



**HAL**  
open science

# Modélisation et simulation de procédés de mise en forme de tôles métalliques ultrafines

Francis Adzima

## ► To cite this version:

Francis Adzima. Modélisation et simulation de procédés de mise en forme de tôles métalliques ultrafines. Mécanique des matériaux [physics.class-ph]. Ecole nationale supérieure d'arts et métiers - ENSAM, 2016. Français. NNT : 2016ENAM0066 . tel-01563545

**HAL Id: tel-01563545**

**<https://pastel.hal.science/tel-01563545>**

Submitted on 17 Jul 2017

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

École doctorale n° 432 : Sciences des Métiers de l'ingénieur

## Doctorat ParisTech

# THÈSE

pour obtenir le grade de docteur délivré par

**l'École Nationale Supérieure d'Arts et Métiers**

**Spécialité " Mécanique – Matériaux "**

*présentée et soutenue publiquement par*

**Francis ADZIMA**

le 07 Décembre 2016

## **Modélisation et simulation de procédés de mise en forme de tôles métalliques ultrafines**

Directeurs de thèse : **Tudor BALAN** et **Pierre-Yves MANACH**

### Jury

**M. Jacques BESSON**, Directeur de recherches CNRS, Centre des Matériaux, Mines Paris  
**Mme Anne-Marie HABRAKEN**, Directrice de recherches FNRS, ARGENCO, Université de Liège  
**M. Sébastien THIBAUD**, Professeur, FEMTO-ST, ENSMM  
**M. Jean RAPHANEL**, Chargé de recherches CNRS, LMS, Ecole Polytechnique  
**M. Laurent TABOUROT**, Professeur, SYMME, Université Savoie Mont Blanc  
**M. Pierre-Yves MANACH**, Professeur, iRDL, Université Bretagne Sud  
**M. Tudor BALAN**, MCF-HDR, LCFC, ENSAM Metz

Président  
Rapporteur  
Rapporteur  
Examinateur  
Examinateur  
Examinateur  
Examinateur

T  
H  
È  
S  
E



# Remerciements

Cette thèse est le fruit d'une codirection entre l'Ecole Nationale Supérieure d'Arts et Métiers (campus de Metz) et l'Université de Bretagne Sud (campus de Lorient).

Je remercie les personnes qui ont, administrativement, rendu possible cette collaboration.

J'adresse de sincères remerciements aux membres du jury pour m'avoir fait l'honneur d'évaluer mes travaux : à Anne-Marie Habraken et Sébastien Thibaud pour avoir accepté la tâche d'être rapporteurs du manuscrit, ainsi qu'à Laurent Tabourot, Jean Raphanel et Jacques Besson pour l'intérêt qu'ils ont porté à mes travaux. Je leur suis reconnaissant pour la lecture minutieuse du manuscrit, la pertinence de leurs questions et suggestions ainsi que pour leurs compliments.

Au delà des aspects techniques et scientifiques, un doctorat constitue avant tout une formidable aventure humaine. Au cours de ce périple, j'ai eu la chance de rencontrer des personnes (plus ou moins) passionnantes et passionnées, d'horizons et de moeurs divers. La réussite d'une thèse étant bien souvent tributaire de l'environnement de travail et de la qualité des interactions, je prendrai ici quelques lignes pour remercier tout ce beau monde.

Tout d'abord, j'exprime ma profonde gratitude à mes encadrants, Tudor Balan et Pierre-Yves Manach pour m'avoir recruté sur ce projet et accordé leur confiance tout au long de ces années. Vous avez su me guider, me conseiller avec brio et j'ai énormément appris à vos côtés. Merci pour votre bonne humeur et votre humour, j'ai vraiment apprécié de travailler avec vous. Merci Pierre-Yves, merci Tudor (et Iona) !

Je remercie ensuite l'ensemble des partenaires du projet XXS Forming, dont Jean-Luc Diot, Sébastien Toutain, Raphaël Pesci et Laurent Tabourot pour leur disponibilité, leur implication et leurs qualités humaines qui ont rendu notre collaboration fort agréable.

J'adresse de chaleureux remerciements à Laurent Bizet pour toute son aide et son bel entrain qui facilita, entre autres, sa découverte du milieu culturel nocturne lorientais ;).

Un grand merci à Célia Caër, Nicolas Bonnet, Anthony Jégat, Cong Hanh Pham, Maxime Zimmermann, Hongbin Wang sans le concours de qui ces travaux auraient requis bien plus de trois ans ! Merci Hongbin pour ta gentillesse, tes capsules de café (j'en avais bien besoin au plus fort de l'hiver) et les si addictifs mochis !

---

Merci à la bande de joyeux lurons bretons qui m'ont si bien accueilli et intégré au LIMATB. Merci à Antonio qui m'a introduit aux horaires alternatifs, à Erwann;), à Yann et Jérémy pour, notamment, ces pauses de midi délirantes :D ; obrigado à Nelson le maitre de l'apéro dinatoire, merci Julien C., Guillaume, Vasco pour ces soirées (im)mémorables, à Julien T., Cong Hanh, Nathan, Antoine, Jean-Marc, Gregory, Anthony, Anita, Aparna, Tidiane, Mickael, Adrien, Emilie, Tual. Merci à Cédric Bernard et à Philippe Pilvin pour leur aide et les échanges.

Merci à tout ceux que j'ai pu croiser durant ces années de thèse à l'ENSAM, avec qui j'ai échangé, rigolé et que j'ai probablement embêté ; Thomas A., Nicolas, Célia, Lotfi, Arif, Akbar, Koffi, Peng, Boris, Sylvain, Dominique, Fodil, Georges, Yves (ce grand fan de Sdl.), Dimitrios, Julien, Mohammed, Honoré, Nadine, Avé, Laurent, Gaël, Khalil, Faydik, Morgane, Paul (bon courage à vous deux), Beatriz, Clément. Merci aux potes du foot, Abdé, Marc W. (te dois un k...!), Zak, Marc K., Hocine, Eric, Julien, Bruno, Yasser, François, Thomas, El Hadi, Patrice, Florian, Emeric, Yannick, Simon qui m'ont permis de me défouler ; et longue vie aux rouges !!

Merci à Clément, Marie, Pascal et Francis pour ces belles soirées de vadrouille dans Metz !

Merci à Romain et à Bénédicte pour tant de choses, votre précieux soutien jusqu'à la fin et ces nombreux restaus si diététiques !

Merci à mes acolytes, Dimitri et Kevin, toujours prêts à me suivre et à m'entraîner dans toutes sortes d'aventures ! Je louerai en particulier l'efficacité de notre travail d'équipe pour transformer (trop ?) régulièrement un certain bureau en salle de pause !

Merci à mes "valeurs sûres" messines, Joseph, Charlotte, Julien, Freddy pour tout !

Merci à mes autres valeurs sûres d'ici et d'ailleurs, Eric, Pipo, Bernardin, Gildas, Manu, Mouba, Lumen, Yoyo !

Merci à toi Marielle, pour ton soutien et ta présence. Tu as compté bien plus que tu ne te l'imagines <3 .

Enfin merci à ma famille pour leur amour et leur soutien indéfectible, merci Papa, Maman, Nana, Jacques, Tante Elizabeth, Tonton Amen, Tonton Denis et Tonton Arsène.

Aux nombreuses personnes que j'oublie de citer, merci !

*What we know is a drop, what we don't know is an ocean.*

*Isaac Newton*

*Le simple est faux. Ce qui ne l'est pas est inutilisable.*

*Paul Valéry*

*A neutron walks into a bar and asks how much for a drink. The barman replies : "for  
you, no charge".*

*Dr. Sheldon Cooper, The Big Bang Theory*



# Table des matières

<b>Contenu</b>	<b>iii</b>
<b>Notations</b>	<b>vii</b>
<b>Introduction générale</b>	<b>xi</b>
<b>1 Mise en forme de tôles d'épaisseur submillimétrique</b>	<b>1</b>
1.1 Déformation dans les matériaux polycristallins . . . . .	1
1.1.1 Structure cristalline . . . . .	1
1.1.2 Mécanismes de déformation . . . . .	2
1.2 Tôles ultrafines et procédés de micro-formage . . . . .	5
1.2.1 Concept de tôle ultrafine . . . . .	5
1.2.2 Quelques procédés usuels de micro-formage . . . . .	6
1.3 Problématiques liées au micro-formage . . . . .	7
1.3.1 Evolution de la contrainte d'écoulement . . . . .	9
1.3.2 Anisotropie et variabilité des propriétés . . . . .	11
1.3.3 Diminution de la ductilité et rupture . . . . .	13
1.3.4 Augmentation du frottement . . . . .	15
1.4 Conclusion . . . . .	16
<b>2 Modélisation du comportement mécanique</b>	<b>18</b>
2.1 Eléments de mécanique des milieux continus . . . . .	18
2.1.1 Cinématique des grandes transformations . . . . .	18
2.1.2 Mesures de contrainte . . . . .	20
2.1.3 Lois de comportement, hyper et hypoélasticité . . . . .	22
2.1.3.1 Le transport convectif ou pull-back . . . . .	24
2.1.3.2 La construction de dérivées objectives sur la configura- tion courante . . . . .	24
2.1.3.3 La formulation en repère tournant . . . . .	26
2.2 Plasticité phénoménologique . . . . .	27
2.2.1 Comportement élastique . . . . .	28
2.2.2 Comportement plastique . . . . .	28
2.2.2.1 Surface de charge . . . . .	29
2.2.2.2 Expressions de contraintes équivalentes . . . . .	30
2.2.2.3 Lois d'écrouissage . . . . .	33
2.2.2.4 Loi d'écoulement plastique . . . . .	37
2.3 Plasticité cristalline . . . . .	37
2.3.1 Loi de comportement du monocristal . . . . .	38

2.3.1.1	Cinématique du glissement cristallin . . . . .	38
2.3.1.2	Comportement local . . . . .	41
2.3.1.3	Loi de comportement . . . . .	45
2.3.2	Le polycristal . . . . .	47
2.3.2.1	Méthodes à champs moyens . . . . .	47
2.3.2.2	Méthodes à champs complets . . . . .	49
2.4	Conclusion . . . . .	51
<b>3</b>	<b>Outils numériques</b>	<b>52</b>
3.1	Implantation du modèle de plasticité cristalline . . . . .	52
3.1.1	Implantation dans ABAQUS/Explicit . . . . .	53
3.1.1.1	ABAQUS/Explicit et VUMAT . . . . .	53
3.1.1.2	Algorithme en repère global . . . . .	55
3.1.1.3	Validation de l'implantation . . . . .	57
3.1.1.4	Algorithme en repère cristallographique (CACS) . . . . .	59
3.1.1.5	Analyse comparative des implantations en repères fixe et cristallographique . . . . .	63
3.1.2	Implantation dans ABAQUS/Standard . . . . .	65
3.1.2.1	ABAQUS/Standard et UMAT . . . . .	65
3.2	Implantation du modèle phénoménologique . . . . .	67
3.3	Génération de microstructure numérique . . . . .	70
3.3.1	L'utilisation de formes simplifiées . . . . .	70
3.3.2	Les tessellations de Voronoï . . . . .	70
3.3.3	La modélisation par croissance de sphère . . . . .	72
3.3.4	Le logiciel <i>Neper</i> . . . . .	73
3.3.5	Le logiciel <i>Germination</i> . . . . .	74
3.4	Conclusion . . . . .	76
<b>4</b>	<b>Caractérisation des matériaux et identification des paramètres des mo- dèles</b>	<b>78</b>
4.1	Caractérisation microstructurale . . . . .	79
4.1.1	L'alliage de cuivre CuBe <sub>2</sub> . . . . .	79
4.1.1.1	Analyse microstructurale . . . . .	79
4.1.2	L'alliage de cuivre CuFe <sub>2</sub> P . . . . .	81
4.1.2.1	Analyse microstructurale . . . . .	81
4.1.3	Le cuivre pur Cu . . . . .	82
4.1.4	Bilan . . . . .	82
4.2	Caractérisation mécanique . . . . .	83
4.2.1	Essais monotones de traction uniaxiale . . . . .	84
4.2.1.1	Le cuivre . . . . .	85
4.2.1.2	Le CuBe <sub>2</sub> . . . . .	86
4.2.1.3	Le CuFe <sub>2</sub> P . . . . .	88
4.2.2	Essais de traction avec sauts de vitesses . . . . .	89
4.2.3	Essais de traction avec charges-décharges à différents taux de dé- formation. . . . .	90
4.2.4	Essais de cisaillement . . . . .	93
4.2.5	Expansion biaxiale . . . . .	97

4.2.6	Bilan . . . . .	100
4.3	Identification de paramètres . . . . .	101
4.3.1	Modèle phénoménologique . . . . .	101
4.3.1.1	Stratégie d'identification . . . . .	101
4.3.1.2	Résultats d'identification . . . . .	103
4.3.2	Modèle CPFEM . . . . .	111
4.3.2.1	Stratégie d'identification . . . . .	111
4.3.2.2	Résultats d'identification . . . . .	116
4.3.3	Analyse comparative des deux approches . . . . .	119
4.3.3.1	Description de l'anisotropie de comportement . . . . .	119
4.3.3.2	Description de l'essai d'expansion biaxiale . . . . .	121
4.3.3.3	Description des essais de cisaillement . . . . .	121
4.4	Conclusion . . . . .	124
<b>5</b>	<b>Application à la prédiction du retour élastique</b>	<b>126</b>
5.1	Démonstrateurs industriels et modèles numériques associés . . . . .	126
5.1.1	Le boîtier électronique de ACUIPLAST . . . . .	126
5.1.2	Le connecteur de DELTA COMPOSANTS . . . . .	129
5.2	Etude de paramètres . . . . .	131
5.2.1	Effet du schéma numérique éléments finis . . . . .	131
5.2.2	Influence du type d'éléments finis . . . . .	133
5.2.3	Influence de l'anisotropie élastique . . . . .	135
5.2.4	Influence de l'évolution du module de Young . . . . .	137
5.2.5	Influence du modèle d'écrouissage et de l'hétérogénéité initiale . . . . .	138
5.2.6	Influence du nombre de grains dans l'épaisseur (ratio T/D) . . . . .	141
5.2.7	Influence de la morphologie des grains . . . . .	143
5.3	Application des modèles aux démonstrateurs . . . . .	145
5.3.1	Pliage de leads . . . . .	146
5.3.2	Cambrage de connecteur . . . . .	148
5.4	Bilan . . . . .	151
	<b>Synthèse et perspectives</b>	<b>153</b>
	<b>Table des figures</b>	<b>171</b>
	<b>Liste des tableaux</b>	<b>177</b>

# Notations

BB2004	Critère de plasticité de ( <a href="#">Bron et Besson, 2004</a> )
Hill48	Critère de plasticité de ( <a href="#">Hill, 1948</a> )
PAN	Modèle d'érouissage de ( <a href="#">Peirce et al., 1982</a> )
Tabourot	Modèle d'érouissage de ( <a href="#">Tabourot, 2001</a> )
CACS	Crystal Associated Coordinate System
MECS	Material Element Coordinate System
$A, A$	Scalars quelconques
$\underline{a}$	Tenseur d'ordre 1 (ou vecteur) quelconque
$\mathbf{A}$	Tenseur d'ordre 2 ou 4 quelconque
$\mathbf{A}^T$	Transposée d'un tenseur $\mathbf{A}$
$\mathbf{A}^{-1}$	Inverse d'un tenseur $\mathbf{A}$
$\tilde{\mathbf{A}}$	Tenseur $\mathbf{A}$ exprimé dans le CACS
$\hat{\mathbf{A}}$	Tenseur $\mathbf{A}$ exprimé dans le MECS
$(\dot{\bullet})$	Dérivée temporelle de $(\bullet)$
$\nabla$	Dérivée objective du tenseur $\mathbf{A}$
$\text{sym}(\mathbf{A})$	Partie symétrique de $\mathbf{A}$
$\text{asym}(\mathbf{A})$	Partie anti-symétrique de $\mathbf{A}$
$\text{signe}(A)$	Signe du scalaire $A$
$\text{tr}(\mathbf{A})$	Trace du tenseur $\mathbf{A}$
$\otimes$	Produit tensoriel
$\cdot$	Simple contraction
$:$	Double contraction

<b>B</b>	Premier tenseur de contraintes de Piola-Kirchhoff
$c_{11}, c_{12}, c_{44}$	Constantes d'élasticité cubique du monocristal
<b>C</b>	Tenseur d'ordre 4 des constantes élastiques
$C_J$	Matrice jacobienne
<b>D</b>	Diamètre d'un grain
<b>D</b>	Tenseur taux de déformation
$D^e$	Tenseur taux de déformation élastique
$D^p$	Tenseur taux de déformation plastique
$D^{(s)}$	Partie symétrique du tenseur de Schmid
$E$	Module de Young
$\bar{\epsilon}$	Déformation équivalente
$\epsilon$	Tenseur de déformation
$\epsilon^e$	Partie élastique du tenseur de déformation
$\epsilon^p, d^p$	Partie plastique du tenseur de déformation
$f$	Surface de charge
<b>F</b>	Tenseur gradient de la transformation
$F^e$	Partie élastique du tenseur gradient de la transformation
$F^p$	Partie plastique du tenseur gradient de la transformation
$\dot{\gamma}_0$	Taux de glissement de référence
$\dot{\gamma}^{(s)}$	Taux de glissement de $(s)$
<b>G</b>	Pseudo-vecteur qui contient les taux de glissement
<b>H</b>	Pseudo-vecteur qui contient les variables d'état
<b>I</b>	Tenseur identité du deuxième ordre
$J$	Déterminant du gradient de la transformation
<b>L</b>	Tenseur gradient de vitesses
$L^e$	Tenseur gradient de vitesses élastique
$L^p$	Tenseur gradient de vitesses plastique
$L_i^p$	Tenseur gradient de vitesses plastique en configuration relâchée
$\underline{m}^{(s)}$	Direction de glissement du plan cristallographique dense
$n$	Coefficient de sensibilité à la vitesse de déformation
<b>N</b>	Nombre de grains dans l'épaisseur de la tôle
$N_c$	Nombre maximum de grains dans l'épaisseur d'une tôle ultrafine
$\underline{n}^{(s)}$	Vecteur normal au plan cristallographique dense

$\nu$	Coefficient de Poisson
$\mathbf{O}$	Matrice de rotation entre le CACS et le MECS
$\mathbf{\Omega}$	Spin de Green-Naghdi ou taux de rotation propre
$p, \bar{\epsilon}^p$	Déformation plastique cumulée
$\Psi$	Energie libre de Helmholtz
$\pi$	Second tenseur de contraintes de Piola-Kirchhoff
$\mathbf{Q}$	Matrice d'orientation
$\rho^{(s)}$	Densité de dislocations sur $(s)$
$R$	Variable scalaire d'écroissage isotrope
$\mathbf{R}$	Tenseur de rotation pure issu de la décomposition polaire de $\mathbf{F}$
$\mathbf{R}^*$	Tenseur de rotation élastique du réseau cristallin
$\mathbf{R}^{**}$	Tenseur de rotation plastique de la matière
$\mathcal{R}$	Tenseur de rotation associé à $\mathbf{W}$
$(s)$	Système de glissement cristallographique
$\bar{\sigma}$	Contrainte équivalente
$\mathbf{s}_{k=1,2}$	Tenseurs déviateurs modifiés du critère de BB2004
$\mathbf{S}^{(s)}$	Tenseur de Schmid de $(s)$
$\sigma_0$	Limite d'élasticité initiale
$\boldsymbol{\sigma}$	Tenseur de contraintes de Cauchy
$t$	Temps
$T$	Epaisseur de la tôle
$\tau^{(s)}$	Cission résolue sur $(s)$
$\tau_c^{(s)}$	Cission critique d'activation de $(s)$
$\mathbf{U}$	Tenseur droit de déformation pure
$\mathbf{V}$	Tenseur gauche de déformation pure
$\mathbf{W}$	Tenseur taux de rotation
$\mathbf{W}^e$	Tenseur taux de rotation élastique
$\mathbf{W}^p$	Tenseur taux de rotation plastique
$\mathbf{W}^{(s)}$	Partie anti-symétrique du tenseur de Schmid
$\mathbf{X}$	Variable tensorielle d'écroissage cinématique
Paramètres du modèle PAN	
$h_0$	Pente initiale d'écroissage

$q$	Paramètre d'écrouissage latent
$\tau^*$	Contrainte de cisaillement en saturation
$\tau_0$	Contrainte de cisaillement de référence
Paramètres du modèle Tabourot	
$\alpha$	Coefficient d'interactions entre dislocations
$\beta^{su}$	Matrice d'interactions entre dislocations
$b$	Vecteur de Burgers
$K$	Paramètre relié au libre parcours moyen d'une dislocation
$\mu$	Module de cisaillement
$y_c$	Distance critique d'annihilation
Paramètres du critère BB2004	
$a, b_1, b_2, \alpha_1$	Paramètres de forme de la surface de plasticité
$c_{i=1..6}^{k=1,2}$	Paramètres d'anisotropie
Paramètres du critère Hill48	
$F, G, H, L, M, N$	Paramètres d'anisotropie
$K_v, n_v$	Paramètres de viscosité
$E_{sat}$	Module de Young à saturation
$k$	Paramètre de la loi d'évolution du module de Young
$\epsilon_0, K_r, n_r$	Paramètres d'écrouissage isotrope de Swift
$C_R, \sigma_{sat}, n_r$	Paramètres d'écrouissage isotrope de Voce et Hockett-Sherby
$C_X, D_X$	Paramètres d'écrouissage cinématique de Armstrong-Frederick
$H_X$	Paramètre d'écrouissage cinématique de Prager

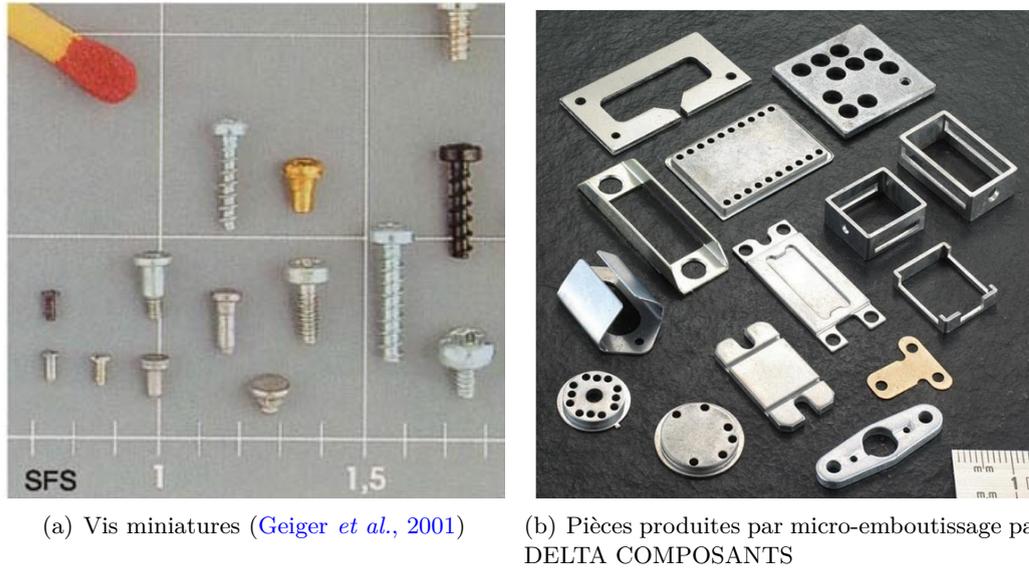
## Contexte et enjeux

Par définition, le terme micro-formage désigne les procédés de fabrication par déformation plastique qui permettent de produire des pièces présentant au moins deux dimensions caractéristiques inférieures au millimètre (submillimétriques) (Geiger *et al.*, 2001), et ce à partir de très fines tôles métalliques. La demande pour de tels composants a explosé avec la course, entamée il y a déjà trois décennies, à la miniaturisation des appareils et dispositifs. Le marché des pièces miniatures a ainsi connu une augmentation de plus de 20 milliards de dollars (Vollertsen *et al.*, 2004) au cours des dix dernières années. Les composants miniatures se retrouvent non seulement dans de nombreux objets du quotidien, des téléphones et ordinateurs portables (Figure 1) aux montres connectées et implants médicaux, mais aussi dans l'industrie aéronautique et automobile.



FIGURE 1: Disque dur IBM de 1 GB (Geiger *et al.*, 2001).

La gamme des composants miniatures existants est très variée et comporte notamment les MEMS (Micro Electro Mechanical Systems), les broches de connexion (lead frames) des boîtiers micro-électroniques, les micro-vis (voir Figure 2(a)) et ressorts, les micro-engrenages, etc.

(a) Vis miniatures (Geiger *et al.*, 2001)

(b) Pièces produites par micro-emboutissage par DELTA COMPOSANTS

FIGURE 2: Exemples de pièces issues de divers procédés de micro-formage.

La demande en MEMS, notamment, a vu apparaître et se diffuser rapidement des procédés par enlèvement de matière tels que la photolithographie, l'ablation laser, la découpe chimique, le micro-fraisage, etc.. Toutefois, au vu des quantités considérables de pièces requises, l'industrie manufacturière a entrepris d'adapter les procédés de mise en forme (formage), déjà mis en oeuvre sur des tôles épaisses pour des pièces d'envergure, à la production de composants miniatures. En effet, de par leurs cadences de production élevées, les procédés de mise en forme constituent la solution technologique privilégiée pour la fabrication en grandes séries (voir Figure 2(b)).

De plus, les procédés de micro-formage sont économiques en terme de taux d'utilisation de la matière, adaptables à une large gamme de matériaux et ont un impact moindre sur l'environnement (Qin, 2010).

Toutefois, le savoir-faire développé au fil des années dans l'application des procédés de formage sur des tôles épaisses et minces s'est révélé difficilement transférable en micro-formage, dans la gamme des tôles très fines et des pièces de petites dimensions. Les procédés de micro-formage se sont avérés peu robustes et affectés par une grande variabilité. Les industriels font face aux limitations de ces procédés mal maîtrisés qui freinent le développement de leurs activités. En effet, les domaines d'application des pièces produites (micro-électronique, aéronautique, etc.) requièrent des spécifications géométriques très strictes. En l'état, la maîtrise dimensionnelle et la répétabilité constituent des verrous technologiques essentiels des procédés de micro-formage. La conception de tels procédés

s'avère délicate, de légers changements dans les paramètres de production ou sur les nuances de matériaux conduisant souvent à une perte de robustesse du procédé et à la production de pièces défectueuses. Ils génèrent, de fait, un rebut considérable (typiquement de 1 à 15% (Megafit, 2016)) et engendrent des coûts et pertes importants.

Les difficultés rencontrées proviennent de divers phénomènes liés à la miniaturisation. Avec la diminution de l'épaisseur des tôles employées, le comportement du matériau se retrouve affecté par des effets d'échelles et présente des singularités. La réduction du nombre de grains dans l'épaisseur et donc l'augmentation du pourcentage de grains en surface entraîne souvent une diminution de la contrainte d'écoulement. En effet, les grains en surface de la tôle sont moins contraints (en termes de joints de grains) que ceux à coeur et se déforment relativement plus aisément. En outre, la diminution globale du nombre de grains dans la pièce entraîne une transition de la réponse du matériau ; on passe d'un comportement de type polycristal à celui d'un monocristal car le comportement individuel des grains prend de l'importance. Dans ces conditions, l'anisotropie cristalline influence grandement la réponse aux sollicitations. Aussi, la dispersion sur la taille et les orientations des grains peut entraîner des concentrations locales de déformation plastique qui impactent la géométrie des pièces produites. Les hétérogénéités et variations locales de microstructure, peu significatives pour les tôles minces et épaisses du fait du grand nombre de grains en jeu, impactent fortement le comportement des tôles d'épaisseur submillimétriques.

Les travaux présentés dans ce manuscrit ont été effectués dans le cadre du projet XXS - FORMING financé par l'Agence Nationale de la Recherche (ANR). Le projet a réuni autour de la thématique du micro-formage trois laboratoires, le SYMME (Université de Savoie), le LIMATB (Université de Bretagne-Sud), le LEM3 (ENSAM de Metz) ainsi que deux industriels ACUIPLAST et DELTA COMPOSANTS. L'objectif était de proposer des solutions pour optimiser la phase de conception des procédés de micro-formage. Pour atteindre son objectif, le projet a choisi de s'appuyer sur la conception virtuelle, un outil aujourd'hui incontournable dans le monde industriel (automobile, aéronautique, etc.) pour réduire le temps de design des procédés et pièces. Les partenaires du projet ont ainsi décidé de mettre au point l'ensemble de la chaîne de connaissance et d'outils nécessaires à la conception virtuelle des procédés de micro-formage.

Cette approche est structurée autour de trois piliers :

- la caractérisation expérimentale fine de (tôles de) matériaux d’usage courant en micro-formage ;
- le choix de modélisations pertinentes du comportement de ces tôles ;
- la mise en oeuvre des modèles dans des logiciels éléments finis commerciaux et l’utilisation de simulations pour optimiser les procédés.

## Positionnement et objectifs de la thèse

Cette thèse s’est focalisée sur les deux derniers piliers cités précédemment, tout en interagissant fortement avec le premier. Elle a eu pour objectifs de :

- proposer et mettre en place des approches adéquates de modélisation du comportement mécanique de tôles submillimétriques ;
- mettre en application ces approches et déterminer les paramètres sensibles pour des simulations de procédés de micro-formage.

A partir des observations expérimentales (tant la microstructure que la réponse aux sollicitations mécaniques), nous nous sommes attelés à mettre en place des modélisations du comportement mécanique de tôles métalliques submillimétriques d’alliages de cuivre, couramment utilisés en micro-formage. La diminution (et la fluctuation) du nombre de grains dans l’épaisseur des tôles étudiées rend difficile la traditionnelle séparation entre les échelles macroscopique (structures homogènes) et mésoscopique (où l’hétérogénéité est sensible). Deux approches de modélisation ont ainsi été adoptées : celle de la plasticité dite phénoménologique, basée sur l’hypothèse d’homogénéité du comportement et la caractérisation expérimentale (macroscopique) des tôles et une autre basée sur la théorie de la plasticité cristalline qui prend en compte l’hétérogénéité et les mécanismes physiques de déformation à l’échelle du grain. Les modèles définis ont été intégrés dans le logiciel commercial ABAQUS, couramment utilisé pour l’analyse des structures par la méthode des éléments finis. Avec les outils développés, nous avons entrepris d’effectuer des simulations de procédés de micro-formage. Nous nous sommes intéressés notamment à la prédiction du phénomène du retour élastique qui impacte fortement les procédés industriels.

Le premier chapitre de ce manuscrit traite des aspects essentiels de la mise en forme de tôles métalliques. Après une introduction aux mécanismes de base de déformation des matériaux polycristallins, la notion de tôle métalliques ultrafine ainsi que divers procédés de micro-formage sont présentés. Les difficultés pouvant apparaître lors de ces procédés sont notamment passées en revue.

Les approches de modélisation proposées font l'objet du deuxième chapitre. Afin d'obtenir un cadre de modélisation adapté à la description de tôles ultrafines présentant un comportement plus ou moins homogène, deux niveaux de modélisations ont été retenus. Le premier consiste en une modélisation phénoménologique élasto-viscoplastique, inspirée des observations macroscopiques. Un rappel des éléments constitutifs d'un modèle phénoménologique est effectué et les différentes lois retenues dans le cadre de ce travail sont explicitées. Le deuxième niveau de modélisation est une description à l'échelle du grain du comportement mécanique, basée sur la théorie de la plasticité cristalline. Les concepts physiques et les relations mathématiques qui régissent le comportement du monocristal, socle de cette approche, sont détaillés. Par la suite, les stratégies de transition d'échelles permettant d'effectuer des calculs de structures en partant du monocristal sont analysées.

Le troisième chapitre présente l'implantation des modèles retenus au chapitre précédent dans le logiciel de calcul par éléments finis ABAQUS. Les aspects relatifs à l'implémentation de lois de comportement en grandes déformations dans les solveurs implicite et explicite d'ABAQUS sont discutés. Aussi, les outils numériques dédiés à la modélisation géométrique des grains et leur mise en oeuvre sont décrits.

La campagne expérimentale de caractérisation des matériaux étudiés dans le projet est détaillée dans le quatrième chapitre. Une analyse de la microstructure des matériaux est effectuée et les différents essais mécaniques réalisés sont présentés. Des stratégies d'identification paramétrique des différents modèles sont développées et une analyse comparative de l'impact de l'identification sur la description de trajets de déformations expérimentaux est proposée.

Dans le cinquième chapitre, les approches développées sont mise en oeuvre dans des simulations de procédés industriels. Une analyse comparative des prédictions obtenues est effectuée avec des données expérimentales. Une étude approfondie des facteurs influençant la qualité des simulations numériques est réalisée, notamment sur la prédiction du retour élastique lors des procédés de micro-formage.

Enfin, une synthèse générale conclut ce document. Les contributions apportées sont rappelées et les défis et verrous persistants sont évoqués. Des pistes d'approfondissement et d'amélioration sont suggérées comme perspectives de ces travaux de thèse.

# Chapitre 1

## Mise en forme de tôles d'épaisseur submillimétrique

Après une description des mécanismes de déformation dans les métaux, ce premier chapitre présente le contexte du micro-formage. Le concept de tôle ultrafine est abordé et diverses problématiques liées aux procédés de micro-formage sont exposées.

### 1.1 Déformation dans les matériaux polycristallins

#### 1.1.1 Structure cristalline

Les métaux et alliages métalliques sont des matériaux polycristallins, constitués de grains ([Figure 1.1](#)). L'état cristallin est un état ordonné de la matière solide. A température ambiante, l'énergie cinétique des atomes est faible et les forces de cohésion les maintiennent en contact les uns avec les autres. Ils s'agencent alors dans des configurations géométriques répétitives dans les trois dimensions de l'espace et forment les cristaux. L'élément constitutif de la répétition forme une structure cristalline qui s'appelle la maille. On peut ainsi distinguer suivant les différentes mailles sept agencements ou réseaux cristallins différents ; selon le nombre et la disposition des atomes au sein de la maille, on peut effectuer des distinctions supplémentaires et obtenir les 14 réseaux de Bravais (se référer par exemple à ([Rousseau, 2000](#)) pour plus d'informations). Les matériaux auxquels nous nous intéressons présentent une structure de cristaux Cubiques à



(a) Cloche en bronze avec les grains visibles dans le creuset. Image de (Pleshakov, 2016a) (b) Grains d'un alliage de titane. Image de (Pleshakov, 2016b)

FIGURE 1.1: Matériaux polycristallins.

Faces Centrées CFC, une des plus courantes dans les matériaux métalliques et qui est celle des alliages de cuivre (voir Figure 1.2). Elle sera, de fait, la seule étudiée dans nos travaux.

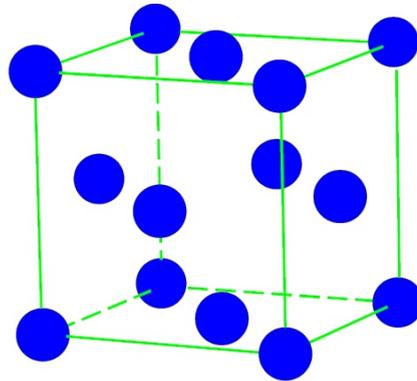


FIGURE 1.2: Structure d'un cristal Cubique à Faces Centrées CFC.

### 1.1.2 Mécanismes de déformation

Il est généralement admis que trois mécanismes sont principalement à l'origine des déformations inélastiques dans les matériaux métalliques à froid :

- la transformation martensitique,
- le maillage,
- le glissement cristallographique.

La transformation martensitique (voir Figure 1.3), à l'inverse des deux autres, entraîne un changement de volume par le passage d'une phase austénitique à maille cubique face centrée à une phase martensitique à maille tétragonale. Elle se rencontre essentiellement

dans les AMF (Alliages à Mémoire de forme) et les aciers TRIP (TRansformation Induced Plasticity).

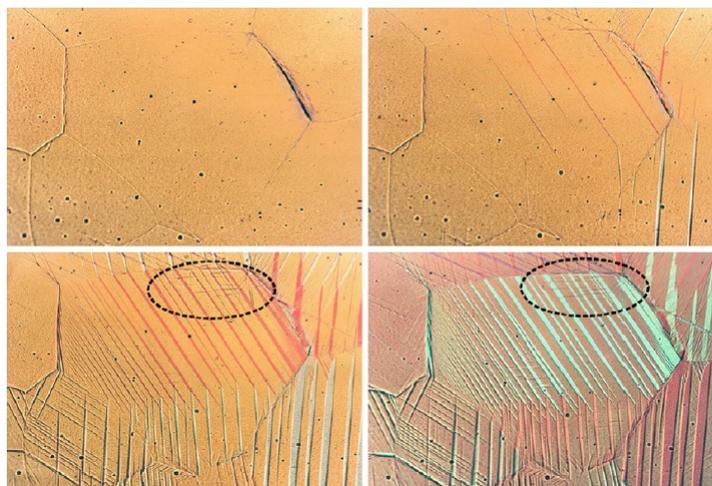
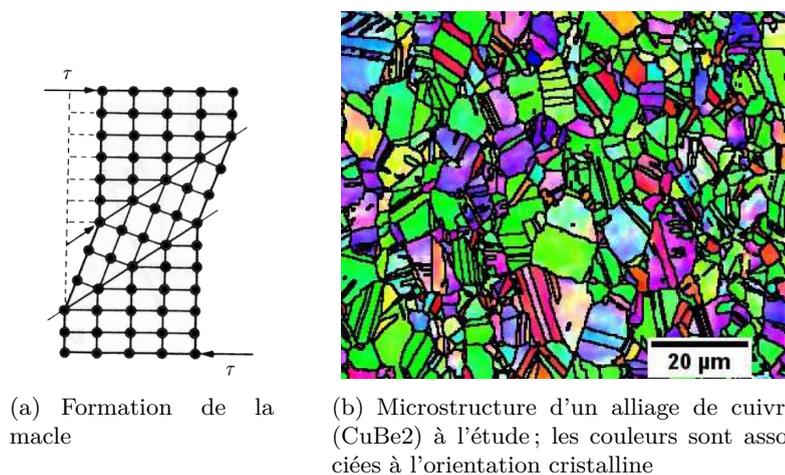


FIGURE 1.3: Formation progressive de variantes de martensite pour accommoder la déformation dans un alliage de cuivre. Avec l'aimable autorisation de A. Eberhardt, LEM3.

Le maillage s'observe le plus souvent dans les matériaux à structure hexagonale (Zirconium, Magnésium...). Il se caractérise par l'apparition dans le réseau de deux plans de macles qui créent des interfaces ; une zone du cristal se retrouve alors cisailée et acquiert une autre orientation. Sur la [Figure 1.4\(b\)](#), on peut observer des macles apparues sous forme de fines bandes dans les grains.



(a) Formation de la macle

(b) Microstructure d'un alliage de cuivre (CuBe2) à l'étude; les couleurs sont associées à l'orientation cristalline

FIGURE 1.4: Déformation par maillage.

Le glissement cristallographique, mécanisme le plus courant auquel nous porterons notre attention, résulte du mouvement des défauts linéaires du réseau que sont les dislocations.

Sous l'action d'une contrainte suffisante, les dislocations se déplacent sur les plans de glissement favorablement orientés pour accommoder la déformation. Les plans de glissement sont des plans de la maille cristalline à très forte densité atomique ; les dislocations se propagent sur ces plans dans des directions denses privilégiées et entraînent le glissement des plans les uns sur les autres (Figure 1.5). Un plan de glissement (repéré par sa normale) et une direction de glissement forment un système de glissement. Le nombre des systèmes de glissement varie suivant la nature de la maille cristalline.

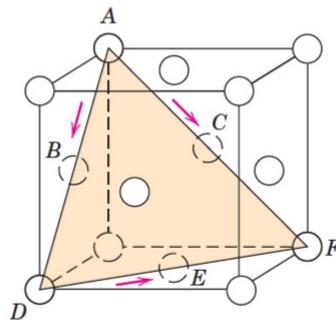


FIGURE 1.5: Plan et directions de glissement dans un CFC (contenant 6 atomes, valeur maximum de la maille CFC).

Enfin, le glissement cristallographique n'affecte pas le volume, la déformation se produisant par cisaillement selon des plans parallèles du cristal (Figure 1.6).

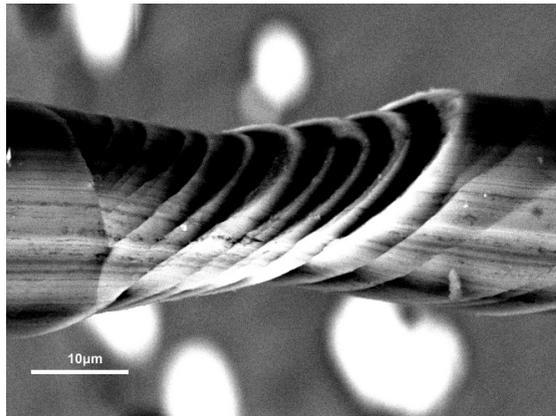


FIGURE 1.6: Apparition de bandes de glissement lors d'une traction uniaxiale sur une éprouvette d'aluminium (Khatibi *et al.*, 2005).

## 1.2 Tôles ultrafines et procédés de micro-formage

### 1.2.1 Concept de tôle ultrafine

Les tôles submillimétriques, comme leur nom l'indique, ont une épaisseur inférieure au millimètre. Pour ce qui est des tôles ultrafines, aucun consensus n'émerge aujourd'hui dans la littérature si ce n'est qu'il s'agit de tôles submillimétriques. On peut toutefois relever une corrélation entre la définition formelle des tôles ultrafines et le nombre  $N$  de grains dans leur épaisseur. Ce dernier peut être défini par le ratio de deux paramètres caractéristiques de la tôle : son épaisseur  $T$  (pour « thickness ») et le diamètre  $D$  des grains, dans la mesure où les grains sont équiaxes. Avec la diminution de l'épaisseur (et donc à priori de  $N$ ), le comportement mécanique des tôles est en effet sujet à une transition. L'un des effets observables les plus rapportés (voir [Figure 1.7](#)) dans la littérature est la variation de la contrainte d'écoulement.

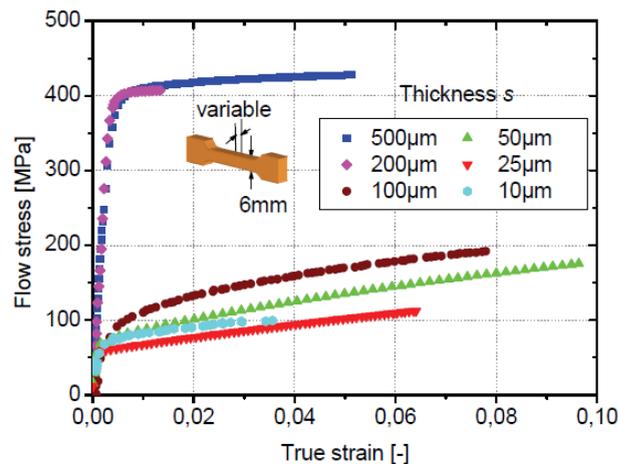


FIGURE 1.7: Influence de l'épaisseur des tôles sur la contrainte d'écoulement lors d'un essai de traction ([Hoffmann et Hong, 2006](#)).

En se basant sur cette caractéristique, de nombreux auteurs se sont intéressés à l'influence de  $N$  sur la réponse aux sollicitations mécaniques des tôles ; ils ont notamment cherché à déterminer une valeur critique de  $N$  à partir de laquelle le concept de tôle ultrafine prend sens. Dans les travaux de ([Gau et al., 2007a](#)), une valeur de  $N=10$  a été trouvée suite à une étude sur le comportement de tôles en alliage d'aluminium Al 1100-O de différentes épaisseurs. Pour des tôles d'épaisseur inférieure à 0.3 mm, ([Furushima et al., 2014](#)) obtiennent un  $N$  de 5 pour du cuivre et de 15 pour du titane. A partir d'études sur des tôles en cuivre, d'épaisseur inférieure à 0.2 mm, ([Hoffmann et Hong,](#)

2006) proposent un  $N$  égal à 10.

D'autres auteurs ont également proposé des gammes de valeurs pour le paramètre  $N$  en analysant la déformation maximale à rupture des tôles submillimétriques. Ils constatent que la déformation à rupture décroît rapidement avec  $N$ . Ainsi pour (Hansen, 1977) et (Vollertsen *et al.*, 2006), le comportement mécanique ne peut plus être considéré comme entièrement polycristallin lorsque  $N$  est inférieur à une valeur comprise entre 10 et 15. Nous retiendrons donc de manière synthétique qu'une tôle est ultrafine si son épaisseur est comprise entre 0.01 et 0.3 mm (Pham, 2014) et si le nombre de grains dans son épaisseur  $N$  est inférieur à 15.

### 1.2.2 Quelques procédés usuels de micro-formage

Les procédés de mise en forme se sont imposés comme la solution technologique de référence dans l'industrie manufacturière de masse. De par leur efficacité, ils permettent de produire en grande série des pièces de qualité qui requièrent généralement peu (ou pas) d'opérations complémentaires de finition ; cette caractéristique implique de facto des économies de matière conséquentes. De nombreux procédés de mise en forme traditionnels ont été adaptés dans le but d'être applicables aux tôles fines et ultrafines.

Le *micro-forgeage* permet de produire une gamme importante de produits. Des vis et goupilles (Figure 1.8(a)) ayant des diamètres de 0.1 à 1 mm peuvent être obtenues avec une précision inférieure au micron (Qin, 2010) par extrusion sur des lopins tréfilés.

Procédé relativement simple, le *micro-perçage* permet de produire des trous (voir Figure 1.8(b)) sur des tôles dont l'épaisseur peut descendre à la dizaine de micromètres (Rhim *et al.*, 2005). Le succès du perçage est toutefois lié au ratio entre le diamètre visé et l'épaisseur de la tôle (Fu et Chan, 2012a).

Le *micro-plier* est souvent mis en oeuvre pour produire des ressorts, connecteurs et dans le domaine de l'électronique pour les broches de connexion (ou « lead frames » en anglais) des boîtiers. Ce dernier type de pièces (voir Figure 1.9), du fait de leur utilisation dans des domaines sensibles (aéronautique, défense) requiert des tolérances dimensionnelles de l'ordre du micromètre.

Adapté d'un procédé largement répandu et bien maîtrisé à des échelles supérieures, le *micro-emboutissage* profond permet la production de pièces en forme de mini-coupelles

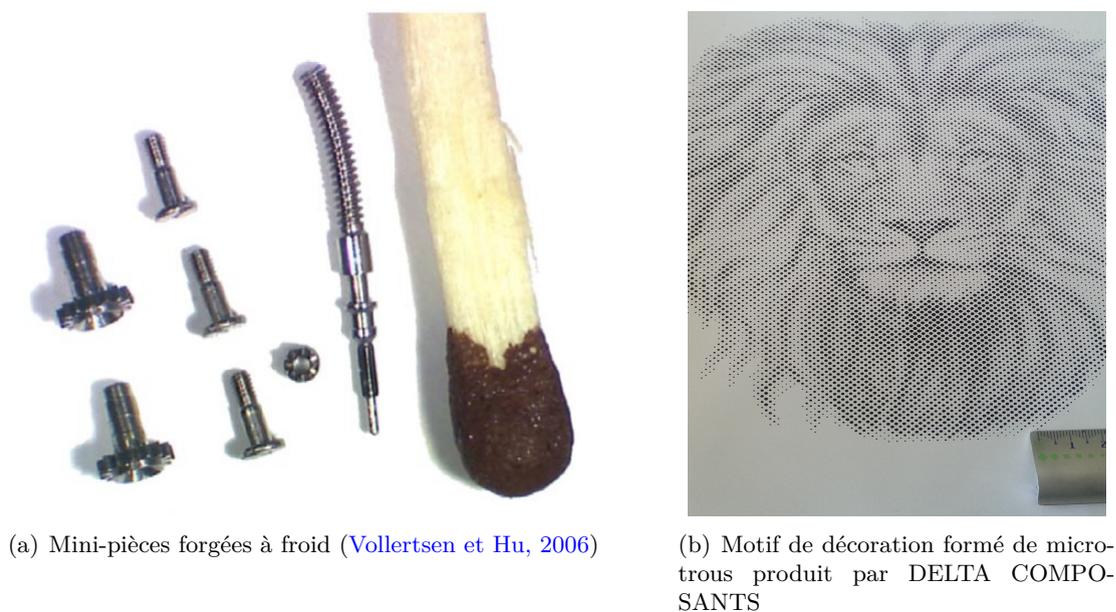


FIGURE 1.8: Exemples de pièces obtenues par micro-formage.

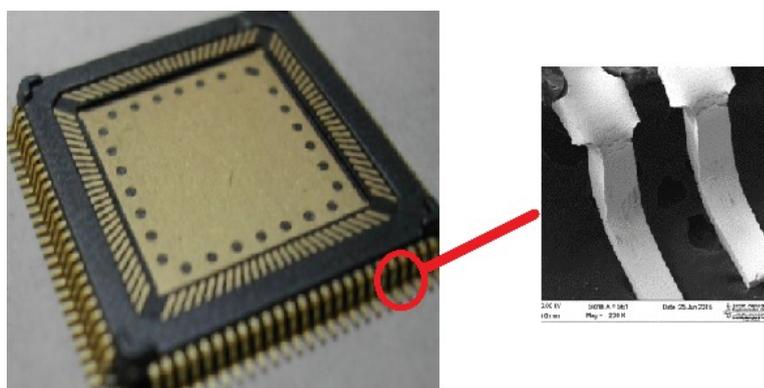


FIGURE 1.9: Leads pliées d'un boîtier microélectronique produit par ACUIPLAST.

avec des épaisseurs allant jusqu'à  $20 \mu\text{m}$ . Ces composants se retrouvent dans nombre d'équipements à l'instar de la coupelle, présentée sur la [Figure 1.10](#), pour canons à électrons de téléviseurs (d'ancienne génération).

### 1.3 Problématiques liées au micro-formage

Ainsi, les applications du micro-formage, brièvement illustrées précédemment, sont bien réelles et diverses. Elles répondent notamment à la forte demande des consommateurs en appareils et engins miniatures de plus en plus compacts et multifonctionnels. Les procédés de micro-formage font donc l'objet d'études et développements continuels afin

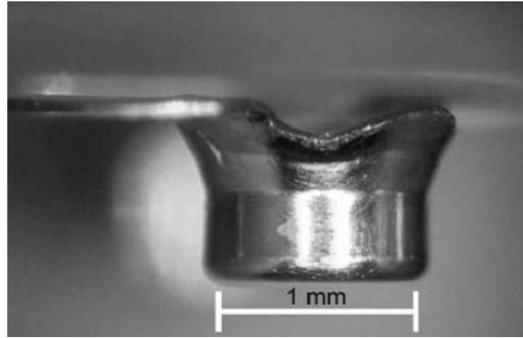


FIGURE 1.10: Coupelle en molybdène pour canon à électrons (Geiger *et al.*, 2001).

d'exploiter à des échelles inférieures le savoir-faire considérable acquis au fil des décennies sur la mise en forme de tôles minces et épaisses. Cependant, l'adaptation des procédés de formage classique aux tôles ultrafines présente de nombreuses difficultés. Celles-ci résultent des interactions entre :

- les outils,
- le matériau,
- le process.

La classe de problèmes que l'on perçoit le mieux, de manière intuitive, est liée à la taille des outils et à leur fabrication. Développer un outillage, dont la géométrie peut être complexe et qui présente un état de surface convenable pour produire des pièces de qualité, représente en soi un réel challenge.

Ces outils s'intégreront dans un procédé dont la conception pose également de nombreux problèmes. Une attention particulière doit être portée aux paramètres du procédé (efforts de formage, vitesses de déplacement d'outils) et à leur régulation ; en effet avec de telles épaisseurs de tôles et des tolérances aussi faibles, de légères variations dans les paramètres de contrôle entraîneront un taux de rebut élevé sur les pièces. Gérer l'encombrement machine dans des procédés multi étapes, transférer les mini-composants d'un poste à l'autre sans les déformer et les positionner convenablement sont autant de difficultés qui apparaissent en micro-formage.

Enfin, les tôles ultrafines présentent un comportement différent des tôles minces et épaisses. Des caractéristiques matériau comme la limite d'écoulement, la ductilité, l'anisotropie et l'érouissage sont affectées par la réduction de l'épaisseur : on parle d'effets de taille. Ce comportement particulier des tôles ultrafines a une influence sur les procédés et rend épineuse la mise en oeuvre de procédés de micro-formage.

Nos travaux s'intéressent particulièrement à l'influence du comportement matériau et à

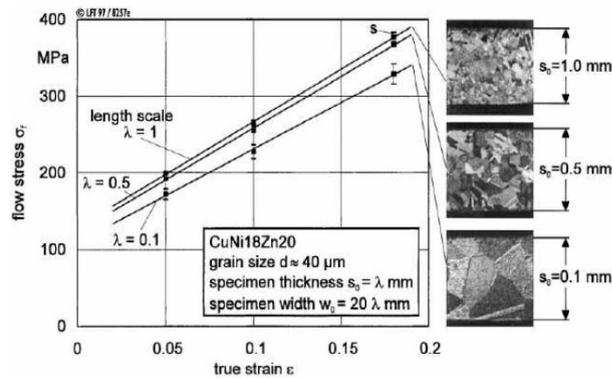
son interaction avec les procédés de micro-formage ; ce sont donc ces deux aspects qui seront donc passés en revue dans les paragraphes suivants.

### 1.3.1 Evolution de la contrainte d'écoulement

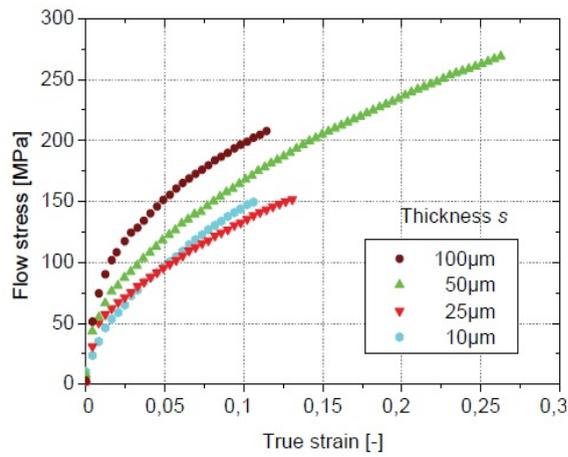
De nombreuses études ont été réalisées pour analyser l'influence de la miniaturisation sur la contrainte d'écoulement des tôles métalliques. La procédure est souvent la même et basée sur une hypothèse de similarité. Des essais mécaniques géométriquement similaires sont mis en oeuvre en multipliant les dimensions des éprouvettes et outils par un facteur d'homothétie. D'après le principe de similarité, les contraintes devraient demeurer inchangées d'un cas à l'autre. Il a toutefois été largement reporté, ([Engel et Eckstein, 2002](#)) et ([Fu et Chan, 2012b](#)), que la contrainte d'écoulement diminue avec le nombre de grains dans l'épaisseur  $N$  et ce à taille de grains constante (voir [Figure 1.11](#)).

Cet effet de taille peut s'expliquer en analysant l'évolution du ratio des grains au voisinage de la surface de la tôle par rapport aux grains à coeur de la tôle. Ces derniers, de par leur position, sont complètement entourés de grains. Ils sont donc plus restreints (par les joints de grains) en termes de déformations admissibles que les grains en surface qui se révèlent plus faciles à déformer et s'écrouissent moins que ceux situés au coeur de la tôle. En effet dans les matériaux métalliques, les déformations inélastiques sont accomodées par le mouvement des dislocations ; en bloquant le passage des dislocations, les joints de grain provoquent le durcissement du matériau (écrouissage). Comme illustré sur la [Figure 1.12](#), la proportion de grains en surface augmente avec la diminution de l'épaisseur et conduit à une diminution de la contrainte d'écoulement.

Une autre conséquence de la réduction de l'épaisseur sur la contrainte d'écoulement a été observée. En étendant leurs études à des tôles ne contenant que quelques grains dans l'épaisseur, des auteurs dont ([Kals et Eckstein, 2000](#)), ([Jie Xu et al., 2013](#)), ([Klein et al., 2001](#)) et ([Hansen, 1977](#)) ont mis en évidence une inversion de la tendance à la diminution de la contrainte d'écoulement. A partir d'un nombre critique  $N_c$ , la contrainte d'écoulement ne diminue plus mais se met à croître.  $N_c$  s'établirait entre 2 et 6 pour des tôles en cuivre, en aluminium et en acier inoxydable SUS304. La [Figure 1.13](#) illustre l'évolution de la contrainte d'écoulement en fonction de  $N$ .



(a) Essais de traction uniaxiale (Kals et Eckstein, 2000)



(b) Essais d'expansion biaxiale (Hoffmann et Hong, 2006)

FIGURE 1.11: Diminution de la contrainte d'écoulement de tôles métalliques avec l'épaisseur.

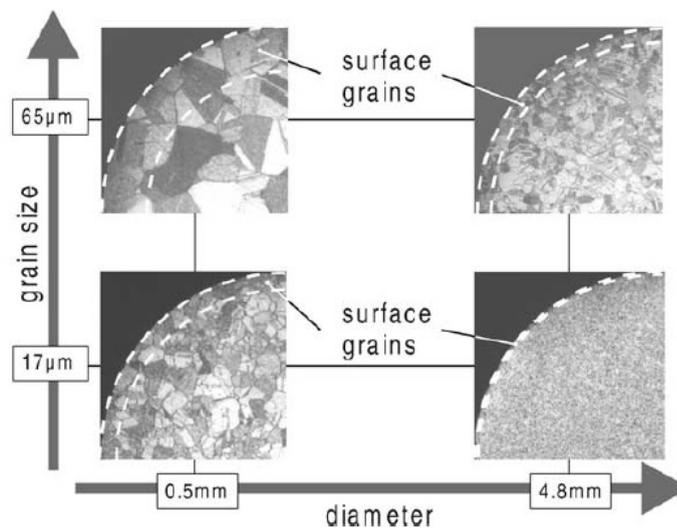


FIGURE 1.12: Evolution de la proportion des grains en surface (Engel et Eckstein, 2002).

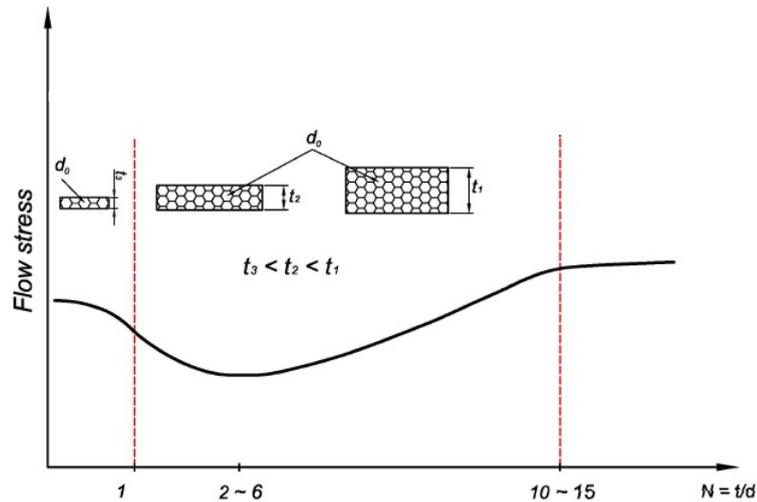


FIGURE 1.13: Evolution de la contrainte d'écoulement de tôles ultrafines en fonction du nombre  $N$  de grains dans l'épaisseur (Jie Xu *et al.*, 2013).

Cette observation, en contradiction avec la relation de Hall-Petch, est probablement due à la physique de la déformation particulière des tôles ultrafines. Pour un nombre de grains  $N$  supérieur à  $N_c$ , entre 6 et 15, la déformation imposée est accommodée principalement par les grains favorablement orientés. Avec la diminution du nombre de grains (en deçà de  $N_c$ ), on en arrive à imposer une sollicitation en inadéquation avec l'orientation initiale d'un certain nombre de grains ce qui requiert une augmentation de la force.

### 1.3.2 Anisotropie et variabilité des propriétés

Les pièces produites par les procédés de micro-formage sont souvent affectées par une grande variabilité sur leurs dimensions géométriques.

La Figure 1.14 montre les résultats d'essais de compression effectués sur des cylindres d'alliage de différents diamètres. Bien que les lopins initiaux soient de section circulaire, les pièces finales présentent une irrégularité de forme croissante avec la diminution du diamètre. Cet exemple illustre l'hétérogénéité de la déformation qui caractérise les procédés de micro-formage. Les grains qui composent les matériaux polycristallins sont par nature anisotropes. Ils possèdent une orientation propre qui conditionne leur réponse aux sollicitations mécaniques; ils se déformeront plus ou moins aisément selon qu'ils sont ou non favorablement orientés par rapport à la direction de la sollicitation. D'un grain à son voisin, le comportement peut donc être radicalement différent si leurs orientations initiales sont éloignées l'une de l'autre. De tels cas de figures entraînent de fortes incompatibilités de déformation entre les grains et les irrégularités de forme découlent

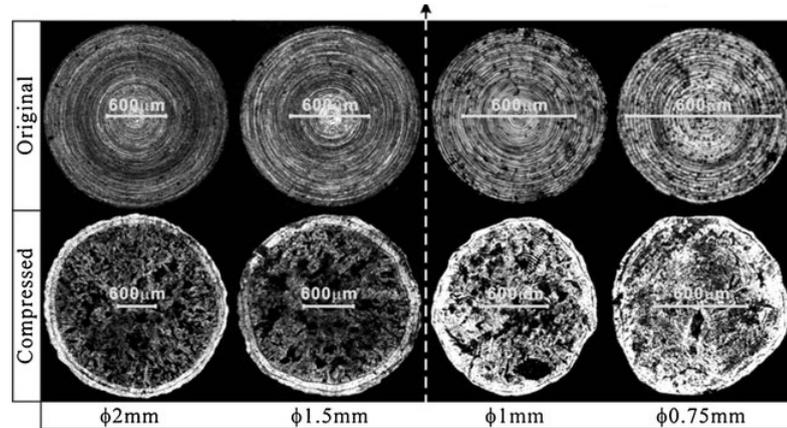


FIGURE 1.14: Géométries de cylindres d'Al6061 avant et après essai de compression (Fu et Chan, 2012b).

de ces incompatibilités de déformation. Le très grand nombre de grains présent dans les tôles d'épaisseur courante (de l'ordre du millimètre) atténue grandement les différences locales d'orientation (ou désorientations). En termes statistiques, la probabilité d'obtenir de fortes désorientations intergranulaires est faible sur de telles tôles du fait de la distribution large et continue d'orientations. Ce n'est pas le cas pour des tôles ultrafines où la probabilité de fortes désorientations est bien plus importante due au faible nombre d'orientations disponibles.

De fortes désorientations localisées entraînent des concentrations de contraintes et l'incompatibilité de déformation qui sont à l'origine de la dispersion relevée sur les pièces produites. Cette variabilité se répercute sur le retour élastique dans les procédés de pliage. En soumettant des tôles de cuivre d'épaisseur décroissante (0.6 à 0.1 mm) à des essais de flexion trois points, Liu et ses collaborateurs (Liu *et al.*, 2011) relèvent une augmentation graduelle du retour élastique et de la dispersion des valeurs avec la diminution du nombre de grains dans l'épaisseur ; la même tendance est constatée par (Gau *et al.*, 2007b) sur du laiton.

