



Homogénéisation des milieux discrets périodiques orientés. Une application aux mousses.

Francis Pradel

► To cite this version:

Francis Pradel. Homogénéisation des milieux discrets périodiques orientés. Une application aux mousses.. Matériaux et structures en mécanique [physics.class-ph]. Ecole nationale des ponts et chaussées - ENPC PARIS / MARNE LA VALLEE, 1998. Français. NNT: . tel-01616818

HAL Id: tel-01616818

<https://pastel.hal.science/tel-01616818>

Submitted on 14 Oct 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



THESE
présentée pour l'obtention du diplôme de
DOCTEUR
DE
L'ECOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSEES

Spécialité : Structures et Matériaux

présentée par :
Francis PRADEL

Sujet de la thèse :

HOMOGENEISATION DES MILIEUX DISCRETS
PERIODIQUES ORIENTES.
UNE APPLICATION AUX MOUSSES

Soutenue le 15 décembre 1998
devant le jury composé de :

Président :	Jean SULEM
Rapporteurs :	Claude BOUTIN Denis CAILLERIE
Examineurs :	Michel FREMOND Quoc Son NGUYEN Karam SAB
Directeur de thèse :	Amina ALAOUTI SOULIMANI

Homogénéisation des milieux discrets
périodiques orientés.
Une application aux mousses

Francis PRADEL
E.N.P.C.-C.E.R.A.M.

15 Décembre 1998

Résumé

Ces dernières années ont vu un renouveau d'intérêt pour les matériaux cellulaires tels que les mousses. Ces matériaux possèdent un comportement propice à l'absorption de choc mécanique pour une faible masse volumique. Ils sont par leur microstructure très proches d'assemblage périodique de treillis de poutres. Nous les décrivons donc par des particules (les extrémités des poutres) douées de mouvement de translation mais aussi de rotation. Entre ces particules, des lois d'interaction sont appliquées pour remplacer les poutres. Cette description fait l'objet de cette thèse transformant ainsi l'étude de ces matériaux en une étude sur les milieux discrets périodiques. Ce travail porte plus particulièrement sur la méthode d'homogénéisation de ces milieux discrets à cinématique enrichie. Dans un premier temps, afin d'examiner l'apport des rotations dans la description cinématique, nous avons étudié comment un milieu continu microscopique élastique linéaire capable de mouvement en rotation était rendu à l'échelle macroscopique. Suivant les hypothèses du comportement microscopique, nous avons vu apparaître un milieu continu classique ou de Cosserat à l'échelle macroscopique. Puis dans un second temps, nous avons injecté la composante discrète du problème posé pour examiner le devenir d'un réseau de particules orientées en interaction par changement d'échelle. Cette étude a fait naturellement apparaître une dépendance en fonction des hypothèses sur les lois d'interaction entre les particules tant sur des comportements élastiques linéaires que non linéaires. Une fois ces développements terminés, la méthode est appliquée sur des structures comme les milieux composés de nids d'abeille ou les mousses considérées comme un assemblage tridimensionnel de poutres formant un pavage périodique du matériau en tétrakaidécaèdres. Par cette description, les comportements en élasticité linéaire sont obtenus ainsi que l'initiation du flambement élastique de ces matériaux complexes.

Abstract

Through the past years, a new trend for cellular materials shown up. These materials like foams are enclined to absorb the mechanical shock for a low cost in weight. Thanks to their microstructure, these materials are very similar to periodic assemblies of beams. So they can be described as a set of particles (the beam extremities) which can translate and rotate. The linkage between particles is made by interaction laws to replace beams. The thesis is based upon the previous description and particularly upon the homogenization method for these periodic discrete media but with an enriched kinematics including a rotational field. In a first step, we examine how we can deal with the rotational field to homogenize a continuous medium with a linear elastic constitutive law at the macroscopical level. According to the hypothesis we choose for the microscopic constitutive law, the macroscopic medium is either classical or a Cosserat medium. Then in a second step, the discrete aspect is introduced to define how the associated continuous macroscopic medium is built from the microscopic network of particles. The study is applied for linear and non-linear elastic laws of interaction. Finally we use the method for materials made of honeycombs and for foams seen as a 3D assembly of beams according to a tetrakaihedron pattern. We obtain their linear elastic constitutive law at the macroscopic level, and the initiation of the elastic buckling for a particular loading.

Remerciements

Cette étude a été réalisée dans le Centre d'Enseignement et de Recherche en Analyse des Matériaux de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées.

En tout premier lieu, je remercie Karam Sab pour son aide précieuse et son soutien constant sans lesquels ce travail n'aurait pu voir le jour, Karam qui m'a montré combien la Mécanique peut être captivante.

J'adresse de sincères remerciements à Amina Alaoui Soulimani, ma directrice de thèse, qui a su me conseiller et me diriger au cours de ces trois ans.

Qu'il me soit permis de remercier vivement Alain Ehrlacher, directeur du C.E.R.A.M., pour m'avoir accueilli dans son laboratoire et encadré lors de la première année, me faisant profiter ainsi de ses précieux conseils et ses vastes connaissances.

J'adresse mes sincères remerciements à Monsieur Jean Sulem qui m'a fait l'honneur de présider le jury ainsi qu'à Monsieur Claude Boutin et Monsieur Denis Caillerie qui ont accepté d'être les rapporteurs de ma thèse. Je tiens à remercier Monsieur Michel Frémond et Monsieur Quoc Son Nguyen pour avoir bien voulu faire partie de mon jury et accorder leur attention à mon travail.

Je remercie tous les membres du C.E.R.A.M. pour l'ambiance amicale qui rapproche tant cette équipe d'une communauté où il fait bon vivre.

Enfin, c'est le plus tendre des remerciements que je formule à ma famille et à mes proches pour leur fidèle affection.

Table des matières

Notations	6
Introduction	7
1 Homogénéisation des milieux de Cosserat périodiques en élasticité linéaire	11
1.1 Le milieu de Cosserat	12
1.1.1 Equations d'équilibre des milieux de Cosserat	12
1.1.2 Le comportement élastique linéaire	15
1.2 Problème bien posé	15
1.3 Milieux périodiques	16
1.4 L'analyse dimensionnelle	17
1.5 Le problème d'homogénéisation	19
1.6 Introduction des développements asymptotiques dans un milieu de Cosserat	24
1.6.1 Développement asymptotique des équations d'équilibre	24
1.6.2 Premier schéma d'homogénéisation (SH1)	27
1.6.3 Deuxième schéma d'homogénéisation (SH2)	36
2 Homogénéisation du grillage	42
2.1 Le grillage	42
2.2 Méthodes existantes	46
2.3 La méthode proposée	50
2.4 Développements asymptotiques	53
2.5 Effets de bords	57
2.6 Flambement du grillage	61
2.7 Un autre exemple de flambement	68
2.8 Conclusion	70
3 Homogénéisation d'un milieu discret en élasticité linéaire	73
3.1 Equilibre d'un système de points matériels	73

3.2	Ecriture du comportement élastique linéaire	76
3.3	Problème bien posé	78
3.4	Réseau périodique	80
3.5	Le problème d'homogénéisation discret	83
3.6	Développements asymptotiques de la cinématique	87
3.7	Développement asymptotique des équations d'équilibre	89
3.8	Le premier schéma d'homogénéisation (SH1)	93
3.9	Le second schéma d'homogénéisation (SH2)	102
4	Homogénéisation du flambement des milieux discrets orientés	110
4.1	Généralités	110
4.2	Exemple d'un milieu de Cauchy	113
4.3	Déformations non-linéaires de milieu discret	115
4.4	Identification des tenseurs de non linéarité géométrique pour une poutre	126
4.5	Conclusion	128
5	Les applications	130
5.1	Exploitation des symétries de la matière pour un milieu de Cosserat	130
5.1.1	Matériau monoclinique	133
5.1.2	Matériau orthotrope	136
5.1.3	Matériau à symétrie cubique	141
5.1.4	Matériau isotrope	146
5.2	Les symétries de la matière et les schémas d'homogénéisation discrets	147
5.3	Les structures en nid d'abeilles	152
5.4	Flambement du matériau constitué de nids d'abeille.	154
5.5	Applications aux mousses	157
5.6	Flambement des mousses	160
	Conclusions et perspectives	163
	Annexes	164
A	Eléments bibliographiques sur la modélisation micro-mécanique des mousses	165
A.1	Approche par des réseaux cubiques	165
A.1.1	Comportement élastique	167
A.1.2	Flambement élastique	168

A.1.3	Ruine plastique	169
A.1.4	Ecrasement fragile	170
A.1.5	Densification	170
A.2	Autres structures géométriques périodiques	171
A.2.1	Tétraèdre	171
A.2.2	Tétrakaidécaèdre	176
A.2.3	Dodécaèdre	176
A.3	Structures aléatoires	178
B	Résolution jusqu'au troisième ordre du problème d'homogénéisation continu (SH1)	181
C	Résolution jusqu'au troisième ordre du problème d'homogénéisation continu (SH2)	188
D	Energie d'une poutre élastique dans l'hypothèse des petites perturbations	191
E	Résolution d'un problème unidirectionnel aux différences finies	195
	Références bibliographiques	198
	Listes des figures	205
	Listes des Tableaux	207

Notations

Cette section regroupe les notations utilisées au cours du mémoire.

- On note $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers, $\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs, $\mathbb{R}$ l'ensemble des réels et $\mathbb{C}$ l'ensemble des complexes, avec $\mathfrak{S}$ la racine carrée de -1 .
- $\cup$ représente la réunion ensembliste et $\cap$ l'intersection.
- Le soulignement exprime le caractère tensoriel d'une grandeur, le nombre de trait sert à déterminer le rang du tenseur. Ainsi $\underline{a}$ représente un vecteur nommé a , de même $\underline{\underline{a}}$ sera un tenseur d'ordre deux nommé a .
- le point, $\cdot$, représente l'opérateur de contraction classique, ainsi $\underline{\underline{a}} : \underline{\underline{b}} = a_{ij}b_{ji}$. Nous adoptons la notation d'Einstein qui veut que tout indice répété dans une expression est sommé.
- Le symbole $\otimes$ représente le produit tensoriel.
- Pour tout tenseur, A , d'ordre supérieur à trois, on introduit la contraction suivante $\lhd$ définie par : $A \lhd B = A_{...ijk}B_{i...} \dots \otimes \underline{e}_i \otimes \underline{e}_k \otimes \dots$
- Pour tout tenseur, A , d'ordre supérieur à trois, on introduit le produit tensoriel $\triangle$ modifié par : $A \triangle \underline{b} = A_{...jk}b_i \dots \otimes \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \otimes \underline{e}_k$.
- Le symbole $\underline{\nabla}$ représente l'opérateur de dérivation. Par exemple, le gradient d'un tenseur a d'ordre deux s'écrit donc : $a \otimes \underline{\nabla} = a_{ij,k} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \otimes \underline{e}_k$. On utilisera parfois le gradient symétrisé noté $\overset{s}{\otimes} \underline{\nabla}$ avec pour définition : $\cdot \overset{s}{\otimes} \underline{\nabla} = \frac{1}{2} (\cdot \otimes \underline{\nabla} + \underline{\nabla} \otimes \cdot)$. La divergence d'un tenseur d'ordre deux, $\underline{\underline{a}}$, est : $\underline{\underline{a}} \cdot \underline{\nabla}$, nous utiliserons aussi, pour ce cas particulier, la notation $\underline{\text{div}}$.
- L'opérateur de transposition sur les tenseurs d'ordre deux est noté t , d'où : $^t \underline{\underline{a}} = a_{ij} \underline{e}_j \otimes \underline{e}_i$.
- $\text{Ker } f$, $\text{Im } f$ désignent respectivement le noyau, l'image d'une application linéaire f .
- Max désigne la valeur maximale sur un ensemble de réels.
- $\equiv$ désigne une égalité formelle.
- $n!$ désigne factorielle n , soit $n! = 1 \cdot 2 \cdots n$.

Introduction

L'intérêt actuel pour la sécurité dans les transports a relancé la recherche sur la modélisation du comportement de matériaux alvéolaires de type mousse. En effet, une mousse est un bon prétendant de faible poids dans l'optimisation d'absorption d'énergie au cours d'un choc. Ainsi, le comportement en compression uniaxiale d'une mousse (non fragile) se décompose en trois phases : une phase élastique linéaire, une phase dite de plateau et une phase de densification du matériau (ruine). Il est à noter que lors d'une décharge pendant la phase de plateau, certaines mousses (en polymère) recouvrent leur état initial sans avoir subi de dommages significatifs. Ceci s'explique souvent par un micro-flambement réversible des parois des alvéoles. Lorsque la charge est suffisamment importante, ces parois s'endommagent causant la densification puis la ruine du matériau.

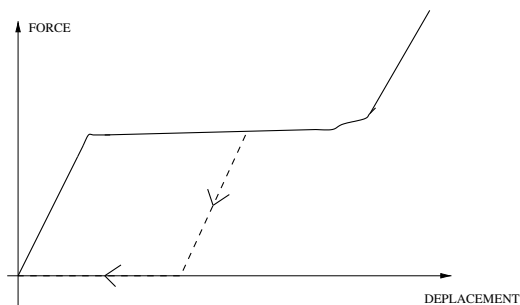


FIG. 1 – compression uniaxiale et décharge d'une mousse

La modélisation micromécanique des mousses perçues comme des assemblages périodiques de poutres encastrees est déjà très ancienne. Gent et Thomas [Gent et Thomas, 1959] furent les premiers historiquement à proposer un réseau cubique. Puis, Gibson et Ashby [Gibson et Ashby, 1988] ont été les principaux chercheurs à développer cette approche en proposant un autre motif périodique qui leur a permis de modéliser une large gamme de comportement (élasticité, plasticité, rupture fragile etc...). Une bibliographie plus détaillée sur la modélisation micro-mécanique des mousses est reportée dans l'annexe A. Il en ressort que toutes les démarches proposées ont un caractère non systématique qui contraste avec la rigueur de l'homogénéisation des milieux continus périodiques.

De part la complexité des structures fortement hétérogènes, il est très

coûteux d'effectuer directement un calcul de structure. L'homogénéisation permet de contourner cette difficulté en substituant au matériau hétérogène un matériau homogène équivalent. En supposant l'hétérogénéité périodique, l'homogénéisation fournit le comportement limite du matériau lorsque ε , le rapport de la taille des hétérogénéités sur la taille de la structure, devient très petit devant 1 [Sanchez-Palencia, 1974], [Bensoussan *et Al.*, 1978]. On trouvera dans [Jikov *et Al.*, 1994] une bibliographie étendue et récente sur la théorie mathématique de l'homogénéisation.

Parmi les méthodes utilisées dans l'homogénéisation des milieux périodiques, la méthode des développements asymptotiques [Sanchez-Palencia, 1980], historiquement introduite par [Van Dyke, 1964] pour la résolution de problèmes issus de la mécanique des fluides, est parmi les plus anciennes. Elle permet d'obtenir facilement par une procédure formelle une approximation du comportement homogénéisé à l'ordre désiré. Elle est néanmoins difficile d'usage pour les démonstrations mathématiques.

L'application de la méthode des développements asymptotiques par Gambin et Kröner [Gambin et Kröner, 1989] puis par Boutin [Boutin, 1996] a permis de montrer la signification physique des milieux homogènes de gradients supérieurs (milieu du second ou troisième gradient du déplacement).

L'application de cette méthode aux structures discrètes date du milieu des années 80 [Cioranescu et Saint Jean Paulin, 1986b]. On trouve une modélisation continue des treillis de poutres réticulées dans [Verna, 1991]. Kozlov [Kozlov, 1987] a homogénéisé un réseau de résistances électriques. Caillerie [Caillerie, 1995] a appliqué cette démarche à l'homogénéisation des milieux granulaires périodiques en négligeant l'effet de la rotation des grains. La prise en compte de la rotation des grains a été proposée par [Sab, 1996].

En réalité, la substitution d'un réseau discret par un milieu continu a déjà fait l'objet de nombreux travaux motivés principalement par une justification micro-mécanique de milieu d'ordre supérieur (milieu de Cosserat, de second ou troisième gradient) [Askar et Cakmak, 1968], [Banks et Sokolowski, 1968], [Kim, 1983], [Sulem et Mühlaus, 1997]. Dans ces derniers travaux, cette substitution s'est faite sans avoir recours à la théorie mathématique de l'homogénéisation. Les résultats obtenus peuvent se contredire comme le montre [Kim, 1983].

L'objet de ce travail est l'utilisation des développements asymptotiques pour effectuer le passage d'un réseau périodique de particules ayant une cinématique de translation et de rotation à un milieu continu équivalent. En particulier, on mettra en évidence les hypothèses précises qui permettent de construire ou non un milieu de Cosserat homogène équivalent. En effet, assez récemment, ces milieux dus aux frères Cosserat [Cosserat, 1909] ont eu un regain d'intérêt [Mindlin, 1964], [Eringen, 1968], [Germain, 1973],

[Mühlaus et Vardoulakis, 1987], grâce à la présence d'une longueur intrinsèque qui permet de limiter la localisation des déformations en plasticité.

Le premier chapitre est consacré à l'homogénéisation d'un milieu continu périodique de Cosserat. Comme nous le verrons, dans la suite, il y a en réalité deux difficultés dans ce travail : la prise en compte du caractère discret des réseaux et celle de la rotation des particules. L'objet du premier chapitre est de traiter la rotation dans un cadre plus classique à savoir le cadre des milieux continus. Après un rappel sur les milieux de Cosserat élastiques, on effectue l'analyse dimensionnelle d'un problème bien posé qui nous permet de proposer deux processus d'homogénéisation appelés schémas (SH1) et (SH2). Ces deux processus diffèrent par le comportement asymptotique des coefficients élastiques. Le premier schéma (SH1) donne un milieu de Cauchy à l'ordre ε^0 et un milieu de gradient supérieur en déplacement pour les ordres suivants. En revanche, le schéma (SH2) donne un milieu de Cosserat à l'ordre ε^0 et un milieu de gradient supérieur en déplacement et en rotation pour les ordres suivants.

Dans le deuxième chapitre, on considère un exemple simple de réseau périodique à cinématique de translation et de rotation. Toutes les particules de ce réseau sont indiscernables (on dit que le réseau est mono-atomique) ce qui simplifie le cas général où plusieurs types de particules engendrent le réseau par périodicité (on dit dans ce cas que le réseau est multi-atomique). Transposant la démarche du premier chapitre au cas discret, on définit deux schémas d'homogénéisation (SH1) et (SH2) qui conduiront en élasticité linéaire à des milieux de Cauchy et de Cosserat respectivement. On étend l'étude à la détermination de la charge critique de flambement d'une bande infinie du réseau mise en compression uniaxiale. On montre que la prédiction des effets d'échelle sur la charge critique, c'est-à-dire, sa dépendance en fonction de l'épaisseur de la bande, est pertinente avec (SH1) ou (SH2) selon les caractéristiques élastiques du réseau.

Le troisième chapitre contient la généralisation au cas multi-atomique en élasticité linéaire de la méthode exposée sur l'exemple du chapitre 2. On y retrouve les deux schémas (SH1) et (SH2). Grâce à l'analyse théorique contenue dans ce chapitre, l'identification du comportement macroscopique en élasticité linéaire de n'importe quel réseau de poutres est systématiquement effectuée. On retrouve, par ailleurs, les mêmes conclusions que dans le cas de l'homogénéisation de milieux continus du chapitre 1 concernant la cinématique du milieu homogénéisé.

Le quatrième chapitre est une extension de l'exemple du chapitre 2, au cas multi-atomique, de la détermination de la charge et du mode critique de flambement élastique par homogénéisation selon les deux schémas (SH1) et (SH2).

Enfin, le dernier chapitre est consacré à des applications de la théorie discrète. On montre comment l'exploitation des symétries de la matière permet de simplifier l'identification du comportement élastique homogénéisé. Les coefficients homogénéisés de deux réseaux plans en nids d'abeille et d'un réseau tridimensionnel de motif tétrakaidécaédral sont donnés pour les deux schémas d'homogénéisation. On compare, ensuite, le flambement de structure obtenu par calcul numérique aux éléments finis avec celui issu de la théorie d'homogénéisation proposée.

Chapitre 1

Homogénéisation des milieux de Cosserat périodiques en élasticité linéaire

LE but de ce chapitre est de remplacer le matériau hétérogène d'un solide, Ω , par un matériau homogène équivalent dans le cadre de la mécanique des milieux continus. Il est clair que pour des matériaux hautement hétérogènes, il est impossible, et même non souhaitable pour des raisons calculatoires, d'avoir une connaissance très précise du comportement en tout point. Nous devons donc faire des hypothèses simplificatrices sur la description même du matériau. L'une des descriptions possibles que nous retiendrons pour toute la suite de cette partie consiste en l'hypothèse de périodicité du comportement. Le matériau continu est supposé constitué de motifs qui se répètent de façon périodique dans l'espace. Dans le cadre de l'élasticité linéaire, ceci se traduit de la même manière pour les coefficients élastiques. On note ε le rapport entre, l , la taille des hétérogénéités représentant les motifs périodiques, autrement appelées cellules élémentaires, et, L , la taille du solide, Ω . On définit alors une cellule de base de taille unité, Y , afin de pouvoir ramener n'importe quel cellule élémentaire, engendrant Ω par périodicité, à la cellule de base Y par une ε -contraction comme le montre la figure 1.1. Une fois le problème d'homogénéisation bien posé, nous le résolvons par approximation successive suivant la technique des développements asymptotiques autour de $\varepsilon = 0$ [Sanchez-Palencia, 1980] [Bensoussan *et Al.*, 1978]. La question centrale à laquelle tente de répondre ce chapitre est la suivante : est-ce que le milieu homogène équivalent à un milieu périodique de Cosserat est un milieu de Cosserat ? Nous verrons que la réponse à cette question peut se formuler de la façon suivante : les modules élastiques de Cosserat font apparaître une longueur caractéristique l_c . Si l_c est du même ordre que L alors le milieu

homogénéisé est de Cosserat. Si l_c est du même ordre que l , alors le milieu homogénéisé à tout ordre du développement asymptotique est un milieu de Cauchy.

1.1 Le milieu de Cosserat

Nous allons traiter de l'homogénéisation d'un milieu de Cosserat. Ce milieu est un milieu de Cauchy auquel nous avons rajouter une variable cinématique d'orientation de la microstructure que nous appellerons rotation. Dans un premier temps, avant de tenter l'homogénéisation d'un tel milieu, nous allons rappeler ses équations d'équilibre au moyen du principe des puissances virtuelles.

1.1.1 Equations d'équilibre des milieux de Cosserat

Pour enrichir la description d'un matériau par rapport au milieu continu de Cauchy, on peut attacher une microstructure indéformable à chaque point matériel. C'est d'ailleurs dans un soucis d'enrichissement que les frères Cosserat [Cosserat, 1909] ont créé ces milieux pour compenser l'absence du coefficient de Poisson à une époque où la mécanique des milieux continus élastiques classique ne l'avait pas encore intégré. Assez récemment, ces milieux ont eu un regain d'intérêt [Mindlin, 1964] et ont même été enrichis, devenant les milieux micromorphiques, en rendant leurs microstructures déformables [Eringen, 1968] [Germain, 1973]. Différentes applications de ces milieux existent comme l'étude des milieux granulaires, des mousses ou encore des matériaux laminés [Mühlhaus *et Al.*, 1995]. Nous nous plaçons, dans la suite, dans le cadre des milieux de Cosserat, où la microstructure est rigide mais pouvant pivoter.

Le champ cinématique virtuel est la donnée en chaque point matériel de la vitesse de translation, $\underline{\mathbf{u}}$, et de la vitesse d'orientation (rotation), $\underline{\boldsymbol{\phi}}$, de la microstructure. Pour établir les équations d'équilibre, nous allons mettre en œuvre le schéma des puissances virtuelles avec une approche au premier gradient.

On suppose que la puissance des efforts intérieurs, $\mathcal{P}_i(\Omega)$, du solide Ω s'écrit :

$$\mathcal{P}_i(\Omega) = - \int_{\Omega} \underline{\mathbf{A}} \cdot \underline{\mathbf{u}} + \underline{\mathbf{B}} : \underline{\nabla} \otimes \underline{\mathbf{u}} + \underline{\mathbf{C}} \cdot \underline{\boldsymbol{\phi}} + \underline{\mathbf{D}} : \underline{\nabla} \otimes \underline{\boldsymbol{\phi}} d\omega$$

Les mouvements rigidifiants sont définis par deux vecteurs uniformes sur le solide : $\underline{\mathbf{u}}_0$ et $\underline{\boldsymbol{\phi}}_0$. On obtient alors les champs cinématiques rigidifiants

suivants :

$$\forall \underline{\mathbf{x}} \in \Omega, \begin{cases} \underline{\mathbf{u}}(\underline{\mathbf{x}}) = \underline{\mathbf{u}}_0 + \underline{\boldsymbol{\phi}}_0 \wedge \underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{u}}_0 + \underline{\boldsymbol{\phi}}_0 \cdot \underline{\mathbf{x}} \\ \underline{\boldsymbol{\phi}}(\underline{\mathbf{x}}) = \underline{\boldsymbol{\phi}}_0 \end{cases}$$

où $\underline{\boldsymbol{\phi}}_0 = -\underline{\underline{\mathbf{e}}} \cdot \underline{\boldsymbol{\phi}}_0$ et $\underline{\boldsymbol{\phi}}_0 = \frac{1}{2}\underline{\underline{\mathbf{e}}} : \underline{\boldsymbol{\phi}}_0$. Le tenseur de permutation $\underline{\underline{\mathbf{e}}}$ est défini par $\underline{\underline{\mathbf{e}}} = (e_{ijk})$ avec :

$$e_{ijk} = \begin{cases} 1 & , \text{ si } ijk \text{ est une permutation paire de } 123 \\ -1 & , \text{ si } ijk \text{ est une permutation impaire de } 123 \\ 0 & , \text{ sinon.} \end{cases}$$

Pour ces champs rigidifiants, la puissance des efforts intérieurs doit être nulle. Soit,

$$\forall (\underline{\mathbf{u}}_0, \underline{\boldsymbol{\phi}}_0) \in (\mathbb{R}^3)^2, \mathcal{P}_i(\Omega) = - \int_{\Omega} \underline{\mathbf{A}} \cdot \underline{\mathbf{u}}_0 + \underline{\underline{\mathbf{B}}} : \underline{\boldsymbol{\phi}}_0 + \underline{\mathbf{C}} \cdot \underline{\boldsymbol{\phi}}_0 d\omega = 0$$

On en déduit :

$$\underline{\mathbf{A}} = 0, \quad (\underline{\underline{\mathbf{B}}} : \underline{\underline{\mathbf{e}}}) + \underline{\mathbf{C}} = 0 \quad (1.1)$$

On pose $\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} = \underline{\underline{\mathbf{B}}}$, $\underline{\underline{\boldsymbol{\nu}}} = \underline{\underline{\mathbf{D}}}$ et $\underline{\boldsymbol{\varsigma}} = \underline{\mathbf{C}}$. La condition d'objectivité (1.1) s'écrit alors :

$$\underline{\boldsymbol{\varsigma}} = -\underline{\underline{\mathbf{e}}} : \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}$$

La puissance des efforts intérieurs s'écrit maintenant :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_i(\Omega) &= - \int_{\Omega} \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} : \underline{\nabla} \otimes \underline{\mathbf{u}} + \underline{\boldsymbol{\varsigma}} \cdot \underline{\boldsymbol{\phi}} + \underline{\underline{\boldsymbol{\nu}}} : \underline{\nabla} \otimes \underline{\boldsymbol{\phi}} d\omega \\ &= - \int_{\partial\Omega} \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} \cdot \underline{\mathbf{n}} \cdot \underline{\mathbf{u}} + \underline{\underline{\boldsymbol{\nu}}} \cdot \underline{\mathbf{n}} \cdot \underline{\boldsymbol{\phi}} dS \\ &\quad + \int_{\Omega} (\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} \cdot \underline{\nabla}) \cdot \underline{\mathbf{u}} + ((\underline{\underline{\boldsymbol{\nu}}} \cdot \underline{\nabla}) - \underline{\boldsymbol{\varsigma}}) \cdot \underline{\boldsymbol{\phi}} d\omega \end{aligned}$$

Par ailleurs, on suppose que la puissance des efforts extérieurs est de la forme :

$$\mathcal{P}_e(\Omega) = \int_{\Omega} \underline{\mathbf{f}} \cdot \underline{\mathbf{u}} + \underline{\mathbf{c}} \cdot \underline{\boldsymbol{\phi}} d\omega + \int_{\partial\Omega} \underline{\mathbf{T}} \cdot \underline{\mathbf{u}} + \underline{\mathbf{H}} \cdot \underline{\boldsymbol{\phi}} d\omega$$

D'après le principe des puissances virtuelles, on doit avoir :

$$\forall \Omega, \forall (\underline{\mathbf{u}}, \underline{\boldsymbol{\phi}}), \mathcal{P}_i(\Omega) + \mathcal{P}_e(\Omega) = 0$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \forall \Omega, \forall (\underline{\mathbf{u}}, \underline{\boldsymbol{\phi}}), \\ 0 = & - \int_{\partial\Omega} (\underline{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \underline{\mathbf{n}} - \underline{\mathbf{T}}) \cdot \underline{\mathbf{u}} + (\underline{\boldsymbol{\nu}} \cdot \underline{\mathbf{n}} - \underline{\mathbf{H}}) \cdot \underline{\boldsymbol{\phi}} dS \\ & + \int_{\Omega} (\underline{\text{div}}(\underline{\boldsymbol{\sigma}}) + \underline{\mathbf{f}}) \cdot \underline{\mathbf{u}} + (\underline{\text{div}}(\underline{\boldsymbol{\nu}}) - \underline{\boldsymbol{\varsigma}} + \underline{\mathbf{c}}) \cdot \underline{\boldsymbol{\phi}} d\omega \end{aligned}$$

Si l'on note $\underline{\boldsymbol{\sigma}}^s$ la partie symétrique de la contrainte $\underline{\boldsymbol{\sigma}}$, on a alors :

$$\underline{\boldsymbol{\sigma}} = \underline{\boldsymbol{\sigma}}^s + \underline{\boldsymbol{\varsigma}} = \underline{\boldsymbol{\sigma}}^s - \underline{\mathbf{e}} \cdot \underline{\boldsymbol{\varsigma}}$$

Les équations d'équilibre sont :

$$\begin{cases} \underline{\text{div}}(\underline{\boldsymbol{\sigma}}^s - \underline{\mathbf{e}} \cdot \underline{\boldsymbol{\varsigma}}) + \underline{\mathbf{f}} = 0 \\ \underline{\text{div}}(\underline{\boldsymbol{\nu}}) - \underline{\boldsymbol{\varsigma}} + \underline{\mathbf{c}} = 0 \end{cases}, \text{ sur } \Omega$$

Les conditions aux limites s'écrivent :

$$\begin{cases} \underline{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \underline{\mathbf{n}} = \underline{\mathbf{T}} \\ \underline{\boldsymbol{\nu}} \cdot \underline{\mathbf{n}} = \underline{\mathbf{H}} \end{cases}, \text{ sur } \partial\Omega$$

et enfin nous rappelons la condition d'objectivité :

$$\underline{\boldsymbol{\varsigma}} = -\underline{\mathbf{e}} : \underline{\boldsymbol{\sigma}}$$

Dans le cadre de cette étude, l'hypothèse des petites perturbations est admise ce qui permet de remplacer la vitesse de translation par le déplacement, et la vitesse d'orientation par l'orientation. Ainsi $\underline{\mathbf{u}}$ est le champ de déplacement et $\underline{\boldsymbol{\phi}}$ est le champ d'orientation. Pour le gradient de déplacement, nous le décomposons de manière classique en sa partie symétrique, $\underline{\boldsymbol{\epsilon}}$, et antisymétrique, $\underline{\boldsymbol{\omega}}$.

Au tenseur antisymétrique du second ordre $\underline{\boldsymbol{\omega}}$, on associe un pseudo-vecteur rotation $\underline{\boldsymbol{\omega}}$ par :

$$\underline{\boldsymbol{\omega}} = \frac{1}{2} \underline{\mathbf{e}} : \underline{\boldsymbol{\omega}} = \frac{1}{2} \underline{\mathbf{e}} : \underline{\mathbf{u}} \otimes \underline{\boldsymbol{\nabla}}$$

Nous posons aussi $\underline{\boldsymbol{\kappa}}$ le gradient de l'orientation ou encore gradient de la rotation de la microstructure, soit $\underline{\boldsymbol{\kappa}} = \underline{\boldsymbol{\phi}} \otimes \underline{\boldsymbol{\nabla}}$. Le tableau 1.1 résume les notations introduites.

Contraintes généralisées	Variables cinématiquement associées
$\underline{\underline{\sigma}}$, contraintes de Cauchy	$\underline{\underline{e}} = \underline{\underline{u}} \otimes \underline{\underline{\nabla}} + \underline{\underline{e}} \cdot \underline{\underline{\phi}}$
σ_{ij}^s , partie symétrique de la contrainte	$\varepsilon_{i,j} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$ partie symétrique du gradient de déplacement
$\underline{\underline{\varsigma}} = -\underline{\underline{e}} : \underline{\underline{\sigma}}$ et $\underline{\underline{\varsigma}} = -\underline{\underline{e}} \cdot \underline{\underline{\varsigma}}$ premier vecteur et tenseur de micro-contrainte, ou vecteur de couple-contrainte	$\underline{\underline{\omega}} - \underline{\underline{\phi}}$ différence entre le vecteur de macro-rotation (rotation matière) et celui de micro-rotation (orientation de la microstructure)
$\underline{\underline{\nu}}$ second tenseur de micro-contrainte, ou tenseur de couple-contrainte	$\underline{\underline{\kappa}}$ gradient d'orientation $\kappa_{ij} = \phi_{i,j}$

TAB. 1.1 – Contraintes et déformations d'un milieu de Cosserat

1.1.2 Le comportement élastique linéaire

Le comportement élastique linéaire reliant les contraintes, $\underline{\underline{\sigma}}$, $\underline{\underline{\nu}}$ aux déformations, $\underline{\underline{e}} = \underline{\underline{u}} \otimes \underline{\underline{\nabla}} + \underline{\underline{e}} \cdot \underline{\underline{\phi}}$, $\underline{\underline{\kappa}} = \underline{\underline{\phi}} \otimes \underline{\underline{\nabla}}$, peut s'écrire à l'aide d'une notation pseudo-matricielle comme :

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{\sigma}} \\ \underline{\underline{\nu}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{A}} & \underline{\underline{B}} \\ {}^t\underline{\underline{B}} & \underline{\underline{C}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{\underline{e}} \\ \underline{\underline{\kappa}} \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

On définit alors une densité d'énergie de déformation quadratique définie positive par :

$$\Psi = \frac{1}{2} \left({}^t\underline{\underline{e}} : \underline{\underline{A}} : \underline{\underline{e}} + 2 {}^t\underline{\underline{e}} : \underline{\underline{B}} : \underline{\underline{\kappa}} + {}^t\underline{\underline{\kappa}} : \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{\kappa}} \right) \quad (1.3)$$

avec les conditions de symmétrie sur les tenseurs de comportement :

$$A_{ijkl} = A_{klij}, \quad C_{ijkl} = C_{klij} \quad (1.4)$$

Il faut noter que le pseudo-tenseur $\underline{\underline{B}}$ ne possède pas cette propriété. Cependant, pour un matériau centrosymétrique, c'est-à-dire dont la symmétrie centrale est une des symmétries de la matière, le pseudo-tenseur $\underline{\underline{B}}$ est nul. On pourra trouver, chez Nowacki [Nowacki, 1970], une synthèse sur la théorie des milieux de Cosserat élastiques.

1.2 Problème bien posé

La description d'un problème réel pour des matériaux de Cosserat élastiques linéaires correspond à la donnée d'un domaine, Ω , de conditions aux

limites sur la frontière, $\partial\Omega$, de Ω et des forces et moments volumiques extérieures agissant sur le solide Ω . Un type de conditions aux limites consiste à partitionner $\partial\Omega$ en deux sous-ensembles disjoints, $\partial\Omega = \partial_c\Omega \cup \partial_s\Omega$, où les déplacements $\underline{\mathbf{u}}_{(d)}$ et $\underline{\boldsymbol{\phi}}_{(d)}$ (respectivement les efforts extérieurs $\underline{\mathbf{T}}_{(d)}$ et $\underline{\mathbf{H}}_{(d)}$) sont donnés sur $\partial_c\Omega$ (respectivement $\partial_s\Omega$). Le problème est alors de résoudre :

- les équations d'équilibre sur l'intérieur du solide, Ω , soit :

$$\begin{cases} \underline{\text{div}}(\underline{\boldsymbol{\sigma}}) + \underline{\mathbf{f}} = 0 \\ \underline{\text{div}}(\underline{\boldsymbol{\nu}}) - \underline{\underline{\mathbf{e}}} : \underline{\boldsymbol{\sigma}} + \underline{\mathbf{c}} = 0 \end{cases} \quad (1.5)$$

- avec le comportement

$$\begin{aligned} \forall \underline{\mathbf{x}} \in \Omega, \\ \underline{\boldsymbol{\sigma}}(\underline{\mathbf{x}}) &= \underline{\underline{\mathbf{A}}}(\underline{\mathbf{x}}) : \left(\underline{\mathbf{u}} \otimes \underline{\nabla} + \underline{\underline{\mathbf{e}}} \cdot \underline{\boldsymbol{\phi}} \right)(\underline{\mathbf{x}}) + \underline{\underline{\mathbf{B}}}(\underline{\mathbf{x}}) : \underline{\boldsymbol{\phi}} \otimes \underline{\nabla}(\underline{\mathbf{x}}) \\ \underline{\boldsymbol{\nu}}(\underline{\mathbf{x}}) &= {}^t \underline{\underline{\mathbf{B}}}(\underline{\mathbf{x}}) : \left(\underline{\mathbf{u}} \otimes \underline{\nabla} + \underline{\underline{\mathbf{e}}} \cdot \underline{\boldsymbol{\phi}} \right)(\underline{\mathbf{x}}) + \underline{\underline{\mathbf{C}}}(\underline{\mathbf{x}}) : \underline{\boldsymbol{\phi}} \otimes \underline{\nabla}(\underline{\mathbf{x}}) \end{aligned} \quad (1.6)$$

- et les conditions aux limites en déplacements :

$$\begin{aligned} \forall \underline{\mathbf{x}} \in \partial_c\Omega, \quad \underline{\mathbf{u}}(\underline{\mathbf{x}}) &= \underline{\mathbf{u}}_{(d)}(\underline{\mathbf{x}}) \\ \underline{\boldsymbol{\phi}}(\underline{\mathbf{x}}) &= \underline{\boldsymbol{\phi}}_{(d)}(\underline{\mathbf{x}}) \end{aligned} \quad (1.7)$$

et en efforts :

$$\begin{aligned} \forall \underline{\mathbf{x}} \in \partial_s\Omega, \quad \underline{\mathbf{T}}_{(d)}(\underline{\mathbf{x}}) &= \underline{\boldsymbol{\sigma}}(\underline{\mathbf{x}}) \cdot \underline{\mathbf{n}} \\ \underline{\mathbf{H}}_{(d)}(\underline{\mathbf{x}}) &= \underline{\boldsymbol{\nu}}(\underline{\mathbf{x}}) \cdot \underline{\mathbf{n}} \end{aligned} \quad (1.8)$$

où $\underline{\mathbf{n}}$ est la normale sortante en $\underline{\mathbf{x}}$ à $\partial_s\Omega$.

Naturellement, il existe d'autres types de problème bien posé avec des "données mixtes" sur les composantes des efforts et les composantes des déplacements sur la frontière, $\partial\Omega$. L'unicité de la solution est assurée dès que l'ensemble des champs cinématiquement admissibles, c'est-à-dire vérifiant (1.7), ne contient aucun mouvement de corps rigide non nul.

1.3 Milieux périodiques

On suppose que le matériau hétérogène étudié est périodique, c'est-à-dire, engendré, par composition des translations suivant les trois vecteurs de périodicité, par une cellule élémentaire, Y_l , de diamètre l :

$$l = \max_{(\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{y}}) \in Y_l \times Y_l} |\underline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{y}}|.$$

On appelle cellule de base, notée Y , une cellule de diamètre unité obtenue à partir d'une cellule élémentaire réelle par une homothétie de rapport l . Sur la figure 1.1, ce passage de la cellule de base à la cellule élémentaire réelle est représenté. La périodicité du matériau est donc définie par la donnée d'une cellule de base, le rapport d'homothétie l , et un trièdre $(\underline{\mathbf{a}}_1, \underline{\mathbf{a}}_2, \underline{\mathbf{a}}_3)$ de périodicité (pas forcément orthonormé) qui sert à engendrer la totalité du solide. Sur la cellule de base, on définit un repère de périodicité $(\underline{\mathbf{a}}_1^*, \underline{\mathbf{a}}_2^*, \underline{\mathbf{a}}_3^*)$ qui est celui de la structure réelle auquel on a fait subir l'homothétie de rapport $\frac{1}{l}$. Ainsi, on pose :

$$Y = \left\{ \underline{\mathbf{y}} = y_i \underline{\mathbf{a}}_i^*, |y_i| < \frac{1}{2} \right\}$$

et

$$Y_l = \left\{ \underline{\mathbf{x}} = x_i \underline{\mathbf{a}}_i, |x_i| < \frac{1}{2} \right\}$$

avec $\underline{\mathbf{a}}_i = l \underline{\mathbf{a}}_i^*$.

Si l'on note, $\mathcal{A}_{\underline{\mathbf{x}}}$, l'opérateur de comportement reliant les déformations généralisées, $\mathcal{D}$, aux contraintes généralisées, $\mathcal{T}$, en un point $\underline{\mathbf{x}}$:

$$\mathcal{T}(\underline{\mathbf{x}}) = \mathcal{A}_{\underline{\mathbf{x}}} \circ \mathcal{D}(\underline{\mathbf{x}}) \quad (1.9)$$

La périodicité du matériau se traduit sur ce comportement par :

$$\begin{aligned} \forall \underline{\mathbf{x}} \in \Omega, \forall (l_1, l_2, l_3) \in \mathbb{Z}^3 \quad & / \underline{\mathbf{x}} + l_1 \underline{\mathbf{a}}_1 + l_2 \underline{\mathbf{a}}_2 + l_3 \underline{\mathbf{a}}_3 \in \Omega, \\ & \mathcal{A}_{\underline{\mathbf{x}}} = \mathcal{A}_{\underline{\mathbf{x}} + l_1 \underline{\mathbf{a}}_1 + l_2 \underline{\mathbf{a}}_2 + l_3 \underline{\mathbf{a}}_3} \end{aligned} \quad (1.10)$$

Dans la suite, on considèrera uniquement des milieux périodiques.

1.4 L'analyse dimensionnelle

Nous allons ramener le problème réel, posé sur le solide Ω , au moyen de l'analyse dimensionnelle à un problème posé sur une géométrie fixe, Ω^* , voir [Millet *et Al.*, 1997] dans le cas de l'étude des plaques. On définit le diamètre, L , du solide étudié comme la distance maximale entre deux points de ce solide, soit

$$L = \max_{(\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{y}}) \in \Omega \times \Omega} |\underline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{y}}|.$$

Afin de se ramener à un problème sans dimensions, on introduit des variables sans dimensions que l'on indice par une étoile ; on écrit :

$$\underline{\mathbf{x}} = L \underline{\mathbf{x}}^*, \underline{\mathbf{u}}(\underline{\mathbf{x}}) = L \underline{\mathbf{u}}^*(\underline{\mathbf{x}}^*), \underline{\phi}(\underline{\mathbf{x}}) = \underline{\phi}^*(\underline{\mathbf{x}}^*) \quad (1.11)$$

et, ainsi, les déformations s'écrivent :

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{u}} \otimes \underline{\nabla} + \underline{\underline{\mathbf{e}}} \cdot \underline{\underline{\phi}} &= \underline{\mathbf{u}}^* \otimes \underline{\nabla}^* + \underline{\underline{\mathbf{e}}} \cdot \underline{\underline{\phi}}^* \\ \underline{\underline{\phi}} \otimes \underline{\nabla} &= \frac{1}{L} \underline{\underline{\phi}}^* \otimes \underline{\nabla}^*\end{aligned}\quad (1.12)$$

avec $\underline{\nabla}^*$ le gradient sur la géométrie sans dimensions.

On choisit, ensuite, une norme sur les tenseurs exprimant le comportement et on introduit les grandeurs :

$$A = \text{Max}_{\underline{\mathbf{x}} \in \Omega} \left| \underline{\underline{\mathbf{A}}}(\underline{\mathbf{x}}) \right|, B = \text{Max}_{\underline{\mathbf{x}} \in \Omega} \left| \underline{\underline{\mathbf{B}}}(\underline{\mathbf{x}}) \right|, C = \text{Max}_{\underline{\mathbf{x}} \in \Omega} \left| \underline{\underline{\mathbf{C}}}(\underline{\mathbf{x}}) \right|. \quad (1.13)$$

On définit deux longueurs liées au matériau, l_b et l_c , données par :

$$B = Al_b, C = Al_c^2 \quad (1.14)$$

Le comportement adimensionnel $\underline{\underline{\mathbf{A}}}^*, \underline{\underline{\mathbf{B}}}^*, \underline{\underline{\mathbf{C}}}^*$ est défini par :

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = A \underline{\underline{\mathbf{A}}}^*, \underline{\underline{\mathbf{B}}} = Al_b \underline{\underline{\mathbf{B}}}^*, \underline{\underline{\mathbf{C}}} = Al_c^2 \underline{\underline{\mathbf{C}}}^* \quad (1.15)$$

Puis, on établit facilement que le comportement réel en $\underline{\mathbf{x}}$:

$$\begin{aligned}\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} &= \underline{\underline{\mathbf{A}}} : (\underline{\mathbf{u}} \otimes \underline{\nabla} + \underline{\underline{\mathbf{e}}} \cdot \underline{\underline{\phi}}) + \underline{\underline{\mathbf{B}}} : \underline{\underline{\phi}} \otimes \underline{\nabla} \\ \underline{\underline{\boldsymbol{\nu}}} &= {}^t \underline{\underline{\mathbf{B}}} : (\underline{\mathbf{u}} \otimes \underline{\nabla} + \underline{\underline{\mathbf{e}}} \cdot \underline{\underline{\phi}}) + \underline{\underline{\mathbf{C}}} : \underline{\underline{\phi}} \otimes \underline{\nabla}\end{aligned}\quad (1.16)$$

s'écrit de manière équivalente en $\underline{\mathbf{x}}^*$:

$$\begin{aligned}\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}^* &= \underline{\underline{\mathbf{A}}}^* : (\underline{\mathbf{u}}^* \otimes \underline{\nabla}^* + \underline{\underline{\mathbf{e}}} \cdot \underline{\underline{\phi}}^*) + \varepsilon^* \frac{l_b}{l} \underline{\underline{\mathbf{B}}}^* : \underline{\underline{\phi}}^* \otimes \underline{\nabla}^* \\ \underline{\underline{\boldsymbol{\nu}}}^* &= \varepsilon^* \frac{l_b}{l} {}^t \underline{\underline{\mathbf{B}}}^* : (\underline{\mathbf{u}}^* \otimes \underline{\nabla}^* + \underline{\underline{\mathbf{e}}} \cdot \underline{\underline{\phi}}^*) + \varepsilon^{*2} \left(\frac{l_c}{l} \right)^2 \underline{\underline{\mathbf{C}}}^* : \underline{\underline{\phi}}^* \otimes \underline{\nabla}^*\end{aligned}\quad (1.17)$$

où

$$\varepsilon^* = \frac{l}{L}, \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}^* = A^{-1} \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}, \underline{\underline{\boldsymbol{\nu}}}^* = (AL)^{-1} \underline{\underline{\boldsymbol{\nu}}}.$$

On rappelle que l est le diamètre des cellules élémentaires du matériau réel. Trois rapports de longueur apparaissent :

$$\varepsilon^* = \frac{l}{L}, \alpha^* = \frac{l_b}{l} \text{ et } \beta^* = \frac{l_c}{l}.$$

Il est clair que la Y_l -périodicité du problème réel se traduit par une εY -périodicité des tenseurs adimensionnés $\underline{\underline{A}}^*$, $\underline{\underline{B}}^*$ et $\underline{\underline{C}}^*$.

Dans l'équilibre sans dimensions, on obtient :

$$\forall \underline{\underline{x}}^* \in \Omega^*, \left\{ \begin{array}{l} \underline{\underline{f}}^* + \underline{\underline{\text{div}}}^* \underline{\underline{\sigma}}^* = 0 \\ \underline{\underline{c}}^* - \underline{\underline{e}} : \underline{\underline{\sigma}}^* + \underline{\underline{\text{div}}}^* \underline{\underline{\nu}}^* = 0 \end{array} \right. \quad (1.18)$$

avec $\underline{\underline{f}}^* = \frac{L \underline{\underline{f}}}{A}$ et $\underline{\underline{c}}^* = \frac{\underline{\underline{c}}}{A}$.

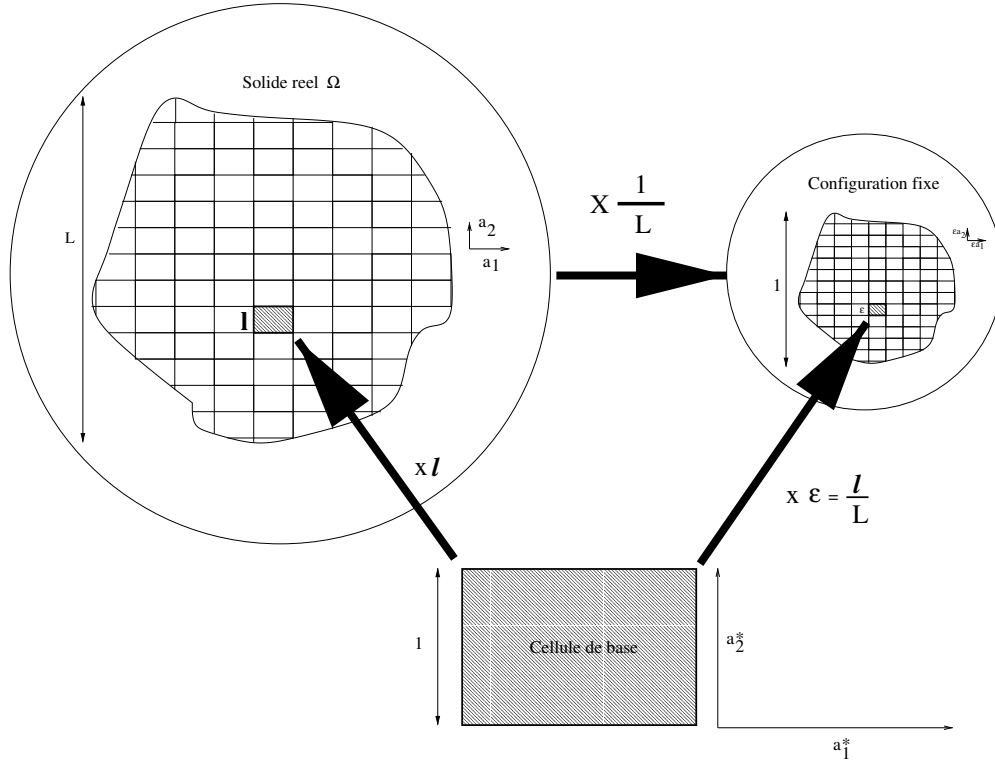


FIG. 1.1 – Passage entre les configurations et la cellule de base

1.5 Le problème d'homogénéisation

Considérons maintenant un problème bien posé sur une structure encastree aux bords. A ce problème est associé un problème sans dimensions comme décrit dans la section précédente avec les conditions aux limites :

$$\forall \underline{\underline{x}}^* \in \partial\Omega^*, \left\{ \begin{array}{l} \underline{\underline{u}}^*(\underline{\underline{x}}^*) = 0 \\ \underline{\underline{\phi}}^*(\underline{\underline{x}}^*) = 0 \end{array} \right. \quad (1.19)$$

Sur cette nouvelle configuration adimensionnelle du problème réel, nous indiquerons maintenant par ε les champs et grandeurs s'y rapportant et nous ometterons les exposants étoiles sur les positions, $\underline{\mathbf{x}}^*$, et sur l'opérateur gradient, $\underline{\nabla}^*$. Les conditions aux limites d'encastrement se traduisent aisément par :

$$\forall \underline{\mathbf{x}} \in \partial\Omega^*, \left\{ \begin{array}{l} \underline{\mathbf{u}}_\varepsilon(\underline{\mathbf{x}}) = 0 \\ \underline{\phi}_\varepsilon(\underline{\mathbf{x}}) = 0 \end{array} \right. \quad (1.20)$$

Le problème d'homogénéisation consiste à s'intéresser à la limite lorsque le rapport ε tend vers 0. Le rapport ε apparaît alors comme un indice pour une suite de problèmes, tous définis sur la géométrie fixe, Ω^* , de diamètre unité. Les champs continus des problèmes successifs seront approchés à l'aide des champs continus limites lorsque ε tend vers 0. Pour effectuer ce passage à la limite, il est nécessaire de faire quelques hypothèses sur la dépendance des efforts extérieurs et du comportement en fonction du rapport ε .

Pour les efforts extérieurs, en tout point $\underline{\mathbf{x}} \in \Omega^*$, on pose :

$$\underline{\mathbf{f}}_\varepsilon(\underline{\mathbf{x}}) = \underline{\mathbf{f}}(\underline{\mathbf{x}}) \text{ et } \underline{\mathbf{c}}_\varepsilon(\underline{\mathbf{x}}) = \underline{\mathbf{c}}(\underline{\mathbf{x}}) \quad (1.21)$$

Le comportement sur le matériau sans dimensions, $\underline{\underline{\mathbf{A}}}_\varepsilon$, $\underline{\underline{\mathbf{B}}}_\varepsilon$, $\underline{\underline{\mathbf{C}}}_\varepsilon$, pourra être différent suivant les ordres d'échelle respectifs des rapports issus de l'analyse dimensionnel, à savoir :

$$\varepsilon^* = \frac{l}{L}, \alpha^* = \frac{l_b}{l}, \text{ et } \beta^* = \frac{l_c}{l} \quad (1.22)$$

Pour le décrire, nous exploiterons la propriété de périodicité pour exprimer le comportement uniquement en fonction de la variable d'espace, $\underline{\mathbf{y}}$, de la cellule de base fixe (de taille unité). Ainsi à chaque relation d'ordre d'échelle différente de α^* , β^* par rapport à ε , on obtient un comportement asymptotique différent et donc un problème d'homogénéisation différent. Nous introduisons ici deux types de comportement asymptotique qui nous conduiront à deux problèmes d'homogénéisation différents par la suite.

Le comportement s'exprime comme :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\sigma}}_\varepsilon &= \underline{\underline{\mathbf{A}}}_\varepsilon : \left(\underline{\mathbf{u}}_\varepsilon \otimes \underline{\nabla} + \underline{\underline{\mathbf{e}}} \cdot \underline{\phi}_\varepsilon \right) + \underline{\underline{\mathbf{B}}}_\varepsilon : \left(\underline{\phi}_\varepsilon \otimes \underline{\nabla} \right) \\ \underline{\underline{\nu}}_\varepsilon &= {}^t \underline{\underline{\mathbf{B}}}_\varepsilon : \left(\underline{\mathbf{u}}_\varepsilon \otimes \underline{\nabla} + \underline{\underline{\mathbf{e}}} \cdot \underline{\phi}_\varepsilon \right) + \underline{\underline{\mathbf{C}}}_\varepsilon : \left(\underline{\phi}_\varepsilon \otimes \underline{\nabla} \right) \end{aligned} \quad (1.23)$$

Comme première hypothèse, on suppose que :

$$\underline{\underline{\mathbf{a}}} = \underline{\underline{\mathbf{A}}}^*, \underline{\underline{\mathbf{b}}} = \alpha^* \underline{\underline{\mathbf{B}}}^* \text{ et } \underline{\underline{\mathbf{c}}} = \beta^{*2} \underline{\underline{\mathbf{C}}}^*,$$

sont indépendants de ε . Autrement dit, on pose :

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0, \quad \underline{\underline{\underline{\mathbf{A}}}}_{\varepsilon}(\underline{\mathbf{x}}) &= \underline{\underline{\underline{\mathbf{a}}}}(\underline{\mathbf{y}}) \\ \underline{\underline{\underline{\mathbf{B}}}}_{\varepsilon}(\underline{\mathbf{x}}) &= \varepsilon \underline{\underline{\underline{\mathbf{b}}}}(\underline{\mathbf{y}}) \\ \underline{\underline{\underline{\mathbf{C}}}}_{\varepsilon}(\underline{\mathbf{x}}) &= \varepsilon^2 \underline{\underline{\underline{\mathbf{c}}}}(\underline{\mathbf{y}}) \end{aligned} \quad (1.24)$$

où $\underline{\underline{\underline{\mathbf{a}}}}, \underline{\underline{\underline{\mathbf{b}}}}, \underline{\underline{\underline{\mathbf{c}}}}$ sont Y -périodiques et $\underline{\mathbf{y}} = \varepsilon^{-1} \underline{\mathbf{x}}$. Naturellement, pour $\varepsilon = \varepsilon^*$, on retrouve le comportement adimensionnel réel (1.17).

La limite du problème mécanique défini par (1.24) lorsque ε tend vers 0 correspond au cas où les longueurs, l, l_b, l_c , intrinsèques au matériau sont constantes et où on fait tendre uniquement la taille, L , du solide vers l'infini.

Pour la deuxième hypothèse, on suppose que :

$$\underline{\underline{\underline{\mathbf{a}}}} = \underline{\underline{\underline{\mathbf{A}}}}^*, \underline{\underline{\underline{\mathbf{b}}}}^{(2)} = \varepsilon \alpha \underline{\underline{\underline{\mathbf{B}}}}^* \text{ et } \underline{\underline{\underline{\mathbf{c}}}}^{(2)} = \varepsilon^2 \beta^2 \underline{\underline{\underline{\mathbf{C}}}}^*,$$

sont indépendants de ε . Autrement dit, on considère une suite indicée par ε telle que $\alpha_\varepsilon = \bar{\alpha} \varepsilon^{-1}$, $\beta_\varepsilon = \bar{\beta} \varepsilon^{-1}$ où $\bar{\alpha}, \bar{\beta}$ sont des constantes strictement positives. Dans ce cas, le comportement asymptotique devient :

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0, \quad \underline{\underline{\underline{\mathbf{A}}}}_{\varepsilon}(\underline{\mathbf{x}}) &= \underline{\underline{\underline{\mathbf{a}}}}(\underline{\mathbf{y}}) \\ \underline{\underline{\underline{\mathbf{B}}}}_{\varepsilon}(\underline{\mathbf{x}}) &= \underline{\underline{\underline{\mathbf{b}}}}^{(2)}(\underline{\mathbf{y}}) \\ \underline{\underline{\underline{\mathbf{C}}}}_{\varepsilon}(\underline{\mathbf{x}}) &= \underline{\underline{\underline{\mathbf{c}}}}^{(2)}(\underline{\mathbf{y}}) \end{aligned} \quad (1.25)$$

où $\underline{\underline{\underline{\mathbf{a}}}}, \underline{\underline{\underline{\mathbf{b}}}}^{(2)}, \underline{\underline{\underline{\mathbf{c}}}}^{(2)}$ sont Y -périodiques et $\underline{\mathbf{y}} = \varepsilon^{-1} \underline{\mathbf{x}}$. Naturellement pour $\varepsilon = \varepsilon^*$, $\bar{\alpha} = \alpha^* \varepsilon^*$, $\bar{\beta} = \beta^* \varepsilon^*$, on retrouve le comportement adimensionnel réel (1.17).

La limite du problème défini par (1.25) lorsque ε tend vers 0 correspond à un comportement réel qui se rigidifie en “flexion” (associée à $\underline{\underline{\underline{\mathbf{C}}}}$) et en “effort tranchant” (associé à $\underline{\underline{\underline{\mathbf{B}}}}$) lorsque l'on augmente la taille de la structure réelle. Le solide se rigidifie pour le gradient de rotation en même temps que l'on augmente la taille, L , du solide. Les longueurs propres aux matériaux l_b et l_c évoluent comme la taille du solide, L . Un tel exemple d'étude d'homogénéisation sur des matériaux continus peut être trouvé chez Pideri [Pideri et Seppecher, 1997] qui s'intéresse à un milieu continu où sont plongées des fibres infiniment rigides en flexion.

Le schéma d'homogénéisation (1.24) (resp : (1.25)) sera pertinent pour une structure réelle donnée si le rapport $\varepsilon^* = l/L$ est suffisamment petit et si l_b et l_c sont du même ordre que l (resp : L).

Si on identifie les tenseurs $\underline{\underline{\mathbf{b}}}$, $\underline{\underline{\mathbf{c}}}$, $\underline{\underline{\mathbf{b}}}^{(2)}$, $\underline{\underline{\mathbf{c}}}^{(2)}$ à partir de la même structure réelle, alors ils seront liés par la relation suivante :

$$\underline{\underline{\mathbf{b}}}(\underline{\mathbf{y}}) = \varepsilon^{*-1} \underline{\underline{\mathbf{b}}}^{(2)}(\underline{\mathbf{y}}) \quad \text{et} \quad \underline{\underline{\mathbf{c}}}(\underline{\mathbf{y}}) = \varepsilon^{*-2} \underline{\underline{\mathbf{c}}}^{(2)}(\underline{\mathbf{y}}). \quad (1.26)$$

Enfin, l'équilibre s'écrit sur la configuration sans dimensions :

$$\forall \underline{\mathbf{x}} \in \Omega^*, \quad \left\{ \begin{array}{l} \underline{\mathbf{f}} + \underline{\mathbf{div}} \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}_{\varepsilon} = 0 \\ \underline{\mathbf{c}} - \underline{\underline{\mathbf{e}}} : \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}_{\varepsilon} + \underline{\mathbf{div}} \underline{\underline{\boldsymbol{\nu}}}_{\varepsilon} = 0 \end{array} \right. \quad (1.27)$$

Nous avons défini deux problèmes d'homogénéisation qui peuvent se résumer de la façon suivante sur la configuration sans dimensions.

Problème d'homogénéisation

- Un domaine géométrique fixe Ω^* .
- Conditions aux limites sur $\partial\Omega^*$

$$\forall \underline{x} \in \partial\Omega^*, \left\{ \begin{array}{l} \underline{u}_\varepsilon(\underline{x}) = 0 \\ \underline{\phi}_\varepsilon(\underline{x}) = 0 \end{array} \right.$$

- Définition des efforts extérieurs de la forme :

$$\underline{f}_\varepsilon(\underline{x}) = \underline{f}(\underline{x}) \text{ et } \underline{c}_\varepsilon(\underline{x}) = \underline{c}(\underline{x})$$

- Equations d'équilibre :

$$\forall \underline{x} \in \Omega^*, \left\{ \begin{array}{l} \underline{f} + \underline{\text{div}} \underline{\sigma}_\varepsilon = 0 \\ \underline{c} - \underline{e} : \underline{\sigma}_\varepsilon + \underline{\text{div}} \underline{\nu}_\varepsilon = 0 \end{array} \right.$$

- Définition du comportement

$$\begin{aligned} \underline{\sigma}_\varepsilon &= \underline{\underline{\underline{A}}}_\varepsilon : \left(\underline{u}_\varepsilon \otimes \underline{\nabla} + \underline{e} \cdot \underline{\phi}_\varepsilon \right) + \underline{\underline{\underline{B}}}_\varepsilon : \left(\underline{\phi}_\varepsilon \otimes \underline{\nabla} \right) \\ \underline{\nu}_\varepsilon &= {}^t \underline{\underline{\underline{B}}}_\varepsilon : \left(\underline{u}_\varepsilon \otimes \underline{\nabla} + \underline{e} \cdot \underline{\phi}_\varepsilon \right) + \underline{\underline{\underline{C}}}_\varepsilon : \left(\underline{\phi}_\varepsilon \otimes \underline{\nabla} \right) \end{aligned}$$

1. Schéma 1 (SH1)

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\underline{A}}}_\varepsilon(\underline{x}) &= \underline{\underline{\underline{a}}}(\underline{y}) \\ \underline{\underline{\underline{B}}}_\varepsilon(\underline{x}) &= \varepsilon \underline{\underline{\underline{b}}}(\underline{y}) \\ \underline{\underline{\underline{C}}}_\varepsilon(\underline{x}) &= \varepsilon^2 \underline{\underline{\underline{c}}}(\underline{y}) \end{aligned}$$

2. Schéma 2 (SH2)

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\underline{A}}}^c_\varepsilon(\underline{x}) &= \underline{\underline{\underline{a}}}(\underline{y}) \\ \underline{\underline{\underline{B}}}^c_\varepsilon(\underline{x}) &= \underline{\underline{\underline{b}}}(\underline{y}) \\ \underline{\underline{\underline{C}}}^c_\varepsilon(\underline{x}) &= \underline{\underline{\underline{c}}}(\underline{y}) \end{aligned}$$

où $\underline{y} = \varepsilon^{-1} \underline{x}$, et les tenseurs $\underline{\underline{\underline{a}}}$, $\underline{\underline{\underline{b}}}$, $\underline{\underline{\underline{c}}}$ sont Y -périodiques.

1.6 Introduction des développements asymptotiques dans un milieu de Cosserat

Nous allons résoudre dans cette section, le problème d'homogénéisation que nous avons posé dans la section précédente en nous appuyant sur la technique des développements asymptotiques à deux variables ($\underline{x}$ et $\underline{y}$) sur les champs cinématiques et sur les contraintes. Cette méthode n'est pas nouvelle et a initialement été introduite par Bensoussan [Bensoussan *et Al.*, 1978] et Sanchez-Palencia [Sanchez-Palencia, 1980]. Dans un premier temps, cette méthode a été appliquée avec succès pour déterminer le comportement de matériau hétérogène au premier ordre de ces développements asymptotiques. Pour dépasser la théorie du premier gradient et donc le premier ordre du développement asymptotique, il a fallu attendre les travaux de Gambin et Kröner [Gambin et Kröner, 1989] pour obtenir une théorie aux gradients supérieurs. La mise en œuvre de cette théorie sur des cas concrets de Mécanique, comme les matériaux composites multicouches, est bien plus récente et constitue l'apport de Boutin tant sur la statique [Boutin, 1996] que sur la dynamique [Boutin et Auriault, 1993] des milieux continus classiques. Notre apport, dans cette section, est d'étendre ces résultats à l'homogénéisation d'ordre supérieur de milieux continus de Cosserat. Dans un premier temps, nous allons donner les développements asymptotiques des déformations et des contraintes ainsi que des équations d'équilibre associées. Puis nous étudierons les lois asymptotiques de comportement pour enfin résoudre le problème en cascade ainsi obtenu.

1.6.1 Développement asymptotique des équations d'équilibre

Maintenant nous ne travaillons que sur la configuration fixe, homothétique des configurations réelles. Le but de cette section est d'étudier des solutions des équations des milieux continus de Cosserat avec des comportements périodiques. Par la suite, nous étendrons les résultats au cas des structures discrètes. Nous allons chercher des solutions en déplacement $\underline{u}$ et en rotation $\underline{\phi}$ sous la forme :

$$\begin{aligned}\underline{u}^\varepsilon(\underline{x}) &= \underline{u}_0(\underline{x}, \underline{y}) + \varepsilon \underline{u}_1(\underline{x}, \underline{y}) + \varepsilon^2 \underline{u}_2(\underline{x}, \underline{y}) + \dots \\ \underline{\phi}^\varepsilon(\underline{x}) &= \underline{\phi}_1(\underline{x}, \underline{y}) + \varepsilon \underline{\phi}_2(\underline{x}, \underline{y}) + \varepsilon^2 \underline{\phi}_3(\underline{x}, \underline{y}) + \dots\end{aligned}\tag{1.28}$$

où les termes $\underline{u}_i(\underline{x}, \underline{y})$ et $\underline{\phi}_i(\underline{x}, \underline{y})$ sont périodiques par rapport à la variable $\underline{y}$ et où l'on pose $\underline{y} = \underline{x}/\varepsilon$. On introduit l'opérateur, $\langle \cdot \rangle$, de moyenne sur une

Y-période par :

$$\langle . \rangle = \frac{1}{|Y|} \int_Y . d\omega_y.$$

Pour la cinématique, on peut introduire la moyenne à chaque ordre des champs par :

$$\forall i \in \mathbb{N}, \underline{\mathbf{U}}_i = \langle \mathbf{u}_i \rangle, \underline{\Phi}_i = \langle \phi_i \rangle. \quad (1.29)$$

Il est clair que : $\langle \underline{\mathbf{u}}^\varepsilon \rangle = \underline{\mathbf{U}}_0 + \varepsilon \underline{\mathbf{U}}_1 + \dots$ et $\langle \underline{\Phi}^\varepsilon \rangle = \underline{\Phi}_0 + \varepsilon \underline{\Phi}_1 + \dots$

Le gradient de ces champs s'exprime en utilisant les dérivations partielles par rapport à $\underline{\mathbf{x}}$ et $\underline{\mathbf{y}}$ par :

$$. \otimes \underline{\nabla} = . \otimes \underline{\nabla}_x + \varepsilon^{-1} . \otimes \underline{\nabla}_y \quad (1.30)$$

et de même :

$$\underline{\text{div}} . = \underline{\text{div}}_x . + \varepsilon^{-1} \underline{\text{div}}_y . \quad (1.31)$$

On effectue maintenant le développement asymptotique des déformations, on obtient ainsi :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\mathbf{e}}}_\varepsilon &= \underline{\mathbf{u}}_\varepsilon \otimes \underline{\nabla} + \underline{\underline{\mathbf{e}}} \cdot \underline{\Phi}_\varepsilon \\ &= \varepsilon^{-1} \underline{\underline{\mathbf{e}}}_{-1} + \underline{\underline{\mathbf{e}}}_0 + \varepsilon^1 \underline{\underline{\mathbf{e}}}_1 + \dots \end{aligned} \quad (1.32)$$

et

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\mathbf{\kappa}}}_\varepsilon &= \underline{\Phi}_\varepsilon \otimes \underline{\nabla} \\ &= \varepsilon^{-1} \underline{\underline{\mathbf{\kappa}}}_{-1} + \underline{\underline{\mathbf{\kappa}}}_0 + \varepsilon^1 \underline{\underline{\mathbf{\kappa}}}_1 + \dots \end{aligned} \quad (1.33)$$

avec, en identifiant à chaque ordre :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\mathbf{e}}}_{-1} &= \underline{\mathbf{u}}_0 \otimes \underline{\nabla}_y \\ \underline{\underline{\mathbf{\kappa}}}_{-1} &= \underline{\Phi}_1 \otimes \underline{\nabla}_y \\ \text{puis } \forall k \geq 0, \\ \underline{\underline{\mathbf{e}}}_k &= \underline{\mathbf{u}}_k \otimes \underline{\nabla}_x + \underline{\mathbf{u}}_{k+1} \otimes \underline{\nabla}_y + \underline{\underline{\mathbf{e}}} \cdot \underline{\Phi}_{k+1} \\ \underline{\underline{\mathbf{\kappa}}}_k &= \underline{\Phi}_{k+1} \otimes \underline{\nabla}_x + \underline{\Phi}_{k+2} \otimes \underline{\nabla}_y \end{aligned} \quad (1.34)$$

On peut effectuer la moyenne en posant $\underline{\underline{\mathbf{E}}}_k = \langle \underline{\underline{\mathbf{e}}}_k \rangle$ et $\underline{\underline{\mathbf{G}}}_k = \langle \underline{\underline{\mathbf{\kappa}}}_k \rangle$:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\mathbf{E}}}_{-1} &= 0 \text{ et } \underline{\underline{\mathbf{G}}}_{-1} = 0 \\ \forall k \geq 0, \\ \underline{\underline{\mathbf{E}}}_k &= \underline{\mathbf{U}}_k \otimes \underline{\nabla}_x + \underline{\underline{\mathbf{e}}} \cdot \underline{\Phi}_{k+1} \\ \underline{\underline{\mathbf{G}}}_k &= \underline{\Phi}_{k+1} \otimes \underline{\nabla}_x \end{aligned} \quad (1.35)$$

donc,

$$\underline{\underline{E}}_\varepsilon = \langle \underline{\underline{e}}_\varepsilon \rangle = \underline{\underline{E}}_0 + \varepsilon \underline{\underline{E}}_1 + \varepsilon^2 \underline{\underline{E}}_2 + \cdots + \varepsilon^k \underline{\underline{E}}_k + \dots$$

et

$$\underline{\underline{G}}_\varepsilon = \langle \underline{\underline{\kappa}}_\varepsilon \rangle = \underline{\underline{G}}_0 + \varepsilon \underline{\underline{G}}_1 + \varepsilon^2 \underline{\underline{G}}_2 + \cdots + \varepsilon^k \underline{\underline{G}}_k + \dots$$

Sur la configuration fixe, Ω^* , nous avons les équations d'équilibre du milieu de Cosserat :

$$\begin{aligned} \underline{\text{div}} \underline{\underline{\sigma}}_\varepsilon + \underline{\underline{f}} &= 0 \\ \underline{\text{div}} \underline{\underline{\nu}}_\varepsilon - \underline{\underline{e}} : \underline{\underline{\sigma}}_\varepsilon + \underline{\underline{c}} &= 0 \end{aligned} \quad (1.36)$$

où $\underline{\underline{f}}$ et $\underline{\underline{c}}$ sont respectivement les forces volumiques extérieures et les moments volumiques extérieurs appliqués sur le solide étudié. C'est en injectant les développements asymptotiques des contraintes et en regroupant les ordres que nous allons obtenir le développement asymptotique des équations d'équilibre. On a :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\sigma}}_\varepsilon(\underline{\underline{x}}) &= \underline{\underline{\sigma}}_0(\underline{\underline{x}}, \underline{\underline{y}}) + \varepsilon \underline{\underline{\sigma}}_1(\underline{\underline{x}}, \underline{\underline{y}}) + \cdots + \varepsilon^k \underline{\underline{\sigma}}_k(\underline{\underline{x}}, \underline{\underline{y}}) + \cdots \\ \underline{\underline{\nu}}_\varepsilon(\underline{\underline{x}}) &= \underline{\underline{\nu}}_0(\underline{\underline{x}}, \underline{\underline{y}}) + \varepsilon \underline{\underline{\nu}}_1(\underline{\underline{x}}, \underline{\underline{y}}) + \cdots + \varepsilon^k \underline{\underline{\nu}}_k(\underline{\underline{x}}, \underline{\underline{y}}) + \cdots \end{aligned} \quad (1.37)$$

où $\underline{\underline{y}} = \varepsilon^{-1} \underline{\underline{x}}$ et les champs $\underline{\underline{\sigma}}_k(\underline{\underline{x}}, \underline{\underline{y}})$ et $\underline{\underline{\nu}}_k(\underline{\underline{x}}, \underline{\underline{y}})$ sont Y -périodiques en la variable $\underline{\underline{y}}$. Les équations d'équilibre deviennent :

$$\begin{aligned} \underline{\text{div}}_x \underline{\underline{\sigma}}_\varepsilon + \varepsilon^{-1} \underline{\text{div}}_y \underline{\underline{\sigma}}_\varepsilon + \underline{\underline{f}} &= 0 \\ \underline{\text{div}}_x \underline{\underline{\nu}}_\varepsilon + \varepsilon^{-1} \underline{\text{div}}_y \underline{\underline{\nu}}_\varepsilon - \underline{\underline{e}} : \underline{\underline{\sigma}}_\varepsilon + \underline{\underline{c}} &= 0 \end{aligned} \quad (1.38)$$

Il suffit maintenant de réinjecter les développements asymptotiques des contraintes (1.37) dans les équilibres (1.38), et de regrouper suivant les ordres de ε , soit :

$$\begin{aligned} 0 &= \varepsilon^{-1} \underline{\text{div}}_y \underline{\underline{\sigma}}_0 + \left(\underline{\text{div}}_x \underline{\underline{\sigma}}_0 + \underline{\text{div}}_y \underline{\underline{\sigma}}_1 + \underline{\underline{f}} \right) \\ &\quad + \varepsilon \left(\underline{\text{div}}_x \underline{\underline{\sigma}}_1 + \underline{\text{div}}_y \underline{\underline{\sigma}}_2 \right) + \cdots \\ 0 &= \varepsilon^{-1} \underline{\text{div}}_y \underline{\underline{\nu}}_0 + \left(\underline{\text{div}}_x \underline{\underline{\nu}}_0 + \underline{\text{div}}_y \underline{\underline{\nu}}_1 - \underline{\underline{e}} : \underline{\underline{\sigma}}_0 + \underline{\underline{c}} \right) \\ &\quad + \varepsilon \left(\underline{\text{div}}_x \underline{\underline{\nu}}_1 + \underline{\text{div}}_y \underline{\underline{\nu}}_2 - \underline{\underline{e}} : \underline{\underline{\sigma}}_1 \right) + \cdots \end{aligned}$$

On obtient ainsi aux différents ordres en ε , les équilibres :

– à l'ordre ε^{-1} ,

$$\begin{aligned}\underline{\text{div}}_y \underline{\sigma}_0 &= 0 \\ \underline{\text{div}}_y \underline{\nu}_0 &= 0\end{aligned}\tag{1.39}$$

– à l'ordre ε^0 ,

$$\begin{aligned}\underline{\text{div}}_x \underline{\sigma}_0 + \underline{\text{div}}_y \underline{\sigma}_1 + \underline{f} &= 0 \\ \underline{\text{div}}_x \underline{\nu}_0 + \underline{\text{div}}_y \underline{\nu}_1 - \underline{e} : \underline{\sigma}_0 + \underline{c} &= 0\end{aligned}\tag{1.40}$$

– enfin à tout ordre ε^k ($k \geq 1$),

$$\begin{aligned}\underline{\text{div}}_x \underline{\sigma}_k + \underline{\text{div}}_y \underline{\sigma}_{k+1} &= 0 \\ \underline{\text{div}}_x \underline{\nu}_k + \underline{\text{div}}_y \underline{\nu}_{k+1} - \underline{e} : \underline{\sigma}_k &= 0\end{aligned}\tag{1.41}$$

On pose :

$$\forall k, \underline{\Sigma}_k = \langle \underline{\sigma}_k \rangle \text{ et } \underline{M}_k = \langle \underline{\nu}_k \rangle.$$

En moyennant les équations d'équilibre sur la cellule de base Y , on obtient grâce à la Y -périodicité des champs de contrainte en la variable y :

– à l'ordre ε^0 ,

$$\begin{aligned}\underline{\text{div}} \underline{\Sigma}_0 + \underline{f} &= 0 \\ \underline{\text{div}} \underline{M}_0 - \underline{e} : \underline{\Sigma}_0 + \underline{c} &= 0\end{aligned}\tag{1.42}$$

– enfin à tout ordre ε^k ($k \geq 1$),

$$\begin{aligned}\underline{\text{div}} \underline{\Sigma}_k &= 0 \\ \underline{\text{div}} \underline{M}_k - \underline{e} : \underline{\Sigma}_k &= 0\end{aligned}\tag{1.43}$$

1.6.2 Premier schéma d'homogénéisation (SH1)

Dans le premier schéma d'homogénéisation, la relation de comportement microscopique intégrant le passage à la cellule de base est de la forme :

$$\begin{bmatrix} \underline{\sigma}_\varepsilon \\ \underline{\nu}_\varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{a}(\underline{y}) & \varepsilon \underline{b}(\underline{y}) \\ \varepsilon \underline{t} \underline{b}(\underline{y}) & \varepsilon^2 \underline{c}(\underline{y}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{e}_\varepsilon \\ \underline{\kappa}_\varepsilon \end{bmatrix}\tag{1.44}$$

En effet, le comportement est par hypothèse périodique, il ne dépend donc que de la variable périodique, y . Ainsi l'écriture du passage des déformations aux

contraintes du problème réel s'effectuera systématiquement sur une cellule de base (représentant le motif de base périodique) de taille fixe. On injecte les développements asymptotiques de la cinématique (1.32) et (1.33) dans la loi de comportement (1.44) et on identifie le développement asymptotique des contraintes. On obtient ainsi :

– à l'ordre ε^{-1} ,

$$\underline{\underline{\underline{a}}} : \underline{\underline{\underline{e}}}_{-1} = \underline{\underline{\underline{a}}} : \underline{\underline{\underline{u}}}_0 \otimes \underline{\underline{\underline{\nabla}}}_y = 0$$

– à l'ordre ε^0 ,

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\underline{\sigma}}}_0 &= \underline{\underline{\underline{a}}} : \underline{\underline{\underline{e}}}_0 + \underline{\underline{\underline{b}}} : \underline{\underline{\underline{\kappa}}}_{-1} \\ \underline{\underline{\underline{\nu}}}_0 &= {}^t \underline{\underline{\underline{b}}} : \underline{\underline{\underline{e}}}_{-1} \end{aligned}$$

– à un ordre quelconque ε^k , $k > 0$

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\underline{\sigma}}}_k &= \underline{\underline{\underline{a}}} : \underline{\underline{\underline{e}}}_k + \underline{\underline{\underline{b}}} : \underline{\underline{\underline{\kappa}}}_{k-1} \\ \underline{\underline{\underline{\nu}}}_k &= {}^t \underline{\underline{\underline{b}}} : \underline{\underline{\underline{e}}}_{k-1} + \underline{\underline{\underline{c}}} : \underline{\underline{\underline{\kappa}}}_{k-2} \end{aligned}$$

On en déduit immédiatement que :

$$\underline{\underline{\underline{u}}}_0 \otimes \underline{\underline{\underline{\nabla}}}_y = 0.$$

$\underline{\underline{\underline{u}}}_0$ est donc indépendant de la variable locale, $\underline{\underline{\underline{y}}}$:

$$\underline{\underline{\underline{u}}}_0(\underline{\underline{\underline{x}}}, \underline{\underline{\underline{y}}}) = \underline{\underline{\underline{U}}}_0(\underline{\underline{\underline{x}}}).$$

L'ordre en ε^0 de la contrainte $\underline{\underline{\underline{\nu}}}$ est donc nul :

$$\underline{\underline{\underline{\nu}}}_0 = {}^t \underline{\underline{\underline{b}}} : \underline{\underline{\underline{u}}}_0 \otimes \underline{\underline{\underline{\nabla}}}_y = 0.$$

Donc

$$\underline{\underline{\underline{M}}}_0 = \langle \underline{\underline{\underline{\nu}}}_0 \rangle = 0.$$

En utilisant, de plus, le développement asymptotique des équilibres (1.39)-(1.41), nous obtenons les problèmes posés à chaque ordre :

en ε^{-2} sur l'équilibre en force et ε^{-1} sur celui en moment,

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{l'équilibre} & \left\{ \begin{array}{l} \underline{\underline{\underline{\operatorname{div}}}}_y \underline{\underline{\underline{\sigma}}}_0 = 0 \\ \underline{\underline{\underline{\operatorname{div}}}}_y \underline{\underline{\underline{\nu}}}_{-1} - \underline{\underline{\underline{e}}} : \underline{\underline{\underline{\sigma}}}_0 + \underline{\underline{\underline{c}}} = 0 \end{array} \right. \\ \text{le comportement} & \left\{ \begin{array}{l} \underline{\underline{\underline{\sigma}}}_0 = \underline{\underline{\underline{a}}} : \underline{\underline{\underline{e}}}_0 + \underline{\underline{\underline{b}}} : \underline{\underline{\underline{\kappa}}}_{-1} \\ \underline{\underline{\underline{\nu}}}_{-1} = {}^t \underline{\underline{\underline{b}}} : \underline{\underline{\underline{e}}}_0 + \underline{\underline{\underline{c}}} : \underline{\underline{\underline{\kappa}}}_{-1} \end{array} \right. \\ \text{la cinématique} & \left\{ \begin{array}{l} \underline{\underline{\underline{e}}}_0 = \underline{\underline{\underline{U}}}_0 \otimes \underline{\underline{\underline{\nabla}}}_x + \underline{\underline{\underline{u}}}_1 \otimes \underline{\underline{\underline{\nabla}}}_y + \underline{\underline{\underline{e}}} \cdot \underline{\underline{\underline{\phi}}}_1 \\ \underline{\underline{\underline{\kappa}}}_{-1} = \underline{\underline{\underline{\phi}}}_1 \otimes \underline{\underline{\underline{\nabla}}}_y \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (1.45)$$

en ε^{-1} sur l'équilibre en force et ε^0 sur celui en moment,

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{l'équilibre} \\ \text{le comportement} \\ \text{la cinématique} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \underline{\text{div}}_x \underline{\sigma}_0 + \underline{\text{div}}_y \underline{\sigma}_1 + \underline{f} = 0 \\ \underline{\text{div}}_x \underline{\nu}_1 + \underline{\text{div}}_y \underline{\nu}_2 - \underline{e} : \underline{\sigma}_1 = 0 \\ \underline{\sigma}_1 = \underline{\underline{a}} : \underline{e}_1 + \underline{\underline{b}} : \underline{\kappa}_0 \\ \underline{\nu}_2 = \underline{\underline{t}} \underline{b} : \underline{e}_1 + \underline{\underline{c}} : \underline{\kappa}_0 \\ \underline{e}_1 = \underline{u}_1 \otimes \underline{\nabla}_x + \underline{u}_2 \otimes \underline{\nabla}_y + \underline{e} \cdot \underline{\phi}_2 \\ \underline{\kappa}_0 = \underline{\phi}_1 \otimes \underline{\nabla}_x + \underline{\phi}_2 \otimes \underline{\nabla}_y \end{array} \right. \quad (1.46)$$

en ε^{k-1} sur l'équilibre en force et ε^{k-2} sur celui en moment, $k \geq 1$,

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{l'équilibre} \\ \text{le comportement} \\ \text{la cinématique} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \underline{\text{div}}_x \underline{\sigma}_k + \underline{\text{div}}_y \underline{\sigma}_{k+1} = 0 \\ \underline{\text{div}}_x \underline{\nu}_{k+1} + \underline{\text{div}}_y \underline{\nu}_{k+2} - \underline{e} : \underline{\sigma}_{k+1} = 0 \\ \underline{\sigma}_{k+1} = \underline{\underline{a}} : \underline{e}_{k+1} + \underline{\underline{b}} : \underline{\kappa}_k \\ \underline{\nu}_{k+2} = \underline{\underline{t}} \underline{b} : \underline{e}_{k+1} + \underline{\underline{c}} : \underline{\kappa}_k \\ \underline{e}_{k+1} = \underline{u}_{k+1} \otimes \underline{\nabla}_x + \underline{u}_{k+2} \otimes \underline{\nabla}_y + \underline{e} \cdot \underline{\phi}_{k+2} \\ \underline{\kappa}_k = \underline{\phi}_{k+1} \otimes \underline{\nabla}_x + \underline{\phi}_{k+2} \otimes \underline{\nabla}_y \end{array} \right. \quad (1.47)$$

On constate que l'on aboutit à une suite de problèmes qui se résolvent en cascade. Par clareté et commodité d'écriture, nous allons introduire des opérateurs comme Gambin et Kröner [Gambin et Kröner, 1989] et plus récemment Boutin [Boutin, 1996] l'ont fait lors de leurs études avec des milieux classiques de Cauchy.

