Dynamique et estimation paramétrique pour les gyroscopes laser à milieu amplificateur gazeux

Noad Badaoui

▶ **To cite this version:**

Noad Badaoui. Dynamique et estimation paramétrique pour les gyroscopes laser à milieu amplificateur gazeux. Systèmes dynamiques [math.DS]. Université Paris sciences et lettres, 2016. Français. NNT : 2016PSLEM058 . tel-01668585

HAL Id: tel-01668585
https://pastel.hal.science/tel-01668585

Submitted on 20 Dec 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE DE DOCTORAT

de l'Université de recherche Paris Sciences et Lettres
PSL Research University

Préparée à MINES ParisTech

Dynamique et estimation paramétrique pour les gyroscopes laser à milieu amplificateur gazeux

École doctorale n°432

SCIENCES ET MÉTIERS DE L'INGÉNIEUR

Spécialité MATHÉMATIQUE ET AUTOMATIQUE

COMPOSITION DU JURY :

M. Gildas Besançon
INP Grenoble, Président

M. Wilfrid Perruquetti
EC Lille, Rapporteur

M. Fabien Bretenaker
Laboratoire Aimé Cotton, Membre du jury

M. Philippe Martin
Mines ParisTech, Membre du jury

M. Pascal Morin
UPMC, Membre du jury

M. Bertrand Morbieu
Thalès Avionics, Membre du jury

M. Pierre Rouchon
Mines ParisTech, Membre du jury

par **Noad Badaoui**
le 2 Décembre 2016

Dirigée par
Philippe Martin
Pierre Rouchon

MINES ParisTech | PSL RESEARCH UNIVERSITY PARIS

Table des matières

Introduction **5**

1 Présentation des Gyrolasers **7**
1.1 Les technologies des gyroscopes . . . 7
1.2 Principe physique des gyrolasers : effet Sagnac . . . 10
1.3 Présentation succincte des gyrolasers gaz . . . 12

2 Modélisation des Gyrolasers **17**
2.1 Modélisation simplifiée d'un Laser . . . 18
2.1.1 Laser dans une cavité linéaire . . . 18
2.1.2 Conversion énergétique dans le milieu à gain . . . 19
2.1.3 Bilan dans la cavité . . . 20
2.2 Modélisation d'un Gyrolaser, approche "semi-classique" . . . 21
2.2.1 Cas unidirectionnel . . . 21
2.2.1.1 Equations semi-classiques . . . 22
2.2.1.2 Réduction par perturbations singulières . . . 27
2.2.2 Cas bidirectionnel . . . 31
2.2.2.1 Effet de l'interaction sur l'inversion de population . . . 32
2.2.2.2 Réduction par perturbations singulières . . . 33
2.2.2.3 Effet des imperfections des miroirs sur les champs . . . 35
2.3 Lien avec les équations de Lamb usuelles . . . 36
2.3.1 Etude succincte de la dynamique des intensités . . . 36
2.3.2 Passage aux équations de Lamb usuelles . . . 37
2.3.3 Approximation par homothétie . . . 38
2.4 Conclusion sur la modélisation . . . 39

3 Etude de la dynamique d'un gyrolaser **41**
3.1 Dynamique des intensités . . . 41
3.1.1 Cas idéal des miroirs parfaits . . . 44
3.1.1.1 Points d'équilibre et stabilité locale . . . 46
3.1.1.2 Stabilité globale du point de fonctionnement . . . 47
3.1.2 Effet des imperfections des miroirs . . . 51
3.2 Equation d'Adler et zones aveugles . . . 53
3.2.1 Observabilité du modèle d'Adler . . . 53
3.2.2 Zone aveugle et perte d'observabilité . . . 56
3.2.3 Activation et zone aveugle dynamique . . . 59

3.2.3.1 Modèle discret . . . 60
3.2.3.2 Zone aveugle dynamique . . . 61
3.3 Conclusion . . . 62

4 Estimation et compensation des imperfections 63
4.1 Estimation des imperfections via les intensités . . . 64
4.1.1 Modèle de design . . . 64
4.1.2 Moindres carrés récursifs . . . 67
4.1.2.1 Algorithme . . . 67
4.1.2.2 Condition d'excitation persistante . . . 68
4.1.2.3 Simulations . . . 73
4.2 Mesure du battement . . . 86
4.2.1 Redressement du battement . . . 87
4.2.1.1 Moindres carrés récursifs . . . 88
4.2.1.2 Simulations . . . 89
4.2.2 Estimation, équation d'Adler . . . 95
4.2.2.1 Moindres carrés récursifs . . . 95
4.2.2.2 Simulations . . . 96
4.3 Conclusion . . . 103

Conclusion 105

Annexes 106

A Towards a solid state ring laser gyroscope 107

B An online compensation algorithm for improving the performance of gas ring laser gyroscopes 119

À ma tante

Introduction

Cette thèse Cifre prend place dans le cadre d'un collaboration entre Thalès Avionics, Thalès Research and Technolgy et le Centre Automatique et Systèmes de Mines-ParisTech, elle fait suite aux travaux de S. Schwartz [42, 45].

Dans un souci de réduction des coûts et de simplification des procédés de production, Thalès a investi dans l'élaboration d'un gyroscope à état solide visant à remplacer l'utilisation du gaz Hélium-Néon par un cristal de Néodyme-Yag, moins cher et plus simple à manipuler. L'étude de la faisabilité théorique d'un tel produit a été effectuée par S. Schwartz dans le cadre de sa thèse, il conclut sur la viabilité du projet à condition d'asservir le comportement du gyroscope afin de réduire les instabilités induites par l'utilisation d'un solide à la place d'un gaz. Ce constat est à l'origine de ma thèse qui a commencé par l'étude du fonctionnement général des gyroscopes avec une approche "théorie et contrôle des systèmes". Plusieurs axes ont été étudiés :

— premièrement, l'utilisation d'outils mathématiques issus de la théorie des équations différentielles tels que les applications de Poincaré et les perturbations régulières et singulières afin d'analyser plus précisément le comportement des gyroscopes. Cette approche trouve une application aussi bien sur les gyroscopes gaz que solide et a donné lieu à une publication [10] en physique et disponible en annexe A,

— un deuxième axe traite de l'implémentation sur un prototype de gyroscope à état solide et à cavité active (GESCA) d'un asservissement visant à réduire les instabilités de comportement induites par l'utilisation d'un cristal. De nombreux travaux ont été effectués dans ce sens en début de thèse et ils ont permis d'obtenir des résultats très prometteurs qui sont restés confidentiels,

— un troisième axe exploite la théorie de l'estimation en temps-réel avec des observateurs asymptotiques afin d'inférer les différents paramètres et grandeurs physiques qui interviennent dans la dynamique des gyroscopes. A notre connaissance, nous proposons ici la première applications de ces techniques d'estimation pour le gyroscope à milieu amplificateur gazeux. Cette démarche novatrice permet en particulier d'estimer et de compenser, en temps réel, les effets non linéaires qui limitent la précision des gyroscopes. Cela représente un point d'intérêt majeur pour Thalès Avionics quand on sait que la précision d'un gyroscope est une des caractéristiques primordiales pour déterminer sa gamme et donc son prix. Cette approche a donné lieu à une publication [9], rappelée dans l'annexe B. Ces travaux ont donné lieu au dépôt d'un brevet au nom de Thalès et Armines, le 18 mars 2016 (numéro de dépôt 1600449), intitulé "Méthode d'estimation des coefficients de diffusion d'un gyrolaser en fonctionnement et système gyroscopique associé" et dont les inventeurs sont Noad Hamze EL Badaoui, Gilles Feugnet, Philippe Martin, Pierre Rouchon et Sylvain Schwartz.

Ce manuscrit est composé de quatre chapitres qui reprennent les travaux du premier et du troisième axe. Dans le premier chapitre, on commence par introduire le phénomène physique sur lequel se basent tous les gyroscopes optiques, à savoir, l'effet Sagnac. Puis on présente succinctement le cas particulier des gyrolasers à gaz : l'exploitation de l'effet Sagnac afin de remonter à l'information utile, les mesures auxquelles on a accès, ainsi que les limitations usuelles, sont abordés. Les deux chapitres suivants reprennent et complètent avec beaucoup plus de détails la publication [9].

Le deuxième chapitre vise à modéliser la dynamique du gyroscope. On adopte l'approche dite "semi classique" afin de présenter et décrire, dans un premier temps, le phénomène Laser sur le cas simple d'une cavité linéaire, puis dans un deuxième temps, le cas plus complexe d'une cavité circulaire. La dynamique des variables d'état mises en jeu possèdent des temps caractéristiques très différents. Cela nous permet, via un calcul de perturbations singulières, de simplifier l'expression de cette dynamique et par la même occasion, de donner une justification mathématique d'un calcul effectué depuis des décennies par la communauté des physiciens. On conclut ce chapitre par un modèle nommé "équations de Lamb" qui nous servira de modèle de référence pour la suite du manuscrit. Il décrit la dynamique des amplitudes complexes des champs des faisceaux Laser dans le gyroscope, et prend en compte les différents phénomènes parasites qui sont à l'origine des limitations usuelles.

Le troisième chapitre est composé de deux parties dans lesquelles on adopte une approche mathématique afin d'étudier le comportement des faisceaux Laser, décrit par les équations de Lamb. Dans la première partie, disponible dans la publication de l'annexe B, on étudie les intensités des faisceaux. On commence par une étude de stabilité des différents points d'équilibre, dans le cas d'un gyroscope idéal, et on prouve la stabilité exponentielle, sur un large domaine, du seul point digne d'intérêt. Cette stabilité exponentielle nous permet d'affirmer que la contribution des imperfections du gyroscope a une influence faible sur les intensités pour tous les temps positifs. La deuxième partie est un nouvel apport par rapport à la publication : on y effectue une étude d'observabilité du système et on réinterprète les limitations usuelles des gyroscopes comme étant une perte d'observabilité. Pour faire cela, on a recours aux applications de Poincaré et à un calcul de perturbations régulières.

Le dernier chapitre également comporte deux parties. La première partie est disponible dans la publication de l'annexe B et elle exploite la mesure des intensités des deux faisceaux, ainsi que les résultats du chapitre précédent. Le comportement des intensités n'étant que peu modifié par les imperfections du gyroscope, on approxime donc leur dynamique par un développement de Taylor autour du point d'équilibre exponentiellement stable. Cette approximation nous sert de modèle de design afin de synthétiser un estimateur temps réel, basé sur les moindres carrés récursifs, et qui nous permet de mesurer la contribution des imperfections du gyroscope afin de les compenser. La dernière partie vise à montrer ce qu'il est possible de faire, en utilisant uniquement la mesure de la différence de phase entre les deux faisceaux Laser. On commence par exposer une méthode permettant de corriger les imperfections des capteurs, pour obtenir une mesure sans biais de la différence de phase. Cette mesure corrigée est exploitée dans la suite pour estimer différents paramètres.

Chapitre 1

Présentation des Gyrolasers

1.1 Les technologies des gyroscopes

Les gyroscopes sont des capteurs de vitesse de rotation. Ils constituent une solution technique de haute performance dans les problématiques de navigation inertielle [12]. Historiquement, des années 1920 aux années 1980, ce sont les capteurs électromécaniques qui remplissaient ce rôle. Au début du XX^{ieme} siècle, la recherche dans le domaine de la navigation inertielle s'est focalisée sur le développement de solutions plus performantes et fiables. Puis, lors de ces dernières décennies, les contraintes et la réalité industrielles ont conduit à envisager des solutions équivalentes en termes de performances et fiabilité, mais à plus faible coût de production.

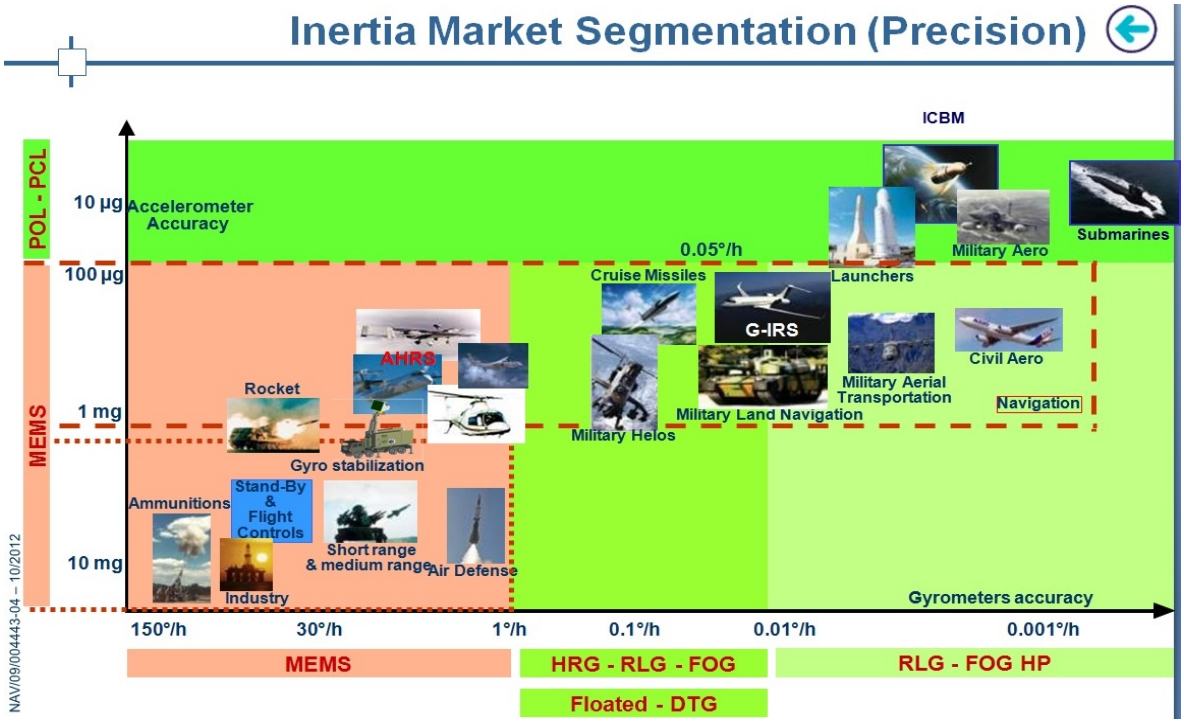


FIGURE 1.1 – Le marché des centrales inertielles en fonction de leur précision, extrait de [1].

De nos jours, de nombreuses recherches restent en cours en vue de développer les produits qui permettront de répondre aux besoins de marchés futurs. Elles visent à réaliser des performances que l'on pensait inaccessibles et se focalisent sur des solutions bas coûts, miniaturisées et facilement intégrables dans un processus de production.

Les grands groupes industriels spécialistes de la navigation inertielle, tels que Thalès Avionics, fournissent à leurs clients des centrales inertielles. Celles-ci sont constituées d'accéléromètres et de gyroscopes qui ont pour but de fournir une mesure de l'accélération linéaire et de la rotation que subit le mobile dans lequel elles sont incorporées. Ces mesures sont intégrées de manière à obtenir une position et un cap relatifs au point de départ.

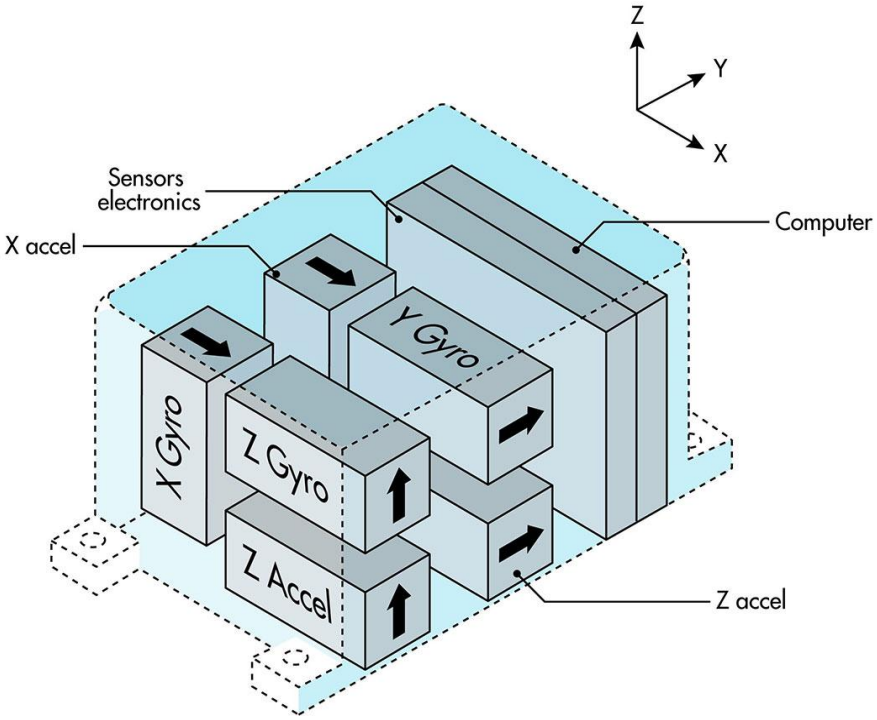


FIGURE 1.2 – Schéma d'une centrale inertielle, extrait de [2].

La figure 1.1 montre les marchés cibles, que peuvent couvrir les centrales inertielles, en fonction de la précision de leurs gyroscopes et de leurs accéléromètres. Plusieurs types de gyroscopes existent. A titre non exhaustif, on peut citer les gyroscopes mécaniques tels que les gyroscopes MEMS (MicroElectroMechanical Systems) et HRG (Hemispherical Resonator Gyroscope) pour la basse et moyenne précision, et les gyroscopes optiques tels que les FOG (Fiber Optic Gyroscope) et RLG (Ring Laser Gyroscope) pour la moyenne et haute précision.

Le premier démonstrateur de gyrolaser en anneau fut réalisé aux US en 1963 par W.M. Macek and D. T. M. Davis, Jr. [35]. Puis de nombreux travaux à travers le monde notamment ceux de F.Aronowitz, permirent de consolider cette approche, conduisant ainsi à une large gamme de gyrolaser, aussi bien du point de vue de la performance et de la stabilité que du coût. A l'instar du pendule de Foucault qui évolue dans un plan d'orientation fixe par rapport à un repère Galiléen, le gyrolaser se base sur un référentiel absolu généré par deux ondes contrapropagatives : lors de la mesure du temps de propagation d'une information circulant en boucle fermée, ce temps va dépendre de la géométrie de la boucle, de la vitesse de propagation de l'information dans la boucle, ainsi que de la rotation que subit l'intégralité du

système. Il tire ainsi parti de l'effet Sagnac en mesurant la différence des temps de propagation dans le but de remonter uniquement à la vitesse de rotation que subit le système.

Ce manuscrit traite des gyrolasers gaz tels que ceux fabriqués par Thalès Avionics à Châtellerault. Ils sont constitués d'un chemin optique fermé (aussi appelé cavité) formé par des miroirs.

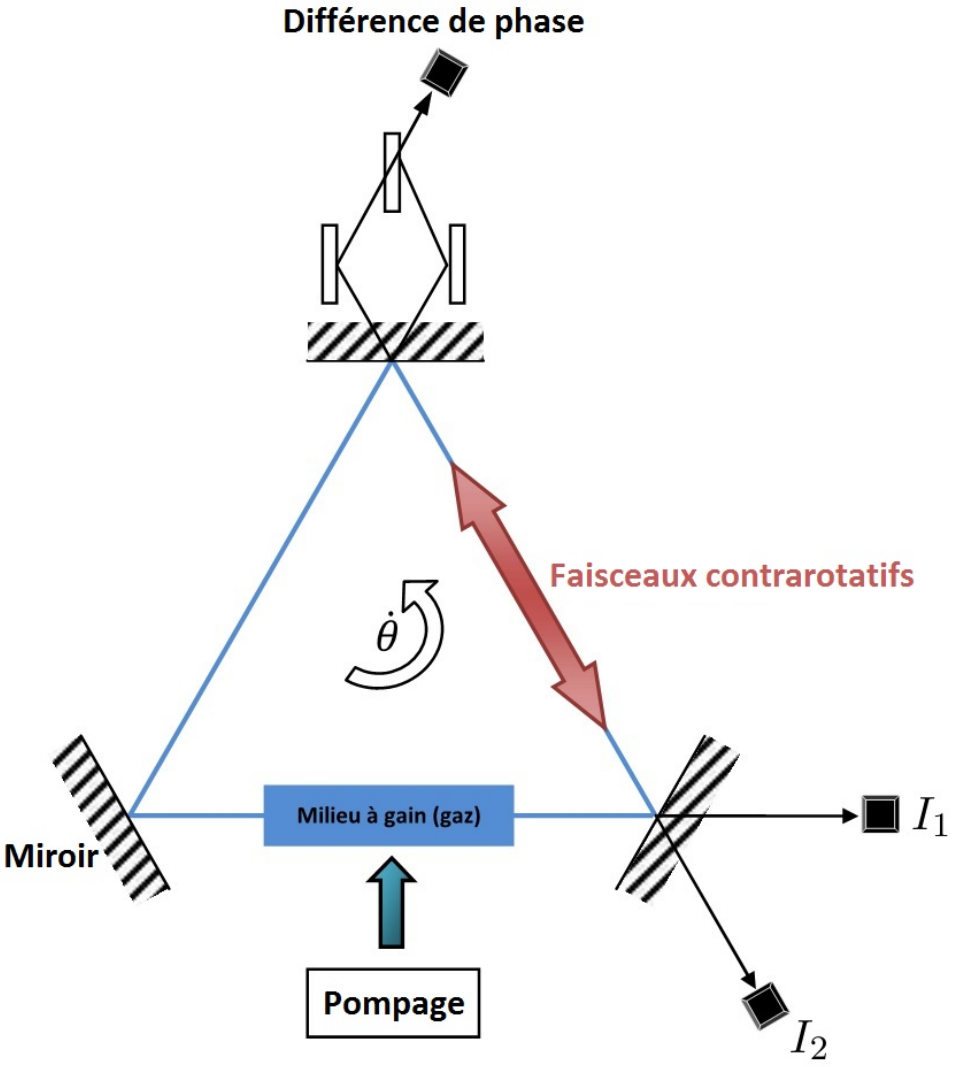


FIGURE 1.3 – Le schéma d'un gyroscope Laser à gaz ou RLG.

La cavité contient un gaz Hélium-Néon, à faible pression, auquel on fournit de l'énergie via un dispositif de pompage afin de générer deux faisceaux Laser contrarotatifs. Deux des miroirs de la cavité sont partiellement réfléchissants. Ils permettent de mesurer les intensités (I_1, I_2) des deux faisceaux contrarotatifs ainsi que les signaux de battements, qui sont une mesure indirecte de la différence de phases entre les deux faisceaux. L'information sur la vitesse de rotation $\dot{\theta}$ que subit le gyroscope se retrouve dans la différence de phases par effet Sagnac. De plus, le gyroscope est soumis à une oscillation mécanique qui a pour but, tel que nous le démontrerons dans la sous section 3.2.3.2, d'augmenter sa précision.

1.2 Principe physique des gyrolasers : effet Sagnac

En 1913 le physicien français Georges Sagnac observe en utilisant un interféromètre optique placé sur une table tournante l'effet qui porte son nom. L'effet Sagnac [26] se base sur la différence de chemin optique que voit un photon circulant dans un guide d'onde suivant la rotation que subit ce dernier. Considérons un guide d'onde circulaire, de rayon R et d'indice de réfraction n, dans lequel circule deux ondes contre-propagatives (O_1, O_2) de même pulsation ω_0. Ce dispositif est soumis à une vitesse de rotation $\dot{\theta}$. On s'intéresse à la longueur effective l_{ef} que voit un photon lorsqu'il effectue un tour.

Quand $\dot{\theta} = 0\ rd/s$, les photons des deux ondes (O_1, O_2) voient la même distance [1] qui vaut $l_{ef} = l = 2\pi R$. En revanche, quand le système subit une vitesse de rotation non nulle, le photon devra parcourir une plus grande distance afin de faire un tour complet, étant donné que son point de départ s'est déplacé de $R\dot{\theta}t$, durant le temps t qu'il lui a fallu pour effectuer son tour. La longueur effective s'exprime en fonction de t de deux manières différentes :

$$l_{ef} = c_0 t$$

où c_0 est la vitesse de la lumière dans le vide et $l_{ef} = l \pm R\dot{\theta}t$. On en déduit :

$$t = \frac{2\pi R}{c_0 \pm R\dot{\theta}}$$

le signe de la contribution dépendant du sens de rotation et du sens de propagation de l'onde (voir la figure suivante).

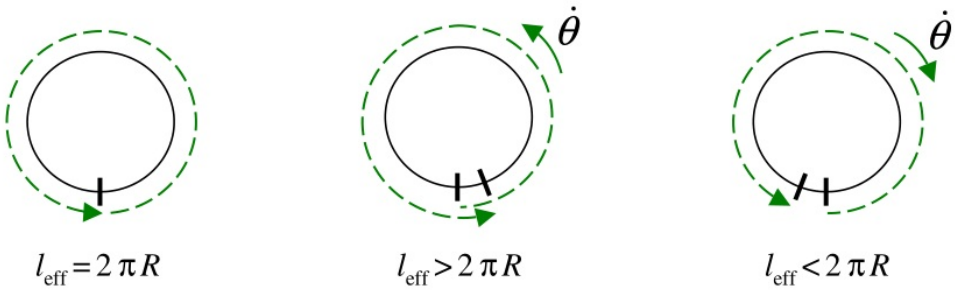


FIGURE 1.4 – La contribution de la rotation sur la longueur effective de parcours, extrait de [42]

Les photons des deux ondes mettent donc un temps différent pour effectuer un tour. Cette différence de temps de propagation Δt peut être vue comme une différence de chemin optique. En effet :

$$\Delta l = l_{O_1} - l_{O_2}$$

Avec (l_{O_1}, l_{O_2}) les longueurs que voit chacun des deux modes. On a donc :

$$\begin{cases} l_{O_1} &= c_0 t_{O_1} = \frac{c_0 l}{c_0 + R\dot{\theta}} \simeq l(1 - \frac{R\dot{\theta}}{c_0}) \\ l_{O_2} &= c_0 t_{O_2} = \frac{c_0 l}{c_0 - R\dot{\theta}} \simeq l(1 + \frac{R\dot{\theta}}{c_0}) \end{cases}$$

1. Une condition d'existence des deux faisceaux Lasers est que la longueur du guide d'onde soit un multiple de la longueur d'onde des faisceaux.

Donc :

$$\Delta l = l(1 - \frac{R\dot{\theta}}{c_0}) - l(1 + \frac{R\dot{\theta}}{c_0}) = -2\frac{Rl\dot{\theta}}{c_0} \tag{1.1}$$

En posant $S_d = \pi R^2$ la surface délimitée par le guide d'onde et en sachant que $l = 2\pi R$ son périmètre, on peut réécrire l'équation :

$$\Delta l = -\frac{4S_d\dot{\theta}}{c_0} \tag{1.2}$$

Cette différence de chemin optique induit un décalage des fréquences temporelles des deux modes, posons :

— (ω_1, ω_2) et (k_1, k_2) respectivement les pulsations temporelles et spatiales des deux modes,

— $\Omega = \omega_1 - \omega_2$ le décalage en fréquence induit par l'effet Sagnac.

On peut calculer le décalage Ω grâce à la condition d'existence des deux faisceaux, à savoir :

$$\omega_0 = N\frac{c_0}{l}, \quad \text{où} \quad N \in \mathbb{N}$$

En différenciant cette équation on obtient :

$$\frac{\Delta\omega_0}{\omega_0} := \frac{\Omega}{\omega_0} = -\frac{\Delta l}{l} \tag{1.3}$$

or, la dépendance de la variation du chemin optique Δl en fonction de la rotation $\dot{\theta}$, que subit le gyroscope, est donnée par l'équation (1.2). L'équation (1.3) devient

$$\Omega = -\omega_0\frac{\Delta l}{l} = \omega_0\frac{4S_d\dot{\theta}}{c_0 l}$$

On obtient donc un décalage, en fréquence, des deux modes, proportionnel à la vitesse de rotation. Des considérations de relativité générale, disponibles dans [42], permettent de prouver que ce résultat est valable dans le cas de tout guide d'onde plan, de longueur l et entourant une surface S_d.

Il suffit donc de mesurer cette différence en fréquence pour déduire la vitesse de rotation $\dot{\theta}$ que subit le système.

Posons $(\tilde{E}_1, \tilde{E}_2)$ les champs des deux faisceaux, ils dépendent du temps et de l'espace, on a :

$$\begin{cases} \tilde{E}_1(z_0,t) &= \tilde{E}_1(t) = E_1 e^{i\varphi_1(z_0,t)} = E_1 e^{i(\omega_1 t + k_1 z_0)} \\ \tilde{E}_2(z_0,t) &= \tilde{E}_2(t) = E_2 e^{i\varphi_2(z_0,t)} = E_2 e^{i(\omega_2 t + k_2 z_0 + \Phi)} \end{cases}$$

Où z_0 est la coordonnée du point de mesure et Φ un déphasage dû à une imperfection d'alignement.

Dans la réalité on recombine les faisceaux grâce à un dispositif optique. L'intensité résultante est mesurée grâce à des photo-détecteurs, elle est proportionnelle à $|E_1 e^{i(\omega_1 t + k_1 z_0)} + E_2 e^{i(\omega_2 t + k_2 z_0 + \Phi)}|^2$, soit, en posant $y(t)$ la mesure :

$$y \quad \propto \quad E_1^2 + E_2^2 + 2\Re(E_1 E_2^*)$$

Nous avons donc un signal qui oscille avec une phase $\varphi_{sagnac}(t) = \varphi_1(t) - \varphi_2(t)$.
Avec, après calcul :

$$\varphi_{sagnac}(t) = \Omega t + (k_1 - k_2)z_0 - \Phi$$

Et donc la pulsation instantanée de la composante oscillante du signal est :

$$\dot{\varphi}_{Sagnac}(t) = \Omega = \frac{4\omega_0 S_d}{c_0 l}\dot{\theta}$$

Cette réponse proportionnelle à la vitesse de rotation que subit le système $\dot{\theta}$ correspond à ce qui est attendu d'un gyroscope dans le cas idéal [38]. Dans la pratique, nous devrons prendre en compte les imperfections du montage, en particulier, la qualité des miroirs.

1.3 Présentation succincte des gyrolasers gaz

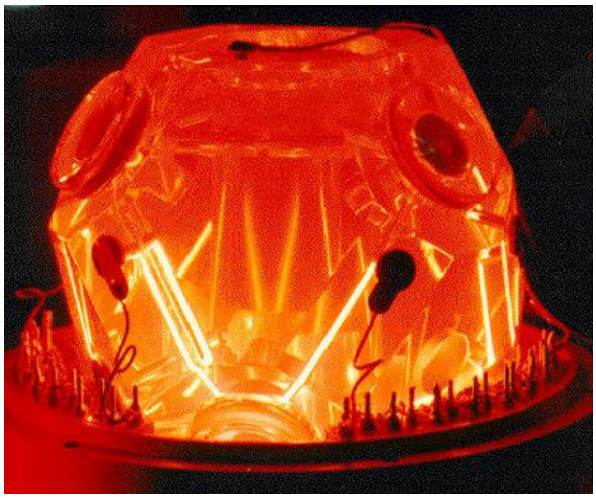


FIGURE 1.5 – Un gyroscope Laser à gaz, tri-axes "PIXYZ", extrait de [1]

Le principe des gyrolasers est assez simple, sa mise en oeuvre l'est beaucoup moins. Deux problématiques majeures peuvent être citées :

— afin d'obtenir un signal de battement, nous devons assurer l'existence des deux modes contrapropagatifs (régime bi-directionnel). Or, suivant la nature du milieu de gain, utilisé afin de générer les deux modes, une des deux ondes peut s'attribuer tous les atomes du milieu, empêchant l'autre d'exister. Ce phénomène nommé "Compétition entre modes" est surtout présent dans le cas des cavités solides,

— l'effet Sagnac, tel qu'il a été présenté, suppose que les deux modes sont parfaitement découplés. Ce qui nous permet d'obtenir un battement proportionnel à la vitesse de rotation. Dans la réalité, la cavité est rectangulaire avec des miroirs aux angles. Les deux modes se réfléchissent donc, sur les mêmes miroirs ce qui introduit un terme de couplage entre eux. Une non-linéarité apparaît dans la réponse du gyrolaser.

La technologie des gyrolasers à gaz présente déjà une grande maturité. Il est constitué d'un milieu amplificateur gaz, à base d'Hélium-Néon à faible pression. Ce gaz est pompé

par décharges plasma obtenues grâce à un dispositif d'anodes/cathodes. Les particules du milieu amplificateur (gaz) étant en mouvement permanent, elles ne possèdent pas de structure cristalline. Les deux modes ont donc à leur disposition, en moyenne, le même nombre de particules excitées. La problématique de compétition entre modes s'en trouve réduite et on observe un régime bi-directionnel stable.

La cavité optique est constituée de miroirs. Ces derniers ne sont pas parfaits, ils rétro-diffusent une partie du rayon incident. La pulsation instantanée du signal de battement devient, en prenant en compte la rétro-diffusion des miroirs

$$\dot{\varphi}(t) = \Omega + m\sin(\varphi(t) + \beta), \tag{1.4}$$

où

- m est le coefficient de rétro-diffusion des miroirs, il est d'autant plus petit que les miroirs sont de bonne qualité,
- β est le déphasage subi lors de la rétro-diffusion, il rend compte du positionnement des miroirs,
- Ω est la contribution de la vitesse de rotation que subit le système, par effet Sagnac.

Cette équation est connue sous le nom de l'équation d'Adler. Le modèle idéal correspond à $m = 0$.

On obtient la réponse de la figure 1.6

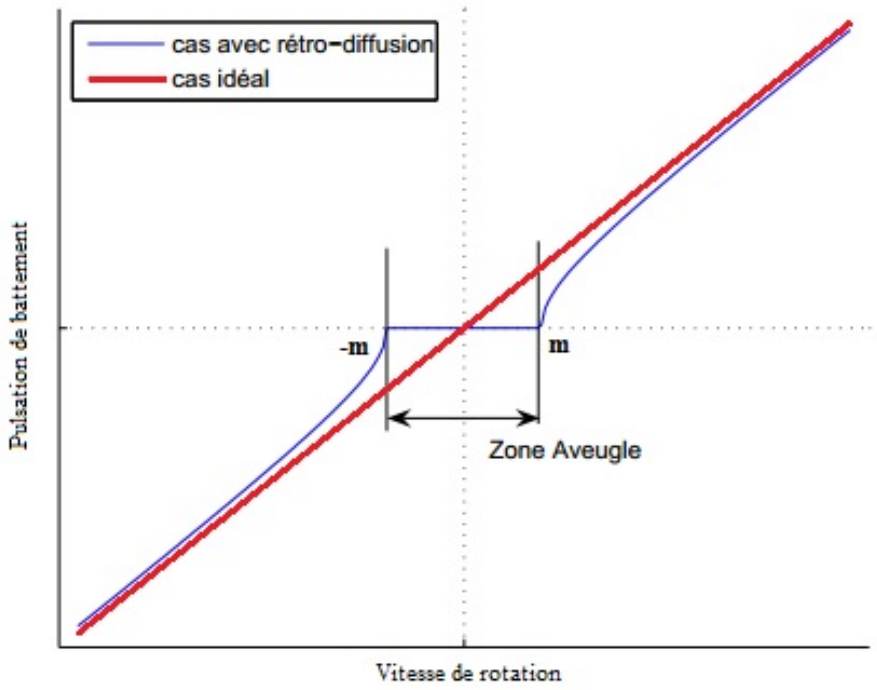


FIGURE 1.6 – La réponse du gyro en fonction de la vitesse de rotation, dans le cas idéal (rouge) et en tenant compte de la rétro-diffusion (bleu), extrait de [37].

La pente du cas idéal, correspond au facteur d'échelle. Dans la réalité, pour de faibles vitesses de rotation on n'observe plus de signal de battement [2]. Physiquement, ce phénomène appelé zone aveugle, correspond à l'accrochage du front d'onde au système [20], i.e., l'accrochage de la différence de phase avec la cavité optique. Il est largement documenté dans la littérature spécialisée, car il représente la première limitation théorique de performance du gyro.

Une solution technique à ce problème consiste à imposer au système, une large rotation sinusoïdale suivant son axe. Le front d'onde ne voit pas de différence entre l'activation mécanique qu'on lui impose et la vitesse de rotation que subit le système dans son ensemble. L'équation d'Adler peut donc se réécrire :

$$\dot{\varphi} = \{\Omega + \Omega_d \cos(\omega_d t)\} + m \sin(\varphi + \beta) \tag{1.5}$$

où

— ω_d la pulsation de l'activation mécanique, on a $\omega_d \sim m$,

— Ω_d l'amplitude de l'activation, corrigée du facteur d'échelle, on a $\Omega_d \gg m, \omega_d$.

On a donc une amplitude d'activation qui vaut, typiquement, 100 fois la zone aveugle. Le gyroscope se trouve presque tout le temps dans sa zone de fonctionnement linéaire, et la vitesse de rotation que subit le système pourra contribuer à la pulsation instantanée du signal de battement. La réponse du gyrolaser soumis à l'activation mécanique est donnée par la figure 1.7 (droite).

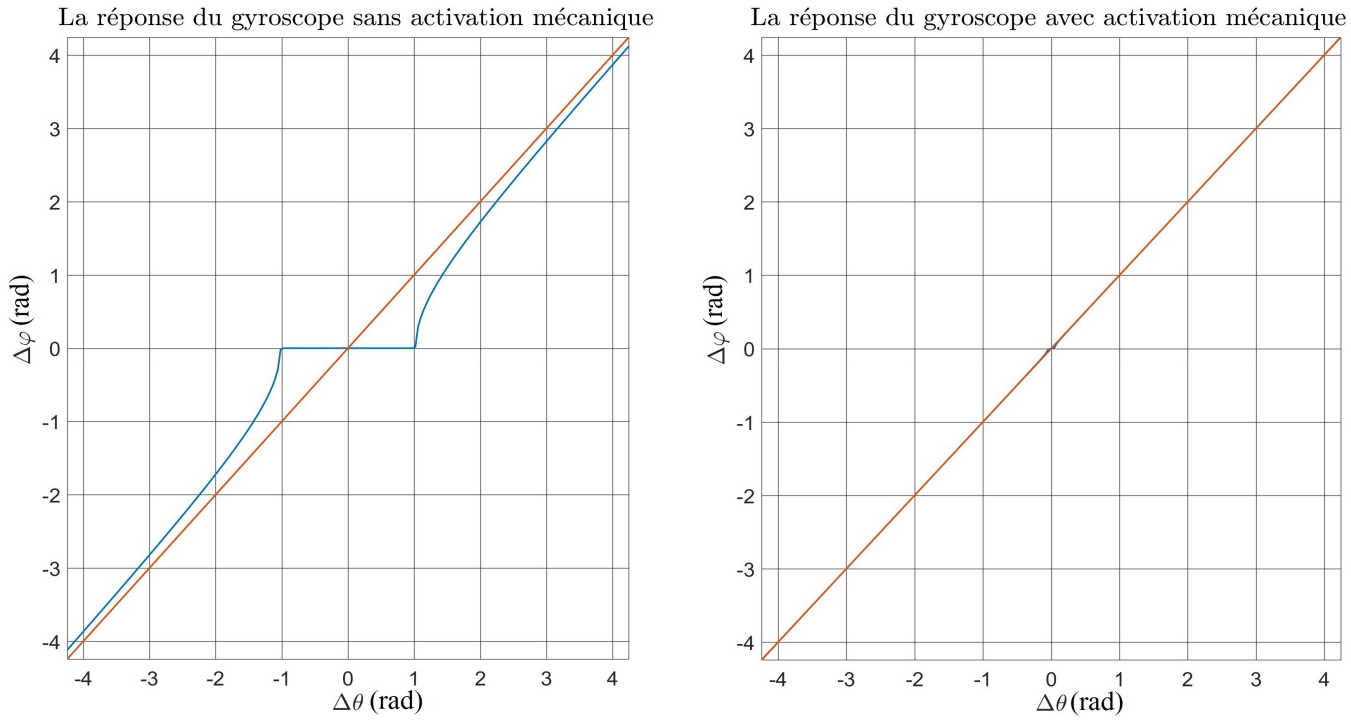


FIGURE 1.7 – L'accroissement de φ normalisé, sur une période d'activation $\frac{2\pi}{\omega_d}$ en fonction de $\Delta\theta$. A gauche sans activation, à droite avec.

2. En effet on observe : $\dot{\varphi} = 0$ pour $|\Omega| < m$.

Afin d'obtenir Ω, on échantillonne le signal de battement avec une période $T_d = \frac{2\pi}{\omega_d}$. Le signal d'activation a une contribution nulle sur cette période. L'accroissement de phase que l'on mesure est donc, au premier ordre :

$$\Delta\varphi = \Omega T_d$$

Un autre phénomène apparaît alors. Pour de très faibles vitesses de rotation, on observe un accrochage du front d'onde à l'activation mécanique [28]. Le signal de battement devient T_d périodique et la contribution de la vitesse de rotation disparaît. On n'observe plus d'accroissement de la phase.

Ce phénomène est connu sous le nom de "Lock-in dynamique" ou "zone aveugle dynamique". Des considérations disponibles dans [7] permettent de prouver qu'il apparaît pour $\Omega < \Omega_L$, avec $\Omega_L = m\sqrt{\frac{2\omega_d}{\pi\Omega_d}} \ll m$. On a une zone aveugle dynamique typiquement 10 fois plus petite que la zone aveugle.

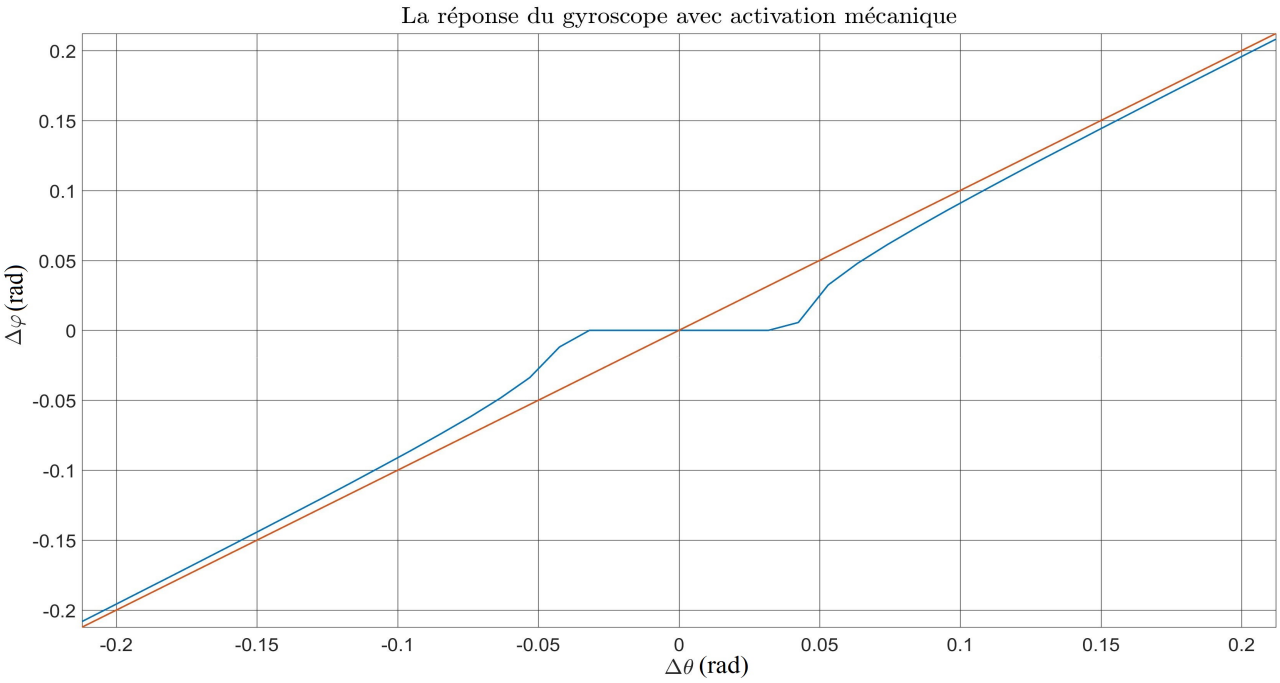


FIGURE 1.8 – L'accroissement de φ sur une période d'activation $\frac{2\pi}{\omega_d}$ en fonction de $\Delta\theta$.

Afin de s'affranchir de cette nouvelle limitation, une modulation via un bruit blanc [3] est appliquée sur l'amplitude de l'activation mécanique. Cette technique permet d'augmenter la précision du gyroscope pour les faibles valeurs de Ω mais dégrade sensiblement sa bande passante.

Cette présentation succincte du fonctionnement du gyrolaser permet de se familiariser avec son fonctionnement et ses principales limitations. Elle met en évidence les phénomènes, dus aux couplages des deux modes, tout en négligeant le phénomène de compétition entre eux. Une étude d'un point de vue "système" sera effectuée dans le chapitre 3, permettant de traduire la zone aveugle en perte d'observabilité.

3. Le bruit a un spectre constant sur la plage fréquentielle utile.

Chapitre 2

Modélisation des Gyrolasers

Ce chapitre vise à établir un modèle de référence sur lequel nous nous baserons dans la suite de ce manuscrit, il se fonde sur les cours d'optique quantique de l'école Polytechnique de A. Aspect, C. Fabre et G. Grynberg [25, 4, 5], sur les nombreuses discussions orales avec Fabien Bretenaker, ainsi que sur son cours [13] de l'ENS Cachan et de l'école Polytechnique.

En 1916 A. Einstein posa les bases théoriques des Lasers dans son papier "Emission and Absorption of Radiation in Quantum Theory" [18]. Il y décrit les différents phénomènes d'interaction entre l'onde et la matière via une approche statistique ce qui lui permit de prouver le caractère amplificateur du champ de l'émission stimulée. En 1928, les phénomènes d'absorption et d'émission stimulée furent confirmés par R. W. Ladenburg. La première observation physique date de 1947 et est attribuée à W. E. Lamb.

En 1939 A. Valentin prédit l'utilisation de l'émission afin d'amplifier des micro-ondes. Il fallut attendre l'année 1951 avant la première réalisation concrète, accomplie par C. H. Townes, d'un maser.

La première amplification d'une onde dans le domaine visible (premier Laser), date des travaux de T. H. Maiman en 1960. Il utilisa comme milieu à gain un cristal de rubis (longueur d'onde de 694 nm) auquel il fournissait de l'énergie via une lampe flash.

Ce chapitre est composée de trois parties. Dans la première partie on expose le fonctionnement d'un Laser à cavité linéaire, un raisonnement quantitatif de bilan nous permet de poser les premières équations qui décrivent l'évolution de l'état du Laser. Cette approche est historiquement issue de la communauté des ingénieurs qui cherchaient à modéliser le comportement et les performances des Lasers afin de les caractériser pour établir un cahier des charges, de plus, elle permet une compréhension simple de l'influence des différents phénomènes mis en jeu dans le Laser. Malgré les approximations et les simplifications, ce raisonnement heuristique conclut sur un modèle relativement fiable pour une large gamme de Laser.

Dans la deuxième partie, on adopte une approche plus rigoureuse, dite "semi-classique", afin de modéliser le comportement d'un Laser unidirectionnel dans une cavité circulaire. On présente les phénomènes influant sur la dynamique du Laser et on met en évidence la contribution de la rotation que subit la cavité. Pour la majorité des Lasers, la polarisation du milieu possède une dynamique beaucoup plus rapide que celle de l'inversion de population et celle du champs. On exploite cette différence d'échelles temporelles afin de simplifier le modèle via un calcul de perturbations singulières, aussi appelé par les physiciens "élimination adiabatique", ce qui nous permet de supprimer la dépendance du modèle vis-à-vis de la

polarisation.

La dernière partie traite le cas d'une cavité où deux modes contrarotatifs coexistent, on présente les différents couplages entre les deux modes. Les deux faisceaux partagent le même milieu à gain , cela génère un phénomène de couplage entre les densités de population qui contribuent à chacun des faisceaux. Pour les Lasers de classe A, auquel appartient le Laser gaz He-Ne, la dynamique de la densité d'inversion de population est beaucoup plus rapide que celle des champs. On exploite cette différence d'échelles temporelles afin de simplifier le modèle via un calcul de perturbations singulières, ce qui nous permet de supprimer la dépendance du modèle vis-à -vis de la densité de population. Les deux faisceaux évoluent dans la même cavité et sont réfléchis sur les mêmes miroirs imparfaits, cela génère un couplage entre les champs complexes des deux faisceaux contrarotatifs. Cela nous permet de conclure sur des équations qui modélisent les amplitudes complexes (appelées par abus de langage "équations de Lamb") qui nous serviront de modèle de référence pour toute la suite de ce manuscrit.

2.1 Modélisation simplifiée d'un Laser

Les Lasers (light amplification by stimulated emission of radiation) sont des dispositifs qui émettent une lumière cohérente dont la fréquence va des infrarouges (IR) aux ultraviolets (UV). La maîtrise qu'offre les Lasers sur les caractéristiques du faisceau sortant (intensité, fréquence et taille) en fait un outil avec de très nombreuses applications dans un très large spectre de domaines. A titre non exhaustif, on peut citer l'industrie (découpes de précision, polissage de composants micro-électroniques, fabrication de semi-conducteurs et de nouveaux composants synthétiques), la médecine (interventions chirurgicales, destruction de mélanomes), le domaine militaire (guidage des projectiles de courte et moyenne portée, destruction de missiles), l'optique (lecteur cd, alignement) et le domaine de la mesure (mesure de distances, de fréquences et interférométrie).

2.1.1 Laser dans une cavité linéaire

Au fur et à mesure de la maturation de la technologie Laser, les dispositifs ont gagné en complexité mais se fondant tous sur le même principe physique, ils partagent un certain nombre de composants nécessaires à l'apparition du phénomène Laser 2.1.

Les Lasers sont basés sur une amplification du champ lumineux à l'intérieur de leur cavité via une interaction onde-matière qui prend place dans le milieu à gain. Ils sont composés des éléments suivants :

— un dispositif de pompage qui a pour but de fournir l'énergie au milieu à gain. Il peut être thermique, lumineux (diode Laser), électrique (décharge plasma),

— un milieu à gain, dans lequel l'énergie fournie par le dispositif de pompage permet la mise en place des interactions onde-matière qui amplifient le champ lumineux à l'intérieur de la cavité. La classification usuelle des Lasers, en industrie, fait référence à la nature de ce milieu qui peut être solide (Nd-Yag), liquide (colorants) ou gazeux (HeNe),

— deux miroirs qui imposent aux flux lumineux des allers-retours dans le milieu à gain créant ainsi le phénomène de résonance, qui permet d'obtenir un faisceau cohérent et de compenser les différentes pertes dans la cavité. Un des miroirs est partiellement réfléchissant ($\sim$98%) afin d'obtenir un faisceau sortant.

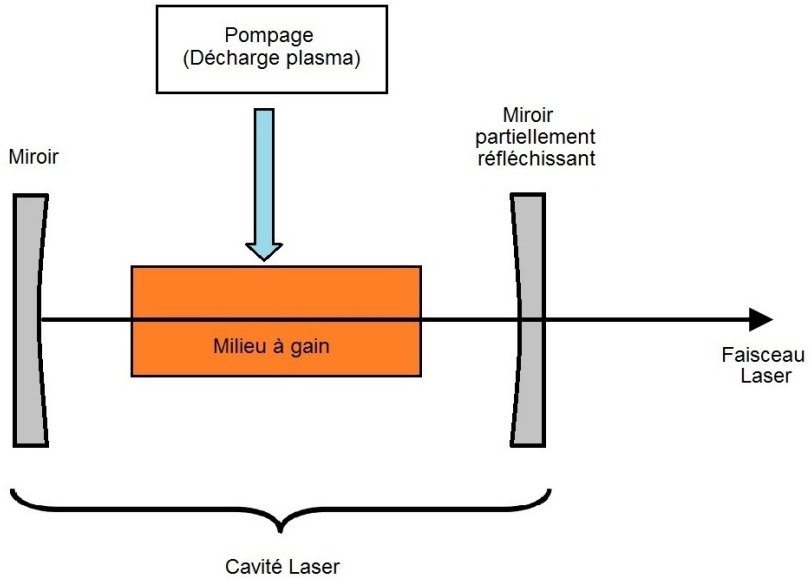


FIGURE 2.1 – Composants d'une cavité Laser.

2.1.2 Conversion énergétique dans le milieu à gain

Les interactions onde-matière qui ont lieu dans le milieu à gain sont au cœur du phénomène Laser. En effet, elles sont à l'origine de la conversion de l'énergie fournie par le dispositif de pompage en amplification du champ lumineux.

En 1913 Bohr posa l'hypothèse que l'ensemble des énergies pouvant être pris par une particule est un ensemble discret (aussi appelé niveaux d'énergie). Cette hypothèse, confirmée expérimentalement sur l'atome d'hydrogène, permit la validation de l'équation de Schrödinger qui prédisait cette quantification des niveaux d'énergies marquant ainsi, la première victoire théorique de la physique quantique. Le passage d'une particule d'un niveau d'énergie à un autre, peut être accompagné d'une absorption ou d'une émission de photon.

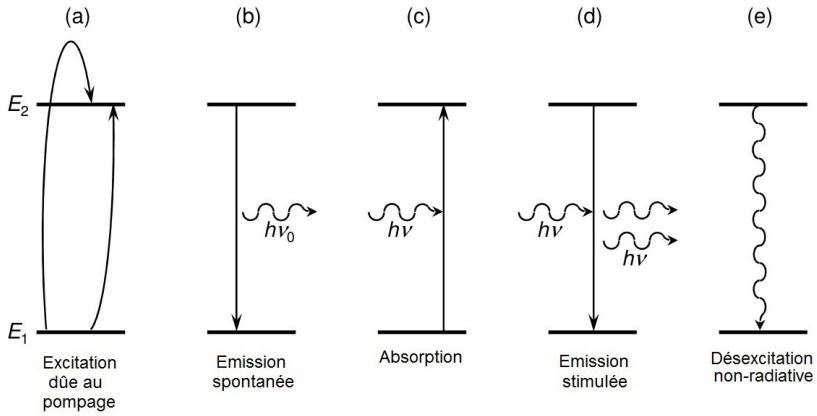


FIGURE 2.2 – Schémas de conversion d'énergie dans un système à deux niveaux, extrait de [13].

Considérons un système à deux niveaux d'énergie 1 et 2. Posons $E_1 < E_2$ leur énergie, on peut décrire 5 schémas de conversion d'énergie, tels qu'illustrés dans la figure 2.2 :

(a) Excitation due au pompage. L'énergie fournie au milieu à gain fait passer une partie des particules du niveau 1 au niveau 2 (transition $1 \to 2$).

(b) Émission spontanée. La particule passe du niveau 2 au niveau 1 (transition $2 \to 1$) en émettant un photon d'énergie $\hbar\omega_0 = E_2 - E_1$ dans une direction aléatoire. La probabilité d'occurrence de ce phénomène est une exponentielle décroissante en fonction du temps. Ce phénomène correspond au temps de vie fini du niveau 2.

(c) Absorption. Une particule du niveau 1 passe au niveau 2 (transition $1 \to 2$) en absorbant un photon d'énergie $\hbar\omega$ proche de $\hbar\omega_0$. A chaque occurrence de ce phénomène le flux lumineux à l'intérieur de la cavité est atténué.

(d) Émission stimulée. Sous l'effet du passage d'un photon, d'énergie $\hbar\omega$ proche de $\hbar\omega_0$, une particule du niveau 2 se désexcite en émettant un photon identique au photon incident (énergie, direction, phase). A chaque occurrence de ce phénomène le flux lumineux à l'intérieur de la cavité est amplifié.

(e) Désexcitation non radiative. Une particule du niveau 2 peut passer au niveau 1 (transition $2 \to 1$) sans émettre de photon, la différence d'énergie peut être convertie, par exemple, en énergie cinétique des particules ou en émission de phonons dans le cas d'un solide.

2.1.3 Bilan dans la cavité

Les différents schémas de conversion énergétique permettent d'effectuer un raisonnement quantitatif de bilan sur le nombre total de photons F dans la cavité et le nombre de particules dans les niveaux 1 et 2, que l'on note respectivement N_1 et N_2.

L'évolution du nombre total de photons dans la cavité est donnée par

$$\frac{dF}{dt} = \kappa N_2 F - \kappa N_1 F + \kappa_s N_2 - \frac{F}{\tau_{cav}}$$

où

— le terme $\kappa N_2 F$ provient de l'émission stimulée (d), il est proportionnel au nombre de photons F et au nombre de particules à désexciter N_2, sa contribution est constructive,

— le terme $-\kappa N_1 F$ provient de l'absorption (c), il est proportionnel au nombre de photons F et au nombre de particules à exciter N_1, sa contribution est destructive. Le phénomène d'absorption étant symétrique par rapport au phénomène d'émission stimulée, la constante de proportionnalité κ est la même,

— le terme $\kappa_s N_2$ provient de l'émission spontanée (b). N'étant pas issu d'une interaction onde-matière, il dépend uniquement de N_2. Le coefficient de proportionnalité κ_s est du même ordre de grandeur que κ, ce qui nous amène à négliger ce terme sachant que $F \sim 10^{10} - 10^{20}$,

— le terme $-\frac{F}{\tau_{cav}}$ correspond aux pertes intra-cavité, il est caractérisé par la constante τ_{cav} aussi appelée temps de vie d'un photon dans la cavité. Ces pertes sont principalement issues du miroir partiellement réfléchissant et de la diffraction à l'intérieur de la cavité, sa contribution est destructive.

Finalement, en posant $\Delta N = N_2 - N_1$ la différence de population entre les niveaux 1 et 2, l'équation devient

$$\frac{dF}{dt} = \kappa \Delta N F - \frac{F}{\tau_{cav}} \tag{2.1}$$

L'évolution de la différence de population des niveaux ΔN est donnée par

$$\frac{d\Delta N}{dt} = R_p - \kappa \Delta N F - \Gamma_D \Delta N \tag{2.2}$$

où

- le terme R_p est issu de l'apport en énergie via le pompage (a),
- le terme $\kappa \Delta N F$ provient de l'échange de populations entre les deux niveaux dû à l'absorption et l'émission stimulée,
- le terme $\Gamma_D \Delta N$ correspond au temps de vie des niveaux 1 et 2. Ce terme présuppose que les deux niveaux possèdent le même temps de vie Γ_D^{-1}, ce qui est vrai dans le cas où les deux niveaux sont instables avec le même taux d'émission spontanée (b), par exemple, deux sous-niveaux d'un même niveau électronique. Dans le cas où les niveaux sont stables, le terme Γ_D^{-1} correspond au temps moyen durant lequel les particules restent dans la section du flux lumineux, i.e., le temps moyen d'interaction entre les particules et le champ, identique pour les deux niveaux.

Les équations (2.1)-(2.2) portent le nom du modèle de Statz et De Mars. Bien qu'obtenu avec des raisonnements simplistes, ce modèle est assez fiable et permet de décrire le comportement d'une large gamme de Lasers. Il peut être obtenu via un calcul plus rigoureux de physique quantique, sous réserve de certaines hypothèses.

2.2 Modélisation d'un Gyrolaser, approche "semi-classique"

Les miroirs parallèles formant la cavité ont pour but d'imposer aux photons des allers-retours dans le milieu à gain, afin de créer le phénomène de résonance qui enclenche l'émission Laser et permet, en régime statique, de compenser les pertes à l'intérieur de la cavité. Le même résultat peut être obtenu avec différentes géométries, par exemple, une cavité en anneau qui a l'avantage d'être sensible à la rotation qu'elle subit.

On commence par présenter le cas où seul un mode existe à l'intérieur de la cavité (unidirectionnel), afin de présenter succinctement l'approche dite "semi-classique" qui permet d'obtenir une modélisation plus précise de la dynamique du Laser. Une présentation plus complète et rigoureuse de la modélisation des gyrolasers peut être trouvée dans une thèse récente [34] de J.S. Macé.

La généralisation au cas où deux modes contrapropagatifs évoluent dans la cavité, permet de mettre en évidence l'effet Sagnac issu du cumul de l'influence de la rotation sur les deux modes. De plus, le phénomène de rétro-diffusion des miroirs qui est à l'origine des limitations du gyroscope est présenté comme un couplage linéaire sur l'amplitude complexe des champs.

