



Méthodes d'inversion pour la reconstruction de mines enfouies à partir de mesures d'antennes radar.

Mohamed Lakhali

► To cite this version:

Mohamed Lakhali. Méthodes d'inversion pour la reconstruction de mines enfouies à partir de mesures d'antennes radar.. Equations aux dérivées partielles [math.AP]. Université Paris Saclay (COMUE), 2017. Français. NNT : 2017SACLX034 . tel-01724695

HAL Id: tel-01724695

<https://pastel.hal.science/tel-01724695>

Submitted on 6 Mar 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

NNT : 2017SACLX034



THÈSE DE DOCTORAT
DE L'UNIVERSITÉ PARIS-SACLAY
PRÉPARÉE À L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Ecole doctorale n°574
Ecole doctorale de Mathématiques Hadamard (EDMH)
Spécialité de doctorat : Mathématiques Appliquées
par

M. MOHAMED LAKHAL

Méthodes d'inversion pour la reconstruction de mines enfouies à partir de
mesures d'antennes radar

Après avis des rapporteurs : AMEL BEN ABDA (UNIVERSITÉ DE TUNIS EL MANAR)
JULIEN DIAZ (INRIA BORDEAUX - SUD-OUEST)

Thèse présentée et soutenue à l'École polytechnique-Palaiseau, le 22 Juin 2017.

Composition du Jury :

M. LORENZO AUDIBERT	Chercheur EDF R&D	(Examineur)
M. MARC BONNET	Directeur de recherche ENSTA ParisTech	(Président)
M. ANTONIN CHAMBOLLE	Directeur de recherche CNRS - École polytechnique	(Examineur)
M. JULIEN DIAZ	Chargé de recherche INRIA Bordeaux - Sud-Ouest	(Rapporteur)
M. HOUSSEM HADDAR	Directeur de recherche INRIA Saclay - École polytechnique	(Directeur de thèse)

À la mémoire de mon
père.

Remerciements

Mon directeur de thèse

J'aimerai avant tout exprimer ma profonde reconnaissance envers Houssein Haddar, il m'a fait confiance pour intégrer l'équipe de recherche DeFI en acceptant de m'accompagner pour cette thèse ambitieuse. J'aimerai également lui dire à quel point son orientation, sa grande disponibilité, et ses qualités humaines durant ces années au CMAP étaient sources de motivation pour moi. Grâce à lui j'ai réussi à développer ma vision sur la recherche scientifique et industrielle et à rencontrer des chercheurs d'horizons très différents. Ce fut une expérience très enrichissante tant sur le plan professionnel que personnel qui restera un des meilleurs souvenirs de ma vie professionnelle.

Financement de mon projet de recherche

Mon travail de recherche a été facilité grâce au financement de l'Ecole polytechnique sur le projet de recherche FUI-TANDEM. Mes remerciements s'adressent à l'ensemble des collaborateurs du projet que j'ai rencontré pendant mes années de recherche doctoral.

Rapporteurs de ma thèse et jury de ma soutenance

Je souhaite adresser mes remerciements les plus sincères à mes deux rapporteurs Amel Ben Abda et Julien Diaz pour avoir accepté d'être rapporteur de ma thèse. Merci pour le temps, la lecture attentive et les améliorations recommandées pour mon manuscrit. Je tiens à exprimer tout particulièrement ma reconnaissance à Antonin Chambolle pour l'intérêt dont il a fait preuve envers mes recherches. Merci de me faire l'honneur de participer à l'évaluation de mon travail. Je tiens à remercier chaleureusement Marc Bonnet d'avoir accepté de juger mes travaux et de consacrer son temps en examinant mon manuscrit. C'est un honneur pour moi qu'il préside le jury de ma soutenance. A Lorenzo Audibert, j'ai eu le plaisir de faire sa connaissance lors de ses années de recherche au sein de l'équipe et ses passages après au CMAP. Il sait que c'est une joie pour moi qu'il fasse partie de mon jury de thèse.

Mes remerciements s'adressent à tous les chercheurs et personnels administratifs du CMAP, qui ont fait de ce laboratoire une ambiance de travail très agréable.

Je tiens donc à remercier Nasséra d'avoir toujours été présente pour la gestion de toutes mes démarches administratives. Un grand merci à Alex, Vincent et Wilfried au CMAP, Jessica, Maeva, Wallis, et Valérie chez INRIA pour leur gentillesse et disponibilité. Merci à Sylvain responsable SI à mon arrivé au labo.

Je n'oublie pas les nombreuses personnes de l'équipe DeFI qui m'ont aidé de près ou de loin dans mon travail. À Fioralba, Lucas et Jing. Kamel, Federico, Zixian, Lorenzo, Tobias, et Marc. Hele, et Kevish. Jack, Irene et Shixu. Ahmed, Bilel, et Marwa. Un grand merci spécialement à Simona et Thi Phong.

J'ai trop apprécié la compagnie des personnes qui ont passé par le bureau 2015 (le meilleur bureau!) Gang, Gweanel et Matteo puis Belhal, Geneviève, Esther, Frédéric, Luca, Mathilde et Remi. Bon courage pour vos thèses et carrières!

Je garde de cette période de recherche au sein du CMAP des souvenirs très vifs. Je pense particulièrement aux afterworks, séminaires, et d'autres événements. Je remercie donc Gustaw, Alexey, Romain, Jean Bernard, Emile, Aline, Ludovic, Haytem, Othemane, Mathieu et Fedor pour les discussions dans le couloir et en salle café. Je ne saurais terminer ces remerciements sans saluer les 'grands' sportifs du labo passant de la musculation, fractionné puis la coulée verte, et je termine cette énumération nostalgique avec the 'peut-être Mudday' group WhatsApp créé par Hadrien, motivé par Massil, et s'ajoute aux aventures de Dorian (LIX).

Mes remerciements s'adressent à mes enseignants

De l'Ecole Mohammadia d'Ingénieurs. Rajae Aboulaich pour son soutien tout au long de ma formation d'ingénieur d'Etat à l'EMI, grâce à elle, j'ai eu la chance de pouvoir travailler avec Houssein. Abdelkhalek Cheddadi pour son encadrement tout au long de mes années d'étude à l'Ecole Mohammadia ses conseils et son intérêt à l'évolution de mes recherches. Malika Saadaoui, j'ai énormément apprécié la qualité de vos cours et le travail avec vous durant mon PFE.

De l'université de Meknès. Principalement mes professeurs, Jilali Assim et Rachid Chibloun ainsi que Abdeslem El Kassimi qui m'ont initié aux bases des Mathématiques. Je tiens à remercier tout mes enseignants qui m'ont donné le goût des sciences.

Mes amis

Je tiens à remercier ceux qui m'ont soutenu en dehors du labo, en particulier à la cité internationale de Paris : Aude, Elena, Gäel, Georg!, Giorgio, Hana, Marco!, Mohamed, Mohammed!, Michell!, Thomas.

Je voudrais remercier mes amis, ceux que je connais depuis plus longtemps, Abdel, Amine, Ahmed, Ayoub, (j'ai cité ceux dont le prénom commence par A.) et les autres de l'EMI.

Ma famille

Mes remerciements vont enfin à mes parents qui m'ont toujours encouragés dans la poursuite de mes études, leur compréhension et leur soutien. A toute ma famille, je pense particulièrement Zakia, Rajae, Abdelmoula, Bouchra, Nisrine, Mohammadi, Fatima, Said et Kamela. Vous m'avez épaulé dans les moments difficiles et toujours été à mes côtés, j'espère que vous appréciez le fruit de tant d'effort. Un grand merci à la petite adorable Maroua pour les préparations du pot de thèse.

Merci à vous tous !

Table des matières

Introduction Générale	i
I Méthodes de type SAR pour la Recherche de Mines enfouies	v
1 Sur le projet Tandem	1
1.1 Le projet Tandem	2
1.1.1 Introduction	2
1.1.2 Contexte	2
1.1.3 Objectif du projet Tandem	4
1.1.4 Conclusion	5
1.2 Principe d'imagerie radar à ouverture synthétique	5
1.2.1 Introduction	5
1.2.2 Techniques d'imagerie radar à ouverture synthétique SAR	5
1.2.3 L'imagerie radar	7
1.2.4 Le principe d'ouverture synthétique	9
1.2.5 Conclusion	11
2 Modélisation de l'imagerie SAR dans un milieu homogène	13
2.1 Présentation du problème de diffraction pour l'imagerie	14
2.1.1 Problème direct : Équations de propagation	14
2.1.2 Formulation du problème inverse	17
2.2 Démarche d'analyse et d'acquisition de données	19
2.2.1 Quelques résultats sur la propagation d'ondes électromagnétiques pour un milieu de référence homogène	20
2.2.2 Approximation de Born	21
2.2.3 Approche variationnelle	22
2.2.4 Validation	24
2.3 Imagerie SAR en configuration backscattering	26
2.3.1 Description de la configuration backscattering	26
2.3.2 Approximation en Champ Lointain	26
2.4 Résultats numériques	29
2.4.1 Notations et Préliminaires	30
2.4.2 Expérimentations Numériques	32
2.4.3 Qualité de l'image en fonction des points de mesure	37
2.5 Conclusion	41

3	Extension au cas d'un milieu non homogène	43
3.1	Modélisation d'un milieu de référence hétérogène	44
3.2	Validation dans le cas bicouche	46
3.2.1	Notations et préliminaires	46
3.2.2	Description du modèle de propagation dans le cas bicouche	47
3.2.3	Expression analytique de la fonction de Green	47
3.3	Résultats numériques et discussions	51
3.3.1	Notations et préliminaires	51
3.3.2	Expérimentations numériques et validation	52
3.3.3	Conclusion	54
3.4	Limitations de la techniques SAR	55
3.4.1	Limitations liées aux données Lidar	55
3.4.2	Limitations liées aux type de sol	57
3.4.3	Conclusion	64
3.5	Reconstruction via une approche itérative et régularisation TV	64
3.5.1	Introduction et motivations	64
3.5.2	Technique de variation totale	65
3.5.3	Schéma Itératif de Landweber	66
3.5.4	Schéma d'inversion hybride	67
3.5.5	Résultats Numériques et Discussions	68
II	Identification of Small Inclusions from Near Field Data In Quasi-back-scattering Configuration	75
4	Introduction and Preliminaries	77
4.1	Presentation of the Forward Problem	78
4.1.1	The scalar model for the forward problem	78
4.1.2	Asymptotic Form of the Scattered Field for Small Inhomogeneities	78
4.2	Sampling methods and the MUSIC algorithm	80
5	A sampling method for quasi-backscattering data adapted to the Tandem project	83
5.1	Introduction	83
5.2	Quasi-backscattering Configuration	84
5.2.1	Asymptotic expression of the scattered field	85
5.2.2	Characterization of the scatterers location using the approximate near field operator	88
5.3	Numerical Algorithms and Experiments	95
5.3.1	Notation and Preliminaries	95
5.3.2	Discussion of the case of monopolar inclusions	96
5.3.3	Discussion of the case of multipolar inclusions	106
5.3.4	Discussion of the case where the polarization tensor is not necessarily diagonal	110

5.4	Conclusion	112
6	Application of the method for quasi-backscattering data in other scenarios	115
6.1	Asymptotic form of the scattered field for the cylindrical configuration	117
6.1.1	Measurements on a circular path	117
6.1.2	Sources in a line configuration	118
6.2	Characterization of the small inclusions in the quasi-backscattering configuration	120
6.2.1	Algorithm of reconstruction in the cylindric case	121
6.3	Numerical Results and Discussion	126
6.3.1	Reconstruction in cylindric configuration	127
6.3.2	Reconstruction in spherical Configuration	131
	Conclusion Générale	135
	Bibliographie	137

Introduction Générale

Contexte

Mes travaux s'inscrivent dans le cadre des thématiques de l'équipe de recherche DeFI (Détermination de Formes Et Identification, INRIA-Ecole Polytechnique) portant sur l'élaboration d'outils théoriques et numériques pour la résolution de problèmes directs et inverses en relation avec des applications en imagerie électromagnétique, en particulier des applications radar et sonar. L'objectif de mon travail est de proposer ce type de solutions pour des besoins de cartographie de mines anti-personnels mais qui peuvent aussi servir d'autres applications telles que l'imagerie biomédicale pour l'identification de cellules tumorales dans le corps humain.

Mon travail de thèse a été financé par projet FUI Tandem portant sur l'imagerie radar de mines enfouies dans un sol sec. L'idée de ce projet est d'exploiter le principe de l'imagerie radar à ouverture de synthèse (SAR) pour mettre en œuvre un système aéroporté permettant la cartographie des mines enfouies sur une région très étendue, tel que le désert de l'Atacama au Chili.

La première partie de la thèse porte sur une modélisation simplifiée de l'acquisition des données radar moyennant la prise en compte de la diffraction d'ondes électromagnétiques par des mines enfouies. La difficulté essentielle réside dans l'incorporation de la diffraction générée par le sol et l'utilisation d'antennes linéiques à "large" ouverture en mode rétrodiffusion (backscattering). L'objectif premier de cette partie est de vérifier les hypothèses d'approximation de type Born utilisées pour la justification du solveur inverse. Cette approximation servira aussi bien pour la génération de données synthétiques pour la proposition des extensions de la méthode SAR au cas non homogène. En effet, bien que cette technique soit bien connue, et donne de très bons résultats dans le cas d'un milieu homogène, son adaptation aux applications de détection d'objets enfouis pose problème. Cette limitation est liée principalement au caractère non homogène du milieu de référence. Nous proposons d'analyser sa précision et les corrections qu'il faut lui apporter dans l'asymptotique petite perturbation introduite par la réponse du sol.

Les techniques SAR fournissent des solutions intéressantes pour l'imagerie en temps réel et peuvent être utilisées pour fournir des cartes 2D des mines. Cependant, pour chercher l'information en profondeur et donc la localisation en 3D des mines d'autres moyens d'inversion seront développés dans la deuxième partie de la thèse. L'algorithme envisagé repose sur l'extension de techniques de type échantillonnage au cas d'antenne linéique moyennant et des données en mode rétrodiffusion étendue (quasi-backscattering). Plusieurs travaux ont été effectués dans ces dernières années pour les problématiques d'imagerie par les méthodes dites-qualitatives [23, 15, 24] exploitant les données en mode multi-diffusion (réseau étendue de capteurs/récepteurs). Notre objectif dans cette partie est d'étendre ce type de technique lorsque les données sont beaucoup plus restreintes comme dans le cas de l'application Tandem. Nous considérons toutefois une configuration de données plus étendue que celle en rétrodiffusion puisque nous supposons qu'une source sera associée à un réseau linéique de capteurs (et non un seul capteur). Contrairement à

la première partie à caractère très applicatif, cette deuxième partie est plutôt prospective proposant de nouvelles méthodes d'imagerie radar prometteuses avec des ouvertures vers d'autres applications. Elle diffère aussi par le fait qu'elle soit rédigée en anglais.

Plan de la thèse et résumés

Première partie : Méthodes de type SAR pour la Recherche de Mines enfouies

Nous consacrons la première partie de cette thèse à la validation et à la modification de la méthodologie SAR (Synthetic Aperture Radar) proposée par les ingénieurs pour traiter les données d'antenne afin d'imager les mines.

La difficulté essentielle réside dans le fait que la méthode SAR repose sur le principe d'un milieu de référence homogène alors que le cas d'étude ne l'est pas. En effet, les sols désertiques contenant les mines ont un indice de réfraction différent de celui de l'air. Pour prendre en compte ce caractère non-homogène, nous avons étudié dans cette thèse l'incorporation d'une approximation bicouche du milieu de référence afin de corriger l'effet du sol et d'obtenir des images moins sensibles à l'effet de celui-ci.

L'incorporation de la fonction de Green bicouche dans la méthode d'inversion peut se faire de deux manières. La première consiste à imiter la technique SAR pour construire une indicatrice de la géométrie via la rétropropagation de la donnée dans le milieu bicouche en utilisant la formule donnée par l'approximation de Born. La deuxième option, beaucoup plus coûteuse numériquement consiste à inverser le modèle de Born avec une technique de régularisation adaptée. Nous avons étudié les deux approches. Nous avons montré pour la première que la modification proposée pour la fonctionnelle SAR n'améliore pas sensiblement les reconstructions. Ceci s'explique essentiellement par le fait que les images obtenues sont seulement des projections (2D) sur l'interface air-sol des mines. Les deux méthodes sont robustes aux petites fluctuations aléatoires engendrées par des inhomogénéités dans le sol mais elles le sont moins par rapport aux fluctuations de l'interface air-sol ou plus généralement aux erreurs dans les données lidar sur la position de cette interface.

Pour la deuxième approche, nous avons étudié l'utilisation d'une technique de régularisation de type variation totale pour réduire la sensibilité aux erreurs lidar. Les résultats numériques sont positifs mais le coût de la méthode reste élevé au regard d'une possible incorporation dans un algorithme d'imagerie en temps réel. La méthodologie donne toutefois une option sérieuse pour le post-traitement des données.

Chapitre 1 : Sur le projet Tandem

Nous introduisons dans un premier chapitre le contexte général du projet FUI Tandem et y présentons les différentes techniques existantes de détection de mines antichars et antipersonnels. Nous décrivons ensuite de manière synthétique les techniques d'imagerie radar, notamment celles qui seront exploitées dans le cadre du projet Tandem.

Chapitre 2 : Modélisation de l'imagerie SAR dans un milieu homogène

Ce chapitre a pour objectif de modéliser le problème d'imagerie dans la configuration la plus simple. Il permet d'exposer les différentes hypothèses simplificatrices qui se cachent derrière l'algorithme SAR. Il nous permet également d'analyser théoriquement et de tester numériquement sa validité et précision dans une situation idéaliste.

Chapitre 3 : Extension au cas d'un milieu non homogène

Nous donnons la formulation du problème de l'imagerie dans une version plus générale où le milieu de propagation est non homogène, notamment bicouche. Nous étendons l'algorithme SAR à cette configuration et comparons les résultats par rapport à une approche plus simple consistant à ignorer l'effet du sol. La robustesse par rapport à des inhomogénéités dans le sol sera également étudiée. Nous complétons ce chapitre par une discussion de méthodes d'inversions plus complexes se basant sur l'inversion d'une représentation linéaire de la réflectivité du sol. Nous employons en particulier une régularisation de type Variation Totale pour stabiliser l'inversion.

Deuxième partie : Identification 3D des petits défauts à partir de la formulation asymptotique du champ proche

Cette partie est rédigée en anglais. Nous nous y sommes intéressés à l'adaptation de méthodes d'inversion de type MUSIC (MUltiple SIgnal Classification) pour retrouver l'information « profondeur » non fournie par les méthodes SAR. Les méthodes MUSIC reposent toutefois sur des données multi-statiques : réseau 2D d'antennes émettrices-réceptrices. L'objectif de cette partie est d'étendre ce type de méthodes à des configurations de données moins gourmandes. En nous inspirant de la problématique Tandem, nous avons proposé l'extension de ces méthodes au cas de données en configuration quasi-backscattering : une antenne émettrice couplée à un réseau 1D d'antennes réceptrices. La méthodologie est complètement nouvelle et la justification de la méthode repose sur l'analyse asymptotique du problème de diffraction dans le régime petit obstacle et champ lointain. L'étude a également été étendue à des configurations cylindriques qui pourraient être adaptées à l'imagerie biomédicale. Cette deuxième partie est plus novatrice en terme de méthodologie et nous semble aussi prometteuse en terme de perspectives scientifiques et applicatives.

Chapitre 1 : Sur les méthodes de type MUSIC

Nous rappelons dans ce premier chapitre le modèle de propagation d'onde dans un milieu contenant des petites inclusions à fréquence fixe. Nous y exposons ensuite le principe des méthodes d'échantillonnage permettant la reconstruction de la forme d'objets ou leur localisation lorsqu'ils sont petits à partir de mesures en configuration multi-statiques. Nous expliquons aussi pourquoi la technique ne peut pas s'appliquer aux données en rétrodiffusion.

Chapitre 2 : Une méthode d'échantillonnage pour le traitement des données en configuration 'quasi-backscattering' adaptée au projet Tandem

Ce chapitre a pour objectif d'étendre les méthodes d'échantillonnage à des configurations où les données correspondent à des mesures en mode rétrodiffusion étendu : une source est liée à un réseau linéique de capteurs. Ce mode s'inspirant du projet Tandem permet d'envisager l'utilisation de méthodes de type échantillonnage lorsqu'un découplage entre la paramétrisation des sources et les mesures peut être établie. Nous expliquons comment cela peut être (asymptotiquement) possible dans la configuration où le trajet des sources est perpendiculaire à l'antenne linéique et où les objets sont petits et loins de l'antenne. Nous proposons et analysons une méthode de type MUSIC associée à cette configuration. Nous exploitons ensuite les résultats théoriques pour discuter des variantes d'algorithmes possibles permettant d'obtenir la localité 3D des petites inclusions.

Chapitre 3 : Applications de la technique pour d'autre domaine en imagerie

Nous reprenons la même démarche développée dans le chapitre précédent mais pour des scénarios différents de collectes de données. Toujours en mode de rétrodiffusion étendu, nous analysons en particulier la méthode d'échantillonnage pour des trajets circulaires des sources. Cette configuration, s'inspirant d'applications en imagerie biomédicale, permet d'avoir de meilleures reconstructions. On analysera en particulier l'effet de combinaisons de différents trajets des sources.

Première partie

Méthodes de type SAR pour la Recherche de Mines enfouies

Sur le projet Tandem

Contents

1.1 Le projet Tandem	2
1.1.1 Introduction	2
1.1.2 Contexte	2
1.1.3 Objectif du projet Tandem	4
1.1.4 Conclusion	5
1.2 Principe d'imagerie radar à ouverture synthétique	5
1.2.1 Introduction	5
1.2.2 Techniques d'imagerie radar à ouverture synthétique SAR	5
1.2.3 L'imagerie radar	7
1.2.4 Le principe d'ouverture synthétique	9
1.2.5 Conclusion	11

Notons que la détection des mines enfouies est une préoccupation majeure en matière de sécurité civile. Elle intéresse des États, des organisations non gouvernementales (ONG) et des organisations internationales, pour mettre un point au désastre causé par ces engins explosifs qui créent chaque année un nombre important de victimes, principalement des civils.

Mon projet de thèse s'inscrit dans le cadre du projet FUI-Tandem qui trouve ses origines dans les relations entre l'École Polytechnique et les principales universités chiliennes. L'objectif principal de ce projet est de développer une solution aéroportée pour la cartographie des mines enfouies. Il est donc question de réaliser des images (3D si possible) en temps réel du terrain, moyennant une antenne à ouverture synthétique (ROS) portée par un aéronef, et de chercher des améliorations de la qualité de détection en directions transverses et en profondeur via un design intelligent de l'antenne et un bon choix de fréquences d'émission.

Les techniques actuellement utilisées en matière d'observation et d'identification de ces objets restent limitées et non efficaces et mettent en danger la vie des utilisateurs. Ainsi, cette étude vise l'utilisation automatique d'imagerie ROS pour mettre en œuvre un système efficace, simple de fabrication, précis, flexible au développement et sans risque d'utilisation. Dans ce chapitre, nous allons introduire dans une première section le projet Tandem. Dans la seconde section, nous allons présenter la technique d'imagerie radar à ouverture de synthèse, et surtout ce qui concerne son pouvoir de résolution.

1.1 Le projet Tandem

1.1.1 Introduction

Les conflits armés se répercutent également sur les populations. En effet, et même des années après la guerre, des milliers de civils sont victimes des mines antipersonnel, des bombes à sous-munitions ou autres explosifs. Face aux chaos engendrés par ce genre de problème, le projet Tandem (Techniques Aéroportés Numérique de Détection de Mines) vient pour proposer une solution innovante dans le but de protéger ces personnes innocentes n'ayant pas participé à ces hostilités. Dans cette première section, nous allons répondre à quelques questions à savoir le contexte du projet Tandem, donner ensuite une description générale, et parler enfin de la maquette du dispositif visée par le projet.

1.1.2 Contexte

La cartographie des zones minées et l'éradication des mines intéressent des individus, des ONG, des entreprises et des États [16]. Pour faire cesser les souffrances et les pertes en vies humaines causées par les mines antipersonnel qui tuent ou mutilent des centaines de personnes par semaine, pour la plupart des civils [26, 53], bien sûr, ces mines font chaque année de nombreuses victimes.

Lors de la signature du traité d'Ottawa en décembre 1997, de nombreux États se sont engagés pour l'interdiction de l'emploi, du stockage, de la production et du transfert des mines antipersonnel et sur leur destruction [45]. Cette convention est entrée en vigueur en mars 1999.

Très vite des avancées intéressantes de cette campagne sont réalisées, en effet, le nombre de victimes par année dans le monde est en diminution, au moins 8000 recensées au début des années 2000 au moins 5200 en 2008 et au moins 3956 en 2009. Mais comme nous l'avons mentionné, le constat reste extrêmement mitigé avec encore près de 6000 victimes en 2007, 10 ans après les premières ratifications du traité d'Ottawa par les 156 états signataires.

Même si certaines cartes contenant des informations sur les positions des mines sont rendues publiques, il est nécessaire de prendre en compte le mouvements de terrain, comme lors catastrophes naturelles ou de glissements de terrain. Pour palier à ce problème, la solution repose sur la localisation via la recherche systématique manuelle ou l'utilisation de moyens aéroportés.

Origine du projet

Le Chili qui fait parti des 156 Etats engagés dans le traité d'Ottawa, et convaincu par les conséquences lourds de la présence des mines disposés sur le nord et le sud de son sol durant l'époque Pinochet. Un pays qui vise la neutralisation et la dé-pollution des 600 000 mines disposées sur son sol, principalement pour des perspectives de développement économique sachant que la moitié des mines au Chili sont au nord du pays et proches des grands gisements de cuivre et autres minerais à proximité du désert d'ATACAMA.

Le projet Tandem est le fruit des relations du rapprochement des relations académiques entre la France et le Chili. En effet, lors de sa visite en France le président Pinera du Chili, dans le cadre de développement des collaborations en matière de recherches et innovations technologiques, un accord a été signé sous l'égide des deux présidences par le seul grand groupe Amesys-BULL

des entreprises, des PME et de l'École polytechnique et les principales institutions académiques chiliennes.

Les Avancées Technologiques

Avant de fixer les objectifs du projet Tandem et les principales solutions, nous allons tout d'abord nous situer dans le cadre des développements technologiques pour citer les principales solutions existantes en matière de détection des mines antichar et antipersonnel dans la littérature, pour cela nous distinguons deux grands volets à savoir les techniques de détection terrestres et aéroportées.

Techniques Terrestres

Notons ici que la quasi-totalité des techniques humanitaires de détection actuellement utilisées [45, 53] sont terrestres et reposent principalement sur :

Le déminage manuel : Il repose sur l'utilisation d'un détecteur des métaux est effectué par des personnes entraînées pour trouver l'engin puis le détruire, c'est une technique très longue et qui présente énormément de risques.

Le déminage mécanique : Il utilise des débroussailleuses et fléaux rotatifs, il vient principalement en appui du précédent, pour faciliter la tâche et réduire le risque et le temps nécessaire pour une zone donnée, cette technique présente divers inconvénients, notamment, la limite d'utilisation, le coût, ainsi que leur fiabilité [34, 28, 44].

Le déminage à l'odorat : Il consiste à recourir à l'odorat des animaux principalement les chiens, et les rats [52, 51, 30], technique qu'on utilise pour le contrôle et en appui de déminage manuel. Bien que cette technique fonctionne plutôt bien, les principales difficultés qui se présentent à côté du dressage de ces animaux et formations de leurs maîtres sont à la fois, la saturation des champs de mines par des vapeurs d'explosifs et le temps de dépollution très importants, ce qui rend difficile l'application de ces techniques olfactives.

D'autres techniques terrestres plus sophistiquées connues dans le domaine militaire, ces méthodes dites High-tech sont portées par des véhicules, le système de détection nécessite des taux de détection très importants (99%) afin d'éviter des accidents du personnel et de véhicules support, ces taux restent difficiles à obtenir, pour plus de détails sur ces techniques nous invitons le lecteur à consulter le guide de la lutte antimine[33], publié par le centre international de déminage humanitaire - Genève.

Pour conclure, notons que le temps nécessaire au déminage reste très réduit et qui ne dépasse pas les 3km/h compte tenu de la vitesse de déplacement des porteurs, le coût de revient reste aussi très important ; le coût de localisation d'une mine dépasse 60 à 100 fois son coût de fabrication.

Techniques Aéroportées

À ce jour, les techniques aéroportées s'appuient principalement sur le calcul de différence thermique entre l'environnement et l'objet d'intérêt. La cartographie des mines par moyen aé-

rapporté s'effectue par caméra infrarouge lors des amplitudes thermique intersaison, la variation de cette amplitude signale la présence d'un matériau de propriétés thermiques différentes du sol et qui peut correspondre aux mines [60]. Malheureusement, cette différence est faible et ne se remarque que dans de conditions thermiques favorables [53]. En outre, ces détecteurs aussi performants soient-ils, présentent plusieurs limitations liées principalement à la quantité de chaleur solaire reçue, le type de sol, le type de mines qui avec le développement dans ce domaine contiennent dans certains cas peu ou pas de métal, l'humidité ou la sécheresse du sol et aussi la gêne due à la présence de végétation.

L'une des principales utilisations de la technologie radar en matière de recherche des objets faiblement enfouis fait appel au principe GPR (Ground Penetrating Radar), pour une référence sur cette technique de détection nous renvoyons le lecteur vers [47], ou encore d'autres références [31, 25, 49]. A l'heure actuelle, la complexité des objets à détecter ainsi que celle de l'environnement rendent difficile la localisation de ces engins explosifs par un seul type de ces instruments. Il est donc important, de combiner plusieurs type de systèmes de détections pour atteindre des performances admissibles.

1.1.3 Objectif du projet Tandem

L'objectif principal du projet Tandem est de développer une nouvelle solution aéroportée permettant d'identifier et de cartographier les mines. Cette technique qui consiste à produire une image du terrain en combinant les réponses mesurées sur une antenne synthétique 2D dans la Figure 1.1, portée par un aéronef et volant à très basse altitude, avec les résolutions transverses et en profondeurs permettant l'imagerie des mines antipersonnel et antichar présentes dans le sol.

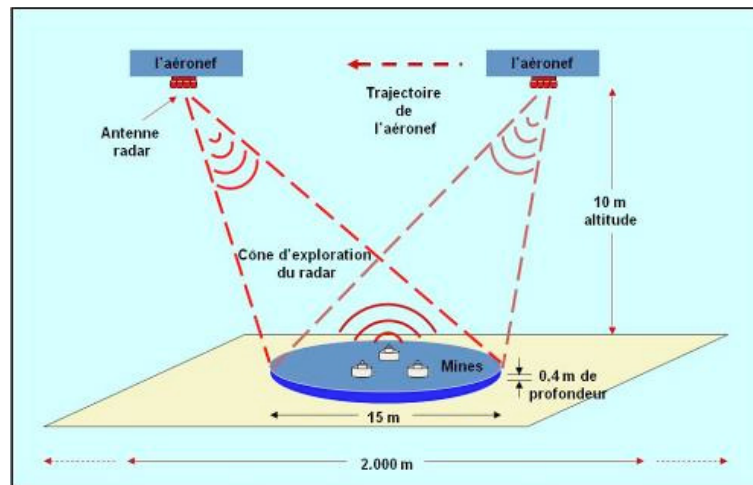


FIGURE 1.1 – Schéma explicatif de fonctionnement de la technologie Tandem

La technologie décrite dans la Figure 1.1 utilise le même principe de l'imagerie radar à ouverture synthétique, pour notre application, la principale difficulté est le coût en terme de volume de traitement. En effet, entre l'analyse du signal émis, la reconstitution des images, leur reconnais-

sance par la comparaison avec une base d'images et l'affichage sur l'écran demande des vitesses de calcul et capacités de stockage à bord. Grâce à l'évolution des puissances de calcul, il est cependant envisageable de porter en temps réel ce nouveau concept. L'objectif du projet est de réaliser une maquette expérimentale permettant de détecter des objets à forme géométrique enfouis à une profondeur maximale d'au plus une quarantaine de centimètres de la surface d'un sol homogène sans végétation. Ce système doit permettre de détecter des mines antipersonnel par passage d'un aéronef (drones). Il est envisageable que cette solution permettra de dresser une cartographie de mine d'une zone de $4km^2$ en un jour avec un coût hors charge de location de drone comparable au prix d'une mine antichar sur des surfaces comportant 100 000 mines.

1.1.4 Conclusion

Le projet consiste à embarquer un radar à formation synthétique d'image sur un aéronef volant à très basse altitude (10 mètres) pour analyser rapidement de larges bandes de terrain, à la recherche des objets enfouis à des profondeurs allant jusqu'au 40cm, d'une zone désertique contenant des mines antichars et antipersonnel. La technique proposée dans ce projet est basée sur la méthodologie radar à ouverture de synthèse qui consiste à envoyer des ondes électromagnétique sur la zone, et à collecter les différentes réponses, puis à les combiner dans le but de reconstruire des cartes avec les positions des mines dans la région en question. Notre principale mission dans ce projet est en premier lieu de valider les techniques d'imagerie radar pour la détection des mines enfouies, et de proposer en suite des dispositifs émetteurs/ récepteurs plus intelligentes permettant d'approuver la résolution des images, et la possibilité de réduire le temps de traitement de ces information. Le premier point du paragraphe 1.1.2 et le paragraphe 1.1.3 et sont extraits du document technique du projet Tandem [61].

1.2 Principe d'imagerie radar à ouverture synthétique

1.2.1 Introduction

Nous commençons dans un premier temps par décrire le principe de base derrière cette technique d'imagerie, qui consiste en l'illumination d'une zone de l'espace par des ondes électromagnétiques provenant d'une station aérienne. Cette station est constituée généralement d'antennes portées par un aéronef (satellite, avion, drone ...) en déplacement et volant à de très basses altitudes. Ces antennes fonctionnent en modes émetteurs/récepteurs. En effet, elles collectent en même temps les réponses des éléments du terrain éclairés, et ce sont ces mesures avec un traitement approprié qui vont nous permettre par la suite d'établir des cartes, avec éventuellement les positions des mines dans la région en question. Ce traitement d'informations collectées durant le temps d'inspection repose principalement sur la technologie radar à ouverture synthétique utilisée dans [20].

1.2.2 Techniques d'imagerie radar à ouverture synthétique SAR

Le radar a été initialement utilisé à fins strictement militaires, et notamment pour la détection. L'utilisation des radars trouve une place de plus en plus importante dans divers domaines, à la fois civil et militaire, notamment en imagerie [10].

Ce potentiel d'application est lié surtout au développement technologique qu'a connu le domaine dans la dernière décennie. En effet, le radar apporte une capacité sans précédent en matière d'imagerie. Comparée aux capteurs optiques par exemple, l'imagerie radar a une souplesse d'utilisation considérable, notamment pour les conditions météorologiques. De plus, le fonctionnement des antennes en domaine micro-ondes leur permet d'acquérir des informations même pour le cas des objets enfouis sous le sol ou couverts par la végétation. L'extraction d'informations radar est basée sur la polarisation de l'onde qui est sensible aux caractéristiques du milieu.

Le principe d'imagerie radar à ouverture synthétique consiste en quelque sorte en un couplage en vue d'améliorer la qualité des images du radar qui assure une très bonne résolution en distance et un traitement de signal approprié garantissant la résolution en azimuth. Nous pouvons ainsi définir le principe d'imagerie haute résolution comme étant la capacité du système à offrir de très bonnes résolutions en axe de propagation et en axe transverse de propagation.

Cette technique d'imagerie (SAR) se distingue par sa principale caractéristique : exploiter le mouvement relatif radar/cible, pour atteindre une haute résolution dans l'axe d'azimut. Il s'agit de combiner soigneusement les signaux rétrodiffusés par une cible pour toutes les positions prises par l'antenne. L'idée est de simuler un signal qui semble relatif à l'acquisition d'une antenne de plus grandes dimensions proposée par Carl Wiley [46], qui a donné naissance à l'antenne à ouverture synthétique.

Notons par W_a, L_a , respectivement l'ouverture et la longueur de l'antenne qui se déplace le long de la trajectoire du vol T_a , l'angle de visée γ , par $\theta_H = \lambda/L_a$, et $\theta_v = \lambda/W_a$, les angles d'ouverture horizontale et verticale, par λ la longueur d'onde, et enfin, par τ_p , la durée entre deux pulsations successives. Dans la Figure 1.2, nous donnons une illustration du principe de synthèse d'ouverture.

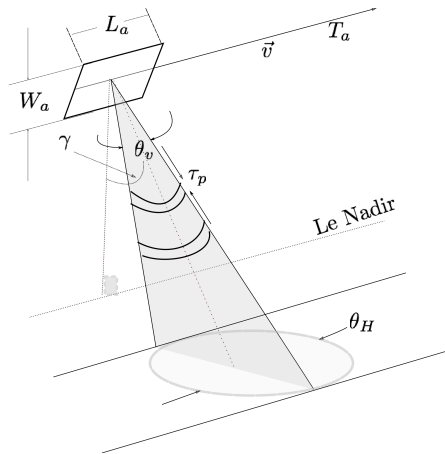


FIGURE 1.2 – Illustration du principe radar à ouverture synthétique

$\vec{v}$, étant la vitesse de déplacement de l'antenne le long de la piste du vol et $V = |\vec{v}|$. Comme nous l'avons déjà signalé auparavant, l'idée d'ouverture de synthèse qui permet l'amélioration de la résolution dans l'axe transverse résulte de l'observation suivante : deux cibles situées à des

angles différents renvoient à l'antenne différentes informations contenues dans leurs fréquences Doppler.

Dans ce qui suit, nous proposons de décrire la technologie radar à ouverture synthétique. Nous commençons par présenter le principe du fonctionnement radar et son utilisation en imagerie, son pouvoir de résolution, ses avantages et limitations, puis par expliquer le développement du principe d'ouverture synthétique.

1.2.3 L'imagerie radar

Le radar illumine une zone en transmettant des ondes électromagnétiques qui seront réfléchies par la suite dès leur contact avec la surface et renvoyées aux récepteurs. Ainsi, le radar est capable de calculer la distance de l'objet diffractant en fonction du temps d'aller/retour de l'onde. Le système radar d'imagerie ainsi introduit permet une très bonne résolution en distance δR_g , que l'on appelle aussi "résolution dans l'axe de propagation d'ondes électromagnétiques". Elle donne la capacité du système à distinguer deux objets très proches dans l'axe de propagation.

Pour visualiser au mieux le principe de résolution en distance, nous proposons une illustration avec le critère de Rayleigh sur la Figure 1.3 [59, 54].

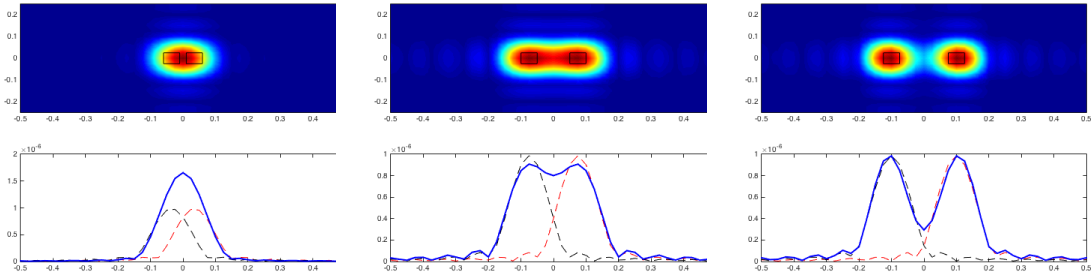
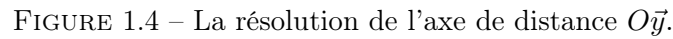


FIGURE 1.3 – Illustration pouvoir de résolution : Critère de Rayleigh.

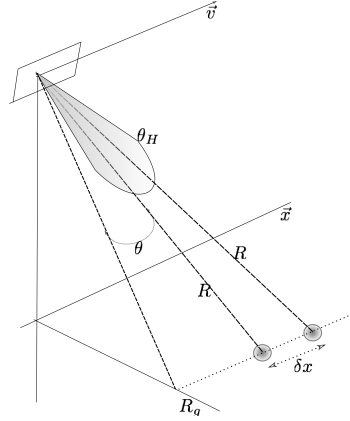
Par conséquent, deux objets sont différents s'ils se trouvent dans deux zones de résolution différentes ; la distance séparant les deux objets est strictement supérieure à la résolution. Sinon, le radar donne une combinaison complexe des deux signaux, comme illustré par le critère de Rayleigh sur la Figure 1.3.

Pour quantifier cette capacité du radar à produire une image séparée de deux points rapprochés, nous considérons le principe de diffraction sur la Figure 1.4.


$$\delta R_g := \frac{\delta R_s}{\sin \eta}$$
$$\delta R_g = \frac{c\tau}{2 \sin \eta} = \frac{c\tau}{2B_p \sin \eta}$$

On peut augmenter considérablement la résolution en variant la fréquence de la bande passante. Néanmoins, les images radar ont une mauvaise résolution dans l'axe transverse du faisceau lumineux. Notons maintenant par dx cette résolution. Elle est proportionnelle à la longueur d'onde d'émission λ et à la distance à l'objet R , et inversement proportionnelle à la dimension de l'antenne W_a :

qui est généralement de l'ordre de km , voire de dizaines de km , ce qui rend difficile l'amélioration de cette résolution, alors que nous cherchons qu'elle soit comparable à celle en distance.

FIGURE 1.5 – La résolution de l'axe d'azimut $O\vec{y}$.

Avec la découverte de Carl Wiley en 1951, il est devenu cependant possible de résoudre le problème de résolution et d'avoir une résolution en azimut du même ordre de grandeur que celle en distance. En effet, il proposa le principe SAR qui repose sur la séparation des cibles par leurs réponses en fréquences Doppler, ce qui a permis l'amélioration de la résolution en azimut.

