chercheurs du laboratoire qui ont travaillé à mes côtés et ont contribué à rendre ces années très agréables. J'ai une pensée particulière pour les Alumni du bureau I 129! Je remercie également tous mes amis pour leurs encouragements. Enfin, je tiens à remercier mes parents et mes sœurs ainsi que tous les membres de ma famille qui me soutiennent depuis le début. Merci encore pour vos encouragements constants!

Nomenclature

$(\mathbf{e}_k)_{k=1..3}$ Canonical basis of $\mathbb{R}^3$ such that $\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_y$ and $\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_z$

$\mathbf{F}(t_i) = \mathbf{F}_i$ Hydrodynamical force acting on the body at time t_i

$\mathbf{F}^*_{i,0}$ Prediction of the hydrodynamical force acting on the body at time t_i made at iteration $i-1$

$\mathbf{F}_{i,k}$ Hydrodynamical force acting on the body at time t_i and sub-iteration k in the Newmark scheme

$\mathbf{n}(\mathbf{x}, t)$ Unit outward normal vector to the fluid boundary $\partial\Omega_f(t)$ at point $\mathbf{x}$

$\mathbf{n}_b(\mathbf{x}, t)$ Unit inward normal vector to the body boundary $\Gamma_c(t)$ at point $\mathbf{x}$

$\mathbf{v}$ Fluid velocity vector

$\mathbf{v}_b(\mathbf{x})$ Solid velocity vector at the point $\mathbf{x}$

$\mathbf{x}$ Position vector

$\mathbf{x}_G(t)$ Position vector of the center of mass of the body

$\ddot{\mathbf{x}}_G(t)$ Acceleration vector of the center of mass of the body

$\dot{\mathbf{x}}_G(t)$ Velocity vector of the center of mass of the body

$\frac{d\cdot}{dt}$ Lagrangian time derivation

Γ_b Bottom boundary

$\Gamma_c(t)$ Wetted surface of the body boundary at time t

$\Gamma_f(t)$ Set of free surface points at time t

Γ_l Set of lateral boundaries of the domain $\Omega_f(t)$

$\Omega_f(t)$ Volume of fluid at time t

$\partial\Omega_f(t)$ External boundary of the fluid at time t

ϕ Velocity potential such that $\nabla\phi = \mathbf{v}$

$\phi_f(t)$ Function such that $\phi_f(t)(\mathbf{x}, t)$ is the Dirichlet condition on the free surface at point $\mathbf{x}$ and at time t

Nomenclature

ϕ_t	Eulerian time derivative of ϕ, $\phi_t = \frac{\partial \phi}{\partial t}$
ρ	Density of the fluid
a_{ij}	Added mass coefficient in the i direction due to a motion in the j direction
b_{ij}	Damping coefficient in the i direction due to a motion in the j direction
c_n	Fourier coefficient of order n
f_k	k -th component of the vector $\mathbf{f}$, $f_k = \mathbf{f} \cdot \mathbf{e}_k$
G	Green's function, fundamental solution of the Laplace equation
g	Acceleration of gravity
N_d	Number of element of the set $\Gamma_f(t) \cap \Gamma_c(t)$
N_b	Number of degrees of freedom on the body surface
N_{dof}	Number of degrees of freedom
N_{el}	Number of boundary elements
Ox	Horizontal axis
Oy	Transverse axis
Oz	Vertical axis
p_a	Atmospheric pressure
$x_b(t)$	Set of body surface nodes belonging to $\Gamma_f(t) \cap \Gamma_c(t)$
$x_f(t)$	Set of free surface nodes belonging to $\Gamma_f(t) \cap \Gamma_c(t)$
X_t	Transformation which maps the initial domain $\Omega_f(0)$ on $\Omega_f(t)$

Sommaire

Nomenclature

List of Figures **xiii**

List of Tables **xix**

1
Introduction **1**

1.1 Comment dimensionner un flotteur d'éolienne off-shore? 1
1.1.1 Stabilité 2
1.1.2 Tenue à la mer 3
1.1.3 Approche classique 3
1.1.4 Limites de la théorie linéaire 4
1.1.5 Vers le développement de modèles complètement non-linéaires 5
1.2 Plan de la thèse 6

2
State-of-the-art of nonlinear wave-body interactions **7**

2.1 Introduction 7
2.2 Mathematical statement of the potential flow problem 8
2.3 Review of numerical modelling for wave-body interactions 10
2.3.1 Numerical models for forced motion cases 10
2.3.2 Alternative numerical modelling approaches 12
2.3.3 Numerical models for freely floating motions 13
2.3.4 Methods for computing the force on the instantaneous body surface . . . 13

3
Development and validation of a two dimensional numerical model **19**

3.1 Introduction 19

3.2 Governing equations . . . 21
3.2.1 Mathematical model and assumptions . . . 21
3.2.2 Time updating . . . 23
3.3 Forced heaving motion of a circular horizontal cylinder . . . 27
3.3.1 Computational domain and simulation methodology . . . 28
3.3.2 Numerical error on volume conservation . . . 31
3.3.3 Numerical error on hydrodynamic force calculation . . . 31
3.3.4 Convergence of results for internal points . . . 36
3.3.5 Comparison to the experiments of Yamashita . . . 37
3.4 Forced swaying motion of a rectangular floating cylinder . . . 40
3.5 Freely floating circular cylinder . . . 41
3.5.1 Computational domain and discretization . . . 41
3.5.2 Convergence of results at internal points . . . 43
3.5.3 Time evolution of the cylinder elevation as a function of numerical scheme 44
3.5.4 Verification of mass and energy conservation . . . 46
3.6 Response amplitude operators of a 2D rectangular barge . . . 50
3.7 Conclusions . . . 52

4
Development of a 3D numerical model **53**

4.1 Boundary Element Method for unstructured grids . . . 53
4.1.1 Boundary integral formulation . . . 53
4.1.2 Singular integrals: analytical functions . . . 56
4.1.3 Method 1: classical formulation of the BIE . . . 56
4.1.4 Method 2: regularized form of the BIE . . . 59
4.2 Validation of the solvers . . . 60
4.2.1 Airy wave potential analytical solution . . . 60
4.2.2 Influence of the tolerance of the solver . . . 60
4.2.3 Influence of the Gauss points distribution . . . 61
4.2.4 Parallel efficiency with the library MPI . . . 62
4.2.5 First conclusions . . . 65
4.3 Time-stepping: construction of discrete differential operators . . . 65
4.4 Discretized derivatives of the MEL time-stepping . . . 67
4.4.1 First-order elements . . . 67
4.4.2 Second-order elements: Fochesato *et al.*'s derivation . . . 68
4.4.3 Second-order elements: linear reconstruction for the gradient of the velocity 69
4.4.4 Derivatives on a regular unstructured mesh . . . 69

4.4.5 Derivatives on an irregular unstructured mesh . . . 73
4.4.6 First conclusions . . . 76

5
Validation du modèle 3D sur des cas académiques 79

5.1 Introduction . . . 79
5.2 Algorithme d'interactions vague-structure . . . 79
5.2.1 Etape 1 : assemblage parallèle du système linéaire . . . 79
5.2.2 Etape 2 : spécification des conditions limites pour le potentiel des vitesses 81
5.2.3 Etape 3 : résolution du système linéaire par une méthode itérative . . . 82
5.2.4 Etapes 4 et 5 : résolution de la dérivée temporelle du potentiel . . . 82
5.2.5 Etape 6.a ou 12.b . . . 83
5.3 Validation du schéma semi-lagrangien . . . 88
5.3.1 Chargement hydrodynamique induit par des vagues longues sur un cylindre vertical ancré au sol . . . 88
5.4 Validation du schéma lagrangien et du remaillage en radiation . . . 92
5.4.1 Cavalement forcé d'un cylindre vertical . . . 92
5.4.2 Mouvement de rotation du cylindre . . . 101
5.5 Mouvement de translation verticale . . . 101
5.5.1 Comparaison des résultats avec des éléments P1 et P2 . . . 103
5.5.2 Coefficients hydrodynamiques . . . 103
5.6 Conclusion intermédiaire . . . 105

6
Vers des applications industrielles 107

6.1 Préambule . . . 107
6.2 Mouvement libre d'une barge cylindrique . . . 107
6.3 Analyse d'un flotteur de type semi-submersible . . . 109
6.3.1 Analyse du pilonnement . . . 112
6.3.2 Sensibilité des résultats au coefficient d'absorption en mouvement forcé . . 112
6.3.3 Diffraction non-linéaire . . . 115
6.4 Conclusion intermédiaire . . . 119

Conclusion et perspectives 123

1 Bilan des résultats obtenus et conclusion . . . 123
2 Perspectives . . . 124

Bibliography 127

List of Figures

1.1 Exemples de concepts de flotteur d'éolienne off-shore [2]. 2

1.2 Diagramme de validité des théories de houle en fonction des paramètres ($\frac{h}{gT^2}$,$\frac{H}{gT^2}$) [3] (d'après Le Méhauté (1976)). 5

3.1 Treatment of the intersection sketch: projection of $\mathbf{x}_f(t_2)$ on the body surface. Green nodes represent free surface particles at time t_1. Red nodes represent free surface particles at time $t_2 = t_1 + \Delta t$. Green dashed circle is the solid boundary at time t_1. Red dashed circle is the solid boundary at time t_2. The new double node at time t_2 is defined at the intersection between the orange line and the red dashed circle. 26

3.2 Treatment of the intersection sketch: extrapolation of the first segment of the free surface. Green nodes represent free surface particles at time t_1. Red nodes represent free surface particles at time $t_2 = t_1 + \Delta t$. Green dashed circle is the solid boundary at time t_1. Red dashed circle is the solid boundary at time t_2. The new double node at time t_2 is defined at the intersection between the orange line and the red dashed circle. 26

3.3 Sketch of the 2D model computational domain at initial time, for the forced heaving motion of a horizontal semi-circular cylinder of radius R in water depth d. Numbers indicate the codes associated with each type of boundary, with boundary conditions marked on the figure. 30

3.4 Forced oscillation of a circular cylinder: evolution of the average wave height $H_{mean}(t)$ for $A = 0.01R$ according to the size of the beach l_{AB}. 32

3.5 Forced oscillation of a circular cylinder: time evolution of the relative error of volume ϵ_V in $\log_{10}$ scale as a function of the discretization N_f (varying from 20 to 60 from left to right) as a function of: (i) the amplitude of motion A (from the top $A/R = 0.01$ to the bottom $A/R = 0.2$); (ii) with or without absorbing beaches; and (iii) the time-stepping (scheme A: second-order explicit time-stepping; scheme B: first-order symplectic-like time-stepping). 33

3.6 Forced heaving motion of a semi-circular cylinder of radius R in deep water: global error on the force computation as a function of the discretization $N_f = 20$ to 60. Results are computed over the time interval $t_i^+ = 0.16$ to $t_f^+ = 19.7$ and the force reference value f_{N_f} is that computed in the finest discretization with $N_f = 80$. The coefficients m and c are determined by computing a least mean square trend line of equation $y = mx + c$ for each set of points. 35

3.7 Forced heaving motion of a semi-circular cylinder of radius R in deep water: instantaneous L^2 error norm over time $t^+ \in [0, 10]$, in the computation of internal fields ϕ, ϕ_t and p, as a function of the discretization $N_f = 20$ (red), 40 (green) and 60 (blue), with amplitude A/R, as compared to the reference values computed with the finest discretization, $N_f = 80$. 36
3.8 Forced heaving motion of a semi-circular cylinder of radius R in deep water: same case as Fig. (3.7), global L^2 error norm for ϕ, ϕ_t and p, obtained by averaging instantaneous errors for $t^+ = 0$ to 10. The coefficients m and c are determined by computing a least mean square trend line of equation $y = mx + c$ for each set of points. The blue square dots and the green circle dots are superimposed. 38
3.9 Forced heaving motion of a semi-circular cylinder of radius $R = B/2$ in deep water: first- to third-order Fourier non-dimensional coefficients of the hydrodynamic force, for a large motion amplitude $A/R = 0.2$. Results are computed over the time interval $t^+ \in [5, 10]$ as a function of the excitation frequency $\omega^2 B/(2g)$: FNPF computations (red circles); experiments of [4] (blue squares); [5] and [6] theories (green lines). 39
3.10 Sway motion of a rectangular barge: horizontal force at frequency $\omega = 0.84s^{-1}$ represented on the time interval $t^+ = t/T \in [0, 10.84]$. 40
3.11 Rectangular barge of width B and draft a in swaying motion: added mass and damping coefficients as a function of the non-dimensional angular frequency. Comparison between numerical wave tank (red circles), to both linear theory (green line) and experimental (blue squares) results of Vugts [7]. 42
3.12 Freely floating cylinder of radius R: convergence of results at internal points (5 meshes; Table (3.4)), expressed by the L^2 error norm of the solution for the 4 coarser grids as compared to that in the fifth finest grid. The cylinder center of mass is initially set to $x_{G3}(0)$. The blue square dots and the green circle dots are superimposed. These results were obtained with the second-order explicit Taylor time-stepping. 43
3.13 Freely floating cylinder of radius R in deep water: time evolution of the elevation of the cylinder, initially located at $x_{G3}(0) = R/8$, as a function of numerical scheme compared to reference values in linear theory for a small initial displacement of the structure with $N_c = 50$ nodes on the body surface. The green dotted line and the red line are quasi-superimposed. The blue dotted line and the pink dotted line are quasi-superimposed. 44
3.14 Freely floating cylinder of radius R in deep water: time evolution of the elevation of the cylinder, initially located at $x_{G3}(0) = R/3$, as a function of numerical scheme compared to reference values in linear theory for a strong initial displacement of the structure with $N_c = 50$ nodes on the body surface. 45
3.15 Freely floating cylinder of radius R: time behaviour of 3 energy and volume ratios for the minimal and maximal discretizations and for two initial release amplitudes $x_{G3}(0) = R/8$ and $x_{G3}(0) = R/4$ with the same fixed time-step. These results were obtained with the second-order explicit Taylor time-stepping. 47
3.16 Freely floating cylinder of radius R: same case as Fig. (3.15) with an adaptive time-step procedure. These results were obtained with the second-order explicit Taylor time-stepping. 48
3.17 Freely floating cylinder of radius R: energy (left) and volume (right) conservation for initial amplitude $R/4$ with two numerical schemes for the finest mesh of parameter $N_F = 400$. 49

3.18 Rectangular barge in waves of parameters $H = 1$cm and $H = 5$cm: first-order response amplitude operator for sway motion $\frac{x_{G1}}{A}$ with respect to the non-dimensional frequency $\xi = \omega^2 \frac{B}{2g}$. 50
3.19 Rectangular barge in waves of parameters $H = 1$cm and $H = 5$cm: first-order response amplitude operator for heave motion $\frac{x_{G3}}{A}$ with respect to the non-dimensional frequency $\xi = \omega^2 \frac{B}{2g}$. 51
3.20 Rectangular barge in waves of parameters $H = 1$cm and $H = 5$cm: first-order response amplitude operator for roll motion $\frac{x_{G3}}{\frac{\omega^2}{g}A}$ with respect to the non-dimensional frequency $\xi = \omega^2 \frac{B}{2g}$. 51

4.1 Sketch of the reference element Γ_ξ for a triangular mesh. 55
4.2 Sketch of the polar transformation on the reference element Γ_ξ. 57
4.3 Sketch of the polar transformation on the reference element Γ_ξ. 58
4.4 Distribution of Gauss points in the reference element Γ_ξ when the singularity is located in $(\xi_1, \xi_2) = (1, 0)$. 58
4.5 Distribution of Gauss points in the reference element Γ_ξ when the singularity is located in $(\xi_1, \xi_2) = (0.5, 0.5)$. 59
4.6 Comparison of the solver's accuracy depending on the order of the isoparametric element with a Dunavant rule of order 10 for regular integrals and 36 Gauss points for singular integrals with second-order elements. The tolerance of the GMRES solver is set to 10^{-6}. 61
4.7 Comparison of the solver's accuracy depending on the order of the isoparametric element with a Dunavant rule of order 10 for regular integrals and 36 Gauss points for singular integrals with second-order elements. The tolerance of the GMRES solver is set to 10^{-8}. 62
4.8 Comparison of the solver's accuracy with different orders of element with $n_p = 8$ and $o_d = 10$. The tolerance of the GMRES solver is set to 10^{-8}. 63
4.9 Comparison of the solver's accuracy with different orders of element with $n_p = 10$ and $o_d = 12$. The tolerance of the GMRES solver is set to 10^{-8}. 63
4.10 Sketch of the set of elements S_i, also called the 1-ring neighbourhood of the vertex $\mathbf{x}_i$. 67
4.11 Regular triangular grid of the lateral side of a vertical cylinder. 70
4.12 Maximum normalized error (left) and average normalized error (right) for the velocity vector $\mathbf{v}$ associated to the potential $\phi = x^2 - y^2$ on a cylinder for various numerical methods. 71
4.13 Maximum normalized error (left) and average normalized error (right) for the acceleration vector $\mathbf{a}$ associated to the potential $\phi = x^2 - y^2$ on a cylinder for various numerical methods. 71
4.14 Maximum normalized error (left) and average normalized error (right) for the velocity vector $\mathbf{v}$ associated to the potential $\phi = \exp k_z z \ \sin(k_x x + k_y y)$ on a cylinder for various numerical methods. 72
4.15 Maximum normalized error (left) and average normalized error (right) for the acceleration vector $\mathbf{a}$ associated to the potential $\phi = \exp k_z z \ \sin(k_x x + k_y y)$ on a cylinder for various numerical methods. 72
4.16 Irregular triangular grid of a sphere generated by the algorithm BLSURF. 74
4.17 Maximum normalized error (left) and average normalized error (right) for the velocity vector $\mathbf{v}$ associated to the potential $\phi = x^2 - y^2$ on a sphere. 74

4.18 Maximum normalized error (left) and average normalized error (right) for the acceleration vector $\mathbf{a}$ associated to the potential $\phi = x^2 - y^2$ on a sphere. 75
4.19 Maximum normalized error (left) and average normalized error (right) for the velocity vector $\mathbf{v}$ associated to the potential $\phi = \exp k_z z \ \sin(k_x x + k_y y)$ on a sphere. 76
4.20 Maximum normalized error (left) and average normalized error (right) for the acceleration vector $\mathbf{a}$ associated to the potential $\phi = \exp k_z z \ \sin(k_x x + k_y y)$ on a sphere. 76
4.21 Maximum normalized error (left) and average normalized error (right) for the velocity vector $\mathbf{v}$ associated to the potential $\phi = \exp k_z z \ \sin(k_x x + k_y y)$ on a torus. 77
4.22 Irregular triangular grid of a torus generated by the algorithm NETGEN. 77
4.23 Maximum normalized error (left) and average normalized error (right) for the acceleration vector $\mathbf{a}$ associated to the potential $\phi = \exp k_z z \ \sin(k_x x + k_y y)$ on a torus. 78

5.1 Schéma de principe pour identifier l'élément dans lequel se trouve un noeud. . . . 88
5.2 Calcul du coefficient de Fourier d'ordre 1 de la série temporelle de l'effort horizontal F_x d'un cylindre ancré au fond avec les paramètres $T = 2.03$s, $kR = 0.245$, profondeur $kd = \pi$. Le signal est analysé entre $t = 20$s et $t + 8T$. 91
5.3 Calcul du coefficient de Fourier d'ordre 2 de la série temporelle de l'effort horizontal F_x d'un cylindre ancré au fond avec les paramètres $T = 2.03$s, $kR = 0.245$, profondeur $kd = \pi$. Le signal est analysé entre $t = 20$s et $t + 8T$. 91
5.4 Mouvement forcé de cavalement d'un cylindre vertical tronqué pour un paramètre $kR = 1.6$ et une amplitude $\frac{A}{R} = 0.15$. Représentation du maillage 3 au temps $\frac{t}{T} = 24.91$. 93
5.5 Cylindre vertical en translation horizontale d'amplitude $\frac{A}{R} = 0.15$ pour $kR = 1.6$. Evolution de l'erreur $\log_{10} \epsilon_V$ entre les temps adimensionnels $t^+ = 10$ et $t^+ = 25$ pour différentes discrétisations temporelles Δt. 94
5.6 Cylindre vertical en translation horizontale d'amplitude $\frac{A}{R} = 0.15$ pour $kR = 1.6$. Evolution de l'erreur $\log_{10} \epsilon_V$ entre les temps adimensionnels $t^+ = 5$ et $t^+ = 20$ pour différentes discrétisations spatiales Δx. 95
5.7 Cylindre vertical en translation horizontale d'amplitude $\frac{A}{R} = 0.15$ pour $kR = 1.6$. Evolution de l'effort vertical F_z (sur la gauche) et du moment transverse M_y (sur la droite) entre les temps adimensionnels $t^+ = 4$ et $t^+ = 6$, pour différentes discrétisations verticales N_z^* du cylindre. 96
5.8 Calcul de la masse ajoutée d'un cylindre vertical, en mouvement de translation selon l'axe Ox, en fonction du nombre d'onde adimensionnel kR pour différents modèles numériques. 97
5.9 Calcul du coefficient d'amortissement d'un cylindre vertical, en mouvement de translation selon l'axe Ox, en fonction du nombre d'onde adimensionnel kR pour différents modèles numériques. 97
5.10 Calcul du coefficient de Fourier d'ordre 1 de la série temporelle de l'effort horizontal F_x d'un cylindre vertical, en mouvement de translation selon l'axe Ox, en fonction du nombre d'onde adimensionnel kR pour différents modèles numériques. 98
5.11 Calcul du coefficient de Fourier d'ordre 2 de la série temporelle de l'effort vertical F_z d'un cylindre vertical, en mouvement de translation selon l'axe Ox, en fonction du nombre d'onde adimensionnel kR pour différents modèles numériques. 99

5.12 Calcul du coefficient de Fourier d'ordre 1 de la série temporelle du moment transverse M_y d'un cylindre vertical, en mouvement de translation selon l'axe Ox, en fonction du nombre d'onde adimensionnel kR pour différents modèles numériques. 99
5.13 Calcul de la série temporelle du run-up $\eta(-R, 0)$ sur un cylindre vertical, en mouvement de translation selon l'axe Ox, pour un nombre d'onde adimensionnel $kR = 1.6$. 100
5.14 Calcul de la série temporelle d'effort horizontal F_x sur un cylindre vertical, en mouvement de translation selon l'axe Ox, pour un nombre d'onde adimensionnel $kR = 1.6$. 100
5.15 Calcul de l'inertie ajoutée d'un cylindre vertical, en mouvement de rotation autour de l'axe Oy, en fonction du nombre d'onde adimensionnel kR pour différents modèles numériques. 101
5.16 Calcul du coefficient de Fourier d'ordre 1 de la série temporelle de l'effort horizontal F_x d'un cylindre vertical, en mouvement de rotation autour de l'axe Oy, en fonction du nombre d'onde adimensionnel kR pour différents modèles numériques. 102
5.17 Calcul du coefficient de Fourier d'ordre 1 de la série temporelle du moment M_y d'un cylindre vertical, en mouvement de rotation autour de l'axe Oy, en fonction du nombre d'onde adimensionnel kR pour différents modèles numériques. 102
5.18 Calcul du coefficient de Fourier d'ordre 1 de la série temporelle de l'effort F_z d'un cylindre vertical, en mouvement de translation verticale, en fonction du nombre d'onde adimensionnel kR pour différents modèles numériques. 104
5.19 Calcul du coefficient de Fourier d'ordre 2 de la série temporelle de l'effort F_z d'un cylindre vertical, en mouvement de translation verticale, en fonction du nombre d'onde adimensionnel kR pour différents modèles numériques. 104

6.1 Mouvement libre d'extinction d'un cylindre vertical tronqué pour les conditions initiales $x_{G3}(0) = 0$ et $\dot{x}_{G3}(0) = \epsilon$ ($\epsilon = 0.1$ m.s^{-1}). 108
6.2 Mouvement libre d'extinction d'un cylindre vertical tronqué pour les conditions initiales $x_{G3}(0) = 0$ et $\dot{x}_{G3}(0) = \epsilon$ ($\epsilon = 0.1$ m.s^{-1}) : déplacement vertical adimensionnel ${x_{G3}}^*(\tau)$ en fonction du temps adimensionnel $\tau = t\sqrt{\frac{g}{R}}$. 109
6.3 Mouvement libre d'extinction d'un cylindre vertical tronqué pour différentes valeurs du paramètre ϵ : déplacement vertical adimensionnel ${x_{G3}}^*(\tau)$ en fonction du temps adimensionnel $\tau = t\sqrt{\frac{g}{R}}$. 110
6.4 Mouvement libre d'extinction d'un cylindre vertical tronqué pour différentes valeurs du paramètre ϵ : nombre de sous-itérations N_{ipc} dans le schéma de Newmark de paramètres $(\gamma, \beta, \omega) = (0.5, 0.25, 0.65)$ en fonction du temps adimensionnel $\tau = t\sqrt{\frac{g}{R}}$. 110
6.5 Géométrie du design *Dutch Tri-floater* et définition du système d'axes extrait de [8]. 111
6.6 Mouvement de translation verticale forcée d'amplitude $a_3 = 1$ m du *Dutch Tri-floater* modifié : coefficient de masse ajoutée A_{33} en fonction de la période du mouvement T. 113
6.7 Mouvement de translation verticale forcée d'amplitude $a_3 = 1$ m du *Dutch Tri-floater* modifié : coefficient d'amortissement B_{33} en fonction de la période du mouvement T. 113

6.8 Effort vertical total F_z entre $t^+ = 9$ et $t^+ = 12$ pour un mouvement de pilonnement de 3 m d'amplitude du flotteur *Dutch Tri-floater* modifié pour $kr = 2.0$. La densité de l'eau est fixée à $\rho_f = 1$ kg.m^{-3}. 114
6.9 Effort vertical total F_z entre $t^+ = 8.235$ et $t^+ = 8.255$ pour un mouvement de pilonnement de 3 m d'amplitude du flotteur *Dutch Tri-floater* modifié pour $kr = 2.0$. La densité de l'eau est fixée à $\rho_f = 1$ kg.m^{-3}. 114
6.10 Schéma de la décomposition du maillage en fonction des conditions aux limites de surface libre. 115
6.11 Diffraction non-linéaire d'une vague longue sur un cylindre tel que $kR = 0.245$: évolution du coefficient $|F_x^{(1)}|$ en fonction de la cambrure kA. 116
6.12 Diffraction non-linéaire d'une vague longue sur un cylindre tel que $kR = 0.245$: évolution du coefficient $|F_x^{(2)}|$ en fonction de la cambrure kA. 117
6.13 Diffraction non-linéaire d'une vague de hauteur $H = 2$ m sur le *Dutch Tri-floater* pour différentes périodes T sur un fond de profondeur $d = 50$ m : RAO de l'effort longitudinal F_x. 119
6.14 Diffraction non-linéaire d'une vague de hauteur $H =$ 2m sur le *Dutch Tri-floater* pour différentes périodes T sur un fond de profondeur $d = 50$ m : RAO de l'effort vertical F_z. 119
6.15 Diffraction non-linéaire d'une vague de hauteur $H =$ 2m sur le *Dutch Tri-floater* pour différentes périodes T sur un fond de profondeur $d = 50$ m : RAO du moment transverse M_y. 120
6.16 Diffraction non-linéaire d'une vague de hauteur $H = 2$ m sur le *Dutch Tri-floater* pour différentes périodes T sur un fond de profondeur $d = 50$ m : rapport $\frac{F_k^{(2)}}{F_k^{(1)}}$ pour $k = 1, 3$ et 5. 120
6.17 Diffraction non-linéaire d'une vague de hauteur $H = 2$ m sur le *Dutch Tri-floater* pour différentes fréquences f sur un fond de profondeur $d = 50$ m : force de dérive horizontale ${F_x}^{(0)}$. 121
6.18 Diffraction non-linéaire d'une vague de hauteur $H = 2$ m sur le *Dutch Tri-floater* pour différentes pulsations ω sur un fond de profondeur $d = 50$ m : force de dérive verticale ${F_z}^{(0)}$. 121

List of Tables

2.1 Numerical methods used in the literature (the time integration scheme is specified where available) 12

2.2 Nature of problems adressed in the literature. 18

3.1 Forced heaving motion of a circular cylinder: discretization used in the model for the convergence study. For the selected parameters, $\lambda = \lambda_0 = 2\pi$, N_{dof} denotes the total number of BEM nodes (or degrees of freedom) and N_{el} the total number of boundary elements. N_f is the number of BEM nodes per dominant wavelength and N_c is the number of BEM nodes discretizing the half-cylinder boundary. . . . 30

3.2 Forced heaving motion of a semi-circular cylinder of radius R in deep water: non-dimensional hydrodynamic coefficients (a_{33}^*, b_{33}^*) computed with our model using $N_f = 20$ to 80 nodes per dominant wavelength ($A/R = 0.01$, $\omega^2 R/g = 1.0$), compared to reference values from the literature. 34

3.3 Forced heaving motion of a semi-circular cylinder of radius R in deep water: Fourier coefficients of the hydrodynamic force. Results are computed over the time interval $t^+ = 11.14$ to 16.08 as a function of the discretization N_f, for $A/R = 0.2$ and $\omega^2\ R/g = 1$. 35

3.4 Freely floating circular cylinder case: discretizations used in the convergence study for internal points computations. Number of nodes: on the free surface (N_F); on the cylinder (N_c); and total (N_{dof}). 42

4.1 CPU time (s) on a single processor for various quadrature rules as a function of the discretization. Three methods are tested : (i) A denotes the second-order method as in [1], (ii) B the second-order method as in [9] and (iii) C denotes the first-order method of [10]. 64

4.2 Error indicators for the mixed Dirichlet-Neumann problem on a sphere of radius $R = 1m$ for the uniform flow condition $U = V = W = 1$. Errors are computed on three meshes (N_e is the number of elements) with two different way of solving the Laplace problem with BIE's. $\epsilon_{L^p}(f)$ is the normalized error of the function f in the norm L^p. 64

4.3 MPI parallel efficiency of the assembling step for the second-order method as a function of: (i) the dicretization and (ii) the number of processors p. T_p is the total CPU time divided by the number of processors under consideration. N denotes the number of nodes of the mesh. 65

4.4 Characteristics of the mesh generated by BLSURF with SALOME platform. p is an input parameter corresponding to the size of the discretization. N_{el} is the number of faces. N_{dof} is the number of vertices. AR is the aspect ratio of the triangle, A_T is the area of the triangle and l_{2D} is the two dimensional length which is close to the input parameter p. 73

5.1 Caractéristiques des maillages d'éléments de frontière utilisés pour l'étude de sensibilité en diffraction d'ondes longues sur un cylindre ancré au fond. N_i $(i = x, y, z)$ est le nombre de segments sur la longueur L_i. N_r est le nombre de segments sur le pourtour du cylindre. N_z^* est le nombre de segments sur le tirant d'eau du cylindre au repos. N_{FS} est le nombre de noeuds sur la surface libre. N_{dof} est le nombre de noeuds total. l_{1D} est la longueur des arêtes sur la surface libre. 89

5.2 Sensibilité au maillage des harmoniques de la force longitudinale F_x pour un cylindre vertical ancré au fond soumis à une vague longue telle que $kA = 0.15$ et $kR = 0.245$. Le paramètre de densité est fixé à $\rho = 1$ dans les simulations. . . . 90

5.3 Mouvement forcé de cavalement d'un cylindre vertical tronqué pour un paramètre $kR = 1.6$ et une amplitude $\frac{A}{R} = 0.15$. Caractéristiques des maillages d'éléments de frontière utilisés pour l'étude de sensibilité. 94

5.4 Caractéristiques des maillages d'éléments de frontière utilisés pour l'étude de sensibilité en mouvement forcé de translation. 95

5.5 Sensibilité au maillage des modules des harmoniques de la force verticale F_z pour un cylindre vertical tronqué en translation verticale d'amplitude $\frac{A}{R} = 0.15$ à la fréquence $kR = 1.6$. Le signal est analysé sur 5 périodes entre $t_i^+ = 9.014$ et $t_f^+ = 16.996$. N_{iter} désigne le nombre d'itérations pour simuler 12.5 périodes du mouvement. n_p désigne le nombre de processeurs employés. 103

6.1 Dimensions géométriques du concept modifié de *Dutch Tri-floater* d'après l'étude [8]. 111

6.2 Diffraction non-linéaire d'une vague longue sur un cylindre tel que $kR = 0.245$ et $kA = 0.15$: sensibilité des harmoniques de l'effort longitudinal F_x à la fenêtre temporelle d'échantillonnage . La densité de l'eau est fixée à $\rho_f = 1$ kg.m^{-3}. . . 116

6.3 Caractéristiques théoriques des vagues simulées dans l'intervalle $kr \in [0.3, 3.0]$. Le rayon des *heave plates* est $r = 9$ m. 118

Chapter 1

Introduction

Ce mémoire présente le travail effectué lors de ma thèse de doctorat menée au sein du Laboratoire d'Hydraulique Saint-Venant (EDF R&D, ENPC, Cerema) et financée par un contrat CIFRE avec EDF R&D sur le sujet intitulé : Modélisation non-linéaire des interactions vague-structure appliquée à des flotteurs d'éoliennes off-shore. Plus précisément, nous avons développé un modèle numérique tridimensionnel fondé sur les équations d'un fluide potentiel en interaction avec des solides supposés rigides. Le but est de parvenir à un outil de simulation avancé apte à prédire le comportement hydrodynamique d'une éolienne flottante et pouvant être employé dans le cas d'états de mer simplifiés en complément des outils d'ingénierie classiquement utilisés dans le cadre du dimensionnement.

Cette question se pose aujourd'hui pour le groupe EDF, qui est amené, dans un contexte de diversification du mix énergétique, à prendre part à des projets de développement de l'éolien off-shore. Si l'éolien "posé" constitue une première étape industrielle, EDF est partenaire de projets éoliens flottants, développés pour des sites où la profondeur d'eau est de l'ordre de 100m. L'intérêt croissant pour les grandes profondeurs s'explique notamment par l'existence de vents plus puissants et plus réguliers, propices à une production d'énergie plus importante qu'à proximité des côtes. Ce tropisme a pour inconvénient de multiplier les contraintes techniques sur le concept d'éolienne, car celui-ci se voit soumis à un environnement extrêmement sévère (vagues, courant, vent), sans compter qu'il rend les opérations de maintenance, d'installation et de raccordement au réseau électrique plus complexes.

1.1 Comment dimensionner un flotteur d'éolienne off-shore?

Une éolienne off-shore est soumise, de par son environnement, à plusieurs types de charge comprenant les efforts aérodynamiques s'exerçant sur la turbine, les chargements hydrostatiques, les chargements induits par les vagues, les efforts dus aux ancrages, les efforts liés au courant, la flexibilité des composants mécaniques et le contrôle-commande. La simulation de l'éolienne off-shore dans son ensemble fait appel à des outils de simulation couplés intégrant ces différents effets en faisant un ensemble d'hypothèses sur les lois de comportement. Ces outils permettent d'évaluer le mouvement de l'éolienne en réponse à des chargements {vagues + courant + vent}. On peut citer notamment les travaux précurseurs de Jonkman [11]. Plus récemment, Philippe a aussi développé un modèle intégré [12].

Dans le contexte de cette thèse, nous nous intéressons plus spécifiquement au chargement induit par les vagues et cherchons à améliorer la représentation des efforts hydrodynamiques s'exerçant sur le flotteur. La figure (1.1) montre des exemples de types de flotteurs possibles.

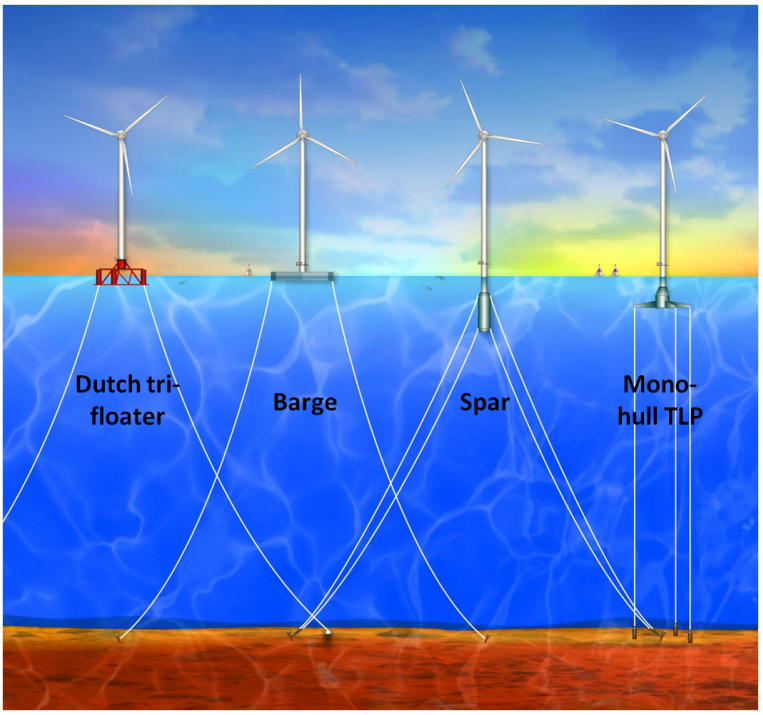


Figure 1.1: Exemples de concepts de flotteur d'éolienne off-shore [2].

1.1.1 Stabilité

Le dimensionnement d'une éolienne flottante comprend en général une phase de calcul de stabilité sous condition de vent, qui s'assimile plus ou moins à un calcul en statique. Cette condition de stabilité porte sur le moment de redressement de la structure par rapport au couple exercé par le vent. Le moment de redressement dépend essentiellement de la géométrie et de la répartition de masse de la structure. Deux paramètres favorisent la stabilité de la structure :

- La surface de flottaison,
- Les positions relatives du centre de gravité et du centre de poussée [1].

Certains flotteurs vont plutôt jouer sur le premier paramètre en choisissant une grande surface de flottaison et en réduisant au maximum le tirant d'eau afin de limiter le coût de la structure (celui-ci étant plus ou moins proportionnel au volume). C'est le cas de la barge et du concept semi-submersible *Dutch Tri-floater* représentés sur la figure (1.1). Au contraire, on peut décider de réduire le diamètre du flotteur, d'augmenter son tirant d'eau et de répartir la masse de sorte que le centre de gravité soit très bas par rapport au centre de poussée. Ceci conduit à la géométrie de type *spar* représentée sur la figure (1.1). Enfin, une dernière façon de procéder consiste à choisir un système d'ancrage très tendu, qui va à lui seul garantir la stabilité statique de l'éolienne off-shore. C'est le cas des plateformes de type *Tension-Leg Platform* (*TLP*). Le choix de ces géométries de base dépend fortement de la profondeur d'eau sur le site d'installation.

[1] Le centre de poussée correspond au point d'application de la poussée d'Archimède.

1.1.2 Tenue à la mer

Une seconde phase consiste ensuite à calculer les mouvements du système sous chargement combiné {vent + vagues}. Des modèles numériques sont alors utilisés pour vérifier si les accélérations et les mouvements restent en deçà de seuils admissibles. Suivant le type de concept, les chargements de vagues peuvent être prépondérants dans le dimensionnement global. Dans l'étude [13], des flotteurs de type *spar*, *TLP* et semi-submersible sont testés avec un outil de simulation couplé pour une turbine de 5 MW à axe vertical et un état de mer typique de Mer du Nord. Dans tous les cas, même si les flotteurs répondent différemment, le chargement provenant des vagues induit des moments de renversement importants.

Dès lors, il semble nécessaire de se doter d'un outil de modélisation apte à représenter très précisément les vagues et leurs interactions avec les flotteurs. Dans le même temps, il est tentant d'adopter directement des méthodes éprouvées dans l'industrie pétrolière, car les concepts utilisés pour les éoliennes off-shore en sont largement inspirés. Cependant, ces méthodes sont très conservatives et peuvent donc conduire à un concept non rentable. Indépendamment de la seule optimisation économique, il est prudent d'évaluer la pertinence des méthodologies de dimensionnement possibles en termes de précision, de conservatisme.

1.1.3 Approche classique

Calcul dans le domaine fréquentiel

Traditionnellement, lors des phases de dimensionnement et d'optimisation, la méthode retenue consiste à représenter le problème d'interaction vague-structure dans le domaine fréquentiel. La résolution du problème dans le domaine fréquentiel suppose une linéarisation de toutes les équations utilisées pour décrire le système, ce qui constitue une hypothèse très forte. Pour chaque fréquence, on calcule séparément la solution des problèmes de diffraction (vague incidente et structure fixe) et de radiation (pas de vague incidente et structure en mouvement unitaire pour chaque degré de liberté). Pour une géométrie, cela conduit à 7 problèmes à résoudre par fréquence de houle considérée (1 en diffraction et 6 en radiation).

Le problème sous forme fréquentielle conduit à l'équation à 6 degrés de liberté suivante :

$$\left[-(\mathbf{M}+\mathbf{A}(\omega))\omega^2 - i\mathbf{B}(\omega) + \mathbf{K}_h + \mathbf{K}_m\right]\mathbf{X} = \mathbf{F}_{exc} \tag{1.1}$$

avec $\mathbf{M}$ la matrice d'inertie généralisée du solide rigide, $\mathbf{A}(\omega)$ la matrice de masse ajoutée pour la fréquence ω, $\mathbf{B}(\omega)$ la matrice d'amortissement linéaire pour la fréquence ω, $\mathbf{K}_h$ la matrice de raideur hydrostatique, $\mathbf{K}_m$ la matrice représentant l'effet des ancrages, $\mathbf{X}$ le vecteur de déplacement généralisé du solide rigide et $\mathbf{F}_{exc}$ l'effort généralisé lié à la diffraction, dit effort d'excitation.

En phase de pré-conception, on peut ainsi évaluer rapidement les efforts d'excitation des vagues, les masses ajoutées ainsi que les raideurs. Comme expliqué dans [13], cette approche permet le calcul des fréquences propres du système et donc un dimensionnement basique de l'éolienne off-shore. Cependant, de nombreux effets non-linéaires et transitoires ne peuvent être mis en évidence.

Calcul dans le domaine temporel

On peut aussi résoudre le problème en utilisant la formulation temporelle de Cummins [14, 13]:

$$(\mathbf{M}+\mathbf{A}(\infty))\ddot{\mathbf{X}}(t) + \int_{-\infty}^{t} \mathbf{K}(t-\tau)\dot{\mathbf{X}}(\tau)d\tau + \mathbf{K}_h\mathbf{X}(t) = \mathbf{F}_{exc} \tag{1.2}$$

avec $\mathbf{A}(\infty)$ la matrice de masse ajoutée pour une pulsation infinie, $\mathbf{K}$ la fonction de retard qui permet de rendre compte d'effets de mémoire et $\mathbf{F}_{exc}$ un effort généralisé incluant cette fois les efforts de diffraction, mais également toute autre charge extérieure. La matrice K a la définition suivante [15]:

$$\mathbf{K}(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \mathbf{B}(\omega)\cos\omega t d\omega \tag{1.3}$$

On voit donc qu'en combinant les solutions fréquentielles par linéarité, on peut calculer la solution du problème dans le domaine temporel. Cette approche autorise à intégrer des non-linéarités venant entre autres de l'aérodynamique, des ancrages mais aussi des modèles semi-empiriques des efforts visqueux par la formule de Morison [13] par exemple. C'est la méthodologie mise en oeuvre dans le code EDF R&D CALHYPSO. Cette technique a l'avantage d'être très économique sur le plan computationnel. Ce choix s'explique par le fait que le dimensionnement complet de l'éolienne inclut plusieurs milliers de cas de charge définis par des états de mers et de vents couplés. Pour chaque état de mer irrégulier, il faut aussi réaliser plusieurs tirages de phases pour caractériser la réponse de l'éolienne off-shore.

1.1.4 Limites de la théorie linéaire

L'approche linéaire est un outil très utile, mais laisse beaucoup de questions en suspens :

- Jusqu'à quelle amplitude de mouvement du solide est-il licite de linéariser le problème?
- Jusqu'à quelle cambrure de vague le modèle linéaire est-il valide?
- Généralement, quels cas de charge peuvent être considérés en théorie linéaire? Avec quel niveau d'approximation?

La figure (1.2) rappelle le domaine de validité des théories de houle selon la valeur du couple $(\frac{h}{gT^2}, \frac{H}{gT^2})$ avec H la hauteur crête-à-creux de la vague, T la période de houle et h la profondeur du fond marin. Le nombre $\frac{h}{gT^2}$ représente la profondeur relative et le nombre $\frac{H}{gT^2}$ représente la cambrure de la vague. On voit immédiatement que le domaine de validité de la théorie linéaire utilisée en entrée des modèles fréquentiels et temporels est limité.

De plus, de nombreux phénomènes observés sur des plateformes off-shore trouvent une explication très satisfaisante par les modèles non-linéaires. C'est le cas du phénomène de *ringing* par exemple, auquel les concepts de type *TLP* sont sujets. Ce phénomène a été remarqué initialement au début des années 90 sur la plateforme de Hutton [16]. Il s'agit d'une résonance à une fréquence d'excitation 4 à 5 fois plus grande que la fréquence significative de houle [15]. Ce phénomène, fugace, peut être généré par l'interaction avec une vague très cambrée. Cela fait suspecter l'intervention d'harmoniques d'ordre élevé (au moins 3), impossible à mettre en évidence avec un modèle linéaire. De la même manière, le phénomène de *springing* [15] a un mécanisme de formation non-linéaire associé aux harmoniques d'ordre 2. C'est un phénomène de résonance, durable dans le temps, d'une structure dont la fréquence propre est 2 fois plus grande que la fréquence de la houle. Ces périodes propres sont excitées cette fois par des sommes de fréquences présentes dans le spectre de houle [15]. La découverte du phénomène de *ringing* a suscité d'importants travaux de recherche et mené notamment à la théorie d'ordre 3 de Malenica et Molin [17]. Dans le domaine encore récent de la recherche sur l'éolien off-shore flottant, des travaux suggèrent l'importance de prendre en compte les effets d'ordre 2 [18] pour le flotteur semi-submersible DeepCWind. En particulier, le cavalement en vague seule est sous-estimé avec

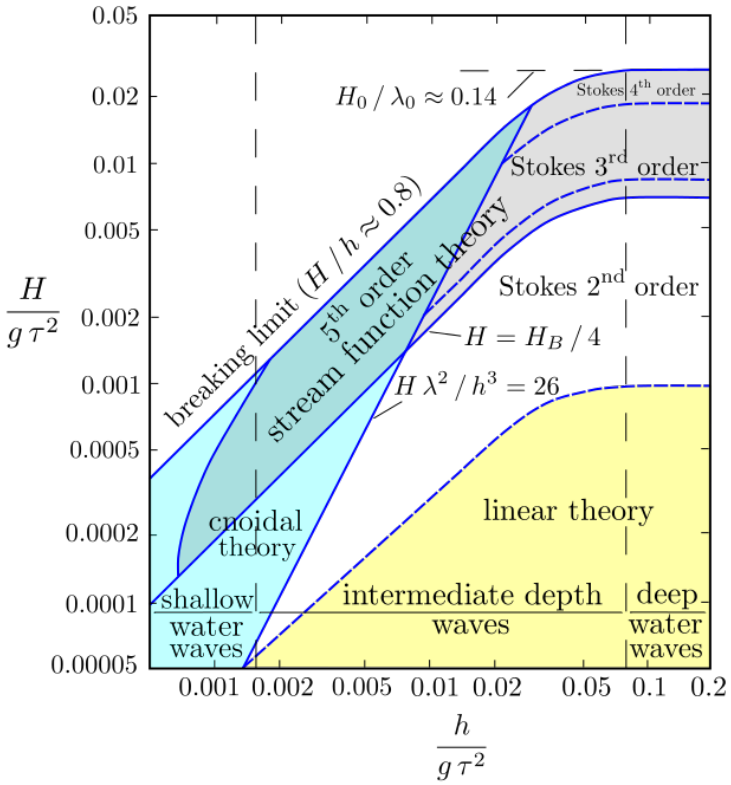


Figure 1.2: Diagramme de validité des théories de houle en fonction des paramètres ($\frac{h}{gT^2}$,$\frac{H}{gT^2}$) [3] (d'après Le Méhauté (1976)).

un modèle purement linéaire. Bachynski et Moan [16] montrent, pour des plateformes de type *TLP*, l'effet non négligeable du *ringing* sur les charges extrêmes et la fatigue à court terme.

1.1.5 Vers le développement de modèles complètement non-linéaires

Parallèlement à ces développements théoriques sur les modèles faiblement non-linéaires, des canaux à houle numériques fondés sur la théorie potentielle non-linéaire ont connu un développement important dès les années 90 pour les modèles 2D, et depuis les années 2000 pour les modèles 3D. Ces modèles numériques, plus coûteux en temps de calcul, présentent un intérêt double. D'une part, ils permettent de s'affranchir de toutes les hypothèses faites sur l'amplitude du mouvement du solide et sur la cambrure des vagues. D'autre part, le résultat d'un calcul contient directement tous les harmoniques susceptibles de se développer. Ils sont donc d'une certaine manière plus "simples" à mettre en oeuvre et à interpréter. Au cours de la thèse d'Etienne Guerber [19] au Laboratoire d'Hydraulique Saint-Venant, une méthode 2D inspirée des travaux de van Daalen [20] et de Tanizawa [21] a été implémentée dans le code 2D de Grilli *et al.* [22]. Nous nous proposons de poursuivre les développements engagés pour adapter le modèle à des géométries de solides 3D perçant la surface libre.

1.2 Plan de la thèse

Le manuscrit suit le plan suivant :

- Le chapitre (2) présente les approches numériques utilisées dans la littérature pour modéliser des structures flottantes soumises à l'action des vagues. Cette étude bibliographique est tournée vers les modèles d'interaction entre un fluide potentiel non-linéaire et un solide rigide afin de mieux situer la méthode utilisée dans ce travail. Les caractéristiques principales de ces méthodes et leurs champs d'application sont détaillés.

- Le chapitre (3) présente une extension du modèle [23] pour prendre en compte des structures perçant la surface libre en 2D ainsi que des résultats de validation. Ces simulations ont été effectués à l'aide du modèle non-linéaire 2D de Grilli *et al.* [22], développé par Guerber *et al.* [23] pour prendre en compte des mouvements forcés et libres de structures immergés sous la surface libre. Ce chapitre reprend, en la complétant, une publication dans la revue *Journal of Ocean Engineering and Marine Energy*. La précision de différents schémas numériques pour l'avance en temps de la surface libre et de la surface du solide rigide est évaluée. A cet égard, on trouve que l'utilisation d'un schéma inspiré par les concepts d'intégration symplectique aboutit à une meilleure conservation de l'énergie et du volume.

- Le chapitre (4) décrit les développements effectués au cours de cette thèse pour mettre en oeuvre la méthode décrite dans le chapitre (3) sur des maillages surfaciques 3D non-structurés. Ils s'appuient sur un premier modèle, basé sur des fonctions de forme linéaires, développé en collaboration avec J.C. Harris [24]. Les techniques utilisées permettent d'obtenir un modèle beaucoup plus général d'usage que le modèle présenté dans [24], qui reposait sur une intégration analytique des intégrales singulières impliquées dans la méthode d'éléments de frontière. Le chapitre contient plusieurs validations du solveur d'éléments de frontière pour différents types de surfaces et précise la sensibilité des résultats à différents paramètres numériques. Par ailleurs, plusieurs stratégies sont proposées pour évaluer les champs de vitesse et d'accélération potentiels sur des maillages triangulaires réguliers et irréguliers.

- Le chapitre (5) présente des résultats de validation du modèle 3D sur des cas de figure académiques. Dans un premier temps, la capacité du modèle à prédire les chargements non-linéaires sur des structures fixes en diffraction est évaluée à l'aide d'un schéma d'avance en temps semi-lagrangien pour la surface libre. Dans un second temps, nous définissons un autre schéma temporel hybride pour simuler des mouvements de cylindres verticaux en translation horizontale et en rotation.

- Le chapitre (6) complète les cas de validation du modèle numérique en mouvement libre et aborde des applications à des flotteurs réalistes. On y considère un flotteur de type barge en mouvement libre. On étudie ensuite la diffraction et la radiation non-linéaires sur une géométrie inspirée du flotteur *Dutch Tri-floater*.

Chapter 2

State-of-the-art of nonlinear wave-body interactions

2.1 Introduction

In this chapter, we focus on the various numerical models developed in the past ten years for describing the wave-body interaction problem based on potential flow theory and rigid solid motion. Many numerical wave tanks taking into account the effects of viscosity have also been proposed and a growing interest is also seen in the use of Navier–Stokes model for computing the nonlinear dynamics of floating bodies for ocean engineering applications (see *e.g.*[25],[26]). A Navier–Stokes model is of course desirable when loads are to be computed on small bodies. However, seeking a solution of the problem using a Navier–Stokes-based solver may not be appropriate for waves applications, as it is known to cause numerical dissipation. This is the reason why, developing a fully nonlinear solver in the bulk of the fluid domain, for coupling it possibly with a Navier–Stokes solver in the near field of the body, remains at least a necessary task, if one wants to predict as accurately as possible the wave-induced nonlinear features of the body dynamics. This kind of numerical strategy has been investigated for example for the prediction of the wave diffraction over a bottom mounted cylinder in [27].

As emphasized by Mei [28] (see especially chapter 8 entitled "Floating body dynamics"), three main parameters can be considered to affect the wave-structure interaction problem: the amplitude of the wave A, the characteristic size of the body D and the wavenumber k.

The first important hypothesis made for this work is to assume the fluid to be the inviscid, which can be applied far from the solid boundary if the Reynolds number R_e of the flow satisfies the condition:

$$R_e = \frac{A\omega\frac{2\pi}{k}}{\nu} \gg 1 \tag{2.1}$$

where ν is the kinematic viscosity of the fluid and ω is the frequency at which the wave propagates. For an oscillatory flow, it is also convenient to define the Keulegan–Carpenter number K_C:

$$K_C = 2\pi\frac{A}{D} \tag{2.2}$$

For a solid of characteristic length D moving in an unbounded flow with the velocity U, it can be shown (see Newman [29]) that the ratio of viscous forces (in a viscosity-dominated flow) and inertia forces (in an inertia-dominated flow) is proportional to $\frac{U^2}{\dot{U}D}$. By assuming an oscillatory flow of frequency ω, this ratio takes the form $\frac{A}{D}$. Therefore, if the number K_C is small, inertia forces dominate drag forces.

In general, we can apply a potential flow model if the viscous effects are small, which means that the following conditions are met:

$$\begin{cases} D \gg 2\pi A \\ A\omega \gg \nu \dfrac{k}{2\pi} \end{cases} \tag{2.3}$$

Under these conditions, we note that we also have $\frac{R_e}{K_C} = \frac{D^2}{\nu T} \gg 1$. This last parameter is commonly used [15] in off-shore hydrodynamics and represents the square of the ratio between the size of the body D and the boundary layer thickness [15].

Furthermore, we note that for applying linearized models for the free surface, the steepness of the wave $\frac{kA}{\pi}$ and its relative height $\frac{2A}{d}$ with respect to the water depth d, need to be small. According to [28], the range of validity of linearized diffraction models falls under the conditions $\frac{A}{D} \ll 1$ and $kD = O(1)$, that is when the wavelength $\frac{2\pi}{k}$ is greater or of the same order as the diameter of the body and the wave amplitude A is very small compared to the characteristic length of the body.

According to Mei [28], the most complicated case occurs when $\frac{A}{D} \geq O(1)$ and $kD = O(1)$, as both viscous effect and nonlinear diffraction are expected to be important.

Based on these criteria, the fully nonlinear potential flow can be considered to be relevant for computing forces in the range $kD \geq O(1)$ and $\frac{A}{D} \leqslant 1$. In addition, the use of this mathematical model imposes to neglect the effects associated to breaking waves. In order to highlight the different choices made in the frame of this work, we will give more details about methods relying on the same mathematical model. We thus restrict ourselves to the fully nonlinear potential formulation of the problem.

2.2 Mathematical statement of the potential flow problem

The model used in this work is by far the most simple that can be found to describe mathematically the motion of the fluid as the governing equation of the problem in the fluid domain is the Laplace equation, which is linear. However, as it will be seen in the next sections, the ideas used for modelling the evolution of the free surface and the body surface are quite general and could be used with other fluid models as well.

Let us denote by ϕ the velocity potential, solution of the Laplace equation. ϕ_n denotes the normal derivative of ϕ and ϕ_t denotes the Eulerian time derivative of ϕ. We solve the governing equation over a domain Ω_f, which corresponds to the volume of fluid surrounding the rigid body, which also defines a domain denoted by Ω_b. $\partial\Omega_f$ (respectively $\partial\Omega_b$) is the boundary of the domain Ω_f (respectively Ω_b). g is the acceleration of gravity, z is the free surface elevation and $\mathbf{v}$ is the rigid body velocity. We consider an earth-fixed reference frame denoted by $\mathcal{R}$ and a body-fixed reference frame denoted by $\mathcal{B}$. $\mathbf{X}$ is the generalized position vector of the center of gravity of the rigid body, defined as follows:

$$\begin{aligned} X_1 &= x_{G1} \\ X_2 &= x_{G2} \\ X_3 &= x_{G3} \\ X_4 &= \theta_{G1} \\ X_5 &= \theta_{G2} \\ X_6 &= \theta_{G3} \end{aligned} \tag{2.4}$$

where $\mathbf{x}_G$ is the position vector of the center of gravity and $\boldsymbol{\theta}_G$ is the orientation vector of the rigid body. The Boundary Value Problem (BVP) associated to the wave-body interactions may then be stated as (see for example [30],[31]) :

$$\begin{aligned}
&\text{Find } (\phi, \Omega_f, \Omega_b, \mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}, \ddot{\mathbf{X}}) \text{ such that :} \\
&\Delta\phi = 0 \quad \text{in} \quad \Omega_f(t) \\
&\phi_t = -gz - \frac{1}{2}\nabla\phi \cdot \nabla\phi \quad \text{on} \quad \partial\Omega_f(t) \\
&\phi_n = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \quad \text{on} \quad \partial\Omega_b \cap \partial\Omega_f(t) \\
&\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \nabla\phi \quad \text{for} \quad \mathbf{x} \quad \text{on} \quad \partial\Omega_f(t) \\
&\left\{ \frac{dm\dot{\mathbf{x}}_G}{dt} \right\}_{\mathcal{R}} = \sum \mathbf{F} \\
&\left\{ \frac{d\mathbf{I}(G) \cdot \boldsymbol{\Omega}_{\mathcal{B}/\mathcal{R}}}{dt} \right\}_{\mathcal{R}} = \sum \mathbf{M}_G
\end{aligned} \tag{2.5}$$

where m is the mass of the solid , $\mathbf{I}(G)$ the inertia tensor of the rigid solid expressed with respect to the center of mass position $\mathbf{x}_G$, $\boldsymbol{\Omega}_{\mathcal{B}/\mathcal{R}}$ the instantaneous angular velocity vector of the solid in the global frame $\mathcal{R}$, such that $\boldsymbol{\Omega}_{\mathcal{B}/\mathcal{R}} = \dot{\boldsymbol{\theta}}_G$, and $\dot{\mathbf{x}}_G$ the translational velocity. The time derivative represented with the symbol $\left\{\frac{d\cdot}{dt}\right\}_{\mathcal{R}}$ indicates time differentiation in the earth-fixed coordinate system $\mathcal{R}$. The force $\sum \mathbf{F}$ is the total force acting on the rigid body, including wave loads and other external forces exerted by the wind and by the mooring lines. For ease of computations, it can be convenient to express the conservation of angular momentum in a coordinate system attached to the principal axes of inertia of the solid. $\mathbf{I}(G) \cdot \boldsymbol{\Omega}_{\mathcal{B}/\mathcal{R}}$ is the angular momentum of the body with respect to $\mathbf{x}_G$, also denoted by $\boldsymbol{\sigma}(G)$. $\sum \mathbf{M}_G$ is the sum of the moments induced by the different forces acting on the rigid body, expressed at the center of mass $\mathbf{x}_G$. The time derivative of $\boldsymbol{\sigma}(G)$ can be rewritten as:

$$\left\{ \frac{d\boldsymbol{\sigma}(G)}{dt} \right\}_{\mathcal{R}} = \left\{ \frac{d\boldsymbol{\sigma}(G)}{dt} \right\}_{\mathcal{B}} + \boldsymbol{\Omega}_{\mathcal{B}/\mathcal{R}} \times \boldsymbol{\sigma}(G) \tag{2.6}$$

where $\boldsymbol{\Omega}_{\mathcal{B}/\mathcal{R}} \times \boldsymbol{\sigma}(G)$ is the gyroscopic moment.

