

Analyse des liens entre un modèle d'endommagement et un modèle de fracture

Leila Azem

▶ **To cite this version:**

Leila Azem. Analyse des liens entre un modèle d'endommagement et un modèle de fracture. Mécanique des structures [physics.class-ph]. Université Paris Saclay (COmUE); Université de Tunis El-Manar. Faculté des Sciences de Tunis (Tunisie), 2017. Français. NNT : 2017SACLX006 . tel-01529518

HAL Id: tel-01529518

https://pastel.hal.science/tel-01529518

Submitted on 30 May 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

université PARIS-SACLAY

جامعة تونس المنار
UNIVERSITÉ DE TUNIS EL MANAR

NNT : 2017SACLX006

THÈSE DE DOCTORAT

DE L'UNIVERSITÉ TUNIS EL MANAR

ET

DE L'UNIVERSITÉ PARIS SACLAY

PRÉPARÉE À L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE PALAISEAU

ÉCOLE DOCTORALE N (574) DE MATHÉMATIQUES HADAMARD (EDMH)

Spécialité de Doctorat : (Mathématiques Appliquées) :

Par :

LEILA AZEM

Analyse des liens entre un modèle d'endommagement et un modèle de fracture

Thèse présentée et soutenue à Palaiseau, le 06 **Janvier** 2017 **:**

M. **Jean-Jacques MARIGO**	Professeur	Ecole Polytechnique Palaiseau	Président
Mme. **Saloua AOUADI**	Professeur	Faculté des Sciences de Tunis	Rapporteur
M. **François JOUVE**	Professeur	Université Diderot Paris 7	Rapporteur
M. **Salem MATHLOUTHI**	Professeur	Faculté des Sciences de Tunis	Examinateur
M. **Georgios MICHAILIDIS**	Ingénieur	Université de Grenoble	Examinateur
M. **Olivier PANTZ**	Professeur	Université de Nice Sophia-Antipolis	Directeur
M. **Hamdi ZORGATI**	Professeur	Faculté des Sciences de Tunis	Directeur

Remerciements

Ce travail s'inscrit dans le cadre de la cotutelle entre l'Université Paris-Saclay, Ecole polytechnique Palaiseau, Centre de Mathématiques Appliquées (CMAP) (France) et l'Université de Tunis-El Manar, Faculté des Sciences de Tunis, Laboratoire d'Équations aux Dérivées Partielles (Tunisie).

Je tiens tout d'abord à remercier mes directeurs de thèse **M. Hamdi Zorgati** et **M. Olivier Pantz** de m'avoir encadré pendant ces années de thèse. Je les remercie de leur disponibilité, leur aide continue et leur gentillesse et encouragements.

Je tiens vivement à remercier **Mme Saloua Aouadi** et **M. François Jouve** d'avoir accepté d'être rapporteurs de ma thèse. Je les remercie également pour leurs remarques précieuses et leurs conseils indispensables.

J'exprime ma gratitude à **M. Jean-Jacques Marigo**, qui a accepté d'être parmi les membres de jury de cette thèse. C'est un grand honneur pour moi.

M. Salem Mathlouthi a accepté de faire partie de mon jury. Je lui adresse mes sincères remerciements et ma gratitude.

J'exprime ma gratitude à **M. Georgios Michailidis** qui a accepté également de faire partie de mon jury.

Un grand merci à tous les membres du Centre de Mathématiques Appliquées (Palaiseau) en particulier les doctorants et **Mme Nasséra Naar** et **Mme Alexandra Noiret** qui m'ont bien aidée à achever les procédures administratives durant les stages successifs que j'ai effectués au CMAP.

J'exprime ma grande reconnaissance et ma gratitude à **M. Fullenwarth Emanuel** et **M. Thierry Bodineau**, je les remercie très énormément pour leur aide et leurs essais de me faciliter toute tâche administrative nécessaire durant la soutenance.

Je remercie tous les membres du Laboratoire d'Équations aux Dérivées Partielles (Tunisie) et tous les enseignants des années de maîtrise. Un remerciement particulier aussi à tous les enseignants qui m'ont aidé à enrichir mon expérience pédagogique grâce à leur grande expérience professionnelle.

Un grand merci aussi aux secrétaires du laboratoire Dieudonné de l'université de Nice pour leur accueil et bienveillance.

Dédicaces

Cette page est dédiée avec un grand sentiment de reconnaissance à des personnes que sans leur intervention, ce travail ne pourra jamais être achevé. Je voudrais d'abord dédier ce travail à M. Zorgati de renouveler sa confiance après mon encadrement en Mastère et d'avoir offert pour moi une chance de s'ouvrir à un pays différent de mon pays natal en me proposant à M. Pantz pour faire une thèse en cotutelle.

Un grand merci à M. Zorgati pour son soutien continu et pour tous ses efforts à chaque stage de fournir un financement par des bourses de laboratoire EDP, ministère d'enseignement supérieur tunisien, son projet CMCU,...

Merci à M. Pantz qui m'a bien accueilli en Cmap à Palaiseau et aussi au laboratoire Dieudonné à Nice, en me motivant et m'encourageant, me faisant transmettre son ambiance de travail, sa volonté de produire de bons résultats.

Un coucou particulier aux personnes que j'ai connues en France, Alaa ma chère amie depuis mon premier séjour de m'avoir accompagnée à chaque occasion à se promener dans les monuments, les endroits éblouissants de Paris. Merci à Maroua mon symbole de forte personnalité et amour, Nesrine, mon cher frère Safouen, Moufida, Yakin, Thémoté., Aymen... Merci à Bouteina, Jamil, Amal, Zeineb, Mathias pour partager des moments de joie et de folie à Nice.

À mes amis qui m'ont tant soutenu et écouté Afef, Imen ,Abir, Fatma, Chahira,Boutaina, Ines, Rahma, Douha, Mounira, Nassira,Raja, Feten, Sondos, Wissem, Khalil, Nejib,Akrem, Moez, Mohamed Ali, Zied...,

À des amis que j'ai connus pendant les colloques Cimpa 2011 et 2015, Peyresq Sonda, Khawla,Asma , Soumaya, Hanen, Younes, Ali, Sofien, Youssef, Sihem, Ali, Elize. A tout enseignant qui m'a aidé et m'a positivement influé et m'a donné un grand souffle surtout pour continuer pendant une période critique de la thèse.

À ma famille assez chère compréhensive à mes chers parents Bochra-Moktar, merci pour leur affection et soutien énorme, à mon ange (Emna) ma soeur et ma binôme qui m'a facilité la vie loin de mes parents, mes frères et leurs femmes Ahmed-Emna, Abdelhamid-Yasmina, et leurs petits anges Farah-Yaakoub.

À mes cousines Ismahen et Sana et leurs anges Ibtihel, Yahya,Hamza, Omar et Israa.

À mon fiancé, merci pour son existence précieuse dans ma vie pendant cette dernière phase de la thèse qui m'a bien soutenu grâce à son grand amour sa compréhension, son écoute et merci à toute sa famille.

Aux personnes qui ont coloré ma vie pendant ces années de thèse avec des couleurs vives de réussites et d'espoir et des couleurs sombres de déception qui m'ont laissé plus rigide malgré tout mal vécu.

À mes amours de vie BMAAET,...

université PARIS-SACLAY | École doctorale de mathématiques Hadamard (EDMH)

Titre : *Analyse des liens entre un modèle d'endommagement et un modèle de fracture*

Mots clès : Endommagement, fracture, dérivée de forme, level set, irréversibilité, épaisseur minimale.

Résumé : Cette thèse est consacrée à la dérivation des modèles de fracture comme limite de modèles d'endommagement. L'étude est justifiée essentiellement à travers des simulations numériques. On s'intéresse à étudier un modèle d'endommagement initié par Allaire, Jouve et Van Goethem. Nous apportons des améliorations significatives à ce modèle justifiant la cohérence physique de cette approche.

D'abord, on ajoute une contrainte sur l'épaisseur minimale de la zone endommagée, puis on ajoute la condition d'irréversibilité forte.

Nous considérons en outre un modèle de fracture avec pénalisation de saut obtenu comme limite asymptotique d'un modèle d'endommagement. Nous justifions ce modèle par une étude numérique et asymptotique formelle unidimensionnelle. Ensuite, la généralisation dans le cas $2D$ est illustrée par des exemples numériques.

Title : Analysis of links between a damage model and a fracture model.

Keywords : Damage, fracture, shape derivative, level set, irreversibility, minimal thickness.

Abstract : This thesis is devoted to the derivation of fracture models as limit of damage models. The study is justified mainly through numerical simulations. We are interested in studying a damage model initiated by Allaire, Jouve and Van Goethem. We are making significant improvements to this model justifying the physical consistency of the approach. First, we add a constraint on the minimum thickness of the damaged area and then we add a condition of strong irreversibility.

We see also a fracture model with jump penalization obtained as an asymptotic limit of a damage model. We justify this model by a one-dimensional formal asymptotic numerical study. Then, the generalization in the $2D$ case is illustrated by numerical examples.

Université Paris-Saclay

Espace Technologique / Immeuble Discovery

Route de l'Orme aux Merisiers RD 128 / 91190 Saint-Aubin, France.

Table des matières

I Introduction générale **1**

Introduction générale. **3**

I.1) Formulation en élasticité linéaire 4

I.2) Modèle d'endommagement de Francfort-Marigo 5

I.3) Modèle d'endommagement d'Allaire-Jouve-Van Goethem 9

I.4) Outils classiques en optimisation de forme et méthode level set 9

I.4).1 Optimisation de forme 9

I.4).2 Application de la méthode géométrique 11

I.4).3 Méthode level set 12

I.5) Modèle de fracture de Francfort-Marigo 15

I.6) Modèle de Francfort-Bourdin 19

I.7) Régularisation des modèles d'endommagement 21

II Motivations **25**

II.1) Rappel : Dérivée de forme eulérienne. 27

II.2) Dérivée de forme Lagrangienne 28

II.3) Applications numériques 31

II.3).1 Modèle de fracture mode II 31

II.3).2 Modèle de Bittencourt 32

III Étude numérique revisitée du modèle d'endommagement de Francfort-Marigo **34**

III.1)Introduction 36

III.2)Endommagement et Fracture 36

III.2).1 Un modèle d'endommagement 36

III.2).2 Un modèle de fracture 38

III.3)Modèle de fracture comme limite d'un modèle d'endommagement 39

III.3).1 Approche de type champ de phase . . . 39
III.3).2 Approche atomistique . . . 40
III.4) L'algorithme AJV . . . 41
III.4).1 Une méthode de type gradient . . . 41
III.4).2 Représentation du domaine endommagé . . . 42
III.4).3 Description de l'algorithme (version continue) . . . 43
III.4).4 Description de l'algorithme (version discrétisée) . . . 43
III.5) Irréversibilité . . . 45
III.6) Contrainte d'épaisseur minimale . . . 47
III.6).1 Motivation . . . 47
III.6).2 Domaines admissibles d'épaisseur minimale . . . 48
III.6).3 Projection sur l'ensemble admissible . . . 49
III.6).4 Approximation de l'application T^ϵ. . . . 51
III.6).5 Reformulation du problème d'endommagement . . . 54
III.7) Un algorithme de type gradient projeté . . . 54
III.7).1 Approximation de la dérivée de forme. . . . 55
III.7).2 Détermination d'une direction de descente et régularisation . . . 55
III.7).3 Mise à jour de la fonction ligne de niveau . . . 56
III.7).4 Critère d'arrêt . . . 56
III.7).5 Résolution de $(\mathcal{Q}_i^{\varepsilon,h})$: Description de l'algorithme . . . 56
III.7).6 Résultats numériques . . . 57
III.7).7 Influence de la contrainte d'irréversibilité forte . . . 62
III.8) Conclusion . . . 63

IV Étude d'un modèle d'endommagement avec pénalisation de saut 65

IV.1) Introduction . . . 67
IV.2) Modèle d'endommagement avec pénalisation de saut : Cas unidimensionnel . . . 69
IV.2).1 Présentation du modèle d'endommagement : . . . 69
IV.2).2 Étude unidimensionnelle formelle à ε fixé : . . . 70
IV.2).3 Limite asymptotique formelle : . . . 73
IV.3) Étude numérique unidimensionnelle . . . 75
IV.3).1 Description de la méthode . . . 76
IV.3).2 Résultats numériques . . . 78
IV.4) Modèle d'endommagement avec pénalisation de saut : Cas bidimensionnel . . . 82

IV.4).1 Étude asymptotique formelle 82
IV.4).2 Étude numérique bidimensionnelle 82
IV.4).3 Modèle de Francfort-Bourdin revisité 85

Conclusion et perspectives **88**

Chapitre I

Introduction générale

Notations

Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d,\ d = 2, 3$.

$\partial\Omega$ est la frontière de Ω telle que

$$\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N.$$

u_D une condition de Dirichlet sur Γ_D.

f une force de volume appliquée dans Ω.

T une force surfacique appliquée sur Γ_N.

$\lambda,\ \mu \in \mathbb{R}$ les coefficients de l'élasticité.

$\mathcal{A}$ un tenseur d'ordre 4 et défini dans le cas isotrope par

$$\mathcal{A}_{i,j,k,l} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu\left(\delta_{ik}\delta_{il} + \delta_{il}\delta_{jk}\right).$$

e un tenseur d'ordre 2 dit tenseur de déformations et est donné par

$$e(u) = \frac{1}{2}\left(\nabla u + (\nabla u)^t\right).$$

σ est un tenseur d'ordre 2 et déduit de la loi de Hooke par :

$$\sigma = \mathcal{A} : e,\ \sigma_{ij} = \mathcal{A}_{ijkl}e_{kl}.$$

n est la normale unité sortante de $\partial\Omega$.

$\mathcal{M}_s^d$ est l'ensemble des matrices $d \times d$ symétriques.

Cette thèse porte sur l'étude des modèles d'endommagement et de fracture en élasticité linéaire. L'objet du travail est de résoudre dans différents cas, un problème de minimisation locale à travers un calcul formel et des simulations numériques en Freefem++.
On montre qu'un modèle de fracture peut être approché par un modèle d'endommagement. On présente dans cette introduction des rappels sur quelques notions de base et une revue sur des travaux antérieurs.

I.1) Formulation en élasticité linéaire

Nous suivons une formulation des problèmes en élasticité linéaire isotrope homogène avec HPP (Hypothèse de petites perturbations) qui impose que la configuration déformée résultant du comportement élastique est proche de la configuration initiale de référence.
L'élasticité est modélisée dans notre cas seulement en se basant sur les effets mécaniques dûes aux contraintes appliquées en évitant la considération de tout effet thermique. Alors, la théorie de l'élasticité s'intéresse à l'étude des déplacements, déformations et des contraintes dans un solide soumis à des forces extérieures.
Le comportement linéaire élastique se déduit intuitivement du cas multidimensionnel en considérant une barre de section constante S attachée à un bout et soumise à une force F sur le bord libre.
La contrainte est notée σ et est définie par la relation

$$\sigma = \frac{F}{S}.$$

Deux cas se présentent :

- La traction pour $F.n_s > 0$,
- La compression pour $F.n_s < 0$ avec n_s la normale à la surface.

Ainsi, les équations locales mécaniques décrivant le comportement élastique sont données par :

$$\begin{cases} -\operatorname{Div}\ \sigma\ = f \text{ dans } \Omega, \\ \sigma(u).n = T \text{ dans } \Gamma_N\ , \\ u = u_D, \quad \text{sur } \Gamma_D\ , \\ \sigma(u) = \mathcal{A} : e \end{cases} \tag{I.1).1}$$

L'énergie de déformation associée au problème d'élasticité linéaire isotrope (HPP) est notée W et est définie par :

$$W = \frac{1}{2}\left(\lambda(\operatorname{tr} e)^2 + 2\mu e : e\right).$$

L'existence et l'unicité de problème (I.1).1) est assurée d'une part par supposer que la frontière Γ_D doit être de mesure non nulle dans $\partial\Omega$.

D'autre part, le problème est bien posé se basant sur le fait que la densité d'énergie W est définie positive

résultant des inégalités sur les coefficients d'élasticité, le module de Young E et le coefficient de Poisson ν ($E > 0,\ -\frac{1}{2} < \nu < \frac{1}{2}$).

La forme intégrale associée au problème (I.1).1) est donnée par :

$$\int_\Omega \sigma e(u) : e(v)\ dx + \int_\Omega f.v\ dx + \int_{\gamma_N} T.u\ dS,\ v \in \mathrm{H}_0^1(\Omega).$$

En appliquant le Lemme de Lax Milgram en montrant que la forme bilinéaire associée est coercive (Lemme de Korn, [Duvaut, 1990]), l'existence et l'unicité des solutions de problème I.1).1 sont déduites.

On se réfère à [François, 1980, Duvaut, 1990, Ciarlet, 1997, Ledret, 2004] pour l'étude des notions de base du problème d'élasticité.

La section suivante est un bref rappel sur la modélisation classique de l'endommagement.

I.2) Modèle d'endommagement de Francfort-Marigo

Les premières formulations des modèles d'endommagement étaient incapables dans plusieurs cas de traiter correctement les compagnons inévitables de l'endommagement comme l'adoucissement, le durcissement des matériaux.

(Voir [Nguyen, 1987, Silling, 1988, De Borst, 1989, Benallal and Marigo, 2007]).

La modélisation classique de l'endommagement se base sur

- La définition du paramètre d'endommagement.
- La dépendance de facteur d'endommagement aux propriétés mécaniques.
- La loi d'évolution du paramètre d'endommagement.

Le choix des lois d'évolution et leurs structures a posé une grande problématique dans la construction des modèles.

Généralement, la structure des lois classiques varie d'un paramètre à l'autre et il n'y pas de prise en compte des paramètres de la géométrie des matériaux et des efforts appliqués.

Francfort-Marigo se sont inspirés de la modélisation initiée par Lemaître et Chaboch dans [Chaboch, 1978], dite phénoménologique, qui s'appuie simplement sur la définition d'un paramètre scalaire χ qui dépend des paramètres d'espace et de temps (x, t) .

A endommagement fixé, le matériau a un comportement élastique dont la rigidité dépend du degré d'endommagement.

D'une part, les phénoménologues ont défini le tenseur de rigidité noté A^χ comme suit :

$$A^\chi = (1 - \chi)A^0 + \chi A1, \qquad \text{(I.2).1)}$$

où χ prend les valeurs 0 ou 1 et $A^0,\ A^1$ sont deux tenseurs d'ordre 4.

D'autre part, A^χ est établi à l'aide d'outil de l'homogénéisation en supposant que χ définit une microstructure et A^χ comme le tenseur macroscopique de rigidité associé à cette structure.
D'autres formulations (voir [Pham and Marigo, 2010a, Pham and Marigo, 2010b]) ont été basées sur l'approche de Francfort-Marigo où l'état d'endommagement est décrit à l'aide d'un scalaire variant entre 0 et α_m avec $0 < \alpha_m < +\infty$ correspondant à l'état sain et α_m l'état ultime de l'endommagement différemment de Francfort-Marigo qui considèrent un modèle brutal où le paramètre χ ne prend que les valeurs 0 et 1. A χ fixé, le matériau a un comportement élastique. Son élasticité dépend de χ et est caractérisée non pas par A^χ mais cette fois-ci par un potentiel $\Psi(e,\alpha)$ où Ψ est continûment différentiable dans $\mathcal{M}_s^n \times [0,\alpha_m]$. On a $\sigma = \frac{\partial \Psi}{\partial e}(e,\alpha)$ avec

$$\Psi(\kappa e,\chi) = \kappa^2 \Psi(e,\chi)\ \frac{\partial \Psi}{\partial \chi} \leq 0,$$

où $\sigma,\ e$ sont les états locaux de contraintes et de déformations.
La loi d'évolution est établie grâce au critère de Drucker-Ilyushin où cette loi est standard

$$\dot{\chi} \geq 0,\ \frac{\partial W_0}{\partial \alpha} \geq 0,\ \dot{\chi}\frac{\partial W_0}{\partial \chi}(e,\chi) = 0,$$

où $\dot{\chi} = \frac{d\chi}{dt}$. Ce modèle a eu une extension naturelle en un modèle non local en ajoutant un terme quadratique de gradient de l'endommagement à l'expression du potentiel

$$\Psi(e,\chi,\nabla\chi) = d(\chi) + \Psi(e,\chi) + \gamma(\chi)\nabla\chi\nabla\chi.$$

Ce modèle permet de retrouver d'autres formulations classiques trouvées par C. Comi dans [Comi, 1999] et E. Lorentz dans [Lorentz and Andrieux, 2003].
Le modèle de Francfort-Marigo a été établi dans un cadre quasi-statique, ainsi on considère une suite de temps $(t_i)_{i\geq 1}$ avec $t_1 = 0,\ t_i < t_{i+1}$ à chaque temps t_i. Ainsi toutes les données et paramètres définissant le modèle sont indexées par i : $f^i,\ g^i,\ \chi^i, V^i, u^{\chi^i}, ...$

Le modèle de Francfort-Marigo se base sur trois ingrédients essentiels :

1. Un matériau élastique linéaire soumis à un endommagement brutal dont la rigidité décroit de A^0 à A^1 : Le modèle est établi dans le cadre de l'élasticité en petites déformations et en négligeant les effets d'inertie : la loi est décrite par le tenseur de rigidité

$$A^i = A^1(1-\chi^i) + \chi^i A^0 \qquad \text{(I.2).2)}$$

où $A^0 > A^1 > 0$ et

$$A^0 = 2\mu^0 I_4 + \lambda^0 I_2 \otimes I_2,$$

$$A^1 = 2\mu^1 I_4 + \lambda^1 I_2 \otimes I_2,$$

avec I_2 est le tenseur identité d'ordre 2 , I_4 est le tenseur identité d'ordre 4, (μ^0, λ^0) sont les coefficients d'élasticité associés au domaine endommagé et (μ^1, λ^1) sont les coefficients d'élasticité du domaine sain.

Ainsi, le cadre élastique de formulation du modèle induit le système d'élasticité suivant :

$$\begin{cases} -\operatorname{Div}(A^i e(u^i)) = f^i \text{ dans } \Omega \\ u^i = u^i_D \quad \text{sur } \Gamma_D \\ A^i e(u^i).n = g^i \quad \text{sur } \Gamma_N. \end{cases} \tag{I.2).3}$$

$u^i_D \in H^1(\Omega)$, $g^i \in L^2(\partial\Omega, \mathbb{R}^{d)}$, $f^i \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^d)$. Soit

$$V^i = \left\{ v^i \in H^1(\Omega, \mathbb{R}^d);\ v^i = u^i_D \ sur\ \partial\Omega \right\}.$$

Soit u^i la solution de I.2).3. Ainsi en posant,

$$P^i(u^i) = \int_\Omega \left(\frac{1}{2} A^i e(u^i) : e(u^i) - f^i.u^i\right) \mathrm{d}V - \int_{\Gamma_N} g^i u^i \ \mathrm{d}S \tag{I.2).4}$$

On a

$$P^i(u^i) = \inf_{u^i \in V^i} P^i(u^i) \tag{I.2).5}$$

2. Un critère d'endommagement énergitique s'écrit :

$$(A^0 - A^1)e.e > 2\kappa;\ \kappa > 0, \tag{I.2).6}$$

où le coefficient κ est un paramètre strictement positif caractéristique du matériau. Cette loi est connue comme la loi à seuil d'endommagement et a été introduite dans [Marigo, 1989].

3. Un critère de stabilité consistant à minimiser la somme de l'énergie potentielle élastique avec le terme introduit par Francfort-Marigo qui décrit l'énergie endommagée défini par

$$\kappa \int_\Omega \chi^i \ \mathrm{d}V \tag{I.2).7}$$

Ainsi, le modèle de Francfort-Marigo consiste à la minimisation globale par rapport au déplacement u^i et la variable d'endommagement χ^i de l'énergie totale

$$J^i(u^i, \chi^i) = P^i(u^i) + \kappa \int_\Omega \chi^i \ \mathrm{d}V. \tag{I.2).8}$$

Une hypothèse d'irréversibilité utilisée dans le modèle de Francfort-Marigo consiste à supposer qu'une fois le matériau est endommagé, il ne peut pas redevenir sain.

Ainsi, pour prendre en compte le caractère irréversible d'endommagement, il est nécessaire de prendre en compte de l'historique du trajet de chargements imposés. Ceci donne le cadre quasi-statique du modèle

de l'endommagement de Francfort-Marigo.

La zone endommagée initiale est supposée nulle ($\chi^0 = 0$) et la condition d'irréversibilité est donnée par

$$\chi \geq \chi^{i-1}.$$

En résumé, le modèle de Francfort-Marigo est une suite de problèmes de minimisation définis par

$$\forall i \geq 1 \inf_{\chi \in L^\infty(\Omega,\{0,1\}),\ \chi \geq \chi^{i-1}} J^i(u^i) = \inf_{u \in V^i,\ \chi \in L^\infty(\Omega,\{0,1\})} J^i(u,\chi) \qquad \text{(I.2).9)}$$

Dans la suite de notre travail, on va considérer la formulation originale du modèle de Francfort-Marigo donnée par l'équation (I.2).9).

Francfort et Marigo ont montré que le problème est mal posé et n'admet pas de solutions car la fonctionnelle minimisée n'est pas semi-continue inférieure et ont procédé à une relaxation du problème en remplaçant la fonctionnelle par son enveloppe semi-continue inférieure.

Francfort et Marigo ont montré qu'il existe une limite notée $\alpha(x)$ d'une sous-suite (χ_n^i) des fonctions caractéristiques de la zone endommagée où $\alpha(x)$ est un volume local de mélange fin de la zone saine et endommagée en un point x de Ω et ont introduit un tenseur homogène effectif représentant le tenseur de rigidité associé à ce mélange.

Ainsi le travail de Francfort-Marigo introduit dans [Francfort and Marigo, 1993] consiste à caractériser l'ensemble de ces tenseurs effectifs associés au mélange fin et la détermination des expressions explicites des densités des énergies relaxées dans le cas $2d$ et le cas $3d$.

Pour consulter les détails du calcul de ces quantités relaxées, on se réfère à la section 2 et la section 3 de [Francfort and Marigo, 1993].

Le modèle de Francfort-Marigo relaxé a été retrouvé par Lorentz dans [Lorentz, 1999] comme limite d'un modèle à gradient d'endommagement lorsque la longueur interne tend vers zéro.

Le modèle ainsi introduit par Francfort-Marigo a présenté une formulation plus adéquate que la formulation classique. Mais il présente un défaut majeur dans la définition de l'ensemble des configurations admissibles de la variable d'endommagement qui induit un faible traitement de la condition d'irréversibilité. Ainsi il est préférable de quitter la minimisation globale par rapport à la variable d'endommagement χ et de la remplacer par une minimisation locale.

En effet, ceci est l'objectif du travail de Allaire et al. dans [Allaire et al., 2011].

I.3) Modèle d'endommagement d'Allaire-Jouve-Van Goethem

Le travail de Allaire et al. consiste en une minimisation locale de l'équation (I.2).9).
La variable endommagée considérée par Allaire et al. est l'interface qui sépare la zone saine et la zone endommagée et est notée Σ.

Le but d'Allaire, Jouve et Van Goethem dans [Allaire et al., 2011] était basé sur une preuve purement numérique. Un modèle de fracture limite est obtenu en partant d'un modèle d'endommagement en faisant modifier l'expression de l'énergie de restitution de Griffith et en la faisant dépendre d'une certaine longueur caractéristique et d'un paramètre de maillage. Ainsi, Allaire Jouve et Van Goethem reformulent le modèle de Francfort et Marigo en considérant le problème de minimisation de l'énergie discrétisée

$$J_{\Delta x}(u_{\Delta x}, \chi_{\Delta x}) = \int_\Omega \frac{1}{2}\big(A_{\chi_{\Delta x}} e(u_{\Delta x}) : e(u_{\Delta x}) - f u_{\Delta x}\big)\mathrm{d}V + \frac{\kappa}{\Delta x}\int_\Omega \chi_{\Delta x}\mathrm{d}V \tag{I.3).1}$$

et obtiennent un modèle limite de fracture en faisant tendre le paramètre Δx vers 0 (taille du maillage) s'écrivant sous la forme

$$\min_{u,\Gamma} \int_{\Omega\setminus\Gamma} \frac{1}{2}\big(A_1 e(u) : e(u) - f u\big)\mathrm{d}V + \kappa \int_\Gamma \mathrm{d}S. \tag{I.3).2}$$

L'étude numérique de I.3).1 se base sur des outils classiques d'optimisation de forme et sur la méthode de lignes de niveau des fonctions. Ces outils seront utiles dans les chapitres suivants de notre travail. La section suivante est un reflet sur des notions de base de ces méthodes.

I.4) Outils classiques en optimisation de forme et méthode level set

I.4).1 Optimisation de forme

La méthode d'optimisation de forme est abordée pour résoudre des problèmes de variation de la frontière des domaines. C'est une approche variationnelle qui s'intéresse à minimiser une fonctionnelle coût intégrale par rapport à une famille de domaines.
L'existence d'une solution d'un problème d'optimisation nécessite le choix d'une topologie adéquate. Une grande littérature est consacrée à étudier ces problèmes dans le cadre de la mécanique des solides [Hadamard, 1908, Haslinger and Neittaanmäki, 1988, Banichuk, 1990, Laporte and Le Tallec, 2003], [Allaire, 2007], mécanique des fluides [Mohamadi and Pironneau, 2001]. Les techniques utilisées dans ce cadre sont similaires à la théorie des problèmes inverses qui s'intéressent essentiellement à déterminer les paramètres d'un modèle à partir des mesures expérimentales. Citons l'exemple du problème de détection

d'endommagement qui se situe dans la classe de problèmes (SHM : Surveillance d'Etat de Structure) dont l'objectif est de déterminer le module de Young dans les zones potentiellement endommagées de la structure afin de minimiser l'écart entre les mesures de déformation et la solution numérique du modèle physique (Voir [Chamoin et al., 2014]).

Citons aussi la théorie du contrôle optimal similaire à cette catégorie de problèmes qui se base sur la minimisation du coût de l'ensemble des trajectoires associées au contrôle, (voir [Trelat, 2005]).

Dans la suite de notre travail, on s'intéresse à l'optimisation de forme ou bien conception optimale de structures dans le cadre de la mécanique des solides et on se penche essentiellement sur [Allaire, 2007] pour décrire le problème type d'optimisation de forme.

En général un problème d'optimisation de forme est modélisé sous la forme

$$\inf_{\Omega \in \mathcal{U}_{ad}} J(\Omega)$$

où $J(\Omega)$ est une fonction coût qu'on veut minimiser et $\mathcal{U}_{ad}$ l'ensemble de formes admissibles.

En général il y a la non-existence de formes optimales dans la plupart des problèmes d'optimisation de forme.

Celle-ci est obtenue sous des contraintes supplémentaires géométriques ([Chenais, 1975]) ou sous des conditions topologiques ([Šverák, 1993, Chambolle, 2003]). Allaire et al. se basent sur un résultat obtenu par Murat et Simon dans [Murat and Simon, 1974, Murat and Simon, 1976] qui consiste à restreindre l'ensemble des configurations admissibles à des ensembles obtenus par application d'un difféomorphisme régulier au domaine initial.

Ce qui permet une représentation plus simple des formes admissibles en terme de difféomorphismes.

Étant donné un domaine de référence Ω_0 que l'on suppose un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^d$, une forme admissible est $\Omega = (Id + \theta)(\Omega_0)$ défini par $\Omega = \{x + \theta(x),\ x \in \Omega_0)\}$. Chaque forme admissible est représentée donc par un champ de vecteurs $\theta(x)$ de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^d$.

Une notion de différentiabilité en Ω_0 en utilisant la dérivation par rapport à θ est donnée par la définition suivante : Si $J(\Omega)$ est une application de l'ensemble des formes admissibles dans $\mathbb{R}$, J est différentiable par rapport au domaine en Ω_0 si la fonction $\theta \mapsto J((Id + \theta)(\Omega_0))$ est différentiable en 0 dans l'espace de Banach $W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ i.e :

$$J((Id + \theta)(\Omega_0)) = J(\Omega_0) + L(\theta) + o(\theta),\ avec\ \lim_{\theta \to 0} \frac{o(\theta)}{|| \theta ||_{W^{1,\infty}}} = 0.$$

On a alors $L = J'(\Omega_0)$.