1.2.4 Le principe d'ouverture synthétique

Comme nous l'avons vu dans la partie précédente, les contraintes physiques relatives à la construction et à la mise en place des antennes font que l'on n'a pas une grande marge pour améliorer la résolution en azimut dans les images fournies par un système radar. Toutefois, le principe SAR a pour objectif l'amélioration de la qualité de l'image obtenue par rapport au cas d'un radar simple. L'idée est de déplacer l'antenne pour permettre de voir de plusieurs angles, dans le but de simuler une antenne de plus grande ouverture en migrant soigneusement les différentes ondes reçues tout au long de la procédure d'inspection. Lors de son déplacement à une vitesse $\vec{v}$ et à une altitude H , l'antenne envoie des ondes et collecte en même temps les données reçues tout au long de sa trajectoire de vol.

Nous schématisons ce processus du synthèse sur la Figure 1.5 et désignons par $\vec{y}$ l'axe des distances dans lequel le problème de résolution est déjà résolu avec un radar à ouverture normale. L'axe $\vec{x}$ correspond quant à lui à l'axe perpendiculaire à celui du faisceau lumineux, et qui schématise la direction en azimut, direction suivant laquelle on souhaite notamment améliorer la résolution. Cela est rendu possible grâce à une analyse de la fréquence dite Doppler au cours du mouvement de l'antenne. Ainsi, le spectre du signal reçu donne une information supplémentaire sur la position de la cible située à la distance R du radar. Cette fréquence est donnée par l'expression suivante :

$$f_D = 2V \frac{\sin \theta}{\lambda} = \frac{2Vx}{\lambda R}$$

Toute énergie observée au temps d'arrivée correspondant à la distance et à la fréquence de Doppler f_D^1 fait référence au point de coordonnées dans la direction $\vec{x}$ à x_1 .

$$x_1 = \frac{\lambda R f_D^{(1)}}{2V}$$

Ainsi, un deuxième point d'abscisse x_2 (se situant à la même distance R et dans le même faisceau lumineux) peut être distingué du premier, du moment que les réponses correspondantes définissent deux fréquences Doppler différentes $f_D^{(1)}$, et $f_D^{(2)}$. La fréquence $f_D^{(2)}$ définit la coordonnée dans la direction d'azimut d'un autre point.

$$x_2 = \frac{\lambda R f_D^2}{2V}$$

On définit ainsi la résolution dans l'axe d'azimut comme :

$$\delta x = \left(\frac{\lambda R}{2V} \right) \delta f_D$$

La résolution fréquentielle mesurée étant l'inverse de la durée S d'analyse de la forme d'onde ($\delta f_D = \frac{1}{S}$) qui correspond au temps pendant lequel le faisceau du radar continue à éclairer le même obstacle, elle est donnée par :

$$S = \frac{R\theta_H}{2V} = \frac{R\lambda}{L_a V}$$

ce qui nous permet de définir la formule de résolution spatiale (dans direction d'azimut) suivante :

$$\delta x = \left(\frac{\lambda R}{2V} \right) \left(\frac{L_a V}{\lambda R} \right) = L_a / 2. \quad (1.1)$$

Avec cette dernière relation, nous pouvons remarquer que la résolution dans la direction d'azimut obtenue par l'analyse en ouverture de synthèse est donc d'autant meilleure que la dimension de l'antenne est petite. Jusqu'à présent, nous avons traité le problème de résolution du système, mais nous n'avons pas pris en considération le temps consacré pour la réception et le passage de l'antenne du mode émetteur en récepteur, et d'autres limitations vont être abordées dans ce qui suit. La première contrainte, qui correspond au temps nécessaire pour un point x_0 pour communiquer avec son environnement (émettre un signal, attendre et enregistrer la réponse), fait que nous ne pouvons pas réduire indéfiniment la dimension de l'antenne et améliorer la résolution de système en axe d'azimut. En effet, nous avons une limite admissible et qui donne un minimum pour la surface de l'antenne A_a :

$$A_a = L_a \cdot W_a > \frac{4}{c} V \lambda R_m \tan(\eta). \quad (1.2)$$

et qui impose un maximum de résolutions. Nous ne pouvons pas aller au-delà de cette limite. Nous remarquons que si les obstacles ont la même composante dans l'axe de transverse, la fréquence de Doppler est invariante, ce qui fait que nous ne pouvons pas utiliser cette même formule pour exprimer la résolution en azimut. Pour plus de détails sur l'imagerie radar à ouverture synthétique, nous renvoyons le lecteur au livre [46]. Les auteurs traitent de plusieurs améliorations ou modifications en fonction du contexte.

1.2.5 Conclusion

Plusieurs travaux ont été effectués dans cet axe pour la détection des mines dans un sol sec. Nous avons présenté les différentes techniques actuellement utilisées dans ce domaine, leurs avantages et limitations. Nous avons présenté brièvement le contexte du projet Tandem, nous avons ainsi défini le cadre et les principaux objectifs, puis la solution aéroportée proposée par Tandem pour la cartographie des mines antichar et antipersonnel dans le sol.

Il a été signalé que les principales finalités de notre travail étaient de valider les techniques d'imagerie radar à ouverture synthétique, pour voir la possibilité de détecter les mines. Nous avons décrit le principe d'imagerie en utilisant les données radar, principalement la question de fonctionnement et de résolution des images.

Dans le chapitre suivant, nous allons voir comment on peut adapter et exploiter les données radar à ouverture synthétique pour former des cartes d'un milieu homogène contenant des mines antichar et antipersonnel.

Modélisation de l'imagerie SAR dans un milieu homogène

Contents

2.1	Présentation du problème de diffraction pour l'imagerie	14
2.1.1	Problème direct : Équations de propagation	14
2.1.2	Formulation du problème inverse	17
2.2	Démarche d'analyse et d'acquisition de données	19
2.2.1	Quelques résultats sur la propagation d'ondes électromagnétiques pour un milieu de référence homogène	20
2.2.2	Approximation de Born	21
2.2.3	Approche variationnelle	22
2.2.4	Validation	24
2.3	Imagerie SAR en configuration backscattering	26
2.3.1	Description de la configuration backscattering	26
2.3.2	Approximation en Champ Lointain	26
2.4	Résultats numériques	29
2.4.1	Notations et Préliminaires	30
2.4.2	Expérimentations Numériques	32
2.4.3	Qualité de l'image en fonction des points de mesure	37
2.5	Conclusion	41

Le présent travail s'intéresse à la cartographie des mines antichar et antipersonnel dans un sol sec, à partir des mesures collectées par des antennes à ouverture synthétique. Avant d'entamer l'étape de fabrication et réalisation d'un tel système qui est très coûteuse, il est important de commencer par une modélisation et une simulation du processus d'imagerie. La technique d'imagerie que nous proposons dans la première partie de cette thèse considère les données synthétiques collectées par les antennes à ouverture de synthèse et procède à des traitements appropriés, pour en tirer le maximum d'informations relatives à l'environnement des mines visé. Ce processus d'imagerie peut être vu comme un problème inverse. La résolution de ce problème inverse nécessite une bonne connaissance du problème direct, celui qui s'intéresse à la modélisation des réponses du milieu d'intérêt pour simuler les données. L'intérêt de ce problème direct est double : d'une part, à ce stade d'étude, nous ne possédons pas de données réelles relatives aux mesures des réponses de mines ; d'autre part, ces modèles vont nous servir de support pour la validation. Nous signalons que ce choix est renforcé par le fait que nous allons utiliser les données issues de la résolution du problème direct et les analyser pour justifier les techniques d'imagerie présentées dans cette partie de thèse, mais aussi pour mettre en œuvre d'autres modèles d'inversion.

Le processus d'imagerie radar est basé essentiellement sur l'analyse des signaux émis et reçus par les antennes dans leur environnement. Ces signaux issus des antennes sont régis par les équations d'ondes électromagnétiques. Nous commençons dans la toute première section 2.1, par présenter le cadre général de cette étude, entre autres les équations de Maxwell, puis une description du problème inverse correspondant. La seconde section 2.2 de ce chapitre s'intéresse à la résolution du problème direct, mais surtout à donner des résultats d'existence et d'unicité de solution de ce type de problème, tout en essayant d'exprimer de manière la plus simple ces solutions. Il est cependant intéressant de signaler que la présence des hétérogénéités dans ce milieu rend difficile la résolution des équations régissant le phénomène de diffraction. Elles deviennent plus complexes et ne possèdent pas de solutions analytiques connues dans la littérature, d'où la nécessité de passer à des schémas numériques de résolution. Nous ne considérons que le cas d'équations scalaires présentées dans la section 2.1 et nous supposons qu'elles permettent une bonne représentation de ces données synthétiques. Le traitement des équations de Maxwell est très similaire.

La section 2.3, est consacrée à l'analyse de ces modèles de réponses dans le cas scalaire, pour voir la possibilité de reconstruire au moins qualitativement les mines dans la région d'intérêt. En réalité, ces réponses correspondent aux mesures enregistrées au niveau des antennes. Pour achever cette étude, résumer et voir enfin les fruits de ce processus d'imagerie, plusieurs tests numériques, pour diverses configurations, sont effectués. Quelques-uns de ces résultats d'expérimentations seront présentés dans la dernière section 2.4 dédiée aux visualisations numériques et discussions.

Cette logique d'automatisation du processus d'imagerie présentée dans ce chapitre consiste à simplifier le problème et ne considère que le cas restreint du milieu (background) homogène. Elle permettra au lecteur de bien cerner le problème et d'avoir une vision d'ensemble sur la technique d'imagerie développée dans cette première partie de thèse.

2.1 Présentation du problème de diffraction pour l'imagerie

Le premier paragraphe 2.1.1 de cette section sera dédié à la présentation des équations de Maxwell qui régissent ce phénomène de diffraction. Nous présenterons aussi, dans un second lieu, ce que nous appellerons « problème d'ondes scalaires », comme une version simplifiée du problème de départ décrit par des ondes électromagnétiques, solutions des équations Maxwell. Dans un second paragraphe 2.1.2, nous décrivons formellement le problème inverse que nous développerons dans d'autres chapitres ultérieurs de la thèse.

Pour résumer, nous allons présenter le cadre général de la démarche poursuivie dans le présent travail pour la validation du système de détection. Ce processus d'imagerie se répartit en deux parties essentielles : la première s'intéresse à générer les données SAR, et la seconde prend en charge la cartographie du terrain pour reconstruire ses détails en se reposant sur les données issues des antennes.

2.1.1 Problème direct : Équations de propagation

Il est important de noter que le radar en question fonctionne en modes émetteur et récepteur d'ondes électromagnétiques. L'émetteur (une source) placé en un point x_0 , produit une perturbation de fréquence k , qui se traduit dans le milieu homogène $\mathbb{R}^3$, d'indice de réfraction

($n_b = 1$), par la propagation d'une onde que l'on note $(E^{inc}, H^{inc}) \sim u^{inc}$. Cette même onde, lorsqu'elle rencontre un obstacle $x \in \Omega$, d'indice de réfraction ($n(x) > n_b$), subit des diffractions dans tous les sens. La mesure au niveau d'un récepteur placé en un point y_0 sera donnée par $(E^{sc}, H^{sc}) \sim u^{sc}$.

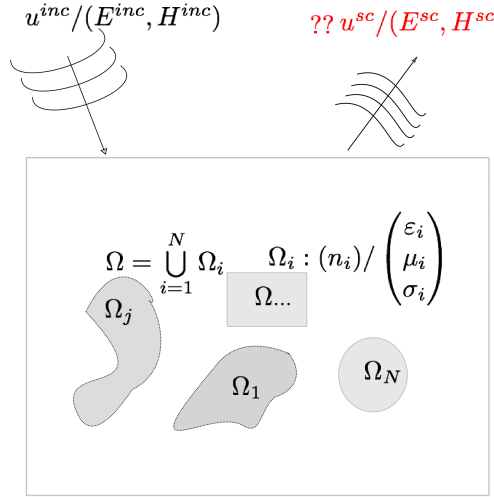


FIGURE 2.1 – Diffraction d'ondes par un milieu non-homogène

La Figure 2.1 résume en quelque sorte le problème de diffraction d'ondes électromagnétiques par un milieu contenant des hétérogénéités modélisées par la géométrie Ω dans $\mathbb{R}^3$, et ses propriétés physiques.

Équations de Maxwell Nous décrivons dans ce qui suit le problème de diffraction électromagnétique causé par la présence de l'hétérogénéité Ω dans le milieu homogène $\mathbb{R}^3$. Cet obstacle est caractérisé par ses propriétés électromagnétiques : la permittivité électrique $\varepsilon = \varepsilon(x) > 0$, la perméabilité magnétique $\mu = \mu_0 > 0$ et la conductivité électrique $\sigma = \sigma(x)$. On suppose de plus $\varepsilon(x) = \varepsilon_0$ et $\sigma(x) = 0$ à l'extérieur d'une boule de $\mathbb{R}^3$ de rayon suffisamment grand contenant Ω . La propagation d'une onde électromagnétique provenant d'un point source x_0 polarisé suivant le vecteur $\vec{P}$ et ayant un profil temporel $f(t)$, est régie par les équations de Maxwell qui relient les champs électrique et magnétique aux sources. Ces équations sont données dans le domaine temporel par :

$$\nabla \times \vec{E}^{tot}(t, x) + \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{B}^{tot}(t, x) = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \quad (2.1)$$

$$\nabla \times \vec{B}^{tot}(t, x) - \varepsilon(x) \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}^{tot}(t, x) - \sigma \vec{E}^{tot}(t, x) = -\delta_{x_0}(x) f(t) \vec{P} \quad \text{dans } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \quad (2.2)$$

et dans le vide, l'onde électrique (par exemple), comme pour le champ magnétique, se propage

suivant :

$$\nabla \times \vec{E}^{inc}(t, x) + \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{B}^{inc}(t, x) = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \quad (2.3)$$

$$\nabla \times \vec{B}^{inc}(t, x) - \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}^{inc}(t, x) = -\delta_{x_0} f(t) \vec{P} \quad \text{dans } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \quad (2.4)$$

où dans ce même ordre $\vec{E}^{tot}(t, x)$, $\vec{B}^{tot}(t, x)$, représentent les vecteurs champs électriques et magnétiques. En supposant l'excitation f harmonique en temps, $f(t) = \sqrt{\varepsilon_0} e^{-i\omega t}$, ces champs s'écrivent dans le régime harmonique sous la forme suivante :

$$\vec{E}^{tot}(t, x) = \frac{1}{\sqrt{\mu_0}} \vec{E}^{tot}(x) e^{-i\omega t}, \quad \vec{B}^{tot}(t, x) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0}} \vec{B}^{tot}(x) e^{-i\omega t}, \quad (2.5)$$

ω étant la fréquence d'émission. Notons par $\vec{E}^{inc}$ et $\vec{B}^{inc}$ les correspondants de $\vec{E}^{tot}$ et $\vec{B}^{tot}$ dans le cas d'un espace libre (2.4). Ainsi, les champs électrique et magnétique $\vec{E}^{tot} = \vec{E}^{inc} + \vec{E}^{sc}$, et $\vec{B}^{tot} = \vec{B}^{inc} + \vec{B}^{sc}$, vérifient le problème de diffraction en régime harmonique :

$$\nabla \times \vec{E}^{tot} - ik \vec{B}^{tot} = 0, \quad \nabla \times \vec{B}^{tot} + ikn(x) \vec{E}^{tot} = -\delta_{x_0} \vec{P}, \quad \text{dans } \mathbb{R}^3 \quad (2.6)$$

$$\nabla \times \vec{E}^{inc} - ik \vec{B}^{inc} = 0, \quad \nabla \times \vec{B}^{inc} + ik \vec{E}^{inc} = -\delta_{x_0} \vec{P}, \quad \text{dans } \mathbb{R}^3 \quad (2.7)$$

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} (\vec{B}^{sc} \times x - |x| \vec{E}^{sc}) = 0 \quad (2.8)$$

k étant le nombre d'ondes défini par $k = \omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$ et n l'indice de réfraction du milieu donné par :

$$n(x) := \frac{1}{\varepsilon_0} \left(\varepsilon(x) + i \frac{\sigma(x)}{\omega} \right).$$

La condition (2.8) se réfère à la condition de rayonnement de Silver-Muller introduite par Rellich [55] et Vekua dans [62] et traduit le fait que l'énergie doit se propager vers l'infini (et non le contraire). En fait, même l'onde incidente ($\vec{E}^{inc}$, $\vec{B}^{inc}$) doit vérifier cette condition puisqu'il s'agit d'une onde créée par un point source x_0 .

Approximation par les equations scalaires Dans le cas d'antennes linéiques, ce qui correspond à celles utilisées dans le projet Tandem, seule la composante tangentielle (à l'antenne) du champ électrique est mesurée. De plus, la polarisation de l'onde incidente est elle aussi alignée avec l'antenne. Dans ce cas, si on note $u^{inc} = \frac{i}{k} \vec{E}^{inc} \cdot \vec{P}$, alors on constate qu'elle vérifie l'équation d'onde scalaire, appelée aussi « équation d'Helmholtz » :

$$\Delta u^{inc} + k^2 u^{inc} = -\delta_{x_0}$$

Ceci nous conduit à définir maintenant ce que l'on appelle le « modèle scalaire » : le champ total $u^{tot} = u^{inc} + u^{sc}$ vérifie

$$\Delta u^{tot} + k^2 n(x) u^{tot} = -\delta_{x_0} \quad \text{dans } \mathbb{R}^3 \quad (2.9)$$

$$\Delta u^{inc} + k^2 n_b(x) u^{inc} = -\delta_{x_0} \quad \text{dans } \mathbb{R}^3 \quad (2.10)$$

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} |x| \left(\frac{\partial}{\partial |x|} - ik \right) u^{sc}(x) = 0. \quad (2.11)$$

La condition de rayonnement (2.11) est appelée la condition de Sommerfeld et elle doit également être vérifiée par le champ incident u^{inc} . La limite dans (2.11) doit être uniforme par rapport à la direction $x/|x|$. Notons que nous avons indiqué un indice n_b pour le champ incident afin de pouvoir traiter ultérieurement des milieux de références non homogènes. La condition (2.11) nécessite que $n(x) = 1$ et $n_b(x) = 1$ pour $|x|$ suffisamment grand.

Notons aussi que la composante $\frac{1}{ik} \vec{E}^{tot} \cdot \vec{P}$ ne vérifie pas (2.9) du fait que l'indice de réfraction n n'est pas constant. Cependant, étant donné que les mesures radar se font dans une seule direction, il est communément admis que le modèle scalaire constitue une bonne approximation des mesures radar. Indépendamment de la correspondance entre les deux modèles, nous avons opté pour traiter dans cette thèse seulement le modèle scalaire car l'étude est plus simple et l'extension au modèle complet de Maxwell (2.6)-(2.8) ne représente qu'une difficulté technique supplémentaire.

2.1.2 Formulation du problème inverse

Le problème inverse en imagerie électromagnétique consiste à déterminer les paramètres du milieu de propagation $(n/(\sigma, \varepsilon, \mu))$, au moins d'une manière qualitative (reconstruire la géométrie), à partir des observations du champ électromagnétique.

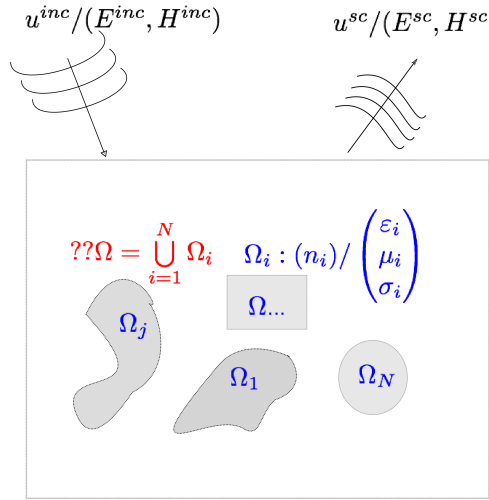


FIGURE 2.2 – Illustration du problème de reconstruction

Dans ce paragraphe, il s'agit de présenter d'une manière plus au moins formelle le problème inverse, que nous utiliserons pour l'imagerie. Ce problème s'intéresse à l'analyse des mesures synthétiques effectuées par le radar, pour reconstruire l'environnement associé au champ des mines, puis à introduire les outils utilisés pour l'analyse des problèmes d'imagerie.

Rappelons encore que le but de cette thèse est de reconstruire les positions des mines antichar et antipersonnel dans un champ désertique. Pour cela, nous commençons par introduire les principales notations utilisées tout au long de ce manuscrit. Nous désignons ainsi par Ω l'ensemble des mines contenues dans la région d'espace que nous souhaitons imager. L'onde incidente provenant

d'un point source x_0 placé sur une surface Σ_i , et évaluée en un point y de l'espace, est notée $(E^{inc}, H^{inc}) \sim u^{inc}(x_0, y)$. Elle peut aussi être vue comme solution du problème de Maxwell (Helmholtz pour $u^{inc}(x_0, y)$) dans l'espace libre (c-à-d., $n_b = 1$). Comme dans la description du problème dans le cas d'une diffraction d'ondes scalaires donné par l'équation (2.9), les mesures de l'onde diffractée $(E^{sc}, H^{sc}) \sim u^{sc}$ par ces objets se font au niveau de la surface Σ_m ($= \Sigma_i$ dans la cas back-scattering).

L'onde totale, toujours dans le cas scalaire que nous avons introduit dans le paragraphe 2.1.1 $u^{tot} = u^{sc} + u^{inc}$, est la solution du même type de problème, sauf qu'ici $n(x) \neq n_b$ à l'intérieur de l'objet Ω .

Remarquons que, dans le cadre de l'approximation par le modèle scalaire, le champ diffracté u^{sc} peut être vu comme solution du problème d'équations aux dérivées partielles suivant :

$$(\Delta + k^2 n(x)) u^{sc}(x_0, \cdot) = (n_b(x) - n(x)) k^2 u^{inc}(x_0, \cdot) \quad (2.12)$$

couplé avec des conditions de rayonnement appropriées. Comme l'illustre la Figure 2.2, donner un modèle de formulation du problème inverse revient à trouver le support Ω de $(n(x) - n_b)$ à partir de la donnée de

$$D := \{u^{sc}(x_0, y_0) : x_0 \in \Sigma_i, y_0 \in \Sigma_m\} \quad (2.13)$$

et de la connaissance du milieu de référence modélisé par n_b . L'indice de refraction n est inconnu et les méthodes que nous allons développer ont pour objectif de reconstruire Ω (ou seulement certaines informations partielles sur ce domaine, comme sa projection sur le plan des mesures ou la localisation des ses composantes connexes) sans avoir à reconstruire n . Les données sont appelées des données en back-scattering (rétrodiffusion) lorsque

$$D := \{u^{sc}(x_0, x_0) : x_0 \in \Sigma_i\}. \quad (2.14)$$

Fixons maintenant, avec plus de précisions, d'autres notations relatives à la géométrie et propriétés électromagnétiques des mines, le milieu de propagation étant tout l'espace $\mathbb{R}^3$, défini par l'ensemble des points x de coordonnées $(x_1, x_2, x_3)^T$. Tout au long de cette partie, nous modélisons l'air par le demi-espace supérieur ($x_3 > 0$) et son indice de réfraction ($n_b = 1$), le sol par son complémentaire dans $\mathbb{R}^3$ d'indice de réfraction n_b éventuellement variable et différent de 1. Cependant nous supposons toujours que le support Ω de $n - n_b$ est compact et se trouve dans le demi espace inférieur.

Pour l'application à Tandem, la distribution des inhomogénéités dans ce demi-espace inférieur suppose la présence de R mines antichar données par $\mathbb{M}_r$ à des profondeurs P_r pour $r = 1, \dots, R$. Chaque mine antichar $\mathbb{M}_r$ est entourée de N_r mines antipersonnel m_j à des profondeurs p_j , $j = 1, \dots, N_r$, d'une distance d_r , comme c'est indiqué dans la Figure 2.3.

L'ensemble, mine antichar et son champ de protection par les mines antipersonnel, est représenté pour chaque $r = 1, \dots, R$ par $\Omega_r = \mathbb{M}_r \bigcup_{j=1}^{N_r} m_j$. Toutes ces mines sont regroupées dans $\Omega =$

$\bigcup_{r=1}^R \Omega_r$. L'indice de réfraction milieu (background) qui nous intéresse est donné par :

$$n_b = \begin{cases} 1 & \text{pour } x_3 \geq 0 \\ n_b(x) & \text{pour } x_3 < 0 \end{cases}$$

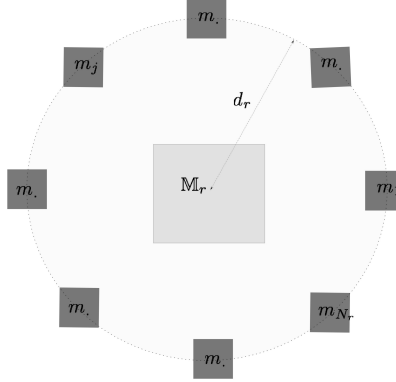


FIGURE 2.3 – Illustration : Vue de dessus, mine antichar et mines antipersonnel.

Les hétérogénéités données par Ω peuvent aussi être définies par leurs propriétés électromagnétiques, qui peuvent être résumées par la donnée de leurs indices de réfraction n que nous considérons comme constants par composante $\mathbb{M}_r$ et m_j formant Ω ; pour les mines antipersonnel $n = n_l^{(p)}$ $l \in \{1, 2, \dots, N_r\}$, et pour les mines antichars $n = n_r^{(c)}$, pour $r \in \{1, 2, \dots, R\}$.

2.2 Démarche d'analyse et d'acquisition de données

La modélisation du phénomène de propagation passe par la résolution du problème de diffraction d'ondes électromagnétiques, présenté dans la section précédente. Une des méthodes permettant la résolution des problèmes de diffraction d'ondes électromagnétiques et acoustiques est de considérer la formulation par des équations intégrales. Ainsi, pour résoudre ce problème, nous allons suivre les mêmes démarches que dans [22], et présentons les solutions des deux problèmes de diffractions en introduisant les équations de Lippmann-Schwinger. La discrétisation numérique exacte de ces équations conduit généralement à des problèmes de très grande taille, puisque le noyau de convolution sous-jacent n'a pas un support compact. En réalité cette formulation nous servira principalement à justifier la méthode d'inversion en explicitant l'approximation de faible contraste. Nous allons suivre la démarche suivante : au lieu de résoudre l'équation intégrale exacte, nous l'approchons sous certaines conditions comme dans [20], où les auteurs considèrent la linéarisation du problème basée sur l'approximation de Born du premier ordre. Nous donnerons plus de détails sur la technique d'approximation et les conditions d'application. Pour résumer, nous introduisons tout d'abord les grands théorèmes d'existence et d'unicité dans le cas scalaire qui restent valables dans le cas de Maxwell. Pour la formulation de la solution du problème, nous accordons après une importance particulière au cas scalaire décrit dans la section 2.1, puis nous arriverons à l'étape principale qui considère le modèle obtenu par l'approximation de Born. Une validation de ces techniques d'approximation passera par la comparaison avec les résultats obtenus en considérant la formulation variationnelle du problème de diffraction de départ.

2.2.1 Quelques résultats sur la propagation d'ondes électromagnétiques pour un milieu de référence homogène

Nous allons continuer à nous intéresser à la résolution du problème direct de diffraction pour caractériser le champ électromagnétique dans l'espace libre ($n_b = 1$), contenant des inclusions. Nous commençons tout d'abord par rappeler les résultats d'existence et d'unicité de la solution du problème de diffraction décrit par les équations de Helmholtz introduites dans la section 2.1. Pour ce faire, nous nous baserons sur la formulation en équations de Lippman-Schwinger comme dans [22]. Nous annonçons sans démonstration les résultats d'existence et d'unicité du problème de diffraction. Et, pour plus de détails, nous invitons le lecteur à consulter le livre de Colton-Kress [22].

Définissons la solution fondamentale de l'équation d'Helmholtz dans $\mathbb{R}^3$

$$\Phi_0(x) := \frac{e^{ik|x|}}{4\pi|x|}, \forall x \neq 0 \in \mathbb{R}^3 \quad (2.15)$$

qui vérifie

$$\Delta\Phi_0 + k^2\Phi_0 = -\delta_0 \text{ dans } \mathbb{R}^3$$

et la condition de rayonnement de Sommerfeld (ci-dessous).

Le champ incident créé par un point source en x_0 s'écrit

$$u^{inc}(x_0, x) = \Phi_0(x - x_0). \quad (2.16)$$

Le champ diffracté $u^{sc}(x_0, \cdot)$ est alors recherché comme une fonction de $H_{loc}^2(\mathbb{R}^3)$ solution de

$$(\Delta + k^2) u^{sc}(x_0, \cdot) = (1 - n(x)) k^2 (u^{sc}(x_0, \cdot) + u^{inc}(x_0, \cdot)) \quad (2.17)$$

vérifiant la condition de rayonnement de Sommerfeld

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} |x| \left(\frac{\partial}{\partial |x|} - ik \right) u^{sc}(x_0, \cdot) = 0 \quad (2.18)$$

uniformément par rapport à toutes les directions $\hat{x} = \frac{x}{|x|}$. Nous avons alors le théorème suivant.

Théorème 1. *Soit $n \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$, $n = 1$ pour $|x|$ suffisamment grand et $\Im(n) \geq 0$. Alors le problème (2.17)-(2.18) admet une solution unique $u^{sc}(x_0, \cdot) \in H_{loc}^2(\mathbb{R}^3)$. Cette solution est aussi l'unique solution de l'équation intégrale : $u^{sc}(x_0, \cdot) \in L^2(\Omega)$ vérifiant*

$$u^{sc}(x_0, x) = - \int_{\Omega} k^2 (1 - n) \Phi_0(x - y) (u^{sc}(x_0, y) + u^{inc}(x_0, y)) dy, \quad x \in \Omega. \quad (2.19)$$

Réciproquement, toute fonction $u^{sc}(x_0, x) \in L^2(\Omega)$ vérifiant (2.19) définit une solution $u^{sc}(x_0, \cdot) \in H_{loc}^2(\mathbb{R}^3)$ via la représentation intégrale

$$u^{sc}(x_0, x) = - \int_{\Omega} k^2 (1 - n) \Phi_0(x - y) (u^{sc}(x_0, y) + u^{inc}(x_0, y)) dy, \forall x \in \mathbb{R}^3. \quad (2.20)$$

L'équation (2.19) est connue sous le nom de l'équation de Lippmann Schwinger. Elle ramène la résolution du problème de diffraction à la résolution d'une équation intégrale posée sur le support de l'inclusion Ω . Cependant, une discrétisation numérique de cette équation conduit à une matrice pleine du fait que le noyau de convolution Φ_0 n'est pas à support compact. Nous décrivons dans ce qui suit le principe de l'approximation de Born qui est largement utilisé dans les problèmes de diffraction inverse en imagerie radar [20].

2.2.2 Approximation de Born

Cette approximation permet à la fois de simplifier le problème direct en rendant l'expression du champ diffracté (2.20) explicite en fonction du champ incident et des propriétés physiques mais aussi de linéariser le problème inverse (comme nous allons le voir plus bas). Afin de présenter le principe de cette approximation introduisons l'opérateur intégral $A_n^{inc} : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ défini par

$$A_n^{inc}(u)(x) = k^2 \int_{\mathbb{R}^3} (1 - n(y)) \Phi_0(x - y) u(y) dy \quad x \in \Omega. \quad (2.21)$$

Cet opérateur est en fait un opérateur compact ($A_n^{inc} : L^2(\Omega) \rightarrow H^2(\Omega)$, cf [22]) et nous permet de réécrire l'équation (2.19) sous la forme

$$u^{tot} = u^{inc} - A_n^{inc} u^{tot}, \quad u^{sc} = u^{tot} - u^{inc} \quad (2.22)$$

L'approximation du Born se base sur l'observation que lorsque $k^2 \sup_{x \in \Omega} |1 - n| \ll 1$, l'opérateur A_n^{inc} devient une contraction, c-à-d $\|A_n^{inc}\| < 1$. Dans ce cas on peut développer l'inverse $(I + A_n^{inc})^{-1}$ en série de Neumann sous la forme

$$(I + A_n^{inc})^{-1} = \sum_{\ell \geq 0} (-1)^\ell (A_n^{inc})^\ell. \quad (2.23)$$

L'approximation de Born consiste à ne garder que les deux premiers termes dans la série de droite et donc d'approcher le champs total par

$$u^{tot} = (I + A_n^{inc})^{-1} u^{inc} \approx u^{inc} - A_n^{inc} u^{inc}.$$

On obtient ainsi une expression explicite du champs diffracté en terme de u^{inc} sous la forme

$$u^{sc}(x_0, x) \approx \tilde{u}^{sc}(x_0, x) := -k^2 \int_{\mathbb{R}^3} (1 - n(y)) \Phi_0(x - y) u^{inc}(x_0, y) dy. \quad (2.24)$$

C'est cette expression (où son équivalent dans le cas non homogène présenté plus tard) qui servira par la suite à générer nos données synthétiques. C'est aussi cette formule qui servira comme justificatif pour la méthode SAR que nous allons introduire. Remarquons que la correspondance entre $(1 - n)$ et $\tilde{u}^{sc}$ devient linéaire, ce qui n'était pas le cas pour le problème original. C'est pour cette raison que cette approximation correspond aussi à une linéarisation du problème inverse. En se rappelant que $u^{inc}(x_0, y) = \Phi_0(x_0 - y)$, pour les mesures en back-scattering $u^{sc}(x_0, x_0)$, les données peuvent être approchées par, en posant $m := 1 - n$;

$$D(x_0) = -k^2 \int_{\mathbb{R}^3} m(y) \Phi_0(x_0 - y)^2 dy. \quad (2.25)$$

On observe dans cette expression encore une fois le caractère linéaire de l'application inverse $D \mapsto m$ mais aussi le caractère (sévèrement) mal posé puisque le noyau $(x_0, y) \rightarrow \Phi_0(x_0 - y)$ est une application C^∞ sur $\Sigma_0 \times \Omega$ (nous rappelons que Σ_0 et Ω se retrouvent dans deux parties différentes de l'espace).

Avant de présenter la méthode SAR, la question qui se pose maintenant est : avons-nous le droit de nous arrêter au premier ordre dans l'approximation de Born ? En effet, pour utiliser cette

approximation, qui nous donne un modèle très simple pour générer les données relatives à une région de l'espace, il faut passer par une étape validation. D'où la nécessité d'un modèle plus fiable décrivant le comportement d'ondes diffractées, idéalement basé sur un calcul analytique, au moins pour des milieux de propagation très particuliers. Nous avons laissé la réponse à cette question comme sujet de discussion dans le paragraphe suivant, où nous introduisons une approche plus rigoureuse basée sur le calcul par éléments finis.

2.2.3 Approche variationnelle

Dans l'optique de valider la technique d'approximation de la forme d'onde indiquée dans le paragraphe ci-dessus, basée sur la linéarisation de l'opérateur de convolution définie par la formulation intégrale du problème de diffraction, nous allons aborder le problème direct d'un angle différent. Nous proposons dans ce paragraphe de passer par la formulation faible du problème de diffraction pour définir une nouvelle stratégie de calcul de la forme d'onde. Nous rappelons que ce problème s'écrit (nous enlevons la dépendance en x_0 des inconnues)

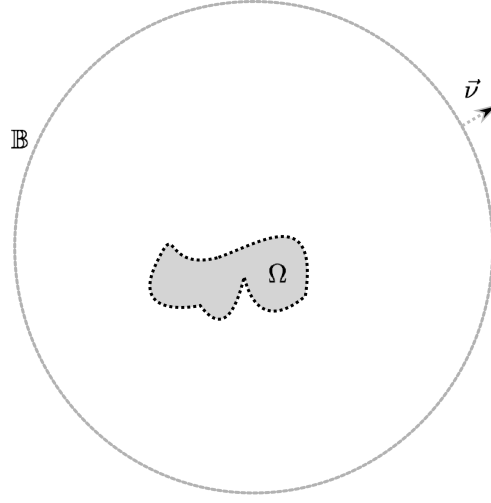
$$(\Delta^2 + k^2 n) u^{sc} = k^2(1 - n)u^{inc} \quad \text{dans } \mathbb{R}^3 \quad (2.26)$$

avec u^{sc} vérifiant la condition de rayonnement de Sommerfeld à l'infini (2.18). Une manière de résoudre ce problème est de passer par une formulation variationnelle du problème et une discrétisation par éléments finis. La difficulté essentielle pour ce genre d'approche (par rapport à l'approche équation intégrale) est la prise en compte de la condition de rayonnement à l'infini. Comment peut-on tenir compte de cette condition tout en tronquant le domaine de calcul ? Il existe une littérature très vaste sur des méthodes permettant de répondre efficacement à cette problématique [11, 3, 27, 32, 8]. Cependant, comme notre objectif est plutôt un objectif de validation que celui de produire un code de résolution qui soit rapide et efficace, nous avons opté pour la solution la plus simple (mais coûteuse en terme de calcul numérique). L'idée est simple et basique : réduire l'espace $\mathbb{R}^3$ en un domaine $\mathbb{B}$ (Figure 2.4) où $\mathbb{B} \subset \mathbb{R}^3$ correspond à une boule de rayon $R \ll 1$ contenant Ω . La condition de rayonnement indique en particulier que

$$\left(\frac{\partial}{\partial |x|} - ik \right) u^{sc}|_{\partial \mathbb{B}} \rightarrow 0 \quad \text{quand } R \rightarrow \infty.$$

Nous imposons alors sur le bord de B les conditions aux limites

$$\frac{\partial}{\partial r} u^{sc} - ik u^{sc} = 0 \quad \text{sur } \partial \mathbb{B}. \quad (2.27)$$

FIGURE 2.4 – Illustration de la condition limite absorbante par un domaine artificiel $\mathbb{B}$.

La formulation faible du problème (2.26)-(2.27) s'écrit de la manière suivante : chercher $u^{sc} \in H^1(\mathbb{B})$ vérifiant,

$$\int_{\mathbb{B}} \nabla u^{sc} \cdot \nabla v \, dx - k^2 \int_{\mathbb{B}} n u^{sc} v \, dx + ik \int_{\partial \mathbb{B}} u^{sc} v \, d\sigma = \int_{\Omega} f v \, dx \quad (2.28)$$

pour tout $v \in H^1(\mathbb{B})$, où on a posé $f = k^2(1-n)u^{inc} \in L^2(\mathbb{B})$. Nous utilisons ensuite une méthode d'éléments finis (P_1 de Lagrange) [48, 43, 9] pour discrétiser (2.28). Nous rappelons que cette technique classique consiste à remplacer l'espace de solution $H^1(\mathbb{B})$, par un espace approché $\mathbb{V}_h \subset H^1(\mathbb{B})$ de dimension finie, engendré par $\{p_1, p_2, \dots, p_N\}$, fonctions affines par maille (ici des tétraèdres), valant 1 en un noeud et 0 ailleurs. Une approximation $u_h^{sc} \in \mathbb{V}_h$ de la solution $u^{sc} \in H^1(\mathbb{B})$ de (2.28) est la solution de

$$\int_{\mathbb{B}} \nabla u_h^{sc} \cdot \nabla v \, dx - k^2 \int_{\mathbb{B}} n u_h^{sc} v \, dx + ik \int_{\partial \mathbb{B}} u_h^{sc} v \, d\sigma = \int_{\Omega} f v \, dx \quad (2.29)$$

pour tout $v \in \mathbb{V}_h$. Tout élément $u_h \in \mathbb{V}_h$, s'écrit comme : -

$$u_h(x) = \sum_{r=1}^N u^{(r)} p_r(x),$$

les $u^{(r)}$ représentent les coefficients de u_h que nous cherchons à déterminer. Le problème (2.29) s'écrit sous forme matricielle sous la forme

$$[P]u_h = F \quad (2.30)$$

avec pour $r, l = 1, 2, \dots, M$, on a, $P_{r,l} = \int_{\mathbb{B}} \nabla p_r \cdot \nabla p_l \, dx - k^2 \int_{\mathbb{B}} n p_r p_l \, dx + ik \int_{\partial \mathbb{B}} p_r p_l \, d\sigma$, et $U_0^{(l)} = \int_{\Omega} f p_l \, dx$. Ainsi, une approximation du champ total u^{tot} prend la forme :

$$u_h^{tot}(x) = \sum_{r=1}^N u^{(r)} p_r(x) + u^{inc}(x). \quad (2.31)$$

Pour l'implémentation des résultats de toute cette partie, nous avons utilisé le logiciel d'éléments finis FreeFem++ [39].

2.2.4 Validation

L'objectif principal de cette section est de donner un modèle fiable pour générer des données synthétiques, pour la réponse des objets à une excitation d'une source placée au point x_0 . Nous avons présenté dans les deux derniers paragraphes deux techniques permettant de modéliser le champ total (ou diffracté $u^{sc} = u^{tot} - u^{inc}$). Dans ce paragraphe, nous portons notre attention sur la comparaison des deux méthodes modélisant la réponse synthétique dans une configuration spécifique. La première est basée sur une formulation intégrale du problème, puis l'approximation de Born qui donne lieu à l'approximation $\tilde{u}^{tot}$, définie par (2.23). La seconde est basée sur une formulation faible du problème et la technique de Galerkin pour le calcul approximatif, et donne une deuxième approximation de ce champ total $\tilde{u}_h^{tot}$ dans (2.31).

Le milieu homogène $\mathbb{R}^3$ contient une hétérogénéité de forme cubique Ω de dimension $(\frac{\lambda}{2})^3$ centré au point $(0, 0, 0)^T$. Le système de détection parcourt une ligne droite formée de $N = 129$ points lumineux x_0 (sources) placés à une hauteur $H = 100\lambda$ du sol. Notre hypothèse de base suppose que le système fonctionne en mono-statique. Les récepteurs x prennent les mêmes endroits que les émetteurs ($x = x_0$). Nous cherchons à comparer les deux formes d'ondes D_h et $\tilde{D}$ sur l'ensemble des points x_0 selon :

$$\varepsilon(x_0) = \frac{\|D_h - \tilde{D}\|}{\|D_h\|} \quad (2.32)$$

$\tilde{D}$ définie par le calcul de l'intégrale résultant de l'approximation de Born est donnée par :

$$\tilde{D}(x_0) = k^2 \int_{\Omega} (n - n_b) \frac{e^{i2k|x_0-y|}}{(4\pi|x_0-y|)^2} dy, \quad (2.33)$$

D_h est celle obtenue en remplaçant dans l'équation (2.20) l'expression du champ total par son approximation utilisant la méthode des éléments finis de type Galerkin (2.31), et s'écrit sous la forme :

$$D_h(x_0) = k^2 \int_{\Omega} (n - n_b) \Phi_0(x_0 - y) u_h^{tot}(y) dx \quad (2.34)$$

les N points sources x_0 de la trajectoire du vol prennent leurs valeurs dans le segment $[-35\lambda, 35\lambda]$. Notons que pour la boule $\mathbb{B}$ utilisée dans le calcul par éléments finis (2.34), nous avons pris une boule de centre $(0, 0, 0)^T$ et de rayon $R = 4\lambda \gg \frac{\lambda}{2}$.