Two cases will be examined in the next chapters:

- Forced motion cases where the kinematics of the center of gravity is provided,
- Free motion cases where the Euler Rigid Body Dynamics equations need to be solved.

From system (2.5), many numerical strategies may be devised according to the way we mesh the geometrical model. They can be divided into two major methods:

- The body-conformal mesh methods, in which the mesh moves with the geometry,
- The fictitious domain methods, in which the fluid motion equations are solved on a fixed mesh and are penalized inside the volume occupied by the solid to take into account the rigid body motion, originally due to Glowinsky *et al.* [32] and recently applied to 2D wave-body interactions in [26].

While the second strategy may offer more simplicity as the mesh needs to be defined only once at the beginning of the simulation, the first method can be expected to be *a priori* the most accurate one, as the details of the time-evolving geometry are better represented in the model.

2.3 Review of numerical modelling for wave-body interactions

In this section, we give an overview of current numerical modelling approaches used for solving the wave-body interaction problem (2.5). Two main numerical methods seem to have led to a significant body of literature: the Boundary Element Method (BEM) and the Finite Element Method (FEM) following a body-conformal mesh approach. Besides, some alternative numerical methods are to be mentionned such as the Desingularized Boundary Element Method (DBEM) and methods based on the Hamiltonian formulation of the wave problem. All of these mathematical methods have been described in depth, *e.g.* in the review of van Daalen [20] and a lot has already been said about this problem at least for two dimensional geometries. Note that at the time of van Daalen's work, most of the numerical wave tanks were based on Boundary Integral Equations and the so-called Mixed-Eulerian-Lagrangian (MEL) time-stepping.

The aim of the present work is to evaluate the possibility to apply these techniques to industrial problems related to the design of off-shore wind turbines platforms and to make a numerical analysis of the model for these cases. In table (2.1), the most recent publications focusing on wave-body interactions are enumerated with the applications realized. The similar table (2.2) details the numerical schemes that have been employed in these publications. Note that the review is limited to works published in journal papers. Some other contributions on this topic may therefore have been omitted.

Considering the references given further in this chapter, one understands that many numerical challenges are associated to the simulation of wave-body interactions:

- A difficulty related to the appearance of instabilities often seen with the MEL time-stepping for steep waves,
- A difficulty related to the management of the mesh in the course of the simulation, when adopting a body-conformal approach,
- A difficulty related to the computational effort of the numerical schemes which will depend both on the chosen mesh and on the numerical method.

For example, the difficulty when dealing with unstructured mesh lies in the generation itself which may be a complex task for 3D geometries and in the remeshing step which can be far more difficult and time consuming than for a structured mesh. Yan and Ma [33] recently showed that their Quasi Arbitrary Lagrangian Eulerian-Finite Element Method (QALE-FEM) could be 10 times faster than the fast BEM developed by Fochesato and Dias [34] for the simulation of overturning waves.

2.3.1 Numerical models for forced motion cases

Until the late 90's, most of the publications were devoted to three dimensional computations of diffraction or radiation loads. In [35], Boo studied the effect of linear and nonlinear irregular waves on fixed bottom mounted cylinder by means of the High Order Boundary Element Method (HOBEM). A multistep method was utilized for integrating the free surface conditions in time

(Adams–Bashforth for prediction and Adams–Moulton for correction). Each variable of their numerical method is filtered in space using a five-point scheme.

In the work of Yue *et al.* [36], a structured mesh was employed for computing, with a Quadratic Boundary Element Method (QBEM), the wave loads in forced motion and diffraction on a Wigley Hull and a truncated cylinder. They also used a fourth-order multistep method for integrating the free surface conditions in time. For the truncated cylinder, a careful analysis of the high-order harmonics loads and on the runup profile was done, and a fair agreement with measurements performed at MARINTEK and the third order theory of Malenica and Molin [17] was found. No smoothing of the free surface, which is known as an effective way of removing the saw-tooth type instablities, was employed. Instead, a remeshing scheme, based on a cubic spline representation in each parametric direction with optimally spaced grid points is employed. Another HOBEM was more recently developped by Bai and Eatock Taylor in [37] for unstructured grid and coupled with domain decomposition method for reducing the computational time. A standard fourth-order Runge–Kutta scheme for integrating the free surface conditions and computing the velocity and the displacement of the body center of gravity is employed. Various forced motions cases were investigated for vertical cylinder geometries. A remeshing step based on the Laplace smoothing technique applied on the projection of the free surface on an horizontal plane is used. Some typical nonlinear effects are outlined like the oscillation of the vertical force in surge at twice the frequency of the motion, valid for a symmetrical object (see the demonstration in [38]). They show an important nonlinear interaction between surge and pitch motion.

Similarly, a methodology based on a FEM was proposed in 2001 by Ma *et al.* and applied to computations with fixed vertical cylinders in [39]. Their time-stepping is a second order trapezoidal rule. According to these authors, this scheme needs to be used in combination with remeshing every few time steps when steep waves are to be simulated. Use of the FEM was also made by Wang *et al.* in [40] in a work focusing on the diffraction and radiation around vertical or flared cylinders.

A very innovative scheme has also been recently proposed by Mola *et al.* [41] and achieves to define an Abitrary Lagrangian Eulerian (ALE) formulation for the boundary of the fluid domain $\partial\Omega_f$ itself. This is quite unusual as the ALE method is originally devised for moving interior nodes of a volumic mesh $\Omega_f(t)$, given the velocity at the boundary, by solving an additional Partial Differential Equation (PDE) in the domain $\Omega_f(t)$. This method is developed for unstructured quadrangular meshes and is stabilized by a Streamline Upwind Petrov–Galerkin (SUPG) scheme applied to the dominant transport term of the boundary condition, in case of a non-negligible advancing velocity.

As an intermediate conclusion, we see that the time-stepping procedure is very often based on the original work of Longuet-Higgins and Cokelet [48] which consists in doing a Taylor expansion of both the geometry and the velocity potential to define the problem at next iteration. Some numerical wave tanks use this scheme in combination with a predictor-corrector scheme (see [35],[36],[37]) or the Taylor expansion can be evaluated explicitly which is found in [1] for the modelling of strongly nonlinear waves near the breaking limit. Whatever the chosen numerical scheme is, its use is very often associated to the occurence of instabilities. This fact has been widely reported in the literature and can be compensated by a remeshing scheme or a filtering scheme, which can damp out these high wavenumber instabilities related to the minimal grid size. A detailed analysis of the process leading to instabilities and their nature is done in [49] for two dimensional configurations. This phenomenon, as highlighted in [48] in the case of free surface waves propagation, is not specific to wave-body interactions.

Table 2.1: Numerical methods used in the literature (the time integration scheme is specified where available)

Authors (year)	**spatial solver**	**time stepping scheme**
Ma *et al.* [39] (2001)	FEM	trapezoidal rule 2
Liu *et al.* [36] (2001)	HOBEM	MEL ABM 4
Wang and Wu [42] (2006)	FEM	RK 4
Koo and Kim [43] (2004)	HOBEM	MEL RK 4
Yan and Ma [44] (2007)	FEM	
Boo [35] (2002)	BEM	ABM 4
Wu and Eatock Taylor [45] (2003)	BEM/FEM coupling	
Wang [46] (2005)	DBEM	
Bai and Eatock Taylor [37] (2006)	HOBEM	RK 4
Bai and Eatock Taylor [47] (2009)	HOBEM	RK 4
Wang *et al.* [40] (2007)	FEM	
Mola *et al.* [41] (2013)	BEM	implicit backward

2.3.2 Alternative numerical modelling approaches

Two other approaches have also been investigated in the literature.

The desingularized boundary element method (DBEM)

The DBEM is a variation of the BEM which has proven to be an efficient way of solving the Boundary Integral Equation. In this method, for each physical point located on the actual surface (named the control point), another source point placed sligthly above or below the actual surface is created. This makes all the integrals that have to be computed for assembling the matrix non singular. It has been applied to truncated three dimensional objects in [50] or more recently by Wang [46] for ship waves applications.

Hamiltonian formulation of the equations

Apart from these popular numerical methods, we should also note the existence of models which take advantage of additional assumptions on the free surface representation. If the free surface elevation η is a single valued function, one can either perform a σ-tranformation between the bed and the free surface on the vertical coordinate or make use of the Hamiltonian mechanics concepts to transform the problem (2.5) where the variables depend on the three coordinates (x, y, z) into a problem where the variables depend only on the horizontal coordinates (x, y). The first alternative has been the object of two papers by Chern *et al.* (see for 2D problems the reference [51] validating the approach in sloshing tanks and [52] for 3D computations of bottom mounted cylinders). According to the authors, the main advantage compared to the FEM/BEM approaches is that no smoothing of the solution is necessary thanks to the σ-transformation. An application of the transformation of the problem in the free surface variables can be found in [53], but it seems yet to be restricted to two dimensional geometries.

Alternative time-stepping

Another promising way of solving the wave problem (which could lead to an equivalent method for the wave-body problem just as the aforesaid methods) is to represent the free surface by means of a Level Set Function. This modification of the time-stepping part of the method only could have significant consequences on the applications that can be handled with as it would pave the way for studying the post-breaking wave phenomenae. This application of the Level Set method dates back to [54] for one phase flow and has been later extended to multiphase flows in [55]. Their method differs also from the presented work in the sense they choose to discretize the boundary integral equations by means of a Galerkin method which leads to hypersingular kernels.

2.3.3 Numerical models for freely floating motions

We focus in this section on the applications of the model for free motions of floating structures. To the best of our knowledge and at the beginning of this work, there existed very few applications for computing the free response of a three dimensional body in waves, which shows that this research area is still active. As indicated in [47], this can be explained by the many new difficulties occuring for 3D geometries as compared to 2D geometries.

An early attempt to adress this issue may be found in [56], which is an extension of the model of Ma *et al.* [39], where the free motion of a simplified FPSO [2] geometry was computed. Apart from this publication, most of the attempts to solve the free motion problem are restricted to two dimensional configurations. For example, the FEM has been successfully applied by Yan and Ma in [44] or by Wang and Wu [42]. In the latter, an original smoothing scheme based on energy considerations is proposed. An application of the 3D BEM to this problem can be found in [47], which was published not long after the article [37], already mentioned in this review, with a focus on vertical and flared cylinders. The authors considered only the free motion in regular waves for vertical and flared cylinder. More specifically, they analyzed the effect of the body geometry, through the flare parameter of the cylinder, on important quantities such as the wave run-up, the dimensionless horizontal force and the drift displacement. An extension of the QALE-FEM method developed in [44], has also been proposed recently to address the free motion in [30]. The QALE-FEM can be seen as a satisfactory answer to the problem of remeshing which can be really tedious for 3D geometries. In this method, the mesh needs only to be generated once. The adaptive mesh strategy is based on a spring analogy for moving interior nodes of the free surface and the body surface. Moreover, the spring analogy is also applied to the body surface which may not keep unchanged geometrical properties of the body surface such that the curvature. This remeshing scheme also has the advantage to be valid for multiple valued free surface elevations. They propose to validate their scheme against comparisons to experimental data for a barge-type and a SPAR-type floating structure with a good agreement. They report a better efficiency of their procedure as compared to the mode decomposition method for computing the hydrodynamic force on the body.

2.3.4 Methods for computing the force on the instantaneous body surface

For predicting the waves loads and displacements, in particular in free motion, it is necessary to evaluate as accurately as possible the force on the body surface. We denote by ρ the density

[2] Floating Production Storage and Offloading.

of the fluid. From now on, the notation $\mathbf{F}$ and $\mathbf{N}$ represent the 6-components vectors of the generalized force and normal defined as:

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{pmatrix}, \ \mathbf{N}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \\ (x_2 - x_{G2})n_3 - (x_3 - x_{G3})n_2 \\ (x_3 - x_{G3})n_1 - (x_1 - x_{G1})n_3 \\ (x_1 - x_{G1})n_2 - (x_2 - x_{G2})n_1 \end{pmatrix} \tag{2.7}$$

when expressed in a basis $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$. With these notations, the components of the generalized force are given by direct integration of the Bernoulli's pressure on the instantaneous wetted body surface, which can be expressed as:

$$F_i = -\rho \int_{\partial\Omega_b} (\phi_t + \frac{1}{2}\nabla\phi \cdot \nabla\phi + g x_3) N_i dS \tag{2.8}$$

where N_i is the i-th component of the generalized normal vector.

As reported by many authors, evaluation of the Eulerian time derivative of the potential by means of backward differencing, may be inaccurate and give rise to instabilities. This difficulty could come from the fact that the Eulerian time derivative of any function defined on the free surface is not a relevant quantity as the fixed point with respect to which it is to be computed at time t may not belong to the domain at next or previous time-step. Instead, several techniques have been proposed, many of which are based on solving an additional Laplace equation for the time derivative of the potential ϕ_t. For solving $\Delta\phi_t = 0$, one needs to specify in the model the normal derivative of ϕ_t, that is $\frac{\partial\phi_t}{\partial n}$, along the body surface. Lagrangian time differentiation of the impermeablity condition may be expressed as follows:

$$\frac{\partial\phi_t}{\partial n}(\mathbf{x}, t) = \frac{d\mathbf{n}}{dt} \cdot (\dot{\mathbf{x}} - \nabla\phi) + \ddot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{n} - \dot{\mathbf{x}} \cdot (\nabla\nabla\phi \cdot \mathbf{n}) \tag{2.9}$$

where the dots stand for time derivative. In the following, we use the notations $\mathbf{U} = \dot{\mathbf{x}}_G$ and $\mathbf{\Omega} = \mathbf{\Omega}_{\mathcal{B}/\mathcal{R}}$ for simplicity. Note that (2.9) is identical to other formulations published in the literature. In [45], this boundary condition is rather written as:

$$\frac{\partial\phi_t}{\partial n}(\mathbf{x}, t) = (\dot{\mathbf{U}} + \dot{\mathbf{\Omega}} \times \mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} - \mathbf{U} \cdot \frac{\partial\nabla\phi}{\partial n} + \mathbf{\Omega} \cdot \frac{\partial \mathbf{r} \times (\mathbf{U} - \nabla\phi)}{\partial n} \tag{2.10}$$

where $\mathbf{r}$ denotes the position vector with respect to the center of gravity $\mathbf{x}_G$, that is $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_G$. At first glance, the two expressions do not look similar. However, splitting in Eq. (2.9) the velocity as $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{U} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}$ leads to:

$$\frac{\partial\phi_t}{\partial n}(\mathbf{x}, t) = (\dot{\mathbf{U}} + \dot{\mathbf{\Omega}} \times \mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} + (\mathbf{\Omega} \times (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r})) \cdot \mathbf{n} - \mathbf{U} \cdot \frac{\partial\nabla\phi}{\partial n} - (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}) \cdot \frac{\partial\nabla\phi}{\partial n} + \frac{d\mathbf{n}}{dt} \cdot (\mathbf{U} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r} - \nabla\phi) \tag{2.11}$$

from which it is seen that $(\mathbf{\Omega} \times \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}) + \frac{d\mathbf{n}}{dt} \cdot (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r})$ vanishes as it can be put under the equivalent form $\mathbf{\Omega} \cdot (\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{n}}{dt} + \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{n})$.

In addition, we observe that the term $\mathbf{\Omega} \cdot \frac{\partial \mathbf{r} \times (\mathbf{U} - \nabla\phi)}{\partial n}$ in Eq. (2.10) may be decomposed into:

$$\mathbf{\Omega} \cdot \frac{\partial \mathbf{r} \times (\mathbf{U} - \nabla\phi)}{\partial n} = \mathbf{\Omega} \cdot \left[\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial n} \times (\mathbf{U} - \nabla\phi) \right] - \mathbf{\Omega} \cdot \left[\mathbf{r} \times \frac{\partial\nabla\phi}{\partial n} \right] \tag{2.12}$$

As the term $\mathbf{\Omega}\cdot\left[\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial n}\times(\mathbf{U}-\nabla\phi)\right]$ can be written also as $\mathbf{\Omega}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial n}\times(\mathbf{U}-\nabla\phi)=(\mathbf{\Omega}\times\mathbf{n})\cdot(\mathbf{U}-\nabla\phi)$, we can conclude that both derivations of Eq. (2.9) and Eq. (2.10) are strictly equivalent.

In the following, we assume that the only forces and moments applied to the rigid body come from the hydrodynamic loading and the gravity. Other external forces may be included by adding them to the force of the gravity.

The indirect or auxiliary functions method

The aim of this method is to decouple the body acceleration and the wave force [45]. It is based on the consideration that only the integration of ϕ_t over the wetted body surface is needed when one wishes to compute the force. It is therefore not necessary to explicitly compute ϕ_t on the whole computational domain.

It is also known as the indirect method first proposed by Wu and Eatock Taylor [57]. This method consists in finding 6 functions ψ_i (corresponding to each mode of motion) such that:

$$\begin{aligned}
&\Delta\psi_i = 0 \text{ in } \ \Omega_f \\
&\frac{\partial\psi_i}{\partial n} = n_i \text{ on } \ \partial\Omega_b \\
&\psi_i = 0 \text{ on } \ \partial\Omega_f \\
&\frac{\partial\psi_i}{\partial n} = 0 \text{ on other boundaries}
\end{aligned} \tag{2.13}$$

The force may then be expressed in the following manner [47]:

$$F_i = -c_{ij}\ddot{\epsilon_j} + Q_i \tag{2.14}$$

where the coefficients c_{ij} and Q_i depend on the auxiliary functions and the displacement of the body. It can be shown, as in [40], that $c_{ij}=\int_{\partial\Omega_b}\psi_i n_j dS$. By applying the Green's identity to each ψ_i and ϕ_t, we have:

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\Omega_b}\phi_t n_i dS = \rho\int_{\partial\Omega_b}\left(\frac{\partial\psi_i}{\partial n}\left((\dot{\mathbf{U}}+\dot{\mathbf{\Omega}}\times\mathbf{r})\cdot\mathbf{n}-\mathbf{U}\cdot\frac{\partial\nabla\phi}{\partial n}+\mathbf{\Omega}\cdot\frac{\partial\mathbf{r}\times(\mathbf{U}-\nabla\phi)}{\partial n}\right)\right)dS \\
+\rho\int_{\partial\Omega_f}(\frac{1}{2}\nabla\phi\cdot\nabla\phi+gz)\frac{\partial\psi_i}{\partial n}dS
\end{aligned} \tag{2.15}$$

where we made use of the formulation of Eq. (2.10). Further transformations of the high order term $-\mathbf{U}\cdot\frac{\partial\nabla\phi}{\partial n}$ by use of the Stokes' theorem leads to the following form ([42],[45],[56]):

$$\begin{aligned}
Q_i = \rho\int_{\partial\Omega_b}(\nabla\psi_i\ [(\mathbf{v}(\mathbf{x},t)\cdot\mathbf{n}(\mathbf{x},t)]\cdot[\nabla\phi-\mathbf{v}(\mathbf{x},t)]-\psi_i(\mathbf{\Omega}\times\mathbf{U})\cdot\mathbf{n})\,dS \\
-\rho\int_{\partial\Omega_f+\partial\Omega_b}(\frac{1}{2}\nabla\phi\cdot\nabla\phi+gz)\frac{\partial\psi_i}{\partial n}dS
\end{aligned} \tag{2.16}$$

The acceleration of the body center of gravity can then be recovered using the Newton's second law [47] :

$$\sum_{j=1}^{6}(m_{ij}+c_{ij})\ddot{\epsilon_j} = Q_i + m_b g\delta_{i,3} \tag{2.17}$$

where m_b is the body mass and m_{ij} is the mass matrix. For 3D problems, this method thus requires to solve 6 Laplace problems.

When considering a freely floating body, the equation of motion is solved by substituting in Eq. (2.17) the obtained velocity potential and auxiliary functions.

The mode decomposition method

An application of the decomposition method has been investigated in Koo and Kim [43] (originally found in [58]) for two dimensional geometries. It consists in making the decomposition:

$$\phi_t = \sum_{j=1}^{6} a_i \phi_i + \phi_7 \tag{2.18}$$

and solving the 7 boundary value problems:

$$\begin{aligned}
&\Delta\psi_i = 0 \text{ in } \ \Omega_f \\
&\frac{\partial\psi_i}{\partial n} = n_i \text{ on } \ \partial\Omega_b \\
&\psi_i = 0 \text{ on } \ \partial\Omega_f \\
&\frac{\partial\psi_i}{\partial n} = 0 \text{ on input boundaries} \\
&\frac{\partial\psi_i}{\partial n} = 0 \text{ on other rigid boundaries}
\end{aligned} \tag{2.19}$$

and:

$$\begin{aligned}
&\Delta\psi_7 = 0 \text{ in } \ \Omega_f \\
&\frac{\partial\psi_7}{\partial n} = q \text{ on } \ \partial\Omega_b \\
&\psi_7 = -g\eta - \frac{1}{2}\nabla\phi\cdot\nabla\phi \text{ on } \ \partial\Omega_f \\
&\frac{\partial\psi_7}{\partial n} = \frac{\partial\phi_t}{\partial n} \text{ on input boundaries} \\
&\frac{\partial\psi_7}{\partial n} = 0 \text{ on other rigid boundaries}
\end{aligned} \tag{2.20}$$

where $q = \phi_{tn} - \ddot{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{n}$, with ϕ_{tn} determined with the expression (2.9).

In this manner, by application of linearity, it is easily seen, that the resulting function ϕ_t as defined in Eq. (2.18) satisfies exactly the same problem as the time derivative of the potential.

Then, once the BIE has been solved for each mode, the coefficients a_i may be recovered by applying the Newton's second law. In [43], a Runge–Kutta–Nystrom 4-th order scheme is proposed to get the velocities and displacements of the body.

Each mode is satisfying a similar BVP to the one solved for the velocity potential as for the auxiliary functions method. Each mode can thus be efficiently solved by using a direct method solver as pointed out in [44].

The implicit body acceleration method

This method has been initially proposed by Tanizawa [21] and van Daalen [20] independently and consists in replacing the acceleration in Eq. (2.9) by the pressure's integral on the body wetted

surface according to Newton second law. By doing so, an extra integral equation relating ϕ_t to ϕ_{tn} may be derived and substituted into the initial algebraic system. It is therefore possible to solve implicitly the velocity potential and its time derivative before an explicit calculation of the acceleration of the floating body which may be necessary otherwise to evaluate the Neumann boundary condition on the body surface, as can be seen in Eq. (2.9). In [23], this method was applied with a predictor-corrector scheme based on the convergence of the hydrodynamic forces.

The ISITIMFB method

This method is an iterative one which consists in replacing directly in the Neumann condition (2.9) the values of the acceleration and the velocity of the rigid body, when solving for ϕ_t.

First, a prediction of the acceleration at next time step is made by a curve fitting of the accelerations at previous time steps. The velocity is then estimated with an Adam-Basforth implicit scheme. A correction step based on the value of the forces or the accelerations is used for refining the solution.

As pointed out by Ma and Yan [30], an additional advantage of using their scheme is that the body velocity used in the process of the mode-decomposition or the indirect method is estimated from the acceleration at previous time step which makes it explicit. Compared to the strategy developed in Guerber *et al.* [23] and followed in the present research work, they also propose to change the value of the velocity potential on the free surface during the iterative process in the 3D extension of the ISITIMFB, called the ISITIMFB-M.

Further details on the last two schemes will be given in the chapter devoted to the present numerical model as it has been implemented and used in the present work. As pointed out in the PhD dissertation of Guerber [19], the fastest method seems to be the implicit body acceleration method as it only involves to solve two BVP's for getting the pressure and the acceleration at any given iteration.

Table 2.2: Nature of problems adressed in the literature.

Author (year)	**geometries**	**Type of problem**	**Force computation**
Ma *et al.* [39] (2001)	3D	diffraction vertical cylinder	field equation for ϕ_t
Liu *et al.* [36] (2001)	3D	diffraction ship waves	BVP approach for ϕ_t post-process method
Wang and Wu [42] (2006)	2D	radiation wedges	auxiliary functions
Koo and Kim [43] (2004)	2D	free motion barge	direct mode acceleration potential
Boo [35] (2002)	3D	irregular diffraction vertical cylinder	
Wu and Eatock Taylor [45] (2003)	2D	submerged body	auxiliary functions
Wang [46] (2005)	3D	Kelvin waves	
Wu and Hu [56] (2004)	3D	forced and free motion FPSO, cylinder	auxiliary functions
Bai and Eatock Taylor [37] (2006)	3D	radiation vertical cylinder	auxiliary functions
Yan and Ma [44] (2007)	2D	free motion	ISITIMFB
Bai and Eatock Taylor [47] (2009)	3D	free motion vertical, flared cylinder	
Wang *et al.* [40] (2007)	3D	diffraction radiation flared cylinder	auxiliary functions
Ma and Yan [30] (2008)	3D	free motion SPAR, barge, Wigley hull	ISITIMFB-M
Mola *et al.* [41] (2013)	3D	ship waves Wigley hull	

Chapter 3

Development and validation of a two dimensional numerical model

The present chapter corresponds to an extension of a previous work which has been published in Journal of Ocean Engineering and Marine Energy [59]. Part of the text has thus been updated and completed as compared to the published paper [59].

3.1 Introduction

The numerical modeling of the interactions of floating structures with waves is very challenging, particularly when one wishes to include in the model both the full nonlinearity of the free surface boundary conditions as well as large motions of the structure, yielding a possibly highly nonlinear behavior of the equations of motion, even using inviscid fluid models such as Fully Nonlinear Potential Flow (FNPF) approach. For a long time, for efficiently predicting both body motion and forces, the engineering design practice has focused on linearizing free surface boundary conditions in the FNPF model as well as assuming small body motions. The use of an inviscid model was typically compensated by introducing a viscous drag force based on semi-empirical formulations such as Morison's equation.

However, the use of such simplified models is often limited to the order-of-magnitude computation of upper bounds of important parameters, such as the steepness and the amplitude of the motion. For the innovative floating structures that are being considered for new applications in ocean renewable energy, such as floating wave energy converters or floating offshore wind turbines, these simplifying hypotheses could significantly affect the eventual design, perhaps making it too sturdy and costly in some cases, or worse unsafe in others.

In the realm of academic research, since the late 1980s, more advanced and complete models such as FNPF have been developed and used, typically based on a higher-order Boundary Element Method (HO-BEM) (*e.g.* [22, 60]). However, despite a constant increase in computational resources, the coupling of such FNPF models with floating rigid body motion has been mostly studied for two-dimensional (2D) geometry; recent contributions in this respect are based on a BEM solver and a force decomposition method ([43, 61, 62]). Other numerical methods were also applied, such as the finite element method (FEM) with an Arbitrary Lagrangian Eulerian (ALE) formalism to follow the internal points in a 2D numerical wave tank [44]; the latter approach was extended to 3D geometry [30]. These authors used a direct approach for evaluating the boundary conditions; by contrast, here, we will use an implicit model, based on the earlier work by [23], who implemented van Daalen's [20] and Tanizawa's [21] implicit method in Grilli *et al.*'s

2D-FNPF model ([22];[60]) to study the interactions of a fluid with fully submerged structures.

Some 3D models solving wave-structure interactions for floating rigid bodies have also been proposed, particularly, in the field of naval architecture. See, for instance, the work by [36] or, more recently, by [46] who used a desingularized BIE method on unstructured grids. Note that an early attempt at developing a 3D axisymmetric model was proposed by [63]. Applications with the panel method in forced and free motion of a sphere were also found in the work of [64].

Regarding floating bodies without forward speed, [37] studied an oscillating cylinder as well as a bottom mounted cylinder using a HO-BEM. Later, these authors also considered the case of flared structures for bottom mounted and truncated cylinder in [47], using an auxiliary method for coupling the fluid and the solid. The different modes of body motion were more specifically studied in a recent paper by [65]. For completeness, numerical models based on the full Navier–Stokes equations were also proposed in 2D ([66]; [67]; [26]) and, in particular, wave impact on structures in regular and irregular waves were also investigated in [25]. But the accurate direct solution of Navier–Stokes equations for nonlinear wave-structure interaction problems, particularly in 3D, still remains a computationally formidable task that poses greater numerical difficulties than when using potential flow theory.

Here, we study wave-structure interactions for floating rigid bodies, using a FNPF model, by extending the work of [23], who studied freely moving submerged rigid structures. In the latter work, it was observed that, when the submerged body moved close to the free surface, numerical problems occurred that reduced the model convergence and accuracy and, hence required special attention in the numerical implementation. In this paper, we will investigate whether similar problems also occur when the floating body is attached to the free surface. Although this paper is limited to 2D problems, this work is a preliminary step since our main goal is to develop this method in 3D, based on the 3D-FNPF model by [1].

As compared to earlier methods discussed above, the present model relies on a fully Lagrangian scheme for updating both the free surface and the body geometry. To ensure accuracy in the BEM, at each time step, free surface discretization nodes of the FNPF model are regridded to equal spacing (curvilinear in 2D). As observed in earlier applications of this 2D-FNPF model, the high accuracy and stability of numerical results make it possible computing the body motion for a long time, without experiencing instabilities that would otherwise require smoothing, as done in most other similar models (*e.g.* [43]). Moreover, the fluid-structure coupling through the hydrodynamic force, is based on a fully implicit scheme. The use of the auxiliary method was found in [43], and a direct evaluation of the dynamic boundary condition on the solid was found in [44]. For the case of the forced heaving motion of a 2D horizontal cylinder, results of our model are compared with the experiments of [4].

The paper is organized as follows. In section 2, we present the model governing equations and their numerical implementation. Then, we present in section 3 the comparison of numerical results to linear, weakly nonlinear, as well as experimental results, for the forced heaving motion of a 2D cylinder. The special interest of having a fully nonlinear model will be outlined. The sway motion of a rectangular body is addressed in section 4. In section 5, we study the model convergence properties for free decay tests of a floating circular cylinder, for which a semi-analytical solution due to [68] is available. Many numerical and physical parameters will be varied, in order to assess the sensitivity of the model solution. Finally, we assess in section 6 the capability of the model to predict the free motion of a rectangular barge in waves.

3.2 Governing equations

In the following, we use notations and definitions introduced in earlier publications of the 2D-FNPF model ([22, 60, 23]; see also the definition section). Thus, the boundary of the fluid domain $\partial\Omega_f(t)$ is divided into four parts, on which different types of boundary conditions can be applied, $\partial\Omega_f(t) = \Gamma_f(t) \cup \Gamma_c(t) \cup \Gamma_b \cup \Gamma_l(t)$, with $\Gamma_f(t)$ denoting the free surface, $\Gamma_c(t)$ the rigid body surface, Γ_b the bottom surface and $\Gamma_l(t)$ the lateral boundaries. The bottom boundary Γ_b is assumed to be time independent.

3.2.1 Mathematical model and assumptions

We assume the fluid to be incompressible and inviscid and the flow to be irrotational. This ensures the existence of a scalar velocity potential ϕ, such that the flow velocity is $\mathbf{v} = \nabla\phi$. In all cases, the potential ϕ must satisfy mass conservation, expressed as a Laplace equation within the entire fluid domain $\Omega_f(t)$. Moreover, by considering the successive time-derivatives of this equation (denoted by a superscript), it is easily seen that $\phi^{(k)}$ $(k = 1, ...)$ is also harmonic.

Denoting by $G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\frac{1}{2\pi}\log(\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|)$ the fundamental solution of the Laplace equation in 2D (*i.e.* $\mathbb{R}^2$), and applying Green's divergence theorem (see *e.g.* [69, 9]), the Laplace equation is recast as a Fredholm equation of the second kind:

$$c(\mathbf{x}, t)\phi(\mathbf{x}, t) = \int_{\partial\Omega_f(t))} \left[\frac{\partial\phi}{\partial n}(\mathbf{y}, t)G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \phi(\mathbf{y}, t)\frac{\partial G}{\partial n}(\mathbf{x}, \mathbf{y})\right] dS_y \tag{3.1}$$

where the function $c(\mathbf{x}, t)$ denotes the fraction solid angle seen from the boundary point $\mathbf{x}$, *e.g.* for a regular portion of the boundary $\partial\Omega_f(t)$, we have $c(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2}$. This BIE is amenable to a numerical solution by a BEM.

Two boundary conditions apply at the (time varying) free surface. The first one expresses the continuity of the pressure at the free surface $p = p_a$ on $\Gamma_f(t)$, p_a being the atmospheric pressure, which is known as the dynamic free surface boundary condition. Additionally, a second boundary condition, the kinematic free surface boundary condition, must also be satisfied on $\Gamma_f(t)$, which states $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \nabla\phi$. The latter condition expresses that water particles belonging to $\Gamma_f(t = 0)$ remain on $\Gamma_f(t)$ for any given time $t > 0$.

On the solid boundary of the floating body, $\Gamma_c(t)$, we specify a free-slip condition, which expresses the normal derivative of the potential, equal to the normal fluid velocity as:

$$\phi_n(\mathbf{x}, t) \equiv \frac{\partial\phi}{\partial n}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{v}_b(\mathbf{x}, t)\cdot\mathbf{n}_b(\mathbf{x}, t) \tag{3.2}$$

where $\mathbf{n}_b(\mathbf{x}, t)$ denotes the unit normal vector pointing inward to the solid surface $\Gamma_c(t)$, at point $\mathbf{x}$, $\mathbf{v}_b(\mathbf{x}, t) = \dot{\mathbf{x}}$ is the body velocity, with the upper dot denoting the Lagrangian time derivative following the body motion, $\frac{d\cdot}{dt}$ and $\cdot$ denotes the usual Euclidian scalar product. This condition remains valid on the fixed bottom and lateral boundaries, $\Gamma_b \cup \Gamma_l$, using a zero velocity, *i.e.* $\frac{\partial\phi}{\partial n} = 0$.

The above set of equations can be recast as the following boundary value problem:

$$\begin{cases} \text{Find } \phi \text{ such that:} \\ c(\mathbf{x},t)\phi(\mathbf{x},t) = \displaystyle\int_{\partial\Omega_f(t)} \left[\phi_n(\mathbf{y},t)\ G(\mathbf{y},\mathbf{x}) - \phi(\mathbf{y},t)\ \frac{\partial G}{\partial n}(\mathbf{y},\mathbf{x})\right] dS_y \\ \phi = \phi_f(t) \text{ on } \Gamma_f(t) \\ \phi_n = 0 \text{ on } \Gamma_b \text{ and } \Gamma_l \\ \phi_n = \dot{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{n} \text{ on } \Gamma_c(t) \end{cases} \tag{3.3}$$

$\phi_f(t)$ is the value of the potential on the free surface $\Gamma_f(t)$, whose geometry and kinematics are assumed to be known at initial time $t = 0$. For later time, these are computed in the numerical model, by using the time-stepping scheme presented in Section (3.2.2).

As reported by many authors, the use of a finite difference scheme for evaluating the time derivative of the potential tends to be numerically unstable ([43, 44]). Following [23], instead, we apply the same BIE technique for computing ϕ_t, which satisfies the same field equations. This function has no direct physical interpretation unlike the acceleration potential $\phi_t + \frac{1}{2}\nabla\phi\cdot\nabla\phi$, whose gradient is equal to the fluid acceleration $\frac{d\mathbf{v}}{dt}$ as pointed out by [31]. However, it has the advantage to be also solution of Laplace equation, which makes it computationally efficient to solve. Besides, in the time stepping schemes used here (see Section (3.2.2)), we need to compute ϕ_t anyway, so this does not add to the computational effort. To complete the set of equations, however, we need to express the corresponding boundary conditions satisfied by ϕ_t on the various boundaries.

We first note that taking the material derivative of the free-slip condition (3.2) yields the following relationship on $\Gamma_c(t)$:

$$\ddot{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{n} + \dot{\mathbf{x}}\cdot\frac{d\mathbf{n}}{dt} = \left(\frac{\partial\nabla\phi}{\partial t} + \dot{\mathbf{x}}\cdot\nabla\nabla\phi\right)\cdot\mathbf{n} + \nabla\phi\cdot\frac{d\mathbf{n}}{dt} \tag{3.4}$$

which gives, after reordering the terms, the following Neumann boundary condition on the body boundary:

$$\frac{\partial\phi_t}{\partial n}(\mathbf{x},t) = \frac{d\mathbf{n}}{dt}\cdot(\dot{\mathbf{x}} - \nabla\phi) + \ddot{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{n} - \dot{\mathbf{x}}\cdot(\nabla\nabla\phi\cdot\mathbf{n}) \tag{3.5}$$

which is (2.9). The assumption of rigid body motion yields, $\dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{x}}_G + \dot{\boldsymbol{\theta}}_G \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}_G)$, where $\mathbf{x}_G$ is the location of the body center of mass and $\dot{\boldsymbol{\theta}}_G$ is the body rotation vector. Here the advection velocity is the body velocity, but alternative numerical schemes could use the fluid velocity instead.

By applying the unsteady Bernoulli theorem, it is possible to derive the following partial differential equation, which must also be satisfied by the potential in $\Omega_f(t)$:

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2}\nabla\phi\cdot\nabla\phi + gz = -\frac{1}{\rho}(p - p_a) \tag{3.6}$$

The Dirichlet boundary condition for ϕ_t on the free surface thus directly follows from the dynamic free surface boundary condition as:

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} = -\frac{1}{2}\nabla\phi\cdot\nabla\phi - gz \text{ on } \Gamma_f(t) \tag{3.7}$$

Following [60], in the 2D-HO-BEM model, both the potential and its normal derivative (as well as their time derivatives) are discretized by higher-order elements, here both cubic. This allows computing gradients, such as in the previous equations, by taking the derivative of the shape functions within each boundary element. Specifically, we use so-called Mixed Cubic Interpolation (MCI) elements, in which geometry is modeled by cubic splines and field variables are interpolated between each pair of nodes, using the mid-section of a four-node "sliding" isoparametric element.

Thus, assuming the potential is known from the solution of the first problem and its gradient is numerically computed as detailed above, the second BIE problem for ϕ_t can be put in the same form as Eq.(3.3):

$$\begin{cases} \text{Find } \phi_t \text{ such that:} \\ c(\mathbf{x},t)\phi_t(\mathbf{x},t) = \displaystyle\int_{\partial\Omega_f(t)} \left[\phi_{t,n}(\mathbf{y},t)\ G(\mathbf{y},\mathbf{x}) - \phi_t(\mathbf{y},t)\ \frac{\partial G}{\partial n}(\mathbf{y},\mathbf{x})\right] dS_y \\ \phi_t = -\dfrac{1}{2}\nabla\phi\cdot\nabla\phi - gz \text{ on } \Gamma_f(t) \\ \phi_{t,n} = 0 \text{ on } \Gamma_b \text{ and } \Gamma_l \\ \phi_{t,n} = \dfrac{d\mathbf{n}}{dt}\cdot(\dot{\mathbf{x}} - \nabla\phi) + \ddot{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{n} - \dot{\mathbf{x}}\cdot(\nabla\nabla\phi\cdot\mathbf{n}) \text{ on } \Gamma_c(t) \end{cases} \tag{3.8}$$

where $\phi_{t,n}$ stands for $\frac{\partial^2\phi}{\partial n \partial t}$.

3.2.2 Time updating

The main flow chart of the 2D-BEM model solving wave structure interactions is summarized in the algorithm 1.

Free surface time-stepping

For time updating the free surface and the potential, we propose to study the effect of two different schemes. The first one is the explicit second-order Taylor series, as used in the original 2D-FNPF code of [70]. This scheme has been widely validated for nonlinear waves propagation purposes [1] and is known to allow for larger time step than a first-order Euler scheme. In this explicit scheme, the new values of the potential ϕ and the position $\mathbf{x}$ at time t_{i+1} may be expressed as follows:

$$\begin{cases} \phi^{i+1} = \phi(\mathbf{x}^{i+1}, t_{i+1}) = \phi(\mathbf{x}^i, t_i) + \dfrac{d\phi}{dt}(\mathbf{x}^i, t_i)\Delta t + \dfrac{d^2\phi}{dt^2}(\mathbf{x}^i, t_i)\dfrac{\Delta t^2}{2} \\ \mathbf{x}^{i+1} = \mathbf{x}^i + \dfrac{d\mathbf{x}}{dt}(\mathbf{x}^i, t_i, \phi^i, \phi_n^i)\Delta t + \dfrac{d^2\mathbf{x}}{dt^2}(\mathbf{x}^i, t_i, \phi^i, \phi_n^i)\dfrac{\Delta t^2}{2} \end{cases} \tag{3.9}$$

As mentioned by [71], taking into acount the Hamiltonian structure of the equations may lead to a better performance of the algorithm for long time simulations. We thus propose to use a first-order scheme inspired by symplectic integrators:

$$\begin{cases} \phi^{i+1} = \phi(\mathbf{x}^{i+1}, t_{i+1}) = \phi(\mathbf{x}^i, t_i) + \dfrac{d\phi}{dt}(\mathbf{x}^i, t_i)\Delta t \\ {\phi_n}^{i+1} = \phi_n(\mathbf{x}^{i+1}, t_{i+1}) = \phi_n(\mathbf{x}^i, t_i) + \dfrac{d\phi_n}{dt}(\mathbf{x}^i, t_i)\Delta t \\ \mathbf{x}^{i+1} = \mathbf{x}^i + \dfrac{d\mathbf{x}}{dt}(\mathbf{x}^i, t_i, \phi^{i+1}, \phi_n^{i+1})\Delta t \end{cases} \tag{3.10}$$

By using free surface conditions and denoting by ϕ_s the tangential derivative of the potential, we can further expand the first two expressions of Eq.(3.10) into:

$$\begin{cases} \phi^{i+1} = \phi^i + \Delta t \ (\phi_t^i + \phi_s^i \phi_s^i + \phi_n^i \phi_n^i) \\ {\phi_n}^{i+1} = \phi_n^i + \Delta t \ \left(\phi_{tn}^i + \phi_{sn}^i \phi_n^i + \phi_n^i \ \left(\frac{1}{R^i} \phi_n^i - \phi_{ss}^i \right) \right) \end{cases} \tag{3.11}$$

where we made use of expressions given in [69] for expressing the second-order normal derivative ϕ_{nn} with respect to the curvature $\frac{1}{R}$ and the second-order tangential derivative ϕ_{ss}. As can be seen in Eq.(3.10), this integrator uses new information on the potential and its normal derivative ϕ^{i+1} and ϕ_n^{i+1} at time t_{i+1} to update the position to $\mathbf{x}^{i+1}$. However, the spatial derivatives are taken on the geometry at time t_i. Although we have no proof that the newly proposed scheme (3.10) possesses the properties of symplectic integrators (as defined by [72]), it will be referred to as symplectic-like scheme in the following. Similar schemes are known to have good energy-conserving properties on the long term, and have been widely used *e.g.* in celestial mechanics and mechanical engineering (*e.g.* [72]).

Body boundary time-stepping

We denote by $\mathbf{F}$ the force due to the total pressure acting on the body surface and by $\mathbf{X}$ the 6 components vector defined such that $X_k = x_{Gk}$, for $k = 1..3$ and $X_k = \theta_{Gk}$ for $k = 4..6$ in the global system of coordinates $\mathcal{R} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$. The pressure has the following definition:

$$p = -\rho \left(g x_3 + \frac{1}{2} \nabla\phi \cdot \nabla\phi + \phi_t \right) \tag{3.12}$$

Note that for 2D geometries, we only solve the degrees of freedom $k = 1$ corresponding to horizontal motion, $k = 3$ corresponding to vertical motion and $k = 5$ corresponding to a rotation around the vector $\mathbf{e}_2$.

For coupling the equation of motion to the fluid potential solver, we use a predictor-corrector scheme combined with a second-order Newmark scheme for the generalized velocity $\dot{\mathbf{X}}$ and the position $\mathbf{X}$ of the center of gravity which reads:

$$\begin{cases} \ddot{\mathbf{X}}_{i+1,k} = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{F}^*_{i+1,k} \\ \dot{\mathbf{X}}_{i+1,k} = \dot{\mathbf{X}}_i + \Delta t \ \left((1-\gamma) \ddot{\mathbf{X}}_i + \gamma \ddot{\mathbf{X}}_{i+1,k} \right) \\ \mathbf{X}_{i+1,k} = \mathbf{X}_i + \Delta t \dot{\mathbf{X}}_i + \Delta t^2 \ \left(\left(\frac{1}{2} - \beta \right) \ddot{\mathbf{X}}_i + \beta \ddot{\mathbf{X}}_{i+1,k} \right) \end{cases} \tag{3.13}$$

where $\mathbf{F}^*_{i+1,k}$ is the force correction in the sub-iteration number k and $\mathbf{M}$ is the mass matrix of the body. The predictor-corrector scheme is initialized with a cubic extrapolation of the force exerted on the body at next time step t_{i+1}. $\epsilon_{n,k}$ denotes the relative error of the component $n \in [\![1, 6]\!]$ (note that for $k \leq 3$, $\mathbf{e}_{k+3} = \mathbf{e}_k$) of the generalized force:

$$\epsilon_{n,k} = \frac{\| \mathbf{F}_{i,k} \cdot \mathbf{e}_n - \mathbf{F}^*_{i,k} \cdot \mathbf{e}_n \|}{\| \mathbf{F}^*_{i,k} \|} \tag{3.14}$$

In the algorithm (1), ω denotes a relaxation parameter lying in $[0, 1]$. The Newmark scheme has the advantage to better preserve the energy of conservative mechanical systems (see [73]) as

compared to the classical fourh-order Runge-Kutta method. Besides, no sub-step is required for this scheme.

Between two sub-iterations, the boundary conditions for the Laplace problems are modified to take into account the new position and velocity of the solid:

$$\begin{cases} \phi_n^{i+1,k} = (\dot{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{n})\left(\mathbf{X}^{i+1,k}, \dot{\mathbf{X}}^{i+1,k}\right) \\ \phi_{tn}^{i+1,k} = \left(\dfrac{d\mathbf{n}}{dt}\cdot(\dot{\mathbf{x}} - \nabla\phi) + \ddot{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{n} - \dot{\mathbf{x}}\cdot(\nabla\nabla\phi\cdot\mathbf{n})\right)\left(\mathbf{X}^{i+1,k}, \dot{\mathbf{X}}^{i+1,k}, \ddot{\mathbf{X}}^{i+1,k}\right) \end{cases} \tag{3.15}$$

First, expressing the boundary condition on ϕ_{tn} in a local curvilinear coordinates system leads to the following formulation, as derived by [74]:

$$\phi_{tn} = \ddot{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{n} + (\dot{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{s} - \phi_s)\,\dot{\theta}_G - \left(\frac{1}{R}\phi_s + \phi_{sn}\right)\dot{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{s} + \left(\phi_{ss} - \frac{1}{R}\phi_n\right)\dot{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{n} \tag{3.16}$$

Based on these considerations, two numerical strategies may be adopted.

Implicit method The first one follows the method used in [23] which is based on original works of [20] and [31]. The acceleration $\ddot{\mathbf{X}}$ is replaced in the Eq. (3.5) by the hydrodynamic force which makes it possible to express ϕ_t as a solution of another boundary integral problem whose support is restricted to the wetted body surface. This relationship takes the form:

$$\phi_{tn}(\mathbf{x}) + \int_{\partial\Omega_b\cap\Omega_f} K(\mathbf{x},\mathbf{y})\phi_t(\mathbf{y})dS_y = \gamma(\mathbf{x}), \quad \text{on } \partial\Omega_b(t) \tag{3.17}$$

in which K is a symmetrical kernel depending only on the rigid body geometry. For the expression of the function γ and K, we refer to the work of [23]. This extra integral equation may be incorporated in the influence matrix of the Laplace equation for more computational efficiency.

Direct method From the expression derived by [74], we also can use directly the acceleration given by the equation (3.13) for computing the new body boundary condition ϕ_{tn}. In this case, no modification of the influence matrix is needed. A similar numerical scheme has been recently used in [44].

Treatment of intersections between body and free surface

In the BEM implementation, a double-node technique ([70, 21]) is used to represent all intersection points between various parts of the boundary, including the solid body and the free surface. Such nodes have the same coordinates but are associated with two sets of unknowns, and in particular two normal gradients of the potential and its time derivative, with different normal directions. Let us denote by $x_f(t) = ({\mathbf{x}_i}^f(t))_{i=1..N_d}$ the coordinates of N_d nodes belonging to the intersection of the free surface and the body surface at time t, $\Gamma_f(t)\cap\Gamma_c(t)$. In the BEM model, these nodes are *a priori* associated with the outward normal vector on the free surface, denoted by ${\mathbf{n}_i}^f({\mathbf{x}_i}^f(t),t)$. For each of these nodes, according to the double node technique, we define a second set of nodes, ${\mathbf{x}_i}^b(t)$, having the same geometrical position but being associated with an inward normal vector on the body surface, ${\mathbf{n}_i}^b({\mathbf{x}_i}^b(t),t)$. The nodes $({\mathbf{x}_i}^f(t))_{i=1..N_d}$ are moving according to Eq. (3.9), while nodes $({\mathbf{x}_i}^b(t))_{i=1..N_d}$ are moving with the rigid body motion.

Due to the different trajectories of the free surface nodes and the body nodes at the intersection, it is necessary to redefine, at each time level, the double node sets $x_f(t)$ and $x_b(t)$. In

our developments, two distinct schemes have been tested for the determination of the new intersection points. In a first scheme, we project the new intersection $x_f(t+\Delta t)$ in the orthogonal direction on the new body surface $\Gamma_c(t+\Delta t)$. This procedure is represented on Fig. (3.1).

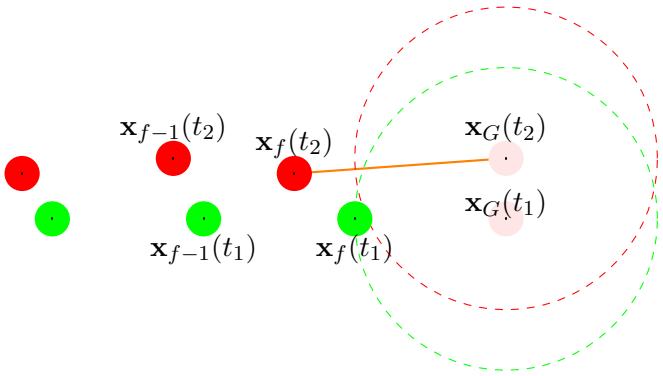


Figure 3.1: Treatment of the intersection sketch: projection of $\mathbf{x}_f(t_2)$ on the body surface. Green nodes represent free surface particles at time t_1. Red nodes represent free surface particles at time $t_2 = t_1 + \Delta t$. Green dashed circle is the solid boundary at time t_1. Red dashed circle is the solid boundary at time t_2. The new double node at time t_2 is defined at the intersection between the orange line and the red dashed circle.

The drawback, however, is that the value of $\phi(x_f(t+\Delta t))$ cannot be easily inferred. In the second scheme, we linearly extrapolate the position and the potential ϕ in the adjacent segment of the body on the surface $\Gamma_f(t+\Delta t)$. More precisely, if we denote by $\mathbf{x}_i^{f-1}$ (respectively $\mathbf{x}_i^{b-1}$) the first neighbour node of $\mathbf{x}_i^f$ on the free surface (respectively $\mathbf{x}_i^b$ on the body surface), we take the intersection between the straight line $(\mathbf{x}_i^{f-1}, \mathbf{x}_i^f)$ and the parametrization of the solid geometry. This procedure is summarized on Fig. (3.2).

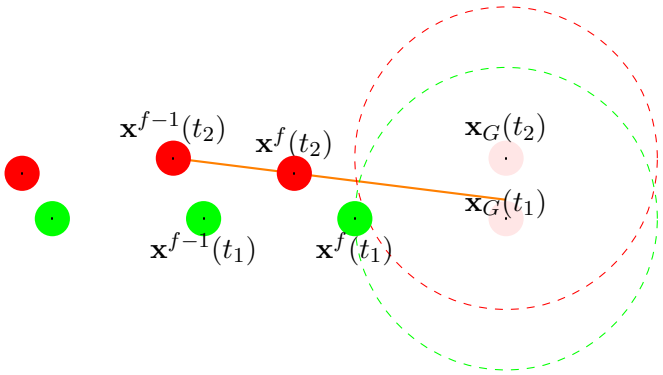


Figure 3.2: Treatment of the intersection sketch: extrapolation of the first segment of the free surface. Green nodes represent free surface particles at time t_1. Red nodes represent free surface particles at time $t_2 = t_1 + \Delta t$. Green dashed circle is the solid boundary at time t_1. Red dashed circle is the solid boundary at time t_2. The new double node at time t_2 is defined at the intersection between the orange line and the red dashed circle.

This intersection procedure has been only tested for elementary geometries such that the intersection between the discretized free surface and body surface can be computed analytically.

For the case of a wall-sided cylinder (*e.g.* the rectangular barge), the new intersection point is thus given by the intersection of the straight line $(\mathbf{x}_i^{f-1}, \mathbf{x}_i^{f-1})$ and the straight line $(\mathbf{x}_i^{b-1}, \mathbf{x}_i^{b})$. For the case of the circular cylinder centered in $\mathbf{x}_G(t)$ and of radius R, we compute analytically the intersection of $(\mathbf{x}_i^{f-1}, \mathbf{x}_i^{f})$ with the circle $\mathcal{C}(\mathbf{x}_G(t), R)$. Once the intersection has been computed, we extrapolate linearly the value of ϕ from the values $(\phi(\mathbf{x}_i^{f-1}), \phi(\mathbf{x}_i^{f}))$. The drawback of the latter scheme is that it is quite difficult to generalize to a 3D geometry, while the first scheme has already been used in some 3D numerical wave tanks ([47, 65]). In the present applications, the second scheme was found to be more stable for solid bodies with curved boundaries, such as the semi-circular horizontal cylinder considered here, yielding a more regular time-history for each component of the force. For this reason, results presented in the following are based on the extrapolation technique at the free surface. Note that also due to numerical errors, the velocity at the double nodes can be discontinuous. To avoid this discontinuity, Tanizawa's velocity compatibility condition ([31]) is applied to both the velocity and the acceleration vectors. This condition expresses the uniqueness of the velocity vector of the fluid particles $x_f(t)$, when expressed in the local basis attached to the solid geometry or in the local basis of the free surface geometry. This is similar to the condition devised by [70] in the 2D-FNPF model.

Algorithm 1 Main algorithm of the 2D-BEM model for wave-structure interactions.

Require: $\Omega_f(t=0)$,$\phi(\mathbf{x},0)$,$\phi_n(\mathbf{x},0)$: initialization of domain geometry and boundary conditions for the field variables

for $i = 1$ to i_{max} **do**
  Solve the BEM (ϕ_t, ϕ_{tn})
  Compute the body force: $\mathbf{F}_i$
  if $i > 1$ **then**
    Compute relative errors on force and moment: $\epsilon_{n,0}$
    while $\exists n; \epsilon_{n,k} > 10^{-6}$ **do**
      Correction of the force $\mathbf{F^*}_{i,k+1} = \mathbf{F}^*_{i,k} + \omega(\mathbf{F}_{i,k} - \mathbf{F}^*_{i,k})$
      Update of the body dynamics with a (γ, β) Newmark scheme
      Solve BEM for ϕ and ϕ_t
      Compute the hydrodynamic force and moment: $\mathbf{F}_{i,k+1}$
    end while
  end if
  MEL technique for the free surface $\rightarrow \Gamma_f(t_{i+1})$ and body displacement $\rightarrow \Gamma_c(t_{i+1})$
  Compute the intersection of $\Gamma_f(t_{i+1})$ and $\Gamma_c(t_{i+1})$
  Prediction of the force and moment at next time step: $\mathbf{F}^*_{i+1,0}$, used as the initialization in the Newmark scheme.
  Adaptation of the time-step Δt to ensure a CFL condition (see [70])
end for

3.3 Forced heaving motion of a circular horizontal cylinder

In this section, we solve the case of the forced heaving motion of a horizontal circular cylinder (in a finite computational domain represented in Fig. (3.3)), to check the accuracy and convergence of the numerical solution, including the hydrodynamic force, with respect to a reference solution. Since we eventually aim at predicting the motion of freely floating structures, the accuracy of the force calculation is of prime importance. For small to moderate amplitudes of motion, a

reference solution can be obtained from linear or weakly nonlinear theory, although it is difficult in a finite length numerical domain to simulate an infinite medium, such as assumed in the reference solutions.

More specifically, we consider the case of a semi-circular horizontal cylinder of radius R, heaving with a forced harmonic motion. The amplitude of the cylinder motion is first set to $0.01R$, which generates a very small amplitude wave that should compare well with the prediction from linear theory. We then compare the vertical force obtained from a direct integration of the computed pressure on the instantaneous body wetted surface $\Gamma_c(t)$, to the first-order force predicted by linear theory. In our nonlinear model, pressure is obtained from the unsteady Bernoulli equation (3.6).

For 2D problems, the hydrodynamic pressure force and moment applied to the floating body at time t_i are given by:

$$\begin{aligned} F_k(t_i) &= \int_{\Gamma_c(t_i)} -\rho \left(g y_3 + \phi_t(\mathbf{y}) + \frac{1}{2} v^2(\mathbf{y}) \right) n_k(\mathbf{y}) dS_y, \quad k = 1..3 \\ F_k(t_i) &= \int_{\Gamma_c(t_i)} -\rho \left(g y_3 + \phi_t(\mathbf{y}) + \frac{1}{2} v^2(\mathbf{y}) \right) \mathbf{e}_k \cdot \{(\mathbf{y} - \mathbf{x}_G(t_i)) \times \mathbf{n}(\mathbf{y})\} dS_y, \quad k = 4..6 \end{aligned} \tag{3.18}$$

where $v^2 = \nabla\phi \cdot \nabla\phi$.

The last three components of the vector $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^6$ are the three components of the moment in the basis $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$. In a second stage, for larger amplitudes of motion up to $0.2R$, we assess the model's ability to compute higher-order components of the force exerted on the cylinder.

In all cases, the conservation of the volume is computed as a function of the discretization. Finally, the L^2 norm error of various variables computed in the model is estimated by also computing the solution at internal nodes.

3.3.1 Computational domain and simulation methodology

We study the forced harmonic heaving motion of a rigid floating body, from a state of rest, which can be represented by the motion of its center of mass given by, $x_{G3}(t) = x_{G3}(0) + A\sin(\omega t)$, with A selected between $0.01R$ and $0.2R$. As noted before for wavemakers started from a state of rest ([60]), at $t = 0$ there is a discrepancy between the initial (finite) velocity of the heaving body and that of the free surface nodes. If large, this incompatibility can trigger high wave number instabilities. To limit this problem, the body is gradually set in motion according to the following equation:

$$x_{G3}(t) = x_{G3}(0) + D(t)A\sin(\omega t), \quad t \leq t_{ramp} \tag{3.19}$$

where $D(t)$ is a ramp function defined by:

$$D(t) = \frac{\tanh\{C(\frac{t}{t_{ramp}} - 1)\} + \tanh C}{\cosh\{C(\frac{t}{t_{ramp}} - 1)\}\,(1 + \tanh C)} \tag{3.20}$$

where the constant C is set to $C = 2.3025$ and the ramp-up time $t_{ramp} = 5T$, with $T = 2\pi/\omega$ the period of the heaving motion. A typical geometry of the computational domain is shown in Fig. (3.3). The rigid floating body is located in the middle of a 2D wavetank of length L_x and depth d. At the tank extremities, in the absence of an exact radiation condition, we use a full reflective wall by setting the Neumann condition $\phi_n = 0$ (left and right boundaries on Fig. (3.3)). A uniform space step between nodes Δx is used over the whole boundary of the

computational domain. As in earlier work ([60, 23]), time step Δt is automatically selected in the model, based on an optimal mesh Courant number, $\mathcal{C}_0 = c\,\Delta t/\Delta x = 0.45$, where c is the dominant wave celerity.