Une méthode largement utilisée a été introduite par J. Cea dans [Céa, 1986] appelée Lagrangien noté $\mathcal{L}$ ou dérivation rapide.

Elle consiste à introduire le Lagrangien comme la somme de la fonction coût et la formulation variationnelle du problème étudié. Cette méthode assure donc que le calcul de la dérivée de forme $\frac{\partial J}{\partial \Omega}$ se réduit à l'évaluation du Lagrangien par rapport à la forme $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Omega}$.

Dans la plupart des problèmes d'optimisation de forme la dérivée de forme est donnée par

$$J'(\Omega_0)(\theta) = \int_{\partial\Omega_0} \theta.n \; d(\Omega_0) dS,$$

où $d(\Omega_0)$ est une fonction qui dépend de la dérivée. Une suite de formes optimales est cherchée notée Ω_t vérifiant la procédure d'itération suivante :

$$\Omega_t = (Id + \theta_t)(\Omega_0),$$

avec $\theta_t = -td(\Omega_0)n$ où $t > 0$ est un pas de descente adéquat. on a

$$J(\Omega_t) < J(\Omega_0) \; si \; d(\Omega_0) \neq 0 \; et \; t \; assez \; petit.$$

I.4).2 Application de la méthode géométrique

La zone saine est modélisée par un domaine fixé Ω et la zone endommagée est maillée et représentée par le domaine Ω. La propagation de la zone endommagée revient à ce que le domaine Ω soit convectée le long d'un champ θ. Ainsi le problème de minimisation de J par rapport à Ω se reformule en une minimisation de la fonction coût J par rapport à θ, i.e : Résoudre le problème

$$< J'(\Omega), \theta >< 0.$$

Ainsi, on suppose l'existence d'un espace de Hilbert contenant le champ θ tel que :

$$< J'(\Omega), \delta\theta) >_Y + < \theta, \delta\theta >_Y = 0, \;\; \delta\theta \in Y. \qquad \text{(I.4).2.1)}$$

Le choix de l'espace Y est d'une grande importance pour avoir une bonne direction de descente du gradient. Notons que l'espace $H^1(\Omega)$ a été le bon candidat pour le choix de l'espace de Hilbert dans les problèmes d'optimisation de forme. Le point clef de notre travail est comment va -t-on déplacer la zone endommagée ?

Le déplacement de la zone endommagée s'effectue en repérant les noeuds sur le bord de la zone endommagée, ensuite on les déplace suivant le champ de convection θ. Ainsi, un nouveau maillage sera construit de la zone endommagée et ceci se répète au cours des itérations de gradient. Pour récapituler, notre algorithme se base sur deux boucles :

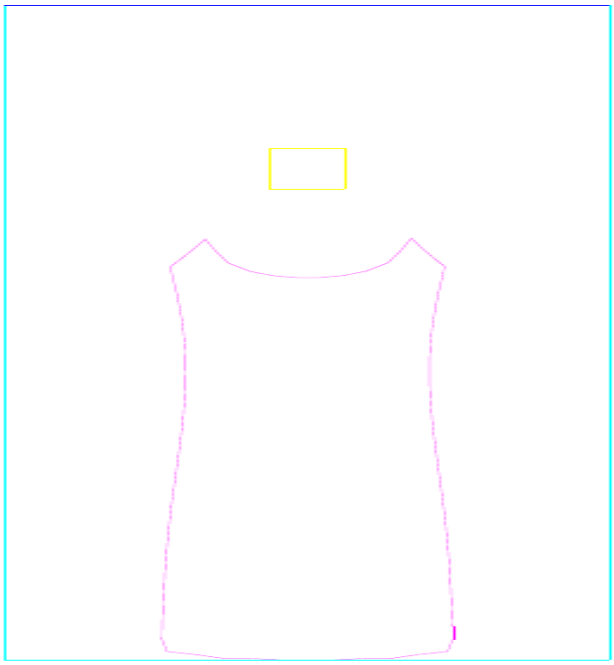


FIGURE I.4).2.1 – Modélisation de la propagation de la zone endommagée par la méthode géométrique

— une boucle extérieure de temps, au cours de laquelle on impose des forces sur la zone saine pour simuler un mode de fracture.
— une boucle interne de gradient au cours de laquelle la forme évolue selon un temps fictif qui correspond au pas de descente de gradient.

Conclusion :

Cette méthode s'avère très coûteuse en faisant un remaillage à chaque itération de l'algorithme en particulier dans le cas $3d$. Une application de la méthode géométrique pour simuler notre modèle d'endommagement est donnée par la figure I.4).2.1 où on obtient une propagation de la zone endommagée ayant deux branches symétriques lorsqu'elle s'approche du bord supérieur du domaine. Une alternative pour faire évoluer la zone endommagée était la représentaion implicite de la forme admissible à l'aide d'une fonction level set.
La section suivante est dédiée à présenter quelques notions de base de cette théorie.

I.4).3 Méthode level set

Cette méthode a été introduite par Osher et Sethian dans [Osher and Sethian, 1988, Sethian, 1999] afin de décrire la propagation spatiale d'un front ou d'une interface au cours du temps. Le mouvement de l'interface est supposé dans la direction normale et a été négligé dans les directions tangentielles.

La position initiale du front est une fonction level set zéro d'une autre fonction ψ à plusieurs variables et pour dériver une équation du mouvement de cette fonction ψ et faire correspondre la fonction level set zéro ψ avec l'évolution de front, la déformation du front en fonction du temps s'effectue en suivant les points qui restent sur le bord de la forme, ce qui permet de déduire que

$$\psi(t, x(t)) = 0. \tag{I.4).3.1}$$

En dérivant l'équation I.4).3.1, on obtient

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t}(x,t) + V(x,t).n \mid \nabla\psi(x,t) \mid = 0, \tag{I.4).3.2}$$

où V est la vitesse level set. En considérant en outre l'équation de Hamilton Jacobi (I.4).3.2), il est nécessaire de chercher la discrétisation de cette équation, la convergence, l'existence, etc

La construction d'un schéma d'approximation de l'équation de Hamilton Jacobi est dûe essentiellement dans [Osher and Sethian, 1988, Osher and Shu, 1991, Sethian, 1999].

La forme générale de l'équation est :

$$\alpha U_t + H(U_x, U_y) = 0, \ H \ étant \ l'hamiltonien.$$

Le cas unidimensionnel qui correspond à cette équation s'écrit sous la forme

$$\alpha U_t + H(U_x) = 0.$$

Ceci mène à l'étude d'une équation hyperbolique généralisée de la forme

$$u_t + [G(u)]_x = 0,$$

où G est une fonction flux. Ainsi, la construction des schémas d'approximation de l'équation d'Hamilton Jacobi n'est qu'une déduction des approximations numériques des équations des lois de conservation hyperboliques. La propriété de conservation se traduit par la définition suivante :

Le schéma vérifie la loi de conservation s'il existe une fonction numérique $g(u_{i-1}, u_i)$ appelée (flux) respectivement $(g(u_i, u_{i+1}))$, qui approche $G_{i-\frac{1}{2}}$, respectivement $(G_{i+\frac{1}{2}})$, telle que

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = -\frac{G_{i+\frac{1}{2}} - G_{i-\frac{1}{2}}}{\Delta x}.$$

Des exemples des expressions de flux de Lax-Friedrichs et Engquist-Osher sont donnés respectivement par

$$g_{EO}(u_1, u_2) = G(u_1) + \int_{u_1}^{u_2} min(\frac{dG}{du}, 0)du,$$

où G est supposée convexe et

$$g_{FL}(u_1,u_2)=\frac{-\Delta x}{2\Delta t}(u_2-u_1)+\frac{1}{2}[G(u_2)-G(u_1)].$$

Dans un cas particulier, lorsque $u_t+[u^2]_x=0$, Osher et Sethian montrent dans [Osher and Sethian, 1988, Sethian, 1999] que

$$g(u_1,u_2)=max(u_1,0)^2+min(u_2,0)^2.$$

Le schéma correspondant est donc

$$\alpha U_i^{n+1}=U_i^n-\Delta t g(\frac{U_i^n-U_{i-1}^n}{\Delta x},\frac{U_{i+1}^n-U_i^n}{\Delta x}).$$

Un schéma d'ordre supérieur s'écrit

$$U_{i,j}^{n+1}=U_{i,j}^n-\Delta g(\frac{U_{i,j}^n-U_{i-1,j}^n}{\Delta x},\frac{U_{i+1,j}^n-U_{i,j}^n}{\Delta x},\\ \frac{U_{i,j}^n-U_{i,j-1}^n}{\Delta y},\frac{U_{i,j+1}^n-U_{i,j}^n}{\Delta y})$$

Ceci permet de déduire la discrétisation de l'équation level set, plus précisément, en posant $H(u)=\sqrt{u^2}$, on obtient l'équation level set

$$u_t+[u^2]_x=0.$$

Le schéma proposé donc est de la forme

$$g(u_1,u_2)=max(u_1,0)^2+min(u_1,0)^2.$$

Ainsi,

$$\psi_i^{n+1}=\psi_i^n-\Delta t[max(D_i^{-x},0)^2+min(D_i^{+x},0)^2]^{\frac{1}{2}}.$$

La version multidimensionnelle de ce schéma level set s'écrit :

$$g_{LS}(u_1,u_2,v_1,v_2)=[max(u_1,0)^2+min(u_1,0)^2+max(v_1,0)^2+min(v_1,0)^2]^{\frac{1}{2}}.$$

Notations

On utilise les notations standards en différences finies. Le domaine est considérée comme une grille constituée de l'axe des abscisses divisé en i noeuds et l'axe des ordonnées divisé en j noeuds. ψ_{ij}^n désigne l'approximation de la fonction ψ au point (i,j) à un instant t^n.

$$\begin{aligned}
D_{ij}^{-x}&=\psi_{i+1,j}-\psi_{i,j}.\\
D_{ij}^{+x}&=\psi_{i,j}-\psi_{i-1,j}.\\
D_{ij}^{-y}&=\psi_{i,j+1}-\psi_{i,j}.\\
D_{ij}^{+y}&=\psi_{i,j}-\psi_{i,j-1}.\\
D_{ij}^{-x+x}&=\psi_{i+1,j}-2\psi_{i,j}+\psi_{i-1,j}.\\
D_{ij}^{-y+y}&=\psi_{i,j+1}-2\psi_{i,j}+\psi_{i,j-1}.
\end{aligned}\qquad \text{(I.4).3.3)}$$

L'approximation d'ordre 1 en espace sous la condition de convexité de l'Hamiltonien H est donnée par :

$$\psi_{ij}^{n+1} = \psi_{ij}^{n} - \Delta t[\max(V_i^n, 0)\nabla^+ + \min(V_n^i, 0)\nabla^-].$$

Avec

$$\nabla^+ = \sqrt{\max(D_{ij}^{-x}, 0)^2 + \min(D_{ij}^{+x}, 0)^2 + \max(D_{ij}^{-y}, 0)^2 + \min(D_{ij}^{+y}, 0)^2},$$
$$\nabla^- = \sqrt{\max(D_{ij}^{+x}, 0)^2 + \min(D_{ij}^{-x}, 0)^2 + \max(D_{ij}^{+y}, 0)^2 + \min(D_{ij}^{-y}, 0)^2}$$

L'approximation d'ordre 2 en espace s'écrit :

$$\psi_{ij}^{n+1} = \psi_{ij}^{n} - \Delta t[\max(V_{ij}^n, 0)\nabla^+ + \min(V_i^n, 0)\nabla^-], \tag{I.4).3.4}$$

où

$$\nabla^+ = \sqrt{\max(A, 0)^2 + \min(B, 0)^2 + \max(C, 0)^2 + \min(D, 0)^2},$$

$$\nabla^- = \sqrt{\max(B, 0)^2 + \min(A, 0)^2 + \max(D, 0)^2 + \min(C, 0)^2},$$

avec

$$A = D_{ij}^{-x} + \frac{\Delta x}{2} m(D_{ij}^{-x-x}, D_{ij}^{+x-x}),\ B = D_{ij}^{+x} - \frac{\Delta x}{2} m(D_{ij}^{+x+x}, D_{ij}^{+x-x}),$$

et

$$C = D_{ij}^{-y} + \frac{\Delta y}{2} m(D_{ij}^{-y-y}, D_{ij}^{+y-y}),\ D = D_{ij}^{+y} - \frac{\Delta y}{2} m(D_{ij}^{+y+y}, D_{ij}^{+y-y}).$$

La fonction m est appelée "Switch" et est définie par :

$$m(x, y) = \begin{cases} x\ si\ \ |x| \leq y,\ y\ si\ \ |x| > y,\ (x.y \geq 0), \\ 0\ si\ xy < 0, \end{cases}$$

Ces schémas ont été introduits dans [Harten and Osher, 1987].

I.5) Modèle de fracture de Francfort-Marigo

La mécanique de rupture s'intéresse à l'étude de l'évolution d'une fissure ou plusieurs fissures dans un milieu continu en fonction du chargement auquel il est soumis. La théorie principale se consacrant à l'étude de ces problèmes est celle de Griffith ([Griffith, 1920]).

Cette théorie se base sur deux points essentiels, d'une part l'affectation d'une énergie de surface aux fissures et un critère qui suppose qu'une fissure ne peut se propager que si l'énergie restituée par le milieu d'un accroissement infinitésimal de la fissure compense l'énergie de surface nécessaire à sa création. La définition du critère de Griffith est décrite à travers un paramètre G, qui a fait l'objet de plusieurs travaux

(voir [Irwin, 1957, Irwin, 1958, Rice, 1968, Destuynder and Djaoua, 1981]).

On considère donc un milieu bidimensionnel en supposant le trajet de la fissure connu a priori et en admettant que l'énergie notée J est dérivable par rapport à une longueur notée l. Le problème d'évolution s'écrit ; Trouver $t \mapsto l(t)$ tel que :

$$l(0) = 0,\ \frac{dl}{dt}(t) \geq 0,\ \frac{dJ}{dl}(l(t), t) \leq k,\ \frac{dJ}{dl}((l(t), t) + k)\frac{dl}{dt} = 0.$$

L'inconvénient de cette formulation de Griffith est la définition restrictive de l'ensemble admissible des fissures et révèle les problèmes suivants,

— L'existence d'une fissure initiale a priori

— Connaissance du trajet de fissuration a priori.

— La non prise en compte des évolutions non régulières de la fissure et la propagation brutale.

Une nouvelle approche a été établie par Francfort-Marigo dans ([Francfort and Marigo, 1998]) se débarrassant des hypothèses classiques considérées par Griffith. Elle consiste à chercher parmi toutes les fissures possibles celles qui conduisent à un état de moindre énergie de la structure.

Ainsi, l'énergie associée au modèle de Francfort-Marigo est définie comme la somme d'une énergie élastique et d'une énergie fissurée :

$$J^{totale}(u, \Gamma) = J^{elas}(u, \Gamma) + J^{fis}(\Gamma) = \int_{\Omega \backslash \Gamma} W(e(u))\ \mathrm{d}x + G^c \mathrm{H}^{d-1}, \tag{I.5).1}$$

où $W(e) = \lambda \operatorname{tr}(e)^2 + \mu e.e$, G^c est le paramètre de ténacité du matériau, $e(u)$ le tenseur symétrisé du gradient et H^{d-1} est la mesure de Hausdorff $d-1$ dimensionnelle.

En considérant des déplacements croissants linéaires

$$U(t, x) = tU(x),$$

Francfort-Marigo décrivent l'évolution quasi-statique du problème en cherchant l'état à l'instant t^i connaissant l'état à l'instant t^{i-1}, la solution du problème de minimisation suivant :

$$\inf \left\{ E^{totale}(u, \Gamma),\ u \in C(\Gamma, t^i),\ \Gamma \supset \Gamma_{i-1} \right\} \tag{I.5).2}$$

où

$$C(\Gamma, t) = \{u \in H^1(\Omega \backslash \Gamma);\ u(x) = tU(x)\ sur \partial\Omega\}$$

et

$$\Gamma \supset \Gamma_{i-1}$$

est une condition d'irréversibilité sur la fissure.

Ainsi, la formulation de Francfort-Marigo, d'une part retrouve les résultats postulés par Griffith, citons l'exemple retrouvant le critère de propagation de Griffith identique dans le cas d'une évolution régulière

et réussit à trouver des résultats de propagation qui s'avèrent impossibles par la loi de Griffith dans le cas d'une propagation brutale de fissure.

Cependant, cette présentation possède des défauts qui font l'objet de plusieurs études actuelles revisitant ce modèle. En effet, cette formulation est restreinte aux déplacements imposés. A part ça il y a le cadre quasi-statique de la formulation, la minimisation globale, la forme de l'énergie de surface qui doit être revisitée, les critères physiques comme le branchement de la fissure, la fermeture des lèvres de la fissure,... Comme réponse à ces questions, citons quelques extensions revisitant le problème de Francfort-Marigo. Ainsi, des restrictions sur l'ensemble admissible des fissures ont été considérées (voir Lorentz et al. dans [Lorentz et al., 2000]) afin de simplifier le problème de minimisation de Francfort-Marigo en considérant une famille $\Gamma(l)$ dépendant de la longueur de la fissure caractérisant l'ensemble des fissures admissibles et en supposant $l^{n-1} = 0$. Le problème discrétisé obtenu est donné par

$$(u_n, l_n) = \min_{l,u} J^{totale}(u, \Gamma(l)). \tag{I.5).3}$$

D'autre part, une étude a été initiée par Miguel dans [Miguel et al., 2006] tenant compte du changement de la forme de l'énergie de surface de Griffith en la remplaçant par une énergie de surface du type Barenblatt où cette densité d'énergie ne dépend pas d'une façon triviale du saut des déplacements admissibles. En outre, une étude dynamique a été ajoutée par Bourdin et al. dans
[Bourdin et al., 2011] où les solutions du problème de Francfort et Marigo qui ont été établies dans le cadre quasi-statique sont des limites des solutions de ce même problème établi dans un cadre dynamique sous certaines hypothèses (Voir [Larsen et al., 2010]). Dans la même idée de considérer une formulation dynamique du problème, on cite le travail de Berdin (Voir [Berdin, 2004]) dans un cadre probabiliste.

Des conditions plus physiques ont été prise en compte dans l'étude du modèle de Francfort-Marigo de la fracture dans [Amor et al., 2009] où la condition de non interpénétration des lèvres de la fissure est ajoutée. Des résultats acceptables numériquement ont été établis mais manquant d'une étude rigoureuse par Gamma-convergence. D'autres résultats dans ce cadre sont trouvés par Simon dans [Racca, 2014] où on tient compte du branchement de la fissure et de la distinction entre les comportements de la fissure en traction et en compression.

Le problème de Francfort et Marigo consiste en la minimisation globale de l'énergie totale par rapport aux déplacements admissibles et fissures admissibles. Ce problème est classé comme un problème à discontinuité libre dont la caractéristique est d'avoir des inconnus (u, K) où K inclus dans $\mathbb{R}^d$ est un

fermé de Ω, dont le prototype est

$$\min\big\{G(u,K);\ K\subset\mathbb{R}^d,\ fermé,\ u\in\mathcal{C}^1(\Omega\backslash K)\big\},\tag{I.5).4}$$

avec

$$G(u,K)=\int_{\Omega\backslash K}\mid\nabla u\mid^2\,\mathrm{d}x+\int_{\Omega\backslash K}\mid u-g\mid^p\,\mathrm{d}x+\mathrm{H}^{d-1}(\Omega\cap K),\tag{I.5).5}$$

et

$$1\leq p\leq+\infty,\ g\in L^p(\Omega)\cap L^\infty(\Omega).$$

Ce type de problèmes a été initialement étudié dans le cadre de segmentation d'images via le modèle de Mumford-Shah [Mumford and Shah, 1989] souligné par la minimisation de l'énergie pour (Γ) fermé et $u\in W^{1,2}(\Omega\backslash\Gamma)$

$$\int_{\Omega\backslash\Gamma}\mid\nabla u\mid^2+k\mathrm{H}^{d-1}(\Omega\cap\Gamma)+k'\int_\Omega\mid u-g\mid^2\,\mathrm{d}x,\tag{I.5).6}$$

où u est l'intensité du pixel recherchée et k,k' sont des poids.

Par ailleurs, un schéma de régularisation proposé par Ambrosio-Tortorelli dans [Ambrosio and Tortorelli, 1990] a été considéré et a induit la formulation faible donnée par

$$\min\Big\{\int_\Omega\mid\nabla u\mid^2\,\mathrm{d}x+k\mathrm{H}^{d-1}(\Omega\cap S_u)+k'\int_\Omega\mid u-g\mid^2\,\mathrm{d}x,\ u\in SBV(\Omega)\Big\},\tag{I.5).7}$$

où $SBV(\Omega)$ est l'espace des fonctions spéciales à variation bornée de Ω.

Voir [Ambrosio and Tortorelli, 1990] pour une étude des propriétés de cet espace.

Une étude est déduite dans [Carriero and Leaci, 1990] considérant

$$\Omega=\mathbb{R}^2,\ u=u(x,y)e_z.$$

Le problème consiste à trouver

$$\min\int_{\Omega\backslash\Gamma}\frac{1}{2}\mid\nabla u\mid^2\mathrm{d}x+k\mathrm{H}^1(\Omega\backslash\mathcal{N}_1),$$

avec $u\in W^{1,2}(\Omega\backslash\Gamma),\ u=U_1$ sur $\partial\Omega_D$ et $\mathcal{N}_1$ le complémentaire de $\partial\Omega_D$.

Une étude d'existence a été inspirée par le modèle d'Ambrosio-Tortorelli en l'adaptant avec l'ajout de conditions aux limites sur u (voir [Bourdin and Chambolle, 2000]) où lorsque (u,Γ) est solution du problème d'origine alors u est minimiseur du problème faible.

En adoptant la formulation faible du problème de minimisation globale du modèle de Francfort-Marigo, le calcul numérique par éléments finis semble impossible car on ne connaît pas la discontinuité a

priori. L'idée est d'étaler le saut par l'introduction d'une seconde variable. Dans [Bourdin, 1998], Bourdin a montré que

$$E(u,v) = \begin{cases} \int_\Omega |\nabla u|^2 \, \mathrm{d}x + \mathrm{H}^1(S_u); \quad v = 1 \text{ p.p dans } \Omega \\ +\infty \text{ sinon} \end{cases} \tag{I.5).8}$$

est la Γ limite dans $(L^2, (\mathbb{R} \times [0,1])$ de

$$E_c(u,v) = \begin{cases} \int_\Omega (v^2 + K_c)|\nabla u|^2 + c|\nabla v|^2 + \frac{(1-v)^2}{4c} \, \mathrm{d}x; \quad v = 1 \text{ p.p dans } \Omega, \ u = U_1 \quad \text{in } \Omega_b \\ +\infty \text{ sinon} \end{cases} \tag{I.5).9}$$

où Ω_b est un domaine contenant compactement le domaine Ω et la donnée U_1. La discrétisation se fait intuitivement en projetant tous les termes sur un espace de dimension finie sur les partitions de Ω en simplexes.

Une autre méthode considérée était de procéder directement à la discrétisation de $E(u,v)$ où $E(u,v)$ est la Γ-limite de

$$E_h(u,T) = \begin{cases} \sum_{T \in \tau_h} |T \cap \Omega| \, \frac{1}{h_T} f(h_T |\nabla u|^2); \quad v = 1 \text{ p.p dans } \Omega \\ +\infty \text{ sinon,} \end{cases} \tag{I.5).10}$$

où τ_h est une triangularisation de Ω et T un triangle appartenant à τ_h. L'étude a été étendue au cas général de l'élasticité où le problème de minimisation est donné par

$$\min \int_{\Omega \backslash \Gamma} \frac{1}{2} Ae(u) : e(u) + k\mathrm{H}^{d-1}(\Gamma \backslash \mathcal{N}_1), \ u \in W^{1,2}(\Omega \backslash \Gamma), \ u = U_1 \ sur \ \partial\Omega.$$

L'idée est de procéder à une formulation dans l'espace $SBV(\Omega)$ par analogie au cas anti-plan. Ceci implique la formulation faible

$$\min \int_{\Omega} \frac{1}{2} Ae(u) : e(u) + k\mathrm{H}^{d-1}(J_u), \ u \in SBV(\Omega_b), \ u = U_1 \ sur \ \Omega_b \backslash \Omega.$$

Mais le problème de montrer l'équivalence entre la formulation d'origine et la formulation faible n'est pas encore complet. En outre, la formulation en $SBV(\Omega)$ n'est pas suffisante car l'inégalité de Korn utilisée pour montrer l'existence est en défaut dans l'espace BV (l'espace des fonctions à variation bornée).

I.6) Modèle de Francfort-Bourdin

L'idée est d'introduire l'espace $SBD(\Omega)$ l'espace des fonctions $L^1(\Omega, \mathbb{R}^d)$ dont le gradient symétrisé est une mesure. Ceci est l'objet de travaux de Bourdin dans [Bourdin, 2007] où il se propose de décrire une implémentation numérique du modèle variationnel de fracture de Francfort-Marigo. La différence avec

étant d'utiliser les forces volumiques au lieu de déplacements imposés. Étant dans le cadre quasi-statique, une suite de pas de temps

$$0, t^{(0)}, ..., t^{(n)} = T$$

est considérée et à chaque temps $t^{(n)}$, une force $f^{(n)}$ est appliquée sur Ω_D sous la forme

$$f(t, x) = tf(x).$$

En définissant l'ensemble

$$K^{(n)} = \big\{u \in SBD(\bar{\Omega}),\ u(x) = 0\ dans\ \Omega_D,\ J_u \subset \bar{\Omega}_F,\ ||\ u\ ||_\infty \leq M\big\},$$

où Ω un ouvert borné de frontière lipschitzienne ,

$$\Omega = \Omega_D \cup \Omega_F$$

et M une constante purement technique.

L'ensemble des sauts est défini par

$$\Gamma_u^{(n)} = \cup_{0 \leq s \leq n} J_u(s),$$

avec

$$\Gamma_u^{(s)} \supset \Gamma_u^{(n)},\ \forall s \leq n.$$

L'énergie totale est donnée par la somme d'une énergie élastique E^{el} et une énergie fissurée E^{fis} où

$$E^{els}(u^{(n)}) = \frac{1}{2}\int_{\Omega_F} A_F e(u) : e(u)\ \mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_{\Omega_D} A_D e(u) : e(u) - 2f.u\ \mathrm{d}x,$$
$$E^{fis}(u^{(n)}) = \gamma \mathrm{H}^{d-1}(\Gamma(u^n)),$$

et $\mathcal{H}^{d-1}$ est la mesure de Hausdorff $d-1$ dimensionnelle et γ est l'épaisseur de la fracture de matériau. Ainsi le modèle est donné par

$$\inf_{u \in K} E^{totale}(u). \tag{I.6).1}$$

La méthode proposée est une minimisation de l'équation (I.6).1) par Γ convergence en posant

$$\eta_\epsilon = o(\epsilon),\ \alpha_\epsilon = o(\epsilon),$$

$$\begin{aligned} E_\epsilon^{totale}(u, v) &= E_\epsilon^{el}(u, v) + E_\epsilon^{fis}(u, v) \\ &= \frac{1}{2}\int_{\Omega_F} (v^2 + \eta_\epsilon) A_F e(u) : e(u) + \frac{1}{2}\int_{\Omega_D} A_D e(u) : e(u) - 2f.u\mathrm{d}x \\ &+ \gamma \int_\Omega \frac{(1-v)^2}{4\epsilon} + \epsilon |\ \nabla v\ |^2\ \mathrm{d}x, \end{aligned} \tag{I.6).2}$$

$$K_\epsilon^{(n)} = \big\{x \in \bar{\Omega},\ v^{(n)} \leq \epsilon\big\}(irréversiblité).$$

Ainsi, à chaque instant, on cherche $(u_\epsilon^{(n)}, v_\epsilon^{(n)})$ solution du problème

$$\inf_{u\in K^{(n)},\ v=0\ sur\ K_\epsilon^{(n)}} E_\epsilon^{totale}(u,v). \tag{I.6).3}$$

La convergence des minimiseurs de E_ϵ approche les minimiseurs de E. est due à un argument de compacité introduit par Dal Maso ([Dal Maso, 1993]).

Bourdin utilise l'idée introduite par Ambrosio qui consiste à supposer que si $F_{\epsilon,h}$ est la restriction de F_ϵ sur un espace d'éléments finis linéaire, alors $F_{\epsilon,h}$ $\Gamma-converge\ vers\ F$. La relation entre la taille de discrétisation h et le paramètre de régularisation pose une difficulté, (voir [Bellettini and Cosia, 1994]). Pour éviter ces problèmes, Bourdin suppose que le maillage est uniforme et suffisamment fin. Dans le problème $\inf E_\epsilon(u,v)$ intervient une fonctionnelle non convexe. Ainsi la minimisation est traitée séparément sur les variables u et v, ce qui implique un algorithme de minimisation alternée en u et v (voir [Bourdin, 2007]). Il est prouvé que l'algorithme converge vers un minimum global si la propagation de la fissure est régulière.

Dans le cas contraire, l'algorithme converge vers un point critique de E_ϵ qui peut être un minimum global, minimum local ou un point selle. Afin d'éviter la convergence vers un point selle, Bourdin introduit un algorithme dit 'backtacking' en temps, se basant sur une condition d'optimalité de l'évolution de la fissure en fonction du temps, si $u^{(r)},\ u^{(p)}$ sont des minima globaux de E à l'instant $t^{(r)}$ et $t^{(p)}$ alors

$$E_\epsilon^{totale}(u^{(r)}, v^{(r)}) \leq \frac{t^{(r)}}{t^{(p)}}^2 E_\epsilon^{el}(u^{(p)}, v^{(p)}) + E_\epsilon^{fis}(v^{(p)}),\ \forall 0 \leq r \leq p. \tag{I.6).4}$$

I.7) Régularisation des modèles d'endommagement

L'analyse par éléments finis des modèles d'endommagement implique une concentration de l'énergie dissipée dans un endroit de la structure et la conservation de l'élasticité dans le reste de la structure. Ce phénomène est dit un phénomène de localisation de l'endommagement dans une bande de structure dépendant de la taille de l'élément fini et son orientation. Un exemple 1D d'une barre élastique a été étudié décrivant ce phénomène de localisation dans [Pijaudier-Cabot and Bažant, 1987]. En outre, un exemple 2D d'une plaque trouée a été introduit dans [Forest and Lorentz, 2004] expliquant la dépendance de la propagation de l'endommagement par rapport à l'orientation du maillage.

La résolution de ces phénomènes a été effectuée dans la théorie non locale de l'endommagement.

Cette théorie consiste à remplaçer des grandeurs locales par des grandeurs non locales via des opérateurs de régularisation.

Ces grandeurs désignent les variables d'état du modèle, le taux de restitution de l'énergie,...

En effet, les modèles d'endommagement non locaux résultant de la régularisation des variables d'état se divisent en deux catégories : Les modèles d'endommagement du type intégraux où les variables d'état

non locales sont obtenues comme une moyenne des variables d'état locales standards.
Citons les travaux de Rodriguez dans [Rodriguez-Ferran et al., 2005] s'intéressant aux déplacements comme variables d'état et les travaux de Godard dans [Godard, 2005] considérant les déformations comme des variables d'état.

Les modèles d'endommagement du type gradient considèrent des dérivées d'ordre supérieur (en général d'ordre 2) ajoutées à l'équation aux dérivées partielles qui décrit l'évolution des déplacements non locaux.
Des exemples numériques sont illustrés dans [Rodriguez-Ferran et al., 2005] servant à montrer l'intérêt de ce type de régularisation sur la correction des problèmes associés aux effets locaux des modèles d'endommagement non régularisés ainsi que la facilité que portent ces modèles aux traitements numériques. La régularisation du taux de restitution de l'énergie d'endommagement se fait en considérant une moyenne spatiale par rapport à la taille caractéristique du matériau,
(voir [Pijaudier-Cabot and Bažant, 1987]).