La rugosité des surfaces des mini-composants découle des incompatibilités de déformation entre les grains en surface de la tôle. La Figure 1.15 issue des travaux de (Wouters *et al.*, 2005) sur un alliage d'aluminium montre la relation entre la taille de grain et la rugosité de la surface, qui augmente avec la taille de grain et la déformation plastique.

Les différences locales d'orientation et de forme sont également responsables de l'hétérogénéité de la déformation et de la forte anisotropie constatées, entre autres par (Kals *et*

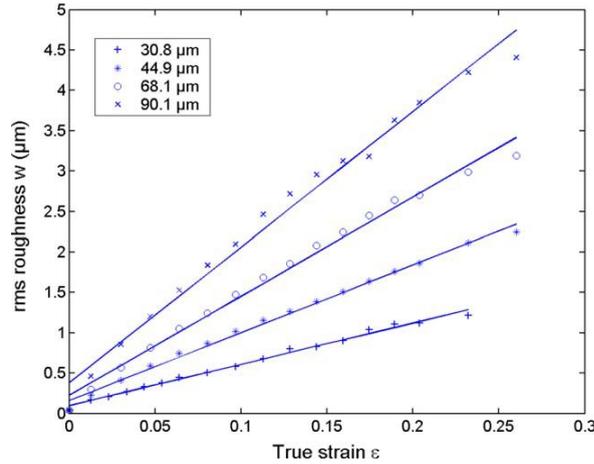


FIGURE 1.15: Evolution de la rugosité en surface pour différentes tailles de grains lors d'essais de traction sur une tôle en alliage d'aluminium (Wouters *et al.*, 2005).

Eckstein, 2000), en micro-formage. En raison du faible nombre de grains dans leur épaisseur, les tôles ultrafines présentent en effet une anisotropie normale marquée (coefficient d'anisotropie moyen faible). La déformation dans l'épaisseur prend de l'importance aux dépens de la déformation transverse, ce qui influence considérablement la ductilité de la tôle et sa rupture.

### 1.3.3 Diminution de la ductilité et rupture

Les taux de déformation atteignables avant rupture lors d'essais de caractérisation sur des tôles ultrafines sont souvent très faibles, largement inférieurs à ceux des tôles minces. Ainsi, (Kals et Eckstein, 2000) se sont intéressés à l'évolution de la ductilité en fonction de l'épaisseur de la tôle et la taille de grains. Les résultats de leurs travaux, sur deux alliages de cuivre CuNi18Zn20 et CuZn15, sont présentés sur la Figure 1.16

Celle-ci présente l'évolution du pourcentage d'allongement uniforme  $e_n$  en fonction du facteur d'homothétie  $\lambda_h$  qui intervient dans la mise en oeuvre d'essais géométriquement similaires. La ductilité décroît avec la miniaturisation et avec l'augmentation de taille des grains. Il est intéressant de remarquer que pour des épaisseurs de tôles très faibles ( $\lambda_h < 0.25$ ), le pourcentage de déformation à striction  $e_n$  est pratiquement nul. On peut donc supposer la transition d'un comportement ductile vers un comportement fragile. L'analyse des faciès de rupture permet de confirmer cette hypothèse ; (Weiss *et al.*, 2002) ont montré, sur des essais en traction, qu'en diminuant l'épaisseur de la tôle, on passe d'une rupture ductile, caractérisée par la présence de cupules, à une rupture par striction

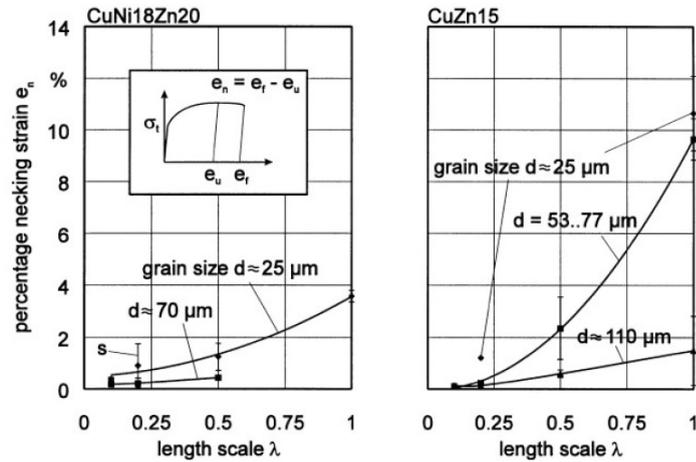


FIGURE 1.16: Evolution de la ductilité en fonction de l'épaisseur de la tôle et de la taille de grain (Kals et Eckstein, 2000).

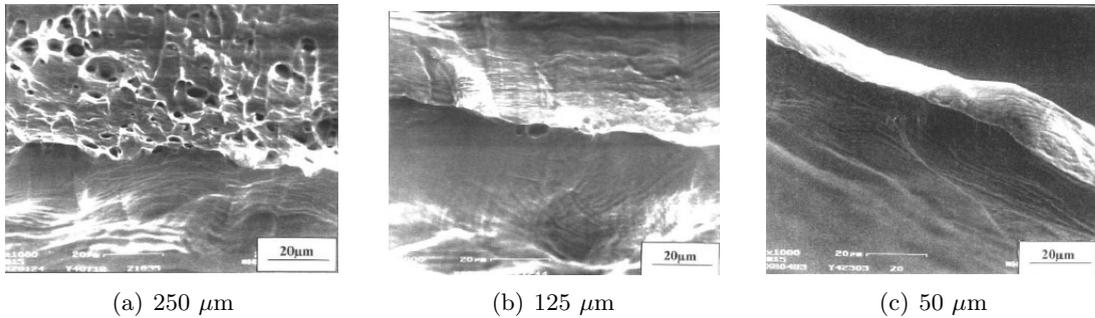


FIGURE 1.17: Faciès de rupture après traction sur des tôles de cuivre de différentes épaisseurs (Weiss *et al.*, 2002).

brutale localisée dite en forme de lame de couteau et qui ne présente pas de cupules (voir Figure 1.17).

La striction n'intervient plus également dans la largeur des éprouvettes (striction dite diffuse), comme c'est le cas avec les tôles minces et épaisses, mais uniquement dans son épaisseur. Le faible de nombre de grains dans cette dernière entraîne une déformation localisée proche du cisaillement du monocristal. Cet écoulement plastique intense provoque une subite perte de stabilité mécanique pendant le chargement et mène à ce faciès de rupture, caractéristique du monocristal. De plus, le profil de rupture se situe à  $90^\circ$  de la direction de traction au lieu des  $45^\circ$  sur les tôles plus épaisses. C'est une des conséquences de la localisation de déformation dans l'épaisseur plutôt que dans la largeur.

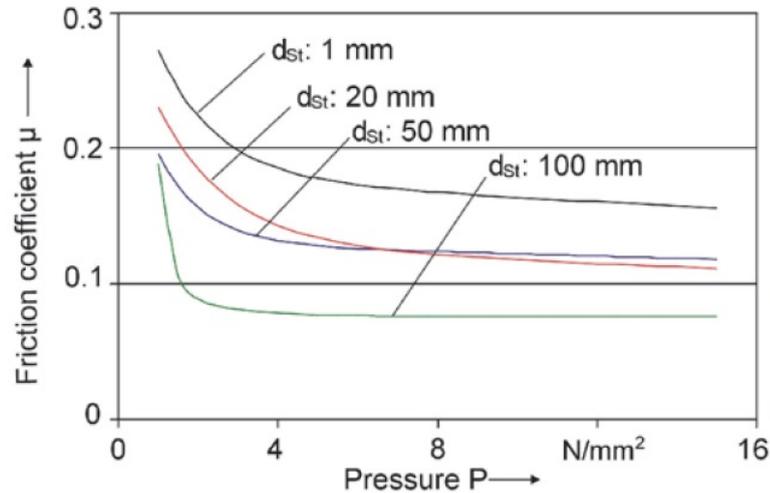


FIGURE 1.18: Evolution du coefficient de frottement tôle-outils en emboutissage ( $d_{St}$  : diamètre du poinçon) (Vollertsen et Hu, 2006).

### 1.3.4 Augmentation du frottement

Des études réalisées sur des procédés de micro-formage effectués avec lubrification ont révélé un changement des conditions de frottement avec la miniaturisation. Des comparaisons entre des essais d'extrusion double de godets en CuZn15 et des simulations numériques menées par (Tiesler et Engel, 2000) montrent une augmentation du coefficient de frottement lorsque la taille des éprouvettes diminue. La même tendance est relevée lors d'essais de mise en forme de pièces en U avec des tôles en aluminium effectués par (Vollertsen et Hu, 2006). Dans ces travaux, différentes dimensions d'outils et de tôles sont considérés et des rapports homothétiques sont appliqués aux dimensions des différents éléments. Un ratio de 2% est choisi entre l'épaisseur des tôles et les diamètres des poinçons qui sont de 100, 50, 20 et 1 mm. Les résultats expérimentaux, illustrés sur la Figure 1.18, montrent une augmentation conséquente (près de 100%) du coefficient de frottement avec la diminution de l'épaisseur des tôles.

D'après (Tiesler et Engel, 2000), la surface des pièces présente des aspérités et des vallées dont la taille et l'étendue caractérisent une rugosité plus ou moins marquée. Le lubrifiant vient s'insérer dans ces vallées et créer des poches (fermées) de lubrifiant ; celles-ci permettent une répartition uniforme de la pression des outils sur toute la surface de la pièce, réduisant de fait la pression sur les aspérités. Cependant, le lubrifiant s'échappe des vallées situées en bordure des arêtes de la pièces (poches ouvertes), ce qui a pour effet de concentrer la pression exercée sur les aspérités, comme schématisé sur Figure 1.19, et donc d'accroître la friction.

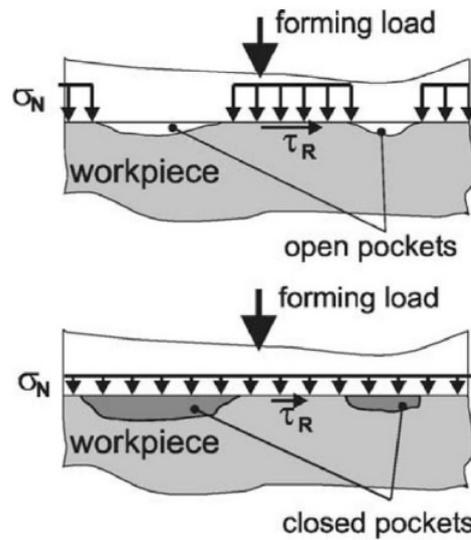


FIGURE 1.19: Poches de lubrifiant ouvertes et fermées (Engel et Eckstein, 2002).

En raison de leurs petites dimensions, les mini-composants ne présentent essentiellement que des poches ouvertes ; l'augmentation du frottement est donc un aspect essentiel à prendre en compte lors de procédés de micro-formage *avec lubrification*. En effet, il convient de préciser (voir (Fu et Chan, 2012b)) que pour des procédés à sec (sans lubrification), aucune relation n'a pu être établie entre la miniaturisation et l'évolution du frottement.

## 1.4 Conclusion

Les procédés de micro-formage permettent la production de nombreux mini-composants et la tendance à la miniaturisation de ces dernières décennies ouvre de nouvelles perspectives d'application. Cependant, les atypies de comportement mécanique qui apparaissent avec la réduction de l'épaisseur des tôles limitent grandement l'exploitation du potentiel des procédés de micro-formage. Divers aspects caractéristiques de la mise en forme de tôles d'épaisseur submillimétriques ont été présentés dans ce chapitre. Le concept de tôle ultrafine a été introduit et il a été souligné que la réponse de ces tôles aux sollicitations mécaniques dépend fortement du nombre de grains dans l'épaisseur.

Les procédés de micro-formage sont affectés par le comportement des tôles ultrafines ; des caractéristiques telles que l'hétérogénéité de la déformation et l'anisotropie marquée,

les fluctuations de la contrainte d'écoulement, l'augmentation du frottement, la diminution de la ductilité entraînent une forte dispersion sur la géométrie des pièces produites et rendent les procédés instables aux changements de paramètres de production. La conception virtuelle, qui dans de nombreux domaines de l'industrie permet d'accélérer le design des pièces par le biais de logiciels de simulation et d'augmenter la productivité, demeure peu effective dans ce secteur d'activités en raison des particularités de comportement des tôles ultrafines. Il est donc nécessaire de mettre en place une modélisation pertinente du comportement des tôles ultrafines, apte à être intégrée dans des logiciels de calcul par éléments finis.

## Chapitre 2

# Modélisation du comportement mécanique

Cette partie discute des approches de modélisation du comportement de matériaux polycristallins. D'importants travaux ont été menés dans les domaines de la plasticité dite phénoménologique et de la plasticité cristalline depuis près d'un siècle maintenant. Ils couvrent de nombreux aspects dont le formalisme cinématique des grandes transformations, les lois de comportement, les lois d'érouissage phénoménologique et à base physique.

### 2.1 Éléments de mécanique des milieux continus

#### 2.1.1 Cinématique des grandes transformations

L'espace euclidien tridimensionnel est muni d'un repère cartésien fixe d'origine  $O$  et de vecteurs de base  $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ . On considère un corps déformable constitué de points matériels appelés particules. Le corps est dans une position dite configuration de référence  $\Omega_o$  à un instant initial  $t_o$ ; sous l'action de sollicitations extérieures, le corps est mis en mouvement, se déforme et se retrouve dans la configuration dite courante  $\Omega_t$  à un instant  $t$  comme illustré sur la [Figure 2.1](#).

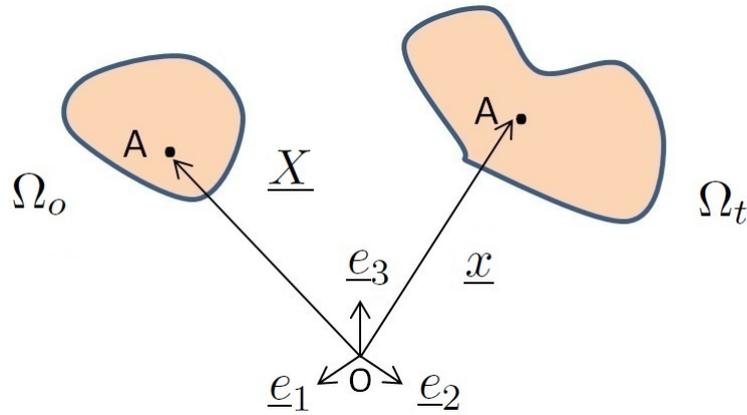


FIGURE 2.1: Mouvement d'un corps déformable de la configuration de référence à la configuration courante.

Examinons le mouvement d'une particule  $A$  choisie arbitrairement. Sa position en configuration initiale est donnée par le vecteur  $\underline{X}$  et sa position en configuration courante par  $\underline{x}$ . Le mouvement de  $A$  sera analysé en description lagrangienne plutôt qu'en description eulérienne plus adaptée aux écoulements de fluides.

Ainsi une variation infinitésimale de la position de  $A$  dans  $\Omega_t$  se formalise par rapport à  $\Omega_o$  comme suit :

$$d\underline{x} = \frac{\partial \underline{x}}{\partial \underline{X}} d\underline{X} \quad (2.1)$$

De cette relation, on définit le gradient de la transformation  $\mathbf{F}$  par :

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \underline{x}}{\partial \underline{X}} \quad (2.2)$$

Le tenseur  $\mathbf{F}$  caractérise de façon locale la transformation et porte l'information sur la déformation du voisinage du point matériel  $A$ . Cette information comporte une déformation pure et une rotation. Ainsi, le gradient de la transformation  $\mathbf{F}$  admet une décomposition polaire qui s'écrit de manière unique :

$$\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{R} \quad (2.3)$$

$\mathbf{R}$  est un tenseur orthogonal qui représente les *rotations de corps rigide*.  $\mathbf{U}$  et  $\mathbf{V}$  sont respectivement les tenseurs droit et gauche de *déformation pure* ; ils sont symétriques et

définis positifs.

Lors d'un mouvement de corps rigide, le solide ne subit aucune déformation pure et on a de fait les égalités  $\mathbf{U} = \mathbf{I}$  et  $\mathbf{F} = \mathbf{R}$  où  $\mathbf{I}$  est le tenseur identité d'ordre deux. Afin de garantir une déformation nulle dans de tels cas de figure, il est classique de définir des mesures de déformations à partir de  $\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{U}$  ou  $\mathbf{V}$  et il en existe un très grand nombre. Le tenseur de déformation de Green-Lagrange est défini sur la configuration de référence par :

$$\mathbf{E}_L = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2} (\mathbf{U}^2 - \mathbf{I}) \quad (2.4)$$

La mesure de déformation logarithmique ou mesure de Hencky s'écrit sur la configuration de référence :

$$\mathbf{E}_H = \ln(\mathbf{U}) \quad (2.5)$$

La dimension temporelle entre bien évidemment dans la représentation du mouvement et la vitesse particulaire s'écrit  $\underline{v} = \frac{\partial x}{\partial t}$ . On peut alors définir le gradient de vitesses de déformation par :

$$\mathbf{L} = \frac{\partial \underline{v}}{\partial \underline{x}} = \dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1} \quad (2.6)$$

Il se décompose en une partie symétrique, la vitesse (ou taux) de déformation  $\mathbf{D}$  et une partie antisymétrique la vorticité ou spin  $\mathbf{W}$  :

$$\mathbf{L} = \mathbf{D} + \mathbf{W} \quad \text{avec} \quad \mathbf{D} = \frac{1}{2} (\mathbf{L} + \mathbf{L}^T) \quad \text{et} \quad \mathbf{W} = \frac{1}{2} (\mathbf{L} - \mathbf{L}^T) \quad (2.7)$$

Le tenseur spin  $\mathbf{W}$  peut être interprété physiquement comme la vitesse de rotation des axes principaux du taux de déformation.

### 2.1.2 Mesures de contrainte

Il existe dans la littérature plusieurs définitions du tenseur des contraintes. Il convient de faire un choix judicieux de la mesure appropriée aux effets que l'on cherche à représenter et/ou concordante avec les outils numériques et expérimentaux dont on dispose.

En particulier, les lois de comportement associent des paires contrainte-déformation bien spécifiques. Les expressions les plus courantes sont les formes eulériennes  $\boldsymbol{\sigma}$  tenseur de Kirchhoff et  $\boldsymbol{\sigma}$  tenseur de Cauchy, mixtes  $\mathbf{B}$  premier tenseur de Piola-Kirchhoff et lagrangiennes  $\boldsymbol{\pi}$  second tenseur de Piola-Kirchhoff.

Les tenseurs  $\boldsymbol{\sigma}$  et  $\mathbf{B}$  ont une signification physique en ce qu'ils caractérisent directement les efforts appliqués. En effet, considérons (Figure 2.2) dans une configuration de référence, un élément de surface d'aire  $dS$  et de normale  $\underline{N}$ . Après déformation, donc en configuration courante, cet élément occupe une aire  $ds$  et a  $\underline{n}$  pour normale unitaire.

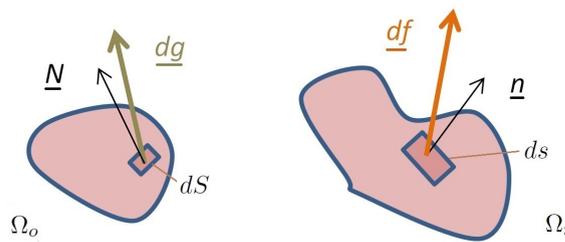


FIGURE 2.2: Représentation des configurations courante et de référence.

Si on suppose qu'en configuration courante, il s'exerce sur l'élément de surface une force  $\underline{df}$ , alors on aura les expressions suivantes :

$$\underline{df} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \underline{n} ds \quad \text{et} \quad \underline{df} = \mathbf{B} \cdot \underline{N} dS \quad (2.8)$$

En clair, par définition  $\boldsymbol{\sigma}$  est une mesure de la force par unité de surface dans l'état déformé et  $\mathbf{B}$  une mesure de la force appliquée au corps déformé par unité de surface non déformée.

Le tenseur de Kirchhoff  $\boldsymbol{\tau}$  est relié à celui de Cauchy par  $\boldsymbol{\tau} = J\boldsymbol{\sigma}$  où  $J$  est le déterminant du gradient de la transformation  $\mathbf{F}$ . Son utilisation permet d'alléger les formulations et il possède comme le tenseur de Cauchy la propriété de symétrie. En revanche, le premier tenseur de Piola-Kirchhoff n'est pas en général symétrique, ce qui peut rendre complexe son utilisation dans le développement et l'implantation numérique de modèles. Le second tenseur de Piola-Kirchhoff  $\boldsymbol{\pi}$  est, lui, symétrique et lagrangien. C'est une mesure de la force  $\underline{dg}$ , résultat du transport de  $\underline{df}$  en configuration de référence, par unité de surface non déformée. Il s'écrit :

$$\boldsymbol{\pi} = J\mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^{-T} \quad (2.9)$$

### 2.1.3 Lois de comportement, hyper et hypoélasticité

Nous nous intéressons ici au comportement à froid et négligerons par conséquent les effets thermiques. Dans un tel cadre, une loi de comportement est une relation qui définit la contrainte en fonction de la déformation et, éventuellement, leurs vitesses. C'est une relation physique qui ne doit pas varier d'un référentiel à l'autre. En d'autres termes, les entités qui servent à écrire les lois de comportement doivent être objectives c'est-à-dire invariantes par rapport à un changement de référentiel. L'hyperélasticité et l'hypoélasticité sont deux approches couramment employées pour formuler une loi de comportement.

Les modèles hyperélastiques sont basés sur les lois de la thermodynamique (voir par exemple (Lemaitre et Chaboche, 2004)). La loi de comportement dérive d'un potentiel thermodynamique qui est formalisé comme une densité d'énergie de déformation. Initialement développée pour décrire le comportement de matériaux qui admettent des taux importants de déformations élastiques (caoutchouc, polymères), l'approche hyperélastique a été étendue à la plasticité des métaux par (Simo et Ortiz, 1985). Les fondements thermodynamiques de ces modèles sont solides et la formulation est matérielle (établie sur la configuration de référence) et de fait objective.

Si on suppose une densité d'énergie libre de Helmholtz  $\Psi$ , alors la loi de comportement s'écrit :

$$\boldsymbol{\pi} = 2 \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{U}^2} \quad (2.10)$$

Ces modèles sont toutefois relativement complexes à mettre en oeuvre et la définition du potentiel thermodynamique sous-jacent peut s'avérer délicate.

L'hypoélasticité peut être perçue comme une analogie, dans le cadre des grandes transformations, de la théorie des petites déformations. La décomposition additive de la vitesse de déformation en parties élastique et plastique est notamment reprise du formalisme de la théorie des petites déformations. La loi de comportement est alors formulée de manière incrémentale entre des taux de déformation et de contrainte. L'absence de fondements thermodynamiques peut entraîner en grandes déformations élastiques une non conservation de l'énergie et de la dissipation en l'absence d'écoulement plastique. Cette possibilité

limite l'emploi des modèles hypoélastiques à certains matériaux tels les métaux qui présentent de très faibles déformations élastiques. Outre ces limitations, la formulation de modèles hypoélastiques requiert l'utilisation de grandeurs objectives. En effet, les non linéarités géométriques qui surviennent en grandes transformations peuvent influencer sur la représentation du comportement dans un cadre non adapté. Dans le cas illustré sur la [Figure 2.3](#), une barre est soumise à un instant initial à un état de contraintes uniaxial selon l'axe  $\underline{x}_1$ . Elle subit ensuite une rotation pure qui l'aligne sur l'axe  $\underline{x}_2$  à un instant final.

Étudions l'évolution du tenseur de contraintes de Cauchy  $\boldsymbol{\sigma}$  exprimé dans le repère fixe

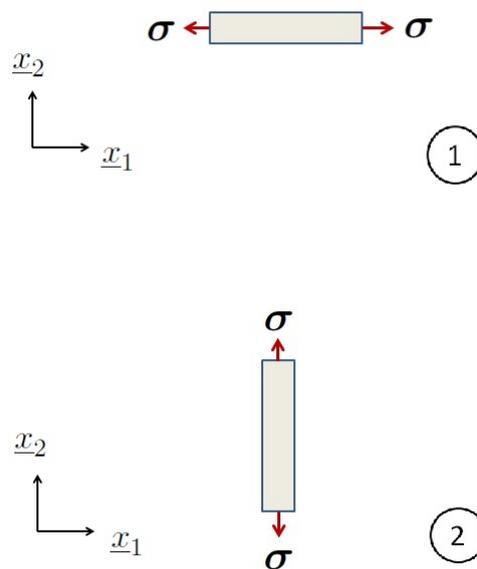


FIGURE 2.3: Rotation de corps rigide d'une barre soumise à un état de contraintes.

$(\underline{x}_1, \underline{x}_2)$  ; à l'instant initial, la seule composante de  $\boldsymbol{\sigma}$  sera  $\sigma_{11}$  et à l'instant final elle sera  $\sigma_{22}$ . On remarque qu'entre les deux instants,  $\dot{\sigma}_{11} \neq 0$  et  $\dot{\sigma}_{22} \neq 0$  ce qui ne correspond pas à la réalité physique ! L'état de contraintes dans le matériau n'a pas changé, celui-ci étant soumis à un mouvement de corps rigide. Le tenseur de contrainte de Cauchy exprimé dans le repère fixe n'est donc pas incrémentalement objectif. Il est nécessaire d'utiliser des entités objectives *et* incrémentalement objectives pour décrire les lois de comportement.

L'objectivité incrémentale est généralement obtenue de trois manières (voir ([Sidoroff, 1982](#)), ([Simo et Hughes, 1998](#))).

### 2.1.3.1 Le transport convectif ou pull-back

On utilise des transformations tensorielles, en l'occurrence le gradient de la transformation, pour projeter des tenseurs incrémentalement non objectifs vers la configuration de référence où les quantités tensorielles sont matérielles et de fait objectives. Ainsi en partant du tenseur de contraintes de Cauchy  $\boldsymbol{\sigma}$ , on aboutit dans la configuration de référence au second tenseur de Piola-Kirchhoff par la transformation suivante :

$$\boldsymbol{\pi} = J\mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^{-T} \quad (2.11)$$

En appliquant cette transformation à une loi de comportement formulée en  $\boldsymbol{\sigma}$ , on obtient une expression, dans la configuration de référence, qui est objective.

### 2.1.3.2 La construction de dérivées objectives sur la configuration courante

On dérive les tenseurs après les avoir transporté vers un référentiel qui suit la rotation du milieu continu et on les ramène dans la configuration courante fixe. Soit  $\mathbf{Q}$  la transformation orthogonale qui permet de passer vers le repère choisi; une dérivée objective de  $\boldsymbol{\sigma}$  s'écrira :

$$\overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{Q}^T \cdot \frac{d}{dt} (\mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{Q}^T) \cdot \mathbf{Q} \quad (2.12)$$

Selon le référentiel choisi, on distingue plusieurs dérivées objectives.

**La dérivée de Truesdell**, dérivée convective introduite par Truesdell en exploitant un transport sur la configuration de référence plutôt qu'un référentiel tournant. Elle s'écrit comme le pull-back (2.11) rapporté en configuration courante :

$$\overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}}^{TR} = \frac{1}{J}\mathbf{F} \cdot \frac{d}{dt} (J\mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^{-T}) \cdot \mathbf{F}^T, \quad (2.13)$$

ce qui donne après développement :

$$\overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}}^{TR} = \dot{\boldsymbol{\sigma}} - \mathbf{L} \cdot \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{L}^T + \boldsymbol{\sigma} \text{tr}(\mathbf{L}) \quad (2.14)$$

**La dérivée de Zaremba-Jaumann-Noll** couramment nommée dérivée de Jaumann ou dérivée corotationnelle : le référentiel corotationnel est choisi comme celui pour lequel les axes principaux de la vitesse de déformation paraissent fixes. En d'autres termes, il tourne à la même vitesse que le spin  $\mathbf{W}$ . Considérons un changement de repère ortho-normé sur notre particule A tel que :

$$\bar{\underline{x}} = \underline{c}(t) + \mathbf{Q}(t) \cdot \underline{x} \quad (2.15)$$

En exploitant cette expression et les relations cinématiques (2.2), (2.6) et (2.7) on montre que le spin s'écrit dans le nouveau référentiel :

$$\bar{\mathbf{W}} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{Q}^T + \boldsymbol{\omega}, \quad (2.16)$$

où  $\boldsymbol{\omega} = \dot{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{Q}^T$  est la vitesse de rotation relative des deux référentiels. En annulant le spin dans le nouveau référentiel, on obtient la transformation qui génère le référentiel corotationnel par intégration de :

$$\dot{\mathbf{Q}}^T \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{W} \quad (2.17)$$

On suppose généralement qu'à l'instant initial le référentiel corotationnel coïncide avec le référentiel fixe.

La dérivée de Jaumann s'écrit en référentiel fixe :

$$\overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}}^J = \dot{\boldsymbol{\sigma}} - \mathbf{W} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{W} \quad (2.18)$$

**La dérivée de Green-Naghdi** ou dérivée en rotation propre : elle a été développée après que des auteurs (Dienes, 1979), (Nagtegaal et De Jong, 1982) aient démontré que la dérivée de Jaumann conduisait à une réponse oscillatoire non physique dans le cas du cisaillement avec écrouissage cinématique et à de très grands taux de déformation. Dans son référentiel associé, dit en rotation propre, les axes principaux de la déformation pure (les vecteurs propres du tenseur  $\mathbf{U}$ ) apparaissent fixes. Ce référentiel est généré par le

tenseur de rotation  $\mathbf{R}$  issu de la décomposition polaire  $\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U}$ . En écrivant  $\mathbf{Q} = \mathbf{R}^T$  dans (2.12), on obtient l'expression de la dérivée de Green-Naghdi :

$$\overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}}^{GN} = \dot{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\Omega} \quad \text{avec} \quad \boldsymbol{\Omega} = \dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R}^T \quad (2.19)$$

En suivant la nomenclature de (Martiny-Weitig, 1992) nous appellerons taux de rotation propre le tenseur  $\boldsymbol{\Omega}$ .

Aussi en partant de la décomposition polaire de  $\mathbf{F}$ , un calcul direct permet d'obtenir la relation suivante pour le spin  $\mathbf{W}$  :

$$\mathbf{W} = \boldsymbol{\Omega} + \mathbf{R} \cdot \text{asym}(\dot{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{U}^{-1}) \cdot \mathbf{R}^T, \quad (2.20)$$

où  $\text{asym}(\mathbf{A})$  représente la partie anti-symétrique d'un tenseur  $\mathbf{A}$ .

On remarque alors que pour un mouvement de corps rigide entre deux incréments consécutifs, le spin est égal au taux de rotation propre  $\mathbf{W} = \boldsymbol{\Omega}$  et la dérivée de Green-Naghdi se ramène à celle de Jaumann.

**La dérivée logarithmique**, développée par (Xiao *et al.*, 1998) et supposée plus performante (précision, cohérences théoriques) que les deux précédentes. Le tenseur  $\boldsymbol{\Omega}$  y est remplacé par :

$$\boldsymbol{\Omega}' = \mathbf{W} + \sum_{i \neq j}^m \left( \frac{1 + \lambda_i / \lambda_k}{1 - \lambda_i / \lambda_j} + \frac{2}{\ln(\lambda_i / \lambda_j)} \right) \underline{b}_i \cdot \mathbf{D} \cdot \underline{b}_j, \quad (2.21)$$

où  $\lambda_i$  est une valeur propre du tenseur de Cauchy-Green gauche  $\mathbf{B} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T$  et  $\underline{b}_i$  un vecteur propre de ce même tenseur.

### 2.1.3.3 La formulation en repère tournant

Elle consiste à formuler la loi de comportement directement dans le référentiel tournant sans retour vers le référentiel d'observation fixe (Hughes, 1984). Elle présente l'avantage d'offrir des expressions plus maniables car les dérivées objectives se réduisent, dans ces référentiels, à de simples dérivées temporelles sans termes additifs ; en partant de (2.12), on obtient aisément :

$$\dot{\hat{\boldsymbol{\sigma}}} = \mathbf{Q} \cdot \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{Q}^T, \quad (2.22)$$

où  $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$  est l'expression de  $\boldsymbol{\sigma}$  dans le référentiel tournant. Elle est adoptée dans de nombreux logiciels éléments finis concomitamment aux référentiels de Jaumann ou de Green-Naghdi.

## 2.2 Plasticité phénoménologique

Les modèles dit phénoménologiques se basent sur l'hypothèse d'homogénéité du milieu ; en ce sens, le comportement moyen d'un matériau est supposé identique en tout point de son volume. Ce type de modélisation s'attache à retranscrire le comportement global observable à l'échelle macroscopique des matériaux. Ils se basent, de fait, sur des observations expérimentales du comportement mécanique des matériaux qui servent à définir les caractéristiques du comportement qui vont être modélisées. Nous présentons dans cette section une méthode générique de construction de ces modèles ; les résultats de caractérisation mécanique du chapitre 4 permettront ensuite de préciser les modèles adaptés à la description du comportement des matériaux étudiés.

Nous nous plaçons dans le cadre des transformations mécaniques isothermes dans un formalisme hypoélastique. On postule que le taux de déformation  $\mathbf{D}$  se décompose comme suit :

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}^e + \mathbf{D}^p \quad (2.23)$$

où  $\mathbf{D}^e$  est le taux de déformation élastique et le taux de déformation plastique  $\mathbf{D}^p$  représente la partie irréversible donc permanente du taux de déformation. Cette décomposition additive de la déformation s'inspire de la théorie des petites déformations où une telle partition est justifiée par une analyse thermodynamique (voir ([Lemaitre et Chaboche, 2004](#))). Notons qu'en grandes transformations, le formalisme hyperélastique s'appuie plutôt sur une décomposition multiplicative du gradient de la transformation

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^e \cdot \mathbf{F}^p \quad (2.24)$$

Un parallèle peut toutefois être établi entre les deux approches pour des matériaux présentant un faible taux de déformation élastique comme les métaux ( $\mathbf{F}^e \approx \mathbf{I}$ ) ; en effet, le gradient de vitesses  $\mathbf{L}$  s'écrira :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{L} &= \dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1} \\
 &= \dot{\mathbf{F}}^e \cdot \mathbf{F}^{e-1} + \mathbf{F}^e \cdot \dot{\mathbf{F}}^p \cdot \mathbf{F}^{p-1} \cdot \mathbf{F}^{e-1} \\
 &= \mathbf{L}^e + \mathbf{F}^e \cdot \mathbf{L}^p \cdot \mathbf{F}^{e-1} \\
 &\approx \mathbf{L}^e + \mathbf{L}^p \Rightarrow \mathbf{D} \approx \mathbf{D}^e + \mathbf{D}^p,
 \end{aligned} \tag{2.25}$$

où  $\mathbf{L}^e$  et  $\mathbf{L}^p$  sont respectivement les gradients de vitesses élastique et plastique.

### 2.2.1 Comportement élastique

Le comportement élastique du matériau est représenté par la loi de Hooke généralisée sous la forme incrémentale objective suivante :

$$\overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C} : \mathbf{D}, \tag{2.26}$$

où  $\overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}}$  est un taux objectif de contrainte et  $\mathbf{C}$  est le tenseur (de quatrième ordre) des constantes élastiques. Cette relation est valable dans la gamme des petites déformations jusqu'à un seuil de contraintes qui représente la limite d'élasticité (ou seuil de plasticité) ; au delà de cette limite, des déformations permanentes apparaissent dans le matériau et la décomposition du taux de déformation en parties élastique et plastique prend sens.

### 2.2.2 Comportement plastique

La description phénoménologique de la plasticité implique trois éléments constitutifs :

- un critère de plasticité qui permet de déterminer, au travers de la surface de charge, si l'état de contrainte dans le matériau induit une déformation permanente ;
- une loi d'écoulement plastique pour quantifier les déformations plastiques ;
- une loi d'écrouissage qui décrit l'évolution du comportement du matériau au cours de la déformation plastique.

### 2.2.2.1 Surface de charge

La définition de la plasticité repose sur le concept de surface de charge qui permet de distinguer les domaines de déformation élastique et plastique. La formalisation mathématique du concept conduit à l'écriture d'une fonction de charge  $f$ . La représentation de  $f$  dans l'espace des contraintes constitue la surface de charge, l'intérieur de cette surface représentant le domaine d'élasticité et son pourtour l'état (élasto)plastique. Elle doit être fermée et convexe.

De manière formelle, elle s'écrit :

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{X}_i, R_j) = \bar{\sigma}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{X}_i) - \sigma_y(\mathbf{X}_i, R_j), \quad (2.27)$$

où  $\bar{\sigma}$  est la *contrainte équivalente* et  $\sigma_y$  représente la contrainte seuil d'écoulement plastique en dessous de laquelle la déformation est élastique et le comportement réversible. La contrainte  $\bar{\sigma}$  est le scalaire équivalent à l'état de contrainte multiaxial représenté par le tenseur  $\boldsymbol{\sigma}$ . Les contraintes équivalente et seuil dépendent de variables internes tensorielles  $\mathbf{X}_i$  ( $i=1\dots M$ ) et des variables internes scalaires et/ou paramètres matériau  $R_j$  ( $j=1\dots N$ ). Ces variables internes représentent des caractéristiques physiques du matériau tels que son type d'écroutissage.

Ainsi, le comportement sera dit élastique si :

$$f < 0 \quad \text{ou} \quad f = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} < 0 \quad (2.28)$$

Il est dit élastoplastique si :

$$f = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} \geq 0 \quad (2.29)$$

De manière synthétique, la surface de plasticité sera décrite par :

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{X}_i, R_j) = 0 \quad (2.30)$$

En plasticité non visqueuse, il faut également s'assurer que l'état de contrainte reste toujours sur la surface de plasticité ; on rajoute alors la condition de cohérence :

$$\dot{f}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{X}_i, R_j) = 0 \quad (2.31)$$

L'expression de la contrainte équivalente dépend du critère considéré pour déterminer si le domaine plastique est atteint. La plupart des critères sont basés sur la contrainte de cisaillement maximale (Tresca) ou un seuil d'énergie (un terme quadratique) de distortion élastique (von Mises). Dans la suite, nous employerons indistinctement les termes de critère et contrainte équivalente.

### 2.2.2.2 Expressions de contraintes équivalentes

Les critères de plasticité dits isotropes considèrent que la contrainte équivalente dans le matériau reste invariante quelque soit la direction de la sollicitation imposée sur ce dernier. Cette hypothèse se justifie dans le cas des matériaux isotropes auxquels ces critères isotropes (Tresca, von Mises...) peuvent être appliqués.

Certains matériaux présentent toutefois des orientations préférentielles marquées qui influent sur leur réponse aux sollicitations. Des critères dit anisotropes ont donc été développés pour intégrer l'influence sur l'écoulement plastique de l'orientation relative du chargement par rapport à un repère privilégié lié au matériau. Il en existe un très grand nombre ; une description approfondie de beaucoup d'entre eux est présentée dans (Banabic, 2010), les critères de (Hill, 1948), (Barlat *et al.*, 2003), (Banabic *et al.*, 2004) étant les plus répandus.

#### Critère quadratique de Hill 1948 (Hill, 1948)

Ce critère de plasticité, noté Hill48, s'utilise pour les matériaux (souvent les aciers) orthotropes (anisotropie qui comporte trois plans de symétrie et caractéristique de tôles laminées). La contrainte équivalente s'écrit :

$$\bar{\sigma}^2 = (\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{X}) : \mathbf{M} : (\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{X}) \quad (2.32)$$

Le tenseur  $\mathbf{M}$  ou tenseur de Hill, symétrique du quatrième ordre et diagonal dans le repère orthotrope matériau, introduit l'anisotropie du matériau par le biais de 6 coefficients  $F$ ,  $G$ ,  $H$ ,  $L$ ,  $M$  et  $N$ . Il admet les symétries majeures et mineures; de plus  $M_{ijkl} = 0$  ce qui traduit l'incompressibilité plastique et permet l'utilisation de  $\boldsymbol{\sigma}$  au lieu de son déviateur  $\mathbf{s}$ . Le tenseur de Hill s'écrit dans le repère matériau orthotrope :

$$\mathbf{M} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2G + 2H - F & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2F + 2H - G & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2H + 2G - H & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

Pour un matériau isotrope, on a  $F = G = H = 1$  et  $L = M = N = 3$  de sorte à obtenir le tenseur de Hill égal au tenseur identité. Dans le cas des tôles, réaliser des essais mettant en jeu les composantes  $\sigma_{3,j}$ ,  $j = 1, 2$  est un problème épineux. On admettra dans ces travaux  $L = M = 3$ .

Pour obtenir le seuil d'écoulement initial égal à la limite d'élasticité en traction suivant la direction de laminage, on impose  $H + G = 2$ ; ce qui laisse 3 paramètres indépendants  $F$ ,  $G$ ,  $N$  à identifier.

### Critère de Bron & Besson (Bron et Besson, 2004)

Ce critère, noté BB2004, appartient à la classe des critères de plasticité basés sur l'utilisation des transformations linéaires pour modéliser l'anisotropie. Ils permettent d'obtenir des surfaces de plasticité intermédiaires entre celles de Tresca et de von Mises. Les premiers modèles de ce type furent développés par (Barlat *et al.*, 1991), (Karafillis et Boyce, 1993) et (Barlat *et al.*, 1997).

La contrainte équivalente s'écrit :

$$\bar{\sigma} = \left( \sum_{k=1}^2 \alpha_k (\psi_k)^{\frac{a}{b_k}} \right)^{\frac{1}{a}} \quad (2.34)$$

C'est la somme de deux fonctions  $\psi$  positives, homogènes de degré 1 et pondérées par les deux paramètres,  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$ , dont la somme vaut 1. Ces fonctions sont convexes par rapport à  $\boldsymbol{\sigma}$  et ont les expressions suivantes :

$$\psi_1 = \frac{1}{2} \left( |S_2^1 - S_3^1|^{b_1} + |S_3^1 - S_1^1|^{b_1} + |S_1^1 - S_2^1|^{b_1} \right), \quad (2.35)$$

$$\psi_2 = \frac{3^{b_2}}{2^{b_2} + 2} \left( |S_1^2|^{b_2} + |S_2^2|^{b_2} + |S_3^2|^{b_2} \right), \quad (2.36)$$

où les  $S_k^i$ ,  $i = 1, 2$  et  $k = 1, 2, 3$  sont les valeurs principales des tenseurs déviateurs modifiés  $\mathbf{s}_k$  obtenus du tenseur dit « offset » de contraintes  $\boldsymbol{\sigma}^{\mathbf{X}} = \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{X}$  par la transformation linéaire suivante :

$$\mathbf{s}_k = \mathbf{L}_k : \boldsymbol{\sigma}^{\mathbf{X}} \quad (2.37)$$

où  $\mathbf{L}_k$  portent les paramètres d'anisotropie et s'écrivent :

$$\mathbf{L}_k = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} c_2^k + c_3^k & -c_3^k & -c_2^k & 0 & 0 & 0 \\ -c_3^k & c_3^k + c_1^k & -c_1^k & 0 & 0 & 0 \\ -c_2^k & -c_1^k & c_1^k + c_2^k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3c_4^k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3c_5^k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3c_6^k \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

Cette façon élégante d'introduire l'anisotropie sur le tenseur  $\boldsymbol{\sigma}$  permet de garder la fonction  $\bar{\sigma}$  isotrope par rapport au tenseur  $\mathbf{s}$  qui constitue un équivalent plastique isotrope. On a donc 12 paramètres  $c_i^k$  d'anisotropie, les paramètres  $a$ ,  $b_1$  et  $b_2$  influençant la forme de la surface de plasticité. Comme pour le critère de Hill48, les paramètres  $c_i^k$ ,  $i = 5, 6$  sont gardés égaux à 1 du fait de la difficulté de leur mise en évidence expérimentale ; de plus en utilisant la relation  $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ , on se retrouve avec un total de 12 paramètres indépendants à identifier.

Il faut souligner que pour  $\alpha = 1$  et  $c_i^1 = 1$ , on retrouve le critère de von Mises pour  $b_1 = 2$  ou 4 et celui de Tresca pour  $b_1 = 1$  ou tendant vers  $+\infty$ .

### 2.2.2.3 Lois d'écrouissage

Toute transformation réelle provoque une dissipation d'énergie mécanique qui entraîne, entre autres, une modification de la structure interne du matériau et une évolution des propriétés mécaniques. Les lois et variables d'écrouissage permettent de rendre compte de cette évolution de la réponse du matériau. Celle-ci se traduit d'un point de vue conceptuel par une altération de la surface de charge qui représente le domaine d'élasticité. En fonction de l'évolution de la surface de charge, on distingue plusieurs types d'écrouissage.

#### Ecrouissage isotrope

Il décrit le durcissement qu'on observe lorsqu'on soumet un métal à un chargement qui le fait rentrer dans le domaine plastique. La réponse devient non linéaire et des essais de charge-décharge montrent l'augmentation de la contrainte seuil de plasticité ; la surface de charge connaît une expansion supposée homothétique comme illustré sur la [Figure 2.4](#).

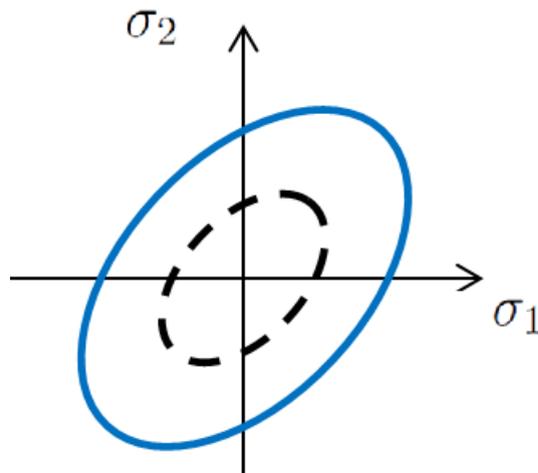


FIGURE 2.4: Evolution de la surface de charge correspondant à un écrouissage isotrope dans le plan  $\sigma_1 - \sigma_2$ . La surface en pointillés représente le domaine élastique initial.

La variable interne choisie pour la description de ce phénomène est la déformation plastique cumulée

$$p = \int_0^t \sqrt{\frac{2}{3} \mathbf{D}^p : \mathbf{D}^p} dt \quad (2.39)$$

Elle est associée à la variable scalaire  $R$  dont l'expression doit être adaptée au comportement du matériau.

De nombreuses expressions existent, dont celles de

– Hollomon

$$R = K_r (p)^{n_r}; \quad (2.40)$$

– Swift

$$R = K_r (\epsilon_o + p)^{n_r}; \quad (2.41)$$

– Voce

$$R = \sigma_0 + \sigma_{sat} [1 - \exp(-C_R p)]; \quad (2.42)$$

– Hockett-Sherby

$$R = \sigma_{sat} - (\sigma_{sat} - \sigma_0) \exp(-C_R p^{n_r}) \quad (2.43)$$

où  $C_R, \epsilon_o, K_r, n_r, \sigma_{sat}$  et  $\sigma_0$  sont des paramètres à identifier.

### Écrouissage cinématique

L'écrouissage cinématique a été introduit pour modéliser les atypies de comportement que présentent certains matériaux à la suite d'une inversion du sens du chargement. L'effet Bauschinger, qui est la diminution du seuil de plasticité, ainsi que d'autres phénomènes liés aux essais alternés et cycliques sont représentés à la [Figure 2.5](#).

La modélisation mathématique se fait à l'aide d'une variable tensorielle  $\mathbf{X}$  (souvent dénommée back-stress ou contrainte de rappel) qui en se soustrayant à la contrainte permet d'effectuer une translation de la surface seuil dans l'espace des contraintes (voir [Figure 2.6](#)).

La variable interne associée à  $\mathbf{X}$  est la déformation plastique et diverses expressions ont été proposées pour modéliser l'évolution de  $\mathbf{X}$ , notamment celles de

– Prager

$$\dot{\mathbf{X}} = H_X \mathbf{D}^p; \quad (2.44)$$

– Ziegler

$$\dot{\mathbf{X}} = H_X (\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{X}) \dot{p}; \quad (2.45)$$

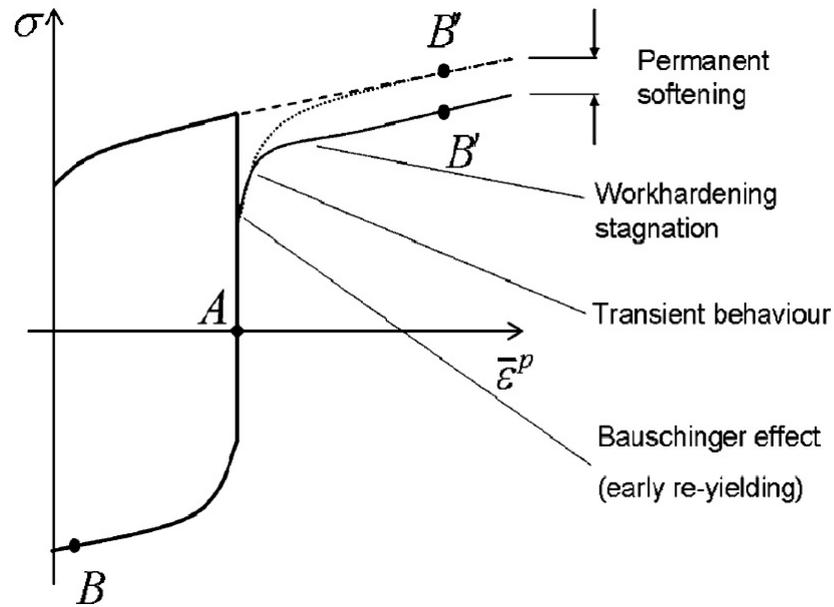


FIGURE 2.5: Illustration schématique des effets de l'érouissage cinématique (Eggertsen et Mattiasson, 2011).

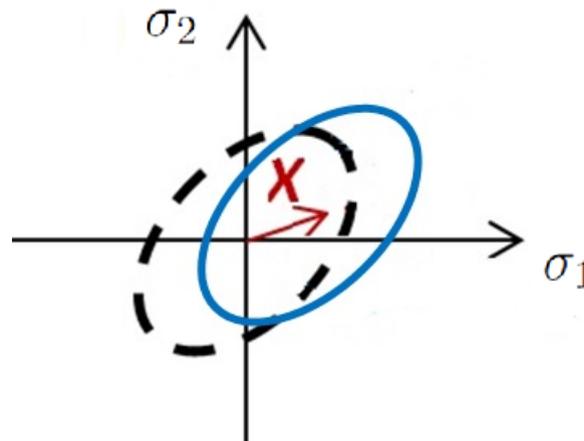


FIGURE 2.6: Evolution de la surface de charge correspondant à un érouissage cinématique dans le plan  $\sigma_1 - \sigma_2$ . La surface en pointillés représente le domaine élastique initial.

– Armstrong-Frederick

$$\dot{\mathbf{X}} = \frac{2}{3} C_X \mathbf{D}^p - D_X \mathbf{X} \dot{p}; \quad (2.46)$$

où  $C_X, D_X$  et  $H_X$  sont des paramètres à identifier.

Aussi, (Chaboche et Rousselier, 1983) ont montré qu'on pouvait grandement améliorer la description de l'érouissage en combinant plusieurs termes d'érouissage cinématique.

### **Erouissage mixte et autres formes d'érouissage**

En associant des termes d'écroutissage isotrope et cinématique, on établit un cadre plus étendu de description dans lequel la surface de charge peut à la fois se translater et se dilater (voir Figure 2.7). On parle alors d'écroutissage mixte.

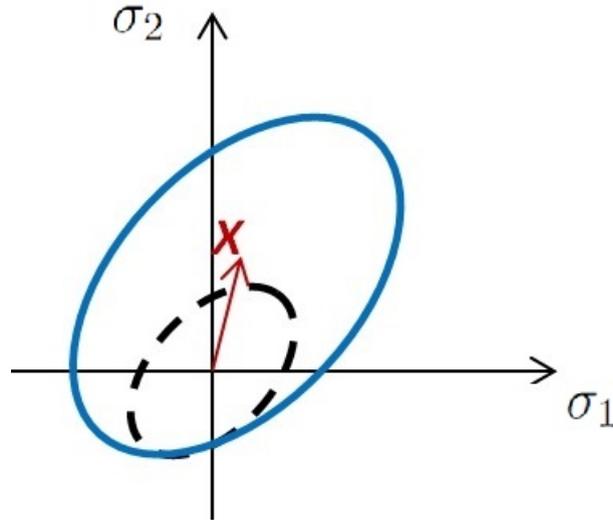


FIGURE 2.7: Evolution de la surface de charge correspondant à un écroutissage mixte dans le plan  $\sigma_1 - \sigma_2$ . La surface en pointillés représente le domaine élastique initial.

Afin d'obtenir un cadre général pour décrire simultanément plusieurs phénomènes, de nombreux auteurs (Mróz, 1967), (Dafalias et Popov, 1976) ont proposé des modèles avec plusieurs surfaces de charge emboîtées les unes dans les autres. La spécification des « degrés de liberté » (translations et expansions individuelles et/ou groupées) des surfaces de charges confère une grande flexibilité à ces modèles. Le modèle développé par Yoshida et Uemori (Yoshida et Uemori, 2003) permet notamment de décrire à la fois l'effet Bauschinger, la saturation de l'écroutissage et l'adoucissement permanent au prix toutefois d'une complexité relativement importante.

Le modèle microstructural de (Teodosiu et Hu, 1998) permet, lui aussi, de reproduire ces différentes caractéristiques d'écroutissage en s'appuyant sur la description de l'évolution de structures de dislocations. L'usage de quatre variables internes d'écroutissage reliées à ces structures de dislocations permet à ce modèle de décrire non seulement l'effet Bauschinger mais également les phénomènes de transition observés après inversion du chargement. Aussi, (Barlat *et al.*, 2011) ont proposé de s'affranchir du concept d'écroutissage cinématique avec leur modèle homogène anisotrope. L'écroutissage y est isotrope et la contrainte équivalente se décompose en la somme d'un terme classique (isotrope ou anisotrope) et d'un terme fluctuant qui introduit une asymétrie de la surface de charge. Cette composante fluctuante, qui distord la surface de charge, permet de modéliser un

certain nombre de phénomènes dont l'effet Bauschinger ou une évolution anisotrope de la forme du domaine d'élasticité.

#### 2.2.2.4 Loi d'écoulement plastique

Elle permet de déterminer la composante plastique de la vitesse de déformation. Cette dernière dérive d'un potentiel (visco)plastique, fonction de la contrainte, des variables internes et éventuellement de la température. Pour les matériaux métalliques, ce potentiel est généralement considéré identique à la fonction de charge : l'écoulement est dit associé ou normal. La vitesse de déformation plastique est alors déterminée par :

$$\mathbf{D}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (2.47)$$

Le scalaire  $\dot{\lambda}$  est le multiplicateur plastique. Dans le cadre de la plasticité indépendante du temps, il est obtenu grâce à la condition de cohérence (2.31).

En viscoplasticité, on suppose un potentiel viscoplastique  $\Omega$  qui caractérise complètement l'écoulement en intensité et en direction. La condition de cohérence n'est pas nécessaire. Le potentiel de Norton généralisé est retenu dans nos travaux et l'écoulement plastique s'écrit :

$$\mathbf{D}^p = \frac{\partial \Omega}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \quad (2.48)$$

avec

$$\Omega = \frac{K_v}{n_v + 1} \left( \frac{f^+(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{X}, R)}{K_v} \right)^{n_v + 1}, \quad (2.49)$$

où  $K_v$  et  $n_v$  sont les paramètres de viscosité à identifier et  $f^+$  est la partie positive de  $f$ .

## 2.3 Plasticité cristalline

A une échelle d'analyse plus fine, la physique des matériaux métalliques n'est pas conforme avec l'hypothèse d'homogénéité de la matière sur laquelle s'appuient les modèles de plasticité phénoménologique. Comme détaillé au chapitre 1, les métaux sont constitués de grains d'orientations et de tailles différentes et la déformation plastique provient du mouvement des défauts linéaires que sont les dislocations sur des plans

cristallins à l'intérieur de ces grains. Ce type de matériau est donc caractérisé par une hétérogénéité microstructurale qui n'est pas prise en compte dans les modélisations phénoménologiques. Les effets de cette hétérogénéité se font d'autant plus ressentir pour des tôles ultrafines à faible nombre de grains dans l'épaisseur ; le comportement individuel des grains influence alors considérablement la réponse globale et l'hypothèse de la séparation des échelles n'est plus valide.

La théorie de la plasticité cristalline s'appuie sur les mécanismes physiques responsables de la déformation et s'intéresse au comportement mécanique du monocristal soumis à une sollicitation. Elle offre ainsi un cadre de modélisation capable d'intégrer une certaine hétérogénéité du matériau. Dans les paragraphes suivants, les divers aspects qui contribuent à l'établissement d'un modèle de plasticité du monocristal et à son utilisation pour la prédiction du comportement de structures polycristallines sont détaillés.

### **2.3.1 Loi de comportement du monocristal**

#### **2.3.1.1 Cinématique du glissement cristallin**

Le lien est établi ici entre la cinématique générale des grandes transformations et la théorie de la plasticité cristalline. Le formalisme adopté est issu des travaux de ([Raphanel et al., 2004](#)), ([Needleman et al., 1985](#)) et ([Peirce et al., 1982](#)), dans la continuité de ceux de ([Hill et Rice, 1972](#)) et ([Rice, 1971](#)).

On considère le mouvement d'un cristal soumis à une transformation. Comme expliqué au préalable, la déformation plastique intervient dans un cristal par le glissement de plans cristallographiques spécifiques sous l'action d'une sollicitation. Le cristal est mu d'une configuration de référence  $\Omega_0$  à une configuration courante  $\Omega_t$  en passant, si plasticité il y a, par une configuration intermédiaire  $\Omega_{it}$ .

On considère que seul le glissement plastique intervient dans cette dernière configuration ; les déformations élastiques n'ont d'effet que sur le réseau cristallin et se produisent après le glissement plastique pour convecter le cristal en configuration courante  $\Omega_t$ . La configuration intermédiaire  $\Omega_{it}$  est donc généralement appelée configuration relâchée en ce qu'on la retrouve en relâchant l'intégralité des contraintes présentes dans la position courante.

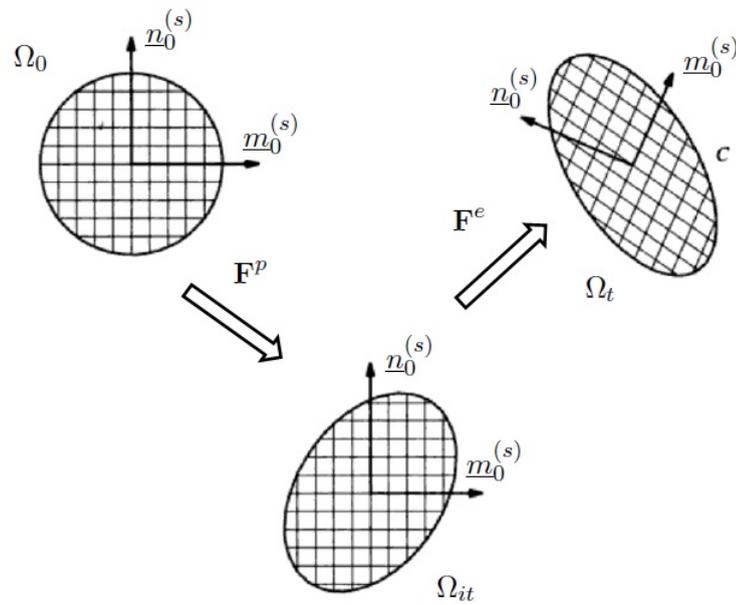


FIGURE 2.8: Décomposition de la déformation en partie élastique et plastique lors du mouvement du cristal.

Chaque système de glissement  $(s)$  est caractérisé par deux vecteurs orthogonaux : le vecteur normal au plan de glissement  $\underline{n}_0^{(s)}$  et le vecteur de la direction de glissement  $\underline{m}_0^{(s)}$ . L'indice « 0 » indique des quantités exprimées dans la configuration de référence. Dans la décomposition multiplicative du gradient de la transformation (2.24), proposée par (Lee, 1969),  $\mathbf{F}^e$  représente la distorsion et la rotation élastique du réseau cristallin tandis que  $\mathbf{F}^p$  correspond à la déformation plastique de la matière par cisaillement. Le réseau cristallin n'est pas affecté par le cisaillement ; ce dernier est induit par glissement de plans cristallographiques et provoque également une rotation de corps rigide de la matière par rapport au réseau (Nemat-Nasser, 2004).

De nombreux auteurs (Teodosiu, 1996) admettent la décomposition suivante :

$$\mathbf{F}^e = (\mathbf{I} + \mathbf{e}) \cdot \mathbf{R}, \quad (2.50)$$

avec  $\mathbf{e}$  un tenseur symétrique de petites déformations élastiques ( $|\mathbf{e}| \ll 1$ ).

Cette décomposition illustre le fait que la partie élastique de la transformation relève essentiellement d'une rotation.

(Nemat-Nasser, 2004) propose les décompositions

$$\mathbf{F}^e = \mathbf{V}^e \cdot \mathbf{R}^* \quad \text{et} \quad \mathbf{F}^p = \mathbf{R}^{**} \cdot \mathbf{U}^p, \quad (2.51)$$

qui établissent la distinction entre la rotation élastique du réseau cristallin  $\mathbf{R}^*$  et la rotation plastique  $\mathbf{R}^{**}$  de la matière,  $\mathbf{V}^e$  et  $\mathbf{U}^p$  étant respectivement les tenseurs d'élongation élastique et plastique. Ce formalisme sera exploité dans l'implémentation numérique au chapitre 3.

Le gradient de vitesses se décompose en

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}^e + \mathbf{L}^p, \quad (2.52)$$

où  $\mathbf{L}^e = \dot{\mathbf{F}}^e \cdot \mathbf{F}^{e-1}$  est le gradient de vitesses élastique et  $\mathbf{L}^p = \mathbf{F}^e \cdot \mathbf{L}_i^p \cdot \mathbf{F}^{e-1}$  celui de vitesses plastique avec  $\mathbf{L}_i^p = \dot{\mathbf{F}}^p \cdot \mathbf{F}^{p-1}$  le gradient de vitesses plastique en configuration relâchée.

On relie alors cette dernière quantité au glissement cristallographique en écrivant d'après (Rice, 1971) :

$$\mathbf{L}_i^p = \sum_s \dot{\gamma}^{(s)} \mathbf{S}_0^{(s)}, \quad (2.53)$$

où  $\dot{\gamma}^{(s)}$  est le taux de glissement et  $\mathbf{S}_0^{(s)} = \underline{m}_0^{(s)} \otimes \underline{n}_0^{(s)}$  est le tenseur de Schmid en configurations initiale et relâchée.

