



**HAL**  
open science

# Approches numériques pour l'analyse globale d'écoulements pariétaux en régime subsonique

Matthieu Merle

► **To cite this version:**

Matthieu Merle. Approches numériques pour l'analyse globale d'écoulements pariétaux en régime subsonique. Mécanique des matériaux [physics.class-ph]. Ecole nationale supérieure d'arts et métiers - ENSAM, 2015. Français. NNT : 2015ENAM0026 . tel-01294621

**HAL Id: tel-01294621**

**<https://pastel.hal.science/tel-01294621>**

Submitted on 29 Mar 2016

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

École doctorale n° 432 : Sciences des métiers de l'ingénieur

**Doctorat ParisTech**  
**T H È S E**

pour obtenir le grade de docteur délivré par

**l'École Nationale Supérieure d'Arts et Métiers**  
**Spécialité “ Mécanique et Matériaux ”**

*présentée et soutenue publiquement par*

**Matthieu MERLE**

le 25/09/15

**Approches numériques pour l'analyse de stabilité globale d'écoulements  
pariétaux en régime subsonique**

Directeurs de thèse : **Uwe EHRENSTEIN, Jean-Christophe ROBINET**

**Jury**

<b>M. Emmanuel LERICHE</b> , Professeur, LML, Université de Lille 1, Villeneuve d'Ascq	Examineur
<b>M. Jean-Philippe BRAZIER</b> , Ingénieur de recherche, ONERA DMAE, Toulouse	Rapporteur
<b>M. Emmanuel CREUSE</b> , Professeur, Laboratoire Paul Painlevé, Université de Lille1, Villeneuve d'Ascq	Rapporteur
<b>M. Christophe AIRIAU</b> , Professeur, IMFT, Université Paul Sabatier, Toulouse	Examineur
<b>M. Damien BIAU</b> , Maître de Conférences, DynFluid, Arts et Métiers ParisTech, Paris	Examineur
<b>M. Uwe EHRENSTEIN</b> , Professeur, IRPHE, Université d'Aix-Marseille, Marseille	Examineur
<b>M. Jean-Christophe ROBINET</b> , Professeur, DynFluid, Arts et Métiers ParisTech, Paris	Examineur

**T  
H  
È  
S  
E**



# Remerciements

*Je tiens à remercier tous d'abord mes directeurs de thèse Uwe EHRENSTEIN et Jean-Christophe ROBINET. La réalisation d'une thèse n'est pas chose facile mais elle l'est d'avantage lorsque les personnes avec qui vous travaillez vous apportent leur soutien et leur expérience. Pour cela je vous remercie. Je remercie également Uwe pour le travail que nous avons effectué ensemble malgré la distance. Ca n'a pas été simple mais malgré cela j'ai réellement apprécié nos échanges ainsi notre manière de travailler.*

*Je voudrais ensuite remercier les rapporteurs Jean-Philippe BRAZIER et Emmanuel CREUSE pour l'intérêt et les remarques apportés aux manuscrit ainsi que l'ensemble des membres du jury Christophe AIRIAU, Emmanuel LERICHE et Damien BIAU pour avoir accepté d'être présents le jour J pour juger la qualité de mon travail.*

*Je remercie bien entendu l'ensemble des membres du laboratoire Cedric, StePHania, Xavier G., Simon, Xavier M., Virginie, DamDam, Paola, Alain ... Tous ont contribué à cette expérience et se devaient d'être remerciés dans ce manuscrit.*

*Mes remerciements vont également aux doctorants des plus anciens Jérémie, Guillaume, RimK, Rocio, Jean-Christophe(Maître Bizu) aux plus jeunes Corentin(Bizu), Elie(LaPince), Miloud, Lucas, Elio, Alessandro, Mirko... sans oublier ceux qui m'ont suivis dès la première JDD, en passant par la JDD 2, les pauses hélico, les conf's, les apéros, bref tous ce qui a pu se passer au et en dehors du bureau jusqu'au jour de la soutenance Leslie, Octavie, Grégoire, Wouter sans oublier super Ali-Marigo (ne rentre pas trop vite). Particulièrement, je remercie Ronan et Florian avec qui les jours de moins bien étaient quand même bien et qui resteront, je l'espère, des proches encore pendant longtemps.*

*Enfin mes remerciements vont à mes parents Patrick et Véronique, mon frère Marc-Alexandre, l'ensemble de mes amis d'enfance ELena, Guilax, Sebich, Bert, Pav, Alex ainsi qu'à celle qui partage... mon appartement Floriane qui me permettent chaque jour d'être ce que je suis et sans qui ce manuscrit n'aurait sans doute pas existé.*

*Bonne lecture*



# Glossaire

## Notations

$\mathbf{q}$	vecteur d'état ou champ instantané
$\mathbf{q}_0$	solution stationnaire
$\mathbf{q}'$	champ de perturbation
$\rho$	masse volumique
$\mathbf{u} = (u, v)^T$	vecteur vitesse
$E$	énergie totale
$T$	température
$p$	pression
$a$	célérité du son
$\Sigma$	tenseur des contraintes visqueuses
$\mathbf{F}$	forces volumiques
$\phi_\tau$	chaleur massique apportée
$\gamma$	rapport des chaleurs spécifiques
$X_{ref}$	grandeurs de référence
$X_\infty$	grandeurs en dehors de la couche limite
$Re$	nombre de Reynolds
$Pr$	nombre de Prandtl
$Ma$	nombre de Mach
$St$	nombre de Strouhal
$\epsilon$	amplitude infinitésimale
$\omega$	pulsation complexe
$\omega_r$	pulsation propre
$\omega_i$	taux d'amplitude
$\beta$	nombre d'onde transverse

$\delta_l$  épaisseur de déplacement de couche limite

$\theta$  épaisseur de quantité de mouvement de couche limite

## **Abréviations**

$x^*$  correspond à la valeur adimensionnée de  $x$

# Table des matières

<b>Avant-propos</b> .....	11
<b>1 Equations et cadre général de l'étude</b> .....	25
1.1 Équations de Navier-Stokes compressibles et système de stabilité linéaire ...	25
1.1.1 Mise sous forme adimensionnelle .....	26
1.2 Cadre théorique de l'étude de stabilité d'un écoulement .....	27
1.2.1 Généralités .....	27
1.2.2 État d'équilibre : notion de champ de base .....	29
1.2.3 Système linéarisé : l'approche modale .....	30
1.2.3.1 Écoulement de base homogène dans une direction de l'espace ..	31
1.3 Écoulements oscillateurs ou amplificateurs de bruit .....	32
1.4 Limites de l'approche modale .....	33
<b>2 Méthodes numériques</b> .....	35
2.1 Méthodes spectrales .....	35
2.1.1 Méthode d'approximation .....	35
2.1.2 Discrétisation numérique .....	36
2.1.3 Changement de variable .....	37
2.1.4 Décomposition de domaine .....	39
2.2 Résolution numérique du champ de base .....	41
2.3 Problème aux valeurs propres .....	43
2.3.1 Méthode d'intégration temporelle .....	43
2.3.2 Approche fréquentielle .....	44
2.3.2.1 Méthode d'Arnoldi inverse .....	44
2.3.2.2 Caractère creux du problème aux valeurs propres .....	45
2.3.2.3 Parallélisation .....	45
<b>3 Conditions limites et validations</b> .....	49
3.1 Conditions aux limites du problème stationnaire .....	49
3.2 Conditions aux limites linéarisées .....	50
3.2.1 Généralités .....	50
3.2.2 Conditions aux limites de type zone absorbante .....	52
3.2.3 Expression des équations d'Euler linéarisées dans les couches PML ...	54
3.2.4 Expression des équations de Navier-Stokes linéarisées dans les couches PML .....	55
3.3 Illustrations et validations .....	56
3.3.1 Utilisation des zones absorbantes pour la propagation acoustique avec viscosité en domaine temporel .....	56
3.3.1.1 Solution de référence .....	57
3.3.1.2 Zone tampon : Za1 .....	58

3.3.1.3 Zone tampon : Za2 .....	58
3.3.1.4 Zone tampon : Za3 .....	60
3.3.2 Utilisation des conditions aux limites non-réfléchissantes appliquées aux études de stabilité globale : cas de couche limite .....	63
<b>4 Stabilité globale : écoulements de cavité et de bosse .....</b>	<b>77</b>
4.1 Écoulement rayonnant : cavité .....	77
4.2 Écoulement derrière une géométrie de type bosse .....	84
<b>5 Écoulement de bosse : effets tridimensionnels .....</b>	<b>93</b>
5.1 Présentation du champ de base et du spectre d'instabilité de référence .....	94
5.2 Effets de compressibilité sur la dynamique des instabilités transverses .....	98
<b>Conclusion .....</b>	<b>103</b>
<b>Bibliographie .....</b>	<b>107</b>
<b>A Méthode d'Arnoldi .....</b>	<b>117</b>
<b>B Résolution de systèmes linéaires creux .....</b>	<b>119</b>

# Avant-propos

La notion de couche limite apparaît lorsque l'on traite les écoulements de fluides visqueux en présence de paroi. En effet, lorsque un écoulement rencontre une paroi solide, les effets de viscosité font que le fluide adhère à cette dernière. Il s'ensuit une zone adjacente à la paroi, appelée couche limite, dans laquelle l'écoulement varie dans la direction normale à la paroi, sa vitesse évoluant de zéro à celle de l'écoulement entrant uniforme. Lorsque la géométrie de la paroi présente un élargissement, le fluide décélère et la pression augmente, ce qui conduit à un gradient de pression adverse qui s'oppose à l'écoulement dans la couche limite. Dans certaines configurations, les gradients de pression sont suffisamment importants et on assiste au renversement local du sens de l'écoulement proche paroi. Il s'ensuit une zone de recirculation associée au décollement de la couche limite, que l'on suppose tout d'abord laminaire, c'est-à-dire libre de fluctuations en temps. Ces zones de recirculation ont cependant la particularité de se déstabiliser rapidement et de donner naissance à un écoulement de plus en plus désordonné, avant qu'il ne devienne turbulent.

D'un point de vue industriel l'étude des décollements de couche limite laminaire revêt une importance fondamentale car les efforts mécaniques appliqués sur la paroi augmentent de façon significative avec l'apparition de ces instabilités. On peut citer à titre d'exemple le phénomène de décrochage aérodynamique d'un profil d'aile qui traduit la chute brutale de la portance d'un avion ou encore l'existence d'efforts latéraux au sein de tuyères de moteurs fusées. L'étude de la stabilité de couches limites laminaires décollées est une étape indispensable pour comprendre la dynamique et la transition vers la turbulence de ces écoulements de paroi.

## Comportement des couches limites décollées

Les premières études expérimentales de Von Doenhoff ([129],[128]) ont permis de mettre en évidence le phénomène de transition laminaire-turbulent associé aux bulbes de décollement formés sur une plaque plane. Il apparaît que les écoulements laminaires décollés sont soumis à plusieurs types d'instabilités. Afin de réaliser l'étude des différents scénarios proposés pour expliquer le phénomène de transition, il est nécessaire d'introduire les notions d'instabilités convectives et d'instabilités absolues (Huerre et Monkewitz [66]), dans le contexte de la stabilité dite linéaire, c'est-à-dire lorsqu'on cherche à décrire la réponse de l'écoulement à des petites perturbations (appelées perturbations infinitésimales dans un langage mathématique). Un écoulement est dit linéairement stable, si de telles perturbations ne sont pas amplifiées en temps. Si par contre les perturbations sont amplifiées en temps, l'écoulement

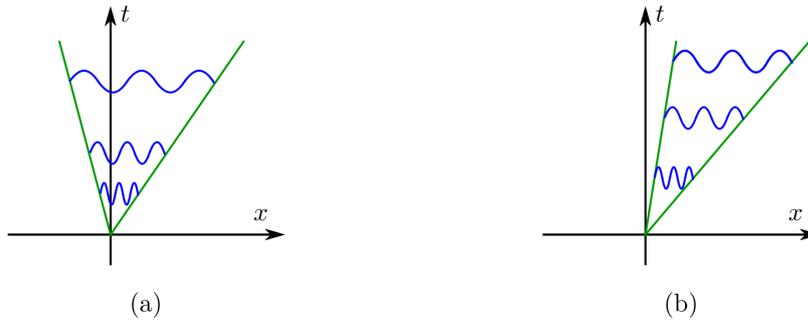


FIGURE 1 – Illustration de l’évolution dans un plan espace/temps d’une perturbation dans un écoulement instable présentant une dynamique de type (a) résonateur ou (b) amplificateur sélectif de bruit (illustrations tirées de [92])

est instable. Dans des conditions d’écoulements dits ouverts, c’est-à-dire faiblement confinés comme par exemple les écoulements de paroi, deux cas de figure différents peuvent se présenter. Soit les perturbations sont advectées suivant la direction de l’écoulement et en l’absence de sources d’excitations extérieures, l’écoulement reviendra à son état d’équilibre. On parle alors d’écoulements convectivement instables, ce qui est notamment le cas pour des écoulements de paroi qui ne présentent pas de zones de recirculation, de tels écoulements étant des amplificateurs sélectifs de bruit. Dans d’autres situations les perturbations n’évoluent plus dans une direction privilégiée, mais sont plutôt auto-entretenues, s’amplifiant en espace et en temps, même en l’absence de bruit entretenu. L’ensemble du système finit ainsi par être perturbé et l’instabilité (linéaire) se manifeste dans ce cas souvent par une oscillation globale de l’écoulement à une fréquence temporelle bien déterminée. Dans le cas des écoulements de paroi, un tel comportement peut notamment apparaître pour des zones où l’écoulement n’évolue plus dans une seule direction, comme précisément lorsqu’il y a des décollements importants. On parle alors d’écoulements globalement instables qui se comportent comme des résonateurs. Ces différents comportements sont schématisés figure 1.

Les travaux de Tani ([120]) puis de Gaster ([57]) ont permis de faire une première classification des décollements. Pour de faibles nombres de Reynolds (rapport entre forces inertielles et forces visqueuses), les décollements ‘courts’ présentent de petites zones de recirculation. Les bulles de recirculation ainsi formées font apparaître sur le profil de vitesse un point d’inflexion qui viendra déstabiliser l’écoulement par une instabilité convective de type Kelvin-Helmholtz ([46]).

Les travaux réalisés expérimentalement par Dovgal [45] et les simulations numériques directes (DNS pour Direct Numerical Simulation) de transition contrôlée (Rist et Maucher [103]) viennent confirmer ce mécanisme. A partir d’un certain nombre de Reynolds critique, le phénomène de *bursting* ([84]) provoque l’augmentation brutale de la longueur de recirculation. Des décollements ‘longs’ apparaissent sur la paroi. On assiste alors fréquemment à l’apparition d’une dynamique auto-entretenu de basse fréquence qui se manifeste par une sorte de “battement” du bulbe de recirculation. De nombreuses études ont été réalisées afin de comprendre les mécanismes

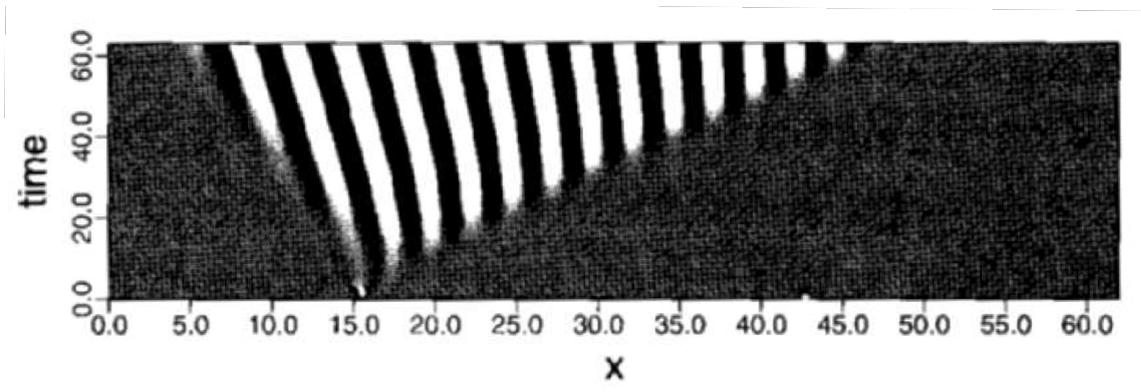


FIGURE 2 – Diagramme spatio-temporel construit à partir de la valeur de la perturbation à la paroi. La perturbation remonte l'écoulement, caractéristique d'une instabilité absolue [54]

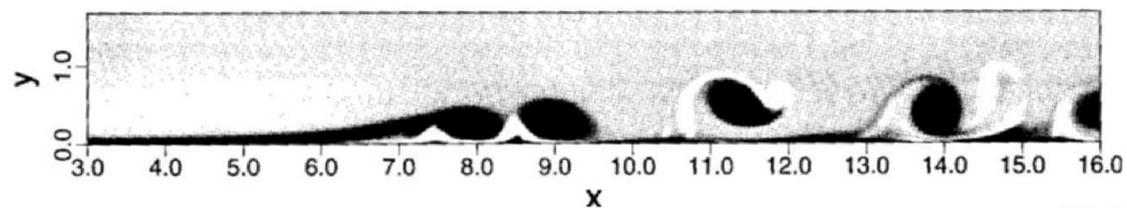


FIGURE 3 – Champ de vorticité instantané représentant un lâcher de structures tourbillonnaires ([54])

d'apparition de ce phénomène.

## Aspect 2D des écoulements décollés : instationnarités basse fréquence

Pour des décollements de couche limite présentant une zone de recirculation suffisamment importante, les simulations numériques bidimensionnelles de Pauley et al. ([94]) ont mis en évidence qu'un écoulement décollé peut devenir globalement instable sous certaines conditions. L'étude de la stabilité linéaire bidimensionnelle de profils locaux de vitesse associés à une région du décollement menée par Hammond et Redekopp ([62]) a démontré la possibilité de transition d'une instabilité convective à une instabilité absolue, pour des régions avec suffisamment d'écoulement de retour. Cependant, les fréquences typiques de ces instabilités sont plus grandes que les fréquences associées à la dynamique d'instabilité décrite par Pauley et al. ([94]) Plus récemment Fasel et Postl ([54]) ont également mis en évidence un phénomène de lâcher de structures cohérentes représenté figure 3, communément appelé '*vortex shedding*', qui apparaît de manière synchronisée avec la fréquence de l'instabilité basse fréquence du décollement.

Les zones de recirculation présentent une couche de mélange qui est le siège d'instabilités de nature convective type Kelvin-Helmholtz. Il y a une certaine évidence, que l'évolution spatiale de ces instabilités et leurs interactions sont à l'origine de

ce phénomène de 'respiration' du bulbe de décollement. Pour les écoulements incompressibles ou à faibles vitesses, de nombreuses études (Eaton et Johnson ([48]); Kiya et Sasaki ([71]); Cherry et al ([35]); Roos et Kegelman ([105]); Farabee et Casarella ([53]); Castro et Haque ([33]); Driver et al ([47])), ont montré que le nombre de Strouhal, c'est-à-dire la fréquence adimensionnée associée au phénomène basse fréquence, est environ égal à 0.12, les quantités de référence étant la vitesse de l'écoulement entrant et la longueur de la zone décollée.

Le premier scénario pour décrire le lien entre structures convectives et respiration du bulbe revient à Eaton et Johnson ([48]), qui suggèrent que le phénomène basse-fréquence provient d'un déséquilibre entre quantité de matière entraînée dans la zone de recirculation et celle rejetée en aval du point de recollement. Pour des décollements de couche limite induits par la présence d'une plaque plane dans l'écoulement (Cherry et al. [35]), les spectres de pression à la paroi montrent l'existence de deux fréquences associées aux instabilités les plus énergétiques. La première associée aux instabilités moyennes fréquences ( $St = 0.7$ ) de Kelvin-Helmholtz et la seconde associée aux instabilités basses fréquences ( $St = 0.12$ ). Farabee et Casarella ([53]) montrent que les instabilités de types moyennes fréquences se trouvent être les plus énergétiques au niveau du point de recollement tandis que les instabilités basses fréquences le sont au niveau du point de décollement pour une géométrie du type marche descendante.

La visualisation des champs de vitesse associés aux mesures de pression pariétale d'un écoulement de marche descendante fournie par Driver et al ([47]) a permis d'émettre une explication alternative au phénomène basse-fréquence. Ces auteurs postulent en effet que la taille de la bulle de recirculation augmente par réinjection de fluide de par la présence des structures tourbillonnaires de type Kelvin-Helmholtz qui se forment au niveau de la couche de mélange, jusqu'à ce que cette dernière atteigne une certaine valeur critique. Au-delà de cette valeur critique, les structures tourbillonnaires ont une taille telle qu'elles sont éjectées de la couche de mélange en aval du décollement. Elles prélèvent alors de la quantité de matière au décollement qui voit ainsi sa taille diminuer petit à petit jusqu'à retourner à son état de base.

Un scénario de mécanisme auto-entretenu associé à une boucle de rétroaction a également été développé (Mabey ([76]), Kiya Sasaki ([72]), Roos et Kegelman ([105]), Singurdson ([113])). Lorsqu'un tourbillon de grande taille issu de la couche de mélange impacte la paroi, une perturbation de pression se forme. Cette dernière va alors remonter l'écoulement jusqu'au point de décollement et modifier ainsi le processus d'amalgame des tourbillons proposé par Kiya et Sasaki ([72]). Ces différentes études expérimentales montrent clairement que le forçage de l'écoulement à moyenne fréquence au niveau du point de recollement pilote le processus d'amalgame des tourbillons, mais aucune étude n'a cependant permis de montrer que la remontée d'informations se faisait dans la gamme de fréquence d'apparition des structures convectives.

Les écoulements de paroi décollés ont également fait l'objet de quelques travaux numériques, notamment en régime incompressible. Pour une géométrie de type bosse, Ehrenstein et Gallaire [51] montrent qu'au delà d'un certain nombre de Reynolds critique, l'écoulement devient globalement instable et présente une dynamique linéaire basse fréquence appelée '*flapping*'. Ces résultats seront présentés en détail par

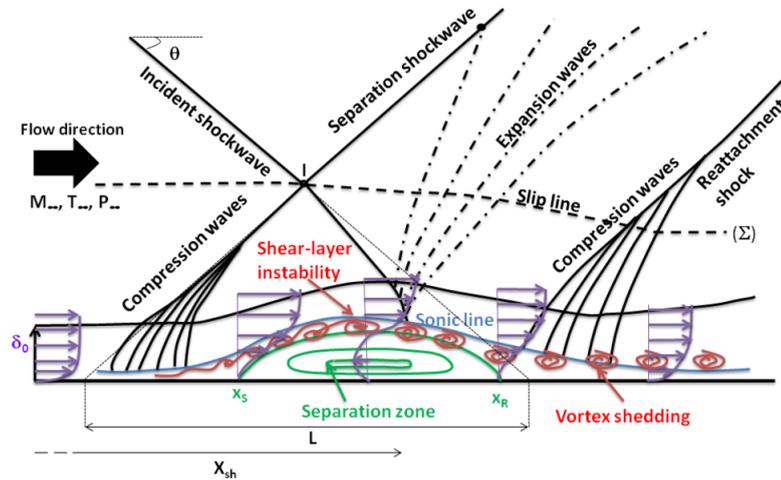


FIGURE 4 – Représentation de la configuration de l’interaction onde de choc couche limite par réflexion de choc

la suite. Plus récemment les travaux de Cherubini et al. [36] ont permis de confirmer ce scénario en étudiant le décollement de plaque plane induit par aspiration de l’écoulement sur la paroi supérieure.

Parmi les études de stabilité globale qui ont permis de mettre en avant le caractère oscillateur des décollements induits par des géométries, on peut citer également le cas du cylindre ([90]), de la géométrie d’une marche descendante ([81],[22], [80]), ou encore des décollements induits par une cavité ([115], [29], [14]). Parmi les études de stabilité globale d’écoulements de paroi avec un comportement d’instabilité de type amplificateur de bruit, on trouve les écoulements de couche limite ([50], [6], [5]).

Les travaux mentionnés ci-dessus portent sur des écoulements en régime incompressible, et un des objectifs de la thèse est précisément de proposer des outils afin d’appréhender les effets de compressibilité sur la stabilité d’écoulements de paroi. Si l’on considère un régime compressible supersonique, la configuration académique de l’interaction onde de choc/couche limite a donné lieu à de nombreuses études. Le décollement est alors induit par l’épaississement local de la couche limite au niveau du pied de choc et le gradient de pression ainsi formé entraîne le décollement de cette dernière. L’écoulement est alors accéléré sur la partie montante du décollement et un second choc communément appelé ‘*choc de décollement*’ ou ‘*choc réfléchi*’ se forme. La géométrie de l’interaction onde de choc/couche limite est représentée sur la figure 4. Dans la couche de mélange, des structures similaires aux instabilités de Kelvin-Helmholtz apparaissent. On assiste ainsi dans certaines configurations au battement basse fréquence du choc de décollement. Ce phénomène est à l’origine de nombreux travaux expérimentaux (Deléry ([42]), Dolling ([44]), Smits et Dussauge ([117]), Piponniau [98]) et numériques (Crouch [41], Sartor [109], Agostini [2]). Ils mettent ainsi en évidence l’existence d’oscillations à basse fréquence avec nombre de Strouhal (fréquence adimensionnée par le rapport entre vitesse incidente et la longueur du décollement  $L$ , cf. figure 4) de l’ordre de 0.03, en rappelant que ces phénomènes basses fréquences en régime incompressible ont un Strouhal de l’ordre

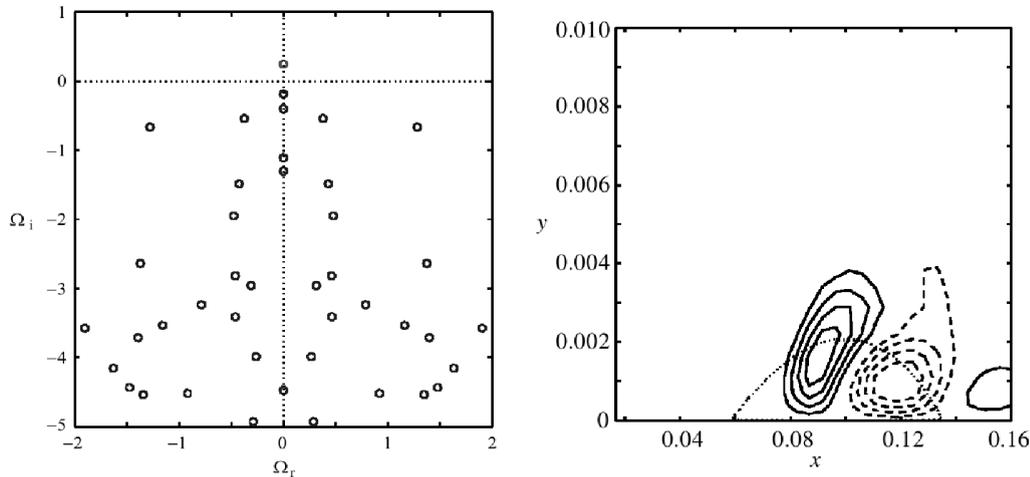


FIGURE 5 – (a) Spectre global issu du calcul de Theofilis *et al.* ([122]) sur une couche limite décollée pour un nombre d’onde transverse  $\beta = 20$ . (b) Fonction propre  $\hat{w}$  associée au mode global instable

de  $St = 0.12$ . On peut alors se demander s’il y a des mécanismes génériques, aussi bien en régime incompressible que compressible, qui expliqueraient l’apparition de ces phénomènes à basses fréquences.

### Aspect 3D des écoulements décollés : instabilité stationnaire

Nous venons de voir que les décollements de couche limite sont le siège d’apparition d’instabilités bidimensionnelles à moyennes et basses fréquences. Cependant, les écoulements décollés dans une géométrie bidimensionnelle présentent également des instabilités de nature tridimensionnelle, périodique dans la direction transversale. Les instabilités primaires de type KH (Kelvin-Helmholtz) sont amplifiées tout en étant convectées. Lorsque ces instabilités primaires sont suffisamment importantes en amplitude, l’écoulement peut devenir à nouveau instable et des instabilités secondaires, le plus souvent tridimensionnelles, se développent, engendrant rapidement la transition vers la turbulence. L’intérieur de la zone de recirculation est caractérisé par des lignes de courant de forme elliptique qui peuvent précisément donner naissance à ce qui est appelé une instabilité linéaire elliptique (Bayly ([19])). L’existence de lignes de courant fermées peut également induire des instabilités non-oscillantes de type centrifuge, lorsque le critère connu sous le nom de “critère de circulation de Rayleigh” est vérifié (Drazin et Reid ([46])). De telles instabilités linéaires tridimensionnelles, dans une approche globale étant donnée la nature non parallèle des écoulements décollés, ont été étudiées par exemple pour le cas d’une cavité (Théofilis *et al.* [121]), d’une géométrie de type bosse (Gallaire *et al.* [56]), d’une marche descendante (Beaudoin *et al.* [20]), ou encore pour un profil d’aile (Kitsios [70]). La figure 5 montre un exemple quant à ces perturbations globales instables, tridimensionnelles et non oscillantes. Très peu d’études ont porté sur les effets de compressibilité sur ces instabilités tridimensionnelles. On peut citer cependant les travaux expérimentaux

de Faure et al. [55], et numériques de Brès et Colonius [29] pour un écoulement de cavité entraînée ainsi que les études numériques des décollements induits par un profil d'aile (Gennaro et al. [58]). L'existence de telles instabilités soulève naturellement la question de la compétition entre les effets tridimensionnels et bidimensionnels.

## Méthodes numériques

### Présentation du problème de stabilité

Le problème de stabilité linéaire en mécanique des fluides consiste en la linéarisation des équations de Navier-Stokes autour d'un état de base (une solution stationnaire du système), en considérant des perturbations infinitésimales. Ces perturbations s'écrivent sous forme de modes temporels, solution d'un problème aux valeurs propres associé au système de Navier-Stokes linéarisé. Les modes, ou fonctions propres, peuvent dépendre de une, deux, voire trois directions de l'espace, selon les directions d'inhomogénéité de l'écoulement de base (la perturbation étant supposée périodique dans une direction d'homogénéité). Évidemment, ces problèmes aux valeurs propres ne peuvent pas (sauf dans des cas simples) être appréhendés par voie analytique, et le système doit être résolu numériquement, après discrétisation des opérateurs en question. Depuis la généralisation du calcul numérique, il est devenu habituel d'appréhender la stabilité d'écoulements parallèles, le mode ne dépendant alors que d'une direction de l'espace (normale à la paroi pour les écoulements de paroi), la perturbation étant alors périodique dans les directions restantes. Dans des configurations non parallèles, il a fallu attendre l'avènement d'ordinateurs plus puissants, notamment en termes de mémoire centrale, ainsi que des algorithmes dédiés, pour résoudre les problèmes aux valeurs propres associés, donnant lieu à des opérateurs de très grandes tailles. Durant ces vingt dernières années ces études de stabilité globale se sont largement généralisées. Plusieurs méthodes de discrétisation sont utilisées couramment pour les études de stabilité en mécanique des fluides, chacune ayant ses avantages et ses inconvénients. Pendant longtemps, le choix s'est plutôt porté sur les méthodes spectrales (en général en approche collocation), étant donné la précision de ces méthodes et limitant ainsi la taille des opérateurs discrets. Cette formulation a été utilisée par exemple au sein du laboratoire DYNFLUID jusqu'en 2005. Elle devient cependant problématique lorsque le champ de base présente une discontinuité (par exemple les chocs en régime supersonique). En effet les bonnes propriétés de précision des méthodes spectrales ne sont garanties que si les champs à résoudre ont des bonnes propriétés de régularité. Notons tout de même que de nombreuses méthodes ont été, et sont encore, actuellement développées pour traiter les discontinuités par ce type d'approche ([73],[78], [127]).

Les méthodes de type différences finies sont une alternative aux méthodes spectrales. Contrairement aux méthodes spectrales, ce type d'approche fait intervenir des schémas de discrétisation avec un ordre de précision inférieur. Un avantage important des méthodes des différences finies réside dans le fait que les opérateurs différentiels discrets ont une structure creuse, les dérivées en un point ne faisant intervenir qu'un faible nombre de points voisins. Depuis le développement de bibliothèques numériques permettant de traiter des systèmes matriciels creux (ou *sparse* en anglais),

Champ de base : $\mathbf{q}_0$	Formes de la perturbation $\mathbf{q}'(x,y,z,t)$	
$\mathbf{q}_0(x,y,z)$ $(x,y,z) \sim O(1)$	$\hat{\mathbf{q}}(x,y,z)e^{-i\omega t}$	Globale 3-D
$\mathbf{q}_0(x,y;Z), Z = \varepsilon z$ $(x,y) \sim O(1)$ $z = O(\varepsilon)$	$\hat{\mathbf{q}}(x,y,z)e^{i(\int_{z_0}^z \beta(\xi)d\xi - \omega t)}$	PSE 3-D ou MEM/WKBJ
$\mathbf{q}_0(x,y)$ $(x,y) \sim O(1)$ $z$ homogène	$\hat{\mathbf{q}}(x,y)e^{i(\beta z - \omega t)}$	Globale 2-D ou Locale 2D
$\mathbf{q}_0(y;X,Z)$ $y \sim O(1), x \sim O(\delta) (X = \delta x)$ et/ou $z \sim O(\varepsilon) (Z = \varepsilon z)$	$\hat{\mathbf{q}}(x,y,z)e^{i(\int_{x_0}^x \alpha(\zeta)d\zeta + \int_{z_0}^z \beta(\xi)d\xi - \omega t)}$ (faiblement non parallèle)	PSE ou MEM/WKBJ
$\mathbf{q}_0(y), y \sim O(1)$ et $x$ et/ou $z$ homogène	$\hat{\mathbf{q}}(y)e^{i(\alpha x + \beta z - \omega t)}$	Locale 1-D (approx. parallèle)

TABLE 1 – Différentes formulations pour la résolution du problème aux valeurs propres

ce type d'approche est devenu une solution intéressante pour la résolution des problèmes aux valeurs propres.

Les méthodes de type éléments finis ont été utilisées pour des études de stabilité globale d'écoulements incompressibles par Jackson [68] et Sipp [116] mais également pour l'étude de stabilité globale subsonique des décollements de couche limite derrière une géométrie cylindrique et de corps profilés ([85]). On peut également citer les méthodes de type volumes finis utilisées pour l'étude de stabilité globale de l'interaction entre une onde de choc et une couche limite ([109]).

Une fois le domaine physique discrétisé en espace, les études numériques de stabilité linéaire globale passent par la résolution du système d'équations du type  $\frac{\partial \mathbf{q}'}{\partial t} = \mathcal{L}\mathbf{q}'$ , en désignant par  $\mathbf{q}'$  la perturbation. Tout d'abord, il convient de définir l'opérateur  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\mathbf{q}_0)$ , associé à l'opérateur de Navier-Stokes linéarisé autour de la solution d'équilibre notée  $\mathbf{q}_0$ . Dans la plupart des problèmes de stabilité en mécanique des fluides, il est ainsi possible de "programmer", dans le langage de programmation choisi, cette matrice jacobienne de manière explicite. Des méthodes implicites de type différentiation (Sherwin [112], Barkley [15], Bagheri [11], Abdessemed [1]), consistent quant à elles à former la matrice  $\mathcal{L}$  en considérant la différence entre le système d'équations de Navier-Stokes perturbé et la solution stationnaire.

Lorsque la matrice jacobienne est formée, deux types d'approches sont à nouveau considérées pour former le problème aux valeurs propres. L'approche traditionnelle consiste à considérer directement après discrétisation un problème matriciel aux valeurs propres, écrivant  $\mathbf{q}' = \hat{\mathbf{q}} e^{\lambda t}$  dont les fonctions propres  $\hat{\mathbf{q}}$  et les valeurs propres  $\lambda$  sont solutions. Pour des écoulements parallèles (ou assimilés à tels), ces matrices sont en général de taille raisonnable et la résolution numérique du problème aux valeurs propres ne présente pas de problème particulier. Pour des écoulements ouverts non parallèles avec des états stationnaires dépendant de deux directions de

l'espace, la formulation de stabilité a été introduite plus récemment, étant donnés les contraintes en termes de place mémoire (on peut citer, entre autres les travaux de Theofilis ([122]) et de Ehrenstein et Gallaire ([50]). Une autre stratégie, qui peut devenir indispensable dans certains cas lorsque les trois directions de l'espace sont des directions d'inhomogénéité pour l'écoulement de base, repose sur l'intégration numérique en temps du système de Navier-Stokes linéarisé. Ces méthodes de type *time-stepping* ont été utilisées dans les travaux de Bagheri([11],[10]), Loiseau([74]) et utilisent le fait que le système de stabilité linéaire, qui, après discrétisation, est un système d'équations différentielles linéaires en temps, et qui admet comme solution formelle  $\mathbf{q}'(k\Delta t) = e^{\mathcal{L}k\Delta t}\mathbf{q}_0$  pour une condition initiale  $\mathbf{q}_0$  et un  $\Delta t$  judicieusement choisis. Intégrant numériquement le système en temps, on forme une séquence de vecteurs  $[\mathbf{q}(t_0), \mathbf{q}(t_1), \dots, \mathbf{q}(t_n)]$ , avec  $t_k = k\Delta t$ , appelée alors séquence de Krylov, dont on peut montrer qu'elle converge vers la plus grande valeur propre (en module) de  $e^{\mathcal{L}\Delta t}$ . On peut ensuite en déduire la valeur propre la plus amplifiée de  $\mathcal{L}$  ainsi que la fonction propre. L'avantage de cette méthode est qu'elle nécessite nettement moins de place mémoire que les méthodes matricielles, dans la mesure où l'on intègre simplement le système de Navier-Stokes linéarisé en temps. Le tableau 1 présente les différentes approches pouvant être utilisées pour la résolution des problèmes de stabilité dans le domaine fréquentiel.

## Résultats antérieurs

### Configuration étudiée : géométrie de type bosse

Afin d'étudier les phénomènes de décollement de couche limite induits par un obstacle, une géométrie de type 'bosse' a été utilisée. Cette géométrie est inspirée du profil utilisé dans la grande soufflerie du Laboratoire de Mécanique de Lille, et optimisé pour des études de la turbulence en présence de gradients de pression adverses proches de ceux existant à l'extrados d'ailes d'avions à forts angles d'attaque (Bernard et al. 2003 [21]). C'est dans le cadre des travaux de thèse de Marquillie ([83]) que cette géométrie a été choisie la première fois pour l'étude numérique d'un écoulement de couche limite laminaire décollée. Dans ces études, l'épaisseur de déplacement de couche limite en entrée du domaine de calcul  $\delta_l$  avait été choisie comme longueur de référence. On assiste dans un premier temps à l'accélération de l'écoulement sur la face amont de la bosse. Le fluide va alors rapidement décélérer jusqu'au point  $x_S$  de séparation où la couche limite décolle. L'écoulement présente alors entre le point de décollement et le point de recollement  $x_R$  une couche de cisaillement adjacente au bord supérieur de la zone de recirculation. La distance entre  $x_S$  et  $x_R$  caractérise la longueur du bulbe de décollement représenté figure 6. Au delà de ce point de recollement, une couche limite attachée se redéveloppe. Marquillie et Ehrenstein [82] montrent que l'écoulement est stationnaire et que la longueur de recirculation croît linéairement avec le nombre de Reynolds. Au delà d'un Reynolds critique  $Re_c \sim 600$ , la longueur de la bulle chute brutalement et des instationnarités apparaissent. Ce comportement est représenté sur la figure 7. On assiste alors à l'apparition d'un phénomène de basses fréquences caractérisé par des lâchers tourbillonnaires similaires aux observations faites au cours des études de

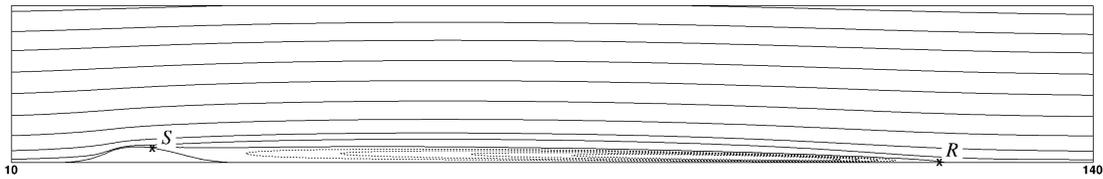


FIGURE 6 – Représentation du décollement de couche limite derrière une bosse

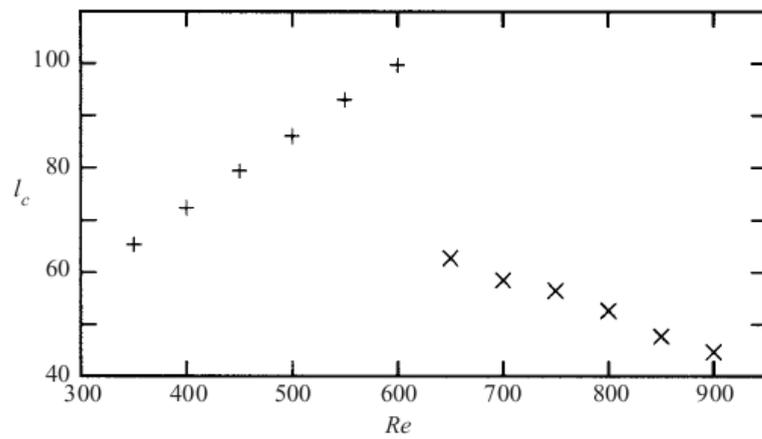


FIGURE 7 – Longueur de la zone de recirculation en fonction du nombre de Reynolds (Marquillie et Ehrenstein ([82]))

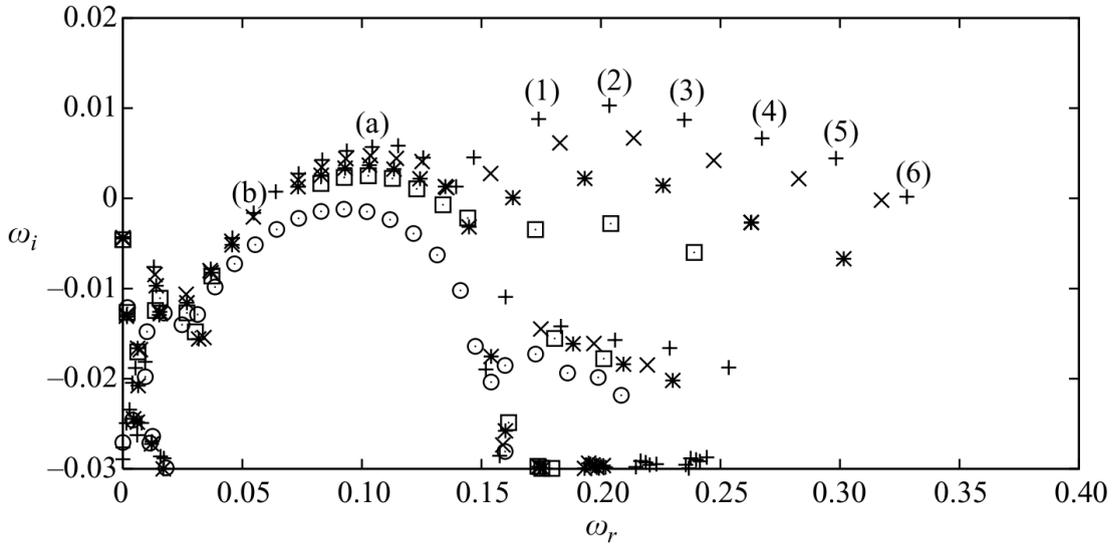


FIGURE 8 – Diagramme de stabilité globale d'un décollement de couche limite induit par une géométrie de type bosse à  $Re = 590$  pour différentes hauteurs de bosse  $h/\delta_l = 1.8(\odot)$ ,  $h/\delta_l = 1.85(\square)$ ,  $h/\delta_l = 1.9(*)$ ,  $h/\delta_l = 1.95(\times)$ ,  $h/\delta_l = 2.0(+)$  (Ehrenstein et Gallaire [51])

décollement présentées plus haut.

## Battement basse fréquence

Au delà du nombre de Reynolds critique  $Re_c$ , la bulle de recirculation est donc soumise au phénomène auto-entretenu de basse fréquence, également appelé *flapping* et localisé le long de la couche de cisaillement. Les travaux de Marquillie et Ehrenstein ([82]) permettent de mettre en évidence ce caractère convectivement instable de la bulle et de localiser les zones de l'écoulement où apparaissent les hautes fréquences grâce à l'analyse de stabilité linéaire locale (hypothèse d'un écoulement faiblement non-parallèle) de profils de vitesse longitudinale. Cependant aucune instabilité absolue n'a été observée pour des profils de vitesse locaux le long de la zone de recirculation. En 2008, Ehrenstein et Gallaire [51] proposent une étude de stabilité linéaire globale pour cet écoulement de couche limite décollée. La résolution du problème aux valeurs propres a été effectuée pour une formulation matricielle du système de Navier-Stokes linéarisé avec une méthode de discrétisation spectrale qui assure la meilleure précision relativement au nombre de degrés de liberté (Peyret 2002 [97]). La figure 8 présente le spectre de stabilité globale d'une couche limite décollée pour un nombre de Reynolds  $Re = 590$  et plusieurs rapport  $h/\delta_l$  de hauteur de bosse. La dynamique linéaire de l'écoulement est donc globalement instable et le spectre contient alors deux familles de valeurs propres. La première correspondant aux valeurs propres équi-espacées en fréquence (notés  $\omega_1$  à  $\omega_6$  sur la figure 8), avec un structure spatiale des perturbations localisée autour du point de recollement de la couche limite (figure 9), la seconde associée à  $\omega_{a,b}$  (figure 8)) avec une structure

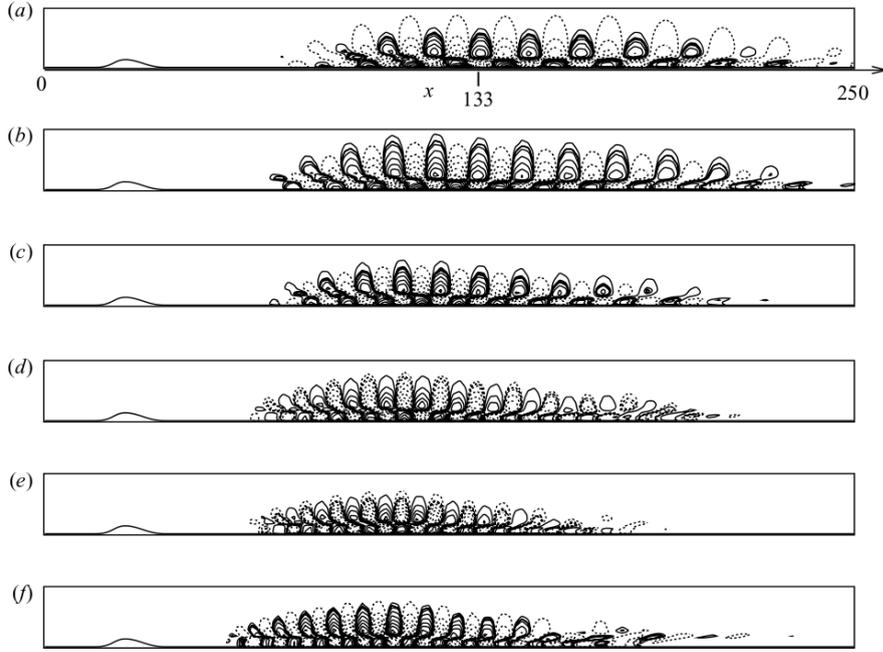


FIGURE 9 – Fonctions propres 1 à 6 associées à la figure 8 représentant la composante longitudinale de la vitesse  $u'$  pour  $Re_{\delta_l} = 590$  et  $h/\delta_l = 2$  (Ehrenstein et Gallaire [51])

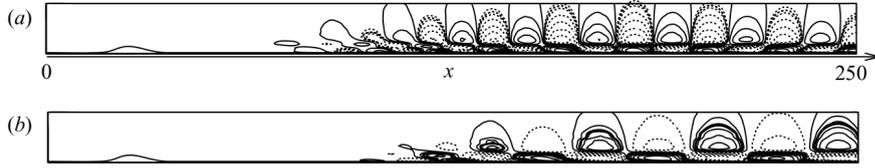


FIGURE 10 – Fonctions propres  $a)$  et  $b)$  associées à la figure 8 représentant la composante longitudinale de la vitesse  $u'$  pour  $Re_{\delta_l} = 590$  et  $h/\delta_l = 2$  (Ehrenstein et Gallaire [51])

spatiale qui se développe en aval du point de recollement (figure 10). Il apparaît que le phénomène de *flapping* peut être décrit par interaction non normale des modes instables présentés sur la figure ?? et que la période du battement basse fréquence  $T$  correspond à l'écart en fréquence  $\Delta\omega_r$  entre deux modes instables successifs tel que  $T = 2\pi/(\Delta\omega_r)$ .