D'autres travaux ont été établis aussi dans le cadre de la régularisation des modèles d'endommagement mais en quittant le formalisme quasi statique et en introduisant l'effet visqueux de la vitesse [Needleman, 1988]. Remarquons que d'une part, l'analyse des modèles d'endommagement et de fracture dans l'optique de l'optimisation de forme a fait intervenir des propriétés et des expressions qui ne sont pas définies de manière unique comme l'expression de la dérivée de forme, la définition de la vitesse level set, la condition d'irréversibilité ,... D'autre part, des problèmes de dépendance des paramètres de discrétisation sont trouvés en utilisant la méthode des éléments finis pour la simulation numérique de ces modèles. Les deux parties de cette thèse sont consacrées à la résolution de ces problèmes.

On donne un court descriptif des chapitres suivants :

Description du chapitre II

Dans ce chapitre, on présente l'intérêt de l'approche lagrangienne pour exprimer la dérivée de forme. Ensuite, validant cette approche, on montre que notre algorithme est capable de retrouver des résultats numériques similaires à ceux de Allaire et al. en utilisant une expression différente de la dérivée de forme. Ce qui est une sorte de validation de cette formulation lagrangienne qu'on va utiliser dans le reste de cette thèse.

Description du chapitre III

Ce chapitre est dédié à une étude numérique revisitée du modèle d'endommagement de Francfort et Marigo [Francfort and Marigo, 1993] introduite par Allaire et al. dans [Allaire et al., 2011]. En outre, on introduit une nouvelle condition d'irréversibilité qui prend en compte l'évolution de la zone endommagée

d'une manière plus cohérente.

Un algorithme instable résulte de la simulation numérique du modèle d'Allaire et al. dans le cas où la zone endommagée est de taille inférieure à la taille d'une maille. On ajoute ainsi une contrainte sur l'épaisseur minimale de la fissure pour éviter ces irrégularités. On suit une approche similaire à G. Michailidis dans [Michailidis, 2014]. Une évolution de la fissure est obtenue, similaire à celle obtenue par Allaire et al. On se propose ensuite d'étudier la stabilité de l'algorithme en effectuant des tests numériques pour étudier l'influence des différents paramètres.

Description du chapitre IV

Ce chapitre est consacré à l'étude d'un modèle de fracture avec pénalisation de saut obtenu comme limite asymptotique formelle d'un modèle d'endommagement. En effet, le modèle est décrit par le problème de minimisation donné par

$$\min_{u,\alpha,\Gamma} J\left(u,\alpha,\Gamma\right)$$

où l'énergie totale J est définie par

$$J(u,\alpha,\Gamma)=\frac{1}{2}\int_{\Omega\setminus\Gamma} Ae(u):e(u)\ \mathrm{d}x+\int_{\Gamma}\kappa|\alpha|\ ds+\frac{1}{2}\int_{\Gamma}|\alpha|^{-1}(A[u]\odot n):(A[u]\odot n)\ \mathrm{d}s$$

obtenue comme limite asymptotique formelle lorsque ϵ tend vers zéro du modèle défini par :

$$J(u_\epsilon,\Gamma_\epsilon)=\frac{1}{2}\int_{\Omega\setminus\Gamma_\epsilon} Ae(u_\epsilon):e(u_\epsilon)\ \mathrm{d}x+\int_{\Gamma_\epsilon}\kappa_\epsilon|\alpha|\ ds+\frac{1}{2}\int_{\Gamma_\epsilon}\ \epsilon Ae(u_\epsilon):e(u_\epsilon)\mathrm{d}s \tag{I.7).1}$$

où

$$\Gamma_\epsilon=\left\{x+t\epsilon n,\ x\in\Gamma,\ -\frac{\alpha}{2}\leq t\leq\frac{\alpha}{2}\right\}.$$

On considère un scaling particulier du paramètre de Griffith κ_ϵ défini par

$$\kappa_\epsilon=\frac{\kappa}{\epsilon}. \tag{I.7).2}$$

Le paramètre ϵ joue un rôle important dans notre approche, d'une part il est utilisé dans la définition du paramètre de Griffith, d'autre part il sert à définir la zone endommagée considérée qui est relativement grossière par rapport à celle de Allaire et al. et qui a été supposée très dégénérée. On montre la stabilité de cette approche à travers des simulations numériques.

Chapitre II

Motivations

Nous commençons dans ce chapitre de présenter l'intérêt de notre usage de la formulation lagrangienne de la dérivée de forme. Puis, on retrouve des résultats numériques similaires à Allaire et al. dans [Allaire et al., 2011] en appliquant l'expression de la dérivée de forme lagrangienne.

La section II.1) est un rappel sur la dérivée de forme eulérienne. La section II.2) consiste à décrire la dérivée de forme lagrangienne et présenter notre expression utilisée pour le reste des problèmes dans ce travail. On reprend l'expérience de Allaire et al de la fracture mode II et on montre qu'on retrouve le même aspect de propagation, voir la section II.3).1. En outre, la section II.3).2 est dédiée à montrer qu'on retrouve la propagation de la fissure à l'intérieur de domaine perforé de Bittencourt.

II.1) Rappel : Dérivée de forme eulérienne.

Notons Ω le domaine de référence du solide élastique et u son déplacement. On note ω la zone endommagée (c'est à dire l'ensemble des éléments de Ω où $\chi = 1$).

Soit θ un champ Lipschitzien de vecteurs sur Ω tel que $\theta \cdot n = 0$ sur $\partial\Omega$. On note e^θ le difféomorphisme de Ω dans Ω défini par

$$e^\theta(x) = X_\theta(x, 1) \text{ pour tout } x \in \Omega,$$

où X_θ sont les caractéristiques du champ θ.

Autrement dit, $X_\theta(x,t)$ correspond à la position d'un point matériel localisé au point x au temps $t = 0$ transporté le long du champ θ pendant un temps t.

$$\begin{cases} X(x,0) = x & \text{pour tout } x \in \Omega, \\ \frac{\partial X_\theta}{\partial t}(x,t) = \theta(X(x,t)) & \text{pour tout } (x,t) \in \Omega \times [0, +\infty[. \end{cases}$$

On dit que J est dérivable par rapport à ω s'il existe une forme linéaire continue L dépendant uniquement de ω telle que pour tout champ vectoriel Lipschitzien θ, on ait

$$J(e^\theta(\omega)) = J(\omega) + L(\theta) + o(\|\theta\|_{W^{1,\infty}(\omega)^N}).$$

On appelle gradient ou dérivée de forme de J l'application linéaire L que l'on note $dJ(\omega)$.

Dans [Allaire et al., 2011], Allaire et al. montrent que sous certaines hypothèses de régularité, la fonction J^ε admet une dérivée de forme. Plus précisément, la formule suivante a été établie dans le Corollaire 3.1 [Allaire et al., 2011].

$$\langle dJ_i^\varepsilon(\omega), \theta \rangle = \int_\Sigma \ell_i^\varepsilon(\omega) \theta \cdot n \, ds \tag{II.1).1}$$

pour tout champ θ tel que $\theta \cdot n = 0$ sur Ω, où Σ est l'interface entre zones endommagée et saine et

$$\ell_i^\varepsilon = \frac{\kappa}{h} + \frac{1}{2} \left(\sigma_{nn}[e_{nn}] - e_{\tau\tau} \cdot [\sigma_{\tau\tau}] + 2\sigma_{\tau n} \cdot [e_{\tau n}] \right). \tag{II.1).2}$$

L'expression de $\ell_i^\varepsilon(\omega)$ dépend du tenseur des contraintes $\sigma(u)$ et du tenseur métrique linéarisé $e(u)$ (simplement notés σ et e dans la formule précédente) avec $u = u_i^\varepsilon(\omega)$. On rappelle que

$$\sigma(u) = Ae(u).$$

Par ailleurs, n représente la normale extérieure aux domaines ω et Ω. Les indices n et τ dans la formule précédente indiquent qu'on considère la restriction des tenseurs correspondants aux composantes normales ou tangentielles. Enfin, une expression entre crochet de type $[a]$ est à interpréter comme les sauts d'une quantité a à l'interface Σ,

$$[a](x) = a^-(x) - a^+(x),$$

où $a^\pm(x) = \lim_{s\to 0^\pm} a(x + sn)$. On fera plutôt usage par la suite d'une expression équivalente de ℓ

$$\ell_i^h(\omega) = [\mathcal{E}_i^h(\omega)],$$

où

$$\mathcal{E}_i^h(\omega) := \frac{\kappa}{h} + \frac{1}{2}\left(\sigma_{nn}e_{nn} - e_{\tau\tau}\cdot\sigma_{\tau\tau} + 2\sigma_{\tau n}\cdot e_{\tau n}\right).$$

II.2) Dérivée de forme Lagrangienne

L'utilisation de cette dernière soulève en effet quelques difficultés. Tout d'abord, elle est basée sur l'expression de la dérivée de forme (II.1).1) de la fonction J_i^ε uniquement valide sous certaines hypothèses de régularité.

Par ailleurs, l'expression de la dérivée eulérienne nécessite l'approximation de la fonction Dirac et des sauts sur l'interface ainsi que des traces des tenseurs des contraintes et d'élasticité, (Voir III.4).4).

Même si elle reste utilisée de manière encore marginale dans les applications, il est désormais reconnu qu'une approximation "volumique" de la dérivée de forme présente un certain nombre d'avantages par rapport à l'approximation plus classique de son expression "surfacique" (voir [Hiptmair et al., 2013, Laurain and Sturm, 2015]).

Nous utiliserons plutôt les qualificatifs de dérivées Lagrangienne pour désigner l'expression volumique et de dérivée Eulérienne pour l'expression surfacique. Tout d'abord, l'expression Lagrangienne de la dérivée de forme ne nécessite aucune hypothèse de régularité. Par ailleurs, une fois discrétisée elle offre une approximation plus précise de la dérivée de forme.

Dans le cas particulier qui nous intéresse ici, l'utilisation de l'expression Lagrangienne présente en outre l'avantage de ne pas nécessiter les approximations complexes de la masse de Dirac sur l'interface ou des sauts à l'interface, qui font à leur tour appel à des paramètres qu'il peut s'avérer difficile à déterminer d'un point de vue pratique. L'usage d'une expression Lagrangienne de la dérivée de forme a donc un

intérêt théorique (aucune hypothèse de régularité, convergence de l'approximation) et pratique (elle ne nécessite pas l'introduction d'approximation supplémentaire potentiellement source de nouvelles erreurs).

Proposition II.2).1 *Soit $\theta \in W^{1,\infty}(\Omega)^N$ un champ de vecteurs sur Ω tel que $\theta \cdot n = 0$ sur $\partial\Omega$ et $\nabla g_i \cdot \theta = 0$ sur Γ_D. La fonction J_i^ε admet une dérivée de forme DJ_i^ε, définie par*

$$\langle DJ_i^\varepsilon(\omega), \theta \rangle \quad = \quad \frac{1}{2}\int_\Omega A_\varepsilon(\omega)e(u) \quad : \quad \left((\nabla\cdot\theta)e(u) - \nabla u \nabla\theta - \nabla\theta^T\nabla u^T\right) dx \; + \; \int_\omega \kappa_\varepsilon \nabla \; \cdot \; \theta \, dx,$$

où $u = u_i^\varepsilon(\omega)$ est le déplacement de la structure.

Dans le cas régulier, $dJ_i^\varepsilon = DJ_i^\varepsilon$. Les dérivées Eulérienne et Lagrangienne coïncident. La preuve de la proposition II.2).1 est assez élémentaire. Elle consiste essentiellement à effectuer un changement de variable afin d'exprimer $J_i^\varepsilon(e^\theta(\omega))$ sur le domaine non perturbé ω. L'expression de la dérivée de forme étant peu présente dans la littérature, nous nous proposons malgré tout de la détailler.

Preuve Soit ω un sous domaine de Ω représentant la zone endommagée et θ un champ de vecteurs vérifiant les hypothèses de la proposition. Comme $\theta \cdot n = 0$ sur $\partial\Omega$ et $\theta = 0$ sur $\partial\Gamma_D$, la fonction e^θ définit un difféomorphisme de Ω dans Ω. Sa restriction à Γ_D, partie du bord le long de laquelle des conditions aux limites de type Dirichlet sont appliquées, est également un difféomorphisme. Soit u un élément de $H^1(\Omega)$. On pose $u_\theta = u \circ e^{-\theta}$. On a

$$j^\varepsilon(u_\theta, e^\theta(\omega)) = \frac{1}{2}\int_\Omega A^\varepsilon(e^\theta(\omega))e(u_\theta) : e(u_\theta)\, dX + \int_{e^\theta(\omega)} \kappa_\varepsilon \, dX.$$

On va effectuer le changement de variable $X = e^\theta(x)$ dans les intégrales précédentes. Notons tout d'abord que pour $X = e^\theta(x)$, on a

$$\nabla_X u_\theta = \nabla_x u (\nabla_X e^{-\theta}).$$

De plus, comme $e^{-\theta} \circ e^\theta = \mathrm{Id}$, on a

$$\nabla_X e^{-\theta} \nabla_x e^\theta = \mathrm{Id}$$

et

$$\nabla_X e^{-\theta} = (\nabla_x e^\theta)^{-1}.$$

Ainsi,

$$e(u_\theta)(X) = \frac{1}{2}\left(\nabla_x u (\nabla_x e^\theta)^{-1} + (\nabla_x e^\theta)^{-T}\nabla_x u^T\right).$$

Par changement de variable dans l'expression de j^ε, on obtient donc

$$
\begin{aligned}
&j^\varepsilon(u_\theta, e^\theta(\omega)) = \\
&\frac{1}{2}\int_\omega A_\varepsilon(\omega)\left(\frac{1}{2}\left(\nabla_x u(\nabla_x e^\theta)^{-1} + (\nabla_x e^\theta)^{-T}\nabla_x u^T\right)\right) : \left(\frac{1}{2}\left(\nabla_x u(\nabla_x e^\theta)^{-1} + (\nabla_x e^\theta)^{-T}\nabla_x u^T\right)\right) |\det \nabla_x e^\theta|\, dx \\
&+ \int_\omega \kappa_\varepsilon |\det \nabla_x e^\theta|\, dx.
\end{aligned}
$$

Par ailleurs, on a

$$\nabla e^\theta = \mathrm{Id} + \nabla\theta + o(\|\nabla\theta\|_\infty).$$

On en déduit que

$$
\begin{aligned}
&j^\varepsilon(u_\theta, e^\theta(\omega)) = \\
&\frac{1}{2}\int_\omega A_\varepsilon(\omega)\left(\frac{1}{2}\left(\nabla u(\mathrm{Id} - \nabla\theta) + (\mathrm{Id} - \nabla\theta^T)\nabla u^T\right)\right) : \left(\frac{1}{2}\left(\nabla u(\mathrm{Id} - \nabla\theta) + (\mathrm{Id} - \nabla\theta^T)\nabla u^T\right)\right)(1 + \nabla\cdot\theta)\, dx \\
&+ \int_\omega \kappa_\varepsilon(1 + \nabla\cdot\theta)\, dx + o(\|\nabla\theta\|_\infty),
\end{aligned}
$$

puis en développant cette expression que

$$
\begin{aligned}
j^\varepsilon(u_\theta, e^\theta(\omega)) = &\frac{1}{2}\int_\Omega A_\varepsilon(\omega)e(u) : e(u)\, dx + \int_\omega \kappa_\varepsilon\, dx \\
&+ \frac{1}{2}\int_\omega A_\varepsilon(\omega)\left(\frac{1}{2}\left(\nabla u + \nabla u^T\right)\right) : \left((\nabla\cdot\theta)e(u) - \nabla u\nabla\theta - \nabla\theta^T\nabla u^T\right)\, dx \\
&+ \int_\omega \kappa_\varepsilon \nabla\cdot\theta\, dx + o(\|\nabla\theta\|_\infty),
\end{aligned}
$$

soit encore

$$
\begin{aligned}
j^\varepsilon(u_\theta, e^\theta(\omega)) = j^\varepsilon(u,\omega) &+ \frac{1}{2}\int_\omega A_\varepsilon(\omega)e(u) : \left((\nabla\cdot\theta)e(u) - \nabla u\nabla\theta - \nabla\theta^T\nabla u^T\right)\, dx \\
&+ \int_\omega \kappa_\varepsilon \nabla\cdot\theta\, dx + o(\|\nabla\theta\|_\infty).
\end{aligned}
$$

On applique cette égalité à

$$u_\theta = u_i^\varepsilon(e^\theta(\omega))$$

et

$$u = U_i^\varepsilon(\theta) := u_i^\varepsilon(e^\theta(\omega)) \circ e^\theta(\omega).$$

Il est relativement aisé d'établir que la fonction $\theta \mapsto U_i^\varepsilon(\theta)$ est dérivable pour l'ensemble des champs $W^{1,\infty}(\omega)^N$ vérifiant les hypothèses dans $H^1(\Omega)^N$. Il existe donc une application linéaire $(U_i^\varepsilon)'$, appelée dérivée Lagrangienne de u, telle que

$$U_i^\varepsilon(\theta) = u_i^\varepsilon(\omega) + \langle (U_i^\varepsilon)', \theta\rangle + o(\|\nabla\theta\|_\infty).$$

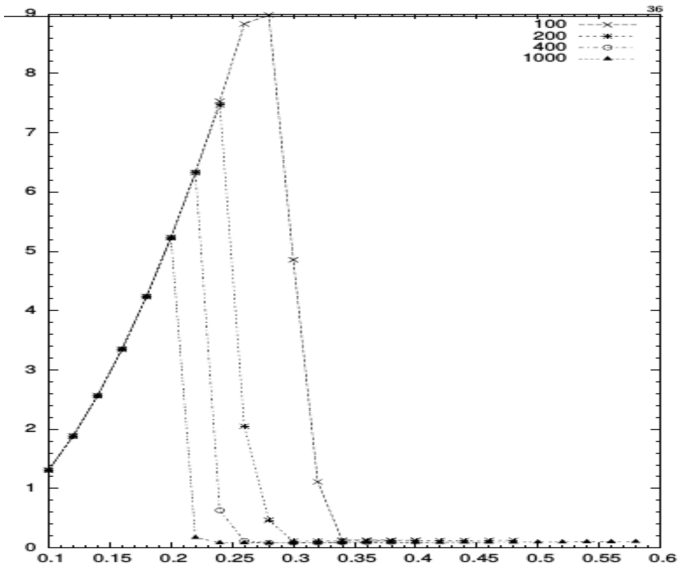


FIGURE II.3).1.1 – Variation de l'énergie totale par rapport aux chargements appliqués pour différents nombres d'itérations.

Il en découle que

$$J_i^\varepsilon(e^\theta(\omega)) = j^\varepsilon(u_i^\varepsilon(e^\theta(\omega)), e^\theta(\omega)) = j^\varepsilon(u_i^\varepsilon(\omega), \omega) + \left\langle \frac{\partial j^\varepsilon}{\partial u}(u_i^\varepsilon(\omega), \omega), \langle (U_i^\varepsilon)', \theta \rangle \right\rangle$$
$$+ \frac{1}{2}\int_\omega A_\varepsilon(\omega) e(u_i^\varepsilon(\omega)) : \left((\nabla\cdot\theta) e(u_i^\varepsilon(\omega)) - \nabla u_i^\varepsilon(\omega)\nabla\theta - \nabla\theta^T(\nabla u_i^\varepsilon(\omega))^T\right)$$
$$+ \int_\omega \kappa_\varepsilon \nabla\cdot\theta\, dx + o(\|\nabla\theta\|_\infty).$$

Enfin, d'après la condition $\nabla g_i \cdot \theta = 0$ sur $\partial\Gamma_D$, on a $\langle (U_i^\varepsilon)', \theta\rangle(x) = 0$ pour tout $x \in \Gamma_D$. D'après la formulation variationnelle vérifiée par $u_i^\varepsilon(\omega)$, le second terme de l'expression précédente s'annule et

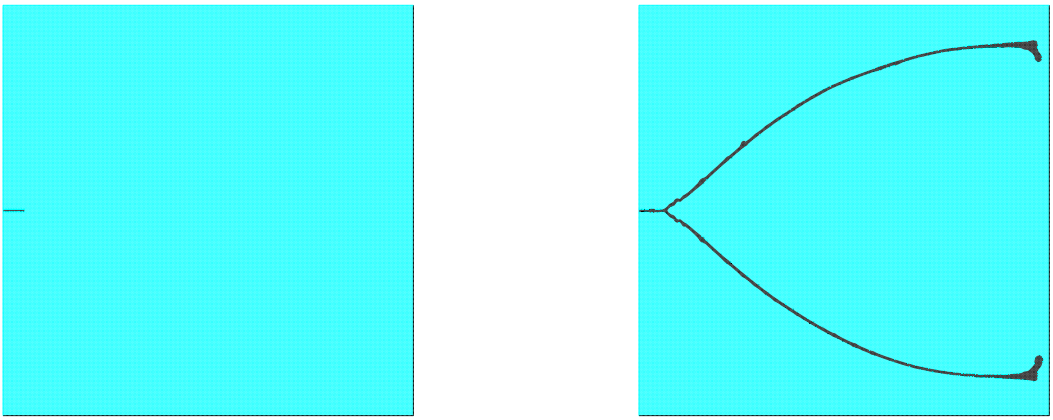
$$J_i^\varepsilon(e^\theta(\omega)) = j^\varepsilon(u_i^\varepsilon(e^\theta(\omega)), e^\theta(\omega)) = j^\varepsilon(u_i^\varepsilon(\omega), \omega)$$
$$+ \frac{1}{2}\int_\omega A_\varepsilon(\omega) e(u_i^\varepsilon(\omega)) : \left((\nabla\cdot\theta) e(u_i^\varepsilon(\omega)) - \nabla u_i^\varepsilon(\omega)\nabla\theta - \nabla\theta^T(\nabla u_i^\varepsilon(\omega))^T\right)$$
$$+ \int_\omega \kappa_\varepsilon \nabla\cdot\theta\, dx + o(\|\nabla\theta\|_\infty).\square$$

□

II.3) Applications numériques

II.3).1 Modèle de fracture mode II

On considère les mêmes paramètres numériques utilisés par Allaire et al. dans la section 6.3 de [Allaire et al., 2011].



(a) Etat initial (b) Etat final

FIGURE II.3).1.2 – Aspect de propagation de la fissure

La zone saine est supposée $E^0 = 10^3$ et la zone endommagée est supposée $E = 10^{-3}$.
Les chargements appliqués sont des déplacements imposés horizontalement sur la frontière de la boite croissants dans un intervalle donné de temps.

On utilise l'espace $P1$ pour calculer le déplacement différemment à A-J-V qui utilisent l'espace $Q1$ pour calculer le déplacement.
La figure II.3).1.1 montre la variation de l'énergie totale par rapport aux chargements appliqués et la figure II.3).1.2 décrit l'aspect de la propagation de la fracture.

II.3).2 Modèle de Bittencourt

Cette expérience a été proposée dans [Bittencourt et al., 1996] où on a extrait les valeurs numériques. Elle a été reproduite dans [Bordas and Moran, 2006, Areias et al., 2009] .

On considère l'équation de Hamilton Jacobi suivante pour décrire l'évolution de la zone endommagée.

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \theta.\nabla\psi = 0. \tag{II.3).2.1}$$

La discrétisation de II.3).2.1 est donné par le schéma suivant :

$$\psi_{ij}^k = \psi_{ij}^k - \Delta t H^{LLF}(p^-, p^+, q^-, q^+), \tag{II.3).2.2}$$

où H^{LLF} est introduit dans [**?**] et est défini par

$$H^{LLF}(p^-, p^+, q^-, q^+) = H(\frac{p^- + p^+}{2}, \frac{q^- + q^+}{2}) - \frac{1}{2}(p^+ - p^-)\alpha^x - \frac{1}{2}(q^+ - q^-)\alpha^y, \tag{II.3).2.3}$$



FIGURE II.3).2.1 – Modèle de Bittencourt pour deux initialisations

avec $\alpha^x = \mid \theta_x \mid,\ \alpha^y = \mid \theta_y \mid,\ \theta = (\theta_x, \theta_y)$ et p^-, p^+, q^-, q^+ sont définies par

$$p^- = D_x^- \psi_{ij} = \frac{\psi_{ij} - \psi_{i-1,j}}{\Delta x}$$
$$p^+ = D_x^+ \psi_{ij} = \frac{\psi_{i+1,j} - \psi_{i,j}}{\Delta x}$$
$$q^- = D_y^- \psi_{ij} = \frac{\psi_{ij} - \psi_{i,j-1}}{\Delta y}$$
$$q^+ = D_y^- \psi_{ij} = \frac{\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j}}{\Delta y}.$$

Résultats numériques pour le modèle de Bittencourt

Le module de Young est 3000 et le coefficient de Poisson est 0.3.

La phase endommagée a un module de Young égal à 3.10^{-3} et elle possède le même coefficient de Poisson

.

L'énergie de Griffith est $\kappa = 0.0014$.

La figure II.3).2.1 montre la propagation de modèle de Bittencourt pour deux initialisations de la fissure.

Ainsi, ce chapitre présente une motivation pour appliquer une approche lagrangienne pour exprimer la dérivée de forme dans le reste du travail.

Chapitre III

Étude numérique revisitée du modèle d'endommagement de Francfort-Marigo

III.1) Introduction

Dans ce chapitre on propose un algorithme permettant de simuler la propagation d'une fracture dans un solide élastique. La démarche employée s'inspire fortement des travaux d'Allaire, Jouve et Van Goethem [Allaire et al., 2009, Allaire et al., 2011] où un modèle de fracture est obtenu comme limite d'un modèle d'endommagement. Un certain nombre d'améliorations sont proposées. L'innovation la plus importante consiste en la prise en compte explicite d'une contrainte d'épaisseur minimale imposée à la zone endommagée. On introduit également la notion d'irréversibilité forte et on illustre par un exemple numérique en quoi elle nous semble nécessaire afin que le modèle reste cohérent d'un point de vue physique. Enfin, on simplifie le calcul de la dérivée de forme en employant une approche Lagrangienne, connue par ailleurs pour être numériquement plus précise.

III.2) Endommagement et Fracture

Dans cette section, nous présentons deux modélisations pour des solides élastiques pouvant être sujet soit à de l'endommagement, soit à la formation de fracture. Nous adoptons ici le point de vue de Francfort et al. [Francfort and Marigo, 1993, Francfort and Marigo, 1998, Francfort and Marigo, 1999, Francfort and Garroni, 2006]. On limite notre étude au cas quasi statique. De plus, nous nous placerons dans le cadre de l'élasticité linéaire et nous nous proposons d'étudier le cas non linéaire.

III.2).1 Un modèle d'endommagement

Un solide élastique, soumis à diverses contraintes, est sujet à une modification de sa structure qui affecte son comportement. Il fatigue et divers défauts peuvent y apparaître tels des micro-fissures ou micro-trous. L'endommagement qu'il subit est irréversible. Afin de décrire de tels phénomènes, l'approche classique consiste à introduire une variable interne $\chi(x,t)$ (dépendant du point x considéré dans le solide et du temps t) reflétant l'état du solide à l'échelle microscopique. La loi de Hooke $A(x,t)$ du solide étudié est supposée dépendre uniquement de cette variable d'endommagement

$$A(x,t) = \hat{A}(\chi(x,t))$$

Basé sur ce principe, les modèles d'endommagement se distinguent par le choix de la variable interne χ, la dépendance de la loi de Hooke en fonction de celle-ci et une loi d'évolution de χ. Nous proposons ici de suivre l'approche de Francfort et Marigo [Francfort and Marigo, 1993], qui a l'avantage de ne reposer que sur un nombre très restreint d'hypothèses. Tout d'abord, la variable interne ne peut prendre que deux états 0 ou 1. Le cas $\chi = 0$ correspondant au solide sain et $\chi = 1$ au solide endommagé. La loi de Hooke

A est alors de la forme

$$A = (1 - \chi)A_0 + \chi A_1,$$

où A_0 est la tenseur de rigidité du solide sain et A_1 du solide endommagé. On suppose par ailleurs que

$$A_0 \geq A_1 \geq 0,$$

en tant que formes quadratiques agissant sur les matrices symétriques. Le point fondamental de leur approche est de ne pas baser la loi d'évolution de la variable d'endommagement sur une loi phénoménologique mais sur un simple principe variationnel. Notons Ω le domaine de référence du solide élastique et u son déplacement. L'énergie élastique du système est donnée par

$$j_e(u, \chi) = \frac{1}{2} \int_\Omega \hat{A}(\chi) e(u) : e(u)\, dx,$$

où $e(u)$ est le tenseur métrique linéarisé,

$$e(u) = \frac{\nabla u + \nabla u^T}{2}.$$

L'énergie de type Griffith dissipée par la formation de zones endommagées est supposée proportionnelle à son volume

$$j_\kappa(\chi) = \kappa \int_\Omega \chi\, dx, \tag{III.2).1.1}$$

où κ est un réel positif. En l'absence de forces extérieures, l'énergie totale du système est la somme de ces deux contributions

$$j(u, \chi) = j_e(u, \chi) + j_\kappa(\chi).$$

Francfort et Marigo supposent que, à chaque instant, l'état du système minimise cette énergie. Le caractère irréversible de l'endommagement, est pris en compte en incluant une contrainte de croissance en fonction du temps de la variable d'endommagement. Si le déplacement de la structure est prescrit sur une partie du bord Γ_D du domaine

$$u(t, x) = g(t, x) \text{ pour } (x, t) \in \Gamma_D \times [0, T],$$

le déplacement $u(t, x)$ et la variable interne χ sont solutions du problème de minimisation

$$\begin{aligned} &\min && j(u, \chi). \\ &u(t) \in H^1(\Omega)^N, \chi \in L^\infty(\Omega; \{0, 1\}) \\ &u(t, x) = g(t, x) \text{ pour tout } x \in \Gamma_D \\ &\chi(t, x) \geq \chi(s, x) \text{ pour tout } (x, s) \in \Omega \times [0, t] \end{aligned}$$

Sans aucune autre condition supplémentaire, il est possible de construire un grand nombre de solutions non physiques. Dans le cas $g = 0$, n'importe quelle fonction χ croissante par rapport au temps sera solution

avec $u(t) = 0$. Afin d'éliminer de telles solutions, il est nécessaire d'ajouter une condition d'équilibre énergétique (voir Théorème 5.5 [Bourdin et al., 2008]),

$$j(\chi(t), u(t)) - j(\chi(0), u(0)) = \int_0^t \int_{\Gamma_D} A(t)e(u(t))n \cdot \dot{g}(t)\, ds\, dt.$$

Cette dernière équation traduit le fait que la zone endommagée ne peut croître que quand le taux de restitution est critique. Elle s'avère inutile dès lors que le problème est discrétisé en temps, cas auquel nous nous limiterons par la suite.

Soit une famille finie et strictement croissante d'instants $(t_i)_{i\in\{0,N\}}$ avec $t_0 = 0$ et $t_N = T$,

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_i \leq \cdots < t_N = T.$$

On suppose que le déplacement imposé sur Γ_D est constant sur chaque intervalle (t_{i-1}, t_i). Dans ces conditions, l'état du système est constant sur chaque intervalle et solution de

$$\begin{aligned} &\min && j(u_i, \chi_i), \\ &u_i \in H^1(\Omega)^N, \chi_i \in L^\infty(\Omega; \{0,1\}) \\ &u_i(x) = g_i(x) \text{ pour tout } x \in \Gamma_D \\ &\chi_i(x) \geq \chi_{i-1}(x) \text{ pour tout } x \in \Omega \end{aligned} \qquad (\mathcal{P}_i)$$

où les variables indexées par i correspondent à leurs valeurs sur (t_{i-1}, t_i). Il est bien connu que ce type de problème est mal posé du fait que les configurations optimales sont formées de micro-structures combinant solide sain et endommagé. Elles appartiennent à la classe des composites. Une difficulté supplémentaire consiste à déterminer quel sens donné dans ce cas à la condition d'irréversibilité. Dans [Francfort and Marigo, 1993], Francfort et al. relaxent cette dernière en ne l'appliquant qu'à la proportion de matériau endommagé. Une analyse plus fine est effectuée dans [Francfort and Garroni, 2006]. Nous ne nous intéresserons pas ici à ces aspects liés à l'homogénéisation. En particulier, les schémas numériques que nous utiliserons imposent une certaine régularité au domaine endommagé qui proscrit de fait l'apparition de micro-structures.

