


NNT : 2016SACLX046

THÈSE DE DOCTORAT
DE L'UNIVERSITE PARIS-SACLAY

préparée à

L'École polytechnique

ÉCOLE DOCTORALE N°574

École doctorale de mathématiques Hadamard (EDMH)

Spécialité de doctorat : Mathématiques fondamentales

par

Thomas MEGARBANE

Laboratoire d'accueil : Centre de mathématiques Laurent Schwartz, UMR 7640 CNRS

Sur les représentations automorphes non ramifiées des groupes linéaires sur $\mathbb{Q}$ de petits rangs.

Thèse présentée et soutenue à Palaiseau, le 12 décembre 2016

Composition du jury :

M. Guy HENNIART	Président de jury	Université Paris-Sud
M. David LOEFFLER	Rapporteur	University of Warwick
Mme Anne-Marie AUBERT	Examinatrice	IMJ
M. Jean LANNES	Examinateur	IMJ
M. Loïc MEREL	Examinateur	IMJ
M. David RENARD	Examinateur	École polytechnique
M. Gaëtan CHENEVIER	Directeur de thèse	Université Paris-Sud

Sur les représentations automorphes non ramifiées des groupes linéaires sur $\mathbb{Q}$ de petits rangs.

Résumé. Cette thèse est consacrée à l'étude des représentations automorphes algébriques des groupes linéaires découvertes par Chenevier–Renard. On s'intéresse plus particulièrement à leurs paramètres de Satake. Notre point de départ est la théorie d'Arthur : elle permet de comprendre ces paramètres à l'aide des paramètres de Satake de représentations automorphes discrètes des groupes spéciaux orthogonaux de réseaux bien choisis. Dans un premier temps, on étudie les opérateurs de Hecke associés aux voisins de Kneser des réseaux de racines E_7, E_8 et $\mathrm{E}_8 \oplus \mathrm{A}_1$. Suivant Gross, on arrive ainsi à calculer la trace des premiers paramètres de Satake des représentations des groupes linéaires considérées initialement, dont les poids peuvent être arbitrairement grands. Dans un second temps, en raisonnant sur les classes d'isomorphisme de réseaux, on calcule les opérateurs de Hecke associés aux p-voisins (pour p premier) en dimension 23 et 25, en écrivant leurs valeurs propres comme des fonctions polynomiales en les traces des paramètres de Satake calculées précédemment. Ceci complète les résultats de Borcherds et Chenevier–Lannes en dimension 24. On en déduit des congruences, du type "congruence de Ramanujan" ou "congruence de Harder", pour les traces des paramètres de Satake des représentations des groupes linéaires considérées.

Mots-clés. Représentations automorphes, voisins de Kneser, paramètres de Satake.

On the unramified automorphic representations of the linear groups over $\mathbb{Q}$ of small rank.

Abstract. In this thesis we examine the different algebraic automorphic representations of the linear groups discovered by Chenevier–Renard. Our main concern is the computation of their Satake parameters. We use Arthur's theory as a starting point : it enables us to understand these parameters with the help of the Satake parameters of discrete automorphic representations for the special orthogonal groups of well chosen lattices. Firstly, we study the Hecke operators associated to the Kneser neighbours of the root lattices E_7, E_8 and $\mathrm{E}_8 \oplus \mathrm{A}_1$. According to Gross, this enables us to compute the trace of the first Satake parameters of the representations for the linear groups previously mentioned, whose weight can be arbitrarily high. Secondly, focusing on the isomorphism classes of lattices, we compute the Hecke operators associated to the p-neighbours (for p a prime) in dimension 23 and 25, using the expression of their eigenvalues as polynomial functions of the traces of the Satake parameters previously computed. This completes the results found by Borcherds and Chenevier–Lannes, in dimension 24. We then deduce congruences, of the "Ramanujan's congruence" or "Harder's congruence" type, involving the traces of the Satake parameters of the considered representations of the linear groups.

Keywords. Automorphic representations, Kneser neighbours, Satake parameters.

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier mon directeur de thèse Gaëtan Chenevier, avec qui j'ai eu beaucoup de plaisir à travailler. C'était déjà lui qui avait éveillé mon intérêt pour la théorie des nombre en M1. Grâce à ses connaissances, il m'a présenté, pendant ces trois années, des objets qui m'ont fasciné. Il a très bien su à me guider tout au long de ma thèse, en étant toujours disponible et en faisant preuve de beaucoup d'enthousiasme et de patience. Il m'a permis de bien orienter mes travaux et de les faire avancer, mais aussi de développer une certaine autonomie dans la recherche.

Je remercie Carel Faber et David Loeffler, qui ont accepté d'être rapporteurs de cette thèse, ce qui était une lourde tâche, et plus particulièrement David Loeffler d'avoir accepté de faire partie du jury. Je remercie aussi Anne-Marie Aubert, Guy Henniart, Jean Lannes, Loïc Merel et David Renard de me faire l'honneur de faire partie du jury.

Je remercie d'autant plus Jean Lannes pour les nombreuses discussions très productives que j'ai eues avec lui durant la fin de ma thèse, ainsi que Loïc Merel, dont j'ai suivi avec plaisir le cours de M2, et qui m'a encadré pendant mon mémoire.

Je remercie Ariane Mézard, dont j'ai suivi le cours de M2, et qui m'a beaucoup aidé dans ma recherche d'un directeur de thèse.

Je remercie Carole, Marine et Pascale pour la manière dont elles m'ont accueilli au Centre de Mathématiques Laurent Schwartz, et pour l'aide qu'elles m'ont apportée tout au long de ma thèse. Je remercie aussi les informaticiens Danh, David et Jean-Luc pour leur aide au quotidien, et surtout pour leur assistance dans l'utilisation du cluster inter-labos, qui a été indispensable à mes recherches.

J'ai vécu une expérience très enrichissante pendant mon monitorat à l'École polytechnique, et je remercie Pascale Harinck de m'avoir supervisé pour mes enseignements, en me donnant des tâches intéressantes comme l'enseignement aux élèves étrangers de première année de l'X.

Je remercie les membres du CMLS que j'ai côtoyés durant ces quelques années, et qui ont rendu si agréable la vie au laboratoire. Ce fut un réel plaisir d'échanger sur des résultats élégants de mathématiques, mais aussi sur du sport ou de la politique, que ce soit lors des déjeuners, du café social, ou des traditionnels goûters. À ce propos, je remercie plus particulièrement Évelyne qui, en instaurant de manière officielle les goûters du lundi, m'a fait faire des progrès notables en pâtisserie.

Je remercie les doctorants et les anciens doctorants du CMLS, surtout mon fidèle co-bureau Jacek, mais aussi Sandrine, Tatiana, Victor, Timofey, Yakine, Hsueh-Yung, Rita, Benoît, René, Zakarias, Matthieu, Nicolas, Matilde, Bac, Fabio, Vincent et Emiliano. Je remercie aussi Giancarlo, avec qui j'ai eu des discussions mathématiques intéressantes, et qui m'a permis de participer au TFJM^2 en tant que membre de jury. J'ai eu le plaisir d'avoir aussi une relation plus développée avec Benoît et Giancarlo, du fait de la proximité de nos sujets d'étude.

Je remercie les autres professeurs de mathématiques qui m'ont marqué ces dernières années, et qui ont affuté mon goût pour les mathématiques : Isabelle Grassy, Celestin

Rakotoniaina, Anne Miquel, Pierre Colmez.

Je remercie tous mes amis qui m'ont accompagné ces dernières années, que ce soit mes amis de collège, de lycée, de prépa, ou mes camarades de promotion.

Je remercie mes parents, ma grand-mère, ainsi que mon frère et ma sœur, et tout le reste de ma famille, qui m'ont beaucoup soutenu et sur qui je peux toujours compter. Je remercie également les membres de ma belle famille, qui m'ont chaleureusement accepté parmi eux, et dont la présence a été très importante pour moi.

Je remercie enfin ma femme Marie, qui me comble de bonheur tous les jours, et sans qui je n'aurais sans doute pas pu accomplir un tel travail. Elle nous a donné une petite Camille dont nous sommes très fiers, et à qui je dédie cette thèse.

Table des matières

1 Introduction **7**

1.1 Généralités sur les réseaux 7

1.1.1 Les réseaux et les systèmes de racines 7

1.1.2 Les A-voisins 9

1.2 Généralités sur les représentations automorphes 10

1.2.1 Les représentations automorphes et la paramétrisation de Satake . . 10

1.2.2 La conjecture d'Arthur–Langlands 11

1.3 Résultats obtenus 12

1.3.1 Traces des opérateurs de Hecke sur les espaces de formes automorphes de SO_7, SO_8 ou SO_9 en niveau 1 et poids arbitraire 12

1.3.2 Calcul des opérateurs de Hecke sur les classes d'isomorphisme de réseaux pairs de déterminant 2 en dimension 23 et 25 16

2 Traces d'opérateurs de Hecke. **19**

2.1 Introduction. 19

2.2 Résultats préliminaires. 24

2.2.1 Les réseaux de $\mathbb{R}^n$. 24

2.2.2 Les formes automorphes et les opérateurs de Hecke. 26

2.3 La formule de la trace d'un opérateur de Hecke 31

2.3.1 La méthode utilisée. 31

2.3.2 Les poids dominants et la formule des caractères de Weyl. 34

2.4 Algorithmes de calculs et résultats pour p impair. 36

2.4.1 Présentation des algorithmes de calculs. 36

2.4.2 La création du groupe de Weyl. 36

2.4.3 La détermination des orbites de $C_L(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$ par l'action du groupe de Weyl W et par W^+ pour q une puissance de p premier impair. . . . 40

2.4.4 La détermination d'une transformation de $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ transformant L en un q-voisin donné. 46

2.5 L'étude de T_A pour A un 2-groupe. 49

2.5.1 Détermination des orbites de A-voisins pour les actions des groupes W et W^+. 49

2.5.2 La création de A-voisins dans des cas particuliers. 55

2.6 Traces d'opérateurs de Hecke obtenus 57

2.6.1 Tables des résultats obtenus. 57

2.6.2 Premières constatations autour de quelques exemples. 57

2.7 La paramétrisation de Langlands–Satake 59

2.7.1 Les formules de Gross et la paramétrisation de Satake 59

2.7.2 Les formes automorphes et la paramétrisation de Langlands 64

2.7.3 La conjecture d'Arthur–Langlands 66

2.7.4 Résultats obtenus 68
2.8 Tables de Résultats 72

3 Opérateurs de Hecke sur les classes de réseaux. 81
3.1 Introduction. 81
3.2 Résultats préliminaires et notations. 86
3.2.1 Les réseaux de $\mathbb{R}^n$. 86
3.2.2 Les opérateurs de Hecke et les A-voisins. 88
3.2.3 La paramétrisation de Langlands–Satake. 90
3.3 Calcul de la matrice de T_2 sur $\mathbb{Z}[X_n]$ pour $n = 23$ ou 25. 92
3.3.1 L'étude des systèmes de racines d'éléments de X_n. 92
3.3.2 Détermination de la classe d'isomorphisme d'un 2-voisin d'un élément de $\mathcal{L}_n$. 93
3.3.3 Présentation de l'algorithme de calcul de la matrice de T_2 sur $\mathbb{Z}[X_n]$. . 94
3.3.4 Résultats obtenus. 97
3.4 Applications. 97
3.4.1 La codiagonalisation des matrices opérateurs T_p. 97
3.4.2 Quelques vérifications de nos résultats. 101
3.4.3 Congruences à la Harder. 103
3.4.4 Une conjecture de Gan–Gross–Prasad. 106
3.5 Tables de résultats. 109

Bibliographie 118

Chapitre 1

Introduction

L'objectif de cette thèse est l'étude des différentes représentations automorphes des groupes linéaires découvertes par Chenevier–Renard dans [19]. À cet effet, on cherche à obtenir des informations sur leurs paramètres de Satake. Suivant la théorie d'Arthur [3], ces représentations apparaissent comme les éléments fondamentaux pour comprendre les représentations automorphes discrètes algébriques des groupes classiques. Cela nous conduit à étudier les réseaux pairs de dimension n et de déterminant minimal, pour $n \equiv 0, \pm 1 \bmod 8$, ainsi que leurs groupes spéciaux orthogonaux. Les paramètres standards des représentations automorphes discrètes associées à ces groupes, décrits dans les travaux de Chenevier–Renard [19] et Chenevier–Lannes [18], permet de faire le lien avec les représentations automorphes des groupes linéaires qui nous intéressent.

1.1 Généralités sur les réseaux

1.1.1 Les réseaux et les systèmes de racines

Considérons V un espace euclidien de dimension n, muni de son produit scalaire $x \cdot y$, et notons $q : V \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{x \cdot x}{2}$ la forme quadratique associée. On considérera parfois le cas où $V = \mathbb{R}^n$: on notera alors $(e_i)_{i \in \{1,\dots,n\}}$ la base canonique associée, de telle sorte que $(x_i) \cdot (y_i) = \sum_i x_i y_i$.

Commençons par présenter quelques notions sur les réseaux de V qui vont nous être utiles :

Définition 1.1. *Un réseau $L \subset V$ est dit entier si : $(\forall\ x, y \in L)\ x \cdot y \in \mathbb{Z}$. Il est dit pair si : $(\forall\ x \in L)\ x \cdot x \in 2\mathbb{Z}$. Il est clair qu'un réseau pair est entier.*

Définition 1.2. *Soit $L \subset V$ un réseau entier. Son dual $L^\sharp$ est défini par :*

$$L^\sharp = \{y \in V \mid (\forall x \in L)\ y \cdot x \in \mathbb{Z}\}$$

On définit alors le résidu de L comme le quotient : rés $L = L^\sharp / L$. *Il est muni d'une forme quadratique* rés $L \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ *définie par $x \mapsto q(x) \bmod \mathbb{Z}$.*

Définition 1.3. *Soit $L \subset V$ un réseau entier. On note* $\det(L)$ *son déterminant, qui est le déterminant de la matrice de Gram d'une $\mathbb{Z}$-base quelconque de L. On a alors la relation :* $\det(L) = |\text{rés } L|$.

Le déterminant d'un réseau L est un entier positif, et on peut définir la quantité $\min_{L \subset V \text{ réseau pair}} \{\det(L)\}$, qui ne dépend que de n. C'est un résultat bien connu que cette quantité vaut 1 si, et seulement si, $n \equiv 0 \bmod 8$. Il est alors facile de constater grâce à des

exemples qu'elle vaut 2 lorsque $n \equiv \pm 1 \bmod 8$. Cette remarque permet de mieux comprendre les ensembles $\mathcal{L}_n$ et X_n définis ci-dessous :

Définition 1.4. *Si $n \equiv 0, \pm 1 \bmod 8$, on définit $\mathcal{L}_n$ comme l'ensemble des réseaux pairs de V de déterminant minimal, c'est-à-dire de déterminant 1 si $n \equiv 0 \bmod 8$, et 2 sinon.*

Le groupe orthogonal $\mathrm{O}(V)(\simeq \mathrm{O}_n(\mathbb{R}))$ agit naturellement sur l'ensemble $\mathcal{L}_n$, et on note X_n l'ensemble des orbites pour cette action, qui est un ensemble fini.

Nous dirons aussi que deux éléments de $\mathcal{L}_n$, ou plus généralement deux réseaux de $\mathbb{R}^n$, sont *isomorphes* s'ils sont dans une même $\mathrm{O}(V)$-orbite.

Afin de mieux comprendre les éléments de $\mathcal{L}_n$, ou plus généralement les réseaux pairs ou entiers de V, on utilisera la notion de système de racines, largement développée dans [11]. Nous renvoyons d'ailleurs à [11, Ch. VI] pour la définition d'un système de racines, ainsi que pour définir son groupe de Weyl, un ensemble de racines simples, et son diagramme de Dynkin. À tout réseau entier de V est associé un système de racines de la manière suivante :

Définition 1.5. *Soit $L \subset V$ un réseau entier. L'ensemble des racines de L est l'ensemble (éventuellement vide) $R(L) = \{x \in L \mid x \cdot x = 2\}$. C'est un système de racines de l'espace vectoriel qu'il engendre sur $\mathbb{R}$, au sens de [11, Ch. VI, §1.1, Définition 1].*

Les systèmes de racines définis à l'aide de réseaux sont tous réduits, suivant les notations de [11, Ch. VI, §I.4], comme toutes les racines considérées sont de même norme, et il s'agit donc de systèmes de racines de type ADE. En tant que système de racines de type ADE, l'ensemble des racines d'un réseau entier est toujours isomorphe à l'union disjointe de systèmes de racines des réseaux $\mathrm{A}_n, \mathrm{D}_n, \mathrm{E}_8, \mathrm{E}_7, \mathrm{E}_6$ que l'on décrit ci-dessous.

A_n : On pose $\mathrm{A}_n = \{(x_i) \in \mathbb{Z}^{n+1} | \sum_i x_i = 0\}$. On a $\mathbf{A}_n = R(\mathrm{A}_n) = \{\pm(e_i - e_j) | i < j\}$.

D_n : On pose $\mathrm{D}_n = \{(x_i) \in \mathbb{Z}^n | \sum_i x_i \equiv 0 \bmod 2\}$. On a $\mathbf{D}_n = R(\mathrm{D}_n) = \{\pm e_i \pm e_j | i < j\}$.

E_8 : On pose $\mathrm{E}_8 = \mathrm{D}_8 + \mathbb{Z} \cdot e$, avec $e = \frac{1}{2}(1, \ldots, 1)$. On a $\mathbf{E}_8 = R(\mathrm{E}_8) = R(\mathrm{D}_8) \cup \left\{(x_i) = \frac{1}{2}(\pm 1, \ldots, \pm 1) | \prod_i x_i > 0\right\}$.

E_7 : On pose $\mathrm{E}_7 = e^\perp \cap \mathrm{E}_8 = \{(x_i) \in \mathrm{E}_8 | \sum_i x_i = 0\}$. On a $\mathbf{E}_7 = R(\mathrm{E}_7) = e^\perp \cap R(\mathrm{E}_8) = R(A_7) \cup \left\{(x_i) = \frac{1}{2}(\pm 1, \ldots, \pm 1) | \sum_i x_i = 0\right\}$.

E_6 : On pose $\mathrm{E}_6 = (e_7 + e_8)^\perp \cap \mathrm{E}_7$. On a $\mathbf{E}_6 = R(\mathrm{E}_6) = (e_7 + e_8)^\perp \cap R(\mathrm{E}_7)$.

Suivant ces notations, il est facile d'exhiber des éléments de $\mathcal{L}_n$, selon la valeur de n. Par exemple, suivant les notations précédentes, $\mathcal{L}_n$ contient :

- le réseau $\mathrm{E}_8^{(n-7)/8} \oplus \mathrm{E}_7$ si $n \equiv -1 \bmod 8$;
- le réseau $\mathrm{E}_8^{n/8}$ si $n \equiv 0 \bmod 8$;
- le réseau $\mathrm{E}_8^{(n-1)/8} \oplus \mathrm{A}_1$ si $n \equiv 1 \bmod 8$.

Pour un réseau $L \in \mathcal{L}_n$ donné, un des intérêts principaux de l'étude du système de racines $R(L)$ est qu'elle nous donne des informations sur le groupe $\mathrm{O}(L) = \{\gamma \in \mathrm{O}(V) \mid \gamma(L) = L\}$. Concrètement, on a les propriétés suivantes :

Proposition 1.6. *Soient L un réseau entier, $R = R(L)$ et W le groupe de Weyl de R. On suppose que R engendre V, et on se donne $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ un ensemble de racines simples de R. On note D le diagramme de Dynkin associé aux α_i, G le sous-groupe des permutations des α_i qui préserve D, et $\mathrm{A}(R) = \{\gamma \in \mathrm{O}(V) \mid \gamma(R) = R\}$. On a alors les inclusions :*

$$W \subset \mathrm{O}(L) \subset \mathrm{A}(R) \simeq W \rtimes G.$$

En particulier, pour $L = \mathrm{E}_7$, $L = \mathrm{E}_8$ *ou* $L = \mathrm{E}_8 \oplus \mathrm{A}_1$, *le groupe* G *est trivial et on a :* $\mathrm{A}(R) = \mathrm{O}(L) = W$.

Pour $n \leq 25$, l'ensemble X_n a été déterminé respectivement par Mordell ($n = 8$), Witt ($n = 16$), Niemeier [61] ($n = 24$), Conway–Sloane [23] ($n = 7, 9, 15, 17$), Borcherds [6] [7] ($n = 23, 25$). Une conséquence remarquable de ces classifications est le théorème suivant :

Théorème 1.7. *Soient* $n \equiv 0, \pm 1 \bmod 8$ *un entier positif, avec* $n \leq 25$, *et* $L_1, L_2 \in \mathcal{L}_n$. *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(*i*) *les réseaux* L_1 *et* L_2 *sont isomorphes,*

(*ii*) *les systèmes de racines* $R(L_1)$ *et* $R(L_2)$ *sont isomorphes, c'est-à-dire qu'il existe* $g \in \mathrm{O}(V)$ *tel que* $g(R(L_1)) = R(L_2)$.

Il existe une démonstration conceptuelle de ce résultat pour $n \leq 16$. Pour les autres valeurs de n, notre démonstration (beaucoup moins élégante) consiste simplement à examiner un par un les systèmes de racines des éléments de X_n (voir le théorème 3.3.1). Le fait que l'on n'ait pas d'explication conceptuelle de cette propriété n'est pas surprenant : déjà pour $n = 24$, ce résultat repose sur une vérification miraculeuse faite au cas par cas par Venkov.

1.1.2 Les A-voisins

Suivant Kneser [43], pour A un groupe abélien fini, on construit comme suit la notion de A-voisins :

Proposition-Définition 1.8. *Soit* A *un groupe abélien fini. On dit que les réseaux* $L_1, L_2 \in \mathcal{L}_n$ *sont des* A*-voisins (ou que* L_2 *est un* A*-voisin de* L_1*) si les conditions équivalentes suivantes sont vérifiées :*

(*i*) *Le quotient* $L_1/(L_1 \cap L_2)$ *est isomorphe à* A.

(*ii*) *Le quotient* $L_2/(L_1 \cap L_2)$ *est isomorphe à* A.

Notons $\mathbb{Z}[\mathcal{L}_n]$ et $\mathbb{Z}[X_n]$ les $\mathbb{Z}$-modules libres engendrés respectivement par $\mathcal{L}_n$ et X_n. La notion de A-voisins permet de construire un opérateur T_A défini comme suit :

Définition 1.9. *Soit* A *un groupe abélien fini. Pour* $L, L' \in \mathcal{L}_n$, *notons* $\overline{L}, \overline{L'}$ *leurs images dans* X_n. *L'opérateur* T_A, *qui peut être vu comme un endomorphisme de* $\mathbb{Z}[\mathcal{L}_n]$ *ou de* $\mathbb{Z}[X_n]$, *est défini par :*

$$(\forall L \in \mathcal{L}_n) \begin{cases} \mathrm{T}_A(L) = \displaystyle\sum_{L' \ A\text{-voisin de } L} L' \\ \mathrm{T}_A(\overline{L}) = \displaystyle\sum_{L' \ A\text{-voisin de } L} \overline{L'} \end{cases}.$$

On s'intéressera plus particulièrement aux cas où A est de la forme $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$. On parlera alors respectivement de d-voisins ou de $d, \ldots, d$-voisins. Si l'on fixe $L \in \mathcal{L}_n$, il est élémentaire de construire tous ses d-voisins (pour d un entier non nul), suivant la construction présentée par exemple par Chenevier–Lannes [18] que l'on rappelle ici :

Proposition-Définition 1.10. *Soient* $L \in \mathcal{L}_n$ *et* d *un entier non nul. Alors l'ensemble des* d*-voisins de* L *est en bijection naturelle avec l'ensemble des droites isotropes de* L/dL, *où l'on entend par droite isotrope un* $\mathbb{Z}/d$*-module libre de rang* 1 *sur lequel la forme quadratique* $L/dL \to \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ *induite par* q *est identiquement nulle.*

Cette bijection commute en particulier à l'action naturelle de $\mathrm{O}(L)$. *Concrètement, elle est définie comme suit. Soient* x *une droite isotrope de* L/dL *et* $v \in L$ *dont l'image dans*

L/dL engendre x, avec de plus $v \cdot v \equiv 0 \bmod 2d^2$. On note M l'image réciproque de $x^\perp$ par la projection canonique $L \to L/dL$. Alors le d-voisin de L associé à x est le réseau :

$$L' = \mathbb{Z}\frac{v}{d} + M.$$

Nous renvoyons à la proposition-définition 2.2.17 pour une construction dans le même esprit de tous les $p, \dots, p$-voisins (pour p premier) d'un élément de $\mathcal{L}_n$.

Les opérateurs T_A participent à la notion plus générale d'anneau de Hecke que l'on définit ci-dessous. Ceci justifie qu'on parlera dans la suite des "opérateurs de Hecke T_A".

Pour cela, fixons G un schéma en groupes de type fini semi-simple sur $\mathbb{Z}$. Notons P l'ensemble des nombres premiers, et posons $\widehat{\mathbb{Z}} = \prod_{p \in P} \mathbb{Z}_p$, et $\mathbb{A}_f = \mathbb{Q} \otimes \widehat{\mathbb{Z}}$ l'anneau des adèles finis de $\mathbb{Q}$. On définit l'anneau de Hecke de G comme :

Définition 1.11. *On définit le $G(\mathbb{A}_f)$-ensemble : $\mathcal{R}(G) = G(\mathbb{A}_f)/G(\widehat{\mathbb{Z}})$. L'anneau de Hecke de G, noté $\mathrm{H}(G)$, est l'ensemble des endomorphismes du $\mathbb{Z}$-module libre $\mathbb{Z}[\mathcal{R}(G)]$ qui commutent à l'action de $G(\mathbb{A}_f)$.*

Notons $L_0 \in \mathcal{L}_n$ le réseau $\mathrm{E}_8^{n-7/8} \oplus \mathrm{E}_7$, $\mathrm{E}_8^{n/8}$ ou $\mathrm{E}_8^{n-1/8} \oplus \mathrm{A}_1$ (selon la valeur de n). On définit O_n comme étant le schéma en groupes affine sur $\mathbb{Z}$ associé à la forme quadratique $L_0 \to \mathbb{Z},\ x \mapsto q(x)$. On définit de même SO_n comme le sous-schéma de O_n des éléments de "déterminant" 1 (si n est pair, il y a une subtilité à laquelle il faut prendre garde, et c'est le déterminant de Dickson–Dieudonné qu'il faut prendre, comme expliqué dans [18, §II.1] par exemple). Les quotients $\mathcal{R}(\mathrm{O}_n)$ ou $\mathcal{R}(\mathrm{SO}_n)$ s'identifient alors naturellement à l'ensemble des éléments de $\mathcal{L}_n$ qui sont inclus dans le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $L_0 \otimes \mathbb{Q}$. Grâce à cette identification, on peut voir les opérateurs de Hecke T_A introduits précédemment comme des éléments de $\mathrm{H}(\mathrm{O}_n) \subset \mathrm{H}(\mathrm{SO}_n)$.

1.2 Généralités sur les représentations automorphes

Dans cette partie, G désignera un schéma en groupes de type fini semi-simple sur $\mathbb{Z}$.

1.2.1 Les représentations automorphes et la paramétrisation de Satake

Rappelons les notations de [18] ou [19] concernant les ensembles de représentations automorphes que l'on considérera.

Définition 1.12. *On définit $\Pi(G)$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de représentations unitaires irréductibles π de $G(\mathbb{A})$ telles que π_p est non ramifiée pour tout p premier.*

On note $\Pi_{\mathrm{disc}}(G)$ le sous-ensemble de $\Pi(G)$ des représentations automorphes discrètes π de G.

On note enfin $\Pi_{\mathrm{cusp}}(G)$ le sous-ensemble de $\Pi_{\mathrm{disc}}(G)$ des représentations automorphes cuspidales de G.

Suivant Borel [10] ou Springer [74] par exemple, rappelons qu'on associe à G un groupe complexe $\widehat{G}$, appelé dual de Langlands de G. C'est un $\mathbb{C}$-groupe semi-simple dont la donnée radicielle est duale à celle de $G(\mathbb{C})$. Notons $\widehat{\mathfrak{g}}$ l'algèbre de Lie complexe de $\widehat{G}$, et $\widehat{G}(\mathbb{C})_{\mathrm{ss}}$ et $\widehat{\mathfrak{g}}(\mathbb{C})_{\mathrm{ss}}$ les classes de $\widehat{G}(\mathbb{C})$-conjugaison d'éléments semi-simples respectivement de $\widehat{G}(\mathbb{C})$ et $\widehat{\mathfrak{g}}(\mathbb{C})$. On note enfin $\mathcal{X}(\widehat{G})$ l'ensemble des familles $(c_v)_{v \in P \cup \{\infty\}}$, où $c_\infty \in \widehat{\mathfrak{g}}_{\mathrm{ss}}$ et $c_p \in \widehat{G}(\mathbb{C})_{\mathrm{ss}}$ pour tout $p \in P$.

Alors suivant Langlands [45], on a le résultat suivant :

Théorème 1.13. *On dispose d'une application canonique :*

$$\begin{array}{rcl} c : \Pi(G) & \to & \mathcal{X}(\widehat{G}) \\ \pi & \mapsto & (c_v(\pi)) \end{array}.$$

C'est une application à fibres finies. De plus, pour tout premier p et pour tout $\pi \in \Pi(G)$, $c_p(\pi)$ détermine entièrement π_p.

L'élément $c_\infty(\pi) \in \widehat{\mathfrak{g}}_{\mathrm{ss}}$ est construit suivant Harish-Chandra [39], et est appelé le caractère infinitésimal de π. Lorsque $G = \mathrm{PGL}_n$, auquel cas $\widehat{G} = \mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$, les valeurs propres du caractère infinitésimal de $\pi \in \Pi(G)$ sont bien définies, et on les appelle les poids de π. On notera $\Pi_{\mathrm{alg}}(\mathrm{PGL}_n)$ le sous-ensemble de $\Pi_{\mathrm{cusp}}(\mathrm{PGL}_n)$ des représentations algébriques, c'est-à-dire des représentations dont les poids sont des demi-entiers, de différences deux à deux entières. On notera enfin $\Pi^{\perp}_{\mathrm{alg}}(\mathrm{PGL}_n)$ le sous-ensemble de $\Pi_{\mathrm{alg}}(\mathrm{PGL}_n)$ des représentations autoduales, c'est-à-dire des représentations isomorphes à leur contragrédiente.

Les éléments $c_p(\pi) \in \widehat{G}(\mathbb{C})_{\mathrm{ss}}$ sont quant à eux construits à l'aide de l'isomorphisme de Satake [64], revisité par Langlands [45], et sont appelés les paramètres de Satake de π.

1.2.2 La conjecture d'Arthur–Langlands

À la manière de [18] ou [19], on appellera ici "conjecture d'Arthur–Langlands" la conjecture présentée dans [18, Ch. VI, Conjecture 4.6] dont l'énoncé repose sur les travaux de Langlands [45] et d'Arthur [3]. Afin de l'énoncer simplement, commençons par définir la notion de paramètre de Langlands :

Définition 1.14. *Soit G un schéma en groupes de type fini semi-simple sur $\mathbb{Z}$, et $r : \widehat{G} \to \mathrm{SL}_n$ une $\mathbb{C}$-représentation. La représentation r induit une application $\mathcal{X}(\widehat{G}) \to \mathcal{X}(\mathrm{SL}_n)$, $(c_v) \mapsto (r(c_v))$. On définit alors l'élément*

$$\psi(\pi, r) = r\left(c(\pi)\right) \in \mathcal{X}(\mathrm{SL}_n)$$

appelé paramètre de Langlands–Satake du couple (π, r).

En gardant les notations de la définition précédente, l'idée de la conjecture d'Arthur–Langlands est qu'il existe une famille (π_i) d'éléments de $\coprod_{m \leq n} \Pi_{\mathrm{cusp}}(\mathrm{PGL}_m)$ telle que le paramètre de Langlands–Satake du couple (π, r) s'exprime à l'aide du caractère infinitésimal et des paramètres de Satake des π_i. On explique cette relation plus en détail ci-dessous.

On suit les notations de [18, §VI.4]. Donnons-nous un entier $k \geq 1$, et pour tout $i \in \{1, \ldots, k\}$ des entiers $n_i, d_i \geq 1$ avec $\sum_i n_i d_i = n$, ainsi qu'une représentation $\pi_i \in \Pi_{\mathrm{cusp}}(\mathrm{PGL}_{n_i})$. On dispose alors d'un élément de $\mathcal{X}(\mathrm{SL}_n)$, noté $\oplus_i \pi_i[d_i]$ dans [18] ou [19], défini par l'égalité

$$\left(\oplus_i \pi_i[d_i]\right)_v = \bigoplus_i c_v(\pi_i) \otimes \mathrm{Sym}^{d_i - 1}(e_v)$$

pour tout $v \in P \cup \{\infty\}$, où on a posé $e_\infty = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et $e_p = \begin{pmatrix} p^{-\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & p^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}$.

On définit alors $\mathcal{X}_{\mathrm{AL}}(\mathrm{SL}_n)$ comme l'ensemble des éléments de la forme $\oplus_i \pi_i[d_i]$. Un résultat important, conjecturé par Langlands [46] et démontré par Jacquet–Shalika [40], est que le quadruplet $(k, (n_i), (d_i), (\pi_i))$ qui définit un élément de $\mathcal{X}_{\mathrm{AL}}(\mathrm{SL}_n)$ est unique à permutation près des triplets (n_i, d_i, π_i). Avec ce formalisme, la conjecture d'Arthur–Langlands se formule comme suit :

Conjecture 1.15. *Soient G un schéma en groupes de type fini semi-simple sur $\mathbb{Z}$, et $r : \widehat{G} \to \mathrm{SL}_n$ une $\mathbb{C}$-représentation. Si $\pi \in \Pi_{\mathrm{disc}}(G)$, alors $\psi(\pi, r) \in \mathcal{X}_{\mathrm{AL}}(\mathrm{SL}_n)$.*

Cette conjecture a fait l'objet de travaux de nombreux auteurs : Arthur [4], Langlands, Kottwitz, Shelstad [70] [71] [72], Waldspurger [81] [82] [58] [44], Ngô [60], Laumon, Chaudouard [14] [15], Moeglin, Mezo [56] [57], culminant par les travaux récents d'Arthur et Waldspurger.

Le théorème suivant est le point de départ de nos travaux. Sa démonstration est due à Taïbi [76], dont les résultats reposent sur les travaux d'Arthur [4], ainsi que ceux de Kaletha [41] et Arancibia–Moeglin–Renard [2].

Théorème 1.16. *La conjecture d'Arthur–Langlands est vraie pour $G = \mathrm{SO}_n$ et r la représentation standard.*

De cette conjecture et de ce théorème, on fait notamment deux constatations. D'une part, la conjecture d'Arthur–Langlands permet de voir les paramètres de Satake des représentations $\pi \in \coprod_m \Pi_{\mathrm{cusp}}(\mathrm{PGL}_m)$ comme les éléments fondamentaux pour la compréhension des ensembles $\Pi_{\mathrm{disc}}(G)$, pour G un schéma en groupe de type fini semi-simple sur $\mathbb{Z}$ quelconque.

D'autre part, le théorème ci-dessus nous dit que l'étude des éléments de $\Pi_{\mathrm{disc}}(\mathrm{SO}_n)$ nous donne des informations sur ces mêmes paramètres de Satake. C'est déjà cette constatation qui avait servi aux travaux de Chenevier–Renard [19] afin de déterminer les paramètres standards des représentations automorphes algébriques des groupes SO_7, SO_8 ou SO_9.

Ces constatations ont été les principales motivations de ma thèse, qui est composée des articles suivants :

- *Traces des opérateurs de Hecke sur les espaces de formes automorphes de* SO_7, SO_8 *ou* SO_9 *en niveau* 1 *et poids arbitraire*, [48], arXiv :1604.01914.
- *Calcul des opérateurs de Hecke sur les classes d'isomorphisme de réseaux pairs de déterminant* 2 *en dimension* 23 *et* 25, [49], arXiv :1607.03613.

On présente dans la suite de cette introduction les méthodes développées dans ces articles, ainsi que les principaux résultats. Notons au passage que les chapitres 2 et 3 se composent de ces mêmes articles tels qu'ils ont été soumis à publication. Il y aura donc dans ce texte de nombreuses redondances, principalement dans les introductions et les parties préliminaires de ces articles.

Les résultats obtenus dans cette thèse ont également servi à la rédaction de l'article *Eisenstein congruences for* $\mathrm{SO}(4,3)$, $\mathrm{SO}(4,4)$*, spinor and triple product L-values*, [5], arXiv : 1605.00819, co-écrit avec Neil Dummigan et Jonas Bergström et récemment accepté au journal *Experimental Mathematics*, mais qu'on a choisi de ne pas présenter ici.

1.3 Résultats obtenus

1.3.1 Traces des opérateurs de Hecke sur les espaces de formes automorphes de SO_7, SO_8 ou SO_9 en niveau 1 et poids arbitraire

Dans cet article, nous développons une méthode algorithmique pour déterminer des informations sur les paramètres de Satake des représentations automorphes des groupes linéaires découvertes par Chenevier–Renard dans [19].

Notre point de départ est l'étude des espaces de formes automorphes pour SO_n, définis comme suit. Si l'on se donne (W, ρ) une représentation de dimension finie de $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ sur

$\mathbb{C}$, alors l'espace des formes automorphes de poids W pour SO_n est l'espace vectoriel de dimension finie :

$$\mathcal{M}_W(\mathrm{SO}_n) = \{f : \mathcal{L}_n \to W \mid (\forall L \in \mathcal{L}_n)(\forall \gamma \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R}))\ f(\gamma \cdot L) = \rho(\gamma) \cdot f(L)\}.$$

Dans la suite, nous expliquerons plus en détail comment des éléments bien choisis de $\mathcal{M}_W(\mathrm{SO}_n)$ permettent de construire des éléments de $\Pi_{\mathrm{disc}}(\mathrm{SO}_n)$. En particulier, nous expliquerons le lien entre les opérateurs de Hecke agissant sur une forme automorphe et les paramètres de Satake de la représentation engendrée.

D'autre part, on peut voir un élément $f \in \mathcal{M}_W(\mathrm{SO}_n)$ comme une application $\mathbb{Z}[\mathcal{L}_n] \to W$. L'opérateur de Hecke T_A agit sur $\mathcal{L}_n$, et a donc une action à droite sur f bien définie. Concrètement, l'action de T_A sur f est donnée par l'égalité :

$$(\forall L \in \mathcal{L}_n)\ \mathrm{T}_A(f)(L) = \sum_{L'\ A\text{-voisin de } L} f(L').$$

Un point très utile pour nous est que les opérateurs T_A ainsi définis sur un espace $\mathcal{M}_W(\mathrm{SO}_n)$ donné sont codiagonalisables (c'est-à-dire qu'il existe une base de $\mathcal{M}_W(\mathrm{SO}_n)$ constituée de vecteurs propres communs à tous les opérateurs T_A).

Le premier but de notre travail est de déterminer, pour A donné et $n \in \{7, 8, 9\}$ fixé, les quantités $\mathrm{Tr}\,(\mathrm{T}_A|\mathcal{M}_W(\mathrm{SO}_n))$ pour des représentations W de $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ irréductibles arbitraires.

Pour de telles valeurs de n, on a $|X_n| = 1$. Si l'on se donne $L_0 \in \mathcal{L}_n$, nous noterons $\mathrm{SO}(L_0) = \{\gamma \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R}) \mid \gamma L_0 = L_0\}$ et $W^{\mathrm{SO}(L_0)} = \{v \in W \mid (\forall \gamma \in \mathrm{SO}(L_0))\ \rho(\gamma)(v) = v\}$. À L_0 fixé, on dispose d'un isomorphisme $\mathcal{M}_W(\mathrm{SO}_n) \simeq W^{\mathrm{SO}(L_0)}$, grâce auquel on déduit la proposition suivante :

Proposition 1.17. *Soient $n \in \{7, 8, 9\}$, et $L_0 \in \mathcal{L}_n$. On note $\mathrm{V}_A(L_0)$ l'ensemble des A-voisins de L_0. Le groupe $\mathrm{SO}(L_0)$ agit naturellement sur $\mathrm{V}_A(L_0)$, et on note $\mathcal{V}_j$ les orbites de cette action, en se donnant pour chaque j un élément $g_j \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ tel que $g_j \cdot L_0 \in \mathcal{V}_j$ (qui existe bien comme $|X_n| = 1$). Alors on a l'égalité :*

$$\mathrm{Tr}\,(\mathrm{T}_A|\mathcal{M}_W(\mathrm{SO}_n)) = \frac{1}{|\mathrm{SO}(L_0)|}\left(\sum_j \left(|\mathcal{V}_j| \sum_{\gamma \in \mathrm{SO}(L_0)} \mathrm{Tr}\,(\gamma g_j|W)\right)\right).$$

On dispose d'un énoncé plus général pour n quelconque. Cependant, la complexité algorithmique du calcul de cette formule pour $n \geq 15$ a rendu inenvisageable de la mettre en application avec les ressources informatiques dont nous disposions.

On donne dans [50] des tables des valeurs de $\mathrm{Tr}\,(\mathrm{T}_A|\mathcal{M}_W(\mathrm{SO}_n))$, pour différents A et W selon les valeurs de n. On a les théorèmes suivants :

Théorème 1.18. *Soient A l'un des groupes $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^i$ ($i \leq 3$), $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ ($p \leq 67$ premier) ou $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ ($q \in \{4, 9, 25, 27\}$), et $\lambda = (a, b, c)$ ($13 \geq a \geq b \geq c \geq 0$) un poids dominant de $\mathrm{SO}_7(\mathbb{R})$. On note V_λ la représentation irréductible de $\mathrm{SO}_7(\mathbb{R})$ de plus haut poids λ. Alors les quantités :*

$$(2a + 5, 2b + 3, 2c + 1, |A|^a \mathrm{Tr}\,(\mathrm{T}_A|\mathcal{M}_{V_\lambda}(\mathrm{SO}_7)))$$

sont données par les tables de [50].

Théorème 1.19. *Soient A l'un des groupes $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^i$ ($i \leq 4$) ou $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ ($p \leq 23$ premier), et $\lambda = (a, b, c, d)$ ($12 \geq a \geq b \geq c \geq d \geq 0$) un poids dominant de $\mathrm{SO}_8(\mathbb{R})$. On note V_λ la représentation irréductible de $\mathrm{SO}_8(\mathbb{R})$ de plus haut poids λ. Alors les quantités :*

$$(2a + 6, 2b + 4, 2c + 2, 2d, |A|^a \mathrm{Tr}\,(\mathrm{T}_A|\mathcal{M}_{V_\lambda}(\mathrm{SO}_8)))$$

sont données par les tables de [50].

Théorème 1.20. *Soient A le groupe $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ ($p \leq 13$ premier), et $\lambda = (a,b,c,d)$ ($12 \geq a \geq b \geq c \geq d \geq 0$) un poids dominant de $\mathrm{SO}_9(\mathbb{R})$. On note V_λ la représentation irréductible de $\mathrm{SO}_9(\mathbb{R})$ de plus haut poids λ. Alors les quantités :*

$$(2a+7, 2b+5, 2c+3, 2d+1, |A|^a \mathrm{Tr}\,(\mathrm{T}_A | \mathcal{M}_{V_\lambda}(\mathrm{SO}_9)))$$

sont données par les tables de [50].

Dans les théorèmes précédents, nous préférons faire apparaître le vecteur $(2a+5, 2b+3, 2c+1)$ (resp. $(2a+6, \dots), (2a+7, \dots)$) plutôt que (a,b,c), qui est pourtant d'apparence plus simple. C'était un choix déjà fait par Chenevier–Renard dans [19] (et dans les tables résultant de leurs travaux). La raison de ce choix est que ce vecteur donne les valeurs propres (dans la représentation standard) du caractère infinitésimal de V_λ, et donc des représentations automorphes engendrées par les éléments de $\mathcal{M}_{V_\lambda}(\mathrm{SO}_n)$. Si $\pi \in \Pi_{\mathrm{disc}}(\mathrm{SO}_n)$ est engendrée par un élément de $\mathcal{M}_{V_\lambda}(\mathrm{SO}_n)$ propre pour tous les T_A, c'est ce caractère infinitésimal qui est pertinent pour tenter de deviner l'élément de $\mathcal{X}_{\mathrm{AL}}(\mathrm{SL}_n)$ défini par $\mathrm{c}(\pi)$, suivant la conjecture d'Arthur-Langlands.

La quantité $\mathrm{Trace}\,(\mathrm{T}_A | \mathcal{M}_{V_\lambda}(\mathrm{SO}_n))$ nous donne des informations sur les valeurs propres de l'opérateur T_A sur $\mathcal{M}_{V_\lambda}(\mathrm{SO}_n)$: ce sont ces mêmes valeurs propres qui nous intéressent pour déterminer des informations sur les paramètres de Satake d'éléments de $\pi \in \Pi_{\mathrm{disc}}(\mathrm{SO}_n)$, à l'aide des propositions suivantes (découlant de [18, Ch. VI, Lemme 2.7] et [36]) :

Proposition 1.21. *Soient $\lambda = (m_1, m_2, m_3)$ un poids dominant de $\mathrm{SO}_7(\mathbb{R})$, et $f \in \mathcal{M}_{V_\lambda}(\mathrm{SO}_7)$ une forme propre pour tous les opérateurs de Hecke, en notant λ_A la valeur propre de f associée à l'opérateur T_A. Alors f engendre une représentation $\pi \in \Pi_{\mathrm{disc}}(\mathrm{SO}_7)$ dont les paramètres de Satake vérifient les propriétés suivantes.*

Les valeurs propres du caractère infinitésimal $c_\infty(\pi)$ dans la représentation standard sont les $\pm(m_i + \frac{7}{2} - i)$, pour $i = 1, \dots, 3$.

Pour tout p premier, le p-ème paramètre de Satake $c_p(\pi)$ vérifie les égalités :

(i) $p^{\frac{5}{2}} \mathrm{Trace}\,(c_p(\pi) | V_{\mathrm{St}}) = \lambda_{\mathbb{Z}/p}$;

(ii) $p^4 \mathrm{Trace}\,(c_p(\pi) | \Lambda^2 V_{\mathrm{St}}) = \lambda_{(\mathbb{Z}/p)^2} + (p^4 + p^2 + 1)$;

(iii) $p^{\frac{9}{2}} \mathrm{Trace}\,(c_p(\pi) | \Lambda^3 V_{\mathrm{St}}) = \lambda_{(\mathbb{Z}/p)^3} + (p^2+1)\ \lambda_{\mathbb{Z}/p}$.

Proposition 1.22. *Soient $\lambda = (m_1, m_2, m_3, m_4)$ un poids dominant de $\mathrm{SO}_8(\mathbb{R})$, et $f \in \mathcal{M}_{V_\lambda}(\mathrm{SO}_8)$ une forme propre pour tous les opérateurs de Hecke, en notant λ_A la valeur propre de f associée à l'opérateur T_A. Alors f engendre une représentation $\pi \in \Pi_{\mathrm{disc}}(\mathrm{SO}_8)$ dont les paramètres de Satake vérifient les propriétés suivantes.*

Les valeurs propres du caractère infinitésimal $c_\infty(\pi)$ dans la représentation standard sont les $\pm(m_i + 4 - i)$, pour $i = 1, \dots, 4$.

Pour tout p premier, le p-ème paramètre de Satake $c_p(\pi)$ vérifie les égalités :

(i) $p^3 \mathrm{Trace}\,(c_p(\pi) | V_{\mathrm{St}}) = \lambda_{\mathbb{Z}/p}$;

(ii) $p^5 \mathrm{Trace}\,(c_p(\pi) | \Lambda^2 V_{\mathrm{St}}) = \lambda_{(\mathbb{Z}/p)^2} + (p^4 + 2\ p^2 + 1)$;

(iii) $p^6 \mathrm{Trace}\,(c_p(\pi) | \Lambda^3 V_{\mathrm{St}}) = \lambda_{(\mathbb{Z}/p)^3} + (p^2 + p + 1)\ \lambda_{\mathbb{Z}/p}$;

(iv) $p^6 \mathrm{Trace}\,(c_p(\pi) | \Lambda^4 V_{\mathrm{St}}) = \lambda_{(\mathbb{Z}/p)^4} + 2\ \lambda_{(\mathbb{Z}/p)^2} + 2\ (p^4 + p^2 + 1)$.

Proposition 1.23. *Soient $\lambda = (m_1, m_2, m_3, m_4)$ un poids dominant de $\mathrm{SO}_9(\mathbb{R})$, et $f \in \mathcal{M}_{V_\lambda}(\mathrm{SO}_9)$ une forme propre pour tous les opérateurs de Hecke, en notant λ_A la valeur propre de f associée à l'opérateur T_A. Alors f engendre une représentation $\pi \in \Pi_{\mathrm{disc}}(\mathrm{SO}_9)$ dont les paramètres de Satake vérifient les propriétés suivantes.*

Les valeurs propres du caractère infinitésimal $c_\infty(\pi)$ dans la représentation standard sont les $\pm(m_i + \frac{9}{2} - i)$, pour $i = 1, \dots, 4$.

Pour tout p premier, le p-ème paramètre de Satake $c_p(\pi)$ vérifie les égalités :

(i) $p^{\frac{7}{2}}\mathrm{Trace}\,(c_p(\pi)|V_{\mathrm{St}}) = \lambda_{\mathbb{Z}/p}$;

(ii) $p^6\mathrm{Trace}\,(c_p(\pi)|\Lambda^2 V_{\mathrm{St}}) = \lambda_{(\mathbb{Z}/p)^2} + (p^6 + p^4 + p^2 + 1)$;

(iii) $p^{\frac{15}{2}}\mathrm{Trace}\,(c_p(\pi)|\Lambda^3 V_{\mathrm{St}}) = \lambda_{(\mathbb{Z}/p)^3} + (p^4 + p^2 + p + 1)\ \lambda_{\mathbb{Z}/p}$;

(iv) $p^8\mathrm{Trace}\,(c_p(\pi)|\Lambda^4 V_{\mathrm{St}}) = \lambda_{(\mathbb{Z}/p)^4} + (p^2 + 1)\ \lambda_{(\mathbb{Z}/p)^2} + (p^8 + p^6 + 2\ p^4 + p^2 + 1)$.

Dans [19, Ch. 5,6,7], Chenevier et Renard ont déterminé les formes possibles des paramètres standards des éléments de $\Pi_{\mathrm{disc}}(\mathrm{SO}_n)$ pour $n = 7, 8, 9$. Grâce à ces résultats, il est possible de faire le lien entre les paramètres de Satake des éléments de $\Pi_{\mathrm{disc}}(\mathrm{SO}_n)$ et les paramètres de Satake des éléments de $\Pi^{\perp}_{\mathrm{alg}}(\mathrm{PGL}_m)$ qui ont été découverts dans [19]. Le fait qu'il s'agisse d'éléments de $\Pi^{\perp}_{\mathrm{alg}}(\mathrm{PGL}_m)$ découle de [19, Lemma 2.23] : la condition d'autodualité des π_i fait partie des résultats d'Arthur, et la forme du caractère infinitésimal de π impose que les π_i soient algébriques. On développe en détail dans cet article la méthode pour passer des paramètres de Satake d'un élément $\pi \in \Pi_{\mathrm{disc}}(\mathrm{SO}_n)$ aux paramètres de Satake des éléments $\pi_i \in \Pi^{\perp}_{\mathrm{alg}}(\mathrm{PGL}_{n_i})$ apparaissant dans le paramètre standard de π. On obtient finalement les théorèmes suivants :

Théorème 1.24. *Soient $25 \geq w_1 > w_2 > w_3 \geq 1$ des entiers impairs, tels que l'ensemble Π des éléments $\pi \in \Pi^{\perp}_{\mathrm{alg}}(\mathrm{PGL}_6)$ dont les poids sont les $\pm\frac{w_1}{2}, \pm\frac{w_2}{2}, \pm\frac{w_3}{2}$ est non vide. D'après [19, Table 7], l'ensemble Π possède alors un ou deux éléments.*

(i) Si $\Pi = \{\pi\}$ est un singleton, alors le polynôme $\det\left(2^{w_1/2}X \cdot \mathrm{Id} - \mathrm{c}_2(\pi) \mid V_{\mathrm{St}}\right) \in \mathbb{Z}[X]$ est donné par la table 2.2.

(ii) Si on a $|\Pi| = 2$, alors le polynôme unitaire de degré 2 dont les racines sont les $2^{w_1/2} \cdot \mathrm{Trace}(\mathrm{c}_2(\pi)|V_{\mathrm{St}})$ pour $\pi \in \Pi$ est donné par la table 2.3.

(iii) Pour $p \leq 53$ un nombre premier impair, la quantité $p^{w_1/2} \cdot \sum_{\pi\in\Pi} \mathrm{Trace}\,(\mathrm{c}_p(\pi)|V_{\mathrm{St}})$ est un entier, donné par les tables 2.4, 2.5 et 2.6.

Théorème 1.25. *Soient $25 \geq w_1 > w_2 > w_3 > w_4 \geq 1$ des entiers impairs, tels que l'ensemble Π des éléments $\pi \in \Pi^{\perp}_{\mathrm{alg}}(\mathrm{PGL}_8)$ dont les poids sont les $\pm\frac{w_1}{2}, \pm\frac{w_2}{2}, \pm\frac{w_3}{2}, \pm\frac{w_4}{2}$ est non vide.*

Pour $p \leq 7$ un nombre premier impair, la quantité $p^{w_1/2} \cdot \sum_{\pi\in\Pi} \mathrm{Trace}\,(\mathrm{c}_p(\pi)|V_{\mathrm{St}})$ est un entier, donné par la table 2.7.

Théorème 1.26. *Soient $26 \geq w_1 > w_2 > w_3 \geq 2$ des entiers pairs, tels que l'ensemble Π des éléments $\pi \in \Pi^{\perp}_{\mathrm{alg}}(\mathrm{PGL}_7)$ dont les poids sont les $\pm\frac{w_1}{2}, \pm\frac{w_2}{2}, \pm\frac{w_3}{2}, 0$ est non vide. D'après [19, Table 10], l'ensemble Π possède alors un seul élément.*

(i) Le polynôme $\det\left(2^{w_1/2}X \cdot \mathrm{Id} - \mathrm{c}_2(\pi) \mid V_{\mathrm{St}}\right) \in \mathbb{Z}[X]$ pour π l'unique élément de Π est donné par la table 2.8.

(ii) Pour $p \leq 13$ un nombre premier impair, la quantité $p^{w_1/2} \cdot \mathrm{Trace}\,(\mathrm{c}_p(\pi)|V_{\mathrm{St}})$ pour π l'unique élément de Π est un entier donné par la table 2.9.

Théorème 1.27. *Soient $26 \geq w_1 > w_2 > w_3 > w_4 \geq 0$ des entiers pairs, tels que l'ensemble Π des éléments $\pi \in \Pi^{\perp}_{\mathrm{alg}}(\mathrm{PGL}_8)$ dont les poids sont les $\pm\frac{w_1}{2}, \pm\frac{w_2}{2}, \pm\frac{w_3}{2}, \pm\frac{w_4}{2}$ est non vide. D'après [19, Table 9], l'ensemble Π possède alors un seul élément.*

(i) Le polynôme $\det\left(2^{w_1/2}X \cdot \mathrm{Id} - \mathrm{c}_2(\pi) \mid V_{\mathrm{St}}\right) \in \mathbb{Z}[X]$ pour π l'unique élément de Π est donné par la table 2.10.

(ii) Pour $p \leq 13$ un nombre premier impair, la quantité $p^{w_1/2} \cdot \mathrm{Trace}\,(\mathrm{c}_p(\pi)|V_{\mathrm{St}})$ pour π l'unique élément de Π est un entier donné par la table 2.11.

1.3.2 Calcul des opérateurs de Hecke sur les classes d'isomorphisme de réseaux pairs de déterminant 2 en dimension 23 et 25

Dans cet article, nous déterminons de nombreux opérateurs de Hecke $\mathrm{T}_{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}}$, qu'on notera plus simplement T_p, vus comme des éléments de $\mathrm{End}(\mathbb{Z}[X_n])$, pour $n = 23$ ou 25. Ces opérateurs sont définis par la formule $\mathrm{T}_p(\overline{L}) = \sum \overline{L'}$, la somme portant sur tous les p-voisins L' de L.

Ces opérateurs de Hecke sont tout à fait reliés à ceux introduits précédemment sur les espaces $\mathcal{M}_W(\mathrm{SO}_n)$. En effet, lorsque W est la représentation triviale, l'espace $\mathcal{M}_W(\mathrm{SO}_n)$ s'identifie naturellement à l'ensemble des fonctions de X_n dans $\mathbb{C}$, dont le dual est canoniquement $\mathbb{C}[X_n]$. On dispose alors d'une action naturelle des opérateurs de Hecke sur ce dernier (qui préserve en fait $\mathbb{Z}[X_n]$) : c'est la formule donnée ci-dessus pour T_p.

Nos résultats nous permettront en particulier de déterminer des congruences faisant intervenir des traces des paramètres de Satake des représentations des groupes linéaires découvertes par Chenevier–Renard dans [19].

Notre point de départ est l'étude des systèmes de racines associés aux éléments de $\mathcal{L}_{23}$ et $\mathcal{L}_{25}$, due à Niemeier [61] pour $\mathcal{L}_{23}$, et à Borcherds [7] pour $\mathcal{L}_{25}$. Comme annoncé au théorème 1.7, si l'on se donne $n = 23$ ou 25, et si $L \in \mathcal{L}_n$, la classe d'isomorphisme de $R(L)$ détermine entièrement la classe $\overline{L}$ de L dans X_n.

Ce point permet d'élaborer un algorithme de complexité raisonnable qui calcule l'opérateur T_2 agissant sur $\mathbb{Z}[X_n]$. On utilise pour cela la construction des 2-voisins déjà exposée à la proposition-défintion 1.10 lorsque l'on a introduit les A-voisins.

On utilise ensuite le fait que, à n fixé, les opérateurs $\mathrm{T}_p \in \mathrm{End}(\mathbb{Z}[X_n])$ sont codiagonalisables. En effet, on sait déjà d'après [18, Ch. VI] que ces endomorphismes commutent deux à deux. Pour $n = 23$ ou 25, l'opérateur T_2 que l'on a calculé a ses valeurs propres deux-à-deux distinctes. Ceci conclut la codiagonalisation de tous les T_p, et nous donne aussi une base de codiagonalisation (à savoir n'importe quelle base de diagonalisation de T_2).

Cela nous permet alors de déterminer de nombreux autres opérateurs T_p. En effet, comme on possède une base de codiagonalisation des T_p, il suffit de connaître la valeur propre associée à chacun de ces vecteurs : celle-ci s'exprime à l'aide de la trace du p-ème paramètre de Langlands–Satake d'un élément de $\Pi_{\mathrm{cusp}}(\mathrm{SO}_n)$ bien choisi. Plus précisément, on a les propositions suivantes :

Proposition 1.28. *Soit $v \in \mathbb{C}[X_{23}]$ un vecteur propre commun à tous les opérateurs de Hecke $\mathrm{T}_p \in \mathrm{End}(\mathbb{C}[X_{23}])$. On note $\lambda(p)$ la valeur propre associée à T_p. Alors il existe un unique élément $\pi \in \Pi_{\mathrm{cusp}}(\mathrm{SO}_{23})$ tel que, pour tout p premier :*

$$\lambda(p) = p^{\frac{21}{2}} \mathrm{Trace}(c_p(\pi)|V_{\mathrm{St}}).$$

Proposition 1.29. *Soit $v \in \mathbb{C}[X_{25}]$ un vecteur propre commun à tous les opérateurs de Hecke $\mathrm{T}_p \in \mathrm{End}(\mathbb{C}[X_{25}])$. On note $\lambda(p)$ la valeur propre associée à T_p. Alors il existe un unique élément $\pi \in \Pi_{\mathrm{cusp}}(\mathrm{SO}_{25})$ tel que, pour tout p premier :*

$$\lambda(p) = p^{\frac{23}{2}} \mathrm{Trace}(c_p(\pi)|V_{\mathrm{St}}).$$

Grâce aux résultats de Chenevier–Lannes [18] et Chenevier–Renard [19], on connaît l'expression des paramètres standards de tous les éléments de $\Pi_{\mathrm{cusp}}(\mathrm{SO}_{23})$ et de $\Pi_{\mathrm{cusp}}(\mathrm{SO}_{25})$ de caractère infinitésimal trivial à l'aide d'éléments de $\coprod_{m\in\mathbb{N}^*} \Pi^{\perp}_{\mathrm{alg}}(\mathrm{PGL}_m)$. Or, ces paramètres standards font intervenir exclusivement des éléments de $\Pi^{\perp}_{\mathrm{alg}}(\mathrm{PGL}_m)$, avec $m \in \{2, 3, 4, 6\}$.

On a justement calculé les traces du p-ème paramètre de Satake de tous ces éléments pour $p \leq 67$ dans [48]. Dans [18], Chenevier et Lannes sont même allés plus loin : ils ont pu calculer la trace du p-ème paramètre de Satake de tous les éléments de $\coprod_m \Pi^{\perp}_{\mathrm{alg}}(\mathrm{PGL}_m)$ qui apparaissent dans les paramètres standards des éléments de $\Pi_{\mathrm{cusp}}(\mathrm{SO}_{23})$ jusqu'à $p = 113$.

Ces résultats nous permettent de faire deux choses. Déjà, ils permettent d'identifier, pour chaque vecteur de codiagonalisation des T_p, l'élément de $\Pi_{\mathrm{cusp}}(\mathrm{SO}_{23})$ ou $\Pi_{\mathrm{cusp}}(\mathrm{SO}_{25})$ qui lui est associé, en regardant la valeur propre pour T_2 qu'on a calculée, et en la comparant aux valeurs propres théoriques de T_2. Ensuite, on en déduit pour $p \leq 113$ (si $n = 23$) ou $p \leq 67$ (si $n = 25$) la valeur propre pour T_p associée à ce même vecteur, ce qui nous donne explicitement l'opérateur T_p. On a ainsi le théorème suivant :

Théorème 1.30. *Pour $n = 23$ et $p \leq 113$, ou pour $n = 25$ et $p \leq 67$, l'endomorphisme $\mathrm{T}_p \in \mathrm{End}(\mathbb{Z}[X_n])$ est donné dans [53].*

Le calcul de l'opérateur $\mathrm{T}_p \in \mathrm{End}(\mathbb{Z}[X_n])$ nous permet de déterminer le graphe de Kneser $\mathrm{K}_n(p)$ dont les sommets sont les éléments de X_n, et où les sommets $\overline{L}, \overline{L'}$ sont adjacents si, et seulement si, il existe des p-voisins $L, L' \in \mathcal{L}_n$ d'images respectives $\overline{L}$ et $\overline{L'}$ dans X_n.

L'étude des vecteurs propres et des valeurs propres de T_p nous permet d'aller plus loin. Grâce aux inégalités de Ramanujan, on montre que, pour $n = 23$ (respectivement $n = 25$), le graphe $\mathrm{K}_n(p)$ est complet pour $p \geq 23$ (respectivement $p \geq 67$). C'est d'ailleurs par la même méthode que Chenevier et Lannes avaient étudié dans [18] la complétude du graphe de Kneser $\mathrm{K}_{24}(p)$.

On déduit de ces deux résultats le graphe $\mathrm{K}_n(p)$ pour $n = 23$ ou 25 pour toute valeur de p, ce qui nous donne notamment le théorème suivant :

Théorème 1.31. *Soit p un nombre premier :*

(*i*) *Le graphe $\mathrm{K}_{23}(p)$ est complet si, et seulement si, $p \geq 23$.*

(*ii*) *Le graphe $\mathrm{K}_{25}(p)$ est complet si, et seulement si, $p \geq 67$.*

À la manière de Chenevier–Lannes [18], on peut aussi étudier les propriétés arithmétiques sur les espaces propres de T_2. L'idée principale est d'exhiber une égalité "modulo m" entre deux droites stables d_1 et d_2 pour T_2. Les droites d_1 et d_2 constituent aussi des sous-espaces propres pour chacun des T_p. En notant $\lambda_i(p)$, pour $i = 1, 2$, la valeur propre de T_p associée à d_i, l'égalité précédente induira une congruence de la forme :

$$(\forall p \in P)\ \lambda_1(p) \equiv \lambda_2(p) \bmod m.$$

C'est déjà de cette manière que Chenevier et Lannes [18, Introduction, Théorème I] avaient démontré la conjecture de Harder [38]. Nos résultats permettent de redémontrer cette congruence, et même de l'améliorer (en remplaçant le module de la congruence par un de ses multiples). En suivant les notations du paragraphe 3.2.3, les congruences que l'on démontre sont données dans le théorème suivant :

Théorème 1.32. *Pour tout nombre premier p, les congruences suivantes sont vérifiées :*

(*i*) $D_{19,7}(p) \equiv D_{19}(p) + p^6 + p^{13} \bmod 8712$;

(*ii*) $D_{21,5}(p) \equiv D_{21}(p) + p^8 + p^{13} \bmod 9840$;

(*iii*) $D_{21,9}(p) \equiv (1 + p^6)\ D_{15}(p) \bmod 12696$;

(*iv*) $D_{21,9}(p) \equiv D_{21}(p) + p^6 + p^{15} \bmod 31200$;

(*v*) $D_{21,13}(p) \equiv (1 + p^4)\ D_{17}(p) \bmod 8736$;

(*vi*) $D_{21,13}(p) \equiv D_{21}(p) + p^4 + p^{17} \bmod 10920$;

(*vii*) $D_{23,7}(p) \equiv (1+p^8)\ D_{15}(p) \bmod 8972$ *;*

(*viii*) $D_{23,13,5}(p) \equiv D_{23,13}(p) + p^9 + p^{14} \bmod 5472$ *;*

(*ix*) $D_{23,15,7}(p) \equiv (1+p^4)\ D_{19}(p) + p^8 + p^{15} \bmod 2184$ *;*

(*x*) $D_{23,15,7}(p) \equiv D_{23,7}(p) + p^4\ D_{15}(p) \bmod 5856$ *;*

(*xi*) $D_{23,17,9}(p) \equiv D_{23,9}(p) + p^3\ D_{17}(p) \bmod 2976$ *;*

(*xii*) $D_{23,19,3}(p) \equiv (1+p^2)\ D_{21}(p) + p^{10} + p^{13} \bmod 7872$ *;*

(*xiii*) $D_{23,19,11}(p) \equiv (1+p^2)\ D_{21}(p) + p^6 + p^{17} \bmod 16224.$

De plus, mis à part les points $(vi), (vii), (xi)$ *et* $(xiii)$*, les congruences ci-dessus sont optimales, dans le sens où le module qui intervient ne peut pas être remplacé par un de ses multiples.*

Chapitre 2

Traces des opérateurs de Hecke sur les espaces de formes automorphes de SO_7, SO_8 ou SO_9 en niveau 1 et poids arbitraire

Résumé

Dans cet article, nous déterminons la trace de certains opérateurs de Hecke sur les espaces de formes automorphes de niveau 1 et poids quelconque des groupes spéciaux orthogonaux des réseaux euclidiens E_7, E_8 et $\mathrm{E}_8 \oplus \mathrm{A}_1$. En utilisant la théorie d'Arthur, nous en déduisons des informations sur les paramètres de Satake des représentations automorphes des groupes linéaires découvertes par Chenevier et Renard dans [19]. Nos résultats corroborent notamment une conjecture de Bergström, Faber et van der Geer sur la fonction zêta de Hasse-Weil de l'espace de module des courbes de genre 3 à 17 points marqués.

2.1 Introduction.

Donnons-nous $n \equiv 0, \pm 1 \bmod 8$ un entier positif, et plaçons-nous dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire usuel $(x_i) \cdot (y_i) = \sum_i x_i y_i$. On définit $\mathcal{L}_n$ l'ensemble des réseaux pairs $L \subset \mathbb{R}^n$ tels que $\det(L) = 1$ si n est pair, et $\det(L) = 2$ sinon. Le groupe $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ a une action naturelle sur $\mathcal{L}_n$, et on pose $X_n = \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \setminus \mathcal{L}_n$.

On s'intéressera plus particulièrement aux cas où $n \in \{7, 8, 9\}$. Ces cas ont notamment la propriété que X_n est réduit à un seul élément, à savoir respectivement la classe des "réseaux de racines" E_7, E_8 et $\mathrm{E}_8 \oplus \mathrm{A}_1$ dont les définitions sont rappelées au paragraphe 2.2.1.

Si on considère (W, ρ) une représentation de dimension finie de $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ sur $\mathbb{C}$, on définit alors l'espace des formes automorphes de poids W pour SO_n comme :

$$\mathcal{M}_W(\mathrm{SO}_n) := \{f : \mathcal{L}_n \to W \,|\, (\forall \gamma \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R}))\, f(\gamma \cdot L) = \rho(\gamma) \cdot f(L)\}\,.$$

C'est un espace vectoriel de dimension finie.

Soient A un groupe abélien fini, et $L_1, L_2 \in \mathcal{L}_n$. On dit que L_1 et L_2 sont A-voisins si :

$$L_1/(L_1 \cap L_2) \simeq L_2/(L_1 \cap L_2) \simeq A$$

Si $A = (\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^k$, on parle de $d, \ldots, d$-voisins (et de d-voisins si $k = 1$). Si p désigne un nombre premier, et q une puissance de p, alors il est facile de construire tous les q-voisins ou

les $p, \dots, p$-voisins d'un $L \in \mathcal{L}_n$ donné (comme rappelé aux proposition-définitions 2.2.18 et 2.2.17). Notons au passage que la construction des d-voisins (et plus particulièrement des q-voisins) d'un réseau $L \in \mathcal{L}_n$ fixé fait intervenir l'ensemble $C_L(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})$ des droites isotropes de L/dL, où on entend par droite isotrope un $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ module libre de rang 1 sur lequel la forme quadratique à valeur dans $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ s'annule.

À la notion de A-voisins est associé un "opérateur de Hecke" T_A sur chaque espace de formes automorphes $\mathcal{M}_W(\mathrm{SO}_n)$ défini par la formule :

$$(\forall L \in \mathcal{L}_n)\,(\forall f \in \mathcal{M}_W(\mathrm{SO}_n))\ \ \mathrm{T}_A(f)(L) = \sum_{L'\ \ A-\text{voisin de } L} f(L')$$

Le premier but de notre travail est de déterminer la trace de T_A sur les espaces $\mathcal{M}_W(\mathrm{SO}_n)$ pour toute représentation irréductible W de SO_n et $n \in \{7, 8, 9\}$. Notre point de départ est le suivant :

Proposition 2.1.1. *Supposons que X_n est réduit à un élément (c'est-à-dire que $n \leq 9$). Soit $L_0 \in \mathcal{L}_n$, et $\mathrm{vois}_A(L_0)$ l'ensemble de ses A-voisins. Le groupe $\mathrm{SO}(L_0)$ a une action naturelle sur $\mathrm{vois}_A(L_0)$. On note $\mathcal{V}_j$ les orbites de cette action, et pour chaque j on choisit un élément $g_j \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ tel que $g_j \cdot L_0 \in \mathcal{V}_j$ (ce qui est toujours possible comme $|X_n| = 1$). Alors on a l'égalité :*

$$\mathrm{tr}\left(\mathrm{T}_A | \mathcal{M}_W(\mathrm{SO}_n)\right) = \frac{1}{|\mathrm{SO}(L_0)|} \cdot \left(\sum_j \left(|\mathcal{V}_j| \cdot \sum_{\gamma \in \mathrm{SO}(L_0)} \mathrm{tr}\left(\gamma g_j | W\right) \right) \right).$$

Dans cet énoncé, on désigne par $\mathrm{SO}(L)$, pour $L \in \mathcal{L}_n$, le sous-groupe des éléments $g \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ tels que $gL = L$, qui est un groupe fini. On dispose d'un énoncé analogue mais plus technique, sans l'hypothèse $|X_n| = 1$, détaillé au paragraphe 2.3.1.

