



**HAL**  
open science

# Modèles asymptotiques et simulation numérique pour la diffraction d'ondes par des petites hétérogénéités

Simon Marmorat

► **To cite this version:**

Simon Marmorat. Modèles asymptotiques et simulation numérique pour la diffraction d'ondes par des petites hétérogénéités. Modélisation et simulation. Université Paris Saclay (COMUE), 2015. Français. NNT : 2015SACLY001 . tel-01243663v2

**HAL Id: tel-01243663**

**<https://pastel.hal.science/tel-01243663v2>**

Submitted on 25 Aug 2016

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ PARIS-SACLAY

École doctorale de mathématiques Hadamard (EDMH, ED 574)

*Établissement inscripteur* : ENSTA ParisTech

*Laboratoire d'accueil* : POEMS (UMR 7231 CNRS-INRIA-ENSTA)

# THÈSE DE DOCTORAT ÈS MATHÉMATIQUES

*Spécialité* : Mathématiques Appliquées

**Simon MARMORAT**

## MODÈLES ASYMPTOTIQUES ET SIMULATION NUMÉRIQUE POUR LA DIFFRACTION D'ONDES PAR DES PETITES HÉTÉROGÉNÉITÉS

soutenue le 12 novembre 2015

*Après avis des rapporteurs* : MARC DAMBRINE (Université de Pau)  
KERSTEN SCHMIDT (Université technique de Berlin)

*Jury de soutenance* :

XAVIER CLAEYS	(UPMC)	Examineur
PATRICK JOLY	(INRIA Saclay)	Directeur de thèse
NICOLAS LEYMARIE	(CEA Saclay)	Invité
KARIM RAMDANI	(INRIA Nancy)	Examineur
SÉBASTIEN TORDEUX	(Université de Pau)	Examineur



**Équipe projet POEMS**  
Unité mixte INRIA - ENSTA - CNRS  
828, boulevard des Maréchaux  
91 762 Palaiseau Cedex

# REMERCIEMENTS

Mes premiers remerciements s'adressent naturellement à Patrick Joly qui a accepté de diriger mes travaux de thèse. Merci pour sa gentillesse et sa disponibilité au cours de ces trois années et demi. Je lui suis très reconnaissant d'avoir partagé avec moi un bout de son immense culture scientifique, mathématique et sportive.

Je remercie très chaleureusement Xavier Claeys, qui a officié comme co-encadrant de cette thèse. Xavier a été une source d'inspiration constante tout au long de cette thèse. Il m'a patiemment expliqué les ressorts de la méthode des développements asymptotiques raccordés et a toujours répondu avec beaucoup de soin à mes questions. Ces travaux de thèse lui doivent beaucoup. Merci pour ta bienveillance à mon égard.

Merci à Marc Dambrine et à Kersten Schmidt d'avoir relu avec attention ces travaux de thèse. Leurs conseils m'ont permis d'améliorer la qualité de ce manuscrit. Je remercie également Sébastien Tordeux et Karim Ramdani d'avoir accepté d'officialier comme examinateurs dans mon jury de thèse.

J'adresse mes remerciements à Nicolas Leymarie qui fut mon enadrant au CEA List. Je remercie également Edouard Demaldent, Sylvain Chatillon, Alexandre Impériale et Pierre Calmon d'avoir régulièrement pris le temps de suivre l'avancée de ces travaux, ainsi que pour leurs questions et conseils avisés tout au long de cette thèse. Je suis heureux d'avoir eu l'opportunité de découvrir une partie du monde du contrôle non destructif à leur contact.

Un très grand merci à Sébastien Impériale, qui m'a initié aux joies du C++ et aux arcanes d'ONDOMATIC au début de ma thèse. J'ai appris à son contact une grande partie des éléments constitutifs du folklore de la modélisation et de la simulation des ondes. Merci pour ta sympathie et ton dynamisme.

Je tiens à remercier l'ensemble de l'équipe POems et plus généralement l'ensemble des personnels de l'UMA, qui offre des conditions et un cadre de travail remarquables. J'ai une

pensée toute particulière pour Anne-Sophie pour sa gentillesse et l'attention qu'elle porte au bien-être des étudiants du laboratoire. Merci à Christophe H., à Sonia, à Laurent, à Jean-François, à Stéphanie, à Eliane pour leur bienveillance. Je remercie tout particulièrement Marc Bonnet qui a suivi régulièrement l'avancée de ces travaux et qui a relu une partie de ce manuscrit. Merci également à Frédéric à Pierre pour leurs conseils.

Je tiens également à exprimer de grands remerciements aux assistantes passées et présentes de l'équipe POems, Nathalie à l'époque de l'INRIA Rocquencourt, à Myriam, Corinne et Katia. Je vous suis très reconnaissant du travail que vous effectuez pour l'ensemble du personnel chercheur. Merci de nous aider au quotidien dans nos démarches.

Un immense merci à Christophe M., Maurice et Nicolas qui chacun à leurs façons veillent sur l'informatique du laboratoire. Merci pour votre sympathie, votre bonne humeur et votre efficacité sans faille en cas de pépin.

Je remercie et souhaite une très bonne continuation aux doctorants de l'équipe POems. Un immense merci à Camille, Rémi et Valentin, les 3 fantastiques pour notre complicité et le soutien mutuel pendant ces quelques années de thèse. Je suis sûr que notre amitié perdurera au-delà de la thèse. Une pensée pour Aliénor, notre maman à tous, qui nous a laissé bien orphelins après sa soutenance l'année dernière. Merci à Audrey qui fût mon binôme à temps partiel au CEA et à POems, à Maxence pour les bons moments partagés et les discussions autour des petites inclusions, merci à Antoine T. pour nos discussions dans le 91.06. Merci également à Geoffrey, à Léandre et à Shirley qui furent mes voisins de bureau, à Mathieu, à Arnaud, à Laure, à Athena, à Antoine B. Merci également à Maryna et à Christian qui furent les doyens de l'aile des thésards pendant la fin de cette thèse.

Merci à mes parents. Merci de m'avoir donné le goût de la science et des mathématiques, ainsi que la possibilité de faire de longues études dans des conditions idéales. Je remercie l'ensemble de ma famille et de mes amis pour leur soutien tout au long de ces 3 ans et demi. J'ai une pensée particulière pour Thomas, mon colocataire au début de cette thèse et qui a fini sa thèse en cours de route, Jérémy, Manon et Martin, les amis nancéiens qui comme moi ont choisi de poursuivre en thèse à la sortie de l'école d'ingénieur. Merci à mes colocataires, Leïla et Adrien pour leur amitié et leur tolérance quand le troisième larron de l'appartement s'est peu à peu transformé en ours à mesure que la fin de cette thèse approchait. Une pensée particulière pour Kilian : en souvenir de nos discussions quand nous poussions chacun pour que nos projets respectifs aboutissent. Merci à tous les autres, qui ont chacun, à leur façon, joué un rôle dans l'accouchement de cette thèse.

And last but not least, un immense merci à Perrine, merci d'avoir été là, merci pour ta patience pendant ma période de rédaction, merci de m'avoir fait rire quand j'étais à ramasser à la petite cuillère, merci de m'avoir soutenu. Merci.

# TABLE DES MATIÈRES

<b>1</b>	<b>Introduction générale</b>	<b>9</b>
1.1	Motivation, contexte applicatif et état de l'art . . . . .	11
1.2	Verrouillage numérique . . . . .	12
1.3	Approche numérique par raffinement de maillage et pas de temps local . .	13
1.4	Approche alternative : utilisation de modèles approchés . . . . .	16
1.4.1	Outil de référence : l'analyse asymptotique . . . . .	16
1.4.2	Philosophie générale : milieu de référence et perturbation . . . . .	17
1.5	Plan du manuscrit . . . . .	18
<b>2</b>	<b>Présentation d'un problème modèle</b>	<b>19</b>
2.1	Notations d'analyse fonctionnelle . . . . .	19
2.2	Présentation d'un problème modèle . . . . .	22
<b>3</b>	<b>Asymptotique de la diffraction par des petites inclusions</b>	<b>29</b>
3.1	Introduction à la méthode des développements asymptotiques raccordés . .	30
3.2	Interlude technique . . . . .	36
3.2.1	Fonctions de troncature . . . . .	36
3.2.2	Solution fondamentale de l'équation des ondes . . . . .	37
3.2.3	Introduction à la théorie de Kondratiev . . . . .	37

3.2.4	Commutateurs . . . . .	50
3.3	Énoncé des résultats principaux . . . . .	53
3.3.1	Cas d'une inclusion unique . . . . .	53
3.3.2	Cas d'un nombre fini d'inclusions . . . . .	56
3.4	Application de la méthode des développements asymptotiques raccordés . . . . .	59
3.4.1	Développement à l'ordre 0 . . . . .	60
3.4.2	Développement à l'ordre 1 . . . . .	64
3.4.3	Développement à l'ordre 2 . . . . .	66
3.4.4	Développement à l'ordre 3 . . . . .	72
3.5	Démonstration des résultats et analyse d'erreur . . . . .	74
3.6	Extensions possibles . . . . .	78
<b>4</b>	<b>Construction et analyse de modèles approchés</b>	<b>81</b>
4.1	Une première approche avec inconnue auxiliaire par analyse du champ proche	83
4.1.1	Cas d'une inclusion unique et d'un contraste $\rho$ uniquement . . . . .	84
4.1.2	Présentation dans le cas général . . . . .	95
4.2	Une seconde approche sans inconnue auxiliaire par analyse du champ lointain	104
4.2.1	Cas d'une inclusion unique . . . . .	104
4.2.2	Cas d'un nombre quelconque d'inclusions . . . . .	119
<b>5</b>	<b>Approximation numérique</b>	<b>123</b>
5.1	Discrétisation des modèles approchés . . . . .	124
5.1.1	Semi-discrétisation en espace . . . . .	125
5.1.2	Discrétisation complète et schémas temporels . . . . .	129
5.2	Etude du phénomène de verrouillage numérique . . . . .	133
5.3	Enrichissement de l'espace d'approximation . . . . .	134
5.4	Remarques concernant l'implémentation numérique . . . . .	138
5.5	Synthèse . . . . .	140
<b>6</b>	<b>Résultats et validation numérique</b>	<b>143</b>
6.1	Un cas d'école : le cas unidimensionnel . . . . .	144
6.1.1	Un premier cas test . . . . .	145

---

6.1.2	Le cas d'un fort contraste du paramètre $\rho_\varepsilon$ . . . . .	149
6.1.3	Analyse d'erreur numérique . . . . .	149
6.2	Le cas bidimensionnel . . . . .	152
6.2.1	Résultats numériques pour la méthode numérique associée au premier modèle approché . . . . .	153
6.2.2	Résultats numériques pour la méthode numérique associée au second modèle approché . . . . .	158
<b>7</b>	<b>Conclusions et perspectives</b>	<b>163</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>165</b>



# CHAPITRE

## 1

# INTRODUCTION GÉNÉRALE

## Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Motivation, contexte applicatif et état de l'art . . . . .</b>	<b>11</b>
<b>1.2</b>	<b>Verrouillage numérique . . . . .</b>	<b>12</b>
<b>1.3</b>	<b>Approche numérique par raffinement de maillage et pas de temps local . . . . .</b>	<b>13</b>
<b>1.4</b>	<b>Approche alternative : utilisation de modèles approchés . . .</b>	<b>16</b>
1.4.1	Outil de référence : l'analyse asymptotique . . . . .	16
1.4.2	Philosophie générale : milieu de référence et perturbation . . .	17
<b>1.5</b>	<b>Plan du manuscrit . . . . .</b>	<b>18</b>

---

Ce manuscrit présente des travaux de doctorat ayant été effectués au CEA LIST ainsi qu'au sein de l'équipe-projet POEMS (UMR INRIA/CNRS/ENSTA). Le Département d'Imagerie et de Simulation pour le Contrôle (DISC) du CEA LIST regroupe un ensemble de laboratoires autour de techniques de contrôle non destructif, techniques qui sont employées dans l'industrie pour contrôler l'état de pièces en fabrication ou en service, afin de s'assurer de l'absence de défauts (par exemple vérifier l'absence de fissure, la conformité matérielle, etc...). Dans ce contexte, la simulation numérique joue un rôle primordial, notamment pour le développement et la validation de méthodes de contrôle.

Ce travail porte sur l'étude de la diffraction d'ondes en régime transitoire, se propageant dans un milieu de référence supposé régulier et *lentement* variable, par un ensemble de *petit* défauts (*petit* est à entendre au sens "petit devant la longueur d'onde", nous reviendrons sur ce point plus loin).

Dans le cadre du contrôle non destructif, il est intéressant de savoir résoudre ce type de problème avec efficacité (d'un point de vue numérique s'entend, c'est-à-dire avec rapidité

et précision). En effet, un matériau de construction composant fréquemment les pièces à inspecter est composé d'un mélange de béton (modélisé par le milieu lentement variable) dans lequel est plongé du gravier (chaque morceau de gravier étant représenté par une *petite* hétérogénéité). Nous pouvons également citer comme application de ce type de travail la prise en compte de petites bulles d'air dans les pièces à inspecter, qui peuvent provenir de défauts de construction.

Le problème qui nous guidera tout au long de ce texte, la diffraction d'une onde acoustique par un ensemble de petites hétérogénéités en domaine temporel, est notamment le prolongement naturel des travaux de Xavier Claeys [31], dont la thèse, également effectuée au sein de l'équipe POEMS, portait sur la diffraction d'ondes par des fils minces en régime fréquentiel. Une des applications essentielles de ce type d'étude est le développement de méthodes d'approximation numérique de l'onde diffractée par de tels défauts sans avoir à choisir le pas de maillage de la méthode numérique sous-jacente en fonction de la taille caractéristique  $\varepsilon$  des défauts (que l'on choisisse d'utiliser des éléments finis volumiques ou de frontières par exemple).

Pour obtenir une précision satisfaisante avec ces méthodes numériques *classiques* (la méthode des éléments finis ou des différences finies pour ne citer qu'elles), il est nécessaire que le pas de maillage  $h$  soit au plus du même ordre de grandeur que  $\varepsilon$ , et ce afin de prendre en compte les détails de la géométrie du domaine de calcul (à savoir les petites hétérogénéités dans notre cas) qui vont générer une onde diffractée. Cette contrainte sur le pas de maillage  $h$  est très pénalisante en terme de temps de calcul, quand  $\varepsilon$  est petit. Ainsi, l'un des objectifs de cette thèse de doctorat est de s'affranchir de cette contrainte, et conduira au développement d'une méthode numérique permettant de choisir le pas de maillage  $h$  indépendamment de  $\varepsilon$ , et prenant en compte de manière approchée la présence des hétérogénéités.

Il existe un certain nombre de travaux traitant de la diffraction des ondes par des petites hétérogénéités dans le domaine fréquentiel (conduisant à étudier l'équation de Helmholtz), et l'on trouve également une littérature abondante pour le cas de problèmes au Laplacien. Citons par exemple [32, 66], le modèle de Foldy-Lax [26, 56, 44, 13, 12] ou encore les travaux utilisant la notion de tenseur de polarisation généralisé [3]. On trouve également des approches essentiellement numériques pour la prise en compte de petites hétérogénéités comme par exemple [77].

Au vu de la littérature existante, précisons que la nouveauté essentielle de ce manuscrit provient du fait que nous nous intéressons à un modèle de propagation d'ondes dans le *domaine temporel*. Par ailleurs, le cahier des charges établi au préalable de ces travaux de thèse stipulait la nécessité de développer une méthode d'approximation numérique de l'onde diffractée par des petits défauts, basée sur la méthode des éléments finis et son intégration au sein d'une librairie appelée **ONDOMATIC**, développée initialement par Sébastien Impériale en interne au CEA LIST et spécialisée dans la résolution de problèmes de propagation d'ondes transitoires.

Cette librairie s'appuie sur une discrétisation par éléments finis d'ordre élevé en espace et permet l'utilisation de plusieurs types de schémas en temps (schémas d'ordre 1 ou d'ordre 2, explicite ou implicite, etc. . .). Un certain nombre de fonctionnalités accélérant le processus de résolution du système linéaire issu de la discrétisation sont implémentées,

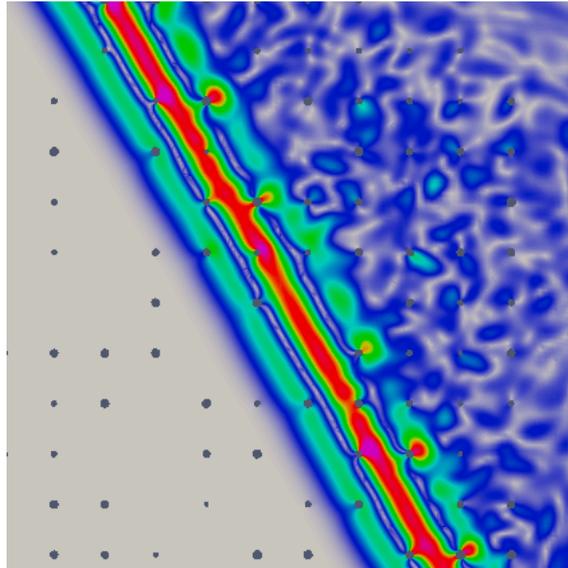


FIGURE 1.0.1 – Instantané d'une onde élastique diffractée par un ensemble de défauts petits devant la longueur d'onde. Simulation effectuée à l'aide de la librairie de calcul ONDOMATIC.

telles la condensation de masse [34] qui offre une structure creuse à la matrice de masse (ce qui accélère significativement son inversion *itérative*), la disponibilité de couches parfaitement adaptées [16, 22] ou encore une méthode de décomposition de domaine basée sur les éléments finis mortiers [60, 5].

## 1.1 MOTIVATION, CONTEXTE APPLICATIF ET ÉTAT DE L'ART

La simulation numérique a connu un essor considérable depuis l'émergence et la démocratisation des outils informatiques. Jusqu'à récemment, la puissance de calcul disponible a crû exponentiellement : la loi de Moore, un énoncé empirique, stipule que la densité de transistors sur un microprocesseur double chaque année et ce à coût constant [74]. Cette loi s'est avérée quasiment exacte jusqu'à atteindre un seuil limite correspondant à une limite physique en deçà de laquelle l'augmentation du nombre de transistors à taille de processeur constante n'est plus rentable ou plus envisageable. Les modèles de développements de la puissance de calcul actuels s'appuient désormais sur calcul parallèle et le recours au multi-cœur. Des modèles de plus en plus complexes peuvent être simulés, qu'il s'agisse de prendre en compte des phénomènes physiques de plus en plus élaborés ou des géométries de plus en plus fines et complexes.

Cependant, il existe un grand nombre de problèmes pour lesquelles l'utilisation de la force brute est peu souhaitable. C'est en particulier le cas des problèmes dits **multi-échelles** : un problème est dit multi-échelle lorsqu'au moins deux quantités d'ordre de grandeur

très différents interviennent canoniquement dans sa modélisation. Par exemple, quand les grandeurs considérées sont des longueurs, lors de l'implémentation d'une méthode de résolution numérique d'un problème de ce type, nous y reviendrons section 1.3, il est naturel de calibrer la méthode sur la plus petite des longueurs  $l$  intervenant dans la modélisation, afin de prendre en compte l'intégralité des détails géométriques. Ceci revient à utiliser une méthode de raffinement de maillage, et si idéalement celui-ci n'est que local, cette solution demeure très pénalisante en terme de coût de calcul, étant donnée l'existence de longueurs bien supérieures à  $l$  dans la formulation du problème.

Le problème que nous considérons dans cette thèse, la diffraction d'une onde par un ou des défauts de taille petite devant la longueur d'onde, appartient à la classe de problèmes multi-échelles, puisque deux longueurs ayant différents ordres de grandeur, la longueur d'onde et la taille caractéristique des défauts, interviennent dans sa formulation.

Les problèmes multi-échelles ont largement été étudiés dans la littérature d'analyse numérique au cours de la fin du XXème siècle et du début du XXIème siècle (voir par exemple [88]). Dans un contexte plus spécifique, un certain nombre de problèmes de propagation d'ondes dans des milieux comportant des dimensions significativement plus petits que la longueur d'onde ont été étudiés (c'est en particulier l'objet d'un certain nombre de travaux au sein de l'équipe-projet POEMS) : on peut par exemple citer la propagation des ondes dans des fentes minces [63, 64], au travers de couches minces [21, 39, 82, 83], dans des câbles co-axiaux [59], etc. . .

## 1.2 VERROUILLAGE NUMÉRIQUE

Une des difficultés majeures que nous aurons à traiter est illustrée par la notion de verrouillage numérique. La formulation mathématique d'un grand nombre de phénomènes fait intervenir un paramètre  $\alpha$  provenant de considérations physiques. Par exemple, les modèles de plaques faisant intervenir l'épaisseur de la plaque  $d$ , le coefficient de Poisson  $\nu$ , etc... L'approximation numérique de tels problèmes peut devenir très difficile (en terme de coût de calcul) quand le paramètre  $\alpha$  est voisin d'une valeur critique  $\alpha_0$ , par exemple quand l'épaisseur de la plaque  $d \rightarrow 0$  ou quand le coefficient de Poisson  $\nu \rightarrow 0.5$  ou dans notre cas quand le rapport taille de défaut sur longueur d'onde  $\varepsilon/\lambda \rightarrow 0$ .

La plupart du temps, les estimations d'erreur a priori sont établies pour une valeur  $\alpha > \alpha_0$  fixée. Ces estimations n'étant généralement pas uniforme en  $\alpha$ , celles-ci peuvent dégénérer quand  $\alpha \rightarrow \alpha_0$ . C'est ce phénomène que l'on nomme *verrouillage numérique*. Les premiers travaux traitant de ce phénomène ont été publiés dans les années 1980 [6], et une définition mathématique précise des notions de verrouillage et de robustesse est donnée dans les articles de Babuska [9, 10].

Comme nous le verrons, le problème de diffraction d'onde par un ou plusieurs obstacles petits devant la longueur d'onde, traité par une méthode par élément finis standards verrouille fortement : l'erreur commise se comporte de manière satisfaisante uniquement quand le pas de maillage  $h$  est tel que  $h < \varepsilon$ .

Un des objectifs de cette thèse est de développer une méthode numérique *robuste* rela-

tivement à la taille des défauts, c'est-à-dire une méthode numérique pour laquelle nous disposons d'estimations d'erreur a priori uniformes relativement à la taille des défauts. Idéalement, nous souhaitons également que la décroissance de l'erreur quand  $h \rightarrow 0$  ait lieu à la même vitesse que pour le cas d'un milieu homogène.

## 1.3 APPROCHE NUMÉRIQUE PAR RAFFINEMENT DE MAILLAGE ET PAS DE TEMPS LOCAL

Pour illustrer certaines difficultés inhérentes au problème de diffraction par des petits défauts, supposons que nous cherchions à calculer une approximation espace-temps de l'onde diffractée par un défaut unique de taille  $\varepsilon$ , plongé dans un milieu homogène, sous l'éclairage d'un champ incident  $u_{\text{inc}}$ , par une méthode de type élément finis classique. Le défaut considéré peut-être pénétrable (contraste des paramètres physiques), ou bien soumis à une condition de bord (de type Dirichlet, Neumann ou Robin pour ne citer que les plus classiques d'entre elles).

Nous cherchons à donner ici un sens à la notion de longueur d'onde centrale, pour une onde transitoire. Cette notion est très simple à appréhender dans le cas d'un signal périodique en temps, bien que nous considérons des phénomènes plus sophistiqués dans notre étude et dans nos simulations numériques.

Notons  $d \in \{2, 3\}$  la dimension d'espace. Soit  $T > 0$  et supposons que le champ incident  $u_{\text{inc}}$  soit  $T$ -périodique en temps, c'est-à-dire que

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, \quad \forall t > 0, \quad u_{\text{inc}}(\mathbf{x}, t + T) = u_{\text{inc}}(\mathbf{x}, t).$$

Notons  $\lambda$  la longueur d'onde associée à  $T$ , c'est-à-dire

$$\lambda = cT,$$

où  $c$  est la vitesse du milieu ambiant. Nous supposons que les dimensions du défaut sont petites devant la longueur d'onde, c'est-à-dire que

$$\frac{\varepsilon}{\lambda} \ll 1.$$

### REMARQUE 1.3.1

*Une définition de la longueur d'onde centrale, plus proche des expériences numériques que nous réaliserons est la suivante. Considérons un point  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^2$ , ainsi qu'une fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$  à support compact. Nous supposons que le champ incident  $u_{\text{inc}}$  satisfait l'équation des ondes suivante*

$$\frac{\partial^2 u_{\text{inc}}}{\partial t^2}(\mathbf{x}, t) - c^2 \Delta u_{\text{inc}}(\mathbf{x}, t) = \delta_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{x}) f(t), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, \quad t > 0,$$

*où  $\delta_{\mathbf{x}_0}$  est la masse de Dirac en  $\mathbf{x}_0$ . Comme  $f$  est supposée infiniment dérivable et à support compact, sa transformée de Fourier est bien définie et atteint son maximum en*

valeur absolue, en une fréquence  $f_{max}$ . La longueur d'onde centrale  $\lambda$  est alors la longueur d'onde associée à la fréquence  $f_{max}$ , définie par

$$\lambda = \frac{c}{f_{max}}.$$

Si il n'y avait aucun défaut dans le milieu, nous pourrions utiliser la règle empirique suivante pour calibrer le pas de maille  $h$  de notre méthode numérique : utiliser un maillage tel qu'il y ait au minimum entre 6 et 10 degrés de libertés par longueur d'onde, ce que nous noterons

$$h \simeq \lambda.$$

Dans le cas de la diffraction par un défaut, pour atteindre une précision satisfaisante et calculer une bonne approximation du champ diffracté par le défaut, il est nécessaire que  $h$  soit du même ordre de grandeur que  $\varepsilon$ . Ainsi l'efficacité en termes de stockage mémoire d'une part, et de temps de calcul d'autre part va être nettement dégradée si l'on cherche à appliquer une méthode numérique classique à notre problème.

Cette difficulté est encore plus frappante lorsque l'on travaille dans le domaine temporel. Il est en effet assez classique d'utiliser un schéma explicite en temps (après semi-discrétisation en espace) pour simuler la propagation des ondes, quitte à utiliser une technique de condensation de masse, voir par exemple [35].

Ces schémas sont stables si et seulement si une condition de stabilité CFL (Courant-Friedrichs-Lax) est satisfaite. Cette condition CFL peut s'exprimer sous différentes formes, équivalentes les unes aux autres. Ces expressions font généralement intervenir les matrices de masse et de rigidité obtenues après semi-discrétisation par éléments finis. On peut montrer, dans le cas académique d'un maillage uniforme en temps et en espace, que cette condition est équivalente à

$$\Delta t \leq Ch,$$

où  $\Delta t$  est le pas de temps et  $C > 0$  est une constante indépendante de  $\Delta t$  et de  $h$ .

Ainsi l'application d'une discrétisation espace-temps naïve au problème de diffraction par des petits défauts mène, dans le cas de l'utilisation d'un schéma explicite, à une importante réduction du pas d'espace et du pas de temps et donc à une augmentation conséquente du stockage mémoire et du temps de calcul. Précisément, l'augmentation du coût de stockage mémoire est de l'ordre de

$$\left(\frac{\varepsilon}{\lambda}\right)^{-(d+1)},$$

l'égalité ayant lieu dans le cas de l'utilisation de maillages uniformes.

Nous sommes ainsi confrontés à une situation qui peut sembler paradoxale, car l'amplitude du champ diffracté est d'autant plus petite que la taille du défaut l'est (en fait l'amplitude relative du champ diffracté est de l'ordre de  $(\varepsilon/\lambda)^d$ , nous le montrerons dans les sections suivantes). Les coûts de calcul et de stockage mémoire sont alors très élevés, pour calculer un phénomène d'amplitude très faible. Ce phénomène est d'autant plus marqué en 3 dimensions, où le calcul d'une solution au problème de diffraction par un petit défaut, par une méthode de type éléments finis standard, peut devenir inenvisageable sur une machine standard.

Pour remédier à cela, une solution possible est l'utilisation d'une technique de raffinement local de maillage au voisinage du défaut, couplée à une technique de pas de temps local [40, 58, 37]. Bien que plusieurs méthodes de nature différentes soient regroupées sous cette appellation de *pas de temps local*, celles-ci ont toutes pour objectif l'utilisation d'un pas de temps *global* qui ne soit pas dégradé par le raffinement d'une région localisée du maillage.

À titre illustratif, nous avons simulé l'onde diffractée par un ensemble de petits défauts en utilisant une discrétisation en espace par éléments finis lagrangiens, et un schéma saute-mouton avec pas de temps local autour de chaque défaut pour la discrétisation en temps (voir figure 1.3.1). Bien que les techniques de pas de temps local soient reconnues pour

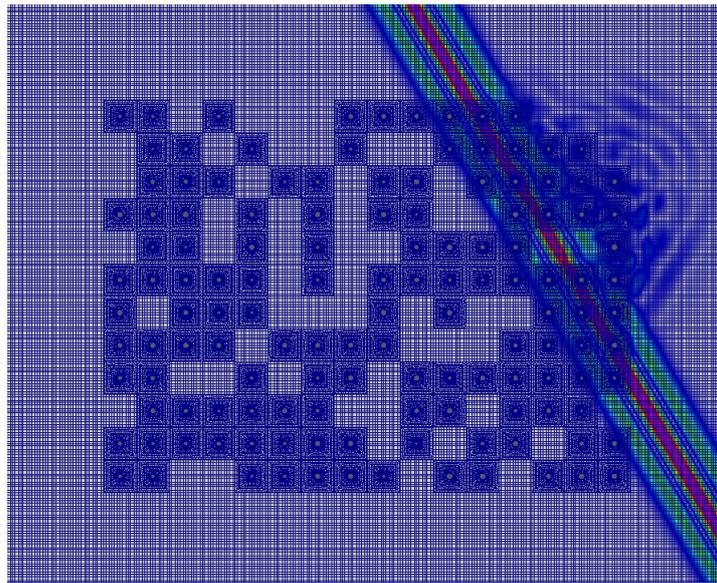


FIGURE 1.3.1 – Instantané d'une simulation avec pas de temps local autour de chaque petit défaut.

leur performance et leur efficacité, elles demeurent lourdes à mettre en place (il faut par exemple aller modifier en profondeur les codes de calcul) et ne permettent pas la prise en compte de la physique sous-jacente au problème. Dans notre situation, nous avons opté pour une analyse asymptotique du problème, conduisant à la construction de modèles

	$h$	$N_{\text{dof}}$	Temps de calcul (s)
Milieu homogène	0.4	$4 \cdot 10^4$	6
Milieu perturbé	0.01	$2, 1 \cdot 10^5$	2500

FIGURE 1.3.2 – Tableau comparatif de différentes données de simulation par éléments finis lagrangiens  $\mathbb{Q}_4$ , pour le cas d'un milieu homogène et d'un milieu homogène perturbé par de petites inclusions circulaires de taille  $\varepsilon = 0.1$ . Le pas de maillage  $h$  renvoie au diamètre de la plus petite maille présente dans le maillage. Une technique de pas de temps local est utilisé pour le milieu perturbé au voisinage de chaque inclusion, ainsi le pas de temps global est le même pour les deux simulations. La longueur d'onde centrale est  $\lambda = 2$ .

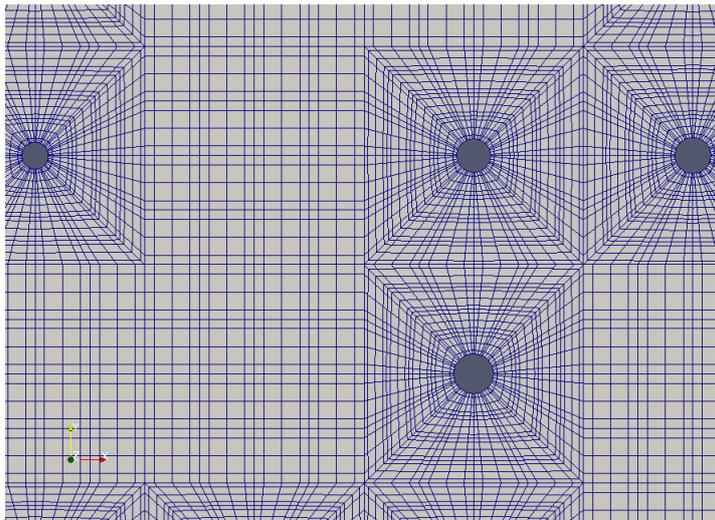


FIGURE 1.3.3 – Zoom sur le maillage supportant la simulation présentée figure 1.3.1. Au voisinage des inclusions, les mailles sont très fines.

approchés.

## 1.4 APPROCHE ALTERNATIVE : UTILISATION DE MODÈLES APPROCHÉS

Une approche alternative pour pallier ces problèmes de convergence de la méthode numérique est la construction de modèles approchés, au sein desquels la présence des inclusions est prise en compte de manière faible, dans un sens que nous préciserons dans la suite. C'est ce type d'approche qui est développé par exemple dans [31].

### 1.4.1 Outil de référence : l'analyse asymptotique

La construction de tels modèles passe dans un premier temps par une analyse asymptotique du problème de diffraction, où le petit paramètre  $\delta$  est le ratio taille caractéristique du défaut/longueur d'onde centrale :

$$\delta := \frac{\varepsilon}{\lambda}.$$

Comme nous le verrons dans la suite, cette analyse permet d'écrire le champ de pression acoustique comme une combinaison des développements du champ total en champ lointain et en champ proche, qui prennent respectivement la forme de séries formelles du type

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n(\delta) u_n(\mathbf{x}, t) \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n(\delta) U_n\left(\frac{\mathbf{x}}{\delta}, t\right), \quad (1.4.1)$$

où les  $\lambda_n$ ,  $\mu_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  sont des *fonctions de jauge*, vérifiant

$$\frac{\lambda_{n+1}(\delta)}{\lambda_n(\delta)} \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0 \quad \text{et} \quad \frac{\mu_{n+1}(\delta)}{\mu_n(\delta)} \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0$$

et les  $u_n$ ,  $U_n$  sont des fonctions indépendantes de  $\delta$ .

Les  $u_n$ ,  $U_n$  étant indépendants de  $\delta$ , une stratégie envisageable est alors de tronquer ces séries et d'utiliser une discrétisation par éléments finis s'appuyant sur un maillage complètement indépendant du ou des défauts.

Plusieurs approches sont possibles pour obtenir de tels développements. On peut par exemple citer la méthode des développements multi-échelles, parfois appelée également méthodes des développements composés [17, 18] ou encore les méthodes de sensibilité topologique [11]. Nous avons opté pour la méthode des développements asymptotiques raccordés [57] à laquelle nous consacrons un chapitre de ce manuscrit.

### 1.4.2 Philosophie générale : milieu de référence et perturbation

Dans un deuxième temps, après avoir effectué l'analyse asymptotique du problème de diffraction, se posera la question de la construction effective de modèles approchés. La question est de savoir s'il existe une stratégie plus pertinente que la simple troncature des séries (1.4.1), suivie du calcul numérique des termes successifs de la somme tronquée.

Deux modèles approchés ont été développés au cours de cette thèse. Le premier modèle s'appuie sur une analyse en champ proche du champ de pression, alors que le deuxième provient d'une analyse en champ lointain. De manière générale, ces modèles sont des perturbations de l'équation des ondes posée dans le milieu sans défaut. Pour chacun d'entre eux, une série de questions naturelles se pose et sera étudiée :

- Le **caractère bien posé** du problème approché, au sens de Hadamard [52]. Il s'agit d'étudier si le problème admet une solution unique, et si celle-ci dépend continûment des données. En particulier, on s'attachera à prouver un résultat de **stabilité** relativement au petit paramètre  $\delta$ .
- La **convergence** de la solution du modèle approché vers la solution du modèle exact quand  $\delta \rightarrow 0$ . On quantifiera précisément la vitesse de convergence.
- Le problème se discrétise-t-il plus *aisément* que le problème initial? En particulier, nous nous intéresserons à la qualité de l'approximation après **semi-discrétisation en espace**. Nous constaterons que, dans le cas d'une discrétisation en espace par éléments finis classiques, celle-ci est généralement dégradée par un phénomène de verrouillage numérique, mais que celui-ci peut-être surmonté par l'enrichissement (par un faible nombre de fonctions, localisées au voisinage de chaque inclusion) de l'espace d'approximation.
- La **discrétisation en temps** est-elle dégradée par ces schémas? Les modèles que nous présenterons sont des perturbations de l'équation des ondes dans l'espace libre (dans le milieu sans défaut). Ce type de problème peut-être discrétisé en temps par un schéma explicite couplé à une méthode de condensation de masse. On s'assurera que la condition de stabilité des problèmes totalement discrétisés est également une perturbation de la condition de stabilité pour le cas du milieu sans défaut.

## 1.5 PLAN DU MANUSCRIT

Les nouveautés que nous avons cherchées à apporter au cours de cette thèse sont de deux natures. Nous avons dans un premier temps effectué l'analyse asymptotique du problème de diffraction par un petit obstacle dans le domaine temporel. Nous avons ensuite développé deux méthodes numériques couplant les résultats de l'analyse asymptotique et une méthode de type éléments finis volumiques d'ordre élevé, avec comme contrainte principale de garder la possibilité d'utiliser un maillage complètement indépendant des défauts (par exemple cartésien).

Ce manuscrit est organisé de la manière suivante :

- Dans le chapitre 2, nous introduisons un certain nombre de notations standards d'analyse fonctionnelle, présentons le problème modèle auquel nous nous intéressons, et rappelons un certain nombre de résultats classiques liés à l'équation des ondes en régime transitoire.
- Dans le chapitre 3, nous développons l'analyse asymptotique du problème de diffraction présenté au chapitre 2. Nous introduisons les outils d'analyse fonctionnelle adaptés à l'étude théorique, et présentons la méthode des développements asymptotiques raccor-dés. Nous effectuons un développement de la solution à l'ordre 2 en champ proche et en champ lointain et présentons une analyse d'erreur.
- Dans le chapitre 4, nous utilisons les résultats de l'analyse asymptotique effectuée au chapitre 3 pour proposer deux modèles approchant notre problème modèle. Ces deux modèles ont pour propriété d'être des perturbations de l'équation des ondes posée dans l'espace libre. Pour chacun de ces deux modèles, nous proposons une analyse de convergence et de stabilité.
- Dans le chapitre 5, nous nous concentrons sur l'approximation numérique des deux problèmes approchés sus-cités. En particulier, nous montrons qu'un phénomène de verrouillage numérique survient dès lors que nous cherchons à appliquer une méthode de discrétisation par éléments finis classique aux problèmes approchés proposés. Nous proposons une méthode d'enrichissement de l'espace d'approximation par un petit nombre de fonctions, qui devrait permettre de surmonter le phénomène de verrouillage.
- Enfin dans le chapitre 6, nous présentons une série de résultats numériques pour différentes expériences ainsi que différentes courbes d'erreur pour valider la pertinence des modèles approchés.

# CHAPITRE

## 2

# PRÉSENTATION D'UN PROBLÈME MODÈLE

## Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Notations d'analyse fonctionnelle . . . . .</b>	<b>19</b>
<b>2.2</b>	<b>Présentation d'un problème modèle . . . . .</b>	<b>22</b>

---

Dans cette section, nous présentons le problème modèle qui guidera notre étude tout au long de ce manuscrit. Dans un premier temps, nous introduisons les espaces fonctionnels classiques (notamment les espaces de Lebesgue et de Sobolev) adaptés à l'étude d'équation aux dérivées partielles linéaires. Dans un deuxième temps, nous explicitons le problème de diffraction par des petites inclusions.

## 2.1 NOTATIONS D'ANALYSE FONCTIONNELLE

Ici, nous rappelons quelques définitions autour des espaces de Lebesgue et de Sobolev. Ces espaces sont adaptés à la modélisation d'une grande classe de phénomènes physiques, et fournissent un cadre fonctionnel adéquat à l'étude d'un certain nombre d'équations aux dérivées partielles. L'objectif de cette section est avant tout de spécifier les notations utilisées tout au long de ce manuscrit. Ainsi, nous nous restreignons à une présentation sommaire de ces espaces fonctionnels, plus de détails pouvant-être trouvés dans la littérature, par exemple dans [20].

Soit  $d \in \mathbb{N}$  et  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  un ouvert non vide. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Nous notons  $\mathcal{C}^n(\Omega)$  l'ensemble des

fonctions  $n$  fois différentiables sur  $\Omega$  admettant une différentielle  $n$ -ème continue, ainsi que

$$\mathcal{C}^\infty(\Omega) := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{C}^n(\Omega)$$

l'ensemble des fonctions infiniment dérivables sur  $\Omega$ . Un élément  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$  sera appelé un multi-indice. Nous noterons  $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_d$  et  $\alpha! = \alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_d!$ .

Pour une fonction  $v \in \mathcal{C}^n(\Omega)$  et pour  $\alpha \in \mathbb{N}^d$  tel que  $|\alpha| = n$ , nous noterons

$$\partial_{\mathbf{x}}^\alpha v := \partial_{x_1}^{\alpha_1} \partial_{x_2}^{\alpha_2} v.$$

Quand  $\Omega$  est borné,  $\mathcal{C}^n(\Omega)$  est un espace de Banach, muni de la norme

$$\|v\|_{\mathcal{C}^n(\Omega)} := \sum_{k=0}^n \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{\mathbf{x} \in \Omega} |\partial_{\mathbf{x}}^\alpha v(\mathbf{x})|,$$

où la seconde somme porte sur l'ensemble des multi-indices  $\alpha \in \mathbb{N}^d$  de longueur inférieure à  $k$ . Si  $\Omega$  est non borné,  $\mathcal{C}^n(\Omega)$  est complet muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact, mais cette topologie n'est pas issue d'une norme.

Soit  $p \in [1, \infty[$ . Classiquement, nous notons  $L^p(\Omega)$  l'espace de Lebesgue complexe d'exposant  $p$ , qui, muni de la norme

$$\|v\|_{L^p(\Omega)} := \left( \int_{\Omega} |v|^p d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{p}},$$

est un espace de Banach. Rappelons également que  $L^2(\Omega)$  muni du produit scalaire

$$(u, v) \mapsto \langle u, v \rangle_{L^2(\Omega)} := \int_{\Omega} u(\mathbf{x}) \cdot \bar{v}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

est un espace de Hilbert. Parfois, étant donnée une fonction  $\rho : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  mesurable bornée et uniformément positive (c'est-à-dire telle  $\inf_{\Omega} \rho > 0$ ), nous serons amenés à considérer la norme

$$\|v\|_{L^2(\Omega, \rho)}^2 := \int_{\Omega} \rho(\mathbf{x}) |v(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x}$$

qui est équivalente à la norme usuelle sur  $L^2(\Omega)$  et qui est issue du produit scalaire

$$(u, v) \mapsto \langle u, v \rangle_{L^2(\Omega, \rho)} := \int_{\Omega} \rho(\mathbf{x}) u(\mathbf{x}) \cdot \bar{v}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

Nous définissons l'espace de Sobolev d'exposant  $n$

$$H^n(\Omega) := \{v \in L^2(\Omega) \text{ telles que } \|v\|_{H^n(\Omega)}^2 = \sum_{k=0}^n \sum_{|\alpha| \leq k} \|\partial_{\mathbf{x}}^\alpha v\|_{L^2(\Omega)}^2 < \infty\},$$

où, à nouveau, la seconde somme porte sur l'ensemble des multi-indices  $\alpha \in \mathbb{N}^d$  de longueur inférieure à  $k$ . Rappelons que  $H^n(\Omega)$  est un espace de Hilbert, muni du produit scalaire

$$(u, v) \mapsto \langle u, v \rangle_{H^n(\Omega)} := \sum_{k=0}^n \sum_{|\alpha| \leq k} \langle \partial_{\mathbf{x}}^\alpha u, \partial_{\mathbf{x}}^\alpha v \rangle_{L^2(\Omega)},$$

et que  $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$ .

Rappelons la définition de la divergence et du gradient. Si  $u \in D'(\Omega)$  alors son gradient  $\nabla u$  est la distribution vectorielle définie par

$$\nabla u := \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial u}{\partial x_d} \end{pmatrix}$$

tandis que la divergence d'une distribution vectorielle  $v \in [D'(\Omega)]^d$  est définie par

$$\operatorname{div} v := \sum_{n=1}^d \frac{\partial v_n}{\partial x_n},$$

$v_n$  désignant la  $n$ -ème composante de  $v$ . Nous aurons occasionnellement (et notamment au chapitre 4) besoin de l'espace  $H(\operatorname{div}, \Omega)$ , qui est l'espace défini par

$$H(\operatorname{div}, \Omega) := \{v \in [L^2(\Omega)]^d \text{ telles que } \operatorname{div} v \in L^2(\Omega)\}.$$

Nous définissons à présent une série d'espaces fonctionnels qui nous seront utiles pour l'étude des problèmes de propagation d'ondes dans le domaine temporel que nous serons amenés à traiter dans ce manuscrit. Quand cela ne portera pas à confusion, nous réaliserons l'abus de notation suivant : si  $u : (\mathbf{x}, t) \mapsto u(\mathbf{x}, t)$  désigne une fonction dépendant de l'espace et du temps, définie sur  $\Omega \times I$ ,  $I$  étant un intervalle de  $\mathbb{R}$ , alors nous noterons également

$$u : t \mapsto u(t)$$

la fonction définie sur  $I$  et à valeurs dans l'espace des fonctions définies sur  $\Omega$ ,  $u(t)$  étant alors définie par

$$u(t) : \mathbf{x} \mapsto u(\mathbf{x}, t).$$

Dans la suite  $X$  désignera un espace de Banach donné, muni de la norme  $\|\cdot\|_X$  et  $I = (a, b)$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ , non nécessairement borné (possiblement  $a = -\infty$  ou  $b = +\infty$ ). Alors nous noterons indifféremment

$$\mathcal{C}^n(I, X) \quad \text{ou} \quad \mathcal{C}^n(a, b, X)$$

l'ensemble des fonctions définies sur  $I$  à valeurs dans  $X$   $n$ -fois différentiables sur  $I$  et dont la différentielle  $n$ -ème est continue. Quand  $I$  est borné,  $\mathcal{C}^n(I, X)$  peut-être muni de la norme

$$\|v\|_{\mathcal{C}^n(I, X)} := \sum_{k=0}^n \sup_{t \in I} \left\| \frac{d^k v}{dt^k} \right\|_X,$$

ce qui lui confère alors la qualité d'espace de Banach.

Dans le même ordre d'idée, nous noterons

$$L^p(I, X) \quad \text{ou} \quad L^p(a, b, X)$$

l'espace de Lebesgue d'exposant  $p$  des fonctions définies sur  $I$  et à valeurs dans  $X$ , qui, muni de la norme

$$\|v\|_{L^p(I,X)} := \left( \int_I \|v(t)\|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}},$$

est lui-même un espace de Banach. Pour plus de détails concernant la théorie de l'intégration de Lebesgue pour des fonctions à valeurs dans des espaces de Banach, nous renvoyons par exemple à [86].

## 2.2 PRÉSENTATION D'UN PROBLÈME MODÈLE

Le problème modèle que nous considérerons tout au long de ce manuscrit est le problème de diffraction d'une onde acoustique temporelle par un ensemble de petits défauts pénétrables.

Donnons-nous un entier  $N \in \mathbb{N}$  non nul, un paramètre  $\varepsilon > 0$  fixé (mais destiné à tendre vers 0) ainsi qu'une collection d'ouverts bornés disjoints à frontière lipschitzienne

$$\omega_n^\varepsilon \subset \mathbb{R}^2, \quad 1 \leq n \leq N.$$

Les  $(\omega_\varepsilon^n)$ ,  $1 \leq n \leq N$  représentent les petites inclusions de notre problème. Nous ferons,

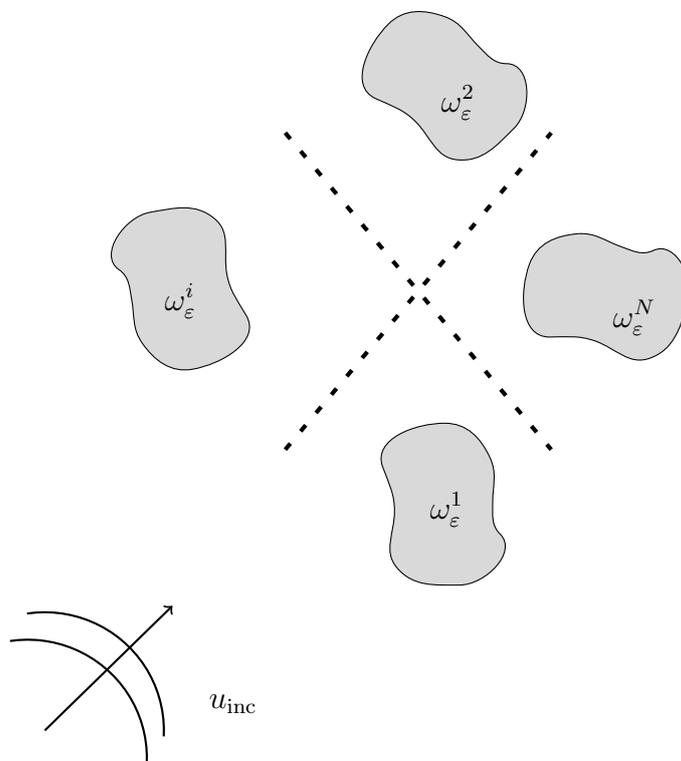


FIGURE 2.2.1 – Exemple de configuration géométrique étudiée :  $N$  inclusions sous l'éclairage du champ incident  $u_{\text{inc}}$ .

avant d'effectuer l'analyse asymptotique du problème au chapitre 3, des hypothèses sur leur taille, qui devra tendre vers 0 quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ , ainsi que sur leur localisation dans le plan : nous supposons que les  $\omega_\varepsilon^n$  sont *bien séparés* les uns des autres, et en particulier qu'ils ne se *rapprochent* pas quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Cependant, ces hypothèses ne sont pas nécessaires dans l'immédiat. Retenons simplement que nous disposons d'une famille d'inclusions disjointes, chacune d'entre elles étant indexées par un paramètre  $\varepsilon > 0$ .

Décrivons maintenant les propriétés matérielles du milieu de propagation. Donnons nous  $2N+2$  constantes  $\rho_0, \rho_1, \dots, \rho_N, \mu_0, \mu_1, \dots, \mu_N$  strictement positives, qui représenteront la valeurs des coefficients de propagation dans le milieu extérieur ainsi qu'à l'intérieur de chacune des inclusions.

Les propriétés matérielles du milieu de propagation sont alors représentées par les fonctions  $\mu_\varepsilon$  and  $\rho_\varepsilon$  définies par

$$\mu_\varepsilon(\mathbf{x}) = \begin{cases} \mu_0 & \text{si } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \setminus \bigcup_{n=1}^N \overline{\omega_\varepsilon^n}, \\ \mu_n & \text{si } \mathbf{x} \in \omega_\varepsilon^n, \end{cases} \quad \rho_\varepsilon(\mathbf{x}) = \begin{cases} \rho_0 & \text{si } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \setminus \bigcup_{n=1}^N \overline{\omega_\varepsilon^n}, \\ \rho_n & \text{si } \mathbf{x} \in \omega_\varepsilon^n. \end{cases} \quad (2.2.1)$$

Donnons-nous une fonction  $f$ , le terme source de notre problème de propagation. Par soucis de simplicité,  $f$  sera supposé infiniment dérivable en temps et de carré intégrable en espace  $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^+, L^2(\mathbb{R}^2))$ , bien que des hypothèses plus générales puissent être considérées.

Définissons le Laplacien généralisé  $\Delta_{\mu_\varepsilon}$  associé à  $\mu_\varepsilon$  est défini par

$$\Delta_{\mu_\varepsilon} v := \operatorname{div}(\mu_\varepsilon \nabla v)$$

pour toute fonction  $v \in D(\Delta_{\mu_\varepsilon}) \subset H^1(\mathbb{R}^2)$  où

$$D(\Delta_{\mu_\varepsilon}) := \{v \in H^1(\mathbb{R}^2) \text{ tel que } \Delta_{\mu_\varepsilon} v \in L^2(\mathbb{R}^2)\}.$$

est le domaine de  $\Delta_{\mu_\varepsilon}$ . Bien entendu,  $\operatorname{div}$  et  $\nabla$  désignent respectivement les opérateurs divergence et gradient usuels.

Nous avons alors à notre disposition l'ensemble des ingrédients pour considérer le problème suivant :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_\varepsilon \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^+, L^2(\mathbb{R}^2)) \cap \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, D(\Delta_{\mu_\varepsilon})) \text{ tel que} \\ \rho_\varepsilon \frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial t^2} - \operatorname{div}(\mu_\varepsilon \nabla u_\varepsilon) = f(\mathbf{x}, t), & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, \quad t \in \mathbb{R}^+, \\ u_\varepsilon(\mathbf{x}, 0) = \partial_t u_\varepsilon(\mathbf{x}, 0) = 0, & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2. \end{cases} \quad (2.2.2)$$

**Interprétation physique des coefficients  $\rho$  et  $\mu$**  L'équation (2.2.2), connue comme l'équation d'onde acoustique linéaire dans le milieu  $(\rho_\varepsilon, \mu_\varepsilon)$  peut-être obtenue à partir de différentes modèles physiques. Les équations de l'acoustique linéaire peuvent être vues comme une dégénérescence des équations de l'élastodynamique linéaire lorsque le second coefficient de Lamé tend vers 0. Dans ce contexte, on a  $\rho_\varepsilon = 1/\lambda_\varepsilon$  où  $\lambda_\varepsilon$  est le premier coefficient de Lamé du matériau, et  $\mu_\varepsilon = 1/d_\varepsilon$  où  $d_\varepsilon$  est la densité du matériau. Nous renvoyons par exemple à [80] pour plus de détails concernant ces aspects de modélisation.

**REMARQUE 2.2.1**

Remarquons que le champ incident  $u_{inc}$ , introduit dans la légende de la figure 2.2.1 est simplement la solution du problème sans trou

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_{inc} \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^+, L^2(\mathbb{R}^2)) \cap \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, D(\Delta)) \text{ tel que} \\ \rho_0 \partial_t^2 u_{inc} - \mu_0 \Delta u_{inc} = f(\mathbf{x}, t), & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, \quad t \in \mathbb{R}^+, \\ u_{inc}(\mathbf{x}, 0) = \partial_t u_{inc}(\mathbf{x}, 0) = 0, & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, \end{cases} \quad (2.2.3)$$

l'espace  $D(\Delta) \subset L^2(\mathbb{R}^2)$  étant le domaine de l'opérateur Laplacien  $\Delta$ , défini par

$$D(\Delta) := \{v \in H^1(\mathbb{R}^2) \text{ tel que } \Delta v \in L^2(\mathbb{R}^2)\} = H^2(\mathbb{R}^2).$$

La proposition suivante est la première brique de notre étude, et assure l'existence d'une unique solution au problème (2.2.2).

**PROPOSITION 2.2.2**

Le problème modèle (2.2.2) est bien-posé : il admet une solution unique  $u_\varepsilon \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^+, L^2(\mathbb{R}^2)) \cap \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, D(\Delta_{\mu_\varepsilon}))$  vérifiant de plus l'estimation suivante

$$\sqrt{\int_{\mathbb{R}^2} \left( \rho_\varepsilon \left| \frac{\partial u_\varepsilon(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \right|^2 + \mu_\varepsilon |\nabla u_\varepsilon(\mathbf{x}, t)|^2 \right) d\mathbf{x}} \leq \int_0^t \sqrt{\int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{\rho_\varepsilon} |f(\mathbf{x}, \tau)|^2 d\mathbf{x}} d\tau, \quad \forall t \geq 0. \quad (2.2.4)$$

Par ailleurs,  $u_\varepsilon$  possède la régularité

$$u_\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^+, D(\Delta_{\mu_\varepsilon})).$$

DÉMONSTRATION : Le caractère bien-posé du problème (2.2.2) peut se démontrer classiquement selon deux méthodes : soit en utilisant le théorème de Hille-Yosida (voir par exemple [20, Théorème 7.4]), soit en se basant sur une approche énergétique (voir par exemple [42, Paragraphe 7.2]) plus conforme à la présentation faite dans ce manuscrit. Nous avons fait le choix de ne pas exposer dans ce manuscrit l'arsenal technique nécessaire à l'introduction du théorème de Hille-Yosida. Nous référons à [76] ou à [42, Théorème 7.2.7] concernant la régularité en temps de  $u_\varepsilon$ .

Pour montrer l'estimation d'énergie a-priori, nous utilisons un raisonnement classique, que nous rapportons ici en raison de l'importance que l'estimation (2.2.4) aura dans la suite de ce manuscrit, et de la place centrale que celle-ci tient dans l'étude des phénomènes de propagation en temps.

Soit  $u_\varepsilon \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^+, L^2(\mathbb{R}^2)) \cap \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, D(\Delta_{\mu_\varepsilon}))$  la solution de (2.2.2). En multipliant l'équation des ondes vérifiée par  $u_\varepsilon$  par  $\partial_t u_\varepsilon$  et en intégrant sur  $\mathbb{R}^2$  tout entier à  $t > 0$  fixé (ce qui est légal en vertu du fait que  $u_\varepsilon \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^+, L^2(\mathbb{R}^2))$ ), nous obtenons l'identité

$$\int_{\mathbb{R}^2} (\rho_\varepsilon \partial_t^2 u_\varepsilon \partial_t u_\varepsilon - \operatorname{div}(\mu_\varepsilon \nabla u_\varepsilon) \partial_t u_\varepsilon) (\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^2} f(\mathbf{x}, t) \partial_t u_\varepsilon(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}, \quad \forall t > 0.$$

La régularité espace-temps de  $u_\varepsilon$  nous permet d'intervertir dérivée temporelle et intégrale spatiale, tandis que la formule de Green appliquée au deuxième terme de l'intégrale à gauche de l'égalité précédente, montre que au bilan :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^2} (\rho_\varepsilon |\partial_t u_\varepsilon|^2 + \mu_\varepsilon |\nabla u_\varepsilon|^2) (\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^2} f(\mathbf{x}, t) \partial_t u_\varepsilon(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}, \quad \forall t > 0.$$

En notant  $E(u_\varepsilon, t)$  l'énergie associée à  $u_\varepsilon$  au temps  $t > 0$  définie par

$$E(u_\varepsilon, t) := \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} (\rho_\varepsilon |\partial_t u_\varepsilon|^2 + \mu_\varepsilon |\nabla u_\varepsilon|^2) (\mathbf{x}, t) d\mathbf{x},$$

nous avons donc montré que

$$\frac{dE}{dt}(u_\varepsilon, \tau) = \int_{\mathbb{R}^2} f(\mathbf{x}, \tau) \partial_t u_\varepsilon(\mathbf{x}, \tau) d\mathbf{x}, \quad \forall \tau > 0. \quad (2.2.5)$$

En intégrant l'égalité (2.2.5) entre 0 et  $t > 0$ , il vient donc que

$$E(u_\varepsilon, t) = \int_0^t \langle f(\tau), \partial_t u_\varepsilon(\tau) \rangle_{L^2(\mathbb{R}^2)} d\tau, \quad \forall t > 0, \quad (2.2.6)$$

en vertu des conditions initiales nulles imposées à  $u_\varepsilon$ , qui impliquent en particulier que  $E(u_\varepsilon, 0) = 0$ .

Or d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, et puisque

$$\forall \tau > 0, \|\partial_t u_\varepsilon(\tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^2, \rho_\varepsilon)}^2 \leq 2E(u_\varepsilon, \tau),$$

il vient que

$$\begin{aligned} \langle f(\tau), \partial_t u_\varepsilon(\tau) \rangle_{L^2(\mathbb{R}^2)} &\leq \|f(\tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^2, 1/\rho_\varepsilon)} \|\partial_t u_\varepsilon(\tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^2, \rho_\varepsilon)} \\ &\leq \sqrt{2} \|f(\tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^2, 1/\rho_\varepsilon)} \sqrt{E(u_\varepsilon, \tau)}, \end{aligned}$$

et ce  $\forall \tau > 0$ . En reportant dans (2.2.6), nous obtenons que

$$E(u_\varepsilon, t) \leq \sqrt{2} \int_0^t \|f(\tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^2, 1/\rho_\varepsilon)} \sqrt{E(u_\varepsilon, \tau)} d\tau, \quad \forall t > 0. \quad (2.2.7)$$

Nous concluons en appliquant le lemme de Gronwall [50, p. 371], résultat classique dans l'étude des inéquations différentielles :

**LEMME 2.2.3 (Lemme de Gronwall)**

Soit  $\alpha \in ]0, 1[$ ,  $\varphi$  et  $m$  deux fonctions continues positives définies sur  $[0, T]$  telles que

$$\varphi(t) \leq \int_0^t m(s) \varphi(s)^\alpha ds, \quad \forall t \in [0, T].$$

Alors

$$\varphi(t) \leq \left( (1 - \alpha) \int_0^t m(s) ds \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}, \quad \forall t \in [0, T].$$

En appliquant le lemme de Gronwall à la situation décrite par l'équation (2.2.7), il vient que

$$E(u_\varepsilon, t) \leq \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^t \|f(\tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^2, 1/\rho_\varepsilon)} d\tau \right)^2, \quad \forall t > 0,$$

ce qui achève la preuve. Notons que nous aurions également pu intégrer directement l'inéquation différentielle (2.2.7).

□

Notons que la proposition 2.2.2 fournit une estimation de  $u_\varepsilon$  indépendante de  $\varepsilon$  dans une norme indépendante de  $\varepsilon$ , ce qui constitue un résultat de stabilité de la solution  $u_\varepsilon$  relativement au paramètre  $\varepsilon$  :

#### **COROLLAIRE 2.2.4**

*Il existe une constante  $C > 0$  telle que  $\forall \varepsilon \geq 0$  et pour tout  $T > 0$ , on ait*

$$\sup_{t \in [0, T]} \left[ \left\| \frac{\partial u_\varepsilon(t)}{\partial t} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \|\nabla u_\varepsilon(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \right] \leq C \|f\|_{L^1(0, T, L^2(\mathbb{R}^2))}$$

DÉMONSTRATION : C'est une conséquence immédiate de la proposition 2.2.2 et de la définition des coefficients  $\rho_\varepsilon$ ,  $\mu_\varepsilon$ .

□

Le résultat précédent montre que la famille  $(u_\varepsilon)_{\varepsilon \geq 0}$  est uniformément bornée dans la norme d'énergie, relativement au paramètre  $\varepsilon$ .

#### **REMARQUE 2.2.5**

- *Nous pourrions montrer de même que le problème (2.2.3) est bien posé, et que sa solution  $u_{inc}$  vérifie l'estimation a-priori*

$$\sqrt{\int_{\mathbb{R}^2} \left( \rho_0 \left| \frac{\partial u_{inc}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \right|^2 + \mu_0 |\nabla u_{inc}(\mathbf{x}, t)|^2 \right) d\mathbf{x}} \leq \int_0^t \sqrt{\int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{\rho_0} |f(\mathbf{x}, \tau)|^2 d\mathbf{x}} d\tau, \quad \forall t \geq 0.$$

- *Étant donné le modèle considéré pour les paramètres physiques  $\rho_\varepsilon$  et  $\mu_\varepsilon$ , le problème de diffraction (2.2.2) est équivalent au problème suivant*

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u_\varepsilon \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^+, L^2(\mathbb{R}^2)) \cap \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, D(\Delta_{\mu_\varepsilon})) \text{ tel que} \\ \rho_0 \partial_t^2 u_\varepsilon - \mu_0 \Delta u_\varepsilon = f(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \setminus \bigcup_{n=1}^N \overline{\omega_\varepsilon^n}, \quad t \in \mathbb{R}^+, \\ \rho_n \partial_t^2 u_\varepsilon - \mu_n \Delta u_\varepsilon = 0, \quad \mathbf{x} \in \omega_\varepsilon^n, \quad t \in \mathbb{R}^+, \\ [u_\varepsilon]_{\partial \omega_\varepsilon^n} = [\mu_\varepsilon \nabla u_\varepsilon \cdot \mathbf{n}]_{\partial \omega_\varepsilon^n} = 0, \quad n \in \{1, \dots, N\}, \quad t \in \mathbb{R}^+, \\ u_\varepsilon(\mathbf{x}, 0) = \partial_t u_\varepsilon(\mathbf{x}, 0) = 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, \end{array} \right.$$

où l'opérateur  $[v]_{\partial \omega_\varepsilon^n}$  désigne la différence des traces de  $v$  sur  $\partial \omega_\varepsilon^n$  :

$$[v]_{\partial \omega_\varepsilon^n} := v^+ - v^-, \quad \mathbf{x} \in \partial \omega_\varepsilon^n,$$

$v^+$  et  $v^-$  désignant respectivement la trace depuis  $\mathbb{R}^2 \setminus \omega_\varepsilon^n$  et depuis  $\omega_\varepsilon^n$  vers  $\partial\omega_\varepsilon^n$ , et où  $\mathbf{n}$  est le vecteur normal à  $\partial\omega_\varepsilon^n$ .

L'objectif de la suite de ce manuscrit est l'élaboration de modèles approchés de (2.2.2), *plus simples* à résoudre numériquement que (2.2.2) lui-même. Ceci passe dans un premier temps par l'analyse asymptotique de  $u_\varepsilon$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ , que nous décrivons dans le prochain chapitre.



# CHAPITRE

## 3

# ASYMPTOTIQUE DE LA DIFFRACTION PAR DES PETITES INCLUSIONS

## Sommaire

<b>3.1</b>	<b>Introduction à la méthode des développements asymptotiques raccordés</b>	<b>30</b>
<b>3.2</b>	<b>Interlude technique</b>	<b>36</b>
3.2.1	Fonctions de troncature	36
3.2.2	Solution fondamentale de l'équation des ondes	37
3.2.3	Introduction à la théorie de Kondratiev	37
3.2.3.a	Transformations de Laplace et de Mellin	38
3.2.3.b	Espaces de Sobolev à poids pour le champ lointain	40
3.2.3.c	Espaces de Sobolev à poids pour le champ proche	49
3.2.4	Commutateurs	50
<b>3.3</b>	<b>Énoncé des résultats principaux</b>	<b>53</b>
3.3.1	Cas d'une inclusion unique	53
3.3.2	Cas d'un nombre fini d'inclusions	56
<b>3.4</b>	<b>Application de la méthode des développements asymptotiques raccordés</b>	<b>59</b>
3.4.1	Développement à l'ordre 0	60
3.4.1.a	Développement radial du champ limite	61
3.4.1.b	Le terme de champ proche	63
3.4.2	Développement à l'ordre 1	64
3.4.3	Développement à l'ordre 2	66
3.4.3.a	Construction du terme de champ proche	66
3.4.3.b	Construction du terme de champ lointain	68
3.4.3.c	Une caractérisation explicite de $u_2$	70

3.4.4	Développement à l'ordre 3 . . . . .	72
3.5	Démonstration des résultats et analyse d'erreur . . . . .	74
3.6	Extensions possibles . . . . .	78

L'objectif de ce chapitre est l'obtention d'un développement asymptotique de la solution  $u_\varepsilon$  du problème (2.2.2) quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Après un passage en revue des différents procédés permettant d'obtenir un tel développement, nous mettons en place un certain nombre de notions techniques préliminaires nous permettant d'appliquer la méthode des développements asymptotiques raccordés, ce qui nous permettra d'obtenir un développement asymptotique effectif ainsi qu'une analyse d'erreur entre  $u_\varepsilon$  et son développement.

## 3.1 INTRODUCTION À LA MÉTHODE DES DÉVELOPPEMENTS ASYMPTOTIQUES RACCORDÉS

Il existe différentes méthodes pour obtenir un développement asymptotique de la solution  $u_\varepsilon$  en fonction de  $\varepsilon$ . Citons les méthodes de type équations intégrales, consistant à écrire le problème de diffraction sous la forme équivalente d'une équation de Lippman-Schwinger, puis à effectuer un développement asymptotique du noyau intégral, la méthode des développements multi-échelles (ou encore méthodes des développements composés) ou finalement la méthode des développements asymptotiques raccordés.

Nous optons pour la méthode des développements asymptotiques raccordés. Précisons dans un premier temps ce que nous appelons développement asymptotique, et introduisons au préalable la notion de séquence de jauge.

### DÉFINITION 3.1.1

- Une suite de fonctions  $(\lambda_p)_{p \in \mathbb{N}}$  définies sur un intervalle de la forme  $[0, \varepsilon_0[$  est appelée une séquence de jauge si  $\forall p \in \mathbb{N}$ , nous avons la relation suivante

$$\frac{\lambda_{p+1}(\varepsilon)}{\lambda_p(\varepsilon)} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0,$$

ce que nous noterons indifféremment

$$\lambda_{p+1}(\varepsilon) \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{=} o(\lambda_p(\varepsilon)).$$

- Nous dirons d'une fonction  $h$  définie sur un intervalle de la forme  $[0, \varepsilon_0[$  qu'elle admet un développement asymptotique ou un développement en série le long de la séquence de jauge  $(\lambda_p)_{p \in \mathbb{N}}$  si il existe une suite  $(c_p)_{p \in \mathbb{N}}$  telle que  $\forall n \in \mathbb{N}$ , nous avons

$$h(\varepsilon) - \sum_{p=0}^n c_p \lambda_p(\varepsilon) \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{=} o(\lambda_n(\varepsilon)).$$

Nous noterons alors

$$h(\varepsilon) = \sum_{p=0}^{\infty} c_p \lambda_p(\varepsilon), \quad \text{quand } \varepsilon \rightarrow 0.$$

L'idée sous-jacente à la méthode des développements asymptotiques raccordés est qu'il est impossible d'obtenir un développement asymptotique de  $u_\varepsilon$  du type

$$u_\varepsilon(\mathbf{x}, t) = \sum_{p \in \mathbb{N}} \lambda_p(\varepsilon) u_p(\mathbf{x}, t), \quad (3.1.1)$$

qui serait valable uniformément en espace, les  $\lambda_p$  étant des *fonctions de jauge* et les  $u_p$  des fonctions indépendantes de  $\varepsilon$ , et ce à cause du caractère *singulier* du problème que nous considérons [57]. Le problème provient du fait qu'au voisinage de chacune des inclusions, la variable canonique n'est plus  $\mathbf{x}$  mais  $\mathbf{x}/\varepsilon$ . Il est nécessaire de considérer un *ansatz* différent de (3.1.1) au voisinage de chacune des inclusions. Un *ansatz* désigne une série formelle, dont la forme est choisie a priori, et dont les propriétés sont vérifiées a posteriori.

Précisément, nous allons chercher à approcher la solution exacte  $u_\varepsilon$  sous la forme d'un *ansatz* du type (3.1.1) à *grande* distance des inclusions, tandis qu'au voisinage de chacune d'entre elle (disons la  $n$ -ème inclusion), nous chercherons à exprimer la solution  $u_\varepsilon$  sous la forme

$$u_\varepsilon(\mathbf{x}, t) = \sum_{p \in \mathbb{N}} \mu_p(\varepsilon) U_p^n \left( \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_n}{\varepsilon}, t \right), \quad (3.1.2)$$

les  $U_p : (\mathbf{x}, t) \mapsto U_p(\mathbf{x}, t)$  étant des fonctions indépendantes de  $\varepsilon$ . Le concept d'*ansatz* repose sur la démarche d'analyse-synthèse suivante : nous *décrétons* que nous cherchons à approcher la solution  $u_\varepsilon$  par des séries formelles du type (3.1.1) et (3.1.2) dans des régions de l'espace adaptées, nous dériverons des propriétés qui caractérisent les termes de ces séries formelles, nous prouverons l'existence de ces termes dans un cadre fonctionnel adapté, puis enfin nous prouverons que les *ansatz* de champ proche et de champ lointain sont des bonnes approximations de  $u_\varepsilon$  dans les zones de champ lointain et de champ proche.

Avant d'aller plus loin, il est nécessaire de décrire un peu plus avant la dépendance du problème (2.2.2) vis-à-vis de  $\varepsilon$ . Précisons un peu plus avant les hypothèses que nous utiliserons sur la géométrie des inclusions.

### **HYPOTHÈSE 3.1.2**

Nous supposons que nous disposons d'une famille de  $N$  points distincts  $(\mathbf{x}_n)_{1 \leq n \leq N}$  de  $\mathbb{R}^2$  qui représenteront les centres des inclusions. Précisément, nous supposons que les inclusions  $\omega_\varepsilon^n$  sont des versions translatées en  $\mathbf{x}_n$  et mise à l'échelle  $\varepsilon$  d'une inclusion de référence  $\omega^n$ .

Ainsi, nous supposons que nous disposons d'une famille  $(\omega^n)_{1 \leq n \leq N}$  d'ouverts bornés et lipschitziens de  $\mathbb{R}^2$ , tels que pour tout  $n \in \{1, \dots, N\}$ ,  $0 \in \mathbb{R}^2$  soit le centre de gravité de  $\omega^n$ , c'est-à-dire

$$\int_{\omega^n} \mathbf{x} \, d\mathbf{x} = 0.$$

Nous supposons alors que les inclusions du problème physique (2.2.2) s'obtiennent de la manière suivante

$$\omega_\varepsilon^n = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_n}{\varepsilon} \in \omega^n \right\},$$

de sorte que  $\mathbf{x}_n$  est le centre de gravité de  $\omega_\varepsilon^n$ .

Nous supposons également que la source  $f$  du problème de diffraction (2.2.2) a un support

spatial bien séparé des inclusions. Ainsi, nous supposons qu'il existe un compact  $K \subset \mathbb{R}^2$  et une constante  $\kappa > 0$  tels que

$$\text{supp } f(t) \subset K, \quad \forall t \geq 0,$$

et vérifiant de plus

$$\text{dist}(\overline{\omega_\varepsilon^n}, K) \geq \kappa, \quad \forall n \in \{1, \dots, N\}, \quad \forall \varepsilon \in [0, 1],$$

où  $\text{dist}$  est la distance de Hausdorff.

Effectuons quelques remarques sur les hypothèses qui précèdent.

**REMARQUE 3.1.3**

- La distance de Hausdorff est définie, pour  $K_1, K_2$  deux compacts de  $\mathbb{R}^2$ , par

$$\text{dist}(K_1, K_2) := \max\left\{\sup_{\mathbf{x} \in K_1} d(\mathbf{x}, K_2), \sup_{\mathbf{x} \in K_2} d(\mathbf{x}, K_1)\right\},$$

la distance à un compact  $K$ , notée  $d(\cdot, K)$ , étant définie par

$$d(\mathbf{x}, K) := \min_{\mathbf{y} \in K} d(\mathbf{x}, \mathbf{y}),$$

$d$  désignant la distance euclidienne sur  $\mathbb{R}^2$ . Notons que nous aurions pu utiliser une autre distance définie sur les compacts de  $\mathbb{R}^2$  que la distance de Hausdorff.

- Il est fondamental de noter que la taille des inclusions  $\omega_\varepsilon^n$  varie linéairement avec  $\varepsilon$  tandis que leur position est fixe. Cette hypothèse est fondamentale dans les calculs que nous dériverons dans ce manuscrit, même si nous aurions pu utiliser des hypothèses un peu plus générales. Notamment, nous ne supposons pas que les obstacles se rapprochent à mesure que  $\varepsilon \rightarrow 0$ , comme par exemple dans [17], où les auteurs considèrent le cas de deux inclusions de taille  $\varepsilon$  centrées respectivement en  $\mathbf{x}_1^\varepsilon$  et  $\mathbf{x}_2^\varepsilon$  (ces points pouvant possiblement varier dans le plan à mesure que  $\varepsilon \rightarrow 0$ ), vérifiant

$$|\mathbf{x}_1^\varepsilon - \mathbf{x}_2^\varepsilon| \leq C\varepsilon^\alpha,$$

avec  $\alpha \in ]0, 1[$  et  $C > 0$  deux constantes indépendantes de  $\varepsilon$ . Cette hypothèse entraîne l'apparition de termes supplémentaires dans le développement asymptotique de la solution  $u_\varepsilon$  en fonction de  $\varepsilon$ .