III.2).2 Un modèle de fracture

Dans le cas de la fracture, la modélisation que nous considérons est similaire à celle introduite dans la section précédente, à l'exception près que le système est cette fois décrit par le déplacement u de la structure et par une zone fissurée $\Gamma(t) \subset \overline{\Omega}$. L'énergie dissipée totale due à la formation de la fracture est de la forme

$$j_\kappa(u, \Gamma) = \kappa \mathcal{H}^{N-1}(\Gamma \cap \Omega \cup \Gamma_D), \qquad \text{(III.2).2.1)}$$

où $\mathcal{H}^{N-1}$ désigne la mesure de Hausdorff $N-1$ dimensionnelle. A noter qu'il est nécessaire d'inclure le coup associé à la formation de fracture sur la partie du bord du domaine où sont appliquées des conditions

aux limites de type Dirichlet.

Remarque Nous nous permettons d'utiliser la même notation pour désigner l'énergie dissipée par une fracture (III.2).2.1) et par une zone endommagée (III.2).1.1), aucune confusion n'étant possible (l'une dépendant d'une fonction caractéristique et l'autre d'une interface). Ce léger abus de langage pourra être à nouveau effectué par la suite pour d'autres fonctions sans que nous n'y fassions plus mention.

L'énergie totale du système définie par

$$j(u,\Gamma) = j_e(u,\Gamma) + j_\kappa(\Gamma),$$

où

$$j_e(u,\Gamma) = \frac{1}{2}\int_{\Omega\setminus\Gamma} A_0 e(u) : e(u)\, dx.$$

Ainsi, le déplacement u_i et la fracture Γ_i sur l'intervalle de temps (t_{i-1}, t_i) sont solutions du problème de minimisation

$$\begin{gathered} \min \qquad\qquad\qquad\qquad j(u_i,\chi_i). \\ u_i \in H^1(\Omega\setminus\Gamma_i)^N, \Gamma_i \subset \overline{\Omega} \\ \Gamma_i \supset \Gamma_{i-1} \\ u_i(x) = g_i(x) \text{ pour tout } x \in \Gamma_D \setminus \Gamma \end{gathered}$$

III.3) Modèle de fracture comme limite d'un modèle d'endommagement

Il est possible de dériver d'un modèle de type endommagement le modèle de fracture introduit dans la section précédente en considérant que les modules d'élasticité de l'état endommagé sont très petits comparés à ceux du solide sain. Nous présentons ici deux méthodes asymptotiques : l'une de Bourdin et al. [Bourdin et al., 2000], basée sur une approche de type champ de phase (III.3).1), l'autre atomistique (III.3).2) proposée par Allaire Jouve et Van Goethem [Allaire et al., 2009, Allaire et al., 2011]. L'analyse que nous effectuerons par la suite reposera sur une version révisée de celle introduite par Allaire et al.. La différence essentielle portant sur l'adjonction d'une contrainte explicite d'épaisseur minimale. L'approche de type champ de phase est présentée ici rapidement afin d'exposer une autre alternative.

III.3).1 Approche de type champ de phase

La fonctionnelle d'Ambrosio and Tortorelli [Ambrosio and Tortorelli, 1990] a été initialement introduite en vue d'applications à la segmentation d'image et a été étendue par la suite au cas de la modélisation des solides élastiques fragiles [Chambolle, 2004, Chambolle, 2005, Iurlano, 2013, Iurlano, 2014],

[Focardi and Iurlano, 2014, Henao et al., 2015, Conti et al., 2016]. L'idée principale consiste à considérer une version régularisée de j définie par

$$j^\varepsilon(u,\chi) = \frac{1}{2}\int_\Omega \hat{A}^\varepsilon(\chi)e(u) : e(u)\,dx + \kappa\int_\Omega \varepsilon|\nabla\chi|^2 + \frac{\chi^2}{4\varepsilon}\,dx,$$

où

$$\hat{A}^\varepsilon(\chi) = (1-\chi)^2 A_0 + \eta_\varepsilon A_0.$$

et $\eta_\varepsilon << \varepsilon$. On remarque que la fonction j^ε est similaire à la définition initiale de j, à l'exception près que χ est maintenant autorisé à prendre ses valeurs dans l'intervalle $[0,1]$ et qu'un terme de régularisation portant sur le gradient de χ a été ajouté. En se munissant d'un cadre fonctionnel approprié, on peut établir la Γ-convergence de j^ε vers j lorsque ε converge vers zéro. Ce résultat a été exploité numériquement par Bourdin et al. dans [Bourdin et al., 2000, Mesgarnejad et al., 2015].

III.3).2 Approche atomistique

Une autre approximation de la fonctionnelle j a été proposée par Allaire, Jouve et Van Goethem (AJV) dans [Allaire et al., 2011]. Considérons le modèle d'endommagement ($\mathcal{P}_i$) introduit initialement pour lequel on choisit des termes dégénérés, fonctions d'un paramètre ε, pour les modules d'élasticité de la zone endommagée et pour le coefficient de dissipation.

$$\begin{aligned} &\min && j^\varepsilon(u_i^\varepsilon,\chi_i^\varepsilon), \qquad (\mathcal{P}_i^\varepsilon)\\ &u_i^\varepsilon \in H^1(\Omega)^N, \chi_i^\varepsilon \in L^\infty(\Omega;\{0,1\})\\ &u_i^\varepsilon(x) = g_i(x) \text{ pour tout } x\in\Gamma_D\\ &\chi_i^\varepsilon(x) \geq \chi_{i-1}^\varepsilon(x) \text{ pour tout } x\in\Omega \end{aligned}$$

avec

$$j^\varepsilon(u,\chi) = \frac{1}{2}\int_\Omega (1+\chi(\eta_\varepsilon-1))A_0 e(u) : e(u)\,dx + \frac{\kappa}{\varepsilon}\int_\Omega \chi\,dx;$$

où (à nouveau) $0 \leq \eta_\varepsilon << \varepsilon$. Tel quel, on ne peut pas espérer que ce modèle converge raisonnablement vers un modèle de fracture lorsque ε tend vers zéro. En effet, les zones endommagées d'épaisseurs d'un ordre de grandeur plus petit que ε sont favorables énergétiquement. A la limite asymptotique en ε, on peut réaliser des fractures pour un coût en terme de dissipation de type Griffith nul. Afin de pallier ce problème, Allaire et al. proposent de résoudre le problème ($\mathcal{P}_i^\varepsilon$) sur des espaces fonctionnels discrets. Plus précisément, un maillage structuré du domaine Ω auquel est associé un espace U_h d'éléments finis de Lagrange à valeurs vectorielles (AJV utilisent des éléments finis de type Q_1) discrétisant l'espace des déplacements et un espace X_h, éléments finis de Lagrange de degré 1, discrétisant l'espace des fonctions caractéristiques. Le solide élastique peut alors être considéré comme constitué d'atomes (les nœuds du maillage) appartenant ou non à une zone endommagée selon la valeur d'une fonction caractéristique

discrétisée. La distance entre chaque atome étant au minimum égale à h, il est impossible de construire des zones endommagées d'épaisseur inférieure à cette distance inter-atomique. La version discrétisée de $(\mathcal{P}_i^\varepsilon)$ est donc

$$\begin{aligned} &\min && j^\varepsilon(u_i^{\varepsilon,h}, \chi_i^{\varepsilon,h}). && (\mathcal{P}_i^{\varepsilon,h}) \\ &u_i^{\varepsilon,h} \in U_h, \chi_i^{\varepsilon,h} \in X_h \cap L^\infty(\Omega; \{0,1\}) \\ &u_i^{\varepsilon,h}(x) = g_i(x) \text{ pour tout } x \in \Gamma_D \\ &\chi_i^{\varepsilon,h}(x) \geq \chi_{i-1}^{\varepsilon,h}(x) \text{ pour tout } x \in \Omega \end{aligned}$$

Allaire et al. avancent que lorsque la taille des mailles h tend vers zéro et que le terme de dissipation de type Griffith dans l'énergie est proportionnelle à cette dernière (c'est à dire $\varepsilon = h$), le premier terme converge (formellement du moins) vers $j_e(u, \Gamma)$ et le second terme vers $j_\kappa(\Gamma) = \kappa \mathcal{H}^{n-1}(\Gamma)$.

III.4) L'algorithme AJV

L'algorithme proposé par Allaire et al. pour résoudre $(\mathcal{P}_i^{\varepsilon,h})$ repose sur des outils classiques d'optimisation de forme. Il est basé sur une méthode de type gradient afin de minimiser l'énergie combinée j^ε. La zone endommagée est quand à elle représentée par l'intermédiaire d'une fonction ligne de niveau. A noter que Allaire et al. font également usage du gradient topologique pour introduire des zones endommagées non connectées à des zones préexistante, ce que nous ne considérerons pas ici. Comme indiqué précédemment, notre approche s'inspire fortement de la leur. Un certain nombre de différences importantes sont toutefois à signaler. Avant de les aborder, il nous faut présenter de manière relativement détaillée leur travail.

Afin de résoudre le problème $(\mathcal{P}_i^{\varepsilon,h})$, Allaire et al. appliquent une méthode de type gradient discrétisé. Dans ce type de situation, deux options sont envisageables : Discrétisation du problème $(\mathcal{P}_i^\varepsilon)$ puis application de la méthode de gradient au problème discrétisé ; Application de la méthode du gradient à $(\mathcal{P}_i^\varepsilon)$, puis discrétisation. Allaire et al utilisent cette seconde approche que nous nous proposons d'exposer ici. L'algorithme appliqué à la minimisation de $(\mathcal{P}_i^\varepsilon)$ sera présenté dans la section III.4).3. Sa version discrétisée, visant à résoudre la suite de problèmes $(\mathcal{P}_i^{\varepsilon,h})$ dans la section III.4).4.

III.4).1 Une méthode de type gradient

On note ω la zone endommagée (c'est à dire l'ensemble des éléments de Ω où $\chi = 1$). Par la suite, toutes les fonctions dépendant de χ seront exprimées indifféremment en fonction de ω ou χ. Par exemple, nous noterons

$$j^\varepsilon(u, \omega) = \frac{1}{2} \int_\Omega A_\varepsilon(\omega) e(u) : e(u)\, dx + \kappa_\varepsilon |\omega|,$$

où χ_ω est la fonction caractéristique de ω, $\kappa_\varepsilon = \kappa/\varepsilon$ avec $\kappa \in \mathbb{R}_*^+$ et $A_\varepsilon(\omega) = (1 + \chi_\omega(\eta_\varepsilon - 1))A_0$. Afin de minimiser la fonctionnelle j^ε par rapport à u et ω, AJV appliquent un algorithme de type gradient. L'optimisation est réalisée en deux étapes. Tout d'abord,

$$J_i^\varepsilon(\omega) = \inf_{\substack{u \in H^1(\Omega)^N \\ u = g_i \text{ sur } \Gamma_D}} j^\varepsilon(u, \omega).$$

L'optimum est atteint par rapport à u en résolvant les équations de l'élasticité linéaire dans le solide élastique Ωde zone endommagée ω. On note $u_i^\varepsilon(\omega)$ la solution de ce problème de minimisation. L'optimisation par rapport à ω s'effectue quant à elle par l'application d'un algorithme de type gradient selon la méthode de Hadamard ([Murat and Simon, 1976, Sokolowski and Zolesio, 1992, Henrot and Pierre, 2005], [Allaire, 2007]). A noter que cette méthode ne permet que d'atteindre des minima locaux, ce qu'on pourrait par ailleurs avancer comme étant plus réaliste d'un point de vue physique qu'une optimisation globale.

Détermination d'une direction de descente. D'après l'expression (II.1).1) de la dérivée de forme de la fonction J , une direction de descente θ peut-être identifiée en choisissant

$$\theta = -\ell_i^\varepsilon n,$$

où n est le vecteur unité normal extérieur à ω et ℓ_i^ε est donné par (II.1).2). Si un tel choix est relativement classique en optimisation de forme, il nécessite cependant d'étendre la définition de ℓ_i^ε en dehors de l'interface Σ. Cette "extension" est effectuée par Allaire et al. par la détermination d'une vitesse normale de descente $V_i^\varepsilon \in H^1(\Omega)$ solution du problème variationnel

$$\int_\Omega r\nabla V_i^\varepsilon \cdot \nabla \delta V \, dx + \int_\Omega V_i^\varepsilon \delta V \, dx + \langle dJ_i^\varepsilon(\omega), n\delta V\rangle = 0 \text{ pour tout } \delta V \in H^1(\Omega), \qquad \text{(III.4).1.1)}$$

où r est un "petit" paramètre. A noter que la vitesse normale V obtenue, si elle est bien définie sur l'intégralité du domaine Ω, n'est pas à proprement parler une extension de ℓ_i^ε. Par contre, V_i^ε définit malgré tout une direction de descente (il suffit de choisir $\delta V = V_i^\varepsilon$ pour s'en assurer).

III.4).2 Représentation du domaine endommagé

Dans [Allaire et al., 2011], le domaine endommagé est représenté implicitement comme l'ensemble des points de valeurs négatives d'une fonction dite "ligne de niveau" ψ définie sur le domaine Ω,

$$\omega = \psi^{-1}((-\infty, 0)).$$

A chaque itération, dès lors qu'une vitesse normale de descente V est déterminée, la fonction ligne de niveau est mise à jour en résolvant l'équation d'Hamilton Jacobi

$$\frac{\partial \psi}{\partial s} + V|\nabla \psi| = 0, \tag{III.4).2.1}$$

où s correspond à un temps virtuel (qui n'a aucun lien avec le temps réel de l'expérience).

III.4).3 Description de l'algorithme (version continue)

Nous sommes maintenant en mesure de donner une description relativement complète de l'algorithme utilisé par Allaire et al. pour résoudre la suite de problèmes ($\mathcal{P}_i^\varepsilon$). Comme on ne s'intéresse qu'au cas quasi-statique, on peut supposer dans perte de généralité que $t_i = i\Delta t$, où Δt avec $\Delta t = T/N$. L'algorithme est constitué de deux boucles imbriquées. Une boucle principale sur les temps de discrétisation, une boucle interne de méthode de type gradient. La condition d'irréversibilité impose uniquement la croissance de la zone endommagée d'une itération en temps à l'autre. Elle n'impose pas la croissance de la zone endommagée au court des itérations de l'algorithme de gradient. Enfin, la fonction ligne de niveau est régulièrement réinitialisée de sorte à préserver la stabilité des itérations d'Hamilton-Jacobi (III.4).2.1), ce qui nous ferons pas apparaître dans la version légèrement simplifiée suivante.

Listing III.1 – Algorithme d'AJV, (version continue)

I. Initialisation de ψ_0^ε.

II. Boucle en temps $t_i = i\Delta t$, Itérations sur $i > 0$

1. On pose $\psi_{i,0}^\varepsilon = \psi_{i-1}^\varepsilon$ et $\omega_{i,0}^\varepsilon = (\psi_{i,0}^\varepsilon)^{-1}(\mathbb{R}_-^*)$.

2. Boucle d'optimisation : Itérations sur $k \geq 0$

   (a) Détermination de $V_i^\varepsilon(\omega_{i,k}^\varepsilon)$ solution of (III.4).1.1)

   (b) Résolution de l'équation H.J. (III.4).2.1)

   avec $V = V_i^\varepsilon(\omega_{i,k})$ et $\psi(s=0) = \psi_{i,k}^\varepsilon$.

   On pose $\widetilde{\psi}_{i,k+1}^\varepsilon = \psi(\Delta s)$ et $\widetilde{\omega}_{i,k+1}^\varepsilon = (\widetilde{\psi}_{i,k+1}^\varepsilon)^{-1}(\mathbb{R}_-^*)$.

   où $\Delta s \geq 0$ est déterminé de sorte que $J_i^\varepsilon(\widetilde{\omega}_{i,k+1}^\varepsilon) \leq J_i^\varepsilon(\omega_{i,k}^\varepsilon)$

   (c) Irréversibilité $\psi_{i,k+1}^\varepsilon = \min(\widetilde{\psi}_{i,k+1}^\varepsilon, \psi_{i-1}^\varepsilon)$

   (d) Retour à (a) jusqu'à convergence. Si convergence, on pose $\psi_i^\varepsilon = \psi_{i,k+1}^\varepsilon$.

III.4).4 Description de l'algorithme (version discrétisée)

La résolution de la suite de problèmes ($\mathcal{P}_i^\varepsilon$) par l'algorithme III.1 présuppose la connaissance exacte de la dérivée de forme $dJ_i^\varepsilon(\omega)$. Or cette dernière dépend du déplacement $u_i^\varepsilon(\omega)$ de la structure qui ne

peut être déterminé de manière exacte.

Dans de nombreux problèmes d'optimisation de forme, il est usuel de définir une approximation de la dérivée de forme en remplaçant dans les expressions (II.1).1-II.1).2) $u_i^\varepsilon(\omega)$ par une approximation $u_i^{\varepsilon,h}(\omega)$ obtenue par la méthode des éléments finis. Dans le cas particulier qui nous intéresse ici, ce n'est pas envisageable, car l'expression de la dérivée de forme dépend du saut de certaines quantités le long de l'interface Σ. Or le long de toute partie de l'interface qui ne coïncide pas avec une arête du maillage, le saut des quantités discrétisées correspondantes sera nul. Ainsi, la méthode classique conduit à une approximation triviale (nulle) de la dérivée de forme !

Approximation de la dérivée de forme. Allaire et al. proposent de régulariser l'intégrale sur l'interface et définissent l'approximation suivante de la dérivée de forme

$$\langle d^h J_i^\varepsilon(\omega), \theta\rangle = \int_\Omega \delta_\Sigma^h \ell_i^{\varepsilon,h}(\omega)\theta\cdot n\, dx, \tag{III.4).4.1}$$

où δ_Σ^h est une approximation de la mesure de Dirac sur l'interface Σ définie par

$$\delta_\Sigma^h = \frac{1}{2}|\nabla s_h(\psi)|$$

et

$$s_h(\psi) = \frac{\psi}{\sqrt{\psi^2+\beta h^2}}.$$

Le paramètre $\beta > 0$ est choisi de sorte que l'intégration s'effectue sur quelques mailles au voisinage de l'interface. Enfin, $\ell_i^{\varepsilon,h}$ est une approximation de ℓ_i^ε définie par

$$\ell_i^{\varepsilon,h} = [\mathcal{E}_i^{h,\varepsilon}]_{\text{approx}}$$

où $\mathcal{E}_i^{h,\varepsilon}$ est défini similairement à $\mathcal{E}_i^\varepsilon$ suite à la substitution de u_i^ε par son approximation $u_i^{\varepsilon,h}$. Enfin le saut d'une fonction a à l'interface est approché par la formule

$$[a]_{\text{approx}} = 2((1-\chi)a - \chi a).$$

Détermination d'une direction de descente. L'algorithme de minimisation de J_i^ε est basé sur l'identification d'une direction de descente obtenue par la résolution du pendant discrétisé de (III.4).1.1) qui définit $V_i^{\varepsilon,h} \in X_H$ par

$$\int_\Omega r\nabla V_i^{\varepsilon,h}\cdot\nabla\delta V\, dx + \int_\Omega V V_i^{\varepsilon,h}\delta V\, dx + \langle d^h J_i^\varepsilon(\omega), n\delta V\rangle = 0 \text{ pour tout } \delta V \in X_H. \tag{III.4).4.2}$$

Description de l'Algorithme (version discrétisée) L'adaptation de l'algorithme III.1 au cas discrétisé est assez élémentaire. Il nous reste cependant à définir la fonction coût discrétisée

$$J_i^{\varepsilon,h}(\omega) = \inf_{\substack{u^h \in U_h \\ u^h = g_i \text{ sur } \Gamma_D}} j^\varepsilon(u^h, \omega).$$

Listing III.2 – Algorithme d'AJV (version discrétisée)

I. Intialisation de $\psi_0^{\varepsilon,h}$.

II. Boucle en temps $t_i = i\Delta t$, Itérations sur $i > 0$

1. On pose $\psi_{i,0}^{\varepsilon,h} = \psi_{i-1}^{\varepsilon,h}$ et $\omega_{i,0}^{\varepsilon,h} = (\psi_{i,0}^{\varepsilon,h})^{-1}(\mathbb{R}_-^*)$.

2. Boucle d'optimisation : Itérations sur $k \geq 0$

(a) Détermination de $V_i^{\varepsilon,h}(\omega_{i,k}^h)$ solution of (III.4).4.2)

(b) Résolution de l'équation H.J. (III.4).2.1)

avec $V = V_i^{\varepsilon,h}(\omega_{i,k}^{\varepsilon,h})$ et $\psi(s=0) = \psi_{i,k}^{\varepsilon,h}$.

On pose $\widetilde{\psi}_{i,k+1}^{\varepsilon,h} = \psi(\Delta s)$ et $\widetilde{\omega}_{i,k+1}^{\varepsilon,h} = (\widetilde{\psi}_{i,k+1}^{\varepsilon,h})^{-1}(\mathbb{R}_-^*)$,

où $\Delta s \geq 0$ est déterminé de sorte que $J_i^{\varepsilon,h}(\widetilde{\omega}_{i,k+1}^{\varepsilon,h}) \leq J_i^{\varepsilon,h}(\omega_{i,k}^{\varepsilon,h})$

(c) Irréversibilité $\psi_{i,k+1}^{\varepsilon,h} = \min(\widetilde{\psi}_{i,k+1}^{\varepsilon,h}, \psi_{i-1}^{\varepsilon,h})$.

(d) Retour à (a) jusqu'à convergence. Si convergence, on pose $\psi_i^{\varepsilon,h} = \psi_{i,k+1}^{\varepsilon,h}$.

Nous tenons à souligner ici que cet algorithme n'est pas une méthode de gradient à proprement parler. En effet, $d^h J_i^\varepsilon$ n'est qu'une approximation du gradient, par ailleurs, il ne coïncide pas non plus avec le gradient de $J_i^{\varepsilon,h}$. En conséquence, le critère de sortie de la boucle de gradient sera probablement atteint avec $\Delta s = 0$ dès lors que la vitesse normale $V_i^{\varepsilon,h}$ ne correspond pas à une direction de descente de la fonction coût discrétisée $J_i^{\varepsilon,h}$.

A ce stade, nous n'avons pas précisé la méthode employée pour la discrétisation de l'équation de Hamilton-Jacobi (III.4).2.1), ni sur l'étape de réinitialisation de la fonction ligne de niveau ψ. Pour plus de détails, nous renvoyons à [Allaire et al., 2011] (fin de la Section 5).

III.5) Irréversibilité

Allaire et al. ne prennent pas en compte la contrainte d'irréversibilité lors des étapes d'optimisation. Plus précisément, au temps t_i, la condition

$$\omega_{i,k+1}^\varepsilon \subset \omega_{i-1}^\varepsilon$$

est imposée uniquement à chaque itération d'optimisation k en rafraîchissant la fonction ligne de niveau ψ par

$$\psi^{\varepsilon}_{i,k+1} = \min(\widetilde{\psi}^{\varepsilon}_{i,k+1}, \psi^{\varepsilon}_{i-1}).$$

Nous dénommerons cette condition d'irréversibilité faible en contraste avec une condition d'irréversibilité forte du type

$$\omega^{\varepsilon}_{i,k+1} \subset \omega^{\varepsilon}_{i,k}. \tag{1}$$

L'argument avancé pour n'imposer qu'une irréversibilité faible porte sur le fait que les itérations d'optimisation de l'énergie ne peuvent qu'être considérée que comme un temps fictif. Cependant, ceci engendre des effets difficilement justifiables sur le plan physique. Par exemple, dans le cas de la fracture de type mode II (voir la section III.7).6) où la fracture se développe brutalement en deux branches, on observe dans un second temps l'évolution la fracture dans le domaine en une géodésique formée de trois branches. Nous pensons que ce comportement n'est pas observé numériquement par Allaire et al. car l'algorithme ne parvient plus à déterminer une direction de descente qui permet de satisfaire la condition de décroissance de l'énergie totale ce qui provoque une interruption de la boucle interne d'optimisation. D'autres phénomènes pourraient être observés, comme la séparation de la fracture en plusieurs composantes connexes, ce qui semble également indésirable.

La condition (1) permet de prévenir le développement de ce type de pathologies. On peut justifier un tel choix en considérant que les itérations d'optimisation de la boucle interne correspondent à des pas de temps beaucoup plus petits que celles de la boucle externe. Ceci soulève malgré tout une difficulté. Du fait de la prise en compte de la contrainte d'irréversibilité forte, l'évolution de la fracture dépend de la régularisation utilisée lors de la détermination de la direction de descente $V^{\varepsilon}_i(\omega)$, solution de (III.4).1.1). L'introduction du paramètre r est essentiellement effectuée par Allaire et al. afin d'étendre la vitesse normale à l'ensemble du domaine d'optimisation Ω. Il n'a a priori aucune base physique et a pour conséquence que la vitesse de convection d'un point de l'interface Σ ne dépende pas uniquement de quantités localisées en ce dernier. L'adjonction de la contrainte d'irréversibilité forte ne semble raisonnable qu'à la condition d'utiliser une régularisation r d'autant plus petite que la discrétisation h utilisée est fine de sorte que la vitesse de convection de l'interface en un point de celle-ci ne dépende que de quantités physiques localisées dans un voisinage de plus en plus restreint de ce dernier. Allaire et al. indiquent d'ailleurs le choix de ce paramètre petit sans préciser sa dépendance vis à vis de h.

III.6) Contrainte d'épaisseur minimale

III.6).1 Motivation

L'algorithme III.1 n'impose explicitement aucune épaisseur minimale à la zone endommagée. Ceci induit de potentiels comportement indésirables. L'algorithme a notamment tendance à se geler dans certaines situations avant convergence lorsque des structures dont l'épaisseur est de la taille d'une maille apparaissent. La minimisation de l'énergie de dissipation favorise la contraction des zones fracturées sans affecter outre mesure la contribution du terme d'énergie élastique au coût global. Cette tendance se poursuit jusqu'à ce que l'épaisseur de la zone délimitée par la ligne de niveau devienne inférieure à la taille d'une maille. On assiste alors à une brusque augmentation du coût global, ce qui conduit à l'impossibilité de déterminer un pas de descente Δs (Étape II.2.b de l'algorithme III.2). Le pas est alors choisi nul et l'algorithme sort de la boucle d'optimisation interne sans avoir atteint l'optimum. On s'attend également à une dépendance du processus d'optimisation par rapport au maillage, qui se traduit par l'obtention de minima locaux artificiels induits par la discrétisation.

Dans le cadre des méthodes d'homogénéisation et SIMP, l'ajout de contraintes de taille caractéristique minimale sur la structure optimisée s'avère souvent nécessaire afin de pallier le phénomène d'échiquier. Dans cette optique, des techniques de filtrage du gradient ([Sigmund and Petersson, 1998], [Petersson and Sigmund, 1998]), réduction des paramètres de design avec projection ([Guest et al., 2004]), monotonicité du gradient de densité [Poulsen, 2003] ont été proposées. Dans le cadre de l'optimisation de type ligne de niveau, G. Michailidis introduit dans sa thèse [Michailidis, 2014] (voir aussi [Allaire et al., 2016]) une contrainte d'épaisseur minimale en imposant à tout point x du bord de la structure que

$$\mathrm{dist}_\omega(x - h_{off} n(x)) \leq 0, \qquad \forall h_{off} \in [0, \epsilon],$$

où ϵ est l'épaisseur minimale imposée. Cette contrainte est par la suite prise en compte numériquement par l'introduction d'une fonction de pénalisation. L'implémentation de la méthode qu'il développe étant assez délicate, nous nous sommes orientés vers une autre solution de type gradient projeté plus aisée à mettre en oeuvre. Notre approche est relativement similaire à celle adoptée par Zhang et al. [Zhang et al., 2014] où une distance minimale du squelette au bord du domaine ω est imposée via l'introduction d'un Lagrangien augmenté. Si nous retenons une définition similaire des domaines admissibles, nous avons opté pour une approche de type gradient projeté.

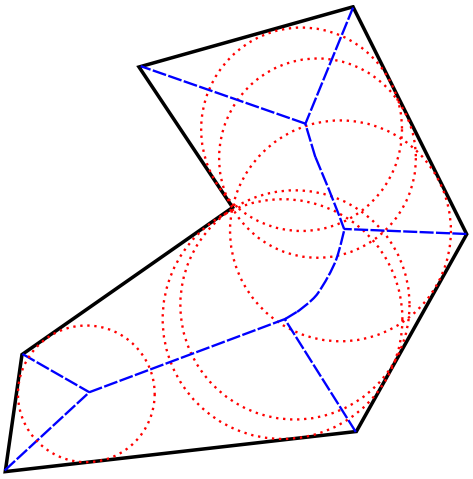


FIGURE III.6).2.1 – Ouvert (traits continus) et son squelette associé (en lignes brisées).

III.6).2 Domaines admissibles d'épaisseur minimale

Soit ω un domaine de $\mathbb{R}^N$. Comme précédemment, nous notons n le vecteur unité normal sortant sur Σ et d_ω la distance signée associée définie pour tout $x \in \mathbb{R}^N$ par

$$d_\omega(x) = \begin{cases} \inf_{y\in\partial\omega} |y-x| & \text{si } x \notin \omega \\ -\inf_{y\in\partial\omega} |y-x| & \text{si } x \in \omega. \end{cases}$$

Nous noterons S_ω le squelette de ω, c'est à dire l'ensemble des points de ω pour lesquels la fonction distance signée n'est pas régulière. Tout point du squelette est équidistant d'au moins deux points distincts du bord Σ.

$$S_\omega = \{x \in \omega \text{ tel qu'il existe } y, z \in \partial\omega \text{ et } |y-x| = |z-x| = -d_\omega(x)\}.$$

La figure III.6).2.1 représente un ouvert ω de $\mathbb{R}^2$ ainsi que le squelette associé. Les cercles sont centrés en des points équidistants de trois points du bord. Pour tout domaine ω de $\mathbb{R}^N$, on définit (on reprend ici la définition de par Zhang et al. [Zhang et al., 2014]) sa plus petite échelle de longueur comme étant le minimum de la distance du squelette au bord de ω,

$$d_\omega^{\min} = \inf_{x\in\mathcal{S}_\omega} -d_\omega(x). \tag{III.6).2.1}$$

La figure III.6).2.2 représente un ouvert régulier et son squelette (ligne brisées).

Le cercle est déterminé par l'optimum dans la définition de $d_\omega^{\min}$ donné par (III.6).2.1).