Nous représentons sur la Figure 2.5 les parties réelles et imaginaires $\mathcal{R}(\tilde{D})$, $\mathcal{R}(D_h)$ et $\mathcal{I}(\tilde{D})$, $\mathcal{I}(D_h)$, de $\tilde{D}$ et D_h .

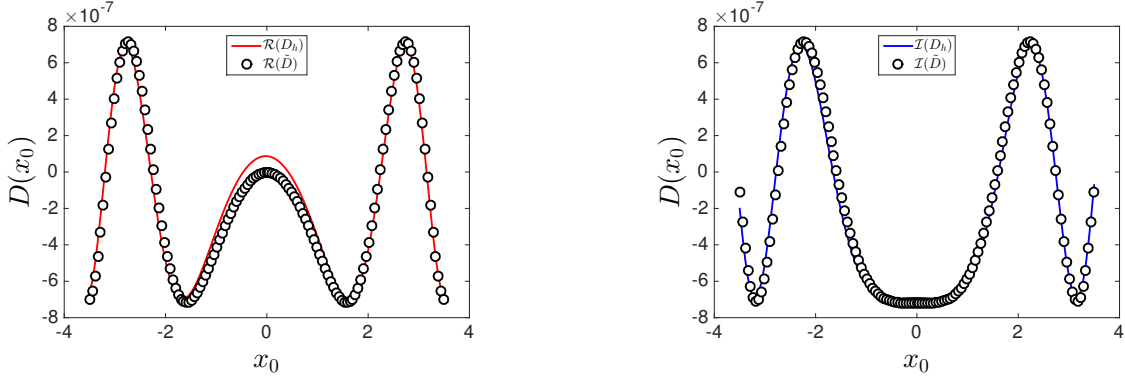


FIGURE 2.5 – Dans le même ordre de la gauche vers la droite, la comparaison des parties réelles et imaginaires des formes d'onde D_h et $\tilde{D}$ en fonction des 129 positions des points de mesures sur la station Radar.

L'erreur relative donnée par la formule (2.32) est représentée sur la Figure 2.6 :

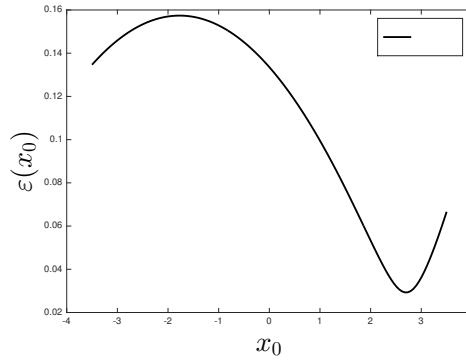


FIGURE 2.6 – L'erreur relative entre D_h et $\tilde{D}$, en fonction de point d'observation x_0 .

Le résultat de la comparaison montre une très bonne correspondance entre la forme d'onde donnée par le calcul exact et celle donnée par le calcul d'intégrale en utilisant l'approximation de Born. Ce type de comparaison nous permet d'être plutôt confiant sur la pertinence de l'utilisation de l'approximation de Born pour générer les données synthétiques. Il faut aussi rappeler que les données sont en général très bruitées et donc que même l'utilisation d'un code très précis de résolution du problème direct ne donne pas les garanties de produire des données réalistes. Seule une confrontation aux données expérimentales pourrait être le garant de l'efficacité des méthodes numériques d'inversion que nous allons présenter. Malheureusement, bien que planifié au début de la thèse, cette validation n'a pas pu avoir lieu car le dispositif expérimental n'a pas été opérationnel jusqu'à la rédaction de ce mémoire.

2.3 Imagerie SAR en configuration backscattering

L'objectif principal de cette section est de modéliser une technique de reconstruction d'image, pour cartographier les mines dans le champ visé. Nous commençons tout d'abord par introduire et analyser le modèle de réponse des mines en configuration backscattering dans un milieu homogène. Nous proposons alors de décrire cette configuration de collecte de données, puis de rappeler le modèle décrivant les principales caractéristiques géométriques et électromagnétiques des mines antichar et antipersonnel.

2.3.1 Description de la configuration backscattering

Il s'agit d'une grille Σ contenant l'ensemble des capteurs x dans la station aérienne placée à une hauteur H_a , formée par une antenne d'ouverture W_a en déplacement le long d'une trajectoire rectiligne de longueur L_a . On parle ainsi du principe d'ouverture synthétique. Ce modèle de collecte de réponse peut être schématisé géométriquement par la grille dans la Figure 2.7 :

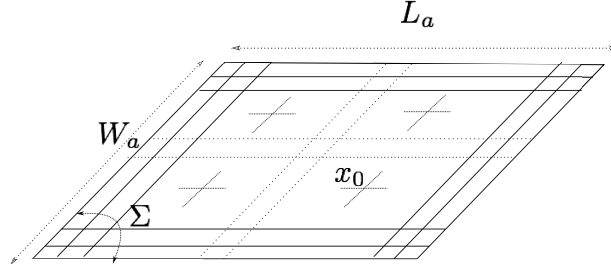


FIGURE 2.7 – Illustration des points de mesures sur la station, en configuration backscattering

Par ailleurs, dans le cas du schéma proposé par Tandem, les capteurs x sont placés aux mêmes endroits que les sources x_0 , et on parle ainsi de la configuration backscattering. Pour les propriétés électromagnétiques et géométriques des mines, notons tout d'abord que le support de la différence entre les indices de réfractions $(n_b - n)$ de milieu et celui des mines est inclus dans Ω , et rappelons que la forme d'onde $D := \tilde{D}$ (2.33) reçue au niveau de cette antenne (la mesure SAR) est modélisée par :

$$D(x_0) = k^2 \int_{\Omega} (n - 1) \frac{e^{2ik|x_0 - y|}}{16\pi^2 |x_0 - y|^2} dy, \quad (2.35)$$

La question qui se pose maintenant est : comment utiliser ces données au niveau des capteurs x_0 , pour produire des cartes pour les zones d'intérêt ? Du moment que les mesures seront effectuées par des antennes suffisamment loin de la surface du sol, l'idée la plus simple pour l'imagerie est de procéder comme dans [20] par l'analyse en champ lointain.

2.3.2 Approximation en Champ Lointain

Pour introduire la technique d'imagerie utilisée pour la cartographie des mines moyennant les données radar à ouverture synthétique, nous nous placerons en configuration de champ lointain [13, 15, 40, 50]. Lorsque les antennes d'observation se trouvent à une grande distance du sol à

inspecter, nous pouvons apporter des simplifications aux expressions du champ diffracté. Plus précisément, dans les conditions de l'approximation de champ lointain :

$$\begin{aligned} |x_0 - y| &= \sqrt{(x_0 - y) \cdot (x_0 - y)} = \sqrt{|x_0|^2 - 2x_0 \cdot y + |y|^2} = |x_0| \sqrt{1 - 2\frac{\hat{x}_0 \cdot y}{|x_0|} + \frac{|y|^2}{|x_0|^2}} \\ &= |x_0| \left(1 - \frac{\hat{x}_0 \cdot y}{|x_0|} + O\left(\frac{|y|^2}{|x_0|^2}\right) \right) \\ &= |x_0| - \hat{x}_0 \cdot y + O\left(\frac{|y|^2}{|x_0|}\right), \text{ avec } \hat{x}_0 = \frac{x_0}{|x_0|} \end{aligned}$$

Le but de cette analyse est de rendre plus simple la lecture de la forme d'onde introduite dans (2.35), et d'en déduire une méthode pour l'imagerie. Nous commençons par quelques notations et définitions.

En champ lointain, un développement de Taylor de $\frac{1}{|x_0 - y|}$, nous donne de la même façon que pour $|x_0 - y|$ l'approximation suivante :

$$\frac{1}{|x_0 - y|} = \frac{1}{|x_0 - y|} \left(1 + O\left(\frac{|y|}{|x_0|}\right) \right)$$

Avec toutes ces approximations, la fonction de Green (2.15) se simplifie sous la forme d'une onde sphérique centrée en l'origine multipliée par un terme de phase :

$$\Phi_0(x_0 - y) = \frac{e^{ik|x_0|}}{4\pi|x_0|} e^{-ik\hat{x}_0 \cdot y} \left(1 + O\left(\frac{|y|}{|x_0|}\right) \right) \left(1 + O\left(\frac{k|y|^2}{|x_0|}\right) \right) \quad (2.36)$$

On en déduit maintenant le modèle d'acquisition de données radar à ouverture synthétique, sous sa forme en configuration champ lointain. En effet, une approximation de la forme d'onde D en configuration champ lointain peut être approchée par :

$$D_\infty(x_0) = A_0 \frac{e^{ik|x_0|}}{4\pi|x_0|} \int_{\mathbb{R}^3} (n-1) e^{-i2k\hat{x}_0 \cdot y} dy, \text{ avec } \hat{x}_0 = \frac{x_0}{|x_0|} \quad (2.37)$$

Avant d'introduire une technique d'imagerie, remarquons tout d'abord que la seule quantité dans l'expression de la forme d'onde simplifiée (2.37) contenant des informations sur les objets que nous voulons cartographier est donnée par :

$$\hat{D}_\infty(x_0) = \int_{\mathbb{R}^3} (n-1) e^{-i2k\hat{x}_0 \cdot y} dy, \quad (2.38)$$

qui est proportionnelle à la transformée de Fourier inverse tridimensionnelle de $(n-1)$. Cette donnée correspond toutefois aux valeurs de la transformée de Fourier seulement sur la sphère de rayon $2k$. La méthode SAR consiste simplement à approcher le support de $(n-1)$ en appliquant la transformée de Fourier inverse sur les données partielles fournies par $\hat{D}_\infty$. On introduit alors l'indicatrice $\hat{I}$ comme étant la transformée de Fourier inverse (de la transformée de Fourier $(n-1)$)

$$\hat{I}(z) := \int_{\Gamma \subset \mathbb{S}^2} \hat{D}_\infty(x_0) e^{+i2k\hat{x}_0 \cdot z} d\hat{x}_0, \quad (2.39)$$

L'avantage premier de cette approche, en plus de sa simplicité, est qu'elle donne une manière extrêmement stable pour traiter le bruit présent dans $\hat{D}_\infty$. La transformée de Fourier permet par exemple de filtrer efficacement tout bruit blanc indépendamment de son amplitude. Cette stabilité est cependant d'une garantie aux dépens de précision puisqu'on ne pourra jamais, à partir de cette formule, retrouver le support $3D$ de $1 - n$ (remarquer que l'intégrale dans (2.39) est une intégrale $2D$).

Afin de quantifier la précision maximale que pourrait fournir ce type d'approche, nous considérons l'exemple simple où le domaine Ω est réduit à un point et que les points de mesures entourent complètement le point en question (on est évidemment très loin de la configuration Tandem). Ce cas se résume donc à $\Gamma = \mathbb{S}^2$, et la mine se comporte comme un point source en $x = z_0$ de manière à ce que les mesures puissent se modéliser par

$$\hat{D}_\infty(\hat{x}_0) = e^{-i2\hat{x}_0 \cdot z_0}$$

Ainsi la fonction indicatrice s'exprime analytiquement par

$$I(z) \rightarrow \hat{I}(z) \simeq \text{cte} \int_{\mathbb{S}^2} e^{i2\hat{x}_0 \cdot (z - z_0)} ds(\hat{x}_0)$$

Cette intégrale se calcule facilement en utilisant la formule de Funk-Hecke [22] et nous donne

$$\hat{I}(z) = j_0(2k|z_0 - z|) = \text{sinc}(2k|z_0 - z|)$$

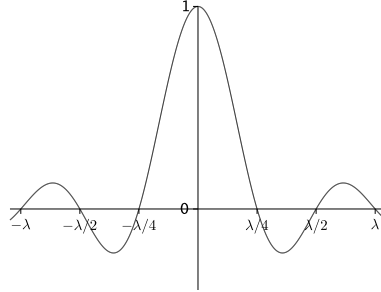


FIGURE 2.8 – Illustration dans le cas ponctuel

Cette formule montre que l'on obtient la fonction sinc comme approximation du dirac en z_0 (qui est la solution exacte du problème inverse simplifié que nous considérons). Le maximum de la fonction indicatrice est atteint pour $z = z_0$ et la résolution (précision) est donnée par la largeur du pic représenté dans la Figure 2.8 en terme de la longueur d'onde $\lambda = 2\pi/k$. On retrouve ici la tâche focale de Rayleigh de diamètre $\lambda/2$.

Extension aux cas de données en champ proche : En pratique les mesures correspondent à la donnée de la forme d'onde (2.35) introduite dans la section précédente. Soit $\tilde{A} : L^2(\mathbb{B}) \rightarrow L^2(\Sigma)$ l'opérateur de convolution défini par :

$$\tilde{A}(n - 1) = D \tag{2.40}$$

où D est donné par (2.35) et où $\mathbb{B}$ désigne le domaine sondé contenant Ω (remarquer que $(1 - n) = 0$ en dehors de Ω). Pour définir une expression de l'indicatrice I il s'agit de faire le même raisonnement de l'analyse en champ lointain en passant des formes approchées aux expressions exactes de D . Il serait question de remplacer

$$\frac{e^{-ik|x_0|}}{4\pi|x_0|} e^{+ik\hat{x}_0 \cdot z} \quad \text{par} \quad \frac{e^{-ik|x_0-z|}}{4\pi|x_0-z|}.$$

Nous sommes ainsi amenés à définir l'indicatrice d'un point z de l'espace relative aux mesures qui se font dans tous les points de surface Σ par

$$I(z) = \int_{\Sigma} \frac{e^{-2ik|z-x_0|}}{16\pi^2|z-x_0|^2} D_k(x_0) dx_0. \quad (2.41)$$

C'est cette fonctionnelle qui est utilisée en imagerie SAR et à laquelle nous avons apportée une justification dans le cas de l'approximation champ lointain. Nous cherchons par la suite à valider son utilisation pour la cartographie des mines à partir des données radar à ouverture synthétique. La justification théorique ne garantit pas forcément la précision des reconstructions pour le dispositif Tandem. Comme nous l'avons indiqué plus haut, il est impossible de reconstruire la géométrie 3D à partir de cette formule. Tout ce qu'on peut espérer c'est d'avoir une certaine précision dans la construction de la projection du domaine Ω sur un plan parallèle à Σ .

Remarquons que la formule donnant $I(z)$ n'est autre que l'évaluation de l'adjoint ($I(z) = \text{cte} \tilde{A}^*(D)$) de l'opérateur $\tilde{A}$. C'est pour cela que dans certaines publications on parle de rétro-propagation des données. Il faut cependant faire attention que ce vocabulaire n'est pas très pertinent dans le cas présent puisque chaque valeur $D(x_0)$ correspond à une onde différente...

Définir un "vrai schéma" d'inversion revient plutôt à construire un inverse approchée de l'opérateur $\tilde{A}$. Ce schéma pourra se baser sur la minimisation de la fonction coût suivante :

$$\|\tilde{A}I - D\|_{L^2(\Sigma)} \quad (2.42)$$

à laquelle nous ajoutons des termes de régularisation. Ce type d'approche sera discuté à la Section 3.5 explorant différentes pistes de régularisation.

2.4 Résultats numériques

En quelques mots, jusqu'à présent, nous avons réussi à mettre en œuvre un modèle mathématique décrivant le comportement de la propagation d'ondes dans un milieu homogène contenant des hétérogénéités définies par leur indice optique n , en réponse à une excitation d'une onde incidente provenant d'un point source. Cette modélisation est basée sur la formulation intégrale d'équations de propagation, puis sur une approximation de Born du premier ordre, que nous avons validée grâce à une autre approche plus rigoureuse. Dans la section 2.3, nous avons proposé aussi un modèle traitant les informations mesurées au niveau des récepteurs, pour ensuite réaliser des cartes de la zone observée. Dès lors, ce modèle d'imagerie a été testé sur plusieurs configurations. Nous avons choisi de présenter quelques exemples pour illustrer les résultats. Nous commençons ce paragraphe par fixer quelques notations et préliminaires, concernant les

régions contenant les mines et le dispositif radar mis en place pour les cartographier. Nous présenterons par la suite quelques résultats numériques, et nous enchaînerons par une conclusion et des discussions sur les images obtenues par le modèle proposé.

2.4.1 Notations et Préliminaires

Nous supposons que nous cherchons à cartographier un terrain rectangulaire comme dans la Figure 2.9, de dimensions $L_x \times L_y$. Cette région de l'espace est formée d'un sol homogène d'indice de réfraction $n_b = 1$, et nous donnons plus de détails sur ce milieu ci-dessous. Ce sol contient un certain nombre de mines antipersonnel Ω_p , et antichar Ω_c , sous forme de parallélépipèdes rectangles, plongées à des profondeurs d_p et d_c . Notons qu'une paramétrisation de ces mines revient à donner leurs centres et les dimensions de leurs bases. Nous donnerons plus de précisions pour le nombre et l'emplacement dans la région en fonction des exemples numériques.

Nous prenons en compte le fait que, lorsqu'une mine antichar est déposée, elle est protégée par des mines antipersonnel. Pour faciliter la modélisation, nous supposons alors que chaque mine antichar est entourée par un cercle contenant huit mines antipersonnel avec un rayon d , que nous préciserons pour chaque exemple aussi (voir Figure 2.9).

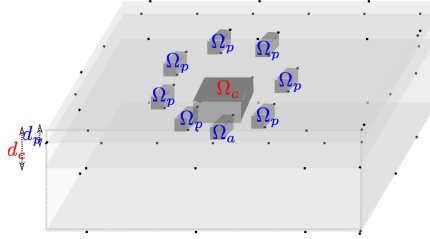


FIGURE 2.9 – Illustration des positions des mines

Pour des raisons de simplicité et sans perte de généralité, nous considérons tous les paramètres des expérimentations numériques en fonction de la longueur d'onde $\lambda = 10\text{cm}$.

Comme nous l'avons signalé plus haut, les mines antichar et antipersonnel et le milieu de propagation auront pour toute la suite les propriétés suivantes :

- La mine antichar définie comme un cube de dimensions $(4\lambda)^3$, et de λ^3 pour la mine antipersonnel.
- Le pas de la discrétisation en espace est de $\Delta = \Delta_x \Delta_y \Delta_z = \left(\frac{\lambda}{2}\right)^3$.
- L'indice de réfraction des mines antichar est fixé à $n_c = 3.6$. Il est de $n_a = 3.2$ pour les mines antipersonnel.
- Le milieu de propagation est supposé homogène d'indice $n_b = 1$.
- Le plan de coupe Π est de dimension $60\lambda \times 60\lambda$, discrétisé avec $\Delta/2^3$.

Nous avons dit que l'on disposait d'une antenne d'ouverture W_a aéroportée par un aéronef. Cette antenne qui fonctionne en mode émetteur/récepteur contient N_a points sources qui jouent

aussi le rôle de récepteur en configuration backscattering. L'aéronef en question se déplace à la hauteur H_a le long d'une trajectoire rectiligne de longueur L_a , à une vitesse v_a . Il en résulte un pas de déplacement Δ_L . Cette plateforme qui occupe M_a stations différentes forme ainsi une grille spatiale rectangulaire Σ , de dimension $W_a \times L_a$, à la hauteur H_a . La Table 2.1 présente le choix des paramètres utilisés pour les expérimentations numériques.

TABLE 2.1 – PARAMÈTRES LIÉS À L'ANTENNE.

Grille	Dimension		Discrétisation		Nombre de points		H_a
	W_a	L_a	Δ_W	Δ_L	N_a	M_a	
Valeurs	60λ	70λ	$.5\lambda$	$.5\lambda$	121	141	100λ

Grille : Station de mesures des réponses.

Les points sources illuminent la zone par des ondes électromagnétiques en bande de fréquence $k = 10GHz$ et qui correspond à la longueur d'onde $\lambda = 10cm$.

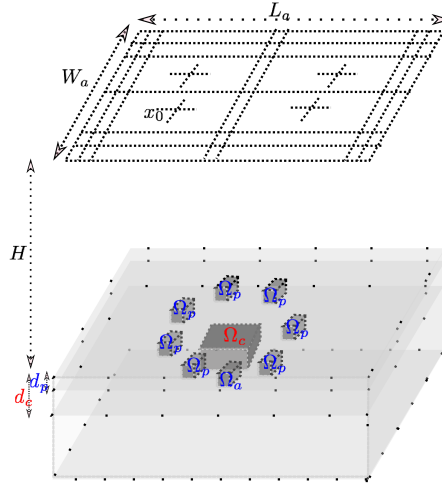


FIGURE 2.10 – Illustration des positions des mines et points d'observation de la station aérienne.

Pour commencer le test des schémas d'imagerie sur des expérimentations numériques, nous tenons à rappeler que nous utilisons des données synthétiques et des algorithmes SAR correspondants pour reconstruire les positions des mines. Il s'agit des données synthétiques $\tilde{D}$ aux points x_0 de Σ , introduites dans le modèle de forme d'ondes défini dans la section 2.3, par :

$$\tilde{D}(x_0) = k^2 \int_{\Omega} (n_b - n) \frac{e^{i2k|x_0 - y|}}{(4\pi |x_0 - y|)^2} dy,$$

Cette intégrale sur Ω est numériquement calculée par la formule des rectangles avec les pas de discrétisation d'espace Δ_x, Δ_y et Δ_z préalablement définis. Nous avons ainsi l'approximation suivante de la forme d'onde :

$$\tilde{D}(x_0) = k^2 \Delta \sum_{r,l,m} (n_b - n_{r,l,m}) \frac{e^{i2k|x_0 - y_{r,l,m}|}}{(4\pi |x_0 - y_{r,l,m}|)^2} \quad (2.43)$$

Les algorithmes SAR définissent la fonction d'intensité I , permettant de réaliser des images de la zone définie pour chaque point z de l'espace $\mathbb{R}^3$, par :

$$I(z) = \int_{\Sigma} \frac{e^{-i2k|z - x_0|}}{(4\pi |z - x_0|)^2} D(x_0) dx_0$$

Numériquement, nous implémenterons l'expression :

$$\tilde{I}(z) = \sum_{x_0 \in \Sigma} \frac{e^{-i2k|z - x_0|}}{(4\pi |z - x_0|)^2} D(x_0) \Delta_0 \quad (2.44)$$

Notons que, dans toutes les expérimentations numériques, nous afficherons une trace de la fonction I sur un plan de coupe horizontale. Nous préciserons pour chaque exemple le niveau de ce plan de coupe, qui est généralement choisi en fonction de la position des mines. En effet, pour des cartes représentatives d'une région contenant des mines antichar et antipersonnel, il serait intéressant de regarder ce qui se passe au niveau des plans de coupe à -4λ , à $-\lambda$ et 0 en profondeur ; les premiers plans Π_3, Π_2 correspondent aux profondeurs d'enterrement des mines, et en dernier Π_1 , le plan 'virtuel' de séparation $\{x \in \mathbb{R}^3 : x_3 = 0\}$. Le processus d'imagerie se déroule de la manière suivante :

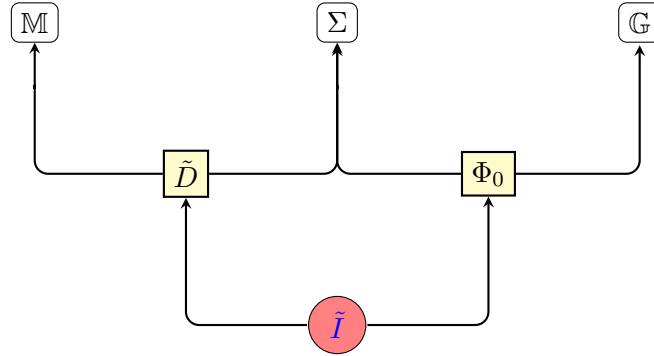


FIGURE 2.11 – Digramme Explicatif de la procédure d'imagerie.

En peu de mots, nous regroupons les données concernant les mines, les points sources et les récepteurs dans des fichiers. Ces fichiers vont être consultés pour générer la matrice des réponses $\tilde{D}$. On calcule à partir de cette matrice des réponses, l'intensité $I(z)$ pour tout pixel z d'un plan de coupe horizontale. On forme ainsi une image avec les détails du terrain visé.

2.4.2 Expérimentations Numériques

Désignons donc par $\Pi_1 = \{z \in \mathbb{R}^3 : z = 0cm\}$, $\Pi_2 = \{z \in \mathbb{R}^3 : z = -10cm\}$, et $\Pi_3 = \{z \in \mathbb{R}^3 : z = -40cm\}$, les trois plans que nous allons visualiser tout au long de ces expérimentations numériques. Un dernier point important, dans tous les exemples numériques, nous nous référons

à la configuration exacte utilisée pour la simulation des données synthétiques par des carrés limitant les bords des objets à reconstruire.

Mine antichar au centre de la région.

Nous commençons notre partie numérique par un test très simple. La région en question contient une seule mine antichar au centre de la région.

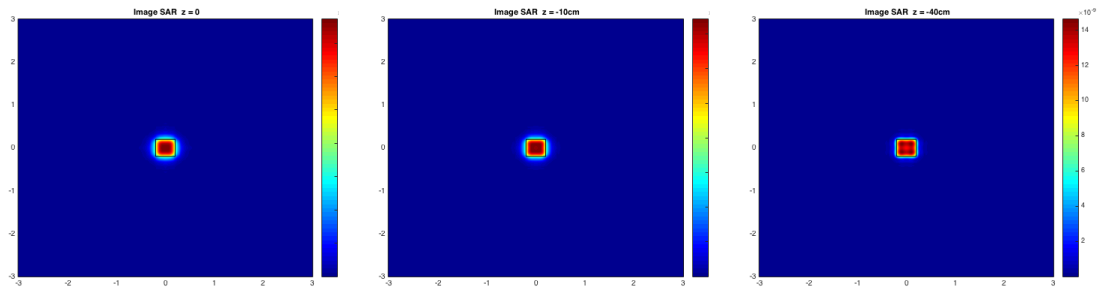


FIGURE 2.12 – Dans ce même ordre, les cartes obtenues en calculant les traces de $I(z)$, sur les plans Π_1, Π_2 et Π_3 , pour la région contenant un seul objet au centre.

Vers la fin de ces expérimentations numériques, nous allons tester pour cet exemple l'impact de la longueur de la trajectoire du vol ainsi que l'ouverture de l'antenne sur la netteté de l'image reconstruite, pour ensuite proposer les dimensions optimales de l'antenne et de la ligne de vol.

Mine antichar entourée des mines antipersonnel

Pour empêcher l'accès et la neutralisation de l'effet des mines antichar, les militaires utilisent des mines antipersonnel autour de chaque mine. Dans cet exemple, et pour simplifier, nous supposons que chaque mine est entourée de huit mines antipersonnel distribuées d'une manière uniforme sur le cercle centré au milieu de la mine antichar et de rayon d . Pour voir l'impact de la distance entre les mines sur l'image, nous répétons ce même exemple, pour plusieurs expérimentations, en jouant sur la distance d entre la mine à l'intérieur et le cercle contenant les mines antipersonnel.

TABLE 2.2 – CENTRE ET BASE DE L'OBJET.

Mine	Centre		dimension			d_a
	x	y	M_x	M_y	M_z	
Antichar	0	0	4λ	4λ	4λ	-4λ
8 Antipersonnel	$d \cos \theta_i$	$d \sin \theta_i$	1λ	1λ	1λ	-1λ

Position et dimension de la Mine.

Dans la première configuration, nous avons considéré que les huit petites mines se trouvent sur un cercle de rayon $d = 2\lambda$, centré au milieu de cette mine, c'est-à-dire qu'on est vraiment au-dessus de la mine qui est de dimension 4λ . Les résultats sont présentés sur la Figure 2.13.

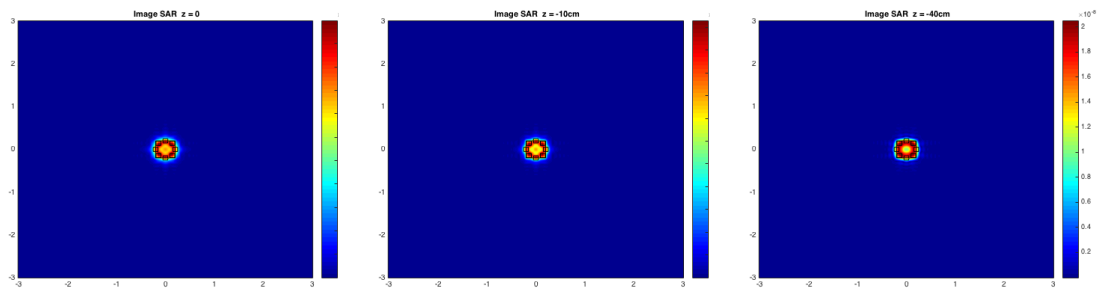


FIGURE 2.13 – Dans ce même ordre, les cartes obtenues en calculant les traces de $I(z)$, sur les plans Π_1, Π_2 et Π_3 , pour la région contenant l'objet au centre, entourée des 8 petits obstacles d'une distance $d = 2\lambda$, du centre.

Maintenant, nous considérons le même exemple, mais cette fois-ci, avec la distance $d = 4\lambda$, voir la Figure 2.14.

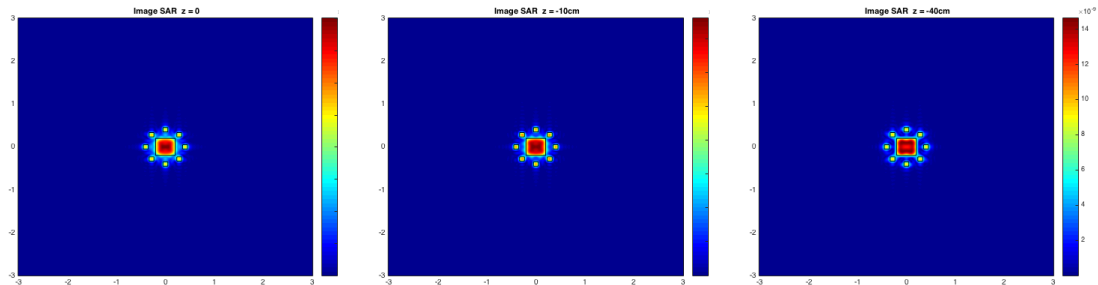


FIGURE 2.14 – Dans ce même ordre, les cartes obtenues en calculant les traces de $I(z)$, sur les plans Π_1, Π_2 et Π_3 , pour la région contenant l'objet au centre, entourée des 8 petits obstacles d'une distance $d = 4\lambda$, du centre.

À l'œil, on ne voit pas vraiment la différence entre les trois images relatives aux différents plans de coupes. Avant de continuer à augmenter la distance entre la mine antichar et les mines antipersonnel qui l'entourent, nous proposons ici un exemple sur des petits objets, pour illustrer l'impact du plan de coupe sur la qualité des objets retrouvés. En effet, nous avons considéré une scène contenant deux mines antipersonnel séparées d'une distance de λ , et nous visualisons la trace de I sur les différents plans de coupe. Nous avons obtenu les résultats dans la Figure 2.15 :

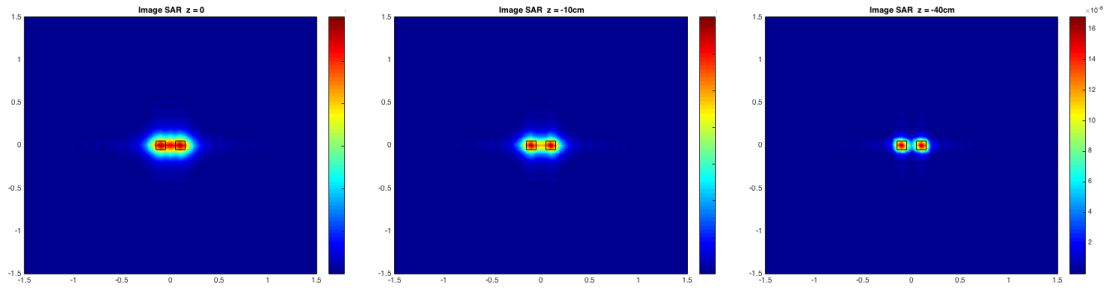


FIGURE 2.15 – Dans ce même ordre, les cartes obtenues en calculant les traces de $I(z)$, sur les plans Π_1, Π_2 et Π_3 , pour une scène avec deux objets séparés de 2λ .

Ici, on voit clairement la différence entre les trois images. Dans les premier et second plans de coupe, on n'arrive pas à distinguer les deux objets, alors que, dans le troisième plan, on voit très bien que la région contient des objets différents.

Revenons à notre configuration de base et continuons à augmenter la distance entre l'objet à l'intérieur et les petites inclusions autour, pour $d = 6\lambda$, comme dans la Figure 2.16.

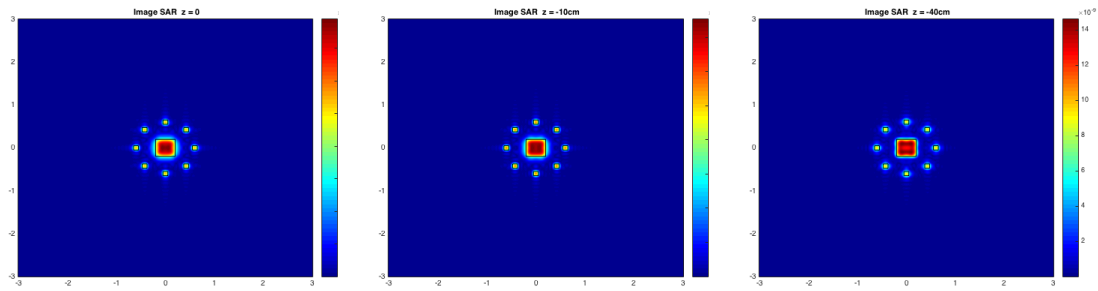


FIGURE 2.16 – Dans ce même ordre, les cartes obtenues en calculant les traces de $I(z)$, sur les plans Π_1, Π_2 et Π_3 , pour la région contenant l'objet au centre, entourée des 8 petits obstacles d'une distance $d = 6\lambda$, du centre.

Dans la Figure 2.17, la distance entre la mine antichar et les mines antipersonnel est de $d = 10\lambda$.

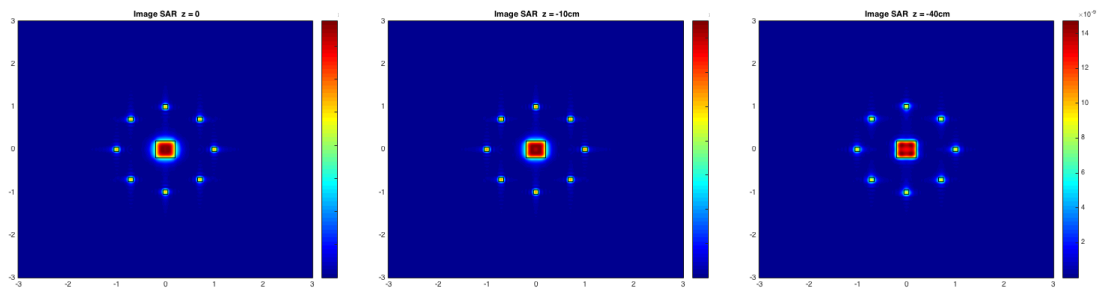


FIGURE 2.17 – Dans ce même ordre, les cartes obtenues en calculant les traces de $I(z)$, sur les plans Π_1, Π_2 et Π_3 , pour la région contenant l'objet au centre, entourée des 8 petits obstacles d'une distance $d = 10\lambda$, du centre.

L'exemple correspond à l'expérimentation d'une mine antichar au centre de la région entourée d'une distance de 20λ . Les résultats de la simulation sont représentés dans la Figure 2.18.

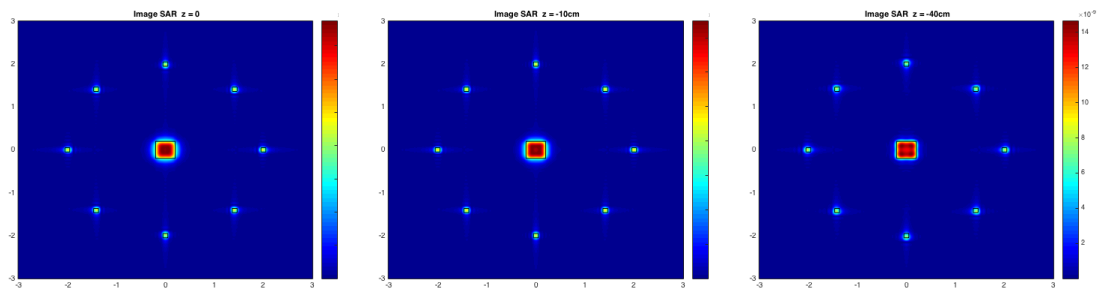


FIGURE 2.18 – Dans ce même ordre, les cartes obtenues en calculant les traces de $I(z)$, sur les plans Π_1, Π_2 et Π_3 , pour la région contenant l'objet au centre, entourée des 8 petits obstacles d'une distance $d = 20\lambda$, du centre.

Dans ce dernier exemple, nous supposons que la région contient plusieurs mines antichar (dans cet exemple 3) qui seront entourées de la même manière par des mines antipersonnel à une distance $d = 6\lambda$. Les positions des centres de ces mines antichar sont données à titre explicatif dans la Table 2.3.

TABLE 2.3 – CENTRES MINES.

Mines	Centre	
	x	y
M_1	0	0
M_2	10λ	10λ
M_3	-10λ	10λ

Centre des Mines.

La Figure 2.19 correspond aux traces de I dans les trois plans Π_1, Π_2 et Π_3 .

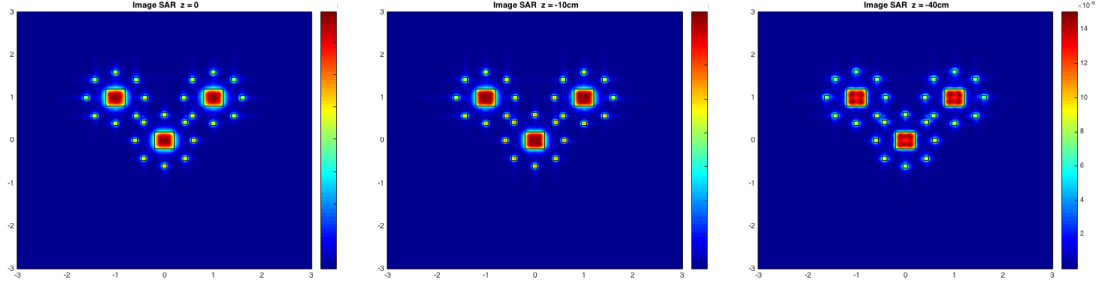


FIGURE 2.19 – Dans ce même ordre, les cartes obtenues en calculant les traces de $I(z)$, sur les plans Π_1, Π_2 et Π_3 , pour la région contenant les 3 objets, entourés chacun des 8, petits obstacles d’une distance $d = 6\lambda$, du centre.

Les résultats numériques obtenus valident bien cette technique d’imagerie radar pour la cartographie des mines dans un milieu homogène. Mais, jusqu’à présent, nous n’avons pas donné d’importance au nombre et à l’emplacement des points sources et récepteurs utilisés pour l’évaluation de la matrice réponse. En effet, il serait donc intéressant de voir l’impact des paramètres de l’expérimentation, principalement relatifs à l’antenne, sa longueur et celle de la trajectoire de vol parcourue, et voir la possibilité de les optimiser dans le but de réduire les coûts, tout en garantissant une bonne localisation des obstacles. Nous avons laissé ces questions sans réponses et nous voulons les discuter dans le paragraphe qui suit.

2.4.3 Qualité de l’image en fonction des points de mesure

Les images présentées dans le paragraphe précédent sont issues d’un traitement de données synthétiques collectées pour une grille de points Σ , que nous qualifions ici de référence et que l’on note par $\Sigma_{ref} := \Sigma$ de longueur $L_{ref} := L_a$ et de largeur $W_{ref} := W_a$. Afin d’analyser l’impact des dimensions de cette surface sur la qualité de l’image obtenue, nous fixons comme surface de référence Σ_{ref} , la grille de dimension $L_{ref} \times W_{ref} := 6 \times 6m^2$, ce qui nous donne l’intensité équivalente de référence I_{ref} . Nous commençons à diminuer progressivement cette surface et à comparer les résultats d’intensité obtenus avec ceux de référence I_{ref} . Nous définissons ainsi l’erreur relative par rapport au cas de référence comme suit :

$$\varepsilon = \frac{\|I_{ref} - I\|_2}{\|I_{ref}\|_2} \quad (2.45)$$

L’hypothèse que nous avons considérée ici consiste à dire qu’avec ces paramètres dits de référence on retrouve les vraies positions des mines.

Nous traitons l’exemple d’un seul objet au centre de la région, puis nous testons les résultats pour d’autres configurations plus complexes. Remarquons que la procédure qui consiste à diminuer graduellement les dimensions de la surface de mesure est symétrique pour les deux directions (c’est à dire que L_{ref} et W_{ref} jouent des rôles symétriques). Nous allons nous limiter à l’étude de l’impact de la largeur W sur la résolution de l’image. Il s’agit ainsi de réduire progressivement la largeur W de la surface, en commençant par la largeur de référence W_{ref} . Notons donc par W_n, Σ_n et I_n les largeurs, surfaces et intensités relatives à cette succession d’expériences. Les

suites numériques $(W_n)_n$ et d'ensemble $(\Sigma_n)_n$ sont décroissantes. Nous comparons ainsi la suite des images I_n avec l'image de référence I_{ref} . Pour bien définir cette suite W_n , on suppose que la différence entre $W_0 = W_{ref}$ et W_1 est de $\Delta_W = 1\lambda$, ainsi W_n est définie par :

$$\begin{aligned} W_0 &= W_{ref} \\ W_{n+1} &= W_n - \lambda \end{aligned}$$

Ce qui revient à enlever pour chaque itération deux points de mesures symétriquement opposés par rapport au centre d'observation dans l'axe des distances.