- Notons que pour tout  $n \in \{1, \dots, N\}$ ,  $\mathbf{x}_n$  est le centre de gravité de  $\omega_\varepsilon^n$  mais que  $\mathbf{x}_n$  n'appartient pas nécessairement à  $\omega_\varepsilon^n$ . Un exemple de telle inclusion est représentée figure 3.1.1.

Décrivons à présent le fonctionnement de la méthode des développements asymptotiques raccordés. Nous introduisons  $N$  zones dites de champ proches, une associée à chaque inclusion, ainsi qu'une zone de champ lointain ; puis de définir dans chacune de ces zones un ansatz de champ proche. Les ansatz de champ proche ont pour fonction de rattraper le changement de nature du problème *limite*.

Ainsi nous introduisons, pour  $n \in \{1, \dots, N\}$ , la zone de champ proche associée à l'inclu-

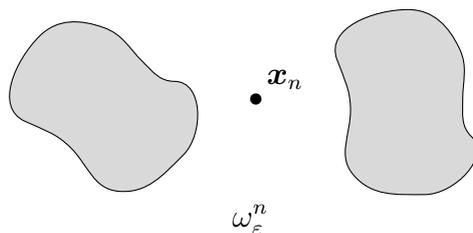


FIGURE 3.1.1 – Exemple d’inclusion  $\omega_\varepsilon^n$  non connexe (les deux composantes connexes de  $\omega_\varepsilon^n$  sont les parties grisées) et telle que  $\mathbf{x}_n \notin \omega_\varepsilon^n$ .

sion numéro  $n$

$$\mathcal{Z}_{n,\varepsilon}^P := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } |\mathbf{x} - \mathbf{x}_n| \leq 2\sqrt{\varepsilon}\} = D(\mathbf{x}_n, 2\sqrt{\varepsilon}),$$

et nous introduisons également la zone de champ lointain

$$\mathcal{Z}_\varepsilon^L = \mathbb{R}^2 \setminus \bigcup_{n=1}^N D(\mathbf{x}_n, \sqrt{\varepsilon}).$$

Notons que l’intersection de la zone de champ lointain avec la  $n$ -ième zone de champ proche est non vide et constitue ce que nous nommerons la  $n$ -ième zone de raccord :

$$\mathcal{Z}_{n,\varepsilon}^R := \mathcal{Z}_{n,\varepsilon}^P \cap \mathcal{Z}_\varepsilon^L = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } \sqrt{\varepsilon} \leq |\mathbf{x} - \mathbf{x}_n| \leq 2\sqrt{\varepsilon}\}.$$

Nous renvoyons à la figure 3.1.2 pour une illustration de ce découpage géométrique.

#### REMARQUE 3.1.4

- Une alternative à la nécessité de considérer  $N$  zones de champ proche, et donc  $N$  zones de raccord, est d’appliquer la méthode des développements asymptotiques raccordés pour une unique inclusion, nous permettant de caractériser le champ diffracté par une unique inclusion, puis de superposer ces résultats pour le cas de  $N$  inclusions. En effet, étant donnée l’hypothèse 3.1.2 et le fait que les inclusions ne se rapprochent pas les unes des autres quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ , le champ diffracté au premier ordre non nul pour le problème avec  $N$  inclusions est simplement la somme des  $N$  champs diffractés pour le problème avec une inclusion. Nous montrerons ceci dans la suite de cette section.
- L’échelle caractéristique définissant les zones de champ proche, de champ lointain et de raccord est  $\sqrt{\varepsilon}$ . Ce choix est arbitraire : nous pouvons remplacer la fonction  $\sqrt{\cdot}$  par toute fonction croissante  $\eta : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  vérifiant

$$\eta(\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0 \quad \text{ainsi que} \quad \frac{\eta(\varepsilon)}{\varepsilon} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \infty,$$

et la méthode des développements asymptotiques raccordés s’appliquerait tout aussi bien. L’idée est que les zones de champ proche et de raccord tendent, formellement, vers un ensemble de mesure nulle quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ , mais strictement plus lentement que  $\varepsilon$

lui-même.

- Nous pourrions introduire une telle fonction  $\eta$  pour chacune des inclusions. Le développement en champ proche et en champ lointain de  $u_\varepsilon$  qui en résulterait serait strictement identique. Par soucis de lisibilité, nous avons donc choisi cette échelle  $\sqrt{\varepsilon}$  et nous y re-streignons tout au long de ce manuscrit.

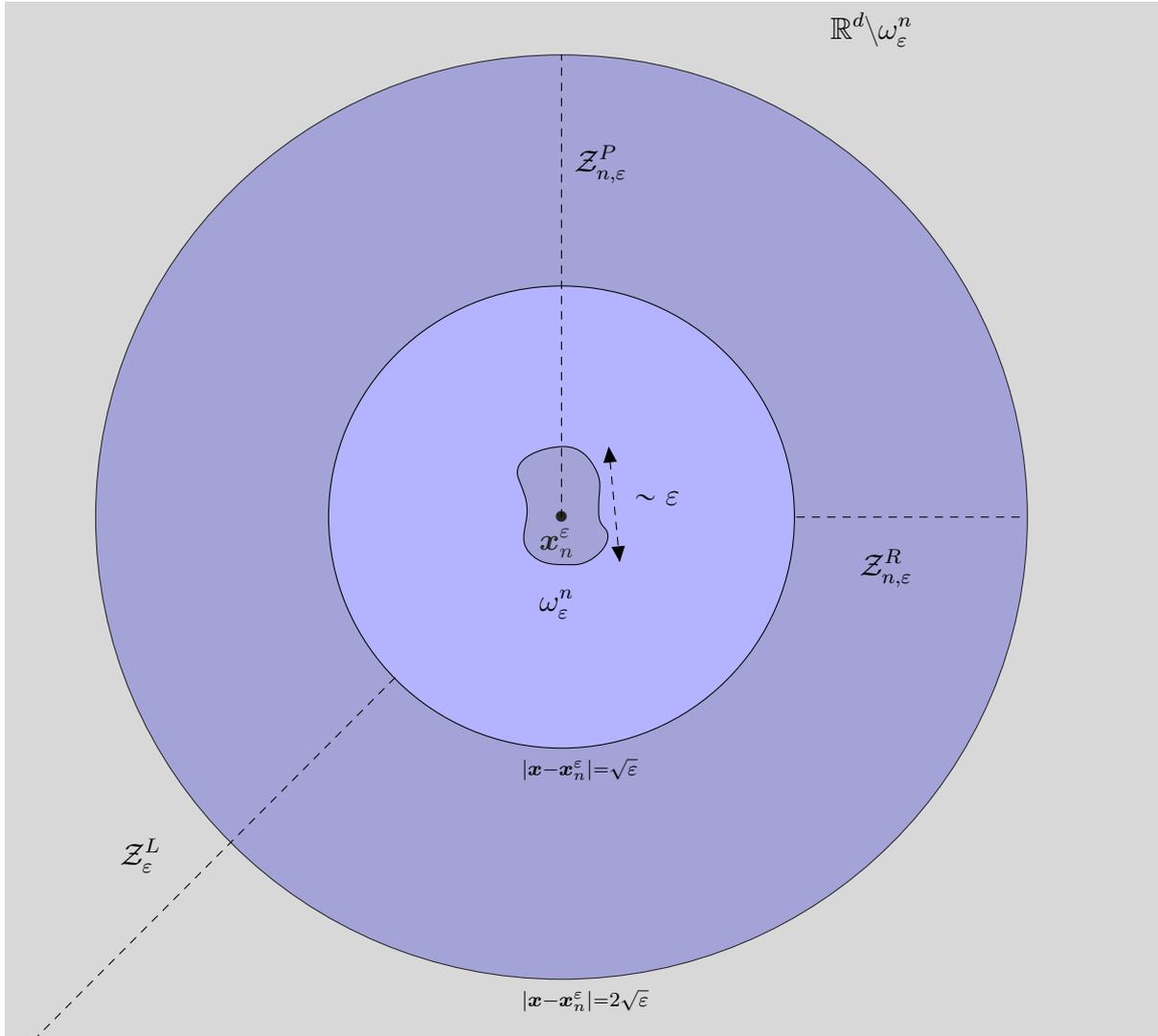


FIGURE 3.1.2 – Découpage en zones du domaine de calcul pour la méthode des développements asymptotiques raccordés : zones de champ proche, de champ lointain et de raccord autour de la  $n$ -ème inclusion.

Concentrons nous sur la décomposition en champ lointain dans un premier temps. A grande distance du défaut (dans la zone de champ lointain), nous cherchons la solution sous la forme

$$u_\varepsilon(\mathbf{x}, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k(\varepsilon) u_k(\mathbf{x}, t), \quad (3.1.3)$$

où les fonctions  $(\mathbf{x}, t) \mapsto u_j(\mathbf{x}, t)$  ne dépendent pas de  $\varepsilon$ . Nous cherchons une caractérisation de ces fonctions.

Ceci peut-être fait *formellement* en insérant le développement (3.1.3) dans l'équation (2.2.2) qui caractérise  $u_\varepsilon$ . Puisque nous sommes intéressés par le calcul d'une approximation en champ lointain, c'est-à-dire loin de l'obstacle, il est légitime de remplacer  $\rho_\varepsilon, \mu_\varepsilon$  par  $\rho_0, \mu_0$  dans (2.2.2). Ceci conduit aux équations

$$\begin{cases} \rho_0 \partial_t^2 u_0 - \mu_0 \Delta u_0 = f(\mathbf{x}, t), \\ u_0(\mathbf{x}, 0) = \partial_t u_0(\mathbf{x}, 0) = 0, & \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, \quad t \in \mathbb{R}_+, \\ \rho_0 \partial_t^2 u_k - \mu_0 \Delta u_k = 0, \\ u_k(\mathbf{x}, 0) = \partial_t u_k(\mathbf{x}, 0) = 0, & \forall k \geq 1, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}, \quad t \in \mathbb{R}_+. \end{cases} \quad (3.1.4)$$

Étant donné que les problèmes de propagation d'ondes dans l'espace libre sont bien posés, si nous supposons que  $u_1, u_2, \dots$  sont réguliers au voisinage de  $\mathbf{x}_n$ ,  $n = 1 \dots N$ , c'est-à-dire si nous cherchons les  $u_k$ ,  $k \geq 1$  dans les espaces de Sobolev traditionnellement adaptés à l'étude de l'équation des ondes, alors nécessairement  $u_k = 0$  pour tout  $k \geq 1$ . C'est pourquoi nous allons autoriser les  $u_k$  à être singuliers au voisinage de 0, le cadre fonctionnel adapté étant donné par la théorie de Kondratiev décrite section 3.2.3.

Examinons maintenant la description de l'approximation en champ proche, au voisinage de la  $n$ -ème inclusion. En insérant l'ansatz (3.1.2) dans (2.2.2), et posant  $U_p^n = 0$  pour  $p \leq -1$ , nous arrivons au système d'équation récurrent suivant

$$-\operatorname{div}(\tilde{\mu}^n \nabla U_k^n) = -\tilde{\rho}^n \partial_t^2 U_{k-2}^n \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad (3.1.5)$$

où les paramètres  $\tilde{\mu}^n$  et  $\tilde{\rho}^n$  sont les *versions translatées et normalisées* sur la  $n$ -ème inclusion des paramètres globaux  $\rho_\varepsilon$  et  $\mu_\varepsilon$  définis par (2.2.1) :

$$\tilde{\mu}^n(\boldsymbol{\xi}) = \begin{cases} \mu_0 & \text{si } \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^2 \setminus \omega^n, \\ \mu_n & \text{si } \boldsymbol{\xi} \in \omega^n, \end{cases} \quad \tilde{\rho}^n(\boldsymbol{\xi}) = \begin{cases} \rho_0 & \text{si } \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^2 \setminus \omega^n, \\ \rho_n & \text{si } \boldsymbol{\xi} \in \omega^n. \end{cases}$$

Moralement, comme les inclusions ne se rapprochent pas les unes des autres à mesure que  $\varepsilon \rightarrow 0$  en vertu de l'hypothèse 3.1.2, considérer un ansatz de champ proche associé à la  $n$ -ème inclusion consiste à faire un zoom sur cette inclusion, c'est-à-dire une mise à l'échelle  $\varepsilon$ . L'inclusion se normalise alors, et toutes les autres inclusions partent à l'infini, ce qui explique pourquoi les paramètres  $\tilde{\mu}^n$  et  $\tilde{\rho}^n$  ne dépendent plus que de l'inclusion  $\omega^n$ .

Dans le même ordre d'idée que pour les termes du champ lointain, si nous cherchons les  $U_p^n$  dans des espaces fonctionnels imposant des décroissances à l'infini (au moins dans un sens faible, par exemple au sens  $H^1(\mathbb{R}^2)$ ), alors nécessairement il viendra que  $U_p^n = 0$ . Nous serons donc amenés à chercher ces inconnues dans des espaces fonctionnels admettant des comportements non bornés au voisinage de l'infini, là encore, la théorie de Kondratiev fournissant un cadre fonctionnel adapté.

Le champ total sera cherché sous la forme d'une combinaison convexe de séries du type (3.1.3) (pour le champ à grande distance des inclusions) et (3.1.2) (au voisinage de chacune des inclusions). Le champ total étant régulier, mais chacun des ansatz de champ lointain

et de champ proche étant, a priori, singulier, respectivement au voisinage de chacun des  $\mathbf{x}_n$  et au voisinage de l'infini, nous allons voir apparaître des conditions dites de raccord, qui expriment le fait que le champ total est régulier, et se traduisant par des relations de compatibilité entre les singularités du champ lointain au voisinage de chacun des  $\mathbf{x}_n$  et les singularités des termes de champ proche au voisinage de l'infini.

## 3.2 INTERLUDE TECHNIQUE

Dans cette section, nous introduisons un certain nombre de notions techniques et regroupons des résultats relatifs à celles-ci, qui nous seront utiles dans la suite de ce chapitre, lorsque nous traiterons l'analyse asymptotique du problème (2.2.2) à proprement parler. Précisément, nous abordons la notion de fonction de troncature, de solution fondamentale pour l'équation des ondes et enfin nous présentons un aperçu de la théorie de Kondratiev, qui nous permettra d'étudier des problèmes aux limites dont les solutions sont singulières.

### 3.2.1 Fonctions de troncature

Dans la suite, nous utiliserons deux fonctions de troncature  $\chi, \psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$  de classe  $C^\infty$  radiales et vérifiant

$$\psi(\mathbf{x}) = 1 - \chi(\mathbf{x}).$$

Nous supposons que  $\chi(\mathbf{x})$  ne dépend que de  $|\mathbf{x}|$  et nous noterons abusivement  $\chi(\mathbf{x}) = \chi(|\mathbf{x}|)$ . Nous supposons par ailleurs que  $\chi(\mathbf{x}) = 1$  pour  $|\mathbf{x}| \leq 1$  et  $\chi(\mathbf{x}) = 0$  pour  $|\mathbf{x}| \geq 2$ . Étant donné  $s > 0$  fixé, nous noterons

$$\chi_s(\mathbf{x}) := \chi(\mathbf{x}/s) \quad \text{et} \quad \psi_s(\mathbf{x}) := \psi(\mathbf{x}/s)$$

les versions mises à l'échelle  $s$  de  $\chi$  et  $\psi$  respectivement. Le graphe de ces fonctions de troncature est affiché figure 3.2.1.

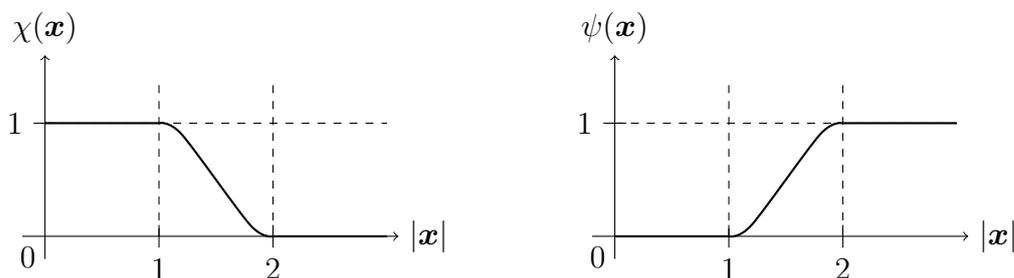


FIGURE 3.2.1 – Graphes des fonctions de troncature  $\chi$  et  $\psi$ .

Ces fonctions de troncature nous permettront de localiser les ansatz de champ proche dans leur zone de champ proche respective, l'ansatz de champ lointain dans la zone de champ lointain, et interviendront dans l'expression du champ approché.

### 3.2.2 Solution fondamentale de l'équation des ondes

Introduisons  $c_0 = \sqrt{\mu_0/\rho_0}$  la vitesse dans le milieu  $(\rho_0, \mu_0)$  et notons  $\mathcal{G} : (\mathbf{x}, t) \mapsto \mathcal{G}(\mathbf{x}, t)$  la fonction de Green, ou encore solution fondamentale, c'est-à-dire une solution causale de l'équation aux dérivées partielles

$$[\partial_t^2 \mathcal{G} - c_0^2 \Delta \mathcal{G}](\mathbf{x}, t) = \delta(t)\delta(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, \quad t \geq 0.$$

Si  $c_0$  est constante, cette fonction est donnée par (voir [41])

$$\mathcal{G}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2\pi c_0} \frac{\mathbf{1}_{0 \leq |\mathbf{x}| \leq c_0 t}}{\sqrt{c_0^2 t^2 - |\mathbf{x}|^2}},$$

où . Notons qu'il est alors aisé de montrer que  $\forall t > 0, \mathcal{G}(\bullet, t) \in L^1(\mathbb{R}^2)$ .

Soit à présent  $a$  une fonction causale de classe  $C^\infty$ , c'est-à-dire que

$$a(t) = 0, \quad \forall t \leq 0.$$

Considérons la convolution en temps de  $a$  par  $\mathcal{G}$  notée  $a \star_t \mathcal{G}$ . Etant données les propriétés usuelles du produit de convolution, il vient que

$$\rho_0 \partial_t^2 (a \star_t \mathcal{G}) - \mu_0 \Delta (a \star_t \mathcal{G}) = \rho_0 \delta_{\mathbf{x}} \otimes a_t,$$

la notation " $a_t$ " servant simplement à rappeler que  $a$  dépend de  $t$  uniquement. En particulier, nous constatons que

$$(a \star_t \mathcal{G})(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2\pi c_0} \int_0^{t-|\mathbf{x}|/c_0} \frac{a(s) ds}{\sqrt{c_0^2 (t-s)^2 - |\mathbf{x}|^2}}$$

est solution d'une équation d'onde homogène dans  $(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}_+$ .

### 3.2.3 Introduction à la théorie de Kondratiev

Comme nous le verrons, l'application de la méthode des développements raccordés conduit à l'étude d'équation aux dérivées partielles dont les inconnues vivent dans des espaces de Sobolev à poids, les éléments duquel sont des fonctions dont le comportement ponctuel ou au voisinage de l'infini est potentiellement singulier, et paramétré par un nombre réel.

Pour introduire ces espaces, un outil fondamental est la transformation de Mellin, dont nous présentons quelques propriétés. Dans un deuxième temps, nous introduisons les espaces de Sobolev à poids qui nous serviront à étudier les fonctions de champ lointain (ces fonctions sont singulières au voisinage de l'origine), puis les espaces de Sobolev pour les fonctions de champ proche (fonctions singulières au voisinage de l'infini).

### 3.2.3.a Transformations de Laplace et de Mellin

Rappelons la définition de la transformée de Laplace  $\mathcal{L}$ , qui est une *généralisation* de la transformée de Fourier aux fréquences complexes. Elle est définie, pour une fonction  $v \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ , par

$$\hat{v}(\lambda) = (\mathcal{L}v)(\lambda) := \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda t} v(t) dt, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \quad (3.2.1)$$

Nous énonçons quelques propriétés de la transformée de Laplace (voir [67, lemme 5.2.3]).

#### PROPOSITION 3.2.1

1. La transformée de Laplace (3.2.1) définit une application linéaire continue de  $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$  dans l'espace des fonctions analytiques du plan complexe. De plus,

$$(\mathcal{L}\partial_t v)(\lambda) = \lambda(\mathcal{L}v)(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad v \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}).$$

2. Une égalité de Parseval est satisfaite : pour tout  $\beta \in \mathbb{R}$ ,

$$\forall (u, v) \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})^2, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\beta t} u(t) \bar{v}(t) dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{\text{Re } \lambda = -\beta} \hat{u}(\lambda) \overline{\hat{v}(\lambda)} d\lambda, \quad (3.2.2)$$

où l'intégration dans le terme de droite de (3.2.2) a lieu sur le chemin  $l_{-\beta} := \{i\tau - \beta, \tau \in \mathbb{R}\}$ . Ainsi la transformation de Laplace (3.2.1) peut-être étendue en un isomorphisme

$$L_\beta^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(l_{-\beta})$$

où

$$L_\beta^2(\mathbb{R}) := \{v \in L_{loc}^2(\mathbb{R}) / e^{\beta t} v \in L^2(\mathbb{R})\}.$$

3. La transformée de Laplace inverse est donnée par la formule suivante, pour  $v \in L_\beta^2(\mathbb{R})$ ,

$$v(t) = (\mathcal{L}^{-1}\hat{v})(t) := \frac{1}{2\pi i} \int_{l_{-\beta}} e^{\lambda t} \hat{v}(\lambda) d\lambda.$$

4. Soient  $\beta_1 < \beta_2$ . Si  $v \in L_{\beta_1}^2(\mathbb{R}) \cap L_{\beta_2}^2(\mathbb{R})$ , alors  $\hat{v}$  est holomorphe dans la bande  $-\beta_2 < \text{Re } \lambda < -\beta_1$ .

Précisons que pour  $\beta \in \mathbb{R}$ , la droite  $l_\beta$  est orientée "de bas en haut", c'est-à-dire de  $-i\infty + \beta$  vers  $+i\infty + \beta$ .

Moralement, la transformée de Laplace transporte le comportement au voisinage de l'infini dans le domaine *réel* vers un comportement d'analyticité dans le domaine *fréquentiel*, comme exprimé au travers du point 4 dans la proposition 3.2.1. Nous allons introduire un outil auxiliaire, la transformation de Mellin, relié à la transformation de Laplace, qui mettra en correspondance le comportement au voisinage d'un point dans le domaine *réel* avec le domaine d'holomorphie dans le domaine *fréquentiel*. Nous reprenons les présentations faites dans [43, 67, 61].

La transformée de Mellin  $\mathbf{M}$  est définie, pour  $v \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}_*^+)$  par

$$\tilde{v}(\lambda) = (\mathbf{M}v)(\lambda) := \int_0^\infty r^{-\lambda} v(r) \frac{dr}{r}. \quad (3.2.3)$$

Il est clair que

$$(\mathbf{M}v)(\lambda) = (\mathcal{L}v(e^t))(\lambda). \quad (3.2.4)$$

En effet, un simple changement de variable montre que

$$\begin{aligned} (\mathbf{M}v)(\lambda) &= \int_0^\infty r^{-\lambda-1} v(r) dr \\ &= \int_{r=e^t}^\infty e^{-\lambda t} v(e^t) dt. \end{aligned}$$

L'équation (3.2.4) couplée à la proposition 3.2.1 va nous permettre d'établir un certain nombre de propriétés de la transformation de Mellin.

### PROPOSITION 3.2.2

1. La transformée de Mellin (3.2.3) définit une application linéaire continue de  $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}_*^+)$  dans l'espace des fonctions analytiques du plan complexe. De plus,

$$(\mathbf{M}(r\partial_r v))(\lambda) = \lambda(\mathbf{M}v)(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad v \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}).$$

2. Une égalité de Parseval est satisfaite : pour tout  $\beta \in \mathbb{R}$ ,

$$\forall (u, v) \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}_*^+)^2, \quad \int_0^\infty r^{2\beta} u(r) \bar{v}(r) \frac{dr}{r} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\text{Re } \lambda = -\beta} \tilde{u}(\lambda) \overline{\tilde{v}(\lambda)} d\lambda, \quad (3.2.5)$$

où l'intégration dans le terme de droite de (3.2.5) a lieu sur le chemin  $l_{-\beta} := \{i\tau - \beta, \tau \in \mathbb{R}\}$ . Ainsi la transformation de Mellin (3.2.3) peut-être étendue en un isomorphisme

$$\{v \in L_{loc}^2(\mathbb{R}_*^+) / r^{\beta-1/2} v \in L^2(\mathbb{R}_*^+)\} \rightarrow L^2(l_{-\beta}).$$

3. La transformée de Mellin inverse est donnée par la formule

$$v(r) = (\mathbf{M}^{-1}\tilde{v})(r) := \frac{1}{2\pi i} \int_{l_{-\beta}} r^\lambda \tilde{v}(\lambda) d\lambda. \quad (3.2.6)$$

4. Soient  $\beta_1 < \beta_2$ . Si  $r^{\beta_i-1/2} v \in L^2(\mathbb{R}_*^+)$  pour  $i = 1, 2$ , alors  $\tilde{v}$  est holomorphe dans la bande  $-\beta_2 < \text{Re } \lambda < -\beta_1$ .

Dans la proposition ci-dessus, et en particulier dans l'énoncé de la formule de Parseval (3.2.5) et la formule d'inversion (3.2.6), nous voyons apparaître un paramètre  $\beta$  qui a loisir d'être un réel quelconque. En réalité, ces formules s'appliquent dès lors que  $\beta$  est tel que  $\mathbf{M}v(\lambda)$  est bien définie pour  $\text{Re } \lambda = \beta$ .

Quand  $v \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ , alors la transformée de Mellin de  $v$  est définie et holomorphe dans le plan complexe tout entier. Pour des fonctions  $v$  moins régulières, il arrive fréquemment que

$\mathbf{M}v$  ne soit définie que dans une *bande* du plan complexe. Par exemple, si nous supposons que  $v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction mesurable, telle que

$$v(r) \underset{r \rightarrow 0}{=} O(r^\delta) \quad \text{et} \quad v(r) \underset{r \rightarrow +\infty}{=} O(r^\gamma),$$

où  $\gamma$  et  $\delta$  sont deux réels tels que  $\gamma < \delta$ , alors la transformée de Mellin de  $v$ , définie par la formule (3.2.3), est définie et holomorphe dans la bande

$$\langle \gamma, \delta \rangle := \{ \lambda \in \mathbb{C} \quad \text{tels que} \quad \gamma < \operatorname{Re} \lambda < \delta \}. \quad (3.2.7)$$

La bande fondamentale d'une fonction  $v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mesurable est la bande maximale (au sens de l'inclusion) du type (3.2.7) sur laquelle soit définie  $\mathbf{M}v$ . Les formules de Parseval et d'inversion pour la transformée de Mellin s'appliquent encore, si tant est que  $\beta$  soit choisi dans la bande fondamentale de  $v$ .

Citons également une propriété élémentaire, qui nous sera utile dans la suite : la multiplication par un monôme est une translation dans le domaine de Mellin.

**PROPOSITION 3.2.3**

Si  $v \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}_*^+)$ , alors pour tout  $\mu \in \mathbb{R}$ ,

$$\mathbf{M}(r^\mu v)(\lambda) = \tilde{v}(\lambda - \mu), \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}.$$

Moralement, on le voit dans la proposition 3.2.2, la transformée de Mellin met en relation le comportement au voisinage de l'origine de la fonction originelle avec le domaine d'holomorphic de sa transformée.

**REMARQUE 3.2.4**

Notons que

$$\mathbf{M} \left( v \left( \frac{1}{r} \right) \right) (\lambda) = \mathbf{M}(v)(-\lambda),$$

ce qui montre que la transformée de Mellin est également un outil pour étudier le comportement d'une fonction donnée au voisinage de l'infini (au sens de la proposition 3.2.2).

**3.2.3.b Espaces de Sobolev à poids pour le champ lointain**

Dans la suite,  $\Omega$  désignera un disque ouvert de rayon  $R$  épointé en 0.

$$\Omega := \{ (r \cos \theta, r \sin \theta) \in \mathbb{R}^2, \quad 0 < r < R, \quad 0 \leq \theta < 2\pi \},$$

où  $R \in ]0, +\infty[$ . En pratique,  $\Omega$  sera souvent choisi comme étant le disque unité épointé. La théorie que nous présentons s'adapte plus généralement au cas où  $\Omega$  est un cône épointé, mais nous n'appliquerons les résultats de cette section qu'au cas du disque. Introduisons  $\mathcal{C}_*^\infty(\overline{\Omega}) := \{ \varphi \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega}) \mid \varphi = 0 \text{ dans un voisinage de } 0 \}$ .

Pour tout multi-indice  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{N}^2$ , nous notons  $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2$ .

**DÉFINITION 3.2.5**

Soit  $k \in \mathbb{N}$  et  $\beta \in \mathbb{R}$ . Nous définissons  $V_\beta^k(\Omega)$  comme le complété de  $\mathcal{C}_*^\infty(\overline{\Omega})$  pour la norme

$$\|v\|_{V_\beta^k(\Omega)}^2 := \sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} |\mathbf{x}|^{2(\beta+|\alpha|-k)} |\partial_{\mathbf{x}}^\alpha v|^2 d\mathbf{x}. \quad (3.2.8)$$

Nous utiliserons régulièrement les espaces  $V_\beta^0(\Omega)$  et  $V_\beta^1(\Omega)$  dans la suite de ce manuscrit. Remarquons que  $L^2(\Omega) = V_0^0(\Omega)$  et  $H^1(\Omega) \subset V_1^1(\Omega)$ . En effet, si  $v \in H^1(\Omega)$ , alors le caractère borné de  $\Omega$  garantit l'existence d'une constante  $C > 0$  indépendante de  $v$  telle que

$$\|v\|_{V_1^1(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} |\mathbf{x}|^2 |\nabla v|^2 d\mathbf{x} + \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \|v\|_{H^1(\Omega)}^2 < \infty,$$

ce qui montre que  $v \in V_1^1(\Omega)$ .

De manière générale, l'espace  $V_\beta^k(\Omega)$  coïncide avec l'espace de Sobolev standard  $H^k(\Omega)$ , excepté au voisinage de 0, où les fonctions de  $V_\beta^k(\Omega)$  ont un comportement paramétré par  $\beta$  : au pire, celles-ci se comportent comme  $r^{-\beta-1}$  au voisinage de 0. Précisément, nous avons le résultat suivant

**PROPOSITION 3.2.6**

Soit  $k \in \mathbb{N}$  et  $\beta \in \mathbb{R}$ . Soit  $\gamma \in \mathbb{N}^2$  un multi-indice et  $v$  la fonction définie sur  $\Omega$  par

$$v(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\gamma.$$

Alors  $v \in V_\beta^k(\Omega)$  si et seulement si  $|\gamma| > -\beta - 1 + k$ .

DÉMONSTRATION : La démonstration est élémentaire : si  $\alpha \in \mathbb{N}^2$  est un multi-indice, alors

$$\begin{aligned} \partial_{\mathbf{x}}^\alpha v &= \partial_{x_1}^{\alpha_1} \partial_{x_2}^{\alpha_2} v = [\partial_{x_1}^{\alpha_1} x_1^{\gamma_1}] \times [\partial_{x_2}^{\alpha_2} x_2^{\gamma_2}] \\ &= C_{\alpha, \gamma} x_1^{\gamma_1 - \alpha_1} x_2^{\gamma_2 - \alpha_2}, \end{aligned}$$

où  $C_{\alpha, \gamma} = \gamma_1(\gamma_1 - 1) \dots (\gamma_1 - \alpha_1 + 1) \gamma_2(\gamma_2 - 1) \dots (\gamma_2 - \alpha_2 + 1)$ . En particulier  $C_{\alpha, \gamma} = 0$  dès que  $\alpha_i > \gamma_i$  pour  $i = 1$  ou  $2$ . Ainsi

$$\begin{aligned} \|v\|_{V_\beta^k(\Omega)}^2 &= \sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} |\mathbf{x}|^{2(\beta+|\alpha|-k)} |\partial_{\mathbf{x}}^\alpha v|^2 d\mathbf{x} \\ &= \sum_{|\alpha| \leq k} C_{\alpha, \gamma}^2 \int_{\Omega} |\mathbf{x}|^{2(\beta+|\alpha|-k)} |x_1^{\gamma_1 - \alpha_1} x_2^{\gamma_2 - \alpha_2}|^2 d\mathbf{x} \\ &= \sum_{|\alpha| \leq k} C_{\alpha, \gamma}^2 \int_0^R r^{2(\beta+|\alpha|-k+|\gamma|-|\alpha|)+1} dr \int_0^{2\pi} |\cos \theta|^{2(\gamma_1 - \alpha_1)} |\sin \theta|^{2(\gamma_2 - \alpha_2)} d\theta \\ &= \sum_{|\alpha| \leq k} C_{\alpha, \gamma}^2 \int_0^R r^{2(\beta-k+|\gamma|)+1} dr \int_0^{2\pi} |\cos \theta|^{2(\gamma_1 - \alpha_1)} |\sin \theta|^{2(\gamma_2 - \alpha_2)} d\theta \end{aligned}$$

Si  $\alpha_i > \gamma_i$  pour  $i = 1$  ou  $i = 2$  alors  $C_{\alpha,\gamma} = 0$ , tandis que si  $\alpha_i \leq \gamma_i$  pour  $i = 1$  et  $2$ , alors les intégrales en  $\theta$  sont finies. Ainsi par comparaison aux intégrales de Riemann,  $\|v\|_{\dot{V}_\beta^k(\Omega)}^2 < \infty$  si et seulement si  $2(\beta - k + |\gamma|) + 1 > -1$  c'est-à-dire si et seulement si  $|\gamma| > -\beta - 1 + k$ .

□

Nous disposons du résultat d'injection suivant :

**PROPOSITION 3.2.7**

Soient  $(k_1, k_2) \in \mathbb{N}^2$ ,  $k_1 > k_2$  et  $(\beta_1, \beta_2) \in \mathbb{R}^2$ . Si  $\beta_1 - k_1 = \beta_2 - k_2$ , alors  $V_{\beta_1}^{k_1}(\Omega)$  s'injecte continument dans  $V_{\beta_2}^{k_2}(\Omega)$ .

DÉMONSTRATION : Soit  $v \in V_{\beta_1}^{k_1}(\Omega)$ . Alors puisque  $\beta_1 - k_1 = \beta_2 - k_2$  et  $k_2 < k_1$ , il est clair que

$$\begin{aligned} \|v\|_{V_{\beta_2}^{k_2}(\Omega)}^2 &= \sum_{|\alpha| \leq k_2} \int_{\Omega} |x|^{2(\beta_2 + |\alpha| - k_2)} |\partial_{\mathbf{x}}^\alpha v|^2 \, d\mathbf{x} \\ &= \sum_{|\alpha| \leq k_2} \int_{\Omega} |x|^{2(\beta_1 + |\alpha| - k_1)} |\partial_{\mathbf{x}}^\alpha v|^2 \, d\mathbf{x} \\ &\leq \sum_{|\alpha| \leq k_1} \int_{\Omega} |x|^{2(\beta_1 + |\alpha| - k_1)} |\partial_{\mathbf{x}}^\alpha v|^2 \, d\mathbf{x} \\ &= \|v\|_{V_{\beta_1}^{k_1}(\Omega)}^2, \end{aligned}$$

ce qui montre que  $V_{\beta_1}^{k_1}(\Omega)$  s'injecte continument dans  $V_{\beta_2}^{k_2}(\Omega)$ .

□

Nous noterons également

$$\mathring{V}_\beta^1(\Omega) = \{v \in V_\beta^1(\Omega) \mid v = 0 \text{ sur } \partial\Omega\},$$

l'ensemble des fonctions de  $V_\beta^1(\Omega)$  s'annulant sur le bord.

**REMARQUE 3.2.8**

Pour  $k \geq 1$  et  $v \in \mathring{V}_\beta^k(\Omega)$ , il est légitime de parler de la trace de  $v$  sur  $\partial\Omega$  car  $v$  est  $H^1$  au voisinage du bord de  $\Omega$ . Nous notons  $V_\beta^{k-1/2}(\partial\Omega)$  l'espace des traces de fonctions de  $V_\beta^k(\Omega)$ .

La théorie de Kondratiev fournit des résultats de régularité pour les solutions de problèmes elliptiques en terme des normes  $\|\cdot\|_{V_\beta^k}$ , résultats que nous allons explorer ici. Nous suivons principalement la présentation faite dans [67].

Le résultat suivant est une application directe de l'analyse faite [67, Théorème 6.1.2].

**PROPOSITION 3.2.9**

Pour tout  $\beta \in ]1, 2[$ , l'opérateur  $\Delta : V_\beta^2(\Omega) \cap \dot{V}_{\beta-1}^1(\Omega) \rightarrow V_\beta^0(\Omega)$  est continu, surjectif. De plus  $\dim \ker(\Delta) = 1$ .

Le résultat précédent étend les résultats usuels pour l'opérateur de Laplace dans les espaces de Sobolev classiques, puisque comme nous allons le voir, pour  $\beta \in ]1, 2[$ ,  $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \subset V_\beta^2(\Omega) \cap \dot{V}_{\beta-1}^1(\Omega)$ .

En effet, nous avons le résultat suivant

**PROPOSITION 3.2.10**

Si  $u \in H^1(\Omega)$ , et si  $\delta > \frac{1}{2}$ , alors

$$\|u\|_{V_{-1+\delta}^0(\Omega)} \leq \frac{1}{\delta} \|\nabla u\|_{V_\delta^0(\Omega)}. \quad (3.2.9)$$

De plus,  $H^2(\Omega) \subset V_\beta^2(\Omega)$  pour  $\beta > 1$ .

DÉMONSTRATION : Citons pour commencer l'inégalité de Hardy (voir par exemple [54, Théorème 330])

**LEMME 3.2.11 (Inégalité de Hardy)**

Soit  $u \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^+)$  et  $\delta > -1/2$ . Alors

$$\|r^\delta u\|_{L^2(\mathbb{R}^+)} \leq \frac{1}{2\delta + 1} \left\| r^{\delta+1} \frac{du}{dr} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^+)}.$$

La première partie de la proposition découle immédiatement de l'inégalité de Hardy, modulo un changement de variable sur  $\delta$  et un passage en coordonnées polaires dans les intégrales définissant les normes intervenant à gauche et à droite de l'inégalité.

La deuxième partie de la proposition s'en déduit alors. En effet, si  $v \in H^2(\Omega)$ , alors

$$\begin{aligned} \|v\|_{V_\beta^2(\Omega)}^2 &= \sum_{|\alpha| \leq 2} \int_{\Omega} |\mathbf{x}|^{2(\beta+|\alpha|-2)} |\partial_{\mathbf{x}}^\alpha v|^2 d\mathbf{x} \\ &\leq C(\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\Delta v\|_{L^2(\Omega)}^2) + \|v\|_{V_{\beta-2}^0(\Omega)}^2 \\ &\leq C\|v\|_{H^2(\Omega)}^2, \end{aligned}$$

où  $C > 0$  est une constante indépendante de  $v$ , et où nous avons utilisé le caractère borné de  $\Omega$  pour la première inégalité, et l'équation (3.2.9) pour la deuxième inégalité. □

Notons que l'inclusion  $H^2(\Omega) \subset V_\beta^2(\Omega)$  est stricte. Par exemple, il est aisé de constater que  $\ln |\mathbf{x}| \in V_\beta^2(\Omega) \setminus H^2(\Omega)$  pour  $\beta \in ]1, 2[$ .

**Transformation de Mellin et espaces de Sobolev à poids** La transformée de Mellin nous permet de donner une caractérisation des espaces  $V_\beta^k$ . Soit  $\beta \in \mathbb{R}$ . Pour une fonction  $v \in V_\beta^2(\Omega)$ , nous noterons  $\bar{v}$  son prolongement à  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  tout entier défini par

$$\bar{v}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \chi(\mathbf{x})v(\mathbf{x}) & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad (3.2.10)$$

où  $\chi$  est une fonction de troncature radiale de classe  $\mathcal{C}^\infty$ , valant 1 dans un voisinage de l'origine et nulle hors de  $\Omega$ .

En vertu du fait que  $v \in V_\beta^2(\Omega)$ , il vient que le prolongement  $\bar{v}$  ainsi défini satisfait également

$$\bar{v} \in V_\beta^2(\mathbb{R}^2).$$

Dans la suite nous omettrons de noter explicitement le prolongement  $\bar{v}$ , et nous noterons encore  $v$  le prolongement défini par (3.2.10). Ceci nous permet de calculer la transformée de Mellin radiale de  $v$ , que nous noterons

$$\tilde{v}(\lambda) := \int_0^{+\infty} r^{-\lambda} v(r) \frac{dr}{r} \in L^2(0, 2\pi)$$

conformément à la notation introduite section 3.2.3.a. Notons que la définition de la transformée de Mellin ainsi introduite n'est pas intrinsèque et dépend a priori du choix de la fonction de troncature  $\chi$ .

La proposition qui suit donne le domaine d'holomorphie de la transformée de Mellin d'une fonction appartenant aux espaces  $V_\beta^2$  et est une conséquence directe du point 2. de la proposition 3.2.2.

**PROPOSITION 3.2.12**

*Si  $v \in V_\beta^2(\Omega) \cap \mathring{V}_{\beta-1}^1(\Omega)$ , alors  $v \in V_{\beta-2}^0(\Omega)$  et la transformée de Mellin radiale de  $v$  est holomorphe dans la bande*

$$\{\lambda \in \mathbb{C} \quad \text{tels que} \quad \text{Re } \lambda < 1 - \beta\}.$$

Nous pouvons à présent caractériser la norme  $\|\cdot\|_{V_\beta^k}$  en terme de la transformée de Mellin. La proposition qui suit est une conséquence directe de l'égalité de Parseval (voir par exemple [67, Lemme 6.1.4]).

**LEMME 3.2.13**

*Soit  $k \geq 1$  un entier et  $\beta \in \mathbb{R}$ . Alors sur l'espace  $V_\beta^k(\Omega) \cap \mathring{V}_{\beta-k+1}^1(\Omega)$ , la norme  $\|\cdot\|_{V_\beta^k(\Omega)}$  définie par (3.2.8) est équivalente à la norme*

$$\|v\| := \left( \frac{1}{2\pi i} \int_{\text{Re } \lambda = -\beta+k-1} \sum_{j=0}^k |\lambda|^{2j} \|\tilde{v}(\lambda, \cdot)\|_{\mathbb{H}^{k-j}([0, 2\pi])}^2 d\lambda \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Par ailleurs, nous disposons du résultat suivant, qui nous fournit l'asymptotique de la solution d'une équation au Laplacien près des singularités du domaine (ici l'origine), voir [67, Théorème 6.4.1].

**PROPOSITION 3.2.14**

*Pour tout  $v \in V_\beta^2(\Omega) \cap \mathring{V}_{\beta-1}^1(\Omega)$  avec  $\beta \in ]1, 2[$  tel que  $\Delta v \in V_{1-\gamma}^0(\Omega)$  pour  $\gamma \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{N}$  fixé, il existe des coefficients  $\pi'_0(v), \pi_\alpha(v) \in \mathbb{C}, |\alpha| \leq [\gamma]$  (où  $[\gamma]$  désigne la partie entière de  $\gamma$ ) tels que nous ayons la décomposition suivante :*

$$v^*(\mathbf{x}) := v(\mathbf{x}) - \pi'_0(v) \ln |\mathbf{x}| - \sum_{|\alpha| \leq [\gamma]} \pi_\alpha(v) \mathbf{x}^\alpha \in V_{1-\gamma}^2(\Omega). \quad (3.2.11)$$

*Par ailleurs, ces coefficients dépendent continûment de  $\Delta v$  i.e. il existe une constante  $c > 0$  indépendante de  $v$  telle que*

$$|\pi'_0(v)| + \sum_{|\alpha| \leq [\gamma]} |\pi_\alpha(v)| + \|v^*\|_{V_{1-\gamma}^2(\Omega)} \leq c \|\Delta v\|_{V_{1-\gamma}^0(\Omega)} + c \|v\|_{V_{\beta-2}^0(\Omega)}.$$

Commentons les hypothèses de cette proposition. Par hypothèse, comme  $v \in V_\beta^2(\Omega) \cap \mathring{V}_{\beta-1}^1(\Omega)$ , d'après la proposition 3.2.9 il vient que

$$\Delta v \in V_\beta^0(\Omega).$$

L'hypothèse  $\Delta v \in V_{1-\gamma}^0(\Omega)$  apporte des informations supplémentaires sur  $v$  puisque étant donné que  $\beta > 1 - \gamma$ , l'inclusion

$$V_{1-\gamma}^0(\Omega) \subset V_\beta^0(\Omega)$$

est vérifiée.

Enfin, la conclusion de cette proposition est pertinente puisque quand  $\gamma > 0$ , ni  $\ln |\mathbf{x}|$  ni les fonctions  $\mathbf{x}^\alpha$  pour  $|\alpha| \leq \gamma$  n'appartiennent à l'espace  $V_{1-\gamma}^2(\Omega)$ .

Une façon alternative de présenter ce résultat est d'affirmer qu'il existe des formes linéaires continues  $\pi'_0, \pi_\alpha, |\alpha| \leq [\gamma]$  définies sur

$$\{v \in V_\beta^2(\Omega) \cap \mathring{V}_{\beta-1}^1(\Omega) \text{ telles que } \Delta v \in V_{1-\gamma}^0(\Omega)\}$$

telles que l'égalité fonctionnelle (3.2.11) ait lieu.

Passons à la preuve de ce résultat.

DÉMONSTRATION : (de la Proposition 3.2.14) Posons  $f = \Delta v \in V_{1-\gamma}^0(\Omega)$ , avec  $v \in V_\beta^2(\Omega) \cap \mathring{V}_{\beta-1}^1(\Omega)$ . Fixons  $\theta \in [0, 2\pi]$ . En passant en coordonnées polaires, il vient

$$r^2 f(r, \theta) = r \partial_r (r \partial_r v(r, \theta)) + (\partial_\theta^2 v)(r, \theta), \quad \forall r > 0, \quad (3.2.12)$$

à une multiplication par la fonction de troncature  $\chi$  près. Comme  $v \in V_\beta^2(\Omega)$ , il vient que  $v \in V_{\beta-2}^0(\Omega)$  et par suite que  $\lambda \mapsto \tilde{v}(\lambda, \theta)$  est analytique dans le demi-plan  $\mathbb{C}_{1-\beta} := \{\operatorname{Re} \lambda < 1 - \beta\}$  d'après la proposition 3.2.12.

De même, comme  $f \in V_{1-\gamma}^0$ , il vient que  $\lambda \mapsto \tilde{f}(\lambda - 2, \theta)$  est holomorphe dans le demi-plan  $\mathbb{C}_\gamma$ .

En appliquant la transformée de Mellin à l'égalité (3.2.12), et en utilisant la proposition 3.2.2, nous obtenons

$$\tilde{f}(\lambda - 2, \theta) = \lambda^2 \tilde{v}(\lambda, \theta) + \partial_\theta^2 \tilde{v}(\lambda, \theta), \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}_{1-\beta}. \quad (3.2.13)$$

L'égalité (3.2.13) va nous permettre d'étendre  $\lambda \mapsto \tilde{u}(\lambda, \theta)$  en une fonction méromorphe du demi-plan  $\mathbb{C}_\gamma$ , modulo l'inversion de l'opérateur  $\partial_\theta^2 + \lambda^2$ .

L'opérateur  $\partial_\theta^2 + \lambda^2$  défini sur

$$H_{\sharp}^2(0, 2\pi) := \{u \in H^2(0, 2\pi) \text{ tels que } u(0) = u(2\pi), u'(0) = u'(2\pi)\}$$

est inversible dès que  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$  et son inverse  $(\partial_\theta^2 + \lambda^2)^{-1}$  admet la décomposition spectrale suivante

$$(\partial_\theta^2 + \lambda^2)^{-1} f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{P_n f}{\lambda^2 - n^2}, \quad (3.2.14)$$

où  $P_n$  est défini par

$$P_n f(\theta) = \frac{e^{in\theta}}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\tau) e^{in\tau} d\tau$$

et où la série (3.2.14) converge dans  $L^2(0, 2\pi)$  (voir par exemple [81] pour plus de détails).

Notons

$$A := ]1 - \beta, \gamma[ \cap \mathbb{Z}.$$

En vertu du fait que  $\beta \in ]1, 2[$  et que  $\gamma > 0$ ,  $A$  ne contient que des entiers positifs ou nuls. Définissons, pour  $\lambda \in \mathbb{C}_\gamma \setminus A$ , la fonction

$$w(\lambda, \theta) = (\partial_\theta^2 + \lambda^2)^{-1} \tilde{f}(\lambda - 2, \theta). \quad (3.2.15)$$

Alors l'égalité (3.2.13) et les remarques qui précèdent montrent que  $w$  est un prolongement méromorphe de  $\tilde{v}$  sur  $\mathbb{C}_\gamma \setminus A$ , admettant des pôles pour chaque  $n \in A$ . Plus particulièrement, chaque entier non nul de  $A$  est un pôle simple, tandis que 0 est un pôle double de  $w$ , et ce en vertu de la décomposition spectrale (3.2.14).

Nous allons maintenant appliquer la transformée de Mellin inverse à  $w$ , et appliquer le théorème des résidus, pour obtenir l'estimation (3.2.11). Pour  $\eta > 0$ , introduisons le rectangle ouvert  $G_\eta$  défini par

$$G_\eta = \{\lambda \in \mathbb{C} \text{ tels que } 1 - \beta < \operatorname{Re} \lambda < \gamma \text{ et } -\eta < \operatorname{Im} \lambda < \eta\},$$

et notons son bord  $R_\eta := \partial G_\eta$  (voir la figure 3.2.2).

Intégrons la fonction  $z(\lambda, \theta) = w(\lambda, \theta) r^\lambda$  sur le bord de  $R_\eta$ , où  $w$  est le prolongement méromorphe de  $\tilde{v}$  défini par (3.2.15) et où  $r > 0$  est fixé. Il est clair que  $z$  est méromorphe dans  $G_\eta$ . Ainsi, d'après le théorème des résidus, nous avons

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{R_\eta} z(\lambda, \theta) d\lambda = \sum_{n \in A} \operatorname{Res}_{\lambda=n} z(\cdot, \theta),$$

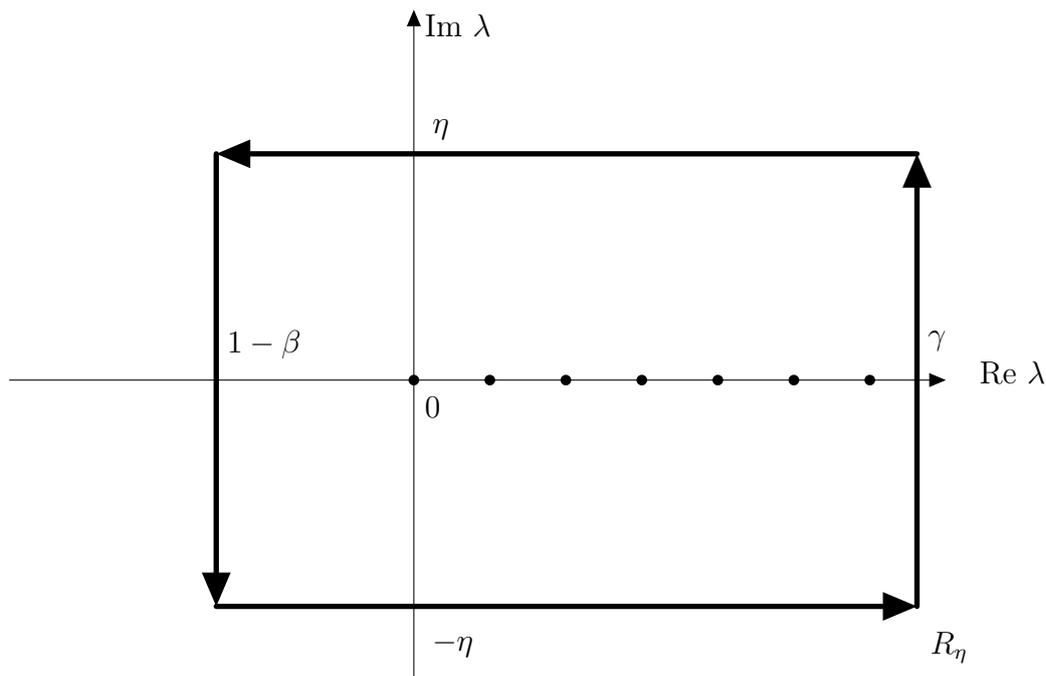


FIGURE 3.2.2 – Le contour d’intégration  $R_\eta$  dans le plan complexe. Les entiers positifs inférieurs à  $\gamma$ , qui sont les pôles de  $w$ , sont représentés en point noir.

où la somme de droite porte sur un ensemble fini. L’idée est maintenant la suivante : après avoir décomposé l’intégrale de gauche comme une somme d’intégrale sur les quatre côtés du rectangle  $R_\eta$ , nous allons faire tendre  $\eta$  vers l’infini. Les deux termes correspondant aux intégrales sur les bords latéraux de  $R_\eta$  vont nous donner des transformations de Mellin inverse, qui, nous le verrons, feront apparaître les fonctions  $v$  et  $v^*$  intervenant dans l’égalité (3.2.11), tandis que les deux intégrales sur les bords horizontaux vont tendre vers 0 quand  $\eta \rightarrow \infty$ .

Décomposons  $\lambda = a + ib$ , où  $a = \text{Re } \lambda$  et  $b = \text{Im } \lambda$ . D’une part, nous avons

$$\begin{aligned} \int_{R_\eta} z(\lambda, \theta) d\lambda &= \int_{-\eta}^{\eta} z(\gamma + ib, \theta) db - \int_{-\eta}^{\eta} z(1 - \beta + ib, \theta) db \\ &\quad + \int_{1-\beta}^{\gamma} z(a - i\eta, \theta) da - \int_{1-\beta}^{\gamma} z(a + i\eta, \theta) da. \end{aligned}$$

En vertu du point 3 de la proposition 3.2.2, nous avons

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{-\eta}^{\eta} z(1 - \beta + ib, \theta) db = \frac{1}{2i\pi} \int_{-\eta}^{\eta} w(1 - \beta + ib, \theta) r^{1-\beta+ib} db \xrightarrow{\eta \rightarrow \infty} v(r, \theta).$$

De plus, on montre grâce au lemme 3.2.13 qu’il existe une fonction  $v^* \in V_{1-\gamma}^2(\Omega)$  telle que

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{-\eta}^{\eta} w(\gamma + ib, \theta) r^{\gamma+ib} db \xrightarrow{\eta \rightarrow \infty} v^*(r, \theta),$$

c’est-à-dire que  $w(\cdot, \theta)$  est la transformée de Mellin de  $v^*$  au voisinage de la droite  $l_\gamma$ .

Passons aux termes intégraux sur les bords horizontaux de  $R_\eta$ . Il existe une suite  $(\eta_k)_{k \in \mathbb{N}}$  tendant vers  $+\infty$  avec  $k$  telle que

$$I(\eta_k) := \int_{1-\beta}^{\gamma} z(a + i\eta_k, \theta) db \rightarrow 0.$$

On peut en effet montrer (voir par exemple [87, p. 75]) que

$$\int_{\mathbb{R}} |I(\eta)|^2 d\eta < +\infty,$$

ce qui montre l'existence d'une telle suite  $(\eta_k)$ . On raisonne de même pour montrer qu'à une extraction près, le terme

$$\int_{1-\beta}^{\gamma} z(a - i\eta, \theta) db \xrightarrow{\eta \rightarrow \infty} 0.$$

Calculons à présent les résidus de  $\lambda \mapsto z(\lambda, \theta)$  aux pôles  $\lambda = n \in A$ . De la décomposition spectrale (3.2.14), on constate que si  $n \in A$  est non nul, alors le résidu de  $z$  en  $n$  est

$$\begin{aligned} \text{Res}_{\lambda=n} z(\cdot, \theta) &= \frac{r^n}{2n} \left[ P_n \tilde{f}(n-2, \theta) + P_{-n} \tilde{f}(n-2, \theta) \right] \\ &= \frac{r^n}{4n\pi} \left[ e^{in\theta} \int_0^{2\pi} \tilde{f}(n-2, \tau) e^{in\tau} d\tau + e^{-in\theta} \int_0^{2\pi} \tilde{f}(n-2, \tau) e^{-in\tau} d\tau \right] \\ &= \frac{r^n}{2n\pi} \left[ \cos(n\theta) \int_0^{2\pi} \tilde{f}(n-2, \tau) \cos(n\tau) d\tau + \sin(n\theta) \int_0^{2\pi} \tilde{f}(n-2, \tau) \sin(n\tau) d\tau \right] \\ &= r^n (\cos(n\theta) c_n(f) + \sin(n\theta) s_n(f)) \end{aligned}$$

où nous avons posé

$$c_n(f) := \frac{1}{2n\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{f}(n-2, \tau) \cos(n\tau) d\tau \quad \text{et} \quad s_n(f) := \frac{1}{2n\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{f}(n-2, \tau) \sin(n\tau) d\tau.$$

Dans le même temps, le résidu de  $z$  en 0 (rappelons que 0 est un pôle double de  $z$ ) est

$$\begin{aligned} \text{Res}_{\lambda=0} z(\cdot, \theta) &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \lambda} (\lambda^2 z(\lambda, \theta)) \\ &= P_0 \tilde{f}(-2, \theta) \ln r + C \end{aligned}$$

où

$$C = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \lambda} P_0 \tilde{f}(\lambda - 2, \theta)$$

est une constante dépendant uniquement de  $f$ .

Récapitulons : nous avons montré qu'il existait  $v^* \in V_{1-\gamma}^2(\Omega)$  et une constante  $C \in \mathbb{C}$  telle que pour tout  $r > 0$  et tout  $\theta \in [0, 2\pi]$ , on ait

$$v^*(r, \theta) - v(r, \theta) = C + \sum_{n \in A} r^n (\cos(n\theta) c_n(f) + \sin(n\theta) s_n(f))$$

En utilisant les formules de Moivre, nous retrouvons la forme annoncée dans l'équation (3.2.11). La continuité des coefficients  $\pi'_0(v)$ ,  $\pi_\alpha(v)$  découle de la définition de  $P_n f$ .

Le résultat qui précède tiendra une place importante lorsque nous appliquerons la méthode des développements asymptotiques raccordés, puisqu'il nous donnera le comportement au voisinage de 0 des termes intervenant dans la décomposition en champ lointain, termes qui, rappelons le, auront un comportement singulier au voisinage de l'origine.

### 3.2.3.c Espaces de Sobolev à poids pour le champ proche

Dans le paragraphe précédent nous avons mis en place le cadre fonctionnel adéquat pour étudier des problèmes variationnels dont les solutions peuvent admettre des singularités quand  $\mathbf{x} \rightarrow 0$ , ce qui nous sera utile pour définir rigoureusement les termes intervenant dans la décomposition en champ lointain. A présent, nous adoptons une démarche similaire pour proposer un cadre fonctionnel adéquat pour définir les termes  $U_k$  intervenant en champ proche, pouvant admettre un comportement singulier au voisinage de l'infini.

Dans la suite,  $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^2$  désignera un ouvert de  $\mathbb{R}^2$ , non nécessairement borné.

#### DÉFINITION 3.2.15

Soit  $k \in \mathbb{N}$  et  $\beta \in \mathbb{R}$ . Nous définissons  $W_\beta^k(\mathcal{O})$  comme le complété de  $\mathcal{C}_*^\infty(\mathcal{O})$  pour la norme

$$\|v\|_{W_\beta^k(\mathcal{O})}^2 := \sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\mathcal{O}} (1 + |\boldsymbol{\xi}|^2)^{\beta + |\alpha| - k} |\partial_{\boldsymbol{\xi}}^\alpha v|^2 d\boldsymbol{\xi}.$$

A nouveau, pour  $k \in \mathbb{N}$ , les fonctions de  $W_\beta^k$  ont une régularité  $H^k$ , excepté au voisinage de  $|\boldsymbol{\xi}| \rightarrow \infty$ , où leur comportement est paramétré par le réel  $\beta$ . Les résultats que nous exposons ici nous permettrons d'étudier en détail les solutions de problèmes tels que (3.1.5).

Donnons-nous une loi de comportement  $k$  constante par morceaux, adaptée à un ouvert borné  $\omega \subset \mathbb{R}^2$  lipschitzien : nous supposons qu'il existe deux constantes réelles strictement positives  $k_0$ ,  $k_1$  telles que

$$k(\mathbf{x}) = \begin{cases} k_0 & \text{si } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \setminus \omega, \\ k_1 & \text{si } \mathbf{x} \in \omega. \end{cases}$$

Nous supposons que  $0 \in \omega$ . Pour tout  $\beta \in ]0, 1[$ , introduisons l'opérateur

$$B_\beta : \begin{cases} D(B_\beta) \longrightarrow W_\beta^0(\mathbb{R}^2) \\ v \longmapsto \operatorname{div}(k \nabla v), \end{cases}$$

où  $D(B_\beta) := \{w \in W_{\beta-1}^1(\mathbb{R}^2) \mid \operatorname{div}(k \nabla w) \in W_\beta^0(\mathbb{R}^2)\}$ . Nous disposons du résultat suivant qui est l'analogue de la proposition 3.2.9 pour les espaces de champ proche et qui étend les résultats classiques du Laplacien généralisé  $\operatorname{div}(k \nabla)$  dans les espaces de Sobolev classique aux espaces  $W_\beta^k$ .

**PROPOSITION 3.2.16**

Pour tout  $\beta \in ]0, 1[$ , l'opérateur  $B_\beta$  est tel que

$$v \in D(B_\beta) \quad \text{si et seulement si} \quad \begin{cases} v|_\omega \in H^2(\omega), \\ v|_{\mathbb{R}^2 \setminus \bar{\omega}} \in W_\beta^2(\mathbb{R}^2 \setminus \bar{\omega}), \\ [v]_\Gamma = [k\partial_n v]_\Gamma = 0. \end{cases}$$

De plus, l'opérateur  $B_\beta$  est surjectif et  $\ker(B_\beta) = \text{vect}\{1\}$  est l'espace des fonctions constantes.

Encore une fois, la théorie de Kondratiev permet d'établir une description précise du comportement asymptotique des solutions associées aux problèmes liés à l'opérateur  $\text{div}(k\nabla)$ . Le résultat qui suit se démontre de manière similaire à la proposition 3.2.14, en utilisant le fait que la transformée de Mellin permet d'étudier le comportement asymptotique au voisinage de 0 comme au voisinage de  $+\infty$  (voir la remarque 3.2.4).

**PROPOSITION 3.2.17**

Pour tout  $v \in D(B_\beta)$  avec  $\beta \in ]0, 1[$  tel que  $B_\beta(v) \in W_{1+\gamma}^0(\mathbb{R}^2)$  pour un certain  $\gamma \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{N}$  fixé, il existe des coefficients  $\Pi'_0(v), \Pi_\alpha(v) \in \mathbb{C}, |\alpha| \leq [\gamma]$  tels que nous ayons la décomposition suivante :

$$v(\xi) - \Pi'_0(v) \frac{1}{2\pi\mu_0} \ln |\xi| - \sum_{|\alpha| \leq [\gamma]} \Pi_\alpha(v) \left( \frac{\xi}{|\xi|^2} \right)^\alpha \in W_{1+\gamma}^2(\mathbb{R}^2 \setminus \bar{\omega}).$$

Par ailleurs, ces coefficients dépendent continûment de  $B_\beta(v)$  i.e. il existe une constante  $c > 0$  indépendante de  $v$  telle que

$$|\Pi'_0(v)| + \sum_{|\alpha| \leq [\gamma]} |\Pi_\alpha(v)| + \|\tilde{v}\|_{W_{1+\gamma}^2(\mathbb{R}^2 \setminus \bar{\omega})} \leq c \|\text{div}(k\nabla v)\|_{W_{1-\gamma}^0(\mathbb{R}^2)} + c \|v\|_{W_{\beta-2}^0(\mathbb{R}^2)}.$$

Ce résultat nous fournit un développement asymptotique de  $v$  connaissant le comportement au voisinage de l'infini de  $\Delta v$ , et nous permettra d'étudier précisément les problèmes de champ proche que nous obtiendrons en appliquant la méthode des développements asymptotiques raccordés.

### 3.2.4 Commutateurs

Enfin, nous introduisons la notion de commutateur qui nous sera utile par la suite et notamment lorsque nous effectuerons l'analyse d'erreur après avoir construit les termes du développement asymptotique.

**DÉFINITION 3.2.18**

Soit un ouvert  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , et  $\eta \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ . Nous définissons le commutateur du Laplacien  $\Delta$  et de  $\eta$  comme l'opérateur défini par

$$[\Delta, \eta]v = \Delta(\eta v) - \eta\Delta(v), \quad \forall v \in \mathcal{C}^\infty(\Omega). \quad (3.2.16)$$

**REMARQUE 3.2.19**

- La formule (3.2.16) peut-être étendue par densité à un certain nombre d'espaces fonctionnels, et l'opérateur  $[\Delta, \eta]$  défini sur des espaces plus grands que  $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ .
- Il est également intéressant de noter que si  $\eta$  est une fonction de troncature (dans les calculs que nous effectuerons,  $\eta$  sera généralement égal à  $\chi$  ou à  $\psi$ ), alors pour toute fonction  $v \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ , la fonction  $[\Delta, \eta]v$  est à support compact, inclus dans  $\text{supp } \nabla \eta$ .

Fixons  $r > 0$  et définissons

$$\mathbb{Q}_r = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid r < |\mathbf{x}| < 2r\} \quad (3.2.17)$$

l'anneau délimité par les cercles de rayon  $r$  et  $2r$ . Si  $V \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$ , alors pour  $\varepsilon > 0$  nous noterons  $\tau_\varepsilon V$  la fonction définie par

$$(\tau_\varepsilon V)(\boldsymbol{\xi}) = V(\varepsilon \boldsymbol{\xi}).$$

Nous avons alors les estimations suivantes :

**LEMME 3.2.20**

Il existe une constante  $C > 0$  indépendante de  $\varepsilon$  telle que pour tout  $v, V \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$ , les estimations

$$\|[\Delta, \psi_\varepsilon]v\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq C \|v\|_{V_{-1}^1(\mathbb{Q}_\varepsilon)}$$

et

$$\|[\Delta, \chi]\tau_\varepsilon V\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq C \|V\|_{W_0^1(\mathbb{Q}_{1/\varepsilon})}$$

soient satisfaites.

DÉMONSTRATION : Soit  $v \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$ . Nous avons

$$\begin{aligned} [\Delta, \psi_\varepsilon]v &= \Delta(\psi_\varepsilon v) - \psi_\varepsilon \Delta v \\ &= v \Delta \psi_\varepsilon + 2 \nabla \psi_\varepsilon \cdot \nabla v. \end{aligned}$$

Notons que le support de  $\nabla \psi_\varepsilon$  et de  $\Delta \psi_\varepsilon$  est inclus dans  $\mathbb{Q}_\varepsilon$ , dû à la définition de  $\psi_\varepsilon$  (il s'agit d'une fonction radiale constante sur les domaines définis par  $|\mathbf{x}| \leq \varepsilon$  et  $|\mathbf{x}| \geq 2\varepsilon$ ). Il vient donc

$$\|[\Delta, \psi_\varepsilon]v\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 \leq 2 \int_{\mathbb{Q}_\varepsilon} (|\Delta \psi_\varepsilon(\mathbf{x})|^2 |v(\mathbf{x})|^2 + 4 |\nabla \psi_\varepsilon(\mathbf{x})|^2 |\nabla v(\mathbf{x})|^2) d\mathbf{x}.$$

Or  $\psi_\varepsilon(\mathbf{x}) = \psi(\mathbf{x}/\varepsilon)$ , et  $\psi$  ainsi que ses différentielles d'ordre 1 et 2 sont bornés en normes  $\|\cdot\|_\infty$  et ce indépendamment de  $\varepsilon$ . Ainsi,

$$\|[\Delta, \psi_\varepsilon]v\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 \leq 2 \int_{\mathbb{Q}_\varepsilon} \left( \frac{1}{\varepsilon^4} |\Delta \psi(\mathbf{x}/\varepsilon)|^2 |v(\mathbf{x})|^2 + \frac{4}{\varepsilon^2} |\nabla \psi(\mathbf{x}/\varepsilon)|^2 |\nabla v(\mathbf{x})|^2 \right) d\mathbf{x} \leq C \|v\|_{V_{-1}^1(\mathbb{Q}_\varepsilon)}^2,$$

où  $C$  est une constante indépendante de  $\varepsilon$ , d'après la définition de  $V_{-1}^1(\mathbb{Q}_\varepsilon)$ . La deuxième estimation s'obtient de manière similaire grâce au changement de variable  $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{x}/\varepsilon$ .

□

Énonçons un lemme qui nous sera également utile lorsque nous mènerons à bien l'analyse

d'erreur entre  $u_\varepsilon$  et son développement asymptotique raccordé. Il est à noter que le lemme suivant est valable pour tout exposant  $\alpha$  réel, ce qui est dû au fait que  $\mathbb{Q}_{1/\varepsilon}$  est une couronne.

Nous disposons du résultat suivant :

**LEMME 3.2.21**

Soient  $\varepsilon_0 > 0$ ,  $\varepsilon \in ]0, \varepsilon_0[$  et  $v \in W_0^1(\mathbb{Q}_{1/\varepsilon})$ . Alors pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}$ , il existe une constante  $C_\alpha > 0$  telle que

$$\|v\|_{W_0^1(\mathbb{Q}_{1/\varepsilon})} \leq C_\alpha \varepsilon^\alpha \|r^\alpha v\|_{W_0^1(\mathbb{Q}_{1/\varepsilon})}$$

DÉMONSTRATION : Rappelons que  $\mathbb{Q}_{1/\varepsilon} = \{\xi \in \mathbb{R}^2 / 1/\varepsilon < |\xi| < 2/\varepsilon\}$  (voir l'équation (3.2.17)). Nous avons par définition

$$\|v\|_{W_0^1(\mathbb{Q}_{1/\varepsilon})}^2 = \|\nabla v\|_{L^2(\mathbb{Q}_{1/\varepsilon})}^2 + \left\| \frac{v}{\sqrt{1+r^2}} \right\|_{L^2(\mathbb{Q}_{1/\varepsilon})}^2.$$

D'une part, on a

$$\left\| \frac{v}{\sqrt{1+r^2}} \right\|_{L^2(\mathbb{Q}_{1/\varepsilon})}^2 \leq \left\| \frac{r^\alpha v}{r^\alpha \sqrt{1+r^2}} \right\|_{L^2(\mathbb{Q}_{1/\varepsilon})}^2 \leq \varepsilon^{2\alpha} \left\| r^\alpha \frac{v}{\sqrt{1+r^2}} \right\|_{L^2(\mathbb{Q}_{1/\varepsilon})}^2,$$

par définition de l'anneau  $\mathbb{Q}_{1/\varepsilon}$ . Par ailleurs, nous avons la formule de dérivation suivante

$$\nabla(r^\alpha v) = r^\alpha \nabla v + \alpha r^{\alpha-1} \frac{\xi}{r} v, \quad \forall \xi \in \mathbb{Q}_{1/\varepsilon},$$

où nous avons noté  $r = |\xi|$ . Ainsi, on a

$$\|\nabla v\|_{L^2(\mathbb{Q}_{1/\varepsilon})} \leq \left\| \frac{1}{r^\alpha} \nabla(r^\alpha v) \right\|_{L^2(\mathbb{Q}_{1/\varepsilon})} + \alpha \left\| \frac{\xi}{r^2} v \right\|_{L^2(\mathbb{Q}_{1/\varepsilon})}.$$

Or nous avons d'une part que  $\|\xi v/r^2\|_{L^2(\mathbb{Q}_{1/\varepsilon})} = \|v/r\|_{L^2(\mathbb{Q}_{1/\varepsilon})}$ , et d'autre part que

$$\left\| \frac{1}{r^\alpha} \nabla(r^\alpha v) \right\|_{L^2(\mathbb{Q}_{1/\varepsilon})} \leq \varepsilon^\alpha \|\nabla(r^\alpha v)\|_{L^2(\mathbb{Q}_{1/\varepsilon})}$$

par définition de  $\mathbb{Q}_{1/\varepsilon}$ . Ainsi, nous avons établi que

$$\|\nabla v\|_{L^2(\mathbb{Q}_{1/\varepsilon})} \leq \varepsilon^\alpha \|\nabla(r^\alpha v)\|_{L^2(\mathbb{Q}_{1/\varepsilon})} + \alpha \left\| \frac{v}{r} \right\|_{L^2(\mathbb{Q}_{1/\varepsilon})}.$$

Pour conclure, il suffit de constater que

$$\left\| \frac{v}{r} \right\|_{L^2(\mathbb{Q}_{1/\varepsilon})}^2 = \left\| \frac{\sqrt{1+r^2}}{r} \frac{v}{\sqrt{1+r^2}} \right\|_{L^2(\mathbb{Q}_{1/\varepsilon})}^2.$$

Or dans l'anneau  $\mathbb{Q}_{1/\varepsilon}$ , on a  $|1+r^2|/r^2 = 1/r^2 + 1 \leq \varepsilon^2 + 1$ , de sorte que

$$\left\| \frac{v}{r} \right\|_{L^2(\mathbb{Q}_{1/\varepsilon})}^2 \leq (\varepsilon^2 + 1) \left\| \frac{v}{\sqrt{1+r^2}} \right\|_{L^2(\mathbb{Q}_{1/\varepsilon})}^2 \leq \varepsilon^{2\alpha} (\varepsilon^2 + 1) \left\| r^\alpha \frac{v}{\sqrt{1+r^2}} \right\|_{L^2(\mathbb{Q}_{1/\varepsilon})}^2.$$

Au bilan, nous avons montré que

$$\begin{aligned} \|v\|_{W_0^1(\mathbb{Q}_{1/\varepsilon})}^2 &\leq \varepsilon^{2\alpha} \left( \|\nabla(r^\alpha v)\|_{L^2(\mathbb{Q}_{1/\varepsilon})}^2 + (\alpha^2(\varepsilon^2 + 1) + 1) \left\| r^\alpha \frac{v}{\sqrt{1+r^2}} \right\|_{L^2(\mathbb{Q}_{1/\varepsilon})}^2 \right) \\ &\leq C_\alpha^2 \varepsilon^{2\alpha} \|r^\alpha v\|_{W_0^1(\mathbb{Q}(1/\varepsilon))}, \end{aligned}$$

où la constante  $C_\alpha$  peut-être définie par  $C_\alpha := \max(1, \alpha^2(\varepsilon_0^2 + 1) + 1)$ .

□

## 3.3 ÉNONCÉ DES RÉSULTATS PRINCIPAUX

Dans cette section, nous présentons les résultats principaux que nous fournira l'application de la méthode des développements asymptotiques raccordés au problème modèle (2.2.2). Précisément, nous effectuons un développement de la solution  $u_\varepsilon$  à l'ordre 2 en champ lointain et à l'ordre 3 en champ proche. Nous donnons la forme des termes du développement, puis nous présentons le résultat qui justifie l'application de cette méthode, à savoir que le champ composé des ansatz de champ lointain et de champ proche est une *bonne* approximation de  $u_\varepsilon$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

L'ordre 2 en  $\varepsilon$  est le premier ordre non nul au delà de l'ordre 0 dans le développement en champ lointain. Ainsi, en fournissant un développement à l'ordre 2 de  $u_\varepsilon$ , nous donnons en réalité un développement du champ diffracté par les petites inclusions au premier ordre non nul. La nouveauté principale de cette partie est l'écriture d'un tel développement et sa justification rigoureuse pour un problème d'acoustique transitoire.

