



**HAL**  
open science

# Modélisation du comportement d'un remblai en sol renforcé sous chargement ferroviaire de type TGV

Jean-Baptiste Payeur

► **To cite this version:**

Jean-Baptiste Payeur. Modélisation du comportement d'un remblai en sol renforcé sous chargement ferroviaire de type TGV. Matériaux. Université Paris-Est, 2015. Français. NNT : 2015PESC1104 . tel-01286318

**HAL Id: tel-01286318**

**<https://pastel.hal.science/tel-01286318>**

Submitted on 10 Mar 2016

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

## THÈSE

présentée pour obtenir le grade de

**Docteur de l'Université Paris-Est**

**Discipline : Géotechnique**

par

**Jean-Baptiste PAYEUR**

### **Modélisation du comportement d'un remblai renforcé sous chargement ferroviaire de type TGV**

Laboratoire NAVIER – Equipe Géotechnique (CERMES)

soutenue le 16 octobre 2015 devant le jury constitué de

M. Patrick	<b>de BUHAN</b>	École des Ponts ParisTech	Président
M. Daniel	<b>DIAS</b>	Université de Grenoble 1	Rapporteur
M. Hussein	<b>MROUEH</b>	Université de Lille 1	Rapporteur
M. Yassine	<b>BENNANI</b>	Entreprise Terre-Armée	Examineur
M. Emmanuel	<b>BOURGEOIS</b>	IFSTTAR	Co-Directeur de thèse
M. Alain	<b>CORFDIR</b>	École des Ponts ParisTech	Directeur de thèse



Ce travail de trois ans de thèse n'aurait pu se faire sans l'aide précieuse d'un grand nombre de personnes, et je tiens à les en remercier.

En premier lieu, j'exprime toute ma gratitude à Alain Corfdir, mon directeur de thèse, qui m'a fait confiance dès le début et m'a encadré avec beaucoup de professionnalisme durant ces trois années. Je tiens également à remercier Emmanuel Bourgeois, mon co-directeur de thèse, qui a réussi à me donner le goût du calcul numérique et de la programmation, alors que j'étais très néophyte. Je le remercie également pour sa disponibilité et sa réactivité face à mes nombreuses questions techniques. L'humour et la bonne humeur de ce duo d'encadrants ont indéniablement été la source principale de motivation durant tout ce temps d'étude.

Je remercie sincèrement Patrick de Buhan d'avoir bien voulu présider mon jury de thèse ainsi que Hussein Mroueh et Daniel Dias, mes rapporteurs, qui ont relu avec attention mon mémoire. Je tiens vivement à les remercier pour leur disponibilité et leurs remarques qui m'ont permis d'apporter des améliorations sur la présentation de mes travaux et de prendre du recul sur cette thèse.

Je remercie bien sûr également Yassine Bennani, qui a accepté d'être examinateur, et Nicolas Freitag de l'entreprise Terre Armée Internationale pour leurs précieux conseils, leur pédagogie et leur écoute. J'espère que mes travaux leur seront utiles, même si le vocabulaire et les méthodes de la recherche académique et de l'ingénierie sont parfois assez éloignés.

Mes pensées vont également à mes collègues doctorants et chercheurs du Cermes, de l'Ifsttar, de l'école des Ponts que j'ai côtoyés de près ou de loin. Un grand merci aux personnes de l'administration de l'école et de l'université –et tout particulièrement à Armelle Fayol- qui m'ont aidé avec beaucoup de disponibilité dans toutes les démarches administratives.

Un merci particulier à Valérie Douay et ses collègues de l'ESIEE qui m'ont permis de goûter aux joies de l'enseignement. C'était un réel plaisir de quitter mon ordinateur durant ces quelques heures pour aller faire découvrir le monde merveilleux des équations aux étudiants.

Enfin merci à Marie, mes Parents, mes frères et sœurs et mes amis pour leur présence et leur soutien durant ces années parisiennes où j'étais encore étudiant...



---

# Résumé

**Titre :** « Modélisation du comportement d'un remblai en sol renforcé sous chargement ferroviaire de type TGV »

Cette thèse étudie le comportement de remblais en sol renforcé lors du passage de trains à grande vitesse, par simulation numérique. Il s'agit de déterminer si les trains à grande vitesse ont un impact particulier sur ce type d'ouvrage.

Après un état de l'art des remblais en sol renforcé et de la modélisation numérique de problèmes ferroviaires, les résultats du chargement harmonique d'un remblai expérimental en Terre Armée sont analysés. Ils montrent que les valeurs des tractions dans les armatures, des contraintes et déplacements dans le massif dépendent de la fréquence de la sollicitation, c'est-à-dire de la vitesse de passage du train. On construit un modèle 3D aux éléments finis pour reproduire cette expérience. Il permet de retrouver les valeurs expérimentales avec une bonne précision, en mettant en avant l'importance du choix des lois de comportement du sol, du parement et des armatures.

Ce modèle avec ses paramètres est alors utilisé pour discuter du comportement local de l'interface armature/remblai au cours d'un chargement harmonique en régime établi. Le confinement varie beaucoup le long des armatures supérieures au cours du chargement dynamique, tandis que les tractions sont peu affectées par le chargement dynamique. Cependant, malgré ces variations au cours du temps, la stabilité de l'interface reste peu affectée par rapport au cas d'un chargement statique.

Un second modèle a été développé pour représenter un remblai de taille plus importante, en utilisant la modélisation multiphasique et en utilisant un référentiel mobile pour prendre en compte le déplacement du train. Les aspects théoriques et l'implémentation de ce modèle dans le code CESAR-LCPC sont détaillés. On l'utilise pour effectuer une étude tridimensionnelle d'un remblai renforcé. Elle met en évidence la faible influence de la vitesse de la charge sur la réponse de l'ouvrage, dans le cas d'un remblai raide ayant des caractéristiques tirées du remblai expérimental. Dans le cas d'un remblai moins raide, la vitesse d'un TGV peut s'approcher de la vitesse des ondes de cisaillement dans le massif avec des conséquences significatives au sein de la structure.

Finalement, les valeurs expérimentales et les deux modèles numériques développés présentent les mêmes tendances : l'effet dynamique du passage du train a pour conséquence une augmentation des déplacements et une variation du confinement des armatures, tandis que les niveaux de traction sont peu affectés par la charge, ce qui nous incite à conclure que la vitesse du train n'est pas significativement pénalisante sur la stabilité des remblais pour les paramètres issus de l'analyse du remblai expérimental. Toutefois, ces résultats dépendent fortement de la géométrie de la structure, de la façon de modéliser le train, des lois de comportement et des valeurs des paramètres retenus pour le sol, le parement et l'interface sol/armature.

**Mots clés :** sol renforcé, Terre Armée, armature, dynamique ferroviaire, éléments finis, modèle 3D, interface, modèle multiphasique, TGV

**Title:** « Numerical model of a Mechanically Stabilized Earth wall under High Speed Train loading »

This study focuses on the numerical modeling of the Mechanically Stabilized Earth (MSE) walls behavior under High Speed Train (HST) loading.

First, the state of the art in reinforced earth as well as in railway dynamics modeling is analyzed. Then we present results coming from the testing of a one-scale reinforced embankment submitted to harmonic loading. They indicate that tensile forces in reinforcements, stresses and displacements depend on loading frequency which is related to train speed. One proposes a 3D Finite Element Model (FEM) in order to numerically reproduce this experimentation. The numerical results fit reasonably well with the experimental ones, highlighting the great importance of the choice of the constitutive law for the soil, reinforcement and facing.

The same model is used to locally investigate the soil/reinforcement interface behaviour during a harmonic loading in steady-state. The confining pressure presents significant variations along the reinforcement strip during the dynamic loading while tensile forces are less affected by the load. Nevertheless, the global interface stability remains acceptable compared to a static load.

A second numerical model is proposed, which represents a bigger embankment. The multiphase model is used to represent the reinforced soil and moving coordinates are used to take into account the moving train. Theoretical developments of this model and its implementation into CESAR-LCPC FEM code are detailed. The results indicate that the train speed does not play a big role in the overall response of the structure, in the case of a stiff reinforcement comparable to the experimental one. If the embankment is weaker, the HST speed may be close to shear waves speed within the soil, which has significant consequences into the structure, particularly on the stability of the soil/reinforcement interface.

Globally the experimental results and those coming from both numerical models present the same trends: the dynamic effect coming from the train passing leads to the increase of displacements and confining pressure close to the highest strips, while tensile forces are less affected by the load. This leads us to the conclusion that the train speed does not have a significant effect on the stability of MSE walls, at least for embankments having similar parameters than the experimental one. However these results strongly depend on the embankment geometry, the way to model the train and the parameters and constitutive laws chosen for the soil, the soil/reinforcement interface and the facing.

**Keywords:** Mechanically Stabilized Earth wall, reinforced earth wall, reinforcements, railway dynamics, Finite Elements Method, 3D model, interface, multiphase model, High Speed Train.

---

# Sommaire

<b>Introduction .....</b>	<b>3</b>
<b>Chapitre 1 Les ouvrages en Terre Armée et leur utilisation pour les lignes à grande vitesse .....</b>	<b>5</b>
1.1 Introduction .....	7
1.2 Présentation de l'utilisation des ouvrages en sol renforcé.....	8
1.3 Études sur la Terre Armée dans un contexte non-ferroviaire.....	16
1.4 Utilisation de la Terre Armée pour les LGV : le cas de la ligne SEA.....	34
1.5 Spécificités du contexte ferroviaire .....	35
1.6 Modèles numériques et expérimentations .....	42
1.7 Conclusion .....	48
<b>Chapitre 2 Comportement expérimental d'un remblai en Terre Armée .....</b>	<b>49</b>
2.1 Introduction .....	51
2.2 Présentation du remblai expérimental .....	52
2.3 Analyse des résultats.....	59
2.4 Conclusion .....	75
<b>Chapitre 3 Établissement d'un modèle numérique.....</b>	<b>77</b>
3.1 Introduction .....	79
3.2 Hypothèses de modélisation .....	80
3.3 Résultats et discussions.....	93
3.4 Conclusion .....	105

<b>Chapitre 4</b>	<b>Comportement instantané d'interface .....</b>	<b>107</b>
4.1	Introduction.....	109
4.2	État de l'art.....	110
4.3	Modélisation numérique de l'interface sous chargement dynamique.....	123
4.4	Présentation des résultats .....	132
4.5	Discussion .....	143
4.6	Conclusion .....	148
<b>Chapitre 5</b>	<b>Prise en compte d'une charge mobile.....</b>	<b>149</b>
5.1	Introduction.....	151
5.2	Modèle Multiphasique.....	152
5.3	Prise en compte d'un référentiel mobile .....	165
5.4	Application à un remblai ferroviaire renforcé .....	177
5.5	Discussion .....	193
5.6	Conclusion .....	198
	<b>Conclusions et perspectives .....</b>	<b>199</b>
	<b>Annexe A : Analyse élastique en référentiel mobile : extension au cas d'un modèle multiphasique .....</b>	<b>203</b>
	<b>Annexe B : Conditions aux limites dans le cas d'un référentiel mobile avec un chargement périodique symétrique .....</b>	<b>207</b>
	<b>Annexe C : Prise en compte d'un référentiel mobile dans CESAR-LCPC .....</b>	<b>215</b>
	<b>Annexe D : Analyse viscoélastique en régime stationnaire avec prise en compte d'un référentiel mobile .....</b>	<b>219</b>
	<b>Références bibliographiques .....</b>	<b>241</b>

---

# Introduction

Cette thèse porte sur les remblais renforcés par inclusions métalliques ou géosynthétiques, appelés communément terre armée en France ou Terre Armée pour parler de la technique brevetée par l'entreprise du même nom. Cette technique est utilisée depuis les années 1970 en France, puis s'est développée partout dans le monde pour différentes structures de génie civil : des infrastructures routières et des lignes ferroviaires classiques, où le massif renforcé est utilisé en tant que soutènement classique, pour les culées de pont ou en tranchées couvertes, mais également des ouvrages hydrauliques ou industriels (applications minières, stockage de déchets dangereux...). Cependant, l'utilisation de cette technologie dans le cadre de remblais ferroviaires, particulièrement des remblais de Lignes à Grande Vitesse, reste très limitée. En effet, on peut se demander si les vibrations engendrées par le passage de Trains à Grandes Vitesses peuvent perturber la stabilité de massifs renforcés.

Ce travail a pour but d'apporter des éléments de réponse à cette question, en s'intéressant au comportement des remblais ferroviaires en sol renforcé lorsqu'ils sont soumis au passage d'un TGV, à partir de modélisations numériques tridimensionnelles en éléments finis avec le logiciel CESAR-LCPC. Il est articulé en cinq chapitres :

Le premier chapitre présente les remblais renforcés par inclusions métalliques, leur utilisation et dimensionnement usuel et leur comportement sous charges statiques et sismiques. Un exemple d'application à des remblais de LGV est proposé, dans le cadre de la ligne LGV SEA. On présente ensuite les caractéristiques des Lignes à Grande Vitesse et du chargement associé aux Trains à Grande Vitesse, et les stratégies de modélisation numérique traitant de problématiques ferroviaires qui existent dans la littérature.

Dans le deuxième chapitre, on commence par rappeler les résultats d'une étude menée en 2009 au Centre d'Expérimentation Routières de Rouen portant sur un ouvrage en Terre Armée soumis à un chargement dynamique. On propose une analyse des résultats expérimentaux qui met en évidence certains aspects de la réponse d'un massif renforcé soumis à des sollicitations ferroviaires.

Le troisième chapitre présente un modèle numérique permettant de reproduire l'expérience du CER. Les résultats expérimentaux et numériques y sont comparés, ce qui permet de valider les stratégies de modélisation retenues.

Le quatrième chapitre étudie le comportement de l'interface sol/armature sous chargement dynamique, en reprenant le modèle précédent. On présente l'influence des vibrations sur la stabilité des armatures, en la comparant à une charge statique équivalente et à la norme NF EN 14475 [AFN07].

Le dernier chapitre propose un second modèle numérique qui permet de prendre en compte le déplacement du train sur le remblai, en se plaçant dans un référentiel mobile, attaché au train. En particulier, on s'intéresse cette fois à la représentation d'un massif armé à l'aide d'un modèle homogénéisé.



---

# Chapitre 1

## Les ouvrages en Terre Armée et leur utilisation pour les lignes à grande vitesse



## 1.1 Introduction

Bien que l'utilisation de la Terre Armée soit courante pour des applications routières, peu d'ouvrages de ce type ont été construits jusqu'à présent dans le cadre de Lignes à Grande Vitesse et la littérature est relativement peu abondante sur l'impact du passage de Trains à Grande Vitesse sur leur stabilité.

D'un autre côté, de multiples aspects du comportement des massifs renforcés similaires à la Terre Armée ont déjà été étudiés. On trouve des articles traitant du comportement théorique du sol renforcé, d'essais d'extraction d'armatures, mais également des publications sur la prédiction du comportement de ces ouvrages dans différents cas de figures (corrosion, réponse statique, réponse sous sollicitations sismiques...). Dans ce cas, les prédictions sont généralement faites sur la base d'études numériques, en 2D, ou bien d'essais en centrifugeuse ou encore à l'aide de modèles réduits.

L'objectif de ce chapitre est de dresser un état des connaissances sur le comportement des ouvrages en sol renforcé et sur les sollicitations dynamiques qu'ils peuvent subir dans un contexte ferroviaire. Dans un premier temps, nous effectuerons une présentation générale de l'utilisation de ce type d'ouvrages, puis nous nous efforcerons de recenser les différentes expérimentations effectuées par le passé dans des contextes sismiques puis ferroviaires. Nous présenterons ensuite l'exemple de l'utilisation de soutènements en Terre Armée sur la ligne à grande vitesse Sud Europe Atlantique (SEA) avant de présenter les spécificités de ce type d'utilisation, et un état de l'art de la modélisation numérique des ouvrages ferroviaires.

## 1.2 Présentation de l'utilisation des ouvrages en sol renforcé

---

### 1.2.1 Chronologie

C'est à Henri Vidal que l'on doit l'invention du concept de la Terre Armée, dont il a déposé le brevet en 1963. En 1965, un premier ouvrage de soutènement expérimental est construit à Pragnères dans les Pyrénées, avec un parement métallique et des armatures lisses. En 1968 est fondée la compagnie de la Terre Armée, qui réalise alors des ouvrages importants sur l'A53. En 1969, la première culée porteuse en Terre Armée est construite à Strasbourg. Un an plus tard est déposé le brevet relatif aux écailles cruciformes du parement en béton préfabriqué. La même année, la Terre Armée devient internationale, avec la fondation de *Reinforced Earth* au Canada, puis aux États-Unis, en Espagne... Durant ce temps, la technologie se perfectionne : différentes études et expérimentations sont menées sur le choix du type et de la géométrie des armatures. Elles aboutissent à la mise au point en 1976 des armatures Haute Adhérence en acier galvanisé. La même année, le cap des 100 000 m<sup>2</sup> d'ouvrages en Terre Armée construits de part le monde est dépassé. En 1979, les principes de construction sont normalisés en France et aboutissent à la publication des « recommandations et règles de l'art pour les ouvrages en terre armée » [SET79] publiées par le SETRA. La technologie poursuit son essor mondial : en 1992, 10 millions de m<sup>2</sup> d'ouvrages en Terre Armée ont été construits ; en 2014, le cap des 50 millions est franchi. Entre-temps, en 1998, la société Terre Armée est intégrée au sein du groupe Solétanche Freyssinet (données société Terre Armée).

---

### 1.2.2 Principe de fonctionnement

Ce que l'on appelle Terre Armée est un matériau composite, constitué de remblai, d'armatures (métalliques ou synthétiques) et d'un parement fait d'écailles de béton ou de métal. Un schéma d'ensemble d'un ouvrage de soutènement réalisé avec ce matériau est proposé sur la Figure 1-1.

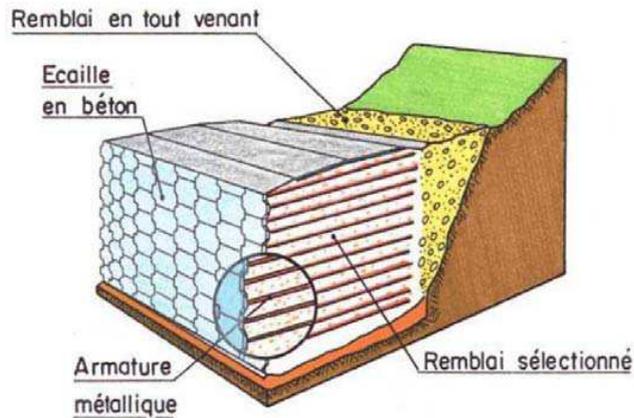


Figure 1-1 : Exemple de remblai en Terre Armée [SET79]

La construction d'un remblai en Terre Armée s'opère de façon itérative par la mise en place d'une rangée d'écailles, l'accroche d'une rangée d'armatures, la pose puis le compactage d'une couche de remblai comme le montrent la Figure 1-2 et la Figure 1-3.



Figure 1-2 : Mise en place du lit d'armatures / Figure 1-3: Compactage d'une couche de remblai

Le parement vise à prévenir l'écoulement de la terre au travers du mur en lui apportant un confinement, mais ne contribue pas à la stabilité mécanique globale du massif. Le matériau de remblai doit quant à lui satisfaire les critères de résistance mécanique et de potentiel électrochimique préconisés dans les normes de constructions de ce type d'ouvrages [AFN09]. Enfin il est à noter que les armatures, même métalliques, possèdent une résistance négligeable à la flexion. De ce fait, il est préférable de les appeler « bandes » plutôt que « barres », dans la mesure où elles apportent au massif un gain de résistance uniquement dans la direction de leur orientation.

En effet, la cohésion d'ensemble du massif est assurée par la mise en traction des armatures du fait du frottement entre le matériau de remblai et les bandes de renforcement. Un schéma de la mécanique du renforcement est proposé Figure 1-4 : en considérant un chargement vertical sur un échantillon de sol non renforcé, il se produit normalement un déplacement horizontal  $\delta_h$ . Dans le cas d'un échantillon de sol renforcé par des bandes horizontales, les armatures

restreignent la déformation du massif dans leur direction. Si les armatures sont métalliques (donc quasiment indéformables), le déplacement horizontal est empêché. Les armatures agissent alors comme si une contrainte de confinement avait été imposée autour de l'échantillon.

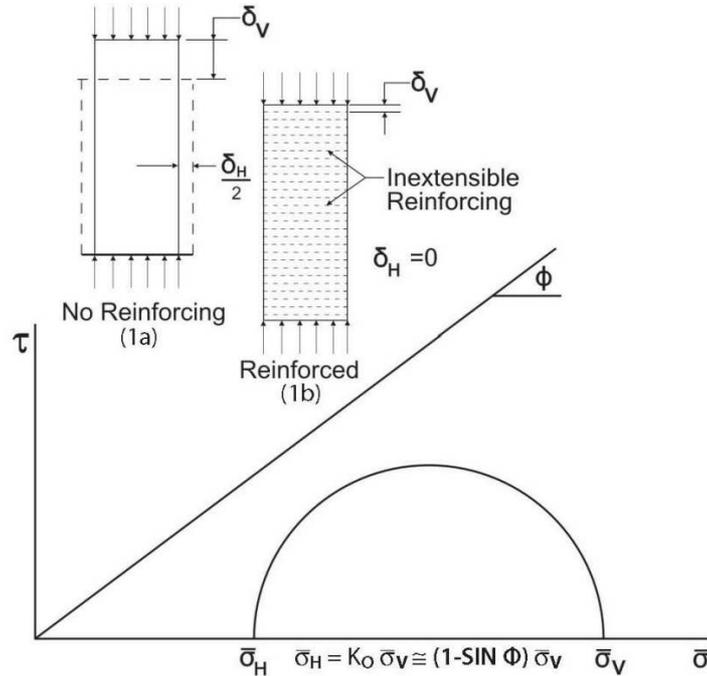


Figure 1-4 : Principe de la mécanique de renforcement du sol [AND05]

Il est à noter que le sol « suit » la déformation des armatures uniquement si l'interface entre le sol et l'armature n'a pas atteint la rupture. Dans le cas contraire, c'est-à-dire si la charge axiale est trop importante, il se produit un glissement à l'interface sol/renforcement, et le phénomène de restriction des déformations horizontales n'a plus lieu.

On voit ainsi tout l'intérêt de caractériser le fonctionnement de l'interface sol/armature et notamment d'estimer précisément le moment à partir duquel la rupture d'interface va être atteinte. Or, le comportement de l'interface au cours d'un chargement reste mal connu. Il dépend de la granulométrie du matériau de remblai et des aspérités de surface de l'armature. De plus, il n'est pas aisé de déterminer la contrainte verticale s'appliquant exactement sur l'interface. Mais, s'il est difficile de caractériser le comportement d'interface sous faible chargement, il est en revanche assez simple d'obtenir des paramètres à la rupture. En effet, en effectuant des tests d'extraction d'armatures sous chargement uniforme, il est possible de remonter à un coefficient de frottement maximal entre l'armature et le sol, appelé  $\mu^*$ . A titre d'exemple, la Figure 1-5 présente les résultats des essais d'extraction effectués par Abdelouhab, Dias et Freitag à l'INSA de Lyon [ABD10a et b], [ABD11].

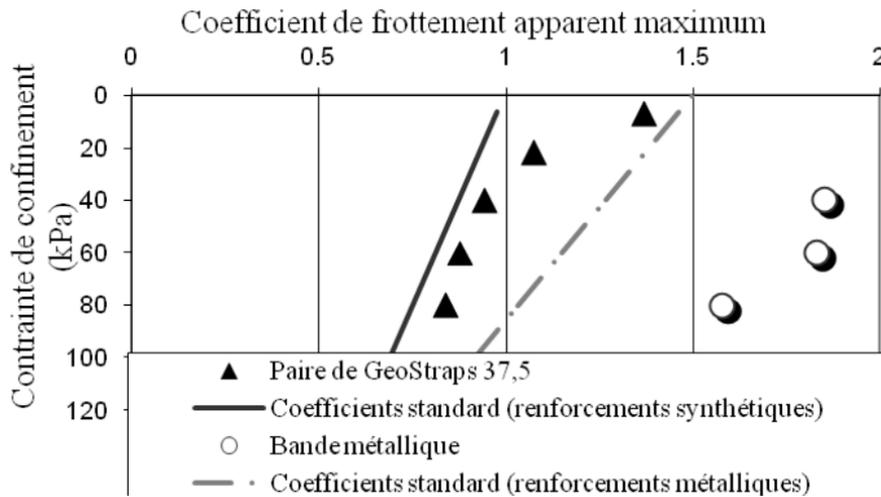


Figure 1-5 : Coefficient de frottement apparent maximal pour différents types de renforcement, comparé aux coefficients réglementaires [ABD12]

Ainsi, le coefficient de frottement maximal dépend du type d'armature, de son état de surface et également de la contrainte verticale au niveau de l'interface. Il dépend également de la dilatance du sol au niveau de l'armature, comme cela a été démontré par Schlosser et Guilloux en 1979 [SCH79]. Ce phénomène est illustré Figure 1-6.

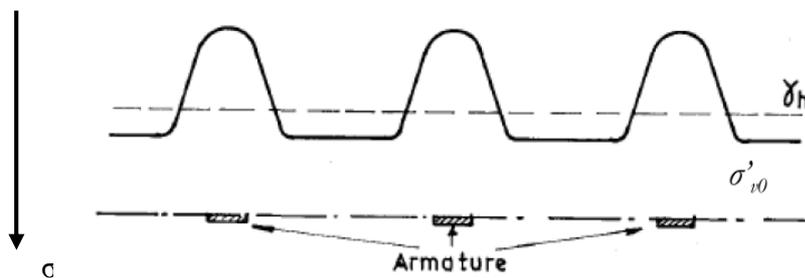


Figure 1-6 : Dilatance empêchée [LCP91]

Le cisaillement créé par la traction appliquée sur l'armature engendre normalement une augmentation de volume du remblai au niveau de l'interface, du fait de la dilatance du sol. Or, cette augmentation de volume peut être empêchée si le sol en place a été compacté car il possède alors une faible compressibilité. La dilatance ainsi empêchée induit alors une augmentation de la contrainte normale s'exerçant sur les armatures, et donc du frottement, lequel s'oppose à l'arrachement de l'armature. Nous reviendrons en détail sur la caractérisation des coefficients de frottement, ainsi que sur le phénomène de dilatance empêchée dans la partie 4.2.1.3.

### 1.2.3 Principe de dimensionnement

La stabilité externe des ouvrages en Terre est similaire à celle de tout ouvrage de soutènement classique (tels que les murs poids). La justification de tels ouvrages passe donc par l'étude de la stabilité d'ensemble, de la portance du sol et du glissement potentiel du mur sur le sol de fondation.

L'étude de la stabilité interne est quant à elle tout à fait spécifique des sols renforcés et nécessite une démarche particulière. On distingue au sein d'un ouvrage deux zones, l'une active et l'autre passive (Figure 1-7).

Dans la zone dite « active », le sol exerce sur les armatures des efforts de cisaillement dirigés vers le parement. Dans cette zone, le sol a tendance à glisser vers le parement, et il est retenu par les armatures et les écailles.

Dans la zone dite « passive » ou « résistante », les efforts de cisaillement exercés par le sol sur les armatures sont dirigés vers l'intérieur du massif. Les armatures, qui reprennent les efforts générés dans la zone active, sont « ancrées » dans le sol de la zone passive. C'est le frottement entre l'armature et le sol de la zone passive qui détermine la stabilité de l'ancrage des armatures et donc de l'ouvrage. La longueur de l'armature située dans la zone résistante est appelée la longueur d'adhérence.

Deux vérifications de stabilité interne sont alors à effectuer : d'une part, il faut veiller à ce que les maximums des efforts de traction prévus le long d'une armature soient inférieurs à la résistance en traction d'un renforcement, et d'autre part, il faut s'assurer que la longueur d'adhérence soit suffisante pour reprendre les efforts en traction causés par la partie active, comme illustré sur la Figure 1-7.

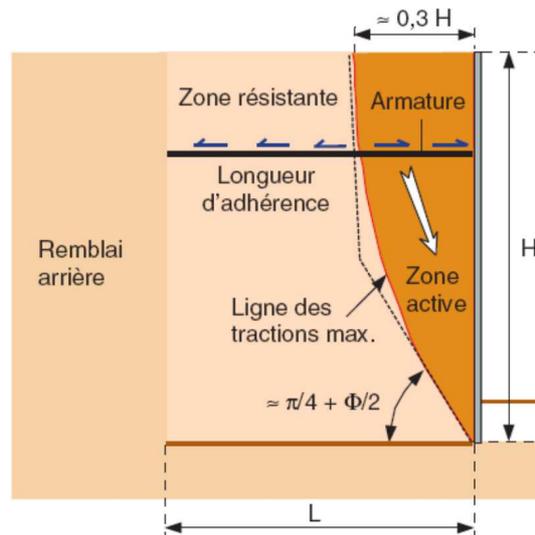


Figure 1-7 : Principe de stabilité interne de la Terre Armée [LCP03]

## 1.2.4 Caractéristiques structurelles

### 1.2.4.1 Parement

Généralement, le parement des ouvrages en Terre Armée est constitué d'écailles cruciformes de béton préfabriquées (Figure 1-8) dans lesquelles sont scellées des amorces métalliques permettant l'accrochage des bandes de renforcement au moyen de boulons d'acier.

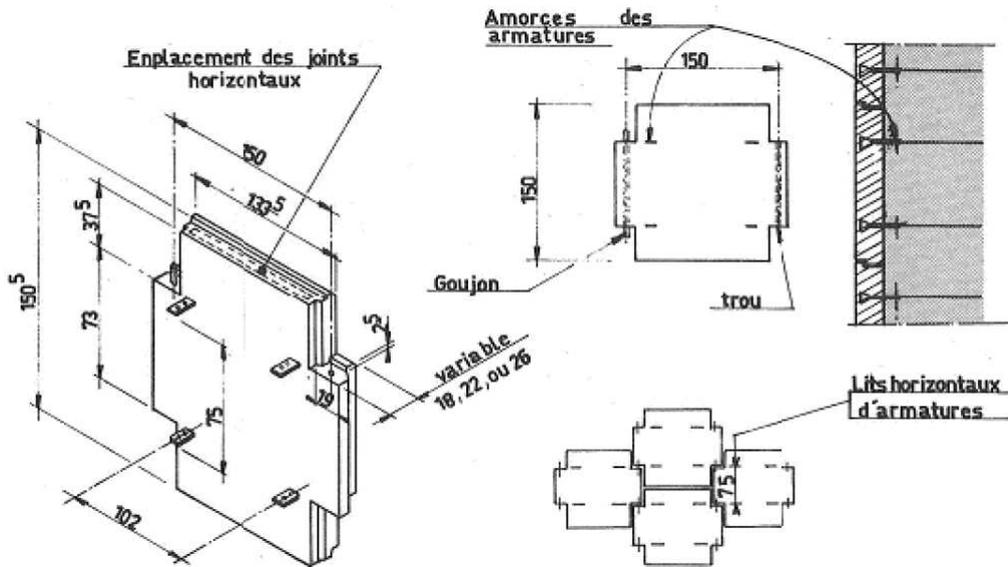


Figure 1-8 : Géométrie de l'écaille en béton [SET79]

Il existe d'autres formes d'écailles (rectangulaires, hexagonales,...) ou des écailles constituées d'autres matériaux, comme le PVC, le métal (les premières écailles historiques), des parements formés de gabions, des parements végétalisés ou en matériaux naturels, comme celui présenté sur la Figure 1-9 (On remarque d'ailleurs bien ici le rôle non structurel du parement, constitué de lattes de bois).



Figure 1-9 : Parement en bois, autoroute A36 (crédits Terre Armée)

#### 1.2.4.2 Armatures

Les sols renforcés se classent généralement en deux familles : les sols renforcés par des armatures (renforcements discrets dans une seule direction), et les sols renforcés par des « nappes » (géotextiles, géogrilles), qui offrent un renforcement continu dans une direction principale ou deux directions.

Les matériaux constitutifs du renforcement peuvent être métalliques (aluminium, acier galvanisé, treillis soudés) ou synthétiques, issus de l'industrie pétrochimique. Parmi ces derniers les plus utilisés sont les plastiques à base de polypropylène, de polyéthylène ou de polyester.

Le choix du type de renforcement est dicté par des considérations économiques, les conditions chimiques du sol, les propriétés mécaniques et la durabilité désirées pour le massif renforcé... Dans le cadre de cette thèse, on ne s'intéressera qu'aux armatures en acier galvanisé Haute Adhérence, qui sont les plus utilisées par l'entreprise Terre Armée pour la réalisation de ses ouvrages. Leur géométrie est présentée sur la Figure 1-10.

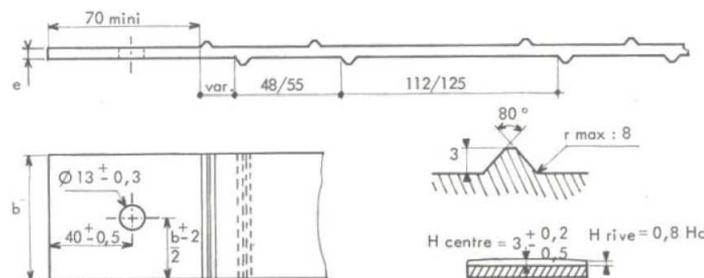


Figure 1-10 : Géométrie de l'armature à Haute Adhérence [SET79]

### 1.2.4.3 Amorces

Les amorces métalliques sont utilisées pour l'accroche des armatures métalliques sur les parements en béton. Leur géométrie est présentée Figure 1-11. Un accrochage manuel des armatures aux amorces est effectué sur le chantier, au moyen de boulons (Figure 1-12).

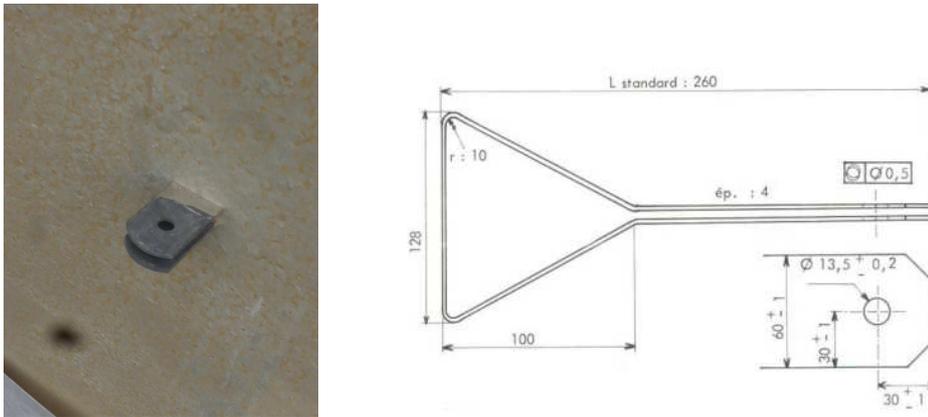


Figure 1-11 : Détail et géométrie de l'amorce métallique [SET79]

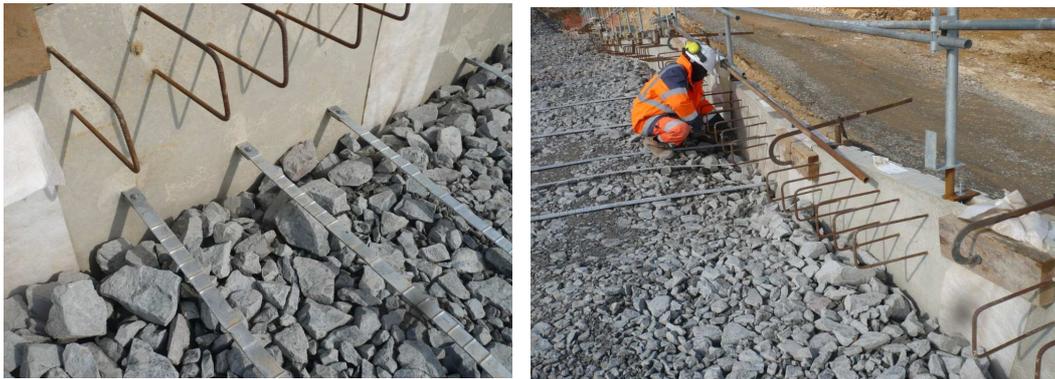


Figure 1-12 : Accroche des armatures

## 1.3 Études sur la Terre Armée dans un contexte non-ferroviaire

---

### 1.3.1 Introduction

L'emploi de la Terre Armée pour des Lignes à Grande Vitesse est nouveau et encore peu documenté. Cependant, de nombreuses études sur le comportement de murs en Terre Armée existent, et mettent en évidence l'influence de différents paramètres sur la réponse du remblai. Elles donnent des indications qui peuvent permettre a priori de dresser les grandes lignes du comportement de la Terre Armée sous chargement ferroviaire, ainsi que les problématiques expérimentales ou numériques associées.

---

### 1.3.2 Comportement sous charges statiques

L'objectif de ce paragraphe est de rappeler très brièvement les caractéristiques du comportement d'un ouvrage en Terre Armée lors de sa construction, ainsi que sa réponse aux surcharges statiques. Nous présenterons également les règles de dimensionnement correspondantes, dans le cadre de la norme NF P 94-270 [AFN09].

#### 1.3.2.1 Comportement lors de la construction

---

On présente à titre d'exemple des résultats en termes de contraintes, déplacements et tractions dans les armatures d'un mur en Terre Armée de 17m de hauteur construit dans l'Indiana (Etats-Unis) en 1998, instrumenté et soumis à son propre poids [RUN01]. Une photographie de ce mur est présentée Figure 1-13.



*Figure 1-13 : Mur de Minnow Creek, Indiana, USA [RUN01]*

Sur toute la hauteur du mur, on trouve 11 panneaux de parement cruciformes et 22 lits d'armatures, espacés de 75 cm. L'espacement horizontal entre les armatures n'est pas constant et varie entre 1 m pour les armatures du haut du parement, et 30 cm pour celles du bas. Le remblai est constitué d'un mélange de sable mal gradué et de graviers, dont les caractéristiques ont été déterminées expérimentalement. Les bandes de renforcement sont des armatures HAR de section  $50 \text{ mm} \times 4 \text{ mm}$ . Le mur est instrumenté en de multiples points par des capteurs de pression et des capteurs de déformation collés sur les armatures. Enfin, trois inclinomètres sont également placés, afin de relever les déplacements horizontaux du massif au cours de sa construction. L'ensemble du dispositif est schématisé sur la Figure 1-14.

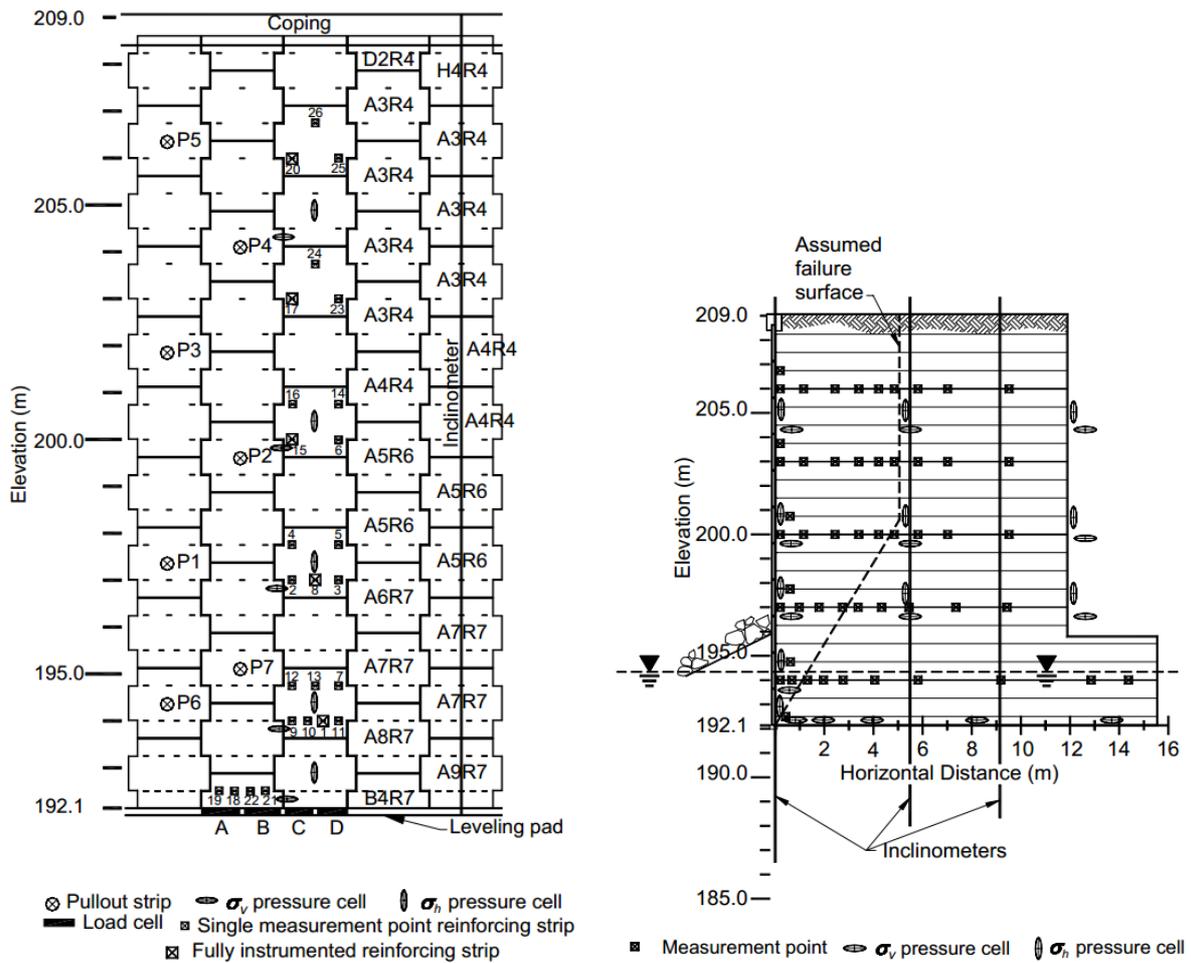


Figure 1-14 : Instrumentation du mur [RUN01]

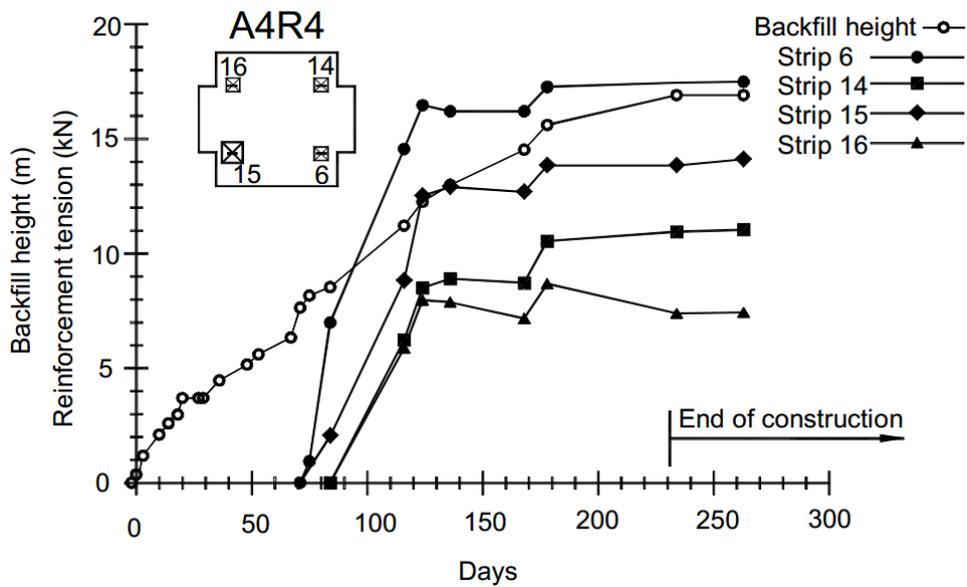


Figure 1-15 : Développement des tractions dans les armatures de l'écaïlle A4R4 (milieu de mur) au cours de la construction du mur [RUN01]

Les résultats caractéristiques de la mise en traction des armatures au cours de la construction sont présentés sur la Figure 1-15. On présente également la distribution dans les armatures à la fin de la construction sur la Figure 1-16, qui est typique de l'augmentation progressive de la traction dans les ouvrages au cours de la construction. On note en particulier la répartition de la ligne des tractions maximales qui suit un profil en coin, partant de la base du mur pour arriver environ à 0,3 H en haut du mur. Les tractions maximales sont de l'ordre de 15 kN pour cet ouvrage. On peut également remarquer sur cette figure ainsi que sur la Figure 1-17 que le parement contribue peu à la stabilité interne du massif, dans la mesure où les contraintes horizontales qui lui sont appliquées à la fin de la construction sont plus faibles que celles données par la théorie de Coulomb et que les tractions dans les armatures n'y sont pas maximales. Enfin, il faut noter que les auteurs parlent de « ligne de rupture » pour évoquer la ligne des tractions maximales usuelle, vocabulaire qu'il faut employer avec précaution, dans la mesure où le mur n'est ici pas sollicité à l'état limite ultime et donc que la frontière entre zone active et passive n'est pas une surface de glissement à l'intérieur du massif.

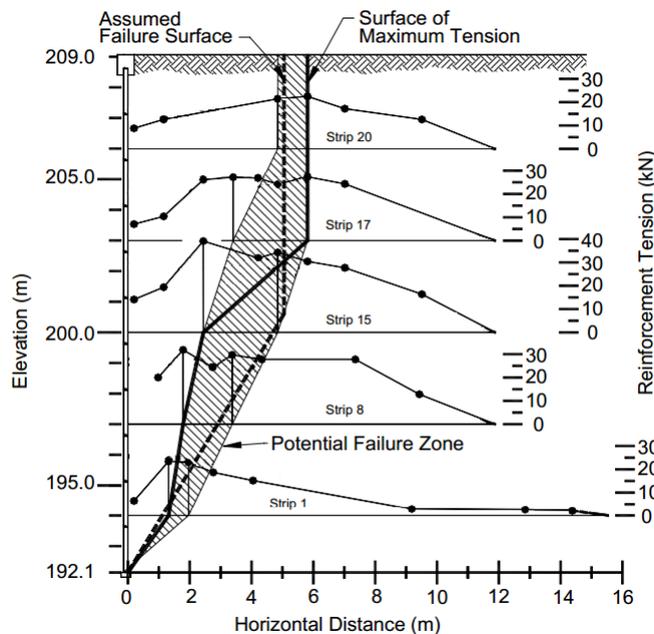


Figure 1-16 : Traction dans les armatures en fonction de la hauteur [RUN01]

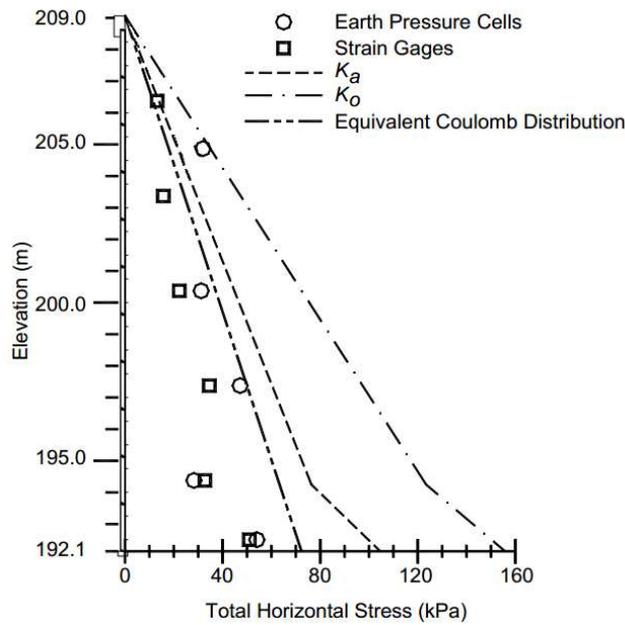


Figure 1-17 : Contraintes horizontales au niveau du parement [RUN01]

Enfin la Figure 1-18 présente les déplacements horizontaux du parement, lequel s'est davantage déformé dans la partie basse du mur, le déplacement maximal étant d'une trentaine de millimètres.

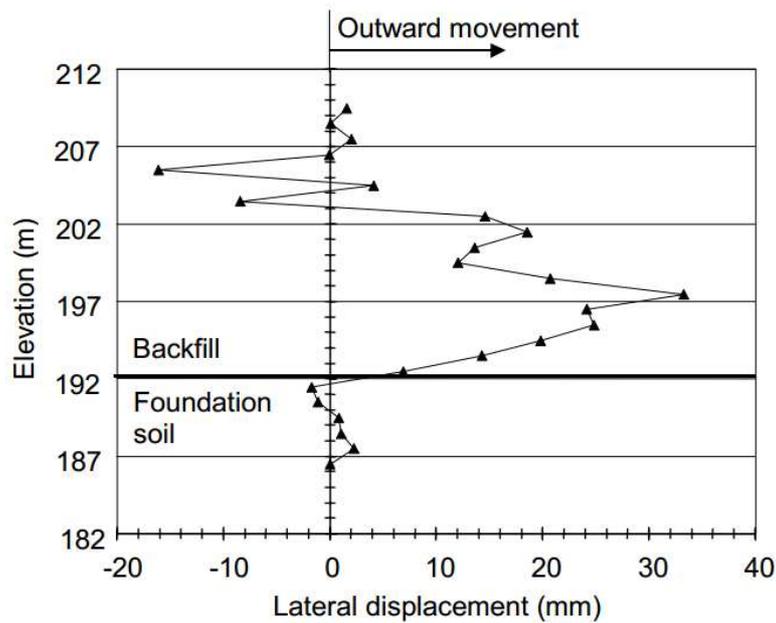


Figure 1-18 : Déplacements horizontaux du parement à la fin de la construction [RUN01]

Ces résultats sont représentatifs du comportement des murs en Terre Armée sous leur propre poids, ce qui justifie leur dimensionnement selon la méthode imposée par la norme NF P 94-270 [AFN09], présentée en 1.3.2.3.

### 1.3.2.2 Surcharges statiques

En plus du poids propre, les pionniers de la Terre Armée ont effectué un certain nombre d'expériences dans le but de caractériser l'influence des surcharges statiques sur les variations de tractions et déplacements au sein du massif. ([COR77], [BAS85a], [JUR77]).

Le calcul de la traction totale dans l'armature se fait en superposant la traction à la fin de la construction à celle donnée par la surcharge statique [COR77]. Les auteurs notent que l'augmentation de traction dans les barres dépend de la valeur et de la position de la surcharge appliquée ([COR77], [JUR77]), même s'il apparaît difficile de localiser avec précision le lieu de traction maximale dans l'armature. Les courbes théoriques présentées sur la Figure 1-19 proposent une estimation de cette sur-traction selon une méthode développée par Bastick [BAS85a] qui est fondée sur la théorie de diffusion des surcharges de Boussinesq. Les résultats du calcul sont ici comparés à des mesures effectuées à Fremersdorf en 1979 sur un ouvrage de digue construit le long de la Sarre [FLO79].

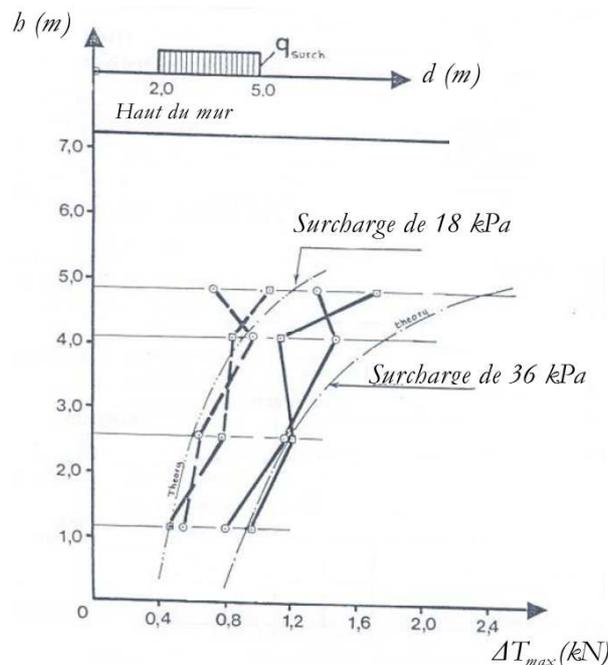
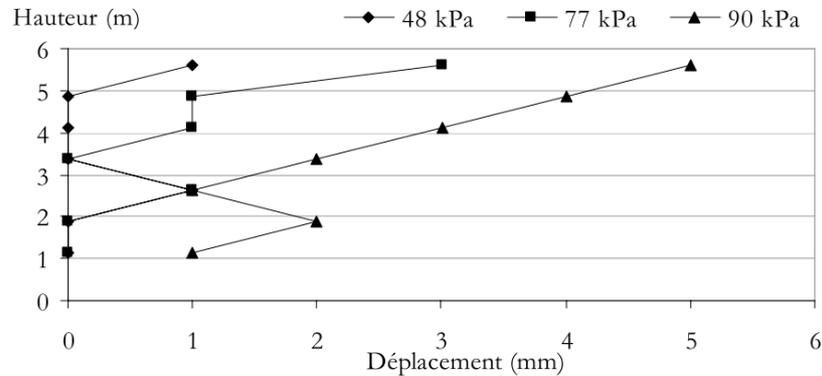


Figure 1-19 : Surtractions mesurées (traits pleins) et calculées (pointillés) d'après [BAS85a]

Concernant les déplacements, l'instrumentation d'un remblai en Terre Armée en 1975 à Triel sur Seine a permis de mesurer le déplacement horizontal du parement sur toute la hauteur du mur, pour différentes surcharges appliquées immédiatement à l'aplomb du mur (chargement de type culées de pont). Le mur considéré mesure 6 m de haut pour des armatures d'une longueur de 5 m. Les résultats sont présentés sur la Figure 1-20. Ils mettent en évidence la non-linéarité des déplacements avec la charge, qui peut s'expliquer par une mise en plasticité du remblai au cours du chargement et par le fait que les armatures ne reprennent

pas de la même façon les contraintes suivant le niveau de chargement (comme expliqué précédemment). On remarque que les déplacements maximaux sont atteints en haut du mur, et que leur valeur ne dépasse pas 5 mm.



*Figure 1-20 : Déplacements horizontaux du parement pour les surcharges statiques (d'après [SOY09])*

Enfin les tassements en haut du remblai armé ont également été étudiés, par exemple dans le cadre de l'ouvrage de Bourron-Marlotte [BAS91]. Là aussi le chargement est de type culée de pont, la hauteur du mur étant de 6 m. Les auteurs ont observé les tassements inférieurs au centimètre, pour des charges allant jusqu'à 250 kPa. De plus, pour un chargement à la rupture, le tassement maximal mesuré n'est que de 0,66 % de la hauteur de l'ouvrage. Ceci justifie ainsi l'emploi de la Terre Armée par rapport à des remblais classiques de compressibilité supérieure et permet également de conclure que les niveaux de tassement des remblais en Terre Armée ne nécessitent pas de vérification particulière pour le dimensionnement.

### 1.3.2.3 Règles de dimensionnement

La justification de la stabilité interne de la Terre Armée a fait l'objet de plusieurs documents officiels depuis 1979, lesquels ont progressivement repris et complété les méthodes antérieures. Les recommandations pour les ouvrages en terre armée [SET79], parues en 1979, donnent les coefficients partiels de pondération et de sécurité conseillés à utiliser. En 1998 est publiée la norme NF P 94-220 [AFN98a, b et c], puis en 2009 la norme actuelle NF P 94-270 [AFN09] qui est une norme d'application de l'Eurocode 7.

La méthode de justification est une méthode semi-analytique qui consiste à prédire la répartition de la ligne des tractions maximales.

La connaissance de cette ligne des tractions maximales permet de vérifier les deux hypothèses fondamentales de la stabilité interne : tout d'abord, par le calcul de la valeur de la traction maximale en chaque lit, vérifier que cette dernière est inférieure à la résistance de rupture en traction du renforcement. Ensuite, la ligne des tractions maximales définit aussi la longueur de la zone résis-

tante, qui permet de vérifier que la traction maximale calculée reste inférieure à la résistance d'ancrage.

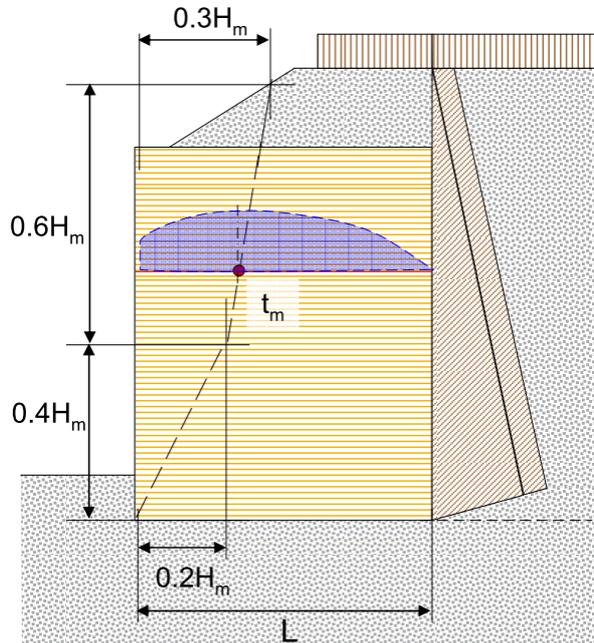
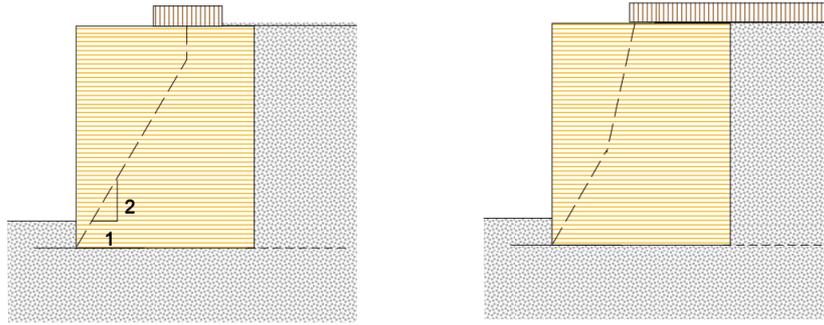


Figure 1-21 : Répartition de la ligne des tractions maximales à la fin de la construction, au sens de la norme NF P 94-270 [FRE14]

La détermination de cette ligne des tractions maximum est donc importante, et la norme considère plusieurs cas de figure selon la charge appliquée. Si la charge appliquée est le poids propre du remblai, ou une charge statique inférieure à 25 kPa (charge routière par exemple), alors la position de la ligne des tractions maximales au sens de la norme dépend uniquement de la hauteur du remblai et est définie comme présenté Figure 1-21. Si la charge est supérieure, il y a un décalage de la ligne de traction, et il faut estimer les surtractions générées par les contraintes verticales en tenant compte de la diffusion de ces contraintes avec la profondeur. Enfin, pour les culées de ponts, avec des sommiers rigides conduisant à des charges très importantes localisées près du parement, le dimensionnement prend en compte trois lignes de tractions maximales au sens de la norme.



*Figure 1-22 : Charge localisée et charge semi-infinie*

Pour les surcharges ferroviaires de type TGV, la charge à prendre en compte dans le calcul est de 180 kN par essieu, ainsi que le poids du ballast et de la sous-couche. La distance entre l'axe de la voie et le parement est au minimum de 3 m, ce qui ramène la surcharge à l'aplomb de la zone passive en considérant une longueur de traverse de 2,4 m et pour des hauteurs de mur de 4 m. La société Terre Armée, par souci de simplicité et de répétabilité des calculs, calcule le dimensionnement en considérant une surcharge semi-infinie en prenant alors en compte une ligne des tractions maximales classique (Figure 1-22). Localement, la contrainte dans le sol peut être minorée, mais globalement, du fait de la densité d'armatures, cette hypothèse va dans le sens de la sécurité.

La norme ne prend pas en compte de manière détaillée les spécificités du chargement ferroviaire, qui est pratiquement considéré comme « moins défavorable » qu'un chargement statique, le coefficient de sécurité à appliquer à la surcharge par rapport au poinçonnement du sol de fondation passant de 1,33 à 1,20.

Cependant, un référentiel interne à la SNCF [SNC85] reprenant des résultats de Verrier [VER79] impose des majorations forfaitaires des tractions dans les armatures pour tenir compte des effets vibratoires lors du passage d'un train, comme présenté Figure 1-23. Ces préconisations sont le résultat de modélisations aux éléments finis, ainsi que de l'application d'un principe de précaution visant à couvrir une éventuelle détérioration de l'interface sol-armature par les vibrations. Cependant, ces coefficients de majoration ne tiennent compte ni de la valeur de la charge, ni de sa localisation, ni de sa vitesse de déplacement.

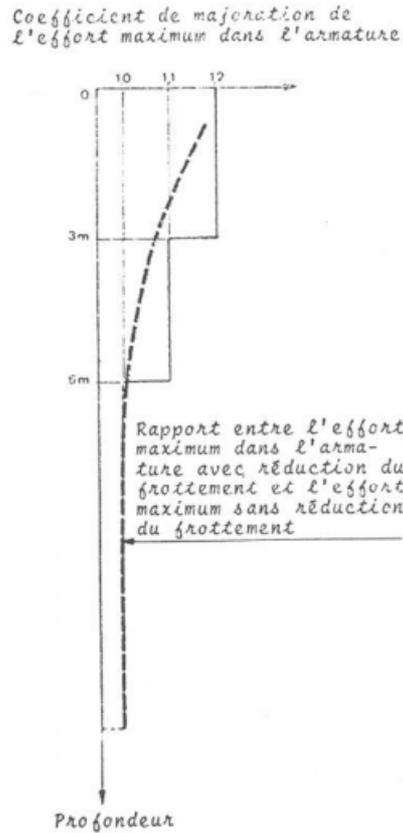


Figure 1-23 : Coefficient de majoration des efforts maximaux dans les armatures  
[VER79]

---

### 1.3.3 Comportement sous sollicitations sismiques

#### 1.3.3.1 Observations in situ

---

Quelques constatations du comportement d'ouvrages réels en sol renforcé lors de séismes sont présentes dans la littérature. Elles concernent principalement des ouvrages en Asie, renforcés par des géosynthétiques ([LIN01a] ou [TAT98], voir la Figure 1-24) ou des ouvrages de Terre Armée en Amérique ([WAR06] pour le séisme de 2003 du Tecoman au Mexique, voir la Figure 1-25).



*Figure 1-24 : Rupture d'un remblai renforcé par des géotextiles lors du séisme Ji-Ji [LIN01a]*



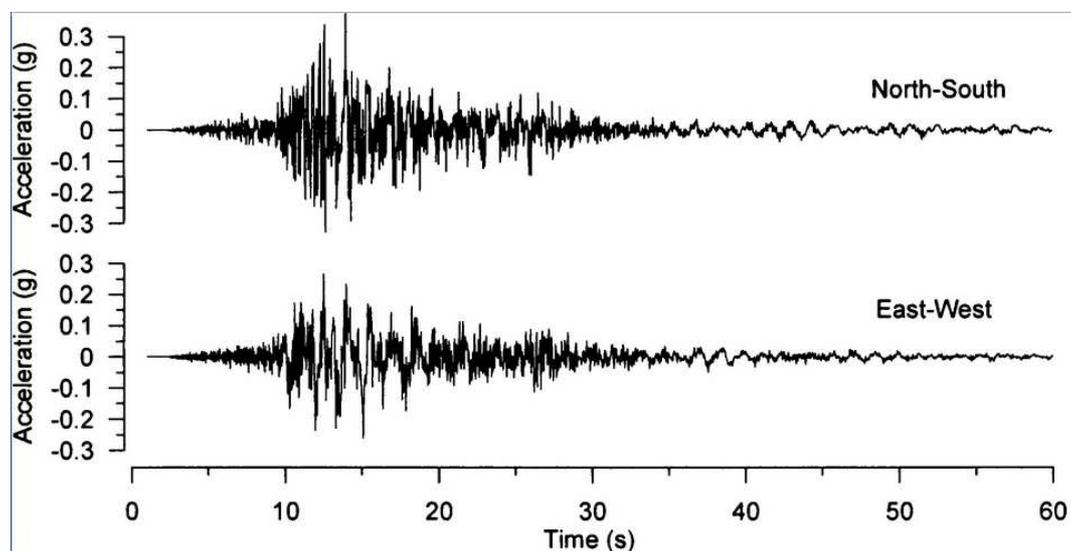
*Figure 1-25 : Fissures provoquées par le déplacement horizontal d'un remblai en Terre Armée au cours d'un séisme [WAR06]*

Les auteurs de ces études notent une meilleure résistance aux séismes des ouvrages en sol renforcé par rapport aux ouvrages d'autres types. Pour les ouvrages en géotextiles, ils soulignent l'importance des connexions entre les renforcements et le parement, ayant constaté que l'inertie des matériaux constitutifs du parement joue un rôle primordial sur les déformations horizontales de ce type d'ouvrages. Enfin, pour les structures en Terre Armée, où la connexion entre le

parement et l'armature est plus rigide, les dommages constatés semblent contrôlés par l'arrachement des lits d'armatures du haut du mur au cours du séisme. Cet arrachement est expliqué par une densité d'armatures et des pressions de confinement trop faibles à ces profondeurs pour les efforts imposés par le séisme ([WAR06], [LES03]). Ces constatations in situ ont mené à des recommandations pour le dimensionnement des murs renforcés, basées sur des analyses pseudo-statiques ([BAT98] ou [ELI01]). Malheureusement, comme le soulignent Ling et al [LIN04], ces études ne permettent pas de quantifier les phénomènes dynamiques observés, étant donné le manque d'informations sur les contraintes in situ, les déformations des murs avant séisme et les niveaux d'accélération locale durant le séisme.

### 1.3.3.2 Expériences à l'aide de modèles réduits

Parallèlement aux observations post-séisme sur le terrain, se sont aussi développées des études expérimentales à plus petite échelle, à l'aide de tables vibrantes ou en centrifugeuse. Les auteurs s'intéressent alors généralement aux grandeurs caractéristiques associées aux ondes S (ondes sismiques de cisaillement). Les fréquences étudiées sont généralement inférieures à 10 Hz, les niveaux d'accélération sont élevés, pouvant aller jusqu'à 0,4 g dans certaines études, et les échantillons sont sollicités en cisaillement. Ces grandeurs sont caractéristiques d'un séisme de magnitude importante, comme le séisme de Tecoman (Figure 1-26).



*Figure 1-26 : Accélérations horizontales du séisme du Tecoman en 2003*  
[WAR06]

On peut citer en particulier Bathurst et al. [BAT01], El-Emam et Bathurst [ELE04] ou Koseki et al. [KOS03] qui ont étudié des modèles réduits de sol renforcé par des géotextiles sur table vibrante ; Kutter et al. [KUT90] pour des ren-

forçements métalliques, ou encore Takahashi et al. [TAK99], [TAK03] pour des études sismiques en centrifugeuse sur des échantillons renforcés avec des géo-grilles en polyéthylène haute densité.

Bien que tous ces auteurs s'accordent sur les limites de leurs modélisations du fait des effets d'échelle et des caractéristiques d'accélération obtenus lors d'un séisme (valeurs élevées et variations importantes), ces études permettent néanmoins de quantifier un certain nombre d'effets grâce aux capteurs placés dans les modèles réduits. Les expériences menées par Takahashi et al. [TAK99], [TAK03] sont particulièrement riches en résultats. Les auteurs ont notamment relevé les déplacements horizontaux et verticaux des échantillons, les déformations dans les renforcements et mis en évidence les mécanismes de ruptures associés, en étudiant différents paramètres comme la densité du sol, la longueur et l'espacement des renforcements (Tableau 1-1).

Tableau 1-1 : Paramètres des modèles [TAK03]

Test code	Dry density $\rho_d$ (Mg/m <sup>3</sup> )	Grid length $L$ (m)	Grid spacing $s$ (m)
L60-075	1.4	6	0.75
L45-075	1.4	4.5	0.75
D60-150	1.48	6	1.5
L60-150	1.4	6	1.5
D45-150	1.48	4.5	1.5
L45-150	1.4	4.5	1.5
D20-150	1.48	2	1.5

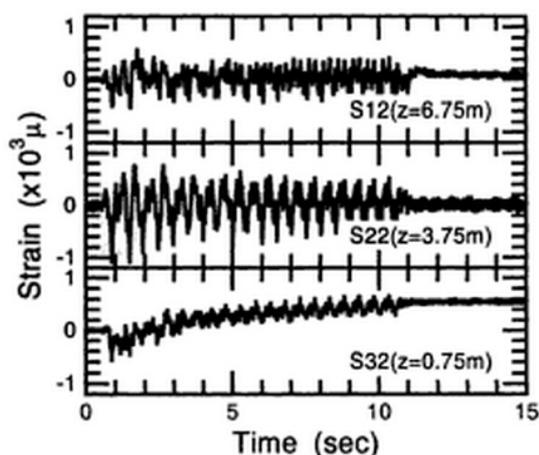


Figure 1-27 : Évolution des déformations dans les renforcements au cours du temps, test D60-150 [TAK03]

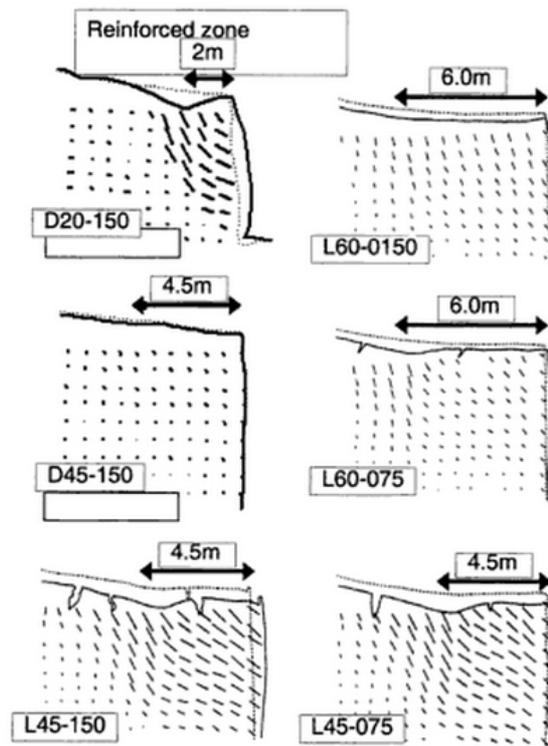


Figure 1-28 : Déformations des modèles [TAK03]

Les conclusions de ces modélisations sont similaires à celles tirées dans le cas des observations in situ : ce sont les accélérations horizontales de grande amplitude (provoquant de grands déplacements) qui, associées à la moindre pression de confinement dans le haut du massif, sont responsables de la perte d'adhérence des renforcements supérieurs (comme illustré par la déformation irréversible du renforcement situé à 75 cm de profondeur, Figure 1-27), entraînant la rupture de l'ouvrage. L'augmentation de la longueur des renforcements, de la densité du sol ou la diminution de l'espacement entre couches de géosynthétiques permettent de diminuer cet effet (cf. Figure 1-28).

D'autre part, Shewbridge et Sousa [SHE91] ont étudié des éprouvettes creuses de sable renforcé (Figure 1-29) avec des armatures métalliques à une densité similaire à celle de la Terre Armée, soumises à des cycles de torsion, pour différents niveaux de déformation, pouvant aller jusqu'à 7 %. Ils ont notamment étudié l'influence de la direction des renforcements, de la pression de confinement, de la fréquence, sur la réponse des échantillons. Cette étude est originale, dans la mesure où elle caractérise les propriétés dynamiques du sol renforcé en considérant d'abord le matériau et non la géométrie globale du remblai. Ainsi, on a accès à des paramètres relatifs au matériau lui-même, et non à telle ou telle configuration de remblai particulière.

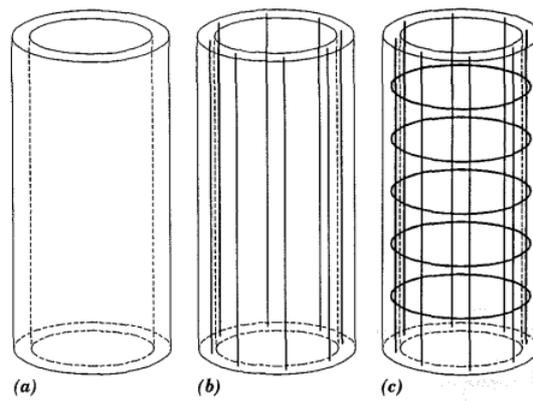


Figure 1-29 : Configuration des renforcements: (a) sans, (b) axial, (c) biaxial  
[SHE91]

Leurs résultats indiquent que le module de cisaillement du sol, ainsi que son coefficient d'amortissement critique sont fonction de la pression de confinement et du taux de cisaillement. En revanche ces paramètres sont indépendants de la fréquence pour la plage 0-10 Hz considérée dans l'article. De plus, les auteurs concluent que la présence des renforcements n'est pas visible sur la réponse de l'échantillon, pour des déformations inférieures à 5 %.

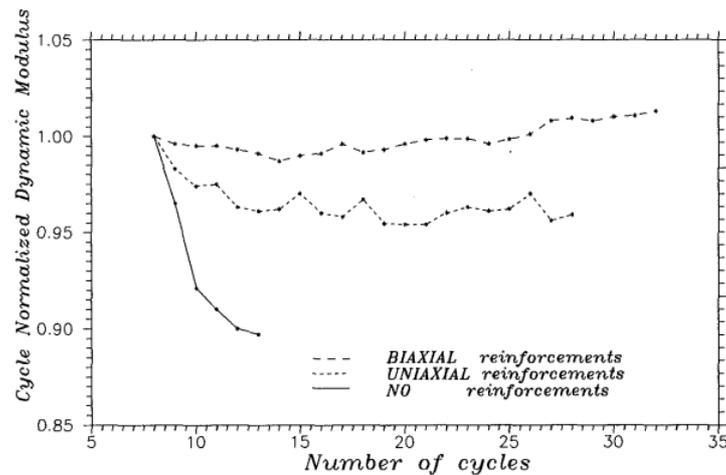


Figure 1-30 : Évolution du module de cisaillement en fonction du nombre de cycles  
[SHE91]

En revanche, pour des déformations de l'ordre de 7 %, les auteurs mettent en évidence une chute rapide des caractéristiques mécaniques du sol non renforcé avec le nombre de cycles, tandis que l'échantillon renforcé de façon biaxiale voit son module de cisaillement augmenter (Figure 1-30). Les auteurs expliquent ce phénomène par le fait que les armatures empêchent les bandes de cisaillement de se former à l'intérieur de l'échantillon. Même si le nombre de cycles est ici peu élevé, on peut expliquer la rigidification du matériau renforcé par une augmentation de sa densité, comme le laisse supposer la Figure 1-31.

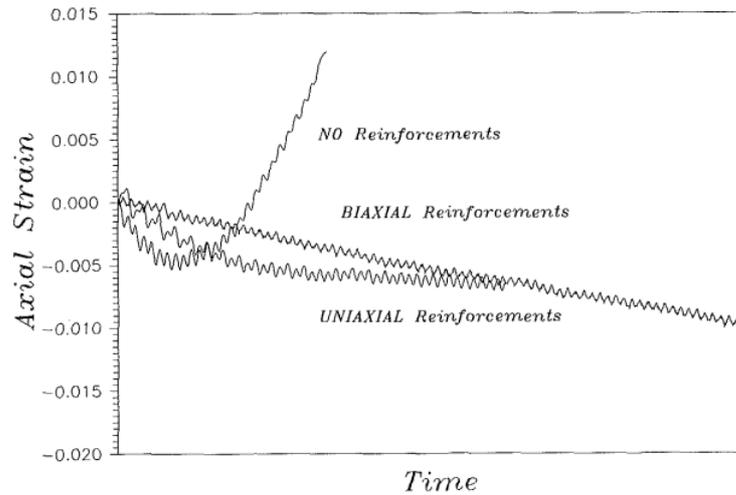


Figure 1-31 : Évolution de la déformation axiale au cours du temps  
[SHE91]

### 1.3.3.3 Modélisations numériques

Les expérimentations in situ ou sur modèles réduits présentées précédemment sont mal adaptées à l'étude de l'influence de nombreux paramètres sur la stabilité globale des murs renforcés sous chargement sismique. Par exemple, l'influence de la géométrie globale du remblai sur la réponse sismique n'est pas étudiée dans ces études. De nombreux auteurs se sont donc intéressés à modéliser numériquement des ouvrages réels ou des modèles réduits, dans le but de tester l'influence de différents paramètres sur la réponse globale des ouvrages renforcés. On peut citer les nombreux travaux de Bathurst et ses collaborateurs ([BAT95], [CAI95], [BAT98], [HAT00]), ainsi que ceux de Ling et Leshchinsky ([LIN04], [LIN05a], [LIN05b], [LIN09]), qui sont essentiellement focalisés sur les sols renforcés par géosynthétiques. Plus récemment, d'autres auteurs se sont également saisis de cette question, se focalisant davantage sur le comportement du parement ([HEL01], [ELE05]). Quelques simulations numériques ont été effectuées sur le comportement sismique des ouvrages renforcés avec des bandes métalliques dans les années 80 ([SEE86], [SEG88]). Toutes ces modélisations ont été effectuées en 2D, en utilisant la méthode des éléments finis ou celle des différences finies. On remarque que la littérature récente a tendance à privilégier l'analyse de sol renforcé par des géosynthétiques, et non par des armatures métalliques. On peut expliquer ce phénomène par plusieurs raisons :

- tout d'abord les publications citées sont le fait de chercheurs américains, qui tendent à privilégier l'étude des ouvrages renforcés par des géotextiles, au détriment des ouvrages avec des armatures métalliques ;

- ensuite, il n'est pas possible de représenter de façon satisfaisante en 2D sous sollicitations sismiques le fait que les renforcements métalliques ne sont pas continus dans la direction transversale ;
- enfin, les auteurs précités semblent considérer que les renforcements métalliques peuvent être considérés comme un cas particulier de renforcements indéformables, par exemple dans [YOG92] ou [ALL04] et peuvent être traités en utilisant les mêmes méthodes de modélisation. Les résultats semblent satisfaisants, bien qu'on ne prenne pas en compte le fait que les renforts métalliques sont discrets, tandis que les nappes de géosynthétiques sont continues.

La procédure de modélisation pour toutes ces études suit globalement une démarche identique. Dans un premier temps, les auteurs cherchent à valider un modèle numérique de référence, calé sur des expériences sur modèles réduits ou centrifugeuse, plus rarement sur des expériences en grandeur réelle. Ensuite, un certain nombre d'études paramétriques sont effectuées, portant à la fois sur les caractéristiques géométriques du remblai étudié, les caractéristiques de fréquence et d'accélération du séisme modélisé et enfin les caractéristiques des matériaux de renforcement, du sol et également des interfaces. Des méthodes de dimensionnement ou des améliorations à celles-ci peuvent alors être proposées.

Il ressort de toutes ces études que la réponse globale d'un massif de sol renforcé soumis à un séisme est gouvernée principalement par les niveaux d'accélération causés par le séisme et par la géométrie du remblai (qui a une influence directe sur la fréquence propre de la structure). Comme lors des expérimentations in situ et sur modèles réduits, il est montré que ce sont les renforcements situés sur la partie supérieure du remblai qui sont les plus sollicités. L'augmentation de leur longueur et la diminution de leur espacement contribue à éviter leur rupture par arrachement. Enfin, une bonne prédiction numérique des niveaux de contraintes, déformations et tractions dans les renforcements nécessite des lois de comportement sophistiquées pour le sol (visco-élasto-plastiques), du fait des hauts niveaux de déformations induits par le séisme. Différentes lois ont été testées dans ces études, chacune possédant de nombreux paramètres, qui ont été calés sur des essais triaxiaux cycliques (cf. [LIN04]).