Un domaine sera dit d'épaisseur supérieure à $\epsilon \geq 0$ si tout point du squelette est situé à une distance au moins égale à la demi épaisseur $\epsilon/2$, c'est à dire si $d_\omega^{\min} \geq \epsilon/2$. On introduit l'ouvert défini à partir du squelette de ω et épaissi de $\epsilon/2$.

$$\mathcal{S}_\omega^\epsilon = \bigcup_{\mathcal{S}_\omega} B(x, \epsilon/2); \tag{III.6).2.2}$$

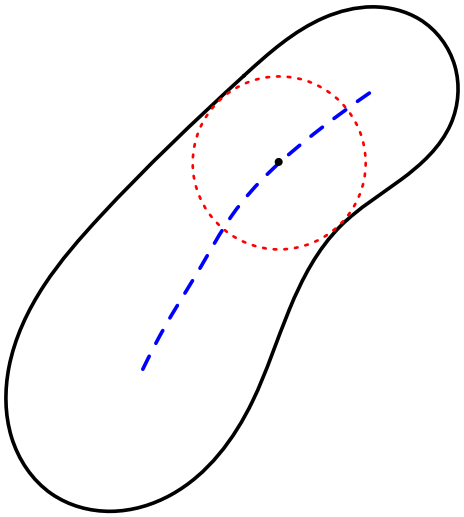


FIGURE III.6).2.2 – Ouvert régulier, son squelette et un disque de diamètre $d^{\min}(\omega)$ centré sur un point du squelette.

où pour tout point x du squelette, $B(x, \epsilon/2)$ est la boule centrée en x de rayon $\epsilon/2$. Ainsi, Zhang et al. définissent les ouverts de taille minimale caractéristique supérieure à ϵ comme l'ensemble des ouverts ω vérifiant la condition

$$\omega = \omega \cup \mathcal{S}^{\epsilon}_{\omega}.$$

Cette définition est plus forte que celle utilisée par Michailidis. Elle impose au domaine de vérifier la condition de boule interne uniforme. L'ouvert représenté par la figure III.6).2.1 n'est pas admissible pour toutes valeurs de ϵ strictement positive. Zhang et al. prennent en compte cette contrainte en imposant une version discrète de la condition

$$|\mathcal{S}^{\epsilon}_{\omega} \setminus \omega| \leq 0.$$

III.6).3 Projection sur l'ensemble admissible

Nous proposons de définir un opérateur de projection sur l'ensemble ouvert d'épaisseur supérieure à ϵ. En suivant la démarche de Zhang et al., un candidat naturel serait de définir le projeté d'un ouvert ω comme union de l'ouvert initial et du squelette épaissi de $\epsilon/2$, $\mathcal{S}^{\epsilon}_{\omega}$

$$S^{\epsilon}(\omega) = \omega \cup \mathcal{S}^{\epsilon}_{\omega}$$

Un exemple de projection ci-dessus utilisant cette définition est illustré par la figure III.6).3.1, qui représente l'image par l'application de l'opérateur S^{ϵ} à un ouvert rectangulaire.

La "projection" définie ci-dessus n'est pas optimale, en ce sens qu'il est possible de construire un ouvert d'épaisseur minimale supérieure à ϵ contenant ω et strictement inclus dans $S^{\epsilon}(\omega)$. Afin de construire un

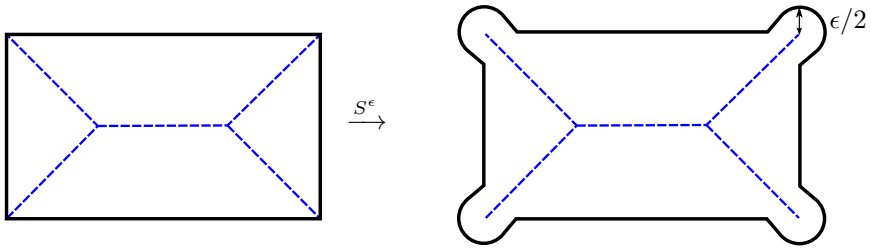


FIGURE III.6).3.1 – Une projection sur l'ensemble des ouverts d'épaisseur minimale ϵ

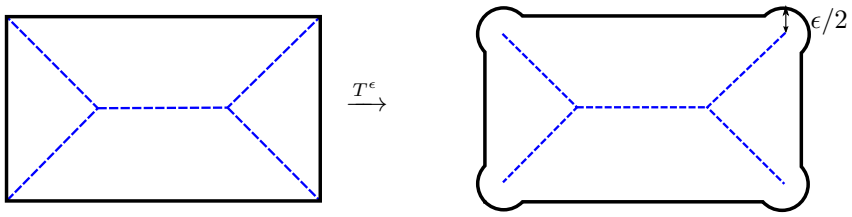


FIGURE III.6).3.2 – Une autre projection sur l'ensemble des ouverts d'épaisseur minimale ϵ

tel ouvert, on peut par exemple rogner le squelette à ses extrémités d'une longueur $\epsilon/2$ avant de l'épaissir. Nous noterons T^ϵ cette application. Son action est illustrée par la figure III.6).3.2

Donnons une définition plus précise de l'application T^ϵ introduite. L'idée consiste toujours à procéder en deux étapes. Dans un premier temps, on réduit l'ouvert ω avant de l'épaissir à nouveau de $\epsilon/2$. Afin de réduire l'ouvert ω, on considère l'équation différentielle ordinaire décrivant la trajectoire d'un point se déplaçant à la vitesse $n = \nabla d_\omega / |\nabla d_\omega|$.

$$\begin{cases} X_\omega(x,0) = x & \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^N \\ \dot{X}_\omega(x,t) = n(X_\omega(x,t)) & \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^N \text{ et } t \in (-\infty,\infty), \end{cases} \tag{III.6).3.1}$$

où $\dot{X}_\omega$ désigne la dérivée partielle par rapport au temps de X_ω. On définit alors le bord contracté de $\epsilon/2$ de ω comme

$$\partial^\epsilon \omega = X_\omega(\partial\omega, -\epsilon/2).$$

On épaissit ensuite $\partial^\epsilon\omega$ d'une épaisseur $\epsilon/2$ en posant

$$\partial^\epsilon_+ \omega = \bigcup_{x \in \partial^\epsilon \omega} B(x, \epsilon/2).$$

Enfin, l'image de ω par l'application T^ϵ est obtenue par l'union de ω et du bord contracté épaissi de $\epsilon/2$

$$T^\epsilon(\omega) = \omega \cup \partial^\epsilon_+ \omega.$$

La figure III.6).3.3 illustre ces deux étapes. Sur la partie gauche, le bord contracté $\partial^\epsilon\omega$ d'un ouvert rectangulaire est représenté en lignes brisées (bleues) tandis que les trajectoires des points du bord sont

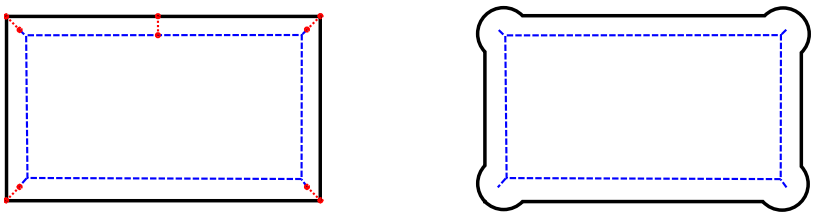


FIGURE III.6).3.3 – Construction de $T^\epsilon(\omega)$. A gauche, l'ouvert initial et son bord contracté $\partial^\epsilon\omega$. A droite l'image de ω par l'application T^ϵ.

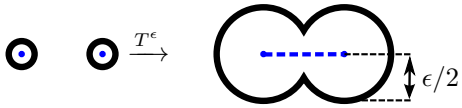


FIGURE III.6).3.4 – Ouvert dont l'image par T^ϵ est d'épaisseur inférieure à ϵ.

marquées par des lignes en pointillés (rouges). La partie droite de la figure représente $T^\epsilon(\omega)$ obtenu par épaississement du bord contracté et union avec l'ouvert initial.

L'application T^ϵ n'est pas à proprement parler une projection sur les domaines d'épaisseur minimale ϵ. Comme on peut le constater sur l'exemple donné par la figure III.6).3.4, constitué de l'union de deux disques disjoints dont les centres sont distants d'une longueur inférieure à $\epsilon/2$, il existe des ouverts dont l'image par T^ϵ n'appartient pas à l'ensemble admissible. De plus, l'application ne vérifie pas $T^\epsilon \circ T^\epsilon = T^\epsilon$. Cependant, un ouvert ω est d'épaisseur minimale ϵ si et seulement si c'est un point fixe de T^ϵ, c'est à dire s'il vérifie

$$\omega = T^\epsilon(\omega).$$

III.6).4 Approximation de l'application T^ϵ.

Le sens à donner à l'équation différentielle (III.6).3.1) n'est cependant pas totalement évident, car la normale n n'est pas un champ lipschitzien. Pour y pallier, on régularise la normale en déterminant $n_{\delta_1} \in H^1(\Omega)^N$, solution du problème variationnel ,

$$\delta_1 h^N \int_\Omega e(n_{\delta_1})e(m)\,dx + \int_\Omega n_{\delta_1}\cdot m = \int_\Omega n\cdot m\,dx, \text{ pour tout } m \in H^1(\Omega)^N. \qquad \text{(III.6).4.1)}$$

De plus, on re normalise n_{δ_1} en posant

$$n_\delta = (1+\delta_3)n_{\delta_1}/\max(|n_{\delta_1}|,\delta_2), \qquad \text{(III.6).4.2)}$$

où $\delta \in \mathbb{R}^3_+$ sont des petits paramètres de régularisation. Les trajectoires régularisées sont donc solution de l'équation différentielle ordinaire

$$\begin{cases} X^\delta_\omega(x,0) = x & \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^N \\ \dot{X}^\delta_\omega(x,t) = n_\delta(X^\delta_\omega(x,t)) & \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^N \text{ et } t \in [0,+\infty[. \end{cases} \tag{III.6).4.3}$$

La contraction régularisée du bord est obtenue en substituant n par n_δ dans sa définition. On pose donc

$$\partial^\epsilon_\delta \omega = X^\delta_\omega(\partial\omega, -\epsilon/2).$$

On épaissit à nouveau $\partial^\epsilon_\delta\omega$ d'une épaisseur $\epsilon/2$ en posant

$$\partial^\epsilon_{\delta,+}\omega = \bigcup_{x\in\partial^\epsilon_\delta\omega} B(x,\epsilon/2).$$

Enfin, l'application T^ϵ régularisé est définie par

$$T^\epsilon_\delta(\omega) = \omega \cup \partial^\epsilon_{\delta,+}\omega.$$

Algorithme de "projection". Le calcul de l'image d'un ouvert donné par une fonction ligne de niveau ψ défini sur Ωse décompose en cinq étapes.

1. Détermination de ψ^+, interpolation de ψ sur un voisinage Ω^+ de Ω.

$$\Omega^+ := \{x \in \mathbb{R}^N \text{ tel que } \operatorname{dist}(\Omega, x) \leq 10h\}.$$

2. Détermination d'un voisinage ω^+ de ω

$$\omega^+ := \{x \in \Omega^+ \text{ tel que } \psi^+(x) < 4\epsilon + h\}.$$

3. Calcul de n_δ, solution de (III.6).4.1-III.6).4.2). La formulation variationnelle est résolue sur ω^+ (et non Ω) tandis que la normale est approchée par

$$n^+ := \frac{\nabla\psi^+}{\max(|\nabla\psi^+|, \delta_2)}.$$

4. Détermination d'une approximation de $X(\cdot, -\epsilon/2) \in V_h^N$ (où V_h est l'espace des éléments finis de Lagrange de degré 2), par la méthode des caractéristiques.

5. Mise à jour de ψ

$$T^\epsilon_\delta(\psi)(x) = \min\left(\psi(x), \inf\{|X(y,-\epsilon/2) - x| - \epsilon/2 \text{ avec } \psi(y) = 0\}\right).$$

Applications numériques.

Nous illustrons maintenant l'action de l'application T^ϵ_δ sur quelques exemples.

On considère dans toutes les applications proposées un rectangle dont seule l'épaisseur varie d'un cas à l'autre. L'épaisseur minimale ϵ imposée est choisie égale à $3H/2$, où H est la taille du maillage structuré utilisé. Enfin, les paramètres choisis sont $\delta_1 = \delta_2 = 0.1$ et $\delta_3 = 0.2$.

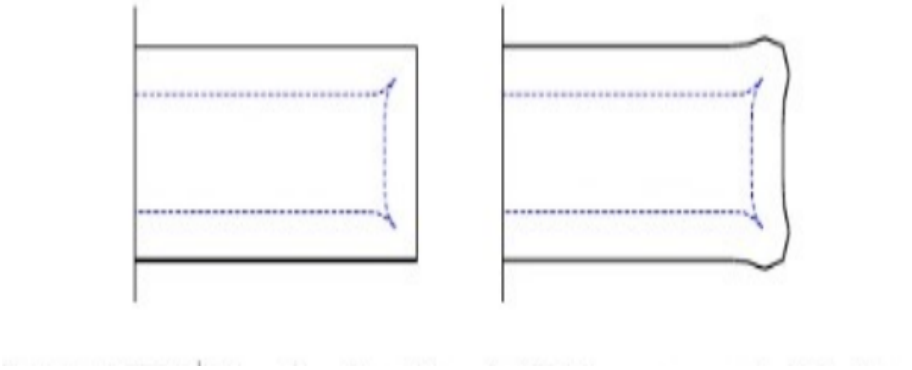


FIGURE III.6).4.1 – Application de T_δ^ϵ à un ouvert d'épaisseur 4ϵ

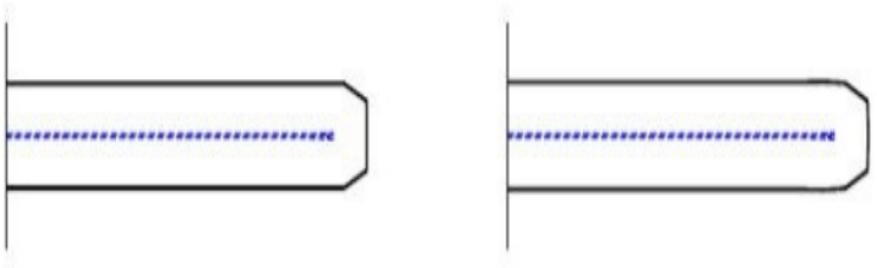


FIGURE III.6).4.2 – Application de T_δ^ϵ à un ouvert d'épaisseur ϵ

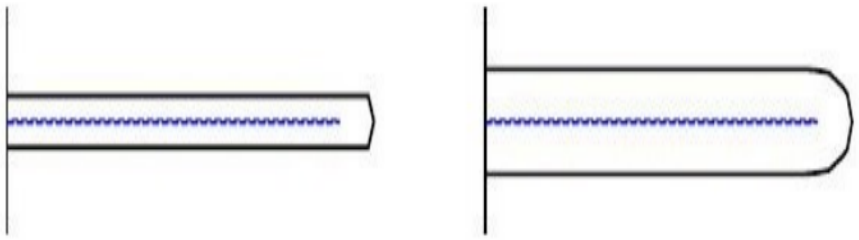


FIGURE III.6).4.3 – Application de T_δ^ϵ à un ouvert d'épaisseur $\epsilon/2$

III.6).5 Reformulation du problème d'endommagement

En lieu et place des problèmes ($\mathcal{P}_i^\varepsilon$), nous nous proposons d'adjoindre la contrainte d'épaisseur minimale pour laquelle il nous semble que la convergence du modèle endommagé vers le modèle de fracture puisse être justifiée. Nous notons ($\mathcal{Q}_i^\varepsilon$) le problème de minimisation

$$\begin{aligned} &\min && j^\varepsilon(u_i^\varepsilon, \omega_i^\varepsilon). \\ &u_i^\varepsilon \in H^1(\Omega)^N, \omega_i^\varepsilon \subset \Omega \\ &u_i^\varepsilon(x) = g_i(x) \text{ pour tout } x \in \Gamma_D \\ &\omega_i^\varepsilon \supset \omega_{i-1}^\varepsilon \\ &T^\epsilon(\omega_i^\varepsilon) = \omega_i^\varepsilon \end{aligned} \qquad (\mathcal{Q}_i^\varepsilon)$$

La version discrétisée de ce problème d'optimisation consiste à résoudre les problèmes

$$\begin{aligned} &\min && j^\varepsilon(u_i^{\varepsilon,h}, \omega_i^{\varepsilon,h}), \\ &u_i^{\varepsilon,h} \in U_h, \psi_i^{\varepsilon,h} \in X_H \\ &u_i^{\varepsilon,h}(x) = g_i(x) \text{ pour tout } x \in \Gamma_D \\ &\omega_i^{\varepsilon,h} \supset \omega_{i-1}^{\varepsilon,h} \\ &T_\delta^\epsilon(\omega_i^{\varepsilon,h}) = \omega_i^{\varepsilon,h} \end{aligned} \qquad (\mathcal{Q}_i^{\varepsilon,h})$$

où $\omega_i^{\varepsilon,\psi}$ est le domaine endommagé correspondant à la ligne de niveau $\psi_i^{\varepsilon,h}$. Remarquons que ces problèmes dépendent tous deux du choix de l'épaisseur minimale imposée ϵ et, pour la version discrétisée, de la taille des mailles H utilisées pour la représentation de la fonction ligne de niveau (qui peut être différente de la taille h du maillage employé pour la discrétisation du déplacement) ainsi que des paramètres δ d'approximation de T^ϵ. Nous ne faisons pas apparaître la dépendance en ces variables dans les notations utilisées pour désigner les problèmes ($\mathcal{Q}_i^\varepsilon$) et ($\mathcal{Q}_i^{\varepsilon,h}$) afin de ne pas les alourdir inutilement.

III.7) Un algorithme de type gradient projeté

Nous avons introduit dans les sections précédentes tous les éléments nous permettant de définir notre version de l'algorithme afin de résoudre le problème ($\mathcal{Q}_i^{\varepsilon,h}$). Nous rappelons que les principales différences de la version que nous proposons par rapport à celle d'Allaire et al. portent sur : l'utilisation d'une expression Lagrangienne $D^h J^\varepsilon$ de la dérivée de forme ainsi que l'introduction d'une condition explicite d'épaisseur minimale sur le domaine endommagé. De plus, nous préciserons également comment nous choisissons le paramètre de régularisation en fonction de la discrétisation ainsi que le critère d'arrêt, détails importants qui ne sont pas abordés dans l'article d'Allaire et al.

Dans cette section, nous précisons tout d'abord comment est déterminée la direction de descente dans la boucle interne d'optimisation.

Dans un second temps, nous aborderons la mise à jour de la fonction ligne de niveau, effectuée par la résolution d'une équation de convection en lieu et place de l'équation d'Hamilton Jacobi (III.4).2.1). Une dernière partie sera consacrée au critère d'arrêt. En conclusion de cette section, l'algorithme proprement dit sera développé.

On utilise une approximation de la dérivée de forme introduite dans II.2).1 dans les applications numériques.

III.7).1 Approximation de la dérivée de forme.

On rappelle que $u_i^{h,\varepsilon}(\omega)$ est une approximation par la méthode de type éléments finis du déplacement de la structure au temps $t = t_i$. On définit l'approximation Lagrangienne $D^h J_i^\varepsilon(\omega)$ de la dérivée de forme de la fonction J_i^ε par

$$\langle D^h J_i^\varepsilon(\omega), \theta\rangle = \frac{1}{2}\int_\Omega A_\varepsilon(\omega)e(u^h) : \left((\nabla\cdot\theta)e(u^h) - \nabla u^h\nabla\theta - \nabla\theta^T(\nabla u^h)^T\right)\, dx + \int_\omega \kappa_\varepsilon \nabla\cdot\theta\, dx, \quad \text{(III.7).1.1)}$$

où $u^h = u_i^{\varepsilon,h}(\omega)$. D'après les résultats standards de convergence pour la méthode des éléments finis, on a trivialement la convergence de $D^h J_i^\varepsilon$ vers DJ_i^ε lorsque h tend vers zéro.

III.7).2 Détermination d'une direction de descente et régularisation

L'identification d'une direction de descente est obtenue via l'expression de la dérivée de forme sous sa forme Lagrangienne $D^h J_i^\varepsilon$ (III.7).1.1) qui fait intervenir toutes les composantes du champ θ et non uniquement sa composante normale à l'interface Σ. On note W_H l'espace des fonctions éléments finis θ^H de Lagrange de degré un à valeurs vectorielles définies sur le maillage structuré de Ωtel que $\theta^H \cdot n = 0$ sur $\partial\Omega$ et $\nabla g_i \cdot \theta^H = 0$ sur Γ_D. Pour une zone endommagée ω, on identifie la direction de descente $\theta_i^{\varepsilon,H}(\omega) \in W_H$, comme la solution du problème variationnel

$$\int_\Omega r(\varepsilon\chi + (1-\chi))e(\theta_i^{\varepsilon,h}(\omega)) : e(\delta\theta)\, dx + H^{-2}\int_\Omega \theta_i^{\varepsilon,h}(\omega)\cdot\delta\theta\, dx + \left\langle D^h J_i^\varepsilon(\omega), \delta\theta\right\rangle = 0 \text{ pour tout } \delta\theta \in W_H, \quad \text{(III.7).2.1)}$$

où r est un paramètre de régularisation. Le choix $r = 0$ conduit à un algorithme explicite, mais nous utiliserons une régularisation non nulle $r = 5$ dans les applications numériques. A noter, que cette régularisation est petite comparée au produit scalaire L^2 qui est pondéré par H^{-2}. Par ailleurs, le paramètre de régularisation est choisi petit dans la fracture afin de conserver l'indépendance de la vitesse d'évolution de part et d'autre d'une zone fracturée.

III.7).3 Mise à jour de la fonction ligne de niveau

A chaque itération, la fonction ligne de niveau ψ est mise à jour en convectant cette dernière le long d'un champ θ correspondant à une direction de descente. Ainsi en lieu et place de la résolution de l'équation d'Hamilton Jacobi, la mise à jour de la fonction ligne de niveau s'effectue par la résolution de l'équation de convection

$$\frac{\partial \psi}{\partial s} + \theta \cdot \nabla \psi = 0, \tag{III.7).3.1}$$

où comme dans le cas (III.4).2.1), la variable s correspond à un temps virtuel. Nous utilisons un schéma de Lax-Friedrich d'ordre 2 pour résoudre cette équation sur un maillage structuré dont la taille des mailles est H. Dans les applications numériques, on effectue dix itérations sur le temps virtuel s à chaque itération de la boucle interne d'optimisation. Par ailleurs, le pas de temps est choisi de sorte à avoir une CFL inférieure ou égale à 1/4.

III.7).4 Critère d'arrêt

Le critère d'arrêt utilisé pour sortir de la boucle interne d'optimisation à une influence cruciale dans le résultat final. Choisi trop lâche, l'algorithme quitte la boucle d'optimisation interne avant convergence. Notre critère d'arrêt est basé sur la variation de la fonction caractéristique χ d'une itération à l'autre :

$$\varepsilon^{-1} \int_\Omega |\chi^{\varepsilon,h}_{i,k+1} - \chi^{\varepsilon,h}_{i,k}| \, dx \leq \delta_\chi H,$$

où δ_χ est un petit paramètre.

III.7).5 Résolution de $(\mathcal{Q}_i^{\varepsilon,h})$: Description de l'algorithme

L'algorithme de résolution de $(\mathcal{Q}_i^{\varepsilon,h})$ utilisé est très similaire à celui proposé par Allaire et al. pour la résolution de $(\mathcal{P}_i^{\varepsilon,h})$. La différence essentielle porte sur la prise en compte de la contrainte d'épaisseur minimale à l'aide d'un algorithme de type gradient projeté.

Listing III.3 – Algorithme de résolution de $(\mathcal{Q}_i^{\varepsilon,h})$

I. Intialisation de $\psi_0^{\varepsilon,h}$.

II. Boucle en temps $t_i = i\Delta t$, Itérations sur $i > 0$

1. On pose $\psi_{i,0}^{\varepsilon,h} = \psi_{i-1}^{\varepsilon,h}$ et $\omega_{i,0}^{\varepsilon,h} = (\psi_{i,0}^{\varepsilon,h})^{-1}(\mathbb{R}_-^*)$.

2. Boucle d'optimisation : Itérations sur $k \geq 0$

   (a) Détermination de $\theta_i^{\varepsilon,h}(\omega_{i,k}^h)$ solution of (III.7).2.1)

   (b) Résolution de l'équation d'advection (III.7).3.1)

   avec $\theta = \theta_i^{\varepsilon,h}(\omega_{i,k}^{\varepsilon,h})$ et $\psi(s=0) = \psi_{i,k}^{\varepsilon,h}$.

On pose $\widetilde{\psi}^{\varepsilon,h}_{i,k+1} = \psi(\Delta s)$ et $\widetilde{\omega}^{\varepsilon,h}_{i,k+1} = (\widetilde{\psi}^{\varepsilon,h}_{i,k+1})^{-1}(\mathbb{R}^*_-)$.

(c) Projection :

(α) Irréversibilité forte : $\widetilde{\psi}^{\varepsilon,h}_{i,k+1,0} = \min(\widetilde{\psi}^{\varepsilon,h}_{i,k+1}, \psi^{\varepsilon,h}_{i,k})$. On pose $l = 0$.

(β) Répéter jusqu'à convergence, pour $l \geq 0$, $\widetilde{\psi}^{\varepsilon,h}_{i,k+1,l+1} = T^{\epsilon}_{\delta}(\widetilde{\psi}^{\varepsilon,h}_{i,k+1,l})$

(γ) A convergence de l'étape (β), on pose $\psi^{\varepsilon,h}_{i,k+1} = \widetilde{\psi}^{\varepsilon,h}_{i,k+1,l}$

(d) Retour à (a) jusqu'à convergence. Si convergence, on pose $\psi^{\varepsilon,h}_{i} = \psi^{\varepsilon,h}_{i,k+1}$.

La contrainte d'épaisseur minimale est imposée à l'étape (c) où on itère l'application T^{ϵ}_{δ} jusqu'à l'obtention d'un point fixe.

III.7).6 Résultats numériques

On considère un des cas étudiés par Allaire et al. de chargement d'un solide élastique $\Omega = (0,1)^2$ dans dans [Allaire et al., 2009, Allaire et al., 2011] auquel on applique un déplacement $g(t) = (tx_2, 0)$ sur les bords inférieurs et supérieurs. Sauf mention contraire, les paramètre choisis sont les suivants : Les modules de Young sont choisis égaux à $E_0 = 1000$ pour la phase saine et $E_1 = 1.e^{-6}$ pour la phase endommagée, tandis que le module de Poisson ν est de 0.3 pour les deux phases. Le module de Griffith κ non mis à l'échelle est choisi égal à 3.5/160, tandis que le paramètre ε est choisi égal à la largeur initiale de la fracture. La longueur initiale de la fracture est 0.05. On utilise des éléments finis P_1 pour discrétiser le déplacement sur un maillage non structuré $\mathcal{T}_h$ régulier dont le diamètre des mailles est inférieur à h. La fonction ligne de niveau est discrétisée sur un maillage structuré de taille H.

La figure III.7).6.2 représente l'évolution de l'énergie au cours du temps. On observe un comportement similaire à celui obtenu par Allaire et al. Dans un premier temps, la zone endommagée n'évolue pas jusqu'à ce que le chargement appliqué atteigne une valeur critique. Lors de la phase de chargement, l'énergie totale croît de manière quadratique en fonction du temps et du chargement. Lorsque le chargement critique est atteint, la fracture évolue brutalement en deux branches symétriques jusqu'à disloquer quasiment complètement le solide en trois parties connexes résultant en une chute brutale de l'énergie. Les zones endommagées initiales ainsi que celle obtenue après le chargement critique sont représentées sur la figure III.7).6.1 sur laquelle on a également indiqué le type de chargement appliqué.

On vérifie sur la figure III.7).6.3, la symétrie de la fracture critique, ce qui n'est a priori pas totalement évident, le maillage utilisé pour résoudre le système de l'élasticité n'étant pas symétrique. En outre sont indiqués les angles formés par les branches qui partent de la zone initialement endommagées avec un angle

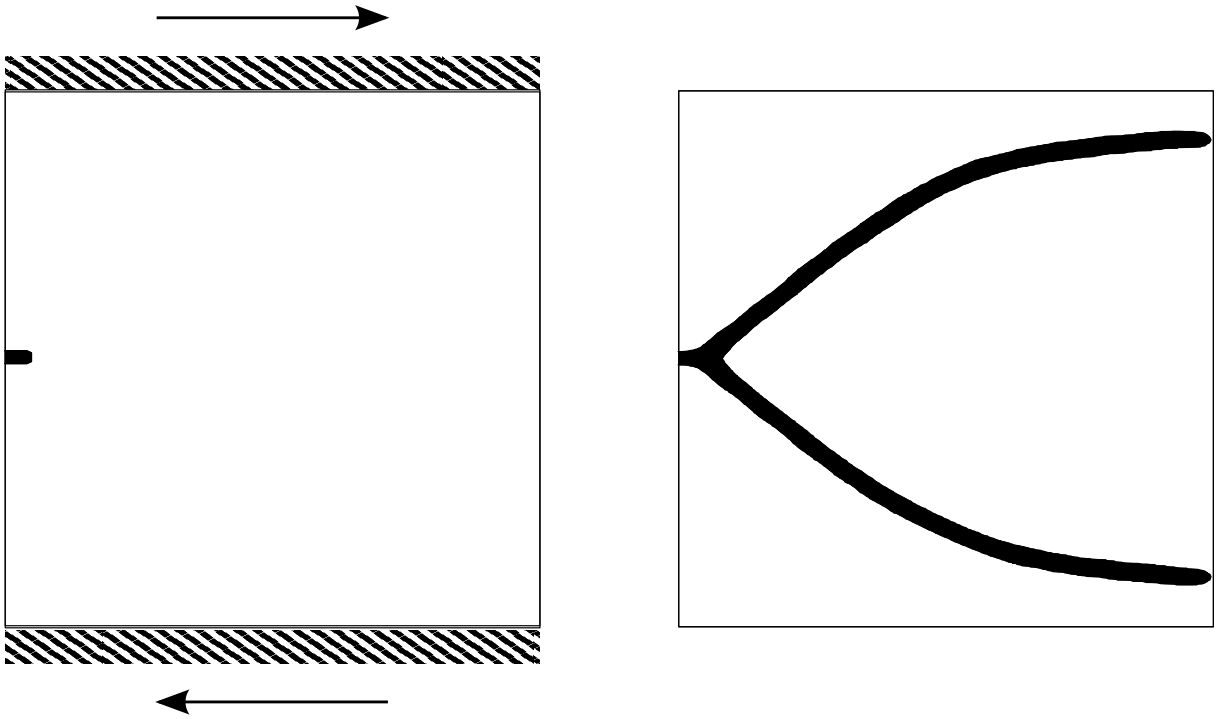


FIGURE III.7).6.1 – Évolution d'une fracture avec un chargement Mode II. A gauche, la fracture initiale et à droite la fracture au chargement critique.

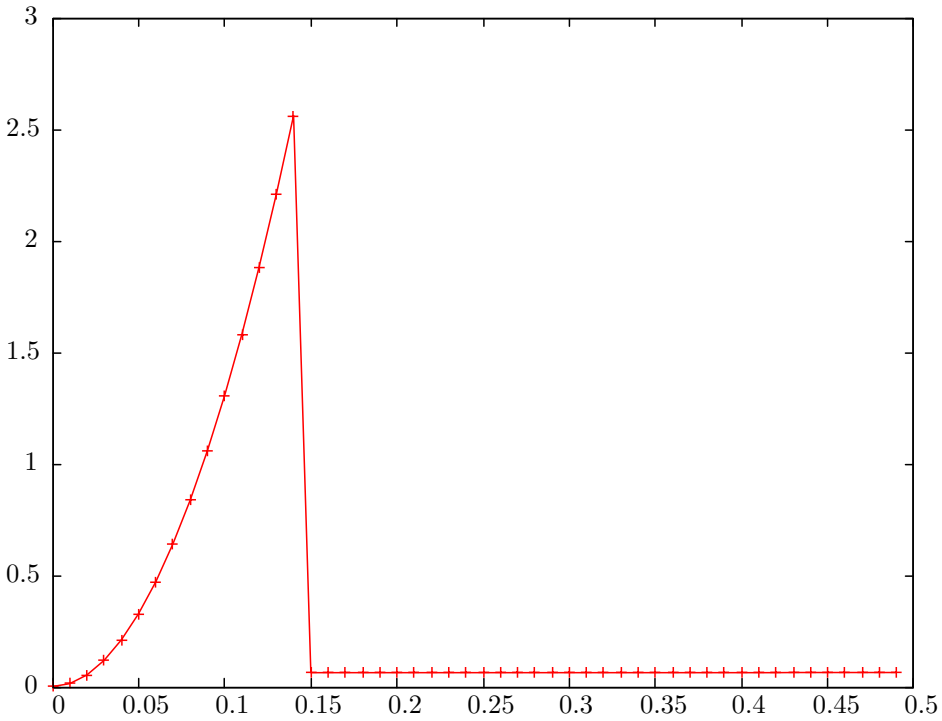


FIGURE III.7).6.2 – Évolution de l'énergie totale J^ε en fonction du chargement, pour un chargement en Mode II.