Par soucis de lisibilité, nous présentons dans un premier temps les résultats de l'analyse asymptotique effectuée par la méthode des développements asymptotiques raccordés dans le cas d'une unique inclusion, c'est-à-dire dans le cas où  $N = 1$ . Dans un deuxième temps, nous énonçons le même type de résultat pour un nombre arbitraire d'inclusions  $N \in \mathbb{N}$ .

### 3.3.1 Cas d'une inclusion unique

Dans cette section nous présentons les résultats de l'analyse asymptotique pour le cas d'une inclusion unique  $\omega_\varepsilon = \omega_\varepsilon^1 \subset \mathbb{R}^2$ . Nous noterons également  $\mathbf{x}_1$  le centre de  $\omega_\varepsilon$  à mesure que  $\varepsilon \rightarrow 0$ , et nous supposons sans nuire à la généralité que  $\mathbf{x}_1 = 0 \in \mathbb{R}^2$ .

#### Définition des termes de champ lointain.

Définissons  $u_0 \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^+, L^2(\mathbb{R}^2)) \cap \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, H^2(\mathbb{R}^2))$  comme l'unique solution du problème

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_0 \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^+, L^2(\mathbb{R}^2)) \cap \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, H^2(\mathbb{R}^2)) \text{ tel que} \\ \rho_0 \partial_t^2 u_0 - \mu_0 \Delta u_0 = f(\mathbf{x}, t), & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, \quad t \in \mathbb{R}_+, \\ u_0(\mathbf{x}, 0) = \partial_t u_0(\mathbf{x}, 0) = 0, & \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2. \end{cases}$$

Remarquons que  $u_0$  est la solution du problème limite : c'est la solution du problème (2.2.2) quand  $\varepsilon = 0$ , c'est-à-dire quand il n'y a pas de défaut.

Posons également  $u_1(\mathbf{x}, t) := 0$  pour  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$  et  $t \geq 0$ , et définissons  $u_2$  comme

$$u_2(\mathbf{x}, t) = \mathcal{G}[a](\mathbf{x}, t) + \partial_{x_1} \mathcal{G}[b^1](\mathbf{x}, t) + \partial_{x_2} \mathcal{G}[b^2](\mathbf{x}, t)$$

où  $\mathcal{G}$  désigne la fonction de Green de l'équation des ondes (introduite au paragraphe 3.2.2) localisée en 0 et

$$\mathcal{G}[a](\mathbf{x}, t) := (\mathcal{G} \star_t a)(\mathbf{x}, t) = \int_{\mathbb{R}_+} \mathcal{G}(\mathbf{x}, t - \tau) a(\tau) d\tau$$

est la convolution en temps de  $\mathcal{G}$  par la fonction  $a$ , tandis  $a$  et  $b$  sont des fonctions de la variable temporelle définies par

$$a(t) := -\frac{\underline{\rho}}{\rho_0} \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2}(0, t), \quad b^j(t) = -2\pi c_0^2 \mathbf{e}_j^T \cdot \mathbf{Q} \cdot \nabla u_0(0, t), \quad j = 1, 2,$$

où  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$  est la base canonique de  $\mathbb{R}^2$ ,  $\underline{\rho}$  désigne le contraste du paramètre  $\rho$  intégré sur  $\omega$

$$\underline{\rho} = \int_{\omega} (\rho_1 - \rho_0(\boldsymbol{\xi})) d\boldsymbol{\xi} = (\rho_1 - \rho_0)|\omega|, \quad (3.3.1)$$

tandis que  $\mathbf{Q}$  désigne une matrice  $2 \times 2$  réelle symétrique, dépendant uniquement du couple  $(\mu_1, \mu_0)$  ainsi que de la géométrie de l'inclusion  $\omega$  (en fait  $\mathbf{Q}$  est le tenseur de polarisation d'ordre 1 associé à l'inclusion  $\omega$ , associé à la loi de comportement  $(\mu_1, \mu_0)$  [3, 51]).

Ainsi, en champ lointain, le terme d'ordre 0 est simplement le champ limite, c'est-à-dire le champ parcourant le milieu sans inclusion, le terme d'ordre 1 est nul, tandis que le terme d'ordre 2 est une combinaison de source monopolaire (correspondant au terme en  $\mathcal{G}$ ) couplée à la valeur en 0 de  $\partial_t^2 u_0$  et dipolaire (correspondant au terme en  $\nabla \mathcal{G}$ ) couplée à la valeur en 0 de  $\nabla u_0$ .

### Définition des termes de champ proche.

Nous décrivons ici les termes de champ proche. Nous notons  $\boldsymbol{\xi}$  la variable rapide, définie par

$$\boldsymbol{\xi} = \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_1}{\varepsilon} = \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}.$$

C'est en terme de cette variable que seront décrites les fonctions de champ proche. Nous notons  $\rho$  et  $\mu$  respectivement les versions mises à l'échelle de  $\rho_\varepsilon$  et  $\mu_\varepsilon$ , définies par

$$\mu(\boldsymbol{\xi}) = \begin{cases} \mu_0 & \text{si } \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^2 \setminus \omega, \\ \mu_1 & \text{si } \boldsymbol{\xi} \in \omega, \end{cases} \quad \rho(\boldsymbol{\xi}) = \begin{cases} \rho_0 & \text{si } \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^2 \setminus \omega, \\ \rho_1 & \text{si } \boldsymbol{\xi} \in \omega. \end{cases}$$

Nous définissons le terme d'ordre 0 du champ proche  $U_0$  comme

$$U_0(\boldsymbol{\xi}, t) := u_0(0, t).$$

Ainsi, à  $t \geq 0$  fixé,  $U_0(\cdot, t)$  est la fonction constante, égale à la valeur du champ limite  $u_0$  évalué en  $(0, t)$ .

Nous définissons  $U_1$  comme solution du problème au Laplacien généralisé

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } t \mapsto U_1(t) \in W_{-1-\gamma}^1(\mathbb{R}^2), \quad \gamma \in ]0, 1[ \quad \text{tel que} \\ -\operatorname{div}(\mu \nabla U_1) = 0, \quad \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^2, \\ U_1(\boldsymbol{\xi}, t) \underset{|\boldsymbol{\xi}| \rightarrow \infty}{\sim} \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla u_0(0, t). \end{array} \right. \quad (3.3.2)$$

Nous expliquerons lors de la section 3.4 les raisons pour lesquelles le problème ci-dessus est bien posé. Le terme de champ proche d'ordre 2,  $U_2$ , est également solution d'un problème au Laplacien généralisé :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } t \mapsto U_2(t) \in W_{-2-\gamma}^1(\mathbb{R}^2), \quad \gamma \in ]0, 1[ \quad \text{tel que} \\ -\operatorname{div}(\mu \nabla U_2) = -\rho \partial_t^2 U_0 \quad \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^2, \\ U_2(\boldsymbol{\xi}, t) \underset{|\boldsymbol{\xi}| \rightarrow \infty}{\sim} \sum_{|\alpha|=2} \frac{\boldsymbol{\xi}^\alpha}{\alpha!} \partial_{\mathbf{x}}^\alpha u_0(0, t). \end{array} \right. \quad (3.3.3)$$

Finalement, nous aurons besoin, en champ proche, de définir un terme d'ordre 3, afin d'assurer que l'approximation globale est d'ordre 3 en  $\varepsilon$ . Nous définissons  $U_3$  à nouveau comme solution d'un problème au Laplacien généralisé :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } t \mapsto U_3(t) \in W_{-3-\gamma}^1(\mathbb{R}^2), \quad \gamma \in ]0, 1[ \quad \text{tel que} \\ -\operatorname{div}(\mu \nabla U_3) = -\rho \partial_t^2 U_1 \quad \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^2, \quad t \in \mathbb{R}^+, \\ U_3(\boldsymbol{\xi}, t) \underset{|\boldsymbol{\xi}| \rightarrow \infty}{\sim} \sum_{|\alpha|=3} \frac{\boldsymbol{\xi}^\alpha}{\alpha!} \partial_{\mathbf{x}}^\alpha u_0(0, t). \end{array} \right. \quad (3.3.4)$$

Nous exposerons dans la section 3.4 les arguments qui montrent que les problèmes (3.3.2), (3.3.3), (3.3.4) sont bien posés. Notons également l'indice des espaces fonctionnels dans lesquels sont cherchés les termes de champ proche  $U_1$ ,  $U_2$ ,  $U_3$  : nous cherchons  $U_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  tel que  $U_i$  ait une croissance polynomiale de degré  $i$  à l'infini. Les espaces fonctionnels  $W_{-i-\gamma}^1$  admettant de telles fonctions en leur sein sont les espaces  $W_{-i-\gamma}^1$  avec  $\gamma > 0$ .

### Approximation en champ total.

Définissons les ansatz tronqués

$$u_\varepsilon^L(\mathbf{x}, t) := \sum_{k=0}^2 \varepsilon^k u_k(\mathbf{x}, t) \quad \text{et} \quad u_\varepsilon^P(\mathbf{x}, t) := \sum_{k=0}^3 \varepsilon^k U_k\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}, t\right).$$

L'exposant  $L$  désigne *lointain*, et accompagne l'ansatz de champ lointain, tandis que l'exposant  $P$  accompagne l'ansatz de champ proche.

Nous définissons le champ total approché de la manière suivante :

$$\tilde{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, t) := \psi_\varepsilon(\mathbf{x}) u_\varepsilon^L(\mathbf{x}, t) + \chi(\mathbf{x}) u_\varepsilon^P(\mathbf{x}, t) - \psi_\varepsilon(\mathbf{x}) \chi(\mathbf{x}) m_\varepsilon(\mathbf{x}, t). \quad (3.3.5)$$

La fonction  $m_\varepsilon$  désigne la somme de tous les termes intervenants dans le principe de raccord entre la zone de champ lointain et la zone de champ proche, donné par

$$m_\varepsilon(\mathbf{x}, t) := \sum_{|\alpha| \leq 3} \frac{\mathbf{x}^\alpha}{\alpha!} \partial_{\mathbf{x}}^\alpha u_0(0, t) + \varepsilon^2 \left[ \frac{\nabla u_0(0, t) \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^2} + \underline{\rho} \partial_t^2 u_0(0, t) \ln |\mathbf{x}| \right].$$

Nous avons alors le résultat suivant, qui justifie que l'ansatz de champ total (3.3.5) est une approximation d'ordre 3 de  $u_\varepsilon$ .

### THÉORÈME 3.3.1

Soit  $u_\varepsilon$  l'unique solution de (2.2.2), définissons  $\tilde{u}_\varepsilon$  par la formule (3.3.5). Pour tout temps  $T > 0$  et pour tout  $\eta > 0$ , il existe deux constantes  $C_\eta = C(T, \eta) > 0$  et  $\varepsilon_0 > 0$  telles que pour tout  $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0[$ , on ait l'estimation

$$\sup_{t \in [0, T]} [\|\partial_t u_\varepsilon - \partial_t \tilde{u}_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \|\nabla u_\varepsilon - \nabla \tilde{u}_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}] \leq C_\eta \varepsilon^{3-\eta}, \quad \forall \varepsilon \in [0, \varepsilon_0[.$$

Le résultat précédent nous donne un certain nombre d'informations explicites concernant  $u_\varepsilon$ . En effet, le champ lointain  $u_\varepsilon^L$  admet une interprétation physique : il est la somme du champ incident  $u_0$  et du terme d'ordre 2,  $\varepsilon^2 u_2$ , où  $u_2$  est une combinaison de sources monopolaire et dipolaire, couplées à  $u_0$  et dépendant des paramètres physiques du problème. Or le résultat 3.3.1 montre que dès que  $\chi(\mathbf{x}) = 0$ , le champ total  $u_\varepsilon$  est approché précisément (à  $\varepsilon^{3-\eta}$  près) par  $u_\varepsilon^L$ . La preuve de ce résultat est donné section 3.5.

### 3.3.2 Cas d'un nombre fini d'inclusions

Dans cette section, nous expliquons comment étendre les résultats de la section précédente à un nombre quelconque mais fixé  $N \in \mathbb{N}$  d'inclusions. En vertu des remarques effectuées en préambule de la section 3.3, comme nous limitons notre développement asymptotique au premier terme du champ diffracté, l'analyse asymptotique pour  $N$  inclusions fournit une superposition des résultats obtenus pour chaque inclusion considérée isolément des autres.

#### Définition des termes de champ lointain.

Définissons  $u_0 \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^+, L^2(\mathbb{R}^2)) \cap \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, H^2(\mathbb{R}^2))$  comme l'unique solution du problème

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_0 \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+, L^2(\mathbb{R}^2)) \cap \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, H^2(\mathbb{R}^2)) \text{ tel que} \\ \rho_0 \partial_t^2 u_0 - \mu_0 \Delta u_0 = f(\mathbf{x}, t) & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, \quad t \in \mathbb{R}_+, \\ u_0(\mathbf{x}, 0) = \partial_t u_0(\mathbf{x}, 0) = 0 & \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2. \end{cases}$$

A nouveau,  $u_0$  est la solution du problème limite : c'est la solution du problème (2.2.2) quand  $\varepsilon = 0$ , c'est-à-dire quand il n'y a pas de défaut.

Posons également  $u_1(\mathbf{x}, t) := 0$  pour  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$  et  $t \geq 0$ , et définissons  $u_2$  comme

$$u_2(\mathbf{x}, t) = \sum_{n=1}^N \mathcal{G}_n[a_n](\mathbf{x}, t) + \partial_{x_1} \mathcal{G}_n[b_n^1](\mathbf{x}, t) + \partial_{x_2} \mathcal{G}_n[b_n^2](\mathbf{x}, t)$$

avec, pour  $n \in \{1, \dots, N\}$  fixé,  $\mathcal{G}_n$  désignant la fonction de Green de l'équation des ondes (introduite au paragraphe 3.2.2) localisée en  $\mathbf{x}_n$ , et définie par

$$\mathcal{G}_n(\mathbf{x}, t) := \mathcal{G}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n, t)$$

et

$$\mathcal{G}_n[a](\mathbf{x}, t) := (\mathcal{G}_n \star_t a)(\mathbf{x}, t) = \int_{\mathbb{R}^+} \mathcal{G}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n, t - \tau) a(\tau) d\tau$$

est la convolution en temps de  $\mathcal{G}_n$  par la fonction  $a$ , tandis  $a_n$  et  $b_n$  sont des fonctions de la variable temporelle définies par

$$a_n(t) := -\frac{\rho_n}{\rho_0} \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2}(\mathbf{x}_n, t), \quad b_n^j(t) = -2\pi c_0^2 \mathbf{e}_j^T \cdot \mathbf{Q}_n \cdot \nabla u_0(\mathbf{x}_n, t), \quad j = 1, 2,$$

où  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$  est la base canonique de  $\mathbb{R}^2$ ,  $\underline{\rho}_n$  désigne le contraste du paramètre  $\rho$  intégré sur  $\omega^n$

$$\underline{\rho}_n = \int_{\omega^n} (\rho_n - \rho_0(\boldsymbol{\xi})) d\boldsymbol{\xi} = (\rho_n - \rho_0)|\omega^n|$$

tandis que  $\mathbf{Q}_n$  désigne une matrice  $2 \times 2$  réelle symétrique, dépendant uniquement du couple  $(\mu_n, \mu_0)$  ainsi que de la géométrie de l'inclusion  $\omega_n$  ( $\mathbf{Q}_n$  est le tenseur de polarisation d'ordre 1 associé à l'inclusion  $\omega^n$ , associé à la loi de comportement  $(\mu_n, \mu_0)$ ).

Ainsi, en champ lointain, le terme d'ordre 0 est simplement le champ limite, c'est-à-dire le champ parcourant le milieu sans inclusion, le terme d'ordre 1 est nul, tandis que le terme d'ordre 2 est une combinaison de source monopolaire (correspondant au terme en  $\mathcal{G}_n$ ) couplée à la valeur en  $\mathbf{x}_n$  de  $\partial_t^2 u_0$  et dipolaire (correspondant au terme en  $\nabla \mathcal{G}_n$ ) couplée à la valeur en  $\mathbf{x}_n$  de  $\nabla u_0$ .

### Définition des termes de champ proche.

Rappelons que nous avons une zone de champ proche par inclusion, et ainsi un ansatz de champ proche par inclusion. Nous fixons  $n \in \{1, \dots, N\}$ , et nous définissons ici l'ansatz associé à la  $n$ -ème inclusion. A chaque inclusion, et donc à chaque zone de champ proche, est associée une variable rapide

$$\boldsymbol{\xi}_n = \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_n}{\varepsilon}.$$

C'est en terme de cette variable que seront décrites les fonctions de champ proche. Nous notons  $\rho^n$  et  $\mu^n$  respectivement les versions mises à l'échelle de  $\rho_\varepsilon$  et  $\mu_\varepsilon$  autour de la  $n$ -ème inclusion, définies par

$$\mu^n(\boldsymbol{\xi}) = \begin{cases} \mu_0 & \text{si } \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^2 \setminus \omega^n, \\ \mu_n & \text{si } \boldsymbol{\xi} \in \omega^n, \end{cases} \quad \rho^n(\boldsymbol{\xi}) = \begin{cases} \rho_0 & \text{si } \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^2 \setminus \omega^n, \\ \rho_n & \text{si } \boldsymbol{\xi} \in \omega^n. \end{cases}$$

Nous définissons  $U_0^n$  comme

$$U_0^n(\boldsymbol{\xi}_n, t) := u_0(\mathbf{x}_n, t).$$

Ainsi, à  $t \geq 0$  fixé,  $U_0^n(\cdot, t)$  est la fonction constante, égale à la valeur du champ limite  $u_0$  évalué en  $(\mathbf{x}_n, t)$ .

Nous définissons  $U_1^n$  comme solution du problème au Laplacien généralisé suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } t \mapsto U_1^n(t) \in W_{-1-\gamma}^1(\mathbb{R}^2), \quad \gamma \in ]0, 1[ \quad \text{tel que} \\ -\operatorname{div}(\mu^n \nabla U_1^n) = 0, \quad \boldsymbol{\xi}_n \in \mathbb{R}^2, \\ U_1^n(\boldsymbol{\xi}_n, t) \underset{|\boldsymbol{\xi}_n| \rightarrow \infty}{\sim} \boldsymbol{\xi}_n \cdot \nabla u_0(\boldsymbol{x}_n, t). \end{array} \right.$$

Nous expliquerons dans la prochaine section les raisons pour lesquelles le problème ci-dessus est bien posé. Le terme d'ordre 2,  $U_2$  est défini comme solution du problème au Laplacien généralisé avec condition de croissance quadratique au voisinage de l'infini suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } t \mapsto U_2^n(t) \in W_{-2-\gamma}^1(\mathbb{R}^2), \quad \gamma \in ]0, 1[ \quad \text{tel que} \\ -\operatorname{div}(\mu^n \nabla U_2^n) = -\rho^n \partial_t^2 U_0^n \quad \boldsymbol{\xi}_n \in \mathbb{R}^2, \\ U_2^n(\boldsymbol{\xi}_n, t) \underset{|\boldsymbol{\xi}_n| \rightarrow \infty}{\sim} \sum_{|\alpha|=2} \frac{\boldsymbol{\xi}_n^\alpha}{\alpha!} \partial_{\boldsymbol{x}}^\alpha u(\boldsymbol{x}_n, t). \end{array} \right. \quad (3.3.6)$$

Finalement, nous aurons besoin, en champ proche, de définir un terme d'ordre 3, afin d'assurer que l'approximation globale est d'ordre 3 en  $\varepsilon$ . Nous définissons  $U_3^n$  comme solution du problème au Laplacien généralisé avec condition de croissance polynomiale de degré 3 à l'infini

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } t \mapsto U_3^n(t) \in W_{-3-\gamma}^1(\mathbb{R}^2), \quad \gamma \in ]0, 1[ \quad \text{tel que} \\ -\operatorname{div}(\mu^n \nabla U_3^n) = -\rho^n \partial_t^2 U_1^n \quad \boldsymbol{\xi}_n \in \mathbb{R}^2, \\ U_3^n(\boldsymbol{\xi}_n, t) \underset{|\boldsymbol{\xi}_n| \rightarrow \infty}{\sim} \sum_{|\alpha|=3} \frac{\boldsymbol{\xi}_n^\alpha}{\alpha!} \partial_{\boldsymbol{x}}^\alpha u_0(\boldsymbol{x}_n, t). \end{array} \right. \quad (3.3.7)$$

Nous exposerons dans la section 3.4 les arguments qui montrent que les problèmes (3.3.2), (3.3.6), (3.3.7) sont bien posés. Notons également l'indice des espaces fonctionnels dans lesquels sont cherchés les termes de champ proche  $U_1^n$ ,  $U_2^n$ ,  $U_3^n$  : nous cherchons  $U_i^n$ ,  $i = 1, 2, 3$  tel que  $U_i^n$  ait une croissance polynomiale de degré  $i$  à l'infini. Les espaces fonctionnels  $W_\beta^1$  admettant de telles fonctions en leur sein sont les espaces  $W_{-i-\gamma}^1$  avec  $\gamma > 0$ .

### Approximation en champ total.

Définissons les ansatz tronqués

$$u_\varepsilon^L(\boldsymbol{x}, t) := \sum_{k=0}^2 \varepsilon^k u_k(\boldsymbol{x}, t) \quad \text{et} \quad u_{n,\varepsilon}^P(\boldsymbol{x}, t) := \sum_{k=0}^3 \varepsilon^k U_k^n \left( \frac{\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_n}{\varepsilon}, t \right), \quad 1 \leq n \leq N.$$

A nouveau, l'exposant  $L$  signifie *lointain*, et accompagne l'ansatz de champ lointain, tandis que l'exposant  $P$  accompagne l'ansatz de champ proche.

Nous définissons le champ total approché de la manière suivante :

$$\tilde{u}_\varepsilon(\boldsymbol{x}, t) := \psi_\varepsilon(\boldsymbol{x}) u_\varepsilon^L(\boldsymbol{x}, t) + \sum_{n=1}^N \chi_n(\boldsymbol{x}) u_{n,\varepsilon}^P(\boldsymbol{x}, t) - \sum_{n=1}^N \psi_\varepsilon(\boldsymbol{x}) \chi_n(\boldsymbol{x}) m_{n,\varepsilon}(\boldsymbol{x}, t). \quad (3.3.8)$$

La fonction  $m_{n,\varepsilon}$  désigne la somme de tous les termes intervenants dans le principe de raccord entre la zone de champ lointain et la  $n$ -ème zone de champ proche, donné par

$$m_{n,\varepsilon}(\mathbf{x}, t) := \sum_{|\alpha| \leq 3} \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n)^\alpha}{\alpha!} \partial_{\mathbf{x}}^\alpha u_0(\mathbf{x}_n, t) + \varepsilon^2 \left[ \frac{\nabla u_0(\mathbf{x}_n, t) \cdot \mathbf{Q}_n \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_n)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_n|^2} + \underline{\rho}_n \partial_t^2 u_0(\mathbf{x}_n, t) \ln |\mathbf{x} - \mathbf{x}_n| \right].$$

Nous avons alors le résultat suivant, qui justifie que l'ansatz de champ total (3.3.8) est une approximation d'ordre 3 de  $u_\varepsilon$ .

**THÉORÈME 3.3.2**

*Soit  $u_\varepsilon$  l'unique solution de (2.2.2),  $\tilde{u}_\varepsilon$  défini par la formule (3.3.8). Pour tout temps  $T > 0$  et pour tout  $\eta > 0$ , il existe deux constantes  $C_\eta = C(T, \eta) > 0$  et  $\varepsilon_0 > 0$  telles que pour tout  $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0[$ , on ait l'estimation*

$$\sup_{t \in [0, T]} \|\partial_t u_\varepsilon - \partial_t \tilde{u}_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \|\nabla u_\varepsilon - \nabla \tilde{u}_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq C_\eta \varepsilon^{3-\eta}, \quad \forall \varepsilon \in [0, \varepsilon_0[.$$

L'objectif de la suite de ce chapitre est de prouver les théorèmes 3.3.2 et 3.3.1. Ceci se fait par un raisonnement de type analyse-synthèse : dans un premier temps, nous partons de l'hypothèse que la solution exacte  $u_\varepsilon$  du problème (2.2.2) s'approche par un ansatz du type (3.3.8), pour en déduire un certain nombre de propriétés nécessairement vérifiées par les termes intervenants dans les décompositions en champ proche et en champ lointain. En particulier, nous nous attacherons à formuler des problèmes aux dérivées partielles vérifiés par ces termes. Après avoir établi ces propriétés, nous raisonnons par synthèse. Ceci se fait en montrant que les équations aux dérivées partielles sus-citées sont bien posées, et en montrant que l'ansatz ainsi construit est une bonne approximation de  $u_\varepsilon$ , au sens du théorème 3.3.2.

## 3.4 APPLICATION DE LA MÉTHODE DES DÉVELOPPEMENTS ASYMPTOTIQUES RACCORDÉS

Nous appliquons ici la méthode des développements asymptotiques raccordés, de manière à construire un développement à l'ordre 2 de  $u_\varepsilon$  à l'ordre 2. Comme nous le verrons, il s'agit, quand la dimension d'espace  $d = 2$ , du premier ordre après l'ordre 0 correspondant à un terme non nul. Plus précisément, l'amplitude relative du champ diffracté par un obstacle de taille  $\varepsilon$  est proportionnelle à  $\varepsilon^2$  en deux dimensions (et à  $\varepsilon^3$  en trois dimensions). Par soucis de simplicité, nous présentons les calculs pour le cas d'une unique inclusion, puis nous exposerons comment se ramener au cas de  $N$  inclusions. Nous supposons que la seule inclusion est telle que  $\mathbf{x}_1 = 0 \in \mathbb{R}^2$ , et nous notons  $\omega = \omega^1$ , ainsi que  $\omega_\varepsilon = \omega_\varepsilon^1$ . Rappelons l'ansatz de champ lointain

$$u_\varepsilon(\mathbf{x}, t) = \sum_{p \in \mathbb{N}} \lambda_p(\varepsilon) u_p(\mathbf{x}, t), \tag{3.4.1}$$

ainsi que les équations vérifiées par les termes du développement en champ lointain

$$\begin{cases} \rho_0 \partial_t^2 u_0 - \mu_0 \Delta u_0 = f(\mathbf{x}, t), \\ u_0(\mathbf{x}, 0) = \partial_t u_0(\mathbf{x}, 0) = 0, & \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, \quad t \in \mathbb{R}^+, \\ \rho_0 \partial_t^2 u_k - \mu_0 \Delta u_k = 0, \\ u_k(\mathbf{x}, 0) = \partial_t u_k(\mathbf{x}, 0) = 0, & \forall k \geq 1, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, \quad t \in \mathbb{R}^+. \end{cases} \quad (3.4.2)$$

Nous introduisons la variable rapide associée  $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{x}/\varepsilon$  ainsi que la solution exprimée dans ces nouvelles coordonnées  $U_\varepsilon(\boldsymbol{\xi}, t) := u_\varepsilon(\varepsilon\boldsymbol{\xi}, t)$ . L'ansatz de champ proche associé à l'inclusion  $\omega_\varepsilon$  s'exprime alors sous la forme

$$u_\varepsilon(\mathbf{x}, t) = U_\varepsilon\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}, t\right) = \sum_{p \in \mathbb{N}} \mu_p(\varepsilon) U_p\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}, t\right). \quad (3.4.3)$$

Rappelons les équations aux dérivées partielles satisfaites par les termes du champ proche :

$$-\operatorname{div}(\mu \nabla U_k) = -\rho \partial_t^2 U_{k-2}, \quad \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^2, \quad t \in \mathbb{R}^+, \quad k \geq 2, \quad (3.4.4)$$

où  $U_{-2} = U_{-1} = 0$  et où les paramètres physiques  $\mu$  et  $\rho$  sont des versions normalisées de  $\mu_\varepsilon$  et  $\rho_\varepsilon$  respectivement, définies par

$$\mu(\boldsymbol{\xi}) = \begin{cases} \mu_0 & \text{si } \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^2 \setminus \omega, \\ \mu_1 & \text{si } \boldsymbol{\xi} \in \omega, \end{cases} \quad \rho(\boldsymbol{\xi}) = \begin{cases} \rho_0 & \text{si } \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^2 \setminus \omega, \\ \rho_1 & \text{si } \boldsymbol{\xi} \in \omega. \end{cases}$$

Fixons  $k$ , et supposons que  $U_{k-1}, U_{k-2}, \dots$  aient déjà été définis. Il n'y a *a priori* aucune raison pour que le support de  $\partial_t^2 U_{k-2}$  soit borné. Ainsi, pour donner un sens au système d'équation ci-dessus, il est nécessaire de considérer la possibilité pour  $U_k(\boldsymbol{\xi}, t)$  d'être non borné quand  $|\boldsymbol{\xi}| \rightarrow \infty$ . C'est pourquoi nous serons amenés à étudier les problèmes variationnels du type (3.4.4) dans les espaces de Sobolev à poids  $W_\beta^k(\mathbb{R}^2)$  introduits section 3.2.3.c.

De même, nous constatons d'après (3.4.2) que si les  $u_k$ ,  $k \geq 1$  sont supposés réguliers au voisinage de 0, alors comme les problèmes de propagation d'onde sont bien posés dans les espaces fonctionnels classiques, nécessairement nous aurons  $u_k = 0$ . Il est donc nécessaire d'envisager la possibilité pour  $u_k$  d'être singulier au voisinage de 0, et c'est la raison pour laquelle nous serons amenés à les rechercher dans les espaces de Sobolev à poids  $V_\beta^k(\mathbb{R}^2)$ , introduits sections 3.2.3.b.

### 3.4.1 Développement à l'ordre 0

Nous construisons ici les termes d'ordre 0 du développement asymptotique. En champ lointain, il est naturel de considérer que le terme d'ordre 0 du champ lointain  $u_0$  est solution du problème limite (2.2.2) quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ , c'est-à-dire du problème sans inclusion. Ainsi nous définissons  $u_0$  comme l'unique solution du problème d'évolution

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_0 \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^+, L^2(\mathbb{R}^2)) \cap \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, H^2(\mathbb{R}^2)) \text{ tel que} \\ \rho_0 \partial_t^2 u_0 - \mu_0 \Delta u_0 = f(\mathbf{x}, t), & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, \quad t \in \mathbb{R}^+, \\ u_0(\mathbf{x}, 0) = \partial_t u_0(\mathbf{x}, 0) = 0, & \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2. \end{cases} \quad (3.4.5)$$

Ce problème est bien posé, c'est encore une fois une conséquence classique du théorème de Hille-Yosida. Rappelons que par hypothèse,  $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^+, L^2(\mathbb{R}^2))$ . Ainsi, les résultats de régularité liés à l'équation des ondes montrent que  $u_0 \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^+, L^2(\mathbb{R}^2))$ . Observons que  $u_0 = u_{\text{inc}}$ , solution du problème (2.2.3).

Afin de construire le terme  $U_0$  de champ proche d'ordre 0, nous allons étudier le comportement de  $u_0(\mathbf{x}, t)$  quand  $\mathbf{x} \rightarrow 0$ , à l'aide des outils fournis par la théorie de Kondratiev.

### 3.4.1.a Développement radial du champ limite

Nous cherchons à appliquer la proposition 3.2.14 à  $u_0$  afin de tirer des informations sur son comportement quand  $\mathbf{x} \rightarrow 0$ , à  $t \geq 0$  fixé. La principale particularité est que nous adressons un problème d'évolution, bien que nous puissions considérer l'équation des ondes satisfaite par  $u_0$  comme une équation de Laplace paramétrée par la variable temporelle  $t$ .

Rappelons que  $\chi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$  une fonction de troncature  $\mathcal{C}^\infty$ , telle que  $\chi(\mathbf{x}) = 1$  pour  $|\mathbf{x}| \leq 1$ , et  $\chi(\mathbf{x}) = 0$  pour  $|\mathbf{x}| \geq 2$ .

Notons,  $D$  le disque unité et introduisons, pour  $t \geq 0$ ,

$$g(t) := \mathbf{x} \mapsto \chi(\mathbf{x})f(\mathbf{x}, t) - \mu_0[\Delta, \chi]u_0(\mathbf{x}, t) - \chi(\mathbf{x})\rho_0\partial_t^2 u_0(\mathbf{x}, t).$$

Étant donné que  $u_0$  est solution de l'équation des ondes (3.4.5), nous en déduisons que pour tout  $t \geq 0$ ,

$$-\mu_0\Delta(\chi u_0(t)) = g(t), \quad \forall \mathbf{x} \in D. \quad (3.4.6)$$

Rappelons que  $u_0 \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^+, L^2(\mathbb{R}^2))$  et qu'à  $t \geq 0$  fixé,  $u_0(t) \in D(\Delta)$ , de sorte que  $\Delta u_0(t) \in L^2(\mathbb{R}^2)$ . Or il est clair que  $L^2(D) \subset V_{1-\gamma}^0(D)$  tout  $\gamma \in [0, 1]$ . Ainsi, le caractère  $\mathcal{C}^\infty$  de  $\chi$  et la régularité de  $f$  montrent que

$$g(t) \in L^2(D) \subset V_{1-\gamma}^0(D), \quad \forall t \geq 0.$$

Par ailleurs,  $H_0^2(D) \subset V_\beta^2(D) \cap \mathring{V}_{\beta-1}^1(D)$  pour tout  $\beta \in (1, 2)$ . Ainsi nous pouvons appliquer la proposition 3.2.14, et en déduire qu'il existe une constante  $C > 0$  telle que  $\forall t \in \mathbb{R}^+, \forall \epsilon \in ]0, 1[$ ,  $u_0(\mathbf{x}, t) - u_0(0, t) \in V_\epsilon^2(D)$  avec

$$|u_0(0, t)| + \|u_0(t) - \pi_0(u_0(t))\|_{V_\epsilon^2(D)} \leq C (\|f(t)\|_{L^2(D)} + \|\partial_t^2 u_0(t)\|_{L^2(D)} + \|u_0(t)\|_{H^1(D)}). \quad (3.4.7)$$

Soulignons que dans le cas présent, nous avons  $\pi_0(u_0(t)) = u_0(0, t)$ . De plus, nous avons  $\pi_0'(u_0(t)) = 0$  puisque  $\ln |\mathbf{x}| \notin H^1(D)$ . Bien sur, nous n'avons ici obtenu rien d'autre qu'un développement à l'ordre 0 de  $u_0$  mais nous avons également établi l'estimation (3.4.7) qui vaut **uniformément** sur tout intervalle borné en temps.

Dérivons maintenant deux fois (3.4.6) par rapport au temps et appliquons la proposition 3.2.14. Nous obtenons que  $t \mapsto u_0(0, t) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^+)$  et

$$\partial_t^2 u_0(\cdot, t) - \partial_t^2 u_0(0, t) \in V_\epsilon^2(D), \quad \forall t \in \mathbb{R}^+, \quad \forall \epsilon > 0.$$

En tant que fonction constante en espace, il est clair que  $u_0(0, \cdot) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^+, V_{-1+\epsilon}^0(D))$  pour tout  $\epsilon > 0$ . Ainsi,  $\partial_t^2 u_0 \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^+, V_{-1+\epsilon}^0(D))$  pour tout  $\epsilon > 0$ .

**REMARQUE 3.4.1**

Pour  $\epsilon > 0$ , l'espace  $V_{-1+\epsilon}^0(D)$  est optimal pour l'inclusion des constantes, au sens où si  $v$  est une fonction constante non nulle sur  $D$ , et si  $\beta \in \mathbb{R}$ , alors

$$v \in V_{\beta}^0(D) \Leftrightarrow \beta > -1.$$

Par ailleurs, l'équation (3.4.6) couplée au fait qu'il existe un voisinage de  $\mathcal{V}$  de 0 tel que  $\text{supp } f \cap \mathcal{V} = \emptyset$  (en vertu de l'hypothèse 3.1.2) montre que  $g(t) \in V_{-1+\epsilon}^0(D)$  pour tout  $t \in \mathbb{R}^+$ , et tout  $\epsilon > 0$ . Ainsi, nous pouvons appliquer la proposition 3.2.14 une fois de plus (c'est-à-dire avec  $\gamma \in [1, 2]$ ) pour obtenir  $u_0(\mathbf{x}, t) - u_0(0, t) - \mathbf{x} \cdot \nabla u_0(0, t) \in V_{-1+\epsilon}^2(D)$  ainsi qu'une estimation similaire à (3.4.7). En appliquant encore une fois cette chaîne d'arguments, nous arrivons à la conclusion suivante

**PROPOSITION 3.4.2**

L'unique solution  $u_0$  du problème (3.4.5) satisfait

$$u_0(\cdot, t) - \sum_{|\alpha| \leq 2} \partial_{\mathbf{x}}^{\alpha} u_0(0, t) \frac{\mathbf{x}^{\alpha}}{\alpha!} \in V_{-2+\epsilon}^2(D)$$

pour tout  $t \geq 0$ . De plus, pour tout  $k \geq 0$  et tout  $T > 0$ , nous avons l'estimation

$$\sup_{t \in [0, T]} \sum_{|\alpha| \leq 2} |\partial_t^k \partial_{\mathbf{x}}^{\alpha} u_0(0, t)| + \sup_{t \in [0, T]} \left\| \partial_t^k u_0(\cdot, t) - \sum_{|\alpha| \leq 2} \frac{\mathbf{x}^{\alpha}}{\alpha!} \partial_t^k \partial_{\mathbf{x}}^{\alpha} u_0(0, t) \right\|_{V_{-2+\epsilon}^2(D)} < +\infty.$$

Le résultat ci-dessus a une conséquence algébrique qui nous sera utile par la suite. Soit  $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^2$  un voisinage de 0 tel que

$$\text{supp}(f(t)) \cap \mathcal{V} = \emptyset, \quad \forall t \geq 0$$

Un tel voisinage existe nécessairement en vertu de l'hypothèse 3.1.2. Notons à présent

$$v_0(\mathbf{x}, t) := u_0(\mathbf{x}, t) - \sum_{|\alpha| \leq 2} \frac{\mathbf{x}^{\alpha}}{\alpha!} \partial_{\mathbf{x}}^{\alpha} u_0(0, t).$$

D'après ce qui précède, pour tout  $t \in \mathbb{R}^+$ , nous avons

$$\rho_0 \partial_t^2 v_0 - \mu_0 \Delta v_0 \in V_{-2+\epsilon}^0(\mathcal{V}).$$

Il vient également que

$$\partial_t^2 \sum_{|\alpha|=1}^2 \frac{\mathbf{x}^{\alpha}}{\alpha!} \partial_{\mathbf{x}}^{\alpha} u_0(0, t) \in V_{-2+\epsilon}^0(\mathcal{V}).$$

De ceci, et comme  $\rho_0 \partial_t^2 u_0 - \mu_0 \Delta u_0 = 0$  dans  $\mathcal{V}$ , nous déduisons que

$$\rho_0 \partial_t^2 u_0(0, t) - \mu_0 \Delta \sum_{|\alpha|=2} \frac{\mathbf{x}^{\alpha}}{\alpha!} \partial_{\mathbf{x}}^{\alpha} u_0(0, t) \in V_{-2+\epsilon}^0(\mathcal{V}) \quad (3.4.8)$$

Mais puisque les fonctions  $\mathbf{x} \mapsto \partial_t^2 u_0(0, t)$  et  $\mathbf{x} \mapsto \Delta(\mathbf{x}^\alpha)$  pour  $|\alpha| = 2$  ont des comportements constants quand  $\mathbf{x} \rightarrow 0$ , et puisque les constantes ne sont pas admises au sein de l'espace  $V_{-2+\epsilon}^0(\mathcal{V})$ , l'équation (3.4.8) ci-dessus est satisfaite si et seulement si

$$\rho_0 \partial_t^2 u_0(0, t) - \mu_0 \Delta \sum_{|\alpha|=2} \frac{\mathbf{x}^\alpha}{\alpha!} \partial_{\mathbf{x}}^\alpha u_0(0, t) = 0.$$

Pour des raisons techniques qui apparaîtront lorsque nous effectuerons l'analyse d'erreur, et bien que nous ne soyons intéressés que par un développement à l'ordre 2 de  $u_\epsilon$ , nous devons prendre en compte les dérivées spatiales d'ordre 3 de  $u_0$ . En utilisant les memes arguments que précédemment, nous montrons que

**PROPOSITION 3.4.3**

*Sous les mêmes hypothèses que dans la proposition 3.4.2,  $u_0$  admet le développement*

$$u_0(\cdot, t) - \sum_{|\alpha| \leq 3} \frac{\mathbf{x}^\alpha}{\alpha!} \partial_{\mathbf{x}}^\alpha u_0(0, t) \in V_{-3+\epsilon}^2(\mathbb{D})$$

*pour tout  $t \geq 0$ . De plus, pour tout  $k \geq 0$  et tout  $T > 0$ , nous avons*

$$\sup_{t \in [0, T]} \sum_{|\alpha| \leq 3} |\partial_t^k \partial_{\mathbf{x}}^\alpha u_0(0, t)| + \sup_{t \in [0, T]} \left\| \partial_t^k u_0(\cdot, t) - \sum_{|\alpha| \leq 3} \frac{\mathbf{x}^\alpha}{\alpha!} \partial_t^k \partial_{\mathbf{x}}^\alpha u_0(0, t) \right\|_{V_{-3+\epsilon}^2(\mathbb{D})} < +\infty.$$

**3.4.1.b Le terme de champ proche**

Décrivons maintenant le terme d'ordre 0 du champ proche  $U_0(\boldsymbol{\xi}, t)$ , où  $\boldsymbol{\xi}$  est la variable rapide. D'après (3.4.4),  $U_0$  satisfait

$$-\operatorname{div}(\mu \nabla U_0) = 0, \quad \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^2, \quad \forall t \geq 0.$$

De plus, le principe de raccord indique que le comportement de  $U_0(\boldsymbol{\xi}, t)$  quand  $|\boldsymbol{\xi}| \rightarrow \infty$  doit coïncider au premier ordre avec le comportement de  $u_0(\mathbf{x}, t)$  quand  $|\mathbf{x}| \rightarrow 0$ . Ainsi, il est naturel d'imposer

$$\lim_{|\boldsymbol{\xi}| \rightarrow \infty} U_0(\boldsymbol{\xi}, t) = u_0(0, t)$$

et de finalement définir  $U_0$  comme

$$U_0(\boldsymbol{\xi}, t) := u_0(0, t) \quad \forall \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^2, \quad \forall t \in \mathbb{R}^+.$$

Remarquons que d'après les résultats établis précédemment, il vient

$$U_0 \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^+, L_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^2)).$$

### 3.4.2 Développement à l'ordre 1

Dans cette section, nous allons définir les termes  $u_1$ ,  $U_1$  intervenant dans les développements en champs proche et lointain (3.4.1)-(3.4.3). La construction de ces termes est pour le moment formelle. La justification du fait que  $u_1$ ,  $U_1$  sont bien les termes d'ordre 1 dans l'asymptotique de  $u_\varepsilon$  sera donnée lors de l'analyse d'erreur (ce qui constituera la synthèse de notre raisonnement).

Dans un premier temps, examinons les conséquences qu'a le principe de raccord sur  $u_1$  et  $U_1$ . Les deux premiers termes du développement radial de  $u_0(\mathbf{x}, t) + \varepsilon u_1(\mathbf{x}, t)$  quand  $|\mathbf{x}| \rightarrow 0$  doit coïncider avec le développement radial de  $U_0(\mathbf{x}/\varepsilon, t) + \varepsilon U_1(\mathbf{x}/\varepsilon, t)$  quand  $\mathbf{x}/\varepsilon \rightarrow \infty$ . Ainsi, nous sommes amenés à comparer les développements

$$\begin{aligned} u_0(\mathbf{x}, t) + \varepsilon u_1(\mathbf{x}, t) &\underset{|\mathbf{x}| \rightarrow 0}{\sim} u_0(0, t) + \mathbf{x} \cdot \nabla u_0(0, t) + \varepsilon u_1(\mathbf{x}, t) + \dots \\ U_0\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}, t\right) + \varepsilon U_1\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}, t\right) &\underset{\frac{|\mathbf{x}|}{\varepsilon} \rightarrow \infty}{\sim} u_0(0, t) + \varepsilon U_1\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}, t\right) + \dots \end{aligned}$$

Nous constatons qu'afin que les deux développements coïncident aux ordres 0 et 1 en tant que polynôme des variables  $\mathbf{x}$  et  $\varepsilon$ , il est suffisant d'annuler le terme de champ lointain

$$u_1 = 0$$

(ce qui est compatible avec le fait que  $u_1$  soit solution d'une équation des ondes homogènes), et d'imposer

$$U_1(\boldsymbol{\xi}, t) \sim \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla u_0(0, t)$$

quand  $|\boldsymbol{\xi}| \rightarrow \infty$ . Prenant en compte (3.4.4), ceci nous mène au système suivant pour  $U_1(t)$  :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\mu \nabla U_1(t)) = 0, & \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^2, \\ U_1(\boldsymbol{\xi}, t) \underset{|\boldsymbol{\xi}| \rightarrow \infty}{\sim} \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla u_0(0, t). \end{cases} \quad (3.4.9)$$

Ce problème au Laplacien généralisé est non standard car, à  $t \geq 0$  fixé, l'inconnue  $U_1(t)$  admet un comportement linéairement croissant au voisinage de l'infini. Ainsi le cadre fonctionnel usuel des espaces de Sobolev n'est pas adapté à l'étude du problème (3.4.9). C'est dans ce contexte que nous faisons usage des espaces de Sobolev à poids, introduits section 3.2.3.c. Nous présentons à présent une construction précise de  $U_1$ . Définissons

$$\mathbf{g}(\boldsymbol{\xi}) := \mu_0 \Delta(\psi(\boldsymbol{\xi}) \boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{\xi} \mu_0 \Delta \psi(\boldsymbol{\xi}) + 2\mu_0 \nabla \psi(\boldsymbol{\xi}),$$

et notons  $(g_1, g_2)$  les coordonnées de  $\mathbf{g}$  dans la base canonique  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$  de  $\mathbb{R}^2$ , de sorte que  $\mathbf{g}(\boldsymbol{\xi}) = g_1(\boldsymbol{\xi})\mathbf{e}_1 + g_2(\boldsymbol{\xi})\mathbf{e}_2$ .

Observons que, étant donné que  $\psi$  est une fonction de troncature,  $\mathbf{g}$  une fonction  $\mathcal{C}^\infty$  à support compact, et qu'une application de la formule de Green montre que pour  $j = 1, 2$ , nous avons

$$\int_{\mathbb{R}^2} g_j(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} = 0.$$

En effet, soit  $R > 0$  et notons  $D_R$  le disque de rayon  $R$  centré en 0. Alors

$$\begin{aligned} \int_{D_R} g_j(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} &= \mu_0 \int_{D_R} \Delta(\psi(\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{\xi}_j) d\boldsymbol{\xi} = -\mu_0 \int_{D_R} \Delta(\chi(\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{\xi}_j) d\boldsymbol{\xi} \\ &= \int_{\partial D_R} \nabla(\chi(\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{\xi}_j) \cdot \mathbf{n} d\boldsymbol{\xi}, \end{aligned}$$

où  $\mathbf{n}$  désigne le vecteur unitaire normal sortant à la frontière  $\partial D_R$  de  $D_R$ . Comme  $\chi(\boldsymbol{\xi})$  est nulle pour  $|\boldsymbol{\xi}|$  suffisamment grand, en faisant tendre  $R \rightarrow \infty$ , nous obtenons que

$$\int_{\mathbb{R}^2} g_j(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} = 0.$$

Suivant les arguments présentés au début de cette section, et plus particulièrement le comportement prescrit pour  $U_1$  au voisinage de l'infini, nous posons

$$U_1(\boldsymbol{\xi}, t) := \nabla u_0(0, t) \cdot (\psi(\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{\xi} + \mathbf{V}_1(\boldsymbol{\xi})).$$

Nous sommes ainsi ramenés à chercher  $\mathbf{V}_1(\boldsymbol{\xi}) = V_{1,1}(\boldsymbol{\xi})\mathbf{e}_1 + V_{1,2}(\boldsymbol{\xi})\mathbf{e}_2$  dont les composantes sont solutions du problème

$$\begin{cases} \text{Trouver } V_{1,j} \in D(\Delta_\mu) \text{ tels que} \\ -\operatorname{div}(\mu \nabla V_{1,j}) = g_j \text{ dans } \mathbb{R}^2, \\ \Pi_0(V_{1,j}) = 0, \end{cases}$$

pour  $j = 1, 2$ . Le problème précédent est bien posé en vertu de la proposition 3.2.16, l'existence des  $V_{1,j}$  étant assurée par la surjectivité de l'opérateur  $-\operatorname{div}(\mu \nabla)$  tandis que l'unicité est garantie par la contrainte  $\Pi_0(V_{1,j}) = 0$ , le noyau de  $-\operatorname{div}(\mu \nabla)$  étant de dimension 1.

D'après la proposition 3.2.17, nous avons

$$V_{1,j}(\boldsymbol{\xi}) - \Pi'_0(V_{1,j})(2\pi\mu_0)^{-1} \ln |\boldsymbol{\xi}| \in W_{2-\epsilon}^2(\mathbb{R}^2)$$

pour tout  $\epsilon \in ]0, 1[$ .

En fait,  $\Pi'_0(V_{1,j}) = 0$  pour  $j = 1, 2$  puisque d'après la formule de Green, nous avons

$$\begin{aligned} \Pi'_0(V_{1,j}) &= \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\partial D_r} \mu_0 \partial_r V_{1,j} d\sigma \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} g_j(\boldsymbol{\xi}, t) d\boldsymbol{\xi} \\ &= 0, \end{aligned}$$

où  $r = |\boldsymbol{\xi}|$  et  $D_r$  fait référence au disque de centre 0 et de rayon  $r$ . Ainsi  $V_1$  peut-être définie comme l'unique solution du problème

$$\begin{cases} \text{Trouver } \mathbf{V}_1 \in W_\gamma^1(\mathbb{R}^2)^2, \quad \gamma \in ]0, 1[, \quad \text{tel que} \\ -\operatorname{div}(\mu \nabla \mathbf{V}_1) = \mu_0 \Delta(\psi(\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{\xi}), \quad \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^2, \quad t \in \mathbb{R}^+. \end{cases} \quad (3.4.10)$$

D'après la définition précédente, il apparaît clairement que  $U_1$  hérite de la régularité en temps de  $\nabla u_0(0, t)$ ; précisément, d'après la proposition 3.4.2,  $U_1$  est au moins de classe  $\mathcal{C}^2$  par rapport au temps. Soulignons que d'après la proposition 3.2.17 appliquée à  $\mathbf{V}_1(\boldsymbol{\xi})$ , nous constatons qu'il existe une matrice  $\mathbf{Q}$  de taille  $2 \times 2$  tel que

$$\mathbf{V}_1(\boldsymbol{\xi}) - \mathbf{Q} \cdot \frac{\boldsymbol{\xi}}{|\boldsymbol{\xi}|^2} \in W_{1+\gamma}^1(\mathbb{R}^2)^2 \quad \forall \gamma \in ]0, 1[. \quad (3.4.11)$$

Ceci fournit dans le même temps le second terme du développement asymptotique de  $U_1(\boldsymbol{\xi}, t)$  quand  $|\boldsymbol{\xi}| \rightarrow \infty$ . Le résultat suivant est tiré de [71].

**LEMME 3.4.4**

*La matrice  $\mathbf{Q}$  définie par l'équation (3.4.11) est réelle symétrique.*

La matrice  $\mathbf{Q}$  est en réalité le tenseur de polarisation généralisé d'ordre 1 [51, 3] associé à  $\omega$  et à l'opérateur  $\operatorname{div}(\mu \nabla)$ . Il s'agit d'une quantité de grand intérêt dans le contexte des problèmes inverses et des techniques d'imagerie, dont l'étude est un thème de recherche très actuel. Un moyen de calculer ce tenseur s'appuie sur le calcul numérique de la solution d'une formulation intégrale de l'équation (3.4.10), comme présenté dans [25].

### 3.4.3 Développement à l'ordre 2

Dans la section précédente, nous avons vu que le terme d'ordre 1 dans le développement en champ lointain de  $u_\varepsilon$  est nul. Nous devons pousser le développement à un ordre supplémentaire pour voir apparaître l'influence de la petite inclusion dans le comportement en champ lointain. Appliquons le principe de raccord à l'ordre 2. Pour le champ lointain, poussant le développement de Taylor de  $u_0$  à l'ordre 2, et prenant en compte le fait que  $u_1 = 0$ , il vient

$$u_0(\mathbf{x}, t) + \varepsilon u_1(\mathbf{x}, t) + \varepsilon^2 u_2(\mathbf{x}, t) \underset{|\mathbf{x}| \rightarrow 0}{\sim} u_0(0, t) + \mathbf{x} \cdot \nabla u_0(0, t) + \sum_{|\alpha|=2} \frac{\mathbf{x}^\alpha}{\alpha!} \partial_{\mathbf{x}}^\alpha u_0(0, t) + \varepsilon^2 u_2(\mathbf{x}, t) + \dots \quad (3.4.12)$$

D'après le principe de raccord, le développement ci-dessus doit coïncider avec les premiers termes du développement du champ proche quand  $|\boldsymbol{\xi}| = |\mathbf{x}|/\varepsilon \rightarrow \infty$ . Prenant en compte les résultats des sections précédentes, et en particulier (3.4.11), ce développement s'écrit

$$U_0\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}, t\right) + \varepsilon U_1\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}, t\right) + \varepsilon^2 U_2\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}, t\right) \underset{\frac{|\mathbf{x}|}{\varepsilon} \rightarrow \infty}{\sim} u_0(0, t) + \mathbf{x} \cdot \nabla u_0(0, t) + \varepsilon^2 \nabla u_0(0, t)^T \mathbf{Q} \cdot \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^2} + \varepsilon^2 U_2\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}, t\right) + \dots$$

#### 3.4.3.a Construction du terme de champ proche

Nous commençons par construire  $U_2$  de telle sorte qu'il compense les termes d'ordre 2 intervenant dans le développement de Taylor de  $u_0$  intervenant dans (3.4.12). Ainsi, et

d'après (3.4.4),  $U_2$  doit satisfaire le système d'équations

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\mu \nabla U_2) = -\rho \partial_t^2 U_0 & \text{dans } \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+, \\ U_2(\boldsymbol{\xi}, t) \underset{|\boldsymbol{\xi}| \rightarrow \infty}{\sim} \sum_{|\alpha|=2} \frac{\boldsymbol{\xi}^\alpha}{\alpha!} \partial_{\mathbf{x}}^\alpha u_0(0, t). \end{cases}$$

Le comportement à l'infini que nous prescrivons pour  $U_2$  est en adéquation avec le membre de droite de l'équation volumique. En effet, nous avons par définition  $U_0(\boldsymbol{\xi}, t) := u_0(0, t)$  ainsi

$$\rho \partial_t^2 U_0 = \rho_0 \partial_t^2 u_0(0, t), \quad \forall t \geq 0.$$

pour  $|\boldsymbol{\xi}|$  suffisamment grand pour assurer que  $\rho(\boldsymbol{\xi}) = \rho_0$ . De plus, puisque  $u_0$  satisfait une équation homogène au voisinage de 0, nous avons

$$\mu_0 \Delta \sum_{|\alpha|=2} \frac{\boldsymbol{\xi}^\alpha}{\alpha!} \partial_{\mathbf{x}}^\alpha u_0(0, t) = \mu_0 (\Delta u_0)(0, t) = \rho_0 \partial_t^2 u_0(0, t).$$

Rappelons la définition du commutateur  $[\Delta, \psi]v := \Delta(\psi(\boldsymbol{\xi})v(\boldsymbol{\xi})) - \psi(\boldsymbol{\xi})\Delta v(\boldsymbol{\xi})$  et notons

$$g_2(\boldsymbol{\xi}) := \sum_{|\alpha|=2} \frac{\boldsymbol{\xi}^\alpha}{\alpha!} \partial_{\mathbf{x}}^\alpha u_0(0, t).$$

L'identité ci-dessus implique que

$$\operatorname{div}(\mu \nabla \psi(\boldsymbol{\xi})g_2(\boldsymbol{\xi})) = \psi(\boldsymbol{\xi})\rho_0 \partial_t^2 u_0(0, t) + [\Delta_\mu, \psi]g_2(\boldsymbol{\xi}),$$

pour  $|\boldsymbol{\xi}|$  suffisamment grand. Prenant en compte l'ensemble de ces considérations, nous cherchons le terme de champ proche sous la forme

$$\begin{cases} U_2(\boldsymbol{\xi}, t) := \psi(\boldsymbol{\xi}) \sum_{|\alpha|=2} \frac{\boldsymbol{\xi}^\alpha}{\alpha!} \partial_{\mathbf{x}}^\alpha u_0(0, t) + V_2(\boldsymbol{\xi}, t) \\ \text{où } V_2 \in W_{-\gamma}^1(\mathbb{R}^2), \gamma \in ]0, 1[ \text{ tel que} \\ -\operatorname{div}(\mu \nabla V_2) = -\chi(\boldsymbol{\xi})\rho(\boldsymbol{\xi})\partial_t^2 u_0(0, t) + \mu_0 [\Delta, \psi] \sum_{|\alpha|=2} \partial_{\mathbf{x}}^\alpha u_0(0, t) \frac{\boldsymbol{\xi}^\alpha}{\alpha!}. \end{cases} \quad (3.4.13)$$

Notons que la fonction  $V_2$  dépend de l'espace et du temps, au contraire de  $V_1$ . Explicitons la construction de  $V_2$ .

D'après la proposition 3.2.16, les équations ci-dessus définissent  $V_2(\boldsymbol{\xi}, t)$  à une constante additive notée  $\Pi_0(V_2)$  près. Nous fixerons cette constante ultérieurement, de façon à satisfaire complètement le principe de raccord. Pour le moment, discutons des autres termes du développement radial de  $V_2(\boldsymbol{\xi}, t)$  quand  $|\boldsymbol{\xi}| \rightarrow \infty$ . Puisque  $V_2 \in W_{-\gamma}^1(\mathbb{R}^2)$ , la proposition 3.2.17 montre que

$$V_2(\boldsymbol{\xi}, t) - \Pi_0'(V_2(\cdot, t))(2\pi\mu_0)^{-1} \ln |\boldsymbol{\xi}| - \Pi_0(V_2(\cdot, t)) \in W_\gamma^1(\mathbb{R}^2) \quad (3.4.14)$$

pour tout  $\gamma \in ]0, 1[$ .

Calculons  $\Pi'_0(V_2(\cdot, t))$ . Observons que, pour  $r > 0$  suffisamment grand, le terme de droite intervenant dans l'équation (3.4.13) définissant  $V_2(\cdot, t)$  s'annule quand  $|\boldsymbol{\xi}| > r$ . De plus, puisque  $\chi + \psi = 1$ , nous avons  $[\Delta, \psi] = -[\Delta, \chi]$ , ainsi

$$\begin{aligned} \Pi'_0(V_2) &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\partial D_R} \mu \partial_r V_2 d\sigma = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{D_R} \operatorname{div}(\mu \nabla V_2) d\boldsymbol{\xi} \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{D_R} \chi(\boldsymbol{\xi}) \rho(\boldsymbol{\xi}) \partial_t^2 u_0(0, t) d\boldsymbol{\xi} - \int_{D_R} \chi(\boldsymbol{\xi}) \Delta \left( \sum_{|\alpha|=2} \frac{\boldsymbol{\xi}^\alpha}{\alpha!} \partial_{\mathbf{x}}^\alpha u_0(0, t) \right) d\boldsymbol{\xi} \\ &\quad + \int_{D_R} \Delta \left( \chi(\boldsymbol{\xi}) \sum_{|\alpha|=2} \frac{\boldsymbol{\xi}^\alpha}{\alpha!} \partial_{\mathbf{x}}^\alpha u_0(0, t) \right) d\boldsymbol{\xi} \\ &= \int_{\omega} (\rho(\boldsymbol{\xi}) - \rho_0) d\boldsymbol{\xi} \partial_t^2 u_0(0, t) = \underline{\rho} \partial_t^2 u_0(0, t), \end{aligned}$$

où nous avons posé

$$\underline{\rho} := \int_{\mathbb{R}^2} (\rho(\boldsymbol{\xi}) - \rho_0) d\boldsymbol{\xi} = \int_{\omega} (\rho(\boldsymbol{\xi}) - \rho_0) d\boldsymbol{\xi} = (\rho_1 - \rho_0) |\omega|. \quad (3.4.15)$$

Le calcul ci-dessus montre que  $U_2$  croît quand  $|\boldsymbol{\xi}| \rightarrow \infty$ , ce qui va impacter la construction du terme de champ lointain. Pour des raisons qui apparaîtront dans la suite, nous cherchons la constante (encore indéterminée à ce stade)  $\Pi_0(V_2(\cdot, t))$  sous la forme

$$\Pi_0(V_2(\cdot, t)) = \underline{\rho} \partial_t^2 u_0(0, t) \frac{\ln \varepsilon}{2\pi\mu_0} + c_2(t), \quad (3.4.16)$$

où  $c_2(t) \in \mathbb{C}$  est encore indéterminée, et sera fixée *a posteriori*, après la construction de  $u_2$ , de façon à satisfaire le principe de raccord. Pour résumer, pour tout  $\gamma \in ]0, 1[$  nous avons

$$U_2(\boldsymbol{\xi}, t) - \sum_{|\alpha|=2} \frac{\boldsymbol{\xi}^\alpha}{\alpha!} \partial_{\mathbf{x}}^\alpha u_0(0, t) - \underline{\rho} \partial_t^2 u_0(0, t) \frac{\ln(\varepsilon|\boldsymbol{\xi}|)}{2\pi\mu_0} - c_2(t) \in W_\gamma^2(\mathbb{R}^2 \setminus \bar{\omega}). \quad (3.4.17)$$

Ainsi, l'asymptotique du champ proche s'écrit, quand  $|\boldsymbol{\xi}| = |\mathbf{x}|/\varepsilon \rightarrow \infty$ ,

$$\begin{aligned} U_0\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}, t\right) + \varepsilon U_1\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}, t\right) + \varepsilon^2 U_2\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}, t\right) \\ \underset{\frac{|\mathbf{x}|}{\varepsilon} \rightarrow \infty}{\sim} u_0(0, t) + \mathbf{x} \cdot \nabla u_0(0, t) + \sum_{|\alpha|=2} \frac{\mathbf{x}^\alpha}{\alpha!} \partial_{\mathbf{x}}^\alpha u_0(0, t) \\ + \varepsilon^2 \left[ \nabla u_0(0, t)^T \mathbf{Q} \cdot \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^2} + \underline{\rho} \partial_t^2 u_0(0, t) \frac{\ln |\mathbf{x}|}{2\pi\mu_0} + c_2(t) \right] + \dots \end{aligned} \quad (3.4.18)$$

### 3.4.3.b Construction du terme de champ lointain

Nous construisons le terme  $u_2$  afin de compenser les termes d'ordre 2 dans (3.4.18). D'après (3.1.4),  $u_2$  doit satisfaire une équation d'onde homogène dans  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ . Étant donné son

comportement singulier au voisinage de  $\mathbf{x} = 0$ ,  $u_2$  ne peut-être identiquement nul. Nous cherchons  $u_2$  solution de

$$\begin{cases} \rho_0 \partial_t^2 u_2 - \mu_0 \Delta u_2 = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \times \mathbb{R}^+, \\ u_2(\mathbf{x}, t) \underset{|\mathbf{x}| \rightarrow 0}{\sim} \nabla u_0(0, t)^T \cdot \mathbf{Q} \cdot \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^2} + \underline{\rho} \partial_t^2 u_0(0, t) \frac{\ln |\mathbf{x}|}{2\pi\mu_0} + c_2(t) \\ u_2(\mathbf{x}, 0) = \partial_t u_2(\mathbf{x}, 0) = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2. \end{cases} \quad (3.4.19)$$

Le problème (3.4.19) n'entre pas dans le cadre fonctionnel standard permettant de décrire les solutions transitoires de l'équation des ondes, puisque nous cherchons un champ  $u_2$  singulier au voisinage de 0. Nous allons dans un premier temps effectuer un relèvement du comportement singulier de  $u_2$  au voisinage de 0, de façon à se ramener à une situation plus classique. Introduisons la fonction

$$h_2(\mathbf{x}, t) := \nabla u_0(0, t)^T \cdot \frac{\mathbf{Q} \cdot \mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^2} + \underline{\rho} \partial_t^2 u_0(0, t) \frac{\ln |\mathbf{x}|}{2\pi\mu_0} + \frac{1}{2} \frac{\rho_0}{\mu_0} (\nabla \partial_t^2 u_0)(0, t)^T \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{x} \ln |\mathbf{x}|.$$

Cette fonction est la somme des deux termes, correspondant au comportement que nous prescrivons pour  $u_2$  au voisinage de 0, et d'un troisième terme dont la fonction est d'assurer que  $h_2$  est solution d'une équation d'onde dans l'espace libre  $\mathbb{R}^2$ , avec un second membre régulier. En effet, puisque les deux premiers termes intervenants dans la définition de  $h_2$  sont harmoniques dans  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ , et puisque

$$\Delta(\mathbf{x} \ln |\mathbf{x}|) = 2 \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^2} \quad \text{dans } \mathbb{R}^2 \setminus \{0\},$$

nous avons

$$(\rho_0 \partial_t^2 - \mu_0 \Delta) h_2(\mathbf{x}, t) = \frac{\rho_0^2}{\mu_0} (\nabla \partial_t^4 u_0)(0, t)^T \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{x} \ln |\mathbf{x}| + \rho_0 \underline{\rho} \partial_t^4 u_0(0, t) \frac{\ln |\mathbf{x}|}{2\pi\mu_0}.$$

En particulier, étant donnée la régularité en temps de  $u_0$ , nous constatons que

$$(\rho_0 \partial_t^2 - \mu_0 \Delta) h_2 \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^+, V_{-1+\epsilon}^0(D))$$

et ce  $\forall \epsilon > 0$ . En particulier, nous avons  $(\rho_0 \partial_t^2 - \mu_0 \Delta) h_2 \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^+, L^2(D))$ . Considérant à présent  $h_2$  comme la partie prédominante de  $u_2$  au voisinage de  $\mathbf{x} \rightarrow 0$ , nous cherchons le terme de champ lointain  $u_2$  sous la forme

$$u_2(\mathbf{x}, t) := \chi(\mathbf{x}) \overline{h_2}(\mathbf{x}, t) + v_2(\mathbf{x}, t),$$

où  $v_2(\mathbf{x}, t)$  est notre nouvelle inconnue. Afin d'assurer que  $u_2$  soit solution d'une équation d'onde homogène dans  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ , nous définissons  $v_2$  comme l'unique solution du problème

$$\begin{cases} \text{Trouver } v_2 \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^+, L^2(\mathbb{R}^2)) \cap \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, H^2(\mathbb{R}^2)) \text{ tel que} \\ \rho_0 \partial_t^2 v_2 - \mu_0 \Delta v_2 = -(\rho_0 \partial_t^2 - \mu_0 \Delta)(\chi h_2), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, \quad t \in \mathbb{R}^+. \end{cases} \quad (3.4.20)$$

Comme  $(\rho_0 \partial_t^2 - \mu_0 \Delta) h_2 \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^+, L^2(D))$ , le problème (3.4.20) est un problème de propagation d'ondes classique, pour lequel le théorème de Hille-Yosida s'applique, ce qui

montre que le problème (3.4.20) est bien posé et caractérise entièrement  $v_2$ , aux conditions initiales près (bien sur, les conditions initiales pour  $v_2$  sont nulles). Par ailleurs, puisque  $(\rho_0 \partial_t^2 - \mu_0 \Delta)(\chi h_2) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^+, V_{-1+\epsilon}^0(\mathbb{R}^2))$  pour tout  $\epsilon > 0$ , nous pouvons utiliser un argument similaire à celui de la section 3.4.1.a afin de montrer qu'en choisissant

$$c_2(t) := v_2(\mathbf{x} = 0, t),$$

nous avons

$$\sup_{t \in [0, T]} \|\partial_t^k (v_2(t) - c_2(t))\|_{V_{-1+\epsilon}^1(\mathbb{D})} < +\infty,$$

ce pour tout  $T > 0$  et pour tout  $k \geq 0$ . Nous avons ainsi fixé la valeur de  $c_2(t)$  qui intervient dans l'équation (3.4.16). Au regard de la définition de  $h_2(\mathbf{x}, t)$ , pour tout  $\epsilon > 0$  nous avons

$$\sup_{t \in [0, T]} \|u_2(\cdot, t) - m_2(\cdot, t)\|_{V_{-2+\epsilon}^1(\mathbb{D})} < +\infty$$

où

$$m_2(\mathbf{x}, t) := \nabla u_0(0, t)^T \frac{\mathbf{Q} \cdot \mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^2} + \underline{\rho} \partial_t^2 u_0(0, t) \frac{\ln |\mathbf{x}|}{2\pi \mu_0} + c_2(t).$$

### 3.4.3.c Une caractérisation explicite de $u_2$

Dans le paragraphe précédent nous avons donné une définition du second terme de champ lointain  $u_2$ . Cette définition n'est pas constructive, au sens où elle repose sur un résultat abstrait d'existence et d'unicité pour un problème de propagation d'onde. Dans ce paragraphe, nous cherchons à donner une description explicite de  $u_2$ , comme annoncée dans la section 3.3. Rappelons la définition de la fonction de Green dans l'espace libre  $\mathbb{R}^2$ , le milieu de propagation étant caractérisé par les coefficients constants  $(\rho_0, \mu_0)$ .

$$\mathcal{G}(\mathbf{x}, t) := \frac{1}{2\pi c_0} \frac{1}{\sqrt{c_0^2 t^2 - |\mathbf{x}|^2}} 1_{[0,1]} \left( \frac{|\mathbf{x}|}{c_0 t} \right),$$

où la vitesse du milieu  $c_0$  est définie par

$$c_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\rho_0}}.$$

Rappelons que la fonction de Green vérifie par définition

$$\partial_t^2 \mathcal{G} - c_0^2 \Delta \mathcal{G} = \delta_{\mathbf{x}} \otimes \delta_t \quad \text{dans } \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R},$$

où  $\delta_{\mathbf{x}} \otimes \delta_t$  est la masse de Dirac centrée en  $\mathbf{x} = 0, t = 0$ , et que si  $a$  est une fonction causale de classe  $\mathcal{C}^\infty$  alors la convolution  $a \star_t \mathcal{G}$ , donnée par

$$(a \star_t \mathcal{G})(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2\pi c_0} \int_0^{t - \frac{|\mathbf{x}|}{c_0}} \frac{a(s) ds}{\sqrt{c_0^2 (t-s)^2 - |\mathbf{x}|^2}} \quad (3.4.21)$$

est solution de l'équation d'ondes

$$\partial_t^2 (a \star_t \mathcal{G}) - c_0^2 \Delta (a \star_t \mathcal{G}) = \delta_{\mathbf{x}} \otimes a_t.$$

Nous nous intéressons ici au comportement, à  $t \geq 0$  fixé, de  $a \star_t \mathcal{G}$  quand  $|\mathbf{x}| \rightarrow 0$ . Le changement de variable  $\eta = c_0 s / |\mathbf{x}|$  dans l'intégrale (3.4.21) donne

$$\begin{aligned} (a \star_t \mathcal{G})(\mathbf{x}, t) &= \frac{a(t)}{2\pi c_0} \int_0^{t - \frac{|\mathbf{x}|}{c_0}} \frac{ds}{\sqrt{c_0^2(t-s)^2 - |\mathbf{x}|^2}} + \frac{1}{2\pi c_0} \int_0^{t - \frac{|\mathbf{x}|}{c_0}} \frac{a(s) - a(t)}{\sqrt{c_0^2(t-s)^2 - |\mathbf{x}|^2}} ds \\ &= \frac{a(t)}{2\pi c_0^2} \ln \left( \frac{c_0 t}{|\mathbf{x}|} + \sqrt{\left( \frac{c_0 t}{|\mathbf{x}|} \right)^2 - 1} \right) + \frac{1}{2\pi c_0} \int_0^{t - \frac{|\mathbf{x}|}{c_0}} \frac{a(s) - a(t)}{\sqrt{c_0^2(t-s)^2 - |\mathbf{x}|^2}} ds \\ &\underset{|\mathbf{x}| \rightarrow 0}{\sim} \frac{a(t)}{2\pi c_0^2} \ln \left( \frac{2c_0 t}{|\mathbf{x}|} \right) + \frac{1}{2\pi c_0^2} \int_0^t \frac{a(s) - a(t)}{|t-s|} ds + O(|\mathbf{x}|) \end{aligned}$$

Notons à présent

$$g(\mathbf{x}, t) = c_0^2 a \star_t \mathcal{G} + \frac{1}{2\pi} a(t) \chi(\mathbf{x}) \ln |\mathbf{x}|.$$

Nous allons étudier le comportement de  $g$  quand  $\mathbf{x} \rightarrow 0$ . Remarquons que, au sens des distributions, nous avons

$$\rho_0 \partial_t^2 g - \mu_0 \Delta g = \frac{1}{2\pi} \rho_0 \partial_t^2 a(t) \chi(\mathbf{x}) \ln |\mathbf{x}| + \frac{1}{2\pi} \mu_0 a(t) [\Delta, \chi] \ln |\mathbf{x}|,$$

de sorte que

$$\partial_t^2 g - c_0^2 \Delta g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^+, L^2(\mathbb{R}^2)).$$

Ainsi,  $g$  est solution d'une équation des ondes inhomogènes dans  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+$  avec un second membre à valeurs dans  $L^2$ . Nous allons utiliser la proposition 3.2.14, ainsi qu'une chaîne d'arguments similaire à celle utilisée à la section 3.4.1.a pour montrer que pour tout  $\gamma > 0$ , tout  $T > 0$ , nous avons

$$\sup_{t \in [0, T]} \left\| \frac{\partial^k}{\partial t^k} \left( a \star_t \mathcal{G} - \frac{a(t)}{2\pi c_0^2} \ln \left( \frac{2ct}{|\mathbf{x}|} \right) - \frac{1}{2\pi c_0^2} \int_0^t \frac{a(s) - a(t)}{|t-s|} ds \right) \right\|_{V_\gamma^2(D)} < +\infty \quad (3.4.22)$$

pour  $k \in \{0, 1, 2\}$ .

L'équation (3.4.22) donne des informations intéressantes sur le champ  $\nabla(a \star_t \mathcal{G})$ . En particulier, celle-ci montre que nous pouvons passer au gradient dans l'asymptotique de  $a \star_t \mathcal{G}$ .

Ceci implique

$$2\pi c_0^2 \nabla(a \star_t \mathcal{G})(\mathbf{x}, t) \sim -a(t) \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^2} + O(1)$$

quand  $|\mathbf{x}| \rightarrow 0$ . De plus  $\nabla(a \star_t \mathcal{G})$  est solution d'une équation des ondes homogènes dans  $(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}^+$ . En prenant en compte ces remarques et comparant aux équations définissant le terme de champ lointain  $u_2$  (3.4.19), nous pouvons identifier les termes et en déduire que

$$u_2(\mathbf{x}, t) = \mathcal{G}[a](\mathbf{x}, t) + \partial_{x_1} \mathcal{G}[b_1](\mathbf{x}, t) + \partial_{x_2} \mathcal{G}[b_2](\mathbf{x}, t)$$

où

$$\mathcal{G}[a] := a \star_t \mathcal{G}, \quad \text{et} \quad a(t) := -\frac{\rho}{\rho_0} \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2}(0, t), \quad b_j(t) = -2\pi c_0^2 \mathbf{e}_j^T \cdot \mathbf{Q} \cdot \nabla u_0(0, t), \quad j = 1, 2,$$

où  $c_0 = \sqrt{\mu_0/\rho_0}$ . Ainsi nous avons obtenu une expression explicite de  $u_2$ , qui est le premier terme du développement du champ diffracté en fonction de  $\varepsilon$ , en terme de la fonction de Green  $\mathcal{G}$  et de son gradient, c'est-à-dire en terme de sources monopolaires et dipolaires. Notons que  $u_2$  est couplé fortement à  $u_0$  et notamment aux valeurs ponctuelles en 0 (la *limite* de l'inclusion quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ ) de sa dérivée seconde en temps ainsi que de son gradient.