Afin de calculer explicitement cette formule, nous devons déterminer les termes qui y interviennent, ce qui fait l'objet des chapitres 2.4 et 2.5.

Au paragraphe 2.4.2 : on explique comment déterminer le groupe $\mathrm{SO}(L_0)$, qui est très proche du groupe de Weyl du système de racines associé à L_0.

Au paragraphe 2.4.3 : on donne un algorithme pour déterminer les orbites de $\mathrm{vois}_A(L_0)$ pour l'action de $\mathrm{SO}(L_0)$. On se restreint ici au cas où $A \simeq \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ pour q une puissance d'un nombre premier impair. Notre algorithme nous retourne pour chaque orbite $\mathcal{V}_j$ la quantité $|\mathcal{V}_j|$ ainsi qu'un élément $x_j \in C_{L_0}(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$ dont le q-voisin associé $L_0'(x_j)$ est dans l'orbite $\mathcal{V}_j$.

Au paragraphe 2.4.4 : on donne un algorithme qui, à partir d'une droite isotrope $x_j \in C_{L_0}(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$, détermine une transformation $g_j \in \mathrm{SO}_n(R)$ vérifiant : $g_j(L_0) = L_0'(x_j)$. Ce même algorithme permet dans un cadre plus général de déterminer, à partir d'une famille $\mathbb{Z}$-génératrice d'un réseau L_0' isomorphe à L_0, une isométrie transformant L_0 en L_0'.

Enfin, les traces de la forme $\mathrm{tr}(\gamma|W)$ pour $\gamma \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ sont calculées au moyen de la formule des caractères de Weyl, ou plus exactement de sa version "dégénérée" étudiée dans [16, Ch. 1] et dans [19, Ch. 2], rappelée ici au paragraphe 2.3.2.

Notre algorithme est d'autant plus long à exécuter que $|A|$ et que n sont grands. C'est pourquoi nous nous restreignons à $n \leq 9$ et même à $q \leq 53$ (pour $n = 7$), $q \leq 13$ (pour $n = 8$) et $q \leq 7$ (pour $n = 9$).

Les cas où A est un 2-groupe présentent certaines particularités. On les étudie au chapitre 2.5. Les orbites des $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^k$-voisins et des 4-voisins des réseaux E_7 et E_8 sont étudiées au paragraphe 2.5.1. On a notamment le résultat suivant :

Proposition 2.1.2. *Pour $L = \mathrm{E}_7$ ou $L = \mathrm{E}_8$, pour $1 \leq i \leq 3$, le groupe $\mathrm{SO}(L)$ agit transitivement sur l'ensemble des $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^i$-voisins de L.*

Pour $L = \mathrm{E}_7$ ou $L = \mathrm{E}_8$, le groupe $\mathrm{SO}(L)$ agit transitivement sur l'ensemble des 4-voisins de L.

Il y a deux orbites de $2,2,2,2$-voisins de E_8 pour l'action de $\mathrm{SO}(\mathrm{E}_8)$, dont la réunion est l'unique orbite des $2,2,2,2$-voisins de E_8 pour l'action de $\mathrm{O}(\mathrm{E}_8)$.

Au final, nous obtenons dans tous ces cas de tables des valeurs de $\mathrm{tr}(\mathrm{T}_A|\mathcal{M}_W(\mathrm{SO}_n))$ pour des représentations irréductibles W arbitraires. Certaines de ces valeurs sont disponibles dans [48].

Au chapitre 2.7, nous rappelons, en suivant Arthur [4] et Chenevier–Renard [19], comment les formes automorphes pour SO_n étudiées ci-dessus sont "construites" à partir de certaines représentations automorphes des groupes linéaires. Cela nous permet, par un procédé de "récurrence sur n" décrit au paragraphe 2.7.4, d'utiliser nos calculs pour déterminer des paramètres de Satake des représentations des groupes linéaires mises en jeu. Soyons plus précis.

Soit $n \geq 1$ un entier. Soit $\Pi^{\perp}_{\mathrm{alg}}(\mathrm{PGL}_n)$ l'ensemble des (classes d'isomorphisme de) représentations automorphes cuspidales de PGL_n sur $\mathbb{Q}$ ayant les propriétés suivantes :

(*i*) π_p est non ramifiée pour tout premier p,

(*ii*) π_∞ est algébrique régulière,

(*iii*) π est isomorphe à sa contragrédiente $\pi^\vee$.

Rappelons la signification de (ii). Suivant Harish-Chandra, π_∞ admet un caractère infinitésimal, que l'on peut voir suivant Langlands comme une classe de conjugaison semisimple dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ ([45, §2]). La condition (ii) signifie que les valeurs propres de cette classe de conjugaison sont de la forme $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n$ avec $\lambda_i \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ et $\lambda_i - \lambda_j \in \mathbb{Z}$ pour tout i, j. Les λ_i sont appelés les poids de π, et vérifient $\lambda_{n-i+1} + \lambda_i = 0$ pour $1 \leq i \leq n$ grâce à la condition (iii).

Rappelons enfin que si $\pi \in \Pi^{\perp}_{\mathrm{alg}}(\mathrm{PGL}_n)$ et si p est premier, alors suivant Langlands [45] l'isomorphisme de Satake associe à π_p une classe de conjugaison semisimple dans $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$, qui sera notée $\mathrm{c}_p(\pi)$.

Dans leur travail [19], Chenevier et Renard ont déterminé pour $n \leq 8$ (et $n \neq 7$ en général), le nombre d'éléments de $\Pi^{\perp}_{\mathrm{alg}}(\mathrm{PGL}_n)$ de poids donné. La question qui s'est posée, en fait le but de notre travail, est d'étudier les paramètres de Satake des ces représentations, du moins pour les premiers poids pour lesquelles il en existe (auquel cas il y en a le plus souvent seulement une ou deux). Soulignons que les résultats de [19] ne sont plus conditionnels, grâce notamment aux travaux récents de Waldspurger [82], Kaletha [41], Taïbi [76] et Arancibia–Moeglin–Renard [2].

Nous obtenons les résultats suivants. Les notations $\Delta_{w_1,\ldots,w_n}$, $\Delta^k_{w_1,\ldots,w_n}$, $\Delta^*_{w_1,\ldots,w_n}$ et ${\Delta^*}^k_{w_1,\ldots,w_n}$ qui interviennent dans les tables 2.1 à 2.11 sont expliquées au paragraphe 2.7.3.

Théorème 2.1.3. *Soient $25 \geq w_1 > w_2 > w_3 \geq 1$ des entiers impairs, tels que l'ensemble Π des éléments $\pi \in \Pi^{\perp}_{\mathrm{alg}}(\mathrm{PGL}_6)$ dont les poids sont les $\pm\frac{w_1}{2}, \pm\frac{w_2}{2}, \pm\frac{w_3}{2}$ est non vide. D'après [19, Table 7], l'ensemble Π possède alors un ou deux éléments.*

(*i*) *Si $\Pi = \{\pi\}$ est un singleton, alors le polynôme $\det\left(2^{w_1/2}X \cdot \mathrm{Id} - \mathrm{c}_2(\pi) \mid V_{\mathrm{St}}\right) \in \mathbb{Z}[X]$ est donné par la table 2.2.*

(*ii*) *Si on a $|\Pi| = 2$, alors le polynôme unitaire de degré 2 dont les racines sont les $2^{w_1/2} \cdot \mathrm{Trace}(\mathrm{c}_2(\pi)|V_{\mathrm{St}})$ pour $\pi \in \Pi$ est donné par la table 2.3.*

(*iii*) *Pour $p \leq 53$ un nombre premier impair, la quantité $p^{w_1/2} \cdot \sum_{\pi \in \Pi} \mathrm{Trace}\,(\mathrm{c}_p(\pi)|V_{\mathrm{St}})$ est un entier, donné par les tables 2.4, 2.5 et 2.6.*

Théorème 2.1.4. *Soient $25 \geq w_1 > w_2 > w_3 > w_4 \geq 1$ des entiers impairs, tels que l'ensemble Π des éléments $\pi \in \Pi^{\perp}_{\mathrm{alg}}(\mathrm{PGL}_8)$ dont les poids sont les $\pm\frac{w_1}{2}, \pm\frac{w_2}{2}, \pm\frac{w_3}{2}, \pm\frac{w_4}{2}$ est non vide.*

Pour $p \leq 7$ un nombre premier impair, la quantité $p^{w_1/2} \cdot \sum_{\pi \in \Pi} \mathrm{Trace}\,(\mathrm{c}_p(\pi)|V_{\mathrm{St}})$ est un entier, donné par la table 2.7.

Théorème 2.1.5. *Soient $26 \geq w_1 > w_2 > w_3 \geq 2$ des entiers pairs, tels que l'ensemble Π des éléments $\pi \in \Pi^{\perp}_{\mathrm{alg}}(\mathrm{PGL}_7)$ dont les poids sont les $\pm\frac{w_1}{2}, \pm\frac{w_2}{2}, \pm\frac{w_3}{2}, 0$ est non vide. D'après [19, Table 10], l'ensemble Π possède alors un seul élément.*

(*i*) *Le polynôme $\det\left(2^{w_1/2}X \cdot \mathrm{Id} - \mathrm{c}_2(\pi) \mid V_{\mathrm{St}}\right) \in \mathbb{Z}[X]$ pour π l'unique élément de Π est donné par la table 2.8.*

(*ii*) *Pour $p \leq 13$ un nombre premier impair, la quantité $p^{w_1/2} \cdot \mathrm{Trace}\,(\mathrm{c}_p(\pi)|V_{\mathrm{St}})$ pour π l'unique élément de Π est un entier donné par la table 2.9.*

Théorème 2.1.6. *Soient $26 \geq w_1 > w_2 > w_3 > w_4 \geq 0$ des entiers pairs, tels que l'ensemble Π des éléments $\pi \in \Pi^{\perp}_{\mathrm{alg}}(\mathrm{PGL}_8)$ dont les poids sont les $\pm\frac{w_1}{2}, \pm\frac{w_2}{2}, \pm\frac{w_3}{2}, \pm\frac{w_4}{2}$ est non vide. D'après [19, Table 9], l'ensemble Π possède alors un seul élément.*

(*i*) *Le polynôme $\det\left(2^{w_1/2}X \cdot \mathrm{Id} - \mathrm{c}_2(\pi) \mid V_{\mathrm{St}}\right) \in \mathbb{Z}[X]$ pour π l'unique élément de Π est donné par la table 2.10.*

(*ii*) *Pour $p \leq 13$ un nombre premier impair, la quantité $p^{w_1/2} \cdot \mathrm{Trace}\,(\mathrm{c}_p(\pi)|V_{\mathrm{St}})$ pour π l'unique élément de Π est un entier donné par la table 2.11.*

Pour $\pi \in \Pi^{\perp}_{\mathrm{alg}}(\mathrm{PGL}_n)$, si l'on pose $\sum_{i=0}^{n} a_i \cdot X^i = \det\left(2^{w_1/2}X \cdot \mathrm{Id} - \mathrm{c}_2(\pi)|V_{\mathrm{St}}\right)$, alors les a_i vérifient : $a_{n-i} = 2^{(n-2i)\cdot w_1/2} \cdot a_i$, et on n'a pas explicité tous les monômes des polynômes donnés aux tables 2.2, 2.8 et 2.10.

Signalons que nous disposons de nombreuses indications que nos calculs finaux sont corrects ! Par exemple, notre méthode permet également de déterminer des paramètres de Satake de représentations associées à des formes modulaires classiques, ou de Siegel en genre 2, cas où ils étaient déjà connus (par exemple par van der Geer [79] ou Chenevier–Lannes [18]). Nous renvoyons au paragraphe 2.6.2 pour quelques exemples détaillés de ces vérifications.

De plus, nous pouvons souvent calculer de différentes manières un paramètre de Satake donné, et vérifier que les résultats sont bien les mêmes. Signalons enfin que nos résultats montrent que pour les trois représentations π de $\Pi^{\perp}_{\mathrm{alg}}(\mathrm{PGL}_7)$ dont les poids sont de la forme $a+b > a > b > 0 > -b > -a > -a-b$ avec $a+b \leq 13$ (voir les trois premières lignes de la table 2.8), alors le paramètre de Satake $\mathrm{c}_2(\pi)$ est conjugué à un élément de G_2, conformément à une conjecture de [19] (voir la page 10 de l'introduction ainsi que la table 10).

Terminons par mentionner un lien entre ce travail et une conjecture de Bergström, Faber et van der Geer [31] sur la fonction zêta de Hasse-Weil de l'espace $\overline{\mathcal{M}_{3,n}}$ de module des courbes stables de genre 3 munies de n points marqués (qui est propre et lisse sur $\mathbb{Z}$). En effet, ces auteurs ont mis en évidence de manière expérimentale l'existence de deux "motifs" de poids 23 et de dimension 6 dans $\mathrm{H}^{23}(\overline{\mathcal{M}_{3,17}})$, et ont déterminé le polynôme caractéristique de leur Frobenius en 2. D'autre part, Chenevier et Renard ont trouvé exactement 7 représentations $\pi \in \Pi^{\perp}_{\mathrm{alg}}(\mathrm{PGL}_6)$ dont le plus grand poids est $\frac{23}{2}$ (et aucune de plus grand poids $< \frac{23}{2}$). Les calculs faits ici montrent que les polynômes caractéristiques des paramètres de Satake en $p = 2$ de deux des 7 représentations susmentionnées, à savoir celles de poids $\pm\frac{23}{2}, \pm\frac{13}{2}, \pm\frac{5}{2}$ et $\pm\frac{23}{2}, \pm\frac{15}{2}, \pm\frac{3}{2}$, sont exactement ceux trouvés par Bergström, Faber et van der Geer ! Cela répond à une question que nous avaient posée ces auteurs.

Cet article a été écrit dans le cadre de ma thèse sous la direction de Gaëtan Chenevier. Je le remercie pour son aide ainsi que pour les choix qu'il m'a incité à prendre et qui ont beaucoup contribué à mes résultats.

2.2 Résultats préliminaires.

Dans toute la suite, on se place dans un espace euclidien V de dimension n, muni de son produit scalaire $x \cdot y$, et on note $q : V \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x \cdot x}{2}$ la forme quadratique associée. On considérera souvent le cas où $V = \mathbb{R}^n$, muni de sa structure euclidienne, avec pour base canonique associée $(e_i)_{i \in \{1,\dots,n\}}$. On notera alors $(x_i) \cdot (y_i) = \sum_i x_i y_i$ le produit scalaire usuel.

2.2.1 Les réseaux de $\mathbb{R}^n$.

Définition 2.2.1 (Réseaux entiers et pairs)**.** *Soit $L \subset V$ un réseau. On dit que L est entier si :*

$$(\forall x, y \in L)\ x \cdot y \in \mathbb{Z}.$$

Si l'on se donne un réseau $L \subset V$ entier, il est dit pair si :

$$(\forall x \in L)\ x \cdot x \in 2\mathbb{Z}.$$

Définition 2.2.2 (Dual et résidu d'un réseau)**.** *Soit $L \subset V$ un réseau. On définit $L^\sharp$ le dual de L par :*

$$L^\sharp = \{y \in V | (\forall x \in L)\ y \cdot x \in \mathbb{Z}\}.$$

En particulier, L est entier si, et seulement si, $L \subset L^\sharp$. Dans ce cas on définit le résidu de L comme le quotient :

$$\text{rés } L = L^\sharp / L.$$

Ce quotient est muni d'une forme quadratique rés $L \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ *définie par $x \mapsto q(x) \bmod \mathbb{Z}$ appelée forme d'enlacement.*

Définition 2.2.3 (Déterminant d'un réseau)**.** *Soit L un réseau entier. On note* $\det(L)$ *son déterminant, qui est encore le déterminant de la matrice de Gram d'une base quelconque de L. On a la relation bien connue :*

$$\det(L) = |\text{rés } L|.$$

Définition 2.2.4 (Racines d'un réseau)**.** *Soit $L \subset V$ un réseau entier. On définit l'ensemble des racines de L comme l'ensemble $R(L)$ (qui est fini, et éventuellement vide) :*

$$R(L) = \{x \in L \mid x \cdot x = 2\}.$$

C'est un système de racines du $\mathbb{R}$-espace vectoriel qu'il engendre au sens de [11, Ch. VI, §1.1, Définition 1], ce qui justifie la terminologie (c'est même un système de racines de type ADE).

On reprend les notations de [11, Ch. VI, §1] pour les notions relatives aux systèmes de racines (systèmes de racines, chambre et groupe de Weyl, longueur d'un élément du groupe de Weyl, diagramme de Dynkin, etc.). On expose ici quelques notations et résultats qu'on utilisera.

Proposition 2.2.5 (Les chambres de Weyl et les générateurs du groupe de Weyl)**.** *Soient R un système de racines de V, W son groupe de Weyl, et C une chambre de R. Alors :*

(*i*) *Pour tout $x \in V$, il existe un élément $w \in W$ tel que $w(x) \in \overline{C}$.*

(*ii*) *Pour toute chambre C', il existe un unique élément $w \in W$ tel que $w(C') = C$.*

(*iii*) *Le groupe W est engendré par l'ensemble des réflexions orthogonales par rapport aux murs de C.*

Démonstration. voir [11, Ch. V, §3, Théorème 1]. □

Le corollaire suivant est une conséquence du (ii) :

Corollaire 2.2.6. *Soit R un système de racines, W son groupe de Weyl, C une chambre, et ρ un élément de C. Alors :*

$$(\forall w, w' \in W)\ w = w' \Leftrightarrow w(\rho) = w'(\rho).$$

Proposition 2.2.7. *Soient R un système de racines, W son groupe de Weyl, C une chambre, et $l : W \to \mathbb{N}$ la longueur associée à C. Soit h un mur de C, et s la symétrie orthogonale associée. Si $w \in W$, alors :*

(i) $l(s \circ w) = l(w) \pm 1$,

(ii) $l(s \circ w) > l(w)$ *si, et seulement si, les chambres C et $w(C)$ sont du même côté de h.*

Démonstration. Voir [11, Ch. V, §3, Théorème 1 (ii)]. □

On adoptera les notations suivantes :

A_n : On pose $\mathrm{A}_n = \{(x_i) \in \mathbb{Z}^{n+1} | \sum_i x_i = 0\}$. On a $R(\mathrm{A}_n) = \{\pm(e_i - e_j) | i \neq j\}$.

D_n : On pose $\mathrm{D}_n = \{(x_i) \in \mathbb{Z}^n | \sum_i x_i \equiv 0 \bmod 2\}$. On a $R(\mathrm{D}_n) = \{\pm e_i \pm e_j | i \neq j\}$.

E_8 : On pose $\mathrm{E}_8 = \mathrm{D}_8 + \mathbb{Z} \cdot e$, avec $e = \frac{1}{2}(1, \ldots, 1)$. On a $R(\mathrm{E}_8) = R(\mathrm{D}_8) \cup \left\{(x_i) = \frac{1}{2}(\pm 1, \ldots, \pm 1) | \prod_i x_i > 0\right\}$.

E_7 : On pose $\mathrm{E}_7 = e^\perp \cap \mathrm{E}_8 = \{(x_i) \in \mathrm{E}_8 | \sum_i x_i = 0\}$. On a $R(\mathrm{E}_7) = e^\perp \cap R(\mathrm{E}_8) = R(\mathrm{A}_7) \cup \left\{(x_i) = \frac{1}{2}(\pm 1, \ldots, \pm 1) | \sum_i x_i = 0\right\}$.

Proposition 2.2.8. *Soient L un réseau entier, $R = R(L)$ et W le groupe de Weyl de R. On suppose que R est un système de racines de V (en particulier, R engendre V comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel). Soient D le diagramme de Dynkin associé à un ensemble de racines simples $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ et G le sous-groupe des permutations de $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ qui sont des automorphismes de D. On pose $\mathrm{A}(R)$ (respectivement $\mathrm{O}(L)$) le sous-groupe de $\mathrm{O}(V)$ des éléments qui laissent stable R (respectivement L). On a les inclusions de groupes suivantes :*

$$W \subset \mathrm{O}(L) \subset \mathrm{A}(R) \simeq W \ltimes G.$$

De plus, si L est engendré $\mathbb{Z}$-linéairement par R, on a l'égalité : $\mathrm{O}(L) = \mathrm{A}(R)$.

Démonstration. Les inclusions $W \subset \mathrm{O}(L)$ et $\mathrm{O}(L) \subset \mathrm{A}(R)$ viennent respectivement du fait que L est un réseau entier, et que le groupe $\mathrm{O}(L)$ préserve l'ensemble R.

L'isomorphisme $\mathrm{A}(R) \simeq W \ltimes G$ vient de [11, Ch. VI, §1, Proposition 16], comme R est un système de racines de V.

Enfin, le cas où L est engendré par R est évident. □

On précise dans le corollaire qui suit les cas que l'on rencontrera le plus souvent, où les notations sont les mêmes qu'à la proposition précédente.

Corollaire 2.2.9. *Pour $L = \mathrm{E}_7$, $L = \mathrm{E}_8$ ou $L = \mathrm{E}_8 \oplus \mathrm{A}_1$, on a : $\mathrm{A}(R) = \mathrm{O}(L) = W$.*

Pour $L = \mathrm{A}_n$ $(n \geq 2)$ ou pour $L = \mathrm{D}_n$ $(n \geq 5)$, on a $G \simeq \mathcal{S}_2 \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Pour $L = \mathrm{D}_4$, on a $G \simeq \mathcal{S}_3$. Dans tous ces cas, on a : $\mathrm{O}(L) = \mathrm{A}(R)$.

Démonstration. On vérifie dans un premier temps que tous ces réseaux sont bien engendrés comme $\mathbb{Z}$-modules par leurs racines. Il suffit ensuite de calculer le groupe G de la proposition précédente, ce qui se fait facilement. Notons par exemple que ce groupe est trivial lorsque le réseau L considéré est E_7, E_8 ou $\mathrm{E}_8 \oplus \mathrm{A}_1$. □

2.2.2 Les formes automorphes et les opérateurs de Hecke.

Les formes automorphes.

Définition 2.2.10 (L'ensemble $\mathcal{L}_n$)**.** *Soit $n \equiv 0, \pm 1 \bmod 8$. On définit $\mathcal{L}_n$ comme l'ensemble des réseaux pairs $L \subset \mathbb{R}^n$ tels que $\det(L) = 1$ si n est pair et $\det(L) = 2$ sinon.*

On rappelle que $\mathcal{L}_n$ est non vide pour $n \equiv 0, \pm 1 \bmod 8$. Par exemple, suivant les notations précédentes, $\mathcal{L}_n$ contient :
- le réseau $\mathrm{E}_8^{(n-7)/8} \oplus \mathrm{E}_7$ si $n \equiv -1 \bmod 8$;
- le réseau $\mathrm{E}_8^{n/8}$ si $n \equiv 0 \bmod 8$;
- le réseau $\mathrm{E}_8^{(n-1)/8} \oplus \mathrm{A}_1$ si $n \equiv 1 \bmod 8$.

Donnons nous $L_0 \in \mathcal{L}_n$ l'élément ci-dessus (selon la valeur de n). On définit O_n le schéma en groupes affine sur $\mathbb{Z}$ associé à la forme quadratique $L_0 \to \mathbb{Z}$, $x \mapsto q(x)$. Il s'agit de l'objet noté O_{L_0} dans [18, Ch. II, §1]. On définit de même $\mathrm{SO}_n \subset \mathrm{O}_n$ (introduit aussi dans [18, Ch. II, §1]).

Pour faire court, on appellera dans la suite $\mathbb{A}$-groupe un schéma en groupes affine sur $\mathbb{A}$ et de type fini, de sorte que O_n et SO_n sont des $\mathbb{Z}$-groupes (ce dernier étant même réductif).

La définition générale de la théorie des formes automorphes s'y applique, et se réduit à la définition suivante qui sera amplement suffisante pour nos besoin (voir par exemple [18, Ch. IV, §3]).

Définition 2.2.11 (Les formes automorphes pour O_n et SO_n)**.** *Soit (W, ρ) une représentation de dimension finie sur $\mathbb{C}$ de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. L'espace des formes automorphes de poids W pour O_n est défini comme :*

$$\mathcal{M}_W(\mathrm{O}_n) = \{f : \mathcal{L}_n \to W \,|\, (\forall \gamma \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}))\, f(\gamma \cdot L) = \rho(\gamma) \cdot f(L)\}\,.$$

Pour W' une représentation de dimension finie de $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ sur $\mathbb{C}$, on définit de même l'espace $\mathcal{M}_{W'}(\mathrm{SO}_n)$ des formes automorphes de poids W' pour SO_n.

Ces deux espaces sont de dimension finie.

Les A-voisins.

Rappelons d'abord quelques définitions, présentes par exemple dans [18, Ch. II, §1], qui nous seront utiles dans la suite.

Définition 2.2.12 (Espaces isotropes et lagrangiens)**.** *Soient m un entier, et C un $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$-module de type fini muni d'une forme bilinéaire symétrique non dégénérée b à valeurs dans $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.*

On dit alors qu'un sous-module I de C est isotrope si l'on a $b(x, y) = 0$ pour tous éléments x et y de I, c'est-à-dire si l'on a $I \subset I^\perp$, où $I^\perp$ désigne l'orthogonal de I.

Si l'on a l'égalité $I = I^\perp$, alors on dira que I est un lagrangien de C. Étant donnés I et J deux lagrangiens de C, ils seront dits transverses si $I \cap J = \{0\}$.

Définition 2.2.13 (Module hyperbolique)**.** *Soient m un entier, et I un $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$-module de type fini. On note $I^\sharp = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}}(I, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ le dual de I.*

On définit le module hyperbolique sur I, noté $\mathrm{H}(I)$, comme étant le $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$-module $I \oplus I^\sharp$ muni de la forme bilinéaire symétrique $((x, \phi), (y, \psi)) \mapsto \psi(x) + \phi(y)$.

En particulier, les sous-modules I et $I^\sharp$ de $\mathrm{H}(I)$ sont des lagrangiens transverses.

Rappelons de plus la définition des A-voisins :

Proposition-Définition 2.2.14 (Les A-voisins)**.** *Soient A un groupe abélien fini, et L_1, L_2 deux éléments de $\mathcal{L}_n$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) Le quotient $L_1/(L_1 \cap L_2)$ est isomorphe à A.

(ii) Le quotient $L_2/(L_1 \cap L_2)$ est isomorphe à A.

Si ces conditions sont vérifiées, on dit que L_1 et L_2 sont A-voisins, ou que L_2 est un A-voisin de L_1.

Démonstration. voir [18, Ch. III, §1] et [18, Annexe B, §3] selon la parité de n. □

Dans le cas particulier où A est de la forme $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$, on parlera de d-voisin (et plus généralement de $d, \ldots, d$-voisin si $A = \mathbb{Z}/d\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$). Dans la suite, A désignera un groupe abélien quelconque. On s'intéressera plus particulièrement aux cas où A est de la forme $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ (où $d \in \mathbb{N}^*$) ou de la forme $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ (où p est un nombre premier).

Le lemme technique suivant nous sera utile par la suite :

Lemme 2.2.15. *Soient L_1 et L_2 deux A-voisins. On pose : $M = L_1 \cap L_2$, $I_1 = L_1/M$, $I_2 = L_2/M$, et $R = (L_1^\sharp \cap L_2^\sharp)/(L_1 \cap L_2)$.*

Les inclusions de L_1, L_2 et $L_1^\sharp \cap L_2^\sharp$ dans $M^\sharp$ induisent l'isomorphisme canonique de groupes abéliens :

$$I_1 \oplus I_2 \oplus R \simeq \text{rés } M$$

De plus, l'accouplement $I_1 \times I_2 \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ induit par la forme d'enlacement de rés M *est non dégénéré. Pour cette forme, les sous-modules $I_1 \oplus I_2$ et R sont orthogonaux,* rés M *est canoniquement isomorphe à* $\mathrm{H}(I_1) \oplus$ rés L_1 *(et cet isomorphisme envoie R sur* rés L_1*), et I_2 est un lagrangien de* $\mathrm{H}(I_1)$ *transverse à I_1 et orthogonal à* rés L_1.

Démonstration. voir [18, Ch. III, §1, Proposition 1.1] et [18, Annexe B, §3, proposition 3.1] selon la parité de n. □

L'utilisation que l'on fera des A-voisins nous impose de prendre un point de vue asymétrique : on souhaite déterminer, pour un réseau L fixé, l'ensemble de ses A-voisins. On rappelle que la notation $C_L(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})$ a été présentée en introduction. En tant que sous-groupes de $\mathrm{O}(V)$, les groupes $\mathrm{O}(L)$ et $\mathrm{SO}(L)$ agissent naturellement sur l'ensemble $C_L(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})$ et sur l'ensemble des A-voisins de L. La proposition suivante nous donne, selon les choix de A, une paramétrisation des A-voisins d'un réseau L donné :

Proposition 2.2.16. *Soit $L \in \mathcal{L}_n$.*

(i) Si $A = \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$, alors l'ensemble des A-voisins de L est en bijection naturelle avec $C_L(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})$.

(ii) Si $A = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^r$, alors l'ensemble des A-voisins L' de L est en bijection avec l'ensemble des couples (X, I'), où X est un espace totalement isotrope de L/pL de dimension r, et I' un lagrangien de $\mathrm{H}(L/M)$ *transverse à L/M (avec M l'image réciproque de $X^\perp$ par $L \to L/pL$, et L' image réciproque de I' par $M^\sharp \to$* rés M*).*

Ces deux bijections sont détaillées dans les propositions-définitions 2.2.18 et 2.2.17 qui suivent. De plus, elles commutent aux actions naturelles de $\mathrm{O}(L)$.

Démonstration. Pour le point (i) : la bijection entre les A-voisins de L et les points de $\mathbb{C}_L(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})$ est détaillée dans [18, Ch.III, §1]. On montre à la proposition-définition 2.2.18 qu'elle commute bien aux actions de $\mathrm{O}(L)$ sur l'ensemble des A-voisins et sur $C_L(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})$ (en donnant explicitement cette bijection).

Pour le point (ii) : on se donne $L \in \mathcal{L}_n$, et L' un A-voisin de L, et on se place pour simplifier dans le cas où $n \equiv 0 \bmod 8$ (les autres cas se traitant de la même manière).

Suivant les notations du lemme 2.2.15, on a $R \simeq$ rés $L = 0$. On note $M = L \cap L'$, $I = L/M$ et $I' = L'/M$. On pose aussi $\phi : L \to L/pL$ la réduction modulo p dans L. On fait les constatations suivantes :

- Du fait des inclusions $pL' \subset M \subset L$, le $\mathbb{Z}/p$-espace vectoriel $X = \phi(pL')$ a bien un sens, et c'est même un $\mathbb{Z}/p$-espace vectoriel totalement isotrope de dimension r dans L/pL. L'isotropie vient du fait que L' est entier (donc l'image par ϕ de tous les éléments de pL' sont isotropes dans L/pL), et la dimension vient des isomorphismes évidents : $X \simeq pL'/(pL \cap pL') \simeq L'/M \simeq A$ (où le dernier isomorphisme provient du fait que L et L' sont des A-voisins).
- Notons que M et X satisfont bien à l'égalité $\phi(M) = X^\perp$. Comme $M = L \cap L' \subset L'$ et que L' est entier, on déduit que : $(\forall x \in pL')(\forall y \in M)\ x \cdot y \equiv 0 \bmod p$, et ainsi on a déjà l'inclusion $\phi(M) \subset X^\perp$. L'égalité vient alors de l'égalité des dimensions de $\phi(M)$ et de $X^\perp$ (vus comme $\mathbb{Z}/p$-espaces vectoriels). On a en effet : $\dim_{\mathbb{Z}/p}\phi(M) = n - r = \dim_{\mathbb{Z}/p}\phi(L) - \dim_{\mathbb{Z}/p}X = \dim_{\mathbb{Z}/p}(X^\perp)$. L'inclusion $pL \subset M$ nous permet de dire que M est bien l'image réciproque de $X^\perp = \phi(M)$ par ϕ.
- D'après le lemme 2.2.15, les $\mathbb{Z}/p$-espaces vectoriels I et I' sont deux lagrangiens transverses de rés $M \simeq \mathrm{H}(I)$. De plus, L' est entièrement déterminé par le choix de M et de I', puisque L' est l'image inverse de I' par l'application $M^\sharp \to$ rés M.

D'après ce qui précède, l'application $L' \mapsto (X, I')$ est bien définie et est injective (le réseau $L \cap L'$ étant l'image inverse de $X^\perp$ par $L \to L/pL$). Il ne reste qu'à démontrer la surjectivité de cette application, ce que nous ferons par un argument de cardinalité dans la démonstration de la proposition-définition 2.2.17.

On vérifiera aussi dans la proposition-définition 2.2.17 que cette bijection commute bien aux actions de $\mathrm{O}(L)$. □

Proposition-Définition 2.2.17 (La création des $p, \ldots, p$-voisin)**.** *Soient L un réseau de $\mathcal{L}_n$ et $A = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^r$. Soient X un espace totalement isotrope de L/pL de dimension r, et (x_i) une base de X. On considère une famille (v_i), avec $v_i \in L$ et $v_i \equiv x_i \bmod pL$, qui vérifie :*

$$\begin{cases} v_i \cdot v_i \equiv 0 \bmod 2p^2, \\ v_i \cdot v_j \equiv 0 \bmod p^2 \text{ pour } i \neq j. \end{cases}$$

Alors le réseau $L'((v_i)_i)$ défini par :

$$\begin{cases} M = \{v \in L | (\forall i) v_i \cdot v \equiv 0 \bmod p\}, \\ L'\left((v_i)_i\right) = M + \sum_i \mathbb{Z}\dfrac{v_i}{p}, \end{cases}$$

est un A-voisin de L tel que $M = L \cap L'\left((v_i)_i\right)$. Le réseau M ne dépend que du choix de X, et est égal à l'image réciproque de $X^\perp$ par la projection $L \to L/pL$.

De plus, une fois la famille (x_i) choisie (et donc une fois le réseau M fixé), l'ensemble des réseaux $L'((v_i)_i)$ ainsi obtenus (qui ne dépendent que du choix des relèvements (v_i)) décrit l'ensemble des A-voisins L' de L tels que $L \cap L' = M$.

Le réseau $L'((v_i)_i)$ sera appelé le $p, \ldots, p$-voisin de L associé à la famille (v_i).

Démonstration. Montrons d'abord que L' est un A-voisin de L tel que $M = L \cap L'$. Comme la famille (x_i) est $\mathbb{Z}/p$-libre dans L/pL, on déduit déjà que $M = L \cap L'$. Pour la même raison, l'image par $L' \to L'/M$ de la famille (v_i/p) est $\mathbb{Z}/p$-libre dans L'/M : par définition de L', c'est une $\mathbb{Z}/p$-base de L'/M, et on déduit que $L'/M \simeq A$.

Il faut maintenant montrer que $L' \in \mathcal{L}_n$, c'est-à-dire que L' est pair et que $\det(L) = \det(L')$. Le premier point provient des congruences satisfaites par les $v_i \cdot v_j$ et de la définition

de M. L'égalité $\det(L) = \det(L')$ vient du fait que l'on a aussi $L/M \simeq A$. En effet, comme le produit scalaire est non dégénéré dans L/pL, on peut trouver une famille (u_i) d'éléments de L vérifiant :

$$\begin{cases} u_i \cdot x_i \equiv 1 \bmod p, \\ u_i \cdot x_j \equiv 0 \bmod p \text{ pour } i \neq j. \end{cases}$$

L'image de la famille (u_i) par $L \to L/M$ est une $\mathbb{Z}/p$-base de L/M, et on a bien $L/M \simeq A$.

Ainsi, L et L' sont bien des A-voisins qui vérifient $L \cap L' = M$.

Montrons maintenant que tous les A-voisins L' de L tels que $L \cap L' = M$ sont obtenus de cette façon. Cela conclura également la démonstration de la proposition 2.2.16 (ii). Nous savons déjà qu'il y en a au plus autant que de lagrangiens transverses à A dans $\mathrm{H}(A)$: cela découle en effet de l'injectivité de l'application $L' \mapsto (X, I')$ démontrée ci-dessus. Il suffit donc de construire autant de tels A-voisins qu'il y a de lagrangiens transverses à A dans $\mathrm{H}(A)$ pour conclure. On rappelle au passage que ces lagrangiens sont en bijection avec les formes alternées sur A : il y en a donc autant que de matrices antisymétriques à diagonale nulle de taille $r \times r$ à coefficients dans $\mathbb{Z}/p$ (puisque $A = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^r$ ici).

Reprenons les notations de la proposition. Soient (v_i) et (v_i') deux familles avec $v_i, v_i' \in L$ et $v_i \equiv v_i' \equiv x_i \bmod pL$ qui vérifient les congruences :

$$\begin{cases} v_i \cdot v_i \equiv v_i' \cdot v_i' \equiv 0 \bmod 2p^2, \\ v_i \cdot v_j \equiv v_i' \cdot v_j' \equiv 0 \bmod p^2 \text{ pour } i \neq j. \end{cases}$$

On pose $v_i' = v_i + p \cdot w_i$, avec $w_i \in L$. Les v_i' vérifient les congruences précédentes si, et seulement si, les w_i vérifient :

$$\begin{cases} w_i \cdot x_i \equiv 0 \bmod p, \\ w_i \cdot x_j + w_j \cdot x_i \equiv 0 \bmod p \text{ pour } i \neq j. \end{cases}$$

Enfin, les réseaux $L'((v_i)_i)$ et $L'((v_i')_i)$ sont égaux si, et seulement si : $(\forall i)\ w_i \in M$, c'est-à-dire si, et seulement si :

$$(\forall i, j)\ w_i \cdot x_j \equiv 0 \bmod p.$$

Ainsi, la matrice $(w_i \cdot x_j \bmod p)_{i,j}$ est une matrice antisymétrique à diagonale nulle. De plus, elle est nulle si, et seulement si, les réseaux $L'((v_i)_i)$ et $L'((v_i')_i)$ sont égaux.

Il reste donc à montrer que toutes les matrices antisymétriques à diagonale nulle de taille $r \times r$ et à coefficients dans $\mathbb{Z}/p$ peuvent être ainsi obtenues, ce qui vient du fait que le produit scalaire est non dégénéré dans L/pL. Au final, on déduit qu'il y a exactement autant de A-voisins L' de L tels que $L \cap L' = M$ que de lagrangiens de $\mathrm{H}(A)$ transverses à A.

De même que dans la démonstration de la proposition-définition 2.2.18, il est facile de voir que, pour $\gamma \in \mathrm{O}(L)$, on a l'égalité : $\gamma(L'((v_i)_i)) = L'(\gamma(v_i)_i)$. On en déduit finalement que la bijection entre les A-voisins de L et les couples de la forme (X, I), où X est un espace totalement isotrope de L/pL de dimension r, et I un lagrangien de $\mathrm{H}(L/M)$ (avec M l'image réciproque de $X^\perp$ par $L \to L/pL$) commute bien aux actions naturelles de $\mathrm{O}(L)$. □

Proposition-Définition 2.2.18 (La création des d-voisins)**.** *Soient L un réseau de $\mathcal{L}_n$ et $d \in \mathbb{N}^*$. Si l'on se donne une droite isotrope $x \in C_L(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})$, on peut lui associer le module M, image inverse de $x^\perp$ par l'homomorphisme $L \to L/dL$. Choisissons enfin $v \in L$, dont l'image dans L/dL engendre x, et tel que $v \cdot v \equiv 0 \bmod 2d^2$. Alors le réseau $L'(x)$ défini par :*

$$L'(x) = \mathbb{Z} \cdot \frac{v}{d} + M$$

est un d-voisin de L qui ne dépend que du choix de x.

De plus, l'application $x \mapsto L'(x)$ est une bijection entre $C_L(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})$ et l'ensemble $\mathrm{Vois}_d(L)$ *des d-voisins de L.*

Démonstration. La nature bijective de cette application est développée dans [18, Ch. III, §1, Propositions 1.4 et 1.5]. Il suffit de vérifier que cette bijection commute aux actions de $\mathrm{O}(L)$. Si l'on se donne $\gamma \in \mathrm{O}(L)$, alors γ conserve l'orthogonalité ainsi que le produit scalaire, et on a les implications suivantes :

$$\begin{cases} M = x^\perp \Rightarrow \gamma(M) = (\gamma(x))^\perp, \\ v \cdot v \equiv 0 \bmod 2d^2 \Rightarrow \gamma(v) \cdot \gamma(v) \equiv 0 \bmod 2d^2, \\ (\forall p|d)\ v \notin pL \Rightarrow (\forall p|d)\ \gamma(v) \notin pL. \end{cases}$$

Ainsi, on a l'égalité : $\gamma(L'(x)) = L'(\gamma(x))$. □

L'anneau des opérateurs de Hecke associé aux A-voisins.

On rappelle qu'on désigne ici par $\mathbb{A}$-groupe un $\mathbb{A}$-schéma en groupes affine et de type fini. On donne ici quelques rappels classiques qui suivent la présentation et les notations de [18, Ch. IV, §2].

Définition 2.2.19 (L'anneau des opérateurs de Hecke)**.** *Soit Γ un groupe, et soit X un Γ-ensemble transitif. On définit l'anneau des opérateurs de Hecke de X comme le sous-anneau $\mathrm{H}(X) \subset \mathrm{End}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}[X])$ des endomorphismes commutant à l'action de Γ.*

Définition 2.2.20 (L'anneau de Hecke d'un $\mathbb{Z}$-groupe)**.** *Soit G un $\mathbb{Z}$-groupe. Si l'on note P l'ensemble des nombres premiers, on note $\widehat{\mathbb{Z}} = \prod_{p\in P} \mathbb{Z}_p$, et $\mathbb{A}_f = \mathbb{Q} \otimes \widehat{\mathbb{Z}}$ l'anneau des adèles finis de $\mathbb{Q}$. On définit alors le $G(\mathbb{A}_f)$-ensemble : $\mathcal{R}(G) = G(\mathbb{A}_f)/G(\widehat{\mathbb{Z}})$. L'anneau de Hecke de G est alors défini comme :*

$$\mathrm{H}(G) = \mathrm{H}(\mathcal{R}(G))$$

où $G(\mathbb{A}_f)$ joue le rôle de Γ dans la définition précédente.

Proposition-Définition 2.2.21. *On considère G un $\mathbb{Z}_p$-groupe, et on garde les notations précédentes. Pour $p \in P$, on définit alors le $G(\mathbb{Q}_p)$-ensemble : $\mathcal{R}_p(G) = G(\mathbb{Q}_p)/G(\mathbb{Z}_p)$. On pose :*

$$\mathrm{H}_p(G) = \mathrm{H}(\mathcal{R}_p(G))$$

où $G(\mathbb{Q}_p)$ joue le rôle de Γ.

On a un homomorphisme d'anneaux injectif canonique : $\mathrm{H}_p(G) \to \mathrm{H}(G)$, et on verra donc simplement $\mathrm{H}_p(G)$ comme un sous-ensemble de $\mathrm{H}(G)$.

On a alors l'isomorphisme suivant :

$$\bigotimes_{p\in P} \mathrm{H}_p(G) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}(G).$$

Démonstration. Voir [18, Ch. IV, §2.5]. □

On s'intéressera aux cas où G est le $\mathbb{Z}$-groupe O_n ou SO_n, définis au paragraphe 2.2.2. Dans ces cas, les anneaux $\mathrm{H}(G)$ sont décrits en détail dans [18, Ch.IV, §2], et on rappelle ici quelques points importants pour nous.

Fixons G l'un des deux $\mathbb{Z}$-groupes O_n ou SO_n. On rappelle que G a été défini au moyen d'un réseau $L_0 \in \mathcal{L}_n$. On vérifie facilement que $\mathcal{R}(G)$ s'identifie naturellement à l'ensemble $\{L \in \mathcal{L}_n \mid L \subset L_0 \otimes \mathbb{Q}\}$ (voir [18, Ch. IV, §1.2 et 4.4]).

On montre ensuite que l'application $G(\mathbb{R}) \times \mathcal{R}(G) \to \mathcal{L}_n,\ (g, L) \mapsto g^{-1}L$ induit une bijection :

$$G(\mathbb{Q}) \setminus (G(\mathbb{R}) \times \mathcal{R}(G)) \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}_n,$$

d'après [18, Ch. IV, §4.5].

L'action naturelle de $\mathrm{H}(G)$ sur $\mathbb{Z}[\mathcal{R}(G)]$ induit une action naturelle de $\mathrm{H}(G)$ sur $\mathbb{Z}[\mathcal{L}_n]$ (par endomorphismes $G(\mathbb{R})$-équivariants). Cette action est très concrète. Par exemple, pour tout groupe abélien fini A, on dispose d'un opérateur T_A associé à la notion de A-voisin (voir [18, Ch.IV, §2.6]) :

Définition 2.2.22 (Les opérateurs de Hecke sur les réseaux)**.** *Soit A un groupe abélien fini. On dispose d'un opérateur de Hecke $\mathrm{T}_A \in \mathrm{H}(\mathrm{O}_n)$ associé à A dont l'action sur $\mathbb{Z}[\mathcal{L}_n]$ est définie par :*

$$(\forall L \in \mathcal{L}_n)\ \mathrm{T}_A(L) = \sum_{L'\ A-\text{voisin de } L} L'.$$

De plus, l'inclusion $\mathrm{SO}_n \to \mathrm{O}_n$ identifie canoniquement $\mathrm{H}(\mathrm{O}_n)$ à un sous-anneau de $\mathrm{H}(\mathrm{SO}_n)$. L'opérateur T_A défini ci-dessus peut donc aussi être vu comme un élément de $\mathrm{H}(\mathrm{SO}_n)$.

Définition 2.2.23 (Les opérateurs de Hecke sur les formes automorphes)**.** *Soit f un élément de $\mathcal{M}_W(\mathrm{SO}_n)$. On peut voir f comme une application $\mathbb{Z}[\mathcal{L}_n] \to W$, donc on peut faire agir à droite l'opérateur de Hecke T_A sur f. L'action de T_A est donnée plus précisément par l'égalité :*

$$(\forall L \in \mathcal{L}_n)\ \mathrm{T}_A(f)(L) = \sum_{L'\ A-\text{voisin de } L} f(L').$$

2.3 Détermination d'une formule pour calculer la trace d'un opérateur de Hecke.

Notre but est de calculer la trace des opérateurs de Hecke T_A agissant sur l'espace $\mathcal{M}_W(\mathrm{SO}_n)$ des formes automorphes de poids W, où W est une représentation irréductible de $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$.

2.3.1 La méthode utilisée.

Soient $n \equiv 0, \pm 1 \bmod 8$, et W une représentation de $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$.

On pose $\widetilde{X}_n = \mathrm{SO}_n(\mathbb{R}) \setminus \mathcal{L}_n$, avec $L_1, \ldots, L_h$ des représentants de chaque classe. Si l'on se donne $f \in \mathcal{M}_W(\mathrm{SO}_n)$, alors chacun des $f(L_i)$ est un élément de W invariant par $\mathrm{SO}(L_i)$ (où $\mathrm{SO}(L_i) = \{\gamma \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R}) | \gamma L_i = L_i\}$). Pour $i = 1, \ldots h$, on pose $W^{\mathrm{SO}(L_i)} = \{v \in W | (\forall \gamma \in \mathrm{SO}(L_i))\ \rho(\gamma)(v) = v\}$ l'espace des éléments de W stables par l'action de $\mathrm{SO}(L_i)$. On dispose d'une application $\mathbb{C}$-linéaire :

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{M}_W(\mathrm{SO}_n) & \longrightarrow & \displaystyle\prod_{i=1}^{h} W^{\mathrm{SO}(L_i)} \\ f & \longmapsto & (f(L_i))_{i \in \{1,\ldots,h\}}\,. \end{array}$$

Le lemme suivant est évident :

Lemme 2.3.1. *Le morphisme ci-dessus est un isomorphisme.*

La formule qui sera notre point de départ est donnée par la proposition suivante :

Proposition 2.3.2. *Soient $n \geq 1$, (W, ρ) une représentation de dimension finie de $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ sur $\mathbb{C}$, et A un groupe abélien fini. Pour tout $i \in \{1, \ldots, h\}$, on pose $\mathrm{vois}_A(L_i)$ l'ensemble des A-voisins de L_i, et $\mathcal{V}_i$ le sous ensemble de $\mathrm{vois}_A(L_i)$ des A-voisins de L_i isomorphes à L_i. L'ensemble $\mathcal{V}_i$ est stable pour l'action de $\mathrm{SO}(L_i)$. On peut donc écrire $\mathcal{V}_i$ comme réunion de ses orbites par l'action de $\mathrm{SO}(L_i)$:*

$$\mathcal{V}_i = \coprod_{j \in J_i} \mathrm{SO}(L_i) g_{i,j} L_i = \coprod_{j \in J_i} \mathcal{V}_{i,j}$$

où $g_{i,j} \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$, et $\mathcal{V}_{i,j}$ est l'orbite des A-voisins de L_i pour l'action de $\mathrm{SO}(L_i)$ contenant $g_{i,j} L_i$. On a l'égalité :

$$\mathrm{tr}\left(\mathrm{T}_A | \mathcal{M}_W(\mathrm{SO}_n)\right) = \sum_{i=1}^{h} \left(\frac{1}{|\mathrm{SO}(L_i)|} \cdot \left(\sum_{j \in J_i} |\mathcal{V}_{i,j}| \cdot \sum_{\gamma \in \mathrm{SO}(L_i)} \mathrm{tr}\left(\gamma g_{i,j} | W\right) \right) \right).$$

Démonstration. Soit $i \in \{1, \ldots, h\}$. On choisit une famille $\gamma_{i,k}$ d'éléments de $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$, et $a_{i,k}$ une famille d'éléments de $\{1, \ldots, h\}$ telles que l'on ait l'écriture :

$$\mathrm{vois}_A(L_i) = \left\{ \gamma_{i,k} L_{a_{i,k}} \mid k \in K_i \right\},$$

où K_i est un ensemble quelconque de même cardinal que $\mathrm{vois}_A(L_i)$. Avec ces notations, notons que l'on a l'égalité : $\mathcal{V}_i = \left\{ \gamma_{i,k} L_{a_{i,k}} \mid k \in K_i \text{ et } a_{i,k} = i \right\}$. Si f est dans $\mathcal{M}_W(\mathrm{SO}_n)$, on a alors :

$$\mathrm{T}_A(f)(L_i) = \sum_{L \in \mathrm{vois}_A(L_i)} f(L) = \sum_{k \in K_i} f(\gamma_{i,k} \cdot L_{a_{i,k}}) = \sum_{k \in K_i} \rho(\gamma_{i,k}) \cdot f(L_{a_{i,k}}).$$

Pour $i_1, i_2 \in \{1, \ldots, h\}$, on définit les endomorphismes :

$$\sum_{\substack{k \in K_{i_1} \\ a_{i_1,k} = i_2}} \rho(\gamma_{i_1,k}) = u_{i_1,i_2} \in \mathrm{End}(W).$$

En particulier, u_{i_1,i_2} satisfait $u_{i_1,i_2}\left(W^{\mathrm{SO}(L_{i_1})}\right) \subset W^{\mathrm{SO}(L_{i_2})}$ et on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_W(\mathrm{SO}_n) & \xrightarrow{\sim} & \prod_{i=1}^{h} W^{\mathrm{SO}(L_i)} \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{T}_A} & & \Big\downarrow{\scriptstyle (u_{i_1,i_2})_{i_1,i_2 \in \{1,\ldots,h\}}} \\ \mathcal{M}_W(\mathrm{SO}_n) & \xrightarrow{\sim} & \prod_{i=1}^{h} W^{\mathrm{SO}(L_i)} \end{array}$$

Pour $i \in \{1, \ldots, h\}$, on définit les projecteurs $p_i \in \mathrm{End}(W)$ par :

$$p_i = \frac{1}{|\mathrm{SO}(L_i)|} \sum_{\gamma \in \mathrm{SO}(L_i)} \rho(\gamma).$$

L'image de p_i est $W^{\mathrm{SO}(L_i)}$, et $\mathrm{Ker}(p_i)$ en est un supplémentaire dans W.

Dans le calcul de la trace qui nous intéresse, seuls les termes diagonaux (c'est-à-dire les $u_{i,i}$) interviendront. De plus, ils vérifient les égalités :

$$\begin{cases} (u_{i,i} \circ p_i)|_{W^{\mathrm{SO}(L_i)}} = u_{i,i}|_{W^{\mathrm{SO}(L_i)}} \\ (u_{i,i} \circ p_i)|_{\mathrm{Ker}(p_i)} = 0 \end{cases}$$

Et ainsi :

$$\mathrm{tr}(u_{i,i}|W^{\mathrm{SO}(L_i)}) = \mathrm{tr}(u_{i,i} \circ p_i|W) = \mathrm{tr}(p_i \circ u_{i,i}|W).$$

D'où finalement :

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}\left(\mathrm{T}_A|\mathcal{M}_W(\mathrm{SO}_n)\right) &= \mathrm{tr}\left((u_{i_1,i_2})_{i_1,i_2\in\{1,\dots,h\}}|\prod_{i=1}^{h} W^{\mathrm{SO}(L_i)}\right) = \sum_{i=1}^{h}\mathrm{tr}\left(u_{i,i}|W^{\mathrm{SO}(L_i)}\right)\\ &= \sum_{i=1}^{h}\mathrm{tr}\left(p_i \circ u_{i,i}|W\right) = \sum_{i=1}^{h}\left(\frac{1}{|\mathrm{SO}(L_i)|}\cdot\left(\sum_{\substack{k\in K_i\\ a_{i,k}=i}}\sum_{\gamma\in\mathrm{SO}(L_i)}\mathrm{tr}\left(\gamma\cdot\gamma_{i,k}|W\right)\right)\right)\\ &= \sum_{i=1}^{h}\left(\frac{1}{|\mathrm{SO}(L_i)|}\cdot\left(\sum_{j\in J_i}|\mathcal{V}_{i,j}|\cdot\sum_{\gamma\in\mathrm{SO}(L_i)}\mathrm{tr}\left(\gamma\cdot g_{i,j}|W\right)\right)\right).\end{aligned}$$

La dernière égalité vient de la constatation suivante. Si on se donne $j \in J_i$, et $L'_1, L'_2 \in \mathcal{V}_{i,j}$ tels que $L'_1 = g_1 L_i$ et $L'_2 = g_2 L_i$, alors on a l'égalité : $\sum_{\gamma\in\mathrm{SO}(L_i)}\mathrm{tr}\left(\gamma\cdot g_1|W\right) = \sum_{\gamma\in\mathrm{SO}(L_i)}\mathrm{tr}\left(\gamma\cdot g_2|W\right)$.

D'où finalement le résultat cherché. □

Après que ce travail a été effectué, Lassina Dembélé nous a fait remarqué qu'une formule comparable avait déjà été obtenue par Neil Dummigan dans l'article [29].

On peut regarder ce que devient cette formule lorsque A est trivial (c'est-à-dire lorsque T_A est l'identité). Dans ce cas, pour tout i, on a l'égalité $\mathrm{vois}_A(L_i) = \{L_i\} = \mathcal{V}_i$, et la formule précédente devient :

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(\mathrm{Id}|\mathcal{M}_W(\mathrm{SO}_n)) &= \sum_{i=1}^{h}\left(\frac{1}{|\mathrm{SO}(L_i)|}\sum_{\gamma\in\mathrm{SO}(L_i)}\mathrm{tr}(\gamma|W)\right)\\ &= \sum_{i=1}^{h}\dim\left(W^{\mathrm{SO}(L_i)}\right) = \dim\left(\mathcal{M}_W(\mathrm{SO}_n)\right),\end{aligned}$$

où les égalités $\dim\left(W^{\mathrm{SO}(L_i)}\right) = \frac{1}{|\mathrm{SO}(L_i)|}\sum_{\gamma\in\mathrm{SO}(L_i)}\mathrm{tr}(\gamma|W)$ sont des résultats classiques.

Lorsque $h = 1$, c'est-à-dire lorsque $n = 7, 8, 9$, on a les corollaires plus simples suivants :

Corollaire 2.3.3. *On suppose que $\widetilde{X}_n$ est réduit à un élément. Soient (W, ρ) une représentation de $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ de dimension finie, et L_0 un élément de $\mathcal{L}_n$. Soit $(g_j) \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ famille finie telle que $\mathrm{vois}_A(L_0) = \coprod_j \mathrm{SO}(L_0)\cdot g_j \cdot L_0 = \coprod_j \mathcal{V}_j$. Alors :*

$$\mathrm{tr}\left(\mathrm{T}_A|\mathcal{M}_W(\mathrm{SO}_n)\right) = \frac{1}{|\mathrm{SO}(L_0)|}\cdot\left(\sum_j\left(|\mathcal{V}_j|\cdot\sum_{\gamma\in\mathrm{SO}(L_0)}\mathrm{tr}\left(\gamma g_j|W\right)\right)\right).$$

Corollaire 2.3.4. *On suppose que $\widetilde{X}_n$ est réduit à un élément. Soient (W, ρ) une représentation de $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$, q une puissance d'un nombre premier p, $A = \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$, et L_0 un élément de $\mathcal{L}_n$. On considère la quadrique projective $C = C_{L_0}(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$. On rappelle qu'il existe une bijection entre $\mathrm{vois}_A(L_0)$ et C qui commute aux actions de $\mathrm{SO}(L_0)$ (voir proposition-définition 2.2.18). Pour tout élément $x \in C$, on associe le q-voisin L_x (d'après la méthode expliquée en proposition-définition 2.2.18), que l'on écrit $L_x = g_x \cdot L_0$, où $g_x \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{Q})$.*

Le groupe spécial orthogonal $\mathrm{SO}(L_0)$ *agit sur* C*. On considère* Y *un système de représentants des orbites de* C *pour l'action de* $\mathrm{SO}(L_0)$*, et pour* $y \in Y$ *on note* Ω_y *l'orbite associée. Alors :*

$$\mathrm{tr}\left(\mathrm{T}_q | \mathcal{M}_W(\mathrm{SO}_n)\right) = \frac{1}{|\mathrm{SO}(L_0)|} \cdot \left(\sum_{y \in Y} |\Omega_y| \cdot \sum_{\gamma \in \mathrm{SO}(L_i)} \mathrm{tr}\left(\gamma g_y | W\right) \right).$$

Les corollaires précédents réduisent le calcul de $\mathrm{tr}(\mathrm{T}_A | \mathcal{M}_W(\mathrm{SO}_n))$ aux calculs des quantités suivantes :

- $\mathrm{tr}(g|W)$, où $g \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{Q})$ et W une représentation irréductible de $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$, ce qui fait l'objet du paragraphe 2.3.2.
- les orbites de $\mathrm{vois}_A(L_i)$ pour l'action de $\mathrm{SO}(L_i)$ (dont il suffit de connaître un représentant et le cardinal), ce qui fait l'objet des chapitres 2.4 et 2.5.

2.3.2 Les poids dominants et la formule des caractères de Weyl.

On reprend ici le raisonnement fait dans [16, Ch. 1] pour exprimer la version dégénérée de la formule des caractères de Weyl. Rappelons quelques notations utilisées dans cette référence.

On se donne $n \geq 1$ et note G le groupe de Lie semi-simple connexe $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$, et $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie. On pose pour simplifier $m = [n/2]$. On se place dans l'espace $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire usuel, que l'on décompose en somme orthogonale :

$$\mathbb{R}^n = \begin{cases} \bigoplus_{i=1}^{m} P_i \text{ si } n \text{ est pair,} \\ \bigoplus_{i=1}^{m} P_i \oplus D \text{ si } n \text{ est impair,} \end{cases}$$

où les P_i sont des plans deux-à-deux orthogonaux de $\mathbb{R}^n$ fixés, et D est l'unique droite orthogonale à tous les P_i lorsque n est impair.

On définit le tore maximal $T \subset G$ comme :

$$T = \begin{cases} \{g \in G | (\forall i)\ g(P_i) \subset P_i \text{ et } \det(g|_{P_i}) = 1\} \text{ si } n \text{ est pair,} \\ \{g \in G | (\forall i)\ g(P_i) \subset P_i,\ \det(g|_{P_i}) = 1 \text{ et } \det(g|_D) = 1\} \text{ si } n \text{ est impair,} \end{cases}$$

de telle sorte qu'on a un isomorphisme naturel $T \xrightarrow{\sim} \prod_i \mathrm{SO}(P_i)$. Fixons une fois pour toute des isomorphismes $\mathrm{SO}(L_i) \simeq \mathbb{S}^1$, et donc l'isomorphisme $T \simeq (\mathbb{S}^1)^m$. On note $(t_1, \ldots, t_m)$ les éléments de T, pour $t_i \in \mathbb{S}^1$.

On note Φ le système de racines de (G, T), et $\mathcal{W}$ son groupe de Weyl. Par définition, Φ est un système de racines dans $X \otimes \mathbb{R}$, où X désigne le groupe abélien libre des morphismes continus de groupe $T \to \mathbb{S}^1$. On rappelle que Φ est le sous-ensemble de $X^*(T)$ constitué des caractères non triviaux de T intervenant dans $\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$. On note de plus $\Phi^+ \subset \Phi$ un système de racines positives. Selon la parité de n, les ensembles Φ, Φ^+ peuvent être choisis comme étant les sous-ensemble suivants de $\mathbb{R}^m$ (muni de sa base canonique $(e_i)_i$) :

- si n est pair : $\Phi = \{\pm e_i \pm e_j\}_{1 \leq i < j \leq m}$, $\Phi^+ = \{e_i \pm e_j\}_{1 \leq i < j \leq m}$, et $\mathcal{W} = \mathcal{S}_m \ltimes (\{\pm 1\}^m)^0$ (où $\mathcal{S}_m$ désigne le groupe des permutations d'un ensemble à m éléments, et $(\{\pm 1\}^m)^0$ le sous-groupe des éléments $(\varepsilon_i) \in \{\pm 1\}^m$ tels que $\prod \varepsilon_i = 1$) ;
- si n est impair : $\Phi = \{\pm e_i\}_{1 \leq i \leq m} \cup \{\pm e_i \pm e_j\}_{1 \leq i < j \leq m}$, $\Phi^+ = \{e_i\}_{1 \leq i \leq m} \cup \{e_i \pm e_j\}_{1 \leq i < j \leq m}$, et $\mathcal{W} = \mathcal{S}_m \ltimes \{\pm 1\}^m$.

On fixe un produit scalaire $(\ ,\ )$ sur $X \otimes \mathbb{R}$ invariant par $\mathcal{W}$. Un poids dominant de G est un élément $\lambda \in X$ tel que $(\lambda, \alpha) \geq 0$ pour tout élément $\alpha \in \Phi^+$. La théorie de Cartan–Weyl définit une bijection canonique $\lambda \mapsto V_\lambda$ entre les poids dominants de G et les représentations

irréductibles de G à isomorphisme près. Le poids dominant λ est appelé le plus haut poids de V_λ. Si $\lambda \in X$ et $i \in T$, on pose $t^\lambda = \lambda(t)$.

Enfin, pour $t \in T$, on note $M = C_G(t)^0$ la composante neutre du centralisateur de t dans G (en particulier, T est un tore maximal dans M, et $t \in M$). On associe à M les sous-ensembles de Φ^+ et de $\mathcal{W}$ suivants :

$$\Phi_M^+ = \{\alpha \in \Phi^+ | t^\alpha = 1\},$$

$$\mathcal{W}^M = \{w \in \mathcal{W} | w^{-1}(\Phi_M^+) \subset \Phi^+\}.$$

On note ρ et ρ_M la demi-somme respectivement des éléments de Φ^+ et de Φ_M^+. On définit enfin pour $v \in X \otimes \mathbb{R}$:

$$P_M(v) = \prod_{\alpha \in \Phi_M^+} \frac{(\alpha, v + \rho_M)}{(\alpha, \rho_M)}.$$

On a la proposition suivante d'après [16, Ch. 1, Proposition 1.9] :

Proposition 2.3.5 (Version dégénérée de la formule des caractères de Weyl)**.** *Soient $\lambda \in X$ un poids dominant, $t \in T$ et $M = C_G(t)^0$. Alors le caractère de t sur la représentation V_λ de plus haut poids λ est donné par :*

$$\chi_{V_\lambda}(t) = \frac{\sum_{w \in \mathcal{W}^M} \varepsilon(w) \cdot t^{w(\lambda+\rho)-\rho} \cdot P_M(w(\lambda+\rho) - \rho_M)}{\prod_{\alpha \in \Phi^+ \setminus \Phi_M^+} (1 - t^{-\alpha})}$$

où $\varepsilon : \mathcal{W} \to \{\pm 1\}$ désigne la signature sur le groupe $\mathcal{W}$.

Pour terminer ce paragraphe, expliquons comment utiliser concrètement cette formule pour l'application au calcul de la trace de T_A. On rappelle que dans cette formule interviennent des éléments de la forme $\gamma g_y \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$, et on doit évaluer la quantité $\mathrm{tr}(\gamma g_y | W)$.

Au chapitre 2.4, on explique comment déterminer explicitement les γg_y. La question est donc la suivante : si on se donne $g \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$, comment trouver $t \in T$ conjugué à g dans $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$.

On calcule le déterminant $\det(X\mathrm{Id} - g)$, qui est de la forme :

$$(X-1)^{n-2m} \cdot \prod_{i=1}^{m} (X - t_i)(X - \overline{t_i}),$$

et on pose $t = (t_1, \ldots, t_m) \in T$.

Si n est impair, g est conjugué à t, et le problème est résolu : il suffit de déterminer des t_i satisfaisant l'égalité précédente. C'est encore vrai lorsque n est pair et que l'un des t_i vaut ± 1.

En revanche, dans le cas général, on a seulement que g est conjugué dans $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ à t ou à $\overline{t} = (t_1, \ldots, t_{m-1}, \overline{t_m})$. On a la relation : $\mathrm{tr}(\overline{t} | W) = \mathrm{tr}(t | W^c)$, où la représentation (ρ^c, W^c) est définie par $(g \mapsto \rho(cgc^{-1}), W)$, pour $c \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \setminus \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$. En terme de plus hauts poids, on a : $V_\lambda^c = V_{\overline{\lambda}}$, où $\overline{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, -\lambda_m)$ si $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$.

On peut donc calculer pour tout $g \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ la quantité : $\mathrm{tr}(g | V_\lambda) + \mathrm{tr}(g | V_\lambda^c)$, et donc $\mathrm{tr}(\mathrm{T}_A | \mathcal{M}_W(\mathrm{SO}_n)) + \mathrm{tr}(\mathrm{T}_A | \mathcal{M}_{W^c}(\mathrm{SO}_n))$.

Le lemme suivant montre qu'on a l'égalité : $\mathrm{tr}(\mathrm{T}_A | \mathcal{M}_W(\mathrm{SO}_n)) = \mathrm{tr}(\mathrm{T}_A | \mathcal{M}_{W^c}(\mathrm{SO}_n))$, et donc $\mathrm{tr}(\mathrm{T}_A | \mathcal{M}_W(\mathrm{SO}_n)) = \frac{\mathrm{tr}(\mathrm{T}_A | \mathcal{M}_W(\mathrm{SO}_n)) + \mathrm{tr}(\mathrm{T}_A | \mathcal{M}_{W^c}(\mathrm{SO}_n))}{2}$.

Lemme 2.3.6. *Soient $s \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \setminus \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$, et W une représentation de $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$. L'application $f \mapsto (L \mapsto f(s(L)))$ induit une bijection $\mathbb{C}$-linéaire $\mathcal{M}_W(\mathrm{SO}_n) \to \mathcal{M}_{W^s}(\mathrm{SO}_n)$. Cette bijection commute à l'opérateur de Hecke T_A pour tout A.*

Démonstration. Pour simplifier, on note φ l'application définie par $\varphi(L) = f(s(L))$. Pour tout $g \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$, on a :

$$\varphi(gL) = f(sgL) = f(sgs^{-1} \cdot sL) = \rho^s(g)\varphi(L).$$

L'application introduite dans le lemme est donc bien une application $\mathbb{C}$-linéaire de $\mathcal{M}_W(\mathrm{SO}_n)$ dans $\mathcal{M}_{W^s}(\mathrm{SO}_n)$. Elle est évidemment bijective, de réciproque $f \mapsto (L \mapsto f(s^{-1}L))$.

On voit dans la définition des A-voisins que : $s\left(\mathrm{vois}_A(L)\right) = \mathrm{vois}_A\left(s(L)\right)$, ce qui conclut que l'application précédente commute bien à l'opérateur T_A. □

2.4 Algorithmes de calculs et résultats pour p impair.

Soient L un réseau pair de $\mathbb{R}^n$, $R = R(L)$ son ensemble de racines, et W son groupe de Weyl. Pour les réseaux étudiés dans cette partie (à savoir E_7, E_8 et $\mathrm{E}_8 \oplus \mathrm{A}_1$), R est un système de racines qui engendre $\mathbb{Z}$-linéairement le réseau L, et le groupe W est égal au groupe $\mathrm{O}(L)$ (d'après la proposition 2.2.8). On note $W^+ = \mathrm{SO}(L)$ le sous-groupe de W des éléments de déterminant 1.

On désigne par q la puissance d'un nombre premier p (dont la parité sera précisée lorsque cela sera nécessaire).

2.4.1 Présentation des algorithmes de calculs.

Les algorithmes que l'on construit ci-dessous ont trois objectifs :

(i) Donner une description facile à manipuler du groupe de Weyl W.

(ii) Regrouper les orbites de $C_L(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$ pour l'action du groupe W^+, et pour chaque orbite donner un représentant et le cardinal de l'orbite.

(iii) Pour chaque représentant d'une orbite trouvée à l'étape (ii), expliciter le q-voisin associé L' et une transformation $g \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ telle que : $L' = g(L)$.

Les parties (i) et (iii) sont utilisées aussi bien pour le cas où $p = 2$ que pour le cas où p est impair. La partie (ii) n'est utilisée que pour le cas où p est impair (et on détaille au chapitre 2.5 le cas où $p = 2$).

2.4.2 La création du groupe de Weyl.

Principe utilisé.

On souhaite pouvoir utiliser dans nos algorithmes le groupe de Weyl de R. On cherche un moyen de parcourir tout le groupe W rapidement et sans avoir à allouer une mémoire trop conséquente.

On suppose donné l'ensemble R des racines du réseau L, ainsi qu'un système de racines simples $(v_1, \ldots, v_n)$. On associe à ces racines simples les réflexions $(s_1, \ldots, s_n)$, la chambre de Weyl C dont les murs sont les hyperplans laissés stables par un des s_i, ρ un élément quelconque de C, et $l : W \to \mathbb{N}$ la longueur associée à ces racines simples. Le groupe W est engendré par les réflexions s_i, et on suppose connu le cardinal de W.

On suppose aussi que l'on possède un sous-groupe W' de W, dont les éléments sont facile à expliciter, et dont on connaît le cardinal. Pour tout élément $w \in W$, on définit son image dans le quotient $W' \setminus W$ comme l'ensemble : $\overline{w} = \{\gamma \circ w \mid \gamma \in W'\}$. On suppose qu'il existe une fonction Φ_n suffisamment simple au sens algorithmique, définie sur W et à valeurs dans un ensemble que l'on précisera, telle que :

$$(\forall w_1, w_2 \in W)\ \overline{w_1} = \overline{w_2} \Leftrightarrow \Phi_n(w_1) = \Phi_n(w_2).$$

L'algorithme expliqué ci-dessous nous donne un ensemble H_n de représentants du quotient $W' \setminus W$ (le cardinal de H_n étant connu, avec : $|H_n| = |W|/|W'|$).

L'objectif final est de pouvoir écrire les éléments de W sous la forme $w \circ h$, pour $w \in W'$ et $h \in H_n$.