Afin de pouvoir résoudre le système à chaque étape en $(\underline{u}_i, \underline{\phi}_i)$, il faut prendre l'ordre ε^{i-2} de l'équation d'équilibre en force et l'ordre ε^{i-1} de celle en moment. On définit ainsi les opérateurs :

$$L_c^{-2} \left(\begin{array}{c} \underline{u} \\ \underline{\phi} \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} L_{c1}^{-2} \\ L_{c2}^{-2} \end{array} \right] \left(\begin{array}{c} \underline{u} \\ \underline{\phi} \end{array} \right) \quad (1.48)$$

avec

$$\begin{aligned} L_{c1}^{-2} \left(\begin{array}{c} \underline{u} \\ \underline{\phi} \end{array} \right) &= \underline{\text{div}}_y \left[\underline{\underline{a}} : (\underline{u} \otimes \underline{\nabla}_y + \underline{e} \cdot \underline{\phi}) + \underline{\underline{b}}(\underline{y}) : \underline{\phi} \otimes \underline{\nabla}_y \right] \\ L_{c2}^{-2} \left(\begin{array}{c} \underline{u} \\ \underline{\phi} \end{array} \right) &= \underline{\text{div}}_y \left[\underline{\underline{t}} \underline{b} : (\underline{u} \otimes \underline{\nabla}_y + \underline{e} \cdot \underline{\phi}) + \underline{\underline{c}} : \underline{\phi} \otimes \underline{\nabla}_y \right] \\ &\quad - \underline{e} : \left[\underline{\underline{a}} : (\underline{u} \otimes \underline{\nabla}_y + \underline{e} \cdot \underline{\phi}) + \underline{\underline{b}}(\underline{y}) : \underline{\phi} \otimes \underline{\nabla}_y \right] \end{aligned} \quad (1.49)$$

$$L_c^{-1} \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{u}} \\ \underline{\phi} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} L_{c1}^{-1} \\ L_{c2}^{-1} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{u}} \\ \underline{\phi} \end{pmatrix} \quad (1.50)$$

avec

$$\begin{aligned} L_{c1}^{-1} \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{u}} \\ \underline{\phi} \end{pmatrix} &= \underline{\text{div}}_y \left[\underline{\underline{\underline{\mathbf{a}}}} : \underline{\mathbf{u}} \otimes \underline{\nabla}_x + \underline{\underline{\underline{\mathbf{b}}}}(\underline{\mathbf{y}}) : \underline{\phi} \otimes \underline{\nabla}_x \right] \\ &\quad + \underline{\text{div}}_x \left[\underline{\underline{\underline{\mathbf{a}}}} : (\underline{\mathbf{u}} \otimes \underline{\nabla}_y + \underline{\underline{\underline{\mathbf{e}}}} \cdot \underline{\phi}) + \underline{\underline{\underline{\mathbf{b}}}}(\underline{\mathbf{y}}) : \underline{\phi} \otimes \underline{\nabla}_y \right] \\ L_{c2}^{-1} \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{u}} \\ \underline{\phi} \end{pmatrix} &= \underline{\text{div}}_y \left[\underline{\underline{\underline{^t\mathbf{b}}}}(\underline{\mathbf{y}}) : \underline{\mathbf{u}} \otimes \underline{\nabla}_x + \underline{\underline{\underline{\mathbf{c}}}}} : \underline{\phi} \otimes \underline{\nabla}_y \right] \\ &\quad + \underline{\text{div}}_x \left[\underline{\underline{\underline{^t\mathbf{b}}}}(\underline{\mathbf{y}}) : (\underline{\mathbf{u}} \otimes \underline{\nabla}_y + \underline{\underline{\underline{\mathbf{e}}}}} \cdot \underline{\phi}) + \underline{\underline{\underline{\mathbf{c}}}}} : \underline{\phi} \otimes \underline{\nabla}_y \right] \\ &\quad - \underline{\underline{\underline{\mathbf{e}}}}} : \left(\underline{\underline{\underline{\mathbf{a}}}}(\underline{\mathbf{y}}) : \underline{\mathbf{u}} \otimes \underline{\nabla}_x + \underline{\underline{\underline{\mathbf{b}}}}(\underline{\mathbf{y}}) : \underline{\phi} \otimes \underline{\nabla}_x \right) \end{aligned} \quad (1.51)$$

et

$$L_c^0 \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{u}} \\ \underline{\phi} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} L_{c1}^0 \\ L_{c2}^0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{u}} \\ \underline{\phi} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\text{div}}_x \left[\underline{\underline{\underline{\mathbf{a}}}} : \underline{\mathbf{u}} \otimes \underline{\nabla}_x + \underline{\underline{\underline{\mathbf{b}}}}} : \underline{\phi} \otimes \underline{\nabla}_x \right] \\ \underline{\text{div}}_x \left[\underline{\underline{\underline{^t\mathbf{b}}}}} : \underline{\mathbf{u}} \otimes \underline{\nabla}_x + \underline{\underline{\underline{\mathbf{c}}}}} : \underline{\phi} \otimes \underline{\nabla}_x \right] \end{bmatrix} \quad (1.52)$$

Par comparaison avec le développement asymptotique des équations d'équilibre, on remarque que l'opérateur, L_c , constitué de deux équations, possède un décalage sur l'ordre du développement asymptotique entre la première et la seconde. La seconde équation L_{c2} correspond à l'équation d'équilibre en moment à un ordre de plus en ε par rapport à la première L_{c1} représentant l'équilibre en force. Le problème s'écrit alors en une cascade :

$$\begin{aligned} L_c^{-2} \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{u}}_0 \\ 0 \end{pmatrix} &= 0 \\ L_c^{-2} \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{u}}_1 \\ \underline{\phi}_1 \end{pmatrix} &= -L_c^{-1} \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{u}}_0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{vmatrix} 0 \\ \underline{\underline{\underline{\mathbf{c}}}}} \end{vmatrix} \\ L_c^{-2} \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{u}}_2 \\ \underline{\phi}_2 \end{pmatrix} &= -L_c^{-1} \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{u}}_1 \\ \underline{\phi}_1 \end{pmatrix} - L_c^0 \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{u}}_0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{vmatrix} \underline{\underline{\underline{\mathbf{f}}}}} \\ 0 \end{vmatrix} \\ \forall i \geq 3, \quad L_c^{-2} \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{u}}_i \\ \underline{\phi}_i \end{pmatrix} &= -L_c^{-1} \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{u}}_{i-1} \\ \underline{\phi}_{i-1} \end{pmatrix} - L_c^0 \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{u}}_{i-2} \\ \underline{\phi}_{i-2} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1.53)$$

Pour pouvoir résoudre le système précédent, nous devons étudier de plus près l'opérateur L_c^{-2} pour examiner à quelle condition on peut l'inverser. La

résolution en $\underline{u}, \underline{\phi}$ sur l'espace, $\mathcal{V}_{per}$, des champs Y -périodiques en la variable $\underline{y}$ de l'équation :

$$L_c^{-2} \left(\frac{\underline{u}}{\underline{\phi}} \right) (\underline{x}, \underline{y}) = \left[\frac{\underline{g}}{\underline{h}} \right] (\underline{x}, \underline{y}) \quad (1.54)$$

où $\underline{g}, \underline{h}$ sont des champs donnés Y -périodiques en la variable $\underline{y}$ est équivalente à la résolution de sa formulation faible : trouver $\underline{u}, \underline{\phi}$ sur l'espace des champs Y -périodiques en la variable $\underline{y}$ tels que :

$$\begin{aligned} & \forall \hat{\underline{u}}, \hat{\underline{\phi}} \text{ } Y\text{-périodiques,} \\ & \int_Y L_{c1}^{-2} \left(\frac{\underline{u}}{\underline{\phi}} \right) (\underline{x}, \underline{y}) \cdot \hat{\underline{u}} (\underline{x}, \underline{y}) + L_{c2}^{-2} \left(\frac{\underline{u}}{\underline{\phi}} \right) (\underline{x}, \underline{y}) \cdot \hat{\underline{\phi}} (\underline{x}, \underline{y}) d\omega_y \quad (1.55) \\ & = \int_Y \underline{g} (\underline{x}, \underline{y}) \cdot \hat{\underline{u}} (\underline{x}, \underline{y}) + \underline{h} (\underline{x}, \underline{y}) \cdot \hat{\underline{\phi}} (\underline{x}, \underline{y}) d\omega_y. \end{aligned}$$

Comme on cherche des solutions sur l'espace des champs Y -périodiques, en intégrant par parties, la fonctionnelle issue de la formulation faible se met sous la forme :

$$\begin{aligned} & \forall \hat{\underline{u}}, \hat{\underline{\phi}} \text{ } Y\text{-périodiques,} \\ & \int_Y {}^t \underline{e}_y \left(\frac{\underline{u}}{\underline{\phi}} \right) : \underline{a} : \underline{e}_y \left(\frac{\hat{\underline{u}}}{\hat{\underline{\phi}}} \right) + {}^t \underline{e}_y \left(\frac{\hat{\underline{u}}}{\hat{\underline{\phi}}} \right) : \underline{b} : \underline{\kappa}_y \left(\frac{\underline{u}}{\underline{\phi}} \right) \\ & + {}^t \underline{e}_y \left(\frac{\underline{u}}{\underline{\phi}} \right) : \underline{b} : \underline{\kappa}_y \left(\frac{\hat{\underline{u}}}{\hat{\underline{\phi}}} \right) + {}^t \underline{\kappa}_y \left(\frac{\hat{\underline{u}}}{\hat{\underline{\phi}}} \right) : \underline{c} : \underline{\kappa}_y \left(\frac{\underline{u}}{\underline{\phi}} \right) d\omega_y \quad (1.56) \\ & = - \int_Y \underline{g} (\underline{x}, \underline{y}) \cdot \hat{\underline{u}} (\underline{x}, \underline{y}) + \underline{h} (\underline{x}, \underline{y}) \cdot \hat{\underline{\phi}} (\underline{x}, \underline{y}) d\omega_y. \end{aligned}$$

où les opérateurs $\underline{e}_y$ et $\underline{\kappa}_y$ sont les opérateurs de déformation pour les milieux de Cosserat, on rappelle :

$$\underline{e}_y \left(\frac{\underline{u}}{\underline{\phi}} \right) = \underline{u} \otimes \underline{\nabla}_y + \underline{e} \cdot \underline{\phi} \text{ et } \underline{\kappa}_y \left(\frac{\underline{u}}{\underline{\phi}} \right) = \underline{\phi} \otimes \underline{\nabla}_y.$$

On reconnaît dans le premier membre de l'équation (1.56) une forme bilinéaire symétrique positive, qui devient un produit scalaire si l'on quotiente l'espace de résolution par l'espace des mouvements rigidifiants Y -périodiques. On vérifie aisément que cet espace est égal au sous-espace vectoriel des champs de translation constante et de rotation nulle, $\mathcal{R}_{per}$. Ainsi la résolution de la formulation faible est équivalente à la recherche du minimum de la fonctionnelle :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_Y {}^t \underline{e}_y \left(\frac{\underline{u}}{\underline{\phi}} \right) : \underline{a} : \underline{e}_y \left(\frac{\underline{u}}{\underline{\phi}} \right) + 2 {}^t \underline{e}_y \left(\frac{\underline{u}}{\underline{\phi}} \right) : \underline{b} : \underline{\kappa}_y \left(\frac{\underline{u}}{\underline{\phi}} \right) \\ & + {}^t \underline{\kappa}_y \left(\frac{\underline{u}}{\underline{\phi}} \right) : \underline{c} : \underline{\kappa}_y \left(\frac{\underline{u}}{\underline{\phi}} \right) d\omega_y + \int_Y \underline{g} \cdot \underline{u} + \underline{h} \cdot \underline{\phi} d\omega_y. \quad (1.57) \end{aligned}$$

définie sur $\mathcal{V}_{per}/\mathcal{R}_{per}$ si, et seulement si, la forme linéaire

$$l \left(\begin{array}{c} \underline{u} \\ \underline{\phi} \end{array} \right) = \int_Y \underline{g} \cdot \underline{u} + \underline{h} \cdot \underline{\phi} d\omega_y$$

est orthogonale (au sens de la dualité) à $\mathcal{R}_{per}$, c'est-à-dire :

$$\forall \underline{U} \in \mathbb{R}^3, \quad l \left(\begin{array}{c} \underline{U} \\ 0 \end{array} \right) = 0.$$

En reprenant, la définition de l cela se traduit par : $\int_Y \underline{g} = 0$.

Lemme 1 (inversion de L_c^{-2} pour (SH1)) Soient deux champs g et h Y -périodiques, l'équation :

$$L_c^{-2} \left(\begin{array}{c} \underline{u} \\ \underline{\phi} \end{array} \right) = \begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix} \quad (1.58)$$

admet une solution, à un champs constant sur $\underline{u}$ près, si, et seulement si,

$$\langle g \rangle = 0. \quad (1.59)$$

Cette relation (1.59) est appelée équation de compatibilité du système (1.58).

Revenons au système (1.53). Il est à noter que la résolution à chaque ordre ne fait appel qu'à une seule condition de compatibilité sur la première composante de l'opérateur. Ces relations deviennent :

$$\begin{aligned} \left\langle L_{c1}^{-1} \left(\begin{array}{c} \underline{U}_0 \\ 0 \end{array} \right) \right\rangle &= 0 \quad \text{automatiquement vérifiée,} \\ \left\langle L_{c1}^{-1} \left(\begin{array}{c} \underline{u}_1 \\ \underline{\phi}_1 \end{array} \right) \right\rangle + \left\langle L_{c1}^0 \left(\begin{array}{c} \underline{U}_0 \\ 0 \end{array} \right) \right\rangle + \underline{f} &= 0 = \underline{\text{div}} \underline{\Sigma}_0 + \underline{f} \\ \forall i \geq 2, \quad \left\langle L_{c1}^{-1} \left(\begin{array}{c} \underline{u}_i \\ \underline{\phi}_i \end{array} \right) \right\rangle + \left\langle L_{c1}^0 \left(\begin{array}{c} \underline{u}_{i-1} \\ \underline{\phi}_{i-1} \end{array} \right) \right\rangle &= 0 = \underline{\text{div}} \underline{\Sigma}_k \end{aligned} \quad (1.60)$$

La résolution successive des problèmes jusqu'au second ordre en cinématique, reportée en annexe B, donne les résultats suivants. Il est clair que seules les équations d'équilibre liées aux translations subsistent. Quelque soit l'ordre auquel on effectue les développements asymptotiques, la rotation s'exprime en fonction des gradients successifs de $\underline{U}_0$. Elle disparaît au niveau macroscopique qui correspond alors à un milieu de type Cauchy. On donne donc

ici les résultats concernant la cinématique de translation, les contraintes de Cauchy et les équations d'équilibre en force. On trouve :

$$\begin{aligned}
\underline{u}_\varepsilon(\underline{x}) = & \underline{U}_0(\underline{x}) \\
& + \varepsilon \left[\underline{U}_1(\underline{x}) + \underline{\underline{X}}_u(\underline{y}) : \underline{U}_0 \overset{s}{\otimes} \underline{\nabla}_x + \underline{\underline{T}}_u(\underline{y}) \cdot \underline{c} \right] \\
& + \varepsilon^2 \left[\underline{U}_2(\underline{x}) + \underline{\underline{X}}_u(\underline{y}) : \underline{U}_1 \overset{s}{\otimes} \underline{\nabla}_x + \underline{\underline{Y}}_u(\underline{y}) : \underline{U}_0 \otimes \underline{\nabla}_x \otimes \underline{\nabla}_x \right. \\
& \quad \left. + \underline{\underline{Q}}_u(\underline{y}) : \underline{c} \otimes \underline{\nabla}_x \right] \\
& + \varepsilon^3 \left[\underline{U}_3(\underline{x}) + \underline{\underline{X}}_u(\underline{y}) : \underline{U}_2 \overset{s}{\otimes} \underline{\nabla}_x + \underline{\underline{Y}}_u(\underline{y}) : \underline{U}_1 \otimes \underline{\nabla}_x \otimes \underline{\nabla}_x \right. \\
& \quad \left. + \underline{\underline{Z}}_u(\underline{y}) : \underline{U}_0 \otimes \underline{\nabla}_x \otimes \underline{\nabla}_x \otimes \underline{\nabla}_x + \underline{\underline{R}}_u(\underline{y}) : \underline{c} \otimes \underline{\nabla}_x \otimes \underline{\nabla}_x \right]
\end{aligned} \tag{1.61}$$

où $\underline{y} = \frac{\underline{x}}{\varepsilon}$ et les tenseurs de localisations $\underline{\underline{X}}_u, \underline{\underline{Y}}_u, \underline{\underline{Z}}_u, \underline{\underline{T}}_u, \underline{\underline{Q}}_u, \underline{\underline{R}}_u$ sont de Y -moyennes nulles avec la condition de symétrie $X_{uijk} = X_{uikj}$. On en déduit la valeur du champ macroscopique de translation :

$$\underline{U} = \underline{U}_\varepsilon = \langle \underline{u}_\varepsilon \rangle = \underline{U}_0 + \varepsilon \underline{U}_1 + \varepsilon^2 \underline{U}_2 + \varepsilon^3 \underline{U}_3,$$

où les champs $\underline{U}_i$ sont déterminés par les systèmes en cascade :

– à l'ordre 0,

$$\begin{aligned} \underline{\text{div}} \underline{\underline{\Sigma}}_0 + \underline{f} &= 0 \\ \underline{\underline{\Sigma}}_0 &= \underline{\underline{\underline{A}}}_0 : \underline{U}_0 \overset{s}{\otimes} \underline{\nabla} + \underline{\underline{\underline{K}}}_0 \cdot \underline{c} \\ \underline{U}_0 &= 0 \text{ sur } \partial\Omega^*. \end{aligned} \quad (1.62)$$

– à l'ordre 1,

$$\begin{aligned} \underline{\text{div}} \varepsilon \underline{\underline{\Sigma}}_1 &= 0 \\ \varepsilon \underline{\underline{\Sigma}}_1 &= \underline{\underline{\underline{A}}}_0 : \varepsilon \underline{U}_1 \overset{s}{\otimes} \underline{\nabla} + \varepsilon \underline{\underline{\underline{A}}}_1 : \underline{U}_0 \otimes \underline{\nabla} \otimes \underline{\nabla} + \varepsilon \underline{\underline{\underline{K}}}_1 : \underline{c} \otimes \underline{\nabla} \\ \underline{U}_1 &= 0 \text{ sur } \partial\Omega^*. \end{aligned} \quad (1.63)$$

– à l'ordre 2,

$$\begin{aligned} \underline{\text{div}} \varepsilon^2 \underline{\underline{\Sigma}}_2 &= 0 \\ \varepsilon^2 \underline{\underline{\Sigma}}_2 &= \underline{\underline{\underline{A}}}_0 : \varepsilon^2 \underline{U}_2 \overset{s}{\otimes} \underline{\nabla} + \varepsilon \underline{\underline{\underline{A}}}_1 : \varepsilon \underline{U}_1 \otimes \underline{\nabla} \otimes \underline{\nabla} \\ &\quad + \varepsilon^2 \underline{\underline{\underline{A}}}_2 : \underline{U}_0 \otimes \underline{\nabla} \otimes \underline{\nabla} \otimes \underline{\nabla} + \varepsilon^2 \underline{\underline{\underline{K}}}_2 : \underline{c} \otimes \underline{\nabla} \otimes \underline{\nabla} \\ \underline{U}_2 &= 0 \text{ sur } \partial\Omega^*. \end{aligned} \quad (1.64)$$

avec les tenseurs de comportement homogénéisé qui sont :

$$\begin{aligned}
\underline{\underline{\underline{\mathbf{A}}_0}} &= \left\langle \underline{\underline{\underline{\mathbf{a}}}} : \left(\underline{\underline{\underline{\mathbf{1}}}} + \underline{\underline{\underline{\nabla}}}_y \otimes \underline{\underline{\underline{\mathbf{X}}}}_u + \underline{\underline{\underline{\mathbf{e}}}} \cdot \underline{\underline{\underline{\mathbf{X}}}}_\phi \right) + \underline{\underline{\underline{\mathbf{b}}}} : \underline{\underline{\underline{\mathbf{X}}}}_\phi \otimes \underline{\underline{\underline{\nabla}}}_y \right\rangle \\
\underline{\underline{\underline{\mathbf{K}}_0}} &= \left\langle \underline{\underline{\underline{\mathbf{a}}}} : \left(\underline{\underline{\underline{\nabla}}}_y \otimes \underline{\underline{\underline{\mathbf{T}}}}_u + \underline{\underline{\underline{\mathbf{e}}}} \cdot \underline{\underline{\underline{\mathbf{T}}}}_\phi \right) + \underline{\underline{\underline{\mathbf{b}}}} : \underline{\underline{\underline{\nabla}}}_y \otimes \underline{\underline{\underline{\mathbf{T}}}}_\phi \right\rangle \\
\underline{\underline{\underline{\mathbf{A}}_1}} &= \left\langle \underline{\underline{\underline{\mathbf{a}}}}(\underline{\underline{\underline{\mathbf{y}}}}) : \left(\underline{\underline{\underline{\mathbf{X}}}}_u(\underline{\underline{\underline{\mathbf{y}}}}) + \underline{\underline{\underline{\mathbf{Y}}}}_u(\underline{\underline{\underline{\mathbf{y}}}}) \triangleleft \underline{\underline{\underline{\nabla}}}_y + \underline{\underline{\underline{\mathbf{e}}}} \cdot \underline{\underline{\underline{\mathbf{Y}}}}_\phi(\underline{\underline{\underline{\mathbf{y}}}}) \right) \right. \\
&\quad \left. + \underline{\underline{\underline{\mathbf{b}}}}(\underline{\underline{\underline{\mathbf{y}}}}) : \left(\underline{\underline{\underline{\mathbf{X}}}}_\phi(\underline{\underline{\underline{\mathbf{y}}}}) + \underline{\underline{\underline{\mathbf{Y}}}}_\phi(\underline{\underline{\underline{\mathbf{y}}}}) \triangleleft \underline{\underline{\underline{\nabla}}}_y \right) \right\rangle \\
\underline{\underline{\underline{\mathbf{K}}_1}} &= \left\langle \underline{\underline{\underline{\mathbf{a}}}}(\underline{\underline{\underline{\mathbf{y}}}}) : \left(\underline{\underline{\underline{\nabla}}}_y \cdot \underline{\underline{\underline{\mathbf{Q}}}}_u + \underline{\underline{\underline{\mathbf{e}}}} \cdot \underline{\underline{\underline{\mathbf{Q}}}}_\phi \right) + \underline{\underline{\underline{\mathbf{b}}}}(\underline{\underline{\underline{\mathbf{y}}}}) : \left(\underline{\underline{\underline{\nabla}}}_y \cdot \underline{\underline{\underline{\mathbf{Q}}}}_\phi + \underline{\underline{\underline{\mathbf{T}}}}_\phi \right) \right\rangle \quad (1.65) \\
\underline{\underline{\underline{\mathbf{A}}_2}} &= \left\langle \underline{\underline{\underline{\mathbf{a}}}} : \left(\underline{\underline{\underline{\mathbf{Y}}}}_u(\underline{\underline{\underline{\mathbf{y}}}}) + \underline{\underline{\underline{\nabla}}}_y \otimes \underline{\underline{\underline{\mathbf{Z}}}}_u(\underline{\underline{\underline{\mathbf{y}}}}) + \underline{\underline{\underline{\mathbf{e}}}} \cdot \underline{\underline{\underline{\mathbf{Z}}}}_\phi(\underline{\underline{\underline{\mathbf{y}}}}) \right) \right. \\
&\quad \left. + \underline{\underline{\underline{\mathbf{b}}}} : \left(\underline{\underline{\underline{\mathbf{Y}}}}_\phi(\underline{\underline{\underline{\mathbf{y}}}}) + \underline{\underline{\underline{\nabla}}}_y \otimes \underline{\underline{\underline{\mathbf{Z}}}}_\phi(\underline{\underline{\underline{\mathbf{y}}}}) \right) \right\rangle \\
\underline{\underline{\underline{\mathbf{K}}_2}} &= \left\langle \underline{\underline{\underline{\mathbf{a}}}} : \left(\underline{\underline{\underline{\mathbf{Q}}}}_u + \underline{\underline{\underline{\nabla}}}_y \otimes \underline{\underline{\underline{\mathbf{R}}}}_u + \underline{\underline{\underline{\mathbf{e}}}} \cdot \underline{\underline{\underline{\mathbf{R}}}}_\phi \right) + \underline{\underline{\underline{\mathbf{b}}}} : \left(\underline{\underline{\underline{\mathbf{Q}}}}_\phi + \underline{\underline{\underline{\nabla}}}_y \otimes \underline{\underline{\underline{\mathbf{R}}}}_\phi \right) \right\rangle
\end{aligned}$$

Il est possible de gommer, tout comme cela a été fait pour les forces extérieures $\underline{\underline{\underline{\mathbf{f}}}}$, les couples extérieurs, $\underline{\underline{\underline{\mathbf{c}}}}$, ils sont alors exprimés en fonction de la partie antisymétrique de $\underline{\underline{\underline{\Sigma}}}_0$ au moyen de la moyenne de l'équation d'équilibre en moment à l'ordre ε^{-1} (voir le système (1.45)).

Il est aussi à noter que le tenseur $\underline{\underline{\underline{\mathbf{A}}_0}}$ a les symétries d'un tenseur d'élasticité de Cauchy classique, c'est-à-dire : $\underline{\underline{\underline{A}}}_{0ijkl} = \underline{\underline{\underline{A}}}_{0klij} = \underline{\underline{\underline{A}}}_{0ijlk}$. Par ailleurs, il peut être défini de manière énergétique équivalente par

$${}^t \underline{\underline{\underline{\mathbf{E}}}}^s : \underline{\underline{\underline{\mathbf{A}}}}_0 : \underline{\underline{\underline{\mathbf{E}}}}^s = \underset{(\underline{\underline{\underline{\mathbf{e}}}}, \underline{\underline{\underline{\kappa}}}) \in \mathcal{CA}^0}{\text{Min}} \mathcal{W}(\underline{\underline{\underline{\mathbf{e}}}}, \underline{\underline{\underline{\kappa}}}) \quad (1.66)$$

où

$$\mathcal{W}(\underline{\underline{\underline{\mathbf{e}}}}, \underline{\underline{\underline{\kappa}}}) = \left\langle \left[{}^t \underline{\underline{\underline{\mathbf{e}}}} : \underline{\underline{\underline{\mathbf{a}}}} : \underline{\underline{\underline{\mathbf{e}}}} + 2 {}^t \underline{\underline{\underline{\mathbf{e}}}} : \underline{\underline{\underline{\mathbf{b}}}} : \underline{\underline{\underline{\kappa}}} + {}^t \underline{\underline{\underline{\kappa}}} : \underline{\underline{\underline{\mathbf{c}}}} : \underline{\underline{\underline{\kappa}}} \right] \right\rangle \quad (1.67)$$

et $\mathcal{CA}^0(\underline{\underline{\underline{\mathbf{E}}}}^s)$ est l'ensemble des déformations généralisées Y -périodiques construites à partir de mouvements périodiques selon :

$$\mathcal{CA}^0_1(\underline{\underline{\underline{\mathbf{E}}}}^s) = \left\{ \begin{array}{l} (\underline{\underline{\underline{\mathbf{e}}}}, \underline{\underline{\underline{\kappa}}}) / \exists \underline{\underline{\underline{\mathbf{u}}}}_{per}, \underline{\underline{\underline{\phi}}}_{per} \text{ } Y\text{-périodiques} / \\ \left\{ \begin{array}{l} \underline{\underline{\underline{\mathbf{e}}}} = \underline{\underline{\underline{\mathbf{E}}}}^s + \underline{\underline{\underline{\mathbf{u}}}}_{per} \otimes \underline{\underline{\underline{\nabla}}} + \underline{\underline{\underline{\mathbf{e}}}} \cdot \underline{\underline{\underline{\phi}}}_{per} \\ \underline{\underline{\underline{\kappa}}} = \underline{\underline{\underline{\phi}}}_{per} \otimes \underline{\underline{\underline{\nabla}}} \end{array} \right\} \end{array} \right\}$$

pour tout tenseur symétrique d'ordre 2 $\underline{\underline{E}}^s$.

Par ailleurs, en sommant les systèmes (1.62) à (1.64). On remonte finalement à l'approximation des contraintes macroscopiques jusqu'au second ordre en ε , elles valent :

$$\begin{aligned}\underline{\underline{\Sigma}} = \underline{\underline{\Sigma}}_\varepsilon &= \underline{\underline{\Sigma}}_0 + \varepsilon \underline{\underline{\Sigma}}_1 + \varepsilon^2 \underline{\underline{\Sigma}}_2 \\ &= \underline{\underline{\underline{A}}}_0 : \underline{\underline{U}} \otimes \underline{\underline{V}} + \underline{\underline{\underline{K}}}_0 \cdot \underline{\underline{c}} + \varepsilon \left(\underline{\underline{\underline{A}}}_1 : \underline{\underline{U}} \otimes \underline{\underline{V}} \otimes \underline{\underline{V}} + \underline{\underline{\underline{K}}}_1 : \underline{\underline{c}} \otimes \underline{\underline{V}} \right) \\ &\quad + \varepsilon^2 \left(\underline{\underline{\underline{A}}}_2 : \underline{\underline{U}} \otimes \underline{\underline{V}} \otimes \underline{\underline{V}} \otimes \underline{\underline{V}} + \underline{\underline{\underline{K}}}_2 : \underline{\underline{c}} \otimes \underline{\underline{V}} \otimes \underline{\underline{V}} \right)\end{aligned}\quad (1.68)$$

Elles vérifient l'équation d'équilibre :

$$\underline{\underline{\text{div}}} \underline{\underline{\Sigma}} + \underline{\underline{f}} = 0 \quad (1.69)$$

Pour $\underline{\underline{c}} = 0$, on reconnaît dans (1.68) et (1.69) les équations d'un modèle au second gradient de la déformation. Il faut noter que l'équation d'équilibre en moment est toujours vérifiée grâce à l'introduction d'un terme d'ordre supérieur en moment. Ainsi seule la première équation d'équilibre en force est une vraie équation d'équilibre macroscopique. L'utilité de garder une ou deux équations (et donc un pseudo $\underline{\underline{\Phi}}$ et $\underline{\underline{U}}$ macroscopiques) réside dans la possibilité de poser des conditions aux limites de différentes façons. Cependant il est clair qu'il n'est pas possible de poser des conditions aux limites indépendantes en rotation et translation. Pour combler cette lacune, il est nécessaire d'effectuer une analyse des effets de bord. Il s'agit juste d'un changement de variable et de substituer une combinaison linéaire de gradient de la translation, $\underline{\underline{U}}$, par une variable, $\underline{\underline{\Phi}}$ que l'on peut qualifier de micro-rotation à l'échelle macroscopique. Nous venons de montrer qu'avec ce schéma d'homogénéisation, le milieu homogénéisé à n'importe quel ordre est un milieu ayant une cinématique de translation.

1.6.3 Deuxième schéma d'homogénéisation (SH2)

Nous allons reprendre la même démarche de développement asymptotique que précédemment mais en l'appliquant à un milieu renforcé en courbure de Cosserat, il s'agit du schéma d'homogénéisation (SH2). Des travaux d'homogénéisation existent déjà qui ont mis en évidence des matériaux possédant ce type de comportement, par exemple pour certains matériaux renforcés par des fibres [Pideri et Seppecher, 1997]. Le comportement asymptotique

s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{\sigma}}_\varepsilon \\ \underline{\underline{\nu}}_\varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{a}}(\underline{y}) & \underline{\underline{b}}^{(2)}(\underline{y}) \\ {}^t\underline{\underline{b}}^{(2)}(\underline{y}) & \underline{\underline{c}}^{(2)}(\underline{y}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{u}_\varepsilon \otimes \underline{\nabla} + \underline{e} \cdot \underline{\phi}_\varepsilon \\ \underline{\phi}_\varepsilon \otimes \underline{\nabla} \end{bmatrix} \quad (1.70)$$

On note que le surplus de rigidité introduit se traduit par la disparition du rapport de taille, ε , dans la relation de comportement asymptotique. Nous reprenons les mêmes développements asymptotiques que dans la section précédente pour les déformations 1.32 et 1.33. On en déduit immédiatement que :

$$\underline{u}_0 \otimes \underline{\nabla}_y = 0, \text{ et } \underline{\phi}_1 \otimes \underline{\nabla}_y = 0.$$

Le déplacement et la rotation $\underline{u}_0$, $\underline{\phi}_1$ sont indépendants de la variable locale, $\underline{y}$:

$$\underline{u}_0(\underline{x}, \underline{y}) = \underline{U}_0(\underline{x}), \quad \underline{\phi}_1(\underline{x}, \underline{y}) = \underline{\Phi}_1(\underline{x}).$$

En utilisant, de plus, le développement asymptotique des équilibres (1.39)-(1.41), nous obtenons les problèmes posés à chaque ordre :
en ε^{-2} sur l'équilibre en force et en moment,

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{l'équilibre} \\ \text{le comportement} \\ \text{la cinématique} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \underline{\text{div}}_y \underline{\underline{\sigma}}_0 = 0 \\ \underline{\text{div}}_y \underline{\underline{\nu}}_0 = 0 \\ \underline{\sigma}_0 = \underline{\underline{a}} : \underline{e}_0 + \underline{\underline{b}} : \underline{\kappa}_0 \\ \underline{\nu}_0 = {}^t\underline{\underline{b}}^{(2)} : \underline{e}_0 + \underline{\underline{c}}^{(2)} : \underline{\kappa}_0 \\ \underline{e}_0 = \underline{U}_0 \otimes \underline{\nabla}_x + \underline{u}_1 \otimes \underline{\nabla}_y + \underline{e} \cdot \underline{\Phi}_1 \\ \underline{\kappa}_0 = \underline{\Phi}_1 \otimes \underline{\nabla}_x + \underline{\phi}_2 \otimes \underline{\nabla}_y \end{array} \right. \quad (1.71)$$

en ε^{-1} sur l'équilibre en force et en moment,

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{l'équilibre} \\ \text{le comportement} \\ \text{la cinématique} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \underline{\text{div}}_x \underline{\underline{\sigma}}_0 + \underline{\text{div}}_y \underline{\underline{\sigma}}_1 + \underline{f} = 0 \\ \underline{\text{div}}_x \underline{\underline{\nu}}_0 + \underline{\text{div}}_y \underline{\underline{\nu}}_1 - \underline{e} : \underline{\sigma}_0 + \underline{c} = 0 \\ \underline{\sigma}_1 = \underline{\underline{a}} : \underline{e}_1 + \underline{\underline{b}}^{(2)} : \underline{\kappa}_1 \\ \underline{\nu}_1 = {}^t\underline{\underline{b}}^{(2)} : \underline{e}_1 + \underline{\underline{c}}^{(2)} : \underline{\kappa}_1 \\ \underline{e}_1 = \underline{u}_1 \otimes \underline{\nabla}_x + \underline{u}_2 \otimes \underline{\nabla}_y + \underline{e} \cdot \underline{\phi}_2 \\ \underline{\kappa}_1 = \underline{\phi}_2 \otimes \underline{\nabla}_x + \underline{\phi}_3 \otimes \underline{\nabla}_y \end{array} \right. \quad (1.72)$$

en ε^{k-2} sur l'équilibre en force et en moment, $k \geq 1$,

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{l'équilibre} \\ \text{le comportement} \\ \text{la cinématique} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \underline{\text{div}}_x \underline{\sigma}_k + \underline{\text{div}}_y \underline{\sigma}_{k+1} = 0 \\ \underline{\text{div}}_x \underline{\nu}_k + \underline{\text{div}}_y \underline{\nu}_{k+1} - \underline{e} : \underline{\sigma}_k = 0 \\ \underline{\sigma}_{k+1} = \underline{a} : \underline{e}_{k+1} + \underline{b}^{(2)} : \underline{\kappa}_{k+1} \\ \underline{\nu}_{k+1} = {}^t \underline{b}^{(2)} : \underline{e}_{k+1} + \underline{c}^{(2)} : \underline{\kappa}_{k+1} \\ \underline{e}_{k+1} = \underline{u}_{k+1} \otimes \underline{\nabla}_x + \underline{u}_{k+2} \otimes \underline{\nabla}_y + \underline{e} \cdot \underline{\phi}_{k+2} \\ \underline{\kappa}_{k+1} = \underline{\phi}_{k+2} \otimes \underline{\nabla}_x + \underline{\phi}_{k+1} \otimes \underline{\nabla}_y \end{array} \right. \quad (1.73)$$

On retrouve des systèmes à résoudre en cascade.

On redéfinit les opérateurs permettant de simplifier l'écriture des systèmes :

$$L_c^{-2} \left(\begin{array}{c} \underline{u} \\ \underline{\phi} \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} L_{c1}^{-2} \\ L_{c2}^{-2} \end{array} \right] \left(\begin{array}{c} \underline{u} \\ \underline{\phi} \end{array} \right) \quad (1.74)$$

avec

$$\begin{aligned} L_{c1}^{-2} \left(\begin{array}{c} \underline{u} \\ \underline{\phi} \end{array} \right) &= \underline{\text{div}}_y \left[\underline{a} : \underline{u} \otimes \underline{\nabla}_y + \underline{b}^{(2)}(\underline{y}) : \underline{\phi} \otimes \underline{\nabla}_y \right] \\ L_{c2}^{-2} \left(\begin{array}{c} \underline{u} \\ \underline{\phi} \end{array} \right) &= \underline{\text{div}}_y \left[{}^t \underline{b}^{(2)} : \underline{u} \otimes \underline{\nabla}_y + \underline{c}^{(2)} : \underline{\phi} \otimes \underline{\nabla}_y \right] \end{aligned} \quad (1.75)$$

$$L_c^{-1} \left(\begin{array}{c} \underline{u} \\ \underline{\phi} \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} L_{c1}^{-1} \\ L_{c2}^{-1} \end{array} \right] \left(\begin{array}{c} \underline{u} \\ \underline{\phi} \end{array} \right) \quad (1.76)$$

avec

$$\begin{aligned} L_{c1}^{-1} \left(\begin{array}{c} \underline{u} \\ \underline{\phi} \end{array} \right) &= \underline{\text{div}}_y \left[\underline{a} : \left(\underline{u} \otimes \underline{\nabla}_x + \underline{e} \cdot \underline{\phi} \right) + \underline{b}^{(2)}(\underline{y}) : \underline{\phi} \otimes \underline{\nabla}_x \right] \\ &\quad + \underline{\text{div}}_x \left[\underline{a} : \underline{u} \otimes \underline{\nabla}_y + \underline{b}^{(2)}(\underline{y}) : \underline{\phi} \otimes \underline{\nabla}_y \right] \\ L_{c2}^{-1} \left(\begin{array}{c} \underline{u} \\ \underline{\phi} \end{array} \right) &= \underline{\text{div}}_y \left[{}^t \underline{b}^{(2)}(\underline{y}) : \left(\underline{u} \otimes \underline{\nabla}_x + \underline{e} \cdot \underline{\phi} \right) + \underline{c}^{(2)} : \underline{\phi} \otimes \underline{\nabla}_y \right] \\ &\quad + \underline{\text{div}}_x \left[\underline{c}^{(2)} : \underline{\phi} \otimes \underline{\nabla}_y \right] \\ &\quad - \underline{e} : \left[\underline{a}(\underline{y}) : \underline{u} \otimes \underline{\nabla}_y + \underline{b}^{(2)}(\underline{y}) : \underline{\phi} \otimes \underline{\nabla}_y \right] \end{aligned} \quad (1.77)$$

et

$$L_c^0 \left(\begin{array}{c} \underline{u} \\ \underline{\phi} \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} L_{c1}^0 \\ L_{c2}^0 \end{array} \right] \left(\begin{array}{c} \underline{u} \\ \underline{\phi} \end{array} \right) \quad (1.78)$$

avec

$$\begin{aligned}
L_{c1}^0 \begin{pmatrix} \underline{u} \\ \underline{\phi} \end{pmatrix} &= \underline{\text{div}}_x \left[\underline{\underline{a}} : \left(\underline{u} \otimes \underline{\nabla}_x + \underline{\underline{e}} \cdot \underline{\phi} \right) + \underline{\underline{b}}^{(2)} : \underline{\phi} \otimes \underline{\nabla}_x \right] \\
L_{c2}^0 \begin{pmatrix} \underline{u} \\ \underline{\phi} \end{pmatrix} &= \underline{\text{div}}_x \left[{}^t \underline{\underline{b}}^{(2)} : \left(\underline{u} \otimes \underline{\nabla}_x + \underline{\underline{e}} \cdot \underline{\phi} \right) + \underline{\underline{c}}^{(2)} : \underline{\phi} \otimes \underline{\nabla}_x \right. \\
&\quad \left. - \underline{\underline{e}} : \left(\underline{\underline{a}}(\underline{y}) : \underline{u} \otimes \underline{\nabla}_x + \underline{\underline{b}}^{(2)}(\underline{y}) : \underline{\phi} \otimes \underline{\nabla}_x \right) \right]
\end{aligned} \tag{1.79}$$

On obtient ainsi la suite de problèmes auxiliaires :

$$\begin{aligned}
L_c^{-2} \begin{pmatrix} \underline{U}_0 \\ \underline{\Phi}_1 \end{pmatrix} &= 0 \\
L_c^{-2} \begin{pmatrix} \underline{u}_1 \\ \underline{\phi}_2 \end{pmatrix} + L_c^{-1} \begin{pmatrix} \underline{U}_0 \\ \underline{\Phi}_1 \end{pmatrix} &= 0 \\
L_c^{-2} \begin{pmatrix} \underline{u}_2 \\ \underline{\phi}_3 \end{pmatrix} + L_c^{-1} \begin{pmatrix} \underline{u}_1 \\ \underline{\phi}_2 \end{pmatrix} + L_c^0 \begin{pmatrix} \underline{U}_0 \\ \underline{\Phi}_1 \end{pmatrix} + \begin{vmatrix} \underline{f} \\ \underline{c} \end{vmatrix} &= 0 \\
\forall k \geq 3, \quad L_c^{-2} \begin{pmatrix} \underline{u}_k \\ \underline{\phi}_{k+1} \end{pmatrix} + L_c^{-1} \begin{pmatrix} \underline{u}_{k-1} \\ \underline{\phi}_k \end{pmatrix} + L_c^0 \begin{pmatrix} \underline{u}_{k-2} \\ \underline{\phi}_{k-1} \end{pmatrix} &= 0
\end{aligned} \tag{1.80}$$

Ici $\mathcal{R}_{per}$, le noyau du nouvel opérateur L_c^{-2} , est l'espace des translations constantes et des rotations constantes. Nous obtenons, de façon analogue à la section précédente, le lemme suivant :

Lemme 2 (inversion de L_c^{-2} pour (SH2)) *Soient deux champs g et h Y -périodiques, l'équation :*

$$L_c^{-2} \begin{pmatrix} \underline{u} \\ \underline{\phi} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix} \tag{1.81}$$

admet une solution unique à un champ constant sur $(\underline{u}, \underline{\phi})$ près, si, et seulement si,

$$\langle g \rangle = 0 \text{ et } \langle h \rangle = 0. \tag{1.82}$$

Ces relations (1.82) sont appelées équations de compatibilité (SH2) du système (1.81).

Nous avons reporté, dans l'annexe C, la résolution jusqu'au troisième ordre.

Nous donnons les résultats au premier ordre. Pour la cinématique, on obtient :

$$\begin{aligned}
\underline{u}_\varepsilon(\underline{x}, \underline{y}) &= \underline{U}_0(\underline{x}) \\
&+ \varepsilon \left[\underline{U}_1(\underline{x}) + \underline{\underline{\underline{L}}}_{1u}(\underline{y}) : \left(\underline{U}_0 \otimes \underline{\nabla}_x + \underline{\underline{\underline{e}}} \cdot \underline{\Phi}_1 \right)(\underline{x}) \right. \\
&\quad \left. + \underline{\underline{\underline{M}}}_{1u}(\underline{y}) : \underline{\Phi}_1 \otimes \underline{\nabla}_x(\underline{x}) \right] \\
\underline{\phi}_\varepsilon(\underline{x}, \underline{y}) &= \underline{\Phi}_1(\underline{x}) \\
&+ \varepsilon \left(\underline{\Phi}_2(\underline{x}) + \underline{\underline{\underline{L}}}_{1\phi}(\underline{y}) : \left(\underline{U}_0 \otimes \underline{\nabla}_x + \underline{\underline{\underline{e}}} \cdot \underline{\Phi}_1 \right)(\underline{x}) \right. \\
&\quad \left. + \underline{\underline{\underline{M}}}_{1\phi}(\underline{y}) : \underline{\Phi}_1 \otimes \underline{\nabla}_x(\underline{x}) \right)
\end{aligned} \tag{1.83}$$

où les tenseurs de localisation M et L sont de Y -moyennes nulles. Les champs $\underline{U}_0$ et $\underline{\Phi}_1$ sont donnés par le système d'équations de Cosserat :

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} \underline{\underline{\underline{\Sigma}}}_0 + \underline{\underline{\underline{f}}} &= 0 \\
\operatorname{div} \underline{\underline{\underline{M}}}_0 - \underline{\underline{\underline{e}}} \cdot \underline{\underline{\underline{\Sigma}}}_0 + \underline{\underline{\underline{c}}} &= 0 \\
\underline{\underline{\underline{\Sigma}}}_0 &= \underline{\underline{\underline{A}}}_0^{(2)} : \left(\underline{U}_0 \otimes \underline{\nabla} + \underline{\underline{\underline{e}}} \cdot \underline{\Phi}_1 \right) + \underline{\underline{\underline{B}}}_0^{(2)} : \underline{\Phi}_1 \otimes \underline{\nabla} \\
\underline{\underline{\underline{M}}}_0 &= \underline{\underline{\underline{B}}}_0'^{(2)} : \left(\underline{U}_0 \otimes \underline{\nabla} + \underline{\underline{\underline{e}}} \cdot \underline{\Phi}_1 \right) + \underline{\underline{\underline{C}}}_0^{(2)} : \underline{\Phi}_1 \otimes \underline{\nabla} \\
\underline{U}_0 &= 0 \text{ et } \underline{\Phi}_1 = 0 \text{ sur } \partial\Omega^*.
\end{aligned} \tag{1.84}$$

avec le comportement macroscopique de Cosserat défini à l'aide des tenseurs :

$$\begin{aligned}
\underline{\underline{\underline{A}}}_0^{(2)} &= \left\langle \underline{\underline{\underline{a}}} : \left(\underline{\underline{\underline{1}}} + \underline{\underline{\underline{L}}}_{1u} \Delta \underline{\nabla}_y + \underline{\underline{\underline{M}}}_{1u} \Delta \underline{\nabla}_y \right) \right\rangle \\
\underline{\underline{\underline{B}}}_0^{(2)} &= \left\langle \underline{\underline{\underline{b}}}^{(2)} : \left(\underline{\underline{\underline{1}}} + \underline{\underline{\underline{L}}}_{1\phi} \Delta \underline{\nabla}_y + \underline{\underline{\underline{M}}}_{1\phi} \Delta \underline{\nabla}_y \right) \right\rangle \\
B_{0ijkl}'^{(2)} &= B_{0kl ij}^{(2)} \underline{\underline{\underline{C}}}_0^{(2)} = \left\langle \underline{\underline{\underline{a}}} : \left(\underline{\underline{\underline{1}}} + \underline{\underline{\underline{L}}}_{1\phi} \Delta \underline{\nabla}_y + \underline{\underline{\underline{M}}}_{1\phi} \Delta \underline{\nabla}_y \right) \right\rangle
\end{aligned} \tag{1.85}$$

Par ailleurs, il peut être défini de manière équivalente par

$${}^t \underline{\underline{\underline{E}}} : \underline{\underline{\underline{A}}}_0^{(2)} : \underline{\underline{\underline{E}}} + 2 \underline{\underline{\underline{G}}} : \underline{\underline{\underline{B}}}_0^{(2)} : \underline{\underline{\underline{E}}} + \underline{\underline{\underline{G}}} : \underline{\underline{\underline{C}}}_0^{(2)} : \underline{\underline{\underline{G}}} = \min_{(\underline{\underline{\underline{e}}}, \underline{\underline{\underline{\kappa}}}) \in \mathcal{CA}_2^0} \mathcal{W}_2(\underline{\underline{\underline{e}}}, \underline{\underline{\underline{\kappa}}}) \tag{1.86}$$

où

$$\mathcal{W}_2(\underline{\underline{\underline{e}}}, \underline{\underline{\underline{\kappa}}}) = \left\langle \left[{}^t \underline{\underline{\underline{e}}} : \underline{\underline{\underline{a}}} : \underline{\underline{\underline{e}}} + 2 {}^t \underline{\underline{\underline{e}}} : \underline{\underline{\underline{b}}}^{(2)} : \underline{\underline{\underline{\kappa}}} + {}^t \underline{\underline{\underline{\kappa}}} : \underline{\underline{\underline{c}}}^{(2)} : \underline{\underline{\underline{\kappa}}} \right] \right\rangle \tag{1.87}$$

et $\mathcal{CA}_2^0(\underline{\underline{E}}, \underline{\underline{G}})$ est l'ensemble des déformations généralisées Y -périodiques construites à partir de mouvements périodiques selon :

$$\mathcal{CA}_2^0(\underline{\underline{E}}, \underline{\underline{G}}) = \left\{ (\underline{e}, \underline{\kappa}) / \exists \underline{u}_{per}, \underline{\phi}_{per} \text{ } Y\text{-périodiques} / \right. \\ \left. \begin{cases} \underline{e} = \underline{\underline{E}} + \underline{u}_{per} \otimes \underline{\nabla} \\ \underline{\kappa} = \underline{\underline{G}} + \underline{\phi}_{per} \otimes \underline{\nabla} \end{cases} \right\}.$$

pour tout $\underline{\underline{E}}, \underline{\underline{G}}$ tenseur d'ordre 2.

Avec ce type de schéma d'homogénéisation, nous préservons le milieu de Cosserat par changement d'échelle, ce qui s'avérerait impossible avec le comportement de la section 1.6.2. Les schémas d'homogénéisation (SH1) et (SH2) ont déjà été mis en œuvre sur des calculs de structures continues hétérogènes [Forest et Sab, 1998].

Quant à la relation entre le comportement homogénéisé au premier ordre des deux schémas d'homogénéisation, on peut établir que la limite, quand λ tend vers l'infini, du comportement homogénéisé (SH1) calculé avec des tenseurs élastiques de la forme

$$\underline{\underline{a}}(\underline{y}) = \underline{\underline{\tilde{a}}}(\underline{y}), \underline{\underline{b}}(\underline{y}) = 0 \text{ et } \underline{\underline{c}}(\underline{y}) = \lambda^2 \underline{\underline{\tilde{c}}}(\underline{y})$$

est égale à la partie de Cauchy du comportement homogénéisé obtenu avec le schéma (SH2) pour les tenseurs :

$$\underline{\underline{a}}(\underline{y}) = \underline{\underline{\tilde{a}}}(\underline{y}), \underline{\underline{b}}^{(2)}(\underline{y}) = 0 \text{ et } \underline{\underline{c}}^{(2)}(\underline{y}) = \underline{\underline{\tilde{c}}}(\underline{y})$$

,soit

$$\forall \underline{\underline{E}}^s \text{ tenseur d'ordre deux symétrique, } \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \underline{\underline{E}}^s : \underline{\underline{A_0}}(\lambda) : \underline{\underline{E}}^s = \underline{\underline{E}}^s : \underline{\underline{A_0^{(2)}}} : \underline{\underline{E}}^s.$$

Autrement dit, lorsque $\underline{\underline{b}}$ est nul, le comportement de Cauchy est le même asymptotiquement, lorsque les raideurs en flexion sont très grandes, quelque soit le schéma d'homogénéisation adopté. Dans le cas discret qui fait l'objet des chapitres suivants, nous avons proposé dans [Pradel et Sab, 1998] un schéma d'homogénéisation que l'on pourrait qualifier de mixte où l'on a retenu un comportement homogénéisé de Cosserat calculé par le schéma (SH2) dans lequel nous avons substitué la forme quadratique $\underline{\underline{E}}^s : \underline{\underline{A_0^{(2)}}} : \underline{\underline{E}}^s$ par la forme quadratique $\underline{\underline{E}}^s : \underline{\underline{A_0}} : \underline{\underline{E}}^s$ calculée par le schéma (SH1).

Chapitre 2

Homogénéisation du grillage

DANS ce chapitre, nous allons substituer un milieu discret par un milieu continu sur un exemple simple : le grillage à motif en croix. Le matériau discret considéré est un assemblage de ressorts que nous décrirons ci-dessous. Les extrémités des ressorts seront nommées particules. Nous allons, dans un premier temps, construire le matériau continu équivalent dans le cadre de l'élasticité linéaire avec l'hypothèse des petites perturbations. Puis, dans un second temps, nous construirons un problème continu équivalent pour le flambement sous une compression uniaxiale d'une bande infinie du grillage.

2.1 Le grillage

Considérons un assemblage périodique de particules reliées entre elles par des ressorts suivant un motif en croix (voir figure 2.2) et se déformant dans le plan. La structure étudiée, Ω , est un carré de côté $h = nl$ où l est la longueur initiale séparant les particules :

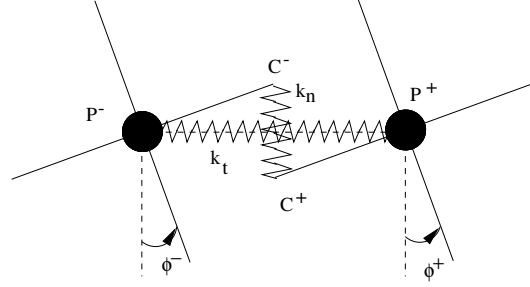
$$\Omega =]0, h[\times]0, h[\subset \mathbb{R}^2.$$

Par commodité d'écriture, les particules sont référencées par deux entiers, i, j , permettant de déterminer leur position dans le plan $(\underline{e}_1, \underline{e}_2)$. Ainsi comme on peut le voir sur la figure 2.2, celle de la particule $P^{i,j}$ est : $\underline{x}^{i,j} = l i \underline{e}_1 + l j \underline{e}_2$. Le déplacement et la rotation de la particule $P^{i,j}$ sont notés :

$$\underline{u}^{i,j} = u^{i,j} \underline{e}_1 + v^{i,j} \underline{e}_2, \quad \underline{\phi}^{i,j} = \phi^{i,j} \underline{e}_3.$$

Entre deux particules connectées $c = (P^-, P^+)$, nous plaçons trois ressorts (un spiral de raideur k_ϕ et deux linéaires de raideurs k_n, k_t) comme illustré sur la figure 2.1. $\underline{t} = \frac{\overrightarrow{P^- P^+}}{l}$, $\underline{n}, \underline{e}_3$ désignent les vecteurs de la base locale

directe du couple c . Les composantes du déplacement et de la rotation (ici un angle orienté) dans les bases locales sont respectivement u_t^+ , u_n^+ et ϕ^+ pour la particule P^+ , et u_t^- , u_n^- , ϕ^- pour la particule P^- . On note δ_t , δ_n , les déplacements relatifs selon $\underline{t}$ et $\underline{n}$ des points $C^- = P^- + \frac{l}{2}\underline{t}$ et $C^+ = P^+ - \frac{l}{2}\underline{t}$ et δ_ϕ désigne la rotation relative.



W W W Ressort linéaire

FIG. 2.1 – Description de l'assemblage de ressorts

Un calcul élémentaire donne :

$$\begin{aligned}\delta_t &= u_t^+ - u_t^- - \frac{l}{2} (\cos(\phi^+) + \cos(\phi^-) - 2) \\ \delta_n &= u_n^+ - u_n^- - \frac{l}{2} (\sin(\phi^+) + \sin(\phi^-)) \\ \delta_\phi &= (\phi^+ - \phi^-)\end{aligned}\quad (2.1)$$

L'énergie élastique du couple c s'écrit :

$$H_c = \frac{k_t}{2} \delta_t^2 + \frac{k_n}{2} \delta_n^2 + \frac{k_\phi}{2} \delta_\phi^2 \quad (2.2)$$

On suppose qu'il n'y a pas de forces ou de moments extérieurs qui s'exercent sur les noeuds intérieurs du grillage. Sur la frontière du carré, $\partial\Omega$, on se donne les déplacements et les rotations $u^{i,j}$, $v^{i,j}$ et $\phi^{i,j}$ de la forme :

$$P^{i,j} \in \partial\Omega, \quad u^{i,j} = h U^d(\underline{x}_\varepsilon^{i,j}), \quad v^{i,j} = h V^d(\underline{x}_\varepsilon^{i,j}), \quad \phi^{i,j} = \Phi^d(\underline{x}_\varepsilon^{i,j}) \quad (2.3)$$

avec

$$\underline{x}_\varepsilon^{i,j} = \frac{\underline{x}^{i,j}}{h} = \frac{\varepsilon \underline{x}^{i,j}}{l}, \quad \text{et } \varepsilon = \frac{1}{n} = \frac{l}{h}.$$

Les champs U^d , V^d , Φ^d sont des fonctions régulières définies sur le bord du carré unité $]0; 1[\times]0; 1[$.

La résolution du problème mécanique ainsi posé revient à trouver les champs cinématiquement admissibles, c'est-à-dire vérifiant (2.3), qui minimisent l'énergie, $\Psi(\Omega)$, de la structure Ω :

$$\Psi(\Omega) = \sum_{c \in \Omega} H_c$$

Dans le cadre de l'analyse en petites perturbations pour un couple de particules c , les variables sont développées au premier ordre suivant ϕ^+ ou ϕ^- .

$$\begin{aligned}\delta_t &\approx u_t^+ - u_t^- \\ \delta_n &\approx u_n^+ - u_n^- - \frac{l}{2}(\phi^+ + \phi^-) \\ \delta_\phi &= (\phi^+ - \phi^-)\end{aligned}$$

Avec cette approximation, l'énergie élastique pour un couple de particule c s'écrit :

$$\begin{aligned}H_c(\underline{U}^-, \phi^-, \underline{U}^+, \phi^+) &= \frac{k_t}{2}(u_t^+ - u_t^-)^2 \\ &+ \frac{k_n}{2}\left(u_n^+ - u_n^- - \frac{l}{2}(\phi^- + \phi^+)\right)^2 \\ &+ \frac{k_\phi}{2}(\phi^+ - \phi^-)^2\end{aligned}\quad (2.4)$$

Les constantes positives k_t , k_n , k_ϕ sont a priori des raideurs de ressort indépendantes les unes des autres. Dans le cadre de l'hypothèse des petites perturbations, l'énergie de déformation de cet assemblage peut être identifiée à celle d'un réseau de poutres d'Euler-Bernoulli encastrées reliant les particules; les constantes des ressorts valent alors

$$k_t = \frac{ES}{l}, \quad k_n = \frac{12EI}{l^3}, \quad k_\phi = \frac{EI}{l}$$

où E , I , S sont, respectivement, le module Young du matériau constituant la poutre, l'inertie et la section de la poutre (voir annexe D). Il est à noter que, dans ce cas, on a :

$$k_\phi = \frac{1}{12}l^2k_n, \quad k_t = \frac{1}{12}\frac{Sl^2}{I}k_n.$$

Considérons la particule $P^{i,j}$ de la structure réelle isolée par le segment pointillé de la figure 2.2. L'énergie, $\Psi(\Omega)$, de la structure, Ω , est partitionnée en une somme :

$$\Psi(\Omega) = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} \Psi_+^{i,j}$$

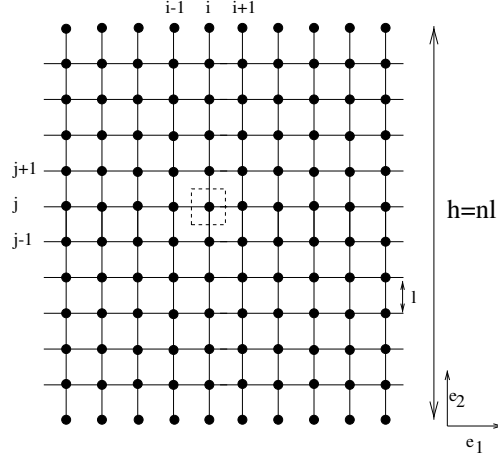


FIG. 2.2 – Description du grillage.

avec

$$\begin{aligned}
 \Psi_+^{i,j} = & \frac{1}{4} \left\{ k_t (v^{i,j+1} - v^{i,j})^2 + k_n \left(u^{i,j} - u^{i,j+1} - \frac{l}{2} (\phi^{i,j+1} + \phi^{i,j}) \right)^2 \right. \\
 & + k_\phi (\phi^{i,j+1} - \phi^{i,j})^2 \\
 & + k_t (v^{i,j} - v^{i,j-1})^2 + k_n \left(u^{i,j-1} - u^{i,j} - \frac{l}{2} (\phi^{i,j} + \phi^{i,j-1}) \right)^2 \\
 & + k_\phi (\phi^{i,j} - \phi^{i,j-1})^2 \\
 & + k_t (u^{i+1,j} - u^{i,j})^2 + k_n \left(v^{i+1,j} - v^{i,j} - \frac{l}{2} (\phi^{i+1,j} + \phi^{i,j}) \right)^2 \\
 & + k_\phi (\phi^{i+1,j} - \phi^{i,j})^2 \\
 & + k_t (u^{i,j} - u^{i-1,j})^2 + k_n \left(v^{i,j} - v^{i-1,j} - \frac{l}{2} (\phi^{i,j} + \phi^{i-1,j}) \right)^2 \\
 & \left. + k_\phi (\phi^{i,j} - \phi^{i-1,j})^2 \right\} \quad (2.5)
 \end{aligned}$$

Par variation première de l'énergie, les équations d'équilibre régissant les

déplacements et les rotations sont :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Psi(\Omega)}{\partial u^{i,j}} &= \frac{\partial \Psi_+^{i,j}}{\partial u^{i,j}} = \\
k_n \left[2 u^{i,j} - u^{i,j+1} - u^{i,j-1} + \frac{l}{2} (\phi^{i,j-1} - \phi^{i,j+1}) \right] &+ k_t [2 u^{i,j} - u^{i-1,j} - u^{i+1,j}] = 0 \\
\\
\frac{\partial \Psi(\Omega)}{\partial v^{i,j}} &= \frac{\partial \Psi_+^{i,j}}{\partial v^{i,j}} = \\
k_n \left[2 v^{i,j} - v^{i+1,j} - v^{i-1,j} + \frac{l}{2} (\phi^{i+1,j} - \phi^{i-1,j}) \right] &+ k_t [2 v^{i,j} - v^{i,j+1} - v^{i,j-1}] = 0 \quad (2.6) \\
\\
\frac{\partial \Psi(\Omega)}{\partial \phi^{i,j}} &= \frac{\partial \Psi_+^{i,j}}{\partial \phi^{i,j}} = \\
k_\phi [4 \phi^{i,j} - \phi^{i+1,j} - \phi^{i-1,j} - \phi^{i,j+1} - \phi^{i,j-1}] & \\
- \frac{l}{2} k_n [-u^{i,j+1} + u^{i,j-1} + v^{i+1,j} - v^{i-1,j}] & \\
- \frac{l^2}{4} k_n [-4 \phi^{i,j} - \phi^{i+1,j} - \phi^{i-1,j} - \phi^{i,j-1} - \phi^{i,j+1}] &= 0
\end{aligned}$$

2.2 Méthodes existantes

Ce type de matériau discret a déjà fait l'objet d'études afin d'obtenir un milieu continu de Cosserat équivalent. Ainsi une première méthode [Banks et Sokolowski, 1968] [Sulem et Mühlhaus, 1997] consiste à

- faire l'hypothèse que les champs discrets $u^{i,j}$, $v^{i,j}$, $\phi^{i,j}$ sont la trace de champs continus de classe C^2 , U , V , Φ définis sur Ω :

$$u^{i,j} = U(\underline{\mathbf{x}}^{i,j}), \quad v^{i,j} = V(\underline{\mathbf{x}}^{i,j}), \quad \phi^{i,j} = \Phi(\underline{\mathbf{x}}^{i,j}),$$

- puis à substituer dans (2.6) les champs discrets par les champs continus avec un développement de Taylor à l'ordre 2 autour de $\underline{\mathbf{x}}^{i,j}$ de ces champs.

Pratiquement, cela se traduit pour une fonction f quelconque par :

$$\begin{aligned}
f(\underline{\mathbf{x}}^{i',j'}) &\approx f(\underline{\mathbf{x}}^{i,j}) + f \otimes \underline{\nabla}(\underline{\mathbf{x}}^{i,j}) \cdot (\underline{\mathbf{x}}^{i',j'} - \underline{\mathbf{x}}^{i,j}) \\
&+ \frac{1}{2} f \otimes \underline{\nabla} \otimes \underline{\nabla}(\underline{\mathbf{x}}^{i,j}) : (\underline{\mathbf{x}}^{i',j'} - \underline{\mathbf{x}}^{i,j}) \otimes (\underline{\mathbf{x}}^{i',j'} - \underline{\mathbf{x}}^{i,j})
\end{aligned}$$

Les équations d'équilibre (2.6) se transforment alors en des équations continues :

$$\begin{aligned}
k_t U_{,11} + k_n U_{,22} + k_n \Phi_{,2} &= 0 \\
k_n V_{,11} + k_t V_{,22} - k_n \Phi_{,1} &= 0 \\
k_n (V_{,1} - U_{,2}) - 2k_n \Phi + k_\nu (\Phi_{,11} + \Phi_{,22}) &= 0 \\
\text{avec } k_\nu &= \left(k_\phi - \frac{k_n l^2}{4} \right)
\end{aligned} \tag{2.7}$$

On reconnaît la forme des équations d'équilibre d'un milieu de Cosserat en déformation plane dans lesquelles on a injecté le comportement. On a, en effet, le comportement reliant les contraintes généralisées aux déformations généralisées :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{21} \\ \nu_{31} \\ \nu_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_\nu \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_{,1} \\ V_{,2} \\ U_{,2} + \Phi \\ V_{,1} - \Phi \\ \Phi_{,1} \\ \Phi_{,2} \end{bmatrix}$$

Les équations d'équilibre, pour les milieux de Cosserat en déformations planes, sont :

$$\begin{aligned}
\sigma_{11,1} + \sigma_{12,2} &= 0 \\
\sigma_{21,1} + \sigma_{22,2} &= 0 \\
\nu_{31,1} + \nu_{32,2} + \sigma_{12} - \sigma_{21} &= 0
\end{aligned}$$

Cependant, si k_ν est négatif, le comportement n'est plus défini positif. Cela pose un problème d'incohérence car le matériau n'est plus stable avec un tel comportement. En particulier pour des valeurs k_t , k_n , k_ϕ correspondant à un réseau de poutres de type d'Euler-Bernoulli, k_ν est négatif.