### 3.4.4 Développement à l'ordre 3

Bien que nous ne soyons intéressés que par un développement à l'ordre 2 de la solution  $u_\varepsilon$  en fonction de  $\varepsilon$ , il apparaîtra, lorsque nous mènerons l'analyse d'erreur, la nécessité de connaître le terme d'ordre 3 en champ proche. Formellement, sa fonction sera de compenser le terme d'ordre 3 apparaissant dans le développement de Taylor de  $u_0$  au voisinage de 0, afin de récupérer un taux de convergence en  $3 - \eta$ ,  $\eta > 0$ .

Examinons les informations apportées par le principe de raccord appliqué à l'ordre 3. En champ lointain, nous avons

$$\begin{aligned} & u_0(\mathbf{x}, t) + \varepsilon u_1(\mathbf{x}, t) + \varepsilon^2 u_2(\mathbf{x}, t) + \varepsilon^3 u_3(\mathbf{x}, t) \\ & \underset{|\mathbf{x}| \rightarrow 0}{\sim} \sum_{|\alpha| \leq 3} \frac{\mathbf{x}^\alpha}{\alpha!} \partial_{\mathbf{x}}^\alpha u_0(0, t) + \varepsilon^2 \nabla u_0(0, t)^T \mathbf{Q} \cdot \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^2} + \varepsilon^2 \frac{\rho}{\rho_0} \partial_t^2 u_0(0, t) \frac{\ln |\mathbf{x}|}{2\pi\mu_0} + \varepsilon^2 c_2(t) + \varepsilon^3 u_3(\mathbf{x}, t) + \dots \end{aligned} \quad (3.4.23)$$

Le principe de raccord indique que le développement ci-dessus doit compenser les premiers termes du développement radial du champ proche quand  $|\boldsymbol{\xi}| = |\mathbf{x}|/\varepsilon \rightarrow \infty$ . D'après ce qui précède, et en particulier (3.4.17), ce développement s'écrit

$$\begin{aligned} & U_0\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}, t\right) + \varepsilon U_1\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}, t\right) + \varepsilon^2 U_2\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}, t\right) + \varepsilon^3 U_3\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}, t\right) \\ & \underset{|\mathbf{x}|/\varepsilon \rightarrow \infty}{\sim} \sum_{|\alpha| \leq 2} \frac{\mathbf{x}^\alpha}{\alpha!} \partial_{\mathbf{x}}^\alpha u_0(0, t) + \varepsilon^2 \nabla u_0(0, t)^T \mathbf{Q} \cdot \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^2} + \varepsilon^2 \frac{\rho}{\rho_0} \partial_t^2 u_0(0, t) \frac{\ln |\mathbf{x}|}{2\pi\mu_0} + \varepsilon^2 c_2(t) + \varepsilon^3 U_3\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}, t\right) + \dots \end{aligned}$$

Nous construisons le terme de champ proche  $U_3$  de sorte qu'il compense le terme d'ordre 3 intervenant dans le développement de Taylor de  $u_0$ , apparaissant dans (3.4.23). D'après (3.1.5), le terme de champ proche  $U_3$  doit satisfaire

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\mu \nabla U_3) = -\rho \partial_t^2 U_1 & \text{dans } \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+, \\ U_3(\boldsymbol{\xi}, t) \underset{|\boldsymbol{\xi}| \rightarrow \infty}{\sim} \sum_{|\alpha|=3} \frac{\boldsymbol{\xi}^\alpha}{\alpha!} \partial_{\mathbf{x}}^\alpha u_0(0, t). \end{cases}$$

Nous adoptons la même démarche qu'aux paragraphes 3.4.2 et 3.4.3, en commençant par construire un relèvement du comportement prescrit pour  $U_3$  au voisinage de l'infini.

Posons

$$g_3(\boldsymbol{\xi}, t) = \sum_{|\alpha|=3} \frac{\boldsymbol{\xi}^\alpha}{\alpha!} \partial_{\mathbf{x}}^\alpha u_0(0, t)$$

et remarquons que le comportement prescrit pour  $U_3$  au voisinage de l'infini est compatible avec le terme source de l'équation volumique : en effet, nous avons

$$\Delta g_3(\boldsymbol{\xi}, t) = \xi_1(\partial_{x_1}^3 u_0(0, t) + \partial_{x_2}^2 \partial_{x_1} u_0(0, t)) + \xi_2(\partial_{x_2}^3 u_0(0, t) + \partial_{x_1}^2 \partial_{x_2} u_0(0, t)),$$

de sorte qu'au bilan

$$\mu_0 \Delta g_3 = \mu_0 \nabla(\Delta(u_0))(0, t) \cdot \boldsymbol{\xi} = \rho_0 \partial_t^2 \nabla u_0(0, t) \cdot \boldsymbol{\xi} \underset{\boldsymbol{\xi} \rightarrow \infty}{\sim} \rho_0 \partial_t^2 U_1. \quad (3.4.24)$$

L'égalité (3.4.24) implique que

$$\operatorname{div}(\mu \nabla(\psi(\boldsymbol{\xi}) g_3(\boldsymbol{\xi}))) = \psi(\boldsymbol{\xi}) \rho_0 \partial_t^2 U_1(\boldsymbol{\xi}, t) + \mu_0 [\Delta, \psi] g_3(\boldsymbol{\xi}),$$

pour  $|\boldsymbol{\xi}|$  suffisamment grand. Avec ces observations à l'esprit, nous cherchons le terme de champ proche  $U_3$  sous la forme

$$\left\{ \begin{array}{l} U_3(\boldsymbol{\xi}, t) := \psi(\boldsymbol{\xi}) \sum_{|\alpha|=3} \frac{\boldsymbol{\xi}^\alpha}{\alpha!} \partial_{\mathbf{x}}^\alpha u_0(0, t) + V_3(\boldsymbol{\xi}, t) \\ \text{où } V_3 \in W_{-\gamma}^1(\mathbb{R}^2), \gamma \in ]0, 1[ \text{ tel que} \\ -\operatorname{div}(\mu \nabla V_3) = -\chi(\boldsymbol{\xi}) \rho(\boldsymbol{\xi}) \partial_t^2 U_1(\boldsymbol{\xi}, t) + \mu_0 [\Delta, \psi] \sum_{|\alpha|=3} \frac{\boldsymbol{\xi}^\alpha}{\alpha!} \partial_{\mathbf{x}}^\alpha u_0(0, t) \end{array} \right. \quad (3.4.25)$$

D'après la proposition 3.2.16, les équations ci-dessus définissent  $V_3$  à une constante  $\Pi_0(V_3)$  près. Notons à nouveau que la fonction  $V_3$  dépend de l'espace et du temps, comme la fonction de profil d'ordre 2,  $V_2$ , et au contraire de  $V_1$ . Explicitons la construction de  $V_3$ .

Discutons le comportement de  $V_3$  quand  $|\boldsymbol{\xi}| \rightarrow \infty$ . Puisque  $V_3 \in W_{-\gamma}^1(\mathbb{R}^2)$ , la proposition 3.2.17 montre que nous avons  $V_3(\boldsymbol{\xi}, t) - \Pi_0'(V_3(\cdot, t))(2\pi\mu_0)^{-1} \ln |\boldsymbol{\xi}| - \Pi_0(V_3(\cdot, t)) \in W_\gamma^1(\mathbb{R}^2)$  pour tout  $\gamma \in ]0, 1[$ .

Calculons la constante  $\Pi_0'(V_3(\cdot, t))$ . Observons que, pour  $R > 0$  suffisamment grand, le membre de droite dans l'équation définissant  $V_3(\cdot, t)$  s'annule pour  $|\boldsymbol{\xi}| > R$ . De plus, puisque  $\chi + \psi = 1$ , nous avons  $[\Delta, \psi] = -[\Delta, \chi]$ . Ainsi

$$\begin{aligned} \Pi_0'(V_3) &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\partial D_R} \mu \partial_r V_3 d\sigma = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{D_R} \operatorname{div}(\mu \nabla V_3) d\boldsymbol{\xi} \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{D_R} \chi(\boldsymbol{\xi}) \rho(\boldsymbol{\xi}) \partial_t^2 U_1(\boldsymbol{\xi}, t) d\boldsymbol{\xi} - \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{D_R} \chi(\boldsymbol{\xi}) \Delta g_3 d\boldsymbol{\xi} + \int_{D_R} \Delta \chi g_3 d\boldsymbol{\xi} \\ &= \int_{\omega} (\rho(\boldsymbol{\xi}) - \rho_0) \partial_t^2 U_1(\boldsymbol{\xi}, t) d\boldsymbol{\xi}. \end{aligned}$$

Nous avons ainsi montré l'existence de  $V_3(\cdot, t)$  à  $t$  fixé, définie à une constante près. Nous passons outre le calcul de cette constante : les seuls ingrédients qui nous intéressent pour mener à bien l'analyse d'erreur sont les comportements prédominants de  $U_3$  et de  $V_3$  quand  $\boldsymbol{\xi} \rightarrow \infty$ .

Nous avons introduit l'ensemble des ingrédients nécessaires à la construction d'un développement asymptotique de  $u_\varepsilon$  en fonction de  $\varepsilon$ , à l'ordre 2 en champ lointain et à l'ordre 3 en champ proche.

Dans la prochaine section, nous justifions le fait que les ansatz  $\sum_{k=0}^2 \varepsilon^k u_k(\mathbf{x}, t)$  et  $\sum_{k=0}^3 \varepsilon^k U_k\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}, t\right)$  sont de *bonnes* approximations de  $u_\varepsilon$  dans les zones de champ lointain et de champ proche respectivement. *Bonne* approximation est à entendre au sens approximation d'ordre 3 en  $\varepsilon$ , ce qui est légitime puisque nous avons construit, globalement, un développement d'ordre 2 de  $u_\varepsilon$ .

### 3.5 DÉMONSTRATION DES RÉSULTATS ET ANALYSE D'ERREUR

Dans cette section, nous réalisons l'analyse d'erreur de notre problème. Nous proposons un ansatz constitué d'une interpolation entre un développement à l'ordre 2 en champ lointain et un développement à l'ordre 3 en champ proche du champ total. Nous prouvons que cet ansatz est une approximation d'ordre  $3 - \eta$  pour tout  $\eta > 0$  du champ total  $u_\varepsilon$ .

Dans un premier temps, nous nous limitons au cas d'une inclusion unique et ce par soucis de lisibilité. Nous expliquons ensuite comment généraliser la démarche au cas d'un nombre quelconque d'inclusions.

Nous définissons, en suivant une idée considérée par exemple dans [75], le champ approché comme

$$\tilde{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, t) := \psi_\varepsilon(\mathbf{x}) \sum_{n=0}^2 \varepsilon^n u_n(\mathbf{x}, t) + \chi(\mathbf{x}) \sum_{n=0}^3 \varepsilon^n U_n\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}, t\right) - \psi_\varepsilon(\mathbf{x}) \chi(\mathbf{x}) m_\varepsilon(\mathbf{x}, t). \quad (3.5.1)$$

Il s'agit d'une interpolation entre les séries tronquées de champ proche et de champ lointain. Rappelons que, moralement,  $m_\varepsilon$  est la somme des termes intervenant dans le principe de raccord en champ lointain, définie par

$$m_\varepsilon(\mathbf{x}, t) := \sum_{|\alpha| \leq 3} \frac{\mathbf{x}^\alpha}{\alpha!} \partial_{\mathbf{x}}^\alpha u_0(0, t) + \varepsilon^2 \left[ \frac{\nabla u_0(0, t) \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^2} + \underline{\rho} \partial_t^2 u_0(0, t) \ln |\mathbf{x}| \right].$$

L'objectif de cette section est de démontrer le

#### THÉORÈME 3.5.1

Soit  $u_\varepsilon$  l'unique solution de (2.2.2), définissons  $\tilde{u}_\varepsilon$  par la formule (3.3.8) et soit  $T > 0$ . Alors pour tout  $\eta \in ]0, 1[$ , il existe deux constantes  $C_\eta, \varepsilon_0 > 0$  telles que

$$\sup_{t \in [0, T]} \left[ \|\partial_t u_\varepsilon - \partial_t \tilde{u}_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \|\nabla u_\varepsilon - \nabla \tilde{u}_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \right] \leq C_\eta \varepsilon^{3-\eta}, \quad \forall \varepsilon \in [0, \varepsilon_0[.$$

Ce théorème constitue la synthèse de l'analyse par développement asymptotique raccordés. Il montre que le champ approché défini par la formule (3.5.1) constitue une bonne approximation du champ total  $u_\varepsilon$ , qui par définition est solution du problème (2.2.2). La norme dans laquelle nous mesurons l'écart entre ces deux champs, définie par

$$u \mapsto \sup_{t \in [0, T]} \|\partial_t u\|_{L^2(\mathbb{R})} + \|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R})}$$

est la norme d'énergie, canoniquement associée aux problèmes de propagation d'ondes acoustiques. Notons que si  $\mathbf{x} \notin \text{supp}\{\chi\}$ , nous avons  $\tilde{u}_\varepsilon(\mathbf{x}) = u_0(\mathbf{x}, t) + \varepsilon u_1(\mathbf{x}, t) + \varepsilon^2 u_2(\mathbf{x}, t)$ . Ainsi, le théorème 3.5.1 montre que

$$\sum_{n=0}^2 \varepsilon^n u_n$$

est une approximation d'ordre  $3 - \eta$  de  $u_\varepsilon$ , à distance  $> 1$  de l'inclusion.

Le reste de cette section est consacré à la preuve du théorème 3.5.1. La preuve se fait, comme souvent, en deux étapes : stabilité et consistance.

- La stabilité consiste à montrer que les solutions aux problèmes de propagation tels que (2.2.2) dépendent continument des données, et ce uniformément en  $\varepsilon$ . Ce résultat a été montré dans le corollaire 2.2.4, et est une conséquence directe du caractère bien posé du problème (2.2.2) ainsi que de l'identité d'énergie associée. Ainsi, il existe deux constantes  $C > 0$  et  $\varepsilon_0 > 0$  telles que

$$\begin{aligned} & \sup_{t \in [0, T]} \|\partial_t v\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \|\nabla v\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \\ & \leq C \left( \|\partial_t v(\cdot, 0)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \|\nabla v(\cdot, 0)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \int_0^T \|\rho_\varepsilon \partial_t^2 v - \text{div}(\mu_\varepsilon \nabla v)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} dt \right) \end{aligned}$$

et ce pour tout  $v \in C^0(\mathbb{R}_+, D(\Delta_{\mu_\varepsilon}))$  et pour tout  $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0[$ .

Notons que les paramètres physiques  $\rho_\varepsilon$  et  $\mu_\varepsilon$  vérifient

$$\rho_\varepsilon \geq \min(\rho_1, \rho_0) > 0 \quad \text{et} \quad \mu_\varepsilon \geq \min(\mu_1, \mu_0) > 0.$$

De plus,

$$u_\varepsilon(\mathbf{x}, 0) = u_0(\mathbf{x}, 0) = u_2(\mathbf{x}, 0) = \partial_t u_\varepsilon(\mathbf{x}, 0) = \partial_t u_0(\mathbf{x}, 0) = \partial_t u_2(\mathbf{x}, 0) = 0$$

et ce pour tout  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ , par construction.

Par ailleurs, les termes de champ proche  $U_0, U_1, U_2$  sont solutions de problèmes de statique dont les seconds membres sont des sommes de termes ayant comme facteurs  $\partial_{\mathbf{x}}^\alpha u_0(0, t)$ .

Ainsi, puisque  $u_0$  est causale et comme  $\partial_{\mathbf{x}}^\alpha u_0(0, 0) = 0$  pour tout  $\alpha \in \mathbb{N}^2$ , ceci implique que  $U_0(\mathbf{x}, 0) = U_1(\mathbf{x}, 0) = U_2(\mathbf{x}, 0) = 0$ .

Pour résumer, nous avons  $\forall \varepsilon \in [0, \varepsilon_0[$ ,

$$\sup_{t \in [0, T]} \left[ \|\partial_t(u_\varepsilon - \tilde{u}_\varepsilon)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \|\nabla(u_\varepsilon - \tilde{u}_\varepsilon)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \right] \leq C \int_0^T \|\rho_\varepsilon \partial_t^2(u_\varepsilon - \tilde{u}_\varepsilon) - \text{div}(\mu_\varepsilon \nabla(u_\varepsilon - \tilde{u}_\varepsilon))\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} dt. \quad (3.5.2)$$

L'estimation (3.5.2) montre que pour estimer la différence  $u_\varepsilon - \tilde{u}_\varepsilon$  dans la norme d'énergie, il suffit de savoir contrôler le terme

$$\int_0^T \|\rho_\varepsilon \partial_t^2(u_\varepsilon - \tilde{u}_\varepsilon) - \operatorname{div}(\mu_\varepsilon \nabla(u_\varepsilon - \tilde{u}_\varepsilon))\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} dt.$$

- Il s'agit de l'étape dite de consistance. Notons que dans l'inégalité ci-dessus, la constante  $C > 0$  est indépendante de  $\varepsilon$ . Nous nous attelons dans la suite de cette section à établir une estimation de la quantité

$$\int_0^T \|\rho_\varepsilon \partial_t^2(u_\varepsilon - \tilde{u}_\varepsilon) - \operatorname{div}(\mu_\varepsilon \nabla(u_\varepsilon - \tilde{u}_\varepsilon))\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} dt.$$

en fonction de  $\varepsilon$ .

Introduisons la notation

$$(\tau_\varepsilon U)(\mathbf{x}) := U\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right).$$

et remémorons la notion de commutateur introduite section 3.2.4, définie par

$$[\Delta, g]v := \Delta(gv) - g\Delta v, \quad \forall (g, v) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)^2.$$

En pratique,  $g$  sera souvent égale à  $\psi_\varepsilon$  ou à  $\chi$ . Rappelons également que

$$\rho_0 \partial_t^2 u_n - \mu_0 \Delta u_n = \delta_{n,0} f, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, \quad t > 0, \quad n \in \mathbb{N},$$

où  $\delta_{n,0}$  est le symbole de Kronecker, valant 1 si  $n = 0$  et 0 sinon. Nous avons alors la suite d'égalités suivantes

$$\begin{aligned} & \rho_\varepsilon \partial_t^2(u_\varepsilon - \tilde{u}_\varepsilon) - \operatorname{div}(\mu_\varepsilon \nabla(u_\varepsilon - \tilde{u}_\varepsilon)) \\ &= \mu_0 [\Delta, \psi_\varepsilon] \sum_{n=0}^2 \varepsilon^n u_n + \mu_0 [\Delta, \chi] \sum_{n=0}^3 \varepsilon^n \tau_\varepsilon U_n - \mu_0 [\Delta, \chi \psi_\varepsilon] m_\varepsilon \\ &+ \chi (\rho_\varepsilon \partial_t^2 - \Delta_{\mu_\varepsilon}) \sum_{n=0}^3 \varepsilon^n \tau_\varepsilon U_n - \chi \psi_\varepsilon (\rho_0 \partial_t^2 - \mu_0 \Delta) m_\varepsilon. \end{aligned} \tag{3.5.3}$$

Soit  $M_\varepsilon(\boldsymbol{\xi}, t)$  l'unique fonction satisfaisant  $m_\varepsilon = \tau_\varepsilon M_\varepsilon$ , de sorte que

$$\begin{aligned} M_\varepsilon(\boldsymbol{\xi}, t) &= u_0(0, t) + \varepsilon \left( \nabla u_0(0, t) \cdot \boldsymbol{\xi} + \nabla u_0(0, t) \cdot Q \cdot \frac{\boldsymbol{\xi}}{|\boldsymbol{\xi}|^2} \right) \\ &+ \varepsilon^2 \left( \sum_{|\alpha|=2} \frac{\boldsymbol{\xi}^\alpha}{\alpha!} \partial_{\mathbf{x}}^\alpha u_0(0, t) + \underline{\rho} \partial_t^2 u_0(0, t) \frac{\ln |\varepsilon \boldsymbol{\xi}|}{2\pi \mu_0} + c_2(t) \right) \\ &+ \varepsilon^3 \sum_{|\alpha|=3} \frac{\boldsymbol{\xi}^\alpha}{\alpha!} \partial_{\mathbf{x}}^\alpha u_0(0, t), \end{aligned}$$

et observons que  $m_\varepsilon$  se décompose sous la forme

$$m_\varepsilon(\mathbf{x}, t) = m_0(\mathbf{x}, t) + \varepsilon m_1(\mathbf{x}, t) + \varepsilon^2 m_2(\mathbf{x}, t)$$

avec  $m_1 = 0$ , tandis que  $m_0, m_2$  sont indépendants de  $\varepsilon$ . De manière similaire,

$$M_\varepsilon(\boldsymbol{\xi}, t) = M_0(\boldsymbol{\xi}, t) + \varepsilon M_1(\boldsymbol{\xi}, t) + \varepsilon^2 M_2(\boldsymbol{\xi}, t) + \varepsilon^3 M_3(\boldsymbol{\xi}, t)$$

où  $M_0, M_1, M_3$  sont indépendantes de  $\varepsilon$  tandis que  $M_2(\boldsymbol{\xi}, t)$  est une fonction affine de  $\ln \varepsilon$ .

Remarquons également que puisque  $\psi_\varepsilon + \chi = 1 + \psi_\varepsilon \chi$ , nous avons

$$[\Delta, \chi \psi_\varepsilon] m_\varepsilon = [\Delta, \psi_\varepsilon] m_\varepsilon + [\Delta, \chi] (\tau_\varepsilon M_\varepsilon).$$

Ainsi puisque  $\chi_\varepsilon(\boldsymbol{x}) := 1 - \psi_\varepsilon(\boldsymbol{x})$ , nous avons  $\chi \psi_\varepsilon = \chi - \chi_\varepsilon$ . Ces observations nous poussent à réorganiser les termes de droite dans (3.5.3) de la manière suivante

$$\begin{aligned} & \rho_\varepsilon \partial_t^2 (u_\varepsilon - \tilde{u}_\varepsilon) - \operatorname{div}(\mu_\varepsilon \nabla (u_\varepsilon - \tilde{u}_\varepsilon)) \\ &= \mu_0 [\Delta, \psi_\varepsilon] \left( \sum_{n=0}^2 \varepsilon^n (u_n - m_n) \right) + \mu_0 [\Delta, \chi] \left( \tau_\varepsilon \sum_{n=0}^3 \varepsilon^n (U_n - M_n) \right) \\ & \quad + (\chi - \chi_\varepsilon) \rho_0 \partial_t^2 \left( \tau_\varepsilon \varepsilon^2 (U_2 - M_2) + \tau_\varepsilon \varepsilon^3 (U_3 - M_3) \right) \\ & \quad + \chi_\varepsilon \rho_\varepsilon \partial_t^2 \left( \varepsilon^2 \tau_\varepsilon U_2 + \varepsilon^3 \tau_\varepsilon U_3 \right) \end{aligned}$$

La proposition qui suit donne une estimation en norme  $L^2$  de chacun des termes intervenant dans la somme précédente.

**PROPOSITION 3.5.2**

*Pour tout  $\eta > 0$ , il existe  $C_\eta > 0$  telle que pour tout  $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0[$  et tout  $t > 0$ , nous ayons les estimations suivantes :*

$$\left\| [\Delta, \psi_\varepsilon] \sum_{n=0}^2 \varepsilon^n (u_n - m_n) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq C_\eta \varepsilon^{3-\eta} \sum_{n=0}^2 \|u_n - m_n\|_{V_{-3+n+\eta}^1(\mathbb{D})}, \quad (3.5.4)$$

$$\left\| [\Delta, \chi] \sum_{n=0}^3 \varepsilon^n \tau_\varepsilon (U_n - M_n) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq C_\eta \varepsilon^{3-\eta} \sum_{n=0}^3 \|U_n - M_n\|_{W_{3-n-\eta}^1(\mathbb{R}^2)}, \quad (3.5.5)$$

$$\left\| (\chi - \chi_\varepsilon) \rho_0 \partial_t^2 \sum_{n=2}^3 \varepsilon^n \tau_\varepsilon (U_n - M_n) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq C_\eta \varepsilon^{3-\eta} \sum_{n=2}^3 \|\partial_t^2 (U_n - M_n)\|_{W_{3-n-\eta}^1(\mathbb{R}^2)} \quad (3.5.6)$$

*Par ailleurs, il existe  $C > 0$  telle que pour tout  $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0[$ , on ait*

$$\left\| \chi_\varepsilon \rho_\varepsilon \partial_t^2 \sum_{n=2}^3 \varepsilon^n \tau_\varepsilon U_n \right\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq C \varepsilon^3 \sum_{n=2}^3 \|\partial_t^2 U_n\|_{L^2(\omega)}. \quad (3.5.7)$$

DÉMONSTRATION :

- Dans un premier temps, traitons les deux premières inégalités (3.5.4), (3.5.5). Prenant en compte les estimations établies dans le lemme 3.2.20, il vient l'existence d'une constante  $C_\eta$  telle que pour tout  $n = 0, \dots, 3$ , on ait l'estimation

$$\|[\Delta, \chi] \tau_\varepsilon(U_n - M_n)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq C \|U_n - M_n\|_{W_0^1(\mathbb{Q}_{1/\varepsilon})}.$$

En utilisant le lemme 3.2.21, nous obtenons qu'il existe  $C_\eta > 0$  telle que

$$\begin{aligned} \|[\Delta, \chi] \tau_\varepsilon(U_n - M_n)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} &\leq C_\eta \varepsilon^{3-n-\eta} \|r^{3-n-\eta}(U_n - M_n)\|_{W_0^1(\mathbb{Q}_{1/\varepsilon})} \\ &\leq C_\eta \varepsilon^{3-n-\eta} \|U_n - M_n\|_{W_{3-n-\eta}^1(\mathbb{R}^2)}, \end{aligned}$$

pour l'erreur de champ proche par exemple, ce qui prouve l'estimation (3.5.5). Le même type de calcul peut-être effectué pour obtenir (3.5.4).

- Les estimations (3.5.6) et (3.5.7) s'obtiennent directement par changement de variable et en se référant aux équations (3.4.13) et (3.4.25).

□

La proposition 3.5.2 achève ainsi la démonstration du théorème 3.3.1 dans le cas d'une unique inclusion.

Nous avons fait la démonstration du théorème 3.5.1 dans le cas d'une unique inclusion, par soucis de lisibilité. Le principe de la démonstration est le même dans le cas d'un nombre quelconque d'inclusions, à nouveau à cause de l'hypothèse sur la séparabilité des inclusions et le fait que l'ordre 2 est le premier ordre en champ lointain auquel apparaît le champ diffracté par les inclusions, ceci en 2D.

Ainsi, nous avons montré dans cette section que le champ approché  $\tilde{u}_\varepsilon$  défini par l'équation (3.5.1) est une approximation d'ordre  $3 - \eta$  de  $u_\varepsilon$ , et ce pour tout  $\eta > 0$ .

Bien évidemment, un grand nombre d'extensions de cette analyse sont possibles, un certain nombre d'entre elles étant détaillées dans la prochaine section.

### REMARQUE 3.5.3

*En vertu du fait que le terme source  $f$  est supposé indéfiniment dérivable en temps (voir le paragraphe 2.2), nous pouvons appliquer ce qui précède pour montrer que des estimations d'erreur telles que celle énoncée théorème 3.5.1 restent valides en remplaçant le champ total  $u_\varepsilon$  et son ansatz d'approximation par leurs dérivées en temps successives. Ainsi, pour tout  $k \geq 0$ , pour tout  $T > 0$  et pour tout  $\eta > 0$ , il existe deux constantes  $C_\eta, \varepsilon_0 > 0$  telles que*

$$\sup_{t \in [0, T]} [\|\partial_t u_\varepsilon^{(k)} - \partial_t \tilde{u}_\varepsilon^{(k)}\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \|\nabla u_\varepsilon^{(k)} - \nabla \tilde{u}_\varepsilon^{(k)}\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}] \leq C_\eta \varepsilon^{3-\eta}, \quad \forall \varepsilon \in [0, \varepsilon_0[,$$

où  $v^{(k)}$  désigne la dérivée  $k$ -ème en temps de  $v$ .

## 3.6 EXTENSIONS POSSIBLES

Nous avons effectué l'analyse asymptotique à l'ordre 2 du problème de diffraction par un ensemble de petits défauts (2.2.2) en utilisant la méthode des développements asympto-

tiques raccordés. Nous aurions pu considérer un problème modèle différent, les extensions possibles et naturelles étant les suivantes :

- La dimension d'espace sous-jacente au problème (dans notre cas  $d = 2$ ) joue un grand rôle dans le résultat de l'analyse asymptotique. Dans la situation que nous avons examinée, le premier terme d'ordre non nul en champ lointain est d'ordre 2. Il aurait été d'ordre 3 en dimension 3, et aurait également été constitué d'une combinaison de monopoles et de dipôle localisés en les  $\mathbf{x}_n$ , la fonction de Green présentant évidemment des propriétés différentes selon que  $d = 2$  ou  $d = 3$ . En particulier, l'apparition de termes en  $\ln \varepsilon$  dans le terme d'ordre 2 du champ proche de  $\varepsilon$  provient du principe de Huygens et du fait que le cône de lumière en 2 dimensions est supporté par le disque  $\{|\mathbf{x}| \leq ct\}$  alors qu'il est supporté par la sphère  $\{|\mathbf{x}| = ct\}$  en dimension 3.
- Nous avons considéré des obstacles pénétrables, c'est-à-dire que les paramètres physiques  $\rho_\varepsilon$  et  $\mu_\varepsilon$  vivent dans tout l'espace et présentent une discontinuité à la frontière des défauts. Nous aurions pu placer des conditions au bord des défauts, par exemple de Dirichlet, Neumann ou de Robin, ce qui aurait mené à un développement asymptotique différent de  $u_\varepsilon$ . Le fait d'avoir choisi comme problème modèle la diffraction par des obstacles pénétrables provient des applications au contrôle non-destructif visées par le CEA List ; notamment la diffraction par un ensemble de petits cailloux plongés dans du béton.
- Rappelons également que l'hypothèse sur la position des obstacles  $\omega_n^\varepsilon$  était fondamentale puisqu'elle permet de découpler les zones de champs proches propres à chaque inclusion. Si nous avons considéré un modèle au sein duquel les inclusions se rapprochent les unes des autres, c'est-à-dire où leur centre sont séparés d'une distance de l'ordre de  $\varepsilon^\alpha$ ,  $\alpha \in ]0, 1[$ , comme dans [17, 18] par exemple, alors des termes supplémentaires apparaîtraient dans le développement asymptotique de  $u_\varepsilon$ .
- Une extension naturelle serait de mener l'analyse asymptotique pour les problèmes de Maxwell et de l'élastodynamique temporelle.

Par ailleurs, nous avons effectué l'hypothèse relativement simpliste d'un milieu constant par morceaux. Dans un premier temps, force est de constater que l'analyse asymptotique qui précède n'aurait pas été affectée par une hypothèse plus générale, celle par exemple d'un milieu de référence  $(\rho_0, \mu_0)$  variant *lentement* dans  $\mathbb{R}^2$  et disons constant au voisinage des inclusions, perturbé par un ensemble de petites inclusions. Quel modèle est alors acceptable pour les paramètres physiques au sein des inclusions ?

Si nous supposons par exemple qu'à l'intérieur des inclusions, les paramètres  $\rho_n$  et  $\mu_n$  sont des fonctions régulières de  $\mathbf{x}$  et indépendantes de  $\varepsilon$ , alors il est légitime d'un point de vue physique d'assimiler ces fonctions à leur valeur au centre, les inclusions étant petites devant la longueur d'onde centrale du champ incident.

Une autre possibilité pourrait être de considérer des fonctions de la forme  $\rho_n((\mathbf{x} - \mathbf{x}_n)/\varepsilon)$ . Dans ce cas, l'intuition suggère de considérer un modèle équivalent où les fonctions  $\rho_n$  et  $\mu_n$  sont remplacées par leur moyenne sur l'inclusion normalisée plutôt que par leur valeur ponctuelle au centre de l'inclusion.

Ces questions de modélisation consistant à déterminer quels sont les modèles réalistes d'un point de vue physique sont intéressantes et en réalité très actuelles au sein de la communauté des développements asymptotiques pour les équations aux dérivées partielles.



# CHAPITRE

## 4

# CONSTRUCTION ET ANALYSE DE MODÈLES APPROCHÉS

## Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Une première approche avec inconnue auxiliaire par analyse du champ proche . . . . .</b>	<b>83</b>
4.1.1	Cas d'une inclusion unique et d'un contraste $\rho$ uniquement . .	84
4.1.1.a	Construction du modèle . . . . .	84
4.1.1.b	Analyse de consistance et de stabilité . . . . .	89
4.1.2	Présentation dans le cas général . . . . .	95
4.1.2.a	Construction du modèle . . . . .	95
4.1.2.b	Analyse de consistance et de stabilité . . . . .	102
<b>4.2</b>	<b>Une seconde approche sans inconnue auxiliaire par analyse du champ lointain . . . . .</b>	<b>104</b>
4.2.1	Cas d'une inclusion unique . . . . .	104
4.2.1.a	Construction du modèle . . . . .	104
4.2.1.b	Analyse de consistance et de stabilité . . . . .	108
4.2.1.c	Développement asymptotique raccordé de la solution du modèle approché . . . . .	112
4.2.2	Cas d'un nombre quelconque d'inclusions . . . . .	119

---

Nous avons effectué l'analyse asymptotique du problème exact (2.2.2), qui rappelons le, est difficile à résoudre numériquement en tant que tel, pour l'ensemble des raisons exposées section 1.3. L'objectif à présent est de tirer parti de l'analyse asymptotique effectuée dans la section précédente, afin de proposer deux modèles, indépendants l'un de l'autre,

qui d'une part approchent le modèle exact (au sens où l'erreur entre les solutions de ces deux modèles est petite, dans un sens que nous préciserons) et d'autre part sont significativement plus faciles à résoudre que le problème initial, d'un point de vue numérique.

Un trait commun aux deux modèles que nous proposerons est le fait qu'ils sont gouvernés par une équation des ondes acoustique dans l'espace libre, ayant comme paramètres  $\rho_0$  et  $\mu_0$ , les paramètres physiques du milieu environnant les inclusions. Bien évidemment ces deux équations d'ondes seront couplées à des inconnues auxiliaires, qui permettront de rendre compte de la présence des inclusions dans le milieu.

L'intérêt d'une telle approche, d'un point de vue numérique, est qu'elle permet de discrétiser l'équation d'onde sous-jacente à l'aide d'un espace élément finis s'appuyant sur un maillage complètement indépendant des hétérogénéités. En particulier, la taille des mailles pourra être choisie indépendamment de la taille caractéristique des inclusions  $\varepsilon$ , nous permettant ainsi de nous affranchir des difficultés liées à la condition de stabilité CFL, de stockage mémoire et de coût de calcul.

A contrario, les deux modèles approchés que nous allons construire présentent des différences dans leur façon de gérer la présence des inclusions. Le premier s'appuie sur une représentation du problème de diffraction comme perturbation d'un problème de propagation dans l'espace libre. Nous introduisons des inconnues auxiliaires artificielles vivant sur les inclusions, à la façon de la méthode des domaines fictifs [23, 49]. Ces inconnues peuvent être considérées comme des multiplicateurs de Lagrange volumiques. Le modèle approché est alors obtenu en réduisant l'espace fonctionnel dans lequel vivent ces multiplicateurs de Lagrange grâce à une méthode de Galerkin, basée sur l'analyse en champ proche effectuée au chapitre 3.

Le second modèle quand à lui s'appuie exclusivement sur une analyse en champ lointain de la solution  $u_\varepsilon$  du problème de diffraction. Il s'agit de régulariser le problème vérifié par l'ansatz de champ lointain tronqué à l'ordre 2.

Ce chapitre est organisé de la manière suivante : nous présentons successivement les deux modèles approchés que nous avons développés. Pour chacun de ces modèles, nous exposons sa construction dans le cas simplifié d'une unique inclusion afin de faciliter la lecture, puis nous présentons le modèle approché dans le cas général d'un nombre quelconque d'inclusions. Dans un deuxième temps, nous donnons des résultats établissant le caractère bien-posé de chacun de ces deux modèles, puis nous effectuons une analyse de convergence, afin d'établir que la solution de chacun des modèles approchés est une *bonne* approximation de la solution  $u_\varepsilon$  du problème exact (2.2.2).

## 4.1 UNE PREMIÈRE APPROCHE AVEC INCONNUE AUXILIAIRE PAR ANALYSE DU CHAMP PROCHE

Le premier modèle approché que nous proposons provient d'une idée relativement simple : il s'agit de considérer que le problème modèle (2.2.2) est une perturbation du problème sans inclusions. La perturbation fait intervenir la valeur de  $u_\varepsilon$ , que nous traitons selon une décomposition de Galerkin le long de certaines fonctions de bases, intervenant dans l'expression des termes de champ proche. Rappelons le problème initial étudié :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u_\varepsilon \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^+, L^2(\mathbb{R}^2)) \cap \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, D(\Delta_{\mu_\varepsilon})) \text{ tel que} \\ \rho_\varepsilon \partial_t^2 u_\varepsilon - \operatorname{div}(\mu_\varepsilon \nabla u_\varepsilon) = f(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, \quad t \in \mathbb{R}^+, \\ u_\varepsilon(\mathbf{x}, 0) = \partial_t u_\varepsilon(\mathbf{x}, 0) = 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, \end{array} \right. \quad (4.1.1)$$

où les paramètres physiques  $\rho_\varepsilon$  et  $\mu_\varepsilon$  présentent des discontinuités à la frontières des inclusions  $\omega_n^\varepsilon$  pour  $n \in \{1, \dots, N\}$ . Il s'agit alors d'écrire que  $u_\varepsilon$  est solution d'une équation d'ondes dans le milieu  $(\rho_0, \mu_0)$ , perturbée par la présence des petites inclusions.

Nous procédons dans cette section à un léger changement de notation, en comparaison des sections qui précèdent, concernant les paramètres physiques du problème.

### REMARQUE 4.1.1

Rappelons que les paramètres physiques du problème  $\mu_\varepsilon$  et  $\rho_\varepsilon$  sont définis par

$$\mu_\varepsilon(\mathbf{x}) = \begin{cases} \mu_0 & \text{si } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\bigcup_{n=1}^N \omega_\varepsilon^n}, \\ \mu_n & \text{si } \mathbf{x} \in \omega_\varepsilon^n, \end{cases} \quad \rho_\varepsilon(\mathbf{x}) = \begin{cases} \rho_0 & \text{si } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\bigcup_{n=1}^N \omega_\varepsilon^n}, \\ \rho_n & \text{si } \mathbf{x} \in \omega_\varepsilon^n. \end{cases}$$

Nous introduisons les  $2N$  constantes  $\theta_1, \dots, \theta_N, \delta_1, \dots, \delta_N$  qui sont telles que

$$\frac{1}{\mu_\varepsilon}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{1}{\mu_0} & \text{si } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\bigcup_{n=1}^N \omega_\varepsilon^n}, \\ \frac{1 + \theta_n}{\mu_0} & \text{si } \mathbf{x} \in \omega_\varepsilon^n, \end{cases} \quad \rho_\varepsilon(\mathbf{x}) = \begin{cases} \rho_0 & \text{si } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\bigcup_{n=1}^N \omega_\varepsilon^n}, \\ \rho_0(1 + \delta_n) & \text{si } \mathbf{x} \in \omega_\varepsilon^n. \end{cases}$$

Notons que ces constantes de contraste relatif sont définies de manière univoque, sont sans dimension, et sont données selon la formule explicite

$$\theta_n = \frac{\mu_0}{\mu_n} - 1 \quad \text{et} \quad \delta_n = \frac{\rho_n}{\rho_0} - 1.$$

Remarquons que puisque  $\mu_\varepsilon \geq 0$  et  $\rho_\varepsilon \geq 0$  sur  $\mathbb{R}^2$ , nécessairement  $\delta_n > -1$  et  $\theta_n > -1$  et ce pour tout  $n \in \{1, \dots, N\}$ . Notons également que le cas de figure où  $\delta_n = \theta_n = 0$  revient à supposer que la  $n$ -ème inclusion est vide (au sens où elle n'existe pas, elle se confond avec le milieu environnant).

L'intérêt de ce changement de notation (nous passons d'une notation *absolue* à une notation en contraste *relatifs*) apparaîtra quand nous chercherons à exprimer que le milieu avec inclusion est une perturbation du milieu de référence, caractérisé par les coefficients  $(\rho_0, \mu_0)$ .

Par souci de pédagogie, nous présentons le modèle approché dans le cas d'une inclusion unique puis dans le cas de  $N$  inclusions.

#### 4.1.1 Cas d'une inclusion unique et d'un contraste $\rho$ uniquement

Dans cette section uniquement, nous supposons que nous disposons d'une unique inclusion  $\omega_\varepsilon$ . Nous supposons que celle-ci est centrée en  $0 \in \mathbb{R}^2$  au sens où

$$\forall \varepsilon > 0, \quad 0 \in \omega_\varepsilon.$$

Nous notons  $\delta = \delta_1$  le contraste relatif du paramètre  $\rho_\varepsilon$  dans l'inclusion, de sorte que

$$\rho_\varepsilon(\mathbf{x}) = \begin{cases} \rho_0 & \text{si } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \setminus \omega_\varepsilon, \\ \rho_0(1 + \delta) & \text{si } \mathbf{x} \in \omega_\varepsilon, \end{cases}$$

et nous supposons que

$$\mu_\varepsilon(\mathbf{x}) = \mu_0(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2.$$

Ces hypothèses vont nous permettre d'exposer les idées conduisant à l'obtention du premier modèle approché. Nous généraliserons ensuite ceci au cas d'un nombre quelconque d'inclusions, avec un contraste de la rigidité  $\mu_\varepsilon$  à l'intérieur de chacune d'entre elles.

Notons  $\mathbf{1}_\varepsilon$  la fonction indicatrice de l'inclusion  $\omega_\varepsilon$  :

$$\mathbf{1}_\varepsilon(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{x} \in \omega_\varepsilon, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Avec les notations ci-dessus, le problème (4.1.1) est équivalent au problème

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_\varepsilon \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^+, L^2(\mathbb{R}^2)) \cap \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, D(\Delta_{\mu_0})) \text{ tel que} \\ \rho_0 \partial_t^2 u_\varepsilon + \rho_0 \delta \partial_t^2 u_\varepsilon \mathbf{1}_\varepsilon - \operatorname{div}(\mu_0 \nabla u_\varepsilon) = f(\mathbf{x}, t), & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, \quad t \in \mathbb{R}^+, \\ u_\varepsilon(\mathbf{x}, 0) = \partial_t u_\varepsilon(\mathbf{x}, 0) = 0, & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2. \end{cases} \quad (4.1.2)$$

##### 4.1.1.a Construction du modèle

L'idée de ce premier modèle approché est de considérer le terme  $\rho_0 \delta \partial_t^2 u_\varepsilon \mathbf{1}_\varepsilon$  comme une source auxiliaire du problème, couplée à l'inconnue  $u_\varepsilon$  du problème. Cette source vivant uniquement sur l'inclusion  $\omega_\varepsilon$ , elle peut-être approchée par les termes de champ proche issus de l'analyse asymptotique du problème.

Ainsi, nous introduisons une inconnue auxiliaire définie par

$$v_\varepsilon = \alpha u_\varepsilon \mathbf{1}_\varepsilon,$$

où  $\alpha \in \mathbb{R}$  est une constante non nulle dont nous préciserons la valeur ultérieurement. Nous allons réécrire le problème (4.1.2) en terme de l'inconnue  $(u_\varepsilon, v_\varepsilon)$ , puis nous procéderons à une décomposition de Galerkin sur  $v_\varepsilon$  le long des fonctions de champ proche. Nous constaterons qu'il existe une valeur critique de  $\alpha$ , dépendant uniquement de la valeur du contraste relatif  $\delta$ , pour laquelle une propriété de conservation d'énergie sera établie, ce qui sera fondamental afin d'établir des schémas numériques stables.

Notons

$$U = \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^+, L^2(\mathbb{R}^2)) \cap \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, D(\Delta_{\mu_0})) \quad \text{et} \quad V_\varepsilon = \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^+, L^2(\omega_\varepsilon)),$$

les espaces fonctionnels adaptés pour  $u_\varepsilon$  et  $v_\varepsilon$  respectivement.

Il est clair que le problème (4.1.2) est équivalent au problème

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (u_\varepsilon, v_\varepsilon) \in U \times V_\varepsilon \text{ tel que} \\ \rho_0 \partial_t^2 u_\varepsilon + \frac{\rho_0 \delta}{\alpha} \partial_t^2 v_\varepsilon - \operatorname{div}(\mu_0 \nabla u_\varepsilon) = f(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, \quad t \in \mathbb{R}^+, \\ v_\varepsilon = \alpha u_\varepsilon \mathbf{1}_\varepsilon, \quad \mathbf{x} \in \omega_\varepsilon, \quad t \in \mathbb{R}^+, \\ u_\varepsilon(\mathbf{x}, 0) = \partial_t u_\varepsilon(\mathbf{x}, 0) = 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2. \end{array} \right. \quad (4.1.3)$$

Nous considérons le problème (4.1.3) comme une équation d'ondes dans le milieu de référence  $(\rho_0, \mu_0)$ , perturbée par une source auxiliaire vivant uniquement sur l'inclusion, cette source étant elle-même couplée à l'inconnue  $u_\varepsilon$  de notre équation d'ondes.

En tant que tel, le problème (4.1.3) est strictement équivalent au problème (4.1.1). En effet, si  $u_\varepsilon$  est solution de (4.1.1), alors le couple  $(u_\varepsilon, v_\varepsilon)$  où  $v_\varepsilon$  est définie par

$$v_\varepsilon = \alpha u_\varepsilon \mathbf{1}_\varepsilon, \quad \mathbf{x} \in \omega_\varepsilon, \quad t > 0,$$

est solution du problème (4.1.3), tandis que la réciproque est également valide : si  $(u_\varepsilon, v_\varepsilon)$  est solution de (4.1.3), alors  $u_\varepsilon$  est solution du problème initial (4.1.1).

Afin de proposer un modèle approché du problème (4.1.3), nous le passons sous forme variationnelle. On montre selon une démarche classique qu'il est équivalent au problème

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (u_\varepsilon, v_\varepsilon) \in U \times V_\varepsilon \text{ tel que} \\ \frac{d^2}{dt^2} m(u_\varepsilon, \tilde{u}) + a(u_\varepsilon, \tilde{u}) + \frac{d^2}{dt^2} b_\varepsilon(v_\varepsilon, \tilde{u}) = F(\tilde{u}), \quad \forall t \in \mathbb{R}^+, \\ m_\varepsilon(v_\varepsilon, \tilde{v}) = b_\varepsilon(\tilde{v}, u_\varepsilon), \quad \forall t \in \mathbb{R}^+, \\ u_\varepsilon(0) = \partial_t u_\varepsilon(0) = 0, \quad \forall (\tilde{u}, \tilde{v}) \in H^1(\mathbb{R}^2) \times L^2(\omega_\varepsilon). \end{array} \right. \quad (4.1.4)$$

où les formes bilinéaires  $m$  et  $a$ , de masse et de rigidité respectivement, sont définies par

$$m : \left\{ \begin{array}{l} L^2(\mathbb{R}^2) \times L^2(\mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{R} \\ (u, \tilde{u}) \mapsto \rho_0 \int_{\mathbb{R}^2} u \tilde{u} \, d\mathbf{x}, \end{array} \right. \quad \text{et} \quad a : \left\{ \begin{array}{l} H^1(\mathbb{R}^2) \times H^1(\mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{R} \\ (u, \tilde{u}) \mapsto \mu_0 \int_{\mathbb{R}^2} \nabla u \cdot \nabla \tilde{u} \, d\mathbf{x}, \end{array} \right. \quad (4.1.5)$$

tandis que les formes bilinéaires  $m_\varepsilon$  et  $b_\varepsilon$  sont définies par

$$m_\varepsilon : \left\{ \begin{array}{l} L^2(\omega_\varepsilon) \times L^2(\omega_\varepsilon) \rightarrow \mathbb{R} \\ (v, \tilde{v}) \mapsto \frac{\rho_0 \delta}{\alpha^2} \int_{\omega_\varepsilon} v \tilde{v} \, d\mathbf{x} \end{array} \right. \quad \text{et} \quad b_\varepsilon : \left\{ \begin{array}{l} L^2(\mathbb{R}^2) \times L^2(\omega_\varepsilon) \rightarrow \mathbb{R} \\ (v, u) \mapsto \frac{\rho_0 \delta}{\alpha} \int_{\omega_\varepsilon} uv \, d\mathbf{x}. \end{array} \right.$$

Enfin, la forme linéaire  $F$  est définie par

$$F : \left\{ \begin{array}{l} L^2(\mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{R} \\ u \mapsto \int_{\mathbb{R}^2} uf \, d\mathbf{x} \end{array} \right. \quad (4.1.6)$$

Les formes bilinéaires  $m$  et  $a$  sont les formes de masse et de rigidité usuellement associées à l'équation des ondes acoustiques, tandis que  $m_\varepsilon$  est la forme de masse associée à l'espace  $V_\varepsilon$  et  $b_\varepsilon$  est une forme de couplage entre les espaces  $U$  et  $V_\varepsilon$ .

L'idée du premier problème approché que nous proposons est de remplacer l'espace  $V_\varepsilon$  par un espace de fonctions de la variable temporelle à valeurs dans un espace de dimension finie et petite, construit à partir du développement en champ proche issu de l'analyse asymptotique.

Nous allons utiliser l'analyse asymptotique effectuée dans la section précédente afin de proposer un modèle approché de (4.1.3), dans lequel nous remplacerons l'espace vectoriel de dimension infinie  $V_\varepsilon$  par un espace de dimension finie. Rappelons les résultats de l'analyse asymptotique, et en particulier la définition des termes de champ proche pour le cas d'une inclusion unique.

**Retour sur l'approximation de champ proche** En se référant à l'analyse asymptotique effectuée section 3, et précisément d'après le théorème 3.3.2, au voisinage de l'inclusion  $\omega_\varepsilon$ , le champ  $u_\varepsilon$  est approché par

$$(\mathbf{x}, t) \mapsto u_P(\mathbf{x}, t) = U_0\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}, t\right) + \varepsilon U_1\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}, t\right) + \varepsilon^2 U_2\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}, t\right)$$

où le terme de champ proche  $U_0$  est défini par  $U_0(\boldsymbol{\xi}, t) := u_0(0, t)$  pour  $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^2$ , tandis que  $U_1$  et  $U_2$  sont solutions des problèmes

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } t \mapsto U_1(t) \in W_{-1-\gamma}^1(\mathbb{R}^2), \quad \gamma \in ]0, 1[ \quad \text{tel que} \\ -\operatorname{div}(\mu \nabla U_1) = 0, \quad \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^2, \\ U_1(\boldsymbol{\xi}, t) \underset{|\boldsymbol{\xi}| \rightarrow \infty}{\sim} \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla u_0(0, t), \end{array} \right.$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } t \mapsto U_2(t) \in W_{-2-\gamma}^1(\mathbb{R}^2), \quad \gamma \in ]0, 1[ \quad \text{tel que} \\ -\operatorname{div}(\mu \nabla U_2) = -\rho \partial_t^2 U_0, \quad \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^2, \\ U_2(\boldsymbol{\xi}, t) \underset{|\boldsymbol{\xi}| \rightarrow \infty}{\sim} \sum_{|\alpha|=2} \frac{\boldsymbol{\xi}^\alpha}{\alpha!} \partial_{\mathbf{x}}^\alpha u_0(0, t), \end{array} \right.$$

la variable rapide  $\boldsymbol{\xi}$  étant définie par  $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{x}/\varepsilon$ .

Précisément, en vertu de l'équation (3.4.13),  $U_2$  est tel que

$$\left\{ \begin{array}{l} U_2(\boldsymbol{\xi}, t) := \psi(\boldsymbol{\xi}) \sum_{|\alpha|=2} \frac{\boldsymbol{\xi}^\alpha}{\alpha!} \partial_{\mathbf{x}}^\alpha u_0(0, t) + V_2(\boldsymbol{\xi}, t) \\ \text{où } V_2 \in W_{-\gamma}^1(\mathbb{R}^2), \gamma \in ]0, 1[; \text{ tel que} \\ -\operatorname{div}(\mu \nabla V_2) = -\chi(\boldsymbol{\xi}) \rho(\boldsymbol{\xi}) \partial_t^2 u_0(0, t) + \mu_0[\Delta, \psi] \sum_{|\alpha|=2} \partial_{\mathbf{x}}^\alpha u_0(0, t) \frac{\boldsymbol{\xi}^\alpha}{\alpha!}. \end{array} \right.$$

Nous avons montré, en vertu de l'équation (3.4.14) que

$$V_2(\boldsymbol{\xi}, t) - \Pi'_0(V_2(\cdot, t))(2\pi\mu_0)^{-1} \ln |\boldsymbol{\xi}| - \Pi_0(V_2(\cdot, t)) \in W_\gamma^1(\mathbb{R}^2),$$

où  $\Pi'_0(V_2(\cdot, t))$  et  $\Pi_0(V_2(\cdot, t))$  sont des fonctions du temps, définies au paragraphe 3.4.3.

A présent, nous cherchons un espace de dimension finie  $X_\varepsilon \subset L^2(\omega_\varepsilon)$  tel que pour tout temps  $t > 0$ , nous ayons

$$U_i(t) \in X_\varepsilon, \quad i = 0, 1, 2.$$

Introduisons la fonction  $W_0$  constante égale à 1 sur  $\mathbb{R}^2$ , que nous pouvons également appréhender comme étant solution du problème

$$\left\{ \begin{array}{l} W_0 \in W_{-\gamma}^1(\mathbb{R}^2), \quad \gamma \in ]0, 1[ \quad \text{tel que} \\ -\operatorname{div}(\mu \nabla W_0) = 0, \quad \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^2, \\ W_0(\boldsymbol{\xi}) \underset{|\boldsymbol{\xi}| \rightarrow \infty}{\sim} 1. \end{array} \right.$$

Ce problème a une unique solution en vertu de la proposition 3.2.16. Nous introduisons également les fonctions  $W_{1,1}$  et  $W_{1,2}$ , solutions respectivement des problèmes

$$\left\{ \begin{array}{l} W_{1,1} \in W_{-1-\gamma}^1(\mathbb{R}^2), \quad \gamma \in ]0, 1[ \quad \text{tel que} \\ -\operatorname{div}(\mu \nabla W_{1,1}) = 0, \quad \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^2, \\ W_{1,1}(\boldsymbol{\xi}) \underset{|\boldsymbol{\xi}| \rightarrow \infty}{\sim} \boldsymbol{\xi}^1, \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} W_{1,2} \in W_{-1-\gamma}^1(\mathbb{R}^2), \quad \gamma \in ]0, 1[ \quad \text{tel que} \\ -\operatorname{div}(\mu \nabla W_{1,2}) = 0, \quad \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^2, \\ W_{1,2}(\boldsymbol{\xi}) \underset{|\boldsymbol{\xi}| \rightarrow \infty}{\sim} \boldsymbol{\xi}^2, \end{array} \right.$$

où nous avons noté  $\boldsymbol{\xi} = (\boldsymbol{\xi}^1, \boldsymbol{\xi}^2)$  les coordonnées de  $\boldsymbol{\xi}$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}^2$ . En tant que telles, les fonctions  $W_{1,1}$  et  $W_{1,2}$  sont définies à une constante près, et ce en vertu de la proposition 3.2.16. Nous imposons que

$$W_{1,i} - \boldsymbol{\xi}^i \underset{|\boldsymbol{\xi}| \rightarrow \infty}{\rightarrow} 0, \quad i = 1, 2,$$

ce qui fixe les constantes indéterminées à 0.

Enfin, pour finir, nous définissons les fonctions de profil d'ordre 2. Introduisons  $W_{2,1}$  et  $W_{2,2}$  définies comme les solutions des problèmes

$$\left\{ \begin{array}{l} W_{2,1} \in W_{-2-\gamma}^1(\mathbb{R}^2), \quad \gamma \in ]0, 1[ \quad \text{tel que} \\ -\operatorname{div}(\mu \nabla W_{2,1}) = 0, \quad \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^2, \\ W_{2,1}(\boldsymbol{\xi}) \underset{|\boldsymbol{\xi}| \rightarrow \infty}{\sim} \boldsymbol{\xi}_1^2 - \boldsymbol{\xi}_2^2, \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} W_{2,2} \in W_{-2-\gamma}^1(\mathbb{R}^2), \quad \gamma \in ]0, 1[ \quad \text{tel que} \\ -\operatorname{div}(\mu \nabla W_{2,2}) = 0, \quad \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^2, \\ W_{2,2}(\boldsymbol{\xi}) \underset{|\boldsymbol{\xi}| \rightarrow \infty}{\sim} \boldsymbol{\xi}_1 \boldsymbol{\xi}_2. \end{array} \right.$$

(4.1.7)

Notons que les comportements prescrits pour  $W_{2,1}$  et  $W_{2,2}$  au voisinage de l'infini sont donnés par deux polynômes harmoniques de degré 2 linéairement indépendants.

Introduisons une dernière fonction de profil, que nous noterons  $W_{2,0}$ , définie comme la solution du problème

$$\begin{cases} W_{2,0} \in W_{-2-\gamma}^1(\mathbb{R}^2), \quad \gamma \in ]0, 1[ \quad \text{tel que} \\ -\operatorname{div}(\mu \nabla W_{2,0}) = -\rho(\boldsymbol{\xi}), \quad \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^2, \\ W_{2,0}(\boldsymbol{\xi}) \underset{|\boldsymbol{\xi}| \rightarrow \infty}{\sim} -\frac{\rho_0}{4\mu_0} (\boldsymbol{\xi}_1^2 + \boldsymbol{\xi}_2^2) - \frac{\rho}{2\pi\mu_0} \ln |\boldsymbol{\xi}|. \end{cases} \quad (4.1.8)$$

Les fonctions  $W_0$ ,  $W_{1,1}$ ,  $W_{1,2}$ ,  $W_{2,0}$ ,  $W_{2,1}$  et  $W_{2,2}$  sont des fonctions de profil, dépendant uniquement de l'espace, et révélant un certain nombre d'informations à propos de l'inclusion  $\omega$ . A nouveau, les fonctions  $W_{2,i}$  pour  $i = 0, 1, 2$  ne sont pas entièrement déterminées par les problèmes (4.1.7) et (4.1.8). Il est en effet nécessaire de spécifier les comportements linéaires, logarithmiques et constants de chacune d'entre elles au voisinage de l'infini.

A cet effet, nous imposons que

$$W_{2,0} + \frac{\rho_0}{4\mu_0} (\boldsymbol{\xi}_1^2 + \boldsymbol{\xi}_2^2) \rightarrow 0, \quad W_{2,1}(\boldsymbol{\xi}) - (\boldsymbol{\xi}_1^2 - \boldsymbol{\xi}_2^2) \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad W_{2,2}(\boldsymbol{\xi}) - \boldsymbol{\xi}_1 \boldsymbol{\xi}_2 \rightarrow 0$$

quand  $|\boldsymbol{\xi}| \rightarrow \infty$ .

La construction de ces fonctions de profil est hiérarchique :  $W_0$  admet un comportement constant au voisinage de l'infini, les  $W_{1,i}$  admettent des comportements linéaires tandis que les et  $W_{2,j}$  sont quadratiques au voisinage de l'infini.

Alors les résultats fournis par la méthode des développements asymptotiques raccordés montrent qu'à tout temps  $t \geq 0$ , le champ proche

$$u_P(\cdot, t) \in \operatorname{vect} \langle W_0, W_{1,1}, W_{1,2}, W_{2,0}, W_{2,1}, W_{2,2} \rangle.$$

En effet, nous avons

$$U_0(\boldsymbol{\xi}, t) = u_0(0, t)W_0(\boldsymbol{\xi}), \quad U_1(\boldsymbol{\xi}, t) = \nabla u_0(0, t) \cdot \begin{pmatrix} W_{1,1}(\boldsymbol{\xi}) \\ W_{1,2}(\boldsymbol{\xi}) \end{pmatrix}$$

et enfin

$$U_2(\boldsymbol{\xi}, t) = \frac{1}{4} \partial_t^2 u_0(0, t) \left[ W_{2,0}(\boldsymbol{\xi}) + \frac{2}{\pi} \frac{\rho\mu_0}{\ln} \varepsilon W_0(\boldsymbol{\xi}) \right] + \frac{1}{4} (\partial_x^2 - \partial_y^2) u_0(0, t) W_{2,1}(\boldsymbol{\xi}) + \frac{1}{2} \partial_{xy}^2 u_0(0, t) W_{2,2}(\boldsymbol{\xi}),$$

Notons

$$X_\varepsilon = \operatorname{vect} \langle W_0, W_{1,1}, W_{1,2}, W_{2,0}, W_{2,1}, W_{2,2} \rangle, \quad (4.1.9)$$

Étant donné que les polynômes  $1$ ,  $\boldsymbol{\xi}_1$ ,  $\boldsymbol{\xi}_2$  et  $\boldsymbol{\xi}_1^2 - \boldsymbol{\xi}_2^2$ ,  $\boldsymbol{\xi}_1 \boldsymbol{\xi}_2$  et  $\boldsymbol{\xi}_1^2 + \boldsymbol{\xi}_2^2$  forment une famille libre de l'espace vectoriel des polynômes réels à deux indéterminées, nous avons le résultat suivant

**PROPOSITION 4.1.2**

<sup>1</sup> La famille  $\{W_0, W_{1,1}, W_{1,2}, W_{2,0}, W_{2,1}, W_{2,2}\}$  est libre dans l'espace vectoriel des fonctions

mesurables de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{C}$ . En particulier,  $\{W_0, W_{1,1}, W_{1,2}, W_{2,0}, W_{2,1}, W_{2,2}\}$  est une base de  $X_\varepsilon$ .

L'idée est de chercher l'inconnue auxiliaire  $v_\varepsilon$ , qui est, à une constante multiplicative près, la restriction du champ  $u_\varepsilon$  sur l'inclusion  $\omega_\varepsilon$ , dans l'espace  $X_\varepsilon$  qui est de dimension 6 et qui contient moralement l'information spatiale associée au champ proche tronqué à l'ordre 2.

Nous proposons donc le problème approché suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (u_\varepsilon, v_\varepsilon) \in U \times \mathcal{C}(\mathbb{R}^+, X_\varepsilon) \text{ tel que} \\ \frac{d^2}{dt^2} m(u_\varepsilon, \tilde{u}) + a(u_\varepsilon, \tilde{u}) + \frac{d^2}{dt^2} b_\varepsilon(v_\varepsilon, \tilde{u}) = F(\tilde{u}), \quad \forall t \in \mathbb{R}^+, \\ m_\varepsilon(v_\varepsilon, \tilde{v}) = b_\varepsilon(\tilde{v}, u_\varepsilon), \quad \forall t \in \mathbb{R}^+, \\ u_\varepsilon(0) = \partial_t u_\varepsilon(0) = 0, \quad \forall (\tilde{u}, \tilde{v}) \in H^1(\mathbb{R}^2) \times X_\varepsilon. \end{array} \right. \quad (4.1.10)$$

On remarquera que le problème approché ci-dessus présente la particularité de faire intervenir une équation d'évolution, qui est en réalité une équation d'onde dans l'espace libre perturbée, tandis que la seconde équation est purement statique.

#### 4.1.1.b Analyse de consistance et de stabilité

En tant que tel, le problème (4.1.4) est équivalent au problème (4.1.3) et donc au problème (4.1.1). En terme d'application au calcul numérique d'une approximation de la solution  $u_\varepsilon$  du problème exact (4.1.3), la difficulté décrite paragraphe 1.3 peut se comprendre au travers du fait que l'espace  $V_\varepsilon$  intervenant dans (4.1.4) est de dimension infinie.

Nous commençons par introduire un résultat de conservation d'énergie pour le problème approché (4.1.10). Pour une fonction  $v \in L^2(\omega_\varepsilon)$ , nous notons  $\underline{v}$  son prolongement par 0 à  $\mathbb{R}^2$  tout entier, défini par

$$\underline{v}(\mathbf{x}) = \begin{cases} v(\mathbf{x}) & \text{si } \mathbf{x} \in \omega_\varepsilon, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Introduisons l'énergie  $E$  associée au problème (4.1.10), définie pour  $t \geq 0$  par

$$E(t) := \frac{1}{2} [m(\dot{u}_\varepsilon + \underline{\dot{v}}_\varepsilon, \dot{u}_\varepsilon + \underline{\dot{v}}_\varepsilon) + a(u_\varepsilon, u_\varepsilon)], \quad (4.1.11)$$

où nous avons noté  $\dot{u} = du/dt$  pour une fonction  $u$  de la variable temporelle. Nous avons le résultat de stabilité suivant, qui nous permet de fixer la valeur du paramètre  $\alpha$ , laissé indéterminé jusqu'à présent :

#### PROPOSITION 4.1.3 (*Estimation d'énergie a priori*)

Supposons que le problème (4.1.10) admette une solution  $(u_\varepsilon, v_\varepsilon)$ . Si le paramètre  $\alpha$  est choisi de telle manière que

$$\alpha = \pm\sqrt{1 + \delta} - 1,$$

alors l'énergie  $E$  associée au problème (4.1.10) et définie par (4.1.11) est conservée au

cours du temps, c'est-à-dire que si le terme source  $f$  est nul, alors

$$\frac{dE}{dt}(t) = 0, \quad \forall t \geq 0.$$

**REMARQUE 4.1.4**

Notons que comme  $\delta \geq -1$  pour les raisons exposées suite à la remarque 4.1.1,  $\alpha$  est un nombre réel correctement défini.

DÉMONSTRATION : Choisissons  $\tilde{u} = \dot{u}_\varepsilon$  dans la première équation de (4.1.10). Nous obtenons

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} [m(\dot{u}_\varepsilon, \dot{u}_\varepsilon) + a(u_\varepsilon, u_\varepsilon)] + b_\varepsilon(\ddot{v}_\varepsilon, \dot{u}_\varepsilon) = 0. \quad (4.1.12)$$

Dérivons par rapport au temps la seconde équation de (4.1.10) et choisissons  $\tilde{v} = \ddot{v}_\varepsilon$  pour obtenir

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} m_\varepsilon(\dot{v}_\varepsilon, \dot{v}_\varepsilon) = b_\varepsilon(\ddot{v}_\varepsilon, \dot{u}_\varepsilon). \quad (4.1.13)$$

L'idée est de calibrer le paramètre  $\alpha$  de telle sorte que les termes en  $m_\varepsilon$  et en  $b_\varepsilon$  s'incorporent au terme de masse global, faisant intervenir la forme bilinéaire  $m$ . Multiplions l'équation (4.1.13) par  $\alpha^2/\delta$  et sommons avec l'équation (4.1.12) : nous obtenons que

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[ m(\dot{u}_\varepsilon, \dot{u}_\varepsilon) + a(u_\varepsilon, u_\varepsilon) + \frac{\alpha^2}{\delta} m_\varepsilon(\dot{v}_\varepsilon, \dot{v}_\varepsilon) \right] + \left( 1 - \frac{\alpha^2}{\delta} \right) b_\varepsilon(\ddot{v}_\varepsilon, \dot{u}_\varepsilon) = 0.$$

Par ailleurs, en dérivant deux fois par rapport au temps la seconde équation de (4.1.10) et choisissant  $\tilde{v} = \dot{v}_\varepsilon$ , nous observons que

$$b(\ddot{v}_\varepsilon, \dot{u}_\varepsilon) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} m_\varepsilon(\dot{v}_\varepsilon, \dot{v}_\varepsilon) = b(\dot{v}_\varepsilon, \ddot{u}_\varepsilon) \quad (4.1.14)$$

Ainsi, étant donné que

$$\frac{\alpha^2}{\delta} m_\varepsilon(\dot{v}_\varepsilon, \dot{v}_\varepsilon) = \int_{\omega_\varepsilon} \rho_0 |\dot{v}_\varepsilon|^2 d\mathbf{x},$$

et que (en utilisant (4.1.14))

$$\begin{aligned} \left( 1 - \frac{\alpha^2}{\delta} \right) b_\varepsilon(\ddot{v}_\varepsilon, \dot{u}_\varepsilon) &= \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\alpha^2}{\delta} \right) (b_\varepsilon(\ddot{v}_\varepsilon, \dot{u}_\varepsilon) + b_\varepsilon(\dot{v}_\varepsilon, \ddot{u}_\varepsilon)) \\ &= \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\alpha^2}{\delta} \right) \frac{\delta}{\alpha} \frac{d}{dt} \int_{\omega_\varepsilon} \rho_0 \dot{v}_\varepsilon \dot{u}_\varepsilon d\mathbf{x}, \end{aligned}$$

il suffit de choisir  $\alpha$  tel que

$$\left( 1 - \frac{\alpha^2}{\delta} \right) \frac{\delta}{\alpha} = 2 \quad (4.1.15)$$

pour que l'on obtienne au final l'égalité annoncée, à savoir

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} [m(\dot{u}_\varepsilon + \underline{\dot{v}}_\varepsilon, \dot{u}_\varepsilon + \underline{\dot{v}}_\varepsilon) + a(u_\varepsilon, u_\varepsilon)] = 0.$$

L'équation (4.1.15) est satisfaite si et seulement si  $\delta/\alpha - \alpha = 2$ , soit si et seulement si  $\alpha = -1 \pm \sqrt{1 + \delta}$ .

La proposition précédente nous fournit une condition sur le paramètre  $\alpha$  sous laquelle le problème approché (4.1.10) satisfait une estimation d'énergie a priori. Cette estimation a priori va nous permettre de montrer le caractère bien posé du problème (4.1.10).

**PROPOSITION 4.1.5**

Le problème (4.1.10) admet une unique solution  $(u_\varepsilon, v_\varepsilon)$ , et ce pour tout  $\varepsilon \geq 0$ . Par ailleurs, il existe une constante  $C > 0$  telle que  $\forall t \geq 0$  et  $\forall \varepsilon \geq 0$ , on ait

$$\sqrt{\int_{\mathbb{R}^2} \rho_0 \left| \frac{\partial(u_\varepsilon + v_\varepsilon)}{\partial t} \right|^2(\mathbf{x}, t) + \mu_0 |\nabla u_\varepsilon|^2(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}} \leq C \int_0^t \sqrt{\int_{\mathbb{R}^2} |f(\mathbf{x}, \tau)|^2 d\mathbf{x}} d\tau. \quad (4.1.16)$$

DÉMONSTRATION : Nous donnons ici les grandes lignes de la démonstration. De l'estimation d'énergie a priori dans le cas d'un second membre nul établie proposition 4.1.3, nous déduisons l'estimation a priori (4.1.16) selon une démarche similaire à celle adoptée dans la preuve de la proposition 2.2.2, l'argument sous-jacent étant l'utilisation du lemme de Gronwall (ou plus simplement l'intégration d'une inéquation différentielle).

A partir de l'estimation a priori (4.1.16), l'existence d'un couple solution  $(u_\varepsilon, v_\varepsilon)$  se démontre en construisant une approximation de Galerkin de la solution. Cette approche est explicitée en détail dans de nombreuses références comme par exemple [42, Paragraphe 7.2.2].

L'unicité de la solution est une conséquence de la linéarité du problème (4.1.10) et de l'estimation d'énergie (4.1.16) : si  $f = 0$  alors nécessairement  $\nabla u_\varepsilon = 0$  dans  $\mathbb{R}^2$  à chaque instant, donc  $u_\varepsilon$  est constante à chaque instant et  $u_\varepsilon = -v_\varepsilon$  dans  $\omega_\varepsilon$ , mais comme  $u \in H^1(\mathbb{R}^2)$  alors  $u_\varepsilon = v_\varepsilon = 0$ .

Notons que l'estimation a priori obtenue dans le résultat précédent est fortement similaire à celle établie proposition 2.2.2, et constitue un résultat de stabilité de la solution  $(u_\varepsilon, v_\varepsilon)$  relativement à  $\varepsilon$  (la famille  $(u_\varepsilon, v_\varepsilon)_{\varepsilon \geq 0}$  est uniformément bornée dans la norme d'énergie).

Le prochain résultat que nous présentons indique que la solution du problème approché (4.1.10) est une bonne approximation de la solution du problème exact. Avant cela, rappelons le problème exact sous considération (rappelons que nous supposons que  $\mu_\varepsilon = \mu_0$ )

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_\varepsilon \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^+, L^2(\mathbb{R}^2)) \cap \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, D(\Delta_{\mu_0})) \text{ tel que} \\ \rho_\varepsilon \partial_t^2 u_\varepsilon - \operatorname{div}(\mu_0 \nabla u_\varepsilon) = f(\mathbf{x}, t), & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, t \in \mathbb{R}^+, \\ u_\varepsilon(\mathbf{x}, 0) = \partial_t u_\varepsilon(\mathbf{x}, 0) = 0, & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2. \end{cases} \quad (4.1.17)$$

Ce problème est équivalent, nous l'avons vu, au problème

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (u_\varepsilon, v_\varepsilon) \in U \times V_\varepsilon \text{ tel que} \\ \frac{d^2}{dt^2} m(u_\varepsilon, \tilde{u}) + a(u_\varepsilon, \tilde{u}) + \frac{d^2}{dt^2} b_\varepsilon(v_\varepsilon, \tilde{u}) = F(\tilde{u}), \quad \forall t \in \mathbb{R}^+, \\ m_\varepsilon(v_\varepsilon, \tilde{v}) = b_\varepsilon(\tilde{v}, u_\varepsilon), \quad \forall t \in \mathbb{R}^+, \\ u_\varepsilon(0) = \partial_t u_\varepsilon(0) = 0, \quad \forall (\tilde{u}, \tilde{v}) \in H^1(\mathbb{R}^2) \times L^2(\omega_\varepsilon). \end{array} \right. \quad (4.1.18)$$

où  $m$ ,  $a$  et  $F$  sont définis par les équations (4.1.5) et (4.1.6) respectivement. Ainsi, en dérivant deux fois par rapport au temps la seconde équation de (4.1.18), le problème modèle (4.1.18) peut se mettre sous la forme

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (u_\varepsilon, v_\varepsilon) \in U \times V_\varepsilon \text{ tel que} \\ \frac{d^2}{dt^2} M_\varepsilon((u_\varepsilon, v_\varepsilon), (\tilde{u}, \tilde{v})) + A((u_\varepsilon, v_\varepsilon), (\tilde{u}, \tilde{v})) = \begin{pmatrix} F(\tilde{u}) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \forall t \in \mathbb{R}^+, \\ u_\varepsilon(0) = \partial_t u_\varepsilon(0) = 0, \quad \forall (\tilde{u}, \tilde{v}) \in H^1(\mathbb{R}^2) \times L^2(\omega_\varepsilon), \end{array} \right. \quad (4.1.19)$$

où  $M_\varepsilon$  et  $A : H^1(\mathbb{R}^2) \times L^2(\omega_\varepsilon) \times H^1(\mathbb{R}^2) \times L^2(\omega_\varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^2$  sont définies respectivement par

$$M_\varepsilon((u, v), (\tilde{u}, \tilde{v})) = \begin{pmatrix} m(u, \tilde{u}) + b_\varepsilon(v, \tilde{u}) \\ m_\varepsilon(v, \tilde{v}) - b_\varepsilon(\tilde{v}, u) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A((u, v), (\tilde{u}, \tilde{v})) = \begin{pmatrix} a(u, \tilde{u}) \\ 0 \end{pmatrix},$$

tandis que le problème approché (4.1.10) est équivalent à

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (u_\varepsilon, v_\varepsilon) \in U \times \mathcal{C}(\mathbb{R}^+, X_\varepsilon) \text{ tel que} \\ \frac{d^2}{dt^2} M_\varepsilon((u_\varepsilon, v_\varepsilon), (\tilde{u}, \tilde{v})) + A((u_\varepsilon, v_\varepsilon), (\tilde{u}, \tilde{v})) = \begin{pmatrix} F(\tilde{u}) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \forall t \in \mathbb{R}^+, \\ u_\varepsilon(0) = \partial_t u_\varepsilon(0) = 0, \quad \forall (\tilde{u}, \tilde{v}) \in H^1(\mathbb{R}^2) \times X_\varepsilon. \end{array} \right. \quad (4.1.20)$$

Avant d'aborder l'estimation d'erreur pour ce premier modèle approché, commençons par donner un lemme concernant la continuité de  $M_\varepsilon$ , qui découle immédiatement de la définition des formes mises en jeu.