To eliminate reflection from sidewalls, which would eventually affect the force computation, following [37], we specify absorbing beaches over a length of 2λ from each wall, where λ is the characteristic wavelength of the waves radiating from the heaving body. In the absorbing beaches (AB), an "absorbing" free surface pressure is added to the dynamic free surface boundary condition (3.6), leading to:

$$\frac{d\phi}{dt} = -gz + \frac{1}{2}\nabla\phi\cdot\nabla\phi - \nu(\mathbf{x})\phi \tag{3.21}$$

Similarly, a dissipative term is also introduced in the projection of the kinematic free surface boundary condition on the vertical axis, and is defined like so:

$$\frac{dz}{dt} = \phi_z - \nu(\mathbf{x})z \tag{3.22}$$

where the damping coefficient has the following definition:

$$\nu(\mathbf{x}) = \begin{cases} \omega\left(\dfrac{x_1 - x_{AB}}{l_{AB}}\right)^2 & x_1 \geq x_{AB} \\ 0 & x_1 < x_{AB} \end{cases} \tag{3.23}$$

where x_{AB} is the coordinate on the horizontal axis at the entrance of the beach, l_{AB} denotes the length of the beach and ω is the frequency of the wave to be absorbed. The performance of the absorption has been measured for $N_f = 30$ nodes per wavelength, by computing the reflection coefficient K defined as:

$$K = \frac{\max H_{mean}(t) - \min H_{mean}(t)}{\max H_{mean}(t) + \min H_{mean}(t)} \tag{3.24}$$

where H_{mean} denotes the mean wave height in an area between the body and the entrance of the absorbing beach. The efficiency of this absorbing system is evaluated with the small amplitude $A/R = 0.01$, which gives rise to a regular wave pattern. In this case, the evolution of H_{mean} is computed for three different lengths of the AB beach and is represented on Fig. (3.4). The efficiency of the AB beach appears not to be sensitive to its length, as each configuration leads to a reflection coefficient K close to 1.2%. Furthermore, it is observed that the present system provides a constant damping for long-term simulations, when monochromatic waves are to be simulated. Based on these tests, the numerical wave tank is equipped on both sides by a beach of length $l_{AB} = 2\lambda$ for forced motions computations.

We study the convergence of the numerical solution towards the reference solution, for a given angular frequency of motion ω, such that $\omega^2 R/g = 1.0$. In deep water, this non-dimensional frequency is equal to kR, *i.e.* it is proportional to the ratio between the width of the body at the free surface and the deep water wavelength $\lambda_0 = 2\pi/k$ (with k the wavenumber), of the radiated waves caused by the body heaving motion. The computational domain length is selected such that $L_x \gg \lambda_0$, typically $L_x = 10\lambda_0$. In general, the linear dispersion relationship reads, $\omega^2 = \frac{2\pi}{\lambda} g \tanh \frac{2\pi}{\lambda} d$. In the applications, the NWT is set to $d = \lambda_0$, which more than satisfies the usual deep water wave condition. To compare our results with the results of [75], which are presented in non-dimensional form, the acceleration of gravity is set to $g = 1$ m/s^2, the fluid density to $\rho = 1$ kg/m^3, and the cylinder radius to $R = 1$ m; in this case, $\lambda_0 = 2\pi \approx 6.28$ m. Results are plotted with respect to the non-dimensional time $t^+ = t/T$ with $T = \frac{2\pi}{\omega}$. In order to

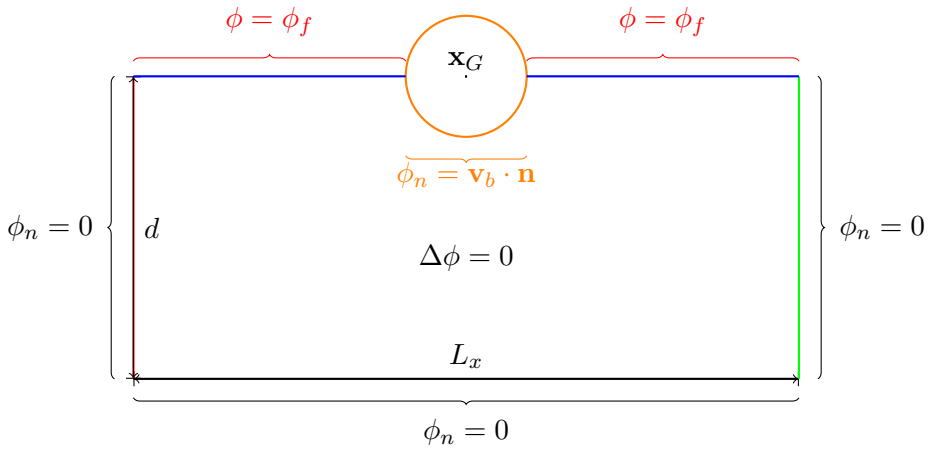


Figure 3.3: Sketch of the 2D model computational domain at initial time, for the forced heaving motion of a horizontal semi-circular cylinder of radius R in water depth d. Numbers indicate the codes associated with each type of boundary, with boundary conditions marked on the figure.

$\lambda/\Delta x = N_f$	10	20	30	40	50	60	80
$\Delta x = 2\pi/N_f$	0.63	0.32	0.21	0.16	0.12	0.10	0.08
N_c	10	10	15	20	25	30	40
N_{el}	224	444	669	894	1119	1344	1794
N_{dof}	231	451	676	901	1126	1351	1801

Table 3.1: Forced heaving motion of a circular cylinder: discretization used in the model for the convergence study. For the selected parameters, $\lambda = \lambda_0 = 2\pi$, N_{dof} denotes the total number of BEM nodes (or degrees of freedom) and N_{el} the total number of boundary elements. N_f is the number of BEM nodes per dominant wavelength and N_c is the number of BEM nodes discretizing the half-cylinder boundary.

assess the long-term behavior of the numerical scheme and verify results for volume conservation, simulations are carried out up to $t_{max} = 15T$ ($t^+_{max} = 15$).

Because the absorbing beaches cover a length 2λ at each extremity of the NWT, wave-structure interactions can be studied over the central part of the domain of length 6λ. In order to assess the effects of the absorbing beaches, simulations will be repeated in some cases without the absorbing pressure. It will be seen that wave reflection has a very significant impact on the conservation of global quantities such as the total fluid energy, denoted $E_f(t)$, and the total fluid volume, denoted $V(\Omega_f(t))$.

We solve the forced heaving problem for 7 different meshes, whose characteristics are detailed in Table (3.1). Each mesh was selected such that, when the body and the free surface are at rest, the space step is uniform on the boundary. However, given the temporal character of our simulations, the grid size is kept constant only within each part of the boundary. As indicated before, after each iteration, regridding is applied to the free surface boundary in order to prevent BEM nodes from getting too close from each other on the free surface, which is known to trigger high wave-number instabilities (see [63, 70]). To this end, the length of each part of the boundary, represented by piecewise cubic splines (respectively linear functions) for the free surface nodes

(respectively for the body nodes) is first computed and the nodes are redistributed uniformly.

3.3.2 Numerical error on volume conservation

For each simulation, with parameters listed in Table (3.1), the conservation of the computational domain volume is assessed as a function of the discretization (parameter N_f) with and without absorbing beaches. We define the relative error on the volume as:

$$\epsilon_V = \left| \frac{V(t) - V_0}{V_0} \right| \tag{3.25}$$

with V_0 the initial volume of fluid. Without absorption in the beaches, the total fluid energy in the NWT will keep increasing, owing to the external forcing of the rigid body motion, which acts as a wavemaker. This will cause wave steepness to keep increasing, as reflected waves combine with incident waves, eventually leading to strong nonlinearity and overturning, which will gradually affect the numerical accuracy. Note that the entrance of the beach is located at $x_{AB} = 2\lambda_0 = 4\pi$.

Fig. (3.5) shows the time evolution of the relative error in total volume conservation during 15 periods of heaving motion, for 3 different discretizations, two amplitudes of motion, for weakly nonlinear $A/R = 0.01$ and strongly nonlinear $A/R = 0.2$ waves, and with or without absorbing beaches. For small amplitude motion, the first-order symplectic-like scheme achieves an error of nearly $\mathcal{O}(10^{-7})$ which is 2 order of magnitude better than the explicit second-order Taylor series. Moreover, with the symplectic-like scheme, this error is not increasing after 15 periods. For the second-order explicit Taylor series, the use of an absorbing beach seems to reduce the relative error on the volume, which does not occur when using the symplectic-like scheme. This suggests, that the latter scheme has better properties for conserving the volume. For each time-stepping, the simulation of the larger amplitude motion $A/R = 0.2$ gives a conservation of the volume 2 orders of magnitude worse than with the small amplitude $A/R = 0.01$.

This error analysis indicates that, for large wave steepness or cylinder amplitude of motion, the second-order Taylor time-stepping with MCI BEM elements on the free surface, does not conserve volume well enough and may thus become inaccurate, as time increases. Although errors on volume increase with time, in all cases, except at the very beginning of simulations, this increase is monotonous, likely due to the use of the regridding method on the free surface. For large amplitude of motion, as energy keeps being fed into the wavetank and wave steepness increases, the initial discretization based on a flat free surface may become too coarse as compared to the initial stages of computations, which may result in increased numerical errors.

3.3.3 Numerical error on hydrodynamic force calculation

We now analyze the relative numerical error on hydrodynamic force calculation with respect to a known reference solution (index ref), as a function of the domain discretization and other parameters of the problem. For each discretization N_f listed in Table (3.1), we define the relative error on the force modulus f as:

$$\epsilon_{N_f}(t_n) = \sqrt{\frac{\{f_{N_f}(t_n) - f_{ref}(t_n)\}^2}{\max_n \{f_{ref}(t_n)^2\}}} \tag{3.26}$$

where t_n is the discrete time corresponding to the n-th time step.

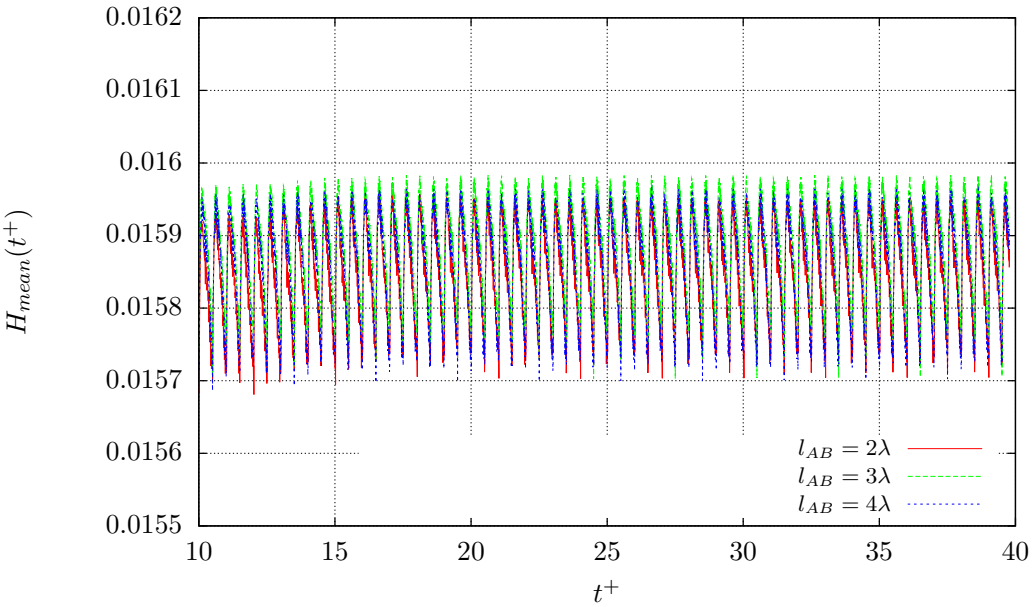


Figure 3.4: Forced oscillation of a circular cylinder: evolution of the average wave height $H_{mean}(t)$ for $A = 0.01R$ according to the size of the beach l_{AB}.

An indicator of the global error on the hydrodynamic force computation, for a simulation lasting from time t_i to time t_f, is finally defined by taking the average of the $\epsilon_{N_f}(t_k)$ for $t_k = t_i$ to t_f as:

$$\epsilon_{N_f}(t_i, t_f) = \frac{1}{(n_f - n_i)} \sum_{n=n_i}^{n_f} \epsilon_{N_f}(t_n) \tag{3.27}$$

Small amplitude motion

Using absorbing beaches and a fine enough grid, we find that the hydrodynamic force becomes quasi-periodic from $t^+ = 5$ to 10 (as can be seen in the test case of a rectangular barge in sway motion on Fig. (3.10)). The stable force signal between $t^+ = 5$ and 10 is Fourier transformed into the frequency domain, from which one can compute the standard hydrodynamic coefficients of the body heaving motion, namely the added mass a_{33} and damping b_{33} coefficients. Let us recall [29] that, to the limit of linear wave theory, these coefficients satisfy the relationship:

$$F_3(t) = -a_{33}(\omega)\ddot{x}_{G3}(t) - b_{33}(\omega)\dot{x}_{G3}(t) \tag{3.28}$$

which gives the amplitude of the force in phase with the body motion as, $F_3^{in} = a_{33}(\omega)A\omega^2$ and that of the force out of phase with this motion as, $F_3^{out} = -b_{33}(\omega)A\omega$. During the time interval under consideration, a_{33} and b_{33} are computed and made non-dimensional by the following transformation: $a_{33}^* \leftarrow F_3^{in}/(\rho\frac{\pi}{2}\omega^2R^2)$ and $b_{33}^* \leftarrow F_3^{out}/(\rho\frac{\pi}{2}\omega^2R^2)$. The hydrodynamic coefficients and the Fourier analysis in the following are computed with the help of the software Scilab. Table (3.2) shows the values of these coefficients computed in our model for various discretization N_f, compared to other first-order values reported in the literature, by [75], [76], and [77]. A fairly good agreement is observed between all these first-order quantities and our results for the two finest discretizations ($N_f = 60$ and 80).

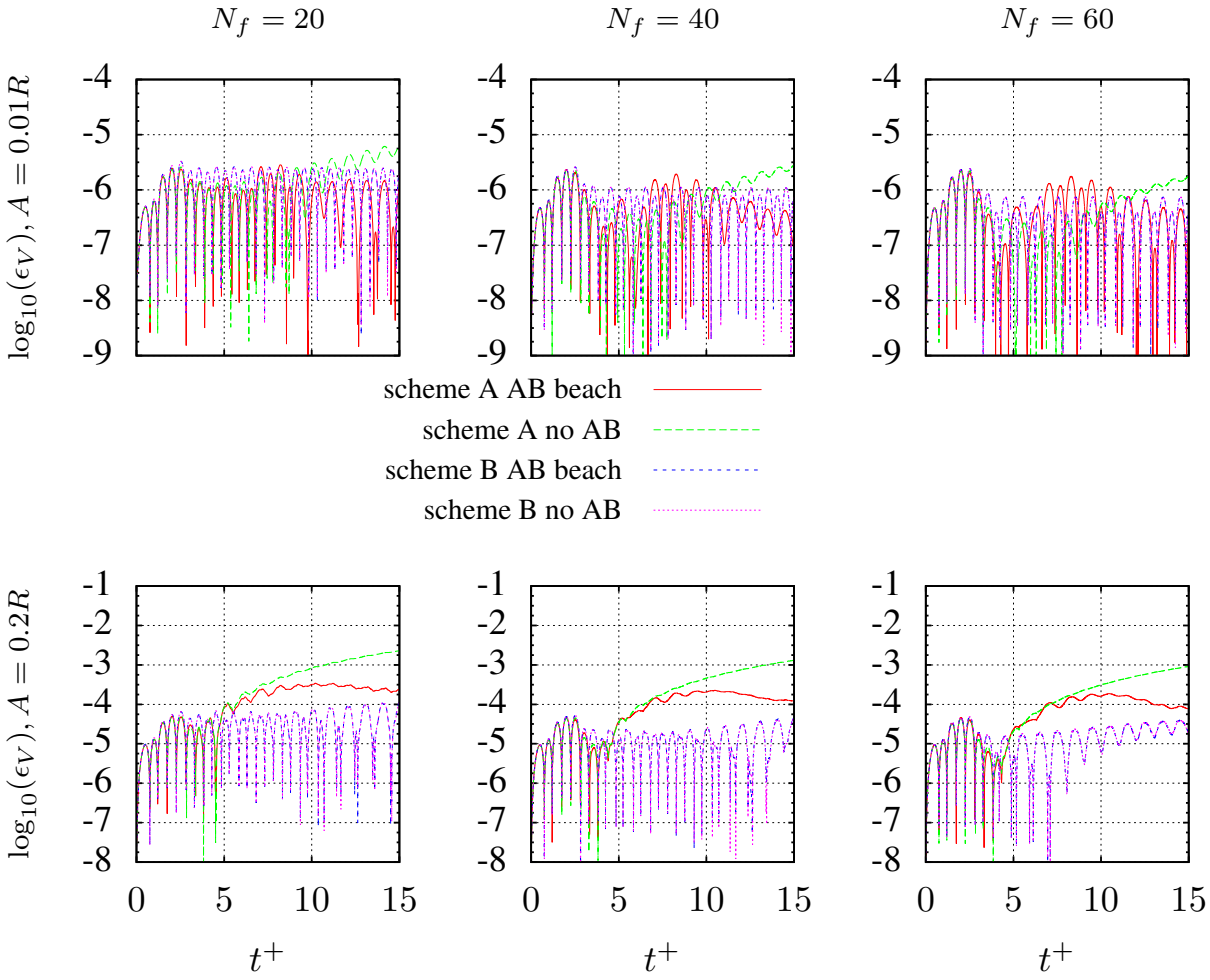


Figure 3.5: Forced oscillation of a circular cylinder: time evolution of the relative error of volume ϵ_V in $\log_{10}$ scale as a function of the discretization N_f (varying from 20 to 60 from left to right) as a function of: (i) the amplitude of motion A (from the top $A/R = 0.01$ to the bottom $A/R = 0.2$); (ii) with or without absorbing beaches; and (iii) the time-stepping (scheme A: second-order explicit time-stepping; scheme B: first-order symplectic-like time-stepping).

Fig. (3.6) illustrates the global convergence of the force computation with the discretization, by computing the global error $\epsilon_{N_f}(t_i, t_f)$, defined with Eqs. (3.26) and (3.27), between $t_i^+ = 0.16$ and $t_f^+ = 19.7$ (with $T = 2\pi$ based on selected parameters), as a function of $N_f = 20$ to 60, using as a reference value the force f_{N_f} computed for $N_f = 80$. We see that, for a small amplitude motion, $A/R = 0.01$, the error decreases as the discretization is refined, confirming the convergence of our numerical scheme.

The rate of convergence, in the least mean square sense, may be evaluated with an absorbing beach, as 1.891 for $A/R = 0.01$ and 1.843 for $A/R = 0.2$. Without absorbing beach, it takes the values 1.896 for $A/R = 0.01$ and 1.563 for $A/R = 0.2$. These values are quite satisfactory given the fact that we used linear elements for meshing the body geometry and the force depends on the solution on the body nodes only. These computations highlight also the fact that the use of

$N_f = 20$	$(0.57353, 0.44863)$
$N_f = 40$	$(0.59644, 0.42155)$
$N_f = 60$	$(0.60063, 0.41302)$
$N_f = 80$	$(0.60172, 0.40929)$
[77]	$(0.58, 0.41)$
[76]	$(0.62, 0.40)$
[75]	$(0.582, 0.410)$

Table 3.2: Forced heaving motion of a semi-circular cylinder of radius R in deep water: non-dimensional hydrodynamic coefficients (a^*_{33}, b^*_{33}) computed with our model using $N_f = 20$ to 80 nodes per dominant wavelength ($A/R = 0.01$, $\omega^2 R/g = 1.0$), compared to reference values from the literature.

an absorbing beach may improve the accuracy of the force calculation at high amplitudes.

Large amplitude motion

We now similarly study the accuracy and convergence of the computation of the hydrodynamic force for a large amplitude of motion of the heaving cylinder. This problem was experimentally studied by [4], who tested a few 2D horizontal cylinders with different cross-sections, including elliptical cylinders and bow stern sections, and compared experimental results to the weakly nonlinear solution of [6]. Based on these results, in a following section, we will assess the accuracy of the present FNPF model in computing actual measured forces. Consistent with earlier results presented here, we restrict ourselves to a semi-circular floating cylinder oscillating with a large amplitude motion $A/R = 0.2$.

As before, we assess the model convergence in this more strongly nonlinear case by comparing values computed for a coarser discretization to those for the finest discretization with $N_f = 80$. Besides the convergence of the total hydrodynamic force for a sufficiently fine mesh, it is also expected that each coefficient of the Fourier series of the signal should converge to the approximate value predicted by weakly nonlinear theories. Denoting by c_n the Fourier coefficient of order n and using the notations of [4], the Fourier decomposition of the vertical component of the total hydrodynamic force $F_3(t)$ reads:

$$F_3(t) = c_0 - 2 \sum_{k \geq 1} |c_k| \sin(k\ \omega\ t + \delta_k) \tag{3.29}$$

where δ_k is the phase associated with the k-th component.

The rate of convergence of the force for large amplitude motion is seen in Fig. (3.6) to be 1.843 with an absorbing beach and 1.563 without beach. As already discussed above for small amplitude motion, it is seen in Fig. (3.6) that, without absorbing beaches, the errors are much larger; this results from the large energy trapping in the wavetank that yields increasingly nonlinear and under-resolved waves. Regarding the Fourier coefficients of the force $F_3(t)$, Table (3.3) lists c_n values computed up to third-order for various discretizations, using Eq. (3.29). As before, convergence is nearly achieved for $N_f = 60$, except for the third-order force coefficient, which is associated with strongly nonlinear effects.

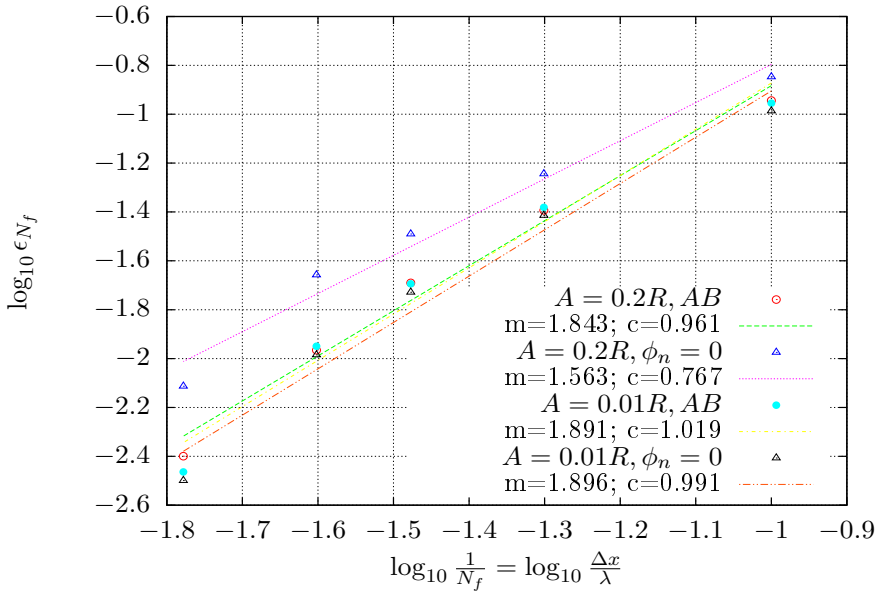


Figure 3.6: Forced heaving motion of a semi-circular cylinder of radius R in deep water: global error on the force computation as a function of the discretization $N_f = 20$ to 60. Results are computed over the time interval $t_i^+ = 0.16$ to $t_f^+ = 19.7$ and the force reference value f_{N_f} is that computed in the finest discretization with $N_f = 80$. The coefficients m and c are determined by computing a least mean square trend line of equation $y = mx + c$ for each set of points.

	$N_f = 20$	$N_f = 40$	$N_f = 60$	$N_f = 80$
c_0	0.05437	0.06375	0.06534	0.06629
c_1	0.23299	0.23225	0.23159	0.23075
c_2	0.01979	0.02234	0.02248	0.02232
c_3	0.00031	0.00055	0.00034	0.00044

Table 3.3: Forced heaving motion of a semi-circular cylinder of radius R in deep water: Fourier coefficients of the hydrodynamic force. Results are computed over the time interval $t^+ = 11.14$ to 16.08 as a function of the discretization N_f, for $A/R = 0.2$ and $\omega^2\ R/g = 1$.

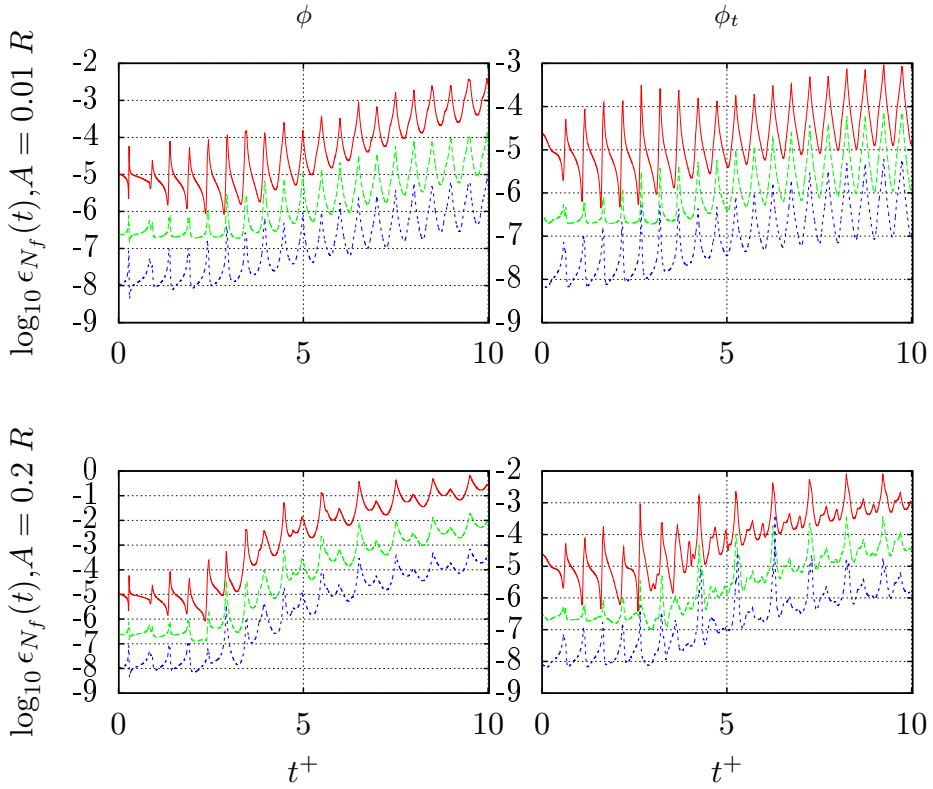


Figure 3.7: Forced heaving motion of a semi-circular cylinder of radius R in deep water: instantaneous L^2 error norm over time $t^+ \in [0, 10]$, in the computation of internal fields ϕ, ϕ_t and p, as a function of the discretization $N_f = 20$ (red), 40 (green) and 60 (blue), with amplitude A/R, as compared to the reference values computed with the finest discretization, $N_f = 80$.

3.3.4 Convergence of results for internal points

In this section, for the same application to the forced heaving motion of a semi-circular cylinder of radius R in deep water, we assess the instantaneous and global L^2 convergence of various model results computed at internal points (*i.e.* within the fluid domain), when refining the discretization (N_f). We will solve both small and large amplitude motion cases, with $A/R = 0.01$ and 0.2, respectively, using the same fixed time step $\Delta t = 0.005$ s.

The internal points under consideration are located in such a way that they remain inside the domain during the whole simulation, in order to avoid an ambiguous comparison for elements located at the free surface. In the model, the solution at internal points satisfies the same BIE as for boundary points, except that $c(\mathbf{x}, t) = 1$, and the boundary fields ϕ and ϕ_t (and their normal derivative) are assumed to be known at time t_i. Hence the computation of the solution at internal points is explicit. Thus, assuming a pre-defined grid of internal points of coordinates $\mathbf{x}_{gages}$ within the domain, the velocity potential at internal points is given by ($i = 1, ..., N_{gages}$):

$$\phi(\mathbf{x}_{gages}, t_i) = \int_{\partial\Omega_f(t_i)} \left[\phi_n(\mathbf{y}_k, t_i) G(\mathbf{x}_{gages}, \mathbf{y}_k) - \phi(\mathbf{y}_k, t_i) \frac{\partial G}{\partial n}(\mathbf{x}_{gages}, \mathbf{y}_k) \right] dS_y \tag{3.30}$$

on the discretized geometry $\Omega_f(t_i)$ at time t_i. Other variables, such as the internal velocity can also be explicitly obtained by applying the gradient operator to the Green's function within the integral kernel, from which the pressure can be computed using Bernoulli's equation.

Here, in order to simplify and reduce the post-processing steps, a simple internal grid is

considered. Assuming a first geometry of the wavetank with, $L_x = 62.3$ m and $d = 6.3$ m, "numerical" gages are specified at a series of discrete x-locations, $x_i = 1$ to $x_f = 60$ m, with an uniform step $\Delta x_{gages} = 3$ m and, in the vertical direction, from $y_i = -2$ to $y_f = -6$ m, by steps $\Delta y_{gages} = 1$ m. For this particular case, $N_{gages} = 100$. As indicated, besides ϕ and ϕ_t, which reflect the accuracy of the BEM solution, we will also assess the convergence of the variable p, which is numerically derived from the BEM solution, by way of the time derivative of the BIE (3.30) and its spatial gradient, which provide ϕ_t and the velocity, respectively. In this manner, the accuracy of the time-stepping is also verified.

We compute ϕ, ϕ_t and p at internal points, for three boundary discretizations with $N_f = 20$, 40 and 60, and calculate the instantaneous L^2 error norm for each of these variables, compared to the results obtained with the finest discretization ($N_f = 80$). Results for both amplitudes of motion are displayed in Fig. (3.7). When these errors are time-averaged for N_{iter} time steps, as (*e.g.*, for the potential ϕ):

$$\epsilon_{N_f} = \frac{1}{N_{iter}} \sum_{i=1}^{N_{iter}} \sqrt{\frac{1}{N_{gages}} \sum_{k=1}^{N_{gages}} \frac{\left(\phi_{N_f}(x_k,t_i) - \phi_{ref}(x_k,t_i)\right)^2}{\max_{x_k} {\phi_{ref}}^2}} \tag{3.31}$$

it is possible to evaluate a global L^2 error norm associated with a given simulation. Note, the square root in Eq. (3.31) represents $\epsilon_{N_f}(t)$. These global convergence indicators are represented in Fig. (3.8), from which it is apparent that the order of the spatial convergence, for a fixed time step, is not constant over the set of tested discretizations (*i.e.*, not a constant power of N_f). Nevertheless, if we compute the root mean square line for the set $(\log \frac{1}{N_f}, \log \epsilon_{N_f})$, it is seen that the order of convergence of these simulations is close to 1.83 for the small amplitude $A/R = 0.01$ and close to 1.88 for the larger amplitude $A/R = 0.2$. These computations were done using the second-order Taylor explicit time-stepping.

3.3.5 Comparison to the experiments of Yamashita

We now repeat the same numerical simulation for a set of discrete frequencies in order to get a comparison with the experiment conducted by [4]. Each simulation is carried out using the methodology presented before for the convergence study. The signal is analyzed on a temporal window included in the time interval $t^+ \in [5, 10]$. The computed coefficients are then made non-dimensional as done by Yamashita by taking:

$$\begin{aligned} {c_2}^* &= \frac{2\ c_2}{2\rho g R^2 \epsilon^2} \\ {c_3}^* &= \frac{2\ c_3}{2\rho g R^2 \epsilon^3} \end{aligned} \tag{3.32}$$

with $\epsilon = \frac{A}{R} = 0.2$. The added mass a_{33} and the damping coefficient b_{33} are also calculated and made non-dimensional by:

$$\begin{aligned} a_{33}^* &= \frac{a_{33}}{\rho\pi\frac{R^2}{2}} \\ b_{33}^* &= \frac{b_{33}\sqrt{\frac{R}{g}}}{\rho\pi\frac{R^2}{2}} \end{aligned} \tag{3.33}$$

On the upper part of Fig. (3.9), the hydrodynamic coefficients previously defined are compared to the theoretical predictions of Tasai and Koterayama [5] and to the experimental values measured

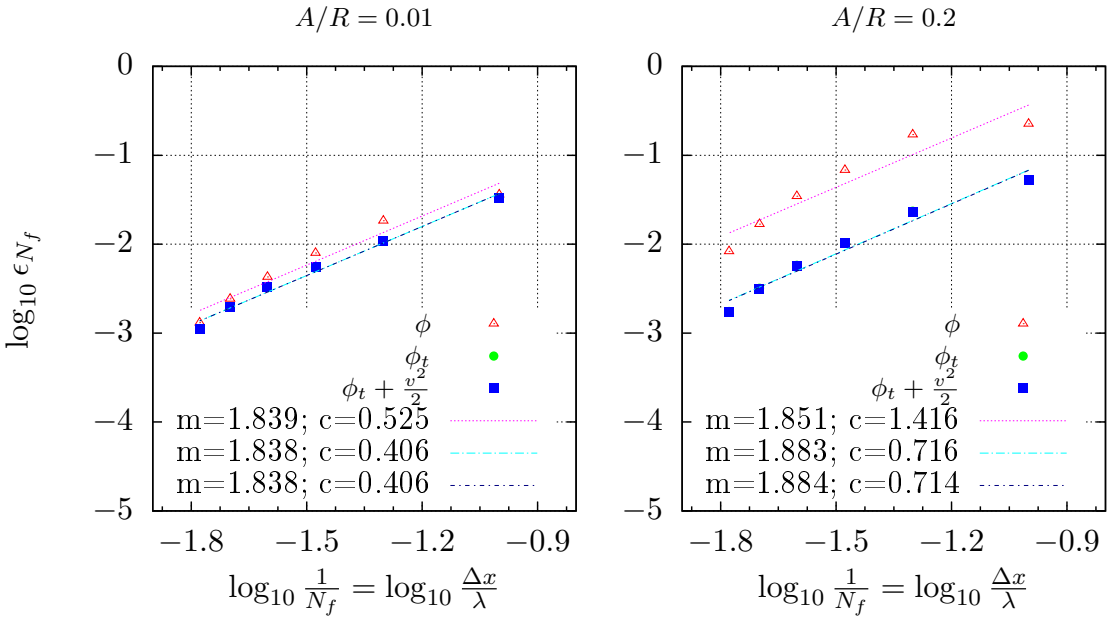


Figure 3.8: Forced heaving motion of a semi-circular cylinder of radius R in deep water: same case as Fig. (3.7), global L^2 error norm for ϕ, ϕ_t and p, obtained by averaging instantaneous errors for $t^+ = 0$ to 10. The coefficients m and c are determined by computing a least mean square trend line of equation $y = mx + c$ for each set of points. The blue square dots and the green circle dots are superimposed.

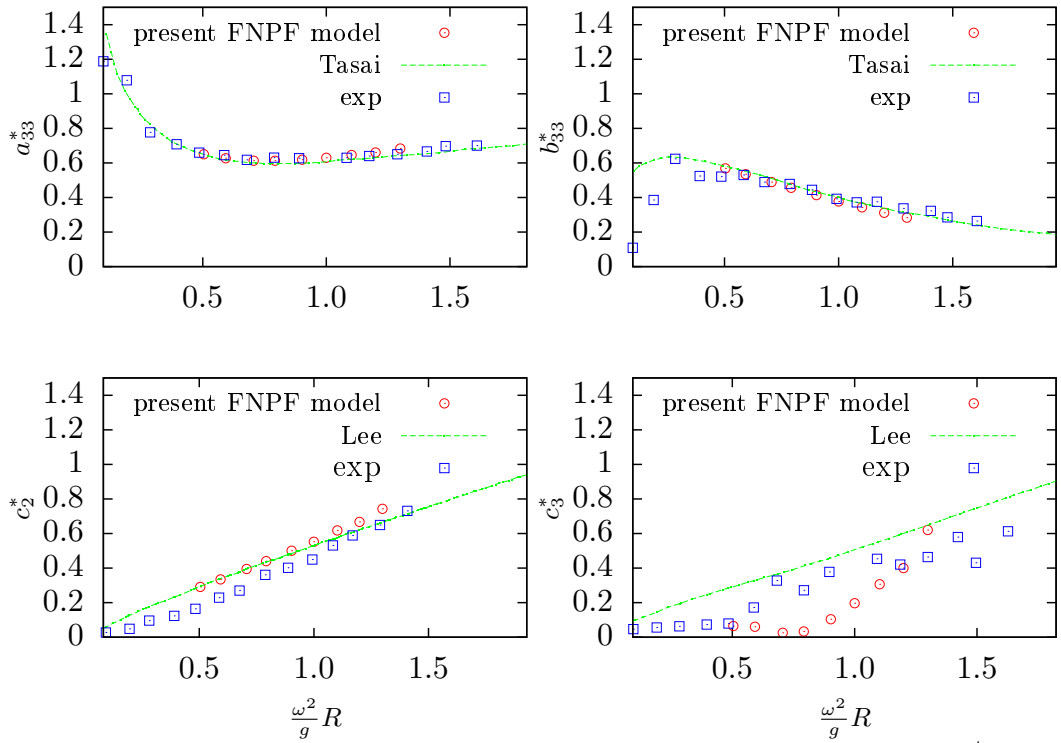


Figure 3.9: Forced heaving motion of a semi-circular cylinder of radius $R = B/2$ in deep water: first- to third-order Fourier non-dimensional coefficients of the hydrodynamic force, for a large motion amplitude $A/R = 0.2$. Results are computed over the time interval $t^+ \in [5, 10]$ as a function of the excitation frequency $\omega^2 B/(2g)$: FNPF computations (red circles); experiments of [4] (blue squares); [5] and [6] theories (green lines).

by [4]. A rather good agreement is observed for these two quantities at least in the middle range of frequencies. For low frequency, the experimental results and the theory of [5] are not in agreement, which can be explained by the inviscid assumption of the model. The damping coefficient b_{33}^* measure appears to be the most affected by viscous effects, which seems reasonable. The high order force coefficients c_2 and c_3 are presented on the lower panels of Fig. (3.9). An excellent agreement with the low order theory of [6] is observed for c_2 in the low to middle frequency range. For $\frac{\omega^2}{g}R \geq 1$, the value of c_2 computed by the present FNPF model becomes greater than the prediction of the weakly nonlinear theory. For the third order coefficient c_3, it appears that our calculations underpredict the results from the low order theory. By contrast, we observe a slightly better agreement of our results with the experimental values at low and high frequencies. This could result from an insufficient mesh resolution for computing high order harmonics as it is seen in Table (3.3) that the third order Fourier coefficient does not reach a clear limit even for the very fine discretization with 80 nodes per wavelength. Moreover, it is also seen in Table (3.3), that the dimensional coefficient c_3 has a very small absolute value, which makes it more difficult to converge on c_3 than on c_1 for given values of the numerical parameters. The satisfactory agreement for first-order and second-order quantities seems to suggest that, for the ratio $A/R = 0.2$, the approximate theories are valid, and confirms the convergence of the nonlinear model towards these theories.

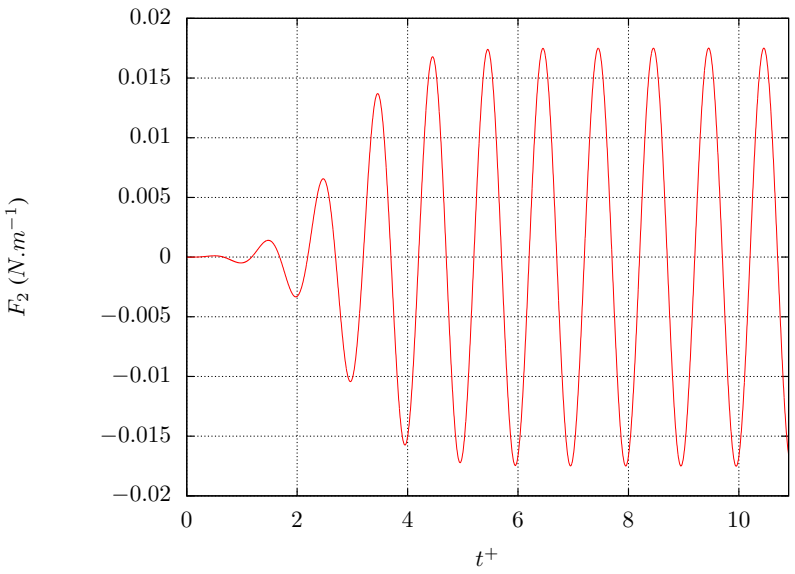


Figure 3.10: Sway motion of a rectangular barge: horizontal force at frequency $\omega = 0.84s^{-1}$ represented on the time interval $t^+ = t/T \in [0, 10.84]$.

3.4 Forced swaying motion of a rectangular floating cylinder

Here, we verify the convergence of numerical results to the predictions of linear theory for a rectangular barge in forced swaying motion. Rather than performing another exhaustive convergence study for a single frequency, as we did for the semi-circular cylinder, we focus instead on the accuracy of the force calculation over a wide range of frequencies, as we did in Section (3.3). Again, the discretization is specified to be uniform over the computational domain boundary. The discretization over the body surface is thus adjusted in order to be the same as on the free surface. A discretization based on $N_f = 80$ nodes per wavelength is used in all cases, which has been shown in earlier applications to ensure a good convergence of numerical results. The barge draft is set to $a = 1$ m and its width to $B = 2a = 2$ m. The amplitude A of the swaying motion is set to a small value corresponding to $\frac{A}{a} = 0.01$, which will make the comparison with linear theory relevant. The force hydrodynamic coefficients are calculated over the interval $t^+ = t/T \in [5.84, 10.84]$ (see in Fig. (3.10)).

The hydrodynamic coefficients in sway (translation along the Ox axis) a_{22} and b_{22} as well as the cross coupling coefficients between sway and pitch (rotation around the Oy axis) a_{24} and b_{24} are defined so as to verify:

$$\begin{aligned} F_2(t) &= -a_{22}(\omega)\ddot{x}_{G2}(t) - b_{22}(\omega)\dot{x}_{G2}(t) \\ F_4(t) &= -a_{24}(\omega)\ddot{x}_{G2}(t) - b_{24}(\omega)\dot{x}_{G2}(t) \end{aligned} \tag{3.34}$$

where F_2 is the horizontal component of the force along the Ox axis and F_4 is the transverse moment in the y direction.

Fig. (3.11) shows the added mass a_{22} and damping b_{22} hydrodynamic coefficients in sway,

as well as those corresponding to the cross-coupling between sway and pitch, a_{24} and b_{24} (a_{24} is the added inertia in pitch due to the forced motion in sway), computed as a function of angular frequency. In the figure, our results are compared to Vugts' experiments and computations based on linear theory [7]. Vugts experimental results have been digitized thanks to the curves presented in the review of [78]. The parameters used to make the coefficients non-dimensional are selected as in [7] (see definitions in the figure). The angular frequency is made non-dimensional as $\omega^* = \omega\sqrt{a/g}$.

We observe a fairly good agreement of our results with linear theory over the whole frequency range, both for the components of the force, both in and transverse to the barge direction of oscillation. This calculation confirms the ability of the model to accurately compute very fine scale phenomena, such as the cross-coupling components of the hydrodynamic force. However, we note that these nearly linear calculations (as well as results from the linear theory) do not match all of Vugts' experimental data. In particular, we observe that linear results overestimate the added mass a_{22} at low frequency, for $\omega^* \leq 0.3$, and underpredict it at high frequencies, for $\omega^* \geq 1.2$. In between, the agreement with experiments is quite good. This discrepancy is even more significant for the damping coefficient b_{22}, which is underestimated by linear theory mainly for higher frequencies. The discrepancy with the experimental values at low frequencies may be explained by the fact that, for long waves with respect to the body size, viscous effects become gradually more important.

3.5 Freely floating circular cylinder

Having confirmed in earlier applications the accuracy and convergence of this 2D-FNPF model for forced heaving or swaying motions of various horizontal cylinders, we now assess the accuracy of the proposed wave-structure coupling algorithm, for the free oscillations of a floating circular cylinder released from a non-equilibrium position. In the linear limit, [68] derived a semi-analytical solution of the vertical displacement of the center of mass, $x_{G3}(t)$ for: (i) a zero initial velocity condition ($x_{G3}(0) \neq 0, \dot{x}_{G3}(0) = 0$); or (ii) a zero displacement initial condition ($x_{G3}(0) = 0, \dot{x}_{G3}(0) \neq 0$).

Below, we first detail the geometry of the computational domain and its discretization. Then, we check the convergence with respect to the discretization of results computed at internal points. Finally, we study in detail the cylinder oscillations as a function of time, for two different numerical schemes, and assess the overall accuracy of computations by checking conservation of mass and total energy (body plus fluid), and the sensitivity of errors on mass and energy conservation to the spatial discretization.

3.5.1 Computational domain and discretization

We consider a 2D rectangular domain of length $L_x = 20m$ and depth $d = 5m$, and study the free oscillations of a semi-circular cylinder of radius $R = 0.25$ m, which is released from a non-equilibrium position $x_{G3}(0) \neq 0$ ($R/3$, $R/4$ and $R/8$). Time is made non-dimensional as, $\tau = t\sqrt{g/R}$ and the cylinder motion evolution in terms of $x_{G3}(t)$ is studied for $\tau \in [0, 20]$. Parameters for the 5 initial discretizations used in the convergence study are given in Table (3.4). In each case, the solution is computed at internal points vertically spaced $\Delta y = 1$ m, specified along $N_{gages} = 153$ vertical numerical gages distributed over the fluid domain, horizontally spaced $\Delta x = 0.5$ m. Over these points, a L^2 error norm is computed for the result difference with respect to the finest (fifth) mesh, which has $N_F = 400$ nodes on the free surface. The errors are defined according to Eq. (3.31).

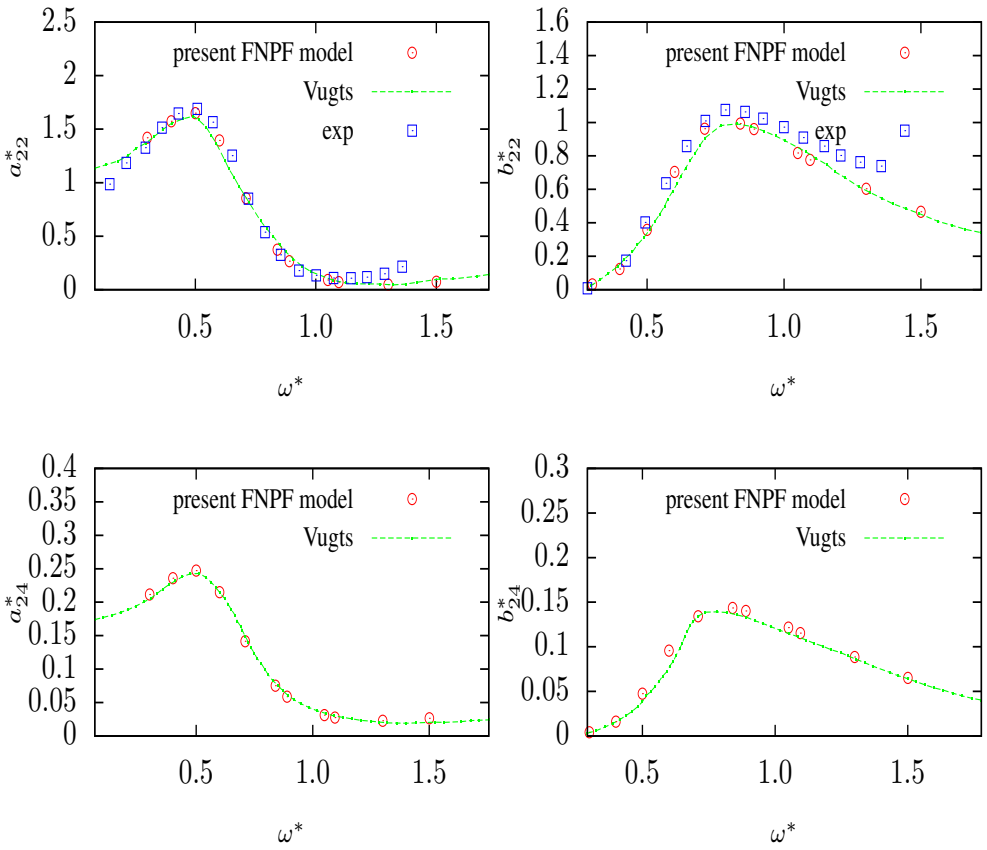


Figure 3.11: Rectangular barge of width B and draft a in swaying motion: added mass and damping coefficients as a function of the non-dimensional angular frequency. Comparison between numerical wave tank (red circles), to both linear theory (green line) and experimental (blue squares) results of Vugts [7].

	mesh 1	mesh 2	mesh 3	mesh 4	mesh 5
Δx (m)	0.131	0.098	0.049	0.033	0.024
N_F	150	200	250	300	400
N_c	25	25	25	25	25
N_{dof}	364	476	926	1376	1826

Table 3.4: Freely floating circular cylinder case: discretizations used in the convergence study for internal points computations. Number of nodes: on the free surface (N_F); on the cylinder (N_c); and total (N_{dof}).

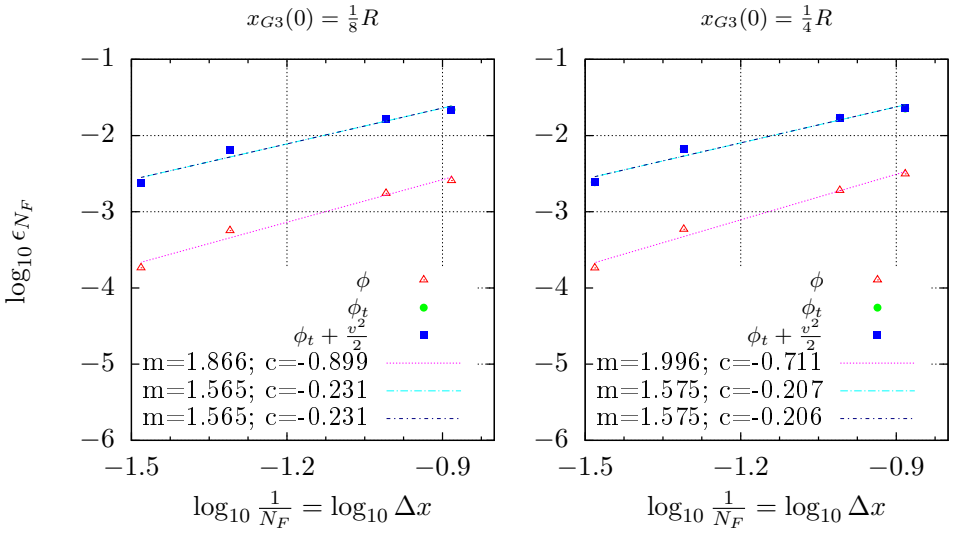


Figure 3.12: Freely floating cylinder of radius R: convergence of results at internal points (5 meshes; Table (3.4)), expressed by the L^2 error norm of the solution for the 4 coarser grids as compared to that in the fifth finest grid. The cylinder center of mass is initially set to $x_{G3}(0)$. The blue square dots and the green circle dots are superimposed. These results were obtained with the second-order explicit Taylor time-stepping.

3.5.2 Convergence of results at internal points

The L^2 error norm of the variables ϕ, ϕ_t and p relative to results in the finest grid is displayed on Fig. (3.12). For the first initial displacement $x_{G3}(0) = R/8$, we also tested the aforementioned direct scheme, which consists in replacing directly in Eq. (3.5) the velocity and the acceleration of the rigid body given by the Newmark scheme. This is somewhat similar to the Iterative "Semi Implicit Time Integration Method for Floating Bodies (ISITIMFB)" recently presented in [44]. Unless otherwise stated, this scheme will be referred to as the direct method. For this scheme, the relaxation parameter in the correction step of the Newmark scheme was set to $\omega = 0.7$ (see Algorithm (1)) as this was observed to minimize the number of sub-iterations required to achieve convergence of the hydrodynamic force. Note that this relaxation parameter is set to $\omega = 1$ for the implicit method. Additionally, the other parameters of the Newmark scheme are set in each case to $\gamma = 0.5$ and $\beta = 0.25$.

In Fig. (3.12), the L^2 error norms related to the variables ϕ, ϕ_t and p are represented for different discretizations. Note that the L^2 error of ϕ_t and p are superimposed. The root mean square straightlines are computed for each set of points. It can be observed that the order of convergence and the accuracy on the calculation of the variable ϕ are better than for ϕ_t and $\phi_t + \frac{1}{2}v^2$. The rate of convergence is approximately 1.87 for ϕ while it reaches the value 1.56 for the other variables. For the amplitude $x_{G3}(0) = R/4$, the rate of convergence is slightly greater than for the amplitude $x_{G3}(0) = R/8$. This time, we observe that the level of the accuracy on the variable ϕ_t is worse than the one on ϕ. This effect could be due to the sub-iterations used for the convergence of the force calculation. It is worth noting, as in the case of forced motion, that the rate of convergence is slightly better for large motion than for small motion amplitude.

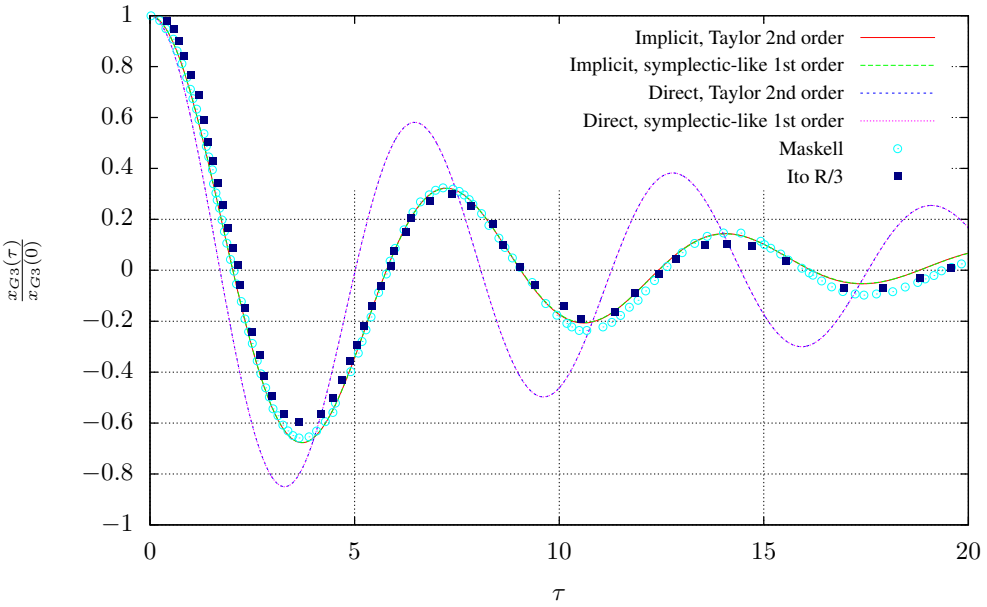


Figure 3.13: Freely floating cylinder of radius R in deep water: time evolution of the elevation of the cylinder, initially located at $x_{G3}(0) = R/8$, as a function of numerical scheme compared to reference values in linear theory for a small initial displacement of the structure with $N_c = 50$ nodes on the body surface. The green dotted line and the red line are quasi-superimposed. The blue dotted line and the pink dotted line are quasi-superimposed.

3.5.3 Time evolution of the cylinder elevation as a function of numerical scheme

In Fig. (3.13), we compare the computed time evolution of the cylinder elevation, for $x_{G3}(0) = R/8$, using the direct method or the implicit one, to the semi-analytical method of [68]; and (ii) to the experimental values of [79]. The experiments of Ito were performed with various initial displacements: $1in$,$1.5in$ and $2in$ and for a diameter of the cylinder equal to $2R = 6in$ (in the foot-pound system). It was found that the first two amplitudes gave almost the same free decay curve (which is the one displayed in Fig. (3.13)). Results were computed for the finest mesh (5) with $N_F = 400$. In Fig. (3.14), the computed time evolution of the cylinder elevation, for $x_{G3}(0) = R/3$ is represented and compared to the Navier–Stokes computations of [26].

It can be concluded that results obtained by using the implicit method are in much better agreement with the reference solutions than results using the direct method for the smallest amplitude $x_{G3}(0) = R/8$, regardless of the time integrator (Taylor second-order or symplectic-like first-order). Moreover, we note that the agreement with the linear predictions of Maskell and Ursell appears to be satisfactory only for the smallest amplitude $x_{G3}(0) = R/8$. For the other amplitude $R/3$, the vertical displacement predicted by the present method significantly deviates from the prediction of linear theory after the first minimum of the displacement for $\tau \approx 4.0$.

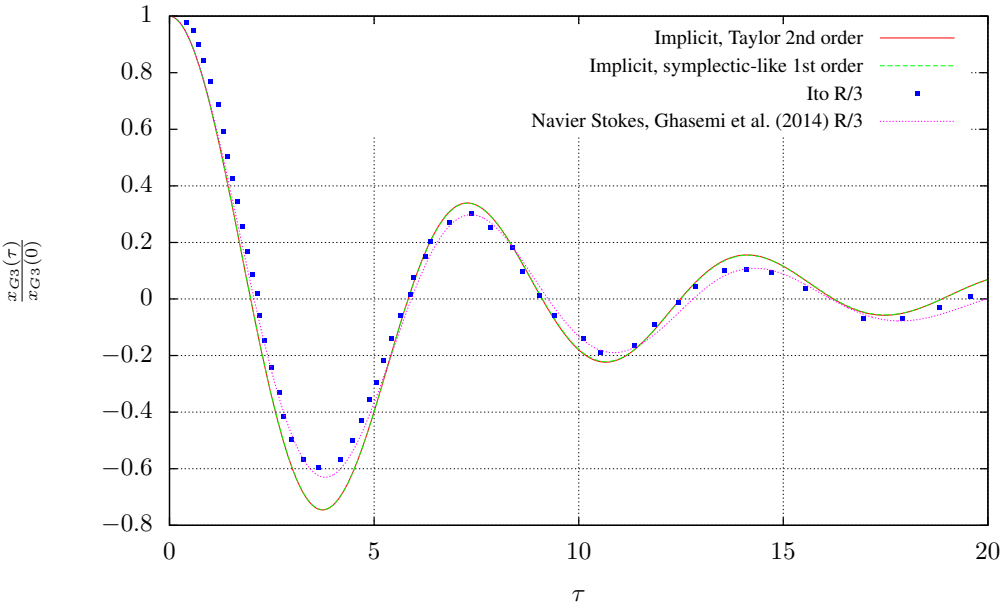


Figure 3.14: Freely floating cylinder of radius R in deep water: time evolution of the elevation of the cylinder, initially located at $x_{G3}(0) = R/3$, as a function of numerical scheme compared to reference values in linear theory for a strong initial displacement of the structure with $N_c = 50$ nodes on the body surface.

In Fig. (3.14), it is seen that the model of [26] based on a two-fluid flow Navier–Stokes method gives a better prediction of the vertical displacement compared to experimental work of [79]. This unfortunate behaviour of the present FNPF model could be explained by the absence of viscous effects, which results in less damping of the motion.

In terms of computational efficiency, running the implicit method with the discretization $N_F = 400$ requires a constant number of 3 sub-iteration in the Newmark scheme, while the direct method requires 5 to 6 sub-iterations to achieve convergence. Based on these tests, the direct method strategy does not appear as a viable alternative to the implicit method. We will thus use the implicit method in our 3D model.