Les lois de comportement régissant les renforcements dépendent du type de ces derniers. Dans le cas de renforcements rigides, les auteurs utilisent généralement une loi de comportement élastique. Pour ceux plus souples, des lois élasto-plastiques peuvent être utilisées, avec des paramètres calés sur des essais de traction cycliques sur échantillons.

Les interfaces parement/sol, renforcement/sol et géosynthétiques/parement (dans certains cas) sont généralement traitées de deux manières :

- soit en modélisant un joint de petite épaisseur, avec un coefficient de Poisson nul ([LIN05a], [HAT00])
- soit en utilisant des éléments de joint, avec une loi de comportement spécifique, généralement proche de celle de Mohr-Coulomb (Figure 1-32)

Dans les deux cas, les modules d'élasticité et l'angle de frottement maximal (ou équivalent) sont calés à partir d'essais d'extraction.

Enfin il est à noter que dans ces études, il n'a pas été pris en compte de conditions spéciales aux limites (de type bandes absorbantes ou autres).

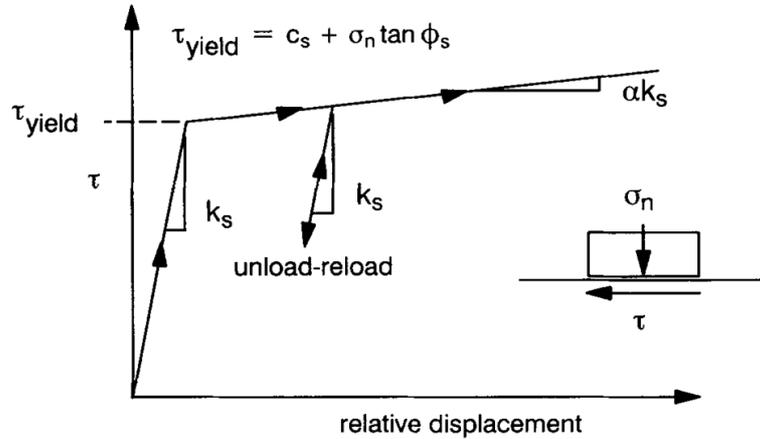


Figure 1-32 : Loi de comportement de l'interface sol-renforcement [CAI95]

#### 1.3.3.4 Conclusion

Les très nombreuses publications relatives au comportement sismique des murs en sol renforcé donnent de précieuses indications quant au comportement de ces ouvrages sous sollicitations dynamiques, même si dans le cas des séismes, on s'intéresse à la rupture et non aux conditions de service.

La réponse globale du massif est fortement influencée par sa géométrie et pas uniquement par les caractéristiques des renforcements. De plus, il apparaît que la ruine de ces ouvrages vient de la perte d'adhérence des armatures les moins confinées (situées près de la surface supérieure du mur). Enfin, les modélisations numériques mettent en évidence des stratégies de prise en compte des interfaces, avec des lois de comportement spécifiques.

Cependant, un chargement sismique diffère d'un chargement ferroviaire en de nombreux points : les fréquences considérées sont plus élevées dans le cas ferroviaire, les sollicitations ne sont pas uniquement des sollicitations en cisaillement, la charge ferroviaire est localisée et située sur la partie supérieure de l'ouvrage, et les niveaux d'accélération sont moindres que dans le cas sismique.

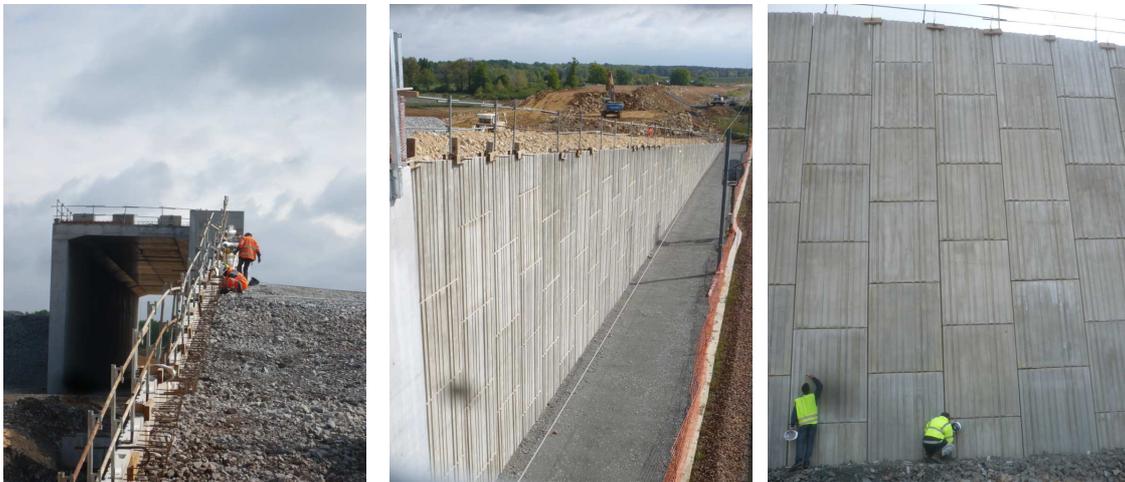
Ces spécificités font que la modélisation bidimensionnelle paraît insuffisante dans le cas ferroviaire, tout comme le fait de considérer les renforts métalliques comme des nappes et non comme des barres. De plus, il faudra veiller aux conditions de frontières pour éviter les phénomènes de réflexion numérique.

A contrario, les lois de comportement des matériaux (barre inextensible et remblai) seront sans doute plus simples, vu les niveaux de déformation plus faibles.

## 1.4 Utilisation de la Terre Armée pour les LGV : le cas de la ligne SEA

Le comportement de la Terre Armée a été relativement peu étudié pour le cas de chargements ferroviaires. Les soutènements construits avant 2013 n'étaient destinés qu'aux lignes classiques, pour la circulation de TER, fret ou TGV à vitesses réduites. Dans ces cas, la vitesse n'étant pas très importante (jusqu'à 250 km/h), les dimensionnements s'effectuaient en considérant une charge équivalente statique. En 2013, suite aux travaux présentés dans la thèse de L. Soyez [SOY09] (qui seront présentés en détail dans la suite de ce mémoire), l'entreprise Terre Armée a pu construire une vingtaine d'ouvrages renforcés dont deux seront circulés à 320 km/h et dimensionnés pour des vitesses jusqu'à 350 km/h. Ces ouvrages ont été construits sur la Ligne à Grande Vitesse Tours-Bordeaux (LGV Sud Europe Atlantique, ou SEA). Cette LGV sera circulée à haute vitesse pour 302 km des 340 km de ligne totale. Cette ligne est également connectée au réseau existant par 40 km de raccords, où se trouve l'essentiel des ouvrages en Terre Armée.

Le principal ouvrage de la ligne est un ouvrage de raccordement en Terre Armée, de 12,70 m de hauteur, présenté en cours de construction dans la Figure 1-33.



*Figure 1-33 : Ouvrage en cours de construction*

## 1.5 Spécificités du contexte ferroviaire

Après un demi-siècle d'existence du procédé de renforcement des sols par des armatures, il existe une littérature abondante concernant le comportement en statique de ces structures ; leur mode de fonctionnement est bien décrit et les méthodes de dimensionnement sont précises et éprouvées.

En dynamique, les études portent essentiellement sur les sollicitations sismiques, qui diffèrent sensiblement des vibrations ferroviaires. La spécificité du chargement ferroviaire à grandes vitesses pour le dimensionnement d'ouvrages en sol renforcé a été peu documentée. On peut citer une étude expérimentale menée au Centre d'Expérimentations Routières de Rouen en 2009 [SOY09] qui sera présentée en détail au Chapitre 2, et un référentiel interne à la SNCF [SNC85]. Ce dernier propose des coefficients de surdimensionnement pour les armatures supérieures, ce qui a permis la construction d'ouvrages de franchissement dans le cadre de la LGV SEA, mais n'explique pas les phénomènes dynamiques qui ont lieu au sein du massif.

Pour étudier ces phénomènes dynamiques complexes, on se propose de mener une étude numérique approfondie du comportement de remblais en sol renforcé lors du passage de trains à hautes vitesses. Pour cela, on commence par présenter la structure et les constituants des voies des lignes à grande vitesse, et les caractéristiques (géométries, vitesses, poids d'un essieu) des TGV circulant sur ces lignes.

---

### 1.5.1 Constituants de la voie

La Figure 1-34 présente la géométrie usuelle d'une voie d'une Ligne à Grande Vitesse. Le terme « voie » désigne la partie supérieure d'une ligne ferroviaire, constituée de rails fixés sur des traverses au moyen d'attaches métalliques et de semelles, le tout reposant sur une couche de ballast.

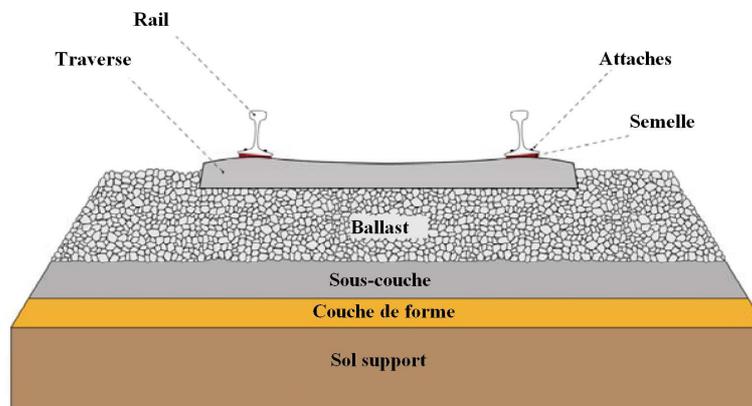


Figure 1-34 : Profil d'une Ligne à Grandes Vitesses (d'après [FER10])

### 1.5.1.1 Rail, traverse, attaches

Une grande diversité de systèmes rail/traverse existe dans le monde. Ils sont le fait de l'histoire, du type de voies, de la culture de chaque constructeur... Les rails sont toujours métalliques (en acier) mais peuvent avoir des géométries différentes, être soudés (Long Rail Soudé) entre eux ou non. Le profil du rail utilisé pour les LGV (Rail Vignole UIC 60) est présenté sur la Figure 1-35a. Les traverses sont en bois, en béton monobloc ou bi-blocs, ou encore exceptionnellement en métal. Les traverses béton bi-blocs sont imposées pour les nouvelles LGV (Figure 1-35b). Des semelles métalliques ou en élastomère peuvent être fixées sur le bloc de bois ou de béton pour assurer la jointure du rail à la traverse. Cette fixation est assurée au moyen d'attaches métalliques, dont un exemple est présenté Figure 1-36. L'ensemble semelle-attache assure la transmission des efforts du rail à la voie, le maintien de l'écartement, l'isolation électrique et possède éventuellement des propriétés amortissantes qui permettent de réduire les vibrations générées par le passage du train.

Les caractéristiques des composants des voies LGV sont détaillées dans le référentiel IN 3279 [RFF06] de la SNCF.

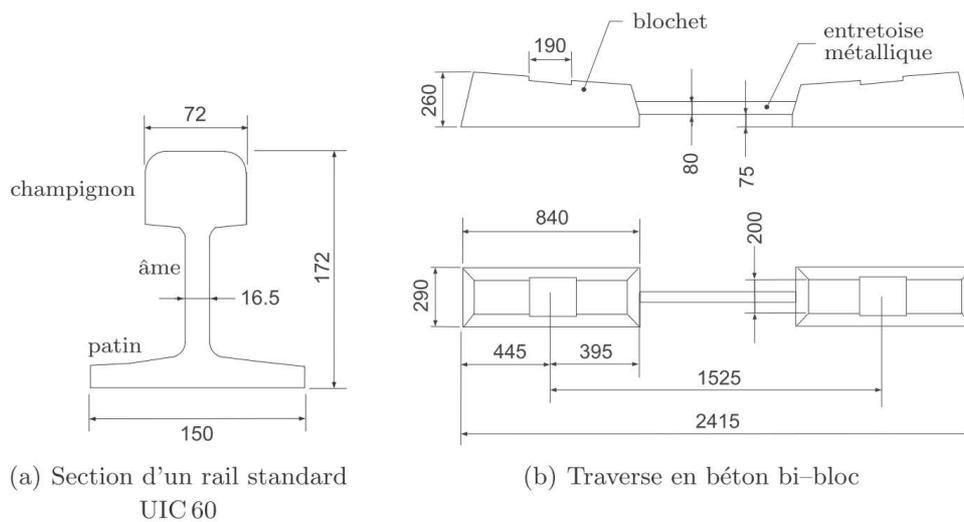


Figure 1-35 : Rail et traverse [KOU09]

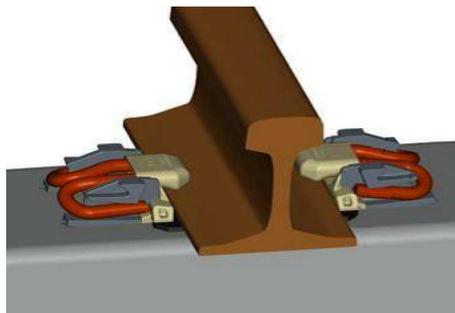


Figure 1-36 : Attaches Pandrol Fastclip [FER10]

### 1.5.1.2 Ballast et sous-couche

---

Le ballast est un matériau granulaire grossier constitué de roches dures concassées (granite, diorite...). Son rôle est d'assurer la transmission des efforts entre les traverses et le sol d'assise de la voie, tout en empêchant l'enfoncement des traverses dans le sol (poinçonnement). Il permet également un drainage immédiat des eaux de pluie et, le cas échéant, de reprendre la géométrie de la voie. Le choix de ce matériau s'est avéré économiquement viable et de mise en place facile pour les lignes classiques. Cependant, on peut rencontrer une usure excessive ainsi que la remontée de sol sous-jacent dans la couche de ballast. Ces problèmes sont fortement liés à la qualité du matériau de sol support (compressibilité, teneur en eau) ainsi qu'à la vitesse de circulation du train. Différentes techniques ont été mises en place pour limiter ces problèmes. Par exemple, l'épaisseur de la couche de ballast a été portée à un minimum de 30 cm et une sous-couche de matériau granulaire entre le ballast et la partie supérieure des terrassements est maintenant obligatoire pour la construction de nouvelles lignes [RFF06]. Cette sous-couche est généralement constituée du même matériau que le ballast, mais de granulométrie plus fine.

Malgré tout, pour des vitesses très élevées (TGV), des problèmes spécifiques aux voies ballastées demeurent actuellement [RHA13], [SAU14], entraînant un surcoût de maintenance conséquent pour l'exploitant des LGV en France. La résolution de ces problèmes passe par une meilleure connaissance du matériau ballast, qui est un géomatériau dont le comportement est très complexe. Ce point sera développé dans la partie 1.6.2.2.

---

### 1.5.2 Géométrie des voitures d'un TGV

En France, plusieurs types de TGV circulent sur les Lignes à Grande Vitesse. On peut notamment citer les TGV Sud-Est, Réseau (Ligne Nord), Atlantique, TMST (Eurostar), PBKA (Lyria), Duplex, POS (Ligne Est-Européenne)... Ils transportent exclusivement des voyageurs (sauf quelques rames postales) et sont utilisés en France, en Espagne ou en Corée du Sud.

Chaque TGV comporte deux motrices (locomotives) à l'avant et à l'arrière de la rame, et un certain nombre de voitures (wagons) entre celles-ci. Les motrices, comme les voitures, sont portées par des bogies, sortes de chariots mobiles par rapport aux caisses, qui portent les essieux et les amortisseurs (Figure 1-37). Ils permettent un meilleur amortissement par rapport à des essieux directement fixés sur la caisse et une meilleure maniabilité dans les courbes.

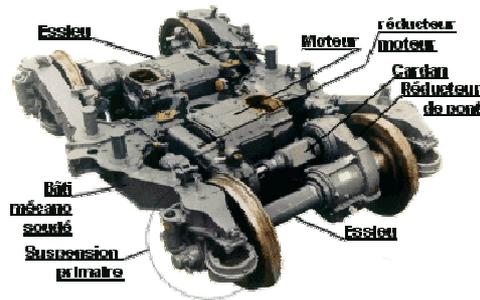


Figure 1-37 : Bogie de TGV (d'après <http://www.barreau.matthieu.free.fr>)

Les essieux d'un même bogie sont séparés de 3 m tandis que les bogies des motrices sont espacés de 14 m et ceux des voitures d'un peu moins de 19 m, comme présenté sur la Figure 1-38.

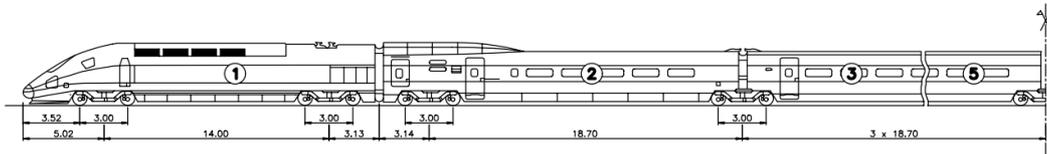


Figure 1-38 : Schéma d'un TGV Thalys [DEG00]

## 1.5.3 Chargement

### 1.5.3.1 Répartition des efforts

Les efforts générés par le passage des roues des voitures et motrices sur les rails peuvent être décomposés selon les trois directions principales (Figure 1-39).

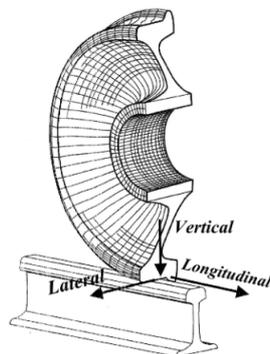


Figure 1-39 : Directions principales des efforts agissant sur le rail [FER10]

Les efforts verticaux correspondent au poids propre du train, additionné des surcharges dynamiques. Pour chaque TGV, la masse de référence supportée par essieu est de 18 tonnes (contre 25 tonnes par exemple pour les trains de fret). Les efforts latéraux correspondent aux efforts dans les virages et dans une

moindre mesure aux irrégularités au niveau du contact roue/rail. Enfin, les efforts longitudinaux correspondent aux forces générées par le frottement roue/rail essentiellement lors des accélérations et freinages des trains.

Les efforts verticaux étant prépondérants sur les deux autres, il est courant ([KOU09], [FER10]) de négliger ces derniers.

La déflexion du rail permet la diffusion de la charge apportée par le passage de la roue à plusieurs traverses à la fois. [SOY09] et [MAN07] ont établi que le nombre de traverses mises en jeu et la répartition de la contrainte n'étaient pas les mêmes suivant la vitesse du train. Si le train circule à faible vitesse, inférieure à 200 km/h, le chargement peut être considéré comme statique, et la flexion du rail répartit la charge sur cinq traverses dont l'essentiel sur la traverse centrale. En revanche, si la vitesse est plus élevée, le nombre de traverses sollicitées augmente, et la charge est davantage répartie sur l'ensemble des traverses. La Figure 1-40 illustre la répartition en pourcentage de la charge supportée par les traverses lors du passage d'une roue sur la traverse 0.

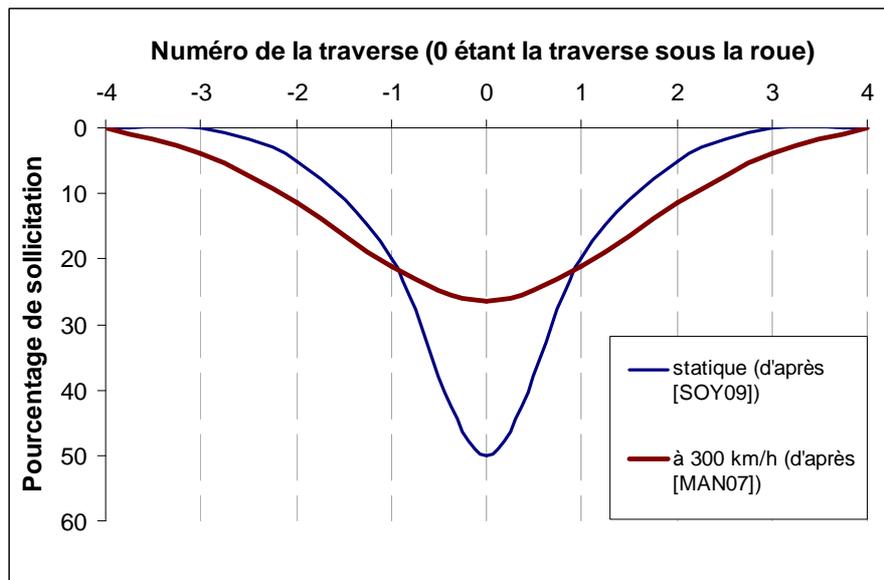


Figure 1-40 : Sollicitation des traverses selon la vitesse du train

Les contraintes engendrées par le passage de la roue sont aussi diffusées verticalement dans le rail, la semelle, la traverse, le ballast, la sous-couche et enfin le sol sous jacent. La surface sur laquelle se répartit la charge augmente sensiblement avec la profondeur, tandis que les niveaux de contraintes diminuent d'autant, ce qui met particulièrement en évidence le caractère tridimensionnel de la diffusion d'une charge ferroviaire. Esveld ([ESV01], Figure 1-41) a proposé un schéma de cette diffusion et des ordres de grandeur associés. On note que la contrainte verticale est divisée d'un facteur 10 000 entre l'interface roue/rail et la base du ballast.

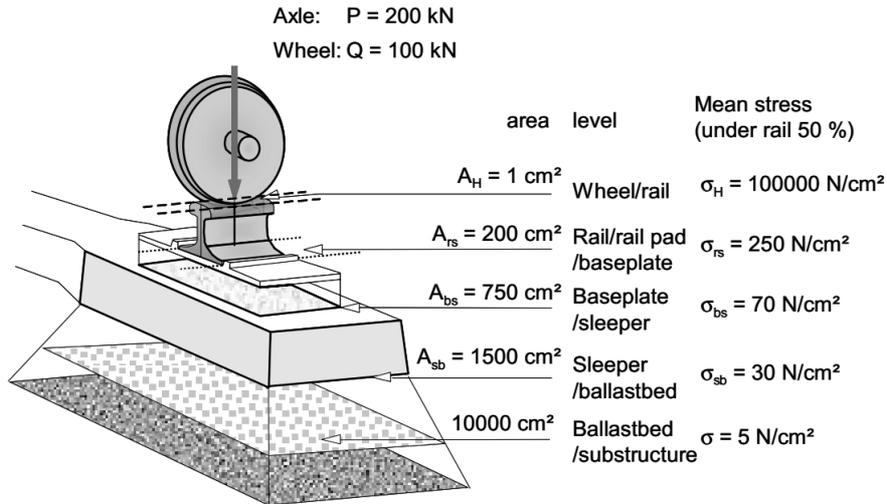
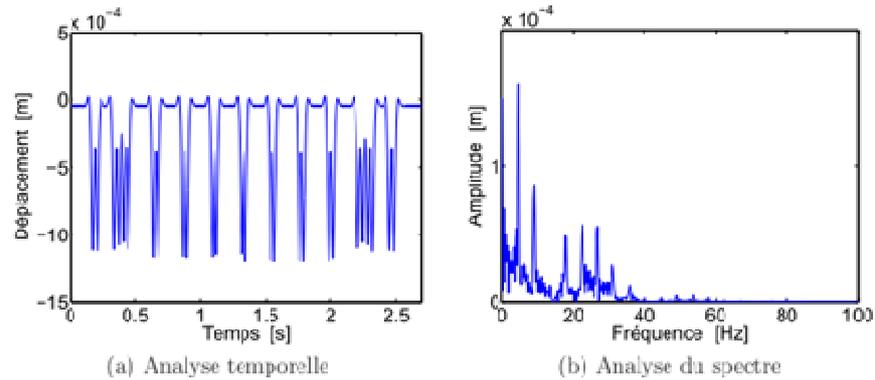


Figure 1-41 : Ordres de grandeurs des efforts transmis par la roue à travers la voie [ESV01]

### 1.5.3.2 Fréquences

Le passage d'un train sur un point fixe d'un rail va provoquer la déflexion périodique de ce dernier, en fonction de la distance inter-roue et de la vitesse du train. Ainsi en enregistrant les déplacements verticaux du point fixe du rail, on obtient un signal temporel caractéristique du passage du train (appelé signal « double M » dans le cas d'un TGV). L'amplitude du déplacement est fonction du poids du train et de la déflexion dynamique du rail, tandis que la variation temporelle est fonction de la distance entre les roues et de la vitesse de passage du train.

Pour les TGV, le poids du train est plus faible que celui des trains de fret par exemple. En revanche, sa vitesse très élevée est d'une part responsable de surcharges dynamiques verticales non négligeables devant son poids et d'autre part d'une période temporelle très courte entre chaque « M » représentant le passage d'un bogie (Figure 1-42a). Ainsi, le contenu fréquentiel du signal associé au passage d'un TGV sera d'autant plus riche en hautes fréquences que sa vitesse sera élevée.



**Figure 1-42 : Déflexion du rail au passage d'un TGV à 300 km/h [KOU09]**

La vitesse commerciale actuellement la plus élevée du réseau LGV en France est de 320 km/h pour la LGV Est. Connaissant la répartition spatiale des roues d'un TGV type (par exemple un Thalys comme présenté Figure 1-38), on peut calculer pour cette vitesse certaines fréquences associées au passage du TGV :

- 30 Hz pour les roues d'un même bogie.
- 14 Hz entre le bogie arrière de la motrice et celui de la voiture la plus proche.
- 6 Hz entre les deux bogies des motrices.
- 5 Hz entre les deux bogies des voitures.

Les fréquences supérieures à 30 Hz (par exemple dans la Figure 1-42b), d'amplitude moindre, correspondent aux efforts associés aux irrégularités de surface entre la roue et le rail.

## 1.6 Modèles numériques et expérimentations

Cette section contient un état de l'art de la modélisation numérique de l'interaction véhicule-structure. Cette thèse étant plus spécialement consacrée à la réponse du massif de sol armé situé sous la voie ferroviaire et non à la voie elle-même ou aux véhicules, nous nous limiterons aux aspects qui touchent notre sujet, encourageant le lecteur à se référer à des publications spécifiques (par exemple [KOU09]) pour une description plus détaillée.

### 1.6.1 Présentation des stratégies numériques

Nous présentons ici un bref aperçu des différentes méthodes numériques utilisées dans la littérature pour modéliser les phénomènes ferroviaires sans exposer précisément chacune d'elles.

Les méthodes numériques ou analytiques existantes se décomposent généralement entre la modélisation du train lui-même (roues, essieux, bogies, caisses...) et celle de la voie et du sol sous-jacent.

Selon les auteurs et les problématiques étudiées, le train peut être réduit à une charge mobile, généralement de vitesse constante [MAR13], et d'amplitude constante, harmonique [PIC02] ou aléatoire [LOM09]. Zhai puis des auteurs postérieurs [ZHA94, KOU09] ont proposé un modèle plus complexe fondé sur la modélisation d'une voiture entière (caisse, bogies, roues), considérée comme un système de plusieurs masses-ressorts-amortisseurs, comme l'illustre la Figure 1-43.

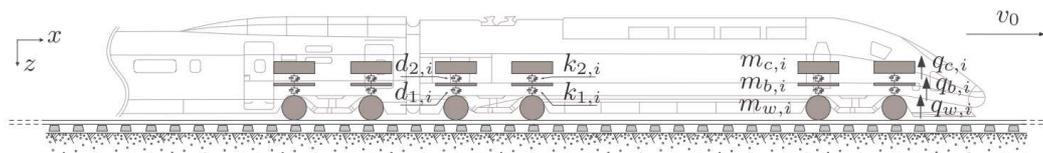
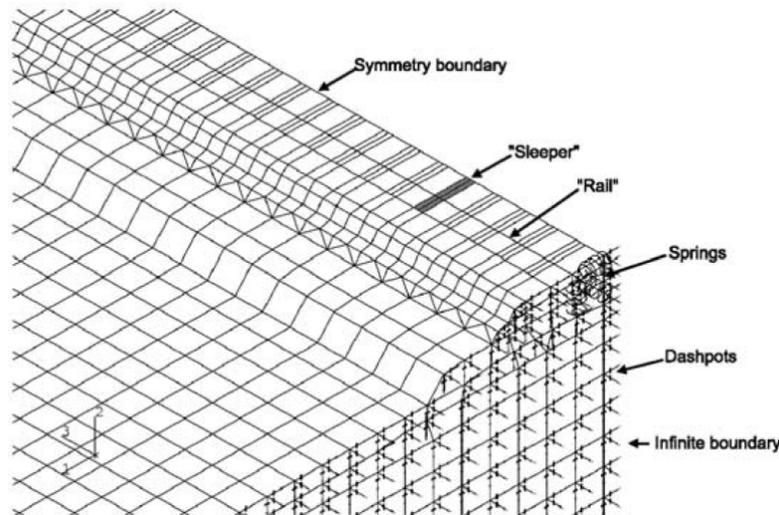


Figure 1-43 : Modèle de train adopté dans [KOU09]

Ces systèmes discrets sont couplés à une représentation de la voie, elle aussi modélisée par des systèmes masse-ressort ou bien par des éléments finis 2D, plus rarement 3D ([HAL03], [AUE08]). Un tel modèle éléments finis en 3D est par exemple présenté sur la Figure 1-44.



*Figure 1-44 : Détail du modèle Éléments Finis de la voie et du sol sous-jacent proposé par [HAL03]*

La résolution s'effectue dans le domaine temporel ou fréquentiel (Sheng et al, 2006, [HAL03]). Pour l'étude du comportement du véhicule ou de la voie, certains auteurs évitent de modéliser le sol, le ramenant à une fondation de Winkler [ZHA94], [KRY96]. Les auteurs s'intéressant aux vibrations dans le sol représentent en revanche ce dernier soit comme un espace infini, dont les contributions sont calculées par des fonctions de Green, soit par des éléments finis, dont les frontières sont traitées spécifiquement (éléments de frontières ou éléments semi infinis). Dans tous les cas, la taille du domaine est rapidement critique et les gros modèles nécessitent des ressources en calcul importantes [YER03].

Aucun auteur ne modélise avec le même degré de précision le train, la voie et le sol sous-jacent. Si l'étude concerne le comportement de la voie et du train, la modélisation privilégie l'étude de l'interaction de ces deux systèmes, aux dépens du sol [ANG13] ; si ce sont les vibrations dans le sol que l'on cherche à modéliser, le modèle de train est réduit à une charge appliquée sur les rails voire même directement sur le ballast. Kouroussis a proposé [KOU09] une modélisation regroupant à la fois l'interaction train/voie et voie/sol, en traitant en fait les deux problèmes de façon découplée (d'après l'hypothèse émise par [DES98]), considérant les efforts subis par le ballast calculés lors de la modélisation véhicule/voie comme donnée d'entrée pour la modélisation voie/sol. Il conclut que cette approche permet d'obtenir des résultats conformes aux expérimentations y compris pour les hautes fréquences, qui sont mésestimées dans les autres approches (par exemple dans [HAL03]).

Quoi qu'il en soit, comme le souligne [KOU09], chaque modèle développé dans la littérature est spécifique d'un problème étudié (statique pour les basses vitesses, 2D pour un sol considéré comme infini...).

---

## 1.6.2 Lois de comportement

### 1.6.2.1 Rails, traverses et attaches

---

Le rail est souvent modélisé comme une poutre d'Euler-Bernoulli (les sections droites restant perpendiculaires à la ligne moyenne). Plus rarement, pour l'étude des fréquences supérieures à 500 Hz (dans le cas des nuisances sonores générées par le contact roue rail par exemple), le modèle peut être amélioré pour prendre en compte les effets d'inertie et de cisaillement dans la section du rail (poutres de Timoshenko) [KOU09]. Les traverses peuvent également être modélisées par ce genre d'éléments, ou comme des corps rigides [GRA82] bien que certains auteurs aient tendance à les modéliser comme un milieu continu, en faisant abstraction du caractère discret des traverses.

Les semelles et attaches sont souvent modélisées comme des systèmes masses-ressorts linéaires dans leur domaine de fonctionnement.

### 1.6.2.2 Ballast

---

Le comportement de ce matériau est encore difficile à modéliser, en dépit de très nombreux travaux de recherche le concernant. Les auteurs s'accordent sur la structure granulaire grossière qui empêche d'appliquer certaines méthodes de milieux continus [SUI02], la non-linéarité du comportement [NGU02], [IND98], et le vieillissement spécifique suivant le type de sollicitation ou de pollution [NGU02], [IND10]. Par exemple, Indraratna et al. [IND10] mettent en évidence une rupture des grains du ballast sous sollicitations cycliques, mais cette détérioration peut être compensée par une augmentation de la densité, suivant la vitesse de passage du train. Toutes ces caractéristiques compliquent sensiblement l'établissement d'un modèle simple et représentatif pour le ballast.

Néanmoins, certains auteurs choisissent de le modéliser comme un système masse-ressort-amortisseur ([KNO93], [ZHA94], [RIC06], [CHO08]) ou comme un matériau continu biphasique (ballast rigide sous les traverses, et plus souple entre celles-ci) [RIC06], sans tension [NGU02].

Plus récemment, d'autres auteurs ([SAU04], [SAU14], [IND10]) se sont intéressés à différents aspects du comportement du ballast (comportement sous conditions hivernales, envol des grains, tassement, bourrage) en utilisant la méthode des éléments discrets, plus à même de représenter les grains un à un (Figure 1-45). Une telle stratégie numérique est pour l'instant limitée à l'étude de la voie seule, du fait des temps de calculs très élevés. Néanmoins, l'utilisation de modèles mixtes éléments discrets/éléments finis (par exemple [VIL09], [BRE10]) semble prometteuse pour prendre en compte le caractère particulier du ballast tout en l'intégrant dans des calculs éléments finis, avec des temps de calcul raisonnables.

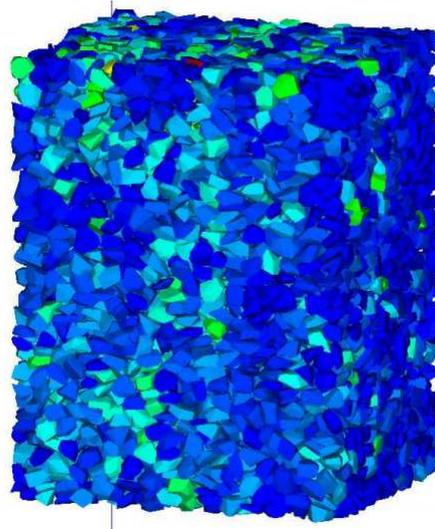


Figure 1-45 : Exemple d'échantillon de ballast modélisé en Éléments Discrets [SAU04]

### 1.6.2.3 Sol

Le comportement du sol soumis à une charge surfacique peut être calculé en résolvant les équations de la dynamique de façon analytique, bien souvent dans le domaine fréquentiel. Les auteurs considèrent alors un massif de sol infini, élastique linéaire ou viscoélastique, éventuellement stratifié [PAO06], [MAR13] (Figure 1-46).

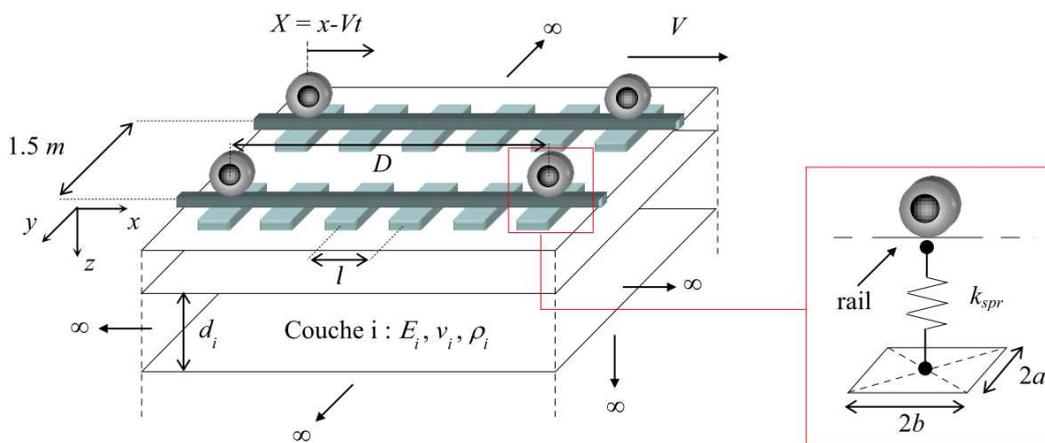
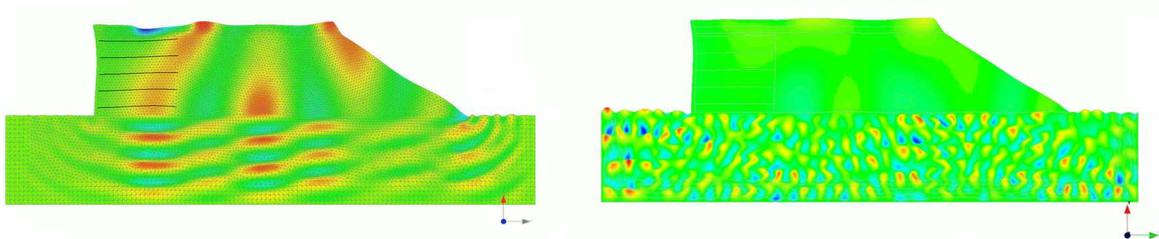


Figure 1-46 : Modèle de voie et sol adopté dans [MAR13]

Il peut aussi être modélisé en utilisant la méthode des éléments de frontières (BEM) [KOG03] pour une résolution dans le domaine fréquentiel avec des lois de comportement linéaires, ou en utilisant la méthode des éléments finis 2D ou 3D ([HAL03]). Dans ce cas, les frontières du domaine maillé doivent subir un traitement particulier pour éviter les réflexions des ondes à leur surface (éléments infinis ou frontières absorbantes), l'autre option étant de modéliser un domaine très large ne présentant de valeurs réalistes qu'en son centre. La Figure

1-47 présente à titre d'exemple une modélisation bidimensionnelle en éléments finis d'un remblai ferroviaire et du sol sous-jacent effectuée dans le cadre de cette thèse. Les frontières du domaine maillé sur la figure de gauche sont traitées avec des bandes absorbantes, tandis que les frontières sur la figure de droite ne présentent pas de traitement de ce type. Pour une sollicitation harmonique de 90 kN aux hautes fréquences (60 Hz) et pour un sol souple, les déplacements verticaux maximaux estimés varient alors entre 2,21 mm pour le calcul sans bandes absorbantes, et 0,62 mm pour le calcul prenant en compte un traitement particulier des frontières. Les déformées dans le cas des frontières non traitées ne sont pas représentatives de la propagation des ondes dans le sol. Le traitement des frontières est donc indispensable pour modéliser correctement des phénomènes vibratoires avec la méthode des éléments finis.

D'autre part, la taille des mailles doit être ajustée en fonction de la fréquence considérée, ce qui limite l'utilisation de cette méthode à des plages de fréquences restreintes (pour plus de détails se reporter à [SEM09]). Là encore, des modèles mixtes FEM/BEM ont été développés ([LOM09], [AUE08], [SEM05]) dans le but de réduire la dimension du problème, tout en permettant une résolution pour une large bande de fréquences.



*Figure 1-47 : Modélisation avec Bandes Absorbantes (à gauche) et sans (à droite)*

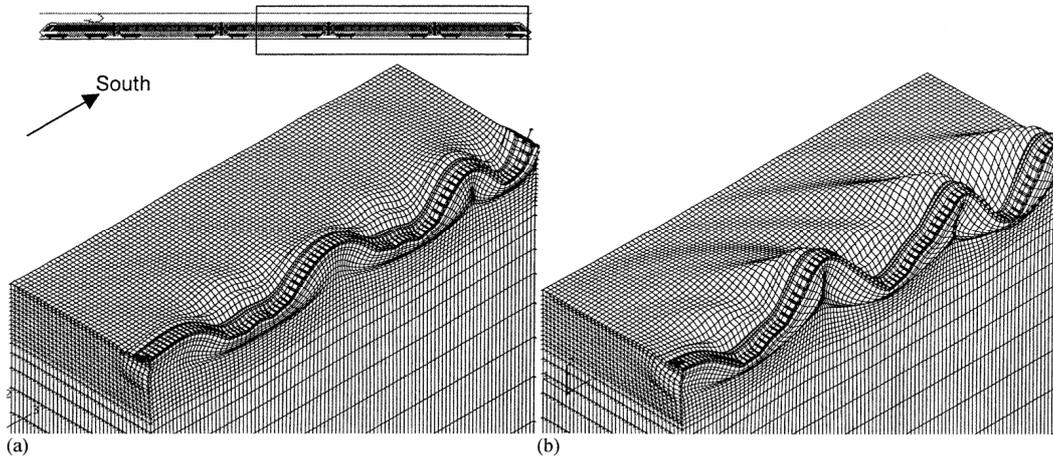
Enfin, l'utilisation de la méthode des éléments finis dans le cas de l'étude du comportement dynamique des sols, permet de considérer des lois de comportement élastiques [RÜC82] ou viscoélastiques (Figure 1-46) éventuellement non linéaires [RIC06] pour le sol.

---

### 1.6.3 Résultats et comparaison avec des instrumentations in-situ

Le but des études présentées ci-dessus est avant tout de retrouver par le calcul les déplacements et accélérations observés in situ pour des lignes classiques ([HAL03] ou LGV ([KOU09], [LOM09])). Les auteurs mettent alors en évidence des déformations très importantes de la surface du sol pour des vitesses critiques sur des sols peu raides (argiles). Celles-ci correspondent en fait à la vitesse des ondes de surface de Rayleigh ([PAO06], [HAL03]) comme le montre la Figure 1-48. Les modèles simples permettent d'observer qualitativement ces phéno-

mènes ([AUE08], [PAO06]), pour certaines vitesses et pour des points du sol situés à proximité immédiate de la voie ([HAL03]), tandis que les modèles complexes donnent également une bonne concordance quantitative (du moins pour les fréquences inférieures à 80 Hz) entre mesures in situ et prédictions [KOU09], pour le sol sous la voie mais également dans l'environnement plus lointain.



**Figure 1-48 : Niveaux de déplacements à proximité de la voie ferrée (agrandis 1000 fois) pour le passage de la tête de train sur des sols mous à des vitesses de (a) 142 km/h et (b) 204 km/h [HAL03]**

Les phénomènes associés aux fréquences élevées, relatifs au contact roue/rail, ne sont pas bien estimés par les modèles numériques de la littérature, car ils dépendent de l'état local du rail et de la roue, qu'il est difficile d'intégrer dans des modèles classiques.

Enfin, les modèles de certains auteurs [MAR13], [NGU02] ont également permis de retrouver des résultats classiques de niveaux d'accélération importants et de déconfinement dans la couche de ballast. [RIC06]

## 1.7 Conclusion

Si le fonctionnement des murs en terre armée soumis à un chargement statique est bien connu et leur dimensionnement maîtrisé, leur comportement dynamique, en particulier sous des sollicitations ferroviaires, a été peu étudié. On peut donc se demander si ces vibrations et l'augmentation des déplacements qui leur sont associées ont une conséquence sur la stabilité des ouvrages en sol renforcé, particulièrement au niveau de l'interface sol/renforcement.

En vue de proposer une analyse de cette question par la voie de la simulation numérique, nous avons cherché à caractériser les particularités de l'utilisation de la terre armée pour des lignes à grande vitesse, et à donner une idée des stratégies de modélisation numériques existantes. La littérature relative aux études numériques permettant d'étudier ce genre de problèmes a tendance à privilégier la modélisation soit du véhicule soit du massif. Cela reflète le fait que la dynamique du véhicule répond à des problématiques de mécanique et d'ingénierie des véhicules, tandis que le comportement de l'assise est avant tout l'affaire des géotechniciens. De plus, un certain nombre de difficultés de modélisation compliquent l'établissement de modèles simples et complets. Parmi ces difficultés, pour la partie géotechnique du problème, on peut citer le comportement du ballast, le choix des conditions aux limites dans le cas d'une modélisation dynamique aux éléments finis, ou encore la grande taille du domaine à étudier.

Pour analyser ces phénomènes et proposer une modélisation numérique adaptée, on s'appuie dans le chapitre suivant sur une étude qui a été effectuée au Centre d'Expérimentations Routières de Rouen sur un remblai expérimental en sol renforcé soumis à un chargement dynamique.

---

## Chapitre 2

# Comportement expérimental d'un remblai en Terre Armée



## 2.1 Introduction

Ce chapitre présente un programme d'essais effectué au Centre d'Expérimentations Routières de Rouen (CER) en 2009. Il s'agissait d'étudier le comportement d'une structure en Terre Armée de taille réelle, soumise à différents chargements dynamiques et statiques. Les recherches ont été menées par un consortium regroupant la SNCF, RFF et l'IFSTTAR. Le programme expérimental est détaillé dans [FRO08] et [SOY09], et les résultats ont fait l'objet de la thèse de Soyez [SOY09] et de différents articles relatifs à la modélisation du comportement de cette structure sous chargement statique ([BOU11], [BOU12]).

Dans cette thèse, nous avons choisi de revenir sur les résultats expérimentaux pour un chargement harmonique et de tirer des conclusions concernant spécifiquement le comportement dynamique de cette structure. Pour ce faire, nous avons composé une base de données reprenant les résultats de l'expérience menée au CER et croisé les données issues de différents capteurs, pour différentes phases de chargement. Nous présentons donc, d'une part, les résultats tirés de [SOY09], et, d'autre part, un certain nombre d'analyses originales de ces résultats, qui permettent de caractériser le comportement dynamique de l'ouvrage.

## 2.2 Présentation du remblai expérimental

La présentation qui suit reprend les éléments donnés par [FRO08] et [SOY09].

### 2.2.1 Constituants et géométrie

La structure expérimentale considérée est composée de deux parties (Figure 2-1) : à gauche un remblai en Terre Armée, dénommé « TA » dans la suite, et à droite un remblai classique, dénommé « SN » (pour « Structure Normale ») dans la suite. Les deux remblais ont été dimensionnés pour correspondre le plus possible à la norme NF P 94-270 [AFN09] et au référentiel SNCF [RFF06]. En particulier, la distance entre les deux milieux de voies a été fixée à 5 m, et la distance entre l'entraxe et le parement est égale à 3 m. Cependant des considérations expérimentales ont nécessité certains ajustements. En particulier, la hauteur du mur a été limitée à moins de 4 m alors que les ouvrages réels peuvent avoisiner la dizaine de mètres. Le critère retenu était d'avoir trois lits d'armatures en fonctionnement proche de la réalité, considérant que les vibrations devaient s'atténuer au-delà des deux premiers mètres de remblai. De plus, les coefficients de sécurité pour le dimensionnement de la partie armée ont été pris égaux à 1. Enfin, les majorations imposées par la SNCF dans le référentiel IN 0203 [SNC85], n'ont pas été prises en compte (cf. Figure 1-23).

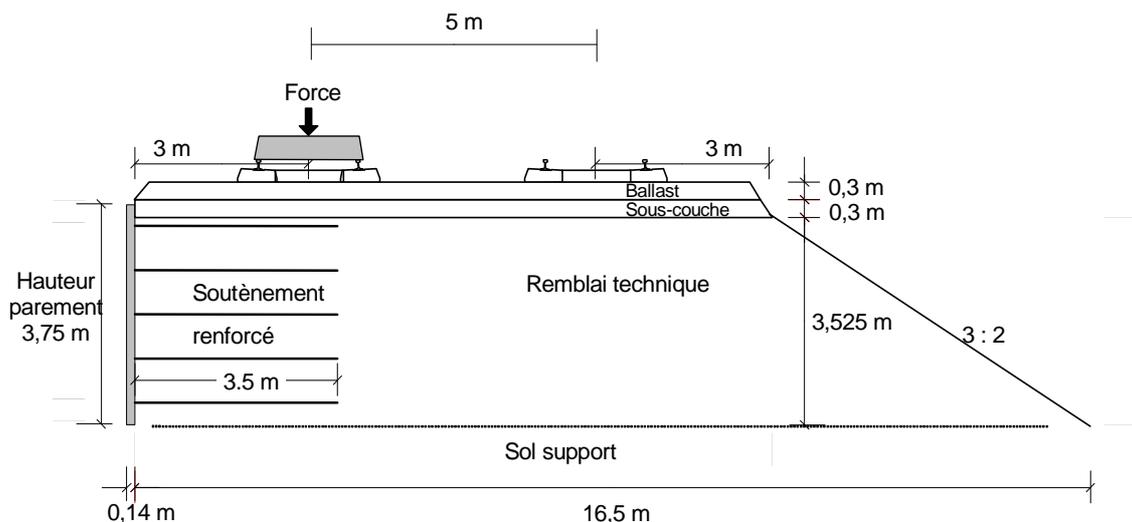


Figure 2-1 : Vue en coupe du mur expérimental (d'après [BOU12])

## Chapitre 2 : Comportement expérimental d'un remblai en Terre Armée

La structure entière fait 8 m de large et est construite dans une fosse du CER (Figure 2-2), limitée par deux murs en béton sur le premier 1,50 m de profondeur. Le remblai a été construit en dix couches successives de 37,5 cm d'épaisseur après compactage, sauf la couche supérieure qui mesure 15 cm d'épaisseur. Le compactage a été réalisé proche de l'optimum Proctor à l'aide de plaques vibrantes (Figure 2-2), avec un matériau d'humidité moyenne (au sens de la recommandation [LCP94]) lors de sa mise en œuvre ([FRO08]). Le matériau constitutif des remblais est une grave argileuse criblée à 40 mm. Sa granulométrie est caractérisée par  $d_{50} = 0,28$  mm et  $c_u = d_{60}/d_{10} = 4,86$ .



Figure 2-2 : Construction du mur expérimental dans la fosse du CER (d'après [SOY09])

Chaque remblai supporte également une sous-couche de matériau granulaire, une couche de ballast et une traverse. Les traverses sont placées perpendiculairement au parement et à mi-largeur de la structure. Ce sont des traverses monoblocs, dont les dimensions sont rappelées sur la Figure 1-35. Le ballast est un matériau lavé et concassé de classe 31,5/50 mm et la sous-couche est constituée du même matériau, mais non traité et de granulométrie 0/31,5 mm. Tous deux correspondent aux exigences définies pour les LGV dans l'IN 0091 [SNC99].

Le parement est constitué d'écailles en béton cruciformes de  $1,5 \text{ m} \times 1,5 \text{ m}$  (Figure 1-8). Quatre armatures métalliques en acier galvanisé (Figure 1-10) sont fixées à chaque écaille. Les armatures sont disposées en lits, espacés de 75 cm. Chaque armature a une longueur de 3,5 m, une largeur de 45 mm et une épaisseur de 5 mm. Chaque armature a un numéro de référence  $A_{xy}$ , où  $x$  est l'indice du lit (0 étant le lit du bas) et  $y$  le numéro de colonne. Dans ce chapitre, nous nous intéresserons en particulier aux armatures A36 et A46 comme définies sur la Figure 2-3.

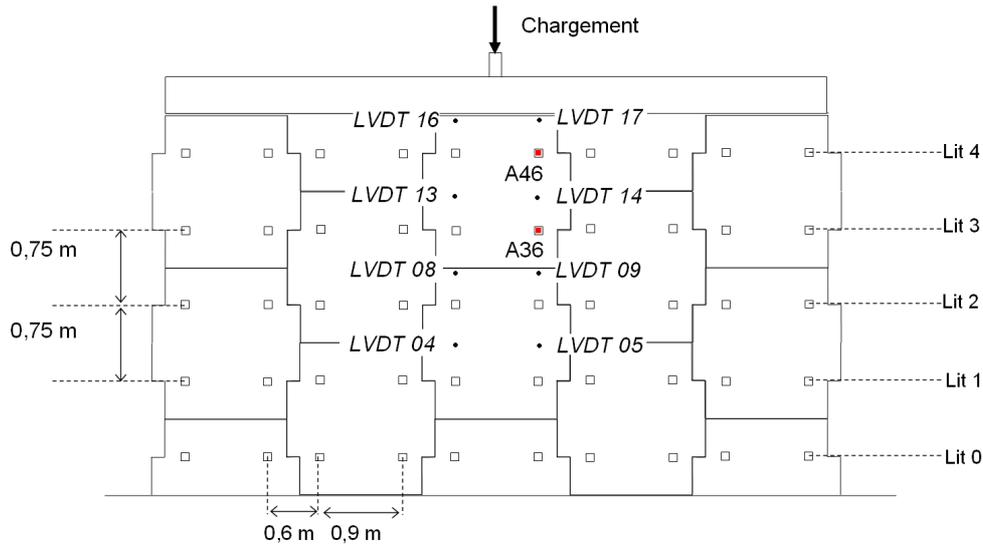


Figure 2-3 : Position des capteurs de déplacements au niveau du parement et armatures instrumentées (d'après [BOU12])

### 2.2.2 Instrumentation

La structure a été instrumentée en de nombreux points, à l'aide de différents capteurs [FRO08]. Nous détaillons ici les capteurs dont les résultats font l'objet d'une analyse détaillée dans la suite. Leurs positions sont représentées sur la Figure 2-3, la Figure 2-4 et la Figure 2-5. Les autres capteurs, situés plus profondément dans le matériau de remblai, n'ont pas permis de mettre en évidence des comportements dynamiques significatifs à ces profondeurs [SOY09].

Les capteurs de déplacement (LVDT) permettent d'enregistrer l'évolution des déplacements de l'interface sous-couche/remblai au cours du chargement. La procédure adoptée a consisté à disposer une plaque métallique à l'interface, et à placer les capteurs dans des tubes, au sein même du massif, le capteur étant relié à la plaque et au sol support par des baguettes rigides indéformables (Figure 2-4).

Des accéléromètres ont aussi été placés à proximité de cette interface (10 cm en dessous), proche du forage renfermant le capteur LVDT. Ces accéléromètres ne mesurent que les accélérations verticales. Des capteurs de contraintes verticales ont également été placés à ce niveau afin de mesurer les contraintes à proximité du lit supérieur d'armatures au cours du chargement (Figure 2-5).

Enfin, des capteurs de déformations ont été collés sur les armatures (Figure 2-5) afin de mesurer les tractions dans les armatures au cours du chargement. Des détails supplémentaires sur la localisation des capteurs, leur étalonnage et leurs caractéristiques propres sont donnés dans [FRO08] et [SOY09].

## Chapitre 2 : Comportement expérimental d'un remblai en Terre Armée

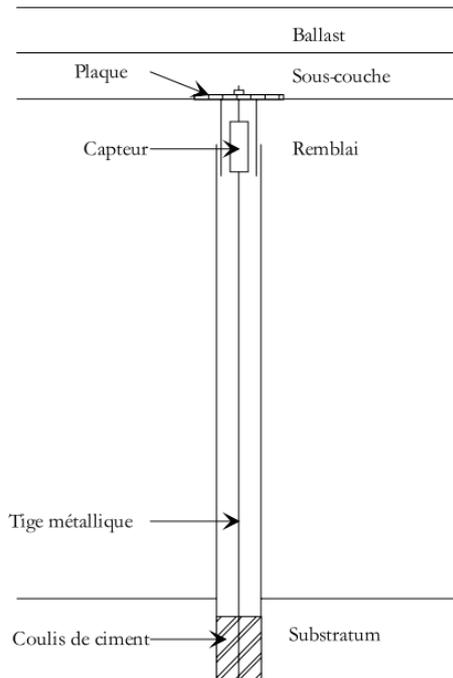


Figure 2-4 : Système de mesure des déplacements verticaux, [FRO08]

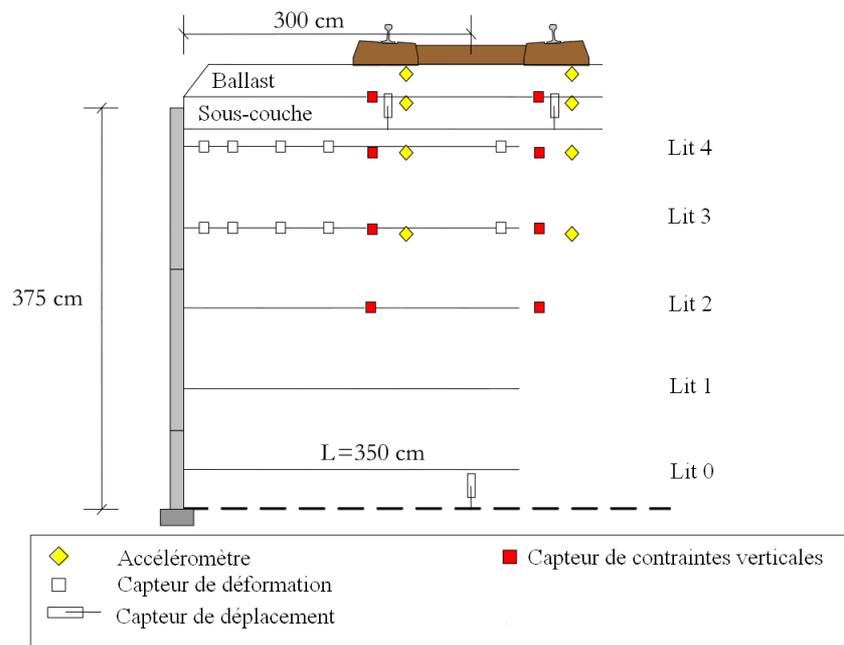


Figure 2-5 : Schéma en coupe de la répartition des capteurs dans le massif armé, d'après [FRO08]

### 2.2.3 Chargement

Le chargement sur les traverses a été appliqué à l'aide d'un vérin hydraulique appliquant une force dont l'intensité peut varier en fonction du temps (Figure 2-6). Après la construction du remblai et un premier chargement de faible amplitude destiné à stabiliser le ballast, un chargement statique de 30, 60 et 90 kN a été appliqué sur chaque traverse. Ceci a permis de caractériser le comportement de l'ouvrage sous charges statiques. Les résultats de ces essais sont présentés dans la thèse de L. Soyez [SOY09]. Ensuite, les deux remblais ont été soumis à une succession de chargements dynamiques de fréquences différentes mais d'intensité constante, le vérin ne permettant pas d'imposer un chargement plus complexe (Figure 2-7). Pour chaque essai, environ 10 000 cycles de chargement-déchargement ont été appliqués, ce qui correspond à un passage d'autant d'essieux de TGV à différentes vitesses, c'est-à-dire environ 400 rames soit 3,5 j de trafic. Ce nombre de cycles a été choisi pour pouvoir étudier les vibrations de l'ouvrage en régime établi (c'est-à-dire une fois que le régime transitoire a été dépassé) et pour avoir une moyenne des grandeurs mesurées sur une large plage de valeurs. Une autre partie de l'expérience, présentée dans [SOY09], consistait à étudier le comportement du remblai sous un très grand nombre de cycles. Pour ce cas-là, 5 000 000 de cycles ont été appliqués sur les traverses, ce qui correspond à une durée de service d'environ 5 ans, considérant le passage d'un million d'essieux par an [RFF06]. Pour ce grand nombre de cycles, c'est le comportement en fatigue de l'ouvrage que l'on cherchait à caractériser.



*Figure 2-6 : Vérin de 100 kN appliquant une charge dynamique*

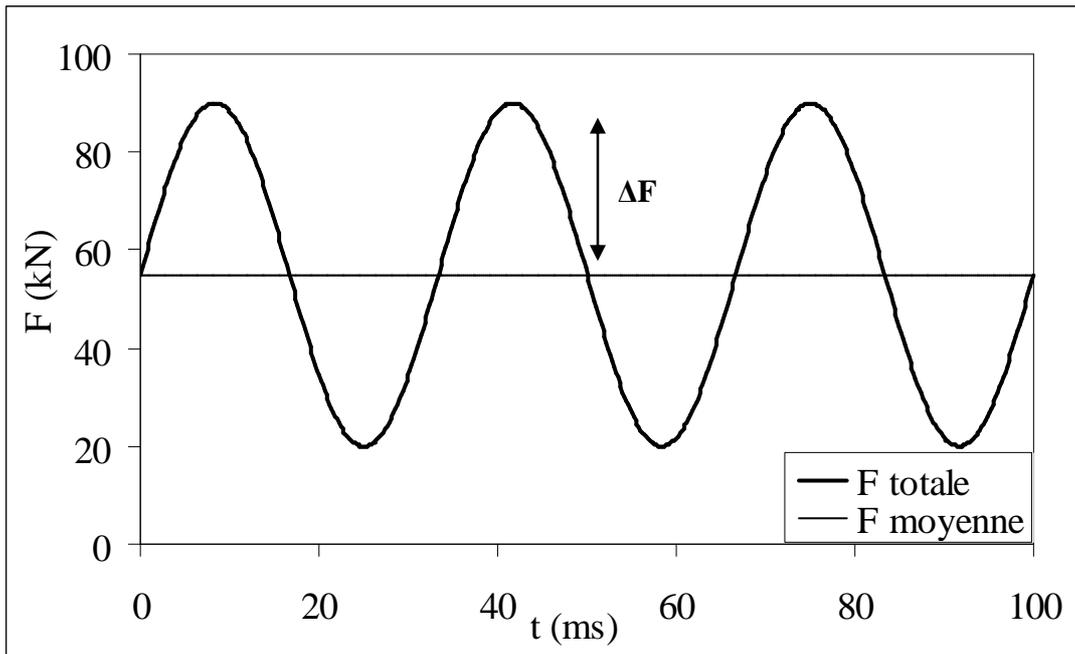


Figure 2-7 : Force totale et moyenne appliquée sur une traverse à 30 Hz.

Comme le montre la Figure 2-7 (pour trois cycles), le chargement dynamique appliqué est composé d'une force statique ( $F_{\text{moy}}$ ), correspondant à la moyenne temporelle de la force totale, et d'une partie sinusoïdale d'amplitude  $\Delta F$ . Deux séquences d'essais ont été effectuées, pour deux jeux de valeurs de  $\Delta F$  et  $F_{\text{moy}}$ , présentés dans le Tableau 2-1.

Pour chaque séquence, différentes fréquences ont été testées. Elles correspondent aux premières fréquences propres associées aux déplacements des rails lors du passage de TGV pour des vitesses comprises entre 0 et 350 km/h (cf. partie 1.5.3.2). On a choisi ici de considérer des fréquences jusqu'à 35 Hz, en admettant que les fréquences plus élevées qui correspondent aux irrégularités de contact roue/rail sont filtrées par les semelles élastomères présentes sous les attaches et par la couche de ballast.

Tableau 2-1 : Détail des séquences de chargement

séquence de chargement	f (Hz)	F moyenne (kN)	$\Delta F$ visé (kN)	$\Delta F$ réel (kN)
1	15	35	15	16
	20			17
	25			13
	30			17
	35			12
2	5	55	35	35
	15			36
	20			35
	25			28
	28			36
	30			37
	35			27

### 2.2.4 Acquisition des données

Pour chaque capteur, pour une séquence de chargement donnée et à une fréquence donnée, un échantillon de 100 cycles est enregistré. Ces cycles sont pris à différents moments, lorsque le régime transitoire est terminé, c'est-à-dire quand le signal de sortie devient périodique. La valeur moyenne de l'amplitude du signal durant ces cycles est prise comme la valeur donnée par le capteur pour le chargement considéré. On appellera valeur « incrémentale » la demi-différence des valeurs maximales et minimales enregistrées par les capteurs au cours des cycles.

Les résultats donnés dans ce chapitre sont présentés dans le domaine fréquentiel (spectres). Chaque point du spectre représente l'amplitude de la partie harmonique du signal (sa valeur « incrémentale ») enregistré par le capteur selon la procédure définie ci-avant. Dans certains cas, cette valeur incrémentale est comparée à la valeur expérimentale « statique » correspondant au chargement statique de 30 kN dont les résultats sont présentés dans [SOY09].

## 2.3 Analyse des résultats

---

### 2.3.1 Évaluation de linéarité du comportement

#### 2.3.1.1 Présentation

---

Les capteurs placés dans la structure (cf. paragraphe 2.2.2) donnent des résultats exploitables pour les deux séquences de chargement présentées dans le Tableau 2-1. Nous avons cherché à comparer les résultats issus de ces deux séquences, en les ramenant à la même amplitude.

En effet, les résultats des valeurs incrémentales présentés dans [SOY09] (contraintes, déplacements et tractions dans les armatures) ne sont pas pondérés par la force réellement appliquée par le vérin à la fréquence considérée, ce qui ne permet pas de comparer précisément les essais entre eux. On a donc normalisé les grandeurs obtenues de la manière suivante :

- on a ramené la partie dynamique de la première séquence de chargement à 35kN (c'est-à-dire en passant de 16, 17, 13, 17 et 12 kN à 35 kN).
- on a aussi ramené la partie dynamique de la deuxième séquence de chargement à exactement 35kN.

Ainsi on obtient des valeurs expérimentales « normalisées » pour une surcharge dynamique « équivalente » de 35 kN. Par exemple, dans le cas des tractions on applique la formule suivante :

$$\Delta T_{equ} = \frac{\Delta T_{mes}}{\Delta F_{app}} \times 35 \text{ kN} \quad (3.1)$$

où  $\Delta T_{equ}$  désigne l'incrément de traction équivalent,  $\Delta T_{mes}$  l'incrément de traction mesuré et  $\Delta F_{app}$  la surcharge dynamique effectivement appliquée (Tableau 2-1).

Cette normalisation a été appliquée en faisant l'hypothèse que la partie statique des grandeurs, en particulier l'état de confinement initial, n'a pas d'influence sur la valeur des incréments dynamiques.

### 2.3.1.2 Résultats

On présente dans la Figure 2-8 la comparaison des incréments de traction normalisée dans l'armature A36 pour chacune des séquences, à différentes fréquences. On présente également le spectre des incréments de déplacement vertical normalisé à l'interface sous-couche/remblai pour les deux séquences de chargement.

Les graphes présentés indiquent une bonne concordance entre les deux jeux de valeurs normalisées correspondant aux deux séquences de chargement.

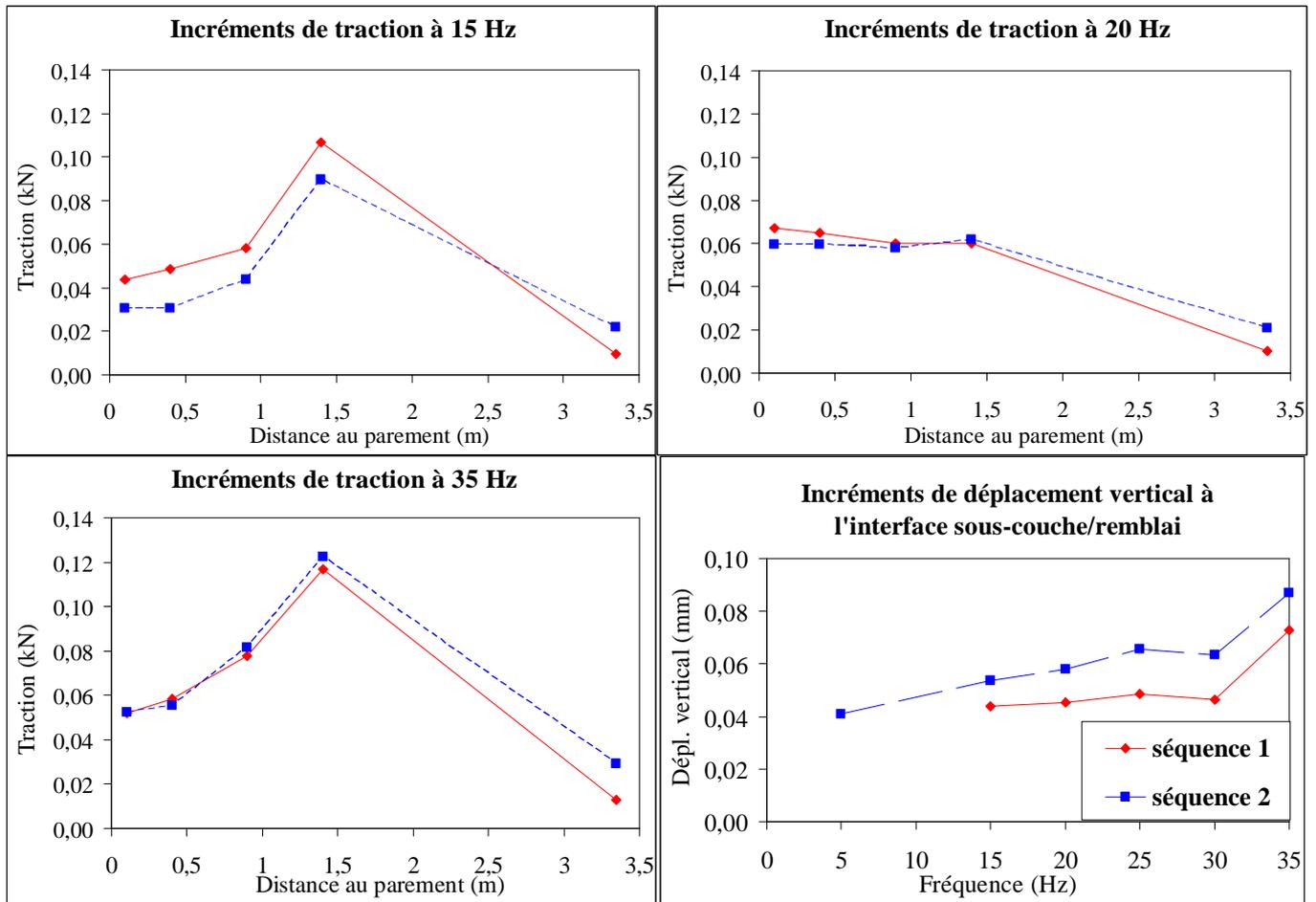


Figure 2-8 : Comparaison des incréments de traction dans l'armature A36 et des déplacements à l'interface sous-couche/remblai pour les deux séquences de chargement normalisées

### 2.3.1.3 Conclusions

Les résultats précédents montrent que l'amplitude des incréments de traction dans les armatures ainsi que les valeurs des incréments de déplacement vertical à l'interface sous-couche/remblai ne dépendent pas de la force moyenne appliquée

( $F_{moy}$  vaut 55 kN pour la deuxième séquence de chargement contre 35 kN pour la première). De plus, ils indiquent que la réponse du massif renforcé est linéaire sur la plage de surcharge dynamique considérée ( $\Delta F$  compris entre 15 et 35 kN). Ce résultat n'a pas été vérifié pour l'incrément de déplacement vertical de la traverse, à la fois à cause du poinçonnement du ballast au cours des cycles et du comportement non-linéaire du ballast constaté par de nombreux auteurs (cf. partie 1.5.1.2).

Les incréments de déplacement horizontal du parement ont uniquement été relevés lors de la deuxième séquence de chargement, ce qui ne permet pas de les comparer. Cependant, au vu du comportement linéaire des incréments de traction dans les armatures, on peut raisonnablement penser que ces incréments de déplacement varient également linéairement avec la surcharge dynamique appliquée.

Ainsi, le recalcul des valeurs expérimentales pour les ramener à un chargement équivalent permet de conclure que le comportement du massif (sauf dans le ballast) est linéaire et l'amplitude des incréments mesurés proportionnelle à la surcharge dynamique appliquée, quelle que soit la force statique (ie le confinement statique) appliquée ou la fréquence du signal. En outre, les résultats montrent que le faible nombre de cycles par fréquence (10 000) ne fatigue pas le matériau. Enfin, ceci permet d'avoir un jeu de valeurs expérimentales normalisées fiable, que l'on pourra comparer aux valeurs issues d'un modèle numérique.

---

### 2.3.2 Calcul des déplacements verticaux à partir des accélérations

#### 2.3.2.1 Présentation

---

Du fait de la difficulté d'insérer des capteurs de déplacement au sein du massif (cf. Figure 2-4), il n'avait pas été possible d'obtenir un nombre significatif de valeurs expérimentales de déplacements verticaux, en particulier à l'interface ballast/sous-couche. Cependant, les accéléromètres ont permis de collecter de nombreuses données, pour chaque fréquence. De plus, dans le cas d'un chargement (ici d'une surcharge) harmonique en régime établi de fréquence connue, il est très facile de calculer les incréments de déplacement correspondant aux accélérations enregistrées. En effet, en régime établi pour un signal harmonique, l'accélération mesurée dans une direction peut s'écrire :

$$a(t) = a_m \sin(\omega t) \quad (3.2)$$

et le déplacement correspondant dans la même direction est également harmonique :

$$d(t) = d_m \sin(\omega t + \varphi) \quad (3.3)$$

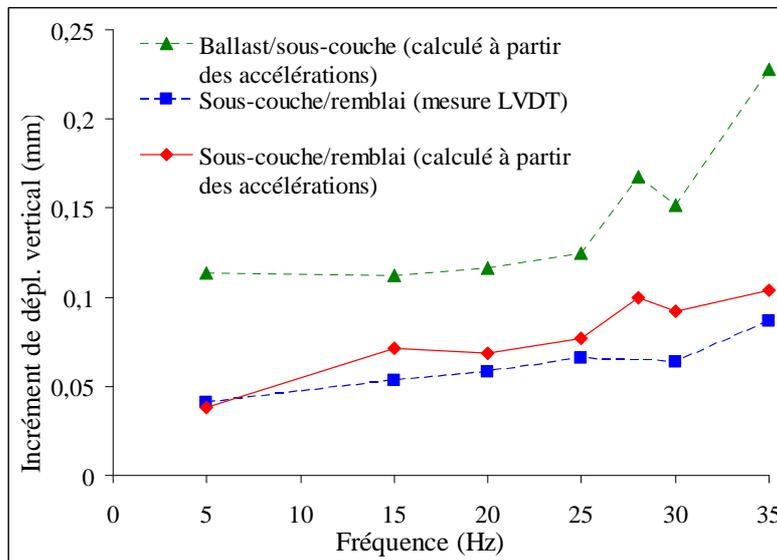
avec  $d_m$  et  $\varphi$  à déterminer.

Sachant que l'accélération est la dérivée seconde du déplacement, et puisque l'on s'intéresse aux incréments de déplacement relatifs à la surcharge, on a alors la relation :

$$d_m = \frac{a_m}{\omega^2} \quad (3.4)$$

Différentes techniques sont disponibles pour des cas de chargements plus complexes (cf. par exemple [BOO25]), mais leur emploi n'est pas justifié ici, étant donné que l'on considère uniquement de petites variations harmoniques dans un milieu linéaire.

### 2.3.2.2 Résultats



**Figure 2-9 : Incréments de déplacement vertical à l'interface sous-couche/remblai pour la seconde séquence de chargement**

La Figure 2-9 montre qu'il existe une bonne corrélation entre les incréments de déplacement vertical mesurés et calculés à partir des accélérations verticales, au niveau de l'interface sous-couche/remblai, comme l'avait déjà noté Soyez [SOY09]. La différence entre les deux valeurs peut s'expliquer par le fait que l'accéléromètre et la plaque métallique reliée au LVDT ne sont pas placés exactement au même point : le premier est à 70 cm de profondeur, la deuxième à 60 cm (cf. 2.2.2). Par ailleurs, le fait d'utiliser une plaque pour mesurer les déplacements de l'interface peut gommer des variations locales au profit d'une moyenne des déplacements sur l'ensemble de la plaque, ce qui peut expliquer que la courbe des valeurs relevées par le LVDT ait une pente plus lisse que celle des valeurs calculées à partir des accélérations. Ce phénomène sera également mis en évidence par le modèle numérique présenté dans le Chapitre 3.

En procédant de la même manière et connaissant la valeur des accélérations à l'interface ballast/sous-couche (à -30 cm), on peut estimer les variations de l'incrément de déplacement vertical à ce niveau avec la fréquence.

En revanche, le calcul des déplacements à partir des accélérations ne permet pas de retrouver les incréments de déplacement vertical mesurés au niveau du haut de la traverse, certainement du fait d'hétérogénéités locales du ballast comme cela a été constaté par [SOY09].

### 2.3.2.3 Conclusion

---

La bonne concordance entre les valeurs expérimentales des incréments de déplacement vertical et ceux calculés à partir des accélérations, au niveau de l'interface sous-couche/remblai, permet de consolider le jeu de données expérimentales et de valider les valeurs des déplacements données par les deux capteurs. Par cette méthode, on a aussi pu calculer les incréments de déplacement estimés à l'interface ballast/sous-couche, qui sont deux fois plus importants que ceux constatés à l'interface sous-couche/remblai. Le profil spectral de ces incréments est en revanche similaire, avec néanmoins un phénomène de résonance qui semble apparaître pour le ballast à 35 Hz.

---

## 2.3.3 Réponse en déplacements, contraintes et tractions

### 2.3.3.1 Introduction

---

Avec ce jeu de données expérimentales, on est maintenant en mesure de s'intéresser au comportement dynamique du remblai renforcé. Un bon moyen d'analyser une structure sous chargement dynamique est de représenter la réponse des différents capteurs dans le domaine fréquentiel (analyse des spectres de réponse). Il est alors possible de déterminer certaines caractéristiques dynamiques propres à la structure, comme la fréquence de résonance, les modes de déplacements associés ou encore l'amortissement propre à la structure. De plus, connaissant les fréquences associées aux vitesses des trains, il sera possible de prédire la réponse de la structure en fonction de la vitesse de passage du train, notamment la variation de contraintes, de tractions dans les barres, de déplacement du parement ou encore de tassements élastiques lors du passage du TGV.

Comme présenté dans la partie 2.3.1, les valeurs expérimentales normalisées pour un chargement équivalent, sont tracées en fonction de la fréquence de la sollicitation appliquée. Dans la Figure 2-10 à la Figure 2-14 ci-après, les résultats présentés correspondent au chargement sur la traverse située sur le remblai renforcé (TA) ou sur la traverse située sur le remblai ferroviaire classique (SN).

Le cas échéant, les résultats issus des sollicitations dynamiques sont également comparés aux résultats issus de la sollicitation statique à 60 kN, qui fournit en première approximation une valeur de référence à 0 Hz pour le spectre. Ceci permet de calculer le coefficient d'amplification dynamique pour chaque spectre de valeurs expérimentales.

Ces résultats sont également présentés dans [SOY09], cependant l'auteur ne présente pas les valeurs normalisées et les spectres de réponse ne sont donc pas tout à fait les mêmes.

### 2.3.3.2 Incréments de contrainte verticale

Le spectre des incréments de contrainte verticale à l'interface sous-couche/remblai est présenté Figure 2-10. Les données expérimentales pour les contraintes dans le sol ne sont disponibles qu'à ces profondeurs. On constate qu'une résonance semble apparaître pour les contraintes pour une fréquence de 28-30 Hz. Le coefficient d'amplification comparé au chargement statique de 30 kN est alors de 2,5 environ.

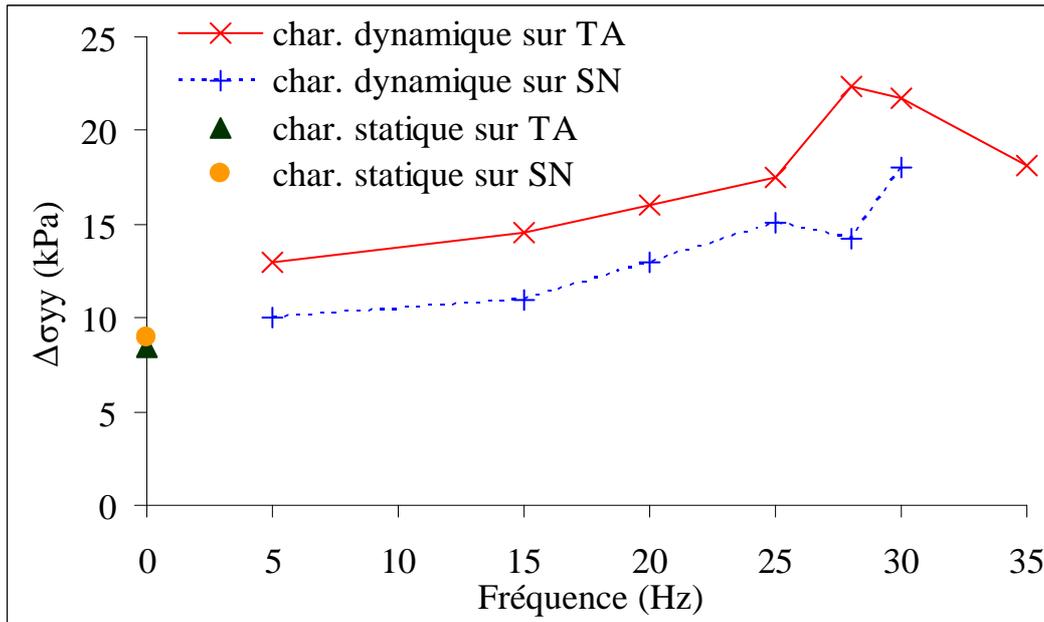


Figure 2-10 : Spectre des incréments de contrainte verticale à l'interface sous-couche/remblai au droit de la traverse

### 2.3.3.3 Incréments de traction

Les incréments de traction en différents points de l'armature 36 pour un chargement sur TA sont présentés dans la Figure 2-11, tandis que le spectre de l'incrément moyen sur le premier 1,50 m de l'armature est présenté Figure 2-12. L'étude du spectre des tractions moyennes permet de mieux appréhender les phénomènes de résonance à l'échelle de l'armature entière.