De cette relation, on obtient en configuration courante l'expression du gradient de vitesses plastique :

$$\mathbf{L}^p = \mathbf{F}^e \cdot \mathbf{L}_i^p \cdot \mathbf{F}^{e-1} = \sum_s \dot{\gamma}^{(s)} \mathbf{S}^{(s)}, \quad (2.54)$$

où  $\mathbf{S}^{(s)} = \underline{m}^{(s)} \otimes \underline{n}^{(s)}$  est le tenseur de Schmid en position courante.

En exploitant ces dernières relations et la décomposition en parties symétrique et antisymétrique  $\mathbf{L} = \mathbf{D} + \mathbf{W}$ , on obtient les taux de déformation et le spin plastiques comme suit :

$$\left. \begin{aligned}
 \mathbf{D}^p &= \frac{1}{2}(\mathbf{L}^p + \mathbf{L}^{pT}) \Rightarrow \mathbf{D}^p = \sum_s \dot{\gamma}^{(s)} \mathbf{D}^{(s)} \\
 \mathbf{W}^p &= \frac{1}{2}(\mathbf{L}^p - \mathbf{L}^{pT}) \Rightarrow \mathbf{W}^p = \sum_s \dot{\gamma}^{(s)} \mathbf{W}^{(s)} \\
 \text{avec } \mathbf{D}^{(s)} &= \frac{1}{2}(\mathbf{S}^{(s)} + \mathbf{S}^{(s)T}) \text{ et } \mathbf{W}^{(s)} = \frac{1}{2}(\mathbf{S}^{(s)} - \mathbf{S}^{(s)T})
 \end{aligned} \right\} \quad (2.55)$$

Les vecteurs caractéristiques des plans cristallographiques sont affectés uniquement par la composante élastique de la transformation et transportés vers  $\Omega_t$  suivant :

$$\underline{m}^{(s)} = \mathbf{F}^e \cdot \underline{m}_0^{(s)} \quad \text{et} \quad \underline{n}^{(s)} = \underline{n}_0^{(s)} \cdot \mathbf{F}^{e-1}, \quad (2.56)$$

où  $\underline{m}^{(s)}$  et  $\underline{n}^{(s)}$  sont les vecteurs en configuration courante.

Il faut à présent spécifier les conditions sous lesquelles intervient le glissement cristallin.

### 2.3.1.2 Comportement local

#### Cission résolue

Au niveau local, le glissement d'un système est fonction de la cission résolue  $\tau^{(s)}$  et de sa cission critique d'activation  $\tau_c^{(s)}$ . La cission résolue est la sollicitation appliquée localement, à partir de l'état de contrainte global  $\boldsymbol{\sigma}$ , à chaque système de glissement. Elle s'obtient par extension tridimensionnelle de la loi de Schmid suivant :

$$\tau^{(s)} = \underline{m}^{(s)} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \underline{n}^{(s)} = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D}^{(s)} \quad (2.57)$$

#### Loi d'écoulement

Pour la détermination du taux de glissement, deux approches de modélisation existent : celles de la plasticité non visqueuse et de la viscoplasticité.

En plasticité non visqueuse, la sensibilité du matériau à la vitesse de déformation est considérée négligeable et le glissement est conditionné par :

$$\left. \begin{aligned} \tau^{(s)} < \tau_c^{(s)} &\Rightarrow \dot{\gamma}^{(s)} = 0 \\ \tau^{(s)} = \tau_c^{(s)} \text{ et } \dot{\tau}^{(s)} < \dot{\tau}_c^{(s)} &\Rightarrow \dot{\gamma}^{(s)} = 0 \\ \tau^{(s)} = \tau_c^{(s)} \text{ et } \dot{\tau}^{(s)} = \dot{\tau}_c^{(s)} &\Rightarrow \dot{\gamma}^{(s)} \neq 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.58)$$

Cette loi est semblable aux conditions de cohérence et de Kuhn-Tucker que l'on retrouve dans les modèles macroscopiques. Il est toutefois possible que s'activent plus de systèmes qu'il n'est nécessaire pour accommoder la déformation du cristal. Il faut alors lever l'indétermination et procéder à une sélection des systèmes réellement actifs. Une des approches les plus répandues est de définir les systèmes réellement actifs comme ceux qui minimisent l'énergie de déformation (Franciosi, 1984), (Franciosi et Zaoui, 1991). D'un point de vue numérique, il faut procéder à une analyse combinatoire des systèmes pour chaque incrément de chargement ce qui est très coûteux en temps de calcul et peut dans certains cas, (Van Houtte, 1988), (Delannay, 2001), ne pas résoudre l'indétermination. Des solutions ont été proposées à ces problèmes; (Delannay, 2001) entre autres propose une procédure numériquement plus performante et (Lorrain, 2005), (Franz, 2008), (Abed-Meraim, 2009) proposent une fonction de régularisation inspirée de la viscoplasticité qui reste toutefois indépendante du temps physique.

En viscoplasticité, le taux de glissement d'un système est directement calculé à partir d'une relation liant la cission critique à la cission résolue. La question de choix de systèmes actifs ne se pose pas car tous les systèmes sont actifs mais seulement certains auront un taux de glissement significatif.

De nombreux auteurs, (Teodosiu *et al.*, 1975), (Hutchinson, 1976), (Peirce *et al.*, 1982), (Needleman *et al.*, 1985), (Tabourot, 1992), (Berbenni *et al.*, 2004), utilisent une loi issue de la théorie de l'activation thermique des dislocations :

$$\dot{\gamma}^{(s)} = \dot{\gamma}_o^{(s)} \text{signe} \left( \tau^{(s)} \right) \left| \frac{\tau^{(s)}}{\tau_c^{(s)}} \right|^n, \quad (2.59)$$

où  $\dot{\gamma}_o$  est un taux de glissement de référence et  $n$  le coefficient de sensibilité à la vitesse de déformation.

D'autres auteurs, (Cuitino et Ortiz, 1993), (Kuchnicki *et al.*, 2006), (Bonnet, 2007), proposent des variantes de cette loi qui introduisent un seuil et atténuent sa forte non linéarité :

$$\dot{\gamma}^{(s)} = \dot{\gamma}_0^{(s)} \text{signe}(\tau^{(s)}) \left( \left| \frac{\tau^{(s)}}{\tau_c^{(s)}} \right|^n - 1 \right) \quad (2.60)$$

(Cailletaud, 1992) s'inspire quand à lui des modèles phénoménologiques macroscopiques et introduit des variables locales d'érouissage isotrope et cinématique :

$$\dot{\gamma}^{(s)} = \left\langle \frac{|\tau^{(s)} - x^{(s)}| - r^{(s)}}{k} \right\rangle^n \text{signe}(\tau^{(s)} - x^{(s)}), \quad (2.61)$$

où  $x^{(s)}$  est la variable d'érouissage cinématique et  $r^{(s)}$  la variable d'érouissage isotrope. (Saai, 2007) et (Manole, 2010) utilisent également ce type de lois en reliant les variables d'érouissage à des densités de dislocations.

### Lois d'érouissage

La déformation plastique entraîne l'évolution des propriétés du matériau. En plasticité cristalline, cette évolution est reliée à la cission critique d'activation. De nombreux modèles ont été proposés pour rendre compte de cet effet.

(Mandel, 1965) et (Peirce *et al.*, 1982) proposent la loi d'évolution suivante :

$$\dot{\tau}_c^{(s)} = \sum_{\beta} h_{s\beta} \dot{\gamma}^{(\beta)}, \quad (2.62)$$

où les  $h_{s\beta}$  sont les coefficients de la matrice d'érouissage identifiés par Chang et Asaro (Chang et Asaro, 1981) tels que :

$$h_{s\beta} = \begin{cases} h(\gamma) & \text{si } \alpha = \beta \text{ (érouissage propre)} \\ qh(\gamma) & \text{si } \alpha \neq \beta \text{ (érouissage latent)} \end{cases} \quad (2.63)$$

où  $q$  est le ratio d'érouissage latent et

$$h(\gamma) = \text{sech}^2 \left( \frac{h_0 \gamma}{\tau^* - \tau_0} \right), \quad (2.64)$$

avec :

$h_0$  : la constante de proportionnalité d'érouissage

$\tau^*$  : la contrainte de cisaillement en saturation

$\tau_0$  : la contrainte de cisaillement de référence

$\gamma$  est le glissement total sur tous les systèmes tel que :

$$\gamma = \int \sum_s \dot{\gamma}^{(s)} dt \quad (2.65)$$

Ce modèle sera dénommé, dans la suite, PAN pour Peirce, Asaro, Needleman (Peirce *et al.*, 1982).

En outre (Franciosi, 1984), (Tabourot, 1992), (Delaire *et al.*, 2000), (Tabourot, 2001) ont proposé des modèles basés sur des analyses microstructurales des dislocations.

La variable primaire est la densité de dislocation  $\rho^{(s)}$  sur le système de glissement ( $s$ ).

La cission critique est reliée à la densité de dislocations par

$$\tau_c^{(s)} = \mu b \sqrt{\sum_u \alpha^{su} \rho^u} \quad (2.66)$$

où  $\mu$  est le module de cisaillement,  $b$  le vecteur de Burgers et  $\alpha^{su}$  est le coefficient évaluant la force de l'interaction entre les dislocations des systèmes de glissement ( $s$ ) et ( $u$ ).

A partir des expressions de production et d'annihilation des dislocations, on obtient la loi d'évolution des densités de dislocations :

$$\dot{\rho}^{(s)} = \frac{1}{b} \left( \frac{\sqrt{\sum_u \beta^{su} \rho^u}}{K} - 2y_c \rho^{(s)} \right) \dot{\gamma}^{(s)}, \quad (2.67)$$

où  $K$  est lié au libre parcours moyen d'une dislocation,  $y_c$  est la distance critique entre deux dislocations susceptibles de s'annihiler et  $\beta^{su}$  est également relié à l'interaction entre dislocations mais contrôle spécifiquement l'accumulation des dislocation en forêts sur le système ( $s$ ) en fonction de celles sur le système ( $u$ ). C'est un modèle à base physique qui offre un point de vue compréhensif sur les mécanismes sous-jacents de la déformation plastique.

Aussi, les travaux menés par (Manole, 2010) montrent que la variable densité de dislocations ne rend pas compte de l'hétérogénéité physique que peut receler une microstructure de dislocations. Il propose d'affiner la description en discrétisant les densités de dislocations en classes suivant leur cission critique d'activation. Ce modèle propose également une description, par des variables à base de densités de dislocations, des effets

de l'écroissage cinématique.

Ces différents modèles font intervenir des densités de dislocations dites statistiquement stockées ou distribuées. Leur mouvement sur les systèmes de glissement, à l'intérieur des grains, propage la déformation plastique et le phénomène d'écroissage résulte de leurs interactions. Cependant, la continuité de la déformation d'un grain à l'autre nécessite la présence de dislocations aux joints de grains. Ces dernières permettent d'assurer la compatibilité géométrique du polycristal et sont couramment désignées par l'anglicisme GND pour « Geometrically Necessary Dislocations » (voir (Nye, 1953), (Ashby, 1970)). Les GND sont liées au gradient spatial de la déformation et, prises en compte dans un modèle de plasticité cristalline, permettent de reproduire les effets de taille dits de second ordre (« strain gradient effects », voir entre autres (Fleck *et al.*, 1994), (Gurtin, 2002), (Evers *et al.*, 2004), (Nicaise *et al.*, 2011), (Schwartz, 2011)).

Au rang de ces approches non locales, figurent également les modèles basés sur les milieux continus généralisés de Cosserat. Les micro-rotations, caractéristiques de cette description, permettent d'établir le lien entre la courbure plastique du réseau cristallin et les GND (voir par exemple (Forest *et al.*, 2000)).

Dans nos travaux, la description des effets de taille statistiques (ou du premier ordre) sera privilégiée. En effet, ils semblent prédominants pour des épaisseurs de tôle de l'ordre de la centaine de micromètres (Keller *et al.*, 2012). Ces effets de taille résultent essentiellement de la diminution du nombre de grains dans l'épaisseur et de la distribution d'orientations ; le modèle PAN et le modèle Tabourot (Tabourot, 2001) à base de densités de dislocations statistiquement stockées seront donc employés.

### 2.3.1.3 Loi de comportement

Il s'agit désormais d'établir la loi régissant le comportement mécanique du cristal entier. La loi de comportement élastique s'écrit en formalisme hypoélastique avec le tenseur taux de déformation élastique et sa mesure de taux de contrainte conjuguée comme suit :

$$\overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}}^* = \mathbf{C} : \mathbf{D}^e, \quad (2.68)$$

où  $\mathbf{C}$  est le tenseur des constantes élastiques,  $\overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}}^*$  est le taux de contraintes objectif de Kirchhoff, corotationnel avec la distortion élastique du réseau. La relation précédente s'écrira donc :

$$\overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}}^* = \dot{\boldsymbol{\tau}} - \mathbf{W}^e \cdot \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{W}^e = \mathbf{C} : \mathbf{D}^e = \mathbf{C} : \mathbf{D}^e \quad (2.69)$$

Si on considère la décomposition  $\mathbf{W}^e = \mathbf{W} - \mathbf{W}^p$  et qu'on substitue cette relation dans (2.69), on obtient :

$$\overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}}^* = \dot{\boldsymbol{\tau}} - \mathbf{W} \cdot \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{W} + \mathbf{W}^p \cdot \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{W}^p = \mathbf{C} : \mathbf{D}^e \quad (2.70)$$

En combinant cette relation avec la définition de la dérivée de Jaumann de  $\boldsymbol{\tau}$ , on obtient :

$$\mathbf{C} : \mathbf{D}^e = \overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}} + \mathbf{W}^p \cdot \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{W}^p \quad (2.71)$$

En introduisant la décomposition  $\mathbf{D} = \mathbf{D}^e + \mathbf{D}^p$  dans (2.70), on arrive à :

$$\overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}} = \mathbf{C} : \mathbf{D} - \mathbf{C} : \mathbf{D}^p + \mathbf{W}^p \cdot \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{W}^p \quad (2.72)$$

Les taux de déformation et de rotation plastique sont liés au glissement cristallographique et calculés comme suit :

$$\mathbf{D}^p = \sum_s \dot{\gamma}^{(s)} \mathbf{D}^{(s)} \quad \text{et} \quad \mathbf{W}^p = \sum_s \dot{\gamma}^{(s)} \mathbf{W}^{(s)} \quad (2.73)$$

On peut alors combiner (2.72) et (2.73) pour écrire :

$$\overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}} = \mathbf{C} : \mathbf{D} - \sum_s \dot{\gamma}^{(s)} (\mathbf{C} : \mathbf{D}^{(s)} + \mathbf{W}^{(s)} \cdot \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{W}^{(s)}) \quad (2.74)$$

Pour obtenir la loi de comportement exprimée en fonction de  $\boldsymbol{\sigma}$  tenseur de Cauchy, écrivons la relation entre  $\boldsymbol{\tau}$  et  $\boldsymbol{\sigma}$  :

$$\dot{\boldsymbol{\tau}} = \dot{J} \boldsymbol{\sigma} + J \dot{\boldsymbol{\sigma}} = J (\text{tr}(\mathbf{D}) \boldsymbol{\sigma} + \dot{\boldsymbol{\sigma}}) \quad (2.75)$$

En considérant une configuration de Lagrange réactualisée ( $\mathbf{F}=\mathbf{I}$  et donc  $J = 1$ ) et la décomposition  $\mathbf{D}^e = \mathbf{D} - \mathbf{D}^p$ , on obtient :

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} - \mathbf{W} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{W} + \text{tr}(\mathbf{D}) \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} : \mathbf{D} - \mathbf{C} : \mathbf{D}^p - \mathbf{W}^p \cdot \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{W}^p \quad (2.76)$$

En identifiant la dérivée de Jaumann de  $\boldsymbol{\sigma}$  dans l'expression précédente, on obtient la loi de comportement :

$$\overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C} : \mathbf{D} - (\mathbf{C} : \mathbf{D}^p + \mathbf{W}^p \cdot \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{W}^p) - \boldsymbol{\sigma} \text{tr}(\mathbf{D}) \quad (2.77)$$

En terme de dérivée temporelle, on obtient :

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C} : \mathbf{D} + \mathbf{W} \cdot \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{W} - \boldsymbol{\sigma} \text{tr}(\mathbf{D}) - (\mathbf{C} : \mathbf{D}^p + \mathbf{W}^p \cdot \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{W}^p) \quad (2.78)$$

De plus, la déformation entraîne une évolution de l'orientation cristalline qui est responsable du développement de texture. Dans le formalisme ci, l'évolution de la matrice d'orientation du cristal  $\mathbf{Q}$  est traduite par la relation :

$$\dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{W}^e \cdot \mathbf{Q} = (\mathbf{W} - \mathbf{W}^p) \cdot \mathbf{Q} \quad (2.79)$$

### 2.3.2 Le polycristal

Le comportement du monocristal étant maintenant établi, il faut effectuer la transition d'échelles permettant de passer du monocristal à une structure macroscopique.

Les pièces et structures sont composées de milliers de grains. Deux classes de méthodes existent pour établir un pont entre la loi monocristalline et le calcul de structures à l'échelle macroscopique : les méthodes d'homogénéisation à champs moyens et à champs complets.

#### 2.3.2.1 Méthodes à champs moyens

Ces méthodes requièrent des hypothèses simplificatrices afin d'obtenir des solutions analytiques. Soit une structure constituée d'un matériau (alliage métallique). On commence par déterminer un Volume Elementaire Représentatif ou VER du matériau. Un VER est le plus petit volume de matière contenant assez de constituants élémentaires (ici les grains) pour représenter statistiquement le matériau, et une fois homogénéisé en un Milieu Homogène Equivalent (MHE), reproduire son comportement macroscopique. La taille d'un VER est donc étroitement liée au problème considéré ; le rapport entre la plus petite dimension du VER et la plus grande dimension de son constituant de base constitue toutefois une mesure pertinente. Nous reviendrons plus en détail sur la notion

de VER au chapitre 4. Une fois le VER choisi, tous les grains de même orientation sont réunis en une phase  $i$  à laquelle on associe une fraction volumique  $f_i$ . Le théorème de Hill-Mandel impose que les tenseurs de déformation  $\mathbf{E}$  et de contrainte macroscopique  $\Sigma$  s'écrivent comme la moyenne des tenseurs correspondants locaux  $\epsilon^i$  et  $\sigma^i$  :

$$\mathbf{E} = \sum_i f_i \epsilon^i \quad \text{et} \quad \Sigma = \sum_i f_i \sigma^i \quad (2.80)$$

Si on applique à la structure un tenseur macroscopique de déformation  $\mathbf{E}$  et qu'on cherche à calculer le tenseur macroscopique de contrainte résultant  $\Sigma$ , la démarche de résolution du problème implique les étapes suivantes :

- la localisation de la déformation macroscopique  $\mathbf{E}$  dans chaque phase en une déformation  $\epsilon^i = \mathbf{A}^i : \mathbf{E}$  où  $\mathbf{A}^i$  est le tenseur de localisation de la déformation ;
- la description locale du comportement par une loi de comportement locale (de monocristal)  $\sigma^i = \mathbf{c}^i : \epsilon^i$
- l'opération de moyenne par laquelle on remonte à la réponse effective du VER

$$\Sigma = \langle \mathbf{c}^i : \mathbf{A}^i \rangle : \mathbf{E}$$

où l'opérateur  $\langle \rangle$  représente l'opération de moyenne sur le volume considéré.

Les premiers modèles ainsi développés étaient basés sur des hypothèses fortes. (Taylor, 1938) et (Bishop et Hill, 1951) ont négligé l'élasticité et supposé la déformation plastique locale uniforme et égale à la déformation macroscopique ; par la suite (Lin, 1957) a étendu ces modèles en incluant la déformation élastique. Bien que capables de décrire certains comportements des matériaux (Guilhem, 2011), ces modèles fournissent des modules effectifs trop élevés et surestiment les contraintes. Dans la même logique simplificatrice (champ de contraintes uniforme), les modèles de (Sachs, 1928) et (Batdorf et Budiansky, 1949) sous estiment les modules effectifs. De nombreux autres modèles ont été proposés pour assouplir les restrictions sur les hypothèses de déformation des polycristaux ; les modèles issus des travaux de (Van Houtte *et al.*, 2005) introduisent des relaxations en considérant des configurations de grains particulières avec des degrés de libertés spécifiques.

En se basant sur la solution d'Eshelby (Eshelby, 1957) au problème d'une inclusion uniformément plastifiée plongée dans une matrice infinie élastique, (Kröner, 1961) proposa le modèle dit autocohérent. Il considère chaque phase comme une inclusion plongée

dans une matrice élastoplastique dont les propriétés sont celles du MHE. L'accommodation des déformations entre chaque phase et la matrice est toutefois élastique ce qui rend le modèle trop raide (modules effectifs surévalués). (Hill, 1965) a apporté une solution à ce problème en considérant une formulation incrémentale. Son modèle reste l'une des approches d'homogénéisation par champs moyens les plus employées. Le modèle VPSC (Molinari *et al.*, 1987), (Lebensohn et Tomé, 1993) applique également la solution d'Eshelby aux matériaux métalliques en substituant aux phases les grains.

Enfin, (Pilvin et Cailletaud, 1991) proposent le modèle en  $\beta$ , dérivé des modèles de (Hill, 1965) et (Berveiller et Zaoui, 1978) et inspiré d'une approche phénoménologique. Ils introduisent une variable tensorielle d'accommodation censée limiter les contraintes intergranulaires qui se développent au cours de la déformation. C'est un modèle flexible, capable de reproduire des réponses macroscopiques sous divers chargements et qui est largement mis en oeuvre (Gérard, 2008), (Guilhem, 2011).

### 2.3.2.2 Méthodes à champs complets

En dépit des améliorations proposées au fil des années, les méthodes à champs moyens restent limitées par :

- les (fortes) hypothèses sur la forme des grains ;
- l'hypothèse d'homogénéité des champs mécaniques au sein des phases ;
- la non représentation spatiale des grains (effets de voisinage non reproduits) ;
- la simplicité des conditions aux limites imposables.

Peirce (Peirce *et al.*, 1982) fut l'un des premiers à coupler la théorie de la plasticité cristalline à la méthode des éléments finis laissant entrevoir d'intéressantes possibilités. En effet, la méthode des éléments finis assure l'équilibre des forces et la compatibilité des déplacements entre les éléments finis et permet d'analyser des problèmes sous des conditions aux limites complexes et diverses ; elle présente également l'avantage de fournir une représentation spatiale des problèmes et possède un côté démonstratif et visuel qui en fait un outil plébiscité en ingénierie des structures. L'augmentation de la puissance des ordinateurs permet depuis une vingtaine d'année la modélisation et l'analyse des structures à l'échelle du grain, pavant la voie à la Crystal Plasticity Finite Element Method (CPFEM). Dans cette approche dite d'homogénéisation par éléments finis, la structure formée de grains est maillée par des éléments finis aux points d'intégration desquels on implante une loi monocristalline comme illustré sur la [Figure 2.9](#).

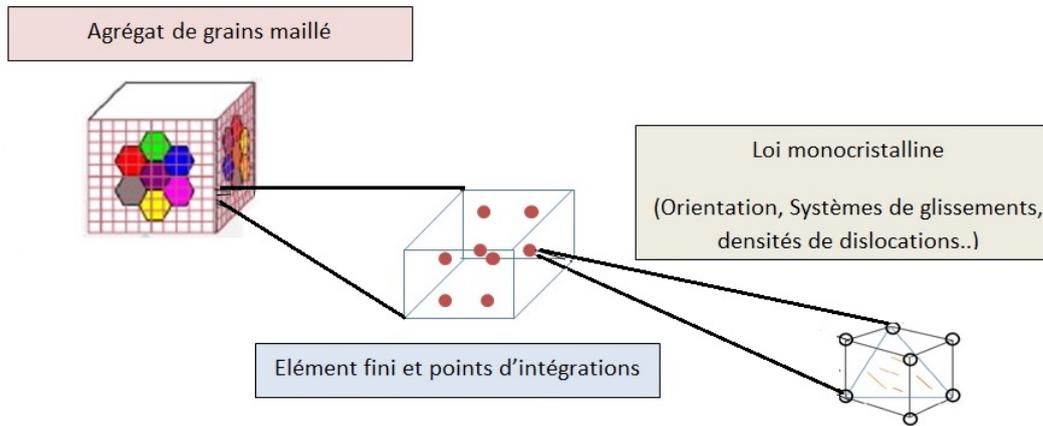


FIGURE 2.9: Homogénéisation par éléments finis.

La compatibilité des déformations entre les grains est assurée par la méthode des éléments finis. Aucune hypothèse n'est nécessaire sur la forme des grains ou les champs mécaniques locaux et l'hétérogénéité inter et intragranulaire peut être décrite. De fait, la CPFEM présente un large panel d'applications possibles (Roters *et al.*, 2010) et s'impose de plus en plus comme une approche de modélisation viable du comportement de matériaux polycristallins. Cependant, elle nécessite une représentation numérique de la microstructure qui peut conduire à des simplifications peu réalistes comme par exemple sur la description des joints de grains. De plus, pour des structures et pièces importantes les temps de calcul restent souvent trop importants pour une utilisation industrielle efficace et l'on est souvent obligé de travailler sur des agrégats de grains qui constituent des VER; une alternative consiste à implémenter des méthodes à champs moyens à un niveau intermédiaire (au point d'intégration par exemple).

Néanmoins, au regard des caractéristiques des pièces étudiées dans ces travaux (peu de grains dans des épaisseurs inférieures à 150 microns), le coût en temps de calcul reste raisonnable. Nous avons ainsi la possibilité d'effectuer un calcul de structures à une telle échelle sans hypothèses restrictives.

Enfin, des méthodes spectrales basées sur les transformées de Fourier rapides ont été mises en oeuvre pour résoudre le système différentiel exprimant la compatibilité et l'équilibre. Ces méthodes couplées à la plasticité cristalline, (A. Lebensohn, 2001), ont engendré une nouvelle classe de modèles dits CPFPT pour Crystal Plasticity Fast Fourier Transforms. Comparativement à la CPFEM, la méthode CPFPT jouit d'une efficacité numérique supérieure mais ne peut être appliquée qu'à des microstructures périodiques.

## 2.4 Conclusion

Deux approches de modélisation du comportement mécanique de matériaux polycristallins ont été présentées dans ce chapitre. L'approche macroscopique est basée sur la théorie de la plasticité dite phénoménologique ; elle permet de reproduire des réponses matériaux par le biais de variables internes et de paramètres ajustables dont le sens physique peut ne pas toujours être clairement établi. Néanmoins, elle fournit un cadre de description aux concepts plus accessibles que celui de la plasticité cristalline. Cette dernière part d'une échelle d'analyse plus fine, celle du monocristal, dont elle décrit le comportement, pour remonter à l'échelle de la structure. Elle nécessite un schéma de transition d'échelles, ici une méthode à champs complets qui implique une modélisation géométrique de la microstructure. Ces différents aspects laissent présager une mise en oeuvre plus complexe que pour l'approche phénoménologique. Cependant, les mécanismes physiques à l'origine de l'écoulement plastique et la représentation de la microstructure sont la promesse d'une modélisation fine et plus conforme au comportement réel de la structure. Ceci n'en est que plus vrai pour les tôles ultrafines dans lesquelles le faible nombre de grains met en exergue l'hétérogénéité microstructurale des matériaux métalliques. Pour de telles applications, l'emploi d'une modélisation phénoménologique basée sur l'hypothèse d'homogénéité de la matière devient questionnable.

Dans ces travaux, afin de disposer d'un cadre de description relativement complet, le choix a été fait de s'appuyer sur les deux types de modélisation. Cela nous laisse la possibilité de passer de l'une à l'autre lorsque le besoin s'en fera ressentir, et de pouvoir les comparer lorsque les conditions sont réunies. Les outils numériques permettant d'utiliser ces approches de modélisation dans des calculs de structure sont présentés au chapitre suivant.

## Chapitre 3

# Outils numériques

L'implantation numérique ainsi que la validation des modèles présentés au chapitre précédent est détaillée ici. Le logiciel ABAQUS sera l'outil d'analyse employé dans ces travaux. Outre les modèles disponibles par défaut, il offre la possibilité à l'utilisateur de mettre en oeuvre des lois de comportement particulières au travers de routines spécifiques. La réponse (thermo)mécanique est déterminée par ces routines utilisateurs au point d'intégration ce qui permet de s'affranchir de tout développement spécifiquement lié à la méthode éléments finis.

En fin de chapitre, les méthodes de génération de microstructures numériques seront explicitées.

### 3.1 Implantation du modèle de plasticité cristalline

Le cadre de modélisation viscoplastique a été retenu dans ces travaux pour deux raisons : d'une part, comme révélé par la campagne expérimentale de caractérisation du chapitre 4, les matériaux étudiés présentent une sensibilité visqueuse qui, tout en étant faible n'est pas négligeable. D'autre part, la plasticité cristalline non visqueuse conduit à une indétermination concernant les systèmes de glissements activés au cours de la déformation. Les procédures mentionnées dans la littérature pour lever cette ambiguïté s'accompagnent d'un coût numérique parfois considérable qui se rajoute au temps de

calcul (déjà significatif) nécessaire pour déterminer l'état de contraintes aux points d'intégration. Dans l'optique d'une utilisation des outils développés sur des cas industriels, la viscoplasticité représente alors un bon compromis entre l'efficacité numérique et la précision des calculs.

Des algorithmes explicites sont retenus pour l'intégration de la loi de comportement. En effet, les algorithmes implicites, basés sur une variable primaire (taux de glissement, gradient de déformation plastique...) dont l'estimation initiale est corrigée par des méthodes itératives de type Newton-Raphson, présentent un coût numérique plus élevé que celui des algorithmes explicites pour une précision comparable ((Ling *et al.*, 2005), (Dumoulin *et al.*, 2009)). De plus, dans le cadre d'applications à des procédés de mise en forme, les fortes non-linéarités géométriques et les conditions de contact fluctuantes entre les outils et la tôle nécessitent forcément, indépendamment de la loi de comportement employée, de petits incréments de chargement. Cette caractéristique confère de facto un avantage certain aux algorithmes explicites en termes de compromis performance - précision - robustesse.

### 3.1.1 Implantation dans ABAQUS/Explicit

#### 3.1.1.1 ABAQUS/Explicit et VUMAT

Le solveur dynamique explicite ABAQUS/Explicit a été conçu pour résoudre des problèmes dynamiques. Cependant, il est appliqué avec succès pour des problèmes quasi-statiques et l'expérience montre qu'il se révèle souvent plus efficace que le solveur implicite ABAQUS/Standard. En effet, ABAQUS/Standard doit s'assurer que l'incrément de déplacement calculé vérifie au mieux l'équilibre mécanique global ; pour cela il effectue des corrections itératives sur la solution par un algorithme de type Newton-Raphson jusqu'à atteindre une précision satisfaisante. Il passe en outre par la formulation et l'inversion d'une matrice tangente, opération également très coûteuse en temps de calcul lorsque le modèle contient un grand nombre de noeuds. De plus, la convergence de l'algorithme de correction n'est pas assurée pour des conditions de contact complexes. Par contre, ABAQUS/Explicit détermine l'incrément de déplacement après intégration temporelle explicite de la relation d'équilibre dynamique :

$$\ddot{\underline{u}} = \mathbf{M}^{-1} \cdot (\underline{F} - \underline{I}) \quad (3.1)$$

avec  $\underline{u}$  le vecteur des déplacements nodaux,  $\mathbf{M}$  la matrice de masse,  $\underline{F}$  le vecteur des efforts externes et  $\underline{I}$  celui des efforts internes.

L'équilibre mécanique n'est pas vérifié et aucune itération n'est faite ; les erreurs s'accroissent à chaque intégration, la stabilité est donc conditionnelle et il faut utiliser des pas de temps suffisamment réduits. Le pas de temps doit être inférieur au temps nécessaire à une onde de compression pour se propager à travers le plus petit élément du maillage, soit :

$$\Delta t \leq \left( \frac{L^e}{c_d} \right) \quad \text{avec } c_d = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \quad (3.2)$$

où  $L^e$  est une longueur caractéristique d'élément,  $c_d$  est la vitesse de propagation d'une onde de compression,  $\lambda$  et  $\mu$  sont les coefficients de Lamé du matériau et  $\rho$  sa densité.

La possibilité fournie aux utilisateurs par ABAQUS/Explicit pour définir une loi de comportement est la routine VUMAT (Vectorized User MATerial). A partir des variables fournies en entrée par ABAQUS/Explicit à chaque incrément, elle a pour objectif de calculer le tenseur de contraintes de Cauchy au point d'intégration. Aussi, bien que la VUMAT oeuvre au point d'intégration, les réponses d'un certain nombre de points (NBLOCK) sont évaluées simultanément lors d'un seul appel de la routine. Cette structure vectorisée permet d'accroître significativement l'efficacité numérique en répartissant le nombre de points évalués sur différents processeurs via les procédures de calcul parallèle. Le formalisme de la VUMAT comporte toutefois certaines particularités dont il faut tenir compte lors de l'implantation d'un modèle.

En effet, dans le souci de garantir l'objectivité incrémentale des lois de comportement, le repère de travail employé par ABAQUS/Explicit est le référentiel tournant associé à la dérivée de Green-Naghdi dénommé référentiel en rotation propre. Comme détaillé au chapitre 2, ce référentiel est généré par la rotation pure  $\mathbf{R}$  issue de la décomposition polaire du gradient de la transformation  $\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U}$  où  $\mathbf{U}$  est un tenseur d'élongation pure. Pour l'implantation d'une loi de plasticité cristalline au travers d'une VUMAT, on peut donc distinguer trois repères :

- le référentiel global qui est fixe dans l'espace ;
- le référentiel en rotation propre qui suit la rotation moyenne de la matière au point matériel (au sens de Green-Naghdi), dans lequel le code de calcul travaille et exprime les tenseurs. Nous le désignerons par l'anglicisme MECS (Material Element Coordinate System) et un tenseur  $\{\bullet\}$  exprimé dans ce référentiel s'écrira  $\{\hat{\bullet}\}$  ;

- le référentiel cristallographique défini par trois axes cristallographiques et qui suit la rotation du réseau cristallin. Il sera dénoté CACS (Crystal Associated Coordinate System). Un tenseur  $\{\bullet\}$  exprimé dans le CACS sera noté  $\{\tilde{\bullet}\}$ .

### 3.1.1.2 Algorithme en repère global

La loi de comportement telle que formulée en 2.3.1.3 est exprimée dans le repère global. Le tenseur des contraintes ainsi déterminé dans le repère global doit être retourné, au code, exprimé dans le MECS. Pour ce faire, le tenseur de rotation  $\mathbf{R}$  qui transforme une base orthonormée directe du repère fixe en une base orthonormée directe du MECS est employé. ABAQUS/Explicit 6.11 fournit comme entrée de la routine VUMAT le gradient de la transformation en début (à  $t$ ) et en fin d'incrément (à  $t + \Delta t$ ), notés respectivement  $\mathbf{F}_n$  et  $\mathbf{F}_{n+1}$ . De même, le tenseur d'élongation pure à droite  $\mathbf{U}$  est fourni en début et en fin d'incrément, soit  $\mathbf{U}_n$  et  $\mathbf{U}_{n+1}$ . Soulignons ici que d'après la documentation ([Hibbitt et al., 1992](#)), le tenseur  $\mathbf{U}$  fourni est bien exprimé dans le MECS. En effet,  $\mathbf{F}$  et  $\mathbf{R}$  sont des tenseurs mixtes, qui ont un pied dans les deux bases à savoir celle du repère global et celle du MECS. On écrit en terme de composantes :

$$F_{iJ} = R_{iK} U_{KJ} \quad (3.3)$$

où les indices en majuscule sont relatifs à la base de Green-Naghdi et ceux en minuscule à la base globale. Ainsi, les tenseurs de rotation en début d'incrément  $\mathbf{R}_n$  et en fin d'incrément  $\mathbf{R}_{n+1}$  sont obtenus par la relation :

$$\mathbf{R} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{U}^{-1} \quad (3.4)$$

Les variables d'état sont stockées pour chaque point d'intégration en fin d'incrément dans un vecteur et récupérées au début de l'incrément suivant. Pour l'algorithme en repère global, on compte comme variables d'états :

- $\mathbf{F}^e$  le gradient élastique ;
- $\mathbf{F}^p$  le gradient plastique ;
- $\tau_c^{s=1..12}$  les cissions critiques d'activation des systèmes de glissement ;

- $\rho^{s=1..12}$  les densités sur les systèmes de glissement si le modèle d'écroissage de (Tabourot, 2001) est employé ;
- $\gamma$  le glissement total sur tous les systèmes ;
- $\mathbf{Q}$  la matrice d'orientation.

Pour garder une certaine lisibilité, les variables d'état intégrées numériquement (exception faite de  $\mathbf{Q}$ ) seront regroupées dans un pseudo-vecteur  $\mathbf{H} = (\mathbf{F}^p, \tau_c^s, \rho^s, \gamma)$ . De manière similaire, nous introduisons l'ensemble  $\mathbf{G}_n = (\dot{\gamma}^s)_n$  des taux de glissement calculés à l'instant  $n$ . Précisons que dans le schéma ici adopté, les taux de glissement à l'instant  $n$  sont estimés explicitement à partir de données à l'instant  $n - 1$ .

On peut donc écrire sous une forme globale :

$$\dot{\mathbf{H}} = \mathbf{h}(t, \mathbf{H}, \mathbf{G}) \quad (3.5)$$

où  $\mathbf{h}$  représente les différentes équations d'évolution des variables internes.

L'intégration numérique des relations est effectuée par des schémas explicites de Runge-Kutta d'ordre 1 (méthode d'Euler explicite), 2 (méthode du point milieu) ou 4. On considère que l'indice  $n$  correspond à l'instant  $t_n$  et que l'indice  $n + 1$  renvoie à l'instant  $t_n + \Delta t$  où  $\Delta t$  est l'intervalle de temps entre deux instants consécutifs.

En employant la forme unifiée des trois méthodes de Runge-Kutta évoquées, on obtient pour un schéma d'ordre  $N$  :

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{H}_i &= \mathbf{h}(t_n + a_i \Delta t, \mathbf{H}_n + a_i \Delta \mathbf{H}_{i-1}, \mathbf{G}_i) \Delta t \\ \mathbf{H}_{n+1} &= \mathbf{H}_n + \sum_{i=1}^N b_i \Delta \mathbf{H}_i \end{aligned} \quad (3.6)$$

avec les coefficients de pondération suivants

$$\begin{array}{lll} N = 1 & a_i = \{0\} & b_i = \{1\} \\ N = 2 & a_i = \left\{0, \frac{1}{2}\right\} & b_i = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\} \\ N = 4 & a_i = \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right\} & b_i = \left\{\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}\right\} \end{array} \quad (3.7)$$

Des relations similaires à celles de (3.6) sont établies pour l'intégration du tenseur de contraintes et l'algorithme en repère global est décrit dans le Tableau 3.1.

L'actualisation de la matrice d'orientation se fait par une intégration avec la formule de Rodrigues ((Raphanel *et al.*, 2004), (Dai, 2015)) pour le calcul du terme exponentiel; cette méthodologie permet de garantir l'orthogonalité des matrices d'orientation. L'orientation initiale donne la matrice de rotation  $\mathbf{Q}_0$  fonction des angles d'Euler  $\varphi_1$ ,  $\phi$ ,  $\varphi_2$  (en convention de Bunge) et a pour expression :

$$\mathbf{Q}_0 = \begin{bmatrix} c(\varphi_1)c(\varphi_2) - s(\varphi_1)c(\phi)s(\varphi_2) & -c(\varphi_1)s(\varphi_2) - s(\varphi_1)c(\phi)c(\varphi_2) & s(\phi_1)s(\phi) \\ s(\varphi_1)c(\varphi_2) + c(\varphi_1)c(\phi)c(\varphi_2) & -s(\varphi_1)s(\varphi_2) + c(\varphi_1)c(\phi)c(\varphi_2) & -c(\varphi_1)s(\phi) \\ s(\varphi_2)s(\phi) & s(\phi)c(\varphi_2) & c(\phi) \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

où  $c(\varphi) = \cos(\varphi)$  et  $s(\varphi) = \sin(\varphi)$ .

### 3.1.1.3 Validation de l'implantation

Des simulations d'essais de traction et de cisaillement sur monocristal (un seul élément fini) effectuées par (Raphanel *et al.*, 2004) ont été reproduites avec la VUMAT développée. (Raphanel *et al.*, 2004) mettent en oeuvre, dans un code EF implicite (SARPP), un algorithme explicite de plasticité cristalline avec un schéma numérique de Runge-Kutta d'ordre 2. Une maille cristalline de type CFC est choisie et le modèle d'érouissage PAN, dont les paramètres sont listés dans le Tableau 3.2, est employé. La vitesse de chargement imposée en traction comme en cisaillement est de  $0,001 \text{ s}^{-1}$ .

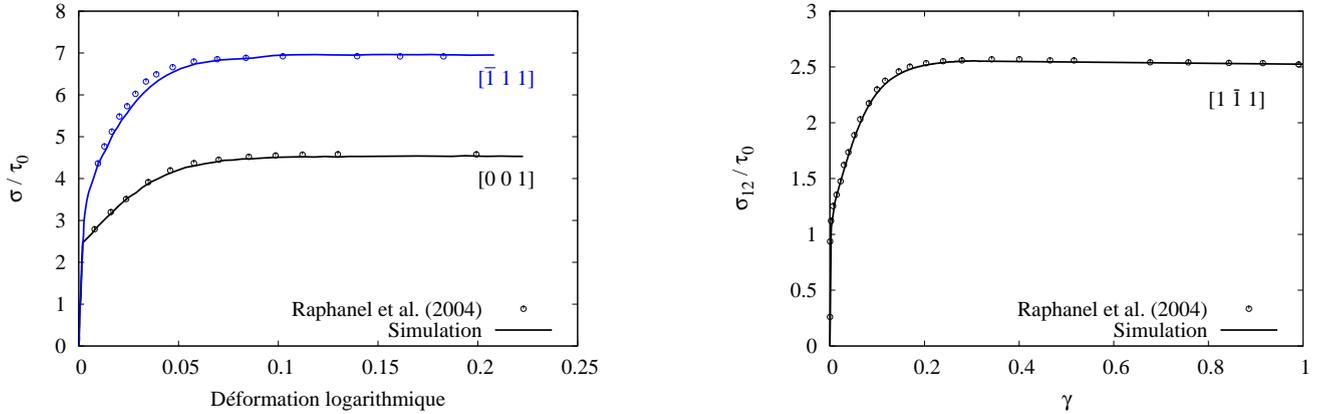
En outre, différentes orientations initiales sont attribuées aux monocristaux; l'axe cristallographique initialement colinéaire à la direction du chargement imposé est spécifié sur la Figure 3.1 qui illustre la comparaison entre les résultats de la présente approche et ceux de (Raphanel *et al.*, 2004).

- Initialisation :  $\tilde{\mathbf{C}}; \tilde{\mathbf{S}}_0^{s=1..12}; \mathbf{F}^e = \mathbf{F}^p = \mathbf{I}; \mathbf{Q}_0; \tau_{c_0}^{s=1..12}, \rho_0^{s=1..12}, \gamma = 0$
- Données d'entrée :  $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_n, \mathbf{F}_{n+1}, \mathbf{F}_n, \hat{\mathbf{U}}_{n+1}, \hat{\mathbf{U}}_n$ 
  1. Récupération des variables d'état
    - $\mathbf{F}_n^e, \mathbf{Q}_n, \mathbf{H}_n = (\mathbf{F}^p, \tau_c^s, \rho^s, \gamma)_n$
  2. Transport de  $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_n$  du MECS vers le repère fixe
    - $\mathbf{R}_n = \mathbf{F}_n \cdot \hat{\mathbf{U}}_n^{-1}$
    - $\boldsymbol{\sigma}_n = \mathbf{R}_n \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}_n \cdot \mathbf{R}_n^T$
  3. Transport de  $\tilde{\mathbf{C}}$  et des  $\tilde{\mathbf{S}}_0^s$  du CACS vers le repère fixe
    - $\mathbf{C} = \mathbf{Q}_n \cdot \mathbf{Q}_n \cdot \tilde{\mathbf{C}} \cdot \mathbf{Q}_n^T \cdot \mathbf{Q}_n^T$
    - Faire de  $s=1$  à 12 :  $\mathbf{S}_0^s = \mathbf{Q}_0 \cdot \tilde{\mathbf{S}}_0^s \cdot \mathbf{Q}_0^T$
  4. Transport de  $\mathbf{S}_0^s$  en début d'incrément
    - Faire de  $s=1$  à 12 :  $\mathbf{S}_n^s = \mathbf{F}_n^e \cdot \mathbf{S}_0^s \cdot \mathbf{F}_n^{e-1}$  ;  $\mathbf{M}_n^s = \text{sym} \{ \mathbf{S}_n^s \}$
  5. Calcul des taux de déformation et de rotation (cinématiques)
    - $\mathbf{D}_{n+1} = \text{sym} \{ \dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}_{n+1}^{-1} \}$  ;  $\mathbf{W}_{n+1} = \text{asym} \{ \dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}_{n+1}^{-1} \}$
  6. Boucle de Runge-Kutta : faire de  $i=1$  à  $N$ 
    - $\boldsymbol{\sigma}_i = \boldsymbol{\sigma}_n + a_i \Delta \boldsymbol{\sigma}_{i-1}$  ;  $\mathbf{H}_i = \mathbf{H}_n + a_i \Delta \mathbf{H}_{i-1}$
    - Faire de  $s=1$  à 12 :  $\tau^s = \boldsymbol{\sigma}_i : \mathbf{M}_n^s$  ;  $\dot{\gamma}^s = \dot{\gamma}_0 \text{signe} \{ \tau^s \} \left| \frac{\tau^s}{\tau_{c_i}^s} \right|$
    - Calcul de  $\mathbf{D}^p$  et  $\mathbf{W}^p$  (2.55)
    - Calcul de  $\Delta \boldsymbol{\sigma}_i$  et  $\Delta \mathbf{H}_i$
  7. Mise à jour des variables
    - $\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}_n + \sum_{i=1}^N b_i \Delta \boldsymbol{\sigma}_i$
    - $\mathbf{H}_{n+1} = \mathbf{H}_n + \sum_{i=1}^N b_i \Delta \mathbf{H}_i$
    - $\mathbf{F}_{n+1}^e = \mathbf{F}_{n+1} \cdot (\mathbf{F}_{n+1}^p)^{-1}$
  8. Actualisation de la matrice d'orientation (calcul de l'exponentielle par la formule de Rodrigues)
    - $\mathbf{Q}_{n+1} = \exp \left( \Delta t (\mathbf{W} - \mathbf{W}^p)_{n+1} \right) \cdot \mathbf{Q}_n$
  9. Transport de  $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$  du repère fixe vers le MECS
    - $\mathbf{R}_{n+1} = \mathbf{F}_{n+1} \cdot \hat{\mathbf{U}}_{n+1}^{-1}$
    - $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1} = \mathbf{R}_{n+1}^T \cdot \boldsymbol{\sigma}_{n+1} \cdot \mathbf{R}_{n+1}$
- Stocker les variables d'état et retourner  $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}$  au solveur

TABLEAU 3.1: Algorithme de la routine VUMAT en repère global.

E	$\nu$	$n$	$q$	$\dot{\gamma}_0$	$\tau_0$	$h_0/\tau_0$	$\tau^*/\tau_0$
1	0,3	50	1	0,001	0,001	8,9	1,8

TABLEAU 3.2: Paramètres matériau utilisés pour les simulations.



(a) Traction uniaxiale sur un monocristal

(b) Cisaillement sur un monocristal

FIGURE 3.1: Comparaison des prédictions de la VUMAT (repère global) par rapport à (Raphanel *et al.*, 2004).  $\sigma$  est la contrainte dans la direction de traction et  $\sigma_{12}$  est la contrainte de cisaillement dans le plan (12).

Un bon accord entre les deux approches est obtenu pour les essais de traction [Figure 3.1\(a\)](#) en utilisant un schéma d'intégration numérique d'Euler. Pour ce qui est du test en cisaillement qui induit des rotations importantes des systèmes de glissement, le schéma de Runge-Kutta d'ordre 4 fut employé afin d'imposer des pas de temps relativement importants ( $\Delta t = 0.1$  comme dans (Raphanel *et al.*, 2004)), ce qui conduit à des résultats satisfaisants sur la [Figure 3.1\(b\)](#).

### 3.1.1.4 Algorithme en repère cristallographique (CACS)

L'implantation réalisée au paragraphe précédent implique de multiples transferts de tenseurs entre trois référentiels pour chaque point d'intégration et à chaque incrément. Dans le cas de simulations de procédés nécessitant un grand nombre d'éléments finis et d'incrément de calcul, on peut intuitivement envisager des difficultés portant sur :

- l’efficacité : les transferts entre les différents référentiels étant coûteux en temps de calcul ;
- la précision numérique : la multiplication des opérations au point matériel induisant inéluctablement une accumulation d’erreurs numériques.

Ces différentes raisons ont poussé à modifier l’algorithme présenté dans le [Tableau 3.1](#). Plusieurs auteurs (([Guan et al., 2006](#)), ([Zamiri et al., 2007](#)), ([Li et al., 2008](#)), ([Rousselier et al., 2009](#)), ([Segurado et al., 2012](#)), ([Zhang et al., 2012](#))) se sont intéressés à l’implantation de la plasticité cristalline en repères tournants. L’approche mise en oeuvre ici est relative aux travaux de ([Amirkhizi et Nemat-Nasser, 2007](#)).

Dans le MECS, la loi de comportement du monocristal est incrémentalement objective et s’écrit :

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \hat{\mathbf{C}} : (\hat{\mathbf{D}} - \hat{\mathbf{D}}^p) - \hat{\boldsymbol{\sigma}} \operatorname{tr}(\hat{\mathbf{D}}) \quad (3.9)$$

Cette relation exprimée dans le CACS garde sa forme compacte :

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \tilde{\mathbf{C}} : (\tilde{\mathbf{D}} - \tilde{\mathbf{D}}^p) - \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \operatorname{tr}(\tilde{\mathbf{D}}) \quad (3.10)$$

ce qui présente certains avantages. Le tenseur des constantes élastiques d’un cristal anisotrope s’exprime par défaut dans ce repère ; aucun transport tensoriel n’est donc requis pour tenir compte de l’anisotropie élastique. Aussi, étant donné que le CACS tourne avec le réseau cristallin, les vecteurs caractéristiques des systèmes de glissement ( $\tilde{\underline{m}}^{(s)}$  et  $\tilde{\underline{n}}^{(s)}$ ) sont invariants (si on les considère continuellement orthonormés) ou simplement étirés élastiquement. En choisissant le CACS comme repère de travail, on s’affranchit donc d’un certain nombre d’opérations numériques sur les tenseurs de Schmid. Néanmoins, cette approche impose de suivre l’évolution de l’orientation du CACS par rapport à celle du MECS (matrice  $\mathbf{O}$ ) au cours de la déformation. Pour ce faire, on se base sur une distinction claire entre la rotation du réseau cristallin (dite élastique)  $\mathbf{R}^*$  et la rotation de la matière (dite plastique) par rapport au réseau cristallin  $\mathbf{R}^{**}$  ([Nemat-Nasser, 2004](#)). On peut alors définir la rotation totale de l’élément matériel comme une composition de ces deux tenseurs de rotation. Dans le contexte de la décomposition polaire du gradient de la transformation  $\mathbf{F}$  en tenseurs de rotation  $\mathbf{R}$  et d’élongation pure  $\mathbf{U}$ , on peut considérer l’égalité suivante :

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}^* \cdot \mathbf{R}^{**} \quad (3.11)$$

Ainsi, vu que le MECS est généré par  $\mathbf{R}$ , la position du CACS se déduira de celle du MECS à une rotation plastique près. La relation d'évolution de la matrice d'orientation  $\mathbf{O}$  du cristal (donc du CACS) s'écrira

$$\dot{\mathbf{O}} = \widetilde{\mathbf{W}}^p \cdot \mathbf{O} \quad (3.12)$$

où  $\widetilde{\mathbf{W}}^p$  est le spin plastique. La matrice  $\mathbf{O}$  permet de passer du CACS au MECS et inversement (voir Figure 3.2).

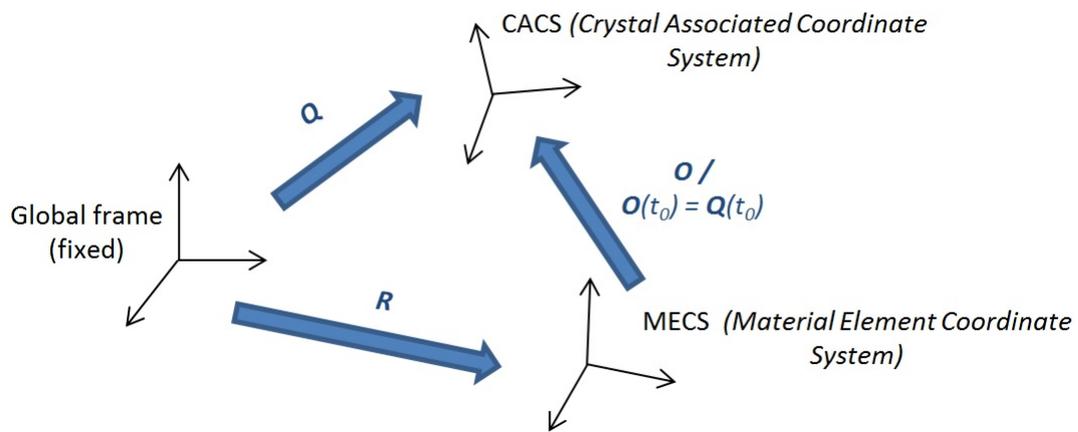


FIGURE 3.2: Différents systèmes de coordonnées mis en jeu (Adzima *et al.*, 2016).

Il est clair qu'à l'instant initial ( $t = 0$ ), le MECS et le repère global coïncident par défaut car  $\mathbf{R} = \mathbf{I}$ .

Par ailleurs, le taux de déformation  $\hat{\mathbf{D}}$  dans le MECS est fonction uniquement du tenseur d'élongation  $\mathbf{U}$  fourni par ABAQUS/Explicit directement exprimé dans ce repère. En partant de la décomposition polaire de  $\mathbf{F}$  et en exploitant la propriété d'orthogonalité du tenseur de rotation ( $\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}^T = \mathbf{I} \Rightarrow \dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R}^T + \mathbf{R} \dot{\mathbf{R}}^T = \mathbf{0}$ ) on obtient en effet :

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{D}} &= \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{D}\mathbf{R} = \mathbf{R}^T \cdot \text{sym}\{\mathbf{L}\} \mathbf{R} \\ &= \mathbf{R}^T \cdot \text{sym}\left\{\left(\dot{\mathbf{R}} \cdot \hat{\mathbf{U}} + \mathbf{R} \cdot \dot{\hat{\mathbf{U}}}\right) \left(\mathbf{U}^{-1} \mathbf{R}^T \cdot\right)\right\} \mathbf{R} \\ &= \mathbf{R}^T \text{sym}\left\{\mathbf{R} \dot{\hat{\mathbf{U}}} \hat{\mathbf{U}}^{-1} \mathbf{R}^T\right\} \mathbf{R} \\ &= \text{sym}\left\{\dot{\hat{\mathbf{U}}} \hat{\mathbf{U}}^{-1}\right\} \end{aligned} \quad (3.13)$$

- Initialisation :  $\tilde{\mathbf{C}}; \tilde{\mathbf{S}}_0^{s=1..12}; \tilde{\mathbf{F}}^e = \tilde{\mathbf{F}}^p = \mathbf{I}; \mathbf{Q}_0; \tau_{c_0}^{s=1..12}, \rho_0^{s=1..12}, \gamma = 0$
- Données d'entrée :  $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_n, \hat{\mathbf{U}}_{n+1}, \hat{\mathbf{U}}_n$ 
  1. Récupération des variables d'état
    - $\tilde{\mathbf{F}}_n^e, \mathbf{Q}_n, \tilde{\mathbf{H}}_n = \left( \tilde{\mathbf{F}}^p, \tau_c^s, \rho^s, \gamma \right)_n$
  2. Calcul des taux de déformation dans le MECS
    - $\hat{\mathbf{D}}_{n+1} = \text{sym} \left\{ \hat{\mathbf{U}} \cdot \hat{\mathbf{U}}_{n+1}^{-1} \right\}$
  3. Transport de  $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_n, \hat{\mathbf{D}}_{n+1}$  et  $\hat{\mathbf{U}}_{n+1}$  du MECS vers le CACS
    - $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_t = \mathbf{Q}_n^T \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}_t \cdot \mathbf{Q}_n$
    - $\tilde{\mathbf{D}}_{n+1} = \mathbf{Q}_n^T \cdot \hat{\mathbf{D}}_{n+1} \cdot \mathbf{Q}_n$
    - $\tilde{\mathbf{U}}_{n+1} = \mathbf{Q}_n^T \cdot \hat{\mathbf{U}}_{n+1} \cdot \mathbf{Q}_n$
  4. Actualisation de  $\tilde{\mathbf{S}}^s$  (élongation) / Calcul de sa partie symétrique
    - Faire de  $s=1$  à 12  $\tilde{\mathbf{S}}_n^s = \tilde{\mathbf{F}}_n^e \cdot \tilde{\mathbf{S}}_c^s \cdot \tilde{\mathbf{F}}_n^{e^{-1}}$  /  $\tilde{\mathbf{M}}_n^s = \text{sym} \left\{ \tilde{\mathbf{S}}_n^s \right\}$
  5. Boucle de Runge-Kutta : faire de  $i=1$  à  $N$ 
    - $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_i = \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_n + a_i \Delta \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{i-1}; \tilde{\mathbf{H}}_i = \tilde{\mathbf{H}}_n + a_i \Delta \tilde{\mathbf{H}}_{i-1}$
    - Faire de  $s=1$  à 12  $\tau^s = \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_i : \tilde{\mathbf{M}}_n^s$  /  $\dot{\gamma}^s = \dot{\gamma}_0 \text{signe} \left\{ \tau^s \right\} \left| \frac{\tau^s}{\tau_{c_i}^s} \right|$
    - Calcul de  $\Delta \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_i$  et  $\Delta \tilde{\mathbf{H}}_i$
  6. Mise à jour des variables
    - $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1} = \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_n + \sum_{i=1}^N b_i \Delta \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_i$
    - $\tilde{\mathbf{H}}_{n+1} = \tilde{\mathbf{H}}_n + \sum_{i=1}^N b_i \Delta \tilde{\mathbf{H}}_i$
    - $\tilde{\mathbf{F}}_{n+1}^e = \tilde{\mathbf{U}}_{n+1} \cdot \tilde{\mathbf{F}}_{n+1}^p$
  7. Actualisation de la matrice d'orientation
    - $\mathbf{O}_{n+1} = \exp \left( \Delta t \left( \tilde{\mathbf{W}}_{n+1}^p \right) \right) \cdot \mathbf{O}_n$
  8. Transport de  $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}$  du CACS vers le MECS
    - $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1} = \mathbf{Q}_{n+1} \cdot \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1} \cdot \mathbf{Q}_{n+1}^T$
- Stocker les variables d'état et retourner  $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}$  au solveur

TABLEAU 3.3: Algorithme de la routine VUMAT en repère cristallographique (CACS).

ce qui est cohérent avec le fait que dans le MECS, seule la composante d'élongation  $\mathbf{U}$  du gradient de la transformation  $\mathbf{F}$  est prise en compte. Par conséquent, il est possible de se passer du repère global et d'effectuer une implantation en ne considérant que le MECS et le CACS.

L'algorithme proposé pour l'implantation dans le CACS est résumé dans le [Tableau 3.3](#).

### 3.1.1.5 Analyse comparative des implantations en repères fixe et cristallographique

Nous établissons ici une comparaison des deux algorithmes sur des simulations de trajets de chargement sur un monocristal. Il est supposé être de type CFC et provenir du cuivre. Son orientation initiale est du type Brass caractérisé par le triplet d'angles d'Euler (en convention de Bunge) suivant  $(35^\circ, 45^\circ, 0^\circ)$ . La vitesse de déplacement imposée est de  $10^{-2} \text{ s}^{-1}$  et les paramètres utilisés pour les simulations sont renseignés dans le [Tableau 3.4](#). La méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 est employée dans toutes les simulations.

Les deux algorithmes sont d'abord comparés sur la réponse mécanique du monocristal au cours d'essais de traction uniaxiale et de cisaillement. Le monocristal est maillé avec un élément cubique à huit noeuds et intégration réduite (un point de Gauss) dénommé C3D8R dans ABAQUS.

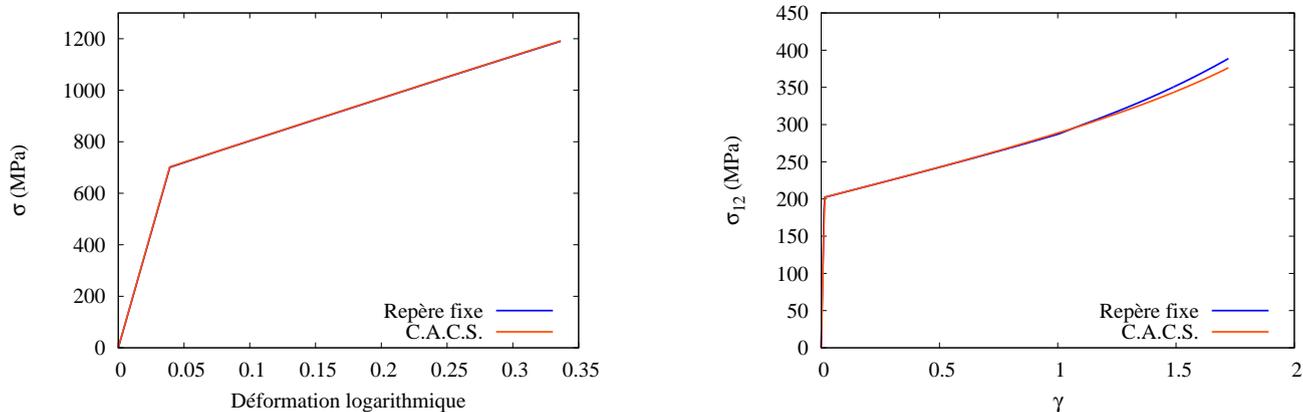
$c_{11}$	$c_{12}$	$c_{44}$	$n$	$q$	$\dot{\gamma}_0$	$h_0$	$\tau_0$	$\tau^*$
166 GPa	120 GPa	76 GPa	50	1,4	0,001	100	175 MPa	700 MPa

TABLEAU 3.4: Paramètres matériau utilisés dans les simulations.

Les résultats des simulations d'essais de traction et de cisaillement avec les deux algorithmes sont illustrés sur la [Figure 3.3](#).

Les deux algorithmes donnent des résultats très proches. Les divergences qui apparaissent à environ 125% de déformation en cisaillement sont inhérentes aux différences entre les cinématiques des repères objectifs de Jaumann (algorithme en repère de fixe) et de Green-Naghdi (algorithme en repère cristallographique).