3.5.4 Verification of mass and energy conservation

For the earlier results, we also computed the time evolution of total energy of the fluid-body system and total fluid volume. The total energy of the fluid-body system can be split into the fluid energy $E_f(t)$, consisting of kinetic and potential energy, and the body mechanical energy $E_b(t)$. Energy conservation in these inviscid simulations imposes that total energy should be constant at any time step. More precisely, in the model, the fluid energy is expressed as:

$$E_f(t) = \frac{1}{2}\rho g \int_{\Gamma_f(t)} (z+d)^2 ds + \frac{1}{2}\rho \int_{\Gamma_f(t)} \phi\phi_n ds \tag{3.35}$$

and the solid body mechanical energy reads:

$$E_b(t) = mg(x_{G3} + d) + \frac{1}{2}\dot{\mathbf{x}}_G^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{x}}_G \tag{3.36}$$

where m (kg.m^{-1}) is the body mass per unit length and the inertia matrix $\mathbf{M}$ is here diagonal with, $M_{11} = M_{33} = m$ and $M_{22} = I_G$, where $I_G = \frac{1}{2}\, m\, R^2$ denotes the moment of inertia around the y axis passing through the body center of mass. The conservation of energy states that:

$$\Delta E_f(t) = -\Delta E_b(t) \tag{3.37}$$

We also know that the variation of the mechanical energy of the solid is equal to the work done by the force acting on it, that is $\Delta E_b(t) = W = \int_0^t \mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{x}}_G dt$. Conservation of total energy is checked in the model by computing the relative error, $\Delta(E_f(t) + E_b(t))/E_b(0)$ as a function of time, with the initial fluid energy being referred to zero and the denominator being the initial mechanical energy given the solid body by its initial vertical displacement; this is done in the top panels of Fig. (3.15), for two different discretizations and two initial amplitudes. In the middle panels of the figure, we computed $(\Delta E_b - W)/E_b(0)$, which enables to check the second conservation principle. Finally the bottom panels of the figure show the evolution of the relative error on fluid volume conservation, $(V(\Omega_f(t)) - V_0)/V_0$. The latter error stays very small in all cases, although it increases with time and is larger, the larger the initial cylinder displacement. This confirms the accuracy of both Laplace equation solver and time stepping schemes used in the present 2D-FNPF model.

It is worth noting that, for the two discretizations tested here with $N_F = 100$ and 400, the conservation of energy is satisfied within the same degree of accuracy. Note that the discretization of the body was kept constant for each discretization of the free surface so that only the influence of this latter parameter was studied. This shows that if we use a fixed time-step, refining the mesh at the free surface does not improve the accuracy of the energy conservation when the discretisation of the body is kept constant. This reflects the fact that numerical errors on energy

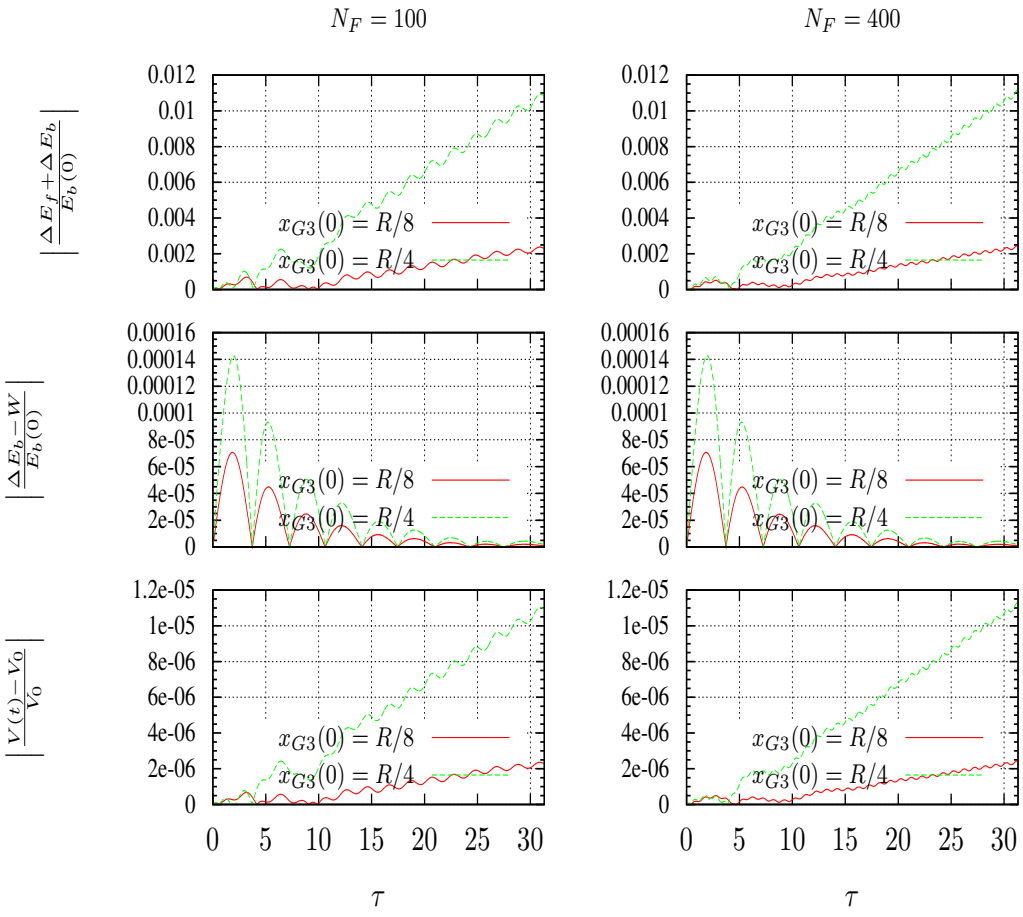


Figure 3.15: Freely floating cylinder of radius R: time behaviour of 3 energy and volume ratios for the minimal and maximal discretizations and for two initial release amplitudes $x_{G3}(0) = R/8$ and $x_{G3}(0) = R/4$ with the same fixed time-step. These results were obtained with the second-order explicit Taylor time-stepping.

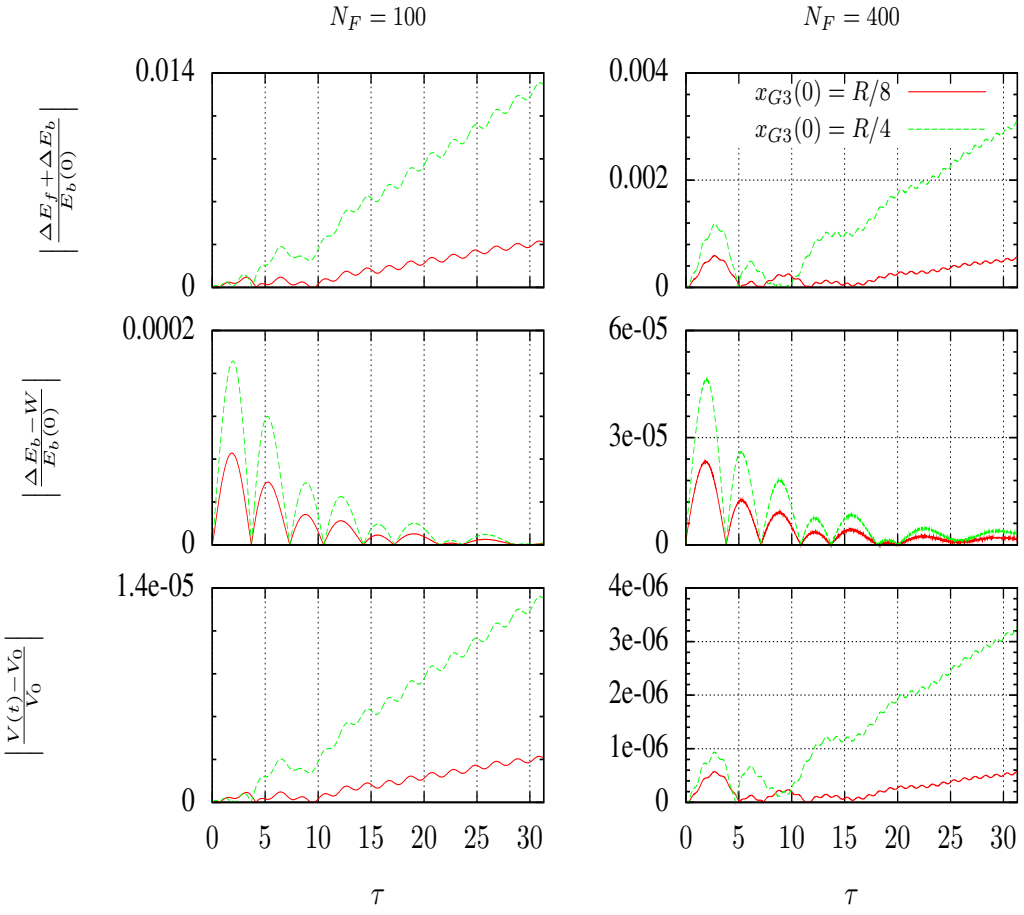


Figure 3.16: Freely floating cylinder of radius R: same case as Fig. (3.15) with an adaptive time-step procedure. These results were obtained with the second-order explicit Taylor time-stepping.

conservation can only decrease with grid refinement if the Courant number is held constant. When using an adaptive time-step and the same discretizations as before, we obtain the results shown in Fig. (3.16). It is seen that the the accuracy on the volume ratio $(V(\Omega_f(t)) - V_0)/V_0$ and on the energy ratio $(\Delta E_b - W)/E_b(0)$ are significantly improved when changing both the space and time discretizations according to a Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) condition, which was not the case by using a fixed time-step. However, it appears that the energy $E_f + E_b$ keeps increasing in absolute value after the end of the free decay with the second-order Taylor explicit time-stepping. This error is more important for large amplitude.

For this particular case, it has been found that using a symplectic-like first-order integrator as defined in Section (3.2.2) leads to a much better conservation of the energy, as it can be seen in Fig. (3.17) for the initial release of the cylinder at $x_{G3}(0) = R/4$. This is in agreement with the expected behaviour of such a scheme. Moreover, we clearly see on Fig. (3.17) that the variation reaches a limit which is not the case for the explicit second-order Taylor series.

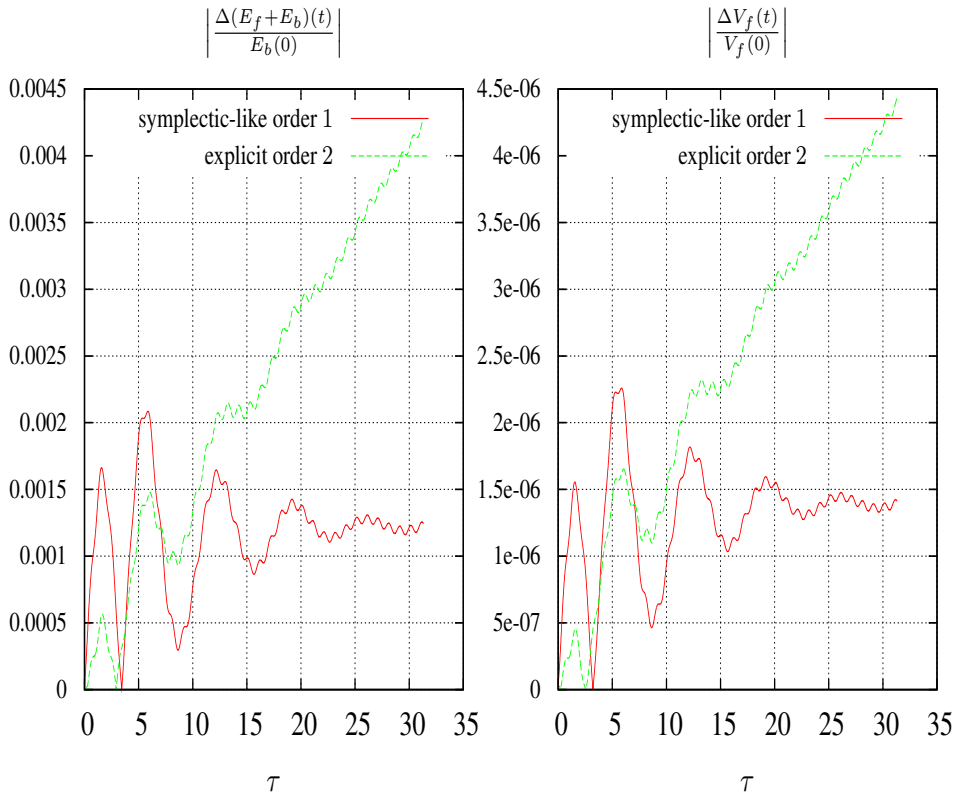


Figure 3.17: Freely floating cylinder of radius R: energy (left) and volume (right) conservation for initial amplitude $R/4$ with two numerical schemes for the finest mesh of parameter $N_F = 400$.

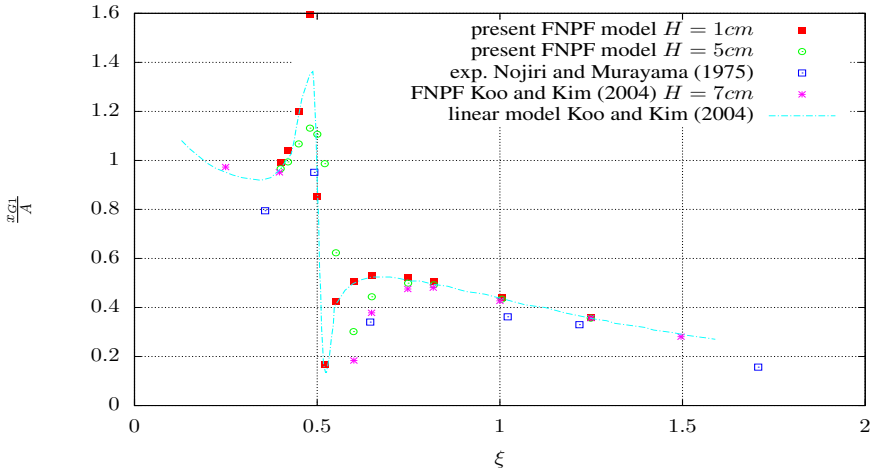


Figure 3.18: Rectangular barge in waves of parameters $H = 1$cm and $H = 5$cm: first-order response amplitude operator for sway motion $\frac{x_{G1}}{A}$ with respect to the non-dimensional frequency $\xi = \omega^2 \frac{B}{2g}$.

3.6 Response amplitude operators of a 2D rectangular barge

Finally, we propose validating our model against the more demanding test case of a 2D rectangular barge subjected to incident waves of various amplitudes. This test case has been used, *e.g.* by [43]. We model a 2D rectangular barge with rounded off corners of radius $r = 0.064$m, of width $B = 0.5$m and of initial draft $T = 0.25$m. The body mass is $M = 125$kg and moment of inertia $I = 4.05$kg.m^2. The motion in the x direction is constrained with a spring of stiffness $K = 197.58$N.m^{-1} and a damping coefficient of $C = 19.8$N.m^{-1}.s^{-1}. The keel to center of gravity distance is $KG = 0.135$m. We use a wave tank of length $L_x = 10\lambda$ for each considered wave. In the model, we specify as a leftward boundary condition an incident linear Airy wave profile of normal particle velocity ϕ_n and local particle acceleration ϕ_{tn} and additionally use an active absorbing beach in front of the wave generation area. The discretization in results presented below has $N_f = 60$ nodes per dominant wavelength. We compute two set of frequencies for a small wave height $H = 1$cm and a moderate one $H = 5$cm. Our results are compared : (i) to the fully non-linear computations of [43] obtained with a similar FNPF model for $H = 7$cm; (ii) to the experimental results of [80] digitized from the paper of [43]; and (iii) to the linear computations of [43]. The first-order response amplitude operators for each mode of motion are represented on Fig. 3.18, Fig. 3.19, Fig. 3.20. The comparison between the small amplitude wave case and the linear computations of [43] is quite satisfactory. It is interesting to note that the first-order response obtained with the wave height $H = 5$cm significantly deviates from that obtained with $H = 1$cm near the resonance frequency range.

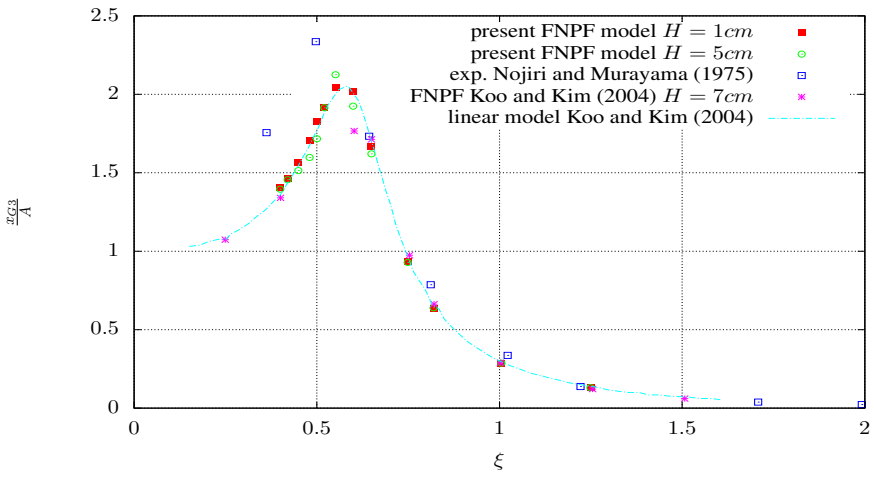


Figure 3.19: Rectangular barge in waves of parameters $H = 1$cm and $H = 5$cm: first-order response amplitude operator for heave motion $\frac{x_{G3}}{A}$ with respect to the non-dimensional frequency $\xi = \omega^2 \frac{B}{2g}$.

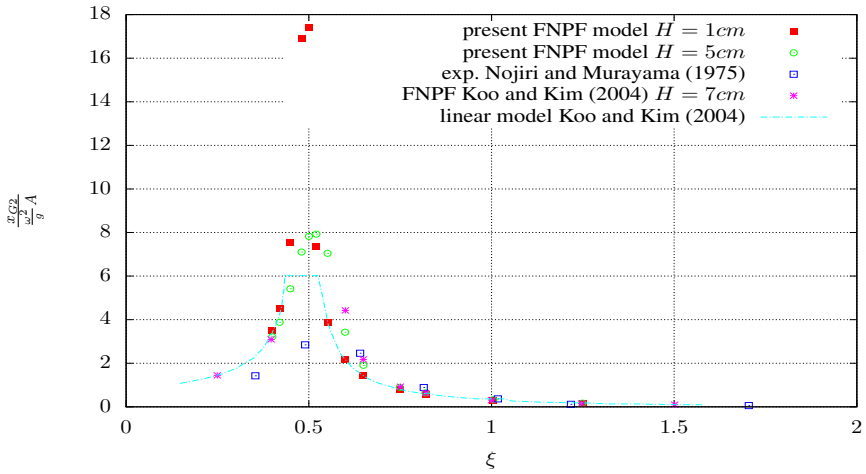


Figure 3.20: Rectangular barge in waves of parameters $H = 1$cm and $H = 5$cm: first-order response amplitude operator for roll motion $\frac{x_{G3}}{\frac{\omega^2}{g}A}$ with respect to the non-dimensional frequency $\xi = \omega^2 \frac{B}{2g}$.

3.7 Conclusions

We presented computations of the interactions of a floating body with a free surface flow modeled by the Fully Nonlinear Potential Flow (FNPF) theory. The present FNPF model is implemented based on a higher-order Boundary Element Method (BEM). These results are only presented in two dimensions in the present chapter. We extended the implicit coupling scheme of [23], which was limited to submerged bodies, to simple surface piercing rigid bodies. Since there are more reference solutions in the literature for this case, we first verified the accuracy and convergence of our scheme, for the forced motion (heaving and swaying) of a rigid body on the free surface. Moreover, we also demonstrated the advantage, in terms of energy and volume conservation, of using a time-stepping inspired by the symplectic integrators. In particular, besides global errors such as on mass and energy conservation, we assessed the accuracy of the computed hydrodynamic force applied to the body as a result of its motion, which is key to accurately solving cases with a freely floating body. In all cases, for small amplitude body motion, we observed a very good agreement with results from the linear theory. In such cases, the conservation of total fluid volume is achieved within a high degree of accuracy. In general, to assess the convergence of various model results, we computed a L^2 error norm of results in various boundary discretizations, compared to those obtained in the finest discretization. This norm was computed at a set of internal points within the fluid domain, which are kept at a fixed position during the simulations. In all cases, convergence of the selected field variables, in terms of the L^2 error norm, shows a good behavior both for forced and freely floating body motion. For large amplitude motion cases, the L^2 error norm of the variables has a similar behavior with respect to the discretization, but the smallest errors achieved are larger than for small amplitude motion. For forced motion, the typical rate of convergence of the force, of the fields ϕ and ϕ_t inside the domain is close to 1.9, for both small and strong amplitude motions. For the strongest amplitude, we observe that the level of accuracy is worse for ϕ than for ϕ_t. We believe that, for such cases, the current geometric updating of the free surface intersection nodes with the body and the regridding of the free surface discretization that results, may not be sufficient for achieving a high volume conservation. For freely floating bodies, the convergence of the algorithm is studied for various amplitudes of motion in free decay tests. We find that the implicit method of [20] and [21] gives a satisfactory agreement with the analytical results of [68]. A larger discrepancy, however, is found for large amplitude free decay motions, which indicates the need for developing a way to include viscous effects in the present FNPF model. In this case, the variable ϕ exhibits a rate of convergence of 1.9 while the variable ϕ_t exhibits a rate of convergence of 1.6 inside the domain. The level of accuracy of the variable ϕ_t is worse than that of the variable ϕ, for both small and strong amplitude motions, contrary to forced motion computations. A preliminar investigation of the capability of the model to predict the free motion of a floating body in waves is done and a fine agreement with other references is found.

In the next chapters, besides extending the present approach to 3D geometries, we will refine the treatment of intersection points between the rigid body and the free surface and study cases both in 2D and 3D when body motions are forced by waves generated in the model (both regular and irregular).

Chapter 4

Development of a 3D numerical model

Having developed a model for dealing with simple surface piercing geometries in the 2D-FNPF of Grilli *et al.* [22] and considered several academic test cases, we now pay attention to the extension of the model to 3D geometries. Preliminary calculations have been accomplished at our laboratory for a submerged heaving sphere in the work of Guerber [19] and brought to the fore an urgent need for optimization of the CPU time. The original 3D model of Grilli *et al.* [1] is a sequential algorithm and a BEM-based solver has its complexity scaling as $\mathcal{O}(N^2)$, so that solving large systems become rapidly impractical. For this reason, we will present here some new developments of the model, introduced in order to use the Message Passing Interface (MPI) concepts. These developments lead to a substantial reduction of the CPU time.

Another limitation of those works was the use of structured quadrangular meshes which do not adapt easily to complex geometrical configurations, even for basic designs such as a vertical cylinder. We therefore strive ourselves to develop an efficient and accurate model for irregular triangular meshes. We will also present, in addition to the basic concepts attached to Boundary Integral Equations (BIE's), new numerical schemes designed for computations on triangular meshes. The accuracy of the proposed strategies is evaluated, compared and validated against analytical solutions.

4.1 Boundary Element Method for unstructured grids

4.1.1 Boundary integral formulation

In this section, we give more details about the way we solve the BIE in 3D. We recall that we are interested in solving the Laplace equation in three dimensions for the velocity potential function which is such that $\nabla\phi = \mathbf{v}$. The velocity potential ϕ satisfies the following boundary integral equation:

$$\begin{cases} \text{Find } \phi \text{ such that:} \\ c(\mathbf{x},t)\phi(\mathbf{x},t) = \displaystyle\int_{\Gamma(t)} (\phi_n(\mathbf{y},t)\ G(\mathbf{y},\mathbf{x}) - \phi(\mathbf{y},t)\ \frac{\partial G}{\partial n}(\mathbf{y},\mathbf{x}))dS_y \\ \phi = f \text{ on } \Gamma_d(t) \\ \phi_n = g \text{ on } \Gamma_n(t) \end{cases} \tag{4.1}$$

which is a mixed Dirichlet-Neumann Boundary Value Problem (BVP) where $\Gamma_d(t)$ is a time dependent Dirichlet boundary and $\Gamma_n(t)$ is a time dependent Neumann boundary. As already

explained in the previous chapter, we also solve in the algorithm a similar BIE for the Eulerian time-derivative of the velocity potential $\frac{\partial \phi}{\partial t}$.

We introduce the fundamental solution as the solution of the problem:

$$\Delta G(\mathbf{y}) = \delta(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \tag{4.2}$$

also called Green's function for the Laplace equation. In the 3D setting of the problem, the Green's function G and its normal derivative on the boundary have the following definitions (see [9]):

$$\begin{aligned} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{1}{4\pi \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} \\ H(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{\partial G}{\partial n}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\frac{1}{4\pi \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2} (\mathbf{y} - \mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} \end{aligned} \tag{4.3}$$

We use isoparametric boundary elements for discretizing both the geometry $\mathbf{x}$ and the unknowns fields (ϕ, ϕ_n). The boundary of the domain $\partial\Omega_f(t) = \Gamma$ is thus decomposed into a number N of collocation points and M elements such that $\Gamma = \cup_{k=1}^{M} \Gamma_k$. These elements are polynomials of degree q (we will give applications of the method for the case $q = 1$ and $q = 2$) and are defined on a reference element denoted by $\Gamma_\xi = \Gamma_{\xi_1, \xi_2}$.

The variables are thus described within the element Γ_k as the following functions:

$$\begin{cases} \mathbf{x}^k = \displaystyle\sum_{i=1}^{q+1} N_i^k(\xi) \mathbf{x}^i \\ \phi(\mathbf{x})^k = \displaystyle\sum_{i=1}^{q+1} N_i^k(\xi) \phi^i \\ \phi_n(\mathbf{x})^k = \displaystyle\sum_{i=1}^{q+1} N_i^k(\xi) \phi_n^i \end{cases} \tag{4.4}$$

The superscript i means that ϕ^i is the i-th nodal value on the element number k. The shape functions N_i^k are defined on the reference element Γ_{ξ_1, ξ_2} in such a way that $N_i^k(\xi(\mathbf{x}_j^k)) = \delta_{ij}$. In the frame of this work, we will only consider the case of triangular elements. For $q = 1$, the shape functions are defined on the reference triangle with respect to the barycentric coordinates (ξ_1, ξ_2, ξ_3) by:

$$\begin{cases} N_1(\xi_1, \xi_2) = \xi_3 \\ N_2(\xi_1, \xi_2) = \xi_1 \\ N_3(\xi_1, \xi_2) = \xi_2 \end{cases} \tag{4.5}$$

with $\xi_3 = 1 - \xi_1 - \xi_2$.

For $q = 2$, the following 6 shape functions are defined (see [9]):

$$\begin{cases} N_1(\xi_1, \xi_2) = -\xi_3(1 - 2\xi_3), & N_2(\xi_1, \xi_2) = 4\xi_1\xi_3 \\ N_3(\xi_1, \xi_2) = -\xi_1(1 - 2\xi_1), & N_4(\xi_1, \xi_2) = 4\xi_1\xi_2 \\ N_5(\xi_1, \xi_2) = -\xi_2(1 - 2\xi_2), & N_6(\xi_1, \xi_2) = 4\xi_2\xi_3 \end{cases} \tag{4.6}$$

Note that the indices $(1, 3, 5)$ of the second-order triangle correspond to the vertices, while the indices $(2, 4, 6)$ correspond to the nodes located at midpoints of the edges $(1-3, 3-5, 5-1)$, as represented on Fig. (4.1).

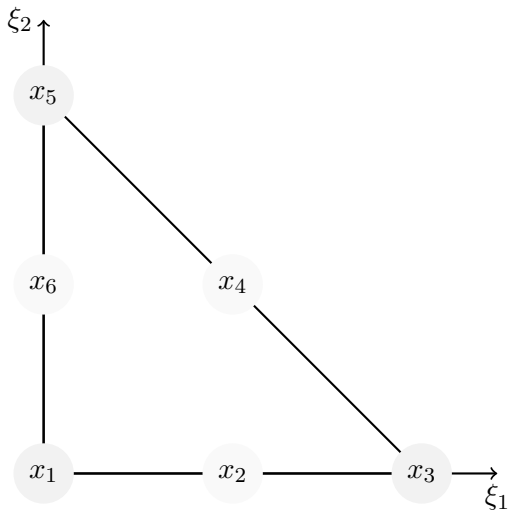


Figure 4.1: Sketch of the reference element Γ_ξ for a triangular mesh.

In our case, the elements are chosen to be the classical Lagrange elements of degree 1 or 2. Note that there exists many different kinds of element. For an overwiew of elements that could alternatively be taken into consideration, the reader is referred to the review of Kirby *et al.* [81].

In order to solve the problem, we use a collocation method which consists of satisfying the integral equation on a particular set of points. From a matrix point of view, this way of discretizing the equation has the drawback to lead to a non-symmetrical matrix unlike the variational approaches [9]. However, deriving the variational formulation associated to the BIE (4.1) by means of the Galerkin method leads to hypersingular kernels, which can be numerically more complex to solve.

We thus write that for any $\mathbf{x}_i$ belonging to the boundary Ω_j at time t_j, we have:

$$c(\mathbf{x}_i, t_j)\phi(\mathbf{x}_i, t_j) = \int_{\Gamma_j} (\phi_n(\mathbf{y}_k, t_j)\ G(\mathbf{y}_k, \mathbf{x}_i) - \phi(\mathbf{y}_k, t_j)\ \frac{\partial G}{\partial n}(\mathbf{y}_k, \mathbf{x}_i))dS_k \tag{4.7}$$

which can be, upon replacing the integral by a discrete sum over the vertices of the mesh, still rewritten as:

$$\left(\delta_{ij}\ c_i + \sum_j K_{ij}^n\right)\phi_j = \sum_j K_{ij}^d \phi_n^j \tag{4.8}$$

Adopting notations used in [69], we can show that the sub-matrices of this system are defined as:

$$\begin{aligned} K_{pl}^n &= \sum_{k\in\mathcal{S}_l} \int_{\Gamma_\xi} \left(N_{j(l)}^{q+1}(\xi) \frac{\partial G}{\partial n}(\mathbf{x}^k(\xi), \mathbf{x}_p) J^k(\xi) d\xi \right) = \sum_{k\in\mathcal{S}_l} E_{pl}^k \\ K_{pl}^d &= \sum_{k\in\mathcal{S}_l} \int_{\Gamma_\xi} \left(N_{j(l)}^{q+1}(\xi) G(\mathbf{x}^k(\xi), \mathbf{x}_p) J^k(\xi) d\xi \right) = \sum_{k\in\mathcal{S}_l} D_{pl}^k \end{aligned} \tag{4.9}$$

where $j(l)$ is a local index varying from 1 to $q+1$ with q the order of the element and $\mathcal{S}_l$ is the set of elements containing the node $\mathbf{x}_l$.

By shifting the known quantities, *i.e* fluxes $\overline{\phi_n^j}$ on rigid boundaries and potentials $\overline{\phi_j}$ on the free surface, on the righ-hand side of the equation, we obtain:

$$\left(\begin{array}{c|c} \delta_{ij}\ c_i + K_{ij}^n & -K_{ij}^d \\ K_{ij}^n & -K_{ij}^d \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} \phi_j \\ \frac{\partial \phi_j}{\partial n} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} K_{ij}^d & -K_{ij}^n \\ K_{ij}^d & -K_{ij}^n \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} \overline{\frac{\partial \phi_j}{\partial n}} \\ \overline{\phi_j} \end{array}\right) \tag{4.10}$$

When assembling the matrix of the system (4.10), if we denote by S_k the set of vertices belonging to Γ_k, two situations arise:

- The source point $\mathbf{x}_p$ is not belonging to the element Γ^k, in which case the terms $(K_{pl}^d, K_{pl}^n)_{l \in S_k}$ can be computed with any proper quadrature rule (*e.g.* the Dunavant rule for triangular elements),
- The source point is belonging to Γ^k, *i.e.* there exists $\mathbf{x}_l \in S_k$ such that $\mathbf{x}_p = \mathbf{x}_l$, in which case we remove the singularity by applying a polar change of coordinates.

The latter case will be examined in the next sections.

4.1.2 Singular integrals: analytical functions

Let us assume that each unknown can be described within any element by a set of three linear shape functions. In this case, one can derive a closed form for the coefficients of the matrix associated to the singularities. In particular, it is easily seen that $E_{pl}^k = 0$, as, for a flat triangle, the relationship $(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{y}) = 0$ is verified for $\mathbf{x}$ and $\mathbf{y}$ belonging to the same element Γ^k.

Following [24], the coefficients D_{pl}^k may be expressed in terms of a linear combination of elementary integrals having the forms $\int_{\Gamma_\xi} \frac{1}{\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2}} d\xi_1 d\xi_2$, $\int_{\Gamma_\xi} \frac{\xi_1}{\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2}} d\xi_1 d\xi_2$ or $\int_{\Gamma_\xi} \frac{\xi_2}{\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2}} d\xi_1 d\xi_2$.

Using the notations indicated on Fig. (4.2), the integrals, in the polar coordinates system, become:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_\xi} \frac{1}{\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2}} d\xi_1 d\xi_2 &= \int_{-\alpha_2}^{\alpha_1} \int_0^{\frac{r}{\cos\alpha}} \frac{r}{r} dr d\alpha = \int_{-\alpha_2}^{\alpha_1} \frac{r}{\cos\theta} dr d\alpha \\ &= r\left[\log \frac{(\cos\alpha_1 + \sin\alpha_1)}{(\cos\alpha_1 - \sin\alpha_1)} - \log \frac{(\cos\alpha_2 - \sin\alpha_2)}{(\cos\alpha_2 + \sin\alpha_2)}\right] \end{aligned} \tag{4.11}$$

In a similar manner, we get the relationships:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_\xi} \frac{\xi_1}{\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2}} d\xi_1 d\xi_2 &= \frac{r^2}{2\cos\alpha_2} \\ \int_{\Gamma_\xi} \frac{\xi_2}{\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2}} d\xi_1 d\xi_2 &= \frac{r^2}{2} \log \frac{(\cos\alpha_2 + \sin\alpha_2)}{(\cos\alpha_2 - \sin\alpha_2)} \end{aligned} \tag{4.12}$$

4.1.3 Method 1: classical formulation of the BIE

Here we extend directly the method used by Grilli *et al.* [1] for computing the singular integrals. For each vertex $\mathbf{x}_p$ of the element Γ^k, we define the segment d_p starting from $\mathbf{x}_p$ and orthogonal to the opposite edge to $\mathbf{x}_p$ denoted by e_p (see Fig.(4.3)). Let ρ_0 be the distance between $\mathbf{x}_p$ and e_p. Let $\tilde{e}_p$ be the line parallel to the edge e_p and intersecting Γ_k in $\mathbf{x}_p$. The horizontal axis

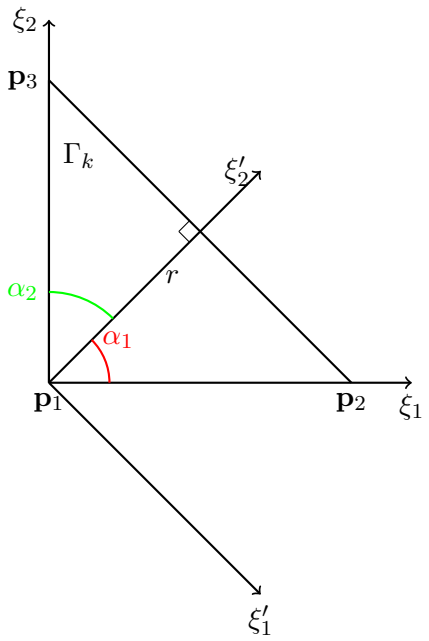


Figure 4.2: Sketch of the polar transformation on the reference element Γ_ξ.

of the new coordinate system centered in $\mathbf{x}_p$ is taken to be parallel to $\tilde{e}_p$ and counter-clockwise oriented. In this manner the segment d_p is defined by $\alpha = \alpha_m = \frac{\pi}{2}$. Finally, if we denote by α_1 and α_2 ($\alpha_1 < \alpha_2$) the angles of the edges different from e_p, the triangular element Γ_k can be described by the set of points $\xi(\rho, \alpha)$ such that (see [9]):

$$\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2, \ 0 \leq \rho \leq \frac{\rho_0}{\cos(\alpha - \alpha_m)} \tag{4.13}$$

For second-order triangles and midpoints nodes $\mathbf{x}_p$, we further need to decompose the element Γ_k into two triangles. The separation line is the segment $[\mathbf{x}_q \ \mathbf{x}_p]$ with $\mathbf{x}_q$ opposite to the edge e_q containing the node $\mathbf{x}_p$ under consideration.

In order to make use of one-dimensional quadrature rules, in the form of tensorial products, we further map the newly defined polar coordinates (ρ, α) onto the unit square (v_1, v_2), by means of the following transformation:

$$\alpha = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2} v_2 + \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}, \ \rho = \frac{1}{2} \frac{\rho_0}{\cos(\alpha - \alpha_m)} (1 + v_1) \tag{4.14}$$

which makes it possible to use standard Gauss-Legendre integration rules.

On Fig. (4.4), a distribution of 36 Gauss points in the polar coordinate system centered around $(\xi_1 = 1, \xi_2 = 0)$ is represented. On Fig. (4.5), a distribution of 72 (each sub-triangle is given a 6×6 distribution) Gauss points in the polar coordinate system centered around $(\xi_1 = 0.5, \xi_2 = 0.5)$ is represented.

If we now go back to the expressions of the singular local matrices, we can rewrite:

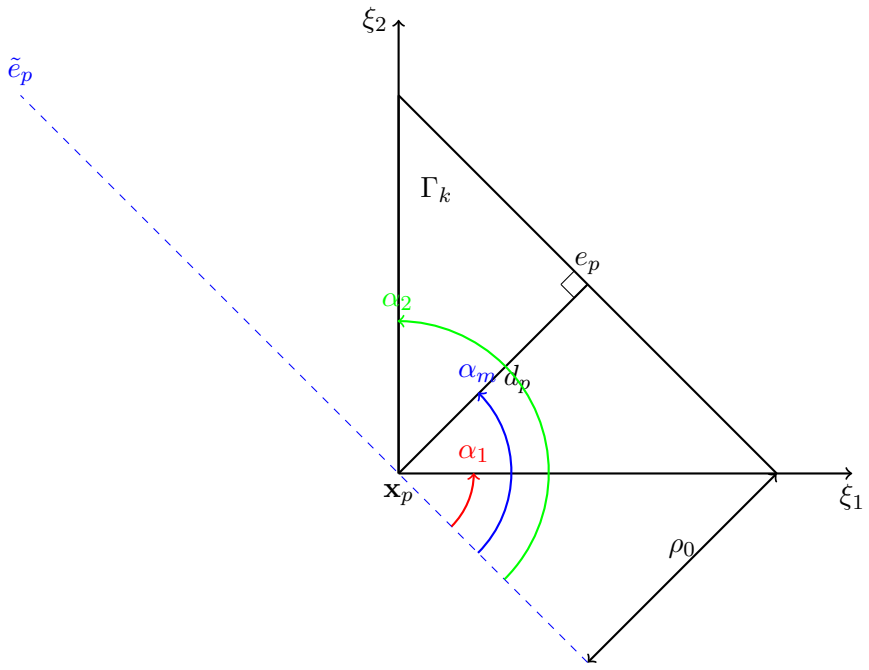


Figure 4.3: Sketch of the polar transformation on the reference element Γ_ξ.

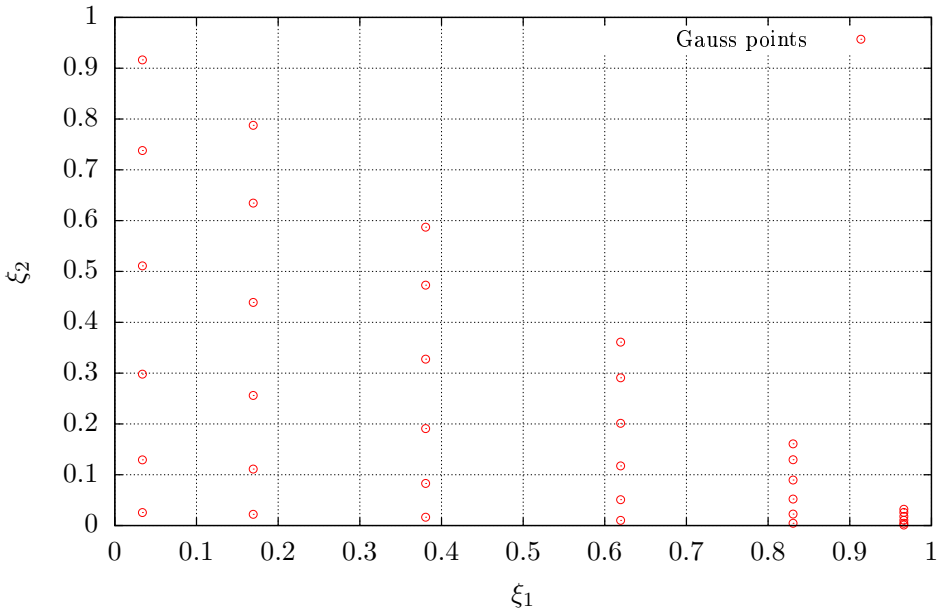


Figure 4.4: Distribution of Gauss points in the reference element Γ_ξ when the singularity is located in $(\xi_1, \xi_2) = (1, 0)$.

$$
\begin{aligned}
D^k_{pl} &= \int_{\Gamma_\xi} N^{q+1}_{j(l)}(\xi) G(\mathbf{x}^k(\xi), \mathbf{x}_p) J^k(\xi) d\xi \\
&= \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \int_0^{\frac{\rho_0}{\cos(\alpha-\alpha_m)}} N^{q+1}_{j(l)}(\rho(\xi), \alpha(\xi)) H(\rho(\xi), \alpha(\xi)) J^k(\xi) \rho d\rho d\alpha
\end{aligned}
\tag{4.15}
$$

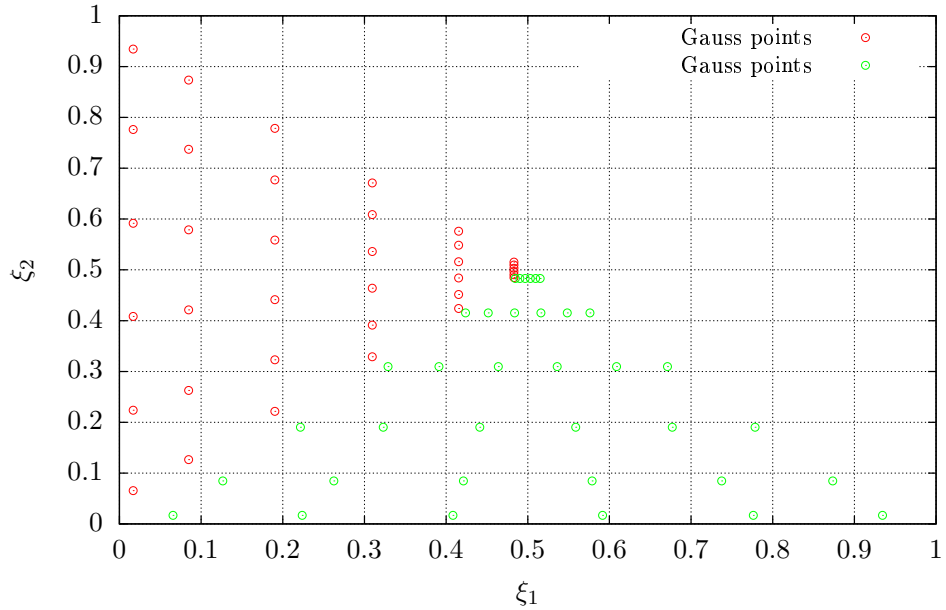


Figure 4.5: Distribution of Gauss points in the reference element Γ_ξ when the singularity is located in $(\xi_1, \xi_2) = (0.5, 0.5)$.

As pointed out in Grilli *et al.* [1], taking the limit of the expression given above as ρ goes to 0 reveals that the kernel is no longer singular in this form. The same conclusion holds for the transformation of the terms $E^k_{pl} = \int_{\Gamma_\xi} N^{q+1}_{j(l)}(\xi) H(\mathbf{x}^k(\xi), \mathbf{x}_p) J^k(\xi) d\xi$.

It should be noted that once the local matrices K^n_{pl} are evaluated, it is possible to get the solid angles coefficients $c(\mathbf{x}, t)$ by a rigid mode approach. More precisely, we can also apply the BIE (4.1) to an homogeneous Dirichlet problem with a constant value of ϕ over the whole boundary. This implies that the normal derivative ϕ_n must vanish and leaves us with the following equality:

$$(c_{ll} + K^n_{ll}) = -\sum_{k \neq l} K^n_{kl} \tag{4.16}$$

4.1.4 Method 2: regularized form of the BIE

In the literature devoted to boundary integral equations, we came across an alternative method, which is rarely used in the applications for modelling nonlinear waves. It is based on a regularization of the equation, as first proposed by Bonnet [9]. This method relies on another description of the boundary integral equation given in a regularized form. More details are to be found in the reference [9]. We only give the final result. For a potential flow problem without sources inside the fluid domain, the boundary integral equation over the boundary of the domain $\Gamma(t)$, for points $\mathbf{x}$ located on the boundary, takes the form (see [9]):

$$\begin{cases} \text{Find } \phi \text{ such that:} \\ \displaystyle\int_{\Gamma(t)} \left((\phi(\mathbf{y}, t) - \phi(\mathbf{x}, t))\ H(\mathbf{y}, \mathbf{x}) - \phi_n(\mathbf{y}, t)\ G(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \right) dS_y = 0 \\ \phi = f \text{ on } \Gamma_d(t) \\ \phi_n = g \text{ on } \Gamma_n(t) \end{cases} \tag{4.17}$$

The numerical integration can then be performed in a similar fashion as that exposed above. Following Bonnet [9], the vector $\mathbf{y}-\mathbf{x}$ can now be expressed as:

$$\mathbf{y}-\mathbf{x}=\sum_{j=1}^{q+1}\left[N_j(\xi)-N_j(\eta)\right]\mathbf{y}^j=\sum_{j=1}^{q+1}\rho\hat{N}_j(\xi,\eta)\mathbf{y}^q \tag{4.18}$$

where $\hat{N}_j$ is a reduced shape function associated to the shape function N_j, which stems from the application of Taylor relationships for two variables polynomials. The modulus of $\mathbf{y}-\mathbf{x}$ can be put under the form $r=\|\mathbf{y}-\mathbf{x}\|=\rho\left\|\sum_{j=1}^{q+1}\hat{N}_j\mathbf{y}^j\right\|$. It can be further proved that $\left\|\sum_{j=1}^{q+1}\hat{N}_j\mathbf{y}^j\right\|$ is non-zero for $\rho=0$. In this manner, the integrals involving the term $H(\mathbf{x},\mathbf{y})$ can be recast in regular form:

$$\begin{aligned}E_{pl}^k&=\int_{\Gamma_\xi}N_{j(l)}^{q+1}(\xi)H(\mathbf{x}^k(\xi),\mathbf{x}_p)J^k(\xi)d\xi\\&=\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\int_0^{\frac{\rho_0}{\cos(\alpha-\alpha_m)}}\hat{N}_{j(l)}^{q+1}(\rho(\xi),\alpha(\xi),\eta)\hat{H}(\rho(\xi),\alpha(\xi),\eta)J^k(\xi)\rho d\rho d\alpha\end{aligned} \tag{4.19}$$

where $\hat{H}=\rho^2 H$.

4.2 Validation of the solvers

In the next sections, the proposed numerical solvers are validated against a bunch of canonical test cases, first on non-smooth surfaces and then on a smooth surface.

4.2.1 Airy wave potential analytical solution

Let us consider the function $\phi(x,y,z)=e^{k_z z}\sin(k_x x+k_y y)$. The wavenumbers k_x, k_y and k_z are related by the relationship $k_z=\sqrt{k_x^2+k_y^2}$ for ϕ to be harmonic. This is a classical validation test for mixed BVP's. The accuracy of the pFFT-CBEM method [82] or the HPC method, recently developed by Shao and Faltinsen [83], have been measured on this test case. For this test function, the velocity components are easily expressed as $\phi_x=k_x e^{k_z z}\cos(k_x x+k_y y)$, $\phi_y=k_y e^{k_z z}\cos(k_x x+k_y y)$ and $\phi_z=k_z\phi$. The top surface of the box is chosen to be a Dirichlet surface where the value of ϕ is specified and all the other boundaries are given a value of the normal derivative ϕ_n according to the analytical solution.

4.2.2 Influence of the tolerance of the solver

In this section, the tolerance of GMRES is varied from $\epsilon_{gmres}=10^{-6}$ to $\epsilon_{gmres}=10^{-8}$. The errors under consideration are:

- The normalized maximum error of ϕ_n on the Dirichlet boundaries Γ_d denoted by L_∞
- The normalized average error of ϕ_n on the Dirichlet boundaries Γ_d denoted by L_2
- The normalized maximum error of ϕ on the Dirichlet boundaries Γ_n denoted by L_∞
- The normalized average error of ϕ on the Dirichlet boundaries Γ_n denoted by L_2

For these simulations, a Dunavant rule of order 10, which corresponds to a set of 25 Gauss points, is used for computing the regular integrals for both the first-order method and the second-order one. For computing the singular integrals with second-order shape functions, a Gauss-Legendre product of 6×6 Gauss points, uniformly distributed on a unit square and then mapped onto the unit triangle, is utilized.

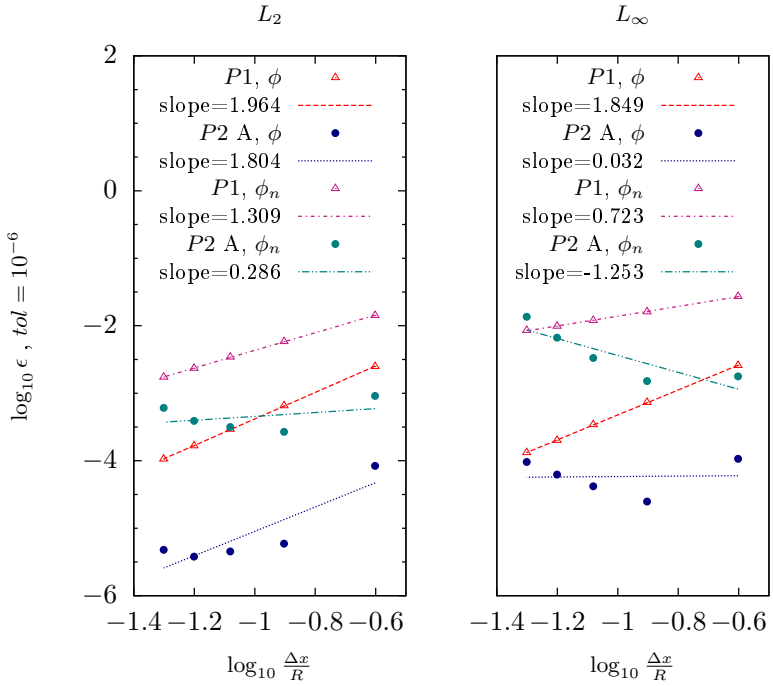


Figure 4.6: Comparison of the solver's accuracy depending on the order of the isoparametric element with a Dunavant rule of order 10 for regular integrals and 36 Gauss points for singular integrals with second-order elements. The tolerance of the GMRES solver is set to 10^{-6}.

The results obtained with a tolerance $\epsilon_{gmres} = 10^{-6}$ are plotted on Fig. (4.6). While the linear method, with analytical integration of the singularity, converges with a regular pattern, the numerical method based on second-order triangles fails at converging. The error is seen to increase after reaching a minimum value. However, we can argue that the second-order solver method still gives a more accurate result than the first-order one.

By changing the tolerance ϵ_{gmres} to 10^{-8}, the results of Fig. (4.7) show that the previous behaviour is merely related to the accuracy with which the linear system associated to Eq. (4.1) is solved. This time, we recover usual values of convergence with a higher rate by one order of magnitude for the variable ϕ defined on Neumann boundaries as compared to the variable ϕ_n defined on the top surface of the box. Moreover, we see that the convergence pattern with the second-order solver is not regular, as the error is seen to reach an almost constant value beyond the space step $\Delta x = 0.1R$ for the maximum error on ϕ_n. This fact has also been reported by Geng [84] who used cubic interpolations. Overall, the maximum errors are always converging with a slower rate than the average errors.

4.2.3 Influence of the Gauss points distribution

The previous results can be further improved by changing the quadrature rules. In Fig. (4.8) and Fig. (4.9), the convergence behaviour of each error indicator is displayed for two more accurate quadratures:

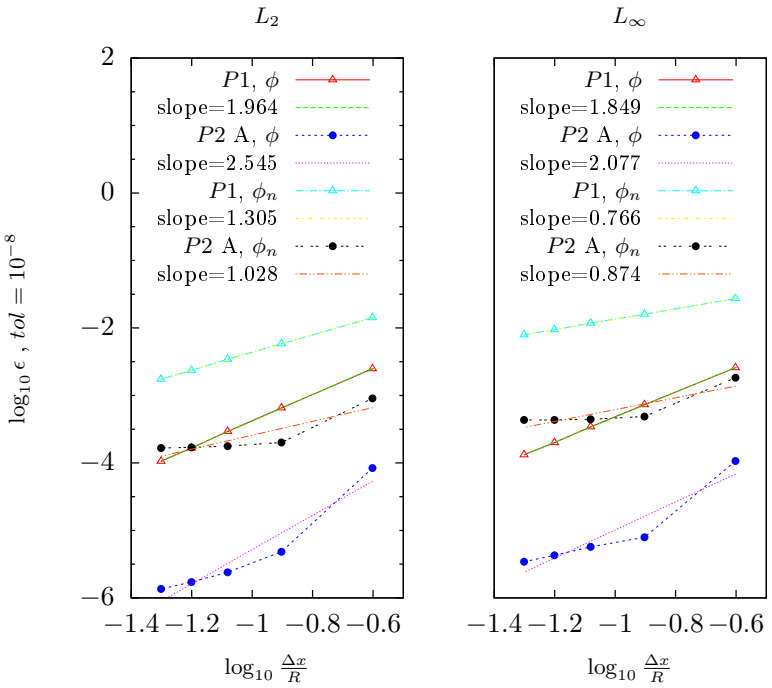


Figure 4.7: Comparison of the solver's accuracy depending on the order of the isoparametric element with a Dunavant rule of order 10 for regular integrals and 36 Gauss points for singular integrals with second-order elements. The tolerance of the GMRES solver is set to 10^{-8}.

- A Gauss-Legendre product for singular integrals of $n_p = 8$ by 8 Gauss points combined with a Dunavant rule of order $o_d = 10$ for regular integrals,
- A Gauss-Legendre product for singular integrals of $n_p = 10$ by 10 Gauss points combined with a Dunavant rule of order $o_d = 12$ for regular integrals.

It is worth noting that for the second quadrature strategy, also the indicators related to the maximum norm keep decreasing for the finest meshes, which was not observed with lower order quadratures in the section (4.2.2). This outlines the need for a high order quadrature rule, if one wants to achieve an efficient convergence of the problem with respect to the discretization.

Another remark is that the accuracy of the first-order method is not as sensitive to the quadrature rule as the second-order method since the order of magnitude of the error stays approximately the same. For the singular integrations, we have limited the sensitivity study to Gauss points distributions obtained by a direct application of the polar transformation around the singular point from a uniform Gauss-Legendre product in a square. At that stage, we could have imagined more complex distributions for the improvement of both the computational efficiency and the accuracy.

In the following chapters, most of the time, a Dunavant rule of order $o_d = 10$ is selected with a tolerance of the GMRES solver set to 10^{-6} if P1 elements are used and to 10^{-8} otherwise. For the singular integrals with a numerical integration, we use a distribution of 8×8 Gauss points.

4.2.4 Parallel efficiency with the library MPI

In table (4.1), the CPU times for the previous test cases are reported. As expected, we observe that the CPU time scales as a quadratic function of the number of nodes N due to a major part

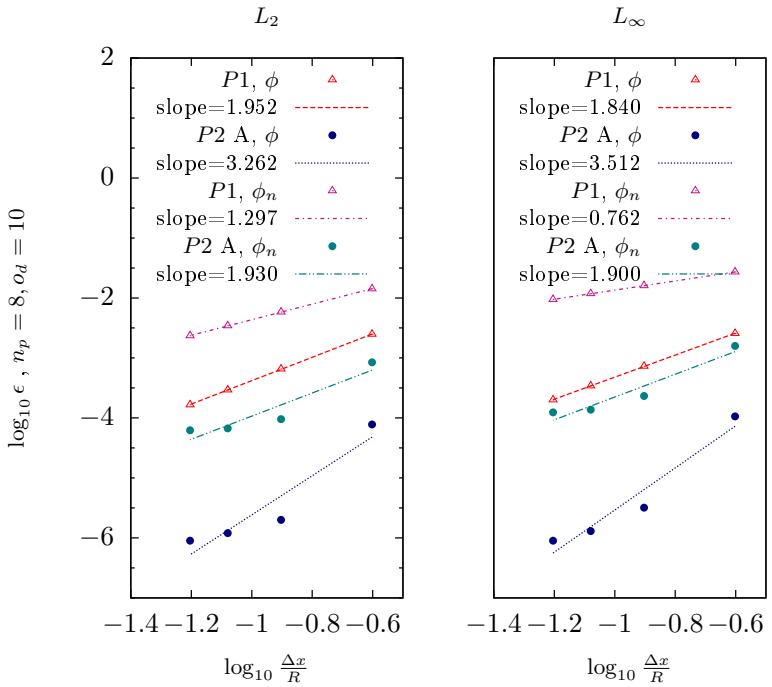


Figure 4.8: Comparison of the solver's accuracy with different orders of element with $n_p = 8$ and $o_d = 10$. The tolerance of the GMRES solver is set to 10^{-8}.

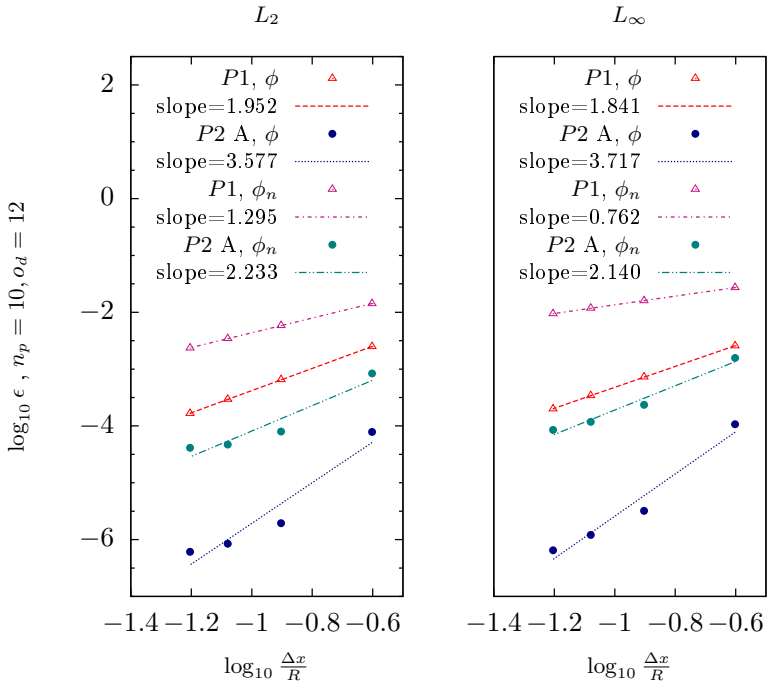


Figure 4.9: Comparison of the solver's accuracy with different orders of element with $n_p = 10$ and $o_d = 12$. The tolerance of the GMRES solver is set to 10^{-8}.

of the CPU time spent on the assembling of the matrix step. If we compare the results obtained with the second-order method given on the second column of table (4.1) and the results with the first-order method on the fourth column (which correpond to an identical number of nodes), we observe a moderate discrepancy of the CPU time T_1. For example, with the quadrature rule of parameters $n_p = 8$ and $o_d = 10$, we have $T_1 = 20.0613$s for the first-order method and

$\frac{L}{\Delta x} = N_f$	4	8	12	16
Δx	0.24	0.125	0.083	0.0625
N_{dof} P1 triangles	150	486	1014	1734
N_{dof} P2 triangles	486	1734	3750	6534
$n_p = 8$ $o_d = 10$ C	0.11	1.48	6.33	20.06
$n_p = 8$ $o_d = 10$ A	2.03	26.03	128.51	382.98
$n_p = 6$ $o_d = 10$ C	0.10	1.42	6.34	20.28
$n_p = 6$ $o_d = 10$ A	1.96	25.69	126.25	384.41
$n_p = 6$ $o_d = 10$ B	1.90	25.79	124.52	392.09
$n_p = 10$ $o_d = 12$ C	0.12	0.17	6.93	24.45
$n_p = 10$ $o_d = 12$ A	2.57	32.61	169.11	486.25

Table 4.1: CPU time (s) on a single processor for various quadrature rules as a function of the discretization. Three methods are tested : (i) A denotes the second-order method as in [1], (ii) B the second-order method as in [9] and (iii) C denotes the first-order method of [10].