On constate que la traction moyenne varie fortement avec la fréquence du signal harmonique, même dans le cas où le chargement est effectué sur la Structure Normale (c'est-à-dire loin des armatures) : on note dans ce cas une augmentation significative de la traction à proximité du parement et une résonance à 30 Hz.

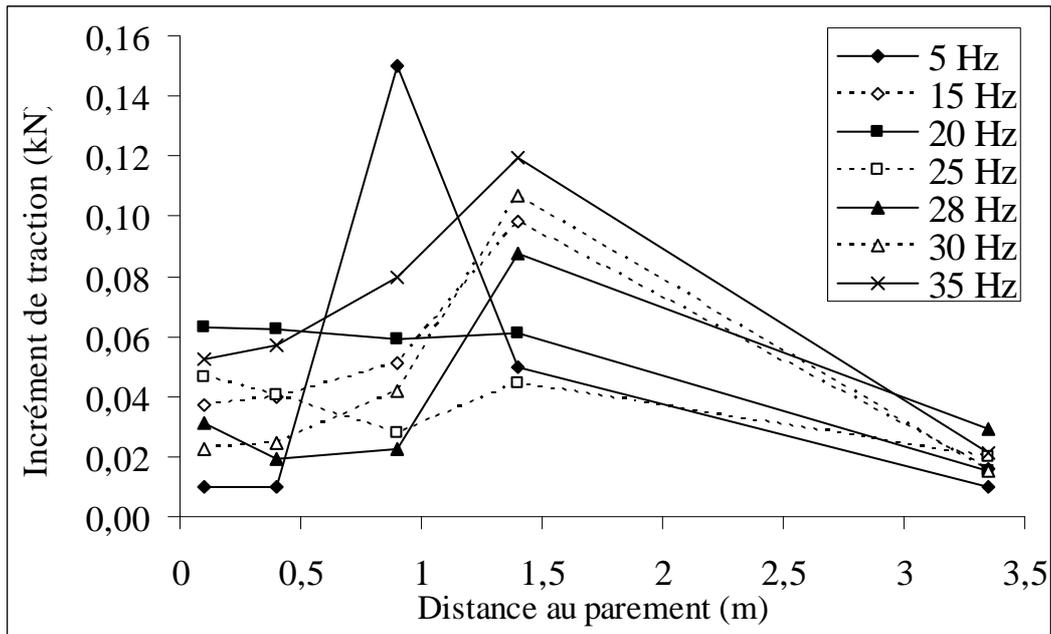


Figure 2-11 : Incréments de traction dans l'armature 36 pour une sollicitation sur la traverse TA

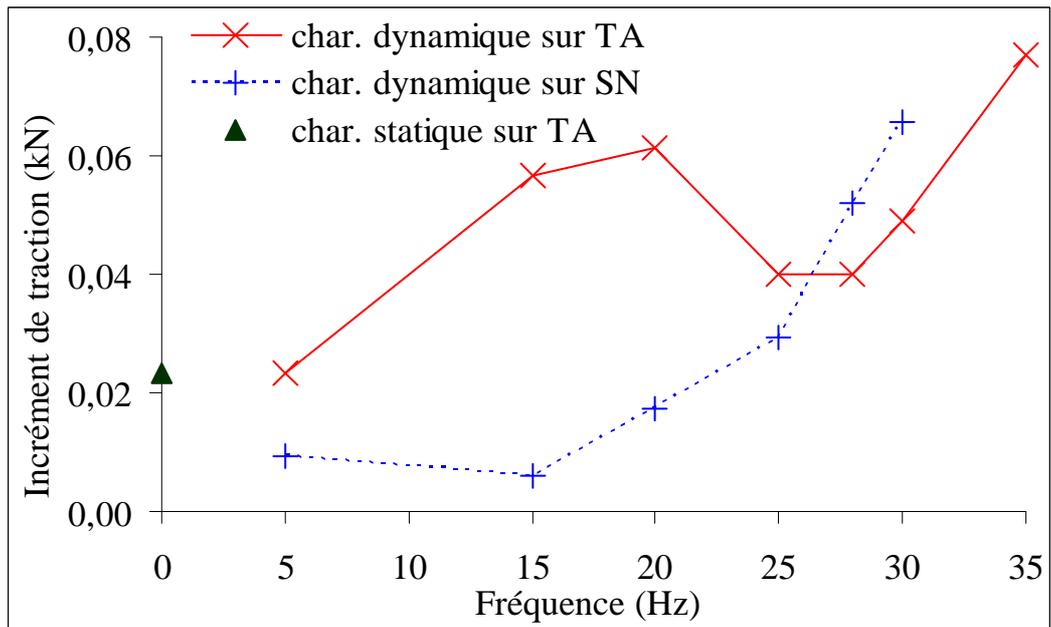


Figure 2-12 : Moyenne de la traction incrémentale sur le premier 1,5 m de l'armature 36. (La valeur à 0,9m pour 5 Hz n'est pas prise en compte)

### 2.3.3.4 Incréments de déplacement

Les incréments de déplacement horizontal du parement sont présentés dans la Figure 2-13 et la Figure 2-14. Les incréments de déplacement vertical à l'interface sous-couche/remblai et ballast/sous-couche ont déjà été présentés sur la Figure 2-9 et la Figure 2-10.

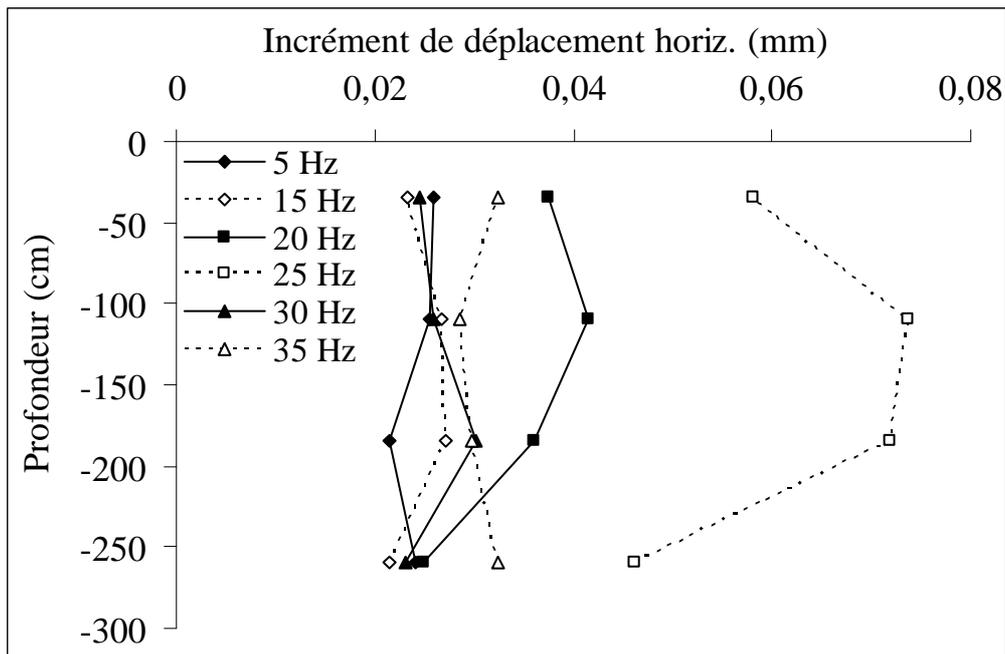


Figure 2-13 : *Incrément de déplacement horizontal du parement*

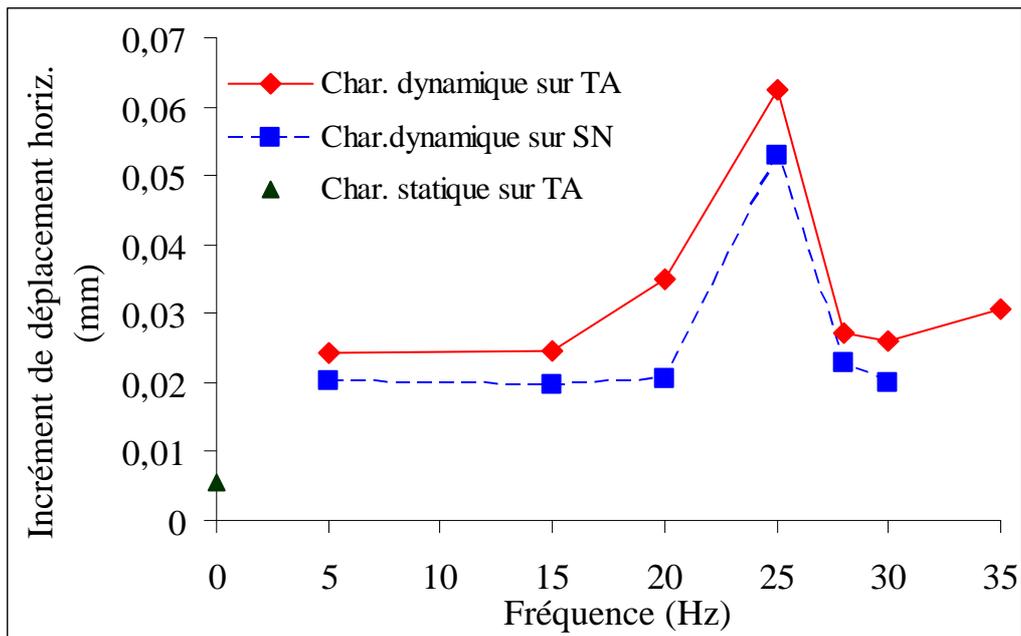


Figure 2-14 : *Moyenne des incréments de déplacement sur les 2,6 m supérieurs*

Les déplacements du parement présentent une résonance à 25 Hz environ, pour un coefficient d'amplification de 2,5. Cependant, l'amplitude de ces déplacements, y compris à la résonance, n'excède pas 0,06 mm, ce qui est insignifiant en termes de comportement à l'état de service.

Les incréments de déplacement vertical ont également une faible valeur, de l'ordre du dixième de millimètres. Cependant on ne peut établir un spectre d'amplification centré sur une seule fréquence. Ceci s'explique sans doute par la

proximité avec des couches de matériaux de caractéristiques mécaniques différentes (y compris le ballast, qui possède un comportement tout à fait spécifique, comme rappelé dans le paragraphe 1.5.1.2). Ainsi, les fréquences et modes de déplacement des couches de matériaux de la voie (ballast et sous-couche) peuvent ne pas être associés aux modes de déformations globaux de la structure entière. Considérant que l'objet de cette thèse n'est pas d'étudier les matériaux constitutifs de la voie, mais au contraire le remblai renforcé, nous ne chercherons pas à caractériser de manière précise ces phénomènes de vibrations de la seule voie ferrée.

---

### 2.3.4 Étude du coefficient d'amortissement

Cette section est consacrée à la définition de l'amortissement et à sa caractérisation dans le cas du remblai expérimental du CER, sur la base des résultats présentés par Soyez.

#### 2.3.4.1 Notion d'amortissement

---

Lorsqu'un matériau est soumis à une sollicitation dynamique quelconque, une partie de l'énergie mécanique appliquée est dissipée directement au sein du matériau et ne dépend pas de la géométrie de la structure ou de la surface du front d'onde. Cette perte d'énergie est appelée de façon générique « amortissement ». Cet amortissement intègre de nombreux phénomènes (dissipation sous forme de chaleur, de micro-frottements, de déformations d'origine plastique...). Cependant, des mesures expérimentales à l'échelle d'un échantillon ou d'un ouvrage permettent de calculer un coefficient d'amortissement, appelé ici  $D$ , qui caractérise la dissipation du système étudié.

Par exemple, un échantillon de sol soumis à une sollicitation dynamique sinusoïdale (cycle fermé) conduit à la courbe efforts-déformation de cisaillement de type hystérésis représentée sur la Figure 2-15, où  $OA$  représente la courbe de premier chargement et  $AB-BA$  la courbe de chargement déchargement en cycle fermé.

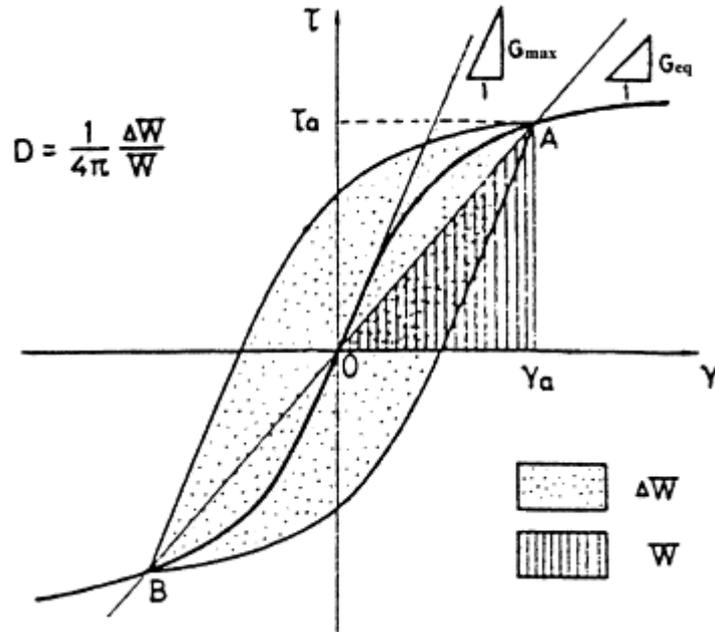


Figure 2-15 : Boucle d'hystérésis sous chargement dynamique [PUZ00]

On définit  $D$ , le coefficient d'amortissement critique tel que :

$$D = \frac{\Delta W}{4\pi W} \quad (3.5)$$

où  $\Delta W$  est l'énergie dissipée sur un cycle (aire de la boucle d'hystérésis) et  $W$  l'énergie totale du système (aire du triangle  $OAgamma_a$ ). Cette définition de l'amortissement permet de modéliser les phénomènes dissipatifs par un terme d'amortissement visqueux proportionnel à la vitesse du système (cf. équation (3.6)).

Par ailleurs, on constate expérimentalement [SEM09] que pour les sols, le coefficient d'amortissement critique  $D$  est le même quelle que soit la fréquence de sollicitation.

### 2.3.4.2 Méthode de caractérisation in-situ

Pecker [PEC14] propose une méthode de caractérisation du coefficient d'amortissement critique pour des ouvrages réels. Nous présentons ici cette méthode et nous présenterons les résultats obtenus dans le paragraphe suivant.

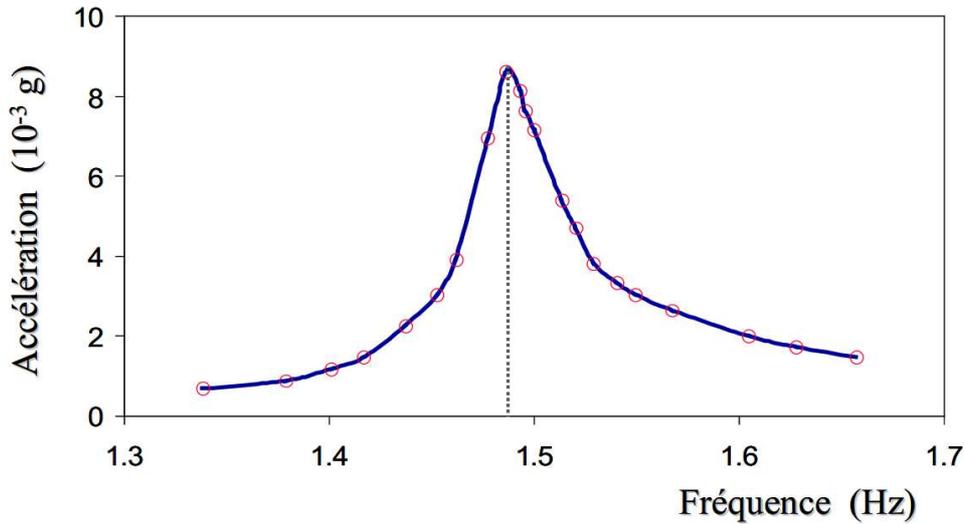


Figure 2-16 : Spectre du premier mode de vibrations de la bibliothèque de Caltech [PEC14]

Pecker [PEC14] reprend une étude effectuée sur la bibliothèque de l'université de Caltech (Californie). Ce bâtiment a été instrumenté puis sollicité à l'aide de vibreurs harmoniques à des fréquences proches de sa fréquence fondamentale et deux séismes l'ont également fait osciller. Ces sollicitations ont permis d'étudier le spectre de réponse en accélération de cette structure, dont le premier mode est donné sur la Figure 2-16. L'enregistrement permet de caractériser une résonance à 1,49 Hz pour un coefficient d'amplification de plus de 8. Considérant que, pour ce mode, la structure se comporte comme un oscillateur visco-élastique à un degré de liberté, on peut approximer que la réponse en déplacements de l'ouvrage réel est la solution de l'équation différentielle suivante, en régime établi:

$$\ddot{u} + 2D\omega_0\dot{u} + \omega_0^2u = \frac{A\sin(\omega t)}{m} \quad (3.6)$$

où  $u$  désigne le déplacement du système dans la direction considérée,  $k$  la raideur du système mécanique équivalent,  $m$  sa masse,  $D$  le coefficient d'amortissement critique à déterminer,  $A$  l'amplitude de la force harmonique appliquée (le mode considéré),  $\omega$  sa pulsation et  $\omega_0$  la pulsation propre définie par :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (3.7)$$

La solution de l'équation précédente est donnée par :

$$u(t) = |H(\omega)| \frac{A}{m} \sin(\omega t + \arg\{H(\omega)\}) \quad (3.8)$$

avec

$$H(\omega) = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i2D\omega\omega_0} \quad (3.9)$$

En représentant les variations du module de  $u(t)$  à proximité de la pulsation propre, on cherche alors à faire coïncider courbe théorique et résultats expérimentaux. La meilleure courbe permet alors d'approximer le coefficient d'amortissement critique  $D$ .

L'approximation de la valeur numérique de  $D$  peut s'effectuer par deux lectures graphiques :

- soit par la lecture de l'amplitude des déplacements à la résonance (c'est à dire pour  $\omega \approx \omega_0$ ) et celle sous sollicitation statique (à  $\omega = 0$ ), la théorie donnant :

$$2D = \frac{u(\omega = 0)}{u(\omega \approx \omega_0)} \quad (3.10)$$

- soit par la lecture de la bande passante, laquelle étant caractérisée par les pulsations  $\omega_2$  et  $\omega_1$  pour lesquelles les valeurs des déplacements sont supérieures au déplacement à la résonance divisé d'un facteur  $2^{1/2}$ .

On a alors :

$$|\omega_2 - \omega_1| = 2D \quad (3.11)$$

Les résultats de l'expérimentation de vibrations de la bibliothèque sont présentés dans le Tableau 2-2 :

Tableau 2-2 : Amortissements mesurés pour la bibliothèque de Caltech [PEC14]

Excitation	Accélération Toit (g)	Mode fondamental	
		Période (s)	Amortissement (%)
Générateur Vibrations	$3.10^{-3}$ à $17.10^{-3}$	0.66 - 0.68	0.7 - 1.5
Lytle Creek	0.035	0.71	2.2
San Fernando	0.348	0.98	7.0

Ces résultats indiquent une grande différence (facteur 2) entre les deux valeurs d'amortissement données par les deux méthodes précédemment présentées. De plus, on constate que les valeurs d'amortissement sont fonction de l'intensité des accélérations imposées à la structure : plus les vibrations sont importantes, plus l'amortissement est élevé. Cependant, on rappelle que ces valeurs sont propres à une structure rigide et que l'amortissement dans les sols est généralement plus important [PEC14].

#### 2.3.4.3 Valeur expérimentale

En appliquant la méthode décrite au paragraphe précédent, on peut estimer l'amortissement du remblai en étudiant le spectre des incréments de déplacement horizontal moyen du parement (Figure 2-17). La méthode du rapport du déplacement statique sur le déplacement à la résonance donne un facteur d'amortissement de 4,4 % tandis que la méthode de la bande passante, basée sur la superposition du spectre théorique avec le spectre expérimental donne un coefficient d'amortissement de 9 % pour une fréquence de résonance de 24,5 Hz. La différence de valeurs entre les deux méthodes, également présente dans l'exemple précédent, est expliquée par le fait que le spectre théorique ne suit pas parfaitement le spectre expérimental, en particulier pour les faibles fréquences.

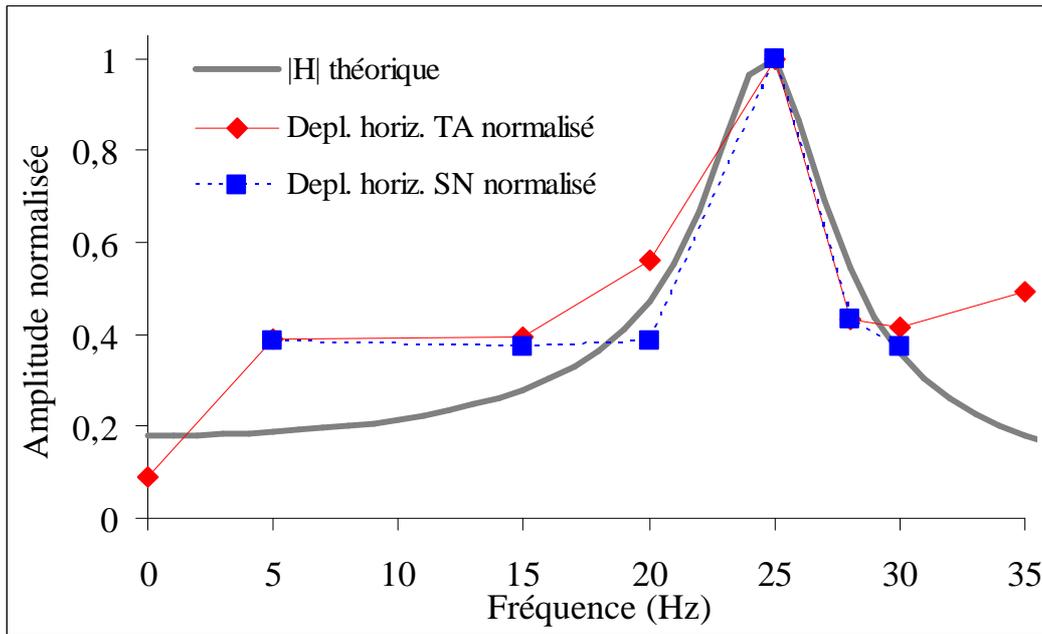


Figure 2-17 : Incréments moyens de déplacement horizontal du parement et module de la fonction de transfert théorique associée

On a donc obtenu une plage de valeurs tirées de l'expérience pour l'amortissement, qui permettra de caler un futur modèle numérique pour modéliser le comportement de remblais en terre armée sous chargement ferroviaire.

### 2.3.5 Essai d'analogie avec des méthodes de génie parasismique

On peut se demander s'il existe un critère simple permettant de prédire ces phénomènes de résonance, comme il en existe en ingénierie parasismique. Le Tableau 2-3 présente la plage de longueurs d'ondes de compression ( $\lambda_p$ ) et de cisaillement ( $\lambda_s$ ) estimées du matériau remblai pour les fréquences étudiées. Pour chaque fréquence, on propose une plage de valeurs de longueur d'onde, pour tenir compte des variations de rigidité du massif avec la profondeur constatées par différents essais expérimentaux et prises en compte dans les études numériques qui seront présentées en détail dans le chapitre suivant.

Tableau 2-3 : Longueurs d'ondes associées au remblai

f (Hz)	5	10	15	20	25	30	35
$\lambda_p$ (m)	62,3-86,6	31,2-43,3	20,8-28,9	15,6-21,7	12,5-17,3	10,4-14,4	8,9-12,4
$\lambda_s$ (m)	33,3-46,3	16,7-23,2	11,1-15,4	8,3-11,6	6,7-9,3	5,6-7,7	4,8-6,6

En sismique, il est d'usage d'estimer la résonance d'une couche uniforme de matériau en comparant la longueur d'onde de la sollicitation ( $\lambda_s$ ) avec la longueur d'onde relative à la fréquence propre. Un critère usuel est de prendre cette dernière égale à  $4H$ , où  $H$  désigne la hauteur de la couche considérée. La résonance autour de 25 Hz mise en évidence ici pour les déplacements horizontaux

ne coïncide pas avec ce critère. Les effets tridimensionnels, ainsi que le fait que la sollicitation soit locale et non comparable avec une onde de cisaillement sismique, plane et se propageant de bas en haut, ne permettent pas de ramener l'étude des vibrations ferroviaires dans le massif à un problème usuel en sismique.

## 2.4 Conclusion

Les résultats présentés en termes d'incrément de contrainte, de traction dans les armatures et de déplacement indiquent une variation importante de ces grandeurs en fonction de la fréquence de la sollicitation (donc de la vitesse du train) pour une amplitude de chargement constante. On identifie ainsi deux fréquences de résonance vers 25 Hz et 30 Hz, le premier plutôt caractérisé par un déplacement horizontal du parement dans sa partie supérieure, le second visible pour les contraintes verticales à l'interface sous/couche remblai. Dans les deux cas, le coefficient d'amplification par rapport au chargement statique est de l'ordre de 2,5. Une autre fréquence de résonance détectée à partir des déplacements verticaux à l'interface sous-couche /remblai semble exister au delà de 35 Hz mais les expériences n'ont pas étudié cette zone de fréquence.

Il peut également exister d'autres modes que ceux relevés, par exemple au niveau du parement, pour des fréquences plus élevées. Cependant ces derniers seront certainement beaucoup moins excités, du fait que les fréquences caractéristiques du passage du TGV sont comprises entre 0 et 35 Hz.

Par ailleurs, il n'apparaît pas possible d'utiliser un critère issu des méthodes d'ingénierie parasismique, à cause des effets tridimensionnels et du fait que la sollicitation est très différente d'une onde de cisaillement sismique, à cause de son caractère très localisé.

Pour cette raison, dans le Chapitre 3 nous nous intéresserons à la modélisation numérique en 3D du remblai renforcé, les spectres de réponse expérimentaux permettant de caler le modèle numérique. Comme les données ont été mesurées pour chaque fréquence, cette grande quantité de résultats va fortement contraindre les valeurs des paramètres du modèle (modules d'élasticité, valeur du coefficient d'amortissement...).

Par ailleurs, la variation des incréments de traction dans les renforcements avec la fréquence est très importante bien que leur amplitude soit très faible devant la traction à la fin de la construction du remblai. Cette variation demeure difficile à expliquer simplement, étant donné que celle-ci dépend de la distribution locale des contraintes autour de l'interface barre/remblai à un instant donné : cette question fait l'objet d'une discussion détaillée dans le Chapitre 4.



---

# Chapitre 3

## Établissement d'un modèle numérique



## 3.1 Introduction

Dans ce chapitre, la structure présentée dans le chapitre précédent est modélisée en trois dimensions à l'aide du code de calcul par éléments finis CESAR-LCPC. Ce code a été développé par l'Institut Français des Sciences et Technologies des Transports, de l'Aménagement et des Réseaux (IFSTTAR) depuis les années 1980 [HUM05]. Le programme dispose de plusieurs modules de simulation, en fonction du problème à traiter. Pour la modélisation dynamique, nous avons tout d'abord testé les modèles LINH et LINC qui permettent d'étudier une structure en régime harmonique établi (respectivement sans et avec amortissement). Bien que ces modules semblent pertinents pour modéliser la surcharge dynamique appliquée dans le cas de l'expérience du CER (cf. 2.2.3), ils sont en fait limités en termes de temps de calcul, car ils ne peuvent pas faire appel au solveur multi-frontal disponible dans d'autres modules de CESAR. C'est pourquoi nous avons utilisé le module DYNI, qui calcule la réponse d'une structure pour un chargement dynamique par intégration directe [LCP06].

Le module DYNI résout l'équation fondamentale de la dynamique :

$$[M] \{\ddot{U}(t)\} + [C] \{\dot{U}(t)\} + [K] \{U(t)\} = \{P(t)\} \quad (4.1)$$

où  $K$ ,  $M$  et  $C$  sont les matrices de rigidité, de masse et d'amortissement et  $\{U(t)\}$  et ses dérivées temporelles représentent les vecteurs déplacements, vitesses et accélérations nodales. Enfin  $\{P(t)\}$  représente les charges appliquées.

La résolution numérique de l'équation (4.1) est basée sur l'algorithme de Newmark avec des paramètres choisis pour être inconditionnellement stable. La robustesse de l'algorithme a été testée (voir par exemple [HUG87]) ; il présente cependant une dissipation numérique qui tend à atténuer les modes aux hautes fréquences.

Cependant, le but de la modélisation est ici d'établir la réponse de la structure sous sollicitation harmonique, pour des fréquences faibles, inférieures à 40 Hz. Dans ce chapitre, nous appellerons incrément de réponse l'amplitude de la réponse harmonique. Cette réponse harmonique s'ajoute aux réponses constantes dues aux parties permanentes du chargement. On ne modélise avec DYNI ni la construction du remblai, ni la partie statique du chargement. Ces phénomènes pourront être modélisés séparément par un calcul statique et une reprise des résultats, comme on le verra dans le prochain chapitre.

Les déplacements, vitesses et accélérations initiales sont pris nuls à l'instant initial, puis une force sinusoïdale est appliquée sur la traverse pendant un nombre de cycles suffisant pour atteindre le régime d'oscillations harmoniques forcées. Il a été établi théoriquement dans [PEC14] et vérifié numériquement que 10 cycles étaient suffisants pour atteindre ce régime dans le problème qui nous intéresse.

## 3.2 Hypothèses de modélisation

Dans le but de proposer un modèle tridimensionnel relativement simple, nous avons choisi une loi de comportement visco-élastique pour chacun des matériaux, de sorte que la réponse de la structure entière, pour une fréquence fixée, soit linéaire avec l'amplitude du signal appliqué. Ce choix est justifié par les constatations expérimentales présentées dans le chapitre précédent. Les paramètres du modèle sont détaillés dans les paragraphes qui suivent.

---

### 3.2.1 Paramètres matériaux

#### 3.2.1.1 Ballast et sous-couche

---

Nous avons décidé de modéliser le ballast et la sous-couche comme un continuum visco-élastique, ce qui constitue une simplification majeure du comportement réel de ce matériau. En effet, beaucoup d'auteurs (cf. 1.5.1.2) mettent en évidence les hétérogénéités locales, les non-linéarités... au sein du ballast, spécialement sous chargement dynamique. Cependant, dans le cas de la modélisation de la structure expérimentale du CER, nous avons décidé de réduire au maximum la complexité numérique de cette couche, étant donné que notre étude porte principalement sur le comportement du massif renforcé.

Même dans le cas de ce modèle simplifié, le choix des paramètres élastiques pour ce matériau fait débat. En effet, des auteurs tels que [BOU12], [SOY09] ou [BEN13] proposent de considérer un module d'Young élevé, de l'ordre de 100 ou 150 MPa pour les simulations numériques. Or, l'expérience du CER décrite dans le chapitre précédent donne des valeurs de déplacement vertical de la traverse et de l'interface ballast/sous-couche qui correspondraient davantage à un module d'Young de l'ordre de 15 MPa. Pour choisir un paramètre pertinent, nous nous sommes finalement appuyés sur des données expérimentales issues du projet européen INNTRACK [INN09] qui donne des valeurs de modules d'Young du ballast pour un cas de chargement simplifié, comparable aux sollicitations dynamiques appliquées au remblai expérimental construit au CER.

Le projet INNTRACK [INN09] est un projet de recherche européen sur les infrastructures ferroviaires qui a été mené entre 2006 et 2009 et dont un des objectifs intermédiaires était de caractériser les paramètres élastiques du ballast et de la sous-couche. Pour ce faire, une cuve expérimentale a été construite par le Département de Structures Ferroviaires de l'Université Technique de Prague, dans laquelle on a constitué des structures correspondant à différentes configurations de sous-couche et de ballast. Différents types de chargement ont été appliqués à ce banc d'essai, au moyen d'un système rail/traverses (Figure 3-1). L'utilisation de cette cuve expérimentale permet d'améliorer l'homogénéité de

la couche de ballast et du chargement correspondant, afin de considérer ce matériau comme un milieu homogène continu.

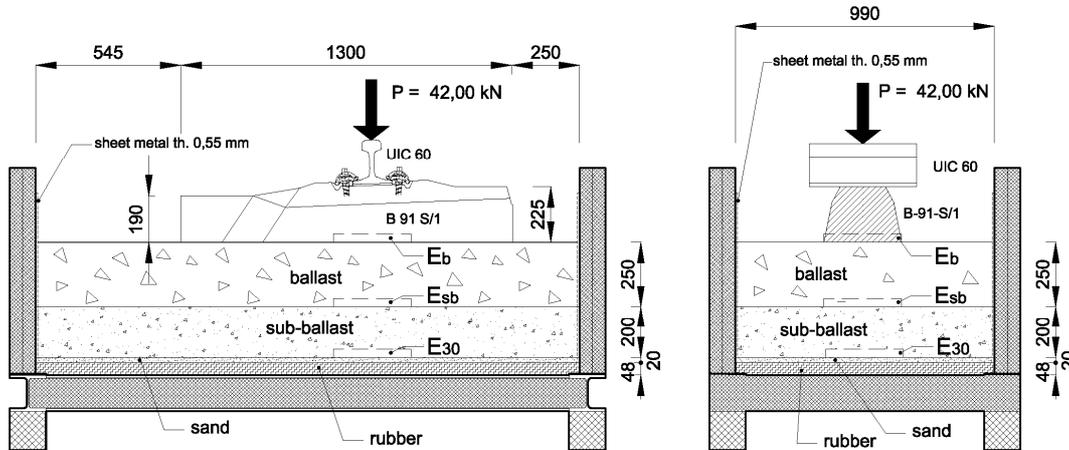


Figure 3-1 : Schéma de l'essai dynamique à 3 Hz du projet INNOTRACK [INN09]

Parmi ces différents essais, certains cas de chargement sont similaires aux procédures expérimentales testées au CER. Le Tableau 3-1 compare deux essais d'INNOTRACK à l'expérience du CER, en donnant pour chacune des expériences les déplacements obtenus au niveau de la couche de ballast et les modules d'Young correspondants. Le module d'Young mesuré correspond aux valeurs obtenues par un essai de chargement dynamique à la plaque (détaillé dans [INN09]) une fois le chargement de la traverse terminé, tandis que le module d'Young « recalculé » correspond au rapport de la contrainte générée par la traverse sur la déformation moyenne de la couche de ballast, avec les valeurs numériques données dans le Tableau 3-1 :

Tableau 3-1 : Comparaison des essais dynamiques INNOTRACK et CER

	INNOTRACK dynamique	INNOTRACK statique	CER dynamique 15 Hz
Épaisseur ballast	25 cm		30 cm
Chargement	42 kN		35 kN
Déplacement traverse	0,72 mm	0,6 mm	1,4 mm (0,6 mm) <sup>(1)</sup>
Déplacement sous ballast	0,47 mm	0,17 mm	?
Déplacement sous Sous-couche	0 mm	0 mm	0,14 mm
Contrainte sous Sous- couche	-	-	15 kPa
$E_b$ mesuré	104 MPa	105 MPa	-
$E_{b+sc}$ recalculé	-	-	19 MPa (52 MPa) <sup>(1)</sup>

(1) valeur après correction, voir texte.

Les expériences statique et à faible fréquence réalisées dans le cadre d'INNOTRACK indiquent que le module d'Young du ballast ne change pas. Par ailleurs les expériences du CER et d'INNOTRACK présentent des ordres de grandeur comparables, à l'exception de l'enfoncement de la traverse de 1,4 mm. Or, Soyez [SOY09] émet des réserves à propos de cette valeur du fait du poinçonnement de la traverse dans la couche de ballast au cours des cycles. De ce fait, en prenant un enfoncement de traverse de 0,6 mm, on obtient un module d'Young du système {ballast + sous-couche} de 52 MPa.

Les essais effectués dans le cadre d'INNOTRACK ont été effectués dans une cuve expérimentale qui confinait les faces latérales de la couche de ballast. On peut dans ce cas supposer que la raideur mesurée est plus importante que la raideur du ballast du CER, où le matériau n'était pas autant confiné.

On a donc différentes sources, expérimentales et numériques, qui nous permettent de choisir les valeurs de modules d'Young à fixer pour la sous-couche et le remblai. A partir de ces valeurs, nous avons fixé le module du ballast  $E_b$  à 60 MPa et celui de la sous-couche  $E_{sc}$  à 90 MPa ; les autres paramètres sont donnés dans le Tableau 3-3.

### 3.2.1.2 Remblai

Le matériau de remblai est le constituant principal du soutènement renforcé et de la Structure Normale, aussi la réponse dynamique de la structure totale est étroitement liée aux paramètres choisis pour modéliser ce matériau. Pour fixer ces paramètres, nous nous sommes basés sur des études expérimentales effectuées sur des échantillons d'un sol similaire au remblai utilisé au CER. Ces études ont

été menées sous différentes conditions de chargement statiques et une synthèse des résultats est présentée dans [REI07]. Cependant, puisque nous nous intéressons à la modélisation du chargement dynamique, il faut veiller à comparer précisément les niveaux de déformation et de confinement à la fois de l'expérience du CER et des essais en laboratoire, pour espérer tirer des paramètres numériques fiables. Le Tableau 3-2 synthétise ces différentes conditions :

Tableau 3-2 : Estimation du module de Young du remblai à partir de données expérimentales

	Contrainte principale (kPa)	Contrainte déviatorique (kPa)	Déformation moyenne	Module de Young E (MPa)
Essais de laboratoire (Triaxial, statique)	Varie entre 0 et 300 kPa	50 - 100 - 150	$2.0 \times 10^{-3}$	117
CER (chargement dynamique)	80 kPa estimé à la base du remblai (poids des terres)	40 kPa estimé (conditions $K_0$ )	$4.0 \times 10^{-5}$	A estimer

Dans le cas de l'expérience du CER de Rouen, la contrainte de confinement à la base de la structure a été estimée à partir du poids des couches des matériaux constitutifs du remblai, avec les densités présentées dans le Tableau 3-3. Il est alors possible d'obtenir une estimation du module d'Young à la base du remblai pour un chargement dynamique. Comme la déformation moyenne in situ est environ cinquante fois moins importante que la déformation moyenne des essais triaxiaux, nous avons choisi, en première approximation, de prendre le module égal à 300 MPa. Une calibration numérique basée sur des essais paramétriques pour ce module, pour la géométrie détaillée Figure 3-5 et pour les hypothèses de modélisation présentées ci-après, nous a finalement conduit à retenir la valeur de 290 MPa pour le module d'Young à la base du remblai.

De plus, dans les simulations numériques, nous avons décidé de considérer une variation de module d'Young avec la profondeur pour tenir compte des contraintes in-situ, issues de la construction du remblai et du poids des terres supérieures. Cette variation avec la profondeur est donnée par la formule suivante (d'après Janbu, [JAN63]) :

$$E = E_0(1 + \kappa\sqrt{z}) \quad (4.2)$$

$E_0$  est choisi de sorte qu'à la base du remblai ( $z = 3.5$  m),  $E$  soit égal à la valeur du module d'Young estimé précédemment et  $\kappa$  est un facteur qui contrôle les variations de  $E$  avec  $z$ , pris égal à  $1 \text{ m}^{-1/2}$ .

L'équation (4.2) est finalement linéarisée sur la hauteur du remblai, comme présenté dans la Figure 3-2 :

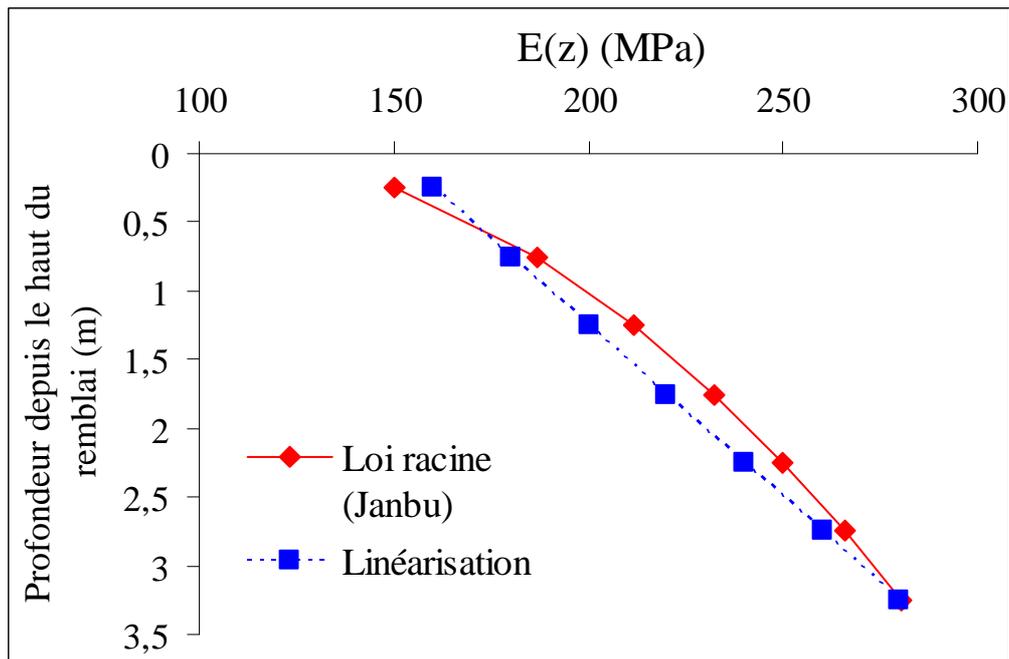


Figure 3-2 : Variation du module d'Young du remblai avec la profondeur

La linéarisation de l'équation (4.2) présentée sur la Figure 3-2, permet d'obtenir une expression de  $E$  qui est utilisée dans le modèle numérique (équation (4.3)) :

$$E = 290 - 40 (h-z) \quad (4.3)$$

où  $E$  est en MPa, et où  $h$ , la hauteur du remblai, et  $z$ , la profondeur depuis le haut du remblai, sont en m.

### 3.2.1.3 Parement

S'agissant du parement, il a été décidé de le modéliser comme un milieu continu, pour éviter d'avoir à représenter chacune des écailles et de s'affranchir de l'utilisation d'éléments d'interface ou d'autres procédures numériques apparentées. On a choisi une loi de comportement de type élastique isotrope transverse (même paramètres dans la direction  $y$  et  $z$ , c'est-à-dire dans le plan du parement, comme présenté dans le Tableau 3-3). L'avantage d'une telle loi est qu'elle permet de considérer un module élastique réaliste dans la direction verticale, tout en s'affranchissant des effets de flexion dans le plan du parement ; effets qui n'ont pas lieu d'être dans le cas d'un assemblage d'écailles disjointes. Cependant, cette hypothèse simplificatrice empêche d'étudier particulièrement l'une ou l'autre écaille, puisque le parement est modélisé comme un milieu continu.

Sous ces hypothèses, on choisit les paramètres du modèle orthotrope de révolution de la façon suivante :  $E_y$  et  $E_z$  sont pris dix fois plus petits que  $E_x$

pour prendre en compte la présence de cales en caoutchouc entre les écailles servant à les tenir séparées les unes des autres. Le comportement en cisaillement dans les plans  $xOy$  et  $xOz$  est décrit au moyen d'un module de cisaillement spécifique, appelé  $G$ . Ce paramètre est fixé arbitrairement, dans le but de réduire au maximum la force de rappel élastique dans la direction  $x$ , induite par la flexion du mur continu. Ceci permet d'obtenir un comportement du parement qui est proche de celui observé expérimentalement.

Enfin, contrairement à ce qui est usuellement fait dans le cas de la modélisation de la construction d'un mur en terre armée (cf. par exemple [BOU12]), il n'est pas nécessaire ici de modéliser l'interface entre le parement et le remblai. En effet, on s'intéresse seulement aux incréments de contrainte et aux déplacements correspondant à un chargement purement sinusoïdal. Le tassement différentiel entre le remblai et le parement n'est pas significatif, contrairement à celui qui se produit lors du compactage des couches au moment de la construction de la structure.

#### 3.2.1.4 Amorces et autres paramètres

---

Les armatures métalliques sont attachées aux écailles du parement au moyen d'amorces métalliques (cf. paragraphe 1.2.4.3). Les propriétés élastiques des armatures sont bien connues (d'après [ABD10b] [ABD11], [BOU12] voir Tableau 3-3).

En revanche, la modélisation du comportement de l'ancrage des armatures aux amorces est plus délicate : [BEN11] a montré que le comportement global de l'ancrage est beaucoup moins raide et doit être pris en compte dans les modèles numériques. A partir de la courbe force-déplacement présentée Figure 3-3, on peut calculer un module d'Young pour les amorces de 14,8 GPa c'est à dire douze fois moins important que celui des armatures. Numériquement, on modélise ces amorces comme le prolongement des renforcements dans le parement.

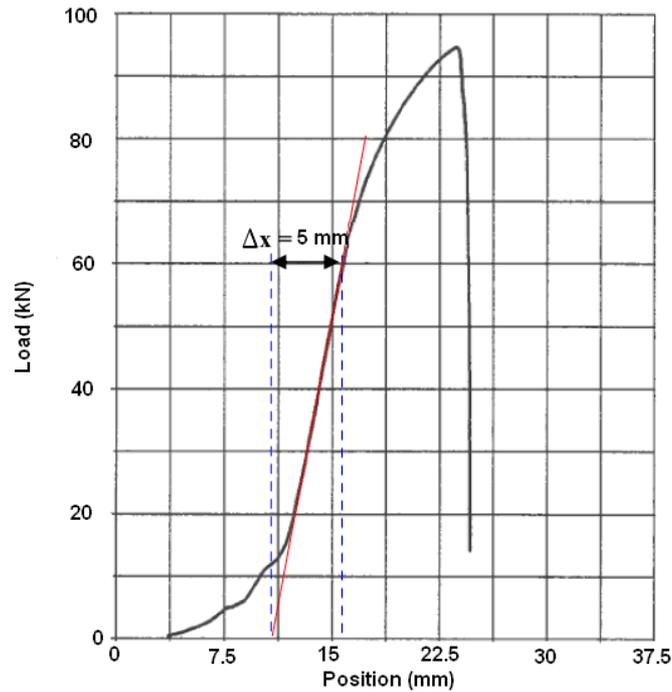


Figure 3-3 : Estimation de la rigidité équivalente de l'amorce [BEN11]

Les autres paramètres matériaux sont issus de la littérature (par exemple [SOY09] et [BOU12]) et correspondent à des paramètres usuels pour les modélisations par éléments finis. L'ensemble des paramètres est finalement résumé dans le Tableau 3-3 :

Tableau 3-3 : Paramètres élastiques des matériaux constitutifs de la structure étudiée

	$\rho$ (t/m <sup>3</sup> )	E (MPa)	$\nu$ (-)	$V_p$ (m/s)	$E_x$ (MPa)	$E_y = E_z$ (MPa)	G (MPa)
Ballast	1,7	60	0,2	198	-	-	-
Sous-couche	2,33	90	0,3	228	-	-	-
Traverse	2,5	$2,5 \times 10^4$	0,2	3333	-	-	-
Remblai	2,08	150-290	0,3	312-433	-	-	-
Renforcements	-	$2,1 \times 10^5$	-	-	-	-	-
Amorces	-	$1,48 \times 10^4$	-	-	-	-	-
Parement	2,5	-	0,2	-	$2,5 \times 10^4$	$2,5 \times 10^3$	$1,0 \times 10^7$

### 3.2.2 Amortissement

L'amortissement pris en compte pour ce calcul est fondé sur le modèle de Rayleigh (présenté en détail dans [PEC14] par exemple) : la matrice d'amortissement globale est une combinaison linéaire de la matrice de masse globale et de la matrice de rigidité globale, selon la formule suivante :

$$[C] = \alpha[M] + \beta[K] \quad (4.4)$$

avec  $\alpha$  et  $\beta$  des coefficients judicieusement choisis.

Ce modèle permet de fixer des paramètres d'amortissement visqueux globaux, identiques en tout point du maillage. Cependant, en procédant de la sorte, on fait l'hypothèse forte que cette matrice est diagonale dans la base des modes propres, ce qui n'a pas de justification théorique, mais présente néanmoins l'avantage de trouver rapidement les coefficients  $\alpha$  et  $\beta$  pour les modes propres de la structure (cf. [PEC14]).

Comme la matrice d'amortissement est déterminée à partir des matrices de masse et de rigidité globales, tous les matériaux considérés ici ont le même amortissement. Il aurait été possible d'en choisir un différent pour chacun des matériaux, en effectuant la même démarche, mais pour les matrices relatives à chaque matériau. Ce choix n'a pas été retenu car on ne dispose pas de données pour déterminer le coefficient d'amortissement pour chacun des matériaux de la structure considérée. On peut, d'ailleurs, faire l'hypothèse que l'amortissement de la structure est essentiellement donné par le remblai, qui est le matériau majoritaire, et que la variation de l'amortissement du ballast ou de la sous-couche n'a que peu d'influence sur la réponse globale du massif. Enfin et surtout, on a déterminé expérimentalement (cf. 2.3.4.3) une plage de valeurs du coefficient d'amortissement global (entre 4,4 % et 9 %), que nous pouvons utiliser directement ici.

Ainsi, les paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  sont choisis pour avoir un coefficient d'amortissement modal de 5 % pour deux modes de vibrations supposés connus.

Dans le cas de l'expérience du CER, nous n'avons pas accès directement aux fréquences propres de la structure (on en voit une unique à 28 Hz). De fait, comme un chargement purement monofréquentiel est appliqué à la structure, on choisit de fixer  $\alpha$  et  $\beta$  de sorte d'avoir un coefficient d'amortissement  $D$  de 5 % exactement pour chaque pulsation  $\omega$ , comme détaillé dans le Tableau 3-4, d'après l'équation (4.5) (d'après [PEC14]). Cette valeur est comprise dans la plage de coefficients d'amortissement déterminée expérimentalement.

$$D = \frac{1}{2} \left[ \frac{\alpha}{\omega} + \beta\omega \right] \quad (4.5)$$

Tableau 3-4 : Valeur numérique des coefficients d'amortissement de Rayleigh

f (Hz)	$\omega$ (rad/s)	$\alpha$ (rad/s)	$\beta$ (s/rad)	D (%)
5	31,42	3,09	$4,77 \times 10^{-5}$	5
10	62,83	6,09		
15	94,25	9,00		
20	125,66	11,81		
25	157,08	14,53		
28	175,93	16,12		
30	188,50	17,15		
35	219,91	19,68		
40	251,33	22,12		

Plus de détails sur l'amortissement de Rayleigh ou d'autres stratégies numériques pour prendre en compte ce phénomène sont disponibles dans [SEM09] ou [PEC14].

---

### 3.2.3 Modèle de renforcement

#### 3.2.3.1 Généralités

---

Différentes possibilités sont mises en œuvre pour modéliser le renforcement par armatures.

Dans le cas tridimensionnel, la solution la plus courante consiste à utiliser des éléments unidimensionnels (barres), qui fonctionnent uniquement en traction-compression (les effets de flexion sont négligés étant donnée la souplesse manifeste des armatures) et qui possèdent éventuellement un comportement d'interface spécifique.

Le choix de la loi de comportement d'interface armature/remblai est aussi déterminant, car il permet de retrouver des niveaux de tractions acceptables dans les armatures numériques. Cependant, le type de loi à utiliser et la détermination expérimentale des paramètres correspondants n'est pas évidente. Pour ce faire, nous nous sommes appuyés sur les résultats expérimentaux de Abdelouhab et al. [ABD10a], [ABD11] et sur les modèles numériques développés par Bourgeois et al [BOU12], à partir des données disponibles dans cette thèse (cf. également Tableau 4-1).

Le cas bidimensionnel, non traité dans ce chapitre, pose des problèmes particuliers ; la pertinence physique des éléments de barres considérés (qui sont en fait des « plaques » continues dans la direction transverse à la modélisation) est à relativiser grandement. En effet, on rencontre des problèmes de glissement

relatif de sol de part et d'autre de la barre, et des phénomènes de réflexions d'ondes sur cette « plaque » qui pénalisent d'autant la modélisation. Plus de détails relatifs à ces phénomènes sont donnés dans [SOY09].

En deux ou en trois dimensions, une approche alternative consiste à remplacer le remblai et les armatures par un milieu continu homogène « équivalent », pour éviter de représenter les renforcements à l'aide de ces éléments de barre (cf. Chapitre 5).

#### 3.2.3.2 Modèle de renforcement retenu

---

Les bandes de renforcement sont modélisées par des éléments de barre unidirectionnels, et le sol alentour par des éléments volumiques, les deux éléments ayant des nœuds en commun. Dans le modèle sans interface, ces nœuds communs ont le même déplacement et le modèle est qualifié de « parfaitement adhérent ». Il n'y a, dans ce cas, pas de limite à l'effort qu'une barre peut transmettre au sol par unité de longueur, ce qui est pénalisant pour la modélisation des ouvrages en terre armée.

Pour pouvoir prendre en compte une limite au frottement mobilisable par unité de longueur entre le sol et la barre, il est nécessaire d'introduire un déplacement relatif entre le sol et la barre. Ce déplacement peut être irréversible si cet effort de traction dépasse un critère de rupture local.

Le modèle et son implémentation dans un code de calcul par éléments finis sont présentés dans [BOU12] ; nous nous contentons ici de reprendre les équations relatives aux paramètres à utiliser dans notre modélisation. Ainsi, en appelant  $\delta$  le déplacement relatif remblai/renforcement dans la direction de l'armature (selon  $x$  par exemple) et  $N(x)$  la traction dans le renforcement, on peut associer les deux grandeurs selon l'équation suivante :

$$-\frac{dN}{dx} = f(\delta) \quad (4.6)$$

$f$  est une fonction du déplacement relatif de l'interface. Cette fonction peut être linéaire avec  $\delta$ , ce qui signifie que le régime de fonctionnement de l'interface est parfaitement élastique. On peut également choisir de prendre  $f$  élastique parfaitement plastique, avec une partie élastique linéaire, bilinéaire ou encore variant selon une loi racine. Ces différents modèles sont disponibles dans les modules statiques de CESAR-LCPC (cf. partie 4.2.2). Ils ont nécessité une implémentation particulière dans le module DYNi pour les besoins de ce travail.

Dans la modélisation présentée dans ce chapitre, comme le chargement est harmonique et que le fonctionnement global du remblai semble élastique (comme expliqué dans la partie 2.3.1), nous choisissons la fonction  $f$  linéaire, sans considérer de critère de rupture. Cette hypothèse sera discutée plus en détail dans le Chapitre 4. Ainsi, l'équation (4.6) devient :

$$-\frac{dN}{dx} = c^I \delta \quad (4.7)$$

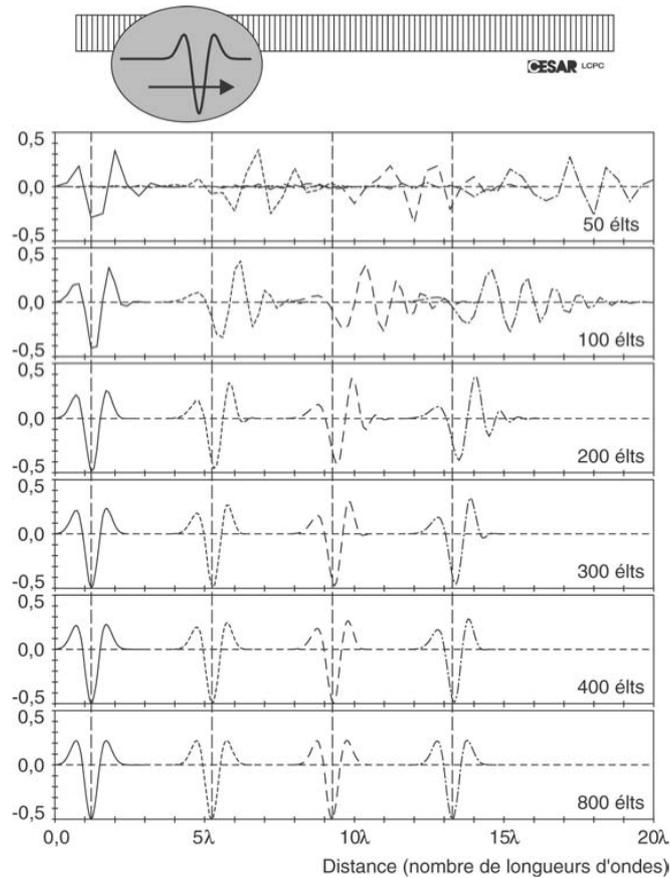
Il est difficile d'obtenir des valeurs expérimentales de  $c^I$  car il faudrait être en mesure de faire des essais au cours desquels on mesure localement le déplacement relatif entre le sol et l'armature. En pratique, on dispose généralement d'essais d'arrachement, au cours desquels on mesure le déplacement de l'extrémité d'une armature en fonction de la force appliquée, qui caractérise le comportement global de l'interface au long de l'armature. Les valeurs du coefficient  $c^I$  sont souvent calées sur la pente initiale des graphes traction/déplacement en tête d'armature, comme par exemple dans [ABD10b], [BOU12] mais cette méthode est sujette à interprétation et ne donne que l'ordre de grandeur de ce coefficient. Aussi, en nous basant sur les valeurs numériques proposées dans [BOU12], nous prenons ici le coefficient du même ordre de grandeur que ces auteurs, soit  $c^I = 10 \text{ MN/m}^2$ .

---

#### 3.2.4 Maillage

La structure expérimentale entière (remblai Terre Armée et Structure Normale) est représentée par un volume maillé 3D. Le sol, le parement, le ballast, la sous-couche et la traverse au droit de la partie renforcée sont représentées par environ 31 000 éléments quadratiques (tétraèdres à 15 nœuds) et 47 000 nœuds.

Une attention particulière a été portée à la taille des éléments utilisés, afin que la propagation des ondes dans le massif numérique soit représentée correctement. En effet, pour un maillage trop grossier avec peu de nœuds sur une distance de l'ordre de grandeur de la longueur d'onde considérée  $\lambda$ , des phénomènes d'amortissement numérique peuvent apparaître, qui ont tendance à déformer le signal au cours de la propagation, comme illustré dans la Figure 3-4. Les auteurs ayant analysé ce problème (par exemple [SEM05], [PEC14]) recommandent une taille de maille de l'ordre de  $\lambda/10$ . De la même façon, une fonction d'interpolation d'ordre le plus élevé possible aura tendance à assurer une bonne propagation.



*Figure 3-4 : Analyse de la dispersion numérique unidimensionnelle pour des problèmes de propagation d'ondes : profils à différents instants [SEM05]*

Pour l'étude considérée, du fait de la taille du maillage, nous avons choisi d'utiliser des interpolations quadratiques. Pour une fréquence maximale appliquée de 40 Hz, la longueur d'onde minimale considérée dans le remblai est  $\lambda_s \sim 5$  m (cf. Tableau 2-3). Aussi, afin d'assurer des temps de calcul raisonnables, nous avons choisi des éléments de l'ordre de 10 cm dans la partie proche de la traverse sollicitée, et des éléments plus larges pour le bas du remblai de la structure chargée, d'une taille maximum de 1,6 m. Le maillage final est présenté Figure 3-5.

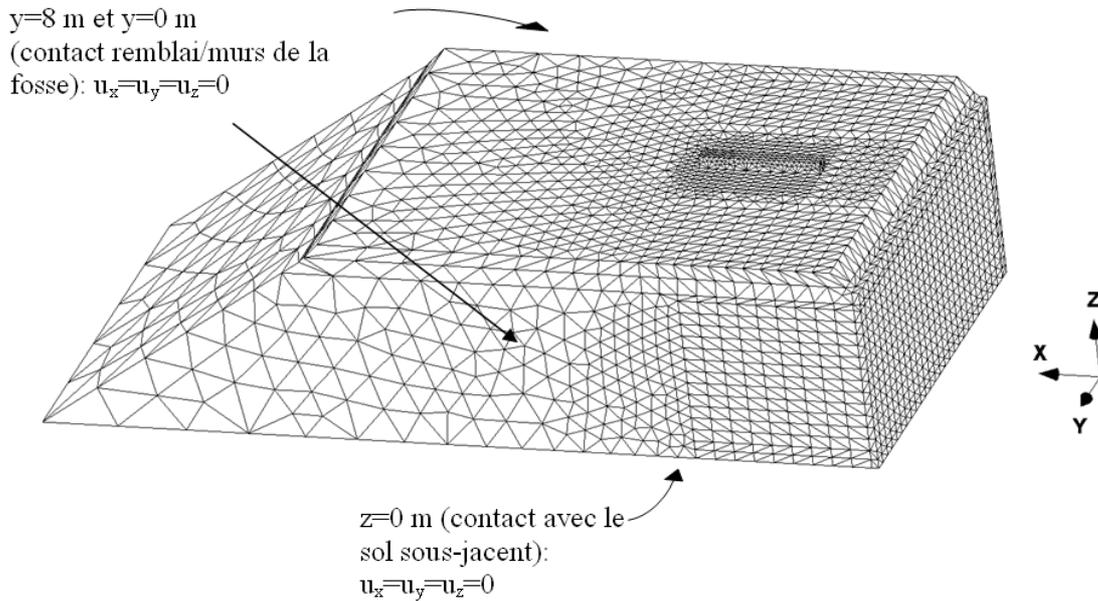


Figure 3-5 : Maillage et conditions aux limites

Les éléments unidimensionnels représentant les bandes de renforcement sont disposés dans le maillage de la même façon que les armatures réelles dans le remblai expérimental, sur une grille de 10 sur 5 de coordonnées  $y \in \{0,55; 1,45; 2,05; 2,95; 3,55; 4,45; 5,05; 5,95; 6,55; 7,45\}$ ;  $z \in \{0,37; 1,12; 1,87; 2,26; 3,37\}$ . Chaque armature fait 3,5 m de long dans la direction  $x$  et est discrétisée en neuf éléments de barre frottante à trois nœuds, dont le comportement est régi par la loi présentée dans le paragraphe 3.2.3.2.

### 3.2.5 Conditions aux limites

Les conditions aux limites consistent à fixer les déplacements nuls dans les trois directions sur la base du remblai et sur les deux côtés verticaux (respectivement à l'interface avec le sol sous-jacent et les deux bords de la fosse), comme présenté Figure 3-5. On considère que le sol sous-jacent et les murs de la fosse ont une rigidité infinie et que la friction dans les deux directions à ces interfaces est suffisante pour empêcher tout déplacement, ce qui est cohérent avec les observations expérimentales. Ceci a l'avantage d'éviter toute procédure numérique spécifique telle que l'utilisation de bandes absorbantes ou d'éléments de frontière (cf. paragraphe 1.6.2.3) pour tenir compte de la propagation des ondes dans les milieux extérieurs à la structure.

Le choix de ces conditions aux limites simplifie alors grandement le problème. On a montré sa pertinence par une série d'études complémentaires, consistant par exemple à libérer les déplacements en cisaillement le long des murs de la fosse : le calcul prédisait des déplacements de plusieurs centimètres au niveau des murs de la fosse, bien loin des constatations expérimentales.

## 3.3 Résultats et discussions

Cette section présente les résultats des calculs numériques aux points où sont placés les capteurs dans le remblai expérimental. La comparaison directe des résultats expérimentaux et numériques permet de discuter la validité du modèle.

### 3.3.1 Contraintes verticales

La Figure 3-6 compare le spectre des incréments de contrainte de compression verticale calculé avec le spectre expérimental. La résonance à 28 Hz constatée expérimentalement n'est pas retrouvée numériquement. Cependant, l'allure de la courbe avec la fréquence, ainsi que l'amplitude des incréments est calculée avec une bonne approximation.

Il est important de noter que les contraintes numériques au sein du massif dépendent beaucoup de la localisation du point où l'on effectue les mesures et également de l'algorithme de post-traitement utilisé (cf. paragraphe 4.3.5.1 pour plus de détail).

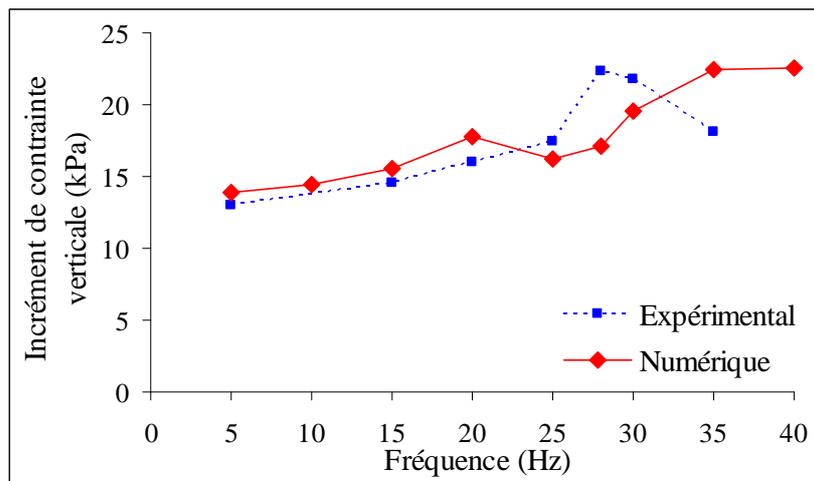


Figure 3-6 : Incréments de contrainte verticale à l'interface sous-couche/remblai

### 3.3.2 Déplacements horizontaux du parement

Les incréments de déplacement horizontal du parement calculés à différentes hauteurs sont présentés de la Figure 3-7 à la Figure 3-10 et comparés aux valeurs expérimentales données par la moyenne des deux capteurs de déplacement à ces hauteurs (cf. Figure 2-3). Les résultats présentés montrent une très bonne correspondance avec les valeurs expérimentales, sauf pour 3 m de hauteur (Figure 3-9). Cette différence est attribuée à la modélisation continue du parement, qui

est en réalité un assemblage de panneaux rigides libres de pivoter les uns par rapport aux autres. D'un point de vue spectral, la fréquence de résonance, la largeur du pic central (bande passante) et l'allure générale des spectres sont très correctement prédites par le modèle, sauf au niveau de la moitié inférieure de l'échelle du haut ( $z=3$  m, Figure 3-9).

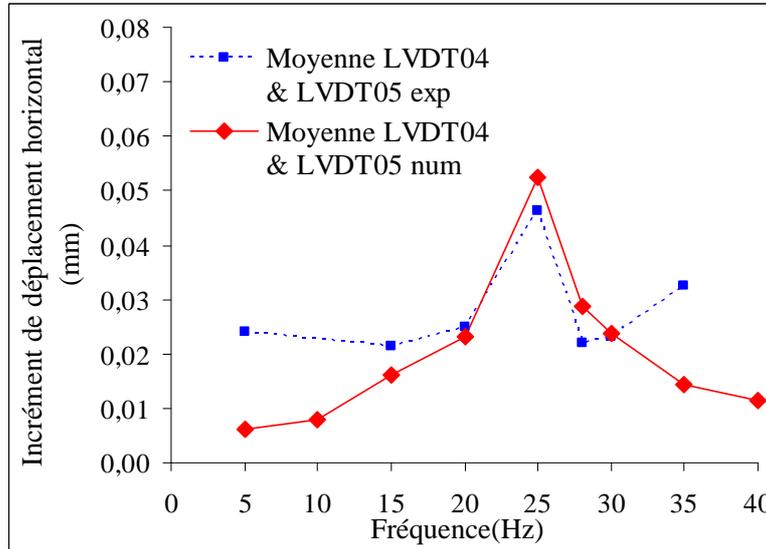


Figure 3-7 : Incréments de déplacement horizontal du parement à 1,5 m de la base du mur

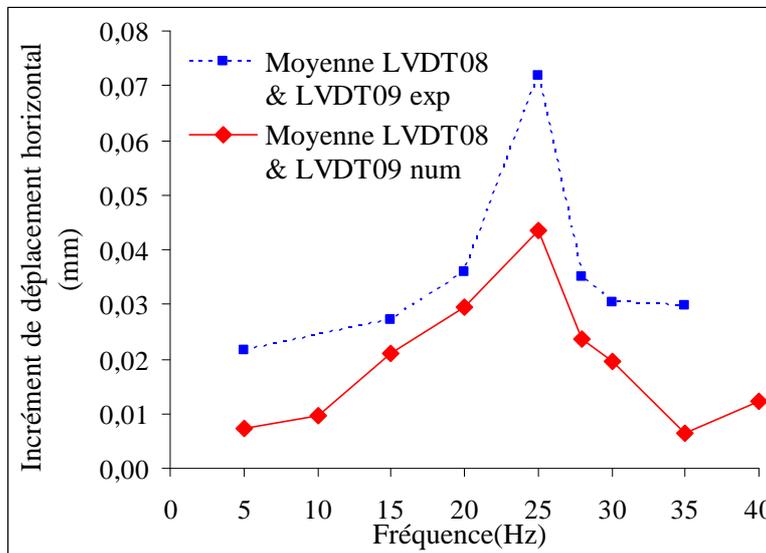


Figure 3-8 : Incréments de déplacement horizontal du parement à 2,25 m

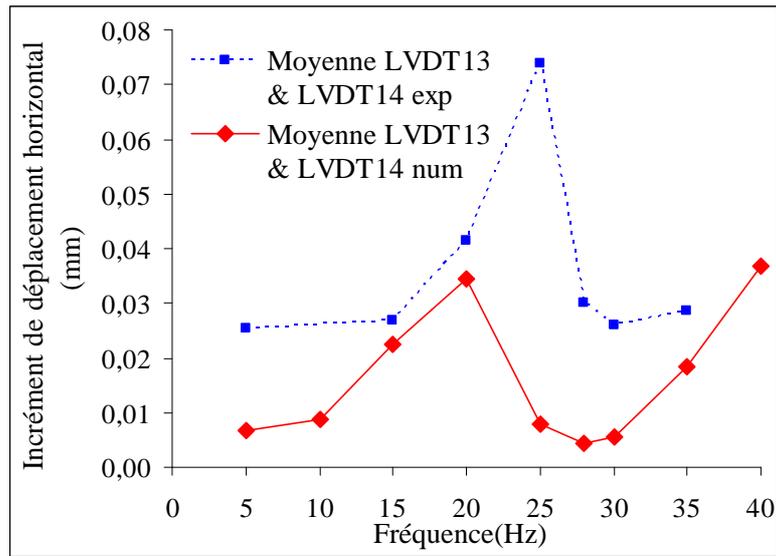


Figure 3-9 : Incréments de déplacement horizontal du parement à 3m

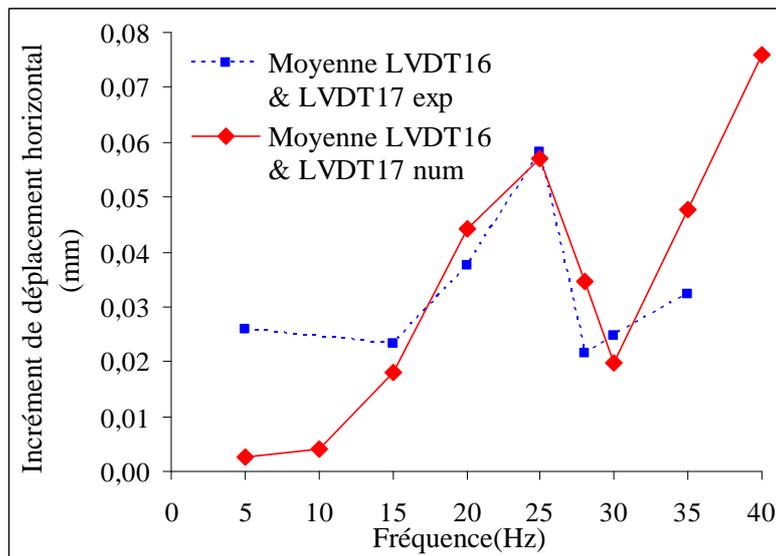


Figure 3-10 : Incréments de déplacement horizontal du parement en haut du mur

### 3.3.3 Déplacement verticaux à l'interface sous-couche/remblai

Les valeurs numériques du déplacement de l'interface sous-couche remblai sont plus élevées que les valeurs expérimentales (Figure 3-11), cependant elles présentent les mêmes variations avec la fréquence. Cela est peut-être dû au fait que l'on a pris un amortissement global et pas défini matériau par matériau. Si on l'avait fait, on aurait augmenté l'amortissement dans le ballast et la sous-couche, dans la mesure où ces derniers subissent des variations de contraintes et déformations importantes. Mais cette sur-amplification donnée par le modèle numérique, par rapport aux valeurs expérimentales peut également être due au fait que l'on n'a pas modélisé le tubage LVDT (cf. Figure 2-4). Ainsi le point numérique

a tendance à beaucoup vibrer, tandis que la vibration de l'accéléromètre est en réalité limitée par sa proximité au tubage.

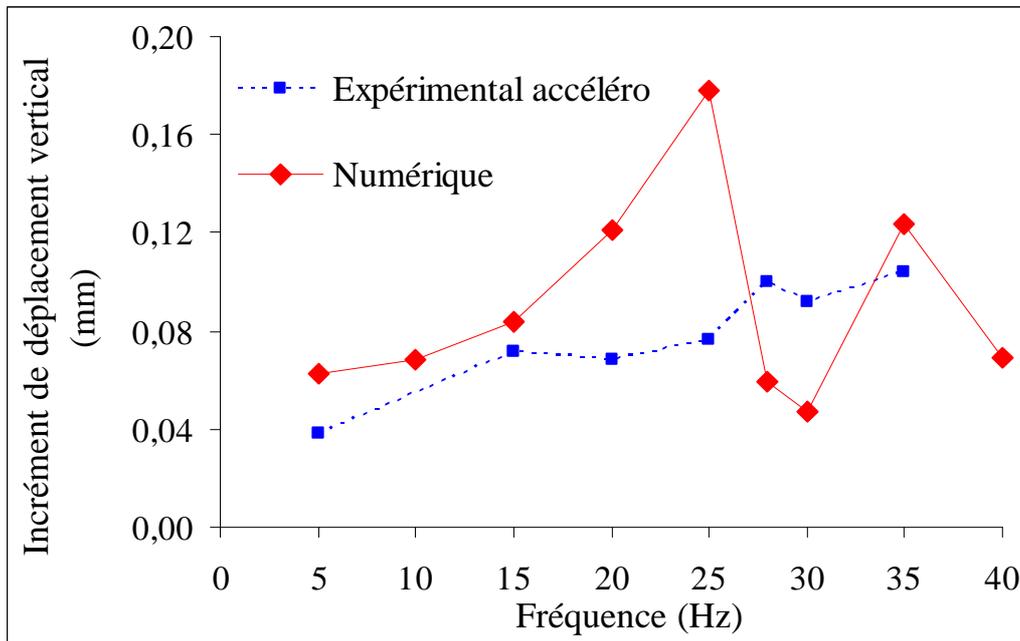


Figure 3-11 : Incréments de déplacement vertical à 70 cm de profondeur

Quoi qu'il en soit, les résultats numériques en déplacement sont comparables en ordre de grandeur, sauf à la résonance et présentent également une variation de spectre de même allure que le spectre expérimental. De plus, le modèle tend à majorer les déplacements ce qui va dans le sens de la sécurité.

---

### 3.3.4 Incréments de traction dans les armatures

#### 3.3.4.1 Lit supérieur, armature A46

---

Les incréments de traction dans l'armature A46 (dont la position au sein du remblai est donnée par la Figure 2-3), sont présentés de la Figure 3-12 à la Figure 3-16.

### Chapitre 3 : Établissement d'un modèle numérique

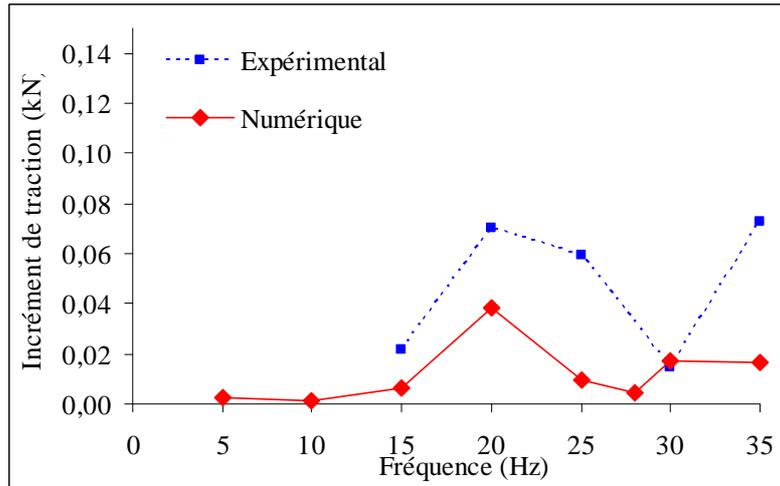


Figure 3-12 : Incréments de traction dans l'armature A46, à 10 cm du parement

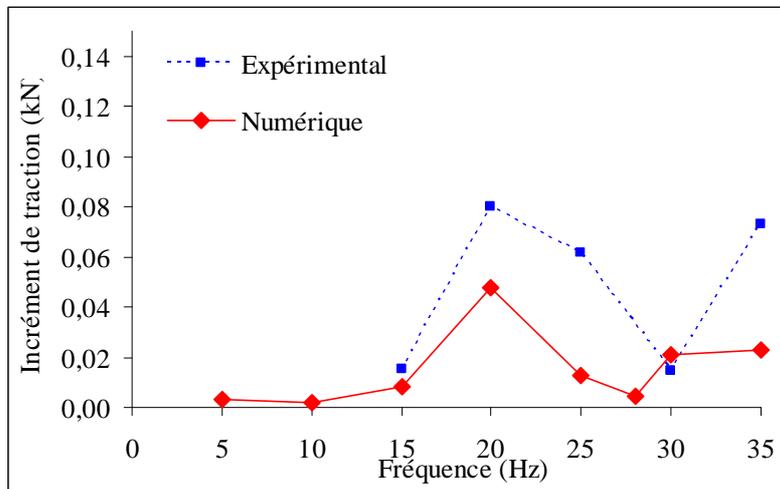


Figure 3-13 : Incréments de traction dans l'armature A46, à 40 cm du parement

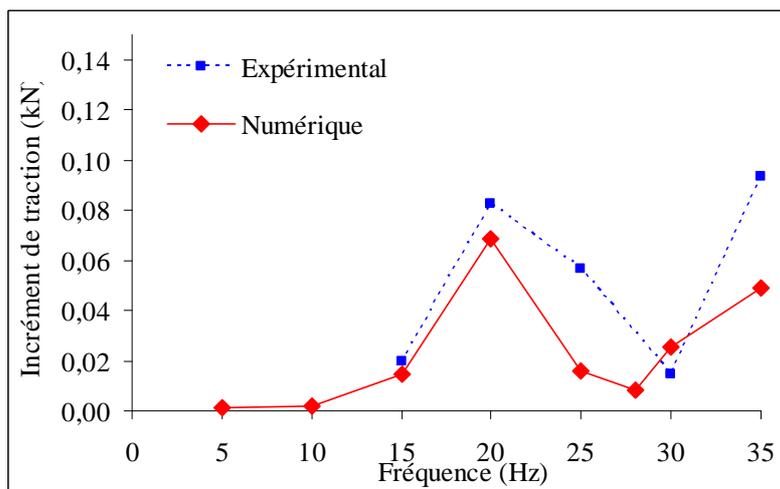


Figure 3-14 : Incréments de traction dans l'armature A46, à 90 cm du parement

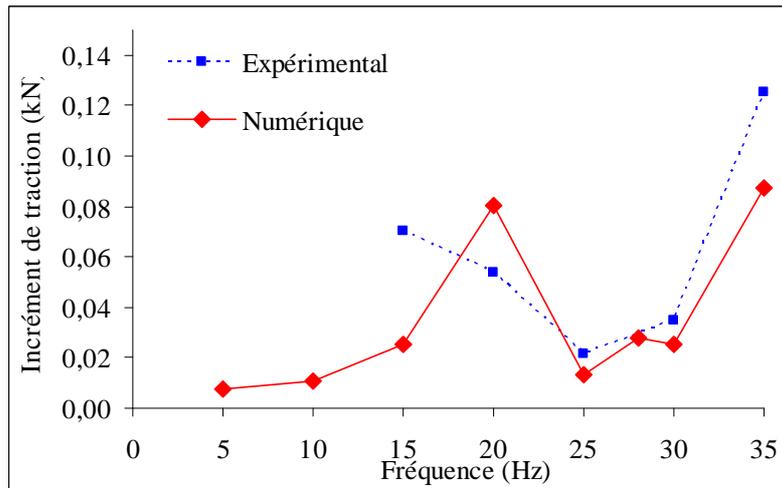


Figure 3-15 : Incréments de traction dans l'armature A46, à 1,4 m du parement

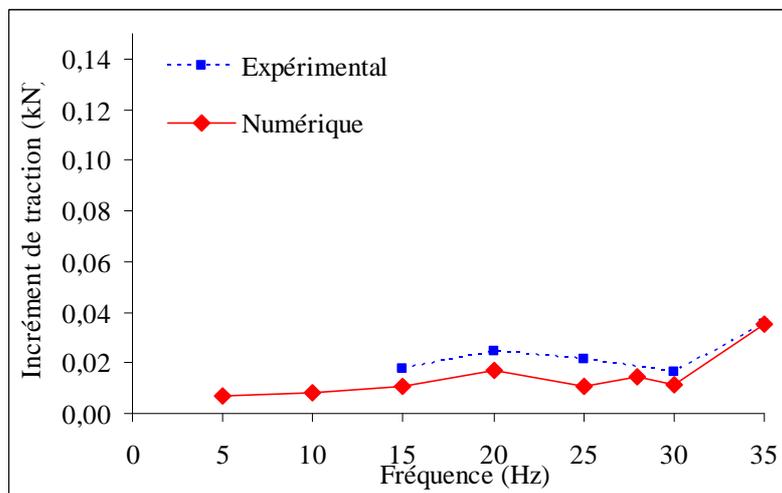


Figure 3-16 : Incréments de traction dans l'armature A46, à 3,35 m du parement

L'allure des spectres numériques est très proche de celle des spectres expérimentaux, pour tous les points le long de la barre. De plus, l'amplitude des incréments de traction estimée par le modèle est très proche de celles obtenues expérimentalement. Il n'y a qu'en tête d'armature, à proximité du parement, que le modèle a tendance à surestimer les incréments de traction d'un facteur 2 à la résonance (Figure 3-12 et Figure 3-13). Malgré tout, ces résultats restent très satisfaisants au regard de toutes les hypothèses effectuées dans le modèle numérique, en particulier la valeur du coefficient d'interaction.