Pour comparer l'efficacité des deux algorithmes, des simulations sont effectuées sur le monocristal maillé avec un nombre croissant d'éléments C3D8R. Les essais de traction uniaxiale sont simulés avec une vitesse de déformation de  $10^{-2} \text{ s}^{-1}$  jusqu'à 30% de déformation ; les calculs sont exécutés sur huit coeurs en parallèle sur des stations de travail Dell 2XQuad-core, 2.93 GHZ et 24 GB de RAM. Les champs de contraintes équivalentes de von Mises obtenus pour les modèles à 1000 éléments finis sont montrés sur la [Figure 3.4](#). Bien qu'il s'agisse de simulations sur un monocristal, pour lesquelles tous les éléments ont la même orientation initiale, les champs de contraintes obtenus après

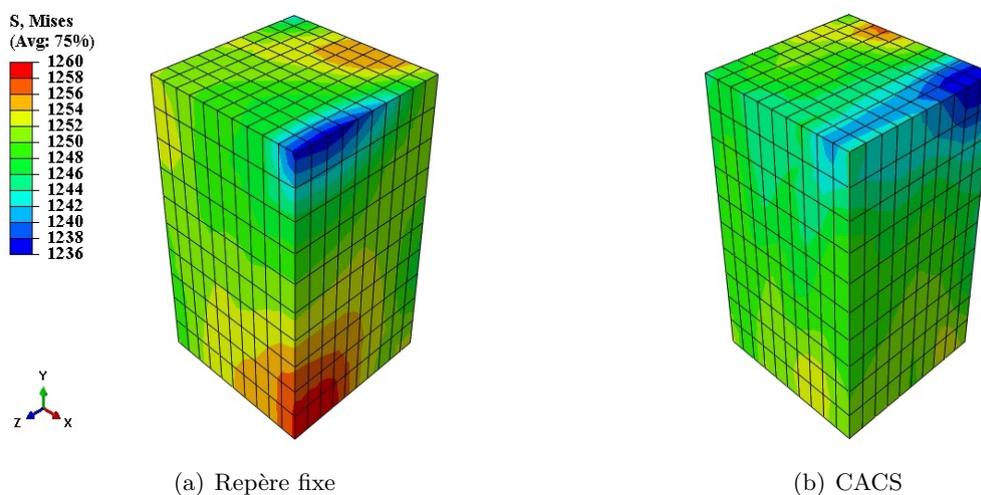


(a) Traction uniaxiale sur un monocristal

(b) Cisaillement sur un monocristal

FIGURE 3.3: Comparaison des prédictions des algorithmes en repères global et cristallographique.

déformation ne sont pas homogènes. Chaque élément se comporte comme une cristallite et l'hétérogénéité qui survient résulte de la désorientation qui se développe progressivement entre les différentes cristallites. Les écarts restent, cependant, relativement faibles avec une amplitude de 24 MPa.



(a) Repère fixe

(b) CACS

FIGURE 3.4: Champs de contraintes obtenus avec les deux algorithmes pour un essai de traction sur un monocristal maillé avec 1000 éléments C3D8R, pour une déformation logarithmique de 0.35.

On remarque que l'hétérogénéité est plus marquée sur les bords des cubes et paraît plus étendue pour l'algorithme en repère fixe.

Les temps de calcul requis par les deux algorithmes en fonction du nombre d'éléments du modèle éléments finis sont rapportés dans le [Tableau 3.5](#).

Repère d'implantation	Nombre d'éléments			
	1	1000	10642	27000
Global	5 s	2 h 14 min	6 h 42 min	24 h 33 min
CACS	5 s	2 h 15 min	3 h 08 min	5 h 57 min

TABLEAU 3.5: Temps de calcul des algorithmes pour différents maillages.

Avec l'augmentation du nombre d'éléments et donc la multiplication d'opérations au point d'intégration, l'algorithme implanté dans le CACS se révèle nettement plus efficace que celui implanté dans le repère global. Il est à noter que pour des simulations plus complexes avec du contact et un matériau polycristallin, ces temps de calcul ne font qu'augmenter. L'algorithme implanté dans le CACS constitue donc la méthode de référence utilisée dans la suite de ces travaux.

### 3.1.2 Implantation dans ABAQUS/Standard

Afin de pouvoir effectuer des analyses avec les solveurs dynamique-explicite et statique-implicite, une implantation de l'algorithme en repère tournant, présenté précédemment, est effectuée dans ABAQUS/Standard au travers du développement d'une UMAT. Le référentiel objectif employé dans ABAQUS/Standard étant celui de Jaumann, des adaptations ont été apportées à la cinématique et sont détaillées dans le paragraphe suivant.

#### 3.1.2.1 ABAQUS/Standard et UMAT

Le solveur implicite ABAQUS/Standard recherche à chaque incrément de temps une solution en déplacement qui vérifie l'équilibre mécanique de la structure. En partant d'un état d'équilibre connu, une estimation des incréments de déplacement est calculée et corrigée itérativement jusqu'à ce que les conditions d'équilibre soient vérifiées (à une tolérance près). La solution vérifiant l'équilibre mécanique est donc obtenue en fin de

calcul et pour des problèmes linéaires, de grands incréments de temps sont admissibles. La routine UMAT permet de définir une loi de comportement dans ABAQUS/Standard. Pour chaque point d'intégration, elle retourne au code le tenseur de contraintes ainsi que le jacobien  $\mathbf{C}_J = \frac{1}{J} \frac{\partial(\Delta\sigma)}{\partial(\Delta\epsilon)}$  où  $\Delta\epsilon$  est calculé par ABAQUS à partir des déplacements nodaux.

Le repère de travail en déformations finies (MECS) est ici le référentiel corotationnel de Jaumann, généré par la rotation  $\mathcal{R}$  telle que :

$$\dot{\mathcal{R}}^T \cdot \mathcal{R} = \mathbf{W} \quad (3.14)$$

Il est possible de récupérer comme entrée de la UMAT, l'incrément de rotation  $d\mathcal{R}$  du tenseur  $\mathcal{R}$ . Il est calculé par l'approximation de Hughes-Winget (Hughes et Winget, 1980) selon :

$$d\mathcal{R} = \left( \mathbf{I} - \frac{1}{2} \Delta \mathbf{W} \right)^{-1} \cdot \left( \mathbf{I} + \frac{1}{2} \Delta \mathbf{W} \right) \quad (3.15)$$

Par conséquent, pour obtenir la rotation à un instant donné, on a :

$$\mathcal{R}_{n+1} = d\mathcal{R} \cdot \mathcal{R}_n \quad (3.16)$$

Les variables cinématiques de base, à savoir le taux de déformation  $\mathbf{D}$  et le tenseur d'élongation  $\mathbf{U}$  (calculé par décomposition polaire de  $\mathbf{F}$ ), peuvent donc être exprimées dans le MECS de Jaumann. En dehors de ces aspects, l'algorithme mis en place est similaire à celui employé dans ABAQUS/Explicit.

En outre, le solveur requiert la matrice jacobienne  $\mathbf{C}_J$  du modèle pour déterminer (itérativement) l'incrément de déplacement idoine. La matrice jacobienne est le module tangent de la loi de comportement cohérent avec l'algorithme d'intégration de celle-ci. Dans le cadre de l'algorithme mis en place, elle s'écrit :

$$\mathbf{C}_J = \frac{1}{J_{n+1}} \left( \mathbf{O}_{n+1} \cdot \mathbf{O}_{n+1} \cdot \frac{\partial \Delta \tilde{\sigma}}{\partial \Delta \tilde{\epsilon}} \cdot \mathbf{O}_{n+1}^T \cdot \mathbf{O}_{n+1}^T \right) \quad (3.17)$$

A partir de (3.10), on obtient en termes de composantes :

$$\frac{\partial \Delta \tilde{\sigma}_{ij}}{\partial \Delta \tilde{\epsilon}_{kl}} = \tilde{C}_{ijkl} - \tilde{\sigma}_{ij} \delta_{kl} \quad (3.18)$$

et donc l'expression finale du jacobien telle que :

$$\mathbf{C}_J = \frac{1}{J_{n+1}} \left( \mathbf{O}_{n+1} \cdot \mathbf{O}_{n+1} \cdot \left( \tilde{\mathbf{C}} - \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_n \otimes \mathbf{I} \right) \cdot \mathbf{O}_{n+1}^T \cdot \mathbf{O}_{n+1}^T \right) \quad (3.19)$$

Le [Tableau 3.6](#) présente l'algorithme en repère cristallographique tel que implanté dans ABAQUS/Standard. Cette implantation dans la version statique-implicite du solveur sera exploitée dans le chapitre 5, notamment sur la prédiction du retour élastique.

### 3.2 Implantation du modèle phénoménologique

Le logiciel SiDoLo, développé par Philippe Pilvin ([Cailletaud et Pilvin, 1993](#)), est un outil dédié à l'analyse de relations de comportements de systèmes physiques. Il permet de programmer des lois de comportement, de simuler leur réponse sous diverses sollicitations et surtout de déterminer les paramètres adéquats des modèles en confrontant les résultats de simulation à des données expérimentales. SiDoLo comporte un module d'intégration de lois de comportement et un module d'identification paramétrique. Les deux modules peuvent s'utiliser ensemble ou indépendamment. Le module identification nécessite des résultats de simulation d'essais et les données expérimentales de ces essais. Les simulations peuvent alors être effectuées à l'aide de codes externes ou avec le module d'intégration (de lois de comportement) propre à SiDoLo. Dans ce dernier cas de figure qui est retenu ici, le modèle est programmé dans l'environnement de SiDoLo. Le « mode différentiel », notamment, permet d'écrire les équations différentielles de la loi de comportement sous une forme incrémentale. L'intégration numérique est alors assurée par SiDoLo par des méthodes explicites de Runge-Kutta. De plus, le dialogue entre les modules d'identification et de simulation est direct et ne nécessite aucune interface spécifique.

On donne ici une description simplifiée de l'implantation du modèle élasto-viscoplastique phénoménologique déjà présenté au chapitre 2 dans SiDoLo. Rappelons que nous considérons dans ces travaux un modèle élasto-viscoplastique anisotrope avec un écrouissage isotrope  $R$  et un écrouissage cinématique  $\mathbf{X}$ . Par rapport à la présentation générale du modèle, le terme d'écrouissage cinématique est écrit ici comme la somme de composantes de type Prager et Armstrong-Frederick soit :

- Initialisation :  $\tilde{\mathbf{C}}; \tilde{\mathbf{S}}_0^{s=1..12}; \tilde{\mathbf{F}}^e = \tilde{\mathbf{F}}^p = \mathbf{I}; \mathbf{Q}_0; \tau_{c_0}^{s=1..12}, \rho_0^{s=1..12}, \gamma = 0$
- Données d'entrée :  $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_n, \mathbf{F}_{n+1}, \mathbf{F}_n, d\mathcal{R}_n$ 
  1. Récupération des variables d'état
    - $\tilde{\mathbf{F}}_n^e, \mathbf{Q}_n, \tilde{\mathbf{H}}_n = \left( \tilde{\mathbf{F}}^p, \tau_c^s, \rho^s, \gamma \right)_n, \mathcal{R}_n$
  2. Actualisation de la rotation générant le MECS de Jaumann
    - $\mathcal{R}_{n+1} = d\mathcal{R}_{n+1} \cdot \mathcal{R}_n$
  3. Calcul du taux de déformation dans le repère global et décomposition polaire de  $\mathbf{F}_{n+1}$ 
    - $\mathbf{D}_{n+1} = \text{sym} \left\{ \dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}_{n+1}^{-1} \right\}$
    - $\mathbf{F}_{n+1} = \mathbf{R}_{n+1} \cdot \mathbf{U}_{n+1}$
  4. Transport du taux de déformation et du tenseur d'élongation vers le MECS
    - $\hat{\mathbf{D}}_{n+1} = \mathcal{R}_{n+1} \cdot \mathbf{D}_{n+1} \cdot \mathcal{R}_{n+1}^T$
    - $\hat{\mathbf{U}}_{n+1} = \mathcal{R}_{n+1} \cdot \mathbf{U}_{n+1} \cdot \mathcal{R}_{n+1}^T$
  5. Transport de  $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_n, \hat{\mathbf{D}}_{n+1}$  et  $\hat{\mathbf{U}}_{n+1}$  du MECS vers le CACS
    - $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_t = \mathbf{O}_n^T \cdot \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_t \cdot \mathbf{O}_n$
    - $\tilde{\mathbf{D}}_{n+1} = \mathbf{O}_n^T \cdot \hat{\mathbf{D}}_{n+1} \cdot \mathbf{O}_n$
    - $\tilde{\mathbf{U}}_{n+1} = \mathbf{O}_n^T \cdot \hat{\mathbf{U}}_{n+1} \cdot \mathbf{O}_n$
  6. Actualisation de  $\tilde{\mathbf{S}}^s$  (élongation) / Calcul de sa partie symétrique
    - Faire de  $s=1$  à 12  $\tilde{\mathbf{S}}_n^s = \tilde{\mathbf{F}}_n^e \cdot \tilde{\mathbf{S}}_c^s \cdot \tilde{\mathbf{F}}_n^{e^{-1}} / \tilde{\mathbf{M}}_n^s = \text{sym} \left\{ \tilde{\mathbf{S}}_n^s \right\}$
  7. Boucle de Runge-Kutta : faire de  $i=1$  à  $N$ 
    - $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_i = \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_n + a_i \Delta \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{i-1}; \tilde{\mathbf{H}}_i = \tilde{\mathbf{H}}_n + a_i \Delta \tilde{\mathbf{H}}_{i-1}$
    - Faire de  $s=1$  à 12  $\tau^s = \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_i : \tilde{\mathbf{M}}_n^s / \dot{\gamma}^s = \dot{\gamma}_0 \text{signe} \left\{ \tau^s \right\} \left| \frac{\tau^s}{\tau_{c_i}^s} \right|$
    - Calcul de  $\Delta \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_i$  et  $\Delta \tilde{\mathbf{H}}_i$
  8. Mise à jour des variables
    - $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1} = \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_n + \sum_{i=1}^N b_i \Delta \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_i$
    - $\tilde{\mathbf{H}}_{n+1} = \tilde{\mathbf{H}}_n + \sum_{i=1}^N b_i \Delta \tilde{\mathbf{H}}_i$
    - $\tilde{\mathbf{F}}_{n+1}^e = \tilde{\mathbf{U}}_{n+1} \cdot \tilde{\mathbf{F}}_{n+1}^p$
  9. Actualisation de la matrice d'orientation (calcul de l'exponentielle par la formule de Rodrigues)
    - $\mathbf{O}_{n+1} = \exp \left( \Delta t \left( \tilde{\mathbf{W}}^p \right) \right) \cdot \mathbf{O}_n$
  10. Calcul de la matrice jacobienne  $\mathbf{C}_J$  par (3.19)
  11. Transport de  $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}$  du CACS vers le MECS
    - $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1} = \mathbf{O}_{n+1} \cdot \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1} \cdot \mathbf{O}_{n+1}^T$
- Stocker les variables d'état et retourner  $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}$  et le jacobien  $\mathbf{C}_J$  au solveur

TABLEAU 3.6: Algorithme de la routine UMAT en repère cristallographique (CACS).

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= \mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2 \\ \dot{\mathbf{X}}_1 &= \frac{2}{3} C_X \mathbf{D}^p - D_X \mathbf{X} \dot{p} \quad \text{et} \quad \dot{\mathbf{X}}_2 = H_X \mathbf{D}^p \end{aligned} \quad (3.20)$$

La combinaison de ces deux termes permet d'obtenir une bonne description du comportement, après inversion de la charge, aussi bien à la transition élasto-plastique qu'à de grands taux de déformations.

On désigne par  $\mathbf{H}$  le pseudo-vecteur des variables internes. Il comporte la déformation plastique  $\boldsymbol{\epsilon}^p = \int_0^t \mathbf{D}^p dt$  et les composantes d'écrouissage cinématique  $\mathbf{X}_1$  et  $\mathbf{X}_2$ .

Les algorithmes explicites se révèlent bien adaptés à la structure modulaire de SiDoLo ; celui implanté en « mode différentiel » est présenté dans le [Tableau 3.7](#). Le repère d'expression des relations incrémentales est le référentiel corotationnel de Jaumann.

- o Données d'entrée :  $\boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^e$ ,  $\mathbf{H}_n = (\boldsymbol{\epsilon}^p, \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2)_n$ 
  1. Calcul de  $\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \mathbf{C} : \boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^e$  (loi de Hooke généralisée)
  2. Calcul des variables d'écrouissage  $\mathbf{X}_{n+1}(\mathbf{H}_n)$  et de  $R_{n+1}(\mathbf{H}_n)$
  3. Calcul de la contrainte équivalente  $\bar{\sigma}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{X})_{n+1}$  et de la contrainte seuil  $\sigma_y(R_{n+1})$
  4. Formulation du critère de plasticité  $f = \bar{\sigma} - \sigma_y$ 
    - si  $f \leq 0$ , incrément élastique,  $\Delta \mathbf{H} = 0$
    - sinon incrément élasto-plastique, calcul de  $\Delta \mathbf{H}$
  5. Actualisation de la position du référentiel corotationnel et calcul de l'incrément de déformation élastique  $\Delta \boldsymbol{\epsilon}^e$

TABLEAU 3.7: Algorithme du modèle phénoménologique dans SiDoLo.

Le modèle ainsi implanté dans SiDoLo peut être utilisé pour la simulation de trajets de chargement et l'identification de paramètres.

De plus, une interface entre SiDoLo et ABAQUS/Standard permet de convertir le fichier SiDoLo en UMAT apte à l'analyse par éléments finis.

### 3.3 Génération de microstructure numérique

Le comportement du matériau étant désormais décrit (au point d'intégration) à l'échelle du monocristal, on s'intéresse maintenant au passage à l'échelle des polycristaux afin d'envisager in fine le calcul de structures à l'échelle macroscopique avec de la plasticité cristalline. Cette transition d'échelles est assurée ici par une méthode à champs complets dite d'homogénéisation par éléments finis. Cette technique nécessite une représentation numérique de la microstructure c'est-à-dire une modélisation géométrique de la forme des grains et de leur arrangement spatial ainsi que le maillage éléments finis associé. On distingue généralement trois classes de méthodes de représentation des grains qui sont détaillées par la suite.

#### 3.3.1 L'utilisation de formes simplifiées

Les grains sont modélisés par des formes géométriques régulières à même de paver l'espace. On emploie à cet effet des volumes simples tels que le cube, le tétraèdre, le dodécaèdre et l'octaèdre tronqué. Ces volumes peuvent tous être maillés avec des éléments hexaédriques ([Figure 3.5\(a\)](#)). Si les formes cubiques et tétraédriques offrent des facilités de manipulation géométrique, elles conduisent généralement à des modélisations peu réalistes de la forme des grains. D'un autre côté, les volumes dodécaédriques et octaédriques permettent de bien représenter des grains plus ou moins sphériques; des difficultés surviennent néanmoins sur les agrégats ainsi générés en raison des formes complexes que prennent les frontières extérieures comme illustré sur la [Figure 3.5\(b\)](#). Ce type d'empilement ne peut remplir parfaitement un volume parallélépipédique en raison des surfaces non planes obtenues.

L'inconvénient principal de ce type de modélisation reste l'uniformité de morphologie des grains obtenus, ce qui constitue une approximation forte de la microstructure réelle des matériaux métalliques.

#### 3.3.2 Les tessellations de Voronoï

Employée par de nombreux auteurs (entre autres ([Barbe et al., 2001](#)), ([Wang et al., 2009](#)), ([Li et al., 2014](#))), cette technique consiste à partitionner l'espace en polyèdres

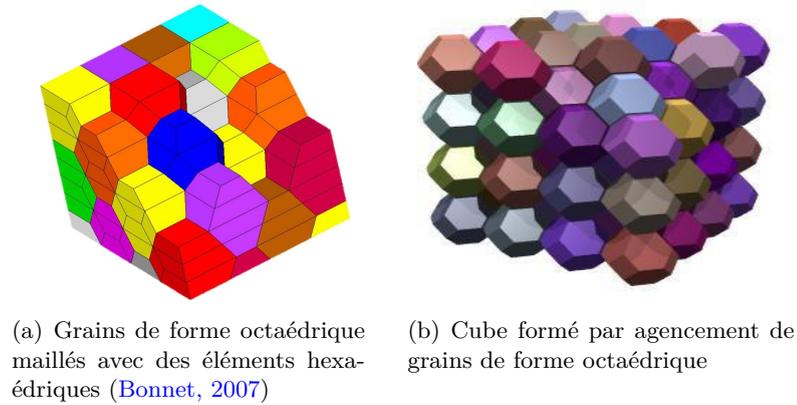


FIGURE 3.5: Représentation de grains par des octaédres.

obtenus par tessellation de Voronoï qui représentent les grains . La tessellation de Voronoï consiste à répartir des germes (ou générateurs) dans un domaine et à construire des cellules basées sur la distance minimum à chaque germe. Synthétiquement, une cellule de Voronoï représente l'ensemble des points les plus proches d'un germe. Les frontières de la cellule sont les médiatrices des segments reliant deux germes. De manière formelle, si on considère un domaine de l'espace  $\Omega$  dans lequel sont répartis des germes  $\{g_i\}_{i=1..n}$ , les cellules de Voronoï sont les domaines  $\{V_i\}_{i=1..n}$  construits selon :

$$V_i = \{x \in \Omega \mid \|x - g_i\| \leq \|x - g_j\|\} \text{ pour } j = 1..n \text{ et } j \neq i \quad (3.21)$$

et qui satisfont les conditions :

$$V_i \cap V_j = \{0\} \text{ et } \cup V_i = \Omega. \quad (3.22)$$

La Figure 3.6 illustre les étapes de l'algorithme permettant d'obtenir les cellules de Voronoï en deux dimensions.

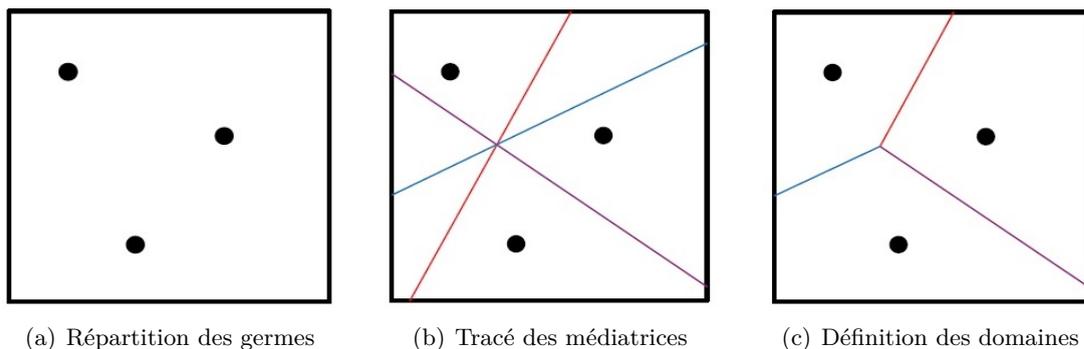


FIGURE 3.6: Principe de fonctionnement en 2D d'une tessellation de Voronoï.

Les grains ainsi obtenus sont ensuite maillés par des techniques spécifiques. Un maillage régulier permet d'utiliser des éléments hexaédriques tandis qu'un maillage libre effectué avec des éléments tétraédriques conduit à une meilleure représentation des interfaces des grains (voir [Figure 3.7](#)).

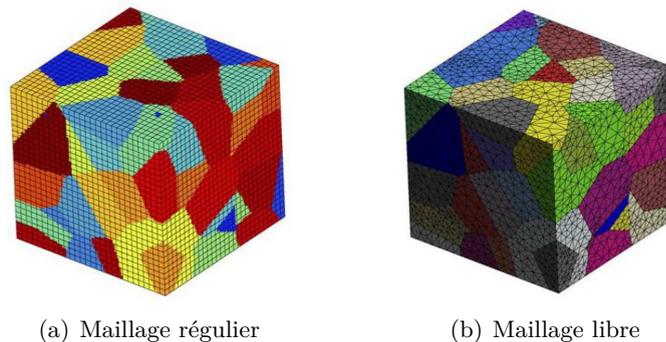


FIGURE 3.7: Techniques de maillage d'un polycristal.

### 3.3.3 La modélisation par croissance de sphère

Le principe consiste à répartir des germes dans un maillage éléments finis pré-existant et d'y faire croître des sphères (([Anderson et al., 1989](#)), ([Humphreys, 1997](#))). L'affectation des éléments du maillage pré-existant aux sphères se fait au fur et à mesure qu'un point d'intégration de l'élément est englobé dans la sphère. L'opération se poursuit jusqu'à ce que tous les éléments du maillage aient été affectés. Les regroupements d'éléments ainsi formés représentent les grains. Ce genre de modèle est inspiré du processus physique de nucléation qui conduit à la formation de polycristaux. Le logiciel *Germination* développé par ([Bonnet, 2007](#)) utilise ce type de modèles. Son principe de fonctionnement est illustré en deux dimensions sur la [Figure 3.8](#).

Dans cette thèse, les deux techniques précédentes sont utilisées de façon complémentaire à savoir les tessellations de Voronoï au travers du logiciel *Neper* ([Quey et al., 2011](#)) et la croissance de sphères avec le logiciel *Germination*. Les deux logiciels sont présentés dans les paragraphes suivants.

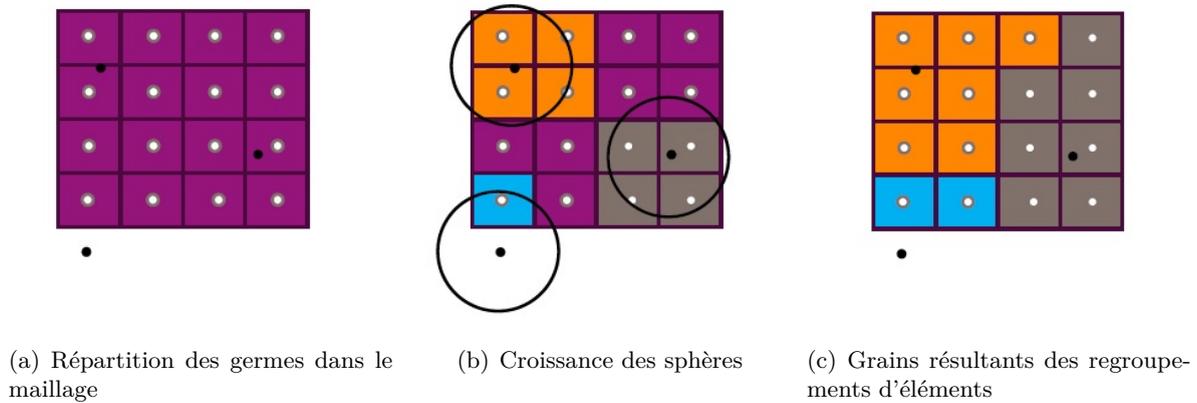


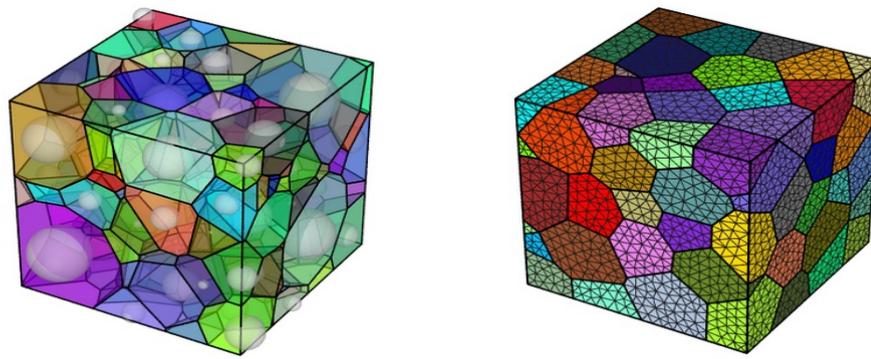
FIGURE 3.8: Principe de fonctionnement de *Germination*. Les carrés représentent des éléments finis avec en leur centre un point d'intégration. Les points noirs sont les germes ou générateurs à partir desquels croissent les sphères qui vont regrouper des éléments et former des grains représentés par des couleurs différentes.

### 3.3.4 Le logiciel *Neper*

*Neper* (Quey *et al.*, 2011) est un logiciel libre qui permet de générer et de mailler des polycristaux en deux ou trois dimensions. Les grains sont d'abord générés par tessellations de Voronoï et ensuite maillés à l'aide de bibliothèques dédiées (Netgen et Gmsh). *Neper* offre la possibilité d'utiliser diverses variantes de la procédure de Voronoï. Dans une tessellation centroïde de Voronoï, par exemple, les germes sont distribués de manière à ce qu'ils soient les centres de masse des grains obtenus ; cette procédure génère des grains à forme plus équiaxe que la tessellation de Voronoï standard. La tessellation de Laguerre-Voronoï (voir Figure 3.9(a)) permet d'attribuer des poids initiaux aux germes ; on peut ainsi reproduire une distribution de taille de grains en utilisant, entre autres, une distribution gaussienne de poids avec une moyenne et un écart type. La procédure de maillage est également flexible et offre de nombreuses possibilités ; on peut notamment choisir de générer un maillage régulier avec des éléments hexaédriques ou opter pour un maillage libre comme sur la Figure 3.9(b).

*Neper* permet également de générer des microstructures périodiques qui s'avèrent pertinentes pour la mise au point de volumes élémentaires représentatifs.

Cependant, en dépit de son efficacité et de sa flexibilité, ce logiciel présente l'inconvénient de ne pouvoir mailler que des domaines de l'espace aux formes géométriques simples à base de cubes ou des cylindres. Si ces géométries sont pertinentes pour des investigations « académiques », elles ne sont pas adaptées pour des analyses de pièces industrielles aux formes complexes. Dans ce cas de figure, nous aurons recours au logiciel *Germination*.



(a) Tessellation de Laguerre-Voronoi

(b) Maillage régulier

FIGURE 3.9: Polycristaux et maillages générés par *Neper* (Quey *et al.*, 2011).

### 3.3.5 Le logiciel *Germination*

*Germination* a été développé au cours de la thèse de Nicolas Bonnet (Bonnet, 2007). Ce logiciel utilise la méthode de croissance de sphères dans un maillage prédéfini et permet donc de représenter une microstructure sur n'importe quel type de géométrie souhaitée. Les germes sont répartis (aléatoirement ou à des positions spécifiques) dans un parallélépipède qui englobe le maillage de la pièce. Les rayons des sphères sont ensuite augmentés incrémentalement à partir des germes ; dès qu'un point d'intégration d'un élément entre dans une sphère, l'élément est affecté au grain en cours de création. A chaque incrément de calcul, le rayon  $r$  des sphères est augmenté de :

$$\Delta r = \frac{1}{V_{cr}} d \quad (3.23)$$

où  $V_{cr}$ , une entrée du logiciel, est la « vitesse » de croissance (supérieure à 1) et  $d$ , la distance minimale entre deux centres d'éléments, est calculée lors de l'importation du maillage.

La Figure 3.10 montre un exemple de microstructure générée par *Germination* sur une géométrie d'éprouvette de traction.

Nos travaux ont conduit à de nouveaux développements dans le logiciel et à l'ajout de fonctionnalités permettant de représenter des textures particulières. Par exemple, les tôles métalliques ayant subi un laminage important présentent souvent une microstructure relativement lamellaire avec des grains fortement étirés dans la direction de laminage comme illustré ci-dessous.



FIGURE 3.10: Microstructure générée par *Germination*. Les couleurs servent uniquement à distinguer les grains les uns des autres.

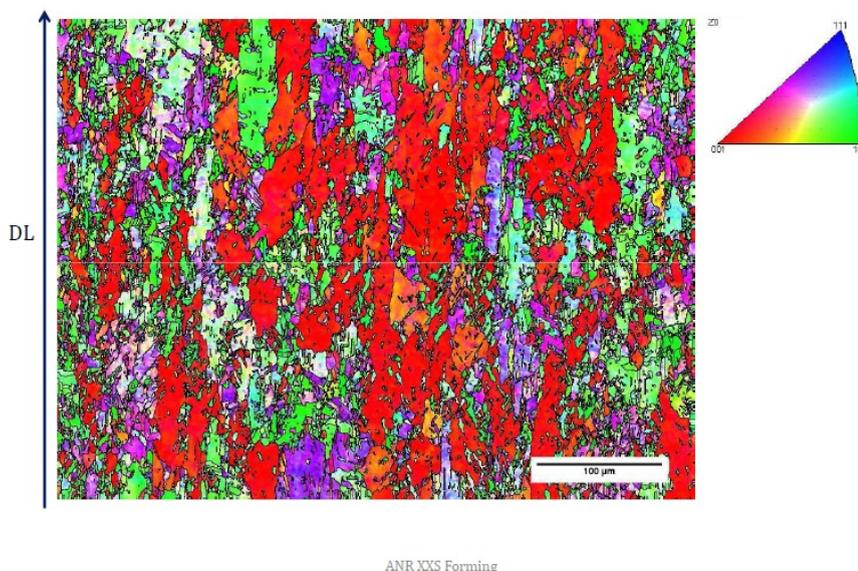


FIGURE 3.11: Analyse EBSD de l'alliage CuFe2P (Caer et Pesci, 2014).

La Figure 3.11 est une cartographie de la microstructure d'un des alliages de cuivre de l'étude dans le cadre du projet, issue d'une analyse par EBSD. Le challenge consiste à obtenir une représentation numérique de ce type de texture. Pour ce faire, une procédure a été mise en place dans *Germination* qui consiste à définir trois facteurs d'homothétie (un pour chaque dimension de l'espace) par le biais desquels on altère le maillage de la pièce lors de l'importation, avant l'étape de distribution des germes et de croissance des sphères. Les grains sont donc générés sur le maillage aux dimensions altérées, et une dernière étape est nécessaire pour ramener le maillage et les grains aux dimensions d'origine de la pièce. On peut ainsi obtenir le type de microstructure recherché comme l'illustre, pour l'exemple considéré, la Figure 3.12.

Les techniques expérimentales de caractérisation microstructurale donnent aussi accès aux tailles de grains, ce qui permet de déterminer une taille moyenne des grains ainsi que la dispersion correspondante. Afin d'en établir une représentation numérique dans *Germination*, une procédure développée sous la forme d'un script Python récupère les



FIGURE 3.12: Microstructure de grains fortement étirés générée par *Germination*.

données expérimentales et calcule la taille moyenne de grains et l'écart type par rapport à l'échantillon considéré. Une distribution lognormale des diamètres de grains  $d_g$  associée aux deux paramètres est alors générée comme fichier d'entrée à *Germination*. L'incrément sur les rayons des sphères (3.23) n'est plus uniforme mais spécifique à chaque germe  $g$  et modifié comme suit :

$$\Delta r_g = \frac{k}{V_{cr}} d_g \quad (3.24)$$

où  $0 < k \leq 1$  est un facteur permettant de diminuer ou d'augmenter la taille des incréments et d'avoir un calcul plus ou moins long et fin au regard de la morphologie des grains souhaités.

Un exemple d'utilisation de cette fonctionnalité est illustré sur la Figure 3.13, qui montre une dispersion relativement importante sur les grains par rapport à la Figure 3.10 où la taille de grains est plus homogène.



FIGURE 3.13: Microstructure de tôle avec une dispersion marquée sur la taille de grains générée par *Germination*.

### 3.4 Conclusion

Les développements nécessaires pour la mise en oeuvre numérique des deux lois de comportement retenues dans ces travaux ont été exposés. Le modèle de plasticité cristalline

a été implanté dans ABAQUS au point d'intégration alors que le modèle phénoménologique a été implanté à la fois dans ABAQUS et dans SiDoLo. La transition d'échelle du monocristal à l'échelle de la structure est réalisée par éléments finis (CPFEM), ce qui a nécessité le recours à des techniques de génération de maillages représentatifs de la microstructure des matériaux. Le logiciel libre *Neper* a été retenu pour les géométries simples, en complément du logiciel *Germination* pour les géométries plus complexes.

Le cadre de la modélisation étant posé, le chapitre suivant est consacré à la caractérisation des matériaux. Ces données expérimentales sont essentielles pour calibrer les modèles choisis et les outils numériques d'investigation des procédés de micro-formage.

## Chapitre 4

# Caractérisation des matériaux et identification des paramètres des modèles

Ce chapitre porte sur la caractérisation des matériaux retenus dans le cadre du projet. Deux alliages de cuivre, le CuBe2 et le CuFe2P, sont couramment utilisés sous forme de tôles ultrafines dans l'industrie du micro-formage. De plus, le cuivre pur a été retenu comme matériau de référence académique. Dans un premier temps, la campagne expérimentale menée pour caractériser ces trois matériaux est présentée : la diffraction par électrons rétrodiffusés permet de mesurer la texture cristallographique des tôles alors que la réponse mécanique à divers trajets de déformation est obtenue par des essais mécaniques. La base expérimentale constituée comprend :

- des essais monotones de traction uniaxiale et de cisaillement à différentes orientations ( $0$ ,  $45$  et  $90^\circ$ ) par rapport à la direction de laminage (DL) pour évaluer l'anisotropie, l'orientation à  $45^\circ$  étant la direction diagonale (DD) et celle à  $90^\circ$  la direction transverse (DT) ;
- des essais d'expansion par gonflement hydraulique qui ont permis d'investiguer le comportement en grandes déformations sous un chargement équibiaxial ;
- des essais de cisaillement cyclique dans la DL pour la mise en évidence de l'effet Bauschinger et d'autres phénomènes transitoires liés à l'écroutissage cinématique ;

- des essais de traction à différentes vitesses de déformation pour l’analyse de l’influence de la viscosité ;
- des essais de charges et décharges à différents taux de déformation en traction (DL) pour étudier l’évolution du module d’élasticité.

Dans un second temps, les données expérimentales recueillies sont utilisées pour calibrer les modèles de comportement. L’identification des paramètres pour les approches phénoménologiques et en plasticité cristalline est alors détaillée ; par ailleurs, une comparaison des procédures d’identification et des capacités prédictives des deux approches est réalisée.

## 4.1 Caractérisation microstructurale

### 4.1.1 L’alliage de cuivre CuBe2

Le **CuBe2** ou **C17200**<sup>1</sup> est un alliage de cuivre qui possède une très haute résistance mécanique, une bonne ductilité ainsi qu’une bonne formabilité tout en conservant une excellente conductibilité électrique.

Il se présente sous forme de feuilles (fournies par Berylco) d’épaisseur 0.1 mm et sa composition chimique est donnée dans le tableau ci-dessous :

Composant chimique	<b>Cu</b>	<b>Be</b>	<b>Co</b>	<b>Ni</b>	<b>Fe</b>
% massique	Min 97%	1,8 - 2%	Max 0,3%	Max 0,15%	Max 0,15%

TABLEAU 4.1: Composition chimique pondérale du CuBe2.

#### 4.1.1.1 Analyse microstructurale

Des analyses par diffractions d’électrons rétrodiffusés (EBSD) effectuées dans le cadre du projet (Caer et Pesci, 2014) ont permis d’appréhender la microstructure des matériaux étudiés. La microstructure a été analysée dans les trois plans d’orthotropie de la tôle c’est-à-dire en surface (section DL - DT) et dans les sections DL - DN et DN - DT où DN est la direction normale au plan de la tôle. Les mesures ont été réalisées avec un microscope électronique à balayage Jeol équipé d’un canon à émission de champs (Field

1. *Unified Numbering System (USA)*

Emission Gun) et d'une caméra EBSD Oxford. Des surfaces de  $320 \times 240 \mu\text{m}^2$  ont été couvertes avec une résolution de  $0.3 \mu\text{m}$ .

Comme illustré par la figure de pôles (Figure 4.1), le CuBe2 présente une texture de type Goss  $\{110\}$ , relativement peu marquée. Un gradient de texture a été observé dans l'épaisseur mais étant peu marqué, il ne sera pas pris en compte.

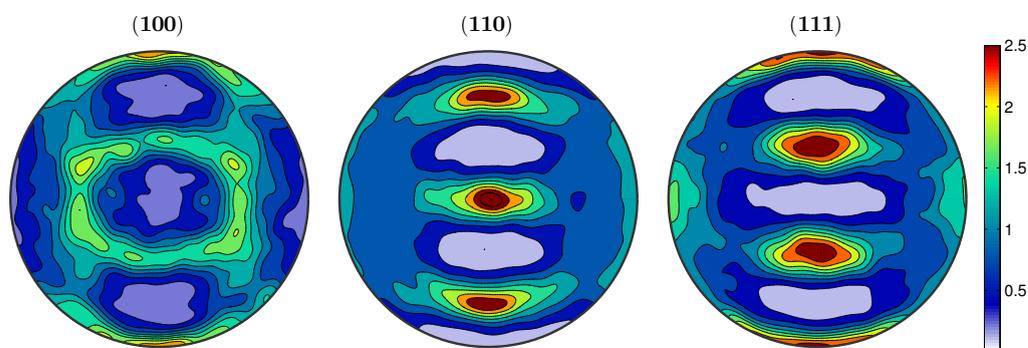


FIGURE 4.1: Figure de pôles du CuBe2 (Caer et Pesci, 2014).

Les grains sont relativement équiaxes et présentent une taille moyenne de  $4 \mu\text{m}$ . La taille maximale est de  $50 \mu\text{m}$  (voir Figure 4.2) bien que la dispersion sur la taille de grains soit relativement faible. On a donc en moyenne une vingtaine de grains dans l'épaisseur de  $100 \mu\text{m}$ .

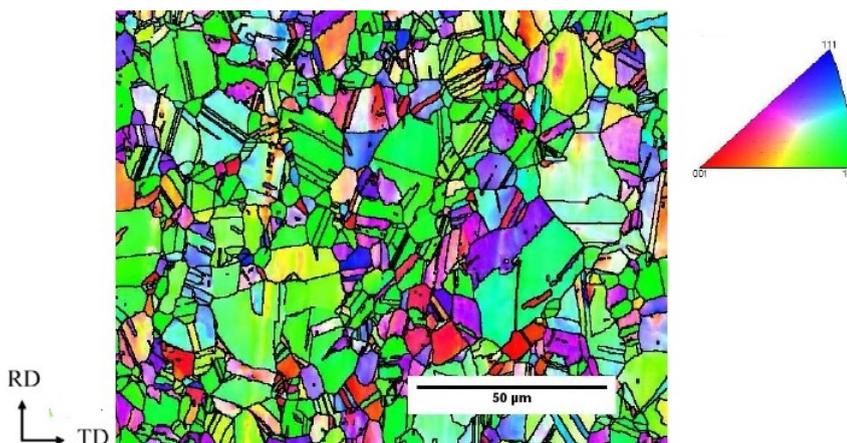


FIGURE 4.2: Cartographie EBSD du CuBe2 (Caer et Pesci, 2014).

### 4.1.2 L'alliage de cuivre CuFe2P

Le **CuFe2P** ou **C19400** est un alliage de cuivre qui combine de bonnes caractéristiques mécaniques (résistance élevée), une aptitude à la mise en forme à chaud, une résistance accrue à la corrosion et une bonne conductibilité électrique.

Il se présente sous forme de feuilles d'épaisseur 0.127 mm (fournies par Wieland) et sa composition chimique est spécifiée dans le tableau ci-dessous :

Composant chimique	Cu	Fe	Zn	P
% massique	97,45%	2,4%	0,12%	0,03%

TABLEAU 4.2: Composition chimique pondérale du CuFe2P.

#### 4.1.2.1 Analyse microstructurale

La texture du matériau est marquée et de type Cube  $\{100\}$  (Figure 4.3).

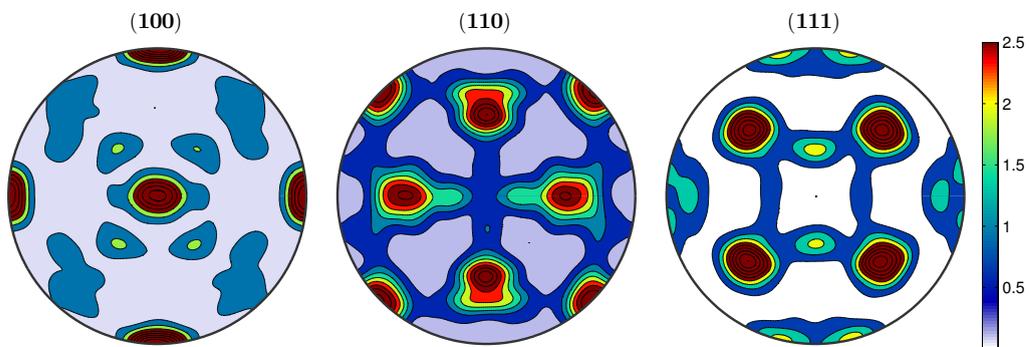
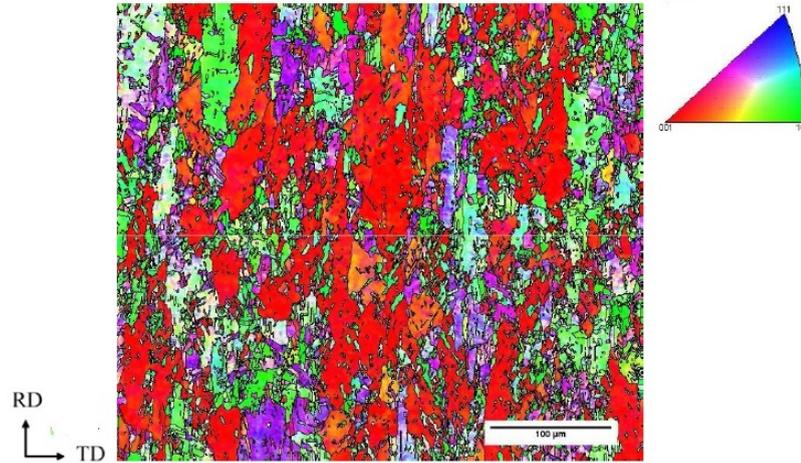


FIGURE 4.3: Figure de pôles du CuFe2P (Caer et Pesci, 2014).

La microstructure des tôles semble « dégradée » et présente un aspect bien plus lamellaire que granulaire. Comme illustré sur la Figure 4.4, les tôles de CuFe2P ont manifestement subi un taux de laminage très important ce qui a considérablement étiré les grains dans la DL mais les a aussi fragmenté. De fait, il est difficile de déterminer une taille moyenne de grains par la méthode dite des cercles. En considérant les différentes sections (DL-DT et DL-DN), les dimensions moyennes d'un grain sont estimées à  $40 \mu m \times 10 \mu m \times 10 \mu m$  et la taille maximale à  $140 \mu m \times 10 \mu m \times 10 \mu m$ . On dénombre donc environ une dizaine de grains dans l'épaisseur.

FIGURE 4.4: Cartographie EBSD du CuFe<sub>2</sub>P (Caer et Pesci, 2014).

### 4.1.3 Le cuivre pur Cu

En complément des alliages industriels, le cuivre pur a été choisi comme matériau de référence. Il se présente également sous la forme de feuilles d'épaisseur 0.1 mm et est pur à 99.9% (d'après le fournisseur Goodfellow). Il est relativement peu texturé (voir Figure 4.5).

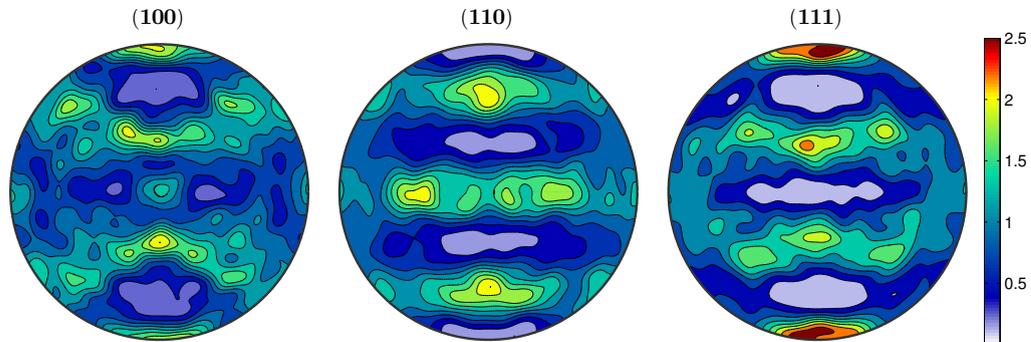


FIGURE 4.5: Figure de pôles du Cu (Caer et Pesci, 2014).

La taille moyenne de grains est de 10  $\mu\text{m}$  avec un maximum de 140  $\mu\text{m}$ . La dispersion est néanmoins faible (voir Figure 4.6) et on a une moyenne de 10 grains dans l'épaisseur.

### 4.1.4 Bilan

L'analyse microstructurale a permis d'accéder à des informations sur la texture des matériaux. Etant donné le nombre relativement élevé de grains (environ 25) dans l'épaisseur des tôles de CuBe<sub>2</sub>, celles ci sont à rapprocher de la catégorie des tôles minces plutôt

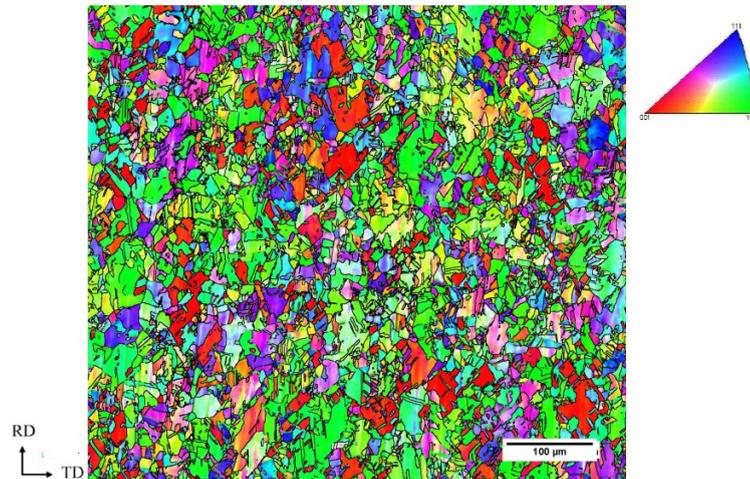


FIGURE 4.6: Cartographie EBSD du cuivre pur (Caer et Pesci, 2014).

que ultrafines.

Le CuFe2P présente une microstructure lamellaire très allongée dans la DL, due à un fort taux de réduction, ainsi qu'une texture bien marquée. La taille moyenne de grain indique une dizaine de grains dans l'épaisseur ce qui permet de classer ces tôles dans la catégorie des ultrafines.

Enfin, le cuivre pur présente une texture peu marquée et on dénombre en moyenne une dizaine de grains dans l'épaisseur des tôles. Elles rentrent donc également dans la catégorie des tôles ultrafines.

## 4.2 Caractérisation mécanique

Des essais mécaniques ont été effectués pour caractériser le comportement mécanique des matériaux sous différents trajets de déformation. Les champs de déformation sont mesurés à l'aide du dispositif de mesure optique 3D par corrélation d'images ARAMIS GOM (GmbH). Ce système se compose de deux caméras vidéos qui enregistrent le déplacement d'un mouchetis aléatoire, noir et blanc, déposé sur la surface des éprouvettes. Les déformations longitudinales et transverses sont accessibles soit en un point soit en moyennant les valeurs sur une zone définie.

### 4.2.1 Essais monotones de traction uniaxiale

Les essais de traction ont été menés sur une machine Instron 5566 avec une cellule de force de 10 kN (précision de +/- 0.5%). Les différents essais ont été effectués sur des éprouvettes obtenues par fraisage dont la géométrie est présentée sur la [Figure 4.7](#).

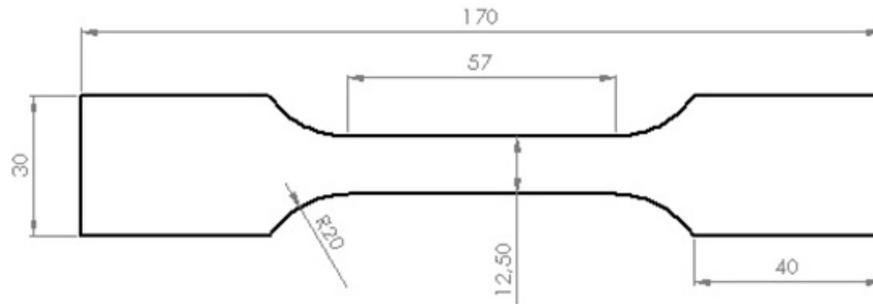


FIGURE 4.7: Géométrie des éprouvettes de traction.

Cette géométrie est en accord avec la norme ISO 6892-1 et a été utilisée sur des épaisseurs de tôles similaires dans les travaux de thèse de ([Pham, 2014](#)). Une attention particulière a été apportée à la mise en place des essais; les têtes des éprouvettes ont notamment été pliées pour assurer une meilleure prise dans les mors. La vitesse de sollicitation, maintenue constante, est de  $10^{-4} \text{ s}^{-1}$ . Les essais ont été réalisés sur des éprouvettes découpées dans la DL, la DT et la DD afin d'étudier l'anisotropie dans le plan de la tôle. Chaque essai a été triplé pour s'assurer de la reproductibilité des résultats et la mesure de déformation choisie est logarithmique  $\epsilon = \ln\left(\frac{l}{l_0}\right)$ ,  $l_0$  étant la longueur initiale et  $l$  la longueur courante. La contrainte nominale mesurée est convertie en contrainte de Cauchy moyennant l'hypothèse de déformation uniforme.

Les grandeurs mécaniques (contraintes, déformations) reliées à la direction de laminage sont dites longitudinales et ont pour indices 11, celles dans la DT sont dites transverses, ont pour indices 22 et celles dans l'épaisseur sont dites normales et indicées 33.

L'anisotropie de déformation dans chaque essai sera évaluée au moyen des coefficients d'anisotropie  $r_\theta$  où  $\theta$  est l'angle d'orientation par rapport à la DL. Ces derniers peuvent être calculés de deux manières :

- soit par le rapport  $\epsilon_{22}^p / \epsilon_{33}^p$  pris à une déformation longitudinale  $\epsilon_{11}^p = 0.1$ , on parle alors des coefficients de Lankford;
- soit comme la pente de la courbe déformation transverse en fonction de la déformation normale  $\epsilon_{22}^p = f(\epsilon_{33}^p)$ , ce sont les coefficients de Hill.

La méthode de Hill qui utilise une régression linéaire pour le calcul de la pente donc des coefficients, donne des résultats moins sensibles aux fluctuations des valeurs expérimentales ; elle est donc retenue dans nos travaux. Dans les deux cas, il est nécessaire d'assurer le suivi de la déformation transverse. Le calcul de la déformation normale avec l'hypothèse d'invariance du volume dans le domaine plastique soit  $\text{tr}(\epsilon^p) = 0$ .

Le coefficient d'anisotropie plastique ainsi défini illustre le mode de déformation de l'éprouvette : s'il est supérieur à 1, la déformation transverse prédomine et s'il est inférieur à 1, la tôle a plus tendance à se déformer dans l'épaisseur. Les valeurs présentées par la suite sont les moyennes effectuées sur trois essais.

A partir de ces informations, on peut quantifier globalement l'anisotropie du matériau par le biais de deux coefficients d'anisotropie :

- le coefficient d'anisotropie moyen  $\bar{r}$  caractérise l'anisotropie normale globale par une moyenne sur les coefficients d'anisotropie calculés pour des différentes orientations :

$$\bar{r} = \frac{r_0 + 2r_{45} + r_{90}}{4} \quad (4.1)$$

Si il est proche de 1, alors l'anisotropie normale est faible.

- le coefficient d'anisotropie planaire  $\Delta r$  évalue la variation de l'anisotropie dans le plan de la tôle selon l'orientation par rapport à la DL :

$$\Delta r = \frac{r_0 - 2r_{45} + r_{90}}{2} \quad (4.2)$$

Une valeur nulle de  $\Delta r$  implique que l'anisotropie de déformation est la même quelle que soit l'orientation, c'est-à-dire que le matériau est isotrope dans le plan. En emboutissage par exemple, un  $\Delta r$  proche de zéro est nécessaire si on veut éviter l'apparition de cornes.

Enfin, pour la détermination du module de Young et du coefficient de Poisson, des jauges de déformation ont été utilisées et quatre cycles de charge-décharge ont été effectués dans le domaine élastique (jusqu'à 0.2% de déformation).

#### 4.2.1.1 Le cuivre

La [Figure 4.8](#) montre que les caractéristiques mécaniques des éprouvettes prélevées dans la DL sont supérieures à celles des éprouvettes dans la DT et la DD. La limite d'élasticité dans la DL est plus élevée et l'écroutissage est également plus important. Pour ce

matériau, l'anisotropie observée sur la contrainte n'est pas négligeable.

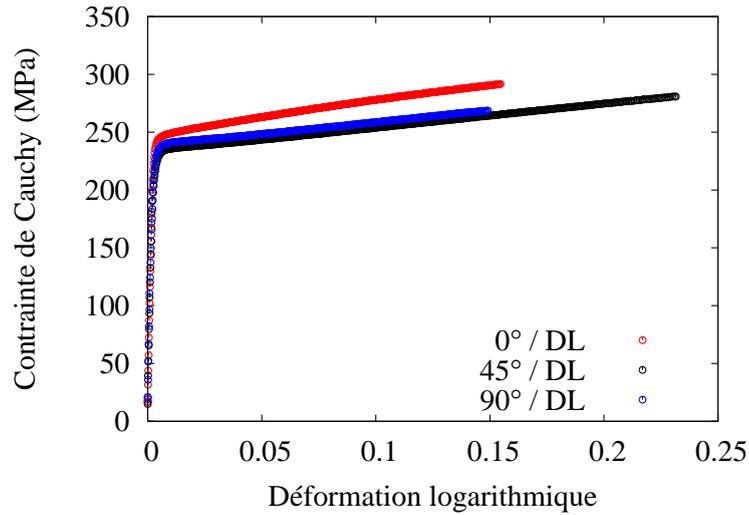


FIGURE 4.8: Essais de traction uniaxiale à 0, 45 et 90° de la DL pour le cuivre pur.

Le coefficient d'anisotropie  $\bar{r}$  du cuivre est de 0,69, indiquant une anisotropie normale relativement marquée. Pour ce qui est de l'anisotropie planaire, on obtient  $\Delta r = 0,08$  ce qui signifie qu'elle faible dans le plan de la tôle.

Les caractéristiques mécaniques sont regroupées dans la [Tableau 4.3](#).

$E$	104 GPa		
$\nu$	0,28		
$r_0$	0,65		
$r_{45}$	0,78		
$r_{90}$	0,64		
$\bar{r}$	0,69		
$\Delta r$	0,08		
		$R_m$	247 MPa
		$R_p$	285 MPa
		Allongement	16
		Dureté Vickers	49 - 87 HV

TABLEAU 4.3: Caractéristiques mécaniques du cuivre pur. La dureté est reprise des données du fournisseur.

#### 4.2.1.2 Le CuBe2

Le CuBe2 présente également une limite d'élasticité dans la DL supérieure à celle dans la DD, elle-même légèrement supérieure à celles dans la DT. L'anisotropie de contrainte est donc assez marquée (voir [Figure 4.9](#)). Cette limite élastique, plus élevée en DL, est

suivie par une inflexion de la pente d'écroissage qui n'est pas relevée sur les essais en DT et DD. Le même comportement est observé pour le cuivre pur. Il est probablement lié au changement de trajet de déformation entre le laminage et la traction (ces tôles en « état dur » ayant été laminées à froid).

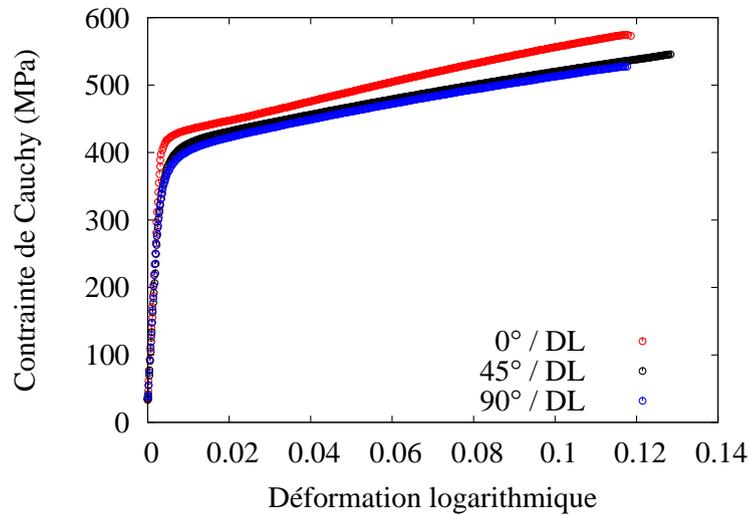


FIGURE 4.9: Essais de traction uniaxiale à 0, 45 et 90° de la DL pour le CuBe2.

Le coefficient d'anisotropie normale est proche de 1 ce qui indique une anisotropie de déformation globalement faible ; il faut néanmoins remarquer la faible valeur du coefficient d'anisotropie dans la DL et, par conséquent, un  $\Delta r$  significatif. Le [Tableau 4.4](#) regroupe les caractéristiques mécaniques du CuBe2.

$E$	126 GPa
$\nu$	0,37
$r_0$	0,64
$r_{45}$	1,20
$r_{90}$	0,93
$\bar{r}$	0,92
$\Delta r$	0,28

$R_m$	430 MPa
$R_p$	590 MPa
Allongement (%)	14
Dureté Vickers	120 - 180 HV

TABLEAU 4.4: Caractéristiques mécaniques du CuBe2. La dureté est reprise des données du fournisseur.

### 4.2.1.3 Le CuFe2P

Le CuFe2P présente un comportement assez différent des deux autres matériaux (voir [Figure 4.10](#)). Les caractéristiques mécaniques dans la DT sont respectivement supérieures à celles dans la DD et la DL. L'écroutissage, quasiment nul dans la DD et la DT, est légèrement plus marqué dans la DL ; ce qui se répercute sur le taux de déformation très faible (de 5 à 11%) atteint avant rupture dans chaque cas, bien que celui dans la DL soit plus élevé.

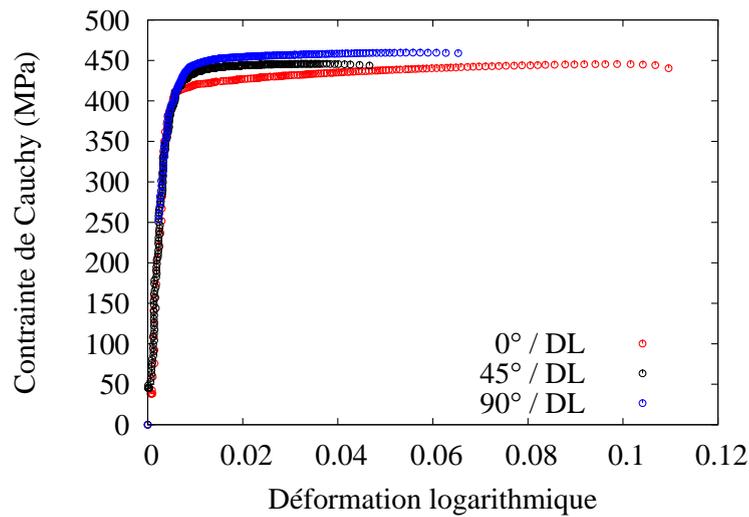


FIGURE 4.10: Essais de traction uniaxiale à 0, 45 et 90° de la DL pour le CuFe2P.

Le [Tableau 4.5](#) donne un aperçu des caractéristiques mécaniques du CuFe2P. On relève une anisotropie normale relativement prononcée par rapport au CuBe2 mais une anisotropie planaire moindre.