## Instabilités transverses

Les travaux de thèse de Marquillie ([83]) présentent pour la première fois des instabilités globales tri-dimensionnelles stationnaires se formant derrière une géométrie de type bosse pour un nombre de Reynolds critique  $Re_{3D} \sim 300$  inférieur au Reynolds critique  $Re_{2D} \sim 600$  au-delà duquel les structures bidimensionnelles apparaissent. La structure de la perturbation est alors périodique selon la direction

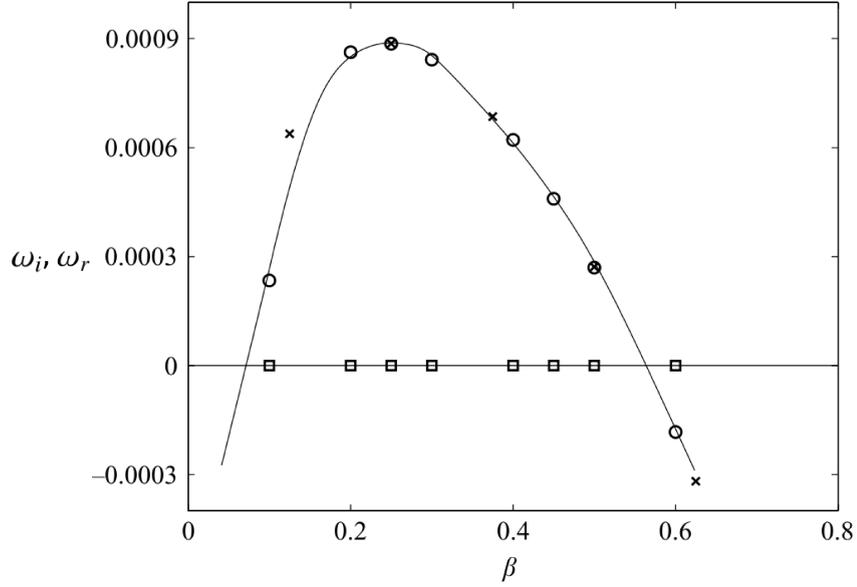


FIGURE 11 – Taux d’amplification ( $\circ$ ) et fréquence ( $\square$ ) du mode globale le plus instable pour  $Re_{\delta_i} = 400$  en fonction du nombre d’onde transverse  $\beta$ . Les taux d’amplification issus de la simulation directe sont également présentés ( $\times$ ) (Gallaire, Marquillie et Ehrenstein [56])

transverse et peut être considérée comme la superposition de modes de Fourier-Laplace du type

$$\mathbf{q}'(x,y,z,t) = \hat{\mathbf{q}}(x,y)e^{i(\beta z - \omega t)} + c.c. \quad (0.1)$$

avec  $\beta = 2\pi/\lambda_z$  le nombre d’onde et  $\lambda_z$  la longueur d’onde selon la direction transverse. Les travaux de Gallaire et al ([56]) présentent une étude plus approfondie des instabilités transverses présentes derrière la bosse en utilisant une approche de type DNS (Direct Numerical Simulation) ainsi qu’une étude de stabilité locale et globale. L’étude de stabilité globale a ainsi permis de mettre en avant l’évolution du taux d’amplification des modes stationnaires 3D en fonction du nombre d’onde transverse  $\beta$ . Le mode global le plus instable apparaît pour un nombre d’onde  $\beta_{max} = 0.25$  (figure 11) et met en jeu des taux d’amplification de l’ordre de  $10^{-4}$ . Ces résultats sont retrouvés expérimentalement par Passagia et al [93]. Il est à noter que l’apparition de ce mode tridimensionnel, avec des taux d’amplification très faibles, apparaît avant que les instabilités bidimensionnelles ne se déclenchent. Aussi, ce mode est non-oscillant et donc étranger au phénomène de basse fréquence observé par Dovgal et al. [45].

## Cadre et objectifs de la thèse

L’étude de stabilité des couches limites attachées et décollées en régime compressible qui sera décrite dans ce manuscrit s’inscrit dans le cadre du projet de l’Agence Nationale de la Recherche (ANR) DECOMOS (DEcollement COMPRESSIBLE et OSCillations auto-induites). L’objectif principal de ce projet est d’étudier la dépendance de

la dynamique vis-à-vis des effets de compressibilité et plus particulièrement d'identifier les causes responsables de la formation des instationnarités basses-fréquences présentées précédemment. Dans ce projet ANR, des régimes d'écoulements subsoniques, avec l'étude de stabilité globale d'écoulements décollés induit par des géométries, ainsi que des décollements en régime supersonique, s'appuyant sur l'analyse numérique et expérimentale d'une interaction entre une onde de choc et une couche limite, ont été abordés.

Dans le cadre de ce projet, le travail de thèse portait plus spécifiquement sur la couche limite décollée induite par la géométrie de type bosse présentée précédemment. Ce travail se présente donc comme l'extension au régime compressible des travaux de Gallaire, Marquillie et Ehrenstein [56], Marquillie Ehrenstein [82], Ehrenstein et Gallaire [51]. Un premier enjeu consistait à mettre en place une nouvelle approche fiable permettant la résolution numérique du problème de stabilité globale d'écoulements en régime compressible, ayant fait le choix d'une approche matricielle pour une discrétisation par collocation-Chebyshev dans les deux directions d'inhomogénéité de l'écoulement.

La première partie du mémoire présente les différents outils théoriques et numériques pour la résolution du problème aux valeurs propres. La seconde partie s'attache à valider les différents outils implémentés au cours de cette thèse. Les chapitres 4 et 5 seront consacrés aux résultats numériques obtenus dans le cadre des études de stabilité globale de perturbations bi et tridimensionnelles présentes dans les écoulements de couche limite décollée. Le manuscrit se terminera par une conclusion et des perspectives à donner à cette étude.

# Chapitre 1

## Equations et cadre général de l'étude

Dans ce chapitre les équations générales sous-jacentes à l'étude sont passées en revue, partant des équations de Navier-Stokes pour un écoulement compressible. La notion d'écoulement de base est rappelée ainsi que le concept général de stabilité linéaire. Nous nous intéresserons également aux aspects théoriques des études de stabilité. Nous verrons enfin quels sont les différentes natures des instabilités auxquelles peut être soumis l'écoulement ainsi que les limites des approches modales que nous utiliserons dans ce manuscrit.

### 1.1 Équations de Navier-Stokes compressibles et système de stabilité linéaire

Les équations de Navier-Stokes pour un fluide newtonien compressible et soumis à l'hypothèse des gaz parfaits se mettent sous la forme conservative suivante :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \quad (1.1a)$$

$$\frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} - \Sigma) - \rho \mathbf{F} = 0, \quad (1.1b)$$

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho E \mathbf{u} - \Sigma \odot \mathbf{u} - \mathbf{q}_c) - \rho \mathbf{F} \cdot \mathbf{u} - \rho \phi_\tau = 0, \quad (1.1c)$$

$$p - \rho r T = 0. \quad (1.1d)$$

Le vecteur d'état  $\mathbf{q} = (\rho, \mathbf{u}, E, p)^T$  fait intervenir respectivement la masse volumique  $\rho$ , le vecteur vitesse  $\mathbf{u}$ , l'énergie totale  $E$  et la pression  $p$ . Nous rappelons que l'hypothèse de Stokes, qui implique qu'un changement de volume s'effectue sans effet de viscosité, sera appliquée dans l'ensemble de ce manuscrit. Le coefficient de Lamé  $\lambda$  et la viscosité dynamique  $\mu$  sont reliés par la relation  $\lambda = -2/3\mu$ . Le tenseur des contraintes visqueuses  $\Sigma$  s'exprime pour un fluide newtonien à partir de la pression, de la viscosité dynamique  $\mu$  et du tenseur des vitesses de déformation  $\mathbf{S}$  selon la relation

$$\Sigma = -\left(p + \frac{2\mu}{3}\nabla \cdot (\mathbf{u})\right)I + 2\mu\mathbf{S}, \quad (1.2)$$

avec  $I$  la matrice identité. Le tenseur des vitesses de déformation  $\mathbf{S}$  s'exprime de la manière suivante :

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2}(\nabla \otimes (\mathbf{u}) + \nabla \otimes (\mathbf{u})^T) \quad (1.3)$$

Les termes  $\mathbf{F}$  et  $\phi_\tau$  présents dans les équations de Navier-Stokes (1.1b) et (1.1c) symbolisent respectivement les forces volumiques (comme la gravité par exemple) appliquées au système et la chaleur massique apportée et seront considérés comme nuls tout au long de ce travail. L'intensité du flux de chaleur  $\mathbf{q}_c$  s'exprime selon la loi de Fourier comme

$$\mathbf{q}_c = -\kappa_c \nabla T \quad (1.4)$$

avec  $\kappa_c$  le coefficient de conduction thermique. Enfin, le terme  $r$  qui entre en jeu dans l'équation d'état d'un gaz parfait correspond à la constante des gaz parfaits pris ici égale à  $r = 287 J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}$ . Notons que les symboles  $\otimes, \odot$  représentent respectivement le produit tensoriel et le produit matrice/vecteur. Il est également possible de travailler avec les équations de Navier-Stokes impliquant la température. En effet, l'énergie totale du système se décompose en la somme de l'énergie interne  $e_i$  et de l'énergie cinétique  $e_c$ . On peut ainsi considérer  $E = e_i + e_c = c_v T + \mathbf{u}^2/2$  avec  $c_v$  la chaleur spécifique par unité de masse à volume constant. Dans le cadre d'un gaz parfait, nous verrons que le produit  $\rho E$  peut se mettre sous la forme

$$\rho E = p/(\gamma - 1) + \rho \mathbf{u}^2/2. \quad (1.5)$$

Il est également possible de formuler les équations de Navier-Stokes en utilisant l'entropie du système. En considérant la relation thermodynamique de Gibbs  $dh = Tds + dp/\rho$ , avec  $h$  l'enthalpie et  $s$  l'entropie du système, il est possible en effet de définir la relation suivante :

$$T = p^{\gamma-1/\gamma} e^{\frac{s}{c_p}}. \quad (1.6)$$

Nous choisirons dans ce manuscrit de travailler avec la formulation des équations de Navier-Stokes utilisant la température. Ainsi le vecteur d'état sera défini de la manière suivante  $\mathbf{q} = (\rho, \mathbf{u}, T, p)^T$

### 1.1.1 Mise sous forme adimensionnelle

Le système de Navier-Stokes est adimensionné en introduisant les grandeurs de référence

- $L_{\text{ref}}$ ,
- $U_{\text{ref}} = U_\infty$ ,
- $\rho_{\text{ref}} = \rho_\infty$ ,
- $T_{\text{ref}} = T_\infty$ ,

respectivement pour la longueur, la vitesse, la masse volumique et la température. Nous abordons dans la présente étude des écoulements de paroi et les quantités de référence seront celles de l'écoulement entrant loin de la paroi, ce qui est symbolisé par l'indice  $\infty$ . Par extension les variables de référence de temps et de pression seront définies de la manière suivante :

- $t_{\text{ref}} = L_{\text{ref}}/U_{\text{ref}}$

nombre de Reynolds	$Re = \frac{U_{\text{ref}}L_{\text{ref}}}{\nu}$	$\frac{\text{temps de diffusion de la quantité de mouvement}}{\text{temps de convection de la quantité de mouvement}}$
nombre de Prandtl	$Pr = \frac{\nu}{\kappa}$	$\frac{\text{temps de diffusion thermique}}{\text{temps de diffusion de la quantité de mouvement}}$
nombre de Mach	$Ma = \frac{U_{\text{ref}}}{a}$	$\frac{\text{vitesse de référence de l'écoulement}}{\text{célérité du son}}$

TABLE 1.1 – Nombres adimensionnés présents dans les équations de Navier-Stokes (1.7)

—  $p_{\text{ref}} = r\rho_{\text{ref}}T_{\text{ref}}$  (loi des gaz parfaits).

Nous choisissons de réécrire le système d'équation (1.1) sous forme non-conservative en considérant le vecteur d'état  $\mathbf{q} = (\rho, \mathbf{u}, T, p)^T$ , ce qui donne lieu au système d'équations

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho = 0, \quad (1.7a)$$

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + \frac{1}{\gamma Ma^2} \nabla p - \frac{1}{Re} \nabla \cdot \tau(\mathbf{u}) = 0, \quad (1.7b)$$

$$\rho \frac{\partial T}{\partial t} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla T + (\gamma - 1)p \nabla \cdot \mathbf{u} - \gamma(\gamma - 1) \frac{Ma^2}{Re} \tau(\mathbf{u}) : \nabla(\mathbf{u}) - \frac{\gamma}{Pr Re} \nabla^2 T = 0 \quad (1.7c)$$

$$p - \rho T = 0 \quad (1.7d)$$

On reconnaît ici les paramètres sans dimensions

- $Re = U_{\text{ref}}L_{\text{ref}}\rho_{\text{ref}}/\mu$  le nombre de Reynolds (avec  $\mu$  la viscosité dynamique)
- $Pr = C_p\mu/\kappa_c$  le nombre de Prandtl (avec  $\kappa_c$  la conductivité thermique).

De même l'adimensionnement des équations fait apparaître le rapport  $U_{\text{ref}}^2/C_v T_{\text{ref}}$  que l'on exprime sous la forme  $\gamma(\gamma - 1)Ma^2$  avec  $\gamma$  le rapport des chaleurs spécifiques. Nous considérerons ce dernier constant et égal à 1.4. Le nombre de Mach sera défini de manière habituelle selon la relation  $Ma = U_{\text{ref}}/a$  avec  $a = \sqrt{\gamma r T_{\text{ref}}}$  la célérité du son de référence. Rappelons également que  $C_v = r/(\gamma - 1) = C_p/\gamma$  où  $C_v$  est le coefficient de chaleur spécifique par unité de masse à volume constant et  $C_p$  à pression constante.

## 1.2 Cadre théorique de l'étude de stabilité d'un écoulement

### 1.2.1 Généralités

Nous venons d'introduire les différents nombres adimensionnés qui caractérisent notre écoulement. Des observations expérimentales ([106], [23], [130], [100]) et numériques ([27], [96], [28], [75]) ont montré que différents régimes d'écoulement existent

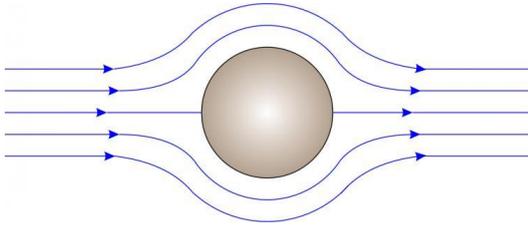


FIGURE 1.1 – Écoulement laminaire rampant  $Re < 5$

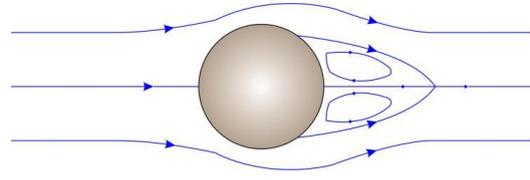


FIGURE 1.2 – Écoulement décollé stationnaire  $5 < Re < 48$

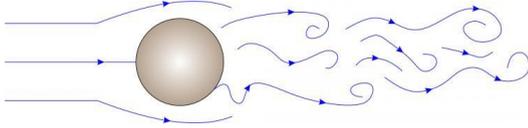


FIGURE 1.3 – Écoulement instationnaire bidimensionnel  $48 < Re < 180$

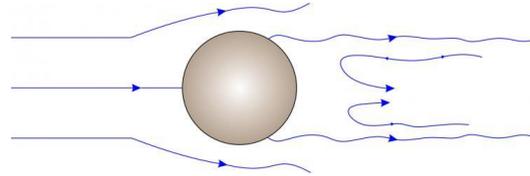


FIGURE 1.4 – Écoulement instationnaire turbulent  $300 < Re$

en fonction des valeurs que peuvent prendre ces paramètres. Un exemple couramment utilisé pour illustrer les problèmes d'instabilités est l'écoulement derrière un cylindre. Pour des nombres de Reynolds suffisamment petits ( $Re < 5$ ), l'écoulement laminaire est stationnaire et les forces visqueuses sont prépondérantes ; l'écoulement représenté figure 1.1 est stable. Pour des nombres de Reynolds plus importants  $5 < Re < 48$ , les forces inertielles augmentent et les forces visqueuses ne suffisent plus à garder l'écoulement attaché à la géométrie. On assiste alors au décollement de la couche limite derrière la géométrie comme illustré figure 1.2 et formant ainsi deux zones de recirculation en aval du cylindre. Aucune instabilité n'apparaît et l'écoulement reste stable.

Lorsque le nombre de Reynolds devient plus grand qu'une certaine valeur critique  $Re_c \approx 48$ , le décollement de la couche limite devient instable et des perturbations de type Von-Kármán apparaissent. Cette bifurcation de nature bidimensionnelle et supercritique se caractérise par une périodicité marquée correspondant à la fréquence du lâcher tourbillonnaire. Ce phénomène est illustré figure 1.3. Lorsque l'on augmente encore le nombre de Reynolds  $180 < Re < 300$ , l'écoulement se tridimensionnalise. Les instabilités observées précédemment présentent alors une ondulation transverse dépendant de l'envergure du cylindre et des tourbillons longitudinaux apparaissent.

Enfin, au delà d'une certaine valeur critique la couche limite est entièrement turbulente (figure 1.4) et possède une dynamique propre à ce type d'écoulement. L'étude de stabilité d'un écoulement consiste à déterminer d'une part si l'écoulement se trouve dans un état stable et dans le cas contraire d'étudier les mécanismes qui amènent l'écoulement à se déstabiliser. Cette approche se base sur la méthode des petites perturbations, en décomposant le champ instantané  $\mathbf{q}$  en la somme d'une solution stationnaire  $\mathbf{q}_0$  à laquelle on ajoute un champ de perturbation  $\mathbf{q}'$  affecté d'une amplitude infinitésimale  $\epsilon$ , à savoir

$$\mathbf{q}(\vec{x}, t) = \mathbf{q}_0(\vec{x}) + \epsilon \mathbf{q}'(\vec{x}, t), \quad \epsilon \ll 1 \quad (1.8)$$

En introduisant la décomposition (1.8) dans le système d'équations de Navier-Stokes (1.7) représenté ici formellement par l'opérateur  $\mathcal{N}$  on peut écrire

$$\mathcal{N}(\mathbf{q}_0) = 0, \quad (1.9a)$$

$$\mathcal{N}(\mathbf{q}_0 + \epsilon \mathbf{q}') = 0. \quad (1.9b)$$

Le système de Navier-Stokes linéarisé au voisinage de la solution stationnaire  $\mathbf{q}_0$  qui régit l'évolution spatio-temporelle de la perturbation  $\mathbf{q}'$  est obtenu formellement par

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} [\mathcal{N}(\mathbf{q}_0 + \epsilon \mathbf{q}') - \mathcal{N}(\mathbf{q}_0)] / \epsilon = 0 \quad (1.10)$$

L'écoulement porteur  $\mathbf{q}_0$  étant solution de  $\mathcal{N}(\mathbf{q}_0) = 0$ , on obtient le système d'équations suivant pour le champ de perturbation  $\mathbf{q}'$  (notant les composantes du champ porteur avec l'indice 0, l'écoulement porteur étant communément appelé "champ de base") :

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + (\mathbf{u}_0 \cdot \nabla) \rho' + (\mathbf{u}' \cdot \nabla) \rho_0 + \rho' (\nabla \cdot \mathbf{u}_0) + \rho_0 (\nabla \cdot \mathbf{u}') = 0, \quad (1.11a)$$

$$\rho_0 \left[ \frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t} + (\mathbf{u}_0 \cdot \nabla) \mathbf{u}' + (\mathbf{u}' \cdot \nabla) \mathbf{u}_0 \right] + \rho' (\mathbf{u}_0 \cdot \nabla) \mathbf{u}_0 = -\frac{1}{\gamma Ma^2} \nabla p' + \frac{1}{Re} \left[ \nabla^2 \mathbf{u}' + \frac{1}{3} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}') \right], \quad (1.11b)$$

$$\begin{aligned} \rho_0 \left[ \frac{\partial T'}{\partial t} + (\mathbf{u}_0 \cdot \nabla) T' + (\mathbf{u}' \cdot \nabla) T_0 \right] + \rho' (\mathbf{u}_0 \cdot \nabla) T_0 = \\ -(\gamma - 1) [(\nabla \cdot \mathbf{u}_0) p' + p_0 (\nabla \cdot \mathbf{u}')] + \frac{\gamma(\gamma - 1) Ma^2}{Re} [\tau_0 : \nabla \otimes \mathbf{u}' + \tau' : \nabla \otimes \mathbf{u}_0] + \frac{\gamma}{PrRe} \nabla^2 T', \end{aligned} \quad (1.11c)$$

On conçoit aisément que la dynamique d'une perturbation  $\mathbf{q}'$  est fortement dépendante du champ porteur qui l'accompagne. Il est donc important de choisir ce dernier aussi rigoureusement que possible. Nous verrons par la suite que certaines hypothèses supplémentaires peuvent être faites sur la nature des perturbations selon le type de champ porteur que l'on considère.

### 1.2.2 État d'équilibre : notion de champ de base

Nous essaierons de définir de manière concise et la plus rigoureuse possible la notion de champ de base (également appelé solution stationnaire ou solution d'équilibre). Nous nous intéresserons ici uniquement à des écoulements laminaires mais il est important de souligner que les études de stabilité d'écoulements s'appliquent également aux écoulements turbulents. Dans les cas simples où la solution des équations de Navier-Stokes peut être calculée analytiquement, la question de l'exactitude et l'unicité de la solution d'équilibre ne se pose pas. C'est le cas par exemple des écoulements de plaque plane. Mais même dans ce cas, il faut introduire des équations de couche limite, c'est-à-dire une approximation des équations de Navier-Stokes justifiée par les différentes échelles spatiales, à savoir la variation lente de l'écoulement dans la direction longitudinale et la variation rapide associée à la couche limite dans la direction normale à la paroi. On peut alors obtenir une solution semi-analytique sous forme de profils auto-semblables bien connue sous le nom de solution de Blasius. Il y a bien sûr une littérature abondante quant au concept de couche limite, un célèbre traité maintes fois réédité étant [110].

La majorité des géométries auxquelles nous nous intéresserons ne présente cependant pas de solutions analytiques ou semi-analytiques. Il devient donc nécessaire de développer des outils numériques pour calculer des états de base, en l'occurrence des solutions stationnaires du système de Navier-Stokes, étant entendu une discrétisation préalable des équations. Différentes méthodes d'obtention du champ de base sont actuellement utilisées.

Les méthodes de gradient (avec ou sans technique de continuation) permettent de calculer et de suivre le champ de base et ce même au delà du seuil de perte de sa stabilité, les méthodes de Newton ou de quasi-Newton faisant naturellement partie de ce type de méthodes. Bien sûr, si le système de Navier-Stokes admet une solution stationnaire stable, une intégration en temps pour le système discrétisé permet en général de la déterminer. Aussi, pour une solution laminaire instable et si les caractéristiques, en termes de fréquences, des instabilités peuvent être estimées, des méthodes de filtrage sélectif ([4]) permettent d'obtenir la solution stationnaire des équations de Navier-Stokes dans ces cas super-critiques.

Une approche également utilisée consiste à calculer la moyenne des solutions obtenues en résolvant les équations de Navier-Stokes instationnaires. Le champ de base correspond alors au champ moyen. Cette approche peut être pertinente par exemple dans le contexte de la turbulence, en déterminant un champ moyen, solution des équations complétées par un modèle de turbulence (comme par exemple le système *RANS* (Reynolds Averaged Navier-Stokes equations) que l'on retrouve entre autre dans les travaux de Crouch [41] ou Sartor *et al.* [109]). Cependant, pour un écoulement laminaire et dans le but de décrire la nature de la perte de stabilité, seul un écoulement de base obtenu en tant qu'état d'équilibre du système d'équations apparaît comme recevable.

### 1.2.3 Système linéarisé : l'approche modale

Lorsque l'on s'intéresse à la stabilité asymptotique, le système des équations de Navier-Stokes linéarisées peut se simplifier davantage en tenant compte des propriétés du champ de base. Étant donné le caractère stationnaire de ce dernier, la perturbation  $\mathbf{q}'$  est solution d'une équation aux dérivées partielles de la forme

$$B(\mathbf{q}_0) \frac{\partial \mathbf{q}'}{\partial t} = \mathcal{L}(\mathbf{q}_0) \mathbf{q}' \quad (1.12)$$

Il est sous-entendu par la suite que les variables d'espace dans les équations (3.3) sont discrétisées par une méthode appropriée, qui sera détaillée plus loin. Les termes, qui ne contiennent que des dérivées partielles par rapport aux variables d'espace, sont alors rassemblés en un opérateur écrit formellement  $\mathcal{L}(\mathbf{q}_0)$  dans l'équation ci-dessus, tandis que les termes qui ont la dérivée partielle en temps en facteur sont représentés formellement par  $B(\mathbf{q}_0)$ . Ce système étant linéaire, les solutions sont cherchées sous la forme de modes temporels

$$\mathbf{q}'(x,y,z,t) = \hat{\mathbf{q}}(x,y,z)e^{-i\omega t} + c.c. \quad (1.13)$$

*c.c.* désignant le complexe conjugué et  $\omega \in \mathbb{C}$  est la pulsation complexe associée à  $\hat{\mathbf{q}}$ . Tenant compte de (1.13), la perturbation est alors solution du problème aux valeurs

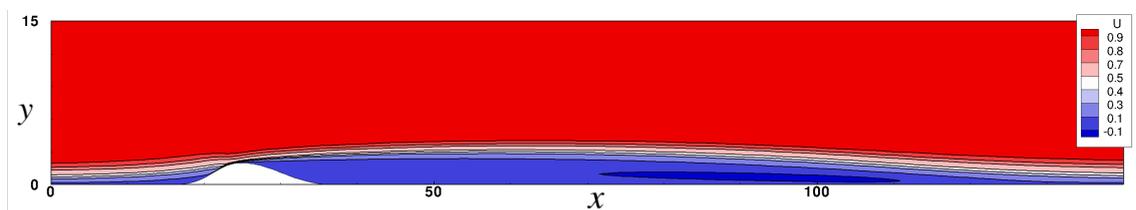


FIGURE 1.5 – Écoulement stationnaire de couche limite décollée

propres

$$\left(\mathcal{L}(\mathbf{q}_0) + i\omega\mathcal{B}(\mathbf{q}_0)\right)\hat{\mathbf{q}}(\mathbf{x}) = 0 \quad (1.14)$$

### 1.2.3.1 Écoulement de base homogène dans une direction de l'espace

Selon la géométrie considérée, le champ de base  $\mathbf{q}_0$  dépend au moins d'une, parfois de deux, voire des trois directions de l'espace. Pour des géométries qui seront considérées par la suite, il y a une direction d'homogénéité, que l'on suppose être orientée selon l'axe  $\vec{e}_z$ . On note  $\hat{\mathbf{q}}(x, y, \beta)$  la transformée de Fourier suivant  $z$  de  $\hat{\mathbf{q}}(x, y, z)$  et la perturbation  $\mathbf{q}'(x, y, z, t)$  peut alors s'écrire :

$$\mathbf{q}'(x, y, z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\beta} \hat{\mathbf{q}}(x, y, \beta) e^{i(\beta z - \omega t)} d\beta + c.c. \quad (1.15)$$

Par transformée de Fourier, la dérivée partielle  $\partial/\partial z$  dans le système de stabilité se transforme bien sûr en  $i\beta$  et le nombre d'onde transverse devient un paramètre du problème. On obtient ainsi le problème aux valeurs propres que l'on peut écrire formellement sous la forme

$$\mathcal{A}(\mathbf{q}_0, \omega, \beta)\hat{\mathbf{q}} = 0 \quad (1.16)$$

Différentes situations sont alors à considérer selon la nature de la direction homogène. Dans le cas particulier où la direction homogène est alignée avec la direction principale de l'écoulement (c'est le cas par exemple de l'écoulement de Poiseuille dans un canal à section rectangulaire), le problème aux valeurs propres (1.16) représente l'étude de stabilité **locale** d'un écoulement de base parallèle.

Lorsque la direction homogène est perpendiculaire à la direction principale de l'écoulement, ce qui est par exemple le cas pour l'écoulement de couche limite décollée représenté figure 1.5, le problème aux valeurs propres représente une analyse de stabilité **globale** d'un écoulement *a priori* non parallèle, l'écoulement de base dépendant des deux coordonnées  $(x, y)$ .

Il est parfois judicieux de faire l'approximation d'un écoulement de base localement parallèle, à savoir qu'on néglige la variation en  $x$  du champ de base (supposée lente par rapport à l'échelle spatiale des perturbations dans cette direction). Deux configurations sont alors possibles. Lorsque les perturbations se développent spatialement, notamment dans le cas de l'écoulement convectivement instable, un nombre complexe  $\beta \in \mathbb{C}$  est introduit dans une approche dite de "stabilité spatiale", et la croissance spatiale peut être déterminée en fonction de fréquences temporelles réelles  $\omega \in \mathbb{R}$  des perturbations. L'opérateur de dérivée seconde en la variable d'homogénéité  $z$  apparaît dans les équations de stabilité, d'où la présence après transformée

de Fourier du carré du nombre d'onde. Le problème aux valeurs propres s'écrit alors formellement

$$\left[ c_0 + \beta c_1 + \beta^2 c_2 \right] \hat{\mathbf{q}}(x,y) = 0. \quad (1.17)$$

En revanche, lorsque les perturbations ont une dynamique temporelle c'est-à-dire que  $\omega \in \mathbb{C}$  et  $\beta \in \mathbb{R}$ , cette approche est qualifiée de temporelle et le problème aux valeurs propres est de la même forme que (1.14). Il est à noter que pour qu'un écoulement soit linéairement instable, il faut et il suffit qu'il y ait une instabilité linéaire temporelle. Dans ce manuscrit, seule l'approche globale sera étudiée, c'est-à-dire que les champs de base dépendent de la direction longitudinale  $x$  et la direction normale aux parois  $y$ . On considère donc le nombre d'onde transverse  $\beta$  réel et on cherchera à calculer les modes globaux  $\omega \in \mathbb{C}$  associés aux fonctions propres  $\hat{\mathbf{q}}(x,y)$ . La partie imaginaire de  $\omega$ ,  $\omega_i$  désigne ainsi le taux d'amplification temporel de la perturbation et la partie réelle  $\omega_r$  sa pulsation.

De manière générale, lorsque la solution d'équilibre présente une seule direction homogène, les fonctions propres  $\hat{\mathbf{q}}$  dépendent de deux directions de l'espace. Bien sûr, comparativement au cas où l'écoulement est homogène selon deux directions de l'espace (ce qui autorise une étude de stabilité locale pour de tels écoulements parallèles) la résolution numérique d'un problème de stabilité globale sera plus coûteuse en ressources numériques et fera souvent appel à des méthodes itératives. Avant d'aborder plus en détail les méthodes numériques utilisées tout au long de notre étude de stabilité globale, quelques considérations générales quant au comportement spatio-temporel des perturbations d'écoulements instables sont esquissées.

### 1.3 Écoulements oscillateurs ou amplificateurs de bruit

Il est possible de classer la dynamique d'un écoulement instable en deux catégories (Huerre et Monkevitz [66],[38],[37]). Un écoulement peut être qualifié de type oscillateur lorsque la dynamique des perturbations est auto-entretenu. Les perturbations créées à l'instant  $t_0$  en un point de l'espace désigné formellement par  $x_s$  se propagent dans toutes les directions de l'espace et viennent perturber l'ensemble du domaine. Ce type d'instabilité est très peu sensible aux bruits extérieurs. Lorsque au contraire un écoulement (instable) ne possède pas de dynamique temporelle auto-entretenu, il peut induire une amplification sélective de bruit. Pour ce type d'écoulements, on peut identifier en général des régions où les perturbations croissent spatialement, c'est-à-dire que l'écoulement, dans une vision locale plus ou moins pertinente en fonction des effets non parallèles, subit une instabilité convective, selon la terminologie consacrée (cf. [66]). La perturbation dépend alors des mécanismes de réceptivité et peut être le siège d'importantes croissances transitoires.

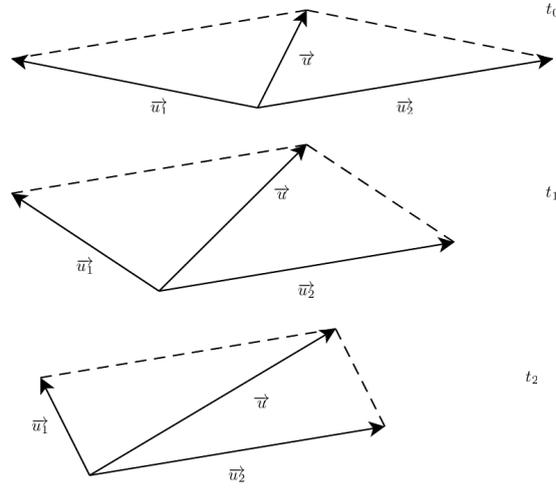


FIGURE 1.6 – Illustration du principe de croissance transitoire

## 1.4 Limites de l'approche modale

Les études de stabilité linéaire permettent d'étudier la stabilité asymptotique de l'écoulement vis-à-vis d'une perturbation infinitésimale. Cependant, Cossu et Chomaz [40], Chomaz [38] et Schmidt [111] ont mis en évidence que l'opérateur de stabilité linéaire peut être fortement "non normal", pour utiliser cette appellation empruntée à l'algèbre linéaire, pour des écoulements ouverts de type couches cisailées. Dans ce cas, les modes d'instabilité ne sont pas orthogonaux les uns avec les autres, notamment pour le produit scalaire associé à l'énergie de la perturbation. Cette caractéristique implique que l'écoulement est le siège d'une croissance transitoire des perturbations pouvant entraîner une transition prématurée vers la turbulence (communément appelée *by-pass transition*). Pour illustrer formellement ce comportement, considérons la somme de deux vecteurs non-normaux

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2, \quad (1.18)$$

alors la norme de  $\mathbf{u}$  s'exprime de la manière suivante.

$$\|\mathbf{u}\|^2 = \|\mathbf{u}_1\|^2 + \|\mathbf{u}_2\|^2 + 2 \langle \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 \rangle, \quad (1.19)$$

avec entre crochets le produit scalaire. La figure 1.6 présente l'évolution des vecteurs  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{u}_1$  et  $\mathbf{u}_2$  au cours du temps. Ainsi on constate que malgré l'atténuation des quantités  $\|\mathbf{u}_1\|$  et  $\|\mathbf{u}_2\|$  au cours du temps, la norme de  $\mathbf{u}$  est plus importante pour  $t_2$  que pour  $t_0$ . Cet exemple illustre le fait que deux modes globaux non normaux peuvent avoir une dynamique à temps court totalement différente de la dynamique que chaque mode possède à temps long. Afin de traiter ces problèmes de croissance transitoire, des méthodes non-modales sont présentées dans [111]. Ce type d'approche est par exemple utilisée par Sipp et Marquet [116] pour caractériser la dynamique de type amplificateur de bruit d'une couche limite de plaque plane en étudiant la réponse optimale induite par un forçage harmonique.



# Chapitre 2

## Méthodes numériques

L'objectif de cette partie est d'introduire les outils numériques utilisés dans ce travail de thèse. Nous présenterons dans un premier temps les méthodes de collocation spectrale ainsi que la discrétisation numérique basée sur les polynômes de Chebyshev. Nous regarderons ensuite les différentes méthodes utilisées pour la résolution des équations de Navier-Stokes stationnaires et du problème aux valeurs propres.

### 2.1 Méthodes spectrales

#### 2.1.1 Méthode d'approximation

Les méthodes spectrales sont des méthodes d'ordres élevés utilisées pour la résolution numérique d'équations aux dérivés partielles. Elles reposent sur le développement polynomial de la solution à déterminer. Considérons la fonction  $f(\xi)$ , avec  $\xi$  la variable d'espace. Le développement polynomial de  $f$  s'écrit

$$f_N(\xi) = \sum_{k=0}^N \hat{f}_k \varphi_k(\xi). \quad (2.1)$$

avec  $N + 1$  le nombre de points (dits points de collocation). Les fonctions  $\varphi_k(\xi)$  sont des fonctions à déterminer, orthogonales pour un produit scalaire à préciser et  $\hat{f}_k$  des coefficients d'expansion à déterminer. Dans le cadre des méthodes de collocation spectrales, on choisit un développement polynomial de sorte que la différence entre la solution exacte et la solution approchée soit nulle en  $N + 1$  points donnés. On impose en chaque point de discrétisation  $\xi_i$

$$f_N(\xi_i) = f(\xi_i), \quad i = 0, \dots, N \quad (2.2)$$

avec  $N + 1$  le nombre de point de maillage. On a donc

$$\sum_{k=0}^N \hat{f}_k \varphi_k(\xi_i) = f(\xi_i), \quad i = 0, \dots, N. \quad (2.3)$$

Pour des fonctions de base  $\varphi_k(\xi)$  fixées, l'équation (2.3) fournit un système de  $N + 1$  équations avec comme solution les coefficients  $\hat{f}_k$ . Ces coefficients sont calculés de

manière explicite et sont donc dépendants du polynôme choisi. Notons que d'autres approches appelées méthode Tau ou de Galerkin existent ([97], [31]). Nous avons cependant retenu la méthode de collocation spectrale car, comme nous l'avons vu, ces travaux de thèse s'inscrivent dans la continuité des travaux de Gallaire *et al.* ([56]), Ehrenstein et Gallaire ([51]) et Passaggia *et al.* ([93]) qui utilisent ce type d'approche pour l'étude du décollement de couche limite derrière une géométrie de type bosse qui nous intéresse. Un avantage indéniable des méthodes de collocation est de permettre une évaluation aisée des termes non linéaires, dans la mesure où tous les opérateurs sont écrits dans l'espace physique (aux points de discrétisation du maillage).

### 2.1.2 Discrétisation numérique

Il convient à présent de définir les fonctions de base  $\varphi_k(\xi)$ . Deux grandes familles de fonctions de base sont couramment utilisées. D'une part les séries de Fourier ( $\varphi_k(\xi) = e^{ik\xi}$ ) qui permettent l'étude de problèmes périodiques tels que la simulation numérique d'écoulements turbulents homogènes isotropes, de l'autre l'utilisation des polynômes appelés polynômes de Chebyshev qui permettent l'étude de configurations plus générales. Considérons donc le polynôme de Chebyshev de degré  $k$  défini pour  $\xi \in [-1,1]$ , à savoir

$$\varphi_k(\xi) = \cos(k \cos^{-1} \xi), \quad k = 0,1,2,\dots,N \quad (2.4)$$

En considérant la discrétisation appelée de Gauss-Lobatto de la forme

$$\xi_i = \cos(i\pi/k), \quad i = 0,\dots,k \quad (2.5)$$

le développement polynomial de  $f(\xi_i)$  s'écrit

$$f_N(\xi_i) = \sum_{k=0}^N \hat{f}_k \varphi_k(\xi_i) = \sum_{k=0}^N \hat{f}_k \cos\left(\frac{k\pi i}{N}\right), \quad i = 0,\dots,N. \quad (2.6)$$

La matrice  $\mathcal{M} = [\cos(k\pi i/N)]$ ,  $k, i = 0, \dots, N$  associée à ce système est inversible et les coefficients  $\hat{f}_k$  sont alors définis explicitement par

$$\hat{f}_k = \frac{2}{\bar{c}_k N} \sum_{i=0}^N \frac{1}{\bar{c}_i} f_N(\xi_i) \cos\left(\frac{k\pi i}{N}\right), \quad k = 0,\dots,N \quad (2.7)$$

avec  $c_0 = c_N = 2$  et  $c_j = 1$  pour  $j \in [1,\dots,N-1]$ .

La dérivée  $f_N^{(p)}$  d'ordre  $p$  de la fonction  $f_N(\xi_i)$  s'écrit comme

$$f_N^{(p)}(\xi_i) = \sum_{j=0}^N d_{i,j}^{(p)} f_N(\xi_j), \quad i = 0,\dots,N. \quad (2.8)$$

Les coefficients  $d_{i,j}^{(p)}$  s'obtiennent alors par élimination des coefficients  $\hat{f}_k$  dans l'expression de la dérivée

$$f_N^{(p)}(\xi_i) = \sum_{k=0}^N \hat{f}_k \varphi_k^{(p)}(\xi_i),$$

En utilisant la relation (2.7), l'expression des coefficients  $d_{i,j}^{(1)}$  pour la dérivée première s'écrit alors

$$\begin{cases} d_{i,j}^{(1)} = \frac{\bar{c}_i (-1)^{(i+j)}}{\bar{c}_j (\xi_i - \xi_j)}, & 0 \leq i, j \leq N, i \neq j \\ d_{i,i}^{(1)} = -\frac{\xi_i}{2(1 - \xi_i^2)}, & 1 \leq i \leq N - 1 \\ d_{0,0}^{(1)} = -d_{N,N}^{(1)} = \frac{2N^2 + 1}{6}, \end{cases} \quad (2.9)$$

La dérivée seconde s'exprime en fonction de l'opérateur de dérivée première ([97])

$$d_{i,j}^{(2)} = \sum_{k=0}^N d_{i,k}^{(1)} d_{k,j}^{(1)}. \quad (2.10)$$

On a ainsi

$$F^{(1)} = \mathcal{D}F, \quad F^{(2)} = \mathcal{D}^2 F \quad (2.11)$$

avec  $F = (f_N(\xi_0), \dots, f_N(\xi_N))^T$  et  $\mathcal{D}$  la matrice contenant les coefficients  $d_{i,j}$ . Lorsque le degré de discrétisation devient important, une erreur apparaît lors de la construction de l'opérateur dérivée (Peyret [97]). Cette erreur appelée erreur de *round-off* peut, selon la sensibilité du problème, changer sensiblement la valeur des valeurs propres (Valdettaro 2007 [126]) des opérateurs de dérivée discrets et notamment les valeurs propres associées aux hautes fréquences. Bayliss *et al.* ([17]) proposent de corriger l'opérateur de dérivée de sorte que les entrées de la matrice 'hors' diagonale  $d_{i,j}^{(1)}$ ,  $i \neq j$  soient ceux introduits en (2.9) et que les termes diagonaux se mettent sous la forme

$$d_{i,i}^{(1)} = -\sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^N d_{i,j}^{(1)} \quad (2.12)$$

### 2.1.3 Changement de variable

Par définition, les polynômes de Chebyshev sont définis sur  $[-1,1]$  et imposent un regroupement des points de discrétisation sur les bords du domaine. Pour l'étude des configurations complexes, il est cependant nécessaire de pouvoir travailler sur un domaine de calcul compatible avec les géométries imposées et adapté à la topologie de l'écoulement. En effet, dans les cas qui nous intéressent, la prise en compte du caractère multi-échelle de l'écoulement de couche limite ou encore la nature curviligne de la géométrie de type bosse nécessite d'adapter le maillage à l'écoulement. Ces modifications passent par un changement de variable de la forme

$$x_i = g(\xi_i) \quad i = 1,2 \quad (2.13)$$

La dérivée exprimée dans le nouveau système de coordonnées s'exprime alors

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial \xi_i}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial \xi_i} \quad i = 1,2 \quad (2.14)$$

ou encore

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = g'(\xi_i) \frac{\partial}{\partial \xi_i} \quad i = 1,2 \quad (2.15)$$

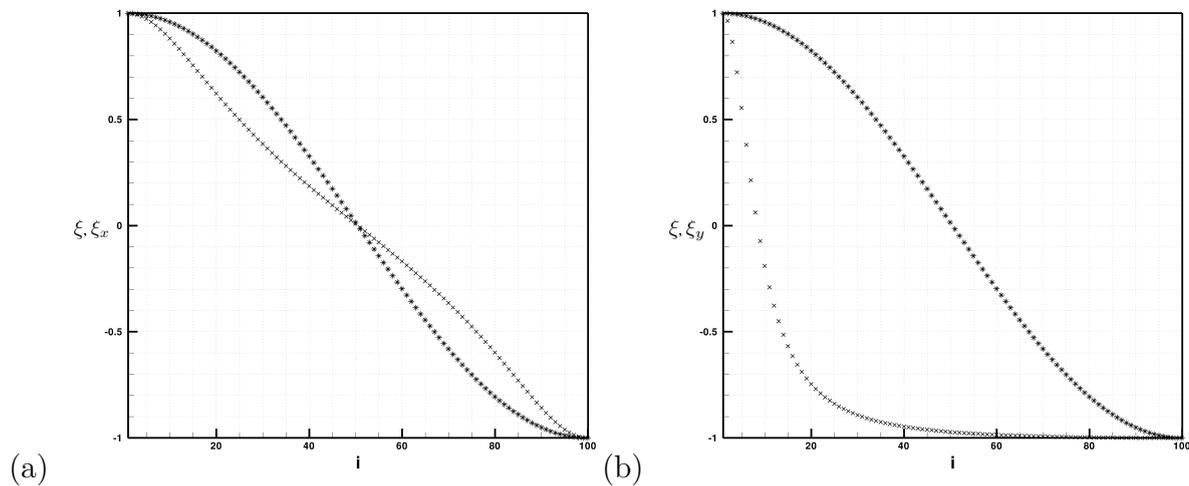


FIGURE 2.1 – Illustration du changement de variable opéré sur les variables spectrales (a) $\xi_x$ , (b) $\xi_y$  sans(\*) et avec(×) stretching

Dans le cadre de cette thèse, considérons une fonction  $\eta(x)$  comme étant la géométrie de type bosse qui nous intéresse. L'ensemble du système des équations de Navier-Stokes stationnaires et linéarisées est alors à résoudre dans le domaine  $a \leq x \leq b$  et  $\eta(x) \leq \tilde{y} \leq H$ . Le changement de variable

$$y = \frac{\tilde{y} - \eta(x)}{H - \eta(x)} H \quad (2.16)$$

transforme le domaine en  $0 \leq y \leq H$ . L'opérateur gradient dans le système ci-dessus devient

$$\nabla = (\nabla_x, \nabla_y) = \left( \frac{\partial}{\partial x} + \frac{y - H}{H - \eta(x)} \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y}; \frac{H}{H - \eta} \frac{\partial}{\partial y} \right). \quad (2.17)$$

Afin de prendre en compte le caractère multi-échelle des écoulements de paroi, un étirement des points de collocation en  $y$  de la forme

$$y = \frac{H s_y (1 + \xi_y)}{2 s_y + H (1 - \xi_y)} \quad (2.18)$$

est opéré. Cette fonction a pour effet de resserrer le maillage lorsque  $\xi \rightarrow 0$  et ce d'autant plus que le paramètre de stretching  $s_y$  est petit. On utilise également un changement de coordonnée en  $x$  afin de répartir les points de maillage de manière quasi-équidistante avec

$$x = \frac{1}{2}(a + b) + \frac{1}{2}(b - a) \frac{s_x \xi_x}{\sqrt{1 + s_x^2 - \xi_x^2}} \quad (2.19)$$

Ici le paramètre de stretching est considéré comme constant et égal à  $s_x = 0.6554$ . Dans les variables  $(\xi_x, \xi_y)$  le domaine est  $[-1, 1] \times [-1, 1]$  et sera discrétisé avec une méthode de collocation-Chebyshev. L'ensemble de ces transformations est présenté fig. 2.2. Il est important de noter que certains critères doivent cependant être respectés pour la construction de la fonction du changement de variable  $g$  (Peyret [97]) :

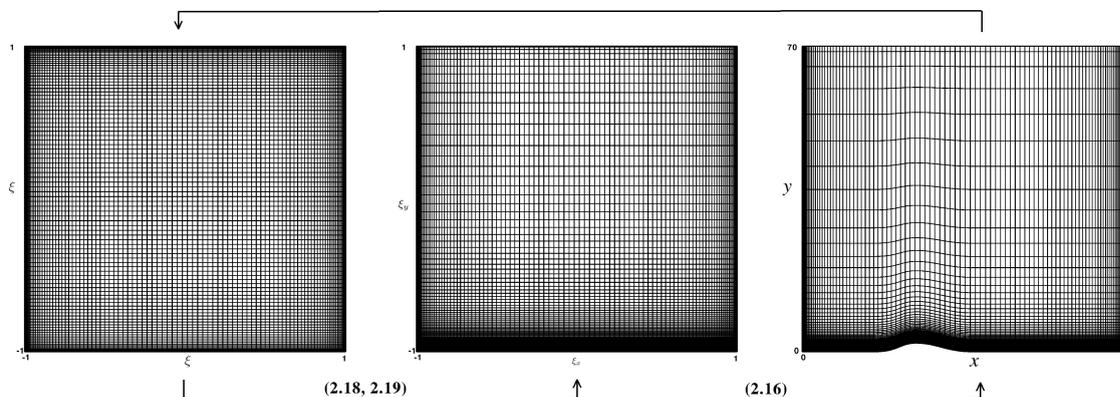


FIGURE 2.2 – Illustration du passage du domaine spectral au domaine physique dans le cas d'une géométrie de type bosse.