### 3.3.4.2 Armature A36

Les incréments de traction pour l'armature A36 sont présentés de la Figure 3-17 à la Figure 3-21.

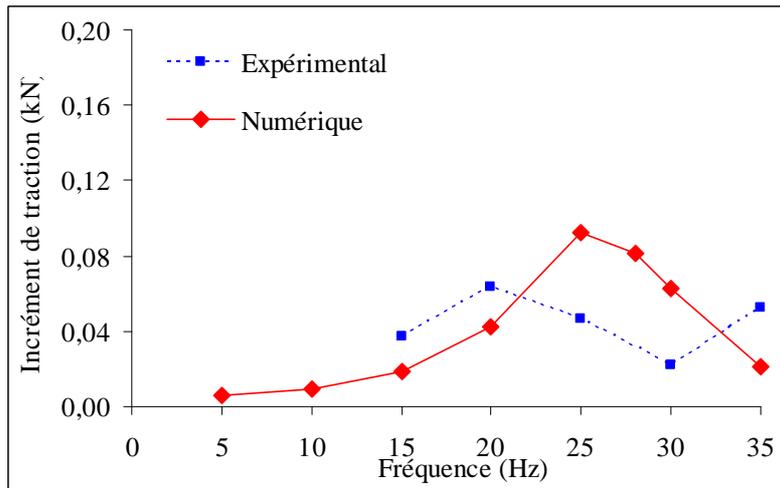


Figure 3-17 : Incréments de traction dans l'armature A36, à 10 cm du parement

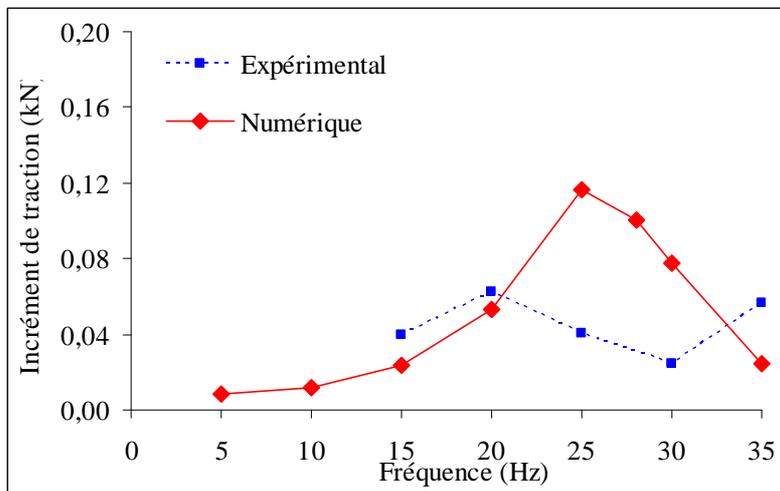


Figure 3-18 : Incréments de traction dans l'armature A36, à 40 cm du parement

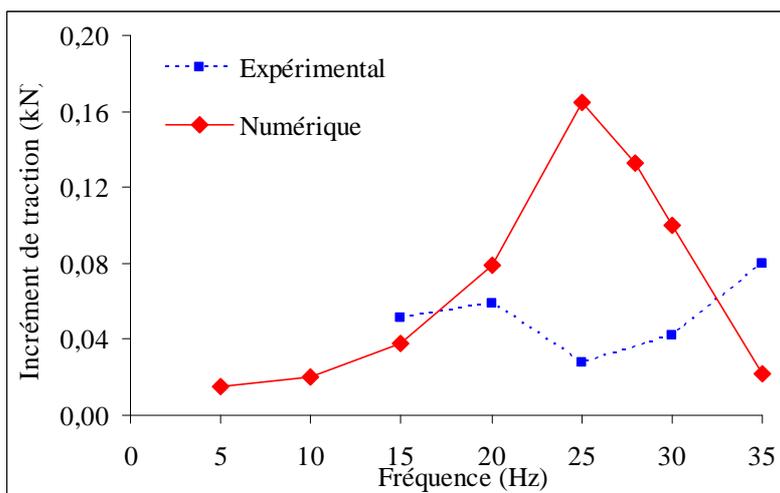


Figure 3-19 : Incréments de traction dans l'armature A36, à 90 cm du parement

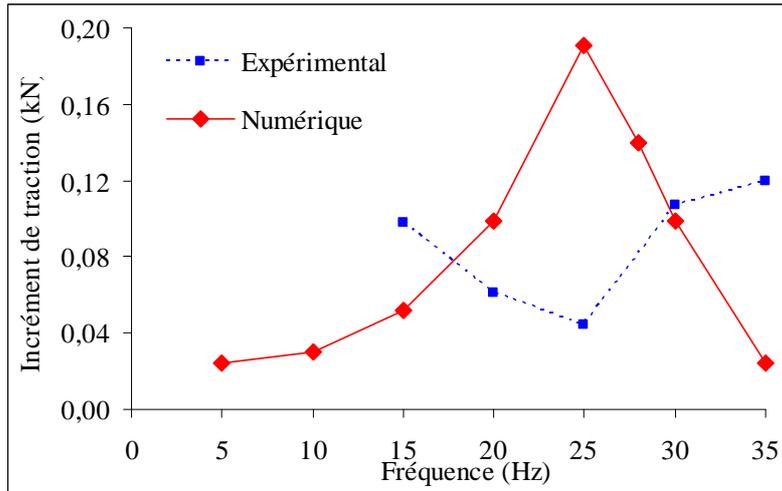


Figure 3-20 : Incréments de traction dans l'armature A36, à 1,4 m du parement

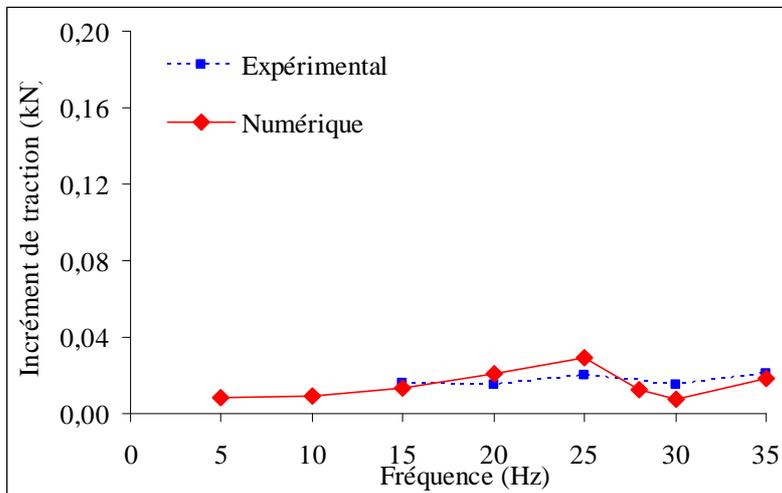


Figure 3-21 : Incréments de traction dans l'armature A36, à 3,35 m du parement

Pour cette armature, le modèle numérique a tendance à surestimer les incréments de traction, par rapport aux mesures expérimentales. De plus, le modèle indique une résonance à 25 Hz, alors que les données expérimentales présentent au contraire un minimum à cette fréquence comme on le remarque dans la Figure 3-20 par exemple. En tout état de cause, le modèle n'est pas satisfaisant pour cette profondeur, même si les ordres de grandeur des incréments de traction restent corrects. Ceci rejoint les constatations déjà effectuées sur les déplacements horizontaux du parement à cette profondeur, où le modèle et les valeurs expérimentales divergeaient sensiblement (Figure 3-9). Ici aussi, on peut penser que c'est la vibration de l'écaille en tant qu'élément discret qui pilote les tractions dans l'armature A36 et que le modèle ne rend pas compte de ce phénomène en considérant le parement comme un milieu continu. En plus de ce phénomène, il est possible que la valeur du coefficient d'interface au niveau de l'armature A36 soit plus faible que le coefficient que l'on a appliqué à l'armature A46. Ici, nous avons choisi de fixer le coefficient indépendamment

de la profondeur, pour éviter d'introduire trop de paramètres difficiles à déterminer, mais on pourrait revenir sur cette hypothèse pour améliorer le modèle.

### 3.3.5 Distribution des incréments de contrainte de compression verticale avec la profondeur

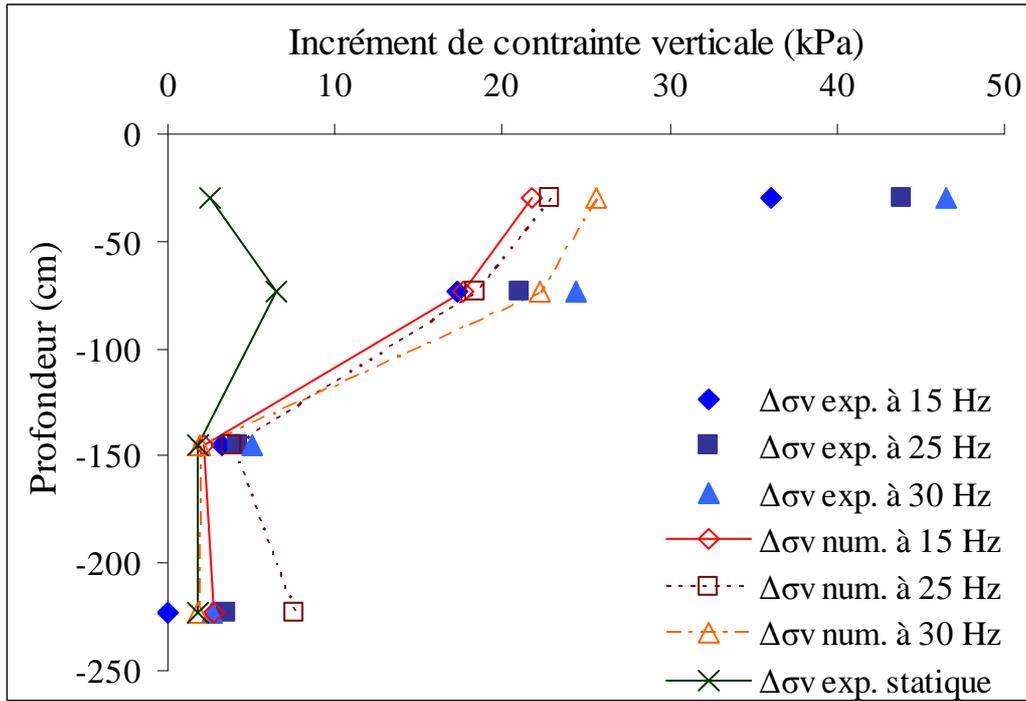


Figure 3-22 : Comparaison des incréments de contrainte verticale expérimentale et numérique à différentes fréquences

La Figure 3-22 présente les incréments de contrainte verticale donnés par le modèle numérique et les compare aux valeurs expérimentales ainsi qu'à la valeur de contrainte statique pour un chargement de 30 kN [SOY09].

Les valeurs expérimentales et numériques convergent de façon satisfaisante dans le remblai (en dessous de 60 cm) et le modèle parvient à estimer avec une bonne précision l'influence de la fréquence du chargement sur les niveaux de contrainte. Cependant, ces valeurs diffèrent sensiblement au niveau de l'interface ballast/sous-couche. Ceci provient certainement du fait que nous avons choisi une loi de comportement simplifiée pour le ballast. On peut également remettre en question la représentativité des contraintes mesurées sous le ballast, dans la mesure où ce matériau est très inhomogène et que la structure granulaire est susceptible d'évoluer entre deux séquences de chargement.

On note également que la distribution des incréments de contrainte en fonction de la profondeur dépend de la fréquence, mais la courbe illustrant cette distribution a une allure similaire quelle que soit la fréquence.

Enfin, pour les incréments de contrainte dans le seul remblai renforcé, la Figure 3-22 présente un résultat fondamental : on constate que les efforts engendrés par les effets dynamiques sont concentrés uniquement dans le haut du remblai et sont comparables aux contraintes statiques issues du poids des couches supérieures et de la charge statique. La variation dynamique de la contrainte verticale (et donc du confinement des armatures) va donc affecter les deux rangées supérieures d'armatures, localisées à -75 cm et -150 cm. Pour les lits situés plus en profondeur, il n'y aura pas d'effets du chargement dynamique. Ce phénomène sera également mis en évidence dans le chapitre suivant.

#### 3.3.6 Déformées

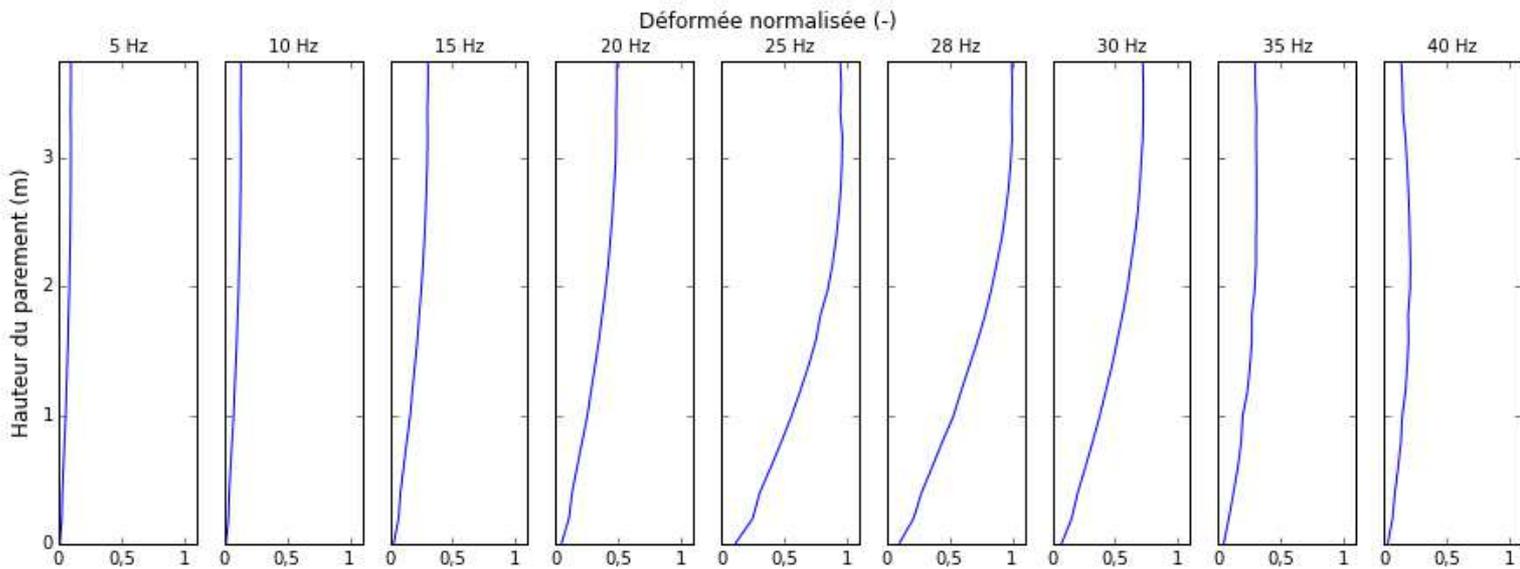


Figure 3-23 : Déformées normalisées du parement pour chaque fréquence

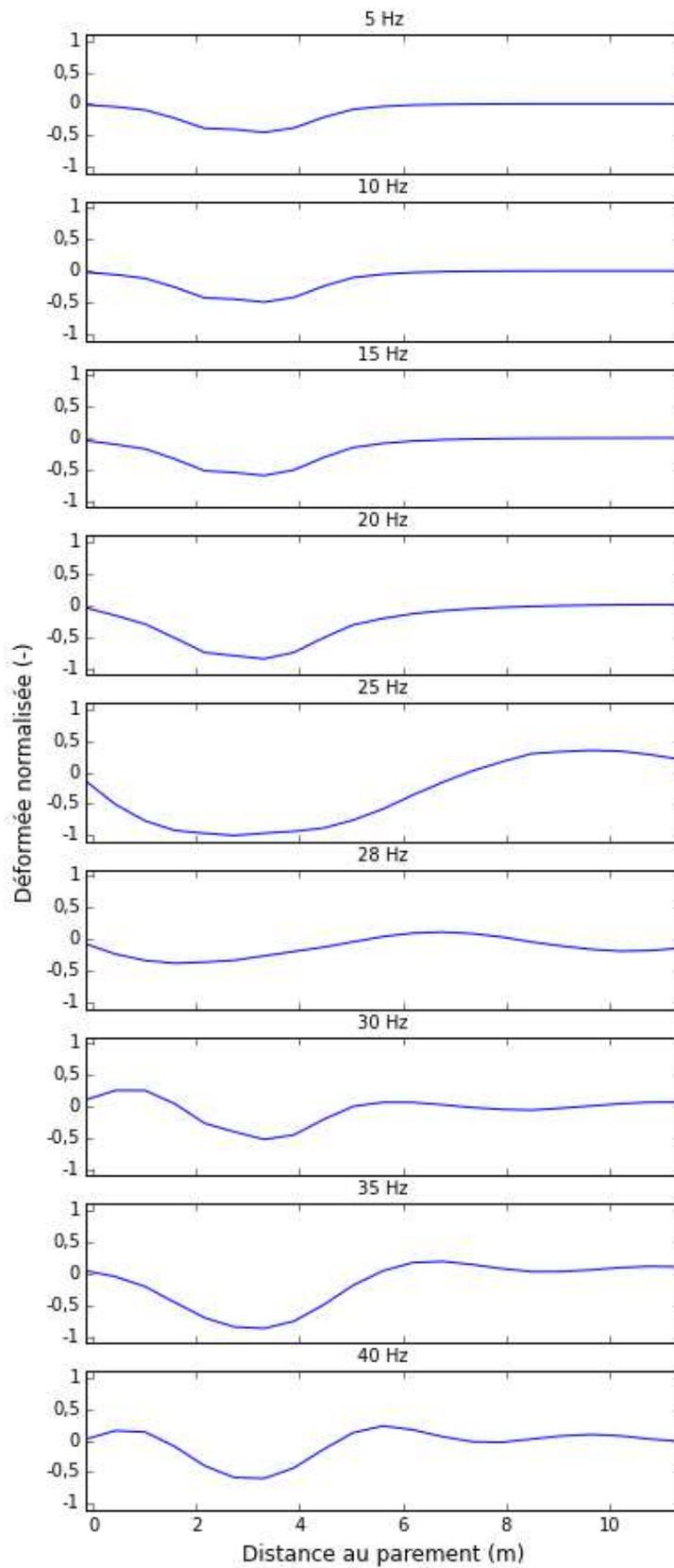


Figure 3-24 : Déformées normalisées du haut du remblai pour chaque fréquence

La Figure 3-23 et la Figure 3-24 présentent les déformées du parement et du haut du remblai, pour chaque fréquence. Dans le cas des déformées du remblai, on étudie les déplacements verticaux du matériau remblai à l'interface sous-couche/remblai. L'étude des déformées à proximité du ballast ne donnerait pas de résultats réalistes, étant données les hypothèses simplificatrices que nous avons choisies pour ce matériau.

Ces déformées sont normalisées par la valeur maximale du déplacement constatée sur l'ensemble des fréquences. Ainsi, les 100 % de déflexion du parement sont atteints à 28 Hz en haut de parement et les 100 % de déformée verticale, correspondant au déplacement vertical maximum, sont atteints à 25 Hz au droit de la traverse.

La déflexion du parement est caractérisée par deux types de déformées distinctes, qui correspondent sans doute à deux modes propres du massif continu représentant le mur. Le premier type de déformée présente une déformation maximale en haut de mur. La section haute du parement reste droite sur les 75cm supérieurs. Cette déformée se retrouve de 5 à 30 Hz, et présente une amplification marquée à 28 Hz. Les déformations maximales ont lieu à 25, 28 et 30 Hz (comme constaté expérimentalement Figure 2-17) et ont un facteur d'amplification supérieur à 2 par rapport aux autres fréquences. Pour les fréquences à 35 et 40 Hz, la déformée change d'allure : le ventre des vibrations se situe alors en milieu de parement, et les nœuds aux deux extrémités verticales du mur. Cependant le maximum de la déformation est très faible comparé à celui à 28 Hz.

Pour la déflexion du haut du remblai, on constate un premier mode de vibration jusqu'à 25 Hz, similaire au cas statique, avec l'enfoncement de la traverse qui est de plus en plus marquée de 5 à 25 Hz, ainsi que la diffusion de cet enfoncement au remblai adjacent.

A 25 Hz apparaît clairement une résonance, avec la première moitié du remblai (comprenant la partie armée) qui s'enfonce d'un bloc tandis que l'autre partie (SN) se soulève un peu, et réciproquement (on rappelle que ces déformées sont la valeur d'une déformée fonction du temps à un instant choisi pour correspondre à une déformation extrême).

A 28 Hz ce mode disparaît au profit d'autres types de déformées où l'enfoncement de la traverse est également proche de 100 %, mais plus localisé en dessous de la traverse. On note également un soulèvement de moindre amplitude d'une partie de la Structure Normale, ce qui implique des vibrations de ces points, pourtant situés à grande distance de la traverse sollicitée.

## 3.4 Conclusion

Nous avons développé un modèle numérique tridimensionnel du remblai expérimental du CER de Rouen avec une modélisation discrète des armatures. Les équations de la dynamique ont été résolues dans le temps par intégration directe. Le calage des paramètres du modèle a principalement porté sur les modules d'élasticité du remblai, de l'interface sol/remblai et sur le coefficient d'amortissement. Il est apparu que la prise en compte de la variation du module d'élasticité du remblai avec la profondeur était un élément indispensable de la modélisation. Le parement a été modélisé de manière continue mais avec une élasticité orthotrope. Ce calage avait comme objectif de reproduire avec un seul jeu de paramètres, les résultats expérimentaux pour les différentes fréquences.

Le modèle reproduit correctement l'allure des spectres de déplacements horizontaux du parement à différentes profondeurs (sauf au niveau du bas de l'écaille supérieure) et des contraintes verticales à l'interface sous-couche/remblai. Il donne également des valeurs de déplacements verticaux en haut de remblai comparables aux données expérimentales, même si le spectre numérique simulé est moins amorti que le spectre expérimental. Le modèle numérique reproduit aussi de façon très satisfaisante les incréments de traction dans l'armature A46 (lit supérieur), que ce soit en termes de spectre ou d'amplitudes. Cependant, il ne permet pas de retrouver des valeurs de tractions satisfaisantes dans l'armature A36 (bas de l'écaille supérieure), même si les ordres de grandeur des amplitudes restent acceptables.

La Figure 3-22 montre clairement que le chargement dynamique affecte sensiblement la valeur de la contrainte verticale appliquée aux deux premiers lits supérieurs d'armature, mais que pour les lits inférieurs ni les contraintes ni les tractions ne varient durant le chargement. Ceci signifie que le chargement dynamique n'a aucun effet sur la stabilité interne du bas du remblai. En revanche, sur les deux premiers lits, les termes d'inertie ne peuvent être négligés et doivent être pris en compte dans le dimensionnement. Par ailleurs, cette figure indique que le modèle prédit bien la valeur des contraintes avec la profondeur, tant au niveau de leur amplitude que de leur dépendance en fréquence.

Ainsi, on peut considérer que le modèle numérique adopté permet de retrouver les résultats expérimentaux avec une précision acceptable, compte tenu de la complexité notamment géométrique de l'expérience. Nous avons voulu proposer un modèle simple, où la majorité des paramètres choisis a fait l'objet d'une discussion fondée sur des résultats d'essais expérimentaux.

Des raffinements sont envisageables pour réduire les écarts constatés, notamment au niveau du bas de l'écaille supérieure :

En premier lieu, la rigidité d'interface armature/remblai a été prise constante pour toutes les armatures, ce qui est sans doute l'hypothèse la plus forte du modèle, étant donné que ce paramètre résulte de plusieurs phénomènes complexes tels que la valeur locale du confinement, la dilatance empêchée... De

plus, la quantification de ces phénomènes suppose de porter une attention toute particulière à la taille des éléments au niveau des armatures et aux fonctions d'interpolation choisies. Ces problématiques spécifiques seront développées dans le paragraphe 4.3.

Le choix d'un coefficient d'amortissement global (partie 3.2.2) pénalise également certainement la valeur des déplacements verticaux à proximité du ballast et de la sous-couche. Cependant, la détermination expérimentale de paramètres d'amortissements locaux reste délicate, du fait de la grande hétérogénéité de ces matériaux et de la très forte variation du taux de déformation sous la traverse au cours du chargement.

Enfin, on peut s'interroger sur la pertinence de modéliser le parement comme un milieu continu (partie 3.2.1.3), dans la mesure où cette hypothèse pénalise la prédiction des déplacements horizontaux du parement et des incréments de traction en certains points du modèle (comme constaté en bas de l'écaille supérieure par exemple). Il est certain qu'une modélisation des écailles comme des corps rigides (éléments de coques par exemple) serait plus pertinente. Cependant ceci pose plusieurs problèmes supplémentaires, tels que la difficulté de mailler correctement l'ensemble des interfaces qu'il faudrait alors prendre en compte avec pour conséquence supplémentaire l'augmentation significative du nombre d'éléments dans le modèle et la détermination des paramètres pour décrire ces interfaces.

Ce modèle peut être utilisé pour étudier de nombreux aspects qui n'ont pu être observés expérimentalement, comme par exemple les déformées du parement et du haut du remblai avec la fréquence. Il donne des enseignements précieux sur les modes de déformation de la structure totale. Cependant il est utile de rappeler que même à la résonance, les déformations horizontales du parement n'excèdent pas 0,1 mm et les déformations verticales du remblai restent inférieures à 0,2 mm, ce qui est marginal du point de vue de l'état de service.

Le modèle peut également être utilisé pour étudier l'évolution de certains paramètres au cours du chargement. En effet, même si les résultats présentés dans ce chapitre sont essentiellement des spectres, c'est-à-dire la distribution des maxima des grandeurs à chaque fréquence, on rappelle que le modèle donne par construction l'évolution des grandeurs en fonction du temps au cours du chargement. Ainsi, dans le chapitre suivant nous nous intéresserons de façon plus spécifique à l'évolution temporelle du coefficient de frottement à l'interface renforcement-remblai au cours du chargement.

---

## Chapitre 4

# Comportement instantané d'interface



## 4.1 Introduction

Dans le chapitre précédent, nous avons établi un modèle numérique fondé sur la méthode des Éléments Finis et l'avons comparé aux résultats des essais effectués au Centre d'Expérimentations Routières de Rouen en 2008. La bonne concordance des résultats donnés par le modèle avec les valeurs expérimentales nous a permis de valider ce modèle et de mettre en évidence l'influence de la fréquence sur différents aspects de la réponse de l'ouvrage : déformées du haut du remblai et du parement, évolution des contraintes de compression verticale avec la profondeur, répartition des incréments de traction dans les barres...

Dans ce chapitre, nous cherchons à caractériser l'évolution temporelle de l'interface armature-remblai à l'échelle locale au cours d'un cycle de chargement. En effet, les contraintes de compression varient fortement au niveau des deux rangées d'armatures situées immédiatement sous la traverse chargée (cf. Figure 3-22). Ces variations de contraintes sont corrélées aux variations de tractions dans les armatures, à un instant  $t$  fixé (Figure 2-12), et posent alors la question de l'état du frottement de l'interface armature-sol au cours du passage du train.

Nous présenterons tout d'abord quelques références normatives d'estimation des paramètres régissant l'état de l'interface, en statique, ainsi qu'un état des lieux des études portant sur la prise en compte d'un chargement dynamique pour les ouvrages en sol renforcé. A partir des constatations effectuées dans ces études, nous proposerons une méthode permettant de calculer un coefficient de frottement « dynamique » à l'interface sol-armature dans le cas de l'expérience du CER. Nous comparerons les valeurs numériques obtenues à l'aide du modèle présenté au chapitre précédent, avec les valeurs issues de modélisations statiques et également avec des valeurs de dimensionnement de référence. Cette comparaison permet de discuter de l'influence du passage d'un TGV sur la stabilité de l'interface et de la comparer à l'approche traditionnelle statique. Nous dresserons alors des conclusions à la fois sur la stabilité de l'ouvrage du CER et sur celle des ouvrages renforcés en général, en mettant en avant les particularités du comportement dynamique.

## 4.2 État de l'art

### 4.2.1 Contexte normatif

#### 4.2.1.1 Principe

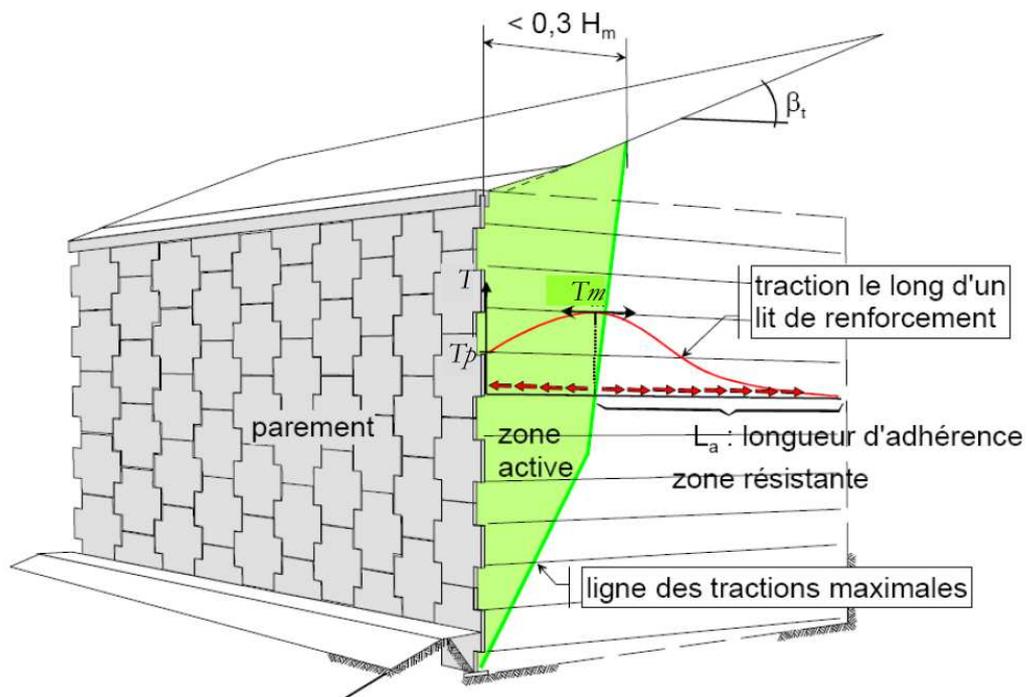


Figure 4-1 : Principe de fonctionnement d'un ouvrage en Terre Armée [REI07]

Comme on l'a expliqué dans la partie 1.2.2, le fonctionnement des ouvrages de soutènement en sol renforcé repose sur la mobilisation du frottement entre l'armature et le sol alentour. Le remblai peut être divisé en deux zones, active et résistante (Figure 4-1). La zone active correspond à la partie de sol qui a tendance à glisser en direction du parement et qui est retenue par les contraintes de cisaillement exercées à l'interface entre le remblai et les armatures. A contrario, la zone résistante correspond à la partie de sol pour laquelle les bandes de renforcement ont tendance à glisser en direction du parement et sont retenues par le frottement sur le remblai. La traction dans les armatures résulte donc du frottement généré tout le long de l'interface armature/sol. Le maximum de traction est atteint à la frontière entre la zone active et la zone passive, là où les contraintes de cisaillement changent d'orientation. Le lieu des maxima de traction avec la profondeur définit alors la « ligne des tractions maximales » qui sépare zone active et zone résistante et sert de base au dimensionnement de l'ouvrage.

En statique, le dimensionnement repose sur l'évaluation du taux de mobilisation de l'armature, c'est-à-dire du rapport entre la charge qui est effectivement retenue par l'armature et la charge totale qu'elle peut supporter, appelée « résistance d'ancrage ». La résistance d'ancrage est calculée en estimant la valeur du coefficient de frottement mobilisé dans la zone résistante le long de l'armature. On dit que le coefficient de frottement est entièrement mobilisé en un point de l'interface dans la zone résistante quand la contrainte de cisaillement  $\tau$  en ce point atteint une valeur maximale  $\tau_{max}$ . Si le frottement est entièrement mobilisé le long de toute l'interface résistante, alors la barre commence à glisser irréversiblement et à se retirer du sol de la zone résistante.

Pour assurer la stabilité interne, la norme NF P 24-270 [AFN09] préconise d'estimer le coefficient de frottement apparent, aussi appelé « coefficient d'interaction », à l'interface armature/remblai et de dimensionner l'ouvrage en fonction de cette valeur. Ce coefficient d'interaction  $\mu^*$  est le rapport de la contrainte de cisaillement sur la contrainte de compression verticale, à la rupture (équation (5.3)). Il dépend notamment de l'angle de frottement du sol et des effets de dilatance à l'interface, et se détermine au moyen d'essais d'extraction ou de valeurs normatives (annexe A de la norme NF EN 14475 [AFN07]).

D'autre part, dans le cas usuel d'un fonctionnement en statique, la norme NF P 24-270 recommande de s'intéresser à la charge maximale susceptible d'être appliquée à la structure (par exemple le poids d'un camion et non d'une voiture dans le cas des infrastructures routières) et de vérifier que la traction maximale générée par ce chargement dans chaque armature est bien inférieure à la résistance d'ancrage calculée à partir du coefficient d'interaction. Si la condition n'est pas remplie, il faut alors augmenter la longueur ou la densité d'armatures. On note que ce type de vérification, armature par armature, est conservatrice, les effets de surtractions locales pouvant dans la réalité être transférés aux armatures situées à proximité.

### 4.2.1.2 Mise en équations

---

Les méthodes de dimensionnement d'ouvrages en sol renforcé sous chargement statique imposent une vérification de l'adhérence de chaque armature lit par lit. En suivant les notations de la norme [AFN09], la traction maximale  $T_d$  (indice  $d$  pour valeur de design) estimée pour la charge maximale imposée à l'infrastructure est comparée à la capacité d'ancrage  $R_{f;k}$  (indice  $k$  pour valeur caractéristique) de l'armature considérée, dans sa zone résistante.

Le critère s'écrit ainsi :

$$T_d \leq \frac{1}{\gamma_{m,f}} \cdot R_{f;k} \quad (5.1)$$

avec  $\gamma_{m,f}$  un coefficient de sécurité forfaitaire.

Par ailleurs, la variation de traction élémentaire  $dT$  sur une longueur élémentaire  $dx$  d'armature en un point d'abscisse  $x$  s'écrit par définition:

$$dT(x) = 2 b \tau(x) dx \quad (5.2)$$

où  $b$  est la largeur d'une armature, et  $\tau(x)$  la contrainte de cisaillement appliquée par l'armature sur le sol le long de  $dx$ , l'axe des  $x$  étant orienté vers l'extrémité libre des armatures (on néglige la contribution du cisaillement sur les deux bords verticaux de l'armature et on suppose que le cisaillement est le même sur les faces supérieure et inférieure). On choisit la convention de signe  $\tau(x) > 0$  pour une contrainte orientée en direction du parement. La zone résistante du massif correspond donc aux points pour lesquels  $\tau(x) < 0$ .

En considérant une facette au point  $x$  à l'interface, la valeur de la contrainte de cisaillement en ce point, à la rupture, est donnée par la contrainte maximale mobilisable, qui s'écrit :

$$\tau_{max}(x) = \mu^*(x) \sigma_v(x) \quad (5.3)$$

où  $\mu^*(x)$  est le coefficient de frottement apparent, qui dépend de l'état du sol à l'interface (cf. partie 4.2.1.3).

En considérant que l'armature métallique est inextensible et glisse lorsque toutes les facettes de l'interface sol/armature ont atteint le critère de rupture, la résistance d'ancrage s'écrit d'après les équations (5.2) et (5.3) :

$$R_{f;k} = 2b \int_{L-L_a}^L \tau_{max}(x).dx = 2b \int_{L-L_a}^L \mu^*(x).\sigma_v(x).dx \quad (5.4)$$

avec  $L_a$  la longueur de la zone résistante (cf. Figure 4-1).

#### 4.2.1.3 Phénomène de dilatance empêchée

---

La valeur du coefficient de frottement apparent  $\mu^*(x)$  est délicate à estimer. En s'inspirant du critère de Coulomb, on considère usuellement que :

$$\mu^*(x) = \tan \varphi \quad (5.5)$$

où  $\varphi$  désigne l'angle de frottement du matériau constituant le remblai.

Cependant cette formule ne prend pas en considération les effets de dilatance présents à l'interface (cf. partie 1.2.2). Ces effets de dilatance sont difficiles à caractériser physiquement, car ils dépendent de l'état du sol à proximité de l'interface. La dilatance augmente le volume du sol lorsqu'il est cisailé. Dans les sols renforcés, [SCH79] a montré que cette augmentation de volume au niveau de l'interface était empêchée, car le remblai compacté possède une trop faible compressibilité. L'impossibilité pour le sol d'augmenter de volume entraîne alors une augmentation de la contrainte verticale  $\sigma_v$  s'appliquant au niveau

du lit de l'armature, ce phénomène étant ainsi appelé « dilatance empêchée ». Des essais d'extraction (cf. par exemple partie 4.2.1.4 et Figure 4-4) ont permis de caractériser la dépendance de  $\mu^*$  avec la contrainte de confinement qui elle-même dépend de la dilatance empêchée. La variation de  $\mu^*$  avec  $\sigma_v$  peut être approximée par une loi bilinéaire (Figure 4-2) où  $\mu_0^*$  dépend du coefficient d'uniformité  $C_u$  du remblai.

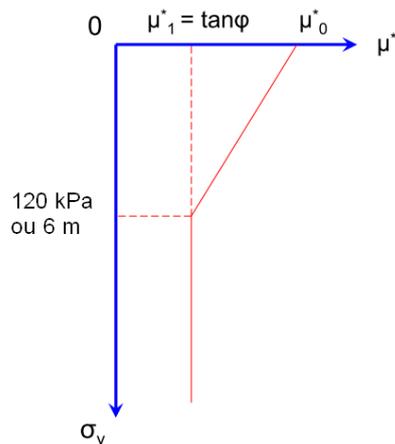


Figure 4-2 : Effet de la dilatance empêchée sur le coefficient de frottement [TAI12]

### 4.2.1.4 Essai d'extraction

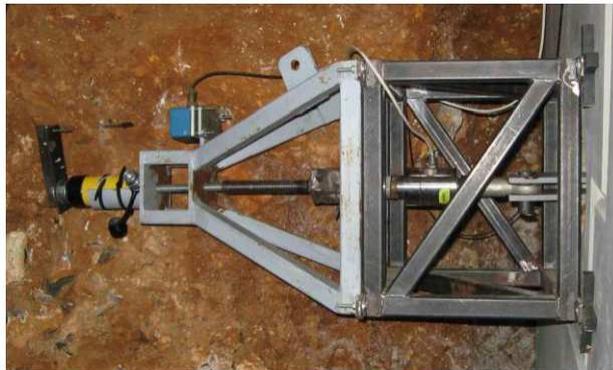


Figure 4-3 : Dispositif d'extraction d'armatures (d'après [SOY09])

L'essai d'extraction consiste à tirer sur la tête d'une armature pour la sortir du massif de sol. Des appareils spécifiques tels que celui présenté Figure 4-3 permettent de mesurer à la fois le déplacement de la tête de l'armature au cours du temps et d'asservir la force appliquée pour maintenir la vitesse de déplacement constante (1 mm/min selon la norme NF P 94-222 [AFN95]).

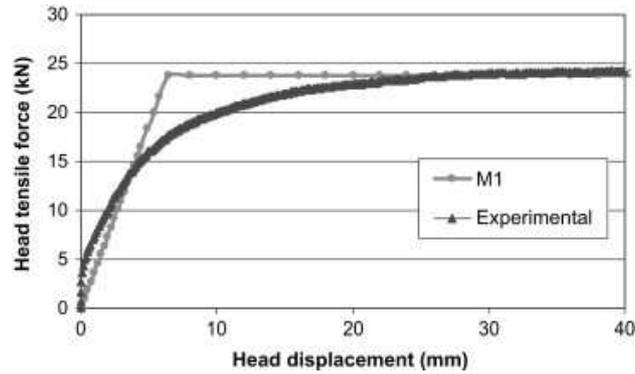


Figure 4-4 : Essai d'extraction d'armature métallique: traction-déplacement en tête d'armature. Résultats expérimentaux et modèle numérique associé (M1) [ABD10]

La Figure 4-4 présente un résultat classique d'un essai d'extraction, qui est caractérisé par la courbe donnant la force appliquée en fonction du déplacement de la tête d'armature. Les armatures métalliques sont généralement considérées comme indéformables et le déplacement en tête correspond au déplacement en chaque point de l'armature. Bien que la courbe expérimentale soit hyperbolique, en première approximation on peut l'estimer numériquement par un modèle élastique parfaitement plastique (courbe M1 sur la figure). Nous reviendrons sur ce point dans la partie 4.2.2.

En supposant que l'extraction provoque des frottements sur toute la longueur de l'armature ( $L_a=L$ ), la force appliquée est égale à la capacité d'ancrage  $R_{f;k}$ .

Comme on l'a vu dans le paragraphe 4.2.1.3, on suppose que le coefficient de frottement apparent dépend de la contrainte verticale pour un matériau homogène ( $C_U$  et  $\varphi$  constants le long de l'armature). Alors, sous réserve que la contrainte verticale soit constante le long de l'armature, le coefficient de frottement est donné par :

$$\mu^* = \frac{R_{f;k}}{2.b.L.\sigma_v} \quad (5.6)$$

Sur les bancs d'essais d'extraction d'armature, il est possible de maintenir une contrainte de confinement constante à l'armature, et l'équation (5.6) est valable. Dans un massif réel, il n'est pas évident que la contrainte verticale ait la même valeur le long de toute l'armature. L'utilisation de la formule (5.6) peut alors conduire à une mauvaise estimation du coefficient de frottement, en particulier si les variations de contraintes le long de la barre sont importantes.

#### 4.2.2 Lois de comportement d'interface

L'utilisation d'éléments de barre, en l'absence de considération spécifique d'interface, que ce soit avec la méthode des différences finies ([BEN13],

[FRE14]) ou des éléments finis, en 2D ou 3D [BOU12], conduit à considérer une adhérence parfaite entre le sol et le renforcement : les deux types d'éléments possèdent des nœuds en commun dont les degrés de liberté sont les mêmes. Cependant, ce comportement ne prend pas en compte le fait que la force transférée du sol à l'armature, sur une longueur donnée, ne peut pas être infinie. Pour surmonter cette difficulté, il faut autoriser un glissement relatif entre le sol et l'armature. Pour cela, on distingue les déplacements de l'armature d'une part (vecteur noté  $\underline{\zeta}_{arm}$  dans la suite) et ceux du sol ( $\underline{\zeta}_{sol}$ ). On complète le modèle mécanique en introduisant une loi de comportement de l'interface reliant le déplacement relatif entre le sol et l'armature  $\delta$  avec la densité linéique de force transmise par le sol à l'armature  $\underline{I}$  (homogène à une force par unité de longueur). En supposant les armatures orientées selon le vecteur unitaire  $\underline{u}_x$ , on peut ainsi écrire :

$$\delta = (\underline{\zeta}_{sol} - \underline{\zeta}_{arm}) \cdot \underline{u}_x \quad (5.7)$$

et

$$\underline{I} = I \underline{u}_x = \frac{dT}{dx} \underline{u}_x \quad (5.8)$$

La relation liant  $I$  à  $\delta$  est alors choisie en se fondant sur les essais d'extraction. Le choix le plus simple est de prendre une loi élastique linéaire parfaitement plastique (voir modèle M1 Figure 4-4 et Figure 4-5). C'est cette loi de comportement qui est prise en compte dans FLAC 2D ([BEN13]) par le modèle « strip »; elle est également disponible dans CESAR-LCPC pour les éléments de barre frottante (éléments KRTx). L'utilisation de ce modèle nécessite de fixer d'une part la raideur de l'interface  $c^I$  et d'autre part le critère de glissement, c'est-à-dire la valeur de  $I_{max}$  comme décrit dans [BOU12].

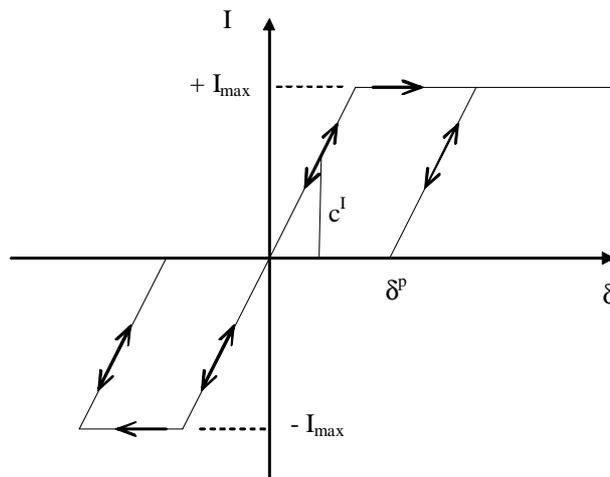


Figure 4-5 : Modèle linéaire élastique parfaitement plastique [BOU12]

La détermination de  $c^I$  est commune aux modèles de FLAC et de CESAR-LCPC. Elle se fait en calant le résultat de la simulation d'un essai d'extraction sur la courbe expérimentale dans le domaine des petits déplacements (pente du modèle M1 Figure 4-4).

La détermination de  $I_{max}$  en revanche diffère selon les codes.

Dans le code CESAR-LCPC la valeur de  $I_{max}$  est fixée par l'utilisateur, sur la base de l'essai d'extraction, pour retrouver la valeur de la force maximale atteinte au cours de l'extraction.

Dans le code FLAC, le critère de glissement est donné par le critère de Coulomb et dépend de la contrainte de compression verticale à l'interface. D'après l'équation (5.3) et la Figure 4-2, on a donc:

$$I_{max} = 2b \cdot \tau_{max} = 2b \cdot \mu^* (\sigma_v) \cdot \sigma_v \quad (5.9)$$

où  $\mu^*$  tient compte de la dilatance empêchée et dont la valeur est fixée par la norme NF EN 14475 [AFN07].

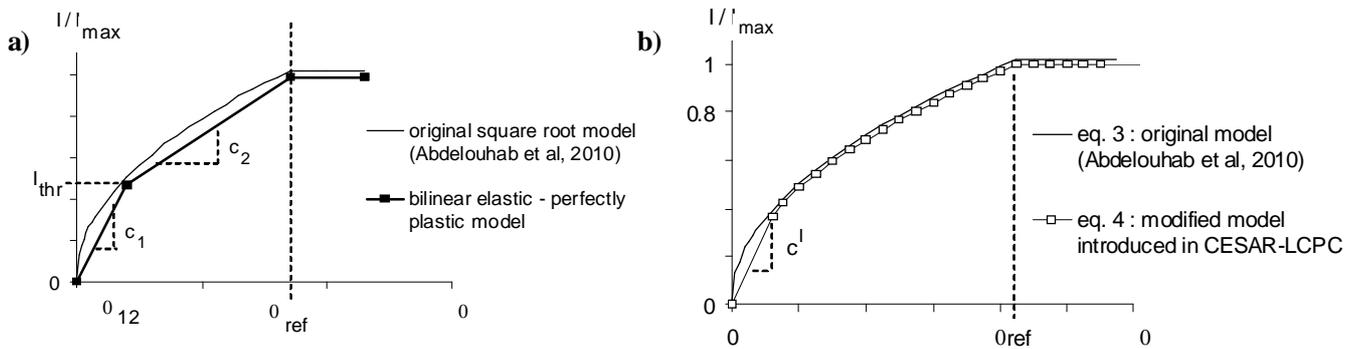


Figure 4-6 : Loïs de comportement d'interface [BOU12]

Il est à noter que pour la partie élastique du modèle, deux autres modèles, non linéaires, (Figure 4-6 a et b) ont également été implémentés dans le code CESAR-LCPC ([BOU12]). Ces modèles nécessitent davantage de paramètres, mais permettent une meilleure prédiction des tractions dans les armatures.

Tableau 4-1 : Résumé des modèles d'interface disponibles dans la littérature

Code	Dénomination	Partie élastique	Partie plastique	Exemple	Références
CESAR-LCPC	<b>linéaire</b> élastique- parfaitement plastique	$I = c^I \cdot \delta$	$I_{\max}$ constant	$c^I = 50 \text{ MN/m}^2$ $I_{\max} = 2 \text{ kN/m}$	[BOU12], [ABD10b]
			non considérée	$c^I = 10 \text{ MN/m}^2$	chapitres 4 et 5
CESAR-LCPC	<b>bilinéaire</b> élastique- parfaitement plastique	$I = \text{Min}[c_1 \cdot \delta, I_{\text{thr}} + c_2 \cdot \delta - I_{\text{thr}}(c_1/c_2)]$	$I_{\max}$ constant	$c_1 = 20 \text{ MN/m}^2$ $c_2 = 1 \text{ MN/m}^2$ $I_{\text{thr}} = 2 \text{ kN/m}$ $I_{\max} = 12 \text{ kN/m}$	[BOU12], [ABD10b]
CESAR-LCPC	<b>loi racine</b> élastique- parfaitement plastique	$I = \text{Min}[c_1 \cdot \delta, I_{\max}(\delta/\delta_{\text{ref}})^{1/2}]$	$I_{\max}$ constant	$c^I = 50 \text{ MN/m}^2$	[BOU12], [ABD10b]
				$\delta_{\text{ref}} = 8 \text{ mm}$	
				$I_{\max} = 12 \text{ kN/m}$	
FLAC-2D	<b>strip</b>	$I = c^I \cdot \delta$	$I_{\max} = 2b \cdot \mu^*(\sigma_v) \cdot \sigma_v$	-	[FRE14]

Finalement, le choix de l'un ou l'autre des modèles d'interaction résumés dans le Tableau 4-1 dépend de l'objectif de la modélisation et des possibilités du logiciel utilisé.

On notera qu'il est également possible de construire un modèle homogénéisé qui tienne compte de ces différentes lois d'interfaces. Il s'agit du modèle multiphasique, que nous présenterons dans le prochain chapitre. Il présente l'avantage de remplacer la représentation discrète des armatures par une représentation continue, ce qui simplifie beaucoup la préparation du maillage et réduit sensiblement les temps de calcul.

Dans ce chapitre, nous nous limiterons à un modèle élastique linéaire pour la loi d'interface en supposant que les variations dynamiques peuvent être modélisées par un modèle de ce type. On pourra au vu des résultats évaluer la pertinence de l'hypothèse.

### 4.2.3 Prise en compte d'un chargement dynamique dans la littérature

Soyez [SOY09] a présenté une série d'essais d'extractions d'armatures effectués sous chargement harmonique à 28 Hz (cf. Figure 2-7). La force nécessaire à l'extraction sous chargement dynamique des armatures supérieures du remblai (armatures 46 et 34 en bordeaux, Figure 4-7) est moins importante que celle nécessaire à l'extraction d'armatures similaires sous chargement statique (armatures 49 et 37 en bleu ciel).

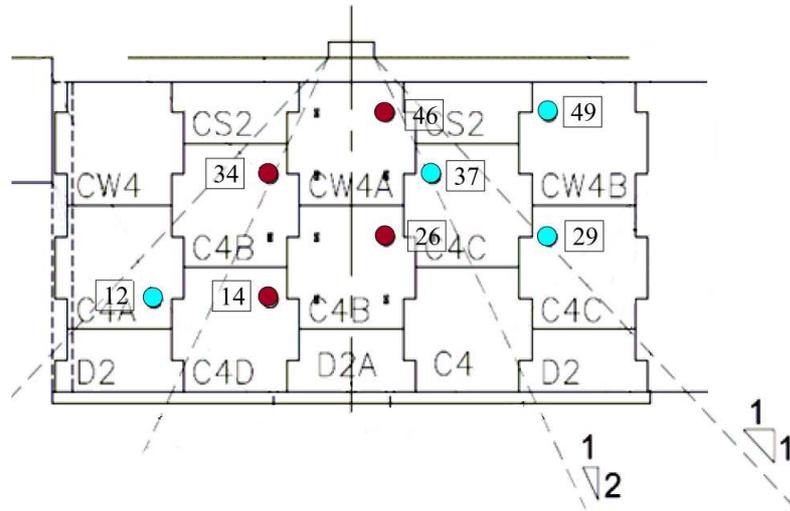


Figure 4-7 : Position des armatures extraites (d'après [SOY09])

Les armatures chargées en dynamique et en statique, n'ont pas été soumises aux mêmes contraintes verticales. En statique, Soyoz considère des valeurs de poids des terres et de surcharges statiques, dont la diffusion est supposée suivre une certaine pente, et calcule une contrainte moyenne le long de l'armature.

Pour les armatures sollicitées dynamiquement, il fait l'hypothèse que la rupture a lieu pour une sur-contrainte dynamique moyenne au cours d'un cycle. Ce raisonnement évite l'utilisation des valeurs instantanées des contraintes le long de chaque armature, qui ne sont pas disponibles avec la procédure d'acquisition décrite dans la partie 2.2.4.

En divisant la force d'extraction appliquée à l'armature par la contrainte statique (moyenne le long de l'armature) ou dynamique (moyenne en espace et en temps) et par la surface de l'armature (équation (5.6)), Soyoz a obtenu des valeurs de coefficients de frottement moyens le long de l'armature (Tableau 4-2) :

Tableau 4-2 : Coefficients de frottement expérimentaux (d'après [SOY09])

Niveau d'armatures	Numéros des armatures (statique/dynamique)	$\mu^*$ statique	$\mu^*$ dynamique	$\mu^*$ dynamique / $\mu^*$ statique
1	A12 / A14	3	2,6	0,89
2	A29 / A26	3,6	3,1	0,87
3	A37/A34	4,4	4,2	0,94
4	A49/A46	10,1	8,6	0,85

Il conclut à une diminution du coefficient de frottement de l'ordre de 15 % pour le niveau supérieur d'armatures dans le cas dynamique par rapport au cas statique (pour le chargement harmonique à 28 Hz).

Les expériences effectuées par Murray et al. [MUR79] et Floss et Thamm [FLO79], pour des essais d'extraction sous chargement dynamique, n'indiquent pas une telle dégradation du coefficient. Ces auteurs expliquent que la diminution constatée de la force d'extraction correspond à l'allègement du confinement provoqué par les accélérations verticales. Dans cette optique, l'hypothèse faite dans [SOY09] de prendre la valeur moyenne de la contrainte de compression sur un cycle paraît un peu trop simplificatrice.

Récemment, l'entreprise Terre Armée a étudié cette question en reprenant et complétant cette discussion [BEN13]. Au moyen d'une analyse 2D avec la méthode des différences finies à l'aide du logiciel FLAC-2D et pour le chargement à 28 Hz, les auteurs de cet article ont montré que l'approche proposée par Soyez était contestable.

Leur raisonnement est résumé par la Figure 4-8, qui représente l'évolution de la contrainte verticale et de la « force de cisaillement » transmise à un « segment » d'armature au cours du calcul, notée  $F_s$ , qui est donc proportionnelle à la contrainte de cisaillement locale  $\tau(x)$  de l'équation (5.2). Ils expliquent que la rupture locale d'interface (entre les moments T1 et T2 sur la figure) a lieu pour les valeurs minimales de contrainte de confinement, tandis que durant le reste du cycle (T3) une reprise d'adhérence est constatée, avant une nouvelle rupture (T4) et ainsi de suite.

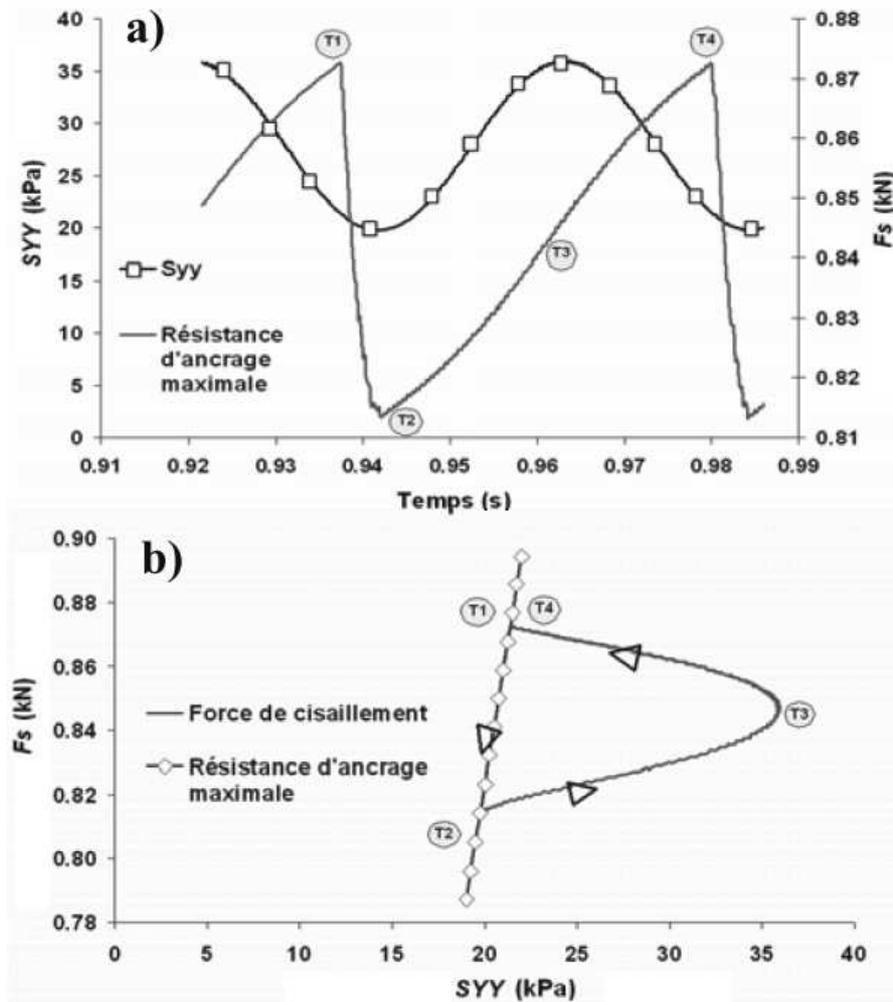


Figure 4-8 : Évolution des contraintes de cisaillement et de compression au niveau d'une facette de l'interface armature/remblai (d'après [BEN13])

Les auteurs relèvent que les contraintes verticales ne sont pas minimales au même moment en chacun des points de l'armature, mais dépendent aussi de  $x$ . Ceci complique l'analyse de l'essai.

Ils ont donc recalculé la courbe de variation du coefficient  $\mu^*$  en fonction de la profondeur qui permet de retrouver la résistance d'ancrage expérimentale obtenue lors de l'essai d'extraction effectué au CER. La procédure numérique développée pour estimer le coefficient de frottement pour chaque segment d'armature n'est pas détaillée dans l'article. Néanmoins, ce calcul conduit à des valeurs de  $\mu^*$  variant entre 9,2 et 10,8, selon la valeur de la contrainte de compression. Les auteurs ont alors proposé (Figure 4-9) une loi de variation du coefficient de frottement apparent avec le confinement, similaire à celle indiquée dans la norme NF EN 14475 [AFN07] pour tenir compte de la dilatance empêchée, montrant ainsi que le frottement apparent sous chargement dynamique était légèrement supérieur à celui sous chargement statique.

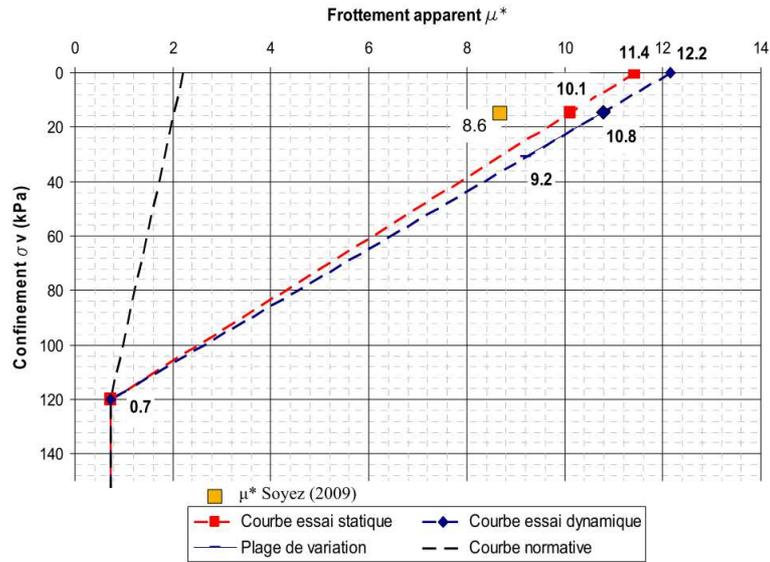


Figure 4-9 : Comparaison des coefficients de frottement dans le cas statique et dynamique à 28 Hz. [BEN13]

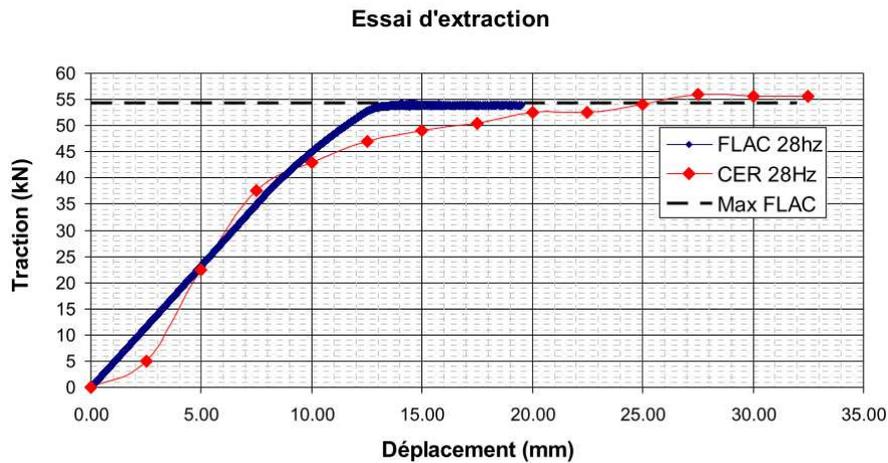
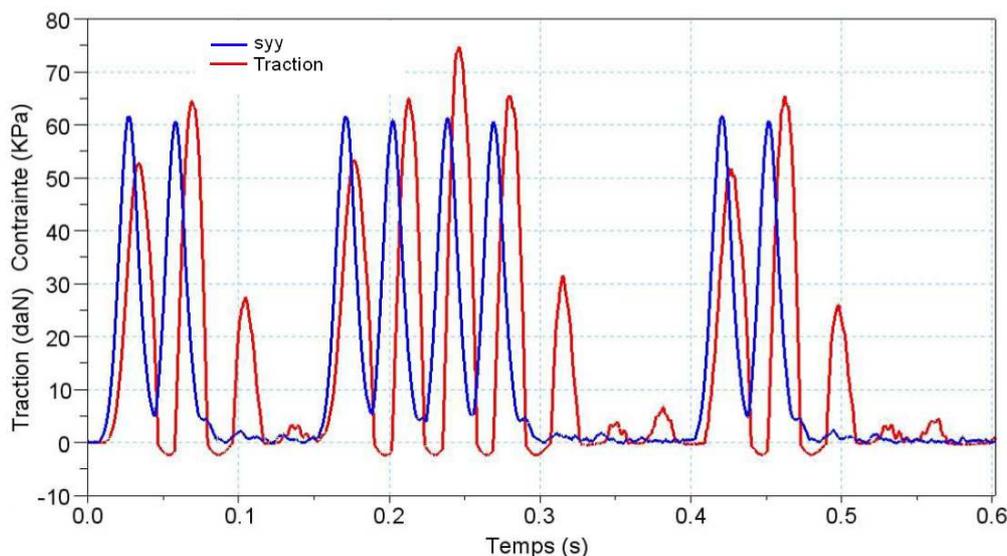


Figure 4-10 : Comparaison de l'essai simulé et celui mesuré en dynamique à 28 Hz. [BEN13]

En utilisant cette loi de comportement de l'interface sol/armature, ils ont simulé l'essai d'extraction de l'armature 46 dans les conditions de l'expérience du CER (courbe bleue Figure 4-10) et retrouvé les valeurs expérimentales (en rouge), confirmant la validité de leur approche.

Cependant, lors d'un essai d'extraction, il n'est pas possible d'étudier l'effet du déphasage entre les contraintes de compression et de cisaillement générées en réalité par le passage d'un train ; effet qui est susceptible de pénaliser l'adhérence des armatures.



**Figure 4-11 : Déphasages entre les contraintes de compression et les incréments de traction (communication personnelle de N. Freitag)**

Pour étudier ce phénomène, les mêmes auteurs ont donc modélisé dans [FRE14] le passage d'un train (signal double M) à l'état de service, toujours avec FLAC-2D. La modélisation permet cette fois de s'intéresser au déphasage entre les contraintes de confinement (en bleu sur la Figure 4-11) et les incréments de traction en un point de l'interface (en rouge sur la Figure 4-11).

Pour les armatures supérieures, le passage du train provoque l'apparition d'incrément de traction d'amplitude non négligeables (Figure 4-11) et la contrainte de cisaillement totale au niveau de l'armature ne peut plus être considérée comme statique. La procédure de calcul des contraintes et tractions totales en statique et en dynamique n'est pas détaillée, mais les auteurs arrivent à la conclusion que les phénomènes vibratoires pénalisent l'adhérence des armatures supérieures de l'ordre de 20 % au maximum pour des vitesses comprises entre 0 et 350 km/h. Cette valeur est cohérente avec les recommandations de l'IN 0203 [SNC85] (Figure 1-23), qui impose de couvrir les effets dynamiques par un coefficient forfaitaire de sécurité à appliquer lors de la justification de la stabilité interne en schéma pseudo-statique. Ce coefficient prend les valeurs suivantes : 1,2 sur les 3 premiers mètres sous la voie ; 1,1 de 3 à 6 mètres sous la voie et 1,0 au-delà.

## 4.3 Modélisation numérique de l'interface sous chargement dynamique

---

### 4.3.1 Effets dynamiques au niveau de l'interface

Le comportement de l'interface sol/armature lors d'un chargement dynamique semble complexe et difficilement observable expérimentalement. C'est la raison pour laquelle nous proposons dans la suite une démarche différente de celle des auteurs cités dans la partie 4.2.3.

Nous choisissons d'une part de mener une étude numérique exhaustive à l'aide d'un modèle tridimensionnel d'un ouvrage en vraie grandeur, en exprimant l'ensemble des contraintes pour chaque instant, chaque point des interfaces des armatures et pour une plage de fréquences comprises entre 5 et 40 Hz. D'autre part, nous prenons le parti de caractériser le problème directement en dynamique, sans nous référer d'emblée à la norme NF P 94-270 [AFN09] qui considère en fait un cas de chargement statique.

Il est important de rappeler les caractéristiques fondamentales des phénomènes dynamiques par rapport aux phénomènes statiques, qui peuvent se décliner en trois effets distincts :

- dépendance temporelle
- effets d'inertie – amplification
- déphasage des contraintes de cisaillement et de compression

La dépendance temporelle se manifeste évidemment par une variation des contraintes et déplacements en un point de l'interface au cours du temps.

Une surcharge dynamique diffère aussi d'une surcharge quasi-statique par les effets d'inertie. Ils induisent des contraintes maximales plus élevées que les valeurs statiques, pour un chargement de même amplitude.

Ces surcharges dépendent de la fréquence du chargement, de la rigidité de la structure, de sa géométrie et de sa masse. Cet effet a été étudié en détail dans les deux chapitres précédents.

Dans le cas de l'étude de phénomènes variant au cours du temps, se pose en plus un problème de déphasage des grandeurs étudiées. Dans le cas qui nous intéresse, les contraintes de cisaillement et de compression au niveau de l'interface sont déphasées. Le déphasage entre elles est constant en régime établi, et dépend également des caractéristiques géométriques, mécaniques et de la fréquence de la sollicitation.

### 4.3.2 Définitions

Pour tenir compte des effets dynamiques, on se propose de récrire les équations de stabilité d'une armature dans le cas où elle est soumise à un chargement dynamique.

En appelant  $dT$  la traction dans l'armature en un point d'abscisse  $x$ , pour un instant  $t$ , on a maintenant, sur un intervalle  $dx$  du renforcement:

$$dT(x,t) = 2b.\tau(x,t).dx + \rho_l \gamma(x,t).dx \quad (5.10)$$

avec  $\tau(x,t)$  la contrainte de cisaillement en ce point et à cet instant,  $b$  la largeur de l'armature,  $\rho_l$  la masse linéique de la barre et  $\gamma(x,t)$  l'accélération de la section  $dx$ .

On peut négliger le terme d'accélération de la section de la barre, dans la mesure où, aux fréquences considérées, la longueur d'onde des ondes mécaniques dans l'acier est très supérieure à la longueur  $L$  des armatures. Ainsi, l'équation (5.10) peut s'écrire :

$$dT(x,t) = 2b.\tau(x,t).dx \quad (5.11)$$

Il est maintenant plus difficile d'estimer une résistance d'ancrage, car il n'y a plus vraiment de zones active et résistante bien définies, dans la mesure où la propagation des ondes induit une variation de l'amplitude des contraintes de cisaillement en chaque point au cours du temps, ce qui peut entraîner localement le changement de sens de ces contraintes.

On se propose donc de discuter localement, et non plus sur toute la longueur de l'armature, l'équilibre d'un tronçon au cours du temps. Pour un matériau granulaire sans cohésion, on suppose qu'il ne peut se développer d'efforts de traction dans le sol et qu'au niveau des armatures il n'y a jamais de contrainte verticale nulle. Ainsi, pour chaque  $x$  et  $t$ , la contrainte verticale est strictement compressive et, avec les conventions de la mécanique des milieux continus, on a :

$$\sigma_v(x,t) < 0 \quad (5.12)$$

Pour chaque point  $x$  à l'instant  $t$ , la contrainte de compression verticale  $\sigma_v(x,t)$  et la contrainte de cisaillement à l'interface armature/sol  $\tau(x,t)$  sont entièrement définies et  $\sigma_v(x,t)$  est non nul. Il est alors possible de définir une nouvelle fonction  $f(x,t)$ , telle que :

$$\tau(x,t) = f(x,t).\sigma_v(x,t) \quad (5.13)$$

$f(x,t)$  sera appelé « coefficient de frottement dynamique » (mobilisé) dans la suite. D'après les équations (5.11) et (5.13),  $f$  s'écrit :

$$f(x,t) = \frac{1}{2b} \frac{\frac{dT}{dx}(x,t)}{\sigma_v(x,t)} \quad (5.14)$$

Cette équation permet de calculer le coefficient  $f$  à partir des valeurs expérimentales ou numériques de tractions et de contraintes de compression verticale à l'interface armature/remblai, et d'étudier ses variations dans un espace  $(x,t)$ .

En se fondant sur le résultat présenté dans [BEN13] (Figure 4-9), on sait que le coefficient de frottement n'est pas dégradé par le chargement dynamique. On pourra alors comparer ce coefficient de frottement dynamique mobilisé  $f(x,t)$  avec le coefficient de frottement apparent  $\mu^*(\sigma_v(x,t))$ , et discuter ainsi de la stabilité de chaque portion d'interface armature/remblai sous chargement dynamique.

### 4.3.3 Présentation des simulations numériques

Dans cette section, on étudie les variations du coefficient de frottement dynamique défini par l'équation (5.14) durant un chargement harmonique en régime établi (donc durant un chargement se rapprochant de l'état de service, et non lors d'un essai d'arrachement).

Le chargement étudié est celui présenté en Figure 2-1, avec une partie statique et une partie variable, dont l'amplitude varie entre 20 kN et 90 kN. Il n'est pas identique à celui correspondant au passage d'un TGV, comme on l'a indiqué dans la partie 2.2.3 : il est monofréquentiel et les effets transitoires ne sont pas pris en compte dans la modélisation. Cependant, il permet de mieux décorréliser les phénomènes dynamiques mis en jeu.

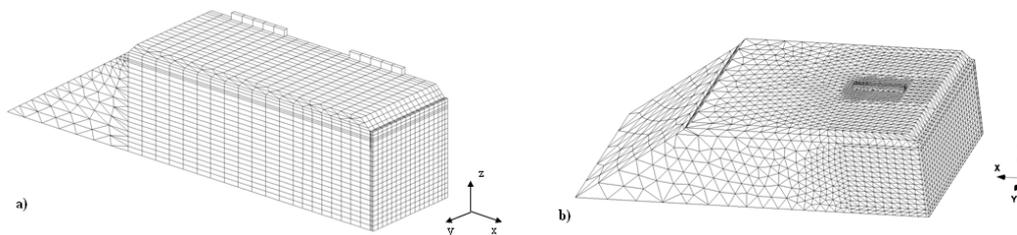


Figure 4-12 : Maillage correspondant au chargement statique (a) [BOU12] et au chargement dynamique (b)

Pour l'analyse des phénomènes dynamiques, on utilise le maillage présenté dans le chapitre précédent. (Figure 3-5)

Pour la partie statique, nous n'avons pas modélisé la construction du massif, ni le chargement statique dans le cadre de cette thèse, mais réutilisé repris le maillage et les fichiers de calcul correspondant au modèle présenté dans [BOU12] (Figure 4-12). Ce choix tient au fait que les stratégies de modélisation

de la construction du remblai et d'un chargement dynamique sont très différentes et ne font pas appel aux mêmes modules de calcul du logiciel CESAR-LCPC. De plus, les résultats statiques présentés dans [BOU12] correspondent relativement bien aux résultats expérimentaux statiques présentés dans [SOY09]. Ainsi, pour obtenir les valeurs statiques nous avons utilisé le maillage correspondant à [BOU12] et l'avons adapté au chargement statique  $F_{\text{moy}} = 55 \text{ kN}$  en gardant la procédure de construction identique.

Dans le nouveau maillage utilisé pour le calcul dynamique, chaque armature est discrétisée en 8 éléments de barre « frottante », et comporte 17 nœuds, ce qui équivaut à une distance entre deux nœuds d'environ 20 cm. Ces dimensions ont été choisies pour correspondre aux critères de longueurs d'onde dans le remblai comme on l'a présenté dans la section 3.2.4. Les variations de tractions et contraintes au voisinage de l'interface sont relevées à chaque incrément de temps pour une période entière du signal en régime établi, ce qui diffère du chapitre précédent où l'on ne relevait que leur valeur maximale sur la période. Bien que l'on s'intéresse au régime établi, on fait un calcul de l'évolution du remblai au cours du temps, en considérant que le régime établi est atteint au bout de 10 périodes. On étudie donc ici les grandeurs correspondant à la dixième période, soit les 30 derniers pas de temps du calcul.

Une procédure numérique complète a été écrite pour lancer les calculs, effectuer le post-traitement et obtenir les représentations graphiques des tractions, contraintes et coefficients de frottement dans un espace  $(x, t)$  pour chaque fréquence. Cette procédure a entièrement été écrite dans le langage Python, en particulier à l'aide des bibliothèques Numpy et Matplotlib dédiées au calcul scientifique.

Les armatures étudiées correspondent aux armatures instrumentées A36 et A46 présentées Figure 4-7. Nous avons choisi d'étudier ces deux seules armatures, car leur comportement est représentatif du comportement des armatures des deux lits supérieurs, qui sont les seuls à être sensibles au chargement dynamique, comme on l'a rappelé dans la Figure 3-22. De plus, elles sont situées à proximité de la traverse sollicitée.

Le coefficient de frottement dynamique mobilisé au cours du chargement harmonique est calculé à partir de l'équation (5.14). On fait l'hypothèse que la valeur des contraintes totales et des tractions totales est la somme de la valeur des contraintes et tractions issues du chargement statique et de la valeur issue du calcul dynamique, qui varie au cours du temps.

L'hypothèse de l'absence de couplage entre partie statique et partie dynamique du chargement a été validée dans la partie 2.3.1. On pourra aussi se référer à [PAP12], qui a discuté en détail les bases mathématiques de ce type de séparation des échelles de temps. Dans la suite, on appellera partie « statique » des contraintes et tractions totales, les grandeurs relatives au chargement correspondant à la construction du massif et au chargement statique de 55 kN ( $F_{\text{moyenne}}$  cf. Figure 2-7).