$E$	114 GPa		
$\nu$	0,27		
$r_0$	0,57		
$r_{45}$	0,52		
$r_{90}$	0,77		
$\bar{r}$	0,60		
$\Delta r$	0,15		
		$R_m$	405 MPa
		$R_p$	460 MPa
		Allongement	7
		Dureté Vickers	130 - 150 HV

TABLEAU 4.5: Caractéristiques mécaniques du CuFe2P. La dureté est reprise des données du fournisseur.

L'analyse comparative des courbes de traction des trois matériaux (voir [Figure 4.11](#)), pour des éprouvettes prises dans la DL, révèle l'intérêt des éléments d'additions des alliages CuBe2 et CuFe2P. La limite d'élasticité passe d'environ 225 MPa pour le cuivre pur à au moins 400 MPa pour les alliages industriels, soit une augmentation de la limite élastique de 55%, au prix d'une certaine perte de ductilité.

De plus, des différences majeures dans le comportement en écrouissage apparaissent. Le CuFe2P ne présente quasiment pas d'écrouissage, au contraire du CuBe2 dont le taux d'écrouissage est important.

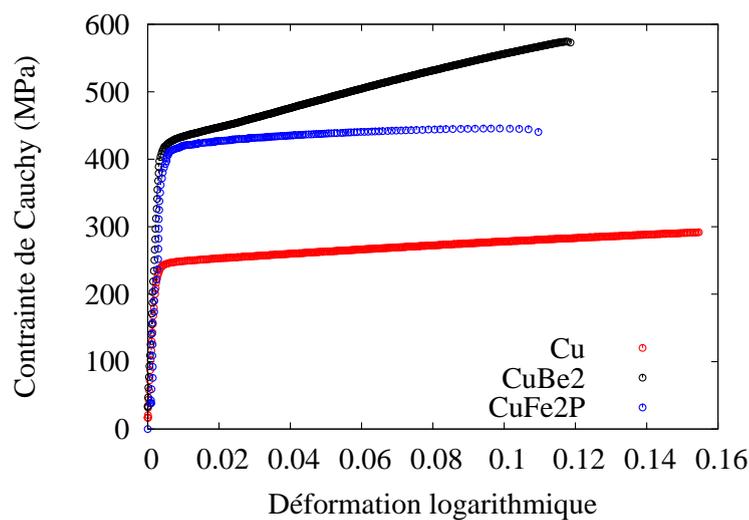


FIGURE 4.11: Comportement en traction dans la DL des trois matériaux.

#### 4.2.2 Essais de traction avec sauts de vitesses

Des essais de traction avec des sollicitations à différentes vitesses de traverse ont été réalisés pour analyser et estimer les propriétés de viscosité des matériaux. Les essais sont constitués de quatre charges : la première à la vitesse de déformation appliquée lors des essais monotones  $10^{-4} \text{ s}^{-1}$ , la seconde à  $10^{-3} \text{ s}^{-1}$ , la troisième à  $10^{-2} \text{ s}^{-1}$  et enfin la dernière à la vitesse initiale de  $10^{-4} \text{ s}^{-1}$ .

Entre deux charges, des relaxations d'au moins une minute sont imposées, hormis pour la dernière charge où la relaxation imposée est plus longue. La figure [Figure 4.12](#) montre la superposition de courbes de sauts de vitesses avec des essais monotones.

Le cuivre pur présente une sensibilité très faible aux variations de vitesse de déformation. En effet, en passant de  $10^{-4} \text{ s}^{-1}$  à  $10^{-2} \text{ s}^{-1}$ , on constate seulement une augmentation de la contrainte  $\Delta\sigma = 10 \text{ MPa}$ . Pour le CuFe2P, la viscosité est aussi relativement faible

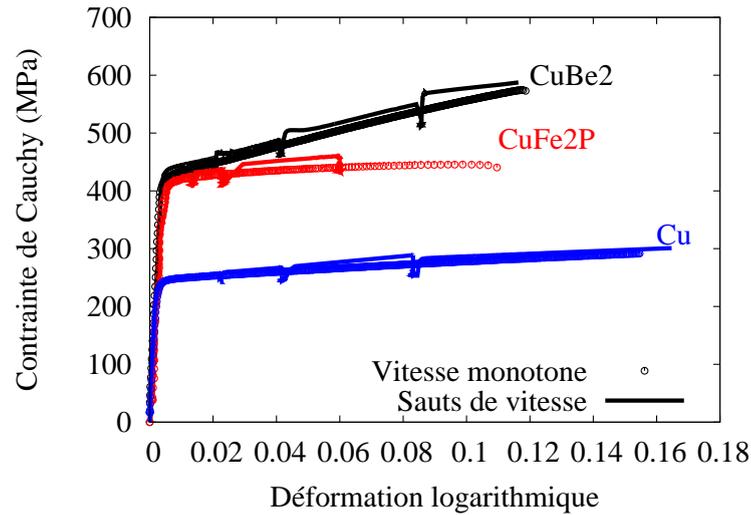


FIGURE 4.12: Essais de traction avec sauts de vitesse. Comparaison par rapport aux essais de traction monotone à la vitesse de  $\dot{\epsilon} = 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ .

avec un  $\Delta\sigma = 6 \text{ MPa}$  sur le premier saut de vitesse et de  $11 \text{ MPa}$  sur le deuxième. Pour un passage de  $10^{-4} \text{ s}^{-1}$  à  $10^{-2} \text{ s}^{-1}$ , on a donc une augmentation de  $17 \text{ MPa}$  du niveau de contraintes.

La sensibilité à la vitesse du CuBe2 est la plus importante. Des sauts de contraintes de  $\Delta\sigma = 9 \text{ MPa}$  et de  $17 \text{ MPa}$  sont observés entre les changements successifs de vitesse de déformation.

Pour tous les essais, la dernière décharge ne coïncide pas rigoureusement avec l'essai de traction à vitesse constante, ce qui semble indiquer que les temps de relaxation imposés entre chaque cycle ne sont pas suffisamment longs.

#### 4.2.3 Essais de traction avec charges-décharges à différents taux de déformation.

L'analyse de phénomènes tels que le retour élastique nécessite de prêter une attention particulière au module de Young. De nombreuses études expérimentales ([Morestin et](#)

Boivin, 1996), (Eggertsen et Mattiasson, 2011) ont révélé qu'il évoluait en fonction de la déformation plastique.

Afin de mettre en évidence ce phénomène et d'en tenir compte dans la modélisation, des essais de traction uniaxiale avec des charges suivies de décharges à différents taux de déformations (dans le domaine plastique) ont été réalisés pour chaque matériau, à une vitesse constante de  $10^{-4} \text{ s}^{-1}$ . La Figure 4.13 présente l'évolution de la contrainte en fonction de la déformation pour des essais de charges-décharges effectués sur le CuFe2P.

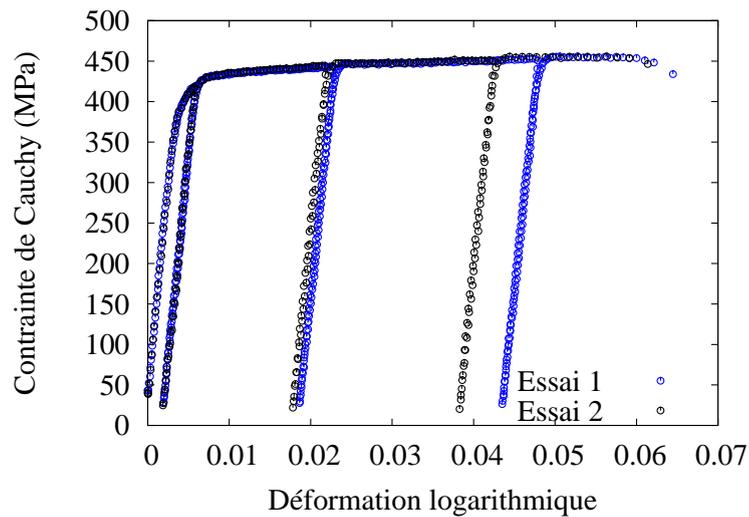


FIGURE 4.13: Traction avec charges et décharges le CuFe2P.

Le module de Young est mesuré comme étant la pente d'une droite reliant le point final de la courbe de décharge au point d'intersection de cette dernière avec la courbe de charge du cycle suivant. Ce module sécant est illustré sur la Figure 4.14.

L'évolution des valeurs mesurées est représentée en fonction de la déformation plastique sur un graphe. Cette évolution est modélisée par une expression analytique selon (Yoshida et Uemori, 2003) qui est ensuite fittée par la méthode des moindres carrés :

$$E = E_o - (E_o - E_{sat}) (1 - \exp(k\bar{\epsilon}^p)) \quad (4.3)$$

où  $E_o$  est le module de Young initial,  $E_{sat}$  un module à saturation et  $k$  un paramètre matériau.

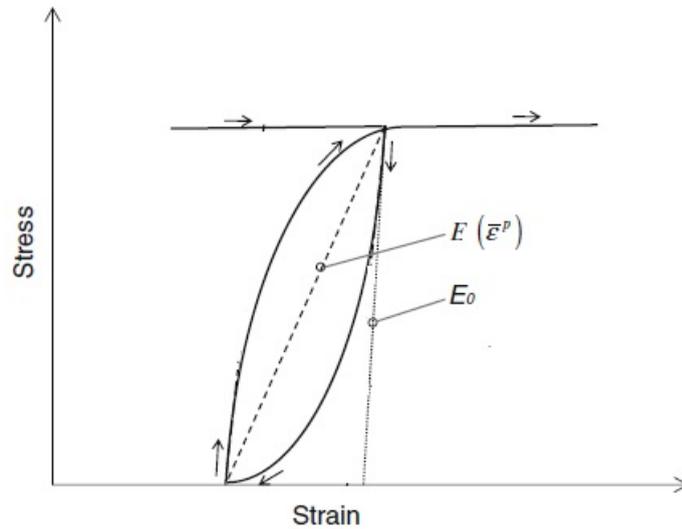


FIGURE 4.14: Illustration de la mesure du module de Young (Eggertsen et Mattiasson, 2010).

Les essais sur les deux alliages de cuivre présentent une décroissance de leurs modules de Young.

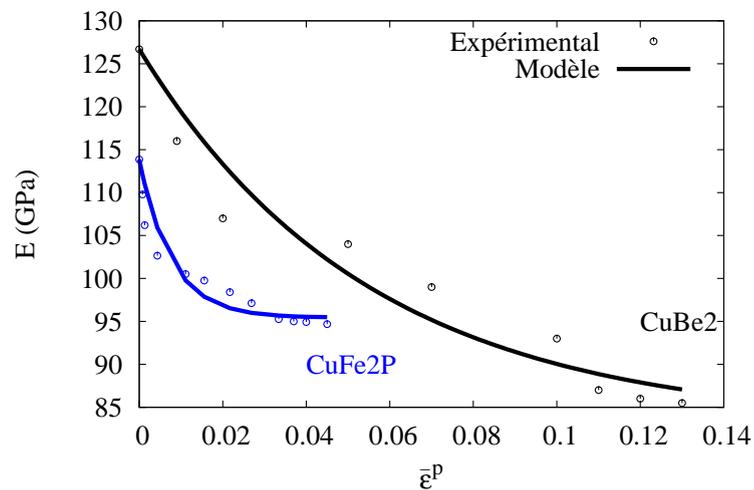


FIGURE 4.15: Evolution du module de Young du CuBe2 et du CuFe2P.

Comme illustré sur Figure 4.15, le module du CuFe2P décroît rapidement et sature à 94 GPa, soit 17% de moins que le module de Young initial. Le CuBe2 présente lui une décroissance plus graduelle et plus prononcée, le module passant de 127 GPa à 85 GPa, soit 33% de réduction pour une déformation plastique de 13%.

#### 4.2.4 Essais de cisaillement

La réponse des matériaux à une sollicitation en cisaillement est analysée par des essais de cisaillement monotones et alternés. Les essais ont été réalisés sur un dispositif spécifique développé au LIMATB (Manach et Couty, 2002).

Spécialement conçu pour l'étude des tôles métalliques, il permet d'obtenir des champs homogènes (Rauch et Schmitt, 1989); de plus les essais cycliques sont réalisés en inversant la direction de sollicitation. Le dispositif (dont le principe est illustré sur la Figure 4.16) est monté sur une machine de traction et met en jeu deux mors, l'un mobile et l'autre fixe, qui serrent l'éprouvette. La machine de traction impose le déplacement au mors mobile ce qui crée la sollicitation de cisaillement.

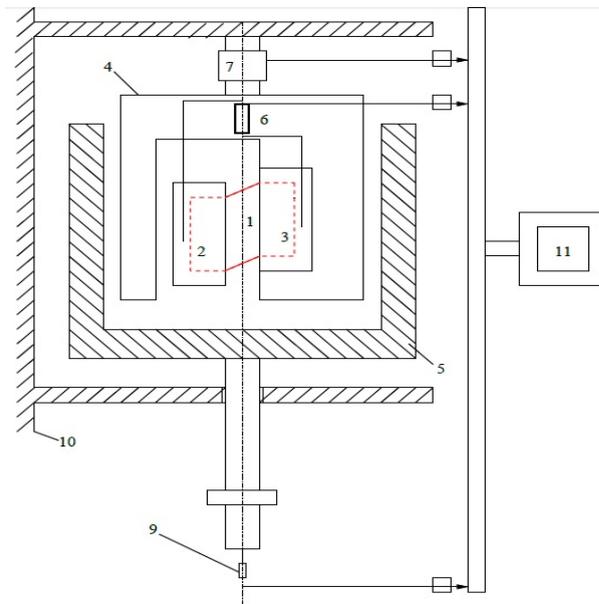


FIGURE 4.16: Principe du dispositif de cisaillement.

Il est possible de moduler la largeur utile de l'éprouvette (bande blanche sur la Figure 4.17(a)) lors du montage dans les mors. Une grande largeur utile facilite l'acquisition par le système ARAMIS et fournit plus d'informations pour le calcul des champs de déformation. Toutefois, en raison de la faible épaisseur des tôles, des plis de flambement (voir la Figure 4.18) se développent sur les éprouvettes pour des largeurs utiles importantes.

Ces déformations hors plan de la tôle apparaissent très rapidement lors des essais. En réduisant la largeur utile à son minimum de 1.4 mm, on atténue le phénomène en cisaillement monotone sans l'annihiler entièrement.

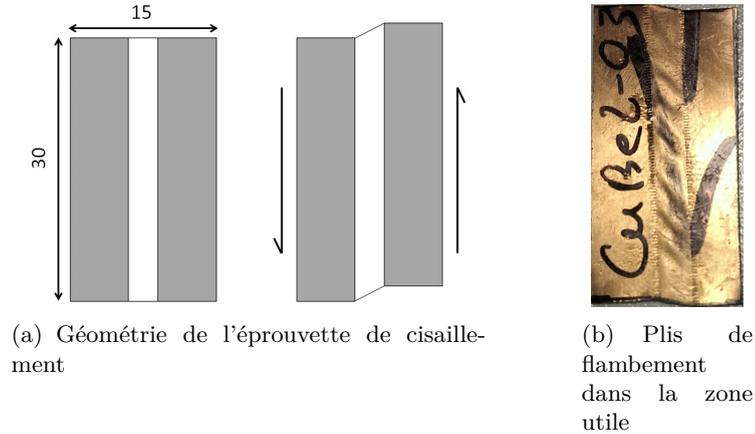


FIGURE 4.17: Epreuve de cisaillement et apparition de plis de flambement.

Pour remédier à ces difficultés, une solution technologique a été développée (Pham *et al.*, 2016). Il s'agit d'un dispositif, illustré en Figure 4.18(a), de maintien de l'éprouvette qui empêche les déformations hors plan. Les pièces (1), (2), (3), (6), (7), (8) servent à fixer la plaque en verre (4) sur l'éprouvette de cisaillement (5). La plaque en verre couvre la largeur utile de l'éprouvette et son faible indice de réfraction (environ 1.5) permet de limiter les erreurs d'acquisition de champs.

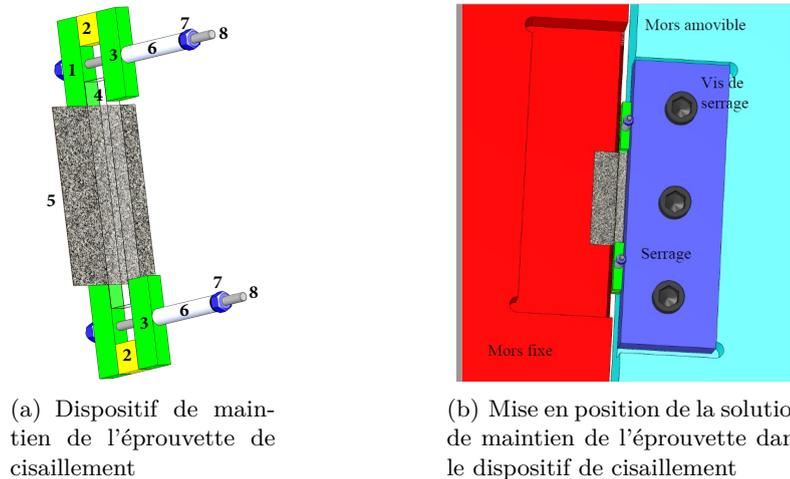


FIGURE 4.18: Support de maintien de l'éprouvette de cisaillement (a) : (1) plaque de base en aluminium, (2) Cales en verre (3) plaques de serrage (4) plaque en verre transparent (5) éprouvette (6) tige en plastique (7) écrou de serrage (8) tige filetée.

L'éprouvette et le support s'insèrent entre les mors du dispositif de cisaillement comme illustré sur Figure 4.18(b). La solution technologique mise en place permet de limiter le flambement et d'obtenir des résultats reproductibles.

Les essais de cisaillement présentés dans la suite sont tous effectués dans la DL, en employant le support de maintien et une vitesse de déformation de  $\dot{\gamma} = 8 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ . La

contrainte de cisaillement est calculée en faisant l'hypothèse que la section de l'éprouvette reste constante tout au long de l'essai, soit  $\sigma_{12} = \frac{F}{S_0}$ . Le champ de déformation en cisaillement calculé par corrélation d'images est homogène sur quasiment toute la zone utile de l'éprouvette bien que d'inévitables effets de bords apparaissent sur les bords libres de l'échantillon. Par conséquent, les valeurs mesurées près des bords sont retirées et la déformation  $\gamma = 2\epsilon_{12}$  est calculée comme la moyenne des mesures locales effectuées dans la partie homogène du champ de déformation.

Les résultats obtenus sur le cuivre pur sont présentés sur la Figure 4.19. La pente d'écroissage est très faible, aussi bien pour les essais monotones qu'alternés. On observe la présence de l'effet Bauschinger, caractérisé par une contrainte à la recharge plus faible que la contrainte atteinte avant inversion, pour toutes les valeurs de pré-déformation.

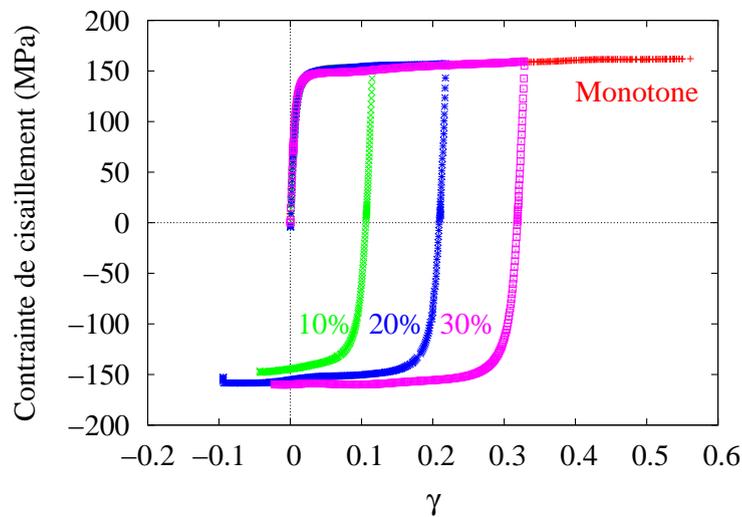


FIGURE 4.19: Essais de cisaillement monotone et alternés sur le cuivre pur.

L'effet Bauschinger tire son origine de l'hétérogénéité du champ de contraintes qui se développe au cours de la déformation, à la fois entre les grains (source intergranulaire) et à l'intérieur de chaque grain (source intragranulaire). Du fait de leurs différentes orientations cristallographiques, les grains d'un polycristal ne possèdent pas tous le même seuil de plasticité, certains étant plus ou moins durs à déformer que d'autres. Des incompatibilités de déformation s'établissent donc entre les grains et résultent sur un champ de contraintes hétérogène aux joints de grains. Après l'inversion du chargement, ces contraintes résiduelles, en se rajoutant à celles engendrées par la nouvelle sollicitation, contribuent à un abaissement du seuil de plasticité global du polycristal. A l'intérieur

des grains, la déformation entraîne une répartition hétérogène des dislocations, dont la microstructure comporte des zones de fortes (les parois) et de faibles densités de dislocations (voir (Mughrabi, 1983)). Des contraintes internes dites à longue portée se créent entre ces différentes zones ; de manière similaire au cas du polycristal, ces contraintes internes favorisent la déformation dans le sens inverse et entraînent une baisse du seuil d'activation plastique. L'augmentation de la pré-déformation accentue l'hétérogénéité de contraintes inter et intragranulaire et conduit donc à un effet Bauschinger de plus en plus marqué.

Pour le CuFe2P, l'effet Bauschinger est le plus marqué (voir Figure 4.20). On remarque également que l'écrouissage est très faible, similairement aux observations faites en traction sur ce matériau.

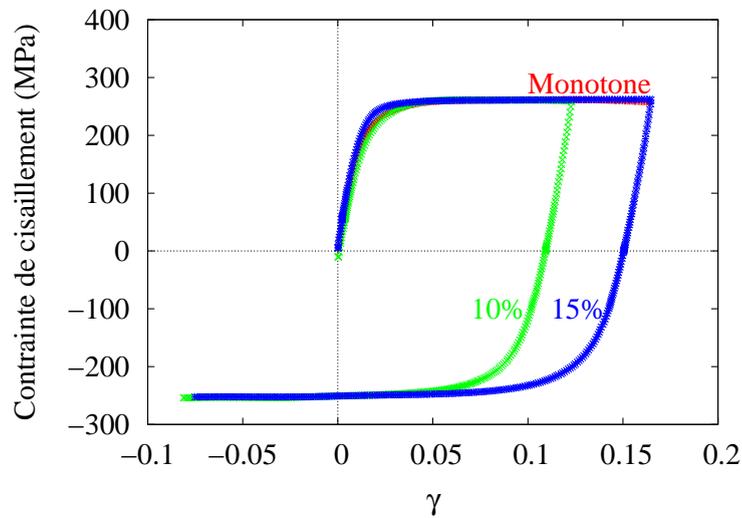


FIGURE 4.20: Essais de cisaillement monotone et alternés sur le CuFe2P.

Le CuBe2 en revanche présente un écrouissage plus important (voir la Figure 4.21). L'effet Bauschinger augmente avec la pré-déformation et on peut distinguer un adoucissement sur les niveaux de contraintes. Cet adoucissement est associé à une réorganisation des structures de dislocations. Une partie des dislocations générées s'annihile exclusivement après l'inversion du chargement, conduisant à une diminution globale du taux de production de dislocations et donc à un écrouissage plus faible.

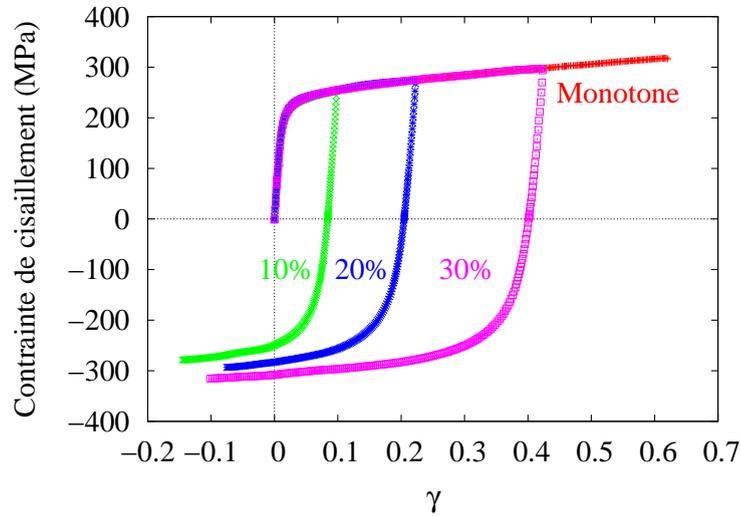


FIGURE 4.21: Essais de cisaillement monotone et alternés sur le CuBe2.

#### 4.2.5 Expansion biaxiale

Les essais d'expansion biaxiale permettent de caractériser le comportement des matériaux pour une sollicitation en expansion, c'est-à-dire pour des déformations principales positives dans le plan de la tôle, configuration qui est souvent rencontrée, par exemple, en mise en forme par emboutissage. Ces essais sont réalisés avec un dispositif de gonflement hydraulique (essai bulge) adapté pour les tôles ultrafines. Il se compose d'une matrice sur laquelle repose l'éprouvette circulaire (ou flan), d'un serre-flan, d'un capteur de pression et du dispositif de mesure optique de déformations 3D ARAMIS. Le serre-flan est maintenu sur le flan par plusieurs vis à couple constant contrôlé par une clé dynamométrique. Le flan de 60 mm de diamètre initial est alors déformé jusqu'à rupture par l'application d'une pression  $p$  d'eau asservie par une pompe électrique et mesurée par le capteur de pression. Le principe de l'essai est schématisé sur la [Figure 4.22](#).

Les caméras du dispositif ARAMIS sont montées du côté de la surface libre de l'éprouvette, comme l'indique la [Figure 4.23](#).

Pour le post-traitement, une calotte sphérique est considérée au pôle, zone dans laquelle l'état de déformations est équi-biaxial. Une approximation de la courbure au voisinage du pôle est donnée par le rayon de courbure  $\rho$  selon :

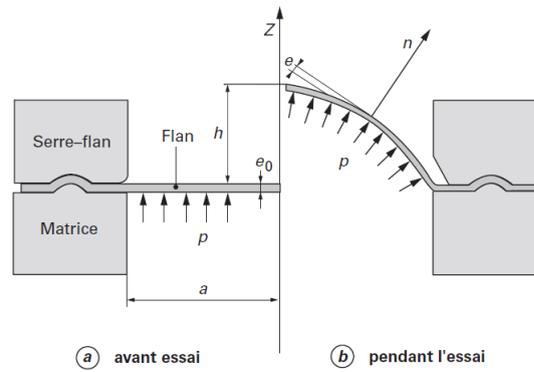


FIGURE 4.22: Schéma de principe de l'essai d'expansion biaxiale.



(a) Dispositif d'essai



(b) Flan après rupture

FIGURE 4.23: Photographies du dispositif d'essai d'expansion biaxiale.

$$\rho = \frac{a^2 + h^2}{2h} \quad (4.4)$$

La contrainte est alors estimée par la relation analytique :

$$\sigma_b = \frac{p\rho}{2e} \quad (4.5)$$

Il faut préciser que cette expression est basée sur une hypothèse d'isotropie de la réponse en contraintes dans le plan de la tôle, c'est-à-dire qu'on a  $\sigma_b = \sigma_{11} = \sigma_{22}$ . L'évolution de l'épaisseur  $e$  est obtenue à partir de la mesure des déformations dans le plan de la tôle et de la relation de conservation du volume.

Si on considère la déformation logarithmique dans l'épaisseur telle que  $\epsilon_{33} = \ln\left(\frac{e}{e_0}\right)$  où

$e_0$  désigne l'épaisseur initiale, la conservation du volume implique que :

$$\text{tr}(\boldsymbol{\epsilon}) = 0 \iff \epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33} = 0 \iff \epsilon_{33} = -2\epsilon_{11} \quad (4.6)$$

Et donc en utilisant l'expression de  $\epsilon_{33}$ , on obtient  $e = e_0 \exp(-2\epsilon_{11})$ .

On peut se rendre compte de l'intérêt des essais d'expansion biaxiale en les comparant aux essais de traction uniaxiale sur des graphes en contrainte et déformation équivalentes. En écrivant l'équivalence du travail plastique  $W^p$  produit dans le matériau par les deux types d'essais et en négligeant la déformation élastique, on obtient pour l'essai de traction :

$$W^p = \bar{\sigma} \bar{\epsilon} = \sigma_t \epsilon_{11} \quad (4.7)$$

et pour l'essai d'expansion biaxiale, dans le cas d'un comportement isotrope :

$$W^p = \bar{\sigma} \bar{\epsilon} = \boldsymbol{\sigma}_b : \boldsymbol{\epsilon}_b = \sigma_{b_{11}} \epsilon_{b_{11}} + \sigma_{b_{22}} \epsilon_{b_{22}} = 2\sigma_b \epsilon_b \quad (4.8)$$

Dans les expressions précédentes,  $\bar{\sigma}$  et  $\bar{\epsilon}$  sont respectivement la contrainte et la déformation équivalentes. En choisissant l'essai de traction uniaxiale comme référence, soit  $\bar{\sigma} = \sigma_t$ , l'égalité des deux expressions donne :

$$\bar{\epsilon} = \epsilon_t = \frac{2}{k_b} \epsilon_b \quad (4.9)$$

où  $k_b$  est le rapport entre la contrainte en traction uniaxiale et celle en expansion biaxiale. Pour une valeur identique d'énergie dissipée dans les essais de traction uniaxiale et d'expansion biaxiale, les états de contrainte et de déformation sont équivalents. A chaque point de la courbe de traction correspond donc un point sur la courbe biaxiale; pour chaque telle paire, on peut calculer  $k_b$ . On peut choisir de le faire par exemple à la fin de la partie exploitable de l'essai de traction (déformation uniforme maximum) ou par d'autres méthodes (Sigvant *et al.*, 2009). Avec un objectif purement illustratif, si on considère  $k_b = 1$  on obtient les essais de traction uniaxiale et d'expansion biaxiale superposés du graphe contrainte et déformation équivalente de la [Figure 4.24](#).

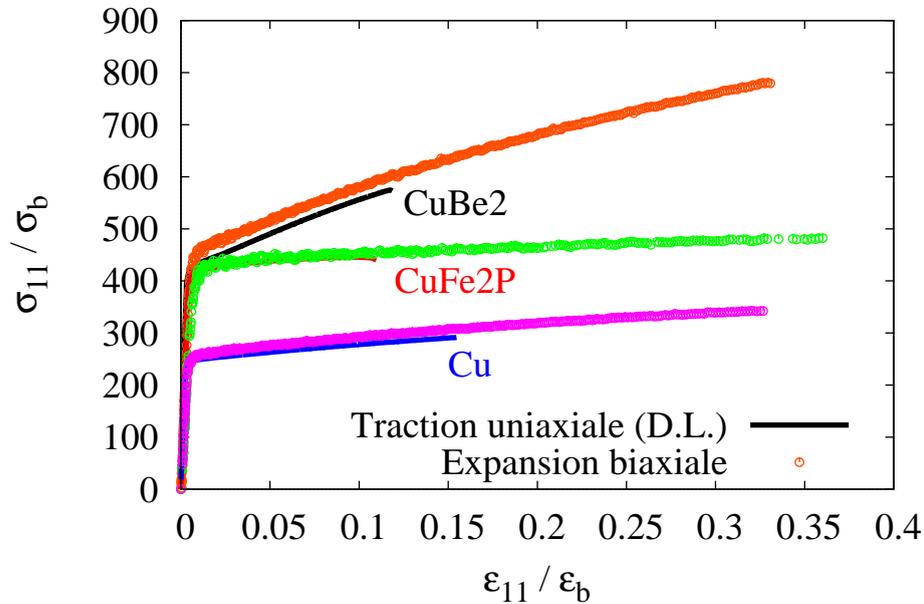


FIGURE 4.24: Superposition d'essais d'expansion biaxiale et de traction uniaxiale dans la DL pour les trois matériaux.

On observe que l'hypothèse d'un comportement isotrope (de type von Mises) ne permet pas de bien comparer les essais pour le Cu et le CuBe2. En revanche, cette hypothèse semble suffisante pour le CuFe2P.

#### 4.2.6 Bilan

La campagne expérimentale a permis de déterminer les principales caractéristiques mécaniques des tôles ultrafines de l'étude. Les essais de traction à différentes orientations par rapport à la DL ont présenté une anisotropie du comportement. L'effet Bauschinger a été mis en évidence grâce à des essais de cisaillement alternés de même qu'une évolution du module de Young avec la déformation plastique par des essais de traction de type charge-décharge. Il convient désormais de déterminer, sur la base des observations expérimentales, les paramètres des modèles de comportement choisis de façon à pouvoir prédire le comportement des tôles ultrafines.

## 4.3 Identification de paramètres

### 4.3.1 Modèle phénoménologique

Cette partie concerne le modèle élasto-viscoplastique présenté au chapitre 2. En fonction des caractéristiques d'écrouissage du matériau, des lois d'écrouissage spécifiques sont choisies et détaillées dans la suite. Les critères de plasticité anisotropes de Hill48 et de BB2004 sont considérés pour chaque matériau.

#### 4.3.1.1 Stratégie d'identification

L'identification paramétrique est effectuée par méthode inverse en exploitant le module d'implantation de modèles dans SiDoLo. Pour chaque modèle, le jeu de paramètres optimum  $\underline{A}$  est celui qui minimise la fonctionnelle  $L(\underline{A})$ . Cette dernière est une fonction coût qui mesure l'écart entre les données expérimentales et les prévisions du modèle. Elle est définie au sens des moindres carrés et s'écrit sur l'ensemble de la base expérimentale selon :

$$L(\underline{A}) = \sum_{\alpha} L^{T-S}(\underline{A}) + \sum_{\alpha} L^{T-E}(\underline{A}) + \sum_{\alpha} L^{Sh-S}(\underline{A}) + L^{BT-S}(\underline{A}) \quad (4.10)$$

Dans l'expression précédente,  $T - S$  et  $T - E$  représentent respectivement la contrainte et la déformation transverse en traction uniaxiale,  $Sh - S$  et  $BT - S$  la contrainte en cisaillement et en expansion biaxiale. En effet, la contrainte et la déformation sont les grandeurs observables sur lesquelles s'effectue la comparaison essai-simulation. Une somme sur  $\alpha$  est effectuée pour prendre en compte tous les essais de chaque type de test (orientations par rapport à la DL pour la traction uniaxiale, différents essais alternés pour le cisaillement). La fonctionnelle d'un essai  $n$  est donnée par la relation :

$$L^n(\underline{A}) = \frac{1}{m_n} \sum_{i=1}^{m_n} \frac{(Z(\underline{A}, t_i) - Z^*(t_i))^2}{w_n^2} \quad (4.11)$$

dans laquelle  $m_n$  est le nombre de points expérimentaux,  $Z(\underline{A}, t_i)$  et  $Z^*(t_i)$  sont respectivement les variables simulées et expérimentales à l'instant  $t_i$  et  $w_n$  est le coefficient

de pondération de l'essai considéré. La valeur de ce poids est choisie en fonction de l'incertitude sur les mesures expérimentales. Les coefficients de pondération permettent d'orienter la qualité de l'identification vers la caractéristique voulue. On peut ainsi choisir de favoriser (ou pas), en fonction de l'application visée, une meilleure description de l'anisotropie de contrainte ou de déformation. Dans cette étude, une description globale des résultats expérimentaux a été visée. Ainsi, pour la traction uniaxiale on a  $w^S = 5$  MPa et  $w^E = 0.002$  tandis que pour le cisaillement  $w = 3$  MPa et  $w = 5$  MPa pour l'expansion biaxiale.

L'identification s'effectue de manière séquentielle, en ajoutant les essais de la base expérimentale au fur et à mesure de la description de telle ou telle caractéristique du matériau. La procédure d'identification globale est la suivante :

- les coefficients de viscosité  $K_v$  et  $n_v$  sont identifiés analytiquement à partir des essais de traction avec sauts de vitesse. En écrivant la loi d'écoulement à partir du potentiel de Norton (2.48) et (2.49), dans un cas monodimensionnel on obtient  $D \approx D^p = \frac{(\sigma - \sigma_y)^{n_v}}{K_v}$ . Cette relation peut s'exprimer sous la forme :

$$\ln D = n_v \ln \Delta\sigma - \ln K_v \quad (4.12)$$

où  $\Delta\sigma = \sigma - \sigma_y$  représente le saut de contrainte au changement de vitesse de déformation.

En appliquant la relation précédente pour les deux vitesses de déformation ( $10^{-3} \text{ s}^{-1}$  et  $10^{-2} \text{ s}^{-1}$ ), on obtient un système de deux équations dont les inconnues sont  $K_v$  et  $n_v$  ;

- la contrainte seuil  $\sigma_0$  et les paramètres d'écrouissage isotrope sont identifiés sur les essais de traction (selon DL, DD, DT) et l'essai de cisaillement monotone ;
- les essais de traction avec sauts de vitesse sont simulés et la cohérence des paramètres de viscosité (identifiés au préalable) est vérifiée ;
- pour le critère de BB2004, les paramètres de forme de la surface de charge  $\alpha_1, a, b_1, b_2$  sont déterminés à partir de l'essai d'expansion biaxiale ;
- les essais alternés en cisaillement sont exploités, les paramètres d'écrouissage isotrope « libérés » et les paramètres d'écrouissage mixte sont identifiés ;
- les paramètres des critères d'anisotropie de Hill48 ou de BB2004 sont ajustés en considérant l'ensemble de la base expérimentale.

Les jeux de coefficients identifiés peuvent ne pas être uniques. En effet les algorithmes d'optimisation dits du gradient sont sensibles aux valeurs initiales des paramètres et conduisent parfois à des minima locaux. Il est alors important de fixer des domaines d'évolution réalistes aux paramètres.

#### 4.3.1.2 Résultats d'identification

On présente ici, pour chaque matériau, les résultats obtenus en considérant les critères anisotropes de Hill48 et de BB2004. Lors de l'optimisation du jeu de paramètres, comme expliqué plus haut, les poids sont répartis de manière équivalente afin d'obtenir une description simultanée de l'anisotropie de contrainte et de déformation, ce qui constitue un bon compromis en vue d'une application en mise en forme.

##### Identification du cuivre pur

La contribution isotrope de la loi d'érouissage mixte est de type Swift pour ce matériau. Les résultats d'identification sont illustrés sur la [Figure 4.25](#), la [Figure 4.26](#) et la [Figure 4.27](#).

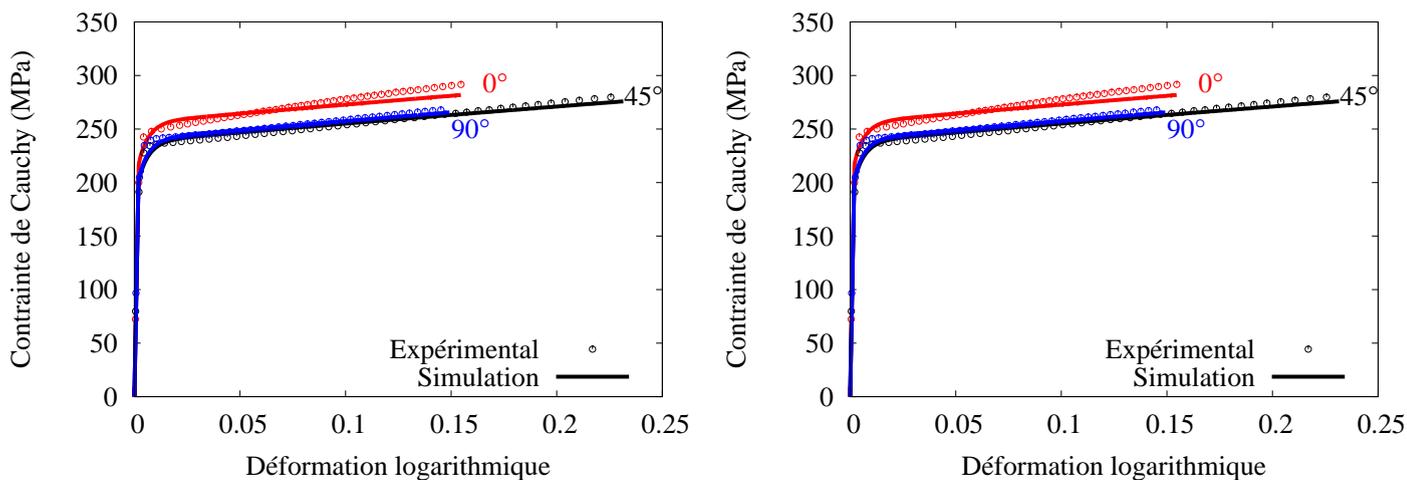


FIGURE 4.25: Comparaison essais / modèles en traction uniaxiale sur du cuivre pur.

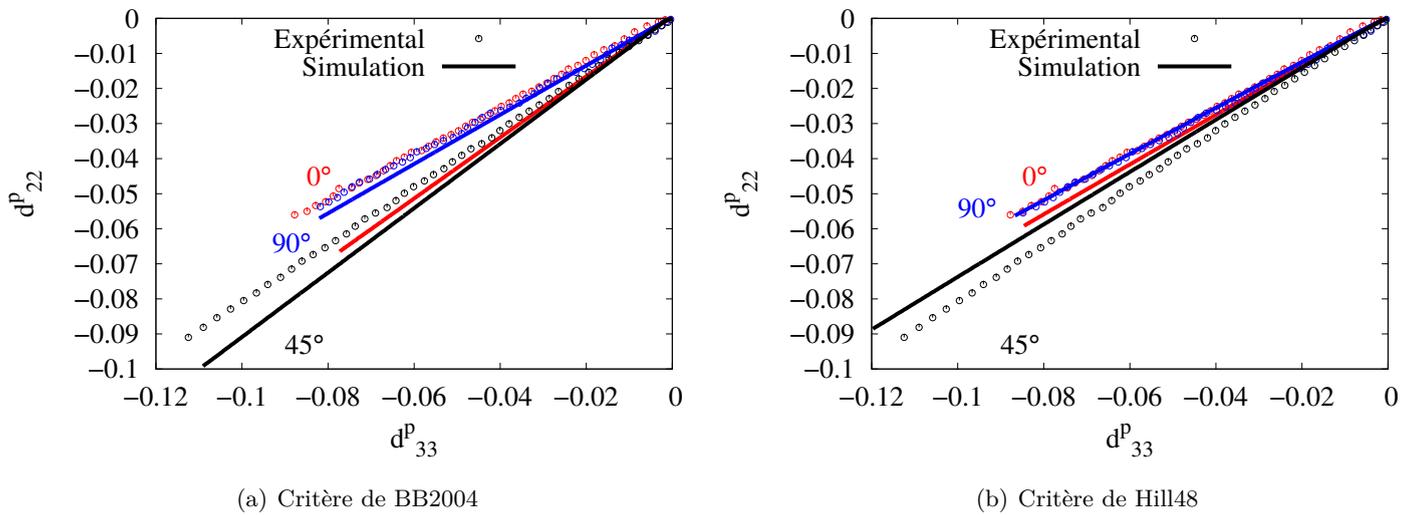


FIGURE 4.26: Comparaison essais / modèles pour l'anisotropie de déformation en traction uniaxiale sur du cuivre pur.

Le critère de Hill48 n'arrive pas à décrire l'anisotropie de contrainte et de déformation. La prédiction des coefficients de Hill est nettement meilleure que celles des niveaux de contraintes où la distinction entre les différentes orientations n'est pas capturée (voir également (Banabic, 2010)). En revanche, le critère de BB2004 fournit une description satisfaisante de l'anisotropie de contrainte et prédit assez bien l'évolution des coefficients d'anisotropie plastique.

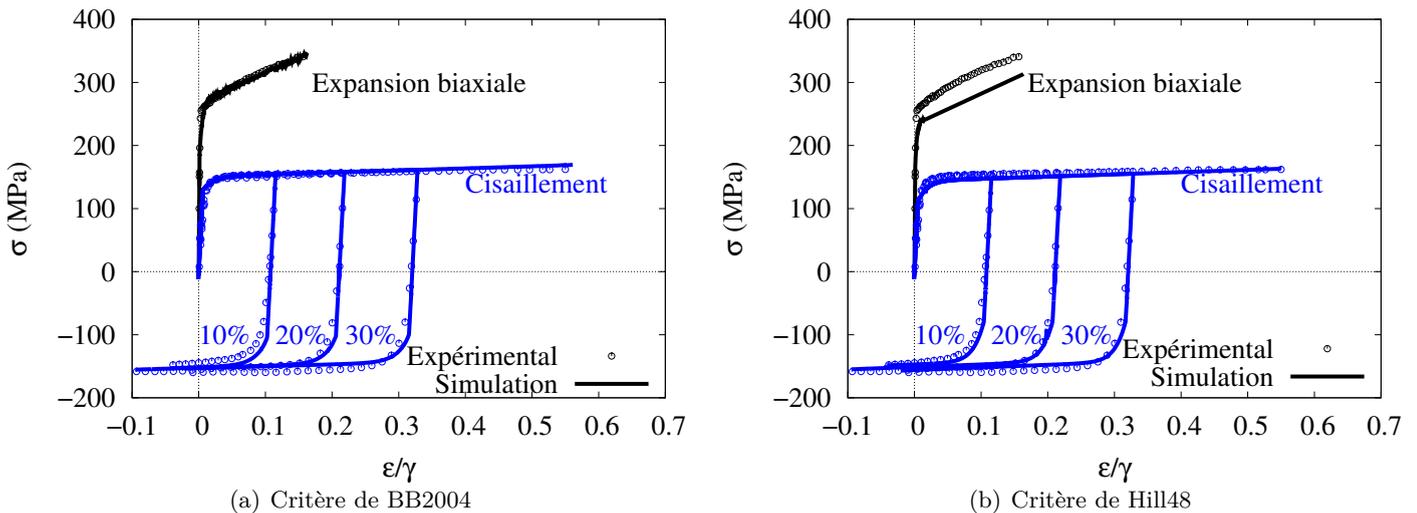


FIGURE 4.27: Comparaison essais / modèles en expansion biaxiale et cisaillement sur du cuivre pur.

En ce qui concerne les essais de cisaillement (monotones et alternés), ils sont bien décrits par les deux modèles. L'effet Bauschinger est bien reproduit après inversion de la charge et ce pour les différents niveaux de pré-déformation. Le modèle de Hill48 n'arrive pas à reproduire correctement l'essai d'expansion biaxiale contrairement au modèle de BB2004 qui en fournit une fidèle prédiction. Les paramètres identifiés (pour les deux critères anisotropes) sont donnés dans le [Tableau 4.6](#), le [Tableau 4.7](#) et le [Tableau 4.8](#).

$K_v$	$n_v$
6,02	5,37

TABLEAU 4.6: Paramètres matériaux communs aux deux modèles pour le cuivre.  $K_v$  est en  $\text{MPa}\cdot\text{s}^{\frac{1}{n_v}}$ .

$F$	$G$	$H = 2 - G$	$N$	$\sigma_0$			
1,36	1,24	0,76	3,02	192			
$C_{X_1}$	$D_{X_1}$	$C_{X_2}$	$D_{X_2}$	$H_X$	$K_r$	$\epsilon_0$	$n_r$
8220	312	6256	216	112	200	0,038	1,46

TABLEAU 4.7: Paramètres identifiés du modèle de Hill 1948 pour le cuivre.  $\sigma_0$ ,  $C_{X_i}$  et  $H_X$  sont en MPa.

$a$	$b_1$	$b_2$	$\alpha_1$	$\sigma_0$			
1,15	15	60	0	217			
$c_{21}$	$c_{22}$	$c_{23}$	$c_{24}$				
1,24	1,23	0,91	1,08				
$C_{X_1}$	$D_{X_1}$	$C_{X_2}$	$D_{X_2}$	$H_X$	$K_r$	$\epsilon_0$	$n_r$
2045	902	4674	200	110	26	0,009	1,28

TABLEAU 4.8: Paramètres identifiés du modèle de Bron&Besson pour le cuivre.  $\sigma_0$ ,  $C_{X_i}$ ,  $H_X$  et  $K$  sont en MPa.

### Identification du CuFe2P

L'érouissage mixte est considéré ici avec une composante isotrope saturante de Voce. La [Figure 4.28](#), la [Figure 4.29](#) et la [Figure 4.30](#) présentent les résultats de l'identification. Le modèle de BB2004 décrit mieux l'anisotropie de contrainte que le modèle de Hill48.

La pente d'érouissage dans la DL, plus marquée que celles dans les autres directions, est bien prédite.

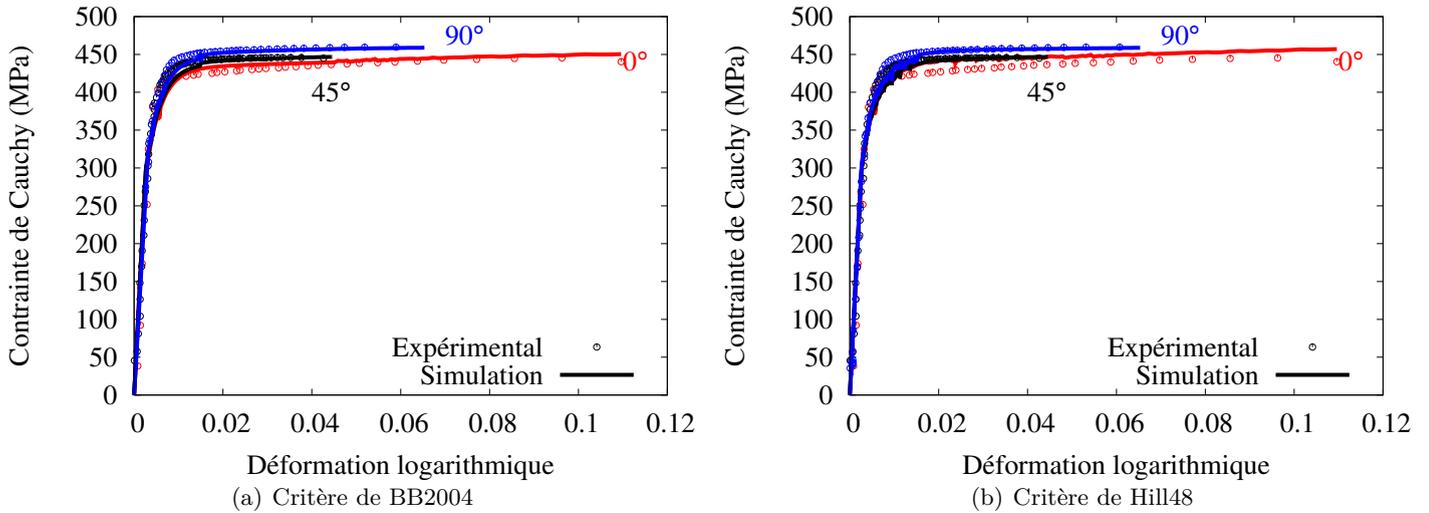


FIGURE 4.28: Comparaison essais / modèles en traction uniaxiale sur le CuFe2P.

La même tendance est observée pour la prédiction de l'anisotropie de déformation où le modèle de BB2004 conduit à une meilleure représentation des données expérimentales; la qualité des prédictions reste toutefois moyenne dans les deux cas. En effet, la microstructure lamellaire et fragmentée de ce matériau entraîne un comportement en déformation particulier. On observe ainsi une évolution non linéaire de la déformation transverse en fonction de la déformation hors plan.

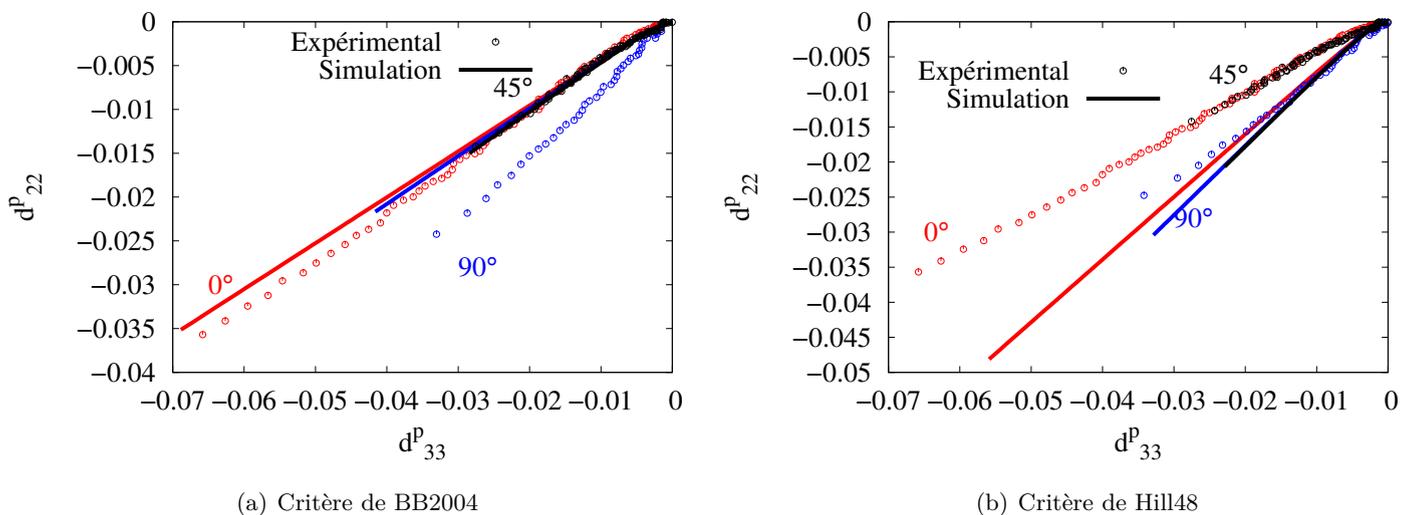


FIGURE 4.29: Comparaison essais / modèles pour l'anisotropie de déformation en traction uniaxiale sur le CuFe2P.

Les deux modèles se révèlent performants dans la description des essais de cisaillement (monotone et alternés) et d'expansion biaxiale. Une bonne concordance est obtenue avec les courbes expérimentales et les prédictions des modèles sont de qualité équivalente.

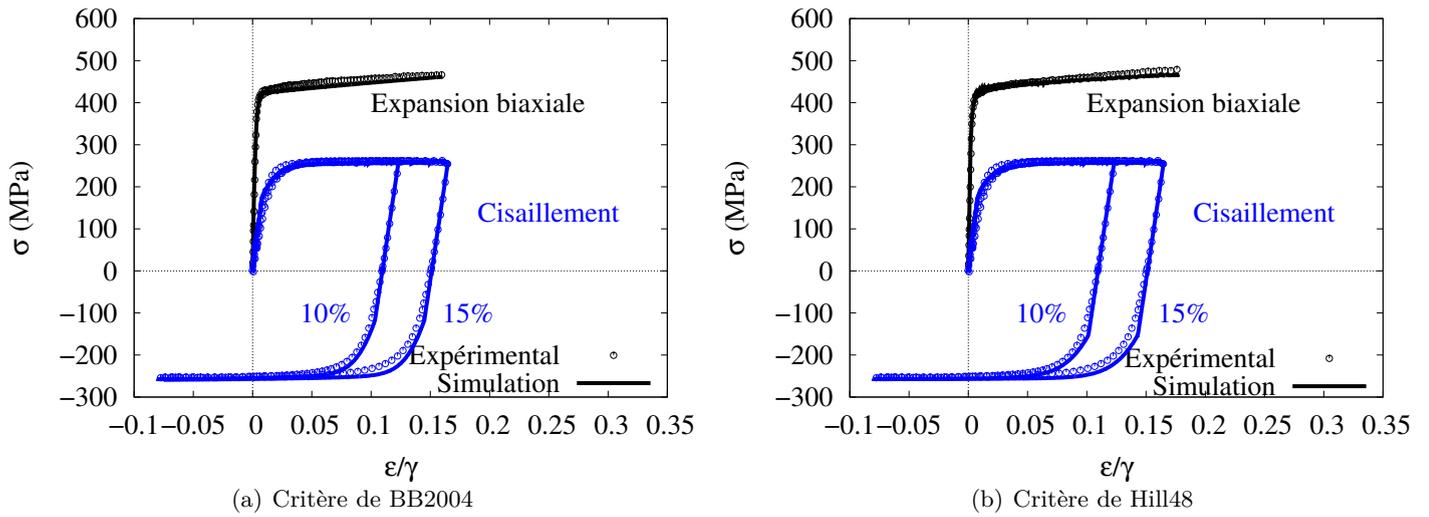


FIGURE 4.30: Comparaison essais / modèles en expansion biaxiale et cisaillement sur le CuFe2P.

Les paramètres des modèles sont fournis dans le [Tableau 4.9](#), le [Tableau 4.10](#) et le [Tableau 4.11](#).

$K_v$	$n_v$	$E_{sat}$	$k$
92,6	3,87	95440	-130

TABLEAU 4.9: Paramètres matériaux communs aux deux modèles.  $E_{sat}$  est en MPa et  $K_v$  en  $\text{MPa}\cdot\text{s}^{\frac{1}{n_v}}$ .

$F$	$G$	$H = 2 - G$	$N$	$\sigma_0$		
0,94	1,07	0,93	3,01	290.		
$C_{X_1}$	$D_{X_1}$	$C_{X_2}$	$D_{X_2}$	$H_X$	$\sigma_{sat}$	$C_R$
20000	230	74	0,006	0	54	1000

TABLEAU 4.10: Paramètres identifiés du modèle de Hill 1948 pour le CuFe2P.  $\sigma_0$ ,  $C_{X_i}$ ,  $H_X$  et  $C_R$  sont en MPa.

$a$	$b_1$	$b_2$	$\alpha_1$	$\sigma_0$				
1	2	48,3	0,09	290				
$c_{11}$	$c_{12}$	$c_{13}$	$c_{14}$	$c_{21}$	$c_{22}$	$c_{23}$	$c_{24}$	
1,07	0,42	1,18	0,87	0,93	1,1	0,99	1,03	
$C_{X_1}$	$D_{X_1}$	$C_{X_2}$	$D_{X_2}$	$H_X$	$\sigma_{sat}$	$C_R$		
10000	248	472	19	110	0	60	735	

TABLEAU 4.11: Paramètres identifiés du modèle de Bron&Besson pour le CuFe2P.  $\sigma_0$ ,  $C_{X_i}$ ,  $H_X$  et  $C_R$  sont en MPa.

### Identification du CuBe2

La loi d'écroutissage isotrope de Hockett-Sherby, combinée à un écroutissage cinématique non linéaire dans le modèle d'écroutissage mixte, s'est révélée la plus adaptée pour le CuBe2. La Figure 4.31, la Figure 4.32 et la Figure 4.33 montrent les résultats d'identification obtenus.

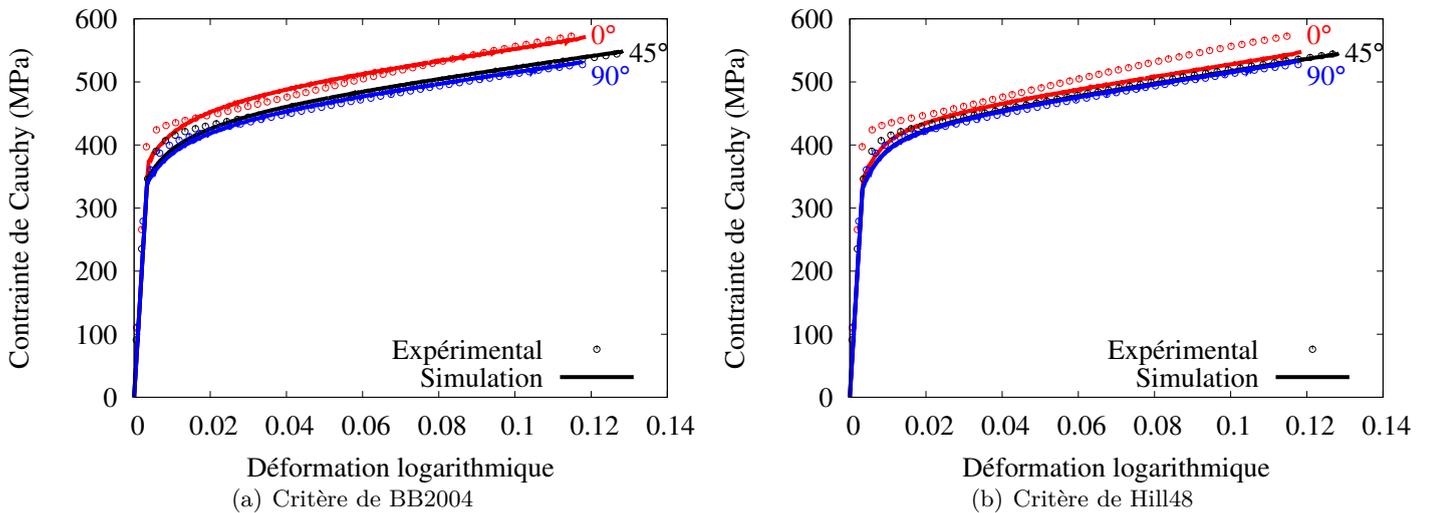


FIGURE 4.31: Comparaison essais / modèles en traction uniaxiale sur le CuBe2.

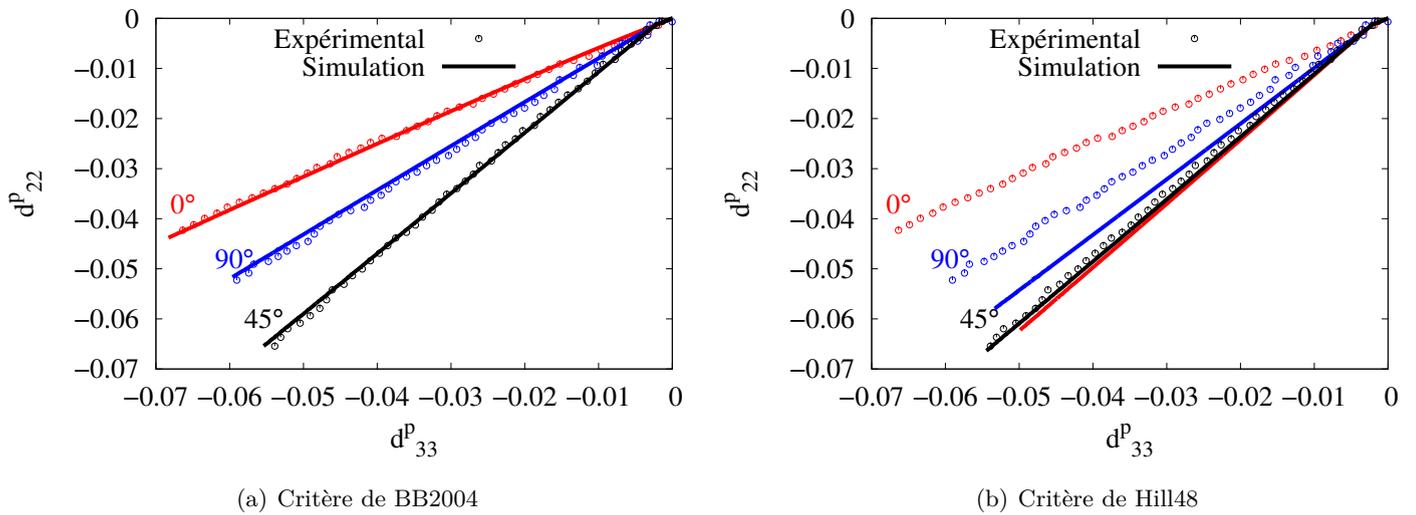


FIGURE 4.32: Comparaison essais / modèles pour l’anisotropie de déformation en traction uniaxiale sur le CuBe2.