$T_1 = 26.0336$s for the second-order one. This is likely due to the use of an analytical procedure for computing the singular integrals.

	Numerical Integration A [1]			Numerical Integration B[9]		
error	$N_e = 1210$	$N_e = 4850$	$N_e = 10924$	$N_e = 1210$	$N_e = 4850$	$N_e = 10924$
$\epsilon_{L^2}(\phi)$	$5,08.10^{-5}$	$5,83.10^{-6}$	$1,90.10^{-6}$	$5,08.10^{-5}$	$5,83.10^{-6}$	$1,90.10^{-6}$
$\epsilon_{L^2}(\phi_n)$	$5,80.10^{-4}$	$1,48.10^{-4}$	$6,89.10^{-5}$	$5,80.10^{-4}$	$1,48.10^{-4}$	$6,89.10^{-5}$
$\epsilon_{L^\infty}(\phi)$	$2,25.10^{-4}$	$5,34.10^{-5}$	$2,70.10^{-5}$	$2,25.10^{-4}$	$5,34.10^{-5}$	$2,70.10^{-5}$
$\epsilon_{L^\infty}(\phi_n)$	$5,04.10^{-3}$	$2,32.10^{-3}$	$1,50.10^{-3}$	$5,04.10^{-3}$	$2,32.10^{-3}$	$1,50.10^{-3}$

Table 4.2: Error indicators for the mixed Dirichlet-Neumann problem on a sphere of radius $R = 1m$ for the uniform flow condition $U = V = W = 1$. Errors are computed on three meshes (N_e is the number of elements) with two different way of solving the Laplace problem with BIE's. $\epsilon_{L^p}(f)$ is the normalized error of the function f in the norm L^p.

The developed method relies on a MPI implementation of the matrix assembling step, which enables to consider a sub-set of the columns on each processor, when computing the local matrices with the kernels G and H. We propose to measure the efficiency of this procedure on a final test case, which is based on solving the interior flow problem in a sphere centered in $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ with a radius $R = 1m$, for the analytical potential defined by $\phi(x, y, z) = Ux + Vy + Wz$ as studied in [82]. Here, the parameters are chosen such that $U = V = W = 1$. As before, we solve a mixed BVP with the Dirichlet surface defined on the top part of the sphere, *i.e.* for the points such that $z \geq 0$, and the Neumann surface on the remaining part with $z < 0$. The same error indicators are computed for 3 different meshes with: (i) the second-order solver with the method of Grilli *et al.* [1] and (ii) the second-order solver with the method of Bonnet [9]. The results are gathered in table (4.2), where the accuracy of the two proposed second-order strategies are evaluated. The performance of both techniques are identical for this test case.

In table (4.3), the parallel performance of the MPI implementation of the matrices assembling step is reported for three meshes of increasing size. Following Geng [84], the performance of the parallelization is defined as the ratio between the CPU time T_1 realized by an unique processor

	$N = 2422$		$N = 9702$		$N = 21850$	
p	$T_p(s)$	$\frac{T_1}{pT_p}$	$T_p(s)$	$\frac{T_1}{pT_p}$	$T_p(s)$	$\frac{T_1}{pT_p}$
1	76.98	1.00	1265.80	1.00	6150.42	1.00
2	35.02	1.10	545.19	1.16	2776.85	1.11
4	17.26	1.11	282.01	1.12	1372.49	1.12
8	8.77	1.10	138.70	1.14	719.38	1.07
16	6.84	0.70	75.32	1.05	365.75	1.05
32	2.52	0.95	41.75	0.95	200.64	0.96

Table 4.3: MPI parallel efficiency of the assembling step for the second-order method as a function of: (i) the dicretization and (ii) the number of processors p. T_p is the total CPU time divided by the number of processors under consideration. N denotes the number of nodes of the mesh.

and the CPU time pT_p realized on a cluster of p processors. It is observed that, for each considered mesh, there exists a maximum number of processors beyond which the increase of p does not lead to a significant reduction of the CPU time pT_p. Moreover, for a given number of processors, the bigger the mesh is, the more efficient the MPI procedure is.

4.2.5 First conclusions

In the previous sections, an exhaustive study of various BIE's solver has been performed in order to evaluate the main characteristics of the numerical model in terms of CPU time and accuracy. It can be inferred that the tolerance of the GMRES solver has an important effect on the convergence of various errors indicators (maximum normalized relative error on the flux ϕ_n especially), when singular integrals are computed numerically. Moreover, the results already obtained in Harris *et al.* [10] with a first-order solver on the elementary case of a linear potential $\phi(x, y, z) = x$ are completed here with different test cases. If a high precision was obtained with a linear function $\phi(x, y, z) = x$ in [10], the performance of this solver is seen to be diminished when computing higher order functions. In order to pave the way for future studies and developments, a more general technique has also been introduced in our model in order to have a general treatment of the singularity. These developments are inspired by other numerical models like that of Grilli *et al.* [1] and by the regularization technique described by Bonnet [9]. Both techniques are shown to achieve very similar performance. As expected, the complexity is essentialy scaling with the square of the number of nodes which makes necessary to use at least parallelization techniques for the sake of computational efficiency.

4.3 Time-stepping: construction of discrete differential operators

In this section, we focus on the accuracy of the differential operators required for advancing the free surface front in the model, when one wishes to use a Mixed Eulerian Lagrangian time stepping on triangular meshes described by isoparametric elements.

We recall that we are interested in computing the time marching of the free surface by means of a second-order Taylor expansion series, which reads:

$$\begin{cases} \phi(t+\Delta t, \mathbf{x}(t+\Delta t)) = \phi(t,x) + \dfrac{d\phi}{dt}\Delta t + \dfrac{d^2\phi}{dt^2}\dfrac{\Delta t^2}{2} + \mathcal{O}(\Delta t^3) \\ \mathbf{x}(t+\Delta t) = \mathbf{x}(t) + \dfrac{d\mathbf{x}}{dt}\Delta t + \dfrac{d^2\mathbf{x}}{dt^2}\dfrac{\Delta t^2}{2} + \mathcal{O}(\Delta t^3) \end{cases} \tag{4.20}$$

where Δt denotes the time-step.

Let $\mathbf{v}_p$ be a velocity field not necessarily equal to the velocity potential field $\nabla\phi$, which is chosen to advect the free surface particles. When using the velocity $\mathbf{v}_p$ for moving the free surface nodes, we can obtain the following coefficients involved in Eq. (4.20):

$$\begin{cases} \dfrac{d\phi}{dt} = \phi_t + \mathbf{v}_p \cdot \nabla\phi \\ \dfrac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{v}_p \end{cases} \tag{4.21}$$

Then, if we take again the material derivative of the first-order coefficients along the velocity vector $\mathbf{v}_p$, we obtain:

$$\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = \frac{\partial \mathbf{v}_p}{\partial t} + \nabla \mathbf{v}_p \cdot \mathbf{v}_p \tag{4.22}$$

and for the second-order variation of ϕ, we can write:

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} = \frac{d\phi_t}{dt} + \frac{d\mathbf{v}_p}{dt} \cdot \nabla\phi + \mathbf{v}_p \cdot \frac{d\nabla\phi}{dt} \tag{4.23}$$

Given the free surface dynamical boundary condition $\phi_t = -gz - \frac{1}{2}\nabla\phi \cdot \nabla\phi$, the first term can be further expanded into:

$$\frac{d\phi_t}{dt} = \mathbf{g} \cdot \nabla\phi - \nabla\phi \cdot (\nabla\phi_t + \nabla\nabla\phi \cdot \mathbf{v}_p) \tag{4.24}$$

while the other terms in (4.23) give:

$$\frac{d\mathbf{v}_p}{dt} \cdot \nabla\phi + \mathbf{v}_p \cdot \frac{d\nabla\phi}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}_p}{\partial t} \cdot \nabla\phi + (\nabla \mathbf{v}_p \cdot \mathbf{v}_p) \cdot \nabla\phi + \mathbf{v}_p \cdot \nabla\phi_t + (\nabla\nabla\phi \cdot \mathbf{v}_p) \cdot \mathbf{v}_p \tag{4.25}$$

If we sum all of these contributions, we obtain the following:

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} = \mathbf{g} \cdot \nabla\phi + (\mathbf{v}_p - \nabla\phi) \cdot \nabla\phi_t + \frac{\partial \mathbf{v}_p}{\partial t} \cdot \nabla\phi + (\nabla\nabla\phi \cdot \mathbf{v}_p) \cdot (\mathbf{v}_p - \nabla\phi) + (\nabla \mathbf{v}_p \cdot \mathbf{v}_p) \cdot \nabla\phi \tag{4.26}$$

One can easily check that setting $\mathbf{v}_p = \nabla\phi$ in the previous equation gives the Lagrangian second-order development:

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} = \mathbf{g} \cdot \nabla\phi + \nabla\phi_t \cdot \nabla\phi + (\nabla\nabla\phi \cdot \nabla\phi) \cdot \nabla\phi \tag{4.27}$$

as can be found *e.g.* in the Appendix A of [49].

For a semi-lagrangian scheme, one would rather consider $\mathbf{v}_p = \phi_z \mathbf{e}_z$ with $\mathbf{e}_z$ the unit vector in the vertical direction. For this scheme, which will be considered in this work, especially for fixed structures, one will have in the Cartesian coordinates system:

$$\begin{cases} \dfrac{d\phi}{dt} = \phi_t + \phi_z\phi_z \\ \dfrac{d\mathbf{x}}{dt} = \phi_z\mathbf{e}_z \\ \dfrac{d^2\phi}{dt^2} = -g\phi_z - \phi_x\phi_{tx} - \phi_y\phi_{ty} + \phi_z\phi_{zt} + \phi_z(\phi_z\phi_{zz} - \phi_x\phi_{xz} - \phi_y\phi_{yz}) \\ \dfrac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = \phi_{zt}\mathbf{e}_z + \phi_z\phi_{zz}\mathbf{e}_z \end{cases} \tag{4.28}$$

4.4 Discretized derivatives of the MEL time-stepping

We give in this section more details about the way we consruct the discrete differential operators on a triangular mesh and the accuracy obtained with respect to the grid resolution. Three strategies are proposed for first and second-order triangles.

4.4.1 First-order elements

For first-order elements, we start computing the velocity using a known result for linear shape functions in one triangle containing the particular vertex under consideration. In such a triangle, whose vertices are denoted by $\mathbf{x}_i$, $\mathbf{x}_j$ and $\mathbf{x}_k$, the gradient of a linear function is constant over the element and may be expressed likewise:

$$\nabla\phi_{T_{ijk}} = \frac{1}{2\mathcal{A}(T_{ijk})}((\phi_j - \phi_i)(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_k)^\perp + (\phi_k - \phi_i)(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i)^\perp) \tag{4.29}$$

with $\mathcal{A}(T_{ijk})$ the area of the triangular element T_{ijk}. Furthermore, the vector $(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_k)^\perp$ is obtained from the vector $\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_k$ by turning it by an angle of $\frac{\pi}{2}$ in the direct sense (with the outward unit normal vector being positively oriented towards the exterior of the fluid domain). We then take an average of this expression over the 1-ring neighbourhood of the vertex i, which is the set of triangles containing $\mathbf{x}_i$ and denoted by $\mathcal{S}_i$ (see Fig. (4.10)).

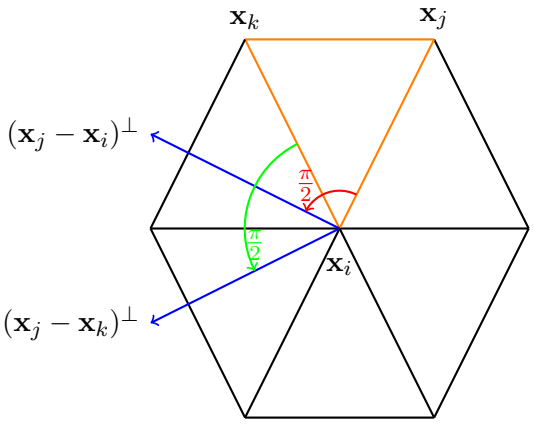


Figure 4.10: Sketch of the set of elements S_i, also called the 1-ring neighbourhood of the vertex $\mathbf{x}_i$.

A use of this method can be seen for example in the field of computer graphics [85] where these considerations are employed for evalutating quantities such as the principal curvature on

irregular meshes. This method is shown in [85] to achieve a comparable accuracy to finite differences schemes and has the advantage to be less sensitive to the mesh configuration.

For evaluating the terms related to the second-order derivatives of ϕ, we try to take advantage of the previous methodology. This is made possible by expressing the second-order tensor $\nabla\nabla\phi$ in a local basis attached to the vertex under consideration. Under its matrix form, this term reads:

$$\nabla\nabla_{\mathcal{B}(\mathbf{x_i})}\phi_{kj} = \nabla(\nabla\phi\cdot\mathbf{s}_k)\cdot\mathbf{s}_j \tag{4.30}$$

with $\mathcal{B}(\mathbf{x}_i) = (\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_3)$ an orthonormal basis such that $\mathbf{s}_3$ is the normal vector to the discrete surface at the node $\mathbf{x}_i$. In Eq. (4.30), we see that if we reinterpolate linearly the projections of $\nabla\phi$ on the local basis $\mathcal{B}(\mathbf{x}_i)$ over the 1-ring neighbourhood of $\mathbf{x}_i$, we can apply Eq. (4.29). The outward normal vector at $\mathbf{x}_i$ is evaluated by means of the following weighted sum:

$$\mathbf{s}_3(\mathbf{x}_i) = \frac{\sum_{T\in\mathcal{S}_i}\mathcal{A}(T)\mathbf{s}_{3T}}{\sum_{T\in\mathcal{S}_i}\mathcal{A}(T)} \tag{4.31}$$

with $\mathbf{s}_{3T}$ the outward normal of the triangular element T. This vector is further made unitary and used to define two tangential vectors to the discrete surface at $\mathbf{x}_i$. For this purpose, we need to define a first tangential vector by projecting any point $\mathbf{x}_j$ belonging to a triangle of the set $\mathcal{S}_i$ and different from the point $\mathbf{x}_i$ onto the tangential plane oriented by $\mathbf{s}_3$ and passing through $\mathbf{x}_i$ by means of the following formula:

$$\mathbf{s}_1(\mathbf{x}_i) = \frac{\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i - \mathbf{s}_3(\mathbf{x}_i)\cdot(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i)}{\|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i - \mathbf{s}_3(\mathbf{x}_i)\cdot(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i)\|} \tag{4.32}$$

A last vector of the basis $\mathcal{B}(\mathbf{x}_i)$ is then given by $\mathbf{s}_2(\mathbf{x}_i) = \mathbf{s}_3(\mathbf{x}_i)\times\mathbf{s}_1(\mathbf{x}_i)$.

4.4.2 Second-order elements: Fochesato *et al.*'s derivation

In this section, we recall briefly the idea introduced in the note [86]. Originally, this method was proposed with the aim to generalize the discrete $3D$ model of Grilli *et al.* [1] for the case where the basis vectors computed by means of the shape functions are not orthogonal. With isoparametric elements, the tangential vectors $\mathbf{s}$ and $\mathbf{m}$ are defined at the vertex $\mathbf{x}$ as:

$$\begin{aligned}\mathbf{s}(\xi_1(\mathbf{x}),\xi_2(\mathbf{x})) &= \partial_{\xi_1}N_j(\xi_1(\mathbf{x}),\xi_2(\mathbf{x}))\mathbf{x}_j\\ \mathbf{m}(\xi_1(\mathbf{x}),\xi_2(\mathbf{x})) &= \partial_{\xi_2}N_j(\xi_1(\mathbf{x}),\xi_2(\mathbf{x}))\mathbf{x}_j\end{aligned} \tag{4.33}$$

The non-orthogonality can occur even when using quadrangular regular meshes under strong deformation dynamics.

The method proposed in [86] consists in defining a new tangential vector $\mathbf{m}'$ as:

$$\mathbf{m}' = \frac{1}{\sqrt{1-\kappa^2}}\mathbf{m} - \frac{\kappa}{\sqrt{1-\kappa^2}}\mathbf{s} \tag{4.34}$$

with $\kappa = \mathbf{s}\cdot\mathbf{m}$. In this manner, the tangential derivative with respect to this new direction satisfies:

$$\phi_{m'} = \frac{1}{\sqrt{1-\kappa^2}}\phi_m - \frac{\kappa}{\sqrt{1-\kappa^2}}\phi_s \tag{4.35}$$

and leads to a new expression for the velocity:

$$\nabla\phi = \frac{1}{\sqrt{1-\kappa^2}}(\phi_s - \kappa\phi_m)\mathbf{s} + \frac{1}{\sqrt{1-\kappa^2}}(\phi_m - \kappa\phi_s)\mathbf{m} + \phi_n\mathbf{n} \tag{4.36}$$

Upon replacing in the original derivations of Grilli *et al.* [1] the derivatives ϕ_m by $\phi_{m'}$, one can obtain the corrections derived in [86] valid even when $\kappa \neq 0$. For computing the velocity at a particular vertex $\mathbf{x}_i$, Eq. (4.36) is evaluated on each element of the set $\mathcal{S}_i$, and an average of this quantity by the area of the elements of $\mathcal{S}_i$ is realized.

4.4.3 Second-order elements: linear reconstruction for the gradient of the velocity

In fact, when applied to irregular triangular meshes, the method of Fochesato *et al.* [86] immediately produced bad results as will be seen in the next sections even for basic geometries. In the absence of a correct mathematical formulation for the acceleration [3] $\mathbf{a} = \nabla\phi_t + \frac{1}{2}\nabla\phi \cdot \nabla\phi$, we propose to apply the method presented in the section (4.4.1) to the projections of the velocity $\nabla\phi$ on a local basis, this time evaluated thanks to Eq. (4.36). This procedure is reasonable when dealing with second-order elements, as we expect $\nabla\phi$ to have linear variations. However, it is clear that a deeper investigation of the correction of [86] would be worth doing in the future in order to accommodate elements of arbitrary high orders.

4.4.4 Derivatives on a regular unstructured mesh

We first adress the case of a cylinder, where the mesh, though unstructured, may be created using quadrangles, which makes for us easy to evaluate the convergence behaviour of the proposed method. Even if it represents an idealized case of unstructured mesh, it is very useful to start with as most of the validations proposed in the next chapters will rely on such a geometry.

Case of a quadratic function

We start computing the derivatives on a cylinder for the test function $\phi(x, y, z) = x^2 - y^2$. For this simple function, we have $\phi_x = 2x$, $\phi_y = 2y$ and $\phi_z = 0$. As before, we pay attention to the following error indicators:

- The normalized maximum error of the vector $\nabla\phi$ denoted by L_∞ in the graphics and defined as $\epsilon = \frac{\max_{i=1..N} \|\nabla\phi - \nabla\phi_{ref}\|_i}{\max_{i=1..N} \|\nabla\phi_{ref}\|_i}$
- The normalized average error of the vector $\nabla\phi$ denoted by L_2 in the graphics and defined as $\epsilon = \frac{\sum_{i=1}^{N} \|\nabla\phi - \nabla\phi_{ref}\|_i}{\sum_{i=1}^{N} \|\nabla\phi_{ref}\|_i}$

A typical mesh of the cylinder considered here is represented on Fig. (4.11).

We also represent, on each graphic of the following sections, a least mean square linear fit for each set of errors and we indicate in the legend the slope, which can be understood as the mean rate of convergence of the error.

The errors on the acceleration vector are defined accordingly. We give in Fig. (4.12) the normalized maximum and average errors for the velocity on a cylinder of radius $R = 1m$ and height $H = 1m$ for various discretizations. In addition, we consider two kind of second-order triangles generated from first-order triangles, either by defining the midpoints in the middle of the edges of the first-order triangle (which is referred to as P2 *A* flat in the graphics as the

[3] Note that the original derivation of Grilli *et al.* [1] without correction has also been tested extensively and gave wrong results for the acceleration of the potential as well when applied to unstructured meshes.

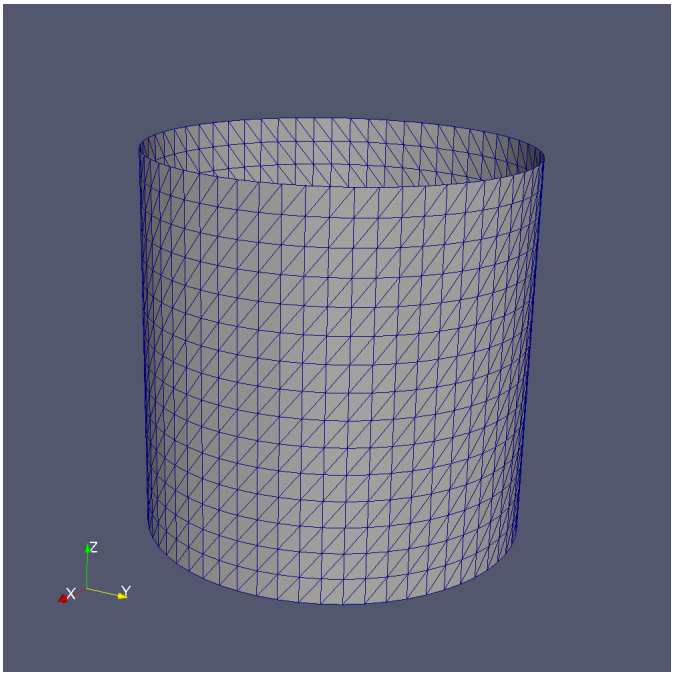


Figure 4.11: Regular triangular grid of the lateral side of a vertical cylinder.

triangle is flat), or by defining the midpoints on the actual underlying geometrical object (which is referred to as P2 A curved in the graphics as the triangle is hence curved). As expected, the second-order method converges at a rate of nearly 2 in maximum and average norms. The proposed first-order scheme is seen to achieve a nearly second-order convergence only for the average norm, while it converges at a rate greater than 1 in the maximum norm.

For the acceleration vector, we obtain similarly the results plotted on Fig. (4.13). For the chosen function, the analytical acceleration is given by $a_x = 4x$, $a_y = 4y$ and $a_z = 0$. In this case, we still observe a second-order convergence of all the schemes except the formulation of Fochesato *et al.* [86] (denoted by $P2$ B) for the average norm. For the maximum norm, the rate of convergence of the first-order scheme is slightly better than for the velocity, while it is seen that only the flat triangles enable to reach a second-order convergence in maximum norm for the second-order method. The same method applied to curved triangles has a rate of convergence reduced to ≈ 1.2.

Derivatives for an Airy wave potential

In this section, we use the same meshes as in section (4.4.4.0) and compute the errors for the high order function $\phi = \exp k_z z \ \sin(k_x x + k_y y)$. The velocity is given analytically by $\phi_x = k_x \exp k_z z \ \cos(k_x x + k_y y)$, $\phi_y = k_y \exp k_z z \ \cos(k_x x + k_y y)$ and $\phi_z = k_z \phi$. Concerning the errors for the first-order derivatives, we obtain in this case similar results than for $\phi = x^2 - y^2$ both in terms of accuracy and rate of convergence, as can be seen in Fig. (4.14).

After straightforward operations, we get the components of the acceleration vector field as $a_x = -k_x^2 \phi \phi_x - k_x k_y \phi \phi_y + k_z \phi_z \phi_x$, $a_y = -k_x k_y \phi \phi_x - k_y^2 \phi \phi_y + k_z \phi_z \phi_y$ and $a_z = k_z \phi_x^2 + k_z \phi_y^2 + k_z \phi_z \phi$. The corresponding results are plotted on Fig. (4.15). While the rates of convergence are almost preserved in average norm compared to the function $\phi = x^2 - y^2$, the accuracy is reduced. Moreover, even the second-order method on flat second-order triangles gives a worse rate of

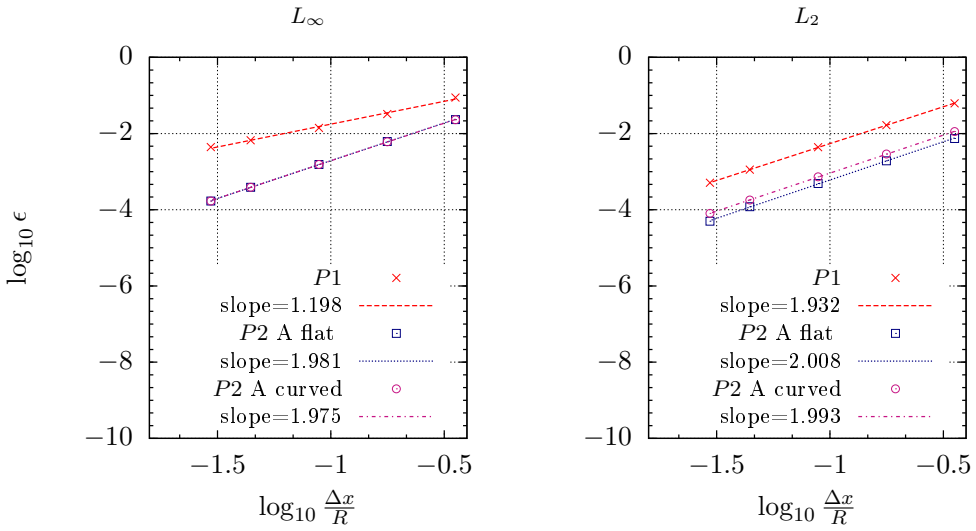


Figure 4.12: Maximum normalized error (left) and average normalized error (right) for the velocity vector $\mathbf{v}$ associated to the potential $\phi = x^2 - y^2$ on a cylinder for various numerical methods.

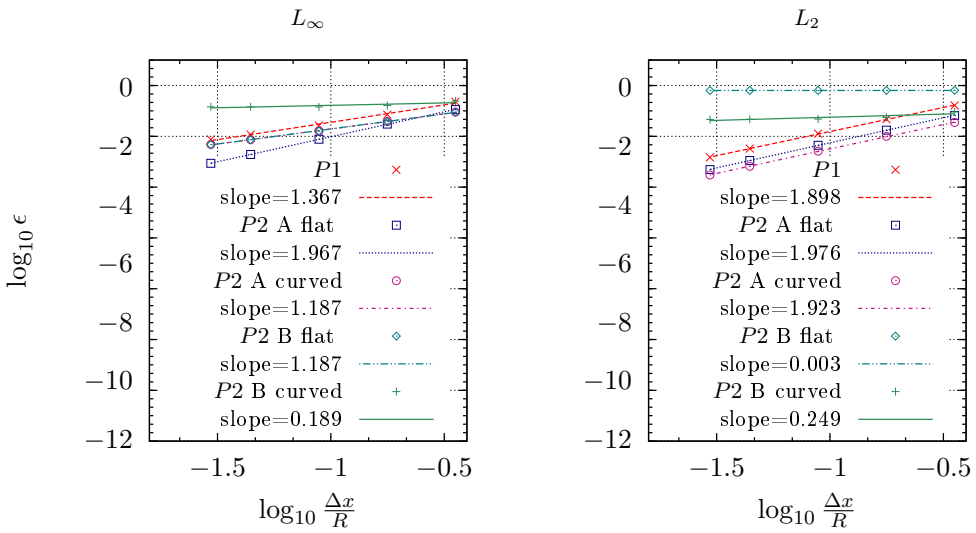


Figure 4.13: Maximum normalized error (left) and average normalized error (right) for the acceleration vector $\mathbf{a}$ associated to the potential $\phi = x^2 - y^2$ on a cylinder for various numerical methods.

convergence of nearly 1 in maximum norm and the accuracy achieved with the finest mesh is not better than $\mathcal{O}(10^{-2})$ for this norm.

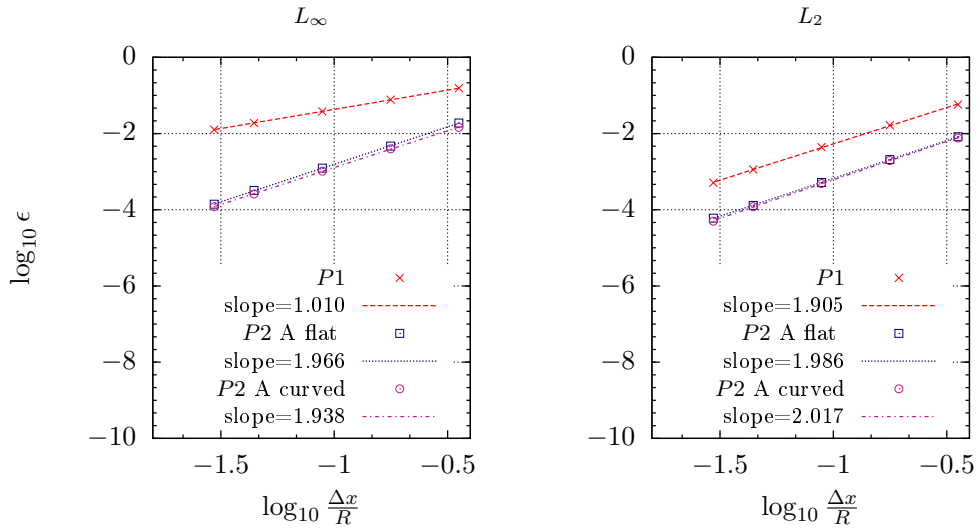


Figure 4.14: Maximum normalized error (left) and average normalized error (right) for the velocity vector $\mathbf{v}$ associated to the potential $\phi = \exp k_z z \ \sin(k_x x + k_y y)$ on a cylinder for various numerical methods.

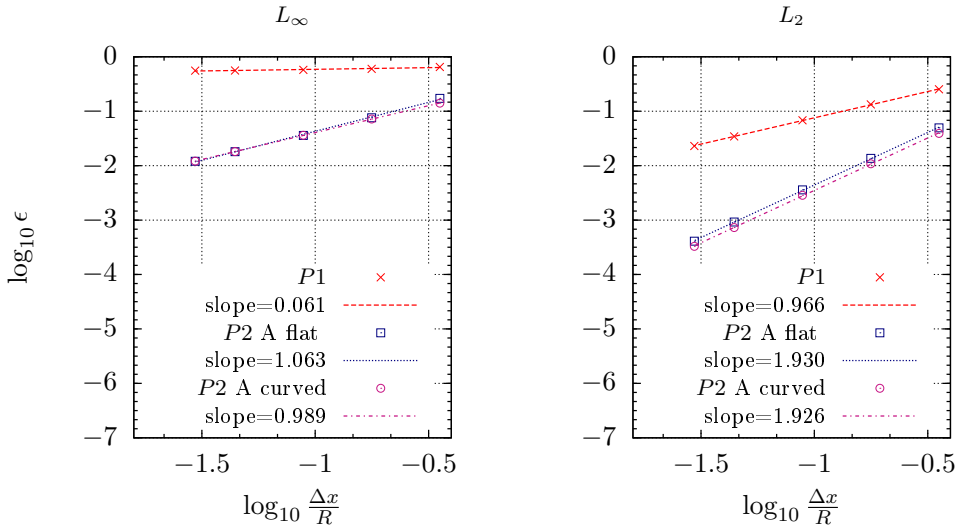


Figure 4.15: Maximum normalized error (left) and average normalized error (right) for the acceleration vector $\mathbf{a}$ associated to the potential $\phi = \exp k_z z \ \sin(k_x x + k_y y)$ on a cylinder for various numerical methods.

4.4.5 Derivatives on an irregular unstructured mesh

Having demonstrated the accuracy of the proposed differential operators on regular unstructured meshes of a cylinder, we now consider irregular unstructured meshes of a sphere. The properties of the meshes, generated by means of the algorithm BLSURF, are gathered in table (4.4). This algorithm, available in the SALOME platform, was found to be best-suited to this kind of geometrical object in comparison to other algorithms such as MEFISTO or NETGEN 2D, which produced poor aspect ratios when refining the mesh. The third mesh defined in table (4.4) is represented on Fig. (4.16).

p	0.3	0.2	0.1	0.07	0.05	0.04	0.03	0.025
N_{dof} P1	156	361	1452	2919	5719	9600	16004	23120
N_{el}	308	718	2900	5834	11434	18006	32004	46236
N_{dof} P2	618	1438	5802	11670	22870	36018	64010	92474
$\min AR$	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
$\max AR$	1.85	1.92	1.46	1.47	1.72	1.76	1.56	1.80
$\min A_T$	0.0173	0.00891	0.00230	0.00113	0.000472	0.000277	0.000200	0.000116
$\max A_T$	0.0693	0.0302	0.00745	0.00360	0.002	0.00122	0.000748	0.000534
l_{2D}	0.313	0.196	0.101	0.0698	0.0499	0.0398	0.299	0.0249

Table 4.4: Characteristics of the mesh generated by BLSURF with SALOME platform. p is an input parameter corresponding to the size of the discretization. N_{el} is the number of faces. N_{dof} is the number of vertices. AR is the aspect ratio of the triangle, A_T is the area of the triangle and l_{2D} is the two dimensional length which is close to the input parameter p.

Quadratic function on a sphere

On Fig. (4.17), the errors of the velocity field are represented for a sphere of radius $R = 1m$ with the same quadratic velocity potential as before defined as $\phi = x^2 - y^2$. We clearly observe similar trends as for the cylinder in terms of convergence's speed, except for the maximum norm with curved second-order triangles, which converges only at a rate of 1. However, a more significant gap between the second-order method applied to flat triangles or curved triangles is obtained this time in terms of accuracy. The second-order strategy with flat triangles is thus more versatile.

On Fig. (4.18), we compute the same error indicators for the acceleration vector, which is numerically obtained at the price of a much more complicated calculation as each component is the sum of three product of second-order derivatives with first-order ones. The linear method fails to converge for the maximum normalized norm. So is the second-order method using an average of the Fochesato *et al.*'s formula (denoted by $P2$ B on the Fig. (4.18)) over the 1-ring neighbourhood of each vertex. This seems to indicate that the relationships derived in [86] are, at least, not suitable to be averaged by the area of the elements, when using triangular meshes. As an alternative of this rather complex formulation, we tried to apply the method suggested for first-order elements to the velocity obtained with second-order elements applying the formulation of Fochesato *et al.* [86], as already explained in section (4.4.3).

The accuracy achieved on the sphere is slightly worse than for the cylinder from almost 1 order of magnitude. Even the mean rate of convergence in maximum norm of the method $P2$ A applied to flat triangles is decreased to a value of 1.426. Nevertheless, this latter scheme proves to converge in a very regular manner in average norm and provides an acceptable level of

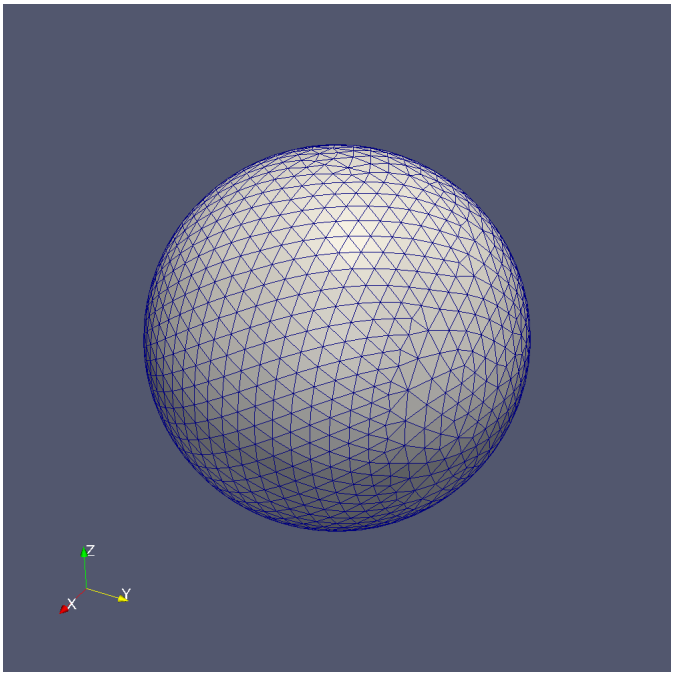


Figure 4.16: Irregular triangular grid of a sphere generated by the algorithm BLSURF.

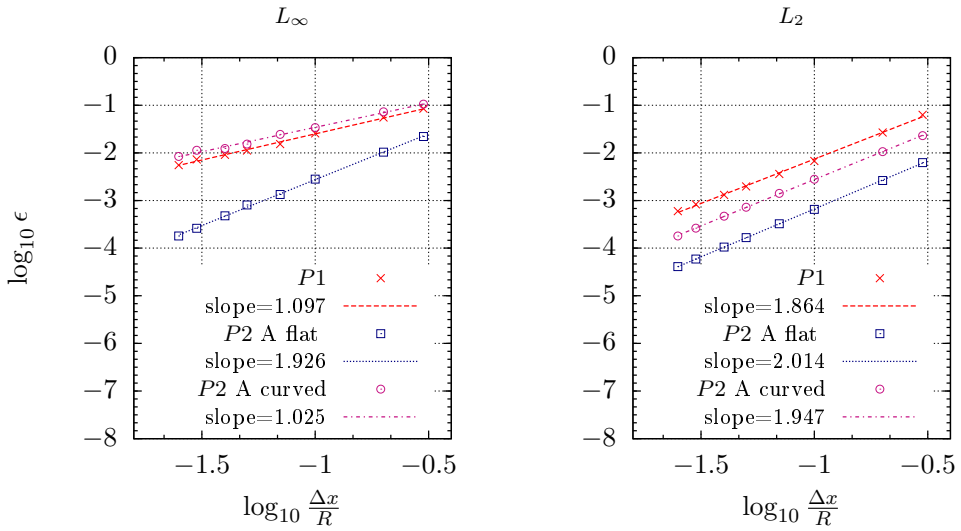


Figure 4.17: Maximum normalized error (left) and average normalized error (right) for the velocity vector $\mathbf{v}$ associated to the potential $\phi = x^2 - y^2$ on a sphere.

accuracy, the average error obtained with the finest mesh having an order of magnitude better than $\mathcal{O}(10^{-3})$. These somewhat worse performances of the differential operators can be explained by the irregular pattern of the mesh. Moreover, as can be seen in table (4.4), the geometrical properties of the mesh are not kept constant when refining the space step. For example, the maximum aspect ratio of the mesh (which is an important property for a good convergence of

numerical methods in general) is not equal for all the meshes tested in this study.

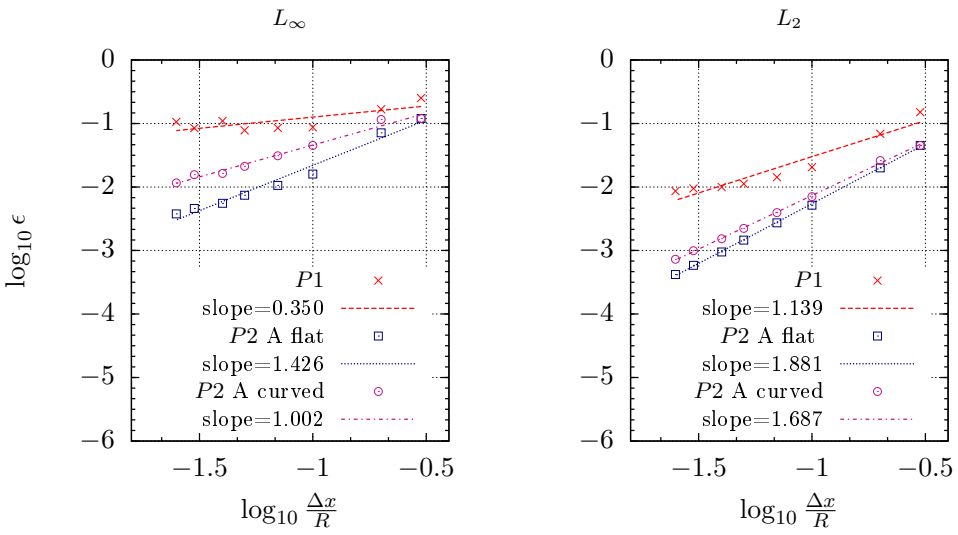


Figure 4.18: Maximum normalized error (left) and average normalized error (right) for the acceleration vector $\mathbf{a}$ associated to the potential $\phi = x^2 - y^2$ on a sphere.

Airy wave potential on a sphere

Now, if we perform the same analysis with the meshes described in table (4.4) with an Airy wave potential $\phi = \exp k_z z \ \sin(k_x x + k_y y)$, we obtain the errors displayed in Fig. (4.19).

The error for the acceleration is presented in Fig. (4.20). Surprisingly, the gap between the method $P2$ A on flat triangles and the method $P2$ A on curved triangles is reduced. Otherwise, the levels of accuracy are very similar to those obtained previously with a quadratic function. This time, the mean rate of convergence of the maximum normalized error is decreased to 1.276, even with the method $P2$ A on flat triangles.

Airy wave potential on a torus

We finally focus our attention on the case of the irregular mesh of a torus with a mean radius of $R_1 = 2m$ and a cross-section of radius $R_2 = 1m$. The second coarsest discretization of the torus considered here is represented on Fig.(4.22). We directly evaluate the performance of the different methods on the wave function $\phi = \exp k_z z \ \sin(k_x x + k_y y)$ for the velocity on Fig. (4.21) and for the acceleration on Fig. (4.23).

The errors are plotted with respect to the maximum edge's length found for each discretization. In this case, the meshes were generated using the $2D$ algorithm NETGEN2D. Note that the discretization parameter Δx is normalized by the radius of the cross-section, *i.e.* $R = R_2 = 1m$. The convergence's speed, in the case of the torus, is very similar to that obtained in the case of the sphere, which demonstrates the robustness of the operators with respect to the mesh configuration. Moreover, the accuracy achieved with the torus is found to be quite satisfactory as the finest discretization tested here is only such that $\frac{\Delta x}{R} = 0.0754$.

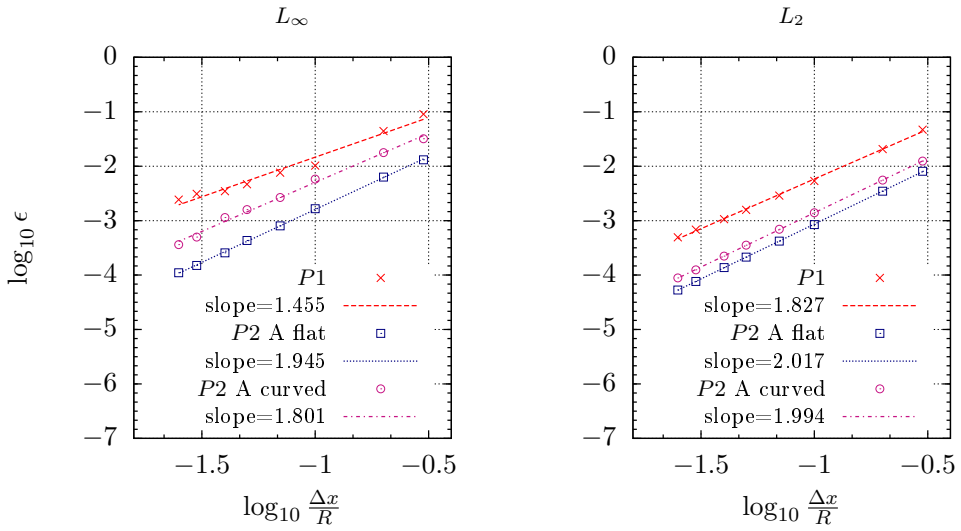


Figure 4.19: Maximum normalized error (left) and average normalized error (right) for the velocity vector $\mathbf{v}$ associated to the potential $\phi = \exp k_z z \ \sin(k_x x + k_y y)$ on a sphere.

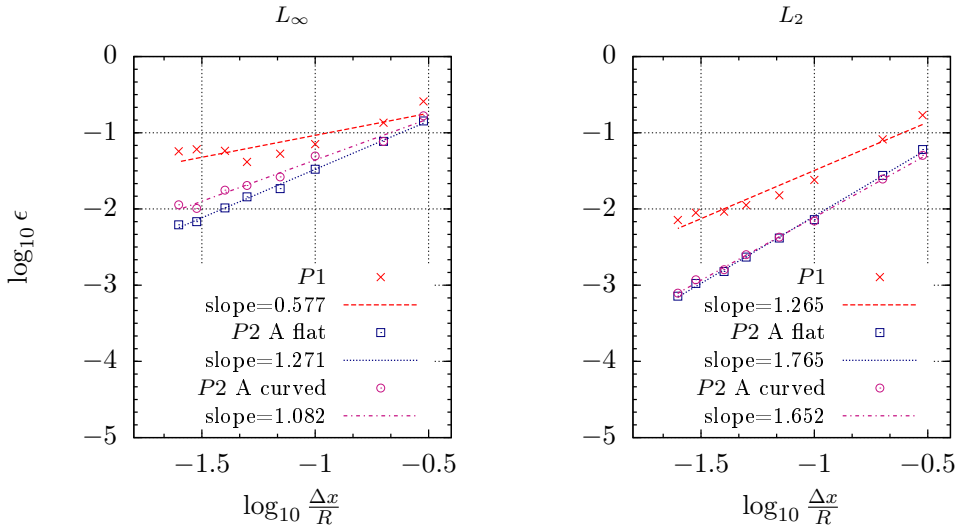


Figure 4.20: Maximum normalized error (left) and average normalized error (right) for the acceleration vector $\mathbf{a}$ associated to the potential $\phi = \exp k_z z \ \sin(k_x x + k_y y)$ on a sphere.

4.4.6 First conclusions

In the previous sections, we provided an exhaustive evaluation of the performance of various numerical schemes based on isoparametric elements employed to compute the surface derivatives requested in the MEL method. The derivatives are defined on each node by taking an average of

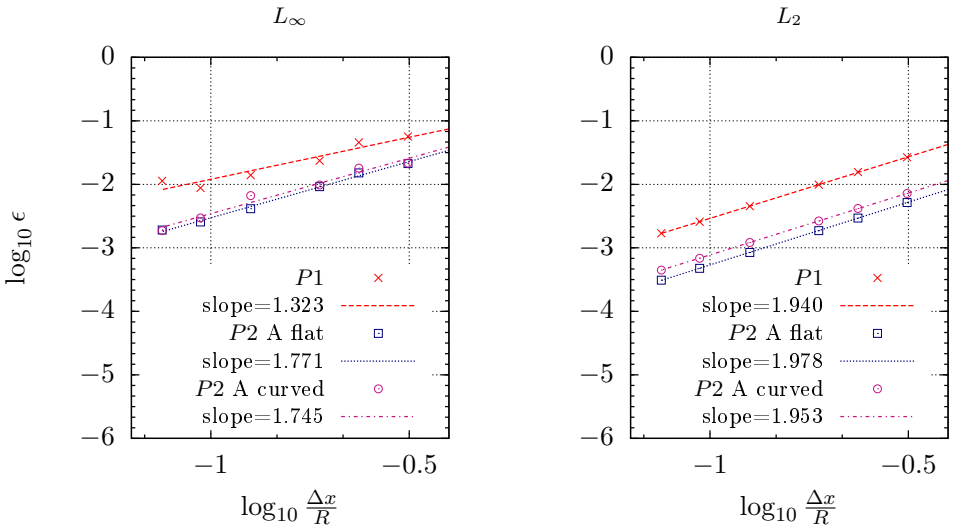


Figure 4.21: Maximum normalized error (left) and average normalized error (right) for the velocity vector $\mathbf{v}$ associated to the potential $\phi = \exp k_z z \ \sin(k_x x + k_y y)$ on a torus.

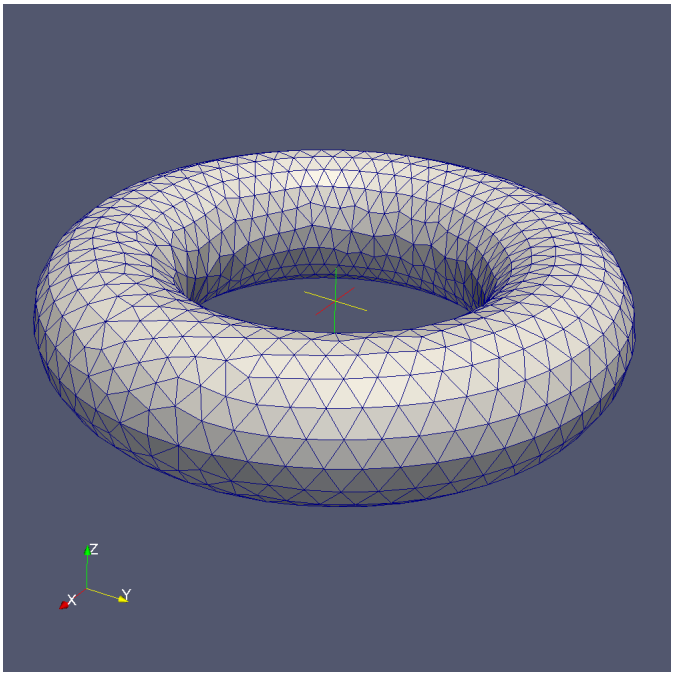


Figure 4.22: Irregular triangular grid of a torus generated by the algorithm NETGEN.

the derivative evaluated on each element of the 1-ring neighborhood. We observe good convergence properties both in maximum and average norms for the first order derivatives, whatever the order of the polynomials describing the geometry and the potential field. However, we notice, depending on the definition of the velocity potential and on the mesh configuration, that the acceleration, when calculated with first order polynomials, may exhibit a very slow convergence.

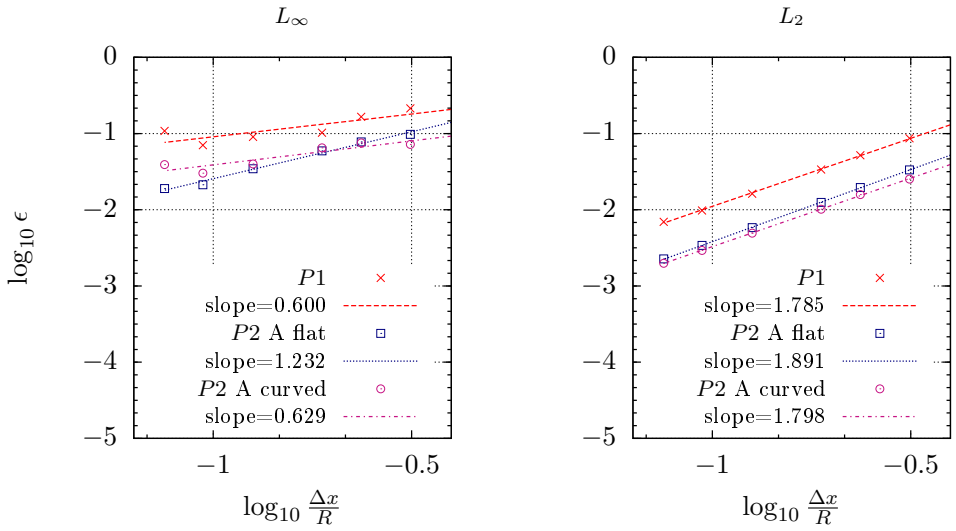


Figure 4.23: Maximum normalized error (left) and average normalized error (right) for the acceleration vector $\mathbf{a}$ associated to the potential $\phi = \exp k_z z \ \sin(k_x x + k_y y)$ on a torus.

Nevertheless, this problem can be circumvented by using high order polynomials, as suggested by the results obtained with quadratic triangles. In the next chapters, P1 and P2 elements will be used for modelling the wave-body interaction problem. As the P1 elements were the only discretizations available in the code when starting the developments, more simulations are done using P1 elements, despite worse accuracy.

Chapter 5

Validation du modèle 3D sur des cas académiques

5.1 Introduction

Nous décrivons ici l'application du modèle d'éléments de frontière 3D présenté au chapitre (4) dans un algorithme dédié aux interactions vague-structure rigide. Nous présentons d'abord, de manière détaillée, l'algorithme développé au cours de la thèse pour traiter des structures 3D. Puis nous validons le modèle numérique sur des cas test académiques. Nous considérons dans un premier temps des simulations sur des cylindres verticaux fixés, ce qui permet d'utiliser un schéma semi-lagrangien sans remaillage du domaine. Puis, nous étendons le domaine d'application de l'algorithme à des cas de cylindres verticaux en mouvements forcés arbitraires, pour lesquels l'emploi d'une technique de remaillage s'avère nécessaire, même pour des amplitudes du mouvement modérées. Pour chaque modèle, nous vérifions la convergence en espace de différentes grandeurs physiques du calcul.

5.2 Algorithme d'interactions vague-structure

Le principe de l'algorithme est en de nombreux points similaire à celui présenté dans le chapitre (3), consacré aux applications 2D. Nous en donnons néanmoins ici la généralisation à des géométries tridimensionnelles dont la partie susceptible de bouger dans la surface libre est de forme cylindrique. Le diagramme (2) résume les actions effectuées dans le modèle numérique. L'indice m désigne le mode du mouvement. $m = 7$ correspond à un mouvement libre de la structure. $m = 0$ correspond à un calcul de diffraction sans mouvement de la structure. $m \in [\![1, 6]\!]$ correspond à un mouvement imposé du solide tel que la coordonnée m du vecteur position de son centre de gravité est décrit par une fonction de la forme $x_m = a_m \sin \omega_m t$ avec a_m l'amplitude du mouvement et ω_m la fréquence du mouvement. Nous proposons d'expliciter quelques unes de ces étapes dans les sections qui suivent.

5.2.1 Etape 1 : assemblage parallèle du système linéaire

Nous renvoyons le lecteur au chapitre (4) pour un rappel des expressions mathématiques employées pour résoudre le problème de Laplace. Cette étape est parallélisée de manière similaire aux travaux présentés dans les publications [24] et [84] afin d'optimiser le temps de calcul CPU. Un appel aux fonctions MPI est effectué en début de programme. Chaque processeur parcourt

Algorithm 2 Algorithme d'interactions vague-structure 3D

Require: (0) $\Omega_f(t=0)$,$\phi(\mathbf{x},0)$,$\phi_n(\mathbf{x},0)$: initialiser la géométrie du domaine et les variables ϕ et ϕ_n

1: **for** $i=1$ to i_{max} **do**
2: (1) Assembler la matrice de coefficients d'influence du problème de Laplace
3: (2) Spécifier les conditions limites pour ϕ et ϕ_n
4: (3) Résoudre l'équation de Laplace associée à (ϕ,ϕ_n)
5: (4) Spécifier les conditions limites pour ϕ_t et ϕ_{tn}
6: (5) Résoudre l'équation de Laplace associée à (ϕ,ϕ_{tn})
7: **if** m<7 **then**
8: (6.a) Avancer en temps la géométrie et les conditions limites
9: **else**
10: (6.b) Calculer les efforts hydrodynamiques sur le solide
11: **if** i>1 **then**
12: (7.b) Calculer les erreurs relatives des composantes d'effort : $\epsilon_{n,0}$
13: **while** $\epsilon_{n,k} > 10^{-6}$ **do**
14: (8.b) Corriger le prédiction de l'effort ${\mathbf{F}^*}_{i,k+1} = \mathbf{F}^*_{i,k} + \omega(\mathbf{F}_{i,k} - \mathbf{F}^*_{i,k})$
15: (9.b) Mettre à jour la cinématique du solide avec un schéma de Newmark de paramètres (γ,β)
16: (10.b) Résoudre le problème de Laplace pour ϕ et ϕ_t
17: (11.b) Calculer les efforts hydrodynamiques sur le solide : $\mathbf{F}_{i,k+1}$
18: **end while**
19: **end if**
20: (12.b) Avancer en temps la géométrie et les conditions limites
21: (13.b) Prédire les efforts à l'instant suivant pour initialiser le schéma de Newmark : $\mathbf{F}^*_{i+1,0}$
22: **end if**
23: **end for**

alors l'ensemble des routines du programme et attribue aux éléments, lors de la lecture des données du maillage, un indice défini comme suit :

$$elemmask(i) = \left\lfloor \frac{i-1}{elemN} n_p \right\rfloor + 1 \tag{5.1}$$

avec i l'indice de l'élément, $elemN$ le nombre total d'éléments, n_p le nombre de processeurs mis en jeu et $\lfloor a \rfloor$ désigne la partie entière du réel a. Ainsi, le tableau $elemmask$ a np valeurs possibles qui varient entre 1 et n_p. Ce tableau est encore modifié dans chaque processeur en tenant compte du rang du processeur considéré dans le communicateur, que l'on note $myid$, pour valoir 1 si $elemmask = myid + 1$ et 0 ailleurs.

Cette répartition des éléments entre les processeurs permet de définir des sous-matrices du problème ayant le même nombre de lignes $nodeN$ (le nombre de noeuds du maillage) que les matrices originales mais un nombre de colonnes réduit $nodeNlocal$ (nombre de noeuds contenus dans des éléments ayant un certain indice). Nous définissons ensuite un tableau $nodeindex$ de taille $nodeN$ à valeurs dans $[0, nodeNlocal]$ afin d'assembler les sous-matrices à partir des indices globaux.

Dans la boucle principale d'assemblage des matrices G et H, chaque processeur ne va considérer que les coefficients d'influence de tous les noeuds du maillage sur le sous-ensemble d'éléments vérifiant $elemmask = 1$. Cela conduit à une économie substantielle du temps de calcul, compte-tenu de la prépondérance en temps CPU de l'étape d'assemblage du système linéaire par rapport à sa résolution avec GMRES.

5.2.2 Etape 2 : spécification des conditions limites pour le potentiel des vitesses

Cette étape consiste à spécifier les conditions limites sur les bords du domaine. Sur la surface libre Γ_f, une condition de Dirichlet est imposée à partir du développement lagrangien de Taylor d'ordre 2 en temps :

$$\phi(\mathbf{x}_t, t) = \phi(\mathbf{x}_{t-\Delta t}, t-\Delta t) + \frac{d\phi}{dt}(\mathbf{x}_{t-\Delta t}, t-\Delta t)\Delta t + \frac{d^2\phi}{dt^2}(\mathbf{x}_{t-\Delta t}, t-\Delta t)\frac{\Delta t^2}{2} \tag{5.2}$$

où $\mathbf{x}_t$ est la position qu'occupe un marqueur lagrangien de la surface libre à l'instant t.

Sur la surface du solide Γ_b, la condition limite à vérifier, en régime de fluide parfait, est une condition de non-pénétration donnée par l'expression :

$$\phi_n(\mathbf{x}, t) = (\dot{\mathbf{x}}_G(t) + \mathbf{\Omega}(t) \times (\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_G(t))) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}, t) \tag{5.3}$$

avec $\mathbf{\Omega}(t)$ le vecteur rotation du solide rigide, $\mathbf{x}_G(t)$ la position de son centre de gravité et $\mathbf{n}(\mathbf{x}, t)$ le vecteur normal unitaire extérieur au fluide au point $\mathbf{x}$ à l'instant t. En cas de mouvement forcé, ces informations de vitesses sont connues explicitement. En cas de mouvement libre, les vitesses sont intégrées par un schéma de Newmark à l'ordre 2 en temps, de sorte qu'elles sont connues à ce stade de l'algorithme. Enfin, il reste à générer des vagues dans le modèle. Cette question soulève à la fois des problèmes physiques et mathématiques. En effet, selon le degré de non-linéarité des vagues simulées, la distance à laquelle le champ incident est imposé (ou le choix de la troncature du domaine physique autour de l'objet à étudier) aura un impact direct sur les propriétés de la vague au niveau du solide et donc sur les efforts calculés. Par ailleurs, l'imposition d'un profil de vitesse, calé sur les théories de houle à l'entrée du domaine, n'est pas sans poser quelques difficultés techniques. On notera en premier lieu qu'en raison des réflexions

sur le solide, la condition d'entrée devient rapidement incompatible avec le flux calculé, ce qui provoque une divergence du modèle au bout de quelques pas de temps. De façon plus insidieuse, l'initialisation de la simulation par un modèle d'ordre fini peut générer des incompatibilités [4] avec les conditions non-linéaires de surface libre et par voie de conséquence des oscillations. Ce comportement peut être limité cependant par l'usage de rampes en temps afin de moduler les termes non-linéaires dans les conditions limites (voir l'article de Dommermuth [87]).