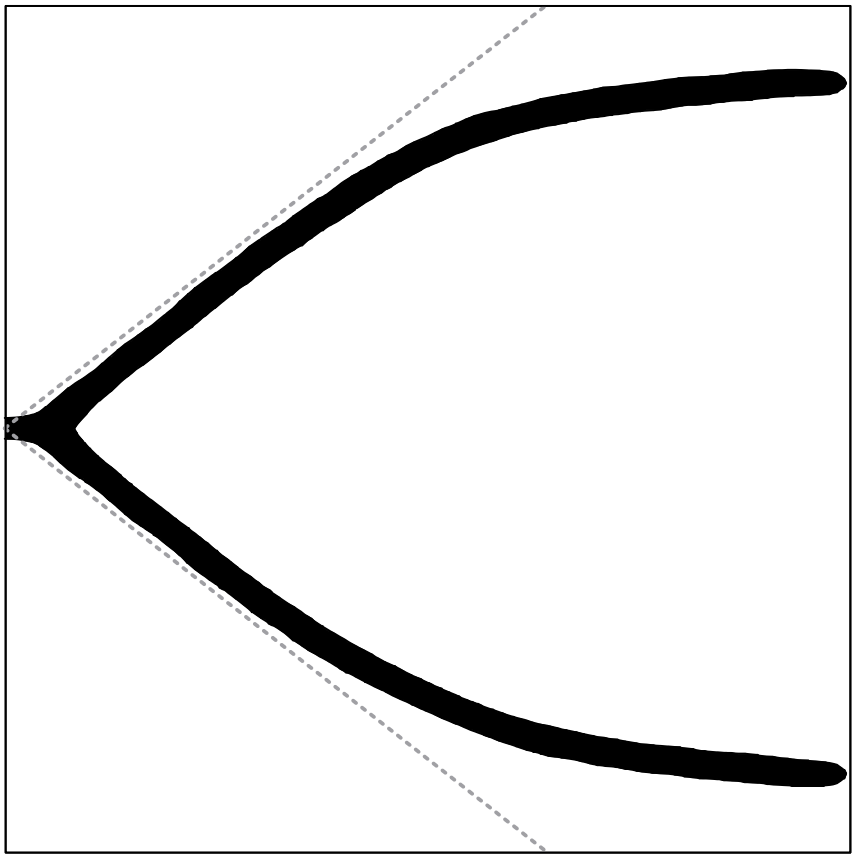


FIGURE III.7).6.3 – Les branches forment un angle de 38 degrés avec la verticale.

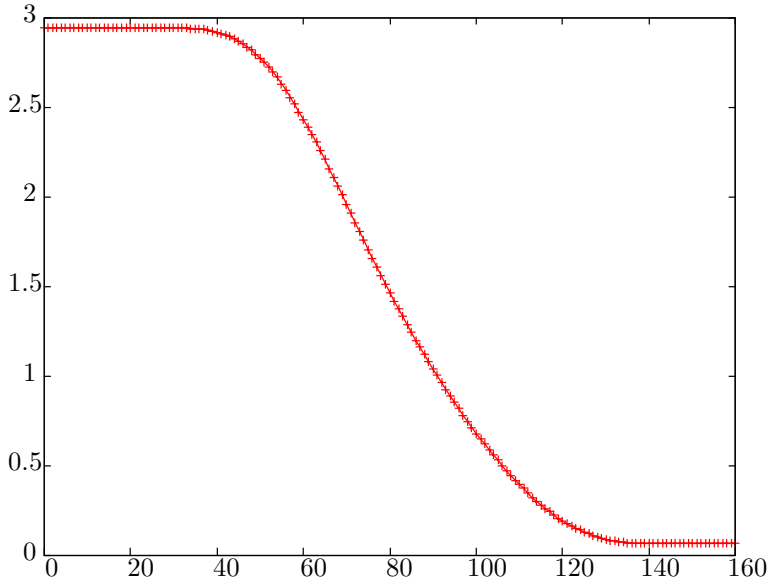


FIGURE III.7).6.4 – Évolution de l'énergie totale J^ε lors des itérations d'optimisation au temps critique, pour un chargement de type Mode II.

de 38 degrés avec l'horizontale. La forme de la fracture est presque parfaitement identique à celle obtenu par Allaire et al. à l'aide de leur propre algorithme. Par contre, le chargement critique est totalement différent. Dans [Allaire et al., 2009, Allaire et al., 2011], le chargement critique est atteint à un temps t de l'ordre de 0.5 et non 0.15. Comme nous n'effectuons pas de test de décroissance de l'énergie sur la simulation ici considérée, on pourrait penser que nous sous-estimons le chargement critique. Ceci ne semble cependant pas le cas, comme l'illustre la figure III.7).6.4 qui représente l'évolution de l'énergie totale au cours des étapes d'optimisation au temps critique $t = 0.15$. On constate que l'énergie est, comme attendue, strictement décroissante.

Convergence en fonction de h

On rappelle que contrairement à Allaire et al., on utilise deux maillages distincts l'un, structuré, pour la représentation de la fonction ligne de niveau. L'autre non structuré, mais régulier dont le diamètre des mailles est inférieure à un paramètre h. Sur la figure III.7).6.5 est représentée l'évolution de l'énergie pour différentes valeurs de h, toutes les autres valeurs de paramètres étant fixes par ailleurs. Le maillage utilisé pour la fonction ligne de niveau est de taille $H = 1/180$ et l'épaisseur minimale est fixée à $\epsilon = H\sqrt{2}$. On vérifie la convergence lorsque la valeur de h décroît. Plus la discrétisation est fine, plus le temps critique est faible. Quelle que soit la valeur considérée, le temps d'initialisation reste similaire et à partir de $h = 1/240$, il devient indépendant de h et est égal à $t = 0.13$.

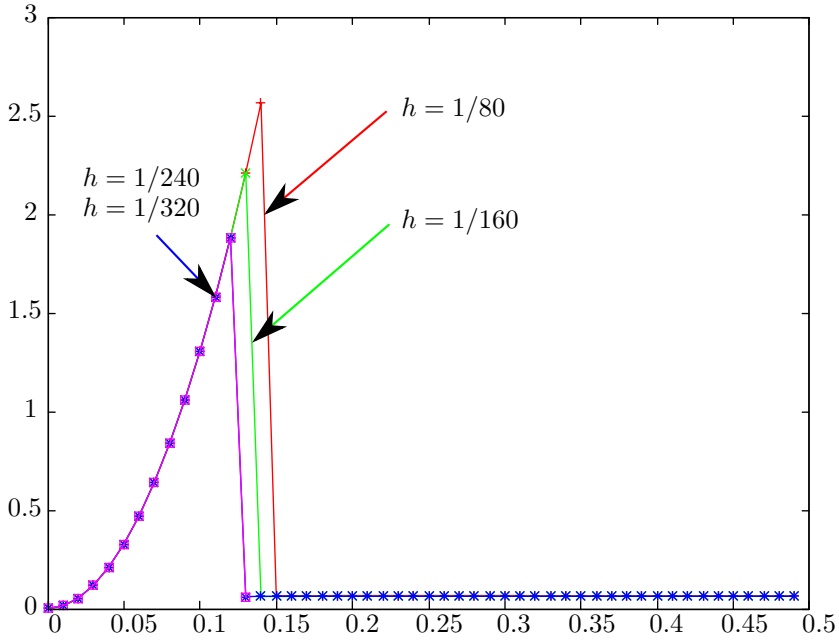


FIGURE III.7).6.5 – Évolution de l'énergie en fonction du temps pour différentes valeurs de la discrétisation h pour le système de l'élasticité.

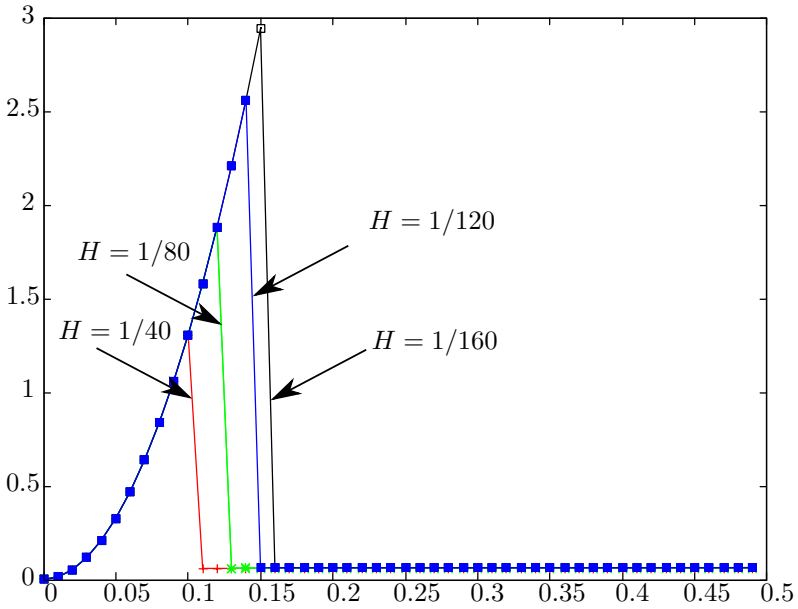


FIGURE III.7).6.6 – Évolution de l'énergie totale pour différentes valeurs de la discrétisation.

Convergence en fonction de ϵ

Comme Allaire et al., on vérifie la convergence de notre algorithme lorsque l'épaisseur minimale imposée à la fracture tend vers zéro. Sur la figure III.7).6.6, on considère, tous paramètres étant égaux par ailleurs, l'évolution de l'énergie pour différentes discrétisations. On considère quatre discrétisations différentes $H = 1/40, 1/80, 1/120, 1/160$. Dans tous les cas, le diamètre des mailles pour la résolution du système de l'élasticité linéaire est choisi proportionnel à H ($h = H/3$). De même l'épaisseur minimale (et initiale) est choisie égale à $\sqrt{2}H$. A noter cependant, que pour les deux discrétisations les plus fines, le paramètre de critère d'arrêt δ_χ est choisi égal à 10^{-4} alors qu'une valeur de 10^{-3} est suffisante pour les discrétisations plus grossières. Les résultats obtenus sont représentés sur la figure III.7).6.6. On constate une légère augmentation de la valeur du chargement critique avec la discrétisation, mais la convergence semble malgré tout observée.

III.7).7 Influence de la contrainte d'irréversibilité forte

Comme nous l'avons indiqué précédemment, la prise en compte d'une contrainte d'irréversibilité faible peut donner lieu à des comportements non physiques de l'algorithme. Dans le cas présent, pour le chargement critique, on s'attend à observer après la propagation de la fracture qui disloque le solide en trois parties connexes à ce que celle-ci tende vers une géodésique. En effet, l'énergie élastique n'en serait pas affectée (elle resterait quasi nulle) alors que la composante due à l'endommagement devrait décroître. Dans Allaire et al., ce comportement n'est pas observé. Ceci peut avoir plusieurs sources : Impossibilité de déterminer une direction de descente suite au non traitement d'une condition d'épaisseur minimale, arrêt de l'algorithme par une condition trop lâche sur le critère de convergence, régularisation de la vitesse normale qui de ce fait tend à être identique de part et d'autre de la fracture, prohibant de fait toute translation de celle-ci.

En imposant une contrainte d'irréversibilité faible en lieu et place de la contrainte forte, on s'attendait donc à observer après le développement de deux branches au temps critique à la translation progressive du point de séparation de celles-ci vers la droite du domaine jusqu'à l'obtention d'une fracture horizontale. Curieusement, nous n'observons pas ce phénomène dans le cas test que nous avons considéré. Sans la condition d'irrévesibilité forte, les deux branches atteignent tout d'abord les bords inférieur et supérieur de l'échantillon, puis continuent d'évoluer jusqu'à l'obtention de trois segments connectés. Une partie des bords inférieurs et supérieurs est également complétement fracturée à convergence. Au point de branchement, les trois segments forment un angle très proche de 120 degrés (on mesure un angle de 115 degrés) connu pour être l'angle optimal pour les problèmes de minimisation de la mesure de Hausdorff de dimension 1. La configuration obtenue est un point critique dans notre cas, car le coût des fractures le

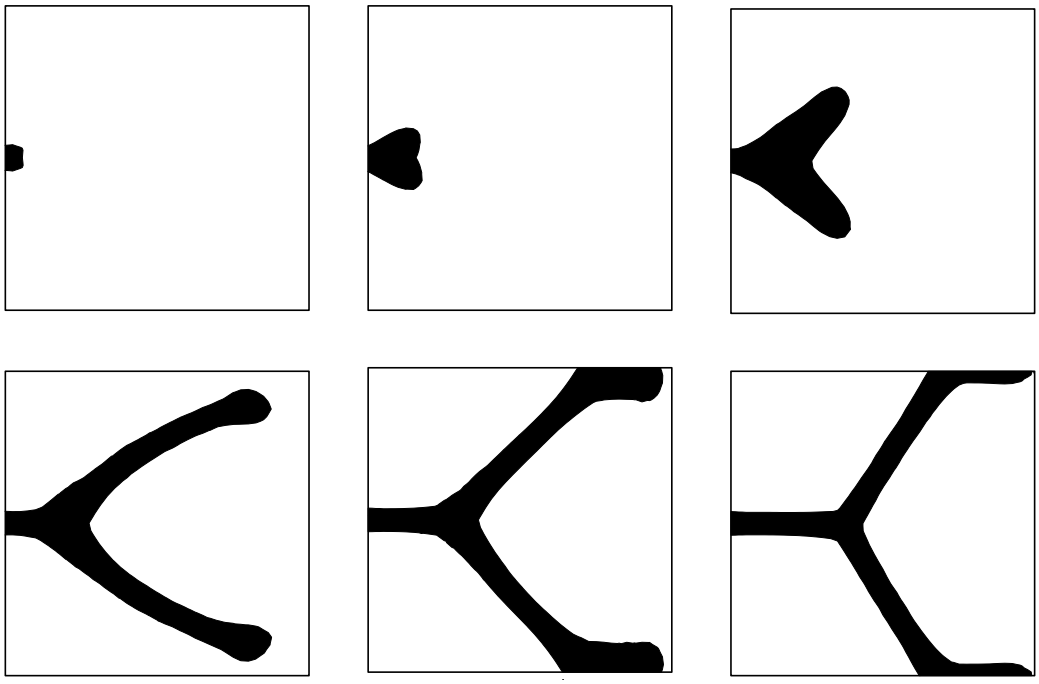


FIGURE III.7).7.1 – Évolution de la zone endommagée avec une contrainte d'irréversibilité faible.

long des bords du domaine de calcul Ω est moitié du coût à l'intérieur du domaine même : la "moitié" de l'épaisseur de la fracture est située en dehors de Ω et n'est de ce fait pas prise en compte. Afin de pallier ce problème, il faudrait étendre le domaine de calcul du coût de dissipation associé à l'endommagement. On a représenté sur la figure III.7).7.1 l'évolution de la zone fracturée au chargement critique au cours des itérations d'optimisation. Nous avons choisi un maillage pour la fonction ligne de niveau relativement grossier ($H = 1/40$) et une largeur minimale $\epsilon = \sqrt{2}H$, ce qui explique l'allure assez grossière des fractures.

III.8) Conclusion

L'algorithme proposé permet, de manière similaire à celui développé par Allaire et al. de simuler la propagation d'une fracture dans un solide élastique. Plusieurs améliorations pourraient être envisagées dans le futur. En particulier, la prise en compte de la contrainte d'épaisseur minimale s'avère assez gourmande dans la version actuelle. Une formulation pénalisée serait potentiellement plus efficace et pourrait être explorée. Enfin, l'une des branches obtenues dans le cas d'un chargement de type Mode II n'est pas physique. Dans la branche inférieure, le déplacement normale de part et d'autre de la fracture est négatif. Ainsi, deux parties distinctes du solide déformé se recouvrent l'une l'autre. Pour pallier ce phénomène, on pourrait envisager de considérer un solide hyper-élastique non linéaire. A priori, on se propose d'adapter la méthode employée ici au cas non linéaire sans modifications majeures.

Chapitre IV

Étude d'un modèle d'endommagement avec pénalisation de saut

On étudie un modèle de fracture avec pénalisation de saut du déplacement dans un solide élastique. On montre formellement qu'une telle modélisation peut être obtenue comme limite d'un modèle d'endommagement tout en présentant diverses simulations numériques illustrant la validité d'une telle approche.

IV.1) Introduction

Soit Ω un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^d$ $(d \geq 2)$ et soit Γ un domaine inclus dans Ω vérifiant

$$\mathcal{H}^{d-1}(\Gamma) < +\infty$$

où $\mathcal{H}^{d-1}$ est la mesure de Hausdorff $(d-1)$ dimensionnelle.
On considère deux phases : une élastique saine située dans $\Omega \backslash \Gamma$ représentée par le tenseur d'élasticité A et une phase endommagée située dans Γ représentée par le tenseur d'élasticité ϵA, les deux phases sont supposées linéaires homogènes isotropes où A est le tenseur d'élasticité donné par

$$A = 2\mu I_4 + \lambda I_2 \odot I_2$$

avec $I_2,\ I_4$ sont les tenseurs d'ordre 2 et 4 respectivement, $\mu,\ \lambda$ sont les coefficients de Lamé. Le paramètre ϵ est un réel positif qui tend vers zéro et qui sert à distinguer la rigidité entre la zone saine et la zone endommagée. Le tenseur symétrisé de gradient de déplacement est défini par

$$e(u_\epsilon) = \frac{1}{2}\left(\nabla u_\epsilon + \nabla {u_\epsilon}^t\right).$$

Le déplacement u_ϵ admet un saut défini par

$$[u_\epsilon] = \alpha\epsilon(\nabla u_\epsilon).$$

Soit n la normale extérieure à Γ_ϵ, α un réel positif décrivant l'épaisseur de la zone endommagée et soit κ_ϵ un réel positif représentant le coefficient de l'énergie de Griffith défini par

$$\kappa_\epsilon = \frac{\kappa}{\epsilon}.$$

On considère donc l'énergie J_ϵ définie par :

$$J_\epsilon(u_\epsilon, \Gamma_\epsilon) = \frac{1}{2}\int_{\Omega\backslash\Gamma_\epsilon} Ae(u_\epsilon) : e(u_\epsilon)\ \mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_{\Gamma_\epsilon} \epsilon Ae(u_\epsilon) : e(u_\epsilon)\mathrm{d}s + \int_{\Gamma_\epsilon} \kappa_\epsilon|\alpha|\, ds \qquad \text{(IV.1).1)}$$

où

$$\Gamma_\epsilon = \left\{x + t\epsilon n,\ x \in \Gamma,\ -\frac{\alpha}{2} \leq t \leq \frac{\alpha}{2}\right\}.$$

et

$$\nabla u_\epsilon = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_\epsilon}{\partial \tau}.\tau & \frac{\partial u_\epsilon}{\partial n}.\tau \\ \frac{\partial u_\epsilon}{\partial \tau}.n & \frac{\partial u_\epsilon}{\partial n}.n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{[u]}{\alpha\epsilon}.\tau \\ 0 & \frac{[u]}{\alpha\epsilon}.n \end{pmatrix}. \qquad \text{(IV.1).2)}$$

où on a supposé que (τ, n) est une base orthonormée.

On se propose d'étudier la limite du modèle lorsque ϵ tend vers 0.

Proposition IV.1).1 *Lorsque le paramètre ϵ tend vers 0, on obtient que*

$$\begin{aligned}
&\int_{\Gamma_\epsilon} \epsilon A e(u_\epsilon) : e(u_\epsilon) \ \mathrm{d}s \text{ tend vers } \int_\Gamma \frac{1}{2\alpha} A([u] \odot n) : A([u] \odot n) \ \mathrm{d}s \\
&\int_{\Gamma_\epsilon} \kappa_\epsilon \alpha \ \mathrm{d}s \simeq \int_\Gamma \kappa\alpha \ \mathrm{d}s \\
&\int_{\Omega\setminus\Gamma_\epsilon} Ae(u_\epsilon) : e(u_\epsilon) \ \mathrm{d}x \text{ tend vers } \int_{\Omega\setminus\Gamma} Ae(u) : e(u) \ \mathrm{d}x.
\end{aligned} \tag{IV.1).3}$$

Preuve Il suffit de montrer que lorsque le paramètre ϵ tend vers 0, on a l'égalité

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_\Gamma |\alpha|^{-1} A \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}[u].\tau \\ \frac{1}{2}[u].\tau & [u].n \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}[u].\tau \\ \frac{1}{2}[u].\tau & [u].n \end{pmatrix} \mathrm{d}s \\
&= \frac{1}{2}\int_\Gamma |\alpha|^{-1} (A[u] \odot n) : (A[u] \odot n) \ \mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

On montre alors que :

$$[u] \odot n = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}[u].\tau \\ \frac{1}{2}[u].\tau & [u].n \end{pmatrix}. \tag{IV.1).4}$$

En exprimant la quantité $[u] \odot n$ dans la base (τ, n) on obtient que :

$$\begin{aligned}
((([u] \odot n)n).\tau &= \frac{1}{2}[u].\tau \\
((([u] \odot n)n).n &= [u].n \\
((([u] \odot n)\tau).n &= \frac{1}{2}([u].\tau).
\end{aligned} \tag{IV.1).5}$$

Ainsi l'équation (IV.1).5) découle des égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
[u] \odot n &= \frac{1}{2}([u] \otimes n + n \otimes [u]), \\
([u] \odot n)\,\tau &= \frac{1}{2}([u].\tau)\,n, \\
([u] \odot n)\,n &= \frac{1}{2}([u] + ([u] \odot n)\,n) \ \square.
\end{aligned}$$

Le modèle de fracture avec pénalisation de saut est donné ainsi par le problème de minimisation par rapport aux déplacements u, épaisseurs α, fracture Γ

$$\min_{u,\alpha,\Gamma} J(u, \alpha, \Gamma)$$

où l'énergie totale J est définie par

$$\begin{aligned}
J(u, \alpha, \Gamma) = &\frac{1}{2}\int_{\Omega\setminus\Gamma} Ae(u) : e(u) \ \mathrm{d}x + \int_\Gamma \kappa|\alpha| \ ds \\
&+ \frac{1}{2}\int_\Gamma |\alpha|^{-1}(A[u] \odot n) : (A[u] \odot n) \ \mathrm{d}s
\end{aligned} \tag{IV.1).6}$$

où $a \odot b$ désigne le produit tensoriel symétrisé

$$a \odot b = (a \otimes b + b \otimes a)/2.$$

Notre approche est similaire à celle développée par Allaire et al. dans [Allaire et al., 2011]. Il s'agit en effet de dériver un modèle de fracture à partir d'un modèle d'endommagement. Dans les deux cas, un problème de minimisation locale par rapport aux déplacements et par rapport à la zone endommagée est établi. AJV supposent l'existence de deux zones élastiques saine A et endommagée ϵA. En effet, le paramètre ϵ est à l'ordre de 10^{-6}, ce qui caractérise une zone endommagée qui approche le vide. Contrairement à Allaire et al., on considère deux zones élastiques saine A et endommagée ϵA avec ϵ est relativement grand de l'ordre de 10^{-2}. Simultanément, ce paramètre est utilisé dans le scaling de l'énergie de Griffith. Ainsi, on définit le paramètre

$$\kappa_\epsilon = \frac{\kappa}{\epsilon}$$

différemment de Allaire et al. qui font dépendre le paramètre de Griffith explicitement en fonction de la taille de maillage. On montre alors que notre modèle d'endommagement est capable de prédire une propagation d'une fissure avec pénalisation des sauts lorsque le paramètre ϵ tend vers 0.
Les deux premières sections sont consacrées à l'étude du cas unidimensionnel théorique d'une part, puis numérique. Dans la section 1, on étudie ainsi le problème de minimisation du modèle d'endommagement à ϵ fixé avant d'effectuer une analyse asymptotique formelle.
La section 2 est consacrée à l'étude numérique du problème unidimensionnel et à la convergence de la méthode proposée lorsque le paramètre ϵ tend vers zéro.

Enfin, la troisième section reprend ces deux points en les généralisant au cas multidimensionnel pour la partie théorique et bidimensionnel pour les aspects numériques.

IV.2) Modèle d'endommagement avec pénalisation de saut : Cas unidimensionnel

IV.2).1 Présentation du modèle d'endommagement :

Soit

$$\Omega = \left(-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right)$$

et soit

$$\omega_\epsilon = \left(-\frac{\alpha\epsilon}{2}, \frac{\alpha\epsilon}{2}\right).$$

On considère deux phases une élastique saine située dans $\Omega \backslash \omega_\epsilon$ représentée par le tenseur d'élasticité A et une phase endommagée située dans ω_ϵ représentée par le tenseur d'élasticité ϵA, les deux phases sont supposées linéaires homogènes isotropes.

On note u_ϵ le déplacement de la structure soumise aux conditions aux limites du type Dirichlet

$$u_\epsilon\left(-\frac{L}{2}\right)=0,\ u_\epsilon\left(\frac{L}{2}\right)=u_d, \tag{IV.2).1.1}$$

où u_d est un réel positif désignant le déplacement imposé à l'extrémité de la barre représentée par Ω.

L'énergie totale décrivant ce modèle est définie par

$$J_\epsilon(u_\epsilon,\omega_\epsilon)=\frac{1}{2}\int_{\omega_\epsilon}\epsilon a\mid u'_\epsilon\mid^2+\frac{1}{2}\int_{\Omega\setminus\omega_\epsilon}a\mid u'_\epsilon\mid^2+\frac{\kappa}{\epsilon}\mid\omega_\epsilon\mid \tag{IV.2).1.2}$$

où

$$\frac{1}{2}\int_{\omega_\epsilon}\epsilon a\mid u'_\epsilon\mid^2$$

est l'énergie élastique emmagasinée dans la zone endommagée,

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega\setminus\omega_\epsilon}a\mid u'_\epsilon\mid^2$$

est l'énergie élastique emmagasinée dans la zone saine et

$$\frac{\kappa}{\epsilon}\mid\omega_\epsilon\mid$$

est l'énergie de Griffith.

IV.2).2 Étude unidimensionnelle formelle à ε fixé :

Le déplacement u_ϵ vérifie l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\begin{cases} -\left(au'_\epsilon\right)'=0\ dans\ \Omega \\ u_\epsilon\left(-\frac{L}{2}\right)=0, \\ u_\epsilon\left(\frac{L}{2}\right)=u_d. \end{cases} \tag{IV.2).2.1}$$

Ainsi, on déduit que u'_ϵ est constante dans chaque intervalle de Ω. Ceci implique qu'il existe $r,\ s\in\mathbb{R}$ tel que

$$\begin{cases} u'_\epsilon=r\ dans\ \left(-\frac{L}{2},\frac{\alpha\epsilon}{2}\right)\cup\left(\frac{\alpha\epsilon}{2},\frac{L}{2}\right) \\ [u_\epsilon]=s\ dans\ \left(-\frac{\alpha\epsilon}{2},\frac{\alpha\epsilon}{2}\right). \end{cases} \tag{IV.2).2.2}$$

Ce qui implique que

$$J_\epsilon(u_\epsilon,\omega_\epsilon)=\frac{\alpha\epsilon^2as^2}{2}+\frac{ar^2(L-\alpha\epsilon)}{2}+\kappa\alpha. \tag{IV.2).2.3}$$

En tenant compte des conditions aux limites de u_ϵ dans (IV.2).1.1), on définit la fonction contrainte F

$$F=r(L-\alpha\epsilon)+\alpha\epsilon s-u_d. \tag{IV.2).2.4}$$

Proposition IV.2).1 *Les minimiseurs de J_ϵ définie par l'équation (IV.2).2.3) sous la contrainte $F = 0$ sont donnés par :*

$$\begin{cases} r = \frac{u_d}{L+\alpha(1-\epsilon)} \\ s = \frac{u_d}{\epsilon(L+\alpha(1-\epsilon))} \\ \alpha = \frac{-L}{1-\epsilon} + \sqrt{\frac{a}{2\kappa(1-\epsilon)}}u_d. \end{cases} \tag{IV.2).2.5}$$

Preuve En minimisant la fonctionnelle

$$J_\epsilon(u_\epsilon, \omega_\epsilon) = \frac{\alpha\epsilon^2 a s^2}{2} + \frac{a r^2 (L - \alpha\epsilon)}{2} + \kappa\alpha,$$

par rapport à s, r et α, on obtient que

$$\begin{cases} \frac{\partial J_\epsilon}{\partial s} + \varrho\frac{\partial F}{\partial s} = 0 \\ \frac{\partial J_\epsilon}{\partial r} + \varrho\frac{\partial F}{\partial r} = 0 \\ \frac{\partial J_\epsilon}{\partial \alpha} + \varrho\frac{\partial F}{\partial \alpha} = 0 \end{cases} \tag{IV.2).2.6}$$

où ϱ est un multiplicateur de Lagrange. Ceci implique

$$\begin{cases} \epsilon^2 a s + \varrho s = 0, \\ a r (L - \alpha\epsilon) + \varrho(L - \alpha\epsilon) = 0, \\ \frac{\epsilon^2 a s^2}{2} - \frac{a r^2 \epsilon}{2} + \kappa + \varrho\epsilon(s - r) = 0. \end{cases} \tag{IV.2).2.7}$$

On déduit ainsi que

$$\varrho = \frac{-a u_d}{L + \alpha(1 - \epsilon)}.$$

D'où l'équation (IV.2).2.5) □.

Les déplacements extrêmes décrits par la première valeur de u_d notée u_d^- pour laquelle on commence à obtenir une propagation et u_d^+ impliquant une valeur de u pour laquelle le domaine est entièrement endommagé correspondent à deux longueurs particulières de la zone endommagée et vérifient :

— Premier cas : Si la zone endommagée est d'épaisseur nulle ($\alpha\epsilon = 0$), on a

$$\alpha\epsilon = \epsilon\Big(\frac{-L}{1-\epsilon} + \sqrt{\frac{a}{2\kappa(1-\epsilon)}}u_d\Big) = 0.$$

Ce qui donne la valeur de u_d^-.

— Deuxième cas : Si la zone endommagée est développée le long de domaine ($\alpha\epsilon = L$), on a

$$\alpha\epsilon = \epsilon\Big(\frac{-L}{1-\epsilon} + \sqrt{\frac{a}{2\kappa(1-\epsilon)}}u_d\Big) = L.$$

Ce qui donne la deuxième valeur de u_d^+.

On obtient donc les valeurs suivantes :

$$u_d^- = \sqrt{\frac{2\kappa}{a(1-\epsilon)}}L \ si\ \alpha\epsilon = 0, u_d^+ = \frac{L}{\epsilon}\sqrt{\frac{2\kappa}{a(1-\epsilon)}}\ si\ \alpha\epsilon = L. \tag{IV.2).2.8}$$

Ce modèle est construit dans un cadre quasi statique où on suppose l'existence d'une suite croissante de temps t_i avec $1 \leq t_i \leq I$, I un entier donné tel que

$$u_{d_i} = t_i.$$

Ainsi, la propagation de la zone endommagée est déclenchée à partir d'une valeur donnée de déplacements imposés $u_d \geq u_d^-$. Si la valeur u_d^- n'est pas atteinte, une condition d'irréversibilité est appliquée pour maintenir la zone endommagée.

En effet, appliquer la condition d'irréversibilité en remplaçant α^{k+1} par $\max(\alpha^k, \alpha^0)$ où α_0 correspond à l'épaisseur de la zone endommagée dans l'itération précédente de la boucle externe des variations en temps. Cette condition sera très importante dans le cas général.