- $g(\xi)$  doit être facilement inversible
- $\varphi_k(g^{-1}(x))$  doit être adapté pour représenter la fonction  $f(x)$
- $|g'(\xi)| \ll 1$  de manière à garder une valeur raisonnable pour  $\partial/\partial x_i$  dans les zones de forts gradients.

Dans le cas contraire, l'utilisation d'un changement de variable peut dégrader la solution. Ce phénomène est appelé phénomène de Runge et peut faire diverger le calcul même si le nombre de points de maillage est suffisamment grand. Une liste non exhaustive de changements de variable peut être trouvée dans la littérature (Boyd [25], Bayliss et Turkel [18], Canuto [31], [32]). Dans notre cas, nous nous limiterons aux changements de variable de type algébrique présentés précédemment. Des transformations de type exponentielle peuvent également être utilisées ([97],[31], [32]) mais ne seront pas détaillées dans ce manuscrit.

#### 2.1.4 Décomposition de domaine

Nous avons vu au chapitre précédent que des changements de variable permettent d'adapter les méthodes spectrales à la géométrie du domaine de l'écoulement que l'on cherche à étudier. On peut remarquer ici que dans une approche globale, ces changements de variables doivent posséder un caractère de régularité suffisant pour être recevables. Pour l'étude de géométries plus complexes comme les marches (ascendantes et descendantes) ou encore les cavités, il n'est pas envisageable d'utiliser un changement de coordonnées global. Les méthodes de décomposition de domaine présentent alors une alternative intéressante. Ce type d'approche consiste à définir un nombre fini  $N_{dom} = N_{dom_x} \times N_{dom_y}$  de sous domaines reliés les uns aux autres par des conditions de raccord. Une telle approche ne permet pas seulement de considérer des géométries avec des arêtes vives mais peut aussi être appropriée pour raffiner les maillages dans les zones où l'écoulement présente de fortes variations.

La décomposition de domaine présente également l'avantage d'un point de vue numérique de garder un nombre de points par domaine suffisamment faible (dans chaque sous-domaine) tout en gardant une bonne précision, ce qui permet la manipulation de matrices bien conditionnées ([97]). Dans ce manuscrit, un effort particulier a été

mené pour adapter ces approches de décomposition de domaine aux méthodes de résolution des solutions d'équilibre de l'écoulement ainsi qu'au calcul des valeurs propres du système linéarisé autour du champ porteur.

Considérons un domaine de calcul  $\Omega$ . Ci-après les ingrédients essentiels de cette approche de décomposition de domaine sont brièvement exposés. Rappelons que le champ de base  $\mathbf{q}_0$  est obtenu en tant que solution du système de Navier-Stokes stationnaire tandis que la perturbation  $\mathbf{q}' = \hat{\mathbf{q}}e^{-i\omega t}$ , solution du système de Navier-Stokes linéarisé en  $\mathbf{q}_0$ , donne lieu à un problème aux valeurs propres, dont  $\omega$  et  $\hat{\mathbf{q}}$  sont solution. Les variables d'espace des directions non homogènes  $(x,y)$  étant discrétisées par l'approche collocation-Chebyshev, on obtient (avec les notations du chapitre 1) les systèmes

$$\begin{cases} \mathcal{N}(\mathbf{q}_0) = 0 \\ (\mathcal{L}(\mathbf{q}_0) + i\omega\mathcal{B}(\mathbf{q}_0))\hat{\mathbf{q}} = 0. \end{cases} \quad (2.20)$$

Ces équations sont à résoudre dans le domaine physique  $\Omega$  de bord  $\partial\Omega$  que l'on partitionne en sous-domaines  $\Omega_k$ . Seules les dérivées partielles spatiales jusqu'à l'ordre 2 interviennent dans les équations. Il convient alors de raccorder les champs en imposant la continuité des variables ainsi que la continuité de leurs dérivées normales aux interfaces notées  $\Gamma_{ij}$ . Cette approche est appelée formulation forte et a initialement été proposée par Orszag ([91], [88]) dans le contexte des méthodes spectrales. Pour plus de détails quant aux méthodes de décomposition de domaine, on pourra consulter l'ouvrage de Quarteroni et Valli ([102]). Les équations sont alors à résoudre dans des domaines  $\Omega_k$ , c'est-à-dire

$$\begin{cases} \mathcal{N}(\mathbf{q}_0^{(k)}) = 0, & \text{dans } \Omega_k \\ (\mathcal{L}(\mathbf{q}_0^{(k)}) + i\omega\mathcal{B}(\mathbf{q}_0^{(k)}))\hat{\mathbf{q}}^{(k)} = 0 & \text{dans } \Omega_k, \end{cases} \quad (2.21)$$

les champs  $\mathbf{q}_0^{(k)}$  et  $\hat{\mathbf{q}}^{(k)}$  satisfaisant les conditions physiques sur  $\partial\Omega_k \cap \partial\Omega$ , c'est-à-dire sur la partie du bord de  $\Omega_k$  qui coïncide, le cas échéant, avec le bord de  $\Omega$ . Sur les interfaces  $\Gamma_{ij}$  entre domaines on impose précisément

$$\begin{cases} [\mathbf{q}_0^{(i)}]_{|\Gamma_{ij}} - [\mathbf{q}_0^{(j)}]_{|\Gamma_{ij}} = 0 \\ [\partial_n \mathbf{q}_0^{(i)}]_{|\Gamma_{ij}} - [\partial_n \mathbf{q}_0^{(j)}]_{|\Gamma_{ij}} = 0 \end{cases} \quad (2.22)$$

pour la résolution du champ de base et

$$\begin{cases} [\hat{\mathbf{q}}^{(i)}]_{|\Gamma_{ij}} - [\hat{\mathbf{q}}^{(j)}]_{|\Gamma_{ij}} = 0 \\ [\partial_n \hat{\mathbf{q}}^{(i)}]_{|\Gamma_{ij}} - [\partial_n \hat{\mathbf{q}}^{(j)}]_{|\Gamma_{ij}} = 0 \end{cases} \quad (2.23)$$

où on note  $\partial_n$  la dérivée normale (la normale  $n$  étant par exemple  $n_i$ , extérieure à  $\Omega_i$  sur  $\partial\Omega_i \cap \Gamma_{ij}$ ). Ces conditions de raccord sont implémentées explicitement dans l'opérateur jacobien. La figure 2.3 présente une illustration de l'organisation de la matrice jacobienne. On retrouve ainsi sous la forme d'un ensemble de sous matrices, le système (2.21) à résoudre dans chaque  $\Omega_k$  (l'état de base  $\mathbf{q}_0$  et ensuite le système de stabilité) étant symbolisé par un grisé et noté  $\mathcal{N}_k$ . Les conditions

de raccord pour la continuité sont ajoutées dans les sous-matrices notées  $C'_{ij}$  et la continuité des dérivées dans  $CD_{ij}$ . Dans ce schéma, le nombre de sous-domaines  $N_{dom} = N_{dom_x} \times N_{dom_y} = 4$ , avec  $N_{dom_x} = N_{dom_y} = 2$ . Il convient bien sûr de numéroter dans un ordre judicieusement choisi les différents sous-domaines.

Nous verrons par la suite que cette méthode présente l'avantage de faire apparaître des opérateurs matriciels creux. Il nous sera donc possible de profiter de cet avantage pour notamment augmenter le nombre de points de maillage de notre système.

## 2.2 Résolution numérique du champ de base

Les états de base pour le calcul de stabilité sont des solutions du système de Navier-Stokes stationnaire. Ces solutions étant instables en général, elle ne peuvent par conséquent pas être déterminées par une méthode d'intégration en temps des équations. Le système de Navier-Stokes étant non linéaire, il faut faire appel à des méthodes itératives pour en déterminer les solutions d'équilibre.

La méthode de Newton, étant la plus générique pour déterminer des solutions de systèmes non linéaires, a été employée dans le présent travail. Il s'agit plutôt d'une approche de quasi-Newton dans le but de minimiser le coût de calcul de la méthode de Newton classique. Rappelons que pour cette dernière il est en effet nécessaire de définir à chaque itération la matrice jacobienne, ce qui présente un coût prohibitif lorsque l'on manipule des matrices de grandes tailles ([119]). Le principe des méthodes de quasi-Newton repose sur une 'mise à jour' de la matrice jacobienne du système que l'on considère. Rappelons d'abord l'algorithme de Newton 'classique' qui se met sous la forme :

$$\mathbf{q}_0^{k+1} = \mathbf{q}_0^k - \mathcal{J}(\mathbf{q}_0^k)^{-1} \mathcal{N}(\mathbf{q}_0^k), \quad \forall k \geq 0 \quad (2.24)$$

avec  $\mathcal{J}(\mathbf{q}_0^k)$  la matrice définie comme  $\mathcal{J}(\mathbf{q}_0) = \left. \frac{\partial \mathcal{N}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \right|_{\mathbf{q}_0}$ . Bien sûr, en général (sauf pour des petits systèmes), nous n'inverserons pas la matrice jacobienne mais nous résoudrons plutôt le système

$$\mathcal{J}(\mathbf{q}_0^k) \mathbf{d}^k = -\mathcal{N}(\mathbf{q}_0^k), \quad \text{avec} \quad \mathbf{d}_0^k = \mathbf{q}_0^{k+1} - \mathbf{q}_0^k. \quad (2.25)$$

A chaque itération  $k \in \mathbb{N}$ , il faut donc :

1. Déterminer l'expression de la matrice jacobienne  $\mathcal{J}(\mathbf{q}_0^k)$
2. Résoudre le système linéaire (2.25), en général par une méthode de type décomposition  $QR$  (ou  $LU$ ).

Beaucoup de méthodes de quasi-Newton reposent sur des approximations de la matrice jacobienne, afin de faciliter sa mise à jour, combinées à une résolution efficace des systèmes linéaires, lors des itérations. Nous détaillerons ici la méthode  $BR1$  (*Broyden Rank One update*) qui a été utilisée dans ce travail. Cette approche permet de définir à l'itération  $k+1$  une approximation de la matrice jacobienne  $\mathcal{J}(\mathbf{q}_0^{k+1})$  à partir de son expression à l'itération  $k$ . Cette approximation consiste à écrire, avec les notations de (2.25)

$$\mathcal{J}(\mathbf{q}_0^{k+1}) = \mathcal{J}(\mathbf{q}_0^k) + \frac{1}{\mathbf{d}_0^{kT} \mathbf{d}_0^k} [\mathbf{r}^k - \mathcal{J}(\mathbf{q}_0^k) \mathbf{d}_0^k] \mathbf{d}_0^{kT} \quad (2.26)$$

$\mathcal{N}_1$	0	0	0
● $C_{1/2}$	● $C_{2/1}$		
● $C_{1/3}$		● $C_{3/1}$	
0	$\mathcal{N}_2$	0	0
	● $C_{2/4}$		● $C_{4/2}$
● $CD_{1/2}$	● $CD_{2/1}$		
0	0	$\mathcal{N}_3$	
		● $C_{3/4}$	● $C_{4/3}$
● $CD_{1/3}$		● $CD_{3/1}$	
0	0	0	$\mathcal{N}_4$
	● $CD_{2/4}$		● $CD_{4/2}$
		● $CD_{3/4}$	● $CD_{4/3}$

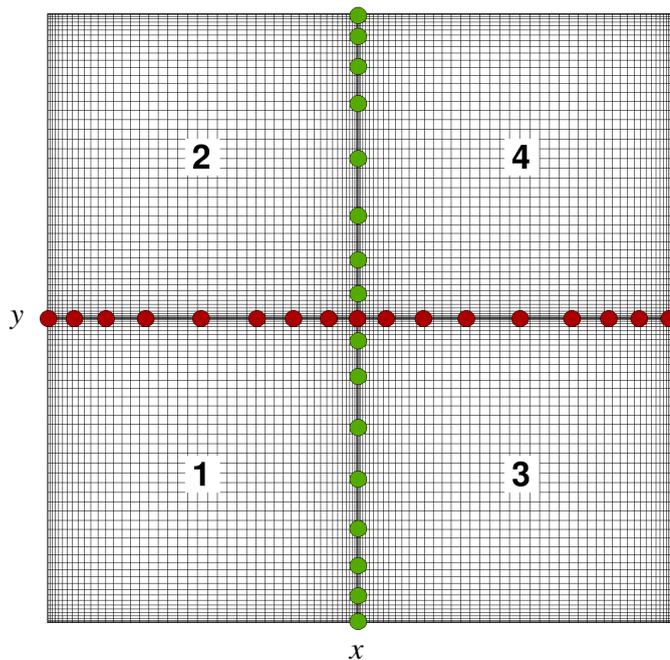


FIGURE 2.3 – Illustration de la structure de l'opérateur Jacobien en fonction de la décomposition de domaine considérée. Ici  $N_{dom} = 2 \times 2$

avec  $\mathbf{r}^k = \mathcal{N}(\mathbf{q}_0^{k+1}) - \mathcal{N}(\mathbf{q}_0^k)$ . Comme exposé par exemple dans [119], cette approximation de la matrice jacobienne se justifie pour des fonctions affines et d'une certaine façon pour des fonctions non linéaires, localement au voisinage d'une solution d'équilibre. En posant  $\mathbf{u}^k = \frac{1}{\mathbf{d}_0^{kT} \mathbf{d}_0^k} [\mathbf{r}^k - \mathcal{J}(\mathbf{q}_0^k) \mathbf{d}^k]$  on peut réécrire (2.26) de manière simplifiée

$$\mathcal{J}^{k+1} = \mathcal{J}^k + \mathbf{u}^k \mathbf{d}^{kT} \quad (2.27)$$

On substitue  $\mathcal{J} = QR$ . En notant  $\mathbf{p} = Q^T \mathbf{u}$  on peut écrire

$$\mathcal{J}^{k+1} = Q(R + \mathbf{p} \mathbf{d}^{kT}) \quad (2.28)$$

Il est alors possible de transformer la matrice  $R + \mathbf{p} \mathbf{d}^{kT}$  en une matrice  $R'$  triangulaire supérieure par  $2(N-1)$  rotations dites de Jacobi. Ces transformations ne nécessitent que  $O(N^2)$  opérations et cette approche numérique est par exemple décrite dans des ouvrages de référence quant aux algorithmes numériques, comme les *Numerical recipes* [101]. On obtient ainsi la solution  $Q^{k+1}$  ainsi que la matrice jacobienne  $\mathcal{J}^{k+1}$  à partir de la matrice  $\mathcal{J}^k$  et seule la matrice jacobienne  $\mathcal{J}(\mathbf{q}_0^{k=0})$  doit donc être construite explicitement au début des itérations. Le critère d'arrêt utilisé ici est de manière habituelle de la forme

$$\|\mathcal{N}(\mathbf{q}_0^k)\|_\infty \leq \epsilon \quad \text{et} \quad \frac{\|\mathbf{d}^k\|_\infty}{\|\mathbf{q}_0^k\|_\infty} \leq \epsilon \quad (2.29)$$

avec la norme  $\|\cdot\|_\infty$  qui consiste à prendre un maximum (en valeur absolue) des coefficients. En effet, cette norme est indépendante, pour une solution recevable donnée, de la taille des vecteurs et donc dans notre cas du nombre de points de discrétisation. Notons que la convergence de ce type de méthode n'est cependant pas quadratique, mais plutôt *super-linéaire*, contrairement à la méthode de Newton classique.

## 2.3 Problème aux valeurs propres

Nous avons vu précédemment que les études de stabilité globale passent par la résolution du système d'équations de Navier-Stokes linéarisées

$$B(\mathbf{q}_0) \frac{\partial \mathbf{q}'}{\partial t} = \mathcal{L}(\mathbf{q}_0) \mathbf{q}' \quad (2.30)$$

autour de la solution d'équilibre  $\mathbf{q}_0$ .

### 2.3.1 Méthode d'intégration temporelle

L'approche d'intégration temporelle consiste comme son nom l'indique à intégrer le système d'équation (2.30) en temps en considérant  $t_{n+1} = (n+1)\Delta t$  avec  $\Delta t$  le pas de temps de manière à déterminer la solution  $\mathbf{q}'^{(n+1)}$  à chaque itération. Dans le cadre de ce travail la méthode d'intégration est basée sur un schéma du second

ordre couramment appelé ' *second-order backward differentiation (BDF)*'. Le système d'équations (2.30) se réécrit sous la forme

$$\frac{3B(\mathbf{q}_0)}{2\Delta t}\mathbf{q}'^{(n+1)} - \mathcal{L}(\mathbf{q}_0)\mathbf{q}'^{(n+1)} = \frac{1}{2\Delta t}B(\mathbf{q}_0)(4\mathbf{q}'^{(n)} - \mathbf{q}'^{(n-1)}) \quad (2.31)$$

On utilisera une décomposition *LU* du membre de gauche pour déterminer la solution  $\mathbf{q}'^{(n+1)}$  du problème linéaire de la forme  $\mathbf{M}\mathbf{q}'^{(n+1)} = \mathbf{b}(\mathbf{q}'^{(n)}, \mathbf{q}'^{(n-1)})$

### 2.3.2 Approche fréquentielle

Dans l'approche modale matricielle utilisée ici, la perturbation est écrite sous la forme  $\mathbf{q}' = \hat{\mathbf{q}}e^{-i\omega t}$  ce qui donne lieu au problème aux valeurs propres  $\omega \in \mathbb{C}$

$$\left(\mathcal{L}(\mathbf{q}_0) + i\omega\mathcal{B}(\mathbf{q}_0)\right)\hat{\mathbf{q}} = 0 \quad (2.32)$$

La partie réelle  $\omega_r = \text{Re}(\omega)$  représente alors la pulsation, associée au taux d'amplification (ou d'atténuation)  $\omega_i = \text{Im}(\omega)$  du mode. Les fonctions propres associées  $\hat{\mathbf{q}}(x, y)$  rendent compte de la répartition spatiale des solutions. Lorsque des systèmes complexes sont étudiés, la résolution des équations de Navier-Stokes linéarisées implique des matrices de grandes tailles et la résolution directe devient trop coûteuse en temps. Des méthodes itératives sont donc utilisées, notamment la méthode itérative d'Arnoldi couramment utilisée pour la résolution de ce type de problème. Cette méthode exploite la projection sur des sous-espaces de Krylov et sera détaillée en annexe. Ci-après, nous abordons brièvement la variante appelée méthode d'Arnoldi inverse, propice à la résolution du problème de stabilité.

#### 2.3.2.1 Méthode d'Arnoldi inverse

Le principe de cette méthode basée sur la méthode d'Arnoldi consiste à pouvoir récupérer l'ensemble des couples valeurs propres/vecteurs propres du problème initialement posé autour d'une certaine valeur  $\omega_0 \in \mathbb{C}$  (voir par exemple [89]). Il est en effet intéressant de pouvoir 'cibler' les valeurs propres qui représentent le mieux la dynamique de l'écoulement. Nous avons vu que la valeur propre de notre problème s'écrit  $\omega \in \mathbb{C}$ . En posant

$$\mu = \frac{i}{\omega - \omega_0} \quad (2.33)$$

on peut réécrire le problème aux valeurs propres sous la forme

$$\left(\mathcal{L}(\mathbf{q}_0) + i\omega_0\mathcal{B}(\mathbf{q}_0)\right)^{-1}\mathcal{B}\hat{\mathbf{q}} = \mu\hat{\mathbf{q}} \quad (2.34)$$

On a alors

$$\mathcal{L}(\mathbf{q}_0)\hat{\mathbf{q}} = \left(\frac{1}{\mu} - i\omega_0\right)\mathcal{B}(\mathbf{q}_0)\hat{\mathbf{q}} \quad (2.35)$$

et par conséquent

$$\omega = \frac{i}{\mu} + \omega_0 \quad (2.36)$$

Afin de calculer les valeurs de  $\omega$  qui sont au voisinage de  $\omega_0$ , il convient donc de calculer la valeur  $\mu$  de plus grand module. Il convient alors d'appliquer la méthode d'Arnoldi (plus précisément la projection sur le sous-espace de Krylov) à l'opérateur  $(\mathcal{L}(\mathbf{q}_0) + i\omega_0\mathcal{B}(\mathbf{q}_0))^{-1}\mathcal{B}$ . Les vecteurs successifs à chaque étape  $j$  de la construction de l'espace Krylov sont par conséquent  $\mathbf{q}_{j+1} = (\mathcal{L}(\mathbf{q}_0) + i\omega_0\mathcal{B}(\mathbf{q}_0))^{-1}\mathcal{B}(\mathbf{q}_0)\mathbf{q}_j$  obtenus en résolvant

$$\left(\mathcal{L}(\mathbf{q}_0) + i\omega_0\mathcal{B}(\mathbf{q}_0)\right)\mathbf{q}_{j+1} = \mathcal{B}(\mathbf{q}_0)\mathbf{q}_j \quad (2.37)$$

en ayant opéré au préalable une décomposition  $LU$  de la matrice  $(\mathcal{L}(\mathbf{q}_0) + i\omega_0\mathcal{B}(\mathbf{q}_0))$ . Dans notre construction de l'opérateur  $\mathcal{L}$ , celui-ci est inversible et il en sera de même pour  $(\mathcal{L} + i\omega_0\mathcal{B})$ . Aussi, en l'absence d'indications sur la localisation des valeurs propres significatives par rapport à la question de stabilité, on prendra souvent  $\omega_0 = 0$ . Ces algorithmes ont été largement utilisés notamment pour des problèmes de stabilité en mécanique des fluides depuis une vingtaine d'années ([49]).

### 2.3.2.2 Caractère creux du problème aux valeurs propres

Afin d'obtenir une convergence suffisante, la résolution du problème aux valeurs propres nécessite de travailler avec un maillage suffisamment raffiné. Ce paramètre est d'autant plus important lorsque le champ de base et les vecteurs propres présentent de petites échelles de variation. L'augmentation du nombre de points de maillage entraîne une augmentation (quadratique) de l'espace mémoire nécessaire au stockage des valeurs de la matrice jacobienne. La difficulté majeure de la résolution du problème aux valeurs propres réside donc dans la capacité à utiliser un nombre de points de maillage suffisant tout en ayant un coût (espace mémoire et temps de calcul) le plus faible possible. Dans cette optique, une approche consiste à exploiter le caractère creux de la matrice jacobienne. Cette approche convient particulièrement aux approches de discrétisation en différences finies mais peut également s'appliquer dans certains cas aux méthodes spectrales. En effet, nous avons vu précédemment que les méthodes de décomposition de domaines entraînent un découpage de la matrice jacobienne d'autant plus important que le nombre de sous-domaines augmente. La figure 2.4 illustre ce comportement. De nombreuses bibliothèques numériques sont alors mises à disposition pour la résolution des problèmes de type  $Ax = b$ . On trouvera en annexe une liste non-exhaustive de ces bibliothèques en fonction de la nature réel ou complexe du problème aux valeurs propres et du langage de programmation adopté. L'ensemble de ces solveurs utilisent des formats de stockage des opérateurs propres aux algorithmes de résolution. Il conviendra donc d'adapter la méthode de stockage au solveur utilisé. Dans notre cas, le choix s'est tourné vers les routines de résolution linéaire *SuperLU* qui imposent de stocker la matrice en format *CCS* (pour *Compressed Row Storage*). Les performances obtenues avec ce type d'approche sont présentées dans le tableau 2.1.

### 2.3.2.3 Parallélisation

Ces dernières décennies, ce qu'il est convenu d'appeler le calcul scientifique, a connu un développement important. Les systèmes à étudier deviennent en effet de

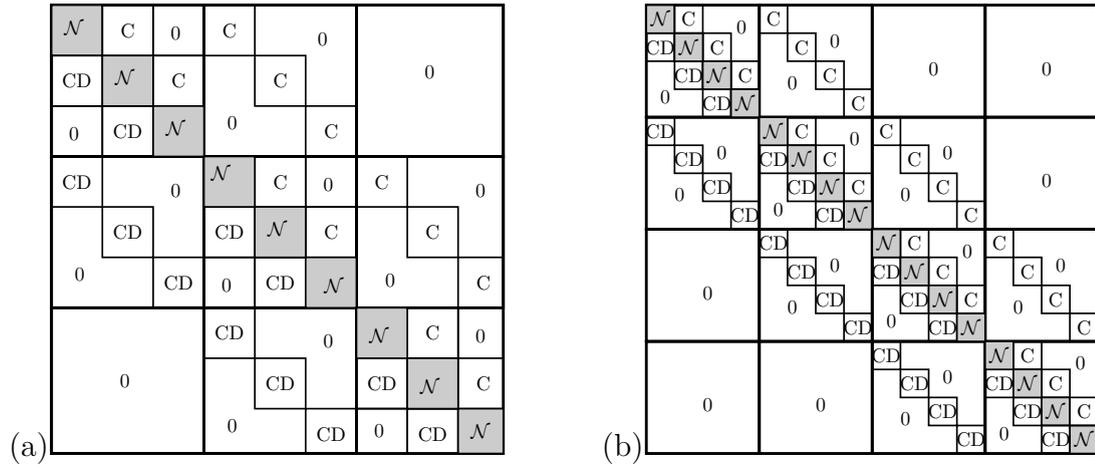


FIGURE 2.4 – Illustration de la structure de l’opérateur Jacobien en fonction du nombre de domaine considéré. Ici on a (a)  $N_{dom} = 3 \times 3$  et (b)  $N_{dom} = 4 \times 4$

$N_{dom} = N_{dom_x} \times N_{dom_y}$	$N = N_x \times N_y = 100$	$N = 400$	$N = 900$	$N = 2500$
$1 \times 1$	1.984	37.664	210.009	1630.158
$1 \times 2$	0.841	16.733	95.102	819.156
$1 \times 3$	0.463	10.295	58.904	524.846
$2 \times 3$	0.249	4.911	27.705	244.514
$3 \times 3$	0.187	2.837	17.794	157.677
$5 \times 5$	0.094	1.056	5.512	49.587

TABLE 2.1 – Mémoire nécessaire ( $Mb$ ) au stockage des matrices  $L$  et  $U$  après décomposition de la matrice Jacobienne en fonction du découpage du domaine et du nombre de points total.

plus en plus complexes, avec pour corollaire un besoin accru en termes de mémoire centrale lors de l'exécution des algorithmes. Les capacités en mémoire centrale des ordinateurs ont certes considérablement augmenté, mais afin d'exécuter aussi efficacement que possible des algorithmes, le *calcul parallèle*, c'est-à-dire l'exécution du calcul plus ou moins simultanément sur plusieurs processeurs, s'est largement généralisé ces dernières années. Deux méthodes de parallélisation semblent s'être imposées en programmation numérique à savoir la programmation OpenMP (Open Multi-Processing), pour laquelle les processeurs sont connectés entre eux par un mécanisme de mémoire partagée, et la programmation MPI (Message Passing Interface), qui est devenue un standard des programmations parallèles sur des systèmes à mémoire distribuée.

De nombreuses bibliothèques scientifiques parallèles (*OpenMP*) correspondent à nos besoins, ce qui nous a convaincus d'adapter le code de stabilité globale au *multi-processing*. Le principe de la parallélisation OpenMP est relativement simple comparé à la programmation MPI. En effet un programme OpenMP est exécuté sur un processus unique et active dans certaines zones du calcul des processus dits légers. Chaque processus léger exécute alors une tâche qui lui est propre, permettant ainsi l'exécution de plusieurs tâches en même temps. Aucune instruction de communication n'est nécessaire, les informations étant toutes stockées sur le même processus. Notre choix s'est porté sur l'utilisation de la librairie LAPACK ([7]) qui propose un large choix d'algorithmes de résolution numériques comme la multiplication matrice/vecteur, la décomposition  $QR$ ,  $LU$  ou encore le calcul des valeurs propres/vecteurs propres d'un opérateur matriciel, le tout avec une bonne scalabilité ([86]).



# Chapitre 3

## Conditions limites et validations

Dès lors que l'on cherche à déterminer numériquement les solutions d'un problème physique non-borné, il est nécessaire d'imposer des frontières au domaine de calcul que l'on considère afin de tronquer le domaine physique. Mathématiquement, cela revient à imposer un système d'équations sur le vecteur d'état pour chaque frontière. Dans le cadre des écoulements compressibles stationnaires, ces conditions aux limites sont généralement assez simples car aucun effet de propagation d'onde n'est à prendre en compte. En revanche, ces dernières peuvent se développer lorsque l'on traite le système de Navier-Stokes linéarisé. Il est alors important d'adapter les conditions aux limites de manière à évacuer proprement ces instabilités ainsi que les ondes acoustiques. Nous rappellerons dans un premier temps le système d'équations de Navier-Stokes stationnaires et détaillerons les conditions aux limites associées. La seconde partie sera consacrée à la présentation des conditions aux limites linéarisées associées au problème aux valeurs propres. Un large choix de conditions aux limites est proposé dans la littérature scientifique (Colonus [39]) et nous nous concentrerons dans ce travail à présenter les conditions aux limites de type zone absorbante. La dernière partie sera consacré à la validation des différentes zones absorbantes implémentées dans notre code de calcul. Pour cela, nous nous intéresserons dans un premier temps à l'étude de propagation acoustique d'une perturbation dans un champ homogène à l'aide de la méthode d'intégration temporelle présentée précédemment. Dans un second temps nous étudierons les résultats obtenus dans le cadre de l'étude de stabilité globale d'un écoulement de couche limite en régime compressible.

### 3.1 Conditions aux limites du problème stationnaire

Nous avons vu précédemment que les études de stabilité globale passent dans un premier temps par la résolution des solutions d'équilibre du système d'équations de Navier-Stokes stationnaires

$$\rho_0 \nabla \cdot \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_0 \cdot \nabla \rho_0 = 0, \quad (3.1a)$$

$$\rho_0 \nabla \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{u}_0 + \frac{1}{\gamma Ma^2} \nabla p_0 - \frac{1}{Re} \nabla \cdot \tau(\mathbf{u}_0) = 0, \quad (3.1b)$$

Conditions aux limites				
Entrée $x = 0$	$u = u_b$	$v = v_b = 0$	$T = T_b = f_c(u_b)$	$\rho = 1/T_b$
Sortie $x = L$	$\partial_x u = 0$	$\partial_x v = 0$	$\partial_x T = 0$	$p = \rho T = 0$
Sol $y = 0$	$u = 0$	$v = 0$	$\partial_y T = 0$	$\partial_y \rho = 0$
Plafond $y = H$	$u = 1$	$\partial_y v = 0$	$T = 1$	$\rho = 1$

TABLE 3.1 – Conditions aux limites pour la résolution de la solution d'équilibre

$$\rho_0 \mathbf{u}_0 \cdot \nabla T_0 + (\gamma - 1) p_0 \nabla \cdot \mathbf{u}_0 - \gamma(\gamma - 1) \frac{Ma^2}{Re} \tau(\mathbf{u}_0) : \mathbf{d}(\mathbf{u}_0) - \frac{\gamma}{Pr Re} \nabla^2 T_0 = 0 \quad (3.1c)$$

$$p_0 - \rho_0 T_0 = 0 \quad (3.1d)$$

Les conditions aux limites utilisées pour fermer ce système sont alors directement héritées du cas incompressible. Étant donné le caractère faiblement compressible de nos écoulements, nous imposerons un profil de Blasius incompressible en entrée. La température sera déterminée par la relation adimensionnée de Crocco-Busemann

$$T_b = 1 + (1 - u_b^2) \frac{(\gamma - 1) Ma^2}{2} \quad (3.2)$$

et la masse volumique par la relation des gaz parfaits  $p_b = \rho_b T_b$  en considérant  $p_b = 1$  en entrée. Ces équations sont à résoudre dans un domaine rectangulaire  $0 < x < L$  et  $0 < y < H$ , la paroi étant localisée en  $y = 0$ , où une condition d'adhérence est imposée. En sortie  $x = L$  des conditions de Neumann (3.1) limitent les effets de réflexions et en  $y = H$ , loin de la couche limite l'écoulement uniforme est prescrit. Le tableau 3.1 résume les différentes conditions limites imposées à l'écoulement.

## 3.2 Conditions aux limites linéarisées

### 3.2.1 Généralités

L'étude de stabilité globale d'un écoulement nécessite dans un second temps la résolution des équations de Navier-Stokes linéarisées autour d'une solution d'équilibre  $\mathbf{q}_0$ . Ces équations ont été introduites au premier chapitre et sont rappelées ici pour une facilité de lecture du manuscrit

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + (\mathbf{u}_0 \cdot \nabla) \rho' + (\mathbf{u}' \cdot \nabla) \rho_0 + \rho' (\nabla \cdot \mathbf{u}_0) + \rho_0 (\nabla \cdot \mathbf{u}') = 0, \quad (3.3a)$$

$$\rho_0 \left[ \frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t} + (\mathbf{u}_0 \cdot \nabla) \mathbf{u}' + (\mathbf{u}' \cdot \nabla) \mathbf{u}_0 \right] + \rho' (\mathbf{u}_0 \cdot \nabla) \mathbf{u}_0 = -\frac{1}{\gamma Ma^2} \nabla p' + \frac{1}{Re} \left[ \nabla^2 \mathbf{u}' + \frac{1}{3} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}') \right], \quad (3.3b)$$

Conditions aux limites linéarisées				
Entrée $x = 0$	$u' = 0$	$v' = 0$	$T' = 0$	$\partial_x \rho' = 0$
Sortie $x = L$	$\partial_x u' = 0$	$\partial_x v' = 0$	$\partial_x T' = 0$	$p' = \rho_0 T' + T_0 \rho' = 0$
Sol $y = 0$	$u' = 0$	$v' = 0$	$\partial_y T' = 0$	$\partial_y \rho' = 0$
Plafond $y = H$	$u' = 0$	$\partial_y v' = 0$	$T' = 0$	$\rho' = 0$

TABLE 3.2 – Conditions aux limites "classiques" utilisées pour fermer le système d'équations de Navier-Stokes linéarisées

$$\begin{aligned}
 \rho_0 \left[ \frac{\partial T'}{\partial t} + (\mathbf{u}_0 \cdot \nabla) T' + (\mathbf{u}' \cdot \nabla) T_0 \right] + \rho' (\mathbf{u}_0 \cdot \nabla) T_0 = \\
 -(\gamma - 1) [(\nabla \cdot \mathbf{u}_0) p' + p_0 (\nabla \cdot \mathbf{u}')] + \frac{\gamma(\gamma - 1) Ma^2}{Re} [\tau_0 : \nabla \otimes \mathbf{u}' + \tau' : \nabla \otimes \mathbf{u}_0] + \frac{\gamma}{Pr Re} \nabla^2 T',
 \end{aligned} \tag{3.3c}$$

Ce système, après discrétisation des variables d'espace et des opérateurs associés, peut alors être réécrit sous la forme d'un problème aux valeurs propres

$$(\mathcal{L}(\mathbf{q}_0) + i\omega \mathcal{B}(\mathbf{q}_0)) \hat{\mathbf{q}}(\mathbf{x}) = 0 \tag{3.4}$$

en considérant la perturbation sous la forme  $\mathbf{q}'(x, y, z, t) = \hat{\mathbf{q}}(x, y, z) e^{-i\omega t}$ . Des conditions aux limites héritées du code de calcul incompressible ont été implémentées en un premier temps pour la résolution du système aux valeurs propres (3.3) (tableau 3.2). Cette approche a néanmoins rapidement montré ses limites et ce d'autant plus lorsque les effets de compressibilité deviennent non négligeables. En effet, pour des nombres de Mach suffisamment grands  $Ma > 0.3$ , des ondes de différentes natures se forment et se propagent dans l'écoulement. Les conditions aux limites présentées dans le tableau 3.2 étant de nature réfléchissante, elles ne permettent pas d'évacuer proprement les perturbations du domaine. Pour les ondes de type hydrodynamique telles que les ondes de vorticité ou d'entropie, une solution serait d'agrandir la taille du domaine de calcul. En effet, ces ondes possèdent un caractère exponentiellement décroissant à mesure qu'elles s'éloignent de la source qui les a émises. Cependant, nous avons vu que l'augmentation de la taille du domaine de calcul entraînait une augmentation du nombre de points de maillage et, par conséquent, de l'espace mémoire nécessaire à la résolution du problème aux valeurs propres. De plus, les écoulements compressibles sont également le siège de formation d'ondes de nature acoustique qui présentent la particularité d'être faiblement décroissantes. Il devient donc essentiel de modifier les conditions de bords de manière à ce que ces ondes puissent sortir du domaine. On peut classer par ordre de complexité croissante différents types d'écoulements présentant ces perturbations acoustiques :

- les problèmes de propagation d'onde linéaire harmonique en temps
- les problèmes de propagation d'onde linéaire instationnaire

— les problèmes de propagation d’onde non-linéaire instationnaire

Les problèmes de propagation d’onde linéaire harmonique en temps possèdent des conditions aux limites éprouvées et efficaces (Gerdes [59], Givoli [60], Tsynkov [125]) et ne seront pas traités dans ce manuscrit. Les conditions aux limites associées aux problèmes non-linéaires instationnaires font actuellement l’objet de nombreuses études et sont, de manière générale, empruntées aux cas linéaires (Chassaing et Gerolymos [34], Atassi et Galan [9], méthode des caractéristiques). Nous nous concentrerons ici sur les conditions aux limites associées aux problèmes de propagation d’ondes linéaires instationnaires. Ces équations sont en règle dépendant du problème et nécessitent de paramétrer les coefficients du modèle que l’on utilise pour s’adapter à l’écoulement considéré. Deux types de conditions aux limites sont associées à notre cas : les **conditions aux limites non-réfléchissantes exactes ou locales** et les **régions absorbantes**. Nous nous limitons dans ce travail de thèse aux zones absorbantes.

### 3.2.2 Conditions aux limites de type zone absorbante

Les zones absorbantes, également appelées zones éponges ou zones tampons, se présentent comme une alternative aux conditions limites ([39]) exactes ou locales de type NRBC (*Non-Reflecting Boundary Conditions*). L’idée générale consiste à ajouter un terme de dissipation numérique aux équations de manière à forcer les perturbations à décroître (Israeli et Orsag [67]). Différentes méthodes ont été utilisées pour construire ce terme de dissipation numérique. Devant l’importance du nombre de travaux portant sur ce type d’approche, nous nous limiterons uniquement à quelques cas (Bodony [24], Yamouni [131], Berenger [30]/Hu[65]) afin de comparer les résultats obtenus et de choisir le type de méthode approprié à nos cas.

Une première méthode (Bodony *et al.* [24]) s’inspire du travail de Israeli et Orsag ([67]) pour construire une zone absorbante pour les équations linéaires et faiblement non-linéaires. Un terme de dissipation de la forme  $-\sigma(x,y)\mathbf{q}_{ref}$  avec  $\sigma$  un coefficient, est introduit directement dans le membre de droite de manière à faire correspondre le champ total  $\mathbf{q}$  avec la solution stationnaire  $\mathbf{q}_0$ . Nous appellerons dans la suite de ce travail cette approche comme étant la zone absorbante *Za1*.

Une seconde méthode consiste à modifier localement la valeur du nombre de Reynolds local en chaque point du maillage appartenant à la zone absorbante. Cette méthode a été utilisée pour l’étude de stabilité globale d’un écoulement de cavité ouverte (Yamouni [131]). Le nombre de Reynolds est dans ce cas défini comme  $Re_d = \min(Re, 1/\nu_\Delta)$  avec  $\Delta$  la taille de maille et la viscosité  $\nu_\Delta = \Delta/\sigma$  en considérant  $\sigma$  un coefficient choisi par l’utilisateur. Ici, la viscosité sera donc augmentée de façon significative dans les zones où l’écoulement est homogène (où les tailles de maille sont les plus importantes). Nous appellerons cette méthode dans la suite de ce travail la zone absorbante de type *Za2*.

La dernière approche introduite ici a été développée par Bérenger [30] pour trai-

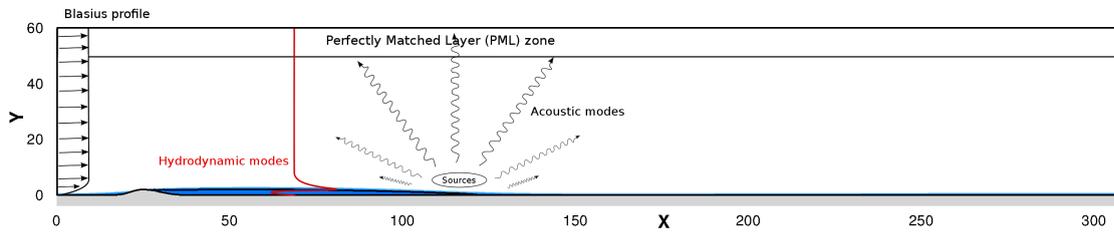


FIGURE 3.1 – Illustration d'un problème de rayonnement acoustique traité par l'introduction d'une zone tampon de type PML

ter les problèmes électromagnétiques en différences finies (résolution des équations de Maxwell). Cette méthode connue sous le nom de PML (pour *Perfectly Matched Layer*) consiste, comme les méthodes de zones absorbantes introduites précédemment, à changer la nature des équations dans la zone de calcul de manière à forcer les perturbations à s'atténuer (figure 3.1). Cette méthode est devenue la référence dans le domaine des ondes électromagnétiques et s'est vite répandue à d'autres domaines d'applications comme celui de la mécanique quantique (Aguilar et Combes [3], Balslev et Combes [12], Simon [114]). Afin de comprendre le concept de cette méthode, considérons une fonction  $f(x,y)$  solution des équations d'ondes. La solution analytique peut se mettre sous la forme d'une onde plane stationnaire du type

$$f(x,y,\omega) = f_0 e^{-i\omega(S_x x + S_y y)} \quad (3.5)$$

avec  $\omega$  la pulsation de l'onde et  $S_x = k_x/\omega, S_y = k_y/\omega$  réels. En introduisant un terme d'atténuation dans chaque direction de l'espace  $e^{-S_x \Gamma_x}$  et  $e^{-S_y \Gamma_y}$  dans la zone absorbante, on obtient

$$f(x,y,\omega) = f_0 e^{-i\omega(S_x x + S_y y)} e^{-S_x \Gamma_x} e^{-S_y \Gamma_y} \quad (3.6)$$

La solution décroissante peut alors se mettre sous la forme

$$f(x,y,\omega) = f_0 e^{-i\omega(S_x(x + i\frac{\Gamma_x}{\omega}) + S_y(y + i\frac{\Gamma_y}{\omega}))} \quad (3.7)$$

On peut voir la perturbation comme une solution des équations à laquelle un changement de variable du type

$$x \longrightarrow x + i\frac{\Gamma_x(x)}{\omega}, \quad y \longrightarrow y + i\frac{\Gamma_y(y)}{\omega} \quad (3.8)$$

est appliqué. La fonction  $f(x,y,\omega)$  étant analytique, le changement de variable (3.8) peut être vu comme le prolongement analytique dans le plan complexe de notre solution. Le chapitre suivant s'appliquera à détailler la forme des équations dans les zones absorbantes définies par une approche de type PML. Nous verrons ainsi les changements que ce type de méthode impose pour les équations d'Euler linéarisées dans un premier temps puis ceux opérés lorsque l'on traite les équations de Navier-Stokes linéarisées compressibles et visqueuses.