Une méthode alternative existe, elle consiste toujours à substituer la cinématique discrète par une cinématique continue, puis à injecter des développements de Taylor de la cinématique continue en fonction de la position des particules mais, cette fois-ci, d'ordre 1 et directement dans l'énergie. Askar [Askar et Cakmak, 1968] a utilisé cette méthode pour construire un milieu continu à partir d'un motif discret mono-atomique en forme d'étoile (voir figure 2.3). Plus récemment Kim [Kim, 1983] a tenté de systématiser cette méthode. On obtient les équations d'équilibre continues en effectuant une variation première sur la densité d'énergie ainsi créée. Pour le calcul de la partition élémentaire d'énergie, on peut retenir le motif en croix déjà utilisé pour écrire (2.5) où l'énergie de chaque couple du motif est comptée une

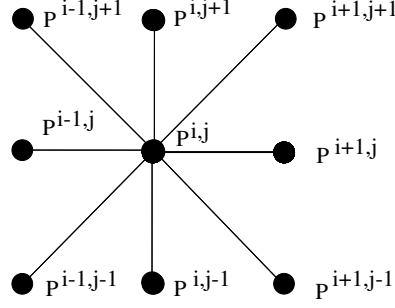


FIG. 2.3 – Motif d'assemblage en étoile.

demi-fois (voir la figure 2.4). Une fois injectés les développements de Taylor à l'ordre 1 dans l'énergie (2.5), on approche la densité continue sur le motif retenu par :

$$\begin{aligned} \Psi_+^{i,j} \approx & \frac{1}{2} \left\{ k_t V_{,2}^2 + k_t U_{,1}^2 + 2k_\phi (\Phi_{,1}^2 + \Phi_{,2}^2) \right. \\ & + k_n \left(U_{,2} + \Phi + \frac{l}{2} \Phi_{,2} \right)^2 + k_n \left(U_{,2} + \Phi - \frac{l}{2} \Phi_{,2} \right)^2 \\ & \left. + k_n \left(V_{,1} - \Phi + \frac{l}{2} \Phi_{,1} \right)^2 + k_n \left(V_{,1} - \Phi - \frac{l}{2} \Phi_{,1} \right)^2 \right\} \end{aligned}$$

On calcule alors la variation première sur cette nouvelle densité d'énergie et on obtient les équations d'équilibre, soit :

$$\begin{aligned} k_t U_{,11} + k_n U_{,22} + k_n \Phi_{,2} &= 0 \\ k_n V_{,11} + k_t V_{,22} - k_n \Phi_{,1} &= 0 \\ k_n (V_{,1} - U_{,2}) - 2k_n \Phi + k'_\nu (\Phi_{,11} + \Phi_{,22}) &= 0 \end{aligned} \tag{2.8}$$

avec $k'_\nu = k_\phi + \frac{k_n l^2}{4}$

On reconnaît le même système que (2.7), mais où $k'_\nu = k_\phi + \frac{k_n l^2}{4} \geq 0$ au lieu de $k_\phi - \frac{k_n l^2}{4}$. Ici, et contrairement à la méthode précédente, le matériau est stable puisque son comportement est bien défini positif. Cependant, le choix du découpage du matériau discret pour construire la partition d'énergie n'est pas unique. Si, par exemple, nous prenons pour la partition énergétique le découpage en L décrit sur la figure 2.4, nous obtenons une partition d'énergie

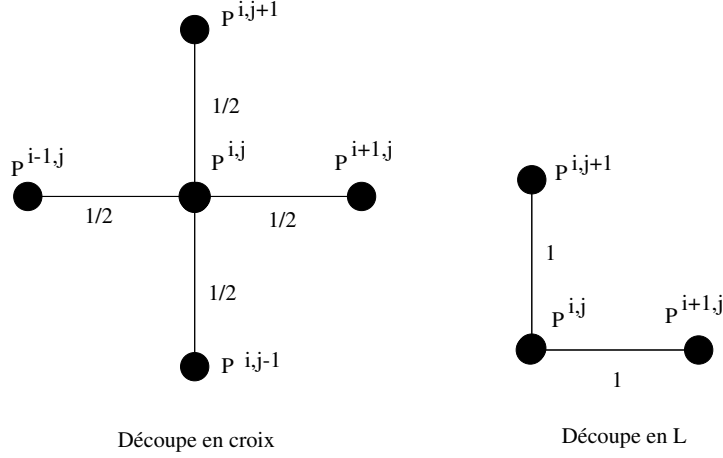


FIG. 2.4 – Deux découpages élémentaires énergétiques du grillage

équivalente :

$$\begin{aligned}
 \Psi_L^{i,j} = & \frac{1}{2} \left\{ k_t (v^{i,j+1} - v^{i,j})^2 + k_n \left(u^{i,j} - u^{i,j+1} - \frac{l}{2} (\phi^{i,j+1} + \phi^{i,j}) \right)^2 \right. \\
 & + k_\phi (\phi^{i,j+1} - \phi^{i,j})^2 \\
 & + k_t (u^{i+1,j} - u^{i,j})^2 + k_n \left(v^{i+1,j} - v^{i,j} - \frac{l}{2} (\phi^{i+1,j} + \phi^{i,j}) \right)^2 \\
 & \left. + k_\phi (\phi^{i+1,j} - \phi^{i,j})^2 \right\} \quad (2.9)
 \end{aligned}$$

avec

$$\Psi(\Omega) = \sum_i \sum_j \Psi_+^{i,j} = \sum_i \sum_j \Psi_L^{i,j}.$$

En remplaçant les développements de Taylor à l'ordre 1 des champs continus dans (2.9), on aboutit, après dérivation, aux équations d'équilibre suivantes :

$$\begin{aligned}
 k_t U_{,11} + k_n U_{,22} + k_n \Phi_{,2} &= 0 \\
 k_n V_{,11} + k_t V_{,22} - k_n \Phi_{,1} &= 0 \\
 k_n (V_{,1} - U_{,2}) - 2k_n \Phi + k_\phi (\Phi_{,11} + \Phi_{,22}) + k_n l^2 (\Phi_{,22} - \Phi_{,11}) &= 0
 \end{aligned} \quad (2.10)$$

Il est clair que ce nouveau système (2.10) n'est pas équivalent au premier (2.8). On obtient donc un résultat intrigant, à savoir, que le choix du modélisateur, concernant la partition énergétique du solide, ne donne pas les mêmes équations d'équilibre (voir les équations (2.8) et (2.10)), et par là, des comportements différents pour un même matériau. Cette méthode est clairement non objective par rapport à la partition énergétique du matériau.

2.3 La méthode proposée

Même si par la suite nous voulons utiliser des développements de Taylor dans notre approche, nous allons auparavant effectuer une étape d'adimensionnement afin de pouvoir comparer les différents champs cinématiques impliqués. En effet, pour pouvoir comparer les champs continus, ils doivent être indépendant de l ou ε . Ils ne doivent pas être liés par leur définition au problème mécanique étudié. Dans les approches précédentes, les champs, sur lesquels les développements de Taylor étaient effectués, étaient propre au problème mécanique étudié. Ainsi, en changeant, par exemple, la taille de la géométrie de la structure sollicitée, la définition des champs cinématiques changeaient rendant impossible la comparaison avec des champs issus d'un problème de taille différente. Pour pouvoir comparer des problèmes différents, il est nécessaire d'effectuer un changement de variable qui les ramène tous à une même géométrie homothétique fixe. C'est sur cette dernière que l'on comparera les champs cinématiques associés aux divers problèmes. Pour se ramener sur une géométrie fixe, on s'appuie sur une procédure d'adimensionnement des champs cinématiques et de la géométrie du problème réel. Une telle démarche a déjà fait l'objet de travaux comme ceux de Caillerie et de son équipe [Caillerie *et Al.*, 1989], [Verna, 1991], [Tollenaere et Caillerie, 1998], où l'énergie des couples de particules ne fait pas intervenir les rotations relatives (cas des treillis de barres rotulées) ou encore de Sab [Sab, 1996] qui en l'appliquant aux milieux granulaires n'a pas pris en compte les variations de rotations. Il existe même une extension à l'élasto-plasticité sur des treillis de barres rotulées [Bonnetier, 1995]. Sur des exemples plus proches de la Physique, Kozlov [Kozlov, 1987] a appliqué cette approche au cas de l'homogénéisation d'un réseau de résistances électriques aléatoires. Avant d'étudier l'adimensionnement du grillage, il faut citer un autre type d'approche [Bakhvalov et Panasenko, 1989], [Cioranescu et Saint Jean Paulin, 1986], qui plutôt que de partir d'un milieu discret reste avec un milieu continu classique fortement perforé, on procède donc à leur homogénéisation sur le milieu continu paramétré par la taille de perforation. Par passage à la limite sur cette perforation, on obtient le milieu homogénéisé. Mais revenons à notre étape d'adimensionnement, elle consiste à écrire :

$$\begin{aligned} \forall i, j, \quad & \underline{\mathbf{u}}^{i,j} = h \underline{\mathbf{u}}_\varepsilon^{i,j} \\ & \phi^{i,j} = \phi_\varepsilon^{i,j} \\ \text{avec} \quad & \varepsilon = \frac{1}{n} = \frac{l}{h} \end{aligned} \tag{2.11}$$

On substitue ces nouvelles valeurs dans le système d'équations linéaires et il vient :

– en force, sur la composante 1,

$$k_n \left[2 u_\varepsilon^{i,j} - u_\varepsilon^{i,j+1} - u_\varepsilon^{i,j-1} + \frac{\varepsilon}{2} (\phi_\varepsilon^{i,j-1} - \phi_\varepsilon^{i,j+1}) \right] + k_t \left[2 u_\varepsilon^{i,j} - u_\varepsilon^{i-1,j} - u_\varepsilon^{i+1,j} \right] = 0 \quad (2.12)$$

– en force, sur la composante 2,

$$k_n \left[2 v_\varepsilon^{i,j} - v_\varepsilon^{i+1,j} - v_\varepsilon^{i-1,j} + \frac{\varepsilon}{2} (\phi_\varepsilon^{i+1,j} - \phi_\varepsilon^{i-1,j}) \right] + k_t \left[2 v_\varepsilon^{i,j} - v_\varepsilon^{i,j+1} - v_\varepsilon^{i,j-1} \right] = 0 \quad (2.13)$$

– en moment,

$$\begin{aligned} & -\frac{\varepsilon^2 k_\phi}{l^2} [4 \phi_\varepsilon^{i,j} - \phi_\varepsilon^{i+1,j} - \phi_\varepsilon^{i-1,j} - \phi_\varepsilon^{i,j+1} - \phi_\varepsilon^{i,j-1}] \\ & + \varepsilon \frac{1}{2} k_n [-u_\varepsilon^{i,j+1} + u_\varepsilon^{i,j-1} + v_\varepsilon^{i+1,j} - v_\varepsilon^{i-1,j}] \\ & + \varepsilon^2 \frac{1}{4} k_n [-4 \phi_\varepsilon^{i,j} - \phi_\varepsilon^{i+1,j} - \phi_\varepsilon^{i-1,j} - \phi_\varepsilon^{i,j-1} - \phi_\varepsilon^{i,j+1}] \\ & = 0 \end{aligned} \quad (2.14)$$

avec les conditions aux limites pour les particules $P^{i,j}$ sur la frontière :

$$u_\varepsilon^{i,j} = U^d(\underline{\mathbf{x}}_\varepsilon^{i,j}), \quad v_\varepsilon^{i,j} = V^d(\underline{\mathbf{x}}_\varepsilon^{i,j}), \quad \phi_\varepsilon^{i,j} = \Phi^d(\underline{\mathbf{x}}_\varepsilon^{i,j}). \quad (2.15)$$

On s'intéresse à la limite lorsque le rapport ε tend vers 0. En effet, c'est pour les ε suffisamment petits qu'on peut espérer remplacer pertinamment le problème discret (2.12)- (2.15) par un problème continu. ε apparaît alors comme un paramètre de discrétisation. On obtient une suite de problèmes indicés par ε , tous définis sur la géométrie fixe, Ω^* , du carré unité.

La démarche d'identification stipule que, pour tout rapport de taille ε , les champs discrets du problème en ε sont la trace de champs, $\underline{\mathbf{U}}$, $\underline{\Phi}$, continus, indépendants de ε , définis sur la géométrie fixe, Ω^* . On a donc :

$$\forall \varepsilon \in]0; 1], \forall i, j, \quad \underline{\mathbf{u}}_\varepsilon^{i,j} = \underline{\mathbf{U}}(\underline{\mathbf{x}}_\varepsilon^{i,j}), \quad \phi_\varepsilon^{i,j} = \Phi(\underline{\mathbf{x}}_\varepsilon^{i,j}) \quad (2.16)$$

De plus, U , V , Φ ainsi que tous leurs gradients étant adimensionnels, l'échelle d'ordre d'approximation des champs discrets est en ε . On va donc estimer à l'ordre ε^n près, les membres de gauche des équations d'équilibre (2.12)-(2.14) par l'utilisation de développement de Taylor sur U , V , Φ à des ordres assurant la cohérence des équations d'équilibre.

Ainsi, on peut écrire, par exemple à l'ordre 4 en ε :

$$u_\varepsilon^{i,j\pm 1} = U \pm \varepsilon U_{,2} + \frac{\varepsilon^2}{2} U_{,22} \pm \frac{\varepsilon^3}{6} U_{,222} + \frac{\varepsilon^4}{24} U_{,2222} + o(\varepsilon^4) \quad (2.17)$$

où les valeurs de U et de toutes ses dérivées sont prises en $\underline{\mathbf{x}}_\varepsilon^{i,j}$.

La non-dépendance des champs continus par rapport à ε permet de comparer tous les termes d'une suite de champs entre eux.

Dans un premier temps, considérons la suite de problèmes (2.12)-(2.15) indicés par ε avec l'hypothèse que les grandeurs

$$\frac{k_\phi}{l^2} = k_\phi^{*(1)}, k_n^* = k_n, k_t^* = k_t$$

sont indépendants de ε . Cette hypothèse notée (SH1) traduit une suite de problèmes sur des carrés de taille $h = nl$ tendant vers l'infini, avec les grandeurs l, k_ϕ, k_n, k_t indépendantes de h .

Dans le schéma (SH1), en utilisant des développements de Taylor à l'ordre 4 de type (2.17), on obtient les équations suivantes valables à l'ordre 2 en ε sur Ω^* .

$$k_n^* (U_{,22} + \Phi_{,2}) + k_t^* U_{,11} + \varepsilon^2 \left[k_n^* \left(\frac{\Phi_{,222}}{6} + \frac{U_{,2222}}{12} \right) + \frac{k_t^* U_{,1111}}{12} \right] = 0 \quad (2.18)$$

$$k_n^* (V_{,11} - \Phi_{,1}) + k_t^* V_{,22} + \varepsilon^2 \left[k_n^* \left(-\frac{\Phi_{,111}}{6} + \frac{V_{,1111}}{12} \right) + \frac{k_t^* V_{,2222}}{12} \right] = 0 \quad (2.19)$$

et

$$\varepsilon^2 \left[-k_\phi^{*(1)} (\Phi_{,11} + \Phi_{,22}) + k_n^* \left(\frac{U_{,222} - V_{,111}}{6} + \frac{\Phi_{,11} + \Phi_{,22}}{4} \right) \right] + k_n^* (U_{,2} - V_{,1} + 2\Phi) = 0 \quad (2.20)$$

avec les conditions aux limites :

$$\text{sur } \partial\Omega^*, U = U^d, V = V^d, \Phi = \Phi^d \quad (2.21)$$

équilibres (H.P.P.) suivant le schéma d'homogénéisation (SH1)

Si maintenant on prend le schéma d'homogénéisation (SH2), il s'agit d'un schéma où les raideurs liées à la variation de rotation augmente lorsque l'on augmente la taille de la structure réelle. C'est à dire qu'en même temps, que la taille de la structure réelle augmente, le matériau se rigidifie en flexion. Pour ce schéma (SH2), on suppose que les grandeurs

$$k_\phi^{*(2)} = \frac{k_\phi}{h^2}, k_n^* = k_n, k_t^* = k_t$$

sont indépendantes de ε . Dans ce cas, les équilibres, obtenus sur Ω^* , sont tous calculs faits à l'ordre 2 :

$$k_n^* (U_{,22} + \Phi_{,2}) + k_t^* U_{,11} + \varepsilon^2 \left[k_n^* \left(\frac{\Phi_{,222}}{6} + \frac{U_{,2222}}{12} \right) + \frac{k_t^* U_{,1111}}{12} \right] = 0 \quad (2.22)$$

$$k_n^* (V_{,11} - \Phi_{,1}) + k_t^* V_{,22} + \varepsilon^2 \left[k_n^* \left(-\frac{\Phi_{,111}}{6} + \frac{V_{,1111}}{12} \right) + \frac{k_t^* V_{,2222}}{12} \right] = 0 \quad (2.23)$$

et

$$\varepsilon^2 \left[-\frac{k_\phi^{*(2)}}{12} (\Phi_{,1111} + \Phi_{,2222}) + k_n^* \left(\frac{U_{,222} - V_{,111}}{6} + \frac{\Phi_{,11} + \Phi_{,22}}{4} \right) \right] - k_\phi^{*(2)} (\Phi_{,11} + \Phi_{,22}) + k_n^* (U_{,2} - V_{,1} + 2\Phi) = 0 \quad (2.24)$$

avec les conditions aux limites :

$$\text{sur } \partial\Omega^*, U = U^d, V = V^d, \Phi = \Phi^d \quad (2.25)$$

équilibres (H.P.P.) suivant le schéma d'homogénéisation (SH2)

Il est à noter que les grandeurs $k_\phi^{*(1)}$, $k_\phi^{*(2)}$, k_n^* , k_t^* ont toutes la dimension d'une force divisée par une longueur. Le milieu homogénéisé selon le schéma (SH1) (resp : (SH2)) sera une bonne modélisation d'un problème réel donné où ε est petit si $k_\phi^{*(1)}$ (resp : $k_\phi^{*(2)}$) est du même ordre que k_n^* et k_t^* . Dans le cas des poutres d'Euler-Bernoulli, nous savons que $k_\phi^{*(1)} = \frac{k_n^*}{12}$ et $k_\phi^{*(2)} = \frac{k_n^*}{12n^2}$ le choix du schéma (SH1) s'impose naturellement.

Ainsi s'achève l'obtention des équations continues associées au grillage de ressorts suivant deux schémas d'homogénéisation différents.

2.4 Développement asymptotiques

La résolution de ces équations peut se faire de manière directe. Cependant, on peut se ramener à une suite de problème en cascade de problème plus simple, en introduisant les développements asymptotiques de la solution recherchée :

$$\begin{aligned} \underline{U} &= \underline{U}_0 + \varepsilon \underline{U}_1 + \varepsilon^2 \underline{U}_2 + o(\varepsilon^2) \\ \underline{\Phi} &= \underline{\Phi}_0 + \varepsilon \underline{\Phi}_1 + \varepsilon^2 \underline{\Phi}_2 + o(\varepsilon^2) \end{aligned} \quad (2.26)$$

On les injecte dans le système d'équations différentielles constitué du schéma étudié (SH1) ou (SH2), puis on annule ordre par ordre les équations obtenues. On obtient de cette façon les termes à chaque ordre de la solution cherchée. Comme le système d'équation différentielle est une approximation à l'ordre ε^2 , nous ne pouvons pas dépasser l'ordre ε^2 pour les développements asymptotiques afin d'assurer la cohérence de la méthode. On obtient les systèmes d'équations aux dérivées partielles, avec les développements de Taylor à l'ordre 4 pour les champs asymptotiques de plus bas niveau ($\underline{U}_0$ et Φ_0), puis d'ordre trois pour les suivants ($\underline{U}_1$ et Φ_1) et enfin d'ordre 2 pour ceux les plus élevés ($\underline{U}_2$ et Φ_2). En regroupant les termes de mêmes ordre, on fait apparaître autant de systèmes que d'équations d'équilibre.

Pour le schéma (SH1), on reprend donc les équations (2.18) à (2.21) :

- pour la détermination de U_0 , V_0 et Φ_0 ,

$$\begin{aligned} k_n^* U_{0,22} + k_t^* U_{0,11} + k_n^* \Phi_{0,2} &= 0 \\ k_t^* V_{0,22} + k_n^* V_{0,11} - k_n^* \Phi_{0,1} &= 0 \\ \Phi_0 &= \frac{V_{0,1} - U_{0,2}}{2} \\ \text{avec sur } \partial\Omega^*, U_0 &= U^d, V_0 = V^d, \Phi_0 = \Phi^d \end{aligned} \quad (2.27)$$

- pour la détermination de U_1 , V_1 et Φ_1 ,

$$\begin{aligned} k_n^* U_{1,22} + k_t^* U_{1,11} + k_n^* \Phi_{1,2} &= 0 \\ k_t^* V_{1,22} + k_n^* V_{1,11} - k_n^* \Phi_{1,1} &= 0 \\ \Phi_1 &= \frac{V_{1,1} - U_{1,2}}{2} \\ \text{avec sur } \partial\Omega^*, U_1 &= 0, V_1 = 0, \Phi_1 = 0 \end{aligned} \quad (2.28)$$

on retrouve, aux conditions au limites près, le même système que pour U_0 , V_0 et Φ_0 .

- et enfin pour la détermination de U_2 , V_2 et Φ_2 ,

$$\begin{aligned} k_n^* \left(U_{2,22} + \frac{U_{0,2222}}{12} \right) + k_t^* \left(U_{2,11} + \frac{U_{0,1111}}{12} \right) \\ + k_n^* \left(\Phi_{2,2} + \frac{1}{6} \Phi_{0,222} \right) &= 0 \\ k_t^* \left(V_{2,22} + \frac{V_{0,2222}}{12} \right) + k_n^* \left(V_{2,11} + \frac{V_{0,1111}}{12} \right) \\ - k_n^* \left(\Phi_{2,1} + \frac{1}{6} \Phi_{0,111} \right) &= 0 \\ \Phi_2 &= \frac{V_{2,1} - U_{2,2}}{2} + \left(\frac{k_\Phi^{*(1)}}{2k_n^*} - \frac{1}{8} \right) (\Phi_{0,11} + \Phi_{0,22}) \\ + \frac{1}{12} (V_{0,111} - U_{0,222}) &= 0 \\ \text{avec sur } \partial\Omega^*, U_2 &= 0, V_2 = 0, \Phi_2 = 0 \end{aligned} \quad (2.29)$$

On constate que la rotation ne dépasse pas l'échelle microscopique vu qu'à l'échelle macroscopique elle est systématiquement fonction des gradients de translation. On peut donc substituer la rotation à chaque ordre, pour retrouver un milieu de Cauchy. Cette réécriture donne alors la suite de systèmes :

- pour la détermination de U_0 et V_0 ,

$$\begin{aligned} k_t^* U_{0,11} + \frac{k_n^*}{2} U_{0,22} + \frac{k_n^*}{2} V_{0,12} &= 0 \\ k_t^* V_{0,22} + \frac{k_n^*}{2} V_{0,11} + \frac{k_n^*}{2} U_{0,21} &= 0 \end{aligned} \quad (2.30)$$

$$\text{avec sur } \partial\Omega^*, U_0 = U^d, V_0 = V^d$$

- pour la détermination de U_1 et V_1 ,

$$\begin{aligned} k_t^* U_{1,11} + \frac{k_n^*}{2} U_{1,22} + \frac{k_n^*}{2} V_{1,12} &= 0 \\ k_t^* V_{1,22} + \frac{k_n^*}{2} V_{1,11} + \frac{k_n^*}{2} U_{1,21} &= 0 \end{aligned} \quad (2.31)$$

$$\text{avec sur } \partial\Omega^*, U_1 = 0, V_1 = 0$$

- et enfin pour la détermination de U_2 , V_2 et Φ_2 ,

$$\begin{aligned} k_t^* U_{2,11} + \frac{k_n^*}{2} U_{2,22} + \frac{k_n^*}{2} V_{2,12} &= \\ - \left[k_n^* \left(\frac{k_\phi^*}{4k_n^*} + \frac{1}{48} \right) (V_{0,1222} + V_{0,1112} - U_{0,2222}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{k_t^*}{12} U_{0,1111} - k_n^* \left(\frac{k_\phi^*}{4k_n^*} - \frac{1}{16} \right) U_{0,2112} \right] \\ k_t^* V_{2,22} + \frac{k_n^*}{2} V_{2,11} + \frac{k_n^*}{2} U_{2,21} &= \\ - \left[k_n^* \left(\frac{k_\phi^*}{4k_n^*} + \frac{1}{48} \right) (U_{0,2111} + U_{0,2221} - V_{0,1111}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{k_t^*}{12} V_{0,2222} - k_n^* \left(\frac{k_\phi^*}{4k_n^*} - \frac{1}{16} \right) V_{0,1221} \right] \end{aligned} \quad (2.32)$$

$$\text{avec sur } \partial\Omega^*, U_2 = 0, V_2 = 0$$

Notons que les systèmes (2.30)-(2.32) sont des problèmes d'élasticité linéaire

classique en cascade puisqu'ils sont de la forme :

$$\begin{aligned} i = 0, 1, 2 \quad L^{-2} \begin{pmatrix} U_i \\ V_i \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} F_i^u \\ F_i^v \end{bmatrix} \\ U_i &= U_i^d, V_i = V_i^d \text{ sur } \partial\Omega^* \end{aligned} \quad (2.33)$$

où

$$L^{-2} \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} k_t^* U_{,11} + \frac{k_n^*}{2} (U_{,22} + V_{,12}) \\ k_t^* V_{,22} + \frac{k_n^*}{2} (U_{,21} + V_{,11}) \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

avec

$$\begin{aligned} i = 0, 1 \quad \begin{bmatrix} F_i^u \\ F_i^v \end{bmatrix} &= 0 \\ \begin{bmatrix} F_2^u \\ F_2^v \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\left[k_n^* \left(\frac{k_\phi^*}{4k_n^*} + \frac{1}{48} \right) (V_{0,1222} + V_{0,1112} - U_{0,2222}) \right. \\ \left. + \frac{k_t^*}{12} U_{0,1111} - k_n^* \left(\frac{k_\phi^*}{4k_n^*} - \frac{1}{16} \right) U_{0,2112} \right] \\ -\left[k_n^* \left(\frac{k_\phi^*}{4k_n^*} + \frac{1}{48} \right) (U_{0,2111} + U_{0,2221} - V_{0,1111}) \right. \\ \left. + \frac{k_t^*}{12} V_{0,2222} - k_n^* \left(\frac{k_\phi^*}{4k_n^*} - \frac{1}{16} \right) V_{0,1221} \right] \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.35)$$

et

$$\begin{bmatrix} U_0^d \\ V_0^d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U^d \\ V^d \end{bmatrix}, \text{ et } \begin{bmatrix} U_i^d \\ V_i^d \end{bmatrix} = 0, i = 1, 2 \quad (2.36)$$

On peut donc exprimer théoriquement les champs solution de (2.30) à (2.32) notés $U_0^s, V_0^s, U_1^s, V_1^s, U_2^s, V_2^s$ en fonction des données au bord U^d et V^d . En utilisant les expressions explicites de Φ_0, Φ_1, Φ_2 en fonction des champs $\underline{U}_0, \underline{U}_1, \underline{U}_2$ et de leurs gradients, on peut théoriquement exprimer les solutions de (2.27) à (2.29), $\Phi_0^s, \Phi_1^s, \Phi_2^s$ en fonction de U^d et V^d .

Par ailleurs, notant $\underline{U}^s = \underline{U}_0^s + \varepsilon \underline{U}_1^s + \varepsilon^2 \underline{U}_2^s$, $\underline{\Phi}^s = \underline{\Phi}_0^s + \varepsilon \underline{\Phi}_1^s + \varepsilon^2 \underline{\Phi}_2^s$, la solution à l'ordre ε^2 de (2.18) à (2.21) et sommant les équations (2.30) à (2.32), on trouve le système suivant du type élasticité linéaire au troisième

gradient de $\underline{U}$:

$$\begin{aligned}
& \frac{k_n^*}{2} U_{,22}^s + k_t^* U_{,11}^s + \frac{k_n^*}{2} V_{,12}^s \\
& + k_n^* \left(\frac{k_\phi^{*(1)}}{4k_n^*} + \frac{1}{48} \right) (V_{,1222}^s + V_{,1112}^s - U_{,2222}^s) + \frac{k_t^*}{12} U_{,1111}^s \\
& - k_n^* \left(\frac{k_\phi^{*(1)}}{4k_n^*} - \frac{1}{16} \right) U_{,2112}^s = 0 \\
& \frac{k_n^*}{2} V_{,11}^s + k_t^* V_{,22}^s + \frac{k_n^*}{2} U_{,21}^s \\
& + k_n^* \left(\frac{k_\phi^{*(1)}}{4k_n^*} + \frac{1}{48} \right) (U_{,2111}^s + U_{,2221}^s - V_{,1111}^s) + \frac{k_t^*}{12} V_{,2222}^s \\
& - k_n^* \left(\frac{k_\phi^{*(1)}}{4k_n^*} - \frac{1}{16} \right) V_{,1221}^s = 0
\end{aligned} \tag{2.37}$$

avec sur $\partial\Omega^*$, $U^s = U^d$, $V^s = V^d$.

Cependant, un problème apparaît clairement pour vérifier les conditions aux limites en rotation car, a priori, $\Phi^s \neq \Phi^d$ sur $\partial\Omega^*$. Nous sommes en présence d'un effet de bord.

Quant au schéma (SH2), on reprend les équations (2.22) à (2.25) en y injectant (2.26). On trouve pour la détermination de U_0 , V_0 et Φ_0 sur Ω^* le système suivant :

$$\begin{aligned}
k_t^* U_{0,11} + k_n^* U_{0,22} + k_n^* \Phi_{0,2} &= 0 \\
k_n^* V_{0,11} + k_t^* V_{0,22} - k_n^* \Phi_{0,1} &= 0 \\
k_n^* (V_{0,1} - U_{0,2}) - 2k_n^* \Phi_0 + k_\nu (\Phi_{0,11} + \Phi_{0,22}) &= 0
\end{aligned} \tag{2.38}$$

avec $k_\nu = k_\phi^{*(2)}$ et sur $\partial\Omega^*$, $U_0 = U^d$, $V_0 = V^d$, $\Phi_0 = \Phi^d$.

On reconnaît dans (2.38) les équations d'un milieu de Cosserat linéaire élastique en déformation plane identique à (2.7) avec $k_\nu = k_\phi^{*(2)} > 0$. Cette fois, le milieu de Cosserat a traversé le changement d'échelle, la rotation existe toujours au niveau macroscopique dans le schéma d'homogénéisation (SH2). Par ailleurs, il n'y a pas, a priori, d'incompatibilité sur les conditions aux limites.

2.5 Effets de bords

Nous venons de construire deux types de milieu continu en partant d'un milieu discret orienté. Nous avons obtenu les équations d'équilibre et le com-

portement macroscopique à l'intérieur de la structure. La validité de ces équations s'arrête à l'approche du bord où on a une rupture de périodicité. Nous avons déjà pu mettre en avant cette incompatibilité dans le cas du schéma (SH1). Puisque le schéma d'homogénéisation (SH2) préserve un milieu de Cosserat au niveau macroscopique, les développements asymptotiques restent valables sur le bord. Quant au schéma (SH1), un problème se pose. Le changement d'échelle fait disparaître l'orientation qui est directement reliée à la cinématique de translation. A priori, les champs homogénéisés ne peuvent pas respecter rigoureusement les conditions aux limites en rotation. Il est clair que l'approche du bord de la structure fait perdre la périodicité de la matière (et donc de la cinématique) dans la direction perpendiculaire à la surface de la structure.

Afin de corriger les champs homogénéisés près du bord, on postule la forme de la cinématique comme la somme du champ homogénéisé et d'un champ évanescent suivant la direction perpendiculaire au bord le plus proche. En ce sens, on s'inspire des travaux de Dumontet [Dumontet, 1990] sur les effets de bord des milieux continus pour donner la forme des champs à décroissance rapide que nous particularisons aux matériaux discrets. On va supposer les champs discrets évanescents issus de la trace de champs continus. Nous allons présenter la construction des champs correcteurs près du bord de la solution U_0^s, V_0^s, Φ_0^s d'ordre ε^0 . En réalité, il est possible d'associer un champ correcteur de U_i^s, V_i^s, Φ_i^s , à chaque ordre ε^i . En prenant ici le bord situé en $x_2 = 0$, on a donc la relation (2.16) qui devient :

$$\begin{aligned} u_\varepsilon^{i,j} &= U_0^s(\underline{\mathbf{x}}_\varepsilon^{i,j}) + \varepsilon u_{0\text{C.L.}}^j\left(\frac{i}{n}\right) \\ v_\varepsilon^{i,j} &= V_0^s(\underline{\mathbf{x}}_\varepsilon^{i,j}) + \varepsilon v_{0\text{C.L.}}^j\left(\frac{i}{n}\right) \\ \phi_\varepsilon^{i,j} &= \Phi_0^s(\underline{\mathbf{x}}_\varepsilon^{i,j}) + \phi_{0\text{C.L.}}^j\left(\frac{i}{n}\right) \end{aligned} \quad (2.39)$$

où $u_{0\text{C.L.}}^j, v_{0\text{C.L.}}^j, \phi_{0\text{C.L.}}^j$ sont des champs réguliers de la variable x_1 définis sur le segment $[0; 1]$, $\Phi_0^s = \frac{1}{2}(V_{0,1}^s - U_{0,2}^s)$ et U_0^s, V_0^s sont les solutions de (2.30).

Les conditions aux limites près du bord $x_2 = 0$ s'écrivent alors :

$$\begin{aligned} \varepsilon u_{0\text{C.L.}}^0\left(\frac{i}{n}\right) &= U^d(\underline{\mathbf{x}}_\varepsilon^{i,0}) - U_0^s(\underline{\mathbf{x}}_\varepsilon^{i,0}) = 0 \\ \varepsilon v_{0\text{C.L.}}^0\left(\frac{i}{n}\right) &= V^d(\underline{\mathbf{x}}_\varepsilon^{i,0}) - V_0^s(\underline{\mathbf{x}}_\varepsilon^{i,0}) = 0 \\ \phi_{0\text{C.L.}}^0\left(\frac{i}{n}\right) &= \Phi^d(\underline{\mathbf{x}}_\varepsilon^{i,0}) - \Phi_0^s(\underline{\mathbf{x}}_\varepsilon^{i,0}) \end{aligned}$$

Pour i fixé, en injectant (2.39) dans les équations d'équilibre (2.12) à (2.14) et en utilisant les développements de Taylor à l'ordre ε^2 , on trouve les équations suivantes qui relient les valeurs des champs correcteurs au même point x_1 :

– en force, sur la composante 1,

$$k_n^* \left[2 u_{0\text{C.L.}}^j - u_{0\text{C.L.}}^{j+1} - u_{0\text{C.L.}}^{j-1} + \frac{1}{2} (\phi_{0\text{C.L.}}^{j-1} - \phi_{0\text{C.L.}}^{j+1}) \right] = 0$$

– en force, sur la composante 2,

$$k_t^* [2 v_{0\,C.L.}^j - v_{0\,C.L.}^{j+1} - v_{0\,C.L.}^{j-1}] = 0$$

– en moment,

$$\begin{aligned} k_\phi^* [2 \phi_{0\,C.L.}^j - \phi_{0\,C.L.}^{j+1} - \phi_{0\,C.L.}^{j-1}] + \frac{k_n^*}{2} [-u_{0\,C.L.}^{j+1} + u_{0\,C.L.}^{j-1}] \\ - \frac{6k_n^*}{4} \phi_{0\,C.L.}^j = 0 \end{aligned}$$

Il s'agit d'une suite de type différences finies dont la résolution est placée en annexe E. On a les conditions aux limites qui sont :

$$\begin{aligned} u_{0\,C.L.}^0 = u_{0\,C.L.}^{+\infty} = 0, \quad v_{0\,C.L.}^0 = v_{0\,C.L.}^{+\infty} = 0, \\ \phi_{0\,C.L.}^0(x_1) = \Phi^d(x_1) - \Phi_0^s(x_1, 0), \quad \phi_{0\,C.L.}^{+\infty} = 0 \end{aligned} \quad (2.40)$$

Le système régissant la suite $v_{C.L.}^j$ est indépendant des autres suites et, avec les conditions aux limites, on obtient aisément $v_{C.L.}^j = 0$. Avec les notations de l'annexe E, le système d'effet de bord donne les paramètres :

$$\alpha = \frac{1}{2}, \quad \beta = \frac{2k_\phi^*}{k_n^*}, \quad \gamma = \frac{3k_n^*}{2k_\phi^*} - 2.$$

On a clairement $\alpha \neq \beta$ d'où on peut poser

$$a = \frac{\beta(\gamma - 1) - \alpha}{\beta - \alpha} = \frac{2k_n^*}{4k_\phi^* - k_n^*} - 3.$$

Pour $k_\phi^* < \frac{k_n^*}{4}$, on a $a < -3$, ce qui permet d'obtenir certaines propriétés concernant les racines du polynôme caractéristique des suites v^j, ϕ^j . En effet si l'on nomme λ_1 et λ_2 les deux racines du polynome autres que 1, on a :

- les deux racines λ_1 et λ_2 sont réelles et comme $a + 1 < 0$, elles sont aussi positives,
- ces deux racines sont l'inverse l'une de l'autre, on pose $\lambda = \lambda_1 < 1$ d'où $\lambda_2 = \lambda_1^{-1} > 1$.

On a ainsi les suites solutions de la forme :

$$\begin{aligned} \forall j \geq 1, \\ u_{0\,C.L.}^j = u_{0\,C.L.}^0 + j(u_{0\,C.L.}^1 - u_{0\,C.L.}^0) + \lambda \frac{1+\lambda}{\lambda-1} \alpha b_1 (j\lambda - \lambda^j) \\ + \lambda^{-1} \frac{1+\lambda}{1-\lambda} \alpha b_2 (j\lambda^{-1} - \lambda^{-j}) \end{aligned}$$

et on a :

$$\phi_{0\,C.L.}^j = a_1 + b_1 \lambda^j + b_2 \lambda^{-j}$$

L'exploitation des conditions aux limites (2.40) finit de donner les suites solutions :

$$\forall j \geq 1, \quad u_{0\,C.L.}^j = u_{0\,C.L.}^1 (j - \lambda^{j-1})$$

$$\phi_{0\,C.L.}^j = \phi_{0\,C.L.}^0 \lambda^j$$

avec

$$u_{0\,C.L.}^1 = \lambda^2 \frac{1 + \lambda}{2(\lambda - 1)} \phi_{0\,C.L.}^0.$$

et

$$\lambda = -\frac{1 + a + \sqrt{a^2 + 2a - 3}}{2}.$$

On rappelle que $v_{C.L.}^j$ est nulle. Sur la figure 2.5, les suites solutions $\frac{u_{C.L.}^j}{\phi_{0\,C.L.}^0}$ et $\frac{\phi_{C.L.}^j}{\phi_{0\,C.L.}^0}$ ont été représentées pour des valeurs de $\frac{k_\phi}{k_n} = \frac{l^2}{12}$. On remarque la

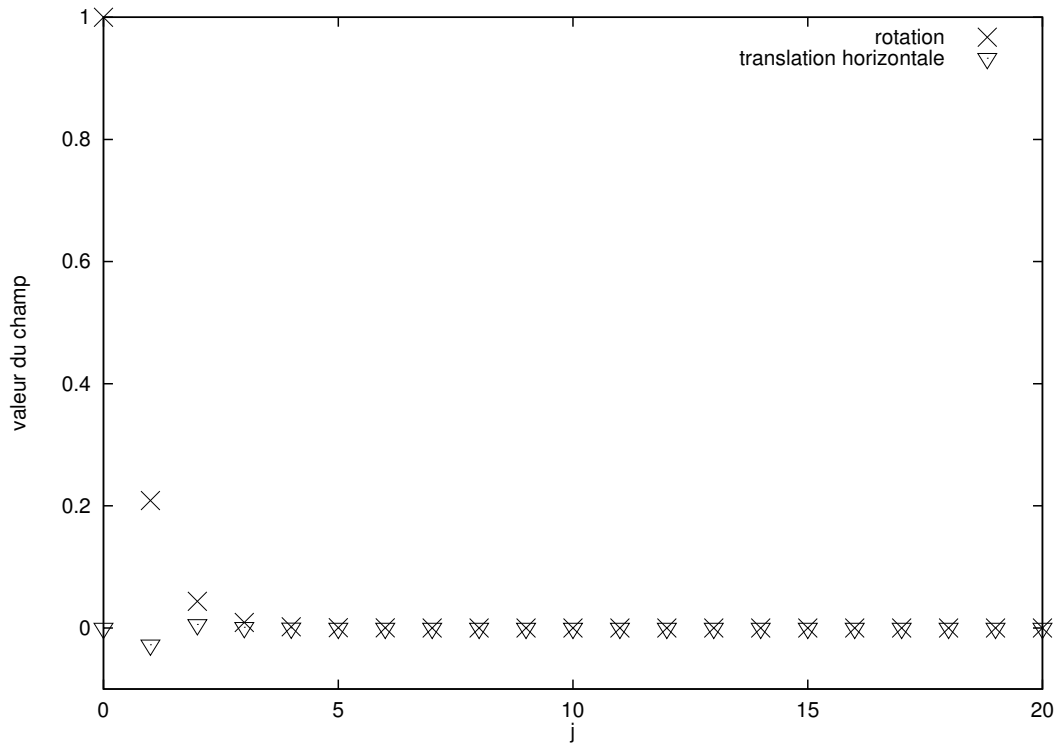


FIG. 2.5 – Effet de bord avec le schéma (SH1)

décroissance rapide des champs mises en jeu, à plus de quatre cellules du bord les effets ne sont plus significatifs. On retrouve une décroissance qui serait issue de la trace d'une fonction exponentielle sur la rotation, la translation est, quant à elle, presque non perturbée.

Ce résultat sur l'étude des effets de bord sur le grillage présente des similitudes avec ceux trouvés par Dumontet [Dumontet, 1990] dans le cas d'un milieu continu stratifié.

2.6 Flambement du grillage

Nous reprenons le grillage étudié ci-dessus : il s'agit donc d'assemblage de ressorts remplissant l'espace bidimensionnel suivant un motif en croix. On considère dans la suite un chargement uniaxial sur une bande infinie d'épaisseur h ; un déplacement vertical, δ , est imposé au sommet de cette bande et il est imposé nul à sa base. Les rotations au sommet et à la base sont aussi nulles (voir figure 2.6). Vu la géométrie et la symétrie du chargement, nous cherchons des solutions qui sont x_1 -invariantes. On ne se place plus a priori dans l'hypothèse des petites perturbations. Un position d'équilibre x_1 -invariante, c'est-à-dire vérifiant

$$u^{i,j} = u^j, v^{i,j} = v^j, \phi^{i,j} = \phi^j$$

doit rendre stationnaire l'énergie potentielle :

$$\begin{aligned} \Psi(\Omega) = & \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{n-1} k_t \left(v^{j+1} - v^j - \frac{l}{2} (\cos \phi^{j+1} + \cos \phi^j - 2) \right)^2 \\ & + k_n \left(u^j - u^{j+1} - \frac{l}{2} (\sin \phi^{j+1} + \sin \phi^j) \right)^2 \\ & + k_\phi (\phi^{j+1} - \phi^j)^2 \\ & + k_t l^2 (\cos \phi^j - 1)^2 + k_n l^2 (\sin \phi^j)^2 \end{aligned}$$

Tant que le paramètre de chargement, $\lambda = \frac{\delta}{h}$, est suffisamment petit, l'hypothèse des petites perturbations est valable et il n'y a qu'une seule solution possible : $\phi^{sj} = 0$, $\underline{u}^{sj} = u^{sj} \underline{e}_2 = -\delta \frac{j l}{h} \underline{e}_2 = -\lambda j l \underline{e}_2$. Lorsque λ augmente une instabilité de la solution triviale est possible. L'étude de la stabilité se résume, grâce au théorème de Lejeune-Dirichlet, à déterminer le niveau de chargement où la solution cesse d'être un minimum stricte de l'énergie potentielle **non-linéarisée**. On rappelle le théorème de Lejeune-Dirichlet [Bamberger, 1981] :

Théorème 1 (Lejeune-Dirichlet) *Pour un système à liaisons indépendantes du temps, dont les actions données et les actions de liaisons dérivent*

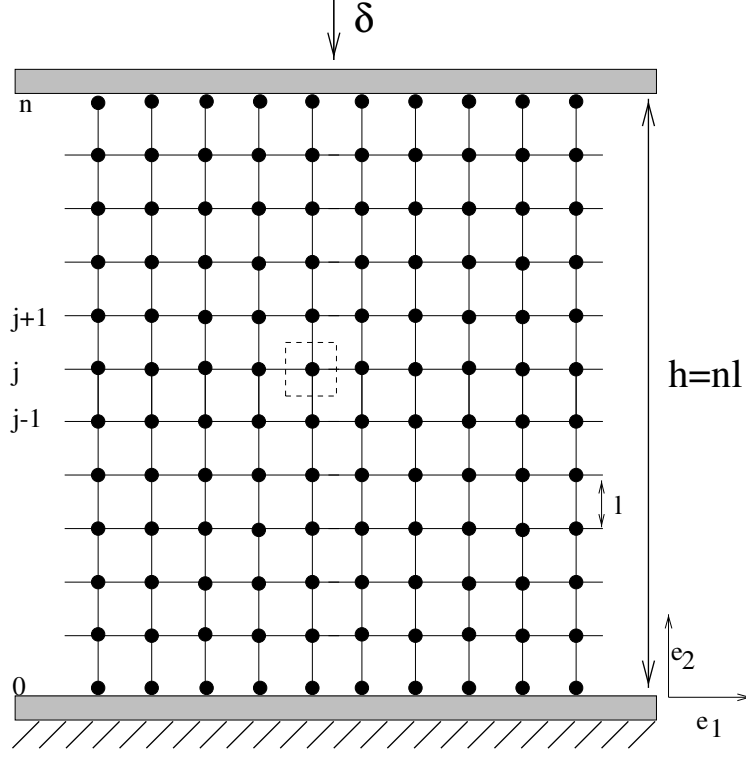


FIG. 2.6 – Conditions aux limites pour la bande infinie chargée uniaxialement

d'un potentiel, Ψ , indépendant du temps et ayant éventuellement des liaisons dissipatives. Si Ψ est un minimum strict en une position d'équilibre, alors cette position d'équilibre est stable.

Pour déterminer la charge critique où le potentiel cesse d'être minimum strict, calculons la variation seconde de l'énergie des couples de particules à la solution triviale. On trouve en utilisant (2.1) et (2.2) :

$$\delta^2 H_c = \delta^2 H_{HPPc} + \delta^2 H_{NLc}$$

, avec :

$$\begin{aligned} \delta^2 H_{HPPc} = & k_t (\delta u_t^+ - \delta u_t^-) (\delta' u_t^+ - \delta' u_t^-) \\ & + k_n \left(\delta' u_n^+ - \delta' u_n^- - \frac{l}{2} (\delta' \phi^+ + \delta' \phi^-) \right) \left(\delta u_n^+ - \delta u_n^- - \frac{l}{2} (\delta \phi^+ + \delta \phi^-) \right) \\ & + k_\phi (\delta' \phi^+ - \delta' \phi^-) (\delta \phi^+ - \delta \phi^-) \end{aligned}$$

$$\delta^2 H_{NLc} = k_t d_t \frac{l}{2} [\delta' \phi^- \delta \phi^- + \delta' \phi^+ \delta \phi^+].$$

Finalement, la variation seconde de l'énergie potentielle à la solution triviale est donnée par :

$$\delta^2 \Psi (\Omega) = \sum_{j=0}^{n-1} \delta^2 \Psi_{HPP}^j + \delta^2 \Psi_{NL}^j$$

avec

$$\begin{aligned} \delta^2 \Psi_{HPP}^j &= \left\{ k_n l^2 (\delta' \phi^j \delta \phi^j) \right. \\ &\quad + k_t (\delta' v^{j+1} - \delta' v^j) (\delta v^{j+1} - \delta v^j) \\ &\quad + k_n \left(\delta' u^j - \delta' u^{j+1} - \frac{l}{2} (\delta' \phi^j + \delta' \phi^{j+1}) \right) \left(\delta u^j - \delta u^{j+1} - \frac{l}{2} (\delta \phi^j + \delta \phi^{j+1}) \right) \\ &\quad \left. + k_\phi (\delta' \phi^{j+1} - \delta' \phi^j) (\delta \phi^{j+1} - \delta \phi^j) \right\} \\ \delta^2 \Psi_{NL}^j &= -k_t \lambda l^2 \left\{ \delta' \phi^j \delta \phi^j \right\} \end{aligned}$$

Il est facile de voir que pour $\lambda = 0$ $\delta^2 \Psi$ est définie positive. Par ailleurs, sachant que $\delta^2 \Psi$ est la différence de deux formes positives, lorsque λ croît à partir de zéro, il atteint une valeur critique λ_c pour laquelle $\delta^2 \Psi$ n'est plus définie. Pour cette valeur critique, il existe un mode $\delta' u^j = \Delta u^j$, $\delta' v^j = \Delta v^j$, $\delta' \phi^j = \Delta \phi^j$ non identiquement nul tel que

$$\delta^2 \Psi = 0, \quad \forall (\delta u^j, \delta v^j, \delta \phi^j).$$

En prenant $(\delta u^j, \delta v^j, \delta \phi^j)$ nul partout sauf en la particule P^j , on obtient les équations locales d'Euler vérifiées par le mode :

$$\begin{aligned} k_n \left[2 \Delta u^j - \Delta u^{j+1} - \Delta u^{j-1} - \frac{l}{2} (\Delta \phi^{j+1} - \Delta \phi^{j-1}) \right] &= 0 \\ k_t [2 \Delta v^j - \Delta v^{j-1} - \Delta v^{j+1}] &= 0 \\ k_\phi [2 \Delta \phi^j - \Delta \phi^{j+1} - \Delta \phi^{j-1}] & \\ - \frac{l}{2} k_n [-\Delta u^{j+1} + \Delta u^{j-1}] & \\ - \frac{l^2}{4} k_n [-6 \Delta \phi^j - \Delta \phi^{j+1} - \Delta \phi^{j-1}] - k_t \lambda_c l^2 \Delta \phi^j &= 0 \end{aligned} \tag{2.41}$$

Ce système admet une solution exacte calculable par différences finies (voir annexe E) en fonction du rapport d'échelle, $\varepsilon = \frac{l}{h} = \frac{1}{n}$. Cette solution exacte donne la charge critique :

$$\lambda_c = \frac{2k_\phi^*}{k_t} \left[1 - \cos \left(\frac{2\pi l}{h} \right) \right] + \frac{k_n}{k_t}$$

On introduit de nouveau la cinématique sans dimensions :

$$\forall j, \quad \begin{aligned} \underline{u}^j &= nl \underline{u}_\varepsilon^j \\ \phi^j &= \phi_\varepsilon^j \end{aligned}$$

soit ΔU , ΔV , $\Delta \Phi$, la cinématique continue sans dimensions du mode de flambement recherché,

$$\Delta U(x_\varepsilon^j) = \frac{\Delta u^j}{nl}, \quad \Delta V(x_\varepsilon^j) = \frac{\Delta v^j}{nl} \text{ et } \Delta \Phi(x_\varepsilon^j) = \Delta \phi^j$$

avec des conditions aux limites d'encastrement sur $\partial\Omega^*$.

En utilisant des développements de Taylor à l'ordre 4, on obtient les équations :

– à l'ordre ε^2 , pour le schéma (SH1),

$$(\Delta U_{,22} + \Delta \Phi_{,2}) + \frac{\varepsilon^2}{6} \left(\Delta \Phi_{,222} + \frac{1}{2} \Delta U_{,2222} \right) = 0$$

$$\Delta V_{,22} + \frac{\varepsilon^2}{12} \Delta V_{,2222} = 0$$

$$\varepsilon^2 \left[-k_\phi^* \Delta \Phi_{,22} + k_n^* \left(\frac{\Delta U_{,222}}{6} + \frac{\Delta \Phi_{,22}}{4} \right) \right] + k_n^* \left[\Delta U_{,2} + \left(2 - \frac{\lambda k_t^*}{k_n^*} \right) \Delta \Phi \right] = 0$$

– à l'ordre ε^2 , pour le schéma (SH2),

$$\Delta U_{,22} + \Delta \Phi_{,2} = 0$$

$$\Delta V_{,22} = 0$$

$$-k_\phi^* \Delta \Phi_{,22} + k_n^* \left[\Delta U_{,2} + \left(2 - \frac{\lambda k_t^*}{k_n^*} \right) \Delta \Phi \right] = 0$$

avec quelque soit le schéma les conditions aux limites :

$$\begin{aligned} \Delta U(0) &= \Delta U(h) = \Delta V(0) = \Delta V(h) = 0 \\ \Delta \Phi(0) &= \Delta \Phi(h) = 0. \end{aligned}$$

Nous allons maintenant comparer l'approche d'homogénéisation (SH1) au troisième ordre et celle (SH2) à l'ordre zéro avec la solution exacte en fonction du rapport d'échelle, ε .

Dans le cas (SH1), on peut écrire le système d'équations différentielles sous la forme matricielle :

$$\varepsilon^2[A] \cdot X'' + ([B] + \lambda[C]) \cdot X = 0$$

où le prime, ' , correspond à la dérivation par rapport à la composante X_2 et,

$$X = \begin{bmatrix} \Delta V'' \\ \Delta U'' \\ \Delta \Phi' \end{bmatrix}$$

$$[A] = \begin{bmatrix} \frac{1}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{-k_\phi^*}{k_n^*} + \frac{1}{4} \end{bmatrix} \quad [B] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$[C] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-k_t^*}{k_n^*} \end{bmatrix}$$

Pour la résolution de ce système d'équations différentielles, on introduit des développements asymptotiques en fonction du rapport d'échelle, ε , tant pour la charge critique, λ_c , que pour le mode de flambement, soit :

$$\begin{aligned} \Delta U &= \Delta U_0 + \varepsilon \Delta U_1 + \varepsilon^2 \Delta U_2 + o(\varepsilon^2) \\ \Delta V &= \Delta V_0 + \varepsilon \Delta V_1 + \varepsilon^2 \Delta V_2 + o(\varepsilon^2) \\ \Delta \Phi &= \Delta \Phi_0 + \varepsilon \Delta \Phi_1 + \varepsilon^2 \Delta \Phi_2 + o(\varepsilon^2) \\ \lambda_c &= \lambda_0 + \varepsilon \lambda_1 + \varepsilon^2 \lambda_2 + o(\varepsilon^2) . \end{aligned}$$

Le système se transforme alors en une suite de systèmes permettant d'approcher les solutions à l'ordre désiré. Cette transformation permet d'écrire jusqu'au troisième ordre :

– au premier ordre près,

$$\begin{aligned}
& ([B] + \lambda_0[C]) \cdot \underline{\mathbf{X}}_0 = 0 \\
\Leftrightarrow & \begin{cases} \Delta V_{0,22} & = 0 \\ \Delta U_{0,22} + \Delta \Phi_{0,2} & = 0 \\ \Delta U_{0,2} + \left(2 - \lambda_0 \frac{k_t^*}{k_n^*}\right) \Delta \Phi_0 & = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\Delta U_0 = \Delta V_0 = 0, \Delta \Phi_0 = 0 \text{ en } x_2 = 0 \text{ et } x_2 = 1.$$

– au deuxième ordre près,

$$\begin{aligned}
& ([B] + \lambda_0[C]) \cdot \underline{\mathbf{X}}_1 + \lambda_1[C] \cdot \underline{\mathbf{X}}_0 = 0 \\
\Leftrightarrow & \begin{cases} \Delta V_{1,22} & = 0 \\ \Delta U_{1,22} + \Delta \Phi_{1,2} & = 0 \\ \Delta U_{1,2} + \left(2 - \lambda_0 \frac{k_t^*}{k_n^*}\right) \Delta \Phi_1 & = \lambda_1 \frac{k_t^*}{k_n^*} \Delta \Phi_0 \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\Delta U_1 = \Delta V_1 = 0, \Delta \Phi_1 = 0 \text{ en } x_2 = 0 \text{ et } x_2 = 1.$$

– au troisième ordre près,

$$\begin{aligned}
& ([B] + \lambda_0[C]) \cdot \underline{\mathbf{X}}_2 + [C] \cdot (\lambda_1 \underline{\mathbf{X}}_1 + \lambda_2 \underline{\mathbf{X}}_0) + [A] \underline{\mathbf{X}}_0'' = 0 \\
\Leftrightarrow & \begin{cases} \Delta V_{2,22} + \frac{\Delta V_{0,2222}}{12} & = 0 \\ \Delta U_{2,22} + \Delta \Phi_{2,2} + \frac{1}{6} \left(\frac{\Delta U_{0,2222}}{2} + \Delta \Phi_{0,222} \right) & = 0 \\ \Delta U_{2,2} + \left(2 - \lambda_0 \frac{k_t^*}{k_n^*}\right) \Delta \Phi_2 & = \\ - \left(\frac{-k_t^*}{k_n^*} (\lambda_1 \Delta \Phi_1 + \lambda_2 \Delta \Phi_0) + \frac{\Delta U_{0,222}}{6} \right. & \\ \left. + \left(\frac{1}{4} - \frac{k_\phi^*}{k_n^*} \right) \Delta \Phi_{0,22} \right) & \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\Delta U_2 = \Delta V_2 = 0, \Delta \Phi_2 = 0 \text{ en } x_2 = 0 \text{ et } x_2 = 1.$$

A l'ordre ε^0 , on obtient la possibilité d'un mode de flambement non nul si, et seulement si, le système est indéterminé c'est-à-dire si, et seulement si,

$$\det([B] + \lambda_0[C]) = 0 \Leftrightarrow \lambda_0 = \frac{k_n^*}{k_t^*}.$$

Dans ce cas, le mode au premier ordre n'est pas déterminé mais il doit vérifier la contrainte :

$$\Delta U_{0,2} = -\Delta \Phi_0$$

Puis les conditions de compatibilité des systèmes suivants (pour l'existence d'une solution) permettent de déterminer d'ordre en ordre la solution. Ainsi à l'ordre ε^1 , il faut que $\lambda_1[C] \cdot \underline{\mathbf{X}}_0$ soit dans l'image de $[B] + \lambda_0[C]$:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 0 \\ \Delta U_{1,2} + \Delta \Phi_1 &= 0 \end{aligned}$$

Enfin la compatibilité au second ordre, nous donne l'équation :

$$\lambda_2 \frac{k_t^*}{k_n^*} \Delta \Phi_0 + \left(\frac{k_\phi^*}{k_n^*} \right) \Delta \Phi_{0,22} = 0$$

avec des conditions d'encastrement aux bords. Pour que le mode soit non nul au premier ordre, la condition de compatibilité du second ordre impose :

$$\begin{aligned} \lambda_2 &= \frac{4\pi^2 k_\phi^*}{k_t^*} \\ \Delta \Phi_0 &= a (\cos(2\pi x_2) - 1) + b \sin(2\pi x_2) \\ \Delta U_{0,2} &= -\Delta \Phi_0 \end{aligned}$$

Ainsi l'approximation jusqu'au second ordre de la charge critique, λ_c , vaut dans le cadre du schéma d'homogénéisation (SH1) :

$$\begin{aligned} \lambda &\approx \lambda_0 + \lambda_1 \varepsilon + \lambda_2 \varepsilon^2 \\ &\approx \frac{k_n}{k_t} + \frac{4\pi^2 k_\phi}{k_t h^2} \end{aligned}$$

Maintenant, pour le schéma d'homogénéisation (SH2) à l'ordre ε^0 , on a matriciellement :

$$[A] \cdot X'' + ([B] + \lambda[C]) \cdot X = 0 \quad (2.42)$$

où le prime, $'$, correspond à la dérivation par rapport à la composante X_2 et,

$$\begin{aligned} X &= \begin{bmatrix} \Delta V'' \\ \Delta U'' \\ \Delta \Phi' \end{bmatrix} \\ [A] &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{k_\phi^*}{k_n^*} \end{bmatrix} \quad [B] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad [C] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{k_t^*}{k_n^*} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

A l'ordre ε^0 , on obtient le même mode de flambement que celui du schéma (SH1) si :

$$\begin{aligned}\lambda_0 &= \frac{k_\phi}{k_t} \left(\frac{4\pi^2}{h^2} + \frac{k_n}{k_\phi} \right) \\ \Delta\Phi_0 &= a (\cos(2\pi x_2) - 1) + b \sin(2\pi x_2) \\ \Delta U_{0,2} &= -\Delta\Phi_0\end{aligned}$$

On obtient ainsi une approximation au premier ordre de la charge critique dans le schéma d'homogénéisation (SH2) :

$$\lambda \approx \frac{k_\phi}{k_t} \left(\frac{4\pi^2}{h^2} + \frac{k_n}{k_\phi} \right)$$

Comme on peut le remarquer le schéma (SH1) au troisième ordre et le

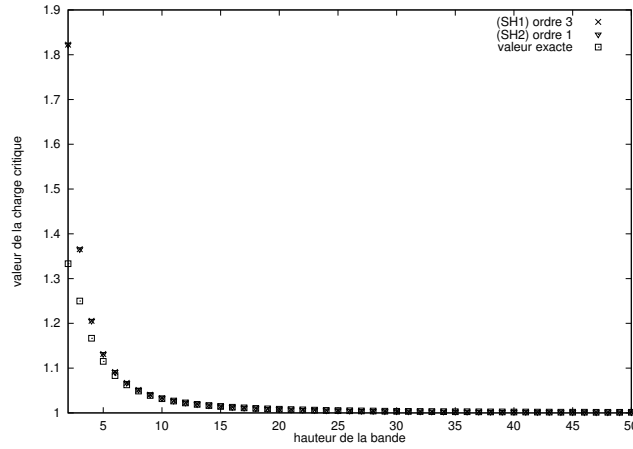


FIG. 2.7 – Comparaison de la charge critique avec celles obtenues par homogénéisation pour $\frac{k_\phi^*}{k_t} = \frac{1}{12}$ et $\frac{k_n}{k_t} = 1$.

schéma (SH2) au premier ordre donnent la même charge critique. Il s'agit là en réalité d'un cas particulier qu'il ne faut pas généraliser. Le graphe 2.7 représente la comparaison pour la charge critique entre le calcul homogénéisé et le calcul analytique. On remarque une bonne concordance. On peut aussi constater que l'effet d'échelle, c'est-à-dire la dépendance de la charge critique normalisée en fonction de l'épaisseur de la bande, est d'autant plus marqué que le rapport $\frac{k_\phi^*}{k_t}$ est élevé.

2.7 Un autre exemple de flambement

Afin d'évaluer la pertinence des schémas (SH1) et (SH2), nous allons traiter du même problème que précédemment où les ressorts liant deux particules

sont remplacés par des poutres encastrées. Comme on le verra dans le chapitre 4, ceci revient à modifier la non-linéarité géométrique pour obtenir une variation seconde du potentiel :

$$\delta^2 \Psi (\Omega) = \sum_{j=0}^{n-1} \delta^2 \Psi_{HPP}^j + \delta^2 \Psi_{NLpou}^j$$

avec la variation seconde $\delta^2 \Psi_{HPP}^j$ inchangée et

$$\begin{aligned} \delta^2 \Psi_{NLpou}^j = & -k_t \lambda l^2 \left\{ \frac{1}{5} \left(\frac{\delta u^{j+1} - \delta u^j}{l} + \frac{\delta \phi^{j+1} + \delta \phi^j}{2} \right) \left(\frac{\delta' u^{j+1} - \delta' u^j}{l} + \frac{\delta' \phi^{j+1} + \delta' \phi^j}{2} \right) \right. \\ & \left. + \left(\frac{\delta u^{j+1} - \delta u^j}{l} \right) \left(\frac{\delta' u^{j+1} - \delta' u^j}{l} \right) + \frac{1}{12} (\delta \phi^{j+1} - \delta \phi^j) (\delta' \phi^{j+1} - \delta' \phi^j) \right\}. \end{aligned}$$

En suivant exactement la même démarche que celle explicitée pour le grillage de ressorts, on trouve à l'aide du schéma (SH1) qu'à l'ordre ε^0 , λ_0 annule le déterminant de :

$$\begin{bmatrix} 1 - \frac{6k_t}{5k_n} \lambda_0 & 1 - \frac{k_t}{5k_n} \lambda_0 \\ 1 - \frac{k_t}{5k_n} \lambda_0 & 2 - \frac{k_t}{5k_n} \lambda_0 \end{bmatrix}$$

, λ_1 est nul et λ_2 s'obtient en écrivant la compatibilité des équations à l'ordre ε^2 .

Quant à la charge critique, λ_c , prévue par le schéma (SH2) à l'ordre ε^0 , elle est donnée par la résolution de l'équation :

$$\det[D] = \frac{4\Pi^2 k^{*(2)}}{k_n} \left(\frac{6k_t}{5k_n} \lambda - 1 \right)$$

où $[D]$ vaut :

$$\begin{bmatrix} 1 - \frac{6k_t}{5k_n} \lambda & 1 - \frac{k_t}{5k_n} \lambda \\ 1 - \frac{k_t}{5k_n} \lambda & 2 - \frac{k_t}{5k_n} \lambda \end{bmatrix}.$$

Enfin utilisant l'annexe E, on peut obtenir la valeur exacte de la charge critique. Nous pouvons maintenant comparer graphiquement l'ensemble des solutions exactes, suivant (SH1) et suivant (SH2), sur un même graphique. On fixe le paramètre multiplicatif $\frac{k_n}{k_t} = 1$ et on fait varier $\alpha = \frac{k_\phi^*}{k_n}$, on obtient les courbes 2.8 à 2.11. Dans le cas d'une poutre d'Euler-Bernoulli, le paramètre α vaut $\frac{1}{12}$.

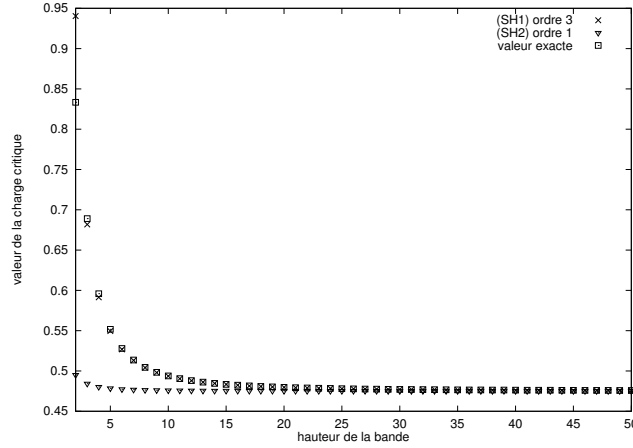


FIG. 2.8 – Comparaison de la charge critique avec celles obtenues par homogénéisation pour $\alpha = \frac{1}{100}$

Comme on peut le remarquer sur l'ensemble des graphes précédents, les schémas (SH1) et (SH2) coïncident avec la solution exacte pour ε suffisamment petit. Quant à la prédiction des effets de taille (ou effets d'échelle), c'est-à-dire la dépendance de la charge critique en fonction de ε , pour ε insuffisamment petit, le schéma (SH1) au troisième ordre donne des résultats satisfaisants pour des valeurs petites du paramètre α (inférieures à $\frac{1}{2}$) alors que le schéma (SH2) au premier ordre est satisfaisant les valeurs de α suffisamment grandes (supérieures à $\frac{1}{2}$). Ceci n'est pas étonnant en regard des hypothèses du problème d'homogénéisation correspondants à chaque schéma. Autrement dit, pour α suffisamment grand, il est recommandé d'utiliser le schéma (SH2) au premier ordre, alors que le recours au schéma (SH1) au troisième ordre est pertinent pour α suffisamment petit. Le cas des poutres d'Euler-Bernoulli rentre dans cette dernière catégorie. Enfin, remarquons que les schémas (SH1) au troisième ordre et (SH2) au premier ordre encadrent systématiquement la charge critique exacte.

2.8 Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre et sur un exemple simple d'une structure périodique discrète, les principaux concepts nécessaires à l'homogénéisation des milieux périodiques discrets. Il convient, tout d'abord, d'adimensionner le problème réel. Puis de choisir un processus d'homogénéisation en fonction des ordres de grandeurs des caractéristiques élastiques adimensionnées. Enfin, l'utilisation des développements asymptotiques permet, après

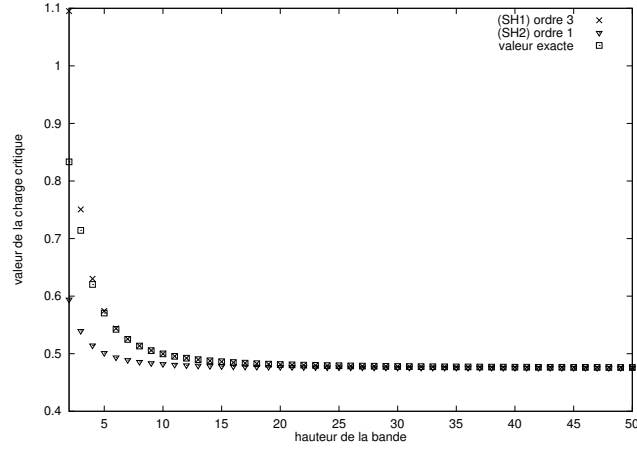


FIG. 2.9 – Comparaison de la charge critique avec celles obtenues par homogénéisation pour $\alpha = \frac{1}{12}$

substitution des champs discrets par le développement de Taylor des champs continus, d'identifier le comportement limite. Il est à noter que les développements asymptotiques et les développements de Taylor doivent être menés à des ordres cohérents.

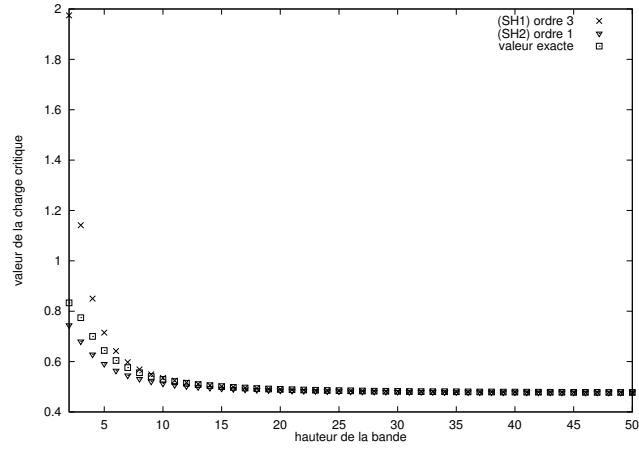


FIG. 2.10 – Comparaison de la charge critique avec celles obtenues par homogénéisation pour $\alpha = \frac{1}{2}$

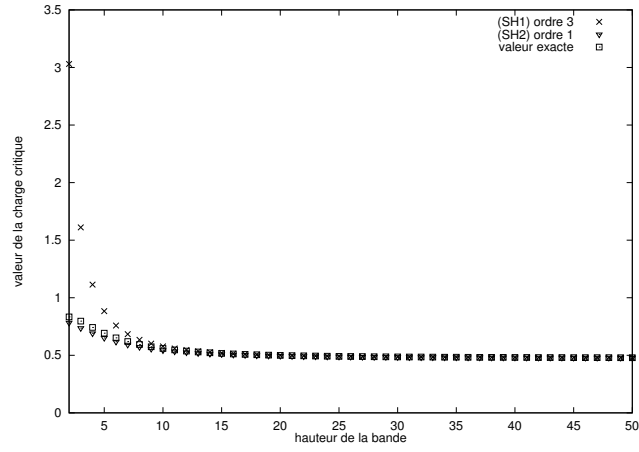


FIG. 2.11 – Comparaison de la charge critique avec celles obtenues par homogénéisation pour $\alpha = 1$

Chapitre 3

Homogénéisation d'un milieu discret en élasticité linéaire

L'objet de ce chapitre est d'étendre au cas général l'identification d'un milieu continu équivalent à un milieu élastique discret périodique ayant une cinématique de translation et de rotation. En effet, le milieu discret étudié dans le chapitre précédent (le grillage) est constitué de particules identiques périodiquement réparties dans l'espace. Il s'agit d'un réseau mono-atomique par analogie à un cristal parfait constitué par un seul type d'atome. En général, un réseau périodique est constitué de n types de particules. On dit alors qu'on a un réseau n -atomique par analogie à un cristal parfait constitué de n atomes différents. Nous verrons que l'homogénéisation d'un tel réseau suit les mêmes étapes que celles qui nous ont permis de traiter le cas mono-atomique.

Après un rappel de la mécanique d'un système de points matériels, on définit rigoureusement les réseaux périodiques élastiques puis on pose deux schémas d'homogénéisation qui seront traités à l'aide des développements asymptotiques.

3.1 Equilibre d'un système de points matériels

On considère un système, $\mathcal{S}$, constitué d'un ensemble de N particules en interaction entre elles : $\mathcal{S} = \{P^1, P^2, P^3, \dots, P^N\}$. Une particule, P^i , est définie par un nombre la repérant de façon univoque, elle possède une position dans l'espace notée $\underline{x}^i$. Chaque particule possède six degrés de liberté, $(\underline{u}^i, \underline{\phi}^i)$, 3 en translations et 3 en rotations. $\underline{u}^i$ est la vitesse de la particule P^i et $\underline{\phi}^i$ est la vitesse de rotation d'un trièdre direct qui lui est attaché. On définit

ainsi l'ensemble cinématique du solide étudié par :

$$(\underline{u}, \underline{\phi}) = \{(\underline{u}^i, \underline{\phi}^i), i = 1, \dots, N\}. \quad (3.1)$$

Les efforts intérieurs sont décrits de la façon suivante. Pour tout couple de particule $c = (P^i, P^j) \in \mathcal{S} \times \mathcal{S}, i \neq j$, on définit la force, $\underline{f}^c$, et le moment en P^j , $\underline{m}^c$, exercés par la particule P^i sur la particule P^j , naturellement $\{P^j, \underline{f}^c, \underline{m}^c\}$ sont les éléments de réduction d'un torseur noté $\mathcal{T}^c$. Pour simplifier les notations, on introduit un opérateur de transposition, t , sur les couples de particule défini par :

$$\forall c = (P^i, P^j) \in \mathcal{S} \times \mathcal{S}, {}^t c = (P^j, P^i).$$

Par ailleurs, l'action de l'extérieur du système $\mathcal{S}$ sur la particule P^j est un torseur dont les éléments de réduction en P^j sont la force $\underline{f}_{ext}^j$ et le moment $\underline{m}_{ext}^j$. Un tel système peut modéliser un assemblage de barres encastrées aux noeuds et chargées en ces noeuds. Les noeuds sont alors doués d'une cinématique enrichie. Ainsi tout comme Salençon [Salençon, 1988] l'a mis en oeuvre sur des systèmes de points ne possédant qu'une cinématique de translation et schématisant un treillis de barres rotulées, nous pouvons obtenir les équations d'équilibre pour un système de points ayant des degrés de liberté en translation et en rotation. Sur les treillis de poutre, nous remplaçons donc les rotules liant les barres par des encastres (figure 3.1). L'équilibre du

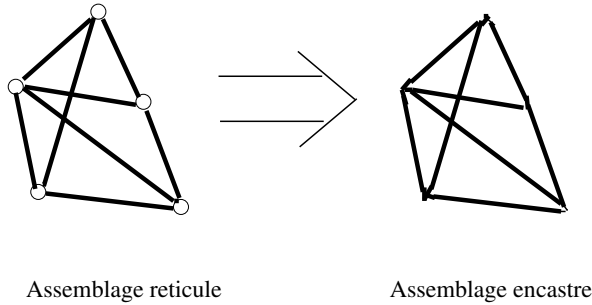


FIG. 3.1 – Système de barres

système $\mathcal{S}$ se traduit par deux lois. La première correspond à la loi des actions mutuelles qui exprime que le torseur des efforts exercés par la particule P^i sur la particule P^j et le torseur des efforts exercés par la particule P^j sur la particule P^i sont opposés :

$$\forall c = (P^i, P^j), i \neq j, \mathcal{T}^c + \mathcal{T}^{tc} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \underline{f}^c + \underline{f}^{tc} = 0 \\ \underline{m}^c + \underline{m}^{tc} + \underline{f}^c \wedge \underline{l}^c = 0 \end{cases} \quad (3.2)$$

Notons $\underline{c} = \frac{1}{2} (\underline{x}^i + \underline{x}^j)$ le point milieu du couple de particule $c = (P^i, P^j)$ et $\underline{l}^c$ le vecteur $\frac{P^j P^i}{2}$. Par convention, on posera pour toute particule P^i : $\underline{f}^{(P^i, P^i)} = 0$ et $\underline{m}^{(P^i, P^i)} = 0$. Nous introduisons une fonction indicatrice χ_j définie par :

$$\begin{aligned} \chi_j(c) &= 1 & \text{si } c = (P^i, P^j) \\ &= 0 & \text{sinon} \end{aligned} \quad (3.3)$$

La seconde loi fondamentale de la statique stipule que le torseur de tous les efforts s'exerçant sur la particule P^j est nul. Ceci peut s'écrire :

$$\forall P^j \in \mathcal{S}, \quad \begin{cases} \underline{f}_{ext}^j + \sum_c \chi_j(c) \underline{f}^c = 0 \\ \underline{m}_{ext}^j + \sum_c \chi_j(c) \underline{m}^c = 0 \end{cases} \quad (3.4)$$

En utilisant les éléments de réduction au point $\underline{c}$ du torseur des efforts exercés par P^i sur P^j , $\mathcal{T}^c = \{\underline{c}, \underline{f}^c, \underline{m}^c\}$, la loi des actions mutuelles (3.2) s'écrit :

$$\begin{cases} \underline{f}^c + \underline{f}^{t^c} = 0 \\ \underline{m}^c + \underline{m}^{t^c} = 0 \\ \text{avec } \underline{m}^{t^c} = \underline{m}^c + \frac{1}{2} \underline{f}^c \wedge \underline{l}^c \end{cases} \quad (3.5)$$

Pour faire apparaître les déformations généralisées discrètes, nous allons étudier la puissance des efforts intérieurs en exploitant la loi des actions mutuelles (3.5). On considère les sous-systèmes $\mathcal{S}'$ constitués de deux particules de $\mathcal{S}$. L'écriture de la puissance, $\mathcal{P}_{int}(\mathcal{S}')$ des efforts intérieurs du système $\mathcal{S}' = \{P^i, P^j\}$ étant égale à l'opposé de la puissance des déformations, il vient :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{int}(\mathcal{S}') &= -\mathcal{P}_{def}(\mathcal{S}') \\ &= \underline{f}^c \cdot \underline{u}^j + \underline{f}^{t^c} \cdot \underline{u}^i + \underline{m}^c \cdot \underline{\phi}^j + \underline{m}^{t^c} \cdot \underline{\phi}^i \\ &= \underline{f}^c \cdot \left(\underline{u}^j - \underline{u}^i + \frac{P^i P^j}{2} \wedge (\underline{\phi}^i + \underline{\phi}^j) \right) \\ &\quad + \underline{m}^c \cdot (\underline{\phi}^j - \underline{\phi}^i) \\ &= -(\underline{f}^c \cdot \underline{d}^c + \underline{m}^c \cdot \underline{\delta}^c) \end{aligned}$$

On voit ainsi apparaître deux “déformations” $\underline{d}^c$ et $\underline{\delta}^c$ définies par :

$$\begin{aligned} \underline{d}^c &= \left(\underline{u}^i - \underline{u}^j + \frac{l^c}{2} \wedge (\underline{\phi}^i + \underline{\phi}^j) \right) \\ \underline{\delta}^c &= (\underline{\phi}^i - \underline{\phi}^j) \end{aligned} \quad (3.6)$$

Les relations suivantes sont évidentes : $\underline{d}^c = -\underline{d}^{t^c}$ et $\underline{\delta}^c = -\underline{\delta}^{t^c}$

3.2 Ecriture du comportement élastique linéaire

On se place dans le cadre des hypothèses des petites perturbations, aussi dans la suite $\underline{u}$ est un déplacement infinitésimal et $\underline{\phi}$ est une rotation infinitésimale. On introduit l'énergie de déformation H_c d'un couple de particule c qui ne dépend que des déformations généralisées du couple impliqué. On ne s'intéresse ici qu'à des interactions ne mettant en jeu qu'un couple de particules. Aussi aucune autre énergie élémentaire n'est à introduire. L'énergie H_c , quant à elle, a les propriétés suivantes :

- $H_c \equiv 0$ si le couple de particule n'est pas connecté, ou par convention si $c = (P^i, P^i)$,
- H_c doit être invariante par la composition avec n'importe quel mouvement rigidifiant du couple c . Aussi l'énergie, H_c , pour un couple $c = (P^i, P^j)$ est fonction des déformations généralisées $\underline{d}^c$ et $\underline{\delta}^c$. Cette énergie s'écrit donc $H_c(\underline{d}^c, \underline{\delta}^c)$
- H_c , pour un couple connecté, est une forme quadratique positive par rapport aux déformations du couple c , à savoir $\underline{d}^c$ et $\underline{\delta}^c$.
- $H_c \equiv H_{t_c}$.

L'expression de H_c peut s'écrire tensoriellement :

$$H_c = \frac{1}{2} (\underline{d}^c \cdot \underline{\underline{A}}^c \cdot \underline{d}^c + 2\underline{d}^c \cdot \underline{\underline{B}}^c \cdot \underline{\delta}^c + \underline{\delta}^c \cdot \underline{\underline{C}}^c \cdot \underline{\delta}^c) \quad (3.7)$$

où $\underline{\underline{A}}^c$ et $\underline{\underline{C}}^c$ sont symétriques. Enfin l'énergie de déformation de la structure est la somme des énergies élémentaires H_c , elle s'exprime alors par :

$$\Psi(\underline{u}, \underline{\phi}) = \frac{1}{2} \sum_{c \in \mathcal{C}} H_c(\underline{d}^c, \underline{\delta}^c)$$

où l'ensemble, $\mathcal{C}$, des couples connectés est défini par : $\mathcal{C} = \{c \in \mathcal{S} \times \mathcal{S} \mid H_c \not\equiv 0\}$.