Ce modèle d'endommagement permet de retrouver trois régimes. Ceci est l'objet du Lemme suivant :

Lemme IV.2).2 *Les trois régimes de propagation de la zone endommagée à l'intérieur de la barre ω sont donnés par :*

— *Premier régime : Absence de propagation de la zone endommagée si $u_d \leq u_d^-$, alors*

$$J = \frac{1}{2}\frac{a{u_d}^2}{L}. \tag{IV.2).2.9}$$

— *Deuxième régime : Endommagement partiel si $u_d^- \leq u_d \leq u_d^+$, alors*

$$J = \sqrt{\frac{2\kappa}{1-\epsilon}}u_d - \frac{\kappa L}{1-\epsilon}. \tag{IV.2).2.10}$$

— *Troisième régime : Endommagement total si $u_d \geq u_d^+$,*

$$J = \frac{1}{2}\alpha\epsilon^2 a s^2 + \kappa\alpha = \frac{\epsilon a u_d^2}{2L} + \frac{\kappa L}{\epsilon}. \tag{IV.2).2.11}$$

Preuve — Premier cas : Si le déplacement u_d vérifie $u_d \leq u_d^-$, alors le gradient de déplacement est $r = \frac{u_d}{L}$, $\alpha\epsilon = 0$, ainsi on a

$$J_\epsilon = \frac{1}{2}ar^2 = \frac{1}{2}a\frac{{u_d}^2}{L}. \tag{IV.2).2.12}$$

— Deuxième cas : Le déplacement u_d vérifie $u_d^- \leq u_d \leq u_d^+$,

en remplaçant les paramètres $r,\ s$ avec ces expressions :

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{\frac{2\kappa}{a(1-\epsilon)}} \\ s &= \frac{1}{\epsilon}\sqrt{\frac{2\kappa}{a(1-\epsilon)}}. \end{aligned} \tag{IV.2).2.13}$$

On obtient que J est linéaire par rapport à u_d avec

$$J = \sqrt{\frac{2\kappa}{1-\epsilon}}u_d - \frac{\kappa L}{1-\epsilon}. \tag{IV.2).2.14}$$

— Dernier cas : Si le déplacement u_d vérifie $u_d \geq u_d^+$.

On a $\alpha\epsilon = L$; le gradient de déplacement est $s = \frac{u_d}{L}$. Donc J est donné par

$$J = \frac{1}{2}\alpha\epsilon^2 a s^2 + \kappa\alpha = \frac{\epsilon a u_d^2}{2L} + \frac{\kappa L}{\epsilon}. \ \square \tag{IV.2).2.15}$$

IV.2).3 Limite asymptotique formelle :

On considère un modèle d'endommagement avec pénalisation de saut où le comportement de l'endommagement au voisinage de l'origine a permet à la fonction de déplacement u_ϵ de n'avoir qu'un seul saut avec :

$$\lim_{x\to 0^+} u_\epsilon(x) - \lim_{x\to 0^-} u_\epsilon(x) = [u_\epsilon](0).$$

Ainsi, on suppose que la fonction u_ϵ est régulière hors de la zone endommagée $\Omega\backslash\omega_\epsilon$ et est définie par :

$$u_\epsilon(x) = \begin{cases} u_0(x) \ si \ x \in \Omega\backslash\omega_\epsilon, \\ v(\frac{x}{\alpha\epsilon}) \ si \ x \in \omega_\epsilon, \end{cases} \tag{IV.2).3.1}$$

avec u_0 une fonction régulière dans la zone saine, v une fonction affine et construite telle que sa pente coïncide avec le saut de u_0. Ainsi,

$$\begin{aligned} &u_\epsilon(-\frac{\alpha\epsilon}{2}) = v(-\frac{1}{2}), u_\epsilon(\frac{\alpha\epsilon}{2}) = v(\frac{1}{2}) \\ &v(\frac{1}{2}) - v(-\frac{1}{2}) = [u_0](0). \end{aligned} \tag{IV.2).3.2}$$

On se propose de calculer la limite formelle asymptotique de l'énergie totale J_ϵ lorsque ϵ tend vers 0 et on la minimise par rapport à α et le gradient de déplacement. Ceci est l'objet du lemme suivant.

Lemme IV.2).3 *1. La limite asymptotique formelle de J_ϵ lorsque ϵ tend vers 0 est donnée par :*

$$\lim_{\epsilon\to 0} J_\epsilon(u_\epsilon, \omega_\epsilon) = \frac{1}{2}\frac{a}{\alpha}[u_0]^2(0) + \frac{1}{2}\int_{\Omega\backslash\{0\}} a{u_0'}^2 + \kappa\alpha. \tag{IV.2).3.3}$$

2. La minimisation de la limite de J_ϵ par rapport à α et u_0' sous la contrainte $Lu_0' + [u_0] = u_d$ est donnée par

$$\min_{\alpha, u_0', Lu_0'+[u_0]=u_d} J(u_0, \alpha) = \kappa L + \sqrt{2a\kappa}\left| u_d - L\sqrt{\frac{2\kappa}{a}} sgn[u_0] \right|, \tag{IV.2).3.4}$$

où $sgn(x)$ désigne le signe de $x \in \mathbb{R}$.

Preuve On a

$$\lim_{\epsilon\to 0} J_\epsilon(u_\epsilon, \omega_\epsilon) = \lim_{\epsilon\to 0} J_\epsilon^1(u_\epsilon, \omega_\epsilon) + \lim_{\epsilon\to 0} J_\epsilon^2(u_\epsilon, \omega_\epsilon) + \lim_{\epsilon\to 0} J_\epsilon^3(u_\epsilon, \omega_\epsilon) \tag{IV.2).3.5}$$

où

$$\begin{aligned} J_\epsilon^1(u_\epsilon,\omega_\epsilon) &= \frac{1}{2}\int_{\omega_\epsilon} \epsilon a \mid u_\epsilon' \mid^2 \mathrm{d}x, \\ J_\epsilon^2(u_\epsilon,\omega_\epsilon) &= \frac{1}{2}\int_{\Omega\setminus\omega_\epsilon} a\mid u_\epsilon' \mid^2 \mathrm{d}x, \\ J_\epsilon^3(u_\epsilon,\omega_\epsilon &= \frac{\kappa}{\epsilon} \mid \omega_\epsilon \mid . \end{aligned} \tag{IV.2).3.6}$$

On a

$$\lim_{\epsilon\to 0} J_\epsilon^1(u_\epsilon,\omega_\epsilon) = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{2}\int_{\omega_\epsilon} \epsilon a \mid u_\epsilon' \mid^2 \mathrm{d}x.$$

On effectue le changement de variables suivant :

$$y = \frac{x}{\alpha\epsilon}.$$

Ainsi, on obtient que

$$\begin{aligned} &\lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{2}\int_{\omega_\epsilon} \epsilon a\mid u_\epsilon' \mid^2 \mathrm{d}x \\ &= \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{2}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{\epsilon a}{\alpha^2\epsilon^2} v'(y)^2 \,\mathrm{d}y \\ &= \frac{a}{2\alpha}[u](0)^2. \end{aligned} \tag{IV.2).3.7}$$

De plus,

$$\begin{aligned} &\lim_{\epsilon\to 0} J_\epsilon^2(u_\epsilon,\omega_\epsilon) = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{2}\int_{\Omega\setminus\omega_\epsilon} a\mid u_\epsilon' \mid^2 \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\int_\omega a\mid u_0'(x)) \mid^2 \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\int_{\Omega\setminus\{0\}} {u_0'}^2 \,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2} a {u_0'}^2 L \end{aligned} \tag{IV.2).3.8}$$

Finalement, on a

$$\begin{aligned} &\lim_{\epsilon\to 0} J_\epsilon^3(u_\epsilon,\omega_\epsilon) = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{\kappa}{\epsilon} \mid \omega_\epsilon \mid \\ &\lim_{\epsilon\to 0}\frac{\kappa\alpha\epsilon}{\alpha\epsilon} = \kappa\alpha. \end{aligned}$$

D'où l'égalité (IV.2).3.3).

Soit

$$J(u_0,\alpha) = \frac{1}{2}\frac{a}{\alpha}[u_0]^2(0) + \frac{1}{2}\int_{\Omega\setminus\{0\}} a{u_0'}^2 + \kappa\alpha. \tag{IV.2).3.9}$$

On procède à une minimisation de la fonctionnelle (IV.2).3.9) par rapport à α induisant deux valeurs

$$\alpha_{1min} = -\sqrt{a}2\kappa \mid [u](0) \mid \ \ et\ \alpha_{2min} = \sqrt{a}2\kappa \mid [u](0) \mid .$$

On considère la valeur α_{2min} pour la suite de notre travail. Ainsi, en remplaçant l'équation (IV.2).3.9) par la valeur minimale de α, on obtient que

$$J(u_0) = \frac{L}{2} a {u'_0}^2 + \sqrt{2a\kappa} \mid [u](0) \mid . \tag{IV.2).3.10}$$

On minimise ensuite la fonctionnelle (IV.2).3.10) par rapport au gradient de déplacement u'_0, en tenant compte des conditions aux limites de la fonction u_0 et de la contrainte donnée par

$$F(u'_0, [u](0)) = u_d - Lu'_0 - [u_0](0) = 0. \tag{IV.2).3.11}$$

Ceci implique que

$$\begin{cases} \frac{\partial J}{\partial u'_0} + \varrho \frac{\partial F}{\partial u'_0} = 0 \\ \frac{\partial J}{\partial [u](0)} + \varrho \frac{\partial F}{\partial [u](0)} = 0. \end{cases} \tag{IV.2).3.12}$$

On obtient que

$$\begin{cases} Lu'_0 a - \varrho L = 0 \\ \sqrt{2a\kappa} sgn[u_0](0) - \varrho = 0. \end{cases} \tag{IV.2).3.13}$$

Ainsi, on déduit que

$$\begin{aligned} \varrho &= \sqrt{2a\kappa} \mid [u_0](0) \mid \\ u'_0 &= \sqrt{\frac{2\kappa}{a}} sgn[u_0](0) \\ [u_0](0) &= u_d - L\sqrt{\frac{2\kappa}{a}} sgn[u_0](0). \end{aligned} \tag{IV.2).3.14}$$

Par conséquent, on obtient l'égalité (IV.2).3.4) □.

Remarque Si

$$\left(u_d - L\sqrt{\frac{2\kappa}{a}} sgn[u_0](0)\right) > 0,$$

de plus, si

$$sgn[u_0] = 1,$$

la fonctionnelle limite minimisée obtenue est égale à

$$\begin{aligned} J &= \sqrt{2a\kappa} u_d + \kappa L - 2L\kappa sgn[u_0] \\ &= \sqrt{2a\kappa} u_d - \kappa L. \end{aligned}$$

On retrouve ainsi l'équation (IV.2).2.10) correspondant au deuxième régime de propagation lorsque $\epsilon = 0$.

IV.3) Étude numérique unidimensionnelle

Cette étude consiste à approcher l'intervalle Ω qui représente une barre de longueur L et de hauteur $Haut$ tel que $Haut << L$. Ainsi on suppose que le domaine de calcul est un rectangle de Largeur L très

grande comparée à son hauteur $Haut$. Cette étude consiste à montrer que ce modèle est capable d'une part de simuler la propagation d'une fissure en cohérence avec les résultats théoriques formels.
D'autre part, on montre que ce modèle est stable par raffinement de maillage et par variation du nombre des itérations du gradient.

IV.3).1 Description de la méthode

C'est un couplage entre la méthode du gradient et la méthode level set.
Le but de cette méthode est de faire une minimisation locale de la fonction coût définie par l'équation (IV.2).2.3).
Cette méthode est récapitulée dans deux boucles :

- Une boucle externe qui consiste à considérer une suite croissante de pas de temps de discrétisation $t_i,\ i \geq 0$, où à chaque instant t_i nous appliquons un déplacement imposé.
- Une boucle interne des itérations de la fonction coût bouclée à chaque pas de temps t_i.

On définit la fonction ψ dans Ω vérifiant :

$$\begin{cases} \psi(x) < 0 \ \Leftrightarrow \ x \in \omega, \\ \psi(x) > 0 \ \Leftrightarrow \ x \in \Omega \backslash \bar{\omega}. \end{cases} \tag{IV.3).1.1}$$

La vitesse V vérifie :

$$< V_i, W_i >_X + < J'(\Omega), W_i > 0, \ \forall W_i \in H^1(\Omega), \tag{IV.3).1.2}$$

où

$$< V_i, W_i >_X = \int_\Gamma V_i W_i dS.$$

L'intégration sur Γ se fait par l'approximation de Allaire, Jouve et Toader dans [Allaire et al., 2004].
Ainsi,

$$\int_\Omega (\epsilon_m \nabla V_i \nabla(W_i) + V_i W_i) dx + < J'(\omega), W_i >= 0, \tag{IV.3).1.3}$$

où ϵ_m est un paramètre de régularisation de la vitesse, δ est une approximation régularisée de la fonction de Dirac définie par

$$\delta = \frac{1}{2} \mid \nabla s_\epsilon(\psi) \mid , s_\epsilon(x) = \frac{\psi}{\sqrt{\psi^2(x) + {\epsilon_m}^2}}.$$

La normale N est définie par

$$N = \frac{\nabla \psi}{\mid \nabla \psi \mid}.$$

On suppose de plus que la normale est régularisée

$$< N, M >= \int_\Omega (\epsilon_m \nabla N \nabla(M) + NM)dx - \int_\Omega (\frac{(\nabla \psi M)}{2 \mid \nabla \psi \mid}) \, \mathrm{d}x, \ \forall N, M \in H^1(\Omega)$$

afin d'éviter les singularités au bord de la vitesse.

La zone endommagée Ω évolue avec une vitesse normale V et son évolution est décrite par l'équation d'Hamilton Jacobi sur ψ :

$$\frac{d\psi}{dt} + V \mid \nabla \psi \mid = 0. \tag{IV.3).1.4}$$

On considère le schéma upwind d'ordre 2 décrit par Sethian dans [Sethian, 1999].

Ainsi, la boucle interne consiste à :

— l'initialisation de la fonction level set ψ_0 comme la distance signée de la zone endommagée Ω_i.

— A chaque itération, pour $k \geq 0$:

  — Calculer la solution u_k du problème d'élasticité,

  — obtenant la fonction ψ^{k+1} à partir de ψ^k en résolvant l'équation (IV.3).1.4),

  — appliquer la condition d'irréversibilité en remplaçant ψ^{k+1} par $\max(\psi^k, \psi^0)$ où ψ_0 correspond à la zone endommagée dans l'itération précédente de la boucle externe des variations de temps de discrétisation.

Ainsi, à chaque instant t_i, la minimisation de J_i est donnée par la méthode d'optimisation de forme.

On suppose ainsi que la zone endommagée évolue pendant le temps. On la note par ω_t et elle est l'image de la fissure initiale ω par le difféomorphisme X $(X : \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}^2)$

$$X(t, x) = Id + t \ \theta$$

où l'application X vérifie l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt}(t, x) = \theta(X(t, x)) & \forall \ (t, x) \in \mathbb{R} \times \Omega \\ X(t = 0, x) & = x \end{cases} \tag{IV.3).1.5}$$

Donc, pour tout réel t, soit $\omega_t = X(t, x)(\omega)$, le transporté de ω par le champ θ qui est supposé nul sur $\partial\Omega$.

On s'intéresse au problème d'optimisation suivant : Trouver t qui minimise $J(\omega_t) = j(\omega_t, u_t)$, où $u_t \in V_t$ défini par

$$u_t \in V_t = \{v \in H^1(\omega_t)^2, \ v = 0 \ \ dans \ \Gamma_t^D\},$$

tel que

$$\int_\Omega \alpha_{\omega_t}\big(2\mu e(u_t)e(v) + \lambda \operatorname{Div}(u_t)\ \operatorname{Div}(v)\big)\mathrm{d}y = 0.$$

Pour minimiser J, on calcule le minimiseur de $J(\Omega)$.

On pose $j(t) = J(\Omega)$.

Si J est différentiable en $t = 0$, on pose

$$< J'(\Omega), t >=< j'(0), t > .$$

Lemme IV.3).1 *L'expression de la dérivée de forme est donnée par :*

$$\begin{aligned} J'(U,\theta) = \big(\int_\Omega \alpha_\omega \big(& -\mu \left(\nabla U \nabla\theta + \nabla\theta^t \nabla U^t\right) e(U) - \lambda \operatorname{tr}\left(\nabla U\nabla\theta + \nabla\theta^t\nabla U^t\right) \operatorname{tr} e(U)\big)\ \mathrm{d}x \\ & + \big(\mu e(U).e(U) + \lambda(\operatorname{Div}(U))^2(\operatorname{Div}(\theta)\big)\ \mathrm{d}x \\ & + \frac{\kappa}{\epsilon}\int_\Omega (\operatorname{Div}(\theta))\ \mathrm{d}x \end{aligned} \qquad \text{(IV.3).1.6)}$$

où

$$\alpha_\omega = \begin{cases} 1 & \text{sur } \Omega\backslash\omega \\ \epsilon & \text{sur } \omega \end{cases}$$

IV.3).2 Résultats numériques

A partir de l'état initiale IV.3).2.1 et avec un déplacement imposé inférieur à ${u_d}^-$, il y a réduction de la zone endommagée jusqu'à sa disparition .

A partir de ${u_d}^-$ il y a propagation jusqu'à l'endommagement total. La figure (IV.3).2.2) montre que la courbe de variation de la fonction coût par rapport aux déplacements imposés présente trois branches :

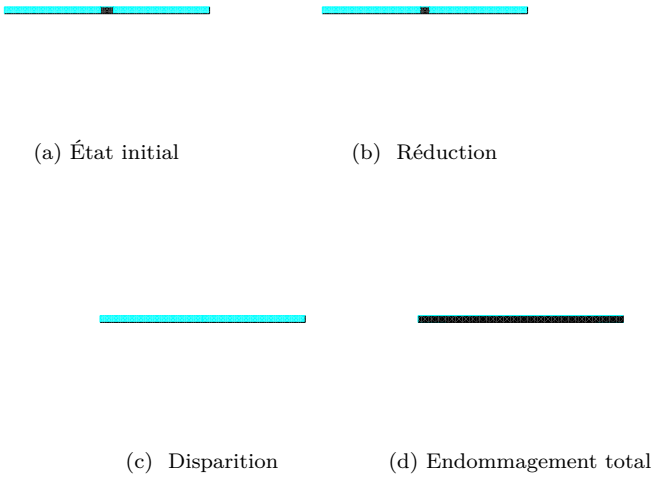
Une branche parabolique avant le début de propagation de la zone endommagée.

Une droite qui montre la propagation de la zone endommagée à partir d'un déplacement imposé ${u_d}^-$ jusqu'à traverser le domaine et atteindre une valeur u_d^+ de déplacement imposé.

Une autre branche parabolique qui montre que la structure est entièrement endommagée. Ceci est conforme avec les résultats de la section IV.2).2.

La figure IV.3).2.4 montre que la variation de la fonction coût est stable par raffinement du maillage et changement du nombre des itérations de la boucle de gradient.

On retrouve le critère de propagation de la fonctionnelle J lorsque le paramètre ϵ est fixé en obtenant deux courbes identiques ; numérique et théorique formelle, dans la figure IV.3).2.2. La figure IV.3).2.5 montre la convergence lorsque le paramètre ϵ tend vers 0 vers le modèle limite formel. Pour $\epsilon \leq 0.05$, les courbes de variations de la fonction coût par rapport aux déplacements imposés coïncident avec la courbe représentative du modèle limite formel.



(a) État initial (b) Réduction

(c) Disparition (d) Endommagement total

FIGURE IV.3).2.1 – Aspect de la propagation de la zone endommagée

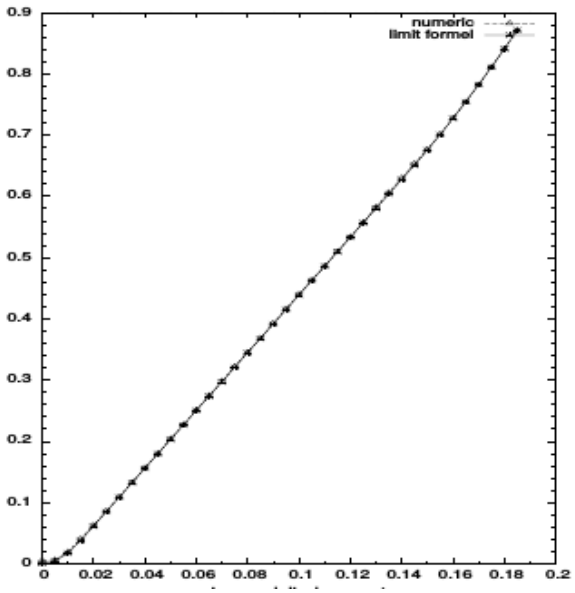


FIGURE IV.3).2.2 – Comparaison de la variation de la fonction coût par rapport aux déplacements imposés obtenue par l'étude numérique et l'étude théorique formelle à ϵ fixé

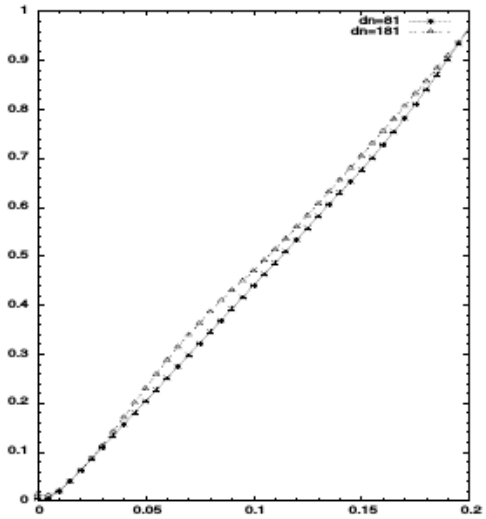


FIGURE IV.3).2.3 – Variation de la fonction coût par rapport aux déplacements imposés pour deux maillages différents ($dn = 81,\ 181$)

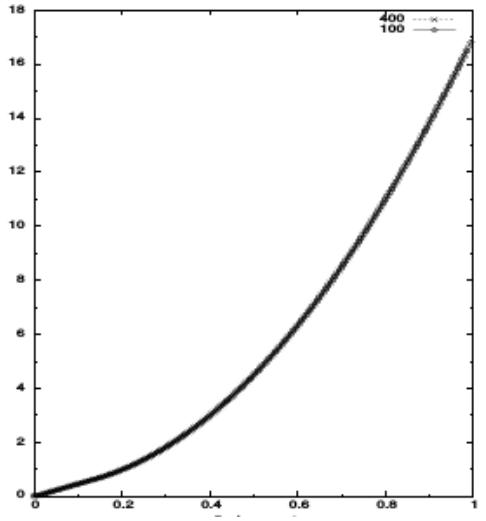


FIGURE IV.3).2.4 – Variation de la fonction coût par rapport aux déplacements imposés en 100, 400 itérations de gradient

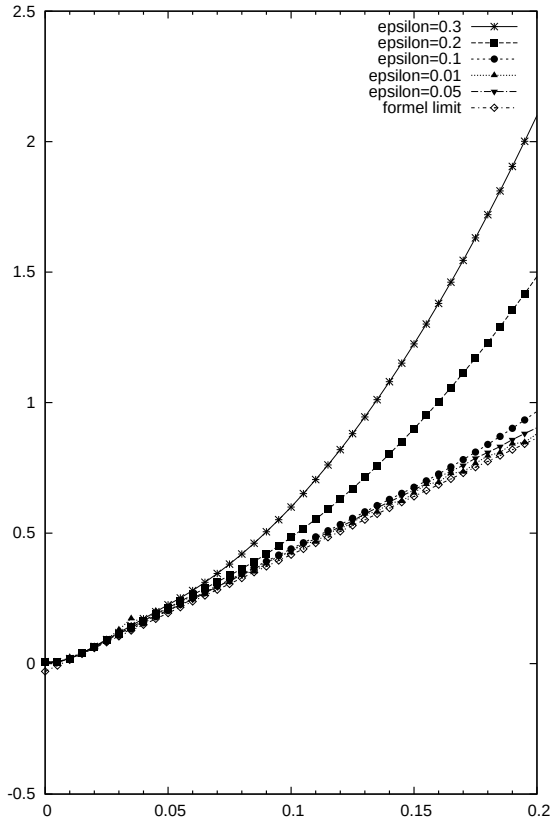


FIGURE IV.3).2.5 – Convergence des courbes représentatives de la variation de la fonction coût par rapport aux déplacements imposés vers le modèle limite formel lorsque ϵ tend vers 0

Conclusion

Le modèle de fracture avec pénalisation de saut est capable de prédire la propagation de la zone endommagée avec des variations stables et cohérentes avec le calcul théorique formel.
En choisissant le paramètre de Griffith comme fonction du paramètre ϵ le modèle obtenu possède une faible dépendance par rapport au maillage utilisé dans la discrétisation.
On se propose de généraliser ces résultats dans le cas bidimensionnel.

IV.4) Modèle d'endommagement avec pénalisation de saut : Cas bidimensionnel

IV.4).1 Étude asymptotique formelle

Soient $L,\ Haut,\ haut,\ \alpha > 0$ et $0 < \epsilon << 1$.

On considère les domaines suivants : Soit

$$\Omega = \left(-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right) \times \left(-\frac{Haut}{2}, \frac{Haut}{2}\right)$$

et

$$\omega_\epsilon = \left(-\frac{\alpha\epsilon}{2}, \frac{\alpha\epsilon}{2}\right) \times \left(-\frac{haut}{2}, \frac{haut}{2}\right).$$

Le modèle bidimensionnel de fracture avec pénalisation de saut est décrit par le problème de minimisation

$$\min_{\alpha, \nabla u_0, [u_0]} J^2\left(u_0, [u_0], \alpha\right)$$

où

$$J^2(u_0, [u_0], \alpha) = \frac{1}{2}\int_{\Omega\setminus\Gamma} a|\ \nabla u_0\ |^2\ \mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_\Gamma \frac{a}{\alpha}[u_0]^2 + \int_\Gamma \kappa\alpha\ \mathrm{d}s.$$

Elle peut être obtenue comme la limite asymptotique formelle lorsque le paramètre ϵ tend vers 0 est donnée par

$$\lim_{\epsilon\to 0} J^2_\epsilon\left(u_\epsilon, \omega_\epsilon\right) = J^2,$$

où

$$J^2_\epsilon\left(u_\epsilon, \omega_\epsilon\right) = \int_{\omega_\epsilon} \epsilon a|\ \nabla u_\epsilon\ |^2\ \mathrm{d}s + \int_{\Omega\setminus\omega_\epsilon} a|\ \nabla u_\epsilon\ |^2\ \mathrm{d}x + \int_{\omega_\epsilon} \kappa_\epsilon\ \mathrm{d}s.$$

On suit une approche identique au cas unidimensionnel dans l'étude asymptotique formelle.

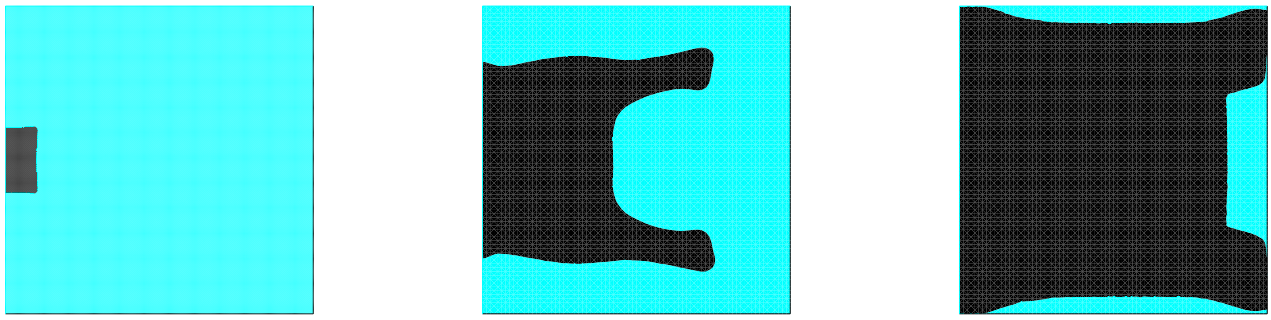
IV.4).2 Étude numérique bidimensionnelle

On considère un domaine carré $L = Haut = 1$. La zone endommagée est un domaine rectangulaire inclus dans Ω. On travaille avec deux maillages différents, un maillage structuré pour gérer l'équation

level set et un maillage non structuré pour calculer la solution du problème d'élasticité linéaire.
Ce maillage est construit par extraction du contour de la fonction level set.
On suppose que $\alpha = 1$. La zone endommagée est initialement d'épaisseur ϵ. On considère trois types de zones endommagées, une grossière ($\epsilon = 0.1$), une intermédiaire $\epsilon = 0.01$ et une fine ($\epsilon = 0.003$).
Dans chaque cas, on étudie la propagation de la zone endommagée, les variations de la fonction coût par rapport aux déplacements imposés pour différents maillages, nombre d'itérations de gradient,...

Simulation numérique d'un modèle d'endommagement avec pénalisation de saut pour une fissure initiale d'épaisseur $\epsilon = 0.1$

La figure IV.4).2.1 montre la propagation de la fissure jusqu'à ruiner la structure. La figure IV.4).2.2 montre la variation de l'énergie totale du modèle par rapport aux déplacements imposés par raffinement de maillage.



(a) Initial (b) Intermédiaire (c) Final

FIGURE IV.4).2.1 – Aspect de la propagation de la zone endommagée pour $\epsilon = 0.1$ pour un maillage grossier ($dn = 81$)

Simulation numérique d'un modèle d'endommagement avec pénalisation de saut pour une fissure initiale d'épaisseur $\epsilon = 0.01$

La propagation de la zone endommagée est décrite par la figure IV.4).2.3 où la fracture présente deux branches symétriques en se propageant jusqu'à traverser tout le domaine.

La figure IV.4).2.4 décrit les variations de la fonction coût pour plusieurs maillages.

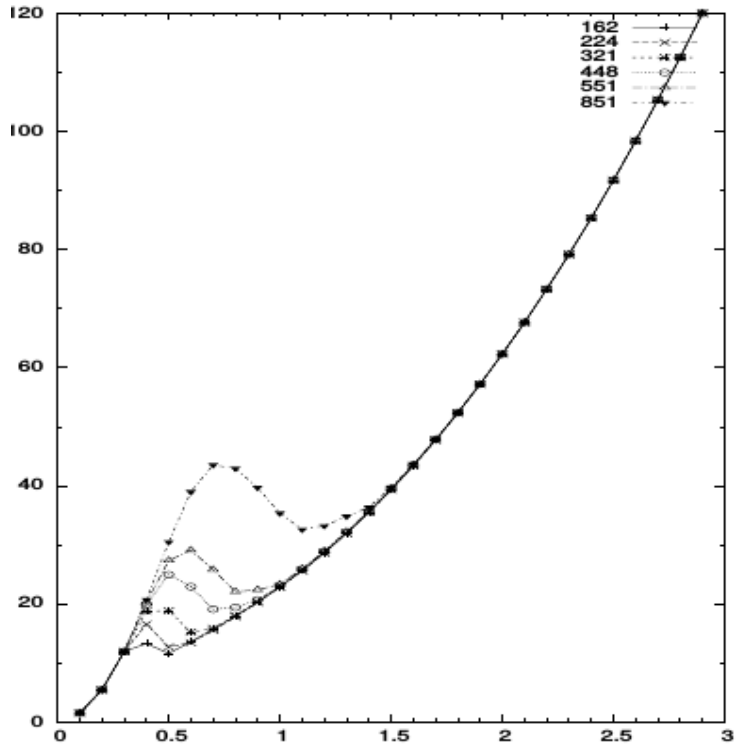
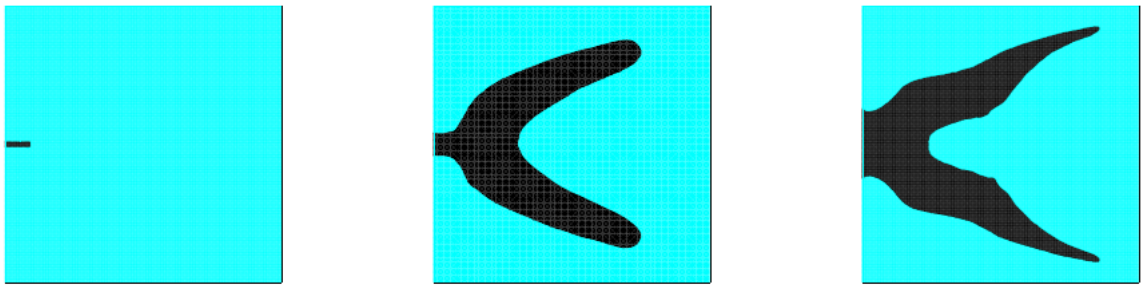


FIGURE IV.4).2.2 – Variation de la fonction coût par rapport aux déplacements imposés avec $\epsilon = 0.1$



(a) Propagation initiale (b) Propagation intermédiaire (c) Propagation finale

FIGURE IV.4).2.3 – Propagation de la fissure pour un maillage $dn = 81$ et $\epsilon = 0.01$:

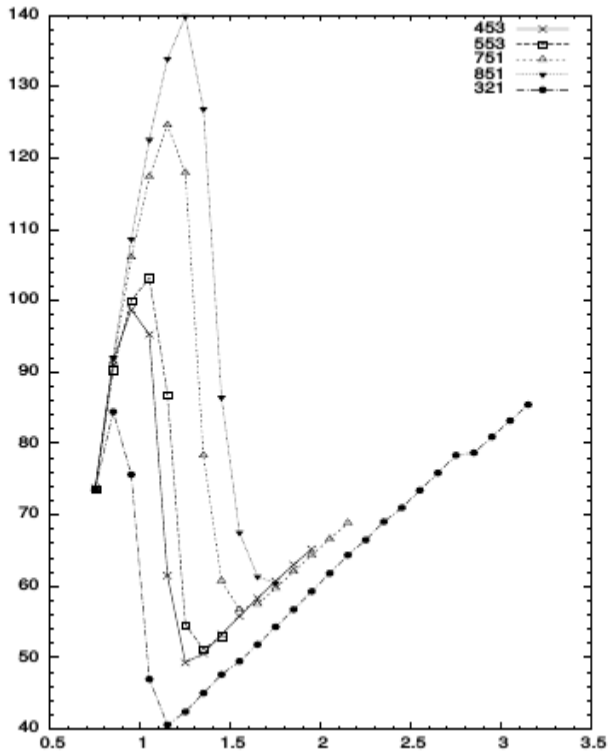


FIGURE IV.4).2.4 – Variation de la fonction coût par rapport au maillage après 100 itérations pour $\epsilon = 0.01$.