**LEMME 4.1.6 (Continuité des formes variationnelles)**

- Les applications  $m : L^2(\mathbb{R}^2)^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $m_\varepsilon : L^2(\omega_\varepsilon)^2 \rightarrow \mathbb{R}$  et  $b_\varepsilon : H^1(\mathbb{R}^2) \times L^2(\omega_\varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$  sont continues. Précisément il existe une constante  $\kappa > 0$  et  $\varepsilon_0 > 0$  telle que pour tout  $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0[$ , on ait

$$\|m\| \leq \kappa, \quad \|m_\varepsilon\| \leq \kappa, \quad \|b_\varepsilon\| \leq \kappa.$$

- L'application  $M_\varepsilon : (H^1(\mathbb{R}^2) \times L^2(\omega_\varepsilon))^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  est continue. Précisément, il existe une constante  $C > 0$  et  $\varepsilon_0 > 0$  telle que pour tout  $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0[$ , on ait

$$|M_\varepsilon((u, v), (\tilde{u}, \tilde{v}))| \leq C \|(u, v)\|_{H^1(\mathbb{R}^2) \times L^2(\omega_\varepsilon)} \|(\tilde{u}, \tilde{v})\|_{H^1(\mathbb{R}^2) \times L^2(\omega_\varepsilon)},$$

et ce pour tout couples  $(u, v), (\tilde{u}, \tilde{v}) \in H^1(\mathbb{R}^2) \times L^2(\omega_\varepsilon)$ .

Le point important dans le résultat précédent et qui nous sera utile par la suite est l'aspect **borné uniformément en  $\varepsilon$**  de  $M_\varepsilon$ . Nous pouvons aborder le résultat concernant l'erreur de consistance du premier modèle.

**THÉORÈME 4.1.7** (*Estimation d'erreur pour le premier modèle*)

Soit  $u_\varepsilon$  la solution du problème (4.1.17) et  $(\tilde{u}_\varepsilon, \tilde{v}_\varepsilon)$  la solution du problème approché (4.1.10). Pour tout temps  $T > 0$  et pour tout  $\eta > 0$ , il existe deux constantes  $C_\eta = C(T, \eta) > 0$  et  $\varepsilon_0 > 0$  telles que pour tout  $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0[$ , on ait l'estimation

$$\sup_{t \in [0, T]} [\|\partial_t u_\varepsilon - \partial_t \tilde{u}_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \|\nabla u_\varepsilon - \nabla \tilde{u}_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}] \leq C_\eta \varepsilon^{3-\eta}, \quad \forall \varepsilon \in [0, \varepsilon_0[.$$

DÉMONSTRATION : Deux approches sont possibles pour montrer ce résultat :

- Montrer que les équations de champ lointain et de champ proche associées au problème approché (4.1.10) sont identiques aux équations de champ lointain et de champ proche pour le problème exact (4.1.18) jusqu'à l'ordre 2, ce qui montrera l'estimation annoncée, puisqu'il suffira alors de reprendre la preuve du théorème 3.5.1 pour conclure.
- Une deuxième approche, plus directe, qui consiste à montrer un résultat de consistance puis de stabilité, comme dans la démonstration du théorème 3.5.1. C'est cette deuxième approche qui est présentée ici.

Notons  $w_\varepsilon = (u_\varepsilon, v_\varepsilon)$  la solution du problème exact (4.1.19) et  $\tilde{w}_\varepsilon = (\tilde{u}_\varepsilon, \tilde{v}_\varepsilon)$  la solution du problème approché (4.1.20). Nous cherchons un contrôle de la différence  $w_\varepsilon - \tilde{w}_\varepsilon$  en fonction de  $\varepsilon$ .

A cette fin, introduisons  $\hat{v}_\varepsilon$  le projeté orthogonal de  $v_\varepsilon$  sur l'espace d'approximation  $X_\varepsilon$  pour le produit scalaire de  $L^2(\omega_\varepsilon)$ , caractérisé par

$$\langle v_\varepsilon - \hat{v}_\varepsilon, v' \rangle_{L^2(\omega_\varepsilon)} = 0$$

pour toute fonction test  $v' \in X_\varepsilon$ .

Notons  $\hat{w}_\varepsilon = (u_\varepsilon, \hat{v}_\varepsilon) \in H^1(\mathbb{R}^2) \times X_\varepsilon$ , qui peut-être vu comme le projeté orthogonal de  $w_\varepsilon$  sur l'espace produit  $H^1(\mathbb{R}^2) \times X_\varepsilon$ .

La preuve peut se décomposer en trois étapes. Dans un premier temps, nous contrôlons la norme de  $\tilde{w}_\varepsilon - \hat{w}_\varepsilon$  par la norme de  $w_\varepsilon - \hat{w}_\varepsilon$  grâce à une estimation d'énergie. Dans un deuxième temps, nous contrôlons  $w_\varepsilon - \hat{w}_\varepsilon$  grâce aux propriétés de l'opérateur de projection orthogonale. Nous pourrions alors conclure en utilisant l'inégalité triangulaire.

Soit  $w' \in H^1(\mathbb{R}^2) \times X_\varepsilon$  une fonction test. En vertu de la décomposition  $\tilde{w}_\varepsilon - \hat{w}_\varepsilon = \tilde{w}_\varepsilon - w_\varepsilon + w_\varepsilon - \hat{w}_\varepsilon$ , il vient

$$\frac{d^2}{dt^2} M_\varepsilon(\tilde{w}_\varepsilon - \hat{w}_\varepsilon, w') + A(\tilde{w}_\varepsilon - \hat{w}_\varepsilon, w') = \frac{d^2}{dt^2} M_\varepsilon(w_\varepsilon - \hat{w}_\varepsilon, w').$$

En vertu de l'estimation d'énergie (4.1.16) et de la continuité de la forme bilinéaire  $M_\varepsilon$  établie lemme 4.1.6, nous obtenons l'existence d'une constante  $C > 0$  telle que

$$\sup_{t \in [0, T]} (\|\partial_t(u_\varepsilon - \tilde{u}_\varepsilon + v_\varepsilon - \tilde{v}_\varepsilon)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \|\nabla(u_\varepsilon - \tilde{u}_\varepsilon)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}) \leq C \|\partial_t^2(w_\varepsilon - \hat{w}_\varepsilon)\|_{L^1(0, T, L^2(\mathbb{R}^2) \times X_\varepsilon)}. \quad (4.1.21)$$

Or *dérivation en temps et projection orthogonale commutent* (c'est une conséquence directe de la continuité de l'opérateur de projection), c'est-à-dire que  $\partial_t^2 \hat{v}_\varepsilon = \widehat{\partial_t^2 v_\varepsilon}$ , pour tout  $t \geq 0$ ,

de sorte que  $\partial_t^2 \widehat{w}_\varepsilon$  est le projeté orthogonal de  $\partial_t^2 w_\varepsilon$  sur  $H^1(\mathbb{R}^2) \times X_\varepsilon$ . Par définition de la projection orthogonale, nous avons

$$\|\partial_t^2(w_\varepsilon(t) - \widehat{w}_\varepsilon(t))\|_{H^1(\mathbb{R}^2) \times L^2(\omega_\varepsilon)} = \inf_{\tilde{w} \in H^1(\mathbb{R}^2) \times X_\varepsilon} \|\partial_t^2 w_\varepsilon(t) - \tilde{w}\|_{H^1(\mathbb{R}^2) \times L^2(\omega_\varepsilon)}.$$

Or l'espace  $X_\varepsilon$  a été construit de sorte que si  $z_\varepsilon(t)$  désigne l'ansatz de champ proche d'ordre 2 associé à  $u_\varepsilon(t)$  à  $t \geq 0$  fixé, défini par

$$z_\varepsilon(\mathbf{x}, t) = \sum_{n=0}^2 \varepsilon^n U_n(x/\varepsilon, t),$$

alors  $w'_\varepsilon(t) = (u_\varepsilon(t), z_\varepsilon(t)) \in H^1(\mathbb{R}^2) \times X_\varepsilon$  (voir équation (4.1.9)).

Ainsi, en vertu de l'estimation d'erreur entre  $u_\varepsilon$  et son développement asymptotique raccordé (voir le théorème 3.3.1 et la remarque 3.5.3), on a, pour tout  $\eta > 0$ , l'existence de deux constantes  $C_\eta > 0$  et  $\varepsilon_0 > 0$  telles que

$$\inf_{\tilde{w} \in H^1(\mathbb{R}^2) \times X_\varepsilon} \|\partial_t^2 w_\varepsilon(t) - \tilde{w}\|_{H^1(\mathbb{R}^2) \times L^2(\omega_\varepsilon)} \leq \|\partial_t^2(w_\varepsilon(t) - w'_\varepsilon)\|_{H^1(\mathbb{R}^2) \times L^2(\omega_\varepsilon)} \leq C_\eta \varepsilon^{3-\eta},$$

et ce pour tout  $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0[$  et tout temps  $0 \leq t \leq T$ .

A partir d'ici, nous continuons à noter  $C_\eta$  des constantes strictement positives indépendantes de  $\varepsilon$  dont la valeur est susceptible de changer d'une ligne à l'autre.

En réinjectant dans l'équation (4.1.21), on a l'existence de  $C_\eta > 0$  telle que

$$\sup_{t \in [0, T]} (\|\partial_t(u_\varepsilon - \tilde{u}_\varepsilon + \underline{v}_\varepsilon - \underline{\tilde{v}}_\varepsilon)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \|\nabla(u_\varepsilon - \tilde{u}_\varepsilon)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}) \leq C_\eta \varepsilon^{3-\eta},$$

et ce pour tout  $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0[$ . Nous ne pouvons conclure immédiatement quand à la validité de l'estimation annoncée dans la proposition, à cause du terme

$$\|\partial_t(u_\varepsilon - \tilde{u}_\varepsilon + \underline{v}_\varepsilon - \underline{\tilde{v}}_\varepsilon)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}.$$

Pour achever la preuve, il est possible d'appliquer le même raisonnement que ce qui précède à la dérivée première des équations définissant le modèle exact et le modèle approché, afin de parvenir à une estimation de la forme

$$\sup_{t \in [0, T]} \|\nabla \partial_t(u_\varepsilon - \tilde{u}_\varepsilon)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq C_\eta \varepsilon^{3-\eta},$$

puis d'utiliser l'inégalité de Poincaré pour parvenir à une estimation du type

$$\sup_{t \in [0, T]} \|\partial_t(u_\varepsilon - \tilde{u}_\varepsilon)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq C_\eta \varepsilon^{3-\eta}.$$

L'utilisation de l'inégalité de Poincaré est ici légitime pour la raison suivante : la source  $f$  est supposée à support compact en espace, et l'équation des ondes jouit alors de la propriété de propagation à vitesse finie. Ainsi, pour tout temps  $t \in [0, T]$ ,  $(u_\varepsilon - \tilde{u}_\varepsilon)(t) \in H_0^1(\Omega_T)$  où  $\Omega_T$  est une boule dont le rayon croît linéairement avec  $T$  et est suffisamment grand pour que

$$(u_\varepsilon - \tilde{u}_\varepsilon)(t) = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega_T,$$

et l'utilisation de l'inégalité de Poincaré sur  $\Omega_T$  est valide. Ceci achève la preuve.  $\square$

**REMARQUE 4.1.8**

*Remarquons que nous pourrions expliciter la dépendance de la constante  $C_\eta$  en le temps final  $T > 0$ . Ceci peut se faire en travaillant plus finement sur l'estimation d'erreur du développement asymptotique raccordé lors de la preuve de (3.3.1), et en explicitant la dépendance de la constante de Poincaré intervenant à la fin de la preuve précédente en  $T > 0$ .*

Rappelons que l'avantage du problème approché (4.1.10) est qu'il fait intervenir un opérateur des ondes indépendant de  $\varepsilon$ , ce qui nous permettra d'utiliser une discrétisation par éléments finis s'appuyant sur un maillage totalement indépendant de  $\varepsilon$ . Avant d'aborder les aspects liés à la discrétisation numérique, nous présentons le même type de modèle pour le cas général, où nous avons un nombre  $N$  quelconque d'inclusions, et où le coefficient  $\mu_\varepsilon$  varie à l'interface des inclusions.

## 4.1.2 Présentation dans le cas général

Revenons au cas général. Nous disposons de  $N$  inclusions, avec un contraste des paramètres  $\rho_\varepsilon$  et  $\mu_\varepsilon$  à l'intérieur de chacune d'entre elles.

### 4.1.2.a Construction du modèle

Reformulons le problème (4.1.1) en un système d'ordre 1 en temps, selon une démarche classique : posons, formellement pour le moment,

$$v_\varepsilon = \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} \quad \text{et} \quad p_\varepsilon = \mu_\varepsilon \nabla u_\varepsilon.$$

Notons

$$V = \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+, L^2(\mathbb{R}^2)) \cap \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, H^1(\mathbb{R}^2))$$

ainsi que

$$P = \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+, L^2(\mathbb{R}^2)) \cap \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, H(\text{div}, \mathbb{R}^2))$$

Alors il est clair que (4.1.1) est équivalent au problème

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (v_\varepsilon, p_\varepsilon) \in V \times P \text{ tel que} \\ \rho_\varepsilon \partial_t v_\varepsilon - \text{div } p_\varepsilon = f(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, \quad t \in \mathbb{R}^+, \\ \frac{1}{\mu_\varepsilon} \partial_t p_\varepsilon - \nabla v_\varepsilon = 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, \quad t \in \mathbb{R}^+, \\ p_\varepsilon(\mathbf{x}, 0) = v_\varepsilon(\mathbf{x}, 0) = 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, \end{array} \right. \quad (4.1.22)$$

où le terme source  $f$  En effet, la première équation du système (4.1.22) est simplement la transcription de l'équation volumique de (4.1.1) en terme des nouvelles inconnues  $v_\varepsilon$  et  $p_\varepsilon$ . La seconde équation de (4.1.22) est une condition de compatibilité, exprimant le fait que

dérivée temporelle et spatiale de  $u_\varepsilon$  commutent. Enfin, les équations définissant le comportement initial de  $v_\varepsilon$  et  $p_\varepsilon$  se déduisent directement de celle définissant le comportement initial de  $u_\varepsilon$ .

Nous souhaitons exprimer le système (4.1.22) comme une perturbation du problème sans inclusions. L'intérêt de travailler avec le système d'ordre 1 plutôt qu'avec le système initial d'ordre 2 provient du fait que nous sommes capables de nous affranchir des conditions de transmission qui apparaissent lorsque nous cherchons à *découpler* le terme  $\operatorname{div}(\mu_\varepsilon \nabla u_\varepsilon)$ .

En effet,  $\mu_\varepsilon$  est définie par morceaux dans chaque inclusion  $\omega_\varepsilon^n$  ainsi que dans  $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{\bigcup_{n=1}^N \omega_\varepsilon^n}$ . Si nous exprimons le terme  $\operatorname{div}(\mu_\varepsilon \nabla u_\varepsilon)$  comme une somme de termes définis uniquement dans une inclusion  $\omega_\varepsilon^n$  ou dans le complémentaire de leur union, alors nous devons également prendre en compte la continuité de la trace et de la trace normale sur la frontière de chaque inclusion  $\omega_\varepsilon^n$ , ces conditions de transmission étant *contenues* dans le fait qu'à  $t$  fixé,  $\operatorname{div}(\mu_\varepsilon \nabla u_\varepsilon) \in L^2(\mathbb{R}^2)$ .

Pour  $n \in \{1, \dots, N\}$ , notons  $\mathbf{1}_\varepsilon^n$  l'indicatrice de  $\omega_\varepsilon^n$ . Avec ces notations en tête, il apparaît que le système (4.1.22) peut se réécrire sous la forme équivalente suivante

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (v_\varepsilon, p_\varepsilon) \in V \times P \text{ tel que} \\ \rho_0 \partial_t v_\varepsilon + \rho_0 \sum_{n=1}^N \delta_n \mathbf{1}_\varepsilon^n \partial_t v_\varepsilon - \operatorname{div} p_\varepsilon = f(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, \quad t \in \mathbb{R}^+, \\ \frac{1}{\mu_0} \partial_t p_\varepsilon + \frac{1}{\mu_0} \sum_{n=1}^N \theta_n \mathbf{1}_\varepsilon^n \partial_t p_\varepsilon - \nabla v_\varepsilon = 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, \quad t \in \mathbb{R}^+, \\ p_\varepsilon(\mathbf{x}, 0) = v_\varepsilon(\mathbf{x}, 0) = 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2. \end{array} \right. \quad (4.1.23)$$

Moralement, l'idée que nous cherchons à développer ici est la suivante : le système (4.1.23) est une équation des ondes acoustiques transitoire dans le milieu caractérisé par les coefficients  $\rho_0, \mu_0$ , perturbée par les sommes de terme faisant intervenir la valeur de l'inconnue  $(v_\varepsilon, p_\varepsilon)$  sur la  $n$ -ème inclusion. Or les inclusions sont petites, donc la perturbation est *petite*, et l'on doit pouvoir établir une méthode numérique pour résoudre l'équation des ondes avec inclusions qui ne coûte *pas significativement plus cher* que l'équation des ondes sans défauts. Introduisons des quantités auxiliaires, que nous nommerons multiplicateurs de Lagrange volumiques, définies selon les formules

$$q_\varepsilon^n = \alpha_n p_\varepsilon \mathbf{1}_\varepsilon^n, \quad w_\varepsilon^n = \beta_n v_\varepsilon \mathbf{1}_\varepsilon^n,$$

pour tout  $n \in \{1, \dots, N\}$ , où  $\alpha_n$  et  $\beta_n$  sont deux constantes réelles non nulles, dont nous préciserons la valeur plus loin. Les quantités  $q_\varepsilon^n$  et  $w_\varepsilon^n$  représentent, aux constantes multiplicatives  $\alpha_n$  et  $\beta_n$  près, la valeur des champs  $p_\varepsilon$  et  $v_\varepsilon$  sur l'inclusion  $\omega_\varepsilon^n$ . Introduisons les vecteurs

$$\mathbf{q}_\varepsilon = (q_\varepsilon^n)_{1 \leq n \leq N} \quad \text{et} \quad \mathbf{w}_\varepsilon = (w_\varepsilon^n)_{1 \leq n \leq N}$$

ainsi que les espaces fonctionnels

$$L_\varepsilon = L^2(\omega_\varepsilon^1) \times L^2(\omega_\varepsilon^2) \times \dots \times L^2(\omega_\varepsilon^N)$$

et

$$\mathcal{C}(L_\varepsilon) = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, L_\varepsilon).$$

Avec ces notations, il est clair que le problème (4.1.23) est équivalent au système

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (v_\varepsilon, p_\varepsilon, \mathbf{w}_\varepsilon, \mathbf{q}_\varepsilon) \in V \times P \times \mathcal{C}(L_\varepsilon) \times \mathcal{C}(L_\varepsilon) \text{ tel que} \\ \rho_0 \partial_t v_\varepsilon + \rho_0 \sum_{n=1}^N \mathbf{1}_\varepsilon^n \frac{\delta_n}{\beta_n} \partial_t w_\varepsilon^n - \operatorname{div} p_\varepsilon = f(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, \quad t \in \mathbb{R}^+, \\ \frac{1}{\mu_0} \partial_t p_\varepsilon + \frac{1}{\mu_0} \sum_{n=1}^N \mathbf{1}_\varepsilon^n \frac{\theta_n}{\alpha_n} \partial_t q_\varepsilon - \nabla v_\varepsilon = 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, \quad t \in \mathbb{R}^+, \\ q_\varepsilon^n = \alpha_n p_\varepsilon \mathbf{1}_\varepsilon^n, \quad \mathbf{x} \in \omega_\varepsilon^n, \quad t \in \mathbb{R}^+, \\ w_\varepsilon^n = \beta_n v_\varepsilon \mathbf{1}_\varepsilon^n, \quad \mathbf{x} \in \omega_\varepsilon^n, \quad t \in \mathbb{R}^+, \\ p_\varepsilon(\mathbf{x}, 0) = v_\varepsilon(\mathbf{x}, 0) = 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2. \end{array} \right. \quad (4.1.24)$$

L'idée est alors d'utiliser une méthode de Galerkin sur les multiplicateurs de Lagrange volumiques  $q_\varepsilon^n$  et  $w_\varepsilon^n$ , le long d'un faible nombre de fonctions de base données par la méthode des développements asymptotiques raccordés. Avant d'effectuer cette opération, nous réécrivons le système (4.1.24) sous une forme faisant apparaître un certain nombre de symétries dans les coefficients physiques. Le système (4.1.24) est équivalent au système

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (v_\varepsilon, p_\varepsilon, \mathbf{w}_\varepsilon, \mathbf{q}_\varepsilon) \in V \times P \times \mathcal{C}(L_\varepsilon) \times \mathcal{C}(L_\varepsilon) \text{ tel que} \\ \rho_0 \partial_t v_\varepsilon + \rho_0 \sum_{n=1}^N \mathbf{1}_\varepsilon^n \frac{\delta_n}{\beta_n} \partial_t w_\varepsilon^n - \operatorname{div} p_\varepsilon = f(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, \quad t \in \mathbb{R}^+, \\ \frac{1}{\mu_0} \partial_t p_\varepsilon + \frac{1}{\mu_0} \sum_{n=1}^N \mathbf{1}_\varepsilon^n \frac{\theta_n}{\alpha_n} \partial_t q_\varepsilon - \nabla v_\varepsilon = 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, \quad t \in \mathbb{R}^+, \\ \frac{\theta_n}{\mu_0 \alpha_n^2} q_\varepsilon^n = \frac{\theta_n}{\mu_0 \alpha_n} p_\varepsilon \mathbf{1}_\varepsilon^n, \quad \mathbf{x} \in \omega_\varepsilon^n, \quad t \in \mathbb{R}^+, \\ \frac{\rho_0 \delta_n}{\beta_n^2} w_\varepsilon^n = \frac{\rho_0 \delta_n}{\beta_n} v_\varepsilon \mathbf{1}_\varepsilon^n, \quad \mathbf{x} \in \omega_\varepsilon^n, \quad t \in \mathbb{R}^+, \\ p_\varepsilon(\mathbf{x}, 0) = v_\varepsilon(\mathbf{x}, 0) = 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2. \end{array} \right. \quad (4.1.25)$$

Nous allons passer le système (4.1.25) sous forme variationnelle, afin d'en dériver un certain nombre de propriétés, notamment de conservation d'énergie, qui nous permettrons de calibrer la valeur des  $\alpha_n$  et des  $\beta_n$  de manière adéquate. Introduisons les formes bilinéaires de masse

$$m_v : \left| \begin{array}{l} L^2(\mathbb{R}^2) \times L^2(\mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{R} \\ (v, \tilde{v}) \mapsto \rho_0 \int_{\mathbb{R}^2} v \tilde{v} \, d\mathbf{x} \end{array} \right. \quad \text{et} \quad m_p : \left| \begin{array}{l} L^2(\mathbb{R}^2)^2 \times L^2(\mathbb{R}^2)^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (p, \tilde{p}) \mapsto \frac{1}{\mu_0} \int_{\mathbb{R}^2} p \tilde{p} \, d\mathbf{x} \end{array} \right. ,$$

et la forme variationnelle de rigidité

$$a : \left| \begin{array}{l} L^2(\mathbb{R}^2) \times H(\operatorname{div}, \mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{R} \\ (v, p) \mapsto \int_{\mathbb{R}^2} v \operatorname{div} p \, d\mathbf{x}. \end{array} \right.$$

Nous introduisons également  $2N$  formes bilinéaires de masse pour les multiplicateurs de Lagrange  $\mathbf{q}_\varepsilon$  et  $\mathbf{w}_\varepsilon$  respectivement. Pour  $n \in \{1, \dots, N\}$  fixé, nous notons

$$m_q^{\varepsilon,n} : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{L}^2(\omega_\varepsilon^n) \times \mathbb{L}^2(\omega_\varepsilon^n) \rightarrow \mathbb{R} \\ (q, \tilde{q}) \mapsto \frac{\theta_n}{\mu_0 \alpha_n^2} \int_{\omega_\varepsilon^n} q \tilde{q} \, d\mathbf{x} \end{array} \right. \quad \text{et} \quad m_w^{\varepsilon,n} : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{L}^2(\omega_\varepsilon^n) \times \mathbb{L}^2(\omega_\varepsilon^n) \rightarrow \mathbb{R} \\ (w, \tilde{w}) \mapsto \frac{\rho_0 \delta_n}{\beta_n^2} \int_{\omega_\varepsilon^n} w \tilde{w} \, d\mathbf{x} \end{array} \right. .$$

Enfin, nous introduisons les  $2N$  formes variationnelles de couplage, définies, pour  $n \in \{1, \dots, N\}$  fixé, par

$$b_\varepsilon^n : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{L}^2(\omega_\varepsilon^n)^2 \times \mathbb{L}^2(\omega_\varepsilon^n)^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (p, q) \mapsto \int_{\omega_\varepsilon^n} \frac{\theta_n}{\mu_0 \alpha_n} p q \, d\mathbf{x} \end{array} \right. \quad \text{et} \quad c_\varepsilon^n : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{L}^2(\omega_\varepsilon^n) \times \mathbb{L}^2(\omega_\varepsilon^n) \rightarrow \mathbb{R} \\ (v, w) \mapsto \int_{\omega_\varepsilon^n} \frac{\rho_0 \delta_n}{\beta_n} v w \, d\mathbf{x} \end{array} \right. ,$$

Notons que toutes les formes introduites ci-avant sont bilinéaires, et que hormis  $a$ , celles-ci sont toutes symétriques. Pour terminer, nous introduisons la forme linéaire

$$F : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{R} \\ v \mapsto \int_{\mathbb{R}^2} f v \, d\mathbf{x} \end{array} \right.$$

Nous avons introduit tous les ingrédients nécessaires pour passer le système (4.1.25) sous forme variationnelle. Celui-ci est équivalent au problème

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (v_\varepsilon, p_\varepsilon, \mathbf{w}_\varepsilon, \mathbf{q}_\varepsilon) \in \mathbb{V} \times \mathbb{P} \times \mathcal{C}(\mathbb{L}_\varepsilon) \times \mathcal{C}(\mathbb{L}_\varepsilon) \text{ tel que} \\ \frac{d}{dt} m_v(v_\varepsilon, \tilde{v}) + \frac{d}{dt} \sum_{n=1}^N c_\varepsilon^n(\tilde{v}, w_\varepsilon^n) - a(\tilde{v}, p_\varepsilon) = F(\tilde{v}), \\ \frac{d}{dt} m_p(p_\varepsilon, \tilde{p}) + \frac{d}{dt} \sum_{n=1}^N b_\varepsilon^n(\tilde{p}, q_\varepsilon^n) + a(v_\varepsilon, \tilde{p}) = 0, \\ m_q^{\varepsilon,n}(q_\varepsilon^n, \tilde{q}^n) = b_\varepsilon^n(p_\varepsilon, \tilde{q}^n), \quad \forall n \in \{1, \dots, N\}, \\ m_w^{\varepsilon,n}(w_\varepsilon^n, \tilde{w}^n) = c_\varepsilon^n(v_\varepsilon, \tilde{w}^n), \\ p_\varepsilon(0) = v_\varepsilon(0) = 0, \\ \text{pour tout } (\tilde{v}, \tilde{p}, \tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{w}}) \in \mathbb{H}^1(\mathbb{R}^2) \times \mathbb{H}(\text{div}, \mathbb{R}^2) \times \mathbb{L}_\varepsilon \times \mathbb{L}_\varepsilon, \end{array} \right. \quad (4.1.26)$$

où si  $\mathbf{z} \in \mathbb{L}_\varepsilon$ , nous avons noté  $z^n \in \mathbb{L}^2(\omega_\varepsilon^n)$  sa  $n$ -ème composante. C'est le problème (4.1.26) qui sera la brique de base pour proposer un premier modèle approché. En effet, les composantes des inconnues  $\mathbf{w}_\varepsilon$  et  $\mathbf{q}_\varepsilon$  sont, moralement et à une constante multiplicative près, la valeur de la vitesse et de la pression au voisinage de chaque inclusion. Or, l'analyse asymptotique effectuée au chapitre 3 nous donne des informations très précises sur le comportement du champ acoustique au voisinage de chacune des inclusions : celui-ci est donné par l'ansatz de champ proche au voisinage de chaque inclusion.

**Retour sur les ansatz de champ proche** Rappelons les résultats fournis par la méthode des développements asymptotiques raccordés. Fixons  $n \in \{1, \dots, N\}$ . D'après le

théorème 3.3.2, au voisinage de la  $n$ -ème inclusion (dans la zone de champ proche associée à la  $n$ -ème inclusion), le champ  $u_\varepsilon$  est approché par

$$(\boldsymbol{\xi}_n, t) \mapsto u_P^n(\boldsymbol{x}, t) = U_0^n(\boldsymbol{\xi}_n, t) + \varepsilon U_1^n(\boldsymbol{\xi}_n, t) + \varepsilon^2 U_2^n(\boldsymbol{\xi}_n, t)$$

où la variable rapide  $\boldsymbol{\xi}_n$  est définie par

$$\boldsymbol{\xi}_n = \frac{\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_n^0}{\varepsilon},$$

et où les termes  $U_0^n$ ,  $U_1^n$  et  $U_2^n$  sont solutions du problème

$$-\operatorname{div}(\mu^n \nabla U_k^n) = -\rho^n \partial_t^2 U_{k-2}^n, \quad \boldsymbol{\xi}_n \in \mathbb{R}^2, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

pour  $k = 0, 1, 2$ , où  $U_{-1}^n = U_{-2}^n = 0$ , et où un comportement à l'infini est prescrit via

$$\begin{aligned} U_0^n(\boldsymbol{\xi}_n, t) & \underset{|\boldsymbol{\xi}_n| \rightarrow \infty}{\sim} u_0(0, t) \\ U_1^n(\boldsymbol{\xi}_n, t) & \underset{|\boldsymbol{\xi}_n| \rightarrow \infty}{\sim} \boldsymbol{\xi}_n \cdot \nabla u_0(0, t) \\ U_2^n(\boldsymbol{\xi}_n, t) & \underset{|\boldsymbol{\xi}_n| \rightarrow \infty}{\sim} \sum_{|\alpha|=2} \frac{\boldsymbol{\xi}_n^\alpha}{\alpha!} \partial_{\boldsymbol{x}}^\alpha u_0(0, t). \end{aligned}$$

Précisément,  $U_0$  est donné par

$$U_0^n(\boldsymbol{\xi}_n, t) := u_0(\boldsymbol{x}_n, t).$$

Ainsi, à  $t \geq 0$  fixé,  $U_0^n(\cdot, t)$  est la fonction constante, égale à la valeur du champ limite  $u_0$  évalué en  $(\boldsymbol{x}_n, t)$ .

Le terme d'ordre 1,  $U_1^n$ , est solution du problème au Laplacien généralisé

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } t \mapsto U_1^n(t) \in W_{-1-\gamma}^1(\mathbb{R}^2), \quad \gamma \in ]0, 1[ \quad \text{tel que} \\ -\operatorname{div}(\mu^n \nabla U_1) = 0, \quad \boldsymbol{\xi}_n \in \mathbb{R}^2, \\ U_1(\boldsymbol{\xi}_n, t) \underset{|\boldsymbol{\xi}_n| \rightarrow \infty}{\sim} \boldsymbol{\xi}_n \cdot \nabla u_0(\boldsymbol{x}_n, t). \end{array} \right.$$

Enfin, le terme d'ordre 2,  $U_2$  est défini comme solution du problème au Laplacien généralisé avec condition de croissance quadratique au voisinage de l'infini

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } t \mapsto U_2^n(t) \in W_{-2-\gamma}^1(\mathbb{R}^2), \quad \gamma \in ]0, 1[ \quad \text{tel que} \\ -\operatorname{div}(\mu^n \nabla U_2) = -\rho^n \partial_t^2 U_0^n \quad \boldsymbol{\xi}_n \in \mathbb{R}^2, \\ U_2^n(\boldsymbol{\xi}_n, t) \underset{|\boldsymbol{\xi}_n| \rightarrow \infty}{\sim} \sum_{|\alpha|=2} \frac{\boldsymbol{\xi}_n^\alpha}{\alpha!} \partial_{\boldsymbol{x}}^\alpha u(\boldsymbol{x}_n, t). \end{array} \right.$$

A nouveau, comme dans le cas d'une unique inclusion, nous cherchons un espace de dimension finie  $X_\varepsilon^n \subset L^2(\omega_n^\varepsilon)$  tel qu'à chaque instant  $t \geq 0$ , nous ayons

$$(U_0^n + \varepsilon U_1^n + \varepsilon^2 U_2^n)(\boldsymbol{\xi}_n, t) \in X_\varepsilon^n.$$

Introduisons, pour  $n \in \{1, \dots, N\}$  fixé, la fonction  $W_0^n$ , dépendant uniquement de l'espace, définie comme solution du problème

$$\begin{cases} W_0^n \in W_{-\gamma}^1(\mathbb{R}^2), & \gamma > 0 \text{ tel que} \\ -\operatorname{div}(\mu^n \nabla W_0^n) = 0, & \boldsymbol{\xi}_n \in \mathbb{R}^2, \\ W_0^n(\boldsymbol{\xi}_n) \underset{|\boldsymbol{\xi}_n| \rightarrow \infty}{\sim} 1. \end{cases}$$

Nous introduisons également les fonctions  $W_{1,1}^n$  et  $W_{1,2}^n$ , solutions respectivement des problèmes

$$\begin{cases} W_{1,1}^n \in W_{-1/2-\gamma}^1(\mathbb{R}^2), & \gamma \in ]0, 1[ \text{ tel que} \\ -\operatorname{div}(\mu^n \nabla W_{1,1}^n) = 0, & \boldsymbol{\xi}_n \in \mathbb{R}^2, \\ W_{1,1}^n(\boldsymbol{\xi}_n) \underset{|\boldsymbol{\xi}_n| \rightarrow \infty}{\sim} \boldsymbol{\xi}_n^1, \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} W_{1,2}^n \in W_{-1/2-\gamma}^1(\mathbb{R}^2), & \gamma \in ]0, 1[ \text{ tel que} \\ -\operatorname{div}(\mu^n \nabla W_{1,2}^n) = 0, & \boldsymbol{\xi}_n \in \mathbb{R}^2, \\ W_{1,2}^n(\boldsymbol{\xi}_n) \underset{|\boldsymbol{\xi}_n| \rightarrow \infty}{\sim} \boldsymbol{\xi}_n^2, \end{cases}$$

où nous avons noté  $\boldsymbol{\xi}_n = (\boldsymbol{\xi}_n^1, \boldsymbol{\xi}_n^2)$  les coordonnées de  $\boldsymbol{\xi}_n$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}^2$ . Définissons également les fonctions de profil d'ordre 2 : soient  $W_{2,1}^n$ ,  $W_{2,2}^n$  et  $W_{2,0}^n$  solutions respectivement de

$$\begin{cases} W_{2,1}^n \in W_{-2-\gamma}^1(\mathbb{R}^2), & \gamma \in ]0, 1[ \text{ tel que} \\ -\operatorname{div}(\mu^n \nabla W_{2,1}^n) = 0, & \boldsymbol{\xi}_n \in \mathbb{R}^2, \\ W_{2,1}^n(\boldsymbol{\xi}_n) \underset{|\boldsymbol{\xi}_n| \rightarrow \infty}{\sim} (\boldsymbol{\xi}_n^1)^2 - (\boldsymbol{\xi}_n^2)^2, \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} W_{2,2}^n \in W_{-2-\gamma}^1(\mathbb{R}^2), & \gamma > 0 \text{ tel que} \\ -\operatorname{div}(\mu^n \nabla W_{2,2}^n) = 0, & \boldsymbol{\xi}_n \in \mathbb{R}^2, \\ W_{2,2}^n(\boldsymbol{\xi}_n) \underset{|\boldsymbol{\xi}_n| \rightarrow \infty}{\sim} \boldsymbol{\xi}_n^1 \boldsymbol{\xi}_n^2, \end{cases}$$

Enfin, nous définissons  $W_{2,0}^n$  comme solution du problème

$$\begin{cases} W_{2,0}^n \in W_{-2-\gamma}^1(\mathbb{R}^2), & \gamma > 0 \text{ tel que} \\ -\operatorname{div}(\mu^n \nabla W_{2,0}^n) = -\rho^n(\boldsymbol{\xi}_n), & \boldsymbol{\xi}_n \in \mathbb{R}^2, \\ W_{2,0}^n(\boldsymbol{\xi}_n) \underset{|\boldsymbol{\xi}_n| \rightarrow \infty}{\sim} -\frac{\rho_0}{4\mu_0} ((\boldsymbol{\xi}_n^1)^2 + (\boldsymbol{\xi}_n^2)^2) - \frac{\rho^n}{2\pi\mu_0} \ln |\boldsymbol{\xi}_n|. \end{cases}$$

Comme dans le cas du modèle approché pour une inclusion unique, les fonctions  $W_{1,1}^n$  et  $W_{1,2}^n$  sont définies à une constante près, et ce en vertu de la proposition 3.2.16. Nous imposons que

$$W_{1,i}^n - \boldsymbol{\xi}_n^i \underset{|\boldsymbol{\xi}_n| \rightarrow \infty}{\rightarrow} 0, \quad i = 1, 2,$$

ce qui fixe les constantes indéterminées à 0. De même, pour caractériser complètement les fonctions  $W_{2,i}^n$  pour  $i = 0, 1, 2$ , il est nécessaire de spécifier les comportements linéaires, logarithmiques et constants de chacune d'entre elles au voisinage de l'infini.

A cet effet, nous imposons que

$$W_{2,0}^n + \frac{\rho_0}{4\mu_0} ((\boldsymbol{\xi}_n^1)^2 + (\boldsymbol{\xi}_n^2)^2) \rightarrow 0, \quad W_{2,1}^n(\boldsymbol{\xi}_n) - ((\boldsymbol{\xi}_n^1)^2 - (\boldsymbol{\xi}_n^2)^2) \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad W_{2,2}^n(\boldsymbol{\xi}_n) - \boldsymbol{\xi}_n^1 \boldsymbol{\xi}_n^2 \rightarrow 0$$

quand  $|\boldsymbol{\xi}_n| \rightarrow \infty$ .

Alors les résultats fournis par la méthode des développements asymptotiques raccordés montrent qu'à tout temps  $t \geq 0$ , le champ proche

$$u_P^n(\cdot, t) \in \text{vect} \langle W_0^n, W_{1,1}^n, W_{1,2}^n, W_{2,0}^n, W_{2,1}^n, W_{2,2}^n \rangle.$$

En effet, en notant  $\tilde{W}_{2,0}^n = -4\mu_0 W_{2,0}^n / \rho_0$ , nous avons

$$U_0^n(\boldsymbol{\xi}_n, t) = u_0(0, t)W_0^n(\boldsymbol{\xi}_n), \quad U_1^n(\boldsymbol{\xi}, t) = \nabla u_0(0, t) \cdot \begin{pmatrix} W_{1,1}^n(\boldsymbol{\xi}_n) \\ W_{1,2}^n(\boldsymbol{\xi}_n) \end{pmatrix} + \alpha_n W_0^n$$

et

$$\begin{aligned} U_2(\boldsymbol{\xi}_n, t) &= \frac{W_{2,1}^n(\boldsymbol{\xi}_n) + \tilde{W}_{2,0}^n(\boldsymbol{\xi}_n)}{4} \partial_{x_1}^2 u_0(0, t) + \frac{\tilde{W}_{2,0}^n(\boldsymbol{\xi}_n) - W_{2,1}^n(\boldsymbol{\xi}_n)}{4} \partial_{x_2}^2 u_0(0, t) \\ &+ \frac{W_{2,2}^n}{2}(\boldsymbol{\xi}_n) \partial_{x_1} \partial_{x_2} u_0(0, t) + \beta_n W_0^n. \end{aligned}$$

Notons

$$X_\varepsilon^n = \text{vect} \langle W_0^n, W_{1,1}^n, W_{1,2}^n, W_{2,0}^n, W_{2,1}^n, W_{2,2}^n \rangle,$$

ainsi que

$$Y_\varepsilon^n = \nabla X_\varepsilon^n.$$

Notons également

$$\mathbf{X}_\varepsilon = X_\varepsilon^1 \times \dots \times X_\varepsilon^N \quad \text{et} \quad \mathbf{Y}_\varepsilon = \nabla \mathbf{X}_\varepsilon = Y_\varepsilon^1 \times \dots \times Y_\varepsilon^N,$$

où le gradient est pris composante par composante.

L'idée est de chercher les inconnues  $\mathbf{w}_\varepsilon$  et  $\mathbf{q}_\varepsilon$ , respectivement la dérivée en temps du champ  $u_\varepsilon$  et son gradient au voisinage des inclusions, dans les espaces  $\mathbf{X}_\varepsilon$  et  $\mathbf{Y}_\varepsilon$ , qui sont désormais des espaces de petite dimension, mais qui contiennent moralement l'information spatiale contenue dans le champ proche tronqué à l'ordre 2.

Nous proposons donc le modèle approché suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (v_\varepsilon, p_\varepsilon, \mathbf{w}_\varepsilon, \mathbf{q}_\varepsilon) \in V \times P \times \mathcal{C}(\mathbf{X}_\varepsilon) \times \mathcal{C}(\mathbf{Y}_\varepsilon) \text{ tel que} \\ \frac{d}{dt} m_v(v_\varepsilon, \tilde{v}) + \frac{d}{dt} \sum_{n=1}^N c_\varepsilon^n(\tilde{v}, w_\varepsilon^n) - a(\tilde{v}, p_\varepsilon) = F(\tilde{v}), \\ \frac{d}{dt} m_p(p_\varepsilon, \tilde{p}) + \frac{d}{dt} \sum_{n=1}^N b_\varepsilon^n(\tilde{p}, q_\varepsilon^n) + a(v_\varepsilon, \tilde{p}) = 0, \\ m_q^{\varepsilon, n}(q_\varepsilon^n, \tilde{q}^n) = b_\varepsilon^n(p_\varepsilon, \tilde{q}^n), \quad \forall n \in \{1, \dots, N\}, \\ m_w^{\varepsilon, n}(w_\varepsilon^n, \tilde{w}^n) = c_\varepsilon^n(v_\varepsilon, \tilde{w}^n), \\ p_\varepsilon(0) = v_\varepsilon(0) = 0, \\ \text{pour tout } (\tilde{v}, \tilde{p}, \tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{w}}) \in H^1(\mathbb{R}^2) \times H(\text{div}, \mathbb{R}^2) \times \mathbf{X}_\varepsilon \times \mathbf{Y}_\varepsilon, \end{array} \right. \quad (4.1.27)$$

Du au fait que les espaces  $\mathbf{X}_\varepsilon$  et  $\mathbf{Y}_\varepsilon$  sont de dimensions finies, le modèle (4.1.27) est plus simple à résoudre que (4.1.26) d'un point de vue numérique.

### 4.1.2.b Analyse de consistance et de stabilité

Avant d'aborder en détail la justification du fait que le problème (4.1.27) est une approximation du problème (4.1.1), citons un premier résultat important, qui nous permettra de fixer la valeur des constantes  $\alpha_n$  et  $\beta_n$ .

#### THÉORÈME 4.1.9

Si les paramètres  $\alpha_n$  et  $\beta_n$  sont choisis de la manière suivante

$$\alpha_n = \pm\sqrt{1 + \theta_n} - 1 \quad \text{et} \quad \beta_n = \pm\sqrt{1 + \delta_n} - 1, \quad \forall n \in \{1, \dots, N\},$$

alors l'énergie  $E$  du système (4.1.27), donnée par

$$E(t) = \frac{1}{2} \left[ m_v \left( v_\varepsilon + \sum_{n=1}^N \frac{w_\varepsilon^n}{\alpha_n}, v_\varepsilon + \sum_{n=1}^N \frac{w_\varepsilon^n}{\beta_n} \right) + m_p \left( p_\varepsilon + \sum_{n=1}^N \mathbf{1}_\varepsilon^n q_\varepsilon^n, p_\varepsilon + \sum_{n=1}^N \mathbf{1}_\varepsilon^n q_\varepsilon^n \right) \right],$$

est conservée au cours du temps, c'est-à-dire que si  $f = 0$  alors

$$\frac{dE}{dt}(t) = 0, \quad \forall t \geq 0.$$

DÉMONSTRATION : Supposons que le terme source soit nul, c'est-à-dire que

$$f(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, \quad \forall t \geq 0.$$

Comme c'est le cas lors de la démonstration d'estimations *a priori*, nous supposons que le problème (4.1.27) admet une unique solution

$$(v_\varepsilon, p_\varepsilon, \mathbf{w}_\varepsilon, \mathbf{q}_\varepsilon) \in V \times P \times \mathbf{X}_\varepsilon \times \mathbf{Y}_\varepsilon.$$

Dans les deux premières équations de (4.1.27), choisissons  $\tilde{v} = v_\varepsilon$  et  $\tilde{p} = p_\varepsilon$ , et sommons les relations ainsi obtenues pour obtenir

$$\frac{d}{dt} m_v(v_\varepsilon, v_\varepsilon) + \frac{d}{dt} m_p(p_\varepsilon, p_\varepsilon) + \frac{d}{dt} \sum_{n=1}^N [c_\varepsilon^n(v_\varepsilon, w_\varepsilon^n) + b_\varepsilon^n(p_\varepsilon, q_\varepsilon^n)] = 0 \quad (4.1.28)$$

Par ailleurs, en choisissant  $\tilde{q}^n = q_\varepsilon^n$  et  $\tilde{w}^n = w_\varepsilon^n$ , pour tout  $n \in \{1, \dots, N\}$  dans la troisième et la quatrième équation du système (4.1.27), il vient

$$m_q^{\varepsilon, n}(q_\varepsilon^n, q_\varepsilon^n) = b_\varepsilon^n(p_\varepsilon, q_\varepsilon^n) \quad \text{et} \quad m_w^{\varepsilon, n}(w_\varepsilon^n, w_\varepsilon^n) = c_\varepsilon^n(v_\varepsilon, w_\varepsilon^n). \quad (4.1.29)$$

En substituant la dérivée par rapport au temps de (4.1.29) dans (4.1.28), nous obtenons que

$$\frac{d}{dt} \left[ m_v(v_\varepsilon, v_\varepsilon) + m_p(p_\varepsilon, p_\varepsilon) + \sum_{n=1}^N (m_q^{\varepsilon, n}(q_\varepsilon^n, q_\varepsilon^n) + m_w^{\varepsilon, n}(w_\varepsilon^n, w_\varepsilon^n)) \right] = 0. \quad (4.1.30)$$

Posons à présent

$$\alpha_n = \pm\sqrt{1 + \theta_n} - 1 \quad \text{et} \quad \beta_n = \pm\sqrt{1 + \delta_n} - 1, \quad \forall n \in \{1, \dots, N\},$$

comme annoncé. Alors pour tout  $n \in \{1, \dots, N\}$ , nous avons

$$\alpha_n^2 + 2\alpha_n = \theta_n \quad \text{et} \quad \beta_n^2 + 2\beta_n = \delta_n,$$

donc en particulier

$$\frac{\theta_n}{\alpha_n^2} = 1 + \frac{2}{\alpha_n} \quad \text{et} \quad \frac{\delta_n}{\beta_n^2} = 1 + \frac{2}{\beta_n}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} m_q^{\varepsilon,n}(q_\varepsilon^n, q_\varepsilon^n) &= \int_{\omega_\varepsilon^n} \frac{\theta_n}{\mu_0 \alpha_n^2} q_\varepsilon^n q_\varepsilon^n \, d\mathbf{x} \\ &= \left(1 + \frac{2}{\alpha_n}\right) m_p(q_\varepsilon^n, q_\varepsilon^n) \\ &= m_p(q_\varepsilon^n, q_\varepsilon^n) + \frac{2\alpha_n}{\theta_n} \int_{\omega_\varepsilon^n} \frac{\theta_n}{\mu_0 \alpha_n^2} q_\varepsilon^n q_\varepsilon^n \, d\mathbf{x} \\ &= m_p(q_\varepsilon^n, q_\varepsilon^n) + \frac{2\alpha_n}{\theta_n} m_q^{\varepsilon,n}(q_\varepsilon^n, q_\varepsilon^n) \\ &= m_p(q_\varepsilon^n, q_\varepsilon^n) + \frac{2\alpha_n}{\theta_n} b_\varepsilon^n(p_\varepsilon, q_\varepsilon^n) \\ &= m_p(q_\varepsilon^n, q_\varepsilon^n) + 2m_p(p_\varepsilon, q_\varepsilon^n) \end{aligned}$$

On peut montrer de manière tout à fait similaire que nous avons

$$m_w^{\varepsilon,n}(w_\varepsilon^n, w_\varepsilon^n) = m_v(w_\varepsilon^n, w_\varepsilon^n) + 2m_v(v_\varepsilon, w_\varepsilon^n).$$

En réinjectant alors dans l'équation (4.1.30), nous obtenons que

$$\frac{d}{dt} m_v(v_\varepsilon, v_\varepsilon) + \frac{d}{dt} m_p(p_\varepsilon, p_\varepsilon) + \frac{d}{dt} \sum_{n=1}^N \left[ m_p(q_\varepsilon^n, q_\varepsilon^n) + 2m_p(p_\varepsilon, q_\varepsilon^n) + m_v(w_\varepsilon^n, w_\varepsilon^n) + 2m_v(v_\varepsilon, w_\varepsilon^n) \right] = 0$$

Etant donné que les inclusions sont *bien* séparées les unes des autres (voir l'hypothèse 3.1.2), nous avons, pour deux entiers distincts  $m$  et  $n$

$$m_p(q_\varepsilon^m, q_\varepsilon^n) = 0 \quad \text{et} \quad m_v(w_\varepsilon^m, w_\varepsilon^n) = 0.$$

Ainsi, au bilan, nous avons établi que

$$\frac{d}{dt} \left[ m_v \left( v_\varepsilon + \sum_{n=1}^N \frac{w_\varepsilon^n}{\alpha_n}, v_\varepsilon + \sum_{n=1}^N \frac{w_\varepsilon^n}{\alpha_n} \right) + m_p \left( p_\varepsilon + \sum_{n=1}^N \frac{q_\varepsilon^n}{\alpha_n}, p_\varepsilon + \sum_{n=1}^N \frac{q_\varepsilon^n}{\alpha_n} \right) \right] = 0.$$

Nous pouvons montrer, de manière tout à fait similaire à la preuve du théorème 4.1.7, le résultat suivant

**THÉORÈME 4.1.10**

Soit  $(v_\varepsilon, p_\varepsilon)$  la solution du problème (4.1.22) et  $(\tilde{u}_\varepsilon, \tilde{v}_\varepsilon)$  la solution du problème approché (4.1.27). Il existe une constante  $C > 0$  telle que pour tout  $\eta > 0$  et pour tout  $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0[$ ,

on ait l'estimation

$$\sup_{t \in [0, T]} [\|\partial_t v_\varepsilon - \partial_t \tilde{u}_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \|\nabla v_\varepsilon - \nabla \tilde{u}_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}] \leq C_\eta \varepsilon^{3-\eta}, \quad \forall \varepsilon \in [0, \varepsilon_0[.$$

Nous verrons au chapitre 5 comment discrétiser de manière pertinente ce modèle approché. Pour le moment, nous étudions un second modèle approché, construit grâce à l'analyse en champ lointain.

## 4.2 UNE SECONDE APPROCHE SANS INCONNUE AUXILIAIRE PAR ANALYSE DU CHAMP LOINTAIN

Nous construisons ici un second modèle approché du problème modèle (2.2.3), dont la solution est une approximation de  $u_\varepsilon$  en champ lointain. La construction de ce modèle s'appuie sur l'analyse asymptotique en champ lointain de  $u_\varepsilon$ , et fait explicitement apparaître au travers de l'équation d'ondes perturbées sur laquelle il repose l'intuition physique suivante : l'onde diffractée par chaque petit défaut se comporte, en première approximation, comme l'onde émise par un point source localisé en ce petit défaut.

### 4.2.1 Cas d'une inclusion unique

Dans cette section uniquement, nous supposons que nous disposons d'une unique inclusion  $\omega_\varepsilon \subset \mathbb{R}^2$ . Rappelons que celle-ci est une version contractée à l'échelle  $\varepsilon$  d'une inclusion de référence  $\omega \subset \mathbb{R}^2$

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \omega_\varepsilon = \varepsilon \omega,$$

où  $\omega$  a pour centre de gravité 0 :

$$\int_{\omega} \mathbf{x} \, d\mathbf{x} = 0.$$

#### 4.2.1.a Construction du modèle

Définissons, pour  $\varepsilon > 0$  fixé, le champ

$$u_\varepsilon^{(2)}(\mathbf{x}, t) := u_0(\mathbf{x}, t) + \varepsilon^2 u_2(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, \quad t \geq 0.$$

où les champs  $u_0$  et  $u_2$  sont les termes d'ordre 0 et 2 respectivement en champ lointain, comme établi au chapitre 3. Ainsi,  $u_\varepsilon^{(2)}$  est l'ansatz de champ lointain tronqué à l'ordre 2.

Rappelons que  $u_0$  est le champ limite obtenu par passage à la limite de  $u_\varepsilon$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ , et est solution de

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_0 \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^+, L^2(\mathbb{R}^2)) \cap \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, H^2(\mathbb{R}^2)) \text{ tel que} \\ \rho_0 \partial_t^2 u_0 - \mu_0 \Delta u_0 = f(\mathbf{x}, t), & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, \quad t \in \mathbb{R}^+, \\ u_0(\mathbf{x}, 0) = \partial_t u_0(\mathbf{x}, 0) = 0, & \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, \end{cases}$$

tandis que  $u_2$  est défini par

$$u_2(\mathbf{x}, t) = \mathcal{G}[a](\mathbf{x}, t) + \partial_{x_1}\mathcal{G}[b^1](\mathbf{x}, t) + \partial_{x_2}\mathcal{G}[b^2](\mathbf{x}, t)$$

avec

$$\mathcal{G}[a] := \mathcal{G} *_t a, \quad \text{et} \quad a(t) := -\frac{\rho}{\rho_0} \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2}(0, t), \quad b^j(t) = -2\pi c_0^2 \mathbf{e}_j^T \cdot \mathbf{Q} \cdot \nabla u_0(0, t), \quad j = 1, 2,$$

$\mathcal{G}$  étant la fonction de Green associée à l'opérateur des ondes caractérisé par le couple  $(1, c_0)$  vérifiant

$$[\partial_t^2 \mathcal{G} - c_0^2 \Delta \mathcal{G}](\mathbf{x}, t) = \delta(t)\delta(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, \quad t \geq 0,$$

et  $\mathbf{Q}$  étant le tenseur de polarisation généralisé associé à l'inclusion  $\omega$ .

Le champ  $u_2$  est le premier terme d'ordre non nul dans la décomposition de  $u_\varepsilon$  en champ lointain, et constitue le développement au premier ordre non nul du champ diffracté. Il s'agit d'une superposition de source monopolaires et dipolaires localisées en 0 (la limite de l'inclusion quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ ).

L'objectif du modèle développé dans cette section est de permettre un calcul efficace de  $u_\varepsilon^{(2)}$ . Plaçons nous dans le contexte de l'approximation numérique :  $u_\varepsilon^{(2)}$  étant dans la zone de champ lointain une approximation d'ordre  $3 - \eta$  de  $u_\varepsilon$ , une méthode numérique capable d'approximer efficacement  $u_\varepsilon^{(2)}$  sera alors capable de calculer une *bonne* approximation de  $u_\varepsilon$  (nous précisons dans le prochain chapitre ce que nous entendons par *bonne* approximation). D'un point de vue pragmatique, une première idée de méthode pourrait être de calculer une approximation de  $u_0$  (par exemple avec une méthode de type éléments finis standard), d'extraire la valeur en 0 de  $u_0$  et de son gradient, par interpolation par exemple, puis de calculer l'approximation de  $u_2$  correspondante. Nous aurions alors une méthode nécessitant deux calculs (celui de  $u_0$  puis de  $u_2$ ) capable de calculer une approximation de  $u_\varepsilon$  et serions parvenu à notre fin.

Nous nous proposons de développer une méthode plus astucieuse que cela, qui calculera une approximation de  $u_\varepsilon^{(2)}$  en un seul calcul. Notons  $\square$  l'opérateur des ondes dans  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \times \mathbb{R}^+$  associé au milieu de propagation  $(\rho_0, \mu_0)$  :

$$\square = \rho_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \text{div}(\mu_0 \nabla).$$

Nous avons, par définition de la fonction de Green  $\mathcal{G}$  et par propriétés du produit de convolution

$$\begin{aligned} \square u_\varepsilon^{(2)}(\mathbf{x}, t) &= \square u_0 + \varepsilon^2 \square u_2 \\ &= f(\mathbf{x}, t) - \varepsilon^2 \left( \partial_t^2 u_0(0, t) \delta(\mathbf{x}) + (2\pi \mu_0 \mathbf{Q} \cdot \nabla u_0(0, t)) \cdot \nabla \delta(\mathbf{x}) \right), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \times \mathbb{R}^+, \end{aligned}$$

où  $\delta$  est la mesure de Dirac. Notons que les fonctions de la variable temporelle  $a$  et  $b$  dépendent de  $u_0$ . Ainsi,  $u_\varepsilon^{(2)}$  vérifie

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u_\varepsilon^{(2)}}{\partial t^2} - \text{div}(\mu_0 \nabla u_\varepsilon^{(2)}) = f(\mathbf{x}, t) - \varepsilon^2 (a(t) \delta(\mathbf{x}) + b(t) \cdot \nabla \delta(\mathbf{x})), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \times \mathbb{R}^+, \quad (4.2.1)$$

où  $a(t) = -\rho \partial_t^2 u_0(0, t)$ . où le vecteur  $b$  est défini par

$$b(t) = 2\pi\mu_0 \mathbf{Q} \nabla u_0(0, t).$$

L'égalité (4.2.1) a lieu au sens des distributions dans  $D'((\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}^+)$ .

Deux obstacles sont à traiter en vue de proposer un modèle issu de (4.2.1) qui admette une formulation variationnelle qui soit bien posée dans les espaces de Sobolev classiquement utilisés :

- L'équation (4.2.1) vérifiée par  $u_\varepsilon^{(2)}$  admet, formellement, deux inconnues :  $u_\varepsilon^{(2)}$  et  $u_0$ . Le problème est *sous-dimensionné*. Nous allons contourner cette difficulté en utilisant un résultat de stabilité lié à l'opérateur des ondes et en utilisant le fait que, moralement,  $u_0$  est une approximation d'ordre 2 de  $u_\varepsilon$ .
- Le deuxième obstacle provient du fait que la masse de Dirac et son gradient ne sont pas, en tant que distribution, continues sur l'espace de Sobolev  $H^1(\mathbb{R}^2)$  classiquement utilisé pour étudier les phénomènes de propagation d'onde. Pour pallier cette difficulté, nous allons proposer une version relaxée de la masse de Dirac, continue sur  $H^1(\mathbb{R}^2)$ , qui converge vers  $\delta$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Penchons nous sur la relaxation de la masse de Dirac et de son gradient.

Comme approximation de la masse de Dirac, nous proposons d'intégrer la fonction test sur la "petite" boule de rayon  $\kappa_1\varepsilon$ , tandis que pour la relaxation du gradient de la masse de Dirac, nous intégrons la fonction test sur la boule de rayon  $\kappa_2\varepsilon$ , où  $\kappa_1, \kappa_2 > 0$  sont deux constantes réelles.

Introduisons les formes linéaires

$$p_\varepsilon : \left\{ \begin{array}{l} H^1(B_{\kappa_1\varepsilon}) \rightarrow \mathbb{R} \\ v \mapsto \frac{1}{|B_{\kappa_1\varepsilon}|} \int_{B_{\kappa_1\varepsilon}} v(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \end{array} \right. \quad \text{et} \quad q_\varepsilon : \left\{ \begin{array}{l} H^2(B_{\kappa_2\varepsilon}) \rightarrow \mathbb{R} \\ v \mapsto \frac{1}{|B_{\kappa_2\varepsilon}|} \int_{B_{\kappa_2\varepsilon}} \nabla v(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}, \end{array} \right. \quad (4.2.2)$$

où  $B_{\kappa_1\varepsilon}$  est la boule de centre 0 et de rayon  $\kappa_1\varepsilon$ . Les formes linéaires  $p_\varepsilon$  et  $q_\varepsilon$  sont des versions relaxées de la masse de Dirac en 0 et de son gradient respectivement, comme nous allons le voir au travers des résultats qui suivent.

#### REMARQUE 4.2.1

*Il est important de noter que nous utilisons à nouveau dans cette section les notations  $p_\varepsilon$  et  $q_\varepsilon$  mais que celles-ci désignent des objets de nature différente comparativement à leur utilisation dans la section précédente!*

Notons que, formellement,  $u_\varepsilon^{(2)}$  vérifie, au moins formellement,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2}{dt^2} m(u_\varepsilon^{(2)}, v) + a(u_\varepsilon^{(2)}, v) + \varepsilon^2 \left[ \rho \frac{d^2 u_0(0, t)}{dt^2} v(0) + 2\pi\mu_0 \nabla u_0(0, t) \cdot \mathbf{Q} \cdot \nabla v(0) \right] = F(v), \\ u_\varepsilon^{(2)}(0) = \partial_t u_\varepsilon^{(2)}(0) = 0, \quad \forall v \in H^1(\mathbb{R}^2), \quad t \in \mathbb{R}^+. \end{array} \right. \quad (4.2.3)$$

Les formes bilinéaires  $m$  et  $a$  sont les formes de masse et de rigidité classiquement associées

à l'opérateur des ondes, définies par

$$m : \left\{ \begin{array}{l} L^2(\mathbb{R}^2) \times L^2(\mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{R} \\ (u, \tilde{u}) \mapsto \rho_0 \int_{\mathbb{R}^2} u \tilde{u} \, d\mathbf{x}, \end{array} \right. \quad \text{et} \quad a : \left\{ \begin{array}{l} H^1(\mathbb{R}^2) \times H^1(\mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{R} \\ (u, \tilde{u}) \mapsto \mu_0 \int_{\mathbb{R}^2} \nabla u \cdot \nabla \tilde{u} \, d\mathbf{x}, \end{array} \right.$$

tandis que  $F(t)$  est, à  $t$  fixé, la forme linéaire

$$F : \left\{ \begin{array}{l} L^2(\mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{R} \\ u \mapsto \int_{\mathbb{R}^2} f(\mathbf{x}, t) u(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}. \end{array} \right.$$

Nous allons proposer un modèle issu de (4.2.3) dans lequel nous allons formellement remplacer la dépendance de  $a$  et  $b$  en  $u_0$  par une dépendance directe en  $u_\varepsilon^{(2)}$  et également remplacer la masse de Dirac par  $p_\varepsilon$  et son gradient par  $q_\varepsilon$  respectivement.

Nous introduisons une matrice carrée d'ordre 2 que nous notons  $\hat{\mathbf{Q}}$ , et qui remplacera  $\mathbf{Q}$  dans le modèle approché. Nous donnerons plus loin des conditions sur  $\hat{\mathbf{Q}}$  pour que la solution du problème approché approche la solution du problème exact.

Nous proposons le modèle approché suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } w_\varepsilon \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^+, L^2(\mathbb{R}^2)) \cap \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, H^2(\mathbb{R}^2)) \text{ tel que} \\ \rho_0 \partial_t^2 w_\varepsilon - \mu_0 \Delta w_\varepsilon + \varepsilon^2 \left[ \rho p_\varepsilon(\ddot{w}_\varepsilon) p_\varepsilon(\cdot) + 2\pi \mu_0 q_\varepsilon(w_\varepsilon)^T \cdot \hat{\mathbf{Q}} \cdot q_\varepsilon(\cdot) \right] = f(\mathbf{x}, t), \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, \\ w_\varepsilon(\mathbf{x}, 0) = \partial_t w_\varepsilon(\mathbf{x}, 0) = 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, \quad \forall t \in \mathbb{R}^+. \end{array} \right. \quad (4.2.4)$$

Écrit tel quel, le modèle approché (4.2.4) est à comprendre au sens variationnel. Précisément, celui-ci doit s'interpréter au sens suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } w_\varepsilon \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^+, L^2(\mathbb{R}^2)) \cap \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, H^2(\mathbb{R}^2)) \text{ tel que} \\ \frac{d^2}{dt^2} m(w_\varepsilon, v) + a(w_\varepsilon, v) + \varepsilon^2 \left[ \rho \frac{d^2}{dt^2} p_\varepsilon(w_\varepsilon) p_\varepsilon(v) + 2\pi \mu_0 q_\varepsilon(w_\varepsilon)^T \cdot \hat{\mathbf{Q}} \cdot q_\varepsilon(v) \right] = F(v), \\ w_\varepsilon(0) = \partial_t w_\varepsilon(0) = 0, \quad \forall v \in H^1(\mathbb{R}^2), \quad \forall t \in \mathbb{R}^+. \end{array} \right. \quad (4.2.5)$$

Il est important d'observer le parallèle entre le modèle approché (4.2.5) et l'équation vérifiée par l'ansatz d'ordre 2 (4.2.3).

Nous pouvons également donner au modèle approché (4.2.5) une interprétation au sens fort. Il est clair que pour tout  $u, v \in H^1(\mathbb{R}^2)$ , on a

$$p_\varepsilon(u) p_\varepsilon(v) = \left\langle \frac{1}{|\mathbf{B}_{\kappa_1 \varepsilon}|} p_\varepsilon(u) \mathbf{1}_{\kappa_1 \varepsilon}, v \right\rangle_{L^2(\mathbb{R}^2)}$$

où  $\mathbf{1}_{\kappa_1 \varepsilon}$  désigne l'indicatrice de la boule de centre 0 et de rayon  $\kappa_1 \varepsilon$ . De manière similaire,

nous avons

$$\begin{aligned} q_\varepsilon(u)^T \cdot \widehat{\mathbf{Q}} \cdot q_\varepsilon(v) &= \frac{1}{|\mathbf{B}_{\kappa_2\varepsilon}|^2} \int_{\mathbf{B}_{\kappa_2\varepsilon}} \int_{\mathbf{B}_{\kappa_2\varepsilon}} \nabla u(\mathbf{x})^T \cdot \widehat{\mathbf{Q}} \cdot \nabla v(\mathbf{y}) \, d\mathbf{x}d\mathbf{y} \\ &= -\frac{1}{|\mathbf{B}_{\kappa_2\varepsilon}|^2} \int_{\mathbf{B}_{\kappa_2\varepsilon}} \int_{\mathbf{B}_{\kappa_2\varepsilon}} v(\mathbf{y}) \operatorname{div}_{\mathbf{y}}(\widehat{\mathbf{Q}} \cdot \nabla u(\mathbf{x})) \, d\mathbf{x}d\mathbf{y} \\ &\quad + \frac{1}{|\mathbf{B}_{\kappa_2\varepsilon}|^2} \int_{\partial\mathbf{B}_{\kappa_2\varepsilon}} \int_{\mathbf{B}_{\kappa_2\varepsilon}} v(\mathbf{y})(\widehat{\mathbf{Q}} \cdot \nabla u(\mathbf{x})) \cdot \nu(\mathbf{y}) \, d\mathbf{x}d\sigma(\mathbf{y}), \end{aligned}$$

par application de la formule de Green,  $\nu$  désignant le vecteur unitaire sortant et  $\sigma$  la mesure surfacique sur  $\partial\mathbf{B}_{\kappa_2\varepsilon}$ . Le terme volumique est nul puisque le terme à dériver ne dépend pas de  $\mathbf{y}$ . Au bilan, nous avons

$$q_\varepsilon(u) \cdot \widehat{\mathbf{Q}} \cdot q_\varepsilon(v) = \left\langle \frac{1}{|\mathbf{B}_{\kappa_2\varepsilon}|} (\widehat{\mathbf{Q}} \cdot q_\varepsilon(u)) \cdot \nu, v \right\rangle_{L^2(\partial\mathbf{B}_{\kappa_2\varepsilon})}. \quad (4.2.6)$$

Au bilan, le problème (4.2.4) s'interprète au sens classique comme

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } w_\varepsilon \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^+, L^2(\mathbb{R}^2)) \cap \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, H^2(\mathbb{R}^2)) \text{ tel que} \\ \rho_0 \partial_t^2 w_\varepsilon - \mu_0 \Delta w_\varepsilon + \varepsilon^2 \left[ \frac{\rho}{|\mathbf{B}_{\kappa_1\varepsilon}|} p_\varepsilon(w_\varepsilon) \mathbf{1}_{\kappa_1\varepsilon} + \frac{2\pi\mu_0}{|\mathbf{B}_{\kappa_2\varepsilon}|} (\widehat{\mathbf{Q}} \cdot q_\varepsilon(w_\varepsilon)) \cdot \nu \delta_{\partial\mathbf{B}_{\kappa_2\varepsilon}} \right] = f(\mathbf{x}, t), \\ w_\varepsilon(\mathbf{x}, 0) = \partial_t w_\varepsilon(\mathbf{x}, 0) = 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, t \in \mathbb{R}^+, \end{array} \right. \quad (4.2.7)$$

où  $\delta_{\partial\mathbf{B}_{\kappa_2\varepsilon}}$  désigne la mesure de Dirac portée par la surface  $\partial\mathbf{B}_{\kappa_2\varepsilon}$ .

#### 4.2.1.b Analyse de consistance et de stabilité

Commençons par donner un lemme concernant la qualité d'approximation de la masse de Dirac  $\delta$  par  $p_\varepsilon$ .

##### LEMME 4.2.2

Si  $v \in \mathcal{C}^1(\mathbf{B}_{\kappa_1\varepsilon})$ , alors nous avons l'estimation

$$p_\varepsilon(v) = v(0) + \mathcal{O}(\varepsilon)$$

quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

DÉMONSTRATION : Soit  $v \in \mathcal{C}^1(\mathbf{B}_{\kappa_1\varepsilon})$ . Alors le développement de Taylor-Young de  $v$  au voisinage de 0 donne

$$v(\mathbf{x}) = v(0) + \mathbf{x} \cdot \nabla v(0) + o(|\mathbf{x}|) \quad (4.2.8)$$

quand  $\mathbf{x} \rightarrow 0$ . Notons que si  $c \in \mathbb{R}$ , alors en notant à nouveau  $c$  la fonction constante égale à  $c$ , il est clair que

$$p_\varepsilon(c) = c$$

tandis que si  $b = (b_1, b_2)^T \in \mathbb{R}^2$ , il vient

$$p_\varepsilon(\mathbf{x} \cdot b) = \frac{1}{|\mathbf{B}_{\kappa_1\varepsilon}|} \int_0^{2\pi} \int_0^{\kappa_1\varepsilon} r(b_1 \cos \theta + b_2 \sin \theta) \, dr \, d\theta = 0.$$

Notons  $g(\mathbf{x}) = v(\mathbf{x}) - v(0) - \mathbf{x} \cdot \nabla v(0)$  et appliquons la forme linéaire  $p_\varepsilon$  à l'égalité (4.2.8). Il vient

$$p_\varepsilon(v) = v(0) + p_\varepsilon(g).$$

Or  $g$  est de la forme

$$g(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}|r(\mathbf{x})$$

où  $r(\mathbf{x}) \rightarrow 0$  quand  $\mathbf{x} \rightarrow 0$ . En particulier,  $r$  est bornée au voisinage de 0 et on a l'existence d'une constante  $C > 0$  indépendante de  $\varepsilon$  telle que

$$|p_\varepsilon(g)| \leq C\kappa_1\varepsilon$$

pour  $\varepsilon$  suffisamment petit, ce qui achève la preuve. □

Le résultat précédent établit que  $p_\varepsilon(v)$  est une bonne approximation de  $v(0)$  lorsque  $v$  est régulière au voisinage de 0. Bien évidemment, si  $v$  n'admet pas de valeur ponctuelle (de trace) en 0, alors  $p_\varepsilon(v)$  diverge lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$  (ceci fait référence aux points dits de Lebesgue en théorie de la mesure). En particulier, nous avons le résultat suivant

**LEMME 4.2.3**

Soient  $\varepsilon > 0$  et  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  un ouvert non vide, tels que  $B_{\kappa_1\varepsilon} \subset \Omega$  pour tout  $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0[$ . Il existe  $C > 0$  telle que pour tout  $v \in H^1(\Omega)$  on ait

$$|p_\varepsilon(v)| \leq C |\ln \varepsilon| \|v\|_{H^1(\Omega)}.$$

De même, si  $v \in H^2(\Omega)$  alors

$$|q_\varepsilon(v)| \leq C |\ln \varepsilon| \|v\|_{H^2(\Omega)}.$$

DÉMONSTRATION : Fixons  $v \in H^1(\Omega)$ . D'après l'inégalité triangulaire et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous avons

$$\begin{aligned} |p_\varepsilon(v)| &\leq \frac{1}{|B_{\kappa_1\varepsilon}|} \int_{B_{\kappa_1\varepsilon}} |v| \, d\mathbf{x} \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{|B_{\kappa_1\varepsilon}|}} \|v\|_{L^2(B_{\kappa_1\varepsilon})}. \end{aligned}$$

Or d'après l'inégalité de Hardy logarithmique (voir par exemple [68, 48]), qui stipule l'existence d'une constante  $C > 0$  telle que pour tout  $v \in H^1(\Omega)$ ,

$$\int_{\Omega} \frac{|v(\mathbf{x})|^2 \, d\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^2 |\ln(\mathbf{x})|^2} \leq C \|v\|_{H^1(\Omega)}^2,$$

nous avons

$$\|v\|_{L^2(B_{\kappa_1\varepsilon})}^2 \leq C\kappa_1\varepsilon^2 |\ln(\kappa_1\varepsilon)|^2 \|v\|_{H^1(\Omega)}^2.$$

Au bilan, nous concluons qu'il existe  $C' = \sqrt{C}$  tel que

$$|p_\varepsilon(v)| \leq C' |\ln \kappa_1\varepsilon| \|v\|_{H^1(\Omega)}.$$

La seconde estimation se montre de manière similaire.

□

Les deux lemmes précédents nous permettent un premier résultat de stabilité.

#### **HYPOTHÈSE 4.2.4**

Nous supposons que les constantes  $\kappa_1$  et  $\kappa_2$  sont suffisamment grandes pour que

$$1 - \frac{1}{\pi\kappa_1^2}|\underline{\rho}| > 0 \quad \text{et} \quad \mathbf{I} + \frac{2\pi\mu_0}{\kappa_2^2}\mathbf{Q} \text{ soit inversible.}$$

Ces deux hypothèses vont nous permettre d'établir la stabilité du problème approché. La seconde hypothèse nous permet de définir la matrice  $\hat{\mathbf{Q}}$  intervenant dans le modèle approché (4.2.4) par

$$\hat{\mathbf{Q}} = \kappa_2^2 \left( \left( \mathbf{I} + \frac{1}{\kappa_2^2} \mathbf{Q} \right)^{-1} - \mathbf{I} \right). \quad (4.2.9)$$

La relation (4.2.9) peut paraître artificielle à première vue. Elle va nous permettre d'établir l'égalité des tenseurs de polarisation du premier ordre associés au problème exact et au problème approché.