En fin de compte, nous appliquons sur les frontières d'entrée les conditions suivantes, déduites d'un modèle de vague linéaire :

$$\begin{aligned} &D(t) = \frac{1}{2}\left(1 - \cos\frac{\pi t}{T}\right), \quad t \leq T \\ &D(t) = 1, \quad t > T \\ &\theta_i(x,t) = k_i x - \omega_i t \\ &\tilde{z} = \frac{z - D(t)\eta_i(x=0,t)}{L_z + D(t)\eta_i(x=0,t)} \\ &\phi_n(x=0,t) = D(t) n_x \frac{\partial \phi_i}{\partial x}(x=0,\tilde{z},t) \end{aligned} \tag{5.4}$$

avec (η_i, ϕ_i) une surface libre et un potentiel solutions du problème potentiel à l'ordre 1, k_i le nombre d'onde de la vague incidente, ω_i la période de la vague incidente, n_x la composante de normale parallèle au vecteur d'onde, L_z la profondeur d'eau à l'entrée du domaine et $\tilde{z}$ la cote transformée avec un modèle de *stretching* pour éviter une surestimation des vitesses au-dessus du niveau moyen $z = 0$. Des tests ont également été réalisés avec un modèle de Stokes d'ordre 2 sans modèle de *stretching*. Néanmoins, ce modèle s'avère être moins robuste que le précédent vis à vis d'une augmentation de cambrure. Sur les frontières latérales restantes et sur le fond, une condition homogène $\phi_n = 0$ est utilisée.

5.2.3 Etape 3 : résolution du système linéaire par une méthode itérative

Le système linéaire est résolu au moyen de la méthode GMRES. Nous fixons la tolérance du solveur à 10^{-6} pour des éléments triangulaires linéaires et à 10^{-8} pour des éléments triangulaires quadratiques, conformément aux résultats du chapitre (4). Nous précisons que le système n'est pas préconditionné. Il pourrait être intéressant d'étudier de plus près l'effet de telles techniques sur la réduction du nombre d'itérations du solveur GMRES et l'optimisation du temps CPU. Néanmoins, nous n'avons pas jugé cet axe comme prioritaire dans ce projet, car le fait d'utiliser une formulation intégrale conduit naturellement, comme l'affirme Bonnet [9], à des termes diagonaux dominants, ce qui doit assurer un conditionnement correct du système linéaire.

5.2.4 Etapes 4 et 5 : résolution de la dérivée temporelle du potentiel

Pour résoudre le problème de Laplace associé à la dérivée temporelle eulérienne du potentiel ϕ_t, on utilise la condition dynamique de surface libre et on obtient donc une condition de type Dirichlet :

$$\phi_t(\mathbf{x}_t, t) = -gz(\mathbf{x}_t, t) - \frac{1}{2}\nabla\phi(\mathbf{x}_t, t) \cdot \nabla\phi(\mathbf{x}_t, t) \tag{5.5}$$

[4] Car le champ imposé est tronqué à un certain ordre et ne vérifie donc pas exactement les conditions de surface libre non-linéaires.

Sur la surface du solide, nous utilisons la formule donnée dans le chapitre (2) de cette thèse :

$$\phi_{tn} = \frac{d\mathbf{n}}{dt}\cdot(\dot{\mathbf{x}} - \nabla\phi) + \ddot{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{n} - \dot{\mathbf{x}}\cdot(\nabla\nabla\phi\cdot\mathbf{n}) \tag{5.6}$$

Afin d'obtenir un problème consistant avec le problème BEM associé au potentiel ϕ, nous complétons ces conditions limites par une condition de flux à l'entrée du domaine. Ce flux se déduit des équations (5.4) par la relation suivante :

$$\phi_{tn} = D(t)\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\phi_n}{D(t)}\right) + \dot{D}(t)\frac{\phi_n}{D(t)} \tag{5.7}$$

Enfin, sur le fond et les bords non-générateurs, on a une condition de flux nul $\phi_{tn} = 0$.

5.2.5 Etape $6.a$ ou $12.b$

Mouvement des surfaces déformables

A cette étape, on commence par appliquer le schéma temporel sur la surface libre par la formule de Taylor à l'ordre 2 pour les variables position $\mathbf{x}$ et potentiel de vitesse ϕ. En adoptant les notations définies plus haut, on obtient :

$$\phi(\mathbf{x}_{t+\Delta t}, t+\Delta t) = \phi(\mathbf{x}_t, t) + \frac{d\phi}{dt}(\mathbf{x}_t, t)\Delta t + \frac{d^2\phi}{dt^2}(\mathbf{x}_t, t)\frac{\Delta t^2}{2} \tag{5.8}$$

Puis afin de pallier à l'incompatibilité des vitesses à l'entrée du domaine, on corrige les conditions limites satisfaites par $\mathbf{x}$ et ϕ dans le développement de Taylor. Pour une cuve parallélépipédique de dimensions $L_x \times L_y \times L_z$, 2 types de corrections sont adoptées. La première concerne les noeuds situés en amont du solide devant la paroi génératrice. Dans cette zone, définie par les points de Γ_f dont les coordonnées horizontales x_1 et x_2 appartiennent à $[0, l_{AB}] \times [0, L_y]$, on corrige l'élévation de surface libre par:

$$\begin{aligned} x_3^* &\leftarrow x_3 - \Delta t\omega_i\left(\frac{x_1 - l_{AB}}{l_{AB}}\right)^2 (x_3 - D(t)\eta_i(x,z,t)) \\ \tilde{z}^* &\leftarrow \frac{x_3^* - D(t)\eta_i(x,z,t)}{L_z + D(t)\eta_i(x,z,t)} L_z \\ \phi^* &\leftarrow \phi - \Delta t\phi_i(x,\tilde{z},t) \end{aligned} \tag{5.9}$$

pour un modèle d'entrée monochromatique et monodirectionnel du premier ordre. En fin de canal, on opère une modification similaire du développement de Taylor sur les noeuds de Γ_f dont les coordonnées horizontales sont dans $[L_x - l_{AB}, L_x] \times [0, L_y]$:

$$\begin{aligned} x_3^* &\leftarrow x_3 - \Delta t\omega_i\left(\frac{x_1 - l_{AB}}{l_{AB}}\right)^2 x_3 \\ \phi^* &\leftarrow \phi - \Delta t\omega_i\left(\frac{x_1 - l_{AB}}{l_{AB}}\right)^2 \phi \end{aligned} \tag{5.10}$$

ce qui tend à ramener la surface libre vers sa position d'équilibre.

Ce type de plage est très facile à implémenter de par son caractère explicite, et peut se généraliser à d'autres géométries. Bien que facile d'usage et très efficace en présence d'ondes monochromatiques (ce qui constitue le coeur des validations fournies plus loin dans ce manuscrit),

cette formulation ne peut être utilisée pareillement avec des ondes polychromatiques. Une méthode plus récente, mise au point par Clamond *et al.* [88], permet de s'affranchir de la dépendance de l'efficacité du dispositif absorbant à la fréquence de l'onde étudiée. Cette technique pourrait se substituer avantageusement à la formulation utilisée ici en fin de canal. Néanmoins, il resterait à trouver un dispositif similaire pour l'absorption des ondes réfléchies par le solide devant la paroi génératrice.

Mouvement des surfaces indéformables

Indépendamment du mouvement des marqueurs de surface libre, les marqueurs de la surface du solide sont déplacés dans un mouvement de corps rigide. Pour plus de clarté dans l'exposé qui suit, nous nous limitons à un mouvement imposé de la paroi. Puisque le solide est supposé rigide, on a pour tout point A et B appartenant au solide la relation $\{\frac{d(\mathbf{x}_B-\mathbf{x}_A)}{dt}\}_{\mathcal{B}} = 0$ dans le référentiel du solide $\mathcal{B}$.

Nous définissons les matrices de rotation selon les axes d'un référentiel fixe $\mathcal{R}$ comme :

$$R_{\theta_x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_x & -\sin\theta_x \\ 0 & \sin\theta_x & \cos\theta_x \end{pmatrix} \tag{5.11}$$

$$R_{\theta_y} = \begin{pmatrix} \cos\theta_y & 0 & \sin\theta_y \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta_y & 0 & \cos\theta_y \end{pmatrix} \tag{5.12}$$

$$R_{\theta_z} = \begin{pmatrix} \cos\theta_z & -\sin\theta_z & 0 \\ \sin\theta_z & \cos\theta_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{5.13}$$

A chaque instant, la position $\mathbf{x}$ d'un marqueur arbitraire de la surface solide s'exprime dans le référentiel fixe $\mathcal{R}$ du laboratoire comme :

$$(\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_G(t))_{\mathcal{R}} = R_{\theta_x} R_{\theta_y} R_{\theta_z} (\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_G(t))_{\mathcal{B}} \tag{5.14}$$

avec $(\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_G(t))_{\mathcal{B}}$ un vecteur invariant dans le temps. Dans la suite, on considère deux bases de calcul. La première est associée au référentiel fixe du laboratoire $\mathcal{R} = (\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$. La seconde est une base fixe dans le référentiel du solide $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_{xb}, \mathbf{e}_{yb}, \mathbf{e}_{zb})$. Elle s'obtient par application de la transformation $R_{\theta_x} R_{\theta_y} R_{\theta_z}$ sur la base fixe de $\mathcal{R}$ définie par les vecteurs $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$.

Fusion des interfaces

En raison du mouvement lagrangien des particules sur la surface libre, les maillages déformés du fluide et du solide (conformes avant le déplacement des frontières du domaine) ne coïncident pas nécessairement. Comme souligné dans Bai et Eatock Taylor [37], la distance introduite entre les deux maillages au niveau de la ligne de flottaison reste toutefois très faible, ce qui incite à se contenter d'une projection des noeuds de surface libre sur le maillage de la structure déplacée. C'est cette technique que nous adoptons en la particularisant au cas d'une paroi plane, pour les bords d'un domaine rectangulaire, et au cas d'une paroi cylindrique pour le bord de la structure étudiée.

Ainsi, chaque point de la surface libre appartenant à l'intersection avec le solide effectue le protocole suivant entre 2 itérations :

1. Déplacement lagrangien d'ordre 2, obtention d'une position intermédiaire $\mathbf{x}_f^*$:

$$\mathbf{x}_f^*(t+\Delta t) = \mathbf{x}_f(t) + \frac{d\mathbf{x}_f}{dt}\Delta t + \frac{d^2\mathbf{x}_f}{dt^2}\frac{\Delta t^2}{2} \tag{5.15}$$

2. Expression de $\mathbf{x}_f^*$ dans le référentiel du solide $\mathcal{B}$:

$$\mathbf{x}_f^*(t+\Delta t)_{\mathcal{B}} - \mathbf{x}_G(t+\Delta t)_{\mathcal{B}} = R_{\theta_z}^{-1}R_{\theta_y}^{-1}R_{\theta_x}^{-1}(\mathbf{x}_f^*(t+\Delta t) - \mathbf{x}_G(t+\Delta t))_{\mathcal{R}} \tag{5.16}$$

3. Expression de $\mathbf{x}_f^*(t+\Delta t)_{\mathcal{B}}$ dans un jeu de coordonnées adapté à la forme géométrique considérée (pour un cylindre, on adopte les coordonnées polaires) :

$$\mathbf{x}_f^*(t+\Delta t)_{\mathcal{B}} - \mathbf{x}_G(t+\Delta t)_{\mathcal{B}} = r_f(\cos\theta_f\mathbf{e}_{xb} + \sin\theta_f\mathbf{e}_{yb}) + z_f\mathbf{e}_{zb} \tag{5.17}$$

4. Correction de la coordonnée radiale r_f par le rayon du cylindre R_b dans le référentiel du solide :

$$\mathbf{x}_f(t+\Delta t)_{\mathcal{B}} - \mathbf{x}_G(t+\Delta t)_{\mathcal{B}} = R_b(\cos\theta_f\mathbf{e}_{xb} + \sin\theta_f\mathbf{e}_{yb}) + z_f\mathbf{e}_{zb} \tag{5.18}$$

5. Transformation de la nouvelle coordonnée $\mathbf{x}_f(t+\Delta t)_{\mathcal{B}}$ dans le référentiel fixe $\mathcal{R}$:

$$\mathbf{x}_f(t+\Delta t)_{\mathcal{R}} = \mathbf{x}_G(t+\Delta t)_{\mathcal{R}} + R_{\theta_x}R_{\theta_y}R_{\theta_z}(\mathbf{x}_f(t+\Delta t) - \mathbf{x}_G(t+\Delta t))_{\mathcal{B}} \tag{5.19}$$

Pour chaque noeud double de l'intersection, on note $\mathbf{x}_f$ le vecteur position du noeud appartenant à la surface libre et $\mathbf{x}_b$ le vecteur position du noeud appartenant à la surface du solide. Une fois cette étape effectuée, et afin de garder une distribution angulaire de noeuds inchangée sur la surface du solide, nous interpolons les élévations de surface libre par rapport à la ligne de flottaison au repos dans le référentiel associé au solide. En d'autres termes, pour chaque noeud double de l'intersection, on exprime $\mathbf{x}_f$ et $\mathbf{x}_b$ dans le repère $(\mathbf{e}_{xb}, \mathbf{e}_{yb}, \mathbf{e}_{zb})$:

$$\begin{aligned}(\mathbf{x}_f - \mathbf{x}_G)_{\mathcal{B}} &= R_{\theta_z}^{-1}R_{\theta_y}^{-1}R_{\theta_x}^{-1}(\mathbf{x}_f - \mathbf{x}_G)_{\mathcal{R}} = R_b(\cos\theta_f\mathbf{e}_{xb} + \sin\theta_f\mathbf{e}_{yb}) + z_f\mathbf{e}_{zb}\\ (\mathbf{x}_b - \mathbf{x}_G)_{\mathcal{B}} &= R_{\theta_z}^{-1}R_{\theta_y}^{-1}R_{\theta_x}^{-1}(\mathbf{x}_b - \mathbf{x}_G)_{\mathcal{R}} = R_b(\cos\theta_b\mathbf{e}_{xb} + \sin\theta_b\mathbf{e}_{yb}) + z_f\mathbf{e}_{zb}\end{aligned} \tag{5.20}$$

On calcule alors pour chaque angle θ_{bj} les indices :

$$\begin{aligned}i_1 &= \min_{i\in[\![1,N_d]\!]}[|\theta_{fi} - \theta_{bj}|; \theta_{bj} \geq \theta_{fi}]\\ i_2 &= \min_{i\in[\![1,N_d]\!]}[|\theta_{fi} - \theta_{bj}|; \theta_{bj} < \theta_{fi}]\end{aligned} \tag{5.21}$$

avec N_d le nombre de noeuds doubles à l'intersection entre le maillage du solide et le maillage de la surface libre. On interpole ensuite linéairement les valeurs du potentiel ϕ_j et d'élévation de surface libre $(\mathbf{x}_f - \mathbf{x}_b)_{\mathcal{B}} \cdot \mathbf{e}_{zb}$ dans l'intervalle $[\theta_{i_1}, \theta_{i_2}]$.

Filtrage de la ligne de flottaison

Le filtrage de la solution sur l'intersection entre la structure et la surface libre s'avère nécessaire quand on considère des cambrures élevées. Sans filtrage, on observe après quelques trains de vagues l'apparition d'oscillations, qui, sans faire diverger le calcul, ont tendance à se propager autour de la structure.

Nous appliquons comme dans [65, 21] une formule de filtrage à 7 points sur les variables ϕ et $(\mathbf{x}_f - \mathbf{x}_b)_{\mathcal{B}} \cdot \mathbf{e}_{zb}$. Pour le potentiel ϕ, cette formule s'exprime comme :

$$\phi_i = \frac{1}{32}(-\phi_{i-3} + 9\phi_{i-1} + 16\phi_i + 9\phi_{i+1} - \phi_{i+3}) \tag{5.22}$$

Dans le cadre du schéma semi-lagrangien, cette technique, appliquée uniquement aux noeuds de la ligne de flottaison [5], suffit à régulariser la solution même pour des états de mer de cambrures intermédiaires.

Gestion des noeuds de la surface libre

Afin de conserver une distribution de noeuds homogène sur la surface libre, on ne peut se contenter d'appliquer le schéma lagrangien avec une vitesse d'advection égale à la vitesse potentielle. Les marqueurs lagrangiens doivent être redistribués spatialement afin d'éviter leur concentration dans les zones de forts gradients de vitesse, ce qui a tendance à favoriser l'apparition d'instabilités. Plusieurs stratégies de gestion du maillage peuvent être envisagées. On peut les répertorier en 2 catégories :

- Méthode de remaillage *a priori*: méthode ALE, récemment mise en oeuvre sur des problèmes résolus par éléments de frontière par Mola et al. [41],
- Méthode de remaillage *a posteriori* : méthode de *Laplace Smoothing*, par exemple, mise en oeuvre notamment par Bai et Eatock Taylor [37].

La première méthode est sans doute la plus satisfaisante d'un point de vue mathématique, car elle permet de définir *a priori* une vitesse de maillage, au prix de la résolution d'un problème aux limites supplémentaire. Compte-tenu de sa complexité et d'autres priorités de développement dans le présent modèle numérique, nous lui avons préféré la seconde technique.

De manière générale, la technique de *Laplace Smoothing* est souvent utilisée pour améliorer la qualité d'un maillage [89]. Elle consiste à vérifier en tous points la relation suivante :

$$\mathbf{x}_i = \frac{1}{card(\mathcal{S}_i)} \sum_{j=1}^{card(\mathcal{S}_i)} \mathbf{x}_j \tag{5.23}$$

avec $\mathcal{S}_i$ l'ensemble des triangles ayant un de ses sommets confondu avec le noeud $\mathbf{x}_i$, et $card(\mathcal{S}_i)$ le nombre d'éléments de l'ensemble $\mathcal{S}_i$. Plutôt que de chercher à résoudre cette équation en tous points du maillage, on l'applique de manière explicite à tous les noeuds, en sauvegardant au préalable les noeuds et les variables associées du précédent maillage. Noter qu'on applique ces relations au maillage 2D obtenu en projetant les noeuds de la surface libre sur un plan horizontal. Les étapes principales de cette technique sont rappelées dans le diagramme de l'algorithme (3). $\mathbf{x}_i^{1,2}$ désigne les 2 coordonnées du vecteur position $\mathbf{x}_i$ du noeud i du maillage dans le plan $z = 0$. ejk est l'indice global du k-ième sommet du j-ième triangle de l'ensemble $\mathcal{S}_i$.

Le test utilisé pour identifier l'élément dans lequel se trouve chaque noeud du maillage modifié (voir Fig. (5.1)) est tiré de [39]. La seule limitation de ce test réside dans le fait qu'on suppose que les bords des triangles sont rectilignes. Pour des triangles courbés, on peut plutôt chercher les coordonnées du noeud $\mathbf{x}_i$ modifié dans l'élément de référence pour chaque élément de l'ensemble $\mathcal{S}_i$ et vérifier que le couple (ξ_1, ξ_2) ainsi trouvé appartient bien au triangle de référence Γ_ξ.

[5] Cela représente, somme toute, une très faible proportion des noeuds du maillage.

Algorithm 3 Algorithme de *Laplace Smoothing*

$\mathbf{x}_{old} = \mathbf{x}$, $\phi_{old} = \phi$
for $i = 1$ to $nodeN$ **do**
  $\mathbf{x}_i = 0$
  for $j = 1$ to $card(\mathcal{S}_i)$ **do**
    for $k = 1$ to 3 **do**
      if $ejk \neq i$ **then**
        $x_i^{1,2} \leftarrow x_i^{1,2} + x_{old,ejk}^{1,2}$
      end if
    end for
  end for
  $\mathbf{x}_i^{1,2} = \frac{\mathbf{x}_i^{1,2}}{card(\mathcal{S}_i)}$ pour $k = 1$ ou 2
end for
for $i = 1$ to $nodeN$ **do**
  for $j = 1$ to $\mathcal{S}_i$ **do**
    $\mathbf{v}_{i1}^{1,2} = \mathbf{x}_i^{1,2} - \mathbf{x}_{old,ej1}^{1,2}$
    $\mathbf{v}_{i2}^{1,2} = \mathbf{x}_i^{1,2} - \mathbf{x}_{old,ej2}^{1,2}$
    $\mathbf{v}_{i3}^{1,2} = \mathbf{x}_i^{1,2} - \mathbf{x}_{old,ej3}^{1,2}$
    $\mathbf{v}_{21}^{1,2} = \mathbf{x}_{old,ej2}^{1,2} - \mathbf{x}_{old,ej1}^{1,2}$
    $\mathbf{v}_{32}^{1,2} = \mathbf{x}_{old,ej3}^{1,2} - \mathbf{x}_{old,ej2}^{1,2}$
    $\mathbf{v}_{13}^{1,2} = \mathbf{x}_{old,ej1}^{1,2} - \mathbf{x}_{old,ej3}^{1,2}$
    if $\mathbf{v}_{i1} \cdot \mathbf{v}_{21} \geq 0$ **and** $\mathbf{v}_{i2} \cdot \mathbf{v}_{32} \geq 0$ **and** $\mathbf{v}_{i3} \cdot \mathbf{v}_{13} \geq 0$ **then**
      Trouver les coordonnées (ξ_1, ξ_2) dans l'élément de référence Γ_ξ correspondant au point $\mathbf{x}_i^{1,2}$
      Réinterpoler $\mathbf{x}_i^3$ et ϕ_i dans l'élément j
    end if
  end for
end for

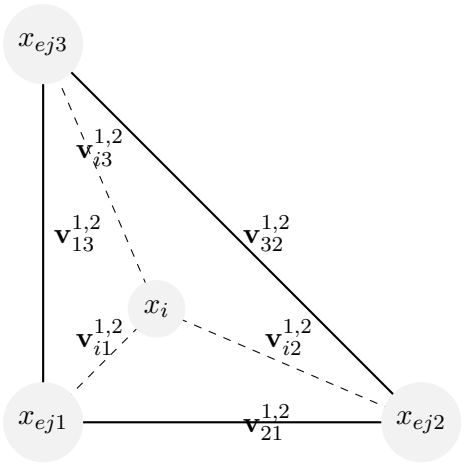


Figure 5.1: Schéma de principe pour identifier l'élément dans lequel se trouve un noeud.

Remaillage des parois solides

Cette dernière étape consiste à redistribuer les noeuds des parois mobiles de manière uniforme par rapport au run-up local. Cette étape est sans doute un point qui pourrait être fortement amélioré afin de prendre en compte des surfaces plus générales qu'un cylindre vertical. L'hypothèse la plus contraignante concerne les maillages de ces surfaces qui sont triangulaires mais obtenus en divisant par la diagonale des quadrangles. Ainsi le maillage doit être, au moins à proximité de la surface libre, géométriquement structuré. Malheureusement, les connectivités obtenues sur ces sous-maillages avec la plateforme SALOME ne le sont pas, de telle sorte qu'il nous est nécessaire de définir une table qui réordonne ces indices afin de pouvoir effectuer cette étape. On fait aussi l'hypothèse qu'on connaît analytiquement la forme à remailler.

5.3 Validation du schéma semi-lagrangien

Nous présentons dans les sections suivantes plusieurs résulats obtenus avec le formalisme semi-lagrangien pour un cas test académique en diffraction.

5.3.1 Chargement hydrodynamique induit par des vagues longues sur un cylindre vertical ancré au sol

Ce cas test a été initialement exploré par Ferrant en 2000 [90], qui applique un schéma en temps de type $RK4$ et des fonctions de forme linéaires pour résoudre le problème de diffraction non-linéaire. Il s'agit de l'analyse de l'effort longitudinal exercé par une vague longue sur un cylindre vertical de rayon R ancré au fond, avec un nombre d'onde tel que $kR = 0.245$. Bien que très classique, ce cas test a le mérite de permettre de confronter la précision des modèles numériques pour le calcul d'harmoniques d'ordre élevé, ce qui est la raison d'être d'un modèle complètement non-linéaire. Comme expliqué dans [83], ce cas test correspond à un nombre de Keulegan–Carpenter suffisamment faible pour ignorer les effets de viscosité. Les calculs de [90] sont comparés aux données expérimentales de Huseby et Grue [91] et un accord satisfaisant est trouvé, tant en termes d'amplitude de l'effort horizontal que de phase jusqu'à l'ordre 7. D'après [90], la discrétisation utilisée pour cette analyse ne permet pas de résoudre des ondes plus courtes

	N_x	N_y	N_z	N_r	N_z^*	N_{FS}	N_{dof}	l_{1D}
M1	100	30	10	18	20	3642	8088	$0.0868 - 0.260$
M2	150	45	10	24	30	9750	16849	$0.0653 - 0.173$
M3	200	60	10	30	40	14068	16849	$0.0523 - 0.130$

Table 5.1: Caractéristiques des maillages d'éléments de frontière utilisés pour l'étude de sensibilité en diffraction d'ondes longues sur un cylindre ancré au fond. N_i $(i = x, y, z)$ est le nombre de segments sur la longueur L_i. N_r est le nombre de segments sur le pourtour du cylindre. N_z^* est le nombre de segments sur le tirant d'eau du cylindre au repos. N_{FS} est le nombre de noeuds sur la surface libre. N_{dof} est le nombre de noeuds total. l_{1D} est la longueur des arêtes sur la surface libre.

que celles à la pulsation 3ω où ω désigne la pulsation fondamentale de la vague étudiée, ce qui souligne l'intérêt d'un tel modèle numérique. La méthode utilisée [90] consiste à décomposer le champ de vague en 2 parties :

$$\phi = \phi_i + \phi_d \tag{5.24}$$

où ϕ_i est le potentiel associé à la vague incidente et ϕ_d celui associé à la diffraction induite par la présence du solide. Toutes les équations du modèle potentiel sont donc modifiées en supposant une forme connue pour ϕ_i et seul le potentiel perturbé ϕ_d est résolu. Cette formulation alors novatrice permet donc à la fois de représenter très précisément ϕ_i avec la méthode de la fonction de courant et d'utiliser un maillage très grossier loin de la structure. Plus récemment, c'est Shao et Faltinsen [83] qui ont analysé ce cas jusqu'à l'ordre 4 avec la méthode HPC [6]. En raison d'instabilités de la solution, localisées à l'intersection entre le solide et la surface libre, l'analyse présentée dans [90] se limite à une cambrure $kA = 0.145$. C'est aussi la limite des résultats présentés dans [83]. Contrairement aux approches non-linéaires mentionnées plus haut, nous ne séparons pas le potentiel en une partie incidente et une partie diffractée. Nous imposons une vitesse et une accélération en entrée répondant au modèle d'Airy, et nous pénalisons les conditions limites de surface libre sur une longueur d'onde devant l'entrée du domaine, pour absorber le potentiel réfléchi par la structure.

Convergence des harmoniques de l'effort longitudinal

Nous adoptons un cylindre de rayon $R = 0.25$m, ce qui donne, pour $kR = 0.245$, une longueur d'onde en profondeur infinie de $\lambda \approx 6.41$m et une période de houle de $T \approx 2.03$s. Nous choisissons une cuve de dimensions $L_x \times L_y \times L_z = 26\text{m} \times 6\text{m} \times 3.2\text{m}$ centrée sur le cylindre, ce qui correspond à une longueur de bassin L_x de 4λ. Comme nous le voyons dans le tableau (5.1), un domaine d'extension limitée représente déjà un nombre de degrés de liberté important. Nous adoptons 3 maillages de densité de noeuds croissante sur la surface libre et dont les caractéristiques sont présentées dans le tableau (5.1).

La disparité dans les longueurs des arêtes au niveau de la surface libre s'explique par le rapport entre la longueur d'onde et le rayon du cylindre $kR = 0.245$ qui exige de beaucoup varier la taille des éléments au voisinage de la structure. En pratique, ce type d'état de mer conduit donc à des pas de temps très faibles, y compris pour des ratios $\frac{N_x}{L_x}$ modérés.

Nous considérons l'état de mer $kA = 0.15$ qui correspond à une hauteur de vague de $H = 0.306$m dans notre cas. C'est la cambrure maximale pour laquelle la solution, en utilisant une

[6] Harmonic Polynomial Cell method.

	Maillage 1, $\Delta t = 0.006s$	Maillage 2 $\Delta t = 0.005s$	Maillage 3, $\Delta t = 0.004s$
$\lvert F_1(\omega)\rvert$	0.5971927	0.5980827	0.6068235
$\lvert F_2(\omega)\rvert$	0.0123979	0.0146644	0.0127145
$\lvert F_3(\omega)\rvert$	0.0011165	0.0009095	0.001585
$\lvert F_4(\omega)\rvert$	0.00038	0.0010712	0.0008949

Table 5.2: Sensibilité au maillage des harmoniques de la force longitudinale F_x pour un cylindre vertical ancré au fond soumis à une vague longue telle que $kA = 0.15$ et $kR = 0.245$. Le paramètre de densité est fixé à $\rho = 1$ dans les simulations.

formule de filtrage uniquement sur la ligne d'intersection entre le solide et le fluide, ne développe pas d'instabilités en dents de scie, et ce pour toutes les discrétisations du tableau (5.1).

Le signal de la force F_x est analysé sur une fenêtre temporelle de 6 périodes démarrant à l'instant $t_i = 20$s. On observe dans le tableau (5.2) une bonne convergence des coefficients jusqu'à l'ordre 3 inclus. Néanmoins, les valeurs obtenues semblent indiquer que pour des pas d'espace grands, le résultat dépend fortement du pas de temps. Il est fort possible que l'algorithme de transformée de Fourier discrète soit moins précis pour les ordres élevés car le ratio $\frac{F_i(\omega)}{F_1(\omega)}$ pour i supérieur à 3 est de l'ordre du millième. C'est un constat qu'on retrouve dans [91]. Ceci invite à une certaine prudence quant à l'interprétation qu'on peut faire des effets d'ordres supérieurs à 4. Pour cette raison, nous limitons la comparaison aux harmoniques d'ordre 1 et d'ordre 2.

Evolution des coefficients d'effort longitudinal en fonction de la cambrure

Les valeurs de référence des figures (5.2) et (5.3) ont été numérisées à partir des figures de l'article [91]. Nous présentons sur la figure (5.2) les résultats obtenus pour le coefficient d'ordre 1 adimensionnel de la force horizontale $\frac{{F_x}^{(1)}}{\rho g A R^2}$. Nous observons à faible cambrure une légère surestimation de la valeur prédite par la théorie linéaire. Pour des cambrures croissantes, nos résultats sont un peu inférieurs à ceux obtenus par le modèle de diffraction non-linéaire de Ferrant [90]. Pour les cambrures intermédiaires, nos résultats sont assez proches de l'expérience [91].

Nous présentons sur la figure (5.3) les résultats obtenus pour le coefficient d'ordre 2 adimensionnel de la force horizontale $\frac{{F_x}^{(2)}}{\rho g A^2 R}$. Les coefficients obtenus en analysant la force hydrodynamique due à la pression totale $p_{tot} = -\rho(\phi_t + \frac{v^2}{2} + gz)$ conduisent à une valeur stable du coefficient $\frac{{F_x}^{(2)}}{\rho g A^2 R}$ sur l'intervalle des cambrures simulées. Nous observons également une décroissance de ce coefficient bien moins marquée que pour les résultats expérimentaux et les calculs de diffraction non-linéaire. A faible cambrure, le coefficient obtenu est près de 3 fois inférieur aux valeurs de référence. Néanmoins, pour les cambrures les plus élevées, notre résultat numérique se rapproche beaucoup de l'expérience. Il semblerait que la configuration utilisée ici, à savoir une longueur de bassin $L_x = 4\lambda$ avec une absorption dynamique devant la paroi d'entrée sur une longueur d'onde, mène à un profil de vague linéaire au milieu du bassin. Nous notons également que Huseby et Grue [91] utilisent dans leurs expériences un canal très allongé dans la direction x. L'une de leur configuration présente une distance entre le batteur et le cylindre de $\frac{12.41m}{3cm} \approx 413$ alors que ce ratio vaut $\frac{13m}{25cm} = 52$ dans nos simulations. Par conséquent, une étude plus approfondie du spectre de houle généré dans notre modèle numérique et une optimisation de la géométrie du bassin pourraient conduire à une meilleure estimation des harmoniques d'ordres élevés.

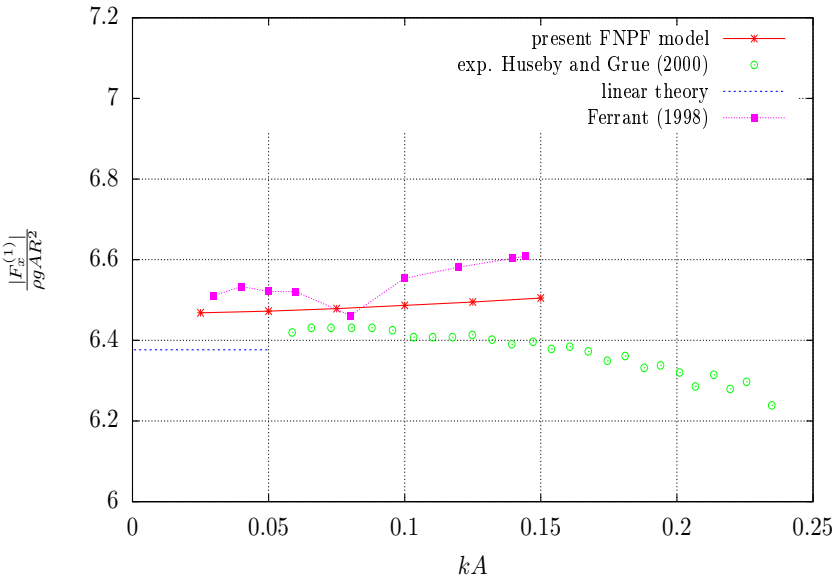


Figure 5.2: Calcul du coefficient de Fourier d'ordre 1 de la série temporelle de l'effort horizontal F_x d'un cylindre ancré au fond avec les paramètres $T = 2.03$s, $kR = 0.245$, profondeur $kd = \pi$. Le signal est analysé entre $t = 20$s et $t + 8T$.

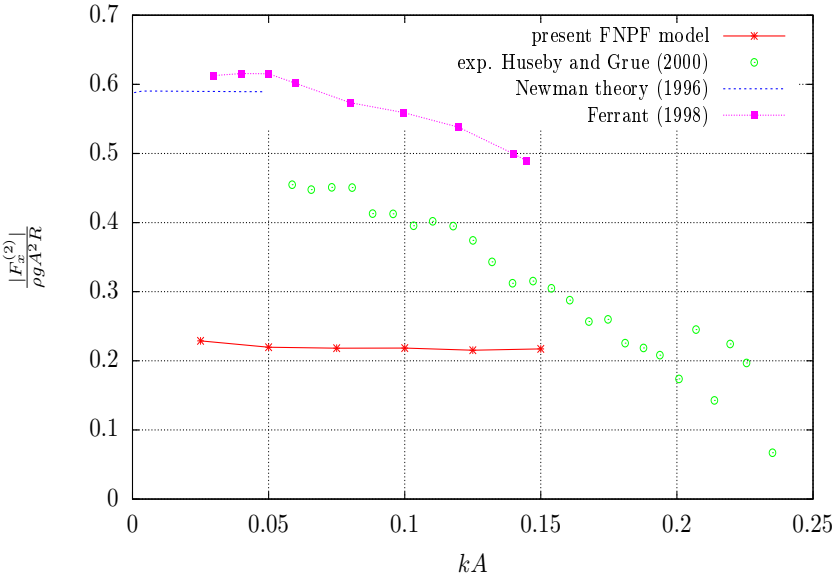


Figure 5.3: Calcul du coefficient de Fourier d'ordre 2 de la série temporelle de l'effort horizontal F_x d'un cylindre ancré au fond avec les paramètres $T = 2.03$s, $kR = 0.245$, profondeur $kd = \pi$. Le signal est analysé entre $t = 20$s et $t + 8T$.

5.4 Validation du schéma lagrangien et du remaillage en radiation

Nous proposons maintenant d'analyser deux cas de mouvement forcé périodique d'un cylindre vertical, extraits de l'article de Zhou *et al.* [65]. Ils utilisent une méthode HOBEM sur maillages quadrangulaires.

5.4.1 Cavalement forcé d'un cylindre vertical

Nous commençons par étudier un mouvement de translation périodique dans un plan parallèle à la surface libre au repos de formule $x_1 = A\sin\omega t$. La profondeur du bassin numérique est fixée à $d = 1.5R$, avec R le rayon du cylindre. Le tirant d'eau du cylindre est défini par $B = 0.5R$. Contrairement à l'étude proposée par Zhou *et al.* [65], nous ne considérons pas un raffinement du maillage du cylindre près de la surface libre et adoptons ainsi une discrétisation uniforme sur la verticale. Le domaine de calcul est aussi de forme cylindrique (sauf pour les calculs de conservation du volume) avec un rayon total de $R_{ext} = R + 2\lambda$ où λ est la longueur d'onde théorique attendue d'après la théorie linéaire pour la pulsation ω et la profondeur d.

Ce type de mouvement est particulièrement compliqué à simuler avec un maillage, car les mailles situées près de l'intersection voient leurs dimensions changer continuellement, ce qui peut affecter la qualité de la solution numérique obtenue par éléments de frontières, et par voie de conséquence, la stabilité du schéma numérique. Il convient donc de modifier la distribution spatiale des noeuds au cours du temps. Pour des raisons de simplicité, nous avons opté pour la méthode de *Laplace Smoothing*.

Conservation du volume

Nous vérifions la conservation du volume, en l'absence de dispositif absorbant, en faisant varier successivement le pas de temps et le pas d'espace. Le schéma utilisé ici combine un traitement complètement lagrangien des noeuds de surface libre dans un voisinage du solide défini initialement comme l'ensemble des points situés à une distance $R_c = 5R$ du centre de gravité du cylindre, et un traitement semi-lagrangien ailleurs. A chaque pas de temps, les noeuds de surface libre de ce sous-domaine sont redistribués par la méthode de *Laplace Smoothing*.

La figure (5.4) illustre l'évolution de la surface libre à l'instant $\frac{t}{T} = 24.9$ pour un mouvement d'amplitude intermédiaire $\frac{A}{R} = 0.15$ sans absorption sur les bords du domaine. Ce calcul illustre la capacité du modèle à représenter des houles fortement cambrées puisque les réflexions augmentent la hauteur de la houle générée par le mouvement du cylindre.

Les caractéristiques des maillages étudiés sont résumées dans le tableau (5.3). La cuve contenant le solide a les dimensions $L_x \times L_y \times L_z = 16\text{m} \times 16\text{m} \times 1.5\text{m}$, ce qui correspond à un domaine carré de 2 longueurs d'onde centré sur le solide. Le cylindre a un rayon $R = 1\text{m}$ et un tirant d'eau $B = 0.5\text{m}$. N_i $(i = \{x, y, z\})$ est le nombre de segments utilisés pour discrétiser la longueur L_i. Sur le cylindre, N_r segments sont employés pour discrétiser $2\pi R$ et N_z^* pour discrétiser B.

Nous désignons par N_{el} le nombre de triangles, par N_{dof} le nombre de noeuds total, par N_{FS} le nombre de noeuds sur la surface libre, par N_{body} le nombre de noeuds sur la surface du corps et par l_{1D} la longueur des arêtes du maillage de la surface libre. Celle-ci n'est évidemment pas constante pour un maillage non-structuré et nous en donnons les bornes dans le tableau (5.3). Ce maillage est obtenu en fusionnant les maillages 2D associés à chaque sous-partie de la géométrie. Ainsi, les bords latéraux sont générés en créant un maillage régulier de motif quadrangulaire,

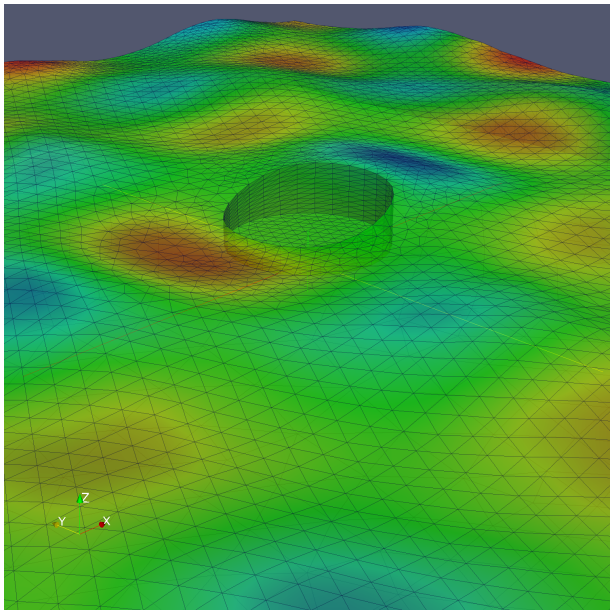


Figure 5.4: Mouvement forcé de cavalement d'un cylindre vertical tronqué pour un paramètre $kR = 1.6$ et une amplitude $\frac{A}{R} = 0.15$. Représentation du maillage 3 au temps $\frac{t}{T} = 24.91$.

puis, en divisant chaque quadrangle en 2 triangles. Sur la surface libre, nous utilisons l'algorithme NETGEN 2D qui permet d'obtenir un dégradé de tailles d'élément près du cylindre. Dans la pratique, on fixe donc les paramètres N_x, N_y et N_r sur les bords, on précise une taille d'élément maximale admissible et l'algorithme génère un maillage non-structuré. N_x et N_y représentent donc de façon approximative le nombre d'éléments pour 2 longueurs d'onde. On voit dans le tableau (5.3) qu'un paramètre $\frac{N_x}{2\lambda} = 50$ représente déjà un nombre de noeuds sur la surface libre conséquent avec $N_{FS} = 15965$.

On observe sur la figure (5.5) que les erreurs relatives sur le volume augmentent constamment avec le temps. Ce comportement est en ligne avec ce que nous avions constaté sur le modèle 2D et peut être imputé à l'utilisation d'un schéma temporel explicite. Il peut également provenir du fait qu'en l'absence d'absorption, la cambrure à simuler augmente fortement, ce qui conduit à une moins bonne résolution de la surface libre. Néanmoins, on note que l'erreur sur le volume reste de l'ordre de $\mathcal{O}(10^{-2.6})$ après 25 périodes pour le pas de temps le plus fin. Cet ordre de grandeur reste satisfaisant comparé aux erreurs réalisées avec le modèle 2D, compte-tenu de l'utilisation de fonctions de forme d'ordre 1 pour toutes les opérations de l'algorithme.

On s'intéresse maintenant à la convergence spatiale du modèle. Le temps adimensionnel est noté $t^+ = \frac{t}{T}$. On note $\epsilon_V = \frac{V(t)-V_0}{V_0}$ l'erreur relative sur le volume. Les courbes de la figure (5.6) montrent que la réduction du pas d'espace conduit à une diminution de l'erreur relative sur le calcul du volume de fluide sauf pour les maillages Mesh 3 et Mesh 4, pour lesquels l'utilisation d'une procédure d'adaptation automatique du pas de temps conduit à un pas de temps presque identique. On rappelle que le pas de temps est modifié comme suit :

$$\Delta t = \mathcal{C}_0 \frac{\min_{(i,j);i<j;(\mathbf{x}_i,\mathbf{x}_j)\in\Gamma_f(t)^2} \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|}{\sqrt{gL_z}} \tag{5.25}$$

avec $\mathcal{C}_0$ un nombre de Courant fixé ici à $\mathcal{C}_0 = 0.4$.

	Maillage 1	Maillage 2	Maillage 3	Maillage 4
N_x	36	50	75	100
N_y	36	50	75	100
N_z	4	4	6	6
N_r	16	24	28	32
N_z^*	4	8	10	14
l_{1D}	$0.390 - 0.444$	$0.261 - 0.320$	$0.213 - 0.224$	$0.160 - 0.196$
N_{el}	5836	13046	16664	41512
N_{dof}	3244	6969	8990	21618
N_{FS}	1453	3971	5104	15965

Table 5.3: Mouvement forcé de cavalement d'un cylindre vertical tronqué pour un paramètre $kR = 1.6$ et une amplitude $\frac{A}{R} = 0.15$. Caractéristiques des maillages d'éléments de frontière utilisés pour l'étude de sensibilité.

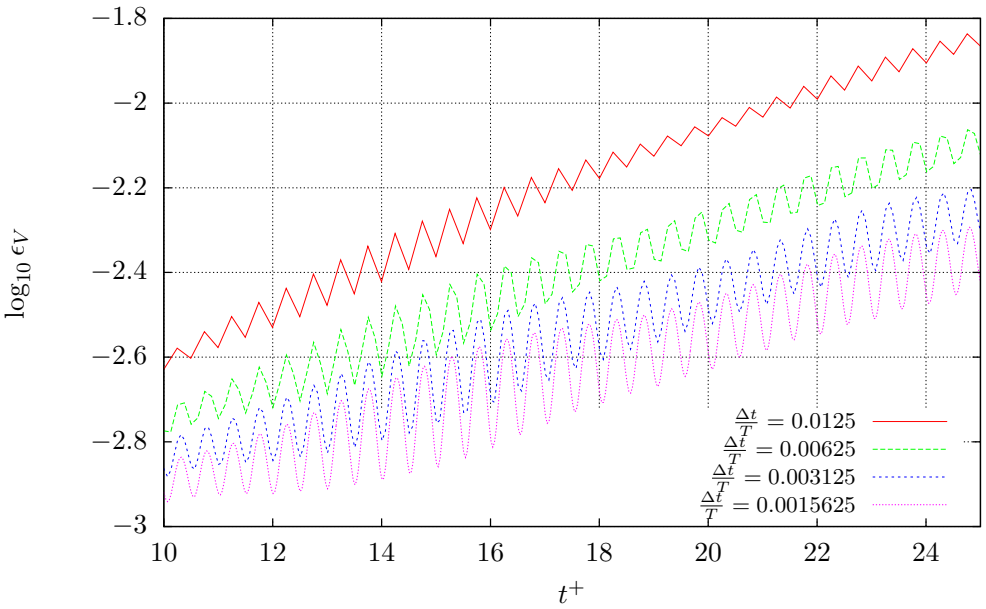


Figure 5.5: Cylindre vertical en translation horizontale d'amplitude $\frac{A}{R} = 0.15$ pour $kR = 1.6$. Evolution de l'erreur $\log_{10} \epsilon_V$ entre les temps adimensionnels $t^+ = 10$ et $t^+ = 25$ pour différentes discrétisations temporelles Δt.

Etude de sensibilité à la discrétisation verticale du cylindre

Dans [65], il est suggéré que la discrétisation spatiale verticale du cylindre influence beaucoup le moment transverse M_y et la force verticale F_z. Nous vérifions sur notre modèle l'effet du paramètre N_z^* sur ces quantités. Nous adoptons cette fois-ci un domaine de forme cylindrique avec un rayon extérieur de $R_e = 2\lambda = 8$m maillé avec l'algorithme MEFISTO 2D. Les caractéristiques des maillages étudiés sont résumées dans le tableau (5.4). Par ailleurs, le maillage vertical est initialement uniforme contrairement à [65] qui propose d'utiliser deux techniques pour obtenir une distribution raffinée vers le haut du cylindre et vers le fond du cylindre.

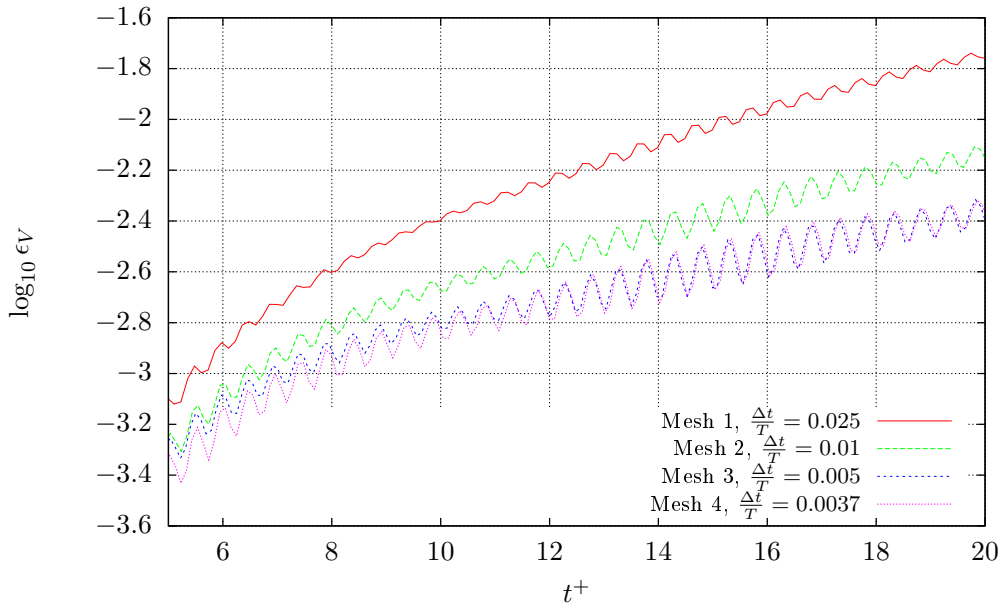


Figure 5.6: Cylindre vertical en translation horizontale d'amplitude $\frac{A}{R} = 0.15$ pour $kR = 1.6$. Evolution de l'erreur $\log_{10}\epsilon_V$ entre les temps adimensionnels $t^+ = 5$ et $t^+ = 20$ pour différentes discrétisations spatiales Δx.

Comme on peut le constater sur la figure (5.7), nos résultats dépendent peu du pas d'espace vertical sur le cylindre, contrairement à l'étude [65].

C'est avec un maillage de forme cylindrique et de discrétisation similaire à celle employée pour le Maillage 2 du tableau (5.4) que l'étude fréquentielle qui suit a été réalisée.

Analyse harmonique

Les résultats de cette étude sont comparés aux calculs non-linéaires de Zhou *et al.* [65], au modèle fréquentiel du second ordre de Teng *et al.* [92] ainsi qu'à la solution linéaire fréquentielle du problème de radiation de Yeung [93]. Le coefficient de masse ajoutée en cavalement A_{11} et le coefficient d'amortissement en cavalement B_{11} sont représentés sur les figures (5.8) et (5.9).

	Maillage 1	Maillage 2	Maillage 3
N_{re}	300	300	300
N_{ri}	60	60	60
N_z	10	10	10
N_z^*	20	30	40
l_{1D}	$0.105 - 0.168$	$0.105 - 0.168$	$0.105 - 0.168$
N_{FS}	12576	12576	12576
N_{body}	1940	2540	3140

Table 5.4: Caractéristiques des maillages d'éléments de frontière utilisés pour l'étude de sensibilité en mouvement forcé de translation.

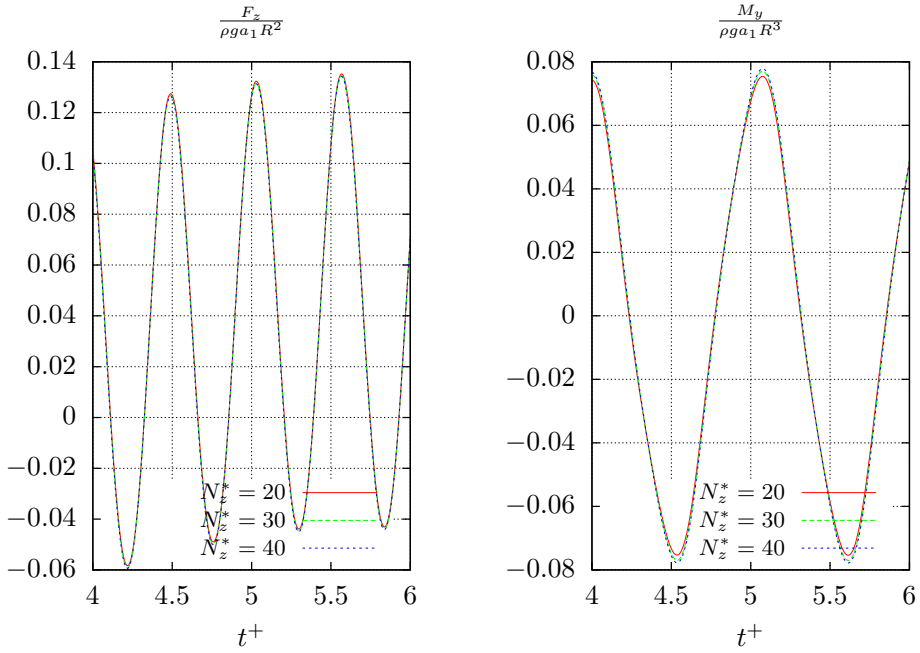


Figure 5.7: Cylindre vertical en translation horizontale d'amplitude $\frac{A}{R} = 0.15$ pour $kR = 1.6$. Evolution de l'effort vertical F_z (sur la gauche) et du moment transverse M_y (sur la droite) entre les temps adimensionnels $t^+ = 4$ et $t^+ = 6$, pour différentes discrétisations verticales N_z^* du cylindre.

Nous rappelons que dans le cadre de la théorie linéaire fréquentielle, d'après Newman [29], l'effort généralisé se décompose en trois termes :

$$\mathbf{F} = -\rho g \int_{\mathcal{S}_b} z\mathbf{N}dS - \rho\Re\left(\sum_{j=1}^{6} i\omega\xi_j e^{i\omega t}\int_{\mathcal{S}_b}\phi_j\mathbf{N}dS\right) - \rho\Re\left(i\omega A e^{i\omega t}\int_{\mathcal{S}_b}(\phi_0+\phi_7)\mathbf{N}dS\right) \quad (5.26)$$

avec ω la pulsation du mouvement, ϕ_j le potentiel radié par la structure pour le mode $j \in [\![1,6]\!]$ d'amplitude ξ_j, ϕ_0 le potentiel du champ incident, ϕ_7 le potentiel diffracté par la structure, $\Re$ la partie réelle et $\mathbf{N}$ le vecteur normal généralisé. C'est le deuxième terme de (5.26) qui est utilisé pour définir les coefficients de masse ajoutée et d'amortissement. Le premier terme donne lieu à des efforts de rappel hydrostatique. Afin de calculer ces coefficients hydrodynamiques, nous excluons le terme $\rho g z$ et utilisons donc la pression dynamique $p_{dyn} = -\rho\left(\phi_t + \frac{v^2}{2}\right)$. On note que pour obtenir ces coefficients, on procède à une analyse de Fourier de l'effort sur une portion stable du signal, contrairement à [65], qui utilise une technique des moindres carrés. Pour l'analyse des harmoniques de la force, nous employons le terme de pression totale $p_{tot} = -\rho\left(gz + \phi_t + \frac{v^2}{2}\right)$ ce qui est précisé dans les légendes des figures correspondantes.

Pour les amplitudes considérées $\frac{A}{R} = 0.05$ et $\frac{A}{R} = 0.15$, on observe globalement un très bon accord avec la théorie linéaire en ce qui concerne la masse ajoutée A_{11}. Pour les hautes fréquences $kR = 1.4$ et $kR = 1.6$, nos résultats sous-estiment un peu la théorie linéaire d'autant plus que l'amplitude est forte.

Le calcul du coefficient d'amortissement linéaire B_{11} fait apparaître un plus grand écart avec la théorie linéaire que celui présenté dans [65], y compris pour l'amplitude $\frac{A}{R} = 0.05$. La proximité avec la théorie linéaire se retrouve logiquement sur le coefficient d'ordre 1 $\frac{F_x^{(1)}}{\rho A R^2}$, présenté sur la

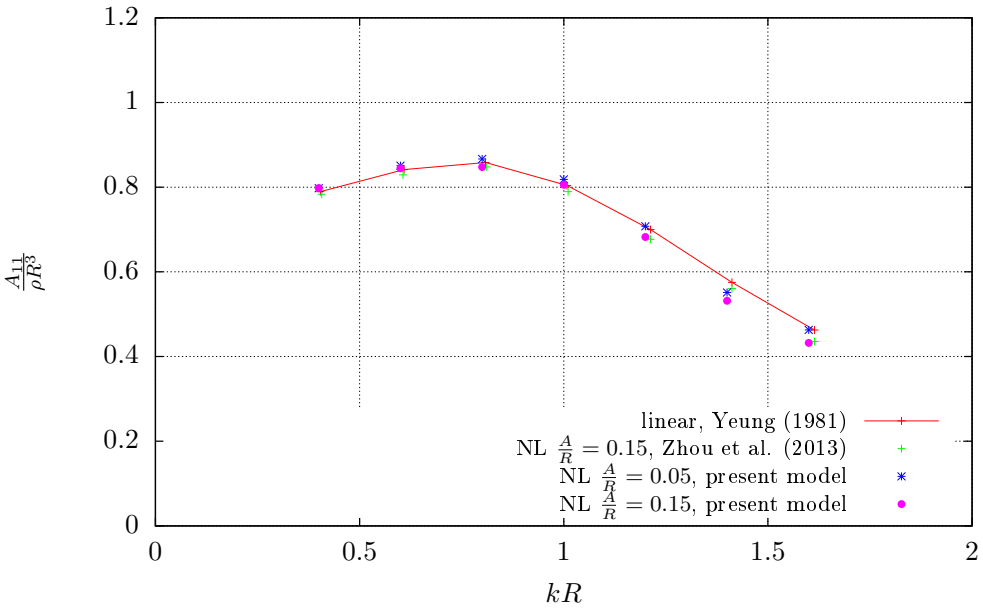


Figure 5.8: Calcul de la masse ajoutée d'un cylindre vertical, en mouvement de translation selon l'axe Ox, en fonction du nombre d'onde adimensionnel kR pour différents modèles numériques.

figure (5.10), hormis une légère surestimation du coefficient pour les fréquences intermédiaires $kR = 1$ et $kR = 1.2$.

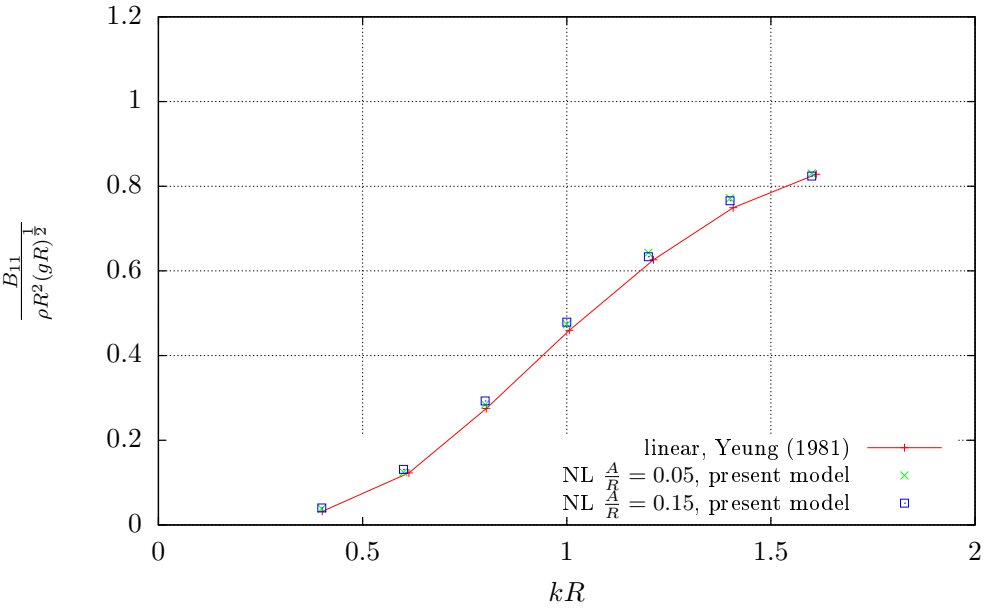


Figure 5.9: Calcul du coefficient d'amortissement d'un cylindre vertical, en mouvement de translation selon l'axe Ox, en fonction du nombre d'onde adimensionnel kR pour différents modèles numériques.

Malgré la faible non-linéarité de l'effort longitudinal F_x, on observe un phénomène intéressant.