2.2.1 Cas unidirectionnel

Considérons une cavité triangulaire, dans laquelle circule un faisceau Laser unidirectionnel et soumise à une rotation $\dot{\theta}$.

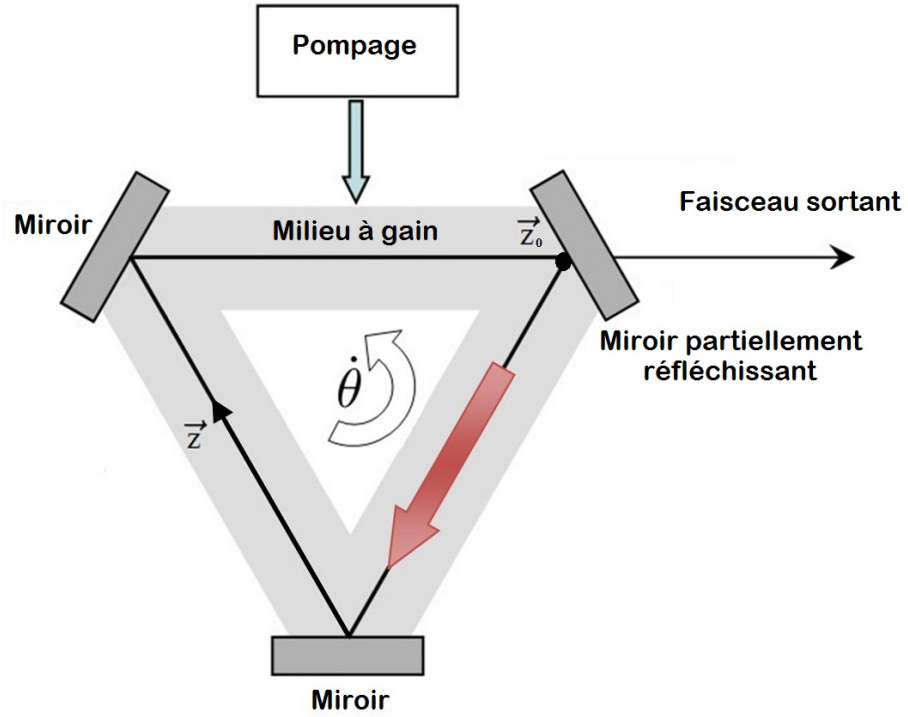


FIGURE 2.3 – Schéma d'une cavité triangulaire unidirectionnel soumise à une rotation $\dot{\theta}$, avec comme point de mesure $\vec{z}_0$.

Contrairement à ce qui a été affirmé dans la sous-section 2.1, les particules qui contribuent à l'amplification du champ dans la cavité ne sont pas celles du niveau haut (niveau 2), mais celles qui se trouvent dans un état de superposition quantique entre les deux états 1 et 2. Chacune de ces particules forme un dipôle électrique qui peut être décrit par une polarisation. C'est l'interaction du champ avec la polarisation des particules, qui permet de l'amplifier. Ce constat implique que la description de la matière ne peut plus se faire uniquement en utilisant la différence de populations entre les deux niveaux mais doit aussi prendre en compte la polarisation dans le milieu à gain [21].

2.2.1.1 Equations semi-classiques

On suppose que le milieu à gain est homogène et remplit toute la cavité et on note z l'abscisse le long des axes du gyroscope. De plus, on suppose que le champ intracavité peut être traité comme une onde plane, on a :

$$E(z,t) = \mathbb{A}(z,t)e^{-i(\omega t-kz)} + \mathbb{A}^*(z,t)e^{i(\omega t-kz)} \quad (2.3)$$
$$P(z,t) = \mathcal{P}(z,t)e^{-i(\omega t-kz)} + \mathcal{P}^*(z,t)e^{i(\omega t-kz)} \quad (2.4)$$

où

— E est le champ dans la cavité,

— P est la polarisation du milieu à gain,

— $\mathbb{A}$ et $\mathcal{P}$ sont respectivement les enveloppes lentement variables de E et P,

— ω est la pulsation temporelle du Laser, qui peut être légèrement différente de la pulsation ω_0 associée à la transition de niveau dont est issu le Laser,

— k est la pulsation spatiale.

De plus, on pose $\Delta n(z,t)$ la différence de populations entre les deux niveaux dont est issu le phénomène Laser, aussi appelée densité d'inversion de population.

Evolution de Δn et $\mathcal{P}$

Pour une particule isolée, l'évolution de la polarisation et de la probabilité de présence sur un niveau est obtenue en résolvant l'équation de Schrödinger. Pour un système quantique dissipatif, comme c'est le cas ici, le formalisme de la matrice densité doit être adopté. Dans le cas d'une émission Laser issue d'une transition à deux niveaux 1 et 2, la matrice de densité s'écrit sous la forme :

$$\hat{\rho} = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{21}^* \\ \rho_{21} & \rho_{22} \end{pmatrix} \tag{2.5}$$

où $\rho_{ii} \geq 0$, est la densité de population du niveau i, $\rho_{12} \in \mathbb{C}$ est la cohérence entre les deux niveaux et $\hat{H}$ l'hamiltonien du système (l'énergie). La condition de normalisation s'écrit $Tr(\hat{\rho}) = \rho_{11} + \rho_{22} = 1$.

La cohérence dénombre les particules se trouvant dans un état de superposition entre les deux niveaux, elles engendrent la polarisation dans le milieu, on pose donc, à z fixé :

$$\sigma_{21}(t) = \rho_{21}(t)e^{i\omega t} \tag{2.6}$$

La prise en compte des phénomènes de conversion énergétique décrits dans la sous-section 2.1, peut être schématisée par la figure 2.4

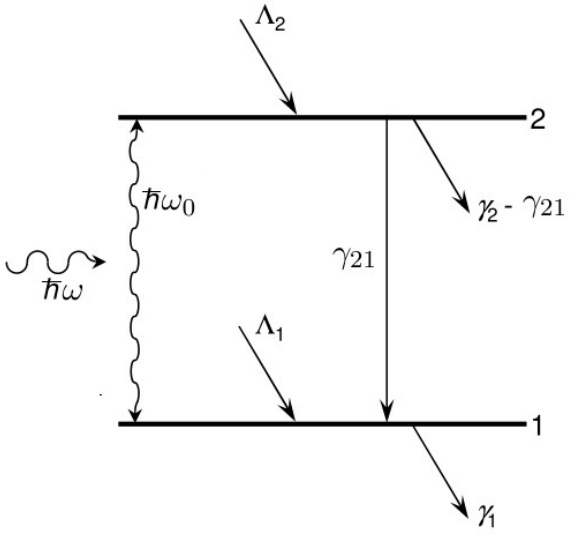


FIGURE 2.4 – L'émission Laser à deux niveaux.

avec

— Λ_i le pompage sur le niveau i,

— γ_i le taux de relaxation du niveau i vers les niveaux inférieurs. Une partie, que l'on note γ_{21} de la population du niveau 2 passe au niveau 1 par relaxation,

— $\hbar\omega_0$ l'énergie de la transition,

— $\hbar\omega$ l'énergie d'un photon du flux lumineux qui se propage dans la cavité.

Le système quantique dissipatif est modélisé par les équations de Bloch optiques [13, 4], à z fixé :

$$\frac{d}{dt}\rho_{22} = \Lambda_2 - \gamma_2\rho_{22} - i\frac{d}{\hbar}(\mathbb{A}^*\sigma_{21} - \mathbb{A}\sigma_{21}^*) \tag{2.7}$$

$$\frac{d}{dt}\rho_{11} = \Lambda_1 - \gamma_1\rho_{11} + \gamma_{21}\rho_{22} + i\frac{d}{\hbar}(\mathbb{A}^*\sigma_{21} - \mathbb{A}\sigma_{21}^*) \tag{2.8}$$

$$\frac{d}{dt}\sigma_{21} = -(\Gamma_r - i\delta)\sigma_{21} - i\frac{d}{\hbar}\mathbb{A}(\rho_{22} - \rho_{11}) \tag{2.9}$$

avec $\delta = \omega - \omega_0$, la différence entre la pulsation du faisceau et la pulsation de la transition $2 \to 1$, Γ_r le taux de relaxation de la cohérence et d le dipôle électrique suivant la direction $\vec{z}$, supposé constant.

La polarisation étant issue des particules en superposition entre les deux niveaux on a l'égalité suivante

$$\mathcal{P}(z,t) = nd\sigma_{21}(z,t) \tag{2.10}$$

avec n, la densité totale de population.

Dans le cas du gyroscope gaz HeNe, on peut effectuer l'approximation dite "quatre niveaux ". Le niveau 1 n'est pas le niveau fondamental, il est instable ($\gamma_1 \gg \gamma_2$) et non pompé ($\Lambda_1 \ll \Lambda_2$), on considère donc qu'il est vide ($\rho_{11} = 0$). On en déduit que la densité d'inversion de population est donnée par

$$\Delta n = n_2\rho_{22} = n\rho_{22} \tag{2.11}$$

où n_2 est la densité totale de population sur le niveau 2. En injectant les équations (2.11) et (2.10) dans les équations (2.8) et (2.9), on obtient

$$\frac{d}{dt}\mathcal{P} = -(\Gamma_r - i\delta)\mathcal{P} - i\frac{d^2}{\hbar}\mathbb{A}\Delta n \tag{2.12}$$

$$\frac{d}{dt}\Delta n = -\frac{1}{\tau}(\Delta n - \Delta n_0) - \frac{i}{\hbar}(\mathbb{A}^*\mathcal{P} - \mathbb{A}\mathcal{P}^*) \tag{2.13}$$

avec $\tau = \tau_2$ et $\Delta n_0 = n\Lambda_2\tau$.

Evolution du champ

Le champ $E(z,t)$ dans la cavité est régit par les équations de Maxwell Bloch [13], il est solution de

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} - \varsigma\mu_0\frac{\partial E}{\partial t} = \mu_0\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} \tag{2.14}$$

avec (μ_0, ε_0), respectivement, la perméabilité et la permittivité du vide. Les pertes dans la cavité, dues aux miroirs et à la diffraction, sont introduites dans l'équation (2.14) par un

terme de conductivité ς, supposé uniforme le long de la cavité. De plus, on suppose que l'on est dans le cadre de "l'approximation dite des enveloppes lentement variables" (AELV), i.e., l'évolution temporelle (respectivement spatiale) de l'enveloppe du champ et de la polarisation, ainsi que leur dérivées, est lente par rapport à ω (respectivement k).

L'AELV se traduit par

$$\begin{aligned} |\frac{\partial^2 \mathbb{A}}{\partial z^2}| &\ll k|\frac{\partial \mathbb{A}}{\partial z}| \\ |\frac{\partial^2 \mathbb{A}}{\partial t^2}| &\ll \omega|\frac{\partial \mathbb{A}}{\partial t}| \\ |\frac{\partial^2 \mathcal{P}}{\partial t^2}| &\ll \omega|\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial t}| \ll \omega\varepsilon|\frac{\partial \mathbb{A}}{\partial t}| \\ |\frac{\partial \mathbb{A}}{\partial t}| &\ll \omega|\mathbb{A}|, \end{aligned} \tag{2.15}$$

où ε est la permittivité du milieu à gain. En injectant les équations (2.3) et (2.4), ainsi que l'approximation AELV (2.15) dans (2.14), on obtient l'évolution de l'enveloppe lentement variable du champ $\mathbb{A}$ en fonction de $\mathcal{P}$

$$\frac{c}{n_0}\frac{\partial \mathbb{A}}{\partial z} + \frac{\partial \mathbb{A}}{\partial t} + \frac{\varsigma}{2\varepsilon}\mathbb{A} = i\frac{\omega}{2\varepsilon}\mathcal{P} \tag{2.16}$$

avec n_0, l'indice de réfraction du milieu à gain et c_0 la vitesse de la lumière dans le vide.

Les cavités des gyrolasers sont étudiées de façon à minimiser les pertes dans la cavité, ce qui nous permet de négliger la dépendance en espace de l'amplitude de l'enveloppe du champ, i.e., $\frac{c}{n_0}\frac{\partial \mathbb{A}}{\partial z} \simeq 0$, l'équation (2.16) se réécrit

$$\frac{d}{dt}\mathbb{A} = -\frac{1}{2\tau_{cav}}\mathbb{A} + i\frac{\omega}{2\varepsilon}\mathcal{P} \tag{2.17}$$

avec $\tau_{cav} = \frac{\varepsilon}{\varsigma}$.

Prise en compte de la rotation $\dot{\theta}$

Deux méthodes s'offrent à nous pour prendre en compte la rotation $\dot{\theta}$ que subit la cavité :

1. Réécrire l'équation de Maxwell (2.14) dans le repère tournant de la cavité. La contribution de la rotation se traduit alors par un terme en $2a(z)\frac{\partial^2 E}{\partial z \partial t}$, où $a(z)$ est la vitesse en z du gyrolaser suivant l'axe de propagation. Ces calculs sont disponibles dans [34].
2. Interpréter la rotation, que subit la cavité, comme étant une modification de la longueur optique de la cavité qui entraine un décalage de la fréquence du faisceau. Puis reporter le déphasage accumulé lors de la propagation du faisceau dans la cavité dans l'équation (2.17). Nous adopterons cette approche.

Reprenons le raisonnement suivit dans la sous-section 1.2, la différence de chemin optique engendré par la rotation de la cavité est donnée par

$$\Delta l = l_{cav} - l_{cav}(1 + \frac{R\dot{\theta}}{c_0}) = -\frac{Rl_{cav}\dot{\theta}}{c_0}$$

La différence de pulsation induite par $\dot{\theta}$ s'écrit

$$\Delta\omega \equiv \delta = -\omega\frac{\Delta l}{l_{cav}} = \frac{2\omega S_d}{c_0 l_{cav}}\dot{\theta} = \frac{\Omega}{2} := \frac{\dot{\Theta}}{2} \tag{2.18}$$

Le déphasage qu'acquiert un photon lors d'un tour de la cavité est

$$\varphi_c = kl_{cav} \equiv \frac{n_0}{c_0}l_{cav}\Delta\omega = \frac{n_0}{c_0}l_{cav}\frac{\Omega}{2}\ [2\pi]$$

Or chaque tour dure $\Delta t_c = \frac{n_0}{c_0}l_{cav}$, on en déduit que le déphasage par unité de temps est

$$\frac{\varphi_c}{\Delta t_c} = \frac{\Omega}{2}$$

l'équation d'évolution de l'amplitude du champ s'écrit

$$\frac{d}{dt}\mathbb{A} = -(\frac{1}{2\tau_{cav}} - i\frac{\Omega}{2})\mathbb{A} + i\frac{\omega}{2\varepsilon}\mathcal{P}$$

Pour résumer, les équations d'état modélisant un gyrolaser soumis à une rotation $\dot{\theta}$, au point de mesure $\vec{z} = \vec{z}_0$ fixé, sont

$$\frac{d}{dt}\mathbb{A} = -(\frac{1}{2\tau_{cav}} - i\frac{\Omega}{2})\mathbb{A} + i\frac{\omega}{2\varepsilon}\mathcal{P} \tag{2.19}$$

$$\frac{d}{dt}\Delta n = -\frac{1}{\tau}(\Delta n - \Delta n_0) - \frac{i}{\hbar}(\mathbb{A}^*\mathcal{P} - \mathbb{A}\mathcal{P}^*) \tag{2.20}$$

$$\frac{d}{dt}\mathcal{P} = -(\Gamma_r - i\frac{\Omega}{2})\mathcal{P} - i\frac{d^2}{\hbar}\mathbb{A}\Delta n \tag{2.21}$$

Une considération sur les ordres de grandeurs s'imposent : on s'intéresse dans ce document aux faibles vitesses de rotation $\Omega \sim 10^3 \sim 10^4\ rd.s^{-1}$, or la fréquence typique de transition du Laser He-Ne est de l'ordre de $10^{15}\ rd.s^{-1}$ ce qui nous permet de poser $\omega = \omega_0 + \Omega \simeq \omega_0$.

Finalement la modélisation d'un gyrolaser en fonctionnement unidirectionnel est donnée par

$$\frac{d}{dt}\mathbb{A} = -(\frac{1}{2\tau_{cav}} - i\frac{\Omega}{2})\mathbb{A} + i\frac{\omega_0}{2\varepsilon}\mathcal{P} \tag{2.22}$$

$$\frac{d}{dt}\Delta n = -\frac{1}{\tau}(\Delta n - \Delta n_0) - \frac{i}{\hbar}(\mathbb{A}^*\mathcal{P} - \mathbb{A}\mathcal{P}^*) \tag{2.23}$$

$$\frac{d}{dt}\mathcal{P} = -(\Gamma_r - i\frac{\Omega}{2})\mathcal{P} - i\frac{d^2}{\hbar}\mathbb{A}\Delta n. \tag{2.24}$$

Les variables d'état $(\mathbb{A}, \mathcal{P})$ sont complexes, cela implique que le terme $i(\mathbb{A}^*\mathcal{P} - \mathbb{A}\mathcal{P}^*)$ est réel, l'équation (2.23) d'évolution de la densité d'inversion de population est réelle et donc Δn aussi. Ceci est cohérent avec la physique quand on sait que Δn est homogène à une densité volumique de particules, elle est donc réelle.

2.2.1.2 Réduction par perturbations singulières

Le système d'équations modélisant le faisceau laser unidirectionnel est multi-échelles. En effet, pour une très large gamme de Laser, la polarisation du milieu à gain a une dynamique beaucoup plus rapide que celle de l'inversion de population et du champ ($\Gamma_r^{-1} \ll \tau_{cav}, \tau$). Un ordre de grandeur typique des échelles pour le Laser He-Ne qui nous intéresse,

$$\Gamma_r^{-1} \sim 10^{-15}\ s^{-1}, \quad \tau \sim 10^{-9}\ s^{-1}, \quad \tau_{cav} \sim 10^{-5} s^{-1}$$

La dynamique de la polarisation étant plus rapide que le reste des variables d'état, on cherche à supprimer la dépendance en $\mathcal{P}$ via un calcul de perturbations singulières, aussi appelé par les physiciens "élimination adiabatique".

Une problématique sur les variables d'état complexes $(\mathbb{A}, \mathcal{P})$ apparaît. En effet, on cherche à effectuer un calcul de perturbations singulières, ce qui implique d'étudier la stabilité de la couche limite et du modèle réduit. Or le terme $i\dfrac{\Omega}{2}$ impose une rotation constante aux variables complexes $(\mathbb{A}, \mathcal{P})$. La solution à ce problème est simplement d'exprimer ces variables dans le repère tournant à la vitesse $\dfrac{\Omega}{2}$, d'effectuer le calcul de perturbations singulières dans ce nouveau repère, puis de reporter le résultat dans le repère "classique". On pose

$$\mathbb{A}_\Omega = \mathbb{A}\ e^{-i\frac{\Theta}{2}} \tag{2.25}$$
$$\mathcal{P}_\Omega = \mathcal{P}\ e^{-i\frac{\Theta}{2}}, \tag{2.26}$$

les variables $(\mathbb{A}, \mathcal{P})$ ramenées dans le repère tournant et avec Θ définit dans l'équation (2.18). On a pour l'amplitude complexe du champ

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\mathbb{A}_\Omega &= \frac{d}{dt}\mathbb{A}\ e^{-i\frac{\Theta}{2}} - i\ \frac{\dot{\Theta}}{2}\ \mathbb{A}\ e^{-i\frac{\Theta}{2}} \\
&= -(\frac{1}{2\tau_{cav}} - i\frac{\Omega}{2})\mathbb{A}_\Omega + i\frac{\omega_0}{2\varepsilon}\mathcal{P}_\Omega - i\frac{\Omega}{2}\mathbb{A}_\Omega \\
&= -\frac{1}{2\tau_{cav}}\mathbb{A}_\Omega + i\frac{\omega_0}{2\varepsilon}\mathcal{P}_\Omega,
\end{aligned}$$

pour la polarisation

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\mathcal{P}_\Omega &= \frac{d}{dt}\mathcal{P}\ e^{-i\frac{\Theta}{2}} - i\frac{\dot{\Theta}}{2}\ \mathcal{P}\ e^{-i\frac{\Theta}{2}} \\
&= -(\Gamma_r - i\frac{\Omega}{2})\mathcal{P}_\Omega - i\frac{d^2}{\hbar}\mathbb{A}_\Omega\Delta n - i\frac{\Omega}{2}\mathcal{P}_\Omega \\
&= -\frac{1}{2\tau_{cav}}\mathbb{A}_\Omega + i\frac{\omega_0}{2\varepsilon}\mathcal{P}_\Omega.
\end{aligned}$$

Finalement, dans le nouveau repère, le système (2.22)-(2.24) s'écrit

$$\frac{d}{dt}\mathbb{A}_\Omega = -\frac{1}{2\tau_{cav}}\mathbb{A}_\Omega + i\frac{\omega_0}{2\varepsilon}\mathcal{P}_\Omega \tag{2.27}$$
$$\frac{d}{dt}\Delta n = -\frac{1}{\tau}(\Delta n - \Delta n_0) - \frac{i}{\hbar}(\mathbb{A}_\Omega^*\mathcal{P}_\Omega - \mathbb{A}_\Omega\mathcal{P}_\Omega^*) \tag{2.28}$$
$$\frac{d}{dt}\mathcal{P}_\Omega = -\Gamma_r\mathcal{P}_\Omega - i\frac{d^2}{\hbar}\mathbb{A}_\Omega\Delta n \tag{2.29}$$

L'objectif d'obtenir des variables complexes qui ne tournent pas avec une vitesse de rotation $\frac{\Omega}{2}$ est atteint, on pose :

$$\vec{X}_{ea} = \begin{pmatrix} \mathbb{A}_\Omega \\ \Delta n \end{pmatrix}$$

où l'indice ea fait référence à l'élimination adiabatique. On réécrit le système (2.27)-(2.29) sous la forme :

$$\frac{d}{dt}\vec{X}_{ea} = f_{ea}(\vec{X}_{ea}, \mathcal{P}_\Omega) \tag{2.30}$$

$$\varepsilon_{ea}\frac{d}{dt}\mathcal{P}_\Omega = g_{ea}(\vec{X}_{ea}, \mathcal{P}_\Omega) \tag{2.31}$$

Avec $\varepsilon_{ea} = \Gamma_r^{-1}$. On a séparé les variables dites lentes $\vec{X}_{ea}$ de la variable rapide $\mathcal{P}_\Omega$ afin de se ramener au cas canonique des perturbations singulières [31]. Le terme $\frac{d^2}{\hbar} \sim 10^{15}$, la fonction g_{ea} ne dépend donc pas de ε_{EA}.

La couche limite est obtenue par résolution de l'équation (2.31), où l'on annule le terme de gauche, on obtient :

$$\mathcal{P}_\Omega \overset{def}{=} h(\vec{X}_{ea}) = -i\frac{d^2}{\hbar\Gamma_r}\mathbb{A}_\Omega\Delta n \tag{2.32}$$

On se ramène à 0 pour la couche limite en posant :

$$y := \mathcal{P}_\Omega - h(\vec{X}_{ea}).$$

La variable centrée y est solution de l'équation :

$$\frac{dy}{d\tau_{ea}} = g_{ea}(\vec{X}_{ea}, y + h(\vec{X}_{ea})) = -y \tag{2.33}$$

avec $\vec{X}_{ea}$ vu comme une constante et $\tau_{ea} = \Gamma_r t$, la variable de temps "rapide". Le point d'équilibre $y = 0$ est clairement globalement exponentiellement stable.

Le système (2.30) réduit s'écrit :

$$\frac{d}{dt}\tilde{X}_{ea} = f_{ea}(\tilde{X}_{ea}, h(\tilde{X}_{ea})) \overset{def}{=} f_r(\tilde{X}_{ea}), \qquad \tilde{X}_{ea}(0) = \vec{X}_{ea}(0) \tag{2.34}$$

et donc :

$$\frac{d}{dt}\mathbb{A}_\Omega = -\frac{1}{2\tau_{cav}}\mathbb{A}_\Omega + k_1\mathbb{A}_\Omega\Delta n \tag{2.35}$$

$$\frac{d}{dt}\Delta n = -\frac{1}{\tau}(\Delta n - \Delta n_0) - k_2|\mathbb{A}_\Omega|^2\Delta n \tag{2.36}$$

avec $k_1 = \dfrac{d^2\omega_0}{2\Gamma_r\hbar\varepsilon}$ et $k_2 = \dfrac{2d^2}{\Gamma_r\hbar^2}$.

On commence par démontrer que le système réduit (2.34) admet une unique solution définie pour tout temps, sur $\mathbb{R}^2$.

On suppose que les conditions initiales sont dans $\mathbb{R}^2$. Dans ce cas, le champ de vecteurs f_r et $\tilde{X}_{ea}$ sont dans $\mathbb{R}^2$. Le demi plan $\Delta n \geq 0$ est un invariant puisque le champ de vecteurs est rentrant sur son bord $\left(\frac{d}{dt}\Delta n(\mathbb{A}_\Omega, 0) = \frac{\Delta n_0}{\tau}\right)$.

On suppose, dans la suite, que la condition initiale de Δn est dans $\mathbb{R}^+$. Il existe un ensemble $\mathbb{I} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ positivement invariant pour le système (2.35)-(2.36). En effet, soit V une fonction de Lyapunov tel que :

$$V(\mathbb{A}_\Omega, \Delta n) = \frac{1}{2}\mathbb{A}_\Omega^2 + \frac{1}{2}\Delta n^2 \quad \text{, définie positive sur } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$$

on a,

$$\frac{d}{dt}V(\mathbb{A}_\Omega, \Delta n) = -\frac{1}{2\tau_{cav}}\mathbb{A}_\Omega^2 - \frac{1}{\tau}\Delta n^2 - (k_2\Delta n - k_1)\mathbb{A}_\Omega^2\Delta n + \frac{1}{\tau}\Delta n_0$$

donc il existe $\bar{V} > 0$, tel que :

$$\forall\ V(\mathbb{A}_\Omega, \Delta n) \geq \bar{V}, \quad \frac{d}{dt}V(\mathbb{A}_\Omega, \Delta n) < 0$$

soit l'ensemble $\mathbb{I}$ définit par,

$$\mathbb{I} := \{(\mathbb{A}_\Omega, \Delta n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \ \text{ tel que, } \ V(\mathbb{A}_\Omega, \Delta n) \leq \max[\bar{V}, V(\mathbb{A}_\Omega(0), \Delta n(0))]\},$$

on a bien un ensemble positivement invariant. Les trajectoires de $(\mathbb{A}_\Omega, \Delta n)$ sont donc bornées.

On remarque que le champ de vecteur f_r est borné et Lipschitz sur tout compact de $\mathbb{R}^2$, le système (2.34) admet une unique solution, notée $\tilde{X}_{ea}$, sur $\mathbb{I}$.

Ce résultat nous permet d'appliquer le théorème de Thikhonov [31, section 11.2, Théorème 11.1], il donne le résultat suivant :

$$\forall T > 0,\ \exists \eta_T, c_T > 0,\ \text{tel que } \forall\ 0 \leq \varepsilon \leq \eta_T,\ \| \vec{X}_{ea}(t) - \tilde{X}_{ea}(t) \| \leq c_T\varepsilon \tag{2.37}$$

On cherche à prouver l'uniformité de ce résultat suivant T,i.e., il existe des variables η, c tel que (2.37) est valable pour tout $T > 0$. Cela implique de trouver un domaine de convergence exponentielle d'un des points d'équilibre stables, or aucune fonction de Lyapunov évidente nous a permis de trouver un tel domaine. C'est pourquoi on se limite à une étude locale de la stabilité des différents points d'équilibre, cela nous permettra d'avoir le résultat (2.37) localement, i.e., si les conditions initiales sont dans le bassin d'attraction exponentielle d'un des points d'équilibres stables.

Reprenons l'étude du système (2.34). Il admet trois points d'équilibre (un "Off" et deux "On" symétriques) :

— le fonctionnement "Off"

$$(\mathbb{A}_\Omega, \Delta n) = (0, \Delta n_0)$$

les valeurs propres du linéaire tangent autour de ce point sont $\lambda_1 = -\frac{1}{\tau}$ et $\lambda_2 = -\frac{1}{2\tau_{cav}} + k_1\Delta n_0$.

Or λ_2 correspond physiquement, à un facteur près, à l'apport d'énergie dans la cavité moins les pertes, cette grandeur est positive dans le cas d'un Laser en fonctionnement, le point d'équilibre est donc instable,

— le fonctionnement “On” :

$$(\mathbb{A}_\Omega^\pm, \Delta n) = \Big(\pm \sqrt{\frac{1}{\tau k_2}(\alpha_{ea} - 1)}, \frac{1}{2k_1\tau_{cav}} \Big)$$

avec $\alpha_{ea} = 2k_1\tau_{cav}\Delta n_0 > 1$ dans le cas d'un Laser en fonctionnement. Les valeurs propres du linéaire tangent sont identiques pour les deux points

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\alpha_{ea}}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\alpha_{ea}^2 - 4\frac{\tau}{\tau_{cav}}(\alpha_{ea} - 1)}.$$

Le terme α_{ea} étant supérieur à 1, les parties réelles des valeurs propres sont négatives, les points d'équilibre sont stables.

On suppose que les conditions initiales du système (2.34) se trouvent dans le bassin d'attraction exponentiel de l'un des points d'équilibre stables. D'après le théorème [31, section 11.2, Théorème 11. 2], le résultat (2.37) devient uniforme suivant T, i.e.,

$$\exists \eta, c > 0, \text{ tel que } \forall T > 0 \text{ et } \forall\ 0 \leq \varepsilon \leq \eta, \quad \| \vec{X}_{ea}(t) - \tilde{X}_{ea}(t) \| \leq c\varepsilon \tag{2.38}$$

les constantes (η, c), ne dépendent plus de T, ce qui justifie la restriction au modèle réduit.

En fonction de la variable $\mathbb{A}$, le système réduit (2.35)-(2.36) s'écrit

$$\frac{d}{dt}\mathbb{A} = -\Big(\frac{1}{2\tau_{cav}} - i\frac{\Omega}{2}\Big)\mathbb{A} + k_1\mathbb{A}\Delta n \tag{2.39}$$

$$\frac{d}{dt}\Delta n = -\frac{1}{\tau}(\Delta n - \Delta n_0) - k_2|\mathbb{A}|^2\Delta n \tag{2.40}$$

On remarque que les équations (2.39)-(2.40) sont identiques à (2.1)-(2.2), qui avaient été obtenues via un simple raisonnement quantitatif. En effet, si on suppose que la densité d'inversion de population et l'amplitude du champs sont uniformes dans la cavité on peut écrire

$$\begin{aligned} \Delta N &:= V_{cav}\Delta n \\ F &:= \alpha_{\mathbb{A}}|\mathbb{A}|^2 \end{aligned}$$

où F est le nombre de photons dans la cavité, $\alpha_{\mathbb{A}} := \dfrac{k_2 V_{cav}}{2k_1}$ un coefficient d'homogénéité, V_{cav} le volume de la cavité et ΔN l'inversion totale de population. En fonction de $(F, \Delta N)$ les équations (2.39)-(2.40) s'écrivent

$$\frac{d}{dt}F = -\frac{1}{\tau_{cav}}F + 2\frac{k_1}{V_{cav}}F\Delta N \tag{2.41}$$

$$\frac{d}{dt}\Delta N = \frac{V_{cav}}{\tau}\Delta n_0 - \frac{1}{\tau}\Delta N - \frac{k_2}{\alpha_{\mathbb{A}}}F\Delta N \tag{2.42}$$

en posant $\kappa := 2\dfrac{k_1}{V_{cav}} = \dfrac{k_2}{\alpha_{\mathbb{A}}}$, $R_p := \dfrac{V_{cav}}{\tau}\Delta n_0$ et $\Gamma_D := \dfrac{1}{\tau}$. Ce qui est bien les équations (2.1)-(2.2).

2.2.2 Cas bidirectionnel

La mesure de la vitesse de rotation sur un gyroscope s'effectue à partir du signal de battement, issu de la combinaison de deux faisceaux. On s'intéresse donc, au cas bidirectionnel, où deux faisceaux contrapropagatifs évoluent au sein de la cavité.

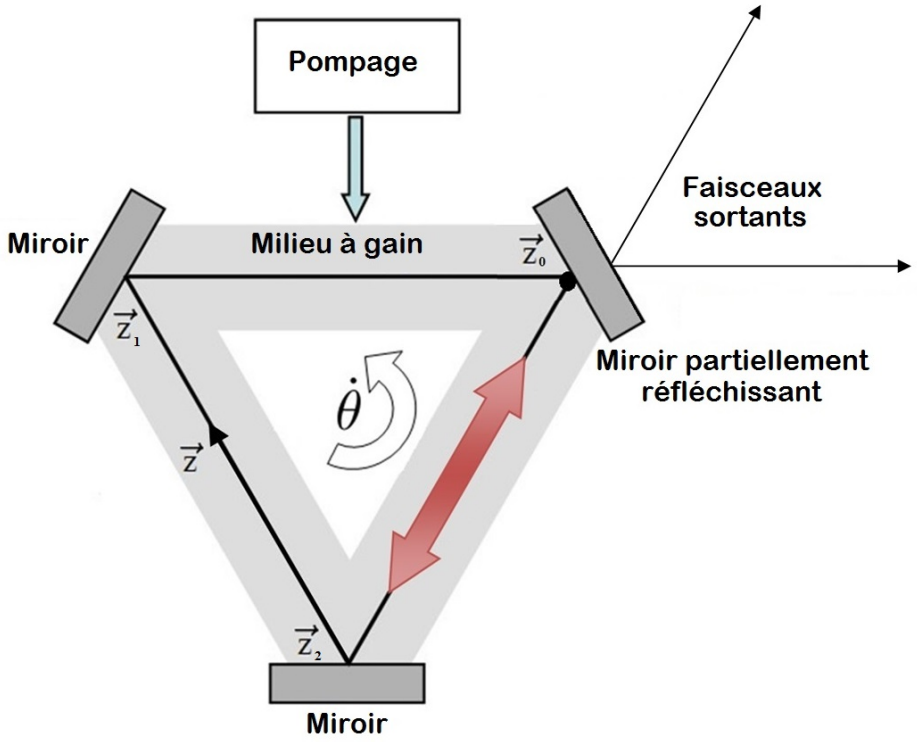


FIGURE 2.5 – Schéma d'une cavité triangulaire bidirectionnelle soumise à une rotation $\dot{\theta}$, avec comme point de mesure $\vec{z}_0$.

La généralisation au cas bidirectionnel doit prendre en compte les éléments suivants :

— les deux faisceaux partagent le même milieu à gain, l'énergie fournie par le dispositif de pompage est donc partagée entre les deux modes,

— les imperfections des miroirs constituant la cavité induisent un couplage linéaire entre les amplitudes complexes des deux champs.

On commence par supposer que les deux modes sont parfaitement indépendants, puis on présentera les différentes interactions entre les deux modes et les modifications qu'elles impliquent sur la représentation d'état du gyroscope.

On pose

$$E_1(z,t) = \mathbb{A}_1(z,t)e^{-i(\omega_1 t - kz)} + \mathbb{A}_1^*(z,t)e^{i(\omega_1 t - kz)} \quad (2.43)$$

$$E_2(z,t) = \mathbb{A}_2(z,t)e^{-i(\omega_2 t + kz)} + \mathbb{A}_2^*(z,t)e^{i(\omega_2 t + kz)} \quad (2.44)$$

Les champs des deux modes, où $\mathbb{A}_i$ est l'amplitude complexe de l'enveloppe lentement variable

du mode $i \in \{1, 2\}$, avec

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \omega_0 + \frac{\Omega}{2} \\ \omega_2 &= \omega_0 - \frac{\Omega}{2} \end{aligned}$$

Si l'on suppose que les deux modes sont parfaitement indépendants et qu'ils tirent leur énergie de deux ensembles distincts de populations, les raisonnements développés dans la sous-section 2.2.1 restent valables, ce qui implique que l'on a les deux systèmes découplés suivants :

$$\frac{d}{dt}\mathbb{A}_1 = -(\frac{1}{2\tau_{cav}} - i\frac{\Omega}{2})\mathbb{A}_1 + k_1\mathbb{A}_1\Delta n_1 \tag{2.45}$$

$$\frac{d}{dt}\Delta n_1 = -\frac{1}{\tau}(\Delta n_1 - \Delta n_0) - k_2|\mathbb{A}_1|^2\Delta n_1 \tag{2.46}$$

et

$$\frac{d}{dt}\mathbb{A}_2 = -(\frac{1}{2\tau_{cav}} - i\frac{\Omega}{2})\mathbb{A}_2 + k_1\mathbb{A}_2\Delta n_2 \tag{2.47}$$

$$\frac{d}{dt}\Delta n_2 = -\frac{1}{\tau}(\Delta n_2 - \Delta n_0) - k_2|\mathbb{A}_2|^2\Delta n_2 \tag{2.48}$$

où Δn_i est l'inversion de population interagissant avec le mode i. Ces équations présupposent que les différentes caractéristiques de la cavité (pertes, permittivité, pompage, dipôle électrique) sont les mêmes pour les deux modes.

2.2.2.1 Effet de l'interaction sur l'inversion de population

Au delà du pompage Δn_0, l'inversion de population Δn_i du mode i dépend de l'interaction du champ et de la polarisation qu'il engendre. Plus l'intensité du champ augmente, moins le transfert d'énergie par le dispositif de pompage au milieu à gain devient efficace. Ce phénomène porte le nom de "self saturation" du gain et a comme origine le terme $\frac{i}{\hbar}(\mathbb{A}^*\mathcal{P} - \mathbb{A}\mathcal{P}^*)$ dans l'équation de la polarisation du système (2.23), il sera étudié plus précisément dans la suite.

Dans le cas où deux modes coexistent dans la cavité, le champ du mode i contribue à la saturation du gain du mode j, ce phénomène porte le nom de "cross saturation" [17]. Sa prise en compte se traduit sur les équations d'inversion de population du modèle réduit (2.46)-(2.48) qui s'écrivent [13, 46] :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\Delta n_1 &= -\frac{1}{\tau}(\Delta n_1 - \Delta n_0) - k_2|\mathbb{A}_1|^2\Delta n_1 - \xi_{12}k_2|\mathbb{A}_2|^2\Delta n_1 \\ \frac{d}{dt}\Delta n_2 &= -\frac{1}{\tau}(\Delta n_2 - \Delta n_0) - k_2|\mathbb{A}_2|^2\Delta n_2 - \xi_{21}k_2|\mathbb{A}_1|^2\Delta n_2 \end{aligned}$$

où ξ_{ij} est le terme de cross saturation du mode j sur le mode i [16]. Finalement le modèle est

approximé par :

$$\frac{d}{dt}\mathbb{A}_1 = -(\frac{1}{2\tau_{cav}} - i\frac{\Omega}{2})\mathbb{A}_1 + k_1\mathbb{A}_1\Delta n_1 \quad (2.49)$$

$$\frac{d}{dt}\mathbb{A}_2 = -(\frac{1}{2\tau_{cav}} + i\frac{\Omega}{2})\mathbb{A}_2 + k_1\mathbb{A}_2\Delta n_2 \quad (2.50)$$

$$\frac{d}{dt}\Delta n_1 = -\frac{1}{\tau}(\Delta n_1 - \Delta n_0) - k_2|\mathbb{A}_1|^2\Delta n_1 - \xi_{12}k_2|\mathbb{A}_2|^2\Delta n_1 \quad (2.51)$$

$$\frac{d}{dt}\Delta n_2 = -\frac{1}{\tau}(\Delta n_2 - \Delta n_0) - k_2|\mathbb{A}_2|^2\Delta n_2 - \xi_{21}k_2|\mathbb{A}_1|^2\Delta n_2 \quad (2.52)$$

2.2.2.2 Réduction par perturbations singulières

Dans le cas d'un Laser à milieu amplificateur gazeux, la dynamique d'inversion de population est beaucoup plus rapide que celle des amplitudes des champs. A l'instar de ce qui a été fait dans la section précédente, on cherche à supprimer la dépendance en Δn_1 et Δn_2, sachant que les variables complexes $(\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2)$ tournent avec une vitesse de rotation de $\pm\frac{\Omega}{2}$. On se place donc dans le repère tournant et on pose :

$$\mathbb{A}_1^\Omega = \mathbb{A}_1\, e^{-i\frac{\Theta}{2}} \quad (2.53)$$

$$\mathbb{A}_2^\Omega = \mathbb{A}_2\, e^{+i\frac{\Theta}{2}} \quad (2.54)$$

avec Θ définit dans l'équation (2.18). Dans ce nouveau repère, le système (2.49)-(2.52) s'écrit

$$\frac{d}{dt}\mathbb{A}_1^\Omega = -\frac{1}{2\tau_{cav}}\mathbb{A}_1^\Omega + k_1\mathbb{A}_1^\Omega\Delta n_1 \quad (2.55)$$

$$\frac{d}{dt}\mathbb{A}_2^\Omega = -\frac{1}{2\tau_{cav}}\mathbb{A}_2^\Omega + k_1\mathbb{A}_2^\Omega\Delta n_2 \quad (2.56)$$

$$\frac{d}{dt}\Delta n_1 = -\frac{1}{\tau}(\Delta n_1 - \Delta n_0) - k_2|\mathbb{A}_1^\Omega|^2\Delta n_1 - \xi_{12}k_2|\mathbb{A}_2^\Omega|^2\Delta n_1 \quad (2.57)$$

$$\frac{d}{dt}\Delta n_2 = -\frac{1}{\tau}(\Delta n_2 - \Delta n_0) - k_2|\mathbb{A}_2^\Omega|^2\Delta n_2 - \xi_{21}k_2|\mathbb{A}_1^\Omega|^2\Delta n_2 \quad (2.58)$$

on pose :

$$\vec{\mathbb{A}} = \begin{pmatrix}\mathbb{A}_1^\Omega \\ \mathbb{A}_2^\Omega\end{pmatrix}, \quad \vec{N} = \begin{pmatrix}\Delta n_1 \\ \Delta n_2\end{pmatrix}$$

Les vecteurs $\vec{\mathbb{A}}$ et $\vec{N}$ sont dans $\mathbb{R}^2$. Le système (2.55)-(2.58) se réécrit sous la forme :

$$\frac{d}{dt}\vec{\mathbb{A}} = f_a(\vec{\mathbb{A}}, \vec{N}) \quad (2.59)$$

$$\tau\frac{d}{dt}\vec{N} = g_n(\vec{\mathbb{A}}, \vec{N}) \quad (2.60)$$

Dans ce cas, les variables rapides sont les inversions de populations et les variables lentes sont les amplitudes des champs. Le terme k_2 étant du même ordre de grandeur que $\frac{1}{\tau}$, la fonction g_n ne dépend pas de τ.

La couche limite est obtenue par résolution de l'équation (2.60), où l'on annule le terme de gauche, on obtient :

$$\vec{N} \stackrel{def}{\equiv} h(\vec{\mathbb{A}}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\Delta n_0}{1+\tau k_2\left(|\mathbb{A}_1^\Omega|^2+\xi_{12}|\mathbb{A}_2^\Omega|^2\right)} \\ \dfrac{\Delta n_0}{1+\tau k_2\left(|\mathbb{A}_2^\Omega|^2+\xi_{21}|\mathbb{A}_1^\Omega|^2\right)} \end{pmatrix} \tag{2.61}$$

On se ramène à $\vec{0}$ pour la couche limite en posant :

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} := \vec{N} - h(\vec{\mathbb{A}}).$$

La variable centrée y est solution de l'équation :

$$\frac{dy}{d\tau_n} = g_n(\vec{\mathbb{A}}, y + h(\vec{\mathbb{A}}))$$

avec $\vec{\mathbb{A}}$ vu comme une constante et $\tau_n = \frac{t}{\tau}$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{d\tau_n} &= -\left[1+k_2\tau|\mathbb{A}_1^\Omega|^2+\xi_{12}k_2\tau|\mathbb{A}_2^\Omega|^2\right]y_1 \\ \frac{dy_2}{d\tau_n} &= -\left[1+k_2\tau|\mathbb{A}_2^\Omega|^2+\xi_{21}k_2\tau|\mathbb{A}_1^\Omega|^2\right]y_2 \end{aligned}$$

Le point d'équilibre $y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est clairement globalement exponentiellement stable. Le système (2.59) réduit s'écrit :

$$\frac{d}{dt}\tilde{\mathbb{A}} = f_a(\tilde{\mathbb{A}}, h(\tilde{\mathbb{A}})) \stackrel{def}{\equiv} f_{ra}(\tilde{\mathbb{A}}), \qquad \tilde{\mathbb{A}}(0) = \vec{\mathbb{A}}(0) \tag{2.62}$$

et donc :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mathbb{A}_1^\Omega &= -\frac{1}{2\tau_{cav}}\mathbb{A}_1^\Omega + \frac{k_1\Delta n_0}{1+\tau k_2\left(|\mathbb{A}_1^\Omega|^2+\xi_{12}|\mathbb{A}_2^\Omega|^2\right)}\mathbb{A}_1^\Omega \\ \frac{d}{dt}\mathbb{A}_2^\Omega &= -\frac{1}{2\tau_{cav}}\mathbb{A}_2^\Omega + \frac{k_1\Delta n_0}{1+\tau k_2\left(|\mathbb{A}_2^\Omega|^2+\xi_{21}|\mathbb{A}_1^\Omega|^2\right)}\mathbb{A}_2^\Omega \end{aligned}$$

que l'on réécrit :

$$\frac{d}{dt}\mathbb{A}_1^\Omega = \frac{1}{2}\frac{g_0\mathbb{A}_1^\Omega}{1+\dfrac{|\mathbb{A}_1^\Omega|^2}{I_s}+\dfrac{|\mathbb{A}_2^\Omega|^2}{I_c}} - \frac{1}{2}\Gamma\mathbb{A}_1^\Omega \tag{2.63}$$

$$\frac{d}{dt}\mathbb{A}_2^\Omega = \frac{1}{2}\frac{g_0\mathbb{A}_2^\Omega}{1+\dfrac{|\mathbb{A}_2^\Omega|^2}{I_s}+\dfrac{|\mathbb{A}_1^\Omega|^2}{I_c}} - \frac{1}{2}\Gamma\mathbb{A}_2^\Omega \tag{2.64}$$

où $\Gamma = \dfrac{1}{\tau_{cav}}$, $g_0 = 2k_1\Delta n_0$, $I_s = \dfrac{1}{\tau k_2}$ et $I_c = \dfrac{1}{\tau k_2\xi_{12}} = \dfrac{1}{\tau k_2\xi_{21}}$, avec $\xi_{12} = \xi_{21}$ par symétrie.

Le champ de vecteur f_{ra} est borné et Lipschitz sur tout compact de $\mathbb{R}^2$, le système (2.63) - (2.64) admet une unique solution, notée $\bar{\mathbb{A}}$, sur $\mathbb{R}^2$. De plus, le champ de vecteur f_{ra} est sous linéaire, en effet :

$$\forall\ \tilde{\mathbb{A}} \in \mathbb{R}^2, \quad \| f_{ra}(\tilde{\mathbb{A}}) \| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}(g_0 + \Gamma + |\Omega|) \| \tilde{\mathbb{A}} \|$$

on a, donc, l'unicité et l'existence globale suivant t de $\bar{\mathbb{A}}$.

D'après le théorème de Thikhonov [31, section 11.2, Théorème 11.1], on a le résultat suivant :

$$\forall T > 0,\ \exists \eta_T, c_T > 0,\ \text{tel que } \forall\ 0 \leq \varepsilon \leq \eta_T, \quad \| \vec{\mathbb{A}}(t) - \tilde{\mathbb{A}}(t) \| \leq c_T \varepsilon \tag{2.65}$$

L'étude de la convergence exponentielle du système (2.63)-(2.64) vers son point d'équilibre sera effectuée dans la section 3.1 du chapitre suivant. Pour l'instant on la considère acquise, ce qui implique que le résultat (2.65) est uniforme suivant T, i.e.,

$$\exists \eta, c > 0,\ \text{tel que } \forall T > 0 \text{ et } \forall\ 0 \leq \varepsilon \leq \eta, \quad \| \vec{\mathbb{A}}(t) - \tilde{\mathbb{A}}(t) \| \leq c\varepsilon \tag{2.66}$$

les constantes (η, c), ne dépendent plus de T, ce qui justifie la restriction au modèle réduit.

En fonction des variables $(\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2)$, le modèle réduit (2.63)-(2.64) s'écrit :

$$\frac{d}{dt}\mathbb{A}_1 = \frac{1}{2}\frac{g_0 \mathbb{A}_1}{1 + \frac{|\mathbb{A}_1|^2}{I_s} + \frac{|\mathbb{A}_2|^2}{I_c}} - \frac{1}{2}\Gamma \mathbb{A}_1 + i\frac{\Omega}{2}\mathbb{A}_1 \tag{2.67}$$

$$\frac{d}{dt}\mathbb{A}_2 = \frac{1}{2}\frac{g_0 \mathbb{A}_2}{1 + \frac{|\mathbb{A}_2|^2}{I_s} + \frac{|\mathbb{A}_1|^2}{I_c}} - \frac{1}{2}\Gamma \mathbb{A}_2 - i\frac{\Omega}{2}\mathbb{A}_2 \tag{2.68}$$

2.2.2.3 Effet des imperfections des miroirs sur les champs

La qualité des miroirs formant la cavité est un facteur critique pour les performances des gyroscopes et fait l'objet d'un grand soin lors du processus de fabrication. Les imperfections qu'ils présentent ont pour conséquence de diffuser une partie du faisceau incident dans toutes les directions et, en particulier, dans le sens opposé au sens de propagation. Cette rétro-diffusion des miroirs implique un couplage linéaire entre les amplitudes complexes des deux champs [42, 34], elle peut être modélisée, au point de mesure $\vec{z}_0$, par :

$$\frac{d}{dt}\mathbb{A}_1 = \frac{1}{2}\frac{g_0 \mathbb{A}_1}{1 + \frac{|\mathbb{A}_1|^2}{I_s} + \frac{|\mathbb{A}_2|^2}{I_c}} - \frac{1}{2}\Gamma \mathbb{A}_1 + i\frac{\Omega}{2}\mathbb{A}_1 + \tilde{m}_1 \mathbb{A}_2 \tag{2.69}$$

$$\frac{d}{dt}\mathbb{A}_2 = \frac{1}{2}\frac{g_0 \mathbb{A}_1}{1 + \frac{|\mathbb{A}_2|^2}{I_s} + \frac{|\mathbb{A}_1|^2}{I_c}} - \frac{1}{2}\Gamma \mathbb{A}_2 - i\frac{\Omega}{2}\mathbb{A}_2 + \tilde{m}_2 \mathbb{A}_1 \tag{2.70}$$

avec $\tilde{m}_i$, le coefficient de rétro-diffusion complexe du mode j sur le mode i. Dans l'exemple de la figure 2.5, la rétro-diffusion a lieu aux points $(\vec{z}_0, \vec{z}_1, \vec{z}_2)$ et l'on a pour le mode j :

$$\tilde{m}_j = \tilde{m}_{\vec{z}_0,j} + i\ \tilde{m}_{\vec{z}_1,j}\left(\frac{n_0}{c_0}\omega_j \frac{l_{cav}}{3}\right) + i\ \tilde{m}_{\vec{z}_2,j}\left(\frac{n_0}{c_0}\omega_j \frac{2l_{cav}}{3}\right)$$

où $\tilde{m}_{\vec{z}_i,j} \in \mathbb{C}$ est le coefficient complexe de rétro-diffusion du miroir en position $\vec{z}_i$.

Dans la suite de ce manuscrit, on admet que le système réduit (2.69), (2.70) modélise le fonctionnement du gyroscope avec suffisamment de précision pour être considéré comme modèle de référence. Il met en jeu des variables complexes que l'on peut représenter en amplitude-phase, en posant :

$$\mathbb{A}_1 := A_1 e^{i\varphi_1}, \quad \mathbb{A}_2 := A_2 e^{i\varphi_2}, \quad \varphi := \varphi_1 - \varphi_2$$

et

$$\tilde{m}_1 = m_1 e^{-i\xi_1}, \quad \tilde{m}_2 = m_2 e^{+i\xi_2}$$

avec une singularité en $(A_1, A_2) = (0, 0)$, dûe au changement de variables, on obtient :

$$\frac{d}{dt}A_1 = \frac{1}{2}\frac{g_0 A_1}{1 + \frac{A_1^2}{I_s} + \frac{A_2^2}{I_c}} - \frac{1}{2}\Gamma A_1 + m_1 A_2 \cos(\varphi + \xi_1) \tag{2.71}$$

$$\frac{d}{dt}A_2 = \frac{1}{2}\frac{g_0 A_2}{1 + \frac{A_2^2}{I_s} + \frac{A_1^2}{I_c}} - \frac{1}{2}\Gamma A_2 + m_2 A_1 \cos(\varphi + \xi_2) \tag{2.72}$$

$$A_1 \frac{d}{dt}\varphi_1 = \frac{\Omega}{2}A_1 - m_1 A_2 \sin(\varphi + \xi_1) \tag{2.73}$$

$$A_2 \frac{d}{dt}\varphi_2 = -\frac{\Omega}{2}A_2 + m_2 A_1 \sin(\varphi + \xi_2) \tag{2.74}$$

2.3 Lien avec les équations de Lamb usuelles

Les équations (2.69)-(2.70) sont, par abus de langage, appelées équations de Lamb. Les équations de Lamb usuelles [36] sont obtenues en suivant la même démarche mais en faisant l'hypothèse supplémentaire que le gain statique g_0 est très proche des pertes Γ. Cette hypothèse nommée "fonctionnement proche du seuil" est communément admise dans la littérature [6, 7, 49, 48, 40].

Dans cette section, on effectue une étude succincte de la dynamique locale du modèle retenu (2.69)-(2.70), puis on présente le raisonnement effectué sous l'hypothèse d'un gain g_0 proche des pertes Γ afin de passer au modèle dit "usuel" des équations de Lamb. Une étude locale de la dynamique des équations de Lamb prouve qu'elles approximent bien le modèle retenu, à une homothétie près.

2.3.1 Etude succincte de la dynamique des intensités

On se limite, dans cette section, à l'étude de la contribution des gains et pertes, on suppose donc que les miroirs sont parfaits. De plus on s'intéresse au comportement local des modules des deux champs contrarotatifs autour de leur point d'équilibre stable. Afin de simplifier l'expression du modèle, il est usuel de l'écrire en fonction des variables suivantes :

$$I_1 := |\mathbb{A}_1|^2, \quad I_2 := |\mathbb{A}_2|^2$$

Ces variables sont homogènes aux intensités des deux faisceaux contrarotatifs. En fonction de $\vec{I} = \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}$, les équations (2.69)-(2.70) s'écrivent

$$\frac{d}{dt}I_1 = \frac{g_0 I_1}{1+\frac{I_1}{I_s}+\frac{I_2}{I_c}} - \Gamma I_1 \tag{2.75}$$

$$\frac{d}{dt}I_2 = \frac{g_0 I_2}{1+\frac{I_2}{I_s}+\frac{I_1}{I_c}} - \Gamma I_2 \tag{2.76}$$

avec $I_c \gg I_s$ et $g_0 > \Gamma$. Une étude détaillée de ce système est effectuée dans la section 3.1.1. Ce système admet un point d'équilibre localement stable

$$\bar{I} := \begin{pmatrix} \bar{\imath} \\ \bar{\imath} \end{pmatrix},$$

avec $\bar{\imath} := \frac{I_s I_c}{I_s + I_c}(\frac{g_0}{\Gamma} - 1)$.

Le linéaire tangent autour de ce point est donné par

$$\frac{d}{dt}\delta I_1 = -\frac{\Gamma}{g_0}\frac{g_0-\Gamma}{I_s+I_c}(I_c\delta I_1 + I_s \delta I_2) \tag{2.77}$$

$$\frac{d}{dt}\delta I_2 = -\frac{\Gamma}{g_0}\frac{g_0-\Gamma}{I_s+I_c}(I_s\delta I_1 + I_c \delta I_2), \tag{2.78}$$

où $\delta\vec{I} := \vec{I} - \bar{I}$ représente les petites variations autours du point d'équilibre. Ses deux valeurs propres $-\frac{I_c - I_s}{I_c + I_s}\frac{\Gamma}{g_0}(g_0 - \Gamma)$ et $-\frac{\Gamma}{g_0}(g_0-\Gamma)$ sont négatives et proches puisque $I_c \gg I_s$.

On peut de plus démontrer (cf. section 3.1.1) que $\bar{I}$ est globalement stable dans $(\mathbb{R}^{+*})^2$.

2.3.2 Passage aux équations de Lamb usuelles

Pour obtenir les équations de Lamb usuelles, on suppose que g_0 est légèrement supérieur à Γ i.e.,

$$g_0 = \Gamma(1+\epsilon_g),$$

où $0 < \epsilon_g \ll 1$. De plus, on considère que I_1 et I_2 restent proches de $\bar{\imath}$, ce qui se justifie par le fait que $\bar{I}$ est globalement stable. L'équation (2.75) devient alors

$$\frac{d}{dt}I_1 = \frac{g_0 I_1}{1+\epsilon_g+\frac{I_1-\bar{\imath}}{I_s}+\frac{I_2-\bar{\imath}}{I_c}} - \Gamma I_1.$$

En effectuant un développement limité du dénominateur par rapport aux "petites" variables $(\epsilon_g, I_1 - \bar{\imath}, I_2 - \bar{\imath})$, on obtient

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}I_1 &\simeq g_0 I_1\left[1-\epsilon_g - \frac{I_1-\bar{\imath}}{I_s} - \frac{I_2-\bar{\imath}}{I_c}\right] - \Gamma I_1 \\ &= g_0 I_1\left[1-\frac{I_1}{I_s}-\frac{I_2}{I_c}\right] - \Gamma I_1.\end{aligned}$$

En posant $X_1 = I_1$ et $X_2 = I_2$, on obtient ainsi les équations "usuelles" de Lamb

$$\frac{d}{dt}X_1 = g_0 X_1 \left[1 - \frac{X_1}{I_s} - \frac{X_2}{I_c}\right] - \Gamma X_1 \tag{2.79}$$

$$\frac{d}{dt}X_2 = g_0 X_2 \left[1 - \frac{X_2}{I_s} - \frac{X_1}{I_c}\right] - \Gamma X_2. \tag{2.80}$$

Soit $\vec{X} := \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$ ce système admet un point d'équilibre localement stable

$$\bar{X} := \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{x} \end{pmatrix}$$

avec $\bar{x} := \dfrac{I_s I_c}{I_s + I_c}(1 - \dfrac{\Gamma}{g_0})$.

Le linéaire tangent autour de ce point d'équilibre est donné par

$$\frac{d}{dt}\delta X_1 = -\frac{g_0 - \Gamma}{I_s + I_c}(I_c \delta X_1 + I_s \delta X_2) \tag{2.81}$$

$$\frac{d}{dt}\delta X_2 = -\frac{g_0 - \Gamma}{I_s + I_c}(I_s \delta X_1 + I_c \delta X_2), \tag{2.82}$$

où $\delta\vec{X} := \vec{X} - \bar{X}$ représente les petites variations autours du point d'équilibre. Ses deux valeurs propres $-\dfrac{I_c - I_s}{I_c + I_s}(g_0 - \Gamma)$ et $-(g_0 - \Gamma)$ sont négatives et proches puisque $I_c \gg I_s$.

2.3.3 Approximation par homothétie

On remarque qu'une homothétie du modèle usuel (2.79)-(2.80) approxime le modèle retenu (2.75)-(2.76). En effet, les points d'équilibre et les linéaires tangents de ces deux systèmes sont identiques à une homothétie près.

On définit $\vec{J}$, l'homothétie de la variable $\vec{X}$ par

$$\vec{J} = \begin{pmatrix} J_1 \\ J_2 \end{pmatrix} := \alpha_J \vec{X} := \frac{g_0}{\Gamma}\vec{X} = (1 + \epsilon_g)\vec{X};$$

le gain g_0 étant très proche des pertes Γ, le facteur d'homothétie $\alpha_J \sim 1$ et donc les variables $\vec{J}$ et $\vec{X}$ sont très proches.

La variable $\vec{J}$ est régie par

$$\frac{d}{dt}J_1 = g_0 J_1 \left[1 - \frac{J_1}{\alpha_J I_s} - \frac{J_2}{\alpha_J I_c}\right] - \Gamma J_1 \tag{2.83}$$

$$\frac{d}{dt}J_2 = g_0 J_2 \left[1 - \frac{J_2}{\alpha_J I_s} - \frac{J_1}{\alpha_J I_c}\right] - \Gamma J_2, \tag{2.84}$$

avec $\vec{J}(0) = \vec{I}(0)$.