Nous pouvons naturellement utiliser la dualité pour déterminer les forces, $\underline{f}^c$, et les moments en $\underline{c}$, $\underline{\hat{m}}^c$, pour chaque couple de particules $c = (P^i, P^j)$. La relation reliant cette réduction du torseur en $\underline{c}$ aux déformations du couple c est :

$$\underline{f}^c = \frac{\partial H_c}{\partial \underline{d}^c}, \quad \underline{\hat{m}}^c = \frac{\partial H_c}{\partial \underline{\delta}^c} \quad (3.8)$$

En injectant (3.7) dans (3.8), on obtient la relation :

$$\begin{aligned} \underline{f}^c &= \underline{\underline{A}}^c \cdot \underline{d}^c + \underline{\underline{B}}^c \cdot \underline{\delta}^c \\ \underline{\hat{m}}^c &= {}^t \underline{\underline{B}}^c \cdot \underline{d}^c + \underline{\underline{C}}^c \cdot \underline{\delta}^c \end{aligned} \quad (3.9)$$

On peut réécrire la relation de comportement pour exprimer $(\underline{f}^c, \underline{m}^c)$ en fonction de $(\underline{d}^c, \underline{\delta}^c)$. En effet,

$$\begin{aligned}\underline{m}^c &= \underline{\hat{m}}^c - \frac{1}{2} \underline{f}^c \wedge \underline{l}^c \\ &= \left({}^t \underline{B}^c + \frac{1}{2} \underline{e} : \underline{l}^c \otimes \underline{A}^c \right) \cdot \underline{d}^c + \left(\underline{C}^c + \frac{1}{2} \underline{e} : \underline{l}^c \otimes \underline{B}^c \right) \cdot \underline{\delta}^c.\end{aligned}$$

On introduit les tenseurs

$$\underline{\tilde{B}}^c = {}^t \underline{B}^c + \frac{1}{2} \underline{e} : \underline{l}^c \otimes \underline{A}^c \quad \underline{\tilde{C}}^c = \underline{C}^c + \frac{1}{2} \underline{e} : \underline{l}^c \otimes \underline{B}^c.$$

On a :

$$\begin{aligned}\underline{f}^c &= \underline{\underline{A}}^c \cdot \underline{d}^c + \underline{\underline{B}}^c \cdot \underline{\delta}^c \\ \underline{m}^c &= \underline{\underline{\tilde{B}}}^c \cdot \underline{d}^c + \underline{\underline{\tilde{C}}}^c \cdot \underline{\delta}^c.\end{aligned}$$

En prenant l'exemple d'interaction entre particules de type poutre d'Euler-Bernoulli, on a (voir l'annexe D) le comportement élastique linéaire suivant :

$$\begin{aligned}\underline{f}^c &= k_t (\underline{d}^c \cdot \underline{t}^c) \cdot \underline{t}^c + k_{n_1} (\underline{d}^c \cdot \underline{n}_1^c) \underline{n}_1^c + k_{n_2} (\underline{d}^c \cdot \underline{n}_2^c) \underline{n}_2^c \\ \underline{\hat{m}}^c &= k_\theta (\underline{\delta}^c \cdot \underline{t}^c) \cdot \underline{t}^c + k_\psi (\underline{\delta}^c \cdot \underline{n}_1^c) \underline{n}_1^c + k_\phi (\underline{\delta}^c \cdot \underline{n}_2^c) \underline{n}_2^c\end{aligned}$$

où le repère local du couple de particule $(\underline{t}^c, \underline{n}_1^c, \underline{n}_2^c)$ est représenté sur la figure 3.2. Les constantes $k_t, k_{n_1}, k_{n_2}, k_\theta, k_\psi, k_\phi$ sont identifiées pour exprimer exac-

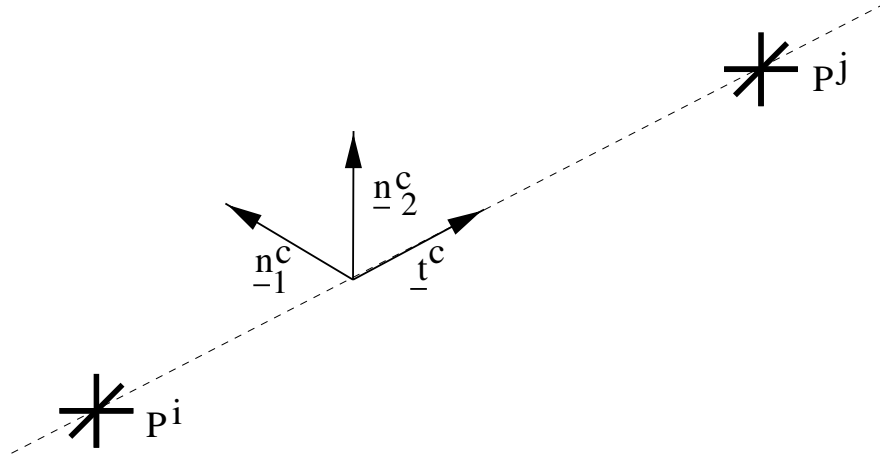


FIG. 3.2 – Repère local attaché à un couple de particule $c = (P^i, P^j)$

tement l'énergie d'une poutre d'Euler-Bernoulli dans l'hypothèse des petites perturbations. Si nous utilisons l, S, I, E, G qui sont respectivement la longueur, la section, l'inertie suivant la direction considérée, le module d'Young de la poutre et le module de cisaillement, ces coefficients sont donnés par :

$$k_t = \frac{E S}{l}, k_{n_1} = \frac{12 E I_1}{l^3}, k_{n_2} = \frac{12 E I_2}{l^3}, k_\theta = \frac{G I_t}{l}, k_\psi = \frac{E I_2}{l} \quad (3.10)$$

et $k_\phi = \frac{E I_1}{l}$.

3.3 Problème bien posé

Dans la suite, on suppose que le système discret $\mathcal{S}$ n'autorise pas de mécanismes internes. Plus précisément, l'énergie de déformation est nulle si, et seulement si, les déplacements sont ceux d'un mouvement de corps rigide :

$$\Psi(\underline{\mathbf{u}}, \underline{\boldsymbol{\phi}}) = 0 \Leftrightarrow \forall (i, j), \underline{\boldsymbol{\phi}}^i = \underline{\boldsymbol{\phi}}^j = \underline{\boldsymbol{\phi}}, \underline{\mathbf{u}}^i = \underline{\mathbf{u}}^j + \underline{\boldsymbol{\phi}} \wedge (\underline{\mathbf{x}}^i - \underline{\mathbf{x}}^j)$$

Un type de problème bien posé sur $\mathcal{S}$ consiste à partitionner $\mathcal{S}$ en deux sous-ensembles disjoints $\mathcal{S} = \mathcal{S}^d \cup \mathcal{S}^e$ où les déplacements, $\underline{\mathbf{u}}_{(d)}^j$ et $\underline{\boldsymbol{\phi}}_{(d)}^j$ (respectivement les efforts extérieurs $\underline{\mathbf{f}}_{ext, (e)}^j$ et $\underline{\mathbf{m}}_{ext, (e)}^j$) sont donnés sur $\mathcal{S}^d$ (respectivement $\mathcal{S}^e$). Le problème est alors de minimiser l'énergie potentielle :

$$\Psi(\underline{\mathbf{u}}, \underline{\boldsymbol{\phi}}) - \sum_{P^j \in \mathcal{S}^e} \underline{\mathbf{f}}_{ext, (e)}^j \cdot \underline{\mathbf{u}}^j + \underline{\mathbf{m}}_{ext, (e)}^j \cdot \underline{\boldsymbol{\phi}}^j$$

sur l'ensemble des champs cinématiquement admissibles, c'est-à-dire, l'ensemble des déplacements et rotations $(\underline{\mathbf{u}}, \underline{\boldsymbol{\phi}})$ tel que :

$$\forall P^j \in \mathcal{S}^d, \quad \underline{\mathbf{u}}^j = \underline{\mathbf{u}}_{(d)}^j \\ \underline{\boldsymbol{\phi}}^j = \underline{\boldsymbol{\phi}}_{(d)}^j.$$

De manière équivalente, on pourrait résoudre les équations d'équilibre associées (3.4) avec $P^j \in \mathcal{S}^e$ en y injectant le comportement (3.9) sur le même ensemble des champs cinématiquement admissibles.

Naturellement, il existe d'autres types de problème bien posé avec des "données mixtes" sur les composantes des efforts extérieurs et les composantes des déplacements nodaux. L'unicité de la solution est assurée dès que l'ensemble des champs cinématiquement admissibles ne contient aucun mouvement de corps rigide non nul.

Passons maintenant à l'analyse dimensionnelle du problème. On définit le diamètre, L , du système étudié comme la distance maximale entre deux particules de ce système, soit $L = \text{Max} |\underline{\mathbf{x}}^i - \underline{\mathbf{x}}^j|$. De manière similaire, on définit la longueur $l = \text{Max}_{c \in \mathcal{C}} |\underline{\mathbf{L}}_c|$ comme la distance caractéristique entre les noeuds connectés. Afin de se ramener à un problème sans dimension, on

introduit de nouvelles variables sans dimensions que l'on indice par une étoile, on écrit :

$$\underline{\mathbf{x}}^i = L\underline{\mathbf{x}}^{*i}, \underline{\mathbf{u}}^i = L\underline{\mathbf{u}}^{*i}, \underline{\boldsymbol{\phi}}^i = \underline{\boldsymbol{\phi}}^{*i}.$$

Ainsi, les déformations pour un couple $c = (P^i, P^j)$ s'écrivent :

$$\underline{\mathbf{d}}^c = L\underline{\mathbf{d}}^{*c}, \quad \underline{\boldsymbol{\delta}}^c = \underline{\boldsymbol{\delta}}^{*c}$$

avec

$$\underline{\mathbf{d}}^{*c} = \underline{\mathbf{u}}^{*i} - \underline{\mathbf{u}}^{*j} + \underline{\mathbf{l}}^{*c} \wedge \frac{\underline{\boldsymbol{\phi}}^{*i} + \underline{\boldsymbol{\phi}}^{*j}}{2}, \text{ où } \underline{\mathbf{l}}^c = L\underline{\mathbf{l}}^{*c}.$$

On choisit une norme sur les tenseurs exprimant le comportement. On introduit les grandeurs :

$$A = \text{Max}_{c \in \mathcal{C}} |\underline{\underline{\mathbf{A}}}^c|, B = \text{Max}_{c \in \mathcal{C}} |\underline{\underline{\mathbf{B}}}^c|, C = \text{Max}_{c \in \mathcal{C}} |\underline{\underline{\mathbf{C}}}^c|$$

Introduisons une valeur de contrainte de référence, σ , définie par :

$$\sigma = A l^{2-d}$$

où d est la dimension de l'espace ($d = 2$ ou 3).

On définit aussi deux longueurs liées au matériau l_b et l_c données par :

$$B = \sigma l_b^{d-1}, C = \sigma l_c^d$$

Le comportement adimensionnel $\underline{\underline{\mathbf{A}}}^{*c}, \underline{\underline{\mathbf{B}}}^{*c}, \underline{\underline{\mathbf{C}}}^{*c}$ est alors donné par :

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}}^c = \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{*c} \sigma l^{d-2}, \underline{\underline{\mathbf{B}}}^c = \underline{\underline{\mathbf{B}}}^{*c} \sigma l_b^{d-1}, \underline{\underline{\mathbf{C}}}^c = \underline{\underline{\mathbf{C}}}^{*c} \sigma l_c^d$$

et, on établit facilement que le comportement réel d'un couple c :

$$\begin{cases} \underline{\mathbf{f}}^c &= \underline{\underline{\mathbf{A}}}^c \cdot \underline{\mathbf{d}}^c + \underline{\underline{\mathbf{B}}}^c \cdot \underline{\boldsymbol{\delta}}^c \\ \underline{\hat{\mathbf{m}}}^c &= {}^t \underline{\underline{\mathbf{B}}}^c \cdot \underline{\mathbf{d}}^c + \underline{\underline{\mathbf{C}}}^c \cdot \underline{\boldsymbol{\delta}}^c \end{cases}$$

s'écrit sous la forme adimensionnelle :

$$\begin{cases} \underline{\mathbf{f}}^{*c} &= \varepsilon^{*d-2} \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{*c} \cdot \underline{\mathbf{d}}^{*c} + \varepsilon^{*d-1} \left(\frac{l_b}{l} \right)^{d-1} \underline{\underline{\mathbf{B}}}^{*c} \cdot \underline{\boldsymbol{\delta}}^{*c} \\ \underline{\hat{\mathbf{m}}}^{*c} &= \varepsilon^{*d-1} \left(\frac{l_b}{l} \right)^{d-1} {}^t \underline{\underline{\mathbf{B}}}^{*c} \cdot \underline{\mathbf{d}}^{*c} + \varepsilon^{*d} \left(\frac{l_c}{l} \right)^d \underline{\underline{\mathbf{C}}}^{*c} \cdot \underline{\boldsymbol{\delta}}^{*c} \end{cases}$$

où

$$\varepsilon^* = \frac{l}{L}, \underline{f}^{*c} = \frac{\underline{f}^c}{\sigma L^{d-1}}, \underline{\hat{m}}^{*c} = \frac{\underline{\hat{m}}^c}{\sigma L^d}.$$

Trois rapports de longueur apparaissent alors : $\varepsilon^* = \frac{l}{L}$, $\alpha^* = \frac{l_c}{l}$ et $\beta^* = \frac{l_b}{l}$.

Dans l'équilibre sans dimensions, on obtient :

$$\begin{aligned} \forall P^j \in \mathcal{S}, \quad & \begin{cases} \underline{f}_{ext}^{*j} + \sum \chi_j(c) \underline{f}^{*c} = 0 \\ \underline{m}_{ext}^{*j} + \sum^c \chi_j(c) \underline{m}^{*c} = 0 \end{cases} \\ & \text{avec } \underline{\hat{m}}^{*c} = \underline{m}^{*c} + \frac{1}{2} \underline{f}^{*c} \wedge \underline{l}^{*c}, \\ & \underline{f}_{ext}^{*j} = \frac{\underline{f}_{ext}^j}{\sigma L^{d-1}} \text{ et } \underline{m}_{ext}^{*j} = \frac{\underline{m}_{ext}^j}{\sigma L^d} \end{aligned} \quad (3.11)$$

3.4 Réseau périodique

Jusqu'à présent le matériau était quelconque, nous le particularisons en le rendant périodique. Le matériau est maintenant vu comme un ensemble dénombrable de particules, $\mathcal{S}$, positionnées sur un réseau périodique remplissant l'espace. Toutes les cellules de base contiennent pour un matériau donné le même nombre de particules, n , ce qui définit le caractère n -atomique du matériau. La figure 3.3 donne deux types de matériau en deux dimensions de structures atomiques distinctes. Nous appellerons $Y^{\underline{\alpha}}$ une cellule de référence du matériau où $\underline{\alpha}$ est un jeu de trois entiers relatifs repérant la cellule au moyen d'un référentiel fixe, $(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3)$, orienté suivant les orientations périodiques de translation. Les longueurs de ces vecteurs, $|\underline{a}_1|$, $|\underline{a}_2|$, $|\underline{a}_3|$ traduisent les dimensions de la cellule et sont caractéristiques du matériau. Une particule, $P^{\underline{\alpha},i}$, est définie par sa position dans l'espace $\underline{x}^{\underline{\alpha},i}$ où $i = 1, \dots, n$ est le numéro attaché à la particule dans la cellule de référence $Y^{\underline{\alpha}}$. Ainsi n est le nombre de particules dans une cellule de référence et nous posons :

$$Y^{\underline{\alpha}} = \left\{ \underline{x} = x_1 \cdot \underline{a}_1 + x_2 \cdot \underline{a}_2 + x_3 \cdot \underline{a}_3, x_k \in \left[\alpha_k - \frac{1}{2}, \alpha_k + \frac{1}{2} \right] \right\}.$$

On introduit les fonctions indicatrices $\chi_{\underline{\alpha},i}$ définies par :

$$\begin{aligned} \chi_{\underline{\alpha},i}(c) &= 1 \quad \text{si } c = (P^{\underline{\beta},j}, P^{\underline{\alpha},i}) \\ &= 0 \quad \text{sinon.} \end{aligned}$$

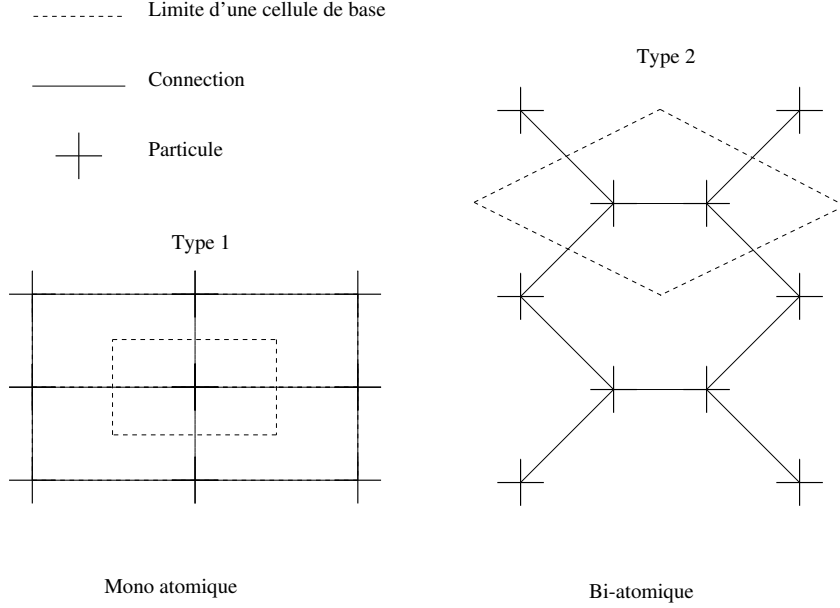


FIG. 3.3 – Différentes périodicités de connexion.

Le système particulaire $\mathcal{S}$ s'écrit alors : $\mathcal{S} = \{P^{\underline{\alpha},i}, \underline{\alpha} \in \mathbb{Z}^3, i \in [1, n]\}$. La périodicité de $\mathcal{S}$ se traduit par :

$$\begin{aligned} \forall i \in [1, n], \quad \underline{x}^{\underline{\alpha},i} &\in Y^{\underline{\alpha}} \\ \forall i \in [1, n], \quad (\underline{\alpha}, \underline{\beta}) &\in \mathbb{Z}^6, \quad \overrightarrow{P^{\underline{\alpha},i} P^{\underline{\beta},i}} = \underline{x}^{\underline{\beta},i} - \underline{x}^{\underline{\alpha},i} = (\beta_k - \alpha_k) \underline{a}_k \end{aligned}$$

On désigne par $S^{\underline{\alpha}}$ le sous-ensemble des particules situées dans la cellule $Y^{\underline{\alpha}}$ dont le centre géométrique est : $\underline{x}^{\underline{\alpha}} = \alpha_1 \cdot \underline{a}_1 + \alpha_2 \cdot \underline{a}_2 + \alpha_3 \cdot \underline{a}_3$.

Ici chaque particule possède six degrés de liberté, $(\underline{u}^{\underline{\alpha},i}, \underline{\phi}^{\underline{\alpha},i})$, 3 en translations et 3 en rotations. On définit ainsi

$$(\underline{u}, \underline{\phi}) = \{(\underline{u}^{\underline{\alpha},i}, \underline{\phi}^{\underline{\alpha},i}), i = 1, \dots, n, \underline{\alpha} \in \mathbb{Z}^3\}. \quad (3.12)$$

Tout élément c de $\mathcal{S} \times \mathcal{S}$ peut s'écrire sous la forme : $c = (P^{\underline{\beta},j}, P^{\underline{\alpha},i})$. Un couple est orienté par l'ordre des particules le composant $((P^{\underline{\beta},j}, P^{\underline{\alpha},i}) \neq (P^{\underline{\alpha},i}, P^{\underline{\beta},j}))$. Pour tout couple, c , un vecteur de connection est défini par :

$$\forall c = (P^{\underline{\beta},j}, P^{\underline{\alpha},i}) \in \mathcal{S} \times \mathcal{S}, \underline{l}^c = \overrightarrow{P^{\underline{\alpha},i} P^{\underline{\beta},j}} = \underline{x}^{\underline{\beta},j} - \underline{x}^{\underline{\alpha},i}$$

On introduit un opérateur de transposition, t , défini sur $\mathcal{S} \times \mathcal{S}$ par :

$$\forall c = (P^{\underline{\beta},j}, P^{\underline{\alpha},i}) \in \mathcal{S} \times \mathcal{S}, {}^t c = (P^{\underline{\alpha},i}, P^{\underline{\beta},j}).$$

On définit aussi le groupe de translation, $\tau_{\underline{\gamma}}$, sur $\mathcal{S} \times \mathcal{S}$ par :

$$\forall \underline{\gamma} \in \mathbb{Z}^3, \forall c = (P^{\underline{\beta},j}, P^{\underline{\alpha},i}) \in \mathcal{S} \times \mathcal{S}, \tau_{\underline{\gamma}}(c) = (P^{\underline{\beta}+\underline{\gamma},j}, P^{\underline{\alpha}+\underline{\gamma},i}).$$

Au moyen de ces nouveaux opérateurs et grâce à la périodicité du système, on peut définir un générateur fini des couples connectés. Pour ce faire, on introduit l'ensemble des couples de particules, noté $G = \{c^1, \dots, c^m\}$, constitué de m couples tels qu'aucun couple ne soit le transposé ou le translaté d'un autre :

$$\forall \underline{\gamma} \in \mathbb{Z}^d, \forall (c^i, c^j) \in G \times G, {}^t c^i \neq c^j, \tau_{\underline{\gamma}}(c^i) \neq c^j$$

Par convention, nous noterons : ${}^t c^i = c^{-i}$. L'ensemble des couples connectés engendré par G , noté $\mathcal{C}_G^s$, est, par définition, l'ensemble des couples obtenus par translation et transposition des éléments de G . Plus précisément, introduisons $G^s = G \cup {}^t G = \{c^{-m}, \dots, c^{-1}, c^1, \dots, c^m\}$ alors,

$$\mathcal{C}_G = \bigcup_{\underline{\gamma} \in \mathbb{Z}^d} \tau_{\underline{\gamma}}(G), \quad \mathcal{C}_G^s = \bigcup_{\underline{\gamma} \in \mathbb{Z}^d} \tau_{\underline{\gamma}}(G^s) = \mathcal{C}_G \cup {}^t \mathcal{C}_G$$

On peut maintenant poser la définition :

Definition 1 *Le couple $c \in \mathcal{C}_G^s$ est de type k , $k = \pm 1, \dots, \pm m$, si et seulement si :*

$$\exists! \underline{\gamma}, \tau_{\underline{\gamma}}(c) = c^k.$$

Pour $c = (P^{\underline{\alpha},i}, P^{\underline{\beta},j})$ de type k , on note $[c] = k$ le type de c , $[c = i]$ le type de la première particule de c , et $[c] = j$ le type de la deuxième particule de c . Il peut être commode d'introduire une autre partition de $\mathcal{C}_G^s$ de la façon suivante. On définit $G^{s,\underline{\alpha}}$ comme l'ensemble des couples de G^s ayant subi une translation qui ramène leurs deuxièmes particules sur la cellule $Y^{\underline{\alpha}}$:

$$G^{s,\underline{\alpha}} = \left\{ c' \mid c' = \tau_{\underline{\alpha}-\underline{\gamma}}(c) / c = (P^{\underline{\beta},j}, P^{\underline{\gamma},i}) \in G^s \right\}$$

Il est clair que :

$$\mathcal{C}_G^s = \bigcup_{\underline{\alpha} \in \mathbb{Z}^d} G^{s,\underline{\alpha}}.$$

On définit maintenant les fonctions $\mathcal{C}$ -périodiques sur $\mathcal{C}$ par :

$$\begin{aligned} f \text{ est } \mathcal{C}_G^s\text{-périodique} &\Leftrightarrow \forall (c, \underline{\gamma}) \in \mathcal{C}_G^s \times \mathbb{Z}^d, f(\tau_{\underline{\gamma}}(c)) = f(c) \\ f \text{ est } \mathcal{C}_G\text{-périodique} &\Leftrightarrow \forall (c, \underline{\gamma}) \in \mathcal{C}_G \times \mathbb{Z}^d, f(\tau_{\underline{\gamma}}(c)) = f(c) \end{aligned}$$

f a donc $2m$ ou m valeurs possibles suivant qu'elle est $\mathcal{C}_G^s$ -périodique ou $\mathcal{C}_G$ -périodique. On note $f(c) = f^{[c]}$ où f^k est la valeur associée au type k . Nous pouvons écrire le théorème suivant :

Théorème 2 *$\mathcal{C}$ -sommation* Pour tout f $\mathcal{C}_G^s$ -périodique,

$$\forall \underline{\alpha} \in \mathbb{Z}^d, \sum_{i=1}^n \sum_{c \in \mathcal{C}} \chi_{\underline{\alpha}, i}(c) f(c) = \sum_{c \in G^s, \underline{\alpha}} f(c) = \sum_{k=1}^m (f^k + f^{-k})$$

L'énergie d'interaction H_c d'un couple de particule c est clairement $\mathcal{C}_G^s$ -périodique ce qui implique la $\mathcal{C}_G^s$ -périodicité de tous les tenseurs de comportement $\underline{\underline{A}}^c, \underline{\underline{B}}^c$ et $\underline{\underline{C}}^c$.

On suppose de plus l'absence de mécanisme interne sur l'ensemble du réseau périodique (qui est infini), ce qui signifie que seuls les mouvements rigidifiants du réseau annulent l'énergie de déformation du système soit :

$$\sum_{c \in \mathcal{C}_G} H_c(\underline{u}, \underline{\phi}) = 0 \Leftrightarrow \forall P^{\underline{\alpha}, i} \in \mathcal{S}, \begin{cases} \underline{u}^{\underline{\alpha}, i} = \underline{U}_0 + \underline{\Phi}_0 \wedge \underline{x}^{\underline{\alpha}, i} \\ \underline{\phi}^{\underline{\alpha}, i} = \underline{\Phi}_0 \end{cases}$$

On rappelle que l'énergie d'interaction H_c est une forme quadratique positive par rapport à $\underline{d}_c$ et $\underline{\delta}_c$. Un réseau périodique, $\mathcal{R}$, est donc géométriquement défini par un triplet $\mathcal{R} = \{\mathcal{S}^0, G, \tau\}$, $\mathcal{S}^0$ donnant le générateur des particules, G le générateur des couples, τ l'opérateur générant le réseau (et donc le repère de périodicité).

Enfin à partir de tout réseau périodique, $\mathcal{R}$, nous pouvons en définir des réseaux ε -homothétiques, $\varepsilon\mathcal{R}$ en effectuant une homothétie de rapport ε sur toutes les positions des particules. On obtient ainsi l'ensemble de particules du réseau ε -homothétique $\varepsilon\mathcal{S} = \{P_\varepsilon = \varepsilon P, P \in \mathcal{S}\}$, et l'ensemble des couples $\varepsilon\mathcal{S} \times \varepsilon\mathcal{S}$. Ainsi le réseau ε -homothétique, $\varepsilon\mathcal{R}$, est défini par le triplet $\{\varepsilon\mathcal{S}^0, \varepsilon G, \tau_{\varepsilon, \cdot}\}$ où :

$$\begin{aligned} \varepsilon\mathcal{S}^0 &= \{P_\varepsilon = \varepsilon P, P \in \mathcal{S}^0\} \\ \varepsilon G &= \left\{ c_\varepsilon^k = \left(P_\varepsilon^{\underline{\beta}, j}, P_\varepsilon^{\underline{\alpha}, i} \right) / c^k = \left(P^{\underline{\beta}, j}, P^{\underline{\alpha}, i} \right) \in G, k \in \mathbb{N} \right\} \\ \forall c_\varepsilon &= \left(P_\varepsilon^{\underline{\beta}, j}, P_\varepsilon^{\underline{\alpha}, i} \right) \in \varepsilon\mathcal{C}, \tau_{\varepsilon, \underline{\gamma}}(c_\varepsilon) = \left(P_\varepsilon^{\underline{\beta} + \underline{\gamma}, j}, P_\varepsilon^{\underline{\alpha} + \underline{\gamma}, i} \right) \end{aligned}$$

Naturellement les positions $\underline{x}^{\underline{\alpha}, i}$ se sont transformées en positions $\underline{x}_\varepsilon^{\underline{\alpha}, i} = \varepsilon \underline{x}^{\underline{\alpha}, i}$ et $\chi_{\underline{\alpha}, i}(c_\varepsilon) = \chi_{\underline{\alpha}, i}(c)$.

3.5 Le problème d'homogénéisation discret

Maintenant que le milieu discret est bien décrit et que les définitions s'y rattachant sont posées, nous allons commencer la description de l'homogénéisation du milieu discret proprement dite. En premier lieu, nous posons

le problème de changement d'échelle sur lequel vont s'appuyer les développements asymptotiques. L'analyse dimensionnelle de la section 3.3 a montré que tout problème d'élasticité bien posé sur une structure constituée d'un réseau périodique dont la taille caractéristique de la cellule élémentaire (son diamètre par exemple) est l , peut se ramener à un problème adimensionnel homothétique posé sur un réseau périodique dont la taille de la période est ε fois l'unité où ε est le rapport entre l et le diamètre de la structure, L . Le principe de l'homogénéisation est de remplacer le problème posé sur la structure discrète par sa limite quand ε tend vers zéro.

Soit $\mathcal{R}$ un réseau périodique dont la cellule élémentaire, Y , est de taille unité. On considère dans la suite un domaine régulier fixe, Ω , occupé par le réseau homothétique $\varepsilon\mathcal{R}$. On impose des conditions d'encastrement sur le bord de Ω :

$$\forall P_{\varepsilon}^{\alpha,i} \in \varepsilon\mathcal{S}/P_{\varepsilon}^{\alpha,i} \notin \Omega, \quad \begin{cases} \underline{u}_{\varepsilon}^{\alpha,i} = 0 \\ \underline{\phi}_{\varepsilon}^{\alpha,i} = 0 \end{cases}$$

Pour les efforts extérieurs, nous les supposons dériver d'efforts volumiques continus indépendant du rapport d'homothétie ε . Ainsi en toute particule $P_{\varepsilon}^{\alpha,i} \in \Omega$, on a :

$$\underline{f}_{ext,\varepsilon}^{\alpha,i} = \frac{\varepsilon^d |Y|}{n} \underline{F}_{ext}(\underline{x}_{\varepsilon}^{\alpha,i}) \quad \text{et} \quad \underline{m}_{ext,\varepsilon}^{\alpha,i} = \frac{\varepsilon^d |Y|}{n} \underline{C}_{ext}(\underline{x}_{\varepsilon}^{\alpha,i})$$

où $\underline{F}_{ext}$ et $\underline{C}_{ext}$ sont des champs continus définis sur Ω .

Nous introduisons deux types de ε -comportement différents qui nous conduiront à deux problèmes d'homogénéisation différents par la suite. Le ε -comportement s'exprime comme :

$$\begin{aligned} \underline{f}_{\varepsilon}^c &= \underline{\underline{A}}_{\varepsilon}^c \cdot \underline{d}_{\varepsilon}^c + \underline{\underline{B}}_{\varepsilon}^c \cdot \underline{\delta}_{\varepsilon}^c \\ \underline{\hat{m}}_{\varepsilon}^c &= {}^t \underline{\underline{B}}_{\varepsilon}^c \cdot \underline{d}_{\varepsilon}^c + \underline{\underline{C}}_{\varepsilon}^c \cdot \underline{\delta}_{\varepsilon}^c \end{aligned}$$

Dans le premier schéma d'homogénéisation, on considère une suite de problèmes réels homothétiques où les longueurs caractéristiques l , l_b et l_c introduites dans l'analyse dimensionnelle restent constantes, et L tend vers l'infini. Dans ce cas, les grandeurs adimensionnelles $\underline{\underline{A}}_{\varepsilon}^c$, $\underline{\underline{B}}_{\varepsilon}^c$, $\underline{\underline{C}}_{\varepsilon}^c$ sont de la forme :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \begin{aligned} \underline{\underline{A}}_{\varepsilon}^c &= \varepsilon^{d-2} \underline{\underline{A}}^{*c} \\ \underline{\underline{B}}_{\varepsilon}^c &= \varepsilon^{d-1} \underline{\underline{B}}^{*c} \\ \underline{\underline{C}}_{\varepsilon}^c &= \varepsilon^d \underline{\underline{C}}^{*c} \end{aligned}$$

où $\underline{\underline{A}}^{*c}$, $\underline{\underline{B}}^{*c}$, $\underline{\underline{C}}^{*c}$ sont $\mathcal{C}_G^s$ -périodiques. Ce type de comportement correspond par exemple à l'étude de structures, constituées d'un matériau vu comme

un assemblage de poutres définies où on fait tendre uniquement la taille de structure vers l'infini.

Dans le second schéma d'homogénéisation, on considère une suite de problèmes réels où la longueur caractéristique l est constante, l_b , l_c et L tendant simultanément vers l'infini. Ce schéma est pertinent lorsque les longueurs l_b , l_c , L sont du même ordre. Dans ce cas, les grandeurs adimensionnées $\underline{\underline{\mathbf{A}}}_\varepsilon^c$, $\underline{\underline{\mathbf{B}}}_\varepsilon^c$, $\underline{\underline{\mathbf{C}}}_\varepsilon^c$, sont de la forme :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \begin{aligned} \underline{\underline{\mathbf{A}}}_\varepsilon^c &= \varepsilon^{d-2} \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{*c} \\ \underline{\underline{\mathbf{B}}}_\varepsilon^c &= \varepsilon^{d-2} \underline{\underline{\mathbf{B}}}^{*(2)c} \\ \underline{\underline{\mathbf{C}}}_\varepsilon^c &= \varepsilon^{d-2} \underline{\underline{\mathbf{C}}}^{*(2)c} \end{aligned}$$

où $\underline{\underline{\mathbf{A}}}^{*c}$, $\underline{\underline{\mathbf{B}}}^{*(2)c}$, $\underline{\underline{\mathbf{C}}}^{*(2)c}$ sont $\mathcal{C}_G^s$ -périodiques. Nous nous retrouvons ici avec un comportement réel qui se rigidifie en “flexion”($\underline{\underline{\mathbf{C}}}^c$) et en “effort tranchant”($\underline{\underline{\mathbf{B}}}^c$) lorsque l'on augmente la taille de la structure réelle.

L'équilibre s'écrit, indépendamment du ε -comportement, sur la nouvelle configuration ε -homothétique :

$$\forall P_\varepsilon^{\underline{\alpha},i}, \quad \begin{cases} \underline{\underline{\mathbf{f}}}_{ext,\varepsilon}^{\underline{\alpha},i} + \sum \chi_{\underline{\alpha},i}(c) \underline{\underline{\mathbf{f}}}_\varepsilon^c = 0 \\ \underline{\underline{\mathbf{m}}}_{ext,\varepsilon}^{\underline{\alpha},i} + \sum_c \chi_{\underline{\alpha},i}(c) \underline{\underline{\mathbf{m}}}_\varepsilon^c = 0 \end{cases}$$

Nous avons défini deux problèmes d'homogénéisation qui peuvent se résumer de la façon suivante sur la ε -configuration.

Problème d'homogénéisation

- Un domaine régulier fixe Ω .
- Fixation de la cinématique hors de Ω

$$\forall P_\varepsilon^{\alpha,i} \in {}_\varepsilon\mathcal{S}/P_\varepsilon^{\alpha,i} \notin \Omega, \left\{ \begin{array}{l} \underline{u}_\varepsilon^{\alpha,i} = 0 \\ \underline{\phi}_\varepsilon^{\alpha,i} = 0 \end{array} \right.$$

- Définition des efforts extérieurs de la forme :

$$\underline{f}_{ext,\varepsilon}^{\alpha,i} = \frac{\varepsilon^d |Y|}{n} \underline{F}_{ext}(\underline{x}_\varepsilon^{\alpha,i}) \text{ et } \underline{m}_{ext,\varepsilon}^{\alpha,i} = \frac{\varepsilon^d |Y|}{n} \underline{C}_{ext}(\underline{x}_\varepsilon^{\alpha,i})$$

- Equations d'équilibre :

$$\forall P_\varepsilon^{\alpha,i}, \left\{ \begin{array}{l} \underline{f}_{ext,\varepsilon}^{\alpha,i} + \sum_c \chi_{\alpha,i}(c) \underline{f}_\varepsilon^c = 0 \\ \underline{m}_{ext,\varepsilon}^{\alpha,i} + \sum_c \chi_{\alpha,i}(c) \underline{m}_\varepsilon^c = 0 \end{array} \right.$$

- Cinématique

$$\underline{d}_\varepsilon^c = \underline{u}_\varepsilon^{\alpha,i} - \underline{u}_\varepsilon^{\beta,j} + \underline{l}_\varepsilon^c \wedge \frac{\underline{\phi}_\varepsilon^{\alpha,i} + \underline{\phi}_\varepsilon^{\beta,j}}{2}, \quad \underline{\delta}_\varepsilon^c = \underline{\phi}_\varepsilon^{\alpha,i} - \underline{\phi}_\varepsilon^{\beta,j}$$

pour $c = (P^{\alpha,i}, P^{\beta,j}), \underline{l}_\varepsilon^c = \underline{x}_\varepsilon^{\alpha,i} - \underline{x}_\varepsilon^{\beta,j}$

- Définition du comportement

$$\underline{f}_\varepsilon^c = \underline{\underline{A}}_\varepsilon^c \cdot \underline{d}_\varepsilon^c + \underline{\underline{B}}_\varepsilon^c \cdot \underline{\delta}_\varepsilon^c \quad \underline{\hat{m}}_\varepsilon^c = {}^t \underline{\underline{B}}_\varepsilon^c \cdot \underline{d}_\varepsilon^c + \underline{\underline{C}}_\varepsilon^c \cdot \underline{\delta}_\varepsilon^c$$

1. Schéma 1 (SH1)

$$\underline{\underline{A}}_\varepsilon^c = \varepsilon^{d-2} \underline{\underline{A}}^{*c}, \quad \underline{\underline{B}}_\varepsilon^c = \varepsilon^{d-1} \underline{\underline{B}}^{*c}, \quad \underline{\underline{C}}_\varepsilon^c = \varepsilon^d \underline{\underline{C}}^{*c}$$

2. Schéma 2 (SH2)

$$\underline{\underline{A}}_\varepsilon^c = \varepsilon^{d-2} \underline{\underline{A}}^{*(2)c}, \quad \underline{\underline{B}}_\varepsilon^c = \varepsilon^{d-2} \underline{\underline{B}}^{*(2)c}, \quad \underline{\underline{C}}_\varepsilon^c = \varepsilon^{d-2} \underline{\underline{C}}^{*(2)c}$$

3.6 Développements asymptotiques de la cinématique

A l'instar de la démarche adoptée dans le passage du niveau microscopique au niveau macroscopique des milieux continus de la section 1.6, nous allons utiliser un développement asymptotique de la cinématique. On substitue les champs discrets par la trace de développement asymptotique continu. La cinématique discrète de translation, $\underline{u}_\varepsilon^{\alpha,i}$, et de rotation, $\underline{\phi}_\varepsilon^{\alpha,i}$, en la particule $P_\varepsilon^{\alpha,i}$ s'écrit :

$$\begin{aligned}\underline{u}_\varepsilon^{\alpha,i} &= \underline{U}_0^i(\underline{x}_\varepsilon^{\alpha,i}) + \varepsilon \underline{U}_1^i(\underline{x}_\varepsilon^{\alpha,i}) + \varepsilon^2 \underline{U}_2^i(\underline{x}_\varepsilon^{\alpha,i}) + \dots \\ \underline{\phi}_\varepsilon^{\alpha,i} &= \underline{\Phi}_0^i(\underline{x}_\varepsilon^{\alpha,i}) + \varepsilon \underline{\Phi}_1^i(\underline{x}_\varepsilon^{\alpha,i}) + \varepsilon^2 \underline{\Phi}_2^i(\underline{x}_\varepsilon^{\alpha,i}) + \dots\end{aligned}$$

où $\underline{U}_k^i$, $\underline{\Phi}_k^i$ sont des champs continus définis sur Ω . A partir de ces nouvelles expressions des champs discrets, nous en déduisons, pour le couple de particules, $c_\varepsilon = (P_\varepsilon^{\alpha,i}, P_\varepsilon^{\beta,j})$, une première expression du développement asymptotique des déformations discrètes généralisées définies par (3.6) :

$$\begin{aligned}\underline{d}_\varepsilon^c &= \left(\underline{U}_0^i(\underline{x}_\varepsilon^{\alpha,i}) - \underline{U}_0^j(\underline{x}_\varepsilon^{\beta,j}) \right) \\ &+ \varepsilon \left(\underline{U}_1^i(\underline{x}_\varepsilon^{\alpha,i}) - \underline{U}_1^j(\underline{x}_\varepsilon^{\beta,j}) + \frac{\underline{l}^c}{2} \wedge \left(\underline{\Phi}_0^i(\underline{x}_\varepsilon^{\alpha,i}) + \underline{\Phi}_0^j(\underline{x}_\varepsilon^{\beta,j}) \right) \right) \\ &+ \varepsilon^2 \left(\underline{U}_2^i(\underline{x}_\varepsilon^{\alpha,i}) - \underline{U}_2^j(\underline{x}_\varepsilon^{\beta,j}) + \frac{\underline{l}^c}{2} \wedge \left(\underline{\Phi}_1^i(\underline{x}_\varepsilon^{\alpha,i}) + \underline{\Phi}_1^j(\underline{x}_\varepsilon^{\beta,j}) \right) \right) \\ &+ \dots \\ \underline{\delta}_\varepsilon^c &= \left(\underline{\Phi}_0^i(\underline{x}_\varepsilon^{\alpha,i}) - \underline{\Phi}_0^j(\underline{x}_\varepsilon^{\beta,j}) \right) + \varepsilon \left(\underline{\Phi}_1^i(\underline{x}_\varepsilon^{\alpha,i}) - \underline{\Phi}_1^j(\underline{x}_\varepsilon^{\beta,j}) \right) \\ &+ \varepsilon^2 \left(\underline{\Phi}_2^i(\underline{x}_\varepsilon^{\alpha,i}) - \underline{\Phi}_2^j(\underline{x}_\varepsilon^{\beta,j}) \right) \\ &+ \dots\end{aligned}$$

On effectue les développements de Taylor autour de la particule où l'on recherche l'équation d'équilibre. Il est à noter que l'ordre du développement de Taylor doit être cohérent avec l'ordre du développement asymptotique des équations d'équilibre. En outre, tout comme dans les équilibres de la section 3.7 le caractère unique du développement asymptotique pour toute valeur du rapport de taille, ε , conjugué avec le caractère dense du système $\mathcal{S}$ permet de passer à des égalités fonctionnelles. Ainsi de façon formelle, on a quelque soit l'ordre recherché en se ramenant en la particule $P_\varepsilon^{\beta,j}$ du couple

$c_\varepsilon = \left(P_\varepsilon^{\alpha,i}, P_\varepsilon^{\beta,j} \right)$ de type k :

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{d}}_\varepsilon^c &= \underline{\mathbf{d}}_0^{[c]} \left(\underline{\mathbf{x}}_\varepsilon^{\beta,j} \right) + \varepsilon \underline{\mathbf{d}}_1^{[c]} \left(\underline{\mathbf{x}}_\varepsilon^{\beta,j} \right) + \varepsilon^2 \underline{\mathbf{d}}_2^{[c]} \left(\underline{\mathbf{x}}_\varepsilon^{\beta,j} \right) + \dots \\ \underline{\boldsymbol{\delta}}_\varepsilon^c &= \underline{\boldsymbol{\delta}}_0^{[c]} \left(\underline{\mathbf{x}}_\varepsilon^{\beta,j} \right) + \varepsilon \underline{\boldsymbol{\delta}}_1^{[c]} \left(\underline{\mathbf{x}}_\varepsilon^{\beta,j} \right) + \varepsilon^2 \underline{\boldsymbol{\delta}}_2^{[c]} \left(\underline{\mathbf{x}}_\varepsilon^{\beta,j} \right) + \dots\end{aligned}$$

où $\underline{\mathbf{d}}_r^k$ et $\underline{\boldsymbol{\delta}}_r^k$ sont des fonctions continues données par :

$$\underline{\mathbf{d}}_0^{[c]} = \underline{\mathbf{U}}_0^{[c]} - \underline{\mathbf{U}}_0^c$$

et $\forall r > 1$,

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{d}}_r^{[c]} &= \underline{\mathbf{U}}_r^{[c]} - \underline{\mathbf{U}}_r^c + \sum_{p=1}^r \frac{1}{p!} \underline{\mathbf{U}}_{r-p}^{[c]} \otimes^p \underline{\boldsymbol{\nabla}}^p \underline{\mathbf{l}}^c \otimes^{p-1} \\ &+ \frac{\underline{\mathbf{l}}^c}{2} \wedge \left(\underline{\boldsymbol{\Phi}}_{r-1}^{[c]} + \underline{\boldsymbol{\Phi}}_{r-1}^c + \sum_{p=1}^{r-1} \frac{1}{p!} \underline{\boldsymbol{\Phi}}_{r-p-1}^{[c]} \otimes^p \underline{\boldsymbol{\nabla}}^p \underline{\mathbf{l}}^c \otimes^{p-1} \right)\end{aligned}\tag{3.13}$$

$$\underline{\boldsymbol{\delta}}_0^{[c]} = \underline{\boldsymbol{\Phi}}_0^{[c]} - \underline{\boldsymbol{\Phi}}_0^c$$

et $\forall r \geq 1$,

$$\underline{\boldsymbol{\delta}}_r^{[c]} = \underline{\boldsymbol{\Phi}}_r^{[c]} - \underline{\boldsymbol{\Phi}}_r^c + \sum_{p=1}^r \frac{1}{p!} \underline{\boldsymbol{\Phi}}_{r-p}^{[c]} \otimes^p \underline{\boldsymbol{\nabla}}^p \underline{\mathbf{l}}^c \otimes^{p-1}$$

Remarquons que les champs $\underline{\mathbf{d}}_r^k$ et $\underline{\mathbf{d}}_r^{-k}$ (resp : $\underline{\boldsymbol{\delta}}_r^k$ et $\underline{\boldsymbol{\delta}}_r^{-k}$) ne sont pas opposés a priori.

Avant d'aborder concrètement l'étude des deux problèmes d'homogénéisation, nous allons dans un premier temps nous intéresser aux développements des équations d'équilibre. Les équilibres écrits en efforts sont indépendants du comportement retenu, leurs développements asymptotiques sont donc les même pour les deux schémas d'homogénéisation ce qui va nous permettre de construire des définitions des contraintes macroscopiques indépendantes du schéma adopté.

3.7 Développement asymptotique des équations d'équilibre

Le milieu discret ne connaît que des forces et moments appliqués en des points discrets et réduit en ces points. Ainsi nous ne possédons, pour un couple $c_\varepsilon = (P_\varepsilon^{\alpha,i}, P_\varepsilon^{\beta,j})$, que la valeur de la force $\underline{f}_\varepsilon^c$ exercée par la particule $P_\varepsilon^{\alpha,i}$ sur la particule $P_\varepsilon^{\beta,j}$, et la valeur du moment $\underline{m}_\varepsilon^c$ exercé par la particule $P_\varepsilon^{\alpha,i}$ sur la particule $P_\varepsilon^{\beta,j}$ réduit en la particule $P_\varepsilon^{\beta,j}$. Nous allons supposer que ces valeurs sont issues de la trace de champ continu en fonction du point de réduction du torseur. Les équations d'équilibre en $P_\varepsilon^{\alpha,i}$ s'écrivent :

$$\begin{aligned} \sum_c \chi_{\alpha,i}(c) \underline{f}_\varepsilon^{c_\varepsilon} + \frac{\varepsilon^d |Y|}{n} \underline{F}_{ext}(\underline{x}_\varepsilon^{\alpha,i}) &= 0 \\ \sum_c \chi_{\alpha,i}(c) \underline{m}_\varepsilon^c + \frac{\varepsilon^d |Y|}{n} \underline{C}_{ext}(\underline{x}_\varepsilon^{\alpha,i}) &= 0 \end{aligned} \quad (3.14)$$

Pour $c_\varepsilon = (P_\varepsilon^{\alpha,i}, P_\varepsilon^{\beta,j})$ de type k , on suppose que les efforts de contact $\underline{f}_\varepsilon^c$ et $\underline{m}_\varepsilon^c$ sont la trace au point $\underline{x}_\varepsilon^{\beta,j}$ d'un champ continu ne dépendant que du type de c , et dont on cherche le développement asymptotique. Ainsi, on écrit :

$$\begin{aligned} \underline{f}_\varepsilon^c &= \varepsilon^{d-1} \left[\underline{F}_0^k(\underline{x}_\varepsilon^{\beta,j}) + \varepsilon \underline{F}_1^k(\underline{x}_\varepsilon^{\beta,j}) + \dots \right. \\ &\quad \left. + \varepsilon^q \underline{F}_q^k(\underline{x}_\varepsilon^{\beta,j}) + \dots \right] \\ \underline{m}_\varepsilon^c &= \varepsilon^{d-1} \left[\underline{M}_0^k(\underline{x}_\varepsilon^{\beta,j}) + \varepsilon \underline{M}_1^k(\underline{x}_\varepsilon^{\beta,j}) + \dots \right. \\ &\quad \left. + \varepsilon^q \underline{M}_q^k(\underline{x}_\varepsilon^{\beta,j}) + \dots \right] \end{aligned} \quad (3.15)$$

$\underline{F}_j^i$ et $\underline{M}_j^i$ sont des champs continus définis sur Ω indépendants du rapport de taille ε . On peut vérifier a posteriori qu'on peut commencer le développement asymptotique à l'ordre ε^{d-1} . Nous allons maintenant réinjecter les nouveaux développements asymptotiques dans les lois d'action mutuelle. Nous obtenons ainsi pour tout couple $c_\varepsilon = (P_\varepsilon^{\alpha,i}, P_\varepsilon^{\beta,j})$ de type de connection k :

$$\begin{aligned} &\underline{f}_\varepsilon^c + \underline{f}_\varepsilon^{t_c} \\ &= \varepsilon^{d-2} \left(\underline{F}_0^k(\underline{x}_\varepsilon^{\beta,j}) + \underline{F}_0^{-k}(\underline{x}_\varepsilon^{\alpha,i}) + \varepsilon \left(\underline{F}_1^k(\underline{x}_\varepsilon^{\beta,j}) + \underline{F}_1^{-k}(\underline{x}_\varepsilon^{\alpha,i}) \right) \right. \\ &\quad \left. + \dots + \varepsilon^q \left(\underline{F}_q^k(\underline{x}_\varepsilon^{\beta,j}) + \underline{F}_q^{-k}(\underline{x}_\varepsilon^{\alpha,i}) \right) \right) + \dots \\ &= 0 \end{aligned}$$

On introduit les champs asymptotiques continus en effectuant un développement de Taylor autour de la particule $P_\varepsilon^{\beta,j}$, la première loi d'action mutuelle devient en regroupant les termes par ordre du développement asymptotique :

$$0 = \varepsilon^{d-1} \left[\underline{\mathbf{F}}_0^k + \underline{\mathbf{F}}_0^{-k} + \varepsilon \left(\underline{\mathbf{F}}_1^k + \underline{\mathbf{F}}_1^{-k} + \underline{\mathbf{F}}_0^{-k} \otimes \underline{\nabla} \cdot \underline{\mathbf{l}}^k \right) + \varepsilon^2 \left(\underline{\mathbf{F}}_2^k + \underline{\mathbf{F}}_2^{-k} + \underline{\mathbf{F}}_1^{-k} \otimes \underline{\nabla} \cdot \underline{\mathbf{l}}^k + \frac{1}{2} \underline{\mathbf{F}}_0^{-k} \otimes \underline{\nabla} \otimes \underline{\nabla} : \underline{\mathbf{l}}^k \otimes \underline{\mathbf{l}}^k \right) + \dots \right]$$

Par identification à chaque ordre, un système apparaît naturellement :

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\mathbf{F}}_0^k + \underline{\mathbf{F}}_0^{-k} = 0 \\ \underline{\mathbf{F}}_1^k + \underline{\mathbf{F}}_1^{-k} + \underline{\mathbf{F}}_0^{-k} \otimes \underline{\nabla} \cdot \underline{\mathbf{l}}^k = 0 \\ \underline{\mathbf{F}}_2^k + \underline{\mathbf{F}}_2^{-k} + \underline{\mathbf{F}}_1^{-k} \otimes \underline{\nabla} \cdot \underline{\mathbf{l}}^k + \frac{1}{2} \underline{\mathbf{F}}_0^{-k} \otimes \underline{\nabla} \otimes \underline{\nabla} : \underline{\mathbf{l}}^k \otimes \underline{\mathbf{l}}^k = 0 \\ \vdots \\ \underline{\mathbf{F}}_q^k + \underline{\mathbf{F}}_q^{-k} + \sum_{l=1}^q \frac{1}{l!} \underline{\mathbf{F}}_{q-l}^{-k} \otimes \underline{\nabla}^{\otimes l} \underline{\mathbf{l}}^k = 0 \end{array} \right. \quad (3.16)$$

On applique le même schéma sur la deuxième loi d'action mutuelle où un couplage apparaît entre les développements asymptotiques de la force et du moment. On rappelle cette loi avec les mêmes particules mises en jeu :

$$\underline{\mathbf{m}}_\varepsilon^c + \underline{\mathbf{m}}_\varepsilon^{tc} + \underline{\mathbf{l}}_\varepsilon^c \wedge \underline{\mathbf{f}}_\varepsilon^c = \underline{\mathbf{m}}_\varepsilon^c + \underline{\mathbf{m}}_\varepsilon^{tc} + \underline{\mathbf{l}}_\varepsilon^{tc} \wedge \underline{\mathbf{f}}_\varepsilon^{tc} = 0 \quad (3.17)$$

Nous prenons l'une ou l'autre des équations et nous lui réinjectons les développements de Taylor pour tout ramener en la particule $\underline{\mathbf{x}}^{\beta,j}$. Nous obtenons alors :

$$\begin{aligned} & \underline{\mathbf{m}}_\varepsilon^c + \underline{\mathbf{m}}_\varepsilon^{tc} + \underline{\mathbf{l}}_\varepsilon^{-k} \wedge \underline{\mathbf{f}}_\varepsilon^{tc} \\ = & \varepsilon^{d-1} \left[\underline{\mathbf{M}}_0^k + \underline{\mathbf{M}}_0^{-k} + \varepsilon \left(\underline{\mathbf{M}}_1^k + \underline{\mathbf{M}}_1^{-k} + \underline{\mathbf{M}}_0^{-k} \otimes \underline{\nabla} \cdot \underline{\mathbf{l}}^k + \underline{\mathbf{l}}^{-k} \wedge \underline{\mathbf{F}}_0^{-k} \right) + \varepsilon^2 \left(\underline{\mathbf{M}}_2^k + \underline{\mathbf{M}}_2^{-k} + \underline{\mathbf{M}}_1^{-k} \otimes \underline{\nabla} \cdot \underline{\mathbf{l}}^k + \frac{1}{2} \underline{\mathbf{M}}_0^{-k} \otimes \underline{\nabla} \otimes \underline{\nabla} : \underline{\mathbf{l}}^k \otimes \underline{\mathbf{l}}^k + \underline{\mathbf{l}}^{-k} \wedge \underline{\mathbf{F}}_1^{-k} \right) + \dots \right] \\ = & 0 \end{aligned} \quad (3.18)$$

en annulant (3.18) ordre par ordre, on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\mathbf{M}}_0^k + \underline{\mathbf{M}}_0^{-k} = 0 \\ \underline{\mathbf{M}}_1^k + \underline{\mathbf{M}}_1^{-k} + \underline{\mathbf{M}}_0^{-k} \otimes \underline{\nabla} \cdot \underline{\mathbf{l}}^k + \underline{\mathbf{l}}^{-k} \wedge \underline{\mathbf{F}}_0^{-k} = 0 \\ \underline{\mathbf{M}}_2^k + \underline{\mathbf{M}}_2^{-k} + \underline{\mathbf{M}}_1^{-k} \otimes \underline{\nabla} \cdot \underline{\mathbf{l}}^k \\ + \frac{1}{2} \underline{\mathbf{M}}_0^{-k} \otimes \underline{\nabla} \otimes \underline{\nabla} : \underline{\mathbf{l}}^k \otimes \underline{\mathbf{l}}^k + \underline{\mathbf{l}}^{-k} \wedge \underline{\mathbf{F}}_1^{-k} = 0 \\ \vdots \\ \underline{\mathbf{M}}_q^k + \underline{\mathbf{M}}_q^{-k} + \sum_{l=1}^q \frac{1}{l!} \underline{\mathbf{M}}_{q-l}^{-k} \otimes \underline{\nabla}^{\cdot q} \underline{\mathbf{l}}^k \otimes \\ + \underline{\mathbf{l}}^{-k} \wedge \underline{\mathbf{F}}_{q-1}^{-k} = 0. \end{array} \right. \quad (3.19)$$

De la même façon, en injectant les développements asymptotiques dans (3.14), on obtient :

$$\forall \underline{\alpha}, i \left\{ \begin{array}{l} \sum_{c \in \mathcal{C}} \chi_{\underline{\alpha}, i}(c) \underline{\mathbf{F}}_0^{[c]} = 0 \\ \sum_{c \in \mathcal{C}} \chi_{\underline{\alpha}, i}(c) \underline{\mathbf{F}}_1^{[c]} + \frac{|Y|}{n} \underline{\mathbf{F}}_{ext} = 0 \\ \vdots \\ \sum_{c \in \mathcal{C}} \chi_{\underline{\alpha}, i}(c) \underline{\mathbf{F}}_q^{[c]} = 0 \end{array} \right. \quad (3.20)$$

$$\forall \underline{\alpha}, i \left\{ \begin{array}{l} \sum_{c \in \mathcal{C}} \chi_{\underline{\alpha}, i}(c) \underline{\mathbf{M}}_0^{[c]} = 0 \\ \sum_{c \in \mathcal{C}} \chi_{\underline{\alpha}, i}(c) \underline{\mathbf{M}}_1^{[c]} + \frac{|Y|}{n} \underline{\mathbf{C}}_{ext} = 0 \\ \vdots \\ \sum_{c \in \mathcal{C}} \chi_{\underline{\alpha}, i}(c) \underline{\mathbf{M}}_q^{[c]} = 0 \end{array} \right. \quad (3.21)$$

En sommant chacune des équations sur i pour $\underline{\alpha}$ fixé, et sachant que les

champs $\underline{\mathbf{F}}_q^k$, $\underline{\mathbf{M}}_q^k$ sont $\mathcal{C}_G^s$ périodiques, on obtient d'après le théorème 2 :

$$\forall \underline{\alpha}, i \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n \sum_{c \in \mathcal{C}} \chi_{\underline{\alpha}, i}(c) \underline{\mathbf{F}}_0^{[c]} = \sum_{k=1}^m \underline{\mathbf{F}}_0^k + \underline{\mathbf{F}}_0^{-k} = 0 \\ \sum_{i=1}^n \sum_{c \in \mathcal{C}} \chi_{\underline{\alpha}, i}(c) \underline{\mathbf{F}}_1^{[c]} + \frac{|Y|}{n} \underline{\mathbf{F}}_{ext} = \sum_{k=1}^m \underline{\mathbf{F}}_1^k + \underline{\mathbf{F}}_1^{-k} + |Y| \underline{\mathbf{F}}_{ext} = 0 \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n \sum_{c \in \mathcal{C}} \chi_{\underline{\alpha}, i}(c) \underline{\mathbf{F}}_q^{[c]} = \sum_{k=1}^m \underline{\mathbf{F}}_q^k + \underline{\mathbf{F}}_q^{-k} = 0 \end{array} \right.$$

$$\forall \underline{\alpha}, i \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n \sum_{c \in \mathcal{C}} \chi_{\underline{\alpha}, i}(c) \underline{\mathbf{M}}_0^{[c]} = \sum_{k=1}^m \underline{\mathbf{M}}_0^k + \underline{\mathbf{M}}_0^{-k} = 0 \\ \sum_{i=1}^n \sum_{c \in \mathcal{C}} \chi_{\underline{\alpha}, i}(c) \underline{\mathbf{M}}_1^{[c]} + |Y| \underline{\mathbf{C}}_{ext} = \sum_{k=1}^m \underline{\mathbf{M}}_1^k + \underline{\mathbf{M}}_1^{-k} + \frac{|Y|}{n} \underline{\mathbf{C}}_{ext} = 0 \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n \sum_{c \in \mathcal{C}} \chi_{\underline{\alpha}, i}(c) \underline{\mathbf{M}}_q^{[c]} = \sum_{k=1}^m \underline{\mathbf{M}}_q^k + \underline{\mathbf{M}}_q^{-k} = 0. \end{array} \right.$$

En utilisant (3.16) et (3.19), on obtient les équations :

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\text{div}} \underline{\underline{\Sigma}}_0 + \underline{\mathbf{F}}_{ext} = 0 \\ \underline{\text{div}} \underline{\underline{\Sigma}}_q = 0 \end{array} \right. \quad \forall q \geq 1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\text{div}} \underline{\underline{\mathbf{M}}}_0 - \underline{\underline{\underline{e}}} : \underline{\underline{\Sigma}}_0 + \underline{\mathbf{C}}_{ext} = 0 \\ \underline{\text{div}} \underline{\underline{\mathbf{M}}}_q - \underline{\underline{\underline{e}}} : \underline{\underline{\Sigma}}_q = 0 \end{array} \right. \quad \forall q \geq 1$$

avec

$$\begin{aligned}\underline{\underline{\Sigma}}_0 &= \frac{1}{|Y|} \sum_{k=1}^m [\underline{\underline{F}}_0^k \otimes \underline{\underline{l}}^k] \\ \underline{\underline{M}}_0 &= \frac{1}{|Y|} \sum_{k=1}^m [\underline{\underline{M}}_0^k \otimes \underline{\underline{l}}^k] \\ \text{puis, } q &\geq 1\end{aligned}\tag{3.22}$$

$$\begin{aligned}\underline{\underline{\Sigma}}_q &= \frac{1}{|Y|} \sum_{l=1}^{q+1} \frac{1}{l!} \left[\sum_{k=1}^m \underline{\underline{F}}_{q+1-l}^k \otimes^l \underline{\underline{l}}^k \cdot^l \underline{\underline{\nabla}} \otimes^{l-1} \right] \\ \underline{\underline{M}}_q &= \frac{1}{|Y|} \sum_{l=1}^{q+1} \frac{1}{l!} \left[\sum_{k=1}^m \underline{\underline{M}}_{q+1-l}^k \otimes^l \underline{\underline{l}}^k \cdot^l \underline{\underline{\nabla}} \otimes^{l-1} \right]\end{aligned}$$

Les contraintes macroscopiques définies par :

$$\begin{aligned}\underline{\underline{\Sigma}} &= \underline{\underline{\Sigma}}_0 + \varepsilon \underline{\underline{\Sigma}}_1 + \dots \\ \underline{\underline{M}} &= \underline{\underline{M}}_0 + \varepsilon \underline{\underline{M}}_1 + \dots\end{aligned}$$

vérifient alors les équations d'équilibre :

$$\begin{aligned}\underline{\underline{\text{div}}} \underline{\underline{\Sigma}} + \underline{\underline{F}}_{ext} &= 0 \\ \underline{\underline{\text{div}}} \underline{\underline{M}} - \underline{\underline{e}} : \underline{\underline{\Sigma}} + \underline{\underline{C}}_{ext} &= 0.\end{aligned}$$

3.8 Le premier schéma d'homogénéisation (SH1)

Avant de pouvoir intégrer, à chaque ordre, la cinématique ainsi approchée dans les équations d'équilibre obtenues dans la section 3.7, nous devons la relier aux contraintes via le comportement. Dans un premier temps, nous allons nous attacher au comportement asymptotique issu de l'analyse dimensionnelle (voir section 3.3) pour le schéma (SH1). Pour mémoire, il s'exprime sous la forme de l'équation :

$$\begin{aligned}\underline{\underline{f}}_\varepsilon^c &= \varepsilon^{d-2} \underline{\underline{A}}^c \cdot \underline{\underline{d}}_\varepsilon^c + \varepsilon^{d-1} \underline{\underline{B}}^c \cdot \underline{\underline{\delta}}_\varepsilon^c \\ \underline{\underline{\hat{m}}}_\varepsilon^c &= \underline{\underline{m}}_\varepsilon^c + \underline{\underline{f}}_\varepsilon^c \wedge \frac{\underline{\underline{l}}_\varepsilon^c}{2} = \varepsilon^{d-1} {}^t \underline{\underline{B}}^c \cdot \underline{\underline{d}}_\varepsilon^c + \varepsilon^d \underline{\underline{C}}^c \cdot \underline{\underline{\delta}}_\varepsilon^c\end{aligned}$$

En injectant les développements asymptotiques de la cinématique (3.13) et ceux des efforts (3.15) dans les équations de comportement, puis en identifiant

ordre par ordre, on obtient les systèmes suivants, pour $\underline{\alpha}$ fixé :

$$\begin{aligned}
\underline{\underline{\mathbf{A}}}^c \cdot \underline{\mathbf{d}}_0^{[c]} &= 0 \\
\underline{\mathbf{F}}_n^{[c]} &= \underline{\underline{\mathbf{A}}}^c \cdot \underline{\mathbf{d}}_{n+1}^{[c]} + \underline{\underline{\mathbf{B}}}^c \cdot \underline{\boldsymbol{\delta}}_n^{[c]}, \quad n > 0 \\
\underline{\mathbf{M}}_0^{[c]} &= {}^t \underline{\underline{\mathbf{B}}}^c \cdot \underline{\mathbf{d}}_0^{[c]} \\
\underline{\mathbf{M}}_{n+1}^{[c]} + \frac{1}{2} \underline{\mathbf{F}}_n^{[c]} \wedge \underline{\mathbf{l}}^c &= {}^t \underline{\underline{\mathbf{B}}}^c \cdot \underline{\mathbf{d}}_{n+1}^{[c]} + \underline{\underline{\mathbf{C}}}^c \cdot \underline{\boldsymbol{\delta}}_n^{[c]}, \quad n \geq 0.
\end{aligned}$$

En ajoutant aux équations précédentes les développements asymptotiques de l'équilibre (3.20) et (3.21), on obtient les systèmes suivants :

$$\forall i \in [1, n], \left\{ \begin{array}{l} \text{les équations d'équilibre,} \\ \sum_{c \in \mathcal{C}} \chi_{\underline{\alpha}, i}(c) \underline{\mathbf{M}}_0^{[c]} = 0 \\ \\ \text{le comportement,} \\ \underline{\underline{\mathbf{A}}}^c \cdot \underline{\mathbf{d}}_0^{[c]} = 0 \\ \underline{\mathbf{M}}_0^{[c]} = {}^t \underline{\underline{\mathbf{B}}}^c \cdot \underline{\mathbf{d}}_0^{[c]} \\ \\ \text{la cinématique,} \\ \underline{\mathbf{d}}_0^{[c]} = \underline{\mathbf{U}}_0^{[c]} - \underline{\mathbf{U}}_0^{[c]} \end{array} \right.$$

$$\forall i \in [1, n], \left\{ \begin{array}{l} \text{les équations d'équilibre,} \\ \sum_{c \in \mathcal{C}} \chi_{\underline{\alpha}, i}(c) \underline{\mathbf{F}}_0^{[c]} = 0 \\ \sum_{c \in \mathcal{C}} \chi_{\underline{\alpha}, i}(c) \underline{\mathbf{M}}_1^{[c]} + \frac{|Y|}{n} \underline{\mathbf{C}}_{ext} = 0 \\ \\ \text{le comportement,} \\ \underline{\mathbf{F}}_0^{[c]} = \underline{\underline{\mathbf{A}}}^c \cdot \underline{\mathbf{d}}_1^{[c]} + \underline{\underline{\mathbf{B}}}^c \cdot \underline{\boldsymbol{\delta}}_0^{[c]} \\ \underline{\mathbf{M}}_1^{[c]} = \underline{\underline{\tilde{\mathbf{B}}}}^c \cdot \underline{\mathbf{d}}_1^{[c]} + \underline{\underline{\tilde{\mathbf{C}}}}^c \cdot \underline{\boldsymbol{\delta}}_0^{[c]} \\ \\ \text{la cinématique,} \\ \underline{\mathbf{d}}_1^{[c]} = \underline{\mathbf{U}}_1^{[c]} - \underline{\mathbf{U}}_1^{[c]} + \underline{\mathbf{U}}_0^{[c]} \otimes \underline{\nabla} \cdot \underline{\mathbf{l}}^c \\ \quad + \frac{\underline{\mathbf{l}}^c}{2} \wedge \left(\underline{\boldsymbol{\Phi}}_0^{[c]} + \underline{\boldsymbol{\Phi}}_0^{[c]} \right) \\ \underline{\boldsymbol{\delta}}_0^{[c]} = \underline{\boldsymbol{\Phi}}_0^{[c]} - \underline{\boldsymbol{\Phi}}_0^{[c]} \end{array} \right.$$

$$\forall i \in [1, n], \left\{ \begin{array}{l}
\text{les équations d'équilibre,} \\
\sum_{c \in \mathcal{C}} \chi_{\underline{\alpha}, i}(c) \underline{\mathbf{F}}_1^{[c]} + \frac{|Y|}{n} \underline{\mathbf{F}}_{ext} = 0 \\
\sum_{c \in \mathcal{C}} \chi_{\underline{\alpha}, i}(c) \underline{\mathbf{M}}_2^{[c]} = 0 \\
\\
\text{le comportement,} \\
\begin{aligned} \underline{\mathbf{F}}_1^{[c]} &= \underline{\underline{\mathbf{A}}}^c \cdot \underline{\mathbf{d}}_2^{[c]} + \underline{\underline{\mathbf{B}}}^c \cdot \underline{\boldsymbol{\delta}}_1^{[c]} \\ \underline{\mathbf{M}}_2^{[c]} &= \underline{\underline{\tilde{\mathbf{B}}}}^c \cdot \underline{\mathbf{d}}_2^{[c]} + \underline{\underline{\tilde{\mathbf{C}}}}^c \cdot \underline{\boldsymbol{\delta}}_1^{[c]} \end{aligned} \\
\text{la cinématique,} \\
\begin{aligned} \underline{\mathbf{d}}_2^{[c]} &= \underline{\mathbf{U}}_2^{[c]} - \underline{\mathbf{U}}_2^c + \underline{\mathbf{U}}_1^{[c]} \otimes \underline{\nabla} \cdot \underline{\mathbf{l}}^c + \frac{1}{2} \underline{\mathbf{U}}_0^{[c]} \otimes \underline{\nabla} \otimes \underline{\nabla} : \underline{\mathbf{l}}^c \otimes \underline{\mathbf{l}}^c \\
&\quad + \frac{\underline{\mathbf{l}}^c}{2} \wedge \left(\underline{\boldsymbol{\Phi}}_1^{[c]} + \underline{\boldsymbol{\Phi}}_1^c + \underline{\mathbf{U}}_0^{[c]} \otimes \underline{\nabla} \cdot \underline{\mathbf{l}}^c \right) \\
\underline{\boldsymbol{\delta}}_1^{[c]} &= \underline{\boldsymbol{\Phi}}_1^{[c]} - \underline{\boldsymbol{\Phi}}_1^c + \underline{\boldsymbol{\Phi}}_0^{[c]} \otimes \underline{\nabla} \cdot \underline{\mathbf{l}}^c \end{aligned}
\end{array} \right.$$

$$\forall i \in [1, n], \left\{ \begin{array}{l}
\text{les équations d'équilibre,} \\
\sum_{c \in \mathcal{C}} \chi_{\underline{\alpha}, i}(c) \underline{\mathbf{F}}_{r-1}^{[c]} = 0 \\
\sum_{c \in \mathcal{C}} \chi_{\underline{\alpha}, i}(c) \underline{\mathbf{M}}_r^{[c]} = 0 \\
\\
\text{le comportement,} \\
\begin{aligned} \underline{\mathbf{F}}_{r-1}^{[c]} &= \underline{\underline{\mathbf{A}}}^c \cdot \underline{\mathbf{d}}_r^{[c]} + \underline{\underline{\mathbf{B}}}^c \cdot \underline{\boldsymbol{\delta}}_{r-1}^{[c]} \\ \underline{\mathbf{M}}_r^{[c]} &= \underline{\underline{\tilde{\mathbf{B}}}}^c \cdot \underline{\mathbf{d}}_r^{[c]} + \underline{\underline{\tilde{\mathbf{C}}}}^c \cdot \underline{\boldsymbol{\delta}}_{r-1}^{[c]} \end{aligned} \\
\text{la cinématique,} \\
\begin{aligned} \underline{\mathbf{d}}_r^{[c]} &= \underline{\mathbf{U}}_r^{[c]} - \underline{\mathbf{U}}_r^c + \sum_{p=1}^r \frac{1}{p!} \underline{\mathbf{U}}_{r-p}^{[c]} \overset{p}{\otimes} \underline{\nabla} \cdot \underline{\mathbf{l}}^c \overset{p-1}{\otimes} \\
&\quad + \frac{\underline{\mathbf{l}}^c}{2} \wedge \left(\underline{\boldsymbol{\Phi}}_{r-1}^{[c]} + \underline{\boldsymbol{\Phi}}_{r-1}^c + \sum_{p=1}^{r-1} \frac{1}{p!} \underline{\boldsymbol{\Phi}}_{r-p-1}^{[c]} \overset{p}{\otimes} \underline{\nabla} \cdot \underline{\mathbf{l}}^c \overset{p-1}{\otimes} \right) \\
\underline{\boldsymbol{\delta}}_{r-1}^{[c]} &= \underline{\boldsymbol{\Phi}}_{r-1}^{[c]} - \underline{\boldsymbol{\Phi}}_{r-1}^c + \sum_{p=1}^{r-1} \frac{1}{p!} \underline{\boldsymbol{\Phi}}_{r-1-p}^{[c]} \overset{p}{\otimes} \underline{\nabla} \cdot \underline{\mathbf{l}}^c \overset{p-1}{\otimes} \end{aligned}
\end{array} \right.$$

où on rappelle la définition des tenseurs :

$$\underline{\underline{\tilde{\mathbf{B}}}}^c = {}^t \underline{\underline{\mathbf{B}}}^c + \frac{1}{2} \underline{\underline{\mathbf{e}}} : \underline{\mathbf{l}}^c \otimes \underline{\underline{\mathbf{A}}}^c \quad , \quad \underline{\underline{\tilde{\mathbf{C}}}}^c = \underline{\underline{\mathbf{C}}}^c + \frac{1}{2} \underline{\underline{\mathbf{e}}} : \underline{\mathbf{l}}^c \otimes \underline{\underline{\mathbf{B}}}^c$$

On reconnaît, dans les systèmes ci-dessus, la structure classique des problèmes en cascade des développements asymptotiques comme Suquet [Suquet, 1980]

l'a mis en évidence pour les milieux continus classiques de Cauchy. On se retrouve avec des systèmes linéaires à chaque ordre permettant de déterminer les nouveaux termes asymptotiques cinématiques en fonction de ceux d'ordre inférieur. Pour obtenir les inconnues, le système global à étudier pour chaque couple de terme asymptotique doit mélanger les ordres. En effet, si l'on cherche, pour avoir les systèmes bien posés, à déterminer $(\{\underline{U}_r\}, \{\underline{\Phi}_r\})$ avec $\{\underline{U}_r\} = (\underline{U}_r^1, \dots, \underline{U}_r^n)$ et $\{\underline{\Phi}_r\} = (\underline{\Phi}_r^1, \dots, \underline{\Phi}_r^n)$, il faut prendre l'équilibre en force à l'ordre ε^r et l'équilibre en moment à l'ordre ε^{r+1} . On peut maintenant déterminer ces systèmes en cascade à résoudre en réinjectant la cinématique dans les équilibres. On fait alors apparaître des opérateurs discrets à la façon de Boutin [Boutin, 1996] permettant d'écrire de manière plus synthétique le problème étudié. On introduit donc l'opérateur L_d et la suite d'opérateurs $(S_d^r)_{r \in \mathbb{N}^*}$ définis, avec $\{\underline{U}\} = (\underline{U}^1, \dots, \underline{U}^n)$ et $\{\underline{\Phi}\} = (\underline{\Phi}^1, \dots, \underline{\Phi}^n)$, par :

$$L_d[i] \left(\begin{array}{c} \{\underline{U}\} \\ \{\underline{\Phi}\} \end{array} \right) = \left| \begin{array}{l} \sum_{c \in G^s/c] = i} \left[\underline{A}^c \left(\underline{U}^{[c} - \underline{U}^{c]} + \frac{\underline{l}^c}{2} \wedge \left(\underline{\Phi}^{[c} + \underline{\Phi}^{c]} \right) \right) + \underline{B}^c \left(\underline{\Phi}^{[c} - \underline{\Phi}^{c]} \right) \right] \\ \sum_{c \in G^s/c] = i} \left[\underline{\tilde{B}}^c \left(\underline{U}^{[c} - \underline{U}^{c]} + \frac{\underline{l}^c}{2} \wedge \left(\underline{\Phi}^{[c} + \underline{\Phi}^{c]} \right) \right) + \underline{\tilde{C}}^c \left(\underline{\Phi}^{[c} - \underline{\Phi}^{c]} \right) \right] \end{array} \right|$$

puis, pour les opérateurs sur les termes de source on a :

$$S_d^1[i] \left(\begin{array}{c} \{\underline{U}\} \\ \{\underline{\Phi}\} \end{array} \right) = \left| \begin{array}{l} \sum_{c \in G^s/c] = i} \left[\underline{A}^c \cdot \left(\underline{U}^{[c} \otimes \underline{\nabla} \cdot \underline{l}^c + \frac{\underline{l}^c}{2} \wedge \left(\underline{\Phi}^{[c} \otimes \underline{\nabla} \cdot \underline{l}^c \right) \right) \right] \\ \sum_{c \in G^s/c] = i} \left[\underline{\tilde{B}}^c \cdot \left(\underline{U}^{[c} \otimes \underline{\nabla} \cdot \underline{l}^c + \frac{\underline{l}^c}{2} \wedge \left(\underline{\Phi}^{[c} \otimes \underline{\nabla} \cdot \underline{l}^c \right) \right) \right] \end{array} \right|$$

$$S_d^2[i] \left(\begin{array}{c} \{\underline{U}\} \\ \{\underline{\Phi}\} \end{array} \right) = \left| \begin{array}{l} \sum_{c \in G^s/c] = i} \left[\underline{\underline{A}}^c \cdot \left(\frac{1}{2} \underline{U}^{[c} \otimes^2 \underline{\nabla} : \underline{l}^c \otimes \underline{l}^c + \frac{\underline{l}^c}{2} \wedge \left(\frac{1}{2} \underline{\Phi}^{[c} \otimes^2 \underline{\nabla} : \underline{l}^c \otimes \underline{l}^c \right) \right) \right. \\ \left. + \underline{\underline{B}}^c \cdot \left(\underline{\Phi}^{[c} \otimes \underline{\nabla} \cdot \underline{l}^c \right) \right] \\ \\ \sum_{c \in G^s/c] = i} \left[\underline{\underline{\tilde{B}}}^c \cdot \left(\frac{1}{2} \underline{U}^{[c} \otimes^2 \underline{\nabla} : \underline{l}^c \otimes \underline{l}^c + \frac{\underline{l}^c}{2} \wedge \left(\frac{1}{2} \underline{\Phi}^{[c} \otimes^2 \underline{\nabla} : \underline{l}^c \otimes \underline{l}^c \right) \right) \right. \\ \left. + \underline{\underline{\tilde{C}}}^c \cdot \left(\underline{\Phi}^{[c} \otimes \underline{\nabla} \cdot \underline{l}^c \right) \right] \end{array} \right|$$

puis au delà, pour les opérateurs d'ordre r supérieur à 2, on a :

$$S_d^r[i] \left(\begin{array}{c} \{\underline{U}\} \\ \{\underline{\Phi}\} \end{array} \right) = \left| \begin{array}{l} \sum_{c \in G^s/c] = i} \left[\underline{\underline{A}}^c \cdot \left(\frac{1}{r!} \underline{U}^{[c} \otimes^r \underline{\nabla} : \underline{l}^c \otimes^{r-1} + \frac{\underline{l}^c}{2} \wedge \left(\frac{1}{r!} \underline{\Phi}^{[c} \otimes^r \underline{\nabla} : \underline{l}^c \otimes^{r-1} \right) \right) \right. \\ \left. + \underline{\underline{B}}^c \cdot \left(\underline{\Phi}^{[c} \otimes^{r-1} \underline{\nabla} : \underline{l}^c \otimes^{r-2} \right) \right] \\ \\ \sum_{c \in G^s/c] = i} \left[\underline{\underline{\tilde{B}}}^c \cdot \left(\frac{1}{r!} \underline{U}^{[c} \otimes^r \underline{\nabla} : \underline{l}^c \otimes^{r-1} + \frac{\underline{l}^c}{2} \wedge \left(\frac{1}{r!} \underline{\Phi}^{[c} \otimes^r \underline{\nabla} : \underline{l}^c \otimes^{r-1} \right) \right) \right. \\ \left. + \underline{\underline{\tilde{C}}}^c \cdot \left(\underline{\Phi}^{[c} \otimes^{r-1} \underline{\nabla} : \underline{l}^c \otimes^{r-2} \right) \right] \end{array} \right|$$

Les systèmes à résoudre sont donc successivement :

$$\begin{aligned} \forall i \in [1, n], \quad L_d[i] \left(\begin{array}{c} \{\underline{U}_0\} \\ 0 \end{array} \right) &= 0 \\ \forall i \in [1, n], \quad L_d[i] \left(\begin{array}{c} \{\underline{U}_1\} \\ \{\underline{\Phi}_0\} \end{array} \right) &= -S_d^1[i] \left(\begin{array}{c} \{\underline{U}_0\} \\ 0 \end{array} \right) - \frac{|Y|}{n} \left[\begin{array}{c} 0 \\ \underline{C}_{ext} \end{array} \right] \\ \forall i \in [1, n], \quad L_d[i] \left(\begin{array}{c} \{\underline{U}_2\} \\ \{\underline{\Phi}_1\} \end{array} \right) &= -S_d^1[i] \left(\begin{array}{c} \{\underline{U}_1\} \\ \{\underline{\Phi}_0\} \end{array} \right) - S_d^2[i] \left(\begin{array}{c} \{\underline{U}_0\} \\ 0 \end{array} \right) - \frac{|Y|}{n} \left[\begin{array}{c} \underline{F}_{ext} \\ 0 \end{array} \right] \\ \forall i \in [1, n], \quad L_d[i] \left(\begin{array}{c} \{\underline{U}_3\} \\ \{\underline{\Phi}_2\} \end{array} \right) &= -S_d^1[i] \left(\begin{array}{c} \{\underline{U}_2\} \\ \{\underline{\Phi}_1\} \end{array} \right) - S_d^2[i] \left(\begin{array}{c} \{\underline{U}_1\} \\ \{\underline{\Phi}_0\} \end{array} \right) - S_d^3[i] \left(\begin{array}{c} \{\underline{U}_0\} \\ 0 \end{array} \right) \end{aligned} \quad (3.23)$$

puis à tout ordre r , on a :

$$\forall i \in [1, n], \quad L_d[i] \left(\begin{array}{c} \{\underline{U}_r\} \\ \{\underline{\Phi}_{r-1}\} \end{array} \right) = - \left(\sum_{m=1}^{r-1} S_d^m[i] \left(\begin{array}{c} \{\underline{U}_{r-m}\} \\ \{\underline{\Phi}_{r-m-1}\} \end{array} \right) \right) - S_d^r[i] \left(\begin{array}{c} \{\underline{U}_0\} \\ 0 \end{array} \right) \quad (3.24)$$

Pour déterminer les solutions cinématiques de ces systèmes successifs, lorsque l'on parcourt l'ensemble des types de particule (i allant de 1 à n), nous faisons appel à des résultats d'algèbre linéaire [Lelong-Ferrand et Arnaudès, 1978] pour l'étude de l'opérateur L_d . On introduit :

Definition 2 *Un système d'équations linéaires est dit **compatible** s'il admet au moins une solution, et **incompatible** dans le cas contraire.*

Pour que le système ainsi constitué de n batteries de d équations pour un espace géométrique de dimension d , soit compatible, il y a une condition nécessaire et suffisante sur les termes asymptotiques d'ordre inférieur considérés comme des termes de source. On a effectivement autant d'équation que d'inconnues, mais l'étude de l'opérateur L_d montre que le système linéaire étudié n'est pas inversible.