Description de l'algorithme :

Pour créer notre ensemble H_n, on va construire une suite d'ensembles (S_i) avec $\emptyset = S_0 \subset S_1 \subset \cdots \subset S_r = H_n$, avec $|S_i| = i$, et donc $r = |H_n| = |W|/|W'|$. La construction des S_i se fait récursivement. On suppose que l'on a déjà construit l'ensemble S_i (avec $0 \leq i \leq r-1$), et on parcourt le groupe W en commençant par les éléments de plus petites longueurs. Pour chaque élément w parcouru par notre algorithme, on regarde son image $\overline{w} \in W' \setminus W$:

- si $\overline{w} \in \{\overline{h} \mid h \in S_i\}$ (c'est-à-dire si $\Phi_n(w) \in \{\Phi_n(h) \mid h \in S\}$) : on passe à l'élément suivant dans W.
- si $\overline{w} \notin \{\overline{h} \mid h \in S\}$ (c'est-à-dire si $\Phi_n(w) \notin \{\Phi_n(h) \mid h \in S\}$) : on pose $S_{i+1} = S_i \cup \{w\}$.

On arrête notre algorithme lorsque l'on a construit l'ensemble S_r, et on pose $H_n = S_r$. L'ensemble H_n ainsi créé correspond à l'ensemble des représentants de $W' \setminus W$ de plus petites longueurs.

Notre seul problème est donc de parcourir W. Pour cela, on pose pour tout $j \in \mathbb{N}$: $W_j = \{w \in W \mid l(w) = j\}$. On connaît déjà les ensembles W_0 et W_1 (qui correspondent respectivement à $\{\mathrm{id}\}$ et à $\{s_i \mid i = 1, \ldots, n\}$). On détermine récursivement tous les ensembles W_i grâce à l'application :

$$\begin{array}{rcl} W_j \times W_1 & \to & W_{j-1} \cup W_{j+1} \\ (w, s_i) & \mapsto & s_i \circ w \end{array}$$

dont l'image contient W_{j+1}. Pour savoir si l'image d'un élément est bien dans W_{j+1}, on utilise le lemme suivant (conséquence immédiate du (ii) de la proposition 2.2.7) :

Lemme 2.4.1. *Soient $j \in \mathbb{N}$, $w \in W_j$ et $i \in \{1, \ldots, n\}$. Alors on a l'équivalence :*

$$l(s_i \circ w) = j + 1 \Leftrightarrow (v_i \cdot w(\rho)) \cdot (v_i \cdot \rho) \geq 0.$$

Un élément de W_{j+1} peut s'écrire de différentes manières sous la forme $s \circ w$ (avec $s \in W_1$ et $w \in W_j$). Afin de ne pas parcourir plusieurs fois le même élément de W_{j+1}, on utilise le corollaire 2.2.6 :

$$(\forall w_1, w_2 \in W_j)(\forall s_{i_1}, s_{i_2} \in W_1)\ s_{i_1} \circ w_1 = s_{i_2} \circ w_2 \Leftrightarrow s_{i_1} \circ w_1(\rho) = s_{i_2} \circ w_2(\rho).$$

Concrètement, si on écrit les éléments w de W_j sous la forme $w = s_{a_j} \circ \cdots \circ s_{a_1}$ pour $a = (a_1, \ldots, a_j) \in \{1, \ldots, n\}^j$, alors on gardera seulement l'écriture où a est le plus petit pour l'ordre lexicographique.

Afin de ne pas surcharger la mémoire allouée, et de limiter les calculs, on représentera tout élément $w \in W_j$ sous la forme d'un couple (a, v), où a est de forme énoncée ci-dessus, et $v = w(\rho) \in \mathbb{R}^n$.

On détaille cette méthode dans le cas de E_7 et de E_8 pour aider à mieux comprendre.

Le cas de E_7.

Dans la description faite de E_7 au paragraphe 2.2.1, on constate que l'on a l'inclusion $\mathrm{A}_7 \subset \mathrm{E}_7$. Le groupe des permutations $\mathcal{S}_8$ agit sur A_7 et sur E_7 par permutation des coordonnées. On a en fait $\mathrm{O}(\mathrm{A}_7) = \{\pm\mathrm{id}\} \times \mathcal{S}_8$.

On note $W' = \{\pm \mathrm{id}\} \times \mathcal{S}_8 = \mathrm{O}(\mathrm{A}_7) \subset W$. L'ensemble $W' \setminus W$ possède $|W|/(2 \cdot 8!) = 36$ éléments (comme $|W| = 2^{10} \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7$, d'après [11, Planche VI] par exemple). Le système de racines simples que l'on choisit est donné par les v_i avec :

$$\begin{cases} v_1 = 1/2 \cdot (-1,1,1,1,-1,-1,-1,1) \\ v_2 = 1/2 \cdot (-1,1,1,-1,-1,1,1,-1) \\ v_3 = 1/2 \cdot (1,-1,-1,1,-1,1,1,-1) \\ v_4 = 1/2 \cdot (1,-1,1,-1,1,-1,-1,1) \\ v_5 = 1/2 \cdot (-1,1,-1,1,1,-1,1,-1) \\ v_6 = 1/2 \cdot (1,1,-1,-1,-1,1,-1,1) \\ v_7 = 1/2 \cdot (-1,-1,1,1,1,1,-1,-1) \end{cases}$$

L'élément ρ que l'on fixe est la demi-somme des racines positives associé à ce système de racines simples, et est donné par :

$$2\ \rho = (29,21,13,5,-3,-11,-19,-35).$$

Il est par exemple facile de vérifier que ρ est bien un élément de la chambre C, en vérifiant que le produit scalaire de ρ avec chacun des v_i est strictement positif.

La fonction Φ_7 que l'on va utiliser est donnée par la proposition-définition évidente suivante :

Proposition-Définition 2.4.2. *Soit E l'ensemble des multi ensembles de $\mathbb{R}$. On définit la fonction $\phi_7 : \mathbb{R}^8 \to E$ par :*

$$\phi_7\left((v_1,\ldots,v_8)\right) = \{\{v_1,\ldots,v_8\}\},$$

où la notation $\{\{\ldots\}\}$ désigne ici un multi ensemble.

Si on se donne $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^8$, on a l'équivalence :

$$\{w(v_1) \mid w \in W'\} = \{w(v_2) \mid w \in W'\} \Leftrightarrow \phi_7(\pm v_1) = \phi_7(\pm v_2).$$

Ainsi, la fonction $\Phi_7 : W \to \{\{e_1,e_2\} \mid e_1,e_2 \in E\}$ donnée par :

$$\Phi_7(w) = \{\phi_7(w(\rho)), \phi_7(-w(\rho))\}$$

vérifie l'équivalence :

$$(\forall w_1, w_2 \in W)\ \overline{w_1} = \overline{w_2} \Leftrightarrow \Phi_7(w_1) = \Phi_7(w_2).$$

Notons $s_1,\ldots,s_7$ les symétries orthogonales associées à $v_1,\ldots,v_7$. On note $[i_1,\ldots,i_j]$ l'élément $s_{i_j} \circ \cdots \circ s_{i_1}$ (avec la notation [ ] pour id). Alors notre algorithme donne pour H_7 l'ensemble :

$\{[\,],[1],[2],[3],[4],[5],[6],[7],[1,2],[1,4],[1,5],[1,6],[1,7],[2,3],[2,6],[3,5],[3,6],[3,7],[4,6],$
$[4,7],[1,2,6],[1,4,6],[1,4,7],[2,3,6],[3,1,4],[4,2,3],[4,3,5],[5,4,6],[1,5,4,6],[3,1,4,6],$
$[3,1,4,7],[4,2,3,6],[3,1,5,4,6],[5,4,2,3,6],[4,3,1,5,4,6],[2,4,3,1,5,4,6]\}$

Dans la suite, lorsque l'on utilisera le groupe $W(\mathrm{E}_7)$, on écrira ses éléments grâce à la bijection :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S}_8 \times \{\pm\mathrm{id}\} \times H_7 & \xrightarrow{\sim} & W \\ (\sigma,\varepsilon,h) & \mapsto & \sigma \circ \varepsilon \circ h. \end{array}$$

Le cas de E_8.

Dans la description de E_8 faite au paragraphe 2.2.1, on constate que l'on a l'inclusion $\mathrm{D}_8 \subset \mathrm{E}_8$. Le groupe $\mathcal{S}_8$ agit sur D_8 et sur E_8 par permutation des coordonnées. On a : $W(\mathrm{D}_8) = \mathcal{S}_8 \ltimes \left(\{\pm 1\}^8\right)^0$, où $\left(\{\pm 1\}^8\right)^0$ désigne le groupe de matrices diagonales de $\mathrm{M}_8(\mathbb{Z})$ de déterminant 1.

On note $W' = \mathcal{S}_8 \ltimes \left(\{\pm 1\}^8\right)^0 = W(\mathrm{D}_8) \subset W$. L'ensemble $W' \setminus W$ possède $|W|/(2^7 \cdot 8!) = 135$ éléments (comme $|W| = 2^{14} \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7$, d'après [11, Planche VII] par exemple). On pose enfin $W'' = \mathcal{S}_8 \ltimes \{\pm 1\}^8 = \mathrm{O}(\mathrm{D}_8) \supset W'$. Le système de racines simples que l'on choisit est donné par les v_i avec :

– les v_i pour $i = 1, \ldots, 7$ sont les mêmes que pour E_7,

– le vecteur v_8 est : $(0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1)$.

L'élément ρ choisi est encore la demi-somme des racines positives, et est donné par :

$$2\rho = (29, 25, 21, 17, 13, 9, 5, -3).$$

On prendra garde au fait que : $W'' \not\subset W$. Si on voit W comme un sous-ensemble de $\mathrm{O}(V)$, alors les groupes W' et W'' ont une action bien définie sur W par composition à gauche. Le lemme suivant donne la relation entre les orbites pour ces deux actions :

Lemme 2.4.3. *Soient $w_1, w_2 \in W$. On a l'équivalence :*

$$W' \cdot w_1 = W' \cdot w_2 \Leftrightarrow W'' \cdot w_1 = W'' \cdot w_2.$$

Démonstration. On procède directement par équivalences.

Soit $d \in \mathrm{O}(V)$ dont la matrice est la matrice diagonale ayant -1 comme premier terme, et 1 partout ailleurs. Alors on a : $W'' = W' \sqcup (W' \cdot d)$. Ainsi, on déduit :

$$W'' \cdot w_1 = W'' \cdot w_2 \Leftrightarrow w_1 \circ w_2^{-1} \in W'' \Leftrightarrow \begin{cases} w_1 \circ w_2^{-1} \in W' \\ \text{ou } w_1 \circ w_2^{-1} \in W' \cdot d \end{cases}.$$

Le cas $w_2^{-1} \cdot w_1 \in W' \cdot d$ est impossible, car $(W' \cdot d) \cap W = \emptyset$ et on a l'équivalence cherchée. □

La fonction Φ_8 que l'on va utiliser est donnée par la proposition-définition évidente suivante :

Proposition-Définition 2.4.4. *Soit E l'ensemble des multi ensembles de $\mathbb{R}$. On définit la fonction $\phi_8 : \mathbb{R}^8 \to E$ par :*

$$\phi_8\left((v_1, \ldots, v_8)\right) = \{\{v_1^2, \ldots, v_8^2\}\}.$$

Si on se donne $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^8$, on a l'équivalence :

$$\{\gamma(v_1) \mid \gamma \in W''\} = \{\gamma(v_2) \mid \gamma \in W''\} \Leftrightarrow \phi_8(v_1) = \phi_8(v_2).$$

Ainsi, la fonction $\Phi_8 : W \to E$ donnée par :

$$\Phi_8(w) = \phi_8(w(\rho))$$

vérifie l'équivalence :

$$(\forall w_1, w_2 \in W)\ \overline{w_1} = \overline{w_2} \Leftrightarrow \Phi_8(w_1) = \Phi_8(w_2).$$

Avec les mêmes notations que pour E_7, notre algorithme donne l'ensemble H_8 suivant :

$\{[\,], [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7], [1,2], [1,4], [1,5], [1,6], [1,7], [2,3], [2,5], [2,6], [2,7], [3,5], [3,6], [3,7], [4,6],$
$[4,7], [5,7], [8,7], [1,2,5], [1,2,6], [1,2,7], [1,4,6], [1,4,7], [1,5,7], [1,8,7], [2,3,5], [2,3,6], [2,3,7], [2,5,7],$
$[2,8,7], [3,1,4], [3,5,7], [3,8,7], [4,2,3], [4,2,5], [4,3,5], [4,8,7], [5,4,6], [5,8,7], [6,5,7], [1,2,5,7],$
$[1,2,8,7], [1,4,2,5], [1,4,8,7], [1,5,4,6], [1,5,8,7], [1,6,5,7], [2,3,5,7], [2,3,8,7], [2,5,8,7], [2,6,5,7],$
$[3,1,4,6], [3,1,4,7], [3,5,8,7], [3,6,5,7], [4,2,3,6], [4,2,3,7], [4,2,5,7], [4,3,5,7], [6,5,8,7], [1,2,5,8,7],$
$[1,2,6,5,7], [1,4,2,5,7], [1,6,5,8,7], [2,3,5,8,7], [2,3,6,5,7], [2,6,5,8,7], [3,1,4,2,5], [3,1,4,8,7],$
$[3,1,5,4,6], [3,6,5,8,7], [4,2,3,8,7], [4,2,5,8,7], [4,2,6,5,7], [4,3,5,8,7], [4,3,6,5,7], [5,4,2,3,6],$
$[7,6,5,8,7], [1,2,6,5,8,7], [1,4,2,5,8,7], [1,4,2,6,5,7], [1,7,6,5,8,7], [2,3,6,5,8,7], [2,7,6,5,8,7],$
$[3,1,4,2,5,7], [3,7,6,5,8,7], [4,2,6,5,8,7], [4,3,1,5,4,6], [4,3,6,5,8,7], [5,4,2,6,5,7], [5,4,3,6,5,7],$
$[1,2,7,6,5,8,7], [1,4,2,6,5,8,7], [1,5,4,2,6,5,7], [2,3,7,6,5,8,7], [2,4,3,1,5,4,6], [3,1,4,2,5,8,7],$
$[3,1,4,2,6,5,7], [4,2,7,6,5,8,7], [4,3,7,6,5,8,7], [5,4,2,6,5,8,7], [5,4,3,6,5,8,7], [1,4,2,7,6,5,8,7],$
$[1,5,4,2,6,5,8,7], [3,1,4,2,6,5,8,7], [3,1,5,4,2,6,5,7], [5,4,2,7,6,5,8,7], [5,4,3,7,6,5,8,7],$
$[1,5,4,2,7,6,5,8,7], [3,1,4,2,7,6,5,8,7], [3,1,5,4,2,6,5,8,7], [4,3,1,5,4,2,6,5,7], [6,5,4,2,7,6,5,8,7],$
$[6,5,4,3,7,6,5,8,7], [1,6,5,4,2,7,6,5,8,7], [2,4,3,1,5,4,2,6,5,7], [3,1,5,4,2,7,6,5,8,7],$
$[4,3,1,5,4,2,6,5,8,7], [2,4,3,1,5,4,2,6,5,8,7], [3,1,6,5,4,2,7,6,5,8,7], [4,3,1,5,4,2,7,6,5,8,7],$
$[2,4,3,1,5,4,2,7,6,5,8,7], [4,3,1,6,5,4,2,7,6,5,8,7], [2,4,3,1,6,5,4,2,7,6,5,8,7],$
$[5,4,3,1,6,5,4,2,7,6,5,8,7], [2,5,4,3,1,6,5,4,2,7,6,5,8,7], [4,2,5,4,3,1,6,5,4,2,7,6,5,8,7],$
$[3,4,2,5,4,3,1,6,5,4,2,7,6,5,8,7], [1,3,4,2,5,4,3,1,6,5,4,2,7,6,5,8,7]\}.$

Dans la suite, lorsque l'on utilisera le groupe $W(\mathrm{E}_8)$, on écrira ses éléments grâce à la bijection :

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{S}_8 \times \left(\{\pm 1\}^8\right)^0 \times H_8 & \xrightarrow{\sim} & W \\ (\sigma, \varepsilon, h) & \mapsto & \sigma \circ \varepsilon \circ h \end{array}.$$

2.4.3 La détermination des orbites de $C_L(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$ par l'action du groupe de Weyl W et par W^+ pour q une puissance de p premier impair.

Méthode utilisée.

On reprend les notations du corollaire 2.3.4. Soient $n = 7, 8$ ou 9, $L \in \mathcal{L}_n$, q une puissance d'un nombre premier p impair, $C = C_L(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$, et R l'ensemble des racines de L (qui est un système de racines de $\mathbb{R}^n$). On note W le groupe de Weyl de R, et W' un sous-groupe bien choisi de W (que l'on précisera à chaque cas).

Notre algorithme effectue les étapes suivantes :

Première étape : on cherche les orbites de C par l'action de W'. On donne pour chaque orbite un représentant ainsi que le cardinal de l'orbite.

Deuxième étape : on rappelle que l'on connaît le sous-ensemble $H_n \subset W$ des représentants de $W' \setminus W$ de plus petites longueurs. On cherche les orbites de C pour l'action de W en faisant agir H_n sur les représentants des orbites de C pour l'action de W' choisis à la première étape. On donne pour chaque orbite un représentant et son cardinal.

Troisième étape : on cherche les orbites de C pour l'action de W^+. Ces orbites sont obtenues grâce aux orbites trouvées à la deuxième étape. Par exemple, lorsque $n = 7$ ou 9, les orbites de C pour les actions de W et de W^+ sont égales.

On présente en détail ces étapes dans les cas où $n = 7, 8, 9$. Dans ces cas, le réseau L désignera respectivement les réseaux E_7, E_8 et $\mathrm{E}_8 \oplus \mathrm{A}_1$.

Dans la suite, si on se donne Γ un groupe agissant sur un ensemble X, on note pour $x \in X$ l'orbite $\mathcal{O}_\Gamma(x)$ de l'élément x sous l'action de Γ.

On fixe enfin p un nombre premier impair, et on note par q une puissance de p.

Le cas de E_7.

Première étape :

On reprend la définition de E_7 donnée au paragraphe 2.2.1.

Le nombre q est impair, donc premier à $|\mathrm{E}_7/\mathrm{A}_7| = 2$. L'inclusion naturelle $\mathrm{A}_7 \to \mathrm{E}_7$ induit une bijection : $\mathrm{A}_7/q\mathrm{A}_7 \xrightarrow{\sim} \mathrm{E}_7/q\mathrm{E}_7$.

D'autre part, la surjection $\mathbb{Z}^8 \xrightarrow{\sum x_i} \mathbb{Z}$ est scindée de noyau A_7, et on a l'isomorphisme naturel :

$$\mathrm{A}_7/q\mathrm{A}_7 \simeq \left\{(x_1, \ldots, x_8) \in (\mathbb{Z}/q)^8 \mid \sum x_i = 0\right\}.$$

Au final, la quadrique $C_{\mathrm{E}_7}(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$ s'identifie à l'ensemble des $\mathbb{Z}/q$-droites $\mathbb{Z}/q \cdot (x_1, \ldots, x_8)$ de $(\mathbb{Z}/q)^8$ vérifiant : $\sum x_i = \sum x_i^2 = 0$.

Par construction, cette identification commute aux actions des groupes orthogonaux considérés, celle de W' étant particulièrement transparente. On a notamment les lemmes suivants, dont la vérification est évidente :

Lemme 2.4.5. *Soit $x \in C_{\mathrm{E}_7}(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$. Alors l'orbite de x par l'action de W' possède un élément $x' = \mathrm{vect}_{\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}}(v)$ pour $v \in \mathrm{E}_7$, où $v = (v_1, \ldots, v_8)$ vérifie :*

$$\begin{array}{rl} (i) & v_i \in \{0, \ldots, q-1\} \\ (ii) & v_1 \leq \cdots \leq v_8 \\ (iii) & \inf\{v_i \mid v_i > 0\} = 1 \end{array}$$

Lemme 2.4.6. *Soient $x, x' \in C_{\mathrm{E}_7}(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$, et $v, v' \in (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^8$ des générateurs de x et x'. Alors x et x' sont dans la même orbite de $C_{\mathrm{E}_7}(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$ pour l'action de W' si, et seulement si :*

$$(\exists i \in \mathbb{Z}/q\mathbb{Z})\ \phi_7(\overline{i \cdot v}) = \phi_7(\overline{v'})$$

où ϕ_7 désigne la fonction introduite au paragraphe précédent, et où on a noté par $\overline{v}$ l'unique élément de $\{\frac{1-q}{2}, \ldots, \frac{q-1}{2}\}^8$ ayant même image que v par le passage au quotient : $\mathbb{Z}^8 \to (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^8$.

On aura ainsi pour chaque orbite cherchée un représentant. Le cardinal de l'orbite est donné par le lemme suivant dont la vérification est laissée au lecteur :

Lemme 2.4.7. *Soit $x \in C_{\mathrm{E}_7}(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$ une droite isotrope, et $v = (v_1, \ldots, v_8)$ un générateur de x. Alors le cardinal de l'orbite de x par l'action de W' est donné par :*

$$\mathrm{card}\left(\mathcal{O}_{W'}(x)\right) = \frac{8!}{|\{i \in \mathbb{Z}/q\mathbb{Z} \mid \phi_7(\overline{i \cdot v}) = \phi_7(\overline{v})\}| \cdot \prod_{i \in \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}} (|\{j \in \{1, \ldots 8\} \mid v_j = i\}|!)}.$$

Deuxième étape :

On possède ainsi pour chaque orbite de $C_{\mathrm{E}_7}(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$ sous l'action de W' un représentant et le cardinal de l'orbite. Il suffit d'utiliser l'ensemble H_7 construit au paragraphe 2.4.2 pour savoir si des orbites différentes pour l'action de W' sont dans la même orbite pour l'action de W. Le lemme suivant se déduit facilement de la définition de l'ensemble H_7 :

Lemme 2.4.8. *Soient $x, x' \in C_{\mathrm{E}_7}(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$, et $v, v' \in (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^8$ des générateurs de x et x'. Alors x et x' sont sur la même orbite de $C_{\mathrm{E}_7}(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$ pour l'action de W si, et seulement si :*

$$(\exists i \in \mathbb{Z}/q\mathbb{Z})(\exists h \in H_7)\ \phi_7(\overline{i \cdot v}) = \phi_7(\overline{h(v')})$$

où les notations sont les mêmes qu'aux lemmes précédents.

Troisième étape : Il n'y a rien à faire dans la troisième étape du fait du lemme suivant :

Lemme 2.4.9. *Les orbites de $C_{\mathrm{E}_7}(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$ pour l'action de W sont exactement celles pour l'action de W^+.*

Démonstration. il suffit de constater que : $-1 \in W \setminus W^+$, et que -1 a une action triviale sur les éléments de $C_{\mathrm{E}_7}(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$. □

Le cas de E_8.

Première étape :

On reprend la définition de E_8 donnée au paragraphe 2.2.1. On fait les mêmes constatations que pour le cas de E_7 : le point clef est que l'on a l'inclusion naturelle $\mathrm{D}_8 \to \mathrm{E}_8$, et que le nombre q est premier à $|\mathrm{E}_8/\mathrm{D}_8| = 2$. Au final, la quadrique $C_{\mathrm{E}_8}(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$ s'identifie à l'ensemble des $\mathbb{Z}/q$-droites $\mathbb{Z}/q \cdot (x_1, \cdots, x_8)$ de $(\mathbb{Z}/q)^8)$ vérifiant : $\sum x_i^2 = 0$.

Par construction, cette identification commute aux actions des groupes orthogonaux considérés. Cependant, l'action de $W' = \mathcal{S}_8 \ltimes (\{\pm 1\})^0$ n'est pas agréable. On considère plutôt le groupe $W'' = \mathcal{S}_8 \ltimes \{\pm 1\}^8$, dont l'action est bien définie. On a notamment les lemmes suivants, dont la vérification est évidente :

Lemme 2.4.10. *Soit $x \in C_{\mathrm{E}_8}(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$. Alors l'orbite de x par l'action de W'' possède un élément $x' = \mathrm{vect}_{\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}}(v)$ pour $v \in \mathrm{E}_8$, où $v = (v_1, \ldots, v_8)$ vérifie :*

$$\begin{array}{rl} (i) & v_i \in \{0, \ldots, (q-1)/2\} \\ (ii) & v_1 \leq \cdots \leq v_8 \\ (iii) & \inf\{v_i \mid v_i > 0\} = 1 \end{array}$$

Pour savoir si deux droites de $C_{\mathrm{E}_8}(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$ correspondent à une même orbite pour l'action de W'', on utilise le lemme suivant dont la vérification est laissée au lecteur :

Lemme 2.4.11. *Soient $x, x' \in C_{\mathrm{E}_8}(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$, et $v, v' \in (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^8$ des générateurs de x et x'. Alors x et x' sont dans la même orbite de $C_{\mathrm{E}_8}(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$ pour l'action de W'' si, et seulement si :*

$$(\exists i \in \mathbb{Z}/q\mathbb{Z})\ \phi_8(\overline{i \cdot v}) = \phi_8(\overline{v'})$$

où ϕ_8 est la fonction introduite au paragraphe précédent, et où on a noté par $\overline{v}$ l'unique élément de $\{\frac{1-q}{2}, \ldots, \frac{q-1}{2}\}^8$ ayant même image que v par le passage au quotient : $\mathbb{Z}^8 \to (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^8$.

On aura ainsi pour chaque orbite pour l'action de W'' un représentant. Le cardinal de l'orbite est donné par le lemme suivant :

Lemme 2.4.12. *Soit $x \in C_{\mathrm{E}_8}(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$ une droite isotrope, et $v = (v_1, \ldots, v_8)$ un générateur de x. Alors le cardinal de l'orbite de x par l'action de W'' est donné par :*

$$\mathrm{card}\left(\mathcal{O}_{W''}(x)\right) = \frac{2^{8-|\{j \in \{1,\ldots,8\} \mid v_j = 0\}|} \cdot 8!}{|\{i \in \mathbb{Z}/q\mathbb{Z} \mid \phi_8(\overline{i \cdot v}) = \phi_8(\overline{v})\}| \cdot \prod_{i \in \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}} (|\{j \in \{1, \ldots 8\} \mid v_j = i\}|!)}$$

Enfin, le lien entre les orbites de $C_{\mathrm{E}_8}(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$ pour les actions de W'' et de W' est donné par le lemme suivant :

Lemme 2.4.13. *On définit la fonction* $\text{signe}_q : (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^8 \to \{-1, 0, 1\}$ *par :*

$$\text{signe}_q(v_1, \ldots, v_8) = \prod_{i=1}^{8} \varepsilon_i,$$

avec :

$$\varepsilon_i = \begin{cases} -1 \text{ si } v_i \in \{(q+1)/2, \ldots, q-1\}. \\ 0 \text{ si } v_i = 0. \\ 1 \text{ si } v_i \in \{1, \ldots, (q-1)/2\}. \end{cases}$$

Alors si $v, v' \in (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^8$ *vérifient* $\mathcal{O}_{W''}(v) = \mathcal{O}_{W''}(v')$*, on a l'équivalence :*

$$\mathcal{O}_{W'}(v) = \mathcal{O}_{W'}(v') \Leftrightarrow \text{signe}_q(v) = \text{signe}_q(v').$$

Démonstration. Soient $v, v' \in (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^8$. On suppose pour simplifier que les images des coordonnées de v et de v' dans $\{0, \ldots, q-1\}^8$ sont rangées par ordre croissant (ce qui ne change rien à la généralité du problème, comme $\mathcal{S}_8 \subset W' \subset W''$).

On constate que la fonction signe_q est invariante par l'action de W' ce qui donne déjà l'implication :

$$\mathcal{O}_{W'}(v) = \mathcal{O}_{W'}(v') \Rightarrow \text{signe}_q(v) = \text{signe}_q(v').$$

En reprenant l'élément d introduit à la démonstration du lemme 2.4.3, on utilise l'écriture $W'' = W' \cup (W' \circ d)$ et l'égalité $\text{signe}_q(d(v)) = -\text{signe}_q(v)$. On a ainsi deux possibilités :

- si $v_1 = 0$: alors on a $d(v) = v$, donc $\mathcal{O}_{W''}(v) = \mathcal{O}_{W'}(v) = \mathcal{O}_{W'}(v')$, et $\text{signe}_q(v) = \text{signe}_q(v') = 0$.
- si $v_1 \neq 0$: alors on a $\text{signe}_q(d(v)) \neq \text{signe}_q(v)$. Ainsi on peut écrire l'union disjointe : $\mathcal{O}_{W''}(v) = \mathcal{O}_{W'}(v) \sqcup \mathcal{O}_{W'}(d(v))$. Comme $v' \in \mathcal{O}_{W''}(v)$, alors on a $v' \in \mathcal{O}_{W'}(v)$ ou $\mathcal{O}_{W'}(d(v))$. Comme la fonction signe_q est constante sur les orbites de W', on déduit que :
$$\mathcal{O}_{W'}(v) = \mathcal{O}_{W'}(v') \Leftrightarrow v' \in \mathcal{O}_{W'}(v) \Leftrightarrow \text{signe}_q(v) = \text{signe}_q(v').$$

D'où le résultat cherché. □

Le lemme suivant se déduit alors facilement :

Lemme 2.4.14. *Soit* O *une orbite de* $C_{\mathrm{E}_8}(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$ *pour l'action de* W''*. Alors* O *correspond à une ou deux orbites pour l'action de* W'*.*

S'il existe $(v_1, \ldots, v_8) \in (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^8$ *avec* $x = \text{vect}_{\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}}(v_1, \ldots, v_8) \in O$ *tel que* $\text{signe}_q(v) = 0$*, alors* O *ne correspond qu'à une seule orbite pour l'action de* W'*.*

S'il n'existe pas de tel élément, alors O *sera la réunion de deux orbites* O^+ *et* O^- *pour l'action de* W'*. Si l'on se donne* $x = \text{vect}_{\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}}(v_1, \ldots, v_8) \in O$ *quelconque, alors* O^+ *et* O^- *peuvent être définies par :*

$$\begin{cases} \text{vect}_{\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}}(v_1, \ldots, v_8) \in O^+ \\ \text{vect}_{\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}}(-v_1, \ldots, v_8) \in O^- \\ \text{card}(O^+) = \text{card}(O^-) = \dfrac{\text{card}(O)}{2} \end{cases}$$

Deuxième étape :

On possède ainsi pour chaque orbite de $C_{\mathrm{E}_8}(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$ sous l'action de W' un représentant et le cardinal de l'orbite. Il suffit d'utiliser l'ensemble H_8 construit au paragraphe 2.4.2 pour savoir si des orbites différentes pour l'action de W' sont dans la même orbite pour l'action de W. Le lemme suivant se déduit facilement de la définition de l'ensemble H_8 :

Lemme 2.4.15. *Soient $x, x' \in C_{\mathrm{E}_8}(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$, et $v, v' \in (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^8$ des générateurs de x et x'. Alors x et x' sont sur la même orbite de $C_{\mathrm{E}_8}(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$ pour l'action de W si, et seulement si :*

$$(\exists i \in \mathbb{Z}/q\mathbb{Z})(\exists h \in H_8) \begin{cases} \phi_8(\overline{i \cdot v}) = \phi_8(\overline{h(v')}) \\ \mathrm{signe}_q(i \cdot v) = \mathrm{signe}_q(h(v')) \end{cases}$$

où les notations sont les mêmes qu'aux lemmes précédents.

Troisième étape : Les orbites de $C_{\mathrm{E}_8}(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$ pour W et pour W^+ sont en général différentes. Soit $\tau_{1,2} \in \mathcal{S}_8 \cap (W \setminus W^+)$ la transposition qui échange les deux premières coordonnées : l'application définie sur W par composition à gauche par $\tau_{1,2}$ est une involution qui échange W^+ et $W \setminus W^+$. Le lien entre les orbites de $C_{\mathrm{E}_8}(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$ pour les actions de W et de W^+ se comprend par le lemme facile suivant :

Lemme 2.4.16. *Soit O une orbite de $C_{\mathrm{E}_8}(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$ pour l'action de W. On pose $v = (v_1, \ldots, v_8)$ tel que $x = \mathrm{vect}_{\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}}(v) \in O$.*

Alors O correspond à une seule orbite pour l'action de W^+ si, et seulement si, un des $h(v)$ pour $h \in H_8$ possède deux coordonnées égales ou opposées.

Dans le cas contraire, O est la réunion de deux orbites O^+ et O^- pour l'action de W^+. Les orbites O^+ et O^- sont entièrement déterminées par les relations :

$$\begin{cases} \mathrm{vect}_{\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}}(v_1, v_2, \ldots, v_8) \in O^+ \\ \mathrm{vect}_{\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}}(v_2, v_1, \ldots, v_8) \in O^- \\ \mathrm{card}(O^+) = \mathrm{card}(O^-) = \dfrac{\mathrm{card}(O)}{2} \end{cases}$$

Le cas de $\mathrm{E}_8 \oplus \mathrm{A}_1$.

Première étape :

D'après la définition introduite au paragraphe 2.2.1, on a $\mathrm{A}_1 = \mathbb{Z} \cdot (1, -1)$. On identifie dans la suite A_1 à $\mathbb{Z}$ par l'isomorphisme : $(a, -a) \in \mathrm{A}_1 \mapsto a \in \mathbb{Z}$. On note dans la suite par (v, w) avec $v \in \mathrm{E}_8$ et $w \in \mathbb{Z}$ les éléments de $\mathrm{E}_8 \oplus \mathrm{A}_1$.

Les résultats pour $\mathrm{E}_8 \oplus \mathrm{A}_1$ se déduisent directement de ceux de E_8, grâce l'isomorphisme $W(\mathrm{E}_8) \times W(\mathrm{A}_1) \simeq W(\mathrm{E}_8 \oplus \mathrm{A}_1)$ suivant :

$$\begin{array}{rcl} W(\mathrm{E}_8) \times W(\mathrm{A}_1) & \tilde{\to} & W(\mathrm{E}_8 \oplus \mathrm{A}_1) \\ (\gamma_1, \gamma_2) & \mapsto & ((v, w) \mapsto (\gamma_1(v), \gamma_2(w))) \,. \end{array}$$

La forme bilinéaire symétrique $(v, w) \cdot (v', w')$ utilisée sur $(\mathrm{E}_8 \oplus \mathrm{A}_1) \times (\mathrm{E}_8 \oplus \mathrm{A}_1)$ et la forme quadratique q associée sont données par :

$$(v, w) \cdot (v', w') = \left(\sum_i v_i \cdot v'_i \right) + 2 \cdot w \cdot w'$$

$$q(v, w) = \frac{1}{2} \left(\sum_i v_i^2 \right) + w^2$$

où on a pris $v = (v_1, \ldots, v_8)$ et $v' = (v'_1, \ldots, v'_8)$ dans E_8 et $w, w' \in \mathbb{Z}$. Notons enfin que $W(\mathrm{A}_1) = \mathrm{O}(\mathrm{A}_1) = \{\pm \mathrm{id}\}$.

On définit les groupes : $W' = \left(\mathcal{S}_8 \ltimes (\{\pm 1\})^0 \right) \times \{\pm \mathrm{id}\}$ et $W'' = (\mathcal{S}_8 \ltimes \{\pm 1\}^8) \times \{\pm 1\}$. On a les inclusions : $W' \subset W$ et $W' \subset W''$.

Les lemmes suivants se déduisent directement des résultats obtenus pour E_8 et sont donc évidents :

Lemme 2.4.17. *Soit $x \in C_{\mathrm{E}_8\oplus\mathrm{A}_1}(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$. Alors l'orbite de x par l'action de W'' possède un élément $x' = \mathrm{vect}_{\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}}(v,w)$ pour $(v,w) \in \mathrm{E}_8 \oplus \mathrm{A}_1$, où $v = (v_1,\dots,v_8)$ vérifie :*

$$\begin{array}{rl} (i) & v_i \in \{0,\dots,(q-1)/2\} \\ (ii) & w \in \{0,\dots,(q-1)/2\} \\ (iii) & v_1 \leq \cdots \leq v_8 \\ (iv) & \inf\{v_i \mid v_i > 0\} = 1 \end{array}$$

Lemme 2.4.18. *Soient $x, x' \in C_{\mathrm{E}_8}(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$, et $(v,w),(v',w') \in (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^8 \times \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ des générateurs de x et x'. Alors x et x' sont dans la même orbite de $C_{\mathrm{E}_8\oplus\mathrm{A}_1}(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$ pour l'action de W'' si, et seulement si :*

$$(\exists i \in \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}) \begin{cases} \phi_8(\overline{i\cdot v}) = \phi_8(\overline{v'}) \\ (i\cdot w)^2 = w'^2 \end{cases}$$

où ϕ_8 est la fonction définie au paragraphe précédent, et où on a noté par $\overline{v}$ l'unique élément de $\{\frac{1-q}{2},\dots\frac{q-1}{2}\}^8$ ayant même image que v par le passage au quotient : $\mathbb{Z}^8 \to (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^8$.

Lemme 2.4.19. *Soit $x \in C_{\mathrm{E}_8\oplus\mathrm{A}_1}(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$ une droite isotrope, et $(v,w) = ((v_1,\dots,v_8),w)$ un générateur de x. Alors le cardinal de l'orbite de x par l'action de W'' est donné par :*

$$\mathrm{card}\left(\mathcal{O}_{W''}(x)\right) =$$
$$\begin{cases} \dfrac{2^{8-|\{j\in\{1,\dots,8\} \mid v_j=0\}|}\cdot 8!}{|\{i\in\mathbb{Z}/q\mathbb{Z} \mid \phi_8(\overline{i\cdot v}) = \phi_8(\overline{v})\}| \cdot \prod\limits_{i\in\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}} (|\{j\in\{1,\dots 8\} \mid v_j = i\}|!)} & \text{si } w = 0 \\ \dfrac{2^{8-|\{j\in\{1,\dots,8\} \mid v_j=0\}|}\cdot 8!\cdot 2}{|\{i\in\mathbb{Z}/q\mathbb{Z} \mid (\phi_8(\overline{i\cdot v}),(iw)^2) = (\phi_8(\overline{v}),w^2)\}| \cdot \prod\limits_{i\in\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}} (|\{j\in\{1,\dots 8\} \mid v_j = i\}|!)} & \text{si } w \neq 0 \end{cases}$$

Le lien entre les orbites de $C_{\mathrm{E}_8\oplus\mathrm{A}_1}(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$ pour l'action de W'' et pour W' se comprend exactement comme dans le cas de E_8. On trouve de la même manière que pour E_8 les lemmes faciles suivants :

Lemme 2.4.20. *Si $(v,w),(v',w') \in (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^8 \times \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ vérifient $\mathcal{O}_{W''}(v,w) = \mathcal{O}_{W''}(v',w')$, on a l'équivalence :*

$$\mathcal{O}_{W'}((v,w)) = \mathcal{O}_{W'}((v',w')) \Leftrightarrow \mathrm{signe}_q(v) = \mathrm{signe}_q(v').$$

Lemme 2.4.21. *Soit O une orbite de $C_{\mathrm{E}_8\oplus\mathrm{A}_1}(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$ pour l'action de W''. Alors O correspond à une ou deux orbites pour l'action de W'.*

S'il existe $v = (v_1,\dots,v_8) \in (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^8$ et $w \in \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ avec $x = \mathrm{vect}_{\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}}(v,w) \in O$ tel que $v_1 = 0$, alors O ne correspond qu'à une seule orbite pour l'action de W'.

S'il n'existe pas de tel élément, alors O sera la réunion de deux orbites O^+ et O^- pour l'action de W'. On note $x = \mathrm{vect}_{\mathbb{F}_p}((v_1,\dots,v_8),w) \in O$, alors O^+ et O^- peuvent être définies par :

$$\begin{cases} \mathrm{vect}_{\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}}(v_1,\dots,v_8) \in O^+. \\ \mathrm{vect}_{\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}}(-v_1,\dots,v_8) \in O^-. \\ \mathrm{card}(O^+) = \mathrm{card}(O^-) = \dfrac{\mathrm{card}(O)}{2}. \end{cases}$$

Deuxième étape :

On possède ainsi pour chaque orbite de $C_{\mathrm{E}_8\oplus\mathrm{A}_1}(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$ sous l'action de W' un représentant et le cardinal de l'orbite. On utilise la même méthode que pour E_8 pour savoir si des orbites différentes pour l'action de W' correspondent à la même orbite pour l'action de W. Concrètement, on utilise le lemme suivant qui se déduit immédiatement de la définition de H_8 :

Lemme 2.4.22. *Soient $x, x' \in C_{\mathrm{E}_8\oplus\mathrm{A}_1}(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$, et $(v,w),(v',w') \in (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^8 \times \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ des générateurs de x et x'. Alors x et x' sont sur la même orbite de $C_{\mathrm{E}_8}(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$ pour l'action de W si, et seulement si :*

$$(\exists i \in \mathbb{Z}/q\mathbb{Z})(\exists h \in H_8) \begin{cases} \phi_8(\overline{i \cdot v}) = \phi_8(\overline{h(v')}) \\ (i \cdot w)^2 = w'^2 \\ \mathrm{signe}_q(i \cdot v) = \mathrm{signe}_q(h(v')) \end{cases}$$

où les notations sont les mêmes qu'aux lemmes précédents.

Troisième étape : On retrouve la même situation que pour E_7 grâce au lemme suivant :

Lemme 2.4.23. *Les orbites de $C_{\mathrm{E}_8\oplus\mathrm{A}_1}(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$ pour l'action de W sont exactement celles pour l'action de W^+.*

Démonstration. il suffit de constater que : $-1 \in W \setminus W^+$, et que -1 a une action triviale sur $C_{\mathrm{E}_8\oplus\mathrm{A}_1}(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$. □

2.4.4 La détermination d'une transformation de $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ transformant L en un q-voisin donné.

Au paragraphe précédent, on a montré comment trouver, pour chaque orbite de $C_L(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$ pour l'action de $W^+ = \mathrm{SO}(L)$, un représentant ainsi que le cardinal de l'orbite. La formule trouvée au corollaire 2.3.4 fait intervenir, pour chacun des représentants x trouvé au paragraphe précédent, un élément $g_x \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{Q})$ tel que le q-voisin L_x de L associé à x par la proposition-définition 2.2.18 s'écrive : $L_x = g_x L$.

La méthode qui suit explique comment, à partir d'une droite isotrope x engendrée par un vecteur v, construire le réseau L_x associé (en exhibant une famille génératrice), puis comment trouver un élément $g_x \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{Q})$ tel que $L_x = g_x L$.

La construction du q-voisin à partir d'une droite isotrope.

On reprend la construction de la proposition-définition 2.2.18. Soient $L \in \mathcal{L}_n$, x la droite isotrope de $C_L(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$ engendrée par le vecteur $v \in L$, et L_x le q-voisin de L associé à x d'après la proposition-définition 2.2.18. On souhaite déterminer une famille génératrice de L_x.

La première étape consiste à créer le réseau M que l'on avait défini comme l'image inverse par l'homomorphisme $L \to L/qL$ de $x^\perp$, ce que l'on décrit dans le lemme suivant :

Lemme 2.4.24. *Soient $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ une $\mathbb{Z}$-base de L, et $(\overline{\alpha_1}, \ldots, \overline{\alpha_n})$ son image dans L/qL. Alors le $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$-module $x^\perp$ est libre de rang $n-1$. De plus, si l'on se donne $i_0 \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $(\overline{\alpha_{i_0}} \cdot v) \in (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^*$, la famille :*

$$\{(\alpha_{i_0} \cdot v)\ \overline{\alpha_i} - (\alpha_i \cdot v)\ \overline{\alpha_{i_0}} \mid i \in \{1, \ldots, n\} \setminus i_0\}$$

est une base de $x^\perp$. En tant qu'image inverse de $x^\perp$ par la projection $L \to L/qL$, le réseau M admet pour famille génératrice la famille suivante :

$$\{(\alpha_{i_0} \cdot v)\ \alpha_i - (\alpha_i \cdot v)\ \alpha_{i_0} \mid i \in \{1, \dots, n\} \setminus i_0\} \bigcup \{q\ \alpha_i \mid i \in \{1, \dots, n\}\}.$$

Démonstration. le rang de $x^\perp$ et l'existence de l'indice i_0 sont assurés par la non dégénérescence du produit scalaire sur L. Le reste est évident. □

Il est alors facile d'exhiber une famille génératrice de L_x à partir de la famille génératrice de M précédente. Concrètement, on a la proposition suivante :

Proposition 2.4.25. *On reprend les mêmes notations que précédemment. Le réseau L_x possède une famille $\mathbb{Z}$-génératrice à $2n$ éléments, à savoir :*

$$\begin{aligned}&\{(\alpha_{i_0} \cdot v)\ \alpha_i - (\alpha_i \cdot v)\ \alpha_{i_0} \mid i \in \{1, \dots, n\} \setminus i_0\} \\ \bigcup \{q\ \alpha_i \mid i \in \{1, \dots, n\}\} &\bigcup \left\{ \frac{1}{q} \left(v - \frac{v \cdot v}{2}\ m\ \alpha_{i_0} \right) \right\},\end{aligned}$$

où m est un entier tel que $m\ (v \cdot \alpha_{i_0}) \equiv 1 \bmod \mathrm{q}$ (qui existe bien comme $(\overline{\alpha_{i_0}} \cdot v) \in (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^*$).

Démonstration. On reprend la construction faite à la proposition-définition 2.2.18. Le réseau L_x est donné par :

$$L_x = M + \mathbb{Z}\ \frac{v'}{q},$$

où $v' = v - \dfrac{v \cdot v}{2}\ m\ \alpha_{i_0}$, et i_0 et m sont définis au-dessus. Comme v est isotrope, alors v et v' ont bien même image dans L/qL, et v' vérifie $(v' \cdot v') \equiv 0 \bmod 2q^2$. □

Détermination d'une transformation entre L et L_x.

On suppose que $n \leq 9$. En particulier, on a les deux propriétés suivantes :
- deux réseaux $L, L' \in \mathcal{L}_n$ sont nécessairement isomorphes ;
- soit $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ un système de racines simples de $L \in \mathcal{L}_n$: c'est une $\mathbb{Z}$-base de L.

De ces deux constatations, on déduit le lemme facile suivant :

Lemme 2.4.26. *Soient $n \leq 9$, et $L, L' \in \mathcal{L}_n$ deux réseaux. On note $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ un système de racines simples de L, et $\{\beta_1, \dots, \beta_n\}$ un système de racines simples de L'. Ce sont respectivement des bases de L et L'. On suppose que les α_i et les β_j sont numérotés de manière à donner le même diagramme de Dynkin, c'est-à-dire que les matrices $(\alpha_i \cdot \alpha_j)_{i,j}$ et $(\beta_i \cdot \beta_j)_{i,j}$ sont égales (ce qui est bien possible comme les réseaux L et L' sont isomorphes).*

Alors l'unique application linéaire g donnée par :

$$\begin{aligned} g : L &\to L' \\ \alpha_i &\mapsto \beta_i \end{aligned}$$

est un élément de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ tel que $g(L) = L'$.

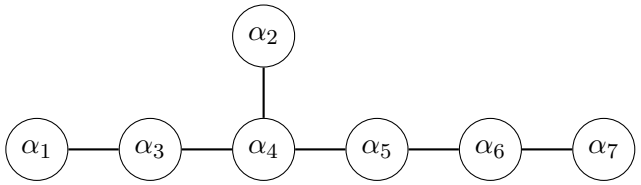
De plus, si $g \notin \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$, alors $g' = g \circ s_{\alpha_1} \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ et vérifie $L' = g'(L)$.

On souhaite construire un élément $g \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ tel que $L_x = g(L)$ (où L_x est le q-voisin de L associé à l'élément $x \in C_L(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$ d'après la proposition-définition 2.2.18). Grâce à l'étude faite au paragraphe précédent, on possède déjà une famille génératrice pour L_x. D'après le lemme précédent, il suffit de déterminer un système de racines simples pour L_x, puis de l'ordonner correctement, et enfin de créer la transformation g associée. L'algorithme qui fait cela se fait selon les étapes suivantes :

Première étape : à l'aide d'une famille $\mathbb{Z}$-génératrice de L_x (par exemple celle trouvée au paragraphe précédent), on trouve une $\mathbb{Z}$-base de L_x grâce à la fonction qflll de PARI qui repose sur l'algorithme LLL. Comme nous l'a fait remarqué un rapporteur, on pourrait aussi utiliser une forme normale de Hermite.
Deuxième étape : la forme bilinéaire sur L_x est entièrement déterminée par sa valeur sur la base trouvée à la première étape. On en déduit l'ensemble des racines de L_x. La fonction qfminim de Pari-GP nous donne directement un ensemble R^+ de racines positives.
Troisième étape : en posant $\rho = (1/2) \cdot \sum_{\beta \in R^+} \beta$, on déduit le système de racines simples $\{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$ associé à la chambre de Weyl contenant ρ.
Quatrième étape : on réordonne ensuite les indices des β_i pour qu'ils donnent le même diagramme de Dynkin que les α_i (où les α_i sont un système de racines simples de L, ordonnées comme dans [11, Planches VI et VII] par exemple).
Cinquième étape : on construit l'application g définie au lemme précédent.

Seules les quatrième et cinquième étapes diffèrent selon les réseaux considérés. On les détaille ci-dessous dans le cas où $L = \mathrm{E}_7$:

L'exemple de E_7 :
On reprend les notations des paragraphes 2.2.1 et 2.4.2. On pose $\alpha_i = v_i$ pour $i = 1, \ldots, 7$ (qui est bien un système de racines simples de E_7). Le diagramme de Dynkin et la matrice de Gram associés sont donnés par :



$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Donnons-nous un système de racines simples $\{\beta_1, \ldots, \beta_7\}$ de L_x (celui qu'on a trouvé à la troisième étape grâce à Pari-GP). On pose $B = (b_{i,j}) = (\beta_i \cdot \beta_j)$ la matrice de Gram associée. On explique ci-dessous comment trouver les entier $i_1, \ldots, i_7$ tels que :

(*i*) $\{i_1, \ldots, i_7\} = \{1, \ldots, 7\}$.
(*ii*) les matrices $B' = (\beta_{i_l} \cdot \beta_{i_m})_{l,m}$ et $A = (\alpha_l \cdot \alpha_m)_{l,m}$ sont égales.

Et une telle numérotation est unique.

On procède comme suit :
– l'entier i_4 est l'indice de l'unique ligne de B dont la somme des coefficients est -1.
– on définit les ensembles $I_1, I_2, I_3, I_4 \subset \{1, \ldots, 7\}$ par :

$$I_1 = \{j \in \{1, \ldots, 7\} \mid b_{i_4,j} = -1\},$$

$$I_2 = \{j \in \{1, \ldots, 7\} \mid \sum_i b_{i,j} = 1\},$$

$$I_3 = \{j \in \{1, \ldots, 7\} \mid \sum_i b_{i,j} = 0\},$$

$$I_4 = \{j \in \{1, \ldots, 7\} \mid (\exists i \in I_1) b_{i,j} = -1\}.$$

– d'après la numérotation du diagramme de Dynkin de E_7, on a les égalités :

$$\{i_2, i_3, i_5\} = I_1,$$
$$\{i_1, i_2, i_7\} = I_2,$$
$$\{i_3, i_5, i_6\} = I_3,$$
$$\{i_1, i_4, i_6\} = I_4.$$

– dans un premier temps, on déduit : $i_1 = I_2 \cap I_4$, $i_2 = I_1 \cap I_2$ et $i_6 = I_3 \cap I_4$.
– on déduit ensuite : $i_7 = I_2 \setminus \{i_1, i_2\}$.
– enfin on trouve $i_3 = \{j \in \{1, \dots, 7\} \mid b_{i_1,j} = -1\}$, et i_5 est le dernier indice restant.

2.5 L'étude de T_A pour A un 2-groupe.

Dans cette partie, on considère A un 2-groupe de la forme $A = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^i$ (avec $i \leq n/2$) ou $A = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$. Soient $n = 7, 8$ ou 9, et $L \in \mathcal{L}_n$. On note $R = R(L)$ l'ensemble des racines de L, W son groupe de Weyl, et $W^+ = \mathrm{SO}(L)$ le sous-groupe de W des éléments de déterminant 1. On souhaite déterminer les orbites de A-voisins du réseau L sous l'action du groupe W^+.

Une particularité du cas $p = 2$ repose sur le lemme suivant :

Lemme 2.5.1. *Soit L un réseau du type E_7 ou E_8. On pose $\tilde{q}$ la forme quadratique obtenue à partir de q par passage au quotient dans $L/2L$. L'homomorphisme naturel suivant :*

$$W \to \mathrm{O}(\tilde{q}) = \mathrm{O}(L/2L)$$

est surjectif.

Démonstration. Voir [11, Ch.VI, §4, Exercices 1 et 3]. □

2.5.1 Détermination des orbites de A-voisins pour les actions des groupes W et W^+.

Les orbites des 2-voisins et des 4-voisins pour l'action de W^+.

D'après la proposition 2.2.16 et la proposition-définition 2.2.18, les orbites des 2-voisins ou des 4-voisins pour l'action de W^+ se comprennent par l'étude des orbites des droites isotropes de $L/2L$ ou de $L/4L$ pour l'action de W^+.

Les orbites de droites isotropes de $L/2L$ pour l'action de W^+ sont expliquées par les corollaires suivants du lemme 2.5.1 :

Corollaire 2.5.2. *Soit L le réseau E_7 ou E_8, et W son groupe de Weyl. Soit $\tilde{q}$ la forme quadratique obtenue à partir de q par passage au quotient dans $L/2L$. Alors $L \otimes \mathbb{F}_2 - \{0\}$ ne possède que deux orbites pour l'action de W^+, à savoir : $\tilde{q}^{-1}(0) - \{0\}$ et $\tilde{q}^{-1}(1)$.*

Démonstration. Découle du lemme 2.5.1 et du théorème de Witt. En effet, si on se donne deux éléments non nuls $u, v \in L \otimes \mathbb{F}_2$ avec $\tilde{q}(u) = \tilde{q}(v)$, le théorème de Witt nous donne un élément $s \in \mathrm{O}(\tilde{q})$ tel que $s(u) = v$. Et un tel élément s provient d'un élément $w \in W$ d'après le lemme 2.5.1. Ainsi, $L \otimes \mathbb{F}_2 - \{0\}$ ne possède que deux orbites pour l'action de W, à savoir : $\tilde{q}^{-1}(0) - \{0\}$ et $\tilde{q}^{-1}(1)$.

Si $u \in \tilde{q}^{-1}(0) - \{0\}$ ou si $u \in \tilde{q}^{-1}(1)$, on peut toujours trouver un vecteur $u' \in L$ laissé stable par un élément $\sigma \in W \setminus W^+$, dont l'image par $L \to L/2L$ est u. Par exemple, si σ désigne la permutation des deux dernières coordonnées dans $\mathbb{R}^8$, on peut voir que les vecteurs $u' = (1, -1, 0, \dots, 0)$ et $u'(1, 1, -1, -1, 0, \dots, 0)$ conviennent. Ainsi, les orbites de $L \otimes \mathbb{F}_2 - \{0\}$ pour les actions de W et de W^+ coïncident. D'où le résultat. □

Les corollaires suivants se déduisent du fait que les 2-voisins du réseau L sont en bijection avec les éléments de $C_L(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$, et que cette bijection commute aux actions de W^+ :

Corollaire 2.5.3. *Soient $L = \mathrm{E}_7$ ou E_8, W son groupe de Weyl, et $W^+ = \mathrm{SO}(L)$. Le groupe W^+ agit transitivement sur $C_L(\mathbb{F}_2)$ ainsi que sur l'ensemble des 2-voisins de L.*

Corollaire 2.5.4. *Soient $L = \mathrm{E}_8 \oplus \mathrm{A}_1$, W son groupe de Weyl, et $W^+ = \mathrm{SO}(L)$. Notons q_1 et q_2 les formes quadratiques associées à la projection de L sur E_8 et A_1 respectivement. Alors $C_L(\mathbb{F}_2)$ possède exactement deux orbites sous l'action de W^+, qui sont :*

$$\Big(q_1^{-1}(0) - \{0\}\Big) \times \{0\}$$
$$\Big(q_1^{-1}(1)\Big) \times \Big(q_2^{-1}(1)\Big)$$

Il y a donc deux orbites de 2-voisins de L sous l'action de W^+, qui sont associées aux deux orbites de $C_L(\mathbb{F}_2)$ par la bijection de la proposition-définition 2.2.18.

De même, nous allons voir que, pour $L = \mathrm{E}_7$ ou $L = \mathrm{E}_8$, le groupe $W^+ = \mathrm{SO}(L)$ agit transitivement sur $C_L(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$, et donc sur l'ensemble des 4-voisins de L.

Pour cela, posons $X = \{x \in \mathrm{E}_7 \setminus 2\mathrm{E}_7 \mid (x \cdot x) = 8\}$. On a les lemmes suivants :

Lemme 2.5.5. *On a les propriétés suivantes :*

(*i*) $|X| = 4032 = 2 \cdot 2^5 \cdot 63$.

(*ii*) *l'action de W^+ sur X est transitive.*

Démonstration. Le point (*i*) se vérifie facilement à la main, car il est élémentaire d'énumérer tous les éléments de X. On pourrait aussi utiliser un argument de série thêta, en utilisant le développement suivant :

$$\theta_{\mathrm{E}_7}(q) = 1 + 126 \cdot q + 756 \cdot q^2 + 2072 \cdot q^3 + 4158 \cdot q^4 + 7560 \cdot q^5 + \dots.$$

Pour le (*ii*), on utilise la description faite de W au paragraphe 2.4.2. Il est alors facile de vérifier qu'il n'y a qu'une seule orbite d'éléments de X pour l'action de W. Comme le vecteur $(2, 1, -1, -1, -1, 0, 0, 0) \in X$ est invariant par la permutation $\sigma \in W \setminus W^+$ qui échange les deux dernières coordonnées, on déduit qu'il n'y a qu'une seule orbite d'éléments de X pour l'action de W^+. □

On veut montrer que toute droite de la quadrique $C_{\mathrm{E}_7}(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$ est engendrée par un vecteur de X, ce qui découle du lemme suivant :

Lemme 2.5.6. *L'application de réduction modulo 4 : $X \to \mathrm{E}_7/4\mathrm{E}_7$ est injective. De plus, elle induit une bijection :*

$$\begin{array}{rcl} \{\{x, -x\} \mid x \in X\} & \to & C_{\mathrm{E}_7}(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}). \\ \{x, -x\} & \mapsto & \mathrm{vect}_{\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}}(x). \end{array}$$

Démonstration. Montrons d'abord l'injectivité de l'application de réduction modulo 4 : $X \to \mathrm{E}_7/4\mathrm{E}_7$. Soient $x \in X$, et u non nul dans E_7 tels que $(x - 4 \cdot u) \in X$. En particulier, on a les égalités : $(x - 4u) \cdot (x - 4u) = 8$ et $x \cdot x = 8$, donc $4u \cdot u = x \cdot u$.

Le théorème de Cauchy-Schwarz nous dit que : $4(u \cdot u)^2 \leq 8(u \cdot u)$, puis $u \cdot u \leq 2$. Comme $u \in \mathrm{E}_7$ et que $u \neq 0$, on déduit que $u \cdot u = 2$. Ainsi, toutes les inégalités précédentes sont des égalités, et les vecteurs x et u sont $\mathbb{R}$-proportionnels. En cherchant x de la forme $\lambda \cdot u$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on trouve facilement que $x = 2u$, ce qui est impossible par définition de X. D'où l'injectivité cherchée.

Il reste à déterminer le caractère bijectif de l'application $\{x, -x\} \mapsto \mathrm{vect}_{\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}}(x)$. Cette application est déjà injective d'après le premier point du lemme. Pour voir qu'elle est surjective, il suffit de voir que $|X| = 2 \cdot |C_{\mathrm{E}_7}(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})|$. C'est un exercice de vérifier que $|C_{\mathrm{E}_7}(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})| = 2^5 \cdot |C_{\mathrm{E}_7}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})| = 2^5 \cdot (2^6 - 1) = 2^5 \cdot 63$. □

Corollaire 2.5.7. *L'action naturelle du groupe $W^+ = \mathrm{SO}(\mathrm{E}_7)$ sur l'ensemble des 4-voisins de E_7 est transitive.*

Démonstration. C'est une conséquence immédiate des lemmes précédents. On sait déjà que W^+ agit transitivement sur l'ensemble X, et on voit facilement que la bijection $\{x, -x\} \mapsto \mathrm{vect}_{Z/4\mathbb{Z}}(x)$ commute avec les actions de W^+ sur X et sur $C_{\mathrm{E}_7}(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$. Ainsi, W^+ agit transitivement sur $C_{\mathrm{E}_7}(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$, donc sur l'ensemble des 4-voisins de E_7. □

La même méthode s'applique à l'étude des 4-voisins de E_8. On se contente d'exposer les résultats analogues au cas de E_7, en laissant les démonstrations au lecteur.

Posons $Y = \{y \in \mathrm{E}_8 \setminus 2\mathrm{E}_8 \mid (y \cdot y) = 8\}$. On a les lemmes suivants :

Lemme 2.5.8. *On a les propriétés suivantes :*

(*i*) $|Y| = 17280 = 2 \cdot 2^6 \cdot 135$.

(*ii*) *l'action de W^+ sur Y est transitive.*

Lemme 2.5.9. *L'application de réduction modulo 4 : $Y \to \mathrm{E}_8/4\mathrm{E}_8$ est injective. De plus, elle induit une bijection :*

$$\begin{array}{rcl} \{\{y, -y\} \mid y \in Y\} & \to & C_{\mathrm{E}_8}(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}). \\ \{y, -y\} & \mapsto & \mathrm{vect}_{\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}}(y). \end{array}$$

Corollaire 2.5.10. *L'action naturelle du groupe $W^+ = \mathrm{SO}(\mathrm{E}_8)$ sur l'ensemble des 4-voisins de E_8 est transitive.*

Les orbites des $2, \ldots, 2$-voisins pour l'action de W^+.

Dans cette partie, on ne considère que les cas où $L = \mathrm{E}_7$ ou $L = \mathrm{E}_8$. On pose $A = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^i$, et on s'intéresse aux A-voisins de L. Notre but est d'étudier les orbites de A-voisins de L pour l'action de $W^+ = \mathrm{SO}(L)$, ce qui repose sur les lemmes suivants :

Lemme 2.5.11. *Soient $n = 7$ ou 8, et $1 \leq i \leq n/2$. À isomorphisme près, il existe un unique réseau $M \subset \mathbb{R}^n$ pair et tel que :*

$$\text{rés } M \simeq \mathrm{H}\left((\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^i\right) \oplus \text{rés } L_0,$$

où L_0 est un élément quelconque de $\mathcal{L}_n$.

Démonstration. Soient I, I' deux espaces isotropes isomorphes à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^i$ et en somme directe dans rés M (qui existent bien par hypothèse). Considérons L et L' les images réciproques respectives de I et I' par l'application naturelle $M^\sharp \to$ rés M : ce sont deux éléments de $\mathcal{L}_n$, qui sont des $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^i$-voisins.

À isométrie près, $\mathcal{L}_n$ ne possède qu'un seul élément, et on peut donc supposer que $L = \mathrm{E}_7$ ou $L = \mathrm{E}_8$ (selon le choix de n). D'après la proposition 2.2.16, M est l'image réciproque via l'application naturelle $L \to L/2L$ de l'orthogonal d'un sous-espace isotrope de dimension i. Comme $\mathrm{O}(L)$ permute transitivement ces sous-espaces (par le théorème de Witt et le lemme 2.5.1), M est bien unique à isomorphisme près.

Il reste à montrer l'existence de tels réseaux M : celle-ci est claire grâce à l'existence de $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^i$-voisins. On donnera dans la suite des exemples de M satisfaisant les propriétés de l'énoncé du lemme. □

Lemme 2.5.12. *Soient n, i et M comme dans le lemme 2.5.11. Alors le groupe $\mathrm{O}(M)$ agit transitivement sur l'ensemble des couples (I, I'), où I et I' sont des sous-espaces isotropes de dimension i en somme directe dans* rés M.

Démonstration. On procède cas par cas. Comme le réseau M est unique à isomorphisme près, on comprend qu'il suffit de montrer le lemme pour les différentes valeurs possibles pour i et n, mais à chaque fois pour un seul réseau M tel que rés $M \simeq \mathrm{H}\left((\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^i\right) +$ rés L_0.

Démonstration du cas $n = 7$ et $i = 1$. Posons $M = \mathrm{A}_1 \oplus \mathrm{D}_6$ (d'après les notations du paragraphe 2.2.1). Notons $\varepsilon = (1/2, -1/2) \in \mathrm{A}_1^\sharp$, qui est un générateur de $\mathrm{A}_1^\sharp/\mathrm{A}_1$, et $e^\pm = (\pm 1/2, 1/2, \ldots, 1/2) \in \mathrm{D}_6^\sharp$ qui engendrent $\mathrm{D}_6^\sharp/\mathrm{D}_6$. On a les égalités :

$$\begin{aligned}\text{rés } M =& \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\varepsilon \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}e^+ \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}e^- \\ =& \Big(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}(\varepsilon + e^+) \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}(\varepsilon + e^-)\Big) \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}(\varepsilon + e^+ + e^-) \\ \simeq& \mathrm{H}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \oplus \text{rés } \mathrm{E}_7.\end{aligned}$$

Il existe seulement deux droites isotropes de dimension 1 et elles sont en somme directe dans rés M. Ce sont les droites engendrées par $\varepsilon + e^+$ et par $\varepsilon + e^-$.

Soit $\sigma \in \mathrm{O}(\mathrm{D}_6)$ la symétrie orthogonale par rapport au vecteur $(1, 0, \ldots, 0)$: elle échange e^+ et e^-. L'élément $\mathrm{id} \oplus \sigma$ est donc un élément de $\mathrm{O}(M)$ qui échange les droites engendrées par $\varepsilon + e^+$ et $\varepsilon + e^-$: le groupe $\mathrm{O}(M)$ agit transitivement sur l'ensemble des couples de droites isotropes en somme directe dans rés M. □

Démonstration du cas $n = 7$ et $i = 2$. Posons $M = (\mathrm{A}_1)^3 \oplus \mathrm{D}_4$ (d'après les notations du paragraphe 2.2.1). Notons $\varepsilon_k = (1/2, -1/2) \in \mathrm{A}_1^\sharp$, qui est un générateur du k-ème terme $\mathrm{A}_1^\sharp/\mathrm{A}_1$ apparaissant dans l'écriture de rés M, et $e^\pm = (\pm 1/2, 1/2, 1/2, 1/2) \in \mathrm{D}_4^\sharp$ qui engendrent $\mathrm{D}_4^\sharp/\mathrm{D}_4$. Enfin, on note P le plan $(\mathbb{F}_2)^2$ muni de la forme quadratique $(x, y) \mapsto (1/2)(x^2 + xy + y^2)$ à valeurs dans $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. On a les égalités :

$$\begin{aligned}\text{rés } M =& \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\varepsilon_1 \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\varepsilon_2 \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\varepsilon_3 \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}e^+ \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}e^- \\ =& \Big(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}e^+ \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}e^-\Big) \oplus (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}(\varepsilon_1 + \varepsilon_3)) \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) \\ \simeq& P \oplus P \oplus \text{rés } \mathrm{E}_7 \simeq \mathrm{H}\left((\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2\right) \oplus \text{rés } \mathrm{E}_7.\end{aligned}$$

Seule la dernière égalité n'est pas évidente : elle provient de [18, Ch. II, Proposition 2.1]. Il suffit de constater que le sous-ensemble $\{x \oplus x \mid x \in P\} \subset P \oplus P$ est un lagrangien de $P \oplus P$, et on a donc un isomorphisme $P \oplus P \simeq H\left((\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2\right)$.

Reste donc à comprendre l'action de $\mathrm{O}(M)$ sur les couples de plans isotropes de rés M. Pour cela, il suffit d'utiliser l'inclusion : $\mathcal{S}_3 \times \mathcal{S}_3 \subset \mathrm{O}(M)$, où le premier $\mathcal{S}_3$ agit par permutation des ε_i, et où le second $\mathcal{S}_3$ agit par permutation des vecteurs non-nuls de rés $\mathrm{D}_4 \simeq P$. On remarque que le groupe $\mathrm{O}(P)$ agit par permutation des vecteurs non-nuls de P : fixons pour la suite un isomorphisme $\phi : \mathcal{S}_3 \simeq \mathrm{O}(P)$ (ce qui revient à fixer une numérotation des vecteurs non-nuls de P). L'inclusion $\mathcal{S}_3 \times \mathcal{S}_3 \subset \mathrm{O}(M)$ induit l'inclusion $\mathrm{O}(P) \times \mathrm{O}(P) \subset \mathrm{O}(M)$.

Les plans isotropes de rés M sont obtenus à partir des plans isotropes de $P \oplus P$. Si l'on se donne I un tel plan, comme P ne contient pas d'élément isotrope non nul, on a les égalités : $I \cap (P \oplus \{0\}) = I \cap (\{0\} \oplus P) = \{0\}$. La dimension de I impose qu'il existe un unique élément σ de $\mathcal{S}_3$ tel que : $I = \{u + \phi(\sigma)(u) \in P \oplus P \mid u \in P\}$. Ceci montre déjà que $\mathrm{O}(M)$ agit transitivement sur les plans isotropes de rés M.

Soient I et I' deux plans isotropes en somme directe dans rés M. Quitte à faire agir un élément de $\mathrm{O}(M)$ bien choisi, on peut supposer que $I = \{u + u \in P \oplus P \mid u \in P\}$. Les

espaces I et I' sont en somme directe si, et seulement si, l'élément $\sigma \in \mathcal{S}_3$ associé à I' ne fixe aucun point (c'est-à-dire que c'est un 3-cycle).

Notons $\sigma_1 = (123)$ et $\sigma_2 = (132)$ les deux 3-cycles de $\mathcal{S}_3$, et notons I_1, I_2 les plans isotropes associés. Soient $\tau \in \mathcal{S}_3$ la transposition (23), et $\overline{\tau} = \tau \times \tau \in \mathcal{S}_3 \times \mathcal{S}_3 \subset \mathrm{O}(M)$. L'action de $\overline{\tau}$ sur $P \oplus P \subset$ rés M a bien un sens, en considérant l'élément $\phi(\tau) \times \phi(\tau) \in \mathrm{O}(P) \times \mathrm{O}(P)$. De plus, cette action échange I_1 et I_2, et laisse stable I. Ainsi, le groupe $\mathrm{O}(M)$ agit bien transitivement sur les couples de plans isotropes de rés M. □

Démonstration du cas $n = 7$ et $i = 3$. Posons $M = (\mathrm{A}_1)^7$ (d'après les notations du paragraphe 2.2.1). Notons $\varepsilon_k = (1/2, -1/2) \in \mathrm{A}_1^\sharp$, qui est un générateur du k-ème terme $\mathrm{A}_1^\sharp/\mathrm{A}_1$ apparaissant dans l'écriture de rés M. On a les égalités :

$$\begin{aligned}\text{rés } M = \bigoplus_{k=1}^{7} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\varepsilon_k &= \left(\bigoplus_{k=2}^{7} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}(\varepsilon_1 + \varepsilon_k)\right) \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\left(\sum_{k=1}^{7} \varepsilon_k\right) \\ &\simeq \mathrm{H}\left((\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3\right) \oplus \text{rés } \mathrm{E}_7\end{aligned}$$

Comme dans le cas précédent, la dernière égalité provient de [18, Ch. II, Proposition 2.1] : il suffit de constater que l'espace I_0 engendré par les vecteurs $\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+\varepsilon_4, \varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_5+\varepsilon_6$ et $\varepsilon_1 + \varepsilon_3 + \varepsilon_5 + \varepsilon_7$ est un lagrangien de $\bigoplus_{k=2}^{7} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}(\varepsilon_1 + \varepsilon_k)$.