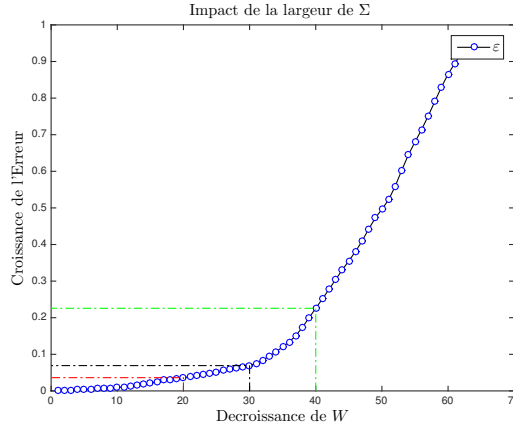


FIGURE 2.20 – L'évolution de l'erreur en décroissement de l'ouverture d'antenne.

Quelques valeurs prises par l'erreur relative définie en (2.45) sont représentées à titre indicatif dans la Table 2.4 ci-dessous, en fonction de la décroissance de largeur de Σ .

TABLE 2.4 – QUELQUES VALEUR DE ε EN FONCTION DE LA LARGEUR DE Σ_a .

W_a	50λ	40λ	30λ	20λ	20λ
N_a	101	81	61	41	21
ε	1.8%	4.7%	10.7%	33%	64.5%

Extrait de la Figure 2.20.

La question qui se pose à ce stade est la suivante : serait-il possible de retrouver les mêmes résultats de la reconstruction en utilisant une station de mesure de dimensions plus réduites ? Pour répondre à cette question, nous allons donc refaire les mêmes expérimentations que dans 2.4.2, maintenant, pour des surfaces de largeur W_a plus petites. Notons que, d'après la Table 2.4, avec une ouverture de 30λ , nous sommes toujours à moins de 10% d'erreur par rapport au cas de référence. Naturellement, nous pouvons trouver des résultats avec des largeurs de plus 30λ , comparables aux résultats trouvés pour une ouverture de 60λ . De nombreuses (en fonction de largeur de grille) configurations ont été testées. Nous en présentons quelques-unes dans ce

qui suit , pour une région contenant trois mines entourées chacune de huit mines antipersonnel. Nous reprenons donc l'exemple dans cette Table 2.5.

TABLE 2.5 – CENTRES MINES.

Mines	Centre	
	x	y
Mine 1	0	0
Mine 3	10λ	10λ
Mine 4	-10λ	10λ

Centre des Mines.

Dans la première configuration, les mesures des réponses sont données pour une grille (avec le même pas de maillage) de dimension plus réduite $40\lambda \times L_{ref}$. D'après la Table 2.4, on note que l'image obtenue diffère de 4,7% par rapport à I_{ref} , la carte obtenue étant :

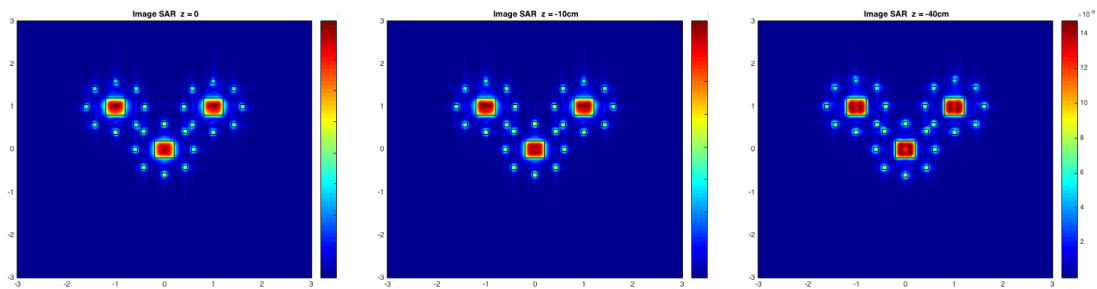


FIGURE 2.21 – Dans ce même ordre, les cartes obtenues en calcul les traces de $I(z)$, sur les plans Π_1, Π_2 et Π_3 , pour la région contenant les 3 objets , entourés chacun des 8 petits obstacles d'une distance $R = 6\lambda$, du centre, pour Σ de dimensions $40\lambda \times L_{ref}$.

Nous reprenons le même exemple dans la Table 2.5, mais maintenant pour des mesures sur une surface Σ de dimensions $30\lambda \times L_{ref}$, l'erreur relative entre les deux images est à peu près de 8% :

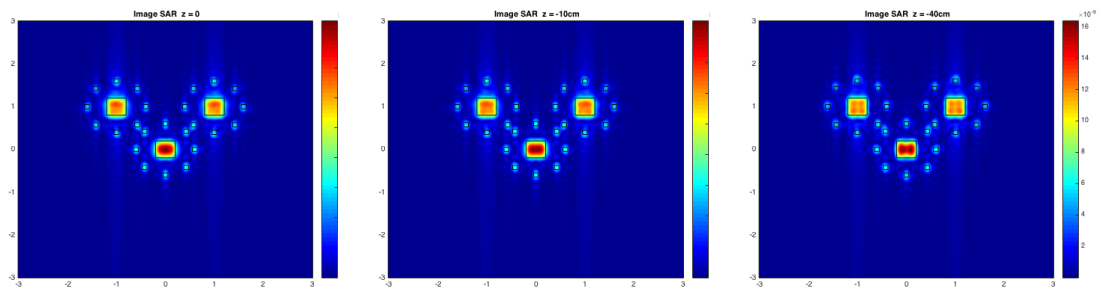


FIGURE 2.22 – Dans ce même ordre, les cartes obtenues en calcul les traces de $I(z)$, sur les plans Π_1, Π_2 et Π_3 , pour la région contenant les 3 objets, entourés chacun des 8 petits obstacles d'une distance $R = 6\lambda$, du centre, pour Σ de dimensions $30\lambda \times L_{ref}$.

Maintenant, pour une surface Σ un peu plus petite, de dimensions $20\lambda \times L_{ref}$, ici l'erreur relative obtenue est de presque 20%. L'image est donnée par :

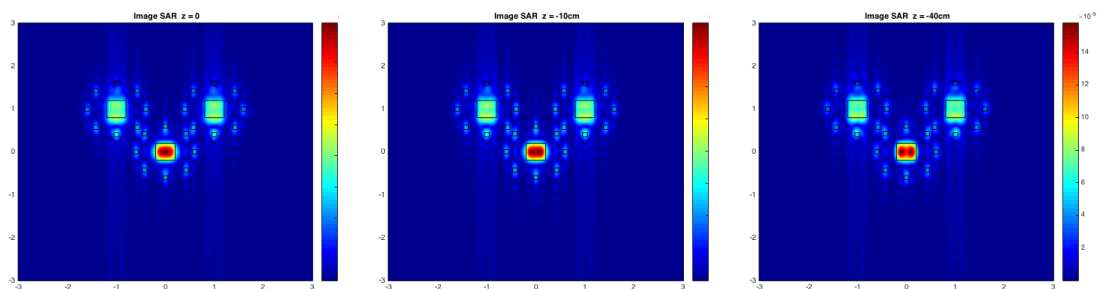


FIGURE 2.23 – Dans ce même ordre, les cartes obtenues en calcul les traces de $I(z)$, sur les plans Π_1, Π_2 et Π_3 , pour la région contenant les 3 objets, entourés chacun des 8 petits obstacles d'une distance $R = 6\lambda$, du centre, pour Σ de dimensions $20\lambda \times L_{ref}$.

Et on voit très bien la dégradation de la qualité de l'image en réduisant le nombre (la taille de la grille de collection de données).

Nous avons aussi regardé le cas avec une grille réduite à la fois en transverse et en azimuth. Nous considérons le même exemple, mais maintenant pour un jeu de données sur Σ , $40\lambda \times 40\lambda$, nous obtenons la carte suivante :

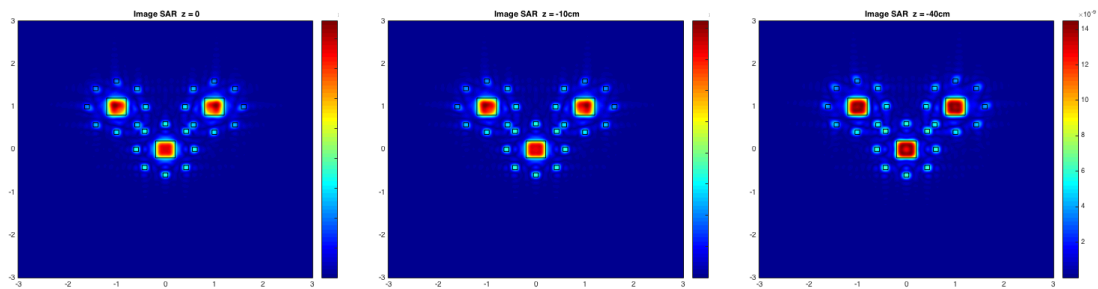


FIGURE 2.24 – Dans ce même ordre, les cartes obtenues en calcul les traces de $I(z)$, sur les plans Π_1, Π_2 et Π_3 , pour la région contenant les 3 objets, entourés chacun des 8 petits obstacles d’une distance $R = 6\lambda$, du centre, pour Σ de dimensions $40\lambda \times 40\lambda$.

2.5 Conclusion

Ce chapitre avait pour objectifs de présenter et mieux comprendre la technique d’imagerie radar à ouverture synthétique. Nous avons traité ainsi le cas simple d’un milieu homogène pour mettre en œuvre tous les ingrédients utiles, tester et valider notre processus d’imagerie.

Nous avons commencé par exposer les équations régissant ces phénomènes de propagation, puis la présentation des résultats d’existence et d’unicité de solution, où nous avons exploité la technique de formulation intégrale qui donne l’expression de la perturbation d’ondes sous une forme implicite. Pour résoudre ces équations, nous sommes passés par des techniques d’approximations, que nous avons réussi à valider pour des configurations particulières. À travers ce chapitre, nous avons présenté aussi les principales techniques pour simuler les réponses au niveau des antennes en nous basant sur les solutions des équations de propagation. Le développement d’un modèle d’imagerie passe par une analyse en champ lointain de la forme d’onde obtenue dans la formulation du problème direct. Nous avons montré à travers des expérimentations numériques qu’il est possible d’utiliser ces algorithmes SAR pour la détection des mines plongées dans un milieu homogène.

En peu de mots, le système de détection de mines dans un milieu homogène proposé dans ce chapitre tend à être robuste. En s’appuyant sur les résultats très intéressants présentés, le lecteur aura remarqué qu’il est possible de traiter d’une manière analogue le cas d’un milieu non homogène. Rappelons que l’objectif principal de cette thèse est de proposer une technique d’imagerie pour détecter des objets enfouis dans un sol, contrairement à l’hypothèse faite dans ce chapitre qui suppose que le milieu contenant les mines est homogène. Pour tenir compte de ces diverses complexités relatives au milieu, nous consacrons le chapitre qui suit. Dans ce dernier (chapitre 3), nous considérons le problème pour un milieu quelconque, et nous essayons d’exploiter le modèle proposé dans ce chapitre 2.

Extension au cas d'un milieu non homogène

Contents

3.1	Modélisation d'un milieu de référence hétérogène	44
3.2	Validation dans le cas bicouche	46
3.2.1	Notations et préliminaires	46
3.2.2	Description du modèle de propagation dans le cas bicouche	47
3.2.3	Expression analytique de la fonction de Green	47
3.3	Résultats numériques et discussions	51
3.3.1	Notations et préliminaires	51
3.3.2	Expérimentations numériques et validation	52
3.3.3	Conclusion	54
3.4	Limitations de la techniques SAR	55
3.4.1	Limitations liées aux données Lidar	55
3.4.2	Limitations liées aux type de sol	57
3.4.3	Conclusion	64
3.5	Reconstruction via une approche itérative et régularisation TV	64
3.5.1	Introduction et motivations	64
3.5.2	Technique de variation totale	65
3.5.3	Schéma Itératif de Landweber	66
3.5.4	Schéma d'inversion hybride	67
3.5.5	Résultats Numériques et Discussions	68

Dans le chapitre précédent, nous avons mis en place un outil mathématique d'imagerie, permettant de cartographier un milieu homogène contenant des inclusions définies par leur indice de réfraction. Le processus d'imagerie considéré plus haut se découpe en deux parties principales : l'acquisition et le traitement des données. Dans la première partie, nous avons considéré la modélisation de l'acquisition des données radar à ouverture synthétique, qui se base principalement sur la résolution du problème direct. La seconde partie, qui consiste à produire des images à partir des réponses collectées au niveau des antennes, se base principalement sur l'analyse en champ lointain de la forme d'onde. L'étude de l'extension de ce modèle est en effet motivée par les résultats satisfaisants obtenus dans le cas homogène.

Puisque nous ne connaissons pas les propriétés physiques des milieux désertiques contenant ces engins explosifs, qui correspondent généralement à des sols loin d'être homogènes, on s'intéresse dans cette thèse à mettre en œuvre une technique d'imagerie permettant la cartographie des mines dans un milieu quelconque. Dans ce chapitre, nous voulons étudier la possibilité d'étendre

le modèle proposé dans le chapitre 2, pour imager un milieu non homogène décrit par son indice de réfraction n_b , non nécessairement constant. Il est cependant recommandé, pour la bonne compréhension du chapitre, de bien maîtriser les notions du précédent. Nous poursuivons la même méthodologie décrite dans le chapitre 2. Pour ce faire, nous décrivons dans un premier temps les équations de diffraction dans un milieu quelconque défini par son indice de réfraction n_b . Nous explorons ainsi les formules appropriées d'extension pour la forme d'onde et la fonction de réflectivité (intensité) utilisée pour cartographier le sol en question. Nous nous pencherons dans une seconde section sur la présentation de quelques résultats numériques et discussions dans des cas spécifiques, pour pouvoir valider ou non ce modèle général.

3.1 Modélisation d'un milieu de référence hétérogène

Dans cette section, nous allons reprendre les équations de diffraction d'onde pour l'espace libre (toujours dans le cas scalaire), tout en les comparant avec les équations de propagation d'ondes scalaires dans le cas non homogène, représentant le mieux la réalité dans le sol à imager. Nous développons ainsi, au fur et à mesure, un modèle d'imagerie plus général, tout en prenant en compte les complexités et particularités des propriétés électromagnétiques liées au terrain à cartographier.

Une onde provenant d'une source ponctuelle placée en un point x_0 , pour un milieu homogène contenant des hétérogénéités définies par l'indice de réfraction $n_b = 1$ à l'extérieur d'un ouvert borné Ω l'onde totale u^{tot} caractérisée par :

$$\Delta u^{tot} + k^2 n u^{tot} = -\delta_{x_0} \quad (3.1)$$

$$\Delta u^{inc} + k^2 u^{inc} = -\delta_{x_0} \quad (3.2)$$

$$u^{sc} = u^{tot} - u^{inc} \quad (3.3)$$

u^{inc} et u^{sc} vérifient la condition de rayonnement de Sommerfeld définie dans le chapitre précédent, k est le nombre d'onde. Dans le cas d'un milieu de référence non homogène d'indice de réfraction n_b non constant (modélisant la présence d'autres types d'hétérogénéités que les mines) et tel que $n = n_b$ à l'extérieur d'un borné Ω , le problème de diffraction dans ce cas est décrit par (3.4)-(3.6)

$$\Delta u^{tot} + k^2 n u^{tot} = -\delta_{x_0} \quad (3.4)$$

$$\Delta u^{inc} + k^2 n_b u^{inc} = -\delta_{x_0} \quad (3.5)$$

$$u^{sc} = u^{tot} - u^{inc} \quad (3.6)$$

avec la même condition de rayonnement de Sommerfeld si on suppose que $n_b = 1$ pour $|x|$ suffisamment grand. Nous renvoyons à la section suivante pour la description de la condition de rayonnement dans des milieux plus généraux (notamment bicouches) ne vérifiant pas cette condition sur n_b .

Ce problème de diffraction (3.4) - (3.6), qui prend en compte un milieu de propagation non homogène présente la principale difficulté suivante. À la différence du problème (3.1)-(3.3), nous n'avons pas une expression analytique pour le champ incident u^{inc} qui décrit le comportement de

propagation d'ondes en l'absence de mines. D'un point de vue théorique, les résultats du chapitre précédent pour le cas $n_b = 1$ s'étendent facilement au cas présent en supposant que $n_b \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$ de partie imaginaire positive et en remplaçant la fonction de Green du cas homogène $\Phi_0(\cdot, x_0)$

$$\Phi_0(x, x_0) := \frac{e^{ik|x-x_0|}}{4\pi|x-x_0|} \quad (3.7)$$

par la fonction de Green associée au milieu de référence non homogène $\Phi_b(\cdot, x_0)$ solution de

$$\Delta\Phi_b(\cdot, x_0) + k^2 n_b \Phi_b(\cdot, x_0) = -\delta_{x_0} \quad (3.8)$$

et vérifiant la condition de rayonnement. En particulier l'approximation de Born reste valide du moment que $k^2 \|n - n_b\|_{L^\infty} \ll 1$. La fonction de Green est symétrique dans le sens où $\Phi_b(x, x_0) = \Phi_b(x_0, x)$

Sous cette hypothèse d'approximation de Born, l'expression des mesures en back-scattering est donnée par (étant donnée la symétrie de Φ_b)

$$\tilde{D}_b(x_0) = k^2 \int_{\Omega} (n - n_b) \Phi_b(x_0, y)^2 dy \quad (3.9)$$

Le but de ce chapitre est de définir une fonction d'imagerie permettant de tracer des profils 2D du terrain. Nous définissons donc la fonction indicatrice d'une manière similaire au cas de l'espace libre. Elle était donnée dans le cas d'un espace libre par l'expression suivante :

$$I(z) = \int_{\Omega} \tilde{D}_0(x_0) \Phi_0^*(x_0, z)^2 dx_0$$

où Φ_0^* désigne le complexe conjugué de Φ_0 . Ainsi, en présence de mesures données par $\tilde{D}_b$, au niveau des récepteurs, dans le cas non homogène, nous suggérons de tester la définition suivante de la fonction indicatrice pour un milieu non homogène

$$I(z) = \int_{\Omega} \tilde{D}_b(x_0) \Phi_b^*(x_0, z)^2 dx_0 \quad (3.10)$$

où Φ_b^* , désigne le complexe conjugué de Φ_b . Désormais, derrière l'extension de cette technique d'imagerie que nous venons de présenter, se cache la difficulté suivante : contrairement au cas homogène où le calcul de la fonction de Green était explicite, la fonction de Green $\Phi_b(\cdot, x_0)$, caractérisant la propagation dans le milieu de référence n'est plus automatique. Pour pouvoir exploiter ce modèle, il est nécessaire de définir des algorithmes de calcul de la fonction $\Phi_b(\cdot, x_0)$. Comme nous l'avons mentionné plus haut, dans le cas général et selon la nature du sol à imager, où est considérée la propagation (les propriétés électromagnétiques du sol contenant les mines), la résolution du problème d'Helmholtz (3.8) s'avère très complexe. Puisque nous ne connaissons pas les hétérogénéités du sol (milieu de référence : avant de poser les mines), nous avons généralement recours à des méthodes numériques pour caractériser le comportement de la propagation en l'absence de mine, en partant des prototypes d'un sol de référence, qui peuvent être obtenus grâce à des sondages.

Cependant, il existe des cas particuliers où nous disposons heureusement de solutions analytiques. Nous nous reposons sur ce type de configurations particulières dans la section 3.2, pour valider

notre modèle d'imagerie proposé plus haut. En effet, dans le cas où le milieu non homogène présente la propriété suivante : l'indice de réfraction du milieu est donné par une constante égale à n_b dans le demi-espace supérieur (l'air), et une constante n_b différente de 1, dans le demi-espace inférieur, nous avons une solution analytique du problème d'Helmholtz (une expression analytique de Φ_b) associé à ce choix de milieu de propagation.

3.2 Validation dans le cas bicouche

Dans cette section, nous allons tester le modèle d'imagerie proposé dans la section 3.1, pour voir la possibilité d'intégrer ce mécanisme d'imagerie dans les systèmes de détection des mines. Nous commençons par quelques notations et préliminaires nécessaires pour aborder le problème. Nous nous intéresserons dans un second lieu à la résolution du problème de diffraction dans un milieu bicouches. Pour valider notre modèle, nous discuterons en dernier les résultats numériques.

3.2.1 Notations et préliminaires

Comme nous l'avons expliqué dans la section précédente, la principale difficulté de ce modèle d'imagerie réside dans le calcul de la fonction de Green $\Phi_b(\cdot, x_0)$, solution du problème de diffraction dans un milieu non homogène caractérisé par son indice de réfraction n_b . Notons que, pour gagner sur la précision du calcul de cette fonction, ce dernier peut devenir très lourd et susceptible de demander un temps considérable. Pour y répondre de la façon la plus concrète possible, ce paragraphe traite le cas d'un milieu non homogène, mais présentant la propriété suivante : le terrain est formé de deux régions comprenant le demi-espace supérieur ($: \mathbb{R}_+^3$) matérialisé par l'air avec comme indice de réfraction $n_b = 1$, et le demi-espace inférieur correspondant à un sol d'indice de réfraction $n_b > 1$ mais constant. Ces deux demi-espaces sont séparés par le plan Π_0 . Dans cette configuration, que nous appellerons bicouche, et que nous schématisons dans la Figure 3.1, nous avons une expression analytique de la solution du problème de diffraction.

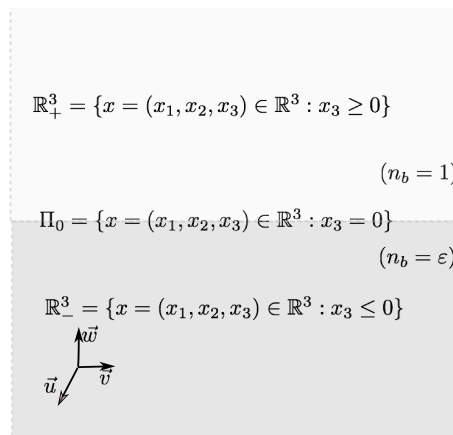


FIGURE 3.1 – Coupe verticale d'un milieu bicouche

Après l'exposition de la solution de ce problème de diffraction, nous réécrivons les expressions

de la forme d'onde modélisant les réponses au niveau des antennes synthétiques, puis l'intensité pour enchaîner après avec les résultats numériques en vue de la validation du modèle d'imagerie.

3.2.2 Description du modèle de propagation dans le cas bicouche

Nous considérons donc que la propagation d'ondes électromagnétiques s'effectue dans un milieu composé de l'air d'indice de réfraction $n_b = 1$, le sol d'indice de réfraction $n_b = \varepsilon (\neq 1)$. Ce milieu peut être vu comme l'espace $\mathbb{R}^3$ constitué de l'air modélisé par $\mathbb{R}_+^3$ et le sol par $\mathbb{R}_-^3$. Il est évident que ce milieu ne répond pas à la condition $n_b = 1$ pour $|x|$ suffisamment grand. Se pose donc la définition de solution sortante dans ce cas (ce qui remplacerait la condition de rayonnement de Sommerfeld). Nous rappelons ici la méthode la plus générale pour le faire et qui s'appelle le principe d'absorption limite. Les solutions physiques sont celles obtenues comme limites lorsque $\delta \rightarrow 0$ des solutions du problème de diffraction pour l'indice $n_b + i\delta$, $\delta > 0$. Expliquons par exemple comment définir la fonction de Green dans ce cas (le champ diffracté sera donc défini de manière automatique via l'approximation de Born, ou dans le cas du modèle exact via l'équation de Lippman Schwinger). Considérons un point source x_0 dans l'air. Nous définissons d'abord la fonction $\Phi_b^\delta(\cdot, x_0) \in L^2(\mathbb{R}^3)$ solution de

$$\Delta \Phi_b^\delta(\cdot, x_0) + k^2(n_b + i\delta)\Phi_b^\delta(\cdot, x_0) = -\delta_{x_0} \quad \text{dans } \mathbb{R}^3.$$

Nous définissons ensuite $\Phi_b(\cdot, x_0)$ comme la limite lorsque $\delta \rightarrow 0$ de $\Phi_b^\delta(\cdot, x_0)$ dans $L_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^3)$. Nous nous référons à [38] pour la justification de l'existence de cette limite. Rappelons que pour définir $\Phi_b^\delta(\cdot, x_0)$ il suffit par exemple de résoudre le problème $\Psi_b^\delta(\cdot, x_0) \in H^1(\mathbb{R}^3)$

$$\Delta \Psi_b^\delta(\cdot, x_0) + k^2(n_b + i\delta)\Psi_b^\delta(\cdot, x_0) = k^2(1 - n_b)\Phi_0^\delta(\cdot, x_0) \quad \text{dans } \mathbb{R}^3$$

avec

$$\Phi_0^\delta(\cdot, x_0) = \frac{e^{ik\sqrt{1+i\delta}|x-x_0|}}{4\pi|x-x_0|}.$$

Ce problème admet une solution unique par l'application du théorème de Lax-Milgram à la formulation variationnelle associée et puisque $k^2(1 - n_b)\Phi_0^\delta(\cdot, x_0) \in L^2(\mathbb{R}^3)$. Nous posons ensuite

$$\Phi_b^\delta(\cdot, x_0) = \Psi_b^\delta(\cdot, x_0) + \Phi_0^\delta(\cdot, x_0).$$

Pour des points sources dans le demi espace inférieur on peut par exemple utiliser la symétrie $\Phi_b(x_0, x) = \Phi_b(x, x_0)$.

3.2.3 Expression analytique de la fonction de Green

Nous allons dériver l'expression analytique de Φ_b en utilisant l'approche de Sommerfeld. Ce calcul peut aussi servir comme une définition de Φ_b (les deux définitions donnant la même solution). Afin de simplifier les notations, nous nous référons aux positions des sources par $x \in \mathbb{R}_+^3$, et nous utilisons comme variable $y = (y_1, y_2, y_3)^T$. Nous omettons la dépendance de Φ_b par rapport à x dans la notation et cherchons une expression pour $\Phi_b(y)$. Nous rappelons que l'indice de réfraction pour la configuration bicouche (demi-espace) s'écrit comme suit :

$$n_b = \begin{cases} 1 & \text{si } y_3 > 0 \\ \varepsilon & \text{si } y_3 < 0 \end{cases} \quad (3.11)$$

Au voisinage de la source, nous voulons que la fonction de Green en bicouche Φ_b soit proche de celle dans le cas homogène $\Phi_0(y)$ et qui doit être corrigée pour prendre en compte les réflexions au niveau de l'interface en fonction de y_3 . Ainsi, nous avons

$$\Phi_b(y) = \begin{cases} \Phi^+(y) & \text{si } y_3 > 0 \\ \Phi^-(y) & \text{si } y_3 < 0 \end{cases} \quad (3.12)$$

avec $\Phi^+(y) = \Phi_0(y) + \tilde{\Phi}^+(y)$, $\tilde{\Phi}^+$ étant la solution de l'équation de Helmholtz

$$\Delta \tilde{\Phi}^+ + k^2 \tilde{\Phi}^+ = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}_+^3,$$

et de la même manière, Φ^- est solution de

$$\Delta \tilde{\Phi}^- + k^2 \varepsilon \tilde{\Phi}^- = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}_-^3.$$

Si nous considérons comme origine (référence) le point $x = (x_1, x_2, x_3)^T$, le point $(y_1, y_2, y_3)^T$ aura pour coordonnées cylindriques $(\rho, \theta, y_3 - x_3)$ avec $\rho = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$. Ainsi, $\tilde{\Phi}^+$ et $\tilde{\Phi}^-$ satisfont respectivement les deux équations aux dérivées partielles

$$\left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y_3^2} - k^2 \right) \tilde{\Phi}^+ = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}_+^3 \quad (3.13)$$

$$\left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y_3^2} - k^2 \varepsilon \right) \tilde{\Phi}^- = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}_-^3. \quad (3.14)$$

L'indépendance de θ dans les deux équations découle de la symétrie du problème. Si nous définissons de plus $\mu_+ = \sqrt{\alpha^2 - k^2}$ et $\mu_- = \sqrt{\alpha^2 - \varepsilon k^2}$ avec $\text{Re}(\mu_{\pm}) > 0$, nous pouvons constater que l'équation définie précédemment admet pour solution une combinaison linéaire de :

$$\begin{cases} e^{\mu_{\pm} y_3} J_0(\alpha \rho), & e^{-\mu_{\pm} y_3} J_0(\alpha \rho) \\ e^{\mu_{\pm} y_3} Y_0(\alpha \rho), & e^{-\mu_{\pm} y_3} Y_0(\alpha \rho) \end{cases}$$

où J_0 et Y_0 désignent les fonctions Bessel cylindriques d'ordre 0. Nous rejetons les solutions contenant Y_0 du fait que $\tilde{\Phi}^+$ et $\tilde{\Phi}^-$ sont régulières. De plus, pour que $\tilde{\Phi}^+$ soit bornée, nous devons choisir les solutions exponentiellement décroissantes pour ρ fixé. Par superposition, nous obtenons :

$$\Phi^+(x, y) = \Phi_0(x, y) + \int_0^\infty a(\alpha) J_0(\alpha \rho) e^{-\mu_+(x_3 + y_3)} d\alpha \quad (3.15)$$

et d'une manière équivalente on obtient :

$$\Phi^-(x, y) = \int_0^\infty b(\alpha) J_0(\alpha \rho) e^{\mu_- y_3 - \mu_+ x_3} d\alpha. \quad (3.16)$$

Les fonctions $a(\alpha)$ et $b(\alpha)$ sont déterminées en utilisant les conditions de continuité au niveau de l'interface Π_0 , Figure 3.1. Pour compléter la détermination de Φ , nous commençons tout d'abord par exprimer Φ_0 dans la base de Fourier-Bessel. A l'aide de la formule de Sommerfeld, on a en effet la représentation suivante :

$$\frac{e^{ik|x-y|}}{4\pi|x-y|} = \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty J_0(\alpha \rho) e^{-\mu_+|x_3 - y_3|} \frac{\alpha}{\mu_+} d\alpha.$$

Les conditions à l'interface correspondent à :

- Continuité sur Π_0 , $\Phi^+ = \Phi^-$.
- Continuité de la dérivé partielle dans Π_0 , $\frac{\partial}{\partial y_3}\Phi^+ = \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial y_3}\Phi^-$.

ces deux conditions impliquent :

$$\begin{cases} \frac{1}{4\pi}\frac{\alpha}{\mu_+} + a(\alpha) - b(\alpha) &= 0 \\ \frac{1}{4\pi}\alpha - \mu_+a(\alpha) - \frac{\mu_-}{\varepsilon}b(\alpha) &= 0 \end{cases}$$

ce qui montre que :

$$\begin{cases} a(\alpha) &= \frac{\alpha}{4\pi\mu_+} \left(1 - \frac{2\mu_-}{\varepsilon\mu_+ + \mu_-}\right) \\ b(\alpha) &= \frac{\alpha\varepsilon}{2\pi(\varepsilon\mu_+ + \mu_-)} \end{cases} \quad (3.17)$$

et on obtient finalement,

$$\Phi^+(x, y) = \Phi_0(x, y) + \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty \frac{\alpha}{\mu_+} \left(1 - \frac{2\mu_-}{\varepsilon\mu_+ + \mu_-}\right) J_0(\alpha\rho) e^{-\mu_+(x_3+y_3)} d\alpha \quad (3.18)$$

et

$$\Phi^-(x, y) = \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_0^\infty \frac{\alpha}{(\varepsilon\mu_+ + \mu_-)} J_0(\alpha\rho) e^{\mu_-y_3 - \mu_+x_3} d\alpha. \quad (3.19)$$

Evaluation numérique des intégrales de Bessel. Reste à calculer cette intégrale généralisée numériquement. Nous commençons tout d'abord par négliger les termes de cette intégrale d'exposant inférieur à une certaine tolérance ϵ . Il s'agit d'approcher l'expression (3.19) par :

$$\Phi^-(y) \approx \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_0^{A_-} \frac{\alpha}{(\varepsilon\mu_+ + \mu_-)} J_0(\alpha\rho) e^{\mu_-y_3 - \mu_+x_3} d\alpha$$

avec A_- le plus petit réel qui satisfait $\exp(\mu_-y_3(A_-) - \mu_+(A_-)x_3) < \eta$ avec η une tolérance numérique. De la même manière nous tronquons l'intégrale (3.18) et remplaçons la borne supérieure de l'intégrale par A_+ le plus petit réel qui satisfait $\exp -\mu_+(x_3 + y_3) < \eta$. Le calcul de ces intégrales se fait ensuite en appliquant la formule des trapèzes à un découpage régulier de l'intervalle d'intégration. Nous soulignons que, pour utiliser cette formule approchée de la fonction de Green $\tilde{\Phi}_b$, il est nécessaire de passer par une étape de validation. Nous allons utiliser le fait que si $\varepsilon = 1$ alors $\Phi_b = \Phi_0$. Cependant, pour le cas particulier $\varepsilon = 1$ le dénominateur dans les intégrales pourrait s'annuler. Afin d'éviter une division numérique par 0, nous avons remplacé k par $k + i\delta$ avec δ très petit, de l'ordre de 10^{-2} dans l'exemple numérique ci-dessous. Nous choisissons $\eta = 10^{-6}$ ce qui fixe les valeurs de troncature $A_\pm$. Nous présentons ci-dessous la comparaison numérique pour $\rho \in [0, 30\lambda]$, λ la longueur d'onde associée à k . Sur la Figure 3.2, nous représentons les parties réelles et imaginaires de $\tilde{\Phi}_b^-(\rho)$ et de $\Phi_0(\rho)$, et à droite l'erreur relative entre les deux. On constate une très bonne précision du calcul de Φ_b . Les paramètres numériques seront gardés les mêmes pour les calculs ultérieurs ($\epsilon \neq 1$).

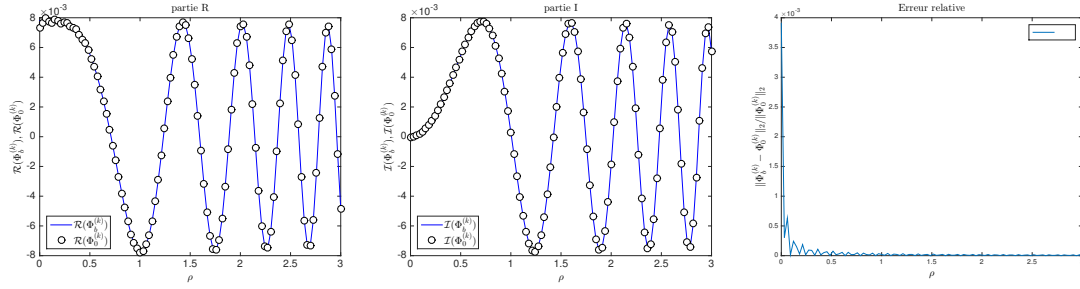


FIGURE 3.2 – Comparaison des parties réelles et imaginaires de Φ_0 , et Φ_b , ainsi que l'erreur entre les deux.

Nous sommes maintenant en mesure de calculer les formules définissant les formes d'onde et d'intensité en fonction du noyau de Green du milieu Φ_b . La forme d'onde $\tilde{D}_b(x_0)$, qui représente la réponse du milieu contenant les mines pour une onde provenant d'un point source x_0 et mesurée au même point, est donnée par :

$$\tilde{D}_b(x_0) = k^2 \int_{\Omega} (n - n_b) \Phi_b(x_0, y)^2 dy \quad (3.20)$$

et nous avons proposé la forme générale de réflectivité d'un point z de l'espace définie par :

$$I(z) = \int_{\Sigma} \tilde{D}_b(x_0) \Phi_b^*(x_0, z)^2 dx_0 \quad (3.21)$$

que nous allons utiliser pour imager les mines. Cette fonction indicatrice sera comparée à une forme de réflectivité simplifiée se basant sur les lois de réfraction d'optique. Le principe de cette réflectivité simplifiée est de ne pas utiliser la fonction de Green du milieu bicouche dans le calcul de $I(z)$ mais d'utiliser celle du vide Φ_0^* . Si le plan d'évaluation de $I(z)$ se trouve dans le sol, il convient alors de remplacer $|x_0 - z|$ dans l'expression de Φ_0 par la distance optique entre x_0 et z . Cette distance optique est calculée via les lois de réfraction de Descartes. Ainsi, si θ_1 et θ_2 sont tels que $\sin \theta_1 = \sqrt{\varepsilon} \sin \theta_2$ et que pour un point z , $d_1(z)$ et $d_2(z)$ sont définis tels que sur la Figure 3.3 qui représente le plan passant par x_0 et z et orthogonal au plan contenant Σ , alors on définit

$$I_o(z) := \int_{\Sigma} \tilde{D}_b(x_0) \frac{e^{-i2k(d_1+d_2)}}{(4\pi)^2(d_1+d_2)^2} dx_0. \quad (3.22)$$

Remarquons que si $z_3 \leq 0$ est la troisième composante de z alors

$$d_2(z) = |z_3| / \cos(\theta_2)$$

et si H est la distance entre Σ et l'interface air-sol alors

$$d_1(z) = H / \cos(\theta_1).$$

Il est donc plus simple de tracer $I_o(z(\theta_1))$ que d'évaluer directement $I_o(z)$ (ce qui nécessiterait l'inversion de $\theta_1 \mapsto z$).

La fonction indicatrice (3.22) a l'avantage d'être beaucoup plus rapide à évaluer que $I(z)$ et semble donc plus appropriée pour une imagerie en temps réel. Nous discuterons par la suite sa pertinence via des expérimentations numériques et des comparaisons avec ce que donne $I(z)$.

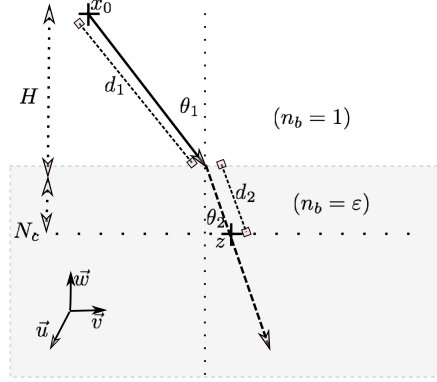


FIGURE 3.3 – Illustration, diffraction d'onde dans un milieu bicouche

3.3 Résultats numériques et discussions

Nous commençons par présenter quelques notations et préliminaires pour principalement décrire les paramètres des expérimentations numériques, puis les résultats des simulations.

3.3.1 Notations et préliminaires

Nous proposons d'imager une région rectangulaire de dimension $L_x \times L_y$, contenant des mines antichar entourées de mines antipersonnel avec des dimensions respectant les données indiquées dans ce qui suit, plongées à une profondeur variant entre $d_c = 40cm$ et $d_p = 10cm$ selon le type de mine. Nous avons choisi de donner une paramétrisation de toutes les grandeurs en fonction de la longueur d'onde incidente $\lambda = 10cm$, qui correspond à la fréquence $k := 2\pi/\lambda$. Nous décrivons les différents paramètres utilisés pour l'expérimentation concernant la région à imager, ainsi que le dispositif d'imagerie mis en place :

- La mine antichar définie comme un cube de dimensions $(4\lambda)^3$, et de λ^3 pour la mine antipersonnel.
- Le pas de la discrétisation en espace est de $\Delta = \Delta_x \Delta_y \Delta_z = \left(\frac{\lambda}{2}\right)^3$.
- L'indice de réfraction des mines antichar est fixé à $n_c = 3.6$. Il est de $n_a = 3.2$ pour les mines antipersonnel.
- Le milieu de propagation :
 - L'air d'indice de réfraction $n_b = 1$.
 - Le sol d'indice de réfraction $n_b = 2.6$.
 - La dimension du plan de coupe horizontale Π est de $20\lambda \times 20\lambda$.

- L'antenne est assimilée à une surface Σ :
 - De dimension $L_a \times W_a = 30\lambda \times 30\lambda$.
 - Placée à une hauteur $H_a = 100\lambda$.
 - La distance entre deux capteurs successifs est de $\Delta_0 = 0.5\lambda \times 0.5\lambda$, soit donc une matrice réponse de taille 61^2 .

Les plans Π , désignent les trois plans de coupe horizontale Π_3, Π_2 et Π_1 qui correspondent respectivement au niveau des mines antichar d_c , au niveau des mines antipersonnel d_p , et à l'interface entre les deux milieux (c'est-à-dire, à $z_3 = 0$).

Φ_b est calculé par la méthode d'intégration numérique décrite dans le paragraphe précédent. Ces mêmes points enregistrent en même temps les réponses des ondes reçues du processus de diffraction, qui correspond à la forme d'onde donnée par (3.20), numériquement calculée par la formule des rectangles sur $\mathbb{M} := \Omega$, (l'ensemble des mines). Nous passons donc par une discrétisation uniforme $\Delta = \Delta_x \times \Delta_y \times \Delta_z = \frac{\lambda^3}{2^3}$ de $\mathbb{M}$. Ainsi, pour tout capteur placé au point x_0 , la forme d'onde est approchée :

$$\tilde{D}_b^{(\delta)}(x_0) = k^2 \Delta \sum_{i,j,k} (n - n_b) \Phi_b(x_0, y_{i,j,k})^2 \quad (3.23)$$

La migration de ces signaux permet de donner l'expression approximative de l'intensité pour tout point $z \in \mathbb{R}^3$, par :

$$\tilde{I}(z) = \sum_{x_0 \in \Sigma} \tilde{D}_b(x_0) \Phi_b^*(x_0, z)^2 \Delta_0 \quad (3.24)$$

la seconde définition qui résulte des lois de réfraction de Snell-Descartes des rayons lumineux retournés permet d'écrire d'une manière approximative l'intensité d'un point z sous la forme :

$$\tilde{I}_o(z) = \sum_{x_0 \in \Sigma} \tilde{D}_b(x_0) \frac{e^{-i2k(d_1+d_2)}}{(4\pi)^2(d_1+d_2)^2} \Delta_0 \quad (3.25)$$

avec $\Delta_0 = \Delta_L \Delta_W$.