### 3.2.3 Expression des équations d'Euler linéarisées dans les couches PML

Les équations de propagation acoustique sont obtenues en linéarisant les équations d'Euler autour d'un champ de base. En considérant un champ porteur uniforme  $\mathbf{q}_0(x,y,t)$ , les équations adimensionnées peuvent s'écrire sous forme vectorielle

$$\frac{\partial \mathbf{q}'}{\partial t} + A \frac{\partial \mathbf{q}'}{\partial x} + B \frac{\partial \mathbf{q}'}{\partial y} = 0 \quad (3.9)$$

Si l'on pose  $\mathbf{q}' = \hat{\mathbf{q}}e^{-i\omega t}$ , le système (3.9) se réécrit

$$-i\omega \hat{\mathbf{q}} + A \frac{\partial \hat{\mathbf{q}}}{\partial x} + B \frac{\partial \hat{\mathbf{q}}}{\partial y} = 0 \quad (3.10)$$

En introduisant le changement de variable

$$\begin{aligned} x &\mapsto x + \frac{i}{\omega} \Gamma_x(x) \\ \frac{\partial}{\partial x} &\mapsto \frac{1}{1 + i \frac{\sigma_x}{\omega}} \frac{\partial}{\partial x} \end{aligned} \quad (3.11)$$

et

$$\begin{aligned} y &\mapsto y + \frac{i}{\omega} \Gamma_y(y) \\ \frac{\partial}{\partial y} &\mapsto \frac{1}{1 + i \frac{\sigma_y}{\omega}} \frac{\partial}{\partial y} \end{aligned} \quad (3.12)$$

avec

$$\sigma_x = \frac{\partial \Gamma(x)}{\partial x}, \quad \sigma_y = \frac{\partial \Gamma(y)}{\partial y} \quad (3.13)$$

le système d'équation (3.10) se réécrit

$$-i\omega \hat{\mathbf{q}} + \frac{1}{1 + i \frac{\sigma_x}{\omega}} A \frac{\partial \hat{\mathbf{q}}}{\partial x} + \frac{1}{1 + i \frac{\sigma_y}{\omega}} B \frac{\partial \hat{\mathbf{q}}}{\partial y} = 0. \quad (3.14)$$

La méthode PML initialement proposée par Bérenger [30] impose de découpler le vecteur d'état en une somme d'ondes entrantes et d'ondes sortantes  $\mathbf{q}' = \mathbf{q}'_1 + \mathbf{q}'_2$ . Cette formulation fait alors apparaître un nouveau système d'équations à résoudre qui augmente significativement l'espace mémoire requis pour la résolution du système. L'application de la méthode PML aux équations d'Euler linéarisées développée par Hu [65] propose une formulation couplée. En effet, en multipliant l'équation (3.14) par  $(1 + i \frac{\sigma_x}{\omega})(1 + i \frac{\sigma_y}{\omega})$ , il est possible de réécrire cette dernière sous la forme

$$-i\omega \hat{\mathbf{q}} + (\sigma_x + \sigma_y) \hat{\mathbf{q}} + \frac{i\sigma_x \sigma_y}{\omega} \hat{\mathbf{q}} + A \frac{\partial \hat{\mathbf{q}}}{\partial x} + \frac{i\sigma_y}{\omega} A \frac{\partial \hat{\mathbf{q}}}{\partial x} + B \frac{\partial \hat{\mathbf{q}}}{\partial y} + \frac{i\sigma_x}{\omega} B \frac{\partial \hat{\mathbf{q}}}{\partial y} = 0 \quad (3.15)$$

On peut alors réécrire le système d'équations dans le domaine temporel

$$\frac{\partial \mathbf{q}'}{\partial t} + A \frac{\partial \mathbf{q}'}{\partial x} + B \frac{\partial \mathbf{q}'}{\partial y} + \sigma_y A \frac{\partial \mathbf{g}'}{\partial x} + \sigma_x B \frac{\partial \mathbf{g}'}{\partial y} + (\sigma_x + \sigma_y) \mathbf{g}' + \sigma_x \sigma_y \mathbf{g}' = 0 \quad (3.16)$$

en introduisant le vecteur  $\mathbf{g}$  défini comme

$$\frac{\partial \mathbf{q}'}{\partial t} = \mathbf{g}' \quad (3.17)$$

Regardons à présent la formulation PML pour nos études de stabilité. Afin de résoudre le système (3.15) comme un problème aux valeurs propres pour  $\omega$ , il faudrait réécrire le système en multipliant par  $\omega$  et donc faire apparaître  $\omega^2$  dans l'équation. L'introduction d'une variable auxiliaire (de type  $\mathbf{r}' = \omega \mathbf{q}'$ ) permettrait certes de se ramener à un problème linéaire aux valeurs propres, au prix cependant de devoir doubler la taille du système, ce qui est exclu dans le problème de stabilité globale présent. Nous proposons donc une expression de prolongement simplifiée

$$x \longrightarrow x + i\Gamma(x), \quad y \longrightarrow y + i\Gamma_y, \quad (3.18)$$

en omettant simplement le terme  $\frac{1}{\omega}$  de la formulation (3.8). Il faudra donc garder à l'esprit que cette formulation PML ne sera pas valide pour toutes les fréquences et que le choix des paramètres  $\sigma_x, \sigma_y$  se fera en fonction des fréquences des modes que l'on cherche à atténuer. Cette formulation a été utilisée par exemple pour l'étude de modes acoustiques rayonnants dans la thèse de Lucas Pascal ([92]) ainsi que dans les études de Hein et al. ([63], [64]). La formulation retenue pour l'étude des modes propres sera donc de la forme

$$-i\omega \hat{\mathbf{q}}(1 + i\sigma_x)(1 + i\sigma_y) + (1 + i\sigma_y)A \frac{\partial \hat{\mathbf{q}}}{\partial x} + (1 + i\sigma_x)B \frac{\partial \hat{\mathbf{q}}}{\partial y} = 0 \quad (3.19)$$

### 3.2.4 Expression des équations de Navier-Stokes linéarisées dans les couches PML

Nous venons de voir la formulation des équations d'Euler linéarisées dans les régions PML. Les équations de Navier-Stokes font ici apparaître les termes de dissipation faisant intervenir les dérivées secondes  $\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \frac{\partial^2}{\partial y}$ . Considérons le système d'équations sous forme vectorielle

$$\frac{\partial \mathbf{q}'}{\partial t} + A \frac{\partial \mathbf{q}'}{\partial x} + B \frac{\partial \mathbf{q}'}{\partial y} + C_1 \frac{\partial^2 \mathbf{q}'}{\partial x^2} + C_2 \frac{\partial^2 \mathbf{q}'}{\partial y^2} = 0. \quad (3.20)$$

En appliquant les mêmes opérations qu'au chapitre précédent, le changement de variable s'écrit

$$\begin{aligned} x &\mapsto x + i\Gamma_x(x) \\ \frac{\partial}{\partial x} &\mapsto \frac{1}{1 + i\sigma_x} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} &\mapsto \frac{1}{(1 + i\sigma_x)^2} \left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{i}{(1 + i\sigma_x)} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \right] \end{aligned} \quad (3.21)$$

et

$$\begin{aligned}
 y &\mapsto y + i\Gamma_y(y) \\
 \frac{\partial}{\partial y} &\mapsto \frac{1}{1 + i\sigma_y} \frac{\partial}{\partial y} \\
 \frac{\partial^2}{\partial y^2} &\mapsto \frac{1}{(1 + i\sigma_y)^2} \left[ \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{i}{(1 + i\sigma_y)} \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} \right].
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

Les équations de Navier-Stokes compressibles dans les régions PML sont donc de la forme

$$\begin{aligned}
 &\frac{\partial \mathbf{q}'}{\partial t} + A \frac{1}{(1 + i\sigma_x)} \frac{\partial \mathbf{q}'}{\partial x} + B \frac{1}{(1 + i\sigma_y)} \frac{\partial \mathbf{q}'}{\partial y} + \\
 &C_1 \frac{1}{(1 + i\sigma_x)^2} \left[ \frac{\partial^2 \mathbf{q}'}{\partial x^2} - \frac{i}{(1 + i\sigma_x)} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \frac{\partial \mathbf{q}'}{\partial x} \right] + \\
 &C_2 \frac{1}{(1 + i\sigma_y)^2} \left[ \frac{\partial^2 \mathbf{q}'}{\partial y^2} - \frac{i}{(1 + i\sigma_y)} \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} \frac{\partial \mathbf{q}'}{\partial y} \right] = 0.
 \end{aligned} \tag{3.23}$$

En multipliant à nouveau de part et d'autre le système (3.23) par  $(1 + i\sigma_x)(1 + i\sigma_y)$ , la formulation des équations de Navier-Stokes s'écrit alors

$$\begin{aligned}
 &-i\omega(1 + i\sigma_x)(1 + i\sigma_y)\hat{\mathbf{q}} + (1 + i\sigma_y)A \frac{\partial \hat{\mathbf{q}}}{\partial x} + (1 + i\sigma_x)B \frac{\partial \hat{\mathbf{q}}}{\partial y} + \\
 &C_1 \frac{(1 + i\sigma_y)}{(1 + i\sigma_x)} \left[ \frac{\partial^2 \hat{\mathbf{q}}}{\partial x^2} - \frac{i}{(1 + i\sigma_x)} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \frac{\partial \hat{\mathbf{q}}}{\partial x} \right] + \\
 &C_2 \frac{(1 + i\sigma_x)}{(1 + i\sigma_y)} \left[ \frac{\partial^2 \hat{\mathbf{q}}}{\partial y^2} - \frac{i}{(1 + i\sigma_y)} \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} \frac{\partial \hat{\mathbf{q}}}{\partial y} \right] = 0.
 \end{aligned} \tag{3.24}$$

A ce jour, il semble qu'aucune étude n'ait mis en avant l'utilisation des PML pour la résolution des problèmes d'écoulements ouverts en régime compressible visqueux. Les chapitres suivants feront part des différents résultats obtenus en utilisant ce type d'approche.

## 3.3 Illustrations et validations

### 3.3.1 Utilisation des zones absorbantes pour la propagation acoustique avec viscosité en domaine temporel

Nous nous intéresserons dans cette partie au comportement d'une perturbation initiale introduite dans un milieu homogène au repos au cours du temps. Pour ce faire, la méthode d'intégration temporelle présentée au chapitre 2 est utilisée. Nous considérons un champ de base homogène  $\mathbf{q}_0 = (\rho_0, u_0, v_0, T_0)^T = (1, 0, 0, 1)^T$  avec un nombre de Reynolds basé sur une longueur de référence  $L_{ref} = 1$ ,  $Re_L = 600$  et

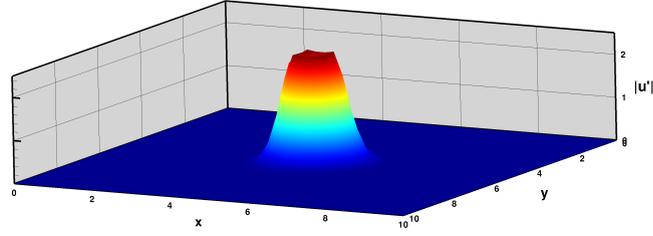


FIGURE 3.2 – Illustration de la perturbation initiale dans un champ de base homogène

auquel on ajoute une perturbation initiale à divergence nulle de la forme

$$\begin{aligned} u' &= -(y - y_0)A_0 \exp \left[ -\ln(2) \left( (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \right) \right] \\ v' &= (x - x_0)A_0 \exp \left[ -\ln(2) \left( (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \right) \right] \end{aligned} \quad (3.25)$$

avec pour la suite une amplitude  $A_0$  que l'on pourra faire varier. Le domaine sera bidimensionnel de géométrie carrée de taille  $L_x = L_y = 10$  et nous considérerons  $N_x = N_y = 40$  points de discrétisation dans les directions longitudinale et transverse. Des conditions aux limites de type paroi solide seront imposées sur les bords du domaine et le pas de temps  $\Delta t$  adimensionné par le temps de référence  $t_{ref}$  sera considéré constant et égal à  $\Delta t = 5.10^{-3}$ . Nous comparerons le comportement de la solution au cours du temps lorsque un modèle de zone tampon est introduit dans le domaine de calcul. Dans cette optique, nous regarderons l'évolution au cours du temps du résidu  $\mathbf{r}$  défini comme la valeur maximale de la différence entre deux solutions successives telle que

$$\mathbf{r} = \left| \mathbf{q}^{m+1} - \mathbf{q}^m \right|_{\max} \quad (3.26)$$

Dans l'ensemble de ce chapitre, la zone absorbante sera construite sur les bords du domaine de calcul avec une épaisseur  $H_{abs} = 2$  à l'intérieur du domaine.

### 3.3.1.1 Solution de référence

Dans un premier temps, regardons le comportement d'une perturbation se propageant dans notre domaine de calcul en considérant uniquement des parois solides sur les bords. La figure 3.3 illustre l'évolution du module de la vitesse  $|\mathbf{u}'|$  ainsi que l'évolution de  $\mathbf{r}(t)$  au cours du temps. Pour  $t_0 < t < t_1$ , on assiste à l'établissement de la perturbation dans l'écoulement, se traduisant par un premier pic à temps très court. Pour  $t > t_1$ , la perturbation impacte la paroi et se réfléchit sur cette dernière. On assiste alors à l'augmentation rapide de la valeur de  $\mathbf{r}$  qui passe de  $\mathbf{r} = 0.04$  à  $\mathbf{r} = 0.07$ . Au delà de cette itération, la perturbation se comporte comme

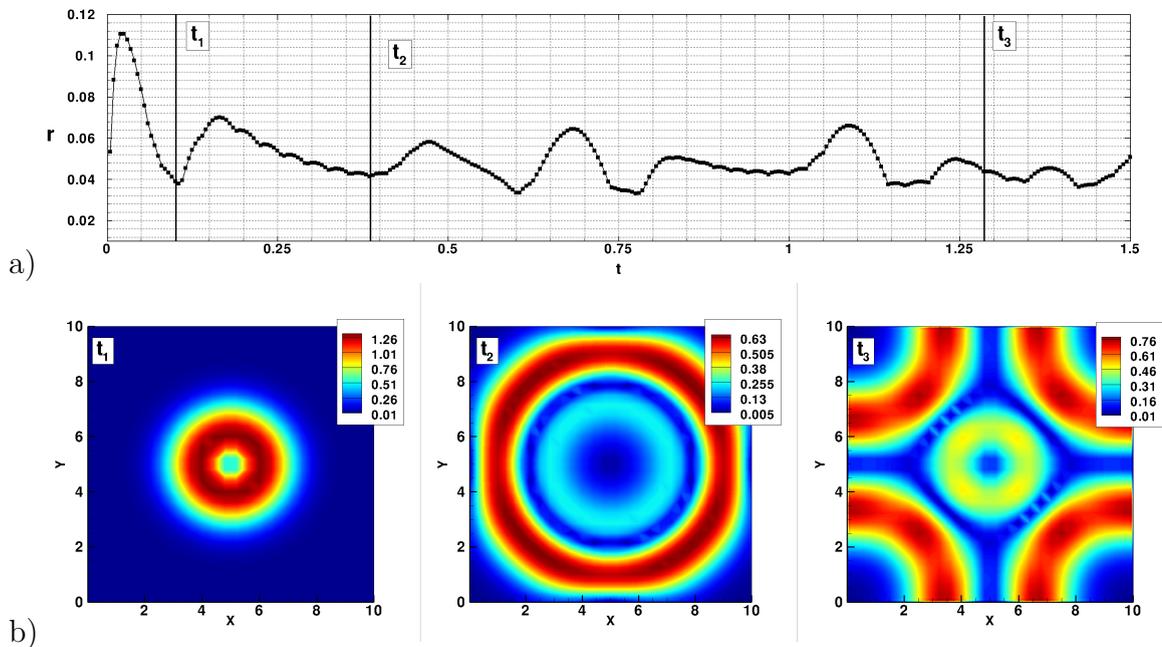


FIGURE 3.3 – (a) Évolution de la valeur du résidu  $r$  au cours du temps. (b) solution  $|u'|$  associée respectivement aux instants  $t_1$ ,  $t_2$  et  $t_3$

un oscillateur et se réfléchit de part et d'autre du domaine de manière périodique. Dans la suite de ce travail, nous nous limiterons à l'étude de la perturbation pour  $0 < t < 150\Delta t$  et nous comparerons les résultats obtenus avec les différents modèles de zones absorbantes à cette solution de référence.

### 3.3.1.2 Zone tampon : Za1

Nous nous concentrerons dans cette partie sur la validation de la méthode de zone absorbante de type  $Za1$  présentée précédemment. Les paramètres numériques sont identiques à ceux utilisés pour l'étude de référence. Les résultats sont présentés figures 3.4 et 3.5. On constate que le résidu reste identique au cas de référence pour  $t_1 < 20\Delta t$  et la perturbation évolue de manière identique au cas de référence. Au delà de  $t_1$ , la perturbation entre dans la zone absorbante. Son amplitude ainsi que la valeur de  $r$  diminuent alors significativement (figure 3.4). Au delà d'un temps suffisamment long et pour un coefficient  $\sigma$  suffisamment important ( $\sigma \geq 10$ ), plus aucune réflexion n'est observable et le milieu tend vers un état stationnaire. Il convient de noter qu'au dessus d'une certaine valeur critique  $\sigma_c$ , la perturbation peut être réfléchi au niveau de l'interface entre le domaine physique et la zone absorbante. Il convient donc de définir au cas par cas une valeur de  $\sigma$  pertinente de manière à absorber suffisamment les perturbations en rendant la zone absorbante la moins intrusive possible.

### 3.3.1.3 Zone tampon : Za2

Nous nous intéresserons dans un second temps aux résultats obtenus pour une zone absorbante de type  $Za2$  construite en augmentant localement la valeur de la viscosité. Étant donné que le maillage associé à la méthode de collocation Chebyshev

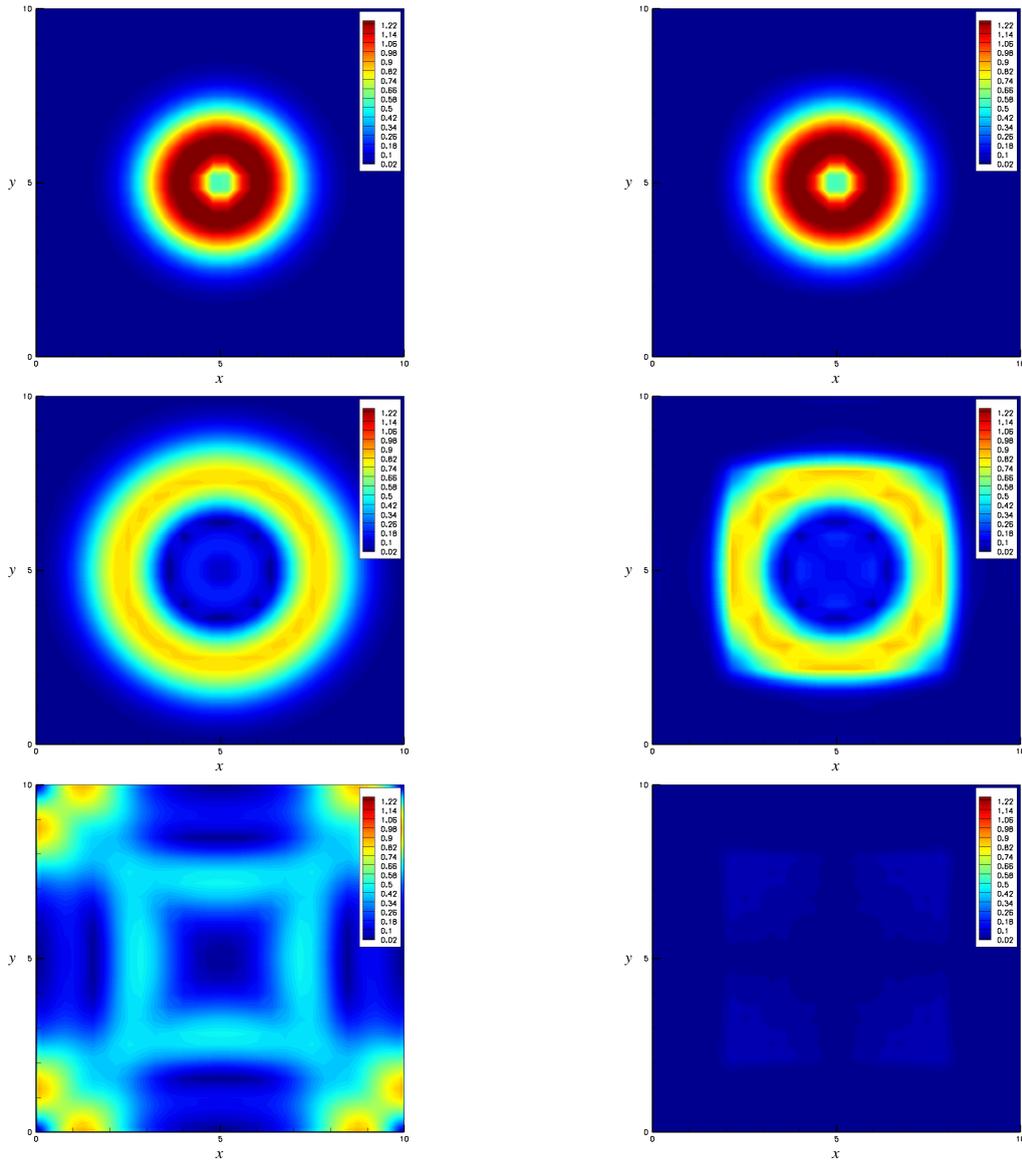


FIGURE 3.4 – Évolution de  $|\mathbf{u}'|$  au cours du temps avec (colonne de droite) et sans (colonne de gauche) zone absorbante de type  $Za1$

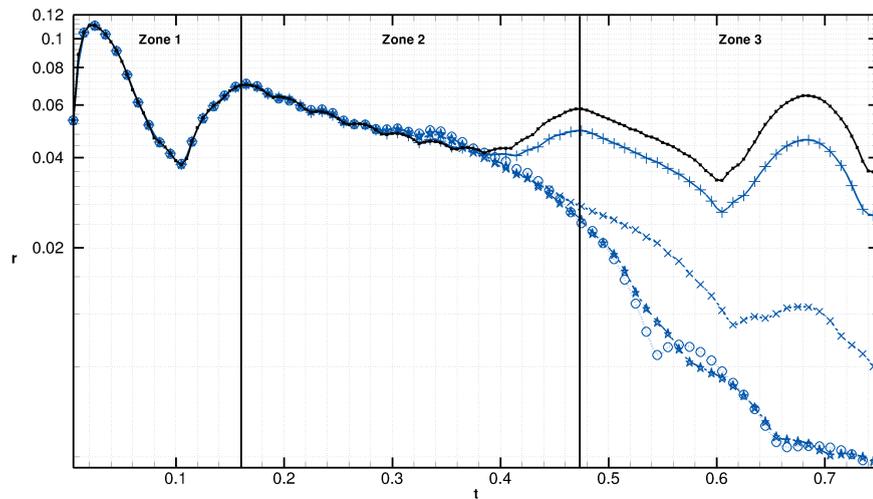


FIGURE 3.5 – Évolution de la valeur du résidu  $r$  au cours du temps pour une zone absorbante de type  $Za1$ . (.) Solution de référence, (+)  $\sigma_y = 1$ , ( $\times$ )  $\sigma_y = 5$ , ( $\square$ )  $\sigma_y = 10$  et ( $\circ$ )  $\sigma_y = 15$

n'est pas uniforme et est au contraire très resserré vers les bords du domaine, la formulation  $Re = \min(Re, 1/\nu_\Delta)$  préconisée dans [131] ne peut pas être utilisée. On choisira donc de construire une fonction  $Re(x, y)$  linéairement décroissante à partir de l'interface entre domaine de calcul et zone absorbante. On choisira alors une valeur minimale sur les bords du domaine  $\min(Re) = 100$ ,  $\min(Re) = 50$ ,  $\min(Re) = 1$  et  $\min(Re) = 0.1$ . Contrairement à la solution obtenue avec une zone absorbante de type *Za1*, on constate que la perturbation n'est pas complètement atténuée dans la région où la valeur de la viscosité est plus importante. Dans le meilleur des cas, le résidu atteint une valeur de l'ordre de  $2.10^{-2}$  quand  $\mathbf{r} \sim 4.10^{-3}$  (zone absorbante de type *Za1*). Pour des valeurs  $\min(Re)$  suffisamment petites, la perturbation est réfléchiée au niveau de l'interface comme le montre la figure 3.7. Une solution serait d'agrandir l'épaisseur de la zone absorbante de manière à atténuer complètement la perturbation. Cependant, le coût des méthodes spectrales nous impose de garder un domaine de calcul raisonnablement petit. Ce type d'approche ne sera donc pas retenu par la suite.

### 3.3.1.4 Zone tampon : *Za3*

Cette dernière partie s'attache à présenter les résultats obtenus lorsque la zone absorbante est construite par une approche de type *Perfectly Matched Layer* appelée ici zone absorbante de type *Za3*. Nous avons vu précédemment (3.17) que ces approches de type PML font intervenir une nouvelle équation de la forme  $\mathbf{g}' = \partial\mathbf{q}'/\partial t$ . Nous utiliserons dans notre cas un schéma de discrétisation en temps identique à celui utilisé dans la méthode d'intégration temporelle (*second-order backward differentiation (BDF)*). On a donc

$$\frac{3\mathbf{q}^{n+1} - 4\mathbf{q}^n + \mathbf{q}^{n-1}}{2\Delta t} = \mathbf{g}^{n+1} \quad (3.27)$$

et le système (3.16) se réécrit donc dans la zone absorbante sous la forme

$$\left[ \frac{3}{2\Delta t} + \mathbf{A} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{B} \frac{\partial}{\partial y} + (\sigma_x + \sigma_y) + \frac{3}{2\Delta t} (\sigma_y \mathbf{A} \frac{\partial}{\partial x} + \sigma_x \mathbf{B} \frac{\partial}{\partial y} + \sigma_x \sigma_y) \right] \mathbf{q}^{n+1} \quad (3.28)$$

$$= \frac{1}{2\Delta t} (4\mathbf{q}^n - \mathbf{q}^{n-1}) - (\sigma_y \mathbf{A} \frac{\partial}{\partial x} + \sigma_x \mathbf{B} \frac{\partial}{\partial y} + \sigma_x \sigma_y) \left( \frac{4\mathbf{q}^n - \mathbf{q}^{n-1}}{2\Delta t} \right) \quad (3.29)$$

La zone d'absorption évolue linéairement selon les directions  $x$  et  $y$  et l'on considère donc un coefficient constant  $\sigma_x = \sigma_y = 1, 5, 10$ , et  $15$ . Nous présenterons figure 3.8 l'évolution du module de la vitesse  $|\mathbf{u}'|$  et figure 3.9 l'évolution de la valeur  $\mathbf{r}$  du résidu au cours du temps. On constate que la solution converge rapidement vers une solution stationnaire lorsque l'on augmente le coefficient d'absorption.

L'ensemble de ces résultats nous montre que les méthodes de zone absorbante sont des solutions alternatives aux conditions limites locales. En effet, les conditions aux limites non-réfléchissantes de type NRBC ne permettent pas d'atténuer dans certains cas les perturbations notamment lorsque les ondes acoustiques arrivent sur la paroi avec une incidence importante (Colonius [39]).

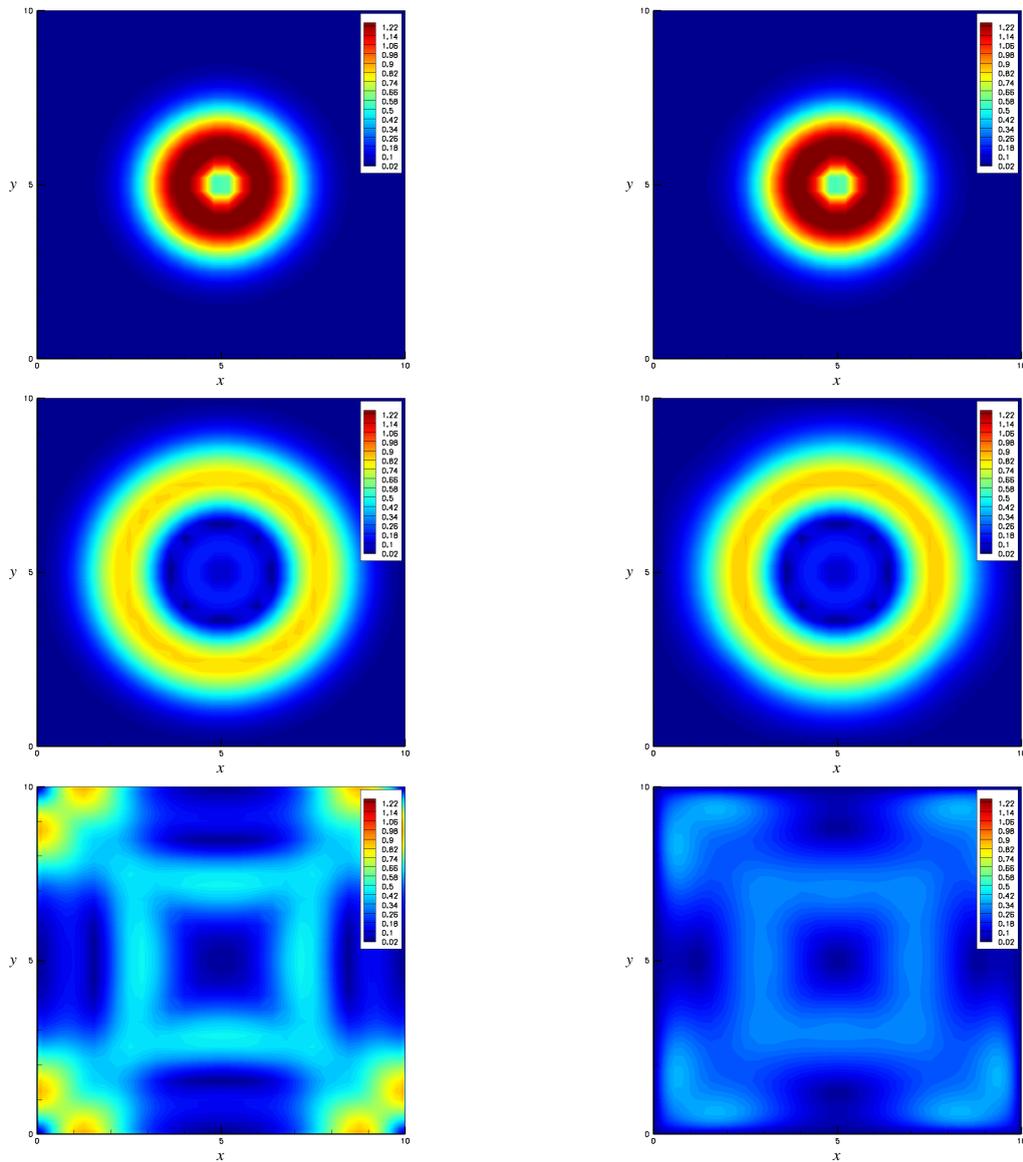


FIGURE 3.6 – Évolution de  $|u'|$  au cours du temps avec (colonne de droite),  $\min Re = 1$ , et sans (colonne de gauche) zone absorbante de type  $Za2$

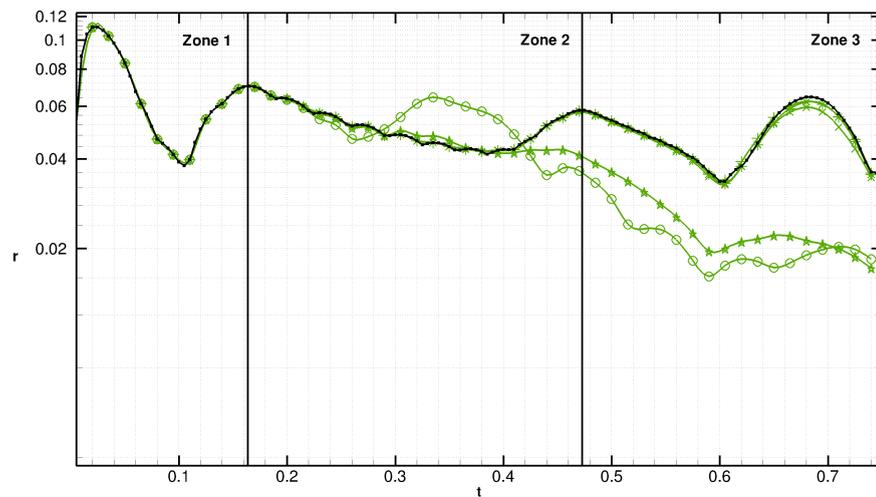


FIGURE 3.7 – Évolution de  $r$  au cours du temps pour une zone absorbante de type  $Za2$  pour une (.) solution de référence, (+)  $\min Re = 100$ , ( $\times$ )  $\min Re = 50$ , ( $\circ$ )  $\min Re = 1$ , ( $\square$ )  $\min Re = 0.1$

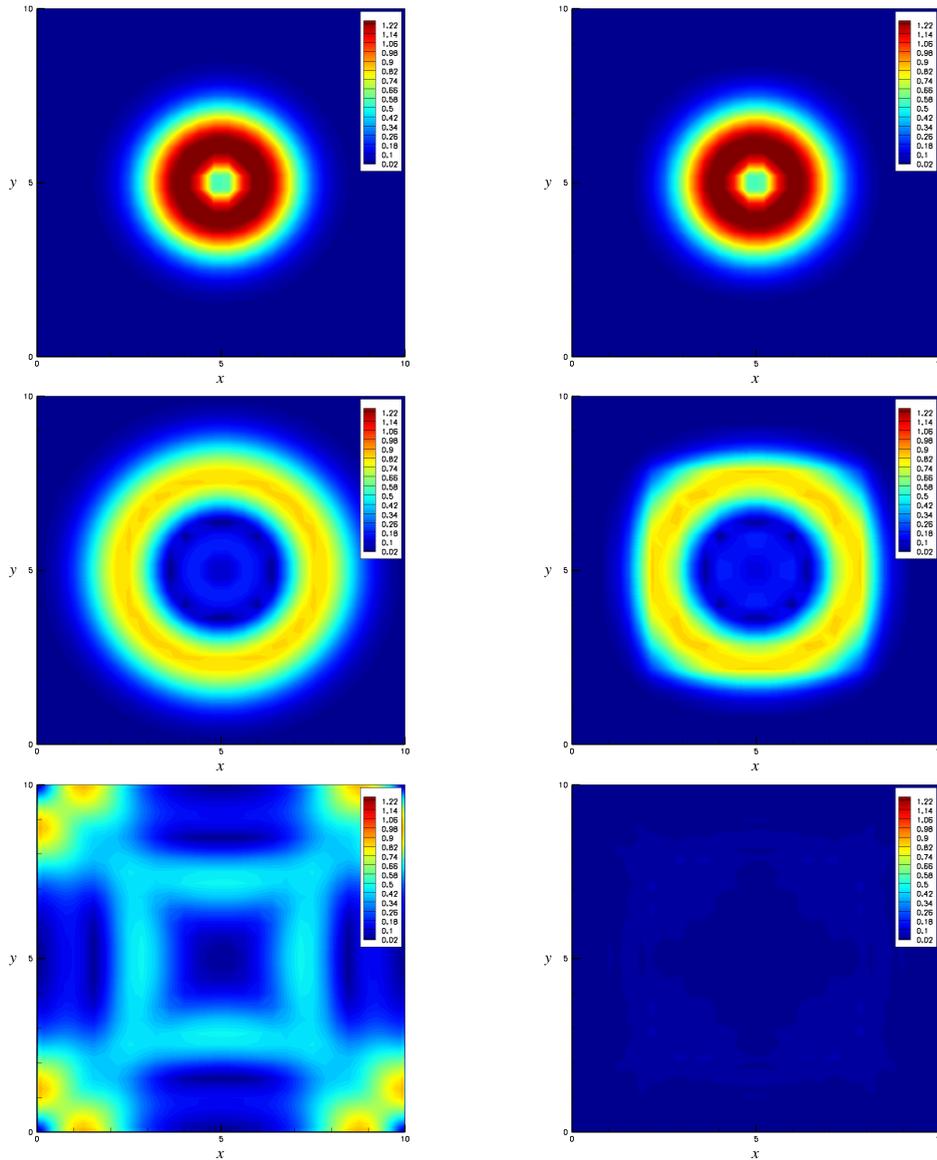


FIGURE 3.8 – Évolution de  $|u'|$  au cours du temps avec (colonne de droite) et sans (colonne de gauche) zone absorbante de type  $Za3$  ( $\sigma_y = 5$ )

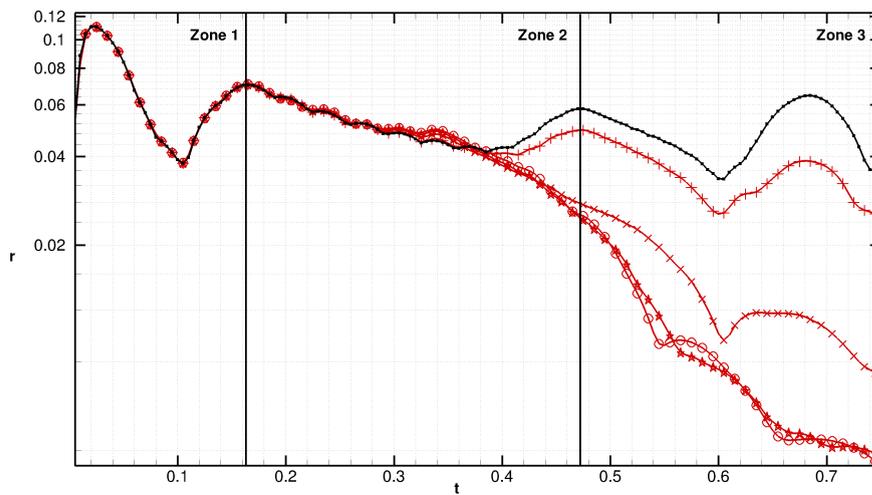


FIGURE 3.9 – Évolution de la valeur du résidu  $r$  au cours du temps sans (■) et avec une zone absorbante de type  $Za3$  (+)  $\sigma_y = 1$ , (x)  $\sigma_y = 5$ , (\*)  $\sigma_y = 10$  et (o)  $\sigma_y = 15$

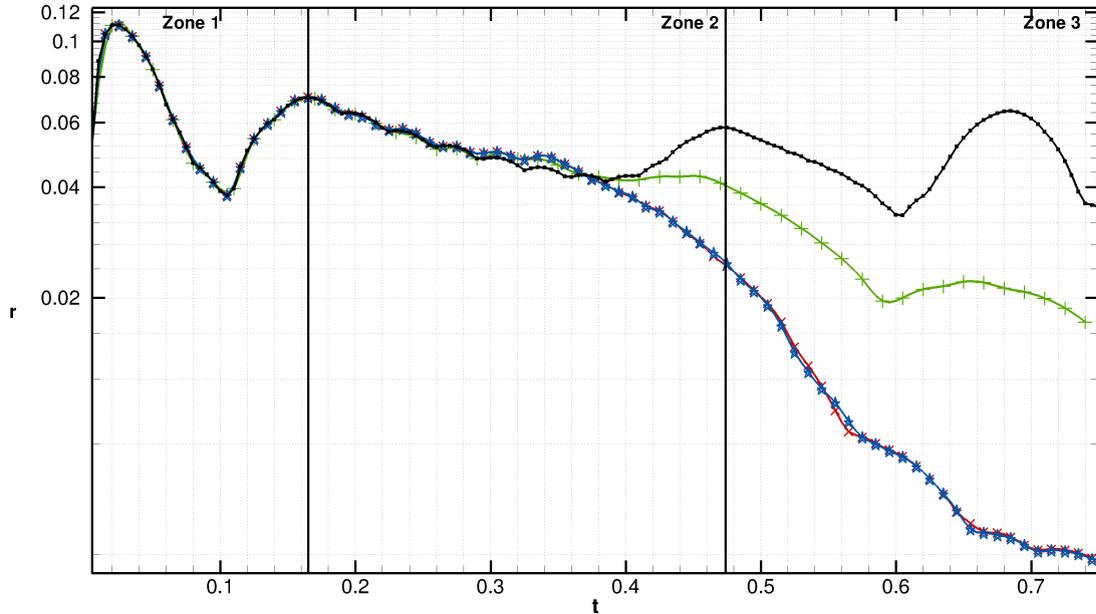


FIGURE 3.10 – Évolution de la valeur du résidu  $r$  au cours du temps sans (■) et avec zone absorbante ( $\star$ )  $Za1$  avec  $\sigma = 10$ , ( $+$ )  $Za2$  avec  $\min(Re) = 1$  et ( $\times$ )  $Za3$  avec  $\sigma = 10$

La figure 3.10 propose de comparer les différentes méthodes utilisées. Dans le cadre de la résolution des équations de Navier-Stokes linéarisées par des approches spectrales associées à la formulation matricielle, il est impératif de pouvoir garder un domaine de calcul relativement petit. Nous avons vu alors que les zones absorbantes de type  $Za2$  ne sont pas en mesure d'atténuer suffisamment les perturbations pour le domaine que l'on considère, contrairement aux approches de type  $Za1$  ou  $Za3$ . Ces deux approches montrent en effet des résultats satisfaisants pour un rapport  $H_{abs}/L$  assez faible avec  $L = L_x = L_y$  la taille du domaine de calcul. Nous privilégierons donc dans la suite de ce travail ces deux méthodes.

### 3.3.2 Utilisation des conditions aux limites non-réfléchissantes appliquées aux études de stabilité globale : cas de couche limite

Ce chapitre a pour objectif de valider et d'illustrer les résultats obtenus lors de l'étude de stabilité globale d'écoulements en régime compressible lorsque des zones absorbantes sont utilisées. Dans cette optique, un cas de couche limite sera étudié pour différents nombres de Mach et un soin particulier sera apporté à la comparaison des résultats obtenus avec les différentes méthodes de zone éponge implémentées. Les écoulements de couche limite sont présents dès lors que la géométrie dans laquelle évolue le fluide présente une paroi rigide. Ils ont été très largement étudiés et ce depuis que le rôle déstabilisant de la viscosité, responsable de la transition laminaire/turbulente, a été théorisé par Prandtl ([99]). Les premières études de stabilité

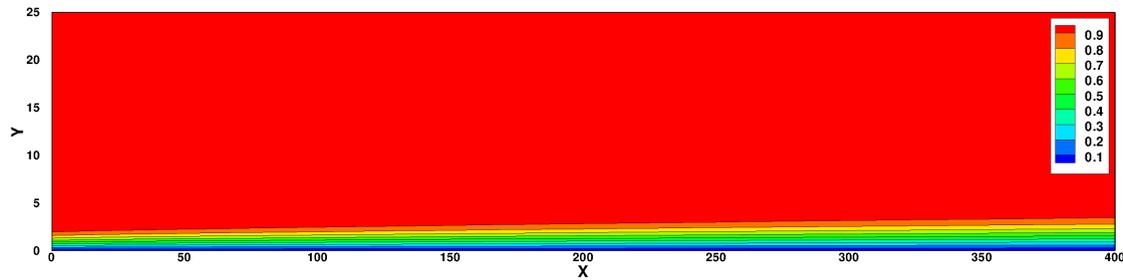


FIGURE 3.11 – Illustration de la variable  $u_0$  d’une solution d’équilibre de couche limite à  $Ma = 0.1$  et  $Re = 600$

linéaire locale ont été menées pour des écoulements incompressibles par Tollmien et Schlichting ([123]) et ont permis de mettre en avant l’existence d’ondes bidimensionnelles responsables du caractère instable de la couche limite. Dans les années 60, les premières études locales de couche limite compressible (Mack [77] et plus récemment Malik [79]) ont permis de mettre en évidence le caractère stabilisant des effets de compressibilité en régime subsonique. Nous regarderons ici la forme des solutions d’équilibre sur lesquelles seront menées les études de stabilité globale en fonction du nombre de Mach. Nous nous intéresserons également aux effets de compressibilité ainsi qu’à l’influence des zones absorbantes sur les modes propres de l’écoulement. Considérons un écoulement de couche limite subsonique dans un domaine de calcul de taille  $L_x = 300$  discrétisée sur  $N_x = 250$  points de collocation et de hauteur  $H = 50$  discrétisée avec  $N_y = 50$  points. Les solutions d’équilibre sont calculées en utilisant les méthodes de quasi-Newton présentées au chapitre 2 et en considérant plusieurs nombres de Mach  $Ma = 0.1, 0.2, \dots, 0.9$  ainsi qu’un nombre de Reynolds basé sur l’épaisseur de déplacement de la couche limite en entrée égal à 600. On rappelle que l’épaisseur de déplacement  $\delta_l$  de la couche limite incompressible est définie comme (l’exposant \* désignant les quantités dimensionnelles)

$$U_\infty^* \delta_l^* = \int_0^\infty (U_\infty^* - u^*) dy^*$$

avec la paroi en  $y^* = 0$ ,  $u^*$  la vitesse longitudinale et  $U_\infty^*$  la vitesse de l’écoulement uniforme loin de la paroi pour  $y^* \rightarrow \infty$ <sup>1</sup>. Cette épaisseur de déplacement mesure ainsi de quelle distance les lignes de courant de l’écoulement externe sont précisément déplacées par la présence de la couche limite. La figure 3.11 présente la composante longitudinale  $u_0$  du champ de vitesse de la solution d’équilibre à  $Ma = 0.1$ ,  $Re_{\delta_l} = 600$ , qui ne varie de manière significative que sur quelques unités de  $y$  (donc dans la variable physique sur quelques  $\delta_l$ ), ce qui illustre bien le comportement de couche limite. La figure 3.12 représente la courbe de l’évolution du nombre de Reynolds local  $Re_{\delta_l^*}$  (basé sur l’épaisseur de déplacement locale) en fonction de l’abscisse  $x$  sur la plaque pour les différents nombres de Mach considérés, afin d’illustrer le caractère (faiblement) non parallèle de la couche limite. Regardons à présent les études de stabilité globale réalisées en considérant les solutions d’équilibre introduites précédemment. Afin de comparer les différents spectres entre eux, il

1. Notons que par soucis de clarté, nous oublierons par la suite l’exposant \*. Il est cependant évident que l’ensemble des quantités présentées restent adimensionnées.

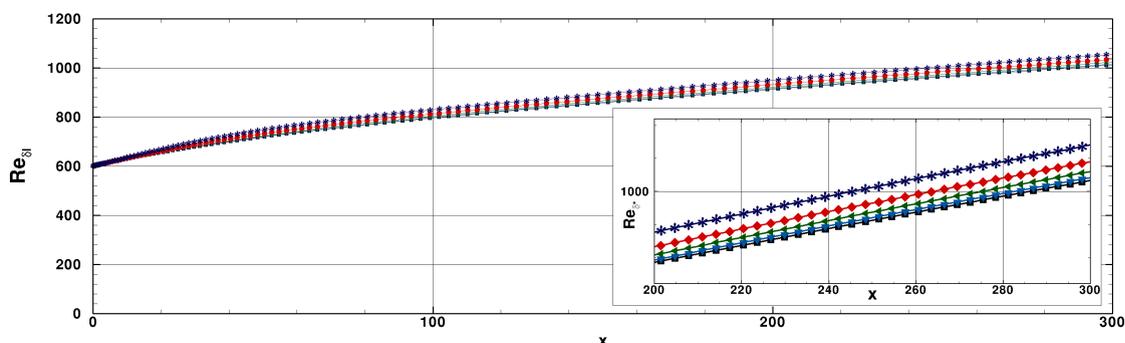
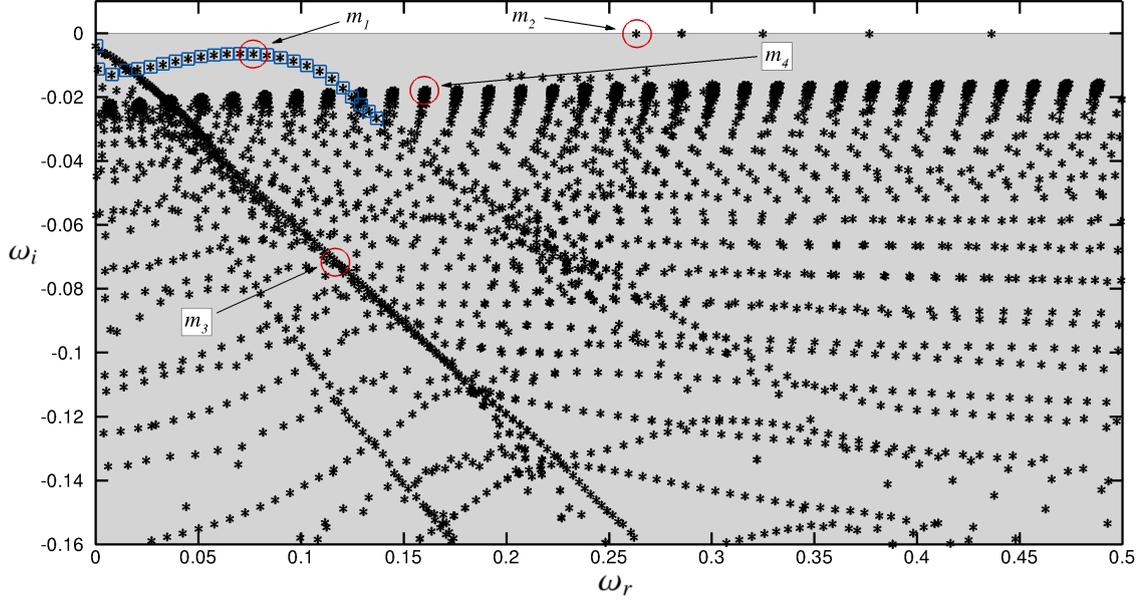


FIGURE 3.12 – Évolution du nombre de Reynolds  $Re_{\delta_i}$  basé sur l'épaisseur de déplacement locale de la couche limite en fonction du nombre de Mach (■)  $Ma = 0.1$ , (▼)  $Ma = 0.3$ , (◁)  $Ma = 0.5$ , (◆)  $Ma = 0.7$ , (\*)  $Ma = 0.9$

convient de décrire la zoologie des modes présents pour un écoulement de référence. Nous choisisons ici de présenter figure 3.13 le diagramme de stabilité d'une couche limite obtenue pour  $Ma = 0.1$ . Plusieurs familles de modes apparaissent pour cet écoulement. Les modes de type  $m_1$  entourés en bleu forment une branche continue et correspondent aux instabilités de Tollmien-Schlichting. L'ensemble de ces modes est amplifié spatialement selon la direction longitudinale, comme l'indique la figure 3.14, et possède un taux d'amplification  $\omega_i$  négatif attestant de son caractère globalement stable. La famille de modes  $m_3$  correspond aux modes dits de paroi (ou modes de Orr) qui jouent un rôle important dans la dynamique à temps court de la couche limite. Enfin les branches de modes  $m_4$  correspondent aux modes liés à la couche critique où la vitesse de phase du mode est égale à la vitesse de l'écoulement  $U_\infty$ . Ils sont donc essentiellement non nuls à l'extérieur de la couche limite. La famille de modes de type  $m_2$  est propre aux écoulements compressibles et sera décrite de manière détaillée par la suite. Afin de vérifier la validité de nos résultats, une étude de convergence a été menée. La figure 3.15 présente l'évolution du spectre, focalisant sur la branche associée aux modes de Tollmien-Schlichting, pour un nombre croissant de points dans la direction longitudinale. Au delà de  $N_x = 200$ , le taux d'amplification des modes de Tollmien Schlichting décroît en dessous de 5% et nous considérerons donc notre solution comme étant convergée. La figure 3.16 présente à nouveau l'évolution du diagramme de stabilité avec le nombre de points utilisé pour discrétiser la direction transverse. Pour notre géométrie, un nombre  $N_y = 35$  suffit pour considérer la solution comme étant convergée.