Par définition de M, on a : $\mathrm{O}(M) = \mathcal{S}_7 \ltimes \{\pm 1\}^7$, où $\{\pm 1\}^7$ agit sur chaque A_1 par $\varepsilon_k \mapsto \pm\varepsilon_k$ (et a donc une action triviale sur rés M), tandis que $\mathcal{S}_7$ agit par permutation des ε_k. On déduit déjà que l'action de $\mathrm{O}(M)$ sur rés $\mathrm{E}_7 \subset$ rés M est triviale. La compréhension des espaces isotropes de dimension 3 de rés M se déduit de la compréhension des lagrangiens de $\mathrm{H}\left((\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3\right)$ donnée par le lemme suivant :

Lemme 2.5.13. *Soit ϕ l'application définie sur $\mathcal{S}_7$ par :*

$$\begin{array}{rccl} \phi : & \mathcal{S}_7 & \to & B_I \\ & \sigma & \mapsto & \left(\mathrm{vect}_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}(v_1, v_2, v_3), (v_1, v_2, v_3)\right) \end{array}$$

où B_I est l'ensemble des couples (I, b), où I est un lagrangiens de $H\left((\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3\right)$, b est une base de I, et où les vecteurs v_1, v_2, v_3 sont donnés par :

$$\begin{cases} v_1 = \varepsilon_{\sigma(1)} + \varepsilon_{\sigma(2)} + \varepsilon_{\sigma(3)} + \varepsilon_{\sigma(4)} \\ v_2 = \varepsilon_{\sigma(1)} + \varepsilon_{\sigma(2)} + \varepsilon_{\sigma(5)} + \varepsilon_{\sigma(6)} \\ v_3 = \varepsilon_{\sigma(1)} + \varepsilon_{\sigma(3)} + \varepsilon_{\sigma(5)} + \varepsilon_{\sigma(7)} \end{cases}.$$

Alors ϕ est une bijection.

Démonstration du lemme. Il est immédiat que ϕ est bien à valeurs dans B_I. Il suffit en effet de voir que les vecteurs v_1, v_2, v_3 sont isotropes, orthogonaux, et forment une famille libre.

Réciproquement, donnons-nous (v_1, v_2, v_3) une base d'un lagrangien I. Pour simplifier, on note I_i les sous-ensembles de $\{1, \ldots, 7\}$ tels que : $v_i = \sum_{j \in I_i} \varepsilon_j$. Les I_i sont deux-à-deux distincts. Comme I est un lagrangien, on a en particulier que :

$$(\forall\ i \in \{1, 2, 3\})\ |I_i| \equiv 0 \bmod 4,$$

$$(\forall\ i, j \in \{1, 2, 3\})\ |I_i \cap I_j| \equiv 0 \bmod 2.$$

Comme les I_i sont des sous-ensembles de $\{1, \ldots, 7\}$, les congruences ci-dessus donnent les égalités :

$$(\forall\ i \in \{1, 2, 3\})\ |I_i| = 4,$$

$$(\forall\, i \neq j \in \{1,2,3\})\ |I_i \cap I_j| = 2.$$

Il est alors facile de voir que l'on a l'égalité :

$$|I_1 \cap I_2 \cap I_3| = 1.$$

En effet, les seules autres valeurs possibles sont 0 ou 2. Mais ces deux cas sont impossibles :

- si $|I_1 \cap I_2 \cap I_3| = 0$: alors on voit facilement que $I_3 = I_1 \cup I_2 \setminus I_1 \cap I_2$, ce qui veut dire que : $v_3 = v_1 + v_2$, ce qui contredit que (v_1, v_2, v_3) forme une base de I.
- si $|I_1 \cap I_2 \cap I_3| = 2$, alors $I_1 \cap I_2 = I_2 \cap I_3 = I_3 \cap I_1 = J$, et les ensembles $I_i \setminus J$ formeraient trois ensembles disjoints à deux éléments de $\{1, \ldots, 7\} \setminus J$, qui ne possède que 5 éléments, ce qui est impossible.

On peut ainsi définir une permutation $\sigma \in \mathcal{S}_7$ avec :

$$\{\sigma(1)\} = I_1 \cap I_2 \cap I_3,$$

$$\{\sigma(2)\} = I_1 \cap I_2 \setminus \{\sigma(1)\},$$

$$\{\sigma(3)\} = I_1 \cap I_3 \setminus \{\sigma(1)\},$$

$$\{\sigma(4)\} = I_1 \setminus \{\sigma(1), \sigma(2), \sigma(3)\},$$

$$\{\sigma(5)\} = I_2 \cap I_3 \setminus \{\sigma(1)\},$$

$$\{\sigma(6)\} = I_2 \setminus \{\sigma(1), \sigma(2), \sigma(5)\},$$

$$\{\sigma(7)\} = I_3 \setminus \{\sigma(1), \sigma(3), \sigma(5)\}.$$

On vérifie facilement que pour notre élément σ défini ci-dessus on a : $\phi(\sigma) = (I, (v_1, v_2, v_3))$. L'application ϕ est une bijection, et sa réciproque est donnée par le processus précédent qui nous a permis de trouver σ. □

Revenons à la démonstration du lemme 2.5.12 dans le cas $n = 7$ et $i = 3$. Soit I un espace isotrope de dimension 3 de rés M : on peut le voir comme un lagrangien de $\bigoplus_{k=2}^{7} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}(\varepsilon_1 + \varepsilon_k) \simeq \mathrm{H}\left((\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3\right)$, et d'après le lemme précédent il existe un élément $\sigma \in \mathcal{S}_7$ associé à une de ses bases. Il est facile de voir que $I = \sigma(I_0)$ (avec l'inclusion $\mathcal{S}_7 \subset \mathrm{O}(M)$), donc $\mathrm{O}(M)$ agit transitivement sur l'ensemble des espaces isotropes de dimension 3 de rés M.

On souhaite vérifier que $\mathrm{O}(M)$ agit bien transitivement sur les couples d'espaces isotropes de dimension 3 en somme directe dans rés M. Soit (I, J) un tel couple. On peut supposer que $I = I_0$ (comme $\mathrm{O}(M)$ agit transitivement sur les espaces isotropes de dimension 3 de rés M). L'espace isotrope J_0 associé par ϕ au 4-cycle $\sigma = (4576)$ est bien en somme directe avec I_0. Soit S le sous-groupe des éléments de $\mathcal{S}_7$ qui préserve I : pour montrer notre résultat, il suffit de vérifier que J est de la forme $s(J_0)$ pour $s \in S$. On vérifie facilement à la main qu'il existe 8 éléments de la forme $s(J_0)$, c'est-à-dire autant que d'espaces isotropes de dimension 3 en somme directe avec I_0 dans rés M, d'où le résultat. □

Démonstration du cas $n = 8$. On se contente de donner les réseaux M qui conviennent selon les valeurs de I. On laisse au lecteur la vérification du lemme 2.5.12 dans ces cas (les méthodes nécessaires ayant déjà été utilisées et détaillées dans le cas $n = 7$). Pour $i = 1, 2, 3, 4$, des réseaux M qui vérifient les conditions du lemme 2.5.11 sont respectivement : D_8, $\mathrm{D}_4 \oplus \mathrm{D}_4$, $\sqrt{2}\mathrm{D}_8^\sharp$ et $\sqrt{2}\mathrm{E}_8^\sharp$. □

□

On déduit des lemmes 2.5.11 et 2.5.12 la proposition suivante :

Proposition 2.5.14. *Soient $1 \leq i \leq 3$ et $A = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^i$. Pour $L = \mathrm{E}_7$ ou E_8, le groupe $\mathrm{SO}(L)$ agit transitivement sur l'ensemble des A-voisins de L.*

Pour $L = \mathrm{E}_8$, il y a deux orbites de $2,2,2,2$-voisins de L pour l'action de $\mathrm{SO}(L)$, et une seule pour l'action de $\mathrm{O}(L)$.

Démonstration. Soient L et A comme dans l'énoncé de la proposition. D'après la proposition 2.2.16, les orbites de A-voisins de L pour l'action de $\mathrm{SO}(L)$ sont en bijection avec les orbites de couples de la forme (X, I), où X est un espace totalement isotrope de L/pL de dimension i, et I est un lagrangien de $\mathrm{H}(L/M)$ (avec M l'image réciproque de $X^\perp$ par $L \to L/pL$) transverse à L/M.

Le théorème de Witt nous dit déjà que $\mathrm{O}(L)$ agit transitivement sur les espaces isotropes X de dimension i de L/pL. Les lemmes 2.5.11 et 2.5.12 nous disent que, une fois X fixé (et donc une fois le réseau M fixé), le groupe $\mathrm{O}(L)$ agit transitivement sur l'ensemble des espaces isotropes de dimension i en somme directe avec L/M dans rés M. Ainsi, le groupe $\mathrm{O}(L)$ agit transitivement sur l'ensemble des A-voisins de L.

Pour passer aux orbites pour l'action de $\mathrm{SO}(L)$, on a deux cas à traiter :

- si $i \leq 3$: alors il est facile de trouver pour un couple (X, I) de la forme précédente un élément $\sigma \in \mathrm{O}(L) \setminus \mathrm{SO}(L)$ tel que $\sigma(X, I) = (X, I)$. Par exemple, pour $L = \mathrm{E}_7$, il suffit de prendre $\sigma = -\mathrm{id}$. On déduit dans ce cas que le groupe $\mathrm{SO}(L)$ agit transitivement sur l'ensemble des couples (X, I) de la forme précédente, et donc sur l'ensemble des A-voisins.
- si $i = 4$ (et donc $L = \mathrm{E}_8$) : il existe exactement deux orbites d'espaces isotropes de dimension 4 dans $\mathrm{E}_8/2\mathrm{E}_8$. Ainsi, il y a exactement deux orbites de couples (X, I) de la forme précédente pour l'action de $\mathrm{SO}(\mathrm{E}_8)$. Il y a donc exactement deux orbites de $2,2,2,2$-voisins de E_8 pour l'action de $\mathrm{SO}(\mathrm{E}_8)$. En particulier, si on se donne $\sigma \in \mathrm{O}(\mathrm{E}_8) \setminus \mathrm{SO}(\mathrm{E}_8)$ et L un $2,2,2,2$-voisin de E_8, alors les réseaux L et $\sigma(L)$ sont des $2,2,2,2$-voisins de E_8 dans des orbites différentes pour l'action de $\mathrm{SO}(\mathrm{E}_8)$.

□

2.5.2 La création de A-voisins dans des cas particuliers.

Les calculs de la trace de T_A (pour A de la forme $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^i$ ou $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$) sont ainsi faciles à réaliser dans les cas précédents : comme on connaît bien les orbites, il suffit de chercher un voisin correspondant à chacune des orbites (c'est-à-dire au plus deux voisins), et de prendre en considération le cardinal de chaque orbite ensuite.

Une autre subtilité du cas où $L = \mathrm{E}_7$, E_8 ou $\mathrm{E}_8 \oplus \mathrm{A}_1$ est que tout élément isotrope $x \in L/2L$ possède un relèvement $v \in L$ tel que $v \cdot v = 4$.

On détaille dans la suite des cas particuliers où il est facile de construire une transformations $\sigma \in \mathrm{O}_n(\mathbb{Q})$ qui transforme L en un de ses A-voisin. Dans les cas étudiés, chaque orbite de A-voisin de L pour l'action de $\mathrm{SO}(L)$ possède un élément de la forme $\sigma(L)$ pour de tels éléments σ.

Lemme 2.5.15 (Création d'un 2-voisin)**.** *Soit $x \in L$ tel que $x \cdot x = 4$. On définit la symétrie $\sigma \in \mathrm{O}_n(\mathbb{Q})$ par :*

$$\sigma(y) = y - \frac{(x \cdot y)}{2}\, x.$$

Alors $\sigma(L)$ est un 2-voisin de L. C'est même le 2-voisin associé à la droite isotrope $\mathrm{vect}(x) \subset L/2L$.

Démonstration. Posons $L' = \sigma(L)$. On a alors :

$$\begin{aligned} L \cap L' &= \left\{ y \in L \mid \sigma^{-1}(y) \in L \right\} = \{ y \in L \mid \sigma(y) \in L \} \\ &= \{ y \in L \mid (x \cdot y) \in 2\mathbb{Z} \} \text{ comme } x \notin 2L \end{aligned}$$

On déduit ainsi facilement que $L/(L\cap L')\simeq\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et que $M=L\cap L'$ est bien l'image réciproque de $x^\perp$ par $L\to L/2L$. Si l'on se donne $y\in L$ tel que $(x\cdot y)\equiv 1 \bmod 2$, alors :

$$L'=M+\mathbb{Z}\ \sigma(y)=M+\mathbb{Z}\ \left(y-\frac{x}{2}\right)=M+\mathbb{Z}\ \frac{x+2y}{2}$$

et on a bien la forme voulue, comme $(x+2y)$ a même image que x dans $L/2L$ et vérifie $(x+2y)\cdot(x+2y)\equiv 0 \bmod 8$. □

On peut étendre cette construction aux $2,\dots,2$-voisins grâce au lemme suivant :

Lemme 2.5.16 (Création de $2,\dots,2$ voisins)**.** *Soit $I=\{1,\dots,m\}$, et $(x_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de L vérifiant les conditions suivantes :*

$$\begin{array}{rl}(i) & (\forall i\in I)\ x_i\cdot x_i=4,\\ (ii) & (\forall i,j\in I)\ i\neq j\Rightarrow x_i\cdot x_j=0,\\ (iii) & \text{la famille } (x_i)_{i\in I} \text{ est libre dans } L/2L.\end{array}$$

Alors, en définissant les σ_i par : $\sigma_i(y)=y-\dfrac{(x_i\cdot y)}{2}\ x_i$, on obtient que :

$$\begin{cases} L\cap\sigma_m\circ\cdots\circ\sigma_1(L)=L\cap\sigma_m(L)\cap\cdots\cap\sigma_1(L),\\ \sigma_m\circ\cdots\circ\sigma_1(L)\ \textit{est un } 2,\dots,2\textit{-voisin de } L.\end{cases}$$

Démonstration. On pose pour simplifier : $\sigma=\sigma_m\circ\cdots\circ\sigma_1$, $L'=\sigma(L)$ et $M=L\cap L'$. La condition (ii) permet d'écrire :

$$\sigma(y)=y-\sum_{i\in I}\frac{(x_i\cdot y)\ x_i}{2}.$$

Ensuite, la condition (iii) nous donne le premier résultat cherché. En effet, on aura :

$$\begin{aligned}\sigma(y)\in L&\Leftrightarrow\sum_{i\in I}\frac{(x_i\cdot y)\ x_i}{2}\in L\Leftrightarrow\sum_{i\in I}(x_i\cdot y)\ x_i\in 2L\\ &\Leftrightarrow(\forall i\in I)(x_i\cdot y)\equiv 0 \bmod 2\Leftrightarrow(\forall i\in I)\sigma_i(y)\in L.\end{aligned}$$

On déduit ainsi que $L\cap L'=L\cap\sigma(L)=L\cap\sigma_m(L)\cap\cdots\cap\sigma_1(L)$, et que L' est bien un $2,\dots,2$-voisin de L.

On peut trouver la famille (v_i) de la proposition 2.2.17 qui est associée à L'. Pour cela, notons $\overline{x_i}$ l'image de la famille x_i dans $L/2L$. On considère u_i une famille d'éléments de L telle que :

$$\begin{array}{rl}(i) & (\forall i)\ u_i\in\bigcap_{j\neq i}\overline{x_j}^\perp\\ (ii) & (\forall i)\ u_i\cdot\overline{x_i}\equiv 1 \bmod 2\end{array}$$

qui existe bien comme le produit scalaire $(\ \cdot\ )$ est non dégénéré et comme la famille des $\overline{x_i}$ est libre. On peut ainsi écrire :

$$L'=M+\sum_i\mathbb{Z}\ \sigma(u_i)=M+\sum_i\mathbb{Z}\ \sigma_i(u_i)=M+\sum_i\mathbb{Z}\ \frac{x_i+2u_i}{2},$$

donc L' est le $2,\dots,2$-voisin associé à la famille (x_i+2u_i), qui est bien un relèvement de $(\overline{x_i})$ vérifiant : $(x_i+2u_i)\cdot(x_i+2u_i)\equiv 0 \bmod 8$ et $(x_i+2u_i)\cdot(x_j+2u_j)\equiv 0 \bmod 4$. □

Lorsque $m=2$, on a le résultat plus général suivant dont la démonstration est évidente :

Lemme 2.5.17. *Soient x_1 et x_2 deux éléments de L tels que $(x_1 \cdot x_1) = (x_2 \cdot x_2) = 4$. On définit comme précédemment les symétries :*

$$\sigma_i(y) = y - \frac{(x_i \cdot y)}{2}\, x_i,$$

qui transforment chacune L en un 2-voisin.

Alors selon la valeur de $(x_1 \cdot x_2) \bmod 2$, on déduit la nature de $L' = \sigma_1 \circ \sigma_2(L)$:

- *si $(x_1 \cdot x_2) \equiv 0 \bmod 2$ avec $x_1 = \pm x_2$: alors $L' = L$.*
- *si $(x_1 \cdot x_2) \equiv 0 \bmod 2$ avec $x_1 \neq \pm x_2$: alors L' est un $2,2$-voisin de L.*
- *si $(x_1 \cdot x_2) \equiv 1 \bmod 2$: alors L' est un 4-voisin de L.*

2.6 Résultats obtenus pour les calculs de traces d'opérateurs de Hecke.

2.6.1 Tables des résultats obtenus.

Si l'on se donne A et n un groupe abélien et un entier bien choisis, pour λ un poids dominant arbitraire de $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$, les résultats précédents nous permettent de calculer : $\mathrm{tr}\,(\mathrm{T}_A|\mathcal{M}_{V_\lambda}(\mathrm{SO}_n))$. On a regroupé certains de ces résultats sous forme de tables disponibles à [48]. Les théorèmes suivants détaillent les résultats en question :

Théorème 2.6.1. *Soient A le groupe $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^i$ ($i \leq 3$), $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ ($p \leq 53$ premier) ou $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ ($q \in \{4, 9, 25, 27\}$), et $\lambda = (a, b, c)$ ($13 \geq a \geq b \geq c \geq 0$) un poids dominant de $\mathrm{SO}_7(\mathbb{R})$. Alors les quantités :*

$$(2a+5, 2b+3, 2c+1, |A|^a \mathrm{tr}\,(\mathrm{T}_A|\mathcal{M}_{V_\lambda}(\mathrm{SO}_7))\,)$$

sont données par les tables de [48].

Théorème 2.6.2. *Soient A le groupe $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^i$ ($i \leq 4$), $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ ($p \leq 13$ premier) ou $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, et $\lambda = (a, b, c, d)$ ($12 \geq a \geq b \geq c \geq d \geq 0$) un poids dominant de $\mathrm{SO}_8(\mathbb{R})$. Alors les quantités :*

$$(2a+6, 2b+4, 2c+2, 2d, |A|^a \mathrm{tr}\,(\mathrm{T}_A|\mathcal{M}_{V_\lambda}(\mathrm{SO}_8))\,)$$

sont données par les tables de [48].

Théorème 2.6.3. *Soient A le groupe $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ ($p \leq 7$ premier), et $\lambda = (a, b, c, d)$ ($12 \geq a \geq b \geq c \geq d \geq 0$) un poids dominant de $\mathrm{SO}_9(\mathbb{R})$. Alors les quantités :*

$$(2a+7, 2b+5, 2c+3, 2d+1, |A|^a \mathrm{tr}\,(\mathrm{T}_A|\mathcal{M}_{V_\lambda}(\mathrm{SO}_9))\,)$$

sont données par les tables de [48].

Notons au passage que dans ces tables, de nombreux poids λ ne sont pas représentés : ce sont ceux pour lesquels la dimension de l'espace $\mathcal{M}_{V_\lambda}(\mathrm{SO}_n)$ est nulle.

2.6.2 Premières constatations autour de quelques exemples.

Partons de l'exemple de SO_7. D'après [19, Table 12], si l'on exclut la représentation triviale $W = \mathbb{C}$ (c'est-à-dire $W = V_\lambda$ pour $\lambda = (0, 0, 0)$), le "premier" $W = V_\lambda$ tel que $\mathcal{M}_W(\mathrm{SO}_7) \neq 0$ est obtenu pour $\lambda = (4, 4, 4)$, auquel cas on a d'après [19] : $\dim \mathcal{M}_W(\mathrm{SO}_7) = 1$. Sur cet espace, la valeur propre de $p^4\mathrm{T}_p$ est :

$$(1 + p + p^2)\tau(p),$$

où τ désigne la fonction de Ramanujan. On constate que c'est bien le résultat que l'on a trouvé.

Toujours d'après [19, Table 12], le "deuxième" $W = V_\lambda$ tel que $\mathcal{M}_W(\mathrm{SO}_7) \neq 0$ est obtenu pour $\lambda = (6, 0, 0)$, et on a là encore d'après [19] $\dim \mathcal{M}_W(\mathrm{SO}_7) = 1$ dans ce cas. Sur cet espace, la valeur propre de $p^6\mathrm{T}_p$ est :

$$\tau_{18}(p) + (1 + p + p^2 + p^3)p^7,$$

où les coefficients $\tau_k(p)$ sont les coefficients en q^p des formes modulaires normalisées pour $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ de poids $k \leq 22$ (et en particulier $\tau = \tau_{12}$). Là encore, on constate que c'est bien le résultat que l'on a trouvé.

De manière plus générale, donnons-nous W une représentation irréductible de SO_7, et notons $\mathcal{M}_W(\mathrm{SO}_7) = \bigoplus_{i=1}^{r_W} \mathbb{C}F_i$, où les F_i sont des éléments de $\mathcal{M}_W(\mathrm{SO}_7)$ propres pour tous les opérateurs de Hecke T_A (ce qui a bien un sens car les opérateurs de Hecke sont tous co-diagonalisables d'après [18, Ch. IV, §4]).

Certaines de ces formes F_i sont en fait associées à des formes automorphes pour des $\mathbb{Z}$-groupes "plus petits" que SO_7, au sens de la théorie de l'endoscopie (nous reviendrons plus en détail sur ce point dans le chapitre suivant). C'est par exemple le cas des deux exemples précédents, où les valeurs propres cherchées se déduisent des valeurs propres de formes modulaires pour $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.

Dans d'autres cas, ce sont des valeurs propres de formes modulaires de Siegel de genre 2 pour $\mathrm{Sp}_4(\mathbb{Z})$ qui interviennent (voir [65], [66], [33], [1] et [78]). Contrairement aux cas des formes modulaires pour $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, leurs valeurs propres sont déjà difficiles à calculer, et ont fait l'objet de nombreux travaux récents (Raum–Ryan–Skoruppa–Tornarìa [63], Faber–van der Geer [32], Chenevier–Lannes [18]).

Par exemple, d'après un résultat de Tsushima, si $(j, k) \in \{(6, 8), (8, 8), (4, 10), (12, 6)\}$, alors la dimension de l'espace des formes modulaires de Siegel de poids $\mathrm{Sym}^j\mathbb{C}^2 \otimes \det^k$ est 1. Suivant [18, Ch. IX], notons $\tau_{j,k}(p)$ la valeur propre de l'opérateur $p^{\frac{j+2k-6}{2}}\mathrm{K}_p$ sur cet espace. Ces valeurs propres ont élé calculées par Faber–van der Geer pour $p \leq 37$, et par une méthode différente dans [18] pour $p \leq 113$.

D'autre part, d'après [19, Table 12], pour $\lambda = (j + 2k - 3, 15, j + 1) = (a, b, c)$ et $W = V_\lambda$ où (j, k) est l'un des 4 couples précédents, on a $\dim \mathcal{M}_W(\mathrm{SO}_7) = 1$, et la valeur propre de $p^a\mathrm{T}_p$ sur cet espace est :

$$\tau_{j,k}(p) + p^{\frac{j+2k-18}{2}}\tau_{16}(p),$$

où τ_{16} a été introduit précédemment.

En particulier, nos calculs permettent de retrouver les valeurs de $\tau_{j,k}(p)$ pour $p \leq 53$ pour une méthode différente.

Enfin, l'intérêt principal de nos calcul est qu'ils permettent de calculer la trace de T_p sur l'espace $\mathcal{M}_W^{\mathrm{ne}}(\mathrm{SO}_7) \subset \mathcal{M}_W(\mathrm{SO}_7)$ engendré par les formes non-endoscopiques. Le "premier" λ pour lequel $\mathcal{M}_{V_\lambda}^{\mathrm{ne}}(\mathrm{SO}_7) \neq 0$ est $\lambda = (9, 5, 2)$. On a alors $\dim(\mathcal{M}_{V_\lambda}^{\mathrm{ne}}(\mathrm{SO}_7)) = 1$. Si on note λ_p la valeur propre de $p^9\mathrm{T}_p$ sur $\mathcal{M}_{V_\lambda}^{\mathrm{ne}}(\mathrm{SO}_7)$, on a les résultats suivants :

p	2	3	5	7	11	13
λ_p	0	-304668	874314	452588136	-1090903017204	1624277793138

Les autres valeurs propres sont données dans les tables 2.2 à 2.6.

Ces calculs suggèrent que la représentation de Galois de dimension 6 mise en évidence par Bergström, Faber et van der Geer est associée à cette forme automorphe pour SO_7, ce qui répond à une question de ces auteurs (ce qui était une des motivations principales de ce travail).

Dans le chapitre suivant, nous rappelons plus en détail suivant [18] et [19] la contribution des formes endoscopiques dans $\mathcal{M}_W(\mathrm{SO}_n)$.

Au final, nous ne donnerons des tables (équivalentes aux tables des théorèmes 2.6.1, 2.6.2 et 2.6.3) que pour les contributions non-endoscopiques.

Suivant Arthur, ces contributions s'expriment mieux en terme de certaines représentations automorphes pour les groupes linéaires PGL_m. Nos calculs permettent de donner des informations sur les "paramètres de Satake" de ces représentations automorphes.

2.7 La paramétrisation de Langlands–Satake

2.7.1 Les formules de Gross et la paramétrisation de Satake

La formule de Gross dans le cas général

Nous renvoyons à Borel [10] et à Springer [74] pour les notions de groupe dual et de données radicielles des groupes réductifs. Nous renvoyons aussi aux études de l'isomorphisme de Satake faites par Gross [36] et par Satake [64]. Enfin, on suivra les notations utilisées dans [19, Ch. 3] et [18, Ch. VI].

On considère G un $\mathbb{Z}_p$-groupe semi-simple, et $\widehat{G}$ son dual de Langlands (qui est un groupe semi-simple sur $\mathbb{C}$). On note $\Psi(G) = (X, \Phi, \Delta, X^\vee, \Phi^\vee, \Delta^\vee)$ sa donnée radicielle basée, $\Psi(\widehat{G}) = (X^\vee, \Phi^\vee, \Delta^\vee, X, \Phi, \Delta)$ la donnée duale, et on note $X_+ \subset X^\vee$ l'ensemble des co-poids dominants de G.

On rappelle que l'isomorphisme de Satake, introduit dans [64] et revisité par Langlands dans [45, §2], est un isomorphisme d'anneaux canonique :

$$\mathrm{Sat} : \mathrm{H}_p(G) \otimes \mathbb{Z}[p^{-\frac{1}{2}}] \xrightarrow{\sim} \mathrm{Rep}(\widehat{G}) \otimes \mathbb{Z}[p^{-\frac{1}{2}}],$$

où $\mathrm{Rep}(\widehat{G})$ désigne l'anneau de Grothendieck des représentations polynomiales de dimension finie de $\widehat{G}$.

Si l'on désigne par $\widehat{G}(\mathbb{C})_{\mathrm{ss}}$ l'ensemble des classes de conjugaison d'éléments semi-simples de $\widehat{G}(C)$, alors pour $c \in \widehat{G}(\mathbb{C})_{\mathrm{ss}}$ on possède une application $V \mapsto \mathrm{trace}(c|V)$ qui associe à une $\mathbb{C}$-représentation de dimension finie V de $\widehat{G}$ la trace de c dans V. Cette application s'étend en un homomorphisme d'anneaux $\mathrm{tr}(c) : \mathrm{Rep}(\widehat{G}) \to \mathbb{C}$. D'après un résultat de Chevalley, l'application $\mathrm{tr} : \widehat{G}(\mathbb{C})_{\mathrm{ss}} \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{anneaux}}(\mathrm{Rep}(\widehat{G}), \mathbb{C})$ est une bijection. On en déduit la proposition suivante :

Proposition 2.7.1. *L'application $c \mapsto \mathrm{tr}(c) \circ \mathrm{Sat}$ définit une bijection :*

$$\widehat{G}(\mathbb{C})_{\mathrm{ss}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathrm{anneaux}}(\mathrm{H}_p(G), \mathbb{C}).$$

La théorie de Cartan–Weyl pour les représentations de plus haut poids nous donne une première $\mathbb{Z}$-base naturelle de $\mathrm{Rep}(\widehat{G})$ indexée par X_+, à savoir les représentations irréductibles de la forme V_λ.

Pour $\lambda \in X_+$, on note $[V_\lambda]$ la classe de V_λ dans $\mathrm{Rep}(\widehat{G})$. De plus, si l'on se donne $\widehat{T}$ un tore maximal de $\widehat{G}$, et $\widehat{B}$ un sous-groupe de Borel de $\widehat{G}$ contenant $\widehat{T}$ (de sorte que $\Psi(\widehat{G})$ s'identifie à $\Psi(\widehat{G}, \widehat{T}, \widehat{B})$), et si $\mu \in X$, on désigne par $V_\lambda(\mu) \subset V_\lambda$ le sous-espace propre de V_λ pour μ sous l'action de $\widehat{T}$.

Comme G est réductif sur $\mathbb{Z}_p$, il existe une décomposition de Cartan de la forme :

$$G(\mathbb{Q}_p) = \coprod_{\lambda \in X_+} G(\mathbb{Z}_p)\lambda(p)G(\mathbb{Z}_p).$$

Pour $\lambda \in X$, on note $c_\lambda \in \mathrm{H}_p(G)$ la fonction caractéristique de la double classe $G(\mathbb{Z}_p)\lambda(p)G(\mathbb{Z}_p)$. Les c_λ ainsi définis forment une $\mathbb{Z}_p$-base de $\mathrm{H}_p(G)$ pour λ décrivant X_+, avec des relations de la forme :

$$(\forall \lambda, \mu \in X_+)(\exists (n_{\lambda,\mu,\nu}) \in \mathbb{Z})\ c_\lambda \cdot c_\mu = c_{\lambda+\mu} + \sum_{\nu<\lambda+\mu} n_{\lambda,\mu,\nu} c_\nu.$$

Le lien entre ces deux $\mathbb{Z}_p$-bases de $\mathrm{H}_p(G)$ et $\mathrm{Rep}(\widehat{G})$ est donné grâce à l'isomorphisme de Satake comme suit :

Proposition 2.7.2 (La formule de Gross)**.** *Soit G un $\mathbb{Z}_p$-groupe semi simple déployé et X_+ l'ensemble ordonné des poids dominants de $\widehat{G}$. Soit $\lambda \in X_+$. On note ρ la demi somme des racines positives de G. Alors on dispose d'une identité de la forme :*

$$p^{\langle \rho,\lambda\rangle}\,[V_\lambda] = \mathrm{Sat}(c_\lambda) + \sum_{\{\mu \in X_+, \mu<\lambda\}} d_\lambda(\mu)\mathrm{Sat}(c_\mu)$$

pour certains entiers $d_\lambda(\mu)$ dépendant de p, qu'on détaille plus loin.

En particulier, on a les résultats suivants :

- *(i) Si λ est un élément minimal, alors : $p^{\langle \rho,\lambda\rangle}\,[V_\lambda] = \mathrm{Sat}(c_\lambda)$.*
- *(ii) Si $\mu \in X_+$ tel que $\dim(V_\lambda(\mu)) = 1$, alors $d_\lambda(\mu) = 1$.*
- *(iii) Si $V_\lambda = \mathrm{Lie}(G)$ est la représentation adjointe de $\widehat{G}$, alors : $d_\lambda(0) = \sum_i p^{m_i-1}$, où les m_i sont les exposants du groupe de Weyl de G (voir [11, Ch. V, §6.2]).*

Démonstration. Le cas où G est adjoint avait déjà été traité par Gross dans [36], et Chenevier et Lannes ont étendu ce résultat au cas où G est semi-simple dans [18, Ch. VI, lemme 2.7], en se ramenant au cas du groupe adjoint $G/\mathrm{Z}(G)$, où $\mathrm{Z}(G)$ désigne le centre de G. □

Les coefficients $d_\lambda(\mu)$ qui interviennent dans la proposition précédente ont été calculés par Lusztig et Kato. On a le résultat suivant :

Proposition 2.7.3. *On reprend les mêmes notations qu'à la proposition précédente. On note ρ la demi somme des racines positives de G, et $\rho^\vee$ celles des coracines positives de G. Pour $\mu \in X_+$, on définit le polynôme $\widehat{P}$ comme :*

$$\widehat{P}(\mu) = \sum_{\mu=\sum_{\alpha\in\Phi^+} n(\alpha^\vee)\alpha^\vee} p^{-\sum n(\alpha^\vee)},$$

qui est un polynôme en p^{-1} qui considère le nombre d'expressions de μ comme somme à coefficients positifs de coracines de G. Si μ ne peut pas s'écrire sous cette forme (ce qui est le cas si μ est combinaison linéaire non-nulle à coefficients négatifs d'éléments de $\Phi^{\vee+}$ par exemple), alors $\widehat{P}(\mu) = 0$. Comme on considère la somme vide dans les possibilités, alors $\widehat{P}(0) = 1$.

Les coefficients $d_\lambda(\mu)$ sont alors donnés par la formule suiante :

$$d_\lambda(\mu) = p^{\langle \rho,\lambda-\mu\rangle} \sum_{\sigma\in W} \varepsilon(\sigma) \cdot \widehat{P}\left(\sigma(\lambda+\rho^\vee) - (\mu+\rho^\vee)\right),$$

où $\varepsilon(\sigma)$ est la signature sur le groupe de Weyl W de $\widehat{G}$.

Démonstration. Voir Kato dans [42], qui reprend des résultats de Lusztig [47], Kostant [34] et Brylinski [12]. □

On donne dans [52] le programme informatique que l'on a utilisé pour calculer explicitement les quantités $d_\lambda(\mu)$ selon le choix de G.

Le groupe spécial orthogonal de dimension paire

Soit $r \geq 2$ un entier, $U = (\mathbb{Z}_p)^r$, et $V = \mathrm{H}(U)$ le module hyperbolique sur U. On pose $G = \mathrm{SO}_V$ le sous-groupe des automorphismes de V préservant la forme quadratique définie sur V et de déterminant 1. On désigne par $(e_i)_{1\leq i\leq r}$ une $\mathbb{Z}_p$-base de U, et (e_i^*) sa base duale. Alors on peut définir une donnée radicielle basée de G en se donnant :

- pour le tore T : le sous-groupe de G des éléments préservant les droites engendrées par les e_i et celles engendrées par les e_j^*.
- pour le groupe de Borel B : le sous-$\mathbb{Z}_p$-groupe de G des éléments préservant le drapeau complet de U associé à $\{e_1\}, \{e_1, e_2\}, \ldots, \{e_1, \ldots, e_r\}$.

On pose $\varepsilon_i \in X^*(T)$ le caractère de T agissant sur la droite engendrée par e_i (ce qui veut dire que T agit sur la droite engendrée par e_j^* par le caractère $-\varepsilon_j$). On pose enfin $(\varepsilon_j^*) \in X_*(T)$ la famille duale de $(\varepsilon_i) \in X^*(T)$. Alors :

- les ensembles $X^*(T)$ et $X_*(T)$ s'identifient respectivement à $\bigoplus_{1\leq i\leq r} \varepsilon_i\mathbb{Z}$ et à $\bigoplus_{1\leq i\leq r} \varepsilon_i^*\mathbb{Z}$ (et en particulier sont isomorphes).
- l'ensemble $\Phi(G,T)$ est constitué des $\pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j$, avec la dualité : $(\pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j)^\vee = \pm\varepsilon_i^* \pm \varepsilon_j^*$ (pour $1 \leq i < j \leq r$).
- l'ensemble $\Delta(G,T,B)$ est constitué des $\varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}$ (pour $1 \leq i \leq r-1$) et de $\varepsilon_{r-1} + \varepsilon_r$.
- l'ensemble Φ^+ est constitué des $\varepsilon_i \pm \varepsilon_j$ (pour $1 \leq i < j \leq r$).
- les éléments ρ et $\rho^\vee$ sont donnés par : $\rho = (r-1)\varepsilon_1 + (r-2)\varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_{r-1}$ et $\rho^\vee = (r-1)\varepsilon_1^* + (r-2)\varepsilon_2^* + \cdots + \varepsilon_{r-1}^*$.
- le dual de Langlands de G est donné par : $\widehat{G} = \mathrm{SO}_{2r}(\mathbb{C})$.
- le groupe de Weyl W de $\widehat{G}$ s'identifie à : $\mathcal{S}_r \ltimes (\{\pm 1\}^r)^0$.

En particulier, l'ensemble des copoids dominants de G est donné par :

$$X_+ = \left\{ \sum_i m_i\varepsilon_i^* \;\middle|\; m_1 \geq m_2 \geq \cdots \geq m_{r-1} \geq |m_r| \right\}.$$

Pour $1 \leq i \leq r$, on définit les éléments $\lambda_i \in X_+$ par : $\lambda_i = \varepsilon_1^* + \cdots + \varepsilon_i^*$.

Enfin, on pose τ l'automorphisme de $\Psi(G)$ qui fixe les ε_i pour $1 \leq i \leq r-1$, et qui envoie ε_r sur $-\varepsilon_r$ (qui est une involution sur X_+).

Les opérateurs de Hecke de $\mathrm{H}(G)$ sont donnés par la proposition suivante :

Proposition 2.7.4. *Soient $\lambda = \sum_i m_i\varepsilon_i^* \in X_+$ et $A_\lambda = \prod_{i=1}^r \left(\mathbb{Z}/p^{|m_i|}\mathbb{Z}\right)$.*

Alors l'opérateur $\mathrm{T}_{A_\lambda} \in \mathrm{H}(G)$ est donné par :

$$\mathrm{T}_{A_\lambda} = \sum_{\mu\in\{\lambda,\tau(\lambda)\}} c_\mu.$$

En particulier, on a les égalités :

$$\begin{array}{ll} (i) & (\forall\ 1 \leq i \leq r-1)\, c_{\lambda_i} = \mathrm{T}_{(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^i} \\ (ii) & c_{\lambda_r} + c_{\tau(\lambda_r)} = \mathrm{T}_{(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^r} \\ (iii) & (\forall\ m \geq 0)\, c_{m\lambda_1} = \mathrm{T}_{p^m} \end{array}$$

Démonstration. Voir [18, Ch. VI, Scholie 2.9]. □

Proposition 2.7.5 (Le poids de la représentation standard)**.** *On considère V_{St} la représentation standard de $\widehat{G} = \mathrm{SO}_{2r}(\mathbb{C})$. C'est la représentation de plus haut poids λ_1.*

De plus, pour $2 \leq i \leq r-1$, la représentation $\Lambda^i V_{\mathrm{St}}$ est irréductible et correspond à la représentation de plus haut poids λ_i.

Enfin, la représentation $\Lambda^r V_{\mathrm{St}}$ correspond à la somme des représentations V_{λ_r} et $V_{\tau(\lambda_r)}$.

Démonstration. Découle de [34, Théorème 19.2]. □

On souhaite exprimer, grâce aux formules de Gross, les représentation V_{St} et $\Lambda^i V_{\mathrm{St}}$ en fonction des opérateurs de Hecke T_A. Pour $r = 4$ (c'est-à-dire pour $\widehat{G} = \mathrm{SO}_8(\mathbb{C})$), on a la proposition suivante :

Proposition 2.7.6. *On reprend les mêmes notations, avec $r = 4$. On considère les éléments $\mathrm{T}_A \in \mathrm{H}(G)$. On a alors les égalités suivantes :*

(*i*) $p^3\,[V_{\mathrm{St}}] = \mathrm{Sat}(\mathrm{T}_p)$

(*ii*) $p^5\,[\Lambda^2 V_{\mathrm{St}}] = \mathrm{Sat}(\mathrm{T}_{p,p}) + (p^4 + 2\,p^2 + 1)$

(*iii*) $p^6\,[\Lambda^3 V_{\mathrm{St}}] = \mathrm{Sat}(\mathrm{T}_{p,p,p}) + (p^2 + p + 1)\ \mathrm{Sat}(\mathrm{T}_p)$

(*iv*) $p^6\,[\Lambda^4 V_{\mathrm{St}}] = \mathrm{Sat}(\mathrm{T}_{p,p,p,p}) + 2\ \mathrm{Sat}(\mathrm{T}_{p,p}) + 2\ (p^4 + p^2 + 1)$

Démonstration. On utilise la proposition 2.7.5 et les formules de Gross. On a :

Pour le (*i*) : il n'y a pas de poids $\mu < \lambda_1$, et ainsi on a les égalités :

$$\begin{aligned} p^3\,[V_{\mathrm{St}}] = p^{\langle\rho,\lambda_1\rangle}\,[V_{\lambda_1}] &= \mathrm{Sat}(c_{\lambda_1}) + \sum_{\{\mu\in X_+,\mu<\lambda_1\}} d_{\lambda_1}(\mu)\mathrm{Sat}(c_\mu) \\ &= \mathrm{Sat}(c_{\lambda_1}) = \mathrm{Sat}(\mathrm{T}_p) \end{aligned}$$

Pour le (*ii*) : il y a un seul poids $\mu < \lambda_2$, à savoir $\mu = 0$. On déduit ainsi :

$$\begin{aligned} p^5\left[\Lambda^2 V_{\mathrm{St}}\right] = p^{\langle\rho,\lambda_2\rangle}\,[V_{\lambda_2}] &= \mathrm{Sat}(c_{\lambda_2}) + \sum_{\{\mu\in X_+,\mu<\lambda_2\}} d_{\lambda_2}(\mu)\mathrm{Sat}(c_\mu) \\ &= \mathrm{Sat}(c_{\lambda_2}) + d_{\lambda_2}(0) = \mathrm{Sat}(\mathrm{T}_{p,p}) + \left(p^4 + 2\,p^2 + 1\right) \end{aligned}$$

Pour le (*iii*) : il y a un seul poids $\mu < \lambda_3$, à savoir $\mu = \lambda_1$. On déduit ainsi :

$$\begin{aligned} p^6\left[\Lambda^3 V_{\mathrm{St}}\right] = p^{\langle\rho,\lambda_3\rangle}\,[V_{\lambda_3}] &= \mathrm{Sat}(c_{\lambda_3}) + \sum_{\{\mu\in X_+,\mu<\lambda_3\}} d_{\lambda_3}(\mu)\mathrm{Sat}(c_\mu) \\ &= \mathrm{Sat}(c_{\lambda_3}) + d_{\lambda_3}(\lambda_1)\ \mathrm{Sat}(c_{\lambda_1}) = \mathrm{Sat}(\mathrm{T}_{p,p,p}) + \left(p^2 + p + 1\right)\ \mathrm{Sat}(\mathrm{T}_p) \end{aligned}$$

Pour le (*iv*) : il y a deux poids μ inférieurs à λ_4 ou à $\tau(\lambda_4)$, à savoir $\mu = \lambda_2$ ou $\mu = 0$ dans les deux cas. On déduit ainsi :

$$\begin{aligned} p^6\left[\Lambda^4 V_{\mathrm{St}}\right] = p^6\ \left([V_{\lambda_4}] + \left[V_{\tau(\lambda_4)}\right]\right) &= p^{\langle\rho,\lambda_4\rangle}\,[V_{\lambda_4}] + p^{\langle\rho,\tau(\lambda_4)\rangle}\left[V_{\tau(\lambda_4)}\right] \\ &= \mathrm{Sat}(c_{\lambda_4}) + \sum_{\{\mu\in X_+,\mu<\lambda_4\}} d_{\lambda_4}(\mu)\mathrm{Sat}(c_\mu) \\ &\quad + \mathrm{Sat}(c_{\tau(\lambda_4)}) + \sum_{\{\mu\in X_+,\mu<\tau(\lambda_4)\}} d_{\tau(\lambda_4)}(\mu)\mathrm{Sat}(c_\mu) \\ &= \mathrm{Sat}(c_{\lambda_4}) + \mathrm{Sat}(c_{\tau(\lambda_4)}) + \left(d_{\lambda_4}(\lambda_2) + d_{\tau(\lambda_4)}(\lambda_2)\right)\ \mathrm{Sat}(c_{\lambda_2}) \\ &\quad + \left(d_{\lambda_4}(0) + d_{\tau(\lambda_4)}(0)\right) \\ &= \mathrm{Sat}(\mathrm{T}_{p,p,p,p}) + 2\ \mathrm{Sat}(\mathrm{T}_{p,p}) + 2\ \left(p^4 + p^2 + 1\right) \end{aligned}$$

Les coefficients $d_\lambda(\mu)$ ont été calculés à l'ordinateur grâce à la proposition 2.7.3 et au programme [52]. □

Le groupe spécial orthogonal en dimension impaire

Soit $r \geq 1$ un entier, $U = (\mathbb{Z}_p)^r$, $\mathrm{H}(U)$ le module hyperbolique sur U et $V = \mathrm{H}(U) \oplus \mathbb{Z}_p$ (où on a muni $\mathbb{Z}_p$ de la forme quadratique $x \mapsto x^2$). On pose $G = \mathrm{SO}_V$ le sous-groupe des automorphismes de V préservant la forme quadratique définie sur V et de déterminant 1. On définit comme dans le cas du groupe spécial orthogonal de dimension paire les éléments T, B, les ε_i et les ε_i^*. Les changements sur la donnée radicielle basée se font alors comme suit :

- l'ensemble $\Phi(G,T)$ est constitué des $\pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j$ $(1 \leq i < j \leq r)$ et des $\pm\varepsilon_i$ $(1 \leq i \leq r)$, avec la dualité : $(\pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j)^\vee = \pm\varepsilon_i^* \pm \varepsilon_j^*$ et $(\pm\varepsilon_i)^\vee = \pm 2 \cdot \varepsilon_i^*$.
- l'ensemble $\Delta(G,T,B)$ est constitué des $\varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}$ (pour $1 \leq i \leq r-1$) et de ε_r.
- l'ensemble Φ^+ est constitué des $\varepsilon_i \pm \varepsilon_j$ (pour $1 \leq i < j \leq r$) et des ε_i (pour $1 \leq i \leq r$).
- les éléments ρ et $\rho^\vee$ sont donnés par : $\rho = \frac{2r-1}{2}\varepsilon_1 + \frac{2r-3}{2}\varepsilon_2 + \cdots + \frac{1}{2}\varepsilon_r$ et $\rho^\vee = r\varepsilon_1^* + (r-1)\varepsilon_2^* + \cdots + \varepsilon_r^*$.
- le dual de Langlands de G est donné par : $\widehat{G} = \mathrm{Sp}_{2r}(\mathbb{C})$.
- le groupe de Weyl W de $\widehat{G}$ s'identifie à : $\mathcal{S}_r \ltimes \{\pm 1\}^r$.

En particulier, l'ensemble des copoids dominants de G est donné par :

$$X_+ = \left\{ \sum_i m_i \varepsilon_i^* \;\middle|\; m_1 \geq m_2 \geq \cdots \geq m_r \geq 0 \right\}.$$

Pour $1 \leq i \leq r$, on définit les éléments $\lambda_i \in X_+$ par : $\lambda_i = \varepsilon_1^* + \cdots + \varepsilon_i^*$.

Les opérateurs de Hecke de $\mathrm{H}(G)$ sont donnés par la proposition suivante :

Proposition 2.7.7. *Soient $\lambda = \sum_i m_i \varepsilon_i^* \in X_+$ et $A_\lambda = \prod_{i=1}^r (\mathbb{Z}/p^{m_i}\mathbb{Z})$.*

Alors l'opérateur $\mathrm{T}_{A_\lambda} \in \mathrm{H}(G)$ est donné par :

$$\mathrm{T}_{A_\lambda} = c_\lambda.$$

En particulier, on a les égalités :

$$(i) \quad (\forall\ 1 \leq i \leq r)\, c_{\lambda_i} = \mathrm{T}_{(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^i}$$
$$(ii) \quad (\forall\ m \geq 0)\, c_{m\lambda_1} = \mathrm{T}_{p^m}$$

Démonstration. Voir [18, Ch. VI, Scholie 2.9]. □

Proposition 2.7.8 (Le poids de la représentation standard)**.** *On considère V_{St} la représentation standard de $\widehat{G} = \mathrm{Sp}_{2r}(\mathbb{C})$. C'est la représentation de plus haut poids λ_1.*

De plus, pour $2 \leq i \leq r$, la représentation $\Lambda^i V_{\mathrm{St}}$ n'est pas irréductible, son plus haut poids est λ_i, et s'écrit sous la forme : $\Lambda^i V_{\mathrm{St}} = V_{\lambda_i} \oplus V_{\lambda_{i-2}} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_{i-2\cdot[i/2]}}$.

Démonstration. Découle de [34, Théorème 17.5] (en faisant une récurrence sur i). □

On souhaite exprimer, grâce aux formules de Gross, les représentation V_{St} et $\Lambda^i V_{\mathrm{St}}$ en fonction des opérateurs de Hecke T_A. Pour $r = 3$ (c'est-à-dire pour $\widehat{G} = \mathrm{Sp}_6(\mathbb{C})$), on a la proposition suivante :

Proposition 2.7.9. *On reprend les mêmes notations, avec $r = 3$. On considère les éléments $\mathrm{T}_A \in \mathrm{H}(G)$. On a alors les égalités suivantes :*

(i) $p^{5/2}\,[V_{\mathrm{St}}] = \mathrm{Sat}(\mathrm{T}_p)$

(ii) $p^4\,[\Lambda^2 V_{\mathrm{St}}] = \mathrm{Sat}(\mathrm{T}_{p,p}) + (p^4 + p^2 + 1)$

(iii) $p^{9/2}\,[\Lambda^3 V_{\mathrm{St}}] = \mathrm{Sat}(\mathrm{T}_{p,p,p}) + (p^2+1) \cdot \mathrm{Sat}(\mathrm{T}_p)$

Démonstration. L'expression des $[V_{\lambda_i}]$ en fonction des $\mathrm{Sat}(\mathrm{T}_A)$ se fait comme précédemment. Reste donc à exprimer les $[\Lambda^i V_{\mathrm{St}}]$ en fonction des $[V_{\lambda_i}]$.

(*i*) : on a $[V_{\mathrm{St}}] = [V_{\lambda_1}]$ et il n'y a pas de poids $\mu < \lambda_1$.
(*ii*) : on a $[\Lambda^2 V_{\mathrm{St}}] = [V_{\lambda_2}] + 1$ et il y a un seul poids $\mu < \lambda_2$, à savoir 0.
(*iii*) : on a $[\Lambda^3 V_{\mathrm{St}}] = [V_{\lambda_3}] + [V_{\lambda_1}]$ et il y a un seul poids $\mu < \lambda_3$, à savoir λ_1.

□

Pour $r = 4$ (c'est-à-dire pour $\widehat{G} = \mathrm{Sp}_8(\mathbb{C})$), on a la proposition suivante :

Proposition 2.7.10. *On reprend les mêmes notations, avec $r = 4$. On considère les éléments $\mathrm{T}_A \in \mathrm{H}(G)$. On a alors les égalités suivantes :*

(*i*) $p^{7/2}\,[V_{\mathrm{St}}] = \mathrm{Sat}(\mathrm{T}_p)$
(*ii*) $p^6\,[\Lambda^2 V_{\mathrm{St}}] = \mathrm{Sat}(\mathrm{T}_{p,p}) + (p^6 + p^4 + p^2 + 1)$
(*iii*) $p^{15/2}\,[\Lambda^3 V_{\mathrm{St}}] = \mathrm{Sat}(\mathrm{T}_{p,p,p}) + (p^4 + p^2 + 1) \cdot \mathrm{Sat}(\mathrm{T}_p)$
(*iv*) $p^8\,[\Lambda^4 V_{\mathrm{St}}] = \mathrm{Sat}(\mathrm{T}_{p,p,p,p}) + (p^2 + 1) \cdot \mathrm{Sat}(\mathrm{T}_{p,p}) + (p^8 + p^6 + 2 \cdot p^4 + p^2 + 1)$

Démonstration. La démonstration se fait comme précédemment. Il suffit de faire les constatations suivantes :

(*i*) : on a $[V_{\mathrm{St}}] = [V_{\lambda_1}]$ et il n'y a pas de poids $\mu < \lambda_1$.
(*ii*) : on a $[\Lambda^2 V_{\mathrm{St}}] = [V_{\lambda_2}] + 1$ et il y a un seul poids $\mu < \lambda_2$, à savoir 0.
(*iii*) : on a $[\Lambda^3 V_{\mathrm{St}}] = [V_{\lambda_3}] + [V_{\lambda_1}]$ et il y a un seul poids $\mu < \lambda_3$, à savoir λ_1.
(*iv*) : on a $[\Lambda^4 V_{\mathrm{St}}] = [V_{\lambda_4}] + [V_{\lambda_2}] + 1$ et il y a deux poids $\mu < \lambda_4$, à savoir λ_2 et 0.

□

2.7.2 Les formes automorphes et la paramétrisation de Langlands

Soient G un $\mathbb{C}$-groupe semi-simple et $\mathfrak{g}$ sa $\mathbb{C}$-algèbre de Lie. On note $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$ son algèbre enveloppante, $\mathrm{Z}(\mathrm{U}(\mathfrak{g}))$ le centre de $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$. Soient enfin $\widehat{G}$ le dual de Langlands de G, et $\widehat{\mathfrak{g}}$ sa $\mathbb{C}$-algèbre de Lie.

Suivant Harish-Chandra et Langlands, on rappelle dans la proposition suivante comment voir les caractères centraux de $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$-modules comme des classes de conjugaison semi-simples dans $\widehat{\mathfrak{g}}$, grâce à l'isomorphisme de Harish-Chandra :

Proposition 2.7.11 (L'isomorphisme de Harish-Chandra)**.** *Avec les mêmes notations, on pose $\mathrm{Pol}(\widehat{\mathfrak{g}})$ la $\mathbb{C}$-algèbre des fonctions polynomiales sur $\widehat{\mathfrak{g}}$. Elle est munie d'une action naturelle de $\widehat{G}(\mathbb{C})$, et on note $\mathrm{Pol}(\widehat{\mathfrak{g}})^{\widehat{G}}$ l'algèbre des invariants. L'isomorphisme de Harish-Chandra est un isomorphisme canonique :*

$$\mathrm{HC} : \mathrm{Z}(\mathrm{U}(\mathfrak{g})) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Pol}(\widehat{\mathfrak{g}})^{\widehat{G}}.$$

L'isomorphisme de Harish-Chandra induit une bijection canonique :

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}-\mathrm{alg}}(\mathrm{Z}(\mathrm{U}(\mathfrak{g})), \mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} \widehat{\mathfrak{g}}_{\mathrm{ss}},$$

où $\widehat{\mathfrak{g}}_{\mathrm{ss}}$ désigne l'ensemble des classes de conjugaisons d'éléments semi-simples de $\widehat{\mathfrak{g}}$.

Démonstration. Voir [45, §2]. □

Exemple : Comme expliqué dans [18, Ch. VI, §3.2] par exemple, les éléments de $X \otimes \mathbb{C}$ peuvent être vus comme des éléments de $\widehat{\mathfrak{g}_{\mathrm{ss}}}$. Soient λ un poids dominant de G, et W la $\mathbb{C}$-représentation irréductible de G de plus haut poids λ. Cette représentation munit W d'une structure de $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$-module. Ce module est simple et admet un caractère central. La

classe de conjugaison dans $\widehat{\mathfrak{g}}_{\mathrm{ss}}$ qui correspond à ce caractère est la classe de conjugaison de $\lambda+\rho$ (où ρ est la demi-somme des racines positives de G).

On définit comme suit les différents ensembles de représentations automorphes :

Définition 2.7.12. *Soit G un $\mathbb{Z}$-groupe semi-simple. On définit une représentation du couple $(G(\mathbb{R}),\mathrm{H}(G))$ comme la donnée d'un espace de Hilbert muni d'une représentation unitaire de $G(\mathbb{R})$, et d'une structure de module à droite sur $\mathrm{H}(G)$ commutant à l'action de $G(\mathbb{R})$.*

On note alors $\Pi(G)$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de représentations du couple $(G(\mathbb{R}),\mathrm{H}(G))$ de la forme $\pi=\pi_\infty\otimes\pi_V$, où π_∞ est une représentation unitaire irréductible de $G(\mathbb{R})$, et π_V est une représentation irréductible complexe de dimension finie de $\mathrm{H}(G)^{\mathrm{opp}}$ (donc de dimension 1).

On note aussi $\Pi_{\mathrm{disc}}(G)$ l'ensemble des représentations automorphes π discrètes de G telles que $\pi_p^{G(\mathbb{Z}_p)}\neq 0$ (le sous-espace des invariants de π_p sous l'action de $G(\mathbb{Z}_p)$) pour tout p premier. L'application $\pi\in\Pi_{\mathrm{disc}}(G)\mapsto\pi^{G(\widehat{\mathbb{Z}})}$ (le sous-espace des invariants de π sous l'action de $G(\widehat{\mathbb{Z}})$) réalise $\Pi_{\mathrm{disc}}(G)$ comme un sous-ensemble de $\Pi(G)$. On note enfin $\Pi_{\mathrm{cusp}}(G)$ le sous-ensemble de $\Pi_{\mathrm{disc}}(G)$ des représentations automorphes cuspidales.

Si l'on se donne H un $\mathbb{C}$-groupe, on peut lui associer un ensemble $\mathcal{X}(H)$ de collections de classes de conjugaison semi-simples comme suit :

Définition 2.7.13. *Soit H un $\mathbb{C}$-groupe semi-simple, et $\mathfrak{h}$ son algèbre de Lie complexe. On note $H(\mathbb{C})_{\mathrm{ss}}$ et $\mathfrak{h}_{\mathrm{ss}}$ les classes de $H(\mathbb{C})$-conjugaison d'éléments semi-simples respectivement de $H(\mathbb{C})$ et de $\mathfrak{h}$.*

On note alors $\mathcal{X}(H)$ l'ensemble des familles $(\mathrm{c}_v)_{v\in P\cup\{\infty\}}$, où $\mathrm{c}_\infty\in\mathfrak{h}_{\mathrm{ss}}$ et $\mathrm{c}_p\in H(\mathbb{C})_{\mathrm{ss}}$ pour tout $p\in P$.

Si on possède un morphisme de $\mathbb{C}$-groupe $r:H\to H'$, on note encore par r l'application définie de $\mathcal{X}(H)$ dans $\mathcal{X}(H')$ envoyant (c_v) sur $(r(\mathrm{c}_v))$.

Suivant Langlands dans [45], on possède une application $\Pi(G)\to\mathcal{X}(\widehat{G})$:

Proposition-Définition 2.7.14 (Paramétrisation de Langlands)**.** *On dispose d'une application canonique :*

$$\begin{array}{rccc} c: & \Pi(G) & \to & \mathcal{X}(\widehat{G}) \\ & \pi & \mapsto & (\mathrm{c}_v(\pi)) \end{array}$$

définie comme suit. Si $\pi=\pi_\infty\otimes\pi_V\in\Pi(G)$, on pose $\mathrm{c}_\infty(\pi)$ le caractère infinitésimal de π_∞ (d'après Harish-Chandra). De plus, l'isomorphisme de Satake entraîne que $\mathrm{H}(G)$ est commutative, donc π_V est de dimension 1 et peut être vue comme un homomorphisme d'anneaux de $\mathrm{H}(G)$ dans $\mathbb{C}$. Sa restriction à $\mathrm{H}_p(G)$ est associée par la proposition 2.7.1 à un unique élément $\mathrm{c}_p(\pi)\in\widehat{G}(\mathbb{C})_{\mathrm{ss}}$.

L'application c ainsi définie est à fibres finies.

Démonstration. Voir [18, Ch. VI, §4.2]. □

En particulier, le caractère $\mathrm{c}_\infty(\pi)$ nous permet de définir la notion de représentation algébrique ou autoduale dans le cas où G est le groupe PGL_n :

Définition 2.7.15 (Représentations algébriques)**.** *Soit $\pi\in\Pi_{\mathrm{cusp}}(\mathrm{PGL}_n)$. Les valeurs propres du caractère $\mathrm{c}_\infty(\pi)$ sont appelés les poids de π.*

Une représentation $\pi\in\Pi_{\mathrm{cusp}}(\mathrm{PGL}_n)$ est dite algébrique si ses poids sont des demi-entiers dont les différences deux à deux sont des entiers. On note $\Pi_{\mathrm{alg}}(\mathrm{PGL}_n)$ le sous-ensemble de $\Pi_{\mathrm{cusp}}(\mathrm{PGL}_n)$ des représentations algébriques.

Définition 2.7.16 (Représentations autoduales)**.** *Soit $\pi \in \Pi(\mathrm{PGL}_n)$. On dit que la représentation π est autoduale si elle est isomorphe à sa contragrédiente.*

On note respectivement $\Pi^{\perp}(\mathrm{PGL}_n)$, $\Pi^{\perp}_{\mathrm{disc}}(\mathrm{PGL}_n)$, $\Pi^{\perp}_{\mathrm{cusp}}(\mathrm{PGL}_n)$ et $\Pi^{\perp}_{\mathrm{alg}}(\mathrm{PGL}_n)$ les sous-ensembles de $\Pi(\mathrm{PGL}_n)$, $\Pi_{\mathrm{disc}}(\mathrm{PGL}_n)$, $\Pi_{\mathrm{cusp}}(\mathrm{PGL}_n)$ et $\Pi_{\mathrm{alg}}(\mathrm{PGL}_n)$ constitués des représentations autoduales.

Suivant [18, Ch. IV, §3.2] par exemple, si l'on se donne une forme automorphe propre pour tous les opérateurs de Hecke, on peut lui associer une représentation automorphe discrète : il s'agit de la représentation automorphe engendrée par la forme automorphe propre considérée. Les formules de Gross et l'isomorphisme d'Harish-Chandra nous permettent de relier les valeurs propres associés aux opérateurs de Hecke d'une forme automorphe propre avec les paramètres de Satake de la représentation automorphe qu'elle engendre. On détaille ci-dessous ce lien dans le cas des représentations automorphes pour SO_8.

Exemple : Soient $G = \mathrm{SO}_8$, $\lambda = \sum_{i=1}^{4} m_i \varepsilon_i$ (suivant les notations adoptées précédemment dans le cas du groupe spécial orthogonal en dimension paire, avec $r = 4$), et W la représentation irréductible de $\mathrm{SO}_8(\mathbb{C})$ de plus haut poids λ. Soient $f \in \mathcal{M}_W(\mathrm{SO}_8)$ une forme propre, et $\pi \in \Pi_{\mathrm{disc}}(\mathrm{SO}_8)$ la représentation engendrée.

Le caractère infinitésimal $\mathrm{c}_\infty(\pi)$ correspond à la classe de conjugaison de $\lambda + \rho$, et ses valeurs propres dans la représentation standard sont les

$$\pm(m_i + 4 - i),\ i = 1, \ldots, 4.$$

Posons de plus : $\mathrm{T}_p(f) = \lambda_p f, \ldots, \mathrm{T}_{p,\ldots,p}(f) = \lambda_{p,\ldots,p} f$. Alors on a les relations :

$$\begin{array}{rl}
(i) & p^3 \mathrm{Trace}\left(\mathrm{c}_p(\pi) | V_{\mathrm{St}}\right) = \lambda_p \\
(ii) & p^5 \mathrm{Trace}\left(\mathrm{c}_p(\pi) | \Lambda^2 V_{\mathrm{St}}\right) = \lambda_{p,p} + \left(p^4 + 2 \cdot p^2 + 1\right) \\
(iii) & p^6 \mathrm{Trace}\left(\mathrm{c}_p(\pi) | \Lambda^3 V_{\mathrm{St}}\right) = \lambda_{p,p,p} + \left(p^2 + p + 1\right) \cdot \lambda_p \\
(iv) & p^6 \mathrm{Trace}\left(\mathrm{c}_p(\pi) | \Lambda^4 V_{\mathrm{St}}\right) = \lambda_{p,p,p,p} + 2 \cdot \lambda_{p,p} + 2 \cdot \left(p^4 + p^2 + 1\right)
\end{array}$$

qui découlent directement de la proposition 2.7.6.

2.7.3 La conjecture d'Arthur–Langlands

Afin de formuler facilement la conjecture d'Arthur–Langlands, commençons par définir la notion de paramètre de Langlands :

Définition 2.7.17. *Soit G un $\mathbb{Z}$-groupe semi-simple, et $r : \widehat{G} \to \mathrm{SL}_n$ une $\mathbb{C}$ représentation. Cette représentation induit une application $\mathcal{X}(\widehat{G}) \to \mathcal{X}(\mathrm{SL}_n)$, $(\mathrm{c}_v) \mapsto (r(\mathrm{c}_v))$. Si $\pi \in \Pi(G)$, on lui associe l'élément :*

$$\psi(\pi, r) = r\left(c\left(\pi\right)\right) \in \mathcal{X}(\mathrm{SL}_n)$$

appelé paramètre de Langlands–Satake du couple (π, r).

Dans la suite, on reprend les notations de [18, §IV.4], qui sont les suivantes :

– On note St_m la $\mathbb{C}$-représentation tautologique de SL_m sur $\mathbb{C}^m$. Pour a et b deux entiers, la somme directe et le produit tensoriel des représentations St_a et St_b nous donnent les applications naturelles :

$$\mathcal{X}\left(\mathrm{SL}_a\right) \times \mathcal{X}\left(\mathrm{SL}_b\right) \to \mathcal{X}\left(\mathrm{SL}_{a+b}\right) \mathrm{et} \mathcal{X}\left(\mathrm{SL}_a\right) \times \mathcal{X}\left(\mathrm{SL}_b\right) \to \mathcal{X}\left(\mathrm{SL}_{ab}\right)$$

que l'on note respectivement $(c, c') \mapsto c \oplus c'$ et $(c, c') \mapsto c \otimes c'$.

– On note $e \in \mathcal{X}(\mathrm{SL}_2)$ l'élément défini par :

$$e_p = \begin{bmatrix} p^{-1/2} & 0 \\ 0 & p^{1/2} \end{bmatrix} \forall p \in P \text{ et } e_\infty = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Pour tout entier $d \geq 1$, on note $[d]$ l'élément $\mathrm{Sym}^{d-1}(e) \in \mathcal{X}(\mathrm{SL}_d)$, où Sym^{d-1} désigne la représentation $\mathrm{Sym}^{d-1}\mathrm{St}_2$. Pour $m, d \geq 1$ entiers, et $c \in \mathcal{X}(\mathrm{SL}_m)$, on pose pour simplifier :

$$c[d] = c \otimes [d].$$

– Pour $\pi \in \Pi_{\mathrm{cusp}}(\mathrm{PGL}_m)$, on note simplement π pour désigner l'élément $c(\pi) \in \mathcal{X}(\mathrm{SL}_m)$.

Avec les notations précédentes, si l'on se donne $n_1, \ldots, n_k, d_1, \ldots, d_k$ des entiers naturels non nuls, et $\pi_i \in \Pi_{\mathrm{cusp}}(\mathrm{PGL}_{n_i})$ pour tout $i \in \{1, \ldots, k\}$, en posant $n = \sum_{i=1}^k n_i d_i$, on dispose d'un élément bien défini :

$$\pi_1[d_1] \oplus \pi_2[d_2] \oplus \cdots \oplus \pi_k[d_k] \in \mathcal{X}(\mathrm{SL}_n).$$

On définit alors $\mathcal{X}_{\mathrm{AL}}(\mathrm{SL}_n)$ comme suit :

Proposition-Définition 2.7.18. *On pose $\mathcal{X}_{\mathrm{AL}}(\mathrm{SL}_n)$ le sous-ensemble de $\mathcal{X}(\mathrm{SL}_n)$ des éléments la forme $\pi_1[d_1] \oplus \pi_2[d_2] \oplus \cdots \oplus \pi_k[d_k]$, pour un quadruplet $(k, (n_i), (d_i), (\pi_i))$ tel que $n = \sum_{i=1}^k n_i d_i$.*

Si on se donne deux écritures $\oplus_{i=1}^k \pi_i[d_i] = \oplus_{j=1}^l \pi'_j[d'_j]$ dans $\mathcal{X}(\mathrm{SL}_n)$, alors $k = l$ et il existe une permutation $\sigma \in \mathcal{S}_k$ telle que $(\pi'_i, d'_i) = (\pi_{\sigma(i)}, d_{\sigma(i)})$.

Démonstration. Voir [40] et [46]. □

Suivant ces notations, on dira qu'un élément π de $\mathcal{X}_{\mathrm{AL}}(\mathrm{SL}_n)$ est non endoscopique si son quadruplet $(k, (n_i), (d_i), (\pi_i))$ vérifie $k = 1$ et $d_1 = 1$.

Avec ces notations, on a la conjecture suivante :

Conjecture 2.7.19 (Conjecture d'Arthur–Langlands)**.** *Soient G un $\mathbb{Z}$-groupe semi-simple et $r : \widehat{G} \to \mathrm{SL}_n$ une $\mathbb{C}$-représentation. Si $\pi \in \Pi_{\mathrm{disc}}(G)$, alors $\psi(\pi, r) \in \mathcal{X}_{\mathrm{AL}}(\mathrm{SL}_n)$.*

Théorème 2.7.20. *La conjecture d'Arthur–Langlands est vraie pour $G = \mathrm{SO}_n$ et $r = V_{\mathrm{St}}$.*

Démonstration. Ce théorème est le produit de travaux de nombreux auteurs (Arthur [4], Langlands, Kottwitz, Shelstad [70] [71] [72], Waldspurger [81] [82] [58] [44], Ngô [60], Laumon, Chaudouard [14] [15], Moeglin, Mezo [56] [57]), culminant par les travaux récents d'Arthur et Waldspurger.

L'énoncé ci-dessus, concernant SO_n, est dû à Taïbi [76] et repose sur [3] et les travaux de Kaletha [41] et Arancibia–Moeglin–Renard [2]. □

Lorsque G est classique et que r est la représentation standard V_{St} de $\widehat{G}$, pour tout élément $\pi \in \Pi_{\mathrm{disc}}(G)$ on a une égalité de la forme :

$$\psi(\pi, \mathrm{St}) = \bigoplus \pi_i[d_i]$$

où les π sont autoduales. Si $G = \mathrm{SO}_n$, on constate sur les caractère infinitésimaux qu'elles sont algébriques, de sortes que les π_i sont des éléments de $\Pi^{\perp}_{\mathrm{alg}}(\mathrm{PGL}_{n_i})$ (voir [19, Lemma 2.23]) : la condition d'autodualité des π_i a été démontrée par Arthur, et le choix du caractère infinitésimal de π impose que les π_i soient algébriques. De plus, on appellera "poids de π" les valeurs propres du caractère infinitésimal de $\psi(\pi, \mathrm{St})$.

L'étude faite dans [19] a pour but de déterminer pour $n = 7, 8$ ou 9 comment s'exprime tout élément de $\Pi_{\text{disc}}(\mathrm{SO}_n)$ grâce aux éléments de $\Pi^{\perp}_{\text{alg}}(\mathrm{PGL}_N)$ ($N \leq n$). Plus précisément, donnons-nous un tel n et posons $m = [n/2]$.Posons $\overline{w} = (w_1, \ldots, w_m)$ avec $w_1 > \cdots > w_m \geq 0$ des entiers positifs ou nuls de même parité que n. On désigne par $\Pi_{\overline{w}}(\mathrm{SO}_n)$ l'ensemble des éléments de $\Pi_{\text{disc}}(\mathrm{SO}_n)$ dont les poids sont les $\pm\frac{w_i}{2}$. Alors les résultats de [19] permettent de calculer le cardinal de $\Pi_{\overline{w}}(\mathrm{SO}_n)$, et d'exprimer pour chacun de ses éléments le quadruplet $(k, (n_i), (d_i), (\pi_i))$ associé par la conjecture d'Arthur–Langlands. Soulignons au passage que les résultats conditionnels de [19] (les énoncés Theorem* et Theorem**) sont maintenant inconditionnels grâce aux résultats récents des auteurs cités ci-dessus (notamment [76]) .