L’anisotropie des niveaux de contrainte dans la DL par rapport à ceux dans la DD et la DT est bien représentée par le modèle de BB2004 de même que l’évolution des coefficients d’anisotropie plastique. En revanche, le modèle de Hill48 ne reproduit ni l’anisotropie de déformation (seul  $r_{45}$  est bien décrit), ni l’anisotropie de contrainte.

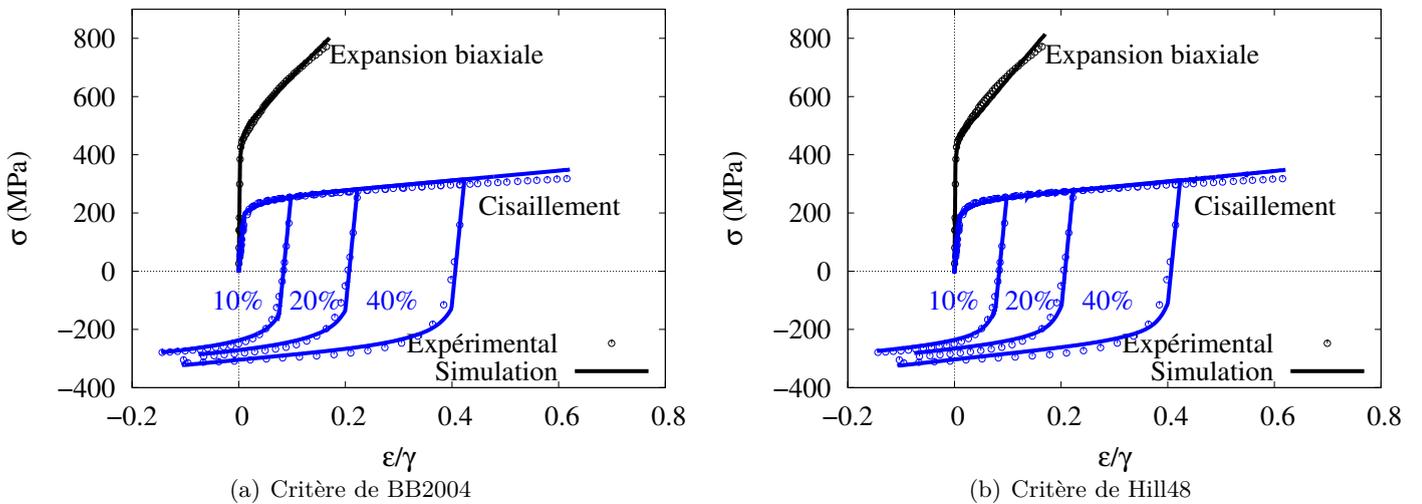


FIGURE 4.33: Comparaison essais / modèles en expansion biaxiale et cisaillement sur le CuBe2.

Les deux modèles fournissent de bonnes représentations des essais de cisaillement et d’expansion biaxiale. La combinaison de trois termes d’écrouissage cinématique permet de capturer finement après inversion du chargement l’effet Bauschinger, la transition

élastique-plastique ainsi que l'adoucissement. Les paramètres des modèles identifiés pour ce matériau sont donnés ci-dessous dans le [Tableau 4.12](#), le [Tableau 4.13](#), le [Tableau 4.14](#).

$K_v$	$n_v$	$E_{sat}$	$k$
74,2	30,1	70000	-60,2

TABLEAU 4.12: Paramètres matériaux communs aux deux modèles.  $E_{sat}$  est en MPa et  $K_v$  en  $\text{MPa} \cdot s^{\frac{1}{n_v}}$ .

$F$	$G$	$H = 2 - G$	$N$	$\sigma_0$					
1,01	0,83	1.17	3,41	290					
$C_{X_1}$	$D_{X_1}$	$C_{X_2}$	$D_{X_2}$	$C_{X_3}$	$D_{X_3}$	$H_X$	$\sigma_{sat}$	$C_R$	$n_r$
13400	293	238	0,01	2850	60,4	395	5420	0,16	1,38

TABLEAU 4.13: Paramètres identifiés du modèle de Hill 1948 pour le CuBe2.  $\sigma_0$ ,  $C_{X_i}$ ,  $H_X$  et  $\sigma_{sat}$  sont en MPa.

$a$	$b_1$	$b_2$	$\alpha_1$	$\sigma_0$					
49,2	2,1	12,7	0,2	290					
$c_{11}$	$c_{12}$	$c_{13}$	$c_{14}$	$c_{21}$	$c_{22}$	$c_{23}$	$c_{24}$		
1,1	0,8	1,01	1,1	0,5	1,3	0,6	0,9		
$C_{X_1}$	$D_{X_1}$	$C_{X_2}$	$D_{X_2}$	$C_{X_3}$	$D_{X_3}$	$H_X$	$\sigma_{sat}$	$C_R$	$n_r$
5080	243	44,8	0,1	2190	52	336	2820	0,23	1,21

TABLEAU 4.14: Paramètres identifiés du modèle de Bron&Besson pour le CuBe2.  $\sigma_0$ ,  $C_{X_i}$ ,  $H_X$  et  $\sigma_{sat}$  sont en MPa.

## Bilan

Les paramètres des modèles phénoménologiques ont été identifiés, pour les trois matériaux, sur la base des données de la campagne expérimentale de caractérisation mécanique. Le modèle élasto-viscoplastique à écrouissage mixte et avec un critère anisotrope de BB2004 permet une bonne description de l'ensemble des trajets de déformation (traction uniaxiale à 0, 45 et 90° de la DL), cisaillement monotone et alternés, expansion biaxiale, pour les trois matériaux. Le critère de BB2004 se révèle notamment plus performant que le critère de Hill48 dans la description conjuguée de l'anisotropie de

déformation et de contrainte. L'ajout de plusieurs termes d'écrouissage permet de capturer le comportement du matériau après inversion du chargement en cisaillement. Il faut toutefois remarquer que ce modèle comporte un nombre élevé de paramètres, 21 pour le CuFe2P, 23 pour le cuivre et 25 pour le CuBe2.

### 4.3.2 Modèle CPFEM

Cette partie concerne l'identification des paramètres du modèle de plasticité cristalline présenté au chapitre 2. Pour ce modèle, l'identification porte uniquement sur les alliages industriels qui seront employés dans les applications, à savoir le CuBe2 et le CuFe2P.

#### 4.3.2.1 Stratégie d'identification

Une loi de plasticité cristalline, telle que celle implantée, devrait être idéalement calibrée à partir d'essais effectués sur des monocristaux. Toutefois l'élaboration de monocristaux et leur instrumentation sont des opérations délicates, coûteuses en temps et à l'issue incertaine. Il est donc fréquent de procéder à l'identification des lois monocristallines à partir d'essais macroscopiques sur des polycristaux. Les paramètres identifiés ne correspondent pas au comportement du monocristal seul mais à celui d'un ensemble de grains qui doit lui même être représentatif du comportement macroscopique. Il convient alors de déterminer avec soin ce volume de grains dénommé Volume Elementaire Représentatif (VER). Un VER peut être défini comme le plus petit volume de matière contenant assez de grains pour représenter statistiquement le matériau et exhiber son comportement macroscopique. On lui attribue les propriétés suivantes :

- il doit être plus grand que la taille caractéristique de l'hétérogénéité (ici le cristal) ;
- il doit être plus petit que la taille caractéristique de la structure mécanique (éprouvette) ;
- sa réponse moyenne ne doit pas changer lorsque sa taille augmente ;
- son comportement moyen doit être identique pour différentes réalisations (tirages aléatoires de la microstructure).

En conséquence, la taille du VER est souvent difficile à estimer précisément et est tributaire du degré de précision recherché et des applications visées.

Une méthode d'estimation de la taille suffisante du VER ([Gitman \*et al.\*, 2007](#)), ([Lin \*et al.\*, 2010](#)), ([Kanit \*et al.\*, 2003](#)) est d'effectuer une étude de convergence. On choisit un

volume élémentaire sur lequel on effectue un essai (numérique) et on observe sa réponse globale. On augmente ensuite la taille du volume élémentaire jusqu'à ce que les réponses globales convergent ; ensuite on reprend le volume à partir duquel elles commencent à converger avec une tolérance acceptable. On effectue plusieurs réalisations différentes de ce volume (maillages et orientations différentes à chaque fois) et on analyse les réponses. Si ces dernières convergent, alors le volume élémentaire est dit représentatif.

Cette procédure est retenue dans ces travaux. La microstructure et le maillage, tous deux périodiques, sont générés à l'aide du logiciel *Neper*. Des volumes élémentaires (VE) de taille (nombre d'éléments et dimensions) croissante sont ainsi créés et maillés régulièrement avec des éléments hexaédriques. Pour chaque taille de VE, cinq simulations sont effectuées afin d'évaluer la dispersion sur les valeurs.

Chaque simulation diffère de l'autre par la morphologie et la disposition spatiale des grains ainsi que par leurs orientations initiales. Les orientations attribuées aux grains sont obtenues à partir des triplets d'angles d'Euler mesurés expérimentalement par EBSD. Ces données sont d'abord converties en fonction de distribution des orientations (FDO) par superposition de fonctions de Gauss (Tarasiuk *et al.*, 2004) pondérées par les diamètres des grains. Ensuite, la distribution continue (la FDO) est discrétisée en un nombre donné d'orientations individuelles. Ainsi, les orientations présentes dans les volumes élémentaires sont statistiquement représentatives de la texture mesurée expérimentalement.

L'étude de convergence de la réponse mécanique est effectuée en soumettant ces VE à des essais de traction uniaxiale. Les conditions aux limites imposées sont périodiques ce qui implique que les déplacements des noeuds sur les faces opposées du VE sont liés. Ce type de conditions aux limites constitue la meilleure représentation du VER plongé dans un milieu infini puisque la réponse mécanique n'est pas affectée par les effets de bords libres du maillage.

On considère  $\underline{e}_i$  un vecteur de la base orthogonale (X,Y,Z) définie sur trois arêtes concurrentes du VE, ainsi que  $\underline{u}'_i$  et  $\underline{u}_i$  les déplacements des ensembles (correspondants deux à deux) de noeuds sur des faces opposées du VE dont la normale est colinéaire à  $\underline{e}_i$ , et enfin  $L_i$  la longueur de l'arête séparant ces faces opposées. La condition de périodicité des déplacements s'écrit alors :

$$\underline{u}'_i - \underline{u}_i = (\mathbf{F} - \mathbf{I}) \cdot (L_i \underline{e}_i) \quad (4.13)$$

où  $\mathbf{F}$  est le gradient de la transformation et  $\mathbf{I}$  le tenseur identité. Ces relations peuvent être spécifiées dans ABAQUS sous formes d'équations ; les déplacements sont alors imposés en recourant à des noeuds de référence  $N_i$  associés aux faces opposées. Les noeuds de référence et les différents déplacements associés à divers types de sollicitations sur le VE sont représentés sur la [Figure 4.34](#).

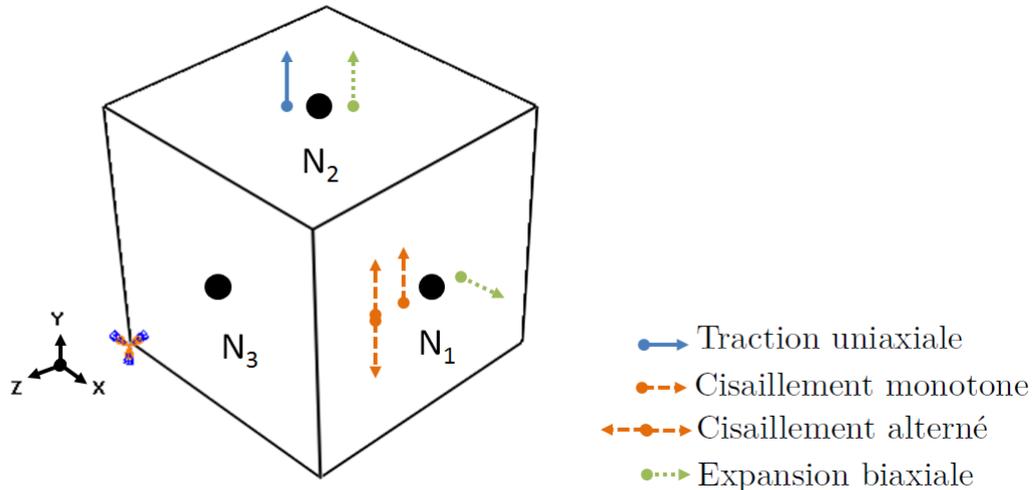


FIGURE 4.34: Volume Élémentaire cubique, noeuds de référence et diverses sollicitations.

Enfin, un noeud du VE est fixé comme illustré sur la [Figure 4.34](#) pour éviter les mouvements de corps rigides.

Chaque grain est constitué d'au moins 20 éléments finis de type C3D8R (cubiques linéaires à un point d'intégration) afin d'assurer une précision numérique suffisante (([Diard et al., 2005](#)), ([Lin et al., 2010](#)), ([Belkhabbaz et al., 2015](#))) pour la détermination des champs mécaniques macroscopiques.

### Détermination du VER : exemple du CuBe2

Les microstructures des VE sont générées avec des tessellations de Laguerre, c'est-à-dire qu'il s'agit de tessellations de Voronoï pondérées initialement par les diamètres des grains. Dans *Neper*, une taille moyenne de grains et l'écart-type associé permettent de reproduire la distribution de tailles de grains par une loi normale. Des VE de 100, 200, 300, 400, 500, 600, 700 et 800 grains sont soumis à des essais de tractions uniaxiales pour étudier la convergence de leur réponse macroscopique. La contrainte et la déformation résultantes sont calculées en moyennant les valeurs aux points d'intégration sur tout le volume élémentaire. Les résultats de l'analyse de convergence sont illustrés sur la [Figure 4.35](#).

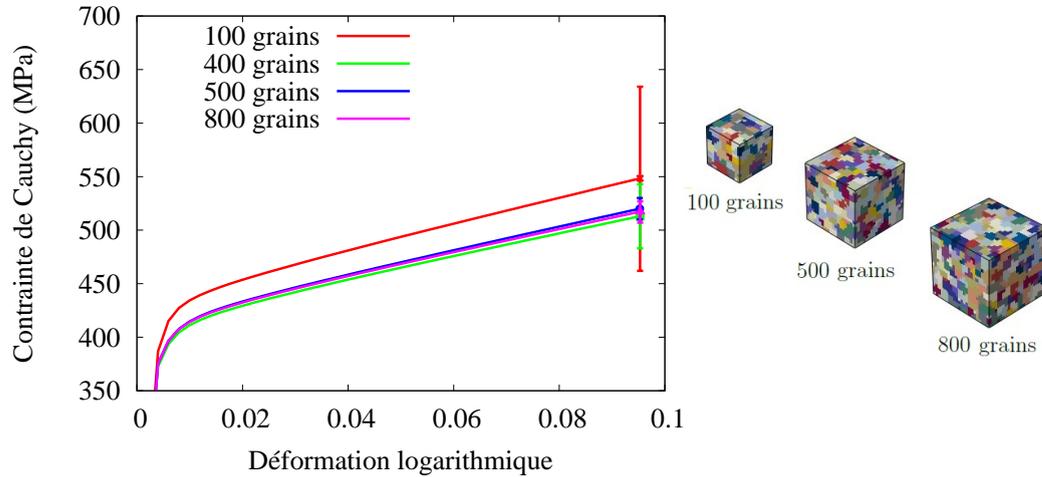


FIGURE 4.35: Analyse de convergence sur les VE pour un test de traction uniaxiale avec le modèle CPFEM et VE de taille croissante (paramètres du modèle :  $h_0=300$  MPa,  $\tau^*=750$  MPa,  $\tau_0=250$  MPa,  $q = 1.4$ ,  $\dot{\gamma}_o=0.001$  s<sup>-1</sup>,  $n=50$ ).

La dispersion des valeurs obtenues sur les réalisations se réduit considérablement à partir de 400 grains et les réponses en contraintes convergent. Le VE de 500 grains est donc considéré comme représentatif. La Figure 4.36 montre que la texture numérique décrit bien les caractéristiques principales de la texture cristallographique expérimentale.

### Identification des paramètres

Les modèles d'érouissage de PAN (Peirce *et al.*, 1982) et de Tabourot (Tabourot, 2001) sont retenus dans le cadre de ces travaux. Les paramètres de ces modèles sont relatifs à l'érouissage et seront donc identifiés sur la base d'un essai de traction dans la DL. Il s'agit d'un des intérêts du modèle de plasticité cristalline ; les mécanismes physiques (glissement de plans cristallographiques, orientations cristallines) pris en compte dans le modèle de comportement permettent (ou du moins devraient permettre) de représenter les phénomènes physiques de la déformation. De plus, les paramètres d'érouissage prennent (pour la plupart) un sens physique direct qui favorise une identification intuitive.

### Modèle PAN

Les paramètres de la loi d'écoulement  $\dot{\gamma}_0$  et  $n$ , valables pour les deux lois d'érouissage, sont regroupés avec ceux du modèle PAN.

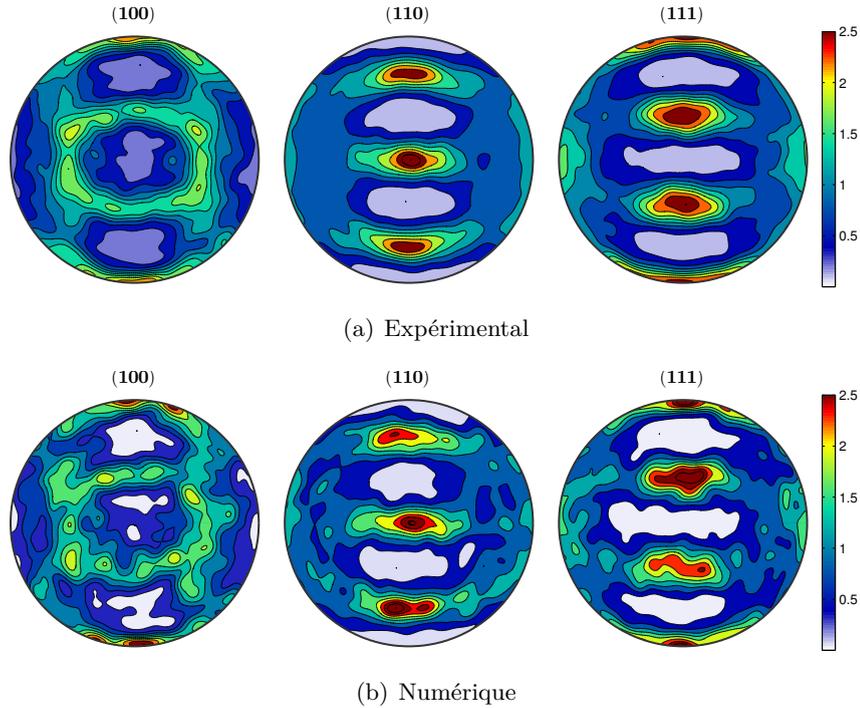


FIGURE 4.36: Figures de pôles pour le CuBe2 a) Données recueillies par EBSD and b) discrétisation numérique des données expérimentales pour le VER.

- $\dot{\gamma}_0$  la cission critique de référence et  $n$  la sensibilité à la vitesse de déformation jouent un rôle dans la théorie de l'activation thermique et sont reliés à des constantes physiques. Pour des matériaux à structure CFC à température ambiante, des valeurs usuelles sont disponibles dans la littérature (Tabourot, 2001);
- d'après la loi de Schmid, la cission critique initiale  $\tau_0$  ne peut excéder la moitié de la contrainte d'écoulement macroscopique. Une estimation de  $\tau_0$  peut ainsi être obtenue;
- comme relevé expérimentalement par (Kocks, 1970), le paramètre d'écroissage latent  $1 \leq q \leq 1.4$ ;
- la pente d'écroissage initiale  $h_0$  et la contrainte de saturation  $\tau^*$  peuvent être ajustées au préalable avec une simulation sur un monocristal (un élément fini);
- le jeu de paramètres est ensuite employé dans la simulation sur le VER et les valeurs ajustées (au besoin) par rapport à la courbe expérimentale.

#### Modèle de Tabourot

- le module de cisaillement  $\mu$  et le vecteur de Burgers  $b$  sont des constantes matériau accessibles dans la littérature (Tabourot, 2001);
- la matrice d'interactions entre dislocations  $\alpha_{su}$  intervient dans l'expression de la contrainte seuil et compte 144 coefficients dans son expression complète. Le choix

- est fait ici de la simplifier et de considérer une influence identique sur tous les systèmes de glissement. Pour les alliages de cuivre, la valeur de  $\alpha = \sqrt{\alpha^{su}} = 0.3$  est d'usage standard (voir (Tabourot, 2001));
- la matrice d'interaction entre dislocations  $\beta^{su}$  intervient dans le libre parcours moyen des dislocations et dépend de la géométrie des systèmes. De nombreuses approches ont été proposées pour réduire le nombre de termes indépendants et classer les interactions suivant leur amplitude (Gérard, 2008). La méthode retenue ici (voir (Tabourot, 2001)) propose la classification suivante  $\beta_0 < \beta_1 < \beta_2 < \beta_3$ . Dans l'expression précédente,  $\beta_0$  est relié à l'auto-écrouissage sur le système,  $\beta_1$  aux interactions colinéaires, coplanaires et orthogonales,  $\beta_2$  aux jonctions glissiles et  $\beta_3$  aux jonctions sessiles ou verrous de Lomer-Cottrell. Les valeurs sont bornées et il est imposé  $\beta_3 = 1$ ; à partir des rapports proposés par (Bassani et Wu, 1991), à savoir  $\beta_1 \cong 0.4\beta_3$  et  $\beta_2 \cong 0.7\beta_3$ , on procède à l'identification des coefficients  $\beta_0, \beta_1$ , et  $\beta_2$ ;
  - la densité de dislocations initiale  $\rho_0$ , le paramètre  $K$  et la distance critique d'annihilation  $y_c$  (qui est de l'ordre du vecteur de Burgers  $b$ ) peuvent être calibrés préalablement avec une simulation sur un monocristal (un seul élément fini);
  - le jeu de paramètres sert alors à simuler l'essai de traction sur le VER et si nécessaire les valeurs sont corrigées pour réduire l'écart avec la courbe expérimentale.

### 4.3.2.2 Résultats d'identification

#### Identification du CuBe2

Les paramètres des modèles PAN et Tabourot calibrés par rapport à l'essai de traction dans la DL sont reportés dans le [Tableau 4.15](#) et le [Tableau 4.16](#). Les résultats de l'identification sont illustrés sur la [Figure 4.37](#)

$h_0$ (MPa)	$\tau^*$ (MPa)	$\tau_0$ (MPa)	$q$	$\dot{\gamma}_o$ (s <sup>-1</sup> )	$n$
100	700	175	1,4	0,001	50

TABLEAU 4.15: Paramètres du modèle PAN (CPFEM) pour le CuBe2 identifiés sur un essai de traction dans la DL.

$\mu(GPa)$	$\alpha^{(s\beta)} = \alpha$	$\beta_0$	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$	$K$	$y_c$ (mm)
42	0,3	0,2	0,4	0,75	1	16	8,32E-07

TABLEAU 4.16: Paramètres du modèle Tabourot (CPFEM) pour le CuBe2 identifiés sur un essai de traction dans la DL.

Un bon accord est obtenu entre la courbe expérimentale et les prévisions du modèle et ce pour les deux modèles d'écroissage PAN et Tabourot. En revanche, comme avec l'approche phénoménologique, la transition élasto-plastique n'est pas bien représentée par le modèle, ce qui pourrait provenir de l'état laminé (non recuit) des tôles utilisées pour les essais mécaniques.

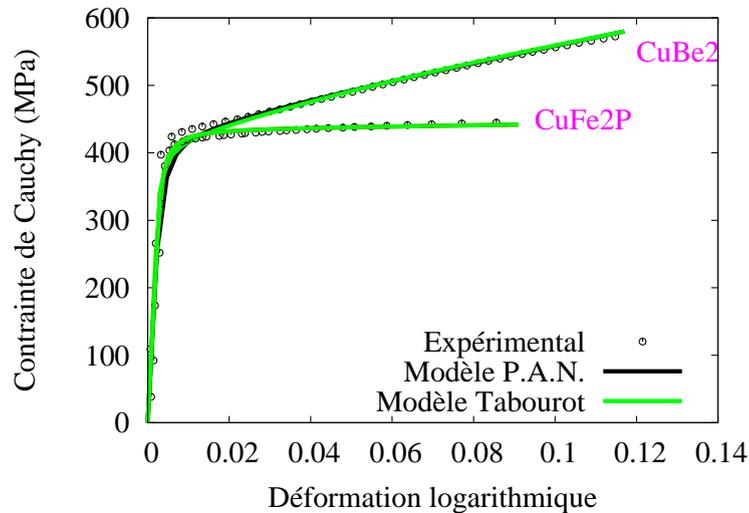


FIGURE 4.37: Identification des paramètres du modèle CPFEM pour le CuBe2 et le CuFe2P sur un essai de traction dans la DL.

### Identification du CuFe2P

Le VER déterminé pour le CuFe2P comporte également 500 grains. La morphologie des grains a été prise en compte dans la modélisation comme illustré sur la [Figure 4.38](#). La texture marquée de ce matériau a été reproduite par la procédure décrite précédemment et la texture numérique obtenue pour le VER de 500 grains est très proche de celle mesurée expérimentalement (voir [Figure 4.39](#)).

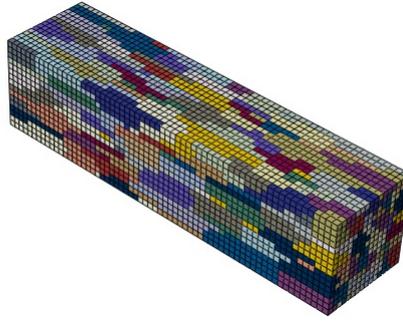


FIGURE 4.38: VER pour le CuFe2P.

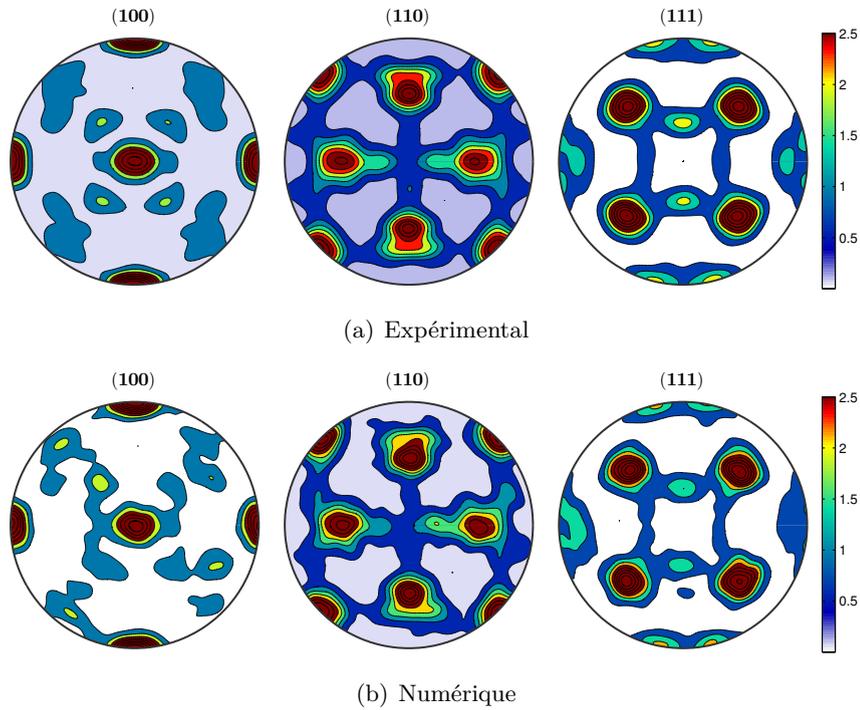


FIGURE 4.39: Figures de pôles pour le CuFe2P a) Données recueillies par EBSD et b) discrétisation numérique des données expérimentales pour le VER.

Les deux modèles d'écoulement donnent des résultats pratiquement identiques en très bon accord avec les données expérimentales (voir [Figure 4.37](#)). Le [Tableau 4.17](#) et le [Tableau 4.18](#) renseignent sur les valeurs des paramètres identifiés.

$h_0$ (MPa)	$\tau^*$ (MPa)	$\tau_0$ (MPa)	$q$	$\dot{\gamma}_o$ ( $s^{-1}$ )	$n$
20	180	180	1	0,001	50

TABLEAU 4.17: Paramètres du modèle PAN (CPFEM) pour le CuBe2 identifiés sur un essai de traction dans la DL.

$\mu$ (GPa)	$\alpha^{(s\beta)} = \alpha$	$\beta_0$	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$	$K$	$y_c$ (mm)
42	0,3	0,2	0,4	0,75	1	40	9E-07

TABLEAU 4.18: Paramètres du modèle Tabourot (CPFEM) pour le CuBe2 identifiés sur un essai de traction dans la DL.

### 4.3.3 Analyse comparative des deux approches

On compare maintenant les capacités des approches phénoménologiques et CPFEM sur la prédiction du comportement mécanique du CuBe2. Dans un premier temps, les réponses du modèle CPFEM aux trajets de déformation expérimentaux qui n'ont pas été pris en compte dans l'identification sont étudiées. En parallèle et afin d'établir une comparaison cohérente, le modèle phénoménologique est aussi re-calibré en utilisant une base expérimentale réduite ne comportant que les essais de traction uniaxiale à 0, 45 et 90° de la DL. En effet, une campagne de caractérisation expérimentale effectuée dans un cadre industriel se limite souvent à ces trois essais.

#### 4.3.3.1 Description de l'anisotropie de comportement

Les essais de traction uniaxiale sur le CuBe2, dans la DT et la DD, sont simulés avec le modèle CPFEM et l'écroutissage de type PAN. Le VER, son maillage et les conditions aux limites demeurent inchangées. La microstructure subit une rotation numérique en soustrayant 45 ou 90° à l'angle d'Euler correspondant à la DL. Le modèle phénoménologique est calibré en considérant les essais de traction uniaxiale à 0, 45 et 90° de la DL et en gardant une pondération équivalente sur la description de l'anisotropie de contrainte et de déformation.

Le modèle CPFEM fournit une bonne description des essais à 45 et 90° qui est illustrée sur la [Figure 4.40](#). Les modèles phénoménologiques (Hill48 et BB2004) conduisent, pour ces simulations, aux mêmes résultats que dans le cas de la base complète (voir [Figure 4.31](#)).

Pour étudier l'anisotropie de déformation, des simulations sont effectuées en faisant varier l'angle par rapport à la DL avec un pas de 5°. La [Figure 4.41](#) montre que si l'on considère une base expérimentale complète, le modèle de BB2004 donne la meilleure

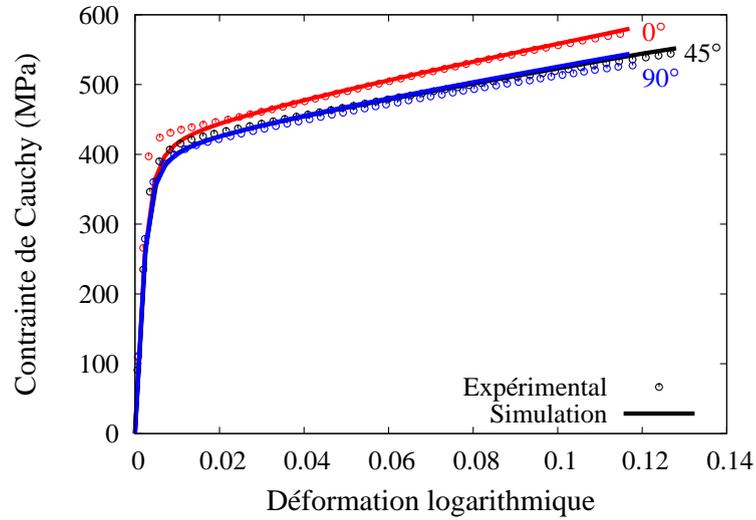
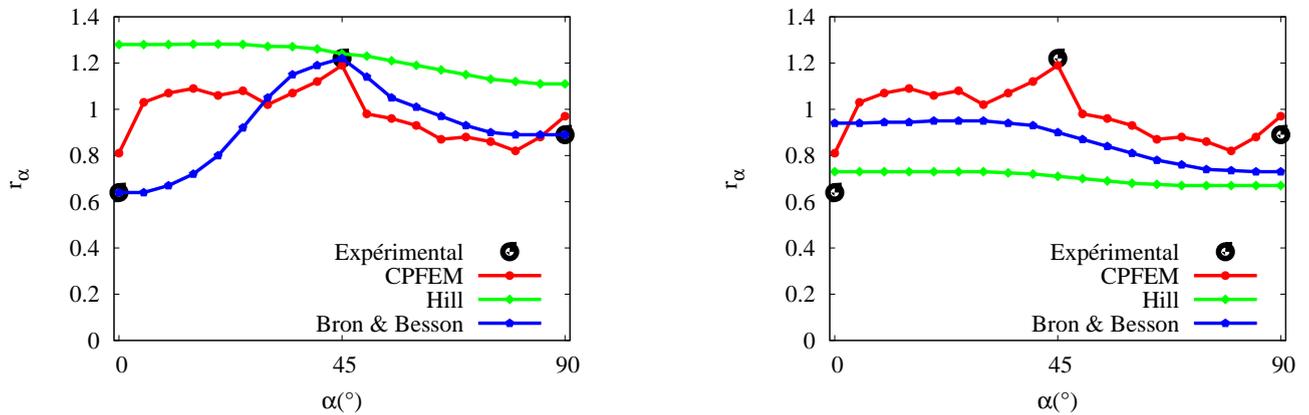


FIGURE 4.40: Courbes d'érouissage du CuBe2 pour différentes orientations par rapport à la DL, par le modèle CPFEM.

description du comportement matériau. Toutefois, dans le cas d'une base réduite, le modèle CPFEM est le plus proche de la réponse expérimentale.



(a) Base complète

(b) Base réduite

FIGURE 4.41: Prédiction des coefficients d'anisotropie plastique à 0°, 45° and 90° avec le modèle CPFEM et le modèle phénoménologique calibré sur a) la base expérimentale complète et b) la base expérimentale réduite.

En résumé, le modèle CPFEM calibré sur un essai de traction dans la DL (et prenant comme entrée les mesures expérimentales d'orientations de grains) conduit à une bonne

description de l'anisotropie de contrainte et de déformation, d'une précision supérieure à celle du modèle de Hill48 et comparable à celle du modèle de BB2004.

#### 4.3.3.2 Description de l'essai d'expansion biaxiale

L'essai d'expansion biaxiale est simulé avec le modèle CPFEM en imposant des déplacements suivant les axes X et Y aux noeuds  $N_1$  et  $N_2$  de la [Figure 4.34](#). Cet essai ne constituant plus une entrée dans la procédure de calibration des modèles phénoménologiques, ceux-ci n'arrivent pas à en donner une description fidèle notamment sur le comportement aux grandes valeurs de déformation. En revanche, les prédictions du modèle CPFEM sont en excellent accord avec les données expérimentales comme l'illustre la [Figure 4.42](#).

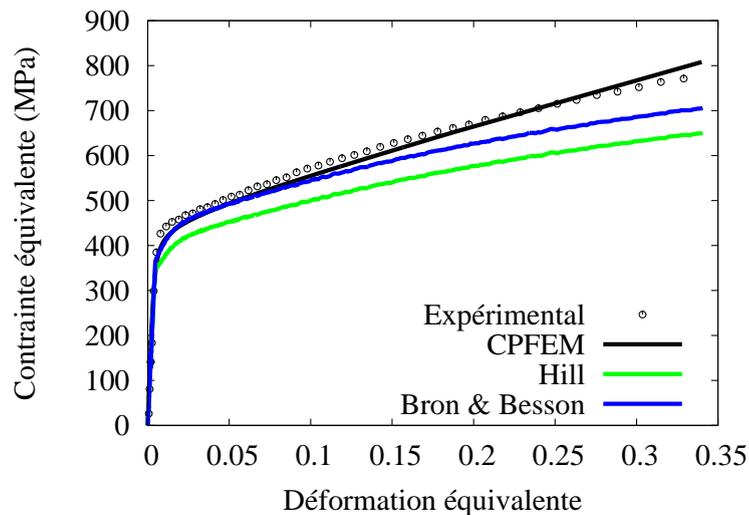
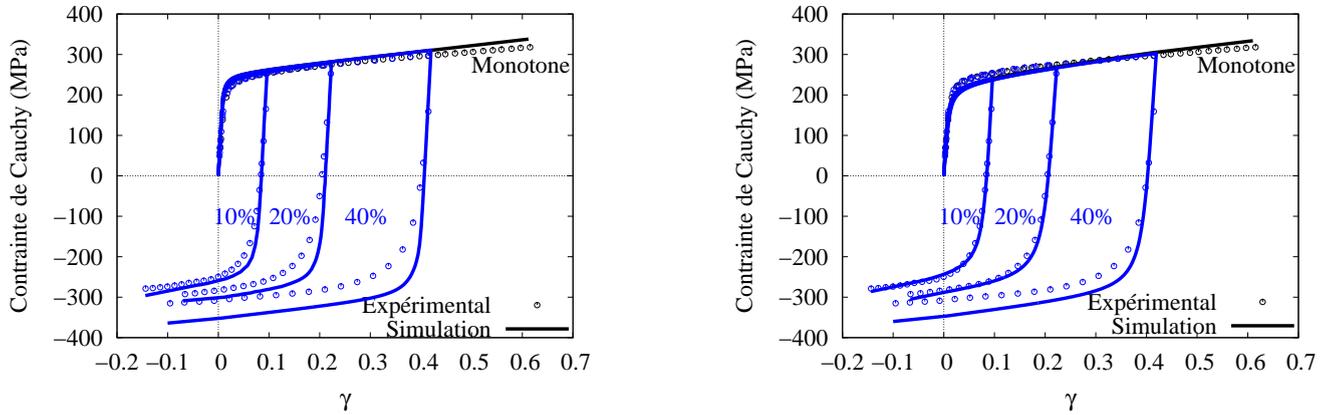


FIGURE 4.42: Description de l'essai d'expansion biaxiale du CuBe2 par le modèle CPFEM et le modèle phénoménologique calibré sur une base réduite.

#### 4.3.3.3 Description des essais de cisaillement

Les essais de cisaillement sont simulés en déplaçant le noeud  $N_1$  le long de l'axe Y. Le modèle CPFEM offre une bonne description de l'essai de cisaillement monotone ainsi que l'essai alterné pour une pré-déformation de 10%. Pour des pré-déformations plus importantes (20 et 40%), l'effet Bauschinger qui se manifeste après inversion de la charge n'est pas bien décrit comme illustré sur la [Figure 4.43\(a\)](#).



(a) Cisssions critiques initiales homogènes

(b) Hétérogénéité intergranulaire des cisssions critiques initiales

FIGURE 4.43: Prédiction des essais de cisaillement avec le modèle CPFEM en considérant a) une homogénéité des cisssions critiques initiales b) une distribution hétérogène entre les grains des cisssions critiques initiales.

Une manière de modéliser ce phénomène est d'introduire, comme dans l'approche phénoménologique, une variable d'écroissage cinématique dans la loi d'écoulement du système de glissement. L'évolution de cette variable est alors gouvernée par une relation de type Armstrong-Frederick dont les paramètres sont alors calibrés sur les essais alternés (voir par exemple (Cailletaud, 1992) et (Luo et Rousselier, 2014)). Il est également possible d'exploiter le lien entre le champ de contraintes résiduelles qui existe dans les tôles laminées et l'effet Bauschinger qu'elles manifestent. En effet, de nombreux auteurs ((Kim *et al.*, 2012), (Li *et al.*, 2014) entre autres) ont relié l'apparition de cet effet à l'hétérogénéité du champ de contraintes résiduelles; en particulier (Déprés *et al.*, 2008), au travers de résultats expérimentaux et de simulations de dynamique des dislocations, ont identifié l'hétérogénéité de la distribution de dislocations dans le matériau comme l'une des sources d'écroissage cinématique. Ils ont, de même que (Balland *et al.*, 2011), proposé d'approximer la répartition d'hétérogénéité par une distribution de Rayleigh.

Nous évaluons ici cette approche en introduisant, dans le VER une hétérogénéité initiale de contraintes en spécifiant des cisssions critiques initiales non plus identiques pour tous les grains mais selon une distribution de Rayleigh :

$$f(\tau_0) = \frac{\tau_0}{(\tau_0^{hom})^2} \exp\left(\frac{-(\tau_0)^2}{2(\tau_0^{hom})^2}\right) \quad (4.14)$$

où  $\tau_0^{hom}$  est le mode de la distribution qui est choisi égal à la valeur précédemment identifiée en traction uniaxiale  $\tau_0$ .

Les simulations réalisées avec l'hétérogénéité initiale dans le VER sont présentées sur la [Figure 4.43\(b\)](#). La méthode se révèle efficace et décrit finement le comportement après inversion de la charge pour des pré-déformations jusqu'à 20%. Pour de plus grandes valeurs, l'effet Bauschinger ainsi que l'adoucissement permanent ne sont pas bien capturés. Il semblerait que, pour de grandes déformations plastiques, l'hétérogénéité du champ de contrainte se développe également à l'intérieur des grains. Cette contribution se rajoute à l'hétérogénéité intergranulaire (la seule considérée dans notre modélisation) et accentue les particularités de comportement qui surviennent après inversion du chargement. Il faut souligner que le spectre de la distribution adoptée est très large (de 0 à  $2 \times \tau_0^{hom}$ ); de fait, elle peut introduire des valeurs de cission critique initiale non réalistes. Il conviendrait donc de rajouter une borne inférieure et une borne supérieure comme paramètres à calibrer. Cependant, cela impliquerait de prendre en compte les essais de cisaillement alternés dans la phase d'identification. Cette possibilité n'a pas été considérée dans ces travaux, notre objectif étant de mettre en place un modèle CPFEM d'identification relativement simple dont les paramètres ont un sens physique clair.

Les prévisions du modèle phénoménologique (BB2004), calibré sur la base réduite, pour les essais de cisaillement sont présentés sur la [Figure 4.44](#). Comme on pouvait s'y attendre, l'érouissage isotrope identifié sur les essais de traction uniaxiale ne parvient pas à reproduire le comportement après inversion du chargement.

## **Bilan**

Le modèle de BB2004 offre une grande flexibilité pour la description du comportement mécanique dans la mesure où on peut lui fournir suffisamment d'informations expérimentales. Ses douze paramètres permettent de simuler finement l'anisotropie du comportement du matériau. Il est à noter que la procédure d'identification adoptée ici visait à obtenir le meilleur compromis sur la description combinée de l'anisotropie de contrainte et de déformation. Avec de telles contraintes d'identification, les prédictions du modèle de Hill48 se révèlent imprécises. Toutefois, si l'on considère une base expérimentale réduite aux essais de traction uniaxiale, la qualité des prédictions des modèles phénoménologiques se dégrade significativement. Il est donc légitime de s'interroger sur la qualité des simulations effectuées avec ces modèles lorsqu'ils sont mis en oeuvre sur des trajets de déformation non proportionnels. En revanche, le modèle CPFEM calibré

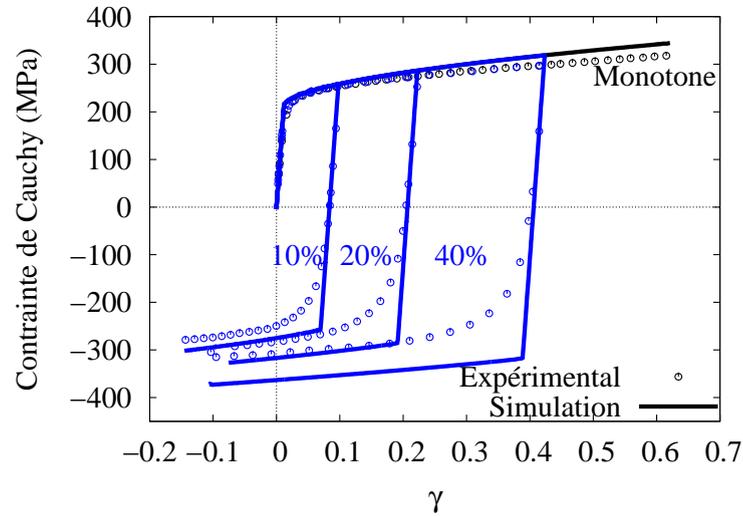


FIGURE 4.44: Prédiction des essais de cisaillement avec le modèle phénoménologique (BB2004) calibré sur des essais de traction uniaxiale.

uniquement sur un essai de traction, conduit à une bonne description de l'ensemble des trajets de chargement. Les mécanismes physiques pris en compte lui confèrent donc une capacité de prédiction du comportement global du matériau. Le nombre de paramètres à calibrer est réduit, ce qui représente un avantage conséquent au vu de la procédure non triviale d'identification des nombreux paramètres des modèles phénoménologiques. La contrepartie réside dans le temps de calcul plus important par rapport aux modèles phénoménologiques.

## 4.4 Conclusion

La campagne de caractérisation des matériaux a été présentée dans ce chapitre. Des analyses EBSD ont permis d'accéder à la microstructure des tôles et notamment la morphologie allongée des grains de l'alliage CuFe2P. Des essais mécaniques ont été réalisés pour investiguer le comportement des tôles. La décroissance du module de Young des alliages industriels (CuBe2 et CuFe2P) a été mise en évidence par des essais de charge-décharge dans le domaine plastique. Les essais de traction uniaxiale à différentes orientations de la DL ont montré une anisotropie non négligeable du comportement mécanique des tôles, aussi bien en contrainte qu'en déformation. Les essais d'expansion biaxiale par gonflement hydraulique ont également été menés afin d'étudier le comportement des tôles en

grandes déformations et sous un trajet de chargement équibiaxial. Enfin les essais de cisaillement (monotone et alternés) ont montré des comportements particuliers observés lors de l'inversion du trajet de chargement, notamment sur le CuBe2.

Dans une seconde partie, les paramètres des modèles phénoménologiques et CPFEM ont été identifiés par méthode inverse à partir de la base des données expérimentales. Les procédures d'identification utilisées sont détaillées et une analyse comparative des deux approches sur leur capacité de prédiction du comportement matériau a été présentée. Les modèles phénoménologiques se révèlent tributaires de la qualité et de l'étendue de la base expérimentale utilisée lors de l'identification paramétrique et nécessitent une procédure appropriée et complexe. A ce titre, le modèle CPFEM présente l'avantage d'une identification plus simple et possède, de par ses bases physiques, la capacité de décrire le comportement global du matériau. Le temps de calcul élevé requis par ce modèle constitue la contrepartie d'une telle capacité de prédiction.

Les modèles mis en place sont désormais calibrés pour prédire le comportement des tôles ultrafines étudiées. Ils sont mis en oeuvre sur des applications de micro-formage au chapitre suivant.

## Chapitre 5

# Application à la prédiction du retour élastique

Ce cinquième et dernier chapitre présente l'application effective des approches de modélisation du comportement qui ont été développées précédemment. Les deux démonstrateurs du projet, composants miniatures fabriqués par pliage de tôles ultrafines, font office d'applications des modèles. Après une présentation des démonstrateurs et de leurs modèles numériques, une investigation est menée sur différents aspects et paramètres à prendre en compte lors de simulations de procédés de micro-formage. Une attention particulière est portée sur leur influence quant à la prédiction du retour élastique qui se produit après retrait des outils de formage.

### 5.1 Démonstrateurs industriels et modèles numériques associés

#### 5.1.1 Le boîtier électronique de ACUIPLAST

Le démonstrateur proposé par la société ACUIPLAST est un boîtier de circuit intégré avec des broches de sortie sur les quatre côtés du corps moulé en polymère. Ces broches de connexion que nous appellerons « leads » sont faites de tôles métalliques ultrafines, en l'occurrence ici de CuFe2P (voir [Figure 5.1](#)).

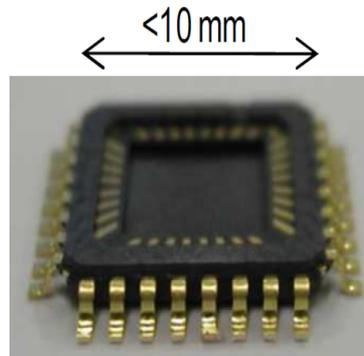


FIGURE 5.1: Modèle de boîtier électronique produit par ACUIPLAST. Les broches métalliques sont constituées de tôles ultrafines.

La forme en « aile de mouette » (gull-wing) est obtenue par une opération de mise en forme après surmoulage de la résine sur l'ensemble des broches espacées de 0.4 mm. La problématique consiste à maîtriser le comportement mécanique des leads au cours et après le cambrage important (sur 1 mm) qui leur est imposé. En effet, des spécifications de coplanéité rigoureuses ( $\leq 100\mu\text{m}$ ) sont exigées afin de garantir une bonne mise en position lors des opérations de soudage. Par conséquent, il est important de pouvoir prédire la gamme de valeurs du retour élastique qui prend place après le formage. Le modèle complet avec le corps du boîtier, les leads, le serre-flan, la matrice, le support et le poinçon est illustré sur la [Figure 5.2](#).

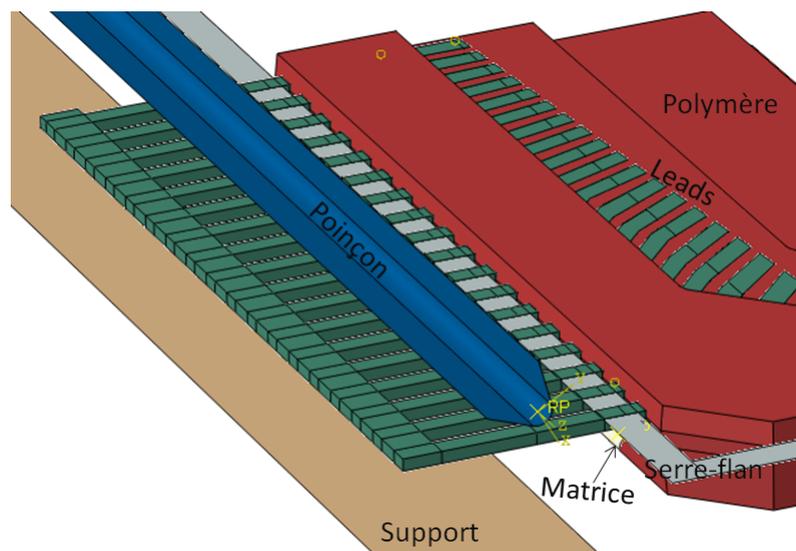


FIGURE 5.2: Modélisation numérique du boîtier complet et des outils de mise en forme (Vautrot *et al.*, 2014).

Un modèle simplifié est présenté sur la [Figure 5.3](#). A l'interface avec le corps moulé en polymère, se substitue une condition d'encastrement de la face « arrière » de la lead, dont les dimensions sont 0.127 mm d'épaisseur, 0.2 mm de profondeur et 2.5 de longueur.

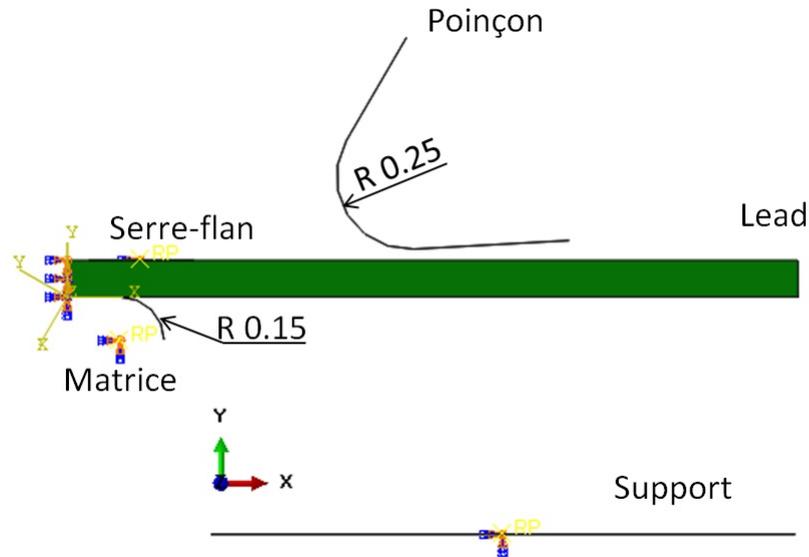


FIGURE 5.3: Modèle simplifié employé pour les simulations numériques sur le démonstrateur ACUIPLAST.

Le poinçon est positionné de manière précise, effectue un mouvement incliné de  $60^\circ$  par rapport à la verticale, et vient cambrer la matière sur le pourtour de la matrice. Après son retrait, le retour élastique qui prend place est quantifié par l'angle  $\alpha$  entre la verticale et la tangente à la lead comme illustré sur [Figure 5.4](#). Cette tangente est prise dans la zone d'inflexion de la courbure de la lead.

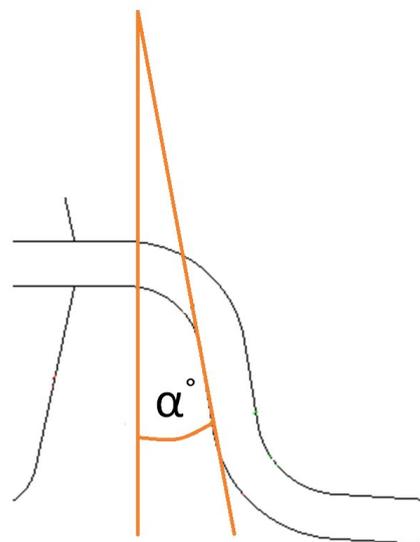


FIGURE 5.4: Mesure du retour élastique sur le démonstrateur ACUIPLAST.

### 5.1.2 Le connecteur de DELTA COMPOSANTS

Il s'agit d'une bague de connexion en CuBe2 développée par DELTA COMPOSANTS et à destination du secteur aéronautique. Elle est obtenue par des opérations de pliage successives sur une dizaine de postes en série (voir [Figure 5.5](#)).

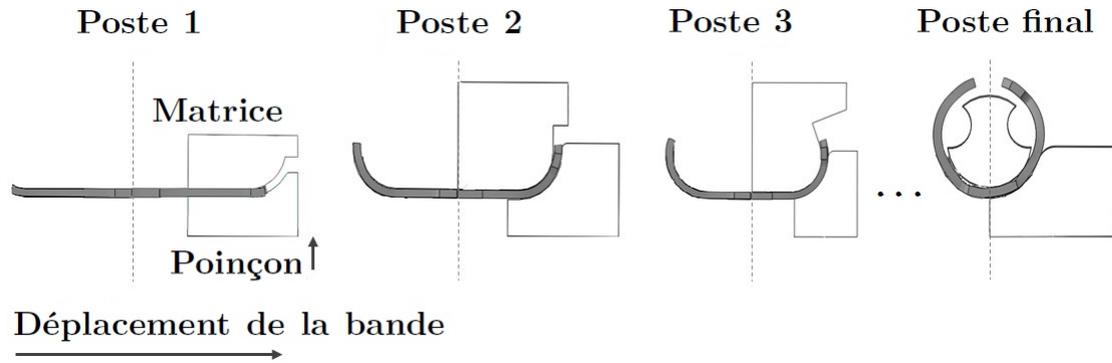


FIGURE 5.5: Illustration du procédé de micro-formage par outils à suivre.

La tôle est cambrée contre une matrice par un poinçon, outils dont les dimensions évoluent à chaque poste de façon à permettre un enroulement progressif de la pièce (outils dits à suivre). Le dispositif ne comprend pas de serre-flan, la bande de matière étant maintenue et guidée précisément d'un poste à l'autre par l'intermédiaire d'un système de guides (trous) et d'axes disposés sur les bords. Entre chaque poste, la pièce subit un retour élastique après retrait des outils. Cependant, la plus grande déformation plastique est imposée à la matière au deuxième poste, le même phénomène de pliage étant ensuite reproduit aux postes suivants. Par conséquent, le retour élastique consécutif à cette étape est le plus important du procédé. L'effort de simulation est donc concentré sur ce poste. En exploitant les symétries de la pièce, une zone d'intérêt est définie selon la [Figure 5.6\(a\)](#). Les conditions aux limites correspondantes ainsi que les dimensions du modèle sont renseignées sur la [Figure 5.6\(b\)](#). Des symétries sont imposées sur les portions de la pièce issues de la définition du modèle CAE. La portion gauche est issue du raccordement à la bande guidée en translation suivant l'axe Z ; il est supposé qu'elle ne se déplacera pas suivant l'axe X. La portion arrière est solidaire du reste de la pièce et supporte également la matrice ; ses degrés de liberté suivant Z et Y sont donc restreints.

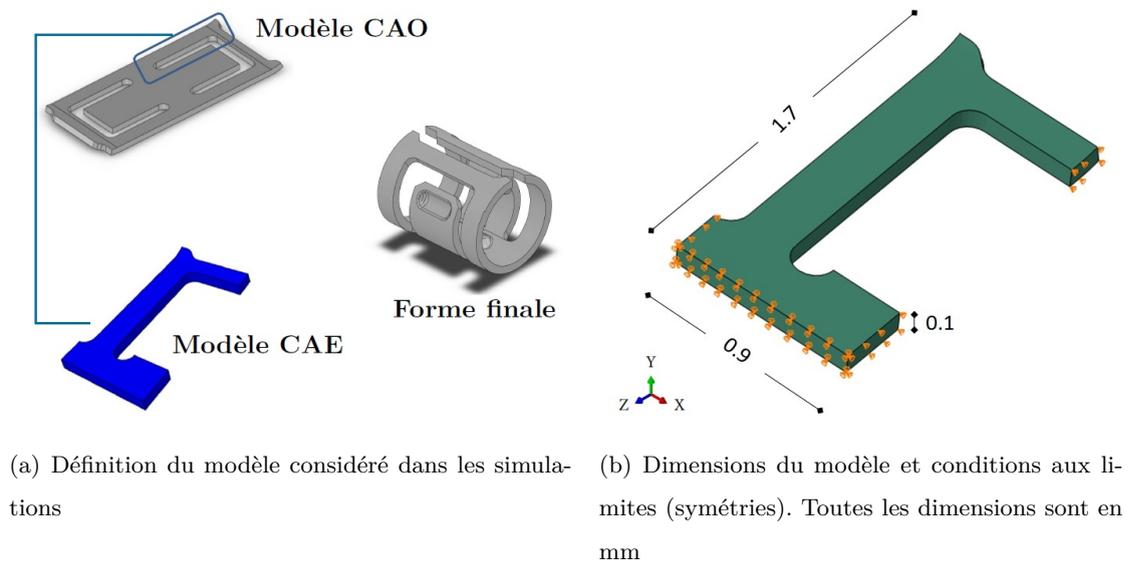


FIGURE 5.6: Modèle numérique du connecteur pour les simulations.

La mise en position des outils et de la pièce au poste 2 est illustrée sur la Figure 5.7. La pièce est enroulée sur la matrice par le déplacement du poinçon et est sujette au retour élastique après retrait de ce dernier.

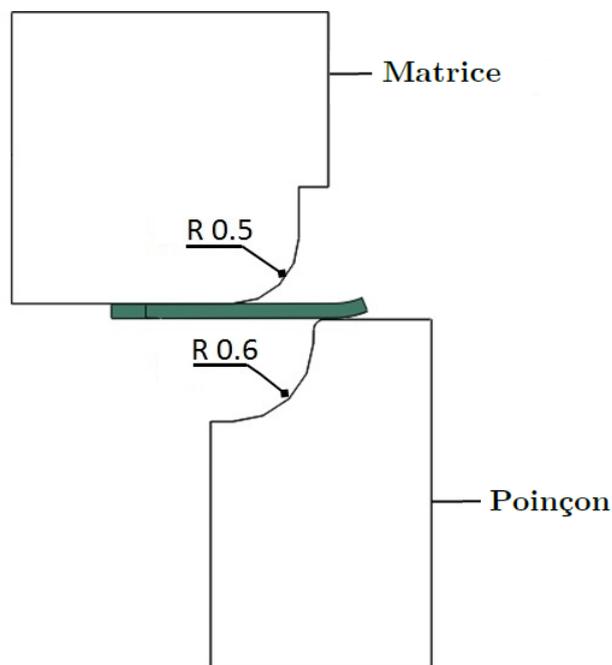


FIGURE 5.7: Modèle utilisé pour les simulations (poste 2) du démonstrateur DELTA COMPOSANTS.

## 5.2 Etude de paramètres

L'influence de plusieurs paramètres sur la prédiction du retour élastique de tôles ultra-fines est analysée dans cette section. Le connecteur présenté ci-dessus est choisi comme modèle d'application ; c'est en effet celui qui possède le rapport Rayon matrice (R) / Epaisseur tôle (T) le plus élevé et qui est donc susceptible de présenter le plus fort retour élastique. Le modèle numérique associé est illustré sur la [Figure 5.8](#). Il compte 4000 éléments solides, dont 8 dans l'épaisseur. La microstructure considérée compte au total 100 grains et moins de 3 dans l'épaisseur de la tôle. On se place donc bien dans une configuration de tôle ultrafine. Dans tous les calculs, le coefficient de frottement entre la tôle et les outils est de 0.1.

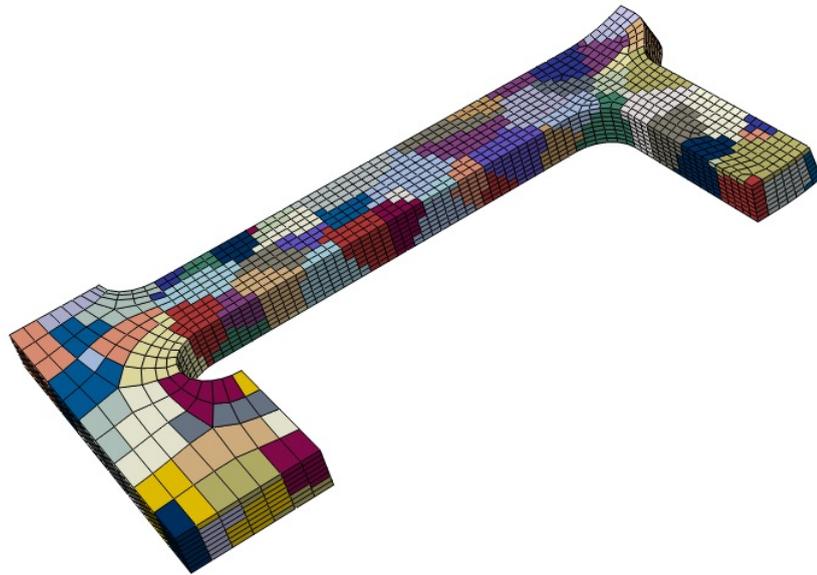


FIGURE 5.8: Modèle numérique employé pour l'étude paramétrique.