Intéressons-nous à présent aux modes de type  $m_2$  introduits précédemment. Les études de stabilité locale ont d'ores et déjà mis en évidence la présence de modes dits neutres ( $\omega_i \sim 0$ ), qui traduisent l'incompatibilité entre le fait d'imposer les conditions aux limites "classiques" qui forcent la décroissance vers zéro des perturbations au bord supérieur du domaine et la présence d'ondes non atténuées loin de la paroi, associées aux effets de compressibilité. En comparant les spectres obtenus pour  $Ma = 0.1$ ,  $Ma = 0.5$  et  $Ma = 0.8$  sur la figure 3.17, on constate que cette famille de modes se manifeste pour cette approche de stabilité globale sous la forme d'une branche continue dont la fréquence de coupure  $\omega_{c_r}$  dépend du nombre de Mach. Afin de


 FIGURE 3.13 – Diagramme de stabilité de couche limite  $Ma = 0.1$  et  $Re_{\delta_i} = 600$ 

comprendre plus précisément sa nature, nous considérons les équations de Navier-Stokes linéarisées en faisant l'hypothèse de champ lointain et non visqueux (ces modes apparaissant près du bord supérieur du domaine) sous la forme suivante

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + u_0 \frac{\partial \rho'}{\partial x} + v' \frac{d\rho_0}{dy} + \rho_0 \left( \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} \right) = 0, \quad (3.30a)$$

$$\rho_0 \left[ \frac{\partial u'}{\partial t} + u_0 \frac{\partial u'}{\partial x} + v' \frac{du_0}{dy} \right] = -\frac{1}{\gamma M_\infty^2} \frac{\partial p'}{\partial x}, \quad (3.30b)$$

$$\rho_0 \left[ \frac{\partial v'}{\partial t} + u_0 \frac{\partial v'}{\partial x} \right] = -\frac{1}{\gamma M_\infty^2} \frac{\partial p'}{\partial y}, \quad (3.30c)$$

$$\rho_0 \left[ \frac{\partial T'}{\partial t} + u_0 \frac{\partial T'}{\partial x} + v' \frac{dT_0}{dy} \right] = -(\gamma - 1) p_0 \left( \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} \right), \quad (3.30d)$$

$$p' = \rho_0 T' + \rho' T_0. \quad (3.30e)$$

Après quelques manipulations, le système (3.30) peut se mettre sous la forme d'une équation

$$\frac{D^3 p'}{Dt^3} - \frac{D^2}{Dt^2} t \left[ \frac{1}{\rho_0 M_\infty^2} \left( \nabla^2 - \frac{1}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dy} \frac{d}{dy} \right) \right] p' + \frac{2}{\rho_0 M_\infty^2} \frac{du_0}{dy} \frac{\partial^2 p'}{\partial x \partial y} = 0, \quad (3.31)$$

avec  $D/Dt = \partial/\partial t + u_0 \partial/\partial x$ . En considérant la direction  $\vec{e}_x$  homogène (et faiblement non parallèle selon  $\vec{e}_y$ ) la solution peut se mettre sous la forme

$$p'(x, y, t) = \hat{p}(\alpha, y, \omega) e^{i(\alpha x - \omega t)} + c.c., \quad (3.32)$$

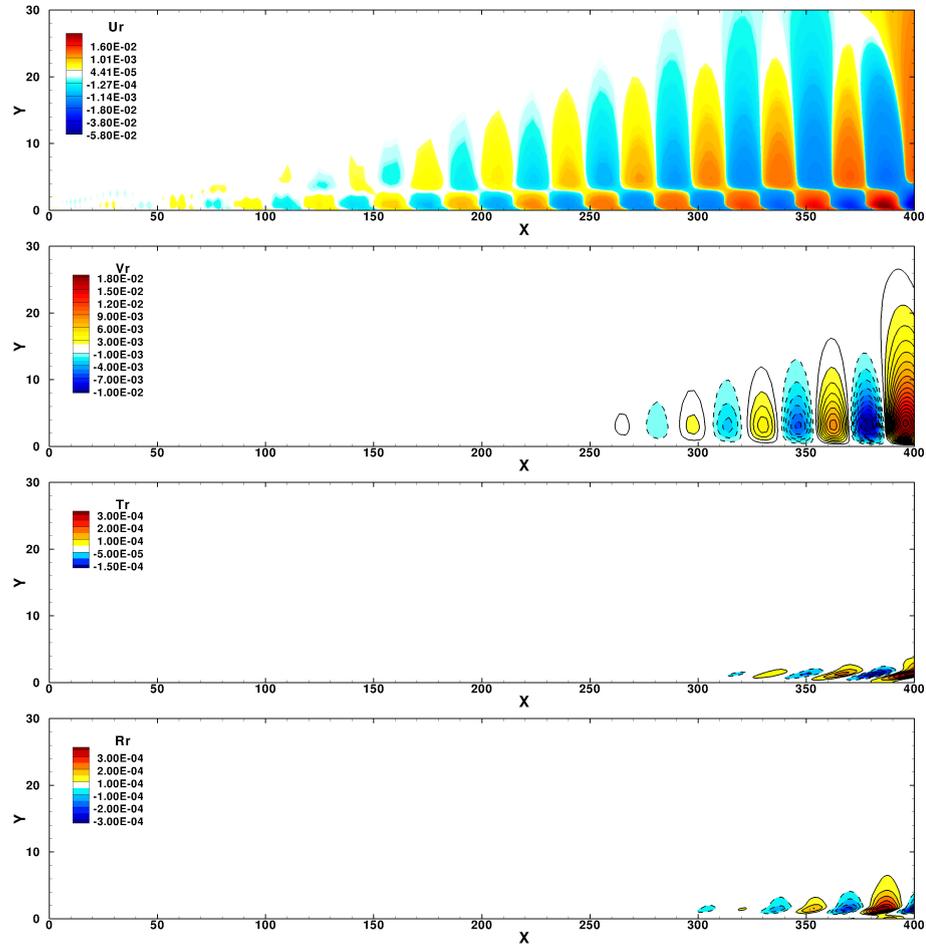


FIGURE 3.14 – Représentation spatiale des fonctions propres  $\hat{u}, \hat{v}, \hat{T}, \hat{\rho}$  associées au mode  $m_1$  présenté figure 3.13 pour un nombre de Mach  $Ma = 0.1$  et un nombre de Reynolds  $Re_{\delta_l} = 600$

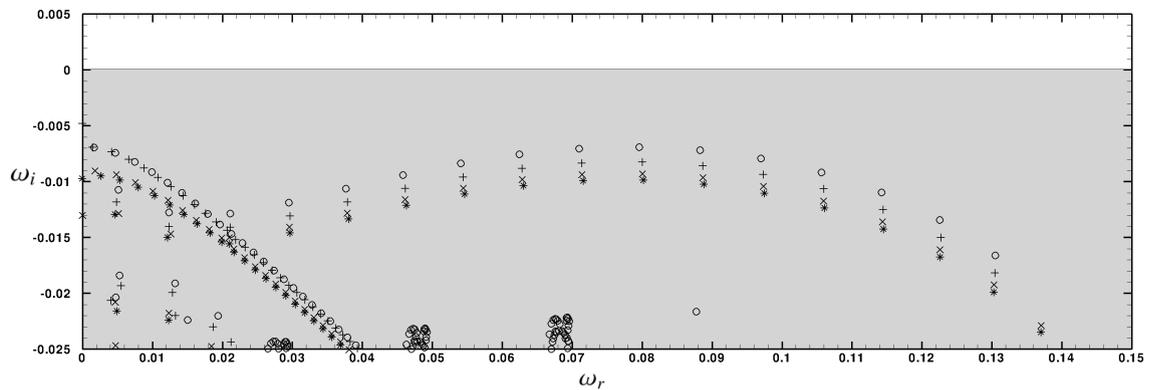


FIGURE 3.15 – Diagramme de stabilité de couche limite pour un écoulement à  $Ma = 0.1$ ,  $Re_{\delta_l} = 600$  pour  $N_y = 50$  et (o)  $N_x = 100$ , (+)  $N_x = 150$ , (x)  $N_x = 200$ , (\*)  $N_x = 250$

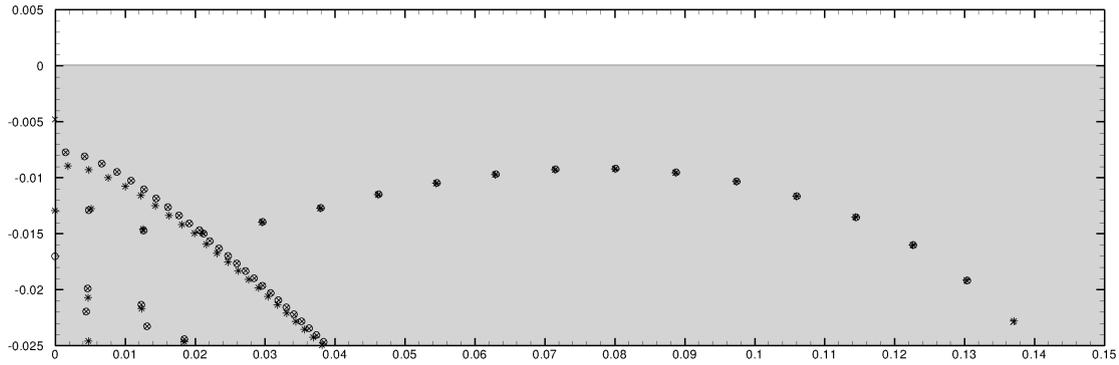


FIGURE 3.16 – Diagramme de stabilité de couche limite pour un écoulement à  $Ma = 0.1$ ,  $Re_{\delta_i} = 600$  pour  $N_x = 200$  et  $(\times)$   $N_y = 35$ ,  $(*)$   $N_y = 50$ ,  $(\circ)$   $N_y = 75$

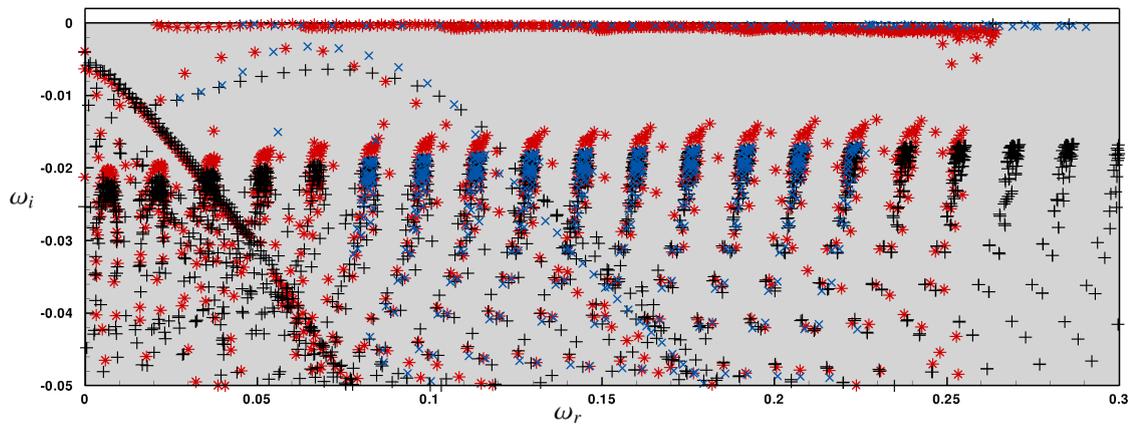


FIGURE 3.17 – Comparaison des spectres de couche limite obtenus pour  $Re_{\delta_i} = 600$  et  $(+)$   $Ma = 0.1$ ;  $(\times)$   $Ma = 0.5$ ;  $(*)$   $Ma = 0.8$

et l'équation (3.31) se met alors sous la forme de l'équation de Rayleigh

$$(\alpha u_0 - \omega) \frac{d^2 \hat{p}}{dy^2} - \left[ (\alpha u_0 - \omega) \frac{1}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dy} + 2i\alpha \frac{du_0}{dy} \right] \frac{d\hat{p}}{dy} + (\alpha u_0 - \omega) \left[ \rho_0 M_\infty^2 (\alpha u_0 - \omega)^2 - \alpha^2 \right] \hat{p} = 0. \quad (3.33)$$

En considérant le champ de base uniforme (en se plaçant donc toujours en dehors de la couche limite), l'équation (3.33) se réécrit

$$(\alpha u_0 - \omega) \left\{ \frac{d^2 \hat{p}}{dy^2} + \beta^2 \hat{p} \right\} = 0 \quad (3.34)$$

Deux équations sont alors à considérer. D'une part la solution

$$\alpha u_0 - \omega = 0 \quad (3.35)$$

qui se traduit sur le spectre par l'apparition des modes de type  $m_4$  présentés précédemment. De l'autre la solution de l'équation qui nous intéresse

$$\frac{d^2 \hat{p}}{dy^2} + \beta^2 \hat{p} = 0 \quad (3.36)$$

avec  $\beta^2 = [M_\star^2 - 1] \alpha^2$ ,  $c = \omega/\alpha$  et  $M_\star^2 = \rho_0 M_\infty^2 (u_0 - c)^2$ . Selon le signe de  $M_\star^2 - 1$ , la solution générale de l'équation (3.34) s'écrit alors

$$\text{Si } M_\star < -1 \text{ ou } M_\star > 1 \quad \hat{p}(y) = A_1(\alpha, \omega) e^{i\beta y} + A_2(\alpha, \omega) e^{-i\beta y} \quad (3.37a)$$

$$\text{Si } -1 < M_\star < +1 \quad \hat{p}(y) = A_1(\alpha, \omega) e^{+|\beta|y} + A_2(\alpha, \omega) e^{-|\beta|y} \quad (3.37b)$$

Les conditions aux limites imposent la valeur de la pression sur les bords du domaine. En considérant les conditions  $\partial_y p'(y=0) = 0$  et  $p'(y=H) = 0$ , la condition de Neumann à la paroi étant naturellement déduite des équations et en  $H$  la condition classique est imposée, on peut montrer que forcément  $|M_\star| > 1$  et

$$\partial_y \hat{p}(0) = i\beta A_1 - i\beta A_2 = 0, \quad \text{d'où } A_1 = A_2 \quad (3.38a)$$

et

$$\hat{p}(H) = A_1(e^{i\beta H} + e^{-i\beta H}) = 2A_1 \cos(\beta H) = 0. \quad (3.38b)$$

$\beta$  est solution de  $\cos(\beta H) = 0$  d'où

$$\beta = \frac{(2k+1)\pi}{2H} = \pm \alpha \sqrt{M_\star^2 - 1} \quad (3.39)$$

avec  $k = 0, \dots$ , un entier. La longueur d'onde transverse peut se mettre sous la forme  $\alpha = \frac{2n\pi}{L_x}$  avec  $n = 1, \dots, N$  également un entier. La solution analytique  $\omega_c(n, k)$  des modes globaux de type  $m_2$  peut alors se mettre sous la forme

$$\omega_c(n, k) = \frac{2n\pi}{L_x} \left( 1 \pm \frac{1}{M_\infty} \sqrt{\left( \frac{(2k+1)L_x}{4nH} \right)^2 + 1} \right) \quad (3.40)$$

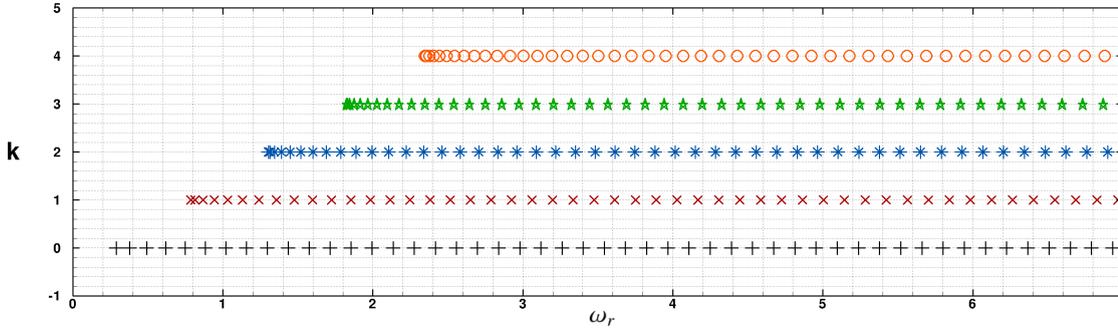


FIGURE 3.18 – Modes globaux  $\omega_c(n,k)$  calculés à partir de la solution analytique (3.40) pour  $n = 1, \dots, 25$  et  $k = 0, \dots, 4$

La figure 3.18 présente cette famille de modes calculés à partir de (3.40). On constate que plusieurs familles de modes acoustiques possédant un taux d'amplification  $\omega_i = 0$  apparaissent à intervalle  $\Delta\omega_r$  constant. Le nombre de modes est d'autant plus important que la valeur de  $N$  est importante. On considérera donc une famille de modes pour  $k = 0$  dit fondamentaux ainsi que leurs harmoniques pour  $k \neq 0$ . Nous avons également pu comparer la fréquence de coupure  $Re(\omega_c(1,0)) = \omega_{c_r}(1,0)$  obtenue théoriquement à l'aide de l'équation (3.40) avec celle obtenue numériquement figure 3.19 pour un écoulement de couche limite avec  $Re\delta_i = 600$ ,  $L_x = 400$  et  $H = 60$  en fonction du nombre de Mach. L'accord entre ces deux approches nous amène donc à penser que ces modes de nature acoustique qui peuvent amener l'écoulement à se déstabiliser numériquement avec une approche de type intégrateur temporel peuvent être globalement atténués en utilisant une zone absorbante dans la partie supérieure du domaine où  $\mathbf{q}_0 \approx \mathbf{q}_\infty$ . Lorsque l'on introduit précisément une zone absorbante de type *Za3*, le changement de variable (3.12) intervient dans l'équation (3.34). En suivant une démarche identique on obtient une solution analytique de la forme

$$\omega_c(n,k) = \frac{2n\pi}{L_x} \left( 1 \pm \frac{1}{M_\infty} \sqrt{1 + \left( \frac{(2k+1)L_x(1-i\sigma_y)}{4n(1+\sigma_y^2)H} \right)^2} \right) \quad (3.41)$$

La figure 3.20 illustre alors l'influence de la zone absorbante *Za3* sur la solution. On constate que l'utilisation d'une telle méthode entraîne une modification du taux d'amplitude  $\omega_i$  et agit d'autant plus que le paramètre  $k$  est important. Les modes globaux voient alors leur taux d'amplification diminuer. Après avoir testé les différentes approches (*Za1*, *Za2*, *Za3*), le détail des différents résultats n'étant pas développé ici, nous retiendrons pour l'ensemble des résultats des conditions aux limites "classiques" (présentées au chapitre 2) auxquelles on ajoutera une zone absorbante de type *Za3*, qui s'avère être la plus robuste et efficace pour atténuer l'ensemble des perturbations dans les zones d'intérêts. Regardons plus précisément l'influence de cette zone absorbante en fonction des différents coefficients présents dans le modèle. Nous considérons une zone absorbante en haut du domaine. L'épaisseur  $H_{abs}$  correspond à nouveau à la taille de la zone absorbante dans laquelle on fera varier la fonction d'atténuation  $\sigma_y(y)$ . Nous définirons pour la suite du calcul une zone absorbante construite de manière à occuper moins de 20% de la hauteur totale du

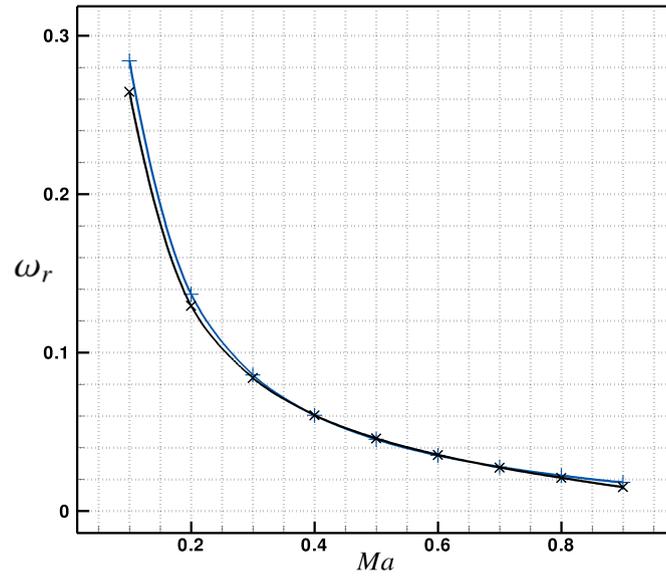


FIGURE 3.19 – Fréquence de coupure pour  $Re_{\delta_l} = 600$  en fonction du nombre de Mach ( $\times$ ) issu du calcul de stabilité globale; ( $+$ ) issu de la formule théorique

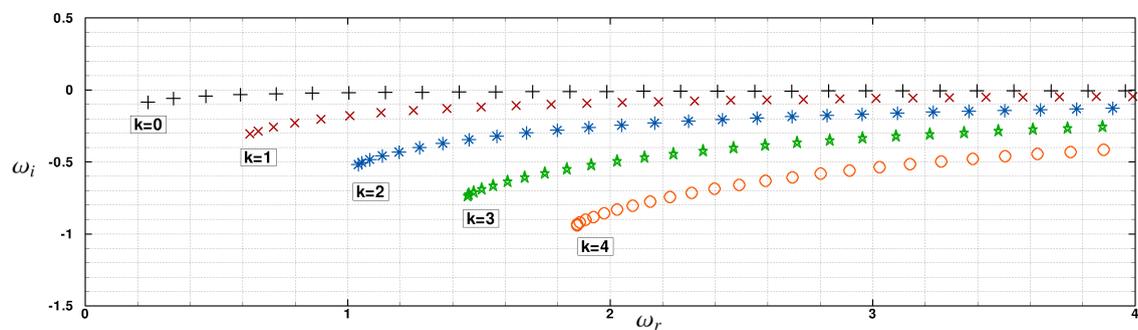


FIGURE 3.20 – Modes globaux  $\omega_c(n,k)$  calculés à partir de la solution analytique (3.41) pour  $n = 1, \dots, 25$  et  $k = 0, \dots, 4$  avec une zone absorbante de type  $Za3$  et avec un coefficient  $\sigma_y = 0.5$

domaine de calcul. Ici,  $H = 60$  et  $H_{abs} = 10$ . La figure 3.21 présente les différents résultats obtenus pour une couche limite à  $Ma = 0.2$  lorsque l'on fait varier la répartition du coefficient d'absorption dans la zone PML. Le caractère novateur de ce travail réside dans l'implémentation des zones absorbantes de type *Za3 (Perfectly Matched Layer)*. Ainsi nous nous attacherons dans la suite de ce chapitre à présenter de manière plus précise l'influence que peuvent avoir les zones éponges construites par ce type d'approche sur la solution. Trois cas sont à considérer

- le cas où l'on considère le coefficient d'absorption constant :

$$\sigma_y = cst \quad (3.42)$$

- le cas où le coefficient d'absorption est linéairement dépendant de  $y$  :

$$\sigma_y = A_0 \left( \frac{y - H_{abs}}{H - H_{abs}} \right) \quad (3.43)$$

- le cas où le coefficient d'absorption évolue en fonction de  $y^2$  :

$$\sigma_y = A_0 \left( \frac{(y - H_{abs})^2}{(H - y_0)^2} \right) \quad (3.44)$$

avec  $A_0$  un facteur d'amplification réel. La figure 3.21 montre que, dans l'ensemble de ces trois cas, la zone PML permet d'atténuer de manière significative les modes neutres, les fréquences et taux d'amplifications des modes hydrodynamiques n'étant cependant pas affectés par l'introduction de la zone absorbante. Contrairement à ce à quoi on s'attendait, imposer une variation linéaire de la fonction d'amortissement  $\Gamma_y(y)$  (ce qui revient à imposer un coefficient  $\sigma_y = \partial\Gamma_y/\partial y$  constant) permet d'atténuer de manière plus efficace ces modes résonants. Ce résultat semble provenir du fait que pour une variation de  $\sigma_y$  d'ordre supérieur à 1, la zone absorbante possède des valeurs de  $\sigma_y$  plus faibles à l'interface entre le domaine hydrodynamique et la zone absorbante. On note également qu'aucune réflexion d'onde n'est observée au niveau du raccord entre la zone hydrodynamique et la zone absorbante. Regardons à présent les effets de la zone PML pour un coefficient d'absorption de différentes valeurs. La figure 3.22 représente les différents spectres obtenus pour le même écoulement de couche limite en considérant un coefficient d'absorption  $\sigma_y$  constant et respectivement pris égal à 0 ; 0.1 ; 0.5 et 1. A nouveau, les modes hydrodynamiques ne sont pas impactés par l'introduction d'une telle zone absorbante. Le taux d'amplification des modes neutres diminue quant à lui avec l'augmentation du coefficient d'absorption. Afin de tester la zone PML pour des effets de compressibilité plus importants, l'étude de stabilité globale d'une couche limite à  $Ma = 0.8$  a été menée. La figure 3.17 présente le diagramme de stabilité associé à la solution d'équilibre. De manière identique à l'étude menée précédemment, on constate que la fréquence de coupure est inférieure au cas de couche limite à  $Ma = 0.1$  et que les modes harmoniques ( $k \neq 0$ ) apparaissent pour un intervalle  $\Delta\omega_r =$  régulier (ici  $\Delta\omega_r \sim 0.04$ ). Une fois encore, la zone PML permet d'atténuer les modes globaux neutres et ce d'autant plus que le coefficient  $\sigma_y$  augmente (figure 3.23). On note également que pour des effets de compressibilité plus importants, il convient de choisir un coefficient d'absorption plus grand afin d'atténuer suffisamment les perturbations dans

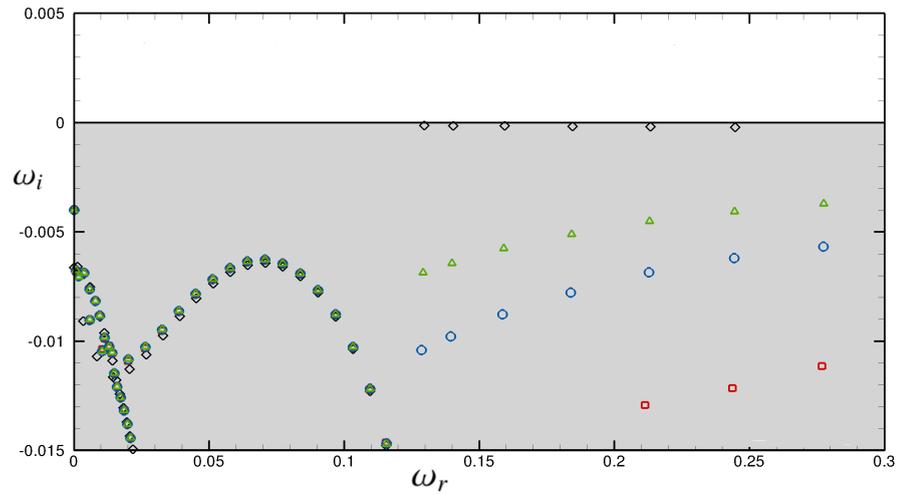


FIGURE 3.21 – Évolution du diagramme de stabilité d'une couche limite à  $Ma = 0.2$  et  $Re_{\delta_l} = 600$  en fonction de la variation du coefficient d'atténuation  $\sigma_y$  dans la zone PML. ( $\diamond$ ) sans zone absorbante, ( $\square$ )  $\sigma_y = cst$ , ( $\circ$ )  $\sigma_y = f(y)$  et ( $\triangle$ )  $\sigma_y = f(y^2)$

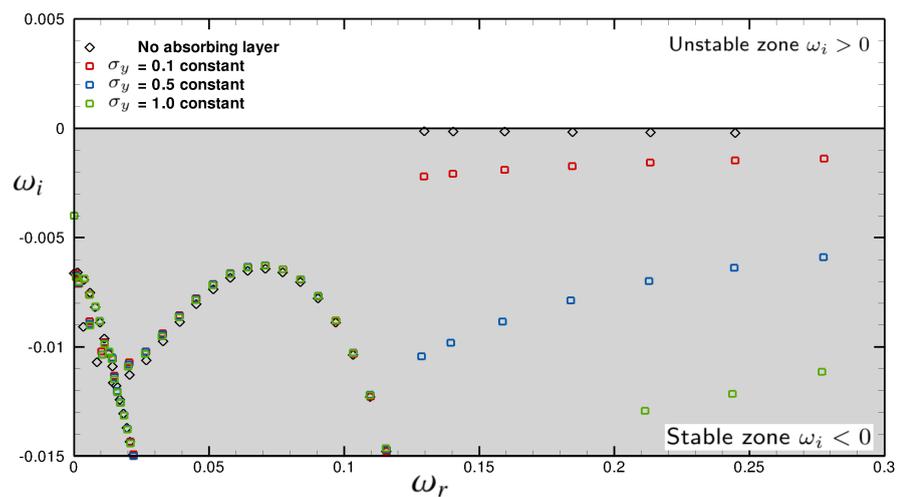


FIGURE 3.22 – Évolution du diagramme de stabilité d'une couche limite à  $Ma = 0.2$  et  $Re_{\delta_l} = 600$  en fonction de la valeur de  $\sigma_y$  dans la zone PML

la couche externe de l'écoulement. De plus, on note que l'écart en fréquence entre les modes de Tollmien-Schlichting diminue avec l'introduction de notre zone absorbante. Il convient de noter ici que cet écart traduit généralement le fait que les calculs sont menés dans un domaine d'une étendue finie en  $x$ , l'intervalle en fréquence étant continu dans le cas idéalisé d'un domaine infini (cet aspect est discuté pour la couche limite incompressible dans [50]). Il semblerait que cet écart soit alors piloté par le rapport  $H_{hydro}/L_x$  qui diminue d'autant plus que  $\sigma_y$  est important. Notons également que pour  $Ma = 0.8$ , la zone PML fait apparaître une branche de modes basse fréquence qui semble s'atténuer avec le coefficient d'absorption. Elle se traduit numériquement par l'apparition d'oscillations sur la paroi supérieure du domaine que la zone PML ne semble pas pouvoir atténuer lorsque le coefficient d'absorption est faible. Il apparaît cependant que la zone absorbante est une bonne alternative aux zones tampons utilisées classiquement pour les études de stabilité. Au vu des résultats présentés, nous considérerons dans l'ensemble de ce manuscrit un coefficient d'absorption  $\sigma_y$  constant dont on choisira la valeur en fonction du cas à traiter.

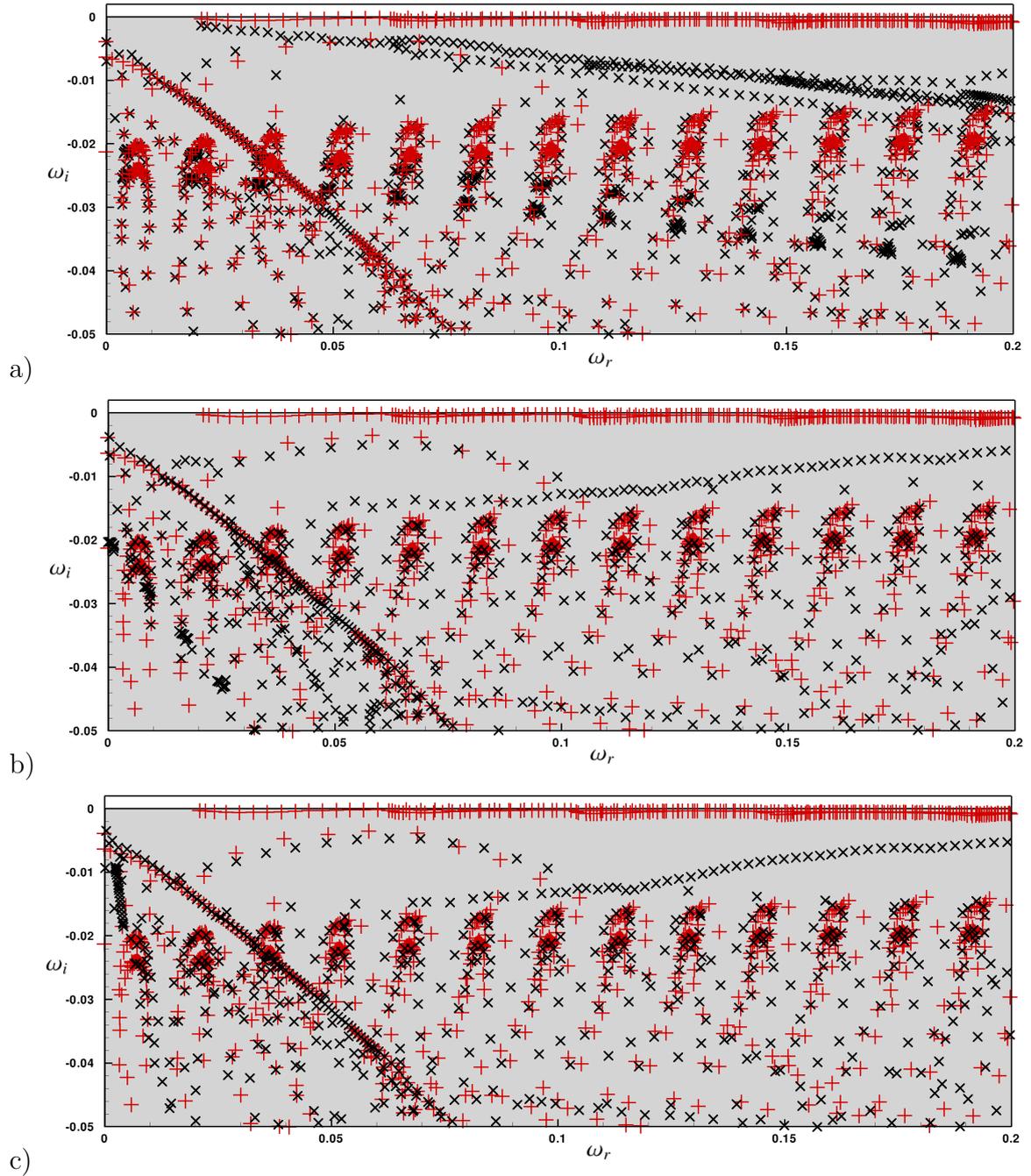


FIGURE 3.23 – Comparaison des spectres de couche limite obtenus sans (+) et avec (x) zone absorbante pour  $Ma = 0.8$ ,  $H_{PML} = 50$  et a)  $\sigma_y = 0.1$ , b)  $\sigma_y = 1.0$ , c)  $\sigma_y = 5.0$



# Chapitre 4

## Stabilité globale : écoulements de cavité et de bosse

Ce chapitre a pour objectif de présenter les résultats obtenus dans le cadre de l'étude d'écoulements bidimensionnels en régime compressible. La première partie sera alors consacrée à l'étude de stabilité globale d'un écoulement de cavité ouverte. Nous regarderons en particulier quels sont les effets de l'ajout d'une zone absorbante de type  $Za3$  sur la stabilité lorsque l'écoulement est fortement compressible et nous comparerons nos résultats à ceux obtenus dans la littérature. La seconde partie sera dédiée à la présentation des résultats obtenus lors de l'étude de stabilité globale d'un écoulement décollé de couche limite induit par une géométrie de type bosse. Nous regarderons en particulier quels sont les effets de compressibilité sur le phénomène de basse fréquence observé en régime incompressible.

### 4.1 Écoulement rayonnant : cavité

Les écoulements de cavité sont connus pour être responsables de charges latérales appliquées à la paroi des systèmes de propulsions aéronautiques et aérospatiaux et sont une source importante de bruit aéroacoustique. La compréhension de tels écoulements s'est donc avérée indispensable en aéronautique notamment pour la conception des avions par exemple. De nombreuses études expérimentales (Karamcheti [69], Rossiter [107]) et numériques (Sipp et Lebedev [115], Barbagallo *et al.* [14], Yamouni *et al.* [131]) ont permis de mettre en avant la dynamique de ce type d'écoulement. Il a été montré que les écoulements de cavité possèdent un premier mécanisme linéaire auto-entretenu appelé mécanisme de rétroaction acoustique. Les perturbations présentes dans l'écoulement s'amplifient le long de la couche de mélange par une instabilité de Kelvin-Helmholtz. Lorsque ces perturbations impactent le bord aval  $x_{TE}$  de la cavité, on assiste à la formation d'ondes aéroacoustiques. Ces ondes remontent alors l'écoulement et viennent exciter les perturbations présentes au point de décollement  $x_S$  qui se trouveront amplifiées à nouveau le long de la couche de mélange. Le second mécanisme est appelé mécanisme de résonance acoustique et se produit lorsque la longueur d'onde acoustique est du même ordre de grandeur que la taille de la cavité.

Dans le cadre de ces travaux de thèse, une telle géométrie nous permet de tester

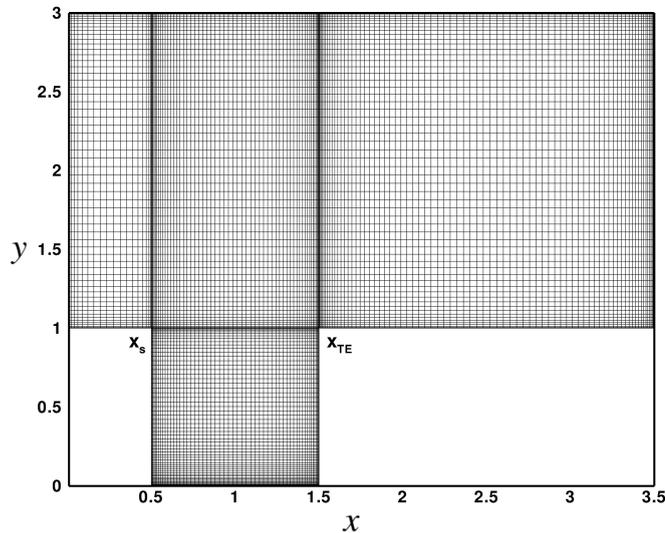


FIGURE 4.1 – Illustration du maillage utilisé pour l'étude de stabilité d'un écoulement de cavité ouverte

l'influence des zones absorbantes sur un écoulement qui présente la particularité d'être rayonnant. Cette géométrie nous permettra également de valider la méthode multi-domaine implémentée pour le calcul des solutions d'équilibres et du calcul de stabilité globale. Afin de valider nos simulations, nous comparerons nos résultats à ceux obtenus par Yamouni *et al.* ([131]) pour un écoulement considéré comme incompressible ( $Ma = 0.1$ ) et nous regarderons les effets de compressibilité sur la stabilité globale de l'écoulement.

L'écoulement présente deux grandeurs caractéristiques, l'épaisseur de déplacement de la couche limite  $\delta_l$  au point de décollement  $x_s$  et la taille de la cavité fixée par le rapport entre la largeur et la hauteur de cavité  $L/D$ . Pour un rapport d'aspect  $L/D = 1$  et en considérant le nombre de Reynolds basé sur  $L$ , Sipp et Lebedev ([115]) ont montré que l'écoulement devient globalement instable pour  $Re_L = 4140$ .

Dans cette étude, le domaine de calcul est décomposé de manière à avoir  $N_{dom_x} = 3$  et  $N_{dom_y} = 2$ . Nous utiliserons pour la discrétisation un nombre total de points  $N_x = 20 + 60 + 80$  selon la direction longitudinale et  $N_y = 60 + 60$  dans la direction transverse. Le maillage est présenté figure 4.1. Nous considérons un nombre de Reynolds basé sur  $L$  égal à  $Re_L = 7500$  et l'écoulement est donc globalement instable. La figure 4.2 présente les iso-valeurs de vitesse longitudinale et de température de la solution d'équilibre pour une épaisseur de déplacement de couche limite au niveau du point de décollement  $x_s$  égale à  $\delta_l = 0.02$  (soit un rapport  $L/\theta_0 = 130$  avec  $H = \delta_l/\theta_0 = 2.6$ ) et un nombre de Mach  $Ma = 0.1$ . Qualitativement, nous retrouvons les mêmes formes que la solution obtenue par Barbagallo *et al.* ([14]) en régime incompressible avec une couche mélange présente à l'entrée de la cavité et une zone de recirculation à l'intérieur. La figure 4.3 présente la comparaison entre les résultats de stabilité obtenus pour notre écoulement de base à  $Ma = 0.1$  et ceux publiés par Yamouni *et al.* [131] en régime incompressible. L'écoulement présente ainsi quatre

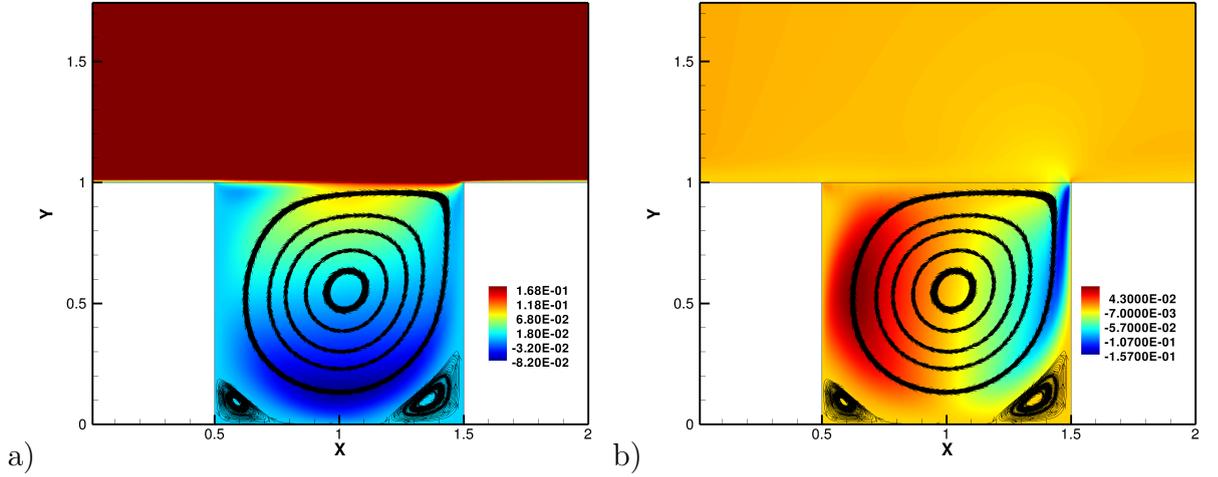


FIGURE 4.2 – Solution d'équilibre d'un écoulement de cavité ouvert à  $Ma = 0.1$  et  $Re = 7500$  représenté par les lignes de courant et les iso-valeurs de a) la vitesse longitudinale et b) la température

modes discrets dont deux modes instables pour un nombre de Strouhal  $St \sim 1$  et  $St \sim 1.5$  et deux modes stables pour  $St \sim 0.6$  et  $St \sim 1.8$  (notons que  $St = \omega_r/2\pi$ ). Ces instabilités s'apparentent à des modes de Kelvin-Helmholtz avec une structure localisée autour du point d'impact  $x_{TE}$  de la couche de mélange sur la paroi (figure 4.4). Une seconde famille de modes apparaît également sur la figure 4.3. Ces modes notés  $m_2$  sont globalement stables et présentes une structure spatiale dans et en dehors de la cavité (figure 4.5). On constate que la fonction propre associée au mode  $m_2$  présente des perturbations de petites échelles localisées dans la cavité et convectées par le champ de base ainsi que des structures connectées à la couche de mélange et se propageant en aval de la cavité. On peut donc constater que nos résultats sont en accord général avec ceux de Yamouni *et al.* [131]. Les légers écarts entre les fréquences et taux d'amplification des modes instables peuvent s'expliquer par le fait que notre écoulement n'est pas incompressible au sens strict. De plus, le caractère non normal de l'écoulement en question et la sensibilité des spectres d'instabilité par rapport à la résolution numérique qui s'ensuit ([124]) rendent difficile l'obtention de résultats parfaitement convergés. La figure 4.6 représente la solution d'équilibre, cette fois-ci pour un régime nettement compressible à un nombre de Mach  $Ma = 0.9$ , au travers des variables a) de vitesse longitudinale, b) de température et c) de pression. L'écoulement de base présente à nouveau une zone de recirculation dans la cavité, avec cependant une vitesse de recirculation supérieure à celle observée dans le cas quasi-incompressible  $U_{c_{comp}} = 1.77 \times U_{c_{inc}}$ . La figure 4.6 c) montre la pression dans l'écoulement et on constate qu'elle reste relativement constante au sein de la cavité ainsi qu'au niveau de la couche de mélange. En considérant la loi d'état des gaz parfaits, la variation de masse volumique vient donc compenser la variation de température observée sur la figure 4.6 b). Enfin on observe une région de surpression au niveau du point d'impact  $x_{TE}$  de la couche de mélange sur la paroi, qui sera la source de la formation des ondes aéroacoustiques que nous observerons par la suite. Yamouni *et al.* ([131]) ont montré que l'épaisseur de déplacement de la couche limite

au point de décollement  $x_s$  ne varie pas de manière significative avec le nombre de Mach. On considérera ici un rapport  $L/\theta_0$  quasi-identique à celui utilisé dans les simulations de Yamouni *et al.* ([131]) à savoir  $L/\theta_0 \sim 200$ . Regardons à présent les effets de compressibilité sur la stabilité de l'écoulement. La figure 4.7 présente la comparaison de nos résultats avec ceux de Yamouni *et al.* ([131]).