On renvoie à [19, Tables 12 à 14] pour une liste des représentations ainsi décrites dans les cas où les w_i sont impairs, avec $n = 7$ ou 9, pour certaines valeurs de $\overline{w}$. La méthode énoncée dans [19, Chapitres 5, 6 et 7] nous permet de trouver l'ensemble des représentations de poids $\pm\frac{w_i}{2}$ dans les autres cas. On donne dans la table 2.1 ci-dessous la décomposition de tous les éléments de $\Pi_{(w_1,w_2,w_3,w_4)}(\mathrm{SO}_9)$, où les w_i sont des entiers impairs tels que $25 = w_1 > w_2 > w_3 > w_4 > 0$, choisis de telle sorte qu'il existe un élément de $\Pi^{\perp}_{\text{alg}}(\mathrm{PGL}_8)$ dont les poids sont les $\pm w_i/2$.

Les tables de [19] susmentionnées, ainsi que les tables 2.1 à 2.11 du présent article, font intervenir les notations suivantes. Donnons-nous $\overline{w} = (w_1, \ldots, w_m)$ où $w_1 > \cdots > w_m \geq 0$ sont des entiers positifs de même parité. On pose Π l'ensemble des $\pi \in \Pi^{\perp}_{\text{alg}}(\mathrm{PGL}_{2m})$ dont les poids sont les $\pm w_i/2$ (avec 0 de multiplicité double lorsque $w_m = 0$). Si $|\Pi| = 1$, on note $\Delta_{w_1,\ldots,w_m}$ son unique élément. Si $|\Pi| = k$, on note $\Delta^k_{w_1,\ldots,w_m}$ n'importe lequel de ses élément. De la même manière, donnons-nous $\overline{w} = (w_1, \ldots, w_m)$ où $w_1 > \cdots > w_m > 0$ sont des entiers pairs strictement positifs, et posons Π^* l'ensemble des $\pi \in \Pi^{\perp}_{\text{alg}}(\mathrm{PGL}_{2m+1})$ dont les poids sont les $\pm w_i/2$ et 0. Si $|\Pi^*| = 1$, on note $\Delta^*_{w_1,\ldots,w_m}$ son unique élément. Si $|\Pi^*| = k$, on note $\Delta^{*k}_{w_1,\ldots,w_m}$ n'importe lequel de ses élément.

2.7.4 Résultats obtenus

Notre but est de déterminer un maximum de paramètres de Langlands–Satake pour des représentations automorphes cuspidales pour les groupes GL_n. Grâce à la conjecture d'Arthur–Langlands, ces paramètres apparaissent comme les éléments fondamentaux pour comprendre les formes automorphes discrètes de groupes plus généraux.

Donnons-nous $\pi \in \Pi_{\text{cusp}}(\mathrm{PGL}_m)$ dont on souhaite déterminer les $\mathrm{c}_p(\pi)$. On procède comme suit :

- on cherche $\pi' \in \Pi_{\text{disc}}(\mathrm{SO}_n)$ pour $n \in \{7, 8, 9\}$ tel que π apparaisse dans l'écriture de $\psi(\pi', \mathrm{St})$ donnée par la conjecture d'Arthur–Langlands. Idéalement, on espère obtenir une égalité de la forme $\psi(\pi', \mathrm{St}) = \pi$ ou $\psi(\pi', \mathrm{St}) = \pi \oplus [d]$.
- on détermine grâce à l'étude de [19] l'ensemble des $\pi'' \in \Pi_{\text{disc}}(\mathrm{SO}_n)$ ayant les mêmes poids que π', et on détermine les paramètres $\psi(\pi'', \mathrm{St})$ associés.
- sous réserve que les paramètres $\psi(\pi'', \mathrm{St})$ font intervenir uniquement des éléments dont les paramètres de Langlands–Satake sont bien connus, on en déduit les $\mathrm{c}_p(\pi)$ (ou du moins les $\mathrm{Trace}(\mathrm{c}_p(\pi)|\Lambda^i\mathrm{St})$ pour certains i).

En guise d'exemple, détaillons comment on a étudié l'élément $\Delta_{23,15,7} \in \Pi^{\perp}_{\text{alg}}(\mathrm{PGL}_6)$, qui est un cas assez représentatif. La notation $\Delta_{w_1,\ldots,w_m}$ a été présentée au paragraphe 2.7.3 (et est notamment utilisée dans [19] ou [18]).

D'après [19, Table 12], on a l'égalité : $\Pi_{(23,15,7)}(\mathrm{SO}_7) = \{\Delta_{23,7} \oplus \Delta_{15},\ \Delta_{23,15,7}\}$. On pose pour simplifier $\pi_1 = \Delta_{23,7} \oplus \Delta_{15}$ et $\pi_2 = \Delta_{23,15,7}$. Soit W la représentation de plus haut poids $(9, 6, 3)$ de SO_7. On pose f_1 et f_2 des formes propres de $\mathcal{M}_W(\mathrm{SO}_7)$ qui engendrent respectivement π_1 et π_2. On pose de plus, pour p un nombre premier quelconque, les valeurs

propres de f_1 et f_2 pour les opérateurs de Hecke $\mathrm{T}_p, \ldots, \mathrm{T}_{p,\ldots,p}$ comme étant respectivement les $\mu_p, \ldots, \mu_{p,\ldots,p}$ et les $\lambda_p, \ldots, \lambda_{p\ldots,p}$. Les formules de Gross nous donnent alors les égalités :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}(\mathrm{T}_p|\mathcal{M}_W(\mathrm{SO}_7)) &= \mu_p + \lambda_p = p^{5/2}\cdot \mathrm{Trace}(\mathrm{c}_p(\pi_1)|V_{\mathrm{St}}) + p^{5/2}\cdot \mathrm{Trace}(\mathrm{c}_p(\pi_2)|V_{\mathrm{St}})\\
\mathrm{Tr}(\mathrm{T}_{p,p}|\mathcal{M}_W(\mathrm{SO}_7)) &= \mu_{p,p} + \lambda_{p,p} = p^4\cdot \mathrm{Trace}(\mathrm{c}_p(\pi_1)|\Lambda^2 V_{\mathrm{St}})\\
&\qquad + p^4\cdot \mathrm{Trace}(\mathrm{c}_p(\pi_2)|\Lambda^2 V_{\mathrm{St}}) - 2\cdot(p^4+p^2+1)\\
\mathrm{Tr}(\mathrm{T}_{p,p,p}|\mathcal{M}_W(\mathrm{SO}_7)) &= \mu_{p,p,p} + \lambda_{p,p,p} = p^{9/2}\cdot \mathrm{Trace}(\mathrm{c}_p(\pi_1)|\Lambda^3 V_{\mathrm{St}})\\
&\qquad + p^{9/2}\cdot \mathrm{Trace}(\mathrm{c}_p(\pi_2)|\Lambda^3 V_{\mathrm{St}}) - (p^2+1)\cdot \mathrm{Tr}(\mathrm{T}_p|\mathcal{M}_W(\mathrm{SO}_7))
\end{aligned}$$

Les quantités qui nous intéressent ici sont les $\mathrm{Trace}(\mathrm{c}_p(\pi_2)|\Lambda^i V_{\mathrm{St}})$ (pour $i=1,2,3$). Pour les déterminer, on a besoin des traces des opérateurs de Hecke $T_p, T_{p,p}, T_{p,p,p}$ (qu'on a calculées au paragraphe 2.6.1), et des quantités $\mathrm{Trace}(\mathrm{c}_p(\pi_1)|\Lambda^i V_{\mathrm{St}})$ (qui sont calculable à l'aide des quantités $\mathrm{Trace}(\mathrm{c}_p(\Delta_{23,7})|\Lambda^i V_{\mathrm{St}})$ et $\mathrm{Trace}(\mathrm{c}_p(\Delta_{15})|\Lambda^i V_{\mathrm{St}})$, et des lemmes techniques 2.7.22, 2.7.23 et 2.7.21 présentés ci-dessous).

Reste donc à calculer les quantités $\mathrm{Trace}(\mathrm{c}_p(\Delta_{23,7})|\Lambda^i V_{\mathrm{St}})$ et $\mathrm{Trace}(\mathrm{c}_p(\Delta_{15})|\Lambda^i V_{\mathrm{St}})$. Si on note $V_{(m_1,m_2,m_3)}$ la représentation de SO_7 de plus haut poids (m_1,m_2,m_3), alors les formules de Gross nous donnent les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}(\mathrm{T}_p|\mathcal{M}_{V_{(4,4,4)}}(\mathrm{SO}_7)) &= p^{5/2}\cdot \mathrm{Trace}(\mathrm{c}_p(\Delta_{11}[3])|V_{\mathrm{St}})\\
&= p^{5/2}\mathrm{Trace}(\mathrm{c}_p(\Delta_{11})|V_{\mathrm{St}})\cdot \mathrm{Trace}(\mathrm{c}_p([3])|V_{\mathrm{St}})\\
\mathrm{Tr}(\mathrm{T}_p|\mathcal{M}_{V_{(6,6,6)}}(\mathrm{SO}_7)) &= p^{5/2}\cdot \mathrm{Trace}(\mathrm{c}_p(\Delta_{15}[3])|V_{\mathrm{St}})\\
&= p^{5/2}\mathrm{Trace}(\mathrm{c}_p(\Delta_{15})|V_{\mathrm{St}})\cdot \mathrm{Trace}(\mathrm{c}_p([3])|V_{\mathrm{St}})\\
\mathrm{Tr}(\mathrm{T}_p|\mathcal{M}_{V_{(9,4,3)}}(\mathrm{SO}_7)) &= p^{5/2}\cdot \mathrm{Trace}(\mathrm{c}_p(\Delta_{23,7}\oplus\Delta_{11})|V_{\mathrm{St}})\\
&= p^{5/2}\left(\mathrm{Trace}(\mathrm{c}_p(\Delta_{23,7})|V_{\mathrm{St}}) + \mathrm{Trace}(\mathrm{c}_p(\Delta_{11})|V_{\mathrm{St}})\right)\\
\mathrm{Tr}(\mathrm{T}_{p,p}|\mathcal{M}_{V_{(9,4,3)}}(\mathrm{SO}_7)) &= p^4\cdot \mathrm{Trace}(\mathrm{c}_p(\Delta_{23,7}\oplus\Delta_{11})|\Lambda^2 V_{\mathrm{St}}) + (p^4+p^2+1)\\
&= p^4(\mathrm{Trace}(\mathrm{c}_p(\Delta_{23,7})|\Lambda^2 V_{\mathrm{St}}) + \mathrm{Trace}(\mathrm{c}_p(\Delta_{11})|\Lambda^2 V_{\mathrm{St}})\\
&\qquad + \mathrm{Trace}(\mathrm{c}_p(\Delta_{23,7})|V_{\mathrm{St}})\cdot \mathrm{Trace}(\mathrm{c}_p(\Delta_{11})|V_{\mathrm{St}}))
\end{aligned}$$

On constate aussi que :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Trace}(\mathrm{c}_p(\Delta_{11})|\Lambda^2 V_{\mathrm{St}}) &= \mathrm{Trace}(\mathrm{c}_p(\Delta_{15})|\Lambda^2 V_{\mathrm{St}}) = 1\\
\mathrm{Trace}(\mathrm{c}_p(\Delta_{11})|\Lambda^i V_{\mathrm{St}}) &= \mathrm{Trace}(\mathrm{c}_p(\Delta_{15})|\Lambda^i V_{\mathrm{St}}) = 0 \text{ pour } i\geq 3\\
\mathrm{Trace}(\mathrm{c}_p(\Delta_{23,7})|\Lambda^3 V_{\mathrm{St}}) &= \mathrm{Trace}(\mathrm{c}_p(\Delta_{23,7})|\Lambda^2 V_{\mathrm{St}})
\end{aligned}$$

Il suffit enfin de réinjecter ces valeurs dans les égalités précédentes pour calculer les quantités $\mathrm{Trace}(\mathrm{c}_p(\Delta_{23,15,7})|\Lambda^i V_{\mathrm{St}})$, données par les tables 2.2, 2.4, 2.5 et 2.6. Ces formules sont assez lourdes, et on se contente de donner ici le résultat obtenu pour $i=1$, à savoir :

$$\begin{aligned}
p^{\frac{23}{2}}\cdot \mathrm{Trace}(\mathrm{c}_p(\Delta_{23,15,7})|V_{\mathrm{St}}) &= p^9\cdot \mathrm{Tr}(\mathrm{T}_p|\mathcal{M}_{V_{(9,6,3)}}(\mathrm{SO}_7)) - p^9\cdot \mathrm{Tr}(\mathrm{T}_p|\mathcal{M}_{V_{(9,4,3)}}(\mathrm{SO}_7))\\
&\quad + \frac{p^{10}}{p^2+p+1}\cdot \mathrm{Tr}(\mathrm{T}_p|\mathcal{M}_{V_{(4,4,4)}}(\mathrm{SO}_7)) - \frac{p^{10}}{p^2+p+1}\cdot \mathrm{Tr}(\mathrm{T}_p|\mathcal{M}_{V_{(6,6,6)}}(\mathrm{SO}_7)).
\end{aligned}$$

Suivant cette expression, les traces calculées dans [50] suffisent à calculer les propriétés voulues sur les paramètres de Satake de $\Delta_{23,11,7}$. On peut toutefois avoir recours aux résultats connus sur les formes modulaires pour $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ et sur les formes modulaires de Siegel de genre 2 pour alléger ces calculs.

L'ensemble des formules obtenues sont détaillées dans le programme [51]. Les fonctions *"triDeltaw1w2...(p)"* y donnent les quantités $p^{\frac{i\cdot w_1}{2}}\mathrm{Trace}(\mathrm{c}_p(\Delta_{w_1,w_2,\dots})|\Lambda^i V_{\mathrm{St}})$, et les fonctions *"triDeltaw1w2...pol(p)"* y donnent le polynôme unitaire dont les racines sont les $p^{\frac{i\cdot w_1}{2}}\mathrm{Trace}(\mathrm{c}_p(\Delta^2_{w_1,w_2,\dots})|\Lambda^i V_{\mathrm{St}})$ (lorsque la notation $\Delta^2_{w_1,w_2,\dots}$ a bien un sens).

Les résultats obtenus sont décrits par les théorèmes 2.1.3, 2.1.4, 2.1.5 et 2.1.6 présentés en introduction.

Dans le cas particulier où $p = 2$, plutôt que les quantités $\mathrm{Trace}(\mathrm{c}_p(\Delta_{w_1,w_2,w_3})|\Lambda^i V_{\mathrm{St}})$, on a préféré donner le polynôme $\det\left(2^{w_1/2}X\cdot\mathrm{Id}-\mathrm{c}_2(\Delta_{w_1,w_2,w_3})\right)$ lorsque nos résultats le permettaient. Le lien entre ces quantités est donné par la relation suivante :

$$\begin{aligned}\det\left(2^{w_1/2}X\cdot\mathrm{Id}-\mathrm{c}_2(\Delta_{w_1,w_2,w_3})\right) &= \sum_{i=0}^{6} X^i\cdot(-1)^i\cdot 2^{i\cdot w_1/2}\cdot\mathrm{Trace}(\mathrm{c}_p(\Delta_{w_1,w_2,w_3})|\Lambda^i V_{\mathrm{St}})\\ &= \sum_{i=0}^{6} X^i\cdot a_i\end{aligned}$$

et les relations $\mathrm{Trace}(\mathrm{c}_p(\Delta_{w_1,w_2,w_3})|\Lambda^i V_{\mathrm{St}}) = \mathrm{Trace}(\mathrm{c}_p(\Delta_{w_1,w_2,w_3})|\Lambda^{6-i} V_{\mathrm{St}})$ pour $i = 0, 1, 2$ permettent de ne pas avoir à expliciter tous les monômes. En effet, suivant la remarque faite à la fin du théorème 2.1.6, on a la relation : $a_{6-i} = 2^{(6-2i)\cdot w_1/2}\cdot a_i$ pour $i = 0, 1, 2$.

On rappelle que, dans cette remarque, on avait donné des propriétés de symétries très proches sur les coefficients du polynôme $\det\left(2^{w/2}X\cdot\mathrm{Id}-\mathrm{c}_2(\pi)\right)$, pour $\pi\in\Pi^{\perp}_{\mathrm{alg}}(\mathrm{PGL}_n)$ de plus haut poids w. Ceci sera utile pour mieux comprendre les tables 2.8 et 2.10.

Enfin, les quelques lemmes techniques suivant sont particulièrement utiles dans nos calculs, et leur démonstration est immédiate :

Lemme 2.7.21. *Soit $d\geq 1$ un entier. Alors $[d]\in\mathcal{X}(\mathrm{SL}_d)$ et on a :*

$$\begin{aligned}\mathrm{Trace}\left(([d])_p|V_{\mathrm{St}}\right) &= p^{\frac{1-d}{2}}\cdot\frac{p^d-1}{p-1}\\ \mathrm{Trace}\left(([d])_p|\Lambda^2 V_{\mathrm{St}}\right) &= p^{2-d}\cdot\frac{(p^d-1)\cdot(p^{d-1}-1)}{(p-1)^2\cdot(p+1)}\\ \mathrm{Trace}\left(([d])_p|\Lambda^3 V_{\mathrm{St}}\right) &= p^{\frac{3\cdot(3-d)}{2}}\cdot\frac{(p^d-1)\cdot(p^{d-1}-1)\cdot(p^{d-2}-1)}{(p-1)^3\cdot(p+1)\cdot(p^2+p+1)}\\ \mathrm{Trace}\left(([d])_p|\Lambda^4 V_{\mathrm{St}}\right) &= p^{2\cdot(4-d)}\cdot\frac{(p^d-1)\cdot(p^{d-1}-1)\cdot(p^{d-2}-1)\cdot(p^{d-3}-1)}{(p-1)^4\cdot(p+1)^2\cdot(p^2+p+1)\cdot(p^2+1)}\end{aligned}$$

Lemme 2.7.22. *Soient $c_i\in\mathcal{X}(\mathrm{SL}_{n_i})$ et $n=\sum_i n_i$. L'élément $\bigoplus_i c_i\in\mathcal{X}(\mathrm{SL}_n)$ est alors bien défini, et on a :*

$$\mathrm{Trace}\left(\left(\bigoplus_i c_i\right)_p|\Lambda^k V_{\mathrm{St}}\right) = \sum_{\substack{0<j\leq k\\ n_1+\cdots+n_j=k\\ i_1<\cdots<i_j}}\prod_{l=1}^{j}\mathrm{Trace}\left((c_{i_l})_p|\Lambda^{n_l}V_{\mathrm{St}}\right)$$

En particulier, les cas $k = 1$ ou $k = 2$ donnent :

$$\mathrm{Trace}\left(\left(\bigoplus_i c_i\right)_p | V_{\mathrm{St}}\right) = \sum_i \mathrm{Trace}\left((c_i)_p | V_{\mathrm{St}}\right)$$

$$\mathrm{Trace}\left(\left(\bigoplus_i c_i\right)_p | \Lambda^2 V_{\mathrm{St}}\right) = \sum_i \mathrm{Trace}\left((c_i)_p | \Lambda^2 V_{\mathrm{St}}\right) + \sum_{i<j} \mathrm{Trace}\left((c_i)_p | V_{\mathrm{St}}\right) \cdot \mathrm{Trace}\left((c_j)_p | V_{\mathrm{St}}\right)$$

Lemme 2.7.23. *Soit $c \in \mathcal{X}(\mathrm{SL}_n)$ et $d \geq 1$ un entier. L'élément $c \otimes [d] \in \mathcal{X}(\mathrm{SL}_{n \cdot d})$ est alors bien défini, et on a :*

$$\mathrm{Trace}\left((c \otimes [d])_p | V_{\mathrm{St}}\right) = \mathrm{Trace}\left((c)_p | V_{\mathrm{St}}\right) \cdot \mathrm{Trace}\left(([d])_p | V_{\mathrm{St}}\right)$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Trace}\left((c \otimes [d])_p | \Lambda^2 V_{\mathrm{St}}\right) &= \mathrm{Trace}\left((c)_p | V_{\mathrm{St}}\right)^2 \cdot \mathrm{Trace}\left(([d])_p | \Lambda^2 V_{\mathrm{St}}\right) \\ &+ \mathrm{Trace}\left((c)_p | \Lambda^2 V_{\mathrm{St}}\right) \cdot \mathrm{Trace}\left(([d])_p | V_{\mathrm{St}}\right)^2 - 2 \cdot \mathrm{Trace}\left((c)_p | \Lambda^2 V_{\mathrm{St}}\right) \cdot \mathrm{Trace}\left(([d])_p | \Lambda^2 V_{\mathrm{St}}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Trace}\left((c \otimes [d])_p | \Lambda^3 V_{\mathrm{St}}\right) &= \mathrm{Trace}\left((c)_p | V_{\mathrm{St}}\right)^3 \cdot \mathrm{Trace}\left(([d])_p | \Lambda^3 V_{\mathrm{St}}\right) \\ &+ \mathrm{Trace}\left((c)_p | \Lambda^3 V_{\mathrm{St}}\right) \cdot \mathrm{Trace}\left(([d])_p | V_{\mathrm{St}}\right)^3 + 3 \cdot \mathrm{Trace}\left((c)_p | \Lambda^3 V_{\mathrm{St}}\right) \cdot \mathrm{Trace}\left(([d])_p | \Lambda^3 V_{\mathrm{St}}\right) \\ &- 3 \cdot \mathrm{Trace}\left((c)_p | \Lambda^2 V_{\mathrm{St}}\right) \cdot \mathrm{Trace}\left((c)_p | V_{\mathrm{St}}\right) \cdot \mathrm{Trace}\left(([d])_p | \Lambda^3 V_{\mathrm{St}}\right) \\ &- 3 \cdot \mathrm{Trace}\left((c)_p | \Lambda^3 V_{\mathrm{St}}\right) \cdot \mathrm{Trace}\left(([d])_p | \Lambda^2 V_{\mathrm{St}}\right) \cdot \mathrm{Trace}\left(([d])_p | V_{\mathrm{St}}\right) \\ &- 3 \cdot \mathrm{Trace}\left((c)_p | \Lambda^2 V_{\mathrm{St}}\right) \cdot \mathrm{Trace}\left((c)_p | V_{\mathrm{St}}\right) \cdot \mathrm{Trace}\left(([d])_p | \Lambda^2 V_{\mathrm{St}}\right) \cdot \mathrm{Trace}\left(([d])_p | V_{\mathrm{St}}\right)\end{aligned}$$

2.8 Tables de Résultats

(w_1, w_2, w_3, w_4)	$\Pi_{w_1,w_2,w_3,w_4}(\mathrm{SO}_9)$	(w_1, w_2, w_3, w_4)	$\Pi_{w_1,w_2,w_3,w_4}(\mathrm{SO}_9)$
$(25,17,9,5)$	$\Delta_{25,17,9,5}$	$(25,21,17,7)$	$\Delta_{25,21,7}^2 \oplus \Delta_{17},\ \Delta_{25,21,17,7}$
$(25,17,13,5)$	$\Delta_{25,17,13,5}$	$(25,21,17,9)$	$\Delta_{25} \oplus \Delta_{21,9} \oplus \Delta_{17},$ $\Delta_{25,17} \oplus \Delta_{21,9},\ \Delta_{25,21,17,9}$
$(25,19,9,3)$	$\Delta_{25,19,9,3}$	$(25,23,9,3)$	$\Delta_{25,23,9,3}$
$(25,19,11,5)$	$\Delta_{25,19,5}^2 \oplus \Delta_{11},\ \Delta_{25,19,11,5}$	$(25,23,11,1)$	$\Delta_{25,23,11,1}$
$(25,19,13,3)$	$\Delta_{25,19,13,3}$	$(25,23,11,5)$	$\Delta_{25,23,11,5}^2$
$(25,19,13,5)$	$\Delta_{25,19,13,5}$	$(25,23,13,3)$	$\Delta_{25,23,13,3}$
$(25,19,13,7)$	$\Delta_{25,13}^2 \oplus \Delta_{19,7},\ \Delta_{25,19,13,7}$	$(25,23,13,7)$	$\Delta_{25,13}^2 \oplus \Delta_{23,7},\ \Delta_{25,23,13,7}$
$(25,19,13,9)$	$\Delta_{25,19,13,9}$	$(25,23,15,1)$	$\Delta_{25,23,15,1}$
$(25,19,15,5)$	$\Delta_{25,19,5}^2 \oplus \Delta_{15},\ \Delta_{25,19,15,5}$	$(25,23,15,5)$	$\Delta_{25,23,15,5}^3$
$(25,21,11,7)$	$\Delta_{25,21,7}^2 \oplus \Delta_{11},\ \Delta_{25,21,11,7}$	$(25,23,15,9)$	$\Delta_{25} \oplus \Delta_{15} \oplus \Delta_{23,9},$ $\Delta_{25,15} \oplus \Delta_{23,9},\ \Delta_{25,23,15,9}$
$(25,21,13,5)$	$\Delta_{25,13}^2 \oplus \Delta_{21,5},\ \Delta_{25,21,13,5}$	$(25,23,15,11)$	$\Delta_{25,23,15,11}$
$(25,21,13,7)$	$\Delta_{25,21,13,7}$	$(25,23,17,3)$	$\Delta_{25,23,17,3}$
$(25,21,15,3)$	$\Delta_{25,21,3}^2 \oplus \Delta_{15},\ \Delta_{25,21,15,3}$	$(25,23,17,5)$	$\Delta_{23,17,5} \oplus \Delta_{25},\ \Delta_{25,23,17,5}$
$(25,21,15,5)$	$\Delta_{25} \oplus \Delta_{21} \oplus \Delta_{21,5},$ $\Delta_{25,15} \oplus \Delta_{21,5},\ \Delta_{25,21,15,5}$	$(25,23,17,7)$	$\Delta_{25} \oplus \Delta_{17} \oplus \Delta_{23,7},$ $\Delta_{25,17} \oplus \Delta_{23,7},\ \Delta_{25,23,17,7}$
$(25,21,15,7)$	$\Delta_{25,21,7}^2 \oplus \Delta_{15},\ \Delta_{25,21,15,7}^2$	$(25,23,17,11)$	$\Delta_{25,23,17,11}$
$(25,21,15,9)$	$\Delta_{25} \oplus \Delta_{15} \oplus \Delta_{21,9},$ $\Delta_{25,15} \oplus \Delta_{21,9},\ \Delta_{25,21,15,9}$	$(25,23,19,5)$	$\Delta_{25,23,19,5}$
$(25,21,17,5)$	$\Delta_{25} \oplus \Delta_{17} \oplus \Delta_{21,5},$ $\Delta_{25,17} \oplus \Delta_{21,5},\ \Delta_{25,21,17,5}$		

TABLE 2.1 – Décomposition des éléments de $\Pi_{(w_1,w_2,w_3,w_4)}(\mathrm{SO}_9)$ pour $w_1 = 25$ lorsqu'il existe un élément de $\Pi_{\mathrm{cusp}}(\mathrm{PGL}_8)$ dont les poids sont les $\pm w_i/2$.

(w_1, w_2, w_3)	$\det\left(2^{w_1/2}X \cdot \mathrm{Id} - \mathrm{c}_2\left(\Delta_{w_1,w_2,w_3}\right)\vert V_{\mathrm{St}}\right)$
$(23, 13, 5)$	$2^{69} \cdot X^6 + \cdots - 14948499456 \cdot X^3 - 4472832 \cdot X^2 + 1$
$(23, 15, 3)$	$2^{69} \cdot X^6 + \cdots + 17641242624 \cdot X^3 + 7139328 \cdot X^2 + 3360 \cdot X + 1$
$(23, 15, 7)$	$2^{69} \cdot X^6 + \cdots + 528482304 \cdot X^3 - 4288512 \cdot X^2 + 720 \cdot X + 1$
$(23, 17, 5)$	$2^{69} \cdot X^6 + \cdots - 22246588416 \cdot X^3 + 7323648 \cdot X^2 - 1920 \cdot X + 1$
$(23, 17, 9)$	$2^{69} \cdot X^6 + \cdots + 5190451200 \cdot X^3 - 417792 \cdot X^2 - 1584 \cdot X + 1$
$(23, 19, 3)$	$2^{69} \cdot X^6 + \cdots - 8241807360 \cdot X^3 + 872448 \cdot X^2 + 96 \cdot X + 1$
$(23, 19, 11)$	$2^{69} \cdot X^6 + \cdots - 6259998720 \cdot X^3 - 4288512 \cdot X^2 + 96 \cdot X + 1$
$(25, 13, 3)$	$2^{75} \cdot X^6 + \cdots - 56170119168 \cdot X^3 + 16023552 \cdot X^2 + 8640 \cdot X + 1$
$(25, 13, 7)$	$2^{75} \cdot X^6 + \cdots + 1962934272 \cdot X^3 + 5332992 \cdot X^2 - 5040 \cdot X + 1$
$(25, 15, 5)$	$2^{75} \cdot X^6 + \cdots - 119587995648 \cdot X^3 + 21331968 \cdot X^2 + 1$
$(25, 15, 9)$	$2^{75} \cdot X^6 + \cdots - 335208775680 \cdot X^3 - 23052288 \cdot X^2 + 6048 \cdot X + 1$
$(25, 17, 11)$	$2^{75} \cdot X^6 + \cdots + 185377751040 \cdot X^3 - 11071488 \cdot X^2 - 6432 \cdot X + 1$
$(25, 19, 1)$	$2^{75} \cdot X^6 + \cdots + 443421818880 \cdot X^3 + 72425472 \cdot X^2 + 10752 \cdot X + 1$
$(25, 19, 13)$	$2^{75} \cdot X^6 + \cdots - 173801472000 \cdot X^3 - 3053568 \cdot X^2 - 672 \cdot X + 1$
$(25, 21, 15)$	$2^{75} \cdot X^6 + \cdots - 106419978240 \cdot X^3 - 14020608 \cdot X^2 - 672 \cdot X + 1$

TABLE 2.2 – Polynômes caractéristiques des $\mathrm{c}_2(\pi)$ pour $\pi \in \Pi^{\perp}_{\mathrm{alg}}(\mathrm{PGL}_6)$

(w_1, w_2, w_3)	$P_{w_1,w_2,w_3}(X)$
$(25, 17, 3)$	$X^2 + 768 \cdot X - 2764800$
$(25, 17, 7)$	$X^2 - 5232 \cdot X - 23063040$
$(25, 19, 5)$	$X^2 - 6624 \cdot X - 38854656$
$(25, 19, 9)$	$X^2 + 1104 \cdot X - 35306496$
$(25, 21, 3)$	$X^2 - 2880 \cdot X - 8193024$
$(25, 21, 7)$	$X^2 + 240 \cdot X - 28491264$
$(25, 21, 11)$	$X^2 + 1824 \cdot X - 42771456$

TABLE 2.3 – Polynômes annulateurs des $2^{w_1/2} \cdot \mathrm{Trace}(\mathrm{c}_2(\pi)|V_{\mathrm{St}})$ pour $\pi \in \Pi^{\perp}_{\mathrm{alg}}(\mathrm{PGL}_6)$

$\overline{w}$ \ p	3	5	7	11	13	17	19
$(23,13,5)$	-304668	874314	452588136	-1090903017204	1624277793138	126454166788950	-119149415901516
$(23,15,3)$	-47628	83069994	-4690439544	-412279403844	8898668260818	-106699425426090	-312437470082556
$(23,15,7)$	425412	-124558326	-3040958424	352045171116	-4816260369102	99848197859670	129801738947604
$(23,17,5)$	-37548	9957354	-3491256504	1417257011676	-5403644192622	-1644876121770	-824110968459036
$(23,17,9)$	161028	118413450	-3221005656	-1654692256404	-5869020263502	-8093664534186	676095496191060
$(23,19,3)$	-201852	-26872950	4686149544	465927593196	-7534226506062	-90400042234026	392917842132180
$(23,19,11)$	-252252	26651850	6781882344	25215729996	2875236177138	-128845421894826	-41596411782540
$(25,13,3)$	-19764	-391988430	9750417432	13078424975076	-96701634737526	2452876322679990	-2642714743857924
$(25,13,7)$	-112644	-559352430	-1243505928	7826821995636	107438724171114	-2831213421327690	-9749582433259284
$(25,15,5)$	867132	-613050606	5377223544	-3134062555596	51842671522026	814881989695158	-2965210972182228
$(25,15,9)$	-278964	533148210	-7056168168	2683226030436	-15864469792374	968124970032822	-2966903818822020
$(25,17,3)$	-1478088	884141220	-9475591056	1338439935912	-114003342180780	827431528322412	9018803395859736
$(25,17,7)$	1265112	626270820	-13034888016	-3063060887928	-34174702764780	2038338006384492	1506984152124216
$(25,17,11)$	872316	-474730350	-9663808008	6996289229556	-123888344826774	197426191828662	-8092805263108500
$(25,19,1)$	-106596	353216850	-17012565192	10854722172756	24295975183914	-2237898756283722	-1116669445539060
$(25,19,5)$	90072	-334979100	-31105966416	-7883875892088	-105638103433068	-2537945828699796	10159571243517240
$(25,19,9)$	-573192	927204900	62961605616	-3096943985688	-15467475516972	-508393328631444	821432168707800
$(25,19,13)$	-702324	9404850	-14719266408	23152557649956	-10567857144054	3351056484428982	-4267132336471620
$(25,21,3)$	-170280	-823542300	4910286000	-1405391636088	145190225249940	-842678842445460	-6403875311384520
$(25,21,7)$	-108360	433601700	43209490800	12737766447912	-109920761915820	-1119504013993620	9538661136172440
$(25,21,11)$	511128	-401727900	28143226416	9867684455112	90846882696468	2611978425209196	3887087995313400
$(25,21,15)$	411516	-439386990	18155978232	-3315674449164	-10179464734614	657746166515382	19498517165502060

TABLE 2.4 – Liste des $p^{w_1/2} \cdot \sum_{\pi\in\Pi} \mathrm{Trace}\,(\mathrm{c}_p(\pi)|V_{\mathrm{St}})$ pour $\Pi^{\perp}_{\mathrm{alg}}(\mathrm{PGL}_6)$ et $3 \leq p \leq 19$

$\overline{w}$ \ p	23	29	31	37	41
$(23,13,5)$	213729467233464	−48303125789698494	102404919986257056	−854573389531170582	3039963284658810510
$(23,15,3)$	4636605523096344	38242077134129826	62411711982932256	194846871383803338	−2444768682516441330
$(23,15,7)$	−483871286752776	31281904260703746	−99338149426357344	488935778497554858	−761251774743469170
$(23,17,5)$	−1778909130889896	41065622154151266	−49354387962315744	−699393293745596022	675213588259710990
$(23,17,9)$	2740073764616568	9074529911413890	−106519618777533024	−845122486221439446	−2038917131601784434
$(23,19,3)$	9794542472491128	−92800925124117630	−102827107514992224	909641598021211434	−1012591870481195634
$(23,19,11)$	−2457101779651272	74027182945751490	55350292141154976	84118925862153834	−1668889536698238834
$(25,13,3)$	−1193162553976248	253606518017413434	2735597919197168736	4732933858242304146	−149824999263679701570
$(25,13,7)$	20178334110978792	432436992664549914	−3130027620660754464	2522703019906092786	−93544655494895631810
$(25,15,5)$	−88220277023194008	−1155443769692920422	9370888247092906464	−31117677722924636046	−1528438521983962050
$(25,15,9)$	−80036596250977464	−1707876195338103750	−780170604309503904	61060941903027848082	−22751573768921753154
$(25,17,3)$	−104847531874172592	2031320319236853684	−2368965684580243008	5344348460239232868	−74090640376161130884
$(25,17,7)$	−80888535775088112	−5992183465309870476	3003950696884185792	34645711154077546788	−10358280803181806724
$(25,17,11)$	−109137642615383064	1797713610306337050	6528516996995314656	16749083457180770802	6852460464769529406
$(25,19,1)$	−36279912858303576	711971194422472410	2456722774222969056	−37665796944733211982	196046761265779865406
$(25,19,5)$	72168216158130192	2501005156335478260	−1340464530776071488	−20702446507555550556	−18731680328982176388
$(25,19,9)$	31165081511786448	−108342006282833100	−317484792913639488	−27388402339916500764	−76102667868305446788
$(25,19,13)$	−6790004985987384	−76851310696194630	−5659730220769482144	−14458992118594150638	242176317466276764606
$(25,21,3)$	−3967628067667440	1872480211861343220	−2037559218626004288	27487981729794451620	263156609307726841212
$(25,21,7)$	222258068930775120	2495104422809767860	−2498495348289012288	−74513456812450965660	12981476072926873212
$(25,21,11)$	−170808940064948592	376161108771818100	−6240617945672417088	946755778368702756	71026063736978463612
$(25,21,15)$	120369062052633576	−202084440446118630	1398887694440035296	−33770972241982657038	64345458637891946046

TABLE 2.5 – Liste des $p^{w_1/2}\cdot\sum_{\pi\in\Pi}\mathrm{Trace}\,(\mathrm{c}_p(\pi)|V_{\mathrm{St}})$ pour $\Pi^{\perp}_{\mathrm{alg}}\,(\mathrm{PGL}_6)$ et $23\leq p\leq 41$

$\overline{w}$ \ p	43	47	53
$(23,13,5)$	1585197541121400492	2888879429822981616	−401934470208658758
$(23,15,3)$	1251580056673244892	729807353383997616	−103182932449233424998
$(23,15,7)$	−6758592609864707508	−20510124050426653584	48013741730657079162
$(23,17,5)$	4997229047209559292	−3083068930104075984	50560941459854437722
$(23,17,9)$	11890923043443050508	15431114760408787824	−7026502567848047622
$(23,19,3)$	−3198945438336050292	4575412865015044464	−33888522555375856902
$(23,19,11)$	−2386037760238127892	−41570441127723864336	−19076488865676636102
$(25,13,3)$	−118592663540334048444	265471738731534187152	6529626819380030334786
$(25,13,7)$	−27876108969519548844	483419531351826739152	−67841640042648419934
$(25,15,5)$	−310395560121687358956	2481990812763404305104	989150772174783875874
$(25,15,9)$	−174530596427091285564	39703282543066180752	−5079143986594630602174
$(25,17,3)$	182208972814755659112	−103615919209859815776	−816797105524166216508
$(25,17,7)$	−20453253350286370488	1741863267899807506464	−4172927152787349895548
$(25,17,11)$	−140783944305361504044	407136532197503992272	3183793193891665327266
$(25,19,1)$	−438706021055601207756	−559258375196038145712	1807317125273707699554
$(25,19,5)$	184893881031217770312	625764793414851116064	2026224497868971399172
$(25,19,9)$	−272331427509356263512	1798384539618122498976	−5663863869660148328892
$(25,19,13)$	157365362411733901956	252625491987210302352	5089431783552918322626
$(25,21,3)$	−240449199626663273400	−701221992491721039840	2592653972992766998020
$(25,21,7)$	−660835618776165010200	1125591434635074114720	4607672947886504889540
$(25,21,11)$	−48343195754042760312	1145954720828549941536	5888654435488579217028
$(25,21,15)$	−282475205135353880364	163067533980263907792	−4351329192379786592094

TABLE 2.6 – Liste des $p^{w_1/2} \cdot \sum_{\pi \in \Pi} \mathrm{Trace}\,(\mathrm{c}_p(\pi)|V_{\mathrm{St}})$ pour $\Pi^{\perp}_{\mathrm{alg}}(\mathrm{PGL}_6)$ et $43 \leq p \leq 53$

$\overline{w}$ \ p	2	3	5	7
$(25,17,9,5)$	1104	-671328	-35927880	19973315264
$(25,17,13,5)$	1632	492912	-45088680	-45797041696
$(25,19,9,3)$	-5280	-317520	71568600	36073032800
$(25,19,11,5)$	4800	-302400	-765121800	29642547200
$(25,19,13,3)$	2640	-483840	23969400	3255324800
$(25,19,13,5)$	-4416	-913248	-155434440	1629650624
$(25,19,13,7)$	-3840	753840	-132911400	83659503200
$(25,19,13,9)$	960	-498960	-500274600	-34659738400
$(25,19,15,5)$	-6432	444528	985329240	14967875552
$(25,21,11,7)$	7920	-274320	181517400	-414752800
$(25,21,13,5)$	8928	139968	-181179144	-9742673920
$(25,21,13,7)$	-1920	58320	-511607400	-7597141600
$(25,21,15,3)$	-3072	995568	148022616	-806421280
$(25,21,15,5)$	-1152	-994032	-652925160	-48906846688
$(25,21,15,7)$	-3408	1215360	204437616	15834248704
$(25,21,15,9)$	-7200	631200	6175800	25981995200
$(25,21,17,5)$	6528	301968	180352536	15716429600
$(25,21,17,7)$	6240	-894240	-877974600	-16347755200
$(25,21,17,9)$	480	421920	451865400	12240996800
$(25,23,9,3)$	-240	-675360	76659000	-8636958400
$(25,23,11,1)$	-7440	-574560	-258371400	45468651200
$(25,23,11,5)$	2832	758880	16184496	-20980586816
$(25,23,13,3)$	288	843696	80271576	-6565786528
$(25,23,13,7)$	3888	-861984	1188954936	448814912
$(25,23,15,1)$	48	-950832	1608216	-5559691360
$(25,23,15,5)$	-4608	-495072	94477608	49773071040
$(25,23,15,9)$	-1392	-382032	-172266024	-6105235360
$(25,23,15,11)$	-1056	538272	-360152520	356506304
$(25,23,17,3)$	1488	1040256	-758350344	11560030592
$(25,23,17,5)$	-2976	97632	34950840	-31527057856
$(25,23,17,7)$	1488	-1687824	-107874984	26073028832
$(25,23,17,11)$	480	-211680	98316600	28990400
$(25,23,19,5)$	-6432	-950832	-477237864	-7262923360

TABLE 2.7 – Liste des $p^{w_1/2} \cdot \sum_{\pi\in\Pi} \mathrm{Trace}\,(\mathrm{c}_p(\pi)|V_{\mathrm{St}})$ pour $\Pi^{\perp}_{\mathrm{alg}}\,(\mathrm{PGL}_8)$ et $2 \leq p \leq 7$ lorsque les w_i sont impairs

(w_1, w_2, w_3)	$\det\left(2^{w_1/2}X \cdot \mathrm{Id} - \mathrm{c}_2\left(\Delta^*_{w_1,w_2,w_3}\right)|V_{\mathrm{St}}\right)$
$(24, 16, 8)$	$2^{84} \cdot X^7 + \cdots - 35053633536 \cdot X^3 - 5300736 \cdot X^2 - 3016 \cdot X - 1$
$(26, 16, 10)$	$2^{91} \cdot X^7 + \cdots + 187711881216 \cdot X^3 + 10444800 \cdot X^2 + 1312 \cdot X - 1$
$(26, 20, 6)$	$2^{91} \cdot X^7 + \cdots - 184113168384 \cdot X^3 - 6881280 \cdot X^2 - 3008 \cdot X - 1$
$(26, 20, 10)$	$2^{91} \cdot X^7 + \cdots + 847484289024 \cdot X^3 - 116293632 \cdot X^2 + 9088 \cdot X - 1$
$(26, 20, 14)$	$2^{91} \cdot X^7 + \cdots - 582362333184 \cdot X^3 + 4546560 \cdot X^2 + 2752 \cdot X - 1$
$(26, 24, 10)$	$2^{91} \cdot X^7 + \cdots + 281257967616 \cdot X^3 + 53460480 \cdot X^2 - 5168 \cdot X - 1$
$(26, 24, 14)$	$2^{91} \cdot X^7 + \cdots - 17485529088 \cdot X^3 - 57698304 \cdot X^2 + 9088 \cdot X - 1$
$(26, 24, 18)$	$2^{91} \cdot X^7 + \cdots + 29700390912 \cdot X^3 + 3495936 \cdot X^2 - 8192 \cdot X - 1$

TABLE 2.8 – Polynômes caractéristiques des $\mathrm{c}_2(\pi)$ pour $\pi \in \Pi^{\perp}_{\mathrm{alg}}(\mathrm{PGL}_7)$

$\overline{w}$ \ p	3	5	7	11	13
$(24, 16, 8)$	-350001	124371575	93528799	-2714242598353	3657301688599
$(26, 16, 10)$	-624051	-1326755021	16022951833	9888917076709	-93579285696245
$(26, 20, 6)$	-1721331	905950579	-9930145127	30034826719909	-337487394517685
$(26, 20, 10)$	-608499	-280183181	84407107225	-11018813856347	-147086616834485
$(26, 20, 14)$	404109	1190523379	-15973145447	-57600800963291	-151745371034165
$(26, 24, 10)$	170829	1280278579	-54192968807	27176421262309	-273154746313205
$(26, 24, 14)$	1183437	-185269325	5344579993	-6837258083483	-80849598511733
$(26, 24, 18)$	-175923	-813224525	59374762393	40761042089317	560921705611147

TABLE 2.9 – Liste des $p^{w_1/2} \cdot \sum_{\pi \in \Pi} \mathrm{Trace}\left(\mathrm{c}_p(\pi)|V_{\mathrm{St}}\right)$ pour $\Pi^{\perp}_{\mathrm{alg}}(\mathrm{PGL}_7)$ et $3 \leq p \leq 13$

(w_1, w_2, w_3, w_4)	$\det\left(2^{w_1/2}X \cdot \mathrm{Id} - \mathrm{c}_2\left(\Delta_{w_1,w_2,w_3,w_4}\right)\vert V_{\mathrm{St}}\right)$
$(24, 18, 10, 4)$	$2^{96} \cdot X^8 + \cdots - 71176198029312 \cdot X^4 - 5324800 \cdot X^2 + 1$
$(24, 20, 14, 2)$	$2^{96} \cdot X^8 + \cdots + 18937584549888 \cdot X^4 + 34233384960 \cdot X^3 - 3020800 \cdot X^2 + 1440 \cdot X + 1$
$(26, 18, 10, 2)$	$2^{104} \cdot X^8 + \cdots + 1664854951723008 \cdot X^4 + 96153108480 \cdot X^3 + 33190400 \cdot X^2 + 11880 \cdot X + 1$
$(26, 18, 14, 6)$	$2^{104} \cdot X^8 + \cdots + 5195343838838784 \cdot X^4 + 113224974336 \cdot X^3 - 89271808 \cdot X^2 - 3672 \cdot X + 1$
$(26, 20, 10, 4)$	$2^{104} \cdot X^8 + \cdots - 5907882134470656 \cdot X^4 - 380356263936 \cdot X^3 - 2646016 \cdot X^2 + 6336 \cdot X + 1$
$(26, 20, 14, 8)$	$2^{104} \cdot X^8 + \cdots + 2055025887019008 \cdot X^4 - 320675512320 \cdot X^3 - 63692800 \cdot X^2 + 2880 \cdot X + 1$
$(26, 22, 10, 6)$	$2^{104} \cdot X^8 + \cdots - 5275597450248192 \cdot X^4 + 586910269440 \cdot X^3 + 29043200 \cdot X^2 - 3960 \cdot X + 1$
$(26, 22, 14, 2)$	$2^{104} \cdot X^8 + \cdots + 3431375000567808 \cdot X^4 - 183848140800 \cdot X^3 + 70054400 \cdot X^2 - 5400 \cdot X + 1$
$(26, 24, 14, 4)$	$2^{104} \cdot X^8 + \cdots - 5487318936846336 \cdot X^4 - 113397202944 \cdot X^3 + 101384192 \cdot X^2 + 16128 \cdot X + 1$
$(26, 24, 16, 2)$	$2^{104} \cdot X^8 + \cdots + 935933503340544 \cdot X^4 - 391440236544 \cdot X^3 + 7104512 \cdot X^2 - 4032 \cdot X + 1$
$(26, 24, 18, 8)$	$2^{104} \cdot X^8 + \cdots + 5006554256375808 \cdot X^4 - 522171187200 \cdot X^3 + 65446400 \cdot X^2 - 10800 \cdot X + 1$
$(26, 24, 20, 6)$	$2^{104} \cdot X^8 + \cdots - 1289572520558592 \cdot X^4 - 121173442560 \cdot X^3 + 819200 \cdot X^2 + 8640 \cdot X + 1$

TABLE 2.10 – Polynômes caractéristiques des $\mathrm{c}_2(\pi)$ pour $\pi \in \Pi^{\perp}_{\mathrm{alg}}(\mathrm{PGL}_8)$ lorsque les w_i sont pairs

$\overline{w}$ \ p	3	5	7	11	13
$(24, 18, 10, 4)$	-453600	-119410200	12572892800	-57063064032	-25198577349400
$(24, 20, 14, 2)$	-90720	-381691800	15880860800	1429298110368	1852311565160
$(26, 18, 10, 2)$	-1028160	93177000	-37259756800	24070317594048	-181403983972120
$(26, 18, 14, 6)$	36288	-407597400	-13480246528	-50783707225152	-553105612803352
$(26, 20, 10, 4)$	2231712	-2103821496	-49948420480	-33016093688160	297288355585928
$(26, 20, 14, 8)$	-2086560	-923239800	90060118400	34658502500448	251026605281480
$(26, 22, 10, 6)$	1321920	611173800	-13077433600	-21930073906752	-207826052609560
$(26, 22, 14, 2)$	-1166400	156076200	25574009600	-40811535001152	145995515911400
$(26, 24, 14, 4)$	-1851552	313754760	34598801792	-25141764069792	232075615185608
$(26, 24, 16, 2)$	-132192	188771400	-162950201728	-32763087987552	180651961034888
$(26, 24, 18, 8)$	1360800	1350102600	-40839971200	-45290750221152	230082936830600
$(26, 24, 20, 6)$	-341280	795285000	-117493532800	198712532448	54899265210440

TABLE 2.11 – Liste des $p^{w_1/2} \cdot \sum_{\pi \in \Pi} \mathrm{Trace}\left(\mathrm{c}_p(\pi) | V_{\mathrm{St}}\right)$ pour $\Pi^{\perp}_{\mathrm{alg}}(\mathrm{PGL}_8)$ et $3 \leq p \leq 13$ lorsque les w_i sont pairs

Chapitre 3

Calcul des opérateurs de Hecke sur les classes d'isomorphisme de réseaux pairs de déterminant 2 en dimension 23 et 25.

Résumé

Dans cet article, nous calculons l'opérateur de Hecke T_2 associé aux 2-voisins de Kneser défini sur les classes d'isomorphisme des réseaux pairs de déterminant 2 en dimension 23 et 25. Grâce aux résultats de [48], on en déduit l'expression de nombreux autres opérateurs de Hecke. Ceci nous permet de déterminer pour tout p premier le graphe de Kneser associé aux p-voisins des réseaux de dimension 23 ou 25. Nos résultats permettent aussi de démontrer de nombreuses autres congruences faisant intervenir les paramètres de Satake des représentations automorphes des groupes linéaires découvertes par Chenevier et Renard, et notamment d'améliorer une conjecture de Harder.

3.1 Introduction.

Fixons $n \equiv 0, \pm 1 \bmod 8$ un entier strictement positif, et considérons un espace euclidien V de dimension n. On définit l'ensemble $\mathcal{L}_n$ des réseaux pairs $L \subset V$ tels que $\det(L) = 1$ si n est pair, et $\det(L) = 2$ sinon. L'ensemble $\mathcal{L}_n$ est muni d'une action du groupe orthogonal euclidien $\mathrm{O}(V) \simeq \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, et on note $X_n = \mathrm{O}(V) \setminus \mathcal{L}_n$.

Suivant Kneser, si l'on se donne A un groupe abélien fini, on dit que les réseaux $L_1, L_2 \in \mathcal{L}_n$ sont des A-voisins si :

$$L_1/(L_1 \cap L_2) \simeq L_2/(L_1 \cap L_2) \simeq A.$$

On parle plus simplement des d-voisins lorsque $A = \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$: c'est le cas qui nous intéresse le plus. Une fois un réseau $L \in \mathcal{L}_n$ donné, il est facile de construire tous ses d-voisins, comme rappelé à la proposition 3.2.11.

Cette notion de A-voisin, et plus particulièrement celle de p-voisins (pour p un nombre premier), nous permet de définir à n fixé un endomorphisme T_p sur le $\mathbb{Z}$-module libre $\mathbb{Z}[X_n]$ engendré par X_n. On le définit par $\mathrm{T}_p(\overline{L}) = \sum \overline{L'}$, la somme portant sur les p-voisins L' de L, et $\overline{L}$ (respectivement $\overline{L'}$) désignant la classe dans X_n de L (respectivement L').

L'étude de l'endomorphisme $\mathrm{T}_p \in \mathrm{End}(\mathbb{Z}[X_n])$ passe par la compréhension de l'ensemble X_n.

Lorsque $n \leq 9$, on sait d'après Mordell (pour $n = 8$) et par exemple d'après Conway–Sloane [23] (pour $n \in \{1, 7, 9\}$) que $|X_n| = 1$, et l'opérateur T_p n'est pas très pertinent.

Lorsque $n \in \{15, 16, 17\}$, les ensembles X_n ont été déterminés par Witt (pour $n = 16$) et Conway–Sloane (pour $n = 15, 17$). Suivant les résultats de Chenevier–Lannes [18], l'opérateur T_p se déduit de l'étude des formes modulaires paraboliques pour $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. La connaissance de T_p est équivalente à la donnée, pour tous $L, L' \in \mathcal{L}_n$, du nombre de p-voisins de L isomorphes à L'. Ces quantités font intervenir des polynômes en p ainsi que le p-ème terme du q-développement des formes modulaires normalisées paraboliques pour $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ de poids 12 ou de poids 16. Pour une étude détaillée, nous renvoyons à [18, Ch. I, Théorème A] lorsque $n = 16$, et à [18, Annexe B, §5] lorsque $n = 15, 17$.

Lorsque $n \in \{23, 24, 25\}$, la classification des éléments de X_n est le produit des travaux de Niemeier (pour $n = 24$, ce qui donne aussi la classification pour $n = 23$) et de Borcherds (pour $n = 25$). On prendra bien garde au fait que $|X_{23}| = 32$, $|X_{24}| = 24$ et $|X_{25}| = 121$, et il est facile de se tromper sur les indices qui interviennent dans la suite.

Si les ensembles X_{23}, X_{24} et X_{25} sont plus ou moins bien connus, il n'y a que pour $n = 24$ que des opérateurs $\mathrm{T}_p \in \mathrm{End}(\mathbb{Z}[X_n])$ ont été déterminés. Le calcul de l'opérateur T_2 sur $\mathbb{Z}[X_{24}]$ résulte des travaux de Borcherds [6] [23], repris ensuite par Nebe-Venkov dans [59]. L'étude faite par Chenevier–Lannes dans [18] repose sur la codiagonalisation des opérateurs $\mathrm{T}_p \in \mathrm{End}(\mathbb{Z}[X_{24}])$, et permet d'en déduire pour $p \leq 113$ l'opérateur T_p sur $\mathbb{Z}[X_{24}]$. Ils utilisent pour cela que les valeurs propres de l'opérateur T_2 sont toutes distinctes, et la diagonalisation de T_2 fournit une base de codiagonalisation pour tous les T_p.

Le premier but de notre travail est de déterminer un maximum d'opérateurs T_p pour $n = 23$ et $n = 25$.

Notre point de départ est la détermination de l'opérateur T_2 lorsque $n = 23$ et $n = 25$, ce qui fait l'objet du paragraphe 3.3.

Au paragraphe 3.3.1, on étudie les ensembles X_{23} et X_{25}. On étudie le rôle fondamental que jouent les systèmes de racines des réseaux de $\mathcal{L}_{23}$ et $\mathcal{L}_{25}$ dans la compréhension de X_{23} et X_{25}, détaillé à la proposition 3.3.1, et certainement déjà connu de Borcherds : si $n = 23$ ou 25, deux réseaux $L_1, L_2 \in \mathcal{L}_n$ sont isomorphes si, et seulement si, leurs systèmes de racines $R(L_1), R(L_2)$ sont isomorphes. On possède un résultat analogue lorsque $n = 24$, qui se déduit des travaux de Niemeier [61] et Venkov [80].

Au paragraphe 3.3.2, on explique comment déterminer la classe d'un réseau $L' \in \mathcal{L}_n$ dans X_n, où les données sont les suivantes : on possède un réseau $L \in \mathcal{L}_n$ (défini par une $\mathbb{Z}$-base), et L' est un 2-voisin de L (déterminé suivant la construction de [18, Annexe B, Propositions 3.3 et 3.4] par un vecteur isotrope non-nul de $L/2L$). L'algorithme présenté dans ce paragraphe nous rend une $\mathbb{Z}$-base de L', ainsi que sa classe d'isomorphisme dans X_n.

Au paragraphe 3.3.3, on détaille l'algorithme permettant de calculer T_2 sur X_{23} et X_{25}. Il se déduit directement des paragraphes précédents : il suffit de parcourir, une fois donnés des réseaux $L_1, \ldots, L_k \in \mathcal{L}_n$ d'images distinctes dans X_n (avec $|X_n| = k$) tous leurs 2-voisins, et d'en déterminer les classes d'isomorphisme. La connexité du graphe de Kneser $\mathrm{K}_n(2)$ facilite grandement notre tâche. Il suffit de considérer un élément quelconque de $\mathcal{L}_n$, et de parcourir ses 2-voisins. En réitérant ce procédé aux 2-voisins des réseaux ainsi construits, on arrive à parcourir tous les éléments de X_n. On construit ainsi une famille $(L_1, \ldots, L_k)$ satisfaisant les conditions ci-dessus, à l'aide uniquement de la donnée d'un élément de $\mathcal{L}_n$ quelconque.

Au final, nous obtenons les matrices de T_2 sur $\mathbb{Z}[X_{23}]$ et $\mathbb{Z}[X_{25}]$, exprimées dans les base de $\mathbb{Z}[X_{23}]$ et $\mathbb{Z}[X_{25}]$ correspondant respectivement à la numérotation des tables 3.2 et 3.3. Ces matrices sont données dans [53]. Notons au passage que cette même méthode

permettrait aussi de recalculer la matrice de T_2 sur $\mathbb{Z}[X_{24}]$.

À n fixé, la codiagonalisation sur $\mathbb{C}$ des opérateurs de Hecke (et donc de leurs matrices associées) permet de décrire les matrices des opérateurs T_p pour p suffisamment petit, ce que l'on présente au paragraphe 3.4.1.

La méthode qu'on utilise est la même que celle déjà utilisée par Chenevier–Lannes [18] en dimension 24. L'opérateur T_2 a ses valeurs propres deux à deux distinctes, et est connu explicitement. On possède ainsi une base de diagonalisation de T_2, qui est aussi une base de codiagonalisation pour tous les opérateurs T_p, vus comme des endomorphismes de $\mathbb{C}[X_n]$. Il suffit ensuite d'exprimer les valeurs propres associées à cette base de diagonalisation, ce qui se déduit des résultats de Chenevier–Lannes [18, Table C.7] et de Chenevier–Renard [19, Appendix D], et que l'on détaille aux propositions 3.4.2 et 3.4.3.

Suivant les notations de [19] ou [18], notons $\Pi^{\perp}_{\mathrm{alg}}(\mathrm{PGL}_m)$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de représentations automorphes cuspidales autoduales de GL_m sur $\mathbb{Q}$, telles que π_p est non ramifiée pour tout p, et que π_∞ est algébrique régulière. Alors les valeurs propres de l'opérateur T_p sur $\mathbb{Z}[X_n]$ s'expriment grâce à la trace du p-ème paramètre de Satake d'éléments de $\Pi^{\perp}_{\mathrm{alg}}(\mathrm{PGL}_m)$, avec $m \in \{2,3,4\}$ pour $n = 23$ et $m \in \{2,3,4,6\}$ pour $n = 25$. Pour $m = 2$ ou 3, ces quantités sont bien connues pour tout p premier, et se déduisent des coefficients du q-développement des formes modulaires pour $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ de poids ≤ 23. Pour $m = 4$ et $n = 23$, ces quantités sont bien connues pour $p \leq 113$, puisqu'elles s'expriment grâce aux coefficients $\tau_{j,k}(p)$ qui ont été calculés par Chenevier–Lannes [18]. Enfin, pour $m = 4$ ou 6, et $n = 25$, ces quantités ont été calculées dans [48] pour $p \leq 67$.

Nos résultats permettent ainsi d'expliciter de nombreux opérateurs T_p sur $\mathbb{Z}[X_n]$, et on a le théorème suivant :

Théorème 3.1.1. *Pour $n = 23$ et $p \leq 113$, ou $n = 25$ et $p \leq 67$, l'endomorphisme $\mathrm{T}_p \in \mathrm{End}(\mathbb{Z}[X_n])$ est donné dans [53].*

Une première application de nos résultats est la détermination, pour $n = 23$ et $p \leq 113$, ou $n = 25$ et $p \leq 67$, du graphe $\mathrm{K}_n(p)$, défini au paragraphe 3.2.2. Rappelons que le graphe de Kneser $\mathrm{K}_n(p)$ est défini comme le graphe dont les sommets sont les éléments de X_n, et dont les arêtes sont les $\{\overline{L}_1, \overline{L}_2\}$ pour $L_1, L_2 \in \mathcal{L}_n$ des p-voisins. Au paragraphe 3.4.1, on démontre que l'on a le théorème suivant :

Théorème 3.1.2. *Soit p un nombre premier :*

(*i*) *Le graphe $\mathrm{K}_{23}(p)$ est complet si, et seulement si, $p \geq 23$.*

(*ii*) *Le graphe $\mathrm{K}_{25}(p)$ est complet si, et seulement si, $p \geq 67$.*

Ainsi, nos résultats permettent de déterminer pour tout p premier les graphes $\mathrm{K}_{23}(p)$ et $\mathrm{K}_{25}(p)$.

Une deuxième application de nos résultats provient de l'étude de la base de codiagonalisation des opérateurs de Hecke trouvée grâce aux vecteurs propres de T_2, ce qui fait l'objet du paragraphe 3.4.3.

Une telle étude permet dans un premier temps de redémontrer la "Conjecture de Harder" [38], déjà démontrée dans [18, Introduction, Théorème I] par une étude des opérateurs T_p sur $\mathbb{Z}[X_{24}]$. Mieux : on l'améliore ici sous la forme du théorème suivant, où les notations sont celles du paragraphe 3.2.3 :

Théorème 3.1.3. *Pour tout nombre premier p, on a la congruence :*

$$D_{21,5}(p) \equiv D_{21}(p) + p^{13} + p^8 \bmod 9840.$$

De plus, cette congruence est optimale, dans le sens où on ne peut pas remplacer 9840 *par un de ses multiples : on a* $D_{21}(p) + p^{13} + p^8 - D_{21,5}(p) = 9840$ *pour* $p = 2$.

Suivant la même méthode, on démontre de nombreuses autres congruences qui sont présentées en détail au paragraphe 3.4.3. De même que pour la congruence précédente, certaines des congruences exposées avaient déjà été démontrées dans [18]. La démonstration qu'on en fait ici est plus facile pour la raison suivante. Dans [18], l'étude des valeurs propres de T_p permettait d'obtenir des "multiplications par $(p+1)$" des congruences cherchées, et le fait de "diviser par $(p+1)$" pose problème lorsque $(p+1)$ n'est pas premier au module de la congruence. Ici, on obtient directement les congruences cherchées, ou des "multiplications par p" de ces congruences, et le fait de "diviser par p" est beaucoup plus facile (car il suffit d'évaluer la congruence pour p divisant le module de la congruence).

Au final, nous démontrons également le théorème suivant :

Théorème 3.1.4. *Pour tout nombre premier p, les congruences suivantes sont vérifiées :*

(i) $D_{19,7}(p) \equiv D_{19}(p) + p^6 + p^{13} \bmod 8712$;

(ii) $D_{21,5}(p) \equiv D_{21}(p) + p^8 + p^{13} \bmod 9840$;

(iii) $D_{21,9}(p) \equiv (1 + p^6)\ D_{15}(p) \bmod 12696$;

(iv) $D_{21,9}(p) \equiv D_{21}(p) + p^6 + p^{15} \bmod 31200$;

(v) $D_{21,13}(p) \equiv (1 + p^4)\ D_{17}(p) \bmod 8736$;

(vi) $D_{21,13}(p) \equiv D_{21}(p) + p^4 + p^{17} \bmod 10920$;

(vii) $D_{23,7}(p) \equiv (1 + p^8)\ D_{15}(p) \bmod 8972$;

$(viii)$ $D_{23,13,5}(p) \equiv D_{23,13}(p) + p^9 + p^{14} \bmod 5472$;

(ix) $D_{23,15,7}(p) \equiv (1 + p^4)\ D_{19}(p) + p^8 + p^{15} \bmod 2184$;

(x) $D_{23,15,7}(p) \equiv D_{23,7}(p) + p^4\ D_{15}(p) \bmod 5856$;

(xi) $D_{23,17,9}(p) \equiv D_{23,9}(p) + p^3\ D_{17}(p) \bmod 2976$;

(xii) $D_{23,19,3}(p) \equiv (1 + p^2)\ D_{21}(p) + p^{10} + p^{13} \bmod 7872$;

$(xiii)$ $D_{23,19,11}(p) \equiv (1 + p^2)\ D_{21}(p) + p^6 + p^{17} \bmod 16224$.

De plus, mis à part les points $(vi), (vii), (xi)$ *et* $(xiii)$*, les congruences ci-dessus sont optimales, dans le sens où le module qui intervient ne peut pas être remplacé par un de ses multiples.*

Notons au passage que la congruence $(viii)$ avait déjà été conjecturée dans [5, §6, Example 3]. On la démontre sous la forme d'un résultat plus fort que dans [5], et on vérifie que ce résultat est optimal.

Enfin, nos résultats valident dans certains cas particuliers une conjecture de Gan–Gross–Prasad, exposée en conclusion de [62, Classical groups, the local case]. Cette dernière stipule que les paramètres standards des représentations π, π' de $\mathrm{SO}_m, \mathrm{SO}_{m-1}$ déterminent entièrement si, et seulement si, π' est une restriction de π. On donne plus en détail au paragraphe 3.4.4 ce critère sur les paramètres standards de π et π'.

Nos résultats permettent de déterminer, lorsque $\pi \in \Pi_{\mathrm{disc}}(\mathrm{O}_{24})$ et $\pi' \in \Pi_{\mathrm{cusp}}(\mathrm{SO}_{23})$, ou lorsque $\pi' \in \Pi_{\mathrm{cusp}}(\mathrm{SO}_{25})$ et $\pi \in \Pi_{\mathrm{disc}}(\mathrm{O}_{24})$, si π' est une restriction de π. Les paramètres standards de telles représentations ont été déterminés dans [18, Table C.7] pour les éléments de $\Pi_{\mathrm{cusp}}(\mathrm{SO}_{23})$, [18, Table C.5] pour les éléments de $\Pi_{\mathrm{disc}}(\mathrm{O}_{24})$ et [19, Appendix D] pour les éléments de $\Pi_{\mathrm{cusp}}(\mathrm{SO}_{25})$.

Prasad et Chenevier avaient réalisé une inspection des paramètres standards des éléments de $\Pi_{\mathrm{cusp}}(\mathrm{SO}_{23})$, $\Pi_{\mathrm{disc}}(\mathrm{O}_{24})$ et $\Pi_{\mathrm{cusp}}(\mathrm{SO}_{25})$. Ils avaient alors remarqué que, en se donnant

$\pi \in \Pi_{\mathrm{disc}}(\mathrm{O}_{24})$ (respectivement $\pi \in \Pi_{\mathrm{cusp}}(\mathrm{SO}_{25})$), le sous-ensemble $\Pi' \subset \Pi_{\mathrm{cusp}}(\mathrm{SO}_{23})$ (respectivement $\Pi' \subset \Pi_{\mathrm{disc}}(\mathrm{O}_{24})$) dont les éléments satisfont la conjecture de Gan–Gross–Prasad est non vide. Nos résultats vont dans le sens de cette constatation, puisque l'on a en fait l'égalité $\Pi' = \mathrm{Res}(\pi)$. On en déduit le théorème suivant :

Théorème 3.1.5. *La conjecture de Gan–Gross–Prasad est bien vérifiée lorsque* $\pi \in \Pi_{\mathrm{disc}}(\mathrm{O}_{24})$ *et* $\pi' \in \Pi_{\mathrm{cusp}}(\mathrm{SO}_{23})$*, ou lorsque* $\pi' \in \Pi_{\mathrm{cusp}}(\mathrm{SO}_{25})$ *et* $\pi \in \Pi_{\mathrm{disc}}(\mathrm{O}_{24})$*.*

Cet article a été écrit dans le cadre de ma thèse sous la direction de Gaëtan Chenevier, que je remercie pour les discussions utiles que nous avons pu avoir. Je remercie aussi Jean Lannes, qui a montré beaucoup d'intérêt pour mes résultats, et avec qui j'ai pu également beaucoup échanger.

3.2 Résultats préliminaires et notations.

Dans toute la suite, on se place dans un espace euclidien V de dimension n, muni de son produit scalaire $x \cdot y$, et on note $q : V \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x \cdot x}{2}$ la forme quadratique associée. On considèrera souvent le cas où $V = \mathbb{R}^n$, muni de sa structure euclidienne, avec pour base canonique associée $(e_i)_{i \in \{1,\dots,n\}}$. On notera alors $(x_i) \cdot (y_i) = \sum_i x_i y_i$ le produit scalaire usuel.

3.2.1 Les réseaux de $\mathbb{R}^n$.

Définition 3.2.1 (Réseaux entiers et pairs)**.** *Soit $L \subset V$ un réseau. On dit que L est entier si :*

$$(\forall x, y \in L)\ x \cdot y \in \mathbb{Z}.$$

Si l'on se donne un réseau $L \subset V$ entier, il est dit pair si :

$$(\forall x \in L)\ x \cdot x \in 2\mathbb{Z}.$$

Définition 3.2.2 (Dual et résidu d'un réseau)**.** *Soit $L \subset V$ un réseau. On définit $L^\sharp$ le dual de L par :*

$$L^\sharp = \{y \in V \mid (\forall x \in L)\ y \cdot x \in \mathbb{Z}\}.$$

En particulier, L est entier si, et seulement si, $L \subset L^\sharp$. Dans ce cas on définit le résidu de L comme le quotient :

$$\text{rés } L = L^\sharp / L.$$

Ce quotient est muni d'une forme quadratique rés $L \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ *définie par* $x \mapsto q(x) \bmod \mathbb{Z}$ *appelée forme d'enlacement.*

Définition 3.2.3 (Déterminant d'un réseau)**.** *Soit L un réseau entier. On note* $\det(L)$ *son déterminant, qui est encore le déterminant de la matrice de Gram d'une base quelconque de L. On a la relation bien connue :*

$$\det(L) = |\text{rés } L|.$$

Définition 3.2.4 (Racines d'un réseau)**.** *Soit $L \subset V$ un réseau entier. On définit le système de racines de L comme l'ensemble $R(L)$ (qui est fini, et éventuellement vide) :*

$$R(L) = \{x \in L \mid x \cdot x = 2\}.$$

C'est un système de racines du $\mathbb{R}$-espace vectoriel qu'il engendre au sens de [11, Ch. VI, §1.1, Définition 1], ce qui justifie la terminologie (c'est même un système de racines de type ADE).

Proposition-Définition 3.2.5 (Racines positives et racines simples)**.** *Soient R un système de racines de V, et D un demi-espace. On suppose que l'hyperplan $H = D \cap (-D)$ ne contient aucun élément de R. On définit alors $R^+ = D \cap R$ comme l'ensemble des racines positives de R associé à D.*

L'ensemble $B(R^+) = \{\alpha \in R^+ \mid \alpha$ ne peut pas s'écrire $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ pour $\alpha_1, \alpha_2 \in R^+\}$ vérifie que tout élément de R est combinaison linéaire à coefficients entiers de même signe de $B(R^+)$. L'ensemble $B(R^+)$ est appelé le système de racines simples de R associé à R^+

Démonstration. Le seul point à vérifier est que tout élément de R est combinaison linéaire à coefficients entiers de même signe de $B(R^+)$, ce qui provient de [11, Ch. VI, Théorème 3]. □

Les systèmes de racines de réseaux pairs sont toujours isomorphes à des unions disjointes des systèmes de racines des réseaux $\mathrm{A}_n, \mathrm{D}_n, \mathrm{E}_8, \mathrm{E}_7, \mathrm{E}_6$ que l'on décrit ci-dessous.