### 5.2.1 Effet du schéma numérique éléments finis

Les solveurs statique-implicite (ABAQUS/Standard) et dynamique-explicite (ABAQUS/Explicit) sont employés et comparés sur la simulation des étapes de mise en forme et de retour élastique.

Le solveur dynamique explicite est couramment employé pour simuler des procédés de mise en forme considérés comme quasi-statiques et se révèle en général performant. En complément d'une gestion efficace des conditions de contact entre les outils et la pièce,

les temps de calcul peuvent être réduits en augmentant artificiellement la masse volumique du matériau (qui est prise égale à  $8.9 \times 10^{-09}$  tonne/mm<sup>3</sup>). Cette option dite de « mass scaling » permet d'augmenter l'incrément de temps d'un facteur A en multipliant la masse volumique par A<sup>2</sup>. Dans les calculs présentés ici, un incrément de temps autour de  $5 \times 10^{-05}$  s est visé et le mass scaling fixé à  $5 \times 10^{08}$ . Avec ce facteur de mass scaling, l'énergie cinétique reste toujours inférieure à 3% de l'énergie interne. Aucune oscillation n'apparaît au cours de la simulation ce qui permet de s'assurer que les effets inertiels sont négligeables et que le problème demeure quasi-statique. Afin d'assurer une stabilisation par amortissement suffisante de la pièce, l'étape de retour élastique en dynamique-explicite est choisie aussi longue que celle de mise en forme.

Les éléments finis employés sont des C3D8R, éléments solides à intégration réduite (un point de Gauss) et les calculs sont exécutés en parallèle, pour les deux solveurs, sur les huit processeurs d'une station Dell 137 2XQuad-core node, 2.93 GHz et 24 GB de RAM.

Les géométries finales (appelées profils) prédites par les deux simulations ainsi que le profil à la fin de l'étape de mise en forme sont illustrés sur [Figure 5.9](#). Il s'agit du profil intérieur de la pièce. Le retour élastique est mesuré ici par l'écart horizontal entre la position de l'extrémité de la pièce à la fin de l'étape de mise en forme (m.e.f.) et après retour élastique. Il atteint ici 18  $\mu$ m ce qui représente près de 20% de l'épaisseur de la tôle ce qui peut être rédhitoire au vu des précisions strictes imposées en micro-formage.

Les profils obtenus avec les deux solveurs se révèlent très proches, la simulation dynamique-explicite prédisant un peu plus de retour élastique que la simulation statique-implicite considérée comme référence. Les temps de calculs requis sont toutefois très différents, étant de 25h34 min pour ABAQUS/Standard et 1h16 min pour ABAQUS/Explicit ; la structure de la routine VUMAT, idoine à la parallélisation des calculs contribue également à accroître l'efficacité du solveur dynamique. L'emploi d'ABAQUS/Explicit constitue donc un compromis intéressant entre précision du calcul et efficacité.

Il faut mentionner qu'une autre alternative, couramment mise en oeuvre, consiste à effectuer l'étape de mise en forme avec ABAQUS/Explicit et de transférer les résultats dans ABAQUS/Standard pour obtenir l'établissement de l'équilibre statique et ensuite simuler le retour élastique. Cette approche a été mise en oeuvre dans ces travaux et écartée car elle nécessite d'employer des éléments dont la formulation, en termes de contrôle du hourglass, est cohérente entre les deux solveurs. Nous verrons au paragraphe suivant que

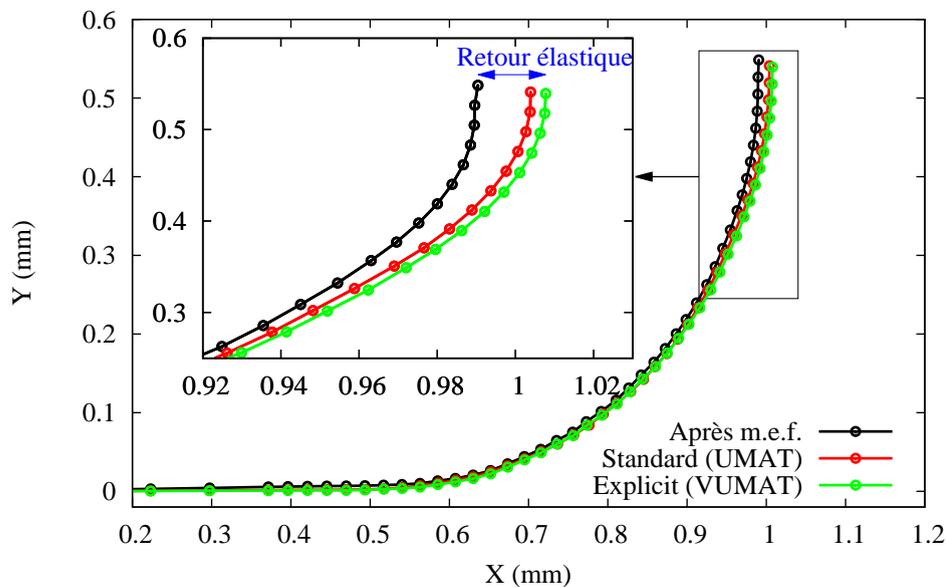


FIGURE 5.9: Comparaison des profils obtenus par des simulations dynamique-explicite et statique-implicite, à la fin de l'opération de mise en forme (m.e.f.) et après retour élastique.

ces éléments ne sont pas adaptés aux problèmes de pliage. De plus, la simulation de procédés à suivre avec plusieurs postes de passages donc plusieurs étapes de formage et de retour élastique nécessiterait de nombreux transferts entre les deux solveurs, opérations peu ergonomiques et potentiellement sources d'erreur de positionnement des outils.

### 5.2.2 Influence du type d'éléments finis

L'influence de différents éléments finis solides est analysée en utilisant le solveur statique-implicite. Les éléments hexaédriques suivants ont été utilisés pour le maillage :

- C3D8R : élément à intégration réduite (un point de Gauss) ;
- C3D8R - HE : C3D8R avec une raideur artificielle incluse pour éliminer des modes de déformation non physiques ou hourglass ;
- C3D8 : élément à 8 points de Gauss ;
- C3D20R : élément à interpolation quadratique et 8 points de Gauss.

Les résultats des simulations sont comparés sur la [Figure 5.10](#) ; on remarque que l'élément C3D8R-HE prédit un retour élastique bien plus prononcé que les trois autres. Leur

raideur additionnelle destinée à corriger les modes de hourglass rend ces éléments trop rigides dès que la structure est sollicitée dans le domaine plastique (voir (Hibbitt *et al.*, 1992)).

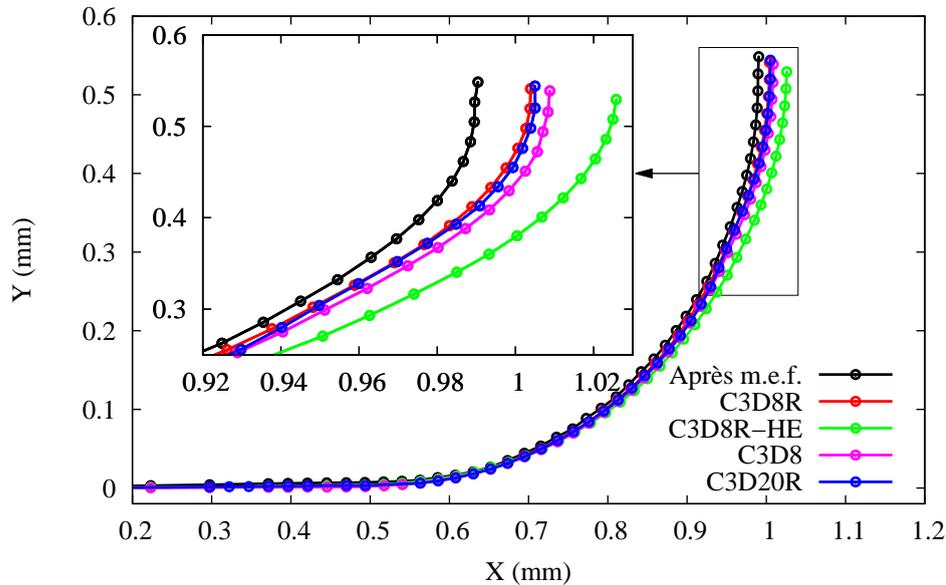


FIGURE 5.10: Comparaison des profils obtenus avec divers types d'éléments finis, à la fin de l'opération de mise en forme (m.e.f.) et après retour élastique.

Ceci entraîne des contraintes trop élevées dans la pièce qui résultent de facto en un retour élastique important. Ils semblent donc peu adaptés aux problèmes de pliage tels que ceux qui sont traités ici. Les éléments C3D8 sont également sujets à une certaine rigidité via le phénomène de verrouillage ou shear locking. Ils génèrent donc plus de contraintes que les C3D8R et produisent par conséquent plus de retour élastique. Grâce à leurs 20 noeuds, les éléments C3D20R fournissent une représentation géométrique précise de la courbure et une fine approximation du champ de déplacements. En plasticité cristalline, ces caractéristiques revêtent une importance supplémentaire car elles permettent une meilleure continuité du champ de déplacements entre des grains voisins, potentiellement grandement désorientés et qui pourraient donc induire des incompatibilités de déformations localisées. De plus, les huit points d'intégration peuvent être considérés comme des cristallites d'un grain ce qui permet d'accroître la résolution numérique et se rapprocher de la réalité physique. Le modèle avec les C3D20R conduit à des résultats très proches de ceux des C3D8R, pour un temps de calcul six fois supérieur. Les C3D8R employés

avec une résolution suffisante, 25 éléments par grains dans cette étude, fournissent donc des résultats fiables tout en étant efficaces d'un point de vue temps de calcul.

### 5.2.3 Influence de l'anisotropie élastique

Les monocristaux présentent souvent une forte anisotropie élastique. Pour ce qui est des matériaux usuels (métaux purs par exemple), les constantes d'élasticité anisotrope sont accessibles dans la littérature. Ce n'est en général pas le cas pour les alliages industriels comme le CuBe2 et le CuFe2P. Des essais sur des monocristaux doivent donc être menés, essais fastidieux et coûteux à mettre en place. L'hypothèse d'élasticité isotrope est donc souvent considérée et comme dans la présente étude, le module de Young et le coefficient de Poisson sont considérés. Il reste néanmoins à évaluer l'importance de l'approximation ainsi effectuée, par exemple sur la prédiction du retour élastique d'une tôle ultrafine en cuivre pur. Les valeurs usuelles de la littérature (voir (Tabourot, 2001)) employées sont les suivantes :

- élasticité isotrope :  $E = 115$  GPa et  $\nu = 0.35$  ;
- élasticité anisotrope :  $c_{11} = 166$  GPa,  $c_{12} = 120$  GPa,  $c_{44} = 76$  GPa où  $c_{11}$ ,  $c_{12}$  et  $c_{44}$  sont les constantes d'élasticité cubique.

En examinant l'état de contraintes présent dans la pièce à la fin de l'étape de formage, on observe peu de différences (voir [Figure 5.11](#)).

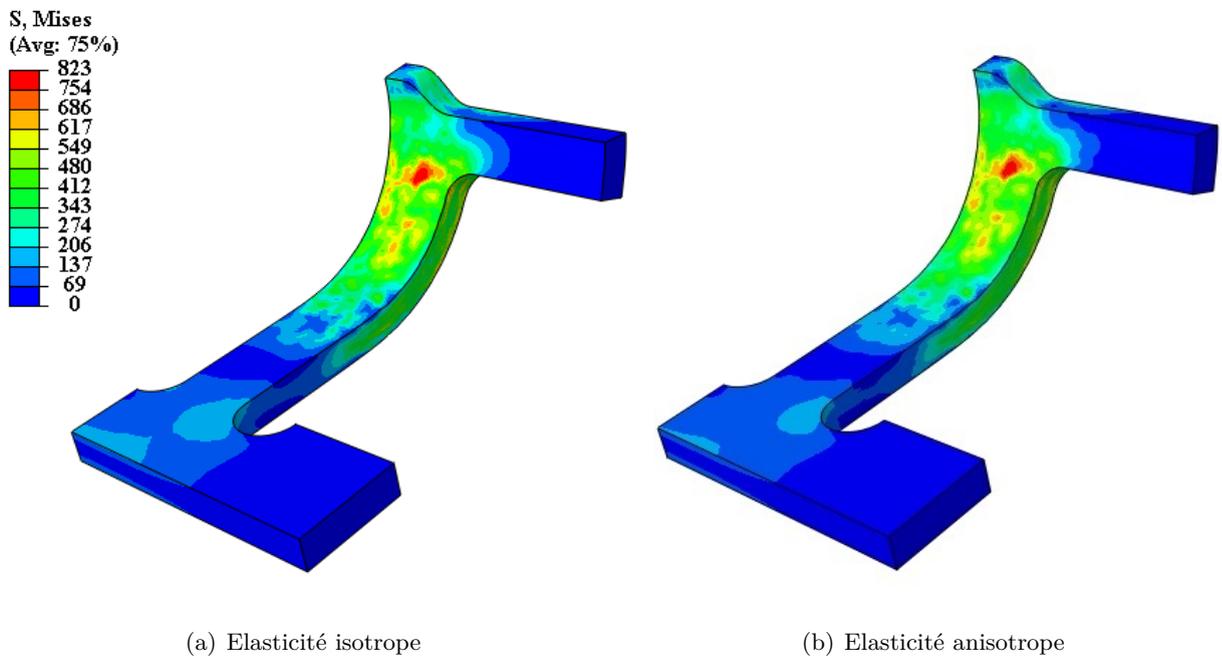


FIGURE 5.11: Champs de contraintes à la fin de l'étape de mise en forme.

Cependant, l'analyse des profils obtenus après retour élastique montre un écart illustré sur la [Figure 5.12](#), avec un retour élastique plus marqué dans le cas d'une élasticité anisotrope.

Le retour élastique prédit par ce modèle est de l'ordre du double (95.4%) de la valeur prédite par le modèle d'élasticité isotrope. Un calcul avec une microstructure comprenant entre 17 et 20 grains dans l'épaisseur pour un total de 3500 grains et d'environ 70000 éléments a également été effectué avec les deux hypothèses d'élasticité. La même tendance est confirmée, le retour élastique est plus marqué pour une élasticité anisotrope (77.2%).

Ainsi l'anisotropie élastique n'influence que faiblement le comportement de la structure dans le domaine plastique, ce dernier étant plus affecté par l'anisotropie plastique induite par l'activation des systèmes de glissement. Le retour élastique, est fortement influencé par le comportement élastique, notamment si l'élasticité est considérée anisotrope.

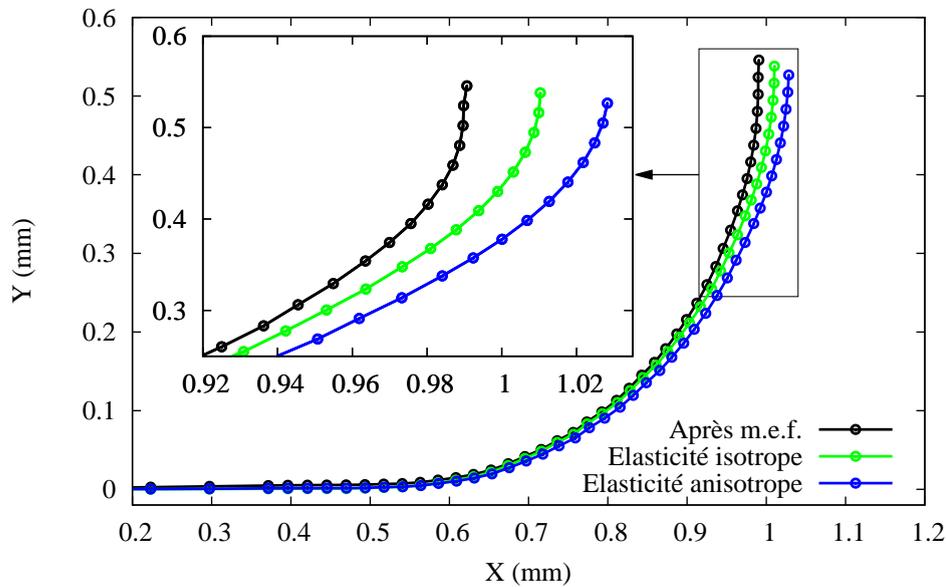


FIGURE 5.12: Comparaison des profils obtenus avec les hypothèses d'élasticité isotrope et anisotrope, à la fin de l'opération de mise en forme et après retour élastique.

#### 5.2.4 Influence de l'évolution du module de Young

La décroissance du module de Young en fonction de la déformation plastique pour le CuBe2 a été mise en évidence expérimentalement. La modélisation de telles caractéristiques matériau est souvent issue de descriptions phénoménologiques. Elles ne sont pas traditionnellement prises en compte dans les modélisations dites à base physique telles que la plasticité cristalline. Ici, l'évolution du module de Young modélisée par la relation (4.3) a été incorporée dans le modèle CPFEM afin d'évaluer quelle est son influence sur la prédiction du retour élastique. Des simulations sont effectuées avec un module constant de  $E = 127$  GPa, le module à saturation de 70 GPa et le module évolutif. Les résultats obtenus sont illustrés sur la Figure 5.13. Le maximum de retour élastique, prédit par les modules évolutifs et saturés qui donnent des résultats identiques, est de  $38.6 \mu\text{m}$ . Le module constant prédit lui bien moins de retour élastique, avec une amplitude de  $26.4 \mu\text{m}$ .

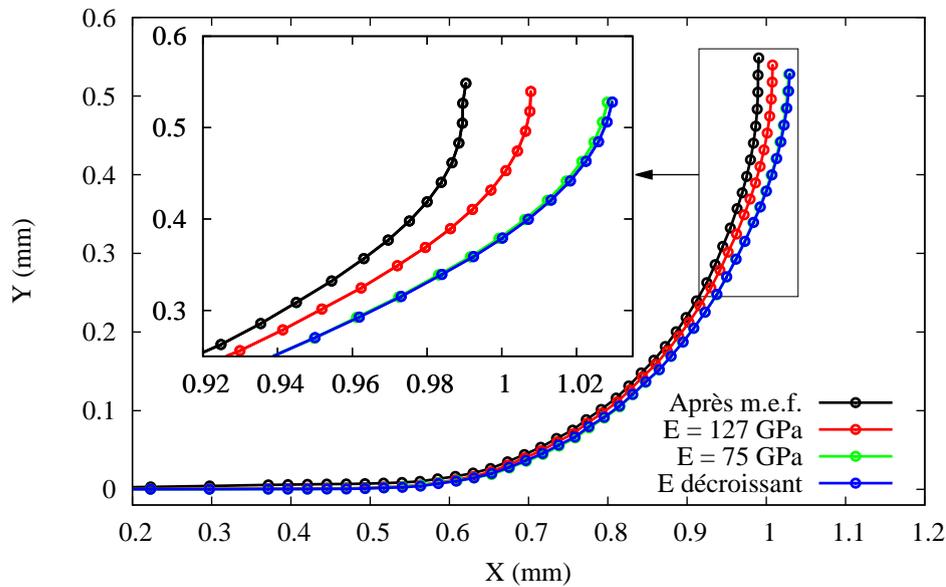


FIGURE 5.13: Comparaison des profils obtenus avec différents modules de Young, à la fin de l'opération de mise en forme et après retour élastique.

L'emploi d'un module de Young fonction de la déformation plastique permet d'introduire un niveau supplémentaire de différenciation de comportement entre les grains. C'est donc une potentialité intéressante d'enrichissement d'un modèle de plasticité cristalline.

### 5.2.5 Influence du modèle d'écroutissage et de l'hétérogénéité initiale

L'influence du type d'écroutissage considéré sur les prédictions de retour élastique a été étudiée. Le modèle de (Tabourot, 2001), qui relie l'évolution des densités de dislocations à l'écroutissage, et celui de (Peirce *et al.*, 1982) qui fait usage de paramètres matériaux ont été employés et les profils obtenus sont illustrés sur Figure 5.14. Les deux modèles ont été identifiés de manière identique sur un essai de traction monotone.

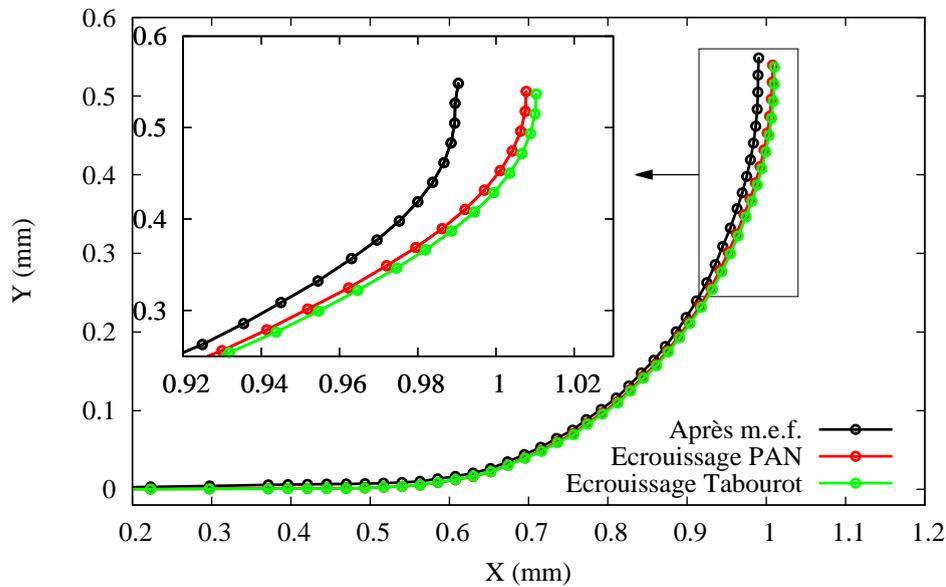


FIGURE 5.14: Comparaison des profils obtenus avec les modèles d'écrouissage de (Tabourot, 2001) et de (Peirce *et al.*, 1982), à la fin de l'opération de mise en forme et après retour élastique.

Les deux lois conduisent à des profils très similaires et l'introduction de densités de dislocations n'apporte que peu de différences entre les comportements des grains. Ces modèles relèvent du concept d'écrouissage isotrope. En effet, l'analyse des densités de dislocations calculées avec le modèle de (Tabourot, 2001) montre que leur évolution est monotone et linéaire, même après inversion de la charge. Un tel profil d'évolution n'est pas cohérent avec la réorganisation de la microstructure de dislocations qui intervient après l'inversion du trajet de chargement. Des auteurs dont (Rauch *et al.*, 2007) ont montré que suite à l'inversion de la charge, une fraction des dislocations s'annihilait graduellement (par restauration dynamique) tandis que l'autre portion continuait d'être sujette au processus de compétition entre génération et annihilation (voir chapitre 2). Des modèles ont été proposés pour prendre en compte ces différentes populations de dislocations et leurs évolutions, entre autres par (Rauch *et al.*, 2011), (Kitayama *et al.*, 2013), (Zecevic et Knezevic, 2015). La nouvelle dynamique de production des dislocations et leur réarrangement ont ainsi été reliés aux phénomènes de saturation de l'écrouissage et d'adoucissement permanent. Ces modèles microstructuraux avancés parviennent à bien reproduire ces particularités de comportement au moyen d'un nombre important

de paramètres à calibrer. Ils se révèlent toutefois d'un intérêt limité pour la présente étude qui se focalise sur la prédiction du retour élastique et s'intéresse donc davantage à la description de l'asymétrie de contrainte d'écoulement plastique (effet Bauschinger) entre un trajet de déformation et le trajet inverse, et non à l'évolution complexe de l'écroûissage en second trajet.

L'hétérogénéité de contraintes intergranulaire induite par les différences d'orientation et de volume des grains qui se développe au cours de la déformation permet d'obtenir naturellement une description de l'effet Bauschinger. Cependant, les limites de ces modèles sur la prédiction de cette caractéristique pour de fortes pré-déformations a été illustrée au chapitre 4. La prise en compte du champ de contraintes résiduelles induit par le procédé de laminage des tôles constitue un moyen d'améliorer la description du comportement. Par le biais d'une distribution de cissions critiques initiales, l'hétérogénéité intergranulaire résiduelle peut ainsi être modélisée. On s'intéresse maintenant à l'influence d'une telle hétérogénéité initiale sur la prédiction du retour élastique. Trois distributions (de Rayleigh) de cissions critiques initiales ayant pour mode la cission critique « homogène » (voir chapitre 4) sont utilisées et les résultats obtenus sont illustrés sur la [Figure 5.15](#).

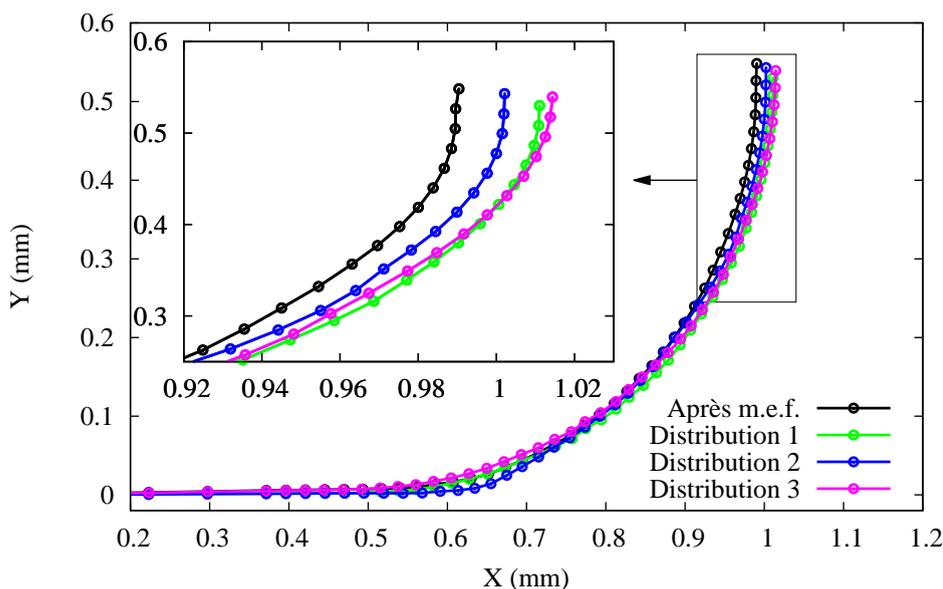


FIGURE 5.15: Comparaison des profils obtenus avec différentes distributions de cissions critiques initiales, à la fin de l'opération de mise en forme et après retour élastique.

Les profils obtenus sont bien distincts les uns des autres et dans certaines régions de la pièce, on observe après décharge un retour élastique inverse (« spring-forward » ou « spring-go ») alors que pour une autre distribution on a un profil classique correspondant à du retour élastique. Ces deux phénomènes sont reliés à la distribution de contraintes dans la pièce durant l'opération de formage et son évolution après retrait des outils.

Moyennant une acquisition expérimentale (par diffraction de rayons X ou d'électrons) du profil de contraintes résiduelles dans la tôle, cette approche peut donc permettre d'obtenir une description plus réaliste du comportement d'une pièce.

### 5.2.6 Influence du nombre de grains dans l'épaisseur (ratio T/D)

Le ratio T (Thickness) / D (Diameter) de l'épaisseur de la tôle sur la taille des grains est souvent employé pour déterminer si une tôle est ultrafine (voir ([Engel et Eckstein, 2002](#))). L'évolution du retour élastique avec le ratio T/D a été analysée par simulations numériques avec des modèles de connecteurs comportant en moyenne 1, 3, 5, 7 et 9 grains dans l'épaisseur. Pour chaque modèle, cinq configurations (forme des grains, répartition spatiale et orientations) différentes sont générées afin d'évaluer la variabilité de la réponse. Ces configurations correspondent toutefois à la même texture et morphologie de grains. L'érouissage de type PAN est employé et le modèle de plasticité cristalline est dans sa forme initiale, sans les extensions proposées précédemment. Les informations sur les modèles numériques sont données dans le [Tableau 5.1](#).

Ratio T/D	Nombre total de grains	Nombre d'éléments (C3D8R)
1	100	4000
3	310	7036
5	590	12130
7	755	16364
9	1080	25412

TABLEAU 5.1: Nombre de grains et d'éléments pour chaque modèle numérique.

La [Figure 5.16](#) montre les champs de contraintes obtenus pour trois configurations du modèle à T/D = 1 et illustre la dispersion caractéristique des procédés de micro-formage.

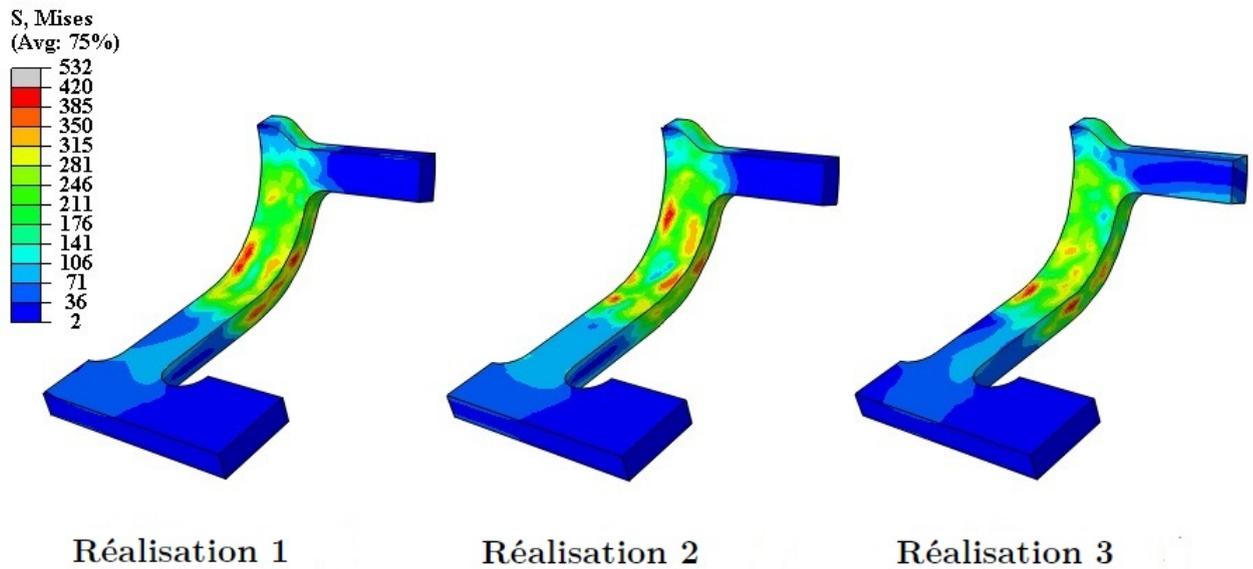


FIGURE 5.16: Champs de contraintes après retour élastique pour trois réalisations différentes du modèle  $T/D = 1$ .

Les valeurs de retour élastique obtenues et la dispersion sur les cinq configurations de chaque modèle sont représentées sur la [Figure 5.17](#).

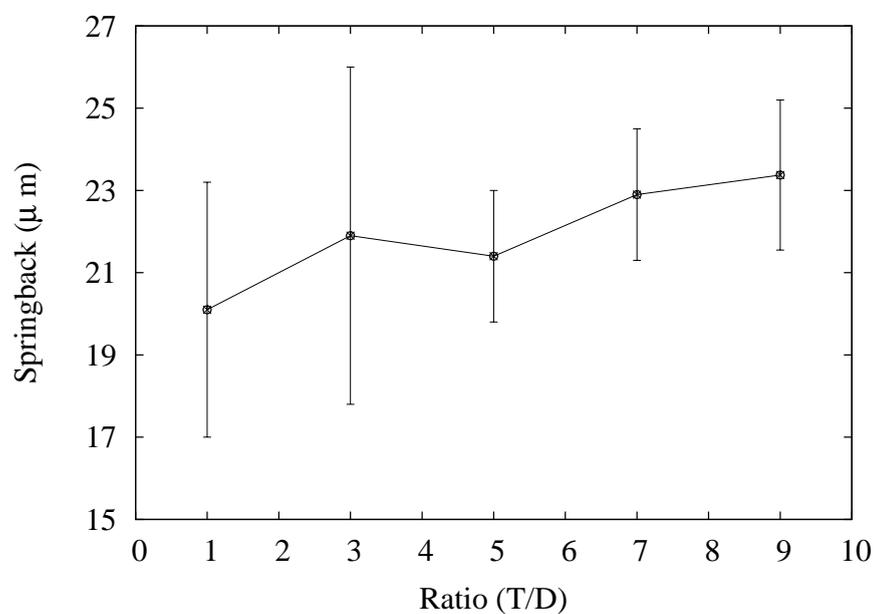


FIGURE 5.17: Evolution du retour élastique avec le nombre de grains dans l'épaisseur de la tôle.

Dans cette étude, le retour élastique semble croître avec le nombre de grains dans l'épaisseur. Cette tendance est similaire à celle rapportée (Jiang et Chen, 2012) suite à des caractérisations expérimentales des effets de taille de grains sur le pliage de microtubes. Cependant, d'autres travaux, notamment (Liu *et al.*, 2011) également en micro-piage, indiquent une tendance inverse, c'est-à-dire un retour élastique de plus en plus important avec la diminution du ratio  $T/D$ . Cet état de choses illustre le fait que l'évolution du retour élastique en micro-formage demeure complexe à analyser. Toutefois, il est clair que la dispersion diminue avec l'augmentation du ratio  $T/D$ . En somme, lorsque le nombre de grains augmente, le comportement global tend vers une moyenne reproductible.

### 5.2.7 Influence de la morphologie des grains

Comme pour le CuFe2P, certaines tôles présentent un taux de laminage important ce qui a pour effet d'étirer considérablement les grains suivant une direction. L'effet de la forme des grains a été étudié en utilisant le démonstrateur industriel associé au CuFe2P. Ainsi, trois microstructures sont représentées sur une lead. Elles comptent toutes 100 grains, avec un ratio d'allongement des grains ( $r$ ) suivant la longueur de 1, 2, et 4. Pour obtenir ces microstructures, les mêmes germes sont utilisés dans *Germination* et les différents facteurs de forme sont appliqués à la pièce. On peut voir sur la Figure 5.18 que la disposition des grains dans la lead reste globalement la même pour les trois modèles. Aussi, les triplets d'angles d'Euler attribués à chaque grain sont identiques d'un modèle à l'autre. Le maillage est constitué de 16258 éléments C3D8R dont 13 dans l'épaisseur de la pièce.

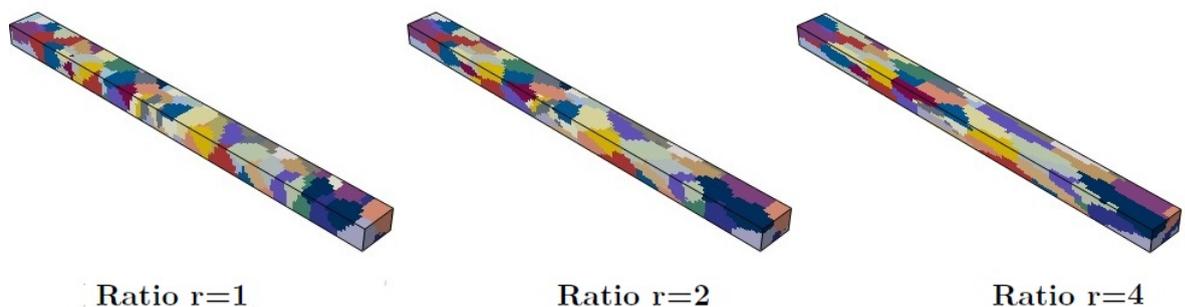


FIGURE 5.18: Représentation de la microstructure avec différents ratios d'allongement des grains suivant la longueur.

Les champs de contraintes illustrés sur la Figure 5.19 sont similaires pour les trois modèles ; en revanche, les géométries obtenues diffèrent notamment aux bords de la pièce.

Des irrégularités de forme sur les bords apparaissent dans les zones de contact entre les outils et la pièce qui semblent moins marquées lorsque le ratio d'allongement des grains augmente.

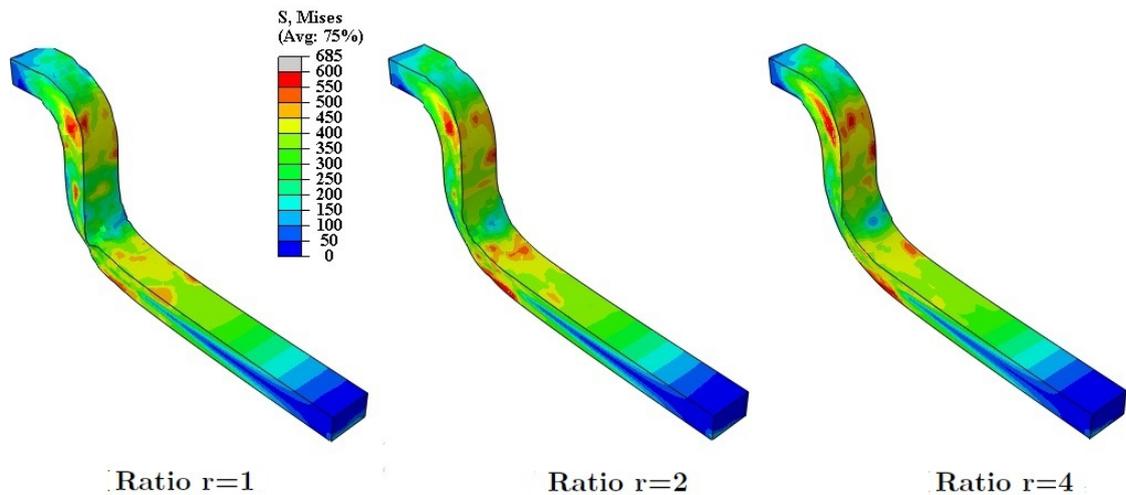


FIGURE 5.19: Champs de contraintes obtenus après l'étape de mise en forme dans les différents modèles.

La Figure 5.20 montre que dans les zones où les irrégularités apparaissent, plusieurs grains sont répartis sur les bords en contact avec les outils.

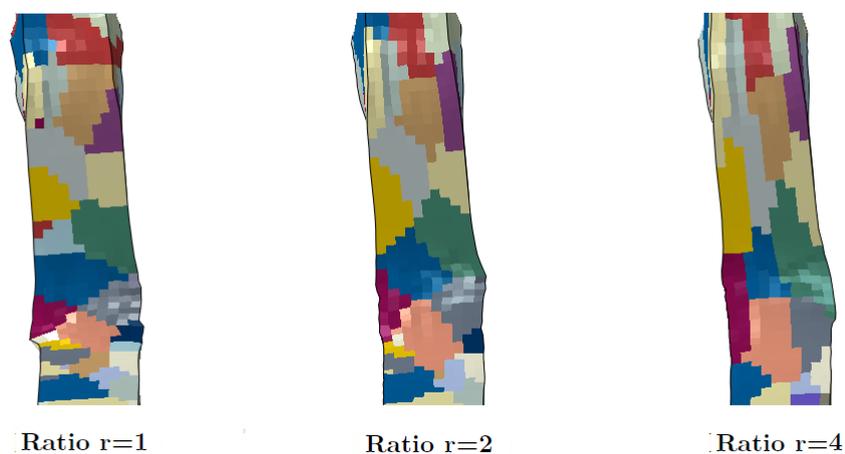


FIGURE 5.20: Irrégularités de profil provenant de la disposition des grains sur les bords de la pièce.

L'analyse du champ de déformation plastique équivalente (Figure 5.21) montre également des localisations de la déformation dans ces zones.

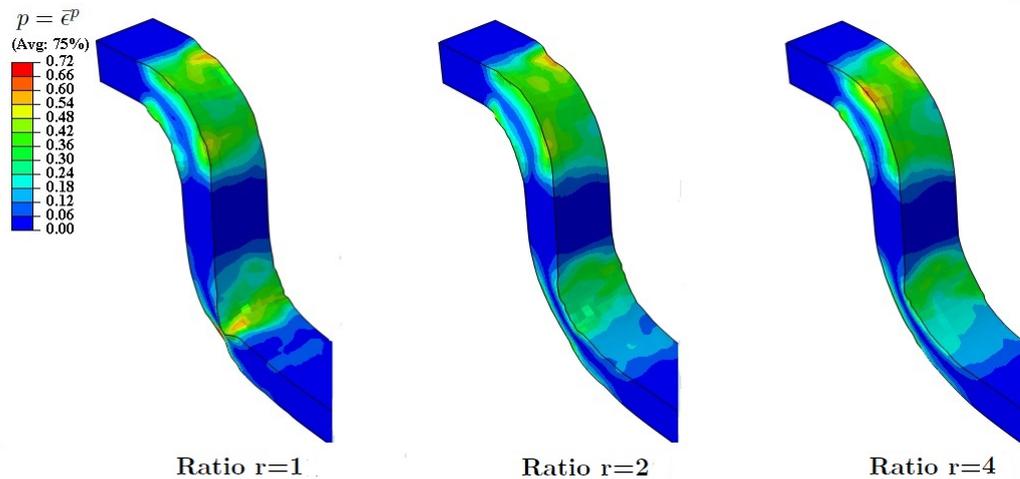


FIGURE 5.21: Champs de déformation plastique équivalente obtenus dans les différents modèles.

Les différences d'orientation entre les grains voisins induisent des incompatibilités de déformation qui apparaissent sur le profil de la pièce ; pour le ratio  $r = 4$ , les zones de contact pièce - outils sont souvent couvertes par un (seul) grain allongé ce qui permet d'avoir un profil plus régulier.

L'angle de retour élastique passe de  $2,08^\circ$  pour  $r=1$ , à  $2,06^\circ$  et  $2,02^\circ$  ce qui montre une influence relativement faible du ratio d'allongement sur le retour élastique, du moins dans le cas présent.

### 5.3 Application des modèles aux démonstrateurs

Cette partie est consacrée à la simulation de la mise en forme des démonstrateurs par les modèles phénoménologiques et de plasticité cristalline. Les deux approches sont comparées. D'un point de vue strictement pratique, le nombre de grains relativement important dans l'épaisseur des tôles ne justifie pas pleinement le recours à un modèle de plasticité cristalline. En effet, les tôles de CuBe2 utilisées comptent environ 25 grains dans l'épaisseur et devraient par conséquent présenter un comportement homogène, à même d'être décrit par une modélisation phénoménologique. Dans le cas du CuFe2P, le nombre de grains dans l'épaisseur (12) rend l'utilisation d'une modélisation homogène questionable même si elle peut encore être justifiée, notamment si l'on met en perspective les temps de calculs requis par les deux approches. Il s'agit justement de deux configurations où les hypothèses d'applicabilité des deux modèles sont vérifiées. Ils offrent donc la

possibilité de comparer de manière licite les prédictions de ces deux modèles, de manière quantitative.

### 5.3.1 Pliage de leads

Le procédé de pliage modélisé par ces simulations est illustré sur la [Figure 5.3](#). La microstructure considérée dans le modèle CPFEM compte 3000 grains, dont entre 10 et 13 dans l'épaisseur. Le ratio d'allongement dans la longueur est de 4, conformément aux mesures expérimentales et le maillage comporte 59960 éléments C3D8R dont 14 dans l'épaisseur. Trois configurations différentes de microstructures sont simulées - l'une d'entre elles étant illustrée sur la [Figure 5.22](#).

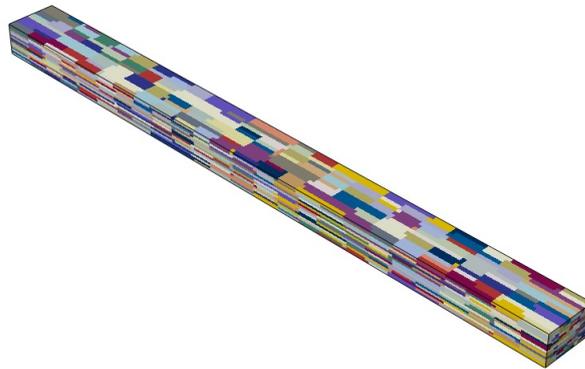


FIGURE 5.22: Microstructure de 3000 grains employée pour le modèle CPFEM.

Le maillage utilisé pour le modèle phénoménologique comporte 5500 éléments C3D8I, dont 8 dans l'épaisseur. Les degrés de liberté supplémentaires spécifiques aux éléments C3D8I permettent d'éliminer les modes de déformation incompatibles tels que le verrouillage ou shear locking. Ces éléments ont l'avantage de ne pas générer de contraintes de cisaillement parasites lorsqu'ils sont sollicités en flexion, ce qui les rend bien adaptés à la simulation de procédés de pliage (voir ([Laurent et al., 2010](#))). Le critère d'anisotropie est celui de ([Bron et Besson, 2004](#)), qui a permis la meilleure description du comportement matériau. L'écrouissage mixte ainsi que la décroissance du module de Young sont également pris en compte dans ces calculs. La [Figure 5.23](#) présente les champs de contrainte équivalente (von Mises pour le modèle CPFEM et BB2004 pour le modèle phénoménologique) obtenus pour l'approche phénoménologique et une des configurations du modèle CPFEM.

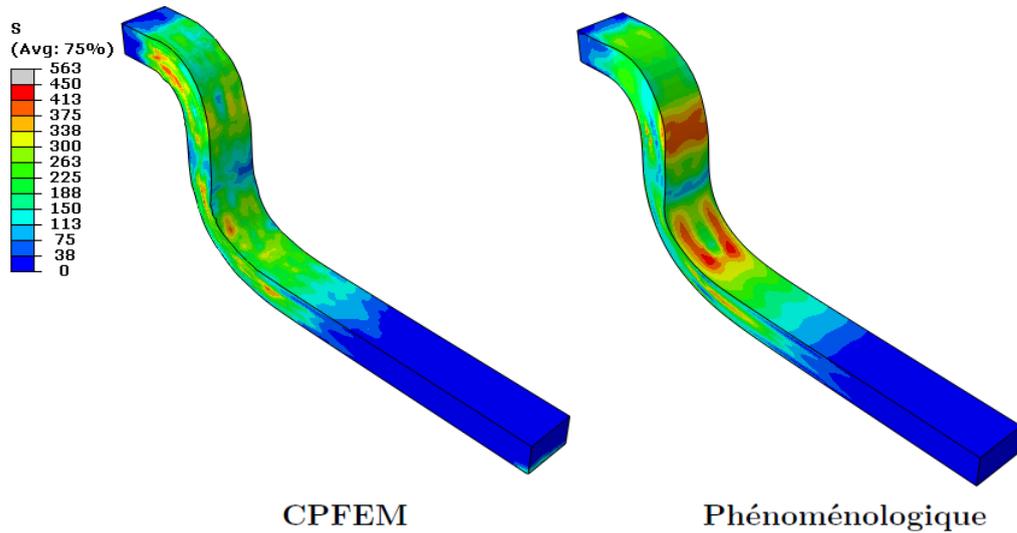


FIGURE 5.23: Champs de contraintes équivalentes (von Mises pour le modèle CPFEM, BB2004 pour le phénoménologique) après retour élastique.

Si les maxima de contraintes résiduelles prédits par le modèle phénoménologique sont symétriques, ils sont répartis de manière plus aléatoire dans l'approche CPFEM. Les angles de retour élastique prédits par les deux approches sont rapportés dans le [Tableau 5.2](#) :

Modèle	Angle de retour élastique (°)
CPFEM	$2,12 \text{ }^\circ \left( \frac{2,08+2,13+2,15}{3} \right)$
Phénoménologique	$2,6 \text{ }^\circ$

TABLEAU 5.2: Valeur des angles de retour élastique prédits.

La moyenne des angles prédits pour les trois configurations ( $2,12^\circ$ ) est inférieure à la valeur de  $2,6^\circ$  obtenue par le modèle phénoménologique, qui est la valeur la plus proche des mesures réalisées sur les pièces produites par ACUIPLAST. En effet, pour 8 leads choisies aléatoirement dans 4 boîtiers différents, l'angle moyen de retour élastique mesuré est de  $2,5^\circ$ .

Ces résultats confirment l'hypothèse que les tôles de CuFe2P utilisées pour la production de ces pièces contiennent suffisamment de grains pour être décrites par un modèle phénoménologique. De plus, l'approche CPFEM est aussi capable de fournir des résultats d'une précision raisonnable en dépit d'un modèle d'écroutissage simple et d'une représentation géométrique simplifiée des grains. Le temps de calcul requis constitue un autre argument pour l'emploi du modèle phénoménologique : 8h04 min contre 25h10 min pour le modèle

CPFEM sur un seul coeur. Précisons toutefois que pour un calcul sur 24 coeurs, le temps de calcul du modèle CPFEM descend à 5h13 min.

### 5.3.2 Cambrage de connecteur

L'opération de cambrage des connecteurs de DELTA COMPOSANTS est aussi simulée avec les deux approches. Le modèle phénoménologique avec écrouissage mixte, décroissance du module de Young et critère de plasticité anisotrope de (Bron et Besson, 2004) est utilisé avec un maillage de 4000 éléments C3D8I qui comprend 6 éléments dans l'épaisseur.

Du fait de la taille et de la complexité de la pièce, la microstructure employée dans le modèle CPFEM est une représentation simplifiée de la microstructure réelle. L'accent est mis sur le nombre de grains dans l'épaisseur et les trois configurations considérées en comportent environ 20 (voir Figure 5.24), c'est-à-dire du même ordre de grandeur que les 25 grains mesurés par EBSD. Cette microstructure de 3500 grains est maillée avec 69482 éléments C3D8R.



FIGURE 5.24: Microstructure de 3500 grains employée pour le modèle CPFEM.

Les champs de contrainte équivalente (von Mises pour le modèle CPFEM et BB2004 pour le phénoménologique) obtenus par les deux approches sont illustrés sur la Figure 5.25. Bien que la description CPFEM prédise des concentrations et des maxima de contraintes localisés, les deux distributions de contraintes présentent certaines similarités.

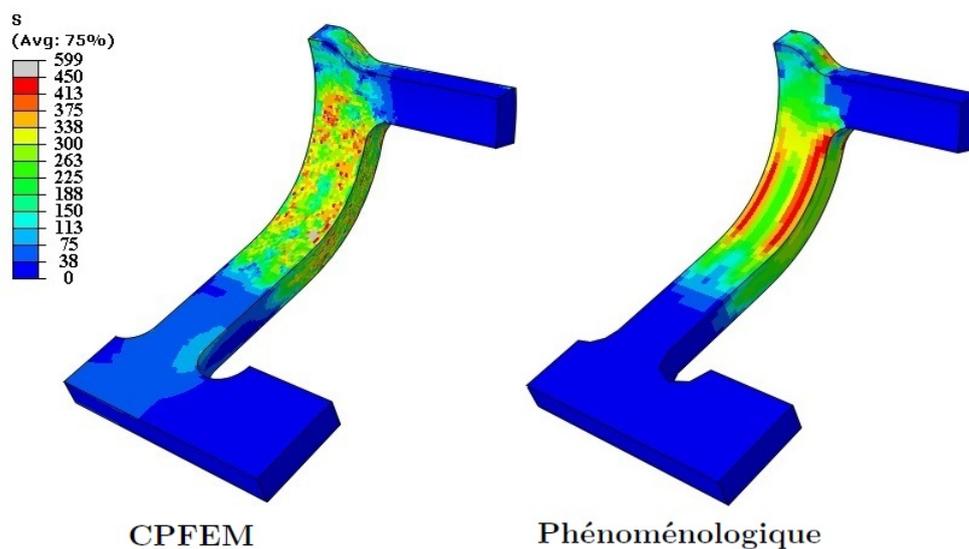


FIGURE 5.25: Distributions de contrainte équivalente (von Mises pour le modèle CPFEM, BB2004 pour le phénoménologique) après retour élastique prédits par les deux approches.

Les profils du connecteur après retour élastique sont relevés et présentés sur la [Figure 5.26](#). En raison du nombre important de grains considérés, les trois configurations du modèle CPFEM produisent des profils pratiquement identiques et un retour élastique de  $27.2 \mu\text{m}$ .

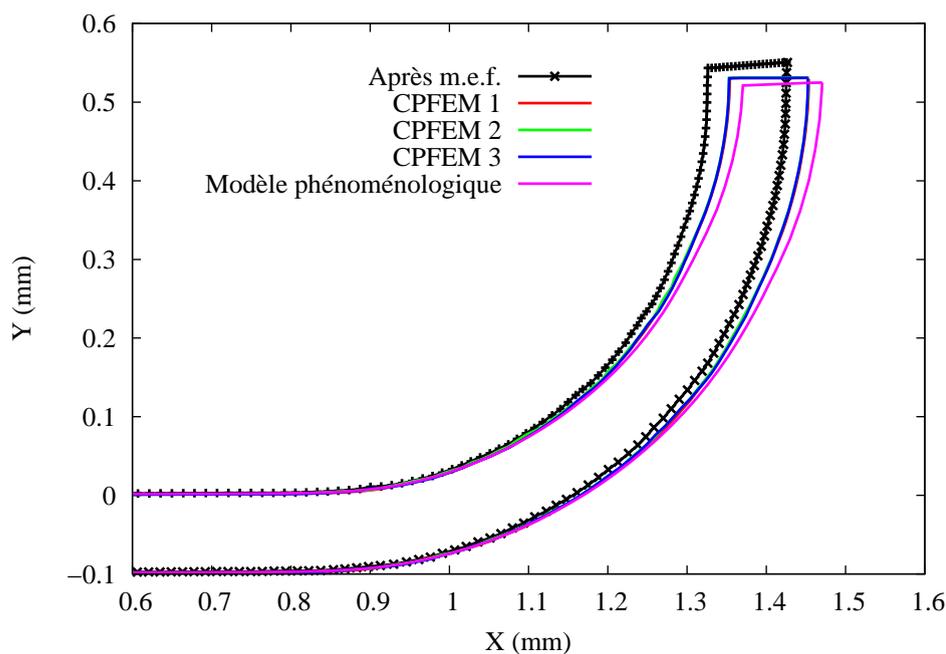


FIGURE 5.26: Comparaison des profils obtenus avec les modèles CPFEM et phénoménologique à la fin de l'opération de mise en forme (m.e.f.) et après retour élastique.

Le modèle phénoménologique prédit un retour élastique plus important ( $44.9 \mu\text{m}$ ). Parallèlement, des mesures expérimentales ont été réalisées sur les connecteurs produits par DELTA COMPOSANTS. Une numérisation de la géométrie des connecteurs a donc été établie ce qui a permis d'obtenir les profils des sections gauche et droite de la pièce illustrées sur la [Figure 5.27](#).

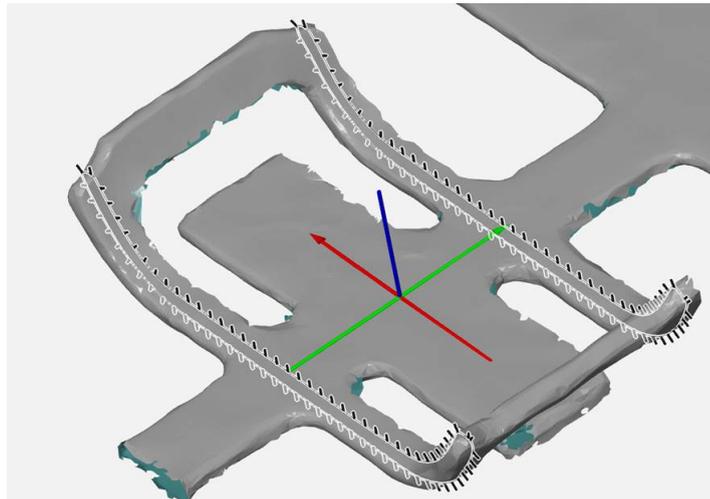


FIGURE 5.27: Numérisation d'un connecteur obtenue par mesure optique 3D (N. Bonnet - ENSAM Metz).

Les profils mesurés sont superposés à ceux obtenus par simulations sur la [Figure 5.28](#). Notons que les extrémités des pièces ne peuvent pas être considérées dans la comparaison, puisque nous n'avons pas simulé leur pliage réel mais simplement importé le modèle CAO « idéal » en fin de première opération.

Les mesures optiques révèlent également que l'épaisseur de la tôle est  $0.122 \text{ mm}$ , soit  $22\%$  de plus que la valeur considérée dans la modélisation. En dehors de ces aspects, les profils mesurés et simulés concordent relativement bien. Le modèle phénoménologique fournit les résultats les plus proches des valeurs expérimentales comme l'on était en mesure de s'y attendre. En effet, le modèle CPFEM utilisé considère seulement un nombre réduit de grains et fait des approximations sur leur géométrie qui permettent d'avoir, au détriment de la précision, des temps de calcul raisonnables.

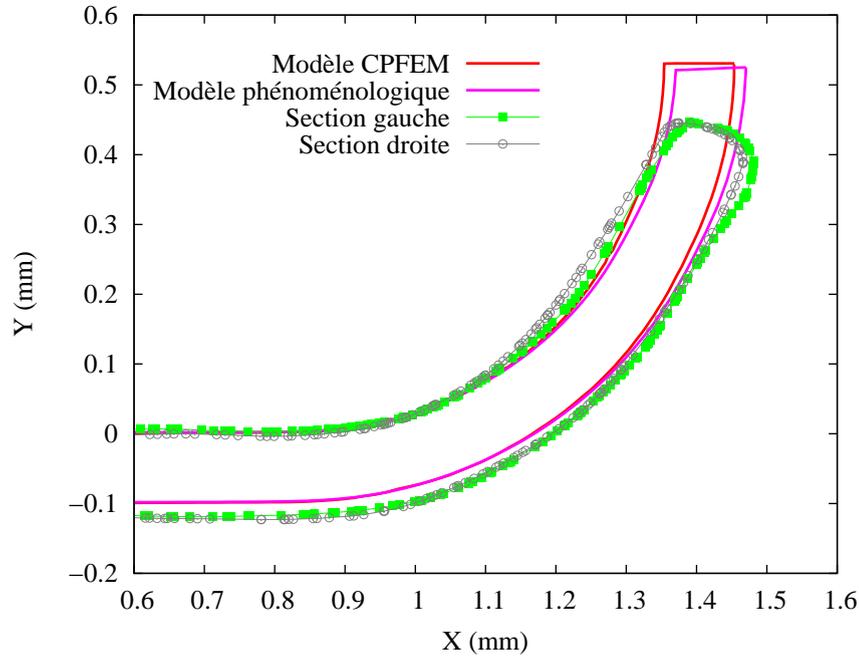


FIGURE 5.28: Comparaison des profils numériques et expérimentaux. L'extrémité de la pièce n'a pas été pliée dans le procédé réel contrairement à la simulation.

## 5.4 Bilan

Dans ce chapitre, les approches de modélisation développées ont été appliquées à des cas réels de micro-formage. Après une description des modèles numériques des démonstrateurs industriels, une étude est réalisée sur divers paramètres entrant en jeu dans les simulations de micro-formage avec un modèle CPFEM. D'un point de vue numérique, il en ressort que le solveur dynamique-explicite ABAQUS/Explicit représente un bon compromis efficacité-précision pour la prédiction du retour élastique du moment que l'on s'assure d'une discrétisation temporelle adéquate. De plus, un nombre suffisant d'éléments à intégration réduite C3D8R par grain (une vingtaine) permet d'obtenir une réponse fiable à l'échelle de la structure. En revanche, l'usage d'éléments à raideur additionnelle de hourglass, recommandés lors de transferts de résultats entre les solveurs explicites et statiques, devrait se faire précautionneusement sur des problèmes de pliage impliquant une déformation plastique.

En ce qui concerne la modélisation du comportement, il a été mis en évidence que l'utilisation d'une élasticité anisotrope conduisait après l'étape de mise en forme, à une

relaxation de contraintes plus importante qu'avec un modèle d'élasticité isotrope. Aussi, l'incorporation dans un modèle CPFEM d'une caractéristique matériau comme la décroissance du module de Young avec la déformation plastique apparaît comme une voie d'enrichissement de ce type de modélisation. Elle présente l'avantage d'introduire un degré de différenciation supplémentaire dans le comportement des grains tout en demeurant relativement simple à mettre en oeuvre. De plus, les lois d'écrouissage à densités de dislocations de (Tabourot, 2001) et à paramètres matériau de (Peirce *et al.*, 1982) ont produit des résultats similaires quant à la prédiction du retour élastique. L'hétérogénéité de contraintes intergranulaire constitue, dans ces lois à écrouissage isotrope, le mécanisme permettant la description de l'effet Bauschinger qui s'avère nécessaire pour une bonne prédiction du retour élastique. Cette hétérogénéité qui se développe au cours de la déformation est renforcée par la présence du champ de contraintes résiduelles pré-existant dans les tôles laminées non recuites. La modélisation de cette hétérogénéité initiale via l'introduction de distributions de cission critiques d'activation ouvre des pistes pour la prédiction du retour élastique. L'influence du ratio T/D (nombre de grains dans l'épaisseur) sur la réponse a été évaluée ; les résultats obtenus révèlent une atténuation de la dispersion et une augmentation du retour élastique avec le nombre de grains dans l'épaisseur. Enfin, l'effet de la morphologie des grains sur la réponse mécanique a été analysé, notamment pour le CuFe2P qui présente une microstructure très allongée dans la DL. Cette étude a montré que des grains allongés dans les zones de contact pièce-outils permettent d'éviter les irrégularités de profil qui peuvent apparaître sur la pièce si la surface de contact pièce-outils est couverte par des grains voisins désorientés.

Dans un second temps, les approches phénoménologiques et CPFEM ont été comparées sur la mise en forme des démonstrateurs industriels. En raison du nombre important de grains dans les tôles employées par les industriels, les résultats du modèle phénoménologique se sont avérés plus proches des mesures expérimentales que ceux du modèle CPFEM. Il n'en demeure pas moins que ce dernier, en dépit d'une représentation géométrique simplifiée des grains et d'un modèle d'écrouissage élémentaire calibré sur un essai de traction, a donné des résultats encourageants ce qui justifie son emploi sur des structures plus adaptées (moins d'une dizaine de grains dans l'épaisseur de la tôle).

# Synthèse et perspectives

## Synthèse

Les procédés de formage sur tôles ultrafines connaissent, ces dernières décennies, un essor considérable en raison de la hausse de la demande en pièces et produits miniatures. Cependant, en raison des spécificités du comportement des tôles d'épaisseur submillimétrique, ces procédés restent mal maîtrisés et complexes à mettre au point. Il est difficile d'estimer avec précision l'issue d'une opération de micro-formage, en termes de géométrie et de caractéristiques des pièces produites. La réduction de l'épaisseur des tôles et donc du nombre de grains, rend le comportement individuel de ces derniers, prépondérant dans la réponse de la structure. Par conséquent, les variations locales de microstructure résultent en une forte anisotropie de la réponse et une hétérogénéité des champs mécaniques marquées. Les procédés de micro-formage sont directement affectés par cette variabilité de comportement qui entraîne une dispersion importante sur les pièces. Cette thèse s'inscrit comme une contribution visant à prédire au travers de la simulation numérique, le comportement mécanique de tôles ultrafines et leur réponse mécanique dans le contexte de procédés de mise en forme.