En effet, la résolution en $\underline{U}, \underline{\Phi}$ sur l'espace, $\mathcal{V}_{per}^d$, des champs discrets $\mathcal{C}_G^s$ -périodiques du système de n équations linéaires :

$$L_d \left(\begin{array}{c} \{\underline{U}\} \\ \{\underline{\Phi}\} \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} \underline{g} \\ \underline{h} \end{array} \right]$$

où $\underline{g} = (\underline{g}_i)_{i \in [1; n]}$ et $\underline{h} = (\underline{h}_i)_{i \in [1; n]}$ correspondent à n vecteurs fixés, est équivalente à la minimisation de l'énergie potentielle :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sum_{c \in G} \underline{d}^{[c]} : \underline{A}^c : \underline{d}^{[c]} + 2 \underline{\delta}^{[c]} : \underline{B}^c : \underline{d}^{[c]} + \underline{\delta}^{[c]} : \underline{C}^c : \underline{\delta}^{[c]} \\ & - \sum_{i=1}^n \underline{g}_i \cdot \underline{U}^i + \underline{h}_i \cdot \underline{\Phi}^i. \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} \underline{d}^{[c]} &= \underline{U}^{[c]} - \underline{U}^c + \frac{l^c}{2} \wedge (\underline{\Phi}^{[c]} + \underline{\Phi}^c) \\ \underline{\delta}^{[c]} &= \underline{\Phi}^{[c]} - \underline{\Phi}^c, \end{aligned}$$

sur l'ensemble des mouvements périodiques. Sachant que, par hypothèse, l'énergie de déformation ne tolère pas de mécanismes, elle s'annule sur l'ensemble des mouvements périodiques rigidifiants, c'est-à-dire l'espace des mouvements de translation constante et de rotation nulle, noté $\mathcal{R}_{per}^d$. Dans ces

conditions, le minimum de l'énergie potentielle existe si, et seulement si, la forme linéaire

$$l \left(\begin{array}{c} \{\underline{U}\} \\ \{\underline{\Phi}\} \end{array} \right) = \sum_{i=1}^n \underline{g}_i \cdot \underline{U}^i + \underline{h}_i \cdot \underline{\Phi}^i$$

est orthogonale (au sens de la dualité) à $\mathcal{R}_{per}^d$, soit :

$$\forall \{\underline{U}\}, l \left(\begin{array}{c} \{\underline{U}\} \\ 0 \end{array} \right) = 0$$

ce qui se traduit par : $\sum_{i=1}^n \underline{g}_i = 0$.

Lemme 3 (inversion de L_d pour (SH1)) Soient deux n -uplet de vecteurs $\underline{g}$ et $\underline{h}$, l'équation :

$$L_d \left(\begin{array}{c} \{\underline{U}\} \\ \{\underline{\Phi}\} \end{array} \right) = \begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

admet une solution unique à un champ constant près, si, et seulement si,

$$\sum_{i=1}^n \underline{g}_i = 0. \quad (3.26)$$

Cette relation (3.26) est appelée équation de compatibilité (SH1) du système (3.25).

La condition de compatibilité correspond à la nullité de la somme des termes de source sur les composantes d'équilibre en force.

Quand à la résolution proprement dite de chaque système, on utilise le théorème suivant :

Théorème 3 (Rouché-Fontené) Si un système linéaire est compatible, sa résolution équivaut à celle d'un système quelconque d'équations principales. Pour résoudre un système d'équations principales, on donne des valeurs arbitraires aux inconnues non principales, et les inconnues principales sont alors déterminées par un système de Cramer.

On peut fixer des valeurs arbitraires aux inconnues non principales, ou bien imposer des contraintes linéaires sur l'ensemble des inconnues. Ce choix étant fait, on peut donc maintenant écrire les solutions de nos problèmes successifs.

Le premier système de (3.23) impose à $\begin{pmatrix} \{\underline{U}_0\} \\ 0 \end{pmatrix}$ d'être dans le noyau de L_d , c'est-à-dire :

$$\forall (i, j) \in [1, n]^2, \underline{U}_0^i = \underline{U}_0^j = \underline{U}_0$$

Ceci signifie que le premier terme du développement asymptotique de la translation est indépendant du type de particule du matériau. En remarquant que d'ordre en ordre, on retrouve la structure du système de l'ordre précédent auquel on rajoute un terme de source, on obtient, grâce à la linéarité, et par l'introduction de tenseurs de localisation solution des divers problèmes auxiliaires, les expressions suivantes :

$$\forall j \in [1, n], \left\{ \begin{array}{l} \underline{U}_1^j = \underline{U}_1 + \underline{\underline{X}}_u^j : \underline{U}_0 \otimes \underline{\nabla} + \underline{\underline{P}}_u \cdot \underline{C}_{ext} \\ \underline{\Phi}_0^j = \frac{1}{2} \underline{\underline{e}} : \underline{U}_0 \otimes \underline{\nabla} + \underline{\underline{X}}_\phi^j : \underline{U}_0 \otimes \underline{\nabla} + \underline{\underline{P}}_\phi \cdot \underline{C}_{ext} \\ \underline{U}_2^j = \underline{U}_2 + \underline{\underline{X}}_u^j : \underline{U}_1 \otimes \underline{\nabla} + \underline{\underline{Y}}_u^j : \underline{U}_0 \otimes \underline{\nabla} \otimes \underline{\nabla} \\ \quad + \underline{\underline{Q}}_u : \underline{C}_{ext} \otimes \underline{\nabla} + \underline{\underline{R}}_u \cdot \underline{F}_{ext} \\ \underline{\Phi}_1^j = \frac{1}{2} \underline{\underline{e}} : \underline{U}_1 \otimes \underline{\nabla} + \underline{\underline{X}}_\phi^j : \underline{U}_1 \otimes \underline{\nabla} + \underline{\underline{Y}}_\phi^j : \underline{U}_0 \otimes \underline{\nabla} \otimes \underline{\nabla} \\ \quad + \underline{\underline{Q}}_\phi : \underline{C}_{ext} \otimes \underline{\nabla} + \underline{\underline{R}}_\phi \cdot \underline{F}_{ext} \\ \underline{U}_3^j = \underline{U}_3 + \underline{\underline{X}}_u^j : \underline{U}_2 \otimes \underline{\nabla} + \underline{\underline{Y}}_u^j : \underline{U}_1 \otimes \underline{\nabla} \otimes \underline{\nabla} \\ \quad + \underline{\underline{Z}}_u^j : \underline{U}_0 \otimes \underline{\nabla} \otimes \underline{\nabla} + \underline{\underline{S}}_u : \underline{C}_{ext} \otimes \underline{\nabla} + \underline{\underline{T}}_u : \underline{F}_{ext} \otimes \underline{\nabla} \\ \underline{\Phi}_2^j = \frac{1}{2} \underline{\underline{e}} : \underline{U}_2 \otimes \underline{\nabla} + \underline{\underline{X}}_\phi^j : \underline{U}_2 \otimes \underline{\nabla} + \underline{\underline{Y}}_\phi^j : \underline{U}_1 \otimes \underline{\nabla} \otimes \underline{\nabla} \\ \quad + \underline{\underline{Z}}_\phi^j : \underline{U}_0 \otimes \underline{\nabla} \otimes \underline{\nabla} + \underline{\underline{S}}_\phi : \underline{C}_{ext} \otimes \underline{\nabla} + \underline{\underline{T}}_\phi : \underline{F}_{ext} \otimes \underline{\nabla} \end{array} \right.$$

avec fixation d'une translation :

$$\underline{\underline{X}}_u^1 = 0, \underline{\underline{Y}}_u^1 = 0, \underline{\underline{Z}}_u^1 = 0$$

et symétrie des $\underline{\underline{X}}_\phi^j$ et des $\underline{\underline{X}}_u^j$:

$$X_{lhk}^j = X_{lkh}^j.$$

Les problèmes des ordres suivants se résolvent de la même façon suivant ce principe de cascade. La relation de compatibilité utilisée à chaque ordre permet d'obtenir les équations d'équilibre au niveau macroscopique.

Maintenant, que nous avons nos solutions cinématiques, nous allons pouvoir exprimer les contraintes macroscopiques et exhiber le comportement macroscopique. Nous allons exploiter les relations (3.22) pour déterminer ce comportement d'ordre en ordre et obtenir les systèmes d'équations en cascade que doivent vérifier les champs de déplacement macroscopique à l'ordre i , $\underline{\underline{U}}_i$. On trouve :

– à l'ordre 0,

$$\begin{aligned}\underline{\underline{\text{div}}} \underline{\underline{\Sigma}}_0 + \underline{\underline{F}}_{ext} &= 0 \\ \underline{\underline{\Sigma}}_0 &= \underline{\underline{\underline{A}}}_0 : \underline{\underline{U}}_0 \overset{s}{\otimes} \underline{\underline{\nabla}} + \underline{\underline{\underline{K}}}_0 \cdot \underline{\underline{C}}_{ext} \\ \underline{\underline{U}}_0 &= 0 \text{ sur } \partial\Omega^*.\end{aligned}\tag{3.27}$$

– à l'ordre 1,

$$\begin{aligned}\underline{\underline{\text{div}}} \varepsilon \underline{\underline{\Sigma}}_1 &= 0 \\ \varepsilon \underline{\underline{\Sigma}}_1 &= \underline{\underline{\underline{A}}}_0 : \varepsilon \underline{\underline{U}}_1 \otimes \underline{\underline{\nabla}} + \varepsilon \underline{\underline{\underline{A}}}_1 : \underline{\underline{U}}_0 \otimes \underline{\underline{\nabla}} \otimes \underline{\underline{\nabla}} + \varepsilon \underline{\underline{\underline{K}}}_1 : \underline{\underline{C}}_{ext} \otimes \underline{\underline{\nabla}} \\ &\quad + \varepsilon \underline{\underline{\underline{K}}}_2 \cdot \underline{\underline{F}}_{ext} \\ \underline{\underline{U}}_1 &= 0 \text{ sur } \partial\Omega^*.\end{aligned}\tag{3.28}$$

– à l'ordre 2,

$$\begin{aligned}\underline{\underline{\text{div}}} \varepsilon^2 \underline{\underline{\Sigma}}_2 &= 0 \\ \varepsilon^2 \underline{\underline{\Sigma}}_2 &= \underline{\underline{\underline{A}}}_0 : \varepsilon^2 \underline{\underline{U}}_2 \overset{s}{\otimes} \underline{\underline{\nabla}} + \varepsilon \underline{\underline{\underline{A}}}_1 : \varepsilon \underline{\underline{U}}_1 \otimes \underline{\underline{\nabla}} \otimes \underline{\underline{\nabla}} \\ &\quad + \varepsilon^2 \underline{\underline{\underline{A}}}_2 : \underline{\underline{U}}_0 \otimes \underline{\underline{\nabla}} \otimes \underline{\underline{\nabla}} \otimes \underline{\underline{\nabla}} + \varepsilon^2 \underline{\underline{\underline{K}}}_3 : \underline{\underline{C}}_{ext} \otimes \underline{\underline{\nabla}} \otimes \underline{\underline{\nabla}} \\ &\quad + \varepsilon^2 \underline{\underline{\underline{K}}}_4 : \underline{\underline{F}}_{ext} \otimes \underline{\underline{\nabla}} \\ \underline{\underline{U}}_2 &= 0 \text{ sur } \partial\Omega^*.\end{aligned}\tag{3.29}$$

où les tenseurs du comportement homogénéisé $\underline{\underline{\underline{A}}}_0, \underline{\underline{\underline{A}}}_1, \underline{\underline{\underline{A}}}_2, \underline{\underline{\underline{K}}}_0, \underline{\underline{\underline{K}}}_1, \underline{\underline{\underline{K}}}_2, \underline{\underline{\underline{K}}}_3, \underline{\underline{\underline{K}}}_4$ s'expriment en fonction des tenseurs de localisation. Par exemple,

on a :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\underline{A_0}}} : \underline{\underline{\underline{E^s}}} &= \frac{1}{|Y|} \sum_{c \in G} \left[\underline{\underline{\underline{A^c}}} \cdot \left(\left(\underline{\underline{\underline{X}}}_u^{[c]} - \underline{\underline{\underline{X}}}_u^{[c]} \right) : \underline{\underline{\underline{E^s}}} \otimes \underline{\underline{\underline{l^c}}} \right. \right. \\ &\quad + \underline{\underline{\underline{E^s}}} \cdot \underline{\underline{\underline{l^c}}} \otimes \underline{\underline{\underline{l^c}}} \\ &\quad + \underline{\underline{\underline{e}}} : \left(\left(\underline{\underline{\underline{X}}}_\phi^{[c]} + \underline{\underline{\underline{X}}}_\phi^{[c]} \right) : \underline{\underline{\underline{E^s}}} \right) \otimes \frac{\underline{\underline{\underline{l^c}}}}{2} \otimes \underline{\underline{\underline{l^c}}} \\ &\quad \left. + \underline{\underline{\underline{B^c}}} \cdot \left(\left(\underline{\underline{\underline{X}}}_\phi^{[c]} - \underline{\underline{\underline{X}}}_\phi^{[c]} \right) : \underline{\underline{\underline{E^s}}} \otimes \underline{\underline{\underline{l^c}}} \right) \right] \end{aligned}$$

pour tout tenseur symétrique d'ordre 2, $\underline{\underline{\underline{E^s}}}$.

Par ailleurs, on peut donner une définition énergétique équivalente de $\underline{\underline{\underline{A_0}}}$:

$$\Psi^{Cauchy}(\underline{\underline{\underline{E^s}}}) = {}^t \underline{\underline{\underline{E^s}}} : \underline{\underline{\underline{A_0}}} : \underline{\underline{\underline{E^s}}} = \min_{(\underline{\underline{\underline{d}}}, \underline{\underline{\underline{\delta}}}) \in \mathcal{CA}^0} \Psi(\underline{\underline{\underline{d}}}, \underline{\underline{\underline{\delta}}}) \quad (3.30)$$

où

$$\Psi(\underline{\underline{\underline{d}}}, \underline{\underline{\underline{\delta}}}) = \frac{1}{|Y|} \sum_{c \in G} \left(\underline{\underline{\underline{d}}}^{[c]} \cdot \underline{\underline{\underline{A^c}}} \cdot \underline{\underline{\underline{d}}}^{[c]} + 2 \underline{\underline{\underline{d}}}^{[c]} \cdot \underline{\underline{\underline{B^c}}} \cdot \underline{\underline{\underline{\delta}}}^{[c]} + \underline{\underline{\underline{\delta}}}^{[c]} \cdot \underline{\underline{\underline{C^c}}} \cdot \underline{\underline{\underline{\delta}}}^{[c]} \right)$$

et $\mathcal{CA}^0(\underline{\underline{\underline{E^s}}})$ est l'ensemble des déformations généralisées $\mathcal{C}_G^s$ -périodiques construites à partir de mouvements périodiques selon :

$$\mathcal{CA}^0(\underline{\underline{\underline{E^s}}}) = \left\{ (\underline{\underline{\underline{d}}}, \underline{\underline{\underline{\delta}}}) / \exists \underline{\underline{\underline{u}}}_{per}, \underline{\underline{\underline{\phi}}}_{per} / \underline{\underline{\underline{u}}}_{per}^{\alpha, i} = \underline{\underline{\underline{u}}}^i, \underline{\underline{\underline{\phi}}}_{per}^{\alpha, i} = \underline{\underline{\underline{\phi}}}^i \right. \\ \left. \begin{cases} \underline{\underline{\underline{d}}}^{[c]} &= \underline{\underline{\underline{E^s}}} \cdot \underline{\underline{\underline{l^c}}} + \underline{\underline{\underline{u}}}^{[c]} - \underline{\underline{\underline{u}}}^{[c]} \\ &\quad + \frac{\underline{\underline{\underline{l^c}}}}{2} \wedge \left(\underline{\underline{\underline{\phi}}}^{[c]} + \underline{\underline{\underline{\phi}}}^{[c]} \right) \\ \underline{\underline{\underline{\delta}}}^{[c]} &= \underline{\underline{\underline{\phi}}}^{[c]} - \underline{\underline{\underline{\phi}}}^{[c]} \end{cases} \right\}.$$

Tout comme dans le cas des milieux continus, l'orientation (rotation) des particules ne franchit pas le niveau microscopique, le processus d'homogénéisation fait disparaître ce champ microstructural. On se retrouve donc avec des milieux continus que l'on peut qualifier de type Cauchy.

3.9 Le second schéma d'homogénéisation (SH2)

A l'instar de la démarche adoptée dans la section précédente 3.8, nous allons insérer le schéma d'homogénéisation (SH2), mis en évidence dans la section 3.5, dans nos équations d'équilibre à l'aide d'un développement asymptotique.

tique de la cinématique. D'après le second schéma d'homogénéisation, la relation reliant les déformations généralisées aux contraintes généralisées s'écrit :

$$\begin{aligned}\underline{\underline{f}}_\varepsilon^c &= \varepsilon^{d-2} \underline{\underline{A}}^c \cdot \underline{\underline{d}}_\varepsilon^c + \varepsilon^{d-2} \underline{\underline{B}}^c \cdot \underline{\underline{\delta}}_\varepsilon^c \\ \underline{\underline{m}}_\varepsilon^c &= \underline{\underline{m}}_\varepsilon^c + \underline{\underline{f}}_\varepsilon^c \wedge \frac{\underline{\underline{l}}_\varepsilon^c}{2} = \varepsilon^{d-2} {}^t \underline{\underline{B}}^c \cdot \underline{\underline{d}}_\varepsilon^c + \varepsilon^{d-2} \underline{\underline{C}}^c \cdot \underline{\underline{\delta}}_\varepsilon^c\end{aligned}$$

En injectant les développements asymptotiques de la cinématique (3.13) et ceux des efforts (3.15) dans les équations de comportement, puis en identifiant ordre par ordre, on obtient les systèmes suivants, pour $\underline{\alpha}$ fixé :

$$\begin{aligned}\underline{\underline{A}}^c \cdot \underline{\underline{d}}_0^{[c]} + \underline{\underline{B}}^c \cdot \underline{\underline{\delta}}_0^{[c]} &= 0 \\ {}^t \underline{\underline{B}}^c \cdot \underline{\underline{d}}_0^{[c]} + \underline{\underline{C}}^c \cdot \underline{\underline{\delta}}_0^{[c]} &= 0 \\ \underline{\underline{F}}_n^{[c]} &= \underline{\underline{A}}^c \cdot \underline{\underline{d}}_{n+1}^{[c]} + \underline{\underline{B}}^c \cdot \underline{\underline{\delta}}_{n+1}^{[c]}, \quad n \geq 0 \\ \underline{\underline{M}}_n^{[c]} + \frac{1}{2} \underline{\underline{F}}_{n-1}^{[c]} \wedge \underline{\underline{l}}^c &= {}^t \underline{\underline{B}}^c \cdot \underline{\underline{d}}_{n+1}^{[c]} + \underline{\underline{C}}^c \cdot \underline{\underline{\delta}}_{n+1}^{[c]}, \quad n \geq 0.\end{aligned}$$

En ajoutant aux équations précédentes les développements asymptotiques de l'équilibre (3.20) et (3.21), on obtient les systèmes suivants :

$$\forall i \in [1, n], \left\{ \begin{array}{l} \text{le comportement,} \\ \underline{\underline{A}}^c \cdot \underline{\underline{d}}_0^{[c]} + \underline{\underline{B}}^c \cdot \underline{\underline{\delta}}_0^{[c]} = 0 \\ {}^t \underline{\underline{B}}^c \cdot \underline{\underline{d}}_0^{[c]} + \underline{\underline{C}}^c \cdot \underline{\underline{\delta}}_0^{[c]} = 0 \\ \text{la cinématique,} \\ \underline{\underline{d}}_0^{[c]} = \underline{\underline{U}}_0^{[c]} - \underline{\underline{U}}_0^{[c]} \\ \underline{\underline{\delta}}_0^{[c]} = \underline{\underline{\Phi}}_0^{[c]} - \underline{\underline{\Phi}}_0^{[c]} \end{array} \right.$$

$$\forall i \in [1, n], \left\{ \begin{array}{l} \text{les équations d'équilibre,} \\ \sum_{c \in \mathcal{C}} \chi_{\underline{\alpha}, i}(c) \underline{\underline{F}}_0^{[c]} = 0 \\ \sum_{c \in \mathcal{C}} \chi_{\underline{\alpha}, i}(c) \underline{\underline{M}}_0^{[c]} = 0 \\ \text{le comportement,} \\ \underline{\underline{F}}_0^{[c]} = \underline{\underline{A}}^c \cdot \underline{\underline{d}}_1^{[c]} + \underline{\underline{B}}^c \cdot \underline{\underline{\delta}}_1^{[c]} \\ \underline{\underline{M}}_0^{[c]} = \underline{\underline{B}}^c \cdot \underline{\underline{d}}_1^{[c]} + \underline{\underline{C}}^c \cdot \underline{\underline{\delta}}_1^{[c]} \\ \text{la cinématique,} \\ \underline{\underline{d}}_1^{[c]} = \underline{\underline{U}}_1^{[c]} - \underline{\underline{U}}_1^{[c]} + \underline{\underline{U}}_0^{[c]} \otimes \underline{\underline{\nabla}} \cdot \underline{\underline{l}}^c \\ \quad + \frac{\underline{\underline{l}}^c}{2} \wedge (\underline{\underline{\Phi}}_0^{[c]} + \underline{\underline{\Phi}}_0^{[c]}) \\ \underline{\underline{\delta}}_1^{[c]} = \underline{\underline{\Phi}}_1^{[c]} - \underline{\underline{\Phi}}_1^{[c]} + \underline{\underline{\Phi}}_0^{[c]} \otimes \underline{\underline{\nabla}} \cdot \underline{\underline{l}}^c \end{array} \right.$$

$$\forall i \in [1, n], \left\{ \begin{array}{l}
\text{les équations d'équilibre,} \\
\sum_{c \in \mathcal{C}} \chi_{\underline{\alpha}, i}(c) \underline{\mathbf{F}}_1^{[c]} + \frac{|Y|}{n} \underline{\mathbf{F}}_{ext} = 0 \\
\sum_{c \in \mathcal{C}} \chi_{\underline{\alpha}, i}(c) \underline{\mathbf{M}}_1^{[c]} + \frac{|Y|}{n} \underline{\mathbf{C}}_{ext} = 0 \\
\\
\text{le comportement,} \\
\underline{\mathbf{F}}_1^{[c]} = \underline{\mathbf{A}}^c \cdot \underline{\mathbf{d}}_2^{[c]} + \underline{\mathbf{B}}^c \cdot \underline{\boldsymbol{\delta}}_2^{[c]} \\
\underline{\mathbf{M}}_1^{[c]} = \underline{\mathbf{B}}^c \cdot \underline{\mathbf{d}}_2^{[c]} + \underline{\mathbf{C}}^c \cdot \underline{\boldsymbol{\delta}}_2^{[c]} + \frac{1}{2} \left(\underline{\mathbf{A}}^c \cdot \underline{\mathbf{d}}_1^{[c]} + \underline{\mathbf{B}}^c \cdot \underline{\boldsymbol{\delta}}_1^{[c]} \right) \\
\\
\text{la cinématique,} \\
\underline{\mathbf{d}}_2^{[c]} = \underline{\mathbf{U}}_2^{[c]} - \underline{\mathbf{U}}_2^c + \underline{\mathbf{U}}_1^{[c]} \otimes \underline{\mathbf{\nabla}} \cdot \underline{\mathbf{l}}^c + \frac{1}{2} \underline{\mathbf{U}}_0^{[c]} \otimes \underline{\mathbf{\nabla}} \otimes \underline{\mathbf{\nabla}} : \underline{\mathbf{l}}^c \otimes \underline{\mathbf{l}}^c \\
+ \frac{\underline{\mathbf{l}}^c}{2} \wedge \left(\underline{\boldsymbol{\Phi}}_1^{[c]} + \underline{\boldsymbol{\Phi}}_1^c + \underline{\mathbf{U}}_0^{[c]} \otimes \underline{\mathbf{\nabla}} \cdot \underline{\mathbf{l}}^c \right) \\
\underline{\boldsymbol{\delta}}_2^{[c]} = \underline{\boldsymbol{\Phi}}_2^{[c]} - \underline{\boldsymbol{\Phi}}_2^c + \underline{\boldsymbol{\Phi}}_1^{[c]} \otimes \underline{\mathbf{\nabla}} \cdot \underline{\mathbf{l}}^c + \frac{1}{2} \underline{\boldsymbol{\Phi}}_0^{[c]} \otimes \underline{\mathbf{\nabla}} \otimes \underline{\mathbf{\nabla}} : \underline{\mathbf{l}}^c \otimes \underline{\mathbf{l}}^c
\end{array} \right.$$

$$\forall i \in [1, n], \left\{ \begin{array}{l}
\text{les équations d'équilibre,} \\
\sum_{c \in \mathcal{C}} \chi_{\underline{\alpha}, i}(c) \underline{\mathbf{F}}_r^{[c]} = 0 \\
\sum_{c \in \mathcal{C}} \chi_{\underline{\alpha}, i}(c) \underline{\mathbf{M}}_r^{[c]} = 0 \\
\\
\text{le comportement,} \\
\underline{\mathbf{F}}_r^{[c]} = \underline{\mathbf{A}}^c \cdot \underline{\mathbf{d}}_{r+1}^{[c]} + \underline{\mathbf{B}}^c \cdot \underline{\boldsymbol{\delta}}_{r+1}^{[c]} \\
\underline{\mathbf{M}}_r^{[c]} = \underline{\mathbf{B}}^c \cdot \underline{\mathbf{d}}_{r+1}^{[c]} + \underline{\mathbf{C}}^c \cdot \underline{\boldsymbol{\delta}}_{r+1}^{[c]} + \frac{1}{2} \underline{\mathbf{e}} : \left(\underline{\mathbf{A}}^c \cdot \underline{\mathbf{d}}_r^{[c]} + \underline{\mathbf{B}}^c \cdot \underline{\boldsymbol{\delta}}_r^{[c]} \right) \\
\\
\text{la cinématique,} \\
\underline{\mathbf{d}}_{r+1}^{[c]} = \underline{\mathbf{U}}_{r+1}^{[c]} - \underline{\mathbf{U}}_{r+1}^c + \sum_{p=1}^{r+1} \frac{1}{p!} \underline{\mathbf{U}}_{r+1-p}^{[c]} \otimes^p \underline{\mathbf{\nabla}} \cdot^p \underline{\mathbf{l}}^c \otimes^{p-1} \\
+ \frac{\underline{\mathbf{l}}^c}{2} \wedge \left(\underline{\boldsymbol{\Phi}}_r^{[c]} + \underline{\boldsymbol{\Phi}}_r^c + \sum_{p=1}^r \frac{1}{p!} \underline{\boldsymbol{\Phi}}_{r-p}^{[c]} \otimes^p \underline{\mathbf{\nabla}} \cdot^p \underline{\mathbf{l}}^c \otimes^{p-1} \right) \\
\underline{\boldsymbol{\delta}}_{r+1}^{[c]} = \underline{\boldsymbol{\Phi}}_{r+1}^{[c]} - \underline{\boldsymbol{\Phi}}_{r+1}^c + \sum_{p=1}^{r+1} \frac{1}{p!} \underline{\boldsymbol{\Phi}}_{r+1-p}^{[c]} \otimes^p \underline{\mathbf{\nabla}} \cdot^p \underline{\mathbf{l}}^c \otimes^{p-1}
\end{array} \right.$$

Une structure en cascade apparaît encore mais les opérateurs à considérer ont légèrement changé. Pour obtenir les inconnues, le système global cette fois-ci n'a pas besoin de mélanger les ordres. Les opérateurs discrets qui vont

intervenir sont l'opérateur $L_d^{(2)}$ et la suite d'opérateurs $(S_d^r)_{r \in \mathbb{N}^*}$ définis par :

$$L_d^{(2)} [i] \left(\begin{array}{c} \{\underline{U}\} \\ \{\underline{\Phi}\} \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} \sum_{c \in G^s/c] = i} \left[\underline{A}^c \cdot (\underline{U}^{[c]} - \underline{U}^{[c]}) + \underline{B}^c \cdot (\underline{\Phi}^{[c]} - \underline{\Phi}^{[c]}) \right] \\ \sum_{c \in G^s/c] = i} \left[{}^t \underline{B}^c \cdot (\underline{U}^{[c]} - \underline{U}^{[c]}) + \underline{C}^c \cdot (\underline{\Phi}^{[c]} - \underline{\Phi}^{[c]}) \right] \end{array} \right]$$

puis, pour les opérateurs sur les termes de source on a :

$$S_d^1 [i] \left(\begin{array}{c} \{\underline{U}\} \\ \{\underline{\Phi}\} \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} \sum_{c \in G^s/c] = i} \left[\underline{A}^c \cdot \left(\underline{U}^{[c]} \otimes \underline{\nabla} \cdot \underline{l}^c + \frac{l^c}{2} \wedge (\underline{\Phi}^{[c]} + \underline{\Phi}^{[c]}) \right) + \underline{B}^c \cdot (\underline{\Phi}^{[c]} \otimes \underline{\nabla} \cdot \underline{l}^c) \right] \\ \sum_{c \in G^s/c] = i} \left[{}^t \underline{B}^c \cdot (\underline{U}^{[c]} \otimes \underline{\nabla} \cdot \underline{l}^c) + \underline{C}^c \cdot (\underline{\Phi}^{[c]} \otimes \underline{\nabla} \cdot \underline{l}^c) \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \underline{e} : \left(\underline{A}^c \cdot (\underline{U}^{[c]} - \underline{U}^{[c]}) + \underline{B}^c \cdot (\underline{\Phi}^{[c]} - \underline{\Phi}^{[c]}) \right) \right] \end{array} \right]$$

$$S_d^2 [i] \left(\begin{array}{c} \{\underline{U}\} \\ \{\underline{\Phi}\} \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} \sum_{c \in G^s/c] = i} \left[\underline{A}^c \cdot \left(\frac{1}{2} \underline{U}^{[c]} \otimes \underline{\nabla} : \underline{l}^c \otimes \underline{l}^c + \frac{l^c}{2} \wedge (\underline{\Phi}^{[c]} \otimes \underline{\nabla} \cdot \underline{l}^c) \right) \right. \\ \left. + \underline{B}^c \cdot \left(\frac{1}{2} \underline{\Phi}^{[c]} \otimes \underline{\nabla} \cdot \underline{l}^c \otimes \underline{l}^c \right) \right] \\ \sum_{c \in G^s/c] = i} \left[{}^t \underline{B}^c \cdot \left(\frac{1}{2} \underline{U}^{[c]} \otimes \underline{\nabla} : \underline{l}^c \otimes \underline{l}^c \right) + \underline{C}^c \cdot \left(\frac{1}{2} \underline{\Phi}^{[c]} \otimes \underline{\nabla} : \underline{l}^c \otimes \underline{l}^c \right) \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \underline{e} : \left(\underline{A}^c \cdot \left(\underline{U}^{[c]} \otimes \underline{\nabla} \cdot \underline{l}^c + \frac{l^c}{2} \wedge (\underline{\Phi}^{[c]} + \underline{\Phi}^{[c]}) \right) + \underline{B}^c \cdot (\underline{\Phi}^{[c]} \otimes \underline{\nabla} \cdot \underline{l}^c) \right) \right] \end{array} \right]$$

puis au delà, pour les opérateurs d'ordre r supérieur à 2, on a :

$$S_d^r [i] \left(\begin{array}{c} \{\underline{\mathbf{U}}\} \\ \{\underline{\Phi}\} \end{array} \right) = \left[\begin{array}{l} \sum_{c \in G^s / c] = i} \left[\underline{\mathbf{A}}^c \cdot \left(\frac{1}{r!} \underline{\mathbf{U}}^{[c]} \otimes \underline{\mathbf{V}}^{\cdot r} \underline{\mathbf{l}}^c \otimes \underline{\mathbf{l}}^{c \cdot r-1} + \frac{\underline{\mathbf{l}}^c}{2} \wedge \left(\frac{1}{(r-1)!} \underline{\Phi}^{[c]} \otimes \underline{\mathbf{V}}^{\cdot r-1} \underline{\mathbf{l}}^c \otimes \underline{\mathbf{l}}^{c \cdot r-2} \right) \right) \right. \\ \left. + \underline{\mathbf{B}}^c \cdot \left(\frac{1}{r!} \underline{\Phi}^{[c]} \otimes \underline{\mathbf{V}}^{\cdot r} \underline{\mathbf{l}}^c \otimes \underline{\mathbf{l}}^{c \cdot r-1} \right) \right] \\ \\ \sum_{c \in G^s / c] = i} \left[\underline{\mathbf{B}}^c \cdot \left(\frac{1}{r!} \underline{\mathbf{U}}^{[c]} \otimes \underline{\mathbf{V}}^{\cdot r} \underline{\mathbf{l}}^c \otimes \underline{\mathbf{l}}^{c \cdot r-1} \right) + \underline{\mathbf{C}}^c \cdot \left(\frac{1}{r!} \underline{\Phi}^{[c]} \otimes \underline{\mathbf{V}}^{\cdot r} \underline{\mathbf{l}}^c \otimes \underline{\mathbf{l}}^c \right) \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \underline{\mathbf{e}} : \left(\underline{\mathbf{A}}^c \cdot \left(\frac{1}{(r-1)!} \underline{\mathbf{U}}^{[c]} \otimes \underline{\mathbf{V}}^{\cdot r-1} \underline{\mathbf{l}}^c \otimes \underline{\mathbf{l}}^{c \cdot r-2} \right) \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\underline{\mathbf{l}}^c}{2} \wedge \left(\frac{1}{(r-2)!} \underline{\mathbf{U}}^{[c]} \otimes \underline{\mathbf{V}}^{\cdot r-2} \underline{\mathbf{l}}^c \otimes \underline{\mathbf{l}}^{c \cdot r-3} \right) \right) \right. \\ \left. + \underline{\mathbf{B}}^c \cdot \left(\frac{1}{(r-1)!} \underline{\Phi}^{[c]} \otimes \underline{\mathbf{V}}^{\cdot r-1} \underline{\mathbf{l}}^c \otimes \underline{\mathbf{l}}^{c \cdot r-2} \right) \right] \end{array} \right]$$

Les nouveaux systèmes à résoudre sont donc successivement :

$$\forall i \in [1, n], \quad L_d^{(2)} [i] \left(\begin{array}{c} \{\underline{\mathbf{U}}_0\} \\ \{\underline{\Phi}_0\} \end{array} \right) = 0 \quad (3.31)$$

$$\begin{aligned} \forall i \in [1, n], \quad L_d^{(2)} [i] \left(\begin{array}{c} \{\underline{\mathbf{U}}_1\} \\ \{\underline{\Phi}_1\} \end{array} \right) &= -S_d^1 [i] \left(\begin{array}{c} \{\underline{\mathbf{U}}_0\} \\ \{\underline{\Phi}_0\} \end{array} \right) \\ \forall i \in [1, n], \quad L_d^{(2)} [i] \left(\begin{array}{c} \{\underline{\mathbf{U}}_2\} \\ \{\underline{\Phi}_2\} \end{array} \right) &= -S_d^1 [i] \left(\begin{array}{c} \{\underline{\mathbf{U}}_1\} \\ \{\underline{\Phi}_1\} \end{array} \right) - S_d^2 [i] \left(\begin{array}{c} \{\underline{\mathbf{U}}_0\} \\ \{\underline{\Phi}_0\} \end{array} \right) - \frac{|Y|}{n} \left[\frac{\underline{\mathbf{F}}_{ext}}{\underline{\mathbf{C}}_{ext}} \right] \\ \forall i \in [1, n], \quad L_d^{(2)} [i] \left(\begin{array}{c} \{\underline{\mathbf{U}}_3\} \\ \{\underline{\Phi}_3\} \end{array} \right) &= -S_d^1 [i] \left(\begin{array}{c} \{\underline{\mathbf{U}}_2\} \\ \{\underline{\Phi}_2\} \end{array} \right) - S_d^2 [i] \left(\begin{array}{c} \{\underline{\mathbf{U}}_1\} \\ \{\underline{\Phi}_1\} \end{array} \right) - S_d^3 [i] \left(\begin{array}{c} \{\underline{\mathbf{U}}_0\} \\ \{\underline{\Phi}_0\} \end{array} \right) \end{aligned}$$

puis à tout ordre r , on a :

$$\forall i \in [1, n], \quad L_d^{(2)} [i] \left(\begin{array}{c} \{\underline{\mathbf{U}}_r\} \\ \{\underline{\Phi}_r\} \end{array} \right) = - \left(\sum_{m=1}^{r-1} S_d^m [i] \left(\begin{array}{c} \{\underline{\mathbf{U}}_{r-m}\} \\ \{\underline{\Phi}_{r-m}\} \end{array} \right) \right) - S_d^r [i] \left(\begin{array}{c} \{\underline{\mathbf{U}}_0\} \\ \{\underline{\Phi}_0\} \end{array} \right)$$

Pour assurer la compatibilité de ces systèmes afin de pouvoir inverser l'opérateur $L_d^{(2)}$, il faut que les termes de sources soient hors du noyau de cet

opérateur. En effet, l'opérateur $L_d^{(2)}$ n'est pas inversible. Il est même clair que le noyau du système est constitué des champs cinématiques :

$$(\{\underline{U}\}, \{\underline{\Phi}\}) / \forall i \in [1, n], \quad \left\{ \begin{array}{l} \underline{U}^i = \underline{U}^0 \\ \underline{\Phi}^i = \underline{\Phi}^0 \end{array} \right.$$

ainsi à chaque ordre, le noyau de l'opérateur $L_d^{(2)}$ est de dimension 6. On obtient ainsi une relation de compatibilité impliquant les deux types d'équations d'équilibre, ce qui représente un changement par rapport au matériau (SH1) (voir la section 3.8).

Lemme 4 (inversion de $L_d^{(2)}$ pour (SH2)) Soient deux n -uplet de vecteurs $\underline{g}$ et $\underline{h}$, l'équation :

$$L_d^{(2)} \left(\begin{array}{c} \{\underline{U}\} \\ \{\underline{\Phi}\} \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} g \\ h \end{array} \right] \quad (3.32)$$

admet une solution unique à un champ constant près, si, et seulement si,

$$\sum_{i=1}^n \underline{g}_i = 0 \text{ et } \sum_{i=1}^n \underline{h}_i = 0. \quad (3.33)$$

Ces relations (3.33) sont appelées équations de compatibilité (SH2) du système (3.32).

On applique ensuite le théorème de Rouché-Fontené [th :3] pour résoudre les systèmes en cascade. On remarque tout de suite à l'examen du système (3.31) que les premiers termes, $(\{\underline{U}_0\}, \{\underline{\Phi}_0\})$, du développement asymptotique sont dans le noyau de $L_d^{(2)}$. Ceci signifie que le premier terme du développement asymptotique de la translation, mais aussi de la rotation, sont indépendants du type de particule du matériau. On obtient alors en introduisant des tenseurs de localisation :

$$\forall i \in [1, n], \quad \left\{ \begin{array}{l} \underline{U}_1^i = \underline{U}_1 + \underline{\underline{\underline{X}}}_{1u}^i : \underline{U}_0 \otimes \underline{\nabla} + \underline{\underline{\underline{X}}}_{2u}^i \cdot \underline{\Phi}_0 + \underline{\underline{\underline{X}}}_{3u}^i : \underline{\Phi}_0 \otimes \underline{\nabla} \\ \underline{\Phi}_1^i = \underline{\Phi}_1 + \underline{\underline{\underline{X}}}_{1\phi}^i : \underline{U}_0 \otimes \underline{\nabla} + \underline{\underline{\underline{X}}}_{2\phi}^i \cdot \underline{\Phi}_0 + \underline{\underline{\underline{X}}}_{3\phi}^i : \underline{\Phi}_0 \otimes \underline{\nabla} \end{array} \right.$$

avec la fixation d'une translation et d'une rotation :

$$\begin{array}{l} \underline{\underline{\underline{X}}}_{1u}^1 = 0, \underline{\underline{\underline{X}}}_{2u}^1 = 0, \underline{\underline{\underline{X}}}_{3u}^1 = 0, \\ \underline{\underline{\underline{X}}}_{1\phi}^1 = 0, \underline{\underline{\underline{X}}}_{2\phi}^1 = 0, \underline{\underline{\underline{X}}}_{3\phi}^1 = 0. \end{array}$$

Les problèmes des ordres suivants se résolvent de la même façon suivant ce principe de cascade. La relation de compatibilité utilisée à chaque ordre permet de passer les équations d'équilibre au niveau macroscopique.

Maintenant, que nous avons nos solutions cinématiques, nous allons pouvoir exprimer les contraintes macroscopique et exhiber le comportement macroscopique. Nous allons exploiter les relations (3.22) pour déterminer ce comportement au premier ordre et obtenir le système d'équations que doit vérifier les champs de déplacement macroscopique au premier ordre. On trouve :

– à l'ordre 0,

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} \underline{\underline{\Sigma}}_0 + \underline{\underline{f}} &= 0 \\
\operatorname{div} \underline{\underline{M}}_0 - \underline{\underline{e}} : \underline{\underline{\Sigma}}_0 + \underline{\underline{c}} &= 0 \\
\underline{\underline{\Sigma}}_0 &= \underline{\underline{A}}_0^{(2)} : \left(\underline{\underline{U}}_0 \otimes \underline{\underline{\nabla}} + \underline{\underline{e}} \cdot \underline{\underline{\Phi}}_0 \right) + \underline{\underline{B}}_0^{(2)} : \underline{\underline{\Phi}}_0 \otimes \underline{\underline{\nabla}} \\
\underline{\underline{M}}_0 &= \underline{\underline{B}}_0'^{(2)} : \left(\underline{\underline{U}}_0 \otimes \underline{\underline{\nabla}} + \underline{\underline{e}} \cdot \underline{\underline{\Phi}}_0 \right) + \underline{\underline{C}}_0^{(2)} : \underline{\underline{\Phi}}_0 \otimes \underline{\underline{\nabla}} \\
\underline{\underline{U}}_0 &= 0 \text{ et } \underline{\underline{\Phi}}_0 = 0 \text{ sur } \partial\Omega^*.
\end{aligned} \tag{3.34}$$

où les tenseurs de comportement homogénéisé $\underline{\underline{A}}_0^{(2)}$, $\underline{\underline{B}}_0^{(2)}$, $\underline{\underline{B}}_0'^{(2)}$, $\underline{\underline{C}}_0^{(2)}$ s'expriment en fonction des tenseurs de localisation. On a, de plus, la propriété : $B_{0ijkl}^{(2)} = B_{0klij}^{(2)}$, on notera $\underline{\underline{B}}_0'^{(2)} = {}^t \underline{\underline{B}}_0^{(2)}$. Par exemple, on a :

$$\begin{aligned}
\underline{\underline{A}}_0^{(2)} : \underline{\underline{E}} &= \frac{1}{|Y|} \sum_{c \in G} \left[\tilde{\underline{\underline{A}}}^c \cdot \left(\left(\underline{\underline{X}}_{1u}^{[c]} - \underline{\underline{X}}_{1u}^{[c]} \right) : \underline{\underline{E}} \otimes \underline{\underline{l}}^c \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{l}}^c \otimes \underline{\underline{l}}^c \right) + \tilde{\underline{\underline{B}}}^c \cdot \left(\left(\underline{\underline{X}}_{1\phi}^{[c]} - \underline{\underline{X}}_{1\phi}^{[c]} \right) : \underline{\underline{E}} \otimes \underline{\underline{l}}^c \right) \right]
\end{aligned}$$

pour tout tenseur d'ordre 2, $\underline{\underline{E}}$.

Par ailleurs, tout comme pour le schéma d'homogénéisation (SH1), on peut donner une définition énergétique équivalente de $\underline{\underline{A}}_0^{(2)}$, $\underline{\underline{B}}_0^{(2)}$, $\underline{\underline{C}}_0^{(2)}$:

$$\begin{aligned}
\Psi^{Cos}(\underline{\underline{E}}, \underline{\underline{G}}) &= {}^t \underline{\underline{E}} : \underline{\underline{A}}_0^{(2)} : \underline{\underline{E}} + 2 {}^t \underline{\underline{E}} : \underline{\underline{B}}_0^{(2)} : \underline{\underline{G}} + {}^t \underline{\underline{G}} : \underline{\underline{C}}_0^{(2)} : \underline{\underline{G}} \\
&= \min_{(\underline{\underline{d}}, \underline{\underline{\delta}}) \in \mathcal{CA}_2^0} \Psi_2(\underline{\underline{d}}, \underline{\underline{\delta}})
\end{aligned} \tag{3.35}$$

où

$$\Psi_2(\underline{\underline{d}}, \underline{\underline{\delta}}) = \frac{1}{|Y|} \sum_{c \in G} \left(\underline{\underline{d}}^{[c]} \cdot \underline{\underline{A}}^c \cdot \underline{\underline{d}}^{[c]} + 2 \underline{\underline{d}}^{[c]} \cdot \underline{\underline{B}}^{(2)c} \cdot \underline{\underline{\delta}}^{[c]} + \underline{\underline{\delta}}^{[c]} \cdot \underline{\underline{C}}^{(2)c} \cdot \underline{\underline{\delta}}^{[c]} \right)$$

et $\mathcal{CA}_2^0(\underline{\underline{E}}, \underline{\underline{G}})$ est l'ensemble des déformations généralisées $\mathcal{C}_G^s$ -périodiques

construites à partir de mouvements périodiques selon :

$$\mathcal{CA}_2^0(\underline{\underline{E}}, \underline{\underline{G}}) = \left\{ \begin{array}{l} (\underline{d}, \underline{\delta}) / \exists \underline{u}_{per}, \underline{\phi}_{per} / \underline{u}_{per}^{\alpha,i} = \underline{u}^i, \underline{\phi}_{per}^{\alpha,i} = \underline{\phi}^i \\ \left\{ \begin{array}{l} \underline{d}^{[c]} = \underline{\underline{E}} \cdot \underline{l}^c + \underline{u}^{[c]} - \underline{u}^{[c]} \\ \underline{\delta}^{[c]} = \underline{\underline{G}} \cdot \underline{l}^c + \underline{\phi}^{[c]} - \underline{\phi}^{[c]} \end{array} \right\} \end{array} \right\}.$$

Finalement le schéma d'homogénéisation du matériau (SH2) fait apparaître un milieu de type Cosserat au niveau macroscopique. La rotation n'est pas diluée dans ce cas par passage du milieu discret microscopique au milieu continu macroscopique, contrairement au schéma (SH1).

Chapitre 4

Homogénéisation du flambement des milieux discrets orientés

4.1 Généralités

DANS les parties précédentes, nous nous sommes intéressés à des problèmes d'élasticité linéaire où il y avait unicité de la solution dans le problème mécanique. Nous allons maintenant aborder des problèmes élastiques non linéaires, où il n'y a plus unicité de la solution du problème. Le choix de la solution se fera par une analyse de la stabilité des solutions candidates. Ce phénomène de multiplicité des solutions possibles (autrement appelé bifurcation) pour les équations d'équilibre est appelé dans le cadre des systèmes élastiques flambement ou flambage. La littérature scientifique est riche sur ce thème, en guise d'introduction, on peut se rapporter à [Bamberger, 1981b], [Germain, 1986], [Nguyen, 1995].

Jusqu'à présent, nous avons examiné les équilibres dans l'hypothèse des petites perturbations où il y avait unicité de la solution. Cette hypothèse correspond à des systèmes élastiques de rigidités suffisamment élevées sous des chargements modérés. La solution ainsi obtenue était un état d'équilibre stable. En augmentant le niveau de chargement, les déplacements cessent d'être petits. A partir de ce niveau de chargement, il n'est plus possible de rester dans le cadre des hypothèses des petites perturbations. Ainsi, à partir d'un état naturel, on fait croître progressivement et continuellement le niveau de chargement. Dans un premier temps, la position unique d'équilibre stable évolue continûment, puis à partir d'un niveau de chargement critique, la solution d'équilibre suivie continûment cesse d'être stable, une autre position

d'équilibre apparaît. C'est à partir de là que nous avons perte de l'unicité de la solution. Pour trouver la charge critique, il faut étudier la variation seconde de l'énergie potentielle dont on suppose l'existence. Cette étude fait naturellement appel au calcul des variations [Lippman, 1972]. Nous nous appuyons dans la suite sur le formalisme de Nguyen [Nguyen, 1995].

Nous nous intéressons ici à des flambements ponctuant la fin de la validité de l'hypothèse des petites perturbations. Les solides considérés sont soumis à des petites déformations et des grandes rotations. On part d'un système mécanique Ω qui, sous l'action d'efforts extérieurs, se déforme et occupe une nouvelle position. Pour notre étude, le chargement est une condition limite cinématique supposée dépendre linéairement d'un paramètre scalaire **sans dimensions** λ qui croît à partir de zéro jusqu'à la charge critique.

On se place en description lagrangienne et on prend l'état naturel comme état de référence. Une position d'équilibre est donc caractérisée par un champ (discret ou continu) de déplacement, ξ , et par la valeur du paramètre de chargement λ . De manière générique, nous appelons $\mathcal{D}$ l'opérateur qui associe la déformation locale, e , appartenant à l'espace des déformations, $\mathcal{DEF}$, au champ de déplacement, ξ , appartenant à l'espace des champs cinématiquement admissibles, $\mathcal{CA}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{D} : \mathcal{CA} &\longrightarrow \mathcal{DEF} \\ \xi &\longrightarrow e = \mathcal{D} \circ \xi. \end{aligned}$$

On suppose que $\mathcal{CA}$ est un espace affine dont l'espace vectoriel associé est noté $\mathcal{CA}_0$ et que $\mathcal{DEF}$ est un espace vectoriel. A titre d'exemple la déformation de Green-Lagrange d'un milieu continu est reliée au champ de déplacement, $\xi = \underline{u}$, par :

$$\underline{e} = \frac{1}{2} (\underline{u} \otimes \underline{\nabla} + \underline{\nabla} \otimes \underline{u} + \underline{\nabla} \otimes \underline{u} \cdot \underline{u} \otimes \underline{\nabla}). \quad (4.1)$$

$\mathcal{D}$ est donc l'opérateur local défini par :

$$\frac{1}{2} (\underline{\cdot} \otimes \underline{\nabla} + \underline{\nabla} \otimes \underline{\cdot} + \underline{\nabla} \otimes \underline{\cdot} \cdot \underline{\cdot} \otimes \underline{\nabla}).$$

Introduisons l'application linéaire tangente de l'opérateur $\mathcal{D}$ en un champ de déplacement donné, ξ_0 par :

$$\forall \delta \xi \in \mathcal{CA}_0, \quad \partial_{\xi_0} \mathcal{D} \cdot \delta \xi = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\mathcal{D} \circ (\xi_0 + t \delta \xi) - \mathcal{D} \circ \xi_0}{t}.$$

Pareillement, nous définissons une application tangente seconde autour d'un champ de déplacement fixe, ξ_0 par :

$$\forall (\delta \xi, \delta^* \xi) \in \mathcal{CA}_0 \times \mathcal{CA}_0, \quad [\partial_{\xi_0}^2 \mathcal{D} \cdot \delta \xi] \cdot \delta^* \xi = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\partial_{(\xi_0 + t \delta^* \xi)} \mathcal{D} \cdot \delta \xi - \partial_{\xi_0} \mathcal{D} \cdot \delta \xi}{t}.$$

On établit facilement que $\partial_{\xi_0}^2 \mathcal{D}$ est une forme bilinéaire symétrique.

Par ailleurs, nous écrivons le comportement sous la forme d'un opérateur local linéaire symétrique, $\mathcal{L}$, défini de l'espace des déformations, $\mathcal{DEF}$ vers l'espace des contraintes, $\mathcal{CON}$. L'hypothèse de linéarité est une bonne approximation pour l'étude de comportement élastique dans le cadre de faibles déformations. Nous associons formellement à $\mathcal{L}$ une densité scalaire d'énergie élastique, $\mathcal{W}(e)$ qui est une forme quadratique définie positive : $\mathcal{W}(e) = \frac{1}{2}(\mathcal{L}e, e)$, on obtient ainsi un système conservatif qui, en présence uniquement de chargement cinématique, est d'énergie potentielle totale :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\xi, \lambda) &= \langle \mathcal{W}(\mathcal{D} \circ \xi) \rangle_{\Omega} \\ &= \frac{1}{2} \langle (\mathcal{L} \circ \mathcal{D} \circ \xi, \mathcal{D} \circ \xi) \rangle_{\Omega} \end{aligned}$$

avec des conditions limites sur ξ proportionnelles à λ . On a introduit l'opérateur linéaire de sommation $\langle \cdot \rangle_{\Omega}$ afin de garder la généralité pour les systèmes discrets et continus.

Ainsi, pour un système discret constitué de particule P dans Ω , on a : $\langle \cdot \rangle_{\Omega} = \sum_{P \in \Omega} \cdot$, et, par exemple, pour un système continu constitué d'un volume

de matière continu Ω : $\langle \cdot \rangle_{\Omega} = \int_{\underline{\mathbf{x}} \in \Omega} \cdot d\omega$.

La définition (et l'existence) d'une énergie potentielle permet d'écrire, pour la solution en déplacement ξ^s , les équations d'équilibre sous une forme simplifiée compacte :

$$\begin{aligned} \forall \delta \xi \in \mathcal{CA}_0, \mathcal{E}_{,\xi^s} \cdot \delta \xi &= \left\langle \left(\mathcal{L} \circ \partial_{\xi^s} \mathcal{D} \cdot \delta \xi, \mathcal{D} \circ \xi^s \right) \right\rangle_{\Omega} = 0 \\ \text{avec sur } \partial\Omega, \xi &= \xi^d(\lambda). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Quant à la variation seconde de l'énergie potentielle, elle s'exprime par :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{,\xi\xi}(\xi) [\delta \xi, \delta^* \xi] &= [\mathcal{E}_{,\xi\xi} \cdot \delta \xi] \cdot \delta^* \xi \\ &= \langle (\mathcal{L} \circ \partial_{\xi} \mathcal{D} \cdot \delta \xi, \partial_{\xi} \mathcal{D} \cdot \delta^* \xi) \rangle_{\Omega} \\ &\quad + \langle (\mathcal{L} \circ \mathcal{D} \circ \xi, [\partial_{\xi}^2 \mathcal{D} \cdot \delta \xi] \cdot \delta^* \xi) \rangle_{\Omega}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

D'après le théorème de Lejeune-Dirichlet, un déplacement ξ^s , solution des équations d'équilibre (4.2) pour un niveau de chargement λ , est stable si la variation seconde de l'énergie potentielle est strictement positive. On dit que le chargement λ^c est critique si

$$\exists \delta \xi \neq 0 \in \mathcal{CA}_0 \text{ tel que } \forall \delta^* \xi \in \mathcal{CA}_0, \quad \mathcal{E}_{,\xi\xi}(\xi^s) [\delta \xi, \delta^* \xi] = 0$$

Dans le cas où un chargement critique a lieu pour un déplacement solution s'inscrivant dans le cadre de l'hypothèse des petites perturbations, il est

possible de simplifier l'étude de la stabilité. On dit que l'on est en petites pré-déformations. En effet, dans ce cas, pour tout $\lambda < \lambda^c$, il existe une seule solution stable qui dépend linéairement de λ : $\xi^s(\lambda) = \lambda \xi_0^s$ où $\lambda \xi_0^s$ est la solution dans l'hypothèse des petites perturbations avec un chargement unité $\lambda = 1$. On obtient une approximation de la variation seconde de l'énergie en y substituant les dérivées de l'opérateur $\mathcal{D}$ à la solution par ses dérivées au déplacement nul. De plus, on suppose :

$$\mathcal{D} \circ \xi^s(\lambda) \approx \partial_0 \mathcal{D} \cdot \xi^s(\lambda) \approx \lambda \partial_0 \mathcal{D} \cdot \xi_0^s.$$

On obtient :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{,\xi\xi}(\xi^s)[\delta\xi, \delta^*\xi] &\approx \langle (\mathcal{L} \circ \partial_0 \mathcal{D} \cdot \delta\xi, \partial_0 \mathcal{D} \cdot \delta^*\xi) \rangle_\Omega \\ &+ \lambda \langle (\mathcal{L} \circ \partial_0 \mathcal{D} \cdot \xi_0^s, [\partial_0^2 \mathcal{D} \cdot \delta\xi] \cdot \delta^*\xi) \rangle_\Omega. \end{aligned}$$

On a une charge critique λ^c , lorsqu'il existe une solution non nulle X , dite mode de flambement, dans l'espace $\mathcal{CA}_0$ au problème :

$$\begin{aligned} \forall \delta\xi \in \mathcal{CA}_0, \quad &\langle (\mathcal{L} \circ \partial_0 \mathcal{D} \cdot X, \partial_0 \mathcal{D} \cdot \delta\xi) \rangle_\Omega \\ &+ \lambda \langle (\mathcal{L} \circ \partial_0 \mathcal{D} \cdot \xi_0^s, [\partial_0^2 \mathcal{D} \cdot X] \cdot \delta\xi) \rangle_\Omega = 0. \end{aligned} \quad (4.4)$$

La détermination du mode de flambement X peut donc se ramener à l'écriture de la stationnarité de la somme :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(Y) &= \mathcal{E}_{HPP}(Y) - \lambda \mathcal{E}_{NL}(Y) \\ \text{avec} \quad \mathcal{E}_{HPP}(Y) &= \langle \mathcal{W}(\partial_0 \mathcal{D} \cdot Y) \rangle_\Omega \\ \text{et} \quad \mathcal{E}_{NL}(Y) &= -\frac{1}{2} \langle (\mathcal{L} \circ \partial_0 \mathcal{D} \cdot \xi_0^s, [\partial_0^2 \mathcal{D} \cdot Y] \cdot Y) \rangle_\Omega. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Naturellement, on supposera dans la suite que $\mathcal{E}_{NL}(Y)$ est une forme quadratique positive. A la manière de Nguyen [Nguyen, 1995], il est alors possible d'utiliser une reformulation du problème (4.4) pour obtenir directement la valeur du chargement critique :

$$\lambda_c = \min_{\xi \in \mathcal{CA}_0} - \frac{\langle (\mathcal{L} \circ \partial_0 \mathcal{D} \cdot \xi, \partial_0 \mathcal{D} \cdot \xi) \rangle_\Omega}{\langle (\mathcal{L} \circ \partial_0 \mathcal{D} \cdot \xi_0^s, [\partial_0^2 \mathcal{D} \cdot \xi] \cdot \xi) \rangle_\Omega} = \min_{\xi \in \mathcal{CA}_0} \frac{\mathcal{E}_{HPP}(\xi)}{\mathcal{E}_{NL}(\xi)}. \quad (4.6)$$

Enfin, il faut vérifier a posteriori que la solution en déplacement $\lambda^c \xi_0^s$ est bien petite pour valider l'hypothèse des petites pré-déformations.

4.2 Exemple d'un milieu de Cauchy

Le formalisme précédent peut être mis en œuvre sur les milieux continus classiques dits de Cauchy. Dans ce cas, les déplacements ξ correspondent aux

translations notées $\underline{\mathbf{u}}$ et la déformation, e , est donné par 4.1. On reconnait alors aisément la partie linéaire et la partie dite quadratique de la déformation, on a :

$$l(\underline{\mathbf{u}}) = \frac{1}{2} (\underline{\mathbf{u}} \otimes \underline{\mathbf{\nabla}} + \underline{\mathbf{\nabla}} \otimes \underline{\mathbf{u}})$$

et $q(\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{u}}) = \frac{1}{2} (\underline{\mathbf{\nabla}} \otimes \underline{\mathbf{u}} \cdot \underline{\mathbf{u}} \otimes \underline{\mathbf{\nabla}})$

L'opérateur de déformation s'écrit ici sous la forme ; $\mathcal{D} = l + q$, il est donc d'application tangente seconde constante sur l'espace des champs de déplacements cinématiquement admissibles, $\mathcal{CA}$. Le comportement est linéaire dans le cadre des hypothèses de petites déformations d'où en introduisant le tenseur de rigidité, $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ et le tenseur de contrainte $\underline{\underline{\sigma}}$:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\mathbf{A}}} : \underline{\underline{\mathbf{e}}}$$

Si l'on pose $\underline{\underline{\sigma}}^s$ la solution triviale en contrainte associée au déplacement $\underline{\mathbf{u}}^s$ et vérifiant l'équilibre :

$$\begin{aligned} & \forall \delta \underline{\mathbf{u}}, \\ \mathcal{E}_{,u} \cdot \delta \underline{\mathbf{u}} &= \int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}}^s : \frac{1}{2} (\delta \underline{\mathbf{u}} \otimes \underline{\mathbf{\nabla}} + 2 \underline{\mathbf{\nabla}} \otimes \delta \underline{\mathbf{u}} + \underline{\mathbf{\nabla}} \otimes \underline{\mathbf{u}}^s \cdot \delta \underline{\mathbf{u}} \otimes \underline{\mathbf{\nabla}}) d\omega \quad (4.7) \\ & \text{avec sur } \partial\Omega, \quad \underline{\mathbf{u}} = \underline{\mathbf{u}}^d(\lambda), \quad \delta \underline{\mathbf{u}} = 0 \end{aligned}$$

On obtient alors l'équation variationnelle pour le mode de flambement, $\underline{\mathbf{X}}$, et le chargement critique, λ^c :

$$\begin{aligned} & \forall \delta \underline{\mathbf{u}}, \\ \mathcal{E}_{,uu} [\delta \underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{X}}] &= \int_{\Omega} \left\{ \frac{1}{2} (\delta \underline{\mathbf{u}} \otimes \underline{\mathbf{\nabla}} + \underline{\mathbf{\nabla}} \otimes \delta \underline{\mathbf{u}} + 2 \underline{\mathbf{\nabla}} \otimes \underline{\mathbf{u}}^s(\lambda^c) \cdot \delta \underline{\mathbf{u}} \otimes \underline{\mathbf{\nabla}}) : \underline{\underline{\mathbf{A}}} \right. \\ & \quad : \frac{1}{2} (\underline{\mathbf{X}} \otimes \underline{\mathbf{\nabla}} + \underline{\mathbf{\nabla}} \otimes \underline{\mathbf{X}} + 2 \underline{\mathbf{\nabla}} \otimes \underline{\mathbf{u}}^s(\lambda^c) \cdot \underline{\mathbf{X}} \otimes \underline{\mathbf{\nabla}}) \\ & \quad \left. + \underline{\underline{\sigma}}^s(\lambda^c) : \underline{\mathbf{\nabla}} \otimes \delta \underline{\mathbf{u}} \cdot \underline{\mathbf{X}} \otimes \underline{\mathbf{\nabla}} \right\} \\ &= 0 \\ & \text{avec sur } \partial\Omega, \quad \delta \underline{\mathbf{u}} = 0 \text{ et } \underline{\mathbf{X}} = 0 \end{aligned}$$

Si nous cherchons la stabilité d'une solution issue d'un problème en petites perturbations, la contrainte et le déplacement triviaux ne sont pas les solutions des équations d'équilibre (4.7), mais d'une expression variationnelle simplifiée. On approche donc la variation seconde du potentielle en y négligeant dans le premier terme énergétique l'apport de la partie non-linéaire de

la déformation. Ainsi la recherche du mode et du facteur critique de chargement se simplifie en un problème variationnel approché :

$$\begin{aligned}
& \forall \delta \underline{\mathbf{u}}, \\
\mathcal{E}_{,uu} [\delta \underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{X}}] &= \int_{\Omega} \left\{ \frac{1}{2} (\delta \underline{\mathbf{u}} \otimes \underline{\nabla} + \underline{\nabla} \otimes \delta \underline{\mathbf{u}}) : \underline{\underline{\mathbf{A}}} : \frac{1}{2} (\underline{\mathbf{X}} \otimes \underline{\nabla} + \underline{\nabla} \otimes \underline{\mathbf{X}}) \right. \\
& \quad \left. + \lambda \underline{\underline{\sigma}}_0^s : \underline{\nabla} \otimes \delta \underline{\mathbf{u}} \cdot \underline{\mathbf{X}} \otimes \underline{\nabla} \right\} \\
&= 0 \\
& \text{avec sur } \partial\Omega, \quad \delta \underline{\mathbf{u}} = 0 \text{ et } \underline{\mathbf{X}} = 0
\end{aligned}$$

4.3 Déformations non-linéaires de milieu discret

On se place dans toute la suite dans le cadre de l'homogénéisation d'un milieu discret périodique comme décrit dans le chapitre 3. On introduit ici la non linéarité géométrique des déformations généralisées $\underline{\mathbf{d}}^c$ et $\underline{\boldsymbol{\delta}}^c$ du couple $c = (P^{\underline{\alpha},i}, P^{\underline{\beta},j})$, l'énergie de déformation du couple restant quadratique :

$$H_c = \frac{1}{2} (\underline{\mathbf{d}}^c \cdot \underline{\underline{\mathbf{A}}}^c \cdot \underline{\mathbf{d}}^c + 2 \underline{\mathbf{d}}^c \cdot \underline{\underline{\mathbf{B}}}^c \cdot \underline{\boldsymbol{\delta}}^c + \underline{\boldsymbol{\delta}}^c \cdot \underline{\underline{\mathbf{C}}}^c \cdot \underline{\boldsymbol{\delta}}^c).$$

La force et le moment associés au couple c sont donnés par :

$$\underline{\mathbf{f}}^c = \frac{\partial H_c}{\partial \underline{\mathbf{d}}^c}, \quad \underline{\hat{\mathbf{m}}}^c = \frac{\partial H_c}{\partial \underline{\boldsymbol{\delta}}^c},$$

c'est-à-dire :

$$\begin{aligned}
\underline{\mathbf{f}}^c &= \underline{\underline{\mathbf{A}}}^c \cdot \underline{\mathbf{d}}^c + \underline{\underline{\mathbf{B}}}^c \cdot \underline{\boldsymbol{\delta}}^c \\
\underline{\hat{\mathbf{m}}}^c &= {}^t \underline{\underline{\mathbf{B}}}^c \cdot \underline{\mathbf{d}}^c + \underline{\underline{\mathbf{C}}}^c \cdot \underline{\boldsymbol{\delta}}^c.
\end{aligned}$$

Quant aux déformations généralisées, $\underline{\mathbf{d}}^c$ et $\underline{\boldsymbol{\delta}}^c$, elles sont des fonctions non linéaires du déplacement relatif des particules $P^{\underline{\alpha},i}$ et $P^{\underline{\beta},j}$, $\underline{\mathbf{u}}^{\underline{\alpha},i} - \underline{\mathbf{u}}^{\underline{\beta},j}$, et des orientations $\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\underline{\alpha},i}$ et $\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\underline{\beta},j}$ des trièdres attachés à ces particules, respectivement. Les tenseurs $\underline{\underline{\mathbf{R}}}$ sont donc des rotations (appartenant au groupe des symétries dont le déterminant vaut 1) qui vérifient :

$${}^t \underline{\underline{\mathbf{R}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{R}}} = \underline{\underline{\mathbf{1}}}.$$

En dérivant l'équation précédente, on obtient l'équation :

$${}^t \left({}^t \underline{\underline{\mathbf{R}}} \cdot \delta \underline{\underline{\mathbf{R}}} \right) + \left({}^t \underline{\underline{\mathbf{R}}} \cdot \delta \underline{\underline{\mathbf{R}}} \right) = 0$$

qui montre que ${}^t\mathbf{\underline{\underline{R}}} \cdot \delta\mathbf{\underline{\underline{R}}}$ est un tenseur antisymétrique dont le représentant pseudo-vectériel, noté $\delta\mathbf{\underline{\underline{\phi}}}$, est donné par :

$$\delta\mathbf{\underline{\underline{\phi}}} = \frac{1}{2}\mathbf{\underline{\underline{e}}} : ({}^t\mathbf{\underline{\underline{R}}} \cdot \delta\mathbf{\underline{\underline{R}}}) .$$

On suppose que

$$\partial_0\mathbf{\underline{\underline{d}}} \cdot \delta[\xi^c] = \delta\mathbf{\underline{\underline{u}}}^{\alpha,i} - \delta\mathbf{\underline{\underline{u}}}^{\beta,j} + \mathbf{\underline{\underline{l}}}^c \wedge \frac{\delta\mathbf{\underline{\underline{\phi}}}^{\alpha,i} + \delta\mathbf{\underline{\underline{\phi}}}^{\beta,j}}{2}$$

et

$$\partial_0\mathbf{\underline{\underline{\delta}}} \cdot \delta[\xi^c] = \delta\mathbf{\underline{\underline{\phi}}}^{\alpha,i} - \delta\mathbf{\underline{\underline{\phi}}}^{\beta,j} ,$$

où $[\xi^c] = [\mathbf{\underline{\underline{u}}}^{\alpha,i}, \mathbf{\underline{\underline{u}}}^{\alpha,i}, \mathbf{\underline{\underline{R}}}^{\alpha,i}, \mathbf{\underline{\underline{R}}}^{\beta,j}]$. Cette hypothèse assure la cohérence avec l'hypothèse des petites perturbations. De plus, on fait l'hypothèse que la variation seconde de $\mathbf{\underline{\underline{\delta}}}^c$ en $[\xi^c] = [0, 0, \mathbf{\underline{\underline{1}}}, \mathbf{\underline{\underline{1}}}]$ est nulle ainsi que les variations secondes de $\mathbf{\underline{\underline{d}}}^c \cdot \mathbf{\underline{\underline{n}}}_1$ et de $\mathbf{\underline{\underline{d}}}^c \cdot \mathbf{\underline{\underline{n}}}_2$. Seule la variation seconde de $d_t^c = \mathbf{\underline{\underline{d}}}^c \cdot \mathbf{\underline{\underline{t}}}$ est non nulle. Elle s'écrit :

$$\partial_0^2 d_t^c [\delta\mathbf{\underline{\underline{\xi}}}, \delta'\mathbf{\underline{\underline{\xi}}}] = {}^t[\delta'\mathbf{\underline{\underline{\xi}}}^c] \cdot [\mathbf{\underline{\underline{Q}}}^c] \cdot [\delta\mathbf{\underline{\underline{\xi}}}^c]$$

où la matrice de tenseurs de non linéarité géométrique est donnée par :

$$[\mathbf{\underline{\underline{Q}}}^c] = \begin{bmatrix} \mathbf{\underline{\underline{Q}}}^c_{\mathbf{\underline{\underline{1}}}} & \mathbf{\underline{\underline{Q}}}^c_{\mathbf{\underline{\underline{2}}}} & \mathbf{\underline{\underline{Q}}}^c_{\mathbf{\underline{\underline{3}}}} \\ {}^t\mathbf{\underline{\underline{Q}}}^c_{\mathbf{\underline{\underline{1}}}} & {}^t\mathbf{\underline{\underline{Q}}}^c_{\mathbf{\underline{\underline{2}}}} & {}^t\mathbf{\underline{\underline{Q}}}^c_{\mathbf{\underline{\underline{3}}}} \\ {}^t\mathbf{\underline{\underline{Q}}}^c_{\mathbf{\underline{\underline{2}}}} & {}^t\mathbf{\underline{\underline{Q}}}^c_{\mathbf{\underline{\underline{4}}}} & {}^t\mathbf{\underline{\underline{Q}}}^c_{\mathbf{\underline{\underline{6}}}} \end{bmatrix} ,$$

avec

$$[\delta\xi^c] = \begin{bmatrix} \delta\mathbf{\underline{\underline{u}}}^{\alpha,i} - \delta\mathbf{\underline{\underline{u}}}^{\beta,j} \\ \delta\mathbf{\underline{\underline{u}}}^{\alpha,i} - \delta\mathbf{\underline{\underline{u}}}^{\beta,j} + \mathbf{\underline{\underline{l}}}^c \wedge \frac{\delta\mathbf{\underline{\underline{\phi}}}^{\alpha,i} + \delta\mathbf{\underline{\underline{\phi}}}^{\beta,j}}{2} \\ \delta\mathbf{\underline{\underline{\phi}}}^{\alpha,i} - \delta\mathbf{\underline{\underline{\phi}}}^{\beta,j} \end{bmatrix} .$$

Rappelons que $(\mathbf{\underline{\underline{t}}}, \mathbf{\underline{\underline{n}}}_1, \mathbf{\underline{\underline{n}}}_2)$ est la base locale associée au couple c avec $\mathbf{\underline{\underline{t}}} = \frac{\mathbf{\underline{\underline{l}}}^c}{\|\mathbf{\underline{\underline{l}}}^c\|}$.