A_n : On pose $\mathrm{A}_n = \{(x_i) \in \mathbb{Z}^{n+1} | \sum_i x_i = 0\}$. On a $\mathbf{A}_n = R(\mathrm{A}_n) = \{\pm(e_i - e_j) | i \neq j\}$.

D_n : On pose $\mathrm{D}_n = \{(x_i) \in \mathbb{Z}^n | \sum_i x_i \equiv 0 \bmod 2\}$. On a $\mathbf{D}_n = R(\mathrm{D}_n) = \{\pm e_i \pm e_j | i \neq j\}$.

E_8 : On pose $\mathrm{E}_8 = \mathrm{D}_8 + \mathbb{Z} \cdot e$, avec $e = \frac{1}{2}(1, \ldots, 1)$. On a $\mathbf{E}_8 = R(\mathrm{E}_8) = R(\mathrm{D}_8) \cup \left\{(x_i) = \frac{1}{2}(\pm 1, \ldots, \pm 1) | \prod_i x_i > 0\right\}$.

E_7 : On pose $\mathrm{E}_7 = e^\perp \cap \mathrm{E}_8 = \{(x_i) \in \mathrm{E}_8 | \sum_i x_i = 0\}$. On a $\mathbf{E}_7 = R(\mathrm{E}_7) = e^\perp \cap R(\mathrm{E}_8) = R(A_7) \cup \left\{(x_i) = \frac{1}{2}(\pm 1, \ldots, \pm 1) | \sum_i x_i = 0\right\}$.

E_6 : On pose $\mathrm{E}_6 = (e_7 + e_8)^\perp \cap \mathrm{E}_7$. On a $\mathbf{E}_6 = R(\mathrm{E}_6) = (e_7 + e_8)^\perp \cap R(\mathrm{E}_7)$.

Suivant ces notations, on a les isomorphismes : $\mathbf{D}_1 \simeq \mathbf{A}_1$, $\mathbf{D}_2 \simeq (\mathbf{A}_1)^2$ et $\mathbf{D}_3 \simeq \mathbf{A}_3$, donc on n'utilisera la notation $\mathbf{D}_n$ que pour $n \geq 4$.

De plus, les systèmes de racines $\mathbf{A}_n$ ($n \geq 1$), $\mathbf{D}_n$ ($n \geq 4$), $\mathbf{E}_8$, $\mathbf{E}_7$ et $\mathbf{E}_6$ sont deux-à-deux non isomorphes, et ce sont (à isomorphisme près) les seuls systèmes de racines irréductibles de type ADE (au sens de [11, Ch. VI, §1]).

Définition 3.2.6 (Les ensembles $\mathcal{L}_n$ et X_n)**.** *Soit $n \equiv 0, \pm 1 \bmod 8$. On définit $\mathcal{L}_n$ comme l'ensemble des réseaux pairs $L \subset V$ tels que $\det(L) = 1$ si n est pair et $\det(L) = 2$ sinon.*

À n fixé, le groupe orthogonal euclidien $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ agit naturellement sur l'ensemble $\mathcal{L}_n$, et on note X_n l'ensemble des classes d'isomorphisme des éléments de $\mathcal{L}_n$, qui est un ensemble fini.

On rappelle que $\mathcal{L}_n$ est non vide pour $n \equiv 0, \pm 1 \bmod 8$. Par exemple, suivant les notations précédentes, $\mathcal{L}_n$ contient :

- le réseau $\mathrm{E}_8^{(n-7)/8} \oplus \mathrm{E}_7$ si $n \equiv -1 \bmod 8$;
- le réseau $\mathrm{E}_8^{n/8}$ si $n \equiv 0 \bmod 8$;
- le réseau $\mathrm{E}_8^{(n-1)/8} \oplus \mathrm{A}_1$ si $n \equiv 1 \bmod 8$.

Lemme 3.2.7. *Soient $L \subset V$ un réseau pair, et $R = R(L)$ son système de racines. Si l'on possède $R^+ \subset R$ un système de racines positives, et que l'on note $\rho = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in R^+} \alpha$, alors le système de racines simples associé à R^+ est donné par : $\{\alpha \in R^+ \mid \alpha \cdot \rho = 1\}$.*

Démonstration. Découle directement de [11, Ch.VI, Proposition 29]. □

Lemme 3.2.8. *Soient R un système de racine irréductible de type ADE, et $r \in R$. Alors $R \cap r^\perp$ est un système de racine (éventuellement vide) donné par la table suivante :*

R	$R \cap r^\perp$
$\mathbf{A}_n$ *($n \leq 2$)*	$\emptyset$
$\mathbf{A}_n$ *($n \geq 3$)*	$\mathbf{A}_{n-2}$
$\mathbf{D}_n$ *($n \geq 4$)*	$\mathbf{D}_{n-2} \coprod \mathbf{A}_1$
$\mathbf{E}_8$	$\mathbf{E}_7$
$\mathbf{E}_7$	$\mathbf{D}_6$
$\mathbf{E}_6$	$\mathbf{A}_5$

Démonstration. Le groupe de Weyl de R agit transitivement sur l'ensemble des éléments de R. La classe d'isomorphisme de $R \cap r^\perp$ ne dépend donc uniquement de la classe d'isomorphisme de R, et non de la racine r choisie. Il suffit donc de vérifier le tableau pour les réseaux $\mathbf{A}_n, \mathbf{D}_n, \mathbf{E}_8, \mathbf{E}_7$ et $\mathbf{E}_6$ décrits précédemment, en prenant une racine quelconque $r \in R$, ce que l'on fait facilement à la main. □

Lemme 3.2.9. *Soit $n \geq 1$ et $L \subset V$ un réseau pair. Si l'on se donne $r \in R(L)$, alors $L' = L \cap r^\perp$ est un sous-$\mathbb{Z}$-module de rang $n-1$ de L, et c'est un réseau pair de l'espace $V \cap r^\perp$. De plus, le système de racines de L' est donné par : $R(L') = R(L) \cap r^\perp$. En particulier, la classe d'isomorphisme de $R(L')$ ne dépend que de $R(L)$ et de la composante irréductible de $R(L)$ contenant r, et elle se déduit du lemme 3.2.8.*

Démonstration. On considère la décomposition en composantes irréductibles du système de racines $R(L)$:

$$R(L) \simeq \coprod_i R_i$$

où les R_i sont des systèmes de racines irréductibles de type ADE (dont certains peuvent être égaux).

Si l'on se donne $r \in R_j$, alors par définition on a : $\coprod_{i \neq j} R_j \subset r^\perp$. Ainsi, le système de racines de $L' = L \cap r^\perp$ vérifie : $R(L') \simeq \left(\coprod_{i \neq j} R_j\right) \coprod \left(R_j \cap r^\perp\right)$, et la classe d'isomorphisme de $R_j \cap r^\perp$ est donnée par le lemme précédent. □

3.2.2 Les opérateurs de Hecke et les A-voisins.

Commençons par rappeler la définition des A-voisins :

Proposition-Définition 3.2.10 (Les A-voisins)**.** *Soient A un groupe abélien fini, et L_1, L_2 deux éléments de $\mathcal{L}_n$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) Le quotient $L_1/(L_1 \cap L_2)$ est isomorphe à A.

(ii) Le quotient $L_2/(L_1 \cap L_2)$ est isomorphe à A.

Si ces conditions sont vérifiées, on dit que L_1 et L_2 sont des A-voisins, ou que L_2 est un A-voisin de L_1.

Démonstration. Voir [18, Ch.III, §1] et [18, Annexe B,§3] selon la parité de n. □

Dans le cas particulier où A est de la forme $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$, on parlera de d-voisin : c'est ce cas qui nous intéressera plus particulièrement. Il est alors facile de construire l'ensemble des d-voisins d'un réseau L donné :

Proposition 3.2.11. *Soient $L \in \mathcal{L}_n$ et $d \in \mathbb{N}^*$. On note $C_L(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})$ l'ensemble des droites isotropes de L/dL (où on entend par droite un $\mathbb{Z}/d$-module libre de dimension 1). Alors les d-voisins de L sont en bijection naturelle avec les points de la quadrique $C_L(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})$ comme suit.*

Donnons-nous x une droite isotrope de L/dL et $v \in L$ dont l'image dans L/dL engendre x vérifiant $v \cdot v \equiv 0 \bmod 2d^2$, et notons M l'image réciproque de $x^\perp$ par l'homomorphisme $L \to L/dL$. Alors le réseau $M + \mathbb{Z}\frac{v}{d}$ est un d-voisin de L ne dépendant que de x : on le note $L'(x)$.

L'application $x \mapsto L'(x)$ est une bijection entre $C_L(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})$ et l'ensemble $\mathrm{Vois}_d(L)$ *des d-voisins de L. Le réseau $L'(x)$ sera appelé le d-voisin de L associé à x*

Démonstration. Voir [18, Ch. III, §1] et [18, Annexe B, §3] selon la parité de n. □

Proposition-Définition 3.2.12. *Soient $n \equiv 0, \pm 1 \bmod 8$, et $L \in \mathcal{L}_n$. Alors le cardinal de la quadrique $C_L(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})$ ne dépend que de n et de d, et on le notera $c_n(d)$.*

En particulier, pour p premier, on a le résultat suivant :

$$c_n(p) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{n-2} p^i + p^{\frac{n}{2}-1} & \text{si } n \text{ est pair ;} \\ \sum_{i=1}^{n-2} p^i & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

Le calcul de $c_n(d)$ pour $d \in \mathbb{Z}$ quelconque se déduit des constatations suivantes :

(*i*) $c_n(d_1\ d_2) = c_n(d_1)\ c_n(d_2)$ *si* d_1 *et* d_2 *sont premiers entre eux ;*

(*ii*) $c_n(p^k) = p^{(k-1)(n-2)}\ c_n(p)$ *pour* p *premier et* $k \in \mathbb{N}$.

Démonstration. Le calcul de $c_n(p)$ pour p premier se déduit de [18, Ch. III] et [18, Annexe B] selon la parité de n.

Le point (*i*) se déduit de la bijection entre L/d_1d_2L et $L/d_1L \times L/d_2L$ et du lemme des restes chinois.

Le point (*ii*) se déduit de la surjection $C_L(\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}) \twoheadrightarrow C_L(\mathbb{Z}/p^{k-1}\mathbb{Z})$. Si l'on se donne une droite isotrope $x \in C_L(\mathbb{Z}/p^{k-1}\mathbb{Z})$ engendré par un vecteur $v \in L \setminus pL$, la fibre au dessus de x est un espace affine dirigé par $v^\perp/\mathbb{F}_p v$, où $v^\perp = \{w \in L/pL \mid (v \cdot w) \equiv 0 \bmod p\}$. En particulier, ces fibres sont toutes de cardinal p^{n-2}, et une récurrence sur k donne le résultat cherché. □

Notons $\mathbb{Z}[X_n]$ le $\mathbb{Z}$-module libre engendré par l'ensemble X_n. On définit sur $\mathbb{Z}[X_n]$ les endomorphismes suivants :

Définition 3.2.13 (Les opérateurs de Hecke)**.** *Si* $L \in \mathcal{L}_n$*, on note* $\overline{L}$ *sa classe dans* X_n*. On note de plus* $\mathrm{Vois}_A(L)$ *l'ensemble des* A*-voisins de* L*, et pour tout élément* $L' \in \mathrm{Vois}_A(L)$*, on note* $\overline{L'}$ *sa classe dans* X_n*.*

L'opérateur de Hecke $\mathrm{T_A}$ *est l'endomorphisme de* $\mathbb{Z}[X_n]$ *défini par :*

$$\mathrm{T}_A(\overline{L}) = \sum_{L' \in \mathrm{Vois}_A(L)} \overline{L'},$$

pour tout réseau $L \in \mathcal{L}_n$*.*

Posons $N = |X_n|$, et donnons-nous $L_1, \dots, L_N \in \mathcal{L}_n$ d'image deux-à-deux distinctes $\overline{L}_1, \dots, \overline{L}_N$ dans X_n. D'après la définition précédente, si l'on note $T_A = t_{i,j} \in \mathrm{M}_N(\mathbb{Z})$ la matrice de T_A dans la base $\overline{L}_1, \dots, \overline{L}_N$, alors le coefficient $t_{i,j}$ est le nombre de A-voisins de L_j isomorphes à L_i.

Pour simplifier, on notera $\mathrm{T}_d = \mathrm{T}_{\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}}$. En particulier, si l'on note $T_d = (t_{i,j})$ la matrice de T_d dans la base $\overline{L}_1, \dots, \overline{L}_N$ (suivant les notations précédentes), alors on a :

$$(\forall\ j \in \{1, \dots, N\})\ \sum_i t_{i,j} = c_n(d).$$

Définition 3.2.14 (Le graphe de Kneser)**.** *Soient* p *un nombre premier, et* $n \equiv 0, \pm 1 \bmod 8$*. Le graphe des* p*-voisins* $\mathrm{K}_n(p)$ *est le graphe défini de la manière suivante :*

- *l'ensemble des sommets est l'ensemble* X_n *;*
- *l'ensemble des arêtes est l'ensemble des* $\{\overline{L_1}, \overline{L_2}\}$*, pour* $L_1, L_2 \in \mathcal{L}_n$ *des* p*-voisins (où pour* $i = 1, 2$ *on désigne par* $\overline{L_i}$ *la classe de* L_i *dans* X_n*).*

Proposition 3.2.15. *Le graphe de* $\mathrm{K}_n(p)$ *est connexe pour tout* n *et pour tout* p*.*

Démonstration. Le cas où n est pair est démontré dans [18, Ch. III, Théorème 1.12]. Le cas où n est impair se traite exactement de la même manière. □

Les opérateurs de Hecke T_A participent à la notion plus générale d'anneau de Hecke d'un schéma en groupes affine sur $\mathbb{Z}$ de type fini. Si l'on se donne G un tel schéma en groupe, on peut lui associer son anneau de Hecke défini comme suit :

Définition 3.2.16 (L'anneau des opérateurs de Hecke)**.** *Soit* Γ *un groupe, et soit* X *un* Γ*-ensemble transitif. On définit l'anneau des opérateurs de Hecke de* X *comme le sous-anneau* $\mathrm{H}(X) \subset \mathrm{End}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}[X])$ *des endomorphismes commutant à l'action de* Γ*.*

Définition 3.2.17 (L'anneau de Hecke d'un schéma en groupe)**.** *Soit G schéma en groupes affine sur $\mathbb{Z}$ de type fini. Si l'on note P l'ensemble des nombres premiers, on note $\widehat{\mathbb{Z}} = \prod_{p\in P}\mathbb{Z}_p$, et $\mathbb{A}_f = \mathbb{Q}\otimes\widehat{\mathbb{Z}}$ l'anneau des adèles finis de $\mathbb{Q}$. On définit alors le $G(\mathbb{A}_f)$-ensemble : $\mathcal{R}(G) = G(\mathbb{A}_f)/G(\widehat{\mathbb{Z}})$. L'anneau de Hecke de G est alors défini comme :*

$$\mathrm{H}(G) = \mathrm{H}(\mathcal{R}(G))$$

où $G(\mathbb{A}_f)$ joue le rôle de Γ dans la définition précédente.

En particulier, on s'intéressera aux cas où $G = \mathrm{O}_n$ ou $G = \mathrm{SO}_n$, définis comme suit :

Définition 3.2.18. *Si on se donne L_0 un élément de $\mathcal{L}_n$, on définit O_n le schéma en groupes affine sur $\mathbb{Z}$ associé à la forme quadratique $L_0 \to \mathbb{Z}$, $x \mapsto q(x)$. Il s'agit de l'objet noté O_{L_0} dans [18, Ch. II, §1]. On définit de même $\mathrm{SO}_n \subset \mathrm{O}_n$ (introduit aussi dans dans [18, Ch. II, §1]). Les schémas O_n et SO_n ainsi définis sont des schéma en groupes affine sur $\mathbb{Z}$ de type fini (ce dernier étant même réductif).*

Les anneaux de Hecke $\mathrm{H}(\mathrm{O}_n) \subset \mathrm{H}(\mathrm{SO}_n)$ sont alors bien définis. Considérons $G = \mathrm{O}_n$, et donnons-nous $L_0 \in \mathcal{L}_n$. Alors l'ensemble $\mathcal{R}(G)$ s'identifie à l'ensemble des réseaux de $L_0 \otimes \mathbb{Q}$ qui sont dans $\mathcal{L}_n$. Cette identification permet de voir les opérateurs de Hecke T_A introduits précédemment comme des éléments de l'algèbre de Hecke $\mathrm{H}(G)$. On a alors la proposition suivante :

Proposition 3.2.19. *Soient $n \equiv 0, \pm 1 \bmod 8$, et $G = \mathrm{O}_n$. Alors :*

(*i*) *Les opérateurs de Hecke T_A associés aux A-voisins forment une $\mathbb{Z}$-base de l'anneau de Hecke $\mathrm{H}(G)$.*

(*ii*) *L'anneau $\mathrm{H}(G)$ est commutatif.*

Démonstration. Voir [18, Ch. IV, §2.6]. □

3.2.3 La paramétrisation de Langlands–Satake.

Dans toute la suite, G désignera un schéma en groupe affine sur $\mathbb{Z}$ de type fini et semi-simple. Notons $\widehat{G}$ son dual au sens de Langlands. C'est un $\mathbb{C}$-groupe réductif dont la donnée radicielle est duale à celle de $G(\mathbb{C})$, suivant Borel [10] et Springer [74] par exemple. Notons de plus $\widehat{\mathfrak{g}}$ l'algèbre de Lie complexe de $\widehat{G}$, et $\widehat{G}(\mathbb{C})_{\mathrm{ss}}$ et $\widehat{\mathfrak{g}}(\mathbb{C})_{\mathrm{ss}}$ les classes de $\widehat{G}(\mathbb{C})$-conjugaison d'éléments semi-simples respectivement de $\widehat{G}(\mathbb{C})$ et $\widehat{\mathfrak{g}}(\mathbb{C})$.

À la manière de [18, Ch. IV, §3.2], on note $\Pi(G)$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de représentations unitaires irréductibles π de $G(\mathbb{A})$ telles que π_p est non ramifiée pour tout p premier. Nous noterons également $\Pi_{\mathrm{cusp}}(G)$ et $\Pi_{\mathrm{disc}}(G)$ respectivement l'ensemble des représentations automorphes cuspidales et l'ensemble des représentations automorphes discrètes de G, suivant les notations de [18] et [19].

On désigne par P l'ensemble des nombres premiers, et on définit $\mathcal{X}(\widehat{G})$ l'ensemble des familles $(c_v)_{v\in P\cup\{\infty\}}$, où $c_\infty \in \widehat{\mathfrak{g}}_{\mathrm{ss}}$ et $c_p \in \widehat{G}(\mathbb{C})_{\mathrm{ss}}$ pour tout $p \in P$. Suivant Langlands dans [45], on dispose d'une application canonique $c : \Pi(G) \to \mathcal{X}(\widehat{G}), \pi \mapsto (c_v(\pi))$. L'élément $c_\infty(\pi)$ est appelé le caractère infinitésimal de π. Lorsque $G = \mathrm{PGL}_n$, auquel cas on a $\widehat{G} = \mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$, les valeurs propres du caractère infinitésimal de π sont bien définies et sont appelées les poids de π.

Si l'on possède $r : \widehat{G} \to \mathrm{SL}_n$ une $\mathbb{C}$-représentation, celle-ci induit une application $\mathcal{X}(\widehat{G}) \to \mathcal{X}(\mathrm{SL}_n), (c_v) \mapsto (r(c_v))$. Pour $\pi \in \Pi(G)$, on note $\psi(\pi, r) = r(c(\pi))$: c'est un élément de $\mathcal{X}(\mathrm{SL}_n)$ qu'on appelle le paramètre de Langlands du couple (π, r).

En pratique, on considérera le cas où G est le groupe SO_n, et $\widehat{G}$ est donc un groupe de la forme SO_m ou Sp_{2m}. On utilisera alors le paramètre de Langlands du couple (π, St), où St désigne la représentation standard de $\widehat{G}$, et on parlera alors du paramètre standard de π.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$, donnons-nous $n_i, d_i \in \mathbb{N}^*$ et $\pi_i \in \Pi_{\mathrm{cusp}}(\mathrm{PGL}_{n_i})$ tels que $\sum_i n_i d_i = n$. On dispose alors d'un élément de $\mathcal{X}(\mathrm{SL}_n)$, noté $\oplus_i \pi_i[d_i]$ dans [18] ou [19]. Par définition, les paramètres de Langlands de $\oplus_i \pi_i[d_i]$ satisfont les égalités suivantes :

$$(\forall\ v \in P \cup \{\infty\})\ c_v(\oplus_i \pi_i[d_i]) = \bigoplus_i c_v(\pi_i) \otimes \mathrm{Sym}^{d_i - 1}(e_v)$$

où $e_\infty = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et $e_p = \begin{pmatrix} p^{-\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & p^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}$.

À la manière de [18, Ch. VI, §4] on note $\mathcal{X}_{\mathrm{AL}}(\mathrm{SL}_n)$ l'ensemble des éléments de la forme $\oplus_i \pi_i[d_i]$, suivant ces notations. Avec ce formalisme, la conjecture d'Arthur–Langlands [45] [3] se formule facilement (voir [18, Ch. VI, §4, Conjecture 4.6]). Lorsque $G = \mathrm{SO}_n$ et que l'on considère la représentation standard de $\widehat{G}$, cette conjecture a été vérifiée par Taïbi [76], dont les résultats reposent sur les travaux d'Arthur [3], ainsi que sur ceux de Kaletha [41] et Arancibia–Moeglin–Renard [2]. Ainsi, le paramètre standard d'une représentation $\pi \in \Pi_{\mathrm{disc}}(\mathrm{SO}_n)$ est un élément de $\mathcal{X}_{\mathrm{AL}}(\mathrm{SL}_n)$.

Si l'on se donne $\pi \in \Pi_{\mathrm{disc}}(\mathrm{SO}_n)$, alors on possède une égalité de la forme $\psi(\pi, \mathrm{St}) = \bigoplus_i \pi_i[d_i]$. On définit les poids de π comme les valeurs propres du caractère infinitésimal de $\psi(\pi, \mathrm{St})$. Une étude de ce caractère infinitésimal nous dit que les π_i précédents sont des éléments de $\Pi^{\perp}_{\mathrm{alg}}(\mathrm{PGL}_{n_i})$ (suivant les notations de [18] ou [19] déjà exposées en introduction).

Enfin, nous adopterons les notations suivantes. Considérons $n \in \{1, 2, 3\}$, et $w_1 > \cdots > w_n > 0$ des entiers de même parité. Si l'on désigne Π l'ensemble des éléments de $\Pi^{\perp}_{\mathrm{alg}}(\mathrm{PGL}_{2n})$ de poids l'ensemble $\{\pm\frac{w_1}{2}, \dots, \pm\frac{w_n}{2}\}$. L'ensemble Π est fini. Notons m son cardinal. On note $\Delta_{w_1,\dots,w_n}$ son unique élément lorsque $m = 1$, et $\Delta^m_{w_1,\dots,w_n}$ n'importe lequel de ses éléments sinon. Lorsque $m = 1$, on définit la fonction $D_{w_1,\dots,w_n}(p) = p^{\frac{w_1}{2}} \mathrm{Trace}\,(c_p(\Delta_{w_1,\dots,w_n})|V_{\mathrm{St}})$. Si $m > 1$, on définit l'ensemble de fonctions $D^m_{w_1,\dots,w_n}(p) = \{p^{\frac{w_1}{2}} \mathrm{Trace}\left(c_p(\Delta^m_{w_1,\dots,w_n})|V_{\mathrm{St}}\right)\}$.

Lorsque $n = 1$, les fonctions $D^m_{w_1}$ se comprennent bien à l'aide des formes modulaires pour $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. Par exemple, on peut considérer les cas où $w_1 \in \{11, 15, 17, 19, 21\}$ (auxquels cas $m = 1$ suivant les notations précédentes). Notons $\tau_{w_1+1}(n)$ le n-ème terme du q-développement de l'unique forme modulaire normalisée de poids $w_1 + 1$ pour $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. Alors on a pour tout p premier l'égalité : $\tau_{w_1+1}(p) = D_{w_1}(p)$.

On considérera aussi le cas $w_1 = 23$ (auquel cas $m = 2$). Notons E_k la série d'Eisenstein normalisée de poids k, et $\Delta = \frac{1}{1728}(\mathrm{E}_4^3 - \mathrm{E}_6^2)$ la fonction de Jacobi. Alors les fonctions $\Delta\ \mathrm{E}_4^3$ et $\Delta\ \mathrm{E}_6^2$ forment une base de l'espace des formes modulaires paraboliques de poids 24. On définit les fonctions $\tau^{\pm}_{24}(n)$ comme étant le n-ème terme du q-développement de la forme modulaire parabolique normalisée de poids 24 suivante :

$$\frac{131 \pm \sqrt{144169}}{144} \Delta\ \mathrm{E}_4^3 + \frac{13 \mp \sqrt{144169}}{144} \Delta\ \mathrm{E}_6^2.$$

Alors on a pour tout p premier l'égalité : $D^2_{23}(p) = \{\tau^+_{24}(p), \tau^-_{24}(p)\}$.

Lorsque $n = 2$, les fonctions $D^m_{w_1,w_2}$ se comprennent grâce aux formes modulaires de Siegel de genre 2. Dans la suite, on considérera les cas où $(w_1, w_2) \in \{(19, 7), (21, 5), (21, 9), (21, 13), (23, 7), (23, 9), (23, 13)\}$, auxquels cas $m = 1$. En reprenant les notations de [18,

Introduction], on a pour tout nombre premier p et tout couple (w_1, w_2) dans l'ensemble précédent l'égalité : $\tau_{w_2-1,\frac{w_1-w_2+4}{2}}(p) = D_{w_1,w_2}(p)$.

On utilisera notamment la proposition suivante :

Proposition 3.2.20 (Les inégalités de Ramanujan)**.** *Soient $n \in \{1,2,3\}$, $w_1 > \cdots > w_n > 0$ des entiers de même parité, Π l'ensemble des éléments de $\Pi^{\perp}_{\mathrm{alg}}(\mathrm{PGL}_{2n})$ de poids $\{\pm\frac{w_1}{2},\ldots,\pm\frac{w_n}{2}\}$, et p un nombre premier. Alors, pour tout $\Delta \in \Pi$ on a l'inégalité :*

$$|p^{\frac{w_1}{2}}\mathrm{Trace}(c_p(\Delta)|\mathrm{St})| \leq 2\ n\ p^{\frac{w_1}{2}}.$$

Démonstration. Le cas $n = 1$ est un résultat bien connu de Deligne. D'après [13, Theorem 1.2] (qui généralise [73, Corollary 1.3]), ou même simplement d'après le théorème principal de [20], si l'on se donne $\Delta \in \Pi$, alors Δ satisfait la conjecture de Ramanujan. Ainsi, les valeurs propres de $c_p(\Delta)$ sont toutes de module 1, et donc $|\mathrm{Trace}(c_p(\Delta)|\mathrm{St})| \leq 2\ n$, puis $|p^{\frac{w_1}{2}}\mathrm{Trace}(c_p(\Delta)|\mathrm{St})| \leq 2\ n\ p^{\frac{w_1}{2}}$, qui est l'inégalité cherchée. Lorsque $|\Pi| = 1$, cette inégalité s'écrit simplement $|D_{w_1,\ldots,w_n}| \leq 2\ n\ p^{\frac{w_1}{2}}$. □

3.3 Calcul de la matrice de T_2 sur $\mathbb{Z}[X_n]$ pour $n = 23$ ou 25.

3.3.1 L'étude des systèmes de racines d'éléments de X_n.

La proposition suivante était probablement déjà connue de Borcherds :

Proposition 3.3.1. *Soient $n = 23$ ou 25, et $L_1, L_2 \in \mathcal{L}_n$. Pour $i = 1,2$, on note $R_i = R(L_i)$ le système de racines de L_i. Alors on a l'équivalence :*

$$L_1 \simeq L_2 \Leftrightarrow R_1 \simeq R_2$$

Démonstration. L'implication $L_1 \simeq L_2 \Rightarrow R_1 \simeq R_2$ est évidente. Il suffit donc de montrer que $L_1 \not\simeq L_2 \Rightarrow R_1 \not\simeq R_2$, c'est-à-dire que deux éléments non isomorphes de $\mathcal{L}_n$ ont des systèmes de racines non-isomorphes, ce qui se fait par inspection selon la valeur de n.

Si $n = 23$: d'après [18, Annexe B], on sait construire X_{23} à l'aide de X_{24} comme suit. Si on se donne $P \in \mathcal{L}_{24}$ qui n'est pas isomorphe au réseau de Leech, et $r \in R(P)$, alors le réseau $L = P \cap r^{\perp}$ est un élément de $\mathcal{L}_{23}$, et les classes d'isomorphisme de réseaux ainsi obtenus décrivent tout X_{23}. Pour $i = 1,2$, donnons-nous $P_i \in \mathcal{L}_{24}$ et $r_i \in R(P_i)$, et notons R_i la composante irréductible de $R(P_i)$ à laquelle appartient r_i et notons $L_i = P_i \cap r_i^{\perp} \in \mathcal{L}_{23}$: alors les réseaux L_1 et L_2 sont isomorphes si, et seulement si, les couples (P_1, R_1) et (P_2, R_2) sont isomorphes (d'après [18, Annexe B, prop. 2.6]).

Il suffit donc de regarder pour chaque élément de X_{23} ainsi généré si les classes d'isomorphisme des systèmes de racines sont deux-à-deux distincts. On détermine ces systèmes de racines grâce aux lemmes précédents, que l'on donne dans le table 3.1, où les notations sont les suivantes : P est un élément de $\mathcal{L}_{24}$ qui n'est pas isomorphe au réseau de Leech (dont la classe d'isomorphisme est entièrement déterminée par celle de son système de racines $R(P)$), r est un élément de $R(P)$ appartement à la composante irréductible R, $L = P \cap r^{\perp}$ est l'élément de $\mathcal{L}_{23}$ qui nous intéresse, et $R(L)$ est son système de racines.

L'inspection de la table 3.1 montre bien le résultat cherché, à savoir que deux éléments non isomorphes de $\mathcal{L}_{23}$ ont des systèmes de racines non isomorphes.

Si $n = 25$: on renvoie à [7] pour la liste des classes d'isomorphisme des éléments de $\mathcal{L}_{25}$ et à leur systèmes de racines. Une inspection rapide montre que l'on a bien l'équivalence cherchée. □

3.3.2 Détermination de la classe d'isomorphisme d'un 2-voisin d'un élément de $\mathcal{L}_n$.

D'après la proposition 3.3.1, la table 3.1 (pour $n = 23$) et les résultats de Borcherds [7] (pour $n = 25$) nous permettent de déterminer la classe dans X_n d'un élément de $\mathcal{L}_n$ grâce à son système de racines. Cependant, déterminer la classe d'isomorphisme d'un système de racine peut s'avérer long sur le plan algorithmique. En pratique, on utilisera la proposition suivante :

Proposition 3.3.2. *On fixe $n = 23$ ou 25. Soient $L \in \mathcal{L}_n$ et $R(L)$ son système de racines. Soient $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$ un ensemble de racines simples de $R(L)$, et $A = (\alpha_i \cdot \alpha_j) = (a_{i,j}) \in \mathrm{M}_k(\mathbb{Z})$ la matrice de Gram associée. Pour $l \in \mathbb{Z}$, on définit les entiers : $n_l = \left|\left\{i \in \{1, \dots, l\} \mid \sum_j a_{i,j} = l\right\}\right|$, qui ne dépendent que de la classe $\overline{L}$ de L dans X_n. De même, les quantités $|R(L)|$ et $\det(A)$ ne dépendent que de $\overline{L}$.*

On définit alors les applications $\Phi_n : \mathcal{L}_n \to \mathbb{N}^6$ et $\overline{\Phi}_n : X_n \to \mathbb{N}^6$ par :

$$\Phi_n(L) = \overline{\Phi}_n(\overline{L}) = (|R(L)|, n_2, n_1, n_0, n_{-1}, \det(A)).$$

L'application $\overline{\Phi}_n$ ainsi définie est injective sur X_n.

Démonstration. Par définition du système de racines $R(L)$ d'un réseau L, il est immédiat que éléments isomorphes de $\mathcal{L}_n$ ont même image par Φ_n, ce qui prouve que $\overline{\Phi}_n$ est bien définie.

Pour l'injectivité de $\overline{\Phi}_n$, il suffit de vérifier que deux éléments distincts dans X_n ont des images distinctes par $\overline{\Phi}_n$, ce qui se fait facilement à la main (comme on connaît déjà les classes d'isomorphisme des systèmes de racines de tous les éléments de X_n). Les tables 3.2 et 3.3 donnent pour tout élément $\overline{L_i}$ de X_n la classe R_i du système de racines de L_i, ainsi que l'image ϕ_i de $\overline{L_i}$ par $\overline{\Phi}_n$. □

Notons que les quantités n_2, n_1, n_0, n_{-1} se comprennent très bien grâce au diagramme de Dynkin de $R(L)$. Il s'agit respectivement du nombre de sommet possédant aucun, un, deux ou trois sommets qui lui sont connexes. L'intérêt de la définition des n_l donnée à la proposition 3.3.2 est qu'elle indique la manière dont on les calcule dans nos algorithmes.

D'après les propositions 3.3.1 et 3.3.2, pour déterminer la classe d'isomorphisme d'un élément de $\mathcal{L}_n$, il suffit de déterminer son image par Φ_n. On souhaite donc déterminer l'image par Φ_n d'un 2-voisin d'un réseau L. On utilise pour cela le lemme suivant :

Lemme 3.3.3. *On fixe $n = 23$ ou 25. Donnons-nous $L \in \mathcal{L}_n$, et considérons x la droite isotrope de $L/2L$ engendrée par $v \in L$. On note L_x le 2-voisin de L associé à la droite x suivant [18, Ch.III, Proposition 1.4]. On suppose enfin que l'on possède une base $\{a_1, \dots, a_n\}$ de L.*

Si l'on se donne $j \in \{1, \dots, n\}$ tel que $(a_j \cdot v) \equiv 1 \bmod 2$, alors la famille :

$$\{(a_j \cdot v)\ a_i - (a_i \cdot v)\ a_j \mid i \in \{1, \dots, n\} \cup \{2\ a_i \mid i \in \{1, \dots, n\}\} \cup \left\{\frac{1}{2}\left(v - \frac{(v \cdot v)}{2} a_j\right)\right\}$$

engendre $\mathbb{Z}$-linéairement L_x.

Démonstration. On reprend la construction faite dans [18]. Le réseau L_x est engendré par le réseau M (où M est l'image réciproque de $x^\perp$ par la projection $L \to L/2L$) et par le vecteur $\frac{1}{2}v'$ (où v' est un élément de L vérifiant $(v' \cdot v') \equiv 0 \bmod 8$, dont l'image dans $L/2L$ engendre x).

Le premier point à vérifier est l'existence de l'entier j du lemme. Celle-ci provient de la non-dégénérescence du produit scalaire sur L, et le fait que $v \notin 2L$ (comme v engendre x).

Il suffit de constater que l'image de la famille $\{(a_j \cdot v)\ a_i - (a_i \cdot v)\ a_j \mid i \in \{1, \dots, n\}\}$ par la projection $L \to L/2L$ engendre bien bien $x^\perp$ (et donc que $\{2\ a_i \mid i \in \{1, \dots, n\}\} \cup \{(a_j \cdot v)\ a_i - (a_i \cdot v)\ a_j \mid i \in \{1, \dots, n\}\}$ engendre bien M), et que le vecteur $v' = v - \frac{(v \cdot v)}{2} a_j$ satisfait bien les conditions voulues, ce que l'on vérifie facilement. □

Donnons nous $\{a_1, \dots, a_n\}$ une base d'un réseau $L \in \mathcal{L}_n$, ainsi qu'une droite isotrope $x \in C_L(\mathbb{F}_2)$ engendré par un vecteur $v \in L$. Si l'on note L_x le 2-voisin de L associé à x, alors l'algorithme qui donne $\Phi_n(L_x)$ se fait selon les étapes suivantes :

Première étape : grâce au lemme 3.3.3, on possède une famille $\mathbb{Z}$-génératrice de L_x.

Deuxième étape : la fonction qflll de PARI nous donne, à partir de la famille génératrice précédente, une base $\{b_1, \dots, b_n\}$ de L_x, ainsi que la matrice de Gram associée $\widetilde{B} = (b_i \cdot b_j)_{i,j}$.

Troisième étape : grâce à la base $\{b_i\}$ et à la matrice $\widetilde{B}$, la fonction qfminim de PARI nous donne l'ensemble R des racines de L_x, ainsi qu'un système R^+ de racines positives.

Quatrième étape : en posant $\rho = \frac{1}{2} \sum_{\beta \in R^+} \beta$, on déduit le système de racines simples suivant $\{\beta_1, \dots, \beta_k\} = \{\beta \in R^+ \mid (\rho \cdot \beta) = 1\}$, ainsi que la matrice de Cartan associée $B = (\beta_i \cdot \beta_j)_{i,j}$.

Cinquième étape : grâce au cardinal de R ainsi qu'à la matrice B, on déduit $\Phi_n(L_x)$.

3.3.3 Présentation de l'algorithme de calcul de la matrice de T_2 sur $\mathbb{Z}[X_n]$.

On aura besoin de parcourir, pour $L \in \mathcal{L}_n$, tous les éléments de $C_L(\mathbb{F}_2)$, ce que l'on fera à l'aide d'une $\mathbb{Z}$-base $a_1, \dots, a_n$ de L et du lemme évident suivant :

Lemme 3.3.4. *Soient $L \in \mathcal{L}_n$, et $a_1, \dots, a_n$ une $\mathbb{Z}$-base arbitraire de L. On définit l'ensemble $V_n(a_1, \dots, a_n) = \{(v_1, \dots, v_n) \in \{0,1\}^n \setminus \{0\} \mid q\,(\sum_k v_k\ a_k) \equiv 0 \bmod 2\}$. Alors l'application :*

$$\begin{array}{rcl} V_n(a_1, \dots, a_n) & \to & C_L(\mathbb{F}_2) \\ (v_1, \dots, v_n) & \mapsto & \mathrm{vect}_{\mathbb{Z}/2}(\sum_k v_k\ a_k) \end{array}$$

est une bijection.

L'algorithme de calcul de la matrice de T_2 sur $\mathbb{Z}[X_{23}]$.

Notons $R_1, \dots, R_{32}$ les classes d'isomorphisme des systèmes de racines des éléments de $\mathcal{L}_{23}$ (suivant la numérotation de la table 3.2). Pour $i \in \{1, \dots, 32\}$, on pose de plus ϕ_i l'image par Φ_{23} (introduit à la proposition 3.3.2) d'un réseau $L \in \mathcal{L}_{23}$ tel que $R(L) \simeq R_i$, et on note $\overline{L}_i$ la classe de L dans X_{23}. On donne dans la table 3.2 la numérotation choisie pour les éléments de X_{23}, en donnant les valeurs de R_i et de ϕ_i en fonction de i.

On souhaite déterminer la matrice $T_{23} \in \mathrm{M}_{32}(\mathbb{Z})$ de l'opérateur T_2 sur $\mathbb{Z}[X_{23}]$ dans la base $(\overline{L}_1, \dots, \overline{L}_{32})$. Pour cela, on cherche pour tout $i \in \{1, \dots, 32\}$ un réseau $L \in \mathcal{L}_{23}$ tel que $R(L) \simeq R_i$, et on le munit d'une base $a_1, \dots, a_{23}$ (en pratique, il s'agira de la base fournie par la fonction qflll de PARI). On construit ensuite tous les éléments $x \in C_L(\mathbb{F}_2)$ (grâce au lemme 3.3.4), et pour chaque x on détermine la classe d'isomorphisme du 2-voisin L_x de L associé à x (grâce à l'algorithme décrit au paragraphe 3.3.2).

Soulignons qu'il n'est pas évident pour tout i de construire un réseau de la forme précédente. Cependant, la connexité du graphe de Kneser $\mathrm{K}_{23}(2)$ (d'après la proposition 3.2.15) nous dit qu'il suffit en fait d'avoir un seul réseau $L \in \mathcal{L}_{23}$. En effet, en parcourant les 2-voisins de L, on parcourra des éléments de $\mathcal{L}_{23}$ correspondant à d'autres classes d'isomorphisme dans X_{23}. En répétant le processus, on parcourra toutes les classes d'isomorphisme de X_{23}, comme le graphe $\mathrm{K}_{23}(2)$ est connexe.

Le réseau que l'on a utilisé comme point de départ est donné par le lemme suivant :

Lemme 3.3.5. *On se place dans $\mathbb{R}^{24}$ muni de sa base canonique (e_i), et on considère le réseau M engendré par : $\{e_i \pm e_{i+1} \mid 1 \leq i \leq 21\} \cup \{e_{23} - e_{24}\}$.*

Le réseau $L = M + \frac{1}{2}\mathbb{Z}\left(\sum_{i=1}^{24} e_i\right)$ est un élément de $\mathcal{L}_{23}$, et vérifie $R(L) \simeq \mathbf{D}_{22} \coprod \mathbf{A}_1$.

Démonstration. On vérifie facilement que L est un $\mathbb{Z}$-module libre de rang 23, et que son déterminant est 2. Son système de racine est : $R(L) = \{\pm e_i \pm e_j \mid 1 \leq i < j \leq 22\} \cup \{\pm(e_{23} - e_{24})\}$, qui vérifie bien $R(L) \simeq \mathbf{D}_{22} \coprod \mathbf{A}_1$. □

Expliquons en détail l'algorithme du calcul de T_2 sur $\mathbb{Z}[X_{23}]$. Pour $i \in \{1, \ldots, 32\}$, nous allons définir des réseaux $L_i \in \mathcal{L}_n$ satisfaisant $R(L_i) \simeq R_i$ (suivant la numérotation de la table 3.2), munis d'une base arbitraire $a_{i,1}, \ldots, a_{i,23}$ (en pratique, il s'agira de la base fournie par la fonction qflll de PARI). Les coefficients de la matrice T_{23} se déduiront des applications $t_i : V_{23}(a_{i,1}, \ldots, a_{i,23}) \to \{1, \ldots, 32\}$ définies ci-dessous.

On pose L_1 le réseau donné par le lemme précédent, et on pose $a_{1,1}, \ldots, a_{1,23}$ la base de L_1 fournie par PARI. On définit comme suit la fonction $t_1 : V_{23}(a_{1,1}, \ldots, a_{1,23}) \to \{1, \ldots, 32\}$.

Soit $(v_1, \ldots, v_{23}) \in V_{23}(a_{1,1}, \ldots, a_{1,23})$. On pose $x = \mathrm{vect}_{\mathbb{Z}/2}(\sum_k v_k\ a_{1,k}) \in C_{L_1}(\mathbb{F}_2)$. On reprend la construction du 2-voisin L_x de L_1 associé à x dans la proposition 3.3.3 : il existe un unique $i \in \{1, \ldots, 32\}$ tel que $R(L_x) \simeq R_i$ (à savoir l'unique i tel que $\Phi_{23}(L_x) = \phi_i$). On pose alors : $t_1((v_1, \cdots, v_{23})) = i$.

Pour tout $i \in t_1(V_{23}(a_{1,1}, \ldots, a_{1,23}))$, on fixe un élément $(v_1, \ldots, v_{23}) \in t_1^{-1}(\{i\})$ quelconque. Notons comme précédemment $x = \mathrm{vect}_{Z/2}(\sum_k v_k a_{1,k})$ et L_x le 2-voisin de L_1 associé à x : on pose $a_{i,1}, \ldots, a_{i,23}$ la base de L_x fournie par PARI, et on définit le réseau $L_i = L_x$.

Pour tous les réseaux $L_i \in \mathcal{L}_{23}$ ainsi définis, muni de leur base $a_{i,1}, \ldots, a_{i,23}$, on construit de même que pour L_1 la fonction $t_i : V_{23}(a_{i,1}, \ldots, a_{i,23}) \to \{1, \ldots, 32\}$. De plus, pour $j \in t_i(V_{23}(a_{i,1}, \ldots, a_{i,23}))$, si l'on n'a pas précédemment défini de réseau L_j, on choisit un élément quelconque $(v_1, \ldots, v_{23}) \in t_i^{-1}(\{j\})$: on note à nouveau $x = \mathrm{vect}_{Z/2}(\sum_k v_k a_{i,k})$ et L_x le 2-voisin de L_i associé à x, et on pose $a_{j,1}, \ldots, a_{j,23}$ la base de L_x fournie par PARI, ainsi que $L_j = L_x$.

On répète le processus jusqu'à avoir construit pour tout $i \in \{1, \ldots, 32\}$ un réseau $L_i \in \mathcal{L}_{23}$ de base $a_{i,1}, \ldots, a_{i,23}$ tel que $\Phi_{23}(L_i) = \phi_i$, ainsi qu'une fonction $t_i : V_{23}(a_{i,1}, \ldots, a_{i,23}) \to \{1, \ldots, 32\}$.

Cet algorithme se termine bien, comme le graphe de Kneser $\mathrm{K}_{23}(2)$ est connexe d'après la proposition 3.2.15.

Proposition 3.3.6. *On pose $T_{23} = (t_{i,j}) \in \mathrm{M}_{32}(\mathbb{Z})$, c'est-à-dire que $t_{i,j}$ est le nombre de 2-voisins de L_j isomorphes à L_i. Avec les notations précédentes, on a l'égalité :*

$$t_{i,j} = |t_j^{-1}(\{i\})|.$$

Démonstration. Soient $j \in \{1, \ldots, 32\}$ et $(v_1, \ldots, v_{23}) \in V_{23}(a_{j,1}, \ldots, a_{j,23})$. On pose comme précédemment $v = \sum_k v_k\ a_{j,k}$, $x = \mathrm{vect}_{Z/2}(v)$ et L_x le 2-voisin de L_j associé à x. On a les équivalence suivantes :

$$L_x \simeq L_i \ \Leftrightarrow\ R(L_x) \simeq R(L_i) \simeq R_i \ \Leftrightarrow\ \Phi_{23}(L_x) = \phi_i \ \Leftrightarrow\ t_j((v_1, \ldots, v_{23})) = i$$

et donc :

$$t_{i,j} = \left|\{x \in C_{L_j}(\mathbb{F}_2) \mid L_x \simeq L_i\}\right| = |t_j^{-1}(\{i\})|$$

qui est l'égalité cherchée. □

On renvoie à [54] pour un algorithme détaillé du calcul de T_{23}. Dans cet algorithme, les fichiers *"generateursX23Li"* sont situés dans le dossier parent : ils contiennent des bases des réseaux L_i que l'on a utilisés pour notre algorithme.

L'algorithme de calcul de la matrice de T_2 sur $\mathbb{Z}[X_{25}]$.

On reprend la liste de [7] pour l'ensemble des classes de X_{25}, et on note $R_1, \dots, R_{121}$ les classes d'isomorphisme des systèmes de racines des éléments de $\mathcal{L}_{25}$ (suivant la numérotation de [7], reprise dans la table 3.3). Comme dans le cas de X_{23}, pour $i \in \{1, \dots, 121\}$, on pose de plus ϕ_i l'image par Φ_{25} (introduit à la proposition 3.3.2) d'un réseau $L \in \mathcal{L}_{25}$ tel que $R(L) \simeq R_i$, et on note $\overline{L}_i$ la classe de L dans X_{25}. On donne dans la table 3.3 la numérotation choisie pour les éléments de X_{25}, en donnant les valeurs de R_i et de ϕ_i en fonction de i.

On souhaite déterminer la matrice $T_{25} \in \mathrm{M}_{121}(\mathbb{Z})$ de l'opérateur T_2 sur $\mathbb{Z}[X_{25}]$ dans la base $(\overline{L}_1, \dots, \overline{L}_{121})$. Pour cela, on cherche pour tout $i \in \{1, \dots, 121\}$ un réseau $L \in \mathcal{L}_{25}$ tel que $R(L) \simeq R_i$, et on le munit d'une base $a_1, \dots, a_{25}$ (en pratique, il s'agira de la base fournie par la fonction qflll de qflll). On construit ensuite tous les éléments $x \in C_L(\mathbb{F}_2)$ (grâce au lemme 3.3.4), et pour chaque x on détermine la classe d'isomorphisme du 2-voisin L_x de L associé à x (grâce à l'algorithme décrit au paragraphe 3.3.2).

Là encore il n'est pas évident pour tout i de construire un réseau de la forme précédente. De la même manière que dans le cas de X_{23}, on utilise la connexité du graphe de Kneser $\mathrm{K}_{25}(2)$ (d'après la proposition 3.2.15). Suivant le raisonnement adopté précédemment, il suffit de construire un seul réseau $L \in \mathcal{L}_{25}$, puis de construire ses 2-voisins, et de répéter le processus jusqu'à avoir parcouru tous les éléments de X_{25}.

Le réseau que l'on a utilisé comme point de départ est donné par le lemme suivant :

Lemme 3.3.7. *On se place dans $\mathbb{R}^{26}$ muni de sa base canonique (e_i), et on considère le réseau M engendré par : $\{e_i \pm e_{i+1} \mid 1 \leq i \leq 23\} \cup \{e_{25} - e_{26}\}$.*

Le réseau $L = M + \frac{1}{2}\mathbb{Z}\left(\sum_{i=1}^{26} e_i\right)$ est un élément de $\mathcal{L}_{25}$, et vérifie $R(L) \simeq \mathbf{D}_{24} \coprod \mathbf{A}_1$.

Démonstration. On vérifie facilement que L est un $\mathbb{Z}$-module libre de rang 25, et que son déterminant est 2. Son système de racine est : $R(L) = \{\pm e_i \pm e_j \mid 1 \leq i < j \leq 24\} \cup \{\pm(e_{25} - e_{26})\}$, qui vérifie bien $R(L) \simeq \mathbf{D}_{24} \coprod \mathbf{A}_1$. □

L'algorithme du calcul de T_2 sur $\mathbb{Z}[X_{25}]$ suit le même processus que dans le cas de X_{23}. Pour $i \in \{1, \dots, 121\}$, nous allons définir des réseaux $L_i \in \mathcal{L}_n$ satisfaisant $R(L_i) \simeq R_i$ (suivant la numérotation de la table 3.3), munis d'une base arbitraire $a_{i,1}, \dots, a_{i,25}$ (en pratique, il s'agira de la base fournie par la fonction qflll de PARI). Les coefficients de la matrice T_{25} se déduiront des applications $t_i : V_{25}(a_{i,1}, \dots, a_{i,25}) \to \{1, \dots, 121\}$ définies ci-dessous.

On pose L_{121} le réseau donné par le lemme précédent, et on pose $a_{121,1}, \dots, a_{121,25}$ la base de L_{121} fournie par PARI. On définit comme suit la fonction $t_{121} : V_{25}(a_{121,1}, \dots, a_{121,25}) \to \{1, \dots, 121\}$.

Soit $(v_1, \dots, v_{25}) \in V_{25}(a_{121,1}, \dots, a_{121,25})$. On pose $x = \mathrm{vect}_{\mathbb{Z}/2}(\sum_k v_k \ a_{121,k}) \in C_{L_{121}}(\mathbb{F}_2)$. On reprend la construction du 2-voisin L_x de L_{121} associé à x dans la proposition 3.3.3 : il existe un unique $i \in \{1, \dots, 121\}$ tel que $R(L_x) \simeq R_i$ (à savoir l'unique i tel que $\Phi_{25}(L_x) = \phi_i$). On pose alors : $t_{121}((v_1, \cdots, v_{25})) = i$.

Pour tout $i \in t_1(V_{25}(a_{121,1}, \dots, a_{121,25}))$, on fixe un élément $(v_1, \dots, v_{25}) \in t_{121}^{-1}(\{i\})$ quelconque. Notons comme précédemment $x = \mathrm{vect}_{\mathbb{Z}/2}(\sum_k v_k a_{121,k})$ et L_x le 2-voisin de L_{121} associé à x : on pose $a_{i,1}, \dots, a_{i,25}$ la base de L_x fournie par PARI, et on définit le réseau $L_i = L_x$.

Pour tous les réseaux $L_i \in \mathcal{L}_{25}$ ainsi définis, muni de leur base $a_{i,1}, \dots, a_{i,25}$, on construit de même que pour L_{121} la fonction $t_i : V_{25}(a_{i,1}, \dots, a_{i,25}) \to \{1, \dots, 121\}$. De plus, pour $j \in t_i(V_{25}(a_{i,1}, \dots, a_{i,25}))$, si l'on n'a pas précédemment défini de réseau L_j, on choisit un élément quelconque $(v_1, \dots, v_{25}) \in t_i^{-1}(\{j\})$: on note à nouveau $x = \mathrm{vect}_{Z/2}(\sum_k v_k a_{i,k})$ et L_x le 2-voisin de L_i associé à x, et on pose $a_{j,1}, \dots, a_{j,25}$ la base de L_x fournie par PARI, ainsi que $L_j = L_x$.

On répète le processus jusqu'à avoir construit pour tout $i \in \{1, \ldots, 121\}$ un réseau $L_i \in \mathcal{L}_{25}$ de base $a_{i,1}, \ldots, a_{i,25}$ tel que $\Phi_{25}(L_i) = \phi_i$, ainsi qu'une fonction $t_i : V_{25}(a_{i,1}, \ldots, a_{i,25}) \to \{1, \ldots, 121\}$.

Cet algorithme se termine bien, comme le graphe de Kneser $\mathrm{K}_{25}(2)$ est connexe d'après la proposition 3.2.15.

Proposition 3.3.8. *On pose $T_{25} = (t_{i,j}) \in \mathrm{M}_{121}(\mathbb{Z})$, c'est-à-dire que $t_{i,j}$ est le nombre de 2-voisins de L_j isomorphes à L_i. Avec les notations précédentes, on a l'égalité :*

$$t_{i,j} = |t_j^{-1}(\{i\})|.$$

Démonstration. Soient $j \in \{1, \ldots, 121\}$ et $(v_1, \ldots, v_{25}) \in V_{25}(a_{j,1}, \ldots, a_{j,25})$. On pose comme précédemment $v = \sum_k v_k \ a_{j,k}$, $x = \mathrm{vect}_{Z/2}(v)$ et L_x le 2-voisin de L_j associé à x. On a les équivalence suivantes :

$$L_x \simeq L_i \ \Leftrightarrow \ R(L_x) \simeq R(L_i) \simeq R_i \ \Leftrightarrow \ \Phi_{25}(L_x) = \phi_i \ \Leftrightarrow \ t_j((v_1, \ldots, v_{25})) = i$$

et donc :

$$t_{i,j} = \big|\{x \in C_{L_j}(\mathbb{F}_2) \mid L_x \simeq L_i\}\big| = |t_j^{-1}(\{i\})|$$

qui est l'égalité cherchée. □

On renvoie à [55] pour un algorithme détaillé du calcul de T_{25}. Dans cet algorithme, les fichiers *"generateursX25Li"* sont situés dans le dossier parent : ils contiennent des bases des réseaux L_i que l'on a utilisés pour notre algorithme.

3.3.4 Résultats obtenus.

Les résultats obtenus grâce à nos algorithmes sont donnés par les théorèmes suivants :

Théorème 3.3.9. *Soient $L_1, \ldots, L_{32} \in \mathcal{L}_{23}$ vérifiant pour tout i : $R(L_i) \simeq R_i$ (suivant les notations de la table 3.2), et soient $\overline{L}_1, \ldots, \overline{L}_{32}$ leurs classes respectives dans X_{23}. Alors la matrice de l'opérateur T_2 relativement à la base $\overline{L}_1, \ldots, \overline{L}_{32}$ est donnée dans [53].*

Théorème 3.3.10. *Soient $L_1, \ldots, L_{121} \in \mathcal{L}_{25}$ vérifiant pour tout i : $R(L_i) \simeq R_i$ (suivant les notations de la table 3.3), et soient $\overline{L}_1, \ldots, \overline{L}_{121}$ leurs classes respectives dans X_{25}. Alors la matrice de l'opérateur T_2 relativement à la base $\overline{L}_1, \ldots, \overline{L}_{121}$ est donnée dans [53].*

3.4 Applications.

3.4.1 La codiagonalisation des matrices opérateurs T_p.

Pour $n = 23$ ou 25, et p premier, on note $T_n(p)$ la matrice de l'opérateur T_p sur X_n relativement à la base des $\overline{L}_i$ introduite précédemment (suivant les numérotations des tables 3.2 ou 3.3, selon la valeur de n). En particulier, on a : $T_{23} = T_{23}(2)$ et $T_{25} = T_{25}(2)$ (suivant les notations du paragraphe 3.3.3).

Notre point de départ est la proposition suivante :

Proposition 3.4.1. *Pour $n = 23$ ou $n = 25$, les opérateurs $\mathrm{T}_p : \mathbb{C}[X_n] \to \mathbb{C}[X_n]$ pour p premier sont codiagonalisables. De manière équivalente, une fois n fixé, les matrices $T_n(p)$ pour p premier sont codiagonalisables dans $\mathbb{C}$.*

Démonstration. C'est un résultat classique, que l'on retrouve notamment dans [18] à de nombreuses reprises. Pour s'en convaincre dans notre cas, il suffit de constater que les matrices T_{23} et T_{25} calculées au chapitre précédent ont toutes leurs valeurs propres distinctes, et que les anneaux de Hecke $\mathrm{H}(\mathrm{O}_n)$ sont commutatifs.

On en déduit qu'on a même un résultat plus fort : si $n = 23$ ou 25, tous les éléments de $\mathrm{H}(\mathrm{O}_n)$ sont codiagonalisables, et toute base de diagonalisation de T_2 est un base de codiagonalisation de $\mathrm{H}(\mathrm{O}_n)$. □

Grâce à PARI, il est facile de trouver des bases de diagonalisation des matrices T_{23} et T_{25} que l'on a calculées, qui seront nécessairement des bases de codiagonalisation respectivement pour $\mathrm{H}(\mathrm{O}_{23})$ et $\mathrm{H}(\mathrm{O}_{25})$.

Notons respectivement $v_1, \ldots, v_{32}$ et $w_1, \ldots, w_{121}$ les bases de diagonalisation obtenues pour T_{23} et T_{25}, en supposant que les valeurs propres λ_i ou μ_i correspondantes suivent les numérotations des tables 3.4, 3.5 et 3.6. Du fait des valeurs que prennent les λ_i et les μ_i, on peut choisir les v_i et les w_i de telle sorte que :

- pour $i \in \{1, \ldots, 32\}$, les v_i sont dans $\mathbb{Z}^{32}$, et de coordonnées premières entre elles ;
- pour $i \in \{1, \ldots, 57\}$, les w_i sont dans $\mathbb{Z}^{121}$, et de coordonnées premières entre elles ;
- pour $i \in \{58, \ldots, 121\}$, les w_i sont dans $\mathbb{Z}[\sqrt{144169}]^{121}$, et de coordonnées premières entre elles.

Les valeurs propres de matrices $T_{23}(p)$ et $T_{25}(p)$ associées respectivement aux vecteurs v_i et w_i sont alors données par les propositions suivantes :

Proposition 3.4.2. *En reprenant les notations précédentes, les vecteurs $v_i \in \mathbb{Z}^{32}$ constituent des vecteurs propres communs à tous les éléments de $\mathrm{H}(\mathrm{O}_{23})$. De plus, chacun de ces vecteurs v_i engendre une représentation automorphe $\pi_i \in \Pi_{\mathrm{cusp}}(\mathrm{SO}_{23})$ dont le paramètre standard $\psi_i = \psi(\pi_i, \mathrm{St})$ est donné par la table 3.4.*

Pour p un nombre premier, notons $\lambda_i(p)$ la valeur propre pour T_p associée au vecteur v_i (en particulier, $\lambda_i(2) = \lambda_i$). Alors on a la formule :

$$\lambda_i(p) = p^{\frac{21}{2}} \mathrm{Trace}\left(c_p(\pi_i) | V_{\mathrm{St}}\right).$$

Démonstration. Considérons p un nombre premier, et plaçons nous dans l'anneau de Hecke $\mathrm{H}(\mathrm{O}_{23})$. Reprenons la $\mathbb{Q}$-base $v_1, \ldots, v_{32}$ de l'espace vectoriel $\mathbb{Q}[X_{23}] \simeq \mathbb{Q}^{32}$ définie précédemment. Chacun des vecteurs v_i engendre une représentation automorphe $\pi_i \in \Pi_{\mathrm{cusp}}(\mathrm{SO}_{23})$. Les paramètres standards $\psi(\pi_i, \mathrm{St})$ de tels π_i sont donnés par [18, Table C.7].

Les formules de Gross (traitées dans [36] dans le cas des groupes adjoints, et précisées dans [18, Ch. VI, Lemme 2.7] dans le cas des groupes semi-simples) nous donnent le lien entre la trace dans la représentation standard et l'image par l'isomorphisme de Satake de l'opérateur de Hecke T_p, à savoir : $p^{\frac{21}{2}} \mathrm{Trace}(V_{\mathrm{St}}) = \mathrm{Sat}(\mathrm{T}_p)$. On en déduit la relation cherchée entre $\lambda_i(p)$ et π_i pour tout p.

Il suffit ensuite de vérifier la relation $\lambda_i = \lambda_i(2)$ pour s'assurer que l'indexation des π_i correspond bien à celle choisie pour les v_i (ce qui a bien un sens, comme tous les λ_i sont distincts). □

Proposition 3.4.3. *En reprenant les notations précédentes, les vecteurs $w_i \in \mathbb{Z}[\sqrt{144169}]^{121}$ constituent des vecteurs propres communs à tous les éléments de $\mathrm{H}(\mathrm{O}_{25})$. De plus, chacun de ces vecteurs w_i engendre une représentation automorphe $\pi_i \in \Pi_{\mathrm{cusp}}(\mathrm{SO}_{25})$ dont le paramètre standard $\psi_i = \psi(\pi_i, \mathrm{St})$ est donné par les tables 3.5 et 3.6.*

Pour p un nombre premier, notons $\mu_i(p)$ la valeur propre pour T_p associée au vecteur w_i (en particulier, $\mu_i(2) = \mu_i$). Alors on a la formule :

$$\mu_i(p) = p^{\frac{23}{2}} \mathrm{Trace}\left(c_p(\pi_i) | V_{\mathrm{St}}\right).$$

Démonstration. La démonstration se fait comme précédemment. Considérons p un nombre premier, et plaçons nous dans l'anneau de Hecke $\mathrm{H}(\mathrm{O}_{25})$. Reprenons la $\mathbb{Q}[\sqrt{144169}]$-base $w_1, \ldots, w_{121}$ de l'espace vectoriel $\mathbb{Q}[\sqrt{144169}][X_{25}] \simeq \mathbb{Q}[\sqrt{144169}]^{121}$ définie précédemment. Chacun des vecteurs w_i engendre une représentation automorphe $\pi_i \in \Pi_{\mathrm{cusp}}(\mathrm{SO}_{25})$. Les paramètres standards $\psi(\pi_i, \mathrm{St})$ de tels π_i sont donnés par [19, Appendix D].

Les formules de Gross [36] nous donnent la relation suivante : $p^{\frac{23}{2}}\mathrm{Trace}(V_{\mathrm{St}}) = \mathrm{Sat}(\mathrm{T}_p)$. On en déduit la relation cherchée entre $\mu_i(p)$ et π_i pour tout p.

Il suffit ensuite de vérifier la relation $\mu_i = \mu_i(2)$ pour vérifier que l'indexation des π_i correspond bien à celle choisie pour les w_i (ce qui a encore bien un sens, comme tous les μ_i sont distincts). □

Afin de simplifier les notations, on définit les matrices $V \in \mathrm{M}_{32}(\mathbb{R})$ et $W \in \mathrm{M}_{121}(\mathbb{R})$ dont les colonnes sont respectivement les vecteurs v_i et w_i. Pour $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, on note $\mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_n) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont les a_i. Alors on a les égalités suivantes :

$$T_{23}(p) = V\ \mathrm{diag}(\lambda_1(p), \ldots, \lambda_{32}(p))\ V^{-1};$$
$$T_{25}(p) = W\ \mathrm{diag}(\mu_1(p), \ldots, \mu_{121}(p))\ W^{-1}.$$

En particulier, on a la proposition suivante :

Théorème 3.4.4. *Pour tout $p \leq 113$ premier, les matrices $T_{23}(p)$ sont données dans [53]. Pour tout $p \leq 67$ premier, les matrices $T_{25}(p)$ sont données dans [53].*

Démonstration. Il est équivalent de connaître les matrices $T_{23}(p)$ et $T_{25}(p)$ et de connaître les $\lambda_i(p)$ et les $\mu_j(p)$. D'après les propositions 3.4.2 et 3.4.3, il suffit donc de connaître les valeurs de $\mathrm{Trace}(c_p(\pi)|V_{\mathrm{St}})$, pour les éléments $\pi \in \cup_m \Pi^{\perp}_{\mathrm{alg}}(\mathrm{PGL}_m)$ apparaissant dans les tables 3.4, 3.5 et 3.6.

Les calculs de ces $\mathrm{Trace}(c_p(\pi)|V_{\mathrm{St}})$ ont justement été effectués jusqu'à $p \leq 67$ dans tous ces cas (voir [48]). Les résultats de [18] permettent même d'aller plus loin, et de connaître pour tout $p \leq 113$ la matrice $\mathrm{T}_{23}(p)$ (grâce aux résultats sur les formes modulaires de Siegel de genre 2). □

Les matrices $T_{23}(p)$ (pour $p \leq 113$) et $T_{25}(p)$ (pour $p \leq 67$) nous donnent en particulier les corollaires suivants :

Corollaire 3.4.5. *Soit p un nombre premier. Le diamètre du graphe $\mathrm{K}_{23}(p)$ est le suivant : 4 pour $p = 2$, 3 pour $p = 3$, 2 pour $5 \leq p \leq 19$, et 1 pour $23 \leq p \leq 113$.*

Corollaire 3.4.6. *Soit p un nombre premier. Le diamètre du graphe $\mathrm{K}_{25}(p)$ est le suivant : 6 pour $p = 2$, 4 pour $p = 3$, 3 pour $5 \leq p \leq 7$, et 2 pour $11 \leq p \leq 61$.*

Pour les plus grandes valeurs de p, on a le théorème suivant :

Théorème 3.4.7. *Soit p un nombre premier. Si $p \geq 23$, le graphe $\mathrm{K}_{23}(p)$ est complet. Si $p \geq 67$, le graphe $\mathrm{K}_{25}(p)$ est complet.*

Démonstration. La démonstration suit celle de [18, Ch. X, Théorème 2.4]. Nous la reprenons en détail dans le cas de $\mathrm{K}_{23}(p)$, et ne donnerons que quelques points clefs pour le cas de $\mathrm{K}_{25}(p)$.

À la manière de [18, Ch. X, §2], définissons les fonctions $\theta_1(p) = D_{11}(p)$, $\theta_2(p) = D_{15}(p)$, $\theta_3(p) = D_{17}(p)$, $\theta_4(p) = D_{19}(p)$, $\theta_5(p) = D_{21}(p)$, $\theta_6(p) = D_{19,7}(p)$, $\theta_7(p) = D_{21,5}(p)$, $\theta_8(p) = D_{21,9}(p)$ et $\theta_9(p) = D_{21,13}(p)$. D'après la proposition 3.4.2, il existe des polynômes

$C_{i,r} \in \mathbb{Z}[X]$, pour $1 \leq i \leq 32$ et $0 \leq r \leq 9$, uniquement déterminés, tels que l'on a pour tout $1 \leq i \leq 32$ et pour tout p premier :

$$\lambda_i(p) = C_{i,0}(p) + \sum_{r=1}^{9} C_{i,r}(p)\theta_r(p).$$

Si l'on note $T_{23}(p) = (t_{i,j}(p))_{1\leq i,j\leq 32}$, alors il existe des polynômes $P_{i,j,r} \in \mathbb{Q}[X]$, pour $1 \leq i,j \leq 32$ et $0 \leq r \leq 9$, uniquement déterminés, tels que l'on a pour tout $1 \leq i,j \leq 32$ et pour tout p premier :

$$t_{i,j}(p) = P_{i,j,0}(p) + \sum_{r=1}^{9} P_{i,j,r}(p)\theta_r(p).$$

Supposons que les deux sommets de $\mathrm{K}_{23}(p)$ correspondant aux classes $\overline{L_i}, \overline{L_j} \in X_{23}$ ne sont pas connexes. Ceci est équivalent à dire que $t_{i,j}(p) = 0$, et on a alors :

$$P_{i,j,0}(p)^2 = \left(\sum_{r=1}^{9} P_{i,j,r}(p)\theta_r(p)\right)^2.$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, a

$$\left(\sum_{r=1}^{9} P_{i,j,r}(p)\theta_r(p)\right)^2 \leq \left(\sum_{r=1}^{9} P_{i,j,r}(p)^2\gamma_r\right)\left(\sum_{r=1}^{9} \gamma_r^{-1}\theta_r(p)^2\right)$$

pour tout 9-uple $(\gamma_1, \ldots, \gamma_9)$ de réels strictement positifs. En particulier, grâce aux inégalités de Ramanujan exposées à la proposition 3.2.20, et en prenant $(\gamma_1, \ldots, \gamma_9) = (4p^{11}, 4p^{15}, 4p^{17}, 4p^{19}, 4p^{21}, 16p^{19}, 16p^{21}, 16p^{21}, 16p^{21})$, on déduit l'inégalité :

$$\left(\sum_{r=1}^{9} P_{i,j,r}(p)\theta_r(p)\right)^2 \leq 9\left(\sum_{r=1}^{9} P_{i,j,r}(p)^2\gamma_r\right).$$

On définit les polynômes

$$(\Gamma_1(X), \Gamma_2(X), \ldots, \Gamma_9(X)) = (4X^{11}, 4X^{15}, \ldots, 16X^{21})$$

et

$$Q_{i,j}(X) = P_{i,j,0}(X)^2 - 9\left(\sum_{r=1}^{9} P_{i,j,r}(X)^2\Gamma_r(X)\right).$$

Les polynômes $Q_{i,j}(X)$ sont des éléments de $\mathbb{Q}[X]$ de coefficient dominant strictement positif. Si l'on définit $\rho_{i,j}$ comme la plus grande racine réelle de $Q_{i,j}(X)$ (avec la convention $\rho_{i,j} = -\infty$ si $Q_{i,j}$ n'a pas de racine réelle). Avec ces notations, on a $t_{i,j}(p) > 0$ dès que $p > \rho_{i,j}$.

Il suffit ensuite de constater que $\max\{\rho_{i,j}, 1 \leq i,j \leq 32\} \approx 21.15$. Ceci conclut que pour $p \geq 23$, tous les $t_{i,j}(p)$ sont non nuls, et que le graphe $\mathrm{K}_{23}(p)$ est complet pour de tels p.

Pour le graphe $\mathrm{K}_{25}(p)$, on procède de la même manière. Les fonctions $\theta_r(p)$ sont les suivantes : $\theta_1(p) = D_{11}(p)$, $\theta_2(p) = D_{15}(p)$, $\theta_3(p) = D_{17}(p)$, $\theta_4(p) = D_{19}(p)$, $\theta_5(p) = D_{21}(p)$, $\{\theta_6(p), \theta_7(p)\} = D_{23}^2(p)$, $\theta_8(p) = p^{11}\mathrm{tr}\left(\mathrm{Sym}^2\, c_p(\Delta_{11})|V_{\mathrm{St}}\right) = (D_{11}(p))^2 + p^{11}$, $\theta_9(p) = D_{19,7}(p)$, $\theta_{10}(p) = D_{21,5}(p)$, $\theta_{11}(p) = D_{21,9}(p)$, $\theta_{12}(p) = D_{21,13}(p)$, $\theta_{13}(p) = D_{23,7}(p)$, $\theta_{14}(p) = D_{23,9}(p)$, $\theta_{15}(p) = D_{23,13}(p)$, $\theta_{16}(p) = D_{23,13,5}(p)$, $\theta_{17}(p) = D_{23,15,3}(p)$, $\theta_{18}(p) = D_{23,15,7}(p)$, $\theta_{19}(p) = D_{23,17,5}(p)$, $\theta_{20}(p) = D_{23,17,9}(p)$, $\theta_{21}(p) = D_{23,19,3}(p)$ et $\theta_{22}(p) = D_{23,19,11}(p)$.