Enfin, nous supposons que  $\kappa_2$  est suffisamment grand pour que

$$1 - \frac{1}{\pi\kappa_2^2} \max_{\lambda \in \text{Sp } \hat{\mathbf{Q}}} |\lambda| > 0.$$

Notons que la matrice  $\hat{\mathbf{Q}}$  est symétrique réelle car  $\mathbf{Q}$  l'est également.

#### **THÉORÈME 4.2.5 (Caractère bien-posé du problème approché)**

Sous les hypothèses 4.2.4, il existe une constante  $\varepsilon_0 > 0$  telle que  $\forall \varepsilon \in [0, \varepsilon_0[$ , le problème (4.2.4) admet une unique solution  $w_\varepsilon$ . Par ailleurs, il existe une constante  $C > 0$  telle que pour tout  $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0[$ , on ait

$$\sqrt{\int_{\mathbb{R}^2} \left( \rho_0 \left| \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial t} \right|^2(\mathbf{x}, t) + \mu_0 |\nabla w_\varepsilon|^2(\mathbf{x}, t) \right) d\mathbf{x}} \leq C \int_0^t \|f(\tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} d\tau,$$

pour tout  $t \geq 0$ .

**DÉMONSTRATION :** A nouveau, comme dans la preuve du caractère bien-posé du problème approché (4.1.10) et du problème modèle (2.2.2), nous procédons via l'utilisation d'estimations d'énergie *a priori*. Supposons qu'il existe  $w_\varepsilon$  solution de (4.2.5). Alors, en choisissant, à  $t \in \mathbb{R}^+$  fixé,  $v = \dot{w}_\varepsilon(t)$ , il vient

$$\frac{d}{dt} E_\varepsilon(w_\varepsilon, t) = F(\dot{w}_\varepsilon), \quad \forall t > 0, \quad (4.2.10)$$

où nous avons noté

$$E_\varepsilon(w_\varepsilon, t) := \left[ m(\dot{w}_\varepsilon, \dot{w}_\varepsilon) + a(w_\varepsilon, w_\varepsilon) + \varepsilon^2 \left( \underline{\rho} p_\varepsilon(\dot{w}_\varepsilon)^2 + 2\pi\mu_0 q_\varepsilon(w_\varepsilon) \cdot \hat{\mathbf{Q}} \cdot q_\varepsilon(w_\varepsilon) \right) \right]$$

l'énergie associée à  $w_\varepsilon$  et au problème (4.2.4).

Or nous avons

$$\begin{aligned} p_\varepsilon(\dot{w}_\varepsilon)^2 &= \left( \frac{1}{|\mathbb{B}_{\kappa_1\varepsilon}|} \int_{\mathbb{B}_{\kappa_1\varepsilon}} \dot{w}_\varepsilon(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \right)^2 \\ &\leq \frac{1}{|\mathbb{B}_{\kappa_1\varepsilon}|} \int_{\mathbb{B}_{\kappa_1\varepsilon}} \dot{w}_\varepsilon(\mathbf{x})^2 \, d\mathbf{x} \\ &\leq \frac{1}{|\mathbb{B}_{\kappa_1\varepsilon}|} m(\dot{w}_\varepsilon, \dot{w}_\varepsilon), \end{aligned}$$

en vertu de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Comme par hypothèse  $\kappa_1$  est tel que  $\alpha := (1 - |\underline{\rho}|/(\pi\kappa_1^2)) > 0$ , on en déduit que

$$\begin{aligned} m(\dot{w}_\varepsilon, \dot{w}_\varepsilon) + \varepsilon^2 \underline{\rho} p_\varepsilon(\dot{w}_\varepsilon)^2 &\geq m(\dot{w}_\varepsilon, \dot{w}_\varepsilon) - \varepsilon^2 |\underline{\rho}| p_\varepsilon(\dot{w}_\varepsilon)^2 \\ &\geq \left( 1 - \frac{1}{\pi\kappa_1^2} |\underline{\rho}| \right) m(\dot{w}_\varepsilon, \dot{w}_\varepsilon) \\ &= \alpha m(\dot{w}_\varepsilon, \dot{w}_\varepsilon). \end{aligned}$$

Le même raisonnement permet de montrer l'existence de  $\beta > 0$  tel que

$$a(w_\varepsilon, w_\varepsilon) + \varepsilon^2 q_\varepsilon(w_\varepsilon)^T \cdot \hat{\mathbf{Q}} \cdot q_\varepsilon(w_\varepsilon) \geq \beta a(w_\varepsilon, w_\varepsilon) \quad (4.2.11)$$

ce qui montre, au bilan, l'existence d'une constante  $\gamma = \min(\alpha, \beta) > 0$  telle que  $E_\varepsilon(w_\varepsilon, t) \geq \gamma E_0(w_\varepsilon, t)$ . Ainsi  $E_\varepsilon$  est une énergie.

A présent, nous avons

$$\frac{\rho_0}{2} \|\dot{w}_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 \leq E_0(w_\varepsilon, t) \leq \frac{1}{\gamma} E_\varepsilon(w_\varepsilon, t), \quad \forall t > 0, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Ainsi, en intégrant l'égalité (4.2.10) entre les temps  $t = 0$  et  $t = T$ , en utilisant le fait que les conditions initiales pour  $w_\varepsilon$  sont nulles et en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous avons

$$\begin{aligned} E_\varepsilon(w_\varepsilon, t) &\leq \int_0^T \|f(\tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \|\dot{w}_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \, d\tau \\ &\leq \int_0^T \sqrt{\frac{2}{\gamma\rho_0}} \|f(\tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \sqrt{E_\varepsilon(w_\varepsilon, \tau)} \, d\tau. \end{aligned}$$

En appliquant alors le lemme de Gronwall (voir lemme 2.2.3), nous obtenons

$$E_\varepsilon(w_\varepsilon, t) \leq \left( \frac{1}{\sqrt{2\gamma\rho_0}} \int_0^t \|f(\tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \, d\tau \right)^2, \quad \forall t > 0.$$

Ainsi, au bilan, nous avons obtenu que

$$E_0(w_\varepsilon, t) \leq \frac{1}{\gamma} E_\varepsilon(w_\varepsilon, t) \leq \left( \frac{1}{\sqrt{2\gamma\rho_0}} \int_0^t \|f(\tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \, d\tau \right)^2, \quad \forall t > 0.$$

A partir de l'estimation d'énergie, nous déduisons le caractère bien-posé du problème hyperbolique 4.2.5 en utilisant des approximations de Galerkin, comme dans [42, Paragraphe 7.2].

□

#### 4.2.1.c Développement asymptotique raccordé de la solution du modèle approché

Nous abordons à présent l'estimation d'erreur entre la solution du problème approché (4.2.5) et la solution du problème exact (2.2.2). Nous allons montrer que les termes de champ lointain du développement raccordé associé au problème approché (4.2.4) sont identiques à celles du problème initial (2.2.2) jusqu'à l'ordre 2. Une fois ceci accompli, la preuve sera complète car nous aurons alors prouvé que le développement raccordé de  $w_\varepsilon$  coïncide avec celui de  $u_\varepsilon$  jusqu'à l'ordre 2 en champ lointain.

Comme lors de la dérivation du développement asymptotique de la solution  $u_\varepsilon$  du problème exact (2.2.2), réalisée au chapitre 3, nous raisonnons de manière formelle dans un premier temps pour dériver les équations aux dérivées partielles satisfaites par les termes du développement de la solution  $w_\varepsilon$  du problème approché (4.2.4).

Notons que comme les équations (2.2.2) caractérisant  $u_\varepsilon$  et (4.2.7) caractérisant  $w_\varepsilon$  ne diffèrent que sur un disque de rayon  $\mathcal{O}(\varepsilon)$ , on s'attend à ce que les équations volumiques satisfaites par les termes de champ lointain soient identiques. Le travail reposera sur les termes de champ proche et sur le principe de raccord.

Rappelons le problème approché : il s'agit de

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } w_\varepsilon \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^+, L^2(\mathbb{R}^2)) \cap \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, H^2(\mathbb{R}^2)) \text{ tel que} \\ \frac{d^2}{dt^2} m(w_\varepsilon, v) + a(w_\varepsilon, v) + \varepsilon^2 \left[ \rho \frac{d^2}{dt^2} p_\varepsilon(w_\varepsilon) p_\varepsilon(v) + 2\pi\mu_0 q_\varepsilon(w_\varepsilon)^T \cdot \widehat{\mathbf{Q}} \cdot q_\varepsilon(v) \right] = F(v), \\ w_\varepsilon(0) = \partial_t w_\varepsilon(0) = 0, \quad \forall v \in H^1(\mathbb{R}^2), \quad \forall t \in \mathbb{R}^+. \end{array} \right.$$

Décrivons les équations de champ lointain et de champ proche associées à ce problème approché.

**Les équations de champ lointain** Plaçons nous à grande distance de l'inclusion et cherchons  $w_\varepsilon$  sous la forme

$$w_\varepsilon(\mathbf{x}, t) = w_0(\mathbf{x}, t) + \varepsilon w_1(\mathbf{x}, t) + \varepsilon^2 w_2(\mathbf{x}, t) + \dots$$

Injectons l'ansatz ci-dessus dans le problème variationnel satisfait par  $w_\varepsilon$  (4.2.5) et utilisons l'hypothèse selon laquelle  $\mathbf{x}$  est grand devant  $\varepsilon$ , ce qui revient à sélectionner une fonction test  $v \in H^1(\mathbb{R}^2)$  nulle dans un voisinage de 0. Les termes en  $p_\varepsilon(w_\varepsilon)$  et  $q_\varepsilon(w_\varepsilon)$  sont négligeables devant  $\varepsilon^2$  en vertu du lemme 4.2.3 et en identifiant les termes en  $\varepsilon$ , nous

obtenons que

$$\begin{cases} \frac{d^2}{dt^2} m(w_n, v) + a(w_n, v) = \delta_0^n F(v), & , \forall t \in \mathbb{R}^+, 0 \leq n \leq 2, \\ w_n(0) = \partial_t w_n(0) = 0. \end{cases} \quad (4.2.12)$$

Ainsi, les équations de champ lointain associées au problème (4.2.5) sont des équations d'ondes dans l'espace libre, avec une singularité en 0.

Étant donné la nature perturbative des formes linéaires  $p_\varepsilon$  et  $q_\varepsilon$  et en particulier le lemme 4.2.3, il est naturel de choisir  $w_0$  comme le champ limite, c'est-à-dire  $w_0 = u_0$ , défini comme l'unique solution du problème limite

$$\begin{cases} \text{Trouver } w_0 \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^+, L^2(\mathbb{R}^2)) \cap \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, H^2(\mathbb{R}^2)) \text{ tel que} \\ \rho_0 \partial_t^2 w_0 - \mu_0 \Delta w_0 = f(\mathbf{x}, t), & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, t \in \mathbb{R}^+, \\ w_0(\mathbf{x}, 0) = \partial_t w_0(\mathbf{x}, 0) = 0, & \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, \end{cases}$$

ce qui est compatible avec l'équation (4.2.12). Les termes d'ordre supérieures  $w_1$  et  $w_2$  vérifient quant à eux

$$\begin{cases} \text{Trouver } w_j \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^+, L_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})) \cap \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, H_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})) \text{ tel que} \\ \rho_0 \partial_t^2 w_j - \mu_0 \Delta w_j = 0, & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, t \in \mathbb{R}^+, \\ w_j(\mathbf{x}, 0) = \partial_t w_j(\mathbf{x}, 0) = 0, & \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}. \end{cases}$$

Comme c'était déjà le cas lors du développement asymptotique de la solution du problème exact au chapitre 3, nous allons prescrire un certain comportement singulier au voisinage de 0 pour  $w_j$ . La nature de cette singularité peut-être calculée grâce au principe de raccord. Écrivons dans un premier temps les équations de champ proche associées au problème approché.

**Les équations de champ proche** Plaçons nous au voisinage de l'inclusion et cherchons  $w_\varepsilon$  sous la forme

$$w_\varepsilon(\mathbf{x}, t) = W_\varepsilon(\boldsymbol{\xi}, t) = W_0(\boldsymbol{\xi}, t) + \varepsilon W_1(\boldsymbol{\xi}, t) + \varepsilon^2 W_2(\boldsymbol{\xi}, t) \dots$$

où  $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{x}/\varepsilon$  est la variable rapide associée à l'inclusion.

Pour  $n = 0, 1, 2$ , nous avons

$$p_\varepsilon(W_n(\cdot/\varepsilon, t)) = \frac{1}{|B_{\kappa_1 \varepsilon}|} \int_{B_{\kappa_1 \varepsilon}} W_n\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}, t\right) d\mathbf{x} = \frac{1}{\pi \kappa_1^2} \int_{B_{\kappa_1}} W_n(\mathbf{y}, t) d\mathbf{y} = p(W_n, t),$$

où nous avons noté  $B_{\kappa_1}$  la boule de centre 0 et de rayon  $\kappa_1$  et

$$p(W_n, t) := \frac{1}{\pi \kappa_1^2} \int_{B_{\kappa_1}} W_n(\mathbf{y}, t) d\mathbf{y}.$$

De même, on a

$$q_\varepsilon(W_n(\cdot/\varepsilon, t)) = \frac{1}{|B_{\kappa_2 \varepsilon}|} \int_{B_{\kappa_2 \varepsilon}} \nabla W_n\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}, t\right) d\mathbf{x} = \frac{1}{\pi \kappa_2^2 \varepsilon} \int_{B_{\kappa_2}} \nabla W_n(\mathbf{y}, t) d\mathbf{y} = \frac{1}{\varepsilon} q(W_n, t),$$

où

$$q(W_n, t) := \frac{1}{\pi\kappa_2^2} \int_{B_{\kappa_2}} \nabla W_n(\mathbf{y}, t) d\mathbf{y}.$$

Ainsi, en sélectionnant une fonction test de la forme  $v_\varepsilon(\mathbf{x}) = V(\mathbf{x}/\varepsilon)$ , où  $V \in \mathbf{H}_{\text{comp}}^1(\mathbb{R}^2) := \{\varphi \in \mathbf{H}^1(\mathbb{R}^2) \mid \text{supp}(\varphi) \text{ est borné}\}$ , et en utilisant le fait que

$$\frac{d^2}{dt^2} m(w_\varepsilon, v_\varepsilon) = \varepsilon^2 \sum_{n=0}^2 \varepsilon^n \frac{d^2}{dt^2} m(W_n, V) \quad \text{et} \quad a(w_\varepsilon, v_\varepsilon) = \sum_{n=0}^2 \varepsilon^n a(W_n, V),$$

nous obtenons

$$\begin{aligned} & \frac{d^2}{dt^2} m(w_\varepsilon, v_\varepsilon) + a(w_\varepsilon, v_\varepsilon) + \varepsilon^2 \left[ \underline{\rho} \frac{d^2}{dt^2} p_\varepsilon(w_\varepsilon) p_\varepsilon(v_\varepsilon) + 2\pi\mu_0 q_\varepsilon(w_\varepsilon)^T \cdot \widehat{\mathbf{Q}} \cdot q_\varepsilon(v_\varepsilon) \right] \\ &= \sum_{n=0}^2 \varepsilon^n \left( a(W_n, V) + 2\pi\mu_0 q(W_n)^T \cdot \widehat{\mathbf{Q}} \cdot q(V) + \varepsilon^2 \frac{d^2}{dt^2} m(W_n, V) + \varepsilon^2 \underline{\rho} \frac{d^2}{dt^2} p(W_n) p(V) \right) \\ &= \mathcal{O}(\varepsilon^3), \end{aligned}$$

en vertu de l'estimation établie dans le lemme 4.2.3. En identifiant les puissances de  $\varepsilon$ , nous obtenons que pour  $n = 0, 1$ , on a

$$a(W_n, V) + q(W_n)^T \cdot 2\pi\mu_0 \widehat{\mathbf{Q}} \cdot q(V) = 0, \quad \forall V \in \mathbf{H}^1(\mathbb{R}^2). \quad (4.2.13)$$

Pour  $n = 2$ , on obtient

$$\frac{d^2}{dt^2} m(W_0, V) + a(W_2, V) + \underline{\rho} \frac{d^2}{dt^2} p(W_0) p(V) + 2\pi\mu_0 q(W_2)^T \cdot \widehat{\mathbf{Q}} \cdot q(V) = 0. \quad (4.2.14)$$

La forme forte des équations (4.2.13) est alors

$$-\mu_0 \Delta W_n + \frac{2\pi\mu_0}{|B_{\kappa_2}|} \nu \cdot \widehat{\mathbf{Q}} \cdot q(W_n) \delta_{\partial B_{\kappa_2}} = 0, \quad \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^2, \quad n = 0, 1,$$

tandis que la forme forte associée à l'équation (4.2.14) est

$$-\mu_0 \Delta W_2 + \frac{2\pi\mu_0}{|B_{\kappa_2}|} \nu \cdot \widehat{\mathbf{Q}} \cdot q(W_2) \delta_{\partial B_{\kappa_2}} = -\rho_0 \partial_t^2 W_0 - \underline{\rho} p(W_0) \mathbf{1}_{\kappa_1}, \quad \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^2,$$

où  $\mathbf{1}_{\kappa_1}$  désigne la fonction indicatrice de la boule de centre 0 et de rayon  $\kappa_1$ .

De la même manière que pour l'estimation (4.2.11), on montre que

$$a(W, W) + 2\pi\mu_0 q(W)^T \cdot \widehat{\mathbf{Q}} \cdot q(W) \geq \beta a(W, W)$$

ce qui montre la coercivité de l'opérateur différentiel intervenant dans les équations de champ proche (4.2.13) et (4.2.14). Évidemment, nous devons préciser le comportement au voisinage de l'infini des fonctions  $W_0$ ,  $W_1$  et  $W_2$  pour les caractériser entièrement. Comme lors de la section 3.4, c'est l'application du principe de raccord qui permettra de définir complètement  $W_0$ ,  $W_1$ ,  $W_2$  ainsi que  $w_0$ ,  $w_1$ ,  $w_2$ .

**Construction des termes d'ordre 0** Nous l'avons vu, le terme de champ lointain d'ordre 0,  $w_0$ , est défini comme l'unique solution du problème limite

$$\begin{cases} \text{Trouver } w_0 \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^+, L^2(\mathbb{R}^2)) \cap \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, H^2(\mathbb{R}^2)) \text{ tel que} \\ \rho_0 \partial_t^2 w_0 - \mu_0 \Delta w_0 = f(\mathbf{x}, t), & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, \quad t \in \mathbb{R}^+, \\ w_0(\mathbf{x}, 0) = \partial_t w_0(\mathbf{x}, 0) = 0, & \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, \end{cases}$$

de sorte que  $w_0 = u_0$ .

Nous raisonnons de manière similaire à ce qui a été fait au chapitre 3. Le principe de raccord dicte que le terme de champ proche  $W_0$  doit vérifier

$$\lim_{\boldsymbol{\xi} \rightarrow \infty} W_0(\boldsymbol{\xi}, t) = w_0(0, t) = u_0(0, t). \quad (4.2.15)$$

De plus,  $W_0$  est satisfait l'équation (4.2.13) :

$$a(W_n, V) + 2\pi\mu_0 q(W_n)^T \cdot \widehat{\mathbf{Q}} \cdot q(V) = 0, \quad \forall V \in H^1(\mathbb{R}^2).$$

On peut énoncer un résultat similaire à la proposition 3.2.16 pour l'opérateur associée à la forme bilinéaire  $a + q \cdot \mathbf{Q} \cdot q$ , grâce à la coercivité de celui-ci : l'opérateur est surjectif et admet un noyau de dimension 1 composé des fonctions constantes. La condition (4.2.15) permet de complètement caractériser  $W_0$ .

Ainsi  $W_0$  est la fonction constante définie par  $W_0(\boldsymbol{\xi}, t) = w_0(0, t) = u_0(0, t)$ , pour tout  $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^2$  et vérifie  $W_0 = U_0$ .

**Construction des termes d'ordre 1** De manière similaire à la section 3.4, le principe de raccord à l'ordre 1 donne

$$\begin{aligned} w_0(\mathbf{x}, t) + \varepsilon w_1(\mathbf{x}, t) & \underset{|\mathbf{x}| \rightarrow 0}{\sim} w_0(0, t) + \mathbf{x} \cdot \nabla w_0(0, t) + \varepsilon w_1(\mathbf{x}, t) + \dots \\ W_0\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}, t\right) + \varepsilon W_1\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}, t\right) & \underset{\frac{|\mathbf{x}|}{\varepsilon} \rightarrow \infty}{\sim} w_0(0, t) + \varepsilon W_1\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}, t\right) + \dots \end{aligned}$$

Nous constatons qu'afin que les deux développements coïncident aux ordres 0 et 1 en tant que polynôme des variables  $\mathbf{x}$  et  $\varepsilon$ , il est suffisant d'annuler le terme de champ lointain

$$w_1 = 0,$$

(ce qui est compatible avec le fait que  $w_1$  soit solution de l'équation d'onde (4.2.12)) et d'imposer

$$W_1(\boldsymbol{\xi}, t) \underset{|\boldsymbol{\xi}| \rightarrow \infty}{\sim} \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla w_0(0, t).$$

Ainsi  $W_1$  est caractérisé par le système d'équations suivant

$$\begin{cases} a(W_1, V) + 2\pi\mu_0 q(W_1)^T \cdot \widehat{\mathbf{Q}} \cdot q(V) = 0, & \forall V \in H_{\text{comp}}^1(\mathbb{R}^2), \\ W_1(\boldsymbol{\xi}, t) \underset{|\boldsymbol{\xi}| \rightarrow \infty}{\sim} \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla u_0(\mathbf{0}, t). \end{cases} \quad (4.2.16)$$

De la même manière que lors de la construction de  $U_1$ , ces équations permettent de caractériser la fonction  $\hat{U}_1(\boldsymbol{\xi}, t)$  à une constante additive près que l'on choisit égale à zéro, de sorte que cette fonction admet un développement de la forme suivante à l'infini

$$W_1(\boldsymbol{\xi}, t) = \boldsymbol{\xi} \cdot \left( \mathbf{I} + \frac{1}{|\boldsymbol{\xi}|^2} \tilde{\mathbf{Q}} \right) \cdot \nabla w_0(\mathbf{0}, t) + O(|\boldsymbol{\xi}|^{-2})$$

où  $\tilde{\mathbf{Q}}$  est une matrice  $2 \times 2$  symétrique. Il est naturel de se demander comment cette matrice est reliée à  $\mathbf{Q}$ . Il s'avère que la construction de  $\hat{\mathbf{Q}}$  donnée par l'équation (4.2.9) va garantir que  $\tilde{\mathbf{Q}} = \mathbf{Q}$ , de sorte que le comportement à l'infini de  $W_1$  est le même que celui de  $U_1$  comme nous allons le voir.

Nous cherchons à calculer le tenseur de polarisation  $\tilde{\mathbf{Q}}$  associé aux problème de champ proche du modèle approché. Notons temporairement  $B := B_{\kappa_2}$  ainsi que  $\Gamma := \partial B$ . Le problème (4.2.16) caractérisant  $W_1$  est de la forme

$$\begin{cases} \text{Trouver } U \in H_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^2) \text{ tel que} \\ a(U, V) + 2\pi\mu_0 q(U)^T \cdot \hat{\mathbf{Q}} \cdot q(V) = 0, & \forall V \in H_{\text{comp}}^1(\mathbb{R}^2), \\ U(\boldsymbol{\xi}, t) \underset{|\boldsymbol{\xi}| \rightarrow \infty}{\sim} \alpha \cdot \boldsymbol{\xi}, \end{cases} \quad (4.2.17)$$

où  $\alpha$  est une donnée du problème, égale à  $\nabla u_0(0, t)$  pour le problème qui caractérise  $W_1$ . Comme au paragraphe 3.4.2, la théorie de Kondratiev montre que ce problème admet une solution unique au choix d'une constante additive près qui peut être choisie de telle sorte que la solution admette au voisinage de l'infini le comportement suivant

$$U(\boldsymbol{\xi}) = \alpha \cdot \boldsymbol{\xi} + \alpha \cdot \tilde{\mathbf{Q}} \cdot \frac{\boldsymbol{\xi}}{|\boldsymbol{\xi}|^2} + O(|\boldsymbol{\xi}|^{-2}).$$

Nous souhaitons calculer l'expression du tenseur de polarisation  $\tilde{\mathbf{Q}}$  en fonction de  $\hat{\mathbf{Q}}$ . Étant donné que, d'après l'équation (4.2.6), on a

$$q(U)^T \cdot \hat{\mathbf{Q}} \cdot q(V) = \int_{\Gamma} V \mathbf{F}(U) \cdot \nu \, d\sigma,$$

où  $\mathbf{F}(U) := \hat{\mathbf{Q}} \cdot q(U)/|B|$ , en appliquant la formule de Green de part et d'autre de  $\Gamma$ , si  $U$  satisfait (4.2.17), alors  $U$  satisfait également

$$\begin{cases} \Delta U = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^2, \\ [U]_{\Gamma} = 0 & \text{sur } \Gamma, \\ \mu_0 [\partial_{\nu} U]_{\gamma} + 2\pi\mu_0 \mathbf{F}(U) \cdot \nu = 0 & \text{sur } \Gamma, \end{cases} \quad (4.2.18)$$

où  $[z]_{\Gamma} = z_{\Gamma}^+ - z_{\Gamma}^-$  désigne le saut de  $z$  sur  $\Gamma$ . Notons qu'une application directe de la formule de Green montre que si  $V \in H_{\text{comp}}^1(\mathbb{R}^2)$  est telle que

$$\int_0^{2\pi} V(r, \theta) e^{\pm i\theta} \, d\theta = 0,$$

alors on a  $\mathbf{F}(V) = 0$ . En combinant cette remarque avec la symétrie de révolution de la géométrie, on en déduit l'existence de deux vecteurs  $\beta$  et  $\gamma \in \mathbb{C}^2$  tels que  $U$  a nécessairement la forme

$$U(\boldsymbol{\xi}) = \begin{cases} \kappa_2^{-1} \beta^T \cdot \boldsymbol{\xi} & \text{pour } |\boldsymbol{\xi}| < \kappa_2, \\ \alpha^T \cdot \boldsymbol{\xi} + \kappa_2 \gamma^T \cdot \boldsymbol{\xi} / |\boldsymbol{\xi}|^2 & \text{pour } |\boldsymbol{\xi}| > \kappa_2. \end{cases} \quad (4.2.19)$$

En injectant l'expression précédente dans la première condition de transmission de (4.2.18) et en gardant à l'esprit que  $|\boldsymbol{\xi}| = \kappa_2$  sur  $\Gamma$ , on obtient que nécessairement

$$\beta = \kappa_2 \alpha + \gamma. \quad (4.2.20)$$

Pour la seconde condition de transmission, liée aux dérivées normales de  $U$ , un calcul direct montre que

$$\partial_\nu U_{|\Gamma}^- = \kappa_2^{-2} \beta^T \cdot \boldsymbol{\xi} \quad \text{et} \quad \partial_\nu U_{|\Gamma}^+ = \kappa_2^{-1} \alpha^T \cdot \boldsymbol{\xi} - \kappa_2^{-2} \gamma^T \cdot \boldsymbol{\xi}.$$

En remarquant que  $\nu = \kappa_2^{-1} \boldsymbol{\xi}$  sur  $\Gamma$  et en utilisant la relation (4.2.20), la deuxième condition de transmission montre que

$$2 \frac{\mu_0}{\kappa_2^2} (\beta - \kappa_2 \alpha)^T \cdot \boldsymbol{\xi} + \frac{2\pi\mu_0}{\kappa_2} \mathbf{F}(U)^T \cdot \boldsymbol{\xi} = 0, \quad \forall \boldsymbol{\xi} \in \Gamma.$$

Comme par ailleurs  $\mathbf{F}(U) = \hat{\mathbf{Q}} \cdot \beta / (\kappa_2 |\mathbf{B}|)$ , on en déduit que

$$2 \frac{\mu_0}{\kappa_2^2} (\beta - \kappa_2 \alpha) + \frac{2\pi\mu_0}{\kappa_2^2 |\mathbf{B}|} \hat{\mathbf{Q}} \cdot \beta = 0.$$

Au bilan, on en déduit que

$$\left( \mathbf{I} + \frac{\pi}{|\mathbf{B}|} \hat{\mathbf{Q}} \right) \beta = \kappa_2 \alpha.$$

Nous avons donc obtenu une expression explicite de  $\beta$  en fonction de  $\alpha$ . En vertu de l'analyse effectuée section 3.4.2 et de la définition de  $U$  donnée par (4.2.19), on a par définition  $\kappa_2 \gamma = \tilde{\mathbf{Q}} \alpha$ . Ainsi, nous avons montré que

$$\tilde{\mathbf{Q}} = \kappa_2^2 \left( \left( \mathbf{I} + \frac{\pi}{|\mathbf{B}|} \hat{\mathbf{Q}} \right)^{-1} - \mathbf{I} \right).$$

En reportant l'expression de  $\hat{\mathbf{Q}}$  donnée par (4.2.9), nous avons ainsi montré que  $\tilde{\mathbf{Q}} = \mathbf{Q}$ , c'est-à-dire que le tenseur de polarisation du problème approché (4.2.4) est exactement le même que le tenseur de polarisation du problème exact. On en déduit que  $W_1 = U_1$ .

**Construction des termes d'ordre 2** Relevons tout d'abord que, au vu de la définition de  $W_0$ , le second membre de (4.2.14) se simplifie un peu. En effet posons  $\hat{\rho}(\boldsymbol{\xi}) = \rho_0$  pour  $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{\mathbf{B}}_{\kappa_1}$ , et  $\hat{\rho}(\boldsymbol{\xi}) = \rho_0 + \underline{\rho} / |\mathbf{B}_{\kappa_1}|$  pour  $\boldsymbol{\xi} \in \mathbf{B}_{\kappa_1}$ . Puisque  $W_0$  ne dépend pas de  $\boldsymbol{\xi}$ , on a

$$\frac{d^2}{dt^2} m(W_0, V) + \underline{\rho} \frac{d^2}{dt^2} p(W_0) p(V) = \frac{d^2}{dt^2} W_0(t) \int_{\mathbb{R}^2} \hat{\rho}(\boldsymbol{\xi}) V(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi}.$$

Comme au paragraphe 3.4.3, le comportement de  $W_2(\boldsymbol{\xi}, t)$  quand  $\boldsymbol{\xi} \rightarrow \infty$  que nous devons prescrire est dicté par les termes d'ordre 2 du développement de Taylor de  $u_0(\mathbf{x}, t)$  quand  $\mathbf{x} \rightarrow 0$ . Le terme  $W_2(\boldsymbol{\xi}, t)$  doit satisfaire (4.2.14) ainsi que

$$W_2(\boldsymbol{\xi}, t) = \frac{\Pi'_0(W_2)}{2\pi\mu_0} \ln |\boldsymbol{\xi}| + \sum_{|\alpha|=2} \partial_{\mathbf{x}}^{\alpha} u_0(0, t) \frac{\boldsymbol{\xi}^{\alpha}}{\alpha!} + O_{|\boldsymbol{\xi}| \rightarrow \infty}(1) \quad (4.2.21)$$

où  $\Pi'_0(W_2) \in \mathbb{C}$  est une constante qui sera choisie de façon à satisfaire la condition de compatibilité lié au problème (4.2.14). Un calcul similaire à celui effectué à la fin du paragraphe 3.4.3.a donne la valeur de cette constante,

$$\begin{aligned} \Pi'_0(W_2) &= \int_{\mathbb{R}^2} \hat{\rho}(\boldsymbol{\xi}) - \rho_0 d\boldsymbol{\xi} \partial_t u_0(\mathbf{0}, t) \\ &= \int_{B_{\kappa_1}} \frac{1}{|B_{\kappa_1}|} \underline{\rho} d\boldsymbol{\xi} \partial_t u_0(\mathbf{0}, t) = \underline{\rho} \partial_t^2 u_0(\mathbf{0}, t) \end{aligned} \quad (4.2.22)$$

Les équations (4.2.14)-(4.2.21)-(4.2.22) déterminent  $W_2(\boldsymbol{\xi}, t)$  à une constante additive près. En fait, cette fonction ne coïncide pas a priori avec la fonction  $U_2(\boldsymbol{\xi}, t)$  (le deuxième terme de champ proche de  $u_{\varepsilon}$ ) mais, en choisissant correctement la constante additive, on a  $|U_2(\boldsymbol{\xi}, t) - W_2(\boldsymbol{\xi}, t)| = O(|\boldsymbol{\xi}|^{-1})$  pour  $\boldsymbol{\xi} \rightarrow \infty$ .

Il reste à examiner le second terme de champ lointain  $w_2(\mathbf{x}, t)$ . En suivant la même méthodologie qu'en section 3.4.3, mais appliquée au modèle approché (4.2.4), au vu du comportement à l'infini de  $W_0$ ,  $W_1$ ,  $W_2$ , cette fonction doit satisfaire les équations

$$\begin{cases} \rho_0 \partial_t^2 w_2 - \mu_0 \Delta w_2 = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \times \mathbb{R}^+, \\ w_2(\mathbf{x}, t) \underset{|\mathbf{x}| \rightarrow 0}{\sim} \frac{\mathbf{x}^T}{|\mathbf{x}|^{-2}} \cdot \tilde{\mathbf{Q}} \cdot \nabla u_0(0, t) + \underline{\rho} \partial_t^2 u_0(\mathbf{0}, t) \frac{\ln |\mathbf{x}|}{2\pi\mu_0}, \\ w_2(\mathbf{x}, 0) = \partial_t w_2(\mathbf{x}, 0) = 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2. \end{cases}$$

Or il s'avère que  $\tilde{\mathbf{Q}} = \mathbf{Q}$ . Ainsi on a  $w_2 = u_2$ .

#### THÉORÈME 4.2.6 (*Estimation d'erreur pour le second modèle approché*)

Soit  $u_{\varepsilon}$  la solution du problème (4.1.1) et  $w_{\varepsilon}$  la solution du problème approché (4.1.10). Pour tout temps  $T > 0$  et pour tout  $\eta > 0$  il existe deux constantes  $C_{\eta} = C(T, \eta) > 0$  et  $\varepsilon_0 > 0$  ainsi qu'un compact  $K \subset \mathbb{R}^2$  contenant un voisinage non vide de l'origine tels que pour tout  $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0[$ , on ait l'estimation

$$\sup_{t \in [0, T]} [\|\partial_t u_{\varepsilon} - \partial_t w_{\varepsilon}\|_{L^2(\mathbb{R}^2 \setminus K)} + \|\nabla u_{\varepsilon} - \nabla w_{\varepsilon}\|_{L^2(\mathbb{R}^2 \setminus K)}] \leq C_{\eta} \varepsilon^{3-\eta}, \quad \forall \varepsilon \in [0, \varepsilon_0[.$$

DÉMONSTRATION : L'analyse effectuée ci-dessus montre que les termes de champ lointain pour le problème approché vérifient  $w_n = u_n$  pour  $n = 0, 1, 2$ . Soit  $u_{\varepsilon}^{(2)} = u_0 + \varepsilon^2 u_2$  le développement asymptotique en champ lointain de  $u_{\varepsilon}$  tronqué à l'ordre 2. Ainsi on a en

vertu de l'inégalité triangulaire

$$\begin{aligned} & \sup_{t \in [0, T]} \left[ \|\partial_t u_\varepsilon - \partial_t w_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^2 \setminus K)} + \|\nabla u_\varepsilon - \nabla w_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^2 \setminus K)} \right] \\ & \leq \sup_{t \in [0, T]} \left[ \|\partial_t u_\varepsilon^{(2)} - \partial_t w_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^2 \setminus K)} + \|\nabla u_\varepsilon^{(2)} - \nabla w_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^2 \setminus K)} \right] \\ & + \sup_{t \in [0, T]} \left[ \|\partial_t u_\varepsilon^{(2)} - \partial_t u_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^2 \setminus K)} + \|\nabla u_\varepsilon^{(2)} - \nabla u_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^2 \setminus K)} \right] \end{aligned}$$

Or nous avons vu au chapitre 3 qu'il existe  $C_\eta(T) > 0$  et  $\varepsilon_0 > 0$  telles que pour tout  $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0[$  on ait

$$\sup_{t \in [0, T]} \left[ \|\partial_t u_\varepsilon^{(2)} - \partial_t u_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^2 \setminus K)} + \|\nabla u_\varepsilon^{(2)} - \nabla u_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^2 \setminus K)} \right] \leq C_\eta \varepsilon^{3-\eta}.$$

De même, comme nous disposons du résultat de stabilité énoncé théorème 4.2.5, nous pouvons appliquer la même démarche que pour l'analyse d'erreur effectuée pour le problème exact, à la section 3.5, pour établir l'estimation d'erreur entre  $w_\varepsilon$  et son développement asymptotique raccordé (à savoir un raisonnement par stabilité puis par erreur de consistance) et l'on montre ainsi que le développement asymptotique en champ lointain de  $w_\varepsilon$  à l'ordre 2 est exactement  $u_\varepsilon^{(2)}$ . Ainsi, pour tout  $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0[$  on a

$$\sup_{t \in [0, T]} \left[ \|\partial_t u_\varepsilon^{(2)} - \partial_t w_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^2 \setminus K)} + \|\nabla u_\varepsilon^{(2)} - \nabla w_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^2 \setminus K)} \right] \leq C_\eta \varepsilon^{3-\eta},$$

ce qui achève la preuve. □

Ce résultat montre que le modèle approché est consistant à l'ordre  $3-\eta$  en  $\varepsilon$ . Nous présentons une généralisation immédiate de ce modèle approché au cas de plusieurs inclusions.

## 4.2.2 Cas d'un nombre quelconque d'inclusions

Ici, nous présentons succinctement le modèle approché que nous utilisons pour le cas de plusieurs inclusions. Il s'agit d'une généralisation immédiate du modèle pour une inclusion unique présenté équation (4.2.4). Nous disposons de  $N$  inclusions  $\omega_\varepsilon^n$ , les propriétés matérielles du milieu de propagation sont représentées par les fonctions  $\mu_\varepsilon$  and  $\rho_\varepsilon$  définies par

$$\mu_\varepsilon(\mathbf{x}) = \begin{cases} \mu_0 & \text{si } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \setminus \bigcup_{n=1}^N \omega_\varepsilon^n, \\ \mu_n & \text{si } \mathbf{x} \in \omega_\varepsilon^n, \end{cases} \quad \rho_\varepsilon(\mathbf{x}) = \begin{cases} \rho_0 & \text{si } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \setminus \bigcup_{n=1}^N \omega_\varepsilon^n, \\ \rho_n & \text{si } \mathbf{x} \in \omega_\varepsilon^n. \end{cases}$$

Nous introduisons,  $2N$  constantes réelles  $\kappa_1^n$  et  $\kappa_2^n$  suffisamment grandes pour que

$$1 - \sum_{n=1}^N \frac{1}{\pi(\kappa_1^n)^2} |\underline{\rho}_n| > 0 \quad \text{et} \quad \mathbf{I} + \sum_{n=1}^N \frac{2\pi\mu_0}{(\kappa_2^n)^2} \mathbf{Q}_n \text{ soit inversible.} \quad (4.2.23)$$

où  $\underline{\rho}_n$  est le contraste relatif intégré sur la  $n$ -ème inclusion

$$\underline{\rho}_n = \int_{\omega_\varepsilon^n} (\rho_n - \rho_0) d\mathbf{x} = (\rho_n - \rho_0) |\omega_\varepsilon^n|,$$

tandis que  $\mathbf{Q}_n$  est une matrice symétrique réelle d'ordre 2, le tenseur de polarisation généralisé d'ordre 1 associé à l'inclusion  $\omega^n$  et au couple  $(\mu_0, \mu_n)$ .

Nous introduisons la matrice auxiliaire  $\widehat{\mathbf{Q}}_n$  définie par

$$\widehat{\mathbf{Q}}_n = (\kappa_2^n)^2 \left( \left( \mathbf{I} + \frac{1}{(\kappa_2^n)^2} \mathbf{Q}_n \right)^{-1} - \mathbf{I} \right)$$

qui nous servira pour la construction du modèle approché.

Nous supposons que pour tout  $n \in \{1, \dots, N\}$ ,  $\kappa_2^n$  est suffisamment grand pour que

$$1 - \frac{1}{\pi(\kappa_2^n)^2} \max_{\lambda \in \text{Sp } \widehat{\mathbf{Q}}_n} |\lambda| > 0. \quad (4.2.24)$$

Notons que la matrice  $\widehat{\mathbf{Q}}_n$  est symétrique réelle car  $\mathbf{Q}_n$  l'est également.

De manière similaire à (4.2.2), nous introduisons les formes linéaires  $p_\varepsilon^n$  et  $q_\varepsilon^n$  définies par

$$p_\varepsilon^n : \left\{ \begin{array}{l} \text{H}^1(\text{B}_{\kappa_1^n \varepsilon}^n) \rightarrow \mathbb{R} \\ v \mapsto \frac{1}{|\text{B}_{\kappa_1^n \varepsilon}^n|} \int_{\text{B}_{\kappa_1^n \varepsilon}^n} v(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \end{array} \right. \quad \text{et} \quad q_\varepsilon^n : \left\{ \begin{array}{l} \text{H}^2(\text{B}_{\kappa_2^n \varepsilon}^n) \rightarrow \mathbb{R} \\ v \mapsto \frac{1}{|\text{B}_{\kappa_2^n \varepsilon}^n|} \int_{\text{B}_{\kappa_2^n \varepsilon}^n} \nabla v(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}, \end{array} \right. \quad (4.2.25)$$

où  $\text{B}_l^n$  est la boule de centre  $\mathbf{x}_n$  et de rayon  $l$ .

Nous proposons le modèle approché

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } w_\varepsilon \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^+, \text{L}^2(\mathbb{R}^2)) \cap \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, \text{H}^2(\mathbb{R}^2)) \text{ tel que} \\ \rho_0 \partial_t^2 w_\varepsilon - \mu_0 \Delta w_\varepsilon + \varepsilon^2 \sum_{n=1}^N \left[ \rho_n p_\varepsilon^n(\ddot{w}_\varepsilon)(t) p_\varepsilon^n(\cdot) + 2\pi\mu_0 q_\varepsilon^n(w_\varepsilon) \cdot \widehat{\mathbf{Q}}_n \cdot q_\varepsilon^n(\cdot) \right] = f(\mathbf{x}, t), \\ w_\varepsilon(\mathbf{x}, 0) = \partial_t w_\varepsilon(\mathbf{x}, 0) = 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, \quad \forall t \in \mathbb{R}^+. \end{array} \right. \quad (4.2.26)$$

La formulation variationnelle associée à (4.2.26) est

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } w_\varepsilon \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^+, \text{L}^2(\mathbb{R}^2)) \cap \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, \text{H}^2(\mathbb{R}^2)) \text{ tel que } t \in \mathbb{R}^+, \\ \frac{d^2}{dt^2} m(w_\varepsilon, v) + a(w_\varepsilon, v) + \varepsilon^2 \sum_{n=1}^N \left[ \rho_n \frac{d^2}{dt^2} p_\varepsilon^n(w_\varepsilon) p_\varepsilon^n(v) + 2\pi\mu_0 q_\varepsilon^n(w_\varepsilon) \cdot \widehat{\mathbf{Q}}_n \cdot q_\varepsilon^n(v) \right] = F(v), \\ w_\varepsilon(0) = \partial_t w_\varepsilon(0) = 0, \quad \forall v \in \text{H}^1(\mathbb{R}^2). \end{array} \right. \quad (4.2.27)$$

Ce problème est posé comme une généralisation de l'étude faite dans le cas d'une inclusion unique. Son caractère bien-posé se prouve de manière similaire, en s'appuyant sur une technique énergétique.

#### THÉORÈME 4.2.7

*Il existe une constante  $\varepsilon_0 > 0$  telle que  $\forall \varepsilon \in [0, \varepsilon_0[$ , le problème (4.2.26) admet une unique solution  $w_\varepsilon$ . Par ailleurs, il existe une constante  $C > 0$  telle que pour tout  $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0[$ , on*

ait

$$\sqrt{\int_{\mathbb{R}^2} \left( \rho_0 \left| \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial t} \right|^2(\mathbf{x}, t) + \mu_0 |\nabla w_\varepsilon|^2(\mathbf{x}, t) \right) d\mathbf{x}} \leq C \int_0^t \|f(\tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} d\tau,$$

pour tout  $t \geq 0$ .

DÉMONSTRATION : La preuve de ce résultat est tout à fait similaire à celle de la preuve de l'existence d'une solution unique pour le problème approché à une seule inclusion, théorème 4.2.5. La première étape consiste à montrer une estimation d'énergie a priori, l'argument technique étant le choix de constantes  $\kappa_1^n$  et  $\kappa_2^n$  vérifiant les conditions (4.2.23) et (4.2.24).

A partir de l'estimation d'énergie, nous déduisons le caractère bien-posé du problème hyperbolique (4.2.5) en utilisant des approximations de Galerkin, comme dans [42, Paragraphe 7.2].

---

Enfin, nous disposons du résultat de consistance suivant, qui généralise le résultat énoncé théorème 4.2.6 au cas de  $N$  inclusions.

**THÉORÈME 4.2.8**

Soit  $u_\varepsilon$  la solution du problème (4.1.1) et  $w_\varepsilon$  la solution du problème approché (4.1.10). Pour tout temps  $T > 0$  et pour tout  $\eta > 0$ , il existe deux constantes  $C_\eta = C(T, \eta) > 0$  et  $\varepsilon_0 > 0$  ainsi qu'un compact  $K \subset \mathbb{R}^2$  contenant un voisinage non vide de l'origine tels que pour tout  $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0[$ , on ait l'estimation

$$\sup_{t \in [0, T]} [\|\partial_t u_\varepsilon - \partial_t w_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^2 \setminus K)} + \|\nabla u_\varepsilon - \nabla w_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^2 \setminus K)}] \leq C_\eta \varepsilon^{3-\eta}, \quad \forall \varepsilon \in [0, \varepsilon_0[.$$

DÉMONSTRATION : La preuve est identique à celle du théorème 4.2.6. Le passage de 1 à  $N$  inclusions est identique à celui fait pour l'analyse d'erreur entre le développement asymptotique et la solution du problème exact, réalisée au théorème 3.5.1 : les équations de champ lointain sont insensibles aux termes perturbatifs, tandis que les équations de champ proche sont locales à chaque inclusion.



# CHAPITRE

5

## APPROXIMATION NUMÉRIQUE

### Sommaire

---

<b>5.1</b>	<b>Discrétisation des modèles approchés . . . . .</b>	<b>124</b>
5.1.1	Semi-discrétisation en espace . . . . .	125
5.1.1.a	Premier modèle . . . . .	125
5.1.1.b	Second modèle . . . . .	128
5.1.2	Discrétisation complète et schémas temporels . . . . .	129
<b>5.2</b>	<b>Etude du phénomène de verrouillage numérique . . . . .</b>	<b>133</b>
<b>5.3</b>	<b>Enrichissement de l'espace d'approximation . . . . .</b>	<b>134</b>
<b>5.4</b>	<b>Remarques concernant l'implémentation numérique . . . . .</b>	<b>138</b>
<b>5.5</b>	<b>Synthèse . . . . .</b>	<b>140</b>

---

Dans ce chapitre, nous abordons différentes questions liées à l'approximation numérique du modèle exact et des modèles approchés proposés au précédent chapitre pour la diffraction d'ondes acoustiques par une ou des petites hétérogénéités.

Replaçons-nous dans le contexte. Le problème initial de diffraction par un ensemble de petites hétérogénéités (2.2.2) peut-être considéré comme la perturbation du problème de propagation d'onde acoustique dans l'espace libre caractérisé par la paire de paramètres physiques  $(\rho_0, \mu_0)$ . La théorie de l'approximation du problème de propagation sans inclusion est bien connue et présente un certain nombre de propriétés agréables : la convergence de la méthode numérique issue d'une semi-discrétisation en espace par éléments finis de Lagrange  $\mathbb{P}_k$  ou  $\mathbb{Q}_k$  associée à un pas de maillage  $h$  et d'une discrétisation en temps à l'aide d'un schéma saute-mouton de pas de temps  $\Delta t$  fournit une convergence à la vitesse  $h^k + \Delta t^2$  (l'erreur étant mesurée en norme  $\mathcal{C}_t^0(L_x^2)$  à condition que la solution du problème exacte soit suffisamment régulière) [34] ; le schéma temporel est stable à condition

qu'une condition de stabilité CFL soit vérifiée ; l'utilisation de techniques de condensation de masse permet d'utiliser une matrice de masse diagonale [35, 36], ce qui a pour effet d'augmenter l'efficacité de la méthode en terme de stockage et de coût de calcul tout en conservant une vitesse de convergence standard.

Nous souhaitons que les méthodes numériques que nous proposons garantissent une convergence qui ait lieu à la même vitesse que la méthode standard pour un problème de propagation dans un milieu sans inclusion, ainsi qu'une condition de stabilité CFL qui soit une perturbation de la condition CFL pour la méthode numérique sans inclusions. Idéalement, nous tirerons parti de la structure diagonale de la matrice de masse produite par la discrétisation de la méthode éléments finis avec condensation de masse pour le problème de propagation sans inclusion.

De plus, nous souhaitons pouvoir choisir le pas spatial de notre méthode numérique  $h$  indépendamment de la taille caractéristique des défauts  $\varepsilon$ . En effet, nous constaterons qu'en ce qui concerne la convergence des méthodes d'approximation numériques par éléments finis standards, un phénomène de verrouillage numérique a lieu (la vitesse de convergence est fortement pénalisée par la présence de l'inclusion dans le modèle). Ceci est très pénalisant en terme de coût de calcul : si  $\varepsilon$  est très petit (par exemple de l'ordre de  $10^{-10}$ ), alors il nous faut choisir un pas de maillage du même ordre pour garantir une bonne précision, et ce même en utilisant les modèles approchés proposés dans le chapitre précédent.

Nous souhaitons donc proposer des méthodes permettant d'atteindre des précisions satisfaisantes tout en choisissant le pas de maillage  $h$  indépendamment de  $\varepsilon$ .

Une stratégie pour contourner cette difficulté et retrouver des vitesses de convergence standards pour ce type de méthode consiste à enrichir l'espace d'approximation à l'aide d'un faible nombre de fonctions, permettant de rendre compte de la nature singulière du champ diffracté par l'inclusion. Les fonctions d'enrichissement sont choisies comme étant des approximations du comportement de la fonction de Green au centre de l'inclusion.

Malheureusement, un bug réside dans le code et je ne suis pas en mesure de fournir de résultats numériques concernant l'enrichissement de l'espace d'approximation. Cependant, sont présentés dans ce chapitre la démarche et la discrétisation employés pour l'enrichissement, qui consiste à ajouter deux fonctions particulières par inclusion à l'espace d'approximation par éléments finis standards.

## 5.1 DISCRÉTISATION DES MODÈLES APPROCHÉS

Nous décrivons dans cette section la discrétisation des deux modèles approchés proposés dans le chapitre précédent. Rappelons que, comme évoqué dans l'introduction de ce manuscrit, une des contraintes intervenant dans le développement de méthodes numériques pour les problèmes de diffraction considérés dans cette thèse stipule que celles-ci doivent s'inscrire dans une librairie de calcul pré-existante à cette thèse de doctorat. Cette librairie de calcul, ONDOMATIC (voir [60]), entre autres fonctionnalités, utilise des éléments finis en espace et des schémas d'ordre 1 ou 2 pour la discrétisation temporelle. Ainsi, nous utiliserons la démarche suivante pour la discrétisation des problèmes approchés : dans un

premier temps, nous appliquons une semi-discrétisation en espace puis nous discrétiserons totalement le problème.

Nous décrivons dans un premier temps le problème obtenu après semi-discrétisation en espace, en utilisant une procédure de discrétisation par éléments finis standards. Dans un deuxième temps, nous nous intéressons à la discrétisation totale, c'est-à-dire que nous proposons des schémas temporels pour les problèmes semi-discrétisés. Enfin, nous nous intéressons au phénomène de verrouillage numérique et à l'enrichissement des espaces d'approximations, qui permettent d'outrepasser le verrouillage.

### 5.1.1 Semi-discrétisation en espace

#### 5.1.1.a Premier modèle

Nous souhaitons développer une méthode numérique pour la formulation (4.1.27), que nous rappelons ici :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (v_\varepsilon, p_\varepsilon, \mathbf{w}_\varepsilon, \mathbf{q}_\varepsilon) \in V \times P \times \mathcal{C}(\mathbf{X}_\varepsilon) \times \mathcal{C}(\mathbf{Y}_\varepsilon) \text{ tel que} \\ \frac{d}{dt} m_v(v_\varepsilon, \tilde{v}) + \frac{d}{dt} \sum_{n=1}^N c_\varepsilon^n(\tilde{v}, w_\varepsilon^n) - a(\tilde{v}, p_\varepsilon) = F(\tilde{v}), \\ \frac{d}{dt} m_p(p_\varepsilon, \tilde{p}) + \frac{d}{dt} \sum_{n=1}^N b_\varepsilon^n(\tilde{p}, q_\varepsilon^n) + a(v_\varepsilon, \tilde{p}) = 0, \\ m_q^{\varepsilon, n}(q_\varepsilon^n, \tilde{q}^n) = b_\varepsilon^n(p_\varepsilon, \tilde{q}^n), \quad \forall n \in \{1, \dots, N\}, \\ m_w^{\varepsilon, n}(w_\varepsilon^n, \tilde{w}^n) = c_\varepsilon^n(v_\varepsilon, \tilde{w}^n), \\ p_\varepsilon(0) = v_\varepsilon(0) = 0, \\ \text{pour tout } (\tilde{v}, \tilde{p}, \tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{w}}) \in H^1(\mathbb{R}^2) \times H(\text{div}, \mathbb{R}^2) \times \mathbf{X}_\varepsilon \times \mathbf{Y}_\varepsilon, \end{array} \right. \quad (5.1.1)$$

où

$$V = \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+, L^2(\mathbb{R}^2)) \cap \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, H^1(\mathbb{R}^2)) \quad \text{et} \quad P = \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+, L^2(\mathbb{R}^2)) \cap \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, H(\text{div}, \mathbb{R}^2)),$$

tandis que  $\mathbf{X}_\varepsilon = X_\varepsilon^1 \times \dots \times X_\varepsilon^N$  et  $\mathbf{Y} = \nabla \mathbf{X}_\varepsilon$ , où à  $n$  fixé l'espace  $X_\varepsilon^n$  est l'espace engendré par les fonctions de profil vivant sur la  $n$ -ème inclusion jusqu'à l'ordre 2 (voir section 4.1.2).

Les formes  $m_v$ ,  $m_p$ ,  $m_q^{\varepsilon, n}$ ,  $m_w^{\varepsilon, n}$  sont les formes de masse associées aux variables  $v$ ,  $p$ ,  $q_\varepsilon^n$  et  $w_\varepsilon^n$  respectivement, tandis que les formes  $b_\varepsilon^n$  et  $c_\varepsilon^n$  sont les formes de couplage pour les couples  $(p_\varepsilon, q_\varepsilon^n)$  et  $(v_\varepsilon, w_\varepsilon^n)$  respectivement.

L'objectif est de discrétiser la paire d'espaces fonctionnels  $(V, P)$  avec des éléments finis classiques, avec un pas de maillage  $h$  indépendant de  $\varepsilon$ .

Nous introduisons deux espaces d'éléments finis [65, 33, 1, 46]

$$V_h = \text{vect}\langle \phi_n, 1 \leq n \leq N_h \rangle, \quad P_h = \text{vect}\langle \xi_n, 1 \leq n \leq N_h \rangle$$

de dimension  $N_h \in \mathbb{N}$ , pour les inconnues  $v_\varepsilon$  et  $p_\varepsilon$  respectivement. Pour assurer la convergence de la méthode par éléments finis, il est nécessaire qu'une certaine compatibilité ait lieu entre les espaces  $V_h$  et  $P_h$  [46].

La convergence de la méthode par élément finis a lieu si  $\nabla P_h \subset V_h$  (nous renvoyons par exemple à [1]).

La formulation semi-discrète associée au problème (5.1.1) est alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (v_{\varepsilon,h}, p_{\varepsilon,h}, \mathbf{w}_{\varepsilon,h}, \mathbf{q}_{\varepsilon,h}) \in \mathcal{C}^1(V_h) \times \mathcal{C}^1(P_h) \times \mathcal{C}(\mathbf{X}_\varepsilon) \times \mathcal{C}(\mathbf{Y}_\varepsilon) \text{ tel que} \\ \\ \frac{d}{dt} m_v(v_{\varepsilon,h}, \tilde{v}) + \frac{d}{dt} \sum_{n=1}^N c_\varepsilon^n(\tilde{v}, w_{\varepsilon,h}^n) - a(\tilde{v}, p_{\varepsilon,h}) = F(\tilde{v}), \\ \\ \frac{d}{dt} m_p(p_{\varepsilon,h}, \tilde{p}) + \frac{d}{dt} \sum_{n=1}^N b_\varepsilon^n(\tilde{p}, q_{\varepsilon,h}^n) + a(v_{\varepsilon,h}, \tilde{p}) = 0, \\ \\ m_q^{\varepsilon,n}(q_{\varepsilon,h}^n, \tilde{q}^n) = b_\varepsilon^n(p_{\varepsilon,h}, \tilde{q}^n), \quad \forall n \in \{1, \dots, N\}, \\ \\ m_w^{\varepsilon,n}(w_{\varepsilon,h}^n, \tilde{w}^n) = c_\varepsilon^n(v_{\varepsilon,h}, \tilde{w}^n), \\ \\ p_{\varepsilon,h}(0) = v_{\varepsilon,h}(0) = 0, \\ \\ \text{pour tout } (\tilde{v}, \tilde{p}, \tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{w}}) \in V_h \times P_h \times \mathbf{X}_\varepsilon \times \mathbf{Y}_\varepsilon, \end{array} \right. \quad (5.1.2)$$

En notant  $\mathbf{v}_\varepsilon^h$  les coordonnées de  $v_\varepsilon^h$  dans la base  $\{\phi_n, 1 \leq n \leq N\}$ ,  $\mathbf{p}_\varepsilon^h$  les coordonnées de  $p_\varepsilon^h$  dans la base  $\{\psi_n, 1 \leq n \leq N\}$ ,  $\mathbf{q}_\varepsilon^h$  les coordonnées de  $\mathbf{q}_{\varepsilon,h}$  dans la base canonique de  $\mathbf{X}_\varepsilon$  et  $\mathbf{w}_\varepsilon^h$  les coordonnées de  $\mathbf{w}_{\varepsilon,h}$  dans la base canonique de  $\mathbf{X}_\varepsilon$ , et en testant la formulation variationnelle (5.1.2) contre les fonctions de base canonique de l'espace produit  $V_h \times P_h \times \mathbf{X}_\varepsilon \times \mathbf{Y}_\varepsilon$ , il est classique que la solution  $(v_{\varepsilon,h}, p_{\varepsilon,h}, \mathbf{w}_{\varepsilon,h}, \mathbf{q}_{\varepsilon,h})$  de (5.1.2) est caractérisée par le système matriciel suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \mathbf{M}_v \mathbf{v}_\varepsilon^h - \mathbf{A} \mathbf{p}_\varepsilon^h + \frac{d}{dt} \sum_{n=1}^N \mathbf{C}_\varepsilon^n \mathbf{w}_\varepsilon^{h,n} = \mathbf{F}_h, \quad t \in \mathbb{R}^+, \\ \\ \frac{d}{dt} \mathbf{M}_p \mathbf{p}_\varepsilon^h + \mathbf{A}^T \mathbf{v}_\varepsilon^h + \frac{d}{dt} \sum_{n=1}^N \mathbf{B}_\varepsilon^n \mathbf{q}_\varepsilon^{h,n} = 0, \\ \\ \mathbf{M}_q^{\varepsilon,n} \mathbf{q}_\varepsilon^{h,n} = (\mathbf{B}_\varepsilon^n)^T \mathbf{p}_\varepsilon^h, \quad \forall n \in \{1, \dots, N\}, \\ \\ \mathbf{M}_w^{\varepsilon,n} \mathbf{w}_\varepsilon^{h,n} = (\mathbf{C}_\varepsilon^n)^T \mathbf{v}_\varepsilon^h, \end{array} \right. \quad (5.1.3)$$

où les matrices sont définies par

$$\mathbf{M}_v = (m_v(\phi_i, \phi_j))_{1 \leq i,j \leq N_h}, \quad \mathbf{M}_p = (m_p(\xi_i, \xi_j))_{1 \leq i,j \leq N_h},$$

et

$$\mathbf{A} = a(\phi_i, \xi_j)_{1 \leq i,j \leq N_h},$$

où  $M^T$  désigne la transposée de la matrice  $M$ , où les matrices  $\mathbf{M}_q^{\varepsilon,n}$  et  $\mathbf{M}_w^{\varepsilon,n}$  sont définies, à  $n \in \{1, \dots, N\}$  fixé par les formules suivantes

$$\mathbf{M}_w^{\varepsilon,n} = (m_w^{\varepsilon,n}(W_i^n, W_j^n))_{1 \leq i,j \leq N_W} \quad \text{et} \quad \mathbf{M}_q^{\varepsilon,n} = (m_q^{\varepsilon,n}(\nabla W_i^n, \nabla W_j^n))_{1 \leq i,j \leq N_W}, \quad (5.1.4)$$

où nous avons noté

$$\{W_0^n, W_{1,1}^n, W_{1,2}^n, W_{2,0}^n, W_{2,\alpha}^n, |\alpha| = 2\} = \{W_i^n, 1 \leq i \leq 7\}. \quad (5.1.5)$$

Ici  $N_W$  est le nombre de fonction  $W$  utilisées dans l'espace d'approximation. Si nous utilisons le développement de  $u_\varepsilon$  à l'ordre 0, 1 ou 2, alors  $N_W$  vaudra respectivement 1, 3 ou 7.

Quand à elles, les matrices  $\mathbf{B}_n^\varepsilon$  et  $\mathbf{C}_n^\varepsilon$  sont définies par

$$(\mathbf{B}_\varepsilon^n)_{ij} = b_\varepsilon^n(\xi_i, W_j^n) \quad \text{et} \quad (\mathbf{C}_\varepsilon^n)_{ij} = c_\varepsilon^n(\phi_i, W_j^n), \quad 1 \leq i \leq N_h, \quad 1 \leq j \leq N_W.$$

Enfin, le terme source  $\mathbf{F}_h$  est défini par

$$(\mathbf{F}_h)_i = F(\phi_i), \quad 1 \leq i \leq N_h.$$

On notera que nous avons omis de signaler la dépendance de la totalité des matrices intervenant dans le système précédent (hormis  $M_w^{\varepsilon,n}$  et  $M_q^{\varepsilon,n}$ ) en le paramètre  $h$ . Cette omission est délibérée et vise simplement à alléger les notations, déjà relativement lourdes.

Nous allons à présent éliminer les variables  $\mathbf{p}_\varepsilon^h$ ,  $\mathbf{q}_\varepsilon^h$  et  $\mathbf{w}_\varepsilon^{h,n}$  du système matriciel (5.1.3), pour n'obtenir qu'une équation d'ondes augmentée en la variable  $\mathbf{v}_\varepsilon^h$ .

En supposant, formellement pour le moment, que les matrices  $\mathbf{M}_w^{\varepsilon,n}$  et  $\mathbf{M}_q^{\varepsilon,n}$  sont inversibles, le système matriciel (5.1.3) se réécrit

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \mathbf{M}_v \mathbf{v}_\varepsilon^h - \mathbf{A} \mathbf{p}_\varepsilon^h + \frac{d}{dt} \sum_{n=1}^N \mathbf{C}_\varepsilon^n (\mathbf{M}_w^{\varepsilon,n})^{-1} (\mathbf{C}_\varepsilon^n)^T \mathbf{v}_\varepsilon^h = \mathbf{F}_h, & t \in \mathbb{R}^+, \\ \frac{d}{dt} \mathbf{M}_p \mathbf{p}_\varepsilon^h + \mathbf{A}^T \mathbf{v}_\varepsilon^h + \frac{d}{dt} \sum_{n=1}^N \mathbf{B}_\varepsilon^n (\mathbf{M}_q^{\varepsilon,n})^{-1} (\mathbf{B}_\varepsilon^n)^T \mathbf{p}_\varepsilon^h = 0. \end{cases}$$

Nous cherchons à éliminer  $\mathbf{p}_\varepsilon^h$  du système ci-dessus. Introduisons la matrice

$$\mathbf{M}_p^{\varepsilon,\text{aug}} = \mathbf{M}_p + \sum_{n=1}^N \mathbf{B}_\varepsilon^n (\mathbf{M}_q^{\varepsilon,n})^{-1} (\mathbf{B}_\varepsilon^n)^T.$$

La puissance aug est l'abréviation de *augmentée*. Nous avons besoin du résultat suivant qui va nous permettre d'éliminer la variable  $\mathbf{p}_\varepsilon^h$ .

#### LEMME 5.1.1

*La matrice  $\mathbf{M}_p^{\varepsilon,\text{aug}}$  est inversible, pour  $\varepsilon$  suffisamment petit.*

DÉMONSTRATION : La preuve repose sur le fait que la matrice  $\mathbf{M}_p$  elle-même est inversible, et que la matrice  $\mathbf{M}_p^{\varepsilon,\text{aug}}$  est une petite perturbation de  $\mathbf{M}_p$ , quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Étant donné que  $\mathbf{M}_p$  est inversible et que l'ensemble des matrices inversibles est ouvert dans l'ensemble des matrices carrées, on en déduit le résultat. □

En dérivant par rapport au temps la première équation et en éliminant la variable  $\mathbf{p}_\varepsilon$  de la seconde équation, on déduit que

$$\frac{d^2}{dt^2} \left[ \mathbf{M}_v + \sum_{n=1}^N \mathbf{C}_\varepsilon^n (\mathbf{M}_w^{\varepsilon,n})^{-1} (\mathbf{C}_\varepsilon^n)^T \right] \mathbf{v}_\varepsilon^h + \mathbf{A} (\mathbf{M}_p^{\varepsilon,\text{aug}})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{v}_\varepsilon^h = \dot{\mathbf{F}}_h, \quad (5.1.6)$$

ce que nous pouvons réécrire

$$\frac{d^2}{dt^2} \mathbf{M}_\varepsilon^{\text{aug}} \mathbf{v}_\varepsilon^h + \mathbf{K}_\varepsilon^{\text{aug}} \mathbf{v}_\varepsilon^h = \dot{\mathbf{F}}_h,$$

Ainsi, nous retombons sur une équation différentielle ordinaire classique au sens où celle-ci a la même forme que les EDOs obtenues après discrétisation par éléments finis d'une équation d'onde classique. Ici, les matrices de masse

$$\mathbf{M}_\varepsilon^{\text{aug}} = \left[ \mathbf{M}_v + \sum_{n=1}^N \mathbf{C}_\varepsilon^n (\mathbf{M}_w^{\varepsilon,n})^{-1} (\mathbf{C}_\varepsilon^n)^T \right]$$

et de rigidité

$$\mathbf{K}_\varepsilon^{\text{aug}} = \mathbf{A} (\mathbf{M}_p^{\varepsilon,\text{aug}})^{-1} \mathbf{A}^T$$

dépendent de  $\varepsilon$  et rendent compte de la présence de l'inclusion.

Nous verrons dans la prochaine section quelle stratégie employer pour discrétiser en temps l'équation (5.1.6).

### 5.1.1.b Second modèle

Dans cette section, nous souhaitons développer une méthode numérique pour le second modèle approché (4.2.27), que nous rappelons ici :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } w_\varepsilon \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^+, L^2(\mathbb{R}^2)) \cap \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, H^2(\mathbb{R}^2)) \text{ tel que } \forall t \in \mathbb{R}^+, \\ \frac{d^2}{dt^2} m(w_\varepsilon, v) + a(w_\varepsilon, v) + \varepsilon^2 \sum_{n=1}^N \left[ \rho_n \frac{d^2}{dt^2} p_\varepsilon^n(w_\varepsilon) p_\varepsilon^n(v) + 2\pi\mu_0 q_\varepsilon^n(w_\varepsilon) \cdot \hat{\mathbf{Q}}_n \cdot q_\varepsilon^n(v) \right] = F(v), \\ w_\varepsilon(0) = \partial_t w_\varepsilon(0) = 0, \quad \forall v \in \mathbf{H}^1(\mathbb{R}^2). \end{array} \right. \quad (5.1.7)$$

Sélectionnons un domaine  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  borné contenant l'inclusion  $\omega_\varepsilon \subset \Omega$  pour tout  $n \in \{1, \dots, N\}$ . Typiquement, dans les simulations numériques que nous présenterons ultérieurement,  $\Omega$  sera un rectangle. Nous allons borner le domaine de calcul, en substituant l'espace  $\mathbb{R}^2$  tout entier par  $\Omega$  dans la formulation (5.1.7) et en apposant des couches parfaitement absorbantes (PMLs) sur le bord de  $\Omega$ . Nous renvoyons à l'abondante littérature ([16, 22, 78, 24] entre autres) concernant les couches parfaitement absorbantes pour plus de détails. Nous omettons celles-ci dans les formulations qui interviendront dans la suite de cette section. Gardons simplement à l'esprit que nous disposons d'un procédé permettant de borner artificiellement le domaine de calcul.

Soit  $k \in \mathbb{N}$  et  $h > 0$ , soit  $\mathbb{V}_h^k$  l'espace d'éléments finis d'ordre  $k$  associé à une triangulation ou une quadrangulation de  $\Omega$ . Notons  $N_h^k = \dim \mathbb{V}_h^k$ , et notons  $\{\varphi_n, 1 \leq n \leq N_h^k\}$  une base de  $\mathbb{V}_h^k$ . La formulation semi-discrète associée à (5.1.7) est

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } w_{\varepsilon,h} \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^+, \mathbb{V}_h^k) \text{ tel que } \forall t \in \mathbb{R}^+, \\ \frac{d^2}{dt^2} m(w_{\varepsilon,h}, v_h) + a(w_{\varepsilon,h}, v_h) + \varepsilon^2 \sum_{n=1}^N \left[ \rho_n \frac{d^2}{dt^2} p_\varepsilon^n(w_{\varepsilon,h}) p_\varepsilon^n(v_h) + 2\pi\mu_0 q_\varepsilon^n(w_{\varepsilon,h}) \cdot \hat{\mathbf{Q}}_n \cdot q_\varepsilon^n(v_h) \right] = F(v_h), \\ w_{\varepsilon,h}(0) = \partial_t w_{\varepsilon,h}(0) = 0, \quad \forall v \in \mathbb{V}_h^k. \end{array} \right. \quad (5.1.8)$$

En notant  $\mathbf{w}_{\varepsilon,h}$  le vecteur des coordonnées de  $w_{\varepsilon,h}$  dans la base canonique de  $\mathbb{V}_h^k$ , il est classique que résoudre (5.1.8) est équivalent à résoudre le système matriciel suivant (il suffit de tester (5.1.8) en prenant  $v_h$  successivement égal à toutes les fonctions de la base canonique de  $\mathbb{V}_h^k$ )

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{w}}_{\varepsilon,h} + \sum_{n=1}^N \mathbf{P}_\varepsilon^n \ddot{\mathbf{w}}_{\varepsilon,h} + \mathbf{K}\mathbf{w}_{\varepsilon,h} + \sum_{n=1}^N \mathbf{Q}_\varepsilon^n \mathbf{w}_{\varepsilon,h} = \mathbf{F}_h, \quad t \in \mathbb{R}^+, \quad (5.1.9)$$

où la matrice de masse  $\mathbf{M}$  et la matrice de rigidité  $\mathbf{K}$  sont données respectivement par les formules

$$\mathbf{M}_{ij} = m(\varphi_i, \varphi_j) \quad \text{et} \quad \mathbf{K}_{ij} = a(\varphi_i, \varphi_j), \quad 1 \leq i, j \leq N_h^k,$$

tandis que les matrices de perturbation  $\mathbf{P}_\varepsilon$  et  $\mathbf{Q}_\varepsilon$  sont données respectivement par

$$(\mathbf{P}_\varepsilon^n)_{ij} = \varepsilon^2 \underline{\rho}_n p_\varepsilon^n(\varphi_i) p_\varepsilon^n(\varphi_j) \quad \text{et} \quad (\mathbf{Q}_\varepsilon^n)_{ij} = 2\pi\mu_0 \varepsilon^2 q_\varepsilon^n(\varphi_i) \cdot \hat{\mathbf{Q}}_n \cdot q_\varepsilon^n(\varphi_j), \quad 1 \leq i, j \leq N_h^k.$$

### REMARQUE 5.1.2

*Du à la définition des formes linéaires  $p_\varepsilon^n$  et  $q_\varepsilon^n$  (4.2.25) qui, rappelons-le, sont des versions relaxées de la masse de Dirac et de son gradient au centre de la  $n$ -ème inclusion, les matrices  $\mathbf{P}_\varepsilon^n$  et  $\mathbf{Q}_\varepsilon^n$  ont une structure creuse. En fait,  $(\mathbf{Q}_\varepsilon^n)_{ij}$  et  $(\mathbf{P}_\varepsilon)_{ij}$  sont non nuls uniquement si les indices  $i$  et  $j$  correspondent à des degrés de libertés appartenant à des mailles voisines de l'inclusion  $\omega_\varepsilon$ . Nous tirerons parti de cette structure creuse pour l'implémentation d'un schéma numérique en temps.*

De plus, en vertu des résultats annoncés section 4.2 et en particulier le lemme 4.2.3, il vient que  $\mathbf{P}_\varepsilon^n \rightarrow 0$  et  $\mathbf{Q}_\varepsilon^n \rightarrow 0$  dans  $\mathbf{M}_{N_h^k}(\mathbb{R})$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

## 5.1.2 Discrétisation complète et schémas temporels

Les deux modèles approchés (4.1.27) et (4.2.5) fournissent chacun, après semi-discrétisation en espace par éléments finis, une équation différentielle ordinaire du type

$$\frac{d^2}{dt^2} \mathbf{M}_\varepsilon^{\text{aug}} \mathbf{v}_\varepsilon^h + \mathbf{K}_\varepsilon^{\text{aug}} \mathbf{v}_\varepsilon^h = \mathbf{F}_h, \quad \forall t \in \mathbb{R}^+, \quad (5.1.10)$$

où, dans le cas du premier modèle, les matrices  $\mathbf{M}_\varepsilon^{\text{aug}}$  et  $\mathbf{K}_\varepsilon^{\text{aug}}$  sont données par (voir l'équation (5.1.6))

$$\mathbf{M}_\varepsilon^{\text{aug}} = \mathbf{M}_v + \sum_{n=1}^N \mathbf{C}_\varepsilon^n (\mathbf{M}_w^{\varepsilon,n})^{-1} (\mathbf{C}_\varepsilon^n)^T \quad \text{et} \quad \mathbf{K}_\varepsilon^{\text{aug}} = \mathbf{A} \mathbf{M}_p^{\varepsilon,\text{aug}} \mathbf{A}^T, \quad (5.1.11)$$

et dans le cas du second modèle (voir l'équation (5.1.9))

$$\mathbf{M}_\varepsilon^{\text{aug}} = \mathbf{M} + \sum_{n=1}^N \mathbf{P}_\varepsilon^n \quad \text{et} \quad \mathbf{K}_\varepsilon^{\text{aug}} = \mathbf{K} + \sum_{n=1}^N \mathbf{Q}_\varepsilon^n. \quad (5.1.12)$$

De même, le terme source  $\mathbf{F}_h$  diffère d'un modèle à l'autre (d'une dérivation en temps).

Dans les deux cas, les matrices de masse et de rigidité augmentées que nous obtenons sont des perturbations des matrices de masse et de rigidité obtenues dans le cas d'une équation d'onde dans l'espace libre, sans inclusion. En particulier, dans les deux cas, la matrice de rigidité peut s'écrire sous la forme

$$\mathbf{K}_\varepsilon^{\text{aug}} = \mathbf{K} + \mathbf{K}_\varepsilon^{\text{per}},$$

où  $\mathbf{K}$  est la matrice de rigidité *usuelle* et  $\mathbf{K}_\varepsilon^{\text{per}}$  est une matrice de perturbation.