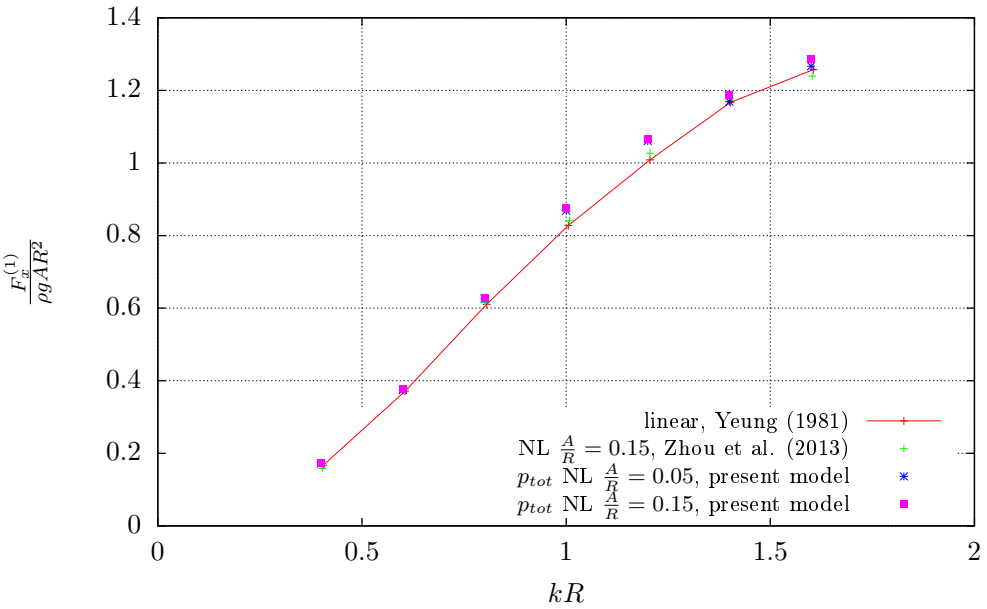


Figure 5.10: Calcul du coefficient de Fourier d'ordre 1 de la série temporelle de l'effort horizontal F_x d'un cylindre vertical, en mouvement de translation selon l'axe Ox, en fonction du nombre d'onde adimensionnel kR pour différents modèles numériques.

Il apparaît sur l'analyse de l'effort vertical. La figure (5.11) illustre tout l'intérêt de recourir à un modèle non-linéaire. En effet, comme le rappellent Zhou *et al.* [65], d'après le résultat théorique de Wu [38], bien que la théorie linéaire prédise un effort nul, car le champ de vagues est anti-symétrique par rapport à l'axe Oy, une force verticale s'établit à une fréquence double de celle du mouvement ω. D'après les mêmes auteurs, l'écart de plus en plus marqué pour kR croissant entre la solution du second ordre de Teng *et al.* [92] et le résultat non-linéaire de Zhou *et al.* [65], s'interprète comme une augmentation des effets non-linéaires pour des valeurs croissantes du paramètre kR, ce qui s'observe pour beaucoup de coefficients d'effort dans leur analyse.

Nous observons bien dans nos simulations cet effet sur la figure (5.11). Cependant, nous sous-estimons de près d'un facteur 2 les résultats de référence. Il se pourrait que l'écart provienne soit de l'imprécision du modèle numérique fondé sur des fonctions de forme d'ordre 1, soit du fait que nous n'utilisons pas de doubles noeuds sur l'intersection entre le fond du cylindre et le bord latéral du cylindre.

Sur la figure (5.12), nous représentons l'évolution du coefficient d'ordre 1 $\frac{M_y^{(1)}}{\rho A R^3}$. Nos calculs sont très proches de l'analyse de [65] avec une légère déviation de la théorie linéaire pour les fréquences intermédiaires $kR = 0.8$ et $kR = 1.0$. De plus, nous observons une sous-estimation de $\frac{M_y^{(1)}}{\rho A R^3}$ qui augmente pour des valeurs de kR croissantes. Cela suggère une plus forte influence des effets non-linéaires sur le calcul du moment à haute fréquence.

Cavalement : série temporelle pour le nombre d'onde $kR = 1.6$

Nous analysons maintenant l'évolution temporelle de quelques grandeurs physiques du modèle. On effectue une comparaison des séries temporelles d'effort et de run-up pour $kR = 1.6$ et $\frac{A}{R} = 0.15$ avec le modèle non-linéaire de Zhou *et al.* [65]. La figure (5.13) représente entre les

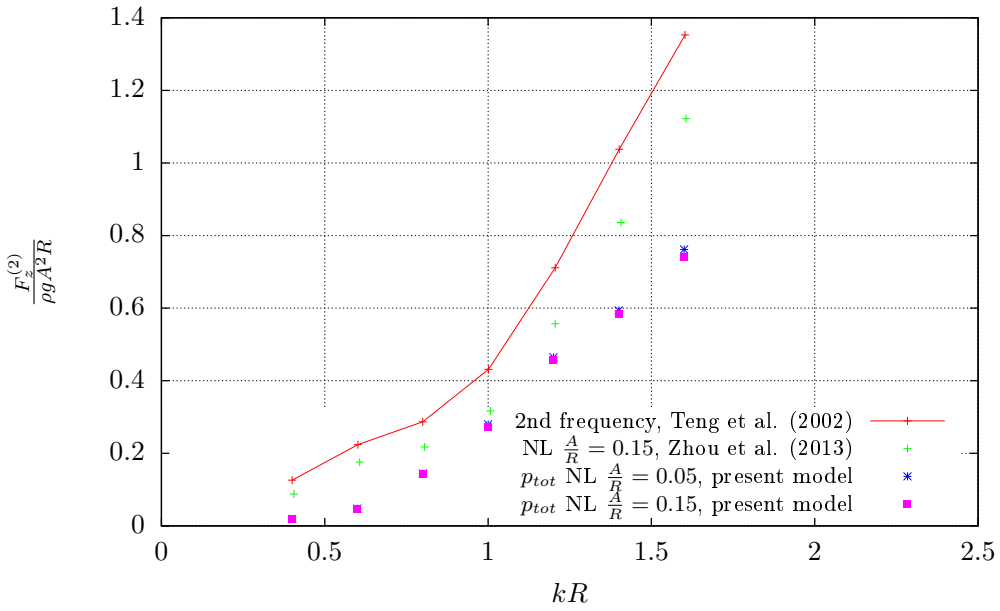


Figure 5.11: Calcul du coefficient de Fourier d'ordre 2 de la série temporelle de l'effort vertical F_z d'un cylindre vertical, en mouvement de translation selon l'axe Ox, en fonction du nombre d'onde adimensionnel kR pour différents modèles numériques.

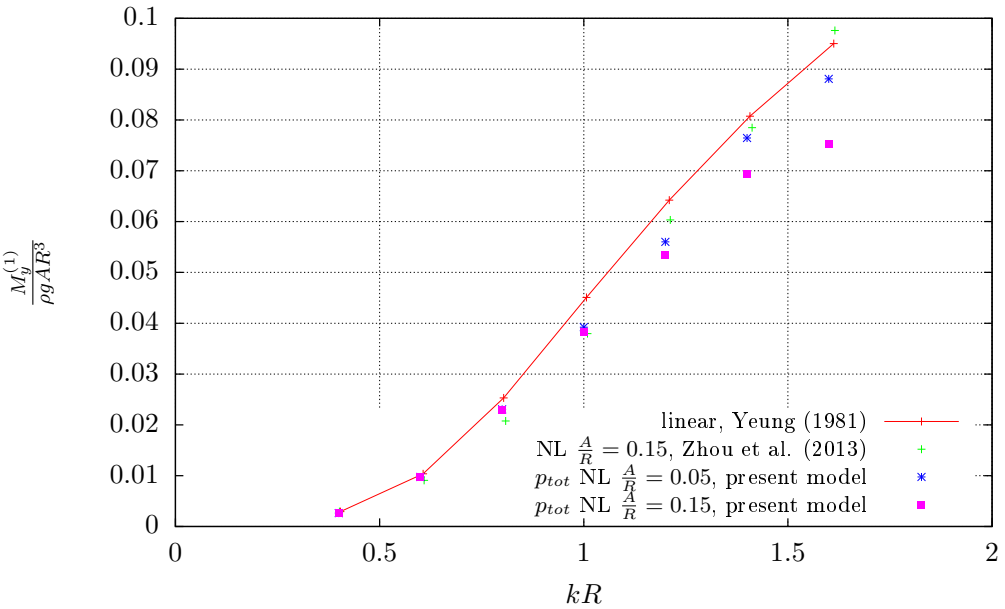


Figure 5.12: Calcul du coefficient de Fourier d'ordre 1 de la série temporelle du moment transverse M_y d'un cylindre vertical, en mouvement de translation selon l'axe Ox, en fonction du nombre d'onde adimensionnel kR pour différents modèles numériques.

instants adimensionnels $t^+ = 4$ et $t^+ = 8$ le run-up au point $(-R, 0)$. L'accord avec la méthode numérique [65] est satisfaisant.

La comparaison sur l'effort longitudinal F_x est représentée sur la figure (5.14). Encore une

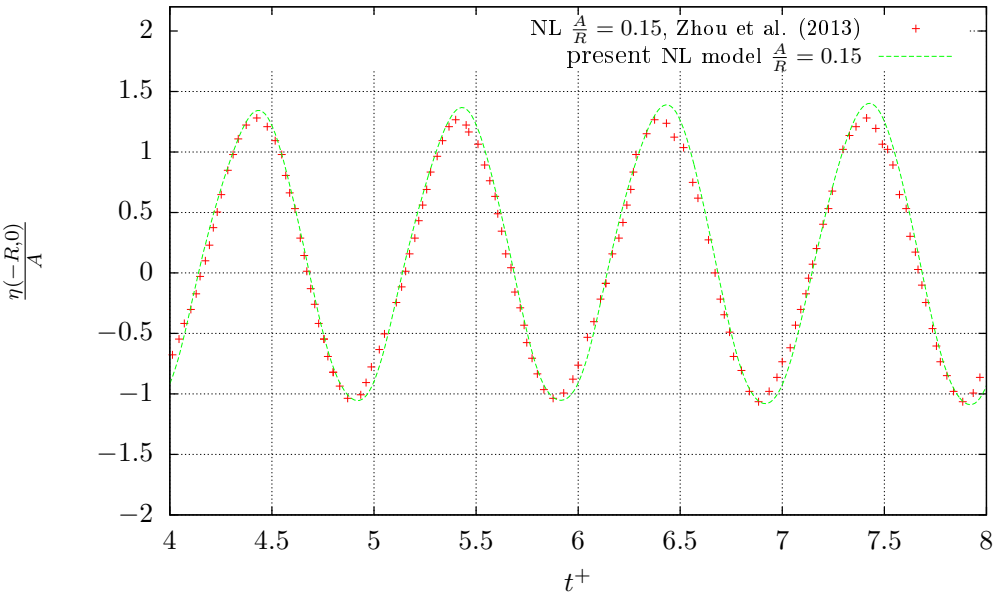


Figure 5.13: Calcul de la série temporelle du run-up $\eta(-R, 0)$ sur un cylindre vertical, en mouvement de translation selon l'axe Ox, pour un nombre d'onde adimensionnel $kR = 1.6$.

fois, on constate un accord très satisfaisant dans le domaine temporel. On remarque aussi sur cette série temporelle que la courbe de F_x présente peu de non-linéarités.

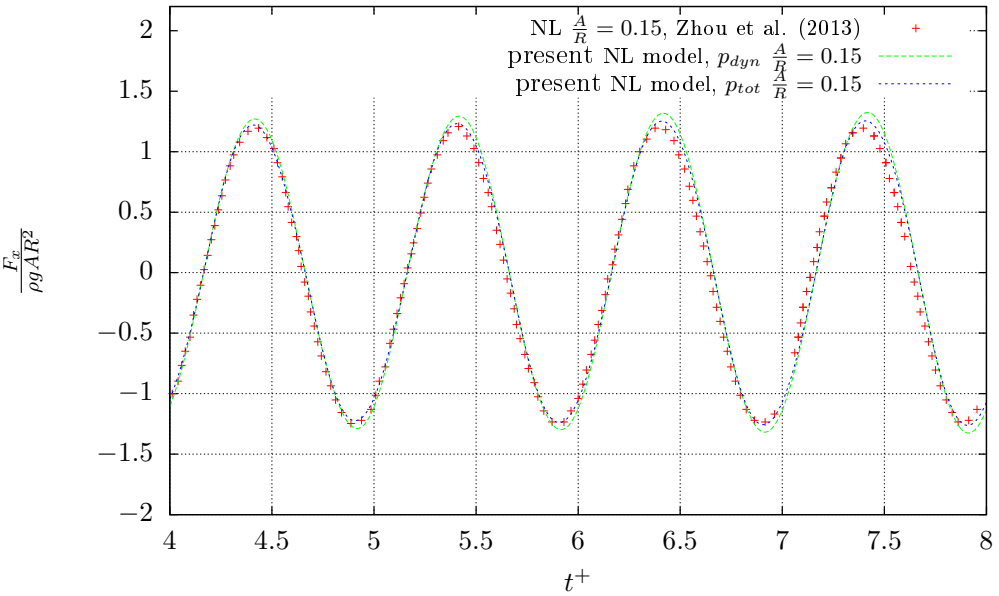


Figure 5.14: Calcul de la série temporelle d'effort horizontal F_x sur un cylindre vertical, en mouvement de translation selon l'axe Ox, pour un nombre d'onde adimensionnel $kR = 1.6$.

5.4.2 Mouvement de rotation du cylindre

Nous analysons dans cette section la rotation forcée autour de l'axe O_y de centre le point $(0, 0, 0)$ et de formule $x_5 = A \sin \omega t$ pour $kR = 1.6$ et deux amplitudes $A = \frac{\pi}{180}$ et $A = \frac{\pi}{30}$. Comme remarqué à juste titre dans [65], ce type de mouvement est moins fréquemment analysé dans la littérature car la paroi du cylindre ne reste pas verticale. Ce cas permet de montrer la robustesse du traitement de l'intersection vis à vis d'une inclinaison du solide.

Analyse harmonique

Comme précédemment, nous commençons notre analyse par le calcul des harmoniques des efforts. La figure (5.15) présente l'inertie ajoutée en rotation, notée A_{55}. On constate un bon accord avec les références. La figure (5.16) présente le coefficient d'effort associé à la force longitudinale F_x. Nos résultats montrent un plus grand écart avec la théorie linéaire que les résultats de [65], ce qui semble logique puisqu'on observait aussi cette tendance avec le coefficient associé au moment transverse M_y en translation. En revanche, les deux amplitudes testées ici conduisent à un ordre de grandeur très proche du coefficient hydrodynamique.

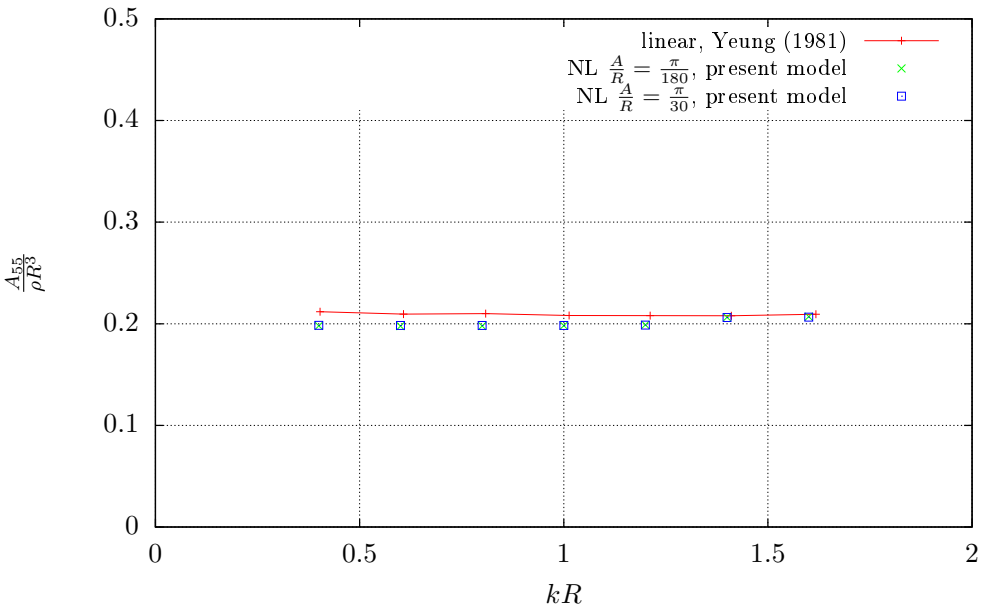


Figure 5.15: Calcul de l'inertie ajoutée d'un cylindre vertical, en mouvement de rotation autour de l'axe Oy, en fonction du nombre d'onde adimensionnel kR pour différents modèles numériques.

La figure (5.17) présente le coefficient d'effort associé au moment transverse M_y. Cette fois, nous retrouvons des valeurs conformes aux résultats linéaires de Yeung [93] et aux résultats non-linéaires [65].

5.5 Mouvement de translation verticale

Enfin, nous analysons les efforts hydrodynamiques de radiation lors d'un mouvement de translation verticale (pilonnement) d'un cylindre d'axe vertical.

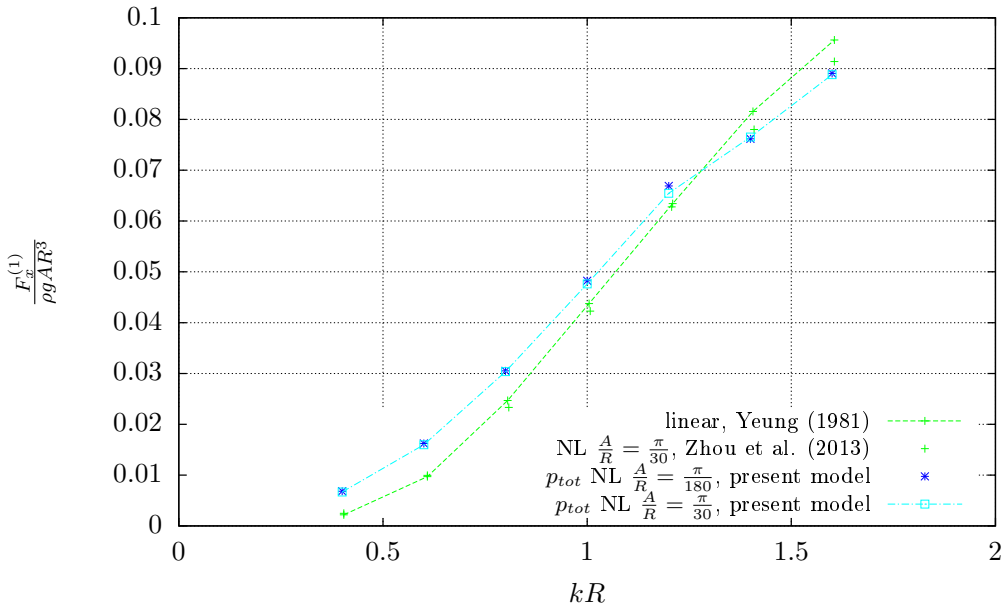


Figure 5.16: Calcul du coefficient de Fourier d'ordre 1 de la série temporelle de l'effort horizontal F_x d'un cylindre vertical, en mouvement de rotation autour de l'axe Oy, en fonction du nombre d'onde adimensionnel kR pour différents modèles numériques.

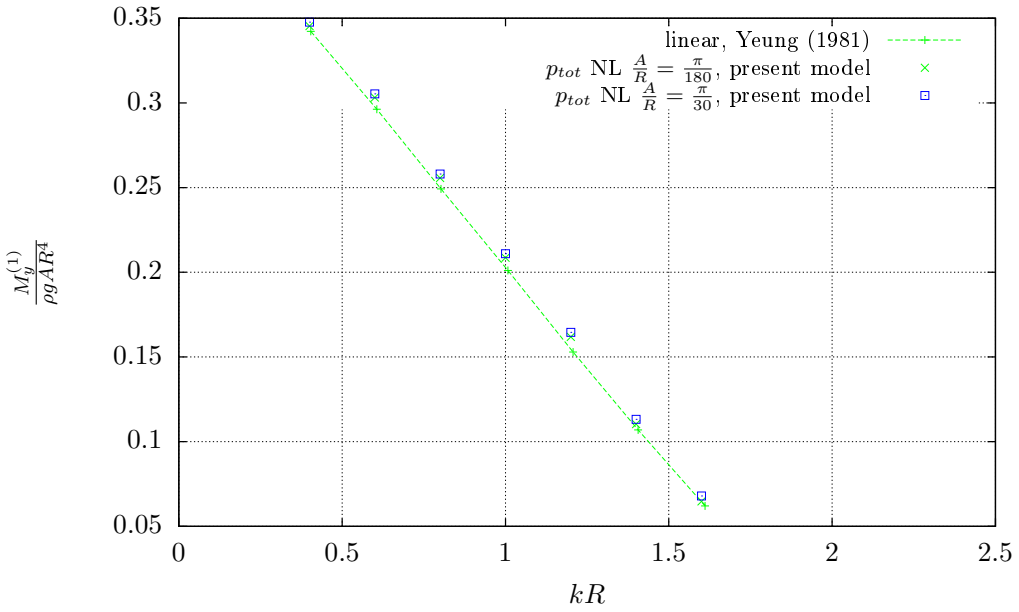


Figure 5.17: Calcul du coefficient de Fourier d'ordre 1 de la série temporelle du moment M_y d'un cylindre vertical, en mouvement de rotation autour de l'axe Oy, en fonction du nombre d'onde adimensionnel kR pour différents modèles numériques.

Type d'éléments	Triangles P1			Triangles P2		
N_{dof}	3040	10419	19613	6442	12830	19238
N_{el}	5624	19934	38030	3084	6190	9352
n_p	24	96	120	96	96	120
N_{iter} pour 12.5 périodes	806	1550	2364	498	745	881
temps CPU par pas de temps (s)	3.87	12.58	57.83	6.17	22.94	41.30
temps CPU total (h)	0.87	5.42	37.97	0.85	4.75	10.11
$\|F_0\|$ p_{dyn}	0.5779	0.6551	0.6924	0.6004	0.6827	0.6903
$\|F_1\|$ p_{dyn}	3.6587	3.7060	3.7224	3.6483	3.7067	3.7136
$\|F_2\|$ p_{dyn}	0.2650	0.3277	0.3617	0.3098	0.3585	0.3640
$\|F_3\|$ p_{dyn}	0.0161	0.0182	0.0167	0.0155	0.0161	0.0157
$\|F_0\|$ p_{tot}	14.6949	14.7315	14.7104	14.9425	14.7482	14.7346
$\|F_1\|$ p_{tot}	1.1304	1.1483	1.1602	1.2429	1.1886	1.1798
$\|F_2\|$ p_{tot}	0.2555	0.3125	0.3534	0.2944	0.3461	0.3544
$\|F_3\|$ p_{tot}	0.0130	0.0132	0.0133	0.0120	0.0126	0.0125

Table 5.5: Sensibilité au maillage des modules des harmoniques de la force verticale F_z pour un cylindre vertical tronqué en translation verticale d'amplitude $\frac{A}{R} = 0.15$ à la fréquence $kR = 1.6$. Le signal est analysé sur 5 périodes entre $t_i^+ = 9.014$ et $t_f^+ = 16.996$. N_{iter} désigne le nombre d'itérations pour simuler 12.5 périodes du mouvement. n_p désigne le nombre de processeurs employés.

5.5.1 Comparaison des résultats avec des éléments P1 et P2

Nous considérons à nouveau le paramètre $kR = 1.6$ et 3 maillages avec des triangles linéaires et quadratiques. Puisque le cylindre est vertical, on peut faire usage du schéma semi-lagrangien pour avancer la surface libre. Ce cas test nous permet aussi de vérifier la concordance des modèles d'éléments de frontière (triangles P1 et P2) implémentés dans le programme.

Nous donnons dans le tableau (5.5) les paramètres des différents modèles utilisés pour cette comparaison. Les colonnes 1 à 3 correspondent à un maillage de triangles linéaires et les colonnes 4 à 6 à un maillage de triangles quadratiques. On constate un très bon accord entre les différentes méthodologies jusqu'à l'ordre 3. On observe dans ce cas l'importance des effets non-linéaires à travers la valeur de $\frac{|F_2|}{|F_1|}$ qui atteint près de 10%. Par ailleurs, l'ordre 0 de l'effort $|F_0|$, calculé avec la pression dynamique représente 18% de $|F_1|$.

5.5.2 Coefficients hydrodynamiques

Nous simulons ce mouvement pour 7 fréquences différentes avec des amplitudes $\frac{A}{R} = 0.05$, 0.15 et 0.25. Nous représentons le coefficient d'ordre 1 de la force verticale totale $\frac{{F_z}^{(1)}}{\rho g A R^2}$ sur la figure (5.18).

Encore une fois, l'effort d'ordre 1 est très bien prédit par notre modèle numérique. On observe cependant que notre résultat s'écarte de la théorie linéaire pour $kR < 1.2$. On note que le coefficient associé à la pression totale ne dépend pratiquement pas de l'amplitude. Une analyse de Fourier similaire avec la pression dynamique révèle une augmentation du coefficient d'effort avec l'amplitude du mouvement pour $kR \geq 1$. Sur la figure (5.19), le coefficient d'ordre 2 adimensionnel de la force $\frac{{F_z}^{(2)}}{\rho g A^2 R}$ est représenté. Comme pour le cavalement, on note un écart

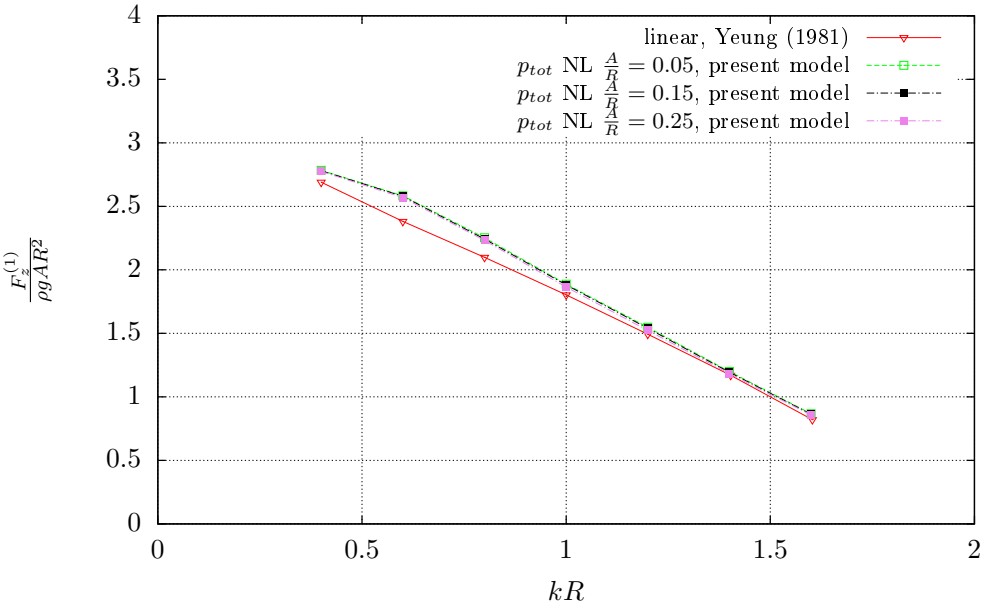


Figure 5.18: Calcul du coefficient de Fourier d'ordre 1 de la série temporelle de l'effort F_z d'un cylindre vertical, en mouvement de translation verticale, en fonction du nombre d'onde adimensionnel kR pour différents modèles numériques.

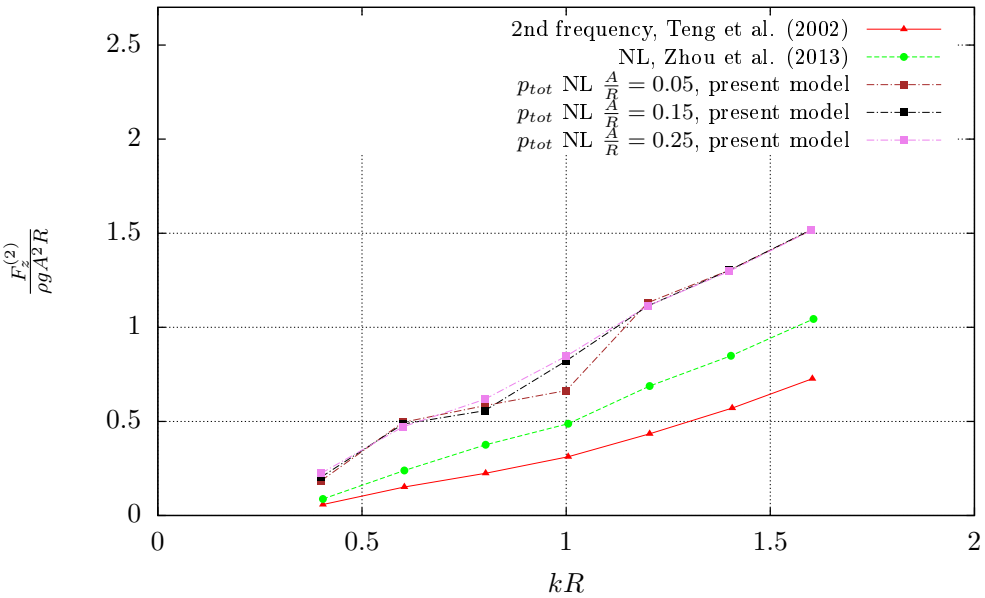


Figure 5.19: Calcul du coefficient de Fourier d'ordre 2 de la série temporelle de l'effort F_z d'un cylindre vertical, en mouvement de translation verticale, en fonction du nombre d'onde adimensionnel kR pour différents modèles numériques.

significatif entre nos résultats et les valeurs publiées dans la littérature.

Contrairement à Zhou *et al.* [65], nos résultats dépendent sensiblement de l'amplitude du mouvement imposé. Notre modèle non-linéaire surestime plus que le modèle [65] les valeurs

obtenues avec le modèle fréquentiel d'ordre 2 de Teng *et al.* [92].

5.6 Conclusion intermédiaire

Le modèle numérique d'interactions vague-structure est décrit en détail. Une première application en diffraction sur un cylindre ancré au fond montre la capacité du schéma semi-lagrangien à simuler des vagues de cambrures intermédiaires et permet de calculer avec une très bonne précision les efforts longitudinaux d'ordre 1. Des améliorations pourraient être apportées au modèle de génération de vagues afin de mieux représenter le champ de vague non-linéaire à proximité de la structure. Ce point se trouvant un peu en dehors du coeur de notre projet, nous n'avons pas pu lui consacré une plus grande attention. Cet exemple montre toutefois le plus grand domaine de validité en cambrure d'un modèle potentiel non-linéaire par rapport aux théories d'ordre fini. Une étude en mouvement forcé de translation horizontale et de rotation pour des amplitudes faibles et modérées montre également la capacité du modèle à capter correctement les coefficients de masses ajoutées. Enfin, une comparaison de la méthode, appliquée avec des fonctions P1 et des fonctions P2, est effectuée sur un cas de pilonnement et ne fait pas apparaître de différences notables pour la prédiction des efforts. Une analyse harmonique de l'effort vertical en pilonnement est réalisée pour plusieurs fréquences à l'aide d'éléments P2. Ces exemples montrent que le modèle d'éléments de frontière sur maillages triangulaires non-structurés se compare très bien à d'autres modèles récents pour les efforts d'ordre 1. Pour les efforts d'ordre supérieur, on aboutit à un écart avec les valeurs obtenues par d'autres modèles numériques. Ces écarts montrent que des améliorations peuvent encore être apportées (plage absorbante, convergence, schéma numérique) avant de pouvoir valider les effets d'ordre 2. Néanmoins, on note que ces coefficients d'ordre 2 augmentent bien avec la cambrure.

Les modes de translation verticale et de rotation peuvent être simulés pour des amplitudes importantes du mouvement, sans donner lieu à des difficultés numériques particulières (jusqu'à $A/R = 0.25$ pour le pilonnement). En revanche, le cas de translation horizontale peut donner lieu à des instabilités de type dents de scie pour des amplitudes A/R strictement supérieures à 0.15.

Chapter 6

Vers des applications industrielles

6.1 Préambule

Ce dernier chapitre vise à compléter les validations présentées dans le chapitre (5) et à donner un aperçu des applications possibles avec notre modèle numérique. Nous présentons des applications du modèle pour des cas de corps en mouvement libre et analysons la convergence numérique du schéma de Newmark. Puis, nous étudions un concept simplifié de flotteur de type semi-submersible inspiré du *Dutch Tri-floater* [94], modifié par Antonutti *et al.* dans l'étude [8] afin d'éviter des problèmes numériques avec le code d'éléments de frontière Nemoh développé par l'Ecole Centrale de Nantes (ECN) [95] en raison de la très faible épaisseur des *heave plates* dont ce flotteur est équipé. Dans ce cas, nous analysons la réponse du flotteur en diffraction non-linéaire et en radiation non-linéaire.

6.2 Mouvement libre d'une barge cylindrique

Bien que très simplifié, le cylindre tronqué peut être vu comme un modèle représentatif d'un flotteur de type barge dont la stabilité provient de la grande surface de flottaison (*waterplane area* en anglais). Le cas test qui suit est issu d'une analyse d'un modèle temporel d'ordre 2 proposé récemment par Bai et Teng [96]. A l'origine, ce problème a été résolu à l'ordre 1 par Newman [97] en théorie potentielle linéaire, à l'aide d'une méthode d'éléments de frontière temporelle en 1D horizontale, dont le formalisme est proche de la méthode de Yeung [98], déjà signalée dans ce mémoire. Nous choisissons, à l'instar de [96], un cylindre de rayon R, de tirant d'eau $B = 0.5R$, de hauteur $H = 2B = R$ et un domaine cylindrique de hauteur d'eau $d = 3R$ et de rayon $R_{ext} = 15R$. Nous analysons le problème aux conditions initiales suivantes :

$$\begin{cases} x_{G3}(0) = 0 \\ \dot{x}_{G3}(0) = \epsilon \end{cases} \tag{6.1}$$

avec ϵ une vitesse positive de faible amplitude afin de se rapprocher des conditions du modèle potentiel linéaire. La barge part donc d'une position d'équilibre avec son centre de gravité au niveau de la surface libre au repos et se voit imposer une vitesse verticale initiale positive. Dans la suite, nous considérons plusieurs jeux de paramètres. Le paramètre $iflags$ fait référence au schéma d'avance en temps de la surface libre. $iflags = 2$ correspond au schéma semi-lagrangien. $iflags = 4$ correspond au schéma lagrangien avec remaillage de la surface libre à chaque pas de temps. Etant donné que le mouvement est restreint à une translation verticale, nous testons

aussi le schéma de Newmark pour ce seul degré de liberté ou en considérant aussi les autres translations et rotations du solide. Nous notons ρ_f la densité du fluide et ρ_s la densité du solide rigide. Le tenseur d'inertie du solide est exprimé dans le système des axes principaux du solide. La masse du cylindre vaut $m = \rho_s \pi R^2 H$ et on suppose que $\rho_s = \frac{1}{2}\rho_f$ pour qu'il y ait équilibre à l'instant initial. Les moments d'inertie principaux sont $I_{xx} = I_{yy} = \frac{m}{12}(3R^2 + H^2)$ et $I_{zz} = \frac{mR^2}{2}$. Pour obtenir une évolution du déplacement vertical $x_{G3}(t)$ centrée en 0, il est nécessaire d'imposer $m = m_h$ avec m_h la masse correspondant au volume discret de la structure immergée, donné par l'intégration de la quantité $\int_{\mathcal{S}_b} z n_z dS$. Pour le maillage avec $N_{dof} = 8604$ et 680 noeuds sur le solide, en supposant $\rho_f = 1.0$ kg.m^{-3}, on obtient les valeurs numériques suivantes : $m = 1.5643$ kg, $I_{xx} = 0.5214$ kg.m^2 et $I_{zz} = 0.7822$ kg.m^2. Par ailleurs, nous prenons les paramètres suivants pour le schéma de Newmark :

$$\gamma = \frac{1}{2},\ \beta = \frac{1}{4},\ \omega = 0.65 \tag{6.2}$$

et la tolérance sur les efforts est fixée à $\epsilon_F = 10^{-5}$. Compte-tenu des évolutions nombreuses subies par le modèle numérique au cours de son développement, nous avons choisi d'utiliser la méthode de couplage direct (voir le chapitre (3)), non intrusive, car elle permet de ne pas modifier les matrices des coefficients d'influence du système, contrairement à la méthode de van Daalen [20].

La figure (6.1) est une vue du domaine de calcul adopté avec $R = 1$m. Deux maillages sont employés avec $N_{dof} = 8604$ ou $N_{dof} = 11802$.

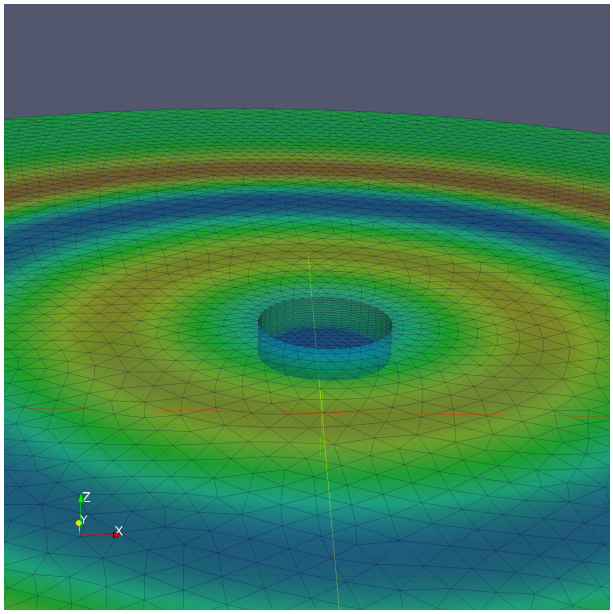


Figure 6.1: Mouvement libre d'extinction d'un cylindre vertical tronqué pour les conditions initiales $x_{G3}(0) = 0$ et $\dot{x}_{G3}(0) = \epsilon$ ($\epsilon = 0.1$ m.s^{-1}).

Le temps est adimensionné par $\tau = t\sqrt{\frac{g}{R}}$. L'historique du déplacement vertical ${x_{G3}}^*(\tau)$ adimensionné par le premier maximum de la courbe est représenté sur la figure (6.2).

Nous constatons que les différents jeux de paramètres conduisent à un résultat identique. Par ailleurs, nous notons un accord excellent avec la méthode de Newman [97] jusqu'au deuxième pic du mouvement pour $\tau \approx 7$. Au delà, on observe un léger déphasage des courbes. Néanmoins,

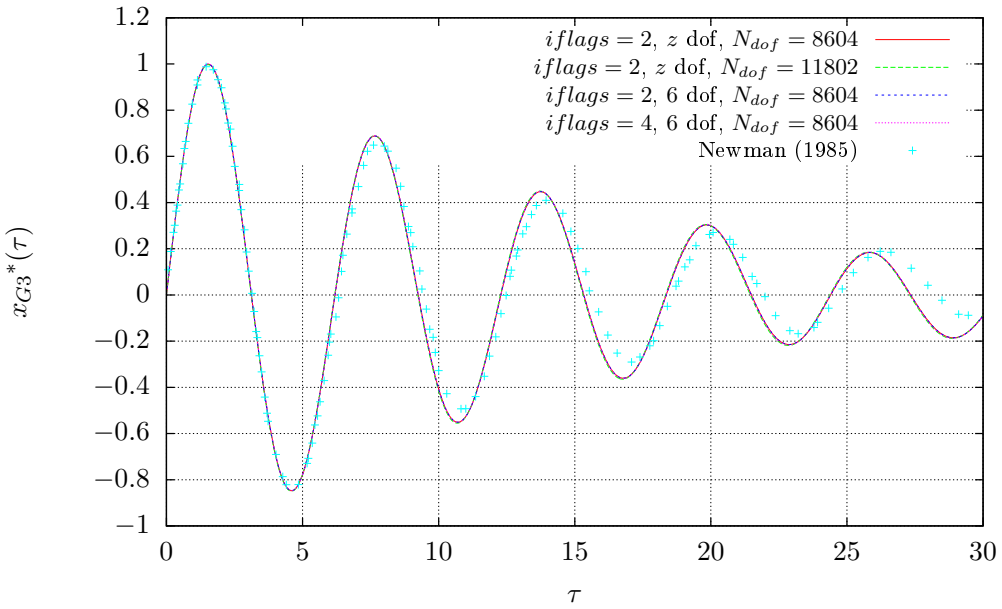


Figure 6.2: Mouvement libre d'extinction d'un cylindre vertical tronqué pour les conditions initiales $x_{G3}(0) = 0$ et $\dot{x}_{G3}(0) = \epsilon$ ($\epsilon = 0.1$ m.s^{-1}) : déplacement vertical adimensionnel $x_{G3}{}^*(\tau)$ en fonction du temps adimensionnel $\tau = t\sqrt{\frac{g}{R}}$.

force est de constater que le comportement qualitatif de notre modèle est très similaire à la solution de référence. Les écarts peuvent provenir de l'utilisation d'un modèle complètement non-linéaire.

Sur la figure (6.3), nous comparons l'évolution du déplacement normalisé pour différentes conditions initiales allant de $\epsilon = 10^{-3}$ m.s^{-1} à $\epsilon = 1$ m.s^{-1}. La tolérance du schéma de Newmark est cette fois fixée à $\epsilon_F = 10^{-6}$. Chaque courbe de déplacement vertical y est normalisée par la valeur du premier pic. On constate pour les valeurs croissantes de vitesse initiale, jusqu'à $\epsilon = 0.5$ m.s^{-1}, un décalage des courbes vers la gauche. A partir de $\epsilon = 0.3$ m.s^{-1}, le deuxième pic négatif est supérieur en valeur absolue au premier pic positif. Tout ceci montre une influence des non-linéarités dans la réponse dynamique du cylindre.

La figure (6.4) représente le nombre d'itérations N_{ipc} requises pour atteindre une précision de 10^{-6} sur les efforts hydrodynamiques dans le schéma prédicteur-correcteur, pour les vitesses initiales $\epsilon = 10^{-1}$ m.s^{-1} et $\epsilon = 1$ m.s^{-1}. Le schéma numérique est semi-lagrangien et on ne considère que le degré de liberté de translation verticale. On observe que le nombre de sous-itérations ne dépend pas de manière significative de l'amplitude du mouvement et qu'il vaut en moyenne $N_{ipc} = 9$ dans ce cas de figure. Cette valeur élevée pour un seul degré de liberté peut s'expliquer par la valeur très faible de la tolérance $\epsilon_F = 10^{-6}$ du schéma prédicteur-correcteur.

6.3 Analyse d'un flotteur de type semi-submersible

Nous abordons maintenant un cas d'application plus proche des concepts envisagés par les concepteurs d'éoliennes off-shore. Il s'agit d'une simplification du modèle du *Dutch Tri-floater* [94]. Ce concept est composé de trois colonnes principales de faible tirant d'eau et de grande surface de flottaison, ce qui favorise la stabilité de l'éolienne. Une vue du *design* complet extraite de [8]

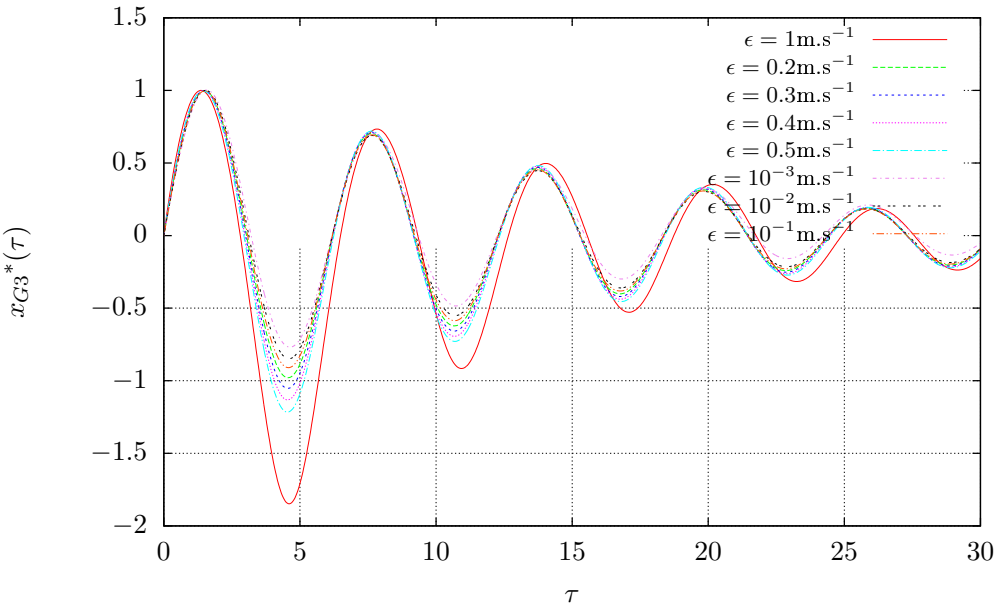


Figure 6.3: Mouvement libre d'extinction d'un cylindre vertical tronqué pour différentes valeurs du paramètre ϵ : déplacement vertical adimensionnel $x_{G3}{}^*(\tau)$ en fonction du temps adimensionnel $\tau = t\sqrt{\frac{g}{R}}$.

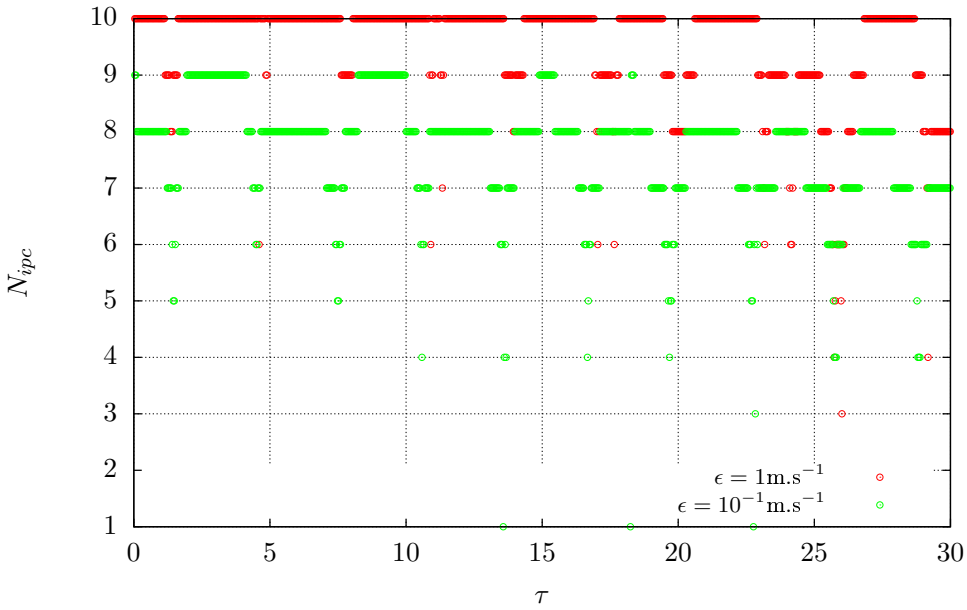


Figure 6.4: Mouvement libre d'extinction d'un cylindre vertical tronqué pour différentes valeurs du paramètre ϵ : nombre de sous-itérations N_{ipc} dans le schéma de Newmark de paramètres $(\gamma, \beta, \omega) = (0.5, 0.25, 0.65)$ en fonction du temps adimensionnel $\tau = t\sqrt{\frac{g}{R}}$.

et adopté dans cette étude est représentée sur la figure (6.5).

Ces colonnes disposent à leur base de pièces appelées *heave plates* et sont reliées entre elles

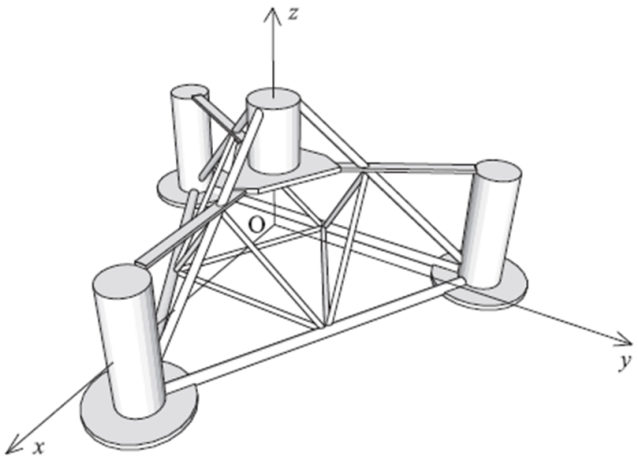


Figure 6.5: Géométrie du design *Dutch Tri-floater* et définition du système d'axes extrait de [8].

Design draft (m)	12.0
Column centre-to-center spacing (m)	68.0
Column diameter (m)	8.0
Column depth including plate (m)	24.0
Plate diameter (m)	18.0
Plate thickness (m)	1.0

Table 6.1: Dimensions géométriques du concept modifié de *Dutch Tri-floater* d'après l'étude [8].

par un réseau de bracons. Conformément à l'analyse en théorie potentielle linéarisée exécutée par [8], nous ignorons ce réseau de pièces de faibles dimensions dans notre calcul en théorie potentielle non-linéaire. Leur modélisation doit faire appel à des formules de Morison pour rendre compte des effets visqueux. L'utilisation de *heave plates* conduit à une augmentation de la masse ajoutée, de l'amortissement de radiation et de la traînée du flotteur. Ceci permet notamment, en jouant sur les dimensions, de modifier les périodes propres du système et de les placer en dehors du spectre de houle. D'après [8], les *heave plates* peuvent aussi avoir de fâcheux effets, en augmentant les charges hydrodynamiques dues aux vagues si leur diamètre est grand par rapport au tirant d'eau. Plus généralement, on s'attend donc à une forte modification du champ de vague diffracté et radié par la structure en présence de tels dispositifs. Les dimensions géométriques de ce concept sont résumées dans le tableau (6.1). On note que contrairement à [94], l'épaisseur des *heave plates* passe de 1 cm à 1 m. Une modélisation directe de la géométrie originale [94] n'a pas pu être entreprise par [8], pour cause d'instabilités numériques dans le code d'éléments de frontière Nemoh, au moment où les calculs ont été effectués pour la publication [8].

6.3.1 Analyse du pilonnement

Dans cette section, nous soumettons le flotteur décrit dans le tableau (6.1) à un mouvement de pilonnement forcé de 1 m d'amplitude pour des valeurs croissantes du paramètre adimensionnel kr avec k le nombre d'onde et r le rayon des *heave plates*. On définit le paramètre $\Lambda = 70$ m, qui correspond approximativement à la distance entre deux colonnes. Pour chaque valeur de kr, on utilise un domaine cylindrique centré sur le centre de gravité de la structure et de rayon $R_{ext} = 2\lambda + \Lambda$. Comme dans le chapitre (5), on utilise une plage absorbante cylindrique de longueur $D_\lambda = \lambda$. Le mouvement est répété pendant 20 périodes avec une rampe en temps initiale de 2 périodes. Nous nous plaçons à la profondeur de *design* $d = 50$ m. Nous utilisons l'algorithme NETGEN 2D de la plateforme SALOME pour mailler la surface libre. Le paramètre kr est varié dans l'intervalle $[0.25, 4.0]$ avec un pas de $\Delta kr = 0.25$. Ceci correspond à une période de houle T variant dans l'intervalle $[3.0, 12.4]$s. Entre ces deux bornes, la géométrie est adaptée à la longueur d'onde avec la formule $R_{ext} = 2\lambda + \Lambda$ et en conservant la contrainte de $N_{dof} \approx 20000$ afin de pouvoir effectuer les simulations dans un temps compatible avec les qualités de service des supercalculateurs disponibles à EDF R&D. On remarque que les simulations en grande longueur d'onde sont doublement pénalisées si on fixe la profondeur $d = 50$ m :

- On doit théoriquement mailler plus finement le fond car on ne satisfait pas l'hypothèse de profondeur infinie,
- On a aussi une contrainte sur le pas de temps plus forte si l'on souhaite conserver une discrétisation constante sur le solide.

Dans la pratique, nous relaxons la contrainte sur le maillage du fond. Le pas de temps est fixé à $\Delta t = \frac{T}{100}$ avec T la période correspondant à la longueur d'onde λ pour la profondeur de *design* $d = 50$ m. La masse ajoutée A_{33} obtenue en analysant l'effort de pression dynamique sur 10 périodes entre les instants adimensionnels $t^+ = \frac{t}{T} = 7.89$ et $t^+ = 17.89$ est représentée sur la figure (6.6) et comparée aux résultats obtenus par Antonutti avec le modèle fréquentiel BEM Nemoh. Nous sous-estimons la masse ajoutée par rapport au résultat linéaire donné par Nemoh. Le coefficient d'amortissement B_{33} est représenté sur la figure (6.7). On note sur la figure (6.7) la présence de deux pics aux mêmes périodes $T = 4.5$ s et $T = 6$ s avec les deux méthodes. Par ailleurs, les deux séries de points coïncident pour les petites périodes. On remarque également que dans certaines plages de période, les coefficients B_{33} obtenus par [8] sont négatifs. Notre méthode temporelle est exempte de cet inconvénient. Globalement, les tendances données par les deux modèles numériques sont proches.

6.3.2 Sensibilité des résultats au coefficient d'absorption en mouvement forcé

Nous évaluons la dépendance des historiques d'effort au coefficient d'absorption employé pour amortir les vagues radiées par la structure. Nous rappelons qu'on utilise sur le domaine $[0, 2\pi] \times [R_\lambda, R_{ext}]$, avec $0 \leq R_\lambda \leq R_{ext}$, un terme correctif dans les équations d'évolution temporelle de la surface libre de la forme :

$$\begin{aligned} x_3^* &\leftarrow x_3 - \gamma_0 \Delta t \sqrt{kg \tanh kd} \left(\frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - R_\lambda}{R_{ext} - R_\lambda} \right)^2 x_3 \\ \phi^* &\leftarrow \phi - \gamma_0 \Delta t \sqrt{kg \tanh kd} \left(\frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - R_\lambda}{R_{ext} - R_\lambda} \right)^2 \phi \end{aligned} \tag{6.3}$$

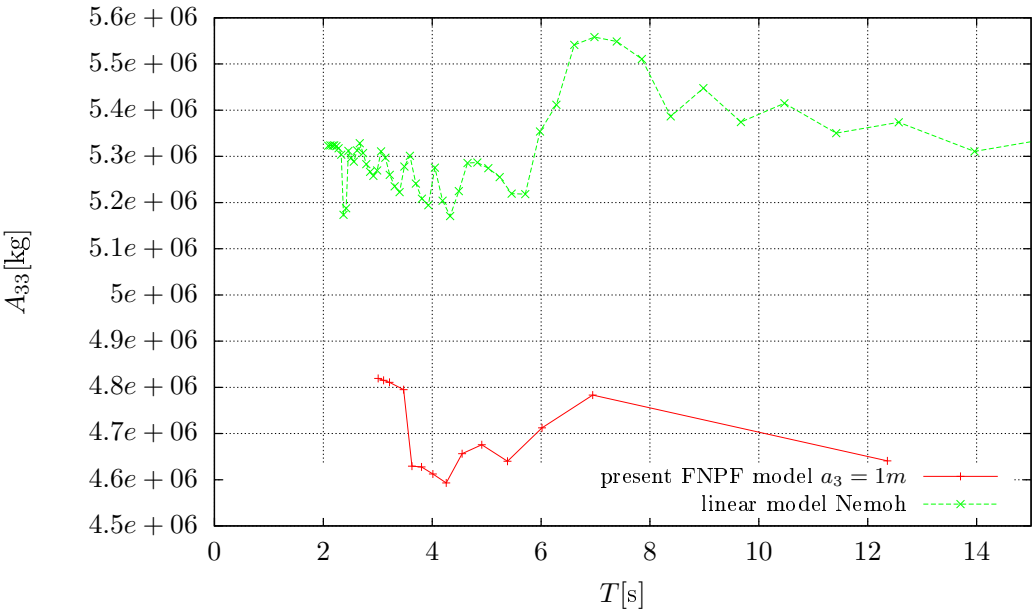


Figure 6.6: Mouvement de translation verticale forcée d'amplitude $a_3 = 1$ m du *Dutch Tri-floater* modifié : coefficient de masse ajoutée A_{33} en fonction de la période du mouvement T.

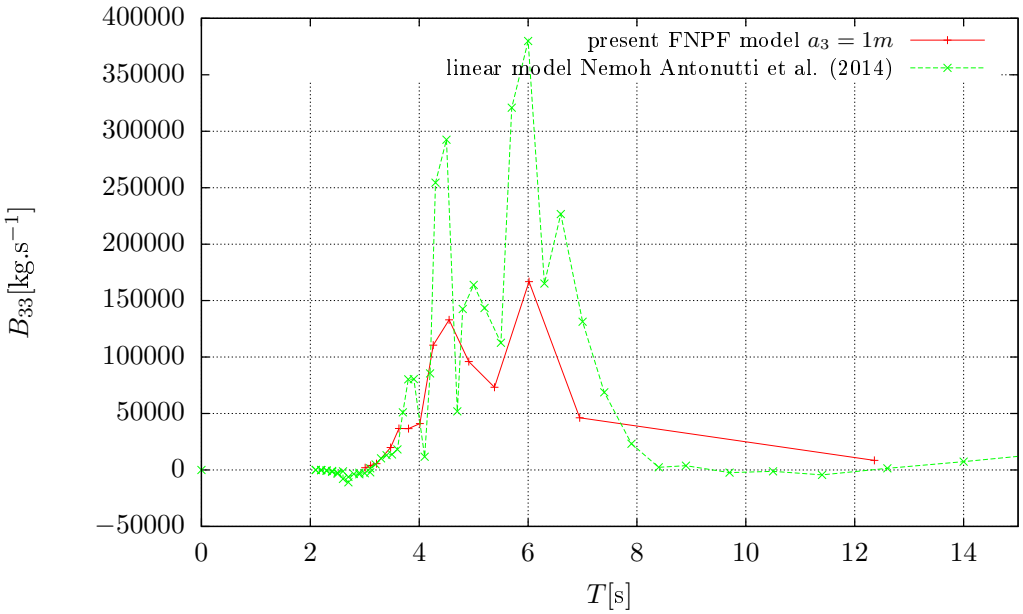


Figure 6.7: Mouvement de translation verticale forcée d'amplitude $a_3 = 1$ m du *Dutch Tri-floater* modifié : coefficient d'amortissement B_{33} en fonction de la période du mouvement T.

Par rapport aux formules présentées dans le chapitre (5), nous introduisons maintenant un coefficient γ_0 qui permet d'augmenter le poids de la pénalisation dans les conditions limites. On présente sur la figure (6.8) l'effort vertical en pilonnement de 3 m d'amplitude pour le paramètre $kr = 2.0$. On constate que les courbes sont pratiquement confondues. La figure (6.9) fait apparaître un écart entre les courbes de l'ordre de 10^{-4}.

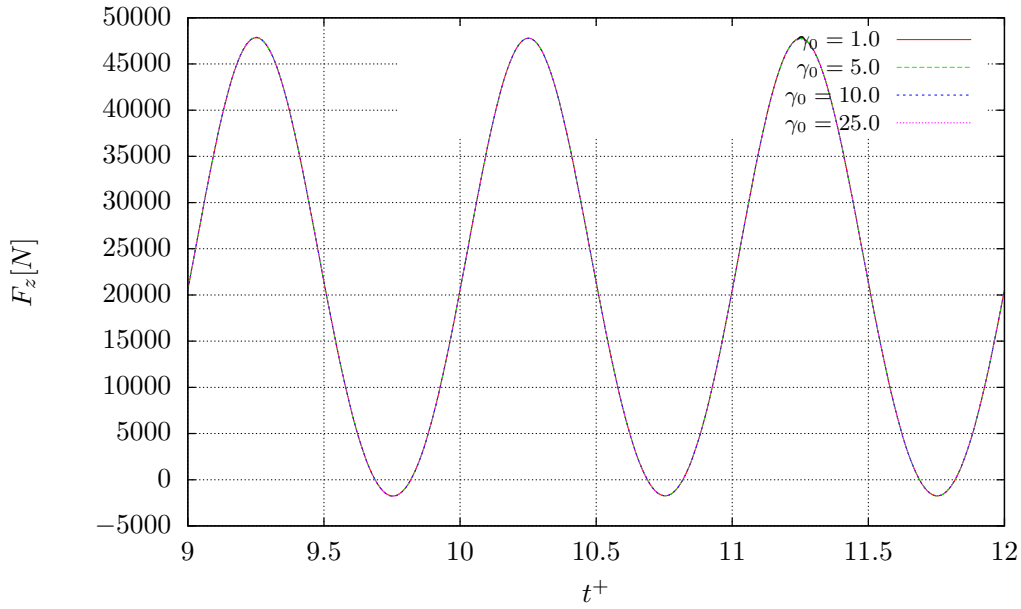


Figure 6.8: Effort vertical total F_z entre $t^+ = 9$ et $t^+ = 12$ pour un mouvement de pilonnement de 3 m d'amplitude du flotteur *Dutch Tri-floater* modifié pour $kr = 2.0$. La densité de l'eau est fixée à $\rho_f = 1$ kg.m^{-3}.