### 4.3.4 Détermination des tractions

#### 4.3.4.1 Tractions statiques

La traction statique dans les armatures a été modélisée dans [BOU12] à l'aide de différents modèles d'interface (cf. 4.2.2) et les valeurs calculées dans les armatures supérieures présentent une erreur inférieure à 30 % par rapport aux valeurs expérimentales. Cependant ici, la valeur de la traction est particulièrement importante, puisqu'elle influe directement sur la valeur du coefficient de frottement dynamique que l'on cherche à estimer. Aussi, pour les valeurs de tractions statiques, puisque les armatures ont été particulièrement bien instrumentées, nous préférons choisir les valeurs expérimentales données dans [SOY09] et proposer une fonction d'interpolation pour estimer la traction entre les points de mesure. Au regard de la distribution des tractions expérimentales donnée Figure 4-13 et Figure 4-14, nous proposons une fonction d'interpolation quadratique, ce qui permet 1) d'obtenir une bonne interpolation des tractions expérimentales, 2) d'avoir une distribution de pente identique à celles proposées dans [BOU12]. Il en résulte que la variation des contraintes de cisaillement le long de l'armature est linéaire.

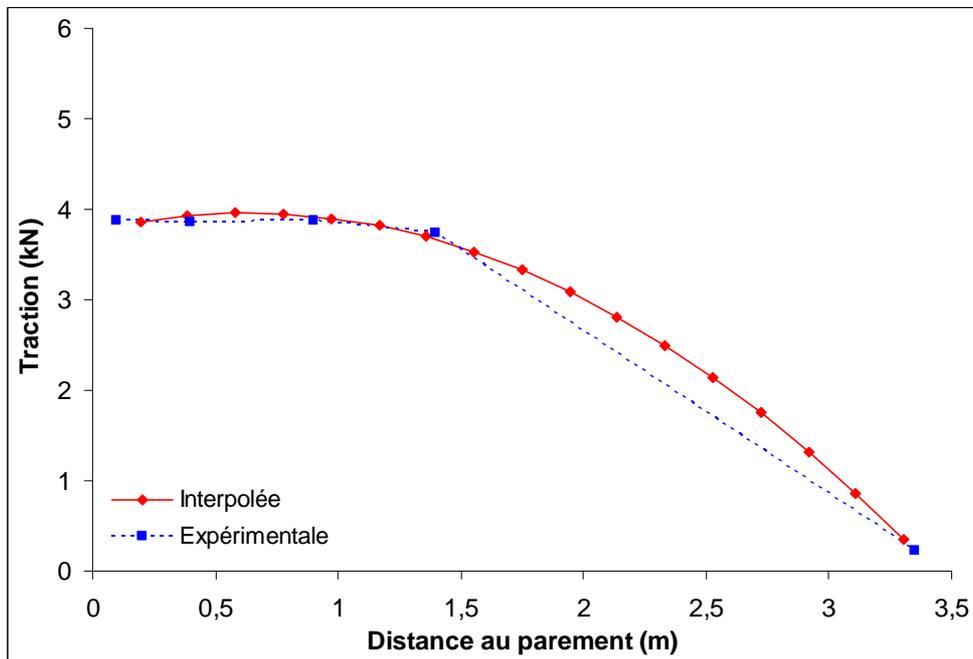


Figure 4-13 : Traction dans l'armature A46 pour le chargement statique

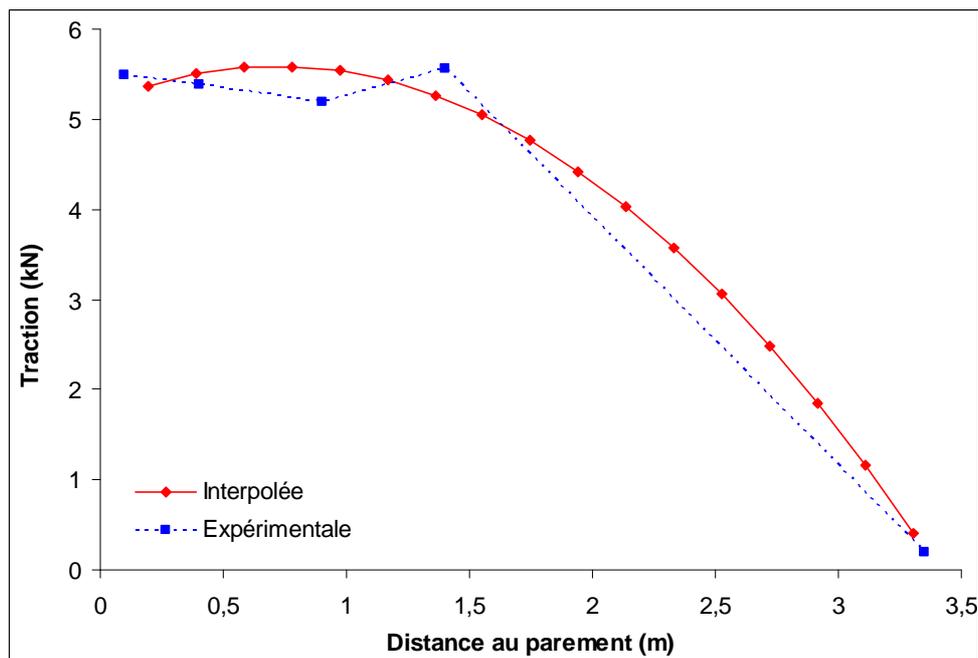


Figure 4-14 : Traction dans l'armature A36 pour le chargement statique

### 4.3.4.2 Incréments de tractions

Les incréments de traction utilisés pour calculer le coefficient de frottement dynamique sont obtenus à partir du modèle numérique présenté dans le chapitre précédent. On a vu que les spectres des tractions (c'est-à-dire la valeur de l'amplitude des variations des tractions avec la fréquence) étaient bien estimés par le modèle pour l'armature A46. Bien que les spectres de tractions calculés dans l'armature A36 ne soient pas en accord avec les valeurs expérimentales, nous avons cependant pris le parti de les utiliser dans le calcul du coefficient de frottement dynamique, du fait de l'absence d'autres données.

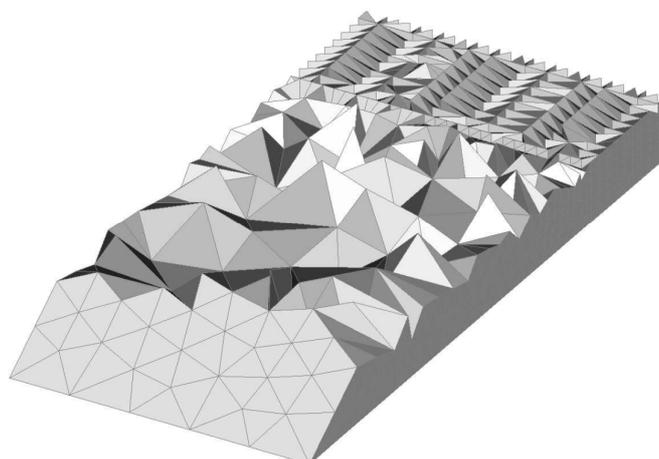
On fait ici l'hypothèse que le modèle prédit bien la variation des tractions pour chaque incrément de temps.

### 4.3.5 Détermination des contraintes

#### 4.3.5.1 Présentation de l'algorithme

Une attention spéciale a été portée à l'estimation des contraintes de compression le long des armatures. En effet, le choix d'un maillage avec des éléments tétraédriques mène à des problèmes géométriques délicats : certains nœuds du maillage peuvent appartenir à un grand nombre d'éléments (plusieurs dizaines), ce qui peut perturber sensiblement l'estimation des contraintes.

Un algorithme d'interpolation initial consistait, pour un point fixé, à chercher le nœud le plus proche puis à choisir le premier élément auquel ce nœud appartient, et donner la contrainte correspondant à cet élément (les contraintes calculées aux points de Gauss étant ramenées, dans le module DYNi, aux nœuds).



*Figure 4-15 : Configuration des mailles du modèle numérique*

Devant la géométrie complexe du maillage créé par le mailleur tétraédrique utilisé (Figure 4-15), le choix d'un seul nœud d'un élément conduisait à des valeurs de contraintes qui variaient fortement le long de l'armature.

Pour améliorer l'estimation des contraintes, on a développé un algorithme d'interpolation plus complexe : pour chaque nœud des armatures, on considère un cube de 5 cm de côté centré en chacun de ces points. Pour chaque sommet de ce cube, on définit la contrainte en ce sommet comme la valeur moyenne des contraintes des éléments auxquels il appartient. L'interpolation ainsi proposée, en tenant compte de la géométrie réelle de tous les éléments adjacents à l'armature, permet de retrouver des variations réalistes de contraintes de compression au voisinage du renforcement.

Cet algorithme a été testé sur un maillage constitué d'éléments hexaédriques et permet d'obtenir des valeurs de contraintes similaires pour les deux maillages.

### 4.3.5.2 Contraintes statiques

---

Durant l'expérience du CER, l'interface sol/armature a été peu instrumentée, et en particulier il y avait peu de données relatives aux contraintes de compression à cette interface (cf. Figure 2-5). Même pour les valeurs statiques, il n'y a pas de données expérimentales disponibles pour estimer les contraintes sur l'ensemble de la longueur des armatures. Nous avons choisi de nous fier aux contraintes calculées par le modèle présenté dans [BOU12] pour avoir les contraintes statiques le long des armatures. Cependant, les auteurs de cet article n'ont pas

comparé les contraintes données par leur modèle aux valeurs relevées par les capteurs disposés dans le massif. Aussi, avant d'utiliser les valeurs numériques à l'interface sol/armature, nous avons procédé à cette comparaison (Figure 4-16 et Figure 4-17).

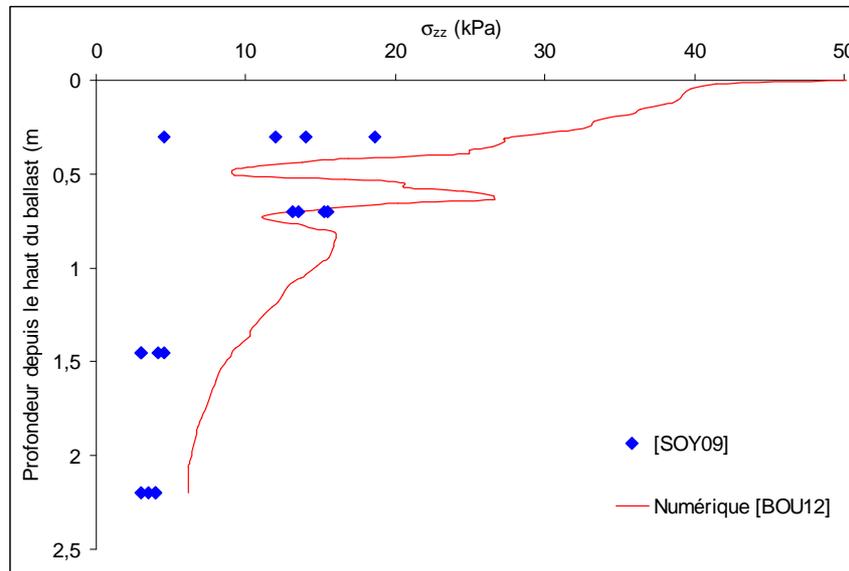


Figure 4-16 : Comparaison des données expérimentales et de résultats de calcul [BOU12] : contraintes de compression verticales pour la surcharge de 55 kN

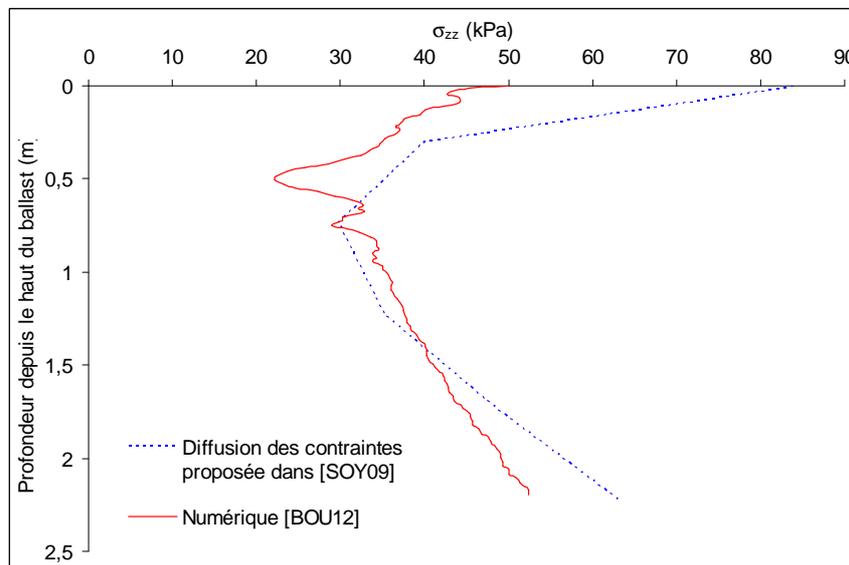


Figure 4-17 : Comparaison des résultats d'un modèle analytique [SOY09] et de résultats de calcul [BOU12] : Contraintes totales (poids des terres + 55 kN)

La Figure 4-16 et la Figure 4-17 montrent que le modèle donne une approximation acceptable de la distribution des contraintes de compression verticales avec la profondeur pour un chargement de 55 kN et une bonne approximation quand on considère également le poids des couches supérieures, par rapport

aux valeurs données dans [SOY09]. Les discontinuités présentes dans le modèle numérique correspondent aux interfaces ballast/sous-couche (-30 cm) et surtout sous-couche/remblai (-60 cm).

On supposera donc que le modèle numérique permet d'estimer avec une bonne précision les contraintes de compression verticales au voisinage des armatures. On prendra ces valeurs numériques pour calculer le coefficient de frottement dynamique mobilisé.

### 4.3.5.3 Incréments de contrainte

---

Les incréments de contrainte verticale à l'interface sol-barre sont donnés par le modèle numérique présenté dans le chapitre précédent. Leurs valeurs n'ont pas été vérifiées aux interfaces sol/armature, néanmoins la Figure 3-6 et la Figure 3-22 indiquent que le modèle prédit de façon satisfaisante les incréments de contrainte aux points instrumentés. On utilisera les résultats du modèle présenté au chapitre précédent et l'algorithme présenté en 4.3.5.1 pour estimer les incréments de contrainte verticale à l'interface sol/A36 et sol/A46.

## 4.4 Présentation des résultats

### 4.4.1 Armature A46

Dans chacune des figures ci après,  $x$  est la distance depuis le parement. Le pas de temps correspond à un trentième de période, donc sa valeur varie pour chaque fréquence suivant le Tableau 4-3 :

Tableau 4-3 : Valeur des pas de temps

Fréquence (Hz)	Pas de temps (ms)
5	6,67
10	3,33
15	2,22
20	1,67
25	1,33
28	1,19
30	1,11
35	0,95
40	0,83

#### 4.4.1.1 Contrainte de cisaillement totale

A partir de la somme des tractions statiques et incrémentales présentées dans la partie 4.3.4 on peut calculer la contrainte de cisaillement totale au niveau de l'interface en dérivant la traction par rapport à la position  $x$  dans l'armature (cf. équation (5.14)). Comme la valeur de la traction totale est quasiment égale à la valeur statique, on obtient une variation quasi linéaire de la contrainte de cisaillement avec la position dans l'armature, comme on le peut constater dans la Figure 4-18 : la dépendance temporelle de ces contraintes de cisaillement totale se manifeste uniquement à 35 Hz et 40 Hz et seulement dans des proportions négligeables devant l'amplitude des contraintes statiques.

Le fait que la traction dynamique soit très largement inférieure à la traction dans les armatures à la fin de la construction, y compris dans les armatures supérieures, a été mis en évidence dans [SOY09] et est donc confirmé ici. Ce résultat sera discuté dans la partie 4.5.

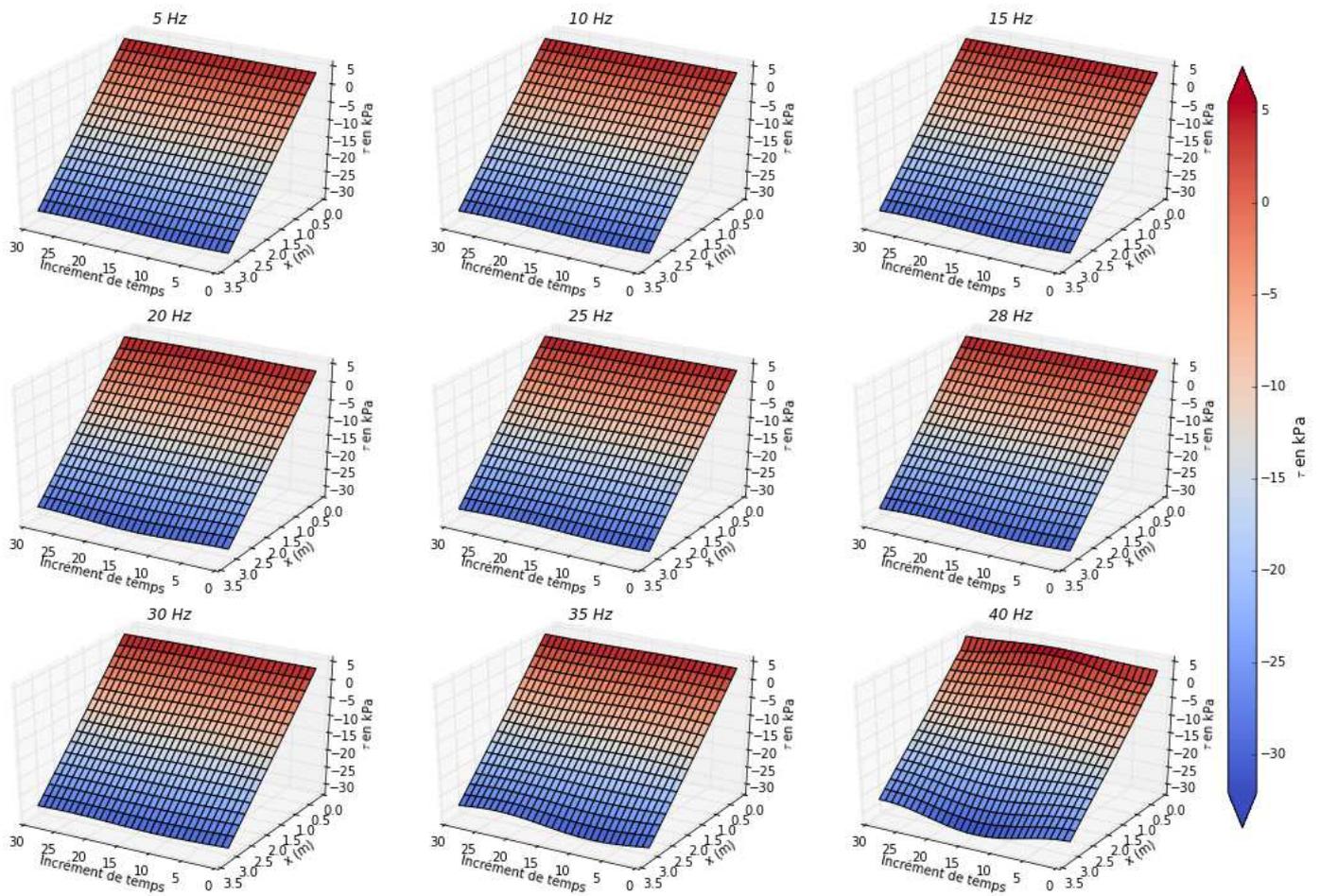


Figure 4-18 : Contrainte de cisaillement totale le long de l'armature A46

Notez qu'ici l'axe des  $x$  a été inversé afin de rendre la figure plus lisible.

### 4.4.1.2 Contrainte verticale totale

Pour la lecture de la Figure 4-19 et de la Figure 4-20, on rappelle que nous avons choisi de représenter les contraintes de compression par des valeurs négatives.

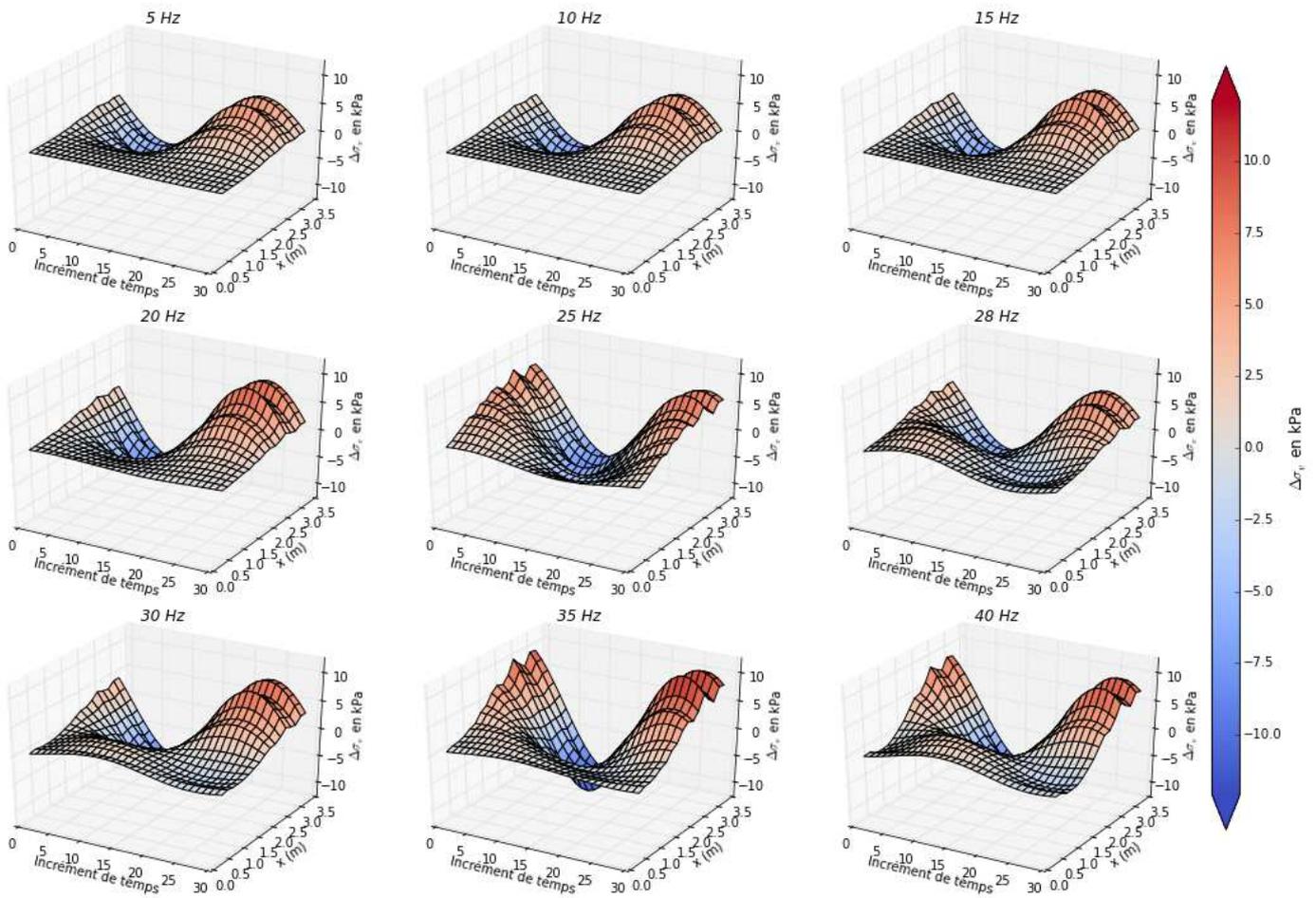


Figure 4-19 : Incréments de contrainte verticale le long de l'armature A46

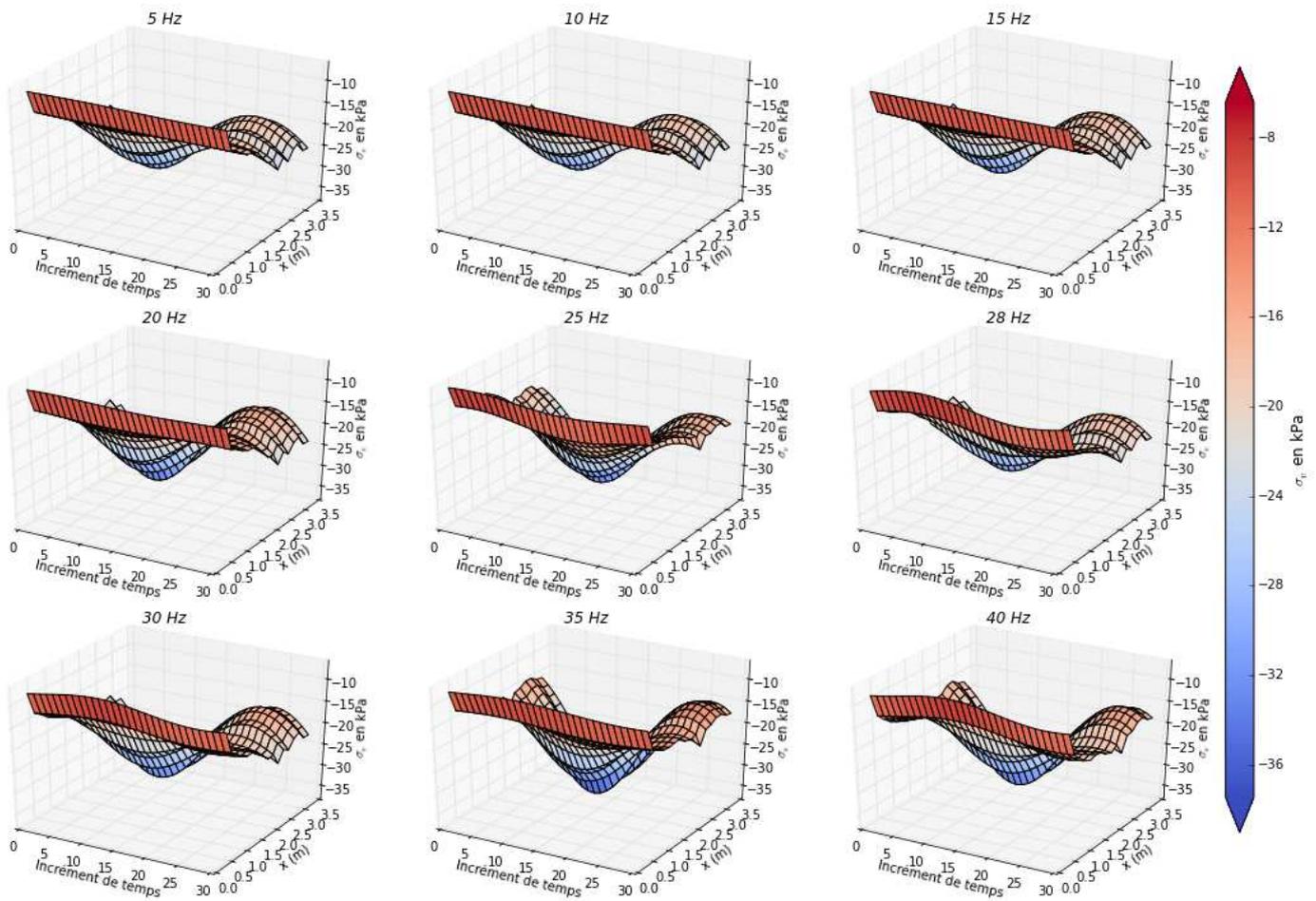


Figure 4-20 : Contrainte verticale totale le long de l'armature A46

La contrainte verticale totale (Figure 4-20) est la somme de la contrainte issue du chargement statique et de la construction du remblai et des incréments de contrainte dynamique (Figure 4-19). Comme attendu (cf. Figure 3-22), les variations des incréments de contrainte sont du même ordre de grandeur que les contraintes statiques au niveau de l'armature A46. De ce fait, les contraintes verticales totales varient beaucoup en fonction du temps. De plus, des phénomènes d'amplification dynamique sont présents dès 25 Hz, et à partir de cette fréquence, les contraintes varient sur tout le long de l'armature et non plus seulement au droit de l'application de la charge.

#### 4.4.1.3 Coefficient de frottement dynamique

On présente Figure 4-21 les valeurs du coefficient de frottement dynamique mobilisé  $f$  pour chaque fréquence dans l'espace  $(x,t)$ .

Comme indiqué en 4.2.1.1,  $f < 0$  signifie que la contrainte de cisaillement exercée par le sol sur l'armature est orientée en direction du parement et le point de l'interface appartient donc à la zone active (cf. Figure 4-1). Comme on

s'intéresse à la zone résistante lors du dimensionnement de l'ouvrage, on s'intéressera surtout dans la suite aux valeurs positives du coefficient de frottement dynamique  $f$ , une valeur élevée de ce coefficient signifiant que le frottement est susceptible d'atteindre un critère de rupture donné ; par exemple le frottement d'interaction défini en 4.2.1.2.

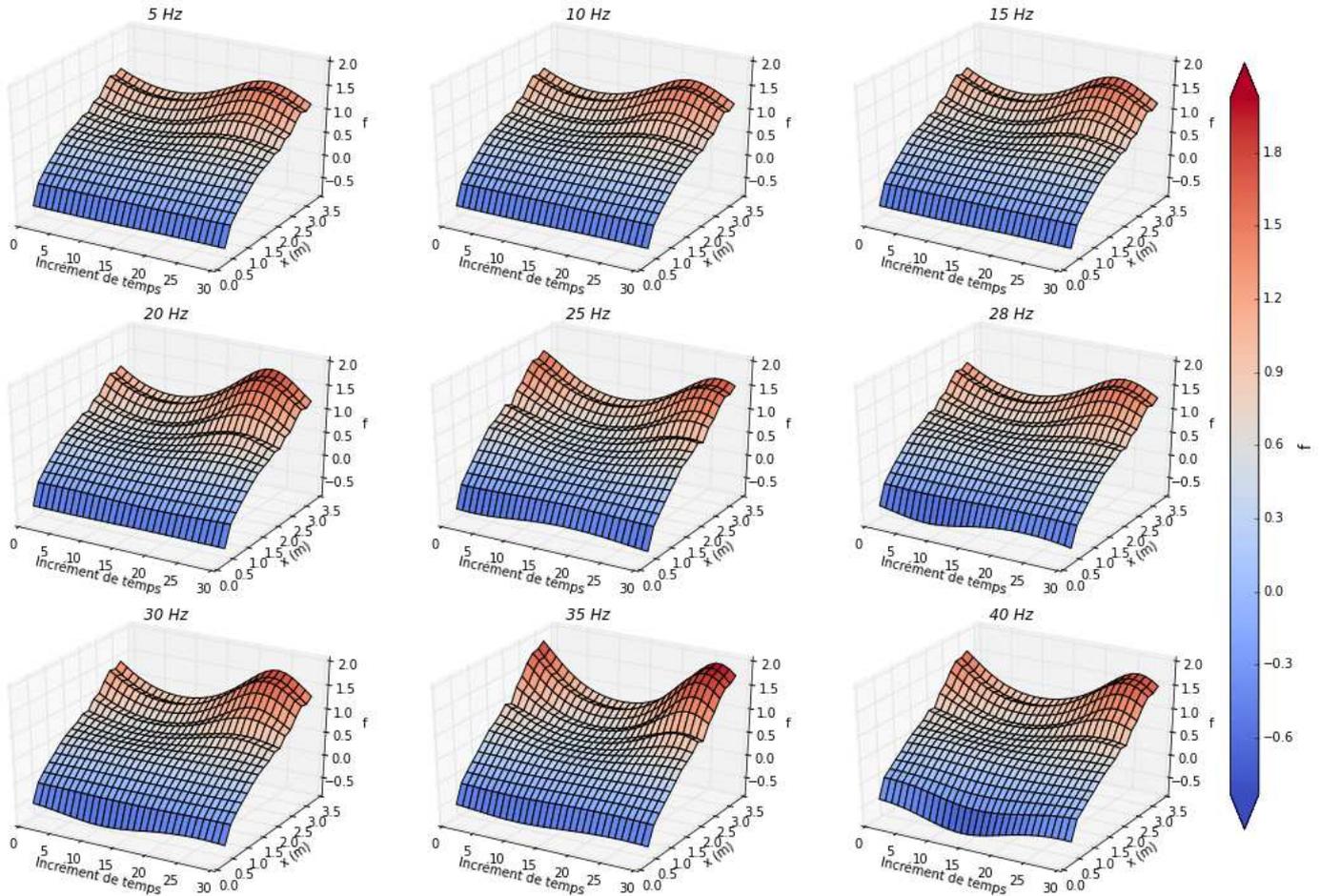


Figure 4-21 : Coefficient de frottement dynamique mobilisé le long de l'armature A46

La Figure 4-21 montre que, pour une armature fixée, le coefficient de frottement dynamique mobilisé varie beaucoup au cours d'un cycle, avec la distance au parement : le coefficient de frottement dynamique prend son minimum à proximité du parement et son maximum en queue d'armature (là où la traction est la plus faible). C'est également à cette abscisse que sa variation au cours du temps est la plus élevée : le coefficient de frottement mobilisé est compris entre 0,8 et 1,4 à 5 Hz et varie entre 0,7 et 1,8 à 25 Hz.

La fréquence du chargement a une influence limitée sur les variations du coefficient dans le domaine  $(x, t)$ . En effet, les courbes de la Figure 4-21 et de la Figure 4-22 ont toutes la même allure à toutes les fréquences. On note cependant

un effet d'amplification de l'amplitude du frottement dynamique mobilisé à 35 Hz pour l'armature A46 et à 25 Hz et 35 Hz pour l'armature A36.

#### 4.4.2 Armature A36

En procédant de façon similaire, on présente sur la Figure 4-22 la distribution du coefficient de frottement le long de l'armature A36. La variation de ces coefficients avec la fréquence, le temps et la distance au parement est similaire à celles de l'armature supérieure, à ceci près que l'amplitude y est un peu moins élevée.

On peut d'ailleurs noter que, pour ce lit d'armatures également, la contrainte de cisaillement totale est presque égale à la traction statique, et donc l'erreur effectuée sur l'estimation des incréments de traction numériques par rapport aux incréments expérimentaux (cf. partie 3.3.4.2) n'a pas de conséquence.

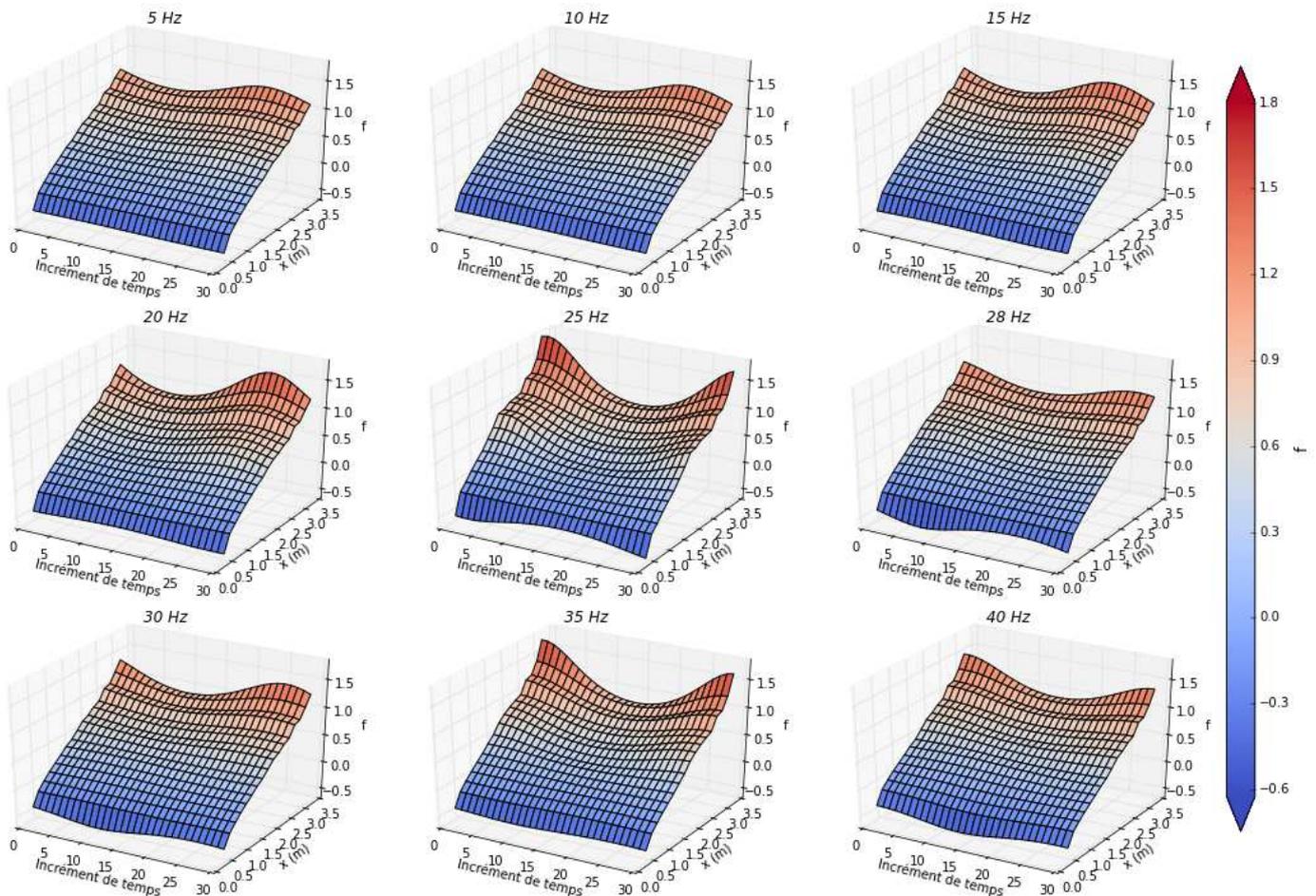


Figure 4-22 : Coefficient de frottement dynamique mobilisé le long de l'armature A36

### 4.4.3 Comparaison avec un chargement statique de 90 kN

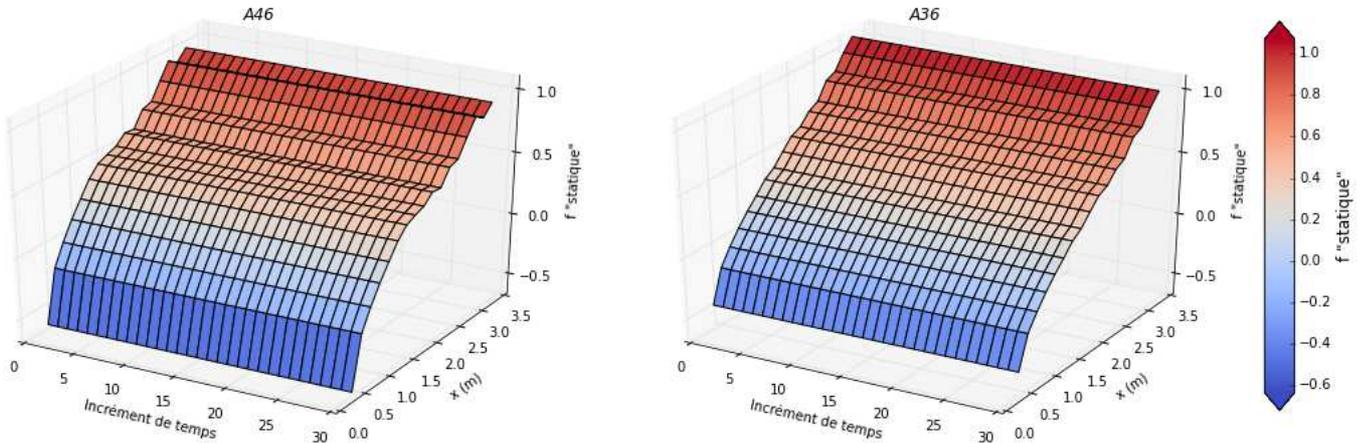


Figure 4-23 :  $f_{\text{statique}}$  pour les armatures A36 et A46

La Figure 4-23 présente le coefficient de frottement « statique » mobilisé pour l'armature A46 et A36 pour un chargement statique de 90 kN. Ce coefficient  $f_{\text{statique}}$  est pris comme le rapport de la contrainte de cisaillement sur la contrainte de compression, toutes deux issues du chargement statique, multiplié par  $2b$ . Ce coefficient dépend fortement de la position le long de l'armature, mais presque pas de la profondeur du lit d'armatures puisque les amplitudes sont quasiment égales pour A36 et A46. On peut à présent comparer ce coefficient « statique » au coefficient dynamique, afin de discuter de l'influence des effets vibratoires sur le coefficient de frottement, par rapport à une charge statique.

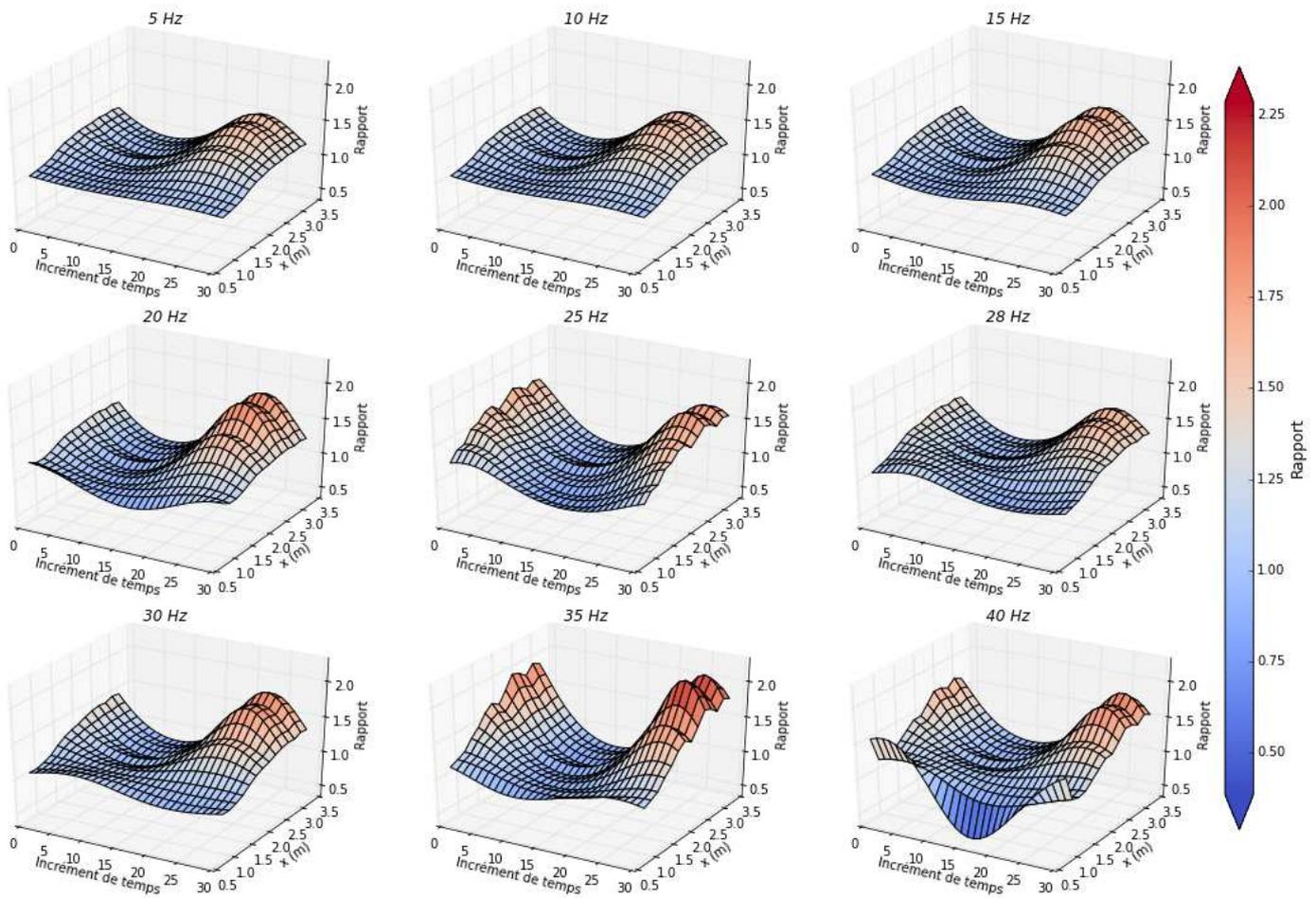


Figure 4-24 : Rapport  $f/f_{statique}$  pour l'armature A46

La Figure 4-24 présente le rapport du coefficient de frottement dynamique sur le coefficient de frottement « statique » correspondant au chargement statique de 90 kN, le long de l'armature A46. Cette valeur correspond à la valeur maximale prise par la force cyclique appliquée sur la traverse (Figure 2-7). Le rapport des coefficients de frottement atteint 2,2 dans le pire des cas (à 35 Hz), cette valeur correspondant en fait au coefficient d'amplification dynamique moyen constaté sur les spectres expérimentaux (cf. partie 2.3.3). Cependant, la valeur maximale n'est atteinte que pour les incréments de temps correspondant à des minimaux de contraintes verticales au cours d'un cycle (forces d'inertie dirigées vers le haut) et pour les points de l'interface situées vers  $x \sim 3$  m.

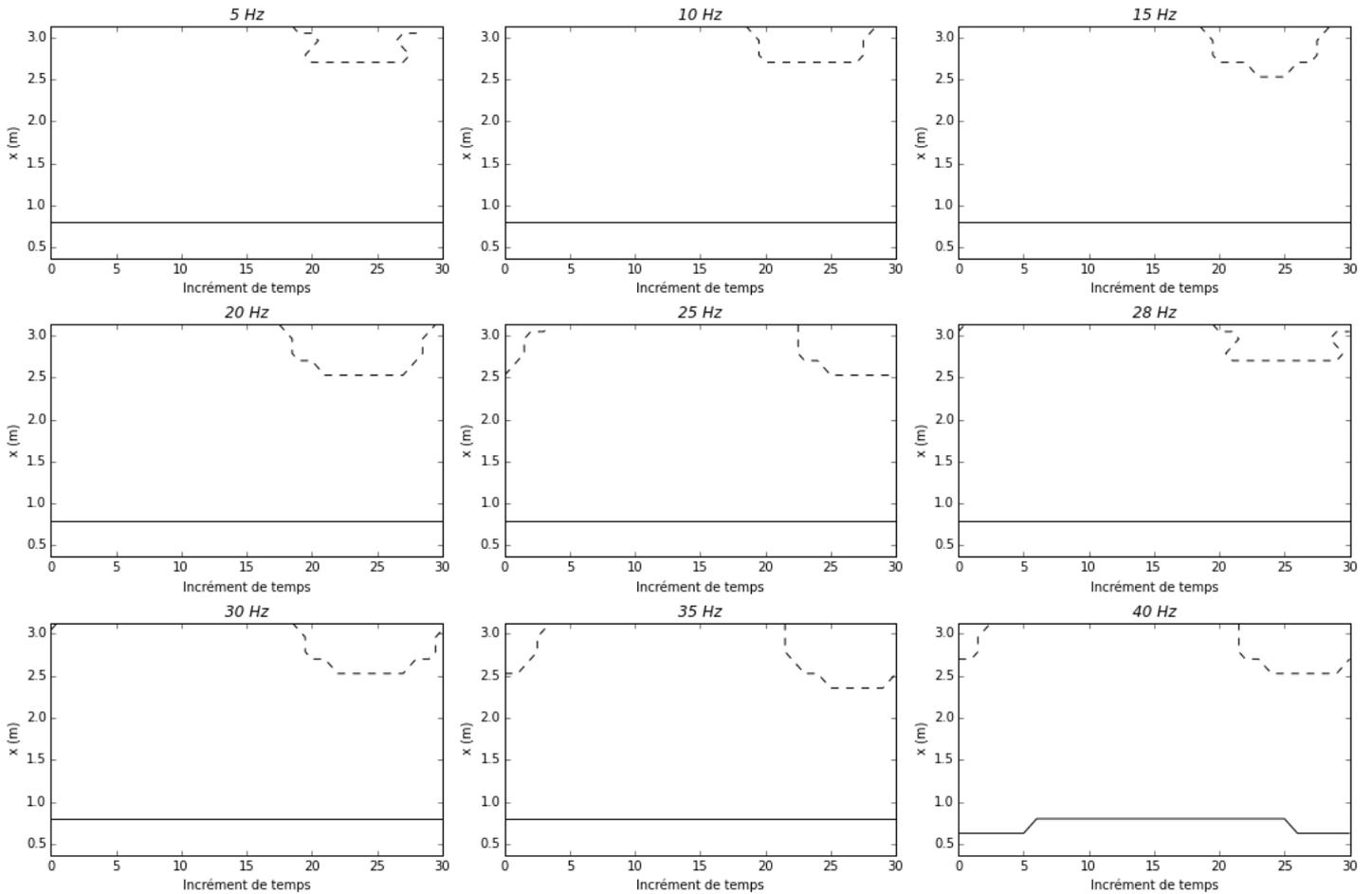
#### 4.4.4 Zones de perte d'adhérence

Comme on l'a vu dans la partie 4.4.3, le coefficient de frottement dynamique peut être plus grand que le coefficient de frottement statique dans certains cas. On peut donc se demander si ces valeurs sont suffisantes pour atteindre la valeur

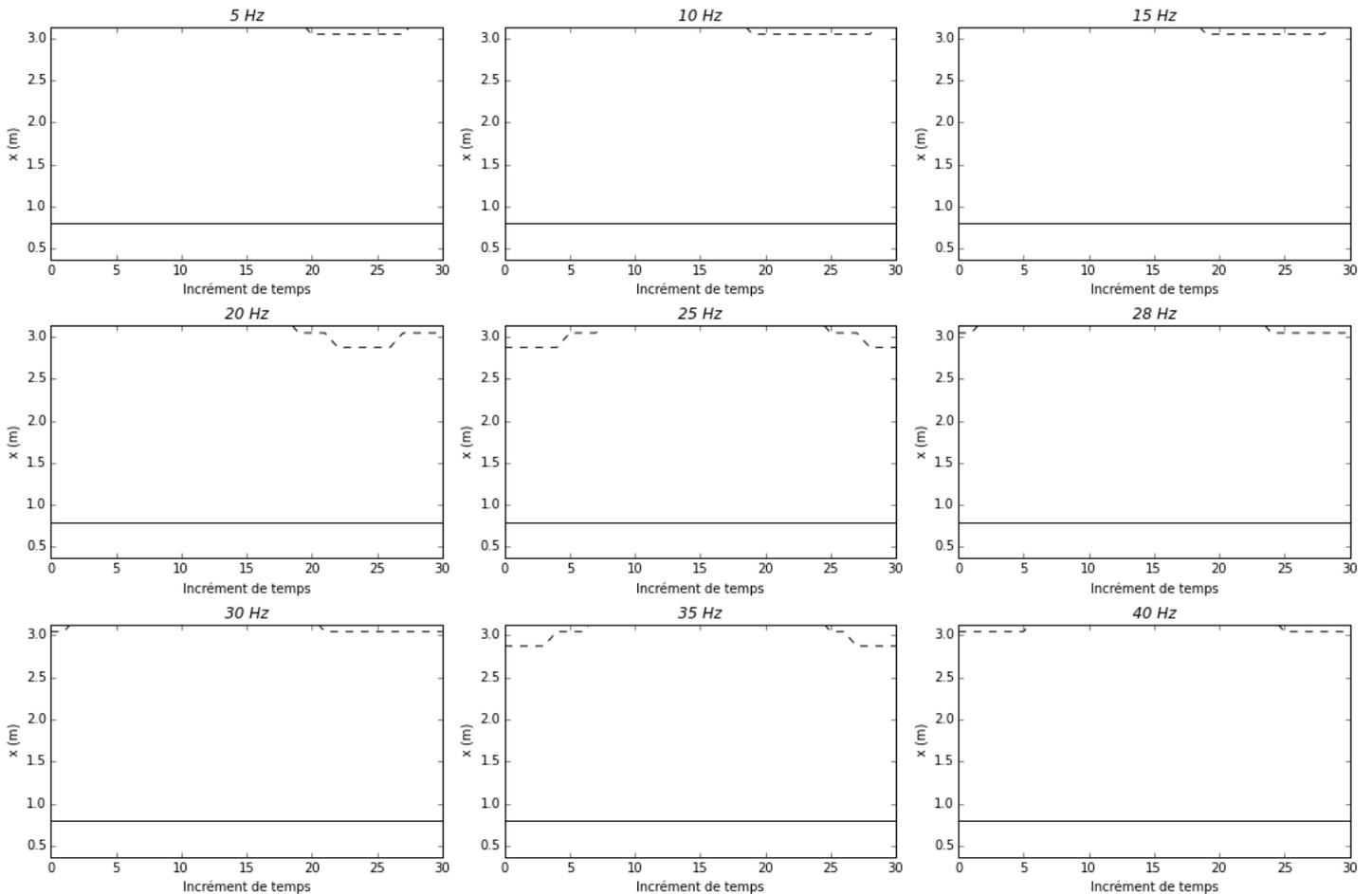
## Chapitre 4 : Comportement instantané d'interface

de coefficient maximal admissible, c'est-à-dire le critère de rupture défini par la norme NF EN 14475 [AFN07].

On compare dans la Figure 4-25 et dans la Figure 4-26 le coefficient de frottement dynamique avec le coefficient  $\mu^*$  défini suivant la loi illustrée par la Figure 4-2. On prend ici  $\varphi = 36^\circ$  [SOY09] et  $\mu_0^* = 1,5$  [AFN07]. On fait ainsi l'hypothèse que la valeur du coefficient d'interaction dans le cas d'un chargement dynamique est inchangée par rapport au cas statique, reprenant ainsi les conclusions de [BEN13] (cf. partie 4.2).



**Figure 4-25 : Zones où le critère de rupture est atteint (pointillés) et ligne des tractions maximales (trait plein) pour l'armature A46**



**Figure 4-26 : Zones où le critère de rupture est atteint (pointillés) et ligne des tractions maximales (trait plein) pour l'armature A36**

La Figure 4-25 et la Figure 4-26 présentent le domaine  $(x, t)$  pour lequel le critère de rupture théorique est atteint (entouré en pointillé), pour l'armature A46 et A36. Le trait plein indique la position le long de l'armature pour laquelle la contrainte de cisaillement change de signe, c'est-à-dire le point où la traction est maximale dans l'armature. On rappelle que le calcul numérique a été effectué en visco-élasticité uniquement, et que l'on ne représente que la comparaison des valeurs numériques aux valeurs théoriques données par la norme NF EN 14475 [AFN07]. En particulier, le calcul ne prend pas en compte le report des efforts supérieurs à l'effort théoriquement admissible le long de l'interface.

On remarque que le critère de rupture n'est atteint qu'en un nombre limité de points de l'armature A46 et pour quasiment aucun point de l'armature A36. Dans les deux cas, le critère est atteint en bout d'armature, c'est-à-dire au droit de la traverse. Pour l'armature A46, le critère est davantage atteint aux hautes fréquences.

Par ailleurs, la position de la ligne des tractions maximales pour les deux armatures considérées est inchangée quelle que soit la fréquence de chargement, excepté pour l'armature 46 à 35Hz. Ceci est dû au fait que la traction dynamique

ne participe quasiment pas à la traction totale, comme on l'a déjà remarqué en 4.4.1.1. Ainsi, la très forte dépendance des incréments de traction à la fréquence (cf. Figure 2-12) n'a dans les faits presque pas d'incidence sur la position de la ligne des tractions maximales.

## 4.5 Discussion

Dans ce paragraphe, on se propose d'analyser les variations de coefficients de frottement mobilisé en fonction des valeurs de contraintes de compression et de cisaillement à l'interface, en proposant une explication théorique de la faible variabilité de ces dernières, puis de discuter de l'influence de ses variations dynamiques sur la stabilité de l'interface.

---

### 4.5.1 Variations des contraintes et des coefficients de frottement

#### 4.5.1.1 Variations spatiales

---

Pour les tractions, comme on l'a noté en 4.4.1.1, l'amplitude des surtractions dynamiques est très inférieure à la traction totale et l'effet dynamique du chargement sur les contraintes de cisaillement à l'interface est quasiment insignifiant, excepté à 40 Hz. Nous proposerons une explication à cet effet dans la partie 4.5.2. Par ailleurs, l'influence de la seule surcharge statique de 55 kN est également très minoritaire sur la valeur des tractions totales (cf. [BOU12], [SOY09]).

Ainsi, la variation spatiale de la contrainte de cisaillement est pratiquement donnée par la répartition des tractions dans les armatures à la fin de la construction.

A contrario, la variation spatiale des contraintes de compression verticales provient à la fois des contraintes statiques et des incréments de contrainte dynamique. Les amplitudes des contraintes verticales sont maximales sous la traverse, c'est-à-dire en extrémité d'armature ( $x \sim 3$  m).

La variation spatiale du coefficient de frottement dynamique mobilisé, constaté dans la partie 4.4.1.3, s'explique alors par ces deux effets : pour un pas de temps fixé, plus le point de l'interface est éloigné du parement, plus le coefficient de frottement mobilisé est important. Ce résultat n'est pas le fait du caractère dynamique du chargement, mais provient davantage de la répartition spatiale des tractions statiques et des contraintes totales.

#### 4.5.1.2 Variations temporelles

---

La variation temporelle du coefficient de frottement dynamique s'explique uniquement par celle des contraintes verticales, c'est-à-dire par les vibrations verticales du remblai autour des armatures, puisque les tractions et donc les contraintes de cisaillement ne dépendent pas du temps (cf. Figure 4-18).

L'amplitude de ces vibrations étant maximale en extrémité d'armature ( $x \sim 3$  m), c'est à ce niveau que les variations temporelles sont le plus marquées.

Cependant, dans le cas d'un chargement ferroviaire modélisé de façon plus réaliste et pour des armatures plus proches de la traverse, comme dans [FRE14] par exemple, ces déphasages rendent nécessaires d'appliquer un facteur 1,2 au coefficient de frottement mobilisé calculé.

Nous allons dans un premier temps proposer une explication de la faible dépendance des tractions à la surcharge dynamique, puis nous considérerons les phénomènes de rupture locale à l'interface dans le cas où ces augmentations de traction sont plus sensibles.

### 4.5.1.3 Influence de la profondeur

---

En moyenne, le coefficient de frottement dans l'armature A46 est plus grand que dans l'armature A36. Ceci s'explique par le fait que les contraintes dynamiques s'atténuent avec la profondeur (cf. Figure 3-22), alors que les contraintes statiques ont des valeurs similaires pour les deux lits d'armatures (Figure 4-17).

---

## 4.5.2 Analogie avec la propagation d'ondes planes en milieu infini

La Figure 4-27 illustre le cas d'une onde plane harmonique se propageant transversalement à la direction des renforcements dans un milieu infini, tandis que la Figure 4-28 illustre le cas où les ondes se propagent dans la direction des renforcements. Le tenseur  $\Gamma$  associé à chacun des deux schémas est le tenseur de Christoffel (cf. [NGU14], [NAV06]) qui représente le tenseur d'élasticité dans la direction de polarisation de l'onde.  $\mu^s$  et  $\lambda^s$  sont les coefficients de Lamé du milieu infini (ici le sol) et  $\alpha$  représente la fraction volumique du renforcement dans le sol multiplié par le module élastique de l'armature (pour un massif en Terre Armée on a  $\alpha \approx 80$  MPa, c'est-à-dire de l'ordre de  $\mu^s$  et  $\lambda^s$ ).

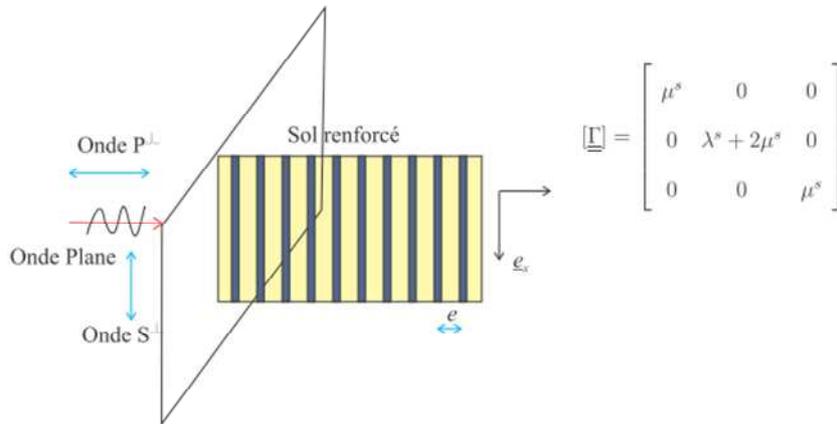


Figure 4-27 : Onde se propageant transversalement à la direction de renforcement [NGU14]

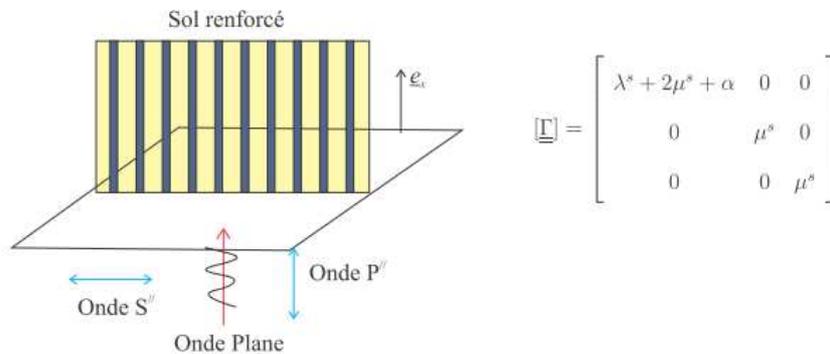


Figure 4-28 : Onde se propageant parallèlement à la direction de renforcement [NGU14]

La Figure 4-27 indique alors que les ondes se propageant transversalement à la direction du renforcement d'un milieu renforcé infini ne « voient » pas les armatures puisque le terme  $\alpha$  associé au renforcement disparaît de la matrice du tenseur  $\Gamma$ .

Ainsi dans notre massif de sol renforcé sollicité verticalement, les armatures ne sont pas « vues » par l'onde incidente, mais uniquement par les ondes réfléchies sur le parement. En effet, le chargement de la traverse est initialement un chargement vertical de compression, tandis que les ondes réfléchies sont des ondes de compression et de cisaillement dont la direction de propagation n'est plus perpendiculaire aux armatures et qui sont donc sensibles à ces dernières. De ce fait, les incréments de traction sont dues uniquement aux ondes générées par les réflexions sur le parement et sont donc d'amplitude très inférieure aux contraintes de compression verticales qui proviennent, elles, à la fois des ondes réfléchies, mais surtout de l'onde incidente générée par l'effort du vérin sur la traverse.

Ainsi, les contraintes de cisaillement dynamique au voisinage de l'interface sol/armature sont souvent négligeables devant les contraintes sta-

tiques, sauf dans les cas de résonance, où on a une amplification de l'amplitude du cisaillement, comme illustré à 35 et 40 Hz sur la Figure 4-18.

### 4.5.3 Comparaison avec le chargement statique

La Figure 4-24 donne le rapport local du coefficient de frottement dynamique mobilisé sur le coefficient de frottement statique sur chaque facette de l'armature. On a vu que les valeurs de ce rapport local pouvaient être élevées, mais seulement pour des petites portions d'armatures, ce qui ne permet pas de conclure sur la stabilité globale de l'ensemble de l'armature. Ainsi, il peut être intéressant de regarder le rapport moyen sur toute la longueur de l'armature et de donner la valeur minimale de ce rapport moyen au cours d'un cycle, comme on le présente Figure 4-29 en reprenant les données de la Figure 4-24. Ce rapport de coefficients de frottement est présenté pour l'armature A46 (située à 13 cm sous la surface du remblai) et l'armature A36 (située à 88 cm de la surface).

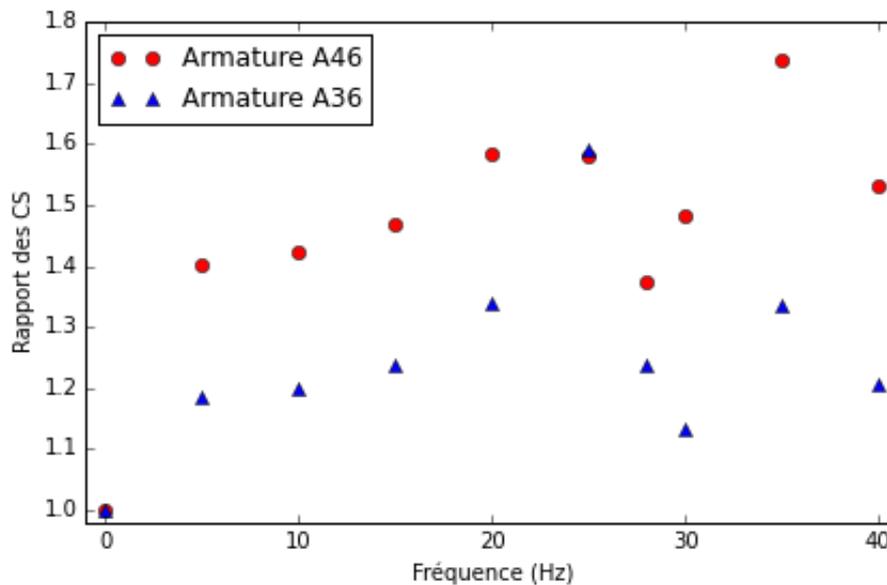


Figure 4-29 : Rapport de  $f_{dynamique}$  sur  $f_{statique}$  à 90 kN. Valeur moyenne sur la zone résistante de l'armature ; valeur minimale au cours d'un cycle.

On constate alors sur la figure précédente que le rapport des coefficients de frottement est presque toujours inférieur à 160 %, sauf à 35 Hz. De plus, ce rapport diminue fortement pour l'armature A36.

Il faut rappeler que la force de 90 kN correspond au poids appliqué par le bogie à la traverse centrale en statique (cf. Figure 1-40) c'est pour cela que nous avons pris cette valeur pour valeur statique de référence. Cependant, comme le chargement est harmonique et l'amplitude de la force appliquée par le vérin varie entre 35 kN et 90 kN, cette force statique de référence correspond au char-

gement quasi statique maximum équivalent, mais ne correspond pas à la valeur moyenne sur une période.

Ces valeurs élevées de coefficient de frottement dynamique mobilisé peuvent dépasser une valeur critique normative, indiquant une mise en plasticité possible (Figure 4-25 et Figure 4-26); cependant, le critère n'est dépassé que sur une petite portion de la partie active de l'interface, et sur des courts laps de temps au cours d'un cycle. On peut donc supposer que la stabilité de l'ouvrage n'est pas remise en cause, même si le modèle utilisé n'a pas permis de donner une estimation des déplacements irréversibles de l'interface causés par l'apparition de cette plasticité.

## 4.6 Conclusion

Ce chapitre porte sur le comportement instantané des interfaces armatures/remblai des deux rangées supérieures de renforcement de l'ouvrage expérimental du CER ([FRO08], [SOY09]) pour un chargement correspondant au passage d'un TGV.

La modélisation a permis de calculer la contrainte de compression et la contrainte de cisaillement locale au niveau des armatures. Les contraintes de cisaillement à l'interface ne sont quasiment pas affectées par le chargement dynamique. En revanche on constate des variations de contrainte de compression pour les lits d'armature supérieurs, qui sont amplifiées quand la fréquence augmente jusqu'à 35 Hz.

A partir de ces grandeurs, nous avons calculé le coefficient de frottement dynamique mobilisé, mettant en évidence d'assez fortes variations du frottement sol-armature mobilisé au cours du chargement surtout pour les points situés au droit de la traverse. Les valeurs de ce coefficient ont été comparées au critère normatif de mise en plasticité. Le critère de rupture local est atteint à certains endroits de la zone résistante de l'interface et à certains moments au cours d'un cycle, pour les valeurs des paramètres retenues pour nos calculs.

Les difficultés sont donc liées à la perte d'adhérence dans les lits supérieurs, ce qui est analogue à ce qui est observé sous sollicitation sismique (voir 1.3.3.1).

Cependant, le modèle est fortement influencé par le caractère harmonique de la charge, la géométrie du remblai, et la comparaison avec un chargement statique équivalent au maximum de la charge quasi-statique est discutable. De plus, le fait de considérer un modèle uniquement élastique ne permet pas d'estimer l'amplitude des déplacements plastiques qui devraient être obtenus.

Ces résultats mériteraient donc d'être confirmés par des études approfondies de l'interface. Il serait pertinent de garder un modèle tridimensionnel qui permet une bonne estimation des contraintes et des phénomènes de résonance, mais de lui adjoindre une prise en compte de la plasticité de l'interaction sol-barre au cours du temps. Il faudrait également envisager l'étude des phénomènes transitoires (début ou fin du passage du train) qui n'ont pour l'instant pas été pris en compte dans le modèle.

Une autre limite importante du modèle réside dans le fait que la charge est immobile : on se propose donc dans le chapitre suivant de prendre en compte une charge mobile, sur un massif infini dans la direction du passage du train, afin de proposer un modèle plus représentatif du passage d'un TGV sur un remblai en Terre Armée.

---

## Chapitre 5

# Prise en compte d'une charge mobile



## 5.1 Introduction

Les chapitres précédents ont permis d'établir un certain nombre de résultats relatifs au comportement des massifs renforcés par des armatures métalliques sous chargement harmonique. Cependant, même si ce type de chargement permet d'approximer le comportement du massif lors du passage d'un TGV, il ne prend pas en compte le fait que cette charge se déplace.

Dans ce chapitre, nous nous proposons d'étudier par voie numérique un massif renforcé soumis à un chargement se déplaçant à vitesse constante dans la direction de la voie (et donc perpendiculairement à la direction des armatures métalliques).

Nous présentons d'abord l'approche choisie ici pour représenter les renforcements. Il s'agit du modèle multiphasique développé à l'École des Ponts ParisTech ([DEB00], [SUD01], [HAS05]) qui permet de représenter le massif renforcé par des armatures de façon homogénéisée, en gardant une loi d'interaction spécifique. L'utilisation d'une telle représentation pour le remblai armé simplifie beaucoup la constitution du maillage.

Nous présentons ensuite le développement et l'implémentation dans le code CESAR-LCPC d'une méthode permettant de prendre en compte le déplacement de la charge en se plaçant dans un référentiel mobile mobile. La réponse d'un remblai en Terre Armée sous chargement mobile sera ainsi étudiée dans le référentiel lié au train : dans ce référentiel, celui-ci est immobile et le remblai « défile » au dessous de lui.

La troisième partie présente les résultats en termes de déplacements, contraintes et tractions dans les armatures d'un remblai ferroviaire armé type, à l'aide d'un modèle numérique mettant en œuvre les deux méthodes précédemment décrites, avec CESAR-LCPC.

## 5.2 Modèle Multiphasique

---

### 5.2.1 Introduction

La nature discrète des armatures dans un remblai renforcé peut être pénalisante pour constituer un maillage en vue de modéliser ce type de structures. En effet, la taille minimale des mailles est conditionnée par l'espacement entre deux armatures. De plus, le caractère discontinu de cette distribution d'armatures peut empêcher l'utilisation de certains modèles, comme par exemple pour la résolution dans un référentiel mobile présentée dans la partie 5.3. Ainsi, dans certains cas, il peut être judicieux d'utiliser des modèles numériques où les armatures sont représentées de façon homogénéisée dans le massif de sol. Le massif renforcé, hétérogène, est alors représenté par un matériau homogène (ici anisotrope) dont les propriétés mécaniques macroscopiques sont équivalentes.

Cependant, l'approche d'homogénéisation « classique » où l'on considère un seul milieu équivalent présente certains inconvénients : elle ne permet pas de bien évaluer les efforts à l'extrémité des armatures, ni de rendre compte de la flexion ou du cisaillement éventuel des inclusions, comme l'ont montré [CHA10], [HAS11] ou [NGU14].

Pour pallier à ces limitations, de Buhan et ses collaborateurs ([DEB00], [SUD01], [BEN03], [HAS05]) ont développé une approche différente, appelée « modèle multiphasique », qui peut être considérée comme une extension de l'homogénéisation classique pour les milieux renforcés (pieux, armatures...). Elle repose sur la prise en compte de deux milieux continus animés de cinématiques distinctes et introduit des lois de comportement distinctes pour le sol, le renforcement et l'interaction mécanique entre ces deux milieux. Une version enrichie permet également de prendre en compte les effets de flexion et de cisaillement dans les renforcements ([HAS05], [NGU14]). Dans la suite, compte tenu de l'application visée ici, on ne prendra pas en compte les effets de flexion.

---

### 5.2.2 Formulation en dynamique

#### 5.2.2.1 Formulation générale

---

On reprend ici la présentation du modèle multiphasique donnée dans la thèse de Nguyen [NGU14] en invitant le lecteur à s'y référer pour de plus amples détails.

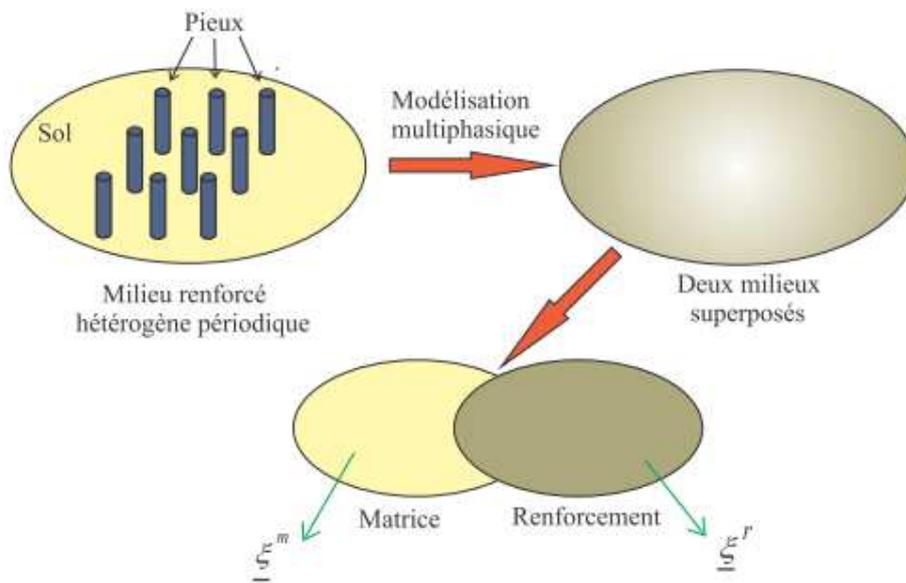


Figure 5-1 : Principe de la modélisation multiphasique (d'après [NGU14])

Dans une approche d'homogénéisation classique, le sol renforcé est modélisé comme un milieu continu présentant des propriétés mécaniques équivalents à l'ensemble sol+armatures. Le principe du modèle multiphasique propose une approche plus riche, qui consiste à modéliser le sol renforcé comme la superposition de deux milieux continus nommé « phases » (Figure 5-1). Le sol est représenté par la phase matrice, et les renforcements périodiques (armatures, pieux...) par la phase renforcement. La fraction volumique du renforcement, notée  $\eta$ , représente la densité de renforcement par Volume Élémentaire Représentatif de sol [DEB87]. Dans le cas d'armatures métalliques de Terre Armée de type HA 45 (cf. partie 1.2.4.2), à raison de quatre armatures par écaille, on a par exemple  $\eta=4 \times 10^{-4}$ .

L'originalité du modèle consiste à considérer une cinématique propre à chacune des phases. On désigne par  $\underline{\zeta}$  le champ de déplacement de la phase matrice, et par  $\underline{\zeta}_r$  celui de la phase renforcement. Considérant un renforcement uniaxial dans la direction  $\underline{e}_2$  on peut alors écrire le champ de contrainte dans la phase renforcement :

$$\underline{\underline{\sigma}}_r = T \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 \quad (6.1)$$

avec  $T$  la densité d'effort axial dans les renforcements par unité de surface.

On peut alors écrire l'équation du mouvement de chaque phase [SUD01]:

$$\begin{cases} \text{div} \underline{\underline{\sigma}} + \rho (\underline{g} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \underline{\zeta}) + \underline{I} = 0 \\ \text{div} (T \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2) + \rho_r (\underline{g} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \underline{\zeta}_r) - \underline{I} = 0 \end{cases} \quad (6.2)$$

avec  $\rho^m$  et  $\rho^r$  les masses volumiques des deux phases,  $\underline{g}$  la gravité et  $\underline{I}$  une densité d'efforts volumiques qui traduit la force d'interaction entre les deux phases (une densité surfacique doit être prise en compte en plus à la frontière de la zone renforcée).

La formulation adoptée nécessite une simplification supplémentaire sur la deuxième équation. Si on suppose que  $\underline{I}$  a la même direction que les renforcements, on ne peut pas équilibrer le poids dans la deuxième équation, ni les accélérations autres que dans l'axe des renforcements. On adopte finalement la formulation suivante, où on ne considère pas les effets dynamiques dus aux armatures qui ont une contribution faible par rapport à la matrice puisque  $\rho \gg \rho_r$  et que le glissement relatif est petit comme le montrent les résultats de calcul :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{div} \underline{\underline{\sigma}} + \rho \left( \underline{g} - \frac{\partial^2 \underline{\zeta}}{\partial t^2} \right) + I \underline{e}_2 = 0 \\ \frac{\partial T}{\partial x_2} - I = 0 \end{array} \right. \quad (6.3)$$

Ce modèle a été comparé à des méthodes d'homogénéisation classiques, à des méthodes éléments finis avec des renforcements discrets et également à des méthodes asymptotiques dans différentes configurations. Les résultats, disponibles dans [NGU14], montrent que le modèle parvient à résoudre de façon satisfaisante les insuffisances de l'homogénéisation classique évoquées dans la partie 5.2.1.

### 5.2.2.2 Terme d'interaction

Le terme d'interaction volumique  $\underline{I}$  dans l'équation précédente, est caractérisé par une « loi de comportement » reliant la densité d'efforts d'interaction et le déplacement relatif de la phase renforcement par rapport à la phase matrice.

Dans la version « adhérente » du modèle multiphasique, on considère que le déplacement relatif est toujours nul (ce qui revient à considérer une rigidité d'interaction infinie). Dans ce cas, le système d'équation (6.2), se ramène à l'équation de l'élastodynamique d'un milieu élastique homogène anisotrope (homogénéisation « classique » définie précédemment). Cette approche présente l'avantage pratique de ne pas nécessiter la détermination de paramètres spécifiques pour la loi d'interaction, lesquels sont rarement obtenus expérimentalement.

Dans le cas de l'utilisation du modèle multiphasique « général », on peut choisir la loi d'interaction souhaitée pour modéliser le comportement d'interface. Nguyen [NGU14] dans sa thèse propose une loi linéaire reliant la densité d'efforts d'interaction et le déplacement relatif :

$$\underline{I} = \underline{c}^I \cdot (\underline{\zeta}_r - \underline{\zeta}) \quad (6.4)$$

avec  $\underline{c}^I$  un tenseur d'ordre 2 défini positif qui représente la raideur d'interaction volumique entre les deux phases.

On notera que la raideur d'interaction introduite ici dans le contexte multiphasique ne coïncide pas avec celle que l'on a mise en jeu dans la modélisation des chapitres précédents, où les armatures étaient modélisées par des barres (équation 5.8) : on travaille ici avec une densité volumique d'interaction  $I$  (et non plus avec une densité linéique d'interaction). Le coefficient d'interaction de la modélisation multiphasique s'exprime donc en  $N/m^4$  (et non plus en  $N/m^2$ ).

On se limitera dans la suite à une interaction de même direction que les renforcements, c'est-à-dire :

$$\underline{I} = c^I (\zeta_r - \zeta_2) \underline{e}_2 \quad (6.5)$$

Bourgeois et al. [BOU102] étendent les résultats d'essais d'extraction obtenus par Abdelouhab, Dias et Freitag [ABD10b] en proposant des lois d'interaction bilinéaires et racine implémentées dans le modèle de barres discrètes (partie 4.2.2) puis dans le modèle multiphasique. Cependant, la validation de ce modèle a été faite uniquement en statique.

Quels que soient les modèles proposés, les auteurs s'accordent sur le fait que les paramètres de raideur et de déplacement relatif limite (dans le cas de l'utilisation d'une loi d'interaction avec prise en compte d'un critère de rupture) sont difficiles à obtenir expérimentalement. De plus, dans le cas dynamique, [NGU14] a mis en évidence que ces paramètres ne sont valides que sur une plage de fréquence donnée et nécessitent un calage à partir d'un modèle auxiliaire. La raison pourrait être qu'il existe des phénomènes d'oscillations localisées à l'échelle locale des interfaces qui sont difficiles à prendre en compte avec un unique paramètre macroscopique.