Rappelons la logique d'implémentation numérique que nous suivons : nous traitons un problème de diffraction par une ou plusieurs petites hétérogénéités, considéré comme perturbation d'un problème de propagation dans l'espace libre. Pour ce dernier problème, nous disposons d'un code de calcul performant que nous souhaitons conserver comme brique élémentaire pour la résolution du problème de diffraction : nous souhaitons que notre méthode numérique soit une perturbation de la méthode numérique pour les phénomènes de propagation dans l'espace libre.

Le code `ONDOMATIC` au sein duquel nous réalisons l'implémentation numérique utilise une technique de condensation de masse [35, 36, 60] ainsi qu'un schéma explicite en temps pour résoudre l'équation des ondes dans l'espace libre. Cette méthode est très performante en terme de temps de calcul, sous condition de stabilité CFL.

Supposons que nous appliquions cette stratégie de discrétisation (un schéma explicite) à l'équation (5.1.10). Soit  $\Delta t > 0$  le pas de temps, soit  $T > 0$  le temps final de simulation, et notons

$$N_T = \left\lfloor \frac{T}{\Delta t} \right\rfloor.$$

Pour  $1 \leq n \leq N_T$ , nous notons  $t^n = n\Delta t$ . Il s'agit de déterminer la suite de vecteurs  $(\mathbf{v}_\varepsilon^{h,n})_{1 \leq n \leq N_T}$  de dimension  $N_h^k$  telle que

$$\mathbf{v}_\varepsilon^{h,n} \sim \mathbf{v}_\varepsilon^h(t^n).$$

Nous proposons le schéma suivant

$$\mathbf{M}_\varepsilon^{\text{aug}} \frac{\mathbf{v}_\varepsilon^{h,n+1} - 2\mathbf{v}_\varepsilon^{h,n} + \mathbf{v}_\varepsilon^{h,n-1}}{\Delta t^2} + \mathbf{K}_\varepsilon^{\text{aug}} \mathbf{v}_\varepsilon^{h,n} = \mathbf{F}^n, \quad \forall 1 \leq n \leq N_T,$$

qui peut se réécrire sous la forme

$$\mathbf{v}_\varepsilon^{h,n+1} = 2\mathbf{v}_\varepsilon^{h,n} - \mathbf{v}_\varepsilon^{h,n-1} + \Delta t^2 (\mathbf{M}_\varepsilon^{\text{aug}})^{-1} (\mathbf{F}^n - \mathbf{K}_\varepsilon^{\text{aug}} \mathbf{v}_\varepsilon^{h,n}).$$

Ce schéma est stable sous la condition de stabilité CFL (voir par exemple [2])

$$\Delta t \leq \frac{2}{\sqrt{\rho((\mathbf{M}_\varepsilon^{\text{aug}})^{-1} \mathbf{K}_\varepsilon^{\text{aug}})}}, \quad (5.1.13)$$

où  $\rho(A)$  désigne le rayon spectral de la matrice  $A$ . Cette condition ne nous satisfait pas, car nous souhaiterions comparer la condition de stabilité CFL (5.1.13) par rapport à la condition de stabilité pour le cas du schéma explicite sans inclusion

$$\Delta t \leq \frac{2}{\sqrt{\rho(\mathbf{M}^{-1} \mathbf{K})}}, \quad (5.1.14)$$

où  $\mathbf{M}$  et  $\mathbf{K}$  sont les matrices de masse et de rigidité classiques, tandis que, rappelons-le,  $\mathbf{M}_\varepsilon^{\text{aug}}$  et  $\mathbf{K}_\varepsilon^{\text{aug}}$  sont des perturbations de  $\mathbf{M}$  et de  $\mathbf{K}$  respectivement. Or la condition CFL (5.1.13) ne nous permet pas d'établir une comparaison théorique avec la condition de stabilité pour la cas homogène (5.1.14). Ceci est du au fait que les perturbations des matrices de masse et de rigidité peuvent être de signe opposés.

Ainsi, nous utilisons plutôt une stratégie mixte : nous appliquons un schéma explicite pour la partie rigidité issue de la discrétisation par éléments finis classique, et un  $\theta$ -schéma pour la partie perturbative de la rigidité.

Nous renvoyons à [27, 70] pour une présentation détaillée des  $\theta$ -schémas. Soit  $\theta \in ]1/4, 1]$ . Nous proposons le schéma suivant pour discrétiser (5.1.10) :

$$\mathbf{M}_\varepsilon^{\text{aug}} \frac{\mathbf{v}_\varepsilon^{h,n+1} - 2\mathbf{v}_\varepsilon^{h,n} + \mathbf{v}_\varepsilon^{h,n-1}}{\Delta t^2} + \mathbf{K}\mathbf{v}_\varepsilon^{h,n} + \mathbf{K}_\varepsilon^{\text{per}} \{\mathbf{v}_\varepsilon^h\}_\theta^n = \mathbf{F}^n, \quad \forall 1 \leq n \leq N_T, \quad (5.1.15)$$

où nous avons noté de manière synthétique

$$\{\mathbf{v}_\varepsilon^h\}_\theta^n = \theta \mathbf{v}_\varepsilon^{h,n+1} + (1 - 2\theta) \mathbf{v}_\varepsilon^{h,n} + \theta \mathbf{v}_\varepsilon^{h,n-1}.$$

Les  $\theta$ -schémas sont inconditionnellement stables quand  $\theta \geq 1/4$ . Pour parler avec les mains, le fait de traiter le terme perturbatif  $\mathbf{K}_\varepsilon^{\text{per}} \{\mathbf{v}_\varepsilon^h\}_\theta^n$  à l'aide d'un  $\theta$ -schéma va avoir tendance à ne pas modifier la CFL du schéma explicite de l'équation non-perturbée sous-jacente. Nous souhaiterions que la condition de stabilité CFL du schéma (5.1.15) soit

$$\Delta t \leq \frac{2}{\sqrt{\rho((\mathbf{M}_\varepsilon^{\text{aug}})^{-1}\mathbf{K})}}, \quad (5.1.16)$$

c'est-à-dire à ce que la condition CFL ne soit affectée que par la partie perturbative de la matrice de masse et insensible à la perturbation de la matrice de rigidité. Nous avons en effet le résultat suivant

**PROPOSITION 5.1.3**

*Si  $\varepsilon$  est suffisamment petit, le schéma (5.1.15) est stable sous la condition de stabilité CFL*

$$\Delta t \leq \frac{1}{\theta \sqrt{\rho((\mathbf{M}_\varepsilon^{\text{aug}})^{-1}\mathbf{K})}}.$$

*En particulier, si  $\theta = 1/2$ , la condition de stabilité CFL est (5.1.16).*

DÉMONSTRATION : Nous utilisons la relation algébrique suivante :

$$\{\mathbf{v}_\varepsilon^h\}_\theta^n = \mathbf{v}_\varepsilon^{h,n} + \theta \Delta t^2 \frac{\mathbf{v}_\varepsilon^{h,n+1} - 2\mathbf{v}_\varepsilon^{h,n} + \mathbf{v}_\varepsilon^{h,n-1}}{\Delta t^2}.$$

Ainsi, le schéma (5.1.15) peut se réécrire sous la forme

$$(\mathbf{M}_\varepsilon^{\text{aug}} - \theta \Delta t^2 \mathbf{K}) \frac{\mathbf{v}_\varepsilon^{h,n+1} - 2\mathbf{v}_\varepsilon^{h,n} + \mathbf{v}_\varepsilon^{h,n-1}}{\Delta t^2} + (\mathbf{K} + \mathbf{K}_\varepsilon^{\text{per}}) \{\mathbf{v}_\varepsilon^h\}_\theta^n = \mathbf{F}^n, \quad \forall 1 \leq n \leq N_T.$$

Le schéma ci-dessus est un  $\theta$ -schéma de matrice de masse  $\mathbf{M}_\varepsilon^{\text{aug}} - \theta \Delta t^2 \mathbf{K}$  et de rigidité  $\mathbf{K} + \mathbf{K}_\varepsilon^{\text{per}}$ . Etant donné que  $\theta \geq 1/4$ , il inconditionnellement stable (voir par exemple [27]) si tant est que les matrices de masse et de rigidité soient positives.

Étant donné que  $\mathbf{K}_\varepsilon^{\text{per}} \rightarrow 0$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$  (voir la proposition 4.2.3) et étant donné que  $\mathbf{K}$  est positive, la matrice  $\mathbf{K} + \mathbf{K}_\varepsilon^{\text{per}}$  est positive pour  $\varepsilon$  suffisamment petit. Ainsi, le schéma (5.1.15) est stable si

$$\mathbf{M}_\varepsilon^{\text{aug}} - \theta \Delta t^2 \mathbf{K}$$

est positive c'est -à-dire si et seulement si

$$\Delta t \leq \frac{1}{\theta \sqrt{\rho((\mathbf{M}_\varepsilon^{\text{aug}})^{-1} \mathbf{K})}}.$$

Dans le cas  $\theta = 1/2$ , on retrouve la condition de stabilité CFL (5.1.16).

□

Nous souhaiterions à présent obtenir un contrôle de la condition CFL (5.1.16) en fonction de la CFL pour la cas sans inclusion (5.1.14). De manière formelle, la différence entre ces deux conditions de stabilité, au moins dans le cas  $\theta = 1/2$  dépend du signe de la perturbation de matrice de masse

$$\mathbf{M}_\varepsilon^{\text{aug}} - \mathbf{M}.$$

Nous ne sommes pas parvenu à établir un résultat théorique dans le cas général de  $N$  inclusions, mais les résultats numériques viendront confirmer la pertinence de notre approche.

**REMARQUE 5.1.4 (Sur l'inversion de la matrice de masse augmentée)**

Pour implémenter numériquement le schéma (5.1.15) et mettre à jour  $\mathbf{v}_\varepsilon^{h,n+1}$  connaissant  $\mathbf{v}_\varepsilon^{h,k}$  pour  $k \leq n$ , il est nécessaire d'inverser

$$\mathbf{M}_\varepsilon^{\text{aug}} + \Delta t^2 \theta \mathbf{K}_\varepsilon^{\text{per}},$$

ou tout du moins de savoir calculer une solution au système matriciel

$$(\mathbf{M}_\varepsilon^{\text{aug}} + \Delta t^2 \theta \mathbf{K}_\varepsilon^{\text{per}}) \mathbf{X} = \mathbf{Y} \tag{5.1.17}$$

d'inconnue  $\mathbf{X}$ . Rappelons que dans le cas sans inclusion, par exemple si  $\varepsilon = 0$ , nous disposons d'un moyen tout à fait efficace de procéder, puisqu'alors la matrice ci-dessus est diagonale par le procédé de condensation de masse [35, 33].

La structure augmentée de la nouvelle matrice de masse vient perturber la matrice localement en terme de blocs. En effet, peu importe que l'on utilise le premier modèle approché via l'équation (5.1.11) ou le second via l'équation (5.1.12), la matrice à inverser,  $\mathbf{M}_\varepsilon^{\text{aug}} + \Delta t^2 \theta \mathbf{K}_\varepsilon^{\text{per}}$  est de la forme

$$\mathbf{M}_\varepsilon^{\text{aug}} + \Delta t^2 \theta \mathbf{K}_\varepsilon^{\text{per}} = \mathbf{M} + \widetilde{\mathbf{M}}_\varepsilon$$

où  $\mathbf{M}$  est la matrice de masse élément finis, diagonale grâce au procédé de condensation de masse, tandis que  $\widetilde{\mathbf{M}}_\varepsilon$  est une matrice ayant des entrées non nulles uniquement aux indices correspondant à des degrés de liberté voisins de l'inclusion (ce qui rejoint la remarque 5.1.2) :

$$\widetilde{\mathbf{M}}_\varepsilon = \left( \begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \mathbf{M}_\varepsilon & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array} \right),$$

où l'on peut montrer que  $\underline{M}_\varepsilon$  est inversible. Ainsi, pour résoudre (5.1.17), nous réalisons simplement une inversion de  $\underline{M}_\varepsilon$  comme un pré-calcul, puis nous exploitons la structure par bloc de  $\mathbf{M}_\varepsilon^{\text{aug}} + \Delta t^2 \theta \mathbf{K}_\varepsilon^{\text{per}}$  et diagonale de  $\mathbf{M}$  pour résoudre le système matriciel (5.1.17) à chaque itération en temps.

## 5.2 ETUDE DU PHÉNOMÈNE DE VERROUILLAGE NUMÉRIQUE

Dans cette section, nous présentons une analyse inspirée de [31] et qui donne un résultat formel décrivant le phénomène de verrouillage numérique sur un problème légèrement différent du problème que nous traitons dans ce manuscrit. En effet, nous illustrons le principe de verrouillage numérique au travers d'un problème fréquentiel de diffraction par un petit défaut avec condition de Neumann sur le bord de l'hétérogénéité. Considérons l'équation de Helmholtz suivante

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_\varepsilon \in \mathbf{H}^1(\Omega) \text{ such that} \\ -\Delta u_\varepsilon - \kappa_\varepsilon^2 u_\varepsilon = f(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Omega, \\ \partial_{\mathbf{n}} u_\varepsilon = 0, & \mathbf{x} \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (5.2.1)$$

où  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  est un ouvert borné lipschitzien,  $\mathbf{n}$  est le vecteur unitaire normal sortant à  $\partial\Omega$  et  $\kappa_\varepsilon$  est une fonction constante par morceaux, définie par

$$\kappa_\varepsilon^2(\mathbf{x}) = \begin{cases} \kappa^2 & \text{pour } \mathbf{x} \in \Omega \setminus \bar{\omega}_\varepsilon, \\ \kappa^2 + \kappa_\star^2 & \text{pour } \mathbf{x} \in \omega_\varepsilon, \end{cases}$$

où  $\kappa$  et  $\kappa_\star$  sont deux constantes strictement positives indépendantes de  $\varepsilon$ . Nous supposons de plus que le terme source  $f \in L^2(\Omega)$ .

Nous supposons que le problème (5.2.1) est bien-posé. Nous renvoyons à [14, 15, 38] pour plus de détails.

La formulation variationnelle associée au problème (5.2.1) est alors : Trouver  $u_\varepsilon \in \mathbf{H}^1(\Omega)$  tel que

$$a(u_\varepsilon, v) + b_\varepsilon(u_\varepsilon, v) = \int_\Omega f v \, d\mathbf{x}, \quad \forall v \in \mathbf{H}^1(\Omega),$$

$$\text{où } a(u, v) := \int_\Omega (\nabla u \nabla v - \kappa^2 uv) \, d\mathbf{x},$$

$$b_\varepsilon(u, v) := -\kappa_\star^2 \int_{\omega_\varepsilon} uv \, d\mathbf{x}.$$

Imaginons que nous souhaitons résoudre (5.2.1) à l'aide d'une méthode de type éléments finis s'appuyant sur une triangulation  $\mathcal{T}_h$  (nous pourrions également considérer une quadrangulation sans nuire à notre propos), où  $h$  représente le diamètre maximal des triangles de  $\mathcal{T}_h$  et est destiné à tendre vers 0. Nous supposons que la taille de l'inclusion  $\varepsilon$  est petite

comparée à la taille des triangles, en supposant que nous avons une relation du type

$$\varepsilon = h^{1+\delta}$$

pour un certain  $\delta > 0$  fixé. Considérons une discrétisation de (5.2.1) à l'aide d'éléments finis de Lagrange  $\mathbb{P}_k$  d'ordre  $k$  et supposons que  $k > 2 + 2\delta$ , c'est-à-dire que nous utilisons des éléments finis d'ordre *élevé* pour discrétiser (5.2.1).

Notons  $V_h$  l'espace variationnel discret associé à cette discrétisation, et notons  $u_\varepsilon^h$  la solution discrète associée, c'est-à-dire que  $u_\varepsilon^h$  est l'unique élément de  $V_h$  vérifiant

$$a(u_\varepsilon^h, v_h) + b_\varepsilon(u_\varepsilon^h, v_h) = \int_{\Omega} f v_h d\mathbf{x} \quad \forall v_h \in V_h.$$

Le résultat qui suit montre que la précision d'une telle méthode numérique est limitée, quel que soit l'ordre  $k$  des éléments finis utilisés.

### THÉORÈME 5.2.1

Supposons que  $u_0(0) \neq 0$ . Alors il existe des constantes  $C, \varepsilon_0, h_0 > 0$  telles que

$$\|u_\varepsilon - u_\varepsilon^h\|_{H^1(\Omega)} \geq C \frac{\varepsilon^2}{|\ln \varepsilon|}$$

pour tout  $\varepsilon \in ]0, \varepsilon_0[$  et tout  $h \in ]0, h_0[$ .

Ce résultat est démontré dans [31] et montre que l'utilisation d'éléments finis d'ordre élevé est inopérante pour obtenir une approximation précise du champ diffracté associé à (5.2.1). Précisément, l'estimation (??) montre qu'augmenter l'ordre  $k$  des éléments finis utilisés n'accélère pas la convergence de la méthode numérique, l'erreur produite par celle-ci étant dominée par  $\varepsilon^2/|\ln \varepsilon|$ . La consistance des éléments finis  $\mathbb{P}_k$  de Lagrange n'est pas de l'ordre  $O(h^k)$  si  $k \geq 2 + 2\varepsilon$ . En d'autres termes, la présence d'une petite inclusion rompt les propriétés d'approximation spectrale des éléments finis d'ordre élevés.

L'analyse réalisée ici sur le problème fréquentiel (5.2.1) de diffraction par une petite inclusion montre qu'une stratégie de discrétisation par éléments finis standards occasionne un phénomène de verrouillage numérique, qui dégrade la qualité de la convergence de la méthode numérique. Cette observation va nous pousser à proposer une discrétisation plus fine pour les problèmes approchés présentés au chapitre précédent, et en particulier à enrichir les espaces d'approximation que nous utiliserons.

## 5.3 ENRICHISSEMENT DE L'ESPACE D'APPROXIMATION

Observons l'erreur numérique commise par les schémas numériques décrits dans la section précédente. L'expérience que nous réalisons est celle d'une inclusion unique, située au centre d'un rectangle. Nous calculons la solution de référence en utilisant l'approximation

de champ lointain

$$u_\varepsilon(\mathbf{x}, t) \simeq u_0(\mathbf{x}, t) + \varepsilon^2 u_2(\mathbf{x}, t),$$

où  $u_0$  est l'unique solution de

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u_0 \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+, L^2(\mathbb{R}^2)) \cap \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, H^2(\mathbb{R}^2)) \text{ tel que} \\ \rho_0 \partial_t^2 u_0 - \mu_0 \Delta u_0 = f(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, \quad t \in \mathbb{R}_+, \\ u_0(\mathbf{x}, 0) = \partial_t u_0(\mathbf{x}, 0) = 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, \end{array} \right.$$

et où  $u_2$  est le terme d'ordre 2 en champ lointain, donné par la formule

$$u_2(\mathbf{x}, t) = \mathcal{G}[a](\mathbf{x}, t) + \partial_{x_1} \mathcal{G}[b^1](\mathbf{x}, t) + \partial_{x_2} \mathcal{G}[b^2](\mathbf{x}, t),$$

où  $\mathcal{G}$  est la fonction de Green de l'opérateur des ondes. Nous renvoyons à la section 3.3 pour plus de détails.

Les résultats numériques sont décrits figure 5.3.1.

Nous calculons la solution du modèle discrétisé (5.1.15) pour le second modèle. Nous utilisons des éléments finis de Gauss-Lobatto  $\mathbb{Q}_k$ , pour  $k$  allant de 1 à 4. Pour chaque ordre  $k$  fixé, nous faisons varier le pas de maillage  $h$ . Nous répétons cette expérience pour plusieurs valeurs de taille de défauts  $\varepsilon$ .

Nous constatons que pour chaque ordre  $k$  de famille d'éléments finis utilisé, hormis pour le cas limite  $\varepsilon = 0$  qui nous donne l'échelle de comparaison de notre méthode numérique, les courbes d'erreur sont *rangées par valeur décroissante de  $\varepsilon$* . Toute chose égale par ailleurs, l'erreur commise par la méthode numérique est d'autant plus grande que  $\varepsilon$  est petit. Ce phénomène est une des conséquences du verrouillage numérique : en effet, ceci reflète l'incapacité de notre méthode numérique à reproduire le comportement singulier de  $u_2$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Cette observation peut-être formalisée dans le cas d'un problème fréquentiel par l'analyse effectuée section 5.2.

Pour pallier à ce problème, nous introduisons deux fonctions supplémentaires par inclusion à l'espace d'approximation, ayant pour rôle de reproduire les singularités de la fonction de Green et de son gradient au centre de l'inclusion  $\mathbf{x}_n$ , selon une démarche inspirée de [31, Section 5.2.4] :

$$\begin{aligned} \sigma_0^{\varepsilon, n}(\mathbf{x}) &= \ln \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_n|}{\varepsilon} \mathbf{1}_{\varepsilon \leq |\mathbf{x} - \mathbf{x}_n| \leq h} \chi_{\alpha, h}(|\mathbf{x} - \mathbf{x}_n|), \\ \sigma_1^{\varepsilon, n}(\mathbf{x}) &= \left( \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_n|} - \frac{1}{\varepsilon} \right) \mathbf{1}_{\varepsilon \leq |\mathbf{x} - \mathbf{x}_n| \leq h} \chi_{\alpha, h}(|\mathbf{x} - \mathbf{x}_n|), \end{aligned} \tag{5.3.1}$$

où  $h > \alpha > \varepsilon$  et  $\chi_{\alpha, h} : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  est une fonction de troncature régulière telle que  $\chi_{\alpha, h}(x) = 1$  si  $|x| \leq \alpha$  et  $\text{supp}(\chi_{\alpha, h}) = [-h, h]$ , et notons, pour  $h > 0$  et  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$\mathbb{W}_{h, \varepsilon}^k = \mathbb{V}_h^k + \bigoplus_{n=1}^N \text{vect} \langle \sigma_0^{\varepsilon, n}, \sigma_1^{\varepsilon, n} \rangle$$

l'espace d'approximation éléments finis classique  $\mathbb{V}_h^k$  enrichi des fonctions  $\sigma_0^{\varepsilon, n}$  et  $\sigma_1^{\varepsilon, n}$ . Notons que  $\sigma_0^{\varepsilon, n}$  et  $\sigma_1^{\varepsilon, n}$  sont continues et ont un support localisé au voisinage de la  $n$ -ème

inclusion, limité par la taille des mailles  $h$ . L'idée est de capter le comportement singulier du champ lointain tronqué à l'ordre 2 dans l'espace d'approximation élément finis.

Tentons d'expliquer avec les mains pourquoi nous avons abordé cette démarche : quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ , en champ lointain, le champ diffracté se comporte au premier ordre comme une combinaison de monopole et de dipôle centré en  $\mathbf{x}_n$ , le centre de la  $n$ -ème inclusion. En rajoutant les fonctions de base  $\sigma_0^{\varepsilon,n}$  et  $\sigma_1^{\varepsilon,n}$  à l'espace d'approximation, nous espérons que notre méthode numérique reproduira plus fidèlement l'allure du champ diffracté et convergera plus rapidement.

Notons que cette technique d'enrichissement est similaire aux techniques du type XFEM (eXtended Finite Element Method) [28, 53] introduits initialement pour simuler la propagation de fissures dans le contexte de la mécanique des solides ou encore à la méthode du complément singulier [7, 29], utilisée notamment pour simuler les solutions d'équations de Maxwell dans des domaines singuliers.

Nous présentons l'analyse liée à cette enrichissement dans le cas d'une inclusion unique par souci de simplicité, mais il est aisé de généraliser les observations qui suivent au cas du modèle à  $N$  inclusions. Notamment, nous nous intéressons à l'aspect implémentation et montrons que l'enrichissement ne vient pas perturber le fond de la méthode numérique. La version semi-discrète de (5.1.7) devient, après enrichissement,

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } w_{\varepsilon,h} \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^+, \mathbb{W}_{h,\varepsilon}^k) \text{ tel que } \forall t \in \mathbb{R}^+, \\ \left[ \frac{d^2}{dt^2} m(w_{\varepsilon,h}, v_h) + a(w_{\varepsilon,h}, v_h) + \varepsilon^2 \left[ \rho \frac{d^2}{dt^2} p_\varepsilon(w_{\varepsilon,h}) p_\varepsilon(v_h) + 2\pi\mu_0 q_\varepsilon(w_{\varepsilon,h}) \cdot \hat{\mathbf{Q}} \cdot q_\varepsilon(v_h) \right] \right] = F(v_h), \\ w_{\varepsilon,h}(0) = \partial_t w_{\varepsilon,h}(0) = 0, \quad \forall v \in \mathbb{W}_{h,\varepsilon}^k. \end{array} \right.$$

En notant  $\mathbf{w}_{\varepsilon,h}$  les coordonnées de  $w_{\varepsilon,h}$  dans la base canonique de  $\mathbb{W}_{h,\varepsilon}^k$ , nous sommes à nouveau ramenés à étudier l'équation différentielle ordinaire

$$\mathbf{M}_\varepsilon^{\text{aug}} \ddot{\mathbf{w}}_{\varepsilon,h} + \mathbf{K}_\varepsilon^{\text{aug}} \mathbf{w}_{\varepsilon,h} = \mathbf{F}, \quad t > 0. \quad (5.3.2)$$

où les matrices de masse augmentées  $\mathbf{M}_\varepsilon$  et  $\mathbf{K}_\varepsilon$  ont maintenant les structures par bloc enrichies suivantes

$$\mathbf{M}_\varepsilon^{\text{aug}} = \left( \begin{array}{c|c} \mathbf{M} + \mathbf{P}_\varepsilon & \mathbf{M}_\varepsilon^{ec} \\ \mathbf{M}_\varepsilon^{ce} & \mathbf{M}_\varepsilon^e \end{array} \right), \quad \mathbf{K}_\varepsilon^{\text{aug}} = \left( \begin{array}{c|c} \mathbf{K} + \mathbf{Q}_\varepsilon & \mathbf{K}_\varepsilon^{ec} \\ \mathbf{K}_\varepsilon^{ce} & \mathbf{K}_\varepsilon^e \end{array} \right)$$

le bloc supérieur gauche étant de taille  $N_h^k$  et le bloc inférieur droit de taille 2. Les matrices  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{P}_\varepsilon$ ,  $\mathbf{K}$  et  $\mathbf{Q}_\varepsilon$  ont toutes été définies section 5.1.1.b.  $\mathbf{M}$  est la matrice de masse usuelle associée à l'espace d'approximation  $\mathbb{V}_h^k$  tandis que  $\mathbf{K}$  est la matrice de rigidité. Les matrices  $\mathbf{M}_\varepsilon^e$  et  $\mathbf{K}_\varepsilon^e$  sont les matrices de masse et de rigidité associées à l'espace vect  $\langle \sigma_0^\varepsilon, \sigma_1^\varepsilon \rangle$ , c'est-à-dire que

$$\begin{aligned} (\mathbf{M}_\varepsilon^e)_{ij} &= m(\sigma_i, \sigma_j) + \varepsilon^2 \rho p_\varepsilon(\sigma_i) p_\varepsilon(\sigma_j), \quad 0 \leq i, j \leq 1, \\ (\mathbf{K}_\varepsilon^e)_{ij} &= a(\sigma_i, \sigma_j) + 2\pi\mu_0 \varepsilon^2 q_\varepsilon(\sigma_i) \cdot \hat{\mathbf{Q}} \cdot q_\varepsilon(\sigma_j), \end{aligned} \quad (5.3.3)$$

et finalement les matrices  $\mathbf{M}_\varepsilon^{ec}$ ,  $\mathbf{M}_\varepsilon^{ce}$ ,  $\mathbf{K}_\varepsilon^{ec}$  et  $\mathbf{K}_\varepsilon^{ce}$  sont les matrices de couplage entre les espaces  $\mathbb{V}_h^k$  et vect  $\langle \sigma_0^\varepsilon, \sigma_1^\varepsilon \rangle$ . La notation *ec* renvoie à *enrichi vers classique* tandis que *ce* renvoie à *classique vers enrichi*.

Ainsi, on a

$$\begin{aligned} (\mathbf{M}_\varepsilon^{ec})_{ij} &= m(\varphi_i, \sigma_j) + \varepsilon^2 \underline{\rho} p_\varepsilon(\varphi_i) p_\varepsilon(\sigma_j), \quad 1 \leq i \leq N_h^k, \quad 0 \leq j \leq 1, \\ (\mathbf{K}_\varepsilon^{ec})_{ij} &= a(\varphi_i, \sigma_j) + 2\pi\mu_0 \varepsilon^2 q_\varepsilon(\varphi_i) \cdot \hat{\mathbf{Q}} \cdot q_\varepsilon(\sigma_j), \end{aligned} \quad (5.3.4)$$

ainsi que les relations  $\mathbf{M}_\varepsilon^{ec} = (\mathbf{M}_\varepsilon^{ce})^T$  et  $\mathbf{K}_\varepsilon^{ec} = (\mathbf{K}_\varepsilon^{ce})^T$ .

Commençons par noter que les matrices  $\mathbf{M}_\varepsilon^e$  et  $\mathbf{K}_\varepsilon^e$  sont symétriques, de manière immédiate.

Séparons les coordonnées de  $w_{\varepsilon,h}$  en deux blocs, correspondant à la décomposition dans  $\mathbb{V}_h^k$  et dans  $\text{vect} \langle \sigma_0^\varepsilon, \sigma_1^\varepsilon \rangle$ , de la manière suivante

$$\mathbf{w}_{\varepsilon,h} = \begin{pmatrix} \mathbf{w}_{\varepsilon,h}^c \\ \mathbf{w}_{\varepsilon,h}^e \end{pmatrix},$$

où  $\mathbf{w}_{\varepsilon,h}^c$  dénote le vecteur des coordonnées de  $w_{\varepsilon,h}$  dans l'espace élément finis classique  $\mathbb{V}_h^k$  tandis que  $\mathbf{w}_{\varepsilon,h}^e$  dénote le vecteur des coordonnées de  $w_{\varepsilon,h}$  dans l'espace d'enrichissement  $\text{vect} \langle \sigma_0^\varepsilon, \sigma_1^\varepsilon \rangle$ .

L'équation différentielle ordinaire (5.3.2) peut alors s'écrire de la manière suivante

$$\begin{cases} (\mathbf{M} + \mathbf{P}_\varepsilon) \ddot{\mathbf{w}}_{\varepsilon,h}^c + \mathbf{M}_\varepsilon^{ec} \ddot{\mathbf{w}}_{\varepsilon,h}^e + (\mathbf{K} + \mathbf{Q}_\varepsilon) \mathbf{w}_{\varepsilon,h}^c + \mathbf{K}_\varepsilon^{ec} \mathbf{w}_{\varepsilon,h}^e = \mathbf{F}, \\ \mathbf{M}_\varepsilon^{ce} \ddot{\mathbf{w}}_{\varepsilon,h}^c + \mathbf{M}_\varepsilon^e \ddot{\mathbf{w}}_{\varepsilon,h}^e + \mathbf{K}_\varepsilon^{ce} \mathbf{w}_{\varepsilon,h}^c + \mathbf{K}_\varepsilon^e \mathbf{w}_{\varepsilon,h}^e = 0. \end{cases} \quad (5.3.5)$$

A nouveau, nous cherchons un schéma en temps pour (5.3.5) qui exploite au mieux le fait qu'il s'agisse d'une équation d'ondes dans l'espace libre perturbé par des matrices qui tendent vers 0 avec  $\varepsilon$ . Rappelons nous que le terme  $\mathbf{K} \mathbf{w}_{\varepsilon,h}^c$  doit être discrétisé à l'aide d'un schéma explicite, et que nous souhaitons que la condition de stabilité CFL du schéma global ne soit pas *grandement* affectée par la présence des termes perturbatifs.

Comme à la section 5.1.2, nous introduisons  $\theta \in ]1/4, 1]$ . Notons  $T > 0$  le temps final,  $\Delta t$  le pas de temps, ainsi que

$$N_T = \left\lfloor \frac{T}{\Delta t} \right\rfloor.$$

Pour une suite de vecteurs  $(\mathbf{v}^n)_{1 \leq n \leq N_T}$  de même dimension, nous introduisons les notations

$$\begin{aligned} \{\mathbf{v}\}_\theta^n &:= \theta \mathbf{v}^{n+1} + (1 - 2\theta) \mathbf{v}^n + \theta \mathbf{v}^{n-1}, \\ D_{\Delta t}^2 \mathbf{v}^n &:= \frac{\mathbf{v}^{n+1} - 2\mathbf{v}^n + \mathbf{v}^{n-1}}{\Delta t^2}. \end{aligned}$$

Notamment, il est classique que  $D_{\Delta t}^2 \mathbf{w}_{\varepsilon,h}^n$  et  $\{\mathbf{w}_{\varepsilon,h}\}_\theta^n$  sont des approximations d'ordre 2 de  $d^2 \mathbf{w}_{\varepsilon,h}(t^n)/dt^2$  et de  $\mathbf{w}_{\varepsilon,h}(t^n)$ . Nous proposons alors le schéma suivant pour discrétiser (5.3.5) :

$$\begin{cases} (\mathbf{M} + \mathbf{P}_\varepsilon) D_{\Delta t}^2 \mathbf{w}_{\varepsilon,h}^{c,n} + \mathbf{M}_\varepsilon^{ec} D_{\Delta t}^2 \mathbf{w}_{\varepsilon,h}^{e,n} + \mathbf{K} \mathbf{w}_{\varepsilon,h}^{c,n} + \mathbf{Q}_\varepsilon \{\mathbf{w}_{\varepsilon,h}^c\}_\theta^n + \mathbf{K}_\varepsilon^{ec} \{\mathbf{w}_{\varepsilon,h}^e\}_\theta^n = \mathbf{F}^n, \\ \mathbf{M}_\varepsilon^{ce} D_{\Delta t}^2 \mathbf{w}_{\varepsilon,h}^{c,n} + \mathbf{M}_\varepsilon^e D_{\Delta t}^2 \mathbf{w}_{\varepsilon,h}^{e,n} + \mathbf{K}_\varepsilon^{ce} \{\mathbf{w}_{\varepsilon,h}^c\}_\theta^n + \mathbf{K}_\varepsilon^e \{\mathbf{w}_{\varepsilon,h}^e\}_\theta^n = 0. \end{cases}$$

On retrouve le schéma explicite pour la partie correspondant au modèle de propagation d'ondes dans l'espace libre usuel, et l'ensemble des termes perturbatifs sont traités à l'aide d'un  $\theta$ -schéma. Le système précédent peut se mettre sous la forme

$$\begin{cases} (\mathbf{M} + \mathbf{P}_\varepsilon + \theta\Delta t^2\mathbf{Q}_\varepsilon)\mathbf{w}_{\varepsilon,h}^{c,n+1} + (\mathbf{M}_\varepsilon^{ec} + \theta\Delta t^2\mathbf{K}_\varepsilon^{ec})\mathbf{w}_{\varepsilon,h}^{e,n+1} = \Delta t^2\mathbf{F}^n + \mathbf{G}_{1,\varepsilon}^n, \\ (\mathbf{M}_\varepsilon^{ce} + \theta\Delta t^2\mathbf{K}_\varepsilon^{ce})\mathbf{w}_{\varepsilon,h}^{c,n+1} + (\mathbf{M}_\varepsilon^e + \theta\Delta t^2\mathbf{K}_\varepsilon^e)\mathbf{w}_{\varepsilon,h}^{e,n+1} = \mathbf{G}_{2,\varepsilon}^n, \end{cases}$$

où nous avons placé dans  $\mathbf{G}_{1,\varepsilon}^n$  et  $\mathbf{G}_{2,\varepsilon}^n$  des termes dépendants uniquement d'instants strictement antécédents à  $t^{n+1}$ .

Avec des définitions immédiates, ce système est de la forme

$$\begin{cases} \mathbf{A}\mathbf{w}_{\varepsilon,h}^{c,n+1} + \mathbf{B}\mathbf{w}_{\varepsilon,h}^{e,n+1} = \Delta t^2\mathbf{F}^n + \mathbf{G}_{1,\varepsilon}^n, \\ \mathbf{C}\mathbf{w}_{\varepsilon,h}^{c,n+1} + \mathbf{D}\mathbf{w}_{\varepsilon,h}^{e,n+1} = \mathbf{G}_{2,\varepsilon}^n, \end{cases}$$

Nous le résolvons à l'aide d'un complément de Schur (voir par exemple [19]), de la manière suivante

$$(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C})\mathbf{w}_{\varepsilon,h}^{c,n+1} = \Delta t^2\mathbf{F}^n + \mathbf{G}_{1,\varepsilon}^n - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{G}_{2,\varepsilon}^n. \quad (5.3.6)$$

Le schéma (5.3.6) constitue le schéma final que nous utilisons pour les simulations numériques avec enrichissement présentées au chapitre 6.

## 5.4 REMARQUES CONCERNANT L'IMPLÉMENTATION NUMÉRIQUE

Dans cette section, nous explicitons les détails du calcul numérique tel que développé sur machine et effectuons quelques remarques sur l'implémentation. Les deux modèles approchés développés au chapitre 4 ont été implémentés au travers d'une classe C++ chacun. Précisons qu'étant donnée la forme finale des modèles après discrétisation et le traitement numérique qui en est fait, une refactorisation de ces deux classes en une seule est envisageable et pourra faire l'objet d'un travail futur.

Les deux modèles approchés, on l'a vu au travers des équations (4.1.27) et (4.2.5) dans leur version continue, et au travers de l'équation (5.1.10) pour la version semi-discrète en espace, sont des perturbations de l'équation des ondes dans l'espace libre. D'un point de vue algorithmique, l'idée est de ne pas perturber outre mesure les itérations nécessaires à la progression dans le schéma en temps pour l'équation des ondes sans perturbation.

On va le constater, l'implémentation des deux modèles nécessite une phase de *preprocessing*, précédant la phase itérative, puis au cours de chaque itération l'application d'un complément de Schur pour continuer à bénéficier des fonctionnalités implémentées pour traiter la partie du schéma liée à la discrétisation par éléments finis classique de l'équation des ondes.

**Remarques concernant l'implémentation du premier modèle** L'implémentation de ce modèle est relativement directe. Le seul point à régler concerne l'intégration et l'assemblage des termes (5.1.4) et (5.1.5). Il s'avère que les fonctions  $W_i^N$  sont polynomiales par morceaux, ainsi l'utilisation de règles de quadrature classiques est adaptée à l'intégration de ces termes. Nous utilisons les points de Lobatto, qui fournissent une règle d'intégration déjà implémentée dans ONDOMATIC.

**Remarques concernant l'implémentation du second modèle** Ce modèle est caractérisé par deux quantités par inclusion, le contraste relatif  $\underline{\rho}_n$  défini équation (3.3.1) ainsi que le tenseur de polarisation  $\mathbf{Q}_n$  pour la  $n$ -ème inclusion, pour  $n \in \{1, \dots, N\}$ . Nous nous sommes limités dans le cadre des applications numériques de cette thèse au cas où les inclusions sont des disques en 2 dimensions; ainsi ces paramètres sont-ils calculables analytiquement, comme nous allons le voir.

Il est tout à fait envisageable d'implémenter une procédure de pré-calcul s'appuyant sur une discrétisation des inclusions pour calculer numériquement ces quantités dans le cas de défauts de forme plus générales.

Pour le cas du disque, nous utilisons les égalités

$$\underline{\rho}_n = (\rho_n - \rho_0)\pi,$$

qui suit immédiatement de la définition (3.4.15), tandis qu'en ce qui concerne le tenseur de polarisation généralisé d'ordre 1, nous référons à [4, Théorème 2.2] pour son calcul dans le cas du disque, donné par

$$\mathbf{Q}_n = \begin{pmatrix} 2\pi \frac{\mu_n - \mu_0}{\mu_0 + \mu_n} & 0 \\ 0 & 2\pi \frac{\mu_n - \mu_0}{\mu_0 + \mu_n} \end{pmatrix}.$$

**Notes concernant le calcul des termes d'enrichissement** Pour mener à bien la procédure d'enrichissement, il est nécessaire d'assembler des termes matriciels faisant intervenir les fonctions d'enrichissement  $\sigma_0^\varepsilon$  et  $\sigma_1^\varepsilon$ .

Pour ce faire, nous utilisons une stratégie de quadrature adaptative. Nous renvoyons à [45] pour une description détaillée des algorithmes de quadrature adaptative. Du point de vue de l'implémentation, nous utilisons la librairie Cubature écrite en C, disponible à l'adresse <http://ab-initio.mit.edu/wiki/index.php/Cubature>.

Précisément, en reprenant les équations (5.3.3) et (5.3.4), nous constatons qu'il est nécessaire de savoir calculer une approximation des termes

$$\begin{aligned} (\mathbf{M}_\varepsilon^e)_{ij} &= m(\sigma_i, \sigma_j) + \varepsilon^2 \underline{\rho} p_\varepsilon(\sigma_i) p_\varepsilon(\sigma_j), \quad 0 \leq i, j \leq 1, \\ (\mathbf{K}_\varepsilon^e)_{ij} &= a(\sigma_i, \sigma_j) + \varepsilon^2 q_\varepsilon(\sigma_i) \cdot \mathbf{Q} \cdot q_\varepsilon(\sigma_j), \end{aligned} \quad (5.4.1)$$

ainsi que

$$\begin{aligned} (\mathbf{M}_\varepsilon^{ec})_{ij} &= m(\varphi_i, \sigma_j) + \varepsilon^2 \underline{\rho} p_\varepsilon(\varphi_i) p_\varepsilon(\sigma_j), \quad 1 \leq i \leq N_h^k, \quad 0 \leq j \leq 1, \\ (\mathbf{K}_\varepsilon^{ec})_{ij} &= a(\varphi_i, \sigma_j) + \varepsilon^2 q_\varepsilon(\varphi_i) \cdot \mathbf{Q} \cdot q_\varepsilon(\sigma_j), \end{aligned} \quad (5.4.2)$$

où les  $(\varphi_i)_{1 \leq i \leq N_h^k}$  sont les fonctions de base de l'espace d'approximation élément finis  $\mathbb{V}_h^k$  tandis que les  $(\sigma_j)_{0 \leq j \leq 1}$  sont les fonctions d'enrichissement définies équation (5.3.1). Il est difficile de construire des règles de quadrature exactes pour l'intégration de termes tels que ceux définis aux équations (5.4.1) et (5.4.2).

Les algorithmes de quadrature adaptatives permettent sous certaines hypothèses de régularité sur l'intégrande de fournir une approximation aussi précise que souhaitée de termes intégraux. L'idée de ces algorithmes est basée sur le concept de *Divide & Conquer* couplé à l'usage d'un estimateur d'erreur *a posteriori*.

## 5.5 SYNTHÈSE

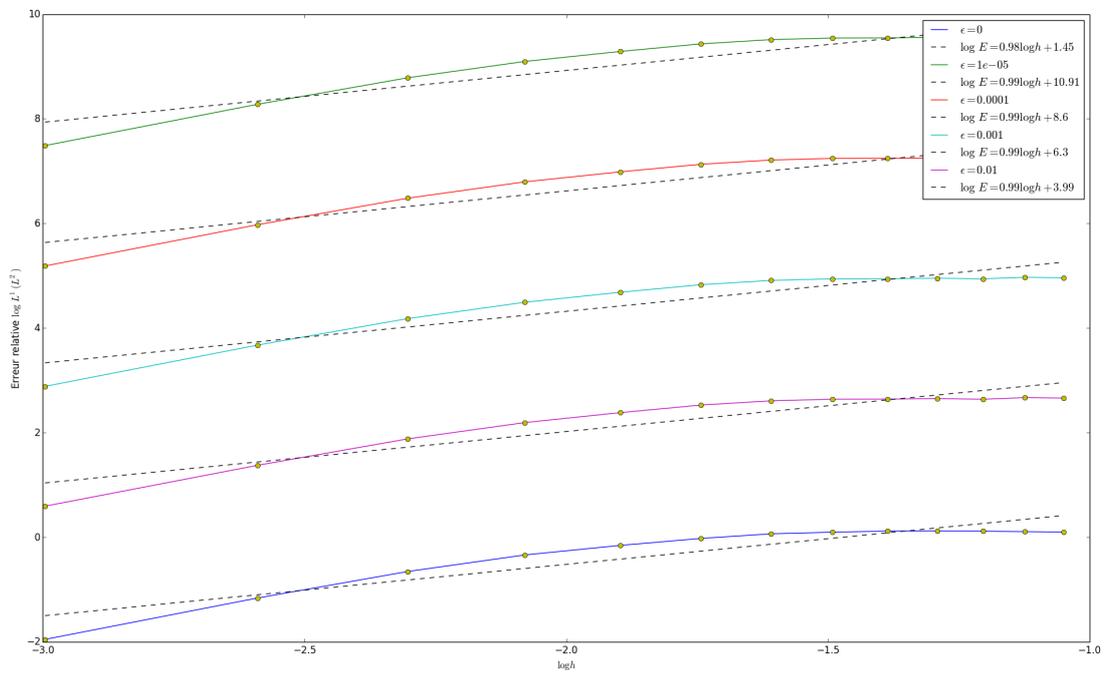
Dans ce chapitre, nous avons explicité les schémas numériques totalement discrétisés que nous utilisons pour l'implémentation des deux modèles approchés présentés au chapitre 4.

Le premier modèle s'appuie sur une analyse en champ proche de la solution  $u_\varepsilon$  du problème exact, tandis que le second modèle s'appuie sur une analyse en champ lointain. L'implémentation numérique de ces deux modèles approchés permet de réduire grandement le temps de calcul nécessaire au calcul d'une approximation de  $u_\varepsilon$  comparé à une méthode par éléments finis standards.

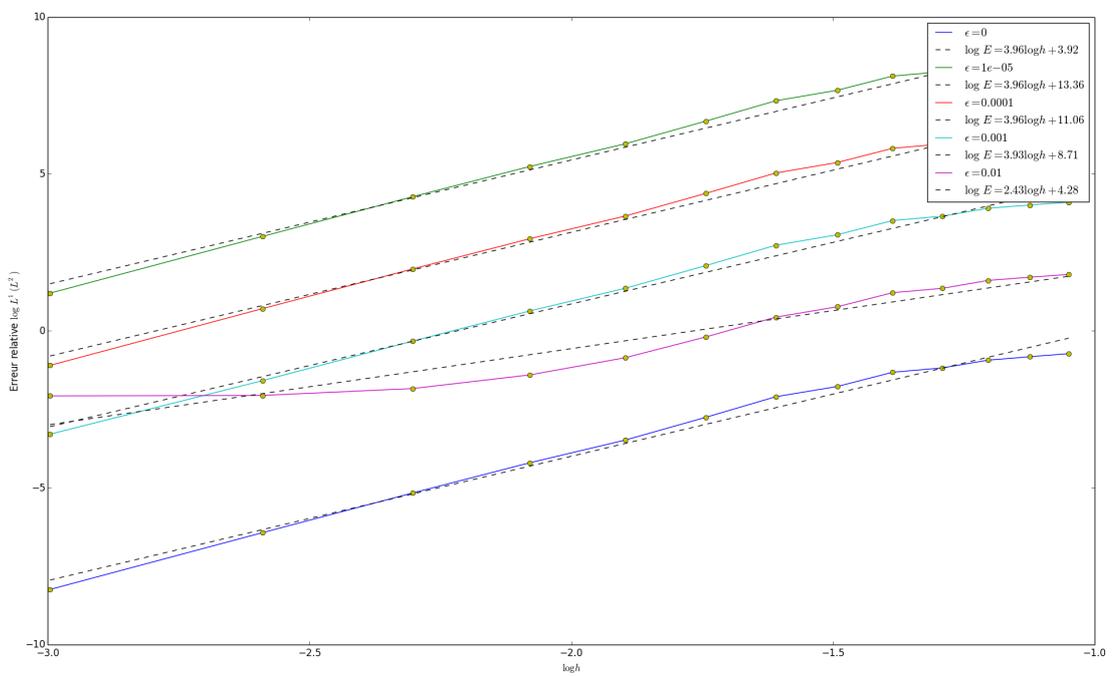
Cependant, les deux modèles approchés discrétisés à l'aide d'une méthode par élément finis standard verrouillent. Cette limitation semble pouvoir être outrepassée grâce à l'ajout de deux fonctions de base par inclusion à l'espace d'approximation. Ces deux fonctions de forme additionnelles ont un support localisé au voisinage de l'inclusion qui leur est associée.

Pour des raisons techniques, en l'état actuel du manuscrit, l'implémentation de l'enrichissement de la méthode numérique ne fournit pas de résultats satisfaisants, en raison d'un bug présent dans le code. En effet, nous ne parvenons pas à faire converger la règle de quadrature adaptative qui devrait permettre de calculer une approximation des termes matriciels liés à l'enrichissement, explicités équations (5.3.3) et (5.3.4). Tous les efforts sont concentrés sur cette difficulté pour parvenir à fournir des résultats numériques avec enrichissement de la méthode au plus vite.

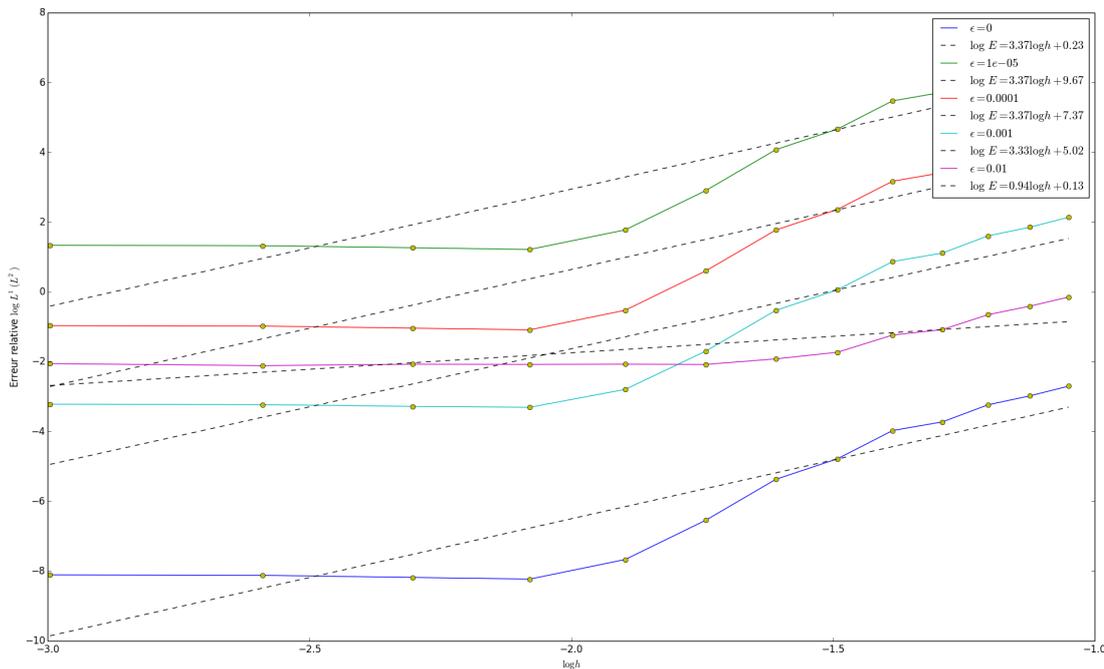
Les deux méthodes numériques sans enrichissement sont néanmoins consistantes, avec des taux de convergence dégradés relativement à la méthode par élément finis standards sous-jacente. Concrètement, les méthodes que nous proposons sont pertinentes pour une gamme de valeur de taille caractéristique de défaut  $\varepsilon$  bornée inférieurement (quand  $\varepsilon$  est trop petit, la précision de nos méthodes numériques tend à diminuer).



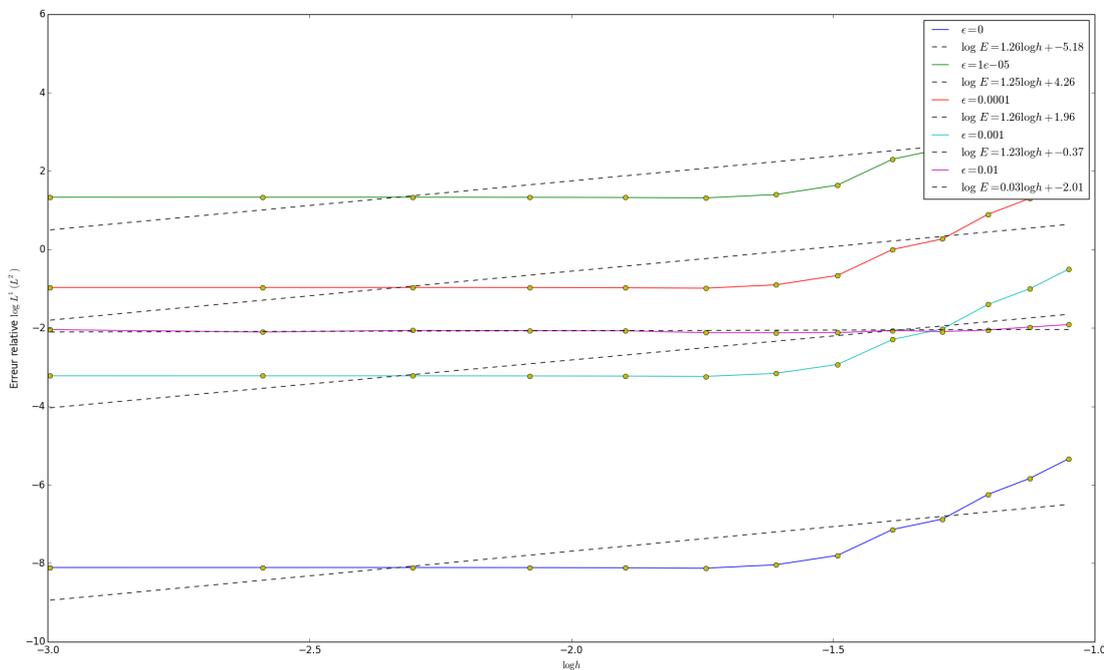
(a) Éléments finis d'ordre 1.



(b) Éléments finis d'ordre 2.



(c) Éléments finis d'ordre 3.



(d) Éléments finis d'ordre 4.

FIGURE 5.3.1 – Analyse d’erreur numérique pour plusieurs pas de maillage  $h$ , plusieurs tailles de défauts  $\epsilon$  et plusieurs ordres d’éléments finis, pour la méthode **sans enrichissement**. Sur chaque graphe, le comportement de la méthode élément finis standard sous-jacente est donné par la courbe en bleu, correspondant au cas sans défaut. Nous observons le phénomène de verrouillage numérique : hormi pour la courbe bleue correspondant à  $\epsilon = 0$ , les autres courbes sont triées par valeurs décroissantes de  $\epsilon$ . Ceci indique que plus  $\epsilon$  strictement positif est petit, plus l’erreur de modèle est grande. Il s’agit précisément du verrouillage numérique.

# CHAPITRE

## 6

# RÉSULTATS ET VALIDATION NUMÉRIQUE

## Sommaire

---

<b>6.1</b>	<b>Un cas d'école : le cas unidimensionnel</b>	<b>144</b>
6.1.1	Un premier cas test	145
6.1.2	Le cas d'un fort contraste du paramètre $\rho_\varepsilon$	149
6.1.3	Analyse d'erreur numérique	149
<b>6.2</b>	<b>Le cas bidimensionnel</b>	<b>152</b>
6.2.1	Résultats numériques pour la méthode numérique associée au premier modèle approché	153
6.2.2	Résultats numériques pour la méthode numérique associée au second modèle approché	158

---

Dans cette section, nous présentons un certain nombre de résultats numériques. Nous présenterons des instantanés pris lors de la simulation des modèles approchés, démontrant la pertinence de notre approche d'un point de vue qualitatif, ainsi que des analyses d'erreur numériques venant préciser cette intuition.

Les simulations 1D ont été réalisées sous le logiciel de calcul scientifique Matlab. L'ensemble des simulations 2D ont été réalisées au sein d'une librairie de simulation appelée ONDOMATIC écrite en C++, capable de traiter différentes équations d'ondes transitoires par éléments finis d'ordre élevés en espace et mentionnée en introduction. Différents algorithmes de post-traitement et d'analyse d'erreur ont été écrits en Python.

Dans un premier temps, nous présentons les résultats numériques pour un problème de diffraction unidimensionnel traité à l'aide du premier problème approché. Dans un second temps, nous illustrons les résultats numériques issus des deux modèles approchés décrits

section 4.

## 6.1 UN CAS D'ÉCOLE : LE CAS UNIDIMENSIONNEL

La première implémentation numérique réalisée dans le cadre de ces travaux de thèse prend place dans un cadre unidimensionnel, plus simple que le cas bidimensionnel.

Décrivons brièvement l'expérience numérique que nous réalisons.

Nous nous donnons un obstacle unique  $\omega_\varepsilon = ]-\varepsilon, \varepsilon[$ , ainsi que les deux fonctions  $\rho_\varepsilon$  et  $\mu_\varepsilon$  qui représentent les paramètres physiques du problème et définies par

$$\rho_\varepsilon(x) = \begin{cases} \rho_0 & \text{si } |x| > \varepsilon, \\ \rho_1 & \text{si } |x| \leq \varepsilon, \end{cases} \quad \text{et} \quad \mu_\varepsilon(x) = \begin{cases} \mu_0 & \text{si } |x| > \varepsilon, \\ \mu_1 & \text{si } |x| \leq \varepsilon. \end{cases}$$

Notons que  $\rho_\varepsilon = \rho(x/\varepsilon)$  et  $\mu_\varepsilon = \mu(x/\varepsilon)$ , où  $\rho$  et  $\mu$  sont les deux fonctions définies par

$$\rho(x) = \begin{cases} \rho_0 & \text{si } |x| > 1, \\ \rho_1 & \text{si } |x| \leq 1, \end{cases} \quad \text{et} \quad \mu(x) = \begin{cases} \mu_0 & \text{si } |x| > 1, \\ \mu_1 & \text{si } |x| \leq 1. \end{cases}$$

Nous étudions alors le problème modèle unidimensionnel

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_\varepsilon \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^+, L^2(\mathbb{R}^2)) \cap \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, D(\Delta_{\mu_\varepsilon})) \text{ tel que} \\ \rho_\varepsilon \partial_t^2 u_\varepsilon - \operatorname{div}(\mu_\varepsilon \nabla u_\varepsilon) = f(\mathbf{x}, t), & \mathbf{x} \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}^+, \\ u_\varepsilon(\mathbf{x}, 0) = \partial_t u_\varepsilon(\mathbf{x}, 0) = 0, & \mathbf{x} \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (6.1.1)$$

pour lequel il n'est pas si aisé de donner une solution analytique même pour des termes sources  $f$  bien choisis. A cause des réflexions multiples ayant lieu au passage de l'interface  $\partial\omega_\varepsilon$ , la solution  $u_\varepsilon$  de (6.1.1) s'exprime nécessairement sous forme de série infinie et une approche numérique pour calculer une solution numérique de référence semble plus adéquate.

Le problème unidimensionnel que nous traitons dans cette section diffère légèrement du problème que nous avons considéré tout au long de ce manuscrit, puisque celui-ci était bidimensionnel. En particulier, nous n'avons pas calculé le développement asymptotique de  $u_\varepsilon$  lorsque la géométrie est unidimensionnelle.

Cependant, il est aisé d'adapter le premier modèle approché décrit section au cas unidimensionnel. En effet, la seule différence avec le cas bidimensionnel repose sur le calcul des fonctions de profil  $W_i$  intervenant dans l'expression des termes de champ proche de  $u_\varepsilon$ . Nous référons à la section ?? pour l'introduction des fonctions de profil dans le cas 2D.

Or ce calcul est aisé en une dimension d'espace. En effet, (nous renvoyons au paragraphe 4.1.1.a pour une discussion sur la définition des fonctions de profil  $W_i$ ), trois fonctions de

profil  $W_0$ ,  $W_1$  et  $W_2$  sont nécessaires en 1D pour décrire le champ proche à l'ordre 2, et celles-ci vérifient

$$\frac{d}{dx} \left( \mu \frac{dW_i}{dx} \right) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad n = 0, 1, \quad (6.1.2)$$

et

$$\frac{d}{dx} \left( \mu \frac{dW_2}{dx} \right) = \rho, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (6.1.3)$$

L'espace vectoriel des solutions de l'équation (6.1.2) est de dimension 2, et est engendré par la fonction constante  $W_0(x) = 1$  ainsi que par la fonction égale à

$$W_1(x) = \begin{cases} \frac{\mu_1}{\mu_0}x - \frac{\mu_0 - \mu_1}{\mu_0}\varepsilon & \text{si } x \in ]-\infty, -\varepsilon[, \\ x & \text{si } x \in ]-\varepsilon, \varepsilon[, \\ \frac{\mu_1}{\mu_0}x + \frac{\mu_0 - \mu_1}{\mu_0}\varepsilon & \text{si } x \in ]\varepsilon, \infty[. \end{cases}$$

Enfin, une solution particulière de l'équation (6.1.3) est donnée par

$$W_2(x) = \begin{cases} \frac{\rho_0}{2\mu_0}x^2 + \frac{\rho_0 - \rho_1}{\mu_0}\varepsilon x + \left( \frac{\rho_1}{2\mu_1} - \frac{\rho_0}{2\mu_0} \right) \varepsilon^2 + \frac{\rho_0 - \rho_1}{\mu_0}\varepsilon^2 & \text{si } x \in ]-\infty, -\varepsilon[, \\ \frac{\rho_1}{2\mu_1}x^2 & \text{si } x \in ]-\varepsilon, \varepsilon[, \\ \frac{\rho_0}{2\mu_0}x^2 + \frac{\rho_0 - \rho_1}{\mu_0}\varepsilon x + \left( \frac{\rho_1}{2\mu_1} - \frac{\rho_0}{2\mu_0} \right) \varepsilon^2 - \frac{\rho_0 - \rho_1}{\mu_0}\varepsilon^2 & \text{si } x \in ]\varepsilon, \infty[, \end{cases}$$

l'espace affine des solutions de (6.1.3) étant donné par  $W_2 + \text{vect} \langle W_0, W_1 \rangle$ .

Nous implémentons alors le schéma numérique pour le premier modèle approché, sans enrichissement, décrit équation (5.1.15), avec  $\theta = 1/2$ . Le code a été développé sous Matlab.

### 6.1.1 Un premier cas test

La première expérience que nous réalisons est présentée figure 6.1.2. Chaque sous-figure est un instantané à un instant précis. Sur la première ligne est tracé le champ total obtenu par résolution du modèle approché. Sur la deuxième ligne est affiché le champ diffracté uniquement, calculé à l'aide du modèle approché. Sur la troisième ligne est affiché le champ diffracté à l'aide d'une méthode de référence, et sur la dernière ligne est affiché le champ total calculé à l'aide d'une méthode de référence.

Par méthode de référence, nous entendons une méthode par éléments finis classiques, calibrée avec un pas de maillage  $h$  adapté à la taille du défaut  $\varepsilon$ .

Pour l'expérience présentée figure 6.1.2, le pas de maillage pour la méthode approchée est  $h_{\text{app}} = 10^{-2}$ , le pas de maillage pour la méthode de référence est  $h_{\text{ref}} = 0,5 \cdot 10^{-3}$  tandis que le défaut est de taille  $\varepsilon = 3 \cdot 10^{-4}$ , de sorte que 6 mailles sont contenues dans le défaut

] $-\varepsilon, \varepsilon[$  pour la méthode de référence. Les éléments finis  $\mathbb{P}_3$  sont utilisés, couplés à une technique de condensation de masse.

L'erreur relative en champ diffractée vaut

$$e = \frac{\|\tilde{u}_\varepsilon - u_\varepsilon\|}{\|u_\varepsilon - u_0\|} = 2.10^{-2}$$

où la norme utilisée est la norme  $L^1(0, T, L^2(\mathbb{R}))$ , où  $u_\varepsilon$  désigne la solution de référence calculée grâce à la méthode élément finis standard,  $u_0$  le champ incident et  $\tilde{u}_\varepsilon$  le champ approché, calculé à l'aide de la méthode asymptotique.

La différence de temps de calcul est quand à elle notable : la méthode par élément finis standard s'exécute en  $T_{\text{ref}} = 0.75$  s tandis que la méthode approchée s'exécute en  $T_{\text{app}} = 0.02$  s, soit un gain de temps de calcul d'un facteur 30 !

Pour l'ensemble des expériences numériques en 1D, nous utilisons le terme source  $f$  suivant

$$f(x, t) = C(x - x_0)e^{-\frac{(x-x_0)^2 - (t-t_0)^2}{2\sigma}},$$

ainsi qu'une vitesse dans le milieu ambiant valant  $c = 1$  (imposé par le fait de choisir  $\rho_0 = \mu_0 = 1$ ), de sorte que  $\sigma$  joue le rôle de carré de la longueur d'onde centrale. Le graphe de  $x \mapsto f(x, t)$  est affiché figure 6.1.1.

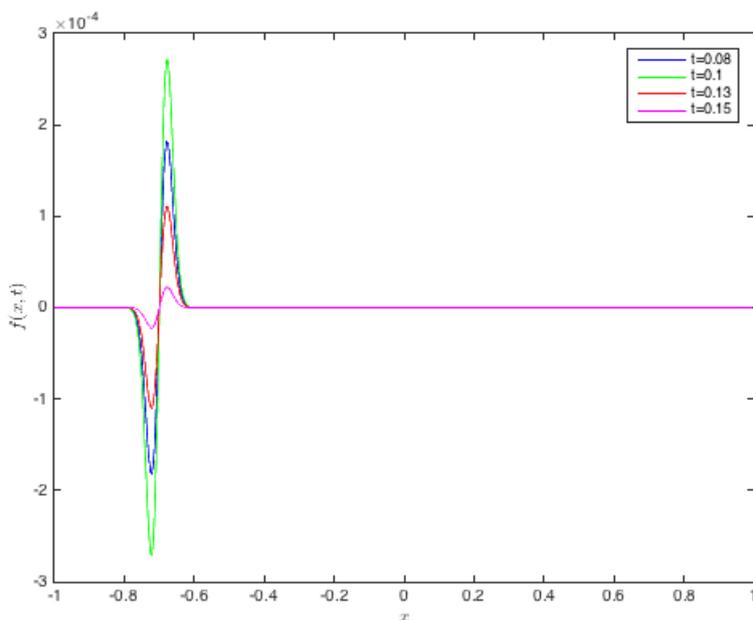
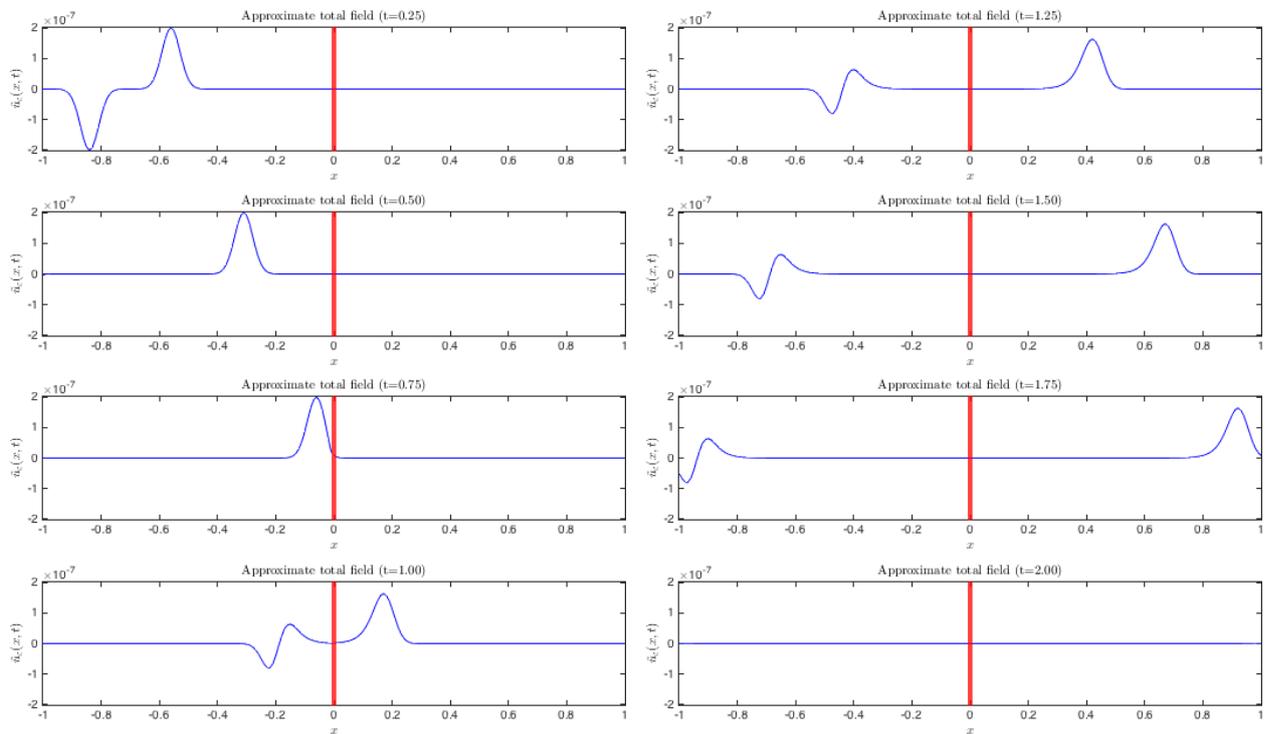
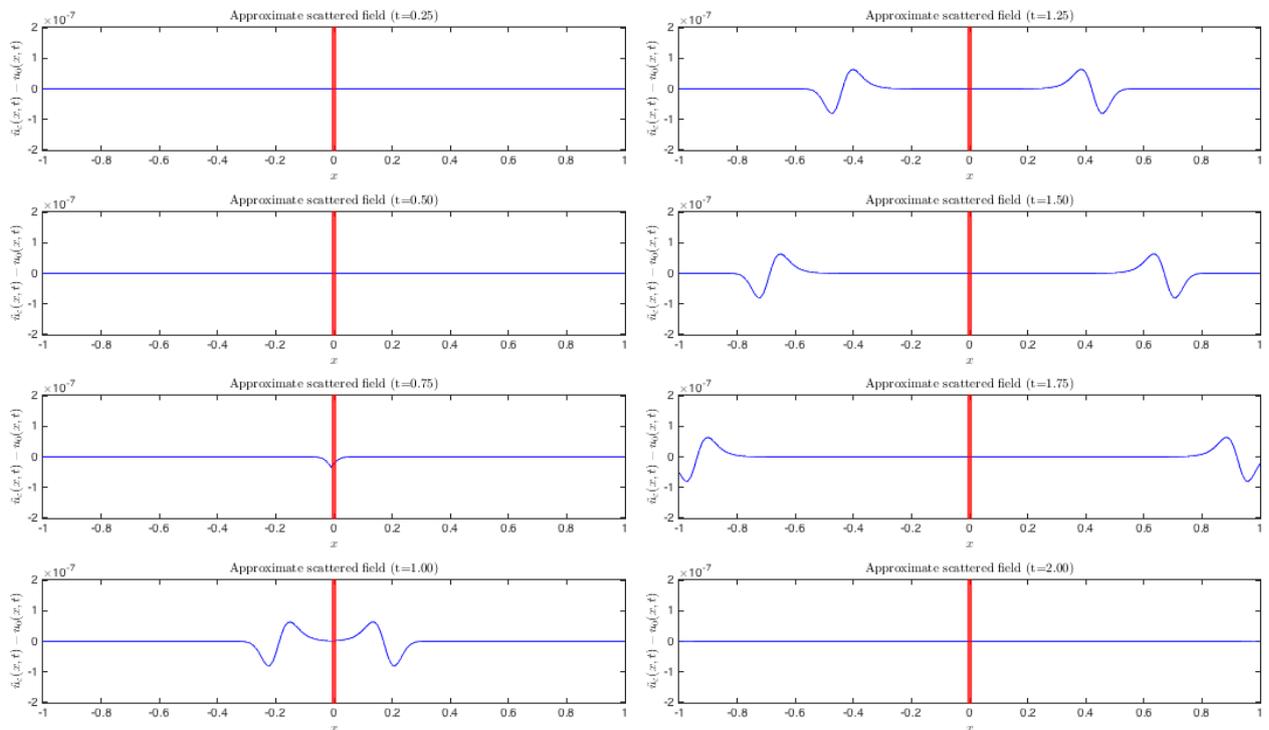


FIGURE 6.1.1 – Graphe de la source  $x \mapsto f(x, t)$  utilisée dans les simulations numériques pour différents instants  $t$ .

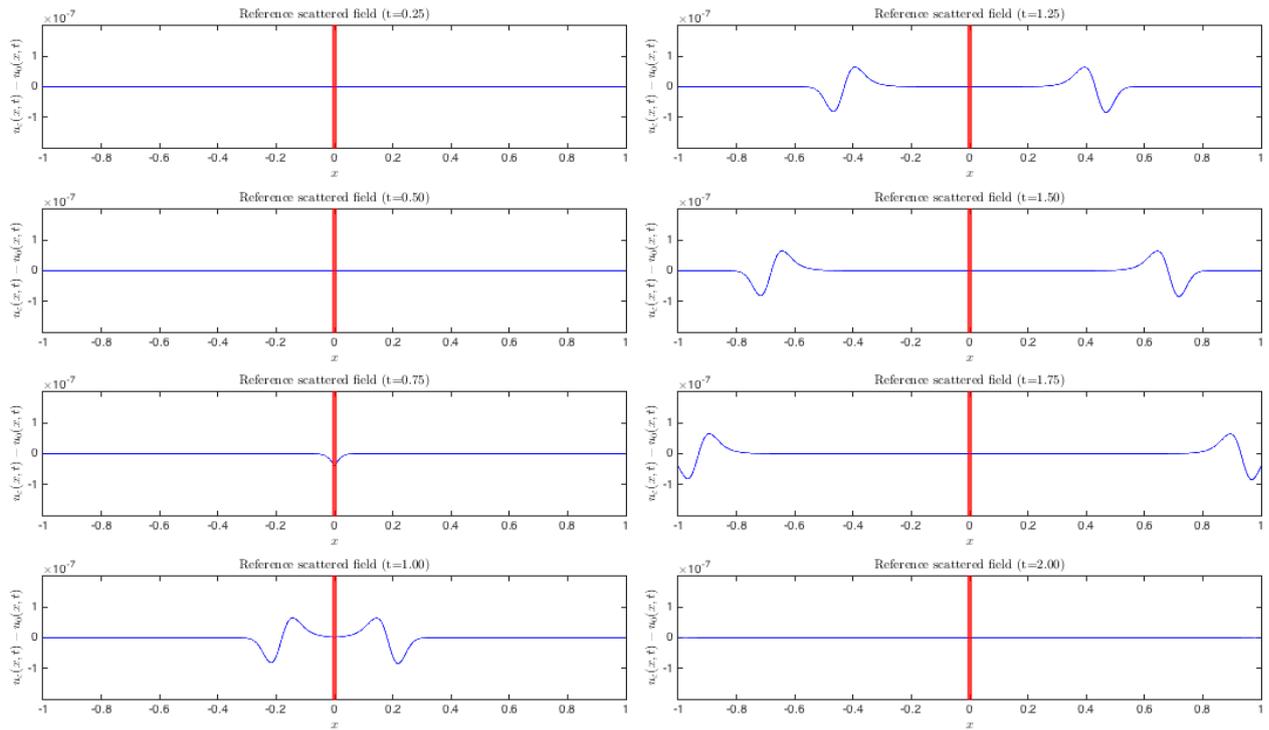
Pour l'expérience décrite figure 6.1.2, les valeurs de  $\rho$  et de  $\mu$  dans l'inclusion sont  $\rho_1 = 10 = \mu_1$ .