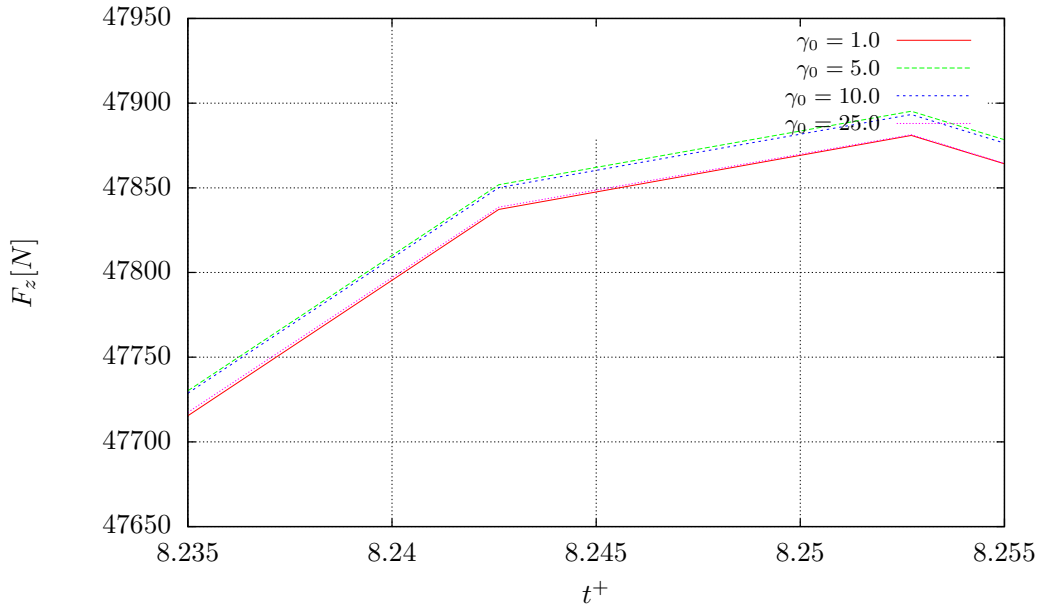


Figure 6.9: Effort vertical total F_z entre $t^+ = 8.235$ et $t^+ = 8.255$ pour un mouvement de pilonnement de 3 m d'amplitude du flotteur *Dutch Tri-floater* modifié pour $kr = 2.0$. La densité de l'eau est fixée à $\rho_f = 1$ kg.m^{-3}.

On peut donc conclure à la non-influence du coefficient γ_0 dans l'absorption des ondes radiées par une structure massive en pilonnement. On verra plus loin qu'il n'en va pas de même quand il s'agit d'absorber les ondes réfléchies par la structure en diffraction pour un forçage de vague

non-linéaire avec le modèle de Stokes à l'ordre 5.

6.3.3 Diffraction non-linéaire

Retour sur la méthodologie de génération de la houle

Nous reprenons dans cette section le cas test du cylindre ancré au fond soumis à des vagues longues abordé dans le chapitre (5). Nous présentons l'influence du modèle de houle théorique employé dans les conditions limites sur le calcul des coefficients d'effort d'ordre 2. Nous utilisons à cet effet un modèle de houle de type Stokes à l'ordre 5 développé par Benoit au LNHE. D'autre part, la configuration géométrique est modifiée par rapport au chapitre (5). Nous utilisons désormais un domaine de forme cylindrique sur fond plat comme représenté sur la figure (6.10). Une formulation similaire a été employée par Ferrant dans [99]. La surface libre est décomposée en 2 sous-parties circulaires. Nous considérons à nouveau un cylindre de rayon $R = 25$ cm et un paramètre $kR = 0.245$. Le rayon du cylindre extérieur est fixé à $R_{ext} = 18$ m ce qui représente approximativement trois longueurs d'onde. La taille de la plage absorbante est fixée à $D_\lambda = 12$ m. La profondeur est fixée à $d = 3$ m. En tout, 21557 noeuds sont employés pour mailler la géométrie. De plus, le domaine $D_1 = [0, 2\pi] \times [R, R_\lambda]$ est maillé plus finement que le domaine extérieur $D_2 = [0, 2\pi] \times [R_\lambda, R_{ext}]$. On utilise 14282 éléments pour D_1 soit une longueur d'arête variant dans $[0.0561, 0.151]$m, alors que le domaine D_2 comprend 20300 triangles pour une longueur d'arête dans $[0.151, 0.452]$m. Les simulations sont conduites sur une durée $t_{max} = 70$ s ce qui correspond à 35 périodes de houle.

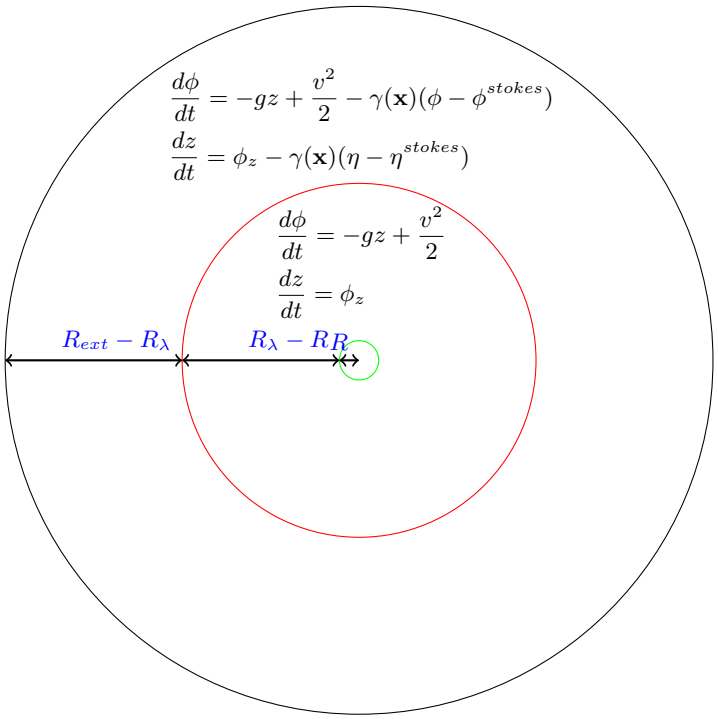


Figure 6.10: Schéma de la décomposition du maillage en fonction des conditions aux limites de surface libre.

Le tableau (6.2) présente la sensibilité des harmoniques d'effort à l'intervalle sur lequel la transformée de Fourier est appliquée au signal F_x. Le signal est à chaque fois analysé sur une

$[t_{min}, t_{max}]$	$[20.01, 40.31]$s	$[30.01, 50.31]$s	$[40.01, 60.31]$s	$[50.01, 70.31]$s
$\|F_1(\omega)\|$	0.6035556	0.6035967	0.6035775	0.6034657
$\|F_2(\omega)\|$	0.0192065	0.0190747	0.0190740	0.0190134
$\|F_3(\omega)\|$	0.0018004	0.0018696	0.0018788	0.0019960
$\|F_4(\omega)\|$	0.0009352	0.0009542	0.0009389	0.0008391
$\|F_5(\omega)\|$	0.0001230	0.0001626	0.0001636	0.0000792

Table 6.2: Diffraction non-linéaire d'une vague longue sur un cylindre tel que $kR = 0.245$ et $kA = 0.15$: sensibilité des harmoniques de l'effort longitudinal F_x à la fenêtre temporelle d'échantillonnage . La densité de l'eau est fixée à $\rho_f = 1$ kg.m^{-3}.

durée de $10T$.

On constate que jusqu'à l'ordre 4, le calcul de du coefficient de Fourier est stable vis à vis d'un changement d'intervalle. Pour l'ordre 3 et l'ordre 4, on observe néanmoins un écart significatif pour le dernier intervalle. Pour l'ordre 5, il y a une plus grande disparité des résultats numériques sur l'ensemble des intervalles utilisés pour calculer la transformée de Fourier du signal F_x. Sur la figure (6.11), nous présentons l'évolution du coefficient $|F_x^1|$ adimensionnel en fonction du paramètre kA sur l'intervalle $[40.01, 60.31]$s. Par rapport aux résultats du chapitre (5), nous obtenons une augmentation plus marquée du coefficient pour les valeurs croissantes de kA. Néanmoins, l'accord avec les autres références est excellent. Nous notons que l'utilisation du modèle d'Airy pour la génération de la houle conduit à un coefficient plus faible qu'avec le modèle de Stokes à l'ordre 5 pour le paramètre $kA = 0.15$. Sur la figure (6.12), nous présentons l'évolution

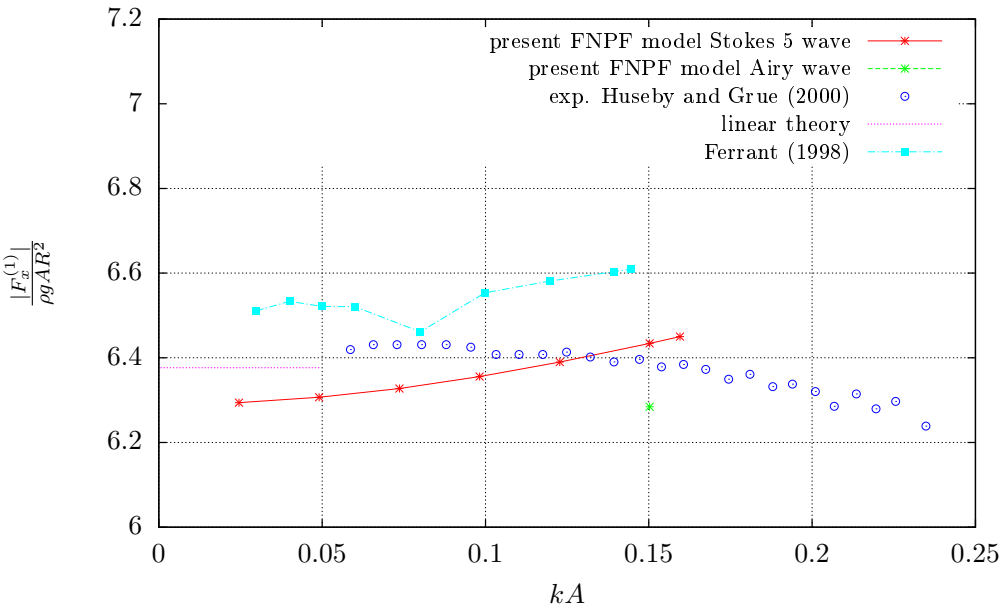


Figure 6.11: Diffraction non-linéaire d'une vague longue sur un cylindre tel que $kR = 0.245$: évolution du coefficient $|F_x^{(1)}|$ en fonction de la cambrure kA.

du coefficient $|F_x^{(2)}|$ adimensionnel en fonction du paramètre kA sur l'intervalle $[40.01, 60.31]$s. A nouveau, on constate un désaccord de notre modèle numérique avec la théorie faiblement non-

linéaire de Newman [100]. Néanmoins, par rapport aux résultats présentés au chapitre (5), le coefficient $|F_x^{(2)}|$ adimensionnel augmente fortement avec le paramètre kA et tend à se rapprocher des expériences pour $kA \geq 0.1$.

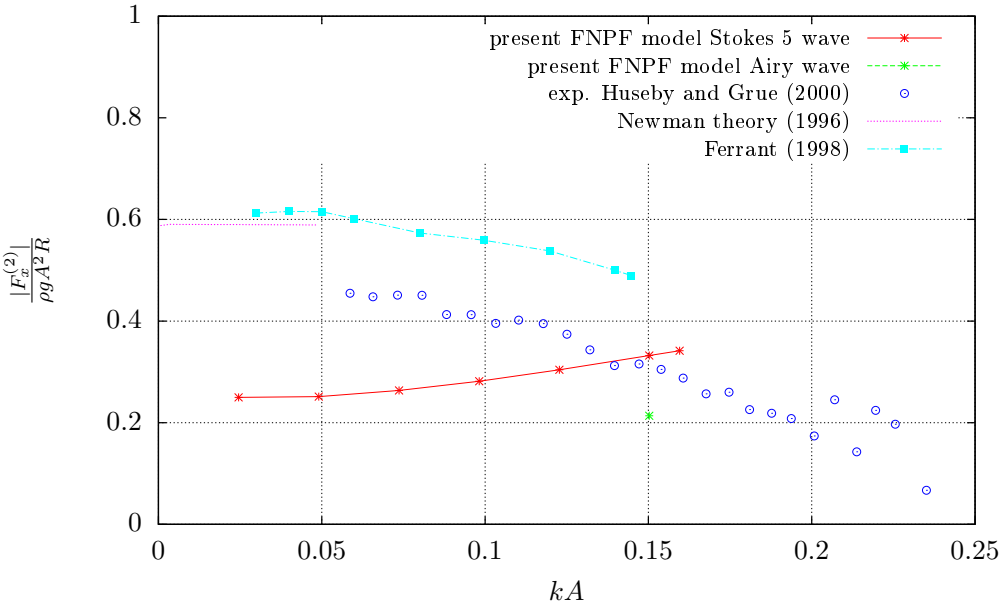


Figure 6.12: Diffraction non-linéaire d'une vague longue sur un cylindre tel que $kR = 0.245$: évolution du coefficient $|F_x^{(2)}|$ en fonction de la cambrure kA.

Application au *Dutch Tri-floater*

Nous étudions la diffraction non-linéaire sur le concept *Dutch Tri-Floater* modifié dans un domaine de forme cylindrique. Nous nous intéressons à l'intervalle $kr \in [0.3, 3.0]$. Nous soumettons le flotteur à des vagues régulières de hauteur $H = 2$ m ciblant un modèle de Stokes à l'ordre 5. Le choix d'une amplitude constante pour déterminer les *Response Amplitude Operators* (RAO) sur la plage $kr \in [0.3, 3.0]$ peut être contesté car les cambrures correspondantes varient fortement sur cet intervalle. On donne dans le tableau (6.3) les cambrures simulées dans cette étude.

Toutes les valeurs énumérées dans le tableau (6.3) ont pu être simulées avec un pas de temps fixe $\Delta t = \frac{T}{100}$ sans que des oscillations ne se manifestent au voisinage des intersections entre le flotteur et la surface libre. Ce n'est pas le cas pour les paramètres $kr \in [0.25, 0.8]$ pour des raisons de distorsions des mailles, qui rendent inévitables les oscillations si le pas de temps ne respecte pas une contrainte de type CFL. Après un certain nombre de tests, il nous est apparu que le choix d'un domaine de taille $R_{ext} = 3\lambda + \Lambda$, d'une plage absorbante d'extension $D_\lambda = 2\lambda$ et d'un paramètre $\gamma_0 = 4$, conduit à une stabilisation en 40 périodes des efforts. Les RAO alors obtenus concordent avec les valeurs présentées dans l'étude [8]. On note que les combinaisons $(D_\lambda, R_{ext}) = (\lambda, 3\lambda + \Lambda)$ et $(D_\lambda, R_{ext}) = (\lambda, 2\lambda + \Lambda)$ ne conduisent pas à une stabilisation des efforts en 40 périodes. Pour $(D_\lambda, R_{ext}) = (2\lambda, 3\lambda + \Lambda)$, on observe qu'à forte cambrure, les différents efforts calculés sur la structure peuvent mettre plus de temps à converger qu'à faible cambrure, d'où l'intérêt éventuel d'établir les RAO à cambrure constante plutôt qu'à hauteur de vague constante.

On analyse le signal des forces F_x, F_y et du moment transverse M_y sur une fenêtre stable

kr	ω[rad/s]	$\frac{H}{d}$	$\frac{2\pi H}{gT^2}$
0.3	0.564	0.04	0.01034071
0.4	0.658	0.04	0.01404540
0.5	0.738	0.04	0.01772977
0.6	0.809	0.04	0.02121773
0.7	0.873	0.04	0.02477896
0.8	0.934	0.04	0.02828204
1.0	1.044	0.04	0.03558266
1.25	1.167	0.04	0.04392920
1.50	1.279	0.04	0.05335175
1.75	1.381	0.04	0.06325805
2.0	1.476	0.04	0.07058650
2.25	1.566	0.04	0.08006097
2.50	1.651	0.04	0.08871022
2.75	1.731	0.04	0.09775156
3.00	1.808	0.04	0.10762240

Table 6.3: Caractéristiques théoriques des vagues simulées dans l'intervalle $kr \in [0.3, 3.0]$. Le rayon des *heave plates* est $r = 9$ m.

pour 6 ou 10 périodes selon les cas. Pour chaque fréquence, on définit le RAO de la quantité temporelle F comme le rapport entre le coefficient de Fourier d'ordre 1 $F^{(1)}$ et la hauteur de vague H. On prend dans ces calculs une densité de l'eau $\rho_f = 1025$ kg.m^3. Le RAO de la force longitudinale est représenté sur la figure (6.13) et un excellent accord est trouvé avec le modèle Nemoh. On reproduit très bien les oscillations de la courbe pour les quelques périodes simulées. Le RAO de la force verticale est représenté sur la figure (6.14) et un très bon accord est trouvé avec les valeurs publiées dans [8].

Enfin, le RAO associé au moment transerse est présenté sur la figure (6.15). A nouveau, on constate une bonne prédiction de notre modèle à l'ordre 1.

Compte-tenu des cambrures élevées atteintes à haute fréquence (voir le tableau (6.3)) dans cette étude, nous analysons aussi le rapport entre les coefficients d'ordre 2 et d'ordre 1 pour chaque composante 1, 3 et 5 de l'effort généralisé. Ces quantités sont représentées sur la figure (6.16), où on observe de façon systématique une décroissance des effets d'ordre 2 pour les périodes croissantes, et donc, pour les cambrures décroissantes. En particulier, on voit que l'effort vertical F_z et le moment transverse M_y sont très sensibles à la cambrure et le ratio $\frac{F_k^{(2)}}{F_k^{(1)}}$ peut atteindre 70%, ce qui est considérable.

Enfin, la figure (6.17) représente l'évolution de l'effort de dérive longitudinal $F_x^{(0)}$ en fonction de la fréquence $f = \frac{1}{T}$ de la vague. La figure (6.18), quant à elle, représente l'évolution de l'effort de dérive vertical $F_z^{(0)}$ en fonction de la fréquence angulaire $\omega = \frac{2\pi}{T}$ de la vague. Nos résultats sont comparés à des calculs effectués par Peyrard à l'aide d'un modèle fréquentiel calculant les *Quadratic Transfer Functions*. On voit donc que ces effets d'ordre 2 sont très bien captés par notre modèle quelle que soit la cambrure de la houle incidente et un accord satisfaisant est trouvé avec le modèle fréquentiel.

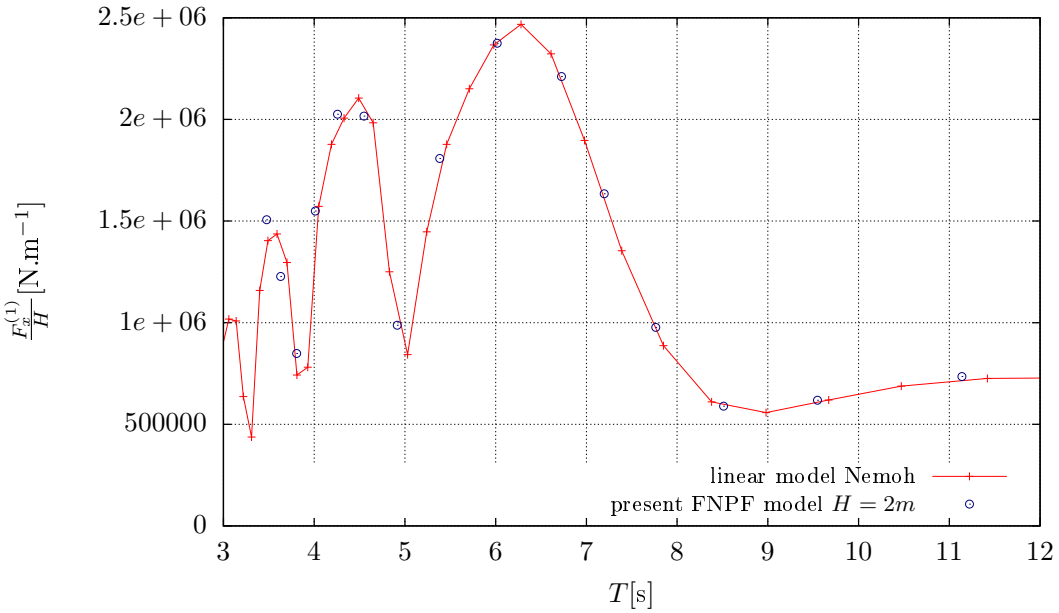


Figure 6.13: Diffraction non-linéaire d'une vague de hauteur $H = 2$ m sur le *Dutch Tri-floater* pour différentes périodes T sur un fond de profondeur $d = 50$ m : RAO de l'effort longitudinal F_x.

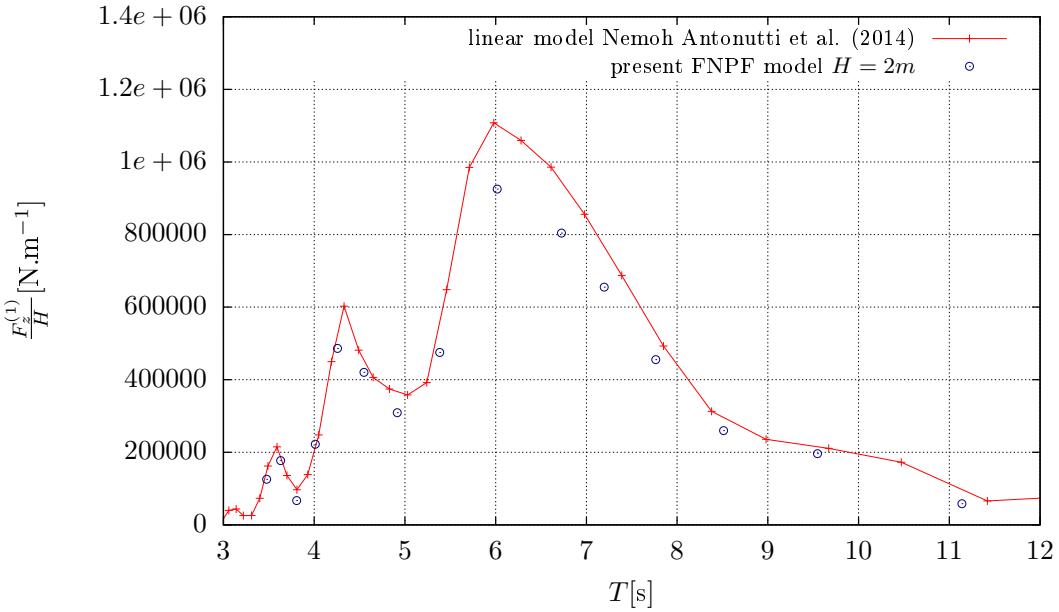


Figure 6.14: Diffraction non-linéaire d'une vague de hauteur $H =$ 2m sur le *Dutch Tri-floater* pour différentes périodes T sur un fond de profondeur $d = 50$ m : RAO de l'effort vertical F_z.

6.4 Conclusion intermédiaire

Le schéma numérique pour le mouvement libre en 3D est validé sur des essais d'extinction d'une barge cylindrique sans système d'ancrages. Un concept un peu plus complexe de flotteur inspiré

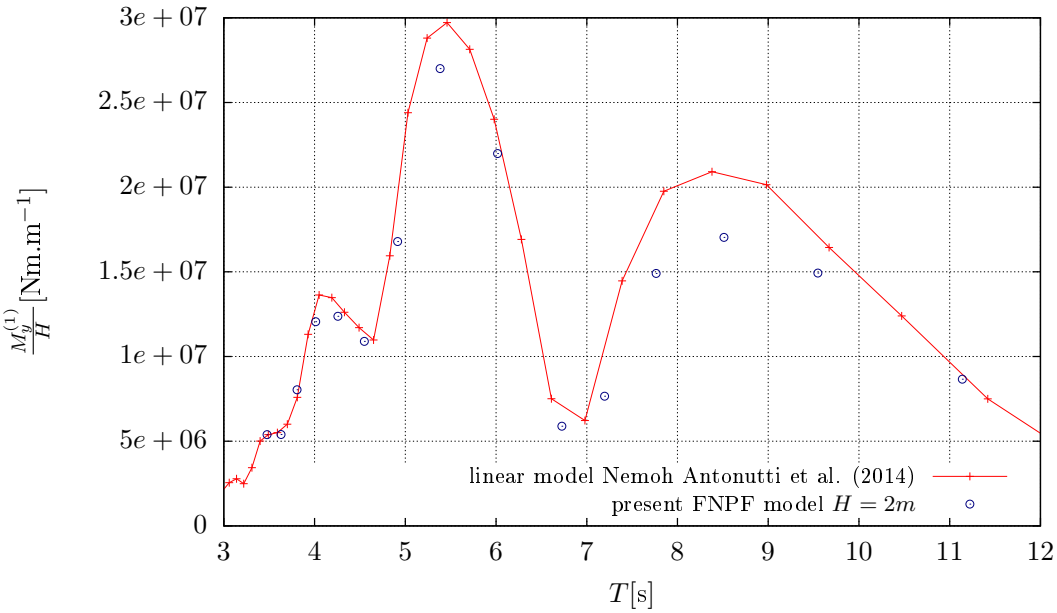


Figure 6.15: Diffraction non-linéaire d'une vague de hauteur $H =$ 2m sur le *Dutch Tri-floater* pour différentes périodes T sur un fond de profondeur $d = 50$ m : RAO du moment transverse M_y.

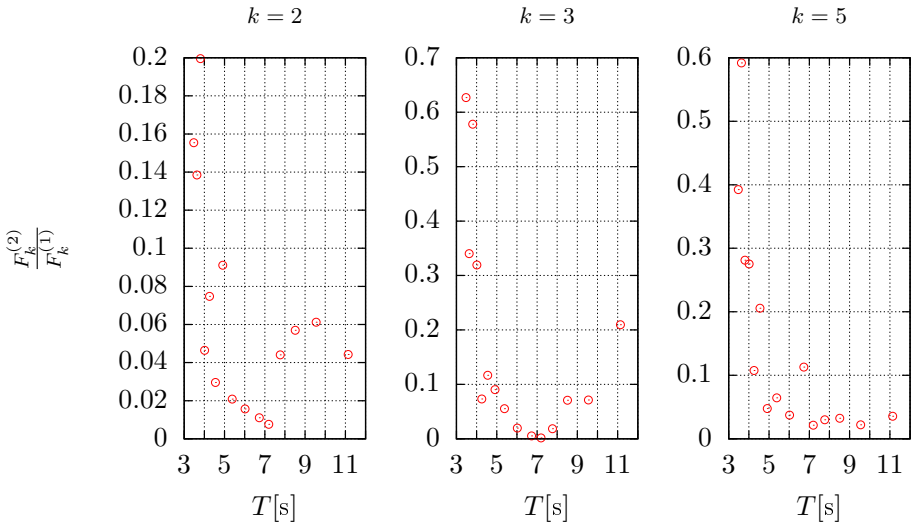


Figure 6.16: Diffraction non-linéaire d'une vague de hauteur $H = 2$ m sur le *Dutch Tri-floater* pour différentes périodes T sur un fond de profondeur $d = 50$ m : rapport $\frac{F_k^{(2)}}{F_k^{(1)}}$ pour $k = 1, 3$ et 5.

du *Dutch Tri-floater* est également analysé en radiation et en diffraction non-linéaires. Ce dernier cas est validé à l'ordre 1 par comparaison avec les résultats du code industriel *open-source* Nemoh.

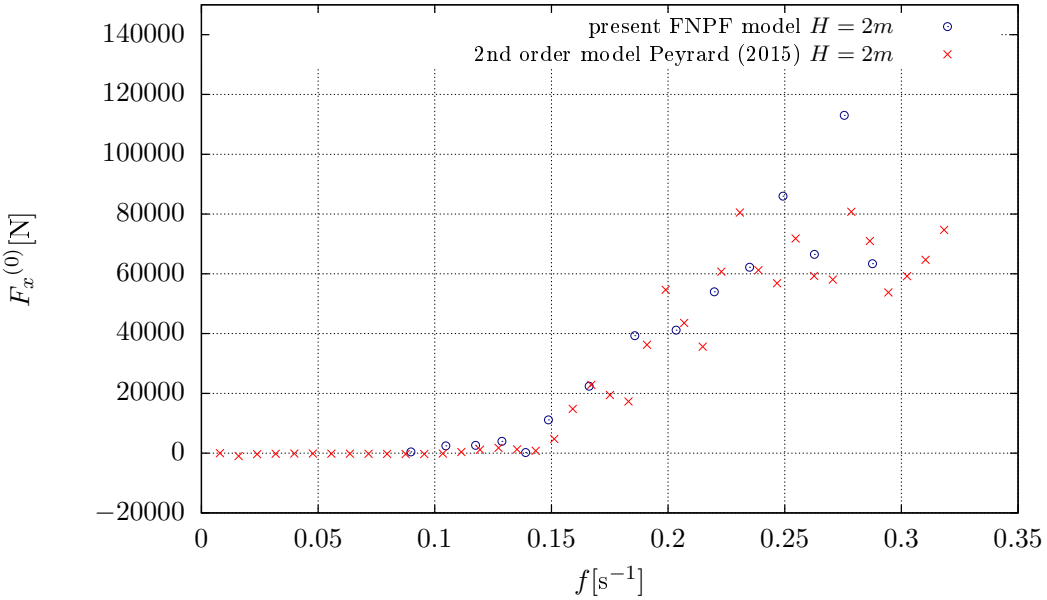


Figure 6.17: Diffraction non-linéaire d'une vague de hauteur $H = 2$ m sur le *Dutch Tri-floater* pour différentes fréquences f sur un fond de profondeur $d = 50$ m : force de dérive horizontale $F_x{}^{(0)}$.

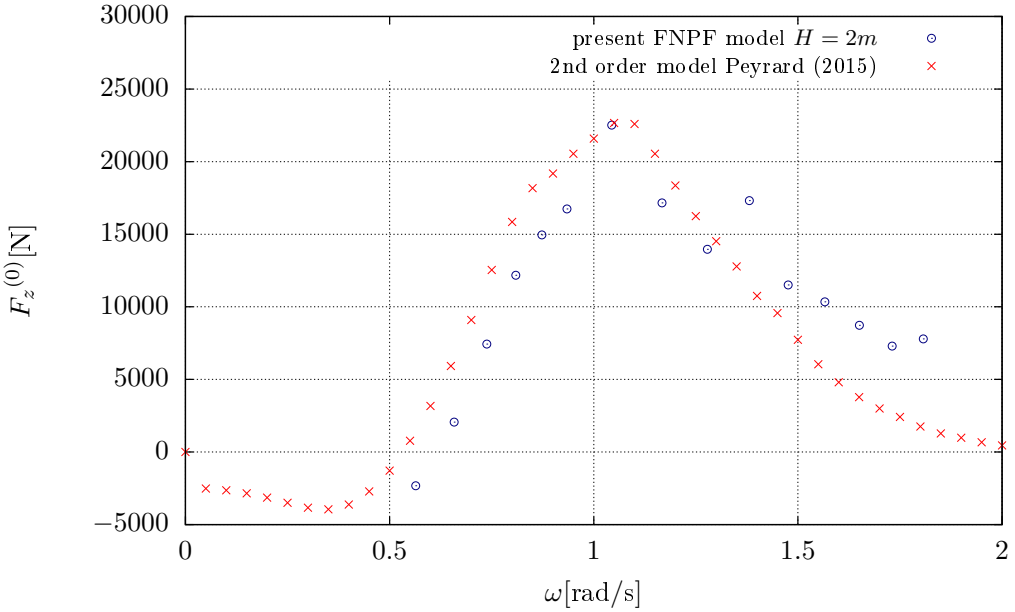


Figure 6.18: Diffraction non-linéaire d'une vague de hauteur $H = 2$ m sur le *Dutch Tri-floater* pour différentes pulsations ω sur un fond de profondeur $d = 50$ m : force de dérive verticale $F_z{}^{(0)}$.

Enfin, nous proposons une technique de génération des ondes non-linéaires basée sur un modèle de Stokes à l'ordre 5 dans des domaines de forme cylindrique. Cette nouvelle technique se distingue de la méthode de décomposition du champ de vague habituellement rencontrée dans le contexte

de la diffraction non-linéaire [90, 83]. On démontre avec ce dispositif la capacité de notre modèle à étudier un flotteur de forme complexe pour des houles de cambrures croissantes. Les RAO obtenus suggèrent un fort intérêt à analyser la structure avec des vagues de cambrure constante pour toutes les périodes considérées afin de mieux mettre en évidence les effets non-linéaires obtenus avec le modèle *FNPF*.

Conclusion et perspectives

1 Bilan des résultats obtenus et conclusion

Ce travail de thèse a permis le développement d'une nouvelle méthode 3D pour simuler des interactions vagues-structure à l'aide d'un modèle potentiel complètement non-linéaire. Comparé aux travaux antérieurs de Grilli *et al.* [1] et Guerber [19], ce nouveau modèle repose sur des maillages non-structurés des frontières du domaine de calcul, ce qui permet une utilisation plus versatile du code pour des problèmes d'interactions entre des vagues et des structures submergées ou flottantes, mais aussi des problèmes de propagation de vagues dans des domaines avec des bords de géométrie arbitraire et des bathymétries variables.

Pour des problèmes 2D, nos développements ont conduit à deux avancées principales dans le modèle numérique de Grilli *et al.* [1]. D'une part, nous avons pu étendre le domaine d'applicabilité du modèle 2D de Guerber *et al.* [23] à des géométries de forme simple (circulaire et rectangulaire) perçant la surface libre et en mouvement à 3 degrés de liberté. Ces développements ont été validés en mouvement forcé par le calcul des coefficients hydrodynamiques et en mouvement libre par des calculs de *RAO* pour un système {barge + ressort + amortisseur}. Une étude détaillée de la convergence du modèle numérique a été réalisée en mouvement forcé. De plus, nous avons proposé une nouvelle stratégie d'avance de la surface libre, d'ordre 1 en temps, inspirée des schémas d'intégration symplectiques. Ce schéma numérique permet de mieux conserver l'énergie du système mécanique {fluide + solide}, mais aussi le volume de fluide à une fonction oscillante près. Cette nouvelle stratégie résout ainsi des problèmes de conservation de l'énergie rencontrés avec le schéma explicite utilisé par Grilli *et al.* [1], pour des applications avec des corps flottants. Ces propriétés de conservation pourraient s'avérer très utiles pour la simulation d'états de mer irréguliers sur des périodes de temps typiques de 3 heures.

Pour des problèmes 3D, une transposition du schéma numérique explicite d'ordre 2, utilisé par Grilli *et al.* [1], a été définie pour des maillages triangulaires non-structurés. Partant des travaux sur un solveur *BEM* parallèle avec des triangles d'ordre 1 et une intégration analytique des singularités [24], nous avons développé un modèle basé sur une intégration numérique des singularités, valable pour des triangles d'ordre 1 et d'ordre 2, à l'aide de deux formulations distinctes du problème d'équations intégrales [1, 9]. De plus, les opérateurs requis dans la méthode *MEL* explicite à l'ordre 2 en temps ont été définis et leur convergence a été évaluée sur des cas test classiques.

D'autre part, un modèle d'interaction vagues-structure, valable pour des configurations de plusieurs cylindres perçant la surface libre a été proposé. Une étude en radiation pour différents modes du mouvement sur un cylindre tronqué et une étude en diffraction sur un cylindre ancré au fond ont permis de vérifier la validité de notre modèle numérique par le calcul de quantités d'intérêt : masse ajoutée, amortissement de radiation, effort d'excitation. Enfin, nous avons effectué une étude préliminaire pour un *design* inspiré du concept *Dutch Tri-Floater*. A cet effet, nous avons évalué l'accord à l'ordre 1 de notre modèle avec le code *open-source* Nemoh sur un cas

de pilonnement forcé. Nous avons aussi proposé une méthode pour coupler un modèle de vague de Stokes à l'ordre 5 avec notre modèle potentiel basé sur une résolution du champ potentiel total. Avec cette méthodologie, les RAO d'ordre 1 sont validés par rapport au code Nemoh. Une comparaison des efforts de dérive par rapport à un modèle fréquentiel d'ordre 2 développé au laboratoire permet d'effectuer une validation préliminaire des effets non-linéaires calculés avec notre modèle *FNPF*.

2 Perspectives

Le travail réalisé sur notre code de simulation numérique nous a permis d'aboutir à une méthodologie capable de traiter des géométries de flotteur d'éolienne off-shore relativement complexes avec plusieurs cylindres perçant la surface libre. Les validations préliminaires effectuées sur ce dernier cas rendent compte de l'importance des effets non-linéaires. Afin de pouvoir pleinement mettre à profit ce type de modélisation, plusieurs améliorations sont envisageables :

- Optimisation et précision du schéma numérique temporel :
  A court terme, compte-tenu des propriétés de conservation de l'énergie des deux schémas analysés dans le chapitre (3), il serait opportun de réaliser une comparaison de différents schémas numériques pour l'avance en temps. Il est clair que la stratégie actuelle pour la surface libre est perfectible car elle repose sur un schéma entièrement explicite. Bien que permettant de se limiter, pour les cas de propagation de vagues et de mouvement forcé de solides rigides, à la résolution de deux problèmes de Laplace par pas de temps, ce schéma nécessite d'évaluer un grand nombre de dérivées d'ordres élevés, ce qui peut engendrer des erreurs supplémentaires dans le schéma numérique. D'autres stratégies d'ordre 2 en temps s'offrent à nous si on abandonne cette contrainte de deux problèmes de Laplace par pas de temps. On pourrait, par exemple, s'appuyer sur un schéma de Runge–Kutta d'ordre 2 pour intégrer les conditions de surface libre d'ordre 1 et effectuer une transformation de la condition limite sur le solide pour abaisser l'ordre des dérivées. Cette transformation, assez classique, est déjà utilisée dans des codes temporels potentiels d'ordre 2 [96]. On note qu'elle fait apparaître $N_b(2N_{tot} - N_b)$ (avec N_b le nombre de noeuds du solide et N_{tot} le nombre de noeuds total) nouveaux coefficients d'influence dans le système linéaire. Tous les outils nécessaires à la mise en oeuvre de cette méthode sont disponibles grâce aux développements effectués dans le chapitre (4). Outre l'avantage indéniable d'éviter l'évaluation de dérivées d'ordre 2, ce schéma numérique permettrait d'aboutir à un formalisme unifié pour notre modèle quelque soit l'ordre des fonctions de forme. Cette technique pourrait être de surcroît aisément généralisée à des schémas en temps multi-niveaux d'ordres supérieurs à 2.

- Propriété de conservation de l'énergie du schéma numérique :
  Il serait intéressant de généraliser au modèle 3D la stratégie d'avance en temps de type symplectique proposée dans ce mémoire et d'effectuer une analyse mathématique des propriétés de ce schéma.

- Précision du solveur d'éléments de frontière :
  Une autre piste d'amélioration du modèle numérique serait d'implémenter la méthode de Hayami (présentée dans [9]) pour le traitement des intégrales quasi-singulières. Cette technique conduit à une évaluation beaucoup plus précise que les quadratures classiques, des intégrales régulières pour des couples de points très proches, éventuellement situés à une interface entre deux frontières. Ce développement permettrait éventuellement de trancher

sur l'origine (solution de l'équation intégrale ou schéma numérique) de certaines instabilités observées sur la ligne de flottaison du solide rigide. A notre connaissance, peu de travaux sur des modèles 3D d'interactions vagues-structure abordent ce sujet.

- Traitement de géométries complexes :
  Un autre axe de recherche, plus appliqué, serait de généraliser l'algorithme d'interaction vagues-structure à des géométries de solides quelconques. Il pourrait reposer sur une utilisation plus avancée des fonctionnalités présentes dans la plateforme SALOME, déjà utilisée dans ce travail pour la génération des maillages triangulaires non-structurés. L'objectif serait de s'affranchir de l'hypothèse de maillage régulier, sur les frontières solides, nécessaire à l'utilisation des méthodes de remaillage développées dans ce travail, en faisant appel aux fonctions de maillage de SALOME. Ceci permettrait alors d'évaluer des types de flotteurs d'éolienne plus variés.

- Effets visqueux :
  Il serait utile de prendre en compte les effets visqueux, à l'aide d'une formulation adhoc telle que la formule de Morison. Ceci permettrait notamment d'utiliser le modèle pour des solides de taille caractéristique petite devant la longueur d'onde des vagues.

- Optimisation du temps CPU :
  Une autre problématique inévitable est liée aux temps de calcul, qui restent importants, même avec la parallélisation de l'assemblage de la matrice des coefficients d'influence du système, d'autant plus que la matrice doit être assemblée à chaque pas de temps avec le modèle *FNPF*. Des travaux allant dans ce sens ont été entrepris au Laboratoire Saint-Venant par Jeffrey Harris lors de son post-doctorat, dans le cadre du projet ANR MONACOREV. Ils ont permis d'interfacer le code avec des librairies de l'algorithme des Multipôles Rapides ExaFMM [101], à l'origine conçue pour des calculs d'interactions à N-corps. Bien qu'étant reconnue comme l'une des implémentations les plus efficientes de l'algorithme des Multipôles Rapides, son utilisation en parallèle conduit à des gains en temps de calcul encore assez modérés [10] pour des maillages de taille intermédiaire (entre 10000 et 30000 noeuds).

Bibliography

[1] S.T. Grilli, P. Guyenne, and F. Dias. A fully non-linear model for three-dimensional overturning waves over an arbitrary bottom. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 35(7):829–867, 2001.

[2] Analysis of floating wind turbines. `http://fessrg.ucsd.edu/Research/Wind/`, 2013.

[3] Cnoidal waves. `http://http://en.wikipedia.org/wiki/Cnoidal_wave`, 2014.

[4] S. Yamashita. Calculations of the hydrodynamic forces acting upon thin cylinders oscillating vertically with large amplitude. *Journal of the Society of Naval Architects of Japan*, (141):61–70, 1977.

[5] F. Tasai and W. Koterayama. Nonlinear hydrodynamic forces acting on cylinders heaving on the surface of a fluid. *Rep. Res. Inst. Appl. Mech. Kyushu Univ*, 24:1–39, 1976.

[6] C.M. Lee. The second-order theory of heaving cylinders in a free surface. *Journal of Ship Research*, 12(4):313–327, 1968.

[7] P. Andersen and H. Wuzhou. On the calculation of two-dimensional added mass and damping coefficients by simple Green's function technique. *Ocean Engineering*, 12(5):425–451, 1985.

[8] R. Antonutti, C. Peyrard, L. Johanning, A. Incecik, and D. Ingram. An investigation of the effects of wind-induced inclination on floating wind turbine dynamics: heave plate excursion. *Ocean Engineering*, 91:208–217, 2014.

[9] M. Bonnet. *Equations intégrales et éléments de frontière (in French)*. CNRS Editions/Eyrolles, 1995.

[10] J.C. Harris, E. Dombre, M. Benoit, and S.T. Grilli. Fast integral equation methods for fully nonlinear water wave modeling. In *Proceedings of the 24th International Offshore and Polar Engineering Conference*, pages 583–590, 2014.

[11] J.M. Jonkman. *Dynamics modeling and loads analysis of an offshore floating wind turbine*. ProQuest, 2007.

[12] M. Philippe. *Couplage aéro-hydrodynamiques pour l'étude de la tenue à la mer des éoliennes offshore flottantes*. PhD thesis, Ecole Centrale de Nantes, France, 2012.

[13] M. Borg and M. Collu. Offshore floating vertical axis wind turbines, dynamics modelling state of the art. part iii: hydrodynamics and coupled modelling approaches. *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, 2014.

[14] W.E. Cummins. The impulse response function and ship motions. Technical report, DTIC Document, 1962.

[15] B. Molin. *Hydrodynamique des structures offshore (in French).* Editions Technip, 2002.

[16] E.E. Bachynski and T. Moan. Ringing loads on tension leg platform wind turbines. *Ocean Engineering*, 84:237–248, 2014.

[17] Š. Malenica and B. Molin. Third-harmonic wave diffraction by a vertical cylinder. *Journal of Fluid Mechanics*, 302:203–229, 1995.

[18] A.J. Coulling, A.J. Goupee, A.N. Robertson, and J.M. Jonkman. Importance of second-order difference-frequency wave-diffraction forces in the validation of a fast semi-submersible floating wind turbine model. In *ASME 2013 32nd International Conference on Ocean, Offshore and Arctic Engineering*, pages V008T09A019–V008T09A019. American Society of Mechanical Engineers, 2013.

[19] E. Guerber. *Numerical modelling of nonlinear interactions of waves with submerged structures: applied to the simulation of wave energy converters.* PhD thesis, Université Paris-Est, 2011.

[20] E.F.G. van Daalen. *Numerical and theoretical studies of water waves and floating bodies.* PhD thesis, Universiteit Twente, The Netherlands, 1993.

[21] K. Tanizawa. The state of the art on numerical wave tank. In *Proceedings of 4th Osaka Colloquium on Seakeeping Performance of Ships*, pages 95–114, 2000.

[22] S.T. Grilli, J. Skourup, and I.A. Svendsen. An efficient boundary element method for nonlinear water waves. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 6(2):97–107, 1989.

[23] E. Guerber, M. Benoit, S.T. Grilli, and C. Buvat. A fully nonlinear implicit model for wave interactions with submerged structures in forced or free motion. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 36(7):1151–1163, 2012.

[24] L. Letournel, P. Ferrant, A. Babarit, G. Ducrozet, J.C. Harris, M. Benoit, and E. Dombre. Comparison of fully nonlinear and weakly nonlinear potential flow solvers for the study of wave energy converters undergoing large amplitude motions. In *ASME 2014 33rd International Conference on Ocean, Offshore and Arctic Engineering*, pages V09BT09A002–V09BT09A002. American Society of Mechanical Engineers, 2014.

[25] Y. Li and M. Lin. Regular and irregular wave impacts on floating body. *Ocean Engineering*, 42:93–101, 2012.

[26] A. Ghasemi, A. Pathak, and M. Raessi. Computational simulation of the interactions between moving rigid bodies and incompressible two-fluid flows. *Computers & Fluids*, 94:1–13, 2014.

[27] B.T. Paulsen, H. Bredmose, and H.B. Bingham. An efficient domain decomposition strategy for wave loads on surface piercing circular cylinders. *Coastal Engineering*, 86:57–76, 2014.

[28] C.C. Mei. *The applied dynamics of ocean surface waves.* World Scientific., 1989.

[29] J.N. Newman. *Marine hydrodynamics*. The MIT press, 1977.

[30] Q.W. Ma and S. Yan. QALE-FEM for numerical modelling of non-linear interaction between 3D moored floating bodies and steep waves. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 78(6):713–756, 2009.

[31] K. Tanizawa. A nonlinear simulation method of 3-D body motions in waves. *Journal of the Society of Naval Architects of Japan*, 178:179–191, 1995.

[32] R. Glowinski, T.-W. Pan, T.I. Hesla, D.D. Joseph, and J. Periaux. A distributed Lagrange multiplier/fictitious domain method for flows around moving rigid bodies: application to particulate flow. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 30(8):1043–1066, 1999.

[33] S. Yan and Q.W. Ma. QALE-FEM for modelling 3D overturning waves. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 63(6):743–768, 2010.

[34] C. Fochesato and F. Dias. A fast method for nonlinear three-dimensional free-surface waves. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Science*, 462(2073):2715–2735, 2006.

[35] S.Y. Boo. Linear and nonlinear irregular waves and forces in a numerical wave tank. *Ocean Engineering*, 29(5):475–493, 2002.

[36] Y. Liu, M. Xue, and D.K.P. Yue. Computations of fully nonlinear three-dimensional wave-wave and wave-body interactions. Part 2. Nonlinear waves and forces on a body. *Journal of Fluid Mechanics*, 438:41–66, 2001.

[37] W. Bai and R. Eatock Taylor. Higher-order boundary element simulation of fully nonlinear wave radiation by oscillating vertical cylinders. *Applied Ocean Research*, 28(4):247–265, 2006.

[38] G.X. Wu. A note on non-linear hydrodynamic force on a floating body. *Applied Ocean Research*, 22:315–316, 2000.

[39] Q.W. Ma, G.X. Wu, and R. Eatock Taylor. Finite element simulation of fully non-linear interaction between vertical cylinders and steep waves. part 1: methodology and numerical procedure. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 36(3):265–285, 2001.

[40] C.Z. Wang, G.X. Wu, and K.R. Drake. Interactions between nonlinear water waves and non-wall-sided 3d structures. *Ocean engineering*, 34(8):1182–1196, 2007.

[41] A. Mola, L. Heltai, and A. DeSimone. A stable and adaptive semi-lagrangian potential model for unsteady and nonlinear ship-wave interactions. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 37(1):128–143, 2013.

[42] C.Z. Wang and G.X. Wu. An unstructured-mesh-based finite element simulation of wave interactions with non-wall-sided bodies. *Journal of Fluids and Structures*, 22(4):441–461, 2006.

[43] W. Koo and M.H. Kim. Freely floating-body simulation by a 2D fully nonlinear numerical wave tank. *Ocean Engineering*, 31(16):2011–2046, 2004.

[44] S. Yan and Q.W. Ma. Numerical simulation of fully nonlinear interaction between steep waves and 2D floating bodies using the QALE-FEM method. *Journal of Computational Physics*, 221(2):666–692, 2007.

[45] G.X. Wu and R. Eatock Taylor. The coupled finite element and boundary element analysis of nonlinear interactions between waves and bodies. *Ocean Engineering*, 30(3):387–400, 2003.

[46] Q.X. Wang. Unstructured MEL modelling of nonlinear unsteady ship waves. *Journal of Computational Physics*, 210(1):368–385, 2005.

[47] W. Bai and R. Eatock Taylor. Fully nonlinear simulation of wave interaction with fixed and floating flared structures. *Ocean Engineering*, 36(3):223–236, 2009.

[48] M.S. Longuet-Higgins and E.D. Cokelet. The deformation of steep surface waves on water. I. A numerical method of computation. *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences*, 350(1660):1–26, 1976.

[49] J.W. Dold. An efficient surface-integral algorithm applied to unsteady gravity waves. *Journal of Computational Physics*, 103(1):90–115, 1992.

[50] R.F. Beck. Time-domain computations for floating bodies. *Applied Ocean Research*, 16(5):267–282, 1994.

[51] M.J. Chern, A.G.L. Borthwick, and R. Eatock Taylor. A pseudospectral σ-transformation model of 2-d nonlinear waves. *Journal of Fluids and Structures*, 13(5):607–630, 1999.

[52] M.J. Chern, A.G.L. Borthwick, and R. Eatock Taylor. Simulation of non-linear free surface motions in a cylindrical domain using a Chebyshev–Fourier spectral collocation method. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 36(4):465–496, 2001.

[53] C.P. Kent and W. Choi. An explicit formulation for the evolution of nonlinear surface waves interacting with a submerged body. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 55(11):1019–1038, 2007.

[54] M. Garzon, D. Adalsteinsson, L. Gray, and J.A. Sethian. A coupled level set-boundary integral method for moving boundary simulations. *Interfaces and Free Boundaries*, 7(3):277, 2005.

[55] M. Garzon, L. J Gray, and J. Sethian. Droplet and bubble pinch-off computations using level sets. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 236(12):3034–3041, 2012.

[56] G.X. Wu and Z.Z. Hu. Simulation of nonlinear interactions between waves and floating bodies through a finite-element-based numerical tank. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 460(2050):2797–2817, 2004.

[57] G.X. Wu and R. Eatock Taylor. Finite element analysis of two-dimensional non-linear transient water waves. *Applied Ocean Research*, 16(6):363–372, 1994.

[58] T. Vinje and P. Brevig. Nonlinear ship motions. Technical Report R-112.81, 1981.

[59] E. Dombre, M. Benoit, D. Violeau, C Peyrard., and S.T. Grilli. Simulation of floating structure dynamics in waves by implicit coupling of a fully non-linear potential flow model and a rigid body motion approach. *Journal of Ocean Engineering and Marine Energy*, pages 1–22, 2014.

[60] S.T. Grilli and R. Subramanya. Numerical modeling of wave breaking induced by fixed or moving boundaries. *Computational Mechanics*, 17(6):374–391, 1996.

[61] W.C. Koo and M.H. Kim. Fully nonlinear wave-body interactions with surface-piercing bodies. *Ocean Engineering*, 34(7):1000–1012, 2007.

[62] H.J. Tang, C.C. Huang, and W.M. Chen. Dynamics of dual pontoon floating structure for cage aquaculture in a two-dimensional numerical wave tank. *Journal of Fluids and Structures*, 27(7):918–936, 2011.

[63] D.G. Dommermuth and D.K.P. Yue. Numerical simulations of nonlinear axisymmetric flows with a free surface. *Journal of Fluid Mechanics*, 178:195–219, 1987.

[64] P.J.F. Berkvens. *Floating bodies interacting with water waves: Development of a time-domain panel method.* PhD thesis, Universiteit Twente, The Netherlands, 1998.

[65] B.Z. Zhou, D.Z. Ning, B. Teng, and W. Bai. Numerical investigation of wave radiation by a vertical cylinder using a fully nonlinear HOBEM. *Ocean Engineering*, 70:1–13, 2013.

[66] M.A. Rahman, N. Mizutani, and K. Kawasaki. Numerical modeling of dynamic responses and mooring forces of submerged floating breakwater. *Coastal Engineering*, 53(10):799–815, 2006.

[67] I. Hadžić, J. Hennig, M. Perić, and Y. Xing-Kaeding. Computation of flow-induced motion of floating bodies. *Applied Mathematical Modelling*, 29(12):1196–1210, 2005.

[68] S.J. Maskell and F. Ursell. The transient motion of a floating body. *Journal of Fluid Mechanics*, 44(part 2):303–313, 1970.

[69] S. Grilli and R. Subramanya. A computer program for transient wave run-up. Technical Report CACR-93-02, Department of Ocean Engineering, University of Rhode Island, 1993.

[70] S.T. Grilli and I.A. Svendsen. Corner problems and global accuracy in the boundary element solution of nonlinear wave flows. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 7(4):178–195, 1990.

[71] F. Dias and T.J. Bridges. The numerical computation of freely propagating time-dependent irrotational water waves. *Fluid Dynamics Research*, 38(12):803–830, 2006.

[72] A. Lew, J.E. Marsden, M. Ortiz, and M. West. Variational time integrators. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 60(1):153–212, 2004.

[73] C. Kane. *Variational integrators and the Newmark algorithm for conservative and dissipative mechanical systems.* PhD thesis, Caltech, USA, 1999.

[74] R. Cointe. *Quelques aspects de la simulation numérique d'un canal à houle (284 pages in French).* PhD thesis, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, Paris, France, 1989.

[75] C.P. Kent. *A pseudo-spectral method for calculating wave-body interaction using an explicit free-surface formulation.* PhD thesis, University of Michigan, USA, 2005.

[76] W. Frank. Oscillation of cylinders in or below the free surface of deep fluids. Technical report, DTIC Document, 1967.

[77] W.R. Porter. Pressure distributions, added-mass, and damping coefficients for cylinders oscillating in a free surface. Technical report, DTIC Document, 1960.

[78] J.V. Wehausen. The motion of floating bodies. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 3(1):237–268, 1971.

[79] S. Itō. *Study of the transient heave oscillation of a floating cylinder.* PhD thesis, Massachusetts Institute of Technology, USA, 1977.

[80] N. Nojiri and K. Murayama. A study on the drift force on two dimensional floating body in regular waves. *Trans. West-Japan Soc. Nav. Arch*, 51:131–152, 1975.

[81] R.C. Kirby, A. Logg, M.E. Rognes, and A.R. Terrel. Common and unusual finite elements. In *Automated Solution of Differential Equations by the Finite Element Method*, pages 95–119. Springer, 2012.

[82] H. Yan and Y. Liu. An efficient high-order boundary element method for nonlinear wave–wave and wave-body interactions. *Journal of Computational Physics*, 230(2):402–424, 2011.

[83] Y.-L. Shao and O.M. Faltinsen. A Harmonic polynomial cell (HPC) method for 3D Laplace equation with application in marine hydrodynamics. *Journal of Computational Physics*, 274:312–332, 2014.

[84] W. Geng. Parallel higher-order boundary integral electrostatics computation on molecular surfaces with curved triangulation. *Journal of Computational Physics*, 241:253–265, 2013.

[85] M. Meyer, M. Desbrun, P. Schröder, A.F. Barr, et al. Discrete differential-geometry operators for triangulated 2-manifolds. *Visualization and Mathematics*, 3(2):52–58, 2002.

[86] C. Fochesato, S.T. Grilli, and P. Guyenne. Note on non-orthogonality of local curvilinear co-ordinates in a three-dimensional boundary element method. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 48(3):305–324, 2005.

[87] D. Dommermuth. The initialization of nonlinear waves using an adjustment scheme. *Wave Motion*, 32(4):307–317, 2000.

[88] D. Clamond, D. Fructus, J. Grue, and Ø. Kristiansen. An efficient model for three-dimensional surface wave simulations. part ii: Generation and absorption. *Journal of Computational Physics*, 205(2):686–705, 2005.

[89] D.A. Field. Laplacian smoothing and Delaunay triangulations. *Communications in applied numerical methods*, 4(6):709–712, 1988.

[90] P. Ferrant. Fully nonlinear interactions of long-crested wave packets with a three dimensional body. In *Twenty-Second Symposium on Naval Hydrodynamics*, page 403. National Academies Press, 2000.

[91] M. Huseby and J. Grue. An experimental investigation of higher-harmonic wave forces on a vertical cylinder. *Journal of fluid Mechanics*, 414:75–103, 2000.

[92] B. Teng, W. Bai, and G. Dong. Simulation of second-order radiation of 3d bodies in time domain by a b-spline method. In *Proceedings of the 12th International Offshore and Polar Engineering Conference*, volume 12, pages 487–493, 2002.

[93] R.W. Yeung. Added mass and damping of a vertical cylinder in finite-depth waters. *Applied Ocean Research*, 3(3):119–133, 1981.

[94] B.H. Bulder, M. T. Van Hees, A. Henderson, R.H.M. Huijsmans, J.T.G. Pierik, E.J.B. Snijders, G.H. Wijnants, and M.J. Wolf. Study to feasibility of and boundary conditions for floating offshore wind turbines. Technical Report 2002-CMC-R43, Drijfwind, 2002.

[95] Descriptif du code Nemoh (ECN). `http://lheea.ec-nantes.fr/doku.php/emo/nemoh/start`.

[96] Wei Bai and Bin Teng. Simulation of second-order wave interaction with fixed and floating structures in time domain. *Ocean Engineering*, 74:168–177, 2013.

[97] J.N. Newman. Transient axisymmetric motion of a floating cylinder. *Journal of Fluid Mechanics*, 157:17–33, 1985.

[98] R.W. Yeung. The transient heaving motion of floating cylinders. *Journal of Engineering Mathematics*, 16(2):97–119, 1982.

[99] P. Ferrant. Radiation and diffraction of nonlinear waves in three dimensions. In *Proceedings of the BOSS'94 Conference -Behaviour of Offshore Stuctures*, pages 507–524, July 1994.

[100] J.N. Newman. The second-order wave force on a vertical cylinder. *Journal of Fluid Mechanics*, 320:417–443, 1996.

[101] R. Yokota and L.A. Barba. A tuned and scalable fast multipole method as a preeminent algorithm for exascale systems. *International Journal of High Performance Computing Applications*, 26(4):337–346, 2012.