Les études de Miles ([87]), Pavithran ([95]) et Meliga ([85]) ont montré que la compressibilité de l'écoulement a tendance à stabiliser les écoulements qui présentent une couche de mélange comme les décollements. On montre cependant figure 4.7 que les effets de compressibilité ont au contraire tendance à déstabiliser l'écoulement. En effet, on constate dans un premier temps que le taux d'amplification des modes augmente avec le nombre de Mach. On passe ainsi de  $\omega_i \sim 0.5$  pour  $Ma = 0.1$  à  $\omega_i \sim 1.0$  pour  $Ma = 0.9$ . On constate également figure 4.7 que le nombre de modes instables augmente avec le nombre de Mach, ce qui est en accord avec les travaux de Yamouni *et al.* ([131]). Il n'est cependant pas aisé d'expliquer les différences entre les calculs pour  $St \sim 2.2$ , car dans nos calculs aucun mode instable n'a pu être détecté pour cette fréquence, contrairement aux résultats de Yamouni *et al.* ([131]) obtenus à l'aide d'un code linéarisé utilisant une formulation matricielle (*FreeFem++*, <http://www.freefem.org>). Il semblerait tout de même que cette différence provienne des différentes épaisseurs de déplacement de couche limite au point de décollement entre les deux calculs.

La figure 4.7 exhibe une famille de modes d'amplification proche du point neutre sur un large intervalle de fréquences, pour ce nombre de Mach  $Ma = 0.9$ . Nous avons discuté plus haut pour le cas académique de la couche limite, que ces modes sont susceptibles de brouiller en quelque sorte le spectre d'instabilité. La figure 4.9(a) montre la pression associée à ce type de modes et on constate leur nature rayonnante. Il est donc nécessaire de traiter les conditions aux limites de sortie sur la frontière supérieure du domaine de calcul afin de permettre aux ondes acoustiques de sortir du domaine. La figure 4.8 présente une comparaison des diagrammes de stabilité obtenus pour un écoulement à  $Ma = 0.9$ ,  $Re_L = 7500$  et  $L/\theta_0 = 130$  avec une zone tampon de type *Perfectly Matched Layer* (ou *Za3*) construite en considérant un coefficient  $\sigma_y = 15.0$  constant pour  $2.5 \leq y$ . On observe que la zone tampon permet ainsi d'abaisser la famille de modes rayonnants dans la zone stable du diagramme de stabilité. Les modes de type hydrodynamique ne sont cependant pas affectés. Il reste toujours la différence entre nos résultats et ceux de Yamouni *et al.* ([131]) pour les fréquences plus élevées. Un calcul supplémentaire est alors nécessaire pour obtenir exactement la même épaisseur de déplacement de couche limite au point de séparation  $x_s$  afin de voir si un mode instable à  $St \sim 2.2$  émerge.

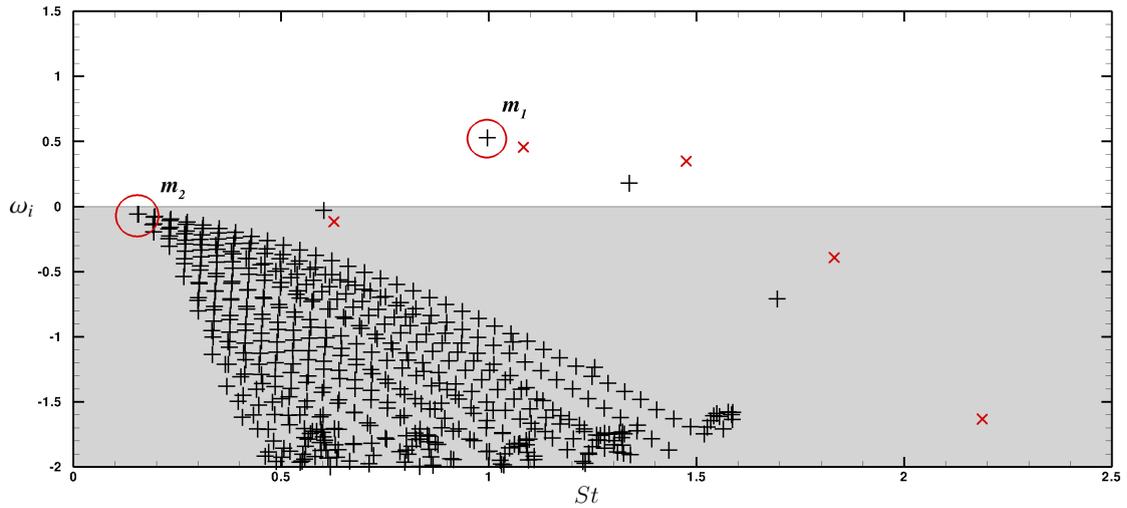


FIGURE 4.3 – Diagramme de stabilité globale d'un écoulement de cavité ouvert pour  $Re_L = 7500$ , à (+)  $Ma = 0.1$  et (x)  $Ma = 0$  (Yamouni *et al.* [131])

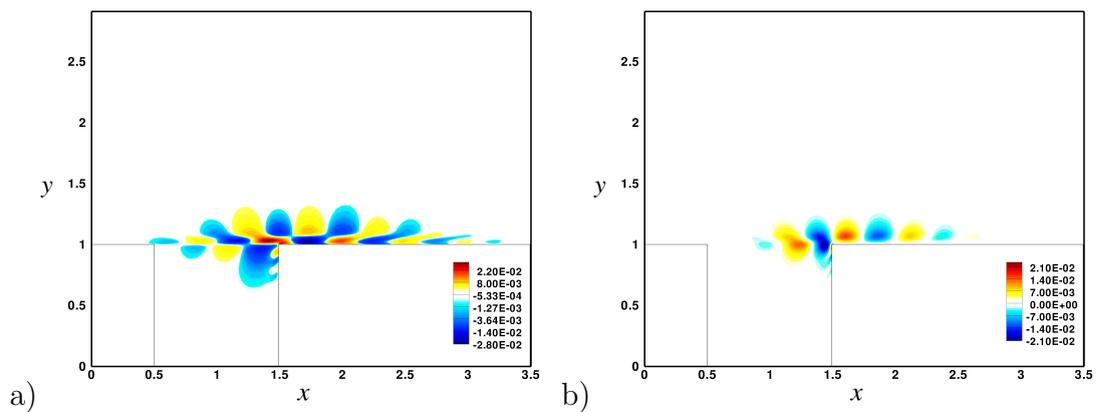


FIGURE 4.4 – Distribution spatiale des vitesses longitudinales (a) et transverses (b) du mode de type  $m_1$  le plus instable ( $St = 1.0$ ,  $\omega_i = 0.53$ ) en régime quasi-incompressible ( $Ma = 0.1$ )

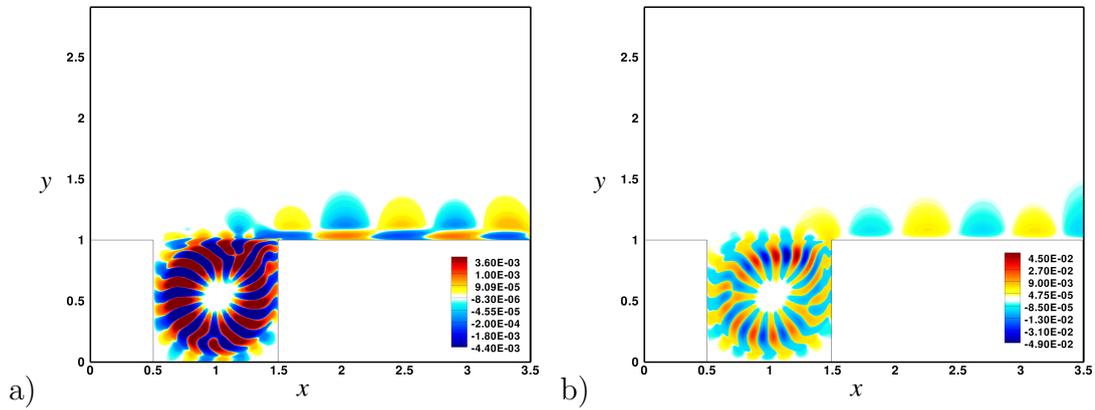


FIGURE 4.5 – Distribution spatiale des vitesses longitudinales (a) et transverses (b) du mode de type  $m_2$  en régime quasi-incompressible ( $Ma = 0.1$ )

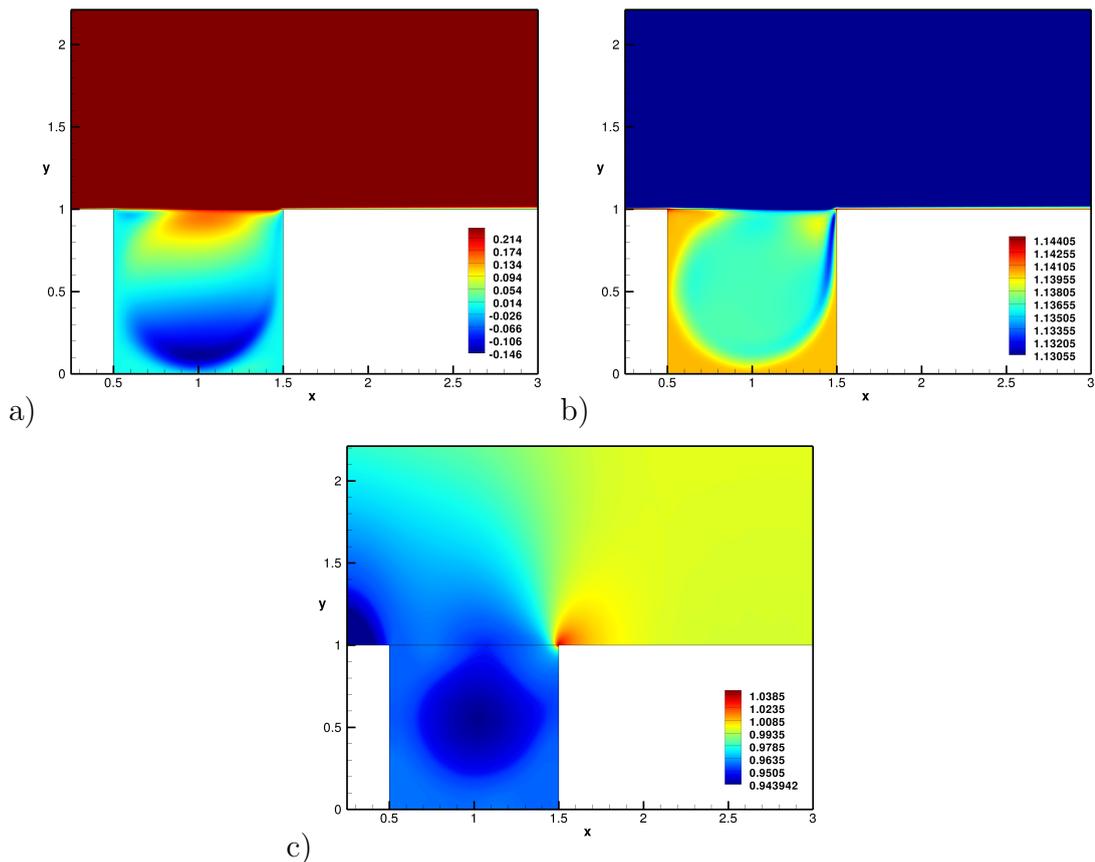


FIGURE 4.6 – Solution d'équilibre d'un écoulement de cavité ouvert à  $Ma = 0.9$  et  $Re_L = 7500$  représentant les iso-valeurs a) de vitesse longitudinale b) de température et c) de pression

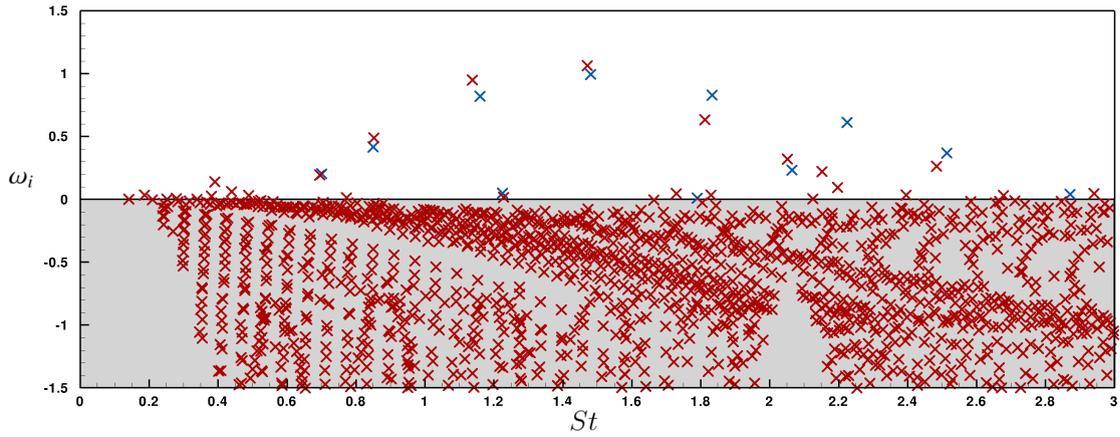


FIGURE 4.7 – Diagramme de stabilité d'un écoulement de cavité ouverte  $L/\theta_0 = 200$  à  $Ma = 0.9$  et  $Re_L = 7500$ ; ( $\times$ ) approche matricielle, ( $\times$ ) résultats de Yamouni *et al.* avec  $L/\theta_0 = 230$

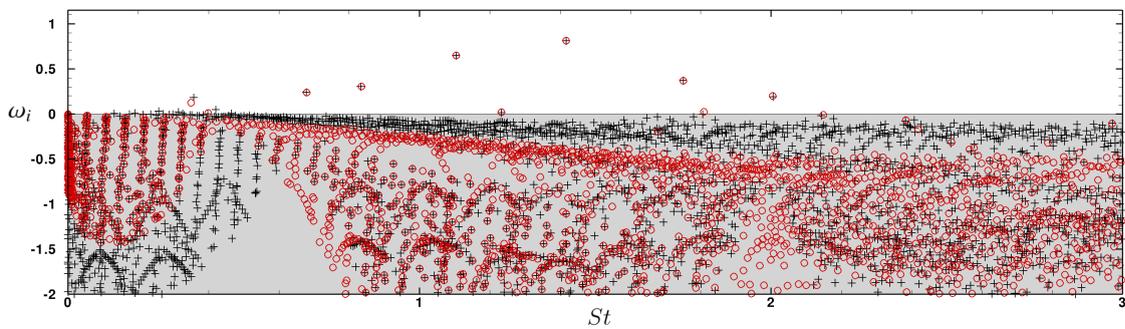


FIGURE 4.8 – Diagramme de stabilité d'un écoulement de cavité ouverte pour  $L/\theta_0 = 130$  à  $Ma = 0.9$  et  $Re_L = 7500$ ; (+) sans zone absorbante, ( $\circ$ ) avec zone absorbante  $y \geq 2.5$ ,  $\sigma_y = 15.0$

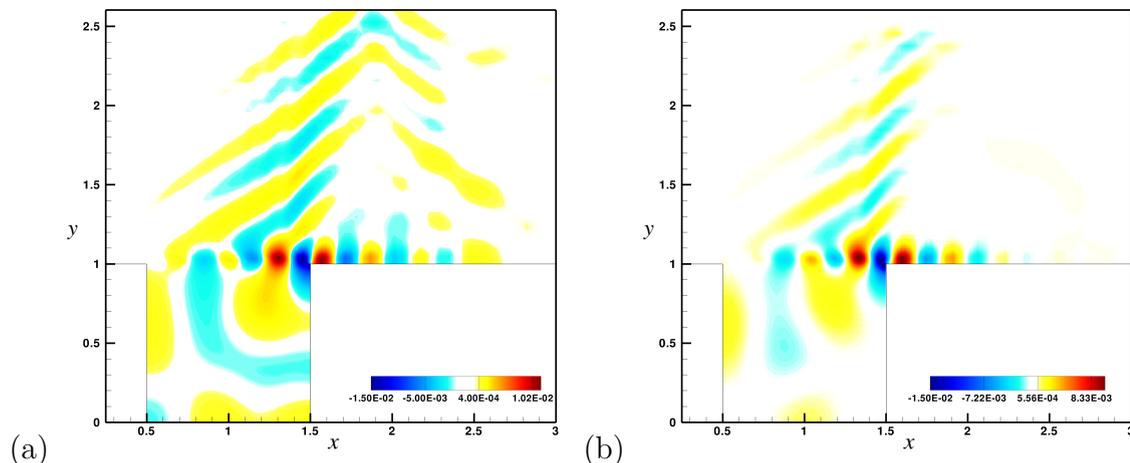


FIGURE 4.9 – Illustration de la pression d'un mode de cavité rayonnant ( $St = 1.750$ ,  $\omega_i = 0.373$ ) pour  $Ma = 0.9$  et  $Re_L = 7500$ ; a) sans PML, b) avec PML

## 4.2 Écoulement derrière une géométrie de type bosse

Nous nous intéresserons dans cette partie aux décollements de couche limite induits par une géométrie de type bosse. Cette configuration a été largement étudiée en régime incompressible, notamment à travers les travaux numériques de Ehrenstein & Gallaire ([51]), Ehrenstein et al. ([52]), et expérimentaux de Passaggia et al. ([93]). Dans ces travaux, une attention particulière a été portée au phénomène dit de *flapping*, c'est-à-dire des oscillations globales du bulbe de recirculation, observées au-delà d'un certain nombre de Reynolds critique. Mettant en œuvre une étude de stabilité globale, ce phénomène a pu être interprété comme étant associé à l'interaction non linéaire de modes devenant presque simultanément instables avec des fréquences équidistantes. La basse fréquence correspond ainsi à l'écart de fréquence  $\Delta\omega_r$  entre chaque mode global, ces modes étant en interaction non normale.

Nous nous limiterons dans cette partie à présenter les effets que peut avoir la compressibilité sur le caractère globalement instable des perturbations et plus particulièrement sur les écarts entre modes observés. Cette configuration exige de raffiner le maillage au niveau des points de décollement et de recollement. Nous décomposerons alors le domaine en trois sous-domaines tels que  $N_{\text{dom}} = N_{\text{dom}_x} + N_{\text{dom}_y} = 3 + 1$ .  $N_x = 30 + 100 + 130$  points de maillage seront utilisés pour discrétiser le domaine selon la direction transverse et  $N_y = 60$  points seront utilisés dans la direction transverse. La taille total du domaine  $L_x$  sera prise égale à 300 et une hauteur  $H = 60$  sera considérée. Etant donné le caractère multi-domaine de notre domaine de calcul, aucun changement de variable n'a été opéré pour modifier la répartition des points suivant la direction  $\vec{e}_x$ . En revanche, l'existence d'une couche limite nous impose de raffiner le maillage selon la direction transverse. Ici le paramètre  $s_y$  du changement de variable présenté au chapitre 2 sera calculé à partir du rapport  $s_y = H/15$ . La taille de la bosse sera prise constante et égale à  $2\delta_l$ , pour être en accord avec les

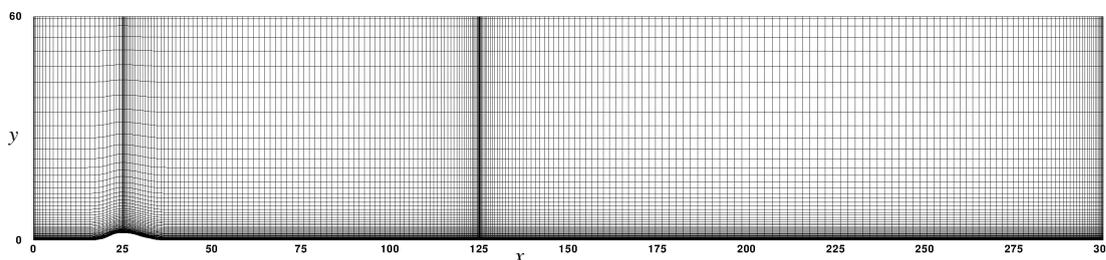


FIGURE 4.10 – Illustration du maillage multi-bloc utilisé pour la simulation de couche limite décollée

travaux de Ehrenstein & Gallaire ([51]). Le maillage des différentes simulations est présenté sur la figure 4.10.

Afin de déterminer les différentes solutions d'équilibre, le nombre de Reynolds basé sur l'épaisseur de déplacement de couche limite en entrée varie et  $40 \leq Re_{\delta_i} \leq 600$ . Notons ici que le nombre de Reynolds est formé avec l'épaisseur de déplacement de la couche limite de Blasius imposée à l'entrée du domaine de calcul. Le sommet de la bosse est à une distance  $\approx 25$  de l'entrée du domaine de calcul, ce qui correspond à la configuration utilisée en régime incompressible. Dans ce cas, l'écoulement devient instable par rapport aux instabilités globales à un nombre de Reynolds  $Re_{\delta_i} \approx 550$ . Nous avons constaté qu'au delà d'un nombre de Mach  $Ma = 0.74$ , la solution d'équilibre présente un nombre de Mach local supersonique au niveau du sommet de la bosse et une discontinuité apparaît. Les méthodes spectrales que nous utilisons ne permettant pas le traitement des discontinuités, le nombre de Mach sera pris égal à  $Ma = 0.1, 0.2, \dots, 0.7$ .

La figure 4.11 présente les différentes composantes de l'écoulement de base  $\mathbf{q}_0$  calculé pour  $Ma = 0.1$ . Cette solution sera considérée comme étant la référence pour la comparaison avec le cas incompressible. On constate que l'écoulement présente une zone de recirculation pour  $26.28 \leq x \leq 122.04$ . Les figures 4.12 et 4.13 présentent respectivement la variation de cette longueur de séparation ainsi que la valeur maximale de la vitesse de recirculation de l'écoulement dans le décollement en fonction du nombre de Reynolds pour différents nombres de Mach. On constate alors que la taille du décollement ainsi que sa vitesse de recirculation varient dans un premier temps très rapidement pour de faibles nombres de Reynolds. Au delà d'un certain nombre de Reynolds  $Re_{\delta_i} \sim 300$  ces deux quantités varient linéairement avec le nombre de Reynolds. Ce comportement a déjà été mis en avant dans les travaux de Cherubini et al. [36] pour un décollement de couche limite induit par suction à la paroi supérieure et semble donc être générique aux écoulements décollés. La figure 4.14 met en avant le comportement du bulbe de recirculation en fonction du nombre de Mach avec l'évolution de la longueur de recirculation  $L_{sep}$  et de la vitesse de recirculation  $|u_{back}|$  pour un nombre de Reynolds  $Re_{\delta_i} = 600$ . On constate ainsi que ces deux quantités évoluent non linéairement avec le nombre de Mach. La solution d'équilibre reste en effet quasi-identique pour de faibles nombres de Mach ( $Ma \leq 0.4$ ) alors que le décollement s'allonge rapidement avec une vitesse de recirculation qui augmente lorsque les effets de compressibilité deviennent non négligeables  $Ma \geq 0.5$ . Notons que ce type de comportement a également été observé pour des écoulements pré-

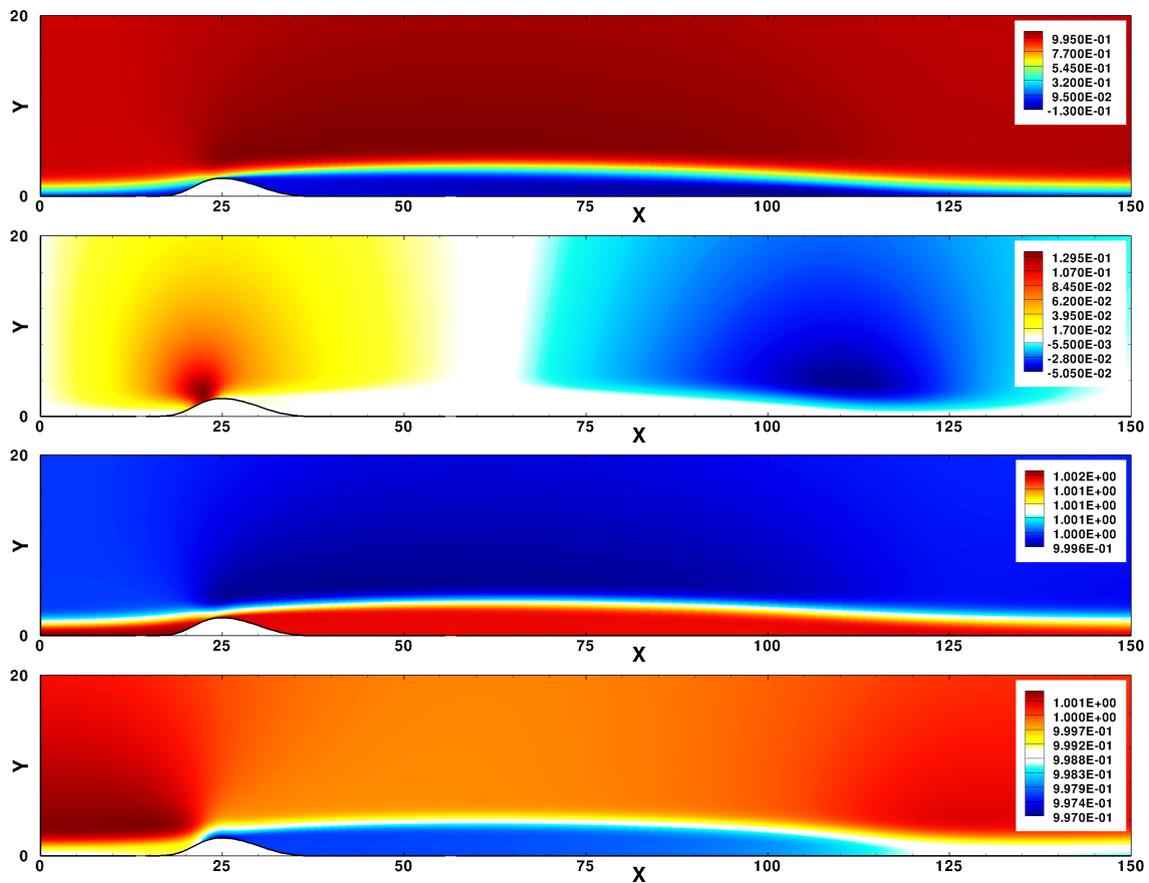


FIGURE 4.11 – Solution d’équilibre  $u_0$ ,  $v_0$ ,  $T_0$  et  $\rho_0$  d’un décollement de couche limite induit par une géométrie de type bosse à  $Ma = 0.1$  et  $Re_{\delta_i} = 600$

sents derrière un corps profilé dans les travaux de Méliga et al. ([85]). La figure 4.15 montre alors les résultats de stabilité obtenus pour un nombre de Mach  $Ma = 0.1$ . Différentes familles de modes peuvent être distinguées. Les instabilités à moyennes fréquences ( $0.15 \leq \omega_r \leq 0.4$ ) entourées en rouge sur le spectre apparaissent sous forme de modes globaux de type Kelvin-Helmholtz, représentés sur la figure 4.16, qui ont une structure spatialement localisée de part et d’autre du point de recollement et dont l’apparition est clairement associée à la couche de mélange du bulbe de recirculation. Les modes notés  $m_2$  sur la figure 4.15 sont également localisés au point de recollement mais possèdent une structure spatiale plus étendue. Il apparaît dans certains cas que des structures de type Tollmien-Schlichting se développent en aval du point de recollement. De manière identique au cas de couche limite, on retrouve les modes dits “de free-stream” et les modes dits de Orr que l’on a observés dans le cadre de l’étude de couche limite compressible. Ces modes apparaissent sur la figure 4.15 et seront respectivement notés  $m_4$  et  $m_5$ . Une zone absorbante de type PML avec un coefficient d’atténuation  $\sigma_y = cste = 6$  et  $H_{PML} = 30$  sera utilisée pour traiter les modes neutres de type  $m_2$  présentés précédemment, qui apparaissent à nouveau lorsque les effets de compressibilité sont pris en compte.

La figure 4.18 présente les différents diagrammes de stabilité obtenus pour  $Ma = 0.1, 0.2, \dots, 0.7$ . On observe que pour des nombres de Mach suffisamment faibles

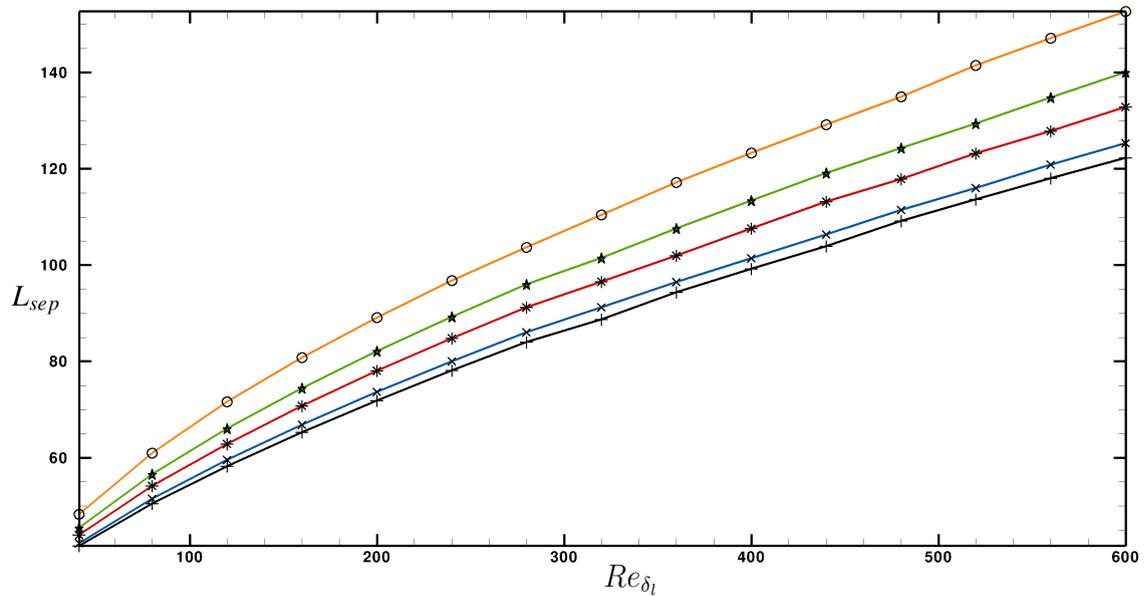


FIGURE 4.12 – Évolution de la longueur de recirculation en fonction du nombre de Reynolds pour (+)  $Ma = 0.1$ , (x)  $Ma = 0.3$ , (\*)  $Ma = 0.5$ , (★)  $Ma = 0.6$ , (o)  $Ma = 0.7$  pour un écoulement de couche limite décollé derrière une géométrie de type bosse

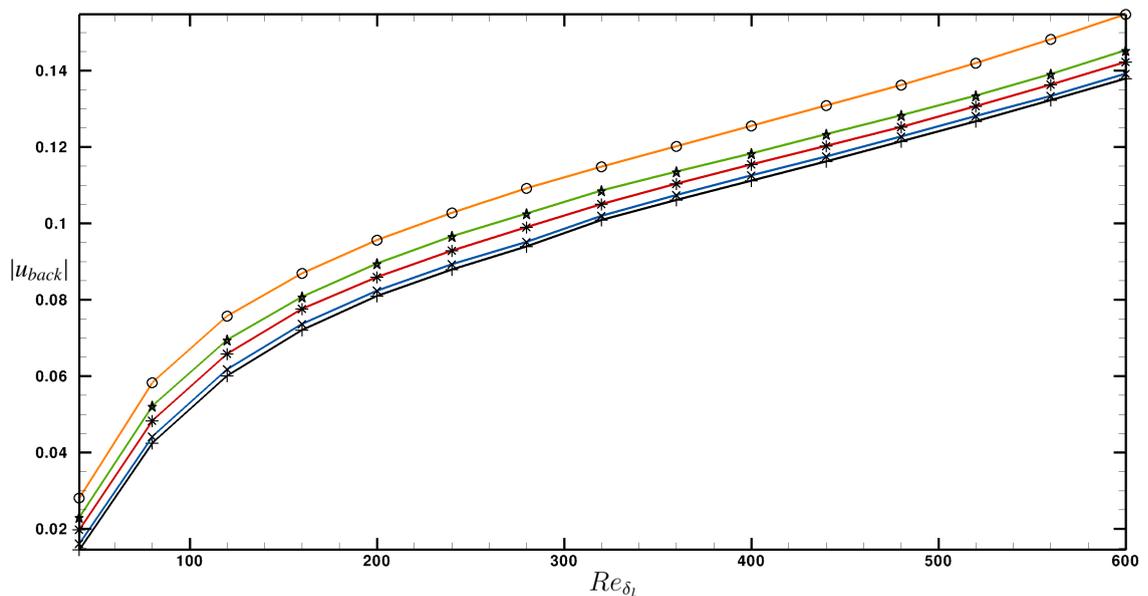


FIGURE 4.13 – Évolution de la valeur absolue de la vitesse de recirculation en fonction du nombre de Reynolds pour (+)  $Ma = 0.1$ , (x)  $Ma = 0.3$ , (\*)  $Ma = 0.5$ , (★)  $Ma = 0.6$ , (o)  $Ma = 0.7$  pour un écoulement de couche limite décollé derrière une géométrie de type bosse

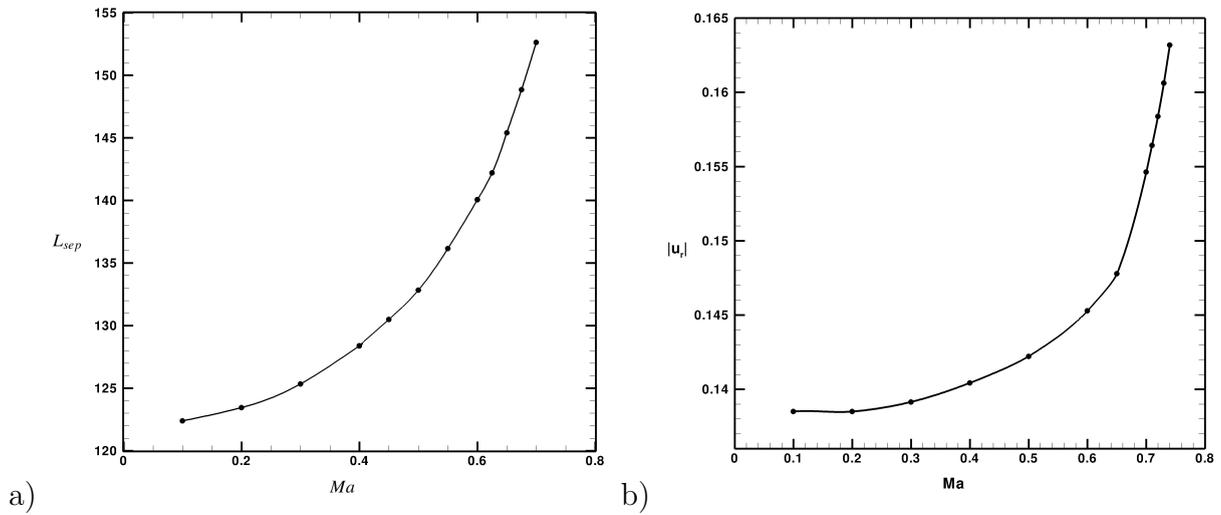


FIGURE 4.14 – Évolution de a) la longueur de recirculation et b) la valeur absolue de la vitesse de recirculation en fonction du nombre de Mach pour un écoulement de couche limite décollée derrière une géométrie de type bosse et en considérant un nombre de Reynolds  $Re_{\delta_i} = 600$

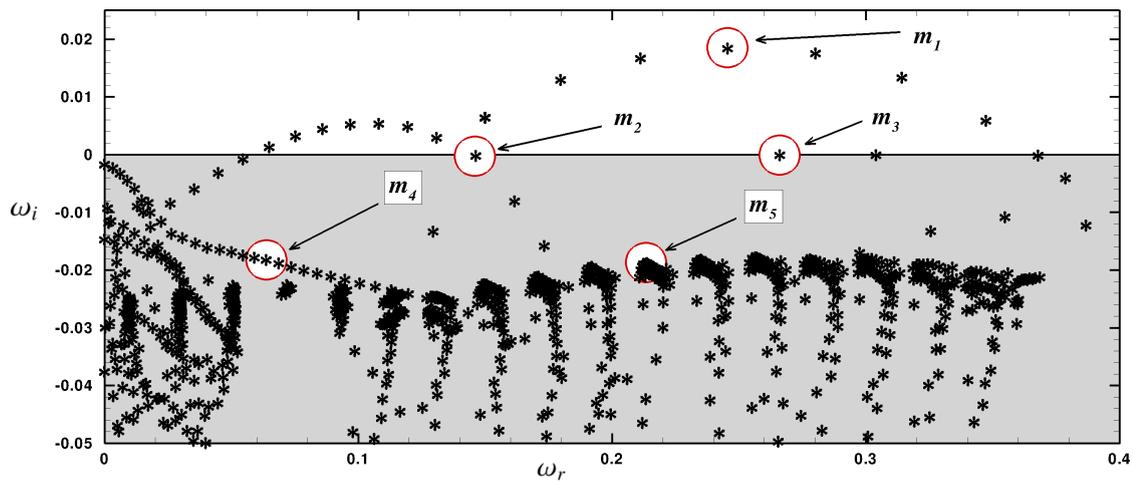


FIGURE 4.15 – Spectre de référence associé à la solution d'équilibre d'un écoulement décollé à  $Ma = 0.1$  et  $Re_{\delta_i} = 600$  sans zone absorbante.

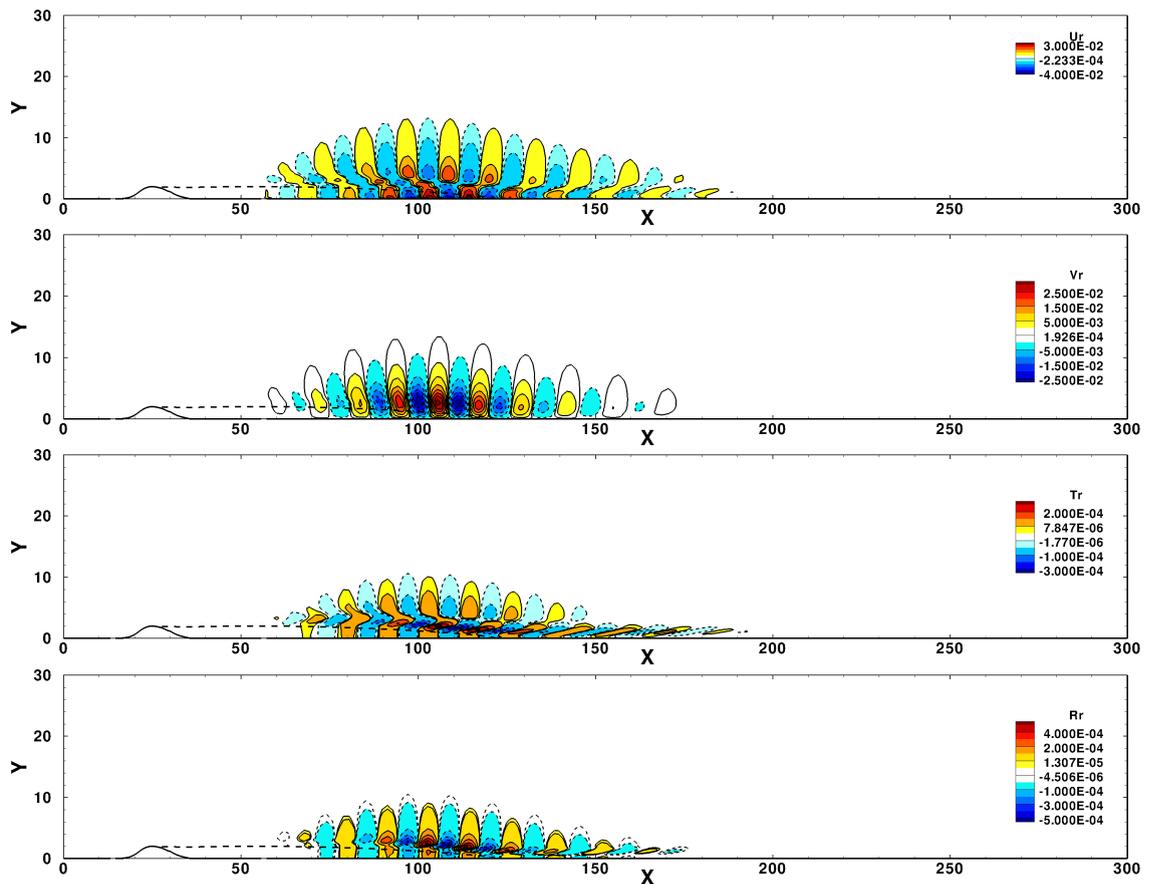


FIGURE 4.16 – Fonctions propres  $\hat{u}$ ,  $\hat{v}$ ,  $\hat{T}$ ,  $\hat{\rho}$  associées au mode global  $m_1$  présenté figure 4.15

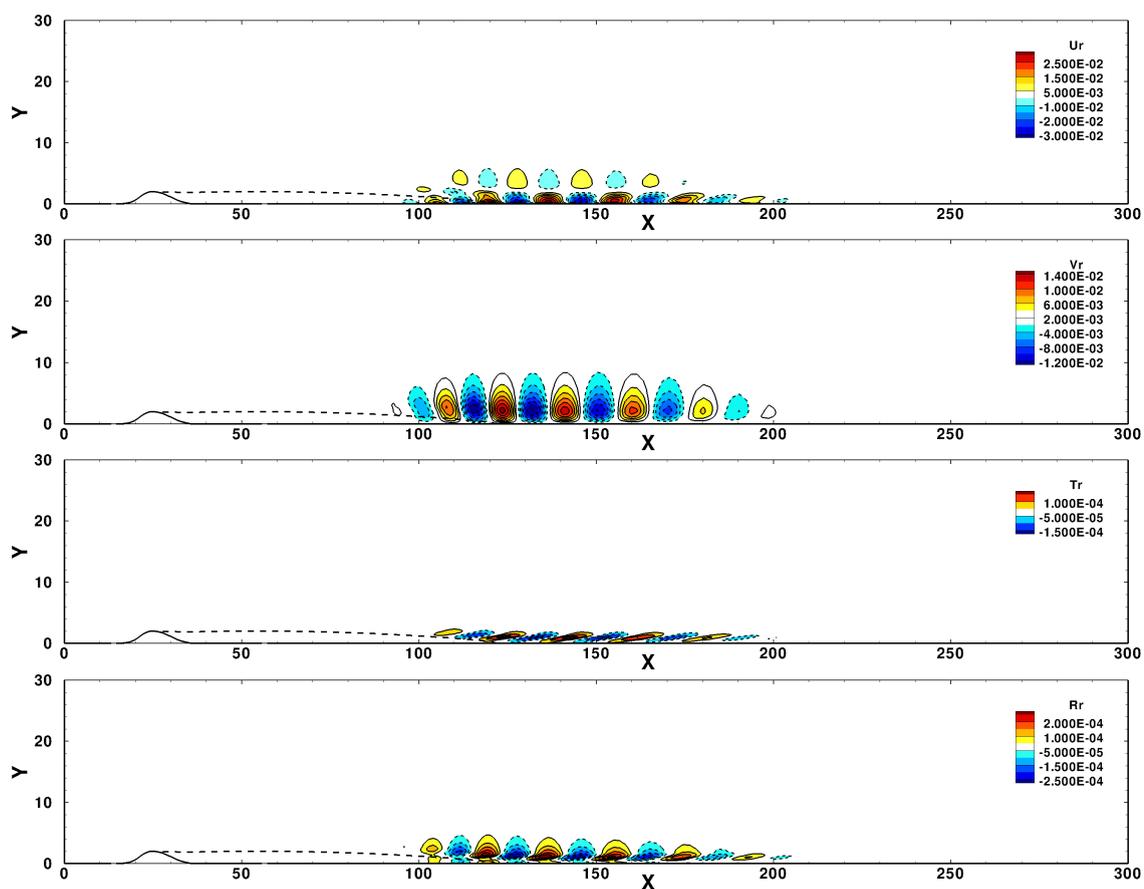


FIGURE 4.17 – Fonctions propres  $\hat{u}$ ,  $\hat{v}$ ,  $\hat{T}$ ,  $\hat{\rho}$  associées au mode global  $m_2$  présenté figure 4.15

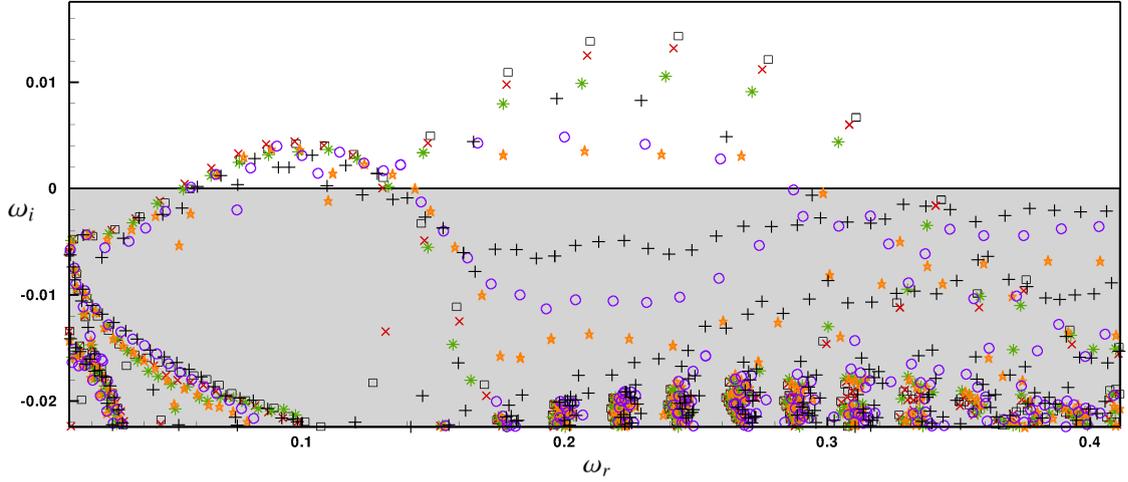


FIGURE 4.18 – Diagramme de stabilité d'un écoulement décollé derrière une géométrie de type bosse pour  $Re_{\delta_t} = 600$  et  $h = 2.0$ . ( $\square$ )  $Ma = 0.1$ , ( $\times$ )  $Ma = 0.2$ , ( $*$ )  $Ma = 0.3$ , ( $\star$ )  $Ma = 0.4$ , ( $\circ$ )  $Ma = 0.5$ , ( $+$ )  $Ma = 0.6$

$0.1 < Ma < 0.5$ , les effets de compressibilité tendent à stabiliser l'écoulement. Au delà de  $Ma = 0.5$ , la compressibilité tend en revanche à déstabiliser rapidement l'écoulement. On constate également que la fréquence du mode le plus instable tend à diminuer avec le nombre de Mach. Étant donné la gamme de Mach utilisée, on constate donc que les résultats numériques sont qualitativement identiques à ceux obtenus en régime incompressible dans les travaux d'Ehrenstein et Gallaire ([51]). En effet, on retrouve les deux familles de modes globaux instables, à savoir ceux à basse fréquence dont la structure est localisée au niveau du point de recollement ainsi qu'en aval du bulbe de décollement, ainsi que ceux responsables du phénomène de *flapping* à moyenne fréquence, dont la structure est localisée au niveau du point de recollement et dans la couche limite décollée. L'évolution de l'écart en fréquence entre deux modes globaux présentée en fonction du nombre de Mach figure 4.19 et caractéristique de ce phénomène basse-fréquence est également quasi-constant et proche de  $\Delta T_{comp} \sim 200$ . Ces résultats sont donc sensiblement similaires aux résultats obtenus en régime incompressible ([51]) pour lequel la fréquence de battement observée se situe à  $T_{inc} \sim 200$ .