Le système (2.83)-(2.84) admet comme point d'équilibre localement stable

$$\bar{J} = \begin{pmatrix} \bar{\jmath} \\ \bar{\jmath} \end{pmatrix}$$

avec $\bar{j} = \alpha_J \bar{x} = \bar{\imath}$.

Le linéaire tangent autour du point d'équilibre localement stable est donné par

$$\frac{d}{dt}\delta J_1 = -\frac{1}{\alpha_J}\frac{g_0-\Gamma}{I_s+I_c}(I_c\delta J_1 + I_s\delta J_2) = -\frac{\Gamma}{g_0}\frac{g_0-\Gamma}{I_s+I_c}(I_c\delta J_1 + I_s\delta J_2) \quad (2.85)$$

$$\frac{d}{dt}\delta J_2 = -\frac{1}{\alpha_J}\frac{g_0-\Gamma}{I_s+I_c}(I_s\delta J_1 + I_c\delta J_2) = -\frac{\Gamma}{g_0}\frac{g_0-\Gamma}{I_s+I_c}(I_s\delta J_1 + I_c\delta J_2), \quad (2.86)$$

où $\delta\vec{J} := \vec{J} - \bar{J}$ représente les petites variations autours du point d'équilibre.

Le modèle retenu (2.75)-(2.76) et l'homothétie des équations usuelles (2.83)-(2.84) admettent le même point d'équilibre localement stable et possèdent le même linéaire tangent autour de ce point. Il suffit que la condition initiale, identique pour les deux systèmes, soit dans le domaine d'attraction exponentielle du point d'équilibre pour que l'erreur entre les deux converge vers $\vec{0}$.

2.4 Conclusion sur la modélisation

Nous avons exposé l'approche permettant d'obtenir un modèle général qui décrit l'évolution des amplitudes complexes des champs des deux faisceaux contrarotatifs. L'expression des termes de gain intervenant dans ce modèle peut être simplifié en posant l'hypothèse que le gain g_0 est très proche des pertes Γ. Cela permet d'approximer les termes de gain et de conclure sur les équations de Lamb usuelles, tel qu'utilisées dans la littérature [51, 19]. Cette approximation est valable mathématiquement à une homothétie près.

Dans le cas des gyrolasers fabriqués par Thalès, le gain g_0 est bien supérieur aux pertes Γ. L'hypothèse nécessaire à la simplifications des termes de gain ne s'applique pas aux gyrolasers modernes. C'est pourquoi nous avons développé dans ce chapitre le modèle plus général (2.69)-(2.70) ; par abus de langage on l'appelle également "équations de Lamb".

Chapitre 3

Etude de la dynamique d'un gyrolaser

La littérature traitant des gyroscopes Lasers est très vaste [7, 14, 44], elle vise principalement à parfaire la compréhension que l'on a du comportement des gyroscopes, via une étude des différentes modélisations existantes. Au regard de cette littérature, le modèle des équations de Lamb modifiées (2.69)-(2.70), introduit dans le chapitre 2, apparait comme un modèle assez complet dans lequel les phénomènes induisant un couplage entre les variables d'état sont bien pris en compte. Deux hypothèses simplificatrices sont usuellement admises par la communauté physicienne ; la première concerne le gain, qui est pris proche du seuil ce qui permet de simplifier la contribution des termes de self et cross saturation. La deuxième concerne le module des champs, qui est souvent considéré comme constant, ce qui permet d'avoir une modélisation simplifiée de la différence de phase φ. Malgré ces hypothèses simplificatrices, les calculs restent suffisamment complexes pour alimenter 50 ans de publications, qui ont permis l'introduction de très nombreuses améliorations au dispositif des gyrolasers, contribuant ainsi à la maturation de cette technologie.

A l'instar de la communauté des physiciens, on propose dans ce chapitre, de faire une étude mathématique du gyroscope et de son comportement afin de proposer, dans le chapitre suivant, une amélioration permettant de réduire les limitations intrinsèques induites par les imperfections des miroirs formant la cavité du gyroscope. Notre étude se base sur les équations de Lamb modifiées (2.69)-(2.70) et adopte une approche systèmes dynamiques.

Ce chapitre comporte deux sections. Dans la première section on étudie la dynamique des intensités des deux modes contrarotatifs dans la cavité, afin de décrire leur comportement et de valider, à terme, l'hypothèse admise par les physiciens sur la constance des modules des champs. Dans la deuxième section, on étudie la différence de phase entre les deux modes contrarotatifs afin de modéliser les limitations usuelles décrites dans la section 1.3 et de les réinterpréter comme une perte d'observabilité de la vitesse de rotation par rapport à la mesure dont on dispose.

3.1 Dynamique des intensités

Dans le chapitre précédent, nous avons présenté les raisonnements et hypothèses permettant d'aboutir à une modélisation relativement fiable des amplitudes complexes des champs

dans la cavité du gyroscope, à savoir, les équations de Lamb modifiées (2.69)-(2.70) :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\mathbb{A}_1 &= \frac{1}{2}\frac{g_0\mathbb{A}_1}{1+\dfrac{|\mathbb{A}_1|^2}{I_s}+\dfrac{|\mathbb{A}_2|^2}{I_c}} - \frac{1}{2}\Gamma\mathbb{A}_1 + i\frac{\Omega}{2}\mathbb{A}_1 + \tilde{m}_1\mathbb{A}_2 \\
\frac{d}{dt}\mathbb{A}_2 &= \frac{1}{2}\frac{g_0\mathbb{A}_1}{1+\dfrac{|\mathbb{A}_2|^2}{I_s}+\dfrac{|\mathbb{A}_1|^2}{I_c}} - \frac{1}{2}\Gamma\mathbb{A}_2 - i\frac{\Omega}{2}\mathbb{A}_2 + \tilde{m}_2\mathbb{A}_1.
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Une remarque s'impose ; le champ de vecteurs du système (3.1) est clairement $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{C}^2$, ce qui implique qu'il est Lipschitz, on a donc l'existence et l'unicité des solutions $(\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2)$ localement en temps t. De plus il est sous linéaire sur $\mathbb{C}^2$, en effet :

$$\begin{aligned}
|\frac{d}{dt}\mathbb{A}_1| &\leq c(|\mathbb{A}_1| + |\mathbb{A}_2|) \\
|\frac{d}{dt}\mathbb{A}_2| &\leq c(|\mathbb{A}_1| + |\mathbb{A}_2|)
\end{aligned}$$

avec $c = \max(\frac{g_0}{2}, \frac{\Gamma}{2}, |\tilde{m}_1|, |\tilde{m}_2|)$, on a donc l'existence globale suivant $t > 0$ des solutions $(\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2)$. Le système (3.1) met en jeu des variables complexes, que l'on peut exprimer en amplitude-phase. On pose :

$$\mathbb{A}_1 = A_1 e^{i\varphi_1}, \qquad \mathbb{A}_2 = A_2 e^{i\varphi_2}$$

les amplitudes et phases des champs complexes, ainsi que,

$$\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$$

la différence de phase entre les deux modes contrarotatifs et

$$\tilde{m}_1 = m_1 e^{-i\xi_1}, \qquad \tilde{m}_2 = m_2 e^{+i\xi_2} \tag{3.2}$$

les amplitudes et phases des rétro-diffusion des miroirs. En amplitude-phase, le système (3.1) s'écrit :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}A_1 &= \frac{1}{2}\frac{g_0 A_1}{1+\dfrac{A_1^2}{I_s}+\dfrac{A_2^2}{I_c}} - \frac{1}{2}\Gamma A_1 + m_1 A_2\cos(\varphi+\xi_1) \\
\frac{d}{dt}A_2 &= \frac{1}{2}\frac{g_0 A_2}{1+\dfrac{A_2^2}{I_s}+\dfrac{A_1^2}{I_c}} - \frac{1}{2}\Gamma A_2 + m_2 A_1\cos(\varphi+\xi_2) \\
\frac{d}{dt}\varphi &= \Omega - m_1\frac{A_2}{A_1}\sin(\varphi+\xi_1) - m_2\frac{A_1}{A_2}\sin(\varphi+\xi_2).
\end{aligned}$$

Ces équations, issues du système (3.1) sont bien définies, la singularité en $(A_1, A_2) = (0, 0)$ est conséquente du changement de variables que l'on a effectué. La variable $\varphi_1 + \varphi_2$ n'intervient ni dans la dynamique des intensités ni dans la dynamique de la différence de phase. De plus,

elle ne permet pas de remonter à la vitesse de rotation Ω, c'est pourquoi on choisit de ne pas l'inclure dans le système.

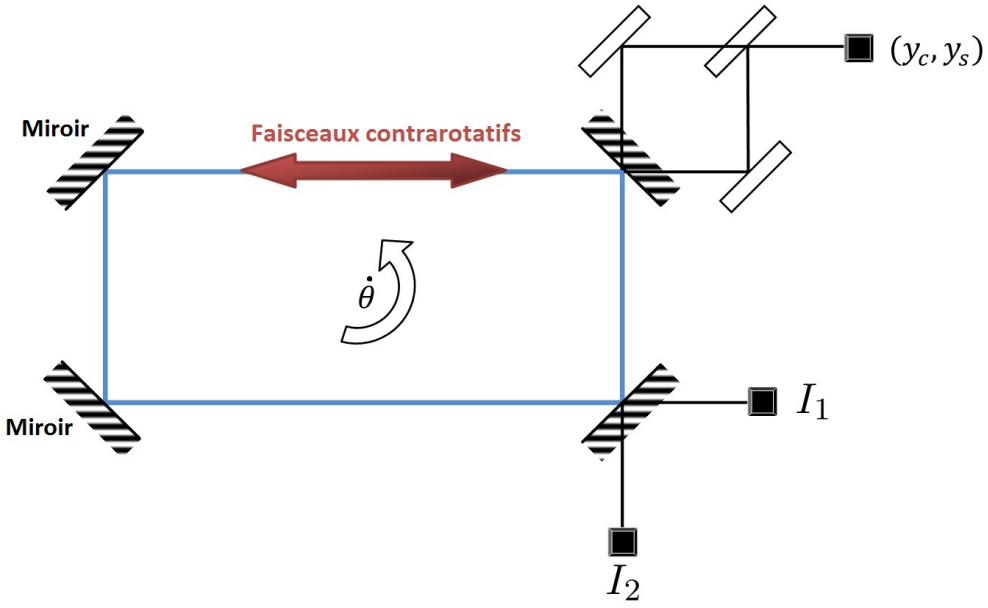


FIGURE 3.1 – Schéma d'une cavité carré bidirectionnelle soumise à une rotation $\dot{\theta}$ et des mesures effectuées.

La figure 3.1 montre, schématiquement, les mesures sur un gyroscope à cavité carrée [43], où :

— (I_1, I_2) sont les intensités des deux modes contrarotatifs, avec :

$$I_1 = |\mathbb{A}_1|^2 \quad \text{et} \quad I_2 = |\mathbb{A}_2|^2, \tag{3.3}$$

— (y_c, y_s) sont les signaux de battements pris en un autre point de la cavité, avec :

$$\begin{aligned} y_c &= |\mathbb{A}_1 + \mathbb{A}_2|^2 = |\mathbb{A}_1|^2 + |\mathbb{A}_2|^2 + 2|\mathbb{A}_1\mathbb{A}_2|\cos(\varphi+\gamma) && (3.4)\\ &= I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos(\varphi+\gamma) && (3.5) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} y_s &= |\mathbb{A}_1 + i\mathbb{A}_2|^2 = |\mathbb{A}_1|^2 + |\mathbb{A}_2|^2 + 2|\mathbb{A}_1\mathbb{A}_2|\sin(\varphi+\gamma) && (3.6)\\ &= I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\sin(\varphi+\gamma) && (3.7) \end{aligned}$$

où γ représente le déphasage dû au point de mesure différent des signaux de battements.

On mesure indirectement, via les signaux de battements, la différence de phase φ et non sa dérivée. Ce constat permet d'en dire un peu plus sur l'utilisation concrète des gyroscopes, qui sont utilisés dans la réalité, non pas pour mesurer une vitesse de rotation mais un incrément d'angle $\Delta\theta$ entre deux moments t_1 et t_2. Il vaut, au facteur d'échelle près,

$$\Delta\theta(t_1, t_2) = \theta(t_2) - \theta(t_1) = \varphi(t_2) - \varphi(t_1)$$

Il est donc intéressant de réécrire le modèle (3.1) en fonction des intensités (I_1, I_2) des deux modes contrarotatifs :

$$\frac{d}{dt}I_1 = \frac{g_0 I_1}{1 + \frac{I_1}{I_s} + \frac{I_2}{I_c}} - \Gamma I_1 + 2m_1\sqrt{I_1 I_2}\cos(\varphi + \xi_1) \tag{3.8}$$

$$\frac{d}{dt}I_2 = \frac{g_0 I_2}{1 + \frac{I_2}{I_s} + \frac{I_1}{I_c}} - \Gamma I_2 + 2m_2\sqrt{I_1 I_2}\cos(\varphi + \xi_2) \tag{3.9}$$

$$\frac{d}{dt}\varphi = \Omega - m_1\sqrt{\frac{I_2}{I_1}}\sin(\varphi + \xi_1) - m_2\sqrt{\frac{I_1}{I_2}}\sin(\varphi + \xi_2) \tag{3.10}$$

où :

- g_0 est le terme de gain,
- Γ est le terme des pertes, typiquement on a , $g_0 \sim 1.3\ \Gamma$ dans le cas des gyroscopes Thalès,
- (I_s, I_c) sont, respectivement, les termes de self et cross saturation, avec $I_s \ll I_c$,
- (m_1, m_2) et (ξ_1, ξ_2) sont respectivement, les modules et phases de la rétro-diffusion, avec $m_i \ll g_0, \Gamma$.

On peut, sans perte de généralité, normaliser ce système d'équations en temps et en intensité, tel que :

- la normalisation en temps est choisie telle que $\frac{\Gamma}{g_0}(g_0 - \Gamma) \sim 1$,
- la normalisation en intensité est choisie telle que $\frac{I_s I_c}{I_s + I_c}(\frac{g_0}{\Gamma} - 1) \sim 1$.

Les miroirs formant la cavité des gyroscopes fabriqués a Thalès, sont de très grande qualité. Cela implique que les coefficients de rétro-diffusion (m_1, m_2), à l'origine des limitations de performances, sont très petits devant 1.

Cette section est composée de deux parties. Dans la première partie on commence par étudier la dynamique des intensités dans le cas d'un gyroscope idéal, i.e., dans le cas où les miroirs formant la cavité sont parfaits et n'induisent pas de rétro-diffusion ($m_1 = m_2 = 0$). On analyse la stabilité du point d'équilibre du mode bidirectionnel, qui permet d'effectuer une mesure de φ. Dans la deuxième partie, on étudie l'influence de la rétro-diffusion des miroirs sur les intensités. Elle sera vue comme une perturbation du modèle idéal.

3.1.1 Cas idéal des miroirs parfaits

Dans le cas d'un gyroscope idéal, i.e., où les miroirs formant sa cavité sont parfaits $m_i = 0$, le système (3.8) - (3.9) s'écrit :

$$\frac{d}{dt}I_1 = \frac{g_0 I_1}{1 + \frac{I_1}{I_s} + \frac{I_2}{I_c}} - \Gamma I_1 \tag{3.11}$$

$$\frac{d}{dt}I_2 = \frac{g_0 I_2}{1 + \frac{I_2}{I_s} + \frac{I_1}{I_c}} - \Gamma I_2 \tag{3.12}$$

ou encore :

$$\vec{I} = f_0(\vec{I}), \quad \vec{I}(0) = \vec{I}_0 \tag{3.13}$$

avec $\vec{I} = \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}$ et $f_0(\vec{I}) = \begin{pmatrix} f_{01}(\vec{I}) \\ f_{02}(\vec{I}) \end{pmatrix}$. On remarque que $f_{01}(I_1, I_2) = f_{02}(I_2, I_1)$, on a une symétrie du champ de vecteurs par rapport à l'abscisse $I_1 = I_2$.

L'équation de la différence de phase (3.10) s'écrit :

$$\frac{d}{dt}\varphi \quad = \quad \Omega \tag{3.14}$$

Le système des intensités est découplé de la phase φ, on se concentre sur son étude.

Ensembles positivement invariants

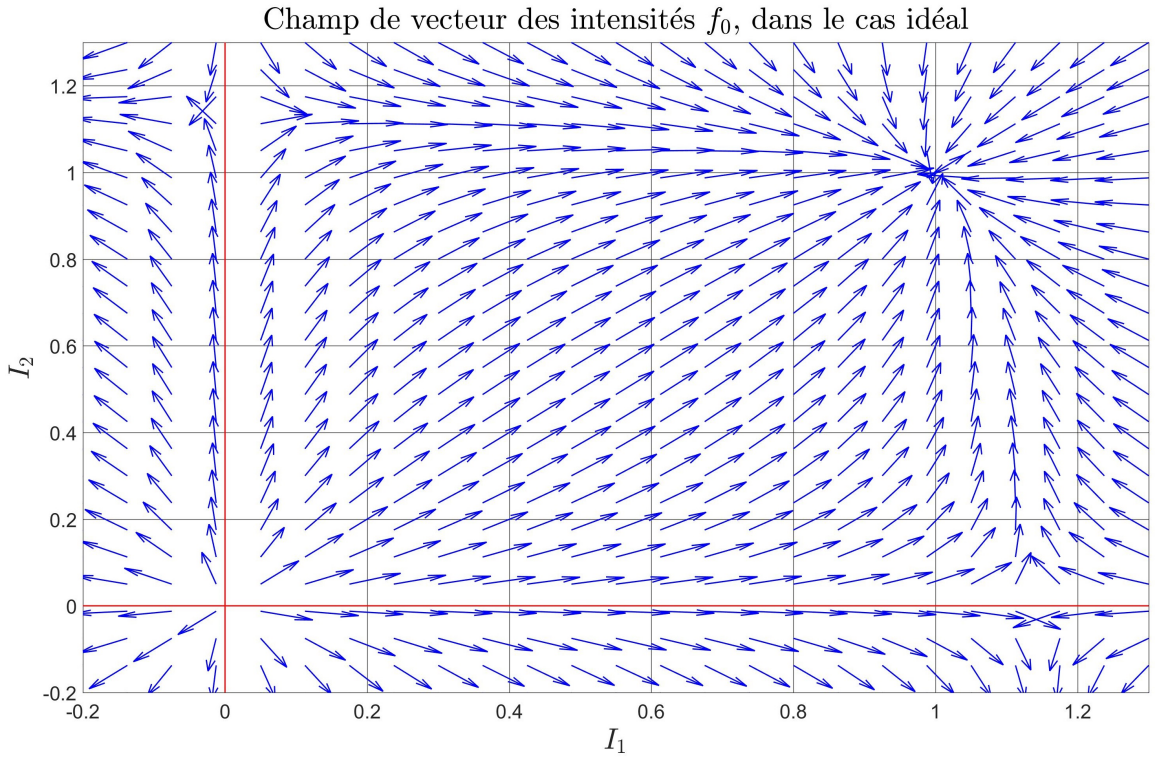


FIGURE 3.2 – Champs de vecteur f_0 dans le cas idéal (bleu), et les axes $I_1 = 0, I_2 = 0$ (rouge), avec $g_0 = 4$, $\Gamma = 2$, $I_c = 8.1$, $I_s = 1.1$.

Le système (3.13) admet plusieurs ensembles positivement invariants évidents :

— l'axe $I_1 = 0$ car $f_01(0, I_2) = 0$,

— l'axe $I_2 = 0$ car $f_02(I_1, 0) = 0$,

— les quarts de plan définis par $I_1 = 0$ et $I_2 = 0$ inclus, sont des ensembles positivement invariants car leurs bords sont des ensembles positivement invariants. Puisque les intensités correspondent à un module au carré, physiquement, elles sont positives, on se limite dans la suite au quart de plan positif $\vec{I_0} \in (\mathbb{R}^+)^2$. Voire figure 3.2.

De plus, les trajectoires de $\vec{I}$ sont bornées dans $(\mathbb{R}^+)^2$, en effet, puisque I_s est plus petit que I_c et g_0 plus grand que Γ on a :

$$\frac{d}{dt}(I_1 + I_2) \leq \left(\frac{g_0}{1 + \dfrac{I_1 + I_2}{I_c}} - \Gamma \right) (I_1 + I_2) \leq 0 \tag{3.15}$$

dés que $(I_1 + I_2) \geq I_c(\frac{g_0}{\Gamma} - 1)$, donc la grandeur $(I_1 + I_2)$ est bornée et puisque le vecteur $\vec{I} \in (\mathbb{R}^+)^2$, alors il est borné.

3.1.1.1 Points d'équilibre et stabilité locale

Le système (3.13) admet 4 points d'équilibres, notés $\bar{I} = \begin{pmatrix} \bar{I}_1 \\ \bar{I}_2 \end{pmatrix}$ dans $(\mathbb{R}^+)^2$. On étudie leur stabilité locale et on pose $\delta\vec{I} := \vec{I} - \bar{I}$ les petites variations autours du point d'équilibre.

(1) $(\bar{I}_1, \bar{I}_2) = (0, 0)$, il est exponentiellement instable, en effet le linéaire tangent autour de ce point est donné par :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\delta I_1 &= (g_0 - \Gamma)\delta I_1 \\ \frac{d}{dt}\delta I_2 &= (g_0 - \Gamma)\delta I_2, \end{aligned}$$

ses deux valeurs propres sont réelles et positives, puisque $g_0 > \Gamma$,

(2) $(\bar{I}_1, \bar{I}_2) = (I_s(\frac{g_0}{\Gamma} - 1), 0)$, il est exponentiellement instable, en effet le linéaire tangent autour de ce point est donné par :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\delta I_1 &= -\frac{\Gamma}{g_0}(g_0 - \Gamma)\delta I_1 - \frac{I_s}{I_c}\frac{\Gamma}{g_0}(g_0 - \Gamma)\delta I_2 \\ \frac{d}{dt}\delta I_2 &= \frac{g_0 - \Gamma}{1 + \frac{I_s}{I_c}(\frac{g_0}{\Gamma} - 1)}(1 - \frac{I_s}{I_c})\delta I_2, \end{aligned}$$

la valeur propre $\dfrac{g_0 - \Gamma}{1 + \dfrac{I_s}{I_c}(\dfrac{g_0}{\Gamma} - 1)}(1 - \dfrac{I_s}{I_c})$ est positive, puisque $I_c \gg I_s$,

(3) $(\bar{I}_1, \bar{I}_2) = (0, I_s(\frac{g_0}{\Gamma} - 1))$, il est exponentiellement instable par symétrie par rapport au point (2),

(4) $(\bar{I}_1, \bar{I}_2) = (\bar{\imath}, \bar{\imath})$, où $\bar{\imath} := \frac{I_s I_c}{I_s + I_c}(\frac{g_0}{\Gamma} - 1)$, il est exponentiellement localement stable, en effet le linéaire tangent autour de ce point est donné par :

$$\frac{d}{dt}\delta I_1 = -\frac{\Gamma}{g_0}\frac{g_0 - \Gamma}{I_s + I_c}(I_c\delta I_1 + I_s\delta I_2) \tag{3.16}$$

$$\frac{d}{dt}\delta I_2 = -\frac{\Gamma}{g_0}\frac{g_0 - \Gamma}{I_s + I_c}(I_s\delta I_1 + I_c\delta I_2), \tag{3.17}$$

ses deux valeurs propres $-\frac{I_c - I_s}{I_c + I_s}\frac{\Gamma}{g_0}(g_0 - \Gamma)$ et $-\frac{\Gamma}{g_0}(g_0 - \Gamma)$ sont négatives et proches puisque $I_c \gg I_s$. De plus, la stabilité exponentielle locale du point d'équilibre $\bar{I} = \begin{pmatrix} \bar{\imath} \\ \bar{\imath} \end{pmatrix}$, implique [31, section] que la fonction de Lyapunov du linéarisé (3.16)-(3.17), définie par

$$V_\delta := \delta I_1^2 + \delta I_2^2$$

vérifie, localement autour de $(0, 0)$,

$$\frac{d}{dt}V_\delta \leq -2\frac{I_c - I_s}{I_c + I_s}\frac{\Gamma}{g_0}(g_0 - \Gamma)V_\delta.$$

Cette analyse correspond bien à ce que montre le champ de vecteurs fig 3.2. Le seul point localement exponentiellement stable est celui qui permet d'effectuer une mesure sur le gyroscope, en effet, supposons que $I_1 \equiv 0$, les signaux de battements (3.5)-(3.7) deviennent :

$$y_c = I_1$$

et

$$y_s = I_1$$

l'effet de la différence de phase φ sur les signaux de battements n'existe plus, on ne peut plus mesure d'incrément d'angle. Ce raisonnement est aussi valable pour $I_2 \equiv 0$.

3.1.1.2 Stabilité globale du point de fonctionnement

Seul le point d'équilibre bidirectionnel est localement exponentiellement stable, on prouve dans cette sous-section que le point d'équilibre est globalement stable sur $]0, +\infty[^2$ et exponentiellement stable sur un domaine que l'on cherche à quantifier.

Théorème 1. *Le point d'équilibre* $\bar{I} = \begin{pmatrix} \bar{\imath} \\ \bar{\imath} \end{pmatrix}$ *du système* (3.13) *est globalement stable sur* $]0, +\infty[^2$.

Démonstration. La preuve se fonde sur le critère et le théorème de Poincaré-Bendixon [27], dans le cas d'un système dynamique dans le plan.

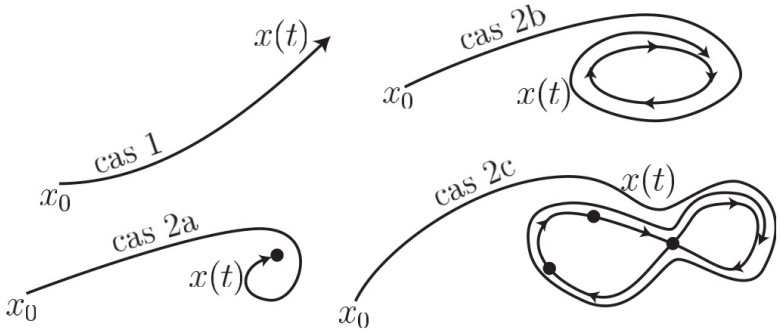


FIGURE 3.3 – Les quatre comportement asymptotiques possibles pour une trajectoire d'un système dynamique dans le plan, extrait de [39].

D'après (3.15), on sait que les trajectoires des intensités sont bornées sur $(\mathbb{R}^+)^2$, l'ensemble limite de tout point de $(\mathbb{R}^+)^2$ est donc, un compact non vide (cas 1 impossible). De plus, on montre que l'ensemble $]0,+\infty[^2$ ne possède pas d'orbite fermée (cas 2b et cas 2c impossibles).

En effet, soit le difféomorphisme de $]0,+\infty[^2$ dans $\mathbb{R}^2$, définit par

$$p_1 = \log(I_1) \tag{3.18}$$
$$p_2 = \log(I_2) \tag{3.19}$$

le système (3.13) s'écrit, en fonction de (p_1,p_2) :

$$\frac{d}{dt}p_1 = \frac{g_0}{1+\frac{e^{p_1}}{I_s}+\frac{e^{p_2}}{I_c}} - \Gamma \tag{3.20}$$
$$\frac{d}{dt}p_2 = \frac{g_0}{1+\frac{e^{p_1}}{I_c}+\frac{e^{p_2}}{I_s}} - \Gamma. \tag{3.21}$$

La divergence du champ de vecteurs du système (3.20)-(3.21) est donnée par :

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial p_1}(\frac{d}{dt}p_1)+\frac{\partial}{\partial p_2}(\frac{d}{dt}p_2) &= \frac{\partial}{\partial p_1}\left[\frac{g_0}{1+\frac{e^{p_1}}{I_s}+\frac{e^{p_2}}{I_c}}-\Gamma\right]+\frac{\partial}{\partial p_2}\left[\frac{g_0}{1+\frac{e^{p_1}}{I_c}+\frac{e^{p_2}}{I_s}}-\Gamma\right]\\ &= -\frac{g_0}{I_s}\left[\frac{1}{(1+\frac{e^{p_1}}{I_s}+\frac{e^{p_2}}{I_c})^2}+\frac{1}{(1+\frac{e^{p_1}}{I_c}+\frac{e^{p_2}}{I_s})^2}\right]\end{aligned}$$

qui est clairement négative sur $\mathbb{R}^2$. D'après le critère de Poincaré-Bendixon, le système (3.20)-(3.21) n'admet pas d'orbite fermée sur $\mathbb{R}^2$ et puisque le changement de variable est un difféomorphisme, le système (3.13) non plus.

La stabilité globale sur $]0,+\infty[^2$ du point d'équilibre bidirectionnel est donnée par le théorème de Poincaré-Bendixon [27, section 1.8], en effet, l'ensemble limite de tout point de $]0,+\infty[^2$ est un compact non vide et qui ne contient pas d'orbite fermée. Il ne peut donc contenir, que l'unique point localement exponentiellement stable de $]0,+\infty[^2$, qui est donc globalement stable. □

Le résultat suivant prouve que la convergence exponentielle locale, est en faite, un résultat plus large s'appliquant à un domaine qu'il reste à définir.

Théorème 2. *Le point d'équilibre* $\bar{I} = \begin{pmatrix}\bar{\imath}\\ \bar{\imath}\end{pmatrix}$ *du système (3.13), est exponentiellement stable sur le carré* $[(1-r)\bar{\imath},(1+r)\bar{\imath}]^2$, *avec* $r \le 1-2\dfrac{g_0+\frac{I_c-I_s}{I_c+I_s}(\Gamma-g_0)}{g_0-\frac{I_c-I_s}{I_c+I_s}(\Gamma-g_0)}\dfrac{I_s}{I_c}$. *Sur ce carré, la fonction de Lyapunov* V *définie par*

$$V(I_1,I_2) := \Delta I_1^2 + \Delta I_2^2 := (I_1-\bar{\imath})^2+(I_2-\bar{\imath})^2$$

vérifie l'inégalité suivante

$$\frac{d}{dt}V \le c_3(r)V,$$

avec $c_3(r)$ *donné par (3.26).*

Démonstration. On pose, $k := (1-r)$, $K := (1+r)$ et $\varepsilon := \dfrac{I_s}{I_c}$. On remarque que le système (3.13) peut se réécrire

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}I_1 &= \frac{g_0 I_1}{1+\frac{I_1}{I_s}+\frac{I_2}{I_c}} - \Gamma I_1 = -\Gamma \frac{\frac{\Delta I_1}{I_s}+\frac{\Delta I_2}{I_c}}{1+\frac{I_1}{I_s}+\frac{I_2}{I_c}} I_1 \\
\frac{d}{dt}I_2 &= \frac{g_0 I_2}{1+\frac{I_2}{I_s}+\frac{I_1}{I_c}} - \Gamma I_2 = -\Gamma \frac{\frac{\Delta I_2}{I_s}+\frac{\Delta I_1}{I_c}}{1+\frac{I_2}{I_s}+\frac{I_1}{I_c}} I_2.
\end{aligned}$$

La dérivée par rapport au temps de la fonction de Lyapunov est donnée par

$$\frac{d}{dt}V = \frac{d}{dt}\Delta I_1^2 + \frac{d}{dt}\Delta I_2^2,$$

avec

$$\frac{d}{dt}\Delta I_1^2 = -\Delta I_1^2 \frac{2\Gamma\frac{I_1}{I_s}}{1+\frac{I_1}{I_s}+\frac{I_2}{I_c}} - \varepsilon \Delta I_1 \Delta I_2 \frac{2\Gamma\frac{I_1}{I_s}}{1+\frac{I_1}{I_s}+\frac{I_2}{I_c}} \tag{3.22}$$

$$\frac{d}{dt}\Delta I_2^2 = -\Delta I_2^2 \frac{2\Gamma\frac{I_2}{I_s}}{1+\frac{I_2}{I_s}+\frac{I_1}{I_c}} - \varepsilon \Delta I_2 \Delta I_1 \frac{2\Gamma\frac{I_2}{I_s}}{1+\frac{I_2}{I_s}+\frac{I_1}{I_c}} \tag{3.23}$$

la fonction

$$\begin{aligned}
\mathbb{R}^+ &\to \mathbb{R}^+ \\
x &\to f_y(x) = \frac{x}{1+x+y}
\end{aligned}$$

est croissante suivant x et décroissante suivant le paramètre y, en conséquence, les équations (3.22)-(3.23) peuvent être majorés par

$$\frac{d}{dt}\Delta I_1^2 \le -\Delta I_1^2 \frac{2\Gamma\frac{k\bar{i}}{I_s}}{1+\frac{k\bar{i}}{I_s}+\frac{K\bar{i}}{I_c}} + \varepsilon |\Delta I_1 \Delta I_2| \frac{2\Gamma\frac{K\bar{i}}{I_s}}{1+\frac{K\bar{i}}{I_s}+\frac{k\bar{i}}{I_c}} \tag{3.24}$$

$$\frac{d}{dt}\Delta I_2^2 \le -\Delta I_2^2 \frac{2\Gamma\frac{k\bar{i}}{I_s}}{1+\frac{k\bar{i}}{I_s}+\frac{K\bar{i}}{I_c}} + \varepsilon |\Delta I_1 \Delta I_2| \frac{2\Gamma\frac{K\bar{i}}{I_s}}{1+\frac{K\bar{i}}{I_s}+\frac{k\bar{i}}{I_c}}, \tag{3.25}$$

en utilisant l'inégalité $\Delta I_1 \Delta I_2 \le \frac{1}{2}(\Delta I_1^2 + \Delta I_2^2)$ on obtient

$$\frac{d}{dt}V \le -c_3(r)V$$

avec

$$\begin{aligned}
c_3(r) &:= 2\Gamma\left(\frac{\frac{k\bar{i}}{I_s}}{1+\frac{k\bar{i}}{I_s}+\frac{K\bar{i}}{I_c}} - \varepsilon\frac{\frac{K\bar{i}}{I_s}}{1+\frac{K\bar{i}}{I_s}+\frac{k\bar{i}}{I_c}}\right) \\
&= \frac{\frac{2\Gamma^2\bar{i}}{I_s}(1-r)}{\Gamma+(g_0-\Gamma)(1-r\frac{I_c-I_s}{I_c+I_s})} - \varepsilon\frac{\frac{2\Gamma^2\bar{i}}{I_s}(1+r)}{\Gamma+(g_0-\Gamma)(1+r\frac{I_c-I_s}{I_c+I_s})}.
\end{aligned} \tag{3.26}$$

Or $c_3(r)$ se doit d'être positive, ce qui implique

$$r^2\frac{I_c-I_s}{I_c+I_s}(g_0-\Gamma)(1-\varepsilon)+r(1+\varepsilon)\big[(1-\frac{I_c-I_s}{I_c+I_s})(g_0-\Gamma)+\Gamma\big]-g_0(1-\varepsilon)<0.$$

Le discriminant du polynôme a en r est

$$\Delta:=(1+\varepsilon)^2\big[(1-\frac{I_c-I_s}{I_c+I_s})(g_0-\Gamma)+\Gamma\big]^2+4\frac{I_c-I_s}{I_c+I_s}g_0(g_0-\Gamma)(1-\varepsilon)^2$$

puisque $0<\frac{I_c-I_s}{I_c+I_s}<1$, le discriminant est positif et peut être minoré par

$$(1+\varepsilon)^2\big[(1-\frac{I_c-I_s}{I_c+I_s})(g_0-\Gamma)+\Gamma\big]^2<\Delta$$

et donc

$$\begin{aligned} r &< \frac{-(1+\varepsilon)\big[(1-\frac{I_c-I_s}{I_c+I_s})(g_0-\Gamma)+\Gamma\big]+\sqrt{\Delta}}{2\frac{I_c-I_s}{I_c+I_s}(g_0-\Gamma)(1-\varepsilon)} \\ &= 1-2\frac{g_0+\dfrac{I_c-I_s}{I_c+I_s}(\Gamma-g_0)}{g_0-\dfrac{I_c-I_s}{I_c+I_s}(\Gamma-g_0)}\varepsilon+\mathcal{O}(\varepsilon^2), \end{aligned}$$

ce qui conclut la preuve. □

On remarque que $c_3(r)$ tend vers $2\dfrac{I_c-I_s}{I_c+I_s}\dfrac{\Gamma}{g_0}(g_0-\Gamma)$ quand r tend vers 0.

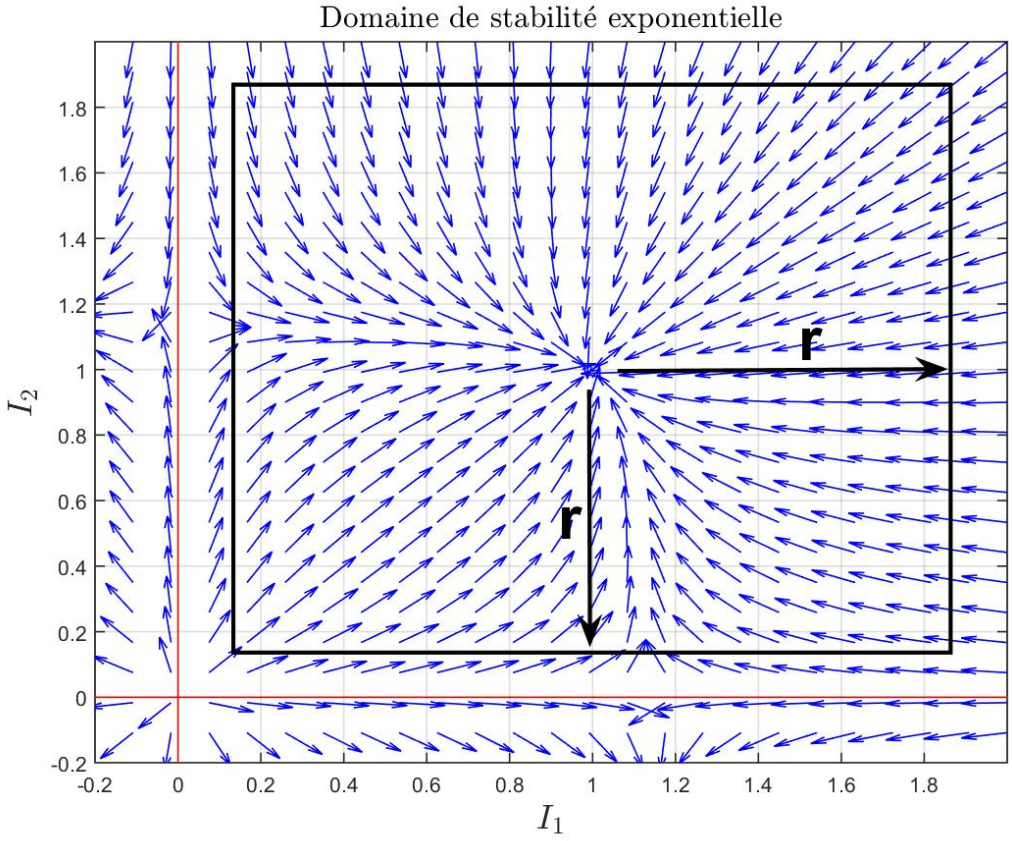


FIGURE 3.4 – Champs de vecteur f_0 dans le cas idéal (bleu) et le domaine d'attraction exponentielle (noir). Avec les paramètres de la figure 3.2 .

3.1.2 Effet des imperfections des miroirs

Dans la réalité, les miroirs formant la cavité gyrolaser ne sont pas parfaits ($m_i \neq 0$). On rappelle les équations qui modélisent les intensités dans la cavité

$$\frac{d}{dt}I_1 = \frac{g_0 I_1}{1+\frac{I_1}{I_s}+\frac{I_2}{I_c}} - \Gamma I_1 + 2m_1\sqrt{I_1 I_2}\cos(\varphi+\xi_1) \tag{3.27}$$

$$\frac{d}{dt}I_2 = \frac{g_0 I_2}{1+\frac{I_2}{I_s}+\frac{I_1}{I_c}} - \Gamma I_2 + 2m_2\sqrt{I_1 I_2}\cos(\varphi+\xi_2). \tag{3.28}$$

L'analyse de ce système peut s'avérer, en première approche, assez complexe, mais elle peut être simplifiée en considérant les ordres de grandeurs mis en jeu. En effet, la très haute qualité des miroirs assure que les coefficients de rétro-diffusion sont très petits, i.e., $m_i \ll 1$, ce qui nous permet de considérer les équations (3.27)-(3.28) comme étant une perturbation du cas

parfait (3.11, 3.12). Ceci se traduit par

$$\frac{d}{dt}\vec{I} = f_0(\vec{I}) + \varrho g(\vec{I},\varphi), \quad \vec{I}(0) = \vec{I}_0 \tag{3.29}$$

avec $\varrho = 2\max(m_1, m_2)$.

Fonctionnement nominal

On commence par remarquer que le quart de plan positif $(\mathbb{R}^+)^2$, reste un ensemble positivement invariant pour les intensités. A l'instar du cas idéal, nous nous limiterons au cas où $\vec{I}_0 \in (\mathbb{R}^+)^2$.

Bien que la perturbation $g(\vec{I},\varphi)$ ne s'annule pas en $\bar{I}$ et n'est pas bornée, son accroissement est sous linéaire en fonction de ΔI. En effet

$$\begin{aligned} \|g(I,\varphi)\| &= 2\sqrt{I_1 I_2}\sqrt{\cos^2(\varphi+\xi_1)+\cos^2(\varphi+\xi_2)} \\ &\leq 2\sqrt{2}\Big(\frac{I_1+I_2}{2}\Big) \\ &\leq 2\sqrt{2}\Big(\bar{\imath}+\frac{|I_1-\bar{\imath}|+|I_2-\bar{\imath}|}{2}\Big) \\ &\leq 2\bar{\imath}\sqrt{2}+2\,\|\Delta I\|\,. \end{aligned} \tag{3.30}$$

De plus la convergence exponentielle (qui est une propriété forte) du système idéal vers $\bar{I}$, nous assure que le système perturbé (3.29) restera dans un entourage de $\bar{I}$.

Le résultat suivant prouve que la trajectoire des intensités converge vers un entourage proche en $\mathcal{O}(\varrho)$ de $\bar{I}$.

Théorème 3. *Il existe $m_0, C > 0$ tel que $\forall\ \ \varrho \leq m_0$ et $\|\Delta I(0)\| \leq \frac{1}{2}\bar{\imath}$ alors, pour t suffisamment grand, on a*

$$\|\Delta I(t)\| \leq \varrho C$$

Démonstration. Le théorème 2 affirme que le point d'équilibre $\bar{I}$ du système idéal (3.13) est exponentiellement stable sur une boule $\|\Delta I\| \leq r\bar{\imath}$, avec r suffisamment petit, en particulier pour $r = \frac{1}{2}$. La fonction de Lyapunov V vérifie

$$\frac{d}{dt}V \leq c_3 V.$$

L'application de la méthode de comparaison [31, section 9.3] nous donne que les solutions du système perturbé (3.29) sont définies pour tout $t \geq 0$ et elles vérifient

$$\|\Delta I(t)\| \leq \|\Delta I(0)\|\, e^{-\alpha t} + 2\frac{\varrho\bar{\imath}\sqrt{2}}{\alpha}(1-e^{-\alpha t})$$

avec $\alpha := \frac{c_3}{2} - 2\varrho > 0$, $\|\Delta I(0)\| < r$ et $2\varrho\bar{\imath}\sqrt{2} < r\alpha$.

Une conséquence directe est que pour t suffisamment grand on a,

$$\|\Delta I(t)\| \leq \frac{2\varrho\bar{\imath}\sqrt{2}}{\frac{c_3}{2}-2\varrho} \leq \frac{2\varrho\bar{\imath}\sqrt{2}}{\frac{c_3}{2}-2m_0}$$

avec $\|\Delta I(0)\| < r$ et $\varrho < m_0$, où $m_0 := \frac{c_3}{4}\frac{r}{r+\bar{\imath}\sqrt{2}}$. □

Les trajectoires des intensités, dans le cas réel, restent dans un entourage proche du point d'équilibre bidirectionnel du système idéal.

3.2 Equation d'Adler et zones aveugles

Nous avons présenté succinctement dans la section 1.3 les différentes limitations des gyroscopes. Pour les faibles vitesses de rotation la différence de phases entre les deux signaux contrarotatifs ne permet plus de remonter à l'incrément d'angle. Ces limitations peuvent être décrites en analysant une approximation de l'équation de la phase (3.10), aussi appelée équation d'Adler. Elle est obtenue en supposant que les intensités des deux modes contrarotatifs sont constants et égaux, ce qui, d'après la sous-section précédente, est vrai à $\mathcal{O}(m)$ près.

Prenons les constantes $m_0, C > 0$ du théorème 3, on suppose que la qualité des miroirs permet d'affirmer que $|\varrho = \max(m_1, m_2)| < m_0$ et que l'on initialise le système tel que $\vec{I}_0 = \bar{I}$. Alors les solutions des équations (3.8)-(3.10) sont définies pour tout $t \geq 0$, et il existe un $D > 0$ tel que, pour tout $t \geq 0$, on a

$$|\frac{d}{dt}\varphi - \Omega + m_1 \sin(\varphi + \xi_1) + m_2 \sin(\varphi + \xi_2)| \leq D\varrho^2$$

On néglige les termes d'ordre 2 en ϱ (uniforme en $t \geq 0$) et on se concentre sur les termes d'ordre 1, qui constituent l'équation d'Adler

$$\frac{d}{dt}\varphi = \Omega - m_1 \sin(\varphi + \xi_1) - m_2 \sin(\varphi + \xi_2). \tag{3.31}$$

Cette équation, bien connue des physiciens, permet une modélisation fiable du comportement de la différence de phase φ entre les deux modes contrarotatifs et elle met en évidence les différentes limitations "usuelles" des gyroscopes.

Cette section est composée de trois parties. Dans la première partie on réécrit l'équation d'Adler sous forme d'état, puis on définit la mesure sur laquelle on se base afin de remonter à la vitesse de rotation que voit le gyroscope. Enfin un rappel de la définition de l'observabilité d'un système dynamique est effectué.

Dans la deuxième partie, on se place dans le cas de faibles vitesses de rotation pour un gyroscope réel et on montre la perte d'observabilité que cela induit. Ce phénomène de verrouillage de phase, ou "static lock-in", apparaît quand la vitesse de rotation est inférieure à une limite communément appelée "zone aveugle" du gyroscope.

Dans la troisième partie, on introduit la solution usuellement adoptée, en industrie, afin de réduire le phénomène de "static lock-in", à savoir, l'activation mécanique (dithering en anglais). Les modifications que cela induit sur la façon d'effectuer la mesure seront exposées. Bien que cette solution permet d'augmenter sensiblement la précision des gyroscopes, elle n'est pas parfaite. En effet, pour de très faibles vitesses de rotation, un phénomène de verrouillage de la phase avec l'activation mécanique apparaît. Il induit une nouvelle perte d'observabilité, que nous modéliserons via les applications de Poincaré. Ce phénomène de verrouillage de phase, ou "dithering lock-in", a lieu quand la vitesse de rotation est inférieure à une limite appelée "zone aveugle dynamique" du gyroscope et qui est bien inférieure à la zone aveugle.

3.2.1 Observabilité du modèle d'Adler

L'équation d'Adler (3.31) donne la dérivée de la différence de phase $\frac{d}{dt}\varphi$, en fonction de la rotation que subit le système Ω. On mesure les signaux de battements suivants :

$$y_c = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos(\varphi) \tag{3.32}$$

$$y_s = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\sin(\varphi). \tag{3.33}$$

A partir des signaux de battements (y_c, y_s), on a accès à

$$\cos\varphi = \frac{y_c - I_1 - I_2}{2\sqrt{I_1 I_2}} \tag{3.34}$$

$$\sin\varphi = \frac{y_s - I_1 - I_2}{2\sqrt{I_1 I_2}} \tag{3.35}$$

Dans la pratique, ces mesures ne sont pas exploitées telles quelles. On commence par transformer $(\cos\varphi, \sin\varphi)$ en signaux carrés, figure 3.5. Puis on compte le défilement des franges à travers le temps.

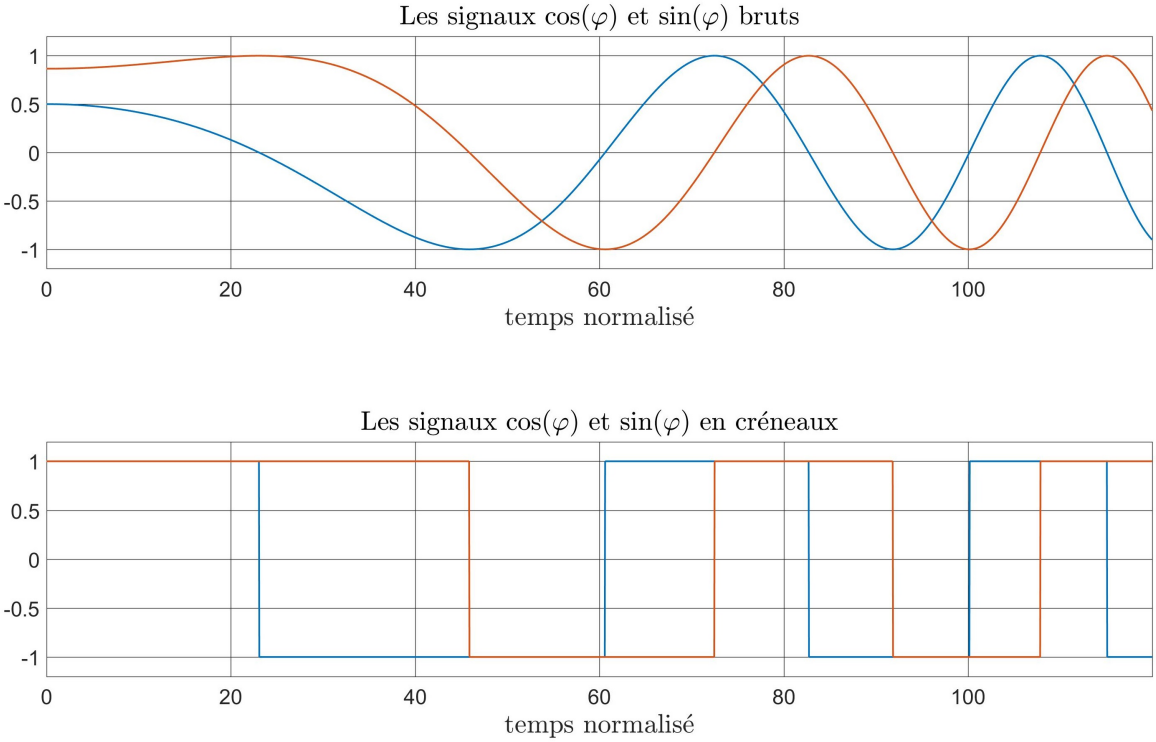


FIGURE 3.5 – Les signaux $(\cos\varphi, \sin\varphi)$ bruts et transformés en créneaux, avec les paramètres de la figure 3.2.

Le gyroscope est considéré comme une roue incrémentale, la vitesse de défilement des franges donne accès au module de la rotation que subit le gyroscope, son signe est déterminé par la quadrature des deux voies. Qui dit comptage dit intégrateur, ce traitement revient à mesurer l'accumulation de différence de phases, entre deux instants $t_0 < t$, i.e., $\varphi(t) - \varphi(t_0)$ avec une quantification de 2π.

A l'instar de ce qui est appliqué dans la pratique, on définit une nouvelle mesure qui permet de remonter à l'accumulation de phase, mais sans quantification :

$$\begin{aligned} y(t) &= \varphi(t_0) + \int_{t_0}^{t} [\cos\varphi \ \frac{d}{dt} \sin\varphi](\tau) d\tau - \int_{t_0}^{t} [\sin\varphi \ \frac{d}{dt} \cos\varphi](\tau) d\tau \\ &= \varphi(0) + \int_{t_0}^{t} \frac{d}{dt}\varphi(\tau) d\tau \\ &= \varphi(t) \end{aligned} \tag{3.36}$$

Dans la suite de ce chapitre on s'intéresse à l'observabilité de la vitesse de rotation, supposée constante, par rapport à la mesure y. En considérant que l'on connaît parfaitement la contribution des miroirs $(\tilde{m}_1, \tilde{m}_2)$, le problème s'écrit en représentation d'état sous la forme

$$\frac{d}{dt}\varphi = \Omega - m_1 \sin(\varphi + \xi_1) - m_2 \sin(\varphi + \xi_2) \tag{3.37}$$

$$\frac{d}{dt}\Omega = 0 \tag{3.38}$$

avec comme mesure $y = \varphi$.

Definition 1. *On dit qu'un système dynamique est observable, si l'on a l'injectivité de la mesure par rapport à l'état, i.e., si pour chaque mesure correspond un seul et unique état.*

Le système (3.37)-(3.38) est clairement observable par rapport à la mesure y, en effet il suffit d'écrire

$$\varphi = y \tag{3.39}$$

$$\Omega = \frac{d}{dt} y + m_1 \sin(y + \xi_1) + m_2 \sin(y + \xi_2) \tag{3.40}$$

Malheureusement, notre connaissance des coefficients de rétro-diffusion des miroirs est pour le moins imparfaite. En effet, au delà du vieillissement qui altère leur qualité, les miroirs sont mis en vibration afin d'asservir la puissance à l'intérieur de la cavité. Cet asservissement a lieu sur les très basses fréquences, les coefficients $(\tilde{m}_1, \tilde{m}_2)$ varient donc lentement. On supposera dans la suite que les coefficients de rétro-diffusion des miroirs sont inconnus et constants. Dans ce cas le problème peut se réécrire, en représentation d'état, sous la forme

$$\frac{d}{dt}\varphi = \Omega - m_c \cos(\varphi) - m_s \sin(\varphi) \tag{3.41}$$

$$\frac{d}{dt}\Omega = 0 \tag{3.42}$$

$$\frac{d}{dt} m_c = 0 \tag{3.43}$$

$$\frac{d}{dt} m_s = 0 \tag{3.44}$$

où

$$m_c := m_1 \sin\xi_1 + m_2 \sin\xi_2 \tag{3.45}$$

$$m_s := m_1 \cos\xi_1 + m_2 \cos\xi_2 \tag{3.46}$$

avec comme mesure $y = \varphi$. On étudie, donc, l'observabilité du vecteur d'état $\vec{X} = \begin{pmatrix} \varphi \\ \Omega \\ m_c \\ m_s \end{pmatrix}$ par rapport à la mesure y.

3.2.2 Zone aveugle et perte d'observabilité

On remarque que le champ de vecteur défini par (3.41)-(3.44) est $\mathcal{C}^\infty$ et borné sur $\mathbb{R}^4$. On a donc l'existence et l'unicité uniforme suivant les $t > 0$ des solutions. Soit $[t_0, t]$ l'intervalle (en temps) d'observation de la mesure y. Le résultat suivant prouve que le système (3.41)-(3.44) est observable s'il existe $\bar{t} \in [t_0, t]$, tel que, $\frac{dy}{dt}(\bar{t}) \neq 0$

Théorème 4. *On observe la mesure y sur un intervalle $[t_0, t]$ où $0 < t_0 < t$.*

$$\textit{si } \exists \bar{t} \in [t_0, t], \textit{ tel que, } \frac{dy}{dt}(\bar{t}) \neq 0 \textit{ alors le système est observable}$$

Démonstration. Supposons que $\bar{t}$ existe. La mesure y est $\mathcal{C}^\infty$ suivant t, nous allons considérer ses dérivées sur $[t_0, t]$. On a :

$$\begin{aligned}
y &= \varphi \\
\frac{dy}{dt} &= \Omega + m_c \cos(y) + m_s \sin(y) \\
\frac{d^2y}{dt} &= \frac{dy}{dt}[m_s \cos(y) - m_c \sin(y)] \\
\frac{d^3y}{dt^3} &= \frac{d^2y}{dt^2}[m_s \cos(y) - m_c \sin(y)] - (\frac{dy}{dt})^2[m_c \cos(y) + m_s \sin(y)]
\end{aligned}$$

On pose :

$$S = m_c \cos(y) + m_s \sin(y) \quad \text{et} \quad C = m_s \cos(y) - m_c \sin(y)$$

Le système se réécrit de la forme :

$$\begin{aligned}
y &= \varphi && (3.47)\\
\frac{dy}{dt} &= \Omega + S && (3.48)\\
\frac{d^2y}{dt^2} &= \frac{dy}{dt} \cdot C && (3.49)\\
\frac{d^3y}{dt^3} &= \frac{d^2y}{dt^2} C - (\frac{dy}{dt})^2 S && (3.50)
\end{aligned}$$

En multipliant l'équation (3.50) par $\frac{dy}{dt}$ et en ré-injectant l'équation (3.49) on obtient sur $[t_0, t]$:

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dt} \cdot \frac{d^2y}{dt^2} &= \frac{d^2y}{dt^2} \cdot \frac{d^2y}{dt^2} - (\frac{dy}{dt})^3 S \\
\frac{d^2y}{dt^2} &= \frac{dy}{dt} \cdot C
\end{aligned}$$

Or d'après l'hypothèse, il existe $\bar{t} \in [t_0, t]$ tel que $\frac{dy}{dt}(\bar{t}) \neq 0$. En ce point, on peut écrire :

$$C = \frac{\frac{d^2y}{dt^2}}{\frac{dy}{dt}} \tag{3.51}$$

$$S = \frac{(\frac{d^2y}{dt^2})^2 - \frac{dy}{dt} \cdot \frac{d^3y}{dt^3}}{(\frac{dy}{dt})^3} \tag{3.52}$$

$$\Omega = \frac{dy}{dt} - \frac{(\frac{d^2y}{dt^2})^2 - \frac{dy}{dt} \cdot \frac{d^3y}{dt^3}}{(\frac{dy}{dt})^3} \tag{3.53}$$

Les équations (3.51) et (3.52) nous permettent de remontrer à (m_c, m_s) à l'instant $\bar{t}$ et l'équation (3.53) à Ω à l'instant $\bar{t}$. Or ces grandeurs sont supposées constantes à travers le temps. Les valeurs qu'elles prennent à l'instant $\bar{t}$ ne varient pas sur $[t_0, t]$, elles sont donc observables sur cet intervalle. L'équation (3.47) nous assurant la connaissance de la phase, on a bien un système observable sur l'intervalle $[t_0, t]$. □

On effectue une étude du système, afin de déterminer suivant les valeurs que prend Ω l'observabilité du système. Pour se faire on pose :

$$m_c + i m_s = m e^{-i\beta} \tag{3.54}$$

où $m := \sqrt{m_c^2 + m_s^2}$ et $\beta := -\arg(m_c + i m_s)$. L'équation d'Adler (3.42) s'écrit

$$\frac{d}{dt}\varphi = \Omega - m\cos(\varphi + \beta) \tag{3.55}$$

On peut dissocier deux comportements distincts, celui des grandes vitesses de rotation et celui des faibles vitesses de rotation.

Comportement de la phase φ, pour de faibles vitesses de rotation $|\Omega| \leq m$

Dans le cas de faibles vitesses de rotation, i.e., $|\Omega| \leq m$, l'équation d'Adler admet deux points d'équilibre en φ . En effet, soit $\bar{\varphi} \in \mathbb{R}$ un point d'équilibre, l'équation (3.55) nous donne :

$$0 = \Omega - m\cos(\bar{\varphi} + \beta)$$

donc

$$\cos(\bar{\varphi} + \beta) = \frac{\Omega}{m} \tag{3.56}$$

d'après l'hypothèse que nous avons posé, $\frac{\Omega}{m} \in [-1, 1]$.