Des tôles ultrafines d'usage courant en micro-formage, en alliages de cuivre CuBe2 et CuFe2P, ont été caractérisées expérimentalement. Leur microstructure (Caer et Pesci, 2014) ainsi que leur comportement mécanique, en étroite collaboration avec (Pham et Jegat, 2015), ont été étudiés par des essais mécaniques et ont permis de mettre en place une base de données expérimentale conséquente. L'anisotropie de la réponse mécanique, l'effet Bauschinger et de l'adoucissement ainsi qu'une dégradation progressive du module de Young ont notamment été mis en évidence. Une caractérisation mécanique aussi

complète de tôles ultrafines est plutôt rare dans la littérature, notamment en raison des nombreuses difficultés expérimentales liées à la faible épaisseur.

Deux approches de modélisation du comportement mécanique ont été retenues dans ces travaux, la plasticité dite phénoménologique et la plasticité cristalline (CPFEM). En effet, de par leurs caractéristiques, les tôles étudiées présentent un comportement qui se situe à l'interface des domaines d'applicabilité de ces approches. En effet, il est courant que les tôles utilisées en micro-formage, bien qu'étant d'épaisseur submillimétrique comportent un nombre important de grains dans leur épaisseur, caractéristique qui rend possible une modélisation phénoménologique. Cette dernière est basée sur l'hypothèse d'homogénéité de la matière et se justifie dans la mesure où un nombre élevé de grains permet de dégager un comportement moyen, peu dépendant des fluctuations dans les réponses individuelles des grains. En disposant des deux approches de description, nous élargissons donc notre champ d'action aux tôles à l'hétérogénéité de comportement plus ou moins marquée. L'approche en plasticité cristalline permet de décrire le comportement d'un matériau polycristallin en partant des mécanismes physiques comme par exemple le mouvement des dislocations et le glissement de plans cristallographiques. Elle prend en compte l'influence de la microstructure du matériau et fournit un outil d'analyse du comportement à une échelle fine. On se donne ainsi la possibilité d'investiguer la zone de transition où s'effectue le passage d'un comportement de type polycristal à une réponse où la contribution individuelle de chaque grain prend de l'importance.

Les variantes des modèles utilisés représentent l'état de l'art et ont été implantées dans le logiciel de calculs par éléments finis ABAQUS dans le formalisme des grandes transformations. Pour le modèle de plasticité cristalline, un effort particulier a été mis pour aboutir à des algorithmes permettant de conjuguer efficacité et précision. L'identification des paramètres des modèles a été réalisée sur la base des données expérimentales et une comparaison des deux approches de modélisation a été établie. Les avantages connus des modèles CPFEM sont confirmés : la prise en compte des mécanismes physiques de glissement cristallographique permet de réduire considérablement le nombre de paramètres à identifier et le nombre d'essais expérimentaux nécessaires. Accompagnée d'une identification paramétrique et d'une implantation numérique rigoureuses, cette modélisation s'est avérée en mesure de prédire de manière quantitative le retour élastique en fin de

procédé de formage. Si ce potentiel prédictif était reconnu pour le comportement mécanique, et surtout de manière qualitative, il a été plus rarement relevé dans la littérature pour la prédiction quantitative de paramètres de procédés.

L'élasticité s'est avérée être le paramètre le plus influent sur la prédiction du retour élastique avec le modèle CPFEM. La prise en compte de l'anisotropie du comportement élastique peut modifier de manière significative le retour élastique prédit. Sur les exemples étudiés ici, celui-ci était sous-estimé avec une élasticité isotrope. Aussi, la prise en compte de la décroissance du module de Young dans les modèles CPFEM permet d'introduire de manière simple un degré de différenciation supplémentaire entre les grains et s'est avéré un facteur d'ordre un dans la prédiction du retour élastique.

Pour finir, la modélisation phénoménologique a conduit aux résultats les plus proches des mesures expérimentales du retour élastique. Elle peut donc s'utiliser sur des tôles ultrafines dont l'épaisseur est de l'ordre de 0.1 mm et qui comportent plus d'une dizaine de grains. L'approche en CPFEM, d'identification paramétrique relativement aisée, est pertinente lorsque le nombre de grains dans l'épaisseur est plus faible.

## Perspectives

La synthèse précédente permet de dégager différents axes d'améliorations de ces travaux. D'un point de vue expérimental, il serait intéressant d'évaluer l'influence de la taille de grains sur le comportement mécanique en la faisant varier par des recuits successifs. Cette étude permettrait d'évaluer l'évolution de diverses caractéristiques avec la diminution du nombre de grains dans l'épaisseur, telles que la dispersion du comportement mécanique, l'évolution du module de Young, l'anisotropie élastique et plastique.

Sur la modélisation du comportement mécanique, des pistes d'enrichissement des modèles de plasticité cristalline restent à explorer. La modélisation des contraintes résiduelles issues du laminage des tôles par l'introduction de distributions de cissions critiques d'activation dans les agrégats numériques de grains s'est montrée capable de reproduire l'effet Bauschinger de manière naturelle. C'est une alternative à l'utilisation

de variables d'écroûissage cinématique au niveau du système de glissement (voir (Wang *et al.*, 2016)). Il serait intéressant d'évaluer par des moyens expérimentaux (Diffraction de Rayons X par exemple) les profils effectifs du champ de contraintes résiduelles dans les tôles et d'employer ces distributions expérimentales dans les simulations. On pourrait à terme, envisager d'établir des profils type de distributions en fonction de caractéristiques du laminage (taux de réduction de l'épaisseur, etc.).

De plus, l'utilisation de l'approche en plasticité cristalline sur du calcul de structures requiert de disposer de ressources importantes en termes de puissance de calcul, notamment lorsqu'on s'intéresse à des cas où le nombre de grains dans l'épaisseur est supérieur à 10. Les aspects relatifs à l'efficacité des algorithmes et à l'optimisation des routines ayant déjà été poussés relativement loin, il serait judicieux de regarder du côté d'un autre type de modélisation dans cette zone de transition du comportement mécanique. La modélisation hybride compartimentée (Déprés *et al.*, 2011) se situe à l'interface des modèles phénoménologiques, à l'efficacité numérique prouvée, et de la modélisation à base physique. En distribuant spatialement des limites élastiques différentes à chaque élément du maillage, ce type de modèles intègre de façon macroscopique les hétérogénéités issues de phénomènes microscopiques. Les résultats obtenus de l'application de ces modèles au calcul de structures sont prometteurs (voir (Bizet, 2016)); une possibilité supplémentaire d'intégrer des effets de texture serait d'attribuer également des orientations cristallographiques aux éléments du maillage, de façon « phénoménologique ».

La modélisation de la non-linéarité et de la décroissance du module de Young reste un domaine de recherche actif (voir (Sun et Wagoner, 2011), (Chen *et al.*, 2016)). Ces divers phénomènes affectant l'élasticité ont été reliés à la micro-plasticité, plus spécifiquement à l'empilement de dislocations et aux mécanismes de relaxation. Une modélisation de ces phénomènes représente une piste d'amélioration de la description de l'élasticité dans les modèles de plasticité cristalline.

L'approche CPFEM développée a été utilisée ici pour l'analyse du retour élastique. Il s'agit toutefois d'un outil qui a un potentiel d'application dans de nombreux domaines. On pourrait envisager, par exemple, de l'utiliser pour prédire des courbes limites de formage de tôles ultrafines qui sont très difficiles à déterminer expérimentalement.

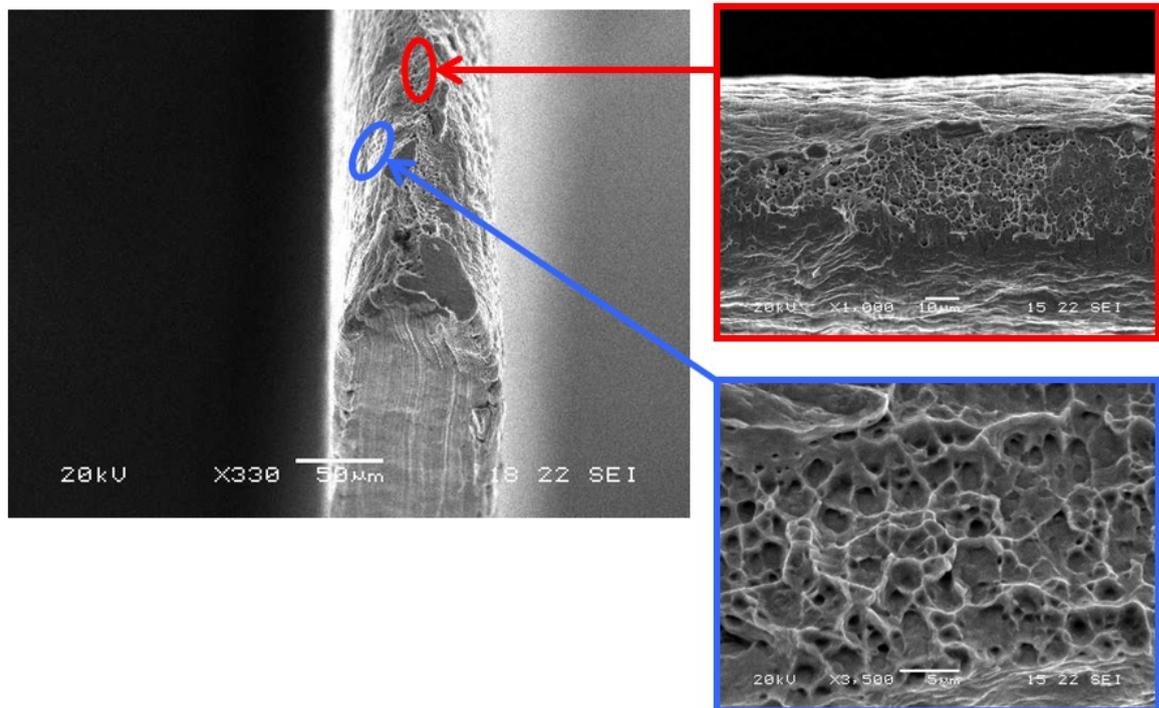


FIGURE 5.29: Cupules observées au MEB après rupture d'une éprouvette de traction en CuBe2.

Aussi, bien que peu attesté dans la littérature pour des tôles ultrafines, de l'endommagement a été observé (Figure 5.29) sur des éprouvettes de CuBe2 sollicitées en traction.

Des travaux existent sur la modélisation de l'endommagement en CPFEM (Kim et Yoon, 2015) et pourraient être intégrés dans l'approche développée ici. Ces différents éléments achèveraient de rendre l'approche en CPFEM utilisable comme laboratoire virtuel d'essais sur des tôles ultrafines.

# Bibliographie

- A. LEBENSOHN, R. (2001). N-site modeling of a 3D viscoplastic polycrystal using Fast Fourier Transform. *Acta Materialia*, 49(14):2723–2737.
- ABED-MERAÏM, F. (2009). *Contributions à la prédiction d’instabilités de type structure et matériau : modélisation de critères et formulation d’éléments finis adaptés à la simulation des structures minces*. Habilitation à Diriger des Recherches, Université de Metz.
- ADZIMA, F., BALAN, T., MANACH, P. Y., BONNET, N. et TABOUROT, L. (2016). Crystal plasticity and phenomenological approaches for the simulation of deformation behavior in thin copper alloy sheets. *International Journal of Plasticity*, In press.
- AMIRKHZI, A. V. et NEMAT-NASSER, S. (2007). A framework for numerical integration of crystal elasto-plastic constitutive equations compatible with explicit finite element codes. *International Journal of Plasticity*, 23(10–11):1918–1937.
- ANDERSON, M. P., GREST, G. S. et SROLOVITZ, D. J. (1989). Computer simulation of normal grain growth in three dimensions. *Philosophical Magazine Part B*, 59(3):293–329.
- ASHBY, M. F. (1970). The deformation of plastically non-homogeneous materials. *Philosophical Magazine*, 21(170):399–424.
- BALLAND, P., DÉPRÉS, C., BILLARD, R. et TABOUROT, L. (2011). Physically Based Kinematic Hardening Modelling of Single Crystal. volume 1353 de *American Institute of Physics Conference Series*, pages 91–96, American Institute of Physics Conference Series. American Institute of Physics Conference Series.
- BANABIC, D. (2010). *Sheet metal forming processes constitutive modelling and numerical simulation*. Springer, Berlin ; London.

- BANABIC, D., KUWABARA, T., BALAN, T. et COMSA, D. S. (2004). An anisotropic yield criterion for sheet metals. *Journal of Materials Processing Technology*, 157–158:462–465.
- BARBE, F., DECKER, L., JEULIN, D. et CAILLETAUD, G. (2001). Intergranular and intragranular behavior of polycrystalline aggregates. Part 1 : F.E. model. *International Journal of Plasticity*, 17(4):513–536.
- BARLAT, F., BREM, J. C., YOON, J. W., CHUNG, K., DICK, R. E., LEGE, D. J., POURBOGHRAAT, F., CHOI, S. H. et CHU, E. (2003). Plane stress yield function for aluminum alloy sheets—part 1 : theory. *International Journal of Plasticity*, 19(9):1297–1319.
- BARLAT, F., GRACIO, J. J., LEE, M.-G., RAUCH, E. F. et VINCZE, G. (2011). An alternative to kinematic hardening in classical plasticity. *International Journal of Plasticity*, 27(9):1309–1327.
- BARLAT, F., LEGE, D. J. et BREM, J. C. (1991). A six-component yield function for anisotropic materials. *International Journal of Plasticity*, 7(7):693–712.
- BARLAT, F., MAEDA, Y., CHUNG, K., YANAGAWA, M., BREM, J. C., HAYASHIDA, Y., LEGE, D. J., MATSUI, K., MURTHA, S. J., HATTORI, S., BECKER, R. C. et MAKOSEY, S. (1997). Yield function development for aluminum alloy sheets. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 45(11–12):1727–1763.
- BASSANI, J. L. et WU, T.-Y. (1991). Latent Hardening in Single Crystals II. Analytical Characterization and Predictions. *Proceedings of the Royal Society of London A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 435(1893):21–41.
- BATDORF, S. B. et BUDIANSKY, B. (1949). A mathematical theory of plasticity based on the concept of slip. Report NACA-TN-1871.
- BELKHABBAZ, A., BACROIX, B. et BRENNER, R. (2015). Investigation of the elastoplastic behavior of FCC polycrystals using a FFT numerical scheme. *Ro. J. Techn. Sci. - Appl. Mech.* 60 :1-2, 10:5–23.
- BERBENNI, S., FAVIER, V., LEMOINE, X. et BERVEILLER, M. (2004). Micromechanical modeling of the elastic-viscoplastic behavior of polycrystalline steels having different microstructures. *Materials Science and Engineering : A*, 372(1–2):128–136.
- BERVEILLER, M. et ZAOUI, A. (1978). An extension of the self-consistent scheme to plastically-flowing polycrystals. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 26(5–6):325–344.

- BISHOP, J. et HILL, R. (1951). A theoretical derivation of the plastic properties of a polycrystalline face-centred metal. *Philosophical Magazine Series 7*, 42(334):1298–1307.
- BIZET, L. (2016). *Caractérisation et modélisation du comportement thermomécanique des matériaux métalliques : vers la prise en compte des hétérogénéités microstructurales intrinsèques*. phdthesis, Université Grenoble Alpes.
- BONNET, N. (2007). *Contribution à l'étude expérimentale et numérique du comportement des toles d'épaisseur submillimétrique*. Thèse de doctorat, E.N.S.A.M., Metz.
- BRON, F. et BESSON, J. (2004). A yield function for anisotropic materials Application to aluminum alloys. *International Journal of Plasticity*, 20(4–5):937–963.
- CAER, C. et PESCI, R. (2014). Caractérisation des microstructures. Rapport interne - XXS Forming.
- CAILLETAUD, G. (1992). A micromechanical approach to inelastic behaviour of metals. *International Journal of Plasticity*, 8(1):55–73.
- CAILLETAUD, G. et PILVIN, P. (1993). Identification and Inverse Problems : A Modular Approach. *ASME Applied Mechanics Division -Publications- AMD*, 168:33.
- CHABOCHE, J. L. et ROUSSELIER, G. (1983). On the Plastic and Viscoplastic Constitutive Equations—Part I : Rules Developed With Internal Variable Concept. *Journal of Pressure Vessel Technology*, 105(2):153–158.
- CHANG, Y. W. et ASARO, R. J. (1981). An experimental study of shear localization in aluminum-copper single crystals. *Acta Metallurgica*, 29(1):241–257.
- CHEN, Z., BONG, H. J., LI, D. et WAGONER, R. H. (2016). The elastic–plastic transition of metals. *International Journal of Plasticity*, 83:178–201.
- CUITINO, A. M. et ORTIZ, M. (1993). Computational modelling of single crystals. *Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering*, 1(3):225.
- DAFALIAS, Y. F. et POPOV, E. P. (1976). Plastic Internal Variables Formalism of Cyclic Plasticity. *Journal of Applied Mechanics*, 43(4):645–651.
- DAI, J. (2015). Euler–Rodrigues formula variations, quaternion conjugation and intrinsic connections. *Mechanism and Machine Theory*, 92:144–152.
- DELAIRE, F., RAPHANEL, J. L. et REY, C. (2000). Plastic heterogeneities of a copper multicrystal deformed in uniaxial tension : experimental study and finite element simulations. *Acta Materialia*, 48(5):1075–1087.

- DELANNAY, L. (2001). *Observation and modelling of grain interactions and grain subdivision in rolled cubic polycrystals*. Thèse de doctorat, Université Catholique de Louvain.
- DIARD, O., LECLERCQ, S., ROUSSELIER, G. et CAILLETAUD, G. (2005). Evaluation of finite element based analysis of 3d multicrystalline aggregates plasticity : Application to crystal plasticity model identification and the study of stress and strain fields near grain boundaries. *International Journal of Plasticity*, 21(4):691–722.
- DIENES, J. K. (1979). On the analysis of rotation and stress rate in deforming bodies. *Acta Mechanica*, 32(4):217–232.
- DÉPRÉS, C., FIVEL, M. et TABOUROT, L. (2008). A dislocation-based model for low-amplitude fatigue behaviour of face-centred cubic single crystals. *Scripta Materialia*, 58(12):1086–1089.
- DÉPRÉS, C., MANOLE, C., BALLAND, P., DEGRÉ, F., TABOUROT, L. et POUZOLS, V. (2011). *Plasticity of crystalline materials : from dislocations to continuum*. Wiley-ISTE.
- DUMOULIN, S., HOPPERSTAD, O. et BERSTAD, T. (2009). Investigation of integration algorithms for rate-dependent crystal plasticity using explicit finite element codes. *Computational Materials Science*, 46(4):785–799.
- EGGERTSEN, P. A. et MATTIASSON, K. (2010). On constitutive modeling for springback analysis. *International Journal of Mechanical Sciences*, 52(6):804–818.
- EGGERTSEN, P.-A. et MATTIASSON, K. (2011). On the identification of kinematic hardening material parameters for accurate springback predictions. *International Journal of Material Forming*, 4(2):103–120.
- ENGEL, U. et ECKSTEIN, R. (2002). Microforming—from basic research to its realization. *Journal of Materials Processing Technology*, 125–126:35–44.
- ESHELBY, J. D. (1957). The Determination of the Elastic Field of an Ellipsoidal Inclusion, and Related Problems. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, 241(1226):376–396.
- EVERS, L. P., BREKELMANS, W. A. M. et GEERS, M. G. D. (2004). Non-local crystal plasticity model with intrinsic SSD and GND effects. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 52(10):2379–2401.

- FLECK, N. A., MULLER, G. M., ASHBY, M. F. et HUTCHINSON, J. W. (1994). Strain gradient plasticity : Theory and experiment. *Acta Metallurgica et Materialia*, 42(2): 475–487.
- FOREST, S., BARBE, F. et CAILLETAUD, G. (2000). Cosserat modelling of size effects in the mechanical behaviour of polycrystals and multi-phase materials. *International Journal of Solids and Structures*, 37(46–47):7105–7126.
- FRANCIOSI, P. (1984). *Etude théorique et expérimentale du comportement élastoplastique des monocristaux métalliques se déformant par glissement modélisation pour un chargement complexe quasi statique*. Thèse de doctorat, Université Paris XIII.
- FRANCIOSI, P. et ZAOUI, A. (1991). Crystal hardening and the issue of uniqueness. *International Journal of Plasticity*, 7(4):295–311.
- FRANZ, G. (2008). *Prédiction de la limite de formabilité des aciers multiphasés par une approche micromécanique*. Thèse de doctorat, Arts et Métiers ParisTech.
- FU, M. W. et CHAN, W. L. (2012a). A review on the state-of-the-art microforming technologies. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 67(9-12):2411–2437.
- FU, M. W. et CHAN, W. L. (2012b). A review on the state-of-the-art microforming technologies. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 67(9-12):2411–2437.
- FURUSHIMA, T., TSUNEZAKI, H., MANABE, K.-i. et ALEXSANDROV, S. (2014). Ductile fracture and free surface roughening behaviors of pure copper foils for micro/meso-scale forming. *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, 76:34–48.
- GAU, J.-T., PRINCIPE, C. et WANG, J. (2007a). An experimental study on size effects on flow stress and formability of aluminum and brass for microforming. *Journal of Materials Processing Technology*, 184(1–3):42–46.
- GAU, J.-T., PRINCIPE, C. et YU, M. (2007b). Springback behavior of brass in micro sheet forming. *Journal of Materials Processing Technology*, 191(1–3):7–10.
- GEIGER, M., KLEINER, M., ECKSTEIN, R., TIESLER, N. et ENGEL, U. (2001). Microforming. *CIRP Annals - Manufacturing Technology*, 50(2):445–462.
- GITMAN, I. M., ASKES, H. et SLUYS, L. J. (2007). Representative volume : Existence and size determination. *Engineering Fracture Mechanics*, 74(16):2518–2534.

- GÉRARD, C. (2008). *Mesures de champs et identification de modèles de plasticité cristalline*. Thèse de doctorat, Université Paris-Nord - Paris XIII.
- GUAN, Y., POURBOGHRAI, F. et BARLAT, F. (2006). Finite element modeling of tube hydroforming of polycrystalline aluminum alloy extrusions. *International Journal of Plasticity*, 22(12):2366–2393.
- GUILHEM, Y. (2011). *Étude numérique des champs mécaniques locaux dans les agrégats polycristallins d'acier 316L sous chargement de fatigue*. Thèse de doctorat, École Nationale Supérieure des Mines de Paris.
- GURTIN, M. E. (2002). A gradient theory of single-crystal viscoplasticity that accounts for geometrically necessary dislocations. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 50(1):5–32.
- HANSEN, N. (1977). The effect of grain size and strain on the tensile flow stress of aluminium at room temperature. *Acta Metallurgica*, 25(8):863–869.
- HIBBITT, KARLSSON et SORENSEN (1992). *ABAQUS : Theory manual*. Hibbitt, Karlsson & Sorensen.
- HILL, R. (1948). A Theory of the Yielding and Plastic Flow of Anisotropic Metals. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, 193(1033):281–297.
- HILL, R. (1965). Continuum micro-mechanics of elastoplastic polycrystals. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 13(2):89–101.
- HILL, R. et RICE, J. R. (1972). Constitutive analysis of elastic-plastic crystals at arbitrary strain. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 20(6):401–413.
- HOFFMANN, H. et HONG, S. (2006). Tensile test of very thin sheet metal and determination of flow stress considering the scaling effect. *CIRP Annals - Manufacturing Technology*, 55(1):263–266.
- HUGHES, T. J. R. (1984). Numerical Implementation of Constitutive Models : Rate-Independent Deviatoric Plasticity. In NEMAT-NASSER, S., ASARO, R. J. et HEGEMIER, G. A., éditeurs : *Theoretical foundation for large-scale computations for nonlinear material behavior*, Mechanics of elastic and inelastic solids 6, pages 29–63. Springer Netherlands.
- HUGHES, T. J. R. et WINGET, J. (1980). Finite rotation effects in numerical integration of rate constitutive equations arising in large-deformation analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 15(12):1862–1867.

- HUMPHREYS, F. J. (1997). A unified theory of recovery, recrystallization and grain growth, based on the stability and growth of cellular microstructures—I. The basic model. *Acta Materialia*, 45(10):4231–4240.
- HUTCHINSON, J. W. (1976). Bounds and Self-Consistent Estimates for Creep of Polycrystalline Materials. *Proceedings of the Royal Society A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences Proceedings of the Royal Society A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 348(1652):101–127.
- JIANG, C.-P. et CHEN, C.-C. (2012). Grain Size Effect on the Springback Behavior of the Microtube in the Press Bending Process. *Materials and Manufacturing Processes*, 27(5):512–518.
- JIE XU, BIN GUO et DEBIN SHAN (2013). Specimen Dimension and Grain Size Effects on Deformation Behavior in Micro Tensile of SUS304 Stainless Steel Foil. *Materials Transactions.*, 54(6):984–989.
- KALS, T. A. et ECKSTEIN, R. (2000). Miniaturization in sheet metal working. *Journal of Materials Processing Technology*, 103(1):95–101.
- KANIT, T., FOREST, S., GALLIET, I., MOUNOURY, V. et JEULIN, D. (2003). Determination of the size of the representative volume element for random composites : statistical and numerical approach. *International Journal of Solids and Structures*, 40(13–14):3647–3679.
- KARAFILLIS, A. P. et BOYCE, M. C. (1993). A general anisotropic yield criterion using bounds and a transformation weighting tensor. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 41(12):1859–1886.
- KELLER, C., HABRAKEN, A. M. et DUCHENE, L. (2012). Finite element investigation of size effects on the mechanical behavior of nickel single crystals. *Materials Science and Engineering : A*, 550:342–349.
- KHATIBI, G., MINGLER, B., SCHAFLE, E., STICKLER, R. et WEISS, B. (2005). Microcharacterization of thin copper and aluminium bond wires. *BHM Berg- und Hüttenmännische Monatshefte*, 150(5):176–180.
- KIM, J.-B. et YOON, J. W. (2015). Necking behavior of AA 6022-T4 based on the crystal plasticity and damage models. *International Journal of Plasticity*, 73:3–23.
- KIM, J. H., KIM, D., BARLAT, F. et LEE, M.-G. (2012). Crystal plasticity approach for predicting the Bauschinger effect in dual-phase steels. *Materials Science and Engineering : A*, 539:259–270.

- KITAYAMA, K., TOMÉ, C. N., RAUCH, E. F., GRACIO, J. J. et BARLAT, F. (2013). A crystallographic dislocation model for describing hardening of polycrystals during strain path changes. Application to low carbon steels. *International Journal of Plasticity*, 46:54–69.
- KLEIN, M., HADRBOLETZ, A., WEISS, B. et KHATIBI, G. (2001). The ‘size effect’ on the stress–strain, fatigue and fracture properties of thin metallic foils. *Materials Science and Engineering : A*, 319–321:924–928.
- KOCKS, U. F. (1970). The relation between polycrystal deformation and single-crystal deformation. *Metallurgical and Materials Transactions*, 1(5):1121–1143.
- KRÖNER, E. (1961). Zur plastischen verformung des vielkristalls. *Acta Metallurgica*, 9(2):155–161.
- KUCHNICKI, S., CUITIÑO, A. et RADOVITZKY, R. (2006). Efficient and robust constitutive integrators for single-crystal plasticity modeling. *International Journal of Plasticity*, 22(10):1988–2011.
- LAURENT, H., GRÈZE, R., OLIVEIRA, M. C., MENEZES, L. F., MANACH, P. Y. et ALVES, J. L. (2010). Numerical study of springback using the split-ring test for an AA5754 aluminum alloy. *Finite Elements in Analysis and Design*, 46(9):751–759.
- LEBENSOHN, R. A. et TOMÉ, C. N. (1993). A self-consistent anisotropic approach for the simulation of plastic deformation and texture development of polycrystals : Application to zirconium alloys. *Acta Metallurgica et Materialia*, 41(9):2611–2624.
- LEE, E. H. (1969). Elastic-Plastic Deformation at Finite Strains. *Journal of Applied Mechanics*, 36(1):1–6.
- LEMAITRE, J. et CHABOCHE, J.-L. (2004). *Mécanique des matériaux solides*. Dunod.
- LI, H., YANG, H. et SUN, Z. (2008). A robust integration algorithm for implementing rate dependent crystal plasticity into explicit finite element method. *International Journal of Plasticity*, 24(2):267–288.
- LI, L., SHEN, L. et PROUST, G. (2014). A texture-based representative volume element crystal plasticity model for predicting Bauschinger effect during cyclic loading. *Materials Science and Engineering : A*, 608:174–183.
- LIN, B., ZHAO, L. G., TONG, J. et CHRIST, H. J. (2010). Crystal plasticity modeling of cyclic deformation for a polycrystalline nickel-based superalloy at high temperature. *Materials Science and Engineering : A*, 527(15):3581–3587.

- LIN, T. H. (1957). Analysis of elastic and plastic strains of a face-centred cubic crystal. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 5(2):143–149.
- LING, X., HORSTEMEYER, M. F. et POTIRNICHE, G. P. (2005). On the numerical implementation of 3d rate-dependent single crystal plasticity formulations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 63(4):548–568.
- LIU, J. G., FU, M. W., LU, J. et CHAN, W. L. (2011). Influence of size effect on the springback of sheet metal foils in micro-bending. *Computational Materials Science*, 50(9):2604–2614.
- LORRAIN, J.-P. (2005). *Critère de ductilité basé sur la perte d'ellipticité du module tangent élastoplastique déduit d'un modèle autocohérent*. Thèse de doctorat, Arts et Métiers ParisTech.
- LUO, M. et ROUSSELIER, G. (2014). Modeling of large strain multi-axial deformation of anisotropic metal sheets with strength-differential effect using a Reduced Texture Methodology. *International Journal of Plasticity*, 53:66–89.
- MANACH, P. Y. et COUTY, N. (2002). Elastoviscohysteresis constitutive law in convected coordinate frames : application to finite deformation shear tests. *Computational Mechanics*, 28(1):17–25.
- MANDEL, J. (1965). Generalisation de la théorie de plasticité de W. T. Koiter. *International Journal of Solids and Structures*, 1(3):273–295.
- MANOLE, C. (2010). *Analyse des contraintes internes dans les monocristaux cfc : vers une nouvelle loi de plasticité cristalline*. Thèse de doctorat, Université de Savoie.
- MARTINY-WEITIG, M. (1992). *Modélisation par éléments finis sur micro-ordinateur de la mise en forme de tôles minces : application au profilage, validation expérimentale par le moiré*. Thèse de doctorat, Nancy 1.
- MEGAFIT (2016). Megafit project overview. <http://www.megafit-project.eu/index.php/overview>; accessed 3-March-2016.
- MOLINARI, A., CANOVA, G. R. et AHZI, S. (1987). A self consistent approach of the large deformation polycrystal viscoplasticity. *Acta Metallurgica*, 35(12):2983–2994.
- MORESTIN, F. et BOIVIN, M. (1996). On the necessity of taking into account the variation in the Young modulus with plastic strain in elastic-plastic software. *Nuclear Engineering and Design*, 162(1):107–116.

- MRÓZ, Z. (1967). On the description of anisotropic workhardening. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 15(3):163–175.
- MUGHRABI, H. (1983). Dislocation wall and cell structures and long-range internal stresses in deformed metal crystals. *Acta Metallurgica*, 31(9):1367–1379.
- NAGTEGAAL, J. et DE JONG, J. (1982). Some aspects of non-isotropic work-hardening in finite strain plasticity. *Plasticity of Metals at Finite Strain : Theory, Experiment and Computation*, pages 65–102.
- NEEDLEMAN, A., ASARO, R., LEMONDS, J. et PEIRCE, D. (1985). Finite element analysis of crystalline solids. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 52(1–3):689–708.
- NEMAT-NASSER, S. (2004). *Plasticity : A Treatise on Finite Deformation of Heterogeneous Inelastic Materials*. Cambridge University Press.
- NICAISE, N., BERBENNI, S., WAGNER, F., BERVEILLER, M. et LEMOINE, X. (2011). Coupled effects of grain size distributions and crystallographic textures on the plastic behaviour of IF steels. *International Journal of Plasticity*, 27(2):232–249.
- NYE, J. F. (1953). Some geometrical relations in dislocated crystals. *Acta Metallurgica*, 1(2):153–162.
- PEIRCE, D., ASARO, R. J. et NEEDLEMAN, A. (1982). An analysis of nonuniform and localized deformation in ductile single crystals. *Acta Metallurgica*, 30(6):1087–1119.
- PHAM, C. H. (2014). *Vrillage de tôles métalliques ultra-minces après emboutissage*. Thèse de doctorat, Université de Bretagne Sud.
- PHAM, C. H., ADZIMA, F., COER, J. et MANACH, P.-Y. (2016). Anti-buckling device for ultra-thin metallic sheets under large and reversed shear strain paths. *Experimental Mechanics (soumis)*.
- PHAM, C. H. et JEGAT, A. (2015). Rapport interne / caractérisation mécanique et formabilité - XXS Forming. Rapport technique.
- PILVIN, P. et CAILLETAUD, G. (1991). Intergranular and transgranular hardening in viscoplasticity. In ŻYCKOWSKI, éditeur : *Creep in Structures*, International Union of Theoretical and Applied Mechanics, pages 171–178. Springer Berlin Heidelberg.
- PLESHAKOV (2016a). Crystallite — wikipedia, the free encyclopedia. <https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/c/cd/CrystalGrain.jpg>; accessed 3-March-2016.

- PLESHAKOV (2016b). Grain boundary — wikipedia, the free encyclopedia. [https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/8/86/Bronze\\_bell\\_with\\_visible\\_material\\_structure.jpg](https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/8/86/Bronze_bell_with_visible_material_structure.jpg); accessed 3-March-2016.
- QIN, Y. (2010). *Micro-manufacturing engineering and technology*. Elsevier, Amsterdam ; Boston.
- QUEY, R., DAWSON, P. R. et BARBE, F. (2011). Large-scale 3d random polycrystals for the finite element method : Generation, meshing and remeshing. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 200(17–20):1729–1745.
- RAPHANEL, J., RAVICHANDRAN, G. et LEROY, Y. (2004). Three-dimensional rate-dependent crystal plasticity based on Runge–Kutta algorithms for update and consistent linearization. *International Journal of Solids and Structures*, 41(22–23): 5995–6021.
- RAUCH, E. et SCHMITT, J. (1989). Dislocation substructures in mild steel deformed in simple shear. *Materials Science and Engineering : A*, 113:441–448.
- RAUCH, E. F., GRACIO, J. J. et BARLAT, F. (2007). Work-hardening model for polycrystalline metals under strain reversal at large strains. *Acta Materialia*, 55(9):2939–2948.
- RAUCH, E. F., GRACIO, J. J., BARLAT, F. et VINCZE, G. (2011). Modelling the plastic behaviour of metals under complex loading conditions. *Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering*, 19(3):035009.
- RHIM, S. H., SON, Y. K. et OH, S. I. (2005). Punching of Ultra Small Size Hole Array. *CIRP Annals - Manufacturing Technology*, 54(1):261–264.
- RICE, J. (1971). Inelastic constitutive relations for solids : An internal-variable theory and its application to metal plasticity. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 19(6):433–455.
- ROTTERS, F., EISENLOHR, P., HANTCHERLI, L., TJAHOJANTO, D., BIELER, T. et RAABE, D. (2010). Overview of constitutive laws, kinematics, homogenization and multiscale methods in crystal plasticity finite-element modeling : Theory, experiments, applications. *Acta Materialia*, 58(4):1152–1211.
- ROUSSEAU, J.-J. (2000). *Cristallographie géométrique et radiocristallographie : avec exercices corrigés*. Dunod, Paris.

- ROUSSELIER, G., BARLAT, F. et YOON, J. (2009). A novel approach for anisotropic hardening modeling. Part I : Theory and its application to finite element analysis of deep drawing. *International Journal of Plasticity*, 25(12):2383–2409.
- SAAI, A. A. (2007). *Modèle physique de la plasticité d'un cristal métallique CFC soumis à des chargements alternés : Contribution à la définition d'une modélisation multiéchelles de la mise en forme des métaux*. Thèse de doctorat, Université de Savoie.
- SACHS, J. (1928). Zur Ableitung einer Fließbedingung. *Zeitschrift des Vereines Deutscher Ingenieure*, 72:734–736.
- SCHWARTZ, J. (2011). *Approche non locale en plasticité cristalline : application à l'étude du comportement mécanique de l'acier AISI 316LN en fatigue oligocyclique*. Châtenay-Malabry, Ecole centrale de Paris.
- SEGURADO, J., LEBENSOHN, R. A., LLORCA, J. et TOMÉ, C. N. (2012). Multiscale modeling of plasticity based on embedding the viscoplastic self-consistent formulation in implicit finite elements. *International Journal of Plasticity*, 28(1):124–140.
- SIDOROFF, F. (1982). *Cours sur les grandes déformations*. GRECO. Centre national de la recherche scientifique (France), Cachan, grandes déformations et endommagement édition.
- SIGVANT, M., MATTIASSON, K., VEGTER, H. et THILDERKVIST, P. (2009). A viscous pressure bulge test for the determination of a plastic hardening curve and equibiaxial material data. *International Journal of Material Forming*, 2(4):235–242.
- SIMO, J. C. et HUGHES, T. J. R. (1998). *Computational Inelasticity*. Springer.
- SIMO, J. C. et ORTIZ, M. (1985). A unified approach to finite deformation elastoplastic analysis based on the use of hyperelastic constitutive equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 49(2):221–245.
- SUN, L. et WAGONER, R. H. (2011). Complex unloading behavior : Nature of the deformation and its consistent constitutive representation. *International Journal of Plasticity*, 27(7):1126–1144.
- TABOUROT, L. (1992). *Loi de comportement élastoviscoplastique du monocristal en grandes transformations*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Grenoble.
- TABOUROT, L. (2001). *Vers une vision unifiée de la plasticité cristalline*. Habilitation à Diriger des Recherches, Université de Savoie.

- TARASIUK, J., WIERZBANOWSKI, K. et BACROIX, B. (2004). Texture decomposition into Gauss-shaped functions : classical and genetic algorithm methods. *Computational Materials Science*, 29(2):179–186.
- TAYLOR, S. G. I. (1938). Plastic Strain in metals. *Journal of the Institute of Metals*, (62):307 – 324.
- TEODOSIU, C. (1996). The Meso-Macro Connection of Polycrystals. *Nato Asi Series of Applied Sciences*, 308:483–516.
- TEODOSIU, C. et HU, Z. (1998). Microstructure in the continuum modelling of plastic anisotropy. *In Nineteenth Riso International Symposium on Materials Science 1998*, pages 149–168.
- TEODOSIU, C., NICOLAE, V. et PAVEN, H. (1975). The influence of the core conditions on the linear anisotropic elastic field of a straight dislocation. *PSSA physica status solidi (a)*, 27(1):191–204.
- TIESLER, N. et ENGEL, U. (2000). Microforming, effects of miniaturization. *In 8th International Conference on Metal Forming*, pages 355–360.
- VAN HOUTTE, P. (1988). A Comprehensive Mathematical Formulation of an Extended Taylor–Bishop–Hill Model Featuring Relaxed Constraints, the Renouard–Wintenberger Theory and a Strain Rate Sensitivity Model. *Textures and Microstructures*, 8:313–350.
- VAN HOUTTE, P., LI, S., SEEFELDT, M. et DELANNAY, L. (2005). Deformation texture prediction : from the Taylor model to the advanced Lamel model. *International Journal of Plasticity*, 21(3):589–624.
- VAUTROT, M., BALLAND, P., TABOUROT, L., DIOT, J.-L. et CHARLEUX, L. (2014). Numerical investigation of the modelling of elastic behaviour in a wiping-die bending process. page NC.
- VOLLERTSEN, F. et HU, Z. (2006). Tribological Size Effects in Sheet Metal Forming Measured by a Strip Drawing Test. *CIRP Annals - Manufacturing Technology*, 55(1):291–294.
- VOLLERTSEN, F., HU, Z., NIEHOFF, H. S. et THEILER, C. (2004). State of the art in micro forming and investigations into micro deep drawing. *Journal of Materials Processing Technology*, 151(1–3):70–79.

- VOLLERTSEN, F., SCHULZE NIEHOFF, H. et HU, Z. (2006). State of the art in micro forming. *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, 46(11):1172–1179.
- WANG, H., CAPOLUNGO, L., CLAUSEN, B. et TOMÉ, C. N. (2016). A crystal plasticity model based on transition state theory. *International Journal of Plasticity*.
- WANG, S., ZHUANG, W., BALINT, D. et LIN, J. (2009). A virtual crystal plasticity simulation tool for micro-forming. *Procedia Engineering*, 1(1):75–78.
- WEISS, B., GRÖGER, V., KHATIBI, G., KOTAS, A., ZIMPRICH, P., STICKLER, R. et ZAGAR, B. (2002). Characterization of mechanical and thermal properties of thin Cu foils and wires. *Sensors and Actuators A : Physical*, 99(1–2):172–182.
- WOUTERS, O., VELLINGA, W. P., TIJUM, R. V. et de HOSSON, J. T. M. (2005). On the evolution of surface roughness during deformation of polycrystalline aluminum alloys. *Acta Materialia*, 53(15):4043–4050.
- XIAO, H., BRUHNS, O. T. et MEYERS, A. (1998). On objective corotational rates and their defining spin tensors. *International Journal of Solids and Structures*, 35(30):4001–4014.
- YOSHIDA, F. et UEMORI, T. (2003). A model of large-strain cyclic plasticity and its application to springback simulation. *International Journal of Mechanical Sciences*, 45(10):1687–1702.
- ZAMIRI, A., POURBOGHRAT, F. et BARLAT, F. (2007). An effective computational algorithm for rate-independent crystal plasticity based on a single crystal yield surface with an application to tube hydroforming. *International Journal of Plasticity*, 23(7):1126–1147.
- ZECEVIC, M. et KNEZEVIC, M. (2015). A dislocation density based elasto-plastic self-consistent model for the prediction of cyclic deformation : Application to AA6022-T4. *International Journal of Plasticity*, 72:200–217.
- ZHANG, H., DONG, X., WANG, Q. et ZENG, Z. (2012). An effective semi-implicit integration scheme for rate dependent crystal plasticity using explicit finite element codes. *Computational Materials Science*, 54:208–218.

# Table des figures

1	Disque dur IBM de 1 GB (Geiger <i>et al.</i> , 2001). . . . .	xi
2	Exemples de pièces issues de divers procédés de micro-formage. . . . .	xii
1.1	Matériaux polycristallins. . . . .	2
1.2	Structure d'un cristal Cubique à Faces Centrées CFC. . . . .	2
1.3	Formation progressive de variantes de martensite pour accommoder la déformation dans un alliage de cuivre. Avec l'aimable autorisation de A. Eberhardt, LEM3. . . . .	3
1.4	Déformation par maclage. . . . .	3
1.5	Plan et directions de glissement dans un CFC (contenant 6 atomes, valeur maximum de la maille CFC). . . . .	4
1.6	Apparition de bandes de glissement lors d'une traction uniaxiale sur une éprouvette d'aluminium (Khatibi <i>et al.</i> , 2005). . . . .	4
1.7	Influence de l'épaisseur des tôles sur la contrainte d'écoulement lors d'un essai de traction (Hoffmann et Hong, 2006). . . . .	5
1.8	Exemples de pièces obtenues par micro-formage. . . . .	7
1.9	Leads pliées d'un boîtier microélectronique produit par ACUIPLAST. . . . .	7
1.10	Coupelle en molybdène pour canon à électrons (Geiger <i>et al.</i> , 2001). . . . .	8
1.11	Diminution de la contrainte d'écoulement de tôles métalliques avec l'épaisseur. . . . .	10
1.12	Evolution de la proportion des grains en surface (Engel et Eckstein, 2002). . . . .	10
1.13	Evolution de la contrainte d'écoulement de tôles ultrafines en fonction du nombre N de grains dans l'épaisseur (Jie Xu <i>et al.</i> , 2013). . . . .	11
1.14	Géométries de cylindres d'Al6061 avant et après essai de compression (Fu et Chan, 2012b). . . . .	12
1.15	Evolution de la rugosité en surface pour différentes tailles de grains lors d'essais de traction sur une tôle en alliage d'aluminium (Wouters <i>et al.</i> , 2005). . . . .	13
1.16	Evolution de la ductilité en fonction de l'épaisseur de la tôle et de la taille de grain (Kals et Eckstein, 2000). . . . .	14
1.17	Faciès de rupture après traction sur des tôles de cuivre de différentes épaisseurs (Weiss <i>et al.</i> , 2002). . . . .	14
1.18	Evolution du coefficient de frottement tôle-outils en emboutissage ( $d_{St}$ : diamètre du poinçon) (Vollertsen et Hu, 2006). . . . .	15
1.19	Poches de lubrifiant ouvertes et fermées (Engel et Eckstein, 2002). . . . .	16
2.1	Mouvement d'un corps déformable de la configuration de référence à la configuration courante. . . . .	19
2.2	Représentation des configurations courante et de référence. . . . .	21

2.3	Rotation de corps rigide d'une barre soumise à un état de contraintes. . .	23
2.4	Evolution de la surface de charge correspondant à un écrouissage isotrope dans le plan $\sigma_1 - \sigma_2$ . La surface en pointillés représente le domaine élastique initial. . . . .	33
2.5	Illustration schématique des effets de l'écrouissage cinématique (Eggertsen et Mattiasson, 2011). . . . .	35
2.6	Evolution de la surface de charge correspondant à un écrouissage cinématique dans le plan $\sigma_1 - \sigma_2$ . La surface en pointillés représente le domaine élastique initial. . . . .	35
2.7	Evolution de la surface de charge correspondant à un écrouissage mixte dans le plan $\sigma_1 - \sigma_2$ . La surface en pointillés représente le domaine élastique initial. . . . .	36
2.8	Décomposition de la déformation en partie élastique et plastique lors du mouvement du cristal. . . . .	39
2.9	Homogénéisation par éléments finis. . . . .	50
3.1	Comparaison des prédictions de la VUMAT (repère global) par rapport à (Raphanel <i>et al.</i> , 2004). $\sigma$ est la contrainte dans la direction de traction et $\sigma_{12}$ est la contrainte de cisaillement dans le plan (12). . . . .	59
3.2	Différents systèmes de coordonnées mis en jeu (Adzima <i>et al.</i> , 2016). . . .	61
3.3	Comparaison des prédictions des algorithmes en repères global et cristallographique. . . . .	64
3.4	Champs de contraintes obtenus avec les deux algorithmes pour un essai de traction sur un monocristal maillé avec 1000 éléments C3D8R, pour une déformation logarithmique de 0.35. . . . .	64
3.5	Représentation de grains par des octaèdres. . . . .	71
3.6	Principe de fonctionnement en 2D d'une tessellation de Voronoï. . . . .	71
3.7	Techniques de maillage d'un polycristal. . . . .	72
3.8	Principe de fonctionnement de <i>Germination</i> . Les carrés représentent des éléments finis avec en leur centre un point d'intégration. Les points noirs sont les germes ou générateurs à partir desquels croissent les sphères qui vont regrouper des éléments et former des grains représentés par des couleurs différentes. . . . .	73
3.9	Polycristaux et maillages générés par <i>Neper</i> (Quey <i>et al.</i> , 2011). . . . .	74
3.10	Microstructure générée par <i>Germination</i> . Les couleurs servent uniquement à distinguer les grains les uns des autres. . . . .	75
3.11	Analyse EBSD de l'alliage CuFe2P (Caer et Pesci, 2014). . . . .	75
3.12	Microstructure de grains fortement étirés générée par <i>Germination</i> . . . . .	76
3.13	Microstructure de tôle avec une dispersion marquée sur la taille de grains générée par <i>Germination</i> . . . . .	76
4.1	Figure de pôles du CuBe2 (Caer et Pesci, 2014). . . . .	80
4.2	Cartographie EBSD du CuBe2 (Caer et Pesci, 2014). . . . .	80
4.3	Figure de pôles du CuFe2P (Caer et Pesci, 2014). . . . .	81
4.4	Cartographie EBSD du CuFe2P (Caer et Pesci, 2014). . . . .	82
4.5	Figure de pôles du Cu (Caer et Pesci, 2014). . . . .	82
4.6	Cartographie EBSD du cuivre pur (Caer et Pesci, 2014). . . . .	83
4.7	Géométrie des éprouvettes de traction. . . . .	84
4.8	Essais de traction uniaxiale à 0, 45 et 90° de la DL pour le cuivre pur. . .	86

4.9	Essais de traction uniaxiale à 0, 45 et 90° de la DL pour le CuBe2. . . . .	87
4.10	Essais de traction uniaxiale à 0, 45 et 90° de la DL pour le CuFe2P. . . . .	88
4.11	Comportement en traction dans la DL des trois matériaux. . . . .	89
4.12	Essais de traction avec sauts de vitesse. Comparaison par rapport aux essais de traction monotone à la vitesse de $\dot{\epsilon} = 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ . . . . .	90
4.13	Traction avec charges et décharges le CuFe2P. . . . .	91
4.14	Illustration de la mesure du module de Young (Eggertsen et Mattiasson, 2010). . . . .	92
4.15	Evolution du module de Young du CuBe2 et du CuFe2P. . . . .	92
4.16	Principe du dispositif de cisaillement. . . . .	93
4.17	Eprouvette de cisaillement et apparition de plis de flambement. . . . .	94
4.18	Support de maintien de l'éprouvette de cisaillement (a) : (1) plaque de base en aluminium, (2) Cales en verre (3) plaques de serrage (4) plaque en verre transparent (5) éprouvette (6) tige en plastique (7) écrou de serrage (8) tige filetée. . . . .	94
4.19	Essais de cisaillement monotone et alternés sur le cuivre pur. . . . .	95
4.20	Essais de cisaillement monotone et alternés sur le CuFe2P. . . . .	96
4.21	Essais de cisaillement monotone et alternés sur le CuBe2. . . . .	97
4.22	Schéma de principe de l'essai d'expansion biaxiale. . . . .	98
4.23	Photographies du dispositif d'essai d'expansion biaxiale. . . . .	98
4.24	Superposition d'essais d'expansion biaxiale et de traction uniaxiale dans la DL pour les trois matériaux. . . . .	100
4.25	Comparaison essais / modèles en traction uniaxiale sur du cuivre pur. . . . .	103
4.26	Comparaison essais / modèles pour l'anisotropie de déformation en traction uniaxiale sur du cuivre pur. . . . .	104
4.27	Comparaison essais / modèles en expansion biaxiale et cisaillement sur du cuivre pur. . . . .	104
4.28	Comparaison essais / modèles en traction uniaxiale sur le CuFe2P. . . . .	106
4.29	Comparaison essais / modèles pour l'anisotropie de déformation en traction uniaxiale sur le CuFe2P. . . . .	106
4.30	Comparaison essais / modèles en expansion biaxiale et cisaillement sur le CuFe2P. . . . .	107
4.31	Comparaison essais / modèles en traction uniaxiale sur le CuBe2. . . . .	108
4.32	Comparaison essais / modèles pour l'anisotropie de déformation en traction uniaxiale sur le CuBe2. . . . .	109
4.33	Comparaison essais / modèles en expansion biaxiale et cisaillement sur le CuBe2. . . . .	109
4.34	Volume Élémentaire cubique, noeuds de référence et diverses sollicitations. . . . .	113
4.35	Analyse de convergence sur les VE pour un test de traction uniaxiale avec le modèle CPFEM et VE de taille croissante (paramètres du modèle : $h_0=300 \text{ MPa}$ , $\tau^*=750 \text{ MPa}$ , $\tau_0=250 \text{ MPa}$ , $q = 1.4$ , $\dot{\gamma}_o=0.001 \text{ s}^{-1}$ , $n=50$ ). . . . .	114
4.36	Figures de pôles pour le CuBe2 a) Données recueillies par EBSD and b) discrétisation numérique des données expérimentales pour le VER. . . . .	115
4.37	Identification des paramètres du modèle CPFEM pour le CuBe2 et le CuFe2P sur un essai de traction dans la DL. . . . .	117
4.38	VER pour le CuFe2P. . . . .	118
4.39	Figures de pôles pour le CuFe2P a) Données recueillies par EBSD et b) discrétisation numérique des données expérimentales pour le VER. . . . .	118

4.40	Courbes d'écroutissage du CuBe2 pour différentes orientations par rapport à la DL, par le modèle CPFEM. . . . .	120
4.41	Prédiction des coefficients d'anisotropie plastique à 0°, 45° and 90° avec le modèle CPFEM et le modèle phénoménologique calibré sur a) la base expérimentale complète et b) la base expérimentale réduite. . . . .	120
4.42	Description de l'essai d'expansion biaxiale du CuBe2 par le modèle CPFEM et le modèle phénoménologique calibré sur une base réduite. . . . .	121
4.43	Prédiction des essais de cisaillement avec le modèle CPFEM en considérant a) une homogénéité des cissions critiques initiales b) une distribution hétérogène entre les grains des cissions critiques initiales. . . . .	122
4.44	Prédiction des essais de cisaillement avec le modèle phénoménologique (BB2004) calibré sur des essais de traction uniaxiale. . . . .	124
5.1	Modèle de boîtier électronique produit par ACUIPLAST. Les broches métalliques sont constituées de tôles ultrafines. . . . .	127
5.2	Modélisation numérique du boîtier complet et des outils de mise en forme (Vautrot <i>et al.</i> , 2014). . . . .	127
5.3	Modèle simplifié employé pour les simulations numériques sur le démonstrateur ACUIPLAST. . . . .	128
5.4	Mesure du retour élastique sur le démonstrateur ACUIPLAST. . . . .	128
5.5	Illustration du procédé de micro-formage par outils à suivre. . . . .	129
5.6	Modèle numérique du connecteur pour les simulations. . . . .	130
5.7	Modèle utilisé pour les simulations (poste 2) du démonstrateur DELTA COMPOSANTS. . . . .	130
5.8	Modèle numérique employé pour l'étude paramétrique. . . . .	131
5.9	Comparaison des profils obtenus par des simulations dynamique-explicite et statique-implicite, à la fin de l'opération de mise en forme (m.e.f.) et après retour élastique. . . . .	133
5.10	Comparaison des profils obtenus avec divers types d'éléments finis, à la fin de l'opération de mise en forme (m.e.f.) et après retour élastique. . . . .	134
5.11	Champs de contraintes à la fin de l'étape de mise en forme. . . . .	136
5.12	Comparaison des profils obtenus avec les hypothèses d'élasticité isotrope et anisotrope, à la fin de l'opération de mise en forme et après retour élastique. . . . .	137
5.13	Comparaison des profils obtenus avec différents modules de Young, à la fin de l'opération de mise en forme et après retour élastique. . . . .	138
5.14	Comparaison des profils obtenus avec les modèles d'écroutissage de (Tabourot, 2001) et de (Peirce <i>et al.</i> , 1982), à la fin de l'opération de mise en forme et après retour élastique. . . . .	139
5.15	Comparaison des profils obtenus avec différentes distributions de cissions critiques initiales, à la fin de l'opération de mise en forme et après retour élastique. . . . .	140
5.16	Champs de contraintes après retour élastique pour trois réalisations différentes du modèle $T/D = 1$ . . . . .	142
5.17	Evolution du retour élastique avec le nombre de grains dans l'épaisseur de la tôle. . . . .	142
5.18	Représentation de la microstructure avec différents ratios d'allongement des grains suivant la longueur. . . . .	143

---

5.19	Champs de contraintes obtenus après l'étape de mise en forme dans les différents modèles. . . . .	144
5.20	Irrégularités de profil provenant de la disposition des grains sur les bords de la pièce. . . . .	144
5.21	Champs de déformation plastique équivalente obtenus dans les différents modèles. . . . .	145
5.22	Microstructure de 3000 grains employée pour le modèle CPFEM. . . . .	146
5.23	Champs de contraintes équivalentes (von Mises pour le modèle CPFEM, BB2004 pour le phénoménologique) après retour élastique. . . . .	147
5.24	Microstructure de 3500 grains employée pour le modèle CPFEM. . . . .	148
5.25	Distributions de contrainte équivalente (von Mises pour le modèle CPFEM, BB2004 pour le phénoménologique) après retour élastique prédits par les deux approches. . . . .	149
5.26	Comparaison des profils obtenus avec les modèles CPFEM et phénoménologique à la fin de l'opération de mise en forme (m.e.f.) et après retour élastique. . . . .	149
5.27	Numérisation d'un connecteur obtenue par mesure optique 3D (N. Bonnet - ENSAM Metz). . . . .	150
5.28	Comparaison des profils numériques et expérimentaux. L'extrémité de la pièce n'a pas été pliée dans le procédé réel contrairement à la simulation. . . . .	151
5.29	Cupules observées au MEB après rupture d'une éprouvette de traction en CuBe2. . . . .	157

# Liste des tableaux

3.1	Algorithme de la routine VUMAT en repère global. . . . .	58
3.2	Paramètres matériau utilisés pour les simulations. . . . .	59
3.3	Algorithme de la routine VUMAT en repère cristallographique (CACS). . . . .	62
3.4	Paramètres matériau utilisés dans les simulations. . . . .	63
3.5	Temps de calcul des algorithmes pour différents maillages. . . . .	65
3.6	Algorithme de la routine UMAT en repère cristallographique (CACS). . . . .	68
3.7	Algorithme du modèle phénoménologique dans SiDoLo. . . . .	69
4.1	Composition chimique pondérale du CuBe2. . . . .	79
4.2	Composition chimique pondérale du CuFe2P. . . . .	81
4.3	Caractéristiques mécaniques du cuivre pur. La dureté est reprise des données du fournisseur. . . . .	86
4.4	Caractéristiques mécaniques du CuBe2. La dureté est reprise des données du fournisseur. . . . .	87
4.5	Caractéristiques mécaniques du CuFe2P. La dureté est reprise des données du fournisseur. . . . .	88
4.6	Paramètres matériaux communs aux deux modèles pour le cuivre. $K_v$ est en MPa. $s^{\frac{1}{nv}}$ . . . . .	105
4.7	Paramètres identifiés du modèle de Hill 1948 pour le cuivre. $\sigma_0$ , $C_{X_i}$ et $H_X$ sont en MPa. . . . .	105
4.8	Paramètres identifiés du modèle de Bron&Besson pour le cuivre. $\sigma_0$ , $C_{X_i}$ , $H_X$ et $K$ sont en MPa. . . . .	105
4.9	Paramètres matériaux communs aux deux modèles. $E_{sat}$ est en MPa et $K_v$ en MPa. $s^{\frac{1}{nv}}$ . . . . .	107
4.10	Paramètres identifiés du modèle de Hill 1948 pour le CuFe2P. $\sigma_0$ , $C_{X_i}$ , $H_X$ et $C_R$ sont en MPa. . . . .	107
4.11	Paramètres identifiés du modèle de Bron&Besson pour le CuFe2P. $\sigma_0$ , $C_{X_i}$ , $H_X$ et $C_R$ sont en MPa. . . . .	108
4.12	Paramètres matériaux communs aux deux modèles. $E_{sat}$ est en MPa et $K_v$ en MPa. $s^{\frac{1}{nv}}$ . . . . .	110
4.13	Paramètres identifiés du modèle de Hill 1948 pour le CuBe2. $\sigma_0$ , $C_{X_i}$ , $H_X$ et $\sigma_{sat}$ sont en MPa. . . . .	110
4.14	Paramètres identifiés du modèle de Bron&Besson pour le CuBe2. $\sigma_0$ , $C_{X_i}$ , $H_X$ et $\sigma_{sat}$ sont en MPa. . . . .	110
4.15	Paramètres du modèle PAN (CPFEM) pour le CuBe2 identifiés sur un essai de traction dans la DL. . . . .	116
4.16	Paramètres du modèle Tabourot (CPFEM) pour le CuBe2 identifiés sur un essai de traction dans la DL. . . . .	117

---

4.17 Paramètres du modèle PAN (CPFEM) pour le CuBe2 identifiés sur un essai de traction dans la DL. . . . .	118
4.18 Paramètres du modèle Tabourot (CPFEM) pour le CuBe2 identifiés sur un essai de traction dans la DL. . . . .	119
5.1 Nombre de grains et d'éléments pour chaque modèle numérique. . . . .	141
5.2 Valeur des angles de retour élastique prédits. . . . .	147

## **Modélisation et simulation de procédés de mise en forme de tôles métalliques ultrafines**

**RESUME :** La course à la miniaturisation entraîne une forte hausse de la demande en composants aux dimensions submillimétriques et donne un essor considérable aux procédés de micro-formage. Cependant le comportement mécanique des tôles ultrafines, employées dans ces procédés présente des singularités liées à la réduction du nombre de grains. Cette thèse a eu pour objet de mettre en place un outil d'aide à la prédiction du comportement mécanique des tôles ultrafines.

Expérimentalement, le comportement de deux alliages de cuivre, le CuBe<sub>2</sub> et le CuFe<sub>2</sub>P, a été caractérisé sous divers types de chargement. Diverses caractéristiques ont été mises en évidence, notamment l'anisotropie de la réponse mécanique, l'effet Bauschinger ou encore la dégradation du module de Young.

Afin d'obtenir un cadre de modélisation apte à la description de tôles présentant un comportement plus ou moins homogène, deux approches ont été retenues. La première consiste en une modélisation phénoménologique inspirée des observations macroscopiques. La seconde est une description, en plasticité cristalline, à l'échelle du grain du comportement mécanique, basée sur les mécanismes physiques de déformation. Les modèles retenus ont été intégrés dans les logiciels ABAQUS et SiDoLo dans le formalisme des grandes transformations. Des stratégies d'identification paramétrique des différents modèles sont développées et une analyse comparative de l'impact de l'identification sur les prévisions des modèles est proposée.

Enfin les approches développées sont mises en œuvre sur des procédés industriels. Une étude sur des facteurs influençant la prédiction du retour élastique est réalisée. Elle a montré qu'une attention particulière doit être portée à la modélisation de l'élasticité.

**Mots clés :** micro-formage, plasticité cristalline, plasticité phénoménologique, mise en forme

## **Modeling and simulation of ultra thin sheet metals forming processes**

**ABSTRACT :** The on-going trend on device miniaturization has increased the demand for miniature parts and boosted micro forming processes. However, the mechanical behavior of ultra-thin sheet metals is subjected to certain peculiarities which are driven from the reduced number of grains in the sheets. The present work aimed to provide a numerical tool for the prediction of the mechanical behavior of ultra-thin sheet metals.

The mechanical behavior of two copper alloys, CuBe<sub>2</sub> and CuFe<sub>2</sub>P, was experimentally characterized through several strain paths. Various characteristics have been revealed, such as the anisotropic response, Bauschinger effect and the decrease of the Young modulus.

In order to build a modeling frame capable of describing thin metal sheets which exhibit a highly heterogeneous behavior and those whose response is more homogeneous, two modeling approaches were considered. On one hand, a phenomenological model based on the experimental results is chosen. On the other hand, a crystal plasticity based model, which takes into account the physical deformation mechanisms, is adopted. Both models were implemented in ABAQUS and SiDoLo softwares, under the finite strain formalism. Parametric identification strategies are devised and the influence of calibration on models performance is assessed.

Ultimately, the modeling approaches were applied to the simulation of industrial processes. A numerical study on relevant parameters for the prediction of springback has been performed. The accurate modeling of elasticity proved highly influential.

**Keywords :** micro-forming, crystal plasticity, phenomenological plasticity, sheet metal forming