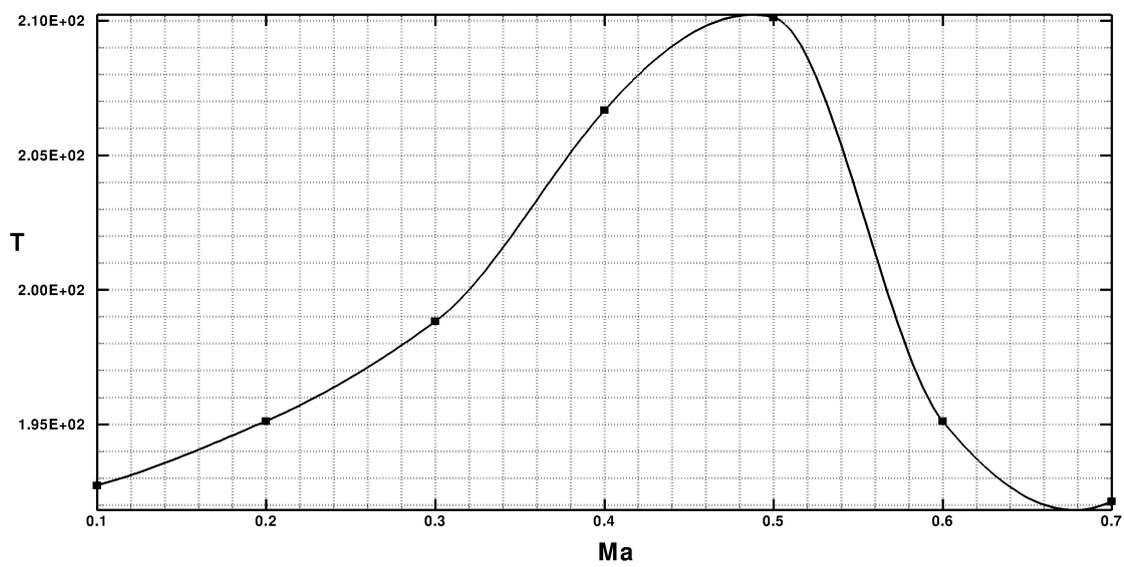


FIGURE 4.19 – Écart de fréquence  $T$  entre deux modes globaux en fonction du nombre de Mach pour un écoulement de couche limite décollée à  $Re_{\delta_l} = 600$

# Chapitre 5

## Écoulement de bosse : effets tridimensionnels

Nous avons montré au chapitre 4 l'existence d'instabilités bidimensionnelles associées à la présence d'une couche de mélange délimitant la zone de recirculation pour des écoulements de couche limite décollée. Il existe également une autre famille de modes globaux instables dans les écoulements de paroi exhibant des décollements (Rodriguez et al. [104]). Les études de stabilité globale de Théofilis *et al.* ([122]), dans le cadre d'un décollement induit par aspiration de l'écoulement sur la paroi supérieure, mais également pour des décollements induits par une géométrie (Armaly et al. [8], Barkley et al. [16], Brès et Colonius [29] entre autres) ont montré que des perturbations possédant une structure tridimensionnelle non oscillantes deviennent instables pour des nombres de Reynolds  $Re \geq Re_{3D}$  (l'indice  $3D$  désignant le nombre de Reynolds critique par rapport aux perturbations tridimensionnelles),  $Re_{3D}$  pouvant être inférieur au nombre de Reynolds critique  $Re_{2D}$  (pour l'apparition des instabilités 2D). Dans le cadre des décollements induits par la géométrie de type bosse qui nous intéresse, les travaux numériques de Gallaire et al. [56] et expérimentaux de Passagia et al. [93] ont également permis de mettre en avant l'existence de ces structures transverses instables dans les écoulements décollés.

Dans la continuité de ces travaux, nous nous concentrerons dans ce chapitre sur les effets de compressibilité sur ces instabilités tridimensionnelles pour cette même configuration de bosse. Nous présenterons dans un premier temps les paramètres numériques utilisés pour déterminer les solutions d'équilibre puis nous regarderons les spectres et familles de modes globaux qui apparaissent pour cet écoulement. Enfin, une étude paramétrique sera faite afin de déterminer quels sont les effets des différents paramètres (nombre d'onde transverse, nombre de Reynolds, nombre de Mach) sur la stabilité de l'écoulement.

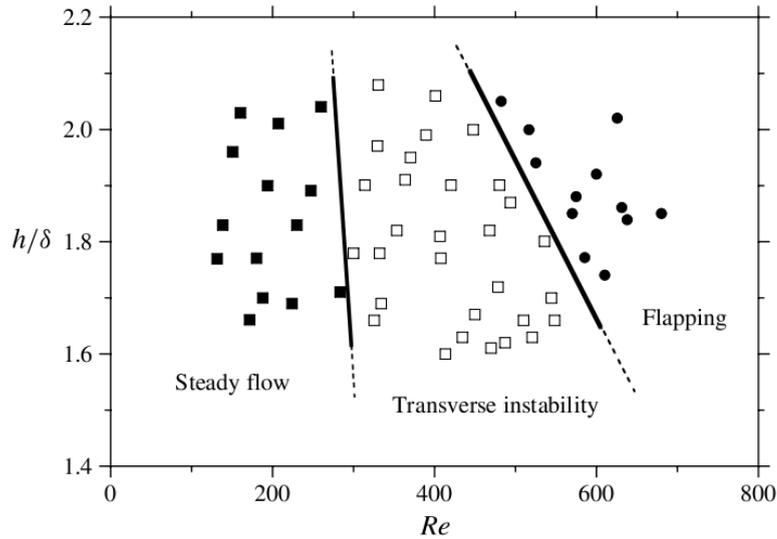


FIGURE 5.1 – Diagramme de stabilité d'un écoulement décollé incompressible en fonction de la hauteur de bosse adimensionnée  $h^* = h/\delta_l$  et du nombre de Reynolds  $Re_{\delta_l}$  (Passaggia *et al.* ([51]))

## 5.1 Présentation du champ de base et du spectre d'instabilité de référence

Nous avons vu que les études de stabilité globale des écoulements décollés induits par des géométries ont été menées principalement dans le régime incompressible, et particulièrement dans le cadre d'un décollement induit par la géométrie de type bosse qui est au cœur de notre étude. La figure 5.1 présente les résultats obtenus par Passaggia *et al.* ([93]) dans le cadre de l'étude expérimentale précisément pour cette géométrie de bosse. On constate que l'écoulement possède trois états quant à sa stabilité. L'état stable, pour lequel l'écoulement est stationnaire, présente ainsi une première bifurcation pour  $Re_{3D} \sim 290$  à partir duquel des perturbations transverses de nature centrifuge apparaissent. Au delà d'un certain nombre de Reynolds  $Re_{2D}$  qui dépend du rapport  $h/\delta_l$  de la hauteur de bosse normalisée par l'épaisseur de déplacement de la couche limite entrant mesurée à une certaine distance du sommet de la bosse, les instabilités bidimensionnelles présentées au chapitre précédent apparaissent. Notons que cette valeur expérimentale  $Re_{2D} \approx 500$  pour une valeur  $h/\delta_l = 2$  qui est la valeur de référence pour notre étude de stabilité globale.

Nous considérerons ici un nombre de points de collocation de  $N_x = 180$  sur une longueur  $L_x = 200$  et  $N_y = 40$  selon la direction normale avec  $H = 60$  pour nos simulations. Gallaire et Ehrenstein [56] montrent en effet que le passage d'un domaine  $L_x = 200$ ,  $H = 100$  discrétisé avec  $N_x = 160$  et  $N_y = 35$  à un domaine de même dimension discrétisé à l'aide de  $N_x = 180$  et  $N_y = 45$  points de maillage ne faisait pas varier le taux d'amplification des modes globaux de plus de 2%. La figure 5.2 présente le diagramme de stabilité associé à la couche limite décollée à  $Ma = 0.1$ , pour un nombre d'onde transverse  $\beta = 0.25$ . Tout en introduisant une dépendance dans

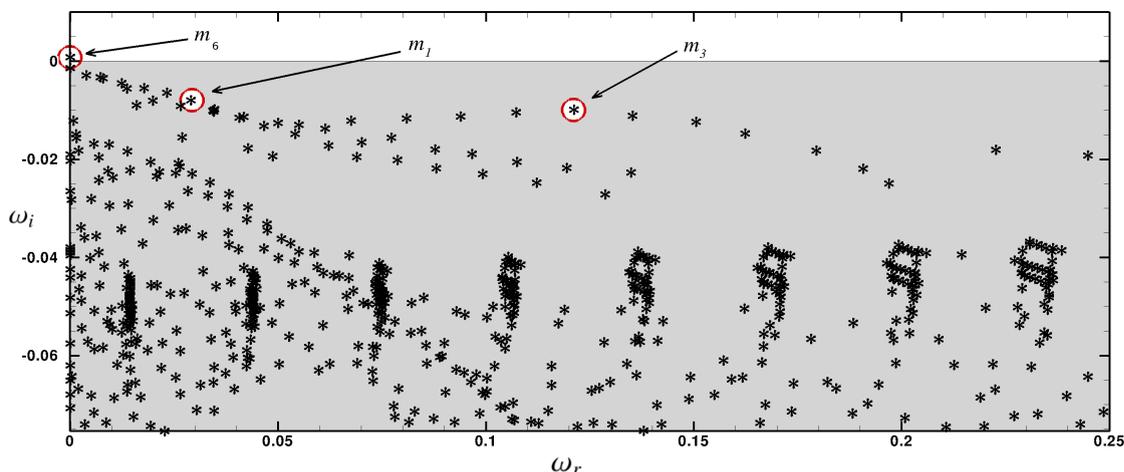


FIGURE 5.2 – Familles de modes pour un écoulement décollé à  $Ma = 0.1$ ,  $Re = 600$  et  $\beta = 0.25$  sans zone absorbante.

la troisième direction  $z$ , on retrouve les différentes familles de modes qui existent pour le cas bidimensionnel  $\beta = 0$  et qui ont été discutées dans le chapitre précédent. Pour rappel, nous avons présenté les modes  $m_1$  qui correspondent aux instabilités de Tollmien-Schlichting, les modes de Kelvin-Helmholtz  $m_3$  responsables du phénomène de *flapping* ainsi que les modes de free-stream notés  $m_4$ . La particularité de ce spectre réside dans l'apparition d'un mode global non oscillant ( $\omega_r = 0$ ) pour  $\beta > 0$  que nous appellerons ici  $m_6$ . La figure 5.4 présente l'influence du nombre d'onde transverse sur le diagramme de stabilité de l'écoulement. En effet, étant donné le caractère symétrique (selon l'axe  $\vec{e}_y$ ) du spectre de stabilité, nous avons choisi de montrer les valeurs propres à fréquences négatives associées au nombre d'onde  $\beta = 0$  d'un côté et les valeurs propres à fréquences positives associées à  $\beta = 0.25$ . Deux phénomènes sont alors à décrire. D'une part, on constate que le nombre d'onde  $\beta \neq 0$  a tendance à stabiliser les instabilités de Kelvin-Helmholtz présentées au chapitre précédent. En effet le taux d'amplification du mode le plus instable diminue significativement avec  $\beta$ . On constate au contraire que le mode  $m_6$  se déstabilise avec  $\beta$ . Ce mode est illustré sur la figure 5.3 et présente une structure spatiale localisée, comme dans le cas incompressible ([56]), dans la zone de recirculation. Afin d'illustrer l'allure générale de l'instabilité dans le domaine, on présente sur la figure 5.5 la reconstruction 3D de la variable  $w'$  de ce mode  $m_6$  pour  $\beta = \beta_{\max}$ .

Il est à noter, que des instabilités de type  $m_6$  associées à la présence de zones de recirculations dans des décollements ont également été observées et discutées par d'autres auteurs ([16], [81], [29]). L'émergence de cette instabilité a été interprétée en termes d'une instabilité centrifuge, selon le célèbre critère de Rayleigh. Ce critère est défini selon l'équation

$$\eta = -\frac{\partial |\vec{r} \times \vec{u}|^2}{\partial \vec{r}} \quad (5.1)$$

avec  $\vec{r} = (x - x_c, y - y_c)$  la position du centre de la bulle de recirculation, définie dans un repère cylindrique ou sphérique et l'on considère que l'écoulement est instable

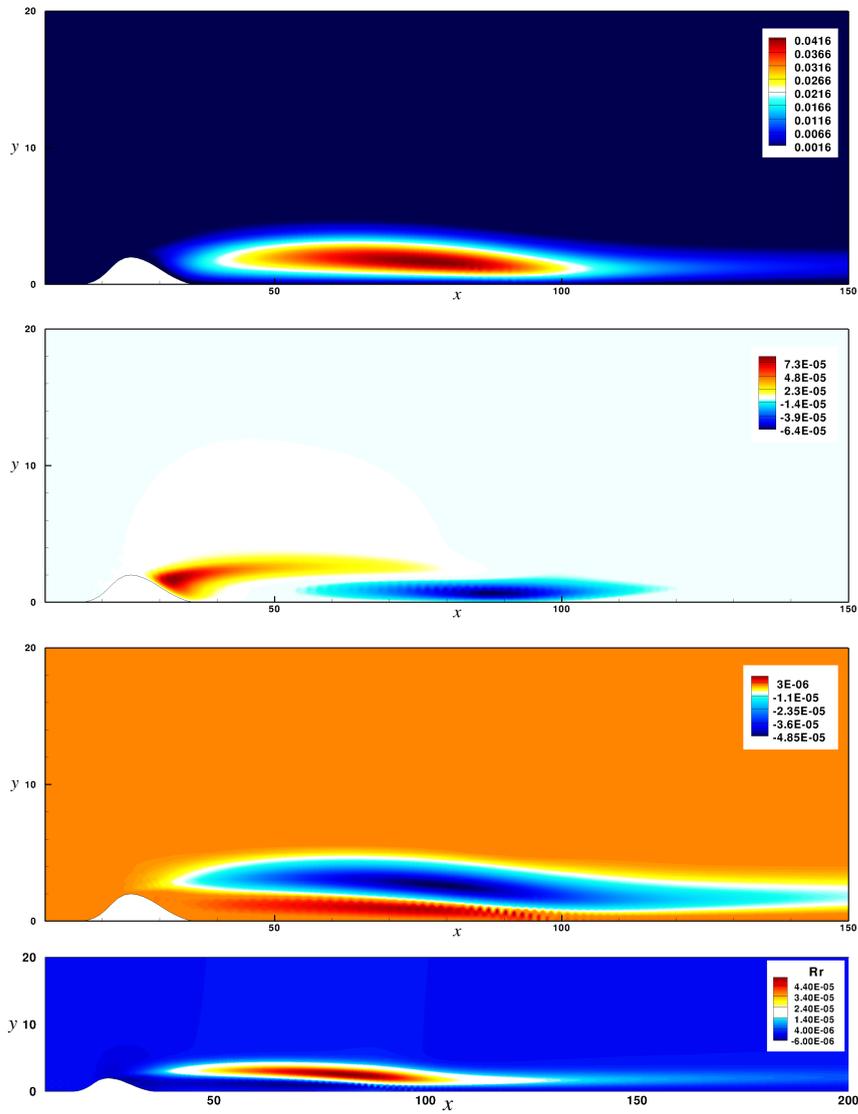


FIGURE 5.3 – Illustration des fonctions propres  $\hat{u}$ ,  $\hat{w}$ ,  $\hat{T}$  et  $\hat{\rho}$  associées au mode global de type  $m_6$  présenté figure 5.2 pour  $Ma = 0.1$  et  $Re_{\delta_i} = 400$

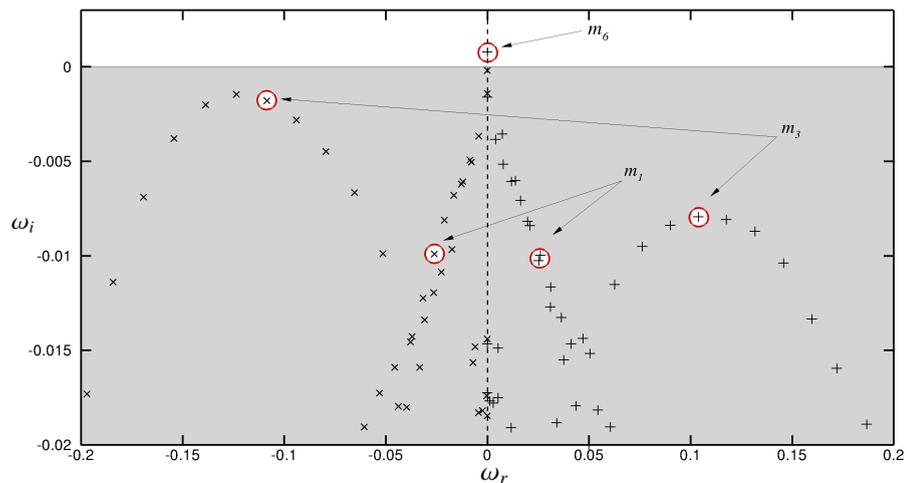


FIGURE 5.4 – Spectre de stabilité globale pour  $Ma = 0.1$ ,  $Re_{\delta_i} = 400$  ( $\times$ ) :  $\beta = 0$ , ( $+$ ) :  $\beta = 0.25$ . A gauche sont représentées les valeurs propres associées à la partie du spectre pour lequel  $\omega_r \leq 0$  et à droite les valeurs propres associées aux fréquences  $\omega_r \geq 0$  (le spectre de stabilité étant symétrique)

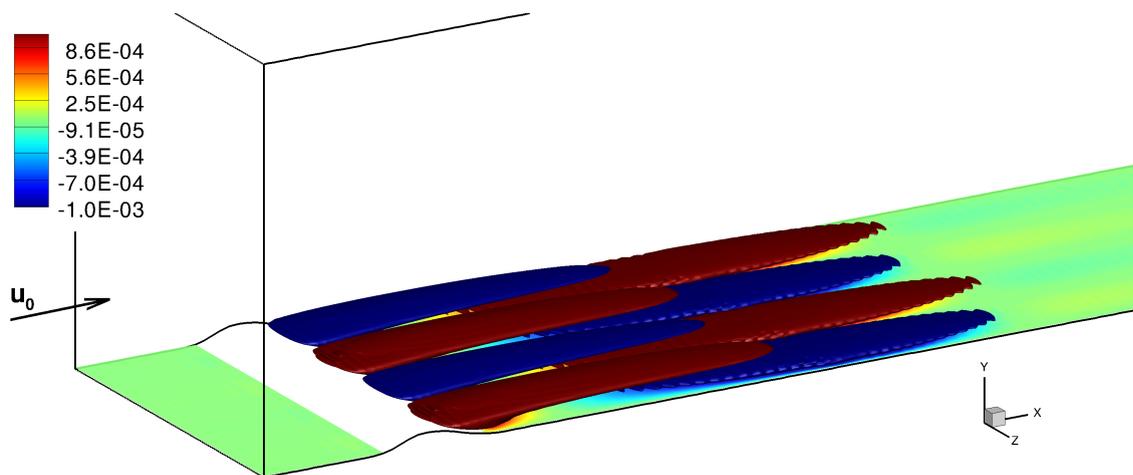


FIGURE 5.5 – Perturbation  $w'$  pour  $Ma = 0.1$  et  $Re_{\delta_i} = 400$

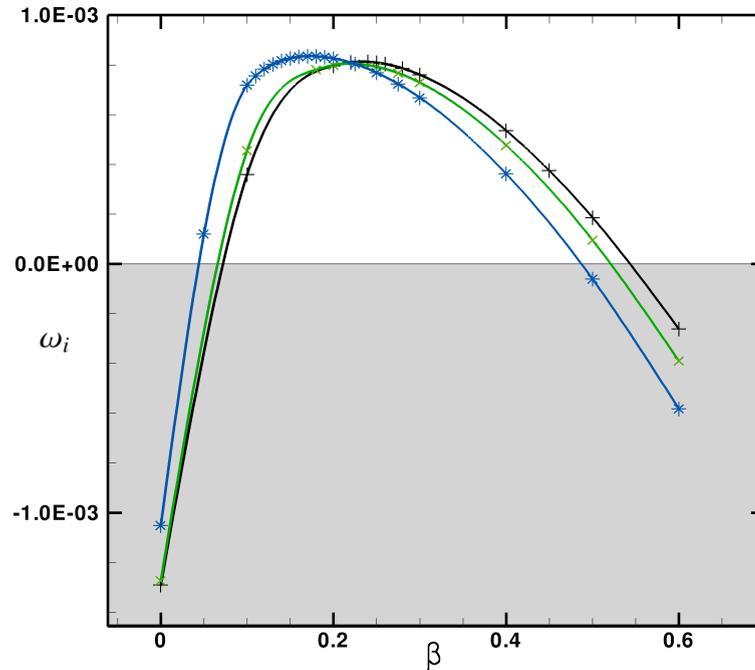


FIGURE 5.6 – Évolution du taux d'amplification  $\omega_i$  du mode non oscillant ( $\omega_r = 0$ ) en fonction du nombre d'onde transverse pour  $Re_{\delta_i} = 400$  et (+)  $Ma = 0.1$ , ( $\times$ )  $Ma = 0.4$  et (\*)  $Ma = 0.7$

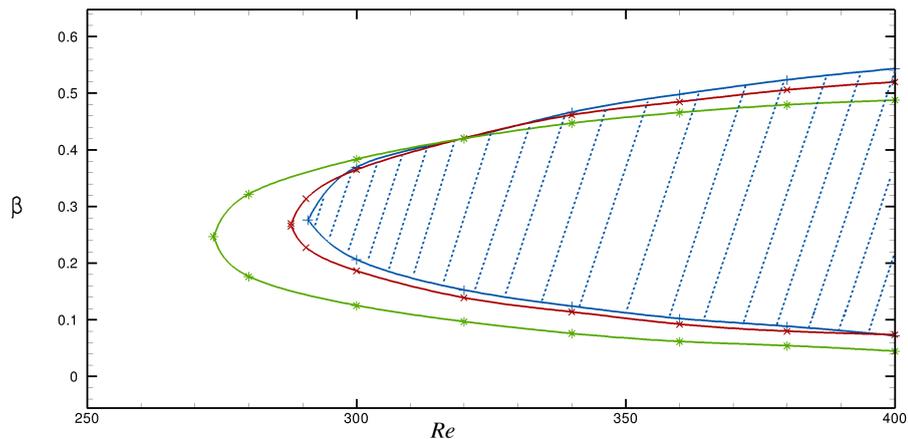
lorsque la valeur de  $\eta$  est négative sur l'ensemble d'une ligne de courant présente dans la bulle de recirculation. Dans notre cas, il apparaît que ce critère n'est pas satisfait de manière stricte pour notre écoulement en aval de la bosse (en régime incompressible), comme montré par Gallaire *et al.* ([56]). Il s'avère cependant qu'une analyse asymptotique du type *WKB*, dans la limite de faibles longueurs d'ondes transverses et le long de lignes de courant fermées dans la bulle de recirculation, permet de déterminer la nature non visqueuse de l'instabilité tridimensionnelle stationnaire (cf. [56]).

## 5.2 Effets de compressibilité sur la dynamique des instabilités transverses

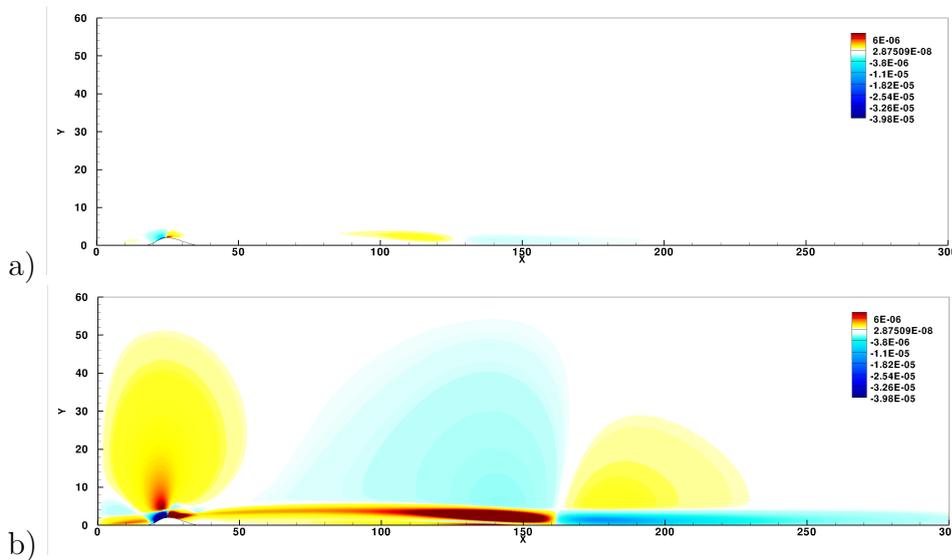
De nombreux travaux ont été menés afin de montrer la stabilité d'un écoulement vis-à-vis de perturbations tridimensionnelles en régime incompressible mais peu d'études étudient les effets de compressibilité. On trouve les travaux de Brès et Colonius ([29]) sur les instabilités transverses présentes dans un écoulement compressible de cavité entraînée ainsi que les travaux de Gennaro et al. ([58]) sur la stabilité tridimensionnelle d'un profil en incidence. Aucune étude n'a cependant permis de déterminer les effets de compressibilité sur la stabilité d'un écoulement décollé induit par une géométrie de type bosse. Ce chapitre a donc pour objectif de présenter l'évolution de la stabilité de cet écoulement vis-à-vis du nombre de Mach. La figure

$Ma$	$Re_c$	$\beta_{\max}$
0.1	291.10	0.2765
0.4	287.982	0.2676
0.7	273.461	0.24663

TABLE 5.1 – Nombre de Reynolds critique et valeur maximale du nombre d'onde transverse en fonction du nombre de Mach


 FIGURE 5.7 – Évolution de la courbe neutre du mode centrifuge pour 3 nombres de Mach (+)  $Ma = 0.1$ , ( $\times$ )  $Ma = 0.4$ , (\*)  $Ma = 0.7$ 

5.6 présente l'évolution du taux d'amplification temporelle du mode non oscillant  $\omega_i$  en fonction du nombre d'onde transverse et du nombre de Mach. Elle fait ainsi apparaître que pour de faibles nombres de Mach ( $0.1 \leq Ma < 0.4$ ), les instabilités 3D sont insensibles aux effets de compressibilité et la valeur du nombre d'onde pour lequel le mode 3D est le plus instable est quasi-constante et égale approximativement à 0.25, ce qui est en accord avec les travaux de Gallaire *et al.* [56] en régime incompressible pour une géométrie identique. Lorsque le nombre de Mach devient plus important, on assiste au décalage du nombre d'onde  $\beta_{\max}$  vers des valeurs plus faibles  $\beta_{\max} = 0.17$ . De plus il apparaît que le taux d'amplification augmente légèrement. Nous avons également regardé les effets de compressibilité sur la courbe neutre de l'écoulement pour différentes valeurs du nombre de Mach. La figure 5.7 présente ces résultats. On constate qu'au delà de  $Ma = 0.4$ , la compressibilité a une influence non négligeable sur le nombre de Reynolds critique, qui passe de  $Re_{3D} \sim 295$  à  $Ma = 0.1$  à  $Re_{3D} \sim 272$ . Notons cependant que les effets de compressibilité ne changent pas les caractéristiques intrinsèques de l'instabilité. Afin de comprendre les origines de ce phénomène de déstabilisation, nous nous intéresserons aux termes présents dans l'équation de vorticité. Les travaux de Soteriou et Gohniem ([118]) suggèrent que le terme barocline présent dans cette dernière est responsable des dif-


 FIGURE 5.8 – Terme barocline  $\frac{1}{\rho^2}$ 

férentes propriétés de stabilité entre une couche de mélange homogène, dans le sens d'une masse volumique constante, et une couche de mélange inhomogène. Pour un écoulement stationnaire, cette équation se met sous la forme

$$(\mathbf{u}_0 \cdot \nabla) \omega_0 - (\omega_0 \cdot \nabla) \mathbf{u}_0 + \omega_0 (\nabla \cdot \mathbf{u}_0) - \frac{1}{\rho^2} (\nabla \rho_0 \times \nabla p_0) - \nabla \times \frac{\nabla \tau_0}{\rho_0} = 0 \quad (5.2)$$

avec la vorticité  $\omega_0 = \nabla \otimes \mathbf{u}_0 = \begin{pmatrix} \frac{\partial w_0}{\partial y} - \frac{\partial v_0}{\partial z} \\ \frac{\partial u_0}{\partial z} - \frac{\partial w_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial x} - \frac{\partial u_0}{\partial y} \end{pmatrix}$ .

et fait apparaître quatre termes

- $(\omega_0 \cdot \nabla) \mathbf{u}_0$  responsable de la déformation de la vorticité due au gradient de vitesse
- $\omega_0 (\nabla \cdot \mathbf{u}_0)$  responsable de l'étirement de la vorticité du à la compressibilité
- $\frac{1}{\rho^2} (\nabla \rho_0 \times \nabla p_0)$  le terme barocline qui caractérise l'alignement des lignes isobares aux lignes isopycnes
- $\nabla \times \frac{\nabla \tau_0}{\rho_0}$  les effets visqueux.

La figure 5.8 montre les iso-valeurs du champ correspondant au terme barocline pour un nombre de Mach  $Ma = 0.1$  et  $Ma = 0.7$  et un nombre de Reynolds  $Re_{\delta_i} = 400$ . On constate sur cette figure que le terme barocline présente deux pics d'amplitude opposée sur le sommet de la bosse. Ce terme s'intensifie au niveau de la couche de mélange pour atteindre à nouveau un pic d'amplitude au niveau du point de recollement.    nouveau le terme barocline change de signe au niveau du point de recollement et devient négatif. On observe que ce terme devient d'autant plus prépondérant que le nombre de Mach augmente. On passe ainsi de  $\Gamma_{Ma=0.1}|_{max}$  de l'ordre de  $9.10^{-6}$  à  $\Gamma_{Ma=0.1}|_{max} \sim 3^{-3}$ . Regardons    présent l'équation de vorticité

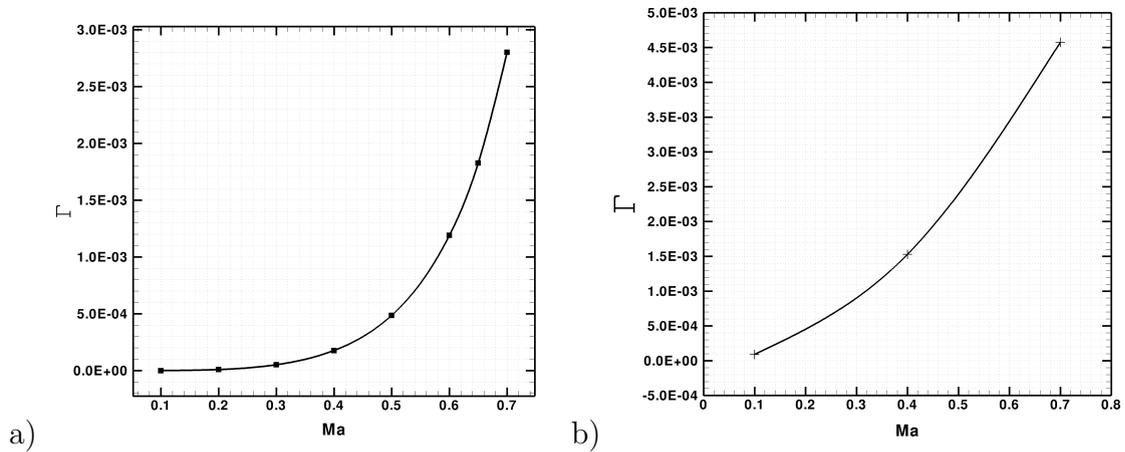


FIGURE 5.9 – Evolution du terme barocline a) stationnaire et b) linéarisé en fonction du nombre de Mach pour  $Re_{\delta_l} = 400$

linéarisée

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial \omega'}{\partial t} + (\mathbf{u}' \cdot \nabla) \omega_0 + (\mathbf{u}_0 \cdot \nabla) \omega' \\
 & - (\omega_0 \cdot \nabla) \mathbf{u}' - (\omega' \cdot \nabla) \mathbf{u}_0 \\
 & + \omega_0 (\nabla \cdot \mathbf{u}') + \omega' (\nabla \cdot \mathbf{u}_0) \\
 & - \frac{2\rho'}{\rho_0^3} (\nabla \rho_0 \times \nabla p_0) + \frac{1}{\rho_0^2} (\nabla \rho' \times \nabla p_0 + \nabla \rho_0 \times \nabla p') = 0
 \end{aligned} \tag{5.3}$$

Ici encore on retrouve les termes responsables de la déformation de la vorticité due au gradient de vitesse, les termes responsables de l'étirement de la vorticité du à la compressibilité, le terme barocline et les effets visqueux. La figure 5.8 représente les zones de l'écoulement où le terme barocline linéarisé est le plus important. On constate à nouveau que ce terme prend naissance au niveau du point de décollement. La figure 5.9 présente l'évolution des valeurs maximales des termes stationnaire et linéarisé en fonction du nombre de Mach et du nombre de Reynolds. On constate dans les deux cas que la valeur maximale de ces termes augmente significativement avec le nombre de Mach. Il apparaît que le terme barocline stationnaire est lié aux propriétés du décollement (longueur de décollement et vitesse de recirculation) présentées au chapitre 4. La stabilité de l'écoulement vis-à-vis des perturbations tridimensionnelles dépend donc fortement du terme barocline lorsque les effets de compressibilité deviennent non négligeables. Il semble alors que la destabilisation de l'écoulement soit majoritairement due aux changements de propriétés de l'écoulement de base.



# Conclusions

Ce travail de thèse a été mené dans le cadre d'un projet du programme blanc de l'Agence Nationale de la Recherche, à savoir le projet DECOMOS (DÉcollements COMpressibles et OScillations auto induites), les partenaires du projet ayant été les laboratoire IUSTI et IRPHE d'Aix-Marseille Université, le laboratoire DynFluid (ENSAM Paris), ainsi que le laboratoire DAFE (ONERA Meudon). Un des objectifs du projet a été d'avancer dans la compréhension des mécanismes sous-jacents des oscillations de basse fréquence, qui apparaissent génériquement dans des écoulements de paroi décollés, que l'écoulement soit incompressible ou compressible (subsonique et supersonique). L'objectif initial du travail de thèse a été de mener une étude de stabilité globale, en continuité avec les travaux d'Ehrenstein et Gallaire ([51]), afin de quantifier les effets de compressibilité sur les instabilités d'un écoulement de couche limite décollée induit par une géométrie de type bosse. Le parti pris était de mettre en œuvre une approche globale matricielle, dans un régime compressible (mais subsonique) et utilisant une discrétisation de type collocation-Chebyshev. Des codes de calcul ont été développés résolvant les équations de Navier-Stokes stationnaires par une méthode de quasi-Newton. En mettant en œuvre l'approche numérique pour le calcul de stabilité, des différences notables entre les régimes compressible et incompressible sont vite apparues.

En effet, dans un écoulement compressible, il existe plusieurs familles possibles d'ondes : des ondes liées à la vorticité (prolongement naturel des ondes observées en régime incompressible), des ondes acoustiques et des ondes entropiques (thermodynamiques). Dans une théorie linéaire, les ondes de vorticité et d'entropie décroissent exponentiellement à l'infini alors qu'une onde acoustique peut être à la fois rentrante et sortante avec une décroissance algébrique et une amplification en temps qui est proche de zéro. Ces modes cohabitent alors avec les instabilités du type "hydrodynamique", ce qui peut rendre difficile l'interprétation d'un spectre de valeurs propres issu d'un calcul de stabilité. Pour des systèmes avec avancement temporel, il existe une littérature abondante sur le sujet permettant de faire sortir efficacement les ondes (acoustiques mais aussi tourbillonnaires) en évitant des réflexions parasites. Il n'est cependant pas aisé de prescrire des conditions aux limites pour ces ondes qui ont une décroissance spatiale faible lorsque l'on cherche à résoudre le problème linéarisé dans le domaine fréquentiel (problème aux valeurs propres matriciel).

La première étape de notre travail a donc été d'adapter ces conditions aux limites non-réfléchissantes (méthodes des caractéristiques, zones absorbantes,...)   des problèmes aux valeurs propres. Ces méthodes se sont avérées être assez mal posées pour une formulation en fréquence, car elles ne permettaient pas d'atténuer les modes acoustiques sortants sans modifier les modes tourbillonnaires et particulièrement

lorsque ces conditions aux limites sont implémentées explicitement dans l'opérateur jacobien. Quant aux méthodes de zone absorbante, il existe de nombreuses formulations mais qui, en règle générale, nécessitent de définir une zone absorbante de grande dimension pour que les ondes sortantes soient efficacement atténuées sans réflexions parasites. Évidemment, ajouter un domaine non physique dans le calcul augmente autant le nombre de points de discrétisation et ainsi la taille des opérateurs dans notre formulation matricielle, ce qui peut entraîner un surcoût prohibitif si l'on doit utiliser d'importantes zones absorbantes. Il est donc nécessaire de trouver une méthode offrant un bon compromis entre coût et efficacité.

Une méthode dite de *Perfectly Matched Layer* (PML), initialement développée pour des phénomènes électromagnétiques, a montré des résultats encourageants et possède la particularité d'être en formulation fréquentielle. Cependant, il semble qu'aucune méthode de ce type n'a, à notre connaissance, été formulée pour des problèmes de stabilité basés sur les équations de Navier-Stokes compressibles.

Dans un premier temps, cette stratégie numérique a donc été testée pour un écoulement de couche limite de plaque plane à différents nombres de Mach (0.1,...,0.9). Cette méthode a alors permis de stabiliser (en termes de décroissance temporelle) les modes purement acoustiques du spectre et de supprimer les réflexions numériques sur les bornes du domaine sans affecter les autres modes (ici les modes de Tollmien-Schlichting).

Afin de tester cette méthode dans une configuration où les modes d'intérêt sont de nature mixte, c'est-à-dire ont un comportement de type tourbillonnaire en champ proche et une nature acoustique en champ lointain, un écoulement de cavité ouverte a été étudié. Une méthode de décomposition de domaine a ainsi été développée, afin de reproduire la géométrie de la cavité, cette approche permettant notamment une discrétisation par collocation-Chebyshev, et des conditions aux limites de type PML ont été utilisées. Ce type d'écoulement a largement été étudié à la fois en régime incompressible et compressible. Les résultats obtenus montrent que le spectre des valeurs propres est faiblement affecté par la zone PML et que les fonctions propres associées aux modes rayonnants possèdent un bon comportement en champ lointain, où le rayonnement acoustique possède la bonne directivité, la bonne longueur d'onde et a de bonnes propriétés de non réflexion aux limites du domaine de calcul. Aussi, les résultats sont en bon accord général avec ceux obtenus par d'autres auteurs, avec des choix algorithmiques différents.

Fort de ces résultats, la configuration de la bosse curviligne immergée dans une couche limite de plaque plane a été abordée. Différentes approches mono-bloc ou multi-bloc ont été testées avec pour objectif d'évaluer les effets de masse volumique ou de compressibilité sur les propriétés de stabilité de cet écoulement.

Nous avons montré qu'en régime subsonique (ayant varié le nombre de Mach entre 0.1 et 0.7), la compressibilité n'agit sur la stabilité de l'écoulement qu'au travers des propriétés de l'écoulement de base. En effet, les effets de compressibilité agissent sur la taille du décollement, qui augmente avec le nombre de Mach, modifiant sa stabilité. Cependant, la nature physique des instabilités n'est pas modifiée. Plus précisément, le phénomène de *flapping* associé à l'interaction non normale de modes

temporels globaux bidimensionnels, c'est-à-dire l'oscillation globale à basse fréquence du bulbe de recirculation, apparaît toujours, comme dans le cas incompressible (cf. [51]). La fréquence de ce phénomène, c'est-à-dire l'écart des fréquences individuelles des modes temporels globaux, est par ailleurs faiblement dépendante du régime de Mach.

Nous nous sommes ensuite intéressés aux effets de compressibilité sur les instabilités centrifuges observées initialement en régime incompressible ([56]). Nous avons pu montrer que ces instabilités avaient tendance à être plus instables au delà d'un nombre de Mach de l'ordre de  $Ma = 0.4$ . Quant à la longueur d'onde transversale  $\lambda_z = 2\pi/\beta$  la plus instable, elle est faiblement modifiée par le nombre de Mach. Nous avons pu montrer que le terme barocline, traduisant le non parallélisme entre les lignes isobares et les isopycnes, fortement non nul au niveau du point de décollement/recollement, est le moteur de ce phénomène de déstabilisation.

D'un point de vue numérique, nous avons vu que les méthodes spectrales, de par leur caractère global, nécessitaient des ressources informatiques importantes dès lors qu'une formulation matricielle était retenue pour l'étude de stabilité globale des écoulements. La méthode de décomposition de domaine a donc fait l'objet d'un travail de programmation numérique conséquent afin d'optimiser le plus possible les méthodes associées à ce type d'approche. Nous avons notamment cherché le meilleur moyen de répartir les sous-matrices dans l'opérateur jacobien et ainsi pouvoir tirer profit au maximum des méthodes de résolution de problèmes matriciels creux. Une première esquisse de ces résultats a été présentée dans ce manuscrit. Nous avons vu que ce type d'approche permettait de gagner plus de la moitié (jusqu'à plus de 90% dans certains cas) de l'espace mémoire utilisé. En travaillant judicieusement sur la répartition des sous domaines dans le domaine de calcul il est possible de raffiner le maillage dans les zones où l'écoulement présente de forts gradients et donc d'améliorer la convergence de la solution. Le dernier avantage de ce type d'approche serait de tirer profit du caractère multi-bloc pour paralléliser à la fois le calcul du champ de base mais aussi le problème de résolution aux valeurs propres. Une programmation OpenMP nous a permis d'améliorer le temps de calcul mais l'approche *MPI* couplée aux méthodes multi-domaines aurait cependant été la dernière étape de la conception de cet outil de stabilité. Les méthodes spectrales en formulation matricielle nécessitent donc un travail de programmation conséquent mais reste un outil viable pour l'étude des écoulements compressibles en régime subsonique en présence de géométries complexes.

Nous avons vu que la stabilité des écoulements compressibles (couche limite, bosse) n'est soumise aux effets de compressibilité qu'au travers du champ de base. L'étape suivante serait donc de passer en régime transsonique voire supersonique afin d'étudier les changements de nature qui s'opèrent lorsqu'une discontinuité (une onde de choc) apparaît. Bien entendu, les méthodes spectrales de par leur construction ne sont *a priori* pas vraiment adaptées à des problèmes exhibant des discontinuités. Il existe cependant des tentatives en ce sens et notamment les méthodes de *shock-fitting* qui consistent à relaxer la discontinuité et ainsi garder le caractère global des

méthodes spectrales (Canuto et al. [32]). Ce type d'approche nécessite cependant de détecter, à chaque itération, la position du choc et d'appliquer la méthode. Outre un temps de calcul plus important, ce type d'approche semble avoir une efficacité toute relative. Une approche plus intéressante a cependant permis de traiter les discontinuités par une approche spectrale. Cette méthode consiste en l'utilisation d'une autre classe de polynômes d'interpolation (polynômes de Gegenbauer) utilisée pour la construction des opérateurs de dérivées. De nombreux articles (Gottlieb et al. [61], Boyd ([26])) ont montré l'efficacité de cette approche qui constituerait une bonne alternative aux méthodes plus traditionnelles.

Concernant la physique des instabilités présentes par exemple pour la configuration de type bosse, ou la cavité, une perspective serait d'étudier les effets de compressibilité sur la croissance transitoire de l'écoulement. En effet, dès lors que la méthode d'intégration temporelle du système matriciel direct est opérationnelle, il est tout à fait envisageable de retravailler le système d'équations de Navier-Stokes afin d'avoir le système matriciel adjoint et donc de faire l'étude de la perturbation optimale. Cette approche permettrait aussi d'avancer dans l'objectif d'un contrôle de l'écoulement.

# Bibliographie

- [1] Abdessemed, N., Sharma, A. S., Sherwin, S., and Theofilis, V. (2009). Transient growth analysis of the flow past a circular cylinder. *Physics of Fluids (1994-present)*, 21(4) :044103.
- [2] Agostini, L., Dupont, P., Larcheveque, L., and Dussauge, J. P. (2011). Numerical study of shock-turbulent boundary layer interactions with incipient and complete separation. *International Journal of Engineering Systems Modelling and Simulation*, 3(1) :46–52.
- [3] Aguilar, J. and Combes, J.-M. (1971). A class of analytic perturbations for one-body schrödinger hamiltonians. *Communications in Mathematical Physics*, 22(4) :269–279.
- [4] Åkervik, E., Brandt, L., Henningson, D. S., Høeffner, J., Marxen, O., and Schlatter, P. (2006). Steady solutions of the navier-stokes equations by selective frequency damping. *Physics of Fluids (1994-present)*, 18(6) :068102.
- [5] Åkervik, E., Ehrenstein, U., Gallaire, F., and Henningson, D. S. (2008). Global two-dimensional stability measures of the flat plate boundary-layer flow. *European Journal of Mechanics-B/Fluids*, 27(5) :501–513.
- [6] Alizard, F. and Robinet, J.-C. (2007). Spatially convective global modes in a boundary layer. *Physics of Fluids (1994-present)*, 19(11) :114105.
- [7] Anderson, E., Bai, Z., Bischof, C., Blackford, S., Demmel, J., Dongarra, J., Du Croz, J., Greenbaum, A., Hammerling, S., McKenney, A., et al. (1999). Lapack users' guide. 9.
- [8] Armaly, B. F., Durst, F., Pereira, J., and Schönung, B. (1983). Experimental and theoretical investigation of backward-facing step flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 127 :473–496.
- [9] Atassi, O. V. and Galán, J. M. (2008). Implementation of nonreflecting boundary conditions for the nonlinear euler equations. *Journal of Computational Physics*, 227(3) :1643–1662.
- [10] Bagheri, S., Åkervik, E., Brandt, L., and Henningson, D. S. (2009a). Matrix-free methods for the stability and control of boundary layers. *AIAA journal*, 47(5) :1057–1068.

- [11] Bagheri, S., Schlatter, P., Schmid, P. J., and Henningson, D. S. (2009b). Global stability of a jet in crossflow. *Journal of Fluid Mechanics*, 624 :33–44.
- [12] Balslev, E. and Combes, J.-M. (1971). Spectral properties of many-body schrödinger operators with dilatation-analytic interactions. *Communications in Mathematical Physics*, 22(4) :280–294.
- [13] Baranger, J. and Brezinski, C. (1991). *Analyse numérique*. 38.
- [14] Barbagallo, A., Sipp, D., and Schmid, P. J. (2009). Closed-loop control of an open cavity flow using reduced-order models. *Journal of Fluid Mechanics*, 641 :1–50.
- [15] Barkley, D., Blackburn, H., and Sherwin, S. J. (2008). Direct optimal growth analysis for timesteppers. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 57(9) :1435–1458.
- [16] Barkley, D., Gomes, M. G. M., and Henderson, R. D. (2002). Three-dimensional instability in flow over a backward-facing step. *Journal of Fluid Mechanics*, 473 :167–190.
- [17] Bayliss, A., Class, A., and Matkowsky, B. J. (1995). Roundoff error in computing derivatives using the chebyshev differentiation matrix. *Journal of Computational Physics*, 116(2) :380–383.
- [18] Bayliss, A. and Turkel, E. (1992). Mappings and accuracy for chebyshev pseudo-spectral approximations. *Journal of Computational Physics*, 101(2) :349–359.
- [19] Bayly, B. J., Orszag, S. A., and Herbert, T. (1988). Instability mechanisms in shear-flow transition. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 20(1) :359–391.
- [20] Beaudoin, J.-F., Cadot, O., Aider, J.-L., and Wesfreid, J. E. (2004). Three-dimensional stationary flow over a backward-facing step. *European Journal of Mechanics-B/Fluids*, 23(1) :147–155.
- [21] Bernard, A., Foucaut, J.-M., Dupont, P., and Stanislas, M. (2003). Decelerating boundary layer : a new scaling and mixing length model. *AIAA journal*, 41(2) :248–255.
- [22] Blackburn, H., Barkley, D., and Sherwin, S. J. (2008). Convective instability and transient growth in flow over a backward-facing step. *Journal of Fluid Mechanics*, 603 :271–304.
- [23] Bloor, M. S. (1964). The transition to turbulence in the wake of a circular cylinder. *Journal of Fluid Mechanics*, 19(02) :290–304.
- [24] Bodony, D. J. (2006). Analysis of sponge zones for computational fluid mechanics. *Journal of Computational Physics*, 212(2) :681–702.
- [25] Boyd, J. P. (2001). *Chebyshev and fourier spectral methods*.