Nous verrons par la suite que cette hypothèse est suffisante pour traiter le flambement d'un réseau de poutres comme le verra ultérieurement. Dans le cadre de l'hypothèse des petites pré-déformations, la variation seconde de l'énergie du couple c est donc de la forme :

$$\delta^2 H_c = \delta^2 H_c^{HPP} - \lambda \delta^2 H_c^{NL}$$

où $\delta^2 H_c^{NL} = -f_{0,t}^c {}^t[\delta'\mathbf{\underline{\underline{\xi}}}] \cdot [\mathbf{\underline{\underline{Q}}}^c] \cdot [\delta\mathbf{\underline{\underline{\xi}}}]$. Ici la force "normale" $f_{0,t}^c = \mathbf{\underline{\underline{f}}}_0^c \cdot \mathbf{\underline{\underline{t}}}$ correspond à la solution en hypothèse de petites perturbations au chargement unité

($\lambda = 1$). Pour simplifier l'exposé, nous supposons dans la suite qu'elle respecte la périodicité du réseau ce qui correspond à une sollicitation homogène à l'échelle macroscopique. Dans le cas général, on utilisera son développement asymptotique (3.15) qui permet de se ramener au cas périodique. Par ailleurs, toujours dans un soucis de simplification de l'exposé, nous limiterons l'étude au cas $\underline{B}^c = 0, \forall c$, qui permet d'obtenir la même non linéarité géométrique asymptotique pour les deux schémas (SH1) et (SH2). En effet, une fois l'étape d'adimensionnement effectuée, on se ramène au problème d'homogénéisation suivant par dérivation de la variation seconde du potentiel où $(\Delta \underline{u}_\varepsilon, \Delta \underline{\phi}_\varepsilon)$ désigne le mode de flambement :

Problème d'homogénéisation du flambement

- Un domaine régulier fixe Ω .
- Fixation du mode hors de Ω

$$\forall P_{\varepsilon}^{\alpha,i} \in \varepsilon \mathcal{S} / P_{\varepsilon}^{\alpha,i} \notin \Omega, \begin{cases} \Delta \underline{u}_{\varepsilon}^{\alpha,i} = 0 \\ \Delta \underline{\phi}_{\varepsilon}^{\alpha,i} = 0 \end{cases}$$

- Equations d'Euler :

$$\forall P_{\varepsilon}^{\alpha,i} \begin{cases} \sum_{c \in \mathcal{C}} \chi_{\alpha,i}(c) \left(\Delta \underline{f}_{\varepsilon}^{HPP,c} - \lambda \Delta \underline{f}_{\varepsilon}^{NL,c} - \lambda \Delta \underline{g}_{\varepsilon}^{NL,c} \right) = 0 \\ \sum_{c \in \mathcal{C}} \chi_{\alpha,i}(c) \left(\Delta \underline{\hat{m}}_{\varepsilon}^{HPP,c} - \lambda \Delta \underline{\hat{m}}_{\varepsilon}^{NL,c} \right. \\ \left. + \frac{l_{\varepsilon}^c}{2} \wedge \left(\Delta \underline{f}_{\varepsilon}^{HPP,c} - \lambda \Delta \underline{f}_{\varepsilon}^{NL,c} \right) \right) = 0 \end{cases}$$

- Cinématique

$$\begin{aligned} \Delta \underline{h}_{\varepsilon}^c &= \Delta \underline{u}_{\varepsilon}^{\alpha,i} - \Delta \underline{u}_{\varepsilon}^{\beta,j} \\ \Delta \underline{d}_{\varepsilon}^c &= \Delta \underline{u}_{\varepsilon}^{\alpha,i} - \Delta \underline{u}_{\varepsilon}^{\beta,j} + \underline{l}_{\varepsilon}^c \wedge \frac{\Delta \underline{\phi}_{\varepsilon}^{\alpha,i} + \Delta \underline{\phi}_{\varepsilon}^{\beta,j}}{2} \\ \Delta \underline{\delta}_{\varepsilon}^c &= \Delta \underline{\phi}_{\varepsilon}^{\alpha,i} - \Delta \underline{\phi}_{\varepsilon}^{\beta,j} \\ \text{pour } c &= (P^{\alpha,i}, P^{\beta,j}), \underline{l}_{\varepsilon}^c = \underline{x}_{\varepsilon}^{\alpha,i} - \underline{x}_{\varepsilon}^{\beta,j} \end{aligned}$$

- “Comportement” :

$$\begin{aligned} \Delta \underline{f}_{\varepsilon}^{HPP,c} &= \underline{\underline{A}}_{\varepsilon}^c \cdot \Delta \underline{d}_{\varepsilon}^c \\ \Delta \underline{\hat{m}}_{\varepsilon}^{HPP,c} &= \underline{\underline{C}}_{\varepsilon}^c \cdot \Delta \underline{\delta}_{\varepsilon}^c \\ \Delta \underline{g}_{\varepsilon}^{NL,c} &= -f_{0,t}^{c*} \left(\underline{\underline{Q}}_{\underline{\underline{1}},\varepsilon} \cdot \Delta \underline{h}_{\varepsilon}^c + \underline{\underline{Q}}_{\underline{\underline{2}},\varepsilon} \cdot \Delta \underline{d}_{\varepsilon}^c + \underline{\underline{Q}}_{\underline{\underline{3}},\varepsilon} \cdot \Delta \underline{\delta}_{\varepsilon}^c \right) \\ \Delta \underline{\hat{m}}_{\varepsilon}^{NL,c} &= -f_{0,t}^{c*} \left({}^t \underline{\underline{Q}}_{\underline{\underline{3}},\varepsilon} \cdot \Delta \underline{h}_{\varepsilon}^c + {}^t \underline{\underline{Q}}_{\underline{\underline{4}},\varepsilon} \cdot \Delta \underline{d}_{\varepsilon}^c + \underline{\underline{Q}}_{\underline{\underline{6}},\varepsilon} \cdot \Delta \underline{\delta}_{\varepsilon}^c \right) \\ \Delta \underline{f}_{\varepsilon}^{NL,c} &= -f_{0,t}^{c*} \left({}^t \underline{\underline{Q}}_{\underline{\underline{2}},\varepsilon} \cdot \Delta \underline{h}_{\varepsilon}^c + \underline{\underline{Q}}_{\underline{\underline{5}},\varepsilon} \cdot \Delta \underline{d}_{\varepsilon}^c + \underline{\underline{Q}}_{\underline{\underline{4}},\varepsilon} \cdot \Delta \underline{\delta}_{\varepsilon}^c \right) \end{aligned}$$

1. Schéma 1 (SH1)

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}}_\varepsilon^c = \varepsilon^{d-2} \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{*c}, \quad \underline{\underline{\mathbf{B}}}_\varepsilon^c = 0, \quad \underline{\underline{\mathbf{C}}}_\varepsilon^c = \varepsilon^d \underline{\underline{\mathbf{C}}}^{*(2)c}$$

2. Schéma 2 (SH2)

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}}_\varepsilon^c = \varepsilon^{d-2} \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{*c}, \quad \underline{\underline{\mathbf{B}}}_\varepsilon^c = 0, \quad \underline{\underline{\mathbf{C}}}_\varepsilon^c = \varepsilon^{d-2} \underline{\underline{\mathbf{C}}}^{*(2)c}$$

3. Tenseurs de non linéarité géométrique

$$[Q_\varepsilon^c] = \begin{bmatrix} \varepsilon^{d-2} \underline{\underline{\mathbf{Q}}}_1^{*c} & \varepsilon^{d-2} \underline{\underline{\mathbf{Q}}}_2^{*c} & \varepsilon^{d-1} \underline{\underline{\mathbf{Q}}}_3^{*c} \\ \varepsilon^{d-2} \underline{\underline{\mathbf{Q}}}_2^{*c} & \varepsilon^{d-2} \underline{\underline{\mathbf{Q}}}_5^{*c} & \varepsilon^{d-1} \underline{\underline{\mathbf{Q}}}_4^{*c} \\ \varepsilon^{d-1} \underline{\underline{\mathbf{Q}}}_3^{*c} & \varepsilon^{d-1} \underline{\underline{\mathbf{Q}}}_4^{*c} & \varepsilon^d \underline{\underline{\mathbf{Q}}}_6^{*c} \end{bmatrix}$$

C'est à ce stade que nous introduisons les développements de Taylor sur le mode de flambement $(\Delta \underline{\mathbf{u}}_\varepsilon, \Delta \underline{\boldsymbol{\phi}}_\varepsilon)$ et la charge critique λ_ε^c dans les équations d'Euler puis leurs développements asymptotiques à des ordres cohérents comme cela a été effectué dans [Triantafyllidis et Bardenhagen, 1996] pour le cas des milieux continus de Cauchy.

On introduit ainsi pour les champs en translation $(\Delta \underline{\mathbf{U}}^i)_{i \in [1;n]}$ du mode de flambement :

$$\begin{aligned} \Delta \underline{\mathbf{u}}_\varepsilon^{\alpha,i} &= \Delta \underline{\mathbf{U}}_0^i(\underline{\mathbf{x}}^{\alpha,i}) + \varepsilon \Delta \underline{\mathbf{U}}_1^i(\underline{\mathbf{x}}^{\alpha,i}) + \varepsilon^2 \Delta \underline{\mathbf{U}}_1^i(\underline{\mathbf{x}}^{\alpha,i}) + \dots \\ &= \Delta \underline{\mathbf{U}}_0^i(\underline{\mathbf{x}}^{\beta,j}) + \varepsilon (\Delta \underline{\mathbf{U}}_1^i(\underline{\mathbf{x}}^{\beta,j}) + \Delta \underline{\mathbf{U}}_0^i \otimes \underline{\nabla}(\underline{\mathbf{x}}^{\beta,j}) \cdot \underline{\mathbf{l}}^c) \\ &\quad + \dots + \varepsilon^k \sum_{p=0}^k \frac{1}{(k-p)!} \Delta \underline{\mathbf{U}}_p^i \otimes \underline{\nabla}(\underline{\mathbf{x}}^{\beta,j})^{k-p} \underline{\mathbf{l}}^c \otimes \dots + \dots \end{aligned}$$

On fait de même pour les champs de rotation du mode de flambement $(\Delta \underline{\boldsymbol{\Phi}}^i)_{i \in [1;n]}$. Pour la charge critique λ_ε^c , on pose le développement asymptotique :

$$\lambda_\varepsilon^c = \lambda_0^c + \varepsilon \lambda_1^c + \varepsilon^2 \lambda_2^c + \dots$$

Il est évident que la partie des équations d'Euler liée à l'énergie notée $\mathcal{E}_{HPP}$ est totalement identique à celle étudiée au chapitre 3. On introduit donc les

opérateurs et les systèmes d'équations en cascade de ce chapitre auxquels vont s'ajouter les systèmes issus de l'énergie $\mathcal{E}_{NL}$.

Pour simplifier l'écriture des opérateurs, on introduit les tenseurs :

$$\begin{aligned}\underline{\underline{\mathbf{A}}}_{NL}^{*c} &= -f_{0,t}^{*c} \left(\underline{\underline{\mathbf{Q}}}_5^{*c} + \underline{\underline{\mathbf{Q}}}_2^{*c} \right), \\ \underline{\underline{\mathbf{B}}}_{NL}^{*c} &= -f_{0,t}^{*c} \left(\underline{\underline{\mathbf{Q}}}_3^{*c} + \underline{\underline{\mathbf{Q}}}_4^{*c} \right), \\ \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{NL}^{*c} &= -f_{0,t}^{*c} \left(\underline{\underline{\mathbf{Q}}}_1^{*c} + {}^t\underline{\underline{\mathbf{Q}}}_2^{*c} \right), \\ \underline{\underline{\tilde{\mathbf{B}}}}_{NL}^{*c} &= -f_{0,t}^{*c} \left({}^t\underline{\underline{\mathbf{Q}}}_4^{*c} + \frac{1}{2}\underline{\underline{\mathbf{e}}} : \underline{\underline{\mathbf{l}}}^c \otimes \underline{\underline{\mathbf{Q}}}_5^{*c} \right) \\ \underline{\underline{\tilde{\mathbf{C}}}}_{NL}^{*c} &= -f_{0,t}^{*c} \left(\underline{\underline{\mathbf{Q}}}_6^{*c} + \frac{1}{2}\underline{\underline{\mathbf{e}}} : \underline{\underline{\mathbf{l}}}^c \otimes \underline{\underline{\mathbf{Q}}}_4^{*c} \right) \\ \underline{\underline{\tilde{\mathbf{K}}}}_{NL}^{*c} &= -f_{0,t}^{*c} \left({}^t\underline{\underline{\mathbf{Q}}}_3^{*c} + \frac{1}{2}\underline{\underline{\mathbf{e}}} : \underline{\underline{\mathbf{l}}}^c \otimes {}^t\underline{\underline{\mathbf{Q}}}_2^{*c} \right).\end{aligned}$$

On introduit alors les opérateurs L_d^{NL} et $(S_d^{NLr})_{r \in \mathbb{N}}$ comme :

$$\forall i \in [1, n], L_d^{NL}[i] \begin{pmatrix} \{\Delta \underline{\mathbf{U}}\} \\ \{\Delta \underline{\mathbf{\Phi}}\} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} L_{d1}^{NL}[i] \\ L_{d2}^{NL}[i] \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \{\Delta \underline{\mathbf{U}}\} \\ \{\Delta \underline{\mathbf{\Phi}}\} \end{pmatrix}$$

avec

$$\begin{aligned}L_{d1}^{NL}[i] \begin{pmatrix} \{\Delta \underline{\mathbf{U}}\} \\ \{\Delta \underline{\mathbf{\Phi}}\} \end{pmatrix} &= \\ \sum_{c \in G^s/c=i} \left\{ \underline{\underline{\mathbf{A}}}_{NL}^{*c} \cdot \left(\Delta \underline{\mathbf{U}}^{[c]} - \Delta \underline{\mathbf{U}}^{[c]} + \frac{\underline{\underline{\mathbf{l}}}^c}{2} \wedge \left(\Delta \underline{\mathbf{\Phi}}^{[c]} + \Delta \underline{\mathbf{\Phi}}^{[c]} \right) \right) \right. \\ \left. \underline{\underline{\mathbf{B}}}_{NL}^{*c} \cdot \left(\Delta \underline{\mathbf{\Phi}}^{[c]} - \Delta \underline{\mathbf{\Phi}}^{[c]} \right) + \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{NL}^{*c} \cdot \left(\Delta \underline{\mathbf{U}}^{[c]} - \Delta \underline{\mathbf{U}}^{[c]} \right) \right\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}L_{d2}^{NL}[i] \begin{pmatrix} \{\Delta \underline{\mathbf{U}}\} \\ \{\Delta \underline{\mathbf{\Phi}}\} \end{pmatrix} &= \\ \sum_{c \in G^s/c=i} \left\{ \underline{\underline{\tilde{\mathbf{B}}}}_{NL}^{*c} \cdot \left(\Delta \underline{\mathbf{U}}^{[c]} - \Delta \underline{\mathbf{U}}^{[c]} + \frac{\underline{\underline{\mathbf{l}}}^c}{2} \wedge \left(\Delta \underline{\mathbf{\Phi}}^{[c]} + \Delta \underline{\mathbf{\Phi}}^{[c]} \right) \right) \right. \\ \left. \underline{\underline{\tilde{\mathbf{C}}}}_{NL}^{*c} \cdot \left(\Delta \underline{\mathbf{\Phi}}^{[c]} - \Delta \underline{\mathbf{\Phi}}^{[c]} \right) + \underline{\underline{\tilde{\mathbf{K}}}}_{NL}^{*c} \cdot \left(\Delta \underline{\mathbf{U}}^{[c]} - \Delta \underline{\mathbf{U}}^{[c]} \right) \right\}\end{aligned}$$

et

$$\forall i \in [1, n], r \in \mathbb{N}^*, S_d^{NLr}[i] \begin{pmatrix} \{\Delta \underline{\mathbf{U}}\} \\ \{\Delta \underline{\mathbf{\Phi}}\} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} S_{d1}^{NLr}[i] \\ S_{d2}^{NLr}[i] \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \{\Delta \underline{\mathbf{U}}\} \\ \{\Delta \underline{\mathbf{\Phi}}\} \end{pmatrix}$$

avec

$$S_{d1}^{NL1}[i] \left(\begin{array}{c} \{\Delta \underline{U}\} \\ \{\Delta \underline{\Phi}\} \end{array} \right) = \sum_{c \in G^s/c=i} \left\{ \underline{A}_{NL}^{*c} \cdot \left[\Delta \underline{U}^{[c]} \otimes \underline{\nabla} \cdot \underline{l}^c + \frac{\underline{l}^c}{2} \wedge \left(\Delta \underline{\Phi}^{[c]} \otimes \underline{\nabla} \cdot \underline{l}^c \right) \right] \right. \\ \left. + \underline{K}_{NL}^{*c} \cdot \left[\Delta \underline{U}^{[c]} \otimes \underline{\nabla} \cdot \underline{l}^c \right] \right\}$$

et

$$S_{d2}^{NL1}[i] \left(\begin{array}{c} \{\Delta \underline{U}\} \\ \{\Delta \underline{\Phi}\} \end{array} \right) = \sum_{c \in G^s/c=i} \left\{ \underline{\tilde{B}}_{NL}^{*c} \cdot \left[\Delta \underline{U}^{[c]} \otimes \underline{\nabla} \cdot \underline{l}^c \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\underline{l}^c}{2} \wedge \left(\Delta \underline{\Phi}^{[c]} \otimes \underline{\nabla} \cdot \underline{l}^c \right) \right] \right. \\ \left. + \underline{\tilde{K}}_{NL}^{*c} \cdot \left[\Delta \underline{U}^{[c]} \otimes \underline{\nabla} \cdot \underline{l}^c \right] \right\}$$

puis,

$$S_{d1}^{NL2}[i] \left(\begin{array}{c} \{\Delta \underline{U}\} \\ \{\Delta \underline{\Phi}\} \end{array} \right) = \sum_{c \in G^s/c=i} \left\{ \underline{A}_{NL}^{*c} \cdot \left[\frac{1}{2} \Delta \underline{U}^{[c]} \otimes^2 \underline{\nabla} : \underline{l}^c \otimes \underline{l}^c \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\underline{l}^c}{2} \wedge \left(\frac{1}{2} \Delta \underline{\Phi}^{[c]} \otimes^2 \underline{\nabla} : \underline{l}^c \otimes \underline{l}^c \right) \right] \right. \\ \left. + \underline{B}_{NL}^{*c} \cdot \left[\Delta \underline{\Phi}^{[c]} \otimes \underline{\nabla} \cdot \underline{l}^c \right] \right. \\ \left. + \underline{K}_{NL}^{*c} \cdot \left[\frac{1}{2} \Delta \underline{U}^{[c]} \otimes^2 \underline{\nabla} : \underline{l}^c \otimes \underline{l}^c \right] \right\}$$

et

$$S_{d2}^{NL2}[i] \left(\begin{array}{c} \{\Delta \underline{U}\} \\ \{\Delta \underline{\Phi}\} \end{array} \right) = \sum_{c \in G^s/c=i} \left\{ \underline{\tilde{B}}_{NL}^{*c} \cdot \left[\frac{1}{2} \Delta \underline{U}^{[c]} \otimes^2 \underline{\nabla} : \underline{l}^c \otimes \underline{l}^c \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\underline{l}^c}{2} \wedge \left(\frac{1}{2} \Delta \underline{\Phi}^{[c]} \otimes^2 \underline{\nabla} : \underline{l}^c \otimes \underline{l}^c \right) \right] \right. \\ \left. + \underline{\tilde{C}}_{NL}^{*c} \cdot \left[\Delta \underline{\Phi}^{[c]} \otimes \underline{\nabla} \cdot \underline{l}^c \right] \right. \\ \left. + \underline{\tilde{K}}_{NL}^{*c} \cdot \left[\frac{1}{2} \Delta \underline{U}^{[c]} \otimes^2 \underline{\nabla} : \underline{l}^c \otimes \underline{l}^c \right] \right\}$$

et de manière générale,

$$S_{d1}^{NLr}[i] \left(\begin{array}{c} \{\Delta \underline{U}\} \\ \{\Delta \underline{\Phi}\} \end{array} \right) = \sum_{c \in G^s / c] = i} \left\{ \begin{array}{l} \underline{A}_{NL}^{*c} \cdot \left[\frac{1}{r!} \Delta \underline{U}^{[c} \otimes \underline{\nabla}^{\cdot r} \underline{l}^c \otimes^{r-1} \right. \\ \left. + \frac{\underline{l}^c}{2} \wedge \left(\frac{1}{r!} \Delta \underline{\Phi}^{[c} \otimes \underline{\nabla}^{\cdot r} \underline{l}^c \otimes^{r-1} \right) \right] \\ + \underline{B}_{NL}^{*c} \cdot \left[\Delta \underline{\Phi}^{[c} \otimes^{r-1} \underline{\nabla}^{\cdot r-1} \underline{l}^c \otimes^{r-2} \right] \\ + \underline{K}_{NL}^{*c} \cdot \left[\frac{1}{r!} \Delta \underline{U}^{[c} \otimes \underline{\nabla}^{\cdot r} \underline{l}^c \otimes^{r-1} \right] \end{array} \right\}$$

et

$$S_{d2}^{NLr}[i] \left(\begin{array}{c} \{\Delta \underline{U}\} \\ \{\Delta \underline{\Phi}\} \end{array} \right) = \sum_{c \in G^s / c] = i} \left\{ \begin{array}{l} \tilde{\underline{B}}_{NL}^{*c} \cdot \left[\frac{1}{r!} \Delta \underline{U}^{[c} \otimes \underline{\nabla}^{\cdot r} \underline{l}^c \otimes^{r-1} \right. \\ \left. + \frac{\underline{l}^c}{2} \wedge \left(\frac{1}{r!} \Delta \underline{\Phi}^{[c} \otimes \underline{\nabla}^{\cdot r} \underline{l}^c \otimes^{r-1} \right) \right] \\ + \tilde{\underline{C}}_{NL}^{*c} \cdot \left[\Delta \underline{\Phi}^{[c} \otimes^{r-1} \underline{\nabla}^{\cdot r-1} \underline{l}^c \otimes^{r-2} \right] \\ + \tilde{\underline{K}}_{NL}^{*c} \cdot \left[\frac{1}{r!} \Delta \underline{U}^{[c} \otimes \underline{\nabla}^{\cdot r} \underline{l}^c \otimes^{r-1} \right] \end{array} \right\}$$

Les systèmes en cascade à résoudre pour le schéma (SH1) sont pour les quatre

premiers ordres :

$$\begin{aligned}
& \forall i \in [1, n], \\
& (L_d - \lambda_0 L_d^{NL}) [i] \begin{pmatrix} \{\Delta \underline{U}_0\} \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \\
& (L_d - \lambda_0 L_d^{NL}) [i] \begin{pmatrix} \{\Delta \underline{U}_1\} \\ \{\Delta \underline{\Phi}_0\} \end{pmatrix} = - (S_d^1 - \lambda_1 L_d^{NL} - \lambda_0 S_d^{NL1}) [i] \begin{pmatrix} \{\Delta \underline{U}_0\} \\ 0 \end{pmatrix} \\
& (L_d - \lambda_0 L_d^{NL}) [i] \begin{pmatrix} \{\Delta \underline{U}_2\} \\ \{\Delta \underline{\Phi}_1\} \end{pmatrix} \\
& = - (S_d^1 - \lambda_1 L_d^{NL} - \lambda_0 S_d^{NL1}) [i] \begin{pmatrix} \{\Delta \underline{U}_1\} \\ \{\Delta \underline{\Phi}_0\} \end{pmatrix} \\
& - (S_d^2 - \lambda_2 L_d^{NL} - \lambda_1 S_d^{NL1} - \lambda_0 S_d^{NL2}) [i] \begin{pmatrix} \{\Delta \underline{U}_0\} \\ 0 \end{pmatrix} \\
& (L_d - \lambda_0 L_d^{NL}) [i] \begin{pmatrix} \{\Delta \underline{U}_3\} \\ \{\Delta \underline{\Phi}_2\} \end{pmatrix} \\
& = - (S_d^1 - \lambda_1 L_d^{NL} - \lambda_0 S_d^{NL1}) [i] \begin{pmatrix} \{\Delta \underline{U}_2\} \\ \{\Delta \underline{\Phi}_1\} \end{pmatrix} \\
& - (S_d^2 - \lambda_2 L_d^{NL} - \lambda_1 S_d^{NL1} - \lambda_0 S_d^{NL2}) [i] \begin{pmatrix} \{\Delta \underline{U}_1\} \\ \{\Delta \underline{\Phi}_0\} \end{pmatrix} \\
& - (S_d^3 - \lambda_3 L_d^{NL} - \lambda_2 S_d^{NL1} - \lambda_1 S_d^{NL2} - \lambda_0 S_d^{NL3}) [i] \begin{pmatrix} \{\Delta \underline{U}_0\} \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{4.8}$$

puis, en général, pour l'ordre $r \geq 2$:

$$\begin{aligned}
& (L_d - \lambda_0 L_d^{NL}) [i] \begin{pmatrix} \{\Delta \underline{U}_{r+1}\} \\ \{\Delta \underline{\Phi}_r\} \end{pmatrix} \\
& = - \sum_{k=1}^r \left(S_d^k - \lambda_k L_d^{NL} + \sum_{j=0}^{k-1} \lambda_j S_d^{NLk-j} \right) [i] \begin{pmatrix} \{\Delta \underline{U}_{r-k}\} \\ \{\Delta \underline{\Phi}_{r-k-1}\} \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{4.9}$$

avec par convention $\{\underline{\Phi}_{-1}\} = 0$.

Tout comme dans le chapitre 3 dans la section 3.8, il faut maintenant étudier l'opérateur $L_d - \lambda_0 L_d^{NL}$ paramétré par λ_0 , pour déterminer sur quel sous-espace il est inversible. Il est à noter que l'étude du flambement commence avec une charge nulle, $\lambda = 0$, pour laquelle on retrouve l'opérateur de la section 3.8 du chapitre 3 de l'hypothèse des petites perturbations. Dans ce cas, le noyau est l'espace de dimension trois (pour le cas tridimensionnel) des translations constantes et des rotations nulles. Cette espace est engendré par trois vecteurs de base notés (T_1) , (T_2) , (T_3) , dans la représentation par des colonnes à $6n$ composantes des champs $\begin{pmatrix} \{\Delta \underline{U}\} \\ \{\Delta \underline{\Phi}\} \end{pmatrix}$. Ainsi, le mode étant encastré sur la frontière du domaine, et les chargements volumiques étant

nuls, on obtient forcément la solution nulle. Puis, on augmente continuellement la charge λ jusqu'à obtenir un noyau plus grand. On fait l'hypothèse, que le noyau a augmenté d'une seule dimension lorsque l'on atteint la charge critique λ^c [Nguyen, 1995]. Afin de déterminer ce niveau de chargement, on doit résoudre la cascade de systèmes (4.8) et (4.9).

Il est à noter que les colonnes (T_1) , (T_2) , (T_3) , sont aussi dans le noyau de L_d^{NL} . La valeur critique λ_0^c est atteinte lorsque le noyau de l'opérateur $L_d - \lambda_0 L_d^{NL}$ augmente d'une dimension. On note (N) un vecteur de base tel que (T_1) , (T_2) , (T_3) , (N) engendrent le noyau. Par ailleurs, la première équation (4.8) stipule que $\begin{pmatrix} \{\Delta \underline{U}_0\} \\ 0 \end{pmatrix}$ appartient au noyau. Sachant que (T_1) , (T_2) , (T_3) ont des composantes nulles en rotation, et se plaçant dans le cas général où (N) a des composantes non nulles en rotation, on déduit que les $\Delta \underline{U}_0^i$ sont tous identiques : on écrit $\Delta \underline{U}_0^i = \Delta \underline{U}_0$.

Il convient de remarquer que l'espace des translations constantes est dans le noyau de l'opérateur $L_d - \lambda_0 L_d^{NL}$ pour toute valeur de λ_0 . Aussi dans la cascade de systèmes (4.8) et (4.9), le terme source impliquant le terme asymptotique de plus haut degré du paramètre de charge étant toujours exercé sur $\begin{pmatrix} \{\Delta \underline{U}_0\} \\ 0 \end{pmatrix}$ ($\Delta \underline{U}_0$ indépendant du type de particule), ce terme s'annule systématiquement. La cascade de systèmes simplifiée s'écrit ainsi :

$$\begin{aligned}
& \forall i \in [1, n], \\
& (L_d - \lambda_0 L_d^{NL}) [i] \begin{pmatrix} \{\Delta \underline{U}_1\} \\ \{\Delta \underline{\Phi}_0\} \end{pmatrix} = - (S_d^1 - \lambda_0 S_d^{NL1}) [i] \begin{pmatrix} \{\Delta \underline{U}_0\} \\ 0 \end{pmatrix} \\
& (L_d - \lambda_0 L_d^{NL}) [i] \begin{pmatrix} \{\Delta \underline{U}_2\} \\ \{\Delta \underline{\Phi}_1\} \end{pmatrix} \\
& = - (S_d^1 - \lambda_1 L_d^{NL} - \lambda_0 S_d^{NL1}) [i] \begin{pmatrix} \{\Delta \underline{U}_1\} \\ \{\Delta \underline{\Phi}_0\} \end{pmatrix} \\
& - (S_d^2 - \lambda_1 S_d^{NL1} - \lambda_0 S_d^{NL2}) [i] \begin{pmatrix} \{\Delta \underline{U}_0\} \\ 0 \end{pmatrix} \\
& (L_d - \lambda_0 L_d^{NL}) [i] \begin{pmatrix} \{\Delta \underline{U}_3\} \\ \{\Delta \underline{\Phi}_2\} \end{pmatrix} \\
& = - (S_d^1 - \lambda_1 L_d^{NL} - \lambda_0 S_d^{NL1}) [i] \begin{pmatrix} \{\Delta \underline{U}_2\} \\ \{\Delta \underline{\Phi}_1\} \end{pmatrix} \\
& - (S_d^2 - \lambda_2 L_d^{NL} - \lambda_1 S_d^{NL1} - \lambda_0 S_d^{NL2}) [i] \begin{pmatrix} \{\Delta \underline{U}_1\} \\ \{\Delta \underline{\Phi}_0\} \end{pmatrix} \\
& - (S_d^3 - \lambda_2 S_d^{NL1} - \lambda_1 S_d^{NL2} - \lambda_0 S_d^{NL3}) [i] \begin{pmatrix} \{\Delta \underline{U}_0\} \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{4.10}$$

puis, en général, pour l'ordre $r \geq 2$:

$$\begin{aligned} & (L_d - \lambda_0 L_d^{NL}) [i] \left(\begin{array}{c} \{\Delta \underline{\mathbf{U}}_{r+1}\} \\ \{\Delta \underline{\Phi}_r\} \end{array} \right) = \\ & - \sum_{k=1}^{r-1} \left(S_d^k - \lambda_k L_d^{NL} + \sum_{j=0}^{k-1} \lambda_j S_d^{NL k-j} \right) [i] \left(\begin{array}{c} \{\Delta \underline{\mathbf{U}}_{r-k}\} \\ \{\Delta \underline{\Phi}_{r-k-1}\} \end{array} \right) \\ & - \left(S_d^r - \sum_{j=0}^{r-1} \lambda_j S_d^{NL r-j} \right) [i] \left(\begin{array}{c} \{\Delta \underline{\mathbf{U}}_0\} \\ 0 \end{array} \right) \end{aligned} \quad (4.11)$$

L'opérateur, $L_d - \lambda_0 L_d^{NL}$, étant symétrique, les conditions de compatibilité s'écrivent :

$$\begin{aligned} & {}^t(N) \cdot (S_d^1 - \lambda_0 S_d^{NL1}) \left(\begin{array}{c} \{\Delta \underline{\mathbf{U}}_0\} \\ 0 \end{array} \right) = 0, \\ & {}^t(T_\alpha) \cdot (S_d^1 - \lambda_0 S_d^{NL1}) \left(\begin{array}{c} \{\Delta \underline{\mathbf{U}}_0\} \\ 0 \end{array} \right) = 0, \alpha = 1; 2; 3. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Tout comme dans le cas de l'élasticité linéaire en petites perturbations, il est facile de voir que les trois dernières équations sont en réalité automatiquement vérifiées pour toute valeur de λ_0 . En revanche, la première équation (orthogonalité par rapport à (N)) combinée aux conditions limites d'encastrement sur $\Delta \underline{\mathbf{U}}_0$, détermine une équation linéaire scalaire aux dérivées partielles portant sur les composantes du gradient de $\Delta \underline{\mathbf{U}}_0(\underline{\mathbf{x}})$.

Grâce à l'introduction d'un opérateur de localisation, $\mathcal{L}_1$ (de tenseur $[\mathcal{L}_1]_{ijk}$, $i \in [1; 6n]$ et $(j, k) \in [1; 3]^2$ pour le gradient de $\Delta \underline{\mathbf{U}}_0(\underline{\mathbf{x}})$), l'exploitation de la première équation de (4.10) permet de déterminer $\left(\begin{array}{c} \{\Delta \underline{\mathbf{U}}_1\} \\ \{\Delta \underline{\Phi}_0\} \end{array} \right)$, à une translation près, en fonction de $\Delta \underline{\mathbf{U}}_0$ et d'un champ scalaire, w_1 (composante suivant (N)) :

$$\left(\begin{array}{c} \{\Delta \underline{\mathbf{U}}_1\} \\ \{\Delta \underline{\Phi}_0\} \end{array} \right) = \underline{\underline{\underline{\mathcal{L}}_1}}} : \Delta \underline{\mathbf{U}}_0 \otimes \underline{\mathbf{\nabla}} + a_1(T_1) + b_1(T_2) + c_1(T_3) + w_1(N).$$

Comme dans le cas de l'hypothèse des petites perturbations, on peut aisément vérifier que la translation indéterminée (les coefficients a_1, b_1, c_1) n'intervient pas dans l'écriture des trois conditions de compatibilité exprimant l'orthogonalité de $(T_1), (T_2), (T_3)$ avec le second membre de la deuxième équation de (4.10), c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} & (S_d^1 - \lambda_1 L_d^{NL} - \lambda_0 S_d^{NL1}) [i] \left(\begin{array}{c} \{\Delta \underline{\mathbf{U}}_1\} \\ \{\Delta \underline{\Phi}_0\} \end{array} \right) \\ & - (S_d^2 - \lambda_1 S_d^{NL1} - \lambda_0 S_d^{NL2}) [i] \left(\begin{array}{c} \{\Delta \underline{\mathbf{U}}_0\} \\ 0 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Ces trois équations jointes à celle d'orthogonalité avec (N) de (4.12) forment un système de quatre équations aux dérivées partielles des quatre champs scalaires $\Delta \underline{\mathbf{U}}_0(\underline{\mathbf{x}})$ et $w_1(\underline{\mathbf{x}})$ dont l'existence d'une solution non nulle avec les conditions d'encastrement détermine λ_1 . Ce système est donc :

$$\begin{aligned} {}^t(N) \cdot (S_d^1 - \lambda_0 S_d^{NL1}) \begin{pmatrix} \{\Delta \underline{\mathbf{U}}_0\} \\ 0 \end{pmatrix} &= 0, \\ {}^t(T_\alpha) \cdot \left[(S_d^1 - \lambda_1 L_d^{NL} - \lambda_0 S_d^{NL1}) \begin{pmatrix} [\underline{\underline{\mathcal{L}}}_1] : \Delta \underline{\mathbf{U}}_0 \otimes \underline{\nabla} + w_1(N) \\ 0 \end{pmatrix} \right. \\ \left. - (S_d^2 - \lambda_1 S_d^{NL1} - \lambda_0 S_d^{NL2}) \begin{pmatrix} \{\Delta \underline{\mathbf{U}}_0\} \\ 0 \end{pmatrix} \right] &= 0, \\ \alpha &= 1; 2; 3. \end{aligned}$$

La détermination des champs $a_1(\underline{\mathbf{x}})$, $b_1(\underline{\mathbf{x}})$, $c_1(\underline{\mathbf{x}})$ sera effectuée avec les relations de compatibilité de l'ordre suivant.

Le schéma de résolution est reproduit pour tous les ordres suivants, on obtient un système de quatre équations aux dérivées partielles impliquant les champs $\Delta \underline{\mathbf{U}}_r(\underline{\mathbf{x}})$ et $w_{r+1}(\underline{\mathbf{x}})$ formé par les trois équations de compatibilité en translation de l'ordre $r+1$ et de la relation de compatibilité suivant (N) de l'ordre r . L'existence d'une solution non nulle détermine λ_{r+1} .

Dans le cadre du second schéma d'homogénéisation (SH2), on peut dérouler de la même manière l'analyse du flambement.

4.4 Identification des tenseurs de non linéarité géométrique pour une poutre

Une poutre peut être vue comme un milieu de Cosserat unidirectionnel de par sa géométrie que l'on assimile à une droite représentant sa fibre neutre. Ainsi, en se plaçant dans le repère local de la poutre $(\underline{\mathbf{t}}, \underline{\mathbf{n}}_1, \underline{\mathbf{n}}_2)$ la cinématique d'un tel objet se réduit au champ

$$\underline{\mathbf{u}}(x) = u(x) \underline{\mathbf{t}} + v(x) \underline{\mathbf{n}}_1 + w(x) \underline{\mathbf{n}}_2$$

pour les translations et à

$$\underline{\phi}(x) = \theta(x) \underline{\mathbf{t}} + \psi(x) \underline{\mathbf{n}}_1 + \phi(x) \underline{\mathbf{n}}_2$$

pour les rotations. Les microstructures sur lesquelles sont accrochées les rotations sont les sections de la poutre. En imposant une liaison interne reliant la rotation à la rotation matière du type $\frac{1}{2} \underline{\underline{\mathbf{e}}} : (\underline{\mathbf{u}} \otimes \underline{\nabla} - \underline{\nabla} \otimes \underline{\mathbf{u}}) = \underline{\phi}$ dans le cadre des hypothèses de petites perturbations, nous obtenons une poutre de

type Euler-Bernoulli (cela correspond à l'hypothèse que les sections restent normales à la fibre moyenne au cours de la déformation). En revanche, si on laisse la rotation libre par rapport à la translation, on obtient une théorie naturelle des poutres (ou poutre de Reissner). Dans le cas de la poutre d'Euler-Bernoulli, la contrainte se résume à une force normale, N , et un effort tranchant, V , (lequel ne travaille pas car la liaison cinématique qui donne l'absence de rotation relative), quant au second tenseur de micro-contrainte il est associé au moment, $\underline{\mathbf{M}}$.

L'énergie non linéaire de déformation de la poutre, dans le cadre des petites déformations, est :

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{P}} \left\{ E S \left(u' + \frac{1}{2} (v'^2 + w'^2) \right)^2 + E I_t \theta'^2 + E I_1 v''^2 + E I_2 w''^2 \right\} dx$$

où le ' désigne la dérivation par rapport à l'abscisse curviligne de la poutre avec E , le module d'Young du matériau constitutif de la poutre, S , la section, I_t , I_1 , I_2 les inerties suivant les directions définies par le repère propre de la poutre $(\underline{\mathbf{t}}, \underline{\mathbf{n}}_1, \underline{\mathbf{n}}_2)$. u , v , w sont les composantes dans le repère propre de la poutre du déplacement et θ représente l'angle de torsion. On se limite dans la suite à des champs cinématiques affines en u et θ , et polynomiaux d'ordre trois, en l'abscisse curviligne. L'énergie de la poutre est alors donnée en fonction de la cinématique de ses extrémités :

$$\begin{aligned} u(P^-) &= u^-, & u(P^+) &= u^+, \\ v(P^-) &= v^-, & v(P^+) &= v^+ & w(P^-) &= w^-, & w(P^+) &= w^+ \\ \theta(P^-) &= \theta^-, & \theta(P^+) &= \theta^+ \\ \psi(P^-) &= \psi^-, & \psi(P^+) &= \psi^+, & \phi(P^-) &= \phi^-, & \phi(P^+) &= \phi^+ \end{aligned}$$

On obtient en négligeant la contribution des termes v'^3 , w'^3 , v'^4 , w'^4 :

$$\begin{aligned}
2\mathcal{E} \approx & \frac{E S}{l} (u^+ - u^-)^2 + E I_t (\theta^+ - \theta^-)^2 \\
& + \frac{E I_1}{l} \left(12 \left[\frac{v^+ - v^-}{l} - \frac{\phi^+ + \phi^-}{2} \right]^2 + [\phi^+ - \phi^-]^2 \right) \\
& + \frac{E I_2}{l} \left(12 \left[\frac{w^+ - w^-}{l} + \frac{\psi^+ + \psi^-}{2} \right]^2 + [\psi^+ - \psi^-]^2 \right) \\
& + E S (u^+ - u^-) \left(\frac{1}{5} \left[\frac{v^+ - v^-}{l} - \frac{\phi^+ + \phi^-}{2} \right]^2 \right. \\
& + \left[\frac{v^+ - v^-}{l} \right]^2 + \frac{1}{12} [\phi^+ - \phi^-]^2 \\
& + \frac{1}{5} \left[\frac{w^+ - w^-}{l} + \frac{\psi^+ + \psi^-}{2} \right]^2 \\
& \left. + \left[\frac{w^+ - w^-}{l} \right]^2 + \frac{1}{12} [\psi^+ - \psi^-]^2 \right)
\end{aligned}$$

A l'aide des calculs de l'annexe D, le tenseur de non linéarité $\underline{\underline{Q}}$, dans ce cas, vaut :

$$\underline{\underline{Q}} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{Q}}_{\underline{\underline{1}}} & \underline{\underline{Q}}_{\underline{\underline{2}}} & \underline{\underline{Q}}_{\underline{\underline{3}}} \\ \underline{\underline{Q}}_{\underline{\underline{2}}} & \underline{\underline{Q}}_{\underline{\underline{5}}} & \underline{\underline{Q}}_{\underline{\underline{4}}} \\ \underline{\underline{Q}}_{\underline{\underline{3}}} & \underline{\underline{Q}}_{\underline{\underline{4}}} & \underline{\underline{Q}}_{\underline{\underline{6}}} \end{bmatrix},$$

avec

$$\begin{aligned}
\underline{\underline{Q}}_{\underline{\underline{1}}} &= \underline{\underline{Q}}_{\underline{\underline{5}}} = \frac{1}{5l^2} (\underline{\mathbf{n}}_1 \otimes \underline{\mathbf{n}}_1 + \underline{\mathbf{n}}_2 \otimes \underline{\mathbf{n}}_2) \\
\underline{\underline{Q}}_{\underline{\underline{2}}} &= \underline{\underline{Q}}_{\underline{\underline{3}}} = \underline{\underline{Q}}_{\underline{\underline{4}}} = 0 \\
\underline{\underline{Q}}_{\underline{\underline{6}}} &= \frac{1}{12} (\underline{\mathbf{n}}_1 \otimes \underline{\mathbf{n}}_1 + \underline{\mathbf{n}}_2 \otimes \underline{\mathbf{n}}_2)
\end{aligned}$$

4.5 Conclusion

Nous avons montré dans ce chapitre comment il était possible d'appliquer à l'analyse de l'initiation du flambement dans les réseaux périodiques la technique des développements asymptotiques. La détermination de la charge critique λ_0^c ne fait pas intervenir le problème de structure, c'est-à-dire qu'elle est indépendante des conditions aux limites appliquées. Il s'agit donc d'une propriété intrinsèque du matériau : pour toute direction de chargement macroscopique homogène, on peut déterminer l'intensité critique de flambement qui peut être infinie. On peut ainsi définir un domaine d'élasticité linéaire

dans l'espace des déformations. La détermination de l'effet d'échelle quant à elle, se fait par un calcul de structure en cascade qui consiste, à chaque étape, en la recherche d'une valeur propre d'un système de quatre équations aux dérivées partielles d'ordre deux de quatre champs scalaires. Concernant l'application aux réseau de poutres, nous nous sommes restreints à une interpolation de la cinématique qui est exacte dans le cas de l'hypothèse des petites perturbations. La méthode proposée permet d'obtenir une approximation à tout ordre de précision désiré en introduisant des nœuds "numériques" entre les deux extrémités des poutres.

Chapitre 5

Les applications

DANS ce chapitre, nous donnons des applications de la méthode développée dans le cas des milieux discrets tant en élasticité linéaire dans l'hypothèse des petites perturbations qu'en recherche de stabilité élastique : flambement. Pour exploiter plus pleinement les résultats d'homogénéisation obtenus, nous allons d'abord simplifier la recherche du comportement élastique homogénéisé par l'utilisation des symétries de la matière propres aux matériaux considérés. Dans la première partie de ce chapitre nous exploitons les symétries de la matière du matériau macroscopique pour en simplifier l'écriture. Le milieu de Cauchy étant un cas particulier des milieux de Cosserat, nous exhiberons la forme des tenseurs de comportement sur les milieux de Cosserat. Puis, nous montrons que les schémas d'homogénéisation proposés préservent les symétries de la matière des assemblages discrets microscopiques de particules orientées lors du passage au niveau macroscopique continu. Enfin, nous calculerons sur des matériaux discrets concrets (assemblage de nids d'abeille, de tétrakaidécaèdre) le comportement élastique homogénéisé suivant les deux schémas (SH1) et (SH2) avant d'étudier leur flambement élastique.

5.1 Exploitation des symétries de la matière pour un milieu de Cosserat

Nous allons exposer l'allure de différents comportements pour un milieu de Cosserat. Sans équations supplémentaires aux équations d'équilibre, les problèmes mécaniques, que nous pouvons poser sur des milieux de Cosserat, resteraient indéterminés. Afin de pouvoir les résoudre, nous introduisons la notion de comportement qui donne les ultimes relations nécessaires liant les déformations généralisées aux contraintes généralisées. Ce comportement est propre au matériau étudié et reste valable quelque soit le problème méca-

nique posé. Nous nous plaçons dans le cas de l'élasticité linéaire. Cette loi de comportement doit être invariante, dans une configuration donnée, par toute transformation appartenant au groupe des symétries de la matière, noté $\mathcal{K}$. Ainsi deux éléments de volumes du matériau en bijection par une symétrie de $\mathcal{K}$ donnent la même réponse à toute sollicitation mécanique extérieure. De même, si sur un élément de volume, on applique deux sollicitations en bijection par une symétrie de $\mathcal{K}$, on obtient deux effets distincts qui sont en bijection par la même symétrie de $\mathcal{K}$. En reprenant les notations $\underline{\underline{e}}, \underline{\underline{\kappa}}$ pour les déformations généralisées des milieux de Cosserat et $\underline{\underline{\sigma}}, \underline{\underline{\nu}}$ pour les contraintes associées, on obtient pour toute symétrie, $S \in \mathcal{K}$, de la matière :

$$\underline{\underline{\sigma}}(S(\underline{\underline{e}}), S(\underline{\underline{\kappa}})) = S(\underline{\underline{\sigma}}(\underline{\underline{e}}, \underline{\underline{\kappa}})).$$

Ainsi, si l'on note Ψ le potentiel thermodynamique permettant d'obtenir le comportement du matériau de Cosserat, il est invariant pour toute symétrie, $S \in \mathcal{K}$, de la matière, soit :

$$\Psi(\underline{\underline{e}}, \underline{\underline{\kappa}}) = \Psi(S(\underline{\underline{e}}), S(\underline{\underline{\kappa}})).$$

Quand on s'intéresse à des milieux décrits par des rotations, une attention particulière doit être apportée sur celle-ci. Ce ne sont pas de réels vecteurs, mais des pseudo-vecteurs. C'est à dire une représentation vectorielle d'une application linéaire anti-symétrique. Il est important de garder cela à l'esprit quand des symétries sont utilisées. En effet, la composition par des symétries sur des pseudo-tenseurs est un peu particulière et doit prendre en compte le changement d'orientation possible de l'espace, ainsi pour les tenseurs précédemment introduits, on a pour toute symétrie S :

$$\begin{aligned} S(\underline{\underline{e}}) &= \underline{\underline{S}} \cdot \underline{\underline{e}} \cdot {}^t\underline{\underline{S}}, & S(\underline{\underline{\kappa}}) &= \det(\underline{\underline{S}}) \underline{\underline{S}} \cdot \underline{\underline{\kappa}} \cdot {}^t\underline{\underline{S}} \\ S(\underline{\underline{\sigma}}) &= \underline{\underline{S}} \cdot \underline{\underline{\sigma}} \cdot {}^t\underline{\underline{S}}, & S(\underline{\underline{\nu}}) &= \det(\underline{\underline{S}}) \underline{\underline{S}} \cdot \underline{\underline{\nu}} \cdot {}^t\underline{\underline{S}}. \end{aligned}$$

L'exploitation des symétries de la matière pour les milieux de Cosserat a déjà fait l'objet de travaux [Ilcewicz *et Al.*, 1986], mais ils se sont limités aux symétries, S , directes de la matière (soit $\det S = +1$). Nous étendons ici ces résultats à l'ensemble des groupes de symétries de la matière (directes ou non). Les contraintes sont donc fonctions linéaire des déformations. Pour faciliter les calculs, les notations de Voigt sont généralisées, on introduit le vecteur des déformations généralisées :

$$\tilde{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2 \cdot \varepsilon_{32} \\ 2 \cdot \varepsilon_{31} \\ 2 \cdot \varepsilon_{12} \\ \omega_1 - \varphi_1 \\ \omega_2 - \varphi_2 \\ \omega_3 - \varphi_3 \\ \kappa_{11} \\ \kappa_{22} \\ \kappa_{33} \\ \kappa_{32} \\ \kappa_{23} \\ \kappa_{31} \\ \kappa_{13} \\ \kappa_{21} \\ \kappa_{12} \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

On pose pour la suite, le vecteur $\underline{r}$ comme la différence entre la rotation matière $\underline{\omega}$ et la microrotation $\underline{\varphi}$.
De la même manière, le vecteur, $\tilde{\sigma}$, des contraintes généralisées s'écrit :

$$\tilde{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{32}^s \\ \sigma_{31}^s \\ \sigma_{12}^s \\ \varsigma_1 \\ \varsigma_2 \\ \varsigma_3 \\ \nu_{11} \\ \nu_{22} \\ \nu_{33} \\ \nu_{32} \\ \nu_{23} \\ \nu_{31} \\ \nu_{13} \\ \nu_{21} \\ \nu_{12} \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

Avec ces notations, l'hypothèse du comportement élastique linéaire devient :

$$\tilde{\sigma} = \tilde{\tilde{C}} \cdot \tilde{\varepsilon}$$

où $\tilde{\tilde{C}}$ est la matrice de rigidité ou complaisance de notre matériau. On peut définir la relation inverse, soit l'expression des déformations généralisées en fonction des contraintes généralisées et alors :

$$\tilde{\varepsilon} = \tilde{\tilde{S}} \cdot \tilde{\sigma} \text{ où } \tilde{\tilde{S}} = \tilde{\tilde{C}}^{-1}$$

Cette nouvelle matrice, $\tilde{\tilde{S}}$, est appelée matrice de flexibilité ou matrice de souplesse de notre matériau. A priori ces comportements sont caractérisés par 324 coefficients. Mais la nécessité de la symétrie des matrices de comportement réduit à 171 le nombre de coefficients à déterminer. Les symétries de la structure composant le matériau permettent de diminuer encore les degrés de liberté des comportements. Cependant le comportement élastique linéaire d'un matériau n'ayant aucune symétrie matière est caractérisé dans un milieu de Cosserat par 171 coefficients. Un tel matériau est appelé matériau triclinique. L'exploitation des symétries matière s'effectue en changeant les repères géométriques de description du comportement. On prend le repère initial de description du comportement, on le compose par une des symétries matière, on obtient un nouveau repère. Dans ce dernier repère, la matrice de comportement doit s'écrire à l'identique de celle liée au repère initial. En effet, du à la symétrie matière, la matériau "est incapable de faire la différence d'orientation entre ces deux repères". L'exploitation de cette invariance se traduit formellement par :

$$\begin{aligned} \text{dans le repère initial} & \quad \tilde{\sigma} = \tilde{\tilde{C}} \cdot \tilde{\varepsilon} \\ \text{et dans l'autre repère symétrique} & \quad \tilde{\sigma}' = \tilde{\tilde{P}} \cdot \tilde{\sigma}, \tilde{\varepsilon}' = \tilde{\tilde{P}} \cdot \tilde{\varepsilon} \quad \tilde{\sigma}' = \tilde{\tilde{C}} \cdot \tilde{\varepsilon}' \\ \text{d'où} & \quad \tilde{\sigma} = \tilde{\tilde{P}}^{-1} \cdot \tilde{\tilde{C}} \cdot \tilde{\tilde{P}} \cdot \tilde{\varepsilon} \quad \text{et donc : } \tilde{\tilde{C}} = \tilde{\tilde{P}}^{-1} \cdot \tilde{\tilde{C}} \cdot \tilde{\tilde{P}} \end{aligned} \quad (5.3)$$

Le déterminant de la symétrie pour les pseudo-tenseurs est inclus dans la notation matricielle généralisée $\tilde{\tilde{P}}$ de la symétrie étudiée. Cela signifie qu'il y a donc invariance de la matrice par ce changement de base. Par la suite, pour l'étude de la forme des matrices associées de comportement, on utilise la convention suivante : on place un 0 quand il n'y a pas de terme associé au comportement et un 1 quand il est présent.

5.1.1 Matériau monoclinique

Lorsque le matériau possède un plan de symétrie, il est dit monoclinique. En supposant que ce plan est $(\underline{e}_2, \underline{e}_3)$, il nous reste plus qu'à exploiter la

relation 5.3.

Pour la partie symétrique du gradient de déplacement $\underline{\underline{\varepsilon}}$, on a l'expression matricielle de la symétrie :

$$\tilde{\tilde{S}}_\varepsilon = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ pour } \tilde{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2 \cdot \varepsilon_{32} \\ 2 \cdot \varepsilon_{31} \\ 2 \cdot \varepsilon_{12} \end{bmatrix}$$

pour la différence, $\underline{\underline{r}}$, entre la rotation de la microstructure et la rotation matière, on a :

$$\tilde{\tilde{S}}_r = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ pour } \tilde{r} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{23} \\ r_{13} \\ r_{21} \end{bmatrix}$$

pour le gradient d'orientation, $\underline{\underline{\kappa}} = \underline{\underline{\nabla\varphi}}$, on a :

$$\tilde{\tilde{S}}_\kappa = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ pour } \tilde{\kappa} = \begin{bmatrix} \kappa_{11} \\ \kappa_{22} \\ \kappa_{33} \\ \kappa_{32} \\ \kappa_{23} \\ \kappa_{31} \\ \kappa_{13} \\ \kappa_{21} \\ \kappa_{12} \end{bmatrix}$$

Avec les notations que nous avons introduites, nous construisons le vecteur symétrie de forme associé au vecteur de déformation généralisée (il suffit d'assembler en un vecteur les termes diagonaux des matrices de symétrie),

et nous obtenons :

$$S_{e_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

La matrice de forme, b_{e_1} , sera donc pour l'invariance par rapport à la symétrie plane normale à $\underline{e}_1$:

$$b_{e_1} = \frac{S_{e_1} \cdot^t S_{e_1} + [1]_{i,j}}{2}$$

On obtient ainsi :

$$b_{e_1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Le comportement monoclinique obtenu ne dépend plus que de 90 coefficients d'élasticité.

5.1.2 Matériau orthotrope

Le passage à un matériau ayant deux plans de symétrie perpendiculaires se fait en rajoutant un plan de symétrie perpendiculaire au matériau monoclinique. Il est à noter que l'existence de deux plans de symétrie perpendiculaires pour le matériau, implique l'existence d'un troisième plan de symétrie perpendiculaire aux deux premiers. Pour déterminer le comportement de ce nouveau matériau, on effectue les nouveaux changements de base associés aux nouveaux plans de symétrie pour la matrice de rigidité d'un matériau monoclinique. On suppose que l'un des nouveaux plans de symétrie est $(\underline{e}_1, \underline{e}_3)$, et on a de manière synthétique :

$$\tilde{S}_\varepsilon = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{pour } \tilde{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2 \cdot \varepsilon_{32} \\ 2 \cdot \varepsilon_{31} \\ 2 \cdot \varepsilon_{12} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\tilde{S}}_r = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ pour } \tilde{r} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{23} \\ r_{13} \\ r_{21} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\tilde{S}}_\varepsilon = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ pour } \tilde{\kappa} = \begin{bmatrix} \kappa_{11} \\ \kappa_{22} \\ \kappa_{33} \\ \kappa_{32} \\ \kappa_{23} \\ \kappa_{31} \\ \kappa_{13} \\ \kappa_{21} \\ \kappa_{12} \end{bmatrix}$$

ainsi,

$$S_{e_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

et

$$b_{e_2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Enfin pour la symétrie par rapport au dernier plan de symétrie $(\underline{e}_1, \underline{e}_2)$, l'exploitation s'exprime par :

$$\tilde{S}_\varepsilon = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ pour } \tilde{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2 \cdot \varepsilon_{32} \\ 2 \cdot \varepsilon_{31} \\ 2 \cdot \varepsilon_{12} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{S}_r = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ pour } \tilde{r} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{23} \\ r_{13} \\ r_{21} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\tilde{S}}_\varepsilon = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{pour } \tilde{\kappa} = \begin{bmatrix} \kappa_{11} \\ \kappa_{22} \\ \kappa_{33} \\ \kappa_{32} \\ \kappa_{23} \\ \kappa_{31} \\ \kappa_{13} \\ \kappa_{21} \\ \kappa_{12} \end{bmatrix}$$

ainsi,

$$S_{e_3} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

et

$$b_{e_3} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Le matériau possédant les trois symétries comme invariant matière, on déduit la forme générale de la matrice de souplesse par :

$$b_{i,j} = b_{e_1 i,j} b_{e_2 i,j} b_{e_3 i,j}$$

La forme est donc :

$$b = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Le comportement orthotrope obtenu ne dépend plus que de 30 coefficients d'élasticité.

5.1.3 Matériau à symétrie cubique

Ce type de matériau est orthotrope, mais il possède la propriété supplémentaire de n'avoir aucun axe principal privilégié. C'est à dire que, techniquement, la permutation d'indice dans les composantes généralisées ne doit pas changer les relations de comportement. Il faut toutefois faire attention et écrire tous nos pseudo vecteurs sous leur véritable forme tensorielle.

Pour aboutir à ce tenseur, on écrit donc les trois symétries matière liées à l'orthotropie du matériau, puis on permute les axes pour exprimer l'aspect cubique de la matière. Nous reprenons la matrice du comportement orthotrope.

Puis nous écrivons l'équivalence du rôle de chaque axe principale de la matière cubique pour $\underline{\omega}$, on a :

$$\omega_i = \frac{1}{2} e_{ijk} \omega_{jk}$$

pour $\underline{\kappa}$, on a :

$$\kappa_{ij} = \frac{1}{2} e_{iml} \varphi_{lm,j}$$

Ainsi écrivons la permutation entre les indices 2 et 3, le vecteur déformation généralisée de

$$\tilde{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2 \cdot \varepsilon_{32} \\ 2 \cdot \varepsilon_{31} \\ 2 \cdot \varepsilon_{12} \\ \omega_1 - \varphi_1 \\ \omega_2 - \varphi_2 \\ \omega_3 - \varphi_3 \\ \kappa_{11} \\ \kappa_{22} \\ \kappa_{33} \\ \kappa_{32} \\ \kappa_{23} \\ \kappa_{31} \\ \kappa_{13} \\ \kappa_{21} \\ \kappa_{12} \end{bmatrix}$$

devient :

$$\tilde{\varepsilon}' = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{22} \\ 2 \cdot \varepsilon_{32} \\ 2 \cdot \varepsilon_{21} \\ 2 \cdot \varepsilon_{31} \\ -\omega_1 + \varphi_1 \\ -\omega_3 + \varphi_3 \\ -\omega_2 + \varphi_2 \\ -\kappa_{11} \\ -\kappa_{33} \\ -\kappa_{22} \\ -\kappa_{23} \\ -\kappa_{32} \\ -\kappa_{21} \\ -\kappa_{12} \\ -\kappa_{31} \\ -\kappa_{13} \end{bmatrix}$$

La matrice de " permutation " associée à ce changement est :

$$Per = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

On compose le comportement déjà réduit par les conditions de symétrie et l'on doit trouver que :

$$\tilde{\tilde{C}} = Per^{-1} \cdot \tilde{\tilde{C}} \cdot Per$$

[illegible][illegible]

L'égalité nous donne les relations suivantes :

$$\begin{aligned} a_{22} &= a_{33} & a_{55} &= a_{66} & a_{12} &= a_{13} \\ b_2 &= b_3 & b_4 &= 0 & b_5 &= -b_6 \\ c_{22} &= c_{33} & c_{44} &= c_{55} & c_{66} &= c_{88} & c_{77} &= c_{99} & c_{67} &= c_{89} & c_{13} &= c_{12} \end{aligned}$$

Il suffit d'effectuer les deux autres permutations (1-2; 1-3) pour obtenir la matrice de rigidité. La matrice en notation ingénieur associée à la rigidité élastique $\underline{\underline{\underline{\mathbf{C}}}}_{\equiv}$, est donc :

$$\tilde{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} a & b & b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & a & b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & b & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e & f & f & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & f & e & f & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & f & f & e & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & g & h & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h & g & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & g & h & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & g & h \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h & g \end{bmatrix}$$

Le comportement élastique de notre milieu de Cosserat à symétrie cubique est donc déterminé par une orientation privilégiée et sept coefficients. Au vu de la forme de la matrice de souplesse de Cosserat, on en déduit aisément que la forme de la matrice de rigidité sera identique (calcul matriciel par blocs).

Nous nous ramenons maintenant à des tenseurs d'ordre 4 pour décrire notre comportement, on introduit pour cela :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\underline{\mathbf{a}}}} &= \delta_{ij} \cdot \delta_{ik} \cdot \delta_{il} \, e_i \otimes e_j \otimes e_k \otimes e_l \\ \underline{\underline{\underline{\mathbf{b}}}} &= \delta_{ij} \cdot \delta_{kl} \, e_i \otimes e_j \otimes e_k \otimes e_l \\ \underline{\underline{\underline{\mathbf{c}}}} &= \delta_{ik} \cdot \delta_{jl} \, e_i \otimes e_j \otimes e_k \otimes e_l \\ \underline{\underline{\underline{\mathbf{d}}}} &= \delta_{il} \cdot \delta_{jk} \, e_i \otimes e_j \otimes e_k \otimes e_l \end{aligned}$$

On a pour les tenseurs de souplesse :

$$\left[\underline{\underline{\sigma}}\right]_s = \underline{\underline{S}} : \underline{\underline{\epsilon}} \quad \underline{\underline{\nu}} = \underline{\underline{S}} : \underline{\underline{\kappa}} \quad \underline{\underline{\varsigma}} = \underline{\underline{S}} \cdot (\underline{\underline{\omega}} - \underline{\underline{\varphi}})$$

et ainsi :

$$\begin{aligned}\underline{\underline{\underline{\mathbf{S}}}}_{\sigma} &= (a - b - c) \underline{\underline{\underline{\mathbf{a}}}} + b \underline{\underline{\underline{\mathbf{b}}}} + c \underline{\underline{\underline{\mathbf{d}}}} \\ \underline{\underline{\underline{\mathbf{S}}}}_{\tau} &= d \cdot \underline{\underline{\underline{\mathbf{1}}}} \\ \underline{\underline{\underline{\mathbf{S}}}}_{\nu} &= (e - f - g - h) \underline{\underline{\underline{\mathbf{a}}}} + f \underline{\underline{\underline{\mathbf{b}}}} + h \underline{\underline{\underline{\mathbf{c}}}} + g \underline{\underline{\underline{\mathbf{d}}}}\end{aligned}$$

5.1.4 Matériau isotrope

Lorsque le choix des axes de référence n'intervient pas pour décrire le comportement du matériau, on le dit isotrope.

Nous nous ramenons maintenant à des tenseurs d'ordre 4 pour décrire notre comportement, on introduit pour cela :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\underline{\mathbf{a}}}}} &= \delta_{ij} \cdot \delta_{ik} \cdot \delta_{il} \, e_i \otimes e_j \otimes e_k \otimes e_l \\ \underline{\underline{\underline{\mathbf{b}}}}} &= \delta_{ij} \cdot \delta_{kl} \, e_i \otimes e_j \otimes e_k \otimes e_l \\ \underline{\underline{\underline{\mathbf{c}}}}} &= \delta_{ik} \cdot \delta_{jl} \, e_i \otimes e_j \otimes e_k \otimes e_l \\ \underline{\underline{\underline{\mathbf{d}}}}} &= \delta_{il} \cdot \delta_{jk} \, e_i \otimes e_j \otimes e_k \otimes e_l \end{aligned}$$

On remarque que ${}^{t_{34}}\underline{\underline{\mathbf{c}}} = \underline{\underline{\mathbf{d}}}$.

On a pour les tenseurs de souplesse :

$$\left[\underline{\underline{\sigma}}\right]_s = \underline{\underline{S}}_{\underline{\underline{\sigma}}} : \underline{\underline{\epsilon}} \quad \underline{\underline{\nu}} = \underline{\underline{S}}_{\underline{\underline{\nu}}} : \underline{\underline{\kappa}} \quad \underline{\underline{\zeta}} = \underline{\underline{S}}_{\underline{\underline{\zeta}}} \cdot (\underline{\underline{\omega}} - \underline{\underline{\varphi}})$$

et ainsi :

$$\begin{aligned}\underline{\underline{\underline{\mathbf{S}}}}_{\sigma} &= (a - b - c) \underline{\underline{\underline{\mathbf{a}}}} + b \underline{\underline{\underline{\mathbf{b}}}} + c \underline{\underline{\underline{\mathbf{d}}}} \\ \underline{\underline{\underline{\mathbf{S}}}}_{\zeta} &= d \cdot \underline{\underline{\underline{\mathbf{1}}}} \\ \underline{\underline{\underline{\mathbf{S}}}}_{\nu} &= (e - f - g - h) \underline{\underline{\underline{\mathbf{a}}}} + f \underline{\underline{\underline{\mathbf{b}}}} + h \underline{\underline{\underline{\mathbf{c}}}} + g \underline{\underline{\underline{\mathbf{d}}}}\end{aligned}$$

On se retrouve dans le cas d'un matériau élastique linéaire isotrope de Cosserat avec huit coefficients à déterminer. Dans le cas de matériau en déformations planes, on se retrouve avec uniquement quatre coefficients d'élasticité.

5.2 Les symétries de la matière et les schémas d'homogénéisation discrets

Grâce à des principes de la physique et plus particulièrement de la cristallographie, nous pouvons établir en général des propriétés de symétries concernant le comportement homogénéisé à l'examen du groupe des symétries point du réseau discret étudié. Ce premier groupe de symétrie introduit est celui des symétries point, $\mathcal{K}$, qui laisse globalement invariant le réseau de particules. Il s'agit d'un groupe essentiellement géométrique. Mathématiquement $\mathcal{K}$ est établi par :

$$\mathcal{K} = \left\{ \underline{S} \in SO(3) / \begin{array}{l} \forall (\underline{\alpha}, i) \in \mathcal{Z}^3 \times [1, n], \exists (\underline{\beta}, j) \in \mathcal{Z}^3 \times [1, n] / \\ \underline{x}^{\underline{\beta}, j} = \underline{S} \cdot \underline{x}^{\underline{\alpha}, i} \end{array} \right\} \quad (5.4)$$

Les propriétés d'un matériau se résume en général par un tenseur reliant deux grandeurs descriptives des phénomènes examinés, l'une se nomme la cause et l'autre l'effet. Le comportement en Mécanique est une propriété physique de ce type. Il s'agit d'un tenseur reliant la déformation à la contrainte et inversement. Ici ces deux grandeurs sont autant des effets que des causes. Le comportement possède donc déjà un groupe de symétries qui est propre à sa nature tensorielle. Il s'agit du groupe des symétries, noté G_{math} , pouvant laisser invariant (en dehors du tenseur nul) un tenseur du même ordre que le comportement. Le second groupe des symétries lié au comportement est le groupe des symétries matérielles, il a un sens purement physique, non comme le premier qui a un caractère plutôt mathématique. Ce groupe des symétries matérielles, noté G_{pr} , correspond à l'ensemble des symétries laissant invariant le tenseur de comportement, pour le matériau particulier observé. Le dernier groupe que nous introduisons est celui des symétries de chargement (ou d'effet). Le chargement en Mécanique est lui aussi représenté par un tenseur, il est alors possible de créer le groupe, noté G_{inf} , des symétries laissant invariant ce chargement. L'étude de ces groupes, lorsque le milieu microscopique envisagé est discret, permet de déterminer l'allure du tenseur de comportement. Elle repose sur l'exploitation de deux principes de la Physique. Ces principes relient entre eux ces groupes qui a priori sont d'origines différentes. Ces principes sont, avec les notations introduites :

Principe 1 (Principe de Neumann) *Le groupe des symétries matérielles, G_{pr} , doit inclure tous les éléments du groupe des symétries du point.*

$$\mathcal{K} \subset G_{pr} \quad (5.5)$$

et

Principe 2 (Principe de Curie) *Un réseau de particules sous l'action d'un chargement change son groupe de symétries point, $\mathcal{K}$, afin de préserver uniquement ses éléments communs avec ceux du groupe du chargement appliqué, G_{inf} . Ainsi le groupe des symétries point, $\mathcal{K}$, se change sous l'action d'un chargement en un groupe $\hat{K}$ défini par :*

$$\hat{K} = K \cap G_{\text{inf}}.$$

Il est important de se souvenir la nécessité que toute symétrie matérielle se doit d'appartenir à G_{math} , autrement le comportement est nul. Ainsi dans un cadre physique quelconque, si un vecteur représente une propriété physique et que le groupe des symétries matérielles possède la symétrie centrale, le vecteur n'a pas d'autre choix que d'être nul. La symétrie centrale, en effet, n'appartient pas au groupe des symétries propre à un vecteur. Les groupes des symétries propres à un tenseur jusqu'à l'ordre quatre sont exposé dans le livre de Shuvalov [Shuvalov, 1988]. Dans la suite de cette section nous allons nous intéresser plus particulièrement au milieu de Cosserat et à notre problème d'homogénéisation vu dans le chapitre 3. Le second groupe construit, celui des symétries matérielles pour le matériau homogénéisé, G_{pr}^c , peut être défini, pour ces milieux homogènes de Cosserat, par :

$$G_{pr}^c = \left\{ \begin{array}{l} \underline{Q} \in SO(3) / \forall (\underline{E}, \underline{G}), \\ \Psi^{Cos}(\underline{Q} \cdot \underline{E} \cdot {}^t \underline{Q}, \det(\underline{Q}) \underline{Q} \cdot \underline{G} \cdot {}^t \underline{Q}) \\ = \Psi^{Cos}(\underline{E}, \underline{G}) \end{array} \right\} \quad (5.6)$$

Ce groupe des symétries matérielles pour le matériau discret, G_{pr}^d , est construit en introduisant les opérateurs S^s et S^k . Si nous prenons une symétrie $\underline{S}$ appartenant à $\mathcal{K}$, nous construisons un isomorphisme S^s de l'espace des déformations généralisées dans lui-même, et un isomorphisme S^k de l'espace de la cinématique discrète dans lui-même :

$$\begin{aligned} \forall (\underline{u}, \underline{\phi}) &= \{ (\underline{u}^{\underline{\alpha}, i}, \underline{\phi}^{\underline{\alpha}, i}, \underline{x}^{\underline{\alpha}, i}), \forall (\underline{\alpha}, i) \in \mathcal{Z}^3 \times [1, n] \}, \\ S^k(\underline{u}, \underline{\phi}) &= \{ (\underline{S} \cdot \underline{u}^{\underline{\alpha}, i}, \det(\underline{S}) \underline{S} \cdot \underline{\phi}^{\underline{\alpha}, i}, \underline{S} \cdot \underline{x}^{\underline{\alpha}, i}), \forall (\underline{\alpha}, i) \in \mathcal{Z}^3 \times [1, n] \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \forall (\underline{d}, \underline{\delta}) &= \{ (\underline{d}^c, \underline{\delta}^c, \underline{C}), \forall c \in \mathcal{C} \}, \\ S^s(\underline{d}, \underline{\delta}) &= \{ (\underline{S} \cdot \underline{d}^c, \det(\underline{S}) \underline{S} \cdot \underline{\delta}^c, \underline{S} \cdot \underline{C}), \forall c \in \mathcal{C} \} \end{aligned}$$

Evidemment, si $(\underline{d}, \underline{\delta})$ est la déformation généralisée associée à $(\underline{u}, \underline{\phi})$ alors $S^s(\underline{d}, \underline{\delta})$ est la déformation généralisée associée à $S^k(\underline{u}, \underline{\phi})$. La description mathématique pour G_{pr}^d devient alors :

$$G_{pr}^d = \{ \underline{\underline{S}} \in \mathcal{K} / \forall (\underline{d}, \underline{\delta}), \Psi(\underline{d}, \underline{\delta}) = \Psi(S^s(\underline{d}, \underline{\delta})) \} \quad (5.7)$$

Le but de ce qui suit est de prouver que le groupe des symétries discrètes est inclus dans celui des symétries continues : $G_{pr}^d \subset G_{pr}^c$. Nous devons à ce stade particulariser les approches pour chaque schéma d'homogénéisation.

Pour le schéma (SH1) au premier ordre, la définition énergétique (3.30) est prise et composée avec l'opérateur S^s , il est à rappeler que le potentiel homogénéisé est celui d'un milieu de Cauchy :

$$\begin{aligned} \forall \underline{\underline{S}} \in G_d^{per}, \Psi^{Cau}(\underline{\underline{E}}^s) &= \frac{1}{|Y|} \min_{(\underline{d}, \underline{\delta}) \in \mathcal{CA}^0(\underline{\underline{E}}^s)} \Psi(\underline{d}_0 + \underline{d}_{per}, \underline{\delta}_{per}) \\ &= \frac{1}{|Y|} \min_{(\underline{d}, \underline{\delta}) \in \mathcal{CA}^0(\underline{\underline{E}}^s)} \Psi(S^s(\underline{d}_0 + \underline{d}_{per}, \underline{\delta}_{per})) \\ &= \frac{1}{|Y|} \min_{(\underline{d}, \underline{\delta}) \in \mathcal{CA}^0(\underline{\underline{E}}^s)} \Psi^0(\underline{\underline{S}} \cdot \underline{d}_0 + \underline{d}_{per}, \underline{\delta}_{per}) \quad (5.8) \\ &= \frac{1}{|Y|} \min_{(\underline{d}, \underline{\delta}) \in \mathcal{CA}^0(\underline{\underline{S}} \cdot \underline{\underline{E}}^s \cdot {}^t \underline{\underline{S}})} \Psi^0(\underline{d}_0 + \underline{d}_{per}, \underline{\delta}_{per}) \\ &= \Psi^{Cau}(\underline{\underline{S}} \cdot \underline{\underline{E}}^s \cdot {}^t \underline{\underline{S}}) \end{aligned}$$

Nous avons utilisé le fait que l'opérateur S^s laisse invariant le sous-espace des déformations perturbatrices généralisées périodiques associées à $\mathcal{CA}^0(\underline{\underline{E}}^s)$.