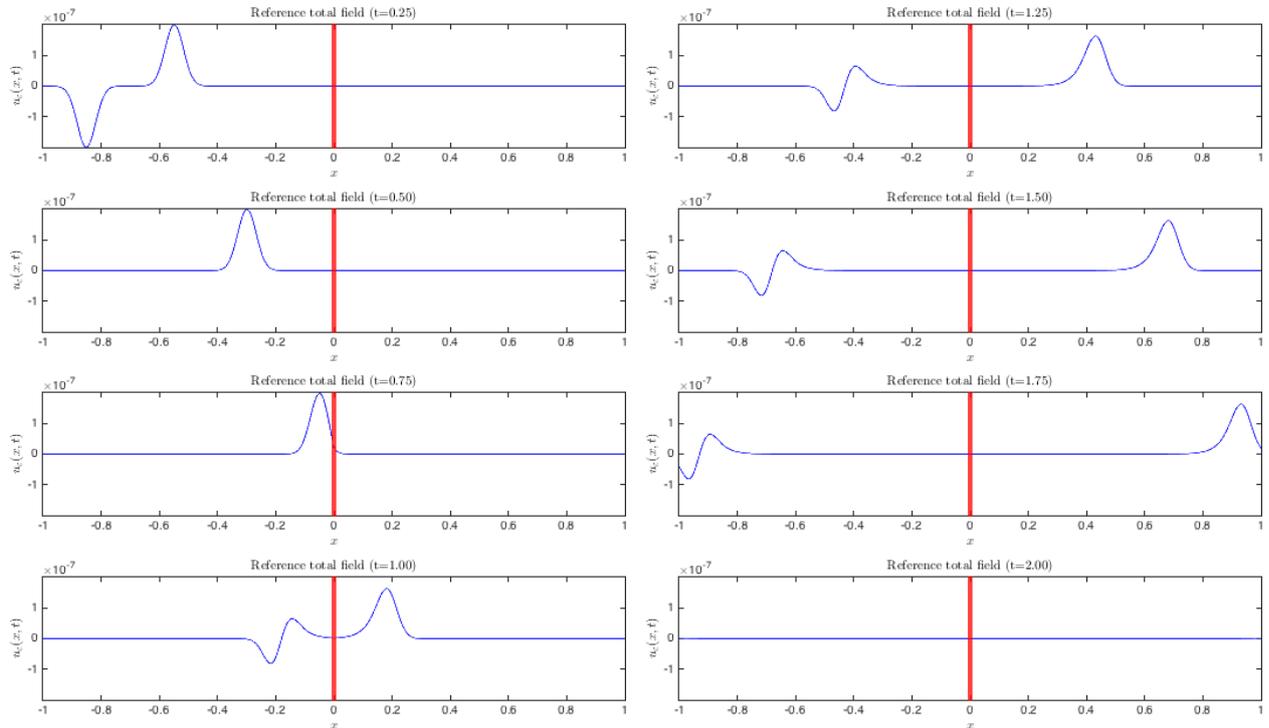
(a) Champ total calculé par la méthode approchée.



(b) Champ diffracté calculé par la méthode approchée.



(c) Champ diffracté calculé par la méthode de référence.



(d) Champ total calculé par la méthode de référence.

FIGURE 6.1.2 – Instantanés pour la méthode numérique associée au premier modèle approché dans le cas unidimensionnel. L'inclusion se trouve au centre du domaine et est délimitée par les traits rouges. Les éléments finis utilisés sont les éléments finis de Lagrange  $\mathbf{P}_3$ . Le pas de maillage est  $h = 0,01$  pour une inclusion de taille  $\varepsilon = 10^{-3}$ . La longueur d'onde centrale est de l'ordre de  $\lambda \simeq 10^{-2}$ , de sorte que  $\varepsilon/\lambda \simeq 10^{-1}$ .

### 6.1.2 Le cas d'un fort contraste du paramètre $\rho_\varepsilon$

Nous décrivons une seconde expérience numérique. Le cadre est le même que dans l'expérience précédente. Les paramètres sont  $\varepsilon = 3.10^{-3}$ , la valeur de  $\mu$  dans le défaut a été fixée à  $\mu_1 = 0$  tandis que  $\rho_1 = 1000$ , le pas de maillage pour la méthode de référence  $h_{\text{ref}} = 10^{-3}$  et le pas de maillage pour la méthode approchée  $h_{\text{app}} = 10^{-2}$ . On se rapproche ainsi d'une condition au bord du défaut de type Dirichlet homogène sur le bord de l'obstacle, comme les résultats numériques le montrent. Les résultats sont présentés figure 6.1.3.

L'erreur relative en champ diffractée vaut

$$e = \frac{\|\tilde{u}_\varepsilon - u_\varepsilon\|}{\|u_\varepsilon - u_0\|} = 1,5.10^{-2}$$

où la norme utilisée est la norme  $L^1(0, T, L^2(\mathbb{R}))$ , où  $u_\varepsilon$  désigne la solution de référence calculée grâce à la méthode élément finis standard,  $u_0$  le champ incident et  $\tilde{u}_\varepsilon$  le champ approché, calculé à l'aide de la méthode asymptotique.

Les temps de calcul sont les suivants  $T_{\text{ref}} = 0.364$  s tandis que la méthode approchée s'exécute en  $T_{\text{app}} = 0.006$  s, soit un gain de temps de calcul d'un facteur 50 environ !

### 6.1.3 Analyse d'erreur numérique

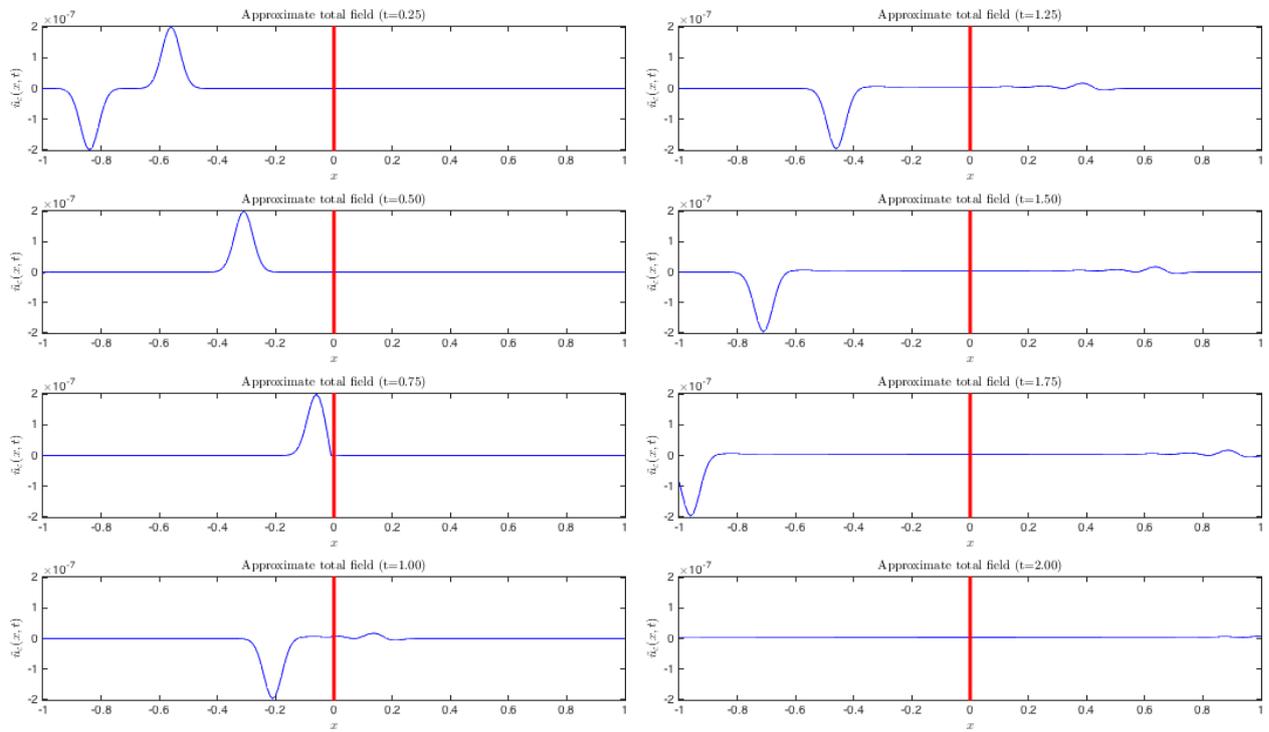
Dans cette section, nous réalisons une analyse d'erreur numérique de notre méthode d'approximation unidimensionnel, décrite en début de section. Précisons qu'il s'agit d'une implémentation de la méthode numérique associée au premier modèle approché, sans enrichissement. L'expérience est présentée figure 6.1.4, et nous observons le même type de phénomène que celui décrit section 5.3, à savoir le phénomène de verrouillage numérique.

En effet, commentons un peu plus avant la figure 6.1.4. Nous avons tracé le logarithme de l'erreur relative en champ diffracté en fonction du logarithme du pas de maillage, où l'erreur est définie par

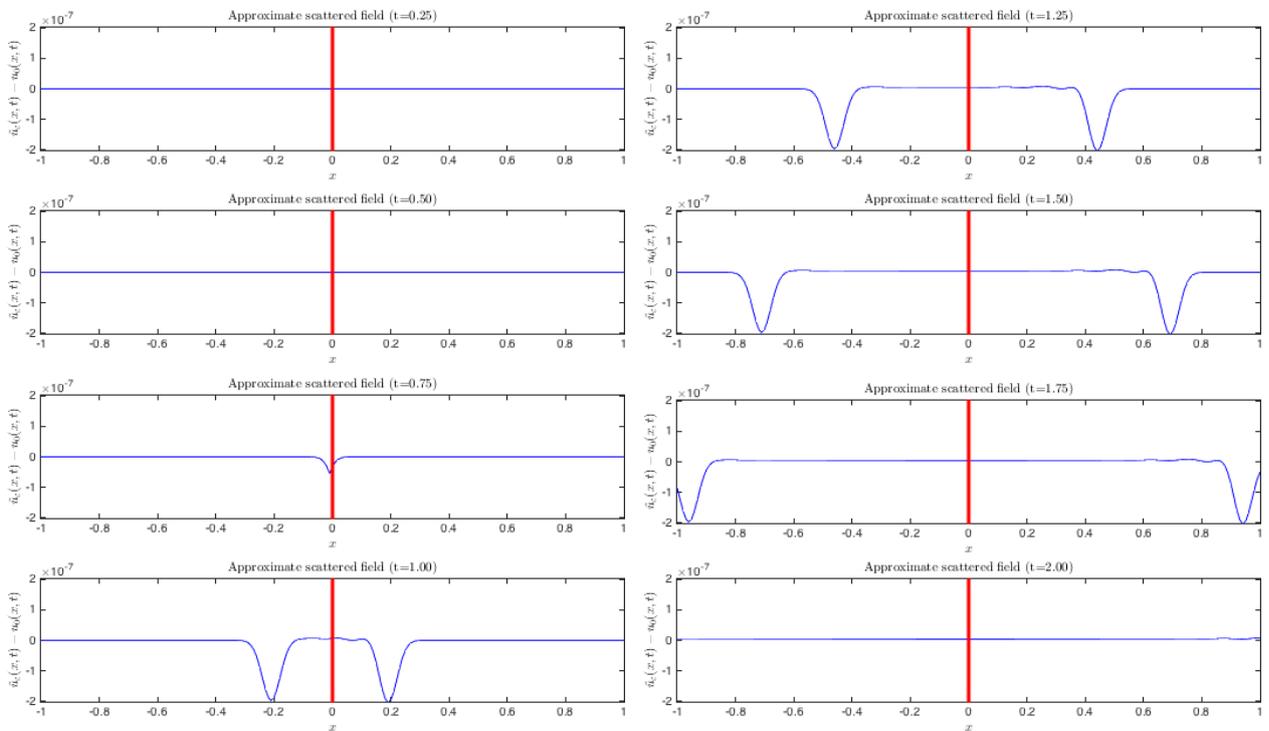
$$e = \frac{\|\tilde{u}_\varepsilon - u_\varepsilon\|}{\|u_\varepsilon - u_0\|},$$

où  $u_0$  désigne le champ incident, solution du problème sans défaut,  $u_\varepsilon$  est une solution de référence calculée grâce à une méthode de type élément finis *ayant presque convergé*.

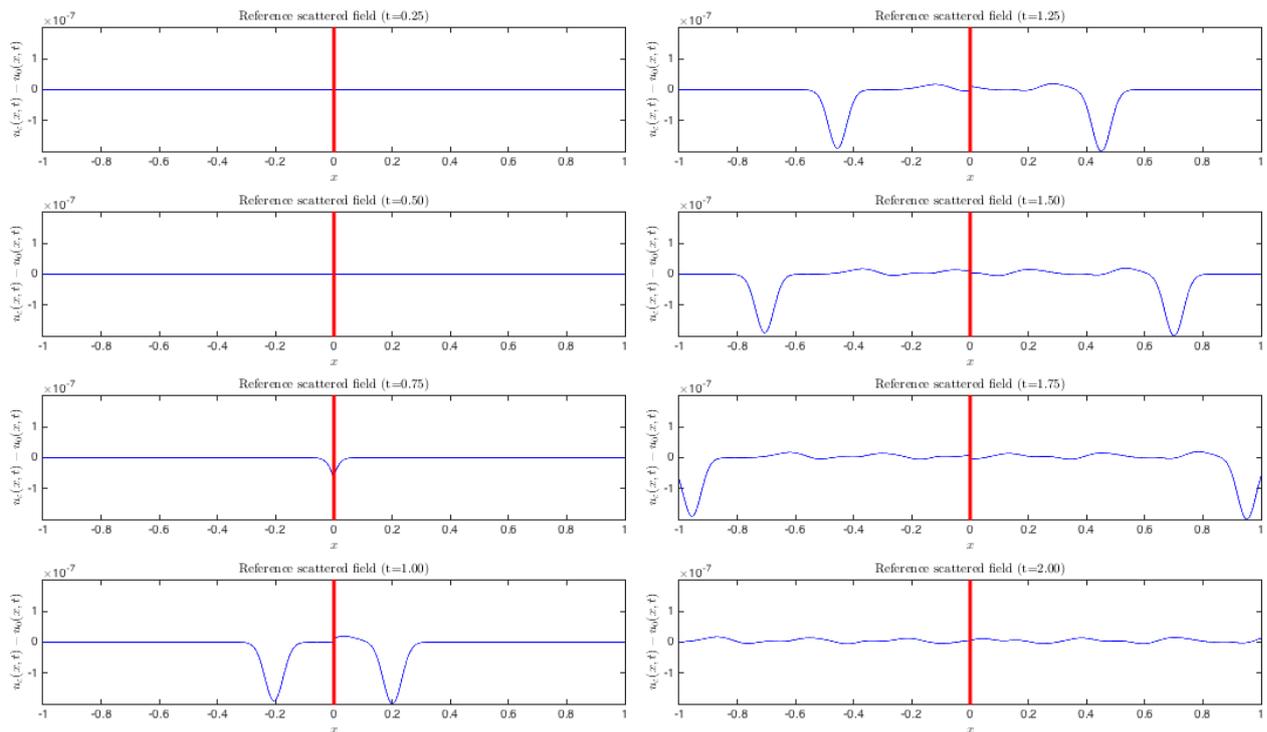
**Note sur le calcul de la solution de référence** Contrairement au cas bidimensionnel où le calcul d'une solution de référence est obtenu analytiquement grâce aux résultats issus de l'analyse asymptotique, dans le cas unidimensionnel qui nous intéresse ici  $u_\varepsilon$  désigne une solution numérique calculée par élément finis  $\mathbf{P}_3$  associée à un pas de maillage  $h$  tel que  $h = \varepsilon/6$ . Avec ce choix de paramètres, la solution numérique est très proche de la solution du problème exact : la solution numérique associée à un pas de maillage  $h/2$  est extrêmement proche de la solution numérique associée au pas de maillage  $h$ .



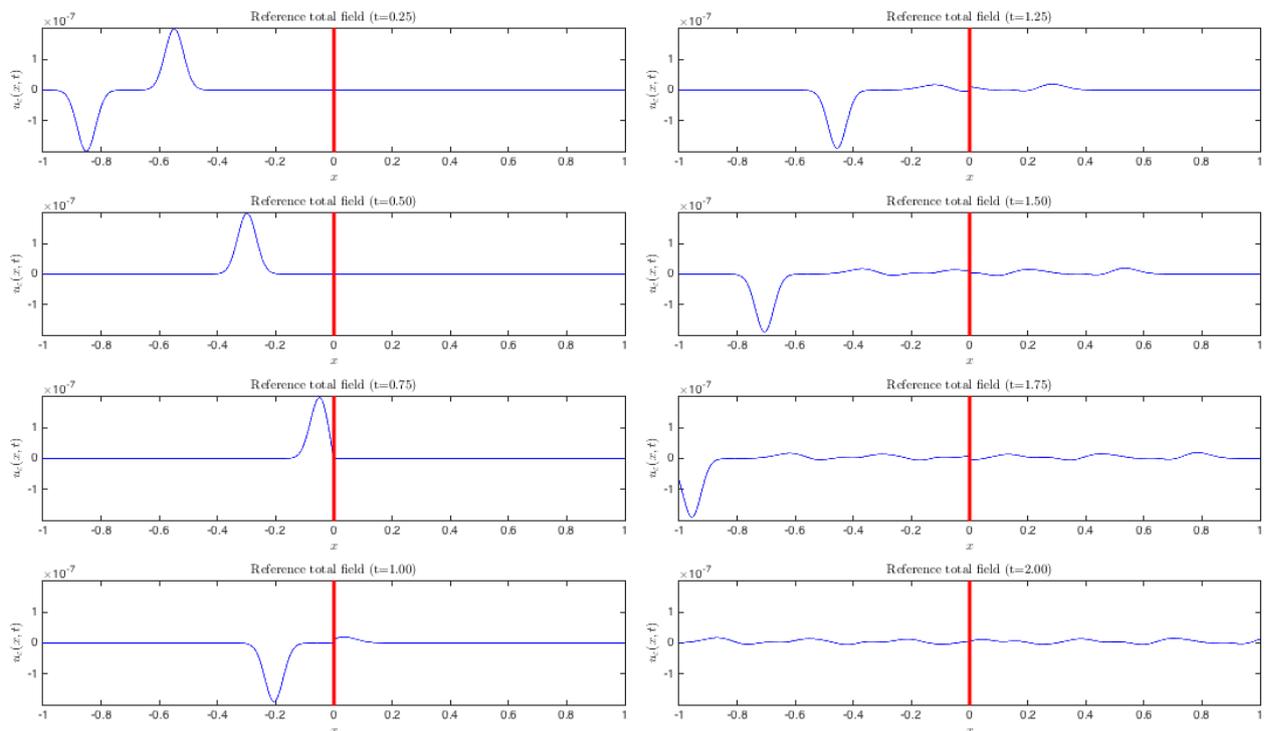
(a) Champ total calculé par la méthode approchée.



(b) Champ diffracté calculé par la méthode approchée.



(c) Champ diffracté calculé par la méthode de référence.



(d) Champ total calculé par la méthode de référence.

FIGURE 6.1.3 – Instantanés pour la seconde expérience numérique. L'inclusion se trouve au centre du domaine et est délimitée par les traits rouges. Le pas de maillage est  $h = 0,01$  pour une inclusion de taille  $\varepsilon = 10^{-3}$ . La longueur d'onde centrale est de l'ordre de  $\lambda \simeq 3.10^{-2}$ , de sorte que  $\varepsilon/\lambda \simeq 10^{-1}$ . Le contraste relatif  $\rho_1/\rho_0 = 1000$ , de sorte que l'on se rapproche d'une condition de Dirichlet sur le bord.

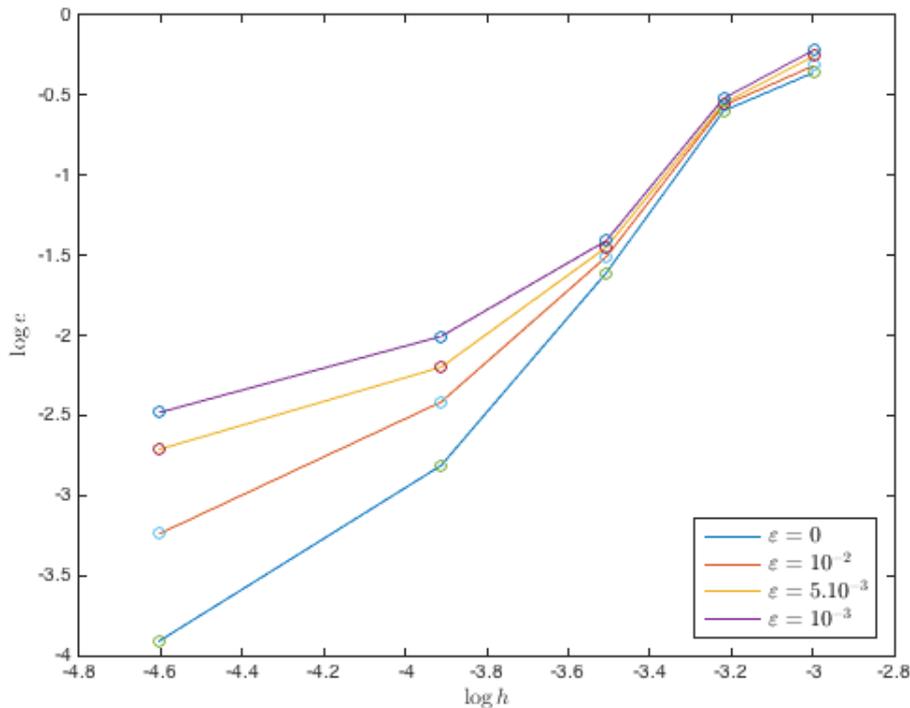


FIGURE 6.1.4 – Analyse d'erreur pour le problème de diffraction unidimensionnel.

## 6.2 LE CAS BIDIMENSIONNEL

La première expérience numérique que nous réalisons consiste à étudier la capacité des modèles approchés développés chapitre 4 à reproduire l'onde diffractée par un unique défaut de petite taille comparée à la longueur d'onde. Nous nous donnons  $\varepsilon > 0$  et  $\lambda > 0$ , respectivement la taille du défaut et la longueur d'onde centrale de l'onde incidente, de sorte que

$$\frac{\varepsilon}{\lambda} \ll 1.$$

La petite hétérogénéité est choisie comme étant le disque ouvert centré en 0 de rayon  $\varepsilon$  :  $\omega_\varepsilon := D(0, \varepsilon)$ . Le domaine de calcul à l'intérieur duquel nous réalisons la simulation est un carré centré en 0 de demi-côté  $R > 0$  :  $\Omega_R = ]-R, R[ \times ]-R, R[$ .

Nous bornons le domaine de calcul en plaçant des couches parfaitement absorbantes (PMLs) [16] sur la frontière du domaine de calcul, afin de simuler la propagation dans  $\mathbb{R}^2$  tout entier.

Dans cette configuration, nous donnons les résultats numériques pour les deux méthodes numériques associées aux deux modèles approchés dont les discrétisations sont décrites au chapitre 5.

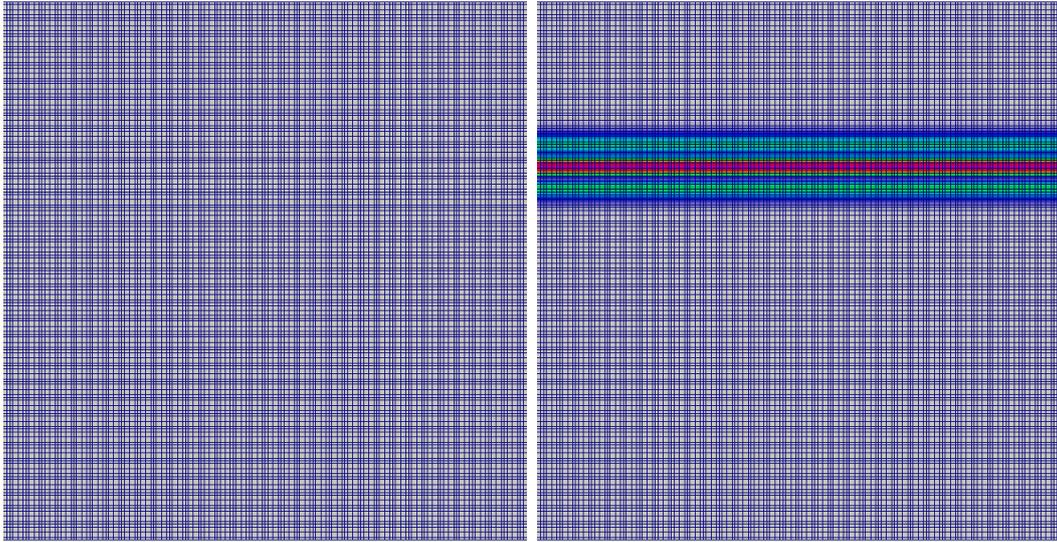


FIGURE 6.2.1 – Exemple de maillage utilisé. Le maillage est cartésien, les degrés de liberté sont les points de Gauss-Lobatto. Le pas de maillage est calibré sur la longueur d’onde, de sorte que l’on ait de l’ordre d’une dizaine de mailles par longueur d’onde.

Toutes les simulations ont été effectuées sur un ordinateur portable de milieu de gamme (cette remarque étant sensée servir de point de repère pour les temps de calcul annoncés).

### 6.2.1 Résultats numériques pour la méthode numérique associée au premier modèle approché

**Le cas d’une inclusion unique** Nous présentons ici quelques instantanés issus de la simulation d’une onde diffractée par un défaut unique, placé au centre du domaine. Le milieu environnant est caractérisé par les paramètres  $\rho_0 = 1$  et  $\mu_0 = 1$ , tandis que l’inclusion a pour paramètre  $\rho_1 = 50$  et  $\mu_1 = 10$ . Les résultats numériques sont présentés sur la figure 6.2.2. Le temps de calcul nécessaire à la simulation sur l’intervalle de temps  $[0, 10]$  est de 12.3 secondes.

**Un réseau d’inclusions** Nous présentons ici quelques instantanés issus de la simulation d’une onde diffractée par un réseau de 100 inclusions, disposées selon une grille régulière légèrement perturbée. Les paramètres du milieu environnant sont  $\rho_0 = 1$  et  $\mu_0 = 1$ , tandis que chaque la  $n$ -ème inclusion a pour paramètre  $\rho_n = 800 + x_n$  et  $\mu_n = 0.5 + y_n$ , où les  $(x_n)_{1 \leq n \leq N}$  sont  $N$  réalisations d’une loi de probabilité uniforme dans  $[-50, 50]$  et les  $(y_n)_{1 \leq n \leq N}$  sont  $N$  réalisations d’une loi de probabilité uniforme dans  $[-0.1, 0.1]$ . Les résultats numériques sont présentés sur la figure 6.2.3. Le temps de calcul nécessaire à la simulation sur l’intervalle de temps  $[0, 10]$  est de 15.4 secondes. La différence de temps

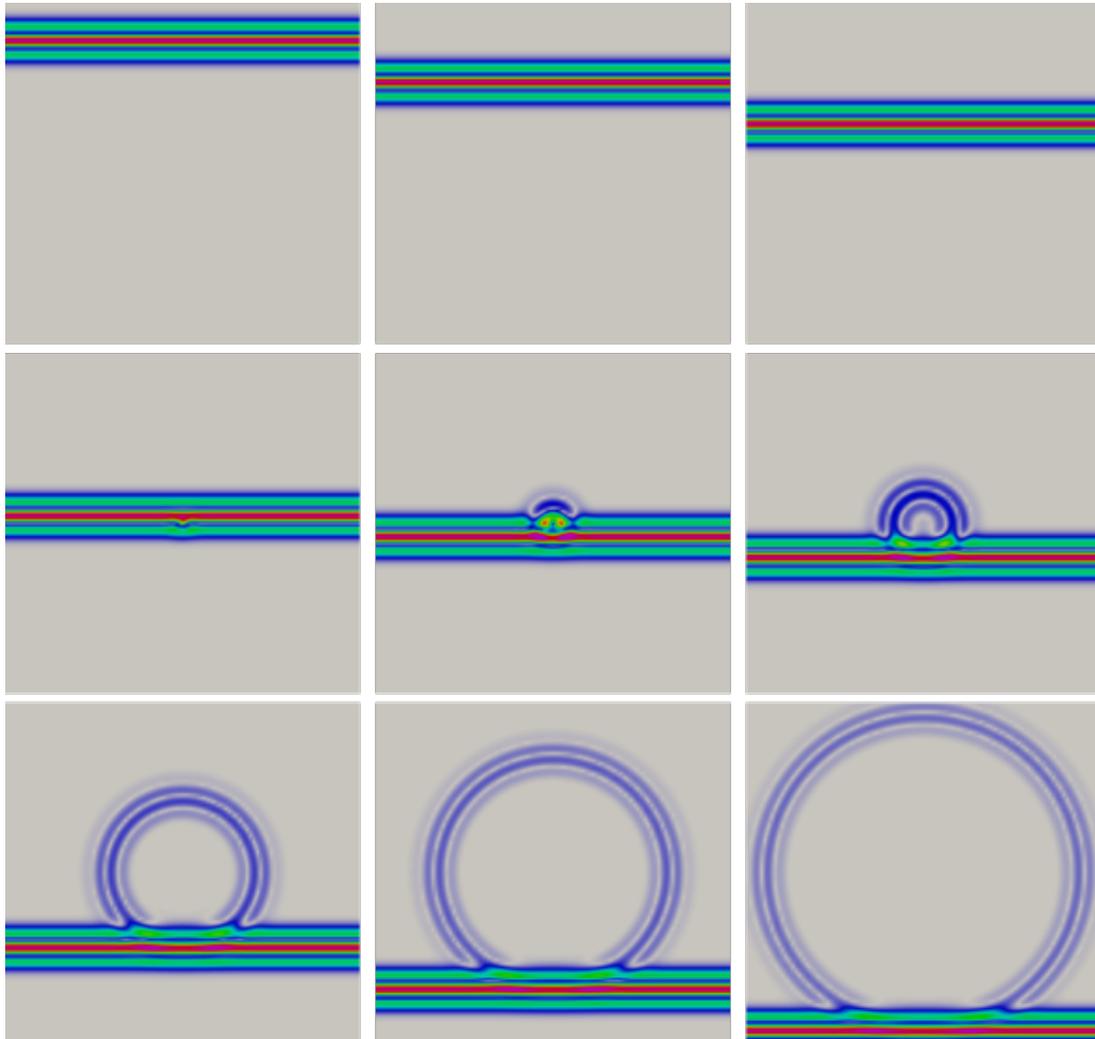


FIGURE 6.2.2 – Instantanés pour la méthode numérique associée au premier modèle approché. L'onde incidente est émise depuis le bord supérieur du domaine et l'inclusion se trouve au centre du domaine. Les éléments finis utilisés sont les éléments finis de Gauss-Lobatto  $\mathbf{Q}_4$ . Le pas de maillage est  $h = 0.15$  pour une inclusion de rayon  $\varepsilon = 0.01$ . La fréquence centrale est  $f = 1$ , la vitesse dans le milieu vaut 1, de sorte que la longueur d'onde centrale vaut  $\lambda = 1$ .

---

de calcul avec le cas d'une inclusion unique provient de la phase de pre-processing qui consiste à assembler les matrices liées aux formes bilinéaires qui rendent compte de la présence de l'inclusion.

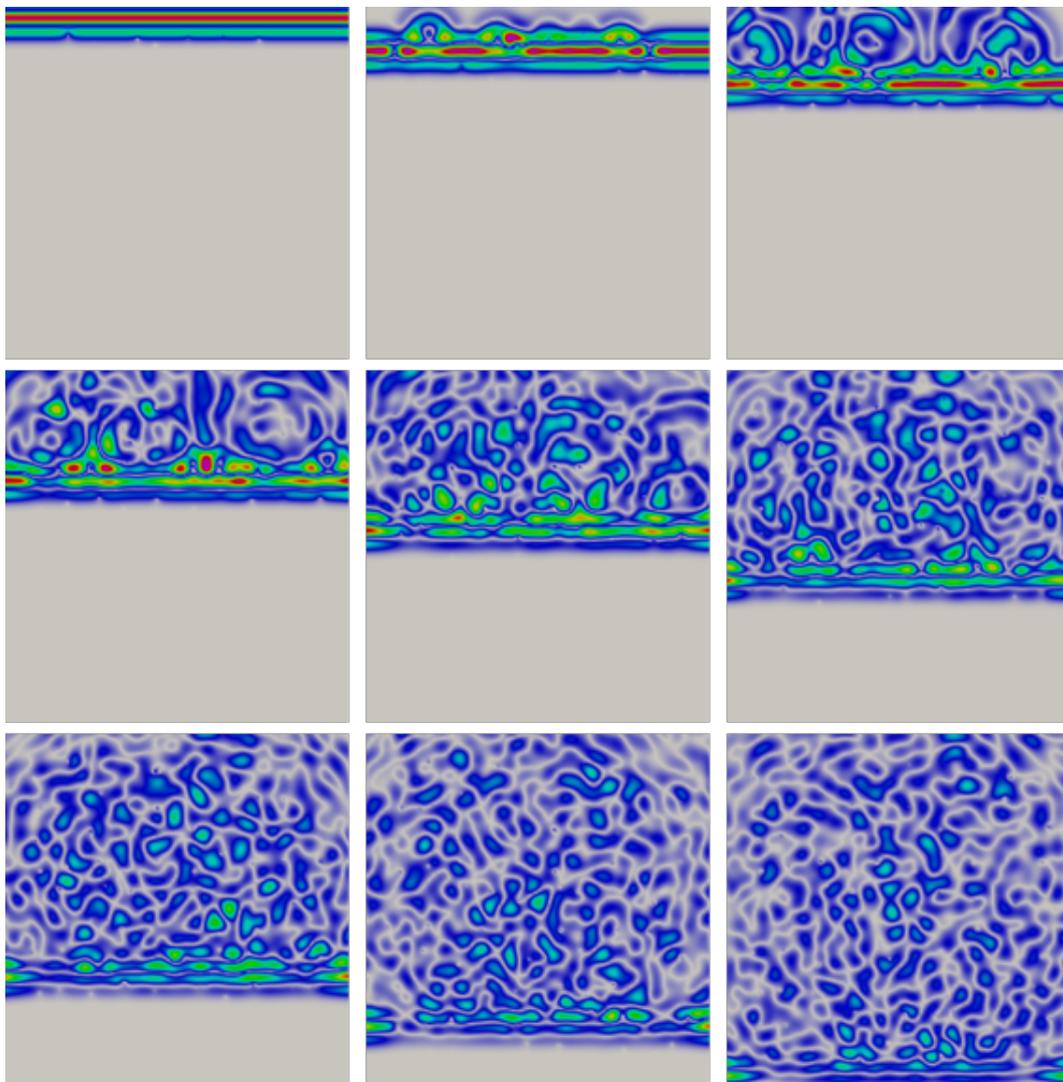


FIGURE 6.2.3 – Instantanés pour la méthode numérique associée au premier modèle approché. L'onde incidente est émise depuis le bord supérieur du domaine et les 100 inclusions sont centrés sur les points perturbés aléatoirement d'un réseau régulier. Les éléments finis utilisés sont les éléments finis de Gauss-Lobatto  $\mathbf{Q}_3$ . Le pas de maillage est  $h = 0.15$  pour une inclusion de rayon  $\varepsilon = 0.01$ . La fréquence centrale est  $f = 1$ , la vitesse dans le milieu vaut 1, de sorte que la longueur d'onde centrale vaut  $\lambda = 1/2$ .

**Analyse d'erreur numérique pour le premier modèle approché** Nous présentons à présent l'analyse d'erreur numérique concernant la méthode associée au premier problème approché. La démarche que nous suivons est identique à celle présentée section 5.3 : nous calculons l'ansatz de champ lointain d'ordre 2 associé à la solution  $u_\varepsilon$  du problème exact de diffraction par une unique hétérogénéité placée au centre d'un domaine carré. Nous calculons alors la solution numérique via le premier modèle approché, et nous calculons l'erreur  $L^1$  en temps à valeurs  $L^2$  en espace dans un domaine spatial excluant un voisinage de l'hétérogénéité.

Nous répétons cette démarche pour plusieurs valeurs du pas de maillage  $h$  de la méthode éléments finis sous-jacente, pour plusieurs tailles d'inclusions  $\varepsilon$  et pour plusieurs ordres d'éléments finis. Les résultats sont présentés sur la figure 6.2.4.

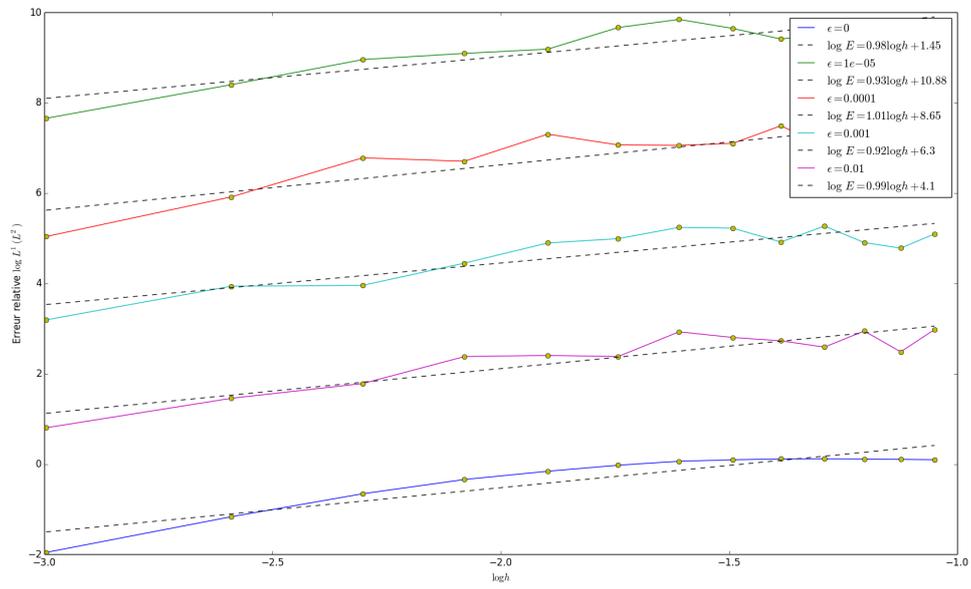
## 6.2.2 Résultats numériques pour la méthode numérique associée au second modèle approché

Nous présentons les résultats numériques pour la seconde méthode numérique, décrite section 5.1.1.b.

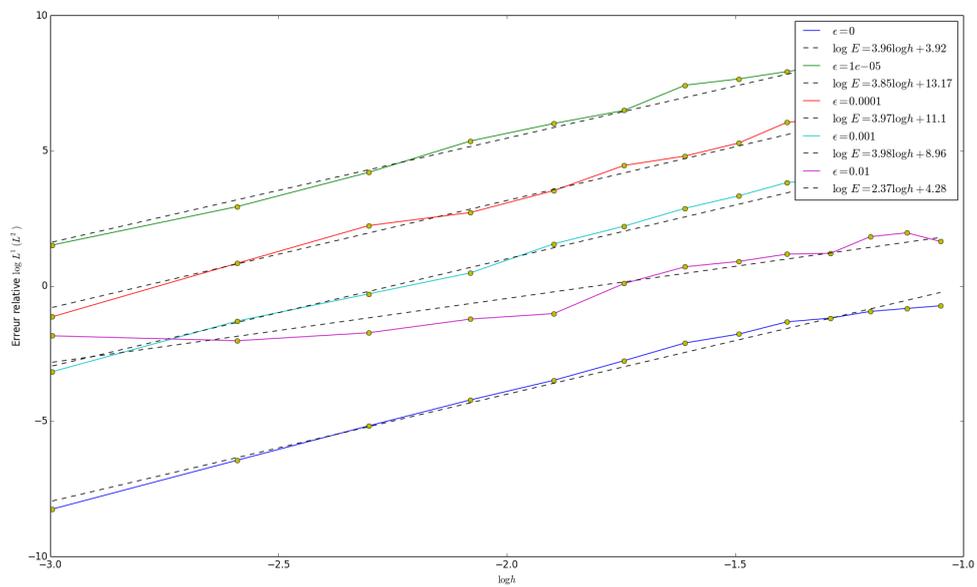
**Le cas d'une inclusion unique** Nous présentons ici quelques instantanés issus de la simulation d'une onde diffractée par un défaut unique, placé au centre du domaine. Le milieu environnant est caractérisé par les paramètres  $\rho_0 = 1$  et  $\mu_0 = 1$ , tandis que l'inclusion a pour paramètre  $\rho_1 = 20$  et  $\mu_1 = 10$ . Le temps de calcul nécessaire à la simulation sur l'intervalle de temps  $[0, 10]$  est de 11.8 secondes. Les résultats numériques sont présentés sur la figure 6.2.2.

**Un réseau d'inclusions** Nous présentons ici quelques instantanés issus de la simulation d'une onde diffractée par un réseau de 25 inclusions, disposées selon une grille régulière légèrement perturbée. Les paramètres du milieu environnant sont  $\rho_0 = 1$  et  $\mu_0 = 1$ , tandis que chaque la  $n$ -ème inclusion a pour paramètre  $\rho_n = 800 + x_n$  et  $\mu_n = 0.5 + y_n$ , où les  $(x_n)_{1 \leq n \leq N}$  sont  $N$  réalisations d'une loi de probabilité uniforme dans  $[-50, 50]$  et les  $(y_n)_{1 \leq n \leq N}$  sont  $N$  réalisations d'une loi de probabilité uniforme dans  $[-0.1, 0.1]$ . Le temps de calcul nécessaire à la simulation sur l'intervalle de temps  $[0, 10]$  est de 13.5 secondes. Les résultats sont présentés sur la figure 6.2.6.

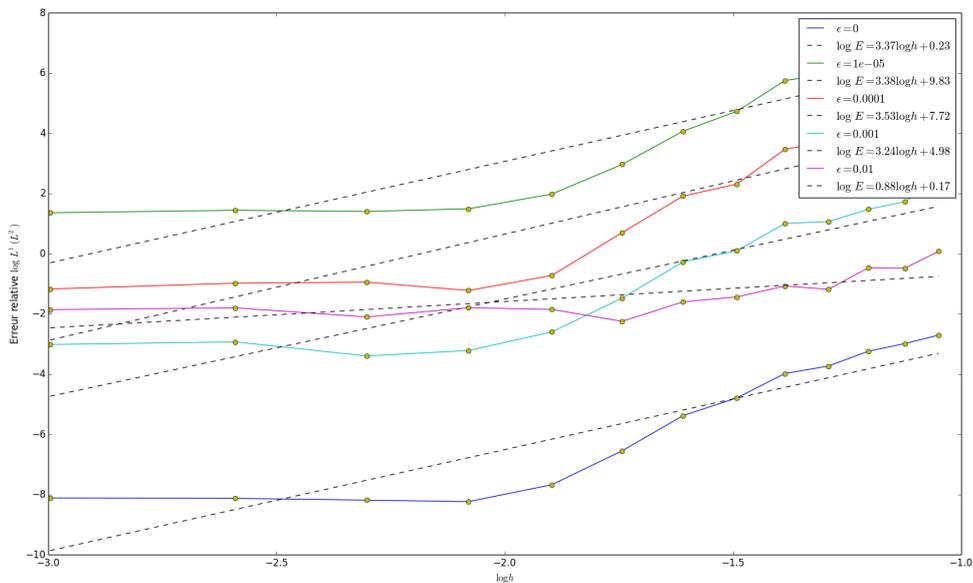
L'analyse d'erreur numérique pour le second modèle approché a été présentée figure 5.3.1.



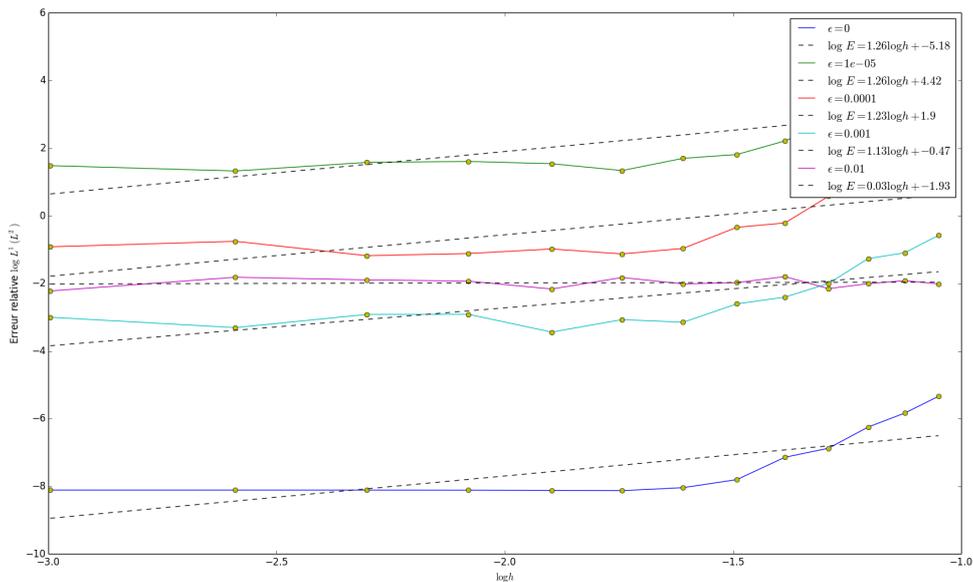
(a) Eléments finis d'ordre 1.



(b) Eléments finis d'ordre 2.



(c) Eléments finis d'ordre 3.



(d) Eléments finis d'ordre 4.

FIGURE 6.2.4 – Analyse d’erreur numérique pour plusieurs pas de maillage  $h$ , plusieurs tailles de défauts  $\varepsilon$  et plusieurs ordres d’éléments finis, pour la méthode numérique **sans enrichissement** associée au premier modèle approché. Sur chaque graphe, le comportement de la méthode élément finis standard sous-jacente est donné par la courbe en bleu, correspondant au cas sans défaut. Nous observons le phénomène de verrouillage numérique : hormi pour la courbe bleue correspondant à  $\varepsilon = 0$ , les autres courbes sont triées par valeurs décroissantes de  $\varepsilon$ .

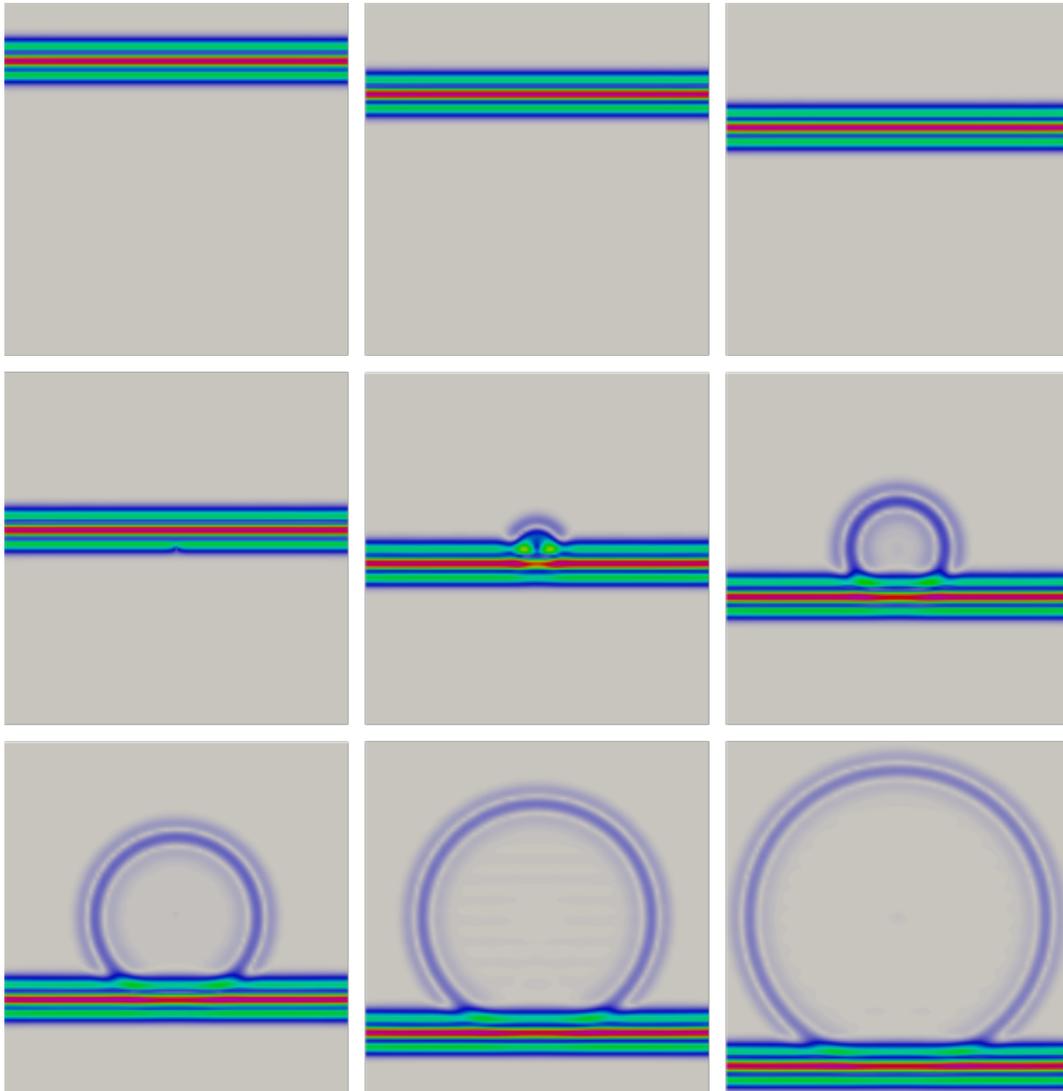


FIGURE 6.2.5 – Instantanés pour la méthode numérique associée au deuxième modèle approché. L'onde incidente est émise depuis le bord supérieur du domaine et l'inclusion se trouve au centre du domaine. Les éléments finis utilisés sont les éléments finis de Gauss-Lobatto  $\mathbf{Q}_4$ . Le pas de maillage est  $h = 0.15$  pour une inclusion de rayon  $\varepsilon = 0.01$ . La fréquence centrale est  $f = 1$ , la vitesse dans le milieu vaut 1, de sorte que la longueur d'onde centrale vaut  $\lambda = 1$ .

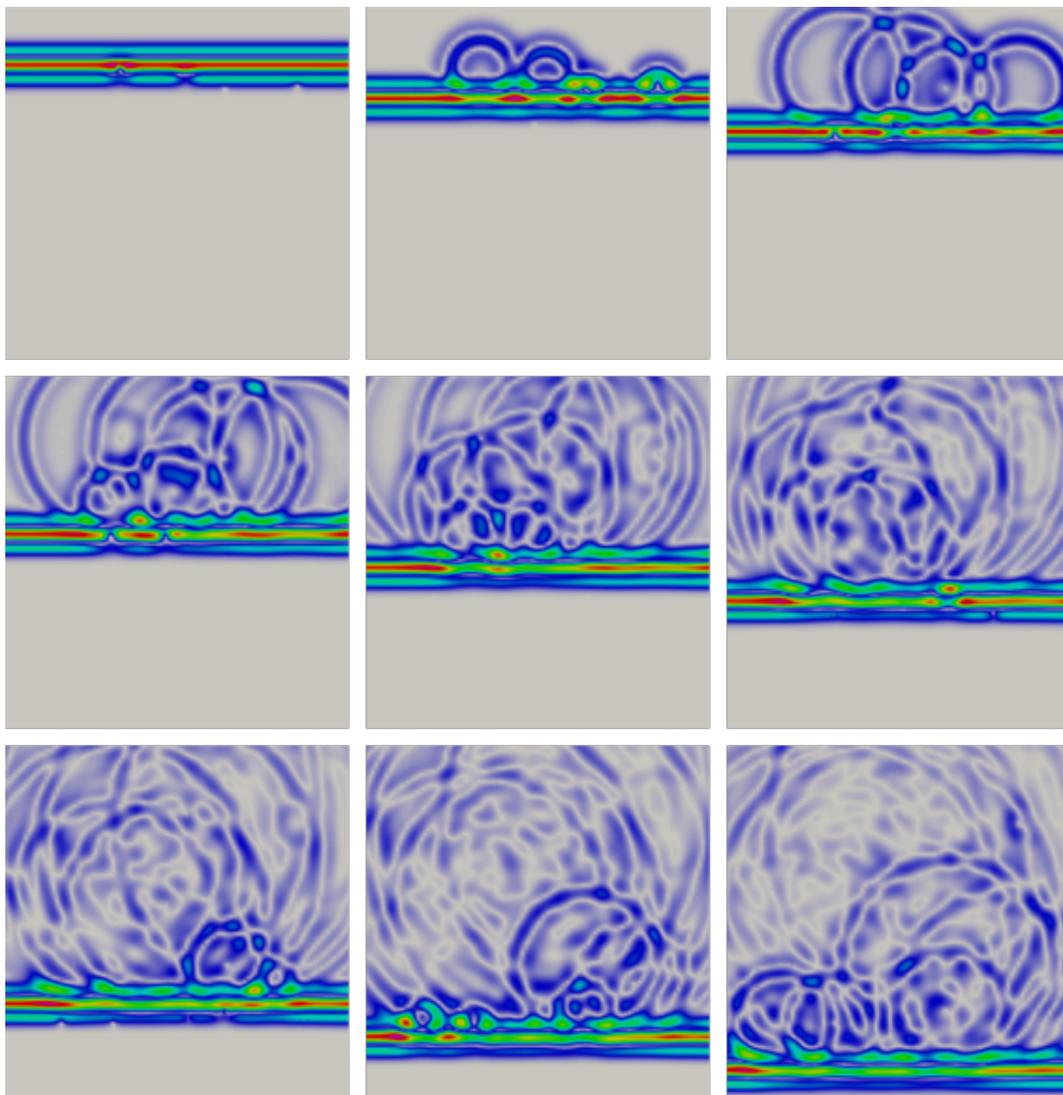


FIGURE 6.2.6 – Instantanés pour la méthode numérique associée au deuxième modèle approché. L'onde incidente est émise depuis le bord supérieur du domaine et les 25 inclusions sont centrés sur les points perturbés aléatoirement d'un réseau régulier. Les éléments finis utilisés sont les éléments finis de Gauss-Lobatto  $\mathbf{Q}_4$ . Le pas de maillage est  $h = 0.15$  pour une inclusion de rayon  $\varepsilon = 0.01$ . La fréquence centrale est  $f = 2$ , la vitesse dans le milieu vaut 1, de sorte que la longueur d'onde centrale vaut  $\lambda = 1/2$ .

## CHAPITRE

### 7

# CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

Nous avons présenté dans ce manuscrit une étude théorique et numérique de la diffraction d'ondes acoustiques transitoires par des obstacles petits devant la longueur d'onde, dans le domaine transitoire et pour une géométrie bidimensionnelle.

Après avoir calculé le développement asymptotique de la solution du problème de diffraction par une hétérogénéité pénétrable, nous avons proposé deux modèles approchés admettant une solution unique proche de celle du modèle exact. L'intérêt de ces modèles approchés est qu'ils s'appuient tous deux sur l'opérateur des ondes dans l'espace libre, ce qui permet une discrétisation par éléments finis standards, diminuant ainsi grandement le temps de calcul nécessaire au calcul d'une approximation de l'onde diffractée par une ou plusieurs petites hétérogénéités.

Nous avons en effet montré qu'une discrétisation par éléments finis des modèles approchés proposés dans ce manuscrit conduit à des temps de calcul similaires au cas d'une méthode par éléments finis pour le problème de propagation d'ondes dans l'espace libre. Nous avons également mis en évidence un phénomène de verrouillage numérique, qui pénalise la convergence de la méthode numérique, mais qui peut-être surmonté via l'enrichissement de l'espace d'approximation grâce à l'ajout de deux fonctions par inclusion.

Plusieurs perspectives de difficulté variables sont envisageables pour ces travaux. Une extension immédiate consisterait en l'implémentation numérique d'une méthode de calcul des différents paramètres des modèles approchés dans le cas où les hétérogénéités n'admettent pas de géométrie à variable séparées. Ceci nécessite la résolution de problèmes de transmission pour Laplacien généralisé dans l'espace libre (afin de calculer une approximation des fonctions de profils  $W$  définies section 4.1 ou le tenseur de polarisation généralisé  $\mathbf{Q}$  utilisé pour le second modèle approché introduit section 4.2). Ces calculs

pourraient faire partie d'une phase de pre-processing, puisqu'il s'agit de calculs *statiques*, ayant lieu en amont des itérations en temps.

Une question également intéressante est celle de l'élaboration de modèles approchés à tout ordre en  $\varepsilon$ . Le premier modèle approché que nous avons proposé se prête tout à fait à une montée en ordre en  $\varepsilon$  puisqu'il suffirait pour cela de rajouter les fonctions de profil d'ordre supérieur. Le second modèle approché que nous avons proposé dépend quand à lui fortement de l'ordre en  $\varepsilon$ , tant sa construction que son analyse.

Enfin, le développement de méthodes asymptotiques pour la diffraction d'ondes transitoires pourrait être mis en place pour les équations de l'électromagnétisme et de l'élastodynamique.

# BIBLIOGRAPHIE

- [1] M. Ainsworth, P. Davies, and D. Duncan, editors. *Topics in computational wave propagation : direct and inverse problems*. Lecture notes in computational science and engineering. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 2003.
- [2] G. Allaire. *Analyse numérique et optimisation : une introduction à la modélisation mathématique et à la simulation numérique*. Mathématiques appliquées. École polytechnique, 2005.
- [3] H. Ammari, P. Calmon, and E. Iakovleva. Direct elastic imaging of a small inclusion. *SIAM Journal on Imaging Sciences*, 1(2) :169–187, 2008.
- [4] H. Ammari, H. Kang, and M. Lim. Polarization tensors and their applications. *Journal of Physics : Conference Series*, 12(1) :13, 2005.
- [5] P.F. Antonietti, I. Mazzieri, A. Quarteroni, and F. Rapetti. Non-conforming high order approximations of the elastodynamics equation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 209–212(0) :212 – 238, 2012.
- [6] D. N. Arnold. Discretization by finite elements of a model parameter dependent problem. *Numerische Mathematik*, 37(3) :405–421, 1981.
- [7] F. Assous, P. Ciarlet, Jr., S. Labrunie, and J. Segré. Numerical solution to the time-dependent Maxwell equations in axisymmetric singular domains : the singular complement method. *J. Comput. Phys.*, 191(1) :147–176, 2003.
- [8] A. Avantiaggiati. On compact embedding theorems in weighted Sobolev spaces. *Czechoslovak Math. J.*, 29(104)(4) :635–648, 1979.
- [9] I. Babuska and M. Suri. Locking effects in the finite element approximation of elasticity problems. *Numerische Mathematik*, 62 :439–463, 1992.
- [10] I. Babuska and M. Suri. On Locking and robustness in the finite element method. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 29 :1261–1293, 1992.

- [11] C. Bellis, M. Bonnet, and F. Cakoni. Acoustic inverse scattering using topological derivative of far-field measurements-based  $L^2$  cost functionals. *Inverse Problems*, 29(7) :075012, 30, 2013.
- [12] A. Bendali, P.-H. Cocquet, and S. Tordeux. Scattering of a scalar time-harmonic wave by  $n$  small spheres by the method of matched asymptotic expansions. *Numerical Analysis and Applications*, 5(2) :116–123, 2012.
- [13] A. Bendali, P.-H. Cocquet, and S. Tordeux. Approximation by multipoles of the multiple acoustic scattering by small obstacles and application to the Foldy theory of isotropic scattering. July 2014.
- [14] A. Bendali and K. Lemrabet. The effect of a thin coating on the scattering of a time-harmonic wave for the helmholtz equation. *SIAM Journal of Applied Mathematics*, 6(5) :1664–1693, 1996.
- [15] A. Bendali and K. Lemrabet. Asymptotic analysis of the scattering of a time-harmonic wave by a perfectly conducting metal coated with a thin dielectric shell. *Asymptotic Analysis*, 57 :199–227, 2008.
- [16] J.-P. Berenger. A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves. *Journal of Computational Physics*, 114(2) :185–200, October 1994.
- [17] V. Bonnaillie-Noel, M. Dambrine, S. Tordeux, and G. Vial. Interactions between moderately close inclusions for the Laplace equation. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 19, 2009.
- [18] V. Bonnaillie-Noël, M. Dambrine, S. Tordeux, and G. Vial. On moderately close inclusions for the laplace equation. *C. R. Acad. Sciences, Mathématiques*, 345(11) :609 – 614, 2007.
- [19] S. Boyd and L. Vandenberghe. *Convex Optimization*. Cambridge University Press, New York, NY, USA, 2004.
- [20] H. Brezis. *Analyse fonctionnelle. Théorie et applications*. Masson, Paris, 1983.
- [21] A. Burel. *Contributions à la simulation numérique en élastodynamique : découplage des ondes P et S, modèles asymptotiques pour la traversée de couches minces*. PhD thesis, 2014. Thèse de doctorat dirigée par P. Joly et M. Bonnet. Mathématiques appliquées Paris 11 2014.
- [22] E. Bécache and P. Joly. On the analysis of bérenger’s perfectly matched layers for maxwell’s equations. *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 36(1) :87–119, 3 2010.
- [23] Bécache, E., Rodríguez, J., and Tsogka, C. Convergence results of the fictitious domain method for a mixed formulation of the wave equation with a neumann boundary condition. *ESAIM : M2AN*, 43(2) :377–398, 2009.
- [24] Bécache, É., Joly, P., Kachanovska, M., and Vinales, V. Perfectly matched layers in negative index metamaterials and plasmas\*. *ESAIM : Proc.*, 50 :113–132, 2015.
- [25] Y. Capdeboscq, A. Bongio Karrman, and J.-C. Nédélec. Numerical computation of approximate generalized polarization tensors. *Appl. Anal.*, 91(6) :1189–1203, 2012.
- [26] M. Cassier and C. Hazard. Multiple scattering of acoustic waves by small sound-soft obstacles in two dimensions : mathematical justification of the foldy–lax model. *Wave Motion*, 50 :18–28, 2013.

- [27] J. Chabassier and S. Imperiale. Introduction and study of fourth order theta schemes for linear wave equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 245 :194–212, January 2013.
- [28] L. Chen, T. Rabczuk, S. P. A. Bordas, G. R. Liu, K. Y. Zeng, and P. Kerfriden. Extended finite element method with edge-based strain smoothing (ESm-XFEM) for linear elastic crack growth. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 209/212 :250–265, 2012.
- [29] P. Ciarlet, Jr. and S. Labrunie. Numerical solution of Maxwell’s equations in axisymmetric domains with the Fourier singular complement method. *Differ. Equ. Appl.*, 3(1) :113–155, 2011.
- [30] P.G. Ciarlet. *The finite element method for elliptic problems*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York-Oxford, 1978. Studies in Mathematics and its Applications, Vol. 4.
- [31] X. Claeys. *Analyse asymptotique et numérique de la diffraction d’ondes par des fils minces*. PhD thesis, Université de Versailles, Saint-Quentin en Yvelines, December 2008.
- [32] X. Claeys and F. Collino. Augmented galerkin schemes for the numerical solution of scattering by small obstacles. *Numer. Math.*, 116(2) :243–268, August 2010.
- [33] G. Cohen. *Higher-order numerical methods for transient wave equations*. Springer-Verlag, 2001.
- [34] G. Cohen. *Higher-Order Numerical Methods for Transient Wave Equations*. Lecture Notes in Economic and Mathematical Systems. Springer, 2002.
- [35] G. Cohen and S. Fauqueux. Mixed finite elements with mass-lumping for the transient wave equation. *Journal of Computational Acoustics*, 08(01) :171–188, 2000.
- [36] G. Cohen, P. Joly, J. E. Roberts, and N. Tordjman. Higher order triangular finite elements with mass lumping for the wave equation. *SIAM J. Numer. Anal.*, 38(6) :2047–2078 (electronic), 2001.
- [37] F. Collino, T. Fouquet, and P. Joly. A conservative space-time mesh refinement method for the 1-d wave equation. part i : Construction. *Numerische Mathematik*, 95(2) :197–221, 2003.
- [38] D. Colton and R. Kress. *Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory*. Number 93 in Series of Applied Mathematics. Springer-Verlag, New-York, 1992.
- [39] B. Delourme, H. Haddar, and P. Joly. On the well-posedness, stability and accuracy of an asymptotic model for thin periodic interfaces in electromagnetic scattering problems. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 12 (23), 2013.
- [40] J. Diaz and M. Grote. Energy conserving explicit local time stepping for second-order wave equations. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 31(3) :1985–2014, 2009.
- [41] D.G. Duffy. *Green’s Functions with Applications*. Applied Mathematics. CRC Press, 2001.
- [42] L.C. Evans. *Partial Differential Equations*. Graduate studies in mathematics. American Mathematical Society, 2010.
- [43] P. Flajolet, X. Gourdon, and P. Dumas. Mellin transforms and asymptotics : Harmonic sums. *Theor. Comput. Sci.*, 144(1&2) :3–58, 1995.

- [44] L. L. Foldy. The multiple scattering of waves. i. general theory of isotropic scattering by randomly distributed scatterers. *Phys. Rev.*, 67 :107–119, Feb 1945.
- [45] W. Gander and W. Gautschi. Adaptive quadrature—revisited. *BIT Numerical Mathematics*, 40(1) :84–101, 2000.
- [46] T. Geveci. On the application of mixed finite element methods to the wave equations. *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis - Modélisation Mathématique et Analyse Numérique*, 22(2) :243–250, 1988.
- [47] V. Girault and P.-A. Raviart. *Finite element methods for Navier-Stokes equations*, volume 5 of *Springer Series in Computational Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1986. Theory and algorithms.
- [48] J. Giroire. *Etude de quelques problèmes aux limites extérieures et résolution par équations intégrales*. PhD thesis, 1987. Thèse de doctorat dirigée par Raviart, Pierre-Arnaud Sciences. Mathématiques Paris 6 1987.
- [49] R. Glowinski, T.-W. Pan, and J. Periaux. A fictitious domain method for dirichlet problem and applications. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 111(3) :283–303, 1994.
- [50] X. Gourdon. *Analyse*. Les maths en tête. Ellipses Marketing, 2008.
- [51] Ammari H., Kang H., and Kim K. Polarization tensors and effective properties of anisotropic composite materials. *Journal of Differential Equations*, 215(2) :401 – 428, 2005.
- [52] J. Hadamard. Sur les problèmes aux dérivés partielles et leur signification physique. *Princeton University Bulletin*, 13 :49–52, 1902.
- [53] S. Ham and K.-J. Bathe. A finite element method enriched for wave propagation problems. *Computers & Structures*, 94–95(0) :1 – 12, 2012.
- [54] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, and G. Pólya. *Inequalities*. Cambridge University Press, 1952.
- [55] P. Holnicki. On  $l^2$ -estimates for discrete-time galerkin approximation to second order hyperbolic equations. *Mathematics and Computers in Simulation*, 23(2) :127 – 132, 1981.
- [56] K. Huang, K. Solna, and H. Zhao. Generalized foldy-lax formulation. *Journal of Computational Physics*, 229(12) :4544 – 4553, 2010.
- [57] A. M. Il'in. *Matching of asymptotic expansions of solutions of boundary value problems*, volume 102 of *Translations of Mathematical Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1992.
- [58] S. Imperiale. *Modélisation mathématique et numérique de capteurs piézoélectriques*. PhD thesis, 1 2012.
- [59] S. Imperiale and P. Joly. Mathematical modeling of electromagnetic wave propagation in heterogeneous lossy coaxial cables with variable cross section. *Applied Numerical Mathematics*, 2013.
- [60] S. Imperiale, S. Marmorat, N. Leymarie, and S. Chatillon. A complete FE simulation tools for NDT inspections with piezoelectric transducers. In *Acoustics 2012*, Nantes, France, Apr 2012.

- [61] P. Jeanquartier. Transformation de mellin et développements asymptotiques. *L'Enseignement Mathématique*, 25 :285, 1979.
- [62] P. Joly. Analyse et approximation de modèles de propagation d'ondes, partie 1. 2001.
- [63] P. Joly and A. Semin. Construction and analysis of improved kirchoff conditions for acoustic wave propagation in a junction of thin slots. *ESAIM : proceedings*, 25 :44–67, 12 2008.
- [64] P. Joly and S. Tordeux. Matching of asymptotic expansions for wave propagation in media with thin slots i : The asymptotic expansion. *Multiscale Modeling and Simulation : A SIAM Interdisciplinary Journal*, 5 (1) :304–336, 2006.
- [65] S. Karaa. Finite element theta-schemes for the acoustic wave equation. *Advances in Applied Mathematics and Mechanics*, 3(2) :181–203, 2011.
- [66] J. B. Keller. Removing small features from computational domains. *Journal of Computational Physics*, 113(1) :148 – 150, 1994.
- [67] V. A. Kozlov, V. G. Maz'ya, and J. Rossmann. *Elliptic Boundary Value Problems in Domains with Point Singularities*, volume 52 of *Mathematical Surveys and Monographs*. AMS, Providence, 1997.
- [68] A. Kufner and A.-M. Sändig. *Some applications of weighted Sobolev spaces*, volume 100 of *Teubner-Texte zur Mathematik [Teubner Texts in Mathematics]*. BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1987.
- [69] N. N. Lebedev. *Special functions and their applications*. Dover Publications, Inc., New York, 1972.
- [70] H. Liang, M. Z. Liu, and W. Lv. Stability of theta-schemes in the numerical solution of a partial differential equation with piecewise continuous arguments. *Appl. Math. Lett.*, 23(2) :198–206, 2010.
- [71] V. Mazya, S. Nazarov, and B. Plamenevskij. *Asymptotic theory of elliptic boundary value problems in singularly perturbed domains, Vol. 1, 2*. Birkhäuser, Basel, 2000.
- [72] V. G. Maz'ya, S. A. Nazarov, and B. A. Plamenevski. *Asymptotic theory of elliptic boundary value problems in singularly perturbed domains. Volume II*, volume 112 of *Operator theory, advances and applications*. Birkhäuser Verlag, Basel, Boston, Berlin, 2000.
- [73] V. G. Maz'ya, S. A. Nazarov, B. A. Plamenevski, Georg Heinig, and Christian Posthoff. *Asymptotic theory of elliptic boundary value problems in singularly perturbed domains. Volume I*, volume 111 of *Operator theory, advances and applications*. Birkhäuser Verlag, Boston, Basel, Berlin, 2000.
- [74] G. E. Moore. Cramming more components onto integrated circuits. *Electronics*, 38, 1938.
- [75] S. Nazarov. Asymptotic conditions at a point, selfadjoint extensions of operators, and the method of matched asymptotic expansions. In *Proceedings of the St. Petersburg Mathematical Society, Vol. V*, volume 193 of *Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2*, pages 77–125, Providence, RI, 1999. Amer. Math. Soc.
- [76] A. Pazy. *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*, volume 44 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, 1983.

- [77] R. L. Pitangueira and R. R. Silva. Numerical Characterization of Concrete Heterogeneity. *Materials Research*, 5 :309 – 314, 09 2002.
- [78] Q. Qi and T. L. Geers. Evaluation of the perfectly matched layer for computational acoustics. *Journal of Computational Physics*, 139(1) :166 – 183, 1998.
- [79] P.A. Raviart and J.M. Thomas. *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles*. Collection Mathématiques appliquées pour la maîtrise. Dunod, 2004.
- [80] S. Rienstra and A. Hirschberg. An introduction to acoustics. *Eindhoven University of Technology*, 18 :19, 2003.
- [81] W. Rudin. *Functional Analysis*. International series in pure and applied mathematics. McGraw-Hill, 1991.
- [82] K. Schmidt and A. Chernov. A unified analysis of transmission conditions for thin conducting sheets in the time-harmonic eddy current model. *SIAM J. Appl. Math.*, 73(6) :1980–2003, 2013.
- [83] K. Schmidt and R. Hiptmair. Asymptotic boundary element methods for thin conducting sheets. *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. S*, 8(3) :619–647, 2015.
- [84] L. Slimane and Y. Renard. The treatment of the locking phenomenon for a general class of variational inequalities. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 170(1) :121 – 143, 2004.
- [85] F. Trèves. *Basic Linear Partial Differential Equations*. Academic Press, 1975.
- [86] F. Trèves. *Topological vector spaces, distributions and kernels*. Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 2006.
- [87] G. Vial. *Analyse multi-échelle et conditions aux limites approchées pour un problème avec couche mince dans un domaine à coin*. PhD thesis, 2003.
- [88] E. Weinan. *Principles of Multiscale Modeling*. Cambridge University Press, New York, 2011.



# MODÈLES ASYMPTOTIQUES ET SIMULATION NUMÉRIQUE POUR LA DIFFRACTION D'ONDES PAR DES PETITES HÉTÉROGÉNÉITÉS

## Résumé

Cette thèse est consacrée à l'étude du problème de la diffraction d'une onde acoustique par un ensemble de petites hétérogénéités pénétrables ainsi qu'au développement de méthodes de simulation numérique dédiées à la résolution efficace de ce type de problèmes. La principale nouveauté de ces travaux provient du fait que nous traitons ce problème dans le domaine temporel.

La première partie de ce manuscrit est consacrée à l'analyse asymptotique du problème de diffraction, menée à bien grâce à la méthode des développements asymptotiques raccordés, le petit paramètre étant la taille caractéristique des défauts  $\varepsilon$ . Ceci nous permet d'obtenir un développement du champ acoustique comme perturbation du problème sans défauts. Nous prouvons un résultat de consistance entre le champ exact et son développement asymptotique en  $\varepsilon$ .

Dans la seconde partie, en s'appuyant sur les résultats de l'analyse asymptotique, nous proposons deux modèles approchés pour le problème de diffraction. Ces deux modèles sont bien-posés et leur solution sont chacune des approximations précises du champ total. La principale caractéristique de ces modèles approchés est qu'ils s'appuient tous deux sur une équation d'onde dans le milieu ambiant (sans défauts), couplée à des termes sources auxiliaires permettant de rendre compte de la présence des défauts. Il est ainsi envisageable, pour traiter ces problèmes approchés, d'utiliser une méthode de discrétisation par éléments finis présentant des performances de temps de calcul similaires au cas de la propagation d'une onde dans l'espace libre, puisque l'opérateur des ondes sous-jacent s'appuie sur une géométrie indépendante des petits défauts. Nous présentons un certain nombre de résultats numériques permettant de valider les deux modèles proposés ainsi qu'une analyse d'erreur numérique.

**Mots-clés** : ondes acoustiques, domaine temporel, petites hétérogénéités, développement asymptotique, méthode des développements asymptotiques raccordés, éléments finis, méthodes numériques.

# ASYMPTOTIC MODELS AND NUMERICAL SIMULATION FOR TIME DOMAIN WAVE SCATTERING BY SMALL DEFECTS

## Abstract

This work is dedicated to the study of the diffraction of acoustic waves by a set of small inclusions, as well as to the development of numerical methods for the simulation of such phenomena. The main novelty of this work is that we deal with time-domain waves.

The first part of this manuscript deals with the asymptotic analysis of the diffraction problem, which is carried out by matched asymptotics, the small parameter being the characteristic size of the defects  $\varepsilon$ . This furnishes an asymptotic expansion of the acoustic field as a perturbation of the defect-free problem. We prove a consistency result between the total field and its  $\varepsilon$ -asymptotic expansion.

In the second part, using the results of the asymptotic analysis, we introduce two approximate models for the diffraction problem. These models are well-posed and their solution are precise approximations of the total acoustic field. One of the main features of these approximate models is that they both rely on a wave equation in the surrounding medium (without defects), coupled to auxiliary source terms which account for the presence of the inclusions. It is then possible to discretize these approximate models using a finite element method, leading to a numerical method which performs as fast as in the defect-free case, since the underlying wave operator is independent of the defects. We present several numerical results which validate both approximate models as well as some insights about numerical error analysis.

**Keywords** : acoustic waves, time domain, small heterogeneities, asymptotic development, matched asymptotic method, finite elements, numerical methods.