- [26] Boyd, J. P. (2005). Trouble with gegenbauer reconstruction for defeating gibbs' phenomenon : Runge phenomenon in the diagonal limit of gegenbauer polynomial approximations. *Journal of Computational Physics*, 204(1) :253–264.
- [27] Braza, M., Chassaing, P., and Minh, H. H. (1986). Numerical study and physical analysis of the pressure and velocity fields in the near wake of a circular cylinder. *Journal of Fluid Mechanics*, 165 :79–130.
- [28] Braza, M., Faghani, D., and Persillon, H. (2001). Successive stages and the role of natural vortex dislocations in three-dimensional wake transition. *Journal of Fluid Mechanics*, 439 :1–41.
- [29] Brès, G. A. and Colonius, T. (2008). Three-dimensional instabilities in compressible flow over open cavities. *Journal of Fluid Mechanics*, 599 :309–339.
- [30] Bérenger, J.-P. (1994). A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves. *Journal of Computational Physics*, 114(2) :185–200.
- [31] Canuto, C., Hussaini, Y., Quarteroni, A., and Thomas A., J. (1993). *Spectral Methods in Fluid Dynamics*. Scientific Computation. Springer Berlin Heidelberg.
- [32] Canuto, C., Hussaini, Y., Quarteroni, A., and Zang, T. (2007). *Spectral Methods : Evolution to Complex Geometries and Applications to Fluid Dynamics*. Scientific Computation. Springer Berlin Heidelberg.
- [33] Castro, I. and Haque, A. (1987). The structure of a turbulent shear layer bounding a separation region. *Journal of Fluid Mechanics*, 179 :439–468.
- [34] Chassaing, J. and Gerolymos, G. (2007). Time-domain implementation of non-reflecting boundary-conditions for the nonlinear euler equations. *Applied mathematical modelling*, 31(10) :2172–2188.
- [35] Cherry, N., Hillier, R., and Latour, M. (1984). Unsteady measurements in a separated and reattaching flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 144 :13–46.
- [36] Cherubini, S., Robinet, J.-C., and De Palma, P. (2010). The effects of non-normality and nonlinearity of the navier–stokes operator on the dynamics of a large laminar separation bubble. *Physics of Fluids (1994-present)*, 22(1) :014102.
- [37] Chomaz, J.-M. (2004). Transition to turbulence in open flows : what linear and fully nonlinear local and global theories tell us. *European Journal of Mechanics-B/Fluids*, 23(3) :385–399.
- [38] Chomaz, J.-M. (2005). Global instabilities in spatially developing flows : non-normality and nonlinearity. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 37 :357–392.
- [39] Colonius, T. (2004). Modeling artificial boundary conditions for compressible flow. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 36 :315–345.
- [40] Cossu, C. and Chomaz, J. (1997). Global measures of local convective instabilities. *Physical review letters*, 78(23) :4387.

- [41] Crouch, J., Garbaruk, A., and Magidov, D. (2007). Predicting the onset of flow unsteadiness based on global instability. *Journal of Computational Physics*, 224(2) :924–940.
- [42] Détery, J., Marvin, J. G., and Reshotko, E. (1986). Shock-wave boundary layer interactions.
- [43] Demmel, J. W., Eisenstat, S. C., Gilbert, J. R., Li, X. S., and Liu, J. W. H. (1999). A supernodal approach to sparse partial pivoting. *SIAM J. Matrix Analysis and Applications*, 20(3) :720–755.
- [44] Dolling, D. S. (2001). Fifty years of shock-wave/boundary-layer interaction research : what next ? *AIAA journal*, 39(8) :1517–1531.
- [45] Dovgal, A., Kozlov, V., and Michalke, A. (1994). Laminar boundary layer separation : instability and associated phenomena. *Progress in Aerospace Sciences*, 30(1) :61–94.
- [46] Drazin, P. and Reid, W. (1981). Hydrodynamic stability. *NASA STI/Recon Technical Report A*, 82 :17950.
- [47] Driver, D. M., Seegmiller, H. L., and Marvin, J. G. (1987). Time-dependent behavior of a reattaching shear layer. *AIAA Journal*, 25(7) :914–919.
- [48] Eaton, J. K. and Johnston, J. P. (1982). Low frequency unsteadiness of a reattaching turbulent shear layer. pages 162–170.
- [49] Edwards, W., Tuckerman, L. S., Friesner, R. A., and Sorensen, D. (1994). Krylov methods for the incompressible navier-stokes equations. *Journal of Computational Physics*, 110(1) :82–102.
- [50] Ehrenstein, U. and Gallaire, F. (2005). On two-dimensional temporal modes in spatially evolving open flows : the flat-plate boundary layer. *Journal of Fluid Mechanics*, 536 :209–218.
- [51] Ehrenstein, U. and Gallaire, F. (2008). Two-dimensional global low-frequency oscillations in a separating boundary-layer flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 614 :315–327.
- [52] Ehrenstein, U., Passaglia, P.-Y., and Gallaire, F. (2011). Control of a separated boundary layer : reduced-order modeling using global modes revisited. *Theoretical and Computational Fluid Dynamics*, 25(1-4) :195–207.
- [53] Farabee, T. and Casarella, M. (1986). Measurements of fluctuating wall pressure for separated/reattached boundary layer flows. *Journal of Vibration and Acoustics*, 108(3) :301–307.
- [54] Fasel, H. F. and Postl, D. (2006). Interaction of separation and transition in boundary layers : direct numerical simulations. pages 71–88.

- [55] Faure, T. M., Pastur, L., Lusseyran, F., Fraigneau, Y., and Bisch, D. (2009). Three-dimensional centrifugal instabilities development inside a parallelepipedic open cavity of various shape. *Experiments in Fluids*, 47(3) :395–410.
- [56] Gallaire, F., Marquillie, M., and Ehrenstein, U. (2007). Three-dimensional transverse instabilities in detached boundary layers. *Journal of Fluid Mechanics*, 571 :221–233.
- [57] Gaster, M. (1969). The structure and behaviour of laminar separation bubbles.
- [58] Gennaro, E., Rodríguez, D., Medeiros, M., and Theofilis, V. (2013). Sparse techniques in global flow instability with application to compressible leading-edge flow. *AIAA journal*, 51(9) :2295–2303.
- [59] Gerdes, K. (2000). A review of infinite element methods for exterior helmholtz problems. *Journal of Computational Acoustics*, 8(01) :43–62.
- [60] Givoli, D. (1991). Non-reflecting boundary conditions. *Journal of Computational Physics*, 94(1) :1–29.
- [61] Gottlieb, D., Shu, C.-W., Solomonoff, A., and Vandeve, H. (1992). On the gibbs phenomenon i : recovering exponential accuracy from the fourier partial sum of a nonperiodic analytic function. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 43(1) :81–98.
- [62] Hammond, D. A. and Redekopp, L. G. (1998). Local and global instability properties of separation bubbles. *European Journal of Mechanics-B/Fluids*, 17(2) :145–164.
- [63] Hein, S., Hohage, T., and Koch, W. (2004). On resonances in open systems. *Journal of Fluid Mechanics*, 506 :255–284.
- [64] Hein, S., Hohage, T., Koch, W., and Schöberl, J. (2007). Acoustic resonances in a high-lift configuration. *Journal of Fluid Mechanics*, 582 :179–202.
- [65] Hu, F. Q. (2001). A stable, perfectly matched layer for linearized euler equations in unsplit physical variables. *Journal of Computational Physics*, 173(2) :455–480.
- [66] Huerre, P. and Monkewitz, P. A. (1990). Local and global instabilities in spatially developing flows. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 22(1) :473–537.
- [67] Israeli, M. and Orszag, S. A. (1981). Approximation of radiation boundary conditions. *Journal of Computational Physics*, 41(1) :115–135.
- [68] Jackson, C. (1987). A finite-element study of the onset of vortex shedding in flow past variously shaped bodies. *Journal of Fluid Mechanics*, 182 :23–45.
- [69] Karamcheti, K. (1956). Sound radiation from surface cutouts in high speed flow.

- [70] Kitsios, V., Rodríguez, D., Theofilis, V., Ooi, A., and Soria, J. (2009). Biglobal stability analysis in curvilinear coordinates of massively separated lifting bodies. *Journal of Computational Physics*, 228(19) :7181–7196.
- [71] Kiya, M. and Sasaki, K. (1983). Structure of a turbulent separation bubble. *Journal of Fluid Mechanics*, 137 :83–113.
- [72] Kiya, M. and Sasaki, K. (1985). Structure of large-scale vortices and unsteady reverse flow in the reattaching zone of a turbulent separation bubble. *Journal of Fluid Mechanics*, 154 :463–491.
- [73] Kreiss, H.-o. and Olinger, J. (1972). Comparison of accurate methods for the integration of hyperbolic equations. *Tellus*, 24(3) :199–215.
- [74] Loiseau, J.-C., Robinet, J.-C., Cherubini, S., and Leriche, E. (2014). Investigation of the roughness-induced transition : global stability analyses and direct numerical simulations. *Journal of Fluid Mechanics*, 760 :175–211.
- [75] Ma, X. and Karniadakis, G. E. (2002). A low-dimensional model for simulating three-dimensional cylinder flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 458 :181–190.
- [76] Mabey, D. G. (1972). Analysis and correlation of data on pressure fluctuations in separated flow. *Journal of Aircraft*, 9(9) :642–645.
- [77] Mack, L. M. (1984). Boundary-layer linear stability theory.
- [78] Majda, A., McDonough, J., and Osher, S. (1978). The fourier method for nonsmooth initial data. *Mathematics of Computation*, 32(144) :1041–1081.
- [79] Malik, M. R. (1990). Numerical methods for hypersonic boundary layer stability. *Journal of Computational Physics*, 86(2) :376–413.
- [80] Marquet, O., Lombardi, M., Chomaz, J.-M., Sipp, D., and Jacquin, L. (2009). Direct and adjoint global modes of a recirculation bubble : lift-up and convective non-normalities. *Journal of Fluid Mechanics*, 622 :1–21.
- [81] Marquet, O. and Sipp, D. (2010). Global sustained perturbations in a backward-facing step flow. pages 525–528.
- [82] Marquillie, M. and Ehrenstein, U. (2003a). On the onset of nonlinear oscillations in a separating boundary-layer flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 490 :169–188.
- [83] Marquillie, M. and Ehrenstein, U. (2003b). Thèse de physique : simulation numérique et étude de la stabilité d’un écoulement de couche limite décollé.
- [84] Marxen, O. and Henningson, D. S. (2011). The effect of small-amplitude convective disturbances on the size and bursting of a laminar separation bubble. *Journal of Fluid Mechanics*, 671 :1–33.
- [85] Meliga, P., Sipp, D., and Chomaz, J.-M. (2010). Effect of compressibility on the global stability of axisymmetric wake flows. *Journal of Fluid Mechanics*, 660 :499–526.

- [86] Merle, X. (2009). *Résolution des équations de stabilité globale en régimes incompressible et compressible avec une méthode aux différences finies de haute précision*. PhD thesis, Arts et Métiers ParisTech.
- [87] Miles, J. W. (1958). On the disturbed motion of a plane vortex sheet. *Journal of Fluid Mechanics*, 4 :538–552.
- [88] Morchoisne, Y. (1983). Résolution des équations de navier-stokes par une méthode spectrale de sous-domaines. *3eme Cong. Int. Meth. Num/Ing., Paris, Ed P. Lascaux*, pages 275–281.
- [89] Nayar, N. and Ortega, J. M. (1993). Computation of selected eigenvalues of generalized eigenvalue problems. *Journal of Computational Physics*, 108(1) :8–14.
- [90] Noack, B. R. and Eckelmann, H. (1994). A global stability analysis of the steady and periodic cylinder wake. *Journal of Fluid Mechanics*, 270 :297–330.
- [91] Orszag, S. A. (1980). Spectral methods for problems in complex geometries. *Journal of Computational Physics*, 37(1) :70–92.
- [92] Pascal, L. (2013). *Acoustique modale et stabilité linéaire par une méthode numérique avancée : Cas d’un conduit traité acoustiquement en présence d’un écoulement*. thèse de doctorat sous la direction de grégoire casalis et estelle piot à l’université de toulouse.
- [93] Passaggia, P.-Y., Leweke, T., and Ehrenstein, U. (2012). Transverse instability and low-frequency flapping in incompressible separated boundary layer flows : an experimental study. *Journal of Fluid Mechanics*, 703 :363–373.
- [94] Pauley, L. L., Moin, P., and Reynolds, W. C. (1990). The structure of two-dimensional separation. *Journal of Fluid Mechanics*, 220 :397–411.
- [95] Pavithran, S. and Redekopp, L. (1989). The absolute-convective transition in subsonic mixing layers. *Physics of Fluids A : Fluid Dynamics (1989-1993)*, 1(10) :1736–1739.
- [96] Persillon, H. and Braza, M. (1998). Physical analysis of the transition to turbulence in the wake of a circular cylinder by three-dimensional navier–stokes simulation. *Journal of Fluid Mechanics*, 365 :23–88.
- [97] Peyret, R. (2002). *Spectral Methods for Incompressible Viscous Flow*. Number vol. 148 in Applied Mathematical Sciences. Springer.
- [98] Piponniau, S., Dussauge, J., Debieve, J., and Dupont, P. (2009). A simple model for low-frequency unsteadiness in shock-induced separation. *Journal of Fluid Mechanics*, 629 :87–108.
- [99] Prandtl, L. (1935). The mechanics of viscous fluids.
- [100] Prasad, A. and Williamson, C. H. (1997). The instability of the shear layer separating from a bluff body. *Journal of Fluid Mechanics*, 333 :375–402.

- [101] Press, W. H. (1996). *FORTTRAN Numerical Recipes : Numerical recipes in FORTRAN 90*. Cambridge University Press.
- [102] Quarteroni, A. and Valli, A. (1999). *Domain decomposition methods for partial differential equations*. Number CMCS-BOOK-2009-019. Oxford University Press.
- [103] Rist, U. and Maucher, U. (2002). Investigations of time-growing instabilities in laminar separation bubbles. *European Journal of Mechanics-B/Fluids*, 21(5) :495–509.
- [104] Rodríguez, D., Gennaro, E. M., and Juniper, M. P. (2013). The two classes of primary modal instability in laminar separation bubbles. *Journal of Fluid Mechanics*, 734 :R4.
- [105] Roos, F. W. and Kegelmann, J. T. (1986). Control of coherent structures in reattaching laminar and turbulent shear layers. *AIAA journal*, 24(12) :1956–1963.
- [106] Roshko, A. (1954). On the drag and shedding frequency of two-dimensional bluff bodies.
- [107] Rossiter, J. (1964). Wind tunnel experiments on the flow over rectangular cavities at subsonic and transonic speeds.
- [108] Saad, Y. (1980). Variations on arnoldi’s method for computing eigenelements of large unsymmetric matrices. *Linear algebra and its applications*, 34 :269–295.
- [109] Sartor, F., Mettot, C., Sipp, D., and Bur, R. (2013). Dynamics of a shock-induced separation in a transonic flow : a linearized approach.
- [110] Schlichting, H. (1987). *Boundary layer theory*. McGraw-Hill, New-York.
- [111] Schmid, P. J. (2007). Nonmodal stability theory. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 39 :129–162.
- [112] Sherwin, S. and Blackburn, H. M. (2005). Three-dimensional instabilities and transition of steady and pulsatile axisymmetric stenotic flows. *Journal of Fluid Mechanics*, 533 :297–327.
- [113] Sigurdson, L. (1995). The structure and control of a turbulent reattaching flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 298 :139–165.
- [114] Simon, B. (1973). Resonances in n-body quantum systems with dilatation analytic potentials and the foundations of time-dependent perturbation theory. *Annals of Mathematics*, pages 247–274.
- [115] Sipp, D. and Lebedev, A. (2007). Global stability of base and mean flows : a general approach and its applications to cylinder and open cavity flows. *Journal of Fluid Mechanics*, 593 :333–358.
- [116] Sipp, D., Marquet, O., Meliga, P., and Barbagallo, A. (2010). Dynamics and control of global instabilities in open-flows : a linearized approach. *Applied Mechanics Reviews*, 63(3) :030801.

- [117] Smits, A. J. and Dussauge, J.-P. (2006). Turbulent shear layers in supersonic flow.
- [118] Soteriou, M. C. and Ghoniem, A. F. (1995). Effects of the free-stream density ratio on free and forced spatially developing shear layers. *Physics of Fluids (1994-present)*, 7(8) :2036–2051.
- [119] Stoer, J. and Bulirsch, R. (2013). *Introduction to numerical analysis*, volume 12. Springer Science & Business Media.
- [120] Tani, I. (1964). Low-speed flows involving bubble separations. *Progress in Aerospace Sciences*, 5 :70–103.
- [121] Theofilis, V. (2000). Globally unstable basic flows in open cavities.
- [122] Theofilis, V., Hein, S., and Dallmann, U. (2000). On the origins of unsteadiness and three-dimensionality in a laminar separation bubble. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 358(1777) :3229–3246.
- [123] Tollmien, W. (1936). General instability criterion of laminar velocity distributions.
- [124] Trefethen, L. N. and Embree, M. (2005). *Spectra and pseudospectra : the behavior of nonnormal matrices and operators*. Princeton University Press.
- [125] Tsynkov, S. V. (1998). Numerical solution of problems on unbounded domains. a review. *Applied Numerical Mathematics*, 27(4) :465–532.
- [126] Valdetaro, L., Rieutord, M., Braconnier, T., and Frayssé, V. (2007). Convergence and round-off errors in a two-dimensional eigenvalue problem using spectral methods and arnoldi–chebyshev algorithm. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 205(1) :382–393.
- [127] Vandeven, H. (1991). Family of spectral filters for discontinuous problems. *Journal of Scientific Computing*, 6(2) :159–192.
- [128] Von Doenhoff, A. E. (1938a). A method of rapidly estimating the position of the laminar separation point.
- [129] Von Doenhoff, A. E. (1938b). A preliminary investigation of boundary-layer transition along a flat plate with adverse pressure gradient.
- [130] Williamson, C. H. (1996). Vortex dynamics in the cylinder wake. *Annual review of fluid mechanics*, 28(1) :477–539.
- [131] Yamouni, S., Sipp, D., and Jacquin, L. (2013). Interaction between feedback aeroacoustic and acoustic resonance mechanisms in a cavity flow : a global stability analysis. *Journal of Fluid Mechanics*, 717 :134–165.



# Annexe A

## Méthode d'Arnoldi

Dans le cadre de la résolution du problème aux valeurs propres, nous avons vu que l'utilisation des méthodes impliquant une décomposition de type  $QR$  peut s'avérer trop coûteuse en espace mémoire. Il convient alors d'utiliser l'algorithme d'Arnoldi, bien connu pour les problèmes traitant de la stabilité linéaire des écoulements et dont l'intérêt a initialement été démontré par Saad ([108]). Considérons le problème aux valeurs propres suivant

$$\mathbf{M}\mathbf{q} = \lambda\mathbf{q} \quad (\text{A.1})$$

L'idée est ici de définir un sous-espace de Krylov à partir de la matrice  $\mathbf{M}$ . Il a été montré mathématiquement ([13]) que ce sous espace permet de déterminer les valeurs propres de  $\mathbf{M}$  de modules les plus grands. Pour ce faire, l'algorithme d'Arnoldi consiste dans un premier temps à déterminer un vecteur  $\mathbf{w}_2$  construit à partir d'un vecteur arbitraire  $\mathbf{x}_1$ , choisi de sorte que  $\|\mathbf{x}_1\| = 1$ , et tel que

$$\mathbf{w}_2 = \mathbf{M}\mathbf{x}_1 - \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{M}\mathbf{x}_1 \rangle \mathbf{x}_1. \quad (\text{A.2})$$

avec les vecteurs  $\mathbf{x}_i$ ,  $i = 0, \dots, K$  qui forment le sous-espace de Krylov de dimension  $K$ . On détermine alors le vecteur  $\mathbf{x}_2$  de sorte que

$$\mathbf{x}_2 = \frac{1}{\|\mathbf{w}_2\|} \mathbf{w}_2. \quad (\text{A.3})$$

Un processus itératif permet de définir

$$\mathbf{w}_{j+1} = \mathbf{M}\mathbf{x}_j - \sum_{i=1}^j h_{ij} \mathbf{x}_i \quad (\text{A.4})$$

avec  $h_{ij} = \langle \mathbf{x}_i, \mathbf{M}\mathbf{x}_j \rangle$  et donc

$$\mathbf{x}_{j+1} = \frac{1}{h_{j+1,j}} \mathbf{w}_{j+1} \quad (\text{A.5})$$

avec  $h_{j+1,j} = \|\mathbf{w}_{j+1}\|$ . On peut facilement concevoir que si l'on définit  $\mathbf{H}$  comme étant la matrice de Hessenberg supérieure de taille  $K \times K$  avec  $K$  la dimension du

sous-espace de Krylov et définie telle que

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & \dots & h_{1,K-1} & h_{1,K} \\ h_{21} & h_{22} & \dots & h_{2,K-1} & h_{2,K} \\ 0 & h_{32} & \dots & h_{3,K-1} & h_{3,K} \\ (0) & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & 0 & h_{K,K-1} & h_{K,K} \end{pmatrix} \quad (\text{A.6})$$

avec  $h_{ij}$  les coefficients définis au dessus, alors

$$\mathbf{M}\mathbf{X} = \mathbf{X}\mathbf{H} + \mathbf{x}_{K+1}\mathbf{r}_K^T \quad (\text{A.7})$$

avec  $\mathbf{r}_K^T = (0, \dots, 0, h_{K+1,K})$  un vecteur ligne. On détermine alors les valeurs propres et vecteurs propres du système

$$\mathbf{H}\mathbf{y}_j = \mu_j\mathbf{y}_j \quad (\text{A.8})$$

plus petit que le système initial.

En posant

$$\mathbf{q}_j = \mathbf{X}\mathbf{y}_j \quad (\text{A.9})$$

et en injectant la relation (A.8) dans (A.7), on obtient aisément la relation

$$\mathbf{M}\mathbf{q}_j = \mu_j\mathbf{q}_j + p_K\mathbf{x}_{K+1} \text{ avec } p_K = y_{jK}h_{K+1,K} \quad (\text{A.10})$$

Il suffit alors que le terme  $p_K$  soit négligeable pour que  $\mu_j = \lambda_j$ . Le critère

$$h_{K+1,K}y_{jK} \leq \epsilon \quad (\text{A.11})$$

permet alors de trier dans les  $K$  valeurs propres de  $\mathbf{H}$  celles qui sont aussi valeurs propres de  $\mathbf{M}$ . La valeur de  $\epsilon$  sera alors choisie en fonction de la précision que l'on cherche à obtenir sur la valeur propre et le vecteur propre sera déterminé à partir de la relation (A.9).

# Annexe B

## Résolution de systèmes linéaires creux

Le caractère creux des matrices intervenant lors de la résolution du problème aux valeurs propres multi-domaine nous permet d'envisager l'utilisation de bibliothèques numériques autorisant le stockage des éléments non nuls uniquement. Le tableau B.1 présente les différents solveurs disponibles en fonction des propriétés du problème aux valeurs propres à traiter et des outils de programmation à disposition. Etant donné le caractère complexe de la matrice jacobienne que l'on a à traiter et du langage de programmation utilisé (ici Fortran 90), notre choix s'est tourné vers les routines de résolution de problème linéaire creux *SuperLU* ([43]). Plusieurs formats de stockage sont alors couramment utilisés pour le remplissage des vecteurs. On peut citer entre autres les formats :

- Compressed Row Storage (CRS)
- Compressed Column Storage (CCS)
- Block Compressed Row Storage (BCRS)
- Compressed Diagonal Storage (CDS)
- Jagged Diagonal Storage (JDS)
- Skyline Storage (SKS).

L'utilisation des routines *SuperLU* fait ainsi intervenir le format CCS pour le stockage des  $N$  éléments non nuls de la jacobienne de taille  $M \times M$  sous la forme

- ***val*** [1 :  $N$ ] : vecteur contenant les valeurs complexes non nulles de la matrice
- ***ia*** [1 :  $N$ ] : vecteur d'entier contenant le numéro de ligne correspondant à la valeur non nulle
- ***ja*** [1 :  $M+1$ ] : vecteur d'entier qui contient le nombre d'éléments que contient ***val*** au passage d'une nouvelle colonne (notons que ***ja***(1)=1)

A titre d'exemple considérons la matrice de taille  $5 \times 5$  suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 22 & 0 & 0 & 0 & 17 \\ 7 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 14 & 0 & 8 \end{pmatrix} \quad (\text{B.1})$$

Les vecteur *val*, *ia*, *ja* prennent alors la forme suivante

<i>val</i>	22	7	3	5	14	1	17	8
------------	----	---	---	---	----	---	----	---

<i>ia</i>	2	3	1	3	5	3	2	5
-----------	---	---	---	---	---	---	---	---

<i>ja</i>	1	3	5	6	7	9
-----------	---	---	---	---	---	---

SOLVEUR DIRECT SPARSE	Type		Langage			Mode	
	Real	Complex	F90	C	C++	Partagée	Distribué
CHOLMOD	X	X		X		X	
DSCPACK	X			X		X	X
KKTDirect	X			X	X	X	
MUMPS	X	X	X	X		X	X
PaStiX	X	X	X	X	X	X	X
PSPASES	X		X	X			X
Quern	X			X	X	X	
SPARSE	X	X		X		X	
SPOOLES	X	X		X		X	X
SuperLU	X	X	X	X		X	X
TAUCS	X	X		X		X	
Trilinos/Amesos	X			X	X	X	X
UMFPACK	X	X		X		X	X
Y12M	X		X			X	

TABLE B.1 – Routines pour la résolution d'un problème linéaire aux valeurs propres de type  $\mathcal{A}x = \mathcal{B}$  creux



# Liste des tableaux

1	Différentes formulations pour la résolution du problème aux valeurs propres . . . . .	18
1.1	Nombres adimensionnés présents dans les équations de Navier-Stokes (1.7) . . . . .	27
2.1	Mémoire nécessaire ( $Mb$ ) au stockage des matrices $L$ et $U$ après décomposition de la matrice Jacobienne en fonction du découpage du domaine et du nombre de points total. . . . .	46
3.1	Conditions aux limites pour la résolution de la solution d'équilibre . .	50
3.2	Conditions aux limites "classiques" utilisées pour fermer le système d'équations de Navier-Stokes linéarisées . . . . .	51
5.1	Nombre de Reynolds critique et valeur maximale du nombre d'onde transverse en fonction du nombre de Mach . . . . .	99
B.1	Routines pour la résolution d'un problème linéaire aux valeurs propres de type $\mathcal{A}x = \mathcal{B}$ creux . . . . .	121



# Table des figures

1	Illustration de l'évolution dans un plan espace/temps d'une perturbation dans un écoulement instable présentant une dynamique de type (a) résonateur ou (b) amplificateur sélectif de bruit (illustrations tirées de [92]) . . . . .	12
2	Diagramme spatio-temporel construit à partir de la valeur de la perturbation à la paroi. La perturbation remonte l'écoulement, caractéristique d'une instabilité absolue [54] . . . . .	13
3	Champ de vorticité instantanée repr�esentant un lâcher de structures tourbillonnaires ([54]) . . . . .	13
4	Repr�esentation de la configuration de l'interaction onde de choc couche limite par r�eflexion de choc . . . . .	15
5	(a) Spectre global issu du calcul de Theofilis <i>et al.</i> ([122]) sur une couche limite décollée pour un nombre d'onde transverse $\beta = 20$ . (b) Fonction propre $\hat{w}$ associée au mode global instable . . . . .	16
6	Repr�esentation du décollement de couche limite derrière une bosse . . . . .	20
7	Longueur de la zone de recirculation en fonction du nombre de Reynolds (Marquillie et Ehrenstein ([82])) . . . . .	20
8	Diagramme de stabilité globale d'un décollement de couche limite induit par une géométrie de type bosse � $Re = 590$ pour différentes hauteurs de bosse $h/\delta_l = 1.8(\odot)$ , $h/\delta_l = 1.85(\square)$ , $h/\delta_l = 1.9(*)$ , $h/\delta_l = 1.95(\times)$ , $h/\delta_l = 2.0(+)$ (Ehrenstein et Gallaire [51]) . . . . .	21
9	Fonctions propres 1 � 6 associées � la figure 8 repr�esentant la composante longitudinale de la vitesse $u'$ pour $Re_{\delta_l} = 590$ et $h/\delta_l = 2$ (Ehrenstein et Gallaire [51]) . . . . .	22
10	Fonctions propres <i>a</i> ) et <i>b</i> ) associées � la figure 8 repr�esentant la composante longitudinale de la vitesse $u'$ pour $Re_{\delta_l} = 590$ et $h/\delta_l = 2$ (Ehrenstein et Gallaire [51]) . . . . .	22
11	Taux d'amplification ( $\circ$ ) et fréquence ( $\square$ ) du mode globale le plus instable pour $Re_{\delta_l} = 400$ en fonction du nombre d'onde transverse $\beta$ . Les taux d'amplification issus de la simulation directe sont également pr�esent�s ( $\times$ ) (Gallaire, Marquillie et Ehrenstein [56]) . . . . .	23
1.1	écoulement laminaire rampant $Re < 5$ . . . . .	28
1.2	écoulement décollé stationnaire $5 < Re < 48$ . . . . .	28
1.3	écoulement instationnaire bidimensionnel $48 < Re < 180$ . . . . .	28
1.4	écoulement instationnaire turbulent $300 < Re$ . . . . .	28
1.5	écoulement stationnaire de couche limite décollée . . . . .	31

1.6	Illustration du principe de croissance transitoire . . . . .	33
2.1	Illustration du changement de variable opéré sur les variables spectrales (a) $\xi_x$ , (b) $\xi_y$ sans(*) et avec( $\times$ ) stretching . . . . .	38
2.2	Illustration du passage du domaine spectral au domaine physique dans le cas d'une géométrie de type bosse. . . . .	39
2.3	Illustration de la structure de l'opérateur Jacobien en fonction de la décomposition de domaine considérée. Ici $N_{dom} = 2 \times 2$ . . . . .	42
2.4	Illustration de la structure de l'opérateur Jacobien en fonction du nombre de domaine considéré. Ici on a (a) $N_{dom} = 3 \times 3$ et (b) $N_{dom} = 4 \times 4$ . . . . .	46
3.1	Illustration d'un problème de rayonnement acoustique traité par l'introduction d'une zone tampon de type PML . . . . .	53
3.2	Illustration de la perturbation initiale dans un champ de base homogène	57
3.3	(a) Évolution de la valeur du résidu $\mathbf{r}$ au cours du temps. (b) solution $ \mathbf{u}' $ associée respectivement aux instants $t_1, t_2$ et $t_3$ . . . . .	58
3.4	Évolution de $ \mathbf{u}' $ au cours du temps avec (colonne de droite) et sans (colonne de gauche) zone absorbante de type $Za1$ . . . . .	59
3.5	Évolution de la valeur du résidu $\mathbf{r}$ au cours du temps pour une zone absorbante de type $Za1$ . (.) Solution de référence, (+) $\sigma_y = 1$ , ( $\times$ ) $\sigma_y = 5$ , ( $\star$ ) $\sigma_y = 10$ et ( $\circ$ ) $\sigma_y = 15$ . . . . .	59
3.6	Évolution de $ \mathbf{u}' $ au cours du temps avec (colonne de droite), $\min Re = 1$ , et sans (colonne de gauche) zone absorbante de type $Za2$ . . . . .	61
3.7	Évolution de $\mathbf{r}$ au cours du temps pour une zone absorbante de type $Za2$ pour une (.) solution de référence, (+) $\min Re = 100$ , ( $\times$ ) $\min Re = 50$ , ( $\star$ ) $\min Re = 1$ , ( $\circ$ ) $\min Re = 0.1$ . . . . .	61
3.8	Évolution de $ \mathbf{u}' $ au cours du temps avec (colonne de droite) et sans (colonne de gauche) zone absorbante de type $Za3$ ( $\sigma_y = 5$ ) . . . . .	62
3.9	Évolution de la valeur du résidu $\mathbf{r}$ au cours du temps sans (■) et avec une zone absorbante de type $Za3$ (+) $\sigma_y = 1$ , ( $\times$ ) $\sigma_y = 5$ , ( $\star$ ) $\sigma_y = 10$ et ( $\circ$ ) $\sigma_y = 15$ . . . . .	62
3.10	Évolution de la valeur du résidu $\mathbf{r}$ au cours du temps sans (■) et avec zone absorbante ( $\star$ ) $Za1$ avec $\sigma = 10$ , (+) $Za2$ avec $\min(Re) = 1$ et ( $\times$ ) $Za3$ avec $\sigma = 10$ . . . . .	63
3.11	Illustration de la variable $u_0$ d'une solution d'équilibre de couche limite à $Ma = 0.1$ et $Re = 600$ . . . . .	64
3.12	Évolution du nombre de Reynolds $Re_{\delta_l}$ basé sur l'épaisseur de déplacement locale de la couche limite en fonction du nombre de Mach (■) $Ma = 0.1$ , ( $\blacktriangledown$ ) $Ma = 0.3$ , ( $\triangleleft$ ) $Ma = 0.5$ , ( $\blacklozenge$ ) $Ma = 0.7$ , ( $\ast$ ) $Ma = 0.9$	65
3.13	Diagramme de stabilité de couche limite $Ma = 0.1$ et $Re_{\delta_l} = 600$ . . . . .	66
3.14	Représentation spatiale des fonctions propres $\hat{u}, \hat{v}, \hat{T}, \hat{\rho}$ associées au mode $m_1$ présenté figure 3.13 pour un nombre de Mach $Ma = 0.1$ et un nombre de Reynolds $Re_{\delta_l} = 600$ . . . . .	67
3.15	Diagramme de stabilité de couche limite pour un écoulement à $Ma = 0.1$ , $Re_{\delta_l} = 600$ pour $N_y = 50$ et ( $\circ$ ) $N_x = 100$ , (+) $N_x = 150$ , ( $\times$ ) $N_x = 200$ , ( $\ast$ ) $N_x = 250$ . . . . .	67

3.16	Diagramme de stabilité de couche limite pour un écoulement à $Ma = 0.1$ , $Re_{\delta_i} = 600$ pour $N_x = 200$ et ( $\times$ ) $N_y = 35$ , ( $*$ ) $N_y = 50$ , ( $\circ$ ) $N_y = 75$ . . . . .	68
3.17	Comparaison des spectres de couche limite obtenus pour $Re_{\delta_i} = 600$ et (+) $Ma = 0.1$ ; ( $\times$ ) $Ma = 0.5$ ; ( $*$ ) $Ma = 0.8$ . . . . .	68
3.18	Modes globaux $\omega_c(n,k)$ calculés à partir de la solution analytique (3.40) pour $n = 1, \dots, 25$ et $k = 0, \dots, 4$ . . . . .	70
3.19	Fréquence de coupure pour $Re_{\delta_i} = 600$ en fonction du nombre de Mach ( $\times$ ) issu du calcul de stabilité globale; (+) issu de la formule théorique . . . . .	71
3.20	Modes globaux $\omega_c(n,k)$ calculés à partir de la solution analytique (3.41) pour $n = 1, \dots, 25$ et $k = 0, \dots, 4$ avec une zone absorbante de type $Za3$ et avec un coefficient $\sigma_y = 0.5$ . . . . .	71
3.21	Évolution du diagramme de stabilité d'une couche limite à $Ma = 0.2$ et $Re_{\delta_i} = 600$ en fonction de la variation du coefficient d'atténuation $\sigma_y$ dans la zone PML. ( $\diamond$ ) sans zone absorbante, ( $\square$ ) $\sigma_y = cst$ , ( $\circ$ ) $\sigma_y = f(y)$ et ( $\triangle$ ) $\sigma_y = f(y^2)$ . . . . .	73
3.22	Évolution du diagramme de stabilité d'une couche limite à $Ma = 0.2$ et $Re_{\delta_i} = 600$ en fonction de la valeur de $\sigma_y$ dans la zone PML . . . . .	73
3.23	Comparaison des spectres de couche limite obtenus sans (+) et avec ( $\times$ ) zone absorbante pour $Ma = 0.8$ , $H_{PML} = 50$ et a) $\sigma_y = 0.1$ , b) $\sigma_y = 1.0$ , c) $\sigma_y = 5.0$ . . . . .	75
4.1	Illustration du maillage utilisé pour l'étude de stabilité d'un écoulement de cavité ouverte . . . . .	78
4.2	Solution d'équilibre d'un écoulement de cavité ouvert à $Ma = 0.1$ et $Re = 7500$ représenté par les lignes de courant et les iso-valeurs de a) la vitesse longitudinale et b) la température . . . . .	79
4.3	Diagramme de stabilité globale d'un écoulement de cavité ouvert pour $Re_L = 7500$ , à (+) $Ma = 0.1$ et ( $\times$ ) $Ma = 0$ (Yamouni <i>et al.</i> [131]) . . . . .	81
4.4	Distribution spatiale des vitesses longitudinales (a) et transverses (b) du mode de type $m_1$ le plus instable ( $St = 1.0$ , $\omega_i = 0.53$ ) en régime quasi-incompressible ( $Ma = 0.1$ ) . . . . .	81
4.5	Distribution spatiale des vitesses longitudinales (a) et transverses (b) du mode de type $m_2$ en régime quasi-incompressible ( $Ma = 0.1$ ) . . . . .	82
4.6	Solution d'équilibre d'un écoulement de cavité ouvert à $Ma = 0.9$ et $Re_L = 7500$ représentant les iso-valeurs a) de vitesse longitudinale b) de température et c) de pression . . . . .	82
4.7	Diagramme de stabilité d'un écoulement de cavité ouverte $L/\theta_0 = 200$ à $Ma = 0.9$ et $Re_L = 7500$ ; ( $\times$ ) approche matricielle, ( $\times$ ) résultats de Yamouni <i>et al.</i> avec $L/\theta_0 = 230$ . . . . .	83
4.8	Diagramme de stabilité d'un écoulement de cavité ouverte pour $L/\theta_0 = 130$ à $Ma = 0.9$ et $Re_L = 7500$ ; (+) sans zone absorbante, ( $\circ$ ) avec zone absorbante $y \geq 2.5$ , $\sigma_y = 15.0$ . . . . .	83
4.9	Illustration de la pression d'un mode de cavité rayonnant ( $St = 1.750$ , $\omega_i = 0.373$ ) pour $Ma = 0.9$ et $Re_L = 7500$ ; a) sans PML, b) avec PML . . . . .	84

4.10	Illustration du maillage multi-bloc utilisé pour la simulation de couche limite décollée . . . . .	85
4.11	Solution d'équilibre $u_0, v_0, T_0$ et $\rho_0$ d'un décollement de couche limite induit par une géométrie de type bosse à $Ma = 0.1$ et $Re_{\delta_l} = 600$ . . . . .	86
4.12	Évolution de la longueur de recirculation en fonction du nombre de Reynolds pour (+) $Ma = 0.1$ , ( $\times$ ) $Ma = 0.3$ , (*) $Ma = 0.5$ , ( $\star$ ) $Ma = 0.6$ , ( $\circ$ ) $Ma = 0.7$ pour un écoulement de couche limite décollé derrière une géométrie de type bosse . . . . .	87
4.13	Évolution de la valeur absolue de la vitesse de recirculation en fonction du nombre de Reynolds pour (+) $Ma = 0.1$ , ( $\times$ ) $Ma = 0.3$ , (*) $Ma = 0.5$ , ( $\star$ ) $Ma = 0.6$ , ( $\circ$ ) $Ma = 0.7$ pour un écoulement de couche limite décollé derrière une géométrie de type bosse . . . . .	87
4.14	Évolution de a) la longueur de recirculation et b) la valeur absolue de la vitesse de recirculation en fonction du nombre de Mach pour un écoulement de couche limite décollée derrière une géométrie de type bosse et en considérant un nombre de Reynolds $Re_{\delta_l} = 600$ . . . . .	88
4.15	Spectre de référence associé à la solution d'équilibre d'un écoulement décollé à $Ma = 0.1$ et $Re_{\delta_l} = 600$ . . . . .	88
4.16	Fonctions propres $\hat{u}, \hat{v}, \hat{T}, \hat{\rho}$ associées au mode global $m_1$ présenté figure 4.15 . . . . .	89
4.17	Fonctions propres $\hat{u}, \hat{v}, \hat{T}, \hat{\rho}$ associées au mode global $m_2$ présenté figure 4.15 . . . . .	90
4.18	Diagramme de stabilité d'un écoulement décollé derrière une géométrie de type bosse pour $Re_{\delta_l} = 600$ et $h = 2.0$ . ( $\square$ ) $Ma = 0.1$ , ( $\times$ ) $Ma = 0.2$ , (*) $Ma = 0.3$ , ( $\star$ ) $Ma = 0.4$ , ( $\circ$ ) $Ma = 0.5$ , (+) $Ma = 0.6$ . . . . .	91
4.19	Écart de fréquence $T$ entre deux modes globaux en fonction du nombre de Mach pour un écoulement de couche limite décollée à $Re_{\delta_l} = 600$ . . . . .	92
5.1	Diagramme de stabilité d'un écoulement décollé incompressible en fonction de la hauteur de bosse adimensionnée $h^* = h/\delta_l$ et du nombre de Reynolds $Re_{\delta_l}$ (Passaggia <i>et al.</i> ([51])) . . . . .	94
5.2	Familles de modes pour un écoulement décollé à $Ma = 0.1$ , $Re = 600$ et $\beta = 0.25$ sans zone absorbante. . . . .	95
5.3	Illustration des fonctions propres $\hat{u}, \hat{w}, \hat{T}$ et $\hat{\rho}$ associées au mode global de type $m_6$ présenté figure 5.2 pour $Ma = 0.1$ et $Re_{\delta_l} = 400$ . . . . .	96
5.4	Spectre de stabilité globale pour $Ma = 0.1$ , $Re_{\delta_l} = 400$ ( $\times$ ) : $\beta = 0$ , (+) : $\beta = 0.25$ . À gauche sont représentées les valeurs propres associées à la partie du spectre pour lequel $\omega_r \leq 0$ et à droite les valeurs propres associées aux fréquences $\omega_r \geq 0$ (le spectre de stabilité étant symétrique) . . . . .	97
5.5	Perturbation $w'$ pour $Ma = 0.1$ et $Re_{\delta_l} = 400$ . . . . .	97
5.6	Évolution du taux d'amplification $\omega_i$ du mode non oscillant ( $\omega_r = 0$ ) en fonction du nombre d'onde transverse pour $Re_{\delta_l} = 400$ et (+) $Ma = 0.1$ , ( $\times$ ) $Ma = 0.4$ et (*) $Ma = 0.7$ . . . . .	98
5.7	Évolution de la courbe neutre du mode centrifuge pour 3 nombres de Mach (+) $Ma = 0.1$ , ( $\times$ ) $Ma = 0.4$ , (*) $Ma = 0.7$ . . . . .	99

5.8	Terme barocline $\frac{1}{\rho^2}$ . . . . .	100
5.9	Evolution du terme barocline a) stationnaire et b) linéarisé en fonction du nombre de Mach pour $Re_{\delta_i} = 400$ . . . . .	101



## Approches numériques pour l'analyse de stabilité globale d'écoulements pariétaux en régime subsonique

**RÉSUMÉ :** Dans le cadre de l'étude des écoulements ouverts, deux types de dynamiques coexistent. Les écoulements de type oscillateur qui présentent une fréquence propre d'oscillation indépendante des perturbations extérieures (dynamique intrinsèque), ainsi que les écoulements de type amplificateur sélectif de bruit comme les écoulements de jets ou de couches limites décollées, caractérisés par une plus large gamme de fréquences dépendantes essentiellement de bruit extérieur (dynamique extrinsèque). Les études de couches limites décollées en régime incompressible ont montré un lien entre le phénomène auto-entretenu de basse fréquence qui apparaît et l'interaction non normale des modes globaux instables existants pour ce type de configuration. L'objectif de ce travail consiste à étendre cette interprétation lorsque l'écoulement est en régime subsonique. Dans ce but, un travail d'adaptation des conditions aux limites non-réfléchissantes aux problèmes de stabilité globale a été réalisé. Une méthode de zone absorbante de type *Perfectly Matched Layer* a été implémentée dans un code de simulation numérique utilisant des méthodes de collocation spectrale. Une méthode de décomposition de domaine adaptée aux calculs des solutions stationnaires ainsi qu'aux problèmes de stabilité globale a également été utilisée pour permettre la validation des conditions aux limites implémentées sur un cas d'écoulement rayonnant de cavité ouverte. Enfin, les études de stabilité d'un écoulement de couche limite décollée derrière une géométrie de type bosse ont été réalisées. L'étude des instabilités bidimensionnelles, responsables du phénomène basse fréquence (*flapping*), et réalisées en régime subsonique montre que le mécanisme observé en régime incompressible est aussi observé en régime subsonique. La stabilité de cet écoulement vis-à-vis de perturbations tri-dimensionnelles, et plus particulièrement les instabilités centrifuges ont aussi été étudiées en fonction du nombre de Mach.

**Mots clés :** instabilités globales, écoulement décollé, Perfectly Matched Layer, écoulement compressible, flapping, collocation spectrale, approche multi-domaine.

### Numerical approach for the global stability analysis of subsonic boundary flows

**ABSTRACT :** In open flows context, there are generally two types of dynamic : oscillators, such as cylinder flow, exhibit a well defined frequency insensitive to external perturbations (intrinsic dynamics) and noise amplifiers, such as boundary layers, jets or in some cases the separated flows, which are characterized by wider spectrum bands that depend essentially on the external noise (dynamic extrinsic). Previous studies have shown that separated flows are subject to self-induced oscillations of low frequency in incompressible regime. These studies have revealed links between the interaction of non-normal modes and low oscillations in an incompressible boundary-layer separation and it will be to establish the validity of this interpretation in a compressible regime. In this regard, non-reflecting boundary conditions have been developed to solve the eigenvalue problem formed by linearised Navier-Stokes equations. An absorbing region known as Perfectly Matched Layer has been implemented in order to damp acoustic perturbations which are generated when the compressibility of the flow is considered. A multi-domain approach using spectral collocation discretisation has also been developed in order to study the influence of this absorbing region on the stability analysis of an open cavity flow which is known to generate acoustic perturbations. Finally, we focused on separated boundary layer induced by a bump geometry in order to understand what are the effects of compressibility on the bidimensional low frequency phenomenon and also on transverse instabilities which are known to be unstable for a lots of separated flows.

**Keywords :** global instabilities, separated flow, Perfectly Matched Layer, compressible flow, flapping, spectral collocation, multi-domain approach.