Pour chaque symétrie $\underline{\underline{S}}$ dans G_{pr}^d , qui laisse invariant le chargement ($\underline{\underline{E}}^s = \underline{\underline{S}} \cdot \underline{\underline{E}}^s \cdot {}^t \underline{\underline{S}}$), le champ solution de (3.30) satisfait :

$$(\underline{u}_{per}, \underline{\phi}_{per}) = S^k(\underline{u}_{per}, \underline{\phi}_{per}) \quad (5.9)$$

Nous passons maintenant au schéma (SH2). Seul l'espace de minimisation du potentiel Ψ_2 change et cette fois-ci, il s'agit réellement au premier ordre d'un potentiel homogénéisé de milieu de Cosserat, Ψ^{Cos} . Nous utilisons la formulation énergétique (3.35) et nous composons le potentiel thermodynamique

avec l'opérateur S^s :

$$\begin{aligned}
\forall \underline{\underline{S}} \in G_d^{per}, \Psi^{Cos}(\underline{\underline{E}}, \underline{\underline{G}}) &= \frac{1}{|Y|} \min_{(\underline{\underline{d}}, \underline{\underline{\delta}}) \in \mathcal{CA}_2^0(\underline{\underline{E}}, \underline{\underline{G}})} \Psi_2(\underline{\underline{d}}_0 + \underline{\underline{d}}_{per}, \underline{\underline{\delta}}_0 + \underline{\underline{\delta}}_{per}) \\
&= \frac{1}{|Y|} \min_{(\underline{\underline{d}}, \underline{\underline{\delta}}) \in \mathcal{CA}_2^0(\underline{\underline{E}}, \underline{\underline{G}})} \Psi_2(S^s(\underline{\underline{d}}_0 + \underline{\underline{d}}_{per}, \underline{\underline{\delta}}_0 + \underline{\underline{\delta}}_{per})) \\
&= \frac{1}{|Y|} \min_{(\underline{\underline{d}}, \underline{\underline{\delta}}) \in \mathcal{CA}_2^0(\underline{\underline{E}}, \underline{\underline{G}})} \Psi_2(\underline{\underline{S}} \cdot \underline{\underline{d}}_0 + \underline{\underline{d}}_{per}, \det(\underline{\underline{S}}) \underline{\underline{S}} \cdot \underline{\underline{\delta}}_0 + \underline{\underline{\delta}}_{per}) \\
&= \frac{1}{|Y|} \min_{(\underline{\underline{d}}, \underline{\underline{\delta}}) \in \mathcal{CA}_2^0(\underline{\underline{S}} \cdot \underline{\underline{E}} \cdot {}^t \underline{\underline{S}}, \det(\underline{\underline{S}}) \underline{\underline{S}} \cdot \underline{\underline{G}} \cdot {}^t \underline{\underline{S}})} \Psi_2(\underline{\underline{d}}_0 + \underline{\underline{d}}_{per}, \underline{\underline{\delta}}_0 + \underline{\underline{\delta}}_{per}) \\
&= \Psi^{Cos}(\underline{\underline{S}} \cdot \underline{\underline{E}} \cdot {}^t \underline{\underline{S}}, \det(\underline{\underline{S}}) \underline{\underline{S}} \cdot \underline{\underline{G}} \cdot {}^t \underline{\underline{S}})
\end{aligned} \tag{5.10}$$

Nous avons encore utilisé le fait que l'opérateur S^s laisse invariant le sous-espace des déformations perturbatrices généralisées périodiques associées à $\mathcal{CA}_2^0(\underline{\underline{E}}, \underline{\underline{G}})$. Pour chaque symétrie $\underline{\underline{S}}$ dans G_{pr}^d , qui laisse invariant le chargement ($\underline{\underline{E}} = \underline{\underline{S}} \cdot \underline{\underline{E}} \cdot {}^t \underline{\underline{S}}$ et $\underline{\underline{G}} = \det(\underline{\underline{S}}) \underline{\underline{S}} \cdot \underline{\underline{G}} \cdot {}^t \underline{\underline{S}}$), le champ solution de (3.35) satisfait :

$$(\underline{\underline{u}}_{per}, \underline{\underline{\phi}}_{per}) = S^k(\underline{\underline{u}}_{per}, \underline{\underline{\phi}}_{per}) \tag{5.11}$$

Ainsi, quelque soit le schéma d'homogénéisation, on obtient un résultat important qui est la démonstration du principe de Neumann, exposé par Vainshtein [Vainshtein, 1994] et Shuvalov [Shuvalov, 1988] :

$$\mathcal{K} \subset G_{pr}^d \subset G_{pr}^c \tag{5.12}$$

Propriété 1 (Principe de Neumann) *Le groupe des symétries matérielles, G_{pr}^c , doit inclure tous les éléments du groupe des symétries du point.*

$$\mathcal{K} \subset G_{pr}^c \tag{5.13}$$

Nous allons prendre les notations suivantes pour nommer les symétries, ainsi $C, \frac{y}{n}, \frac{E}{x}$ et $\frac{S}{x}$ sont respectivement la symétrie centrale, la rotation autour de l'axe y avec un angle de $\frac{2\pi}{n}$, la composition d'une rotation d'angle π autour de $x, \frac{x}{2}$, avec la symétrie centrale, $\frac{E}{x} = C \frac{x}{2}$, et la composition de la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ autour de $x, \frac{x}{4}$, avec $\frac{E}{x}$, alors $\frac{S}{x} = \frac{E}{x} \frac{x}{4} = C \frac{x}{4}^{-1}$. Les trois directions, x, y, z , qui sont intrinsèques au réseau discret, sont nommées directions d'orthotropie. Quoiqu'il arrive, on doit garder à l'esprit que le tenseur est mathématiquement une translation pour les propriétés physiques (ici mécanique, élastique), et qu'il a ses propres éléments de symétrie. L'existence de propriété

Chargement $\underline{\underline{E}}$ $E_{11} \ E_{22} \ E_{33}$ $E_{31} \ E_{23} \ E_{12}$	Chargement $\underline{\Phi} - \underline{\Omega}$ $\Phi_1 - \Omega_1 \ \Phi_2 - \Omega_2$ $\Phi_3 - \Omega_3$	Chargement $\underline{\underline{G}}$ $G_{11} \ G_{22} \ G_{33}$ $G_{31} \ G_{13} \ G_{23}$ $G_{32} \ G_{12} \ G_{21}$	G_{inf}
$E_{11} \ E_{22} \ E_{22} \ 0 \ 0 \ 0$	$0 \ 0 \ 0$	$0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0$	$\left\{ C, \frac{x}{4}, \frac{y}{2}, \frac{z}{2} \right\}$
$0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ E_{12}$	$0 \ 0 \ 0$	$0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0$	$\left\{ C, \frac{x}{4}, \frac{y}{2}, \frac{z}{2} \right\}$
$0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0$	$0 \ 0 \ \Phi_3 - \Omega_3$	$0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0$	$\left\{ C, \frac{z}{4} \right\}$
$0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0$	$0 \ 0 \ 0$	$G_{11} \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0$	$\left\{ \frac{x}{4}, \frac{y}{2}, \frac{z}{2} \right\}$
$0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0$	$0 \ 0 \ 0$	$G_{11} \ G_{11} \ G_{11} \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0$	$\left\{ \frac{x}{4}, \frac{y}{4} \right\}$
$0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0$	$0 \ 0 \ 0$	$0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ G_{12} \ G_{12}$	$\left\{ \frac{z}{2}, \frac{E}{x}, \frac{E}{y}, \frac{S}{z} \right\}$
$0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0$	$0 \ 0 \ 0$	$0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -G_{12} \ G_{12}$	$\left\{ \frac{E}{x}, \frac{E}{y}, \frac{S}{z} \right\}$

TAB. 5.1 – Chargements caractéristiques

est liée à la coïncidence avec un élément existant de $\mathcal{K}$. Pratiquement, nous montrons le groupe des symétries du point, $\mathcal{K}$, sur l'assemblage discret et nous déduisons alors, avec l'aide du Principe de Neumann, que ce groupe est conservé par notre méthode d'homogénéisation pour le milieu continu pour y décrire le nouveau groupe de symétries matérielles obtenu. A ce point, nous connaissons la forme pour le comportement élastique linéaire et le nombre de coefficients indépendants. Ilcewicz *et Al.* [Ilcewicz *et Al.*, 1986] ont donné les tenseurs de rigidité dans le cas particulier des milieux de Cosserat, cependant ils ont exclus certains éléments indirects du groupe de symétries, $\mathcal{K}$. En réintégrant ces symétries oubliées, nous corrigeons la forme de la rigidité. Pour les calculer, nous montrons les types de chargements qui donnent des groupes intéressants de symétries du point pour appliquer le Principe de Curie. Pour cette dernière raison, nous identifierons le comportement pour le schéma (SH1) au moyen des chargements, $(\underline{\underline{E}}^s)$, qui crée le plus grand groupe possible des symétries invariantes $G_{inf}(\underline{\underline{E}}^s)$ pour un milieu de Cauchy défini par :

$$G_{inf}(\underline{\underline{E}}^s) = \left\{ \underline{\underline{S}} \in G_{pr}^d / \underline{\underline{S}} \cdot \underline{\underline{E}}^s \cdot {}^t \underline{\underline{S}} = \underline{\underline{E}}^s \right\},$$

et pour le schéma (SH2) au moyen des chargements, $(\underline{E}, \underline{G})$, qui crée le plus grand groupe possible des symétries invariantes $G_{inf}(\underline{E}, \underline{G})$ pour un milieu de Cosserat défini par :

$$G_{inf}(\underline{E}, \underline{G}) = \left\{ \begin{array}{l} \underline{S} \in G_{pr}^d / \\ \text{et} \end{array} \quad \begin{array}{l} \underline{S} \cdot \underline{E} \cdot {}^t \underline{S} = \underline{E} \\ \det(\underline{S}) \underline{S} \cdot \underline{G} \cdot {}^t \underline{S} = \underline{G} \end{array} \right\}$$

Une sélection de sept chargements de caractérisation, pour le schéma (SH2), et leurs groupes de chargement associés est rapportée dans le tableau 5.1, comme Schouten[Schouten, 1989] l'a fait. Dans le cas du schéma (SH1) où seul un milieu de Cauchy subsiste au niveau macroscopique, les deux premiers chargements du tableau 5.1 suffisent à déterminer le comportement macroscopique.

5.3 Les structures en nid d'abeilles

Pour illustrer notre théorie sur des structures homogénéisées, nous choisissons deux assemblages bidimensionnels de poutre comme décrit sur la figure 5.3. Nous considérons pour ce assemblages des poutres d'Euler-Bernoulli en déformation plane. La cinématique impliquée ici se résume à un vecteur de déplacement généralisé, $\underline{V}^{\alpha,i}$, pour chaque particule, $\underline{P}^{\alpha,i}$ impliquant trois degrés de liberté (deux en translation et un en rotation). On introduit donc, u_1 , u_2 et ϕ comme étant respectivement les composantes horizontale et verticale du déplacement et la rotation. Pour une exploitation ultérieure, nous introduisons aussi l, S, I, E qui sont respectivement la longueur, la section, l'inertie normale et le module d'Young des poutres. La partition périodique fait apparaître deux types de cellule, une par structure discrète étudiée.

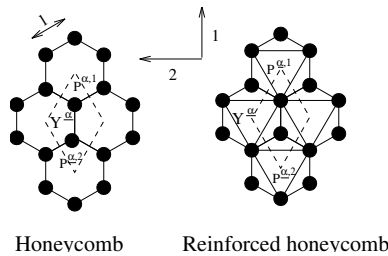


FIG. 5.1 – Les structures planes pour le nid d'abeille régulier and renforcé.

En utilisant les notations vectorielles de Voigt, nous introduisons la déformation généralisée $\tilde{\epsilon} = \{D_{11}, D_{22}, D_{12} + \Phi, D_{21} - \Phi, G_{31}, G_{32}\}$ et la rigidité

Coefficient élastique	Nid d'abeille	Nid d'abeille renforcé
K (SH1) & (SH2)	$\frac{\sqrt{3} E S}{6 l}$	$\frac{3 + \sqrt{3} E S}{6 l}$
G (SH1) & (SH2)	$4 \frac{E}{l} S \frac{I}{12I + l^2 S} \sqrt{3}$	$\frac{(48I^2 + 16(\sqrt{3} + 1) I l^2 S + l^4 S^2)}{4 l^3 (l^2 S + 12I)} E$
G_c (SH2)	$\frac{2E I}{l^3} \sqrt{3}$	$\frac{(3 + \sqrt{3})}{3} \frac{2E I}{l^3} \sqrt{3}$
M (SH2)	$\frac{\sqrt{3} I E}{3l}$	$(1 + \sqrt{3}) \frac{\sqrt{3} I E}{3l}$

TAB. 5.2 – Constantes élastiques pour le nid d'abeille et le nid d'abeille renforcé

homogénéisée $\begin{bmatrix} C \\ \equiv \end{bmatrix}$ s'exprime alors pour notre étude en déformation plane :

$$\begin{bmatrix} C \\ \equiv \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K + G & K - G & 0 & 0 & 0 & 0 \\ K - G & K + G & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G + G_c & G - G_c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G - G_c & G + G_c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & M \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

Dans le tableau 5.2, les coefficients élastiques sont regroupés pour les deux cas étudiés. Les coefficients de Cauchy (K et G) sont les mêmes pour les deux schémas d'homogénéisation (SH1) et (SH2), quant aux coefficients spécifiques au milieu de Cosserat (G_c et M), ils sont issus de l'homogénéisation par les schéma (SH2). Ces résultats ont été aussi obtenus par une méthode légèrement différente [Pradel et Sab, 1998]. Pour chacun des motifs, il est à remarquer que l'isotropie est toujours présente quand nous étendons le milieu à un milieu de Cosserat. Pour la partie Cauchy du comportement du nid d'abeille, nous trouvons un résultat plus général que celui trouvé par Gibson *et Al.* [Gibson *et Al.*, 1982], puisqu'ils ont négligé dans leur approche la partie de compression-traction des poutres qu'ils étudiaient. Maintenant nous allons regarder l'initiation du flambement de la structure pour le nid d'abeille classique. Pour cette approche, nous nous limitons aux calculs sur une cellule de base élémentaire. Une borne supérieur de la charge de flambement sera ainsi obtenue, puisqu'une minimisation serait nécessaire sur l'ensemble des cellules de base possibles pour la structure périodique.

5.4 Flambement du matériau constitué de nids d'abeille.

Maintenant que nous avons déterminé les comportements élastiques linéaires macroscopiques de matériaux constitués de nids d'abeille, nous allons déterminer la charge critique de flambement pour un chargement sous compression uniaxiale d'une couche de largeur infinie illustré sur la figure 5.4 pour le cas de l'assemblage de nids d'abeille. On considère dans la suite un chargement uniaxial sur une bande infinie d'épaisseur h ; un déplacement vertical, δ , est imposé au sommet de cette bande et il est imposé nul à sa base. Les rotations au sommet et à la base sont aussi nulles. Vu la géométrie et la symétrie du chargement, nous cherchons des solutions qui sont x_1 -invariantes. On se place ici dans le cadre du chapitre 4 dans l'hypothèse des faibles pré-déformation. Dans un premier temps, au moyen d'un code aux éléments finis [SAMCEF, 1995], nous étudions la convergence pour une hauteur de couche fixée suivant la largeur du mode et de la charge critique de flambement. Ceci nous permettra de valider numériquement l'hypothèse de x_1 -invariances des solutions. En exploitant l'invariance en translation de la structure étudiée, nous obtenons toujours en utilisant le code aux éléments finis, un mode de flambement et une charge critique limites en fonction de la hauteur de la couche infinie étudiée. Cette dépendance traduit l'effet d'échelle pour l'initiation du flambement. Comme le montre la courbe sur la figure 5.3, l'effet d'échelle s'estompe très vite, et au delà de dix cellules de base il devient négligeable. Il n'est donc pas nécessaire de développer ici le schéma à des ordres supérieurs. Nous limitons donc l'approche au schéma (SH1) où seul le premier ordre de la charge critique est à déterminer.

Au niveau microscopique, les particules sont reliées entre elles par des poutres. Pour déterminer les non-linéarités discrètes de ces poutres, nous effectuons la même approximation que dans la section 4.4, nous nous limitons donc à des champs cinématiques affines en u et θ , et polynomiaux d'ordre trois, en l'abscisse curviligne de la poutre impliquée pour déterminer la loi discrète d'interaction entre deux particules.

Pour le problème d'homogénéisation, nous limitons les calculs à la cellule de base minimale du pavage périodique de l'espace par des nids d'abeille. Cette cellule est représentée sur la figure 5.4. Il est clair en faisant référence aux travaux de Müller [Müller, 1987], que l'étude de l'approximation de la valeur critique de flambement devrait être menée sur des cellules de base de plus en plus grande du pavage de l'espace jusqu'à obtenir celui donnant la charge critique de flambement la plus petite. En prenant ici a priori la cellule de base minimale, nous déterminons une borne supérieure de la charge

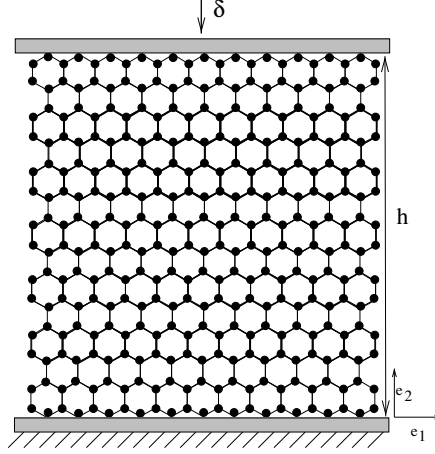


FIG. 5.2 – Chargement d'une couche de nids d'abeille sous compression uniaxiale.

critique. Nous prenons pour la recherche d'instabilité la solution triviale issue du problème d'homogénéisation au premier ordre en élasticité linéaire pour ce problème de chargement uniaxial. Les résultats en élasticité linéaire sont donc repris pour le chargement spécifique étudié qui correspond à la déformation homogène $\underline{\underline{E}}$ donnée par :

$$[\underline{\underline{E}}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

On obtient alors, à un mouvement rigidifiant près, le champ de déplacement solution, $\underline{\underline{u}}_s$, $\underline{\underline{\phi}}_s$ sur la cellule de base choisie :

$$\underline{\underline{u}}_s(P_1) = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\lambda l}{2} \left(-1 + \frac{\frac{12I_1}{Sl^2} - 1}{\frac{12I_1}{Sl^2} + 1} \right) \end{bmatrix}, \quad \underline{\underline{\phi}}_s(P_1) = 0$$

et pour les autres points du second type de la cellule de base :

$$i \neq 1, \underline{\underline{u}}_s(P_i) = \underline{\underline{E}} \cdot (P_i - P_1), \quad \underline{\underline{\phi}}_s(P_i) = 0$$

L'énergie totale élastique issue de l'approche en élasticité linéaire est d'abord calculée, indiquée par Lin , sur la cellule de base pour un champ perturbateur périodique, $\delta \underline{\underline{U}} = (\delta \underline{\underline{u}}, \delta \underline{\underline{\phi}})$, puis la partie énergétique liée à la non-linéarité géométrique est calculée, indiquée par NL , dans laquelle est insérée la localisation de la solution triviale. Le calcul donne alors matriciellement l'énergie

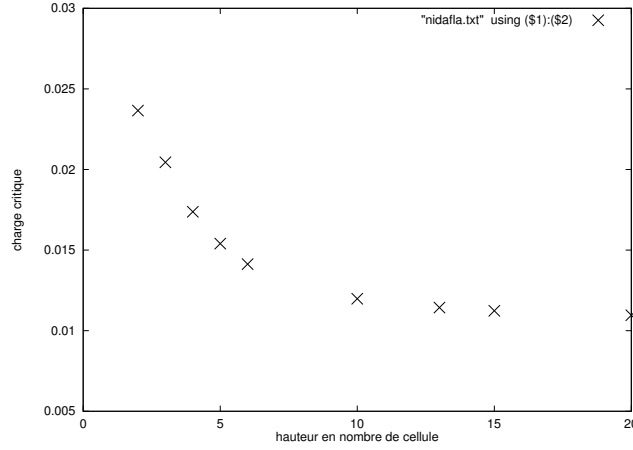


FIG. 5.3 – Effet d'échelle du flambement d'une couche de nids d'abeille.

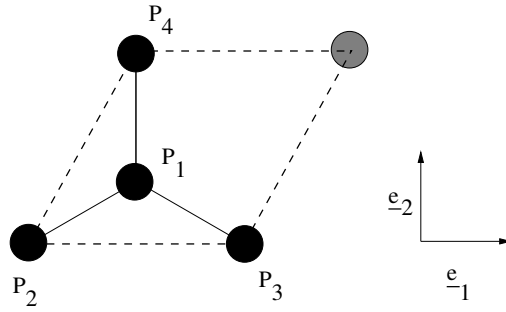


FIG. 5.4 – Cellule périodique minimale pour le pavage en nid d'abeille

du problème :

$${}^t[\delta \underline{\underline{U}}] \cdot \left[\underline{\underline{K}}_{Lin} + \lambda \underline{\underline{K}}_{NL} \right] \cdot [\delta \underline{\underline{U}}] = 0$$

La charge critique au premier ordre est obtenue comme la plus petite valeur de λ tel que : $\det \left[\underline{\underline{K}}_{Lin} + \lambda \underline{\underline{K}}_{NL} \right] = 0$. Le nid d'abeille donne la valeur :

$$\lambda_c = \frac{12I}{Sl^2}.$$

En utilisant les valeurs numériques des poutres utilisées pour l'application aux éléments finis, la valeur obtenue pour la charge critique est de 1 % par la méthode d'homogénéisation contre 1,07 % par la méthode numérique aux éléments finis.

5.5 Applications aux mousses

Comme application, nous nous intéressons à une mousse modélisée du point de vue microscopique comme un assemblage périodique de poutres suivant un motif tétrakaidrique représenté sur la figure 5.5. Pour plus d'information, dans l'annexe A, des éléments bibliographiques dédiés à l'étude microstructural des mousses ont été reportés. Le choix du tétrakaidécaèdre est guidé par l'observation au microscope de mousse polymère de type polyuréthane où cette forme de cellule est la plus présente. Cela semble cohérent avec le procédé physique de moussage du matériau. En effet, si l'on considère que la création de la mousse s'effectue par expansion d'un gaz de façon isotrope à partir de centres d'expansion uniformément répartis au sein d'un matériau continu, on se retrouve avec un pavage de sphère de gaz dans le milieu continu. A l'issue de l'expansion gazeuse, les sphères ont dégénérées en polyèdres, les types de polyèdres sont ceux issus du pavage de l'espace par des sphères de rayon constants. Il existe trois polyèdres possibles : le dodécaèdre (polyèdre à douze faces), le octaèdre (de base un hexagone) et enfin le tétrakaidécaèdre (polyèdre à quatorze faces). C'est ce dernier que nous avons retenu pour modéliser la microstructure de notre mousse à porosité ouverte. Chaque type de polyèdre est issu du type de pavage de l'espace par des sphères : pavage à faces centrées, pavage hexagonal ou encore pavage à volume centré. Les poutres considérées sont les poutres usuelles d'Euler-Bernoulli, nous prenons les notations l , S , pour la longueur et la section de la micro poutre, I_t , I_1 , I_2 , pour l'inertie de torsion, l'inertie suivant le premier et le second axe principal de la poutre, E_s , G_s , sont le module d'Young et de cisaillement du matériau constitutif de la poutre. Chaque poutre est à l'intersection d'un carré et de deux hexagones, afin de donner une définition intrinsèque des axes d'inertie, nous plaçons pour chaque poutre le premier axe d'inertie dirigé vers le centre du carré associé à la poutre. Cette description semble s'accorder avec l'observation des micro structures dans les mousses comme l'ont vu [Zhu *et Al.*, 1997]. Grâce à la distribution spacial des extrémités des poutres, on peut aisément conclure que le groupe des symétries du point, $\mathcal{K}$, est :

$$\mathcal{K} = group \left\{ C, \begin{smallmatrix} x & y \\ 4 & 4 \end{smallmatrix} \right\}$$

On représente sur la figure 5.5 les directions d'orthotropie (x, y, z) de l'exemple traité. Il est important de remarquer que le symétrie par rapport à l'origine C est incluse dans $\mathcal{K}$. Une déduction immédiate donne l'absence de termes couplés dans le comportement. Il n'y a pas de couplage entre tenseur du second ordre et pseudo-tenseur du second ordre. En exploitant le groupe $\mathcal{K}$ group, nous concluons que la représentation matricielle généralisée de Voigt

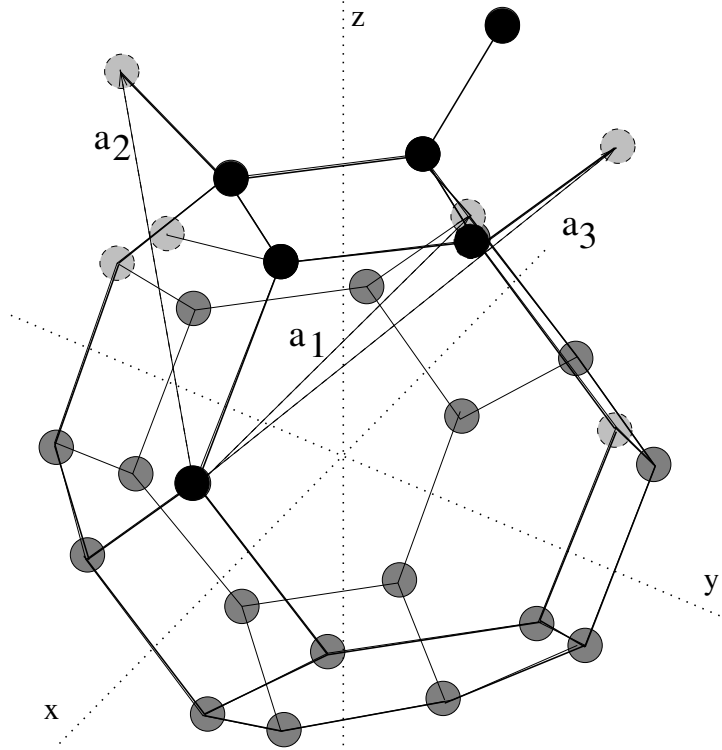


FIG. 5.5 – description du tétraikaedre et de la cellule de référence.

possède huit coefficients élastiques et a la forme suivante dans le référentiel de cubicité du matériau :

$$\begin{aligned}
 \begin{Bmatrix} \Sigma_{11}^s \\ \Sigma_{22}^s \\ \Sigma_{33}^s \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ E_{33} \end{Bmatrix} \quad \Sigma_{ij}^s = c E_{ij} \text{ if } i \neq j \\
 \underline{\Sigma}^{as} &= d (\underline{\Phi} - \underline{\Omega}) \\
 \begin{Bmatrix} \Gamma_{11} \\ \Gamma_{22} \\ \Gamma_{33} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} e & f & f \\ f & e & f \\ f & f & e \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} G_{11} \\ G_{22} \\ G_{33} \end{Bmatrix} \quad \Gamma_{ij} + \Gamma_{ji} = (h + g) (G_{ij} + G_{ji}) \\
 \text{and} & \\
 \Gamma_{ij} - \Gamma_{ji} &= (g - h) (G_{ij} - G_{ji}) \quad \text{if } i \neq j
 \end{aligned} \tag{5.15}$$

Pour calculer nos coefficients, nous allons homogénéiser notre matériau sous des chargements typiques que nous appellerons chargements caractéristiques. Sur la base du principe de Neumann, nous voulons faire ressortir un jeu de chargements qui implique tous les coefficients élastiques quand nous couvrons le jeu de chargements. La perspicacité dans le choix des chargements représentatifs revient à sélectionner ceux qui préservent le plus grand groupe de

symétrie généré par $\hat{\mathcal{K}} = \mathcal{K} \cap G_{\text{inf}}$. Ici le jeu de chargements caractéristiques

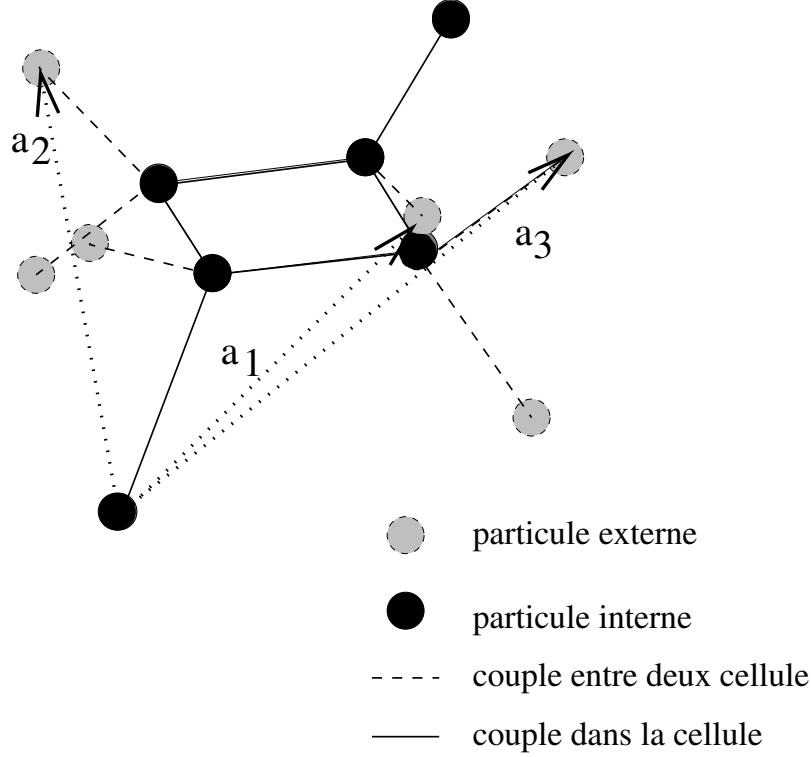


FIG. 5.6 – Description de la cellule de base

est défini comme reporté dans la table 5.1. Cela signifie que nous effectuerons sept calculs de structure pour déterminer le comportement cubique de notre matériau. Il est maintenant largement temps de décrire notre micro structure et sa cellule de référence associée. Sur la figure 5.5, un tétrakaidécaèdre avec toutes ses particules a été dessiné. Nous avons aussi représenté une cellule de référence et son repère périodique $(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3)$. Les particules noires sont comptées en entier dans la cellule de référence, celles en gris foncées sont extérieures et celles en gris claire sont sur la frontière de la cellule, ce qui signifie que les couples comprenant une particule noire et une gris claire ont une énergie, dans leur poutre, comptée une demi fois pour la cellule. pour cette partition de l'espace, il y a six types de particules, la cellule de référence est dessinée sur la figure 5.6. Aussi il n'y a que douze champs périodiques discrets distincts. Pour déterminer les coefficients élastiques, nous utilisons, pour chaque chargement, les symétries appartenant à $\mathcal{K}$ pour réduire les inconnues cinématiques grâce à (5.11). D'où pour un chargement spécifique, nous créons des correspondances entre les degrés de liberté et réduisons ainsi la taille de notre problème de minimisation. Dans le cas du tétrakaidécaèdre,

nous obtenons les coefficients élastiques suivants,
pour le milieu de Cauchy (les coefficients sont communs aux schémas (SH1)
et (SH2) par l'exploitation du groupe des symétrie de la matière de notre
matériau) :

$$E_f = 6 \frac{S I_1 E_s \sqrt{2}}{l^2 (12 I_1 + l^2 S)} \quad (5.16)$$

$$\nu_f = -1/2 \frac{12 I_1 - l^2 S}{12 I_1 + l^2 S} \quad (5.17)$$

$$G_f = \frac{3\sqrt{2} S E_s I_2 \left(I_2 + \frac{G_s}{E_s} I_t + 4 I_1 \right)}{l^2 \left(12 I_2^2 + 48 I_2 I_1 + 12 I_2 \frac{G_s}{E_s} I_t + l^2 \frac{G_s}{E_s} I_t S + 4 l^2 S I_2 + 4 l^2 I_1 S \right)} \quad (5.18)$$

pour la partie de Cosserat propre au schéma (SH2),

$$d = \frac{3\sqrt{2} E_s S}{l^2} \quad (5.19)$$

$$e = \frac{(E_s I_2 + G_s I_t) \sqrt{2}}{8 l^2} \quad (5.20)$$

$$f = \frac{(5 G_s I_t - E_s I_2) \sqrt{2}}{16 l^2} \quad (5.21)$$

$$g = E_s \frac{\sqrt{2} (3 G_s I_t I_1 - G_s I_t I_2 - E_s I_1^2 - E_s I_1 I_2)}{8 l^2 (E_s I_1 + G_s I_t)} \quad (5.22)$$

$$h = E_s \frac{\sqrt{2} (G_s I_t I_2 + 5 G_s I_t I_1 + E_s I_1^2 + E_s I_1 I_2)}{8 l^2 (E_s I_1 + G_s I_t)} \quad (5.23)$$

Nous avons introduit E_f , ν_f , G_f et K_f respectivement le module d'Young, le coefficient de Poisson, le module de cisaillement pour la mousse homogénéisée. Pour la partie de Cauchy de notre comportement, nous avons trouvé les mêmes résultats, avec une méthode générale, comme Zhu *et Al.* [Zhu *et Al.*, 1997] l'a fait, mais nous avons additionné les constantes élastiques purement de Cosserat.

5.6 Flambement des mousses

Tout comme pour le matériau bidimensionnel constitué de nids d'abeille, nous allons déterminer la charge critique de flambement pour un chargement

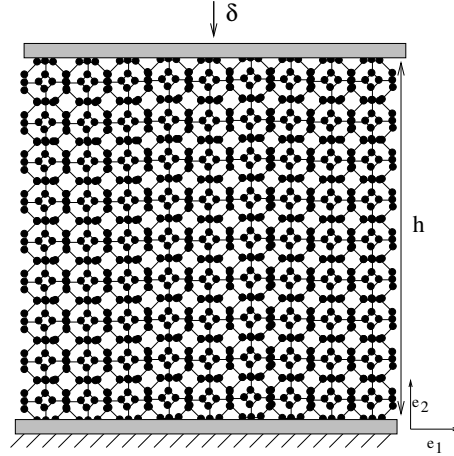


FIG. 5.7 – Chargement d'une couche de tétrakaidécédres

sous compression uniaxiale d'une couche d'assemblage périodique tridimensionnel de tétrakaidécédres de largeur infinie illustré sur la figure 5.7. On reprend, pour l'exemple, un chargement uniaxial sur une bande infinie d'épaisseur h ; un déplacement vertical, δ , est imposé au sommet de cette bande et il est imposé nul à sa base. Les rotations au sommet et à la base sont aussi nulles. Vu la géométrie et la symétrie du chargement, nous cherchons des solutions qui sont x_1 -invariantes. On se place ici dans le cadre du chapitre 4 dans

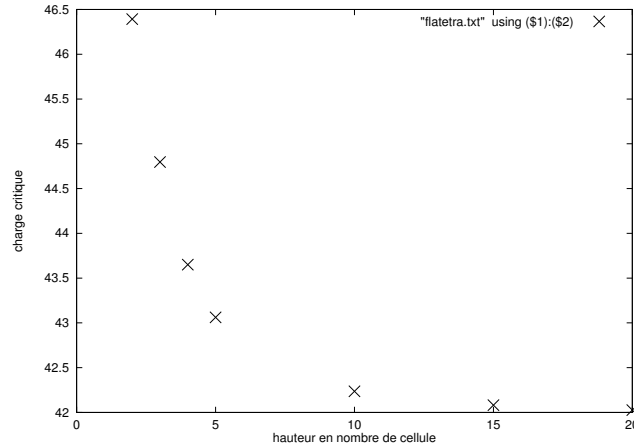


FIG. 5.8 – Effet d'échelle du flambement d'une couche de tétrakaidécédres.

l'hypothèse des faibles prédéformation. L'utilisation d'un code aux éléments finis [SAMCEF, 1995] permet encore de conclure à la faible importance de l'effet d'échelle sur l'initiation du flambement (voir le figure 5.8). Les micro

poutres considérées sont de longueur $l = 1$ m, de section $S = l/10m^2$, d'inertie $I_1 = I_2 = S^2/12m^4$, dans les directions principales de flexion. Le schéma d'homogénéisation utilisé est (SH1), les micro poutres de la mousse étant du type Euler-Bernoulli, et la détermination de la charge critique s'effectue au premier ordre.

La valeur de la charge critique, λ_c , vaut ainsi au premier ordre :

$$\frac{\left(-12 \frac{I_l}{l^2 S} - 1 + \sqrt{80 \frac{I_l^2}{l^4 S^2} + 8 \frac{I_l}{l^2 S} + 1 + 9216 \frac{I_l^4}{S^4 l^8} + 2304 \frac{I_l^3}{S^3 l^6}}\right) \left(\frac{15 I_l}{2 l^2 S} + \frac{1}{8}\right)}{\left(144 \frac{I_l^2}{l^4 S^2} - 1\right)} \quad (5.24)$$

La charge critique est évaluée numériquement avec les valeurs utilisées pour le calcul aux éléments finis sur la structure totale. La valeur obtenue pour la charge critique est de 9,999 % par la méthode d'homogénéisation contre 7,7 % par la méthode numérique aux éléments finis. Le résultat est proche mais tend à montrer qu'il est nécessaire d'effectuer une optimisation sur le choix de la cellule de base comme le laissent entrevoir les travaux de Müller [Müller, 1987] [Geymonat *et Al.*, 1993].

Conclusions et Perspectives

DANS cette étude, nous avons montré comment dans le cadre de l'homogénéisation, il était possible de prendre en compte une cinématique enrichie par des rotations tant dans le cas continu que discret. Dans les deux cas, la phase primordiale pour l'obtention d'un comportement macroscopique valide est l'analyse dimensionnelle. Elle permet de comparer les différents termes de la cinématique entre eux sur une géométrie fixe quelque soit la taille de la structure réelle étudiée. Nous avons alors défini deux schémas d'homogénéisation en considérant des suites différentes de comportement asymptotique dont la validité a été discuté dans le chapitre 2. Il ressort de cette discussion que le schéma (SH2) est pertinent lorsque les raideurs associées au gradient de rotation sont élevées.

Dans le cas de l'homogénéisation de réseaux, nous avons introduit des développements de Taylor de champs continus pour aboutir à un milieu continu. Pour un réseau n -atomique, n champs de translation et n champs de rotation sont à déterminer par la résolution d'autant d'équations d'équilibre que de champs inconnus.

L'introduction des développements asymptotiques dans les équations d'équilibre permet d'exprimer ces champs inconnus en fonction d'un seul champ (de translation) pour le schéma (SH1) et de deux champs (un de translation et un de rotation) pour le schéma (SH2). A noter que l'ordre d'approximation des développements asymptotiques et celle des développements de Taylor s'effectue suivant la même échelle de comparaison en ε .

Comme nous l'avons fait sur les motifs discrets en nid d'abeille et en tétra-kaidécaèdre en comparant avec les résultats de Gibson [Gibson *et Al.*, 1982] et ceux de Zhu [Zhu *et Al.*, 1997], il convient de vérifier par cette méthode générale la validité des comportements obtenus empiriquement dans la littérature sur les réseaux discrets.

En revanche, si nous n'effectuons pas les développements asymptotiques, une théorie continue n particulières peut s'avérer suffisante pour résoudre les problèmes mécaniques envisagés. Il se peut même que cette approche soit fructueuse pour déterminer les effets de bords. Ce point constituerait une extension aux matériaux n -atomiques de l'étude des effets de bord donnée dans le cas mono-atomique (chapitre 2).

Par ailleurs, nous avons montré lors de ce travail comment on pouvait déterminer la charge critique de flambement d'un réseau n -atomique dans

les hypothèses de faibles prédéformations. Cependant il semble nécessaire sur la trace de travaux récents [Müller, 1987] d'examiner le choix (forme et taille) de la cellule de base périodique pour effectuer l'analyse en homogénéisation du flambement. L'étude du post-flambement pour la détermination de la fin du plateau déclenchée par la mise en contact des poutres, déjà considérée par Dement'ev et Tarakanov [Dement'ev et Tarakanov, 1970] [Dement'ev et Tarakanov, 1970b], serait dans le prolongement naturel de ce travail. Nous pourrions alors nous appuyer sur les travaux existants [Chateau et Nguyen, 1991] concernant la gestion du contact.

Vu la complexité du problème, le recours à des techniques de résolution numérique semble nécessaire. Nous avons déjà commencé à mettre en œuvre une telle démarche [Veiga, 1997], l'étude du post-flambement s'effectuant par une méthode incrémentale à partir du mode de flambement trouvé.

Enfin, nous pouvons mettre en évidence expérimentalement les effets d'échelle théoriquement étudié dans ce travail dans le cas de l'élasticité linéaire et du flambement. En effet, un dispositif expérimental a déjà été mis au point le permettant à l'aide d'excitations magnéto-mécaniques [Lakes, 1983] [Lakes, 1986]. Dans le cadre des stages [Fudala, 1997] et [Bouguern, 1998], nous avons amélioré à l'aide d'interférométrie LASER sa métrologie. Cependant, l'exploitation des observations expérimentales reste encore à faire. Nous pourrions alors comparer les résultats théoriques et expérimentaux.

Annexe A

Eléments bibliographiques sur la modélisation micro-mécanique des mousses

Plusieurs chercheurs se sont penchés sur l'étude micromécanique des mousses afin d'expliquer les différents mécanismes observés expérimentalement. Une synthèse intéressante peut être trouvée dans [Ould Eyih, 1993]. La majorité des études entreprises sont axées sur les mousses à cellules ouvertes, mais certaines donnent des compléments pour le cas des cellules fermées. Toutes les approches considèrent les mousses comme un assemblage de poutres auxquelles on peut rajouter des membranes minces pour obtenir une porosité occluse. L'approche numérique effectuée par Renz [Renz, 1977] suit d'ailleurs cette description en répartissant suivant différentes distributions la matière entre les arêtes et les parois de cellules. Les approches micromécaniques se différencient soit par la description géométrique de la cellule de base, soit par le comportement attribué aux poutres de la mousse.

Remarque 1 *Dans tout ce qui suit, les exposants * désigneront des grandeurs relatives à la mousse.*

A.1 Approche par des réseaux cubiques

Gent ([Gent et Thomas, 1959] à [Gent et Rusch, 1966a]), qui fut le premier historiquement à construire un modèle poutre, a choisi de construire un réseau cubique périodique organisé comme sur la figure A.1.

Il lui applique un chargement uniaxial et y insère des calculs de type résistance des matériaux. Son modèle fait apparaître des mécanismes de traction-

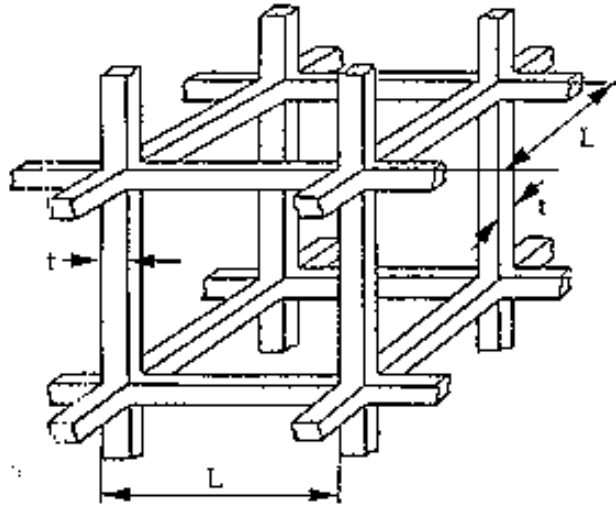


FIG. A.1 – Cellule de base adoptée par Gent

compression des poutres. Par homogénéisation, il obtient un module d'Young suivant la direction de chargement proportionnel à la densité relative de la mousse, Φ égale au rapport entre la densité de la mousse et la densité du solide la composant. Expérimentalement, cette approche n'a été validée que pour peu de mousses.

Puis Gibson ont repris ces travaux en changeant la géométrie de la cellule de base en deux dimensions [Gibson *et Al.*, 1982], puis en trois dimensions [Gibson et Ashby, 1982]. Ils ont effectué des recherches sur deux géométries différentes. La première géométrie est donnée par la Figure A.2

Elle correspond à un réseau de "cubes" dont chaque arête est une poutre de section carré. Cette nouvelle description de la cellule introduit la flexion comme nouveau phénomène important dans la déformation des cellules sous chargement uniaxial. Gibson dépasse d'ailleurs la simple phase élastique de la mousse. Il introduit le flambement élastique, la plasticité et la rupture dans son modèle. Suivant les chargements et les matériaux utilisés dans les mousses, dans un seul de ces domaines ou plusieurs successivement. Gibson donne d'ailleurs des mécanismes de rupture, mais aussi de flambement élastique et plastique. De plus, il introduit des chargements multiaxiaux, et de l'anisotropie en remplaçant les cubes représentant les cellules par des parallélogramme de faces différentes. Cette modélisation présente un défaut important dans la description géométrique de la cellule : il y a une très forte orientation dans la structure mousse qui est 2D plus que 3D. En volume, la mousse par sa description géométrique est orthotrope. En chargement uniaxial, on obtient les résultats suivants.

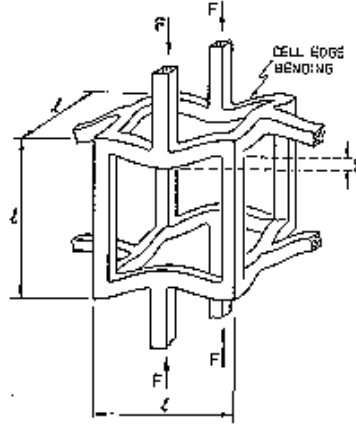


FIG. 3.7. Cell edge bending during linear elastic deformation.

FIG. A.2 – Première géométrie choisi par Gibson *et al.*

A.1.1 Comportement élastique

Le modèle s'appuie sur la flexion d'une poutre. La déflexion δ s'exprime :

$$\delta = \frac{C_1 \cdot F \cdot l^3}{E_s \cdot I} \quad (\text{A.1})$$

avec F la force appliquée sur la poutre, I le moment d'inertie de la poutre, E_s le module d'Young du solide utilisé et l la longueur des poutres. Le module d'Young E^* de la mousse globale peut alors être calculé.

Cellules ouvertes

$$\frac{E^*}{E_s} = C_2 \cdot \left(\frac{\rho}{\rho_s} \right)^2 \quad (\text{A.2})$$

Cellules fermées

$$\frac{E^*}{E_s} = C_2 \cdot \left(\frac{\rho}{\rho_s} \right)^3 \quad (\text{A.3})$$

Le coefficient de Poisson lui a une valeur quasi-constante quelque soit le matériau : $\nu \approx \frac{1}{3}$ dans la phase élastique. Mais dans la phase du plateau, le

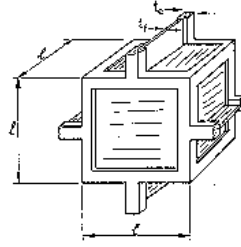


FIG. 5.12. A cubic cell model for a closed-cell foam, showing the edge thickness, t_e , and the face thickness, t_f .

FIG. A.3 – Structure à cellules fermées

coefficient de Poisson chute pour s'annuler.

A.1.2 Flambement élastique

Les formules d'Euler sont appliqués aux poutres de ces cellules, et elles donnent dans le cas de densité relative faible (inférieure à 0,3) :

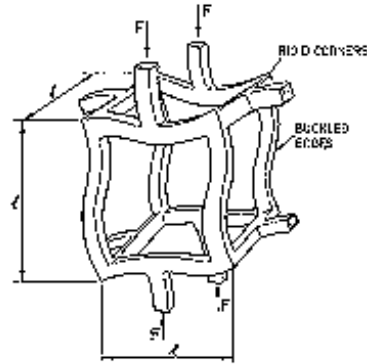


FIG. 5.14. Elastic buckling in the cell walls of an open-cell foam.

FIG. A.4 – Flambement élastique

Cellules ouvertes

$$\frac{\sigma_{el}^*}{E_s} = C_3 \cdot \left(\frac{\rho}{\rho_s} \right)^2 \quad (\text{A.4})$$

Cellules fermées

$$\frac{\sigma_{el}^*}{E_s} = C_3 \cdot \left(\frac{\rho}{\rho_s} \right)^2 + \frac{p_0 - p_{at}}{E_s} \quad (\text{A.5})$$

puis le comportement dans la zone de flambement devient :

$$\frac{\sigma^*}{E_s} = C_3 \cdot \left(\frac{\rho}{\rho_s} \right)^2 + \frac{p_0 \cdot \epsilon}{E_s \cdot \left(1 - \epsilon - \frac{\rho}{\rho_s} \right)} \quad (\text{A.6})$$

A.1.3 Ruine plastique

Les parois peuvent aussi se plastifier, cela arrive quand le moment des parois inclinées excède celui de pleine plastification ($M_p = \frac{1}{4} \cdot \sigma_Y \cdot t^3$, σ_Y est le seuil de plasticité). Cette plastification se traduit par des rotules plastiques aux jonctions des poutres comme sur la figure .

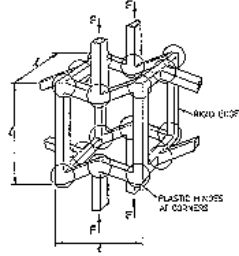


FIG. 5.18. The formation of plastic hinges in an open-cell foam.

FIG. A.5 – Apparition de rotules plastiques

Dans le cas des cellules fermées, il faut rajouter la contribution due à l'extension des membranes et celle due à la compression du gaz. On obtient donc les seuils plastiques, σ_{pl}^* , suivants pour la mousse :

Cellules ouvertes

$$\frac{\sigma_{pl}^*}{\sigma_{ys}} = C_4 \cdot \left(\frac{\rho}{\rho_s} \right)^{\frac{3}{2}} \quad (\text{A.7})$$

Cellules fermées

$$\frac{\sigma_{pl}^*}{\sigma_{ys}} = C_4 \cdot \left(\phi \cdot \frac{\rho}{\rho_s} \right)^{\frac{3}{2}} + C'_4 \cdot (1 - \phi) \cdot \frac{\rho}{\rho_s} + \frac{p_0 - p_{at}}{\sigma_{ys}} \quad (\text{A.8})$$

ϕ représente la fraction de matière dans les arêtes de la mousse, p_0 la pression du gaz dans les cellules et p_{at} la pression atmosphérique.

A.1.4 Ecrasement fragile

Suivant le même principe que la plasticité, on peut déterminer une contrainte de rupture pour laquelle les poutres cassent. Ainsi pour des mousses fragiles (céramique, ou certains polymères) dont le matériau a un module de rupture, σ_{fs} , une poutre casse lorsque le moment qu'elle subit dépasse $M_f = \frac{1}{6} \cdot \sigma_{fs} \cdot t^3$. Suivant que les cellules sont fermées, c'est à dire que l'on prenne en compte ou pas les contraintes membranaires, on obtient :

Cellules ouvertes

$$\frac{\sigma_{cr}^*}{\sigma_{fs}} = C_5 \cdot \left(\frac{\rho}{\rho_s} \right)^{\frac{3}{2}} \quad (\text{A.9})$$

Cellules fermées

$$\frac{\sigma_{cr}^*}{\sigma_{fs}} = C_5 \cdot \left(\phi \cdot \frac{\rho}{\rho_s} \right)^{\frac{3}{2}} + C'_5 \cdot (1 - \phi) \cdot \frac{\rho}{\rho_s} \quad (\text{A.10})$$

Cette modélisation, dont le synthèse est regroupé dans [Gibson et Ashby, 1988], fait forcément intervenir l'expérience pour déterminer les constantes C, c'est en cela que l'on peut classer ce modèle comme empirico-théorique.

A.1.5 Densification

Enfin pour la dernière phase du comportement de la mousse, la mousse est tellement comprimée qu'il n'y a plus de gaz en son sein. Seul demeure le solide, et le comportement tend vers le comportement du solide. On peut penser que cela arrive lorsque la déformation est telle qu'il n'y a plus de place

pour le gaz, soit : $\varepsilon = 1 - \frac{\rho}{\rho_s}$. Mais expérimentalement cette formule n'est pas validée, il s'agirait plutôt de : $\varepsilon = 1 - 1,4 \cdot \frac{\rho}{\rho_s}$. Pour expliquer ce phénomène, Maiti, Gibson *et al.* [Maiti *et Al.*, 1984] introduisent une hétérogénéité dans les longueurs de poutre des cellules. Cela intervient d'ailleurs dans tout les domaines précédemment décrits. Ainsi il y a flambement élastique ou plastique, rupture et densification en fonction de la longueur des arêtes des cellules et donc en fonction de la distribution de ces longueurs. Il s'agit d'une présentation multiaxiale des matériaux de type mousse. L'approche y est semi-expérimentale, seule l'allure des comportements y est déterminée à l'aide de considération de type Résistance des Matériaux. L'obtention final de loi exploitable se fait en calant expérimentalement les constantes mises à jour. Trois types de mousse sont abordés les mousses flexible (élastomère), rigide (polymère ou métal) et fragile (céramique). Chaque type peut lui-même être à porosité ouverte ou occluse. Cependant les mousses de ces deux dernières catégories semblent avoir le même comportement. Dans l'approche, on peut prendre en compte pour les lois de comportement finales les possibilités microscopiques de flexion (élasticité), flambement élastique, ruine plastique et enfin rupture fragile des poutres ou bien des parois. En s'appuyant sur des données expérimentales, certaines mousses sont totalement caractérisées sur les trois étapes possibles : zone linéaire, plateau plus ou moins long à contrainte nominale constante et enfin densification. Enfin l'article conclut sur l'expression de l'énergie absorbée en fonction du niveau de déformation atteint. Les résultats et les modèles pour chaque type de solide cellulaire sont combinés pour développer des cartes de mode de mécanisme qui résument les propriétés en un diagramme unique.

A.2 Autres structures géométriques périodiques

A.2.1 Tétraèdre

Une deuxième famille d'approches de cette description poutre a été faite par Ashby ([Zhang et Ashby, 1989] dans le cas des nids d'abeille, et [Zhang et Ashby, 1989b] pour des mousses tridimensionnelles isotropes) mais aussi par Warren *et Al.* ([Warren et Kraynik, 1987] à [Warren *et Al.*, 1989]). Ces deux études partent de la description géométrique. La structure retenue est alors un assemblage de quatre poutres faisant toutes deux à deux un angle de 109^0 , comme sur la Figure A.6.

Dans le cas de Ashby, il s'agit d'un morceau de la cellule de base de la mousse de forme tétrakaïdecaédrique. Cette forme de cellule permet un

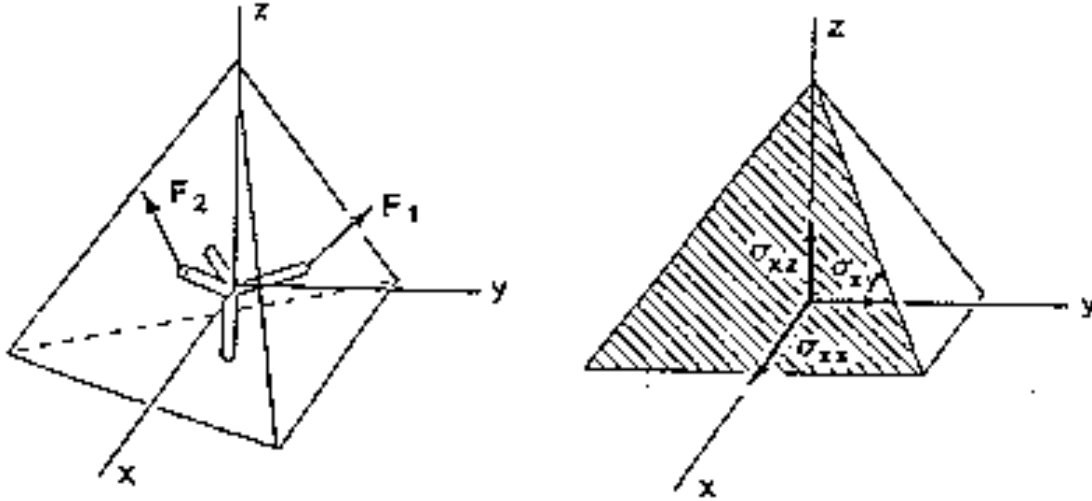


FIG. A.6 – Pavage par tétraèdres

pavage parfait de l'espace (Lord Kelvin) et expérimentalement d'après Smith, cette cellule est la plus proche de la réalité.

Le rapport de Zhang et Ashby [Zhang et Ashby, 1989b] présente une approche de type passage de la micro structure à l'échelle macroscopique sur le matériau tridimensionnel. Les auteurs résument la microstructure à l'assemblage de quatre poutres suivant un tétraèdre pavant presque l'espace. Le chargement en contrainte est exercé au niveau macroscopique, il est alors redescendu sur chacune des quatre poutres. Pour obtenir cette localisation, on décrit l'opération de moyenne qui permet de passer des micro-poutres au volume élémentaire. Une fois au niveau de la poutre considérée sans effort tranchant, on obtient en exhibant son comportement, supposé élastique, la micro déformation exercée sur la poutre. On remonte alors en effectuant la moyenne au niveau macroscopique, obtenant ainsi la réponse globale contrainte-déformation. Pour cette mousse supposée isotrope, le module d'Young et le coefficient de Poisson sont donnés, caractérisant ainsi son comportement tridimensionnel élastique. Différents modes de comportement comme la rupture fragile, le flambement élastique ou bien la plasticité sont alors étudiés avec la même localisation. Des critères en contrainte de rupture, flambement ou plasticité sont ainsi obtenus, représentés graphiquement et enfin comparés avec des résultats expérimentaux.

Dans le cas de l'approche de Warren, l'analyse est faite pour la phase élastique linéaire [Warren et Kraynik, 1988] et non-linéaire [Warren et Kraynik, 1991] de la mousse. On passe ici à une vision plus tridimensionnelle de la structure cellulaire. En effet Gibson et Ashby ([Gibson et Ashby, 1988]) ont donné une

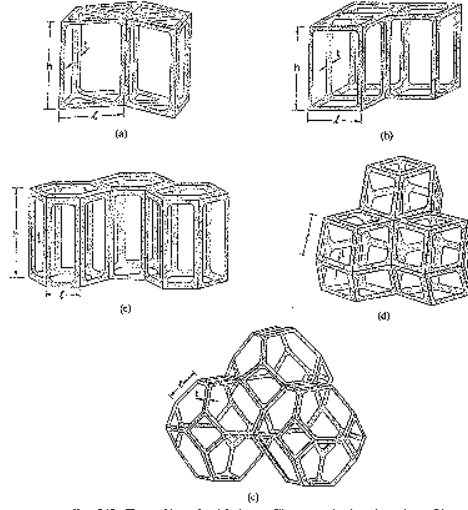


FIG. 2.12. The packing of polyhedra to fill space: (a) triangular prisms, (b) rectangular prisms, (c) hexagonal prisms, (d) rhombo dodecahedra, (e) tetrakaidécaèdres.

FIG. A.7 – Cellules permettant le pavage compact de l'espace : (a) prismes triangulaires, (b) parallélogrammes, (c) Prismes hexagonaux, (d) dodécaèdres rhombiques et (e) tétrakaidécaèdres

sorte de projection d'un modèle plan en trois dimensions. Ils restent tributaires d'essais de caractérisation pour leur modèle. Seule la porosité ressort comme paramètre important.

Warren ([Warren et Kraynik, 1988] et [Warren et Kraynik, 1991] pour des approches bidimensionnel et tridimensionnel) est parti de la poutre pour décrire une mousse à cellules ouvertes, mais il les a placées dans l'espace afin de résumer la structure à un assemblage de tétraèdres réguliers contenant quatre poutres identiques de longueur L . Il suppose pouvoir paver l'espace par des tétraèdres microscopiques réguliers sans introduire une erreur trop grande au niveau macroscopique (ce type de pavage étant théoriquement impossible). Les grandeurs cinématiques des points extrêmes des poutres sont approchées par des déplacements et des rotations affines. Les déformations seront ainsi homogènes. Puis on suppose que les déplacements sont reliés linéairement aux efforts et moments associés. Si on prend tous les déplacements par rapport au sommet S_4 , on obtient la position relative, b_i de chaque sommet, S_i par :

$$b_i = b_i^0 + \delta_i \quad \delta_i = \Delta_i - \Delta_4 \quad i \in \{1; 2; 3\} \quad (\text{A.11})$$

La linéarité entre "déformation" et "contrainte" se traduit par l'existence de module de traction, M , flexion, N , et torsion, L , et par la liaison de compor-

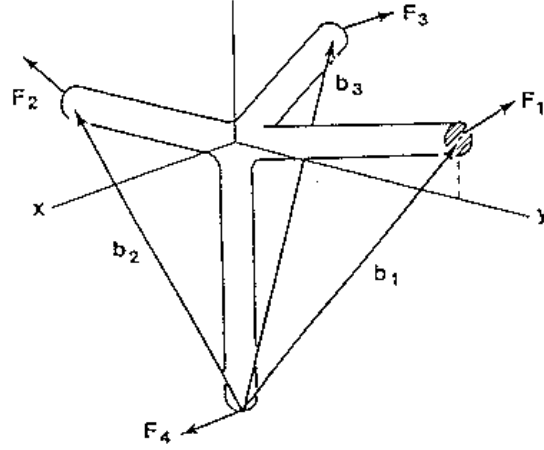


FIG. A.8 – Tétraèdre de référence choisi par Warren

tement :

$$\Delta_i = M \cdot (\underline{\mathbf{F}}_j \cdot \underline{\mathbf{e}}_j) \underline{\mathbf{e}}_j + N \cdot (\underline{\mathbf{e}}_j \wedge \underline{\mathbf{F}}_j) \wedge \underline{\mathbf{e}}_j + L \underline{\psi} \wedge \underline{\mathbf{e}}_j \quad (\text{A.12})$$

Au niveau des équations d'équilibre nous avons en considérant l'assemblage des quatre poutres :

$$\sum_{i=1}^4 \underline{\mathbf{F}}_i = 0 \quad \sum_{i=1}^4 \underline{\mathbf{e}}_i \wedge \underline{\mathbf{F}}_i = 0 \quad (\text{A.13})$$

Puis on simule les essais de cisaillement et de traction sur un tétraèdre, on obtient ainsi le comportement reliant les contraintes de Cauchy définies à partir des forces et moments sur le tétraèdre et les déformations définies de la même façon. Il est à noter que le comportement est caractérisé par une orientation liée à chaque tétraèdre. On suppose une répartition équiprobable au niveau macroscopique des orientations des microstructures tétraédriques. Les contraintes effectives au niveau du volume élémentaire représentatif deviennent alors une moyenne sur toutes les orientations des contraintes liées aux tétraèdres, soit :

$$\begin{aligned} \bar{\sigma} &= \frac{1}{V} \cdot \int_V \sigma(\theta, \varphi, \psi) dv \\ &= \frac{1}{8 \cdot \pi^2} \cdot \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sigma(\theta, \varphi, \psi) \sin \theta d\varphi d\theta d\psi \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

On obtient alors le comportement élastique linéaire au niveau macroscopique

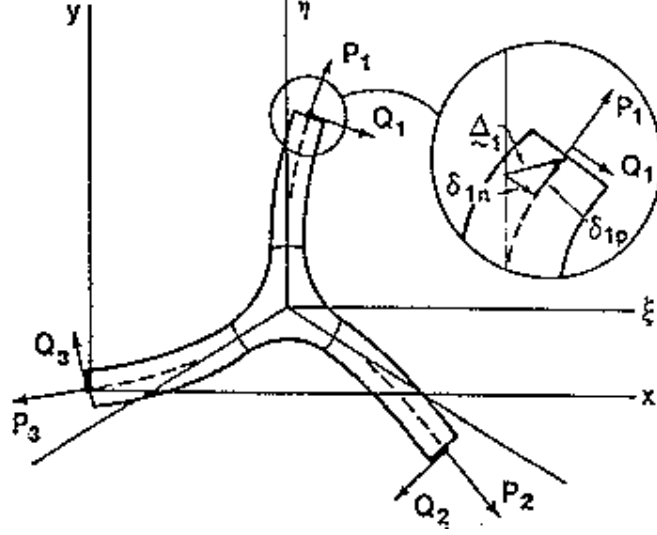


FIG. A.9 – Cinématique du tétraèdre de Warren

suivant :

$$E = \frac{11 \cdot N + 4 \cdot M}{2 \cdot \sqrt{3} \cdot L \cdot (10 \cdot N^2 + 31 \cdot M \cdot N + 4 \cdot M^2)} \quad (\text{A.15})$$

$$\nu = \frac{(N - M) \cdot (5 \cdot N + 5 \cdot M)}{10 \cdot N^2 + 31 \cdot M \cdot N + 4 \cdot M^2}$$

L'introduction de la section droite des poutres, A , et du moment d'inertie $A \cdot q^2$ donne une porosité de $\phi = \frac{A}{2 \cdot \sqrt{3} \cdot L^2}$. Les souplesses de traction et flexion deviennent :

$$M = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{3} \cdot E_s \cdot L \cdot \phi} \quad \text{et} \quad N = \frac{1}{36 \cdot E_s \cdot q^2 \cdot L \cdot \phi^2} \quad (\text{A.16})$$

Ainsi on obtient :

$$\frac{E}{E_s} = \frac{33 \cdot \sqrt{3} \cdot q^2 \cdot \phi^2}{5 \cdot A} \quad \text{pour } \phi \ll 1 \quad (\text{A.17})$$

Pour trois sections droites différentes, on obtient :

section circulaire

$$\frac{q^2}{A} = \frac{1}{4 \cdot \pi} = 0,080 \quad \frac{E}{E_s} = 0,91 \cdot \phi^2 \quad (\text{A.18})$$

section triangulaire

$$\frac{q^2}{A} = \frac{1}{6 \cdot \sqrt{3}} = 0,096 \quad \frac{E}{E_s} = 1,1 \cdot \phi^2 \quad (\text{A.19})$$

section "Plateau"

$$\frac{q^2}{A} = \frac{20 \cdot \sqrt{3} - 11 \cdot \pi}{6 \cdot (2 \cdot \sqrt{3} - \pi)^2} = 0,134 \quad \frac{E}{E_s} = 1,53 \cdot \phi^2 \quad (\text{A.20})$$

A.2.2 Tétrakaidécaèdre

Approche numérique développée par Renz

Dans cette étude, la déformation élastique pour différentes mousses, telles que les mousses en PVC et les mousses en PUR, est calculée à partir de la méthode des éléments finis. Le comportement des mousses est construit à partir de la définition d'une cellule élémentaire. Le choix des auteurs [Renz et Ehrenstein, 1982] porte sur le tétrakidécaèdre comme géométrie de la cellule élémentaire, qui est formée par assemblage de poutres et de plaques.

D'un point de vue de la modélisation numérique, même si la cellule élémentaire est identique pour les deux types de mousses, la différence est faite dans les données de la distribution de matière et des modules d'Young entre les poutres et les plaques. Ces différences de données sont motivées par les observations microscopiques dans les textures des deux types de mousses.

Ainsi, pour les mousses en PVC, le réseau des poutres et des joints est moins imposant que celui des parois. Le choix privilégie donc une distribution de la matière sur les plaques. D'autre part, pour les mousses en PUR, la distribution non homogène de la masse est concentrée sur les poutres et les joints, tandis qu'un faible pourcentage est distribué sur les parois. Les comparaisons des modules élastiques des mousses (comportement global) entre les résultats numériques et les résultats expérimentaux montrent une différence au plus de l'ordre de 50%.

A.2.3 Dodécaèdre

Dans les travaux de Patel et Finnie [Patel et Finnie, 1970], trois composantes importantes dans le comportement des mousses rigides se distinguent :

- La phase gazeuse.

- La phase solide.
- L'arrangement géométrique de ces deux phase (par ex. ceci peut influencer la rupture les parois des cellules par la pression du gaz).

Pour les mousses à porosité fermée, le gaz en captivité est approximativement à la pression atmosphérique. La résistance due au changement de pression du gaz (en supposant le processus isotherme) est de l'ordre du produit de la pression atmosphérique et de la déformation ingénieur. Cette pression va diminuer lors d'éventuelles ruptures des parois des cellules.

Pour les matériaux à porosité fermée, la résistance due à l'écoulement visqueux du gaz est peut importante même à de grandes vitesses de chargement, puisque la résistance du polymère croît considérablement du fait de sa nature viscoélastique. Cette observation conduit les auteurs à négliger la contribution de la phase gazeuse pour les mousses rigides.

Dans cette étude, les auteurs étudient l'influence de l'arrangement géométrique de la structure cellulaire des mousses sur le comportement global. A partir de la définition d'une cellule élémentaire, ils construisent un modèle afin d'expliquer quelques aspects du comportement mécanique des matériaux à structures cellulaires. La cellule retenue est un dodécaèdre pentagonal. Les auteurs généralisent le modèle aux mousses en tenant compte de la morphologie de celles-ci. Le modèle met en évidence, entre autre, deux aspects du comportement :

- L'influence de la direction des parois des cellules par rapport à la direction de chargement sur la résistance des mousses
- Une analyse plus avancée permet de déduire une relation entre la résistance à la compression des mousses et leurs densités.

Le résultat donne une comparaison satisfaisante avec des résultats expérimentaux.

Etude de Ko [Ko, 1965]

Les mousses sont vu ici sans l'influence du gaz et comme des treillis de poutres, la porosité est à priori ouverte. En partant des pavages compacts périodiques de l'espace, l'auteur élabore une répartition des arêtes de la mousse suivant que la pavage est hexagonal, cubique à faces centrées ou volume centré. La répartition obtenue des centres des cellules microscopiques s'effectue suivant un dodécaèdre rhombique trapézoïdal, ou bien un dodécaèdre rhombique pour les pavages les plus compacts. Afin de déterminer le module d'Young et le coefficient de Poisson de ces matériaux considérés comme linéaire élastique, l'auteur effectue un chargement uniaxial pour chacun des pavages retenus. Par le calcul, le chargement est redescendu au niveau des poutres de type Euler-Bernoulli, à section triangulaire, constitutives de la

micro-structure. Pour obtenir les coefficients élastiques, on remonte au niveau macroscopique. Au niveau microstructural, on a, pour ce chargement, trois types de micro chargement de poutre dans le cas du pavage hexagonal de l'espace, et deux types dans le cas du pavage cubique à faces centrées. Ko conclue ainsi sur la détermination du module d'Young et du coefficient de Poisson dans chacun des cas.

A.3 Structures aléatoires

Dans le cadre de ces approches micromécaniques, il est possible de citer l'étude de Christensen [Christensen, 1986]. Il prend la poutre comme élément représentatif de la microstructure (avec une membrane dans le cas de cellule fermée). Il définit deux repères l'un propre lié à la poutre où le premier axe est de direction confondue avec la poutre et le second quelconque. En se plaçant dans un repère quelconque, il effectue une déformation uniaxiale suivant l'un des axes (le troisième par exemple) afin d'obtenir le module d'Young et le coefficient de Poisson de la mousse. Soit :

$$\epsilon'_{33} \neq 0$$

$$\epsilon'_{ij} = 0 \quad i \neq 3, j \neq 3$$

Le passage dans le repère propre permet de déterminer la contrainte grâce à une loi de comportement uniaxiale, $\sigma_{11} = E_m \cdot \epsilon_{11}$, écrite dans le repère propre. Pour passer au niveau macroscopique, Christensen suppose une orientation aléatoire et équiprobable des "fibres" dans la mousse. Il passe toutes les grandeurs dans le repère quelconque fixé et somme suivant toutes les orientations possibles du repère propre. Suivant la composante du tenseur de contrainte choisie, on obtient plusieurs relations liant le module de compression et le module de cisaillement macroscopiques. Cette sommation se traduit par la formule :

$$\left. \frac{\sigma'_{ij}}{\epsilon'_{33}} \right|_{\text{Aléatoire}} = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{\sigma'_{ij}}{\epsilon'_{33}} \sin \theta d\theta d\phi \quad (\text{A.21})$$

On aboutit aux relations :

$$\left. \frac{\sigma'_{ij}}{\epsilon'_{33}} \right|_{Aléatoire} = k + \frac{4}{3} \cdot \mu$$

$$\left. \frac{\sigma'_{ij}}{\epsilon'_{33}} \right|_{Aléatoire} = k - \frac{2}{3} \cdot \mu$$
(A.22)

où k est le module de compression et μ le module de cisaillement. Cela donne au final :

$$k = \frac{c \cdot E_m}{9} \quad \mu = \frac{c \cdot E_m}{15}$$
(A.23)

où c est la fraction volumique de matière et E_m le module d'young du matériau constitutif de la mousse. En terme de module d'Young E et coefficient de Poisson ν macroscopiques cela se traduit par :

$$E = \frac{c \cdot E_m}{6} \quad \nu = \frac{1}{4}$$
(A.24)

Cette approche, comme on l'a déjà citée, peut être étendue au modèle englobant des parois de cellule. Au lieu d'avoir un seul axe de privilégié dans le repère propre, deux deviennent nécessaires pour décrire une membrane (l'axe 1 et 3 par exemple). Le comportement s'y écrit alors :

$$\sigma_{11} = \frac{E_m}{1 - \nu_m^2} \cdot [\epsilon_{11} + \nu_m \cdot \epsilon_{33}]$$

$$\sigma_{33} = \frac{E_m}{1 - \nu_m^2} \cdot [\epsilon_{33} + \nu_m \cdot \epsilon_{11}]$$
(A.25)

On déroule ensuite les calculs de la même façon et les résultats s'écrivent :

$$\left. \frac{k}{k_m} \right|_{Membrane} = \frac{2 \cdot (1 - 2 \cdot \nu_m)}{3 \cdot (1 - \nu_m)} \cdot c \quad \left. \frac{\mu}{\mu_m} \right|_{Membrane} = \frac{(7 - 5 \cdot \nu_m)}{15 \cdot (1 - \nu_m)} \cdot c$$

ou bien

(A.26)

$$\frac{E}{E_m} = \frac{2 \cdot (7 - 5 \cdot \nu_m)}{3 \cdot (1 - \nu_m) \cdot (9 + 5 \cdot \nu_m)} \cdot c \quad \nu = \frac{(1 + 5 \cdot \nu_m)}{(9 + 5 \cdot \nu_m)}$$

Christensen rappelle l'approche possible pour les mousses à cellules fermées par les sphères de Hashin où chaque cellule est considérée comme une inclusion sphérique. Le module de compression obtenu dans ce modèle est :

$$\frac{k}{k_m} = 1 - \frac{3 \cdot (1 - \nu_m) \cdot (1 - c)}{2 \cdot (1 - 2 \cdot \nu_m) + (1 + \nu_m) \cdot (1 - c)} \quad (\text{A.27})$$

et en faisant tendre c vers 0, on peut approcher le résultat par :

$$\begin{aligned} \left. \frac{k}{k_m} \right|_{Hashin} &= \frac{2 \cdot (1 - 2 \cdot \nu_m)}{3 \cdot (1 - \nu_m)} \cdot c \\ \left. \frac{\mu}{\mu_m} \right|_{Hashin} &= \frac{(7 - 5 \cdot \nu_m)}{15 \cdot (1 - \nu_m)} \cdot c \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

On retrouve les mêmes résultats, ce qui d'après Christensen tend à prouver que les propriétés d'une mousse à porosité occluse à faible fraction volumique ne dépend pas de la géométrie de la cellule mais seulement de la fraction volumique de matière.