Simulation numérique d'un modèle d'endommagement avec pénalisation de saut pour une fissure initiale d'épaisseur $\epsilon = 0.003$

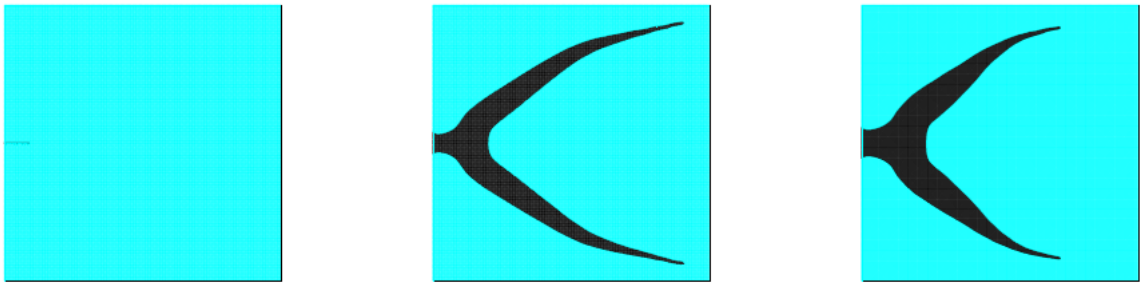
La figure IV.4).2.5 montre la propagation de la zone endommagée. La figure IV.4).2.6 montre la variation de la fonction coût par rapport aux déplacements imposés dans le cas d'adaptation et non adaptation de maillage.

Convergence vers un modèle de fracture mode II

Une propagation des zones endommagées d'épaisseur grossière, intermédiaire et fine respectivement est représentée par la figure IV.4).2.7 illustrant que plus l'épaisseur est faible, plus le modèle converge vers un modèle de fracture II.

IV.4).3 Modèle de Francfort-Bourdin revisité

On considère un domaine rectangulaire où on introduit à son intérieur une fissure préexistante. Un champ de déplacement ayant des valeurs croissantes et une orientation d'angle θ est fixé sur deux parois parallèles du domaine. Lorsque le déplacement atteint une valeur critique, on obtient plusieurs aspects de propagation selon les valeurs de l'angle θ. La figure IV.4).3.1 montre que



(a) Propagation initiale (b) Propagation intermédiaire (c) Propagation finale

FIGURE IV.4).2.5 – Aspect de la propagation de la zone endommagée pour le maillage $dn = 321$ avec $\epsilon = 0.003$

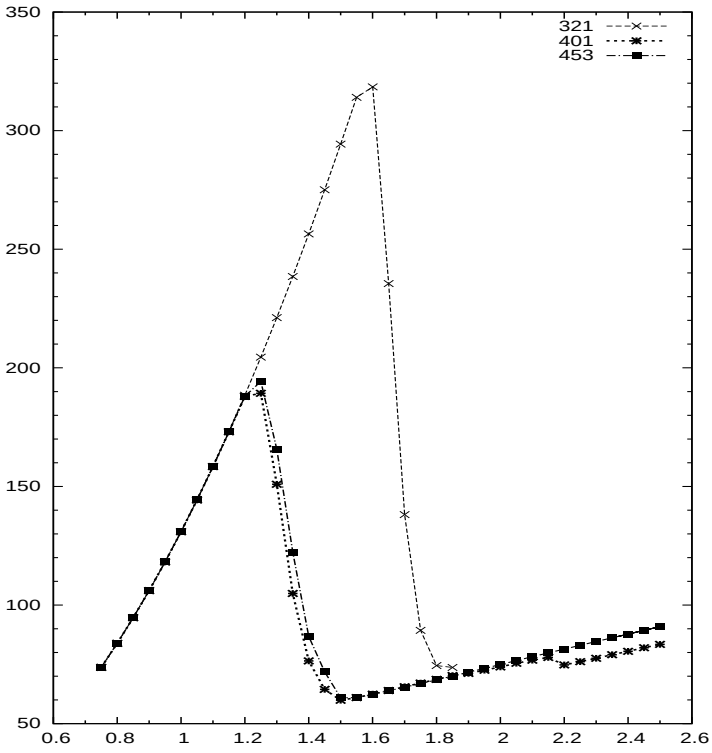
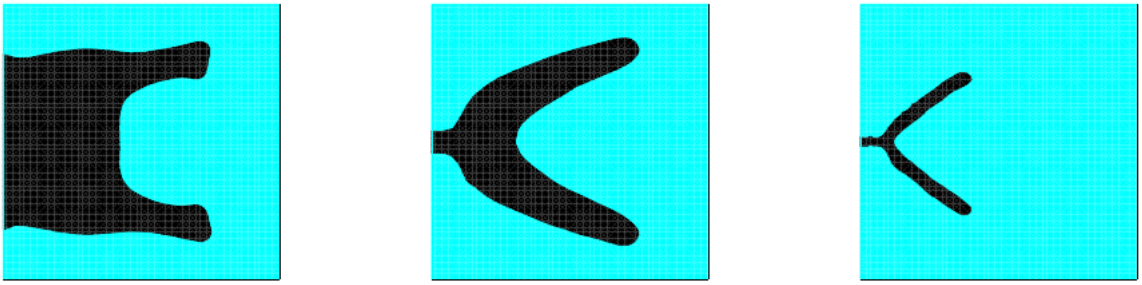
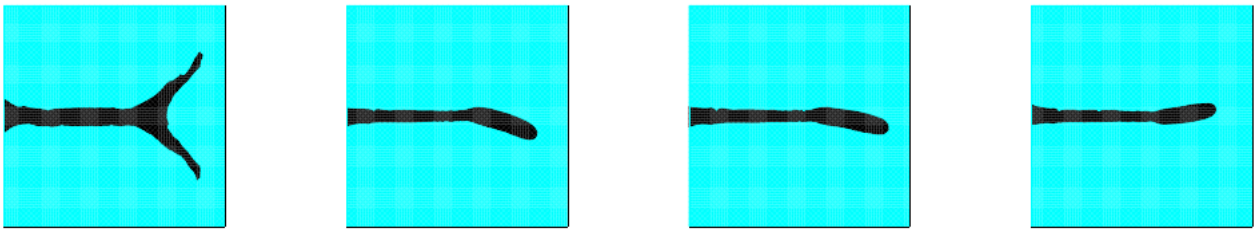


FIGURE IV.4).2.6 – Convergence par rapport aux itérations de la boucle de gradient avec $\epsilon = 0.003$



(a) $\epsilon = 0.1$ (b) $\epsilon = 0.01$ (c) $\epsilon = 0.003$

FIGURE IV.4).2.7 – Propagation de la zone endommagée lorsque ϵ converge à 0 pour un maillage grossier ($dn = 81$) :



(a) $\theta = 0$ (b) $\theta = 7$ (c) $\theta = 45$ (d) $\theta = 90$

FIGURE IV.4).3.1 – Aspect de la propagation de la zone endommagée : expérience de Francfort-Bourdin

— Lorsque $\theta = 0$ la propagation de deux branches symétriques de la fissure retrouvant le mode II classique de l'ouverture de la fracture.

— Lorsque $\theta = 90$, une propagation à branche unique horizontale de la fissure est obtenue dont la pointe tend à se propager vers le haut.

— Pour $0 < \theta = 7 < 90$, une propagation horizontale est obtenue tout en tendant à se propager vers le bas.

Conclusion

Les simulations numériques montrent que notre modèle limite est capable de prédire un modèle de fracture conforme.

On retrouve donc les résultats de propagation de la fracture modélisés dans la figure 4 de Francfort-Bourdin, [Bourdin et al., 2000].

Conclusion et perspectives

— L'étude numérique des modèles d'endommagement quasi statiques linéaires isotropes dans les chapitres III et IV montre la capacité de ces modèles à prédire une propagation des fissures et il en résulte un algorithme stable par rapport aux différents paramètres de ces modèles.

En revisitant certaines notions essentielles relatives à ces modèles, notre travail était consacré à obtenir des apports et des améliorations qui mènent à un traitement plus développé.

— En plus d'avoir un algorithme stable qui gère l'étude numérique des modèles d'endommagement, on cherche à avoir des résultats plus réalistes physiquement.

Ainsi, dans le cadre de grandes déformations, des hypothèses sur les contraintes infinies qui accompagnent les déformations extrêmes sont définies par :

$$\begin{aligned} &W(x,F) \to +\infty \ quand \ \det\ F\ \to 0^+,\ F \in M^3_+, \\ &W(x,F) \to +\infty \ quand \ \{|| \ F \ || + || \ cof F \ || + (\det F)\} \to +\infty,\ F \in M^3_+, \end{aligned} \tag{IV.4).3.1}$$

où on désigne par une déformation toute application ϕ de $\bar{\Omega} \to \mathbb{R}^3$ et le déplacement associé à cette déformation est défini par

$$u(X) = \phi(X) - X,\ X \in \Omega,\ F = \nabla\phi.$$

Ainsi, notre étude sera dédiée à la résolution du problème de minimisation suivant

$$\min_{C,\Gamma}\ \{ \int_\Omega W(C)\mathrm{d}x + \kappa \mid \Gamma \mid \},$$

où W est la densité d'énergie de Ciarlet-Geymonat (voir [Ciarlet, 1997]) définie par

$$\begin{aligned} W(C) = \kappa_1\big(\,\mathrm{tr}(C)\det(C)^{-\frac{1}{3}} - 3\big) + \kappa_2\big(\frac{1}{2}(\mathrm{tr}(C)^2 - \mathrm{tr}(C^2))\det(C)^{-\frac{2}{3}} - 3\big) \\ + \kappa\big(\det(C)^{\frac{1}{2}} - 1\big) - \kappa Ln\big(\det(C)^{\frac{1}{2}}\big). \end{aligned} \tag{IV.4).3.2}$$

— On se propose dans le même contexte de la formulation du modèle d'endommagement avec pénalisation de saut de considérer un modèle d'endommagement avec régularisation du déplacement avec l'ajout de dérivées secondes de déplacement.

Ainsi, le travail se réduit à résoudre un problème de minimisation défini par

$$Min\ \big\{ \lim_{\epsilon \to 0} J_\epsilon(u_\epsilon, \omega_\epsilon) \big\}.$$

L'énergie totale étant définie par la fonctionnelle

$$J_\epsilon(u_\epsilon, \omega_\epsilon) = \int_\Omega 2\mu_\epsilon |\, e(u_\epsilon)\, |^2 + \lambda_\epsilon (\mathrm{Div}(u_\epsilon)^2 + \frac{\kappa}{\epsilon} \mid \omega_\epsilon \mid + \int_\Omega M_\epsilon |\, \Delta u_\epsilon\, |^2 \, \mathrm{d}x,$$

où M_ϵ une constante de régularisation à déterminer.

Bibliographie

[Allaire, 2007] Allaire, G. (2007). *Conception optimale de structures*, volume 58 of *Mathématiques & Applications*. Springer Verlag. 9, 10, 42

[Allaire et al., 2016] Allaire, G., Jouve, F., and Michailidis, G. (2016). Thickness control in structural optimization via a level setmethod. *Struct. Multidiscip. Optim.*, 53(6) :1349–1382. 47

[Allaire et al., 2004] Allaire, G., Jouve, F., and Toader, A. M. (2004). Structural optimization using sensitivity analysis and a level-set method. *J. Comput. Phys.*, 194(1) :363–393. 76

[Allaire et al., 2009] Allaire, G., Jouve, F., and Van Goethem, N. (2009). A level set method for the numerical simulation of damage evolution. In *ICIAM 07—6th International Congress on Industrial and Applied Mathematics*, pages 3–22. Eur. Math. Soc., Zürich. 36, 39, 57, 60

[Allaire et al., 2011] Allaire, G., Jouve, F., and Van Goethem, N. (2011). Damage evolution in brittle materials by shape and topological sensitivity analysis. *Computational Physics*, 230 :5010–5044. 8, 9, 22, 27, 31, 36, 39, 40, 42, 45, 57, 60, 69

[Ambrosio and Tortorelli, 1990] Ambrosio, L. and Tortorelli, V. M. (1990). Approximation of functionals depending on jumps by elliptic functionals via Γ-convergence. *Comm. Pure Appl. Math.*, 43(8) :999–1036. 18, 39

[Amor et al., 2009] Amor, H., Marigo, J. J., and Maurini, C. (2009). Regularized formulation of the variational brittle fracture with unilateral contact : Numerical experiments. *J Mech Phys*, 57 :1209–1229. 17

[Areias et al., 2009] Areias, P., Alfaiate, J., Dias da costa, D., and Jùlio, E. (2009). Arbitrary bi-dimensionnal finite strain cohesive crack propagation. *J.comput Mech*, 45(1) :61–75. 32

[Banichuk, 1990] Banichuk, N. V. (1990). *Introduction to optimization of structures*. Springer Verlag New york. 9

[Bellettini and Cosia, 1994] Bellettini, G. and Cosia, A. (1994). Discrete approximation of free discontinuity problem. *Num Func Optim*, 15(3-4) :201–224. 21

[Benallal and Marigo, 2007] Benallal, A. and Marigo, J. J. (2007). Bifurcation and stability issues in gradient theories with softening. *Modeling Simul.*, 15(1) :283–295. 5

[Berdin, 2004] Berdin, C. (2004). Damage evolution law and fracture criteria : In local approach to fracture. *Les Presses de l'École des Mines Paris*, pages 147–171. 17

[Bittencourt et al., 1996] Bittencourt, T., Ingraffea, A. R., Wawrzynek, P., and Sousa, J. (1996). Quasi-automatic simulation of crack propagation for 2d lefm problems. *Eng Fract Mech*, 55(2) :321–334. 32

[Bordas and Moran, 2006] Bordas, S. and Moran, B. (2006). Enriched finit elements and level sets for damage tolerance assessments of complex structures. *Engineering Fracture Mechanics*, 73(9) :1176–1201. 32

[Bourdin, 1998] Bourdin, B. (1998). *Une méthode variationnelle en mécanique de la rupture : Théorie et applications numériques*. PhD thesis, Univeristé Paris Nord. 19

[Bourdin, 2007] Bourdin, B. (2007). Numerical implementation of the variational formulation of quasi-static brittle fracture. *Interface Free Bound*, 9(3) :411–430. 19, 21

[Bourdin and Chambolle, 2000] Bourdin, B. and Chambolle, A. (2000). Implementation of an adaptive finit-element approximation of mumford-shah functional. *Numer Math*, 85(4) :609–646. 18

[Bourdin et al., 2000] Bourdin, B., Francfort, G., and Marigo, J. J. (2000). Numerical experiments in revisited brittle fracture. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 48(4) :797 – 826. 39, 40, 87

[Bourdin et al., 2008] Bourdin, B., Francfort, G. A., and Marigo, J. J. (2008). The variational approach to fracture. *J. Elasticity*, 91(1-3) :5–148. 38

[Bourdin et al., 2011] Bourdin, B., Larsen, C. J., Casey, and Richardson, L. (2011). A time discrete model for dynamic fracture based on crack regularization. *International Journal of Fracture*, 168(2) :133–143. 17

[Carriero and Leaci, 1990] Carriero, M. and Leaci, A. (1990). Existence theorem for a dirichlet problem with a free discontinuity set. *Nonlinear Analysis TMA*, 15 :661–677. 18

[Céa, 1986] Céa, J. (1986). Conception optimale ou identification de formes : calcul rapide de la dérivée directionnelle de la fonction coût. *RAIRO Modél. Math. Anal. Numér.*, 20(3) :371–402. 10

[Chaboch, 1978] Chaboch, L. (1978). Aspect phénomologique de la rupture par endommagement. *Mech. Appl*, 2(3) :317–365. 5

[Chambolle, 2003] Chambolle, A. (2003). A density result in two-dimensional linearized elasticity, and applications. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 167(3) :211–233. 10

[Chambolle, 2004] Chambolle, A. (2004). An approximation result for special functions with bounded deformation. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 83(7) :929–954. 39

[Chambolle, 2005] Chambolle, A. (2005). An approximation result for special functions with bounded deformation the n-dimensional case. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 84(1) :137–145. 39

[Chamoin et al., 2014] Chamoin, L., Ladevèze, P., and Waeytens, J. (2014). Goal-oriented updating of mechanical models using the adjoint framework. *Computational mechanics*, 54(6) :1415–1430. 10

[Chenais, 1975] Chenais, D. (1975). On the existence of a solution in a damain identification problem. *Mathematical Analysis and applications*, 52 :189–289. 10

[Ciarlet, 1997] Ciarlet, P. G. (1997). *Mathematical elasticity. Vol. II.* North-Holland Publishing Co., Amsterdam. Theory of plates. 5, 88

[Comi, 1999] Comi, C. (1999). Computational modelling of gradient enhanced damage in quasi-brittle materials. *Mech Coches Frict Mater*, 4 :17–36. 6

[Conti et al., 2016] Conti, S., Focardi, M., and Iurlano, F. (2016). Some recent results on the convergence of damage to fracture. *Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Lincei Mat. Appl.*, 27(1) :51–60. 40

[Dal Maso, 1993] Dal Maso, G. (1993). *An introduction to* Γ*-convergence*. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA. 21

[De Borst, 1989] De Borst, R. (1989). Analysis of spurious kinematic modes in finit element analysis of strain softening solids. *Elsevier Applied Science Amsterdam.*, pages 335–345. 5

[Destuynder and Djaoua, 1981] Destuynder, P. and Djaoua, P. (1981). Sur une interprétation mathématique de l'intégrale de rice en théorie de la rupture fragile. *Math, Mech Appl Sci*, 3 :70–87. 16

[Duvaut, 1990] Duvaut, G. (1990). *Mécanique des milieux continus*. Elsevier. 5

[Focardi and Iurlano, 2014] Focardi, M. and Iurlano, F. (2014). Asymptotic analysis of Ambrosio-Tortorelli energies in linearized elasticity. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 46(4) :2936–2955. 40

[Forest and Lorentz, 2004] Forest, S. and Lorentz, E. (2004). Localization phenomena and regularization methods. pages 311–371. Les presses de l'Ecole des Mines de Paris. 21

[François, 1980] François, S. (1980). *Mécanique des milieux continus*. Engineering school, Ecole centrale Lyon. 5

[Francfort and Marigo, 1999] Francfort, G. and Marigo, J. J. (1999). Une approche variationnelle de la mécanique du défaut. *ESAIM : Proc.*, 6 :57–74. 36

[Francfort and Garroni, 2006] Francfort, G. A. and Garroni, A. (2006). A variational view of partial brittle damage evolution. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 182(1) :125–152. 36, 38

[Francfort and Marigo, 1993] Francfort, G. A. and Marigo, J. J. (1993). Stable damage evolution in a brittle continuous medium. *European J. Mech. A Solids*, 12(2) :149–189. 8, 22, 36, 38

[Francfort and Marigo, 1998] Francfort, G. A. and Marigo, J. J. (1998). Revisiting brittle fracture as an energy minimization problem. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 46(8) :1319 – 1342. 16, 36

[Godard, 2005] Godard, V. (2005). *Modélisation de l'endommagement anisotrope du béton avec prise en compte de l'effet unilatéral*. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie. 22

[Griffith, 1920] Griffith, A. (1920). The phenomena of rupture and flow in solids. *Phil.Trans.Roy.Soc London Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 221 :163–198. 15

[Guest et al., 2004] Guest, J., Prévost, J. H., and Belytschko, T. (2004). Achieving minimum length scale in topology optimization usingnodal design variables and projection functions. *Internat. J. Numer. Methods Engrg.*, 61(2) :238–254. 47

[Hadamard, 1908] Hadamard, J. (1908). Mémoire sur le problème d'analyse relatif à l'équilibre des plaques élastiques encastrées. *Mémoires présentés par divers savants Académie des Sciences Paris*, 33(4). 9

[Harten and Osher, 1987] Harten, A. and Osher, S. (1987). Uniformly high order accurate non oscillatory shemes. *I. SIAM J. Num. Anal.*, 24 :279–309. 15

[Haslinger and Neittaanmäki, 1988] Haslinger, J. and Neittaanmäki, P. (1988). *Finite Element approximation for optimal shape design :Theory and Applications*. J. Wiley Sons, Chichester. 9

[Henao et al., 2015] Henao, D., Mora-Corral, C., and Xu, X. (2015). Γ-convergence approximation of fracture and cavitation in nonlinear elasticity. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 216(3) :813–879. 40

[Henrot and Pierre, 2005] Henrot, A. and Pierre, M. (2005). *Variation et optimisation de formes*, volume 48 of *Mathématiques & Applications (Berlin)*. Springer, Berlin. 42

[Hiptmair et al., 2013] Hiptmair, R., Paganini, A., and Sargheini, S. (2013). Comparison of approximate shape gradients. Technical report, ETH Zürich. 28

[Irwin, 1957] Irwin, G. R. (1957). Analysis of stresses and strains near the end of crack traversing a plate. *J Appl Mech Trans*, 24 :361–364. 16

[Irwin, 1958] Irwin, G. R. (1958). Fracture in handbuch der physik. *springer Verlag*, 6 :591–590. 16

[Iurlano, 2013] Iurlano, F. (2013). Fracture and plastic models as gamma-limits of damage models under different regimes. *Advances in Calculus of Variations*, 6 :165–189. 39

[Iurlano, 2014] Iurlano, F. (2014). A density result for GSBD and its application to the approximation of brittle fracture energies. *Calc. Var. Partial Differential Equations*, 51(1-2) :315–342. 39

[Laporte and Le Tallec, 2003] Laporte, E. and Le Tallec, P. (2003). *Numerical methods in sensitivity analysis and shape optimization*. Birkhäuser Boston. 9

[Larsen et al., 2010] Larsen, C. J., Ortner, C., and Süli, E. (2010). Existence of solutions to a regularized model for dynamic fracture. *Math Models Methods in Applied Sciences*, 20(7) :1021–1048. 17

[Laurain and Sturm, 2015] Laurain, A. and Sturm, K. (2015). Distributed shape derivative via averaged adjoint method and applications. *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, pages 1241–1267. 28

[Ledret, 2004] Ledret, H. (2004). *Méthodes mathématiques en élasticité*. Université Pierre et Marie Curie. 5

[Lorentz, 1999] Lorentz, E. (1999). *Lois de comportement à gradients de variables internes :Construction formulation variationnelle et mise en oeuvre numérique*. PhD thesis, Thèse de doctorat Paris 6. 8

[Lorentz and Andrieux, 2003] Lorentz, E. and Andrieux, S. (2003). Analysis of nonlocal models through energetic formulations. *Int.J.Solids Struct*, 40(12) :2905–2936. 6

[Lorentz et al., 2000] Lorentz, E., Wadier, Y., and Debruyne, G. (2000). Mécanique de la rupture fragile en présence de plasticité. *Comptes rendus de l 'Académie des Sciences Séries IIB Mechanics*, 328(9) :657–662. 17

[Marigo, 1989] Marigo, J. J. (1989). Constitutive relations in plasticity, damage and fracture mechanics based on a work property. *Nuclear Eng Design*, 114(3) :249 – 272. 7

[Mesgarnejad et al., 2015] Mesgarnejad, A., Bourdin, B., and Khonsari, M. M. (2015). Validation simulations for the variational approach to fracture. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 290 :420–437. 40

[Michailidis, 2014] Michailidis, G. (2014). *Manufacturing Constraints and Multi-Phase Shape and Topology Optimization via a Level-Set Method*. PhD thesis, École Polytechique, 91128 Palaiseau, France. 23, 47

[Miguel et al., 2006] Miguel, C., Laverne, J., and Marigo, J. J. (2006). Initiation of cracks with cohesive force models : A variational approach. *European journal of mechanics*, 25(4) :649–669. 17

[Mohamadi and Pironneau, 2001] Mohamadi, B. and Pironneau, O. (2001). *Applied shape optimization for fluids*. Oxford University Press. 9

[Mumford and Shah, 1989] Mumford, D. and Shah, J. (1989). Optimal approximation by piecewise smooth functions and associated variational problems. *Comm Pure Appl Math*, 42(5) :577–685. 18

[Murat and Simon, 1974] Murat, F. and Simon, J. (1974). Quelques résultats sur le contrôle par un domaine géométrique. Technical report, Université Pierre et Marie Curie. 10

[Murat and Simon, 1976] Murat, F. and Simon, J. (1976). Etude de problèmes d'optimal design. In Cea, J., editor, *Optimization Techniques Modeling and Optimization in the Service of Man Part 2*, volume 41 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 54–62. Springer Berlin / Heidelberg. 10, 42

[Needleman, 1988] Needleman, A. (1988). Materiel rate dependance and mesh sensitivity in localization problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 67(1) :69–85. 22

[Nguyen, 1987] Nguyen, Q. S. (1987). Bifurcation and post-bifurcation analysis in plasticity and brittle fracture. *J.Mech Phys solids*, 35(3) :303–324. 5

[Osher and Sethian, 1988] Osher, S. and Sethian, J. A. (1988). Fronts propagating with curvature-dependent speed : algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations. *J. Comput. Phys.*, 79(1) :12–49. 12, 13, 14

[Osher and Shu, 1991] Osher, S. and Shu, C. (1991). High-order essentially non-oscillatory schemes for hamilton-jacobi equations. *SIAM J.Num.Anal.*, 28(4) :907–922. 13

[Petersson and Sigmund, 1998] Petersson, J. and Sigmund, O. (1998). Slope constrained topology optimization. *Internat. J. Numer. Methods Engrg.*, 41(8) :1417–1434. 47

[Pham and Marigo, 2010a] Pham, K. and Marigo, J. (2010a). Approche variationnelle de l'endommagement :Les concepts fondamentaux. *C. R. Méch*, 338(4) :191–198. 6

[Pham and Marigo, 2010b] Pham, K. and Marigo, J. J. (2010b). Approche variationnelle de l'endommagement :Les modèles à gradient. *C. R. Méch*, 338(4) :199–206. 6

[Pijaudier-Cabot and Bažant, 1987] Pijaudier-Cabot, G. and Bažant, Z. P. (1987). Non local damage theory. *Journal of engineering mechanics*, 113(10) :1512–1533. 21, 22

[Poulsen, 2003] Poulsen, T. A. (2003). A new scheme for imposing a minimum length scale in topology optimization. *Internat. J. Numer. Methods Engrg.*, 57(6) :741–760. 47

[Racca, 2014] Racca, S. (2014). A model for crack growth with branching and kinking. *Asymptotic Analysis*, 89(1-2) :63–110. 17

[Rice, 1968] Rice, J. R. (1968). A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks. *J Appl Mech Trans*, 35(2) :379–386. 16

[Rodriguez-Ferran et al., 2005] Rodriguez-Ferran, A., Morata, I., and Huerta, A. (2005). A new damage model based on non local displacements. *International journal for numerical and analytical methods in geomechanics*, 29(5) :473–493. 22

[Sethian, 1999] Sethian, J. A. (1999). *Level Set Methods and Fast Marching Methods Evolving Interfaces in Computational Geometry, Fluid Mechanics, Computer Vision and Materials Science*, volume 3. Cambridge University Press. 12, 13, 14, 77

[Sigmund and Petersson, 1998] Sigmund, O. and Petersson, J. (1998). Numerical instabilities in topology optimization : A survey on procedures dealing with checkerboards, mesh-dependencies and local minima. *Structural optimization*, 16(1) :68–75. 47

[Silling, 1988] Silling, S. A. (1988). Numerical studies of loss of ellipticity near singularities in an elastic material. *J.Elasticity*, 19 :213–239. 5

[Sokolowski and Zolesio, 1992] Sokolowski, J. and Zolesio, J. (1992). *Introduction to shape optimization*, volume 16 of *Springer Series in Computational Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin. Shape sensitivity analysis. 42

[Šverák, 1993] Šverák, V. (1993). On optimal shape design. *J. Math pures*, 72(6) :537–551. 10

[Trelat, 2005] Trelat, E. (2005). Book review : Contrôle optimal-théorie et applications. *Ciel et Terre*, 121 :155. 10

[Zhang et al., 2014] Zhang, W., Zhong, W., and Guo, X. (2014). An explicit length scale control approach in SIMP-based topology optimization. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 282 :71 – 86. 47, 48

université PARIS-SACLAY | École doctorale de mathématiques Hadamard (EDMH)

Titre : *Analyse des liens entre un modèle d'endommagement et un modèle de fracture*

Mots clès : Endommagement, fracture, dérivée de forme, level set, irréversibilité, épaisseur minimale.

Résumé : Cette thèse est consacrée à la dérivation des modèles de fracture comme limite de modèles d'endommagement. L'étude est justifiée essentiellement à travers des simulations numériques. On s'intéresse à étudier un modèle d'endommagement initié par Allaire, Jouve et Van Goethem. Nous apportons des améliorations significatives à ce modèle justifiant la cohérence physique de cette approche.

D'abord, on ajoute une contrainte sur l'épaisseur minimale de la zone endommagée, puis on ajoute la condition d'irréversibilité forte.

Nous considérons en outre un modèle de fracture avec pénalisation de saut obtenu comme limite asymptotique d'un modèle d'endommagement. Nous justifions ce modèle par une étude numérique et asymptotique formelle unidimensionnelle. Ensuite, la généralisation dans le cas $2D$ est illustrée par des exemples numériques.

Title : Analysis of links between a damage model and a fracture model.

Keywords : Damage, fracture, shape derivative, level set, irreversibility, minimal thickness.

Abstract : This thesis is devoted to the derivation of fracture models as limit of damage models. The study is justified mainly through numerical simulations. We are interested in studying a damage model initiated by Allaire, Jouve and Van Goethem. We are making significant improvements to this model justifying the physical consistency of the approach. First, we add a constraint on the minimum thickness of the damaged area and then we add a condition of strong irreversibility.

We see also a fracture model with jump penalization obtained as an asymptotic limit of a damage model. We justify this model by a one-dimensional formal asymptotic numerical study. Then, the generalization in the $2D$ case is illustrated by numerical examples.

Université Paris-Saclay

Espace Technologique / Immeuble Discovery

Route de l'Orme aux Merisiers RD 128 / 91190 Saint-Aubin, France.