Le modèle multiphasique est disponible, en version adhérente ou en version générale, dans le logiciel CESAR-LCPC depuis plusieurs années, en statique uniquement. Il a été utilisé pour modéliser des radiers de fondation sur un groupe de pieux et des murs en Terre Armée. Pour ce travail, on a procédé aux développements nécessaires pour que le modèle soit également utilisable en dynamique (pour des comportements linéaires).

Dans les paragraphes suivants, nous comparerons ce modèle multiphasique à des approches discrètes en 2D et 3D.

---

### 5.2.3 Approche bidimensionnelle

Une étude bidimensionnelle a tout d'abord été effectuée pour discuter de l'influence de la modélisation multiphasique des renforcements sur la réponse dynamique d'un échantillon numérique de sol armé.

### 5.2.3.1 Géométrie et matériaux

On considère une colonne de sol constituée d'une couche de ballast, d'une sous-couche et d'une couche de remblai. L'échantillon est symétrique ; et le parement n'est pas représenté. Le remblai peut être non renforcé ou renforcé : dans ce cas, le renforcement est pris en compte soit avec des barres discrètes, soit homogénéisé avec le matériau en utilisant le modèle multiphasique dans sa version adhérente. Les conditions aux limites bloquent les deux composantes du déplacement en bas tandis que les faces latérales sont libres de contraintes.

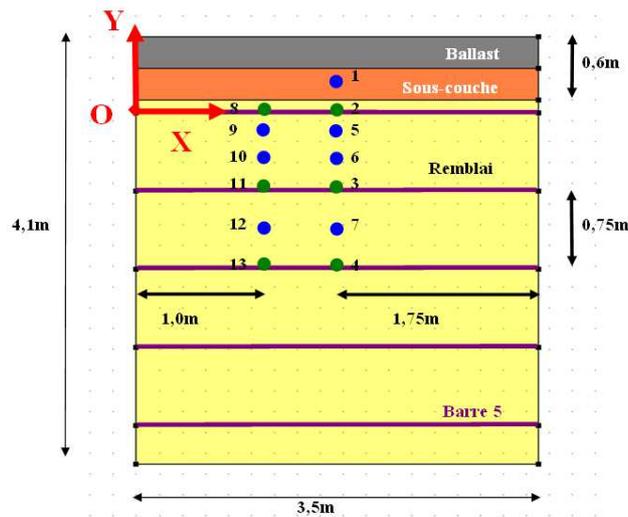


Figure 5-2 : Modèle numérique 2D considéré

La Figure 5-2 donne la géométrie de l'échantillon numérique ainsi que les positions des points où sont relevés les déplacements horizontaux et verticaux (notés  $u$  et  $v$ ) et les contraintes verticale et de cisaillement  $\sigma_{yy}$  et  $\sigma_{xy}$ . Ces points sont pris sur la partie supérieure du remblai afin de pouvoir étudier les variations de grandeurs avant toute réflexion sur les bords.

Le comportement de tous les matériaux est supposé élastique linéaire, avec les valeurs similaires à celles présentées en 3.2.1. Aucun amortissement n'est pris en compte.

### 5.2.3.2 Chargement

Dans le cas de cette étude et par souci de simplification, le chargement consiste à appliquer une contrainte uniforme verticale sur la face supérieure de l'échantillon. Trois impulsions sont envisagées : l'une brève, d'une durée de 10 ms (Figure 5-3), et deux autres plus longues (30 ms et 50 ms). Les deux dernières sont de l'ordre de grandeur de la durée d'une sollicitation imposée par une roue de train à la vitesse de 300 km/h et 200 km/h respectivement, tandis que la première permet de suivre avec une bonne précision l'onde incidente en la découplant des ondes réfléchies sur les bords.

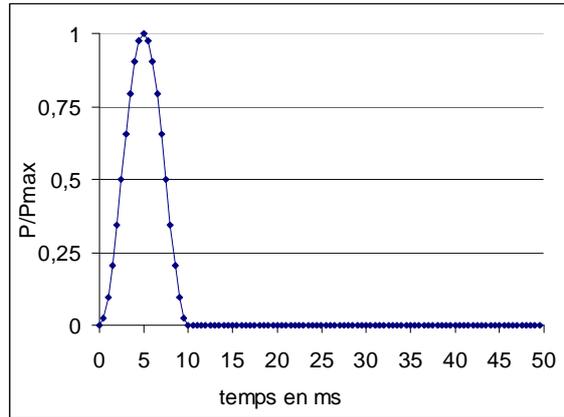


Figure 5-3 : Sollicitation de 10 ms

5.2.3.3 Résultats

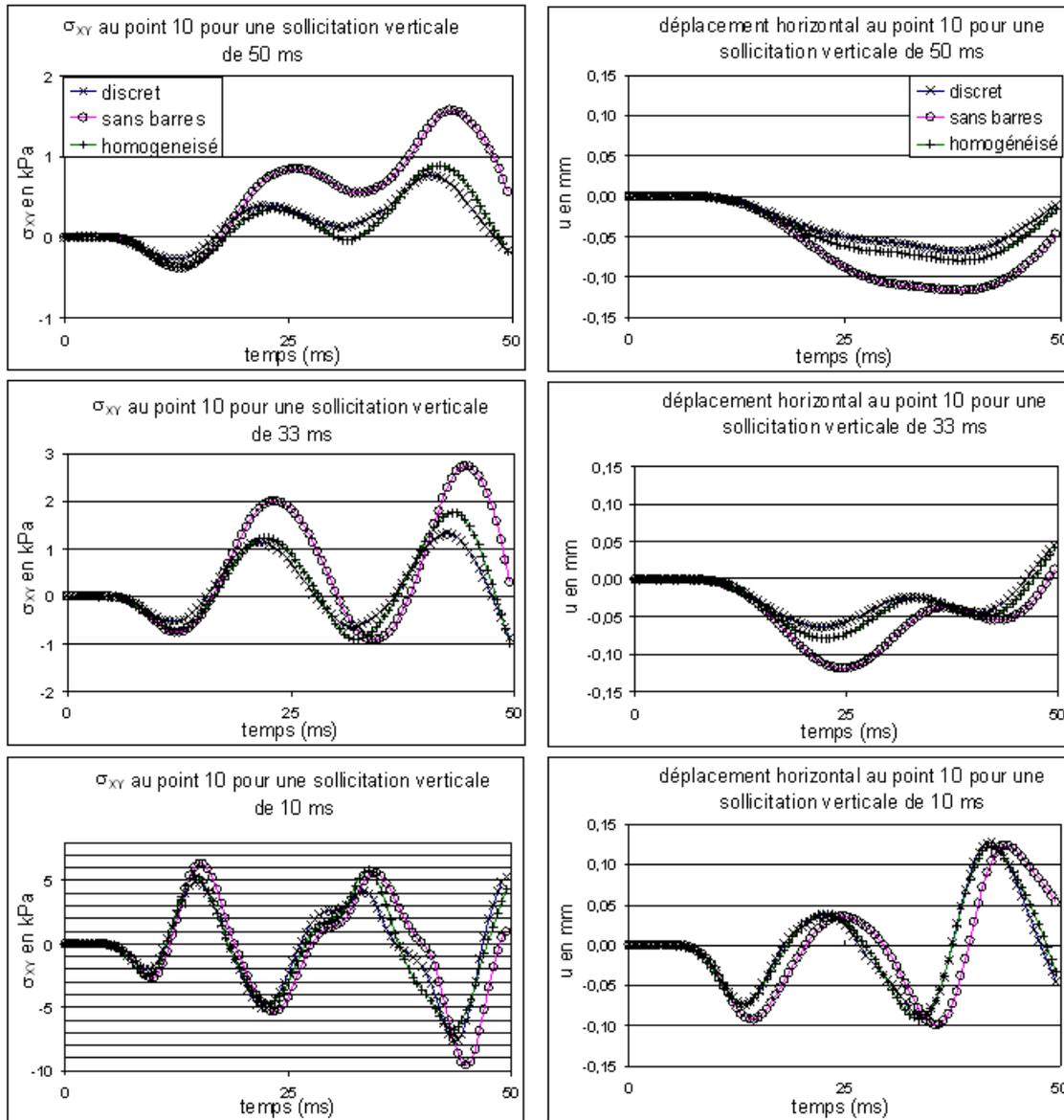


Figure 5-4 : Vibrations du point 10 pour différents modèles

Les résultats présentés sur la Figure 5-4 et dans le Tableau 5-1 indiquent une bonne concordance entre les modèles homogénéisé et discret tant en déphasage qu'en norme, pour chacune des trois impulsions. On note que la présence des renforcements n'est pas très sensible pour une impulsion brève.

Tableau 5-1 : Différences absolues et relatives du déplacement horizontal selon le modèle de remblai pour une sollicitation verticale au point 10

durée de sollicitation	10 ms	30 ms	50 ms	durée de sollicitation	10 ms	30 ms	50 ms
$ u_{\text{discret}} - u_{\text{sans-barres}} $ (mm)	0,02	0,06	0,03	$ u_{\text{discret}} - u_{\text{homogénéisé}} $ (mm)	0,00	0,02	0,01
$ u_{\text{sans-barres}} $ (mm)	0,09	0,12	0,10	$ u_{\text{discret}} $ (mm)	0,07	0,08	0,08
écart relatif	21 %	47 %	30 %	écart relatif	0 %	19 %	13 %

Outre la comparaison entre modèle multiphasique et modèle discret, ce calcul bidimensionnel permet de s'intéresser à la vitesse d'établissement de la contrainte de compression verticale, de la contrainte de cisaillement et de la traction dans la barre en fonction de la position dans l'échantillon. La différence entre ces vitesses permet de quantifier les déphasages des contraintes les unes par rapport aux autres et d'étudier la variation de ce déphasage avec la profondeur. On compare ces vitesses aux vitesses  $V_p$  et  $V_s$  des ondes de compression et de cisaillement dans le cas de la propagation unidirectionnelle d'ondes planes.

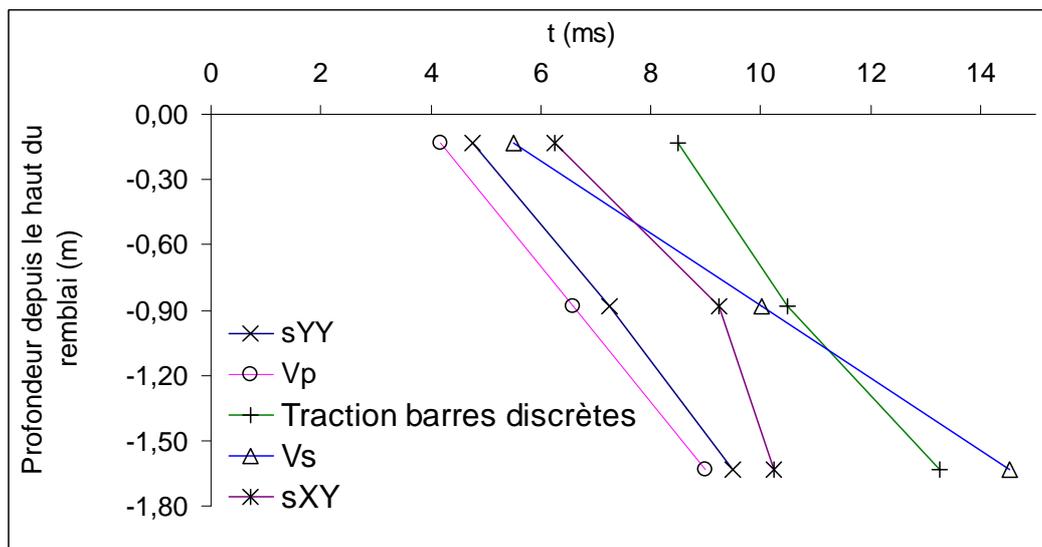


Figure 5-5 : Temps d'arrivée des différentes grandeurs au centre de l'échantillon numérique, modèle discret

La Figure 5-5 montre que la contrainte verticale se propage à la vitesse  $V_p$  théorique, à la précision du calcul près. De plus, aucun signal (que ce soit déplacement ou contrainte) ne va jamais plus vite que  $V_p$ . Par ailleurs, on peut constater que ni la contrainte de cisaillement, ni la traction dans la barre ne peuvent être reliées à la propagation d'une onde de cisaillement de vitesse  $V_s$ .

### 5.2.3.4 Discussion

---

Les différences absolues entre les résultats fournis par le modèle multiphasique adhérent et le modèle discret dépendent remarquablement peu de la grandeur étudiée et de l'impulsion considérée. De plus, cette différence est comparable à celle que l'on trouve en comparant ces deux modèles sous chargement statique (dans [BOU12] par exemple).

De manière plus précise, dans le cadre des hypothèses considérées ici, la différence entre les modèles est de l'ordre de 30 % dans le cas le plus défavorable. Cette différence s'explique davantage par la discontinuité d'impédance introduite par la représentation discrète de la barre (qui est en fait un plan d'armature dans la section perpendiculaire à la modélisation) que par l'utilisation du modèle multiphasique adhérent. Ainsi, en 2D et en dynamique, il vaut certainement mieux utiliser un modèle homogénéisé pour représenter les armatures, plutôt que de représenter les renforcements de façon discrète.

Cette étude numérique a également permis de mettre en évidence le fait que la mise en traction des armatures dans le cas discret pour ce régime transitoire ne peut se relier simplement à vitesse des ondes P et S.

---

### 5.2.4 Approche tridimensionnelle

Il ressort de la partie précédente que le modèle multiphasique dans sa forme adhérente peut approcher avec une bonne approximation le comportement des armatures discrètes pour lesquelles on n'a pas considéré de loi de comportement d'interface.

Nous avons donc cherché à étendre l'utilisation du modèle multiphasique au cas tridimensionnel, pour un chargement dynamique en discrétisation temporelle en utilisant le module DYNi du logiciel CESAR-LCPC. Cette partie présente les résultats d'une étude paramétrique dont le modèle de référence est celui présenté dans le Chapitre 3 et où les armatures sont prises en compte de différentes façons.

#### 5.2.4.1 Paramètres

---

Le maillage, les paramètres matériaux, les conditions de chargement et la plage d'étude temporelle sont identiques à celles de l'étude présentée dans le Chapitre 3. L'étude paramétrique porte sur la façon de modéliser les renforcements et quatre cas de figures sont pris en compte :

- un modèle sans renforcements
- un modèle où les armatures sont représentées de façon discrète, avec un comportement d'interface parfaitement adhérent

- un modèle où les armatures sont représentées de façon discrète, avec un comportement d'interface de type élastique linéaire. Trois valeurs de raideur d'interface sont testées.
- un modèle où les armatures sont représentées à l'aide du modèle multiphasique adhérent.

Malheureusement, il n'a pas été possible d'implémenter dans CESAR le modèle multiphasique avec prise en compte d'une loi d'interaction d'interface, du fait de difficultés d'implémentations propres au module DYNi.

Les résultats de l'étude paramétrique sont comparés aux résultats obtenus lors de l'expérience effectuée au CER de Rouen (Chapitre 2). Ils sont également comparés aux valeurs numériques du modèle de référence présenté dans le Chapitre 3. Pour rappel, ce modèle numérique de référence comporte des armatures modélisées de façon discrètes, avec une raideur d'interface  $c^I = 10 \text{ MN/m}^4$ .

### 5.2.4.2 Résultats et discussion

---

On présente dans cette partie quelques résultats représentatifs du comportement de chacun des modèles, sans être exhaustif. Le choix d'utiliser le même maillage que dans le Chapitre 3 a permis de réutiliser les outils de post-traitement développés pour le modèle de référence, facilitant le tracé des courbes de variation des grandeurs aux points pour lesquels des valeurs expérimentales étaient disponibles (cf. partie 2.2.2).

La Figure 5-6 présente la sensibilité des paramètres sur les spectres d'incrément de traction. Il n'a pas été possible de relever les tractions équivalentes obtenues par le modèle multiphasique, du fait des difficultés de post traitement spécifiques au module de calcul DYNi. Néanmoins, cette démarche engage la discussion sur le choix des paramètres de raideur d'interface : on peut constater que la modélisation a tendance à surestimer les tractions dans la partie résistante du remblai (c'est-à-dire en queue d'armature, cf. Figure 5-6) pour des valeurs de raideur d'interface élevées et à les sous-estimer pour de faibles valeurs de raideur d'interface. Pour autant, l'allure du spectre reste globalement constante suivant la valeur de ce paramètre.

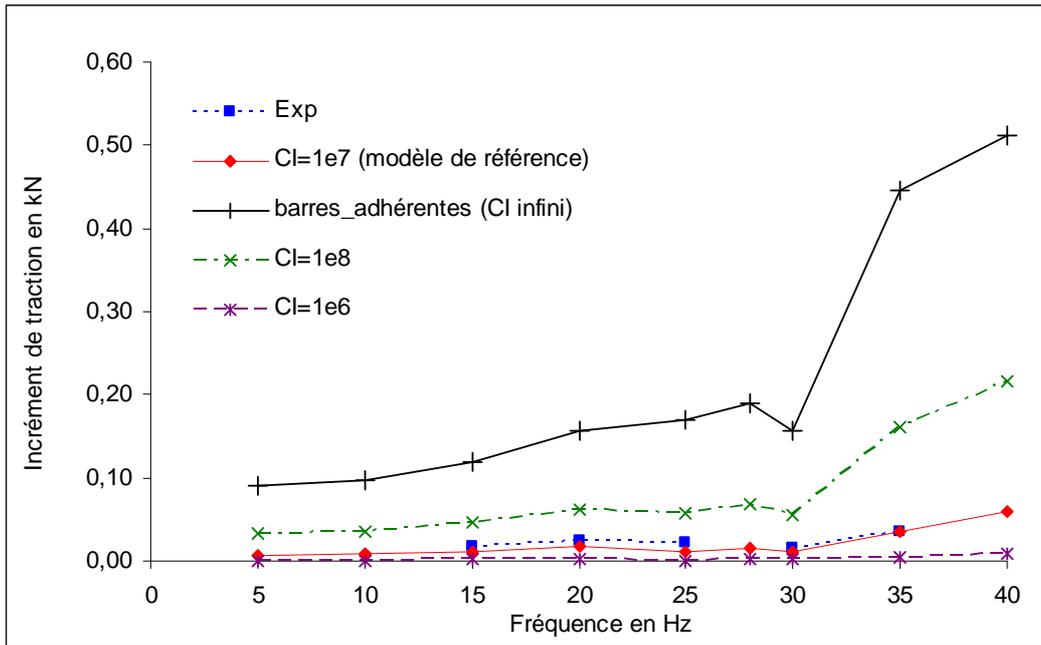


Figure 5-6 : Incréments de traction dans l'armature A46 à 3,35 m du parement

Concernant les autres grandeurs, on constate que les spectres sont très similaires, quel que soit le modèle choisi. À titre d'exemple on présente dans la Figure 5-7 le spectre des déplacements horizontaux du parement, pour le capteur LVDT17 situé en haut du parement.

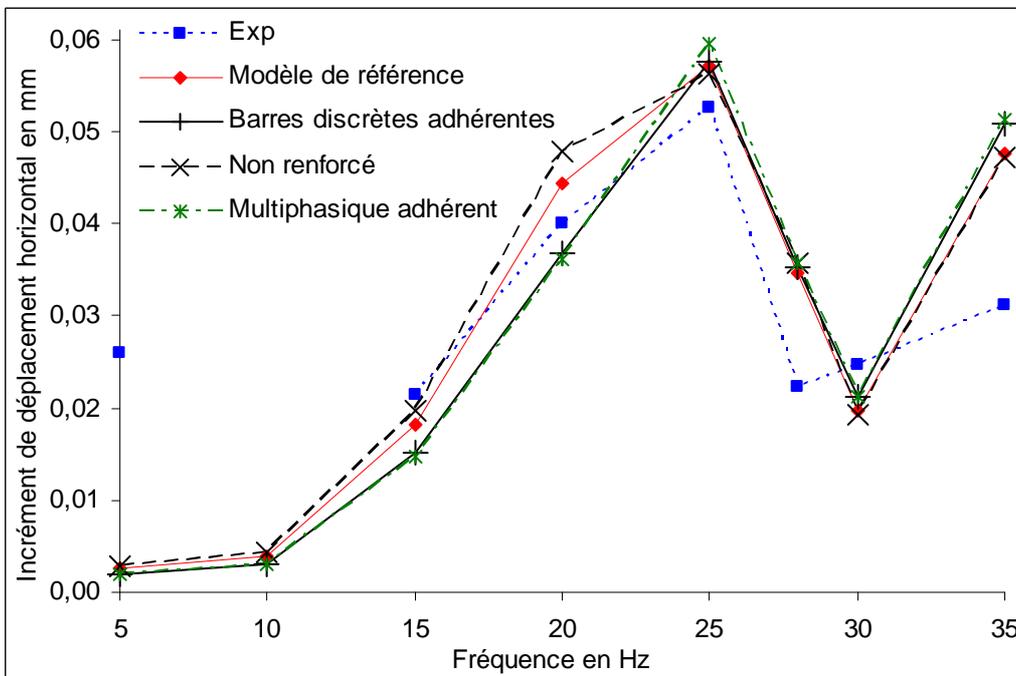


Figure 5-7 : Incréments de déplacement horizontal en haut du parement

Ce sont les déplacements horizontaux du parement qui présentent la plus forte variabilité, après les tractions dans les armatures. En revanche, les con-

traintes verticales de compression et les déplacements horizontaux sont moins affectés par le choix du modèle de renforcement. Dans la Figure 5-7, on constate ainsi que modèle multiphasique adhérent et modèle discret adhérent donnent les mêmes valeurs de déplacements horizontaux. Ces valeurs sont inférieures à celles du modèle de référence et également du modèle non-renforcé. Cette observation s'applique uniquement sur la partie gauche du spectre, c'est-à-dire proche du cas quasi statique, avant la résonance, où les effets de raideur du domaine sur la valeur des déplacements sont comparables au cas statique. Les effets dynamiques étant prépondérants ensuite, la valeur des incréments de déplacement aux hautes fréquences en un point du domaine ne dépend pas simplement du modèle utilisé, parce que des considérations de géométrie prennent le pas sur les seules valeurs de rigidité.

### 5.2.4.3 Conclusion et perspectives

---

Les résultats présentés précédemment confortent les hypothèses de modélisation que nous avons adoptées. La présence des renforcements est quasiment invisible au premier ordre sur la réponse spectrale de toutes les grandeurs, y compris les déplacements horizontaux du parement. C'est assez logique du fait que le comportement du remblai est ici linéaire, et que la densité d'armatures est assez faible. Le fait de modéliser ces renforcements permet tout de même d'augmenter la précision de l'estimation des déplacements verticaux, sans pour autant changer la variation avec la fréquence, qui elle dépend de la géométrie et de la rigidité des matériaux prépondérants en volume. Notons à ce sujet que la modélisation multiphasique, ici dans sa version adhérente, permet de retrouver le comportement du remblai renforcé modélisé avec des barres discrètes adhérentes.

En revanche, l'utilisation de barres discrètes avec prise en compte du frottement a été indispensable pour estimer la traction dans les armatures. Dans ce cas, la façon de modéliser le renforcement devient sensible et les écarts d'estimation de la sur-traction peuvent s'avérer très importants si la loi d'interface entre le sol et les armatures n'est pas prise en compte. Le choix d'utiliser des barres discrètes avec prise en compte d'une loi d'interface est donc pertinent, comme on l'a montré dans le Chapitre 3.

Malheureusement, il n'a pas été possible d'obtenir numériquement les tractions dans la phase renforcement du modèle multiphasique, que la loi d'interaction soit adhérente ou non : il aurait fallu modifier les structures de données utilisées par le code de manière trop profonde. Cependant, au vu de la bonne concordance des grandeurs entre le modèle multiphasique et le modèle discret dans leur version adhérente, il semble que cette méthode soit prometteuse.

Nous nous proposons dans la suite d'utiliser une autre technique de prise en compte de la vitesse de déplacement du train dans la modélisation, ce qui permettra d'utiliser le modèle multiphasique avec prise en compte d'une loi

## Chapitre 5 : Prise en compte d'une charge mobile

d'interaction : l'idée est de contourner les limitations du module DYNI en résolvant le calcul en statique, dans un référentiel mobile.

## 5.3 Prise en compte d'un référentiel mobile

---

### 5.3.1 Introduction

Dans les chapitres précédents, on a étudié en dynamique le comportement du remblai sous une sollicitation harmonique, correspondant à une charge fixe (module DYNI de CESAR-LCPC).

Dans ce chapitre, nous souhaitons étudier le cas d'une charge mobile. La première option consiste à mailler une portion de voie et le sol support, sur une longueur suffisante pour éviter que le calcul ne soit perturbé par les réflexions d'ondes sur les frontières. La taille du maillage est alors fonction de la vitesse des ondes dans le sol et du temps sur lequel on veut effectuer la simulation, et est couramment de l'ordre de la centaine de mètres [HAL03]. Cette approche conduit à un nombre de degrés de liberté très important, surtout si l'on souhaite tenir compte de l'intervalle spatial entre les armatures d'un mur en Terre Armée (de l'ordre de 40 cm).

On peut également envisager de mettre en œuvre des couches d'éléments qui absorbent ces ondes, mais cette technique pose des difficultés pratiques importantes, en obligeant à prendre en compte dans le maillage un domaine très étendu. Des techniques plus avancées, du type éléments de frontière absorbante, éléments infinis [BET92] ou couplage FEM/BEM [AUE05] constituent une alternative possible, mais ils ne sont pas disponibles dans CESAR.

Nous présentons donc un cas particulier de modélisation d'une charge en mouvement où l'on fait le calcul dans un référentiel mobile attaché à la charge appliquée par un essieu sur la voie. Dans le cas périodique et sans amortissement, on montre que l'on peut se ramener à un calcul quasi-statique dans lequel le mouvement est pris en compte en modifiant la matrice de rigidité. La vitesse de la charge est supposée constante, et on se place en régime établi.

---

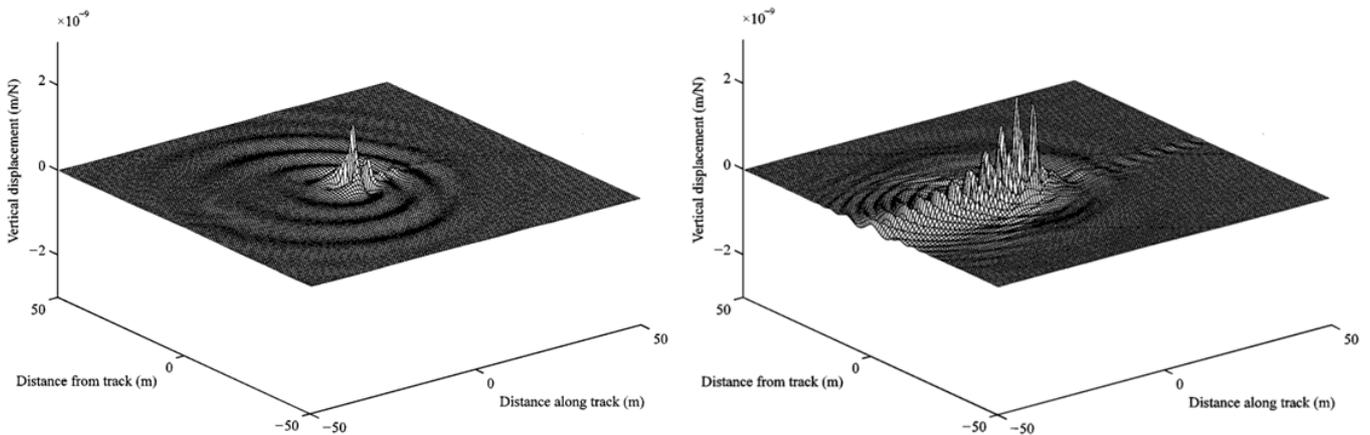
### 5.3.2 Revue bibliographique

La prise en compte d'un référentiel mobile lié à une charge en mouvement se déplaçant sur un massif de sol est bien décrite dans la littérature et a généralement trait à des problématiques ferroviaires ([PIC05], [CHU11]). Cependant, d'un point de vue géotechnique, ces méthodes se bornent essentiellement à estimer le déplacement de la surface du sol en contact avec la charge ou éventuellement du système masse-ressort qui modélise la voiture, se focalisant avant tout sur la réponse globale du véhicule.

La charge appliquée a généralement une vitesse constante ([PIC03], [CHU11]) et possède une amplitude constante ou harmonique ([JON00], [CHA14]). Le massif de sol est pris en compte par un massif infini, qui peut être éventuellement composé de plusieurs couches horizontales, dont le comportement est élastique ou visco-élastique.

Les méthodes numériques appliquées sont généralement fondées sur l'expression des déplacements et contraintes dans le domaine des nombres d'ondes. Elles ne permettent pas toujours d'avoir l'expression de chacune des grandeurs en des points quelconques du massif et ne sont de fait pas toujours applicables à la méthode des Éléments Finis.

Les auteurs s'accordent cependant sur le fait que ces méthodes permettent de simuler correctement les effets de la vitesse du véhicule sur la déformation de la surface du sol, tout particulièrement lorsque cette vitesse est proche de la vitesse des ondes de Rayleigh du massif sous-jacent. On a alors un phénomène de résonance qui se manifeste par des déformations surfaciques très importantes. Un exemple de ce phénomène est illustré Figure 5-8. Cette figure présente la déformée de la surface du sol sous l'application d'une charge mobile ( $V = 83 \text{ m/s}$ ), harmonique ( $f = 40 \text{ Hz}$ ) sur la surface d'un sol raide à gauche (vitesse des ondes de cisaillement  $V_s = 260 \text{ m/s}$ ) et souple à droite ( $V_s = 80 \text{ m/s}$ ).



**Figure 5-8 : Déformation de la surface du sol (raide à gauche et souple à droite) sous l'application d'une charge mobile harmonique (d'après [JON00])**

Bien que la prise en compte d'une hétérogénéité du sol par une approche simplifiée (rail en flexion modélisé par une poutre d'Euler Bernoulli sur une fondation de Winkler) ait été proposée par exemple dans [ANG13] avec une formulation faible du problème de flexion du rail dans le référentiel mobile, ces différentes approches ne permettent pas vraiment d'étudier le comportement d'un sol hétérogène, à plus forte raison celui d'un sol renforcé. Pour cette raison, nous proposons d'implémenter la prise en compte d'un référentiel mobile dans un code aux éléments finis, permettant ainsi de prendre en compte des géométries et des matériaux hétérogènes. Une approche similaire, pour l'étude de phénomènes transitoires en prenant en compte de l'amortissement a été pro-

posée par Duhamel et Nguyen [NGU02], [NGU06] à l'École des Ponts puis reprise par différents auteurs, par exemple [ZHA10].

### 5.3.3 Mise en équations

#### 5.3.3.1 Introduction d'un référentiel mobile

On étudie l'effet d'un chargement mobile sur un solide élastique semi-infini (Figure 5-9). La section de ce solide par le plan  $x_1 = \text{constante}$  est notée  $S$ . Le chargement mobile se déplace à la vitesse  $v$  selon l'axe  $Ox_1$ .

On présente dans ce chapitre le cas d'un matériau élastique classique pour ne pas alourdir l'exposé. L'extension au milieu multiphasique offre peu de difficultés supplémentaires ; les compléments nécessaires sont donnés en annexe A.

On choisit d'étudier ce problème dans un référentiel mobile où le chargement est constant. Le domaine d'étude  $V$  lui-même a son bord qui se déplace dans le référentiel fixe ; il est fixe dans le référentiel mobile. On restreint le domaine d'étude à une longueur  $L$ . On a :

$$V = S \times [0, L] \quad (6.6)$$

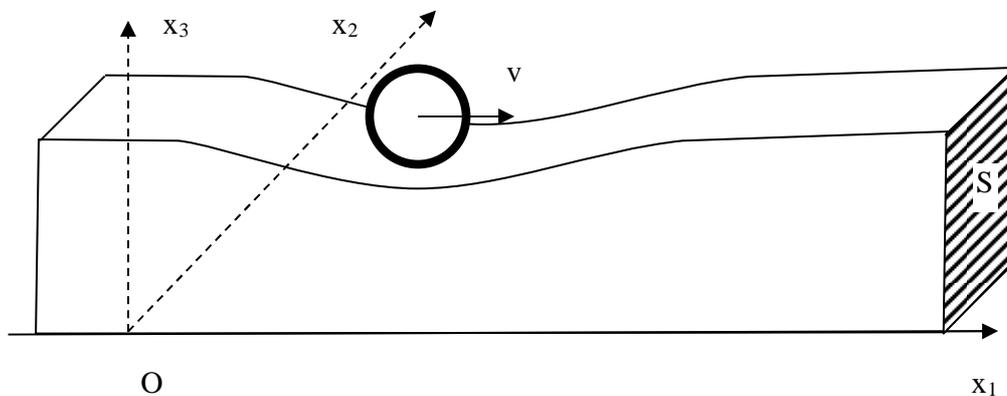


Figure 5-9 : Problème dans le référentiel mobile

Le problème à résoudre s'écrit donc :

$$\text{div } \sigma + f = \rho \cdot \gamma \quad (6.7)$$

$$E \cdot \varepsilon = \sigma \quad (6.8)$$

avec des conditions à préciser sur le contour de  $V$ . En particulier, le chargement peut se traduire par une force ou une densité de forces se déplaçant à la surface supérieure de  $V$ . Dans le repère fixe les deux équations précédentes s'écrivent :

$$\operatorname{div}\sigma(x_1, x_2, x_3, t) + f(x_1, x_2, x_3, t) = \rho\gamma(x_1, x_2, x_3, t) \quad (6.9)$$

$$E\mathcal{E}(x_1, x_2, x_3, t) = \sigma(x_1, x_2, x_3, t) \quad (6.10)$$

On suppose que le problème est stationnaire dans un repère lié au chargement. Celui-ci se déplace à la vitesse  $v$  dans le sens des  $x_1$  positifs. On utilise le fait que les phénomènes sont identiques au point  $(x_1, x_2, x_3, t)$  et au point  $(x_1 - vt = X_1, x_2, x_3, 0)$ , même  $E$ , même  $\sigma$ , même  $f$ , mêmes conditions aux limites. On a donc dans ce référentiel mobile :

$$\operatorname{div}\sigma(X_1, x_2, x_3, 0) + f(X_1, x_2, x_3, 0) = \rho\gamma(X_1, x_2, x_3, 0) \quad (6.11)$$

$$E\mathcal{E}(X_1, x_2, x_3, 0) = \sigma(X_1, x_2, x_3, 0) \quad (6.12)$$

Il faut évaluer le terme d'accélération dans (6.11) avec des dérivées spatiales.

On a :

$$\gamma(x_1, x_2, x_3, t) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \begin{pmatrix} \zeta_1(x_1, x_2, x_3, t) \\ \zeta_2(x_1, x_2, x_3, t) \\ \zeta_3(x_1, x_2, x_3, t) \end{pmatrix} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \begin{pmatrix} \zeta_1(x_1 - vt, x_2, x_3, 0) \\ \zeta_2(x_1 - vt, x_2, x_3, 0) \\ \zeta_3(x_1 - vt, x_2, x_3, 0) \end{pmatrix} = v^2 \frac{\partial^2}{\partial X_1^2} \begin{pmatrix} \zeta_1(X_1, x_2, x_3, 0) \\ \zeta_2(X_1, x_2, x_3, 0) \\ \zeta_3(X_1, x_2, x_3, 0) \end{pmatrix} \quad (6.13)$$

Finalement, en combinant (6.11) et (6.13) on a :

$$\operatorname{div}\sigma(X_1, x_2, x_3) + f(X_1, x_2, x_3) - \rho v^2 \frac{\partial^2}{\partial X_1^2} \zeta(X_1, x_2, x_3) = 0 \quad (6.14)$$

### 5.3.3.2 Étude d'une formulation faible du problème

On multiplie (6.14) par une fonction test  $\hat{\zeta}$  pour obtenir une formulation faible du problème :

$$\int_V \hat{\zeta} \cdot (\operatorname{div}\sigma(X_1, x_2, x_3) + f(X_1, x_2, x_3) - \rho v^2 \frac{\partial^2 \zeta(X_1, x_2, x_3)}{\partial X_1^2}) = 0 \quad (6.15)$$

Étudions le terme correspondant aux forces d'inertie. En intégrant par parties on obtient :

$$\int_V \hat{\zeta} \cdot \rho v^2 \frac{\partial^2 \zeta(X_1, x_2, x_3)}{\partial X_1^2} = v^2 \int_V \rho \left( \frac{\partial}{\partial X_1} \left( \hat{\zeta} \cdot \frac{\partial \zeta(X_1, x_2, x_3)}{\partial X_1} \right) - \frac{\partial \hat{\zeta}(X_1, x_2, x_3)}{\partial X_1} \cdot \frac{\partial \zeta(X_1, x_2, x_3)}{\partial X_1} \right) \quad (6.16)$$

Il faut étudier le terme  $\int_V \rho \frac{\partial}{\partial X_1} \left( \hat{\zeta} \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial X_1} \right)$ .

On rappelle que les différentes données du problème ne dépendent pas de  $X_1$  (sauf le chargement) et on néglige les variations de la masse volumique  $\rho$  relatives à ce chargement, comme il est habituel de le faire dans le cadre des petites perturbations. Ainsi  $\rho$  ne dépend pas de  $X_1$ .

En utilisant le théorème de Fubini et la forme particulière du domaine  $V$ , on peut alors écrire :

$$\int_V \rho \frac{\partial}{\partial X_1} \left( \hat{\zeta} \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial X_1} \right) dV = \int_s \left( \int_0^L \rho \frac{\partial}{\partial X_1} \left( \hat{\zeta} \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial X_1} \right) dX_1 \right) dx_2 dx_3 = \int_s \rho \left[ \hat{\zeta} \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial X_1} \right]_0^L dx_2 dx_3 \quad (6.17)$$

Il faut noter que cette transformation n'est valable qu'en l'absence de discontinuité de  $\frac{\partial \zeta}{\partial X_1}$  qui correspondrait à une discontinuité de la vitesse et donc à une onde de choc. Nous allons vérifier que le terme de droite est nul pour des conditions de symétrie plane aux deux bords. Ces conditions aux limites bien connues en repère fixe sont étudiées dans l'annexe B. On montre que pour une matrice élastique isotrope on a les mêmes conclusions que pour un problème symétrique en repère fixe. Les fonctions tests  $\hat{\zeta}$  doivent vérifier les conditions aux limites déduites de celles satisfaites par  $\zeta$ , notamment  $\zeta_1=0$ . On en déduit que  $\hat{\zeta}_1=0$ . Comme on a également les relations  $\partial \zeta_2 / \partial X_1 = \partial \zeta_3 / \partial X_1 = 0$  pour les plans de symétrie dans le cas d'un matériau élastique isotrope on conclut que le membre de droite de (6.17) est nul.

On peut alors récrire (6.16) de la manière suivante :

$$\int_V \hat{\zeta} \cdot \rho v^2 \frac{\partial^2 \zeta(X_1, x_2, x_3)}{\partial X_1^2} = -v^2 \int_V \rho \frac{\partial \hat{\zeta}}{\partial X_1} \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial X_1} \quad (6.18)$$

Récrivons l'équation (6.15) en prenant en compte et (6.8) et en faisant l'intégration par parties usuelle pour le terme en  $\hat{\zeta} \cdot \text{div} \sigma$  :

$$\int_V \hat{\zeta} \cdot (\text{div} \sigma(X_1, x_2, x_3) + f(X_1, x_2, x_3) - \rho v^2 \frac{\partial^2 \zeta(X_1, x_2, x_3)}{\partial X_1^2})$$

$$= \int_{\partial V} \hat{\zeta} T - \int_V \varepsilon : E : \hat{\varepsilon} + \int_V \rho v^2 \frac{\partial \zeta}{\partial X_1} \cdot \frac{\partial \hat{\zeta}}{\partial X_1} = 0 \quad (6.19)$$

ou encore :

$$\int_V \varepsilon : E : \hat{\varepsilon} - \int_V \rho v^2 \frac{\partial \zeta}{\partial X_1} \cdot \frac{\partial \hat{\zeta}}{\partial X_1} = \int_{\partial V} \hat{\zeta} T \quad (6.20)$$

où le membre de gauche est une forme bilinéaire symétrique, formée par la différence entre le terme habituel  $\int_V \varepsilon : E : \hat{\varepsilon}$  et un terme provenant des forces d'inertie.

Pour une vitesse suffisamment grande, cette forme bilinéaire perd sa positivité. Si on prend  $\zeta = \hat{\zeta} = (X_1, 0, 0)$  alors :  $\varepsilon = \hat{\varepsilon} = e_1 \otimes e_1$  et  $\partial \zeta / \partial X_1 = \partial \hat{\zeta} / \partial X_1 = e_1$ . Pour un milieu élastique isotrope, la condition de positivité conduit alors à  $v \leq \sqrt{(\lambda + 2\mu) / \rho}$  (vitesse des ondes de compression).

Si on prend  $\zeta = \hat{\zeta} = (0, X_1, 0)$  alors  $\varepsilon = \hat{\varepsilon} = 1/2(e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1)$ ,  $\partial \zeta / \partial X_1 = \partial \hat{\zeta} / \partial X_1 = e_2$ , et on voit apparaître comme condition nécessaire de positivité  $v < \sqrt{\mu / \rho}$  (vitesse des ondes de cisaillement).

Lorsque la vitesse dépasse la célérité des ondes de cisaillement, il apparaît des discontinuités dans le champ de vitesses et le raisonnement précédent ne tient plus.

### 5.3.3.3 Conséquences pour la matrice de rigidité d'un élément

Pour un élément, on note  $\{u\}$  le vecteur des déplacements. On pose :

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad \{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} \quad (6.21)$$

En tenant compte de l'interpolation des déplacements, on a :

$$\{\varepsilon\} = B\{u\} \quad (6.22)$$

où les coefficients de la matrice  $B$  dépendent des dérivées des fonctions d'interpolation  $N$ .

La relation locale entre contraintes et déformations s'écrit :

$$\{\sigma\} = E\{\varepsilon\} \quad \text{avec} \quad E = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \quad (6.23)$$

La première intégrale figurant dans le membre de gauche de (6.20) se calcule donc comme suit :

$$\int_V \varepsilon : E : \hat{\varepsilon} = \{u\}^T K \{\hat{u}\} \quad (6.24)$$

où  $K$  est la matrice de rigidité donnée par :

$$K = \int_V B^T E B \quad (6.25)$$

Pour la prise en compte de l'effet d'inertie, on introduit de plus la matrice  $C$ , qui permet de calculer les dérivées du déplacement par rapport à la direction du mouvement :

$$\left\{ \frac{\partial \zeta}{\partial X_1} \right\} = C \{u\} \quad (6.26)$$

La deuxième intégrale du membre de gauche de (6.20) se calcule donc comme suit :

$$-\int_V \rho v^2 \frac{\partial \zeta}{\partial X_1} \cdot \frac{\partial \hat{\zeta}}{\partial X_1} = \{u\}^T K'' \{\hat{u}\} \quad (6.27)$$

où l'on a posé:

$$K'' = -\rho v^2 \int_V C^T C \quad (6.28)$$

On a alors une matrice de rigidité apparente  $K'$  qui s'écrit :

$$K' = K + K'' = \int_V B^T E B - (\rho v^2)(C^T C) \quad (6.29)$$

On peut remarquer que la contribution à la rigidité apparente ne dépend pas du signe de  $v$ , c'est-à-dire du sens de déplacement du chargement.

#### 5.3.3.4 Remarques et perspectives

---

On se propose d'utiliser cette méthode de représentation en référentiel mobile pour étudier le passage d'une roue de TGV sur un massif renforcé. On présente

dans la suite l'implémentation de cette technique numérique dans le code CESAR-LCPC.

Nous nous sommes également intéressés au développement de cette méthode dans le cas d'une loi de comportement visco-élastique pour le sol. L'implémentation dans un code éléments finis n'a pas été effectuée, néanmoins un certain nombre de développements théoriques sont disponibles dans l'annexe C.

### 5.3.4 Implémentation du modèle numérique

#### 5.3.4.1 Exemple de calcul de la matrice de rigidité modifiée pour un triangle à trois nœuds

A titre d'illustration, on considère un triangle à trois nœuds, et on note respectivement  $u_i$  et  $v_i$  les composantes horizontale et verticale du nœud  $i$ .

Classiquement, pour construire la matrice de rigidité d'un élément triangulaire à trois nœuds, on définit les fonctions de forme (ou d'interpolation),  $N_i$ , linéaires valant 1 au sommet  $i$  et nulle sur les deux autres sommets.

On définit les matrices  $L$  et  $N$  par :

$$L = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1} \end{bmatrix} \quad (6.30)$$

$$N^e = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_1 & N_2 & N_3 \end{bmatrix} \quad (6.31)$$

Et on a :  $LN^e = B^e$  et  $\{\varepsilon\}^e = B^e \{u\}^e$  avec  $\{u\}^e$  les déplacements nodaux de l'élément (classés par composantes  $\{u\}^{eT} = \{u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3\}$ );  $B^e$  s'écrit :

$$B^e = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x_1} & \frac{\partial N_2}{\partial x_1} & \frac{\partial N_3}{\partial x_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial x_2} & \frac{\partial N_2}{\partial x_2} & \frac{\partial N_3}{\partial x_2} \\ \frac{\partial N_1}{\partial x_2} & \frac{\partial N_2}{\partial x_2} & \frac{\partial N_3}{\partial x_2} & \frac{\partial N_1}{\partial x_1} & \frac{\partial N_2}{\partial x_1} & \frac{\partial N_3}{\partial x_1} \end{bmatrix} \quad (6.32)$$

La matrice de rigidité d'un élément  $K^e$  est donnée par :

$$K^e = \int_e B^T E B \quad (6.33)$$

Pour construire le complément  $K^{e''}$  à la matrice d'inertie d'un élément, on définit l'opérateur différentiel  $L'$  :

$$L' = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_1} \end{bmatrix} \quad (6.34)$$

Et on a  $C=L'N$  :

$$C = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x_1} & \frac{\partial N_2}{\partial x_1} & \frac{\partial N_3}{\partial x_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial x_1} & \frac{\partial N_2}{\partial x_1} & \frac{\partial N_3}{\partial x_1} \end{bmatrix} \quad (6.35)$$

et

$$C^T C = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1^2}{\partial x_1} & \frac{\partial N_1}{\partial x_1} \frac{\partial N_2}{\partial x_1} & \frac{\partial N_1}{\partial x_1} \frac{\partial N_3}{\partial x_1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial N_1}{\partial x_1} \frac{\partial N_2}{\partial x_1} & \frac{\partial N_2^2}{\partial x_1} & \frac{\partial N_2}{\partial x_1} \frac{\partial N_3}{\partial x_1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial N_1}{\partial x_1} \frac{\partial N_3}{\partial x_1} & \frac{\partial N_2}{\partial x_1} \frac{\partial N_3}{\partial x_1} & \frac{\partial N_3^2}{\partial x_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_1^2}{\partial x_1} & \frac{\partial N_1}{\partial x_1} \frac{\partial N_2}{\partial x_1} & \frac{\partial N_1}{\partial x_1} \frac{\partial N_3}{\partial x_1} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial x_1} \frac{\partial N_2}{\partial x_1} & \frac{\partial N_2^2}{\partial x_1} & \frac{\partial N_2}{\partial x_1} \frac{\partial N_3}{\partial x_1} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial x_1} \frac{\partial N_3}{\partial x_1} & \frac{\partial N_2}{\partial x_1} \frac{\partial N_3}{\partial x_1} & \frac{\partial N_3^2}{\partial x_1} \end{bmatrix} \quad (6.36)$$

Le terme à ajouter à la matrice de rigidité est alors donné par :

$$K^{e''} = -\rho v^2 \int_e C^T C \quad (6.37)$$

### 5.3.5 Exemple de mise en œuvre

Des essais de validation de la programmation de ce modèle ont été effectués en 2D et 3D. On a constitué un maillage régulier, correspondant à une longueur de

20 m et une épaisseur de 4 m, constitué d'éléments carrés, avec une interpolation quadratique, de 25 cm de côté (ce qui conduit à un maillage comportant environ 6400 nœuds en 2D et 15000 nœuds en 3D). Le matériau est supposé homogène élastique linéaire avec  $\rho = 2000 \text{ kg/m}^3$   $E = 100 \text{ MPa}$  ;  $\nu = 0,3$  et une force ponctuelle, comme illustré dans les Figure 5-10 et Figure 5-11. La longueur de la demi-période spatiale  $L/2$  (cf. partie 5.3.3) est arbitrairement fixée à 10 m.

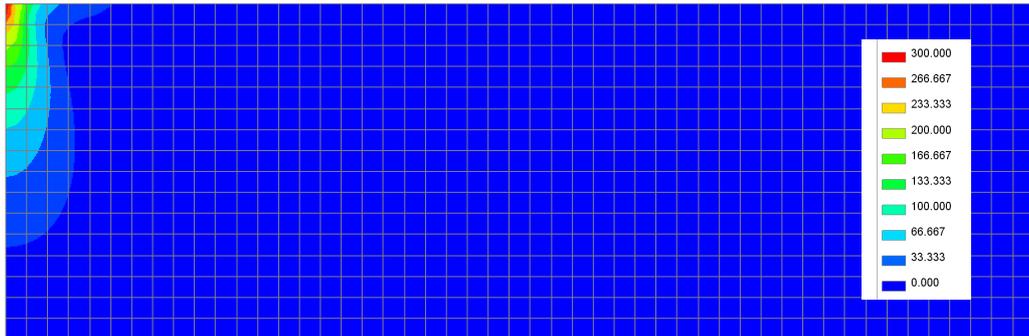


Figure 5-10 : Déplacement total pour  $V=125 \text{ m/s}$  (bleu = 0, rouge = 300 mm)

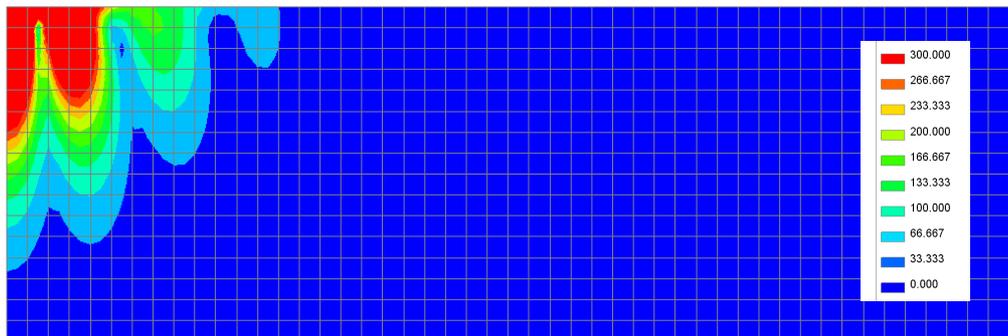
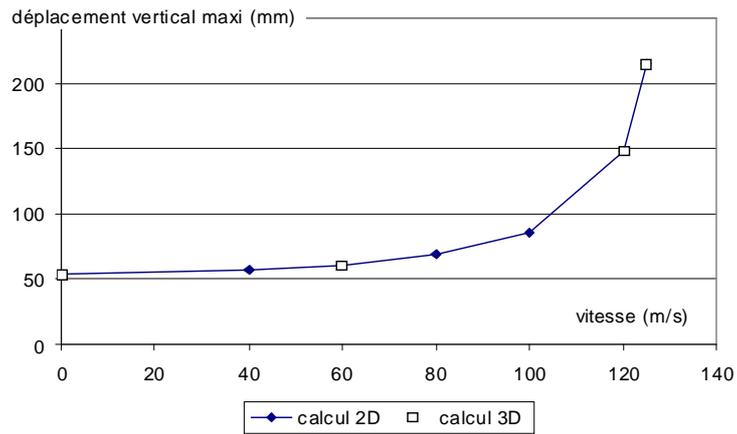


Figure 5-11: Déplacement total pour  $V =130 \text{ m/s}$  (bleu = 0, rouge = 300 mm)

Le calcul ne peut effectivement s'effectuer que lorsque la matrice de rigidité est positive, ce qui permet d'estimer la vitesse critique du système (vitesse des ondes de cisaillement dans le massif, théoriquement ici 129 m/s). Le calcul passe encore pour 130 km/h mais échoue pour toute valeur supérieure. Pour des vitesses de circulation de la charge légèrement inférieures à cette vitesse critique, on a un phénomène d'amplification non amortie qui conduit à des déformations très supérieures aux déformations statiques (Figure 5-12). Les déplacements calculés sont illustrés par la Figure 5-10 et la Figure 5-11.

## Chapitre 5 : Prise en compte d'une charge mobile



*Figure 5-12 : Essai de validation sur un massif : vitesse critique et amplification non amortie*

## 5.4 Application à un remblai ferroviaire renforcé

### 5.4.1 Géométrie

On modélise un remblai ferroviaire type, dont la géométrie est présentée sur la Figure 5-13. Il est constitué d'une couche de ballast de 25 cm d'épaisseur, puis d'une sous-couche d'épaisseur identique, puis du corps de remblai. Comme dans l'expérience du CER présentée au Chapitre 2, on suppose que le remblai est constitué d'une partie renforcée et d'une partie non renforcée. La partie renforcée est associée à un parement en béton. Les armatures font 5 m de long.

Le remblai est construit en cinq étapes : les quatre premières étapes correspondent à la construction de chacune des couches de remblai et de la section de parement correspondante. La cinquième étape correspond à la mise en place de la sous-couche et du ballast.

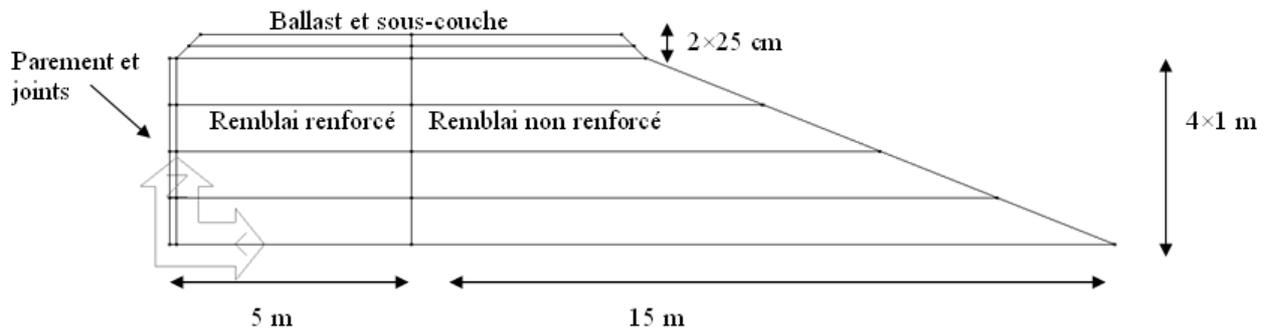


Figure 5-13 : Géométrie de la section du remblai considéré

### 5.4.2 Symétries et conditions aux limites

On étudie ici les relations de symétrie du chargement dans le cas d'un train et leurs conséquences en termes d'implémentation en référentiel mobile, afin de proposer un modèle représentatif du passage d'un TGV sur un domaine maillé le plus restreint possible (Figure 5-15).

On démontre dans l'annexe B que le domaine d'étude dans le cas d'un référentiel mobile pour un chargement périodique symétrique par rapport au plan  $\Pi$  (Figure 5-14), peut se ramener à l'étude d'une demi-période spatiale avec des conditions aux limites classiques d'un code éléments finis sur les bords du domaine.

En choisissant de considérer un train « infini » dans le sens où la modélisation simule le passage d'une infinité de wagons sur le remblai armé et en reprenant la géométrie d'un Thalys présentée Figure 1-38, la longueur finalement choisie dans la direction longitudinale pour représenter le domaine maillé est  $L/2=9.3$  m. Les conditions aux limites bloquent les déplacements dans la direction longitudinale sur les bords du domaine (traits rouges pointillés, Figure 5-14) et laissent libres les déplacements dans les deux autres directions.

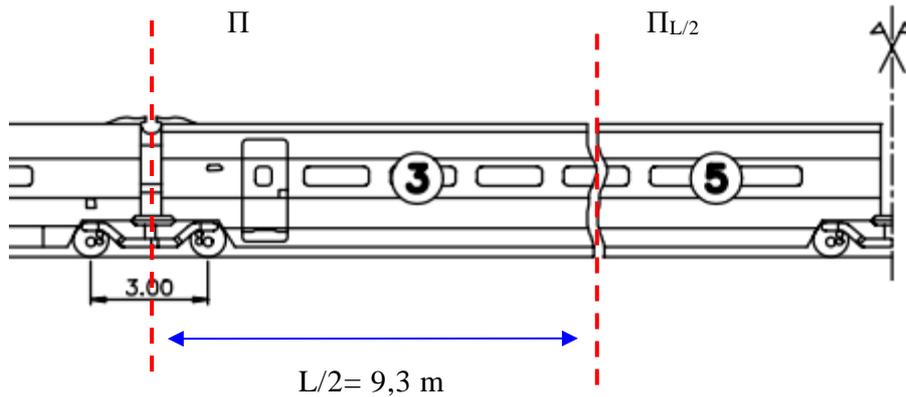


Figure 5-14 : Symétrie d'une voiture TGV (d'après [DEG00])

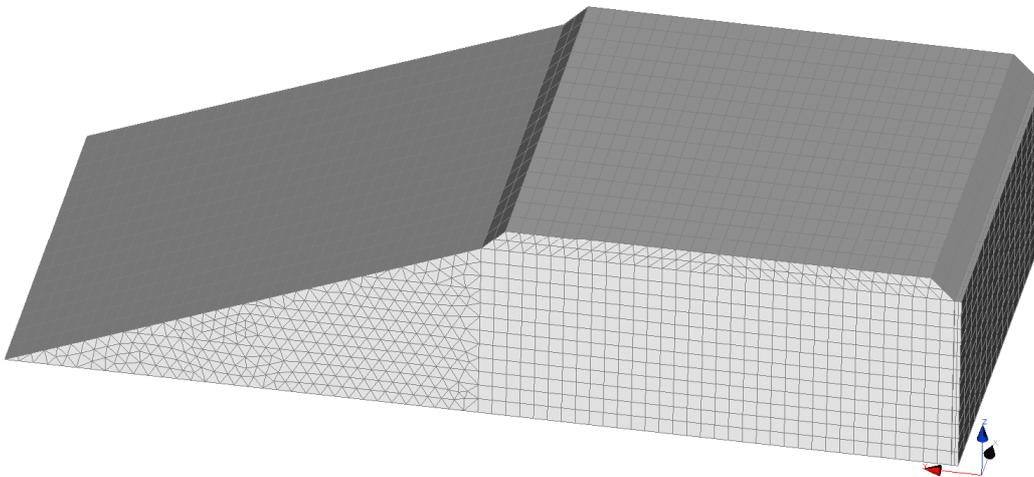


Figure 5-15 : Maillage tridimensionnel

### 5.4.3 Chargement

Comme on le remarque sur la Figure 5-14, la roue du bogie applique une force située à 1,50 m du plan de symétrie  $\Pi$ . Nous avons choisi de ne représenter ni les traverses ni les rails, pour ne pas surcharger le modèle et pour ne pas rompre la continuité dans la direction  $X_1$ , qui est une condition essentielle à l'application de la méthode de résolution en référentiel mobile (cf. partie 5.3.3).

On applique donc le poids du train directement sur le ballast, en négligeant celui du rail et des traverses.

La diffusion de la charge de 180 kN (correspondant à deux roues d'un bogie, cf. partie 1.5.3) au travers de la voie, du fait de la déflexion du rail, a été prise en compte en réutilisant les résultats expérimentaux de [MAN07] (partie 1.5.3.1). Nous avons choisi ici de considérer les coefficients de diffusion de la charge correspondant à un chargement TGV (c'est-à-dire considérant que la déflexion du rail a une incidence jusqu'à la quatrième traverse située en amont et en aval de la traverse sur laquelle passe la roue). Ces coefficients tiennent compte de la vibration du rail et des effets d'amortissement de la voie sous grandes vitesses et doivent donc être pris en compte y compris lors de l'utilisation du référentiel mobile.

---

### 5.4.4 Paramètres matériaux

Nous étudions deux remblais types. Pour chacune des structures, les paramètres matériaux sont identiques excepté ceux du modèle de sol. De plus, pour chaque calcul, un certain nombre de paramètres correspondent à la construction, et un certain nombre d'autres sont mis en jeu lors de l'application de la charge mobile.

Le premier remblai, qualifié dans la suite de « raide » correspond aux paramètres matériaux issus de la modélisation de l'expérience du CER (cf. Tableau 3-3). Le second remblai correspond à un remblai qualifié de « souple » dans la suite : le module d'Young du sol  $y$  est pris suffisamment faible pour que la vitesse des ondes de cisaillement dans le massif prenne une valeur proche de 350 km/h, ce qui permet d'observer les phénomènes de résonance pour des vitesses proches de vitesses TGV.

#### 5.4.4.1 Construction du remblai

---

La construction du remblai comprend quatre étapes qui correspondent à l'activation successive du poids des quatre couches de sol et de la section de parement correspondante ; la sous-couche et le ballast étant activés en même temps que la couche supérieure de sol. On introduit une couche d'éléments minces entre le parement et le sol renforcé, pour tenir compte du tassement du sol qui « glisse » contre les écailles indéformables lors de l'application du poids des couches supérieures. A cette étape, le parement est modélisé comme un matériau continu homogène et isotrope, avec des paramètres élastiques correspondant au béton.

Le ballast, la sous-couche et le sol sont modélisés à l'aide d'une loi élastoplastique de type Mohr-Coulomb. Les valeurs d'angle de frottement et de dilataance sont prises égales à celles proposées dans [SOY09]. L'ensemble des paramètres sont rappelés dans le Tableau 5-2.

Le sol renforcé est modélisé à l'aide du modèle multiphasique précédemment présenté : la « phase renforcement » possède des caractéristiques d'élasticité déduites de celles de l'acier et de la fraction volumique des armatures. La loi d'interaction entre les deux phases est élastique bilinéaire - parfaitement plastique, les coefficients étant identiques à ceux présentés dans le Tableau 3-1, mais pondérés par la fraction volumique de la phase renforcement.

Tableau 5-2 : Paramètres matériaux lors de la construction

	$\gamma$ (kN/m <sup>3</sup> )	E (MPa)	$\nu$ (-)	c (kPa)	$\phi$ (°)
Ballast	17	60	0,2	10	36
Sous-couche	23,3	90	0,3	10	36
Remblai souple	21	70	0,3	10	36
Remblai raide	21	150	0,3	10	36
Contact sol-parement	20	0,1	0,49	-	-
Écaille béton	25	25 000	0,2	-	-

#### 5.4.4.2 Application d'une charge mobile

L'étape de chargement consiste à appliquer une charge mobile sur le remblai préalablement construit. Numériquement, la procédure consiste à lancer un nouveau calcul en initialisant les contraintes au sein du massif à la valeur qu'elles avaient à la fin de la construction. Les déplacements sont réinitialisés au début de cette étape.

Le calcul est effectué en élasticité avec de nouveaux paramètres pour les matériaux correspondant à cette étape. On choisit pour le sol de nouveaux modules d'Young : pour le remblai raide, ces modules varient avec la profondeur et sont identiques à ceux fixés lors de la modélisation du CER (Figure 3-2). Pour le remblai « souple », on garde la valeur de 70 MPa pour l'ensemble du massif. Enfin, le ballast et la sous-couche ne changent pas de propriétés élastiques.

Le comportement du parement est décrit par une loi de comportement de type élastique isotrope transverse, dans le but de s'affranchir des effets de flexion (cf. partie 3.2.1.3). De plus, on attribue également ces paramètres aux éléments qui servaient auparavant de joint entre le sol et le parement.

Les renforcements sont toujours modélisés à l'aide du modèle multiphasique, avec les mêmes caractéristiques que lors de la phase construction.

## 5.4.5 Résultats

Les résultats du calcul pour les deux modèles de remblai sont présentés ci-dessous. Conformément à l'hypothèse de représentation en référentiel mobile, on rappelle que la distance au plan de symétrie est proportionnelle à la dépendance temporelle des grandeurs. Ainsi, la distribution spatiale dans l'axe  $x$  des résultats qui suivent correspondent en fait aux variations temporelles avant, pendant et après le passage de la roue.

### 5.4.5.1 Remblai raide

Les paramètres associés à ce modèle sont similaires à ceux présentés dans le Chapitre 3 mais la géométrie, les conditions aux limites et le type de chargement diffèrent sensiblement entre les deux modèles.

Néanmoins, par souci de clarté, nous présenterons les résultats du calcul {construction + chargement mobile} de manière similaire à ce qui a été fait dans le Chapitre 4.

On s'intéresse tout d'abord à la déformée globale du massif, représentée sur la Figure 5-16 dans le cas d'un chargement à 350 km/h et sur la Figure 5-17 dans le cas d'un chargement immobile ( $V=0$  km/h). Les niveaux de couleur correspondent sur ces figures aux isovaleurs du déplacement vertical  $w$  donné en millimètres.

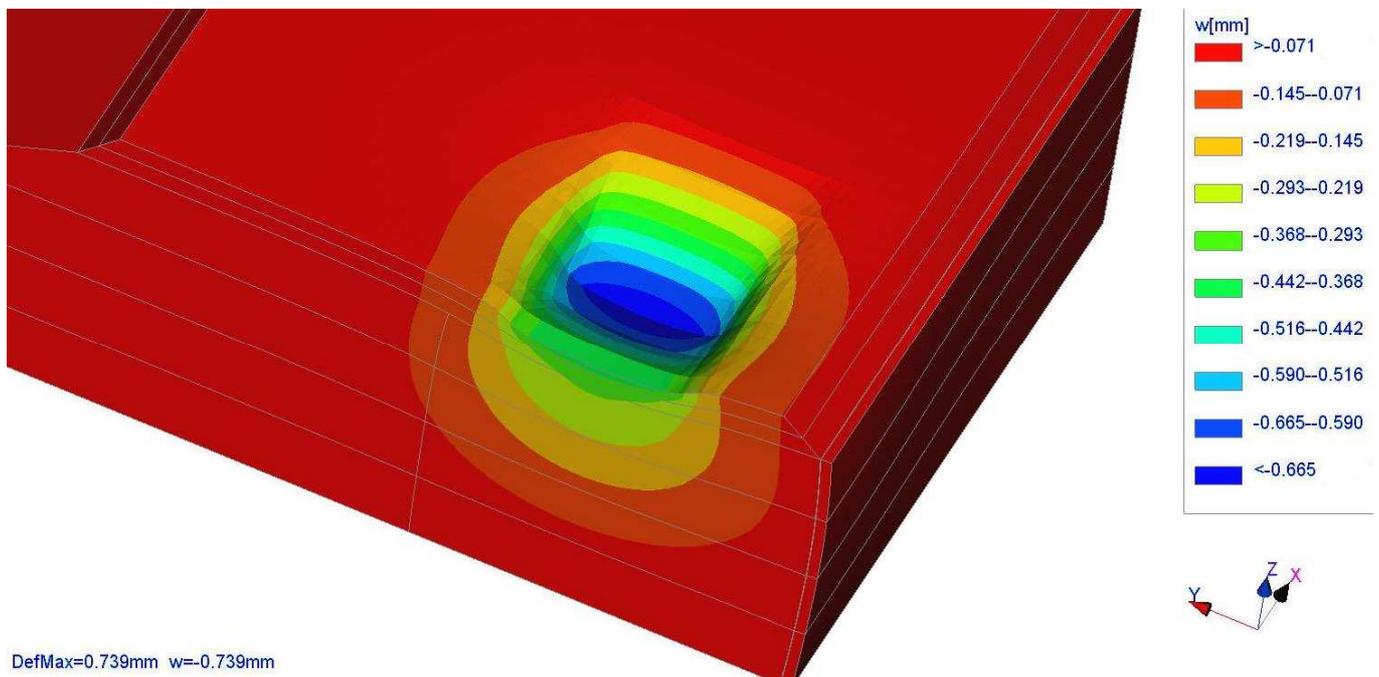


Figure 5-16 : Maillage déformé pour le chargement à 350 km/h

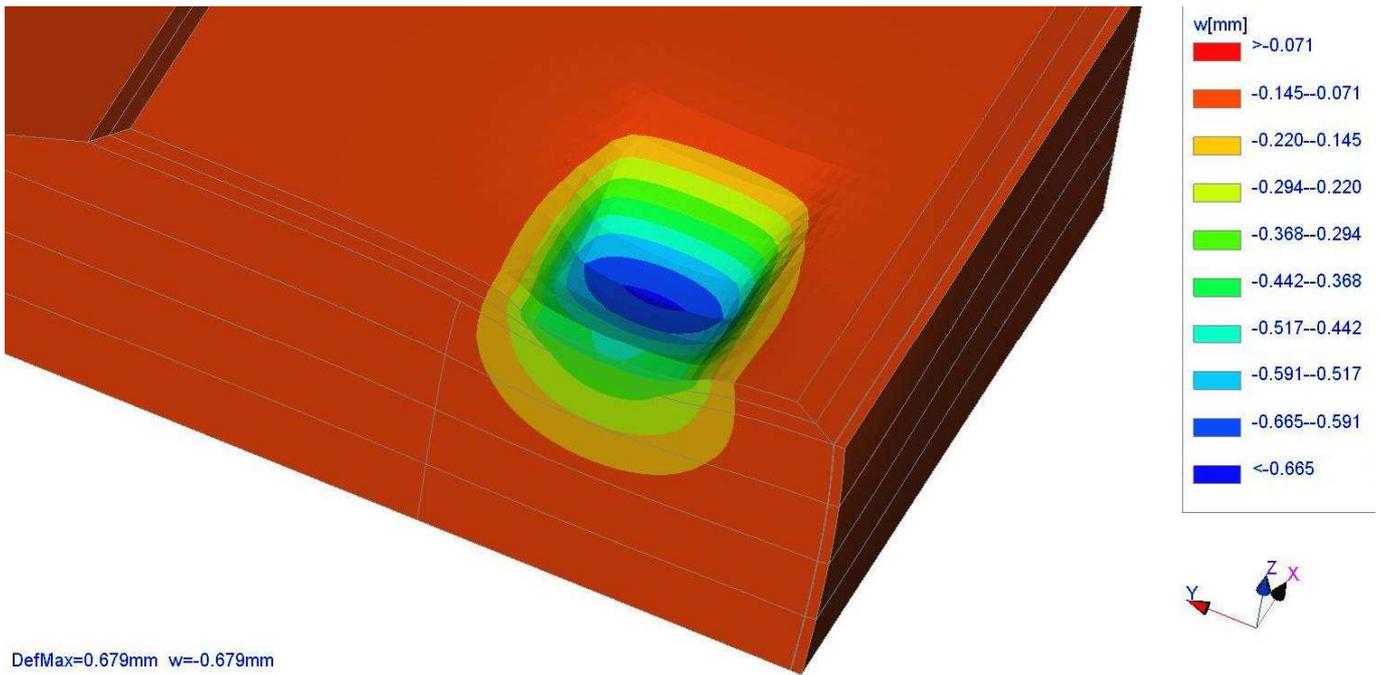


Figure 5-17 : Maillage déformé pour le chargement immobile (à 0 km/h)

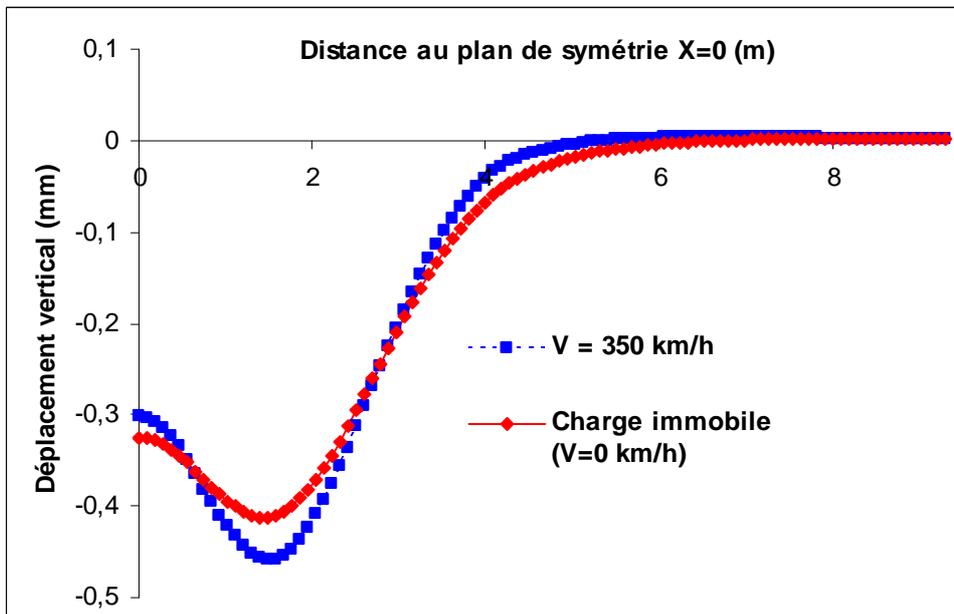


Figure 5-18 : Déplacement vertical à l'interface sous-couche/remblai, remblai raide.

La Figure 5-18 reprend les déplacements verticaux de l'interface sous-couche remblai dans la direction  $x$  et à 3 m du parement. À cette profondeur, la charge à 350 km/h entraîne des déplacements plus importants au droit de la roue, de l'ordre de 11 % de plus que les déplacements engendrés par une charge immobile de même magnitude.

On compare également dans la Figure 5-19 les tractions équivalentes totales  $T$  dans la phase renforcée et dans la Figure 5-20 les contraintes verticales totales  $\sigma_{zz}$  (données avec la convention de la mécanique, les contraintes de compression ayant des valeurs négatives). Ces deux grandeurs tiennent compte à la fois de la construction du parement et de l'application de la surcharge. Les tractions équivalentes sont obtenues en ramenant la force d'interaction de la phase renforcée du modèle multiphasique à un volume correspondant à une armature. On s'intéresse uniquement ici aux variations des grandeurs à l'endroit où serait situé le premier lit d'armatures (pris à  $Z = 3,8$  m), le comportement étant similaire pour les lits inférieurs.

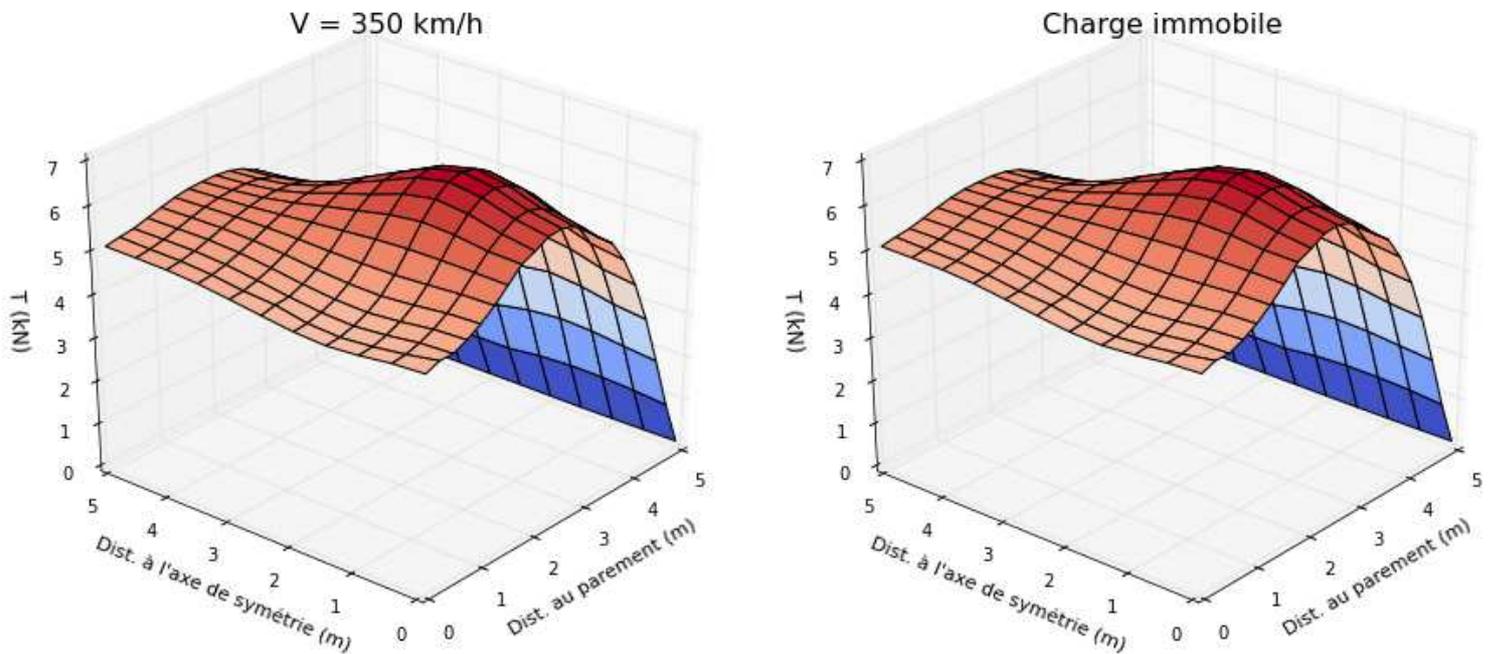


Figure 5-19 : Tractions équivalentes totales dans le lit d'armatures supérieures

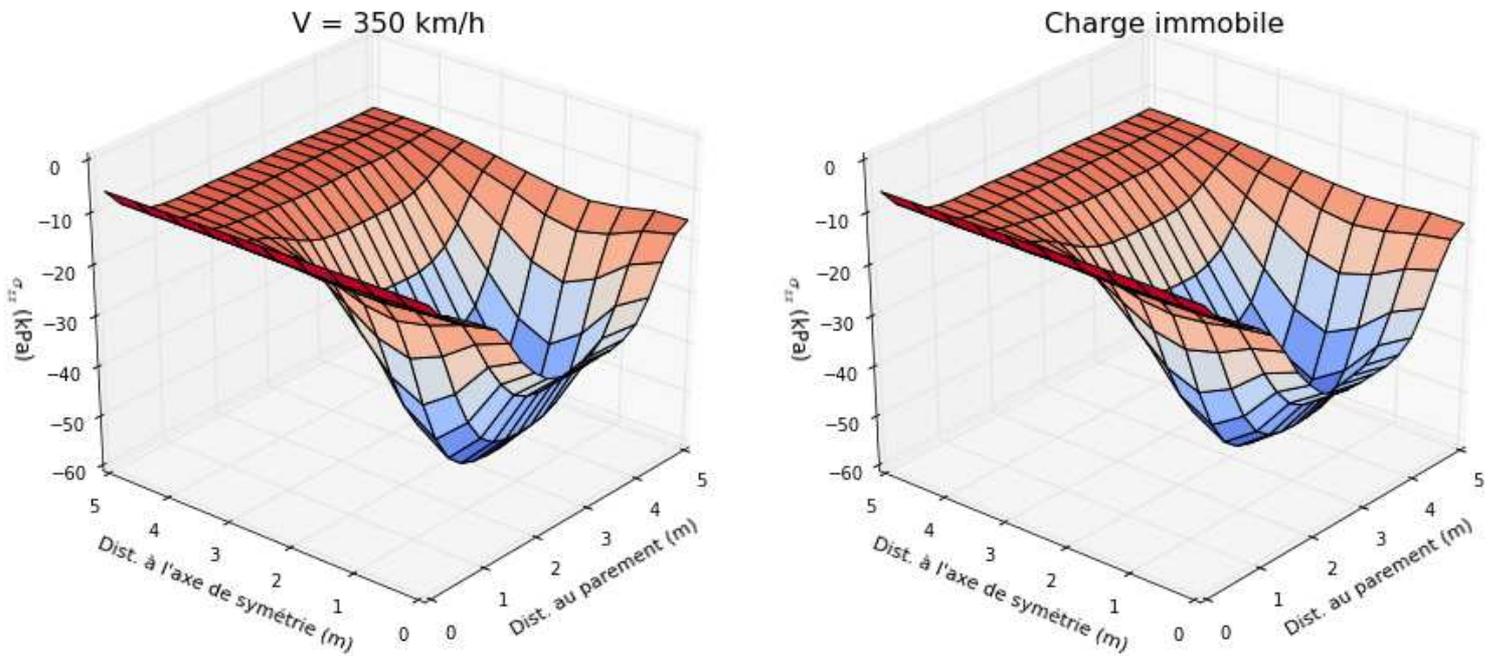


Figure 5-20 : Contraintes de compression verticales totales

Dans la Figure 5-21 et dans la Figure 5-22, on présente respectivement les incréments de traction  $\Delta T$  et de déplacement relatif  $\Delta\delta$  entre la phase renforcement et la phase sol du modèle multiphasique générés par la seule application de la charge mobile ou immobile. La construction du remblai engendre évidemment également des déplacements relatifs, mais il n'est pas pertinent de les considérer si l'on s'intéresse uniquement aux conséquences du passage d'un train sur la réponse instantanée du massif renforcé.