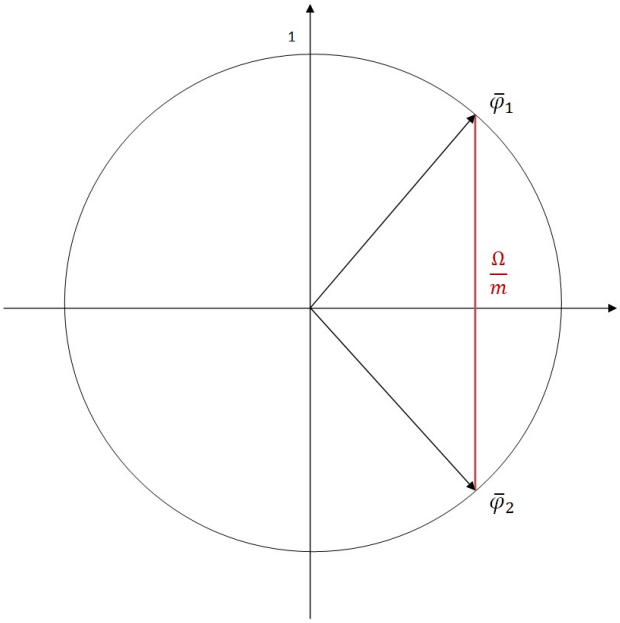


FIGURE 3.6 – Les phases $(\bar{\varphi}_1, \bar{\varphi}_2)$ des deux points d'équilibre

il existe bien deux points d'équilibre $(\bar{\varphi}_1, \bar{\varphi}_2)$ en φ, l'un est localement exponentiellement stable et l'autre instable. Autour de ces points, la dérivée temporelle de la mesure du système (3.42)-(3.42), $\frac{dy}{dt}$ sera proche de zéro, c'est pourquoi nous allons envisager l'observabilité au premier ordre du système autour de ces points. Pour se faire, nous allons poser le tangent du système aux points d'équilibre $\bar{X}_j = \begin{pmatrix} \bar{\varphi}_j \\ \Omega \\ m_c \\ m_s \end{pmatrix}$ avec $j = \{1, 2\}$. Il est défini par :

$$A_j := \begin{pmatrix} -m_c \sin(\bar{\varphi}_j) + m_s \cos(\bar{\varphi}_j) & 1 & \cos(\bar{\varphi}_j) & \sin(\bar{\varphi}_j) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On pose $H := (1, 0, 0, 0)$ pour caractériser la loi de sortie. Le système sera observable au premier ordre s'il vérifie le critère de Kalman.

$$\text{ie,} \qquad rg \begin{pmatrix} H \\ HA_i \\ HA_i^2 \\ HA_i^3 \end{pmatrix} = 4 \quad \text{Où} \quad i = \{1, 2\}$$

Afin de simplifier les calculs on pose $\upsilon_j := -m_c \sin(\bar{\varphi}_j) + m_s \cos(\bar{\varphi}_j)$. On a donc :

$$\begin{pmatrix} H \\ HA_j \\ HA_j^2 \\ HA_j^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \upsilon_j & 1 & \cos(\bar{\varphi}_j) & \sin(\bar{\varphi}_j) \\ \upsilon_j^2 & \upsilon_j & \upsilon_j \cos(\bar{\varphi}_j) & \upsilon_j \sin(\bar{\varphi}_j) \\ \upsilon_j^3 & \upsilon_j^2 & \upsilon_j^2 \cos(\bar{\varphi}_j) & \upsilon_j^2 \sin(\bar{\varphi}_j) \end{pmatrix}$$

qui est de rang 2. Le système n'est donc pas observable au premier ordre.

Definition 2. *On appelle zone aveugle l'ensemble des valeurs de* Ω *tel que le système* (3.41)-(3.44) *est non observable,*

$$ZA = \{\forall \Omega \in \mathbb{R}, \textit{tel que} \quad |\Omega| \leq m\}$$

Il existe une autre façon de présenter cette perte d'observabilité en se basant sur la définition 1. Pour les faibles vitesses de rotation ($|\Omega| \leq m$), la phase φ va converger vers le point d'équilibre stable et donc pour t suffisamment grand on peut écrire

$$\varphi(t) := y(t) \sim \bar{\varphi} = \pm \arccos(\frac{\Omega}{\sqrt{m_c^2 + m_s^2}}).$$

Il existe donc une infinité de combinaisons des variables d'état (Ω, m_c, m_s) permettant d'obtenir cette mesure qui n'est donc pas injective. Le système n'est donc pas observable.

Comportement de la phase φ, pour de grandes vitesses de rotation $|\Omega| > m$

Pour les hautes vitesses de rotation, i.e., $|\Omega| > m$, l'équation d' Adler nous donne :

$$\frac{dy}{dt} = \Omega - m\cos(y + \beta)$$

Et donc $\forall t \in \mathbb{R}, \quad |\frac{dy}{dt}| \in [|\Omega| - m, |\Omega| + m]$, cet intervalle n'incluant pas 0 puisque $|\Omega| > m$, nous avons la non nullité de $|\frac{dy}{dt}|$ sur $\mathbb{R}$ et donc, d'après le théorème 4, l'observabilité du système sur tout intervalle $[t_0, t]$ avec $0 < t_0 < t$.

En industrie, les coefficients de rétro-diffusion des miroirs ne sont pas estimés afin de remonter à Ω, en effet, la très haute qualité des miroirs permet d'affirmer que $m \ll 1$. Pour une très large gamme de vitesses de rotation tel que $\Omega \gg m$, l'équation d'Adler peut s'écrire

$$\frac{dy}{dt} = \Omega + \mathcal{O}(m)$$

l'accumulation de l'incrément de phase entre deux instants t_0 et t, avec $t - t_0 \sim 1$ telle que présentée dans la figure 3.5 s'écrit

$$\varphi(t) - \varphi(t_0) \quad := \quad y(t) - y(t_0) = \int_{t_0}^{t} \Omega(\tau)d\tau + \mathcal{O}(m) \tag{3.57}$$

3.2.3 Activation et zone aveugle dynamique

La solution communément adoptée afin de réduire la zone aveugle est d'implémenter une mise en vibration périodique du gyroscope. Cette activation mécanique, ou dithering, est réalisée de telle sorte que le gyroscope voit une vitesse de rotation importante durant un temps relativement long et elle est modélisée par

$$\frac{d}{dt}\varphi_d = \Omega_d \cos(\omega_d t + \beta_d) \tag{3.58}$$

avec $\Omega_d \gg \omega_d \gg m$ et β_d un déphasage. La vitesse de rotation que voit le gyroscope est donc "éjectée" en dehors de la zone aveugle presque tout le temps. On démontre dans cette

sous-section que l'activation mécanique permet de réduire considérablement les limitations des gyroscopes mais elle ne les supprime pas. La rotation totale que voit la cavité est le cumul de la rotation que subit le gyroscope avec la rotation due à l'activation mécanique, l'équation (3.31) s'écrit

$$\frac{d}{dt}\varphi = \Omega + \frac{d}{dt}\varphi_d - m_c\cos(\varphi) - m_s\sin(\varphi) \tag{3.59}$$

ou encore, en fonction des variables de rétro-diffusion définies en (3.54)

$$\frac{d}{dt}\varphi = \Omega + \frac{d}{dt}\varphi_d - m\cos(\varphi+\beta) \tag{3.60}$$

De part sa réalisation technique, l'activation mécanique est toujours centrée. Sa contribution à travers le temps n'impose pas de décalage dans la mesure de la vitesse de rotation. De plus, la pulsation de l'activation mécanique ω_d est une grandeur que l'on maîtrise avec une grande précision. Le meilleur moyen de prendre en compte ces caractéristiques est d'échantillonner la mesure y à la période d'activation, de façon à ne pas mesurer la contribution de l'activation mécanique. On pose

- $\varphi_d(t) = a_d\sin(\omega_d t)$ la phase due à l'activation mécanique, avec $a_d := \frac{\Omega_d}{\omega_d}$,
- $T_d := \frac{2\pi}{\omega_d}$, la période de l'activation mécanique,
- $\psi := \varphi - \varphi_d$, un changement de variable qui nous place dans le repère tournant.

De plus on définit les variables discrètes associées aux différentes phases

- $\varphi_n := \varphi(nT_d)$, avec $n \in \mathbb{N}$,
- $\psi_n := \psi(nTd)$, avec $n \in \mathbb{N}$

l'activation mécanique étant T_d-périodique, on a $\varphi_{n+1} - \varphi_n = \psi_{n+1} - \psi_n$.

3.2.3.1 Modèle discret

On s'attelle dans la suite à réécrire le système (3.41)-(3.44) en discret, afin de modéliser l'évolution de ψ_n et à en étudier les éventuels points d'équilibre.

L'équation d'Adler (3.60) dans le repère tournant s'écrit

$$\frac{d}{dt}\psi = \Omega - m\cos(\psi+\varphi_d+\beta) \tag{3.61}$$

Quand $|\Omega|T_d \ll 1$ et $mT_d \ll 1$, il est possible de donner une approximation de la phase ψ sur une période d'activation T_d, en effet

$$\psi(t) - \psi(t-T_d) = \Omega T_d - m\int_{t-T_d}^{t}\cos(\psi(\tau)+\varphi_d(\omega_d\tau)+\beta)d\tau$$

ce qui implique

$$|\psi(t) - \psi(t-T_d)| \leq (|\Omega|+m)T_d \ll 1$$

et donc,

$$\begin{aligned}\psi(t) - \psi(t-T_d) &= \Omega T_d - m\int_{t-T_d}^{t}\cos(\psi(t-T_d)+\varphi_d(\omega_d\tau)+\beta)d\tau \\ &\quad +\mathcal{O}(m|\Omega|T_d^2 + (mT_d)^2)\end{aligned} \tag{3.62}$$

avec

$$\begin{aligned}\int_{t-T_d}^{t} \cos(\psi(t-T_d)+\varphi_d(\omega_d\tau)+\beta)d\tau &= \cos(\psi(t-T_d)+\beta)\int_{t-T_d}^{t}\cos(\varphi_d(\omega_d\tau))d\tau \\ &\quad -\sin(\psi(t-T_d)+\beta)\int_{t-T_d}^{t}\sin(\varphi_d(\omega_d\tau))d\tau\end{aligned}$$

or l'expansion de Jacobi-Angers [3] nous donne

$$\begin{aligned}\cos(\varphi_d(\omega_d\tau)) &= J_0(a_d)+2\sum_{k=1}^{+\infty}J_{2k}(a_d)\cos(2k(\omega_d\tau+\beta_d)) \\ \sin(\varphi_d(\omega_d\tau)) &= 2\sum_{k=0}^{+\infty}J_{2k+1}(a_d)\sin((2k+1)(\omega_d\tau+\beta_d))\end{aligned}$$

où $J_n(.)$ est la n^{ieme} fonction de Bessel du premier type, on obtient

$$\begin{aligned}\psi(t)-\psi(t-T_d) &= \Omega T_d - mT_dJ_0(a_d)\cos(\psi(t-T_d)+\beta) \\ &\quad +\mathcal{O}(m|\Omega|T_d^2+(mT_d)^2)\end{aligned} \tag{3.63}$$

Le système (3.41)-(3.44), en discret, peut être approximé par

$$\psi_{n+1} = \psi_n + \Omega T_d - mT_dJ_0(a_d)\cos(\psi(t-T_d)+\beta_n) \tag{3.64}$$
$$\Omega_{n+1} = \Omega_n \tag{3.65}$$
$$m_{n+1} = m_n \tag{3.66}$$
$$\beta_{n+1} = \beta_n \tag{3.67}$$

avec comme mesure $y_n = \varphi_n = \psi_n + \varphi_d(nT_d)$.

Dans la pratique, $a_d \gg 1$, ce qui implique $|J_0(a_d) = \sqrt{2/(\pi a_d)}\cos(a_d - \pi/4)| \ll 1$ et donc la mesure usuelle effectuée dans l'industrie (3.57) devient

$$\varphi_{n+1}-\varphi_n := y_{n+1}-y_n = \int_{nT_d}^{(n+1)T_d}\Omega(\tau)d\tau + \mathcal{O}(mJ_0(a_d))$$

La mise en application de l'activation mécanique a permis de gagner un facteur $J_0(a_d)$ sur la précision de l'estimation de l'incrément d'angle.

3.2.3.2 Zone aveugle dynamique

Pour de très faibles vitesses de rotation la phase φ s'accroche avec l'activation mécanique, elle devient T_d-périodique. Cela implique que la nouvelle mesure y_n, devient constante, pour de faibles vitesses de rotation, non nulles [47].

On modélise ce verrouillage de phase, via les applications de Poincaré [50]. Soit P l'application de Poincaré associée à l'équation d'Adler (3.60),

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad P(\varphi_n) = \varphi_{n+1}$$

L'équation d'approximation de la phase ψ, donnée par (3.63), nous fournit une expression approximée de l'application P :

$$P(\varphi_n) \approx \varphi_n + \Omega T_d - mJ_0(a_d)T_d\cos(\varphi_n - \varphi_d(nT_d)+\beta) \tag{3.68}$$

L'application P est bijective, par unicité des solutions de l'équation d'Adler, de plus si elle admet un point fixe $\bar{\varphi}$ sur $[0, 2\pi]$, alors la suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\bar{\varphi}$ quand $n \to +\infty$.

Quand $|\Omega| \leq mJ_0(a_d)$, P admet deux points fixes

$$\bar{\varphi} = \pm \arccos(\frac{\Omega}{J_0(a_d)m}) + \varphi_d(nT_d) - \beta$$

l'un est localement exponentiellement stable, l'autre localement instable, en effet

$$\frac{dP}{d\varphi_n} = 1 \pm mJ_0(a_d) \sin\left(|\arccos(\frac{\Omega}{J_0(a_d)m})|\right)$$

le temps de convergence de la suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donné par

$$\tau_{poincare} = -\frac{1}{\ln\left[1 - |mJ_0(a_d)\sin\left(|\arccos(\frac{\Omega}{J_0(a_d)m})|\right)|\right]} \tag{3.69}$$

plus le coefficient de rétro-diffusion m est petit, plus le temps de convergence est grand.

Pour n suffisamment grand et Ω suffisamment petit, la phase φ_n se confond avec le point d'équilibre stable, elle vérifie

$$\varphi_n := y_n \sim \bar{\varphi} = \pm \arccos(\frac{\Omega}{J_0(a_d)m}) + \varphi_d(nT_d) - \beta$$

Il existe, donc, une infinité de jeux de paramètres (Ω, m, β) permettant d'obtenir cette mesure, d'après la définition 1, le système (3.64)-(3.64) n'est pas observable.

Definition 3. *On appelle zone aveugle dynamique l'ensemble des valeurs de Ω tel que le système (3.64)-(3.64) est non observable,*

$$ZAD = \{\forall \Omega \in \mathbb{R}, \textit{tel que} \quad |\Omega| \leq mJ_0(a_d)\}$$

Il serait logique de cherche à fixer le paramètre a_d sur un 0 de la fonction de Bessel $J_0(.)$, de façon à annuler la zone aveugle dynamique. Malheureusement, la précision que cela demande sur le contrôle que l'on a de a_d est bien trop grande pour pouvoir être réalisée dans la pratique.

3.3 Conclusion

L'étude dynamique des équations de Lamb a démontré que le fonctionnement bi-directionnel du gyroscope est stable. De plus, les intensités des deux modes contrarotatifs restent dans un proche entourage du point d'équilibre. Ce constat autorise une simplification notable dans l'étude du comportement de la différence de phases φ, permettant ainsi, de prouver que les limitations usuelles des gyroscopes sont dues à notre méconnaissance des coefficients de rétro-diffusion des miroirs $\tilde{m}$. Il est donc naturel de chercher à estimer ces coefficients, afin de pouvoir "rétablir" l'observabilité du gyroscope, et ce, même pour de faibles vitesses de rotation.

Chapitre 4

Estimation et compensation des imperfections

Dans le chapitre précédent nous avons démontré que l'observabilité de la rotation que subit le gyroscope est directement liée à notre connaissance des coefficients de rétro-diffusion des miroirs. On propose donc plusieurs approches d'estimation, temps-réel, permettant de mesurer ces coefficients. L'optimisation des performances des gyroscopes à travers une compensation de l'effet de la rétro-diffusion est un sujet en pleine expansion et qui est traité dans de nombreuses publications [32, 15, 23, 41, 29]. Différentes techniques existent afin de mesurer l'influence des miroirs sur la différence de phase φ, mais elles se basent toutes sur le principe de pré-calibration. En effet, des approximations sont effectuées dans le but de de modéliser le comportement des signaux de sorties (intensités des deux modes contrarotatifs et battements) qui sont enregistrés durant quelques heures. Puis à l'aide d'algorithmes tels que les moindres carrés [24] ou les filtres de Kalman [11], on "feat" [22] ces données sur les modèles développés, en vue d'en déduire les coefficients de rétro-diffusion. Dans la pratique, ces enregistrements des signaux de sorties sont effectués après une phase dite de "pré-chauffage". Le gyroscope est mis en fonctionnement durant plusieurs heures afin de stabiliser sa température dont dépendent les grandeurs qui le caractérisent (facteur d'échelle, rétro-diffusion, gain, pertes...). Ces techniques présentent le désavantage d'être trop rigides pour pouvoir être appliquées sur le produit industriel. En effet, les coefficients de rétro-diffusion dépendent de la température des miroirs ainsi que de leur vieillissement. Or le gyroscope se doit d'être opérationnel dès le démarrage et ce durant toute sa durée de vie (dix ans). Une pré-calibration effectuée dans un milieu contrôlé et basée sur un fonctionnement stabilisé, ne peut être considérée comme suffisamment fiable quelles que soient les conditions de fonctionnement du gyroscope et durant toute sa durée de vie. C'est pourquoi on propose une approche d'estimation en temps réel des coefficients de rétro-diffusion des miroirs, afin de suivre leur évolution à travers le temps.

Ce chapitre est composé de deux sections. Dans la première section, on exploite la mesure des intensités dans le but de remonter aux coefficients de rétro-diffusion des miroirs. L'étude de dynamique effectuée dans le chapitre 3 nous permet d'affirmer que les intensités restent dans un entourage proche du point d'équilibre bi-directionnel du système parfait. Nous effectuerons un développement limité des équations des intensités autour de ce point, afin d'obtenir un modèle linéaire par rapport aux mesures, nous permettant ainsi, d'appliquer un algorithme d'estimation en temps réel basé sur les moindres carrés récursifs. De plus, on admet l'hypothèse (très abusive) que les mesures sont parfaites.

Dans la deuxième section on exploite uniquement la différence de phase φ obtenue via les signaux $(\cos\varphi, \sin\varphi)$ issus des mesures de battement et des intensités.

Les mesures de battements sont obtenues via des photo-détecteurs dont le gain et le biais dépendent aussi de la température et sont sensibles aux vieillissement. On commence par proposer une estimation du gain et biais des photo-détecteurs, basée sur un moindre carrés récursifs, nous permettant ainsi de corriger leur dérive et de ramener les signaux $(\cos\varphi, \sin\varphi)$ sur le cercle unité. A partir des signaux corrigés on obtient une mesure "propre" de la différence de phase φ que l'on exploite dan l'intention d'introduire un estimateur sur l'équation d'Adler. Cette approche a l'avantage de se baser sur les signaux de battements qui sont facilement accessibles et de bonne qualité, car utilisés actuellement comme signaux de sortie du gyroscope (voire la sous-section 3.2.1) mais a le désavantage de dépendre de la vitesse de rotation Ω que subit le gyroscope. En effet Ω est supposé constant, ce qui implique que cette approche ne peut être utilisée que dans le cas des mesures fines et stables de vitesse de rotation (rotation terrestre, mesure du champ de gravité....).

4.1 Estimation des imperfections via les intensités

On se propose d'utiliser les mesures des intensités combinées à celles du battement de manière à estimer les coefficients de rétro-diffusion des miroirs. L'objectif étant d'améliorer la précision du gyroscope, on exploite l'estimation obtenue pour compenser l'effet de la rétro-diffusion sur la différence de phase φ.

Cette section est composée de trois parties. Dans la première partie, on utilise le résultat du théorème 3, qui assure que les intensités restent dans un entourage proche en $\mathcal{O}(\varrho)$ du point d'équilibre bi-directionnel $\bar{I}$, pour approximer leur comportement par un modèle simplifié qui correspond au développement de Taylor du champ de vecteur des intensités autour de $\bar{I}$. On démontre que cette approximation est proche en $\mathcal{O}(\varrho^2)$ du système réel et ce, uniformément pour les temps suffisamment grands.

Dans la deuxième partie, on propose un estimateur temps-réel basé sur les moindres carrés récursifs afin d'estimer les différents paramètres intervenants dans le gyroscope, en particulier, les coefficients de rétro-diffusion. Puis, on met en évidence les conditions nécessaires pour assurer la convergence de l'estimateur vers les valeurs réelles de ces paramètres.

Dans la dernière partie, on explicite la méthode suivie dans le but d'exploiter l'estimation des coefficients de rétro-diffusion pour compenser leur effet sur la différence de phase. Puis on propose différents scénarios de simulation permettant de confirmer la pertinence de notre approche.

4.1.1 Modèle de design

On rappel que l'évolution des intensités est donnée par :

$$\frac{d}{dt}I_1 = \frac{g_0 I_1}{1 + \dfrac{I_1}{I_s} + \dfrac{I_2}{I_c}} - \Gamma I_1 + 2m_1\sqrt{I_1 I_2}\cos(\varphi + \xi_1) \tag{4.1}$$

$$\frac{d}{dt}I_2 = \frac{g_0 I_2}{1 + \dfrac{I_2}{I_s} + \dfrac{I_1}{I_c}} - \Gamma I_2 + 2m_2\sqrt{I_1 I_2}\cos(\varphi + \xi_2) \tag{4.2}$$

ou encore

$$\frac{d}{dt}\vec{I} = f_0(\vec{I}) + \varrho g(\vec{I}, \varphi), \quad \vec{I}(0) = \vec{I}_0 \tag{4.3}$$

Avec $\varrho = 2\max(m_1, m_2)$.

Le résultat du théorème 3 affirme que pour t suffisamment grand, les intensités restent dans un entourage proche en $\mathcal{O}(\varrho)$ du point d'équilibre bi-directionnel $\bar{I}$. Il est donc naturel de chercher à approximer le comportement des intensités par un développement de Taylor du champs de vecteur autour de $\bar{I}$. On démontre que le système affine définit par

$$\frac{d}{dt}J = \frac{\partial f_0}{\partial I}(\bar{I}) \cdot (J - \bar{I}) + \varrho g(\bar{I}, \varphi), \quad J(0) = \begin{pmatrix} J_1(0) \\ J_2(0) \end{pmatrix} = I(0) \tag{4.4}$$

approxime (4.3) à l'ordre ϱ^2, pour t suffisamment grand. Il servira de base pour synthétiser l'estimateur moindres carrés récursifs afin d'estimer les paramètres du gyroscope.

Théorème 5. *Reprenons les constantes (m_0, C) du théorème 3. Alors, $\forall \varrho \leq m_0$ avec $\|\Delta I(0)\| \leq \frac{1}{2}\bar{\imath}$ alors il existe $c > 0$ tel que, pour tout t suffisamment grand, on a $\|I(t) - J(t)\| \leq c\rho^2$.*

Démonstration. Le développement de Taylor du champ de vecteur f_0 est donné par

$$f_0(I) = f_0(\bar{I}) + \frac{\partial f_0}{\partial I}(\bar{I})\Delta I + \Delta I^T R(I)\Delta I, \tag{4.5}$$

avec R est le reste intégral du développement de Taylor. On a

$$\frac{d}{dt}(I - J) = \frac{\partial f_0}{\partial I}(\bar{I}) \cdot (I - J) + d, \tag{4.6}$$

où

$$d := \Delta I^T R(I)\Delta I + 2\varrho(\sqrt{I_1 I_2} - \sqrt{\bar{\imath}^2}) \begin{pmatrix} \cos(\varphi + \xi) \\ \sin(\varphi + \xi) \end{pmatrix}.$$

Le reste intégral est continu suivant les variables d'espace sur $[\frac{\bar{\imath}}{2}, \frac{3\bar{\imath}}{2}]^2$, il est donc majoré et il existe $M > 0$ tel que

$$\forall I \in [\frac{\bar{\imath}}{2}, \frac{3\bar{\imath}}{2}]^2, \quad \|R(I)\| \leq M$$

de plus, $(I_1, I_2) \to \sqrt{I_1 I_2}$ est Lipschitz sur $[\frac{\bar{\imath}}{2}, \frac{3\bar{\imath}}{2}]^2$, de constante $\tilde{M}$, i.e.,

$$\forall I \in [\frac{\bar{\imath}}{2}, \frac{3\bar{\imath}}{2}]^2, \quad \left\|\sqrt{I_1 I_2} - \sqrt{\bar{\imath}^2}\right\| \leq \tilde{M}\|\Delta I\|$$

on en déduit que

$$\|d\| \leq M\|\Delta I\|^2 + 2\varrho\sqrt{2}\tilde{M}\|\Delta I\|$$

d'après le théorème 3, pour t suffisamment grand, $\|\Delta I\| \leq C\varrho$, ce qui implique

$$\|d\| \leq (MC^2 + 2\sqrt{2}\tilde{M}C)\varrho^2.$$

Le système d'erreur (4.6) est vu comme étant un modèle linéaire, perturbé par le terme d. La matrice $\dfrac{\partial f_0}{\partial I}(\bar{I})$ est Hurwitz, on a donc la stabilité exponentielle globale sur $\mathbb{R}^2$ du système non perturbé. L'application de la méthode de comparaison [31, section 9.3] nous donne, pour t suffisamment grand

$$\|I(t) - J(t)\| \leq \frac{MC^2 + 2\sqrt{2}\tilde{M}C}{\frac{I_c - I_s}{I_c + I_s}\frac{\Gamma}{g_0}(g_0 - \Gamma)}\varrho^2,$$

ce qui prouve le théorème, avec $c := \dfrac{MC^2 + 2\sqrt{2}\tilde{M}C}{\frac{I_c - I_s}{I_c + I_s}\frac{\Gamma}{g_0}(g_0 - \Gamma)}$. □

Dans le but de simplifier l'expression du système (4.4), on choisit de l'exprimer dans la base des vecteurs propres de la matrice $\dfrac{\partial f_0}{\partial I}(\bar{I})$, on pose

$$J^+ = \frac{1}{2}(J_1 + J_2) \tag{4.7}$$
$$J^- = \frac{1}{2}(J_1 - J_2) \tag{4.8}$$

le système (4.4) s'écrit dans la base (J^+, J^-)

$$\frac{d}{dt}J^+ = -\alpha_n J^+ + \bar{\imath}[m_c^+ \cos\varphi - m_s^+ \sin\varphi] + \Omega_n \bar{\imath} \tag{4.9}$$
$$\frac{d}{dt}J^- = -\alpha_n \frac{I_c - I_s}{I_c + I_s} J^- + \bar{\imath}[m_c^- \cos\varphi - m_s^- \sin\varphi] \tag{4.10}$$

où $\alpha_n := \dfrac{\Gamma}{g_0}(g_0 - \Gamma)$ et

$$\begin{aligned} m_c^+ &:= m_1 \cos\xi_1 + m_2 \cos\xi_2 \\ m_s^+ &:= m_1 \sin\xi_1 + m_2 \sin\xi_2 \\ m_c^- &:= m_1 \cos\xi_1 - m_2 \cos\xi_2 \\ m_s^- &:= m_1 \sin\xi_1 - m_2 \sin\xi_2 \end{aligned}$$

La connaissance des coefficients $(m_c^+, m_s^+, m_c^-, m_s^-)$ permet de remonter aux coefficients (m_1, m_2, ξ_1, ξ_2), en effet

$$m_1 = \frac{1}{2}|(m_c^+ + m_c^-) + i(m_s^+ + m_s^-)| \tag{4.11}$$
$$\xi_1 = \arg\left[(m_c^+ + m_c^-) + i(m_s^+ + m_s^-)\right] \tag{4.12}$$
$$m_2 = \frac{1}{2}|(m_c^+ - m_c^-) + i(m_s^+ - m_s^-)| \tag{4.13}$$
$$\xi_2 = \arg\left[(m_c^+ - m_c^-) + i(m_s^+ - m_s^-)\right] \tag{4.14}$$

4.1.2 Moindres carrés récursifs

D'après le théorème 5, le système (4.9)-(4.10) approxime uniformément le comportement des intensités avec une précision en $\mathcal{O}(\varrho^2)$, nous le prendrons donc comme modèle de référence pour synthétiser l'estimateur. De plus, il est linéaire par rapport aux mesures, on propose donc d'appliquer un algorithme de moindres carrés récursifs [8] (RLS) en vue d'estimer les paramètres.

4.1.2.1 Algorithme

Écrit en fonction des variables (J^+, J^-), le système (4.9)-(4.10)) s'écrit

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}J^+ &= -\alpha_n J^+ + \bar{\imath}[m_c^+ \cos\varphi - m_s^+ \sin\varphi] + \alpha_n \bar{\imath} \\ \frac{d}{dt}J^- &= -\alpha_n \frac{I_c - I_s}{I_c + I_s} J^- + \bar{\imath}[m_c^- \cos\varphi - m_s^- \sin\varphi]\end{aligned}$$

Les équations du système sont découplées, on pose

$$\mathcal{F}^+ := \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} -\alpha_n \\ \bar{\imath} m_c^+ \\ -\bar{\imath} m_s^+ \\ \alpha_n \bar{\imath} \end{pmatrix},$$

et

$$\mathcal{F}^- := \begin{pmatrix} k_5 \\ k_6 \\ k_7 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} -\alpha_n \frac{I_c - I_s}{I_c + I_s} \\ +\bar{\imath} m_c^- \\ -\bar{\imath} m_s^- \end{pmatrix},$$

les équations (4.9) et (4.10) s'écrivent

$$\frac{d}{dt}J^+ = (J^+,\ \cos\varphi,\ \sin\varphi,\ 1) \cdot \mathcal{F}^+ := \mathbb{V}^+ \cdot \mathcal{F}^+ \tag{4.15}$$

$$\frac{d}{dt}J^- = (J^-,\ \cos\varphi,\ \sin\varphi) \cdot \mathcal{F}^- := \mathbb{V}^- \cdot \mathcal{F}^- \tag{4.16}$$

où les vecteurs $(\mathbb{V}^+, \mathbb{V}^-)$ sont issus de la mesure. Afin de synthétiser les variables $(\frac{d}{dt}J^+, \frac{d}{dt}J^-)$, sans dérivation numérique pure de la mesure, on filtre linéairement les équations (4.15)-(4.16) par un passe bas, la synthèse des dérivés devient causale.

Soit $H(s)$, avec s la variable de Laplace, le filtre passe bas linéaire, exprimé dans le domaine de Laplace. Les équations filtrées deviennent

$$\frac{d}{dt}J_f^+ = \mathbb{V}_f^+ \cdot \mathcal{F}^+ \tag{4.17}$$

$$\frac{d}{dt}J_f^- = \mathbb{V}_f^- \cdot \mathcal{F}^- \tag{4.18}$$

où $(\mathbb{V}_f^+, \mathbb{V}_f^-)$ sont les vecteurs de mesure $(\mathbb{V}^+, \mathbb{V}^-)$ filtrés par le filtre $H(s)$ et

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}J_f^+ &= \mathcal{L}^-1\left[sH(s)J^+(s)\right] \\ \frac{d}{dt}J_f^- &= \mathcal{L}^-1\left[sH(s)J^-(s)\right]\end{aligned}$$

avec $\mathcal{L}^{-}1$ l'inverse de la transformé de Laplace.

Dans la suite de cette section, on explicite l'algorithme de moindre carrés récursifs et sa preuve de convergence pour l'équation (4.17). Les preuves et raisonnements étant identiques pour (4.18), on se limite à donner les résultats.

L'algorithme de moindres carrés récursifs continu avec facteur d'oubli, s'écrit [8]

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\hat{\mathcal{F}}^{+} &= P\mathbb{V}_f^{+}\left[\frac{d}{dt}J_f^{+} - (\mathbb{V}_f^{+})^T\hat{\mathcal{F}}^{+}\right] \\ \frac{d}{dt}P &= \upsilon P - P\ \mathbb{V}_f^{+}(\mathbb{V}_f^{+})^T\ P, \end{aligned}$$

où $\hat{\mathcal{F}}^{+}$ est l'estimation du vecteur de paramètres $\mathcal{F}^{+}$, P est la matrice de covariance du vecteur de mesure $\mathbb{V}_f^{+}$ et υ est le facteur d'oubli.

Dans la pratique les mesures auxquelles on a accès sont échantillonnées à une fréquence de 2.5 MHz, on utilise donc la version discrète de l'algorithme des moindres carrés récursifs avec facteur d'oubli, qui a l'avantage d'être déjà implémenté dans Matlab-Simulink-2015a sous le nom de "Recursive Least Squares Estimator" [33] :

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{F}}(t)^{+} &= \hat{\mathcal{F}}^{+}(t-\delta t) + K(t)\cdot\left[\frac{d}{dt}J_f^{+}(t) - \mathbb{V}_f^{+}(t)^T\hat{\mathcal{F}}^{+}(t-\delta t)\right] \\ K(t) &= \frac{P^{+}(t-\delta t)\mathbb{V}_f^{+}(t)}{\lambda + \mathbb{V}_f^{+}(t)^T P^{+}(t-\delta t)\mathbb{V}_f^{+}(t)} \\ P^{+}(t) &= \frac{1}{\lambda}\left[P^{+}(t-\delta t) - K(t)\mathbb{V}_f^{+}(t)^T P^{+}(t-\delta t)\right] \end{aligned} \tag{4.19}$$

où $\delta t := 4\ .10^{-}7\ s$ est la période d'échantillonnage, P^{+} la matrice de covariance du vecteur mesure, K le gain et $\lambda = 1 - \frac{\delta t}{T_0}$ est le facteur d'oubli, avec T_0 le temps de réponse de l'estimateur.

4.1.2.2 Condition d'excitation persistante

L'algorithme de moindres carrés récursifs converge vers les bonnes valeurs de $\mathcal{F}^{+}$ si le vecteur de mesure satisfait la condition d'excitation persistante [30]. Dans notre cas, cela se traduit par le théorème suivant

Théorème 6. *Si le gyroscope est soumis à l'activation mécanique, i.e., $\varphi_d \not\equiv 0$ et si $m_c^{+} \neq 0$ ou $m_s^{+} \neq 0$, alors $\hat{\mathcal{F}}^{+}$ converge exponentiellement vers $\mathcal{F}^{+}$.*

Démonstration. Le vecteur de mesure vérifie la condition d'excitation persistante (PE) si sa matrice d'auto-covariance définie par

$$R := \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T \mathbb{V}_f^{+}(\tau)\mathbb{V}_f^{+}(\tau)^T d\tau = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} S_{\mathbb{V}_f}(\omega)d\omega$$

existe et elle est définie positive. Le terme $S_{\mathbb{V}_f}$ est la densité spectrale d'énergie du vecteur $\mathbb{V}_f^{+}$.

L'existence de la matrice est une conséquence du caractère uniformément borné du vecteur de mesure $\mathbb{V}_f^+$. Dans le domaine de Laplace, l'équation (4.17) s'écrit

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\mathbb{V}_f\}(s) &= \begin{pmatrix}\frac{k_2}{s-k_1}\\1\\0\\0\end{pmatrix} H(s)\mathcal{L}\{\cos\varphi\}(s) + \begin{pmatrix}\frac{k_3}{s-k_1}\\0\\1\\0\end{pmatrix} H(s)\mathcal{L}\{\sin\varphi\}(s) + \begin{pmatrix}\frac{k_4}{s-k_1}\\0\\0\\1\end{pmatrix} .H(s).1 \\ &=: H_1(s)\mathcal{L}\{\cos\varphi\}(s) + H_2(s).\mathcal{L}\{\sin\varphi\}(s) + H_3(s).1 \end{aligned} \tag{4.20}$$

avec $\mathcal{L}$ la transformé de Laplace.

Soit $(S_{\cos\varphi}(\omega), S_{\sin\varphi}(\omega), S_1(\omega))$, respectivement, les densités spectral d'énergies de $(\cos\varphi, \sin\varphi, 1)$, on a

$$S_1(\omega) = \delta(\omega)$$

où $\delta(\omega)$ est la fonction dirac. Pour les deux autres densités d'énergies, on sait que la phase φ est régit par l'équation d'Adler (3.60)

$$\frac{d}{dt}\varphi = \Omega + \frac{d}{dt}\varphi_d - m\cos(\varphi+\beta),$$

la présence de l'activation mécanique et le fait que $\varrho \ll 1$ nous assure que $\frac{d}{dt}\varphi$ possède, au moins une harmonique en ω_d. En effet, d'après l'expansion de Jacobi-Angers [3] nous donne,

$$\begin{aligned}\cos(\varphi) &\simeq \Re\left[e^{i\Omega t}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} i^n J_n(a_d)e^{in\omega_d t}\right] \\ \sin(\varphi) &\simeq \Im\left[e^{i\Omega t}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} i^n J_n(a_d)e^{in\omega_d t}\right]\end{aligned}$$

les variables $(\cos\varphi, \sin\varphi)$ possèdent au moins des harmoniques aux multiples de ω_d, décalées de $\pm\Omega$, ce qui implique, que $(S_{\cos\varphi}(\omega), S_{\sin\varphi}(\omega))$ sont strictement positifs sur ces harmoniques et positifs ailleurs (voire figure 4.1). Soit $\Pi_N := \{\omega_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ l'ensemble de ces pulsations.

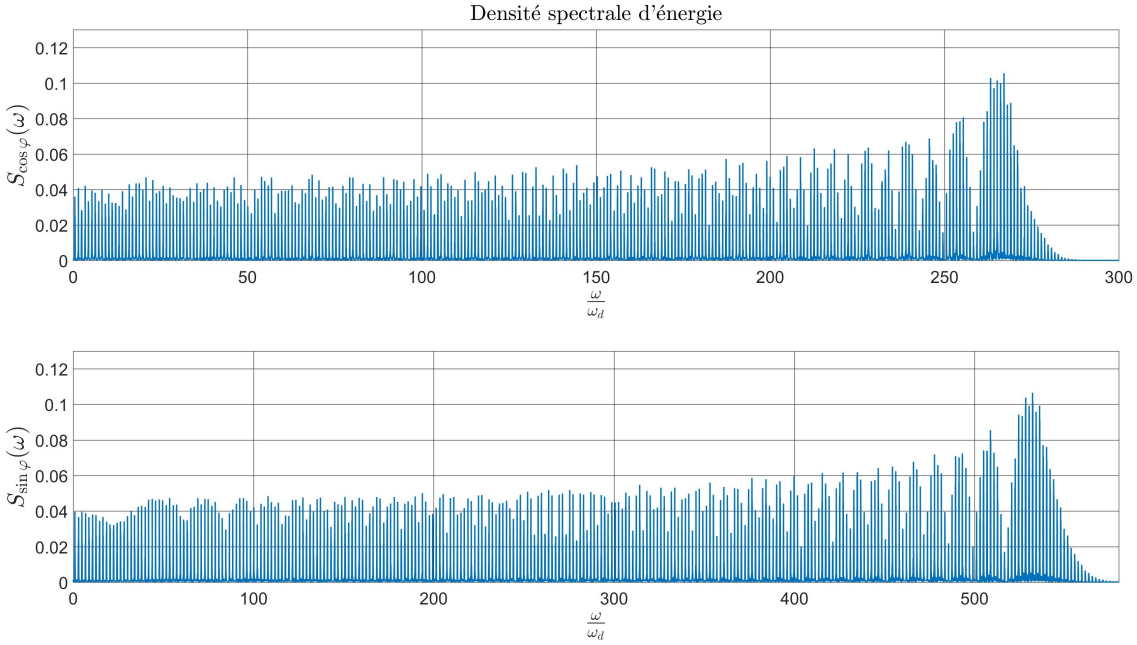


FIGURE 4.1 – Les densités spectrales d'énergies de $\cos\varphi$ et $\sin\varphi$ en fonction de la pulsation normalisée $\dfrac{\omega}{\omega_d}$, avec $m = 1.5\ 10^{-3}$, $\beta = 1.46$, $\omega_d = 3.6\ 10^{-3}$, $\Omega_d = 1$ et $\Omega = 1.7\ 10^{-3}$.

La densité spectrale d'énergie $S_{\mathbb{V}_f}$ du vecteur de mesure $\mathbb{V}_f^+$ est donnée par

$$\begin{aligned} S_{\mathbb{V}_f}(\omega) &= H_1(-j\omega)S_{\cos\varphi}(\omega)H_1^T(j\omega) + H_2(-j\omega)S_{\sin\varphi}(\omega)H_2^T(j\omega) \\ &\quad + H_3(-j\omega)S_1(\omega)H_3^T(j\omega) \end{aligned} \tag{4.21}$$

et la matrice d'auto-covariance est donnée par

$$\begin{aligned} R &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} H_1(-j\omega)S_{\cos\varphi}(\omega)H_1^T(j\omega)d\omega \\ &\quad + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} H_2(-j\omega)S_{\sin\varphi}(\omega)H_2^T(j\omega)d\omega \\ &\quad + \frac{1}{2\pi}H_3(0)H_3^T(0) \end{aligned} \tag{4.22}$$

Puisque l'on cherche à démontrer que la matrice R est définie positive, étudions les solutions de l'équation

$$x^T R x = 0, \quad \text{avec } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \tag{4.23}$$

qui se réécrit

$$\begin{aligned} x^T R x &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} S_{\cos\varphi}(\omega).x^T.H_1(-j\omega).H_1^T(j\omega).x.d\omega \\ &+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} S_{\sin\varphi}(\omega).x^T.H_2(-j\omega).H_2^T(j\omega).x.d\omega \\ &+\frac{1}{2\pi}x^T.H_3(0)H_3^T(0).x \end{aligned} \tag{4.24}$$

sur l'ensemble Π_n, les fonctions $(S_{\cos\varphi}(\omega), S_{\sin\varphi}(\omega))$ sont strictement positives et donc, tous les termes à l'intérieur des intégrales dans (4.24) sont définis semi-positifs. L'équation $x^T R x = 0$ implique que x est orthogonale à

$$H_1(j\omega_n) = H(j\omega_n)\begin{pmatrix} \dfrac{k_2}{j\omega_n - k_1} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad H_2(j\omega_n) = H(j\omega_n)\begin{pmatrix} \dfrac{k_3}{j\omega_n - k_1} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et

$$H_3(0) = H(0)\begin{pmatrix} -\dfrac{k_4}{k_1} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad n \in \mathbb{N}$$

supposons que $m_c^+ \neq 0$ (resp. $m_s^+ \neq 0$), alors les vecteurs $H_1(j\omega_n)$ (resp. $H_2(j\omega_n)$) sont non-colinéaires pour différents $n \in \mathbb{N}$ (voire figure 4.2), ce qui implique que

$$\begin{aligned} x_1 &= x_2 = 0, \quad \text{par orthogonalité à } H_1(j\omega_n), \quad n \in \mathbb{N} \\ x_3 &= 0, \quad \text{par orthogonalité à } H_2(j\omega_n), \quad n \in \mathbb{N} \\ x_4 &= 0, \quad \text{par orthogonalité à } H_3(0) \end{aligned}$$

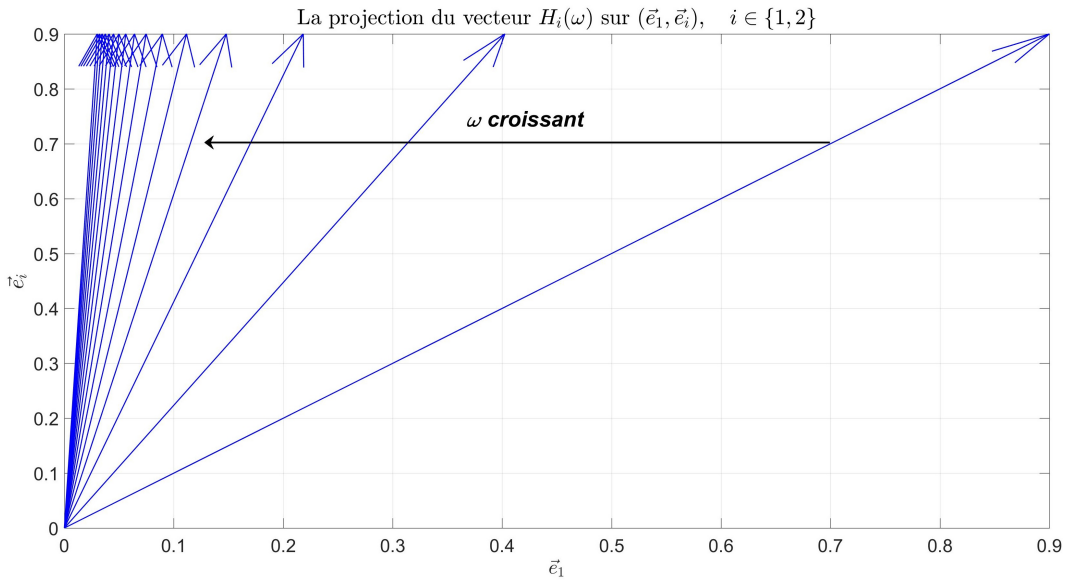


FIGURE 4.2 – Projection du vecteur $H_i(\omega)$ sur $(\vec{e}_1, \vec{e}_i)$, $i \in \{1,2\}$ pour différentes valeurs de ω.

la matrice R est donc définie positive, ce qui implique que le vecteur de mesure $\mathbb{V}_f^+$ vérifie la condition d'excitation persistante (PE). □

Le théorème équivalent pour l'équation (4.18) est

Théorème 7. *Si le gyroscope est soumis à l'activation mécanique, i.e., $\varphi_d \not\equiv 0$ et si $m_c^- \neq 0$ ou $m_s^- \neq 0$, alors $\hat{\mathcal{F}}^-$ converge exponentiellement vers $\mathcal{F}^-$.*

Démonstration. Démonstration identique à celle du théorème 6. □

Estimation et compensation des imperfections

Grâce à l'estimation des paramètres $(\hat{\mathcal{F}}^+, \hat{\mathcal{F}}^-)$, nous pouvons remonter aux différents coefficients intervenants dans les équations de Lamb (4.1)-(4.2), en effet

$$\hat{\alpha}_n = -\hat{k}_1 \tag{4.25}$$

$$\hat{\bar{i}} = \frac{\hat{k}_4}{\hat{\omega}_n} \tag{4.26}$$

$$\hat{m}_c^+ = \frac{\hat{k}_2}{\hat{\bar{i}}} \tag{4.27}$$

$$\hat{m}_s^+ = -\frac{\hat{k}_3}{\hat{\bar{i}}} \tag{4.28}$$

$$\hat{m}_c^- = \frac{\hat{k}_6}{\hat{\bar{i}}} \tag{4.29}$$

$$\hat{m}_s^- = -\frac{\hat{k}_7}{\hat{\bar{i}}} \tag{4.30}$$

les équations (4.11)-(4.14) nous permettent de remonter à $(\hat{m}_1, \hat{m}_2, \hat{\xi}_1, \hat{\xi}_2)$.

La connaissance des coefficients de rétro-diffusion des miroirs permet de restaurer l'observabilité de la vitesse de rotation Ω que subit le gyroscope par rapport à la mesure (I_1, I_2) et $y = \varphi$, en effet l'équation (3.10) nous donne

$$\Omega = \frac{d}{dt}y + m_1\sqrt{\frac{I_2}{I_1}}\sin(y+\xi_1) + m_2\sqrt{\frac{I_1}{I_2}}\sin(y+\xi_2)$$

A partir de l'estimation des coefficients de rétro-diffusion, obtenue grâce à l'algorithme RLS, on définit une nouvelle phase φ_c par

$$\begin{aligned}\varphi_c(t) &= y(t) + \hat{m}_1\int_0^t\sqrt{\frac{I_2(\tau)}{I_1(\tau)}}\sin(y(\tau)+\hat{\xi}_1)d\tau \\ &\quad +\hat{m}_2\int_0^t\sqrt{\frac{I_1(\tau)}{I_2(\tau)}}\sin(y(\tau)+\hat{\xi}_2)d\tau\end{aligned} \tag{4.31}$$

Si l'estimation des coefficients de rétro-diffusion est parfaite, la phase φ_c vérifie

$$\frac{d}{dt}\varphi_c = \Omega \tag{4.32}$$

elle se comporte comme la phase d'un gyroscope dont les miroirs formant la cavité sont idéaux.

4.1.2.3 Simulations

Afin de prouver la pertinence de notre approche, on effectue une simulation à l'aide de l'outil Simulink de Matlab.

Scénario

On intègre, via un solver ode45 et avec les paramètres du tableau 4.1, les équations de Lamb pour deux gyroscopes (RLGa et RLGb) de qualités différentes et sur une durée $T_f = 10^7$. L'activation mécanique est donnée par $\varphi_d(t) := 150\cos(\omega_d t)$.

$I_1(0)$	$I_2(0)$	$\varphi(0)$	f_e	ξ_1	ξ_2	I_s	I_c	Γ	g_0	ω_d
1	1	0	2.5	0.8	-0.05	1.14	8.1	2	4	$3.65.\ 10^{-3}$

TABLE 4.1 – Paramètres de la simulation des équations de Lamb

Les deux gyroscopes voient la même vitesse de rotation $\Omega(t)$, cf. figure 4.3

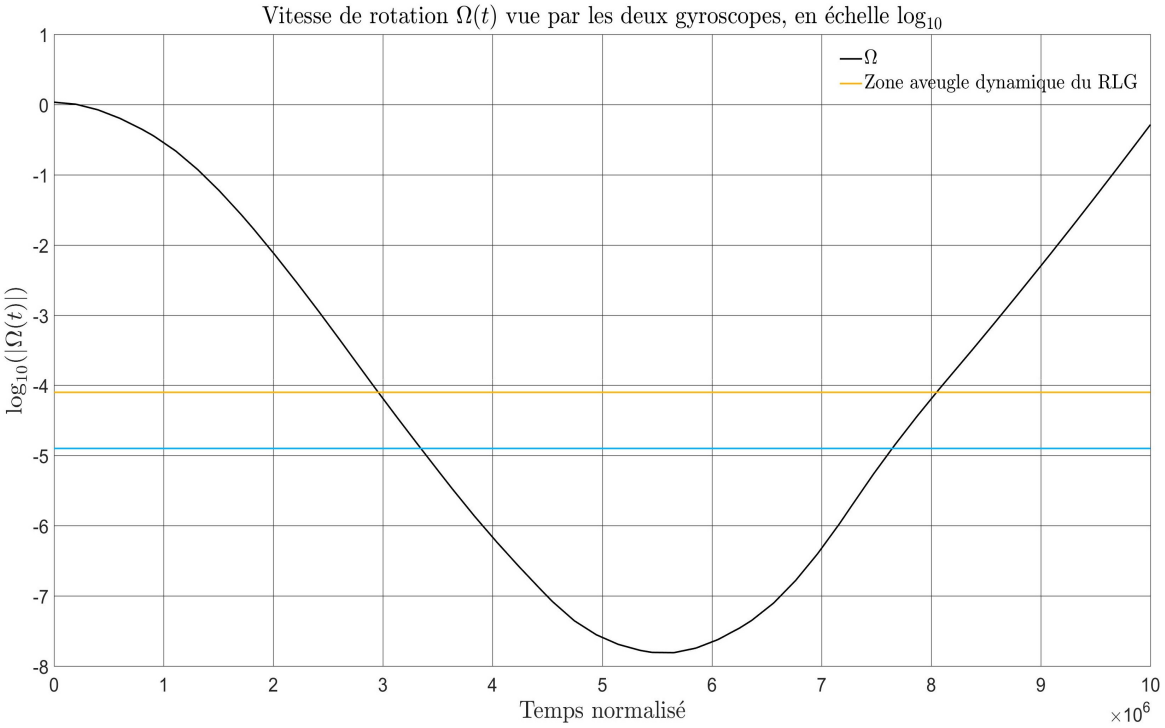


FIGURE 4.3 – La vitesse de rotation, en échelle logarithmique, que voient les deux gyroscopes RLGa et RLGb, avec les zones aveugles dynamiques respectives.

La vitesse de rotation est choisie toujours positive et elle est initialisée loin des zones aveugles dynamiques des deux gyroscopes. La vitesse diminue jusqu'à rentrer dans les zones aveugle dynamiques et elle y reste un certain laps de temps afin de mettre en évidence les différents phénomènes d'accrochage de phase, puis elle ré-augmente pour en sortir. L'ordre de grandeur de Ω qui nous intéresse est comparable aux coefficients de rétro-diffusion des miroirs, il est très petite devant 1, c'est pourquoi on choisit de tracer la vitesse de rotation en échelle logarithmique.

Les amplitudes des coefficients de rétro-diffusion des deux gyroscopes sont lentement variables, avec une modulation autour de leurs valeurs moyenne de l'ordre de 6%. On a

— Pour le gyroscope de bonne qualité RLGa, les valeurs moyennes des coefficients de rétro-diffusion sont $\bar{m_1} = 2.4488.\ 10^{-4}$ et $\bar{m_2} = 2.48.\ 10^{-4}$,

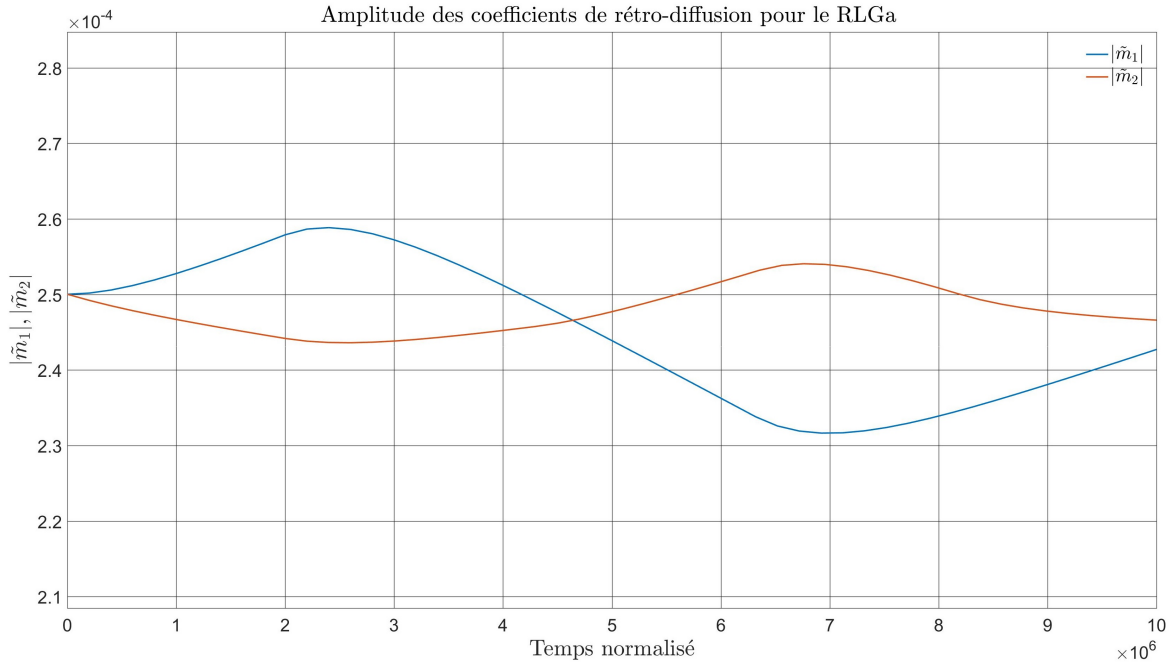


FIGURE 4.4 – L'amplitude des coefficients de rétro-diffusion (m_1, m_2) pour le RLGa.

— pour le gyroscope de moins bonne qualité RLGb, les valeurs moyennes des coefficients de rétro-diffusion sont $\bar{m_1} = 1.4693.\ 10^{-3}$ et $\bar{m_2} = 1.488.\ 10^{-3}$ (6 fois supérieures à celles du gyroscope de bonne qualité).

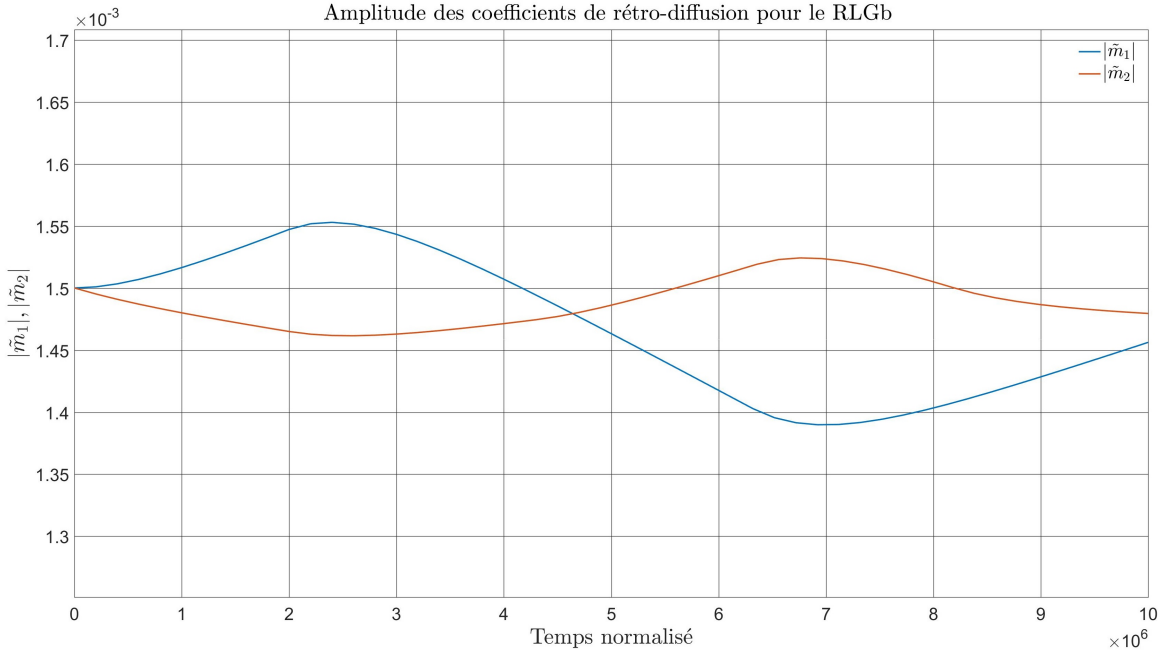


FIGURE 4.5 – L'amplitude des coefficients de rétro-diffusion (m_1, m_2) pour le RLGb.

Les mesures

Les signaux de mesures (intensités et signaux de battements) des deux gyroscopes, avec lesquels on alimente l'estimateur sont bruités avec un bruit gaussien de puissance $N_i = 10^{-11}$ et de bande passante 10 f_e, figure 4.6.

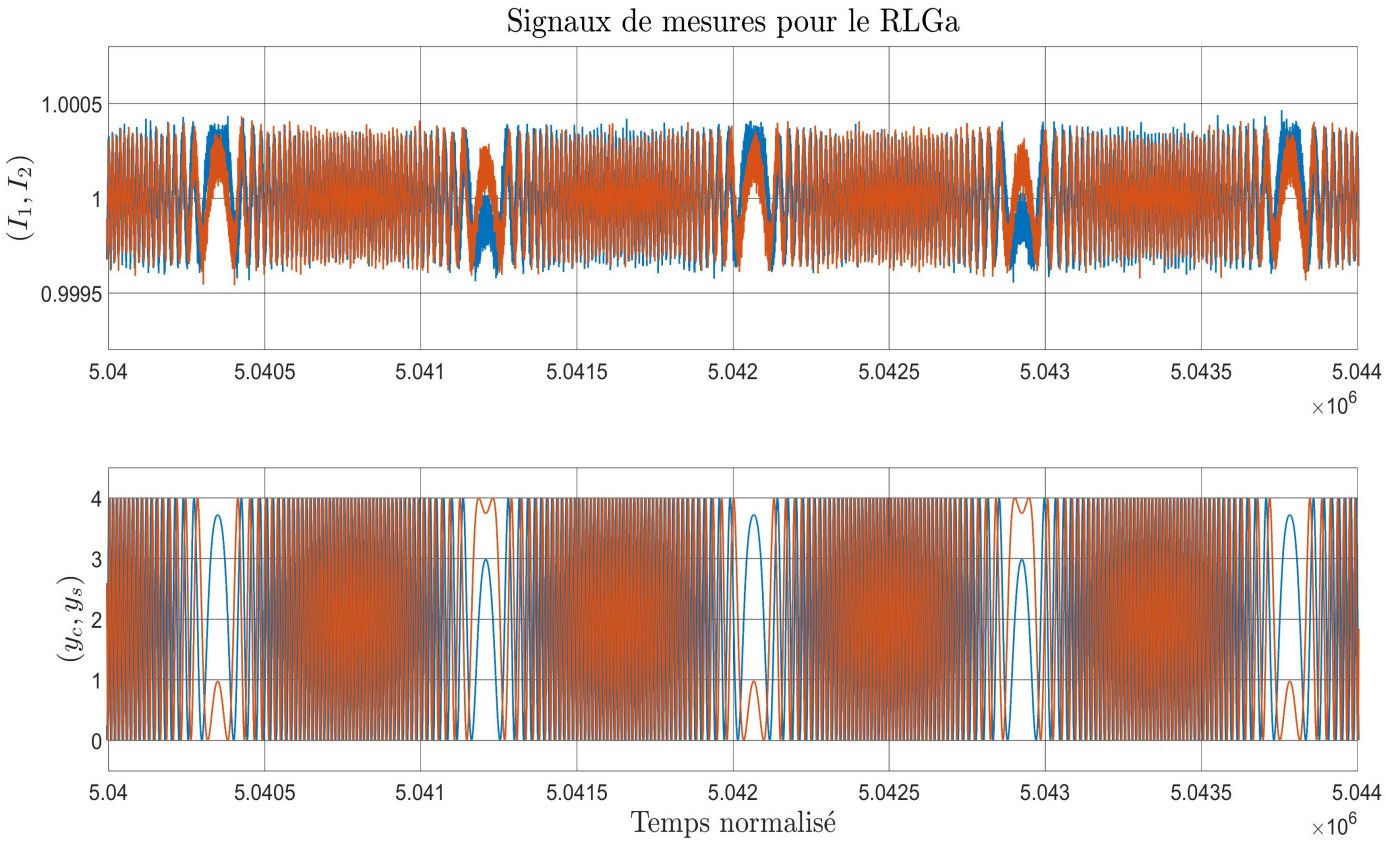


FIGURE 4.6 – Les intensités (I_1, I_2) et le battement (y_c, y_s) du gyroscope RLGa, pour $t \in [5.04\ 10^6,\ 5.044\ 10^6]$.