3.3.2 Expérimentations numériques et validation

Le modèle d'imagerie que nous venons de décrire s'appuie intégralement sur celui décrit et validé dans le chapitre précédent. Nous reprenons donc les mêmes routines de calculs faites auparavant, en changeant juste les expressions de la fonction de Green et l'indice de réfraction du milieu. Σ est un maillage de la grille virtuelle des mesures de réponse ; $\mathbb{M}$ correspond à un maillage de la paramétrisation de l'ensemble des mines dans le milieu ; $\mathbb{G}$, est le maillage de la région à imager pour un plan de coupe Π .

Ce processus d'imagerie a été testé pour une multitude de configurations, et ce pour les deux expressions de la fonction d'intensité proposées dans (3.21) et (3.22), qui consistent à pondérer de deux manières les réponses $\tilde{D}_b$ au niveau de tous les récepteurs pour ensuite trouver une image du terrain.

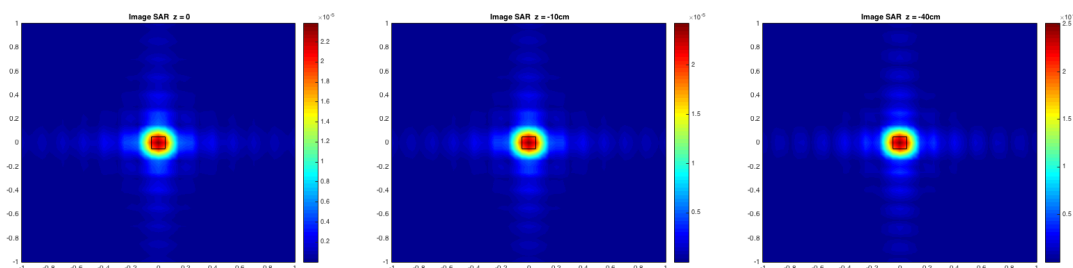
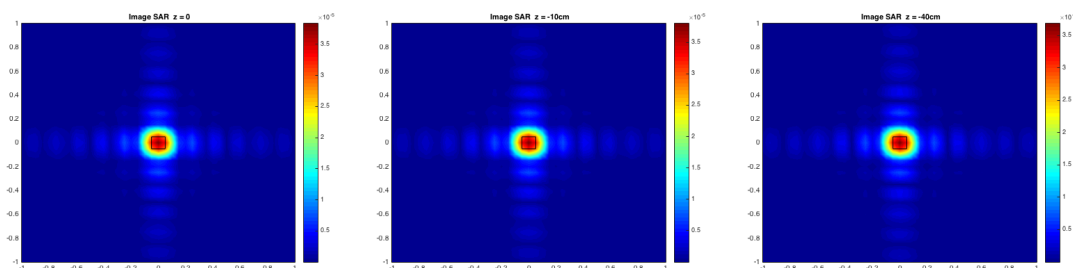
Avant de commencer la présentation des résultats numériques, il est important de noter que, dans tout ce qui suit, nous nous référons aux positions exactes des objets utilisés pour simuler

les réponses D , par des carrés de couleur noire, limitant ainsi leurs bords (vue de dessus). Les résultats de reconstruction, eux, sont représentés sur les mêmes images par la dégradation de la couleur de la grille. Nous allons lister pour différentes configurations les images relatives aux traces de I et I_o sur des plans de coupe horizontale Π . Dans le premier exemple, nous avons considéré :

TABLE 3.1 – CENTRE ET BASE DE L'OBJET.

Mine	Centre		dimension			d_a
	x	y	M_x	M_y	M_z	
Grandeurs	0	0	λ	λ	λ	-4λ

Position et dimension de la Mine.

FIGURE 3.4 – Trace de la fonction I_o , dans les plans Π_1 , Π_2 , et Π_3 .FIGURE 3.5 – Trace de la fonction I , dans les plans Π_1 , Π_2 , et Π_3 .

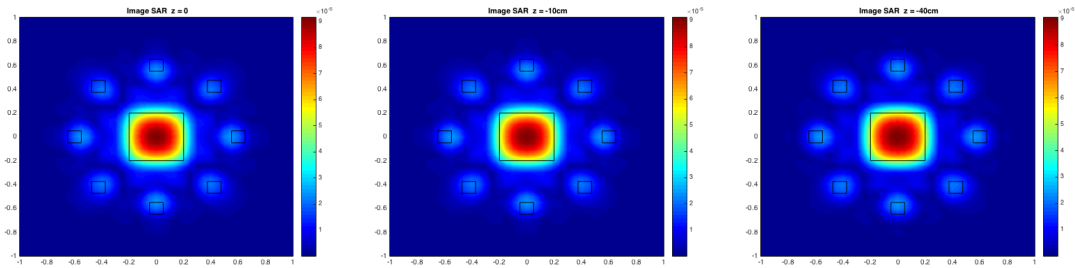
Nous présentons ici l'exemple de la région décrite plus haut, et contenant une mine de type 'antichar' au centre, entourée de huit mines antipersonnel distribuées sur le cercle de rayon $d = 6\lambda$, au centre de la première mine en respectant une répartition uniforme pour des $\theta_i, i = 1, 2, \dots, 8$ dans $[0, 2\pi]$.

TABLE 3.2 – CENTRE ET BASE DE L'OBJET.

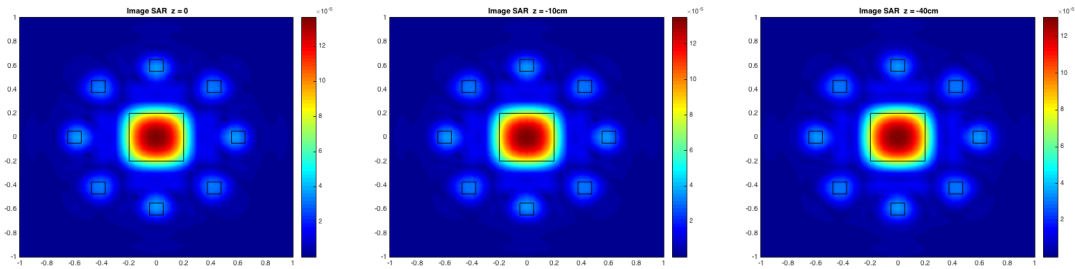
Mine	Centre		dimension			d_a
	x	y	M_x	M_y	M_z	
Antichar	0	0	4λ	4λ	4λ	-4λ
8 Antipersonnel	$d \cos \theta_i$	$d \sin \theta_i$	1λ	1λ	1λ	-1λ

Position et dimension de la Mine.

Nous commençons par une inversion en utilisant la formule (3.25), et nous obtenons le résultat dans la Figure 3.6.

FIGURE 3.6 – Trace de la fonction I_o , dans les plans Π_1 , Π_2 , et Π_3 , .

Nous présentons dans la Figure 3.7 le résultat de la simulation qui correspond à la même configuration traitée dans la Figure 3.6, mais, cette fois-ci, nous utilisons comme modèle d'inversion la fonction I , donnée par la formule (3.21), introduite plus haut. On obtient les images suivantes :

FIGURE 3.7 – Trace de la fonction I , (3.21), dans les plans Π_1 , Π_2 , et Π_3 , .

Pour conclure, notons que nous avons refait les mêmes scènes pour des sols d'indice de réfraction plus élevé pour $n_b = 2.6, 2.8$ et 3 . Nous retrouvons des résultats similaires.

3.3.3 Conclusion

Jusqu'à présent, nous avons une extension de modèle de détection des mines. Le modèle que nous avons présenté jusqu'à ce stade dans ce chapitre s'appuie sur les algorithmes SAR. Il généralise aussi celui que nous avons traité dans le chapitre 2. Ce modèle reste consistant. En

effet, il nous permet de retrouver des informations importantes concernant la localisation des mines. Reste à tester la fiabilité du modèle d'imagerie proposé pour des données réelles.

3.4 Limitations de la techniques SAR

Introduction

De ce qui précède, nous avons été en mesure de décrire et tester les algorithmes d'imagerie radar à ouverture synthétique. Nous allons prouver, à partir des exemples, que cette technique peut avoir des limitations d'applications, notamment celles liées principalement à la nature du sol (son indice de réfraction). D'autres types de variantes et conditions peuvent mettre en cause cette technique d'imagerie, déjà par exemple sur la manière de collecter les données.

Le but de cette section est de développer autour de ces problèmes, d'aller effectivement un peu plus loin sur ces limitations et de penser à des alternatives. Nous avons pensé à réintroduire dans ce chapitre d'autres considérations. Le lecteur aurait peut-être pu se poser la plupart de ces questions. Nous nous intéresserons à deux questions essentielles.

La première, avons-nous le droit de considérer que la trajectoire de l'antenne est plane ? ou alors, le sol est-il toujours plan ? La réponse est claire, mais la question qui nous intéresse le plus est : ce modèle reste-t-il valide dans ce cas ? ou sinon, comment l'ajuster pour répondre au besoin de la cartographie ? Cette question sera traitée dans le paragraphe 3.4.3.

La seconde question est liée au type de sol, aux matériaux qu'il contient et aux interactions entre ses composantes. Le paragraphe 3.4.3 sera dédié à la discussion autour de ce sujet.

3.4.1 Limitations liées aux données Lidar

Dans ce qui suit, nous supposons que les distances au sol sont dictées par des Lidars (des instruments embarqués au système pour calculer les distance au sol) . Au fur et à mesure que les Lidars embarqués dans le système d'imagerie calculent les distances au sol, ils prendront en compte ces petites fluctuations dues au mouvement vertical du drone ou des vallonements du terrain. Nous avons commencé par tester les algorithmes basés sur le calcul d'intensité I pour voir l'impact de ces données Lidars sur les images obtenues. Pour des raisons de simplicité, nous reprenons le cas homogène, où l'expression de l'intensité est donnée par :

$$I(z) = \int_{\Sigma} \frac{e^{i2k|z-x_0|}}{16\pi^2|z-x_0|^2} D(x_0) dx_0 \quad (3.26)$$

c'est la quantité $|z-x_0|$ au niveau de l'intensité qui sera donnée par le Lidar. Les distances liées aux fluctuations par rapport à un sol de référence que l'on considère plane sont données par :

$$|z-x_0| = \sqrt{(x_a-z_1)^2 + (y_a-z_2)^2 + (H_a-z_3)^2}, x_0 = (x_a, y_a, H_a) \quad (3.27)$$

La différence créée par le mouvement en vertical du système radar et le sol vallonné peut se réduire à un sol vallonné. Il s'agit de considérer les points $z = (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{R}^3$, tels que :

$$z_3 = z_3(z_1, z_2) = h \cos f_1 \pi z_1 \sin f_2 \pi z_2 \quad (3.28)$$

h , étant l'amplitude du paysage, f_1, f_2 représentent en quelque sorte les degrés de variations dans les directions transversales. Dans ces exemples, nous commençons par des sols faiblement ondulés (h très petit), et nous continuons à augmenter h . Au niveau des fréquences de fluctuations, nous pouvons considérer aussi des valeurs aléatoires, comme le montre l'image à gauche sur la Figure 3.8. Nous considérons la scène avec un milieu contenant trois mines antichar, les carrés en noir sur les Figures 3.9 et 3.10 se réfèrent aux bords des cubes (coupe horizontale) modélisant les mines, utilisés pour la simulation des données D . Nous traitons donc les deux types de sol définis par les paramètres dans la Table suivante :

TABLE 3.3 – CENTRES MINES.

Exemples	Amplitude			Fréquence	
	h			f_1	f_2
1	0	10λ	40λ	$22(X \sim U([0, 1]))/W_a$	$22(X \sim U([0, 1]))/L_a$
2	0	10λ	40λ	$1/W_a$	$1/L_a$

W_a , et L_a étant les dimensions de la grille de mesure des réponses $D(x_0)$.

L'image au centre correspond à l'exemple 1 dans la Table 3.3 où f_1 et f_2 prennent des valeurs aléatoires, et l'image à gauche correspond à l'exemple 2, celle à gauche pour indiquer les positions des mines.

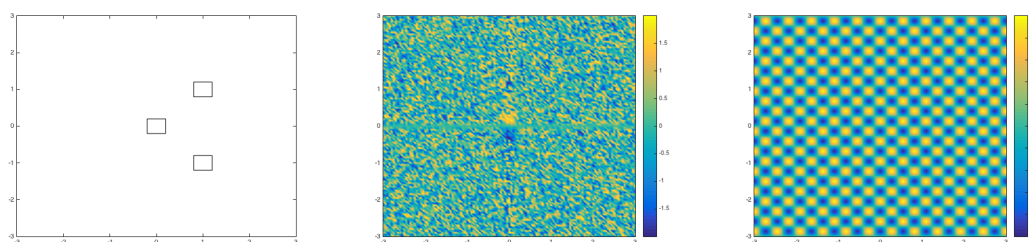


FIGURE 3.8 – Configuration exacte des mines, forme de sol et positions des mines.

Nous présentons, dans un premier temps (Figure 3.9), les résultats du premier exemple dans la Table 3.3

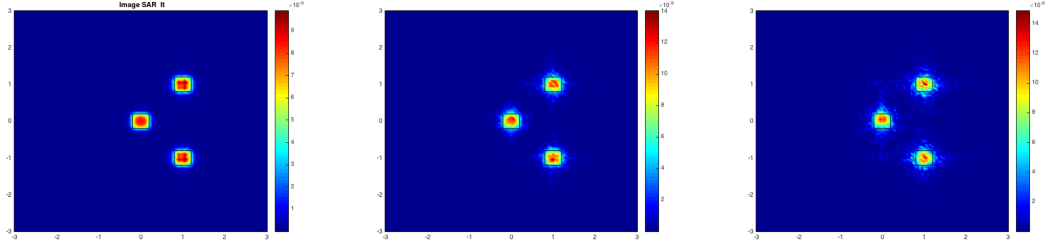


FIGURE 3.9 – Illustration Exemple 1, de l'impact des mesures Lidar sur l'image, utilisation de (3.28).

Dans l'exemple 2, nous avons fixé la partie aléatoire dans f_1 et f_2 , ce qui donne un sol de la forme à gauche sur la Figure 3.8. Dans ce cas, on obtient selon le même ordre croissant des valeurs de h les résultats suivants :

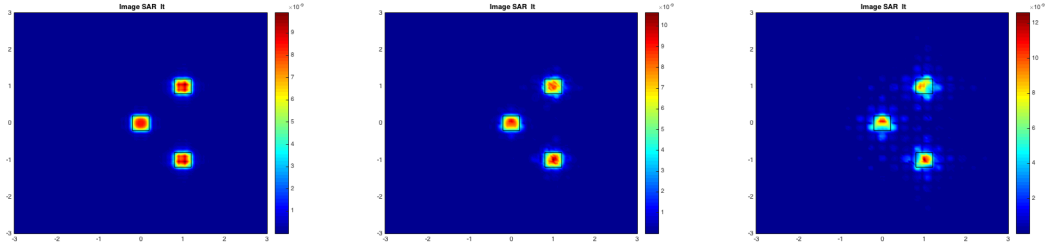


FIGURE 3.10 – Illustration Exemple 2, de l'impact des mesures Lidar sur l'image, utilisation de (3.28).

3.4.2 Limitations liées aux type de sol

Dans tout ce qui précède, nous avons considéré que le sol désertique était homogène, alors que, en général, il peut contenir des espaces couverts de cailloux. Vu le fait que les résultats obtenus dans le cas d'espace homogène et celui du milieu bicouche sont assez similaires, et que l'analyse du problème est plus simple en cas d'espace libre, nous nous limiterons dans tout ce qui suit, à l'étude du problème dans le cas homogène. Nous considérons au fur et à mesure d'autres type de complexités.

Nous avons considéré le cas d'un milieu de référence totalement homogène, dont le demi-espace inférieur contient de petites masses locales (l'ensemble des volumes est contenu dans une sphère de rayon fini). Il s'agit des volumes Ξ_j , formant $\Xi = \bigcup_j \Xi_j$ dans le milieu de référence.

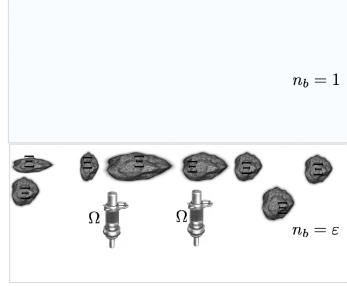


FIGURE 3.11 – Sol comprenant d'autre type d'inhomogénéités

Une première approche d'approximation

Pour une première approximation, ces cailloux peuvent être considérés comme des mines plongées dans le sol de référence, mais d'indice de réfraction différent de celui des mines. Il s'agit de remplacer Ω dans la définition des formes d'ondes introduite dans la section précédente par $\Omega \cup \Xi$, tout en changeant les indices de réfraction des mines n avec ceux des cailloux dans Ξ , que l'on note n_c . Ce qui revient à écrire,

$$\tilde{D}_b^\Delta(x_0) = k^2 \Delta \sum_{y \in \Omega} (n - n_b) \Phi_b(x_0, y)^2 + k^2 \Delta \sum_{y \in \Xi} (n_c - n_b) \Phi_b(x_0, y)^2 \quad (3.29)$$

Pour illustrer cela, imaginons par exemple, qu'au niveau du plan $\Pi_0 = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_3 = -2\lambda\}$, nous avons nous avons des masses volumiques (cubes) de dimensions $2\lambda \times 2\lambda \times 2\lambda$ formant ainsi un sol sous forme de damiers, où deux cubes successifs ont les propriétés physiques suivantes $n_c = n_b, n_c = n_b + \varsigma$. Ce qui peut se traduire par la coupe horizontale au niveau de Π_0 suivante :

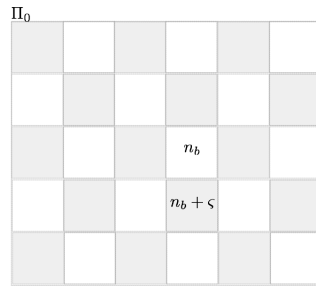


FIGURE 3.12 – Sol sous forme d'un damier

Si l'on considère un milieu similaire à celui dans la Figure 3.12, contenant aussi des mines, en respectant la même configuration de l'un des exemples traités dans le chapitre précédent, par exemple, trois mines antichar entourées chacune de huit mines antipersonnel.

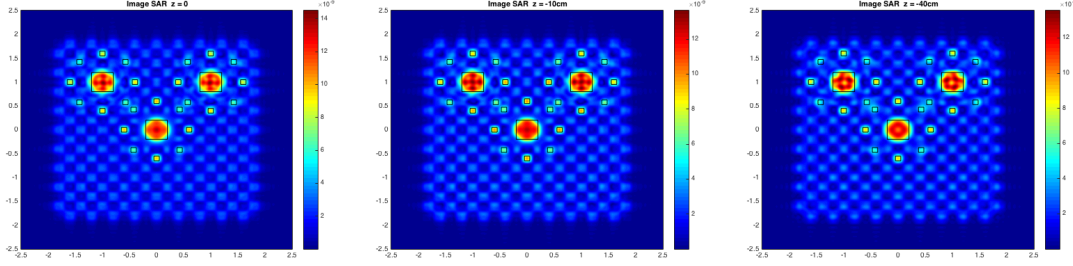


FIGURE 3.13 – Trace de la fonction I , cf. 2.4 équation (2.44), dans les plans Π_1 , Π_2 , et Π_3 , pour un milieu comportant des masses non-homogène.

Seconde approche d'approximation

Avant de conclure ce chapitre, remarquons tout d'abord que l'approximation décrite dans le paragraphe précédent ne prend pas en compte les interactions mines-cailloux, chose qui facilite l'étude, mais fausse le problème de base. Rien ne justifie ce choix. Nous avons poursuivi la réflexion sur l'élément central du modèle qui est le milieu de référence et donc le noyau de Green décrivant la propagation dans le milieu. En effet, pour donner un modèle représentant le mieux la forme d'onde, nous passons par un calcul de fonction de Green du milieu de référence contenant les cailloux, que l'on note $G_{b,c}$. Cette fonction de Green sera calculée en utilisant l'approximation de Born. Soit maintenant $n_{b,c}$ l'indice de réfraction du milieu avec cailloux, et n_b pour un milieu de référence avant qu'il y ait des cailloux. La propagation de l'onde dans ce milieu se fait selon :

$$\Delta G_{b,c}(\cdot, x_0) + k^2 n_{b,c} G_{b,c}(\cdot, x_0) = -\delta_{x_0} \quad \text{dans } \mathbb{R}^3 \quad (3.30)$$

vérifiant une condition de rayonnement appropriée. Puisque, $n_{b,c} = n_b$ à l'extérieur des cailloux, il est facile de vérifier que $G_{b,c}(\cdot, x_0)$ peut s'écrire sous la forme :

$$G_{b,c}(\cdot, x_0) = \Phi_b(\cdot, x_0) + u_{b,c}^{sc}(\cdot, x_0), \quad (3.31)$$

avec Φ_b la fonction de Green dans le cas sans cailloux et $u_{b,c}^{sc}(\cdot, x_0)$ représente la partie diffractée par les cailloux. Elle est la solution du problème de propagation suivant :

$$\Delta u_{b,c}^{sc} + k^2 n_b u_{b,c}^{sc} = k^2 (n_b - n_{b,c}) (\Phi_b(\cdot, x_0) + u_{b,c}^{sc}(\cdot, x_0)) \quad \text{dans } \mathbb{R}^3 \quad (3.32)$$

vérifiant une condition de rayonnement appropriée. En appliquant l'équation de Lippmann-Schwinger, on obtient la formule suivante du champ diffracté $u^{sc}(x, x_0)$:

$$u_{b,c}^{sc}(x, x_0) = -k^2 \int_{\Xi} (n_b - n_{b,c}) \Phi_b(x, y) (u_{b,c}^{sc}(y) + \Phi_b(y, x_0)) dy \quad (3.33)$$

où Ξ matérialise le domaine occupé par l'ensemble des cailloux.

En utilisant l'approximation de Born pour le cas des petits cailloux, on obtient l'approximation $\tilde{u}_{b,c}^{sc}$ suivante du champ diffracté $u_{b,c}^{sc}$:

$$\tilde{u}_{b,c}^{sc}(x, x_0) = -k^2 \int_{\Xi} (n_b - n_{b,c}) \Phi_b(x, y) \Phi_b(y, x_0) dy \quad (3.34)$$

Il en résulte que la fonction de Green du milieu de référence peut être approchée par :

$$\tilde{G}_{b,c}(\cdot, x_0) \approx \Phi_b(\cdot, x_0) + \tilde{u}_{b,c}^{sc}(\cdot, x_0). \quad (3.35)$$

Revenons maintenant à notre problème central de propagation d'ondes dans le milieu de référence représentant le milieu de référence (milieu + cailloux), d'indice de réfraction $n_{b,c}$ dans lequel seront déposées des mines antichar et antipersonnel, formant ainsi un milieu d'indice n , avec $n = n_{b,c}$ à l'extérieur de ces dernières. En considérant que les mines sont une perturbation du milieu de référence modélisée par la fonction de Green (3.30), et en utilisant encore une fois et de la même manière l'approximation de Born, nous pouvons donner une expression de la forme d'onde générée au niveau des récepteurs x_0 , sous la forme approchée suivante :

$$D_{c,b}(x_0) = k^2 \int_{\Omega} (n - n_{b,c}) G_{b,c}^2(y, x_0) dy. \quad (3.36)$$

Résultats numériques Maintenant que notre modèle est bien ajusté, considérons le cas d'un milieu de référence formé du vide et d'une masse modélisée par un pavé Ξ_0 , de dimensions v_0 , avec les mêmes paramètres que nous avons fixés dans les parties précédentes :

$$I_d(z) = \int_{\Sigma} D_{c,b}(x_0) G_{b,c}^*(z, x_0)^2 dx_0, \quad I_g(z) = \int_{\Sigma} D_{c,b}(x_0) \Phi_b^*(z, x_0)^2 dx_0, \quad (3.37)$$

avec la notation z^* pour désigner le complexe conjugué de z . De plus, comme décrit dans le paragraphe introductif de cette section, le milieu en question contient des mines antichar et antipersonnel, qui sont représentées dans l'image de gauche de toutes les figures par des carrés d'intérieur vide. Les images au centre et à droite des figures de ce paragraphe se réfèrent respectivement aux reconstructions obtenues par I_g et I_d .

Nous tenons à préciser que pour tous les exemples que l'on considère dans cette section, les positions exactes des cailloux sont illustrées dans toutes les images sur les figures par des carrés. Pour les différencier des mines, ces carrés sont distingués par leur couleur grise, pour montrer la configuration de départ. La mine antichar est de dimension $(4\lambda)^3$ et la mine antipersonnel est de dimension λ^3 . Pour $v_0 = (\lambda/2)^3$,

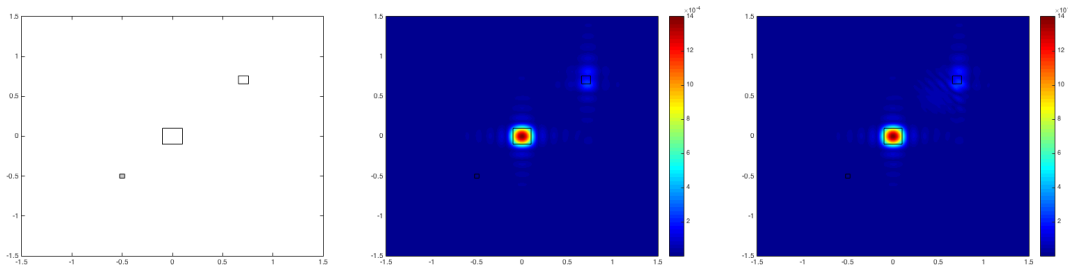


FIGURE 3.14 – $n=2.6$, Reconstruction avec la fonction de Green du milieu de référence (à droite), et la fonction de Green de l'espace libre (à gauche).

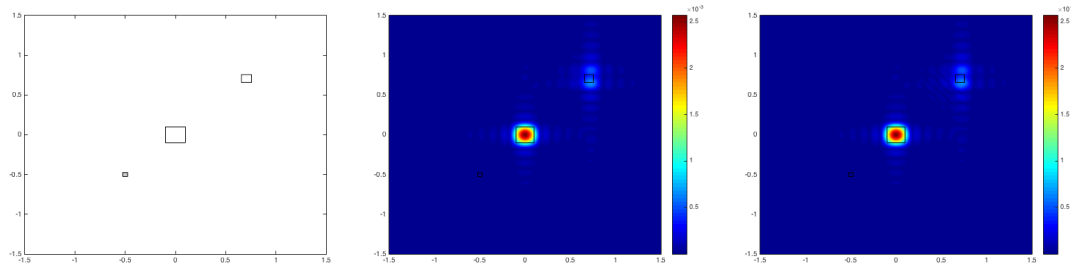


FIGURE 3.15 – $n=1.6$, Reconstruction avec la fonction de Green du milieu de référence (à droite), et la fonction de Green de l'espace libre (à gauche).

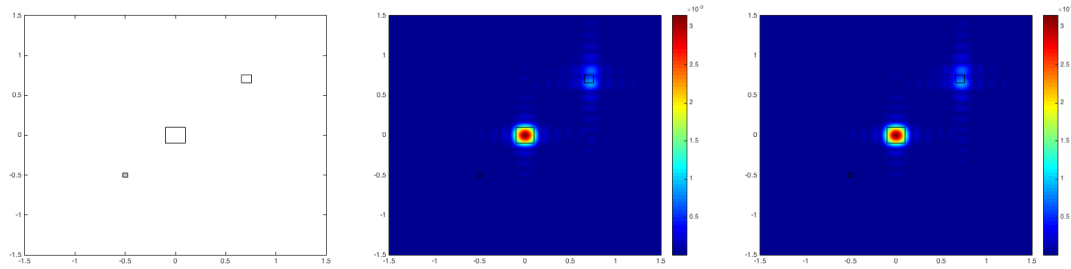


FIGURE 3.16 – $n=2.6$, Reconstruction avec la fonction de Green du milieu de référence (à droite), et la fonction de Green de l'espace libre (à gauche).

Maintenant, on augmente la taille de la perturbation au niveau du milieu de référence en passant d'un caillou de dimension $(\lambda/2)^3$ dans l'exemple précédent à λ^3 . On change aussi l'indice de réfraction du caillou par rapport à celui du milieu de référence, et ce en passant de $n = 1.1$ à $n = 2.6$ en trois étapes, comme nous le précisons dans les exemples qui suivent. Après, on joue sur sa position par rapport à celle de la mine au centre.

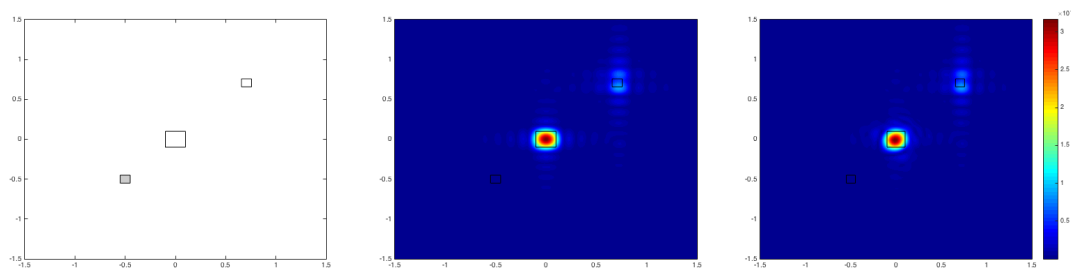


FIGURE 3.17 – $n=1.1$, Reconstruction avec la fonction de Green du milieu de référence (à droite), et la fonction de Green de l'espace libre (à gauche).

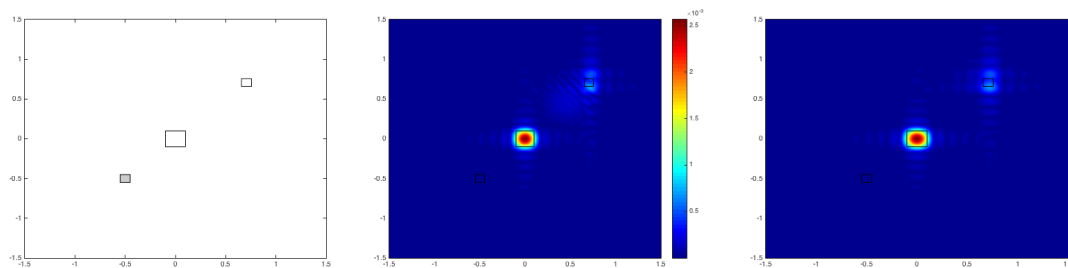


FIGURE 3.18 – $n=1.6$, Reconstruction avec la fonction de Green du milieu de référence (à droite), et la fonction de Green de l'espace libre (à gauche).

Le caillou est très proche de la mine antichar :

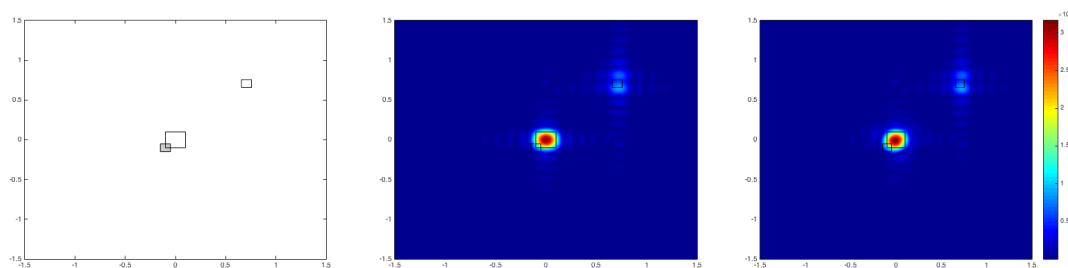


FIGURE 3.19 – $n=1.1$, Reconstruction avec la fonction de Green du milieu de référence (à droite), et la fonction de Green de l'espace libre (à gauche).

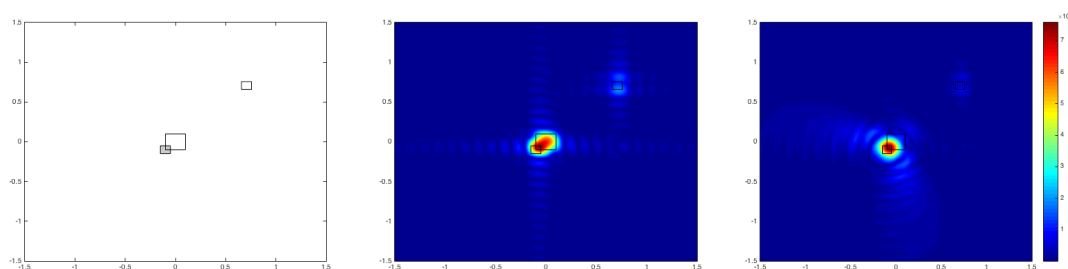


FIGURE 3.20 – $n=1.6$, Reconstruction avec la fonction de Green du milieu de référence (à droite), et la fonction de Green de l'espace libre (à gauche).

Nous plaçons maintenant dans le milieu homogène quatre cailloux autour de la mine antichar, dans un premier temps très proches de la mine comme sur la Figure 3.21 à gauche, et de la même manière qu'avant nous faisons des tests pour deux différents indices de réfraction, $n = 1.1$ sur la Figure 3.21 et $n = 1.6$ sur la Figure 3.22.

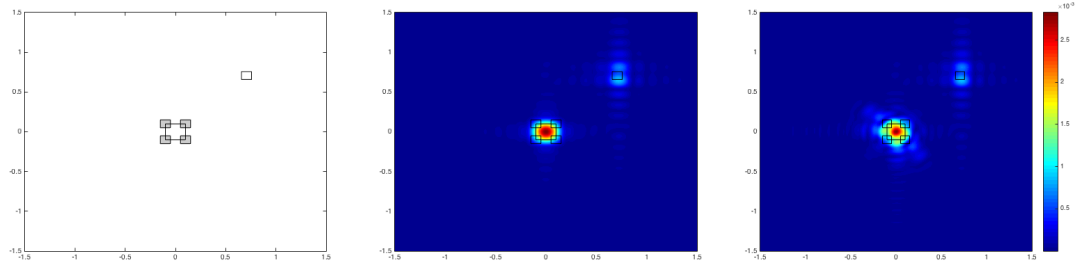


FIGURE 3.21 – $n=1.1$, Reconstruction avec la fonction de Green du milieu de référence (à droite), et la fonction de Green de l'espace libre (à gauche).

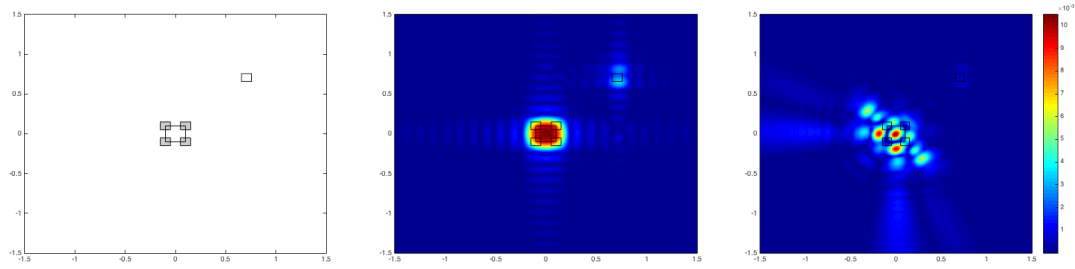


FIGURE 3.22 – $n=1.6$, Reconstruction avec la fonction de Green du milieu de référence (à droite), et la fonction de Green de l'espace libre (à gauche).

Dans cet exemple, nous supposons que la distance entre les cailloux et la mine antichar est très grande, comme illustré dans la configuration de référence sur l'image à gauche des Figures à 3.23-3.24. Ce qui change entre les deux Figures 3.23-3.24, c'est l'indice de réfraction des cailloux.

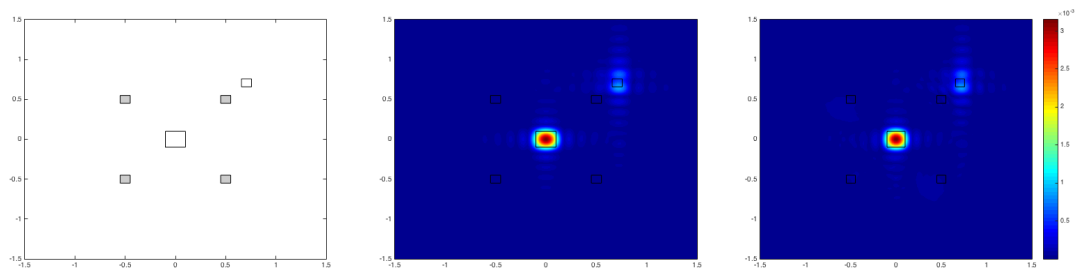


FIGURE 3.23 – $n=1.1$, Reconstruction avec la fonction de Green du milieu de référence (à droite), et la fonction de Green de l'espace libre (à gauche).

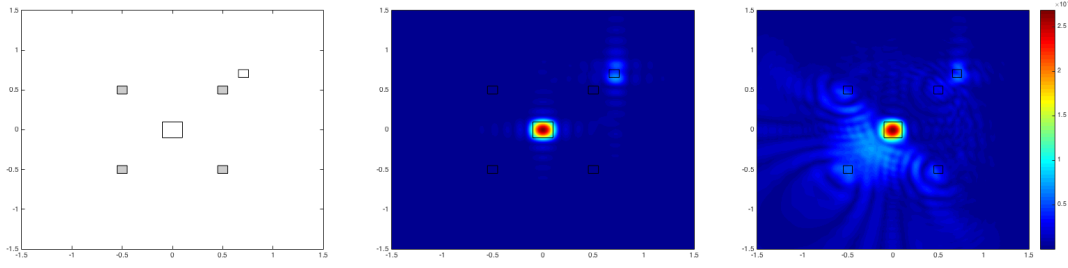


FIGURE 3.24 – $n=1.6$, Reconstruction avec la fonction de Green du milieu de référence (à droite), et la fonction de Green de l'espace libre (à gauche).

3.4.3 Conclusion

Il s'avère que les distances obtenues par les Lidars et utilisées pour l'expression d'intensité I sont susceptibles d'influencer la qualité des images obtenues. Il est nécessaire de revoir la technique d'inversion pour apporter d'éventuelles améliorations. L'idée la plus simple, que nous allons traiter dans un premier temps, consiste à reprendre les résultats obtenus par les algorithmes SAR et chercher à les améliorer, en passant par un traitement d'image basé sur une approche de type variation totale. Nous consacrons donc une grande partie de la section suivante pour décrire d'avantage cette technique. Pour l'histoire, cette technique a été introduite pour la première fois par Rodin Osher Fatemi (ROF) en 1992, pour la régularisation des problèmes inverses [56]. Nous donnerons plus de références sur cette approche dans les paragraphes qui suivent.

Cependant, les résultats présentés plus haut pour le cas d'un sol contenant d'autres types de matériaux prouvent que ces techniques ne sont plus valables. Les résultats de la reconstruction obtenus sont tellement différents des positions exactes que l'application des méthodes de traitement d'image n'est plus discutable.

Il est maintenant nécessaire de penser à un autre type de technique d'inversion plus fiable. Une deuxième approche serait de redéfinir la technique d'inversion elle-même. Nous proposons ainsi une nouvelle technique pour le calcul d'inverse approché de l'opérateur régissant le processus de collecte de données, en nous basant aussi sur la même technique de régularisation. Nous décrivons le schéma d'inversion dans les paragraphes 3.5.2 et 3.5.3 de la section qui suit.

3.5 Reconstruction via une approche itérative et régularisation TV

3.5.1 Introduction et motivations

Nous avons déjà fait remarquer au chapitre précédent que résoudre le problème inverse revient à inverser l'opérateur (de convolution) $A : L^2(\mathbb{B}) \rightarrow L^2(\Sigma)$ défini par

$$A(n_b - n) = D \quad \text{sur } \Sigma \quad (3.38)$$

où D représente la réponse du milieu définie par (3.20) ou par (3.36) et où $\mathbb{B}$ est un domaine contenant Ω . En plus d'être régularisant (et donc compact), cet opérateur est clairement non

injectif du fait que $n_b - n$ est une fonction 3D et que Σ est seulement une surface 2D. Afin de restreindre le type d'information que nous voulons obtenir et en nous inspirant du fait que la technique SAR revient à approcher l'inverse en calculant l'adjoint de A sur une surface (ici un plan) Π parallèle à Σ , nous transformons le problème inverse en la recherche d'une fonction $I(z)$ définie sur Π telle que

$$KI = D \quad (3.39)$$

avec $K : L^2(\Pi) \rightarrow L^2(\Sigma)$ l'opérateur (de convolution) ayant le même noyau que A . Par exemple, dans le cas bicouche sans hétérogénéités,

$$K(I)(x_0) := k^2 \int_{\Pi} I(z) \Phi_b^2(z, x_0) dz \quad x_0 \in \Sigma. \quad (3.40)$$

L'opérateur K vérifie bien $K^*D = A^*D|_{\Pi}$. La technique SAR peut être vue aussi donc comme celle cherchant à approcher I en calculant l'adjoint de K . L'opérateur K étant formellement bien calibré (transformant une entrée 2D en une donnée 2D), on se propose de comparer dans cette section les résultats que donnent une inversion de K pour évaluer I avec ce que donne l'algorithme SAR des sections précédentes. Nous sommes cependant toujours confronté au caractère mal posé de l'inverse : l'opérateur K est compact car son noyau est régulier et donc son inverse n'est pas continu. Il faut alors introduire une technique de régularisation adaptée. Nous allons utiliser une double régularisation. La première est celle relative à un critère d'arrêt adapté aux bruits de mesures pour une méthode de type Landweber. La deuxième est l'introduction d'un terme de pénalisation de type Variation Totale (TV). Cette dernière est bien connue pour être adaptée à la reconstruction de paramètres discontinues, ce qui est clairement ce qu'on attend de la fonction indicatrice $I(z)$. Nous formulons ainsi le problème inverse comme celui de la recherche de $I \in BV(\Pi)$ qui minimise

$$J(I) := \frac{1}{2} \|KI - D\|_{L^2(\Pi)}^2 + \gamma \int_{\Pi} |\nabla I|(x) dx \quad (3.41)$$

avec $\gamma \geq 0$ un paramètre de régularisation. L'espace $BV(\Pi)$ est défini par

$$BV(\Pi) = \{u \in L^1(\Pi) : \int_{\Pi} |\nabla u|(x) dx < +\infty\}.$$

Avant de présenter des schémas numériques permettant d'approcher des minimiseurs de J (et donc d'inverser K de manière approchée) nous allons discuter en premier le principe de TV et son utilisation comme un traitement à posteriori des images produites par la technique SAR. Ce traitement pourrait avoir son propre intérêt puisqu'il permettrait de retrouver une approximation constante par morceaux de I .