Les polynômes $\Gamma_r(X)$ (qui nous donnent les quantités $\gamma_r = \Gamma_r(p)$) sont les suivantes : $\Gamma_1(X) = 4X^{11}$, $\Gamma_2(X) = 4X^{15}$, $\Gamma_3(X) = 4X^{17}$, $\Gamma_4(X) = 4X^{19}$, $\Gamma_5(X) = 4X^{21}$, $\Gamma_6(X) = \Gamma_7(X) = 4X^{23}$, $\Gamma_8(X) = 9X^{22}$, $\Gamma_9(X) = 16X^{19}$, $\Gamma_{10}(X) = \cdots = \Gamma_{12}(X) = 16X^{21}$, $\Gamma_{13}(X) = \cdots = \Gamma_{15}(X) = 16X^{23}$ et $\Gamma_{16}(X) = \cdots = \Gamma_{22}(X) = 36X^{23}$.

On calcule de la même manières les quantités $\rho_{i,j}$ associées au polynômes $Q_{i,j}(X)$. Il suffit ensuite de constater que $\max\{\rho_{i,j}, 1 \leq i, j \leq 121\} \approx 64.25$. Ceci conclut que pour $p \geq 67$, tous les coefficients de la matrice $T_{25}(p)$ sont non nuls, et que le graphe $\mathrm{K}_{25}(p)$ est complet pour de tels p. □

3.4.2 Quelques vérifications de nos résultats.

Les propositions 3.4.2 et 3.4.3 constituent une première vérification de nos calculs. En effet, on connaît grâce à ces propositions les valeurs propres de T_2 sur $\mathbb{Z}[X_{23}]$ et $\mathbb{Z}[X_{25}]$: on vérifie que ces valeurs correspondent bien aux valeurs propres des matrices T_{23} et T_{25} calculées par nos algorithmes.

Une deuxième vérification repose sur la remarque finale de [18, Annexe B, §5.3]. Suivant l'indexation adoptée ici pour X_{23}, on a $L_2 \simeq \mathrm{E}_{15} \oplus \mathrm{E}_8$ et $L_3 \simeq \mathrm{E}_{16} \oplus \mathrm{E}_7$. Ainsi, le coefficient d'indice $(3, 2)$ de la matrice T_{23} est égal à $\mathrm{N}_2(\mathrm{E}_{15} \oplus \mathrm{E}_8, \mathrm{E}_{16} \oplus \mathrm{E}_7)$. On constate sur la matrice T_{23} que l'on a calculé que ce coefficient vaut 120, ce qui est bien cohérent avec le résultat de [18] évoqué ci-dessus.

Une autre vérification repose sur l'étude des graphes de Kneser $\mathrm{K}_{23}(p)$ $(2 \leq p \leq 113)$ et $\mathrm{K}_{25}(p)$ $(2 \leq p \leq 67)$, qu'on a calculés explicitement grâce au théorème 3.4.4. On vérifie dans un premier temps qu'ils sont connexes, comme exposé précédemment, ce qui est cohérent avec la proposition 3.2.15.

De plus, les graphes $\mathrm{K}_{24}(p)$ ont été calculé dans [18, Ch. X, Théorème 2.4] pour tout p premier. On vérifie que nos calculs des graphes $\mathrm{K}_{23}(p)$ sont cohérents avec la propriété suivante :

Proposition 3.4.8. *Soient $n \equiv -1 \bmod 8$ et p un nombre premier. Pour $i = 1, 2$, on se donne $L_i \in \mathcal{L}_n$ d'image $\overline{L_i}$ dans X_n, et $P_i \in \mathcal{L}_{n+1}$ d'image $\overline{P_i} \in X_{n+1}$ tel que $L_i \simeq P_i \cap \alpha_i^{\perp}$ pour un certain $\alpha_i \in R(P_i)$.*

Si les sommets $\overline{L_1}$ et $\overline{L_2}$ sont adjacents dans le graphe $\mathrm{K}_n(p)$, alors les sommets $\overline{P_1}$ et $\overline{P_2}$ sont adjacents dans le graphe $\mathrm{K}_{n+1}(p)$.

Démonstration. Considérons $L_1, L_2 \in \mathcal{L}_n$ deux p-voisins, que l'on voit comme des réseaux de $L_1 \otimes \mathbb{Q} = L_2 \otimes \mathbb{Q} = \mathrm{U}_n$. Pour $i = 1, 2$, on pose $\widetilde{P}_i = L_i \oplus \mathrm{A}_1$, et P_i l'unique réseau unimodulaire pair contenant $\widetilde{P}_i$ (c'est-à-dire l'image réciproque par $\widetilde{P}_i^{\sharp} \to$ rés $\widetilde{P}_i$ de l'unique droite isotrope de rés $\widetilde{P}_i$).

Les réseaux P_1, P_2 sont des réseaux unimodulaires pairs de $\mathrm{V}_n = \mathrm{U}_n \oplus (\mathbb{Q} \otimes \mathrm{A}_1)$ qui vérifient pour $i = 1, 2$: $L_i = P_i \cap \mathrm{U}_n$. On est ainsi dans le cadre de [18, Annexe B, Proposition 4.2]. D'après cette proposition, les réseaux P_1, P_2 sont des p-voisins, ce qui conclut notre démonstration. □

On applique ce résultat aux graphes $\mathrm{K}_{23}(p)$ et $\mathrm{K}_{24}(p)$. On vérifie que cette propriété est satisfaite pour $p < 47$ (il est inutile de la vérifier pour $p \geq 47$ comme les graphes $\mathrm{K}_{23}(p)$ et $\mathrm{K}_{24}(p)$ sont alors complets). Pour cela, on utilise la table 3.1, qui nous donne pour chaque réseau $L \in \mathcal{L}_{23}$ la classe dans X_{24} de l'unique réseau unimodulaire pair contenant $L \oplus \mathrm{A}_1$.

On vérifie aussi qu'on a le corollaire plus faible suivant :

Corollaire 3.4.9. *Soit p un nombre premier. On note $\mathrm{K}'_{24}(p)$ le sous-graphe de $\mathrm{K}_{24}(p)$ obtenu en retirant le sommet correspondant au réseau de Leech. Alors le diamètre de $\mathrm{K}'_{24}(p)$ est inférieur ou égal au diamètre de $\mathrm{K}_{23}(p)$.*

En particulier que le graphe $\mathrm{K}'_{24}(p)$ *est complet pour* $p \geq 23$.

Une dernière vérification de nos calculs provient de la proposition suivante :

Proposition 3.4.10. *Soient* $n = 23$ *ou* 25 *et* p *premier. Alors l'endomorphisme* T_p *de* $\mathbb{Z}[X_n]$ *est auto-adjoint pour le produit scalaire* $(\ |\ )$ *défini par :*

$$(\overline{L}_1|\overline{L}_2) = |\mathrm{O}(L_1)|\delta_{\overline{L}_1,\overline{L}_2},$$

où $\overline{L}_1, \overline{L}_2 \in X_n$, $L_1 \in \mathcal{L}_n$ *a pour classe* $\overline{L}_1$ *dans* X_n, $\mathrm{O}(L_1)$ *est le groupe orthogonal de* L_1, *et* $\delta_{\overline{L}_1,\overline{L}_2} = 1$ *si, et seulement si,* $\overline{L}_1 = \overline{L}_2$ *et* 0 *sinon.*

Si l'on note P_{23} *(respectivement* P_{25}*) la matrice diagonale de* $\mathrm{M}_{32}(\mathbb{Z})$ *(respectivement* $\mathrm{M}_{121}(\mathbb{Z})$*) dont le* i*-ème terme diagonal est* $|\mathrm{O}(L_i)|$ *suivant la numérotation de la table 3.2 (respectivement de la table 3.3), alors pour tout* p *premier on a les égalités :*

$$P_{23}\ \mathrm{T}_{23}(p) = \mathrm{T}_{23}^t(p)\ P_{23} \qquad et \qquad P_{25}\ \mathrm{T}_{25}(p) = \mathrm{T}_{25}^t(p)\ P_{25},$$

où pour $M \in \mathrm{M}_N(\mathbb{Z})$ *on désigne par* M^t *la matrice transposée de* M.

Démonstration. C'est un résultat classique, qui est par exemple énoncé dans [59, §2.5] (voir [18, Ch. III, §1 et §2] pour une démonstration élémentaire). C'est aussi un cas particulier d'une propriété plus générale du comportement des opérateurs de Hecke relativement à un produit scalaire naturel sur les espaces de formes modulaires algébriques au sens de Gross (voir [37, Proposition 6.9] pour l'énoncé général, et [18, Ch. IV, §4.7] pour une démonstration). □

D'après les valeurs obtenues pour T_{23} et T_{25}, on vérifie qu'il existe qu'une seule matrice diagonale P_1 et une seule matrice diagonale P_2 (à multiplication près par un scalaire) telles que : $P_1\ T_{23} = T_{23}^t\ P_1$ et $P_2\ T_{25} = T_{25}^t\ P_2$.

L'existence de P_1 et P_2 constitue déjà en soi une vérification de nos résultats. On s'assure de plus que les coefficients de P_1 et P_2 sont cohérents avec les valeurs des $|\mathrm{O}(L_i)|$ que l'on sait déterminer facilement. C'est notamment le cas lorsque $R(L_i)$ et L_i ont même rang (en tant que $\mathbb{Z}$-modules), et dans se cas le groupe $\mathrm{O}(L_i)$ se déduit directement du groupe de Weyl de $R(L_i)$.

Prenons par exemple le cas de L_1 (suivant les notations de la table 3.2). Posons $M = \mathrm{D}_{22} \oplus A_1$. On obtient alors : rés $M = \left(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\ d_1 \oplus^\perp \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\ d_2\right) \oplus^\perp \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}a$ avec $q(d_1) = q(d_2) = 3/4$ et $q(a) = 1/4$. En particulier, il existe deux droites isotropes dans rés M, engendrées respectivement par $d_1 + a$ et $d_2 + a$. Ainsi, il existe deux réseaux $L^+, L^- \in \mathcal{L}_{23}$ contenant M : ces deux réseaux sont isomorphes, et sont échangés par toute isométrie de M qui n'est pas dans le groupe de Weyl de M (qui sont exactement les isométries de M qui échangent d_1 et d_2). Et on déduit que $|\mathrm{O}(L^+)| = |\mathrm{O}(L^-)| = \frac{|\mathrm{O}(M)|}{2} = 22!\ 2^{22}$.

Il est aussi facile de déterminer la valeur de $|\mathrm{O}(L)|$ pour certains éléments de $\mathcal{L}_{25}$. En effet, la proposition 3.4.10 est aussi vraie pour $n = 24$, suivant [18, Ch. III, §2] par exemple. On en déduit les valeurs des $|\mathrm{O}(P)|$ pour $P \in \mathcal{L}_{24}$ grâce à la matrice de T_2 sur $\mathbb{Z}[X_{24}]$, donnée dans [59] par exemple. Si l'on se donne $P \in \mathcal{L}_{24}$, alors le réseau $L = P \oplus \mathrm{A}_1$ est un élément de $\mathcal{L}_{25}$, et on a l'égalité : $|\mathrm{O}(L)| = 2\ |\mathrm{O}(P)|$. Pour s'en convaincre, il suffit de constater qu'un élément $\gamma \in \mathrm{O}(L)$ satisfait $\gamma(P) = P$ et $\gamma(\mathrm{A}_1) = \mathrm{A}_1$.

Ceci permet de déterminer la valeur de $|\mathrm{O}(L)|$ pour les éléments $L \in \mathcal{L}_{25}$ de la forme $L \simeq P \oplus \mathrm{A}_1$ avec $P \in \mathcal{L}_{24}$, qui sont exactement les éléments satisfaisant $R(L) \simeq R \coprod \mathbf{A}_1$, où R est le système de racines d'un élément de $\mathcal{L}_{24}$. Les différentes valeurs de R ont été déterminées par Niemeier [61] et Venkov [80] : c'est un système de racine de type ADE équicoxeter de rang 24, ou l'ensemble vide (lorsque P est le réseau de Leech).

Notons au passage que la détermination des matrices P_{23} et P_{25} nous donne pour tout L dans $\mathcal{L}_{23}$ ou $\mathcal{L}_{25}$ la quantité $|\mathrm{O}(L)|$. On donne dans [53] les matrices P_{23} et P_{25}.

3.4.3 Congruences à la Harder.

On souhaite établir des congruences entre les traces de paramètres de Langlands–Satake de certaines formes automorphes normalisées, comme c'est par exemple le cas dans la conjecture de Harder, exposée dans [38] et déjà démontrée dans [18, Ch. X, Théorème 4.4] :

Théorème 3.4.11 (Conjecture de Harder)**.** *Pour tout premier p, on a la congruence suivante :*

$$D_{21,5}(p) \equiv D_{21}(p) + p^{13} + p^8 \bmod 41.$$

Dans [18], cette congruence est exprimée sous la forme $\tau_{4,10}(p) \equiv \tau_{22}(p)+p^{13}+p^8 \bmod 41$, qui est équivalente, du fait des égalités $D_{21,5}(p) = \tau_{4,10}(p)$ et $D_{21}(p) = \tau_{22}(p)$ déjà expliquées au paragraphe 3.2.3.

De telles congruences entre les fonctions $D_{w_1,\dots,w_n}$ proviennent de congruences entre les colonnes des matrices V ou W. On utilise pour cela le lemme suivant :

Lemme 3.4.12. *Soient m un entier quelconque, et $i, j \in \{1, \dots, 32\}$ tels que $\mathrm{vect}_{\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}}(v_i) = \mathrm{vect}_{\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}}(v_j)$. Alors pour tout p on a la congruence :*

$$\lambda_i(p) \equiv \lambda_j(p) \bmod m.$$

De même, s'il existe $i, j \in \{1, \dots, 57\}$ tels que $\mathrm{vect}_{\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}}(w_i) = \mathrm{vect}_{\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}}(w_j)$, alors pour tout p on a la congruence :

$$\mu_i(p) \equiv \mu_j(p) \bmod m.$$

Enfin, s'il existe $i, j \in \{58, \dots, 121\}$ tels que $\mathrm{vect}_{\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}}(w_i) = \mathrm{vect}_{\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}}(w_j)$, alors pour tout p on a la congruence :

$$\mu_i(p) \equiv \mu_j(p) \bmod m\mathbb{Z}[\sqrt{144169}].$$

Démonstration. Supposons par exemple qu'il existe un entier m, et des entiers $i, j \in \{1, \dots, 32\}$ tels que $\mathrm{vect}_{\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}}(v_i) = \mathrm{vect}_{\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}}(v_j)$. Par définition, les coordonnées de v_i sont premières entre elles (et il en va de même pour celles de v_j). En particulier, l'égalité précédente implique qu'il existe $\alpha \in (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*$ tel que $v_i - \alpha v_j \in (m\mathbb{Z})^{32}$. En faisant agir $T_{23}(p) \in \mathrm{M}_{32}(\mathbb{Z})$ sur ce vecteur, on déduit les implications suivantes :

$$\begin{aligned}
v_i - \alpha v_j \in (m\mathbb{Z})^{32} &\Rightarrow T_{23}(p)(v_i - \alpha v_j) \in (m\mathbb{Z})^{32} \\
&\Rightarrow \lambda_i(p)v_i - \alpha\lambda_j(p)v_j \in (m\mathbb{Z})^{32} \\
&\Rightarrow \lambda_i(p)(v_i - \alpha v_j) + \alpha(\lambda_i(p) - \lambda_j(p))v_j \in (m\mathbb{Z})^{32} \\
&\Rightarrow \alpha(\lambda_i(p) - \lambda_j(p))v_j \in (m\mathbb{Z})^{32} \\
&\Rightarrow (\lambda_i(p) - \lambda_j(p))v_j \in (m\mathbb{Z})^{32} \\
&\Rightarrow \lambda_i(p) - \lambda_j(p) \in m\mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

(où la dernière implication utilise que les coordonnées de v_j sont relativement premières entre elles).

La démonstration est identique si l'on possède des entiers $m \in \mathbb{Z}$ et $i, j \in \{1, \dots, 121\}$ tels que $\mathrm{vect}_{\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}}(w_i) = \mathrm{vect}_{\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}}(w_j)$.

Dans le troisième cas, on peut remplacer l'hypothèse $\mathrm{vect}_{\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}}(w_i) = \mathrm{vect}_{\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}}(w_j)$ par $\mathrm{vect}_{\mathbb{Z}[\sqrt{144169}]/m\mathbb{Z}[\sqrt{144169}]}(w_i) = \mathrm{vect}_{\mathbb{Z}[\sqrt{144169}]/m\mathbb{Z}[\sqrt{144169}]}(w_j)$ et on obtient le même résultat. Cependant, on n'utilisera ce cas uniquement lorsque $\mu_i(p) - \mu_j(p) \in \mathbb{Z}$. □

Il suffit ensuite d'utiliser les proposition 3.4.2 et 3.4.3 pour déduire les congruences cherchées. Du fait des propositions 3.4.2 et 3.4.3, les fonctions $D_{w_1,\dots,w_n}$ que l'on fera intervenir sont exactement celles provenant des représentations $\Delta_{w_1,\dots,w_n}$ présentes dans les tables 3.4, 3.5 et 3.6. Par exemple, la proposition suivante améliore la congruence de Harder exposée précédemment :

Théorème 3.4.13. *Pour tout nombre premier p, on a la congruence :*

$$D_{21,5}(p) \equiv D_{21}(p) + p^{13} + p^8 \bmod 9840.$$

De plus, cette congruence est optimale, dans le sens où on ne peut pas remplacer 9840 *par un de ses multiples.*

Démonstration. Pour obtenir la congruence précédente, il suffit dans un premier temps de constater que, pour $(m,i,j) = (9840, 26, 28)$, on a l'égalité : $\mathrm{vect}_{\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}}(v_i) = \mathrm{vect}_{\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}}(v_j)$. Le lemme 3.4.12 nous donne pour tout premier p la congruence $\lambda_{26}(p) \equiv \lambda_{28}(p) \bmod 9840$. D'après la table 3.4 et la proposition 3.4.2, on a les égalités :

$$\begin{aligned}
\lambda_{26}(p) &= p^{\frac{21}{2}} \mathrm{Trace}\left(c_p\left(\Delta_{21} \oplus \Delta_{19,7} \oplus \Delta_{17} \oplus \Delta_{15} \oplus \Delta_{11}[3] \oplus [6]\right) | V_{\mathrm{St}}\right) \\
&= D_{21}(p) + p\ D_{19,7}(p) + p^2\ D_{17}(p) + p^3\ D_{15}(p) + p^4\ (1+p+p^2)\ D_{11}(p) \\
&\quad + p^8\ (1+p+p^2+p^3+p^4+p^5), \\
\lambda_{28}(p) &= p^{\frac{21}{2}} \mathrm{Trace}\left(c_p\left(\Delta_{21,5} \oplus \Delta_{19,7} \oplus \Delta_{17} \oplus \Delta_{15} \oplus \Delta_{11}[3] \oplus [4]\right) | V_{\mathrm{St}}\right) \\
&= D_{21,5}(p) + p\ D_{19,7}(p) + p^2\ D_{17}(p) + p^3\ D_{15}(p) + p^4\ (1+p+p^2)\ D_{11}(p) \\
&\quad + p^9\ (1+p+p^2+p^3).
\end{aligned}$$

Et ainsi :

$$\lambda_{26}(p) - \lambda_{28}(p) = D_{21}(p) + p^{13} + p^8 - D_{21,5}(p)$$

qui est la congruence cherchée. Notons au passage que l'on a aussi l'égalité $\mathrm{vect}_{\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}}(v_i) = \mathrm{vect}_{\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}}(v_j)$ pour $(m,i,j) = (9840, 27, 29)$, qui nous donne la même congruence.

Pour constater que cette congruence est optimale, il suffit d'évaluer la quantité $\lambda_{26}(p) - \lambda_{28}(p) = D_{21}(p) + p^{13} + p^8 - D_{21,5}(p)$ pour certaines valeurs de p. On constate par exemple que $\lambda_{26}(2) - \lambda_{28}(2) = 9840$, ce qui prouve l'optimalité. □

L'ensemble des congruences que l'on a trouvées sont données par le théorème suivant :

Théorème 3.4.14. *Pour tout nombre premier p, les congruences suivantes sont vérifiées :*

- *(i)* $D_{19,7}(p) \equiv D_{19}(p) + p^6 + p^{13} \bmod 8712$;
- *(ii)* $D_{21,5}(p) \equiv D_{21}(p) + p^8 + p^{13} \bmod 9840$;
- *(iii)* $D_{21,9}(p) \equiv (1+p^6)\ D_{15}(p) \bmod 12696$;
- *(iv)* $D_{21,9}(p) \equiv D_{21}(p) + p^6 + p^{15} \bmod 31200$;
- *(v)* $D_{21,13}(p) \equiv (1+p^4)\ D_{17}(p) \bmod 8736$;
- *(vi)* $D_{21,13}(p) \equiv D_{21}(p) + p^4 + p^{17} \bmod 10920$;
- *(vii)* $D_{23,7}(p) \equiv (1+p^8)\ D_{15}(p) \bmod 8972$;
- *(viii)* $D_{23,13,5}(p) \equiv D_{23,13}(p) + p^9 + p^{14} \bmod 5472$;
- *(ix)* $D_{23,15,7}(p) \equiv (1+p^4)\ D_{19}(p) + p^8 + p^{15} \bmod 2184$;
- *(x)* $D_{23,15,7}(p) \equiv D_{23,7}(p) + p^4\ D_{15}(p) \bmod 5856$;
- *(xi)* $D_{23,17,9}(p) \equiv D_{23,9}(p) + p^3\ D_{17}(p) \bmod 2976$;

(xii) $D_{23,19,3}(p) \equiv (1+p^2)\ D_{21}(p) + p^{10} + p^{13} \bmod 7872$;

$(xiii)$ $D_{23,19,11}(p) \equiv (1+p^2)\ D_{21}(p) + p^6 + p^{17} \bmod 16224$.

De plus, mis à part les points $(vi), (vii), (xi)$ et $(xiii)$, les congruences ci-dessus sont optimales, dans le sens où le module qui intervient ne peut pas être remplacé par un de ses multiples.

Démonstration. On donne pour chacun des points de la proposition la congruence de la forme $\lambda_i \equiv \lambda_j \bmod m$ (ou $\mu_i \equiv \mu_j \bmod m$), qui se déduit du lemme 3.4.12. On précise lorsqu'il a fallu utiliser des résultats supplémentaires.

Certaines congruences qui apparaissent sont des "multiplications par p" des congruences cherchées : on peut évaluer nos congruences jusqu'à $p = 67$, et ainsi on pourra "diviser une congruence modulo m par p" dès lors que les diviseurs premiers de m seront inférieurs ou égaux à 67. C'est aussi le fait d'évaluer ces congruences jusqu'à $p = 67$ qui nous permet dans certains cas de dire si elles sont optimales.

(i) : $\lambda_{22}(p) \equiv \lambda_{26}(p) \bmod 17424$ ce qui nous donne la congruence $p\ D_{19,7}(p) \equiv p\ D_{19}(p) + p^7 + p^{14} \bmod 17424$. Il suffit d'évaluer la quantité $D_{19,7}(p) \equiv D_{19}(p) + p^6 + p^{13}$ pour les p premiers divisant 17424 pour déduire la congruence cherchée, qui est optimale.

(ii) et (iii) : $\lambda_{26}(p) \equiv \lambda_{28}(p) \bmod 9840$ et $\lambda_{16}(p) \equiv \lambda_{19}(p) \bmod 12696$ donnent directement les congruences cherchées, qui sont optimales.

(iv) : $\lambda_{20}(p) \equiv \lambda_{14}(p) \bmod 7800$ et $\mu_{15}(p) \equiv \mu_{24}(p) \bmod 20800$ nous donnent la congruence $p\ D_{21,9}(p) \equiv p\ D_{21}(p) + p^7 + p^{16} \bmod 62400$. Il suffit d'évaluer la quantité $D_{21,9}(p) \equiv D_{21}(p) + p^6 + p^{15}$ pour les p premiers divisant 62400 pour déduire la congruence cherchée, qui est optimale.

(v) : $\lambda_{11}(p) \equiv \lambda_{12}(p) \bmod 4368$ et $\lambda_{17}(p) \equiv \lambda_{18}(p) \bmod 416$ donnent directement la congruence cherchée, qui est optimale.

(vi) : $\lambda_{10}(p) \equiv \lambda_7(p) \bmod 2730$ et $\mu_{64}(p) \equiv \mu_{67}(p) \bmod 8$ nous donnent la congruence $p\ D_{21,13}(p) \equiv p\ D_{21}(p) + p^5 + p^{18} \bmod 10920$ et il suffit d'évaluer la quantité $D_{21,13}(p) \equiv D_{21}(p) + p^4 + p^{17}$ pour les p premiers divisant 10920 pour obtenir la congruence cherchée. Cependant, on n'a aucune certitude sur l'optimalité de la congruence.

(vii) à (xii) : $\mu_{10} \equiv \mu_{18} \bmod 8972$, $\mu_{44} \equiv \mu_{37} \bmod 5472$, $\mu_{21} \equiv \mu_{36} \bmod 2184$, $\mu_{41} \equiv \mu_{38} \bmod 5856$, $\mu_{35} \equiv \mu_{40} \bmod 2976$ et $\mu_{53} \equiv \mu_{56} \bmod 7872$ nous donnent directement les congruences cherchées. Il est facile de voir que les congruences $(viii)$, (ix), (x) et (xii) sont optimales.

$(xiii)$: les congruences $\mu_{11} \equiv \mu_6 \bmod 5408$, $\mu_{11} \equiv \mu_{12} \bmod 96$, $\mu_{12} \equiv \mu_6 \bmod 44224$ et $\mu_{13} \equiv \mu_7 \bmod 8292$ nous donnent les congruences : $D_{23,19,11}(p) \equiv (1+p^2)\ D_{21}(p) + p^6 + p^{17} \bmod 5408$, $D_{23,19,11}(p) \equiv (1+p^2)\ D_{21}(p) + p^6\ D_{11}(p) \bmod 96$ et $p^6\ D_{11}(p) \equiv p^6 + p^{17} \bmod 132672$ (qui est une "multiplication par p^6" de la congruence de Ramanujan). On en déduit ainsi la congruence cherchée. □

Outre la congruence (ii) (qui est une optimisation de la conjecture de Harder), deux congruences attirent notre attention.

La congruence (vii) est la seule faisant intervenir une forme de Siegel de genre 2 qui n'avait pas été traitée dans [18] ou [77]. En suivant la méthode de Dieulefait [27] (et reprise par Tayou [77]), on démontre le résultat ci-dessous :

Proposition 3.4.15. *Soit S l'espace des formes modulaires paraboliques de Siegel de genre 2 de poids $\mathrm{Sym}^6\mathbb{C}^2 \otimes \det^{10}$ (qui est un espace de dimension 1). Pour l un nombre premier, on note ρ_l la représentation l-adique associée par la construction de Weissauer (voir [83] et [77, Théorème 1.1]), et $\overline{\rho}_l$ la $\mathbb{F}_l$-représentation résiduelle associée (voir par exemple [18, §X.1]).*

Alors pour $l > 23$, la représentation $\overline{\rho}_l$ est irréductible si, et seulement si, $l \neq 2243$.

Démonstration. Nous nous contentons ici de reprendre la méthode de Dieulefait [27] ainsi que les notations qui y sont utilisées (et qu'il serait trop long de réintroduire ici).

Suivant ces notations, considérons p un nombre premier et définissons la quantité :

$$C_{6,10}(p) = \left(p^{23} \cdot \mathrm{Trace}(c_p(\Delta_{23,7})|\Lambda^2 V_{\mathrm{St}}) - p^{15} - p^{31}\right)(1+p^8)^2 - p^{31} \cdot \mathrm{Trace}(c_p(\Delta_{23,7})|V_{\mathrm{St}})^2.$$

Considérons l un nombre premier, et les deux assertions suivantes :

(i) la représentation $\overline{\rho}_l$ est somme directe de deux représentations π_1 et π_2 de dimension 2, dont les poids de l'inertie modérée sont respectivement $\{0, 15\}$ et $\{8, 23\}$, et satisfaisant : $\pi_2 \simeq \pi_1^* \otimes \chi_l^{23}$, où χ_l désigne le caractère cyclotomique modulo l.

(ii) pour tout p premier différent de l, on a : $C_{6,10}(p) \equiv 0 \bmod l$.

Dieulefait montre que, si $l > 23$, on a l'implication : $(i) \Rightarrow (ii)$.

On définit de même, pour p premier, les quantités $A_{6,10}(p)$, $B_{6,10}(p)$ et $D_{6,10}(p)$ (suivant les notations de [77]), qui correspondent chacune à un type de réduction de la représentation $\overline{\rho}_l$. Par exemple, $D_{6,10}$ correspond à une réduction de la forme $\pi_1 \oplus \pi_2$, où les poids de l'inertie modérée de π_1 et π_2 sont respectivement $\{0, 8\}$ et $\{15, 23\}$, et satisfaisant $\pi_2 \simeq \pi_1^* \otimes \chi_l^{23}$.

Nos calculs démontrent les égalités suivantes :

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{pgcd}\left(\{A_{6,10}(p) \mid p \in \{2,3,5\}\}\right) & = & 1 \\ \mathrm{pgcd}\left(\{B_{6,10}(p) \mid p \in \{2,3,5\}\}\right) & = & 2^9 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 13^2 \\ \mathrm{pgcd}\left(\{C_{6,10}(p) \mid p \in \{2,3,5\}\}\right) & = & 2^{11} \cdot 3^2 \cdot 2243 \\ \mathrm{pgcd}\left(\{D_{6,10}(p) \mid p \in \{2,3,5\}\}\right) & = & 2^8 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \end{array}.$$

On en déduit ainsi que, si $l > 23$ et $l \neq 2243$, alors la représentation $\overline{\rho}_l$ est irréductible.

Il reste à étudier le cas $l = 2243$. Mais dans ce cas, la congruence (vii) et le théorème de Chebotarev permettent de conclure quant à la réductibilité de $\overline{\rho}_{2243}$ (en constatant $8972 = 4 \cdot 2243$), et donne pour $l = 2243$ l'égalité

$$\overline{\rho}_l \simeq (1 \oplus \chi_l^8) \otimes \overline{\rho}_{\Delta_{15},l},$$

où on désigne par $\overline{\rho}_{\Delta_{15},l}$ la représentation l-adique associée à l'unique forme modulaire parabolique normalisée de poids 16 pour $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. □

La seconde congruence qui attire notre attention est la congruence ($viii$). En effet, elle apparaissait déjà dans [5, §6, Example 3] sous la forme plus faible de la conjecture :

$$(\forall\ p \text{ premier})\ \ D_{23,13,5}(p) \equiv D_{23,13}(p) + p^9 + p^{14} \bmod 19.$$

Ainsi, en constatant que $5472 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 19$, la congruence ($viii$) apparaît donc non seulement comme un démonstration de la conjecture précédente, mais aussi comme une amélioration comme on a pu remplacer 19 par un de ses multiples.

3.4.4 Une conjecture de Gan–Gross–Prasad.

Soit $n \equiv -1, 0 \bmod 8$. Alors on possède une application naturelle $\phi_n : X_n \to X_{n+1}$ définie de la manière suivante :

– si $n \equiv -1 \bmod 8$: on se donne $L \in \mathcal{L}_n$, et on note $\overline{L}$ sa classe dans X_n. Alors $M = L \oplus A_1$ est un réseau de $\mathbb{R}^{n+1}$ tel que résM = rés$L \oplus$ rés$A_1 \simeq \mathbb{Z}/2\ e_1 \oplus \mathbb{Z}/2\ e_2$ (avec $q(e_1) = 3/4$ et $q(e_2) = 1/4$). En particulier, résM possède une unique droite isotrope (celle engendrée par $e_1 + e_2$) : l'image réciproque de cette droite par la projection naturelle $M^\sharp \to$ résM est un réseau $P \in \mathcal{L}_{n+1}$ dont la classe $\overline{P}$ dans X_{n+1} ne dépend que de $\overline{L}$. On pose $\phi_n(\overline{L}) = \overline{P}$.
– si $n \equiv 0 \bmod 8$: on se donne $L \in \mathcal{L}_n$, et on note $\overline{L}$ sa classe dans X_n. Alors $P = L \oplus A_1$ est un élément de $\mathcal{L}_{n+1}$ dont la classe $\overline{P}$ dans X_{n+1} ne dépend que de $\overline{L}$. On pose $\phi_n(\overline{L}) = \overline{P}$.

On sait déjà que, pour $n = 23, 24$ ou 25, deux éléments de $\mathcal{L}_n$ sont isomorphes si, et seulement si, leurs systèmes de racines sont isomorphes. Les application ϕ_{23} et ϕ_{24} se déduisent directement de cette constatation :
– pour ϕ_{23} : soient $L \in \mathcal{L}_{23}$, $P \in \mathcal{L}_{24}$ et $\overline{L}, \overline{P}$ leurs classes respectives dans X_{23} et X_{24}. Alors $\phi_{23}(\overline{L}) = \overline{P}$ si, et seulement si, il existe $\alpha \in R(P)$ tel que $L \simeq P \cap \alpha^\perp$. L'application ϕ_{23} se déduit donc directement de la table 3.1.
– pour ϕ_{25} : soient $L \in \mathcal{L}_{24}$, $P \in \mathcal{L}_{25}$ et $\overline{L}, \overline{P}$ leurs classes respectives dans X_{24} et X_{25}. Alors $\phi_{24}(\overline{L}) = \overline{P}$ si, et seulement si, $R(P) \simeq R(L) \oplus \mathbf{A}_1$.

Les applications $\phi_n : X_n \to X_{n+1}$ ainsi définies induisent des applications $\mathbb{C}[X_n] \to \mathbb{C}[X_{n+1}]$. Du fait des isomorphismes $\mathbb{C}^{X_n} \simeq \mathbb{C}[X_n]^*$ et $\mathbb{C}^{X_{n+1}} \simeq \mathbb{C}[X_{n+1}]^*$, on déduit que ϕ_n définit une application : $\widetilde{\phi}_n : \mathbb{C}^{X_{n+1}} \to \mathbb{C}^{X_n}$. Pour simplifier les notations, si $f \in \mathbb{C}^{X_{n+1}}$, on note $f|_{X_n} = \widetilde{\phi}_n(f)$.

Dans la suite, on aura besoin de définir les formes automorphes pour les $\mathbb{Z}$-groupes O_n, qui ne sont pas semi-simples. Nous renvoyons à [18, §IV.3 et IV.4] pour leurs définitions, qui permettent de définir les ensembles $\Pi(\mathrm{O}_n)$, $\Pi_{\mathrm{disc}}(\mathrm{O}_n)$ et $\Pi_{\mathrm{cusp}}(\mathrm{O}_n)$. On a alors les énoncés suivants :

Définition 3.4.16. *Soient $n \equiv -1 \bmod 8$ (respectivement $n \equiv 0 \bmod 8$), et $\pi \in \Pi_{\mathrm{disc}}(\mathrm{O}_{n+1})$ (respectivement $\pi \in \Pi_{\mathrm{cusp}}(\mathrm{SO}_{n+1})$) tel que $\pi_\infty = \mathbb{C}$. On lui associe le sous-ensemble* Res π *de $\Pi_{\mathrm{cusp}}(\mathrm{SO}_n)$ (respectivement $\Pi_{\mathrm{disc}}(\mathrm{O}_n)$) défini comme suit.*

Soit $f \in \mathcal{M}_{\mathbb{C}}(\mathrm{O}_{n+1})$ qui engendre π (en particulier, f est propre pour $\mathrm{H}(\mathrm{O}_{n+1})$). On écrit $f|_{X_n} = f_1 + \cdots + f_r$, où les f_i sont propres pour $\mathrm{H}(\mathrm{O}_n)$. Alors $\pi' \in$ Res π si, et seulement si, l'un des f_i ci-dessus engendre π'.

Proposition 3.4.17. *Les tables 3.7, 3.8 et 3.9 donnent les paramètres standards des éléments de* Res π *pour $\pi \in \Pi_{\mathrm{disc}}(\mathrm{O}_{24})$ ou $\pi \in \Pi_{\mathrm{cusp}}(\mathrm{SO}_{25})$, lorsque π_∞ est trivial.*

Démonstration. On se contente ici de détailler le cas où $\pi \in \Pi_{\mathrm{disc}}(\mathrm{O}_{24})$ (la même méthode s'applique lorsque $\pi \in \Pi_{\mathrm{cusp}}(\mathrm{SO}_{25})$).

On possède une base v_i de vecteurs propres pour l'action de $\mathrm{H}(\mathrm{O}_{23})$ sur $\mathbb{C}[X_{23}]$, ainsi qu'une base w_j de vecteurs propres pour l'action de $\mathrm{H}(\mathrm{O}_{24})$ sur $\mathbb{C}[X_{24}]$ (grâce à la matrice T_{23} déterminée précédemment, et à la matrice de T_2 sur $\mathbb{Z}[X_{24}]$ donnée dans [59]). On connaît de plus les représentations $\pi'_i \in \Pi_{\mathrm{cusp}}(\mathrm{SO}_{23})$ et $\pi_j \in \Pi_{\mathrm{disc}}(\mathrm{O}_{24})$ respectivement associées aux v_i et aux w_j (voir table 3.4 et [18, Table C.5] par exemple).

Comme on a déterminé l'application $\phi_{23} : \mathbb{C}[X_{23}] \to \mathbb{C}[X_{24}]$, on peut construire les éléments $\alpha_{i,j} \in \mathbb{C}$ vérifiant : $(\forall\ i \in \{1, \ldots, 32\})\ \phi_{23}(v_i) = \sum_{j=1}^{24} \alpha_{i,j} w_j$.

Par définition, l'ensemble Res π_j se déduit de l'équivalence : $\pi'_i \in$ Res $\pi_j \Leftrightarrow \alpha_{i,j} \neq 0$. □

Théorème 3.4.18. *Soient $n = 1, 2$ ou 3, $\pi \in \Pi_{\mathrm{disc}}(\mathrm{O}_{8n})$ (respectivement $\pi \in \Pi_{\mathrm{cusp}}(\mathrm{SO}_{8n+1})$) tel que π_∞ est triviale, et $\pi' \in \Pi_{\mathrm{cusp}}(\mathrm{SO}_{8n-1})$ (respectivement $\pi' \in \Pi_{\mathrm{disc}}(\mathrm{O}_{8n})$) tel que π'_∞*

est aussi triviale.

Alors $\pi' \in \mathrm{Res}\ \pi$ *si, et seulement si, il existe des multi-ensembles finis* $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3 \subset \cup_m \Pi_{\mathrm{cusp}}(\mathrm{PGL}_m)$*, et des applications* $d_1 : \Pi_1 \to \mathbb{N}^*$ *et* $d_2 : \Pi_2 \to \mathbb{N}^*$ *tels que :*

$$\psi(\pi, \mathrm{St}) = \bigoplus_{\pi_i \in \Pi_1} \pi_i[d_1(\pi_i)] \ \oplus \ \bigoplus_{\pi_j \in \Pi_2} \pi_j[d_2(\pi_j)],$$

$$\psi(\pi', \mathrm{St}) = \bigoplus_{\pi_i \in \Pi_1} \pi_i[d_1(\pi_i) + 1] \ \oplus \ \bigoplus_{\pi_j \in \Pi_2} \pi_j[d_2(\pi_j) - 1] \ \oplus \ \bigoplus_{\pi_k \in \Pi_3} \pi_k.$$

Démonstration. Le cas $n = 3$ découle directement d'une inspection des tables 3.7, 3.8 et 3.9. Le cas $n = 2$ se déduit facilement des matrices de l'opérateur T_2 sur $\mathbb{C}[X_{15}]$, $\mathbb{C}[X_{16}]$ et $\mathbb{C}[X_{17}]$ (données dans [18, Annexe B] pour X_{15} et X_{17}, et dans [18, Ch. III, §3] pour X_{16} par exemple). Le cas $n = 1$ est évident (comme $|X_7| = |X_8| = |X_9| = 1$). □

Ce résultat valide dans ces cas particuliers la conjecture formulée par Gan–Gross–Prasad, qui conclut l'exposé [62, Classical groups, the local case]. Suivant les mêmes notations, il s'agit des cas où $n = m - 1$, avec $m \in \{8, 9, 16, 17, 24, 25\}$.

3.5 Tables de résultats.

$R(P)$	R	$R(L)$	$R(P)$	R	$R(L)$
$\mathbf{D}_{24}$	$\mathbf{D}_{24}$	$\mathbf{D}_{22} \coprod \mathbf{A}_1$	$\mathbf{A}_{11} \coprod \mathbf{D}_7 \coprod \mathbf{E}_6$	$\mathbf{E}_6$	$\mathbf{A}_{11} \coprod \mathbf{D}_7 \coprod \mathbf{A}_5$
$\mathbf{D}_{16} \coprod \mathbf{E}_8$	$\mathbf{D}_{16}$	$\mathbf{D}_{14} \coprod \mathbf{E}_8 \coprod \mathbf{A}_1$	$4\ \mathbf{E}_6$	$\mathbf{E}_6$	$3\ \mathbf{E}_6 \coprod \mathbf{A}_5$
	$\mathbf{E}_8$	$\mathbf{D}_{16} \coprod \mathbf{E}_7$	$2\ \mathbf{A}_9 \coprod \mathbf{D}_6$	$\mathbf{A}_9$	$\mathbf{A}_9 \coprod \mathbf{A}_7 \coprod \mathbf{D}_6$
$3\ \mathbf{E}_8$	$\mathbf{E}_8$	$2\ \mathbf{E}_8 \coprod \mathbf{E}_7$		$\mathbf{D}_6$	$2\ \mathbf{A}_9 \coprod \mathbf{D}_4 \coprod \mathbf{A}_1$
$\mathbf{A}_{24}$	$\mathbf{A}_{24}$	$\mathbf{A}_{22}$	$4\ \mathbf{D}_6$	$\mathbf{D}_6$	$3\ \mathbf{D}_6 \coprod \mathbf{D}_4 \coprod \mathbf{A}_1$
$2\ \mathbf{D}_{12}$	$\mathbf{D}_{12}$	$\mathbf{D}_{12} \coprod \mathbf{D}_{10} \coprod \mathbf{A}_1$	$3\ \mathbf{A}_8$	$\mathbf{A}_8$	$2\ \mathbf{A}_8 \coprod \mathbf{A}_6$
$\mathbf{A}_{17} \coprod \mathbf{E}_7$	$\mathbf{A}_{17}$	$\mathbf{A}_{15} \coprod \mathbf{E}_7$	$2\ \mathbf{A}_7 \coprod 2\ \mathbf{D}_5$	$\mathbf{A}_7$	$\mathbf{A}_7 \coprod 2\ \mathbf{D}_5 \coprod \mathbf{A}_5$
	$\mathbf{E}_7$	$\mathbf{A}_{17} \coprod \mathbf{D}_6$		$\mathbf{D}_5$	$2\ \mathbf{A}_7 \coprod \mathbf{D}_5 \coprod \mathbf{A}_3 \coprod \mathbf{A}_1$
$\mathbf{D}_{10} \coprod 2\ \mathbf{E}_7$	$\mathbf{D}_{10}$	$\mathbf{D}_8 \coprod 2\ \mathbf{E}_7 \coprod \mathbf{A}_1$	$4\ \mathbf{A}_6$	$\mathbf{A}_6$	$3\ \mathbf{A}_6 \coprod \mathbf{A}_4$
	$\mathbf{E}_7$	$\mathbf{D}_{10} \coprod \mathbf{E}_7 \coprod \mathbf{D}_6$	$4\ \mathbf{A}_5 \coprod \mathbf{D}_4$	$\mathbf{A}_5$	$3\ \mathbf{A}_5 \coprod \mathbf{D}_4 \coprod \mathbf{A}_3$
$\mathbf{A}_{15} \coprod \mathbf{D}_9$	$\mathbf{A}_{15}$	$\mathbf{A}_{13} \coprod \mathbf{D}_9$		$\mathbf{D}_4$	$4\ \mathbf{A}_5 \coprod 3\ \mathbf{A}_1$
	$\mathbf{D}_9$	$\mathbf{A}_{15} \coprod \mathbf{D}_7 \coprod \mathbf{A}_1$	$6\ \mathbf{D}_4$	$\mathbf{D}_4$	$5\ \mathbf{D}_4 \coprod 3\ \mathbf{A}_1$
$3\ \mathbf{D}_8$	$\mathbf{D}_8$	$2\ \mathbf{D}_8 \coprod \mathbf{D}_6 \coprod \mathbf{A}_1$	$6\ \mathbf{A}_4$	$\mathbf{A}_4$	$5\ \mathbf{A}_4 \coprod \mathbf{A}_2$
$2\ \mathbf{A}_{12}$	$\mathbf{A}_{12}$	$\mathbf{A}_{12} \coprod \mathbf{A}_{10}$	$8\ \mathbf{A}_3$	$\mathbf{A}_3$	$7\ \mathbf{A}_3 \coprod \mathbf{A}_1$
$\mathbf{A}_{11} \coprod \mathbf{D}_7 \coprod \mathbf{E}_6$	$\mathbf{A}_{11}$	$\mathbf{A}_9 \coprod \mathbf{D}_7 \coprod \mathbf{E}_6$	$12\ \mathbf{A}_2$	$\mathbf{A}_2$	$11\ \mathbf{A}_2$
	$\mathbf{D}_7$	$\mathbf{A}_{11} \coprod \mathbf{E}_6 \coprod \mathbf{D}_5 \coprod \mathbf{A}_1$	$24\ \mathbf{A}_1$	$\mathbf{A}_1$	$23\ \mathbf{A}_1$

TABLE 3.1 – Classes d'isomorphisme des systèmes de racines des éléments de X_{23}

i	R_i	ϕ_i	i	R_i	ϕ_i
1	$\mathbf{D}_{22} \coprod \mathbf{A}_1$	$(926, 1, 3, 18, 1, 8)$	17	$\mathbf{A}_{11} \coprod \mathbf{D}_7 \coprod \mathbf{A}_5$	$(246, 0, 7, 15, 1, 288)$
2	$\mathbf{D}_{14} \coprod \mathbf{E}_8 \coprod \mathbf{A}_1$	$(606, 1, 6, 14, 2, 8)$	18	$3\ \mathbf{E}_6 \coprod \mathbf{A}_5$	$(246, 0, 11, 9, 3, 162)$
3	$\mathbf{D}_{16} \coprod \mathbf{E}_7$	$(606, 0, 6, 15, 2, 8)$	19	$\mathbf{A}_9 \coprod \mathbf{A}_7 \coprod \mathbf{D}_6$	$(206, 0, 7, 14, 1, 320)$
4	$2\ \mathbf{E}_8 \coprod \mathbf{E}_7$	$(606, 0, 9, 11, 3, 2)$	20	$2\ \mathbf{A}_9 \coprod \mathbf{D}_4 \coprod \mathbf{A}_1$	$(206, 1, 7, 14, 1, 800)$
5	$\mathbf{A}_{22}$	$(506, 0, 2, 20, 0, 23)$	21	$3\ \mathbf{D}_6 \coprod \mathbf{D}_4 \coprod \mathbf{A}_1$	$(206, 1, 12, 6, 4, 512)$
6	$\mathbf{D}_{12} \coprod \mathbf{D}_{10} \coprod \mathbf{A}_1$	$(446, 1, 6, 14, 2, 32)$	22	$2\ \mathbf{A}_8 \coprod \mathbf{A}_6$	$(186, 0, 6, 16, 0, 567)$
7	$\mathbf{A}_{15} \coprod \mathbf{E}_7$	$(366, 0, 5, 16, 1, 32)$	23	$\mathbf{A}_7 \coprod 2\ \mathbf{D}_5 \coprod \mathbf{A}_5$	$(166, 0, 10, 10, 2, 768)$
8	$\mathbf{A}_{17} \coprod \mathbf{D}_6$	$(366, 0, 5, 17, 1, 72)$	24	$2\ \mathbf{A}_7 \coprod \mathbf{D}_5 \coprod \mathbf{A}_3 \coprod \mathbf{A}_1$	$(166, 1, 9, 12, 1, 2048)$
9	$\mathbf{D}_8 \coprod 2\ \mathbf{E}_7 \coprod \mathbf{A}_1$	$(366, 1, 9, 10, 3, 32)$	25	$3\ \mathbf{A}_6 \coprod \mathbf{A}_4$	$(146, 0, 8, 14, 0, 1715)$
10	$\mathbf{D}_{10} \coprod \mathbf{E}_7 \coprod \mathbf{D}_6$	$(366, 0, 9, 11, 3, 32)$	26	$3\ \mathbf{A}_5 \coprod \mathbf{D}_4 \coprod \mathbf{A}_3$	$(126, 0, 11, 10, 1, 3456)$
11	$\mathbf{A}_{13} \coprod \mathbf{D}_9$	$(326, 0, 5, 16, 1, 56)$	27	$4\ \mathbf{A}_5 \coprod 3\ \mathbf{A}_1$	$(126, 3, 8, 12, 0, 10368)$
12	$\mathbf{A}_{15} \coprod \mathbf{D}_7 \coprod \mathbf{A}_1$	$(326, 1, 5, 16, 1, 128)$	28	$5\ \mathbf{D}_4 \coprod 3\ \mathbf{A}_1$	$(126, 3, 15, 0, 5, 8192)$
13	$2\ \mathbf{D}_8 \coprod \mathbf{D}_6 \coprod \mathbf{A}_1$	$(286, 1, 9, 10, 3, 128)$	29	$5\ \mathbf{A}_4 \coprod \mathbf{A}_2$	$(106, 0, 12, 10, 0, 9375)$
14	$\mathbf{A}_{12} \coprod \mathbf{A}_{10}$	$(266, 0, 4, 18, 0, 143)$	30	$7\ \mathbf{A}_3 \coprod \mathbf{A}_1$	$(86, 1, 14, 7, 0, 32768)$
15	$\mathbf{A}_9 \coprod \mathbf{D}_7 \coprod \mathbf{E}_6$	$(246, 0, 8, 12, 2, 120)$	31	$11\ \mathbf{A}_2$	$(66, 0, 22, 0, 0, 177147)$
16	$\mathbf{A}_{11} \coprod \mathbf{E}_6 \coprod \mathbf{D}_5 \coprod \mathbf{A}_1$	$(246, 1, 8, 12, 2, 288)$	32	$23\ \mathbf{A}_1$	$(46, 23, 0, 0, 0, 8388608)$

TABLE 3.2 – Numérotations des systèmes de racines des éléments de X_{23}

i	R_i	ϕ_i	i	R_i	ϕ_i
1	$\mathbf{A}_1$	$(2,1,0,0,0,2)$	62	$\mathbf{A}_8 \coprod 2\ \mathbf{A}_7 \coprod \mathbf{A}_1$	$(186,1,6,16,0,1152)$
2	$\mathbf{A}_2$	$(6,0,2,0,0,3)$	63	$\mathbf{A}_9 \coprod \mathbf{D}_5 \coprod \mathbf{A}_5 \coprod \mathbf{D}_4 \coprod \mathbf{A}_1$	$(186,1,10,11,2,1920)$
3	$9\ \mathbf{A}_1$	$(18,9,0,0,0,512)$	64	$\mathbf{A}_9 \coprod \mathbf{A}_7 \coprod 2\ \mathbf{A}_4$	$(186,0,8,16,0,2000)$
4	$\mathbf{A}_2 \coprod 12\ \mathbf{A}_1$	$(30,12,2,0,0,12288)$	65	$\mathbf{E}_6 \coprod 3\ \mathbf{A}_6$	$(198,0,9,14,1,1029)$
5	$25\ \mathbf{A}_1$	$(50,25,0,0,0,33554432)$	66	$\mathbf{A}_9 \coprod \mathbf{A}_8 \coprod \mathbf{A}_5 \coprod \mathbf{A}_2$	$(198,0,8,16,0,1620)$
6	$4\ \mathbf{A}_2 \coprod 9\ \mathbf{A}_1$	$(42,9,8,0,0,41472)$	67	$3\ \mathbf{A}_8 \coprod \mathbf{A}_1$	$(218,1,6,18,0,1458)$
7	$\mathbf{A}_3 \coprod 15\ \mathbf{A}_1$	$(42,15,2,1,0,131072)$	68	$3\ \mathbf{D}_6 \coprod \mathbf{D}_4 \coprod 3\ \mathbf{A}_1$	$(210,3,12,6,4,2048)$
8	$9\ \mathbf{A}_2$	$(54,0,18,0,0,19683)$	69	$\mathbf{A}_7 \coprod \mathbf{E}_6 \coprod 2\ \mathbf{D}_5 \coprod \mathbf{A}_1$	$(210,1,11,9,3,768)$
9	$\mathbf{A}_3 \coprod 5\ \mathbf{A}_2 \coprod 6\ \mathbf{A}_1$	$(54,6,12,1,0,62208)$	70	$\mathbf{D}_7 \coprod \mathbf{A}_7 \coprod \mathbf{D}_5 \coprod \mathbf{A}_5$	$(210,0,10,12,2,768)$
10	$12\ \mathbf{A}_2 \coprod \mathbf{A}_1$	$(74,1,24,0,0,1062882)$	71	$\mathbf{D}_7 \coprod 2\ \mathbf{A}_7 \coprod \mathbf{A}_3 \coprod \mathbf{A}_1$	$(210,1,9,14,1,2048)$
11	$3\ \mathbf{A}_3 \coprod 4\ \mathbf{A}_2 \coprod 3\ \mathbf{A}_1$	$(66,3,14,3,0,41472)$	72	$\mathbf{A}_9 \coprod \mathbf{A}_7 \coprod \mathbf{D}_6 \coprod 2\ \mathbf{A}_1$	$(210,2,7,14,1,1280)$
12	$4\ \mathbf{A}_3 \coprod 9\ \mathbf{A}_1$	$(66,9,8,4,0,131072)$	73	$\mathbf{A}_{10} \coprod \mathbf{A}_7 \coprod \mathbf{A}_6 \coprod \mathbf{A}_1$	$(210,1,6,17,0,1232)$
13	$\mathbf{A}_{17} \coprod \mathbf{E}_7 \coprod \mathbf{A}_1$	$(434,1,5,18,1,72)$	74	$2\ \mathbf{A}_8 \coprod \mathbf{E}_6 \coprod \mathbf{A}_2$	$(222,0,9,14,1,729)$
14	$\mathbf{D}_4 \coprod 21\ \mathbf{A}_1$	$(66,21,3,0,1,8388608)$	75	$\mathbf{A}_{10} \coprod \mathbf{A}_8 \coprod \mathbf{D}_5$	$(222,0,7,15,1,396)$
15	$6\ \mathbf{A}_3 \coprod \mathbf{A}_2$	$(78,0,14,6,0,12288)$	76	$2\ \mathbf{A}_9 \coprod \mathbf{D}_6 \coprod \mathbf{A}_1$	$(242,1,7,16,1,800)$
16	$\mathbf{A}_4 \coprod 3\ \mathbf{A}_3 \coprod 3\ \mathbf{A}_2 \coprod 2\ \mathbf{A}_1$	$(78,2,14,5,0,34560)$	77	$\mathbf{A}_{11} \coprod \mathbf{D}_6 \coprod \mathbf{A}_5 \coprod \mathbf{A}_3$	$(234,0,9,15,1,1152)$
17	$\mathbf{D}_4 \coprod 9\ \mathbf{A}_2$	$(78,0,21,0,1,78732)$	78	$\mathbf{A}_{11} \coprod \mathbf{A}_8 \coprod \mathbf{A}_5$	$(234,0,6,18,0,648)$
18	$8\ \mathbf{A}_3 \coprod \mathbf{A}_1$	$(98,1,16,8,0,131072)$	79	$4\ \mathbf{D}_6 \coprod \mathbf{A}_1$	$(242,1,12,8,4,512)$
19	$2\ \mathbf{A}_4 \coprod 4\ \mathbf{A}_3 \coprod \mathbf{A}_1$	$(90,1,12,8,0,12800)$	80	$\mathbf{A}_9 \coprod \mathbf{E}_6 \coprod \mathbf{D}_6 \coprod \mathbf{A}_3$	$(234,0,10,12,2,480)$
20	$3\ \mathbf{A}_4 \coprod \mathbf{A}_3 \coprod 2\ \mathbf{A}_2 \coprod 3\ \mathbf{A}_1$	$(90,3,12,7,0,36000)$	81	$\mathbf{D}_7 \coprod 2\ \mathbf{E}_6 \coprod \mathbf{A}_5$	$(258,0,11,10,3,216)$
21	$\mathbf{D}_4 \coprod 5\ \mathbf{A}_3 \coprod 3\ \mathbf{A}_1$	$(90,3,13,5,1,32768)$	82	$\mathbf{D}_8 \coprod 2\ \mathbf{D}_6 \coprod \mathbf{D}_4 \coprod \mathbf{A}_1$	$(258,1,12,8,4,512)$
22	$\mathbf{A}_5 \coprod 3\ \mathbf{A}_3 \coprod 4\ \mathbf{A}_2$	$(90,0,16,6,0,31104)$	83	$\mathbf{A}_9 \coprod 2\ \mathbf{D}_7$	$(258,0,8,13,2,160)$
23	$\mathbf{A}_5 \coprod 4\ \mathbf{A}_3 \coprod 6\ \mathbf{A}_1$	$(90,6,10,7,0,98304)$	84	$\mathbf{A}_9 \coprod \mathbf{D}_8 \coprod \mathbf{A}_7$	$(258,0,7,16,1,320)$
24	$\mathbf{D}_4 \coprod 3\ \mathbf{A}_4 \coprod 3\ \mathbf{A}_2$	$(102,0,15,6,1,13500)$	85	$\mathbf{A}_{11} \coprod \mathbf{D}_7 \coprod \mathbf{D}_5 \coprod \mathbf{A}_1$	$(258,1,8,13,2,384)$
25	$\mathbf{A}_5 \coprod 2\ \mathbf{A}_4 \coprod 2\ \mathbf{A}_3 \coprod \mathbf{A}_2 \coprod \mathbf{A}_1$	$(102,1,12,9,0,14400)$	86	$2\ \mathbf{A}_{11} \coprod \mathbf{A}_2$	$(270,0,6,18,0,432)$
26	$6\ \mathbf{A}_4 \coprod \mathbf{A}_1$	$(122,1,12,12,0,31250)$	87	$\mathbf{A}_{12} \coprod \mathbf{E}_6 \coprod \mathbf{A}_6$	$(270,0,7,16,1,273)$
27	$4\ \mathbf{D}_4 \coprod 9\ \mathbf{A}_1$	$(114,9,12,0,4,131072)$	88	$\mathbf{A}_{11} \coprod \mathbf{D}_7 \coprod \mathbf{E}_6 \coprod \mathbf{A}_1$	$(290,1,8,14,2,288)$
28	$\mathbf{A}_5 \coprod 2\ \mathbf{D}_4 \coprod 3\ \mathbf{A}_3$	$(114,0,14,6,2,6144)$	89	$\mathbf{A}_{13} \coprod \mathbf{D}_6 \coprod \mathbf{D}_5$	$(282,0,8,14,2,224)$
29	$2\ \mathbf{A}_5 \coprod 2\ \mathbf{A}_4 \coprod \mathbf{A}_3 \coprod \mathbf{A}_1$	$(114,1,10,11,0,7200)$	90	$4\ \mathbf{E}_6 \coprod \mathbf{A}_1$	$(290,1,12,8,4,162)$
30	$2\ \mathbf{A}_5 \coprod \mathbf{D}_4 \coprod 2\ \mathbf{A}_3 \coprod 3\ \mathbf{A}_1$	$(114,3,11,8,1,18432)$	91	$\mathbf{A}_{13} \coprod \mathbf{A}_{10} \coprod \mathbf{A}_1$	$(294,1,4,19,0,308)$
31	$3\ \mathbf{A}_5 \coprod 4\ \mathbf{A}_2$	$(114,0,14,9,0,17496)$	92	$2\ \mathbf{A}_{12} \coprod \mathbf{A}_1$	$(314,1,4,20,0,338)$
32	$\mathbf{D}_5 \coprod 6\ \mathbf{A}_3 \coprod \mathbf{A}_1$	$(114,1,15,7,1,32768)$	93	$\mathbf{E}_7 \coprod 3\ \mathbf{D}_6$	$(306,0,12,9,4,128)$
33	$\mathbf{A}_6 \coprod 2\ \mathbf{A}_4 \coprod 2\ \mathbf{A}_3 \coprod \mathbf{A}_2 \coprod \mathbf{A}_1$	$(114,1,12,10,0,16800)$	94	$2\ \mathbf{A}_9 \coprod \mathbf{E}_7$	$(306,0,7,17,1,200)$
34	$4\ \mathbf{A}_5 \coprod \mathbf{A}_2$	$(126,0,10,12,0,3888)$	95	$\mathbf{D}_9 \coprod \mathbf{A}_9 \coprod \mathbf{E}_6$	$(306,0,8,14,2,120)$
35	$\mathbf{D}_5 \coprod 4\ \mathbf{A}_4 \coprod \mathbf{A}_2$	$(126,0,13,9,1,7500)$	96	$\mathbf{A}_{11} \coprod \mathbf{D}_9 \coprod \mathbf{A}_5$	$(306,0,7,17,1,288)$
36	$\mathbf{A}_6 \coprod \mathbf{D}_4 \coprod 3\ \mathbf{A}_4$	$(126,0,11,10,1,3500)$	97	$\mathbf{A}_{14} \coprod \mathbf{A}_9 \coprod \mathbf{A}_2$	$(306,0,6,19,0,450)$
37	$\mathbf{A}_6 \coprod 2\ \mathbf{A}_5 \coprod \mathbf{A}_3 \coprod 2\ \mathbf{A}_2$	$(126,0,12,11,0,9072)$	98	$\mathbf{A}_{11} \coprod \mathbf{E}_7 \coprod \mathbf{E}_6$	$(330,0,8,14,2,72)$
38	$4\ \mathbf{A}_5 \coprod \mathbf{D}_4 \coprod \mathbf{A}_1$	$(146,1,11,12,1,10368)$	99	$3\ \mathbf{D}_8 \coprod \mathbf{A}_1$	$(338,1,9,12,3,128)$
39	$\mathbf{D}_5 \coprod 2\ \mathbf{A}_5 \coprod \mathbf{D}_4 \coprod \mathbf{A}_3 \coprod \mathbf{A}_1$	$(138,1,12,8,2,4608)$	100	$2\ \mathbf{D}_8 \coprod \mathbf{E}_7 \coprod 2\ \mathbf{A}_1$	$(354,2,9,11,3,128)$
40	$\mathbf{D}_5 \coprod 3\ \mathbf{A}_5 \coprod 4\ \mathbf{A}_1$	$(138,4,9,10,1,13824)$	101	$\mathbf{D}_{10} \coprod \mathbf{D}_8 \coprod \mathbf{D}_6 \coprod \mathbf{A}_1$	$(354,1,9,12,3,128)$
41	$6\ \mathbf{D}_4 \coprod \mathbf{A}_1$	$(146,1,18,0,6,8192)$	102	$\mathbf{A}_{15} \coprod \mathbf{D}_8 \coprod \mathbf{A}_1$	$(354,1,5,17,1,128)$
42	$2\ \mathbf{A}_6 \coprod \mathbf{A}_5 \coprod \mathbf{A}_4 \coprod 2\ \mathbf{A}_1$	$(138,2,8,13,0,5880)$	103	$\mathbf{A}_{15} \coprod \mathbf{D}_9 \coprod \mathbf{A}_1$	$(386,1,5,18,1,128)$
43	$\mathbf{A}_7 \coprod \mathbf{A}_5 \coprod 2\ \mathbf{A}_4 \coprod \mathbf{A}_3$	$(138,0,10,13,0,4800)$	104	$\mathbf{A}_{15} \coprod \mathbf{E}_7 \coprod \mathbf{A}_3$	$(378,0,7,17,1,128)$
44	$\mathbf{A}_7 \coprod \mathbf{A}_5 \coprod \mathbf{D}_4 \coprod 2\ \mathbf{A}_3 \coprod 2\ \mathbf{A}_1$	$(138,2,11,10,1,12288)$	105	$\mathbf{A}_{17} \coprod \mathbf{A}_8$	$(378,0,4,21,0,162)$
45	$2\ \mathbf{A}_6 \coprod \mathbf{D}_5 \coprod \mathbf{A}_4 \coprod \mathbf{A}_2$	$(150,0,11,11,1,2940)$	106	$3\ \mathbf{E}_7 \coprod \mathbf{D}_4$	$(402,0,12,9,4,32)$
46	$3\ \mathbf{A}_6 \coprod \mathbf{D}_4$	$(150,0,9,12,1,1372)$	107	$\mathbf{A}_{13} \coprod \mathbf{D}_{11}$	$(402,0,5,18,1,56)$
47	$\mathbf{A}_7 \coprod \mathbf{A}_6 \coprod \mathbf{A}_5 \coprod \mathbf{A}_4 \coprod \mathbf{A}_1$	$(150,1,8,14,0,3360)$	108	$\mathbf{A}_{18} \coprod \mathbf{E}_6$	$(414,0,5,18,1,57)$
48	$4\ \mathbf{A}_6 \coprod \mathbf{A}_1$	$(170,1,8,16,0,4802)$	109	$\mathbf{A}_4 \coprod 6\ \mathbf{A}_2 \coprod 5\ \mathbf{A}_1$	$(66,5,14,2,0,116640)$
49	$3\ \mathbf{D}_5 \coprod \mathbf{A}_5 \coprod \mathbf{A}_3$	$(162,0,13,7,3,1536)$	110	$\mathbf{D}_{10} \coprod 2\ \mathbf{E}_7 \coprod \mathbf{A}_1$	$(434,1,9,12,3,32)$
50	$\mathbf{D}_6 \coprod 4\ \mathbf{D}_4 \coprod 3\ \mathbf{A}_1$	$(162,3,15,2,5,8192)$	111	$\mathbf{D}_{12} \coprod \mathbf{E}_7 \coprod \mathbf{D}_6$	$(450,0,9,13,3,32)$
51	$\mathbf{D}_6 \coprod 3\ \mathbf{A}_5 \coprod \mathbf{A}_3$	$(162,0,11,12,1,3456)$	112	$2\ \mathbf{D}_{12} \coprod \mathbf{A}_1$	$(530,1,6,16,2,32)$
52	$\mathbf{A}_7 \coprod 2\ \mathbf{D}_5 \coprod 2\ \mathbf{A}_3 \coprod \mathbf{A}_1$	$(162,1,12,9,2,4096)$	113	$\mathbf{D}_{10} \coprod \mathbf{E}_8 \coprod \mathbf{E}_7$	$(546,0,9,13,3,8)$
53	$2\ \mathbf{A}_7 \coprod 2\ \mathbf{D}_4 \coprod \mathbf{A}_1$	$(162,1,10,10,2,2048)$	114	$\mathbf{D}_{14} \coprod \mathbf{D}_{10} \coprod \mathbf{A}_1$	$(546,1,6,16,2,32)$
54	$\mathbf{A}_8 \coprod 3\ \mathbf{A}_5$	$(162,0,8,15,0,1944)$	115	$\mathbf{A}_{17} \coprod \mathbf{E}_8$	$(546,0,5,19,1,18)$
55	$\mathbf{A}_8 \coprod \mathbf{A}_6 \coprod \mathbf{A}_5 \coprod \mathbf{A}_3 \coprod \mathbf{A}_2$	$(162,0,10,14,0,4536)$	116	$\mathbf{A}_{23} \coprod \mathbf{A}_2$	$(558,0,4,21,0,72)$
56	$3\ \mathbf{A}_7 \coprod \mathbf{A}_2$	$(174,0,8,15,0,1536)$	117	$\mathbf{A}_{24} \coprod \mathbf{A}_1$	$(602,1,2,22,0,50)$
57	$\mathbf{A}_8 \coprod \mathbf{A}_6 \coprod \mathbf{D}_5 \coprod \mathbf{A}_4$	$(174,0,9,13,1,1260)$	118	$\mathbf{D}_{16} \coprod \mathbf{E}_8 \coprod \mathbf{A}_1$	$(722,1,6,16,2,8)$
58	$2\ \mathbf{A}_7 \coprod 2\ \mathbf{D}_5 \coprod \mathbf{A}_1$	$(194,1,10,12,2,2048)$	119	$3\ \mathbf{E}_8 \coprod \mathbf{A}_1$	$(722,1,9,12,3,2)$
59	$\mathbf{E}_6 \coprod 3\ \mathbf{A}_5 \coprod \mathbf{D}_4$	$(186,0,12,11,2,2592)$	120	$\mathbf{D}_{18} \coprod \mathbf{E}_7$	$(738,0,6,17,2,8)$
60	$\mathbf{A}_7 \coprod \mathbf{D}_6 \coprod \mathbf{D}_5 \coprod \mathbf{A}_5$	$(186,0,10,11,2,768)$	121	$\mathbf{D}_{24} \coprod \mathbf{A}_1$	$(1106,1,3,20,1,8)$
61	$2\ \mathbf{A}_7 \coprod \mathbf{D}_6 \coprod \mathbf{A}_3 \coprod \mathbf{A}_1$	$(186,1,9,13,1,2048)$			

TABLE 3.3 – Numérotations des systèmes de racines des éléments de X_{25}

i	ψ_i	λ_i
1	$[22]$	4194303
2	$\Delta_{21} \oplus [20]$	2096862
3	$\Delta_{21} \oplus \Delta_{19} \oplus [18]$	1049196
4	$\Delta_{19}[3] \oplus [16]$	527472
5	$\Delta_{21} \oplus \Delta_{19} \oplus \Delta_{17} \oplus [16]$	522792
6	$\Delta_{19}[3] \oplus \Delta_{15} \oplus [14]$	267048
7	$\Delta_{21} \oplus \Delta_{19} \oplus \Delta_{17} \oplus \Delta_{15} \oplus [14]$	262368
8	$\Delta_{21} \oplus \Delta_{17}[3] \oplus [14]$	254448
9	$\Delta_{21} \oplus \Delta_{19} \oplus \Delta_{15}[3] \oplus [12]$	137712
10	$\Delta_{21,13} \oplus \Delta_{19} \oplus \Delta_{17} \oplus \Delta_{15} \oplus [12]$	131328
11	$\Delta_{21,13} \oplus \Delta_{17}[3] \oplus [12]$	123408
12	$\Delta_{17}[5] \oplus [12]$	114672
13	$\Delta_{21} \oplus \Delta_{15}[5] \oplus [10]$	78576
14	$\Delta_{21} \oplus \Delta_{19} \oplus \Delta_{15}[3] \oplus \Delta_{11} \oplus [10]$	71376
15	$\Delta_{21,13} \oplus \Delta_{19} \oplus \Delta_{17} \oplus \Delta_{15} \oplus \Delta_{11} \oplus [10]$	64992
16	$\Delta_{15}[7] \oplus [8]$	60072
17	$\Delta_{21,13} \oplus \Delta_{17}[3] \oplus \Delta_{11} \oplus [10]$	57072
18	$\Delta_{17}[5] \oplus \Delta_{11} \oplus [10]$	48336
19	$\Delta_{21,9} \oplus \Delta_{15}[5] \oplus [8]$	47376
20	$\Delta_{21,9} \oplus \Delta_{19} \oplus \Delta_{15}[3] \oplus \Delta_{11} \oplus [8]$	40176
21	$\Delta_{19}[3] \oplus \Delta_{15} \oplus \Delta_{11}[3] \oplus [8]$	34872
22	$\Delta_{21} \oplus \Delta_{19} \oplus \Delta_{17} \oplus \Delta_{15} \oplus \Delta_{11}[3] \oplus [8]$	30192
23	$\Delta_{21,9} \oplus \Delta_{19,7} \oplus \Delta_{15}[3] \oplus \Delta_{11} \oplus [6]$	22752
24	$\Delta_{21} \oplus \Delta_{17}[3] \oplus \Delta_{11}[3] \oplus [8]$	22272
25	$\Delta_{19}[3] \oplus \Delta_{11}[5] \oplus [6]$	13368
26	$\Delta_{21} \oplus \Delta_{19,7} \oplus \Delta_{17} \oplus \Delta_{15} \oplus \Delta_{11}[3] \oplus [6]$	12768
27	$\Delta_{21} \oplus \Delta_{19} \oplus \Delta_{17} \oplus \Delta_{11}[5] \oplus [6]$	8688
28	$\Delta_{21,5} \oplus \Delta_{19,7} \oplus \Delta_{17} \oplus \Delta_{15} \oplus \Delta_{11}[3] \oplus [4]$	2928
29	$\Delta_{21,5} \oplus \Delta_{19} \oplus \Delta_{17} \oplus \Delta_{11}[5] \oplus [4]$	-1152
30	$\Delta_{21} \oplus \Delta_{19} \oplus \Delta_{11}[7] \oplus [4]$	-3888
31	$\Delta_{21} \oplus \Delta_{11}[9] \oplus [2]$	-21744
32	$\Delta_{11}[11]$	-49128