Annexe B

Résolution jusqu'au troisième ordre du problème d'homogénéisation continu (SH1)

Nous commençons donc par une résolution successive du problème. A l'ordre ε^{-2} , nous avons l'unique équation :

$$L_{c1}^{-2} \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{u}}_0 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{div}}_y \left[\underline{\underline{\mathbf{a}}} : (\underline{\mathbf{u}}_0 \otimes \underline{\nabla}_y) \right] = 0 \quad (\text{B.1})$$

La solution est alors les champs constants sur la période, le champs $\underline{\mathbf{u}}_0$ est par conséquent indépendant de la variable $\underline{\mathbf{y}}$. Nous passons donc à l'ordre ε^{-1} où nous commençons à avoir un système d'équation :

$$L_c^{-2} \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{u}}_1 \\ \underline{\phi}_1 \end{pmatrix} = -L_c^{-1} \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{u}}_0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.2})$$

soit, $\underline{\mathbf{div}}_x \left[\underline{\underline{\mathbf{a}}}(\underline{\mathbf{y}}) : \underline{\mathbf{u}}_0 \otimes \underline{\nabla}_y \right] + \underline{\mathbf{div}}_y \left[\underline{\underline{\mathbf{a}}}(\underline{\mathbf{y}}) : \left(\underline{\mathbf{u}}_0 \otimes \underline{\nabla}_x + \underline{\mathbf{u}}_1 \otimes \underline{\nabla}_y + \underline{\underline{\mathbf{e}}} : \underline{\phi}_1 \right) \right] = 0$

et

$$\begin{aligned} & \underline{\mathbf{div}}_y \left[\underline{\underline{\mathbf{b}}}(\underline{\mathbf{y}}) : \underline{\phi}_1 \otimes \underline{\nabla}_y \right] \\ & - \underline{\underline{\mathbf{e}}} : \left(\underline{\underline{\mathbf{a}}}(\underline{\mathbf{y}}) : \left(\underline{\mathbf{u}}_0 \otimes \underline{\nabla}_x + \underline{\mathbf{u}}_1 \otimes \underline{\nabla}_y + \underline{\underline{\mathbf{e}}} : \underline{\phi}_1 \right) \right) + \underline{\mathbf{c}} = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

Pour s'affranchir des mouvements rigidifiants, on pose : $\langle \underline{\mathbf{u}}_1 \rangle = 0$. On en déduit alors par la linéarité du problème que les solutions $\underline{\mathbf{u}}_1$ et $\underline{\phi}_1$ s'écrivent

sous la forme :

$$\begin{aligned}\underline{u}_1(\underline{x}, \underline{y}) &= \underline{U}_1(\underline{x}) + \underline{\underline{X}}_{\underline{u}}(\underline{y}) : \underline{u}_0 \otimes \underline{\nabla}_x + \underline{\underline{T}}_{\underline{u}} \cdot \underline{c} \\ \underline{\phi}_1(\underline{x}, \underline{y}) &= \underline{\underline{X}}_{\phi}(\underline{y}) : \underline{u}_0 \otimes \underline{\nabla}_x + \underline{\underline{T}}_{\phi} \cdot \underline{c}\end{aligned}\quad (\text{B.4})$$

avec $\langle \underline{\underline{X}}_{\underline{u}} \rangle = 0$, $\langle \underline{\underline{T}}_{\underline{u}} \rangle = 0$, $\langle \underline{\underline{X}}_{\phi} \rangle = 0$ et $\langle \underline{\underline{T}}_{\phi} \rangle = 0$. La relation de compatibilité est automatique à cet ordre, et la deuxième équation donne en moyenne :

$$\underline{\text{div}}_x \langle \underline{\underline{\nu}}_0 \rangle - \underline{\underline{e}} : \langle \underline{\underline{\sigma}}_0 \rangle + \underline{c} = 0 \quad (\text{B.5})$$

avec $\langle \underline{\underline{\nu}}_0 \rangle = 0$, on obtient ainsi :

$$-\underline{\underline{e}} : \langle \underline{\underline{\sigma}}_0 \rangle + \underline{c} = 0 \quad (\text{B.6})$$

, et en réinjectant le comportement microscopique l'approximation du comportement macroscopique au premier ordre apparaît :

$$\begin{aligned}\underline{\underline{\Sigma}}_0 &= \left\langle \underline{\underline{a}} : \left(\underline{\underline{1}} + \underline{\nabla}_y \cdot \underline{\underline{X}}_{\underline{u}} + \underline{\underline{e}} \cdot \underline{\underline{X}}_{\phi} \right) + \underline{\underline{b}} : \underline{\nabla}_y \cdot \underline{\underline{X}}_{\phi} \right\rangle : \underline{u}_0 \otimes \underline{\nabla}_x \\ &+ \left\langle \underline{\underline{a}} : \left(\underline{\nabla}_y \otimes \underline{\underline{T}}_{\underline{u}} + \underline{\underline{e}} \cdot \underline{\underline{T}}_{\phi} \right) + \underline{\underline{b}} : \underline{\nabla}_y \otimes \underline{\underline{T}}_{\phi} \right\rangle \cdot \underline{c}\end{aligned}\quad (\text{B.7})$$

et évidemment,

$$\underline{\underline{M}}_0 = 0 \quad (\text{B.8})$$

On obtient ainsi le comportement macroscopique homogénéisé au premier ordre donné par les tenseurs :

$$\begin{aligned}\underline{\underline{a}}_0 &= \underline{\underline{a}} : \left(\underline{\underline{1}} + \underline{\nabla}_y \otimes \underline{\underline{X}}_{\underline{u}} + \underline{\underline{e}} \cdot \underline{\underline{X}}_{\phi} \right) + \underline{\underline{b}} : \underline{\underline{X}}_{\phi} \otimes \underline{\nabla}_x \\ \underline{\underline{A}}_0 &= \left\langle \underline{\underline{a}}_0 \right\rangle \\ \underline{\underline{k}}_0 &= \underline{\underline{a}} : \left(\underline{\nabla}_y \otimes \underline{\underline{T}}_{\underline{u}} + \underline{\underline{e}} \cdot \underline{\underline{T}}_{\phi} \right) + \underline{\underline{b}} : \underline{\nabla}_y \otimes \underline{\underline{T}}_{\phi} \\ \underline{\underline{K}}_0 &= \left\langle \underline{\underline{k}}_0 \right\rangle\end{aligned}\quad (\text{B.9})$$

où

$$\underline{\underline{\Sigma}}_0 = \underline{\underline{A}}_0 : \underline{u}_0 \otimes \underline{\nabla}_y + \underline{\underline{K}}_0 \cdot \underline{c} \quad (\text{B.10})$$

Passons à un ordre supérieur en ε , le système devient :

$$L_c^{-2} \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{u}}_2 \\ \underline{\phi}_2 \end{pmatrix} = -L_c^{-1} \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{u}}_1 \\ \underline{\phi}_1 \end{pmatrix} - L_c^0 \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{u}}_0 \\ 0 \end{pmatrix} - \left| \frac{\underline{\mathbf{f}}}{0} \right. \quad (\text{B.11})$$

La relation de compatibilité nous donne :

$$\underline{\text{div}}_x \left\langle \underline{\underline{\underline{\mathbf{a}}}}(\underline{\mathbf{y}}) : \left(\underline{\mathbf{u}}_0 \otimes \underline{\nabla}_x + \underline{\mathbf{u}}_1 \otimes \underline{\nabla}_y + \underline{\underline{\underline{\mathbf{e}}}} \cdot \underline{\phi}_1 \right) + \underline{\underline{\underline{\mathbf{b}}}} : \underline{\phi}_1 \otimes \underline{\nabla}_y \right\rangle + \underline{\mathbf{f}} = (\text{B.12})$$

Elle permet d'éliminer la force volumique extérieure du système précédent, le système se transforme alors en

$$\begin{cases} \underline{\text{div}}_x \underline{\underline{\underline{\sigma}}}_0 + \underline{\text{div}}_y \underline{\underline{\underline{\sigma}}}_1 - \underline{\text{div}}_x \underline{\underline{\underline{\Sigma}}}_0 = 0 \\ \underline{\text{div}}_x \underline{\underline{\underline{\nu}}}_1 + \underline{\text{div}}_y \underline{\underline{\underline{\nu}}}_2 - \underline{\underline{\underline{\mathbf{e}}}} : \underline{\underline{\underline{\Sigma}}}_1 = 0 \end{cases} \quad (\text{B.13})$$

La cinématique solution de l'ordre précédent des champs $\underline{\mathbf{u}}_1$ et $\underline{\phi}_1$ permet de préciser le terme de source de l'équation, elle se met sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} L_c^{-2} \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{u}}_2 \\ \underline{\phi}_2 \end{pmatrix} = & -L_c^{-1} \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{U}}_1 \\ 0 \end{pmatrix} - L_c^{-1} \begin{pmatrix} \underline{\underline{\underline{\mathbf{X}}}}_u(\underline{\mathbf{y}}) : \underline{\mathbf{u}}_0 \otimes \underline{\nabla}_x + \underline{\underline{\underline{\mathbf{T}}}}_u \cdot \underline{\underline{\underline{\mathbf{c}}}} \\ \underline{\underline{\underline{\mathbf{X}}}}_\phi(\underline{\mathbf{y}}) : \underline{\mathbf{u}}_0 \otimes \underline{\nabla}_x + \underline{\underline{\underline{\mathbf{T}}}}_\phi \cdot \underline{\underline{\underline{\mathbf{c}}}} \end{pmatrix} \\ & - L_c^0 \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{u}}_0 \\ 0 \end{pmatrix} - \left[\underline{\text{div}}_x \begin{pmatrix} \underline{\underline{\underline{\mathbf{A}}}}_0 : \underline{\mathbf{u}}_0 \otimes \underline{\nabla}_x + \underline{\underline{\underline{\mathbf{K}}}}_0 \cdot \underline{\underline{\underline{\mathbf{c}}}} \\ 0 \end{pmatrix} \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

Les deux premiers termes ont la même structure que le système précédent avec un couple volumique, $\underline{\underline{\underline{\mathbf{c}}}}$, nul. On s'affranchit encore des mouvements rigidifiants périodiques en imposant : $\langle \underline{\mathbf{u}}_2 \rangle = 0$. Puis la linéarité du problème nous permet de reprendre le même type de solution qu'à l'étape précédente et d'y additionner la solution particulière à ce nouvel ordre. Ainsi les solutions $\underline{\mathbf{u}}_2$ et $\underline{\phi}_2$ s'écrivent sous la forme :

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{u}}_2(\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{y}}) = & \underline{\mathbf{U}}_2(\underline{\mathbf{x}}) + \underline{\underline{\underline{\mathbf{X}}}}_u(\underline{\mathbf{y}}) : \underline{\mathbf{U}}_1 \otimes \underline{\nabla}_x + \underline{\underline{\underline{\mathbf{Y}}}}_u(\underline{\mathbf{y}}) : \underline{\mathbf{u}}_0 \otimes \underline{\nabla}_x \otimes \underline{\nabla}_x \\ & + \underline{\underline{\underline{\mathbf{Q}}}}_u : \underline{\underline{\underline{\mathbf{c}}}} \otimes \underline{\nabla}_x \\ \underline{\phi}_2(\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{y}}) = & \underline{\underline{\underline{\mathbf{X}}}}_\phi(\underline{\mathbf{y}}) : \underline{\mathbf{U}}_1 \otimes \underline{\nabla}_x + \underline{\underline{\underline{\mathbf{Y}}}}_\phi(\underline{\mathbf{y}}) : \underline{\mathbf{u}}_0 \otimes \underline{\nabla}_x \otimes \underline{\nabla}_x \\ & + \underline{\underline{\underline{\mathbf{Q}}}}_\phi : \underline{\underline{\underline{\mathbf{c}}}} \otimes \underline{\nabla}_x. \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

où $\langle \underline{\underline{\underline{\mathbf{Y}}}}_u \rangle = 0$, $\langle \underline{\underline{\underline{\mathbf{Y}}}}_\phi \rangle = 0$, $\langle \underline{\underline{\underline{\mathbf{Q}}}}_u \rangle = 0$ et $\langle \underline{\underline{\underline{\mathbf{Q}}}}_\phi \rangle = 0$. Nous pouvons maintenant exprimer les contraintes liées à cet ordre, en introduisant de nouveaux

tenseurs,

$$\begin{aligned}
\underline{\underline{\underline{a_1}}} &= \underline{\underline{\underline{a}}}(y) : \left(\underline{\underline{\underline{X_u}}}(y) + \underline{\underline{\underline{Y_u}}}(y) \triangleleft \underline{\underline{\nabla}}_y + \underline{\underline{\underline{e}}} \cdot \underline{\underline{\underline{Y_\phi}}}(y) \right) + \underline{\underline{\underline{b}}}(y) : \left(\underline{\underline{\underline{X_\phi}}}(y) + \underline{\underline{\underline{Y_\phi}}}(y) \triangleleft \underline{\underline{\nabla}}_y \right) \\
\underline{\underline{\underline{k_1}}} &= \underline{\underline{\underline{a}}}(y) : \left(\underline{\underline{\nabla}}_y \cdot \underline{\underline{\underline{Q_u}}} + \underline{\underline{\underline{e}}} \cdot \underline{\underline{\underline{Q_\phi}}} \right) + \underline{\underline{\underline{b}}}(y) : \left(\underline{\underline{\nabla}}_y \cdot \underline{\underline{\underline{Q_\phi}}} + \underline{\underline{\underline{T_\phi}}} \right) \\
\underline{\underline{\underline{b_1}}} &= \underline{\underline{\underline{b}}}: \left(\underline{\underline{\underline{1}}} + \underline{\underline{\nabla}}_y \otimes \underline{\underline{\underline{X_u}}} + \underline{\underline{\underline{e}}} \cdot \underline{\underline{\underline{X_\phi}}} \right) + \underline{\underline{\underline{c}}} : \underline{\underline{\nabla}}_y \otimes \underline{\underline{\underline{X_\phi}}} \\
\underline{\underline{\underline{h_1}}} &= \underline{\underline{\underline{b}}}: \left(\underline{\underline{\nabla}}_y \otimes \underline{\underline{\underline{T_u}}} + \underline{\underline{\underline{e}}} \cdot \underline{\underline{\underline{T_\phi}}} \right) + \underline{\underline{\underline{c}}} : \underline{\underline{\nabla}}_y \otimes \underline{\underline{\underline{T_\phi}}},
\end{aligned} \tag{B.16}$$

nous avons :

$$\begin{aligned}
\underline{\underline{\underline{\sigma_1}}} &= \underline{\underline{\underline{a_0}}} : \underline{\underline{\nabla}}_x \underline{\underline{\underline{U_1}}} + \underline{\underline{\underline{a_1}}} : \underline{\underline{\nabla}}_x \underline{\underline{\nabla}}_x \underline{\underline{\underline{u_0}}} + \underline{\underline{\underline{k_1}}} : \underline{\underline{\nabla}}_x \underline{\underline{\underline{c}}} \\
\underline{\underline{\underline{\nu_1}}} &= \underline{\underline{\underline{b_1}}} : \underline{\underline{\nabla}}_x \underline{\underline{\underline{u_0}}} + \underline{\underline{\underline{h_1}}} \cdot \underline{\underline{\underline{c}}}.
\end{aligned} \tag{B.17}$$

On obtient ainsi au niveau macroscopique et à l'ordre ε^0 en force et à l'ordre ε^1 en moment, pour l'équilibre :

$$\begin{cases} \underline{\underline{\text{div}_x}} \underline{\underline{\underline{\Sigma_0}}} + \underline{\underline{\underline{f}}} = 0 \\ \underline{\underline{\text{div}_x}} \underline{\underline{\underline{M_1}}} - \underline{\underline{\underline{e}}} : \underline{\underline{\underline{\Sigma_1}}} = 0 \end{cases} \tag{B.18}$$

avec pour le comportement

$$\begin{aligned}
\underline{\underline{\underline{\Sigma_1}}} &= \underline{\underline{\underline{A_0}}} : \underline{\underline{\underline{U_1}}} \otimes \underline{\underline{\nabla}}_x + \underline{\underline{\underline{A_1}}} : \underline{\underline{\underline{u_0}}} \otimes \underline{\underline{\nabla}}_x \otimes \underline{\underline{\nabla}}_x + \underline{\underline{\underline{K_1}}} : \underline{\underline{\underline{c}}} \otimes \underline{\underline{\nabla}}_x \\
\underline{\underline{\underline{M_1}}} &= \underline{\underline{\underline{B_1}}} : \underline{\underline{\underline{u_0}}} \otimes \underline{\underline{\nabla}}_x + \underline{\underline{\underline{H_1}}} \cdot \underline{\underline{\underline{c}}}
\end{aligned} \tag{B.19}$$

où $\underline{\underline{\underline{A_1}}} = \left\langle \underline{\underline{\underline{a_1}}} \right\rangle$, $\underline{\underline{\underline{K_1}}} = \left\langle \underline{\underline{\underline{k_1}}} \right\rangle$, $\underline{\underline{\underline{B_1}}} = \left\langle \underline{\underline{\underline{b_1}}} \right\rangle$ et $\underline{\underline{\underline{H_1}}} = \left\langle \underline{\underline{\underline{h_1}}} \right\rangle$.

Si nous arrêtons notre théorie à cet ordre, le comportement macroscopique correspondant à la somme des différents ordres impliqués est à l'ordre ε :

$$\begin{aligned}
\underline{\underline{\underline{\Sigma}}} &= \underline{\underline{\underline{A_0}}} : \underline{\underline{\underline{U}}} \otimes \underline{\underline{\nabla}} + \varepsilon \underline{\underline{\underline{A_1}}} : \underline{\underline{\underline{U}}} \otimes \underline{\underline{\nabla}} \otimes \underline{\underline{\nabla}} + \varepsilon \underline{\underline{\underline{K_1}}} : \underline{\underline{\underline{c}}} \otimes \underline{\underline{\nabla}} \\
\underline{\underline{\underline{M}}} &= \varepsilon \underline{\underline{\underline{B_1}}} : \underline{\underline{\underline{U}}} \otimes \underline{\underline{\nabla}} + \varepsilon \underline{\underline{\underline{H_1}}} \cdot \underline{\underline{\underline{c}}}
\end{aligned} \tag{B.20}$$

puisque le calcul donne $\langle \underline{\underline{\underline{u}}} \rangle = \underline{\underline{\underline{U}}} = \underline{\underline{\underline{u_0}}} + \varepsilon \langle \underline{\underline{\underline{u_1}}} \rangle + \dots$. L'équilibre s'écrit ici :

$$\begin{cases} \underline{\underline{\text{div}}} \underline{\underline{\underline{\Sigma}}} + \underline{\underline{\underline{f}}} = 0 & \text{à l'ordre } \varepsilon^0 \\ \underline{\underline{\text{div}}} \underline{\underline{\underline{M}}} - \underline{\underline{\underline{e}}} : \underline{\underline{\underline{\Sigma}}} + \underline{\underline{\underline{c}}} = 0 & \text{à l'ordre } \varepsilon \end{cases} \tag{B.21}$$

Enfin, afin d'affiner notre approximation du milieu, nous allons examiner l'ordre suivant en ε , ce dernier permet de déterminer les champs $\underline{\mathbf{u}}_3$ et $\underline{\boldsymbol{\phi}}_3$ mais la structure des ordres suivants étant la même les tenseurs de localisation seront les mêmes pour tous les ordres supérieurs. A l'ordre ε^{-3} , le système à résoudre est :

$$L_c^{-2} \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{u}}_3 \\ \underline{\boldsymbol{\phi}}_3 \end{pmatrix} = -L_c^{-1} \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{u}}_2 \\ \underline{\boldsymbol{\phi}}_2 \end{pmatrix} - L_c^0 \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{u}}_1 \\ \underline{\boldsymbol{\phi}}_1 \end{pmatrix} \quad (\text{B.22})$$

soit en contrainte,

$$\begin{cases} \underline{\text{div}}_x \underline{\boldsymbol{\sigma}}_1 + \underline{\text{div}}_y \underline{\boldsymbol{\sigma}}_2 = 0 \\ \underline{\text{div}}_x \underline{\boldsymbol{\nu}}_2 + \underline{\text{div}}_y \underline{\boldsymbol{\nu}}_3 - \underline{\mathbf{e}} : \underline{\boldsymbol{\sigma}}_2 = 0 \end{cases} \quad (\text{B.23})$$

Comme précédemment, on remplace les solutions issues des systèmes précédents dans le nouveau système, en substituant $(\underline{\mathbf{u}}_1, \underline{\boldsymbol{\phi}}_1)$ et $(\underline{\mathbf{u}}_2, \underline{\boldsymbol{\phi}}_2)$, le problème devient :

$$\begin{aligned} L_c^{-2} \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{u}}_3 \\ \underline{\boldsymbol{\phi}}_3 \end{pmatrix} = & -L_c^{-1} \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{U}}_2 \\ 0 \end{pmatrix} - L_c^{-1} \begin{pmatrix} \underline{\underline{\underline{\mathbf{X}}}}_u : \underline{\mathbf{U}}_1 \otimes \underline{\nabla}_x \\ \underline{\underline{\underline{\mathbf{X}}}}_\phi : \underline{\mathbf{U}}_1 \otimes \underline{\nabla}_x \end{pmatrix} - L_c^0 \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{U}}_1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ & - L_c^0 \begin{pmatrix} \underline{\underline{\underline{\mathbf{X}}}}_u : \underline{\mathbf{u}}_0 \otimes \underline{\nabla}_x + \underline{\underline{\underline{\mathbf{T}}}}_u \cdot \underline{\mathbf{c}} \\ \underline{\underline{\underline{\mathbf{X}}}}_\phi : \underline{\mathbf{u}}_0 \otimes \underline{\nabla}_x + \underline{\underline{\underline{\mathbf{T}}}}_\phi \cdot \underline{\mathbf{c}} \end{pmatrix} \\ & - L_c^{-1} \begin{pmatrix} \underline{\underline{\underline{\mathbf{Y}}}}_u : \underline{\mathbf{u}}_0 \otimes \underline{\nabla}_x \otimes \underline{\nabla}_x + \underline{\underline{\underline{\mathbf{Q}}}}_u : \underline{\mathbf{c}} \otimes \underline{\nabla}_x \\ \underline{\underline{\underline{\mathbf{Y}}}}_\phi : \underline{\mathbf{u}}_0 \otimes \underline{\nabla}_x \otimes \underline{\nabla}_x + \underline{\underline{\underline{\mathbf{Q}}}}_\phi : \underline{\mathbf{c}} \otimes \underline{\nabla}_x \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{B.24})$$

Pour la résolution, on fixe : $\langle \underline{\mathbf{u}}_3 \rangle = 0$, on retrouve la somme des deux types de systèmes précédents plus un nouveau type, les solutions sont alors :

$$\left\{ \begin{aligned} \underline{\mathbf{u}}_3(\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{y}}) = & \underline{\mathbf{U}}_3(\underline{\mathbf{x}}) + \underline{\underline{\underline{\mathbf{X}}}}_u(\underline{\mathbf{y}}) : \underline{\mathbf{U}}_2 \otimes \underline{\nabla}_x + \underline{\underline{\underline{\mathbf{Y}}}}_u(\underline{\mathbf{y}}) : \underline{\mathbf{U}}_1 \otimes \underline{\nabla}_x \otimes \underline{\nabla}_x \\ & + \underline{\underline{\underline{\mathbf{Z}}}}_u(\underline{\mathbf{y}}) : \underline{\mathbf{u}}_0 \otimes \underline{\nabla}_x \otimes \underline{\nabla}_x \otimes \underline{\nabla}_x + \underline{\underline{\underline{\mathbf{R}}}}_u : \underline{\mathbf{c}} \otimes \underline{\nabla}_x \otimes \underline{\nabla}_x \\ \underline{\boldsymbol{\phi}}_3(\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{y}}) = & \underline{\underline{\underline{\mathbf{X}}}}_\phi(\underline{\mathbf{y}}) : \underline{\mathbf{U}}_2 \otimes \underline{\nabla}_x + \underline{\underline{\underline{\mathbf{Y}}}}_\phi(\underline{\mathbf{y}}) : \underline{\mathbf{U}}_1 \otimes \underline{\nabla}_x \otimes \underline{\nabla}_x \\ & + \underline{\underline{\underline{\mathbf{Z}}}}_\phi(\underline{\mathbf{y}}) : \underline{\mathbf{u}}_0 \otimes \underline{\nabla}_x \otimes \underline{\nabla}_x \otimes \underline{\nabla}_x + \underline{\underline{\underline{\mathbf{R}}}}_\phi : \underline{\mathbf{c}} \otimes \underline{\nabla}_x \otimes \underline{\nabla}_x \end{aligned} \right. \quad (\text{B.25})$$

où $\langle \underline{\underline{\underline{\mathbf{Z}}}}_u \rangle = 0$, $\langle \underline{\underline{\underline{\mathbf{Z}}}}_\phi \rangle = 0$, $\langle \underline{\underline{\underline{\mathbf{R}}}}_u \rangle = 0$, $\langle \underline{\underline{\underline{\mathbf{R}}}}_\phi \rangle = 0$. Nous utilisons de

nouveau le comportement, à savoir,

$$\begin{cases} \underline{\underline{\sigma}}_2 = \underline{\underline{a}} : \left(\underline{u}_2 \otimes \underline{\nabla}_x + \underline{u}_3 \otimes \underline{\nabla}_y + \underline{e} \cdot \underline{\phi}_3 \right) + \underline{\underline{b}} : \left(\underline{\phi}_2 \otimes \underline{\nabla}_x + \underline{\phi}_3 \otimes \underline{\nabla}_y \right) \\ \underline{\underline{\nu}}_2 = {}^t \underline{\underline{b}} : \left(\underline{u}_1 \otimes \underline{\nabla}_x + \underline{u}_2 \otimes \underline{\nabla}_y + \underline{e} \cdot \underline{\phi}_2 \right) + \underline{\underline{c}} : \left(\underline{\phi}_1 \otimes \underline{\nabla}_x + \underline{\phi}_2 \otimes \underline{\nabla}_y \right) \end{cases} \quad (\text{B.26})$$

et il vient après toutes les substitutions :

$$\begin{cases} \underline{\underline{\sigma}}_2 = \underline{\underline{a}}_0 : \underline{U}_2 \otimes \underline{\nabla}_x + \underline{\underline{a}}_1 : \underline{U}_1 \otimes \underline{\nabla}_x \otimes \underline{\nabla}_x + \underline{\underline{a}}_2 : \underline{u}_0 \otimes \underline{\nabla}_x \otimes \underline{\nabla}_x \otimes \underline{\nabla}_x \\ \quad + \underline{\underline{k}}_2 : \underline{c} \otimes \underline{\nabla}_x \otimes \underline{\nabla}_x \\ \underline{\underline{\nu}}_2 = \underline{\underline{b}}_1 : \underline{U}_1 \otimes \underline{\nabla}_x + \underline{\underline{b}}_2 : \underline{u}_0 \otimes \underline{\nabla}_x \otimes \underline{\nabla}_x + \underline{\underline{h}}_2 : \underline{c} \otimes \underline{\nabla}_x \end{cases} \quad (\text{B.27})$$

avec de nouveaux tenseurs $\underline{\underline{a}}_2$, $\underline{\underline{k}}_2$, $\underline{\underline{b}}_2$ et $\underline{\underline{h}}_2$:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{a}}_2 &= \underline{\underline{a}} : \left(\underline{\underline{Y}}_u(\underline{y}) + \underline{\nabla}_y \otimes \underline{\underline{Z}}_u(\underline{y}) + \underline{e} \cdot \underline{\underline{Z}}_\phi(\underline{y}) \right) + \underline{\underline{b}} : \left(\underline{\underline{Y}}_\phi(\underline{y}) + \underline{\nabla}_y \otimes \underline{\underline{Z}}_\phi(\underline{y}) \right) \\ \underline{\underline{k}}_2 &= \underline{\underline{a}} : \left(\underline{Q}_u + \underline{\nabla}_y \otimes \underline{R}_u + \underline{e} \cdot \underline{R}_\phi \right) + \underline{\underline{b}} : \left(\underline{Q}_\phi + \underline{\nabla}_y \otimes \underline{R}_\phi \right) \\ \underline{\underline{b}}_2 &= {}^t \underline{\underline{b}} : \left(\underline{\underline{X}}_u(\underline{y}) + \underline{\nabla}_y \otimes \underline{\underline{Y}}_u(\underline{y}) + \underline{e} \cdot \underline{\underline{Y}}_\phi(\underline{y}) \right) + \underline{\underline{c}} : \left(\underline{\underline{X}}_\phi(\underline{y}) + \underline{\nabla}_y \otimes \underline{\underline{Y}}_\phi(\underline{y}) \right) \\ \underline{\underline{h}}_2 &= {}^t \underline{\underline{b}} : \left(\underline{T}_u + \underline{\nabla}_y \otimes \underline{Q}_u + \underline{e} \cdot \underline{Q}_\phi \right) + \underline{\underline{c}} : \left(\underline{T}_\phi + \underline{\nabla}_y \otimes \underline{Q}_\phi \right) \end{aligned} \quad (\text{B.28})$$

Les moyennes de ces tenseurs sont introduites : $\underline{\underline{A}}_2 = \left\langle \underline{\underline{a}}_2 \right\rangle$, $\underline{\underline{K}}_2 = \left\langle \underline{\underline{k}}_2 \right\rangle$,

$\underline{\underline{B}}_2 = \left\langle \underline{\underline{b}}_2 \right\rangle$ et $\underline{\underline{H}}_2 = \left\langle \underline{\underline{h}}_2 \right\rangle$. Ainsi au second ordre en ε , le développement des contraintes macroscopiques est :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\Sigma}}_2 &= \underline{\underline{A}}_0 : \underline{U}_2 \otimes \underline{\nabla}_x + \underline{\underline{A}}_1 : \underline{U}_1 \otimes \underline{\nabla}_x \otimes \underline{\nabla}_x + \underline{\underline{A}}_2 : \underline{u}_0 \otimes \underline{\nabla}_x \otimes \underline{\nabla}_x \otimes \underline{\nabla}_x \\ &\quad + \underline{\underline{K}}_2 : \underline{c} \otimes \underline{\nabla}_x \otimes \underline{\nabla}_x \\ \underline{\underline{M}}_2 &= \underline{\underline{B}}_1 : \underline{U}_1 \otimes \underline{\nabla}_x + \underline{\underline{B}}_2 : \underline{u}_0 \otimes \underline{\nabla}_x \otimes \underline{\nabla}_x + \underline{\underline{H}}_2 : \underline{c} \otimes \underline{\nabla}_x \end{aligned} \quad (\text{B.29})$$

On remonte finalement à l'approximation des contraintes macroscopiques jusqu'au second ordre en ε , elles valent :

$$\begin{aligned}
\underline{\underline{\Sigma}} &= \underline{\underline{A_0}} : \underline{U} \otimes \underline{\nabla} + \varepsilon \underline{\underline{A_1}} : \underline{U} \otimes \underline{\nabla} \otimes \underline{\nabla} + \varepsilon^2 \underline{\underline{A_2}} : \underline{U} \otimes \underline{\nabla} \otimes \underline{\nabla} \otimes \underline{\nabla} \\
&\quad + \varepsilon \underline{\underline{K_1}} : \underline{c} \otimes \underline{\nabla} + \varepsilon^2 \underline{\underline{K_2}} : \underline{c} \otimes \underline{\nabla} \otimes \underline{\nabla} \\
\underline{\underline{M}} &= \varepsilon \underline{\underline{B_1}} : \underline{U} \otimes \underline{\nabla} + \varepsilon^2 \underline{\underline{B_2}} : \underline{U} \otimes \underline{\nabla} \otimes \underline{\nabla} + \varepsilon \underline{\underline{H_1}} \cdot \underline{c} + \varepsilon^2 \underline{\underline{H_2}} : \underline{c} \otimes \underline{\nabla}
\end{aligned} \tag{B.30}$$

On garde toujours les équations d'équilibre :

$$\begin{cases} \underline{\text{div}} \underline{\underline{\Sigma}} + \underline{f} = 0 & \text{à l'ordre } \varepsilon^1 \\ \underline{\text{div}} \underline{\underline{M}} - \underline{e} : \underline{\underline{\Sigma}} + \underline{c} = 0 & \text{à l'ordre } \varepsilon^2 \end{cases} \tag{B.31}$$

Annexe C

Résolution jusqu'au troisième ordre du problème d'homogénéisation continu (SH2)

On se place ici dans le cadre du schéma (SH2) d'homogénéisation que nous allons résoudre dans cette annexe. Les systèmes à résoudre jusqu'au troisième ordre sont : en ε^{-2} ,

$$\underline{\text{div}}_y \left[\underline{\underline{\underline{a}}} : \underline{\underline{\underline{u}}}_0 \otimes \underline{\underline{\nabla}}_y + \underline{\underline{\underline{b}}} : \left(\underline{\underline{\phi}}_1 \otimes \underline{\underline{\nabla}}_y \right) \right] = 0 \quad (\text{C.1})$$

et

$$\underline{\text{div}}_y \left[{}^t \underline{\underline{\underline{b}}} : \underline{\underline{\underline{u}}}_0 \otimes \underline{\underline{\nabla}}_y + \underline{\underline{\underline{c}}} : \underline{\underline{\phi}}_1 \otimes \underline{\underline{\nabla}}_y \right] = 0 \quad (\text{C.2})$$

en ε^{-1} ,

$$\begin{aligned} & \underline{\text{div}}_x \left[\underline{\underline{\underline{a}}} : \underline{\underline{\underline{u}}}_0 \otimes \underline{\underline{\nabla}}_y + \underline{\underline{\underline{b}}} : \left(\underline{\underline{\phi}}_1 \otimes \underline{\underline{\nabla}}_y \right) \right] \\ & + \underline{\text{div}}_y \left[\underline{\underline{\underline{a}}} : \left(\underline{\underline{\underline{u}}}_0 \otimes \underline{\underline{\nabla}}_x + \underline{\underline{\underline{u}}}_1 \otimes \underline{\underline{\nabla}}_y + \underline{\underline{\underline{e}}} : \underline{\underline{\phi}}_1 \right) + \underline{\underline{\underline{b}}} : \left(\underline{\underline{\phi}}_1 \otimes \underline{\underline{\nabla}}_x + \underline{\underline{\phi}}_2 \otimes \underline{\underline{\nabla}}_y \right) \right] \quad (\text{C.3}) \\ & = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \underline{\text{div}}_y \left[{}^t \underline{\underline{\underline{b}}} : \left(\underline{\underline{\underline{u}}}_0 \otimes \underline{\underline{\nabla}}_x + \underline{\underline{\underline{u}}}_1 \otimes \underline{\underline{\nabla}}_y + \underline{\underline{\underline{e}}} : \underline{\underline{\phi}}_1 \right) + \underline{\underline{\underline{c}}} : \left(\underline{\underline{\phi}}_1 \otimes \underline{\underline{\nabla}}_x + \underline{\underline{\phi}}_2 \otimes \underline{\underline{\nabla}}_y \right) \right] \quad (\text{C.4}) \\ & + \underline{\text{div}}_x \left[\underline{\underline{\underline{c}}} : \underline{\underline{\phi}}_1 \otimes \underline{\underline{\nabla}}_y \right] - \underline{\underline{\underline{e}}} \cdot \left(\underline{\underline{\underline{a}}} : \underline{\underline{\underline{u}}}_0 \otimes \underline{\underline{\nabla}}_y + \underline{\underline{\underline{b}}} : \underline{\underline{\phi}}_1 \otimes \underline{\underline{\nabla}}_y \right) = 0 \end{aligned}$$

en ε^0 ,

$$\begin{aligned} & \underline{\text{div}}_x \left[\underline{\underline{\underline{a}}} : \left(\underline{\underline{\underline{u}}}_0 \otimes \underline{\underline{\underline{\nabla}}}_x + \underline{\underline{\underline{u}}}_1 \otimes \underline{\underline{\underline{\nabla}}}_y + \underline{\underline{\underline{e}}} : \underline{\underline{\underline{\phi}}}_1 \right) + \underline{\underline{\underline{b}}} : \left(\underline{\underline{\underline{\phi}}}_1 \otimes \underline{\underline{\underline{\nabla}}}_x + \underline{\underline{\underline{\phi}}}_2 \otimes \underline{\underline{\underline{\nabla}}}_y \right) \right] \\ & + \underline{\text{div}}_y \left[\underline{\underline{\underline{a}}} : \left(\underline{\underline{\underline{u}}}_1 \otimes \underline{\underline{\underline{\nabla}}}_x + \underline{\underline{\underline{u}}}_2 \otimes \underline{\underline{\underline{\nabla}}}_y + \underline{\underline{\underline{e}}} : \underline{\underline{\underline{\phi}}}_2 \right) + \underline{\underline{\underline{b}}} : \left(\underline{\underline{\underline{\phi}}}_2 \otimes \underline{\underline{\underline{\nabla}}}_x + \underline{\underline{\underline{\phi}}}_3 \otimes \underline{\underline{\underline{\nabla}}}_y \right) \right] \quad (\text{C.5}) \\ & + \underline{\underline{\underline{f}}} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \underline{\text{div}}_x \left[{}^t \underline{\underline{\underline{b}}} : \left(\underline{\underline{\underline{u}}}_0 \otimes \underline{\underline{\underline{\nabla}}}_x + \underline{\underline{\underline{u}}}_1 \otimes \underline{\underline{\underline{\nabla}}}_y + \underline{\underline{\underline{e}}} : \underline{\underline{\underline{\phi}}}_1 \right) + \underline{\underline{\underline{c}}} : \left(\underline{\underline{\underline{\phi}}}_1 \otimes \underline{\underline{\underline{\nabla}}}_x + \underline{\underline{\underline{\phi}}}_2 \otimes \underline{\underline{\underline{\nabla}}}_y \right) \right] \\ & + \underline{\text{div}}_y \left[{}^t \underline{\underline{\underline{b}}} : \left(\underline{\underline{\underline{u}}}_1 \otimes \underline{\underline{\underline{\nabla}}}_x + \underline{\underline{\underline{u}}}_2 \otimes \underline{\underline{\underline{\nabla}}}_y + \underline{\underline{\underline{e}}} : \underline{\underline{\underline{\phi}}}_2 \right) + \underline{\underline{\underline{c}}} : \left(\underline{\underline{\underline{\phi}}}_2 \otimes \underline{\underline{\underline{\nabla}}}_x + \underline{\underline{\underline{\phi}}}_3 \otimes \underline{\underline{\underline{\nabla}}}_y \right) \right] \quad (\text{C.6}) \\ & - \underline{\underline{\underline{e}}} : \left(\underline{\underline{\underline{a}}} : \left(\underline{\underline{\underline{u}}}_0 \otimes \underline{\underline{\underline{\nabla}}}_x + \underline{\underline{\underline{u}}}_1 \otimes \underline{\underline{\underline{\nabla}}}_y + \underline{\underline{\underline{e}}} : \underline{\underline{\underline{\phi}}}_1 \right) + \underline{\underline{\underline{b}}} : \left(\underline{\underline{\underline{\phi}}}_1 \otimes \underline{\underline{\underline{\nabla}}}_x + \underline{\underline{\underline{\phi}}}_2 \otimes \underline{\underline{\underline{\nabla}}}_y \right) \right) \\ & + \underline{\underline{\underline{c}}} = 0 \end{aligned}$$

Ainsi de l'ordre ε^{-2} , on en déduit que les champs $\underline{\underline{\underline{u}}}_0$ et $\underline{\underline{\underline{\phi}}}_1$ sont indépendants de la variable locale $\underline{\underline{\underline{y}}}$. On peut alors réécrire le système à l'ordre ε^{-1} en intégrant ce fait, il vient :

$$\begin{aligned} & \underline{\text{div}}_y \left[\underline{\underline{\underline{a}}} : \left(\underline{\underline{\underline{u}}}_0 \otimes \underline{\underline{\underline{\nabla}}}_x + \underline{\underline{\underline{u}}}_1 \otimes \underline{\underline{\underline{\nabla}}}_y + \underline{\underline{\underline{e}}} : \underline{\underline{\underline{\phi}}}_1 \right) + \underline{\underline{\underline{b}}} : \left(\underline{\underline{\underline{\phi}}}_1 \otimes \underline{\underline{\underline{\nabla}}}_x + \underline{\underline{\underline{\phi}}}_2 \otimes \underline{\underline{\underline{\nabla}}}_y \right) \right] \quad (\text{C.7}) \\ & = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \underline{\text{div}}_y \left[{}^t \underline{\underline{\underline{b}}} : \left(\underline{\underline{\underline{u}}}_0 \otimes \underline{\underline{\underline{\nabla}}}_x + \underline{\underline{\underline{u}}}_1 \otimes \underline{\underline{\underline{\nabla}}}_y + \underline{\underline{\underline{e}}} : \underline{\underline{\underline{\phi}}}_1 \right) + \underline{\underline{\underline{c}}} : \left(\underline{\underline{\underline{\phi}}}_1 \otimes \underline{\underline{\underline{\nabla}}}_x + \underline{\underline{\underline{\phi}}}_2 \otimes \underline{\underline{\underline{\nabla}}}_y \right) \right] \quad (\text{C.8}) \\ & = 0 \end{aligned}$$

On obtient alors les solutions pour $\underline{\underline{\underline{u}}}_1$ et $\underline{\underline{\underline{\phi}}}_2$:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\underline{u}}}_1(\underline{\underline{\underline{x}}}, \underline{\underline{\underline{y}}}) &= \underline{\underline{\underline{U}}}_1(\underline{\underline{\underline{x}}}) + \underline{\underline{\underline{L}}}_{1\underline{\underline{\underline{u}}}}(\underline{\underline{\underline{y}}}) : \left(\underline{\underline{\underline{u}}}_0 \otimes \underline{\underline{\underline{\nabla}}}_x + \underline{\underline{\underline{e}}} : \underline{\underline{\underline{\phi}}}_1 \right)(\underline{\underline{\underline{x}}}) \\ &\quad + \underline{\underline{\underline{M}}}_{1\underline{\underline{\underline{u}}}}(\underline{\underline{\underline{y}}}) : \underline{\underline{\underline{\phi}}}_1 \otimes \underline{\underline{\underline{\nabla}}}_x(\underline{\underline{\underline{x}}}) \\ \underline{\underline{\underline{\phi}}}_2(\underline{\underline{\underline{x}}}, \underline{\underline{\underline{y}}}) &= \underline{\underline{\underline{\Phi}}}_2(\underline{\underline{\underline{x}}}) + \underline{\underline{\underline{L}}}_{1\underline{\underline{\underline{\phi}}}}(\underline{\underline{\underline{y}}}) : \left(\underline{\underline{\underline{u}}}_0 \otimes \underline{\underline{\underline{\nabla}}}_x + \underline{\underline{\underline{e}}} : \underline{\underline{\underline{\phi}}}_1 \right)(\underline{\underline{\underline{x}}}) \\ &\quad + \underline{\underline{\underline{M}}}_{1\underline{\underline{\underline{\phi}}}}(\underline{\underline{\underline{y}}}) : \underline{\underline{\underline{\phi}}}_1 \otimes \underline{\underline{\underline{\nabla}}}_x(\underline{\underline{\underline{x}}}) \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

Enfin à l'ordre ε^0 , on réinjecte, dans les équilibres (C.5) et (C.6), les solutions $(\underline{\underline{\underline{u}}}_1, \underline{\underline{\underline{\phi}}}_2)$ décrites par l'équation (C.9) et on obtient ainsi de nouveaux

tenseurs de localisation et les solutions $\underline{u}_2$ et $\underline{\phi}_3$ s'écrivent :

$$\begin{aligned}
\underline{u}_2(\underline{x}, \underline{y}) &= \underline{U}_2(\underline{x}) + \underline{\underline{\underline{L}}}_{1u}(\underline{y}) : \left(\underline{U}_1 \otimes \underline{\nabla}_x + \underline{\underline{\underline{e}}} \cdot \underline{\Phi}_2 \right)(\underline{x}) \\
&\quad + \underline{\underline{\underline{L}}}_{2u}(\underline{y}) \dots \left(\underline{u}_0 \otimes \underline{\nabla}_x \otimes \underline{\nabla}_x + \underline{\underline{\underline{e}}} \cdot \underline{\phi}_1 \otimes \underline{\nabla}_x \right) \\
&\quad + \underline{\underline{\underline{M}}}_{1u}(\underline{y}) : \underline{\Phi}_2 \otimes \underline{\nabla}_x(\underline{x}) + \underline{\underline{\underline{M}}}_{2u}(\underline{y}) \dots \underline{\phi}_1 \otimes \underline{\nabla}_x \otimes \underline{\nabla}_x(\underline{x}) \\
&\quad + \underline{\underline{\underline{T}}}_{1u} \cdot \underline{f} + \underline{\underline{\underline{T}}}_{2u} \cdot \underline{c} \\
\underline{\phi}_3(\underline{x}, \underline{y}) &= \underline{\Phi}_3(\underline{x}) + \underline{\underline{\underline{L}}}_{1\phi}(\underline{y}) : \left(\underline{U}_1 \otimes \underline{\nabla}_x + \underline{\underline{\underline{e}}} \cdot \underline{\Phi}_2 \right) \\
&\quad + \underline{\underline{\underline{L}}}_{2\phi}(\underline{y}) \dots \left(\underline{u}_0 \otimes \underline{\nabla}_x \otimes \underline{\nabla}_x + \underline{\underline{\underline{e}}} \cdot \underline{\phi}_1 \otimes \underline{\nabla}_x \right)(\underline{x}) \\
&\quad + \underline{\underline{\underline{M}}}_{1\phi}(\underline{y}) : \underline{\Phi}_2 \otimes \underline{\nabla}_x(\underline{x}) + \underline{\underline{\underline{M}}}_{2\phi}(\underline{y}) \dots \underline{\phi}_1 \otimes \underline{\nabla}_x \otimes \underline{\nabla}_x(\underline{x}) \\
&\quad + \underline{\underline{\underline{T}}}_{1\phi} \cdot \underline{f} + \underline{\underline{\underline{T}}}_{2\phi} \cdot \underline{c}
\end{aligned} \tag{C.10}$$

On écrit enfin l'équilibre macroscopique en sommant les différents ordres et en moyennant sur la cellule de base. On a toujours sur les champs cinématiques la même relation entre la moyenne du champs et ses valeurs, à savoir : $\langle \underline{u} \rangle = \underline{U} = \underline{u}_0 + \varepsilon \langle \underline{u}_1 \rangle + \dots$ et $\langle \underline{\phi} \rangle = \underline{\Phi} = \underline{\phi}_1 + \varepsilon \langle \underline{\phi}_2 \rangle + \dots$. Il en va de même pour les moyennes des gradients de ces champs à tous les ordres. La périodicité des champs nous donne alors en introduisant la contrainte macroscopique $\underline{\underline{\underline{\Sigma}}}$ et le second tenseur de contrainte macroscopique $\underline{\underline{\underline{M}}}$:

$$\begin{aligned}
\underline{\underline{\underline{\text{div}}}} [\underline{\underline{\underline{\Sigma}}}] + \underline{f} &= 0 \\
\underline{\underline{\underline{\text{div}}}} [\underline{\underline{\underline{M}}}] - \underline{\underline{\underline{e}}} : \underline{\underline{\underline{\Sigma}}} + \underline{c} &= 0
\end{aligned} \tag{C.11}$$

avec le comportement macroscopique à l'aide des tenseurs,

$$\begin{aligned}
\underline{\underline{\underline{A}}}_0^{(2)} &= \left\langle \underline{\underline{\underline{a}}} : \left(\underline{\underline{\underline{1}}} + \underline{\underline{\underline{L}}}_{1u} \triangle \underline{\nabla}_y + \underline{\underline{\underline{M}}}_{1u} \triangle \underline{\nabla}_y \right) \right\rangle \\
\underline{\underline{\underline{B}}}_0^{(2)} &= \left\langle \underline{\underline{\underline{b}}} : \left(\underline{\underline{\underline{1}}} + \underline{\underline{\underline{L}}}_{1\phi} \triangle \underline{\nabla}_y + \underline{\underline{\underline{M}}}_{1\phi} \triangle \underline{\nabla}_y \right) \right\rangle \\
\underline{\underline{\underline{B}}}_0'^{(2)} &= \left\langle {}^t \underline{\underline{\underline{b}}} : \left(\underline{\underline{\underline{1}}} + \underline{\underline{\underline{L}}}_{1u} \triangle \underline{\nabla}_y + \underline{\underline{\underline{M}}}_{1u} \triangle \underline{\nabla}_y \right) \right\rangle \\
\underline{\underline{\underline{C}}}_0^{(2)} &= \left\langle \underline{\underline{\underline{a}}} : \left(\underline{\underline{\underline{1}}} + \underline{\underline{\underline{L}}}_{1\phi} \triangle \underline{\nabla}_y + \underline{\underline{\underline{M}}}_{1\phi} \triangle \underline{\nabla}_y \right) \right\rangle
\end{aligned} \tag{C.12}$$

donné par la relation :

$$\begin{aligned}
\underline{\underline{\underline{\Sigma}}} &= \underline{\underline{\underline{A}}}_0^{(2)} : \left(\underline{U} \otimes \underline{\nabla}_x + \underline{\underline{\underline{e}}} \cdot \underline{\Phi} \right) + \underline{\underline{\underline{B}}}_0^{(2)} : \underline{\Phi} \otimes \underline{\nabla}_x \otimes \underline{\nabla}_x \\
\underline{\underline{\underline{M}}} &= \underline{\underline{\underline{B}}}_0'^{(2)} : \left(\underline{U} \otimes \underline{\nabla}_x + \underline{\underline{\underline{e}}} \cdot \underline{\Phi} \right) + \underline{\underline{\underline{C}}}_0^{(2)} : \underline{\Phi} \otimes \underline{\nabla}_x \otimes \underline{\nabla}_x
\end{aligned} \tag{C.13}$$

Annexe D

Energie d'une poutre élastique dans l'hypothèse des petites perturbations

Nous allons écrire la modélisation énergétique d'une poutre de Navier-Bernoulli chargée uniquement à ses extrémités. Chaque point possède trois degrés de liberté en translation, $\underline{U}$ et trois degrés de liberté en rotation, $\underline{\Omega}$. On schématise la poutre de longueur, l , par :

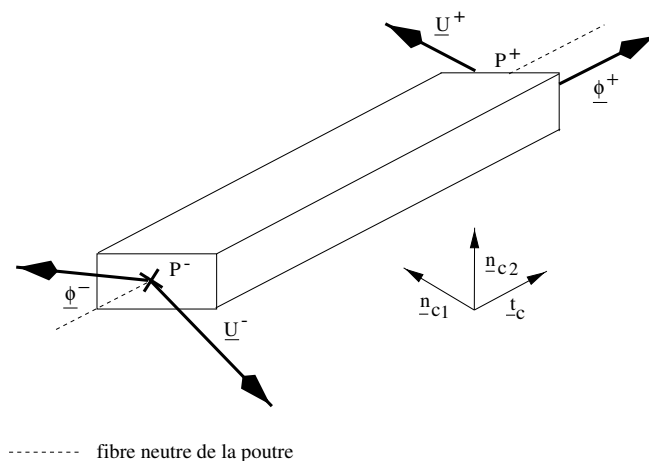


FIG. D.1 – Représentation d'une poutre tridimensionnelle

On pose :

$$\underline{\mathbf{U}} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}_{(\underline{\mathbf{t}}, \underline{\mathbf{n}}_1, \underline{\mathbf{n}}_2)} \quad \underline{\mathbf{\Omega}} = \begin{bmatrix} \theta \\ \psi \\ \varphi \end{bmatrix}_{(\underline{\mathbf{t}}, \underline{\mathbf{n}}_1, \underline{\mathbf{n}}_2)}$$

où $(\underline{\mathbf{t}}, \underline{\mathbf{n}}_1, \underline{\mathbf{n}}_2)$ est le repère local de la poutre considérée.

L'énergie de la poutre s'écrit :

$$E_{poutre} = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{N^2}{E_s \cdot S} + \frac{M_1^2}{G_s \cdot I_t} + \frac{M_3^2}{E_s \cdot I_1} + \frac{M_2^2}{E_s \cdot I_2} dx \quad (\text{D.1})$$

avec E_s , G_s le module d'Young et le module de cisaillement du matériau constitutif de la poutre, S , l , la section et la longueur de la poutre, et I_t , I_1 , I_2 , les inerties de la poutre suivant les directions locales de la poutre données par $\underline{\mathbf{t}}$, $\underline{\mathbf{n}}_1$, $\underline{\mathbf{n}}_2$. L'énergie devient alors en fonction des variables cinématiques :

$$E_{poutre} = \frac{1}{2} \int_0^l E_s \cdot S \cdot \left(\frac{du}{dx} \right)^2 + G_s \cdot I_t \cdot \left(\frac{d\theta}{dx} \right)^2 dx + \frac{E_s}{2} \int_0^l I_1 \cdot \left(\frac{d^2v}{dx^2} \right)^2 + I_2 \cdot \left(\frac{d^2w}{dx^2} \right)^2 dx \quad (\text{D.2})$$

or nous avons les équations d'équilibre qui liées au comportement nous donne :

$$\frac{d^2u}{dx^2} = 0 \quad \frac{d^2\theta}{dx^2} = 0 \quad \frac{d^4v}{dx^4} = 0 \quad \frac{d^4w}{dx^4} = 0 \quad (\text{D.3})$$

et les conditions aux limites et l'hypothèse de Navier-Bernoulli (soit $(\underline{\mathbf{U}} + \underline{\mathbf{t}} \wedge \underline{\mathbf{\Omega}}) \cdot \underline{\mathbf{n}}_i = 0$, avec $i \in \{1, 2\}$) :

$$\begin{aligned} u(0) &= u_1 & u(l) &= u_2 \\ v(0) &= v_1 & v(l) &= v_2 & \frac{dv}{dx_t}(0) &= \varphi_1 & \frac{dv}{dx_t}(l) &= \varphi_2 \\ w(0) &= w_1 & w(l) &= w_2 & \frac{dw}{dx_t}(0) &= -\psi_1 & \frac{dw}{dx_t}(l) &= -\psi_2 \\ \theta(0) &= \theta_1 & \theta(l) &= \theta_2 \end{aligned} \quad (\text{D.4})$$

On en déduit les expressions suivantes des différentes grandeurs cinématiques en fonction des degrés de liberté aux extrémités de la poutre :

$$\begin{aligned} u &= (u_2 - u_1) \cdot \frac{x}{l} + u_1 & \theta &= (\theta_2 - \theta_1) \cdot \frac{x}{l} + \theta_1 \\ v &= v_1 + \varphi_1 \cdot x + \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2 \cdot l} \cdot x^2 + \left(v_1 - v_2 + \frac{(\varphi_1 + \varphi_2) \cdot l}{2} \right) \cdot \frac{x^2}{l^2} \cdot \left(2 \cdot \frac{x}{l} - 3 \right) \\ w &= w_1 - \psi_1 \cdot x + \frac{\psi_1 - \psi_2}{2 \cdot l} \cdot x^2 + \left(w_1 - w_2 - \frac{(\psi_1 + \psi_2) \cdot l}{2} \right) \cdot \frac{x^2}{l^2} \cdot \left(2 \cdot \frac{x}{l} - 3 \right) \end{aligned} \quad (\text{D.5})$$

Nous remplaçons ces champs dans l'énergie et nous obtenons :

$$E_{poutre} = \frac{1}{2 \cdot l^3} \cdot \left[l^2 \cdot E_s \cdot S \cdot (u_2 - u_1)^2 + 12 \cdot E_s \cdot I_1 \cdot \left(v_2 - v_1 - l \cdot \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} \right)^2 \right. \\ \left. + 12 \cdot E_s \cdot I_2 \cdot \left(w_2 - w_1 + l \cdot \frac{\psi_1 + \psi_2}{2} \right)^2 + l^2 \cdot G_s \cdot I_t \cdot (\theta_2 - \theta_1)^2 \right. \\ \left. + l^2 \cdot E_s \cdot I_1 \cdot (\varphi_2 - \varphi_1)^2 + l^2 \cdot E_s \cdot I_2 \cdot (\psi_2 - \psi_1)^2 \right] \quad (D.6)$$

En introduisant des "déformations généralisées" :

$$d_t = u_2 - u_1, d_{n_1} = v_2 - v_1 - l \cdot \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}, d_{n_2} = w_2 - w_1 + l \cdot \frac{\psi_1 + \psi_2}{2} \quad (D.7) \\ \delta_t = \theta_2 - \theta_1, \delta_{n_1} = \varphi_2 - \varphi_1, \delta_{n_2} = \psi_2 - \psi_1$$

L'énergie élastique de la poutre se met sous la forme :

$$E_{poutre} = \frac{1}{2} \left(k_t d_t^2 + k_{n_1} d_{n_1}^2 + k_{n_2} d_{n_2}^2 + k_\theta \delta_t^2 + k_\varphi \delta_{n_1}^2 + k_\psi \delta_{n_2}^2 \right) \quad (D.8)$$

où les constantes d'élasticité introduites sont définies par :

$$k_t = \frac{E_s S}{l} \quad k_{n_1} = \frac{12 E_s I_1}{l^3} \quad k_{n_2} = \frac{12 E_s I_2}{l^3} \quad (D.9) \\ k_\theta = \frac{G_s I_t}{l} \quad k_\varphi = \frac{E_s I_1}{l} \quad k_\psi = \frac{E_s I_2}{l}$$

Dans le cadre de l'étude du flambement de structure composée de poutres, nous devons prendre en compte la partie non-linéaire de la déformation. Pour déterminer les charges critiques de flambement, nous nous contenterons de réinjecter dans l'écriture de l'énergie tenant compte de la non-linéarité des déformations, la solution du problème précédent linéarisé. Cette nouvelle énergie s'écrit (en découplant la torsion) :

$$E_{poutre} = \frac{E}{2} \cdot \int_0^l S \cdot \left(\frac{d u}{d x} + \frac{1}{2} \cdot \left(\left(\frac{d v}{d x} \right)^2 + \left(\frac{d w}{d x} \right)^2 \right) \right)^2 dx \\ + \frac{1}{2} \cdot \int_0^l G_s \cdot I_t \cdot \left(\frac{d \theta}{d x} \right)^2 + E I_1 \cdot \left(\frac{d^2 v}{d x^2} \right)^2 + E I_2 \cdot \left(\frac{d^2 w}{d x^2} \right)^2 dx \quad (D.10)$$

Nous allons donc avoir besoin de connaître les valeurs de $\frac{1}{l} \int_0^l v'^2$ et de $\frac{1}{l} \int_0^l w'^2$, à savoir :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{l} \int_0^l v'^2 &= \frac{1}{5} \left[\frac{v_2 - v_1}{l} - \frac{\phi_1 + \phi_2}{2} \right]^2 + \left[\frac{v_2 - v_1}{l} \right]^2 + \frac{1}{12} [\phi_2 - \phi_1]^2 \\
\frac{1}{l} \int_0^l w'^2 &= \frac{1}{5} \left[\frac{w_2 - w_1}{l} + \frac{\psi_1 + \psi_2}{2} \right]^2 + \left[\frac{w_2 - w_1}{l} \right]^2 + \frac{1}{12} [\psi_2 - \psi_1]^2
\end{aligned} \tag{D.11}$$

de même, nous devons nous attacher à déterminer $\frac{1}{l} \int_0^l v''^2$ et $\frac{1}{l} \int_0^l w''^2$,
à savoir :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{l} \int_0^l v''^2 &= \frac{1}{l^2} \left(12 \left[\frac{v_2 - v_1}{l} - \frac{\phi_1 + \phi_2}{2} \right]^2 + [\phi_2 - \phi_1]^2 \right) \\
\frac{1}{l} \int_0^l w''^2 &= \frac{1}{l^2} \left(12 \left[\frac{w_2 - w_1}{l} + \frac{\psi_1 + \psi_2}{2} \right]^2 + [\psi_2 - \psi_1]^2 \right)
\end{aligned} \tag{D.12}$$

Annexe E

Résolution d'un problème unidirectionnel aux différences finies

Dans cette annexe, nous reportons les calculs du problème aux différences finies se résumant au système de suites imbriquées :

$$\begin{aligned} U_{i+1} + U_{i-1} - 2U_i + \alpha (\Phi_{i+1} - \Phi_{i-1}) &= 0 \\ U_{i+1} - U_{i-1} + \beta (\Phi_{i+1} + \Phi_{i-1} + \gamma \Phi_i) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{E.1})$$

Pour simplifier le problème on pose : $x_{i+1} = U_{i+1} - U_i$ et $y_i = \Phi_i$. Le système se réécrit alors :

$$x_{i+1} - x_i + \alpha (y_{i+1} - y_{i-1}) = 0 \quad (\text{E.2})$$

$$x_{i+1} + x_i + \beta (y_{i+1} + y_{i-1} + \gamma y_i) = 0 \quad (\text{E.3})$$

on identifie x_i et x_{i+1} , ce qui nous permet de construire une relation isolant la suite y_i :

$$(\beta - \alpha) (y_{i+1} - y_{i-2}) + (\beta (1 - \alpha) + \alpha) (y_{i-1} - y_i) = 0 \quad (\text{E.4})$$

si $\alpha = \beta$ ou si $\beta (1 - \alpha) + \alpha = 0$, on obtient des systèmes dégénérés que nous n'étudierons pas ici. Autrement, nous obtenons :

$$y_{i+1} + a (y_i - y_{i-1}) - y_{i-2} = 0 \quad (\text{E.5})$$

avec

$$a = \frac{\beta (\gamma - 1) - \alpha}{\beta - \alpha}$$

. La suite y_i peut maintenant être déterminée de façon classique en s'aidant de son polynôme caractéristique, P , qui vaut :

$$\begin{aligned} P(X) &= X^3 + aX(X-1) - 1 \\ &= (X-1)(X^2 + (1+a)X + 1) \\ &= (X-1)Q(X) \end{aligned} \quad (\text{E.6})$$

Les racines de Q sont déterminées par le signe de $\Delta = a^2 + 2a - 3$, ainsi :

– si $a \in]-\infty, -3[\cup]1, +\infty[$, on a deux racines réelles de mêmes signes :

$$\lambda_1 = \frac{-1 - a - \sqrt{\Delta}}{2}$$

et

$$\lambda_2 = \frac{-1 - a + \sqrt{\Delta}}{2}$$

– si $a \in]-3, 1[$, on a deux racines complexes conjuguées de module 1 :

$$\lambda_1 = \cos \theta + \Im \sin \theta$$

et

$$\lambda_2 = \cos \theta - \Im \sin \theta$$

, avec

$$\theta = \arccos \left(\frac{-(1+a)}{2} \right)$$

– si $a = 1$ alors

$$\lambda_1 = -1$$

est racine double.

– si $a = -3$ alors

$$\lambda_1 = 1$$

est racine double.

Règlons le problème des racines doubles, si

$$\lambda_1 = 1$$

alors 1 est racine triple de P et on a la forme de y_i qui est :

$$y_i = a_2 i^2 + a_1 i + a_0 \quad (\text{E.7})$$

les constantes a_2, a_1, a_0 sont déterminées par les conditions aux limites. Comme nous n'avons que deux conditions aux limites en y_i , on en déduit

que la suite est indéterminée et possède un degré de liberté. On reconstruit ensuite la suite x_i et en ajoutant les deux conditions aux limites, on finit de déterminer les deux suites. Enfin par sommation de x_i , on remonte à la suite U_i ce qui achève de résoudre le problème.

Maintenant si

$$\lambda_1 = -1$$

, on a :

$$y_i = (a_2 i + a_1) (-1)^i + a_0 \quad (\text{E.8})$$

Passons maintenant au cas où on a deux racines distinctes pour Q , on obtient alors :

$$y_i = b_1 \lambda_1^i + b_2 \lambda_2^i + a_1 \quad (\text{E.9})$$

Puis pour remonter à x_i , on a :

$$\begin{aligned} x_j - x_1 &= \sum_{i=2}^j (x_{i+1} - x_i) \\ &= \alpha \sum_{i=2}^j (y_{i-1} - y_{i+1}) \\ &= \alpha \sum_{i=2}^j (b_1 \lambda_1^{i-1} (1 - \lambda_1^2) + b_2 \lambda_2^{i-1} (1 - \lambda_2^2)) \\ &= \alpha b_1 (1 + \lambda_1) (1 - \lambda_1^j) + \alpha b_2 (1 + \lambda_2) (1 - \lambda_2^j) \end{aligned} \quad (\text{E.10})$$

enfin pour remonter à U_i , on somme de nouveau et :

$$U_k - U_0 - k (U_1 - U_0) = \sum_{j=1}^k (x_j - x_1) \quad (\text{E.11})$$

soit,

$$\begin{aligned} U_k = U_0 + k (U_1 - U_0) &+ \lambda_1 \frac{1 + \lambda_1}{\lambda_1 - 1} \alpha b_1 (\lambda_1 k - \lambda_1^k) \\ &+ \lambda_2 \frac{1 + \lambda_2}{\lambda_2 - 1} \alpha b_2 (\lambda_2 k - \lambda_2^k) \end{aligned} \quad (\text{E.12})$$

et on a :

$$\Phi_k = a_1 + b_1 \lambda_1^k + b_2 \lambda_2^k \quad (\text{E.13})$$

la fin de la résolution du système consiste à exploiter les conditions aux limites soit les valeurs fixées de U_0 , U_n , Φ_0 et Φ_n . On a donc un système linéaire à 4 équations (4 conditions aux limites) avec 4 inconnues (U_1 , a_1 , b_1 et b_2) à résoudre. Dans le cas de la recherche de l'initiation du flambement, il suffit de rechercher la première valeur du paramètre de chargement qui cesse de donner un système de Cramer (le déterminant du système devient nul).

Bibliographie

- [Askar et Cakmak, 1968] Askar A., Cakmak A. S., “a structural model of a micropolar continuum”, *Int. J. Engng. Sci.*, **6**, (1968), pp. 583-589.
- [Bakhvalov et Panasenko, 1989] Bakhvalov N., Panasenko G., “homogenisation : averaging processes in periodic media Mathematical problems in the Mechanics of composite materials”, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, (1989).
- [Bamberger, 1981] Bamberger Y., “mécanique de l'ingénieur I. systèmes de corps rigides”, Hermann, Paris, (1981).
- [Bamberger, 1981b] Bamberger Y., “mécanique de l'ingénieur III. solides déformables”, Hermann, Paris, (1981).
- [Banks et Sokolowski, 1968] Banks C.B., Sokolowski M., “on certain two-dimensional applications of the couple stress theory”, *Int. J. Solids Structures*, **4**, (1968), pp. 15-29.
- [Bensoussan et Al., 1978] Bensoussan A., Lions J.L., Papanicolau G., “asymptotic analysis for periodic structures”, North Holland, Amsterdam, (1978).
- [Bonnetier, 1995] Bonnetier E., “plane stress elasto-plastic constitutive equations obtained by homogenizing one-dimensional structures”, *Modél. Math. Anal. Numér.*, **29**, 1, (1995), pp. 23-52.
- [Bouguern, 1998] Bouguern K., “interface informatique et contrôle d'une expérience de micro torsion-flexion dynamique”, rapport de stage IUT Paris VII-Diderot, (1998).
- [Boutin et Auriault, 1993] Boutin C., Auriault J.L., “Rayleigh scattering in elastic composite materials”, *Int. J. Engng Sci.*, **31**, (1993), pp. 1669-1689.
- [Boutin, 1996] Boutin C., “microstructural effects in elastic composites”, *Int. J. Solids Structures*, **33**, 7, (1996), pp. 1023-1051.
- [Caillerie et Al., 1989] Caillerie D., Trompette P., Verna P., “homogenization of periodic trusses”, IASS conference, Madrid, (1989).

- [Caillerie, 1995] Caillerie D., “évolution quasistatique d’un milieu granulaire, loi incrémentale par homogénéisation”, in “des géomatériaux aux ouvrages”, Hermès, Paris, (1995).
- [Chateau et Nguyen, 1991] Chateau X., Nguyen Q.S., “buckling of elastic structures in unilateral contact with or without friction”, *Eur. J. Mech., A/Solids*, **10**, 1, (1991), pp. 71-89.
- [Christensen, 1986] Christensen R. M., “mechanics of low density materials”, *J. Mech. Phys. of Solids*, **34**, 6, (1986), pp. 563.
- [Cioranescu et Saint Jean Paulin, 1986] Cioranescu D., Saint Jean Paulin J., “reinforced and honeycomb structures”, *J. Math. Pures Appl.*, **65**, (1986), pp. 403-422.
- [Cioranescu et Saint Jean Paulin, 1986b] Cioranescu D., Saint Jean Paulin J., “problèmes de Neumann et de Dirichlet dans des structures réticulées de faible épaisseur”, *C.R. Acad. Sci. I*, **303**, 1, (1986), pp. 7-10.
- [Cosserat, 1909] Cosserat E., Cosserat F., “théorie des corps déformables”, A. Herman et Fils, Paris, (1909).
- [de Borst et Sluys, 1991] de Borst R., Sluys L.J., “localisation in a Cosserat continuum under static and dynamic loading conditions”, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, **90**, (1991), pp. 805-827.
- [Dement’ev et Tarakanov, 1970] Dement’ev A. G., Tarakanov O. G., “effect of cellular structure on the mechanical properties of plastic foams”, *Polym. Mech.*, **6**, 4, (1970), pp. 519-525.
- [Dement’ev et Tarakanov, 1970b] Dement’ev A. G., Tarakanov O. G., “model analysis of the cellular structure of plastic foams of the polyurethane type”, *Polym. Mech.*, **6**, 5, (1970), pp. 744-749.
- [Dumontet, 1990] Dumontet H., “homogénéisation et effets de bords dans les matériaux composites”, *thèse*, Université Pierre et Marie Curie Paris 6, (1990).
- [Eringen, 1968] Eringen A.C., “Mechanics of micromorphic continua”, Mechanics of Generalized Continua, I.U.T.A.M. symposium, Springer-Verlag, Berlin, (1968), pp. 18-35.
- [Feng et Christensen, 1982] Feng W. W., Christensen R. M., “nonlinear deformation of elastomeric foams”, *Int. J. Non-linear Mechanics*, **17**, 5/6, (1982), pp. 355-367.
- [Forest, 1996] Forest S., “modèles mécaniques de la déformation hétérogène des monocristaux”, *Thèse*, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, (1996).

- [Forest et Sab, 1998] Forest S., Sab K., “overall modelling of periodic heterogeneous Cosserat media”, 9^{ème} symposium international continuum models and discrete systems (CMD9), Istanbul, (1998).
- [Fudala, 1997] Fudala R., “conception et construction d’une machine de micro-test en torsion et flexion”, rapport de stage IUT Paris VII-Diderot, (1997).
- [Gambin et Kröner, 1989] Gambin B., Kröner E., “Higher-order terms in the homogenized stress-strain relation of periodic elastic media”, *phys. stat. sol.*, **151**, (1989), pp. 513-519.
- [Gent et Thomas, 1959] Gent A. N., Thomas A. G., “failure of foamed elastic materials”, *J. Appl. Polym. Sci.*, **2**, 6, (1959), pp. 354.
- [Gent et Thomas, 1959a] Gent A. N., Thomas A. G., “the deformation of foamed elastic materials”, *J. Appl. Polym. Sci.*, **1**, 1, (1959), pp. 107.
- [Gent et Thomas, 1963] Gent A. N., Thomas A. G., “mechanics of foamed elastic materials”, *Rubber Chem. and Tech.*, **36**, (1963), pp. 597.
- [Gent et Rusch, 1966] Gent A. N., Rusch K. C., *Rubber Chem. and Tech.*, **39**, (1966), pp. 389.
- [Gent et Rusch, 1966a] Gent A. N., Rusch K. C., “permeability of open-cell foamed materials”, *J. Cell. Plast.*, **2**, 1, (1966), pp. 46.
- [Germain, 1973] Germain P., “the method of virtual power in continuum mechanics. Part 2 : microstructure”, *SIAM J. Appl. Math.*, **25**, 3, (1973).
- [Germain, 1986] Germain P., “mécanique, tome II”, Ecole Polytechnique, Ellipses, Paris, (1986).
- [Geymonat et Al., 1993] Geymonat G., Müller S., Triantafyllidis N., “Homogenization of nonlinearly elastic materials, microscopic bifurcation and macroscopic loss of rank-one convexity”, *Arch. Rational Mech. Anal.*, **122**, (1993), pp. 231-290.
- [Gibson et Al., 1982] Gibson L.J., Ashby M.F., Schajer G.S., “the mechanics of two-dimensional cellular materials”, *Proc.R.Soc.Lond.*, **A382**, (1982), pp. 25.
- [Gibson et Ashby, 1982] Gibson L. J. et Ashby M. F., “the mechanics of three-dimensional cellular materials”, *Proc.R.Soc.Lond.*, **A382**, (1982), pp. 43.
- [Gibson et Ashby, 1988] Gibson L. J. et Ashby M. F., “cellular solids : structure & properties”, *Pergamon Press*, Oxford, (1988).
- [Ilcewicz et Al., 1986] Ilcewicz L.B., Narasimhan M.N.L., Wilson J.B., “micro and macro material symmetries in generalized continua”, *Int.J.Engng Sci.*, **24**, 1, (1986), pp. 97-109.

- [Jikov *et Al.*, 1994] Jikov J.J., Kozlov S.M., Oleinik O.A., “homogenization of differential operators and integral functionals”, Springer-Verlag, Berlin, (1994).
- [Kim, 1983] Kim K. S., “static and dynamic characteristics of materials with beam-microstructure”, *Thèse*, Stanford University, (1983).
- [Ko, 1965] Ko W. L., “deformations of foamed elastomers”, *J. of Cellular Plastics*, **1**, 1, (1965), pp. 45-50.
- [Kozlov, 1987] Kozlov S. M., “averaging of difference schemes”, *Math. U.S.S.R. Sbornik*, **52**, 2, (1987), pp. 351-369.
- [Lakes, 1983] Lakes R. S., “size effects and micromechanics of a porous solid”, *J. Materials Science*, **18**, (1983), pp. 2572-2580.
- [Lakes, 1986] Lakes R. S., “experimental microelasticity of two porous solids”, *Int. J. of Solids Structures*, **22**, 1, (1986), pp. 55-63.
- [Lelong-Ferrand et Arnaudiès, 1978] Lelong-Ferrand J., Arnaudiès J. M., “cours de mathématiques, tome 1, algèbre”, 3^{me} édition, *Dunod*, (1978).
- [Lippman, 1972] Lippman H., “extremum and variational principles in mechanics”, courses and lectures C.I.S.M. No 54, Springer-Verlag, Vienne-New York, (1972).
- [Maiti *et Al.*, 1984] Maiti S. K., Gibson L. J., Ashby M. F., “deformation and energy absorption diagrams for cellular solids”, *Acta Metall.*, **32**, 11, (1984), pp. 1963.
- [Masiani *et Al.*, 1995] Masiani R., Rizzi N., Trovalusci P., “masonry as structured continuum”, *Meccanica*, **30**, (1995), pp. 673-683.
- [Mindlin, 1964] Mindlin R.D., “microstructure in linear elasticity”, *Arch. Rational Mech. Anal.*, **17**, (1964), pp. 51-78.
- [Millet *et Al.*, 1997] Millet O., Hamdouni A., Cimetière A., “justification du modèle bidimensionnel linéaire de plaque par développement asymptotique de l’équation de Navier”, *C.R. Acad. Sci. IIb*, **324**, 5, (1997).
- [Mühlaus et Vardoulakis, 1987] Mühlaus H.-B., Vardoulakis I., “the thickness of shear bands in granular materials”, *Géotechnique*, **37**, 3, (1987), pp. 271-283.
- [Mühlaus *et Al.*, 1995] Mühlaus H.-B. *et Al.*, “continuum models for materials with microstructure”, John Wiley & Sons, Chichester, (1995).
- [Müller, 1987] Müller S., “Homogenization of nonconvex integral functionals and cellular elastic materials”, *Arch. Rational Mech. Anal.*, **99**, (1987), pp. 189-212.

- [Nguyen, 1995] Nguyen Q. S., “stabilité des structures élastiques”, Springer-Verlag, (1995).
- [Nowacki, 1970] Nowacki W., “theory of micropolar elasticity”, courses and lectures C.I.S.M. No 25, Springer-Verlag, Vienne-New York, (1970).
- [Ould Eyih, 1993] Ould Eyih A., “contribution à l’étude du comportement en grandes déformations des mousses : modèle de simulation numérique du chargement par un mannequin”, *Thèse*, Ecole Centrale, LYON, (1993).
- [Patel et Finnie, 1970] Patel M. R., Finnie I., “structural features and mechanical properties of rigid cellular plastics”, *Journal of Materials JMLSA*, **5**, 4, (1970), pp. 909.
- [Pideri et Seppecher, 1997] Pideri C., Seppecher P., “un résultat d’homogénéisation pour un matériau élastique renforcé périodiquement par des fibres élastiques de très grande rigidité”, *C. R. Acad. Sci. Iib*, **324**, (1997), pp. 475-481.
- [Pradel et Sab, 1998] Pradel F., Sab K., “Cosserat modelling of periodic lattice structures”, *C. R. Acad. Sci. Iib*, **326**, (1998), pp. 699-704.
- [Renz, 1977] Renz R., “on the rapid and cyclic deformation behaviour of rigid foamed polymers”, *Thèse*, Universit de KARLSRUHE, (1977).
- [Renz et Ehrenstein, 1982] Renz R., Ehrenstein G. W., “calculation of deformation of cellular plastics by applying the finite element method”, *Cell. Polym.*, **1**, 5, (1982).
- [Sab, 1996] Sab K., “déformations microscopiques et macroscopiques dans un assemblage dense de particules rigides”, *C.R. Acad. Sci. Iib*, **322**, (1996), pp. 715-721.
- [Salençon, 1988] Salençon J., “mécanique des milieux continus, I. concepts généraux”, Ellipses, (1988).
- [SAMCEF, 1995] manuels utilisateurs version 6.1, SAMTECH S.A., Liège, (1995).
- [Sanchez-Palencia, 1974] Sanchez-Palencia E., “comportement local et macroscopique d’un type de milieux physiques hétérogènes”, *J. Engin. Sci.*, **12**, (1974), pp. 331-351 .
- [Sanchez-Palencia, 1980] Sanchez-Palencia E., “non homogeneous media and vibration theory”, Lecture Notes in Physics 127, Springer-Verlag, Berlin, (1980).
- [Sanchez-Hubert et Sanchez-Palencia, 1992] Sanchez-Hubert J., Sanchez-Palencia E., “introduction aux méthodes asymptotiques et à l’homogénéisation”, Masson, (1992).

- [Schouten, 1989] Schouten J.A., “tensor analysis for physicists”, Dover Publications Inc., second edition, (1989).
- [Shuvalov, 1988] Shuvalov L. A., “modern crystallography 4 : Physical properties of crystals”, Springer-Verlag, (1988).
- [Sulem et Mühlaus , 1997] Sulem J., Mühlaus H.B., *Mechanics of Cohesive-Frictional Materials*, **2**, (1997), pp. 31-46.
- [Suquet, 1980] Suquet P.M., “homogenization methods in the mechanics of solids”, Groupe Français de Rhéologie 15 ème Colloque, Paris, (1980), pp. 87-128.
- [Tollenaere et Caillerie, 1998] Tollenaere H., Caillerie D., “continuous modeling of lattice structures by homogenization”, *Adv. Eng. Softw.*, **9**, 7, (1998), pp. 699-705.
- [Triantafyllidis et Bardenhagen, 1996] Triantafyllidis N., Bardenhagen S., “the influence of scale size on the stability of periodic solids and the role of associated higher order gradient continuum models”, *J. Mech. Phys. Solids*, **44**, 11, (1996), pp. 1891-1928.
- [Vainshtein, 1994] Vainshtein B. K., “modern crystallography 1 : Fundamentals of crystals : symmetry and methods of structural crystallography”, Springer-Verlag 2nd ed., (1994).
- [Van Dyke, 1964] Van Dyke M., “perturbation methods in fluid mechanics”, Academic Press Ed., New-York, (1964).
- [Vardoulakis et Sulem, 1995] Vardoulakis I., Sulem J., “Bifurcation analysis in geomechanics”, Blackie Academic & Professional 1st ed., (1995).
- [Veiga, 1997] Veiga P., “comportement d’une structure cellulaire périodique”, rapport de stage DESS Paris VI, (1997).
- [Verna, 1991] Verna P., “modélisation continue des structures discrètes par homogénéisation : cas des treillis”, *Thèse*, Institut National Polytechnique de Grenoble, (1991).
- [Warren et Kraynik, 1987] Warren W. E., Kraynik A. M., “foam mechanics : The linear elastic response of two-dimensional spatially periodic cellular materials”, *Mechanics of Materials*, **6**, (1987), pp. 27.
- [Warren et Kraynik, 1988] Warren W. E., Kraynik A. M., 1988, “the linear elastic properties of open-cell foams”, *J. Appl. Mechanics*, **55**, 5, (1988), pp. 341.
- [Warren *et Al.*, 1989] Warren W. E., Kraynik A. M., Stone C. M., “a constitutive model for two-dimensional nonlinear elastic foams”, *J. Mech. Phys. of Solids*, **37**, 6, (1989), pp. 171.

- [Warren et Kraynik, 1991] Warren W. E., Kraynik A. M., “the nonlinear elastic behavior of open-cell foams”, *J. Appl. Mechanics*, **58**, (1991), pp. 376.
- [Zhang et Ashby, 1989] Zhang J., Ashby M. F., “the mechanical properties of honeycombs”, *Cambridge Univ. Engin. Dep. report*, CUED/C-MATS/TR157, 4, (1989).
- [Zhang et Ashby, 1989b] Zhang J., Ashby M. F., “theoretical studies on isotropic foams”, *Cambridge Univ. Engin. Dep. report*, CUED/C-MATS/TR158, 4, (1989).
- [Zhu et Al., 1997] Zhu H.X., Knott J.F., Mills N.J., “analysis of the elastic properties of open-cell foams with tetrakaidecahedral cells”, *J.Mech.Phys.Solids*, **45**, 3, (1997), pp. 319-343.

Table des figures

1	compression uniaxiale et décharge d'une mousse	7
1.1	Passage entre les configurations et la cellule de base	19
2.1	Description de l'assemblage de ressorts	43
2.2	Description du grillage.	45
2.3	Motif d'assemblage en étoile.	48
2.4	Deux découpages élémentaires énergétiques du grillage	49
2.5	Effet de bord avec le schéma (SH1)	60
2.6	Conditions aux limites pour la bande infinie chargée uniaxialement	62
2.7	Comparaison de la charge critique avec celles obtenues par homogénéisation pour $\frac{k_\phi^*}{k_t} = \frac{1}{12}$ et $\frac{k_n}{k_t} = 1$	68
2.8	Comparaison de la charge critique avec celles obtenues par homogénéisation pour $\alpha = \frac{1}{100}$	70
2.9	Comparaison de la charge critique avec celles obtenues par homogénéisation pour $\alpha = \frac{1}{12}$	71
2.10	Comparaison de la charge critique avec celles obtenues par homogénéisation pour $\alpha = \frac{1}{2}$	72
2.11	Comparaison de la charge critique avec celles obtenues par homogénéisation pour $\alpha = 1$	72
3.1	Système de barres	74
3.2	Repère local attaché à un couple de particule $c = (P^i, P^j)$. . .	77
3.3	Différentes périodicités de connexion.	81
5.1	Les structures planes pour le nid d'abeille régulier and renforcé.152	
5.2	Chargement d'une couche de nids d'abeille sous compression uniaxiale.	155
5.3	Effet d'échelle du flambement d'une couche de nids d'abeille. .	156
5.4	Cellule périodique minimale pour le pavage en nid d'abeille . .	156
5.5	description du tétrakaïdecaèdre et de la cellule de référence. .	158

5.6	Description de la cellule de base	159
5.7	Chargement d'une couche de tétrakaidécaèdres	161
5.8	Effet d'échelle du flambement d'une couche de tétrakaidécaèdres.	161
A.1	Cellule de base adoptée par Gent	166
A.2	Première géométrie choisi par Gibson <i>et al.</i>	167
A.3	Structure à cellules fermées	168
A.4	Flambement élastique	168
A.5	Apparition de rotules plastiques	169
A.6	Pavage par tétraèdres	172
A.7	Cellules permettant le pavage compact de l'espace : (a) prismes triangulaires, (b) parallélogrammes, (c) Prismes hexagonaux, (d) dodécaèdres rhombiques et (e) tétrakaidécaèdres	173
A.8	Tétraèdre de référence choisi par Warren	174
A.9	Cinématique du tétraèdre de Warren	175
D.1	Représentation d'une poutre tridimensionnelle	191

Liste des tableaux

1.1	Contraintes et déformations d'un milieu de Cosserat	15
5.1	Chargements caractéristiques	151
5.2	Constantes élastiques pour le nid d'abeille et le nid d'abeille renforcé	153