3.5.2 Technique de variation totale

Cette célèbre technique a été introduite par Rudin, Osher et Fatemi en 1992 [56]. Elle a été abondamment étudiée pour des problèmes de débruitage d'images, segmentation et d'autres types de problèmes inverses en imagerie. Nous allons rappeler ici son principe et son utilisation pour réduire les artefacts que pourrait contenir l'image produite par la technique SAR que nous avons introduite dans les sections précédentes. Étant donnée une sortie I_0 de l'algorithme SAR,

l'idée est d'essayer de construire un approximant constant par morceaux de I_0 . La technique TV consisterait alors à chercher $I \in BV(\Pi)$ minimisant

$$\frac{1}{2} \|I - I_0\|_{L^2(\Pi)}^2 + \gamma \int_{\Pi} |\nabla I|(x) dx \quad (3.42)$$

Pour résoudre ce problème (3.41), nous avons utilisé l'algorithme proposé par Chambolle en transformant le problème d'origine (dans sa version discrétisée) en un problème de point selle et une descente de gradient alternant les problèmes primal-dual [17]. Pour plus de détails sur les techniques de résolution de ce genre de problème de minimisation, nous invitons le lecteur à regarder dans la littérature, par exemple, les articles [18, 7, 17]. Nous présentons ici un des algorithmes proposés par A. Chambolle et T. Pock dans [18] et qui respecte le schéma suivant. Dans cet algorithme, nous supposons que I est discrétisé sur une grille régulière du plan Π et notons $I_{i,j}$, $1 \leq i, j \leq N$ les valeurs de I sur cette grille. L'inconnu $I \in \mathbb{X} := \mathbb{R}^{N \times N}$ et le vecteur dual $p = (p^1, p^2) \in \mathbb{X} \times \mathbb{X}$.

Algorithme TV : Initialisation $p^0 = 0$ et $I^0 = I_0$. Itérer suivant le schéma :

$$\begin{cases} p^{n+1} &= \mathbb{P}_{\infty}^1(p^n + \gamma \alpha \nabla_{\Pi} I^n) \\ I^{n+1} &= \frac{1}{1+\alpha} (I^n + \gamma \alpha \operatorname{div}_{\Pi}(p^{n+1}) + \alpha I_0) \\ \text{avec } \mathbb{P}_{\infty}(p) &:= \frac{p}{\max(|p|, 1)} \end{cases} \quad (3.43)$$

L'algorithme est arrêté lorsque $\|I^{n+1} - I^n\|$ est plus petite qu'une tolérance donnée. Le paramètre α est un pas de descente de gradient qui fait également partie des paramètres à choisir par l'utilisateur. Dans cet algorithme nous avons besoin de définir le gradient d'un vecteur $u \in \mathbb{X}$ et la divergence d'un vecteur $p \in \mathbb{X} \times \mathbb{X}$. Le gradient $(\nabla u)_{i,j} = ((\nabla u)_{i,j}^1, (\nabla u)_{i,j}^2)$, est défini comme suit :

$$(\nabla_{\Pi} u)_{i,j}^1 = \begin{cases} u_{i+1,j} - u_{i,j} & \text{si } i < N \\ 0 & \text{si } i = N \end{cases} \quad (\nabla_{\Pi} u)_{i,j}^2 = \begin{cases} u_{i,j+1} - u_{i,j} & \text{si } j < N \\ 0 & \text{si } j = N \end{cases}$$

La divergence d'un vecteur $p = (p_{i,j}^1, p_{i,j}^2) \in \mathbb{X} \times \mathbb{X}$ est donnée par la formule suivante :

$$(\operatorname{div}_{\Pi} p)_{i,j} = p_{i,j}^1 - p_{i-1,j}^1 + p_{i,j}^2 - p_{i,j-1}^2 \quad (3.44)$$

pour $1 \leq i, j \leq N$, la différence $p_{i,j}^1 - p_{i-1,j}^1$ est remplacée par $p_{i,j}^1$ si $i = 1$, et par $-p_{i-1,j}^1$ si $i = N$, de même que $p_{i,j}^2 - p_{i,j-1}^2$ est remplacée par $p_{i,j}^2$ pour $j = 1$ et par $-p_{i,j-1}^2$ pour $j = N$.

3.5.3 Schéma Itératif de Landweber

Nous allons discuter dans ce paragraphe du deuxième ingrédient pour la minimisation de (3.41). Le schéma itératif de Landweber avec un critère d'arrêt liée au bruit est l'une des nombreuses techniques de régularisation de l'inversion d'un opérateur mal conditionné [42]. Dans le cas, cette méthode est simplement une méthode de descente de gradient pour la minimisation de la fonctionnelle de moindres carrés

$$\frac{1}{2} \|KI - D\|_{L^2(\Pi)}^2. \quad (3.45)$$

Le schéma itératif s'écrit alors

$$I^{n+1} = I^n - aK^*(KI^n - D)$$

On montre dans [42] que ce schéma itératif converge pour un D dans l'image de K lorsque le paramètre de descente $a < 1/\|K^*K\|$. Lorsque les données sont une petite perturbation δ d'un élément D_0 de l'image de K , ce qui est par exemple le cas de données bruitées ou simplement du fait que le modèle n'est pas exact,

$$\|D - D_0\|_{L^2(\Sigma)} \leq \delta$$

et $\|D_0\| > \delta$, l'algorithme ne converge pas en général. Cependant, si $n(\delta)$ désigne la première itération pour laquelle

$$\|KI^{n(\delta)} - D\|_{L^2(\Pi)} < r\delta$$

pour un $r > 1$ fixé, alors $I^{n(\delta)} \rightarrow I_0$ dans $L^2(\Pi)$ avec I_0 un antécédent de D_0 , c-à-d $KI_0 = D_0$.

3.5.4 Schéma d'inversion hybride

Nous sommes maintenant en mesure de proposer un algorithme approchant le minimiseur de (3.41). Des variantes de cet algorithme ont notamment été utilisé dans [19] pour la résolution de certains problèmes inverses. Il s'inspire aussi des algorithmes proposés dans [18] pour des opérateurs bien conditionnés K . Le principe est assez simple : il s'agit d'appliquer l'algorithme de Landweber et de coupler chaque itération par une ou plusieurs itérations de variation totale. Nous notons $TV : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$ l'opérateur qui consiste à effectuer une itération de l'algorithme (3.43). Plus précisément, $TV(I^n) = I^{n+1}$ avec I^{n+1} donné (3.43). L'algorithme hybride que nous utiliserons s'écrit alors :

Algorithme 1 $I = \operatorname{argmin}_{I \in \mathbb{X}} \frac{1}{2} \|KI - D\|_{L^2(\Pi)}^2 + \gamma \int_{\Pi} |\nabla I|$

ENTRÉES : $I^0 = 0, \varepsilon, a, D, K, m$

tantque $\|KI^n - D\| \geq \varepsilon$ **faire**

Etape 1 : $I^{n+\frac{1}{2}} \leftarrow I^n - aK^*(KI^n - D)$

Etape 2 : $I^{n+1} \leftarrow TV^{(m)} \left(I^{n+\frac{1}{2}} \right)$

Sortie : $I^* = I^{n+1}$.

Dans cet algorithme, on s'autorise à effectuer un nombre d'itérations m de l'algorithme (3.43) qui soit plus grand de 1 et qui est représenté par $TV^{(m)}$. Remarquons que l'initialisation peut être la valeur de I donnée par l'algorithme SAR. Le paramètre ε est l'équivalent du $r\delta$ évoqué plus haut et devrait être fixé en fonction (d'une estimation) du niveau de bruit dans les mesures.

Afin de quantifier l'effet d'incorporer l'algorithme TV au cours des itérations nous comparerons cette version avec celle où la régularisation TV est appliquée à la fin des itérations de Landweber. Cette variante s'écrit alors

Algorithme 2 $I = \operatorname{argmin}_{I \in \mathbb{X}} \frac{1}{2} \|KI - D\|_{L^2(\Pi)}^2 + \gamma \int_{\Pi} |\nabla I|$

ENTRÉES: $I^0 = 0, \varepsilon, a, D, K, m$

tantque $\|KI^n - D\| \geq \varepsilon$ **faire**
 $I^{n+1} \leftarrow I^n - aK^*(KI^n - D)$

Sortie : $I^* = TV^{(m)}(I^{n+1})$

3.5.5 Résultats Numériques et Discussions

Corrections des artefacts liés aux données Lidar

Nous nous intéressons ici aux corrections apportées par TV aux problèmes engendrés par l'utilisation du Lidar pour le calcul des distances dans le schéma d'inversion SAR.

Nous reprenons les mêmes exemples décrits dans la section 3.4, où nous avons parlé des limitations du modèle SAR pour la cartographie des mines. Nous supposons donc que les Lidar sont placés avec les sources $x_0 = (x_0^1, x_0^2, H_a)$ à une hauteur H_a du plan $\Pi_0 = \{z = (z_1, z_2, z_3)^T \in \mathbb{R}^3 : z_3 = 0\}$, et la distance au plan vallonné est modélisée par :

$$d(x_0) = d_0(x_0) + \frac{H}{f(\theta)} l(x_0), d_0(x_0) = |x_0 - z^{(0)}|$$

où θ est l'angle formé entre (z, x_0) , où $z^{(0)} \in \Pi_0$ ou encore un autre plan horizontal parallèle à Π_0 , cette distance qui peut être exprimée aussi comme :

$$d(x_0) = |x_0 - z|$$

avec $z = (z_1, z_2, z_3)^T$ et z_3 , varie en fonction de z_1 et z_2 . Nous proposons dans un premier temps d'améliorer les résultats de la section 3.4, dans les cas où les données présentent des perturbations, provenant par exemple des mesures pour un sol vallonné. L'objectif est alors d'améliorer ce résultat en ajoutant un terme supplémentaire avec des données sur le gradient de l'image en question, par la résolution du problème de minimisation suivant :

$$I = \operatorname{argmin}_{I \in \mathbb{X}} \|I - I_0\|_{L^2(\Pi)}^2 + \gamma \int_{\Pi} |\nabla I| \quad (3.46)$$

Un algorithme de résolution de ce problème est donné par 3.43 et c'est celui que nous avons implémenté.

Résultats numériques Sachant que les paysages des sols désertiques contenant les mines sont de natures très variés, ils présentent ainsi des pentes et des vallonnements qui peuvent être aléatoires. Nous proposons de les modéliser en introduisant des fluctuations sur un sol de référence plan, en commençant par des sols faiblement ondulés jusqu'à des paysages fortement ondulés. Nous reprenons un des exemples traités dans les parties précédentes de cette thèse, et nous supposons que les défauts dans les mesures du Lidar proviennent d'un sol à la base vallonné. Nous modélisons ce sol par le point $z = (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{R}^3$, de la manière suivante :

$$z_3 = z_3(z_1, z_2) = h \cos f_1 \pi z_1 \sin f_2 \pi z_2 \quad (3.47)$$

h , étant l'amplitude du paysage pour (qui peut être choisie aléatoirement) et que l'on augmente progressivement, f_1, f_2 représentent en quelque sorte les degrés de variation dans les directions transversales et qui peuvent contenir de l'aléatoire. Dans ce cas, la distance au sol sera donnée par :

$$d(x_0) = \sqrt{(x_a - z_1)^2 + (y_a - z_2)^2 + (H_a - z_3)^2}, x_0 = (x_a, y_a, H_a)^T \quad (3.48)$$

Dans un premier temps, nous considérons une scène de cartographie d'un sol contenant trois mines antichar. Les sols sont donnés dans la Table 3.4 :

TABLE 3.4 – CENTRES MINES.

Exemples	Amplitude			Fréquence	
	h			f_1	f_2
1	0	10λ	40λ	$22(X \sim U([0, 1]))/W_a$	$22(X \sim U([0, 1]))/L_a$
2	0	10λ	40λ	$1/W_a$	$1/L_a$

W_a , et L_a étant les dimensions de la grille de mesure des réponses $D(x_0)$.

Nous représentons à gauche sur la Figure 3.25, les positions des mines dans un milieu homogène. Dans les exemples qui suivent, nous distinguons deux types de vallonnement au niveau du sol, ils sont représentés respectivement au centre et à droite sur la Figure 3.25.

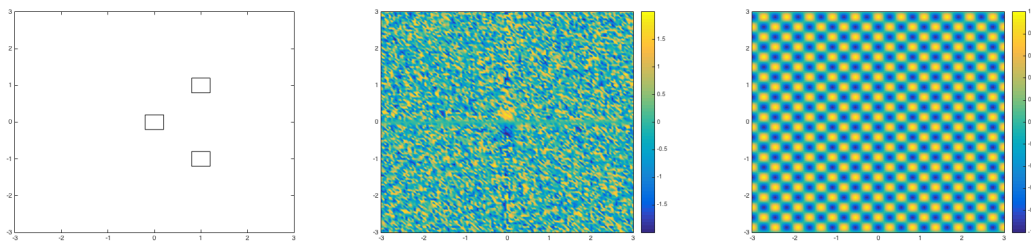
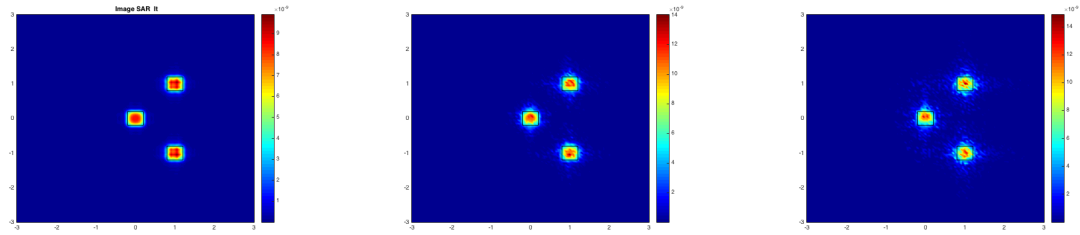


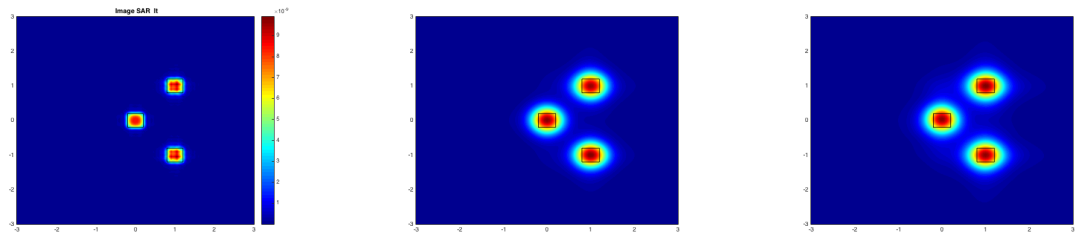
FIGURE 3.25 – Configuration exacte des mines, forme de sol et positions des mines.

Nous avons choisi les paramètres de régularisation suivants : $\alpha = 0.8$, $\gamma = 0.1$ et $\tau = 0.08$.

Sur les deux Figures 3.26 et 3.27, nous présentons les résultats obtenus respectivement pour les deux types de sol indiqués dans la Table 3.4, en utilisant les algorithmes SAR, puis un traitement avec le terme de variation totale (TV).

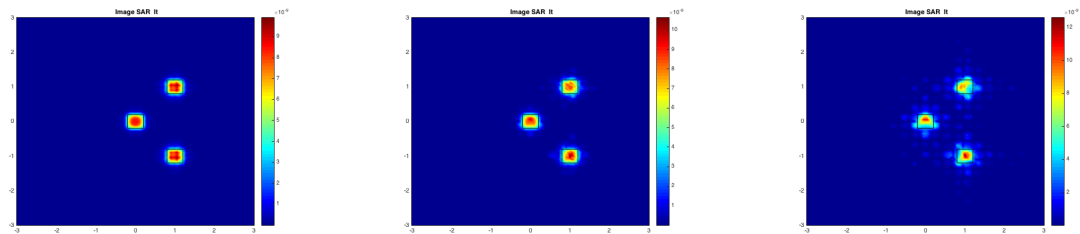


(a) Image SAR

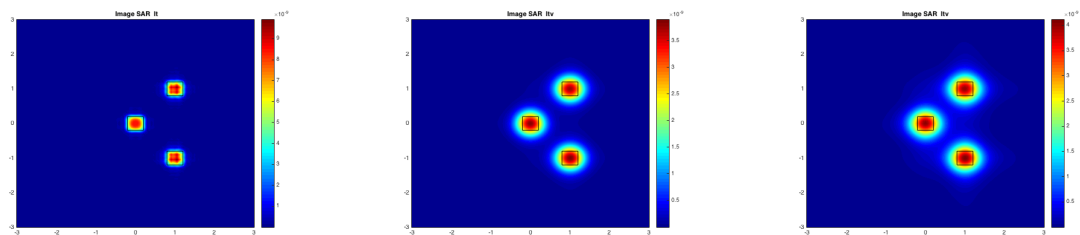


(b) Traitement TV

FIGURE 3.26 – Exemple 1 : Images obtenues en utilisant les distances Lidar, en 3.26a, on trouve les résultats des algorithmes SAR en fonction de h , et en 3.26b, les résultats du débruitage correspondants.



(a) Image SAR



(b) Traitement TV

FIGURE 3.27 – Exemple 2 : Images obtenues en utilisant les distances Lidar, en 3.27a, on trouve les résultats des algorithmes SAR en fonction de h , et en 3.27b, les résultats du débruitage correspondants.

Inversion basée sur l'algorithme hybride

Nous présentons ici un exemple de reconstruction utilisant l'algorithme hybride (1). Nous commençons d'abord par présenter ce que donne l'agorithme (2) où TV n'est appliquée qu'à la fin des itérations de Landweber.

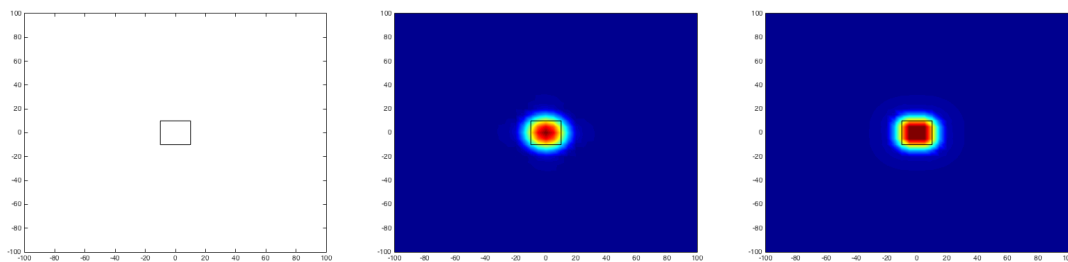


FIGURE 3.28 – Reconstruction avec l'algorithme 2, de gauche vers la droite : bord de l'objet utilisé pour générer les données, reconstruction sans itération de variation totale, et avec m itérations de variation totale.

Nous reprenons le même exemple, mais maintenant nous minimisons le problème régularisé comme dans l'algorithme 1. Il s'agit d'une combinaison des itérations de variations totales et d'une descente de gradient.

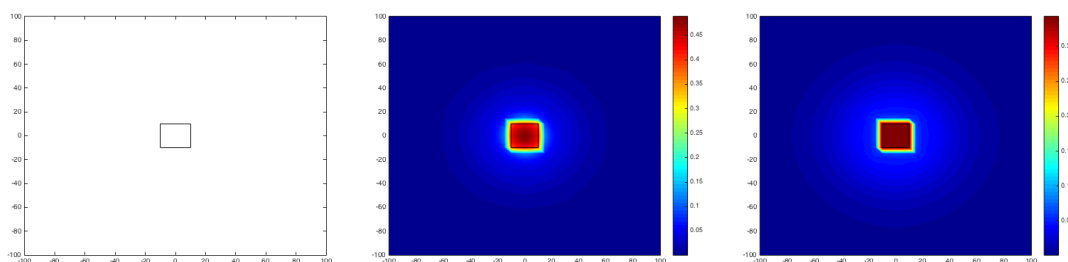


FIGURE 3.29 – Reconstruction en utilisant l'algorithme 1 : de gauche à droite : bord (en 2D) du volume utilisé pour générer les données, résultat en s'arrêtant l' **Etape 1**, puis en dernier en s'arrêtant à l'**Etape 2**.

Nous avons repris la scène pour deux objets, et nous appliquons les deux algorithmes 2 et 1 afin de reconstruire et de comparer les résultats. Comme dans la Figure 3.28, nous représentons dans la Figure 3.30 les images obtenues via l'algorithme 2, et puis à droite on ajoute m itérations de variation totale, qui, comme nous pouvons le voir, améliorent le résultat.

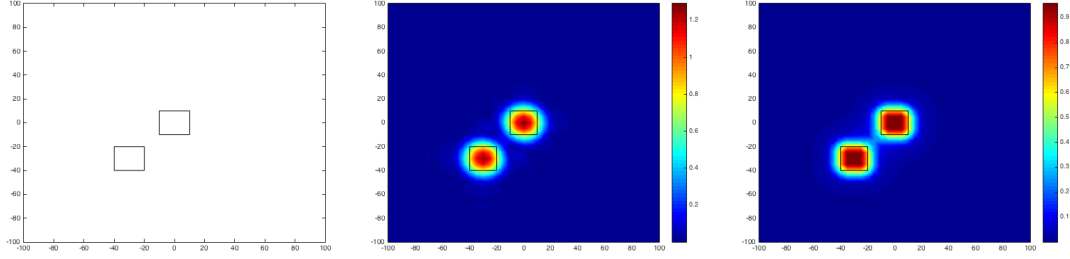


FIGURE 3.30 – Reconstruction avec l’algorithme 2, de gauche à droite : bord de l’objet utilisé pour générer les données, reconstruction sans itération de variation totale, et avec m itérations de variation totale.

De la même manière que sur la Figure 3.29, nous représentons dans la Figure 3.31, respectivement, les images correspondant aux traces de $I^{n+1/2}$ puis de I^{n+1} dans le plan Π :

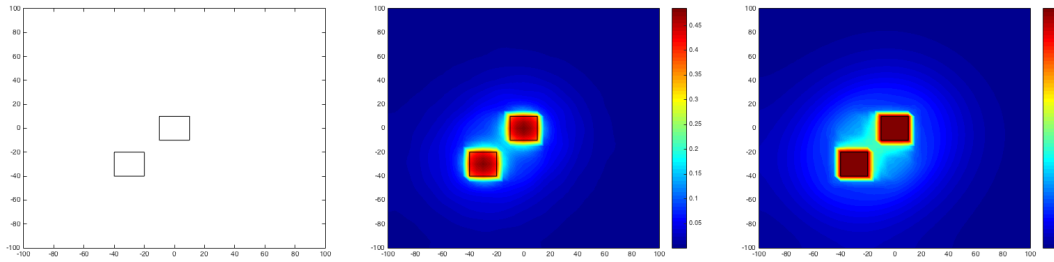


FIGURE 3.31 – Reconstruction en utilisant l’algorithme 1, de gauche à droite : bord (en 2D) du volume utilisé pour générer les données, résultat en s’arrêtant à l’ **Etape 1**, puis en dernier en s’arrêtant à l’**Etape 2** de l’algorithme.

Les résultats que l’on obtient ici sont comparables à ceux obtenus dans le cas des algorithmes SAR. Cependant, ces schémas demandent un temps d’exécution important, ce qui rend leur utilisation moins pratique (du moins impossible à faire en temps réel). Cette utilisation peut être justifiée en post-traitement comme le montrent les améliorations qu’elle apporte sur les exemples du paragraphe suivant.

Applications sol avec cailloux Dans ce paragraphe, nous allons reprendre les exemples que nous avons étudiés dans la section 3.4, et appliquer la technique d’inversion basée sur la technique de pénalisation avec un terme de variation totale. Pour l’algorithme 1, nous utilisons les paramètres de régularisation suivants :

TABLE 3.5 – PARAMÈTRES DE RÉGULARISATION.

Exemple	Paramètres					
	τ	α	γ	ε	a	m
Eg 1	1/10	0.9	τ/α	10^{-1}	47.2738	400

Notons que z_0 définissant le plan Π est choisi au niveau de l'objet au centre (la profondeur de la mine antichar). La région contient deux mines. Un sol homogène contenant quatre cailloux, la reconstruction est donnée selon l'emplacement de ces derniers sur les Figures 3.32, 3.33 et 3.34.

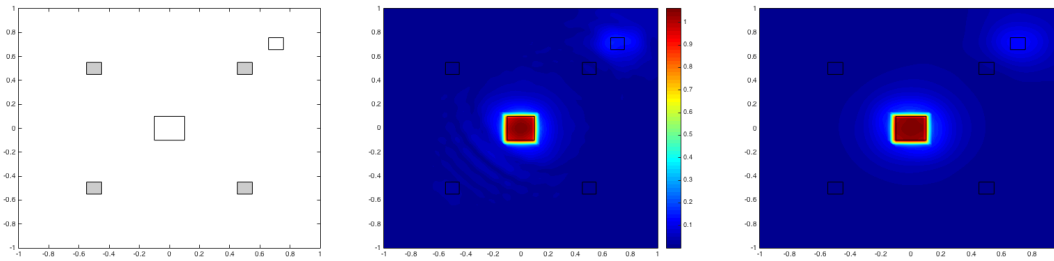


FIGURE 3.32 – $n=1.6$, Reconstruction correspondant au choix de paramètres de l'exemple E1, soient respectivement $I^{n+\frac{1}{2}}$ et I^{n+1} .

Nous reprenons la même configuration de cet exemple, mais maintenant on suppose que les deux mines sont au même niveau à $z_0 = -40\lambda$.

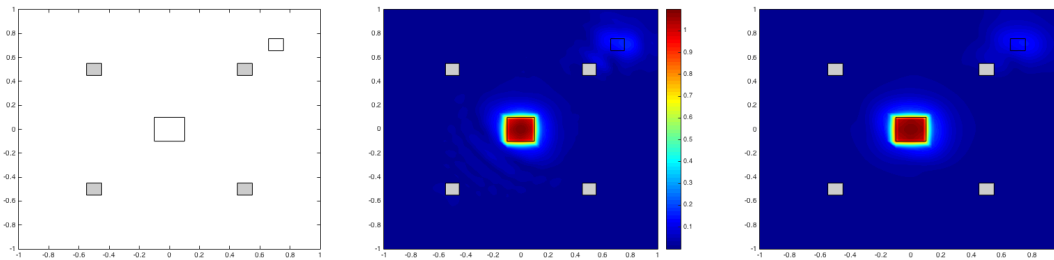


FIGURE 3.33 – $n=1.6$, Reconstruction correspondant au choix de paramètres de l'exemple E1, respectivement $I^{n+\frac{1}{2}}$ et I^{n+1} .

Nous reprenons l'exemple où les cailloux sont proches de la mine au centre et nous utilisons le même algorithme d'inversion. Nous obtenons les images suivantes :

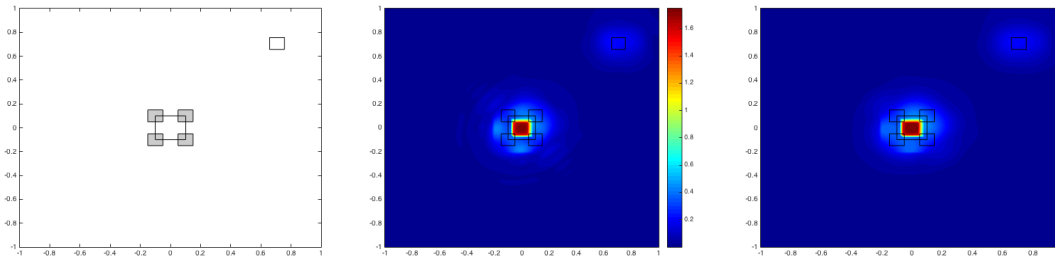


FIGURE 3.34 – $n=1.6$, Reconstruction correspondant au choix de paramètres de l'exemple E 2, respectivement $I^{n+\frac{1}{2}}$ et I^{n+1} .

Part II

Identification of Small Inclusions from Near Field Data In Quasi-back-scattering Configuration

Introduction and Preliminaries

Contents

4.1	Presentation of the Forward Problem	78
4.1.1	The scalar model for the forward problem	78
4.1.2	Asymptotic Form of the Scattered Field for Small Inhomogeneities	78
4.2	Sampling methods and the MUSIC algorithm	80

Introduction

This part is dedicated to the introduction and study of a new method capable of identifying the 3D location of small targets. This method is somehow complementary to the previously studied SAR methods since the latter is in general only capable of correctly imaging the 2D projected shapes of the targets. The new method is inspired from the one in [37] and is adapted to measurement setting compatible with the Tandem project. The new setting requires data collected on a small aperture around the source location: this is referred to as quasi-backscattering configurations.

This part is divided into three chapters. The first chapter is introductory, presenting the model and some materials related to sampling methods for multi-static data and small targets. The second chapter of this part (Chapter 5) introduces the new sampling method adapted to quasi-backscattering data inspired from the Tandem project. We then extend in chapter 6 the method to other configurations of the backscattering data that may for instance be appropriate for medical imaging experiments.

The outline of this chapter is as follows. We present first the model problem which corresponds with acoustic waves at a fixed frequency and that will be used in Chapters 5 and 6. We then recall the asymptotic form of the scattered field for the case of small inhomogeneities. This asymptotic form will be the first important tool in justifying the sampling method for quasi-backscattering data. We also recall in this chapter the principle of sampling methods associated with multistatic data. We provide a justification of the so-called Linear Sampling method in the case of small inclusions asymptotic regime as well as the principle of MUSIC algorithm. This will allow us to put into perspective the method introduced in the following chapters.

4.1 Presentation of the Forward Problem

4.1.1 The scalar model for the forward problem

We shall mostly consider the scalar problem modeled by the Helmholtz equation for the total field u ,

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho} \nabla u \right) + k^2 n^2 u = -\delta_{x_0} \quad \text{in } \mathbb{R}^3 \quad (4.1)$$

where k represents the wavenumber, ρ the volume density of the medium and n the refractive index and x_0 is the location of the point source. The aim of this chapter is to first present an asymptotic formula that represents the scattered wave for a medium that contains a small inhomogeneities. This formula will be the basis for the justification of the inversion method we shall introduce later. Since our method is inspired from sampling methods, we shall also give a short presentation of this type of methods in the case of data collected on a limited aperture. This will allow us to highlight the differences between sampling methods and the method based on quasi-back scattering configurations.

We now formulate more precisely the forward scattering problem. We shall assume that $\rho = n = 1$ for $|x|$ sufficiently large and denote by D the smallest domain such that $\mathbb{R}^3 \setminus D$ is connected and $\rho = n = 1$ outside D .

Let $u^{inc}(\cdot, x_0)$ be the incident field generated by the point source x_0 ,

$$u^{in}(x, x_0) = \Phi(x, x_0) := \frac{e^{ik|x-x_0|}}{4\pi|x-x_0|}, \quad \text{with } x \in \mathbb{R}^3 \text{ and } x \neq x_0 \quad (4.2)$$

This field corresponds to the field present in the absence of the inhomogeneities and satisfies:

$$\nabla \cdot \nabla u^{inc}(\cdot, x_0) + k^2 u^{inc}(\cdot, x_0) = -\delta_{x_0} \quad \text{in } \mathbb{R}^3, \quad (4.3)$$

and the Sommerfeld radiation condition indicated below. Due to the inhomogeneities, this field induces a scattered field $u^{sc}(\cdot, x_0) \in H_{loc}^1(\mathbb{R}^3)$ (Figure 4.1). The total field $u^t(\cdot, x_0) = u^{in} + u^{sc}$ satisfies:

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho} \nabla u^t(\cdot, x_0) \right) + k^2 n^2 u^t(\cdot, x_0) = -\delta_{x_0} \quad \text{in } \mathbb{R}^3, \quad (4.4)$$

and u^{sc} satisfies the Sommerfeld radiation condition:

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} |x| \left(\frac{\partial u^{sc}}{\partial |x|} - iku^{sc} \right) = 0 \quad (4.5)$$

uniformly in all directions $\hat{x} := \frac{x}{|x|}$.

The inverse problem we are interested in is corresponds with retrieving the location of D from some measurements of the scattered field $\partial u^{sc}(\cdot, x_0)$ for some source points x_0 .

4.1.2 Asymptotic Form of the Scattered Field for Small Inhomogeneities

The justification of the new method that we shall present will be done only in the asymptotic framework of scattering from small inhomogeneities, where the scatterers behave like point sources. We recall here this asymptotic form that can be found in [63, 2, 36].

We assume that D is formed by M inclusions $D_j^\delta = C_j + \delta B_j$ where C_j represents the location, δ is the size of D_j^δ and B_j is the normalized shape of D_j^δ . In this setting, δ is the small parameter and we shall describe the asymptotic form of the scattered field as $\delta \rightarrow 0$. In this asymptotic, C_j and B_j are assumed to be independent from δ . Moreover, the medium properties ρ^j and n^j inside D_j^δ are also assumed to be independent from δ .

Let us define ρ_δ and n_δ :

$$\rho_\delta(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{R}^3 \setminus D \\ \rho_j, & x \in D_j^\delta \end{cases} \quad \text{and} \quad n_\delta(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{R}^3 \setminus D \\ n_j, & x \in D_j^\delta \end{cases} \quad (4.6)$$

Then the total field is solution to

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho_\delta} \nabla u_\delta^t(., x_0) \right) + k^2 n_\delta^2 u_\delta^t(., x_0) = -\delta_{x_0} \quad \text{in } \mathbb{R}^3, \quad (4.7)$$

together with the Sommerfeld radiation condition and we denote by $u_\delta^{sc}(., x_0)$ the associated scattered field (as defined above).

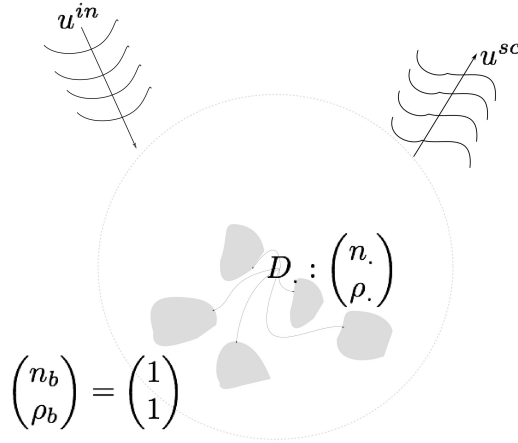


Figure 4.1 – Illustration of the scattering problem.

To describe the limit form we shall first introduce the so called polarization-tensors. Let us define for any $j = 1, \dots, M$, the solutions $\hat{v}_j \in H_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^3)$ to the following systems

$$\begin{aligned} \Delta \hat{v}_j &= 0, \text{ in } \mathbb{R}^3 \setminus \bar{B}_j, & \Delta \hat{v}_j &= 0, \text{ in } B_j \\ \hat{v}_j|_- - \hat{v}_j|_+ &= 0, \text{ on } \partial B_j, & \frac{\rho_j}{\rho_0} \frac{\partial \hat{v}_j}{\partial \nu}|_+ - \frac{\partial \hat{v}_j}{\partial \nu}|_- &= \nu, \text{ on } \partial B_j \\ |\hat{v}_j(y)| &\mapsto 0, |y| \mapsto \infty \end{aligned}$$

where ν denotes the unit normal to ∂B_j directed to the exterior of B_j . We then define (as in [63]), the polarization tensors, $\mathcal{M}_j$ corresponding to the inhomogeneity B_j by:

$$\mathcal{M}_j(\rho_j) = |B|_j I + \left(\frac{\rho_j}{\rho_0} - 1 \right) \int_{\partial B_j} \nu \cdot (\hat{v}_j)^T ds(y). \quad (4.8)$$

This polarization tensor depends on ρ_j and on the measure of B_j . We define $\nabla\Phi$ as the gradient of the Green function with respect to the x variable, i.e:

$$\nabla_x \Phi(x, y) := \left(ik - \frac{1}{|x - y|} \right) \Phi(x, y) \frac{x - y}{|x - y|}, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^3, x \neq y$$

One then obtain the following asymptotic representation of the scattered field.

Theorem 2. *Assume that the imaginary parts of ρ_j and n_j are non negative for $j = 1, \dots, M$. Then the scattered field can be written as*

$$u_\delta^{sc}(x, x_0) = \delta^3 \sum_{j=1}^M \left(\gamma_\rho^j \nabla \Phi(C_j, x) \cdot \mathcal{M}_j(\rho_j) \nabla u^{inc}(C_j, x_0) + |B_j| k^2 \gamma_n^j \Phi(C_j, x) u^{inc}(C_j, x_0) \right) + O(\delta^4)$$

where $\gamma_n^j = (1 - n_j^2)$, $\gamma_\rho^j = (1 - \rho_j)$ and where $O(\delta^4)$ is bounded by $C\delta^4$ uniformly with respect x and x_0 in a bounded set of $\mathbb{R}^3 \setminus D$. If we set

$$0 < d_0 < |C_j - C_l|, \quad \forall j \neq l \quad (4.9)$$

then the constant C depends only on d_0 , on the geometry of the obstacles and on the physical properties of the medium but not on the location of the obstacles C_j , $j = 1, 2, \dots, M$.

The reader can find more details on the justification of the Theorem 2 in [2].

This result can be extended to the case where the background is not homogeneous. In that case Φ should be replaced by the the Green function of the background and the constants n_j and ρ_j by the ratios n_j/n_b and ρ_j/ρ_b where n_b and ρ_b are the physical properties associated with the background at the inhomogeneity location. The only difficulty then, from the numerical point of view, is to compute the corresponding Green function.

4.2 Sampling methods and the MUSIC algorithm

In order to put into perspective our method we shall present here the classical setting for so-called sampling methods and the application to retrieve the location of small targets. The sampling methods for near-field data are based on collecting the data

$$u^{sc}(x, x_0) \quad \text{for } (x, x_0) \in \Sigma \times \Sigma_0$$

where Σ and Σ_0 are two surfaces that are embedded in $\mathbb{R}^3 \setminus D$ such that the surface measures of Σ and Σ_0 are non zero. In the case where Σ is not the boundary of a bounded domain enclosing D we assume that it is an analytic surface that can be extended to an analytic boundary of a domain Ω enclosing D . Similar assumption is made for Σ_0 with domain Ω_0 . These methods then construct an indicator function of D using this set of data by exploiting the range of the near-field operator

$$N : L^2(\Sigma_0) \rightarrow L^2(\Sigma)$$

defined by

$$Ng(x) := \int_{\Sigma_0} u^{sc}(x, x_0) g(x_0) ds(x_0) \quad x \in \Sigma$$

Let us define $\phi_z(x) := \Phi(x, z)$ for $x \in \Sigma$. The simplest method is the so called Linear Sampling Method (LSM) [15] where one considers nearby solutions to the equation

$$Ng_z \simeq \phi_z \quad \text{on } \Sigma.$$

The method then stipulates that $z \mapsto 1/\|g_z\|_{L^2(\Sigma_0)}$ is expected to be zero outside D . This is due to the fact that if the equality holds for $z \notin D$, then using the analyticity of the scattered field outside D and the fact that Σ is analytic, and using the uniqueness for scattering problems in $\mathbb{R}^3 \setminus \Omega$ with Dirichlet data on $\partial\Omega$, we obtain that

$$\int_{\Sigma_0} u^{sc}(x, x_0) g_z(x_0) ds(x_0) = \Phi(x, z) \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus D$$

which is a contradiction since $x \mapsto \Phi(x, z)$ is singular at $x = z$. In most implementations of the method one uses a Tikhonov regularization as

$$\alpha g_z^\alpha + N^* N g_z^\alpha = N^* \phi_z$$

where $\alpha > 0$ is a regularization parameter (that can be fixed using a Morozov type discrepancy principle). The regularization theory then ensures that $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \|g_z^\alpha\|_{L^2(\Sigma_0)} = \infty$ as $\alpha \rightarrow 0$ for $z \notin D$. The main difficulty in justifying the LSM is to prove that $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \|g_z^\alpha\|_{L^2(\Sigma_0)} < \infty$ as $\alpha \rightarrow 0$ for $z \in D$. In [4] an alternative construction of g_z^α is proposed so that a rigorous asymptotic statement can hold. We refer to [4, 6, 5] for an overview of this alternative method called the Generalized LSM.

We shall here explain how in the small asymptotic regime one can obtain an exact characterization of the location of the small target in terms of the asymptotic form of the near-field operator. This is similar to what has been observed in [36] using the reciprocity gap sampling method. Let us consider the asymptotic form in the simple case where $\rho_j = 1$. In that case the scattered field is of the form

$$u^{sc}(x, x_0) = \tilde{u}^{sc}(x, x_0) + o(\delta^3)$$

uniformly with respect to $(x, x_0) \in \Sigma \times \Sigma_0$, where we have set

$$\tilde{u}^{sc}(x, x_0) := \sum_{j=1}^M \tau_j \Phi(x, C_j) \Phi(C_j, x_0)$$

and $\tau_j := \delta^3 |B_j| k^2 \gamma_n^j$. Define the approximate near-field operator $\tilde{N} : L^2(\Sigma_0) \rightarrow L^2(\Sigma)$ by

$$\tilde{N}g(x) := \int_{\Sigma_0} \tilde{u}^{sc}(x, x_0) g(x_0) ds(x_0) \quad x \in \Sigma$$

Then we have the following theorem

Theorem 3. *Let $z \in \Omega$. The function ϕ_z is in the range of the operator $\tilde{N}$ if and only if $z \in \{C_j, j = 1, \dots, M\}$.*

Proof. The proof relies on the separation of variables between x and x_0 in the expression of $\tilde{u}^{sc}(x, x_0)$. We indeed have that

$$\tilde{N}g(x) = \sum_{j=1}^M \left(\tau_j \int_{\Sigma_0} \Phi(C_j, x_0) g(x_0) ds(x_0) \right) \Phi(x, C_j)$$

and therefore $\tilde{N}$ clearly has finite rank.