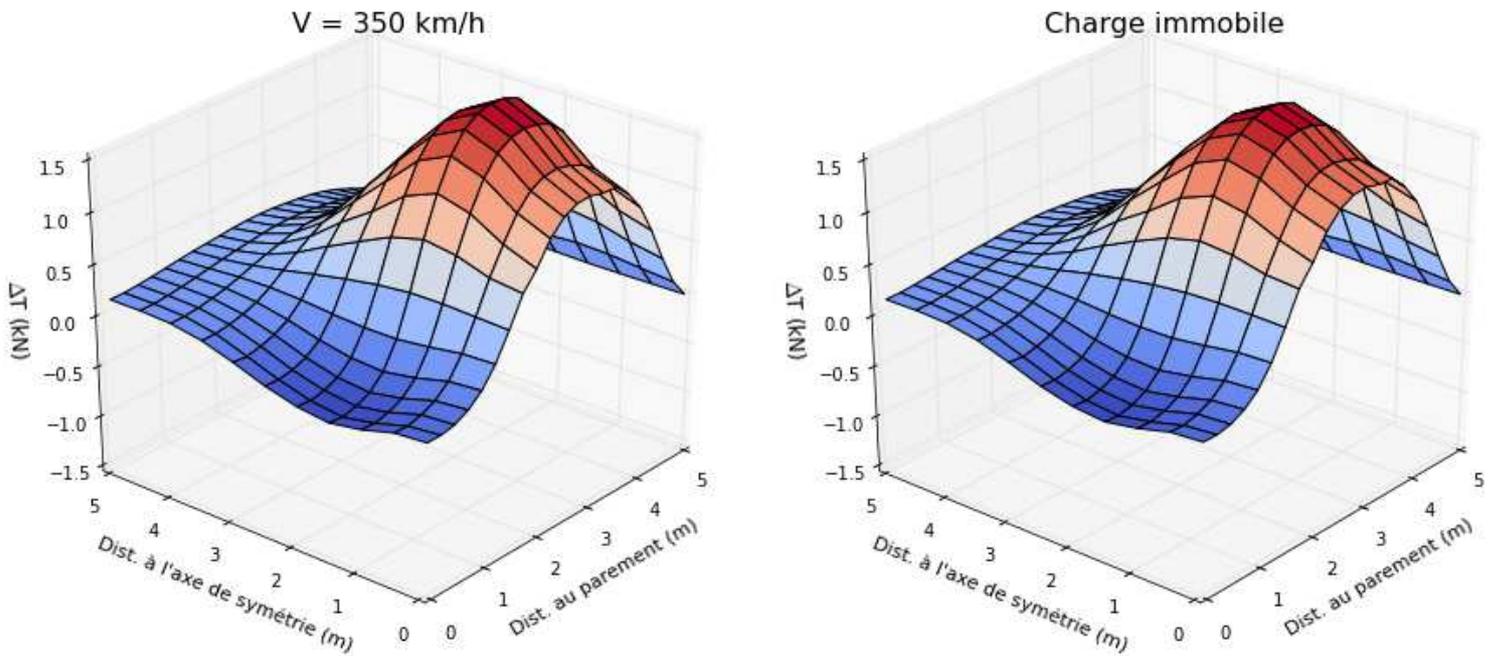


Figure 5-21 : Incrément de traction équivalente

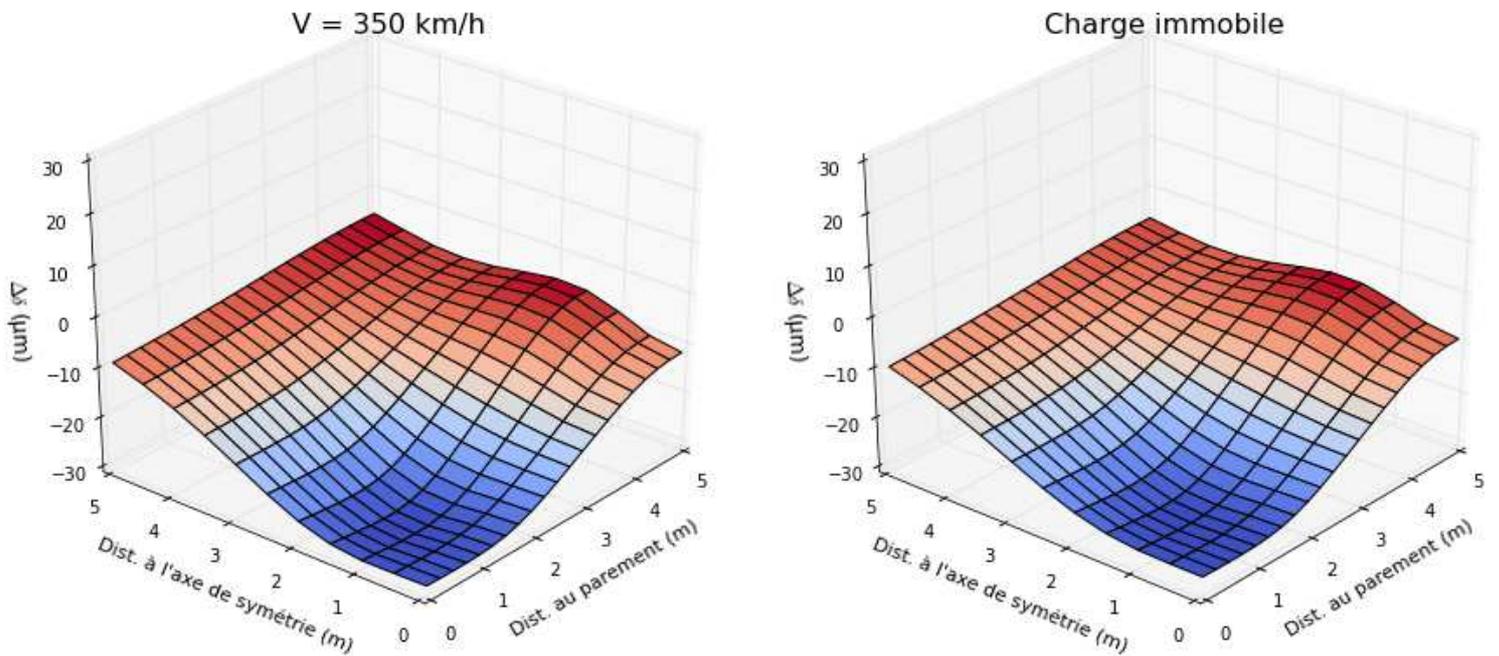


Figure 5-22 : Déplacements relatifs d'interface générés par la seule surcharge

On présente également dans la Figure 5-23 les variations des coefficients de frottement mobilisés équivalents au lit d'armature supérieur. Le coefficient de frottement mobilisé dans le cas de la charge mobile est appelé  $\mu_{dyn}$  et celui correspondant à une vitesse nulle  $\mu_{stat}$ . La démarche effectuée pour calculer ces coefficients est identique à celle présentée à la partie 4.3.

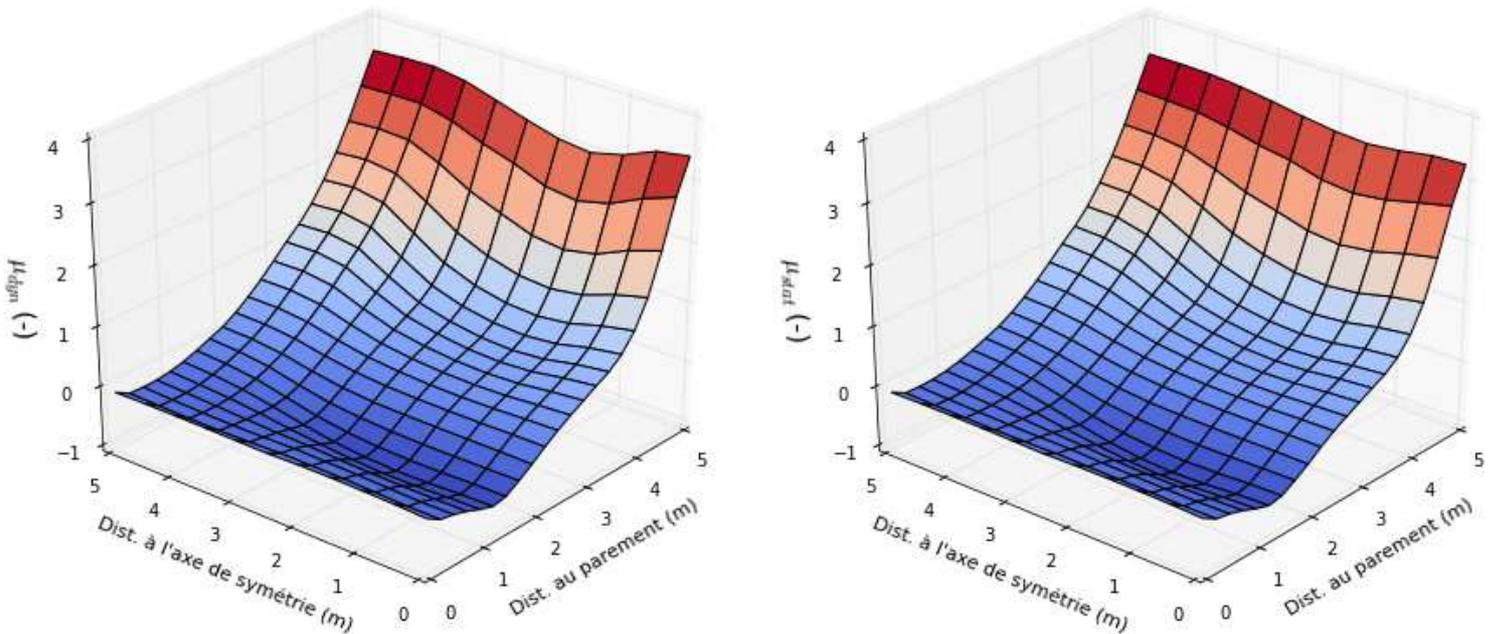


Figure 5-23 : Coefficients de frottement mobilisés, remblai raide.

Les résultats présentés ci-dessus ne montrent pas de différences significatives entre le chargement mobile à 350 km/h et le chargement immobile. On constate cependant une localisation des contraintes de compression au niveau de la roue, pour une vitesse élevée (Figure 5-20) qui correspond à une variation temporelle plus rapide des contraintes. On note par ailleurs que les ordres de grandeurs des tractions équivalentes totales (Figure 5-19) sont identiques aux valeurs expérimentales du CER (cf. par exemple Figure 4-13).

Les incréments de traction (Figure 5-21) sont ici supérieurs d'un facteur 10 environ par rapport à un chargement ponctuel sur une seule traverse (de type de l'expérience du CER). Cependant, on ne constate pas d'effet dynamique sur les valeurs des incréments de traction, alors que ces effets dynamiques étaient présents sur l'expérience du CER (cf. par exemple Figure 2-10 et Figure 2-11).

On constate enfin que le déplacement élastique d'interface armature/remblai ne dépasse pas quelques dizaines de micromètres.

#### 5.4.5.2 Remblai souple

On présente maintenant les résultats du calcul relatif au remblai souple. La Figure 5-24 présente la déformée et les isovaleurs des déplacements verticaux pour une vitesse de 350 km/h, tandis que la Figure 5-25 présente ces mêmes grandeurs pour un chargement immobile.

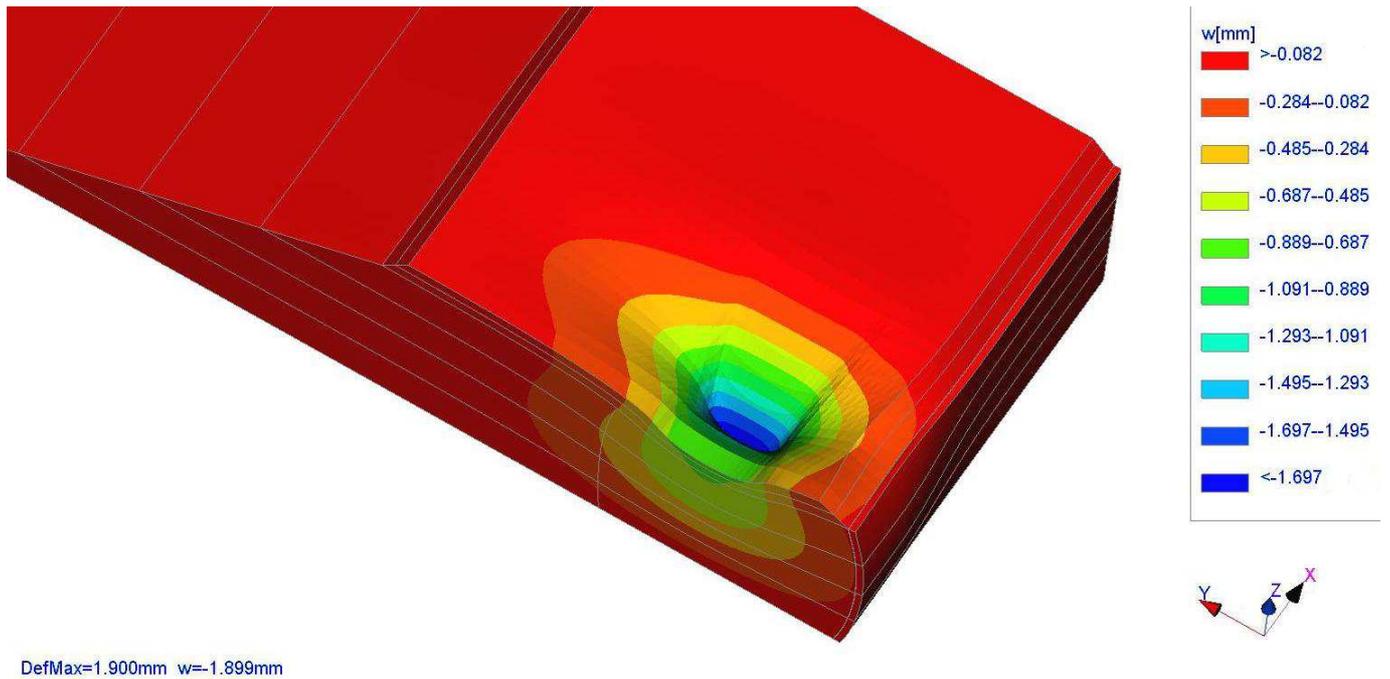


Figure 5-24 : Déformée et déplacements verticaux d'un remblai souple à 350 km/h

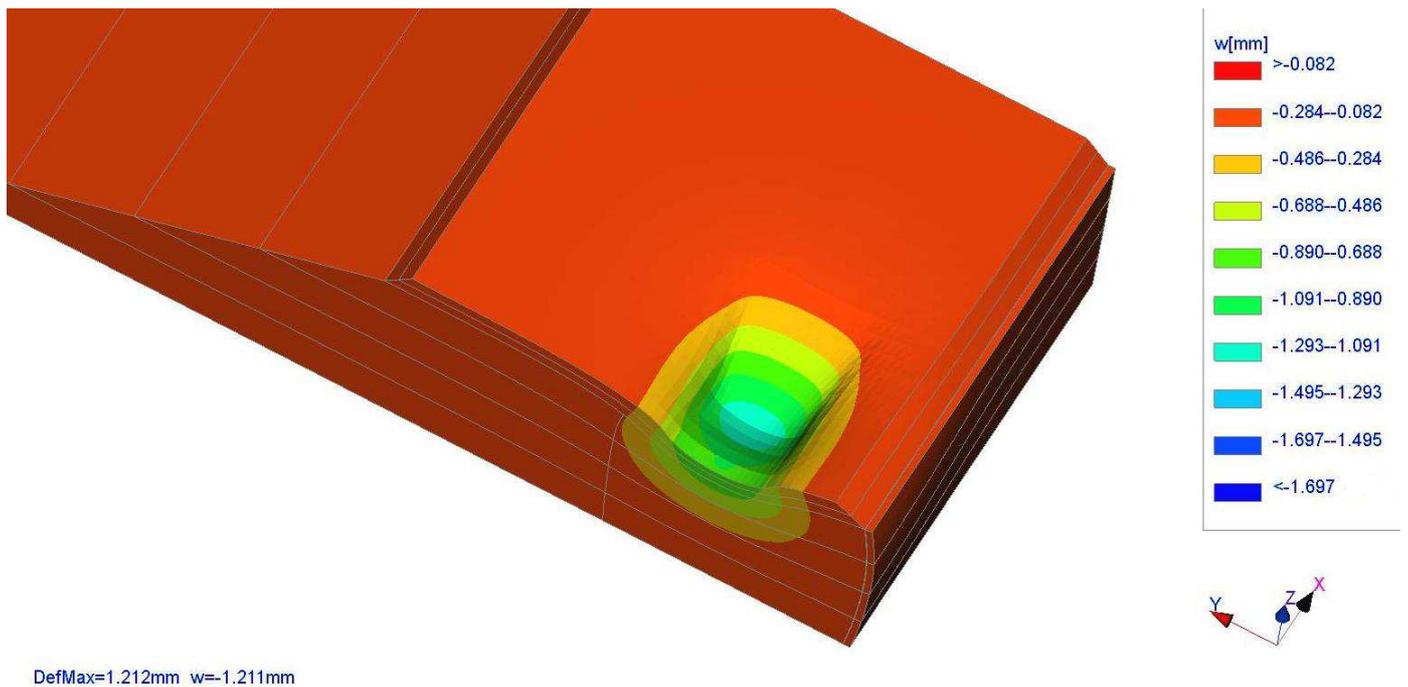


Figure 5-25 : Déformée et déplacement verticaux d'un remblai souple pour une charge immobile (à 0 km/h)

On remarque une concentration des déformations sous la charge, du fait de la proximité de la vitesse du train avec la vitesse des ondes de Rayleigh au sein du massif, comme cela a été constaté dans la littérature avec d'autres méthodes numériques (cf. Figure 5-8).

La Figure 5-26 représente les déplacements verticaux de l'interface sous-couche remblai dans la direction  $x$  et à 3 m du parement. La charge à 350 km/h entraîne 44 % de déplacements supplémentaires par rapport à ceux engendrés par une charge immobile.

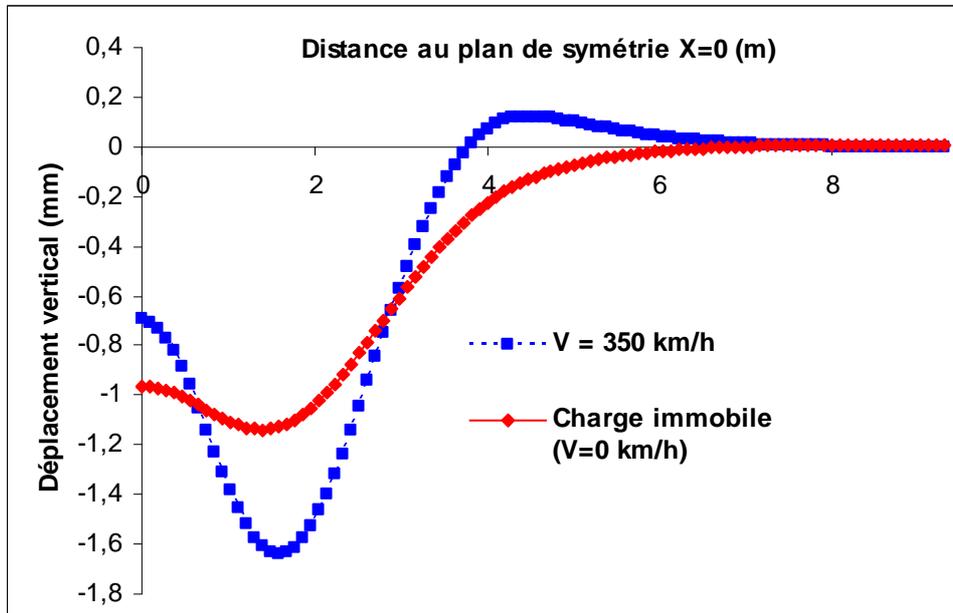
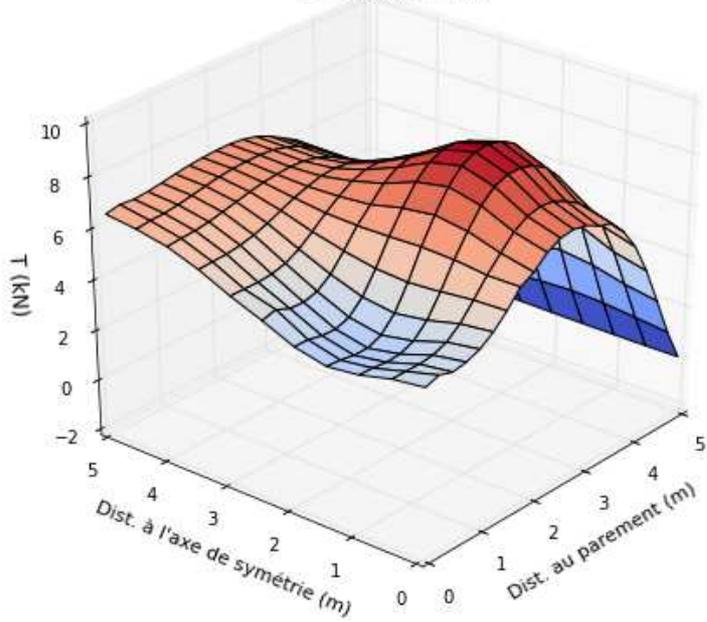


Figure 5-26 : Déplacement vertical à l'interface sous-couche/remblai, remblai souple.

Comme précédemment, les tractions équivalentes totales  $T$ , les contraintes verticales totales  $\sigma_{zz}$  et les incréments de déplacement relatif d'interface  $\Delta\delta$  en  $Z = 3,80$  m sont présentés respectivement sur la Figure 5-27, la Figure 5-28 et la Figure 5-29.

V = 350 km/h



Charge immobile

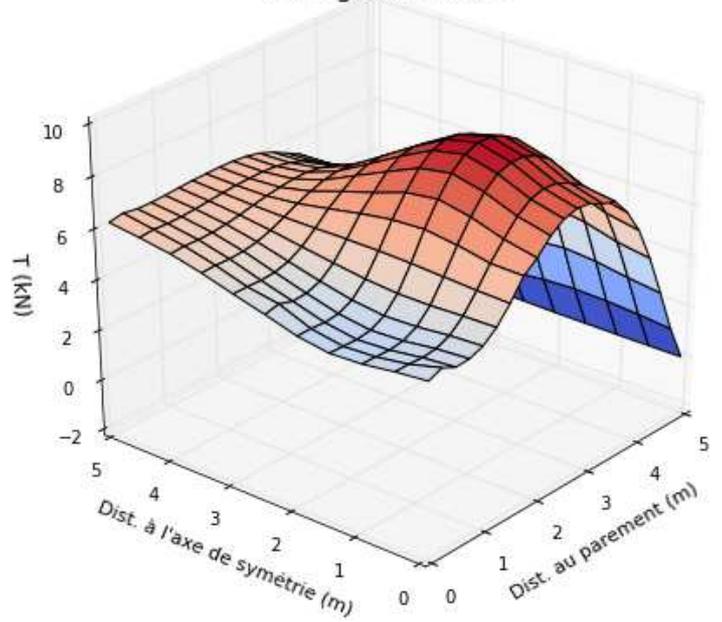
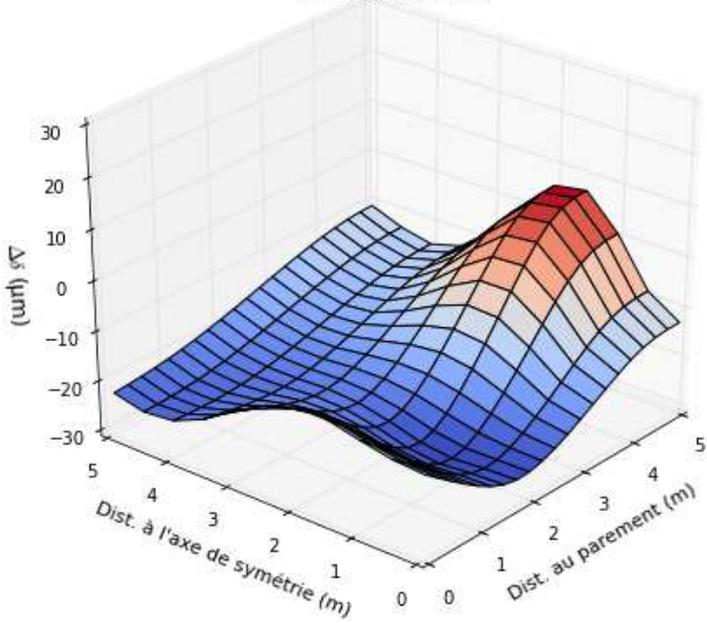


Figure 5-27 : Tractions équivalentes totales au niveau du premier lit d'armatures

V = 350 km/h



Chargement immobile

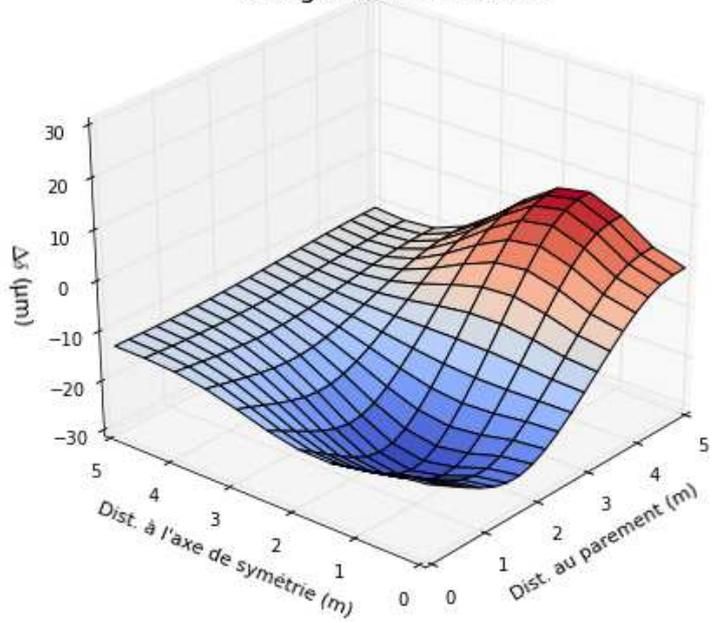


Figure 5-28 : Incréments de déplacement relatif d'interface

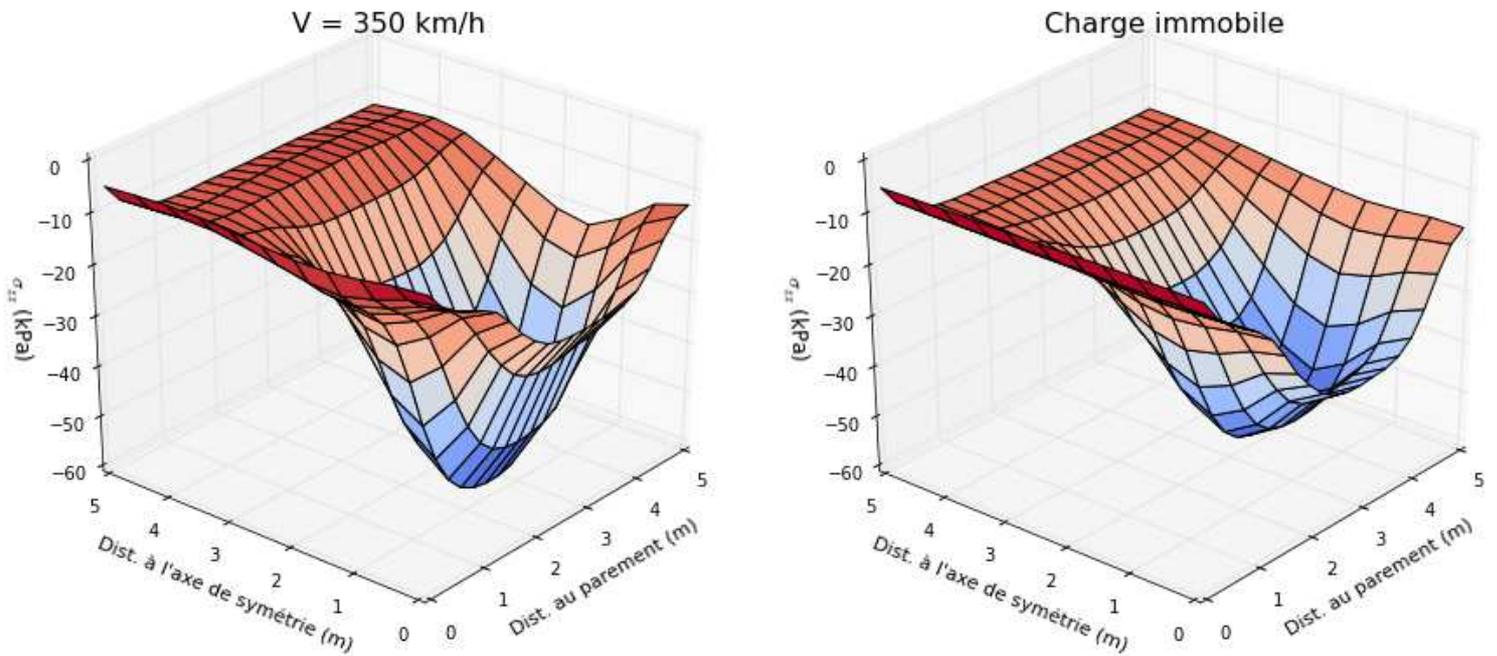


Figure 5-29 : Contraintes de compression verticales totales

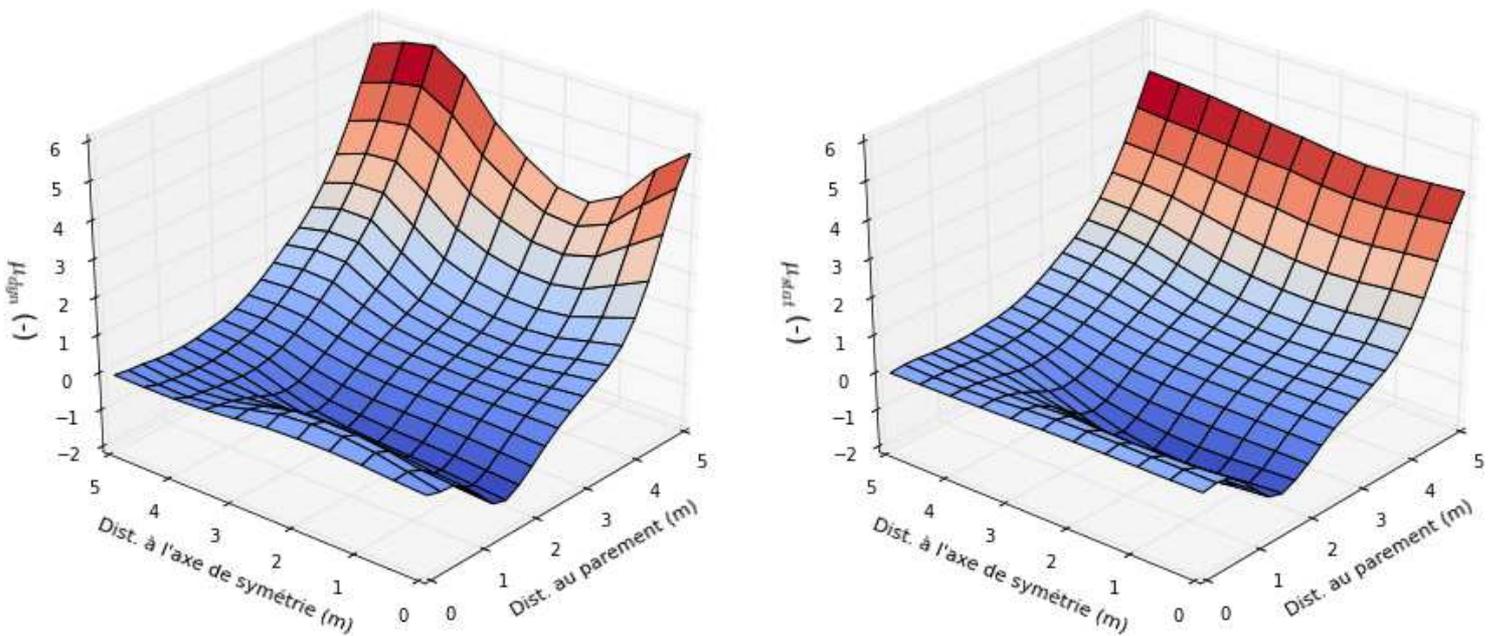


Figure 5-30 : Coefficients de frottement mobilisés, remblai souple.

Les résultats ci-dessus montrent une différence significative en termes de déplacements, contraintes et coefficients de frottement, selon que la charge est mobile ou non. On remarque en particulier une localisation de ces contraintes et déplacements au niveau du point d'application de la charge (Figure 5-29). En revanche, les tractions équivalentes (Figure 5-27) et déplacements relatifs

d'interface (Figure 5-28) ne sont pas sensiblement affectés par la vitesse de la charge.

Nous présentons également ci-après les résultats correspondant à l'application de la charge seule, en décomptant la contribution due à la construction préalable du remblai. La Figure 5-31 présente ainsi les incréments de traction et la Figure 5-32 les incréments de contrainte verticale de compression en  $Z=3,80$  m.

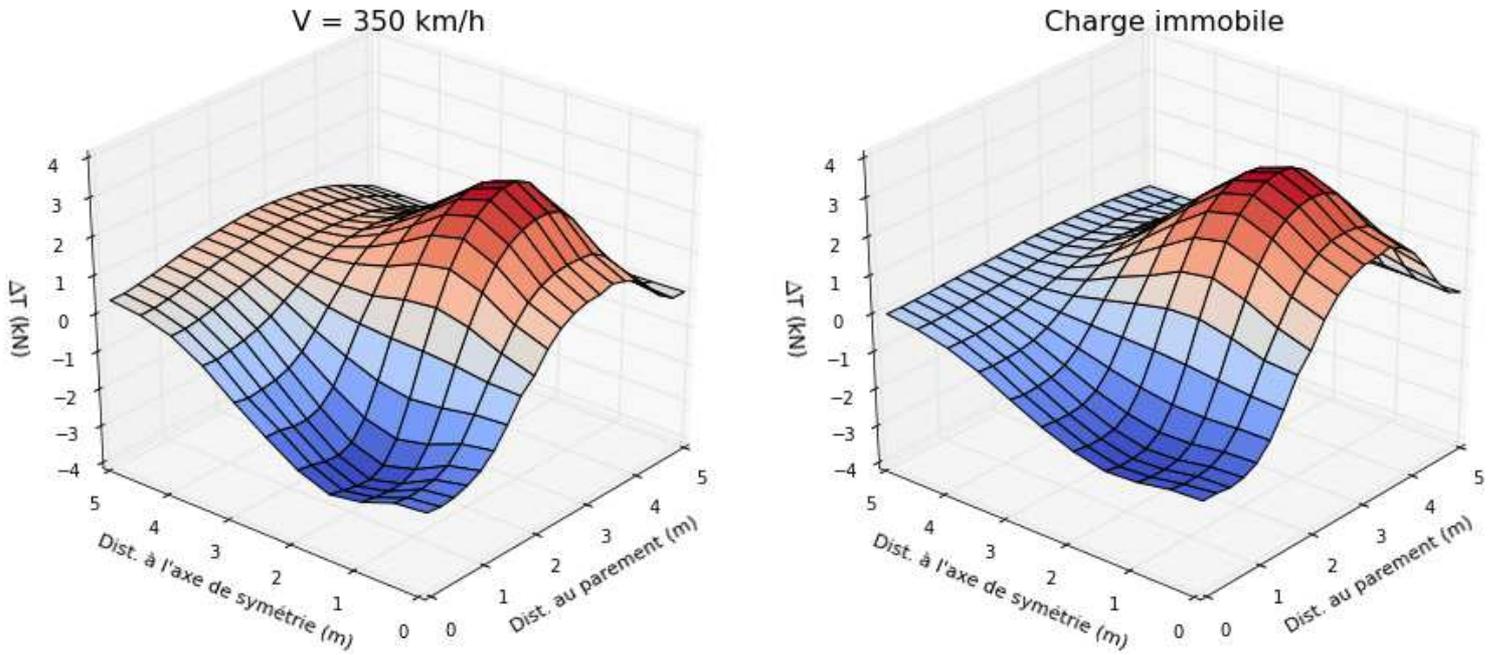


Figure 5-31 : Incréments de traction équivalente, premier lit d'armatures

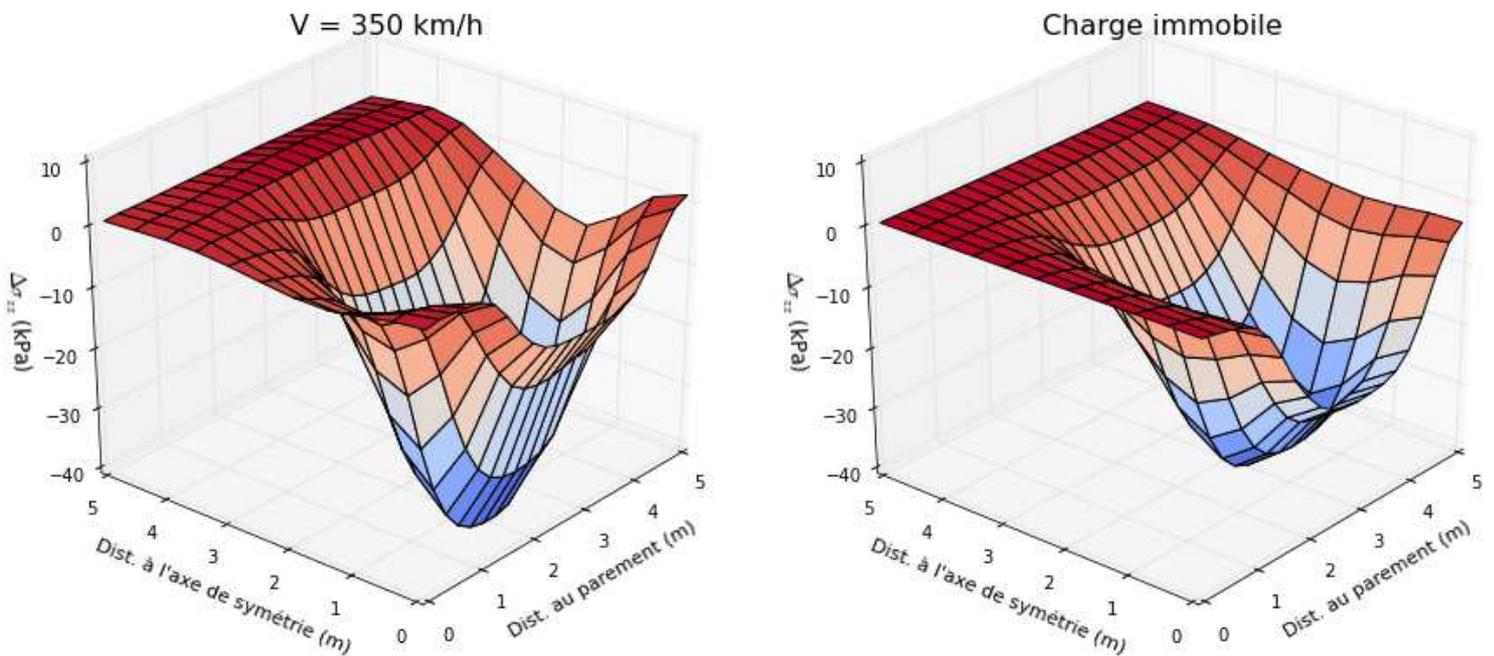


Figure 5-32 : Incréments de contrainte verticale

La concentration de contraintes identifiée sur la Figure 5-29 se retrouve sur la Figure 5-32, localisée sous la traverse la plus sollicitée et la différence entre les incréments de contrainte statique et dynamique est de 30 % environ.

Les incréments de traction dynamique ont la même allure en statique et dynamique (Figure 5-31) mais les surtractions sous la charge sont légèrement plus faibles dans le cas dynamique par rapport au cas statique. En revanche, celles-ci ont des valeurs plus élevées que les tractions statiques en des points plus éloignés de la charge (loin du plan de symétrie). L'augmentation de ces surtractions loin de la charge a pour conséquence une variation sur les valeurs de déplacement relatif de l'interface (Figure 5-28), qui restent cependant de l'ordre de grandeur des déplacements générés par l'application d'une charge statique.

## 5.5 Discussion

---

### 5.5.1 Déplacements

Le déplacement de la charge à des vitesses élevées implique des variations importantes des déplacements dans le haut du remblai, par rapport à ceux engendrés par l'application d'une charge immobile. Cependant, même si les variations sont importantes en pourcentage, leur valeur reste limitée à quelques dixièmes de millimètres pour un remblai raide et quelques millimètres pour un remblai souple, ce qui n'a pas de conséquence pratique sur la stabilité globale de l'ouvrage.

---

### 5.5.2 Tractions

Les résultats présentés ci avant mettent en évidence la faible influence de la vitesse de la charge sur les niveaux de traction totale au sein du remblai dans le cas du massif raide : les incréments de traction présentent le même profil que la vitesse soit nulle ou égale à 350 km/h.

Pour le remblai souple, ces incréments ont une variation d'amplitude plus faible dans le cas dynamique que dans le cas statique, et ne s'annulent jamais vraiment, ce qui signifie que la variation des tractions dans les barres est plus lente que la vitesse de passage du train. L'amplitude de ces tractions reste inférieure à la traction dans les armatures à la fin de la construction, excepté au bout de l'armature, et de ce fait, les tractions totales statiques et dynamiques présentent globalement le même profil. Ce phénomène est illustré dans la Figure 5-33, pour une longueur de voiture totale, pour un point situé en milieu d'une armature du lit supérieur. Sur cette figure, la « longueur du train » correspond en fait à une distance depuis le milieu d'une voiture (du fait des symétries du problème présentées dans la partie 5.4.2).

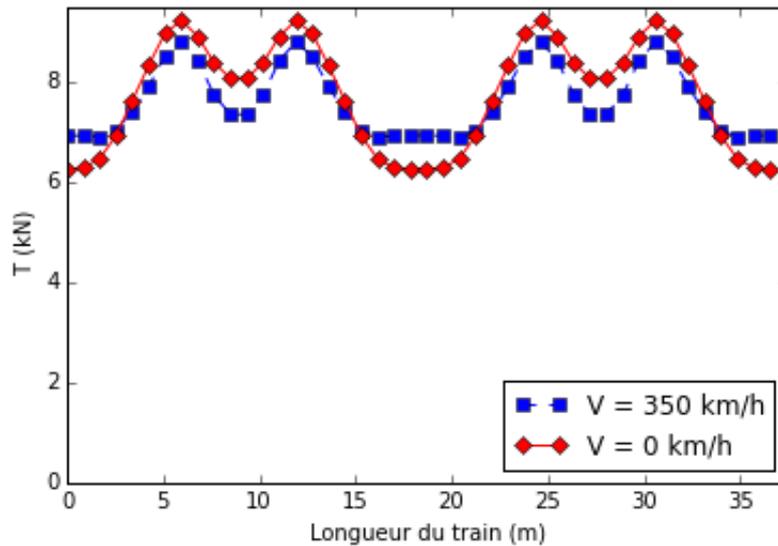


Figure 5-33 : Profil des tractions totales en milieu d'armature pour une voiture entière, remblai souple

On remarque également que les incréments de traction générés par l'application de la surcharge mobile ou non sont d'un ordre de grandeur 10 fois supérieur à celles mesurées dans le cas de l'expérience du CER, y compris dans le cas du remblai raide. Ceci s'explique par le fait qu'ici on considère le chargement appliqué par une voiture entière, tandis que dans l'expérience du CER, le chargement correspond à une seule roue. Cependant, une étude plus approfondie des paramètres de la loi de comportement de l'interface pourrait également permettre de donner une meilleure estimation de ces tractions incrémentales.

### 5.5.3 Contraintes

Les variations de contraintes verticales de compression ne sont pas influencées par la vitesse de la charge dans le cas d'un remblai raide, dans la gamme de vitesses étudiées. En revanche, dans le cas d'un remblai souple, la différence entre la distribution des contraintes de compression totales selon que la charge est mobile ou non est très importante, comme illustré dans la Figure 5-34, pour un point situé au milieu d'une armature équivalente du lit supérieur.

Il s'agit à la fois d'une différence d'amplitude, les incréments de contrainte maximale au droit de la charge diffèrent par exemple de 30 %, mais aussi de distribution temporelle, puisque dans le cas d'une charge mobile, les contraintes sont davantage localisées au voisinage du point d'application de la charge. Ceci s'explique par le fait que la vitesse du front d'onde de diffusion des contraintes est alors du même ordre de grandeur que la vitesse du train.

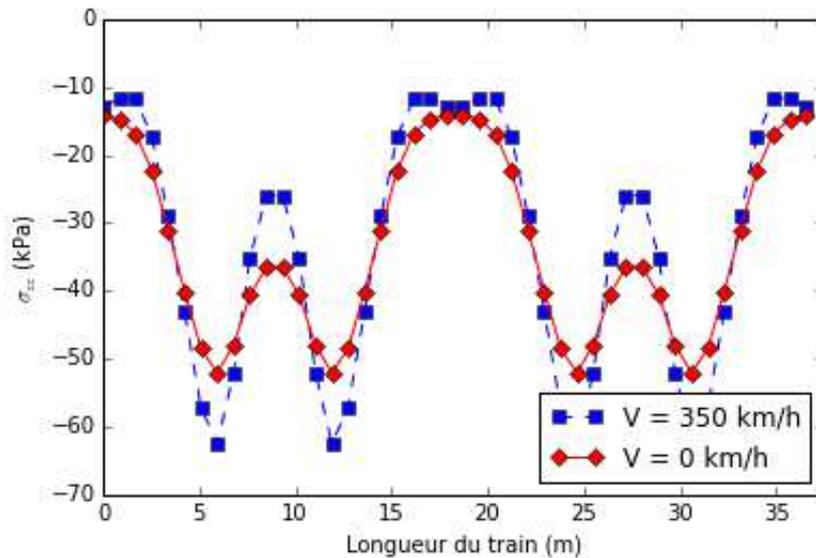


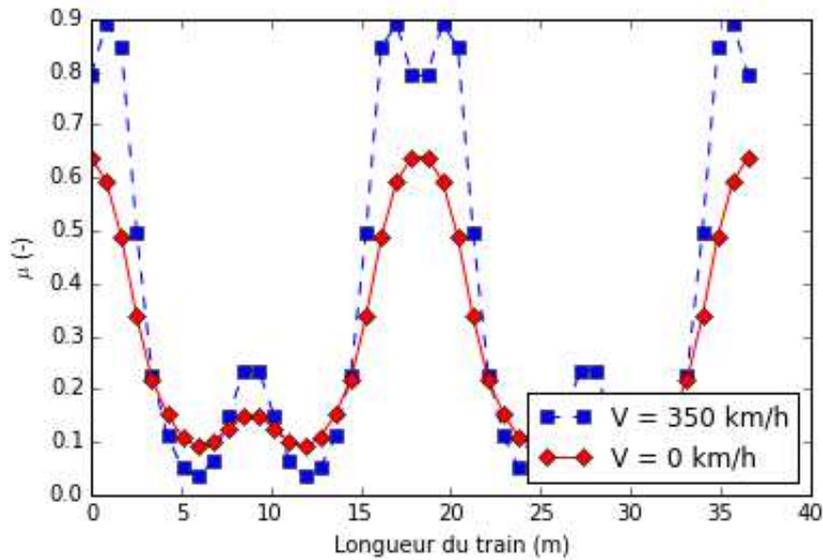
Figure 5-34 : Profil de la distribution de contraintes verticales en milieu d'armature pour une voiture entière, remblai souple

#### 5.5.4 Coefficients de frottement mobilisés

L'effet dynamique en termes d'amplitude du coefficient de frottement mobilisé  $\mu$  est particulièrement sensible sur l'arrière de l'armature dans le cas du remblai souple et entraîne une augmentation du coefficient dynamique de l'ordre de 30 % par rapport au cas statique (Figure 5-36). En revanche aucune différence sensible n'est constatée dans le cas d'un remblai raide.

Les valeurs du coefficient de frottement mobilisé sont plus élevées que celles données dans le chapitre précédent. Ceci est dû au fait que les incréments de tractions sont ici plus élevés. Pour discuter de l'influence de la vitesse sur la variation des coefficients de frottement mobilisés, il est préférable de comparer charge mobile et charge immobile sans s'attacher précisément à la valeur numérique du coefficient de frottement donnée par le calcul.

Les causes de l'évolution de ces coefficients sont similaires à celles relevées dans le Chapitre 4 et rejoignent la discussion précédente sur les contraintes de compression et tractions : la vitesse de chargement impacte la valeur des contraintes de compression au droit de la charge tandis que les surtractions à cet endroit sont sensiblement identiques que le chargement soit statique ou dynamique. De ce fait, au droit de la charge, le coefficient de frottement dynamique mobilisé est moins élevé que le frottement statique. (cf. Figure 5-35 à 6 m et 12 m par exemple).



*Figure 5-35 : Coefficient de frottement mobilisé en milieu d'armature pour une voiture entière, remblai souple*

En revanche, en queue d'armature, les incréments de traction ne sont plus négligeables devant les tractions à la fin de la construction, ce qui entraîne une augmentation des coefficients de frottement mobilisés. La variation temporelle des contraintes de compression entraîne alors une variation de l'amplitude du coefficient de frottement.

Ce phénomène déjà constaté dans le chapitre précédent est ici légèrement accentué par le fait que les incréments de traction ne s'annulent pas totalement au cours d'une période (cf. Figure 5-31 à 5 m de l'axe de symétrie par exemple), contribuant ainsi l'amplitude élevée du frottement dynamique mobilisé (Figure 5-36 pour une longueur de train entre 16 et 21 m).

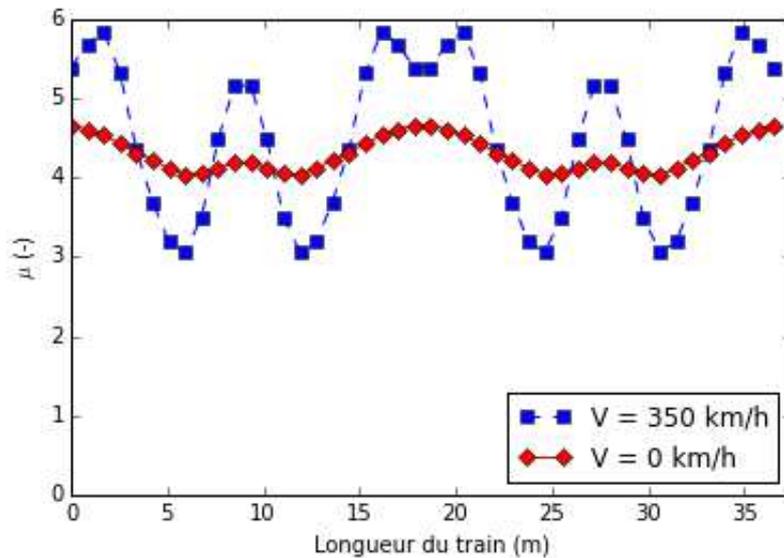


Figure 5-36 : Coefficient de frottement mobilisé à l'arrière de l'armature pour une voiture entière, remblai souple.

### 5.5.5 Déplacements relatifs d'interface

Bien que les déplacements relatifs d'interface n'aient pas fait l'objet de discussion particulière dans les chapitres précédents, leur valeur numérique présentée sur la Figure 5-28 permet d'engager deux discussions qui pourraient être approfondies, mais que nous n'avons pas eu le temps de traiter durant cette thèse, faute de modèle de fatigue adapté :

- l'ordre de grandeur petit et réaliste (quelques dizaines de microns) du déplacement d'interface nous conforte dans le choix des paramètres numériques de raideur d'interface, même si ces derniers mériteraient une analyse expérimentale détaillée.
- ces valeurs de déplacement relatif lors du passage d'une seule roue nous paraissent raisonnablement petites, pour éviter des phénomènes de fatigue prématurée de l'interface lors du passage d'un nombre important de trains. Dans le cas d'un remblai raide, comme ces déplacements sont quasiment identiques selon que la charge est mobile ou non, il semble pertinent d'adopter une approche de dimensionnement quasistatique pour prendre en compte cet effet. Dans le cas d'un remblai souple, ils sont du même ordre de grandeur que ceux générés par un chargement statique et seule leur répartition spatiale diffère.

## 5.6 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté un modèle numérique permettant de modéliser une charge mobile se déplaçant sur un massif renforcé.

L'originalité du modèle réside d'une part dans le fait que le calcul s'effectue dans le repère lié à la charge mobile et d'autre part, par le fait que le remblai renforcé est modélisé en utilisant le modèle multiphasique.

L'implémentation de ce modèle dans le code CESAR-LCPC a permis d'étudier numériquement deux remblais tridimensionnels de grande taille, l'un raide et l'autre souple.

Les résultats de l'étude indiquent que le déplacement de la charge à 350 km/h a une influence faible sur les grandeurs au sein du massif : tout au plus le déplacement vertical est majoré de 11 % au niveau du ballast, mais les efforts au sein du massif armé ne varient pas, comparé à un chargement de même intensité et de vitesse nulle.

L'étude d'un remblai souple met en évidence davantage de différences avec la vitesse de la charge : quand cette vitesse est proche de celle des ondes de cisaillement dans le massif, on constate une amplification importante des déplacements et contraintes verticales dans le massif renforcé, qui sont concentrés au droit de la charge. On constate également que les armatures supérieures sont mises en traction sur toute la longueur du train, et non plus seulement sur la longueur des bogies. Ces résultats présentent une forte analogie avec le cas d'un sol non renforcé de qualité médiocre, où l'on constate une forte augmentation des déformations quand la vitesse du train approche celle de l'onde de Rayleigh (voir 1.6.3).

Ces effets dynamiques tendent à faire varier le coefficient de frottement mobilisé le long de l'armature, qui reste cependant de l'ordre de grandeur du coefficient de frottement statique équivalent.

Ces tendances rejoignent les conclusions effectuées dans le chapitre précédent, cependant ici les effets dynamiques ne sont observés que dans le cas d'un remblai beaucoup plus souple que le remblai expérimental du CER.

Ainsi, il semble raisonnable de penser que les effets mis en évidence dans le chapitre précédent pour un remblai expérimental et un chargement immobile harmonique seront moins sensibles dans le cas d'un chargement mobile pour une géométrie d'ouvrage réel.

Par ailleurs, des modifications au modèle proposé paraissent nécessaires pour améliorer la prédiction quantitative des grandeurs au sein du massif. En particulier, il faudrait prendre en compte les phénomènes d'amortissement et travailler sur l'établissement des paramètres de la loi d'interaction du modèle multiphasique. Le lecteur pourra se référer à l'annexe D qui propose des développements théoriques afin de prendre en compte des phénomènes d'amortissement dans le référentiel mobile.

---

# Conclusions et perspectives

Cette thèse porte sur le comportement des murs en sol renforcé utilisé comme remblai pour des voies de chemin de fer à grande vitesse. Elle vise à préciser dans quelle mesure le fonctionnement de l'ouvrage est modifié par le caractère dynamique du chargement.

Dans ce contexte, on a commence par rappeler dans le chapitre 1 les principes de fonctionnement des ouvrages de ce type et on a effectué une revue de la littérature disponible sur leur comportement sous charge statique ou sous des chargements dynamiques : on constate que les principaux résultats concernent la tenue de ces ouvrages aux séismes ; une exception notable est l'expérimentation conduite au Centre d'Expérimentations Routières de Rouen par la SNCF, RFF et l'IFSTTAR [SOY09], dans laquelle on soumet un mur en terre armée à un chargement plus représentatif des sollicitations ferroviaires. On récapitule également les spécificités des chargements ferroviaires, la gamme de fréquences étudiée, les problématiques qui lui sont associées et présente les grandes lignes des approches de modélisation généralement adoptées pour étudier le comportement des voitures ou celui de la voie.

Le chapitre 2 propose une interprétation détaillée du comportement du mur expérimental du CER sous chargement dynamique. En s'appuyant sur les résultats disponibles dans la thèse de Soyez [SOY09], on montre que le comportement du mur en régime dynamique reste pratiquement dans le domaine linéaire et on détermine une valeur permettant de caractériser globalement l'amortissement dans le remblai. Ces deux résultats ont une grande importance pratique pour les modélisations numériques présentées dans le chapitre suivant. Par ailleurs, l'examen des résultats montre que le comportement du mur ne peut pas être appréhendé avec les méthodes usuellement mises en œuvre dans les études sismiques.

Dans le chapitre 3, on propose une modélisation numérique qui rend compte de manière satisfaisante de l'ensemble des aspects du comportement observé sous sollicitations dynamiques, avec une précision qui est du même ordre de grandeur que celle des modélisations numériques effectuées pour le même ouvrage en statique.

Le chapitre 4 ouvre la discussion de l'impact du chargement dynamique sur la stabilité de l'ouvrage. Il repose sur l'idée que la justification de la stabilité interne ne peut plus se faire de manière globale sur toute la longueur d'une armature, à cause des variations spatiales et temporelles de la contrainte verticale. On propose de comparer localement la valeur du coefficient de frottement mobilisé avec le coefficient de frottement pris en compte pour la justification de l'ouvrage. La démarche consiste à combiner des résultats de mesures effectuées en statique, des résultats de calculs statiques et dynamiques pour évaluer le comportement global résultant de la combinaison des charges statiques et dynamiques. Finalement, le modèle montre que le caractère dynamique du charge-

ment a un impact limité sur la stabilité de l'ouvrage : un éventuel glissement local à l'interface ne se produit que sur une longueur faible et sur des intervalles de temps courts.

Le chapitre 5 propose d'étudier le comportement de l'ouvrage soumis à une charge qui se déplace. Cette question pose une difficulté supplémentaire, liée aux limites actuelles des moyens de calcul, qui ne permettent pas de prendre en compte un domaine très étendu en trois dimensions. L'approche adoptée ici vise à contourner cette difficulté, en mettant en œuvre l'approche multiphasique dans un référentiel mobile. Bien qu'elle soit incomplète, dans la mesure où l'on n'a pas pris en compte d'amortissement, cette approche fournit un éclairage différent sur le comportement de l'ouvrage et confirme la nécessité de prendre en compte le déplacement et la vitesse de la charge, au moins pour des remblais peu raides.

Pour conclure, les résultats des simulations présentées ici tendent à prouver qu'en pratique le chargement dynamique modifie peu le fonctionnement du mur en terre armée, et seulement sur une profondeur réduite, qui ne concerne que les deux premiers lits d'armatures.

De manière générale, on a cherché à mettre en lumière les choix de modélisation que vous avons été amenés à faire, en les justifiant dans la mesure du possible ou en évaluant leurs conséquences. Un soin particulier a également été apporté à expliquer comment on a procédé pour déterminer le nombreux paramètres impliqués dans les différents aspects du fonctionnement des ouvrages en terre armée. Cette approche permettra de reprendre les différentes hypothèses pour améliorer les modélisations si on le juge nécessaire. Différentes pistes sont ouvertes pour approfondir la réflexion présentée ici :

- La prise en compte d'un comportement d'interaction non linéaire entre les barres et le sol dans le calcul dynamique : les calculs du chapitre 3 reposent sur l'hypothèse que cette interaction demeure linéaire sous le chargement dynamique, en vertu de l'analyse des données expérimentales présentée au chapitre 2. On peut cependant regretter qu'il n'ait pas été possible dans le cadre des structures de données actuellement disponibles dans CESAR de faire un calcul non linéaire pour tester l'influence de cette hypothèse. Cette limitation de l'outil de calcul utilisé pourrait exagérer l'augmentation du coefficient de frottement mobilisé en dynamique par rapport au cas statique et avoir une influence sur les conclusions du chapitre 4. On peut signaler qu'une refonte du code est actuellement en chantier, qui devrait permettre de surmonter cette difficulté.
- La prise en compte de l'amortissement dans le référentiel mobile, dont le principe de l'implémentation dans un code aux éléments finis est disponible dans l'annexe D.
- L'amélioration de la prise en compte du comportement du ballast.
- La prise en compte de phénomènes de plus hautes fréquences dus au comportement dynamique propre du véhicule lui-même.

## Conclusions et perspectives

- Le comportement en fatigue sous grand nombre de cycles, qui n'a pas été étudié, faute de loi de fatigue acceptable. On pourrait se référer à [SOY09] et [BEN13] pour les résultats expérimentaux d'essais d'extractions en condition dynamique et par exemple aux travaux, de Cao, Mroueh et Burlon ([CAO11] et [BUR14]) pour les modèles numériques adaptés à la résolution de ce type de problèmes.

Enfin une autre perspective naturelle sera de confronter l'approche que nous avons suivie et les résultats obtenus aux mesures qui seront réalisées sur les murs en Terre Armée de la ligne LGV SEA.



---

# Annexe A :

## Analyse élastique en référentiel mobile : extension au cas d'un modèle multiphasique

---

### Position du problème

On étudie le même massif que dans le paragraphe 5.3.3, mais on suppose maintenant que le corps solide contient des renforcements parallèles à  $\underline{e}_2$ . L'objectif de cette annexe est de montrer comment il est possible de prendre en compte ces renforcements avec un modèle multiphasique dans un référentiel mobile.

---

### Introduction d'un référentiel mobile

On choisit d'étudier ce problème dans un référentiel mobile où le chargement est constant. Le domaine d'étude  $V$  lui-même a son bord qui se déplace dans le repère fixe ; il est fixe dans le référentiel mobile. On restreint le domaine d'étude à une longueur  $L$ . On a :  $V = S \times [0, L]$ . Le problème à résoudre s'écrit donc :

$$\operatorname{div} \sigma + f + I \underline{e}_2 = \rho \gamma \quad (1)$$

$$E \varepsilon = \sigma \quad (2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x_2} - I \underline{e}_2 = 0 \quad (3)$$

$$I = C(\zeta_r - \zeta_2) \quad (4)$$

$$T = R \frac{\partial \zeta_r}{\partial x_2} \quad (5)$$

On suppose toujours le problème stationnaire dans le référentiel mobile se déplaçant à la vitesse  $v \underline{e}_1$  avec les coordonnées  $(X_1, x_2, x_3)$ .

Le seul changement dû à ce nouveau repère porte sur l'équation (1) qui devient :

$$\operatorname{div}\sigma + f + I_{\underline{e}_2} - \rho v^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial X_1^2} + I_s = 0 \quad (6)$$

La force  $I_s$  introduite ici est une force d'ancrage surfacique exercée éventuellement selon  $\underline{e}_2$  par les armatures en limite de zone renforcée; l'équation est alors à prendre au sens des distributions.

---

### Étude d'une formulation faible du problème

On multiplie la dernière équation par une fonction test  $\hat{\zeta}$  pour obtenir une formulation faible du problème :

$$\int_V \hat{\zeta} \cdot (\operatorname{div}\sigma(X_1, x_2, x_3) + f(X_1, x_2, x_3) - \rho v^2 \frac{\partial^2 \zeta(X_1, x_2, x_3)}{\partial X_1^2}) + \int_V I_{\hat{\zeta}_2} + \int_{S_{\text{ancrage}}} \hat{\zeta}_2 I_s = 0 \quad (7)$$

On étudie, comme pour le cas monophasique, le terme correspondant aux forces d'inertie comme pour le milieu solide simple. Il se traite de la même manière. En intégrant par parties on obtient :

$$\int_V \hat{\zeta} \rho v^2 \frac{\partial^2 \zeta(X_1, x_2, x_3)}{\partial X_1^2} = -v^2 \int_V \rho \frac{\partial \hat{\zeta}}{\partial X_1} \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial X_1} \quad (8)$$

Récrivons l'équation (7) en prenant en compte (7) et (2) et en faisant l'intégration par parties usuelle pour le terme en  $\hat{\zeta} \cdot \operatorname{div}\sigma$  :

$$\begin{aligned} & \int_V \hat{\zeta} \cdot (\operatorname{div}\sigma(X_1, x_2, x_3) + f(X_1, x_2, x_3) - \rho v^2 \frac{\partial^2 \zeta(X_1, x_2, x_3)}{\partial X_1^2}) + \int_V I_{\hat{\zeta}_2} + \int_{S_{\text{ancrage}}} \hat{\zeta}_2 I_s = \\ & = \int_{\partial V} \hat{\zeta} \cdot f_s - \int_V \varepsilon : E : \hat{\varepsilon} + \int_V \rho v^2 \frac{\partial \zeta}{\partial X_1} \cdot \frac{\partial \hat{\zeta}}{\partial X_1} + \int_V f \hat{\zeta} + \int_V I_{\hat{\zeta}_2} + \int_{S_{\text{ancrage}}} \hat{\zeta}_2 I_s = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

avec  $f_s$  la densité de force surfacique sur le bord. On peut récrire l'équation de la manière suivante :

$$\int_V \varepsilon : E : \hat{\varepsilon} - \int_V \rho v^2 \frac{\partial \zeta}{\partial X_1} \cdot \frac{\partial \hat{\zeta}}{\partial X_1} - \int_V I_{\hat{\zeta}_2} = \int_{\partial V} \hat{\zeta} \cdot f_s + \int_V \hat{\zeta} \cdot f + \int_{S_{\text{ancrage}}} \hat{\zeta}_2 I_s \quad (10)$$

On considère maintenant l'équation d'équilibre de la phase de renforcement que l'on multiplie par une fonction test  $\hat{\zeta}_r$  et que l'on intègre sur le volume renforcé  $V_r$ . Il vient :

$$\int_{V_r} \hat{\zeta}_r \left( \frac{\partial T}{\partial X_2} - I e_2 \right) = 0 \quad (11)$$

En intégrant par parties on obtient :

$$\int_{V_r} \hat{\zeta}_r \left( \frac{\partial T}{\partial x_2} \right) = \int_{V_r} \frac{\partial}{\partial x_2} (\hat{\zeta}_r T) - \int_{V_r} \frac{\partial \hat{\zeta}_r}{\partial x_2} R \left( \frac{\partial \zeta_r}{\partial X_2} \right) \quad (12)$$

Si on intègre d'un bout à l'autre de la zone renforcée (c'est à dire en suivant la direction des armatures) on trouve qu'on a à intégrer :  $\int_S \left[ \hat{\zeta}_r T \right]_{x_{2min}}^{x_{2max}}$ . Le terme  $\hat{\zeta}_r T$  du crochet est nul si la condition au bord de l'armature est  $T=0$  (extrémité libre).

Prenons le cas de figure où l'ancrage est en  $x_{2min}$ , et l'extrémité en  $x_{2max}$  est libre alors on a :  $\int_{V_r} \hat{\zeta}_r \left( \frac{\partial T}{\partial x_2} \right) = - \int_{S_{\text{ancrage}}} \hat{\zeta}_r T$ . Donc finalement (11) s'écrit :

$$- \int_{V_r} \frac{\partial \hat{\zeta}_r}{\partial x_2} R \left( \frac{\partial \zeta_r}{\partial X_2} \right) - \int_{V_r} I \hat{\zeta}_r = \int_{S_{\text{ancrage}}} \hat{\zeta}_r T \quad (13)$$

En soustrayant cette équation à (10) on trouve, les fonctions test devant vérifier  $\hat{\zeta}_r = \hat{\zeta}_2$  et les conditions aux limites  $T = I_s \cdot e_2$  sur la surface d'ancrage  $S_{\text{ancrage}}$ .

$$\int_V \varepsilon : E : \hat{\varepsilon} + \int_V \frac{\partial \zeta_r}{\partial X_2} R \frac{\partial \hat{\zeta}_r}{\partial x_2} + \int_V (\zeta_r - \zeta_2) C (\hat{\zeta}_r - \hat{\zeta}_2) - v^2 \int_V \rho \frac{\partial \zeta}{\partial X_1} \frac{\partial \hat{\zeta}}{\partial X_1} = \int_V \hat{\zeta} f_s + \int_V \hat{\zeta} f \quad (14)$$

Par rapport au milieu monophasique, il y a deux termes en plus qui sont bien des formes bilinéaires symétriques, qui ont d'ailleurs la même expression qu'en statique.



---

# Annexe B :

## Conditions aux limites dans le cas d'un référentiel mobile avec un chargement périodique symétrique

---

### Position du problème

On considère un massif de sol cylindrique d'étendue infinie dans la direction de l'axe  $Ox_1$ . On suppose que ses propriétés mécaniques sont invariantes par translation dans la direction de l'axe  $Ox_1$ .

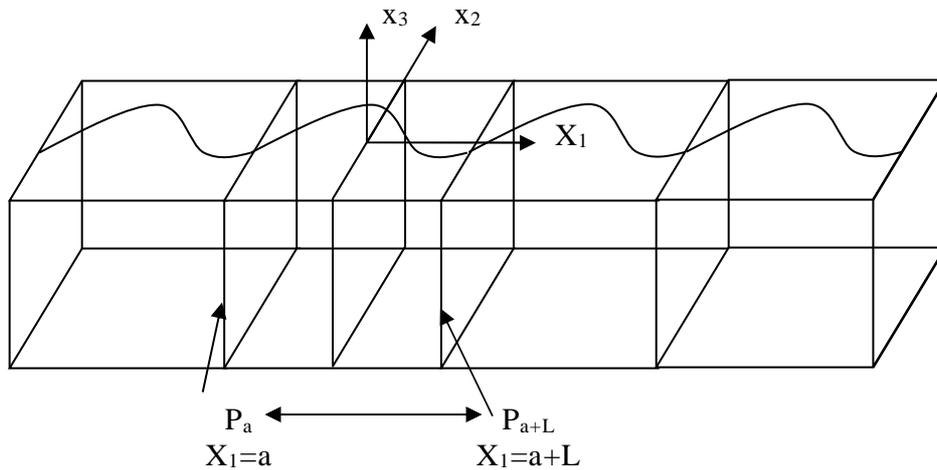
On impose un déplacement nul à la base du maillage. Le massif est soumis d'une part, à son poids propre, d'autre part à une charge mobile, représentée par une densité surfacique de charge appliquée sur sa surface supérieure. La zone d'application du chargement est supposée petite devant l'étendue du domaine étudié dans la direction  $Ox_2$ .

Dans ce cadre, on peut calculer les déformations induites par une charge mobile à vitesse constante dans la direction  $e_1$  en se plaçant dans un référentiel attaché à la charge (cf. paragraphe 5.3.3).

On étudie ici comment les éventuelles propriétés de symétrie du chargement par rapport à un plan vertical perpendiculaire à la direction du mouvement permettent de réduire le domaine d'étude et comment choisir les conditions aux limites sur ces nouveaux bords créés par la réduction du domaine d'étude.

---

**Cas d'un problème de longueur infinie homogène  
selon  $x$  le chargement étant périodique**



*Figure 1 : Problème périodique dans la direction  $x$  de période  $L$*

On peut limiter le domaine d'étude à la partie du système compris entre deux plans  $P_a$  et  $P_{a+L}$ . On note  $\zeta(x)$  le champ de déplacement solution du problème pour la phase sol,  $\sigma(x)$  le champ de contrainte de compression et  $t(x)$  le champ de contraintes de cisaillement associé.

Les conditions aux limites à imposer en  $P_a$  et  $P_{a+L}$  sont  $\zeta_1(X_1+L, x_2, x_3) = \zeta_1(X_1, x_2, x_3)$  et  $t(X_1+L, x_2, x_3) = \sigma(X_1+L, x_2, x_3) \cdot n = -t(X_1, x_2, x_3)$ . On note que l'on a ainsi autant d'équations que si l'on imposait des conditions aux limites standard par exemple en déplacement nul sur les deux bords  $P_a$  et  $P_{a+L}$  :  $\zeta_1(X_1+L, x_2, x_3) = 0$  ;  $\zeta_1(X_1, x_2, x_3) = 0$ .

---

## Cas d'un problème qui admet un plan de symétrie $\Pi$

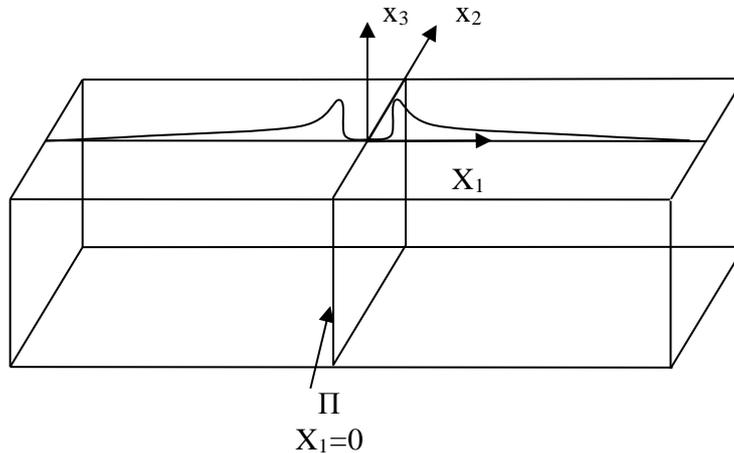


Figure 2 : Cas d'un problème ayant un plan de symétrie  $\Pi$

### Milieu élastique classique

On note  $P$  la symétrie par rapport au plan  $\Pi$ . On notera de la même façon la symétrie de l'espace vectoriel.

On note  $\zeta(x)$  le champ de déplacement solution du problème pour la phase sol, et  $\sigma(x)$  le champ de contrainte associé. On a donc :

$$\operatorname{div}\sigma(x) + f(x) - \rho v^2 \frac{\partial^2}{\partial X_1^2} \zeta(x) = 0 \quad (1)$$

avec à la surface du massif :

$$\sigma(x) \cdot e_3 = F(x) \quad (2)$$

On considère à présent le champ de déplacement  $\zeta'(x) = P(\zeta(P(x)))$  ; On pose :  $\alpha_1 = -1$ ;  $\alpha_2 = 1$ ;  $\alpha_3 = 1$  : On peut écrire :

$$\zeta'_i(x) = \alpha_i \zeta_i(P(x)) \quad (3)$$

On note  $\varepsilon'$  le champ de déformation correspondant et  $\sigma'$  le champ de contraintes correspondant. On a :

$$\varepsilon'_{ij}(x) = \alpha_i \alpha_j \varepsilon_{ij}(P(x)) \quad (4)$$

On suppose pour simplifier que le tenseur d'élasticité  $E$  est isotrope et indépendant de  $x_1$ . On en déduit :

$$\begin{aligned}\sigma'_{ij}(x) &= \lambda(x)\text{tr}\varepsilon'_{ij} + 2\mu(x)\varepsilon'_{ij} = \lambda(P(x))\text{tr}\varepsilon(P(x))\delta_{ij} + 2\mu(P(x))\alpha_i\alpha_j\varepsilon_{ij}(P(x)) = \\ &= \alpha_i\alpha_j\lambda(P(x))\text{tr}\varepsilon(P(x))\delta_{ij} + 2\mu(P(x))\alpha_i\alpha_j\varepsilon_{ij}(P(x)) = \alpha_i\alpha_j\sigma_{ij}(P(x))\end{aligned}\quad (5)$$

Alors, on a :

$$\text{div}\sigma'_i(x) = \frac{\partial\sigma'_{ik}}{\partial x_k} = \alpha_i\alpha_k \frac{\partial\sigma_{ik}(P(x))}{\partial x_k} = \alpha_i\alpha_k\alpha_k \frac{\partial\sigma_{ik}}{\partial x_k}(P(x)) = \alpha_i\text{div}\sigma_i(P(x)) \quad (6)$$

Soit finalement :

$$\text{div}\sigma'(x) = P(\text{div}\sigma(P(x))) \quad (7)$$

On vérifie de même :

$$\frac{\partial^2}{\partial X_1^2}\zeta'_1(x) = P\left(\frac{\partial^2}{\partial X_1^2}\zeta_1(P(x))\right) \quad (8)$$

En appliquant  $P$  aux équations (1) et (2) écrites au point  $P(x)$ , on trouve :

$$\text{div}\sigma'(x) + P(f(P(x))) - \rho v^2 \frac{\partial^2}{\partial X_1^2}\zeta'(x) = 0 \quad (9)$$

$$P(\sigma(P(x))) \cdot e_3 = \sigma'(x) \cdot e_3 = P(F(x)) \quad (10)$$

Donc  $\zeta'$  est solution du problème avec des forces de volume  $P(f(P(x)))$  et des forces surfaciques  $P(F(P(x)))$ . Si le chargement est symétrique par rapport à  $P$ , on a  $P(f(P(x))) = f(x)$  et sur le bord  $P(F(P(x))) = F(x)$ . Alors l'unicité de la solution du problème donne  $P(\zeta(P(x))) = \zeta(x)$ .

Dans le plan  $\Pi$ , on a donc en particulier :

$$\zeta_1(X_1 = 0, x_2, x_3) = 0 \quad (11)$$

On peut vérifier par un calcul en composantes dans le repère orthonormé  $(O, X_1, x_2, x_3)$ , dans le cas d'un matériau homogène isotrope que :

$$\sigma'(x) \cdot (P(n)) = P(\sigma(P(x)) \cdot n) \quad (12)$$

Dans le plan  $\Pi$  on a la normale au plan  $n=e_1$  et on trouve que les deux composantes de cisaillement du vecteur contraintes sont nulles.

$$\begin{aligned} t_2(X_1 = 0, x_2, x_3) &= 0 \\ t_3(X_1 = 0, x_2, x_3) &= 0 \end{aligned} \quad (13)$$

On vient d'étendre au cas du référentiel mobile (équations (5.12) et (5.14)) ce qui est bien connu en repère fixe. Ce résultat ne serait plus valable si on introduisait en plus de la viscosité.

Par ailleurs, on a en élasticité isotrope :

$$t_2(X_1 = 0) = \sigma_{13} = \mu \left( \frac{\partial u_3}{\partial X_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right) = \mu \frac{\partial u_3}{\partial X_1} = 0 \quad (14)$$

Avec le même raisonnement pour  $t_3$ :

$$\frac{\partial u_3}{\partial X_1}(X_1 = 0) = \frac{\partial u_2}{\partial X_1}(X_1 = 0) = 0 \quad (15)$$

Ces deux dernières relations seront utiles pour l'obtention de la formulation faible (cf. annexe A).