A titre illustratif, on trace les signaux de mesures bruités pour le gyroscope RLGa, pour $t \in [5.04\ 10^6,\ 5.044\ 10^6]$, i.e., quand la vitesse de rotation est dans la zone aveugle dynamique. La forme en accordéon des signaux correspond au cosinus et sinus de la phase principalement composée de l'activation mécanique.

L'estimateur

On suppose que l'on n'a pas de connaissance à priori des valeurs à estimer, on initialise les estimateurs à 0, i.e., $\hat{\mathcal{F}}^+(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\hat{\mathcal{F}}^-(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Le filtrage des mesures est effectué via un filtre passe-bas linéaire du premier ordre, de bande passante ω_c et de gain unitaire.

Les paramètres de filtrage des mesures et de l'algorithme (4.19) des moindres carrés récursifs sont données dans le tableau 4.2

λ	ω_c	$P^+(0)$	$P^-(0)$
0.99992	1.25	$\mathbb{I}_{d-4}$	$\mathbb{I}_{d-3}$

TABLE 4.2 – Paramètres de réglage de l'estimateur.

Le facteur d'oubli $\lambda = 1 - \frac{\delta t}{T_0}$ nous donne la bande passante de l'estimateur, sa valeur est issue d'un compromis entre la vitesse désirée de convergence de l'estimateur et sa sensibilité au bruit de mesure. Le λ choisit correspond à un temps de convergence $T_0 = 5T_d$.

Le filtre passe-bas du premier ordre a trois avantages :

— permettre que la synthèse des dérivés dans les équations (4.17)-(4.18) soit causale,

— augmenter l'excitation persistante du vecteur de mesure. En effet, le filtre coupe les hautes fréquences ce qui assure au module des vecteurs $H_i(j\omega_n)$, définis dans l'équation (4.20), une grande variation en fonction de ω_n,

— filtrer le bruit de mesure.

Une bonne approche afin de régler le filtre, consiste à tracer la densité spectrale d'énergie des signaux de mesures puis à placer ω_c au niveau de leur bande passante.

Résultats de la simulation

On applique en temps réel la correction permettant de calculer la phase corrigée φ_c, définie en (4.31) par

$$\begin{aligned}\varphi_c(t) &= y(t) + \hat{m}_1 \int_0^t \sqrt{\frac{I_2(\tau)}{I_1(\tau)}} \sin(y(\tau) + \hat{\xi}_1) d\tau \\ &\quad + \hat{m}_2 \int_0^t \sqrt{\frac{I_1(\tau)}{I_2(\tau)}} \sin(y(\tau) + \hat{\xi}_2) d\tau\end{aligned}$$

Afin d'illustrer le résultat de la simulation, on trace, pour les deux gyroscopes RLGa et RLGb, les variables suivantes :

Pour la mesure de la vitesse de rotation :

— la vitesse de rotation $\Omega(nT_d)$, que voient les gyroscopes,

— l'estimation dite "classique" de la vitesse de rotation, donnée par

$$\hat{\Omega}(nT_d) := \frac{1}{T_d} \left[\varphi\left((n+1)T_d\right) - \varphi(n)\right],$$

— l'estimation avec compensation de la vitesse de rotation, donnée par

$$\hat{\Omega}_c(nT_d) := \frac{1}{T_d} \left[\varphi_c\left((n+1)T_d\right) - \varphi_c(n)\right].$$

Avec $0 \leq nT_d \leq 10^7$, ces variables sont échantillonnées à la période T_d.

Pour l'estimation des différents paramètres des gyroscopes, on traces les signaux d'erreur entre l'estimé et la variable réelle.

Résultats pour RLGb

Pour la mesure de la vitesse de rotation

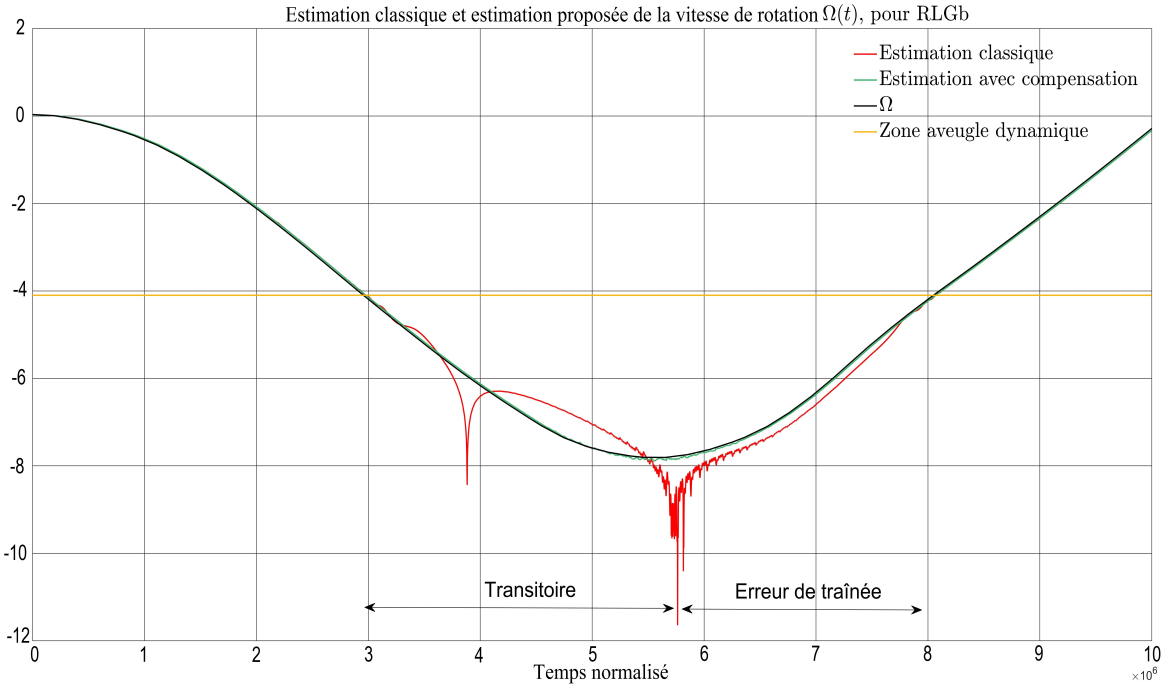


FIGURE 4.7 – L'estimation classique $\hat{\Omega}(nT_d)$, l'estimation compensée $\hat{\Omega}_c(nT_d)$, la vitesse de rotation $\Omega(nT_d)$ et la zone aveugle dynamique du gyroscope RLGb, en échelle logarithmique et avec $0 \leq nT_d \leq 10^7$.

Une explication sur le comportement de l'estimation classique s'impose, quand Ω est en dehors de la zone aveugle dynamique, l'incrément de phase suit l'incrément d'angle. Quand Ω rentre dans la zone aveugle dynamique ($nT_d \sim 3\ 10^6$), l'incrément de phase semble avoir un comportement chaotique qui peut s'expliquer en ayant recours aux applications de Poincaré introduites dans l'équation (3.68). En effet, pour Ω dans la zone aveugle dynamique, l'application de Poincaré admet un point fixe et donc la phase admet un point d'équilibre stable dont l'expression dépend de Ω. Le comportement chaotique observé sur l'intervalle "Transitoire" dans la figure 4.7 correspond au transitoire de la phase, qui tend à converger avec une vitesse donnée par (3.69), vers un point d'équilibre qui bouge. Au moment où la vitesse de rotation cesse de bouger (l'accélération est nulle pour $nT_d \sim 5.7\ 10^6$), la phase s'accroche à son point d'équilibre et l'incrément de phase tend vers 0, ce qui explique le pic observé. Puis quand la vitesse de rotation se met à ré-augmenter la phase suit son point d'équilibre avec une vitesse plus lente que l'accélération, ce qui explique l'erreur de traînée observée pour $5.7\ 10^6 \leq nT_d \leq 8\ 10^6$.

L'estimation compensée suit l'évolution de Ω, et ce même quand on est dans la zone aveugle dynamique.

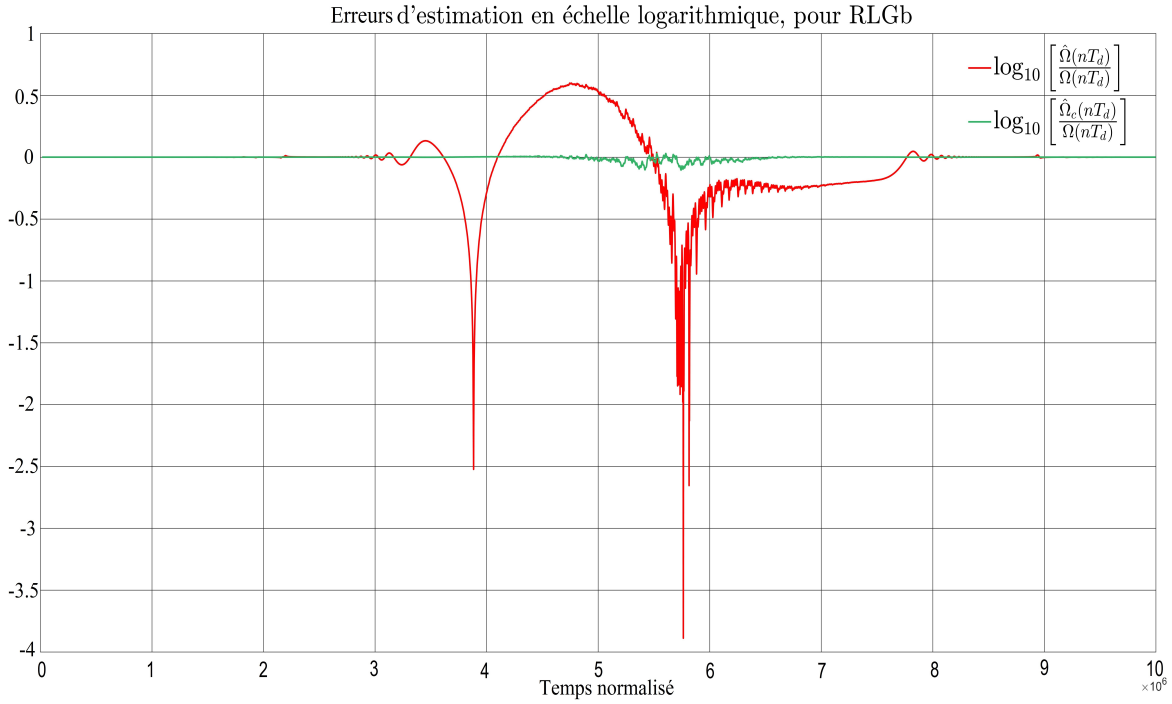


FIGURE 4.8 – L'erreur logarithmique d'estimation de la vitesse de rotation en utilisant l'estimation classique $\hat{\Omega}(nT_d)$ et l'estimation compensée $\hat{\Omega}_c(nT_d)$.

L'erreur d'estimation en utilisant l'incrément de la phase compensée est nulle, sauf quand la vitesse de rotation est à son minimum $\Omega(5.5\ 10^6) \sim 10^{-8}$. Dans l'entourage de ce point, on observe une erreur $\log_{10}\left[\dfrac{\hat{\Omega}_c(nT_d)}{\Omega(nT_d)}\right] \sim 0.1$ qui peut être expliquée par l'imperfection de l'estimation, par le bruit de mesure et par le bruit numérique de la simulation. On a bien réduit l'influence des imperfections des miroirs sur la mesure de la vitesse de rotation pour le gyroscope RLGb.

Pour l'estimation de l'amplitude des coefficients de rétro-diffusion des miroirs (m_1, m_2)

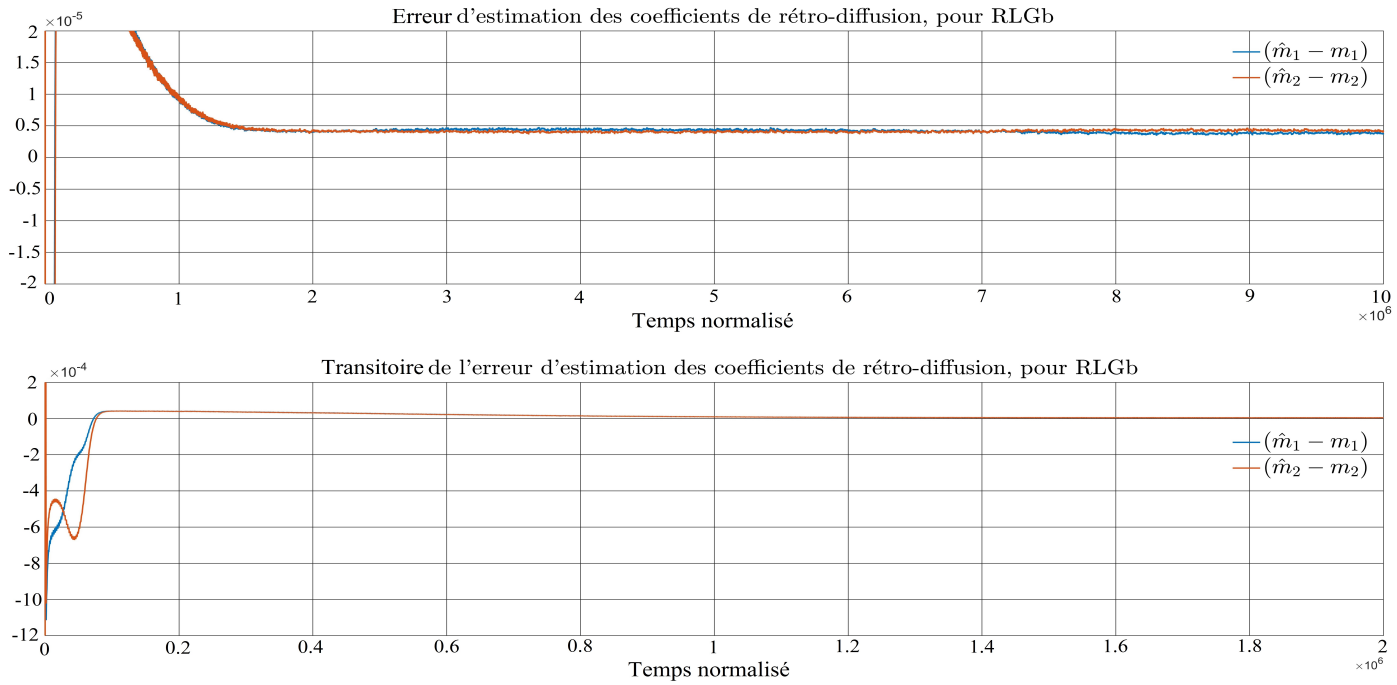


FIGURE 4.9 – L'erreur d'estimation des amplitudes des coefficients de rétro-diffusion des miroirs $(\hat{m}_1 - m_1)$ et $(\hat{m}_2 - m_2)$. Fig du haut : l'erreur statique. Fig du bas : le transitoire de l'erreur.

Pour l'estimation des phases des coefficients de rétro-diffusion des miroirs (ξ_1, ξ_2)

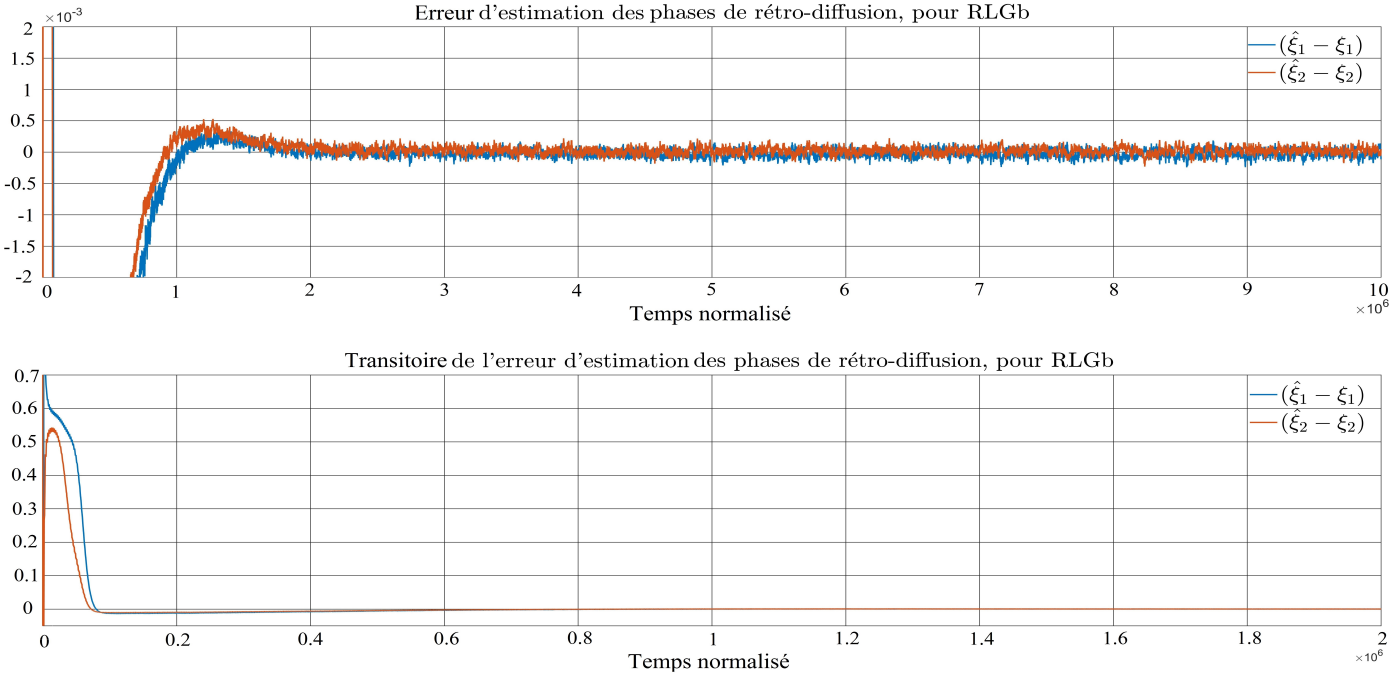


FIGURE 4.10 – L'erreur d'estimation des phases des coefficients de rétro-diffusion des miroirs $(\hat{\xi}_1 - \xi_1)$ et $(\hat{\xi}_2 - \xi_2)$. Fig du haut : l'erreur statique. Fig du bas : le transitoire de l'erreur.

Pour l'estimation des amplitudes des coefficients de rétro-diffusion (m_1, m_2), on a une erreur statique de 5. 10^{-6} ce qui correspond à une erreur relatif de 0.3%, nous avons donc réduit les imperfections des miroirs d'un facteur 300. De plus, (m_1, m_2) varient avec le temps, cette erreur statique est l'erreur de traînée entre l'estimation et la valeur réelle. En théorie, l'erreur statique pourrait être annulée en augmentant l'ordre de l'estimateur (estimer aussi $\frac{d}{dt}m_1$ et $\frac{d}{dt}m_2$), malheureusement, $\hat{m}_1, \hat{m}_2$ étant issues d'une combinaison non linéaire (4.25) des véritables variables estimées cela rajouterai beaucoup de complexité pour un gain minime.

En ce qui concerne les phases des coefficients de rétro-diffusion (ξ_1, ξ_2) , nous n'avons pas d'erreur d'estimation statique puisque les variables sont prises constantes à travers le temps. On observe une oscillation de 0.2 10^{-3} autour de 0, cela est due aux bruit sur les mesures et peut être réduit en augmentant le temps de réponse de l'estimateur T_0 au prix d'une augmentation de l'erreur statique d'estimation des variables (m_1, m_2) et du temps de convergence, qui vaut 8 10^5.

Pour l'estimation (4.26) du point d'équilibre bi-directionnel des intensités $\bar{I} = \begin{pmatrix} \bar{i} \\ \bar{i} \end{pmatrix}$,

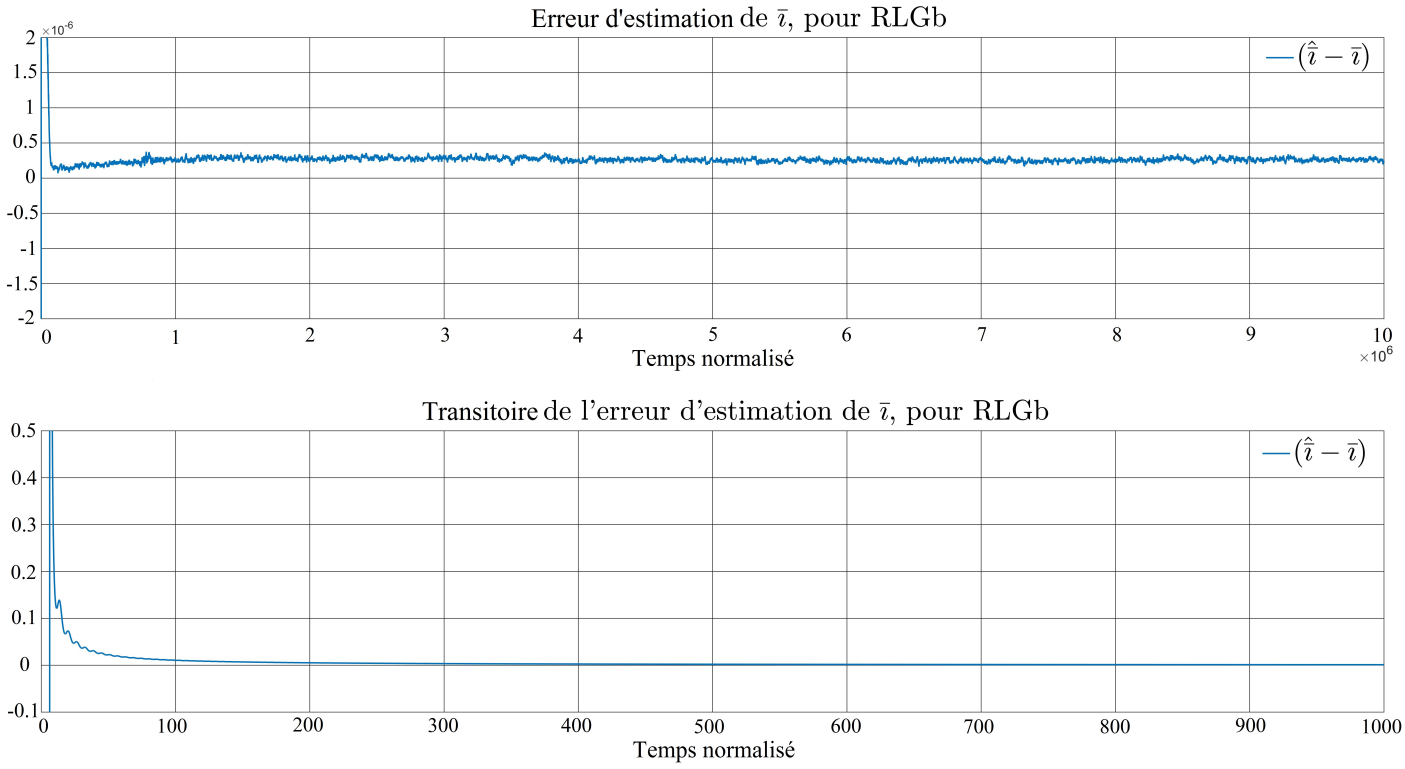


FIGURE 4.11 – L'erreur d'estimation du point d'équilibre bi-directionnel des intensités $\bar{i}$. Fig du haut : l'erreur statique. Fig du bas : le transitoire de l'erreur.

On remarque un temps de convergence très court (100) et une erreur statique de 0.25 10^{-6} qui correspond à une erreur relative de 2.5 10^{-5}%.

Pour l'estimation (4.25) de la bande passante du système idéal des intensités α_n,

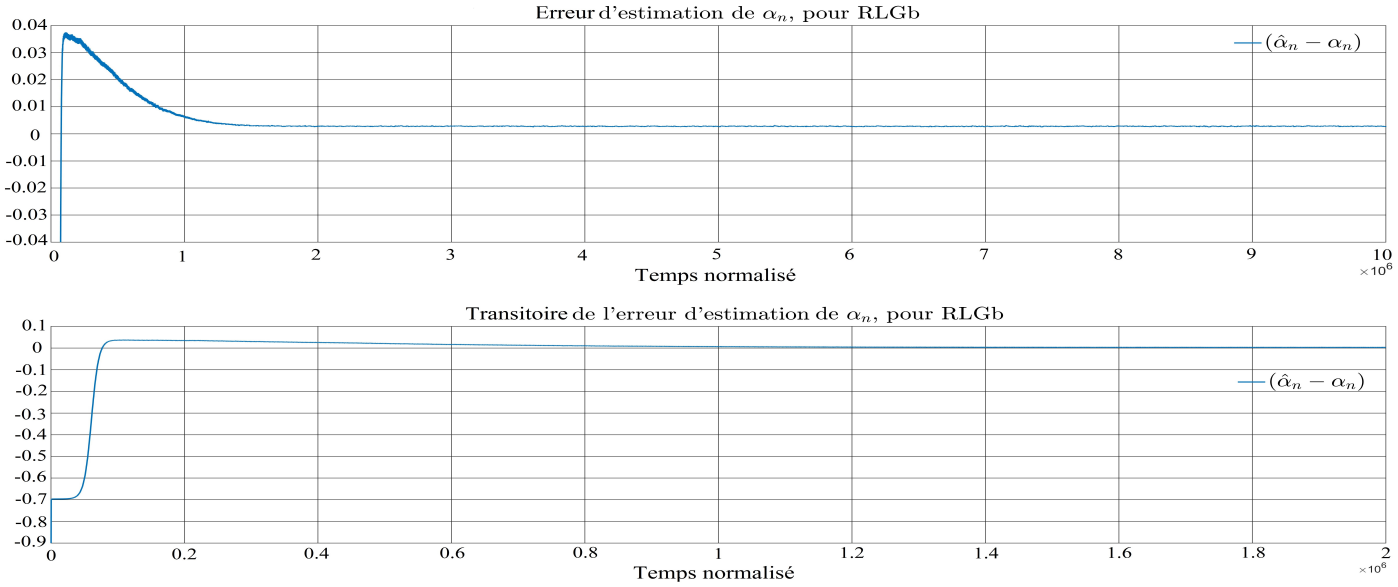
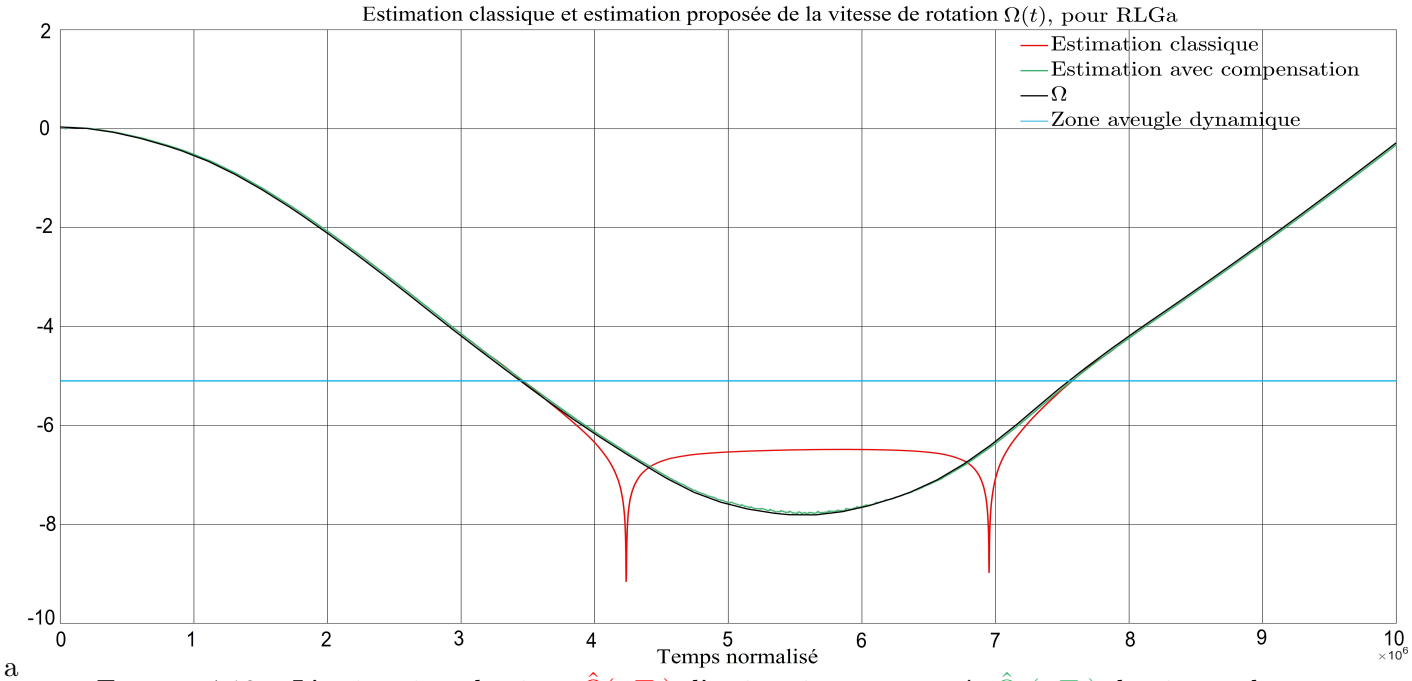


FIGURE 4.12 – L'erreur d'estimation de la bande passante du système idéal des intensités α_n. Fig du haut : l'erreur statique. Fig du bas : le transitoire de l'erreur.

On a un transitoire assez long (10^6) avec une erreur statique relative de 0.5%. La valeur de α_n n'est pas exploitée dans l'implémentation de la correction, son utilité est minime.

Résultats pour RLGa

Pour la mesure de la vitesse de rotation



a

FIGURE 4.13 – L'estimation classique $\hat{\Omega}(nT_d)$, l'estimation compensée $\hat{\Omega}_c(nT_d)$, la vitesse de rotation $\Omega(nT_d)$ et la zone aveugle dynamique du gyroscope RLGa, en échelle logarithmique et avec $0 \leq nT_d \leq 10^7$.

Le gyroscope RLGa ayant des miroirs de qualité 6 fois supérieure à celle du gyroscope RLGb, sa zone aveugle dynamique est plus petite. Le palier observé lors du passage par la zone aveugle dynamique pour l'estimation classique correspond au transitoire de l'accrochage de phase, en effet, les coefficients de rétro-diffusion étant plus petits dans le cas du gyroscope RLGa l'accrochage s'effectue avec une vitesse de convergence trop petite pour pouvoir suivre l'évolution de Ω. De plus, cette convergence se fait avec une pente négative, ce qui explique les deux pics observés.

L'estimation compensée suit l'évolution de Ω, et ce même quand on est dans la zone aveugle dynamique.

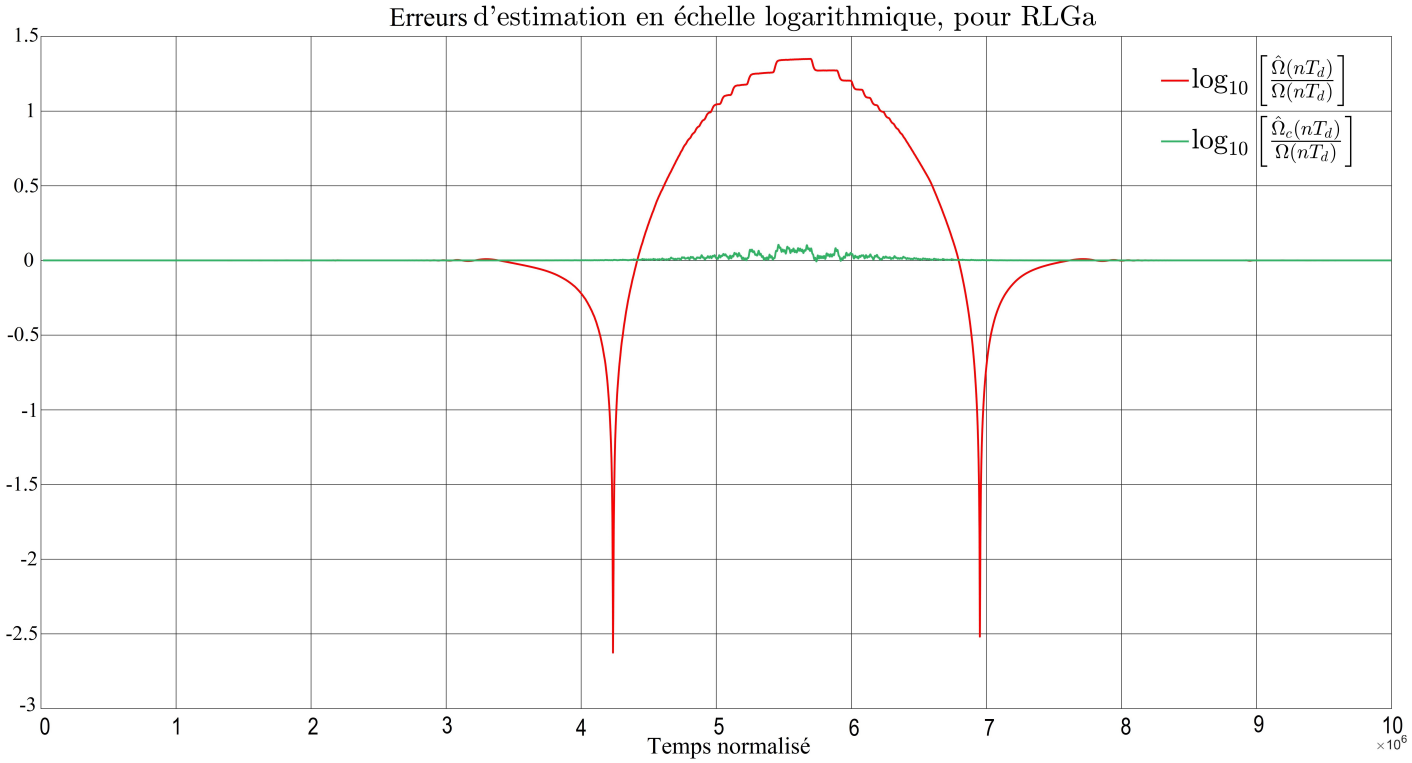


FIGURE 4.14 – L'erreur logarithmique d'estimation de la vitesse de rotation en utilisant l'estimation classique $\hat{\Omega}(nT_d)$ et l'estimation compensée $\hat{\Omega}_c(nT_d)$.

L'erreur d'estimation en utilisant l'incrément de la phase compensée est nulle, sauf quand la vitesse de rotation est à son minimum $\Omega(5.5\ 10^6) \sim 10^{-8}$. Dans l'entourage de ce point, on observe une erreur $\log_{10}\left[\dfrac{\hat{\Omega}_c(nT_d)}{\Omega(nT_d)}\right] \sim 0.01$ qui peut être expliquée par l'imperfection de l'estimation, par le bruit de mesure et par le bruit numérique de la simulation. On a bien réduit l'influence des imperfections des miroirs sur la mesure de la vitesse de rotation pour le gyroscope RLGa. De plus, il est intéressant de remarquer que la précision du gyroscope RLGb avec comme sortie la phase compensée, est supérieure à celle du gyroscope RLGa sans compensation. On peut donc, grâce à notre algorithme, utiliser des gyroscopes de moindre qualité.

Pour l'estimation de l'amplitude des coefficients de rétro-diffusion des miroirs (m_1, m_2)

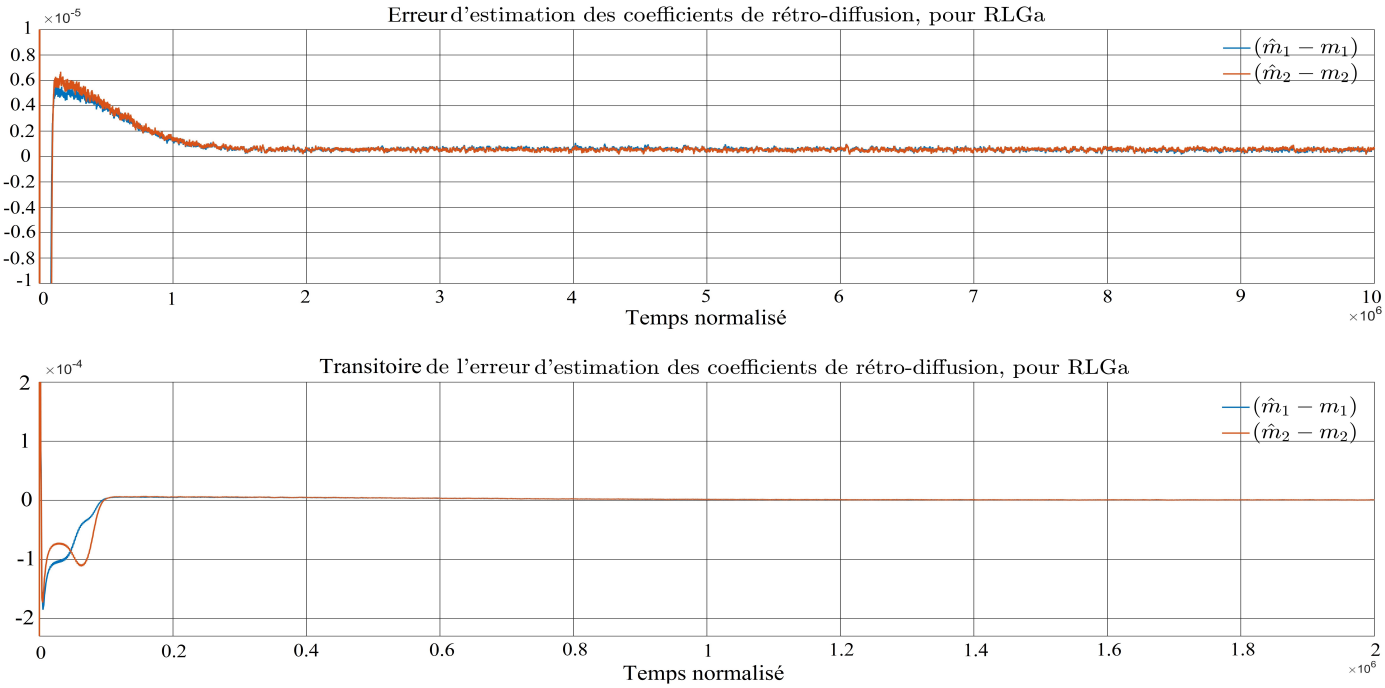


FIGURE 4.15 – L'erreur d'estimation des amplitudes des coefficients de rétro-diffusion des miroirs $(\hat{m}_1 - m_1)$ et $(\hat{m}_2 - m_2)$. Fig du haut : l'erreur statique. Fig du bas : le transitoire de l'erreur.

Pour l'estimation des phases des coefficients de rétro-diffusion des miroirs (ξ_1, ξ_2)

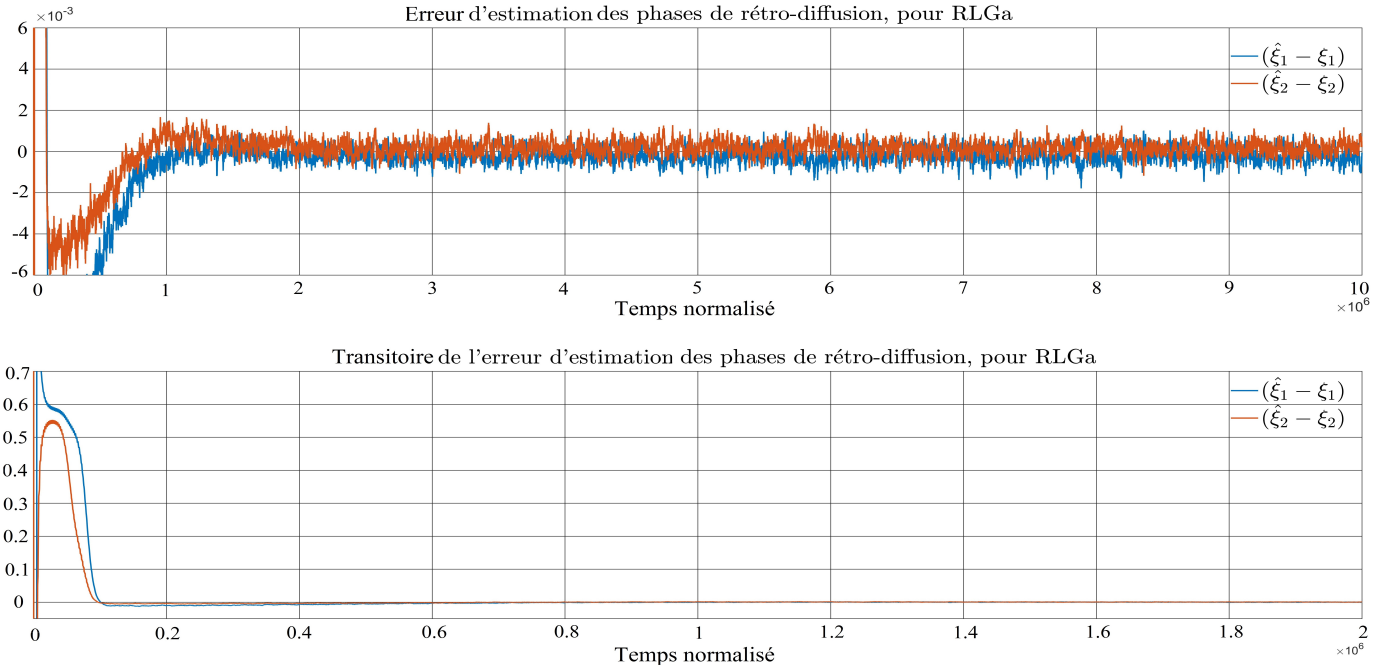


FIGURE 4.16 – L'erreur d'estimation des phases des coefficients de rétro-diffusion des miroirs $(\hat{\xi}_1 - \xi_1)$ et $(\hat{\xi}_2 - \xi_2)$. Fig du haut : l'erreur statique. Fig du bas : le transitoire de l'erreur.

Pour l'estimation des amplitudes des coefficients de rétro-diffusion (m_1, m_2) et une erreur statique de 1. 10^{-6} qui correspond à une erreur relative de 0.4%, nous avons donc réduit les imperfections des miroirs d'un facteur 240. Les considérations sur l'erreur statique exposées dans le cas du gyroscope RLGb restent valables.

En ce qui concerne les phases des coefficients de rétro-diffusion (ξ_1, ξ_2) , nous n'avons pas d'erreur d'estimation statique. On observe une oscillation de 10^{-3} autour de 0. Le transitoire pour l'estimation des coefficients de rétro-diffusion est de 10^5.

Pour l'estimation (4.26) du point d'équilibre bi-directionnel des intensités $\bar{I} = \begin{pmatrix} \bar{\imath} \\ \bar{\imath} \end{pmatrix}$,

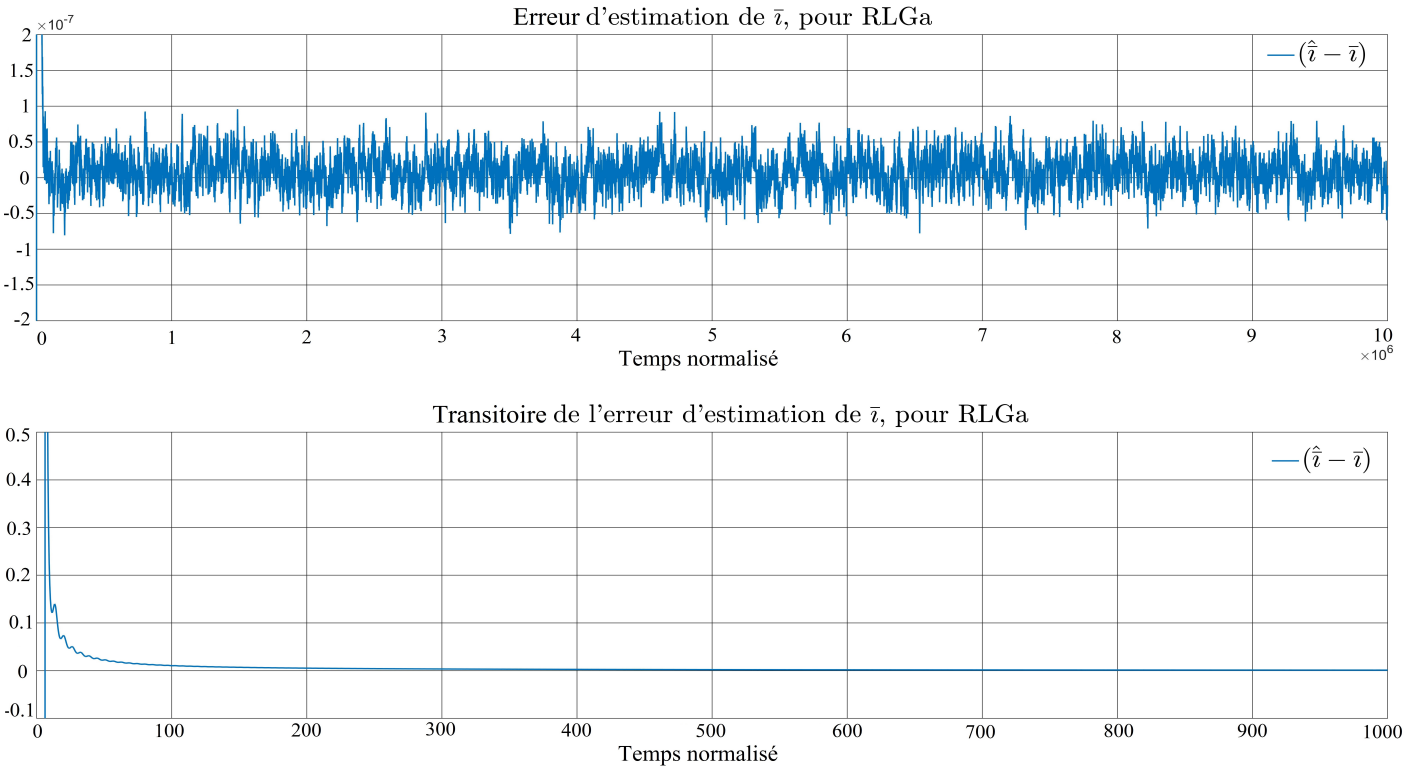


FIGURE 4.17 – L'erreur d'estimation du point d'équilibre bi-directionnel des intensités $\bar{\imath}$. Fig du haut : l'erreur statique. Fig du bas : le transitoire de l'erreur.

On remarque un temps de convergence très cour (100) et une erreur statique de 10^{-7} qui correspond à une erreur relative de 10^{-5}%.

Pour l'estimation (4.25) de la bande passante du système idéal des intensités α_n,

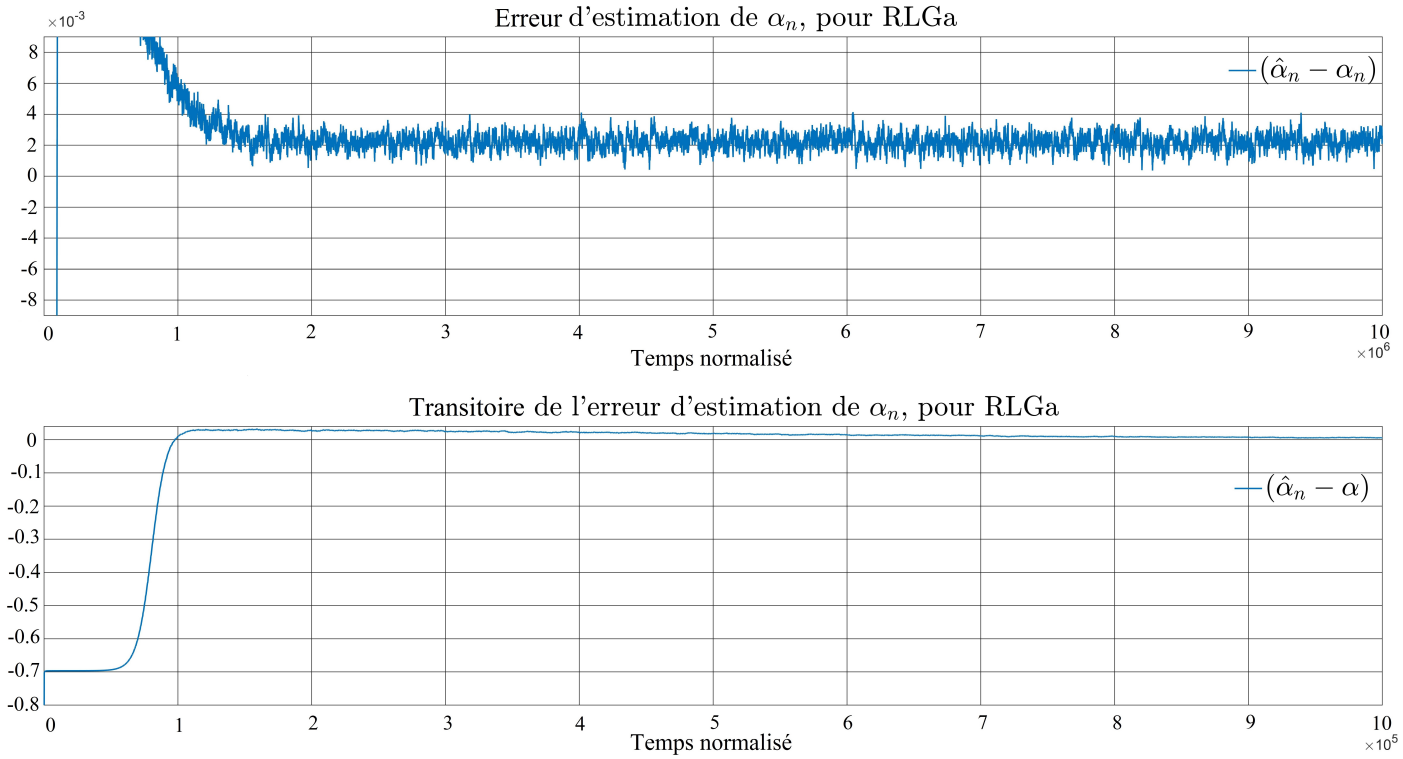


FIGURE 4.18 – L'erreur d'estimation de la bande passante du système idéal des intensités α_n. Fig du haut : l'erreur statique. Fig du bas : le transitoire de l'erreur.

On a un transitoire assez long (10^6), avec une erreur statique relative de 0.2%.

4.2 Mesure du battement

Dans cette section, on expose se qu'il est possible de faire en ayant uniquement accès aux signaux de battements (y_c, y_s). D'un point de vue chronologique, cette section correspond au début de ma thèse. En effet, notre connaissance du modèle de Lamb (3.8)-(3.10) n'est venue que tardivement, nos travaux ne se concentrait alors, que sur l'équation d'Adler (3.31). Actuellement, les seuls signaux exploités réellement sur les gyroscopes He-Ne à Châtellerault sont les signaux de battements, la mesure des intensités a été supprimé il y'a de ça quelques décennies pour des raisons de réduction de coûts.

Cette section est composée de deux parties. Dans la première partie, on propose une estimation des paramètres des photo-détecteurs qui mesurent les signaux de battements. Dans la section précédente, nous avions supposé que les mesures sont parfaites, or dans la réalité, le dispositif de mesure possède deux principales défauts

— des gains et biais qui varient très lentement avec le temps et qui sont différents pour chaque voie,

— un défaut d'alignement lors de la mise quadrature des deux faisceaux contrarotatifs.

L'estimation de ces défauts nous permet de les compenser et de ramener le battement sur le cercle unité afin de synthétiser "proprement les signaux" $\cos(\varphi)$ et $\sin(\varphi)$. Finalement, on effectue une simulation afin de valider notre approche.

Dans la deuxième section, on propose un estimateur appliqué à l'équation d'Adler, qui permet de mesurer les coefficients de rétro-diffusion ainsi, la contribution de l'activation mécanique et la vitesse de rotation que subit le gyroscope. Seul les signaux de battement et le signal de la détectrice de l'activation mécanique sont nécessaires afin de synthétiser cet estimateur. Cette approche a un désavantage par rapport à celle développée dans la sous-section 4.1.2, elle est sensible aux variations de la vitesse de rotation. Finalement, on effectue une simulation afin de valider notre approche.

4.2.1 Redressement du battement

On rappel que les signaux de battement théoriques sont données par

$$y_c = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos(\varphi) \tag{4.33}$$
$$y_s = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\sin(\varphi) \tag{4.34}$$

Prenons les constantes $m_0, C > 0$ du théorème 3, on suppose que la qualité des miroirs permet d'affirmer que $|\varrho = \max(m_1, m_2)| < m_0$ et que l'on initialise le système tel que $\vec{I}_0 = \bar{I}$. Alors les solutions des équations (3.8)-(3.10) sont définies pour tout $t \geq 0$ et il existe $D_c > 0$ et $D_s > 0$ tel que, pour tout $t \geq 0$, on a

$$\begin{aligned} |y_c - 2\bar{\imath} - 2\bar{\imath}\cos(\varphi)| &\leq D_c\varrho \\ |y_s - 2\bar{\imath} - 2\bar{\imath}\sin(\varphi)| &\leq D_s\varrho \end{aligned}$$

On néglige les termes d'ordre 1 en ϱ (uniforme en $t \geq 0$) et on se concentre sur les termes d'ordre 0, ce qui nous donne

$$y_c = 2\bar{\imath} + 2\bar{\imath}\cos(\varphi) \tag{4.35}$$
$$y_s = 2\bar{\imath} + 2\bar{\imath}\sin(\varphi) \tag{4.36}$$

Or les photo-détecteurs qui mesures les signaux de battement ne sont pas parfaitement en quadrature, de plus leur gains et biais sont différents et peuvent varier lentement en fonction du temps. Dans la réalité on mesure

$$y_c = a_c\cos(\varphi) + \epsilon_c\sin(\varphi) + b_c \tag{4.37}$$
$$y_s = a_s\sin(\varphi) + b_s \tag{4.38}$$

avec (a_c, b_c, a_s, b_s) des coefficients strictement positifs et $\epsilon_c \geq 0$. Les signaux (y_c, y_s) sont issus de la mesure de l'intensité des flux lumineux, ils sont positifs, cela se traduit par les conditions suivantes

$$\begin{aligned} b_c &\geq a_c + \epsilon_c \\ b_s &\geq a_s \end{aligned}$$

On cherche à ramener les signaux de battement sur le cercle unité, pour se faire on réécrit les équations (4.37)-(4.38) sous la forme

$$\cos(\varphi) = \frac{1}{a_c}\left[y_c - b_c - \epsilon_1(y_s - b_s)\right] \tag{4.39}$$
$$\sin(\varphi) = \frac{1}{a_s}\left[y_s - b_s\right] \tag{4.40}$$

avec $\epsilon_1 := \dfrac{\epsilon_c}{a_s}$.

4.2.1.1 Moindres carrés récursifs

Sur le cercle unité on a

$$\cos(\varphi)^2 + \sin(\varphi)^2 = 1$$

et donc

$$\frac{1}{a_c^2}\left[y_c - b_c - \epsilon_1(y_s - b_s)\right]^2 + \frac{1}{a_s^2}\left[y_s - b_s\right]^2 = 1 \tag{4.41}$$

on pose $\alpha_c := \dfrac{a_c}{a_s}$, l'équation (4.41) devient

$$\begin{aligned} y_c^2 &= -\left[\epsilon_1^2 + \alpha_c^2\right].y_s^2 + \left[2\epsilon_1\right].y_s y_c + 2\left[b_c - \epsilon_1 b_s\right].y_c \\ &\quad +2\left[\epsilon_1^2 b_s + \alpha_c^2 b_s - \epsilon_1 b_c\right].y_s + \left[a_c^2 - b_c^2 - \epsilon_1^2 b_s^2 + 2\epsilon_1 b_s b_c - \alpha_c^2 b_s^2\right].1 \end{aligned} \tag{4.42}$$

l'équation est linéaire par rapport aux mesures $(y_c^2, y_s^2, y_s y_c, y_c, y_s, 1)$, on propose donc d'appliquer un algorithme de moindres carrés récursifs [8] (RLS) afin d'estimer les paramètres, on pose

$$\mathcal{F} := \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \\ k_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\epsilon_1^2 - \alpha_c^2 \\ 2\epsilon_1 \\ 2(b_c - \epsilon_1 b_s) \\ 2(\epsilon_1^2 b_s + \alpha_c^2 b_s - \epsilon_1 b_c) \\ a_c^2 - b_c^2 - \epsilon_1^2 b_s^2 + 2\epsilon_1 b_s b_c - \alpha_c^2 b_s^2 \end{pmatrix} \tag{4.43}$$

l'équation (4.42) s'écrit

$$y_c^2 = (y_s^2,\ y_s y_c,\ y_c,\ y_s,\ 1)\cdot\mathcal{F} := \mathbb{V}.\mathcal{F} \tag{4.44}$$

On commence par filtrer linéairement l'équations (4.42) par un passe bas linéaire afin de minimiser l'impact du bruit. Soit $H(s)$, avec s la variable de Laplace, le filtre passe bas linéaire, exprimé dans le domaine de Laplace, on obtient l'équation filtrée

$$(y_c^2)_f = \mathbb{V}_f \cdot \mathcal{F} \tag{4.45}$$

où $\mathbb{V}_f$ est le vecteur de mesure $\mathbb{V}$ filtré par le filtre $H(s)$ et

$$(y_c^2)_f = \mathcal{L}^{-}1\left[H(s)y_c^2(s)\right]$$

avec $\mathcal{L}^{-}1$ l'inverse de la transformé de Laplace.

On explicite l'algorithme des moindres carrés récursifs (RLS) pour l'équation (4.45). L'algorithme de moindres carrés récursifs, continu avec facteur d'oubli, s'écrit [8]

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\hat{\mathcal{F}} &= P\mathbb{V}_f\left[(y_c^2)_f - (\mathbb{V}_f)^T\hat{\mathcal{F}}\right] \\ \frac{d}{dt}P &= \upsilon P - P\ \mathbb{V}_f(\mathbb{V}_f)^T\ P, \end{aligned}$$

où $\hat{\mathcal{F}}$ est l'estimation du vecteur de paramètres $\mathcal{F}$, P est la matrice de covariance du vecteur de mesure $\mathbb{V}_f$ et υ est le facteur d'oubli.

Dans la pratique les mesures auxquelles on a accès sont échantillonnées à une fréquence de 2.5 MHz, on utilise donc la version discrète de l'algorithme des moindres carrés récursifs avec facteur d'oubli :

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{F}}(t) &= \hat{\mathcal{F}}(t-\delta t) + K(t)\cdot\left[(y_c^2)_f(t) - \mathbb{V}_f(t)^T\hat{\mathcal{F}}(t-\delta t)\right] \\ K(t) &= \frac{P(t-\delta t)\mathbb{V}_f(t)}{\lambda + \mathbb{V}_f(t)^T P(t-\delta t)\mathbb{V}_f(t)} \\ P(t) &= \frac{1}{\lambda}\left[P(t-\delta t) - K(t)\mathbb{V}_f(t)^T P(t-\delta t)\right] \end{aligned} \tag{4.46}$$

où $\delta t := 4\ .10^-7\ s$ est la période d'échantillonnage, P^+ la matrice de covariance du vecteur mesure, K le gain et $\lambda = 1 - \frac{\delta t}{T_0}$ est le facteur d'oubli, avec T_0 le temps de réponse de l'estimateur.