Assume that $z \notin \{C_j, j = 1, \dots, M\}$ and that there exists $g \in L^2(\Sigma_0)$ such that

$$\tilde{N}g = \phi_z \text{ on } \Sigma.$$

Then by analyticity of the $x \mapsto \Phi(x, y)$ outside y and the analyticity of the measurement surface Σ , the equality holds on the boundary $\partial\Omega$. Then uniqueness for the scattering problem in $\mathbb{R}^3 \setminus \Omega$ with Dirichlet data on $\partial\Omega$ and unique continuation principle implies that

$$\sum_{j=1}^M \left(\tau_j \int_{\Sigma_0} \Phi(C_j, x_0) g(x_0) ds(x_0) \right) \Phi(x, C_j) = \Phi(x, z)$$

for all $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{z, C_j, j = 1, M\}$. This gives a contradiction since the right hand side is singular at z while the left hand side is regular at z .

Assume now that z coincides with one C_{j_0} . We shall construct a function g such that

$$\int_{\Sigma_0} \Phi(C_j, x_0) g(x_0) ds(x_0) = \frac{1}{\tau_j} \delta_{j, j_0} \quad (4.10)$$

so that one ensures $\tilde{N}g = \phi_z$ on Σ . The construction of a function $g \in L^2(\Sigma_0)$ satisfying (4.10) is possible due to the fact that the functions $x_0 \mapsto \Phi(C_j, x_0)$ are independent functions of $L^2(\Sigma_0)$. The latter follows for instance using a contradiction argument and the same unique continuation principle previously employed. $\square$

A commonly used method to exploit Theorem 3 for localizing the points C_j is based on the fact that since $\tilde{N}$ has finite rank, then its range is closed and is equal to the orthogonal to the kernel of $\tilde{N}^*$. The theorem then can be rephrased as

$$z \in \{C_j, j = 1, \dots, M\} \text{ iff } \phi_z \in (\ker \tilde{N}^*)^\perp$$

Denoting P the orthogonal projection on $\ker \tilde{N}^*$ we then have the MUSIC type characterization of the points C_j as

$$z \in \{C_j, j = 1, \dots, M\} \text{ iff } 1/\|P\phi_z\| = \infty.$$

Numerically, one can construct the orthogonal projection operator using a singular value decomposition of $\tilde{N}$ and the plot the function

$$z \mapsto 1/\|P\phi_z\|$$

that should present peaks at $\{C_j, j = 1, \dots, M\}$.

This type of algorithm will be extended later in the configuration where the data is of the form $u^{sc}(x, x_0)$ where $x \in \Sigma(x_0)$ and $x_0 \in \Sigma_0$. The fact that $\Sigma(x_0)$ depends on x_0 does not allow the use of the sampling operator N as presented above.

A sampling method for quasi-backscattering data adapted to the Tandem project

Contents

5.1 Introduction	83
5.2 Quasi-backscattering Configuration	84
5.2.1 Asymptotic expression of the scattered field	85
5.2.2 Characterization of the scatterers location using the approximate near field operator	88
5.3 Numerical Algorithms and Experiments	95
5.3.1 Notation and Preliminaries	95
5.3.2 Discussion of the case of monopolar inclusions	96
5.3.3 Discussion of the case of multipolar inclusions	106
5.3.4 Discussion of the case where the polarization tensor is not necessarily diagonal	110
5.4 Conclusion	112

5.1 Introduction

We present a new sampling method [41, 12, 14] for detecting targets (small inclusions or defects) immersed in a homogeneous medium in three-dimensional space, from measurements of acoustic scattered fields created by point source incident waves. We consider the harmonic regime and a data setting that corresponds with quasi-backscattering configuration: the data is collected by a set of receivers that are distributed on a segment centered at the source position and the device is swept along a path orthogonal to the receiver line. We assume that the aperture of the receivers is small compared with the distance to the targets. Considering the asymptotic form of the scattered field as the size of the targets goes to zero and the small aperture approximation, one is able to derive a special expression for the scattered field. In this expression a separation of the dependence of scattered field on the source location and the distance source-target is performed. This allows us to propose a sampling procedure that characterizes the targets location in terms of the range of a near-field operator constructed from available data. Our procedure is similar to the one proposed in [37] for far-field configurations. We then implement the procedure using MUSIC type algorithm [41, 1, 35] and well chosen combination of the multi-campaign measurements (varying the source-receivers path). Validation against synthetic data is performed for some toy examples.

The model problem is the one presented in the previous chapter and we shall keep the same notation here. In particular we shall consider the case where D is formed by a collection of small targets D_j^δ , $j = 1, \dots, M$.

The chapter is organized as follows. We start by introducing a general concept of the Quasi-back-scattering configuration. We then derive an adapted asymptotic form of the scattered wave that will be useful for the inversion algorithm. This asymptotic form is also validated numerically. The MUSIC type algorithm that gives a characterization of the inclusions location from the data in the Quasi-backscattering configuration is addressed in Section 5.2. In Section 5.3, some reconstructions algorithms are proposed based on different scenarios for collecting the data. We present in Section 5.3.2 some validating numerical results showing the advantages and limitations of the method.

5.2 Quasi-backscattering Configuration

The data for a Quasi-backscattering configuration is collected by a multi-receivers antenna that transmits a pulse and records the backscattered signals corresponding to each pulse, with a specific setting of the receivers shown schematically in Figure 5.1. In the orthonormal basis $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ from $\mathbb{R}^3$, we assume that the scattered field is measured by receivers at the plane $\Sigma := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = H\}$, that are distributed on a segment R parallel to the unit vector $\vec{v}$ and centered at the source location x_0 . The device formed by the source x_0 and the receivers segment R is swept along a line $\mathbb{T} \subset \Sigma$ orthogonal to the receivers line. We note that the plane Σ lies above the targets D_j^δ $j \in \mathcal{I} = \{1, 2, \dots, M\}$, that belong to the lower half space $\mathbb{R}_-^3 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 \leq 0\}$.

We assume that a source is placed at the center of R . In this configuration, one would collect measurements of $u^{sc}(x, x_0)$ for $x_0 \in \mathbb{T}$ $x \in R(x_0)$ where $R(x_0) \subset \Sigma$ is the segment orthogonal to $\mathbb{T}$ at x_0 . This type of acquisition will be referred to as the flat surface quasi-backscattering configuration of measurements. We recall that in a backscattering configuration $R(x_0)$ is reduced to $\{x_0\}$ meaning that we have a single receiver at the source location [21]. This configuration is the one retained in Tandem and was the subject of our study in the first part of this thesis.

In our setting, to fix the notation, the source locations will be parametrized as:

$$x_0 = r\vec{u} + H\vec{w}, r \in \mathbb{R}, \quad (\text{i.e. } \mathbb{T} \subset \mathbb{R}\vec{u} + H\vec{w}) \quad (5.1)$$

and therefore the receivers locations x are parametrized as:

$$x = x_0 + \eta\vec{v}, \eta \in [-\theta, \theta] \quad (\text{i.e. } R(x_0) \subset x_0 + \mathbb{R}\vec{v}), \quad (5.2)$$

where 2θ is a fixed parameter referring to the length of R . In the following, the points (x, x_0) related by (5.2) will then be identified with (η, x_0) .

The quasi-back-scattering configuration will refer to the cases where

$$\theta \ll H,$$

meaning that the receivers are located on a small aperture, compared to sources-targets squared distances, around the source point x_0 (but not reduced to a single point).

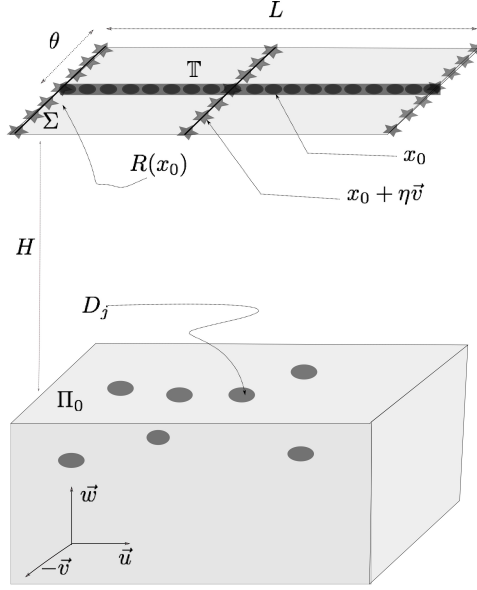


Figure 5.1 – Illustration of the flat surface quasi-backscattering configuration of the measurements.

5.2.1 Asymptotic expression of the scattered field

In the following, $x_0 \in \Sigma$ refers to the positions of the sources, and $y \in \mathbb{R}_-^3$ refers to the point in the region to be imaged which is located in the half space $\mathbb{R}_-^3$. The points x are defined by (5.2). Writing that

$$|x - y| = |y - x_0 - \eta \vec{v}| = \left(|y - x_0|^2 - 2\eta \vec{v} \cdot (y - x_0) + \eta^2 \right)^{1/2}$$

and observing that $\vec{v} \cdot x_0 = 0$ we get that

$$|x - y| = |y - x_0| \left(1 - 2\eta \frac{\vec{v} \cdot y}{|y - x_0|^2} + \frac{\eta^2}{|y - x_0|^2} \right)^{1/2}.$$

Therefore,

$$|x - y| = |y - x_0| - \eta \frac{\vec{v} \cdot y}{|y - x_0|} + O\left(\frac{\theta^2}{|y - x_0|}\right) \quad (5.3)$$

uniformly with respect to x_0 and bounded values of $\vec{v} \cdot y$. We also observe that $|y - x_0| \geq H$ and that for sufficiently large H

$$\frac{1}{|y - x_0|} = \frac{1}{H} + O\left(\frac{1}{H^2}\right) \quad (5.4)$$

uniformly with respect to y in a bounded region of $\mathbb{R}_-^3$ and x_0 in $\mathbb{T}$. We then deduce that, for sufficiently large H and sufficiently small θ ,

$$e^{ik|x-y|} = e^{ik|x_0-y|} e^{-ik\eta \frac{\vec{v} \cdot y}{H}} + O\left(\frac{\theta^2}{H} + \frac{\theta}{H^2}\right) \quad (5.5)$$

uniformly with respect to y in a bounded region of $\mathbb{R}_-^3$ and x_0 in $\mathbb{T}$. Indeed one observes from (5.5) that a high order of accuracy can be achieved if $\theta \sim 1/H$ and we obtain a relative error that behaves like $O(1/H^3)$. This regime would then be better suited for H not too large. In the case where H is large, taking $\theta \sim 1/H$ may lead to insufficiently rich amount of data since the aperture would be too small. However (5.5) indicates that one can also take $\theta \equiv 1/H^\epsilon$ with $\epsilon > 0$ and then the accuracy of the approximation in (5.5) will then be of order $O(1/H^{1+\epsilon})$. Observing that

$$\frac{1}{|x-y|} = \frac{1}{|x_0-y|} + O\left(\frac{\theta}{H^3}\right) \quad (5.6)$$

we deduce from (5.4) and (5.5) that

$$\frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} = \frac{e^{ik|x_0-y|}}{|x_0-y|} e^{-ik\eta \frac{\vec{v} \cdot y}{H}} + O\left(\frac{\theta^2}{H^2} + \frac{\theta}{H^3}\right)$$

and therefore

$$\Phi(x, y) = \Phi(x_0, y) \chi(\eta, y) + O\left(\frac{\theta^2}{H^2} + \frac{\theta}{H^3}\right).$$

with $\chi(\eta, y) = e^{-ik\eta \frac{\vec{v} \cdot y}{H}}$. We also need to derive an approximation for

$$\nabla_x \Phi(x, y) = \left(ik - \frac{1}{|x-y|}\right) \Phi(x, y) \frac{x-y}{|x-y|}.$$

Writing that

$$\frac{x-y}{|x-y|} = \frac{x_0-y}{|x_0-y|} + \frac{\eta \vec{v}}{|x-y|}$$

we deduce from (5.6) that

$$\frac{x-y}{|x-y|} = \frac{x_0-y}{|x_0-y|} + \frac{\eta \vec{v}}{|x_0-y|} + O\left(\frac{\theta}{H^2}\right)$$

It is then readily deduced that (observe that $\Phi(x_0, y) \sim 1/H$)

$$\nabla_x \Phi(x, y) = \left(ik - \frac{1}{|x_0-y|}\right) \Phi(x_0, y) \chi(\eta, y) \frac{x_0-y}{|x_0-y|} + ik \frac{\eta \vec{v}}{|x_0-y|} \Phi(x_0, y) \chi(\eta, y) + O\left(\frac{\theta^2}{H^2} + \frac{\theta}{H^3}\right).$$

Let $\mathcal{M}(\rho)$ denote the polarization tensor (defined in the previous chapter) corresponding to the inhomogeneity of center y which depends only on ρ . We introduce the vector functions,

$$\begin{aligned} \psi_0(y, x_0) &:= \Phi^2(x_0, y) \frac{x_0-y}{|x_0-y|} \\ \psi_1(y, x_0) &:= \Phi^2(x_0, y) \left(ik - \frac{1}{|x_0-y|}\right)^2 \frac{x_0-y}{|x_0-y|} \\ \psi_2(y, x_0) &:= \Phi^2(x_0, y) ik \left(ik - \frac{1}{|x_0-y|}\right) \frac{\vec{v}}{|x_0-y|} \end{aligned} \quad (5.7)$$

Let us denote by U^{sc} of the leading term of the asymptotic form of the scattered field u_δ^{sc} introduced in Theorem 2,

$$U^{sc}(x, x_0) := \sum_{j=1}^M \left(\nabla \Phi(C_j, x) \cdot \mathcal{M}_j \nabla \Phi(C_j, x_0) + \tau_j \Phi(C_j, x) \Phi(C_j, x_0) \right) \quad (5.8)$$

so that the scattered field satisfies for all (x, x_0) as defined in the backscattering configuration,

$$u_\delta^{sc}(x, x_0) = \delta^3 U^{sc}(x, x_0) + O(\delta^4)$$

where $\mathcal{M}_j = \gamma_\rho^j \mathcal{M}_j(\rho_j)$ and $\tau_j = |B_j| k^2 \gamma_n^j$, for $j = 1, \dots, M$. Notice that since we can express the receiver location x as a function of η , then we can also use the identification $u_\delta^{sc}(x, \cdot) \equiv u_\delta^{sc}(\eta, \cdot)$ and similar one for U^{sc} . The previous considerations show that

$$U^{sc}(\eta, x_0) = \tilde{U}^{sc}(\eta, x_0) + O\left(\frac{\theta}{H^3} + \frac{\theta^2}{H^2}\right) \quad (5.9)$$

where the function $\tilde{U}^{sc}$ is given by:

$$\begin{aligned} \tilde{U}^{sc}(\eta, x_0) &:= \sum_{j=1}^M \left(\left(\psi_0(C_j, x_0)(\tau_j I_3) + \psi_1(C_j, x_0) \mathcal{M}_j \right) \cdot \frac{x_0 - C_j}{|x_0 - C_j|} \right) \chi(\eta, C_j) \\ &+ \sum_{j=1}^M \left(\psi_2(C_j, x_0) \mathcal{M}_j \cdot \frac{x_0 - C_j}{|x_0 - C_j|} \right) \eta \chi(\eta, C_j) \end{aligned} \quad (5.10)$$

and where we used the short notation

$$\chi(\eta, C_j) := e^{-ik \frac{\eta}{H} C_j \vec{v}}.$$

The expression of $\tilde{U}^{sc}(\eta, x_0)$ is the one that will be exploited to theoretically justify the sampling method we shall introduce in the sequel. We observe that in this expression, a separation on the dependence with respect of the variables η and x_0 is operated. This is why an application of a MuSiC type algorithm will be possible as in the case of multi-static data described in the previous chapter.

Quality of the quasi-backscattering approximation

We have introduced an asymptotic form of the scattered field adapted to the configuration of our experiment. In order to use (5.10) in the analysis of the corresponding inverse problem we start by verifying the numerical accuracy of this asymptotic form. We shall measure the difference between U^{sc} and $\tilde{U}^{sc}$ for one or several inhomogeneities in the medium. The size of the inclusions δ is small and we assume that we satisfy the conditions of Theorem 2.

We present here the numerical results only for a specific configuration that we will use later in all our numerical results and shall vary the height H .

We assume that the measurements correspond to the following experiment setting: the aperture of the antenna $\theta = 5\lambda$ and contains 21 sensors separated with a step $\frac{\lambda}{4}$. The antenna is swept along a path $\mathbb{T}$ of length $L = 20\lambda$ and measurements are performed at each $\frac{\lambda}{2}$ step (this corresponds with $N = 41$). We note by $\tilde{\Sigma}(H)$ the synthetic grid (21×41) sensors formed by this setting (indeed all sources do not measure the action of all sources).

Denote by $\epsilon(H)$ the relative error defined as

$$\epsilon(H) = \frac{\|U^{sc} - \tilde{U}^{sc}\|_{L^2(\tilde{\Sigma}(H))}}{\|U^{sc}\|_{L^2(\tilde{\Sigma}(H))}}. \quad (5.11)$$

In the following Figure 5.2 we represent the evolution of the relative error as a function of the height H .

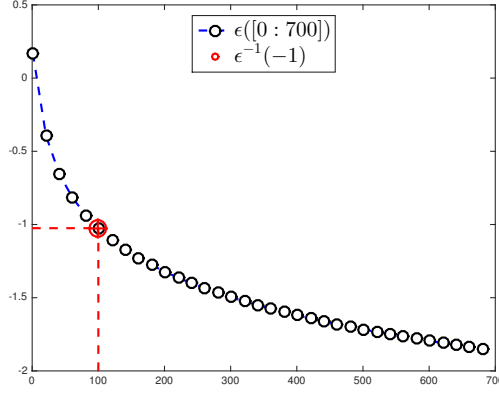


Figure 5.2 – Relative error $\epsilon(H)$ as a function of flight height.

This allows us to conclude that indeed the higher heights H correspond with better approximations. A relative error $\epsilon < 10\%$ is achieved for $H > 100\lambda$. However, we will see that in our numerical examples, the choice $H = 10\lambda$ gives reasonably accurate results.

5.2.2 Characterization of the scatterers location using the approximate near field operator

Using the measurements

$$u_{\delta}^{sc}(\eta, x_0) \quad |\eta| \leq |\theta| \text{ and } x_0 \in \mathbb{T}$$

one can easily construct the near field operator

$$\begin{aligned} N_{\delta}: L^2[-\theta; \theta] &\longrightarrow L^2(\mathbb{T}) \\ g &\longmapsto (N_{\delta}g)(x_0) = \int_{-\theta}^{\theta} g(\eta) u_{\delta}^{sc}(\eta, x_0) ds(\eta), \forall x_0 \in \mathbb{T}. \end{aligned}$$

Based on the asymptotic expressions above, one has two approximations of this operator. The first approximation come from the small inhomogeneities expansion that indicates that $N_{\delta} = \delta^3 N + O(\delta^4)$ where

$$\begin{aligned} N: L^2[-\theta; \theta] &\longrightarrow L^2(\mathbb{T}) \\ g &\longmapsto (Ng)(x_0) = \int_{-\theta}^{\theta} g(\eta) U^{sc}(\eta, x_0) ds(\eta), \forall x_0 \in \mathbb{T}. \end{aligned} \tag{5.12}$$

It is this operator expression that we shall use in the numerical experiments below. However, to analyze the method we shall rely on the additional quasi-backscattering approximation given

by

$$\begin{aligned} \tilde{N}: L^2[-\theta; \theta] &\longrightarrow L^2(\mathbb{T}) \\ g &\longmapsto (Ng)(x_0) = \int_{-\theta}^{\theta} g(\eta) \tilde{U}^{sc}(\eta, x_0) ds(\eta), \forall x_0 \in \mathbb{T}. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Indeed we have

$$\|N - \tilde{N}\| = O\left(\frac{\theta}{H^3} + \frac{\theta^2}{H^2}\right). \quad (5.14)$$

The advantage of considering the operator $\tilde{N}$ lies in the following expression for $(\tilde{N}g)$,

$$\begin{aligned} (\tilde{N}g)(x_0) &= \sum_{j=1}^M (\psi_0(C_j, x_0)(\tau_j I_3) + \psi_1(C_j, x_0)\mathcal{M}_j) \cdot \frac{x_0 - C_j}{|x_0 - C_j|} \int_{-\theta}^{\theta} g(\eta) \chi(\eta, C_j) ds(\eta) \\ &\quad + \sum_{j=1}^M \psi_2(C_j, x_0)\mathcal{M}_j \cdot \frac{x_0 - C_j}{|x_0 - C_j|} \int_{-\theta}^{\theta} g(\eta) \eta \chi(\eta, C_j) ds(\eta) \end{aligned} \quad (5.15)$$

that shows in particular that the operator $(\tilde{N}g)$ has finite rank. It is therefore possible to investigate a MUSIC type algorithm to characterize its range and therefore get the location of the small inhomogeneities.

We start with the following observation:

Lemma 1. *Let us define the set $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ with*

$$\mathcal{A}_1 = \{\eta \in [-\theta, \theta] \mapsto e^{i\eta r_j} \mid j \in \{1, 2, \dots, M\}\}, \mathcal{A}_2 = \{\eta \in [-\theta, \theta] \mapsto \eta e^{i\eta r_j} \mid j \in \{1, 2, \dots, M\}\},$$

with $(r_j)_{j=1}^M$ being strictly increasing sequence of real numbers. Then $\mathcal{A}$ forms a family of linearly independent functions.

Proof. Suppose that we have $\alpha = (\beta, \gamma) \in \mathbb{C}^{2M}$ such that:

$$\sum_{j=1}^M (\beta_j + \eta \gamma_j) e^{i\eta r_j} = 0, \text{ for all } \eta \in [-\theta, \theta].$$

Next consider the function f ,

$$f: \eta \in \mathbb{C} \mapsto \sum_{j=1}^M (\beta_j + \eta \gamma_j) e^{i\eta r_j}.$$

By the analyticity of this function $f(\eta) = 0$ in $[-\theta, \theta]$ implies that $f(\eta) = 0$ in all $\mathbb{C}$. Observe that a multiplication of f by $e^{-ir_1\eta}/\eta$ gives that for all $\eta \in i\mathbb{R}$,

$$\left(\frac{\beta_1}{\eta} + \gamma_1\right) + \sum_{j=2}^M \left(\frac{\beta_j}{\eta} + \gamma_j\right) e^{i\eta(-r_1+r_j)} = 0 \quad (5.16)$$

and therefore choosing $\eta = i\xi$ and letting $\xi \rightarrow +\infty$ implies that $\gamma_1 = 0$. Then multiplying (5.16) with η and letting $\xi \rightarrow +\infty$ implies $\beta_1 = 0$. An induction argument then implies

$$\gamma_j = \beta_j = 0, \forall j \in \{1, 2, \dots, M\}.$$

□

We prove a similar result for the functions that generate the range of the operator $\tilde{N}$. According to (5.15), this range is generated by the functions $\Psi_{1,j}, \Psi_{2,j}$, defined for $x \in \mathbb{T}$ by:

$$\begin{aligned}\Psi_{1,j}(x, C_j) &:= \tau_j \psi_0(x, C_j) + \psi_1(x, C_j) \cdot \mathcal{M}_j \frac{x - C_j}{|x - C_j|} \\ \Psi_{2,j}(x, C_j) &:= \psi_2(x, C_j) \cdot \mathcal{M}_j \frac{x - C_j}{|x - C_j|}\end{aligned}\tag{5.17}$$

for $j = 1, 2, \dots, M$. Although some of the results below can be generalized to the case of arbitrary form of positive polarization tensor $\mathcal{M}_j$, we are able to prove the main result only in the case where these polarization tensors are diagonal, i.e.

$$\mathcal{M}_j = \lambda_j I_3, \quad j = 1, 2, \dots, M\tag{5.18}$$

with $\lambda_j \geq 0$. This corresponds to the case of spherical inclusions. This assumption will be made in all the remaining of this chapter otherwise indicated.

In the case where (5.18) holds, we can express $\Psi_{1,j}(x_0), \Psi_{2,j}(x_0)$ for all x_0 in $\mathbb{T}$ as follows,

$$\begin{aligned}\Psi_{1,j}(x, C_j) &= \tau_j \Phi^2(x, C_j) + \lambda_j \Phi^2(x, C_j) \left(ik - \frac{1}{|x - C_j|} \right)^2 \\ \Psi_{2,j}(x, C_j) &= -ik \lambda_j \Phi^2(x, C_j) \left(ik - \frac{1}{|x - C_j|} \right) \frac{C_j \cdot \vec{v}}{|x - C_j|^2}\end{aligned}\tag{5.19}$$

where $(x - C_j) \cdot \vec{v} = -C_j \cdot \vec{v}$ comes from the fact that $x \in \mathbb{T}$. In particular these functions are of the form

$$\Psi(x, z) = \frac{e^{2ik|x-z|}}{|x-z|^2} p(1/|x-z|)\tag{5.20}$$

with p a polynomial function. We first prove the following lemma

Lemma 2. Assume that $\mathbb{T} = \mathbb{R}\vec{u} + H\vec{w}$. Let $z \in \mathbb{R}^3$ and assume that for all $j = 1, \dots, M$ the equality

$$|z - x_0| = |C_j - x_0| \quad \forall x_0 \in \mathbb{T}$$

is not verified. Then the function $x_0 \in \mathbb{T} \mapsto \Psi(x_0, z)$ of the form (5.20) with $p(0) \neq 0$ cannot be in the range of $\tilde{N}$.

Proof. Let us make a change of the origin so that $\mathbb{T} = \mathbb{R}\vec{u}$. The points x_0 have then $(r, 0, 0)$, $r \in \mathbb{R}$ as coordinates with respect to the orthonormal basis $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$. We denote by (r_j, η_j, ξ_j) the coordinates of the point C_j , $j = 1, \dots, M$ in the new system and by (r_0, η_0, ξ_0) the coordinates of the point z . We observe that

$$|z - x_0| = |C_j - x_0| \quad \forall x_0 \in \mathbb{T}$$

is equivalent to

$$r_0 = r_j \text{ and } \eta_0^2 + \xi_0^2 = \eta_j^2 + \xi_j^2.$$

To shorten the notation let us set $\beta_j = \sqrt{\eta_j^2 + \xi_j^2}$, $j = 0, \dots, M$ and set $C_0 = z$. We observe that

$$|C_j - x_0|^2 = (r - r_j)^2 + \beta_j^2.$$

Therefore,

$$|C_j - x_0| = |r - r_j| \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\beta_j^2}{|r - r_j|^2} + O\left(\frac{1}{|r - r_j|^4}\right) \right) \quad (5.21)$$

as $|r| \rightarrow \infty$. Let us now prove the lemma statement by a contradiction argument. Assume that the function $x_0 \in \mathbb{T} \mapsto \Psi(x_0, C_0)$ of the form (5.20) is in the range of $\tilde{N}$. Then there exists $\alpha_j \in \mathbb{C}$ such that

$$\frac{e^{2ik|x_0 - C_0|}}{|x_0 - C_0|^2} p(1/|x_0 - C_0|) = \sum_{j=1}^M \alpha_j \frac{e^{2ik|x_0 - C_j|}}{|x_0 - C_j|^2} p_j(1/|x_0 - C_j|) \quad (5.22)$$

where p_j , $j = 1 \cdots M$ are polynomial functions. This implies in particular that

$$\left(\frac{e^{2ik(r-r_0)}}{(r-r_0)^2} p(0) - \sum_{j=1}^M \alpha_j \frac{e^{2ik(r-r_j)}}{(r-r_j)^2} p_j(0) \right) (1 + O(1/|r|)) = 0$$

for $r \rightarrow +\infty$. We then deduce that

$$\frac{e^{2ik(r-r_0)}}{(r-r_0)^2} p(0) = \sum_{j=1}^M \alpha_j \frac{e^{2ik(r-r_j)}}{(r-r_j)^2} p_j(0)$$

for r sufficiently large. Analyticity argument similar to above then implies that this equality should hold for all $r \in \mathbb{R}$ which gives a contradiction if $r_0 \neq r_j$ for all $j = 1, \dots, M$ since the right hand side is then regular at $r = r_0$ while the left hand side is not. We then conclude that

$$r_0 = r_{j_0}$$

for some $j_0 \in [1, \dots, M]$. We also deduce, using the same arguments that $\alpha_j p_j(0) = 0$ if $r_j \neq r_0$. We now reorder the index j so that $r_j = r_0$ for $j = 1, \dots, M_0$ with $M_0 \geq 1$. This implies that equality (5.22) can be written as,

$$\frac{e^{2ik\sqrt{(r-r_0)^2 + \beta_0^2}}}{(r-r_0)^2 + \beta_0^2} p(1/\sqrt{(r-r_0)^2 + \beta_0^2}) = \sum_{j=1}^{M_0} \alpha_j \frac{e^{2ik\sqrt{(r-r_0)^2 + \beta_j^2}}}{(r-r_0)^2 + \beta_j^2} p_j(1/\sqrt{(r-r_0)^2 + \beta_j^2}).$$

Considering $r \rightarrow +\infty$ and using the second term in the asymptotic expansion (5.21) we then deduce that

$$\frac{e^{ik\frac{\beta_0^2}{r-r_0}}}{(r-r_0)^2 + \beta_0^2} p(0) = \sum_{j=1}^{M_0} \alpha_j \frac{e^{ik\frac{\beta_j^2}{r-r_0}}}{(r-r_0)^2 + \beta_j^2} p_j(0)$$

for r sufficiently large. Again, by analyticity argument, this equality then should hold for $r \in \mathbb{C}$. Taking $r = r_0 - i\zeta$, $\zeta > 0$, and letting $\zeta \rightarrow 0$ we obtain that β_0^2 should coincide with some $\beta_{j_0}^2$ otherwise the blow up of left hand side as $\zeta \rightarrow 0$ cannot be equivalent to the right hand side. We finally conclude that $(r_0, \beta_0) = (r_{j_0}, \beta_{j_0})$ for some $j_0 \in [1, \dots, M]$ which contradicts the assumption of the lemma and finishes the proof. $\square$

We are now in position to prove one of the main results of this chapter. We will refer to

“monopolar inclusion” the inclusion for which $\mathcal{M}_j = 0$ and “dipolar inclusion” the case where $\tau_j = 0$. We refer to “multipolar inclusion” the one for which $\mathcal{M}_j \neq 0$ and $\tau_j \neq 0$. In the following we shall define

$$\begin{aligned}\Psi_1(x, z) &:= \Phi^2(x, z), \\ \Psi_2(x, z) &:= \Phi^2(x, z) \left(ik - \frac{1}{|x-z|} \right)^2, \\ \Psi_3(x, z) &:= \Phi^2(x, z) \left(ik - \frac{1}{|x-z|} \right) \frac{1}{|x-z|^2}.\end{aligned}\tag{5.23}$$

The function Ψ_1 will be used to localize monopolar inclusions, the function Ψ_2 can be used for dipolar inclusions while the function Ψ_3 will be used to localize the case non mono-polar inclusions (for instance multipolar inclusions).

Theorem 4. *Assume that $\mathbb{T} = \mathbb{R}\vec{u} + H\vec{w}$ and $C_j \cdot \vec{v} \neq C_i \cdot \vec{v}$ if $i \neq j$ for $i, j = 1, \dots, M$. Consider $z \in \mathbb{R}^3$ and consider the functions $\Psi_\ell(\cdot, z)$ $\ell = 1, 2, 3$ defined by (5.23). Then the following statements are equivalent:*

- (i) $x_0 \in \mathbb{T} \mapsto \Psi_\ell(x_0, z)$ is in the range of $\tilde{N}$;
- (ii) $|z - x_0| = |C_j - x_0|$, for all $x_0 \in \mathbb{T}$ and for some $j \in \{1, 2, \dots, M\}$ and $\lambda_j = 0$ if $\ell = 1$, $\tau_j = 0$ if $\ell = 2$ and $\lambda_j C_j \cdot \vec{v} \neq 0$ if $\ell = 3$.

Proof. If the equality $|z - x_0| = |C_j - x_0|$, for all $x_0 \in \mathbb{T}$ does not hold for any $j \in \{1, 2, \dots, M\}$ then, using Lemma 2 we immediately see that (i) cannot be verified. Assume that the equality hold for some index j , that $\ell = 1$ and $\lambda_j \neq 0$. If (i) is verified, then using Lemma 2 we deduce that

$$\Psi_1(x_0, C_j) = \alpha_1 \lambda_j \Psi_2(x_0, C_j) + \alpha_2 ik \lambda_j C_j \cdot \vec{v} \Psi_3(x_0, C_j) \quad \forall x_0 \in \mathbb{T}$$

for some constants α_1 and α_2 . This gives a contradiction by dividing the equality by $\Phi_2(x_0, C_j)$ and letting $|x_0 - C_j| \rightarrow \infty$. The other cases ($\ell = 2$ and $\tau_j \neq 0$) and ($\ell = 3$ and $\lambda_j C_j \cdot \vec{v} = 0$) can be used the same reasoning.

We now prove that if (ii) is verified then $x_0 \in \mathbb{T} \mapsto \Psi_\ell(x_0, z)$ is in the range of $\tilde{N}$. Denote by j_0 the index such that $|z - x_0| = |C_{j_0} - x_0|$ for all $x_0 \in \mathbb{T}$. According to Lemma 1 and the assumptions of $C_j \cdot \vec{v}$, the functions $g_1^j : \eta \in [-\theta, \theta] \mapsto \chi(\eta, C_j)$ and $g_2^j : \eta \in [-\theta, \theta] \mapsto \eta \chi(\eta, C_j)$, $j = 1, \dots, M$ are linearly independent. Therefore one can choose g such that

$$\int_{-\theta}^{\theta} g(\eta) g_{\ell'}^j(\eta) d\eta = \delta_j^{j_0} \delta_{\ell'}^{\ell} \alpha$$

$\ell' = 1, 2$ and $j = 1, \dots, M$. The constant $\alpha = \tau_j$ if $\ell = 1$, $\alpha = \lambda_j$ if $\ell = 2$ and $\alpha = -ik \lambda_j C_j \cdot \vec{v}$ if $\ell = 3$. Expression (5.15) then immediately shows that

$$\tilde{N}g(x_0) = \Psi_\ell(x_0, z) \quad x_0 \in \mathbb{T}$$

which concludes the proof. $\square$

This theorem clearly shows that one can recover the two cylindrical coordinates (r_j, β_j) of the points C_j with respect to $\mathbb{T}$ (see the proof of Lemma 2 for the definition of (r_j, β_j)) using the range of the operator $\tilde{N}$ if the points C_j satisfy the additional assumption in the Theorem. However, it does not tell what happens if $C_j \cdot \vec{v} = C_i \cdot \vec{v}$ for some $j \neq i$. The following extension shows that one may not be able to recover the location of those points using the range of the operator $\tilde{N}$ but still can recover (the two cylindrical coordinates) of the other points.

Theorem 5. Assume that $\mathbb{T} = \mathbb{R}\vec{u} + H\vec{v}$. Let us denote by $\mathcal{I}_0$ be the maximal set of indices such that

- if $C_j \cdot \vec{v} = C_i \cdot \vec{v}$ for $i \neq j \in \mathcal{I}_0$ then $|C_i - x_0| = |C_j - x_0|$ for all $x_0 \in \mathbb{T}$.
- $C_j \cdot \vec{v} \neq C_i \cdot \vec{v}$ for $j \in \mathcal{I}_0$ and $i \notin \mathcal{I}_0$.

Consider $z \in \mathbb{R}^3$, the functions $\Psi_\ell(\cdot, z)$ $\ell = 1, 2, 3$ defined by (5.23) and the following statements:

- (i) $x_0 \in \mathbb{T} \mapsto \Psi_\ell(x_0, z)$ is in the range of $\tilde{N}$;
- (ii) $|z - x_0| = |C_j - x_0|$, for all $x_0 \in \mathbb{T}$ and $\lambda_j = 0$ if $\ell = 1$, $\tau_j = 0$ if $\ell = 2$ and $\lambda_j C_j \cdot \vec{v} \neq 0$ if $\ell = 3$.

If (ii) holds for some $j \in \mathcal{I}_0$ then (i) is verified. If (ii) does not hold for any $j \in [1, \dots, M]$ then (i) is not verified.

Consider now the case where all the inclusions are monopolar ($\lambda_j = 0, j \in [1, \dots, M]$) and $\ell = 1$ or the case where all the inclusions are dipolar ($\tau_j = 0, j \in [1, \dots, M]$) and $\ell = 2$ or the case where $\lambda_j C_j \cdot \vec{v} \neq 0$ for all $j \in [1, \dots, M]$ and $\ell = 3$. Then if (ii) does not hold for any $j \in \mathcal{I}_0$ then (i) is not verified.

Proof. Let us first remark that in the case $|C_i - x_0| = |C_j - x_0|$ for all $x_0 \in \mathbb{T}$ and $C_j \cdot \vec{v} = C_i \cdot \vec{v}$ one does not change the operator $\tilde{N}$ if we eliminate C_i and replace λ_j and τ_j by $2\lambda_j$ and $2\tau_j$. Those points play also the same role in (ii). This is why one can assume, without loss of generality that if $i, j \in \mathcal{I}_0$ then $C_j \cdot \vec{v} \neq C_i \cdot \vec{v}$.

The proof of (ii) verified for some $j \in \mathcal{I}_0$ implies (i) is then the same as in the proof of Theorem 4 since the functions g_ℓ^j , $\ell = 1, 2$ and $j \in \mathcal{I}_0$ are linearly independent and do not belong to the space spanned by g_ℓ^j , $\ell = 1, 2$ and $j \notin \mathcal{I}_0$. Therefore, for $j_0 \in \mathcal{I}_0$, $\ell = 1, 2$, one can still choose $g \in L^2(-\theta, \theta)$ such that

$$\int_{-\theta}^{\theta} g(\eta) g_{\ell'}^j(\eta) d\eta = \delta_j^{j_0} \delta_{\ell'}^{\ell} \alpha$$

$\ell' = 1, 2$ and $j = 1, \dots, M$ and $\alpha = \tau_j$ if $\ell = 1$, $\alpha = \lambda_j$ if $\ell = 2$ and $\alpha = -ik\lambda_j C_j \cdot \vec{v}$ if $\ell = 3$.

Consider now the case where (ii) is not satisfied. We only need to consider the case where $|z - x_0| = |C_j - x_0|$, for all $x_0 \in \mathbb{T}$ and for some $j \notin \mathcal{I}_0$. The other cases fall in the proof of the first part of Theorem 4. For the case $j \notin \mathcal{I}_0$ we have, by assumption, that $C_j \cdot \vec{v} = C_i \cdot \vec{v}$ for some $i \neq j$, $i \in \mathcal{I}_0$ and $|C_i - x_0| \neq |C_j - x_0|$ for some x_0 in $\mathbb{T}$. If the function $x_0 \in \mathbb{T} \mapsto \Psi_\ell(x_0, C_j)$ is in the range of $\tilde{N}$, then we conclude from Lemma 2 that

$$\Psi_\ell(x_0, C_j) = \alpha_1 \sum_{k, C_j \cdot \vec{v} = C_k \cdot \vec{v}} \Psi_{1,k}(x_0, C_k) + \alpha_2 \sum_{k, C_j \cdot \vec{v} = C_k \cdot \vec{v}} \Psi_{2,k}(x_0, C_k) \quad x_0 \in \mathbb{T}$$

where

$$\alpha_\ell = \int_{-\theta}^{\theta} g(\eta) g_\ell^j(\eta) d\eta$$

for some function $g \in L^2(-\theta, \theta)$. To simplify the argument, assume that the sum on the right hand side is only for $k = i$ and $k = j$. The other case can be treated similarly regrouping the points that have the same cylindrical coordinates (r_k, β_k) with respect to $\mathbb{T}$ (see the proof of Lemma 2 for the definition of these coordinates). Using Lemma 2 we then conclude that

$$\alpha_1 \Psi_{1,i}(x_0, C_i) + \alpha_2 \Psi_{2,i}(x_0, C_i) = 0 \quad x_0 \in \mathbb{T} \quad (5.24)$$

and

$$\Psi_\ell(x_0, C_j) = \alpha_1 \Psi_{1,j}(x_0, C_j) + \alpha_2 \Psi_{2,j}(x_0, C_j) \quad x_0 \in \mathbb{T}. \quad (5.25)$$

Let us treat the case where all the inclusions are monopolar ($\lambda_j = 0, j \in [1, \dots, M]$) and $\ell = 1$. In this case $\Psi_{2,j} = \Psi_{2,i} = 0$. Then (5.24) implies $\alpha_1 = 0$ and (5.25) implies $\alpha_1 \tau_j = 1$ which is a contradiction. Consider the case where all the inclusions are dipolar and $\ell = 2$. Equation (5.24) implies after simplifying by $\Phi(x_0, C_i)^2$ and letting $|x_0 - C_i| \rightarrow \infty$ that $\alpha_1 = 0$. Similarly, equation (5.25) implies after simplifying by $\Phi(x_0, C_j)^2$ and letting $|x_0 - C_j| \rightarrow \infty$ that $\alpha_1 \lambda_j = 1$ which is a contradiction. The last case can be treated similarly to the dipolar case and the proof is complete. $\square$

As complement to Theorem 5 we remark that in the case where there are mixtures of monopolar and dipolar inclusions one may recover a point C_j with $j \notin \mathcal{I}_0$, i.e. (i) still holds for this point. This is the case for instance if $\ell = 3$, the point C_j corresponds with a multipolar inclusion while the points C_i such that $C_i \cdot \vec{v} = C_j \cdot \vec{v}$ are monopolar inclusions. This is why the implication (ii) verified for some $j \notin \mathcal{I}_0$ implies (i) is not verified cannot hold in all cases. The theorem however indicates that it is generically true.

We have constructed, by Theorem 4, a characterization of the two cylindrical coordinates (r_j, β_j) of the points C_j using the range of the operator $\tilde{N}$. For numerical implementations, we exploit the MUSIC algorithm as explained in the previous chapter. This algorithm is based on the fact that $\text{Range} \tilde{N} = (\ker \tilde{N}^*)^\perp$ (this equality is due to the fact that $\text{Range} \tilde{N}$ is finite dimensional and therefore is a closed space). Therefore $\Psi_\ell(\cdot, z) \in \text{Range} \tilde{N}$ if and only if $\Psi_\ell(\cdot, z) \in (\ker \tilde{N}^*)^\perp$. Let us consider $\tilde{\mathbb{P}}$ the orthogonal projection on $\ker \tilde{N}^*$. Then $\Psi_\ell(\cdot, z) \in \text{Range} \tilde{N}$ if and only if $\tilde{\mathbb{P}} \Psi_\ell(\cdot, z) = 0$. This is the criterion that will be exploited numerically.