### Extension au cas multiphasique

L'extension ne pose pas de difficultés particulières. On définit  $T(x)$  la tension dans la phase renforcement,  $T(x)$  est la direction  $\underline{e}_2$  et  $\zeta_r$  le déplacement selon  $\underline{e}_2$  de cette phase. On a alors :

$$\operatorname{div} \sigma(x) + f(x) - \rho v^2 \frac{\partial^2}{\partial X_1^2} \zeta(x) + \mathbf{I} \underline{e}_2 = 0 \quad (16)$$

$$\mathbf{E} \varepsilon = \sigma \quad (17)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x_2} - \mathbf{I} \underline{e}_2 = 0 \quad (18)$$

$$\mathbf{I} = \mathbf{C}(\zeta_r - \zeta_2) \quad (19)$$

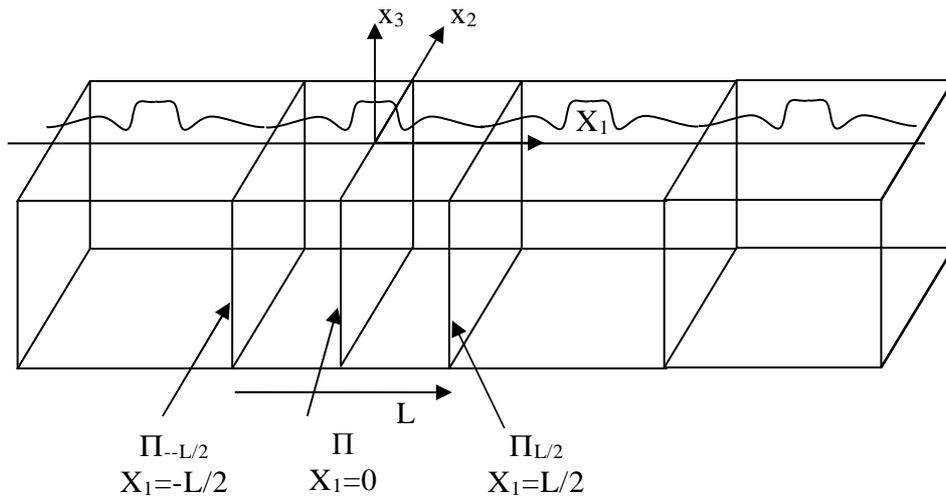
$$T = \mathbf{R} \frac{\partial \zeta_r}{\partial x_2} \quad (20)$$

Il faut introduire en plus  $\zeta'_r(x) = \zeta_r(P(x))$ , le champ  $T'$  associé et enfin  $I'$ . Si on applique  $P$  à l'équation (18) prise au point  $P(x)$  on arrive à la conclusion que si les chargements sont eux aussi symétriques et que  $\zeta'_r, \zeta_r$  est aussi solution de

(18). Il en est de même pour les 4 autres équations. Les conclusions sur les conditions aux limites au plan de symétrie données pour le milieu classique restent valables.

---

**Cas où le problème admet un plan de symétrie  $\Pi$  et est périodique**



*Figure 3 : Cas d'un problème à la fois symétrique par rapport à un plan et périodique*

On suppose que  $\Pi$  est un plan de symétrie du problème qui par ailleurs est périodique de période  $L$ .

On peut alors limiter le domaine d'étude à l'espace compris entre les plans  $\Pi$  et  $\Pi_{L/2}$  avec comme condition aux limites sur le plan  $\Pi$ :

$$\begin{aligned} u_1(X_1 = 0, x_2, x_3) &= 0 \\ t_2(X_1 = 0, x_2, x_3) &= 0 \\ t_3(X_1 = 0, x_2, x_3) &= 0 \end{aligned} \tag{21}$$

Les plans  $\Pi_{L/2}$  et  $\Pi_{-L/2}$  sont eux aussi des plans de symétrie. En effet, si on considère le chargement de surface  $F$ , à cause de la symétrie par rapport à  $\Pi$ , on a :

$$F(P_{L/2}(x)) = P(F(P_{L/2}(x))) \tag{22}$$

Si on calcule les coordonnées de  $P(P_{L/2}(x))$  :

$$P(P_{L/2}(x)) = P(P(x) - Le_1) = x + Le_1 \tag{23}$$

Comme le problème est périodique  $F(x + Le_1) = F(x)$  et on peut écrire :

$$F(P_{L/2}(x)) = P(F(x)) \quad (24)$$

Et donc le plan  $\Pi_{L/2}$  est un plan de symétrie et on a à nouveau les conditions aux limites des plans de symétrie :

$$\begin{aligned} u_1(X_1 = L/2, x_2, x_3) &= 0 \\ t_2(X_1 = L/2, x_2, x_3) &= 0 \\ t_3(X_1 = L/2, x_2, x_3) &= 0 \end{aligned} \quad (25)$$

Dans ce cas particulier, on se ramène de cette façon à des conditions aux limites standards d'un code aux éléments finis.



---

# Annexe C : Prise en compte d'un référentiel mobile dans CESAR-LCPC

---

## Introduction

En reprenant les développements présentés dans la partie 5.3.4, on aboutit à l'expression de la nouvelle matrice de rigidité apparente  $K'$  qui s'écrit :

$$K' = K + K'' = \int_V B^T E B - (\rho v^2)(C^T C) \quad (1)$$

Le terme complémentaire qu'il convient d'ajouter à la matrice de rigidité est une intégrale de produits de dérivées de fonctions d'interpolation. D'autre part, cette matrice a une structure particulière : elle est diagonale par blocs. Chaque bloc est associé à une composante du déplacement, et les différents blocs sont identiques.

On peut donc chercher à tirer parti de cette observation, en faisant le calcul du bloc à l'aide des routines existantes dans CESAR-LCPC, pour la première composante, et en le recopiant pour la ou les autres composantes.

Le premier terme est égal à  $\mathcal{E}_{11}^2$ , qu'on peut obtenir en calculant la matrice de rigidité de l'élément pour une pseudo-matrice élastique locale particulière :

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

Une fois calculée la matrice de rigidité élémentaire correspondant à cette contribution, on peut l'utiliser pour calculer les deux autres contributions provenant des dérivées de  $\xi_2$  et  $\xi_3$ . Le calcul est simple parce qu'on a supposé que le mouvement se fait parallèlement à la première direction  $x_1$ . Pour le type de problème qu'on étudie, cette limitation en termes d'implémentation dans le code numérique n'est pas contraignante. Cependant, il faudrait reprendre le raisonnement de manière plus détaillée pour considérer un mouvement selon une direction quelconque.

---

## Calcul du complément à la matrice de rigidité dans CESAR

De manière générale, l'implantation d'une nouvelle fonctionnalité demande une étape de réflexion préalable, pour identifier le moyen le plus simple d'obtenir le résultat cherché, de manière à éviter de recopier des parties de code existantes ou à reprogrammer des calculs qui sont déjà disponibles dans l'une ou l'autre des parties du code. On s'appuie ainsi sur des développements qui ont été validés par le passé, et qui sont souvent robustes et performants. D'autre part, pour la maintenance du code (mises à jour successives), il y a un enjeu fort à éviter de constituer plusieurs parties de code pratiquement identiques, et à reprendre autant que possible ce qui existe déjà.

Dans CESAR, lors du calcul de la rigidité d'un élément de massif, on effectue deux opérations successives :

- le calcul de la matrice  $E$  reliant la valeur locale des contraintes à celle des déformations, et d'une matrice auxiliaire servant à l'assemblage, notée  $D$  ; ce calcul est effectué par une routine appelée CALD1 (ou éventuellement par une variante de cette routine pour certains modèles de comportement);
- le calcul de la matrice de rigidité proprement dite, effectué par la routine RIGISO.

Le calcul du complément dû à l'inertie peut donc se faire en reprenant les routines existantes, en modifiant le calcul de la matrice  $E$  locale de manière à remplacer la matrice élastique originale par la matrice modifiée (1). On fait appel à une routine qui reproduit le fonctionnement de CALD1, mais qui présente l'intérêt d'être beaucoup plus simple. On effectue ensuite le calcul de la matrice de rigidité en reprenant le fonctionnement de RIGISO, ce qui fournit le premier bloc sur la diagonale, que l'on recopie ensuite.

Ce fonctionnement est simple et clair ; les branchements sur le code existant sont peu nombreux et bien identifiables.

Sur le plan de la programmation, on n'introduit pas d'étape de calcul spécifique au schéma général de calcul d'un problème de mécanique en comportement non linéaire : c'est au niveau de chaque élément que l'on se place pour modifier la rigidité à prendre en compte. Ce fonctionnement ne perturbe pas le déroulement général du calcul, mais il faudrait intervenir au niveau de chaque famille d'éléments de CESAR pour que le développement ait une portée générale (par exemple, pour qu'il soit utilisable avec des éléments de poutre ou de barre placés parallèlement à la direction  $x_1$ ).

---

## Mise en données

Dans CESAR, différentes options sont possibles pour introduire des données relatives à un calcul, qui sont plus ou moins pertinentes selon le contexte. Les

données sont associées aux groupes d'éléments, à des chargements, à des conditions aux limites ou à un type de calcul.

Ici la modification porte sur la rigidité apparente du sol, ce qui exclut pratiquement de faire appel à un type de chargement ou de conditions aux limites spécifiques. D'autre part, l'ensemble du maillage est concerné par le déplacement du référentiel mobile, et il n'est pas nécessaire (mais ce serait possible), d'indiquer groupe par groupe que la matrice de rigidité doit être complétée. La modification dépend de la masse volumique des différents matériaux mais elle est globale : on peut donc proposer un fonctionnement reposant sur une option du module d'exécution.

Les données de cette option sont limitées : on impose que la direction du mouvement est celle du premier axe du repère, il reste donc à l'utilisateur à donner la vitesse d'ensemble (la valeur de la masse volumique est en principe donnée dans les caractéristiques des différents groupes d'élément).

Sur le plan du fonctionnement :

- on arrête l'exécution du calcul si l'on est en condition axisymétrique ou s'il y a d'autres types d'éléments que des éléments de volume ; sinon on met à 1 un indicateur spécifique du calcul en référentiel mobile;
- pour le calcul de la rigidité : on effectue l'assemblage du complément à l'aide d'une valeur spécifique de ICOD, et on le cumule avec la rigidité initiale ;
- le calcul des contraintes se fait avec la matrice élastique d'origine : il n'y a donc pas de modification à faire à ce stade.
- le cas où l'on perd la positivité n'est pas traité pour le moment et conduit à un plantage.



---

# Annexe D :

## Analyse viscoélastique en régime stationnaire avec prise en compte d'un référentiel mobile

---

### Introduction

Cette annexe étend les développements analytiques proposés à la partie 5.3 en considérant en plus des effets d'amortissement dans la prise en compte d'un problème de déplacement d'une charge en référentiel mobile.

Pour prendre en compte l'amortissement dans les équations d'équilibre dynamique, on peut envisager globalement deux méthodes : soit on considère l'amortissement en rajoutant une force de type « trainée visqueuse », soit on prend en compte cet amortissement directement dans la loi de comportement du matériau. Dans la suite, on présente ces deux approches.

---

### Trainée visqueuse

On peut considérer l'amortissement directement dans l'équation d'équilibre en introduisant une force du type « trainée visqueuse » (particule dans un écoulement fluide à faible nombre de Reynolds). Dans ce cas on fait l'hypothèse que l'amortissement prend une valeur forfaitaire pour l'ensemble du problème et qu'il ne dépend ni de la fréquence, ni de la déformation ou des contraintes ou de leurs incréments respectifs. On fait également l'hypothèse d'isotropie de cet amortissement. C'est ce qui est proposé dans [BAS07]. Ainsi l'équation d'équilibre devient :

$$\operatorname{div}\sigma = \operatorname{div}(E : \varepsilon) - \eta \dot{\xi} \quad (1)$$

avec  $\eta$  un paramètre d'amortissement.

Bien que cette méthode présente de grandes facilités en termes d'implémentation dans un code aux éléments finis, la signification physique de cet amortissement soulève un certain nombre d'objections sérieuses :

Cette relation ne peut se ramener à une loi viscoélastique linéaire locale où on a la formule de Boltzmann (voir [SAL83]) qui ne fait intervenir que  $\varepsilon$ :

$$\sigma = R(t,t)\varepsilon(t) - \int_{-\infty}^t \frac{\partial R}{\partial \tau} G(\tau,t)\varepsilon(\tau)d\tau \quad (2)$$

Cependant on ne voit pas d'origine physique et en cas de changement de repère galiléen l'équation n'est pas conservée.

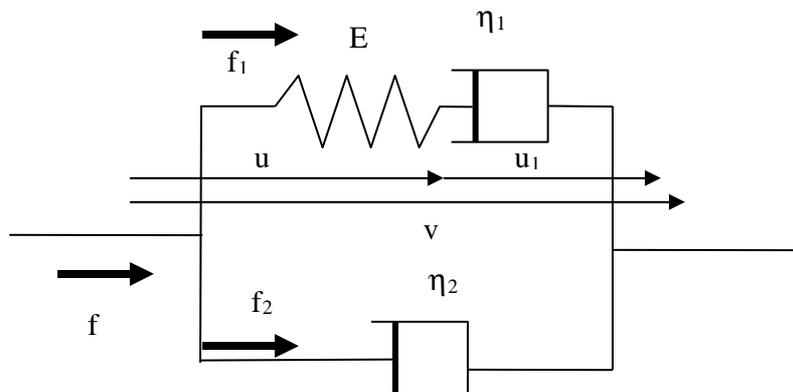
---

## Loi de comportement viscoélastique

Une façon plus pertinente de prendre en compte l'amortissement est de considérer une loi de comportement viscoélastique pour le matériau. Il existe plusieurs modèles de loi de comportement (Kelvin Voigt, Maxwell, Zener...) qui font presque toujours intervenir des grandeurs complexes qui s'expriment selon la fréquence et qui nécessitent de passer dans le domaine de Fourier. Dans la suite, nous présentons le modèle de Maxwell et celui de Kelvin Voigt, en proposant pour ce dernier une implémentation dans un code aux éléments finis.

### Matériau de Maxwell généralisé

Semblat [SEM97] a montré que ce matériau de Maxwell généralisé avait l'intéressante propriété de donner un amortissement de type Rayleigh en  $\eta = \frac{a_0}{\omega} + a_1\omega$ , ce qui a l'avantage d'offrir un amortissement presque constant dans une certaine plage de fréquence, ce qui s'approche des mesures physiques.



*Figure 1 : Modèle de Maxwell généralisé*

On peut objecter qu'il s'agit d'un modèle fluide : si on applique une déformation, à long terme l'effort est nul et si on applique un effort la déformée devient infinie. Toutefois pour les applications que nous visons, il s'agit de sollicitations courtes et ce comportement à long terme sous chargement ne devrait pas avoir le temps d'apparaître. Ce serait quelque chose à vérifier avec les valeurs numériques retenues.

Écrivons les équations :

$$\begin{cases} f = f_1 + f_2 \\ f_2 = \eta_2 \dot{v} \\ f_1 = Eu \\ f_1 = \eta_1 \dot{u}_1 \\ v = u + u_1 \end{cases} \quad (3)$$

En utilisant la transformée de Fourier indiquée par  $*$ , on transforme ce système un système linéaire d'équations :

$$\begin{cases} f^* = f_1^* + f_2^* \\ f_2^* = i\omega\eta_2 v^* \\ f_1^* = Eu^* \\ f_1^* = i\omega\eta_1 u_1^* \\ v^* = u^* + u_1^* \end{cases} \quad (4)$$

On trouve :

$$\begin{aligned} f^* &= \frac{1}{E^2 + \omega^2\eta_1^2} \left[ \omega^2\eta_1^2 E + i\omega(\eta_2(E^2 + \omega^2\eta_1^2) + \eta_1 E^2) \right] v^* = \\ &= \frac{1}{E + i\omega\eta_1} \left[ i\omega(\eta_1 + \eta_2)E + (i\omega)^2\eta_1\eta_2 \right] v^* \end{aligned} \quad (5)$$

Soit  $E^*$  le module complexe et  $E_r$  et  $E_i$  ses parties réelle et imaginaire. On retrouve le résultat de [SEM97] :

$$2\xi = \frac{1}{Q} = \frac{E_i}{E_r} = \frac{(\eta_1 + \eta_2)E^2 + \omega^2\eta_1^2\eta_2}{\omega\eta_1^2 E} \quad (6)$$

Dans le cas particulier de modèle de Maxwell simple, on a  $\eta_2 = 0$  :

$$f^* = \frac{1}{E^2 + \omega^2\eta_1^2} \left[ \omega^2\eta_1^2 E + i\omega\eta_1 E^2 \right] v^* = \frac{i\omega\eta_1 E(E - i\omega\eta_1)}{(E + i\omega\eta_1)(E - i\omega\eta_1)} v^* = \frac{i\omega\eta_1 E}{(E + i\omega\eta_1)} v^* \quad (7)$$

D'où multipliant les deux membres par  $E + i\omega\eta_1$  et en appliquant la transformation de Fourier inverse :

$$Ef + \eta_1 \dot{f} = \eta_1 E \dot{v} \quad (8)$$

L'équivalent en 3D s'écrit :

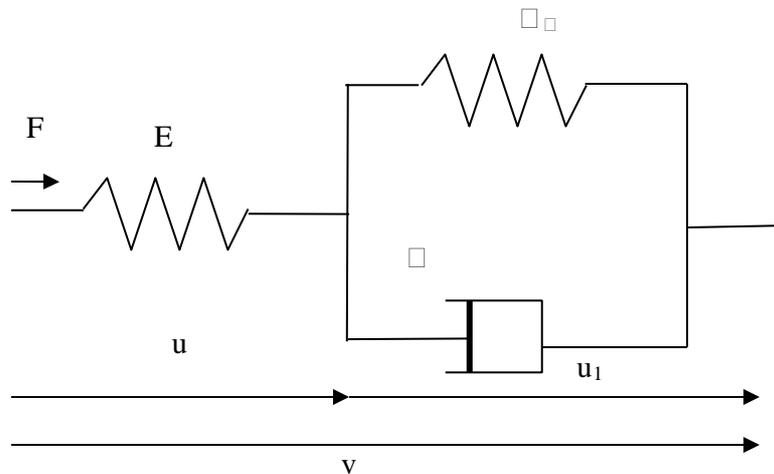
$$\sigma + E^{-1}\eta_1\dot{\sigma} = \eta_1\dot{\epsilon} \quad (9)$$

En fait avec un tel modèle on est très loin de l'élasticité, il n'y a pas de matrice de rigidité quand on passe aux éléments finis. L'équivalent de l'équation ci-dessus pour le matériau de Maxwell généralisé fait intervenir une dérivée seconde :

$$Ef + \eta_1\dot{f} = (\eta_1 + \eta_2)E\dot{v} + \eta_1\eta_2\ddot{v} \quad (10)$$

### Matériau de Kelvin-Voigt à élasticité instantanée

Le matériau de Kelvin-Voigt à élasticité instantanée est appelé aussi modèle de Zener ou solide linéaire standard [SAL83].



**Figure 2 : Modèle de Zener**

Une représentation équivalente est possible avec un Maxwell en parallèle avec un ressort. Une telle modélisation permet de rendre compte à la fois du fluage (évolution à effort constant) qui tend vers une limite finie et de la relaxation (évolution à déformation constante) vers une limite non nulle et d'une élasticité instantanée.

Dans ce cas particulier 1D nous allons étudier la loi de comportement globale.

Écrivons les équations correspondantes avec les conventions suivantes :  $f$  est positive en traction, le déplacement  $u$  est positif si le ressort s'allonge.

$$\begin{cases} f = Eu \\ f = E_1u_1 + \eta_1\dot{u}_1 \\ v = u + u_1 \end{cases} \quad (11)$$

Prenons la transformée de Fourier par rapport au temps en la notant  $*$ , le système précédent devient :

$$\begin{cases} f^* = Eu^* \\ f^* = E_1 u_1^* + i\omega\eta u_1^* \\ v^* = u^* + u_1^* \end{cases} \quad (12)$$

On élimine de ce système les deux variables  $u^*$  et  $u_1^*$ , on trouve :

$$f^* = \frac{E(E_1 + i\omega\eta)}{(E + E_1) + i\omega\eta} v^* \quad (13)$$

Nous pouvons récrit cette relation comme suit :

$$((E + E_1) + i\omega\eta) f^* = E(E_1 + i\omega\eta) v^* \quad (14)$$

Mis sous cette forme nous pouvons prendre la transformée de Fourier inverse et obtenir :

$$(E + E_1)f + \eta\dot{f} = EE_1v + \eta E\dot{v} \quad (15)$$

On peut aussi appliquer l'analyse proposée dans [SEM97] pour le modèle de Maxwell à ce modèle.

On a alors :  $f^* = E_c v^*$  avec :

$$E_c = \frac{E}{(E + E_1)^2 + \omega^2\eta^2} \left[ (E_1(E + E_1) + \omega^2\eta^2) + i\omega\eta E \right] \quad (16)$$

Le facteur de qualité est alors donné par :

$$Q = \frac{R_e(E_c)}{I_m(E_c)} = \frac{E_1(E + E_1) + \omega^2\eta^2}{\omega\eta E} \quad (17)$$

Pour les faibles amortissements on a :

$$2\xi = \frac{1}{Q} = \frac{\omega\eta E}{E_1(E + E_1) + \omega^2\eta^2} \quad (18)$$

L'amortissement maximal est atteint pour :

$$\omega_r = \frac{\sqrt{E_1(E + E_1)}}{\eta} \quad (19)$$

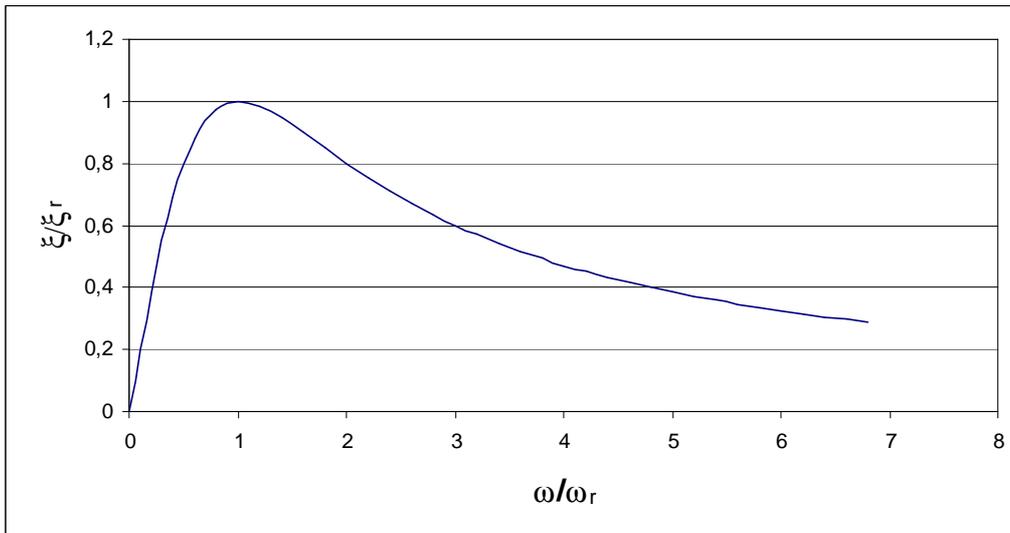
L'amortissement maximal vaut :

$$\xi_r = \frac{E}{4\sqrt{E_1(E + E_1)}} \quad (20)$$

On peut récrire la loi qui donne  $\xi$  en fonction de  $\omega$  avec les variables réduites  $\xi/\xi_r$  et  $\omega/\omega_r$  ; On trouve :

$$\frac{\xi}{\xi_r} = \frac{2 \frac{\omega}{\omega_r}}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_r}\right)^2} \quad (21)$$

La figure ci après donne cette courbe.



*Figure 3 :: Variation du coefficient d'amortissement avec la fréquence*

Comme pour le matériau de Maxwell généralisé, il y a un extremum de l'amortissement et autour de cet extremum la variation est lente. A la différence de Maxwell cependant, l'extremum est un maximum et l'amortissement tend vers zéro pour les pulsations très petites ou très grandes.

La valeur de 10 % de l'amortissement conduit à :  $E_1=1,94 E$ .

On a alors approximativement :  $\omega_r = \frac{2,39E}{\eta}$ . Quelle valeur retenir pour

$\eta$  ? Il faut en fait choisir la pulsation  $\omega_r$ .

Par exemple, dans le cas d'un train, si on admet qu'il y a quasi périodicité d'un essieu à l'autre, ça veut dire que les événements passage de bogie sont indépendants les uns des autres et les fréquences qui nous intéressent sont plutôt

liées à la longueur du bogie  $L_b$ .  $\omega_r \frac{L_b}{v} = 2\pi$  on en déduit :

$$\eta = 0,38 \frac{EL_b}{v} \quad (22)$$

Considérons le cas où le ressort  $E$  n'existe pas (Kelvin Voigt). On trouve :

$$E_c = E_1 + i\omega\eta \quad (23)$$

$$2\xi = \frac{1}{Q} = \frac{\omega\eta}{E_1} \quad (24)$$

Il n'y a pas de plateau où l'amortissement varie peu.

### Loi de comportement 3D pour le matériau de Kelvin-Voigt à élasticité instantanée

Pour passer à un matériau tridimensionnel, il y a lieu de remplacer la force de traction par le tenseur des contraintes de Cauchy et l'allongement par le tenseur des déformations. On obtient ainsi une relation du type :

$$(E + E_1) : \sigma + \eta \dot{\sigma} = EE_1 : \varepsilon + \eta E \dot{\varepsilon} \quad (25)$$

$E$  et  $E_1$  sont maintenant les tenseurs d'élasticité. La forme la plus simple pour  $\eta$  est un scalaire, mais on peut aussi envisager des formes plus générales, par exemple pour le cas isotrope la même forme dépendant de deux paramètres que le tenseur d'élasticité (voir par exemple [FAB92]), la forme « scalaire » étant un cas particulier.

On a donc à résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} \operatorname{div} \sigma + f = \rho \gamma \\ (E + E_1) : \sigma + \eta \dot{\sigma} = EE_1 : \varepsilon + \eta E \dot{\varepsilon} \end{cases} \quad (26)$$

Si  $\eta = 0$ , on retrouve la loi de comportement élastique  $\sigma = E' \varepsilon$

---

## Étude de la loi de comportement pour un phénomène stationnaire en référentiel mobile.

### Cas particulier du matériau de Kelvin-Voigt simple

Si on se limite à Kelvin-Voigt simple on a :

$$\int_e \hat{\varepsilon} : \left( E\varepsilon - v\eta \frac{\partial \varepsilon}{\partial X_1} \right) - \rho v^2 \frac{\partial \hat{\zeta}}{\partial X_1} \frac{\partial \zeta}{\partial X_1} = 0 \quad (27)$$

On remarque qu'il faut un élément quadratique et qu'il y a perte de la symétrie : la présence du terme en  $v$  rompt la symétrie observée dans le cas d'un chargement symétrique pour une loi de comportement purement élastique.

On a peu d'information à ce stade sur la valeur à retenir pour  $\eta$ . Une première idée serait d'utiliser :  $2 \xi = \frac{1}{Q} = \frac{\omega \eta}{E}$  soit :  $\eta = \frac{2\xi E}{\omega}$ .

### Cas général : matériau de Kelvin-Voigt avec élasticité instantanée

On utilise que la dérivation par rapport au temps peut être remplacée par une dérivation par rapport à la variable  $X_1$ . La loi de comportement viscoélastique s'écrit alors :

$$(E + E_1) : \sigma - v\eta \frac{\partial \sigma}{\partial X_1} + EE_1 : \varepsilon + v\eta E \frac{\partial \varepsilon}{\partial X_1} = 0 \quad (28)$$

On écrit :

$$\sigma = \frac{EE_1}{E + E_1} \varepsilon + \frac{v\eta E}{E + E_1} \frac{\partial \varepsilon}{\partial X_1} - \frac{v\eta}{E + E_1} \frac{\partial \sigma}{\partial X_1} \quad (29)$$

---

## Résolution par une méthode itérative

### Position du problème

La formulation faible peut s'écrire en l'absence de forces extérieures :

$$\int_v \hat{\varepsilon}' \sigma - \rho v^2 \hat{\zeta} \zeta = 0 \quad (30)$$

On récrit sous la forme suivant en tenant compte de la loi de comportement :

$$\int_v \hat{\varepsilon}' \frac{EE_1}{E+E_1} : \varepsilon - \rho v^2 \hat{\zeta} \zeta = \int_v \hat{\varepsilon}' \left[ \frac{v\eta}{E+E_1} \frac{\partial \sigma}{\partial X_1} - \frac{v\eta E}{E+E_1} \frac{\partial \varepsilon}{\partial X_1} \right] \quad (31)$$

On remarque que pour une valeur faible d'amortissement on a  $\sigma \approx \frac{EE_1}{E+E_1} \varepsilon$ , Le terme correctif s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \frac{v\eta E}{E+E_1} \frac{\partial \varepsilon}{\partial X_1} - \frac{v\eta}{E+E_1} \frac{\partial \sigma}{\partial X_1} &= \frac{v\eta E}{E+E_1} \frac{\partial \varepsilon}{\partial X_1} - \frac{v\eta}{E+E_1} \frac{EE_1}{E+E_1} \frac{\partial \varepsilon}{\partial X_1} = \\ &= v\eta \left( \frac{E}{E+E_1} \right)^2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial X_1} \end{aligned} \quad (32)$$

On pose pour l'ordre de grandeur de  $\frac{\partial \varepsilon}{\partial X_1} \approx \frac{\varepsilon}{L_b}$ . On avait trouvé pour un facteur d'amortissement de 0,1 :  $E_1 = 1,94 E$   $\eta = 0,38 \frac{EL_b}{v}$  comme choix pertinent des paramètres

Le rapport entre le terme correctif sur la contrainte et le terme principal s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{v\eta \left( \frac{E}{E+E_1} \right)^2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial X_1}}{\frac{EE}{E+E_1} \varepsilon} &= \frac{v 0,38 \frac{EL_b}{v} \left( \frac{E}{E+E_1} \right)^2 \frac{\varepsilon}{L_b}}{\frac{EE}{E+E_1} \varepsilon} \\ &= \frac{0,38E \left( \frac{E}{E+E_1} \right)^2}{\frac{EE}{E+E_1}} = 0,38 \frac{E}{E+E_1} = 0,2 \end{aligned} \quad (33)$$

Il serait possible de poursuivre cette étude de manière analytique et non sur un seul exemple numérique.

### Étape 1 : initialisation

On écrit :  $\sigma_1 = \frac{EE_1}{E + E_1} \varepsilon_1$ , ce qui revient à ne pas prendre en compte le second membre dans (29).

L'écriture de la formulation faible donne la même formulation qu'en élasticité.

Nous la rappelons ici.

Pour un élément on note  $\{u\}$  le vecteur des déplacements nodaux et on définit les fonctions B et C sur cet élément. On pose :

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad \{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} \quad (34)$$

En tenant compte de l'interpolation des déplacements, on a :

$$\{\varepsilon\} = B\{u\} \quad (35)$$

où les coefficients de la matrice B dépendent des dérivées des fonctions d'interpolation N.

La relation locale entre contraintes et déformations s'écrit :

$$\{\sigma\} = E\{\varepsilon\} \quad \text{avec} \quad E = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \quad (36)$$

L'intégrale  $\int_V \varepsilon : E : \hat{\varepsilon}$  figurant dans le membre de gauche se calcule donc comme suit :

$$\int_V \varepsilon : E : \hat{\varepsilon} = \{u\}^T K \{\hat{u}\} \quad (37)$$

où K est la matrice de rigidité donnée par :

$$K = \int_V B^T E B \quad (38)$$

Pour la prise en compte de l'effet d'inertie, on introduit de plus la matrice C, qui permet de calculer les dérivées du déplacement par rapport à la direction du mouvement :

$$\left\{ \frac{\partial \xi}{\partial X_1} \right\} = C \{u\} \quad (39)$$

Portons attention à cette matrice. On a :

$$\xi(X_1, X_2, X_3) = \begin{bmatrix} N_{11}(X)u_1 + N_{12}(X)u_2^\circ + N_{13}(X)u_3 \\ N_{21}(X)u_1 + N_{22}(X)u_2^\circ + N_{23}(X)u_3 \end{bmatrix} \quad (40)$$

$$\frac{\partial \xi(X_1, X_2, X_3)}{\partial X_1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_{11}(X)}{\partial X_1}u_1 + \frac{\partial N_{12}(X)}{\partial X_1}u_2^\circ + \frac{\partial N_{13}(X)}{\partial X_1}u_3 \\ \frac{\partial N_{21}(X)}{\partial X_1}u_1 + \frac{\partial N_{22}(X)}{\partial X_1}u_2^\circ + \frac{\partial N_{23}(X)}{\partial X_1}u_3 \end{bmatrix} = \frac{\partial N}{\partial X_1} \{u\} \quad (41)$$

La deuxième intégrale du membre de gauche se calcule donc comme suit :

$$-\int_V \rho v^2 \frac{\partial \xi}{\partial X_1} \cdot \frac{\partial \hat{\xi}}{\partial X_1} = \{u\}^T K'' \{\hat{u}\} \quad (42)$$

où l'on a posé:

$$K'' = -\rho v^2 \int_V C^T C \quad (43)$$

On a une matrice de rigidité apparente  $K'$  qui s'écrit :

$$K' = K + K'' = \int_V B^T \frac{EE_1}{E + E_1} B - (\rho v^2)(C^T C) \quad (44)$$

Il est intéressant de remarquer que la contribution à la rigidité apparente ne dépend pas du signe de  $v$ , c'est-à-dire du sens de déplacement du chargement.

Examinons aussi le terme  $\frac{EE_1}{E + E_1}$ . On a :  $E\varepsilon = 2\mu\varepsilon + \lambda \text{tr}(\varepsilon)\text{Id}$ . En remplaçant on a :

$$\begin{aligned} EE_1\varepsilon &= 2\mu(2\mu_1\varepsilon + \lambda_1 \text{tr}(\varepsilon)\text{Id}) + \lambda \text{tr}(2\mu_1\varepsilon + \lambda_1 \text{tr}(\varepsilon)\text{Id})\text{Id} = \\ &= 4\mu\mu_1\varepsilon + (2\lambda\mu_1 + 2\lambda_1\mu + \lambda\lambda_1 \text{tr}\text{Id})\text{tr}\varepsilon\text{Id} = 4\mu\mu_1\varepsilon + (2\lambda\mu_1 + 2\lambda_1\mu + 3\lambda\lambda_1)\text{tr}\varepsilon\text{Id} \end{aligned} \quad (45)$$

La forme est symétrique les deux matrices commutent et leur produit a la forme d'une matrice d'élasticité. De même  $(E+E_1)$  va commuter avec  $EE_1$  et il n'y a donc pas d'ambiguïté en écrivant  $\frac{EE_1}{E + E_1}$ . La matrice  $E+E_1$  est inversible : si  $E$  et

$E_1$  sont des matrices d'élasticité elles s satisfont aux contraintes linéaires sur  $\lambda$

et  $\mu$  assurant positivité, alors la matrice  $E+E_1$  satisfait encore ces contraintes, est définie positive et donc inversible.

### Étape 2

On cherche toujours à résoudre (31)

Il faut évaluer de manière approchée le second membre qui avait été négligé lors de l'initialisation en utilisant le premier résultat  $\varepsilon_1$ .

$$\text{On prend ici } \sigma_1 = \frac{EE_1}{E + E_1} \varepsilon_1$$

Et on résout l'équation :

$$\int_v \hat{\varepsilon}^t \frac{EE_1}{E + E_1} : \varepsilon_2 - \rho v^2 \hat{\zeta} \zeta_2 = \int_v \hat{\varepsilon}^t \left[ v\eta \left( \frac{E}{E + E_1} \right) \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial X_1} \right] \quad (46)$$

On trouve  $\varepsilon_2$  et l'approximation de  $\sigma_2$  qu'on retient en fait :

$$\sigma_2 = \frac{EE_1}{E + E_1} \varepsilon_2 + \frac{v\eta E}{E + E_1} \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial X_1} - \frac{v\eta}{E + E_1} \frac{\partial \sigma_1}{\partial X_1} \quad (47)$$

On a déjà vu comment calculer  $\varepsilon = B\{u\}$ , on a simplement :

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial X_1} = \frac{\partial B}{\partial X_1} \{u\} \quad (48)$$

Une écriture matricielle du second membre pour un élément est :

$$\int_e v\eta B^t \left( \frac{E}{E + E_1} \right) \frac{\partial B}{\partial X_1} \{u_1\} \quad (49)$$

Il faut expliciter le calcul de  $\frac{\partial \sigma}{\partial X_1}$ . En fait on a dans un élément :

$$\sigma_{ij} = N \{v_{i,j}\} \quad (50)$$

Alors :

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial X_1} = \frac{\partial N}{\partial X_1} \{v_{i,j}\} \quad (51)$$

### Étapes suivantes

On s'attache maintenant à la troisième étape. On propose de mettre dans le second membre l'expression suivante :

$$\int_v \hat{\varepsilon}^t : \sigma_3 - \rho v^2 \hat{\zeta} \zeta_3 = \int_v \hat{\varepsilon}^t \left[ \frac{v\eta}{E+E_1} \frac{\partial \sigma}{\partial X_1} - \frac{v\eta E}{E+E_1} \frac{\partial \varepsilon}{\partial X_1} \right] \quad (52)$$

On écrit :

$$\sigma_3 = \frac{EE_1}{E+E_1} \varepsilon_3 + \frac{v\eta E}{E+E_1} \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial X_1} - \frac{v\eta}{E+E_1} \frac{\partial \sigma_2}{\partial X_1} \quad (53)$$

$$\sigma_2 \approx \frac{EE_1}{E+E_1} \varepsilon_2 + \frac{v\eta E}{E+E_1} \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial X_1} - \frac{v\eta}{E+E_1} \frac{\partial \sigma_1}{\partial X_1} \quad (54)$$

### Résolution par une méthode directe

Soit  $D_1$  tel que pour un champ scalaire  $w$  défini sur l'élément  $e$  par ses compo-

santes  $\{w\} = \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{Bmatrix}$  sur les fonctions de formes  $N_1 \dots N_n$ .

On a :

$$w(X_1, X_2, X_3) = (1, 1, \dots, 1) \begin{pmatrix} N_1(X_1, X_2, X_3) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & N_2(X_1, X_2, X_3) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & N_n(X_1, X_2, X_3) \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{Bmatrix} \quad (55)$$

On suppose que toute dérivée par rapport à  $X_1$  d'une fonction de forme est une combinaison linéaire des fonctions de forme (voir exemple de la section 5).

$$\frac{\partial N_i}{\partial X_1} = D_{1i,1} N_1 + D_{2i,1} N_2 + \dots + D_{ni,1} N_n \quad (56)$$

On pose :

$$\tilde{D}_1 = \begin{pmatrix} D_{11,1} & D_{12,1} & \dots & D_{1n,1} \\ D_{21,1} & D_{22,1} & \dots & D_{2n,1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{n1,1} & D_{n2,1} & \dots & D_{nn,1} \end{pmatrix} \quad (57)$$

$$\tilde{N} = \begin{pmatrix} N_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & N_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & N_n \end{pmatrix} \quad (58)$$

$$A_1 = \begin{matrix} (1, 1, \dots, 1) \\ \leftarrow n\text{fois} \rightarrow \end{matrix} \quad (59)$$

Et on a :

$$\frac{\partial w}{\partial X_1} = A_1 \tilde{N} \tilde{D}_1 \{w\} \quad (60)$$

De même  $D_{X_2}$  et  $D_{X_3}$  pour les dérivées par rapport aux autres coordonnées.  $D_i$  est une matrice  $n \times n$ .

Si maintenant on considère une grandeur vectorielle comme le déplacement. On range les coordonnées par composantes du déplacement.

$$\zeta(X_1, X_2, X_3)_{3 \times 1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}_{3 \times 3n} \begin{pmatrix} \tilde{N} & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{N} & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{N} \end{pmatrix}_{3n \times 3n} \{u\}_{3n} \quad (61)$$

On pose :

$$A_{1 \times n} = \begin{matrix} (1, 1, \dots, 1) \\ \leftarrow n\text{fois} \rightarrow \end{matrix} \quad (62)$$

On peut écrire :

$$\zeta(X_1, X_2, X_3)_{3 \times 1} = \begin{pmatrix} A_{1 \times n} & 0 & 0 \\ 0 & A_{1 \times n} & 0 \\ 0 & 0 & A_{1 \times n} \end{pmatrix}_{3 \times 3n} \begin{pmatrix} \tilde{N} & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{N} & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{N} \end{pmatrix}_{3n \times 3n} \{u\}_{3n} \quad (63)$$

On pose :

$$A_{3 \times n} = \begin{pmatrix} A_{1 \times n} & 0 & 0 \\ 0 & A_{1 \times n} & 0 \\ 0 & 0 & A_{1 \times n} \end{pmatrix}_{3 \times 3n} \quad (64)$$

$$\tilde{N}_3 = \begin{pmatrix} \tilde{N} & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{N} & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{N} \end{pmatrix}_{3n \times 3n} \quad (65)$$

On écrit finalement sous forme condensée :

$$\zeta(X_1, X_2, X_3)_{3 \times 1} = A_{3 \times 3n} \tilde{N}_3 \{u\}_{3n} \quad (66)$$

On définit de même

$$A_{6 \times n} = \begin{pmatrix} A_{1 \times n} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{1 \times n} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{1 \times n} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{1 \times n} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{1 \times n} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{1 \times n} \end{pmatrix}_{6 \times 6n} \quad (67)$$

$$\tilde{N}_6 = \begin{pmatrix} \tilde{N} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{N} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{N} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{N} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{N} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{N} \end{pmatrix}_{6n \times 6n} \quad (68)$$

Et on peut écrire par exemple les six composantes du tenseur des contraintes écrit les 6 composantes du tenseur des contraintes

$$\sigma = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \end{Bmatrix} = A_{6 \times n} \tilde{N}_6 \{v\}_{6n \times 1} \quad (69)$$

Il faut écrire aussi les 6 composantes de  $\varepsilon = \{\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, 2\varepsilon_{13}, 2\varepsilon_{23}, 2\varepsilon_{12}\}_{1 \times 6}$ . On a :

$$\varepsilon^t_{6 \times 1} = [L]_{6 \times 3} \zeta^t_{3 \times 1} \quad (70)$$

Avec :

$$[L]_{6 \times 3} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial X_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial X_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial X_3} \\ \frac{\partial}{\partial X_2} & \frac{\partial}{\partial X_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial X_3} & \frac{\partial}{\partial X_2} \\ \frac{\partial}{\partial X_3} & 0 & \frac{\partial}{\partial X_1} \end{bmatrix} \quad (71)$$

D'où classiquement on introduit la matrice B :

$$[B] = [L][N] \quad (72)$$

Et :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial X_1} & \frac{\partial N_2}{\partial X_1} & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial X_1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial X_2} & \frac{\partial N_2}{\partial X_2} & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial X_2} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial X_3} & \frac{\partial N_2}{\partial X_3} & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial X_3} \\ \frac{\partial N_1}{\partial X_2} & \frac{\partial N_2}{\partial X_2} & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial X_2} & \frac{\partial N_1}{\partial X_1} & \frac{\partial N_2}{\partial X_1} & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial X_1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial X_3} & \frac{\partial N_2}{\partial X_3} & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial X_3} & \frac{\partial N_1}{\partial X_2} & \frac{\partial N_2}{\partial X_2} & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial X_2} \\ \frac{\partial N_1}{\partial X_3} & \frac{\partial N_2}{\partial X_3} & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial X_3} & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial X_1} & \frac{\partial N_2}{\partial X_1} & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial X_1} \end{pmatrix} \quad (73)$$

Mais si on utilise les matrices  $D_i$ , on pose :

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} D_1 & 0_{n \times n} & 0_{n \times n} \\ 0_{n \times n} & D_2 & 0_{n \times n} \\ 0_{n \times n} & 0_{n \times n} & D_3 \\ D_2 & D_1 & 0_{n \times n} \\ 0_{n \times n} & D_3 & D_2 \\ D_3 & 0_{n \times n} & D_1 \end{bmatrix} \quad (74)$$

Et on a :

$$\mathcal{E} = \begin{Bmatrix} \mathcal{E}_{11} \\ \mathcal{E}_{22} \\ \mathcal{E}_{33} \\ 2\mathcal{E}_{12} \\ 2\mathcal{E}_{23} \\ 2\mathcal{E}_{31} \end{Bmatrix} = A_{6 \times n} \tilde{N}_6 \tilde{B} \{u\}_{3n} \quad (75)$$

Les composantes s'écrivent :

$$\begin{Bmatrix} \mathcal{E}_{11,1} \\ \dots \\ \mathcal{E}_{11,n} \\ \mathcal{E}_{22,1} \\ \dots \\ \mathcal{E}_{22,n} \\ \mathcal{E}_{33,1} \\ \dots \\ \mathcal{E}_{33,n} \\ \mathcal{E}_{12,1} \\ \dots \\ \mathcal{E}_{12,n} \\ \mathcal{E}_{23,1} \\ \dots \\ \mathcal{E}_{23,n} \\ \mathcal{E}_{31,1} \\ \dots \\ \mathcal{E}_{31,n} \end{Bmatrix}_{6n \times 1} = \tilde{B}_{6n \times 3n} \{u\}_{3n} \quad (76)$$

Alors on peut récrire la loi de comportement (29)

Pour simplifier, comme on a peu d'information sur  $E$   $E_1$  et  $\eta$ , on va faire l'hypothèse simplificatrice suivante :  $E$   $E_1$  et  $\eta$  sont proportionnels :

$$\frac{E_1}{E + E_1} = \alpha; \frac{\eta}{E + E_1} = \beta \quad (77)$$

La loi de comportement s'écrit alors :

$$\sigma = \alpha E \varepsilon + \nu \beta E \frac{\partial \varepsilon}{\partial X_1} - \nu \beta \frac{\partial \sigma}{\partial X_1} \quad (78)$$

Une telle équation traduit l'égalité des composantes sur la base des fonctions de forme. Examinons d'abord le terme  $E\varepsilon$ .

On a les coordonnées de  $E\varepsilon$  qui sont données par  $\{E\varepsilon\}_{6n} = \tilde{E}\{\varepsilon\}_{6n}$

Avec :

$$\tilde{E} = \begin{pmatrix} \lambda+2\mu & 0 & \dots & 0 & \lambda & 0 & \dots & 0 & \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda+2\mu & \dots & 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda+2\mu & 0 & 0 & \dots & \lambda & 0 & 0 & \dots & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 0 & \dots & 0 & \lambda+2\mu & 0 & \dots & 0 & \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 & 0 & \lambda+2\mu & \dots & 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda & 0 & 0 & \dots & \lambda+2\mu & 0 & 0 & \dots & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 0 & \dots & 0 & \lambda & 0 & \dots & 0 & \lambda+2\mu & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 & 0 & \lambda+2\mu & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda & 0 & 0 & \dots & \lambda & 0 & 0 & \dots & \lambda+2\mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} \quad (79)$$

Sous forme condensée, on peut écrire :

$$\tilde{E} = E \otimes Id_n \quad (80)$$

Finalement on a :

$$\{\sigma\}_{6n} = \alpha \tilde{E} \tilde{B} \{\zeta\}_{3n} + \nu \beta \tilde{E} \tilde{B} \tilde{D}_3 \{\zeta\}_{3n} - \nu \beta \tilde{D}_6 \{\sigma\}_{6n} \quad (81)$$

Avec :

$$\tilde{D}_3 = \begin{pmatrix} D_1 & 0 & 0 \\ 0 & D_1 & 0 \\ 0 & 0 & D_1 \end{pmatrix}_{3n \times 3n} \quad (82)$$

$$\tilde{D}_6 = \begin{pmatrix} D_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_1 \end{pmatrix}_{6n \times 6n} \quad (83)$$

On en tire :

$$\{\sigma\}_{6n} = (1 + \nu\beta\tilde{D}_6)^{-1} (\alpha\tilde{E}\tilde{B} + \nu\beta\tilde{E}\tilde{B}\tilde{D}_3) \{\zeta\}_{3n} \quad (84)$$

On pose :

$$E^* = (1 + \nu\beta\tilde{D}_6)^{-1} (\alpha\tilde{E}\tilde{B} + \nu\beta\tilde{E}\tilde{B}\tilde{D}_3) \quad (85)$$

Notons que la structure particulière de  $(1 + \nu\beta\tilde{D}_6)$  allège le calcul de son inverse qui s'écrit :

$$(Id_{6n} + \nu\beta\tilde{D}_6)^{-1} = \begin{pmatrix} (Id_n + \nu\beta D_1)^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (Id_n + \nu\beta D_1)^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (Id_n + \nu\beta D_1)^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (Id_n + \nu\beta D_1)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (Id_n + \nu\beta D_1)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (Id_n + \nu\beta D_1)^{-1} \end{pmatrix} \quad (86)$$

Si on revient maintenant à la matrice de rigidité associée à un élément, on l'évalue en cherchant l'intégrale :

$$\int_e \hat{\varepsilon}^t : \sigma - \rho v^2 \frac{\partial \hat{\zeta}}{\partial X_1} \frac{\partial \zeta}{\partial X_1} \quad (87)$$

L'intégrande peut s'écrire comme suit :

$$\begin{aligned} \hat{\varepsilon}^t : \sigma - \rho v^2 \frac{\partial \hat{\zeta}}{\partial X_1} \frac{\partial \zeta}{\partial X_1} &= \{\hat{\zeta}\}_{3n}^t \tilde{B}' \tilde{N}'_6 A'_6 A_6 \tilde{N}_6 E^* \{\zeta\}_{3n} - \rho v^2 \{\hat{\zeta}\}_{3n}^t \tilde{D}'_3 \tilde{N}'_3 A'_3 A_3 \tilde{N}_3 \tilde{D}_3 \{\zeta\}_{3n} = \\ &= \{\hat{\zeta}\}_{3n}^t \left( \tilde{B}' \tilde{N}'_6 A'_6 A_6 \tilde{N}_6 E^* - \rho v^2 \tilde{D}'_3 \tilde{N}'_3 A'_3 A_3 \tilde{N}_3 \tilde{D}_3 \right) \{\zeta\} \end{aligned} \quad (88)$$

Étudions par exemple  $\tilde{N}'_3 A'_3 A_3 \tilde{N}_3$ .

$$\begin{aligned}
A_3^t A_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \tag{89}
\end{aligned}$$

On conclut finalement :

$$\tilde{N}_3^t A_3^t A_3 \tilde{N}_3 = \begin{pmatrix} M & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & M \end{pmatrix} = M_3 \tag{90}$$

On retrouve la matrice de masse M, avec :

$$M = \begin{pmatrix} N_1 N_1 & N_1 N_2 & \dots & N_1 N_n \\ N_2 N_1 & N_2 N_2 & \dots & N_2 N_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \dots \\ N_n N_1 & N_n N_2 & \dots & N_n N_n \end{pmatrix} \tag{91}$$

De même :

$$\tilde{N}_6^t A_6^t A_6 \tilde{N}_6 = M_6 \tag{92}$$

Finalement la matrice  $K_e$  vaut :

$$K_e = \tilde{B}^t \left( \int_e M_6 \right) E^* - \rho v^2 \tilde{D}_3^t \left( \int_e M_3 \right) \tilde{D}_3 \quad (93)$$

On reconnaît dans les éléments intégrés  $\left( \int_e \mathbf{M} \right)$  les matrices de masse élémentaires, usuellement évaluées de manière numérique mais qui pour des éléments de type Q8 pourraient aussi bien être calculées analytiquement.

Il faut noter aussi qu'on a perdu la symétrie de  $K_e$ .



---

## Références bibliographiques

- [ABD10a] **Abdelouhab A.**, 2010. « Comportement des murs en terre armée. Modélisation physique, analytique et numérique des renforcements extensibles ». Thèse de Doctorat. INSA Lyon
- [ABD10b] **Abdelouhab A, Dias D., Freitag N.**, 2010. “Physical and analytical modelling of geosynthetic strip pull-out behaviour”. *Geotechniques and geomembranes*, Vol. 28, pp. 44-53.
- [ABD11] **Abdelouhab A., Dias D., Freitag N.**, 2011. ‘Numerical analysis of the behaviour of mechanically stabilized earth walls reinforced with different types of strips’, *Geotextiles and Geomembranes*, Volume 29, Issue 2, Pages 116-129, ISSN 0266-1144, <http://dx.doi.org/10.1016/j.geotexmem.2010.10.011>
- [AFN95] **AFNOR**, 1995. « Norme Française NF P 94-222 : Renforcement des sols – Ouvrages en sols rapportés renforcés par des armatures ou nappes peu extensibles et souples »
- [AFN98a] **AFNOR**, 1998. « Norme Française NF P 94-220-0 : Renforcement des sols – Ouvrages en sols rapportés renforcés par armatures ou nappes peu extensibles et souples – Partie 0 : Justification du dimensionnement »
- [AFN98b] **AFNOR**, 1998. « Norme Française NF P 94-220-1 : Renforcement des sols – Ouvrages en sols rapportés renforcés par armatures ou nappes peu extensibles et souples – Partie 1 : Renforcement par des armatures métalliques en bande – Justification du dimensionnement »
- [AFN98c] **AFNOR**, 1998. « Norme Française NF P 94-220-2 : Renforcement des sols – Ouvrages en sols rapportés renforcés par armatures ou nappes peu extensibles et souples – Partie 2 : Renforcement par des armatures métalliques en treillis – Justification du dimensionnement »
- [AFN07] **AFNOR**, 2007. « Norme NF EN 14475 : Remblais renforcés – Exécution de travaux géotechniques spéciaux ».
- [AFN09] **AFNOR**, 2009. « Norme française NF P 94-270 : Calcul géotechnique - Ouvrages de soutènement - Remblais renforcés et massifs en sol cloué»

- [ALL04] **Allen T., Bathurst R., Holtz R., Lee W., and Walters D.,** 2004. “New Method for Prediction of Loads in Steel Reinforced Soil Walls.” *J. Geotech. Geoenviron. Eng.*, 130(11), 1109–1120.
- [AND05] **Andersen P. L. et Brabant K.,** 2005. “Increased Use of MSE Abutments”. The 22nd Annual International Bridge Conference held in Pittsburgh. Association for Metallically Stabilized Earth. Pittsburgh : 1-8.
- [ANG13] **Ang K.K., Dai J.,** 2013. “Response analysis of high-speed rail system accounting for abrupt change of foundation stiffness”, *Journal of Sound and Vibration* 332, 2954-2970.
- [AUE05] **Auersch L.,** 2005. “The excitation of ground vibration by rail traffic: theory of vehicle-track-soil interaction and measurements on high-speed lines”, *Journal of Sound And Vibration* 284(1-2) : 103-132
- [AUE08] **Auersch L.,** 2008. “The effect of critically moving loads on the vibrations of soft soils and isolated railway tracks”, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 310, no. 3, pp. 587–607.
- [BAS85] **Bastick M.,** 1985a. “Reinforced Earth Abutments –Research Model and Full-Scale Structures”. Internal report, Terre Armée International.
- [BAS91] **Bastick M., Schlosser F., Amar S., Canepa Y.,** 1991. « Efforts et déformations dans une culée expérimentale en Terre Armée ». *Comptes Rendus de la 10e conférence européenne de mécanique des sols et travaux de fondations*, Florence, Italie, pp. 661-664.
- [BAS07] **Basserville S. et Feyel F.,** 2007. « Méthodes de résolution en Eléments Finis », cours de l’ENS des Mines de Paris
- [BAT95] **Bathurst R.J., and Cai Z.,** 1995. “Pseudo-static seismic analysis of geosynthetic reinforced segmental retaining walls”. *Geosynthetics International*, Vol . 2, No. 5, pp. 789-832.
- [BAT98] **Bathurst R.J., and Hatami K.,** 1998. “Seismic Response Analysis of a Geosynthetic Reinforced Soil Retaining Wall”. *Geosynthetics International*, Vol. 5, Nos. 1&2, pp. 127-166.

- [BAT01] **Bathurst R.J., Walters D. L., Hatami K., and Allen T.M.,** 2001. "Full-scale performance testing and numerical modeling of reinforced soil retaining walls." IS Kyushu preprint, 3-28.
- [BEN11] **Bennani Y., Freitag N.,** 2011. "Equivalent stiffness of the connection". Internal report, Terre Armée, France.
- [BEN13] **Bennani Y., Soyez L., Freitag N.,** 2013. « Interprétation d'essais d'extraction de renforcements métalliques haute adhérence dans un massif en Terre Armée soumis à un chargement dynamique cyclique ». Proceedings of the 18<sup>th</sup> International Conference on Soil Mechanics and Geotechnical Engineering, Paris 2013.
- [BET92] **Bettess P.,** 1992. "Infinite elements". Penshaw Press, Sunderland (G B), xv + 264 p.
- [BOO05] **Boore D M; Bommer J.J.,** 2005. "Processing of strong-motion accelerograms: needs, options and consequences". Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 25, pp.93-115.
- [BOU11] **Bourgeois E., Soyez L., Le Kouby A.,** 2011. "Experimental and numerical study of the behavior of a reinforced earth wall subjected to a local load." Computers and Geotechnics 38 (4), 515-525.
- [BOU12] **Bourgeois E., Le Kouby A., Soyez L.,** 2012. "Influence of the strip-backfill interaction model in the analysis of the behavior of a mechanically stabilized earth wall." Soils and Foundations. DOI: [10.1016/j.sandf.2012.05.012](https://doi.org/10.1016/j.sandf.2012.05.012)
- [BRE10] **Breugnot A., Gotteland Ph., Villard P.,** 2010. "Numerical modelling of impacts on granular materials with a combined discrete - Continuum approach". Numerical Methods in Geotechnical Engineering - Proceedings of the 7th European Conference on Numerical Methods in Geotechnical Engineering, pp. 477-482.
- [BUR14] **Burlon S., Mroueh H., Cao J.P.,** 2014. "Skipped cycles' method for studying cyclic loading and soil-structure interface." Computers and Geotechnics, 61, pp. 209-220.
- [CAI95] **Cai Z., and Bathurst R.J.,** 1995. "Seismic Response Analysis of Geosynthetic Reinforced Soil Segmental Retaining Walls by

Finite Element Method”. *Computers and Geotechnics*, Vol. 17 No. 4, pp. 523-546.

- [CAO11] **Cao, J.P., Mroueh, H., Burlon S.**, 2011. “Analysis of soil-structure interaction problems involving a large number of loading cycles.” *Computational Geomechanics, COMGEO II - Proceedings of the 2nd International Symposium on Computational Geomechanics*, pp. 305-316.
- [CHA10] **Chau T.-L.**, 2010. « Effet de la corrosion des armatures sur le comportement des murs en remblai renforcé par des éléments métalliques », thèse Ecole des Ponts ParisTech – université Paris Est.
- [CHA14] **Chahour K, Lefeuve-Mesgouez G., Mesgouez A.**, 2014. “Spectral analysis of a railway track in contact with a multi-layered poroviscoelastic soil subjected to a harmonic moving load”, *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, Volume 64, Pages 24-37, ISSN 0267-7261.
- [CHO08] **Choudhury D., Bharti R., Chauhan S., and Indraratna B.**, 2008. “Response of Multilayer Foundation System beneath Railway Track under Cyclic Loading.” *J. Geotech. Geoenviron. Eng.*, 134(10), 1558–1563.
- [CHU11] **Chupin O., Piau. J-M.**, 2011. « Modélisation de la réponse dynamique d’une structure ferroviaire multicouche sous chargement roulant », CFM 2011.
- [COR77] **Corté J.-F.**, 1977. « La méthode des éléments finis appliquée aux ouvrages en terre armée ». *Bulletin de Liaison des Laboratoires des Ponts et Chaussées*, n°90, juil.-août 1977, pp. 37-48.
- [DEB87] **de Buhan P, Salençon J.**, 1987. « Analyse de la stabilité des ouvrages en sol renforcé par une méthode d’homogénéisation », *Revue Française de Géotechnique* 41, 29-43.
- [DEB00] **de Buhan P., Sudret B.**, 2000. “Micropolar multiphase model for materials reinforced by linear inclusions”. *Eur. J. Mech. A/Solids*, 19(6), pp. 669–687.
- [DEB08] **De Buhan P, Hassen G.**, 2008. “Multiphase approach as a generalized homogenization procedure for modelling the mac-

rosopic behaviour of soils reinforced by linear inclusions”, Eur J Mechanics A/ Solids (27), 662-679.

- [DEG00] **Degrande G., Lombaert G.**, 2000. “High-speed train induced free filed vibrations: in situ measurements and numerical modelling”. Proceedings of the International Workshop Wave 2000, Wave propagation, Moving load, Vibration reduction, Ruhr University Bochum, Germany, Balkema Edition, pp. 29-41.
- [DES98] **De Saedeleer B., Bilon S., Datoussaïd S., Conti C.**, 1998. “Vibrations induced by urban railway vehicles – modeling of the vehicle/track system”. Proceedings of the “transport and environment” study days of the BSMEE, Mons, Belgium.
- [ELI01] **Elias V., Christopher B.R., Berg R.R.**, 2001. “Mechanically stabilized earth walls and reinforced soil slopes design and construction guidelines.” Publication FHWA-NHI-00-043, FHWA, U.S. Dept. of Transp., Washington, D.C.
- [ELE04] **El-Emam M., and Bathurst R.J.**, 2004. “Experimental design, instrumentation and interpretation of reinforced soil wall response using a shaking table”, International Journal of Physical Modelling in Geotechnics, Vol. 4, No. 4, pp. 13-32.
- [ELE05] **El-Emam M., and Bathurst R.J.**, 2005. “Facing contribution to seismic response of reduced-scale reinforced soil walls”. Geosynthetics International, Vol. 12, No. 5, pp. 215-238.
- [ESV01] **Esveld C.**, 2001. “Modern Railway Track”. 2ème Edition, MRT-Productions. Pays-Bas.
- [FAB92] **Fabrizio M., Morro A.**, 1992. “Mathematical problems in linear viscoelasticity, SIAM studies in applied mathematics vol. 12”, SIAM, Philadelphia, 203p.
- [FER10] **Ferreira P.**, 2010. “Modelling and prediction of the dynamic behaviour of railway infrastructures at very high speeds”
- [FLO79] **Floss R., Thamm B.R.**, 1979. “Field measurements of a reinforced earth retaining wall under static and dynamic loading”. Comptes rendus du Colloque International sur le Renforcement des Sols : terre armée et autres techniques, Paris, 1979, Vol III, pp. 183-188.

- [FRE14] **Freitag N., Bennani Y., Joffrin P., Soyez L.,** 2014. « Stabilité d'un ouvrage Terre Armée sous Ligne Grande Vitesse : application au projet SEA Tours – Bordeaux ». Symposium International GEORAIL. IFSTTAR Marne-la-Vallée, 2014.
- [FRO08] **Froumentin, M., Hosseingholian, M., Mercadier, D., Charles, I.,** 2008. « Comportement des ouvrages sous charges ferroviaire – Application au cas de ouvrages de soutènement en sol renforcé et en remblai ». rapport interne, V2.0, CETE N-C/CER.
- [GRA82] **Grassie S.L., Gregory R.W., Harrison D. and Johnson K.L.,** 1982. “The dynamic response of railway track to high frequency vertical excitation”. *Journal Mechanical Engineering Science*, 24(2) : 77-90.
- [HAL03] **Hall L.,** 2003 “Simulations and analyses of train-induced ground vibrations in finite element models”, *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, Volume 23, Issue 5, Pages 403-413, ISSN 0267-7261.
- [HAS05] **Hassen G., de Buhan P.,** 2005. “A two-phase model and related numerical tool for the design of soil structures reinforced by stiff linear inclusions”, *European Journal of Mechanics – A/Solids* 24(6), 987-1001.
- [HAS11] **Hassen G., de Buhan P., Bourgeois E.,** 2011. “Design of piled-raft foundations by means of a multiphase model accounting for soil-pile interactions”, *2nd Int Symp on Computational Geomechanics (ComGeo II)*, 704-713.
- [HAT00] **Hatami K., and Bathurst R.J.,** 2000. “Effect of Structural Design on Fundamental Frequency of Reinforced-Soil Retaining Walls”. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, Vol. 19, pp. 137-157.
- [HEL01] **Helwany S. M. B., Budhu M., and McCallen D.,** 2001. “Seismic analysis of segmental retaining walls. I: Model verification.” *J. Geotech. Geoenviron. Eng.*, 127 (9), 741–749
- [HUG87] **Hughes T. J. R.,** 1987. “The finite element method - Linear static and dynamic finite element analysis”, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ.

- [HUM05] **Humbert, P., Dubouchet, A., Fezans, G., Remaud, D.,** 2005. "CESAR LCPC: A computation software package dedicated to civil engineering uses". Bull Lab Ponts et Chaussées 256–257, 7–37
- [IND98] **Indraratna B., Ionescu D., and Christie H.,** 1998. "Shear Behavior of Railway Ballast Based on Large-Scale Triaxial Tests." J. Geotech. Geoenviron. Eng., 124(5), 439–449.
- [IND10] **Indraratna B., Thakur P., and Vinod J.,** 2010. "Experimental and Numerical Study of Railway Ballast Behavior under Cyclic Loading." Int. J. Geomech., 10(4), 136–144.
- [INN09] **INNOTRACK,** 2009. "Deliverable 2.1.16. Final report on the modelling of poor quality sites"
- [JAN63] **Janbu, N.,** 1963. "Soil compressibility as determined by oedometer and triaxial tests". European Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering, Wiesbaden, Vol.1, pp. 19-25, and Vol. 2, pp. 17-21.
- [JON00] **Jones C.J.C., Sheng X., Petyt M.,** 2000. "Simulations of ground vibration from a moving harmonic load on a railway track", Journal of Sound and Vibration, Volume 231, Issue 3, Pages 739-751, ISSN 0022-460X, <http://dx.doi.org/10.1006/jsvi.1999.2559>.
- [JUR77] **Juran I.,** 1977. « Dimensionnement interne des ouvrages en terre armée ». Thèse de doctorat de l'Université Paris VI.
- [KNO93] **Knothe K., Grassie S.L.,** 1993. "Modelling of railway track and vehicle/track interaction at high frequencies". Vehivle System Dynamics, 22 : 209-262.
- [KOG03] **Kogut J., Lombaert G., François S., Degrande G., Haegeman W.,** 2003. "High Speed train induced vibrations: in situ measurements and numerical modeling". Proceeding of the 10th International Congress on Sound and Vibration, Stockholm, Suède.
- [KOS03] **Koseki J. et al.,** 2003. "Model tests on seismic stability of several types of soil retaining wall." Reinforced soil engineer-

- ing - Advanced in research and practice, H. Ling, D. Leshchinsky, and F. Tatsuoka eds., Marcel Dekker, New York
- [KOU09] **Kouroussis G.**, 2009 « Modélisation des effets vibratoires du trafic ferroviaire sur l'environnement ». Thèse de doctorat de la faculté polytechnique de Mons.
- [KRY96] **Krylov V.V.**, 1996. "Vibrational impact of high-speed trains, effect of track dynamics". Journal of Acoustical Society of America 100(5) : 3121-3134.
- [KUT90] **Kutter B.L., Casey J.A., and Romstad K.M.**, 1990. "Centrifuge modeling and field observations of dynamic behavior of reinforced soil and concrete cantilever retaining walls" Proc., 4th U.S. Natl. Conf. on Earthquake Engineering, 663-672.
- [LCP91] **LCPC et Sétra**, 1991. «Les ouvrages en terre armée : Recommandations et règles de l'art ». Guide technique, Réimpression de Juillet 1991.
- [LCP94] **LCPC et SETRA**, 1994. « Remblayage des tranchées et réfection des chaussées ». Guide Technique, Paris, France.
- [LCP03] **LCPC, Ed.**, 2003. « Recommandations pour l'inspection détaillée, le suivi et le diagnostic des ouvrages de soutènement en remblai renforcé par des éléments métalliques ». Guide technique.
- [LCP06] **LCPC**, 2006. CESAR-LCPC version standard - RÉFÉRENTIEL THÉORIQUE : Module DYNi, 6e édition, rapport interne, 16 p.
- [LES03] **Leshchinsky D.**, 2003. "Issue and nonissue in block walls as implied through computer-aided design." Reinforced soil engineering - Advanced in research and practice, H. Ling, D. Leshchinsky, and F. Tatsuoka eds., Marcel Dekker, New York
- [LIN01] **Ling H.I., Leshchinsky D., Chou N.N.S.**, 2001. "Post-earthquake investigation on several geosynthetic-reinforced soil retaining walls and slopes during the Ji-Ji earthquake of Taiwan". Soil Dynamics and Earthquake Engineering, Volume 21, Issue 4, Pages 297-313, ISSN 0267-7261.

- [LIN04] **Ling H., Liu H., Kaliakin V., and Leshchinsky D., 2004.** "Analyzing Dynamic Behavior of Geosynthetic-Reinforced Soil Retaining Walls." *J. Eng. Mech.*, 130(8), 911–920.
- [LIN05a] **Ling, H., Liu, H., and Mohri, Y., 2005.** "Parametric Studies on the Behavior of Reinforced Soil Retaining Walls under Earthquake Loading." *J. Eng. Mech.*, 131(10), 1056–1065.
- [LIN05b] **Ling H.I., and Leshchinsky D., 2005.** "Failure Analysis of Modular-Block Reinforced-Soil Walls during Earthquakes." *ASCE, Journal of Performance of Constructed Facilities*, 19(2), pp. 117-123.
- [LIN09] **Ling H. I., Leshchinsky D., Wang J-P, Mohri Y., Rosen, A., 2009** "Seismic Response of Geocell Retaining Walls: Experimental Studies". *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Eng.*, ASCE, 135(4), 515-524.
- [LOM09] **Lombaert G., Degrande G., 2009.** "Ground-borne vibration due to static and dynamic axle loads of InterCity and high-speed trains", *Journal of Sound and Vibration*, Volume 319, Issues 3–5, Pages 1036-1066, ISSN 0022-460X.
- [MAN07] **Manzanas J., Moreno J., Cuellar V., Andreu M.A., Navarro F., 2007.** "CEDEX's experimental facility for testing railway tracks". *Proceedings of the 14th European Conference on Soil Mechanics and Geotechnical Engineering*, Madrid, Spain, pp. 2037-2055
- [MAR13] **Martin A., Chupin O., Piau J-M., Hicher P-Y., 2013.** « Effets des paramètres de conception des Lignes à Grande Vitesse sur les niveaux d'accélération dans le ballast », 21ème Congrès Français de Mécanique, 26 au 30 août 2013, Bordeaux, France(FR)
- [MUR79] **Murray R.T. et Al., 1979.** "Pullout tests on reinforcements embedded in uniformly graded sand subjected to vibration. Design parameters in geotechnical engineering", *Proceedings of the 7<sup>th</sup> European Conference on Soils Mechanics and Foundation Engineering*, Brighton, Vol.III, 115-120.
- [NAV06] **Navi P., 2006.** « Propriétés acoustiques des matériaux, Propagation des ondes planes harmoniques ». *Presses polytechniques et universitaire romandes*, France.

- [NGU02] **Nguyen V.H.**, 2002. « Comportement dynamique de structures non-linéaires soumises à des charges mobiles ». Thèse de doctorat, École Nationale des Ponts et Chaussées.
- [NGU06] **Nguyen VH, Duhamel D.**, 2006. “Finite element procedures for non-linear structures in moving coordinates. Part 1 : infinite bar under moving axial loads”, *Comput. Struct.*, 84 (21): 1368-1380.
- [NGU14] **Nguyen VT.**, 2014. « Analyse sismique des ouvrages renforcés par inclusions rigides à l’aide d’une modélisation multiphasique », Université Paris-Est.
- [PAO06] **Paolucci R., Spinelli D.**, 2006. “Ground Motion Induced by Train Passage”. *Journal of Engineering Mechanics* 132(2) : 201-210.
- [PAP12] **Papon A., Yin Z.-Y., Riou Y. et. Hicher P.-Y.**, 2012. “Time homogenization for clays subjected to large numbers of cycles”, *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*.
- [PEC14] **Pecker A.**, « Dynamique des structures et des ouvrages », cours de l’École des Ponts Paristech, 2014.
- [PIC02] **Picoux B., Rotinat R., Regoin J-P., Le Houedec D., Quetin F., et al.**, 2002. « Modèle prédictif de propagation des vibrations à partir de véhicules ferroviaires se déplaçant à vitesse constante ». *Acoustique et Techniques*, 30, pp.4-7.
- [PIC03] **Picoux B, Rotinat R, Regoin JP, Le Houedec D**, 2003. ”Prediction and Measurements of vibrations from a railway track lying on a peaty ground”, *Journal of sounds and vibrations* 267 (3), 575-589.
- [PIC05] **Picoux B., Le Houédec D.**, 2005. “Diagnosis and prediction of vibrations from railway trains”. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering* 25 (12), 905-921.
- [PUZ00] **Puzrin A. M., Shiran A.**, 2000. “Effects of the constitutive relationship on seismic response of soils”. *Soils dynamics and earthquake engineering*. Vol 19, 5, pp305-318.

- [REI07] **Reiffsteck P., Arbaut J., Sagnard N., Khay M., Subrin D., Chapeau C., Levacher D., 2007.** “Laboratory measurements of the mechanical behavior of heterogeneous soils”. Bull Lab Ponts Chaussées, 268-269:59-82.
- [RFF06] **RFF, SNCF, 2006** « RFF-SNCF IN 3279 – Référentiel Technique pour la réalisation des LGV, partie Equipements Ferroviaires - Tome EF1 : Voie Ferrée » édition du 30-04-2006
- [RHA13] **Rhayma N., Bressolette Ph., Breul P., Fogli M., Saussine G., 2013.** “Reliability analysis of maintenance operations for railway tracks”, Reliability Engineering & System Safety, Volume 114, Pages 12-25, ISSN 0951-8320.
- [RIC06] **Ricci L., 2006.** « Modélisation discrètes et continues des voies ferrées ballastées ». Thèse de doctorat, École Nationale des Ponts et Chaussées.
- [RÜC82] **Rücker W., 1982.** “Dynamic interaction of a railroad-bed with the subsoil”. Proceeding of the Soil Dynamics and Earthquake Engineering Conference, vol. 2, 435-448, Southampton (Angleterre).
- [RUN01] **Runser D.J., Fox P.J, and Bourdeau, P.L., 2001.** “Field Performance of a 17 m-High Reinforced Soil Retaining Wall”, Geosynthetics International, Vol 8, No. 5, pp. 367-391.
- [SAL83] **Salençon J. et Halphen B., 1983.** « Viscoélasticité », Presses de l’École Nationale des Ponts et Chaussées, Paris, 92 pages
- [SAU04] **Saussine G., 2004.** « Contribution à la modélisation de granulats tridimensionnels : application au ballast ». Université Montpellier II - Sciences et Techniques du Languedoc.
- [SAU14] **Saussine G., 2014.** « Ballast mechanics ». Special Lecture, Railway Geomechanics Session, Alert Geomaterial Workshop, Aussois 2014.
- [SCH79] **Schlosser F. et Guilloux A., 1979.** « Le frottement sol-armature dans les ouvrages en terre armée ». Colloque international sur le renforcement des sols. Paris.
- [SEE86] **Seed R. B., Collin J. G., and Mitchell J. K., 1986.** “FEM analyses of compacted reinforced soil walls.” Proc., Second

Symp. on Numerical Models in Geomechanics, Balkema, Rotterdam, The Netherlands, 553–562.

- [SEG88] **Segrestin, P., and Bastick, M. J.**, 1988. “Seismic design of reinforced earth retaining walls—The contribution of finite element analysis.” Theory and practice of earth reinforcement, Balkema, Rotterdam, The Netherlands, 577–582
- [SEM97] **Semblat J.-F.**, 1997. “Rheological interpretation of Rayleigh Damping Ratio”, Journal of Sound and Vibration, 206 (5), pp. 741-744.
- [SEM05] **Semblat J-F, Dangla P.**, 2005. « Modélisation de la propagation d’ondes et de l’interaction sol-structure : approche par éléments finis et éléments de frontière. » Bulletin des laboratoires des Ponts et Chaussées 256-257 Juillet-Août-Septembre 2005.
- [SEM09] **Semblat J.-F., Pecker A.**, 2009. “Waves and Vibrations in Soils: Earthquakes, Traffic, Shocks, Construction Work”, UISS Press.
- [SET79] **Sétra, LCPC**, 1979. « Les ouvrages en terre armée : Recommandations et règles de l’art ». Guide technique.
- [SHE91] **Shewbridge S.E., and Sousa J.B.**, 1991. ”Dynamic Properties of Reinforced Sand.” J. Geotech. Engrg., 117(9), 1402–1422.
- [SNC85] **SNCF**, 1985. « Ouvrages en Terre Armée ». IN0203 (anciennement Notice Générale – EF 2 B 21 n°1)
- [SNC99] **SNCF**, 1999. « Spécifications techniques pour la fourniture de granulats utilisés pour la réalisation et l’entretien de voies ferrées. » IN 0091, Mars 1999, Paris, France.
- [SOU12] **Soubestre J., Boutin C.**, 2012. “Non-local dynamic behaviour of linear fiber reinforced materials”, Mech. Mater. 55, 16-32.
- [SOY09] **Soyez L.**, 2009. « Contribution à l’étude du comportement des ouvrages en sol renforcé soumis à des charges d’exploitation ferroviaire (charges dynamiques et cycliques). Thèse de doctorat de l’École des Ponts Paristech.

- [SUD99] **Sudret B.** 1999. « Modélisation multiphasique des ouvrages renforcés par inclusions ». Thèse de l'ENPC, 364 p
- [SUD01] **Sudret B., de Buhon P.,** 2001. "Multiphase model for reinforced geomaterials – Application to piled raft foundation and rock-bolted tunnels", *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomach.* 25, 155-182.
- [SUI02] **Suiker A.S.J.,** 2002. "The mechanical behaviour of ballasted railway tracks". Thèse de doctorat, Delft Technical University.
- [TAI12] **Terre Armée International,** 2012. « Fonctionnement de la Terre Armée ». Document interne.
- [TAK99] **Takahashi A., Takemura j., and Izawa J.,** 1999. "Dynamic behavior of vertical geogrid-reinforced soil during earthquake." *Proc., Int. Symp. on Slope Stability Engineering,* N.Yagi, T. Yomagami, and J.-C. Jiang, eds., Balkema, Rotterdam, The Netherlands, Vol. 2, 991-996.
- [TAK03] **Takemura J., and Takahashi A.,** 2003. "Centrifuge modeling of seismic performance of reinforced earth structure." *Reinforced soil engineering - Advanced in research and practice,* H. Ling, D. Leshchinsky, and F. Tatsuoka eds., Marcel Dekker, New York
- [TAT98] **Tatsuoka F., Koseki J., Tateyama M., Munaf Y., and Horii L.,** 1998. "Seismic stability against high seismic loads of geosynthetic-reinforced soil retaining structures." 6th International Conference on Geosynthetics, Atlanta, pp. 103-142.
- [VER79] **Verrier G.,** 1979. « Construction d'un remblai en terre armée sous une voie ferrée ». *Comptes rendus du Colloque International sur le Renforcement des Sols : terre armée et autres techniques,* Paris, 1979, Vol II, pp. 385-390.
- [VIL09] **Villard P., Chevalier B., Le Hello B., Combe G.,** 2009. "Coupling between finite and discrete element methods for the modelling of earth structures reinforced by geosynthetic", *Computers and Geotechnics,* Volume 36, Issue 5, Pages 709-717, ISSN 0266-352X.
- [WAR06] **Wartman J., Rondinel-Oviedo E., and Rodriguez-Marek A.,** 2006. "Performance and Analyses of Mechanically Stabilized

Earth Walls in the Tecomán, Mexico Earthquake.” J. Perform. Constr. Facil., 20(3), 287–299.

- [YER03] **Yerli H.R., Kacin S. and Kocak S.**, 2003. “A parallel finite-infinite element model for two-dimensional soil-structure interaction problems”. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 23 : 249-253.
- [YOG92] **Yogendrakumar M., Bathurst R., and Finn W.**, 1992. ”Dynamic Response Analysis of Reinforced Soil Retaining Wall.” J. Geotech. Engrg., 118(8), 1158–1167.
- [ZHA94] **Zhai W., Sun X.**, 1994. “A detailed model for investigating vertical interaction between railway vehicle and track”. Vehicle System Dynamics, 23 (Supplement), 603-615.
- [ZHA10] **Zhai W., Song E.**, 2010. “Three dimensional FEM of moving coordinates for the analysis of transient vibrations due to moving loads”, Computers and Geotechnics 37, 164-174.