Paramètres des capteurs

Grâce à l'estimation des paramètres $\hat{\mathcal{F}}$, nous pouvons remonter aux différents coefficients intervenants dans les équations des signaux de battements (4.37)-(4.38), en effet

$$\hat{\epsilon}_1 = \frac{\hat{k}_2}{d2} \tag{4.47}$$

$$\hat{\alpha}_c = \sqrt{-\hat{k}_1 - \hat{\epsilon}_1^2} \tag{4.48}$$

$$\hat{b}_s = \frac{\hat{k}_4 + \hat{\epsilon}_1\hat{k}_3}{2\hat{\alpha}_c} \tag{4.49}$$

$$\hat{b}_c = \frac{\hat{k}_3}{2} + \hat{\epsilon}_1\hat{b}_s \tag{4.50}$$

$$\hat{a}_c = \sqrt{\hat{k}_5 + \hat{b}_c^2 + \hat{\epsilon}_1^2\hat{b}_s^2 - 2\hat{\epsilon}_1\hat{b}_c\hat{b}_s + \hat{\alpha}_c^2\hat{b}_s^2} \tag{4.51}$$

$$\hat{a}_s = \frac{\hat{a}_c}{\hat{\alpha}_c} \tag{4.52}$$

$$\hat{\epsilon}_c = \hat{\epsilon}_1\hat{a}_s \tag{4.53}$$

La connaissance des paramètres des capteurs permet de synthétiser, à partir des signaux de battements, les variables $\cos(\varphi)$ et $\sin(\varphi)$,

$$\cos(\varphi) = \frac{1}{\hat{a}_c}\left[y_c - \hat{b}_c - \hat{\epsilon}_1(y_s - \hat{b}_s)\right] \tag{4.54}$$

$$\sin(\varphi) = \frac{1}{\hat{a}_s}\left[y_s - \hat{b}_s\right] \tag{4.55}$$

4.2.1.2 Simulations

Afin de prouver la pertinence de notre approche, on effectue une simulation à l'aide de l'outil Simulink de Matlab.

Scénario

On intègre, via un solver ode45 et avec les paramètres du tableau 4.3 les équations de Lamb pour le gyroscope RLGa de la section précédente, sur une durée de $T_f = 4\ 10^5$. L'activation mécanique est donnée par $\varphi_d(t) := 150\cos(\omega_d t)$.

$I_1(0)$	$I_2(0)$	$\varphi(0)$	f_e	ξ_1	ξ_2	I_s	I_c	Γ	g_0	ω_d
1	1	0	2.5	0.8	-0.05	1.14	8.1	2	4	$3.65.\ 10^{-3}$

TABLE 4.3 – Paramètres de la simulation des équations de Lamb

Les coefficients de rétro-diffusion des miroirs sont les mêmes et nous illustrons les résultats pour une vitesse de rotation nulle ($\Omega = 0$).

Les paramètres des capteurs

Nous prenons des paramètres lentement variables à travers le temps, modélisés par une sinusoïde dont l'amplitude d'oscillation vaut 0.1 fois son biais. Les biais choisit pour les différents paramètres sont donnés par le tableau 4.4

a_c	b_c	ϵ_c	a_s	b_s
1.5	2.2	0.05	1.2	2.7

TABLE 4.4 – Biais des paramètres des capteurs

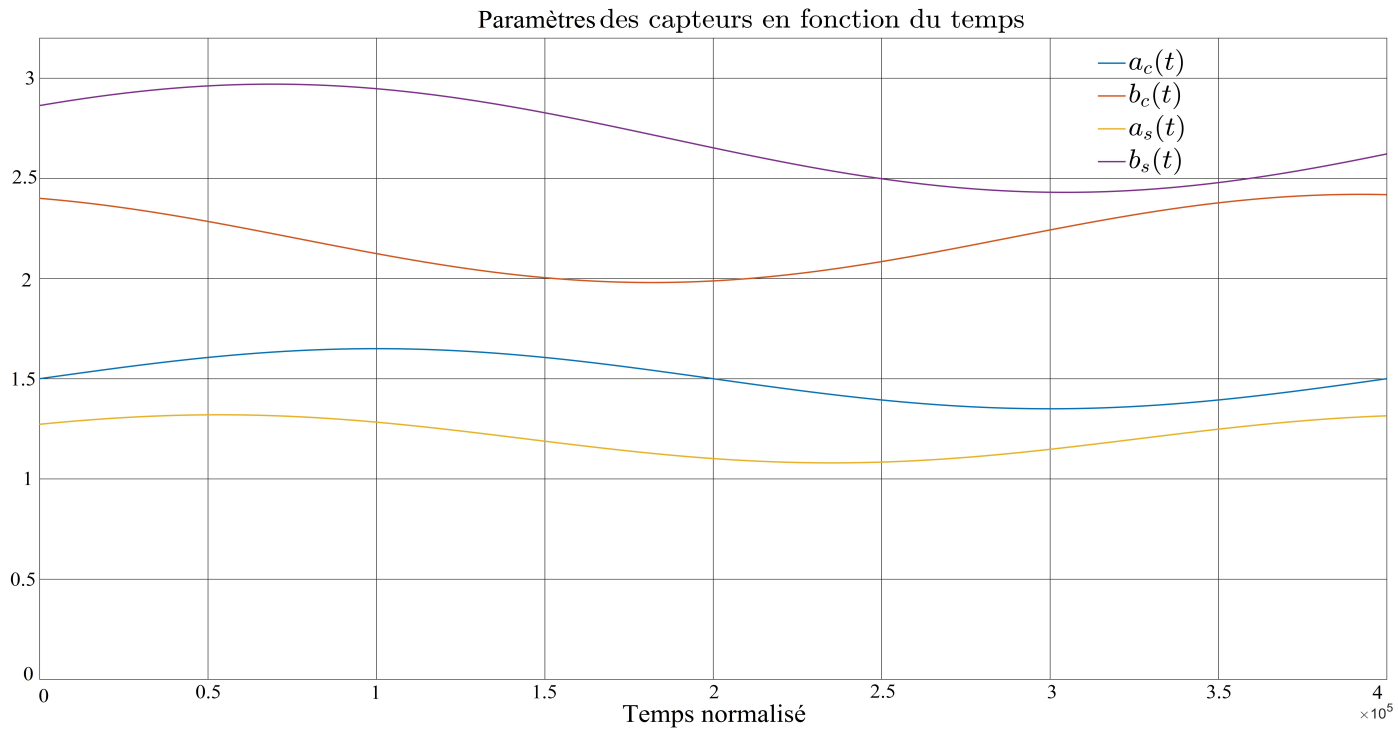


FIGURE 4.19 – Les paramètres (a_c, b_c, a_s, b_s) en fonction du temps.

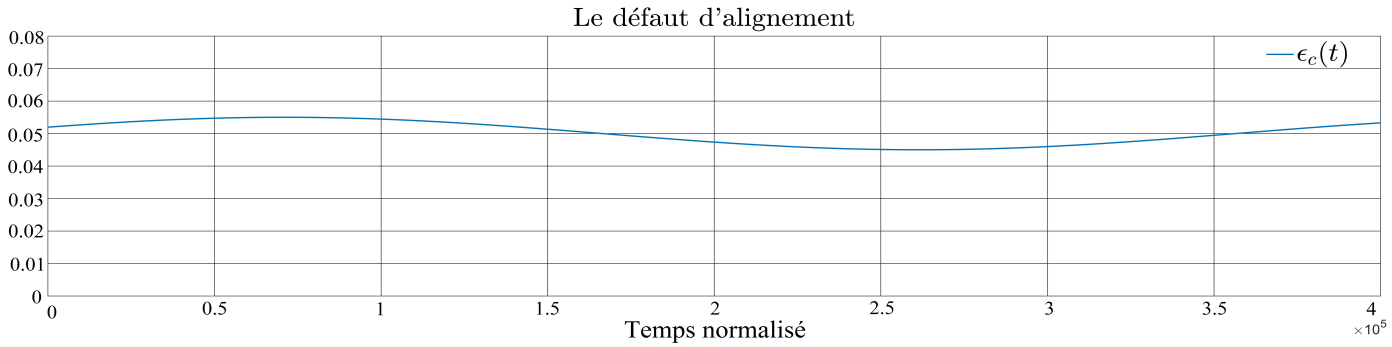


FIGURE 4.20 – Le défaut d'alignement $\epsilon_c(t)$ en fonction du temps.

Les mesures

Les signaux de mesures (signaux de battements) avec lesquels on alimente l'estimateur sont bruités avec un bruit gaussien de puissance $N_i = 10^{-5}$ et de bande passante 10 f_e, figure 4.6.

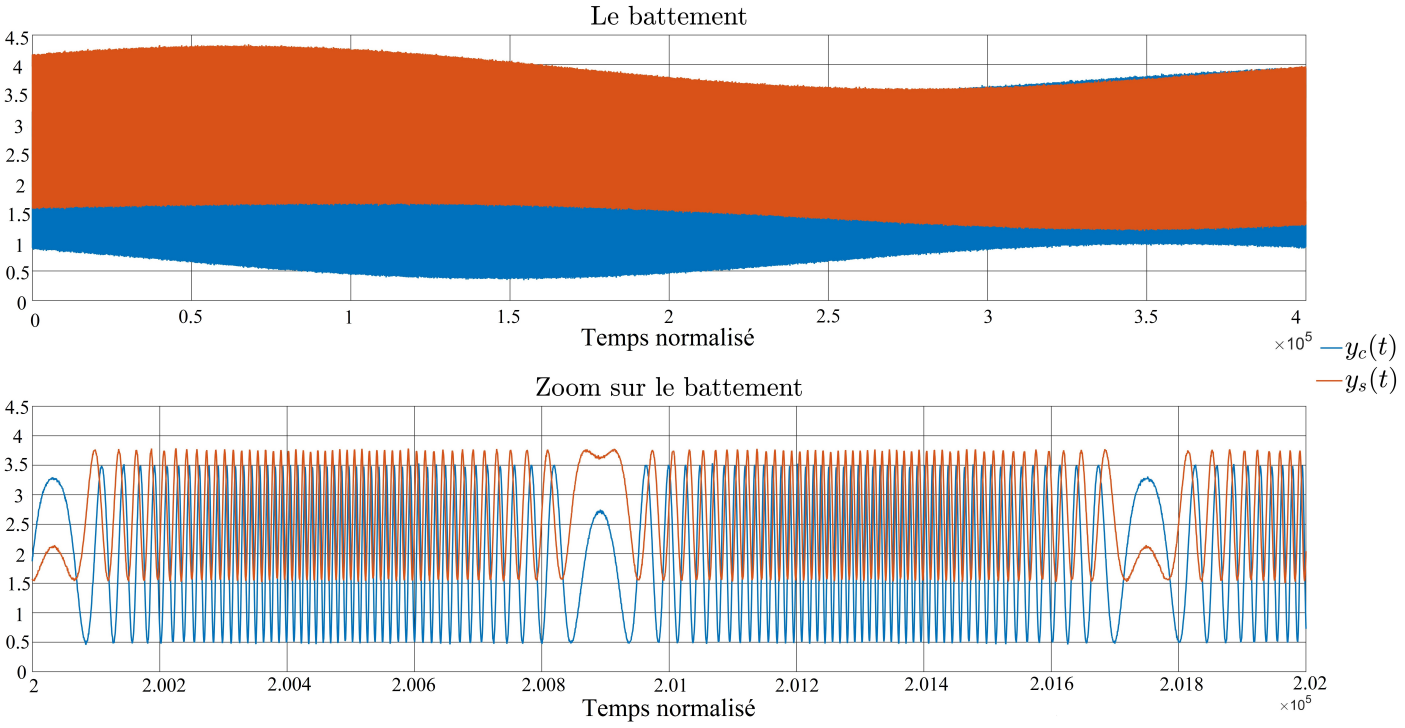


FIGURE 4.21 – Les signaux de battements (y_c, y_s). Figure du haut : pour $t \in [0, 4\ 10^5]$. Figure du bas : pour $t \in [2\ 10^5, 2.02\ 10^5]$.

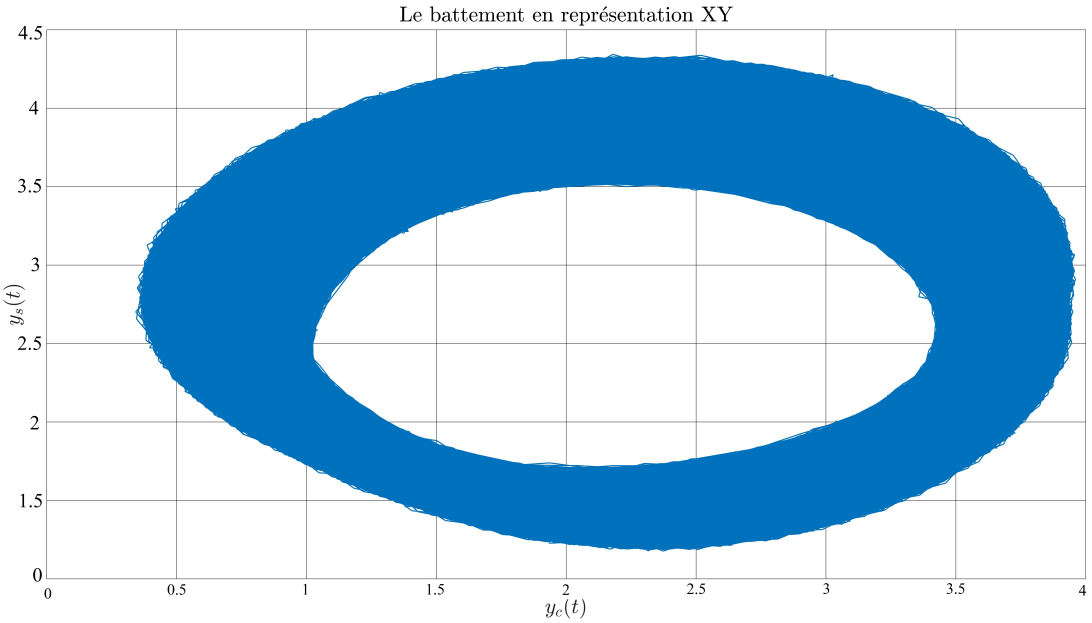


FIGURE 4.22 – Les signaux de battement (y_c, y_s) en représentation XY.

L'épaisseur observée sur la représentation en XY correspond aux défauts que nous cherchons à corriger et aux bruit de mesure.

L'estimateur

On suppose que l'on a pas de connaissance à priori des valeurs à estimer, on initialise l'estimateur à 0, i.e., $\hat{\mathcal{F}}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Le filtrage des mesure est effectué via un filtre passe-bas linéaire du premier ordre, de bande passante ω_c et de gain unitaire. Les paramètres de filtrage des mesures et de l'algorithme (4.46) des moindres carrés récursifs sont donnés dans le tableau 4.5

λ	ω_c	$P(0)$
0.9999	0.5	$\mathbb{I}_{d-5}$

TABLE 4.5 – Paramètres de réglage de l'estimateur.

Le facteur d'oubli $\lambda = 1 - \frac{\delta t}{T_0}$ est choisi tel que le temps de convergence $T_0 = 15T_d$. Nous avons choisi une dynamique relativement lente pour l'estimateur afin d'éviter de filtrer les petites modulations rapides dues aux intensités.

Résultats de la simulation

Afin d'illustrer le résultat de la simulation, on trace les variables suivantes :

— les erreurs d'estimation des différents paramètres des capteurs,

— les signaux de battements après correction, en fonction du temps et en représentation XY.

Pour les paramètres des capteurs

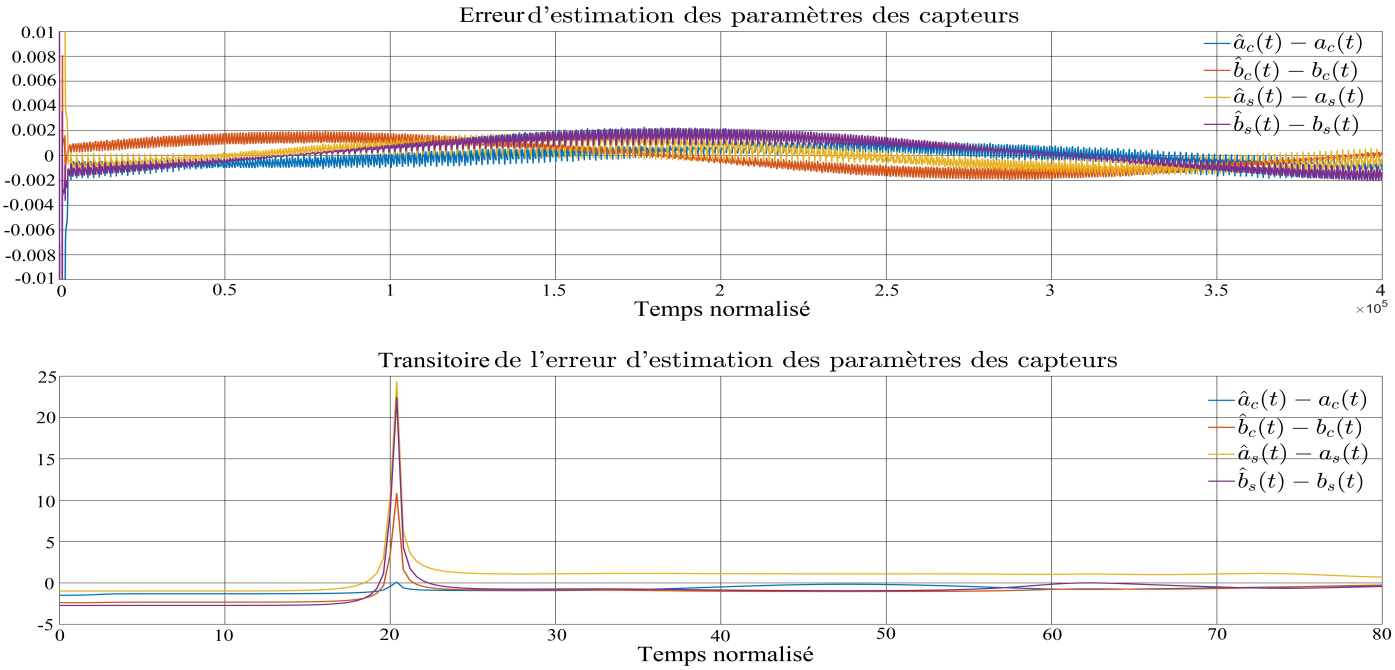


FIGURE 4.23 – L'erreur d'estimation des paramètres (a_c, b_c, a_s, b_s). Fig du haut : l'erreur statique. Fig du bas : le transitoire de l'erreur.

On obtient des estimations avec des erreurs statiques de l'ordre de 2 10^{-3}, ce qui correspond à une erreur relative de $0.1 \sim 0.2$ %. A l'instar de l'estimation des amplitudes des coefficients de rétro-diffusion, l'erreur que l'on observe est une erreur de traînée, qui pourrait théoriquement être annulée en augmentant l'ordre de l'estimateur.

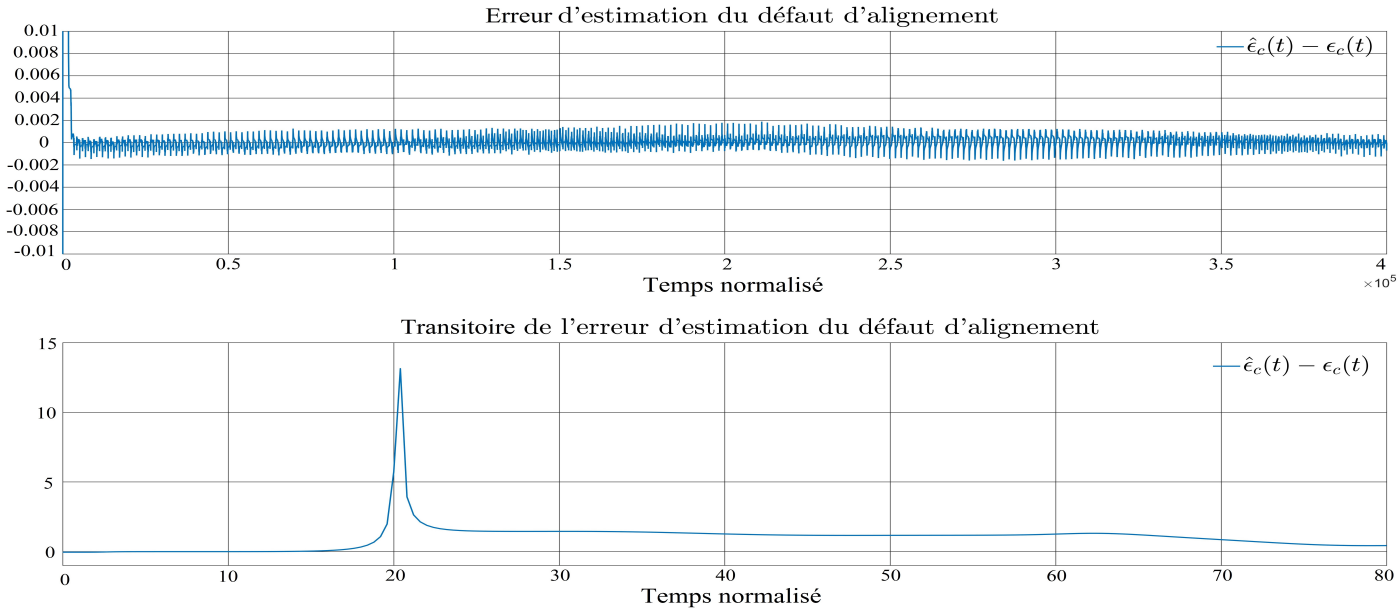


FIGURE 4.24 – L'erreur d'estimation du défaut d'alignement ϵ_c. Fig du haut : l'erreur statique. Fig du bas : le transitoire de l'erreur.

Pour l'estimation du défaut d'alignement ϵ_c, on obtient une modulation d'erreur autour de 0 de l'ordre de 4% et une erreur statique quasi-nulle.

Pour les signaux de battements

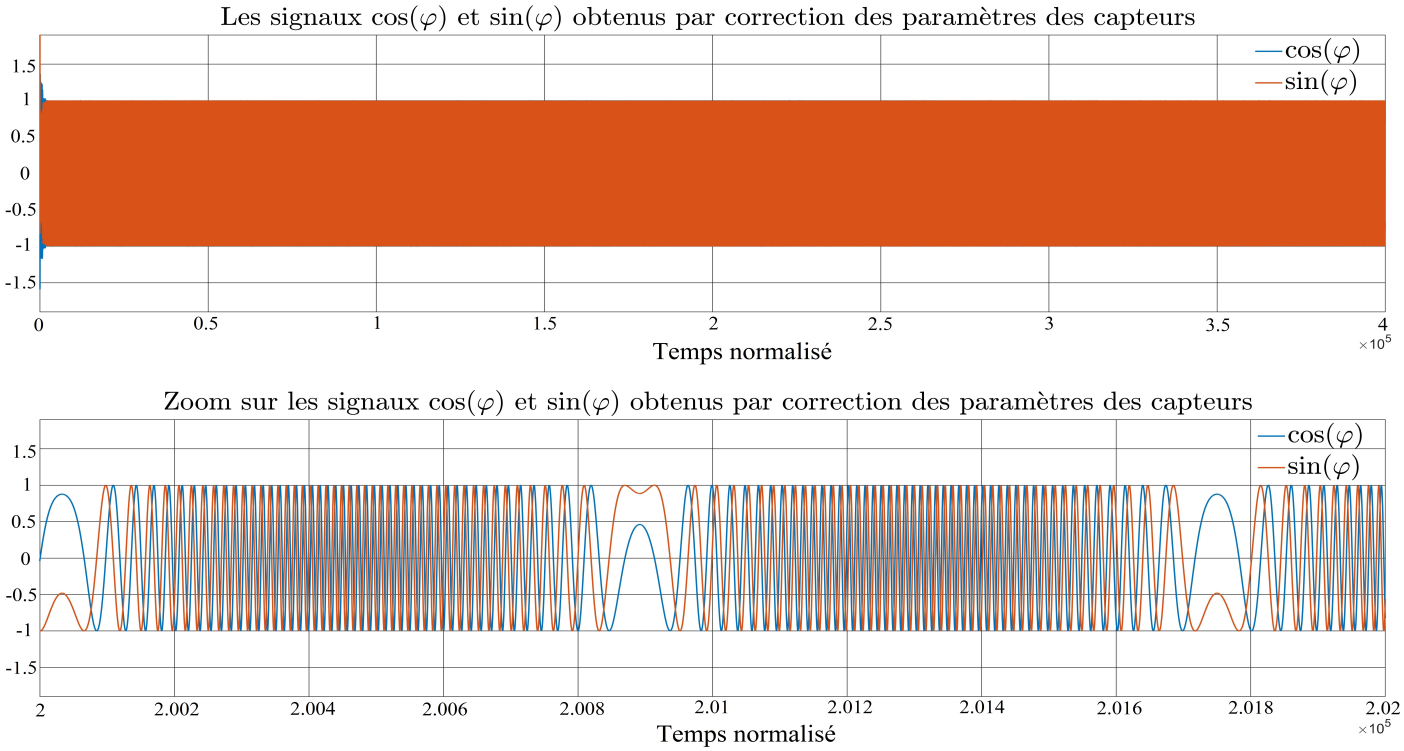


FIGURE 4.25 – Les signaux $(\cos\varphi, \sin\varphi)$ pour $t \in [0, 4\ 10^5]$ (haut) et pour $t \in [2\ 10^5, 2.02\ 10^5]$ (bas).

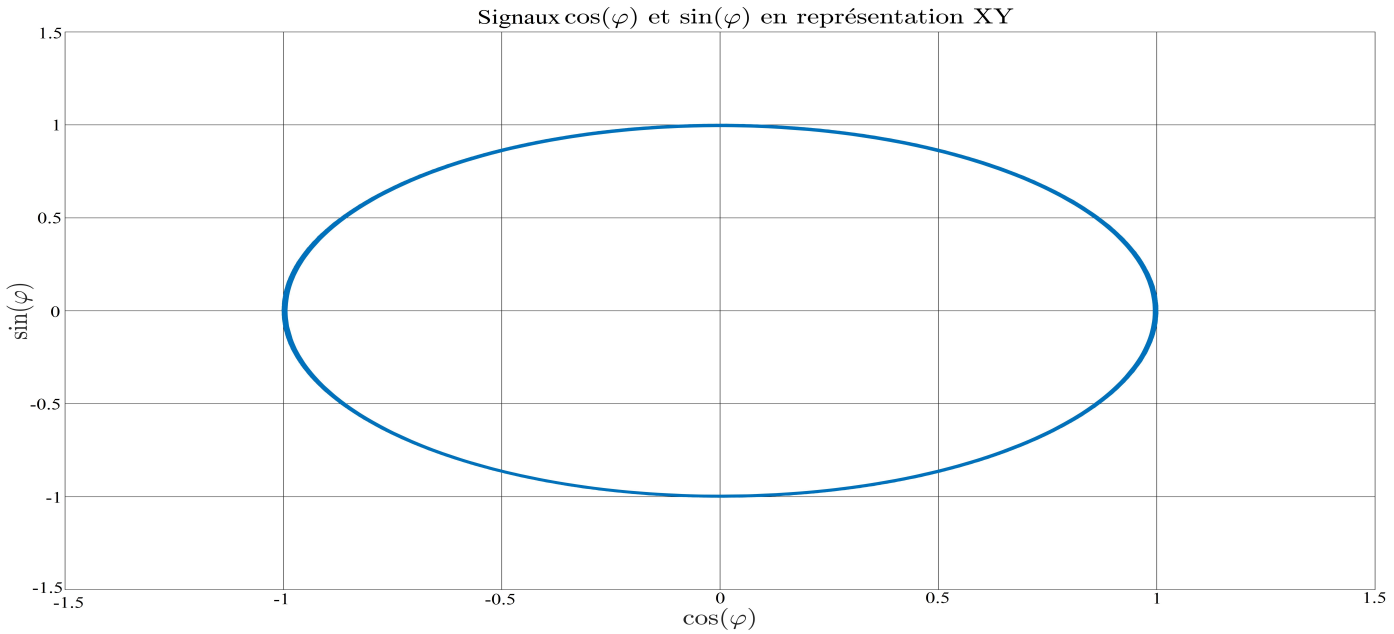


FIGURE 4.26 – Les signaux $(\cos\varphi, \sin\varphi)$ en représentation XY.

Le suivi de l'évolution des paramètres des capteurs, via l'estimateur, a bien permis d'obtenir une synthèse "propre" des signaux $(\cos\varphi, \sin\varphi)$.

4.2.2 Estimation, équation d'Adler

Dans cette sous-section on propose un estimateur, basé sur les moindres carrés récursifs, dans le but d'estimer les différents paramètres intervenants dans l'équation d'Adler. L'estimateur exploite

— les signaux $(\cos\varphi, \sin\varphi)$ synthétisés dans la sous section précédente,

— la pulsation de l'activation mécanique ω_d.

On rappel que l'équation d'Adler (3.59) s'écrit

$$\frac{d}{dt}\varphi = \Omega + \Omega_{dc}\cos(\omega dt) + \Omega_{ds}\sin(\omega dt) + m_c\cos(\varphi) + m_s\sin(\varphi) \tag{4.56}$$

où

— Ω est la vitesse de rotation que subit le gyroscope, supposée constante,

— l'activation mécanique s'écrit $\frac{d}{dt}\varphi_d = \Omega_d\cos(\omega_d t + \beta_d) := \Omega_{dc}\cos(\omega_d t) + \Omega_{ds}\sin(\omega_d t)$, avec $(\Omega_{dc}, \Omega_{ds}, \omega_d)$ sont supposés constants,

— les coefficients de rétro-diffusion $m_c := m_1\sin\xi_1 + m_2\sin\xi_2$ et $m_s := m_1\cos\xi_1 + m_2\cos\xi_2$, avec (m_c, m_s) supposés constants.

On admet que l'on a accès à la phase $\omega_d t$ de l'activation mécanique. Dans la pratique une simple PLL appliquée au signal de la détectrice de l'activation mécanique permet d'obtenir ce résultat.

4.2.2.1 Moindres carrés récursifs

L'équation d'Adler :

$$\frac{d}{dt}\varphi = \Omega + \Omega_{dc}\cos(\omega_d t) + \Omega_{ds}\sin(\omega_d t) + m_c\cos(\varphi) + m_s\sin(\varphi) \tag{4.57}$$

est linéaire par rapport aux mesures $(1, \cos(\omega_d t), \sin(\omega_d t), \cos(\varphi), \sin(\varphi))$, on propose donc d'appliquer un algorithme de moindres carrés récursifs [8] (RLS) afin d'estimer les paramètres, on pose

$$\mathcal{F} := \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \\ k_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Omega \\ \Omega_{dc} \\ \Omega_{ds} \\ m_c \\ m_s \end{pmatrix} \tag{4.58}$$

l'équation (4.57) s'écrit

$$\frac{d}{dt}\varphi = (1, \cos(\omega_d t), \sin(\omega_d t), \cos(\varphi), \sin(\varphi)) \cdot \mathcal{F} := \mathbb{V}.\mathcal{F} \tag{4.59}$$

où le vecteur $\mathbb{V}$ est issu de la mesure. Afin de synthétiser la variable $\frac{d}{dt}\varphi$, sans dérivation numérique pure de la mesure, on filtre linéairement l'équation (4.59) par un passe bas, la synthèse de la dérivé devient causale.

$$(\frac{d}{dt}\varphi)_f = \mathbb{V}_f \cdot \mathcal{F} \tag{4.60}$$

où $\mathbb{V}_f$ est le vecteur de mesure $\mathbb{V}$ filtré par le filtre $H(s)$ et

$$(\frac{d}{dt}\varphi)_f = \mathcal{L}^{-1}\left[sH(s)\varphi(s)\right]$$

avec $\mathcal{L}^{-1}$ l'inverse de la transformé de Laplace.

On explicite l'algorithme des moindres carrés récursifs (RLS) pour l'équation (4.60). L'algorithme de moindres carrés récursifs, continu avec facteur d'oubli, s'écrit [8]

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\hat{\mathcal{F}} &= P\mathbb{V}_f\left[(\frac{d}{dt}\varphi)_f - (\mathbb{V}_f)^T\hat{\mathcal{F}}\right]\\ \frac{d}{dt}P &= \upsilon P - P\,\mathbb{V}_f(\mathbb{V}_f)^T\,P,\end{aligned}$$

où $\hat{\mathcal{F}}$ est l'estimation du vecteur de paramètres $\mathcal{F}$, P est la matrice de covariance du vecteur de mesure $\mathbb{V}_f$ et υ est le facteur d'oubli.

Dans la pratique les mesures auxquelles on a accès sont échantillonnées à une fréquence de 2.5 MHz, on utilise donc la version discrète de l'algorithme des moindres carrés récursifs avec facteur d'oubli :

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{F}}(t) &= \hat{\mathcal{F}}(t-\delta t) + K(t)\cdot\left[(\frac{d}{dt}\varphi)_f(t) - \mathbb{V}_f(t)^T\hat{\mathcal{F}}(t-\delta t)\right]\\ K(t) &= \frac{P(t-\delta t)\mathbb{V}_f(t)}{\lambda + \mathbb{V}_f(t)^T P(t-\delta t)\mathbb{V}_f(t)}\\ P(t) &= \frac{1}{\lambda}\left[P(t-\delta t) - K(t)\mathbb{V}_f(t)^T P(t-\delta t)\right]\end{aligned} \tag{4.61}$$

où $\delta t := 4\ .10^-7\ s$ est la période d'échantillonnage, P^+ la matrice de covariance du vecteur mesure, K le gain et $\lambda = 1 - \frac{\delta t}{T_0}$ est le facteur d'oubli, avec T_0 le temps de réponse de l'estimateur.

4.2.2.2 Simulations

Cette approche permet d'estimer (uniquement avec les signaux de battements et la pulsation de l'action mécanique) :

— la vitesse de rotation Ω que subit le gyroscope,

— les amplitudes des coefficients de rétro-diffusion (m_s, m_s),

— l'amplitude et le déphasage de l'activation mécanique (Ω_d, β_d).

Scénario

On intègre, via un solver ode45 et avec les paramètres du tableau 4.6 les équations de Lamb pour le gyroscope RLGa de la section précédente, sur une durée de $T_f = 3\ 10^6$. L'activation mécanique est donnée par $\varphi_d(t) := 150\cos(\omega_d t)$ et nous effectuons une simulation pour les deux cas suivants :

1. le cas où la vitesse de rotation est constante, avec $\Omega = 10^{-7}$
2. le cas où la vitesse de rotation varie, son évolution est donnée par la figure 4.27

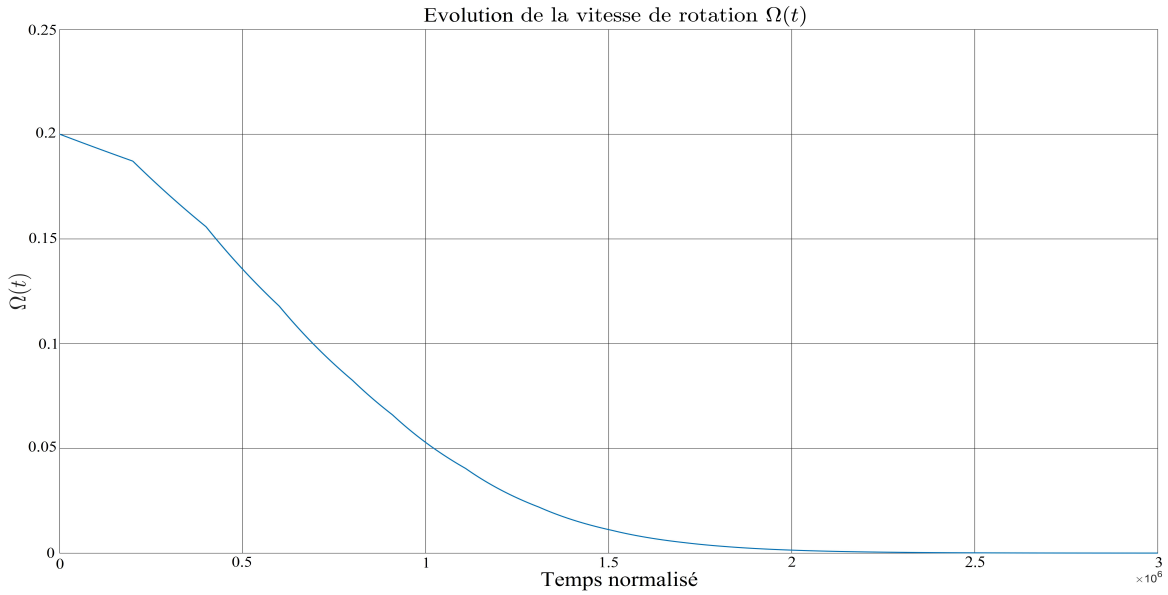


FIGURE 4.27 – L'évolution de la vitesse de rotation $\Omega(t)$, pour $t \in [0,\ 3\ 10^6]$.

Les amplitudes des coefficients de rétro-diffusion des miroirs (m_1, m_2) sont ceux du gyroscope RLGa, ce qui nous donne des coefficients (m_c, m_s) dont l'évolution est tracée figure 4.28

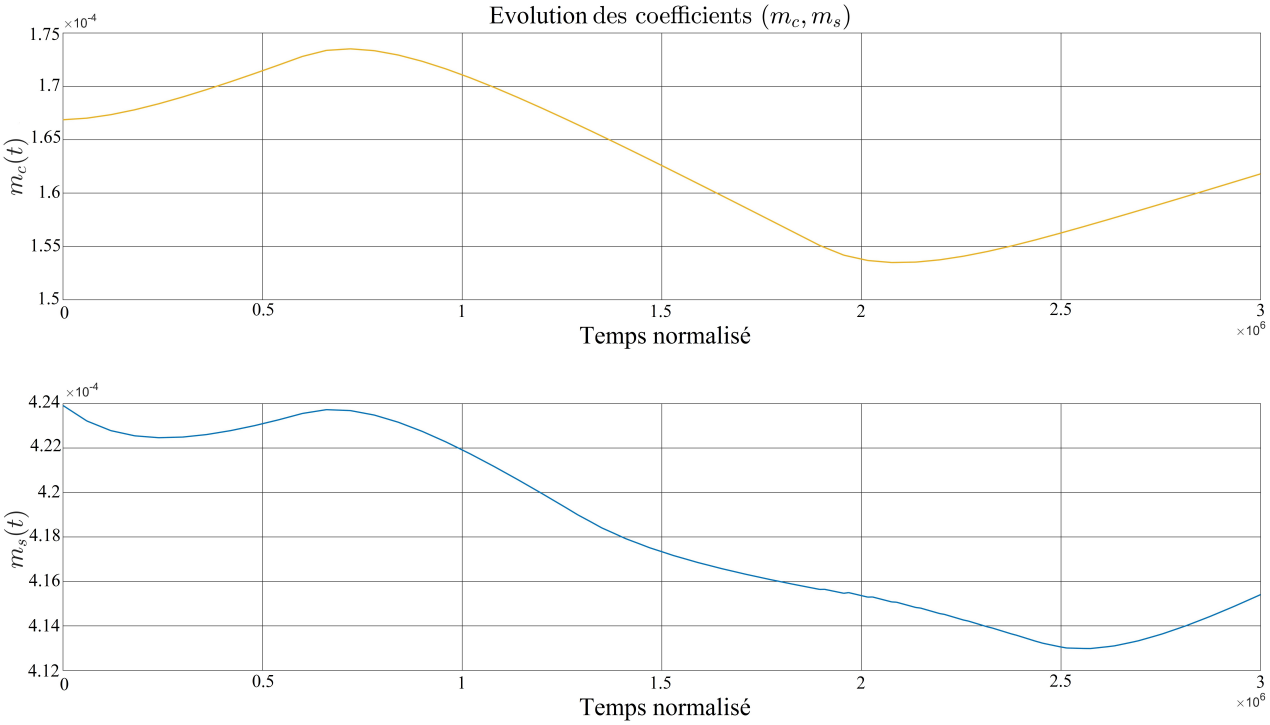


FIGURE 4.28 – L'évolution des coefficients de rétro-diffusion (m_c, m_s), pour $t \in [0,\ 3\ 10^6]$.

$I_1(0)$	$I_2(0)$	$\varphi(0)$	f_e	ξ_1	ξ_2	I_s	I_c	Γ	g_0	ω_d
1	1	0	2.5	0.8	-0.05	1.14	8.1	2	4	$3.65.\ 10^{-3}$

TABLE 4.6 – Paramètres de la simulation des équations de Lamb

Les mesures

Les signaux de mesures $(\cos\varphi, \sin\varphi)$ avec lesquels on alimente l'estimateur sont bruités avec un bruit gaussien de puissance $N_i = 10^{-10}$ et de bande passante 10 f_e.

L'estimateur

On suppose que l'on n'a pas de connaissance à priori des valeurs à estimer, on initialise l'estimateur à 0, i.e., $\hat{\mathcal{F}}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Le filtrage des mesures est effectué via un filtre passe-bas linéaire du premier ordre, de bande passante ω_c et de gain unitaire. Les paramètres de filtrage des mesures et de l'algorithme (4.61) des moindres carrés récursifs sont données dans le tableau 4.7

λ	ω_c	$P(0)$
0.9999	0.5	$\mathbb{I}_{d-5}$

TABLE 4.7 – Paramètres de réglage de l'estimateur.

Le facteur d'oubli $\lambda = 1 - \frac{\delta t}{T_0}$ est choisi tel que le temps de convergence $T_0 = 2.5T_d$.

Résultats de la simulation

Afin d'illustrer le résultat de la simulation, on trace les erreurs d'estimation.

Le cas où la vitesse de rotation est constante, avec $\Omega = 10^{-7}$

Pour la vitesse de rotation

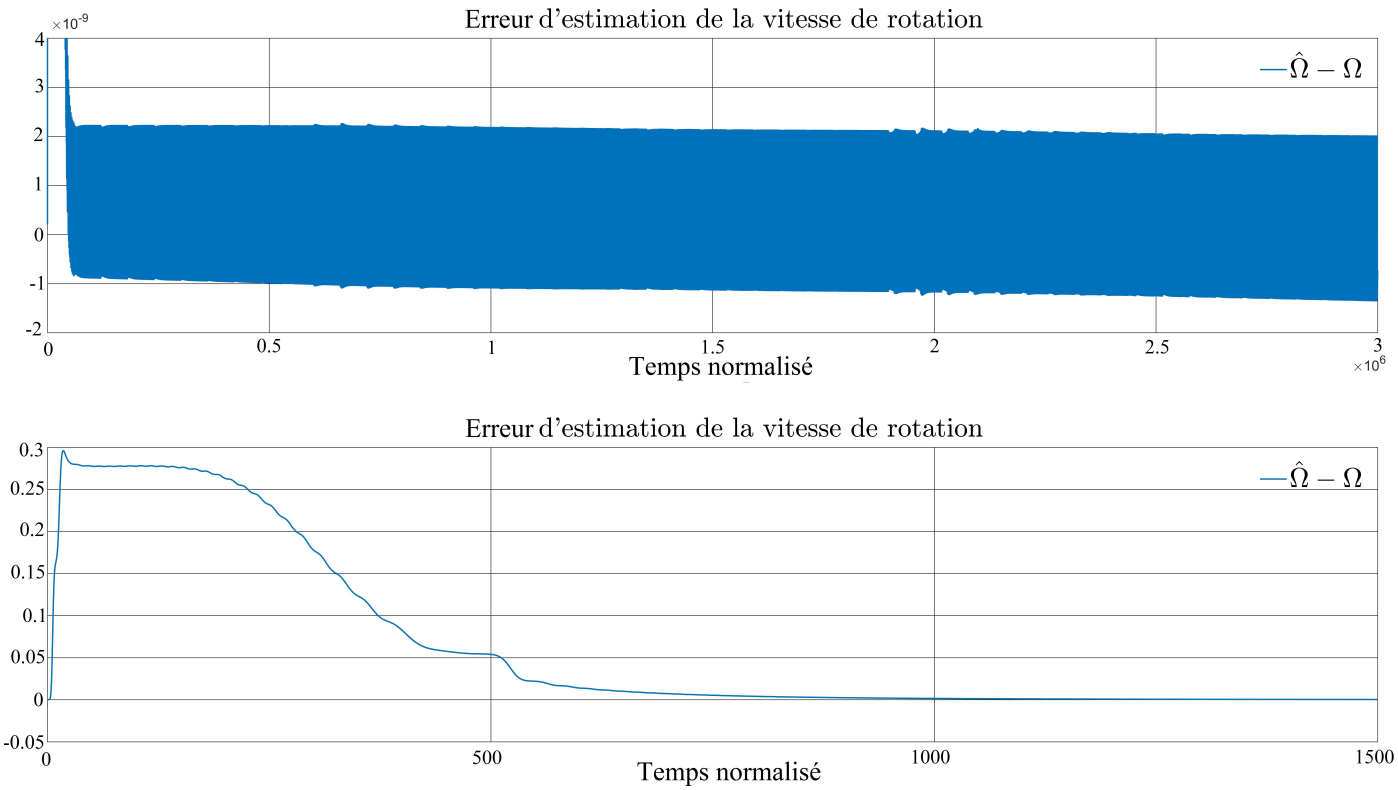


FIGURE 4.29 – L'erreur d'estimation de la vitesse de rotation Ω. Fig du haut : l'erreur statique. Fig du bas : le transitoire de l'erreur.

On a une erreur statique de 2 10^{-9} ce qui correspond à une erreur relative de 2%. Le transitoire est assez rapide (1000), l'estimation de la vitesse de rotation fonctionne correctement.

Pour les amplitudes de l'activation mécanique

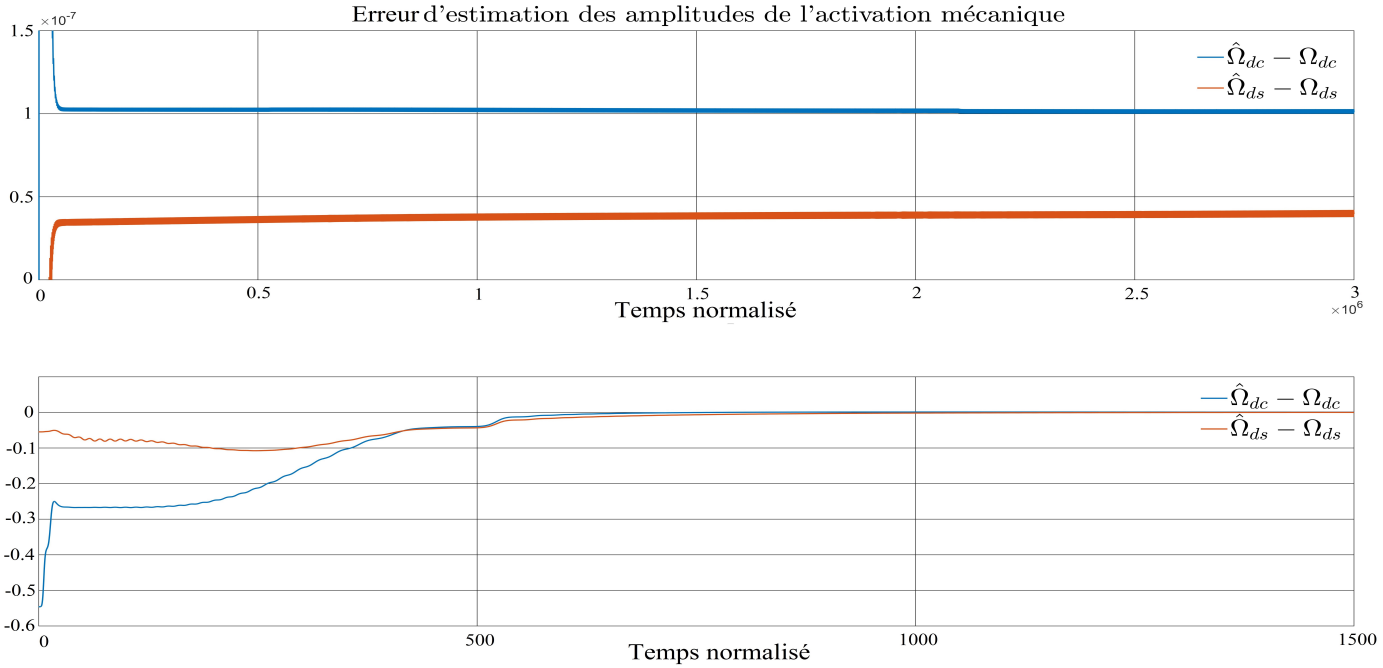


FIGURE 4.30 – L'erreur d'estimation des amplitudes de l'activation mécanique $(\Omega_{dc}, \Omega_{ds})$. Fig du haut : l'erreur statique. Fig du bas : le transitoire de l'erreur.

On a une erreur statique de 10^{-7} ce qui correspond à une erreur relative de 2 $10^{-5}\%$. L'estimation des amplitudes de l'activation mécanique est très précise.

Pour les coefficients de rétro-diffusion

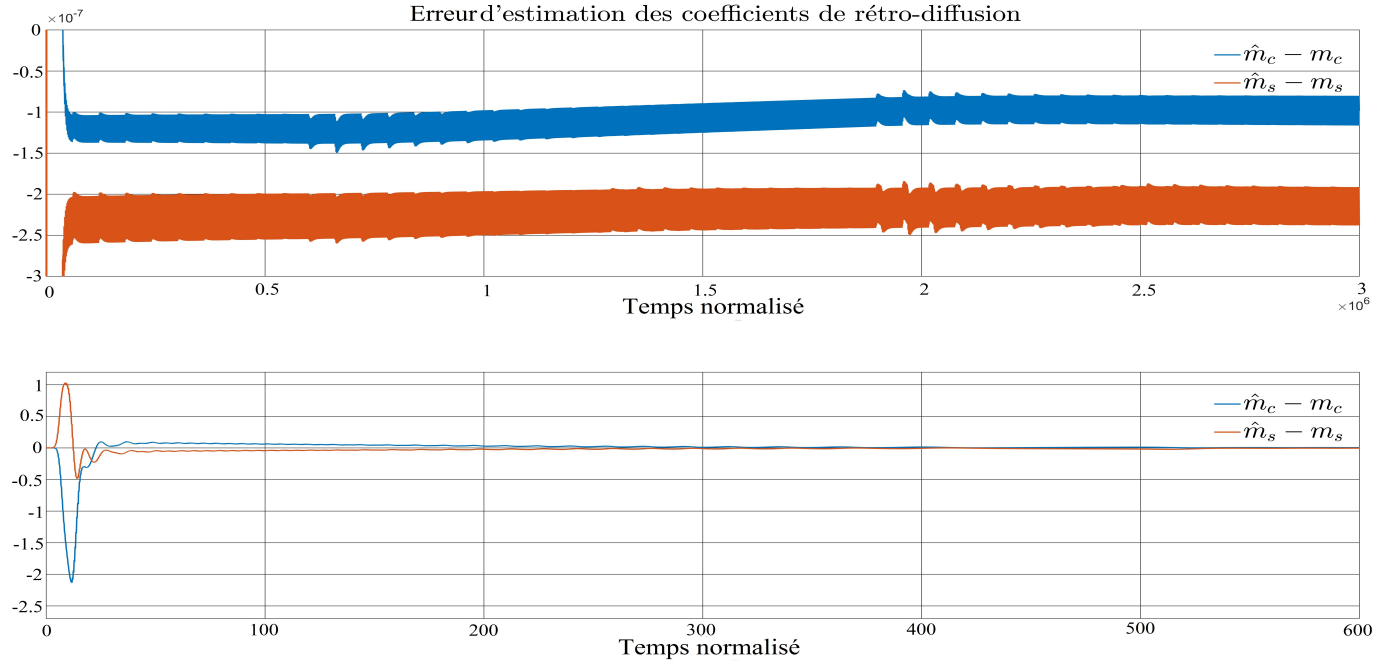


FIGURE 4.31 – L'erreur d'estimation des coefficients de rétro-diffusion (m_c, m_s). Fig du haut : l'erreur statique. Fig du bas : le transitoire de l'erreur.

On a une erreur statique de 10^{-7} ce qui correspond à une erreur relative de l'ordre de 0.05%. L'erreur statique que l'on observe est une erreur de traînée puisque les coefficients (m_c, m_s) varient en fonction du temps alors qu'ils sont supposés constants.

Le cas où la vitesse de rotation varie

Pour la vitesse de rotation

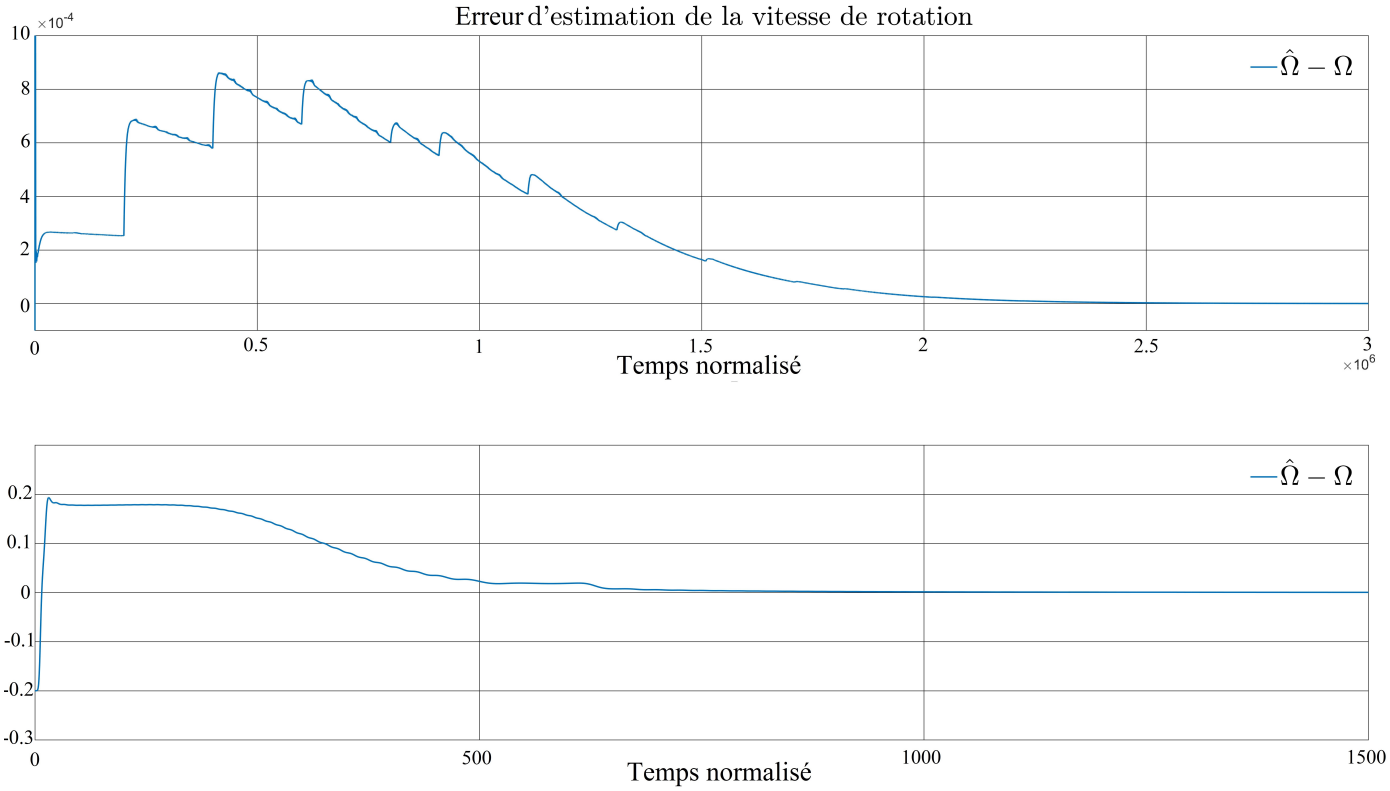


FIGURE 4.32 – L'erreur d'estimation de la vitesse de rotation Ω. Fig du haut : l'erreur statique. Fig du bas : le transitoire de l'erreur.

On remarque que chaque changement de l'accélération angulaire est vu comme une perturbation sur la vitesse de rotation, l'estimateur ne parvient pas à suivre l'évolution de Ω. Pour les amplitudes de l'activation mécanique

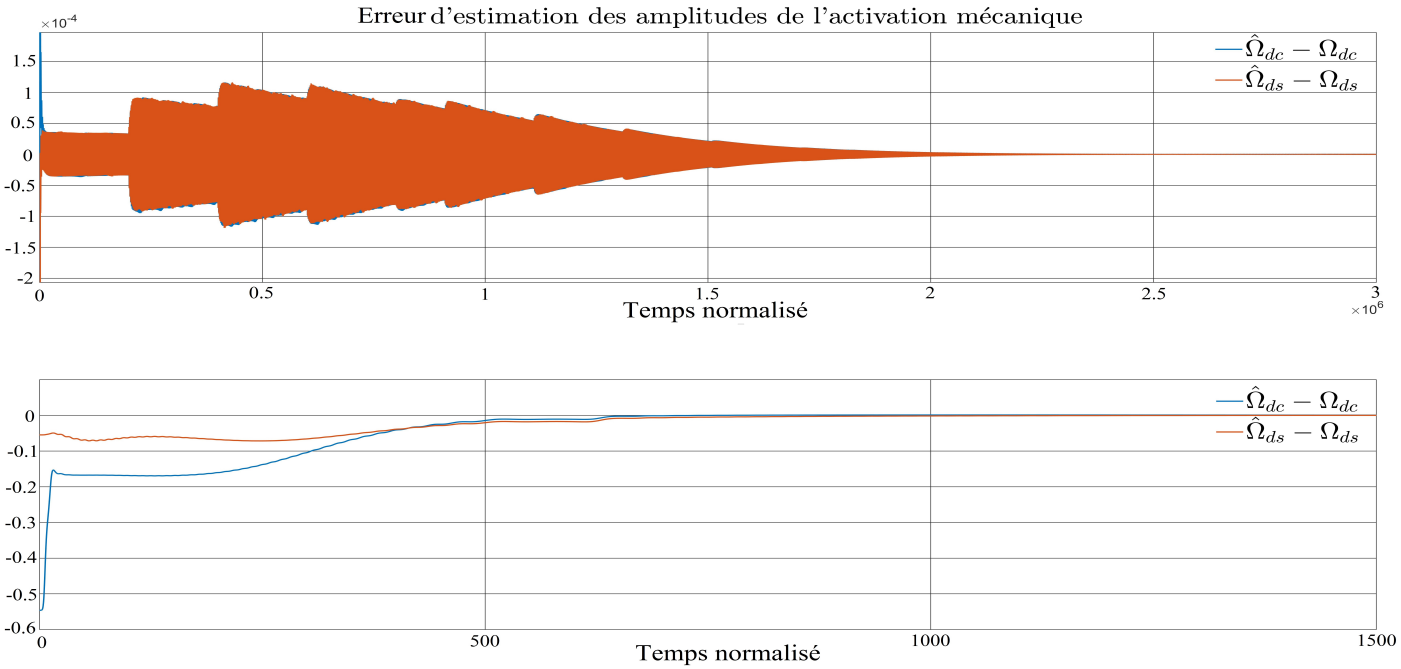


FIGURE 4.33 – L'erreur d'estimation des amplitudes de l'activation mécanique $(\Omega_{dc}, \Omega_{ds})$. Fig du haut : l'erreur statique. Fig du bas : le transitoire de l'erreur.

On a une erreur statique de 10^{-4} ce qui correspond à une erreur relative de 2 $10^{-2}\%$. L'estimation des amplitudes de l'activation mécanique a beaucoup perdue en précision par rapport au cas précédent.