TABLE 3.4 – Paramètres standards $\psi_i = \psi(\pi_i, \mathrm{St})$ des 32 représentations π_i dans $\Pi_{\mathrm{cusp}}(\mathrm{SO}_{23})$ telles que π_∞ est triviale, rangées par valeurs propres associées pour T_2 décroissantes.

i	ψ_i	μ_i
1	$[24]$	16777215
2	$\Delta_{21}[3] \oplus [18]$	2095128
3	$\Delta_{21}[3] \oplus \Delta_{17} \oplus [16]$	1042320
4	$\Delta_{19}[5] \oplus [14]$	538392
5	$\Delta_{21}[3] \oplus \Delta_{17} \oplus \Delta_{15} \oplus [14]$	521472
6	$\Delta_{21}[3] \oplus \Delta_{15}[3] \oplus [12]$	272160
7	$\Delta_{23,13} \oplus \Delta_{19}[3] \oplus \Delta_{15} \oplus [12]$	271440
8	$\Delta_{23,13} \oplus \Delta_{21} \oplus \Delta_{19} \oplus \Delta_{17} \oplus \Delta_{15} \oplus [12]$	262080
9	$\Delta_{23,13} \oplus \Delta_{21} \oplus \Delta_{17}[3] \oplus [12]$	246240
10	$\Delta_{15}[9] \oplus [6]$	142632
11	$\Delta_{23,19,11} \oplus \Delta_{21} \oplus \Delta_{15}[3] \oplus [10]$	142368
12	$\Delta_{21}[3] \oplus \Delta_{15}[3] \oplus \Delta_{11} \oplus [10]$	139488
13	$\Delta_{23,13} \oplus \Delta_{19}[3] \oplus \Delta_{15} \oplus \Delta_{11} \oplus [10]$	138768
14	$\Delta_{23,19,11} \oplus \Delta_{21,13} \oplus \Delta_{17} \oplus \Delta_{15} \oplus [10]$	129600
15	$\Delta_{23,13} \oplus \Delta_{21} \oplus \Delta_{19} \oplus \Delta_{17} \oplus \Delta_{15} \oplus \Delta_{11} \oplus [10]$	129408
16	$\Delta_{21,13}[3] \oplus \Delta_{17} \oplus [10]$	125040
17	$\Delta_{23,13} \oplus \Delta_{21} \oplus \Delta_{17}[3] \oplus \Delta_{11} \oplus [10]$	113568
18	$\Delta_{23,7} \oplus \Delta_{15}[7] \oplus [6]$	88800
19	$\Delta_{23,9} \oplus \Delta_{21} \oplus \Delta_{15}[5] \oplus [8]$	88368
20	$\Delta_{23,19,11} \oplus \Delta_{21,9} \oplus \Delta_{15}[3] \oplus [8]$	79968
21	$\Delta_{19}[5] \oplus \Delta_{11}[3] \oplus [8]$	74040
22	$\Delta_{23,9} \oplus \Delta_{21} \oplus \Delta_{19} \oplus \Delta_{15}[3] \oplus \Delta_{11} \oplus [8]$	73968
23	$\Delta_{23,17,9} \oplus \Delta_{21,13} \oplus \Delta_{19} \oplus \Delta_{15} \oplus \Delta_{11} \oplus [8]$	70128
24	$\Delta_{23,13} \oplus \Delta_{21,9} \oplus \Delta_{19} \oplus \Delta_{17} \oplus \Delta_{15} \oplus \Delta_{11} \oplus [8]$	67008
25	$\Delta_{17}[7] \oplus [10]$	63888
26	$\Delta_{23,7} \oplus \Delta_{21,9} \oplus \Delta_{15}[5] \oplus [6]$	63408
27	$\Delta_{23,9} \oplus \Delta_{21,13} \oplus \Delta_{19} \oplus \Delta_{17} \oplus \Delta_{15} \oplus \Delta_{11} \oplus [8]$	61200
28	$\Delta_{21}[3] \oplus \Delta_{17} \oplus \Delta_{15} \oplus \Delta_{11}[3] \oplus [8]$	57120
29	$\Delta_{21,9}[3] \oplus \Delta_{15}[3] \oplus [6]$	53760
30	$\Delta_{23,13} \oplus \Delta_{21,9} \oplus \Delta_{17}[3] \oplus \Delta_{11} \oplus [8]$	51168
31	$\Delta_{23,7} \oplus \Delta_{21,9} \oplus \Delta_{19} \oplus \Delta_{15}[3] \oplus \Delta_{11} \oplus [6]$	49008
32	$\Delta_{23,9} \oplus \Delta_{21,13} \oplus \Delta_{17}[3] \oplus \Delta_{11} \oplus [8]$	45360
33	$\Delta_{23,9} \oplus \Delta_{21} \oplus \Delta_{19,7} \oplus \Delta_{15}[3] \oplus \Delta_{11} \oplus [6]$	39120
34	$\Delta_{23,7} \oplus \Delta_{19}[3] \oplus \Delta_{15} \oplus \Delta_{11}[3] \oplus [6]$	38400
35	$\Delta_{23,17,9} \oplus \Delta_{21,13} \oplus \Delta_{19,7} \oplus \Delta_{15} \oplus \Delta_{11} \oplus [6]$	35280
36	$\Delta_{23,15,7} \oplus \Delta_{19}[3] \oplus \Delta_{11}[3] \oplus [6]$	32544
37	$\Delta_{23,13} \oplus \Delta_{21,9} \oplus \Delta_{19,7} \oplus \Delta_{17} \oplus \Delta_{15} \oplus \Delta_{11} \oplus [6]$	32160
38	$\Delta_{23,7} \oplus \Delta_{21} \oplus \Delta_{19} \oplus \Delta_{17} \oplus \Delta_{15} \oplus \Delta_{11}[3] \oplus [6]$	29040
39	$\Delta_{23,9} \oplus \Delta_{17}[5] \oplus \Delta_{11} \oplus [8]$	27888
40	$\Delta_{23,9} \oplus \Delta_{21,13} \oplus \Delta_{19,7} \oplus \Delta_{17} \oplus \Delta_{15} \oplus \Delta_{11} \oplus [6]$	26352
41	$\Delta_{23,15,7} \oplus \Delta_{21} \oplus \Delta_{19} \oplus \Delta_{17} \oplus \Delta_{11}[3] \oplus [6]$	23184
42	$\Delta_{23,9} \oplus \Delta_{21,5} \oplus \Delta_{19,7} \oplus \Delta_{15}[3] \oplus \Delta_{11} \oplus [4]$	19440
43	$\Delta_{23,13} \oplus \Delta_{19,7}[3] \oplus \Delta_{15} \oplus \Delta_{11} \oplus [4]$	16800
44	$\Delta_{23,13,5} \oplus \Delta_{21,9} \oplus \Delta_{19,7} \oplus \Delta_{17} \oplus \Delta_{15} \oplus \Delta_{11} \oplus [4]$	15744
45	$\Delta_{23,17,5} \oplus \Delta_{21} \oplus \Delta_{19,7} \oplus \Delta_{15} \oplus \Delta_{11}[3] \oplus [4]$	14784
46	$\Delta_{21}[3] \oplus \Delta_{17} \oplus \Delta_{11}[5] \oplus [6]$	14112
47	$\Delta_{23,7} \oplus \Delta_{21} \oplus \Delta_{17}[3] \oplus \Delta_{11}[3] \oplus [6]$	13200
48	$\Delta_{23,7} \oplus \Delta_{21,5} \oplus \Delta_{19} \oplus \Delta_{17} \oplus \Delta_{15} \oplus \Delta_{11}[3] \oplus [4]$	9360
49	$\Delta_{23,17,5} \oplus \Delta_{21} \oplus \Delta_{19} \oplus \Delta_{11}[5] \oplus [4]$	6624
50	$\Delta_{23,15,7} \oplus \Delta_{21,5} \oplus \Delta_{19} \oplus \Delta_{17} \oplus \Delta_{11}[3] \oplus [4]$	3504
51	$\Delta_{23,7} \oplus \Delta_{21,5} \oplus \Delta_{17}[3] \oplus \Delta_{11}[3] \oplus [4]$	-6480
52	$\Delta_{23,15,3} \oplus \Delta_{21,5} \oplus \Delta_{19,7} \oplus \Delta_{17} \oplus \Delta_{11}[3] \oplus [2]$	-10176
53	$\Delta_{21}[3] \oplus \Delta_{11}[7] \oplus [4]$	-11040
54	$\Delta_{21,5}[3] \oplus \Delta_{17} \oplus \Delta_{15} \oplus \Delta_{11}[3] \oplus [2]$	-11760
55	$\Delta_{23,19,3} \oplus \Delta_{21,5} \oplus \Delta_{17} \oplus \Delta_{11}[5] \oplus [2]$	-13440
56	$\Delta_{23,19,3} \oplus \Delta_{21} \oplus \Delta_{11}[7] \oplus [2]$	-18912
57	$\mathrm{Sym}^2\Delta_{11}[2] \oplus \Delta_{11}[9]$	-53472

TABLE 3.5 – Paramètres standards $\psi_i = \psi(\pi_i, \mathrm{St})$ des 57 représentations π_i dans $\Pi_{\mathrm{cusp}}(\mathrm{SO}_{25})$ telles que π_∞ est triviale pour lesquelles les valeurs propres associées pour T_2 sont entières, rangées par valeurs propres associées pour T_2 décroissantes.

i	$\psi_i,\ \psi_{i+1}$	$\mu_i,\ \mu_{i+1}$
58	$\Delta_{23}^2 \oplus [22]$	$8389146 \pm 12\sqrt{144169}$
60	$\Delta_{23}^2 \oplus \Delta_{21} \oplus [20]$	$4194264 \pm 12\sqrt{144169}$
62	$\Delta_{23}^2 \oplus \Delta_{21} \oplus \Delta_{19} \oplus [18]$	$2098932 \pm 12\sqrt{144169}$
64	$\Delta_{23}^2 \oplus \Delta_{19}[3] \oplus [16]$	$1055484 \pm 12\sqrt{144169}$
66	$\Delta_{23}^2 \oplus \Delta_{21} \oplus \Delta_{19} \oplus \Delta_{17} \oplus [16]$	$1046124 \pm 12\sqrt{144169}$
68	$\Delta_{23}^2 \oplus \Delta_{19}[3] \oplus \Delta_{15} \oplus [14]$	$534636 \pm 12\sqrt{144169}$
70	$\Delta_{23}^2 \oplus \Delta_{21} \oplus \Delta_{19} \oplus \Delta_{17} \oplus \Delta_{15} \oplus [14]$	$525276 \pm 12\sqrt{144169}$
72	$\Delta_{23}^2 \oplus \Delta_{21} \oplus \Delta_{17}[3] \oplus [14]$	$509436 \pm 12\sqrt{144169}$
74	$\Delta_{23}^2 \oplus \Delta_{21} \oplus \Delta_{19} \oplus \Delta_{15}[3] \oplus [12]$	$275964 \pm 12\sqrt{144169}$
76	$\Delta_{23}^2 \oplus \Delta_{21,13} \oplus \Delta_{19} \oplus \Delta_{17} \oplus \Delta_{15} \oplus [12]$	$263196 \pm 12\sqrt{144169}$
78	$\Delta_{23}^2 \oplus \Delta_{21,13} \oplus \Delta_{17}[3] \oplus [12]$	$247356 \pm 12\sqrt{144169}$
80	$\Delta_{23}^2 \oplus \Delta_{17}[5] \oplus [12]$	$229884 \pm 12\sqrt{144169}$
82	$\Delta_{23}^2 \oplus \Delta_{21} \oplus \Delta_{15}[5] \oplus [10]$	$157692 \pm 12\sqrt{144169}$
84	$\Delta_{23}^2 \oplus \Delta_{21} \oplus \Delta_{19} \oplus \Delta_{15}[3] \oplus \Delta_{11} \oplus [10]$	$143292 \pm 12\sqrt{144169}$
86	$\Delta_{23}^2 \oplus \Delta_{21,13} \oplus \Delta_{19} \oplus \Delta_{17} \oplus \Delta_{15} \oplus \Delta_{11} \oplus [10]$	$130524 \pm 12\sqrt{144169}$
88	$\Delta_{23}^2 \oplus \Delta_{15}[7] \oplus [8]$	$120684 \pm 12\sqrt{144169}$
90	$\Delta_{23}^2 \oplus \Delta_{21,13} \oplus \Delta_{17}[3] \oplus \Delta_{11} \oplus [10]$	$114684 \pm 12\sqrt{144169}$
92	$\Delta_{23}^2 \oplus \Delta_{17}[5] \oplus \Delta_{11} \oplus [10]$	$97212 \pm 12\sqrt{144169}$
94	$\Delta_{23}^2 \oplus \Delta_{21,9} \oplus \Delta_{15}[5] \oplus [8]$	$95292 \pm 12\sqrt{144169}$
96	$\Delta_{23}^2 \oplus \Delta_{21,9} \oplus \Delta_{19} \oplus \Delta_{15}[3] \oplus \Delta_{11} \oplus [8]$	$80892 \pm 12\sqrt{144169}$
98	$\Delta_{23}^2 \oplus \Delta_{19}[3] \oplus \Delta_{15} \oplus \Delta_{11}[3] \oplus [8]$	$70284 \pm 12\sqrt{144169}$
100	$\Delta_{23}^2 \oplus \Delta_{21} \oplus \Delta_{19} \oplus \Delta_{17} \oplus \Delta_{15} \oplus \Delta_{11}[3] \oplus [8]$	$60924 \pm 12\sqrt{144169}$
102	$\Delta_{23}^2 \oplus \Delta_{21,9} \oplus \Delta_{19,7} \oplus \Delta_{15}[3] \oplus \Delta_{11} \oplus [6]$	$46044 \pm 12\sqrt{144169}$
104	$\Delta_{23}^2 \oplus \Delta_{21} \oplus \Delta_{17}[3] \oplus \Delta_{11}[3] \oplus [8]$	$45084 \pm 12\sqrt{144169}$
106	$\Delta_{23}^2 \oplus \Delta_{19}[3] \oplus \Delta_{11}[5] \oplus [6]$	$27276 \pm 12\sqrt{144169}$
108	$\Delta_{23}^2 \oplus \Delta_{21} \oplus \Delta_{19,7} \oplus \Delta_{17} \oplus \Delta_{15} \oplus \Delta_{11}[3] \oplus [6]$	$26076 \pm 12\sqrt{144169}$
110	$\Delta_{23}^2 \oplus \Delta_{21} \oplus \Delta_{19} \oplus \Delta_{17} \oplus \Delta_{11}[5] \oplus [6]$	$17916 \pm 12\sqrt{144169}$
112	$\Delta_{23}^2 \oplus \Delta_{21,5} \oplus \Delta_{19,7} \oplus \Delta_{17} \oplus \Delta_{15} \oplus \Delta_{11}[3] \oplus [4]$	$6396 \pm 12\sqrt{144169}$
114	$\Delta_{23}^2 \oplus \Delta_{21,5} \oplus \Delta_{19} \oplus \Delta_{17} \oplus \Delta_{11}[5] \oplus [4]$	$-1764 \pm 12\sqrt{144169}$
116	$\Delta_{23}^2 \oplus \Delta_{21} \oplus \Delta_{19} \oplus \Delta_{11}[7] \oplus [4]$	$-7236 \pm 12\sqrt{144169}$
118	$\Delta_{23}^2 \oplus \Delta_{21} \oplus \Delta_{11}[9] \oplus [2]$	$-42948 \pm 12\sqrt{144169}$
120	$\Delta_{23}^2 \oplus \Delta_{11}[11]$	$-97716 \pm 12\sqrt{144169}$

TABLE 3.6 – Paramètres standards $\psi_i = \psi(\pi_i, \mathrm{St})$ des 64 représentations π_i dans $\Pi_{\mathrm{cusp}}(\mathrm{SO}_{25})$ telles que π_∞ est triviale pour lesquelles les valeurs propres associées pour T_2 ne sont pas entières, rangées par valeurs propres associées pour T_2 décroissantes.

$\psi(\pi, \mathrm{St})$	$\psi(\pi', \mathrm{St})$
$[23] \oplus [1]$	$[22]$
$\mathrm{Sym}^2\Delta_{11} \oplus [21]$	$[22],\ \Delta_{21} \oplus [20]$
$\Delta_{21}[2] \oplus [1] \oplus [19]$	$\Delta_{21} \oplus [20],\ \Delta_{21} \oplus \Delta_{19} \oplus [18]$
$\mathrm{Sym}^2\Delta_{11} \oplus \Delta_{19}[2] \oplus [17]$	$\Delta_{21} \oplus \Delta_{19} \oplus [18],\ \Delta_{19}[3] \oplus [16],\ \Delta_{21} \oplus \Delta_{19} \oplus \Delta_{17} \oplus [16]$
$\Delta_{19}[4] \oplus [1] \oplus [15]$	$\Delta_{19}[3] \oplus [16],\ \Delta_{19}[3] \oplus \Delta_{15} \oplus [14]$
$\Delta_{21}[2] \oplus \Delta_{17}[2] \oplus [1] \oplus [15]$	$\Delta_{21} \oplus \Delta_{19} \oplus \Delta_{17} \oplus [16],\ \Delta_{21} \oplus \Delta_{19} \oplus \Delta_{17} \oplus \Delta_{15} \oplus [14],$ $\Delta_{21} \oplus \Delta_{17}[3] \oplus [14]$
$\mathrm{Sym}^2\Delta_{11} \oplus \Delta_{19}[2] \oplus \Delta_{15}[2] \oplus [13]$	$\Delta_{19}[3] \oplus \Delta_{15} \oplus [14],\ \Delta_{21} \oplus \Delta_{19} \oplus \Delta_{17} \oplus \Delta_{15} \oplus [14],$ $\Delta_{21} \oplus \Delta_{19} \oplus \Delta_{15}[3] \oplus [12],\ \Delta_{21,13} \oplus \Delta_{19} \oplus \Delta_{17} \oplus \Delta_{15} \oplus [12]$
$\mathrm{Sym}^2\Delta_{11} \oplus \Delta_{17}[4] \oplus [13]$	$\Delta_{21} \oplus \Delta_{17}[3] \oplus [14],\ \Delta_{21,13} \oplus \Delta_{17}[3] \oplus [12],\ \Delta_{17}[5] \oplus [12]$
$\Delta_{21}[2] \oplus \Delta_{15}[4] \oplus [1] \oplus [11]$	$\Delta_{21} \oplus \Delta_{19} \oplus \Delta_{15}[3] \oplus [12],\ \Delta_{21} \oplus \Delta_{15}[5] \oplus [10],$ $\Delta_{21} \oplus \Delta_{19} \oplus \Delta_{15}[3] \oplus \Delta_{11} \oplus [10]$
$\Delta_{21,13}[2] \oplus \Delta_{17}[2] \oplus [1] \oplus [11]$	$\Delta_{21,13} \oplus \Delta_{19} \oplus \Delta_{17} \oplus \Delta_{15} \oplus [12],\ \Delta_{21,13} \oplus \Delta_{17}[3] \oplus [12],$ $\Delta_{21,13} \oplus \Delta_{19} \oplus \Delta_{17} \oplus \Delta_{15} \oplus \Delta_{11} \oplus [10],\ \Delta_{21,13} \oplus \Delta_{17}[3] \oplus \Delta_{11} \oplus [10]$
$\Delta_{17}[6] \oplus [1] \oplus [11]$	$\Delta_{17}[5] \oplus [12],\ \Delta_{17}[5] \oplus \Delta_{11} \oplus [10]$
$\mathrm{Sym}^2\Delta_{11} \oplus \Delta_{15}[6] \oplus [9]$	$\Delta_{21} \oplus \Delta_{15}[5] \oplus [10], \Delta_{15}[7] \oplus [8],\ \Delta_{21,9} \oplus \Delta_{15}[5] \oplus [8]$
$\Delta_{15}[8] \oplus [1] \oplus [7]$	$\Delta_{15}[7] \oplus [8]$
$\mathrm{Sym}^2\Delta_{11} \oplus \Delta_{19}[2] \oplus \Delta_{15}[2] \oplus \Delta_{11}[2] \oplus [9]$	$\Delta_{21} \oplus \Delta_{19} \oplus \Delta_{15}[3] \oplus \Delta_{11} \oplus [10],$ $\Delta_{21,13} \oplus \Delta_{19} \oplus \Delta_{17} \oplus \Delta_{15} \oplus \Delta_{11} \oplus [10],$ $\Delta_{21,9} \oplus \Delta_{19} \oplus \Delta_{15}[3] \oplus \Delta_{11} \oplus [8],\ \Delta_{19}[3] \oplus \Delta_{15} \oplus \Delta_{11}[3] \oplus [8],$ $\Delta_{21} \oplus \Delta_{19} \oplus \Delta_{17} \oplus \Delta_{15} \oplus \Delta_{11}[3] \oplus [8]$
$\Delta_{21,9}[2] \oplus \Delta_{15}[4] \oplus [1] \oplus [7]$	$\Delta_{21,9} \oplus \Delta_{15}[5] \oplus [8],\ \Delta_{21,9} \oplus \Delta_{19} \oplus \Delta_{15}[3] \oplus \Delta_{11} \oplus [8],$ $\Delta_{21,9} \oplus \Delta_{19,7} \oplus \Delta_{15}[3] \oplus \Delta_{11} \oplus [6]$
$\mathrm{Sym}^2\Delta_{11} \oplus \Delta_{17}[4] \oplus \Delta_{11}[2] \oplus [9]$	$\Delta_{21,13} \oplus \Delta_{17}[3] \oplus \Delta_{11} \oplus [10],\ \Delta_{17}[5] \oplus \Delta_{11} \oplus [10],$ $\Delta_{21} \oplus \Delta_{17}[3] \oplus \Delta_{11}[3] \oplus [8]$
$\Delta_{19}[4] \oplus \Delta_{11}[4] \oplus [1] \oplus [7]$	$\Delta_{19}[3] \oplus \Delta_{15} \oplus \Delta_{11}[3] \oplus [8],\ \Delta_{19}[3] \oplus \Delta_{11}[5] \oplus [6]$
$\Delta_{21}[2] \oplus \Delta_{17}[2] \oplus \Delta_{11}[4] \oplus [1] \oplus [7]$	$\Delta_{21} \oplus \Delta_{19} \oplus \Delta_{17} \oplus \Delta_{15} \oplus \Delta_{11}[3] \oplus [8],\ \Delta_{21} \oplus \Delta_{17}[3] \oplus \Delta_{11}[3] \oplus [8],$ $\Delta_{21} \oplus \Delta_{19,7} \oplus \Delta_{17} \oplus \Delta_{15} \oplus \Delta_{11}[3] \oplus [6],\ \Delta_{21} \oplus \Delta_{19} \oplus \Delta_{17} \oplus \Delta_{11}[5] \oplus [6]$
$\mathrm{Sym}^2\Delta_{11} \oplus \Delta_{19,7}[2] \oplus \Delta_{15}[2] \oplus \Delta_{11}[2] \oplus [5]$	$\Delta_{21,9} \oplus \Delta_{19,7} \oplus \Delta_{15}[3] \oplus \Delta_{11} \oplus [6],$ $\Delta_{21} \oplus \Delta_{19,7} \oplus \Delta_{17} \oplus \Delta_{15} \oplus \Delta_{11}[3] \oplus [6],$ $\Delta_{21,5} \oplus \Delta_{19,7} \oplus \Delta_{17} \oplus \Delta_{15} \oplus \Delta_{11}[3] \oplus [4]$
$\mathrm{Sym}^2\Delta_{11} \oplus \Delta_{19}[2] \oplus \Delta_{11}[6] \oplus [5]$	$\Delta_{19}[3] \oplus \Delta_{11}[5] \oplus [6],\ \Delta_{21} \oplus \Delta_{19} \oplus \Delta_{17} \oplus \Delta_{11}[5] \oplus [6],$ $\Delta_{21,5} \oplus \Delta_{19} \oplus \Delta_{17} \oplus \Delta_{11}[5] \oplus [4],\ \Delta_{21} \oplus \Delta_{19} \oplus \Delta_{11}[7] \oplus [4]$
$\Delta_{21,5}[2] \oplus \Delta_{17}[2] \oplus \Delta_{11}[4] \oplus [1] \oplus [3]$	$\Delta_{21,5} \oplus \Delta_{19,7} \oplus \Delta_{17} \oplus \Delta_{15} \oplus \Delta_{11}[3] \oplus [4],$ $\Delta_{21,5} \oplus \Delta_{19} \oplus \Delta_{17} \oplus \Delta_{11}[5] \oplus [4]$
$\Delta_{21}[2] \oplus \Delta_{11}[8] \oplus [1] \oplus [3]$	$\Delta_{21} \oplus \Delta_{19} \oplus \Delta_{11}[7] \oplus [4],\ \Delta_{21} \oplus \Delta_{11}[9] \oplus [2]$
$\mathrm{Sym}^2\Delta_{11} \oplus \Delta_{11}[10] \oplus [1]$	$\Delta_{21} \oplus \Delta_{11}[9] \oplus [2],\ \Delta_{11}[11]$
$\Delta_{11}[12]$	$\Delta_{11}[11]$

TABLE 3.7 – Paramètres standards $\psi(\pi', \mathrm{St})$ des éléments $\pi' \in \mathrm{Res}\ \pi$, pour les représentations $\pi \in \Pi_{\mathrm{disc}}(\mathrm{O}_{24})$ telles que π_∞ est triviale.

$\psi(\pi, \mathrm{St})$	$\psi(\pi', \mathrm{St})$
$[24]$	$[23] \oplus [1]$
$\Delta_{21}[3] \oplus [18]$	$\Delta_{21}[2] \oplus [1] \oplus [19]$
$\Delta_{21}[3] \oplus \Delta_{17} \oplus [16]$	$\Delta_{21}[2] \oplus \Delta_{17}[2] \oplus [1] \oplus [15]$
$\Delta_{19}[5] \oplus [14]$	$\Delta_{19}[4] \oplus [1] \oplus [15]$
$\Delta_{21}[3] \oplus \Delta_{17} \oplus \Delta_{15} \oplus [14]$	$\Delta_{21}[2] \oplus \Delta_{17}[2] \oplus [1] \oplus [15]$
$\Delta_{21}[3] \oplus \Delta_{15}[3] \oplus [12]$	$\Delta_{21}[2] \oplus \Delta_{15}[4] \oplus [1] \oplus [11]$
$\Delta_{23,13} \oplus \Delta_{19}[3] \oplus \Delta_{15} \oplus [12]$	$\mathrm{Sym}^2\Delta_{11} \oplus \Delta_{19}[2] \oplus \Delta_{15}[2] \oplus [13]$
$\Delta_{23,13} \oplus \Delta_{21} \oplus \Delta_{19} \oplus \Delta_{17} \oplus \Delta_{15} \oplus [12]$	$\mathrm{Sym}^2\Delta_{11} \oplus \Delta_{19}[2] \oplus \Delta_{15}[2] \oplus [13]$
$\Delta_{23,13} \oplus \Delta_{21} \oplus \Delta_{17}[3] \oplus [12]$	$\mathrm{Sym}^2\Delta_{11} \oplus \Delta_{17}[4] \oplus [13]$
$\Delta_{15}[9] \oplus [6]$	$\Delta_{15}[8] \oplus [1] \oplus [7]$
$\Delta_{23,19,11} \oplus \Delta_{21} \oplus \Delta_{15}[3] \oplus [10]$	$\Delta_{21}[2] \oplus \Delta_{15}[4] \oplus [1] \oplus [11]$
$\Delta_{21}[3] \oplus \Delta_{15}[3] \oplus \Delta_{11} \oplus [10]$	$\Delta_{21}[2] \oplus \Delta_{15}[4] \oplus [1] \oplus [11]$
$\Delta_{23,13} \oplus \Delta_{19}[3] \oplus \Delta_{15} \oplus \Delta_{11} \oplus [10]$	$\mathrm{Sym}^2\Delta_{11} \oplus \Delta_{19}[2] \oplus \Delta_{15}[2] \oplus \Delta_{11}[2] \oplus [9]$
$\Delta_{23,19,11} \oplus \Delta_{21,13} \oplus \Delta_{17} \oplus \Delta_{15} \oplus [10]$	$\Delta_{21,13}[2] \oplus \Delta_{17}[2] \oplus [1] \oplus [11]$
$\Delta_{23,13} \oplus \Delta_{21} \oplus \Delta_{19} \oplus \Delta_{17} \oplus \Delta_{15} \oplus \Delta_{11} \oplus [10]$	$\mathrm{Sym}^2\Delta_{11} \oplus \Delta_{19}[2] \oplus \Delta_{15}[2] \oplus \Delta_{11}[2] \oplus [9]$
$\Delta_{21,13}[3] \oplus \Delta_{17} \oplus [10]$	$\Delta_{21,13}[2] \oplus \Delta_{17}[2] \oplus [1] \oplus [11]$
$\Delta_{23,13} \oplus \Delta_{21} \oplus \Delta_{17}[3] \oplus \Delta_{11} \oplus [10]$	$\mathrm{Sym}^2\Delta_{11} \oplus \Delta_{17}[4] \oplus \Delta_{11}[2] \oplus [9]$
$\Delta_{23,7} \oplus \Delta_{15}[7] \oplus [6]$	$\Delta_{15}[8] \oplus [1] \oplus [7]$
$\Delta_{23,9} \oplus \Delta_{21} \oplus \Delta_{15}[5] \oplus [8]$	$\mathrm{Sym}^2\Delta_{11} \oplus \Delta_{15}[6] \oplus [9]$
$\Delta_{23,19,11} \oplus \Delta_{21,9} \oplus \Delta_{15}[3] \oplus [8]$	$\Delta_{21,9}[2] \oplus \Delta_{15}[4] \oplus [1] \oplus [7]$
$\Delta_{19}[5] \oplus \Delta_{11}[3] \oplus [8]$	$\Delta_{19}[4] \oplus \Delta_{11}[4] \oplus [1] \oplus [7]$
$\Delta_{23,9} \oplus \Delta_{21} \oplus \Delta_{19} \oplus \Delta_{15}[3] \oplus \Delta_{11} \oplus [8]$	$\mathrm{Sym}^2\Delta_{11} \oplus \Delta_{19}[2] \oplus \Delta_{15}[2] \oplus \Delta_{11}[2] \oplus [9]$
$\Delta_{23,17,9} \oplus \Delta_{21,13} \oplus \Delta_{19} \oplus \Delta_{15} \oplus \Delta_{11} \oplus [8]$	$\mathrm{Sym}^2\Delta_{11} \oplus \Delta_{19}[2] \oplus \Delta_{15}[2] \oplus \Delta_{11}[2] \oplus [9]$
$\Delta_{23,13} \oplus \Delta_{21,9} \oplus \Delta_{19} \oplus \Delta_{17} \oplus \Delta_{15} \oplus \Delta_{11} \oplus [8]$	$\mathrm{Sym}^2\Delta_{11} \oplus \Delta_{19}[2] \oplus \Delta_{15}[2] \oplus \Delta_{11}[2] \oplus [9]$
$\Delta_{17}[7] \oplus [10]$	$\Delta_{17}[6] \oplus [1] \oplus [11]$
$\Delta_{23,7} \oplus \Delta_{21,9} \oplus \Delta_{15}[5] \oplus [6]$	$\Delta_{21,9}[2] \oplus \Delta_{15}[4] \oplus [1] \oplus [7]$
$\Delta_{23,9} \oplus \Delta_{21,13} \oplus \Delta_{19} \oplus \Delta_{17} \oplus \Delta_{15} \oplus \Delta_{11} \oplus [8]$	$\mathrm{Sym}^2\Delta_{11} \oplus \Delta_{19}[2] \oplus \Delta_{15}[2] \oplus \Delta_{11}[2] \oplus [9]$
$\Delta_{21}[3] \oplus \Delta_{17} \oplus \Delta_{15} \oplus \Delta_{11}[3] \oplus [8]$	$\Delta_{21}[2] \oplus \Delta_{17}[2] \oplus \Delta_{11}[4] \oplus [1] \oplus [7]$
$\Delta_{21,9}[3] \oplus \Delta_{15}[3] \oplus [6]$	$\Delta_{21,9}[2] \oplus \Delta_{15}[4] \oplus [1] \oplus [7]$
$\Delta_{23,13} \oplus \Delta_{21,9} \oplus \Delta_{17}[3] \oplus \Delta_{11} \oplus [8]$	$\mathrm{Sym}^2\Delta_{11} \oplus \Delta_{17}[4] \oplus \Delta_{11}[2] \oplus [9]$
$\Delta_{23,7} \oplus \Delta_{21,9} \oplus \Delta_{19} \oplus \Delta_{15}[3] \oplus \Delta_{11} \oplus [6]$	$\Delta_{21,9}[2] \oplus \Delta_{15}[4] \oplus [1] \oplus [7]$
$\Delta_{23,9} \oplus \Delta_{21,13} \oplus \Delta_{17}[3] \oplus \Delta_{11} \oplus [8]$	$\mathrm{Sym}^2\Delta_{11} \oplus \Delta_{17}[4] \oplus \Delta_{11}[2] \oplus [9]$
$\Delta_{23,9} \oplus \Delta_{21} \oplus \Delta_{19,7} \oplus \Delta_{15}[3] \oplus \Delta_{11} \oplus [6]$	$\mathrm{Sym}^2\Delta_{11} \oplus \Delta_{19,7}[2] \oplus \Delta_{15}[2] \oplus \Delta_{11}[2] \oplus [5]$
$\Delta_{23,7} \oplus \Delta_{19}[3] \oplus \Delta_{15} \oplus \Delta_{11}[3] \oplus [6]$	$\Delta_{19}[4] \oplus \Delta_{11}[4] \oplus [1] \oplus [7]$
$\Delta_{23,17,9} \oplus \Delta_{21,13} \oplus \Delta_{19,7} \oplus \Delta_{15} \oplus \Delta_{11} \oplus [6]$	$\mathrm{Sym}^2\Delta_{11} \oplus \Delta_{19,7}[2] \oplus \Delta_{15}[2] \oplus \Delta_{11}[2] \oplus [5]$
$\Delta_{23,15,7} \oplus \Delta_{19}[3] \oplus \Delta_{11}[3] \oplus [6]$	$\Delta_{19}[4] \oplus \Delta_{11}[4] \oplus [1] \oplus [7]$
$\Delta_{23,13} \oplus \Delta_{21,9} \oplus \Delta_{19,7} \oplus \Delta_{17} \oplus \Delta_{15} \oplus \Delta_{11} \oplus [6]$	$\mathrm{Sym}^2\Delta_{11} \oplus \Delta_{19,7}[2] \oplus \Delta_{15}[2] \oplus \Delta_{11}[2] \oplus [5]$
$\Delta_{23,7} \oplus \Delta_{21} \oplus \Delta_{19} \oplus \Delta_{17} \oplus \Delta_{15} \oplus \Delta_{11}[3] \oplus [6]$	$\Delta_{21}[2] \oplus \Delta_{17}[2] \oplus \Delta_{11}[4] \oplus [1] \oplus [7]$
$\Delta_{23,9} \oplus \Delta_{17}[5] \oplus \Delta_{11} \oplus [8]$	$\mathrm{Sym}^2\Delta_{11} \oplus \Delta_{17}[4] \oplus \Delta_{11}[2] \oplus [9]$
$\Delta_{23,9} \oplus \Delta_{21,13} \oplus \Delta_{19,7} \oplus \Delta_{17} \oplus \Delta_{15} \oplus \Delta_{11} \oplus [6]$	$\mathrm{Sym}^2\Delta_{11} \oplus \Delta_{19,7}[2] \oplus \Delta_{15}[2] \oplus \Delta_{11}[2] \oplus [5]$
$\Delta_{23,15,7} \oplus \Delta_{21} \oplus \Delta_{19} \oplus \Delta_{17} \oplus \Delta_{11}[3] \oplus [6]$	$\Delta_{21}[2] \oplus \Delta_{17}[2] \oplus \Delta_{11}[4] \oplus [1] \oplus [7]$
$\Delta_{23,9} \oplus \Delta_{21,5} \oplus \Delta_{19,7} \oplus \Delta_{15}[3] \oplus \Delta_{11} \oplus [4]$	$\mathrm{Sym}^2\Delta_{11} \oplus \Delta_{19,7}[2] \oplus \Delta_{15}[2] \oplus \Delta_{11}[2] \oplus [5]$
$\Delta_{23,13} \oplus \Delta_{19,7}[3] \oplus \Delta_{15} \oplus \Delta_{11} \oplus [4]$	$\mathrm{Sym}^2\Delta_{11} \oplus \Delta_{19,7}[2] \oplus \Delta_{15}[2] \oplus \Delta_{11}[2] \oplus [5]$
$\Delta_{23,13,5} \oplus \Delta_{21,9} \oplus \Delta_{19,7} \oplus \Delta_{17} \oplus \Delta_{15} \oplus \Delta_{11} \oplus [4]$	$\mathrm{Sym}^2\Delta_{11} \oplus \Delta_{19,7}[2] \oplus \Delta_{15}[2] \oplus \Delta_{11}[2] \oplus [5]$
$\Delta_{23,17,5} \oplus \Delta_{21} \oplus \Delta_{19,7} \oplus \Delta_{15} \oplus \Delta_{11}[3] \oplus [4]$	$\mathrm{Sym}^2\Delta_{11} \oplus \Delta_{19,7}[2] \oplus \Delta_{15}[2] \oplus \Delta_{11}[2] \oplus [5]$
$\Delta_{21}[3] \oplus \Delta_{17} \oplus \Delta_{11}[5] \oplus [6]$	$\Delta_{21}[2] \oplus \Delta_{17}[2] \oplus \Delta_{11}[4] \oplus [1] \oplus [7]$
$\Delta_{23,7} \oplus \Delta_{21} \oplus \Delta_{17}[3] \oplus \Delta_{11}[3] \oplus [6]$	$\Delta_{21}[2] \oplus \Delta_{17}[2] \oplus \Delta_{11}[4] \oplus [1] \oplus [7]$
$\Delta_{23,7} \oplus \Delta_{21,5} \oplus \Delta_{19} \oplus \Delta_{17} \oplus \Delta_{15} \oplus \Delta_{11}[3] \oplus [4]$	$\Delta_{21,5}[2] \oplus \Delta_{17}[2] \oplus \Delta_{11}[4] \oplus [1] \oplus [3]$
$\Delta_{23,17,5} \oplus \Delta_{21} \oplus \Delta_{19} \oplus \Delta_{11}[5] \oplus [4]$	$\mathrm{Sym}^2\Delta_{11} \oplus \Delta_{19}[2] \oplus \Delta_{11}[6] \oplus [5]$
$\Delta_{23,15,7} \oplus \Delta_{21,5} \oplus \Delta_{19} \oplus \Delta_{17} \oplus \Delta_{11}[3] \oplus [4]$	$\Delta_{21,5}[2] \oplus \Delta_{17}[2] \oplus \Delta_{11}[4] \oplus [1] \oplus [3]$
$\Delta_{23,7} \oplus \Delta_{21,5} \oplus \Delta_{17}[3] \oplus \Delta_{11}[3] \oplus [4]$	$\Delta_{21,5}[2] \oplus \Delta_{17}[2] \oplus \Delta_{11}[4] \oplus [1] \oplus [3]$
$\Delta_{23,15,3} \oplus \Delta_{21,5} \oplus \Delta_{19,7} \oplus \Delta_{17} \oplus \Delta_{11}[3] \oplus [2]$	$\Delta_{21,5}[2] \oplus \Delta_{17}[2] \oplus \Delta_{11}[4] \oplus [1] \oplus [3]$
$\Delta_{21}[3] \oplus \Delta_{11}[7] \oplus [4]$	$\Delta_{21}[2] \oplus \Delta_{11}[8] \oplus [1] \oplus [3]$
$\Delta_{21,5}[3] \oplus \Delta_{17} \oplus \Delta_{15} \oplus \Delta_{11}[3] \oplus [2]$	$\Delta_{21,5}[2] \oplus \Delta_{17}[2] \oplus \Delta_{11}[4] \oplus [1] \oplus [3]$
$\Delta_{23,19,3} \oplus \Delta_{21,5} \oplus \Delta_{17} \oplus \Delta_{11}[5] \oplus [2]$	$\Delta_{21,5}[2] \oplus \Delta_{17}[2] \oplus \Delta_{11}[4] \oplus [1] \oplus [3]$
$\Delta_{23,19,3} \oplus \Delta_{21} \oplus \Delta_{11}[7] \oplus [2]$	$\Delta_{21}[2] \oplus \Delta_{11}[8] \oplus [1] \oplus [3]$
$\mathrm{Sym}^2\Delta_{11}[2] \oplus \Delta_{11}[9]$	$\mathrm{Sym}^2\Delta_{11} \oplus \Delta_{11}[10] \oplus [1]$

TABLE 3.8 – Paramètres standards $\psi(\pi', \mathrm{St})$ des éléments $\pi' \in \mathrm{Res}\ \pi$, pour les représentations $\pi \in \Pi_{\mathrm{cusp}}(\mathrm{SO}_{25})$ telles que π_∞ est triviale, dont les valeurs propres associées pour T_2 sont entières.

$\psi(\pi, \mathrm{St})$	$\psi(\pi', \mathrm{St})$
$\Delta_{23}^2 \oplus [22]$	$[23] \oplus [1],\ \mathrm{Sym}^2\Delta_{11} \oplus [21]$
$\Delta_{23}^2 \oplus \Delta_{21} \oplus [20]$	$\mathrm{Sym}^2\Delta_{11} \oplus [21],\ \Delta_{21}[2] \oplus [1] \oplus [19]$
$\Delta_{23}^2 \oplus \Delta_{21} \oplus \Delta_{19} \oplus [18]$	$\Delta_{21}[2] \oplus [1] \oplus [19],\ \mathrm{Sym}^2\Delta_{11} \oplus \Delta_{19}[2] \oplus [17]$
$\Delta_{23}^2 \oplus \Delta_{19}[3] \oplus [16]$	$\mathrm{Sym}^2\Delta_{11} \oplus \Delta_{19}[2] \oplus [17],\ \Delta_{19}[4] \oplus [1] \oplus [15]$
$\Delta_{23}^2 \oplus \Delta_{21} \oplus \Delta_{19} \oplus \Delta_{17} \oplus [16]$	$\mathrm{Sym}^2\Delta_{11} \oplus \Delta_{19}[2] \oplus [17],\ \Delta_{21}[2] \oplus \Delta_{17}[2] \oplus [1] \oplus [15]$
$\Delta_{23}^2 \oplus \Delta_{19}[3] \oplus \Delta_{15} \oplus [14]$	$\Delta_{19}[4] \oplus [1] \oplus [15],\ \mathrm{Sym}^2\Delta_{11} \oplus \Delta_{19}[2] \oplus \Delta_{15}[2] \oplus [13]$
$\Delta_{23}^2 \oplus \Delta_{21} \oplus \Delta_{19} \oplus \Delta_{17} \oplus \Delta_{15} \oplus [14]$	$\Delta_{21}[2] \oplus \Delta_{17}[2] \oplus [1] \oplus [15],\ \mathrm{Sym}^2\Delta_{11} \oplus \Delta_{19}[2] \oplus \Delta_{15}[2] \oplus [13]$
$\Delta_{23}^2 \oplus \Delta_{21} \oplus \Delta_{17}[3] \oplus [14]$	$\Delta_{21}[2] \oplus \Delta_{17}[2] \oplus [1] \oplus [15],\ \mathrm{Sym}^2\Delta_{11} \oplus \Delta_{17}[4] \oplus [13]$
$\Delta_{23}^2 \oplus \Delta_{21} \oplus \Delta_{19} \oplus \Delta_{15}[3] \oplus [12]$	$\mathrm{Sym}^2\Delta_{11} \oplus \Delta_{19}[2] \oplus \Delta_{15}[2] \oplus [13],\ \Delta_{21}[2] \oplus \Delta_{15}[4] \oplus [1] \oplus [11]$
$\Delta_{23}^2 \oplus \Delta_{21,13} \oplus \Delta_{19} \oplus \Delta_{17} \oplus \Delta_{15} \oplus [12]$	$\mathrm{Sym}^2\Delta_{11} \oplus \Delta_{19}[2] \oplus \Delta_{15}[2] \oplus [13],\ \Delta_{21,13}[2] \oplus \Delta_{17}[2] \oplus [1] \oplus [11]$
$\Delta_{23}^2 \oplus \Delta_{21,13} \oplus \Delta_{17}[3] \oplus [12]$	$\mathrm{Sym}^2\Delta_{11} \oplus \Delta_{17}[4] \oplus [13],\ \Delta_{21,13}[2] \oplus \Delta_{17}[2] \oplus [1] \oplus [11]$
$\Delta_{23}^2 \oplus \Delta_{17}[5] \oplus [12]$	$\mathrm{Sym}^2\Delta_{11} \oplus \Delta_{17}[4] \oplus [13],\ \Delta_{17}[6] \oplus [1] \oplus [11]$
$\Delta_{23}^2 \oplus \Delta_{21} \oplus \Delta_{15}[5] \oplus [10]$	$\Delta_{21}[2] \oplus \Delta_{15}[4] \oplus [1] \oplus [11],\ \mathrm{Sym}^2\Delta_{11} \oplus \Delta_{15}[6] \oplus [9]$
$\Delta_{23}^2 \oplus \Delta_{21} \oplus \Delta_{19} \oplus \Delta_{15}[3] \oplus \Delta_{11} \oplus [10]$	$\Delta_{21}[2] \oplus \Delta_{15}[4] \oplus [1] \oplus [11],\ \mathrm{Sym}^2\Delta_{11} \oplus \Delta_{19}[2] \oplus \Delta_{15}[2] \oplus \Delta_{11}[2] \oplus [9]$
$\Delta_{23}^2 \oplus \Delta_{21,13} \oplus \Delta_{19} \oplus \Delta_{17} \oplus \Delta_{15} \oplus \Delta_{11} \oplus [10]$	$\Delta_{21,13}[2] \oplus \Delta_{17}[2] \oplus [1] \oplus [11],$ $\mathrm{Sym}^2\Delta_{11} \oplus \Delta_{19}[2] \oplus \Delta_{15}[2] \oplus \Delta_{11}[2] \oplus [9]$
$\Delta_{23}^2 \oplus \Delta_{15}[7] \oplus [8]$	$\mathrm{Sym}^2\Delta_{11} \oplus \Delta_{15}[6] \oplus [9],\ \Delta_{15}[8] \oplus [1] \oplus [7]$
$\Delta_{23}^2 \oplus \Delta_{21,13} \oplus \Delta_{17}[3] \oplus \Delta_{11} \oplus [10]$	$\Delta_{21,13}[2] \oplus \Delta_{17}[2] \oplus [1] \oplus [11],\ \mathrm{Sym}^2\Delta_{11} \oplus \Delta_{17}[4] \oplus \Delta_{11}[2] \oplus [9]$
$\Delta_{23}^2 \oplus \Delta_{17}[5] \oplus \Delta_{11} \oplus [10]$	$\Delta_{17}[6] \oplus [1] \oplus [11],\ \mathrm{Sym}^2\Delta_{11} \oplus \Delta_{17}[4] \oplus \Delta_{11}[2] \oplus [9]$
$\Delta_{23}^2 \oplus \Delta_{21,9} \oplus \Delta_{15}[5] \oplus [8]$	$\mathrm{Sym}^2\Delta_{11} \oplus \Delta_{15}[6] \oplus [9],\ \Delta_{21,9}[2] \oplus \Delta_{15}[4] \oplus [1] \oplus [7]$
$\Delta_{23}^2 \oplus \Delta_{21,9} \oplus \Delta_{19} \oplus \Delta_{15}[3] \oplus \Delta_{11} \oplus [8]$	$\mathrm{Sym}^2\Delta_{11} \oplus \Delta_{19}[2] \oplus \Delta_{15}[2] \oplus \Delta_{11}[2] \oplus [9],$ $\Delta_{21,9}[2] \oplus \Delta_{15}[4] \oplus [1] \oplus [7]$
$\Delta_{23}^2 \oplus \Delta_{19}[3] \oplus \Delta_{15} \oplus \Delta_{11}[3] \oplus [8]$	$\mathrm{Sym}^2\Delta_{11} \oplus \Delta_{19}[2] \oplus \Delta_{15}[2] \oplus \Delta_{11}[2] \oplus [9],\ \Delta_{19}[4] \oplus \Delta_{11}[4] \oplus [1] \oplus [7]$
$\Delta_{23}^2 \oplus \Delta_{21} \oplus \Delta_{19} \oplus \Delta_{17} \oplus \Delta_{15} \oplus \Delta_{11}[3] \oplus [8]$	$\mathrm{Sym}^2\Delta_{11} \oplus \Delta_{19}[2] \oplus \Delta_{15}[2] \oplus \Delta_{11}[2] \oplus [9],$ $\Delta_{21}[2] \oplus \Delta_{17}[2] \oplus \Delta_{11}[4] \oplus [1] \oplus [7]$
$\Delta_{23}^2 \oplus \Delta_{21,9} \oplus \Delta_{19,7} \oplus \Delta_{15}[3] \oplus \Delta_{11} \oplus [6]$	$\Delta_{21,9}[2] \oplus \Delta_{15}[4] \oplus [1] \oplus [7],$ $\mathrm{Sym}^2\Delta_{11} \oplus \Delta_{19,7}[2] \oplus \Delta_{15}[2] \oplus \Delta_{11}[2] \oplus [5]$
$\Delta_{23}^2 \oplus \Delta_{21} \oplus \Delta_{17}[3] \oplus \Delta_{11}[3] \oplus [8]$	$\mathrm{Sym}^2\Delta_{11} \oplus \Delta_{17}[4] \oplus \Delta_{11}[2] \oplus [9],\ \Delta_{21}[2] \oplus \Delta_{17}[2] \oplus \Delta_{11}[4] \oplus [1] \oplus [7]$
$\Delta_{23}^2 \oplus \Delta_{19}[3] \oplus \Delta_{11}[5] \oplus [6]$	$\Delta_{19}[4] \oplus \Delta_{11}[4] \oplus [1] \oplus [7],\ \mathrm{Sym}^2\Delta_{11} \oplus \Delta_{19}[2] \oplus \Delta_{11}[6] \oplus [5]$
$\Delta_{23}^2 \oplus \Delta_{21} \oplus \Delta_{19,7} \oplus \Delta_{17} \oplus \Delta_{15} \oplus \Delta_{11}[3] \oplus [6]$	$\Delta_{21}[2] \oplus \Delta_{17}[2] \oplus \Delta_{11}[4] \oplus [1] \oplus [7],$ $\mathrm{Sym}^2\Delta_{11} \oplus \Delta_{19,7}[2] \oplus \Delta_{15}[2] \oplus \Delta_{11}[2] \oplus [5]$
$\Delta_{23}^2 \oplus \Delta_{21} \oplus \Delta_{19} \oplus \Delta_{17} \oplus \Delta_{11}[5] \oplus [6]$	$\Delta_{21}[2] \oplus \Delta_{17}[2] \oplus \Delta_{11}[4] \oplus [1] \oplus [7],\ \mathrm{Sym}^2\Delta_{11} \oplus \Delta_{19}[2] \oplus \Delta_{11}[6] \oplus [5]$
$\Delta_{23}^2 \oplus \Delta_{21,5} \oplus \Delta_{19,7} \oplus \Delta_{17} \oplus \Delta_{15} \oplus \Delta_{11}[3] \oplus [4]$	$\mathrm{Sym}^2\Delta_{11} \oplus \Delta_{19,7}[2] \oplus \Delta_{15}[2] \oplus \Delta_{11}[2] \oplus [5],$ $\Delta_{21,5}[2] \oplus \Delta_{17}[2] \oplus \Delta_{11}[4] \oplus [1] \oplus [3]$
$\Delta_{23}^2 \oplus \Delta_{21,5} \oplus \Delta_{19} \oplus \Delta_{17} \oplus \Delta_{11}[5] \oplus [4]$	$\mathrm{Sym}^2\Delta_{11} \oplus \Delta_{19}[2] \oplus \Delta_{11}[6] \oplus [5],\ \Delta_{21,5}[2] \oplus \Delta_{17}[2] \oplus \Delta_{11}[4] \oplus [1] \oplus [3]$
$\Delta_{23}^2 \oplus \Delta_{21} \oplus \Delta_{19} \oplus \Delta_{11}[7] \oplus [4]$	$\mathrm{Sym}^2\Delta_{11} \oplus \Delta_{19}[2] \oplus \Delta_{11}[6] \oplus [5],\ \Delta_{21}[2] \oplus \Delta_{11}[8] \oplus [1] \oplus [3]$
$\Delta_{23}^2 \oplus \Delta_{21} \oplus \Delta_{11}[9] \oplus [2]$	$\Delta_{21}[2] \oplus \Delta_{11}[8] \oplus [1] \oplus [3],\ \mathrm{Sym}^2\Delta_{11} \oplus \Delta_{11}[10] \oplus [1]$
$\Delta_{23}^2 \oplus \Delta_{11}[11]$	$\mathrm{Sym}^2\Delta_{11} \oplus \Delta_{11}[10] \oplus [1],\ \Delta_{11}[12]$

TABLE 3.9 – Paramètres standards $\psi(\pi', \mathrm{St})$ des éléments $\pi' \in \mathrm{Res}\ \pi$, pour les représentations $\pi \in \Pi_{\mathrm{cusp}}(\mathrm{SO}_{25})$ telles que π_∞ est triviale, dont les valeurs propres associées pour T_2 ne sont pas entières.

Bibliographie

[1] A. N. Andrianov, *Quadratic forms and Hecke operators*, Springer Verlag Grundlehren der math. Wiss. 286 (1987).

[2] N. Arancibia, C. Moeglin et D. Renard, *Paquets d'Arthur des groupes classiques et unitaires*, disponible à l'url http://arxiv.org/abs/1507.01432.

[3] J. Arthur, *Unipotent automorphic representations : conjectures*, dans *Orbites unipotentes et représentations II : groupes p-adiques et réels*, Astérisque 171–172, 13–71 (1989).

[4] J. Arthur, *The endoscopic classification of representations : orthogonal and symplectic groups*, Colloquium Publ. 61, Amer. Math. Soc. (2013).

[5] J. Bergström, N. Dummigan et T. Mégarbané, *Eisenstein congruences for* $\mathrm{SO}(4,3)$*,* $\mathrm{SO}(4,4)$*, spinor and triple product L-values*, et appendice par T. Ibukiyama et H. Katsurada, preprint, 2016, disponible à l'url http://arxiv.org/abs/1605.00819.

[6] R. Borcherds, *The Leech lattice and other lattices*, Ph. D. dissertation, University of Cambridge (1984).

[7] R. Borcherds, *Richard Borcherds' Complete List of Even 25-Dimensional Lattices of Determinant 2*, disponible à l'url http://www.math.rwth-aachen.de/~Gabriele.Nebe/LATTICES/even_det2.25.html.

[8] R. Borcherds, E. Freitag et R. Weissauer, *A Siegel cusp form of degree* 12 *and weight* 12, J. reine angew. Math 494, 141–153 (1998).

[9] A. Borel et H. Jacquet, *Automorphic forms and automorphic representation*, Corvallis, P.S.P.M.33 vol. I (1979).

[10] A. Borel, *Automorphic L-functions*, dans [24] vol. II, 27–61 (1977).

[11] N. Bourbaki, *Éléments de mathématiques, Groupes et algèbres de Lie, chapitres IV à VI*, Masson, Paris (1981).

[12] R. K. Brylinski, *Limits of weight spaces, Lusztig's q-analogs, and fiberings of adjoint orbits*, Journal of the A.M.S. 2, 517-533 (1989).

[13] A. Caraiani, *Local-global compatibility and the action of monodromy on nearby cycles*, Duke Math. J. 161, 2311–2413 (2012).

[14] P.-H. Chaudouard et G. Laumon, *Le lemme fondamental pondéré. I. Constructions géométriques*, Compositio Math. 146, 1416–1506 (2010).

[15] P.-H. Chaudouard et G. Laumon, *Le lemme fondamental pondéré. II. Énoncés cohomologiques*, Annals of Math. 176, 1647–1781 (2012).

[16] G. Chenevier et L. Clozel, *Corps de nombres peu ramifiés et formes automorphes autoduales*, Journal of the A.M.S. 22 Vol 2, 467-519 (2009).

[17] G. Chenevier et M. Harris, *Construction of automorphic Galois representations II*, Cambridge Math. J. 1, 53–73 (2013).

[18] G. Chenevier et J. Lannes, *Formes automorphes et voisins de Kneser des réseaux de Niemeier*.

[19] G. Chenevier et D. Renard, *Level one algebraic cusp forms of classical groups of small rank*, Mem. Amer Math. Soc. 1121, 128p (2015).

[20] L. Clozel, *Purity Reigns Supreme*, I.M.R.N. 2013, 328–346 (2013).

[21] L. Clozel, M. Harris et J.-P. Labesse, *Construction of automorphic Galois representations I, dans Stabilization of the Trace Formula, Shimura Varieties, and Arithmetic Applications*, édité par L. Clozel, M. Harris, J.-P. Labesse et B.-C. Ngô, International Press (2011).

[22] J. Cogdell, *Lectures on L-functions, converse theorems, and functoriality for* GL_n, in *Lectures on automorphic L-functions*, A.M.S. , Fields Institute Monographs (2004).

[23] J .H. Conway et N. J. A. Sloane, *Sphere packings, lattices and groups*, Grundlehren der Math. Wissenschaften 290, Springer-Verlag, New York (1999).

[24] *Automorphic forms, representations and L-functions, Part I & II*, Proc. Symp. in Pure Math. XXXIII, Oregon State Univ., Corvallis, Ore., Providence, R.I., Amer. Math. Soc. (1977).

[25] J. Dieudonné, *Sur les groupes classiques*, Hermann (1997).

[26] P. Deligne, *Formes modulaires et représentations l-adiques*, Séminaire Bourbaki, exposé no. 355, 139–172 (1968-1960).

[27] L. V. Dieulefait, *On the images of the Galois representations attached to genus* 2 *Siegel modular forms*, J. Reine Angew. Math., 553 (2002), pp. 183–200.

[28] J. Dixmier, *Algèbres enveloppantes*, Gauthier-Villars Éd. (1974).

[29] N. Dummigan, *A simple trace formula for algebraic modular forms*, Experimental Mathematics **22** (2013), no. 2, 123-131.

[30] V. Erokhin, *Theta series of even unimodular* 24*-dimensional lattices* (in Russian), Zap. Naucn. Sem. Leningrad Otdel. Mat. Inst. Steklov. (LOMI) 86 (1979), 82–93. ; traduction anglaise dans J. Soviet Math. 17, 1999–2008 (1981).

[31] C. Faber, *Modular forms and the cohomology of moduli spaces*, disponible à l'url https://people.kth.se/~faber/publ.html.

[32] C. Faber et G. van der Geer, *Sur la cohomologie des systèmes locaux sur les espaces de modules des courbes de genre 2 et des surfaces abéliennes*, I et II, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I 338, 381–384 (2004).

[33] E. Freitag, *Siegelsche Modulfunktionen*, Grundlehren der Math. Wissenschaften 254, Springer Verlag (1983).

[34] W. Fulton et J. Harris, *Representation theory*, Springer Verlag, New York (1991).

[35] I. M. Gel'fand, M. I. Graev et I. I. Pyatetskii-Shapiro, *Representation theory and automorphic functions*, Academic Press (1990), 1st ed. 1966.

[36] B. Gross, *On the Satake isomorphism*, dans *Galois representations in arithmetic algebraic geometry*, A. Scholl and R. Taylor Ed., Cambridge Univ. Press (1998).

[37] B. Gross, *Algebraic modular forms*, Israel J. Math. 113, 61–93 (1999).

[38] G. Harder, *A congruence between a Siegel and an elliptic modular form*, dans *The 1–2–3 of modular forms*, édité par J.H. Bruinier, G. van der Geer, G. Harder et D. Zagier, Universitext, Springer Verlag, Berlin, 247–260 (2008).

[39] Harish-Chandra, *Automorphic forms on semisimple Lie groups*, Springer Verlag, Lecture notes in Math. (1968).

[40] H. Jacquet et J. Shalika, *On Euler products and the classification of automorphic representations II*, Amer. J. of Math. 103, 777–815 (1981).

[41] T. Kaletha, *Rigid inner forms of real and p-adic groups*, disponible à l'url https://web.math.princeton.edu/~tkaletha/.

[42] S.-I. Kato, *Spherical functions and a q-analog of Kostant's weight multiplicity formula*, Ivent. Math. 66, 461-468 (1982).

[43] M. Kneser, *Klassenzahlen definiter quadratischer formen*, Archiv der Math. 8, 241–250 (1957).

[44] J.-P. Labesse et J.-L. Waldspurger, *La formule des traces tordue d'après le Friday Morning Seminar*, C. R. M. Monograph Series 31 (2013).

[45] R. Langlands, *Euler products*, Yale Math. Monographs, Yale Univ. Press, New Haven and London (1971).

[46] R. Langlands, *Automorphic representations, Shimura varieties, and motives (Ein Märchen)*, dans [24] vol. II, 205–246 (1979).

[47] G. Lusztig, *Singularities, character formulas, and a q-analog of weight multiplicities*, Astérisque 101, 208-227 (1983).

[48] T. Mégarbané, *Traces des opérateurs de Hecke sur les espaces de formes automorphes de* SO_7*,* SO_8 *ou* SO_9 *en niveau 1 et poids arbitraire.*, disponible à l'url https://arxiv.org/abs/1604.01914.

[49] T. Mégarbané, *Calcul des opérateurs de Hecke sur les classes d'isomorphisme de réseaux pairs de déterminant* 2 *en dimension* 23 *et* 25, disponible à l'url https://arxiv.org/abs/1607.03613.

[50] T. Mégarbané, tables des traces d'opérateurs de Hecke sur les espaces de formes automorphes disponibles à l'url http://megarban.perso.math.cnrs.fr.

[51] T. Mégarbané, algorithme de calcul des traces de paramètres de Satake des représentations automorphes de PGL_m disponible à l'url http://megarban.perso.math.cnrs.fr/programmes/traceshecke/Formules_Gross/calculdelta.txt.

[52] T. Mégarbané, algorithme de calcul des traces de paramètres de Satake des représentations automorphes de PGL_m disponible à l'url http://megarban.perso.math.cnrs.fr/programmes/traceshecke/Formules_Gross/formules_Gross.txt.

[53] T. Mégarbané, calculs de matrices des opérateurs T_p sur les classes d'isomorphisme de réseaux pairs de déterminant minimal en dimension 23 et 25, disponibles à l'url http://megarban.perso.math.cnrs.fr.

[54] T. Mégarbané, algorithme du calcul de la matrice de l'opérateur de Hecke T_2 sur $\mathbb{Z}[X_{23}]$, disponible à l'url http://megarban.perso.math.cnrs.fr/programmes/calculT2/X_23/calcul_T2_X23.txt.

[55] T. Mégarbané, algorithme du calcul de la matrice de l'opérateur de Hecke T_2 sur $\mathbb{Z}[X_{25}]$, disponible à l'url http://megarban.perso.math.cnrs.fr/programmes/calculT2/X_25/calcul_T2_X25.txt

[56] P. Mezo, *Character identities in the twisted endoscopy of real reductive groups*, Mem. Amer. Math. Soc. 222 (2013).

[57] P. Mezo, *Tempered spectral transfer in the twisted endoscopy of real groups*, prépublication disponible à l'url http://people.math.carleton.ca/~mezo/ (2013).

[58] C. Moeglin et J.-L. Waldspurger, *Stabilisation de la formule des traces tordue VI & X*, prépublication disponible à l'url http://webusers.imj-prg.fr/~jean-loup.waldspurger/ (2014).

[59] G. Nebe et B. Venkov, *On Siegel modular forms of weight 12*, J. reine angew. Math. 351, 49–60 (2001).

[60] B. C. Ngô, *Le lemme fondamental pour les algèbres de Lie*, Publ. Math. I.H.É.S. 111, 1–169 (2009).

[61] H.-V. Niemeier, *Definite quadratische Formen der Dimension* 24 *und Diskriminante 1*, J. Number Theory 5, 142–178 (1973).

[62] D. Prasad, *Branching laws for non-tempered representations*, exposé au MSRI disponible à l'url http://www.msri.org/workshops/719/schedules/19231/documents/2362/assets/22428.

[63] M. Raum, N. C. Ryan, N.-P. Skoruppa, G. Tornarìa, *Explicit computations of Siegel modular forms of degree two*, prépublication disponible à l'url http://arxiv.org/abs/1205.6255.

[64] I. Satake, *Theory of spherical functions on reductive algebraic groups over p-adic fields*, Publ. Math. I.H.É.S. 18, 5–69 (1963).

[65] *Variétés analytiques complexes et fonctions automorphes*, séminaire H. Cartan, tome 6, Éc. Norm. Sup. Paris (1953/54).

[66] *Fonctions automorphes*, séminaire H. Cartan, tome 10, Éc. Norm. Sup. Paris (1957/58).

[67] J.-P. Serre, *Une interprétation des congruences relatives à la fonction τ de Ramanujan*, Séminaire Delange-Pisot-Poitou, exposé no. 14 (1967-1968).

[68] J.-P. Serre, *Cours d'arithmétique*, P.U.F., Paris (1970).

[69] J.-P. Serre, *Complex semisimple Lie algebras*, Springer Verlag, New York (1987).

[70] D. Shelstad, *On geometric transfer in real twisted endoscopy*, Annals of Math. 176, 1919–1985 (2012).

[71] D. Shelstad, *On the structure of endoscopic transfer factors*, prépublication disponible à l'url http://andromeda.rutgers.edu/~shelstad/.

[72] D. Shelstad, *On spectral transfer factors in real twisted endoscopy*, prépublication disponible à l'url http://andromeda.rutgers.edu/~shelstad/.

[73] S.-W. Shin, *Galois representations arising from some compact Shimura varieties*, Annals of Math. 173, 1645–1741 (2011).

[74] T. Springer, *Reductive groups*, dans [24] vol. I, 3–27 (1979).

[75] H.P.F. Swinnerton-Dyer, *On l-adic representations and congruences for coefficients of modular forms*, dans *Modular fonctions in one variable III*, International Summer School on Modular fonctions, Antwerp (1972).

[76] O. Taïbi, *Arthur's multiplicity formula for certain inner forms of special orthogonal and symplectic groups*, à paraître dans Journal of the European Mathematical Society.

[77] S. Tayou, *Images de représentations galoisiennes associées à certaines formes modulaires de Siegel de genre* 2, disponible à l'url http://arxiv.org/abs/1602.02272.

[78] G. van der Geer, *Siegel modular forms and their applications*, dans *The 1–2–3 of modular forms*, édité par J. H. Bruinier, G. van der Geer, G. Harder et D. Zagier, Universitext, Springer Verlag, Berlin, 181–245 (2008).

[79] G. van der Geer, *Siegel modular forms*, disponible à l'url http://arxiv.org/abs/math/0605346.

[80] B. Venkov, *On the classification of integral even unimodular* 24*-dimensional quadratic forms*, Chapitre 18 de [23].

[81] J.-L. Waldspurger, *Endoscopie et changement de caractéristique*, J. Inst. Math. Jussieu 5, 423-525 (2006).

[82] J.-L. Waldspurger, *Stabilisation de la formule des traces tordues I, II, III, IV, V, VII, VIII, IX*, prépublications disponibles à l'url http://webusers.imj-prg.fr/~jean-loup.waldspurger/ (2014).

[83] R. Weissauer, *Four dimensional galois representations*, Preprint, (2000)

université PARIS-SACLAY | École doctorale de mathématiques Hadamard (EDMH)

Titre : Sur les représentations automorphes non ramifiées des groupes linéaires sur $\mathbb{Q}$ de petits rangs.

Mots clés : Représentations automorphes, voisins de Kneser, paramètres de Satake.

Résumé : Cette thèse est consacrée à l'étude des représentations automorphes algébriques des groupes linéaires découvertes par Chenevier–Renard. On s'intéresse plus particulièrement à leurs paramètres de Satake. Notre point de départ est la théorie d'Arthur : elle permet de comprendre ces paramètres à l'aide des paramètres de Satake de représentations automorphes discrètes des groupes spéciaux orthogonaux de réseaux bien choisis. Dans un premier temps, on étudie les opérateurs de Hecke associés aux voisins de Kneser des réseaux de racines E_7, E_8 et $\mathrm{E}_8 \oplus \mathrm{A}_1$. Suivant Gross, on arrive ainsi à calculer la trace des premiers paramètres de Satake des représentations des groupes linéaires considérées initialement, dont les poids peuvent être arbitrairement grands. Dans un second temps, en raisonnant sur les classes d'isomorphisme de réseaux, on calcule les opérateurs de Hecke associés aux p-voisins (pour p premier) en dimension 23 et 25, en écrivant leurs valeurs propres comme des fonctions polynomiales en les traces des paramètres de Satake calculées précédemment. Ceci complète les résultats de Borcherds et Chenevier–Lannes en dimension 24. On en déduit des congruences, du type "congruence de Ramanujan" ou "congruence de Harder", pour les traces des paramètres de Satake des représentations des groupes linéaires considérées.

Title : On the unramified automorphic representations of the linear groups over $\mathbb{Q}$ of small rank.

Keywords : Automorphic representations, Kneser neighbours, Satake parameters.

Abstract : In this thesis we examine the different algebraic automorphic representations of the linear groups discovered by Chenevier–Renard. Our main concern is the computation of their Satake parameters. We use Arthur's theory as a starting point : it enables us to understand these parameters with the help of the Satake parameters of discrete automorphic representations for the special orthogonal groups of well chosen lattices. Firstly, we study the Hecke operators associated to the Kneser neighbours of the root lattices E_7, E_8 and $\mathrm{E}_8 \oplus \mathrm{A}_1$. According to Gross, this enables us to compute the trace of the first Satake parameters of the representations for the linear groups previously mentioned, whose weight can be arbitrarily high. Secondly, focusing on the isomorphism classes of lattices, we compute the Hecke operators associated to the p-neighbours (for p a prime) in dimension 23 and 25, using the expression of their eigenvalues as polynomial functions of the traces of the Satake parameters previously computed. This completes the results found by Borcherds and Chenevier–Lannes, in dimension 24. We then deduce congruences, of the "Ramanujan's congruence" or "Harder's congruence" type, involving the traces of the Satake parameters of the considered representations of the linear groups.

Université Paris-Saclay
Espace Technologique / Immeuble Discovery
Route de l'Orme aux Merisiers RD 128 / 91190 Saint-Aubin,
France