Pour les coefficients de rétro-diffusion

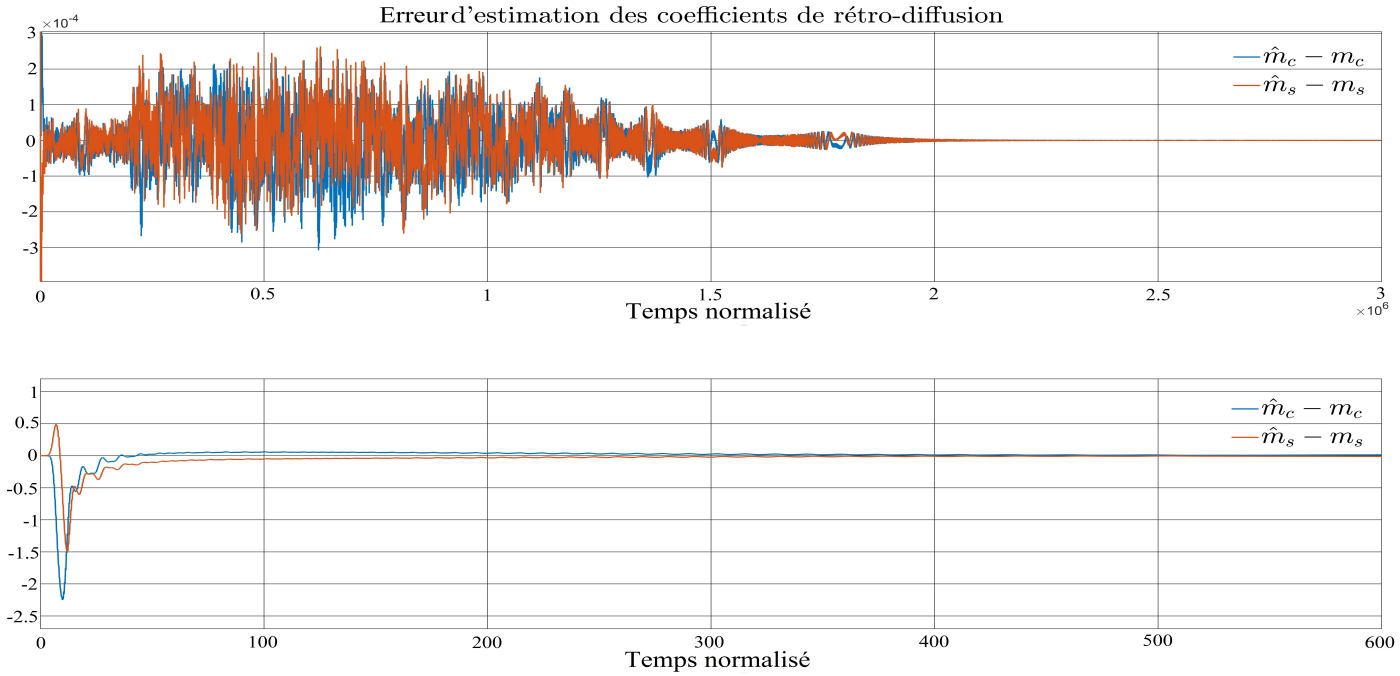


FIGURE 4.34 – L'erreur d'estimation des coefficients de rétro-diffusion (m_c, m_s). Fig du haut : l'erreur statique. Fig du bas : le transitoire de l'erreur.

On a une erreur statique de 3 10^{-4} ce qui correspond à une erreur relative de l'ordre de 100%. La sortie de l'estimateur ne peut être exploitée pour mesurer les coefficients de rétro-diffusion dans ce cas.

Dans la réalité, certains des paramètres à estimer varient avec le temps. En ce qui concerne les coefficients de rétro-diffusion et l'amplitude de l'activation mécanique, cela ne pose pas de réel problème car ils ne varient que légèrement et lentement à travers le temps. La problématique provient de la vitesse de rotation, sur laquelle nous n'avons aucun contrôle. Si la vitesse de rotation varie rapidement, le point d'équilibre de l'estimateur varie tout aussi vite et cela a tendance à considérablement dégrader les performances de l'estimateur. Cela restreint son utilisation au cadre de la calibration dans le procédé de fabrication ou dans le cadre de mesure statique de haute précision.

Ce constat permet de mettre en évidence un des principaux avantages de l'algorithme (4.19) (développé dans la section précédente), il n'estime pas Ω. En effet, l'utilisation exclusive des intensités permet de reporter totalement l'influence de la vitesse de rotation sur les mesures. Cela qui implique que son point d'équilibre ne dépend pas de Ω, il peut être utilisé dans le cas d'une vitesse de rotation qui varie.

4.3 Conclusion

L'application de la théorie de l'estimation temps-réel permet d'obtenir en simulation des résultats très probants. En effet, grâce à la compensation des imperfections des miroirs, nous avons montré comment augmenter notablement la précision des gyroscopes, sans imposer de modifications sur le produit. Un simple traitement numérique, pouvant être implémenté sur un FPGA, devrait permettre l'utilisation de miroirs de moindres qualités et donc de moindres coûts et ce, sans changer les performances du gyroscope. De plus, avoir un accès en ligne des coefficients de rétro-diffusion devrait permettre aussi une simplification de l'étape d'alignement des miroirs dans le procédé de fabrication des gyroscopes. Les premiers essais confidentiels sur des données réelles montrent déjà une estimation robuste des paramètres d'imperfection liés aux miroirs.

Conclusion

Après avoir effectué une introduction succincte de l'effet Sagnac, nous avons présenté le dispositif qui tire partie de ce phénomène physique afin d'obtenir un excellent capteur de rotation inertielle, à savoir les gyroscopes laser à gaz He-Ne. Leur principe de fonctionnement théorique peut sembler simple mais, comme souvent, la confrontation avec la réalité rend leur mise en application concrète beaucoup plus compliquée. La problématique majeure vient de l'imperfection des miroirs qui forment la cavité optique dans laquelle circule les deux faisceaux laser. Cette imperfection génère des effets non linéaires qui limitent la précision du gyroscope. La solution communément adoptée dans l'industrie est de mettre en vibration le gyroscope dans le but de réduire l'influence de ces imperfections, ce qui a pour effet d'augmenter la précision du gyroscope au prix d'une réduction de sa bande passante.

Nous nous sommes intéressés par la suite à la modélisation de la dynamique des différentes grandeurs intervenant dans la cavité d'un gyroscope. Après avoir décrit les phénomènes à l'origine de l'émission Laser dans le cas simple d'une cavité linéaire, nous avons présenté les raisonnements et hypothèses permettant de conclure sur une modélisation des champs des deux faisceaux laser dans la cavité circulaire qui forme le gyroscope. Les temps caractéristiques de l'évolution de la polarisation et du milieu à gain étant très petits quand ils sont comparés à celui de l'amplitude des champs électromagnétiques, un calcul de perturbation singulière permet de valider mathématiquement l'approximation communément effectuée par la communauté des physiciens. Puis, l'influence des différents phénomènes parasites, comme l'imperfection des miroirs et la cross-saturation, est étudiée ce qui nous permet d'obtenir un modèle de référence fiable pour nos travaux, aussi appelé équations de Lamb. Ces équations décrivent l'évolution des intensités des deux faisceaux contrarotatifs dans la cavité, ainsi que leur différence de phases.

Ensuite, nous avons adopté une approche mathématique afin d'étudier ces équations d'un point de vu "théorie des systèmes". On démontre que le point d'équilibre bi-directionnel des intensités, nécessaire à la mesure de la différence de phases, est exponentiellement stable sur un large domaine dans le cas où les miroirs sont parfaits. Ce résultat prouve que la contribution de l'imperfection des miroirs est minime sur le comportement des intensités, ce qui nous permet d'approximer leur dynamique par un développement de Taylor autour du point d'équilibre stable. Cette approximation nous a servi de modèle de design pour la synthèse d'un estimateur dans la suite. Ce chapitre est conclu par une étude de la différence de phases où l'on met en évidence, via une étude d'observabilité, la limitation sur la précision du gyroscope qu'induisent les imperfections des miroirs.

A partir du modèle de design, qui est linéaire par rapport aux paramètres à estimer, nous avons synthétisé un estimateur, basé sur les moindres carrés récursifs, en vue d'effectuer un suivi temps-réel des imperfections des miroirs et ainsi, compenser leur contribution sur la différence de phases. Cette approche, validée par une preuve de convergence de l'estimateur et

des simulations, a permis d'augmenter notablement la précision du gyroscope sans impacter sa bande passante. Après avoir tiré profit de la dynamique des intensités, on conclut ce manuscrit par une présentation de ce qu'il est possible de faire en exploitant uniquement la mesure de la phase relative : même si théoriquement, il est possible d'obtenir une estimation directe de la vitesse de rotation, cette estimation reste très sensible au fait que l'on suppose ici que la vitesse de rotation reste constante.

L'implémentation des résultats obtenus dans ce manuscrit sur des données de mesure réelles est en cours. Ces travaux sont effectués grâce aux nombreux efforts de l'équipe Thalès, à savoir M. Bertrand Morbieu et M. Gilles Feugnet et avec la collaboration généreuse de M. Fabien Bretenaker du Laboratoire Aimé Cotton. De nombreux défis ont émergé suite à notre confrontation à la réalité, en particulier la difficulté d'effectuer des mesures d'intensité sur un produit industriel qui n'est pas conçu pour cela. Les premiers calculs sur des données réelles ont été possibles très récemment. Ils montrent que l'estimation des paramètres des miroirs à partir des fluctuations des intensités est robuste et cohérente. La compensation sur la vitesse de rotation des imperfections des miroirs est en cours. Sur le moyen terme, notre contribution a pour ambition d'être implémentée sur le produit industriel, cela implique des simplifications supplémentaires des algorithmes afin de les rendre plus facilement implémentables sur un FPGA.

Le cumul des approches de différents corps académiques apporte un œil nouveau sur une technologie déjà très mature. Cette collaboration sera très certainement à l'origine de nouvelles solutions et améliorations visant à optimiser les performances des gyroscopes Laser, sachant que ce produit industriel est déjà considéré comme étant un des capteurs inertiels les plus fiables du marché.

Annexe A

Towards a solid state ring laser gyroscope

C. R. Physique 15 (2014) 841–850

Contents lists available at ScienceDirect

Comptes Rendus Physique

www.sciencedirect.com

The Sagnac effect: 100 years later / L'effet Sagnac : 100 ans après

Towards a solid-state ring laser gyroscope

Vers un gyrolaser à état solide

Noad El Badaoui [a,b], Bertrand Morbieu [a], Philippe Martin [b], Pierre Rouchon [b], Jean-Paul Pocholle [c], François Gutty [c], Gilles Feugnet [c], Sylvain Schwartz [c,*]

[a] *Thales Avionics, 40, rue de la Brelandière, BP 128, 86101 Châtellerault, France*
[b] *Centre Automatique et Systèmes, Mines ParisTech, PSL Research University, 60, boulevard Saint-Michel, 75272 Paris cedex 06, France*
[c] *Thales Research and Technology France, Campus Polytechnique, 1, avenue Augustin Fresnel, 91767 Palaiseau, France*

ARTICLE INFO

Article history:
Available online 30 October 2014

Keywords:
Ring laser gyroscope
Solid-state laser
Sagnac effect

ABSTRACT

In this paper, we report our recent progress towards a solid-state ring laser gyroscope (RLG), where mode competition is circumvented by active control of differential losses, and nonlinear effects are mitigated by longitudinal vibration of the gain medium. The resulting dynamics is significantly different from that of a classical helium–neon RLG, owing in particular to parametric resonances that occur when the Sagnac frequency is an integer multiple of the crystal vibration frequency. We describe the main experimental and theoretical results obtained so far, and the prospects of practical applications in the near future.

Published by Elsevier Masson SAS on behalf of Académie des sciences.

RÉSUMÉ

Nous décrivons dans cet article nos récents progrès vers la réalisation d'un gyrolaser à état solide. Dans ce dispositif, le problème de la compétition entre modes est résolu par un contrôle actif des pertes différentielles, et les effets non linéaires sont fortement atténués par la mise en vibration du milieu à gain. La dynamique d'un tel système est significativement différente de celle d'un gyrolaser à hélium–néon classique, en particulier à cause des résonances paramétriques qui surviennent lorsque la fréquence Sagnac est un multiple entier de la fréquence de vibration du cristal. Nous décrivons les principaux résultats expérimentaux et théoriques obtenus jusqu'ici et discutons les perspectives d'applications pratiques à court et moyen termes.

Published by Elsevier Masson SAS on behalf of Académie des sciences.

1. Introduction

A century after Sagnac pioneering experiments [1,2] and more than fifty years after the first demonstration of a ring laser gyroscope by Macek and Davis [3], optical rotation sensing is still a remarkably active field of research. It includes integrated

* Corresponding author.
E-mail address: sylvain.schwartz@thalesgroup.com (S. Schwartz).

http://dx.doi.org/10.1016/j.crhy.2014.10.008
1631-0705/Published by Elsevier Masson SAS on behalf of Académie des sciences.

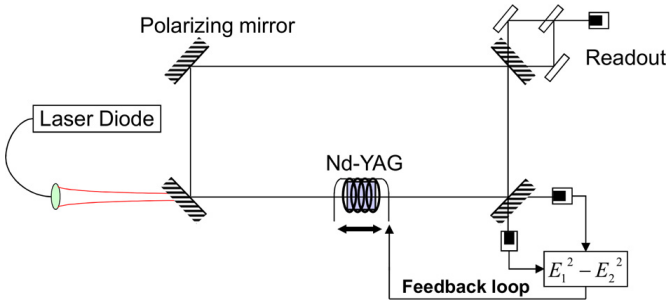


Fig. 1. Basic principle of the solid-state ring laser gyroscope. The double arrow relates to the vibration of the Nd–YAG crystal, which will be discussed in Sections 3 and 4. (Color online.)

optics [4–6], slow and fast light [7–14], hollow core fibers [15–17] and large instruments for fundamental science [18–21]. From an industry perspective, two solutions have emerged and are routinely used for guidance, navigation and control: the ring laser gyroscope (RLG) [22] and the interferometric fiber-optic gyroscope (IFOG) [23]. Although the two devices can be shown to be equivalent in theory (in the sense that they have the same shot-noise limit for equal size and optical power, under the additional hypothesis that the number of fiber turns in the IFOG is equal to the finesse of the cavity in the RLG [24,14]), they differ by their practical implementation: the IFOG is shot-noise limited, but more sensitive to external perturbations (especially time-dependent temperature gradients [25]), while the RLG is more robust to its environment, but has an additional source of noise resulting from mechanical dither (which is the best known solution so far to circumvent the lock-in phenomenon [26,27]).

A key requirement common to all kinds of optical gyroscopes is reciprocity, which means that the two counter-propagating beams must share the same optical path, in order to make the variations of the latter common-mode. For the RLG, which is an active device, this implies that the two counter-propagating modes must also share the same gain medium, and are thus subject to mode competition, which tends to hinder bidirectional emission. This problem is classically solved by using a gaseous gain medium for the RLG, typically a helium–neon mixture. The trick is to tune the cavity out of resonance with the atoms at rest, such that the two counter-propagating modes are resonant, owing to the Doppler effect, with two different classes of atoms (corresponding to opposite classes of velocity), ensuring stable bidirectional emission. From a practical point of view, it would be a strong asset to be able to replace the gaseous mixture with a solid-state component, taking advantage of the recent progress in cost reduction, lifetime and reliability driven by markets much bigger than inertial sensing. In this case, however, the Doppler trick cannot be used anymore, and one has to implement new techniques to circumvent mode competition and nonlinear couplings.

In this manuscript, we report our recent progress towards the achievement of a diode-pumped neodymium-doped yttrium aluminium garnet (Nd–YAG) RLG. We will first describe the technique of active control of the differential losses that we have implemented on this device, enabling bidirectional emission and rotation sensing. We will then discuss the nonlinearity of the resulting frequency response curve, which is mostly due to the existence of a population inversion grating in the amplifying medium. Based on theoretical predictions from a semiclassical model and on experimental results, we will show how the grating can be washed out by vibrating the gain crystal along the laser axis, significantly improving the linearity of the frequency response. We will also describe the residual nonlinearities, due for the most part to a parametric resonance between the Sagnac frequency and the crystal vibration frequency. Finally, we will discuss the expected performance of this novel rotation sensor, and prospects for future applications.

2. Circumventing mode competition in the solid-state ring laser

Our basic setup is sketched in Fig. 1. It is made of a four-mirror ring cavity, containing a diode-pumped Nd–YAG crystal as the gain medium. The readout system combines the beams emitted from the two counter-propagating modes to form a beat signal on a photodiode.

The issue of mode competition is addressed by an active control of the differential losses between the counter-propagating modes [28–30]. The basic idea is to measure independently the intensity of the two beams, and to make the differential losses proportional to the intensity difference using a feedback loop, with the appropriate sign such that the more intense mode gets the higher losses at any time. In practice, the differential losses are created by polarization effects, based on the combination of a nonreciprocal rotation (obtained by Faraday effect in the YAG crystal placed inside a solenoid), a reciprocal rotation (obtained by a slight non-planarity of the cavity) and a polarizing effect (obtained by an appropriate coating on one of the mirrors). The amount of differential losses is proportional (in the limit of small rotations) to the current flowing in the solenoid, which is controlled by the feedback loop as described above.

The experimental frequency response curve of the solid-state ring laser with active stabilization of the differential losses is shown in Fig. 2. Below a critical rotation rate on the order of 10 deg/s, nonlinear couplings in the gain medium dominate and no stable signal is observed. Above this critical rotation rate, the feedback loop becomes efficient and a stable beat signal is obtained. As can be seen in Fig. 2, the frequency response curve of the solid-state RLG is nonlinear, with an upwards deviation from the ideal Sagnac line. The main reason for this nonlinearity is the presence of a population inversion grating

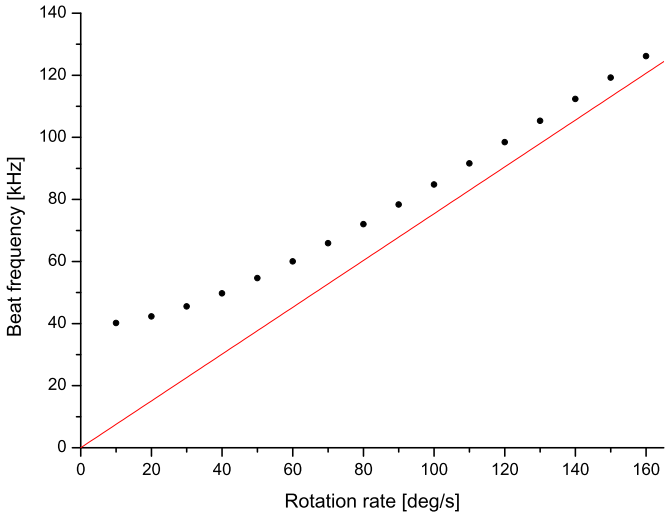


Fig. 2. Typical (experimental) frequency response of the solid-state ring laser gyroscope without crystal vibration. (Color online.)

in the gain medium [30], which couples the two counter-propagating modes. This grating results from the inhomogeneous saturation of the gain by the interfering counter-propagating modes. Its effect on the frequency response decreases for increasing rotation rates, because it becomes more and more difficult for the population inversion density, which has a finite response time (about 230 µs in our case), to follow the variations of the light pattern.

Based on the latter observation, we have introduced in the laser cavity a mechanical device to vibrate the gain crystal along the light propagation axis [31], with a view to washing out the population inversion grating. As will be discussed in the following, this can significantly improve the linearity of the frequency response curve at low rotation rates provided the appropriate choice of experimental parameters is made. This requires a careful description of the laser dynamics including crystal vibration [32], which will be presented in the next sections.

3. Semiclassical description of the solid-state RLG with crystal vibration

In order to describe the electric field inside the ring cavity, we assume that there is only one laser mode in each direction of propagation, something which is experimentally obtained owing to crystal vibration, which counteracts spatial hole burning effects [33,34]. We furthermore assume that the two modes have the same polarization state. This eventually leads, in the plane wave approximation, to the following expression for the electric field:

$$E(x,t) = \Re\left[\sum_{p=1}^{2} \tilde{E}_p(t) \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_c t + \mu_p k x)}\right]$$

where $\mu_p = (-1)^p$ and where ω_c and k are respectively the angular and spatial average frequencies of the laser, whose longitudinal axis is associated with the x coordinate. The dynamics of the solid-state RLG is then ruled, in the rotating wave approximation, by the following semiclassical equations [35]:

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{E}_{1,2}}{\mathrm{d}t} = -\frac{\gamma_{1,2}}{2}\tilde{E}_{1,2} + \mathrm{i}\frac{\tilde{m}_{1,2}}{2}\tilde{E}_{2,1} - \mathrm{i}\mu_{1,2}\frac{\Omega}{2}\tilde{E}_{1,2} + \frac{\sigma}{2T}\left(\tilde{E}_{1,2}\int_0^l N_c\,\mathrm{d}x + \tilde{E}_{2,1}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}kx_c}\int_0^l N_c \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\mu_{1,2}kx}\,\mathrm{d}x\right) \tag{1}$$

where $\gamma_{1,2}$ are the cavity losses associated with the counter-propagating modes, $\tilde{m}_{1,2}$ are the backscattering coefficients, Ω is the (angular) frequency difference between the counter-propagating modes, σ is the laser cross section, T is the cavity round-trip time, l is the size of the gain medium, N_c is the population inversion density in the frame of the vibrating crystal and x_c is the coordinate (in the laser frame) of a fixed point attached to the crystal, given by:

$$x_c = \frac{x_m}{2}\cos(2\pi f_m t) \tag{2}$$

where x_m is the amplitude of the movement and $f_m = \omega_m/(2\pi)$ its frequency. The backscattering coefficients, which depend on the spatial inhomogeneities of the propagation medium, have the following expression [35]:

$$\tilde{m}_{1,2}(t) = \tilde{m}_{1,2}^{c}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\mu_{1,2}kx_c(t)} + \tilde{m}_{1,2}^{m} \tag{3}$$

where $\tilde{m}_{1,2}^{c}$ is the backscattering coefficient associated with the diffusion inside the YAG crystal, and $\tilde{m}_{1,2}^{m}$ is the backscattering coefficient associated with any other source of diffusion inside the laser cavity, essentially the mirrors. The stabilizing coupling described in the previous section is modelled (neglecting finite-bandwidth effects) by taking losses of the form:

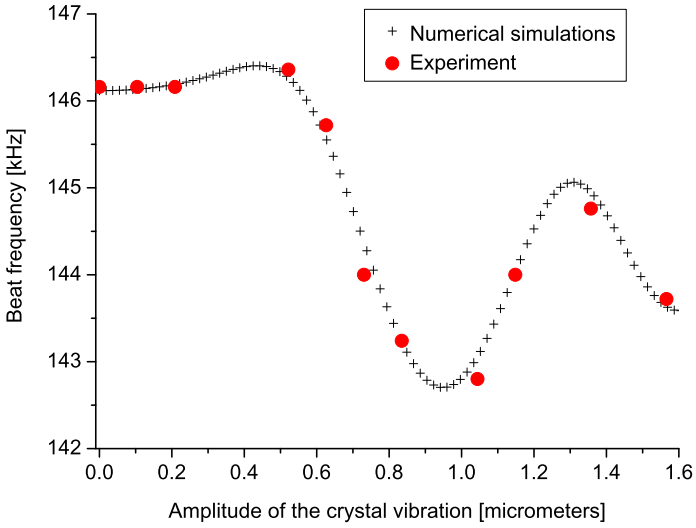


Fig. 3. Beat frequency as a function of the amplitude of the crystal movement for $\dot{\theta} = 200$ deg/s with the crystal vibrating at $f_m \simeq 40$ kHz. The experimental data (red circles) are in good agreement with numerical simulations (black crosses) obtained using the following measured parameters [38]: $\gamma = 15.34\ 10^6\ s^{-1}$, $\eta = 0.21$, $|\tilde{m}^c_{1,2}| = 1.5\ 10^4\ s^{-1}$, $|\tilde{m}^m_{1,2}| = 8.5\ 10^4\ s^{-1}$, $\arg(\tilde{m}^c_1/\tilde{m}^c_2) = \arg(\tilde{m}^m_1/\tilde{m}^m_2) = \pi/17$, $K = 10^7\ s^{-1}$. Integration step is 0.1 μs, average values are computed between 8 and 10 ms. (Color online.)

$$\gamma_{1,2} = \gamma - \mu_{1,2} K a\left(|\tilde{E}_1|^2 - |\tilde{E}_2|^2\right) \tag{4}$$

where γ is the average loss coefficient, $K > 0$ represents the strength of the stabilizing coupling and a is the saturation parameter. The population inversion density function in the frame of the vibrating crystal $N_c(x,t)$ is ruled by the following equation:

$$\frac{\partial N_c}{\partial t} = W_{th}(1+\eta) - \frac{N_c}{T_1} - \frac{a N_c |\tilde{E}_1 e^{-ik(x+x_c)} + \tilde{E}_2 e^{ik(x+x_c)}|^2}{T_1} \tag{5}$$

where η is the relative excess of pumping power above the threshold value W_{th} and T_1 is the lifetime of the population inversion. The difference Ω between the eigenfrequencies of the counter-propagating modes is induced by the combined effects of rotation (Sagnac effect [36]) and crystal vibration (Fresnel–Fizeau drag effect [37]), resulting in the following expression:

$$\Omega = \Omega_s - \frac{4\pi \dot{x}_c(t) l_c (n^2 - 1)}{\lambda L} \tag{6}$$

where $\Omega_s = 8\pi A\dot{\theta}/(\lambda L)$ is the Sagnac angular frequency, A is the area enclosed by the ring cavity, L is the (optical) length of the cavity, $\dot{\theta}$ is the angular velocity of the cavity around its axis, $\lambda = 2\pi c/\omega_c$ is the emission wavelength, and l_c and n are respectively the length and the refractive index of the crystal. In Eq. (6), we have neglected the effect of dispersion in the YAG crystal, which is much smaller than the Fresnel–Fizeau drag effect in our case.

To summarize, the dynamics of the solid-state RLG with crystal vibration is described by Eqs. (1), in conjunction with Eqs. (2), (3), (4), (5) and (6). Of course, this model is too complex to be solved analytically. However, it can be integrated numerically with realistic laser parameters, providing a good agreement with the experimental results. This is illustrated by the data shown in Fig. 3, where the beat frequency is plotted as a function of the amplitude of the crystal vibration x_m for $f_m \simeq 40$ kHz. The experimental frequency response curve has in this case a non-trivial shape, which is well reproduced by the numerical simulation.

4. Dynamics of the solid-state RLG with high-frequency crystal vibration

The linearity of the solid-state RLG can be significantly improved by making the crystal vibration frequency ω_m much bigger than all other frequencies involved in the laser dynamics, namely $|\Omega_s|$, $|\tilde{m}^m_{1,2}|$, $|\tilde{m}^c_{1,2}|$ and the relaxation frequency $\omega_r = \sqrt{\gamma\eta/T_1}$ [35], as will be discussed in this section.

4.1. Analytical derivation of the beat frequency in the limit of high rotation rates

In this subsection, we furthermore assume that the rotation rate is high enough for the following conditions to be fulfilled:

$$\omega_m > |\Omega_s| \gg \left|\tilde{m}^m_{1,2}\right|, \left|\tilde{m}^c_{1,2}\right|, \omega_r \tag{7}$$

In this case, the nonlinearity of the frequency response of the solid-state RLG can be analytically estimated. To do so, we first introduce N_0 and N_1, respectively the mean and first spatial harmonics of the population inversion density function $N_c(x,t)$, defined by:

$$N_0 = \frac{1}{l}\int_0^l N_c(x,t)\,dx \quad \text{and} \quad N_1 = \frac{1}{l}\int_0^l N_c(x,t)e^{2ikx}\,dx$$

If we furthermore assume that the pumping rate is close to the threshold value (i.e. $\eta \ll 1$), then we can rewrite Eqs. (1) and (5) as follows:

$$\begin{cases} \dfrac{d\tilde{E}_{1,2}}{dt} = \left(\dfrac{Z}{2}N_0 - \dfrac{\gamma_{1,2}}{2}\right)\tilde{E}_{1,2} + \dfrac{i\tilde{m}_{1,2}}{2}\tilde{E}_{2,1} - \dfrac{i\mu_{1,2}\Omega}{2}\tilde{E}_{1,2} + \dfrac{Z}{2}N_{1,2}e^{-2i\mu_{1,2}kx_c}\tilde{E}_{2,1} \\ \dfrac{dN_0}{dt} = W_{th}(1+\eta) - \dfrac{N_0}{T_1} - \dfrac{a}{2T_1}N_{th}\left(|\tilde{E}_1|^2 + |\tilde{E}_2|^2\right) \\ \dfrac{dN_1}{dt} = -\dfrac{N_1}{T_1} - \dfrac{a}{2T_1}N_{th}e^{-2ikx_c}\tilde{E}_1\tilde{E}_2^* \end{cases} \tag{8}$$

where $Z = \sigma l/T$, $N_2 = N_1^*$ and N_{th} is the value of N_0 at the laser threshold. It obeys the following relation:

$$W_{th} = \frac{N_{th}}{T_1} \simeq \frac{\gamma}{ZT_1} \tag{9}$$

where the contribution of backscattering has been neglected in the expression of N_{th}. We will now derive an approximation of this system using the mathematical theory of averaging over nonlinear dynamical systems [39,40]. For simplicity, we neglect the Fresnel–Fizeau term introduced in Eq. (6), such that $\Omega = \Omega_s$. Going into the rotating frame by setting:

$$\tilde{E}_1 = e^{i\Omega_s t/2}F_1 \quad \text{and} \quad \tilde{E}_2 = e^{-i\Omega_s t/2}F_2 \tag{10}$$

the system (8) becomes:

$$\begin{cases} \dfrac{dF_{1,2}}{dt} = \left(\dfrac{Z}{2}N_0 - \dfrac{\gamma_{1,2}}{2}\right)F_{1,2} + \dfrac{Z}{2}N_{1,2}e^{-i\mu_{1,2}kx_m\cos(\omega_m t)}e^{i\mu_{1,2}\Omega_s t}F_{2,1} + \dfrac{i}{2}\left[\tilde{m}_{1,2}^{\,m} + \tilde{m}_{1,2}^{\,c}e^{-i\mu_{1,2}kx_m\cos(\omega_m t)}\right]e^{i\mu_{1,2}\Omega_s t}F_{2,1} \\ \dfrac{dN_0}{dt} = W_{th}(1+\eta) - \dfrac{N_0}{T_1} - \dfrac{a}{2T_1}N_{th}\left(|F_1|^2 + |F_2|^2\right) \\ \dfrac{dN_1}{dt} = -\dfrac{N_1}{T_1} - \dfrac{a}{2T_1}N_{th}e^{-ikx_m\cos(\omega_m t)}e^{i\Omega_s t}F_1F_2^* \end{cases}$$

Using the classical series involving the Bessel functions J_n:

$$e^{ikx_m\cos(\omega_m t)} = J_0(kx_m) + \sum_{n=1}^{+\infty} i^n J_n(kx_m)\left(e^{in\omega_m t} + e^{-in\omega_m t}\right)$$

we can perform a first order averaging of the previous system of equations considering the fact that the frequencies $n\omega_m \pm \Omega_s$ are much larger than the other frequencies involved in the laser dynamics (see (7)). This provides the following model:

$$\begin{cases} \dfrac{d\bar{F}_{1,2}}{dt} = \left(\dfrac{Z}{2}\bar{N}_0 - \dfrac{\bar{\gamma}_{1,2}}{2}\right)\bar{F}_{1,2} \\ \dfrac{d\bar{N}_0}{dt} = W - \dfrac{\bar{N}_0}{T_1} - \dfrac{a}{2T_1}N_{th}\left(|\bar{F}_1|^2 + |\bar{F}_2|^2\right) \\ \dfrac{d\bar{N}_1}{dt} = -\dfrac{\bar{N}_1}{T_1} \end{cases} \tag{11}$$

leading to the following equilibrium values for the averaged parameters:

$$\bar{\gamma}_1 = \bar{\gamma}_2 = \gamma, \qquad a|F_1|^2 = a|F_2|^2 = \eta, \qquad \bar{N}_0 = \gamma/Z \quad \text{and} \quad \bar{N}_1 = 0 \tag{12}$$

Let us compute the second order correction for $(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{N}_0, \bar{N}_1)$ around the equilibrium of (11). The small fluctuations denoted with a δ around the average values (denoted with a bar) admit the following form:

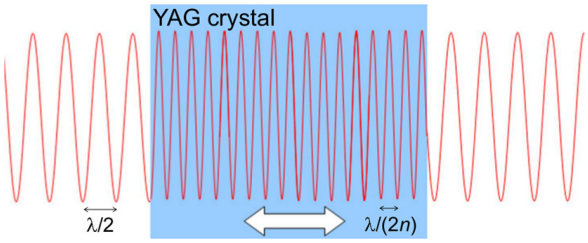


Fig. 4. Sketch of the optical standing wave inside and outside the YAG crystal. When the crystal is physically translated by $\lambda/2$, the relative position between the optical standing wave and a fixed point in the crystal is changed by $\lambda/(2n)$. (Color online.)

$$\delta F_1 = \frac{1}{2}\left[-\frac{\tilde{m}_1^{\mathrm{m}} + \tilde{m}_1^{\mathrm{c}} J_0(kx_{\mathrm{m}})}{\Omega_{\mathrm{s}}} + \mathrm{i}\tilde{m}_1^{\mathrm{c}} J_1(kx_{\mathrm{m}})\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{\mathrm{m}}t}}{\omega_{\mathrm{m}} - \Omega_{\mathrm{s}}} - \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_{\mathrm{m}}t}}{\omega_{\mathrm{m}} + \Omega_{\mathrm{s}}}\right)\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Omega_{\mathrm{s}}t}\bar{F}_2$$

$$\delta F_2 = \frac{1}{2}\left[\frac{\tilde{m}_2^{\mathrm{m}} + \tilde{m}_2^{\mathrm{c}} J_0(kx_{\mathrm{m}})}{\Omega_{\mathrm{s}}} - \mathrm{i}\tilde{m}_2^{\mathrm{c}} J_1(kx_{\mathrm{m}})\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{\mathrm{m}}t}}{\omega_{\mathrm{m}} + \Omega_{\mathrm{s}}} - \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_{\mathrm{m}}t}}{\omega_{\mathrm{m}} - \Omega_{\mathrm{s}}}\right)\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Omega_{\mathrm{s}}t}\bar{F}_1$$

$$\delta N_0 = 0$$

$$\delta N_1 = \mathrm{i}\frac{a\gamma}{2ZT_1}\left[\frac{J_0(kx_{\mathrm{m}})}{\Omega_{\mathrm{s}}} - \mathrm{i}J_1(kx_{\mathrm{m}})\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{\mathrm{m}}t}}{\omega_{\mathrm{m}} + \Omega_{\mathrm{s}}} - \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_{\mathrm{m}}t}}{\omega_{\mathrm{m}} - \Omega_{\mathrm{s}}}\right)\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Omega_{\mathrm{s}}t}\bar{F}_1\bar{F}_2^*$$

where we have neglected the J_n terms with $n \geq 2$ for simplicity. In order to compute the second-order approximation, we replace (F_1, F_2, N_0, N_1) by their first-order value $(\bar{F}_1 + \delta F_1, \bar{F}_2 + \delta F_2, \bar{N}_0 + \delta N_0, \bar{N}_1 + \delta N_1)$ in the second members of differential equations (11), and re-average the fast-oscillating terms. The second order approximation eventually leads to:

$$\frac{\mathrm{d}\bar{F}_{1,2}}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{Z\bar{N}_0 - \bar{\gamma}_{1,2}}{2} + \mathrm{i}\Delta_{1,2}\right)\bar{F}_{1,2} \tag{13}$$

where:

$$\Delta_1 - \Delta_2 = \frac{\gamma\eta}{2T_1}\left[\frac{J_0^2(kx_{\mathrm{m}})}{\Omega_{\mathrm{s}}} + \frac{2\Omega_{\mathrm{s}} J_1^2(kx_{\mathrm{m}})}{\Omega_{\mathrm{s}}^2 - \omega_{\mathrm{m}}^2}\right] + \frac{\tilde{m}_1^{\mathrm{c}}\tilde{m}_2^{\mathrm{c}}}{2\Omega_{\mathrm{s}}} J_0^2(kx_{\mathrm{m}}) + \frac{\tilde{m}_1^{\mathrm{m}}\tilde{m}_2^{\mathrm{m}}}{2\Omega_{\mathrm{s}}} + \frac{\tilde{m}_1^{\mathrm{c}}\tilde{m}_2^{\mathrm{m}} + \tilde{m}_1^{\mathrm{m}}\tilde{m}_2^{\mathrm{c}}}{2\Omega_{\mathrm{s}}} J_0(kx_{\mathrm{m}}) + \frac{\tilde{m}_1^{\mathrm{c}}\tilde{m}_2^{\mathrm{c}}\Omega_{\mathrm{s}} J_1^2(kx_{\mathrm{m}})}{\Omega_{\mathrm{s}}^2 - \omega_{\mathrm{m}}^2} \tag{14}$$

The measured (angular) beat frequency Ω_{beat} is defined in this formalism by the time average of $\arg(\tilde{E}_1/\tilde{E}_2)$. Based on Eqs. (10) and (13), it is equal to $\Omega_{\mathrm{beat}} = \Omega_{\mathrm{s}} + \Re(\Delta_1 - \Delta_2)$, where $\Delta_1 - \Delta_2$ is given by Eq. (14).

4.2. Physical interpretation and comparison with experiment

In a first approximation, we neglect the J_1 terms and keep only the dominant backscattering term $\tilde{m}_1^{\mathrm{c}}\tilde{m}_2^{\mathrm{c}}$ in Eq. (14), leading to:

$$\Omega_{\mathrm{beat}} \simeq \Omega_{\mathrm{s}} + \frac{\gamma\eta}{2\Omega_{\mathrm{s}}T_1} J_0^2(kx_{\mathrm{m}}) + \frac{\Re(\tilde{m}_1^{\mathrm{c}}\tilde{m}_2^{\mathrm{c}})}{2\Omega_{\mathrm{s}}} J_0^2(kx_{\mathrm{m}}) \tag{15}$$

Physically, the first correcting term is due to the residual effect of the population inversion grating, which goes to zero either for very high rotation rates or for a set of discrete values of the vibration amplitude corresponding to $J_0(kx_{\mathrm{m}}) = 0$. The second correcting term, resulting from backscattering in the crystal, is also reduced by crystal vibration, owing to the Doppler effect, which makes the backscattered light from one mode non-resonant anymore with the counter-propagating mode. The two effects go simultaneously to zero when $J_0(kx_{\mathrm{m}}) = 0$, corresponding to the situation where all the ions of the gain medium see on average the same intensity. The smallest value of x_{m} for which this happens is $kx_{\mathrm{m}} \simeq 2.405$, where $k = 2\pi/\lambda$ is the wavevector outside the YAG crystal, and shall not be confused in this context with its counterpart inside the YAG crystal $k_{\mathrm{c}} = n2\pi/\lambda$, as illustrated in Fig. 4. With $\lambda = 1.064$ µm, this leads to the following requirement on the vibration amplitude: $x_{\mathrm{m}} \simeq 0.41$ µm, which we typically achieve in practice using a resonant mechanical device excited by a piezoelectric ceramic.

The J_0^2 shape of the frequency response curve predicted in Eq. (15) is experimentally observed in Fig. 5, where the beat frequency is measured as a function of the amplitude of the crystal vibration for a fixed rotation rate of 55 deg/s and a crystal vibration frequency of $f_{\mathrm{m}} \simeq 168$ kHz. This curve provides an experimental signal to tune the vibration amplitude such that $J_0(kx_{\mathrm{m}}) = 0$.

When the latter condition is fulfilled, the frequency response curve of the solid-state RLG gets much closer to the ideal Sagnac line for $|\Omega_{\mathrm{s}}| \ll \omega_{\mathrm{m}}$, as illustrated in Fig. 6. Conversely, when the Sagnac frequency approaches the crystal

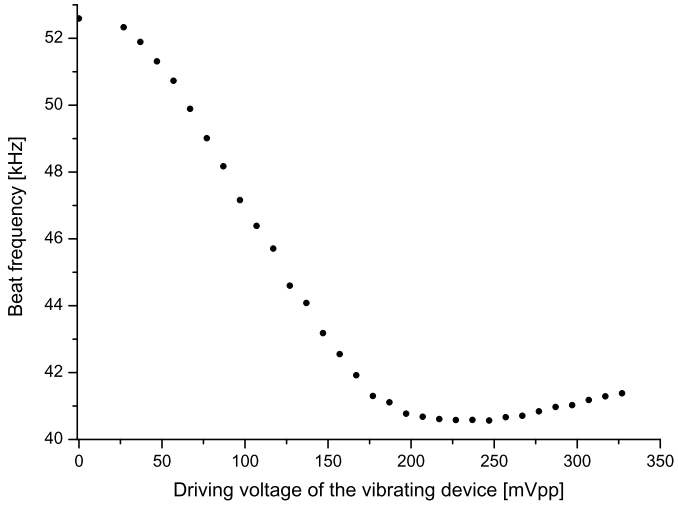


Fig. 5. Measured beat frequency as a function of the driving voltage of the vibrating device for $\dot{\theta} = 55$ deg/s, with the crystal vibrating at $f_m \simeq 168$ kHz. The driving voltage is proportional to the amplitude of the vibration up to $\simeq 250$ mV peak-to-peak (beyond this point, saturation occurs). The point where the curve is minimum corresponds to $J_0(kx_m) = 0$, hence $x_m \simeq 0.41$ µm.

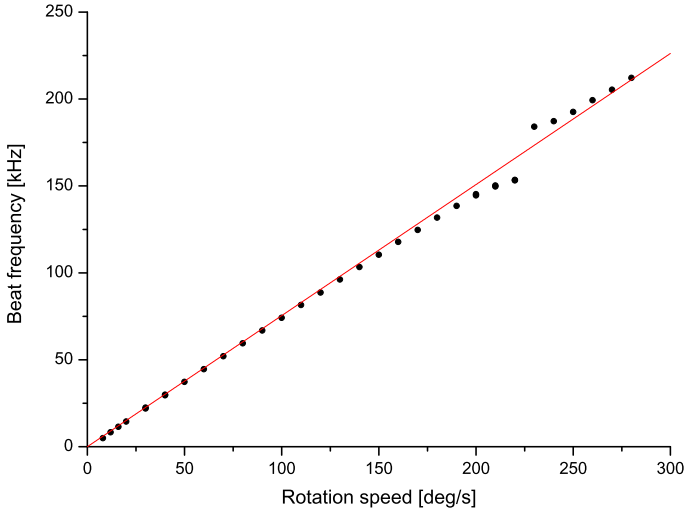


Fig. 6. Experimental frequency response of the solid-state ring laser gyroscope with $J_0(kx_m) = 0$ and $f_m \simeq 168$ kHz. A phenomenon of parametric resonance is observed when the Sagnac frequency approaches the crystal vibration frequency. (Color online.)

vibration frequency, the nonlinearity of the frequency response significantly increases. To give a quantitative estimate of this parametric resonance phenomenon, we include the J_1 terms in Eq. (14) while setting the J_0 terms to zero, leading to:

$$\Omega_{\text{beat}} \simeq \Omega_s + \frac{\gamma\eta\Omega_s J_1^2(kx_m)}{T_1(\Omega_s^2 - \omega_m^2)} + \frac{\Re(\tilde{m}_1{}^m \tilde{m}_2{}^m)}{2\Omega_s} + \frac{\Re(\tilde{m}_1{}^c \tilde{m}_2{}^c)\Omega_s J_1^2(kx_m)}{\Omega_s^2 - \omega_m^2} \tag{16}$$

Since the value of kx_m is deliberately chosen to be equal to the first zero of the J_0 function, the J_1 term becomes the dominant nonlinearity, with $J_1^2(kx_m) \simeq 0.27$. Eq. (16) is in good agreement with experimental data, as reported in Fig. 7, where the beat frequency is measured as a function of the pumping rate. The experimentally measured slope is -3.7 kHz, while the theoretical estimate from Eq. (16) leads to $-\gamma J_1^2(kx_m)\Omega_s/[2\pi T_1(\omega_m^2 - \Omega_s^2)] \simeq -3.6$ kHz (where we have used the following parameters: $\gamma = 15.34\ 10^6\ \text{s}^{-1}$, $\Omega_s/(2\pi) \simeq 117.3$ kHz, $T_1 = 230$ µs and $\omega_m/(2\pi) \simeq 168$ kHz).

Keeping only the leading order in the small quantity Ω_s/ω_m, the frequency shift induced by the parametric resonance described above can be rewritten as $-J_1^2(kx_m)[\omega_r/\omega_m]^2\Omega_s$. In terms of gyroscope performance, this corresponds to a scale-factor nonlinearity, which is typically (with $\omega_r/(2\pi) \simeq 20$ kHz) on the order of 3×10^{-3}. With this parameters, this means in particular that the pumping rate η has to be controlled at the 10^{-3} level in order to make the scale factor stable at the ppm level. A similar control on the amplitude of the crystal vibration x_m is also required for the same reason. One way to relax the latter constraint would be to increase the vibration frequency f_m beyond its actual value of 168 kHz.

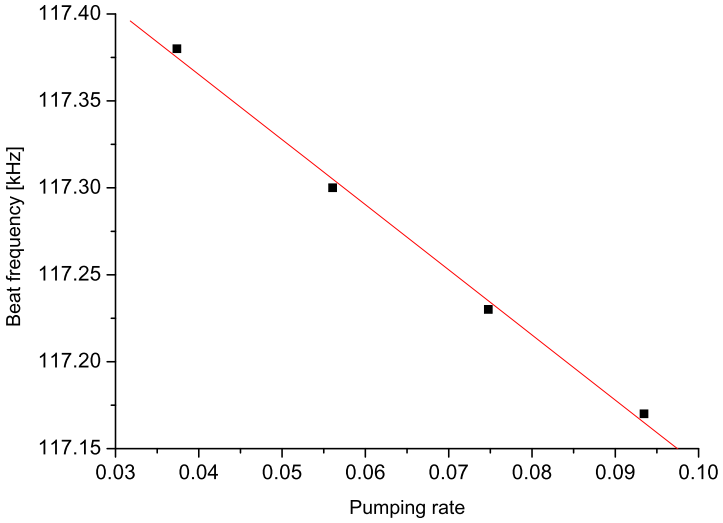


Fig. 7. Experimental frequency response of the solid-state ring laser gyroscope as a function of the pumping rate, with $J_0(kx_m) = 0$, $f_m \simeq 168$ kHz and $\dot{\theta} = 160$ deg/s. The measured slope is in good agreement with analytical predictions (Eq. (16)). (Color online.)

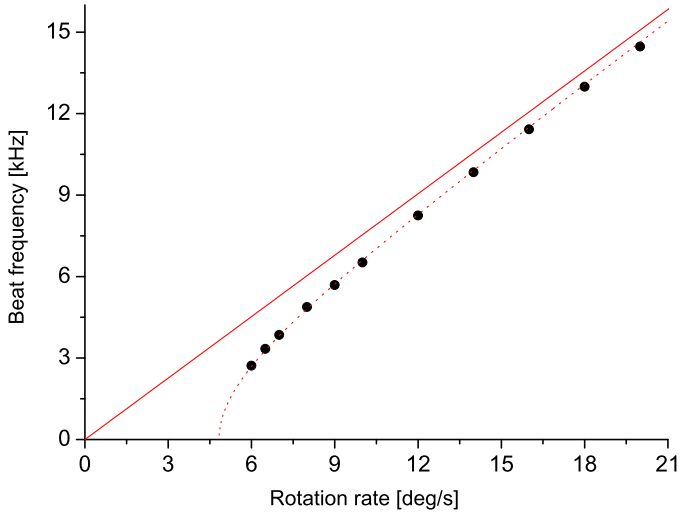


Fig. 8. Experimental frequency response of the solid-state ring laser gyroscope at low rotation rates, with $J_0(kx_m) = 0$ and $f_m \simeq 168$ kHz. The dashed line is a fit of the experimental data by the typical frequency response curve of a helium–neon RLG [27]. (Color online.)

4.3. Case of low rotation rates

When the condition $J_0(kx_m) = 0$ is fulfilled, the nonlinearity of the frequency response curve is significantly reduced, and the deviation from the ideal Sagnac line at low rotation rates is downwards, as illustrated in Fig. 8. It is a remarkable fact that the shape of this frequency response curve is now similar to what would be expected from a helium–neon RLG, where the dominant coupling source is (linear) backscattering on the cavity mirrors. This similarity is confirmed by the numerical simulations shown in Fig. 9, where the frequency response curve of a high-performance helium–neon RLG is shown to be identical to that of a solid-state RLG with the same mirror backscattering coefficients $\tilde{m}_{1,2}^{m}$. Further numerical simulations [32] including mechanical dither also show that the two devices are expected to have the same level of angular random walk if identical mirrors are used. In other words, everything happens at low rotation rates as if all sources of nonlinear coupling from the Nd–YAG crystal were effectively suppressed by the crystal vibration.

5. Conclusion

The ultimate level of performance that can be expected from the solid-state RLG (in addition to the scale factor effect outlined in the previous section) is discussed in Ref. [41]. As already mentioned, the angular random walk resulting from mechanical dither is expected to be the same as for a helium–neon RLG, provided mirrors of equivalent quality are used. The Schawlow–Townes limit [42] should be slightly higher in the case of the solid-state RLG because the finesse of the cavity is a little bit lower, although this will be partly compensated by the possibility to use more power thanks to the high gain in the Nd–YAG crystal. In total, the solid-state RLG should be able to reach the 10^{-3} deg/$\sqrt{\text{h}}$ range. As regards the

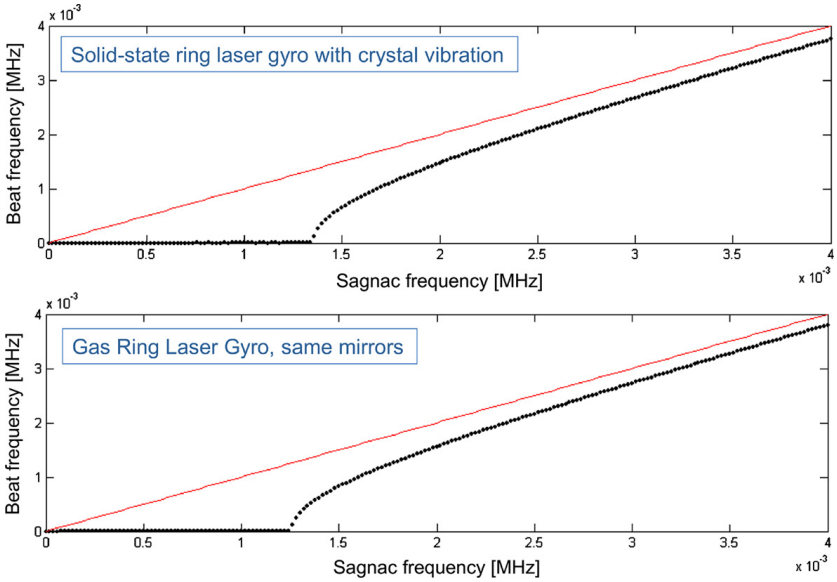


Fig. 9. Up: simulated frequency response curve of a solid-state RLG with crystal vibration at $f_{\mathrm{m}} \simeq 168$ kHz and $J_0(kx_{\mathrm{m}}) = 0$. All parameter values are taken from experimental measurements [38], except the mirror backscattering coefficients $\tilde{m}^{\mathrm{m}}_{1,2}$, which have the typical value of a high-performance helium–neon RLG. Low: simulated frequency response curve of a high-performance helium–neon RLG (obtained by numerical integration of the Adler equation [27] with the same value of $\tilde{m}^{m}_{1,2}$ as for the upper curve). (Color online.)

ultimate bias stability, it is predicted to lay in the 10^{-2} deg/h range if the current flowing out of the feedback loop can be measured at the 10^{-3} level [41]. As discussed in this paper, the same precision will be required on the pumping rate and crystal vibration amplitude to reach the ppm level on the stability of the scale factor.

Experimental work is still ongoing at Thales to raise the Technology Readiness Level of the solid-state RLG (in particular by using high-quality mirrors at 1.064 µm and by improving the stability of the control electronics). Beyond industrial applications, this technology could also be an interesting platform to test more advanced schemes of rotation sensing, involving for example anomalous dispersion [14].

References

[1] G. Sagnac, L'éther lumineux démontré par l'effet du vent relatif d'éther dans un interféromètre en rotation uniforme, C. R. Acad. Sci. Paris 95 (1913) 708.
[2] G. Sagnac, Sur la preuve de la réalité de l'éther lumineux par l'expérience de l'interférographe tournant, C. R. Acad. Sci. Paris 95 (1913) 1410.
[3] W. Macek, D. Davis, Rotation rate sensing with traveling-wave ring lasers, Appl. Phys. Lett. 2 (3) (1963) 67.
[4] C. Ciminelli, F. Dell'Olio, C.E. Campanella, M.N. Armenise, Photonic technologies for angular velocity sensing, Adv. Opt. Photonics 2 (3) (2010) 370.
[5] H. Ma, Z. He, K. Hotate, Reduction of backscattering induced noise by carrier suppression in waveguide-type optical ring resonator gyro, J. Lightwave Technol. 29 (1) (2011) 85.
[6] H. Mao, H. Ma, Z. Jin, Polarization maintaining silica waveguide resonator optic gyro using double phase modulation technique, Opt. Express 19 (5) (2011) 4632.
[7] U. Leonhardt, P. Piwnicki, Ultrahigh sensitivity of slow-light gyroscope, Phys. Rev. A 62 (2000) 055801.
[8] A. Matsko, A. Savchenkov, V. Ilchenko, L. Maleki, Optical gyroscope with whispering gallery mode optical cavities, Opt. Commun. 233 (1) (2004) 107.
[9] B.Z. Steinberg, Rotating photonic crystals: a medium for compact optical gyroscopes, Phys. Rev. E 71 (5) (2005) 056621.
[10] J. Scheuer, A. Yariv, Sagnac effect in coupled-resonator slow-light waveguide structures, Phys. Rev. Lett. 96 (2006) 053901.
[11] B.Z. Steinberg, J. Scheuer, A. Boag, Rotation-induced superstructure in slow-light waveguides with mode-degeneracy: optical gyroscopes with exponential sensitivity, J. Opt. Soc. Am. B 24 (5) (2007) 1216.
[12] M.S. Shahriar, G.S. Pati, R. Tripathi, V. Gopal, M. Messall, K. Salit, Ultrahigh enhancement in absolute and relative rotation sensing using fast and slow light, Phys. Rev. A 75 (2007) 053807.
[13] M. Salit, G. Pati, K. Salit, M. Shahriar, Fast-light for astrophysics: super-sensitive gyroscopes and gravitational wave detectors, J. Mod. Opt. 54 (16–17) (2007) 2425.
[14] S. Schwartz, F. Goldfarb, F. Bretenaker, Some considerations on slow-and fast-light gyros, Opt. Eng. 53 (10) (2014) 102706.
[15] H.K. Kim, M.J. Digonnet, G.S. Kino, Air-core photonic-bandgap fiber-optic gyroscope, J. Lightwave Technol. 24 (8) (2006) 3169.
[16] G.A. Sanders, L.K. Strandjord, T. Qiu, Hollow core fiber optic ring resonator for rotation sensing, in: Optical Fiber Sensors, Optical Society of America, 2006, p. ME6.
[17] M.A. Terrel, M.J. Digonnet, S. Fan, Resonant fiber optic gyroscope using an air-core fiber, J. Lightwave Technol. 30 (7) (2012) 931.
[18] K. Schreiber, T. Klügel, J.-P. Wells, R. Hurst, A. Gebauer, How to detect the Chandler and the annual wobble of the Earth with a large ring laser gyroscope, Phys. Rev. Lett. 107 (17) (2011) 173904.
[19] F. Bosi, G. Cella, A. Di Virgilio, A. Ortolan, A. Porzio, S. Solimeno, M. Cerdonio, J. Zendri, M. Allegrini, J. Belfi, et al., Measuring gravitomagnetic effects by a multi-ring-laser gyroscope, Phys. Rev. D 84 (12) (2011) 122002.
[20] K. Schreiber, A. Gebauer, J.-P. Wells, Long-term frequency stabilization of a 16 m^2 ring laser gyroscope, Opt. Lett. 37 (11) (2012) 1925.
[21] C. Clivati, D. Calonico, G.A. Costanzo, A. Mura, M. Pizzocaro, F. Levi, Large-area fiber-optic gyroscope on a multiplexed fiber network, Opt. Lett. 38 (7) (2013) 1092.
[22] W. Chow, J. Gea-Banacloche, L. Pedrotti, V. Sanders, W. Schleich, M. Scully, The ring laser gyro, Rev. Mod. Phys. 57 (1) (1985) 61.
[23] H. Lefèvre, The Fiber-Optic Gyroscope, Artech House, 1993.

[24] J. Gea-Banacloche, Passive versus active interferometers: why cavity losses make them equivalent, Phys. Rev. A 35 (6) (1987) 2518.
[25] D.M. Shupe, Thermally induced nonreciprocity in the fiber-optic interferometer, Appl. Opt. 19 (5) (1980) 654.
[26] J. Killpatrick, The laser gyro, IEEE Spectr. 4 (10) (1967) 44.
[27] F. Aronowitz, Fundamentals of the ring laser gyro, in: Optical Gyros and Their Application, NATO Research and Technology Organization, 1999 (Ch. 3).
[28] A. Dotsenko, E. Lariontsev, Use of a feedback circuit for the improvement of the characteristics of a solid-state ring laser, Sov. J. Quantum Electron. 14 (1) (1984) 117.
[29] A. Dotsenko, L.S. Kornienko, N.V. Kravtsov, E. Lariontsev, O. Nanii, A. Shelaev, Use of a feedback loop for the stabilization of a beat regime in a solid-state ring laser, Sov. J. Quantum Electron. 16 (1) (1986) 58.
[30] S. Schwartz, G. Feugnet, P. Bouyer, E. Lariontsev, A. Aspect, J.-P. Pocholle, Mode-coupling control in resonant devices: application to solid-state ring lasers, Phys. Rev. Lett. 97 (2006) 093902.
[31] S. Schwartz, F. Gutty, J.-P. Pocholle, G. Feugnet, Solid-state ring laser gyro with a mechanically activated gain medium, US Patent 7,589,841.
[32] S. Schwartz, F. Gutty, G. Feugnet, E. Loil, J.-P. Pocholle, Solid-state ring laser gyro behaving like its helium–neon counterpart at low rotation rates, Opt. Lett. 34 (24) (2009) 3884.
[33] H. Danielmeyer, E. Turner, Electro-optic elimination of spatial hole burning in lasers, Appl. Phys. Lett. 17 (12) (1970) 519.
[34] H. Danielmeyer, W. Nilsen, Spontaneous single-frequency output from a spatially homogeneous Nd–YAG laser, Appl. Phys. Lett. 16 (3) (1969) 124.
[35] S. Schwartz, F. Gutty, G. Feugnet, P. Bouyer, J.-P. Pocholle, Suppression of nonlinear interactions in resonant macroscopic quantum devices: the example of the solid-state ring laser gyroscope, Phys. Rev. Lett. 100 (2008) 183901.
[36] E.J. Post, Sagnac effect, Rev. Mod. Phys. 39 (2) (1967) 475.
[37] H.R. Bilger, W.K. Stowell, Light drag in a ring laser: an improved determination of the drag coefficient, Phys. Rev. A 16 (1977) 313.
[38] S. Schwartz, G. Feugnet, E. Lariontsev, J.-P. Pocholle, Oscillation regimes of a solid-state ring laser with active beat-note stabilization: from a chaotic device to a ring-laser gyroscope, Phys. Rev. A 76 (2) (2007) 023807.
[39] J. Kevorkian, J. Cole, Multiple Scale and Singular Perturbation Methods, Springer, 1996.
[40] J. Sanders, F. Verhulst, J. Murdock, Averaging Methods in Nonlinear Dynamical Systems, Springer, 2007.
[41] S. Schwartz, F. Gutty, G. Feugnet, J.-P. Pocholle, Performance evaluation of a solid-state ring laser gyro, in: Proceedings of the Symposium Gyro Technology, Karlsruhe, Germany, 2010.
[42] T. Dorschner, H. Haus, M. Holz, I. Smith, H. Statz, Laser gyro at quantum limit, IEEE J. Quantum Electron. 16 (12) (1980) 1376.

Annexe B

An online compensation algorithm for improving the performance of gas ring laser gyroscopes

An online compensation algorithm for improving the performance of gas ring laser gyroscopes

N. Badaoui[1,2], F. Bretenaker[3], G. Feugnet[4], P. Martin[1], B. Morbieu[2], P. Rouchon[1] and S. Schwartz[4]

***Abstract*— The gas Ring Laser Gyroscope is an excellent inertial rotation sensor. Nevertheless, its accuracy at low angular velocities is limited by the (very small) imperfections of the mirrors forming its optical cavity. In this paper, we propose to compensate the effect of these imperfections thanks to an online estimation of the system parameters. The estimator is designed on a suitable simplification of the model, in which the parameters appear linearly, and its convergence is proved. The relevance of the approach is illustrated in simulation; in particular, it is seen that good performance can be achieved even with lower quality mirrors.**

I. Introduction

A gas Ring Laser Gyroscope (RLG) is an optoelectronic inertial rotation sensor, intended to accurately measure the inertial angular velocity, or more precisely the inertial angle increment, of the body to which it is affixed. It consists of an optical cavity formed by mirrors and filled with an inert gas, in which circulate two counter-propagating laser beams. Though the mirrors are excellent, they still have imperfections, which induces limitations on the measurement accuracy at low angular velocities. In this paper, we propose to compensate the effect of the mirrors imperfections thanks to an online estimation of the system parameters. This yields a much better accuracy at low velocities, and it should permit using lower quality mirrors. Compensation schemes have already been considered in the literature, see e.g. [1]–[4], but rather as offline calibration methods; as parameters tend to slowly drift with time, a compensation scheme based on the calibrated parameters may behave rather poorly in normal operation. On the contrary, the present approach works online, and relies only on the normally available physical measurements.

The paper runs as follows: in section II, we present and comment the standard model of the RLG. In section III, we analyze the dynamics of the ideal RLG with perfect mirrors and show how the angle increment can be recovered. In section IV, we analyze the dynamics of the real RLG, by seeing it as a perturbation of the ideal RLG; we also present the classical method to recover the angle increment and discuss its limitations, in particular the so-called lock-in phenomena. In section V, we propose a phase compensation scheme able to overcome the limitations of the classical approach, which relies on the online estimation of the model parameters; the estimator is designed on a suitable simplification of the model, in which the parameters appear linearly, and its convergence is proved. Finally, the relevance of the approach is illustrated in section VI by a numerical simulation; in particular, it is seen that good performance can be achieved even with lower quality mirrors.

[1]Centre Automatique et Systèmes, MINES ParisTech, PSL Research University, France
[2]Thales Avionics, Châtellerault, France
[3]Laboratoire Aimé Cotton, CNRS, Université Paris-Saclay, Orsay, France
[4]Thales Research an Technology, Palaiseau, France
Corresponding author: philippe.martin@mines-paristech.fr

II. Model of the RLG

The RLG consists of an optical cavity formed by mirrors, in which circulate two counter-propagating laser beams. The cavity is affixed to the body whose rotation must be sensed through a mechanical dithering device, which produces a "small" and approximately periodic oscillation $\varphi_d(t)$ of period T_d. If $\theta(t)$ is the inertial rotation of the rigid body, the inertial angular velocity undergone by the cavity is therefore $\dot\varphi_d(t)+\dot\theta(t)$ (we tacitly consider only the angular motion around the axis perpendicular to the cavity). A widely accepted model for the time evolution of the RLG is given by the so-called Lamb equations, see e.g. [5]–[8],

$$\dot I_1 = \frac{g_0}{1+\frac{I_1}{I_s}+\frac{I_2}{I_c}} I_1 - \Gamma I_1 + 2\rho\sqrt{I_1 I_2}\cos(\varphi+\xi) \quad (1)$$

$$\dot I_2 = \frac{g_0}{1+\frac{I_1}{I_c}+\frac{I_2}{I_s}} I_2 - \Gamma I_2 + 2\rho\sqrt{I_1 I_2}\cos(\varphi-\xi) \quad (2)$$

$$\dot\varphi = \dot\varphi_d(t)+\dot\theta(t) - \rho\sqrt{\frac{I_2}{I_1}}\sin(\varphi+\xi) - \rho\sqrt{\frac{I_1}{I_2}}\sin(\varphi-\xi), \quad (3)$$

where I_1 and I_2 are the intensities of the two counter-propagating electromagnetic modes, and φ is the phase difference between these two modes. The period T_d is assumed known and constant, whereas the positive parameters g_0, Γ, ρ, ξ, I_s, I_c may very slowly drift with time; for a well-built RLG, $g_0>\Gamma$, $\rho \ll g_0-\Gamma$ (the better the mirrors, the smaller ρ), and $I_s \ll I_c$.

Without loss of generality, we assume time has been scaled so that $\frac{\Gamma}{g_0}(g_0-\Gamma)\sim 1$; similarly the intensities have been scaled so that $\frac{I_s I_c}{I_s+I_c}(\frac{g_0}{\Gamma}-1)\sim 1$. Thanks to these scalings, all the variables and parameters are now dimensionless; in particular, ρ then appears as a small parameter $\rho \ll 1$. Notice that though the dithering oscillation looks very small to the eye, its scaled amplitude is in fact large.

Finally, the RLG is equipped with four high-quality photodetectors, from which the whole state (I_1, I_2, φ) can be directly reconstructed provided $I_1 I_2 \neq 0$. We therefore assume in all the following theoretical developments that I_1, I_2, φ are the measured quantities, and deliberately ignore the possible imperfections of the photodetectors, in particular

measurement noise. We will nevertheless check in simulation in section VI the robustness with respect to this neglected noise.

Remark 1: The differential system (1)–(3) might at first glance look rather ill-defined: since I_1, I_2 represent physical intensities, the system should be well-defined for all $I_1, I_2 \geq 0$, and have a unique solution for all initial conditions $I_1(0), I_2(0) \geq 0$. But (3) is obviously undefined when $I_1 I_2 = 0$, and the uniqueness of solutions is unclear because of the non-Lipschitz terms $\sqrt{I_1 I_2}$ in (1)-(2).

The problem is in fact artificial and only due to a singularity of the coordinate change used to obtain (1)–(3) from the "true" physical equations. Indeed, these "true" equations are written in terms of the complex amplitudes A_1 and A_2 of the electromagnetic modes and form a perfectly well-defined system of four real differential equations. Performing the amplitude-phase change of variables

$$I_1 := |A_1|^2, \quad I_2 := |A_2|^2, \quad \varphi := \arg(A_1) - \arg(A_2),$$

and discarding the fourth variable $\arg(A_1) + \arg(A_2)$ then yields (1)–(3), but the transformation is singular when $A_1 A_2 = 0$, i.e. $I_1 I_2 = 0$.

It is then easy to conclude that the Lamb equations (1)–(3) are well-defined for all $I_1, I_2 \geq 0$ such that $I_1^2 + I_2^2 \neq 0$.

III. The ideal RLG

We first consider an ideal RLG with perfect mirrors, i.e. $\rho := 0$. The model (1)–(3) then reads

$$\dot{I}_1 = \frac{g_0}{1 + \frac{I_1}{I_s} + \frac{I_2}{I_c}} I_1 - \Gamma I_1 \tag{4}$$

$$\dot{I}_2 = \frac{g_0}{1 + \frac{I_1}{I_c} + \frac{I_2}{I_s}} I_2 - \Gamma I_2 \tag{5}$$

$$\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_d(t) + \dot{\theta}(t), \tag{6}$$

and splits into two independent subsystems.

A. Analysis of the intensity subsystem

The intensity subsystem (4)-(5) lives on the positive quadrant $[0, +\infty]^2$, in accordance with physical reality. Indeed, a trajectory starting on the vertical boundary $\{I_1 = 0,\ I_2 > 0\}$ remains on this boundary as $\dot{I}_1 = 0$ by (4); similarly, a trajectory starting on the horizontal boundary $\{I_1 > 0, I_2 = 0\}$ remains on the horizontal boundary; finally, a trajectory starting at $\{I_1 = 0, I_2 = 0\}$ sits there forever. It is therefore impossible for a trajectory to escape the positive quadrant, since two trajectories can not intersect.

The intensity subsystem obviously has four equilibrium points in the positive quadrant $[0, +\infty]^2$:

- $(\bar{I}_1, \bar{I}_2) = (0, 0)$, which is exponentially unstable. Indeed, the linearized system around this point,

$$\delta\dot{I}_1 = (g_0 - \Gamma)\delta I_1$$
$$\delta\dot{I}_2 = (g_0 - \Gamma)\delta I_2,$$

  has two strictly positive eigenvalues

- $(\bar{I}_1, \bar{I}_2) = \big(I_s(\frac{g_0}{\Gamma} - 1), 0\big)$, which is exponentially unstable. Indeed, the linearized system around this point,

$$\delta\dot{I}_1 = -\frac{\Gamma}{g_0}(g_0 - \Gamma)\delta I_1 - \frac{I_s}{I_c}\frac{\Gamma}{g_0}(g_0 - \Gamma)\delta I_2$$
$$\delta\dot{I}_2 = \frac{g_0 - \Gamma}{1 + \frac{I_s}{I_c}(\frac{g_0}{\Gamma} - 1)}(1 - \frac{I_s}{I_c})\delta I_2,$$

  has one strictly positive eigenvalue

- $(\bar{I}_1, \bar{I}_2) = \big(0, I_s(\frac{g_0}{\Gamma} - 1)\big)$, which is exponentially unstable. Indeed, the linearized system around this point,

$$\delta\dot{I}_1 = \frac{g_0 - \Gamma}{1 + \frac{I_s}{I_c}(\frac{g_0}{\Gamma} - 1)}(1 - \frac{I_s}{I_c})\delta I_1$$
$$\delta\dot{I}_2 = -\frac{I_s}{I_c}\frac{\Gamma}{g_0}(g_0 - \Gamma)\delta I_1 - \frac{\Gamma}{g_0}(g_0 - \Gamma)\delta I_2,$$

  has one strictly positive eigenvalue

- $(\bar{I}_1, \bar{I}_2) = (\bar{\imath}, \bar{\imath})$, where $\bar{\imath} := \frac{I_s I_c}{I_s + I_c}(\frac{g_0}{\Gamma} - 1)$, which is exponentially stable. Indeed, the linearized system around this point,

$$\delta\dot{I}_1 = -\frac{\Gamma}{g_0}\frac{g_0 - \Gamma}{I_s + I_c}(I_c\delta I_1 + I_s\delta I_2) \tag{7}$$

$$\delta\dot{I}_2 = -\frac{\Gamma}{g_0}\frac{g_0 - \Gamma}{I_s + I_c}(I_s\delta I_1 + I_c\delta I_2), \tag{8}$$

  has two strictly negative eigenvalues $-\frac{I_c - I_s}{I_c + I_s}\frac{\Gamma}{g_0}(g_0 - \Gamma)$ and $-\frac{\Gamma}{g_0}(g_0 - \Gamma)$, that are moreover close since $I_c \gg I_s$.

The (locally) exponentially stable equilibrium point $(\bar{\imath}, \bar{\imath})$ corresponds to the so-called bidirectional mode, which is the normal mode of operation of the RLG. The following result shows its domain of attraction is $(0, +\infty)^2$, which in practice means that the ideal RLG will enter the bidirectional mode as soon as it has been "suitably" activated.

Proposition 1: The domain of attraction of the equilibrium point $(\bar{\imath}, \bar{\imath})$ is the strictly positive quadrant $(0, +\infty)^2$.

Proof: The result is established thanks to properties of two-dimensional flows, which can be found e.g. in [9, section 1.8]. A more direct proof would have been Lyapunov analysis, but we have not been able to exhibit a suitable Lyapunov function.

By the previous discussion, the boundary $\{I_1 = 0, I_2 \geq 0\} \cup \{I_1 \geq 0, I_2 = 0\}$ is an invariant set, and contains the three unstable equilibrium points. Therefore, $(0, +\infty)^2$ is also invariant, and contains a unique, exponentially stable, equilibrium point.

On the other hand, every trajectory $\big(I_1(t), I_2(t)\big)$ starting from $\big(I_1(0), I_2(0)\big) \in (0, +\infty)^2$ is bounded. Indeed, as $I_s \leq I_c$, we obviously have

$$\dot{I}_1 + \dot{I}_2 \leq \left(\frac{g_0}{1 + \frac{I_1 + I_2}{I_c}} - \Gamma\right)(I_1 + I_2);$$

therefore, $\dot{I}_1 + \dot{I}_2 \leq 0$ as soon as $I_1 + I_2 \geq I_c\frac{g_0 - \Gamma}{\Gamma} > 0$. Since $I_1(t)$ and $I_2(t)$ remain positive, this implies $I_1(t) + I_2(t)$ is bounded, hence so are $I_1(t)$ and $I_2(t)$. As a consequence, the ω-limit set of every point of $(0, +\infty)^2$ is nonempty and compact.

Finally, we show that $(0,+\infty)^2$ contains no closed orbit. To this end, consider the diffeomorphism from $(0,+\infty)^2$ to $\mathbb{R}^2$ defined by $(p_1,p_2) := (\log I_1, \log I_2)$. It transforms (4)-(5) into

$$\dot{p}_1 = \frac{g_0}{1+\frac{e^{p_1}}{I_s}+\frac{e^{p_2}}{I_c}} - \Gamma \tag{9}$$

$$\dot{p}_2 = \frac{g_0}{1+\frac{e^{p_1}}{I_c}+\frac{e^{p_2}}{I_s}} - \Gamma. \tag{10}$$

The divergence of this system,

$$\frac{\partial}{\partial p_1}\left[\frac{g_0}{1+\frac{e^{p_1}}{I_s}+\frac{e^{p_2}}{I_c}} - \Gamma\right] + \frac{\partial}{\partial p_2}\left[\frac{g_0}{1+\frac{e^{p_1}}{I_c}+\frac{e^{p_2}}{I_s}} - \Gamma\right],$$

obviously is strictly negative for all $(p_1,p_2) \in \mathbb{R}^2$. By Bendixson's criterion, this implies that (9)-(10) has no closed orbit, hence that (4)-(5) has no closed orbit lying in $(0,+\infty)^2$.

We conclude the proof thanks to the Poincaré-Bendixson theorem: since the ω-limit set of every point of $(0,+\infty)^2$ is nonempty and compact, but cannot be a closed orbit, it necessarily contains an equilibrium point; and since this equilibrium point must be the unique, exponentially stable, equilibrium point of $(0,+\infty)^2$, it is necessarily globally stable on $(0,+\infty)^2$. ∎

The equilibrium point $(\bar{\imath},\bar{\imath})$ is locally exponentially stable, and $V_\delta := \delta I_1^2 + \delta I_2^2$ is clearly a Lyapunov function for the linearized system (7)-(8) satisfying

$$\dot{V}_\delta \leq -2\frac{I_c - I_s}{I_c + I_s}\frac{\Gamma}{g_0}(g_0-\Gamma)V_\delta.$$

The next result shows that the corresponding "finite" Lyapunov function $V := \Delta I_1^2 + \Delta I_2^2$, where $(\Delta I_1, \Delta I_2) := (I_1 - \bar{\imath}, I_2 - \bar{\imath})$, actually guarantees exponential stability on a domain much larger than a small neighborhood of the equilibrium point. It will be used in section IV to study the dynamics of the real RLG.

Proposition 2: The equilibrium point $(\bar{\imath},\bar{\imath})$ is exponentially stable on the square $[(1-r)\bar{\imath},(1+r)\bar{\imath}]^2$, provided $r \lesssim 1 - \frac{2\Gamma}{2g_0-\Gamma}\frac{I_s}{I_c}$. On this square, V satisfies $\dot{V} \leq -c_3(r)V$, with $c_3(r) > 0$ given by (11) below.

Proof: Set $k := 1-r$, $K := 1+r$, $\varepsilon := \frac{I_s}{I_c}$. Notice first

$$\dot{I}_1 = \frac{g_0}{1+\frac{I_1}{I_s}+\frac{I_2}{I_c}}I_1 - \Gamma I_1 = -\Gamma\frac{\frac{\Delta I_1}{I_s}+\frac{\Delta I_2}{I_c}}{1+\frac{I_1}{I_s}+\frac{I_2}{I_c}}I_1,$$

with a similar formula for $\dot{I}_2$. On the other hand, since the map $x \to f_y(x) := \frac{x}{1+x+y}$ is increasing for $(x,y) \in [x_l,x_u]\times[y_l,y_u] \in (\mathbb{R}^+)^2$,

$$f_{y_l}(x_l) \leq f_y(x_l) \leq f_y(x) \leq f_y(x_u) = f_{y_u}(x_u).$$

As a consequence,

$$\begin{aligned}\frac{d\Delta I_1^2}{dt} &= -\Delta I_1^2\frac{2\Gamma\frac{I_1}{I_s}}{1+\frac{I_1}{I_s}+\frac{I_2}{I_c}} - \varepsilon\Delta I_1\Delta I_2\frac{2\Gamma\frac{I_1}{I_s}}{1+\frac{I_1}{I_s}+\frac{I_2}{I_c}} \\ &\leq -\Delta I_1^2\frac{2\Gamma\frac{k\bar{\imath}}{I_s}}{1+\frac{k\bar{\imath}}{I_s}+\frac{k\bar{\imath}}{I_c}} + \varepsilon\left|\Delta I_1\Delta I_2\right|\frac{2\Gamma\frac{K\bar{\imath}}{I_s}}{1+\frac{K\bar{\imath}}{I_s}+\frac{K\bar{\imath}}{I_c}} \\ \frac{d\Delta I_2^2}{dt} &\leq -\Delta I_2^2\frac{2\Gamma\frac{k\bar{\imath}}{I_s}}{1+\frac{k\bar{\imath}}{I_s}+\frac{k\bar{\imath}}{I_c}} + \varepsilon\left|\Delta I_1\Delta I_2\right|\frac{2\Gamma\frac{K\bar{\imath}}{I_s}}{1+\frac{K\bar{\imath}}{I_s}+\frac{K\bar{\imath}}{I_c}},\end{aligned}$$

which directly yields $\dot{V} \leq -c_3(r)$, with

$$\begin{aligned}c_3(r) &:= 2\Gamma\left(\frac{\frac{k\bar{\imath}}{I_s}}{1+\frac{k\bar{\imath}}{I_s}+\frac{k\bar{\imath}}{I_c}} - \varepsilon\frac{\frac{K\bar{\imath}}{I_s}}{1+\frac{K\bar{\imath}}{I_s}+\frac{K\bar{\imath}}{I_c}}\right) \\ &= \frac{\frac{2\Gamma^2\bar{\imath}}{I_s}(1-r)}{\Gamma+(1-r)(g_0-\Gamma)} - \varepsilon\frac{\frac{2\Gamma^2\bar{\imath}}{I_s}(1+r)}{\Gamma+(1+r)(g_0-\Gamma)}\end{aligned} \tag{11}$$

Now $c_3(r) > 0$ amounts to

$$r^2(g_0-\Gamma)(1-\varepsilon) + r\Gamma(1+\varepsilon) - g_0(1-\varepsilon) < 0.$$

Since $\Delta := \Gamma^2(1+\varepsilon)^2 + 4g_0(g_0-\Gamma)(1-\varepsilon) > \Gamma^2(1+\varepsilon)^2$, this means

$$\begin{aligned}r &< \frac{\Gamma(1+\varepsilon)+\sqrt{\Delta}}{2(g_0-\Gamma)(1-\varepsilon)} \\ &= 1 - \frac{2\Gamma}{2g_0-\Gamma}\varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2),\end{aligned}$$

which concludes the proof. ∎

Notice $c_3(r)$ tends to $2\frac{I_c-I_s}{I_c+I_s}\frac{\Gamma}{g_0}(g_0-\Gamma)$ as r tends to 0.

B. Estimation of angle increment

Integrating both sides of (6) between t_1 and t_2 yields

$$\begin{aligned}\varphi(t_2) - \varphi(t_1) &= \varphi_d(t_2) + \theta(t_2) - \varphi_d(t_1) - \theta(t_1) \\ &= \Delta\theta(t_2,t_1) + \varphi_d(t_2) - \varphi_d(t_1),\end{aligned}$$

where $\Delta\theta(t_2,t_1) := \theta(t_2) - \theta(t_1)$ is the angle increment between t_1 and t_2, i.e. the quantity to be sensed. Since φ_d is T_d-periodic, the contribution of the mechanical dithering disappears when t_1, t_2 are chosen such that $t_2 - t_1 = T_d$.

As seen in the previous section, the RLG enters the bidirectional mode as soon as it has been "suitably" activated. In particular $I_1 I_2 \neq 0$, hence φ can be reconstructed from the photodetectors. The angle increment $\Delta\theta(t,t-T_d)$ can thus be "estimated" by the simple formula

$$\begin{aligned}\widehat{\Delta\theta}(t,t-T_d) &:= \varphi(t) - \varphi(t-T_d) \\ &= \Delta\theta(t,t-T_d).\end{aligned} \tag{12}$$

Remark 2: The mechanical dithering is obviously useless here. Its role is nonetheless paramount for a real RLG with imperfect mirrors, as will be seen in the following sections.

IV. The real RLG

For a real RLG, the intensities I_1, I_2 are coupled with the phase φ, and the behavior of (1)–(3) is quite difficult to analyze. Since the parameter ρ is by assumption small, a way to simplify the analysis is to see the real intensity subsystem (1)-(2) as a "small" perturbation of the ideal intensity subsystem (4)-(5), namely, with self-evident notations,

$$\dot{I} = f(I) + \rho g(I,\varphi). \tag{13}$$

Though g is non-vanishing and unbounded, it does not grow too fast, uniformly in φ; this will be used to show that $I(t)$ remains "close" to the equilibrium point $\bar{I} := (\bar{\imath},\bar{\imath})$ for t large enough. This can then be used to approximately decouple the phase equation (3) from the intensity subsystem (1)-(2), which is the basis of the classical approach to estimate the angle increment.

A. Analysis of the intensity subsystem

Proposition 3: Assume $\rho \leq \rho_0$ for some small enough ρ_0, and $\|\Delta I(0)\| \leq \frac{1}{2}\bar{\imath}$. When t is large enough, $\|\Delta I(t)\| \leq C\rho$ for some $C > 0$.

Proof: First notice that the growth of g is sublinear with respect to ΔI, uniformly in φ. Indeed,

$$\begin{aligned}\|g(I,\varphi)\| &= 2\sqrt{I_1 I_2}\,\sqrt{\cos^2(\varphi+\xi)+\sin^2(\varphi-\xi)}\\ &\leq 2\sqrt{2}\Big(\frac{I_1+I_2}{2}\Big)\\ &\leq 2\sqrt{2}\Big(\bar{\imath}+\frac{|I_1-\bar{\imath}|+|I_2-\bar{\imath}|}{2}\Big)\\ &\leq 2\bar{\imath}\sqrt{2}+2\,\|\Delta I\|\,.\end{aligned}$$

On the other hand, we know by proposition 2 that $\bar{I}$ is exponentially stable on the ball $\Delta I \leq r\bar{\imath}$ for r small enough, and in particular for $r := 1/2$, with V as a Lyapunov function. A direct application of the comparison method of [10, section 9.3] then yields

$$\|\Delta I(t)\| \leq \|\Delta I(0)\| + \frac{2\rho\bar{\imath}\sqrt{2}}{\alpha}\big(1-e^{-\alpha t}\big),$$

where $\alpha := \frac{c_3}{2} - 2\rho$, provided that $\alpha > 0$, $\|\Delta I(0)\| < r$ and $2\rho\bar{\imath}\sqrt{2} < r\alpha$.

As a straightforward consequence, for t large enough,

$$\|\Delta I(t)\| \leq \frac{2\rho\bar{\imath}\sqrt{2}}{\frac{c_3(r)}{2}-2\rho} \leq \frac{2\rho\bar{\imath}\sqrt{2}}{\frac{c_3(r)}{2}-2\rho_0}$$

provided that $\|\Delta I(0)\| < r$ and $\rho < \frac{c_3(r)}{4}\frac{r}{r+\bar{\imath}\sqrt{2}} =: \rho_0$. ∎

Remark 3: In the proposition, we arbitrarily chose $r = \frac{1}{2}$; it is possible to improve the result, with a larger r and a smaller C, by repeatedly using the comparison method.

Thanks to this result, we now show the affine system

$$\dot{J} = f'(\bar{I})\cdot(J-\bar{I}) + \rho g(\bar{I},\varphi) \tag{14}$$

uniformly approximates (13) to order ρ^2 for t large enough. This approximate system will be used in section V to estimate the parameters.

Proposition 4: Assume $\rho \leq \rho_0$ for some small enough ρ_0, and $\|\Delta I(0)\| \leq \frac{1}{2}\bar{\imath}$. When t is large enough, $\|I(t)-J(t)\| \leq c\rho^2$ for some $c > 0$.

Proof: Taylor expand f as

$$f(I) = f(\bar{I}) + f'(\bar{I})\Delta I + \Delta I^T R(I)\Delta I, \tag{15}$$

where R is the integral reminder. Then,

$$\dot{I}-\dot{J} = f'(\bar{I})\cdot(I-J)+d,$$

where

$$\begin{aligned}\|d\| &= \left\|\Delta I^T R(I)\Delta I + 2\rho(\sqrt{I_1 I_2}-\sqrt{\bar{\imath}^2})\begin{pmatrix}\cos(\varphi+\xi)\\ \sin(\varphi+\xi)\end{pmatrix}\right\|\\ &\leq M\,\|\Delta I\|^2 + 2\rho\tilde{M}\,\|\Delta I\|\sqrt{2}\\ &\leq (MC^2+2\sqrt{2}\tilde{M}C)\rho^2.\end{aligned}$$

We have used that on the square $[\frac{\bar{\imath}}{2},\frac{3\bar{\imath}}{2}]^2$, R is bounded by M and $(I_1,I_2)\to\sqrt{I_1 I_2}$ is Lipschitz with constant $\tilde{M}$, and that $\|\Delta I(t) \leq C\rho\|$ for t large enough by proposition 3.

Now (15) can be seen as the linearized system (7)-(8) driven by the perturbation d, hence

$$\|I(t)-J(t)\| \leq \frac{MC^2+2\sqrt{2}\tilde{M}C}{\frac{I_c-I_s}{I_c+I_s}\frac{\Gamma}{g_0}(g_0-\Gamma)}\rho^2,$$

yielding the desired result. ∎

B. Classical estimation of angle increment static lock-in and dithering lock-in

By proposition 3, the intensity I remains after some time close to the equilibrium point $\bar{I}$, namely $I(t) = \bar{I} + \mathcal{O}(\rho)$. Injecting this in the phase equation (3) yields the so-called Adler equation [7]

$$\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_d(\omega_d t) + \dot{\theta}(t) - 2\rho\cos(2\xi)\sin(\varphi) + \mathcal{O}(\rho^2). \tag{16}$$

The classical way to estimate the angle increment is to use (12), i.e.

$$\widehat{\Delta\theta}(t,t-T_d) := \varphi(t)-\varphi(t-T_d). \tag{17}$$

This obviously gives $\Delta\theta(t,t-T_d)$ with a $\mathcal{O}(\rho)$ approximation, which is satisfactory when $\dot{\theta} \gg \rho$. We can now explain the role of dithering at low velocity, assuming for simplicity that $\dot{\theta}$ is constant. Indeed, if there is no dithering, i.e. $\varphi_d = 0$, equation (16) can be seen to have a stable equilibrium point when $|\dot{\theta}| < 2|\rho\cos(2\xi)|$; once this equilibrium point is reached, $\varphi(t)$ is "locked" to a constant value, hence $\widehat{\Delta\theta}(t,t-T_d) = 0$, irrespective of the actual angle increment. This phenomenon, known as "static lock-in" [7], would prevent the RLG to sense small velocities. Thanks to dithering, the equilibrium point no longer exists, and it can be shown [11] that (17) yields the angle actual increment to order $\mathcal{O}(\rho\sqrt{\frac{2}{\pi a_d}})$, where $a_d \gg 1$ is the amplitude of the dithering φ_d. But (17) still has a limit for very small velocities: when $|\dot{\theta}| \leq 2\rho|\cos(2\xi)J_0(a_d))|$, with J_0 the first kind Bessel function of order 0, it can be shown [11] that φ becomes T_d periodic, i.e., that its Poincaré map admits a fixed point. As a consequence, $\widehat{\Delta\theta}(t,t-T_d) = 0$, irrespective of the actual angle increment. This is the so-called "dithering lock-in" phenomenon.

V. The online compensation scheme

A. Principle

The imperfections of the mirrors induce limitations on the recovery of the angular velocity for low regimes. Since I_1, I_2 and φ are precisely measured, we can compensate directly these imperfections if we have an accurate estimate $(\hat{\rho},\hat{\xi})$ of the mirrors parameters (ρ,ξ). Such compensation is done via simple integrals over an activation period T_d:

$$\begin{aligned}\Delta\hat{\theta}(t,t-T_d) &= \varphi(t)-\varphi(t-T_d)\\ &\quad+\int_{t-T_d}^{t}\hat{\rho}\sqrt{\tfrac{I_2(\tau)}{I_1(\tau)}}\sin\big(\varphi(\tau)+\hat{\xi}\big)d\tau\\ &\quad+\int_{t-T_d}^{t}\hat{\rho}\sqrt{\tfrac{I_1(\tau)}{I_2(\tau)}}\sin\big(\varphi(\tau)-\hat{\xi}\big)d\tau\\ &\approx \theta(t)-\theta(t-T_d).\end{aligned} \tag{18}$$

Using an estimated value $(\hat{\rho}, \hat{\xi})$ obtained by an offline calibration [1] is excluded; indeed, the parameters (ρ, ξ) are not exactly constant, but may slowly drift with time. Therefore, we design in the following sections an online estimator.

B. Estimation of the mirrors imperfections

Written in terms of the variables $(J^+, J^-) := \frac{1}{2}(J_1 + J_2, J_1 - J_2)$, the affine system (14) is decoupled and reads

$$\dot{J}^+ = -\omega_n J^+ + 2\rho\bar{\imath}\cos\xi\cos\varphi + \omega_n\bar{\imath} \tag{19}$$

$$\dot{J}^- = -\omega_n \frac{I_c - I_s}{I_c + I_s} J^- - 2\rho\bar{\imath}\sin\xi\sin\varphi, \tag{20}$$

where $\omega_n := \frac{\Gamma}{g_0}(g_0 - \Gamma)$. As the parameters linearly enter (19)-(20), we can estimate them for instance by the recursive least squares (RLS) algorithm with forgetting factor.

The estimation algorithm is detailed for (19). It is similar for (20). Denoting

$$F^+ := \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 2\rho\bar{\imath}\cos\xi \\ -\omega_n \\ \omega_n\bar{\imath} \end{pmatrix},$$

equation (19) can be rewritten as

$$\dot{J}^+ = \begin{pmatrix} \cos\varphi & J^+ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \mathbb{V}^T F^+, \tag{21}$$

where $\mathbb{V}$ is obtained from the measurements. To avoid the numerical differentiation, we filter both sides of (21) by a low pass filter of strictly causal transfer function $H(s)$, with s the Laplace variable. This yields

$$\dot{J}_f^+ = \mathbb{V}_f^T F^+, \tag{22}$$

where $\dot{J}_f^+(t)$ is the inverse Laplace transform of $sH(s)J^+(s)$, and $\mathbb{V}_f(t)$ is the inverse Laplace transform of $H(s)\mathcal{L}\{\mathbb{V}_f\}(s)$.

The RLS estimator with forgetting factor then reads

$$\frac{d}{dt}\hat{F}^+ = P\ \mathbb{V}_f\ (\dot{J}_f^+ - \mathbb{V}_f^T\hat{F}^+)$$
$$\frac{d}{dt}P = \alpha P - P\ \mathbb{V}_f\ \mathbb{V}_f^T\ P,$$

where $\hat{F}^+$ is the estimate of F^+, P is the covariance matrix of the measurements, and $\alpha > 0$ is the forgetting factor. It has the nice following convergence property.

Theorem 1: If the gyroscope is submitted to mechanical dithering, i.e., $\varphi_d \not\equiv 0$, and if $\rho\cos\xi \neq 0$, then $\hat{F}^+$ exponentially converges towards F^+.

Proof: The RLS algorithm converges exponentially to the true parameter values if the measurement vector $\mathbb{V}_f$ is persistently exciting (PE), i.e., if its autocovariance matrix

$$R := \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \mathbb{V}_f(\tau)\mathbb{V}_f^T(\tau)d\tau = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} S_{\mathbb{V}_f}(\omega)d\omega$$

exists and is positive definite, see e.g. [12]; $S_{\mathbb{V}_f}$ is the spectral distribution of $\mathbb{V}_f$. Since $\mathbb{V}_f$ is uniformly bounded the existence is assured. In the Laplace domain, (22) reads

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\mathbb{V}_f\}(s) &= \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{k_1}{s-k_2} \\ 0 \end{pmatrix} H(s)\mathcal{L}\{\cos\varphi\}(s) \\ &\quad + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{k_3}{s-k_2} \\ 1 \end{pmatrix} H(s).1 \\ &=: H_1(s)\mathcal{L}\{\cos\varphi\}(s) + H_2(s).1.\end{aligned}$$

For the sake of simplicity, the phase φ is approximated by the $T_d = \frac{2\pi}{\omega_d}$ periodic mechanical dithering φ_d; hence, the spectral distribution of $\cos\varphi$ can be written as

$$S_{\cos\varphi}(\omega) = \sum_{n=0}^{+\infty} A_n\delta(\omega - n\omega_d),$$

where the coefficients A_n are strictly positive; on the other hand, the spectral distribution of 1 is $S_1(\omega) = \delta(\omega)$. Therefore, the spectral distribution of $\mathbb{V}_f$ is

$$S_{\mathbb{V}_f} = H_1(-j\omega)S_{\cos\varphi}(\omega)H_1^T(j\omega) + H_2(-j\omega)S_1(\omega)H_2^T(j\omega),$$

and

$$R = \frac{1}{2\pi}\big[(H_2H_2^T)(0) + \sum_{n=0}^{+\infty} A_nH_1(-jn\omega_d)H_1^T(jn\omega_d)\big]. \tag{23}$$

Now, consider the solution of the equation

$$x^T R_V x = 0 \quad \text{with } x = (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3$$

Since all the terms in (23) are semi-positive definite, $x^TR_Vx = 0$ amounts to x orthogonal to $\{H_1(jn\omega_d), n \in \mathbb{N}\}$ and $H_2(0)$. If $k_1 \neq 0$, i.e., $\rho\cos\xi \neq 0$, all the vectors $\{H_1(jn\omega_d), n \in \mathbb{N}\}$ are non-collinear, yielding $x_1 = x_2 = 0$; finally, $x_3 = 0$ since x is also orthogonal to $H_2(0)$. We conclude R is positive definite, i.e., $\mathbb{V}_f$ is PE. ■

We then recover the parameters of the model from the estimated vectors

$$\hat{F}^+ = \begin{pmatrix} 2\hat{\rho}\hat{\bar{\imath}}\cos\hat{\xi} \\ -\hat{\omega}_n \\ \hat{\omega}_n\hat{\bar{\imath}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{k}_1 \\ \hat{k}_2 \\ \hat{k}_3 \end{pmatrix}$$

$$\hat{F}^- = \begin{pmatrix} -2\hat{\rho}\hat{\bar{\imath}}\sin\hat{\xi} \\ -\hat{\omega}_n\frac{I_c - I_s}{I_c + I_s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{k}_4 \\ \hat{k}_5 \end{pmatrix}$$

by

$$\hat{\omega}_n = -\hat{k}_2$$
$$\hat{\bar{\imath}} = -\frac{\hat{k}_3}{\hat{k}_2}$$
$$\hat{\rho} = \frac{1}{2\hat{\bar{\imath}}}\sqrt{\hat{k}_1^2 + \hat{k}_4^2}$$
$$\hat{\xi} = -\operatorname{atan2}(\hat{k}_4, \hat{k}_1).$$

VI. Numerical simulations

We illustrate the relevance of our approach in simulation. We compare the performance of the proposed scheme (18) with the classical estimation of the angle increment. This comparison is made on two different RLGs:

- RLGa, with high-quality mirrors, hence a small dithering lock-in zone
- RLGb, with low-quality mirrors, hence a large dithering lock-in zone.

Both gyroscopes undergo the same rotation $\theta(t)$, for $0 \leq t \leq 10^6$, according to the scenario displayed in Fig. 1; initially, the angular velocity $\dot{\theta}(t)$ is high, hence far away from the dithering lock-in zones of both RLGs; it then decreases and successively enters the two lock-in zones, and eventually increases out of the lock-in zones.

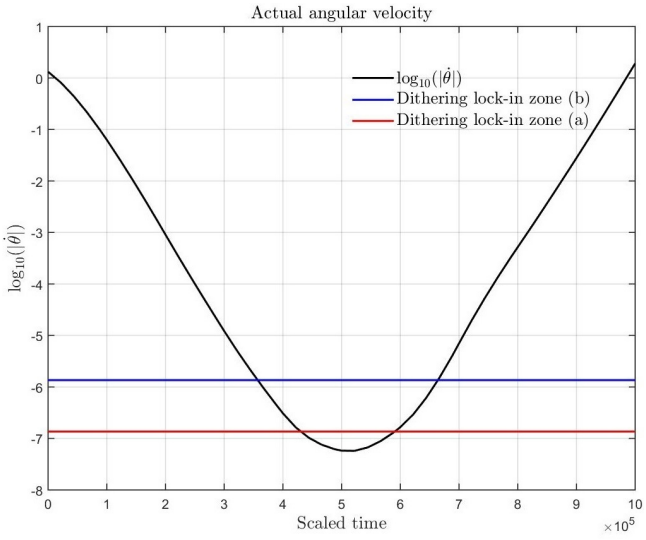


Fig. 1. Logarithmic angular velocity $\log_{10}(|\dot{\theta}(t)|)$ and the dithering lock-in zones for RLGa (red) and RGLb (blue).

The model equations (1)–(3) are numerically integrated with Matlab/Simulink, using the parameters of Table I and the mechanical dithering $\varphi_d(t) := 150\cos(\omega_d t)$. To evaluate the effect of measurement noise, the signals I_1, I_2 and φ fed to the estimators are corrupted by uncorrelated white noises with power $\sigma^2 := 10^{-10}$.

$\rho^{(a)}$	$\rho^{(b)}$	ξ	I_s	I_c	Γ	g_0	ω_d
10^{-4}	10^{-3}	0.25	1.14	8.1	2	4	$3.65.\ 10^{-3}$

TABLE I
Simulation parameters

Fig. 2 shows an excerpt of the raw components of the measurement vector $I^+(t) = \frac{1}{2}(I_1(t) + I_2(t))$ and $\cos\varphi(t)$, when $\dot{\theta}$ is in the dithering lock-in zone of RLGa. Notice the phase φ locks with the dithering and becomes T_d-periodic, hence $\cos\varphi$ is also T_d-periodic. The modulations of I^+ around its equilibrium point $\bar{\imath}$ follow the same pattern as

α	$H(s)$	ω_c
5.10^{-4}	$\frac{1}{(1+\frac{s}{\omega_c})^3}$	0.628

TABLE II
Estimator parameters

$\cos\varphi$; indeed, since $I^+ = J^+ + \mathcal{O}(\rho^2)$, this follows at once from equation (19).

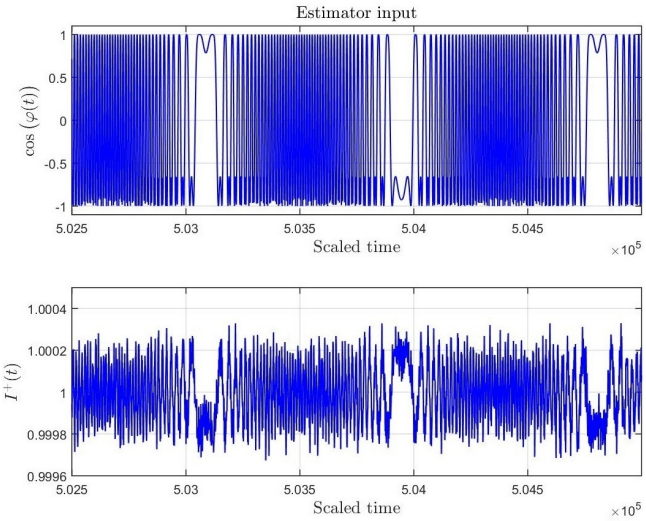


Fig. 2. Raw components of the measurement vector, for $5025 \leq t \leq 5050$.

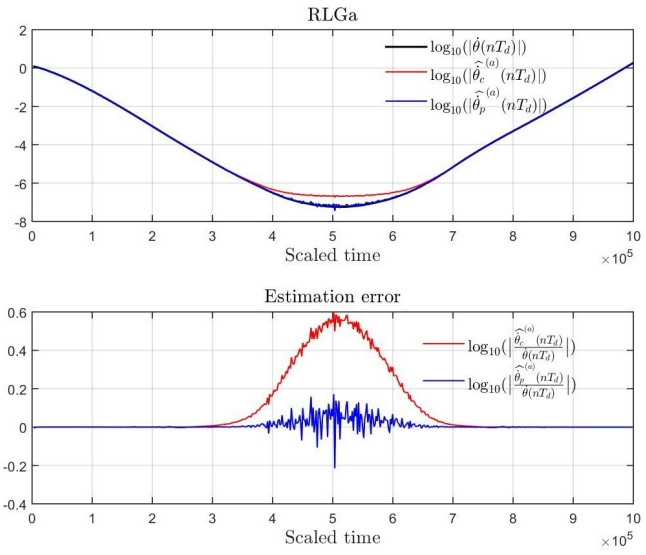


Fig. 3. RLGa. Top: actual logarithmic angular velocity, classical estimation(red), and proposed estimation(blue). Bottom: logarithmic estimation error for classical (red) and proposed estimation (blue).

Using the parameters in Table II, we implement the RLS estimator on RLGa and RLGb. Once the estimation of the mirror parameters $(\rho^{(a)}, \xi^{(a)})$ (resp. $(\rho^{(b)}, \xi^{(b)})$) are obtained, we compute the phase compensation according

to (18). To demonstrate the algorithm performance, we display the following signals, with $0 \leq nT_d \leq 10^6$:

- the actual angular velocity $\dot{\theta}(nT_d)$
- the angular velocity estimated by the classical method

$$\widehat{\dot{\theta}}_c(nT_d) := \frac{1}{T_d}\widehat{\Delta\theta}_c\big(nT_d,(n-1)T_d\big) = \frac{1}{T_d}\left[\varphi(nT_d) - \varphi\big((n-1)T_d\big)\right]$$

- the angular velocity estimated by the compensated phase

$$\widehat{\dot{\theta}}_p(nT_d) := \frac{1}{T_d}\widehat{\Delta\theta}_p\big(nT_d,(n-1)T_d\big).$$

Fig. 3 and 4 show a comparison of the classical and proposed estimation, respectively for RLGa and RLGb. For the sake of clarity, velocities, rather than angle increments, are displayed. Also a logarithmic scale is used, to highlight the behavior at low velocity.

When the angular velocity $\dot{\theta}$ enters the dithering lock-in zone of RLGa, the classical estimate $\widehat{\dot{\theta}}_c^{(a)}(nT_d)$ fails to follow the actual angular velocity when $\dot{\theta} \leq 5.10^{-7}$. The compensated estimation $\widehat{\dot{\theta}}_p^{(a)}(nT_d)$ follows more accurately the variations of $\dot{\theta}$, even in the dithering lock-in zone. Small fluctuations can be seen on the logarithmic error $\log_{10}(\widehat{\dot{\theta}}_p^{(a)}) - \log_{10}(\dot{\theta})$ around the lower point of $\dot{\theta}$. They can be explained by two phenomena; the influence of the measurement noise, which translates into small biases on the estimated parameters, and numerical noise of the solver.

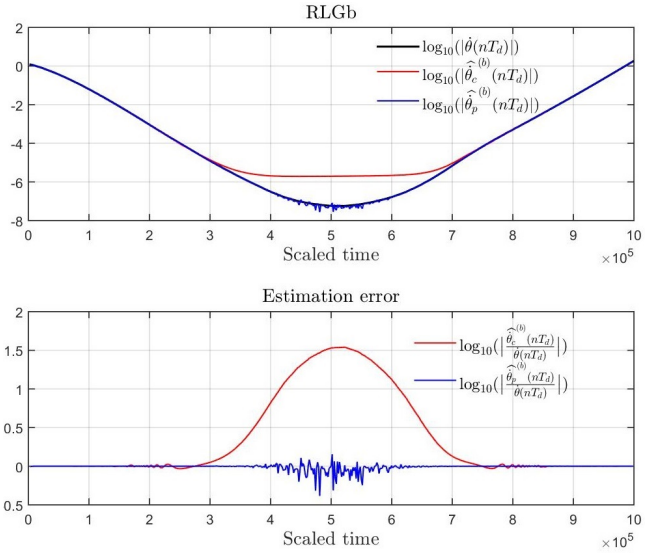


Fig. 4. RLGb: Top: actual logarithmic angular velocity, classical estimation(red), and proposed estimation(blue). Bottom: logarithmic estimation error for classical (red) and proposed estimation (blue).

Similarly to RGLa, when angular velocity $\dot{\theta}$ enters the dithering lock-in zone of RLGb $\dot{\theta} \leq 5.10^{-6}$, the classical estimate $\widehat{\dot{\theta}}_c^{(b)}(nT_d)$ fails to follow the actual angular velocity. Since RLGb has lower quality mirrors than RLGa, the dithering lock-in is reached at higher velocity. Nevertheless, the compensated estimation $\widehat{\dot{\theta}}_p^{(b)}(nT_d)$ follows the variation of $\dot{\theta}$, even in the dithering lock-in zone.

The fluctuations of the logarithmic error for RLGa, with the classical estimation, are of order $10^{0.6}$, while for RLGb, with the proposed estimation, are of order $10^{0.4}$. The compensation has enhanced the accuracy of the lower quality RLGb to a higher level than the higher quality RLGa.

VII. Conclusion

We have proposed an online compensation scheme able to improve the performance of RLGs at very low velocity. It can compensate the effects of the mirrors imperfections and suppress the limitations they induce.

References

[1] Z. Fan, H. Luo, S. Hu, and G. Xiao, "Research on lock-in correction for mechanical dithered ring laser gyro," *Optical Engineering*, vol. 50, no. 3, 2011.

[2] A. Beghi, J. Belfi, N. Beverini, B. Bouhadef, D. Cuccato, A. Di Virgilio, and A. Ortolan, "Compensation of the laser parameter fluctuations in large ring-laser gyros: A Kalman filter approach," *Applied Optics*, vol. 51, no. 31, pp. 7518–7528, 2012.

[3] Z. Fan, H. Luo, G. Lu, and S. Hu, "Online effective backscattering estimation for ring laser gyro," *Chin. Opt. Lett.*, vol. 10, no. 5, p. 051404, May 2012.

[4] D. Cuccato, A. Beghi, J. Belfi, N. Beverini, A. Ortolan, and A. D. Virgilio, "Controlling the non-linear intracavity dynamics of large he–ne laser gyroscopes," *Metrologia*, vol. 51, no. 1, p. 97, 2014.

[5] F. Bretenaker, B. Lépine, A. Le Calvez, O. Adam, J.-P. Taché, and A. Le Floch, "Resonant diffraction mechanism, nonreciprocity, and lock-in in the ring-laser gyroscope," *Phys. Rev. A*, vol. 47, no. 1, pp. 543–551, Jan. 1993.

[6] D. Kühlke and R. Horak, "Fluctuations and transitions at instabilities in a ring laser with optical back-scattering," *Physica B+C*, vol. 111, pp. 111–126, Oct. 1981.

[7] F. Aronowitz, "Fundamentals of the ring laser gyro," in *Optical gyros and their application*, ser. RTO AGARDograph, D. Loukianov, R. Rodloff, H. Sorg, and B. Stiler, Eds. North Atlantic Treaty Organization, Research and Technology Organization, 1999, vol. 339, ch. 3.

[8] Menegozzi, L. N., Lamb, and W. E., "Theory of a ring laser," *Phys. Rev. A*, vol. 8, pp. 2103–2125, Oct 1973.

[9] J. Guckenheimer and P. Holmes, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*, 3rd ed., ser. Applied Mathematical Sciences. Springer New York, 2013.

[10] H. Khalil, *Nonlinear Systems*, 3rd ed. Prentice Hall, 2002.

[11] S. Schwartz, *Encyclopedia of Optical Engineering*, 2nd ed. CRC Press, 2015.

[12] P. Ioannou and J. Sun, *Robust Adaptive Control*. Dover Publications, 2013.

Bibliographie

[1] *Inertia market segmentation.* Thales internal.

[2] *Topaxyz unité de mesure inertielle (umi).* Thales public, https://www.thalesgroup.com/fr/monde/aeronautique/topaxyz-unite-de-mesure-inertielle-umi.

[3] M. Abramowitz and I. A. Stegun, *Handbook of mathematical functions : with formulas, graphs, and mathematical tables*, vol. 55, Courier Corporation, 1964.

[4] G. G. Alain Aspect, Claude Fabre, *Optique quantique 1 : Lasers*, vol. Tome I, Ecole Polytechnique, 2005. https://moodle.polytechnique.fr/course/view.php?id=1899.

[5] ——, *Optique quantique 1 : Lasers*, vol. Tome II, Ecole Polytechnique, 2005.

[6] F. Aronowitz, *Theory of a traveling-wave optical maser*, Physical Review, 139 (1965), p. A635.

[7] F. Aronowitz, *Fundamentals of the ring laser gyro*, in Optical gyros and their application, D. Loukianov, R. Rodloff, H. Sorg, and B. Stiler, eds., vol. 339 of RTO AGARDograph, North Atlantic Treaty Organization, Research and Technology Organization, 1999, ch. 3.

[8] K. Åström and B. Wittenmark, *Adaptive Control : Second Edition*, Dover Books on Electrical Engineering, Dover Publications, 2013.

[9] N. Badaoui, F. Bretenaker, G. Feugnet, P. Martin, B. Morbieu, P. Rouchon, and S. Schwartz, *An online compensation algorithm for improving the performance of gas ring laser gyroscopes*, in IEEE Multi-Conference on Systems and Control 2016, pp. **_**.

[10] N. E. Badaoui, B. Morbieu, P. Martin, P. Rouchon, J.-P. Pocholle, F. Gutty, G. Feugnet, and S. Schwartz, *Towards a solid-state ring laser gyroscope*, Comptes Rendus Physique, 15 (2014), pp. 841 – 850. The Sagnac effect : 100 years later / L'effet Sagnac : 100 ans après.

[11] A. Beghi, J. Belfi, N. Beverini, B. Bouhadef, D. Cuccato, A. Di Virgilio, and A. Ortolan, *Compensation of the laser parameter fluctuations in large ring-laser gyros : A Kalman filter approach*, Applied Optics, 51 (2012), pp. 7518–7528.

[12] A. BOSE, S. PURI, and P. BANERJEE, *Modern Inertial Sensors and Systems*, PHI Learning, 2008.

[13] F. Bretenaker, *Laser Physics*, Laboratoire Aimé Cotton - Université Paris Sud, ENS Cachan and Département de Physique - Ecole Polytechnique, Orsay and Palaiseau, France, 2015. http://www.lac.u-psud.fr/IMG/pdf/2015_laserphysics_bretenaker.pdf.

[14] F. Bretenaker, B. Lépine, A. Le Calvez, O. Adam, J.-P. Taché, and A. Le Floch, *Resonant diffraction mechanism, nonreciprocity, and lock-in in the ring-laser gyroscope*, Phys. Rev. A, 47 (1993), pp. 543–551.

[15] D. Cuccato, A. Beghi, J. Belfi, N. Beverini, A. Ortolan, and A. D. Virgilio, *Controlling the non-linear intracavity dynamics of large he–ne laser gyroscopes*, Metrologia, 51 (2014), p. 97.

[16] S. De, G. Baili, S. Bouchoule, M. Alouini, and F. Bretenaker, *Intensity-and phase-noise correlations in a dual-frequency vertical-external-cavity surface-emitting laser operating at telecom wavelength*, Physical Review A, 91 (2015), p. 053828.

[17] S. De, V. Potapchuk, and F. Bretenaker, *Influence of spin-dependent carrier dynamics on the properties of a dual-frequency vertical-external-cavity surface-emitting laser*, Physical Review A, 90 (2014), p. 013841.

[18] A. Einstein, *Emission and absorption of radiation in quantum theory*, Verhandlungen der Deutschen phyikalischen Gesellschaft, 8 (1916), pp. 318–323.

[19] C. Etrich, P. Mandel, R. C. Neelen, R. Spreeuw, and J. Woerdman, *Dynamics of a ring-laser gyroscope with backscattering*, Physical review A, 46 (1992), p. 525.

[20] H. Everett, *Theory and applications of optical gyroscopes : Part i*, Sensors-the Journal of Applied Sensing Technology, 12 (1995), pp. 54–55.

[21] C. Fabre, *Atomes et lumière, interaction matière rayonnement*, Université Pierre et Marie Curie, 2006.

[22] Z. Fan, H. Luo, S. Hu, and G. Xiao, *Research on lock-in correction for mechanical dithered ring laser gyro*, Optical Engineering, 50 (2011).

[23] Z. Fan, H. Luo, G. Lu, and S. Hu, *Dynamic lock-in compensation for mechanically dithered ring laser gyros*, Chin. Opt. Lett., 10 (2012), p. 061403.

[24] Z. Fan, H. Luo, G. Lu, and S. Hu, *Online effective backscattering estimation for ring laser gyro*, Chin. Opt. Lett., 10 (2012), p. 051404.

[25] G. Grynberg, A. Aspect, and C. Fabre, *Introduction to quantum optics : from the semi-classical approach to quantized light*, Cambridge university press, 2010.

[26] G.Sagnac, *L'éther lumineux démontré par l'effet du vent relatif d'éther dans un interféromètre en rotation uniforme*, SPIE milestone series, 28 (1991), pp. 361–362. fre.

[27] J. Guckenheimer and P. Holmes, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*, Applied Mathematical Sciences, Springer New York, third ed., 2013.

[28] H. Haus, H. Statz, and I. Smith, *Frequency locking of modes in a ring laser*, IEEE journal of quantum electronics, 21 (1985), pp. 78–85.

[29] R. B. Hurst, N. Rabeendran, J.-P. R. Wells, and K. U. Schreiber, *Large ring laser gyroscopes : towards absolute rotation rate sensing*, in International Seminar on Photonics, Optics, and Applications 2014, International Society for Optics and Photonics, 2015, pp. 944407–944407.

[30] P. Ioannou and J. Sun, *-Robust Adaptive Control*, Dover Publications, 2013.

[31] H. Khalil, *Nonlinear Systems*, Prentice Hall, third ed., 2002.

[32] D. Kühlke and R. Horak, *Fluctuations and transitions at instabilities in a ring laser with optical back-scattering*, Physica B+C, 111 (1981), pp. 111–126.

[33] L. Ljung, *System identification, theory for the user. upper saddle river, nj 07458, usa, prentice-hall*, tech. rep., ISBN 0-13-656695-2, 1999.

[34] J.-S. Macé, *Modélisation du fonctionnement d'un gyrolaser He-Ne de très haute précision*, PhD thesis, Université Paris-Sud, 2014.

[35] W. M. Macek and D. Davis Jr, *Rotation rate sensing with traveling-wave ring lasers*, Applied Physics Letters, 2 (1963), pp. 67–68.

[36] Menegozzi, L. N., Lamb, and W. E., *Theory of a ring laser*, Phys. Rev. A, 8 (1973), pp. 2103–2125.

[37] A. Mignot, *Gyrolaser semi-conducteur à cavitè externe.*, PhD thesis, Ecole Polytechnique, 2008.

[38] S. Mohammad-Nejad, M. Pourmahyabadi, and A. Lajevardizadeh, *Performance modeling of ring laser gyro in inertial*, Iranian Journal of Electrical and Electronic Engineering, 2 (2006), pp. 82–90.

[39] N. Petit and P. Rouchon, *Dynamique et contrôle des systèmes*, Ecole des Mines de Paris, 2008.

[40] M. Pizzocaro, *Development of a ring laser gyro : active stabilization and sensitivity analysis*, (2009).

[41] R. Rodloff, *A laser gyro with optimized resonator geometry*, IEEE Journal of Quantum Electronics, 23 (1987), pp. 438–445.

[42] S. Schwartz, *Gyrolaser à état solide. Application des lasers à atomes à la gyrométrie*, PhD thesis, Ecole Polytechnique, 2006.

[43] ——, *Theory and numerical simulations of the solid-state ring laser gyro*, (2012). Private communcation.

[44] ——, *Encyclopedia of Optical Engineering*, CRC Press, second ed., 2015.

[45] S. Schwartz, F. Gutty, G. Feugnet, J.-P. Pocholle, and G. Desilles, *Solid-state ring laser gyro for aerospace applications*, International Conferenceon Space Optics, (2012).

[46] P. Smith, *Linewidth and saturation parameters for the 6328-å transition in a he–ne laser*, Journal of Applied Physics, 37 (1966), pp. 2089–2093.

[47] S.-W. Song, J.-C. Lee, S.-K. Hong, and D. Chwa, *New random walk reduction algorithm in ring laser gyroscopes*, Journal of Optics, 12 (2010), p. 115501.

[48] G. Stedman, *Ring-laser tests of fundamental physics and geophysics*, Reports on progress in physics, 60 (1997), p. 615.

[49] G. Stedman, Z. Li, C. Rowe, A. McGregor, and H. Bilger, *Harmonic analysis in a large ring laser with backscatter-induced pulling*, Physical Review A, 51 (1995), p. 4944.

[50] G. Teschl, *Ordinary Differential Equations and Dynamical Systems*, Graduate studies in mathematics, American Mathematical Soc.

[51] A. Velikoseltsev et al., *The development of a sensor model for large ring lasers and their application in seismic studies*, PHD, Technische Universitat Munchen, (2005).

Résumé

Les gyroscopes laser à gaz constituent une solution technique de haute performances dans les problématiques de navigation inertielle. Néanmoins, pour de très faibles vitesses de rotation, les petites imperfections des miroirs de la cavité optique font que les deux faisceaux contrapropageant sont verrouillés en phase. En conséquence, les mesures en quadrature de leur différence de phase ne permettent plus de remonter directement aux vitesses de rotation à l'intérieur d'une zone autour de zéro, dite zone aveugle statique, ou, si l'on utilise une procédure d'activation mécanique, dite zone aveugle dynamique. Ce travail montre qu'il est néanmoins possible, en utilisant des méthodes issues du filtrage et de l'estimation, de remonter aux vitesses de rotation mêmes si ces dernières sont en zone aveugle. Pour cela, on part d'une modélisation physique de la dynamique que l'on simplifie par des techniques de perturbations singulières pour en déduire une généralisation des équations de Lamb. Il s'agit de quatre équations différentielles non-linéaires qui décrivent la dynamique des intensités et des phases des deux faisceaux contrapropageant. Une étude qualitative par perturbations régulières, stabilité exponentielle des points d'équilibre et applications de Poincaré permet de caractériser les zones aveugles statiques et dynamiques en fonction des imperfections dues aux miroirs. Il est alors possible d'estimer en ligne avec un observateur asymptotique fondé sur les moindre carrés récursifs ces imperfections en rajoutant aux deux mesures en quadrature celles des deux intensités. La connaissance précise de ces imperfections permet alors de les compenser dans la dynamique de la phase relative, et ainsi d'estimer les rotations en zone aveugle. Des simulations numériques détaillées illustrent l'intérêt de ces observateurs pour augmenter la précision des gyroscopes à gaz.

Mots Clés

Gyrolaser, systèmes dynamiques, perturbations singulières, perturbations régulières, estimation, application de Poincaré, moindres carrés récursifs.

Abstract

Gaz ring laser gyroscopes provide a high performance technical solution for inertial navigation. However, for very low rotational speeds, the mirrors imperfections of the optical cavity induce a locking phenomena between the phases of the two counter-propagating Laser beams. Hence, the measurements of the phase difference can no longer be used when the speed is within an area around zero, called lock-in zone, or,if a procedure of mechanical dithering is implemented, dithering lock-in zone. Nevertheless, this work shows that it is possible using filtering and estimation methods to measure the speed even within the lock-in zones. To achieve this result, we exploit a physical modeling of the dynamics that we simplify, using singular perturbation techniques, to obtain a generalization of Lamb's equations. There are four non-linear differential equations describing the dynamics of the intensities and phases of the two counter-propagating beams. A qualitative study by regular perturbation theory, exponential stability of the equilibrium points and Poincaré maps allows a characterisation of the lock-in zones according to the mirrors imperfections. It is then possible to estimate online, with an asymptotic observer based on recursive least squares, these imperfections by considering the additional measurements of the beam intensities. Accurate knowledge of these imperfections enables us to compensate them in the dynamic of the relative phase, and thus to estimate rotational speeds within the lock-in zones. Detailed numerical simulations illustrate the interest of those observers to increase the accuracy of gas ring laser gyroscopes.

Keywords

Ring Laser Gyroscope, dynamical systems, singular perturbations, regular perturbations, estimation, Poincaré map, recursive least squares.