For the numerical examples we will use the operator N (which give a best representation of the exact data). This operator can be seen as a noisy version of $\tilde{N}$. Let us consider $\mathbb{P}$ the orthogonal projection on an approximation (that will be indicated later) of the kernel of N^* , $\ker N^*$. Defining the function

$$I(z) = \sum_{\ell=1}^3 \|\mathbb{P} \Psi_\ell(\cdot, z)\|^{-1}$$

we expect that (under some appropriate assumptions indicated in Theorem 4) this function will have large values for z close to one of the circles defined by:

$$\mathcal{C}_j := \{z \in \mathbb{R}^3 : |z - x_0| = |C_j - x_0| \quad \forall x_0 \in \mathbb{T}\}, \quad j = 1, 2, \dots, M.$$

To compute the imaging function $I(z)$ we shall use the singular value decomposition of the near field operator $\tilde{N}$ denoted by $(v_k, s_k, u_k), k = 1, 2, \dots$ where $v_k \in L^2(\mathbb{T})$, $u_k \in L^2([-\theta, \theta])$ are respectively the left and right singular vectors and s_k is the corresponding singular value. The orthogonal projection $\mathbb{P}$ will be defined as

$$\mathbb{P} \psi = \sum_{s_k \leq \epsilon} (\psi_\ell, v_k) v_k \quad (5.26)$$

where ϵ is a user parameter that will be fixed so that $\mathbb{P}$ can be considered as a good approximation of $\ker N^*$. The numerical examples will show that this parameter can be easily fixed in the case

of a small number of inclusions. Summarizing, the indicator functional I is then computed as

$$I(z) = \sum_{\ell=1}^3 \left(\sum_{s_k \leq \epsilon} \left| \int_{\mathbb{T}} \Psi_{\ell}(x_0, z) \cdot v_k(x_0) ds(x_0) \right|^2 \right)^{-1}. \quad (5.27)$$

Indeed this indicator function will give us (under some assumptions) only the circles $\mathcal{C}_j$. We shall discuss later how one can retrieve the points C_j combining the use of different paths $\mathbb{T}$. We shall also discuss how one can avoid the degenerated cases indicated in Theorem 5.

5.3 Numerical Algorithms and Experiments

Before the presentation of some inversion strategies and numerical results associated with the theoretical background of the previous section, we first give some details related to the implementation of the indicator function (5.27).

5.3.1 Notation and Preliminaries

We shall refer to “Line Configuration” the choice of the path $\mathbb{T}$ being a line. We denote by L the number of source points locations and we assume that we have R receivers at each source position.

The modeling of the acquisition data in the quasi-backscattering configuration is represented by the response matrix $\mathbb{F}$ (data) in the following equation (5.36) (that approximate the near field operator N given by (5.12)).

$$\mathbb{F}_{n,r} := \delta^3 \left(\sum_{j=1}^M \nabla \Phi(x_0^n + \eta_r \vec{v}, C_j) \cdot \mathcal{M}_j \nabla \Phi(x_0^n, C_j) + \tau_j \Phi(x_0^n + \eta_r \vec{v}, C_j) \Phi(x_0^n, C_j) \right) \quad (5.28)$$

where η_r refers to the discretization points of the segment $[\theta, \theta]$, $1 \leq r \leq R$ and x_0^n refers to the sources positions $1 \leq n \leq L$. We recall that δ is related to the size of the inclusions while $\mathcal{M}_j$ the polarization tensor and τ_j contain information about the electromagnetic properties of the inclusion located at C_j (see Theorem 2).

In order to avoid the inverse crime we also consider the case of noisy measurements by applying our algorithm to the noisy operator

$$\tilde{\mathbb{F}}_{n,r} := \mathbb{F}_{n,r} (1 + \sigma \mathbb{D}_{n,r}) \quad 1 \leq n \leq L \quad 1 \leq r \leq R$$

where $\mathbb{D}_{n,r}$ are random complex numbers uniformly distributed in the unit square $|\mathbb{D}_{n,r}| \leq 1$ and σ denotes the noise level .

Parameters for the probed region For all the numerical examples, the region containing all the targets is taken as a volume $\mathbb{V} = [-A; B] \times [-a; b] \times [-p; h]$, of dimension $20\lambda \times 20\lambda \times 11\lambda$, with $(A = B = a = b = p = 10\lambda)$ and $h = \lambda$, with $\lambda = 1cm$ being the wavelength.

Response Matrix and SVD decomposition Notice that to compute the imaging functional I we need to calculate the singular value decomposition (SVD) of $\tilde{\mathbb{F}}$. This is done using the predefined Matlab function `svd`.

It also should be noted that the orthogonal projection $\mathbb{P}$ (see (6.9)) depends on the choice of the parameter ϵ or equivalently on the index k_0 such that

$$\sigma_{k_0} \leq \epsilon < \sigma_{k_0-1}.$$

According to the previous section, k_0 should be greater than the inclusions number M if these inclusions are all monopolar inclusions while k_0 should be greater than $2M$ if the inclusions are all dipolar.

From the practical point of view, the number k_0 can be determined as the index corresponding with a sharp decrease in the singular values. We shall illustrate in the numerical examples how this sharp decrease can be easily identified (for relatively small amount of noise).

Parameters for the sources/receivers The data are collected on a grid in the plane Σ : the line source path $\mathbb{T}$ of length $L = 24\lambda$, contains $L = 49$ sources placed at the height $H = 10\lambda$ from the plane $\Pi_0 = \{z \in \mathbb{R}^3 : z \cdot \vec{w} = 0\}$ and oriented in the direction $\vec{u}$. These sources are uniformly distributed with the distance $\frac{\lambda}{2}$. For all point source $x_0 \in \mathbb{T}$, $R = 21$ receivers are oriented in the second direction $\vec{v}$ and are uniformly distributed in an aperture of length 5λ with a step $\frac{\lambda}{4}$.

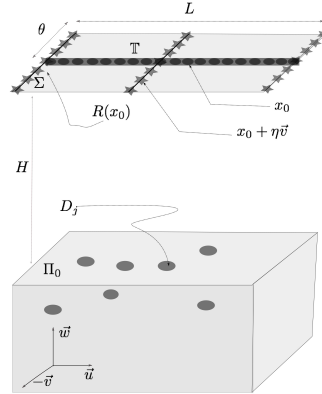


Figure 5.3 – The location Σ of the sources x_0^n in $\mathbb{T}$ and receivers $x_0^n + \eta_r \vec{v}$, $n = 1, 2, \dots, L$ and $r = 1, 2, \dots, R$.

5.3.2 Discussion of the case of monopolar inclusions

To discuss the imaging technique, we propose to study first the specific case of monopolar inclusions. This case is more simpler than the dipolar case since one does not need to have a priori knowledge on the inclusion shape. Moreover, it turns out that the choice of the test function for this case is the most efficient even in the general case (which is not indeed indicated by the theory). With the same notation as previously in this specific case the response matrix

is given by:

$$\mathbb{F}_{n,r} = \delta^3 \sum_{j=1}^M \tau_j \Phi(x_0^{(n)}, C_j) \Phi(x_0^{(n)} + \eta_r \vec{v}, C_j)$$

and according to Theorem 4, since $\lambda_j = 0$, the test function has to be chosen as

$$\Psi(x_0, z) = \Psi_1(x_0, z) = \Phi^2(x_0, z).$$

Let us observe that in this case we do not encounter the problem of planes where $\Psi(\cdot, z) = 0$, which is the case of $\Psi_2(x_0, z)$. This help having more flexibility in the choice of the paths for collecting the data. We shall discuss two different strategies to determine the inclusions locations depending on this choice of sources paths.

Mono-directional sources path

We discuss in this paragraph the algorithm associated with a fixed direction $\vec{u}$ for the sources path. Since a single source path is capable to only locate a circle containing the inclusion location, one needs to use more than one source path in order to retrieve this location.

We shall use two parallel paths $\mathbb{T} = \mathbb{T}_1$ and $\mathbb{T} = \mathbb{T}_2$ that are in the same plane Σ . The line $\mathbb{T}_2$ can be defined as the translation of $\mathbb{T}_1$ in the second direction $\vec{v}$ with a distance Δ .

For all $j \in \{1, 2, \dots, M\}$ we define $\Pi^{(j)} := \{z \in \mathbb{R}^3 : z \cdot \vec{u} = C_j \cdot \vec{u}\}$, and define in this plane $\Pi^{(j)}$ the two circles:

$$\mathcal{C}_j^{(1)} := \left\{ z \in \Pi^{(j)} \mid |x_0 - z| = |x_0 - C_j|, \forall x_0 \in \mathbb{T}_1 \right\}$$

and

$$\mathcal{C}_j^{(2)} := \left\{ z \in \Pi^{(j)} \mid |x_0 - z| = |x_0 - C_j|, \forall x_0 \in \mathbb{T}_2 \right\}$$

that contain the location C_j . We now explain how to exploit the condition (ii) of Theorem 5 to design an algorithm reconstructing the point C_j . It is important to mention here that we treat only the case where $\mathcal{I}_0 = \{1, \dots, M\}$, i.e. it coincides with the set of all the inclusions. We shall discuss later the case where this does not hold.

The determination of C_j for all $j \in \mathcal{I}_0$ in the considered region is based on the following 3 steps:

- In one plane containing $\mathbb{T}_1$, we reconstruct the first component $C_j \cdot \vec{u}$ of the defect location.
- In the plane $\Pi^{(j)}$ and with the measurement data from $\mathbb{T}_1$ we reconstruct the circle $\mathcal{C}_j^{(1)}$.
- In the same plane $\Pi^{(j)}$, but now using data from $\mathbb{T}_2$, we reconstruct the circle $\mathcal{C}_j^{(2)}$.

The geometric intersection between the two circles $\mathcal{C}_j^{(1)}, \mathcal{C}_j^{(2)}$ in the plane $\Pi^{(j)}$ defined above, and the fact that all the inclusions are located only in the half space $\mathbb{R}_-^3$, allow us to retrieve the points C_j for all $j = 1, 2, \dots, M$.

Algorithm description We explain now how we implement the indicated procedure. Since there is noise in the data, the circles $\mathcal{C}_j^{(1)}$ cannot be determined exactly. We opt in evaluating directly the intersection using the criterion $I(z)$. More specifically let us denote

$$I_\ell(z) := \frac{1}{\|\mathbb{P}_\ell \Psi(\cdot, z)\|_{L^2(\mathbb{T}_\ell)}} \quad (5.29)$$

where $\mathbb{P}_\ell$ is the projection operator $\mathbb{P}$ associated with the path configuration $\mathbb{T}_\ell$. The intersection between the two circles can be visualized using the indicator function

$$I(z) = \frac{1}{\|\mathbb{P}_1\Psi(\cdot, z)\|_{L^2(\mathbb{T}_1)} + \|\mathbb{P}_2\Psi(\cdot, z)\|_{L^2(\mathbb{T}_2)}}, z \in \Pi^{(j)}. \quad (5.30)$$

This function is supposed to have large values only at the intersection of the two circles. This can be justified by the fact that if the data for the paths $\mathbb{T}_1$ and $\mathbb{T}_2$ respectively correspond with the approximate operators $\tilde{N} = \tilde{N}_1$ and $\tilde{N} = \tilde{N}_2$ (with obvious notation), then according to Theorem 4

$$\mathbb{P}_1\Psi(\cdot, z) = 0 \text{ and } \mathbb{P}_2\Psi(\cdot, z) = 0.$$

if and only if $z \in \mathcal{C}_j^{(1)} \cap \mathcal{C}_j^{(2)}$. This is provided that $C_l \cdot \vec{v} \neq C_m \cdot \vec{v}$, $l \neq m \in \{1, 2, \dots, M\}$. The imaging procedure is then based on the following algorithm (Algorithm 1) where Σ_0 denote a plane containing $\mathbb{T}_1$.

Algorithm 1 Reconstruction of C_j , $\mathcal{I}_0 = \mathcal{I}$

Input: $\mathbb{F}_1, \mathbb{F}_2, \Psi, \mathbb{T}_1, \mathbb{T}_2, \Sigma_0$

Output: C_j .

1. **Compute:** $I_1(z)$, $z \in \Sigma_0$. **Identify :** $C_j \cdot \vec{u}$, **Then:** $\Pi^{(j)}$, $j = 1, 2$.
 2. **Compute** $I_1(z)$, $z \in \Pi^{(j)}$. **Visualize** $\mathcal{C}_j^{(1)}$.
 3. **Compute** $I_2(z)$, $z \in \Pi^{(j)}$. **Visualize** $\mathcal{C}_j^{(2)}$.
 4. **Visualize** the intersection of $\mathcal{C}_j^{(1)}$ and $\mathcal{C}_j^{(2)}$ using (5.30). **Identify** the point $C_j \in \Pi^{(j)}$.
-

Multi-directional sources path

A natural idea to handle the situations where $C_m \cdot \vec{v} = C_l \cdot \vec{v}$ for some index $m \neq l$ is to use a different direction of the path T , let us say $\vec{u}'$ which is linearly independent from $\vec{u}$. If one wants to keep in mind the application to Tandem, the new direction $\vec{u}'$ should lay in the same plane Σ . This configuration does not allow to avoid all pathological configurations. Using sources path in the plane Σ (or in parallel planes to Σ) does not allow to distinguish locations that are in the same vertical line orthogonal to the plane Σ . Obviously if

$$C_l = C_m + \beta \vec{w}$$

then $C_l \cdot \vec{v} = C_m \cdot \vec{v}$ for all direction $\vec{v}$ such that $\vec{w} \cdot \vec{v} = 0$. We summarize this in the following theorem that can be seen as a direct consequence of Theorem 5 and the discussion above.

We denote by Π_Σ the orthogonal projection on the plane Σ and $\mathbb{T}'$ a line sources path directed along the unitary direction $\vec{u}'$ that we can suppose of the form $\mathbb{T}' = \mathbb{R}\vec{u}' + H\vec{w}$. We denote by $\vec{v}'$ the unitary vector such that $(\vec{u}', \vec{v}', \vec{w})$ is an orthonormal basis of $\mathbb{R}^3$. We also denote by $\tilde{N}'$ the near-field approximate operator associated with $\mathbb{T}'$ and defined as in (5.13).

Theorem 6. Assume that $\mathbb{T} = \mathbb{R}\vec{u} + H\vec{w}$ and $\mathbb{T}' = \mathbb{R}\vec{u}' + H\vec{w}$. Let $\mathcal{I}_0$ be the maximal set of indices such that $\Pi_\Sigma C_j \neq \Pi_\Sigma C_i$ for $i \neq j$ in $\mathcal{I}_0$ and $\Pi_\Sigma C_j \neq \Pi_\Sigma C_i$ for $i \in \mathcal{I}_0$ and $j \notin \mathcal{I}_0$. Then the following statements are equivalent:

- (i) $x_0 \in \mathbb{T} \mapsto \Psi_1(x_0, z)$ is in the range of $\tilde{N}$ or $x_0 \in \mathbb{T}' \mapsto \Psi_1(x_0, z)$ is in the range of $\tilde{N}'$
- (ii) The equality $|z - x_0| = |C_j - x_0|$ holds either for all $x_0 \in \mathbb{T}$ or for all $x_0 \in \mathbb{T}'$ and for some $j \in \mathcal{I}_0$.

Combining this strategy with the one discussed for the mono-directional path we then can propose the following two options to retrieve the points C_j , $j \in \mathcal{I}_0$. We consider the same setting as for the mono-directional case and add the indicator functions

$$I'_\ell(z) := \frac{1}{\|\mathbb{P}'_\ell \Psi(\cdot, z)\|_{L^2(\mathbb{T}'_\ell)}} \quad (5.31)$$

and

$$I'(z) = \frac{1}{\|\mathbb{P}'_1 \psi(\cdot, z)\|_{L^2(\mathbb{T}'_1)} + \|\mathbb{P}'_2 \psi(\cdot, z)\|_{L^2(\mathbb{T}'_2)}}, z \in \Pi^{(j)}. \quad (5.32)$$

where the definitions for the operators and functions with prime is the same as in (5.29) and (5.32) replacing $\vec{u}$ with $\vec{u}'$, $\mathbb{T}_\ell$ with $\mathbb{T}'_\ell$, etc.

The two possible algorithms are the following:

— **Option 1:**

1. Apply Algorithm 1 twice, one for $\mathbb{T}_\ell$ and one for $\mathbb{T}'_\ell$,
2. Take the union of reconstructed points

— **Option 2:**

1. Evaluate the function $I_{3D} : z \mapsto I(z) + I'(z)$ for all points z in the 3D probed domain
2. Identify the points as inside the regions delimited by the level set $I_{3D} = C$ where C is a sufficiently high constant chosen by the user.

The algorithm in Option 2 may appear more expensive since we evaluate I_{3D} for a larger number of sampling points z . However, it is much simpler to program and directly give the 3D location of the points. The tuning of the value of C may depend on the strength of the scattering points. The higher is this value the greater is the probability to miss some of the points C_j . A decisive advantage of Option 2 is that it can be easily adapted to the use of more than two path directions.

For instance assume that we use a number p of paths that we denote with $\vec{u}_a$, $a = 1, \dots, p$. Denote by $\mathbb{T}_\ell^a$, $\ell = 1, 2$ the associate (two parallel paths) and use superscript a to denotes the quantities related to this choice of paths. The 3D indicator function can then be chosen as

$$I_{3D}(z) := \sum_{a=1}^p I^a(z) \quad (5.33)$$

where $I^a(z)$ is defined as in (5.32) replacing the prime with superscript a . Several options can be used to parametrize $\vec{u}_a$ and also one can simply use

$$I_{3D}(z) := \sum_{a=1}^p I_1^a(z) \quad (5.34)$$

reducing the number of needed paths. These options will be discussed in the numerical section. Let us end this section by emphasizing that indeed one can treat the case where $\mathcal{I}_0$ does not coincide with all points by repeating the procedure with a second plane Σ not parallel to the first one. We postpone this possibility to the next chapter where more scenarios that are not constraint with Tandem application will be explored.

Numerical experiments for monopolar inclusions

To illustrate the numerical reconstruction schemes developed previously, we dedicate the following part to the numerical results obtained for some examples of monopolar inclusions. We distinguish according to the way the data are collected, two cases: in the first one that will be presented in the paragraph above, we refer to the cases of mono-directional sources path. The second case concerns the multidirectional sources path and will be presented later. We then discuss the other criterion described in the previous paragraph.

Monodirectional sources path

In the following we will present the results of simulations. The aim is to find the location of small objects monopolar based the Algorithm 1.

In this monodirectional sources path case, we denote by $\mathbb{T}_1$ and $\mathbb{T}_2$ the first and second lines of sources with parametric form

$$\begin{aligned} \mathbb{T}_1 &= \{x_0^{(n)} = (r(n), -3\lambda, H) \in \Sigma, n = 1, 2, \dots, L\}, \\ \text{and ,} \\ \mathbb{T}_2 &= \{x_0^{(n)} = (r(n), 3\lambda, H) \in \Sigma, n = 1, 2, \dots, L\}. \end{aligned} \quad (5.35)$$

For the rest of this paragraph Σ_0 refers to us to $\Sigma_0 = \{z \in \mathbb{R}^3 : z \cdot \vec{u} = 0\}$, which corresponds to the data in our algorithm of reconstruction 1.

Medium containing single inclusion: Here we consider that the probed region contains $M = 1$ defect centered on $C_1 = (\lambda, \lambda, -\lambda)$. The first step of our Algorithm 1 consisting of reconstructing the component $C_1 \cdot \vec{u}$ and defining the plane Π_1 . Figure 5.4 represents the plot of the imaging function $z \in \Sigma_0 \mapsto I_1(z)$ (5.29). Let us mention that, the circle in magenta refers to the exact position of the object.

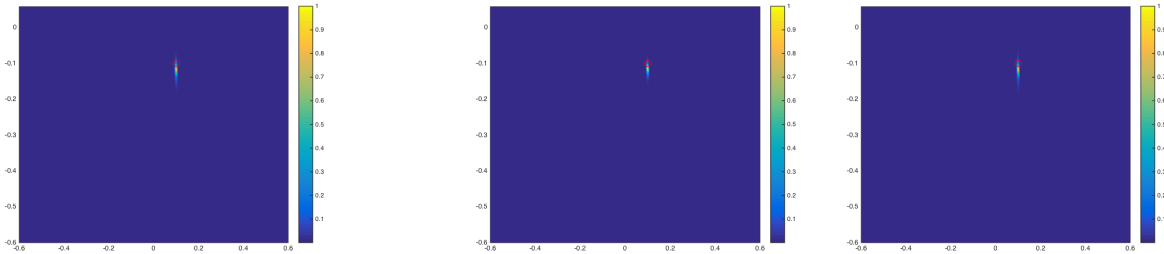


Figure 5.4 – The region contains a single monopolar inclusion: The x-axis of the peak gives $C_1 \cdot \vec{u}$ and the y-axis of the peak gives the distance from C_j to $\mathbb{T}$.

This Figure 5.4 shows the x-axis of the peak that gives $C_1 \cdot \vec{u}$ and the y-axis of the peak gives the distance from C_j to $\mathbb{T}$. It gives a good location of this component of the objects center. Therefore, this allows us to define the plane Π_1 (see. step 1 Algorithm 1) .

The following Figure 5.5 corresponds respectively to the plot of $z \in \Pi_1 \mapsto I_1(z)$, that corresponds to the second step, $z \in \Pi_1 \mapsto I_2(z)$, (5.29) refers to us to the third step and finally the fourth step $z \in \Pi_1 \mapsto I(z)$ (5.30) of the Algorithm 1.

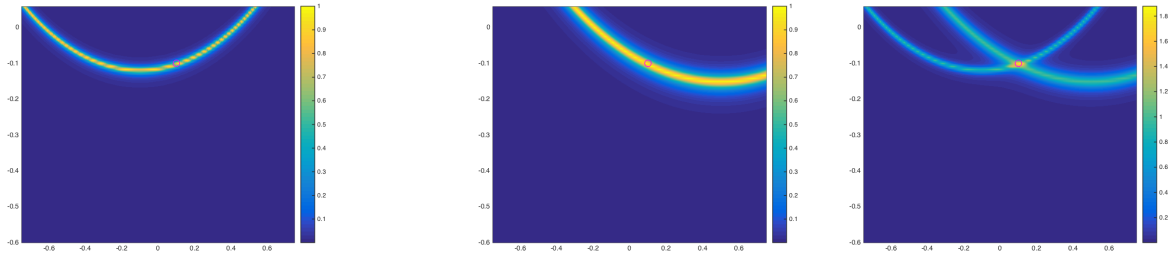


Figure 5.5 – Visualization $z \in \Pi_1 \mapsto I(z)$, from the data with 10% of noise: The portion of circle in the left side hand contains the point $(C_1 \cdot \vec{v}, C_1 \cdot \vec{w})$, it corresponds to the plot of $I_1(z)$ in the plane Π_1 . The portion of circle in the middle contains the point $(C_1 \cdot \vec{v}, C_1 \cdot \vec{w})$, it corresponds to the plot of $I_2(z)$ in the plane Π_1 . In the right side hand, the x-axis of the peak gives $C_1 \cdot \vec{v}$ and the y-axis of the peak gives $C_1 \cdot \vec{w}$. In the same order (see. step 2, 3, 4 Algorithm 1).

The visualization in the Figure 5.4, 5.5 allows us to have very good information on the location of the inclusion with the same theoretical expectations. In fact, for the case of single monopolar inclusion we have a very good reconstruction technique (Algorithm 1).

To see the possibility of pushing further the validity field of our algorithm we will test it for the case of a medium containing more objects. Let us start by the following remark, which gives us another way to use same Algorithm 1.

Algorithm 2 Reconstruction of C_j , $\mathcal{I}_0 = \mathcal{I}$

Input: $\mathbb{F}_1, \mathbb{F}_2, \Psi, \mathbb{T}_1, \mathbb{T}_2, \Sigma_0$

Output: C_j .

1. Compute: $I(z)$, $z \in \Sigma_0$. **Identify :** $C_j \cdot \vec{u}$, **Then:** $\Pi^{(j)}$, $j = 1, 2, \dots, M$.

2. Visualize the intersection of $\mathcal{C}_j^{(1)}$ and $\mathcal{C}_j^{(2)}$ using (5.30). **Identify** the point $C_j \in \Pi^{(j)}$.

with $I(z)$, $z \in \mathbb{R}^3$ is given by (5.30).

Medium containing two inclusions: Here we suppose that, the region of interest contains 2 defects C_1 and C_2 , with $(C_1 \cdot \vec{v}) \neq (C_2 \cdot \vec{v})$, we take for example $C_1 = (\lambda, \lambda, -\lambda)$ and $C_2 = (3\lambda, 3\lambda, -\lambda)$.

In the left hand side of Figure 5.6, we visualize the part of plane Σ_0 , and try to determine the components of all the inclusions in the direction $\vec{u}$. With this retrieved argument (i.e $C_1 \cdot \vec{v}$), and

using Algorithm 2, we visualize the defined plane Π_1 and Π_2 in the two other images in Figure 5.6 in order to determine the location of each defect.

These two planes are defined from the visualization as follow $\Pi_j = \{z \in \mathbb{R}^3 : z \cdot \vec{u} = C_j \cdot \vec{u}\}$ for $j = 1, 2$. To summarize, the following Figure 5.6 corresponds to the plot of the imaging function $I(z)$ respectively in the plane Σ_0, Π_1 , and Π_2 .

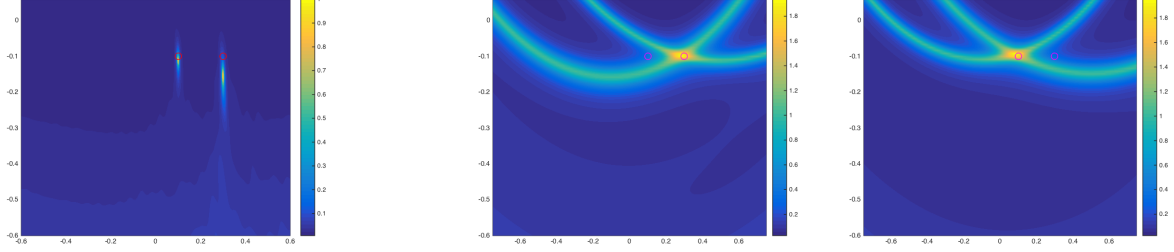


Figure 5.6 – Identification of the defects center's C_1 and C_2 from the data with 10% of noise: In left the first component of the defects with the maps $I(z)$ for $z \in \Sigma_0$ (see. Step 1 Algorithm 2). In the middle, reconstruction of the C_1 by evaluating $I(z) \in \Pi_1$. And finally, in the right side the x-axis and y-axis peak refer to the location of the inclusion C_2 from the color maps $I(z)$ for all $z \in \Pi_2$.

In this above Figure 5.6 we see a good reconstruction of the defects location's. In the left side hand of this figure, we retrieve the first component of the two considered defects, which allows us to define the $\vec{u}$ -orthogonal planes containing the objects. In the second and third images are retrieved the two other components of the centers of the objects.

The main conclusion we can make here is that: if the inclusions satisfy the following condition:

$$C_j \cdot \vec{v} \neq C_r \cdot \vec{v} \text{ for } r \neq j \in [1, \dots, M],$$

then the Algorithm 1 (or Algorithm 2) allows us to identify all the inclusions.

Now, in the this example we test our Algorithm 2 for the case of the medium that contains some inclusions with the same components in the direction $\vec{v}$.

Medium contains some defects with same components in direction of receivers Here we suppose that the region contains 3 monopolar inclusions at the locations given by the points C_1, C_2 and C_3 with the hypothesis that $C_2 \cdot \vec{v} = C_3 \cdot \vec{v} = 3\lambda$, we use our reconstruction algorithm to identify the position of the defect C_1 and also to see what happens for the two other defects. The strategy of the visualization is similar to the previous example: in the following Figure 5.6 we plot $z \in \Sigma_0 \mapsto I(z)$ and determine the three planes Π_1, Π_2, Π_3 . Then we use the second step of the Algorithm 2 and plot in the same order $z \in \Pi_j \mapsto I(z)$ for $j = 1, 2, 3$.

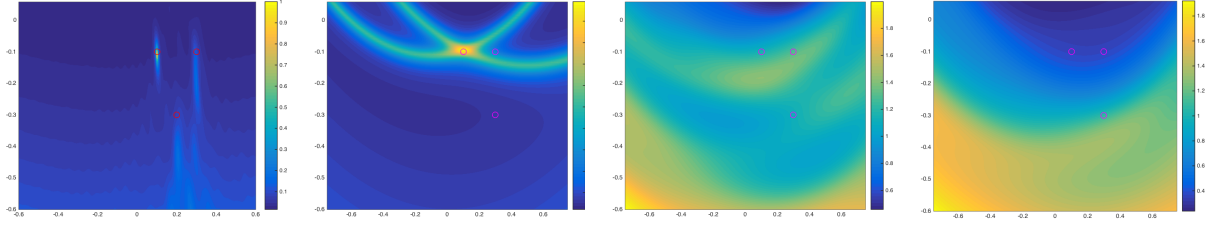


Figure 5.7 – Utilization of the algorithm for the reconstruction of the defects center's $C_j, j = 1, 2, 3$ from the data with 10% of noise.

As we can see in the first image, $z \in \Sigma_0$, we can retrieve with a good approximation the x-component of $C_1 = (\lambda, \lambda, -\lambda)$, and we identify poorly the x-components of $C_2 = (3\lambda, 3\lambda, -3\lambda)$ and $C_3 = (3\lambda, 3\lambda, -\lambda)$. In the second image $z \in \Pi_1$ we identify with a good approximation the location of $C_1 \in \Pi_1$. But as shown in the two last images that corresponds to the plot of $I(z)$ in Π_2, Π_3 , our algorithm is not able to find the locations of C_2, C_3 , which is coherent with the results demonstrated in the Theorem 4.

Multi-directional sources path

To remedy the limitation of the last example of the previous section, we added much more measurements. We consider more directions to collecting of the data as defined in the last subsection. We suppose that we dispose the data from $\mathbb{T}_\ell^a, \ell = 1, 2$ directed by $\vec{u}_a = (\cos a, \sin a, 0)$. To fix the ideas, we suppose that we dispose of the four directions schematized in the following Figure 5.8. The four directions correspond to $a = 0, -\pi/4, \pi/4, \pi/2$.

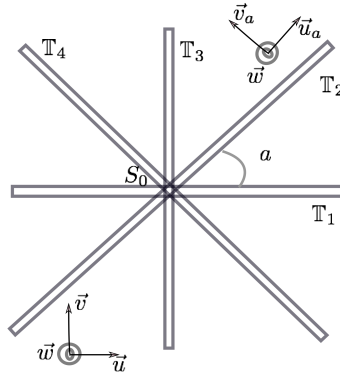


Figure 5.8 – Experiment setting: Design of the 4 lines of transmitter positions.

We refer the reader to the subsection 5.3.2, for the case where we developed an algorithm of reconstruction based on the imaging I_{3D} given by the expression (5.33). To see the consistency

of this scheme of reconstruction, we discuss several examples.

Medium containing three inclusions with different components in the direction $\vec{v}$

We consider the following configuration of the three inclusions of the centers: $C_1 = (\lambda, \lambda, -\lambda)^T$, $C_2 = (3\lambda, 4\lambda, -3\lambda)^T$ and $C_3 = (2\lambda, 3\lambda, -2\lambda)^T$.

In the Figure 5.9, we plot the 3D imaging function $z \in \mathbb{V} \mapsto I_{3D}(z)$, for the noisy data given with 0%, 1%, 5%, and 10%.

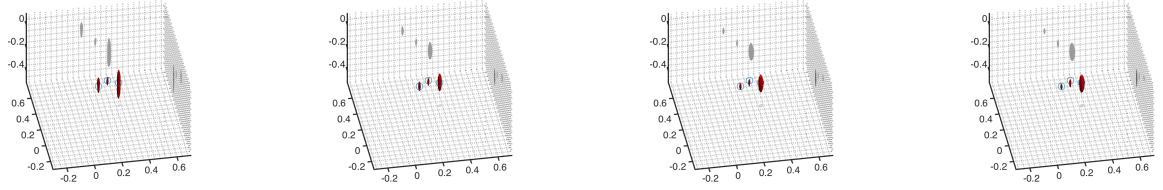


Figure 5.9 – From the left to right the reconstruction of the 3 inclusions with the data given by 0%, 1%, 5% and 10%, from the maps of $I_{3D}(z)$ for all z in the region, using the isosurface function.

Their projections in the three principal directions are represented here for the case of 0% of noise.

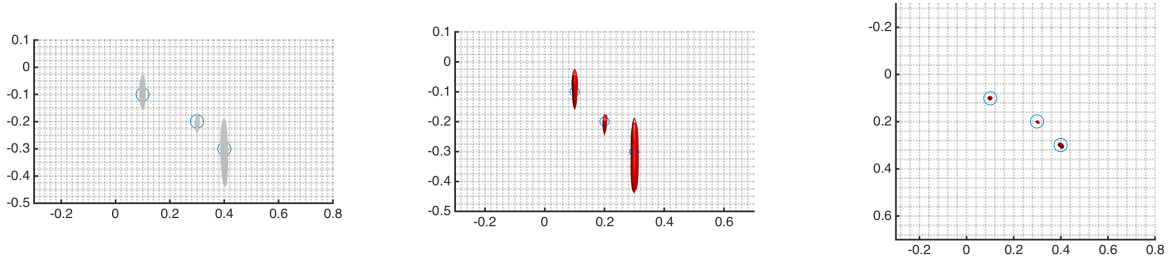


Figure 5.10 – The three principal projections of the maps of $I_{3D}(z)$ for all z in the region, using the isosurface function.

From the two graphics above, we obtain a good 3D reconstruction of the defects location's by using the imaging function (5.33).

Let us recall that the aim of this part is to determine the location of the defects which are lost in the monodirectional case. The general case of inclusion locations excluding the following : $C_r = C_m + \beta \vec{w}$, for $r \neq m \in [1, \dots, M]$.

Medium containing general form of inclusions We suppose here that the region defined before contains 3 inclusions such that: the first and second inclusions have the same component in the direction $\vec{v}$. The second and third inclusions have the same component in the direction $\vec{w}$.

$$C_1 = (\lambda, \lambda, -\lambda)^T, C_2 = (2\lambda, \lambda, -3\lambda)^T \text{ and } C_3 = (2\lambda, 4\lambda, -2\lambda)^T.$$

By using the reconstruction strategy for this configuration (i.e plotting $I_{3D}(z)$ for all z in the considered region). Figure 5.11 represents Option 2, where $I_{3D}(z)$ is given by (5.33). It corresponds with the general strategy of reconstruction with several (4 different) directions of measurements data.

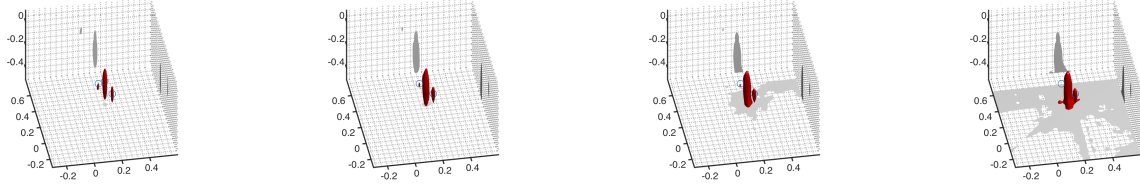


Figure 5.11 – From the left to right side hand the reconstruction of the 3 inclusions with the data given by 0%, 1%, 5%, and 10%, from the maps of $I_{3D}(z)$ for all z in the region, using the isosurface function.

The representation projection of the imaging function in the principal directions is given by:

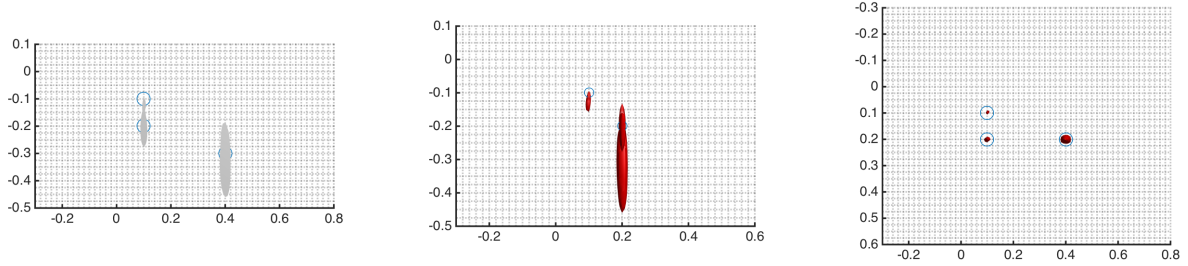


Figure 5.12 – The three principal projections of $I_{3D}(z)$ on the three principal direction, using the isosurface function.

Our imaging technique studied in this section is based on near field data analysis for the detection of small inclusions in 3D. We combine measurements from several directions to define the imaging function I_{3D} . With this function we have theoretically shown that, we are able to identify the 3D positions of the inclusions. In the our numerical results, we consider data from 4 different directions to define the imaging function. The obtained results have shown a consistency with theoretical expectations. Note that, in these last two examples, we assume that in each direction $\vec{u}_a$, we have two parallel paths on the data.

Now, we assume that we have only the data corresponding to a single line path for each direction, i.e. we assume the imaging model defined by (5.34). To see if this model is sufficient to identify the targets, we treat here the example of a region containing single inclusion C_1 .

Medium containing single inclusion using the model (5.34): The following Figure 5.13 corresponds with the plot of the imaging function (5.34) defined above. It shows $z \mapsto I_{3D}(z), z \in \mathbb{V}$

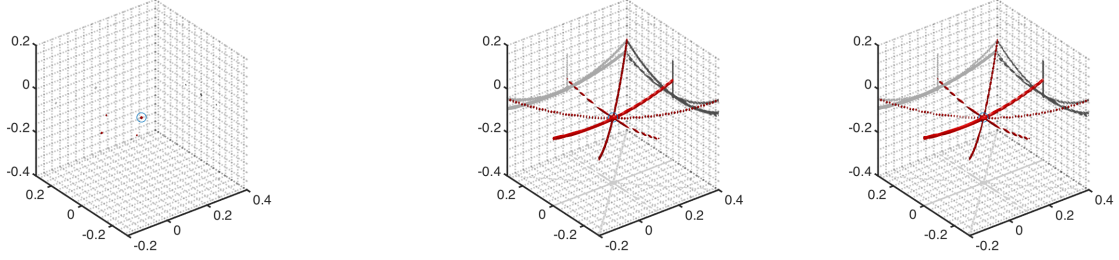


Figure 5.13 – The reconstruction with (5.34) of a medium containing a single monopolar inclusion . In this order from left to right: the data are given respecting the relative noise 0%, 5% and 10%.

As expected, we get the intersection of all the circles defined previously.

5.3.3 Discussion of the case of multipolar inclusions

In the last subsection are discussed the possible configurations of monopolar inclusion that can be reconstructed with mono-directional and multidirectional path. The aim of this subsection is to use the same argument as above for studying the possibility of identification of the inclusion in the general case. Therefore, we consider the case where the geometry does not pose a problem for the reconstruction, and we are interested in studying the impact of the physical properties of the inclusions. We distinguish the different types of inclusions: we start with the dipolar, we pass to the multipolar and end with a mixture of inclusions. The numerical results will be given in the same conditions of the previous subsection 5.3.2. In fact we consider the same volume $\mathbb{V}$, and the same configuration of collecting data.

The case of dipolar inclusions

With the same notation as previously in this specific case the response matrix is given by:

$$\mathbb{F}_{n,r} := \delta^3 \left(\sum_{j=1}^M \lambda_j \nabla \Phi(x_0^n + \eta_r \vec{v}, C_j) \cdot \nabla \Phi(x_0^n, C_j) \right) \quad (5.36)$$

In this case we can use either Ψ_2 or Ψ_3 for the choice of the test function, given by the expression (5.23). For the inclusion locations, we only choose configurations that fit into the framework of the reconstruction. We then test this examples for monodirectional and multidirectional path settings.

Monodirectional path: The data $\mathbb{F}$ is given for the two parallel paths (5.35), for this medium containing the following 3 inclusions.

$$C_1 = (\lambda, \lambda, -\lambda), C_2 = (2\lambda, 3\lambda, -2\lambda), C_3 = (3\lambda, 4\lambda, -3\lambda).$$

If we use the test function Ψ_2 with the imaging function $I(z)$ (5.30), for the plane $\Pi(= \Sigma_0$ and Π_1, Π_2 , and $\Pi_3)$. The Figure 5.14 shows the plot $z \in \Pi \mapsto I(z)$ in this order.

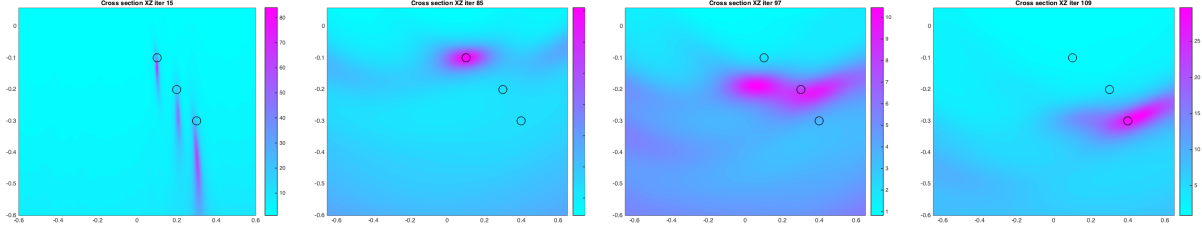


Figure 5.14 – Utilization of the imaging function (5.30) : the reconstruction of the defect locations $C_j, j = 1, 2, 3$ from the data with 10% of noise.

Using the test function Ψ_3 with the same imaging function for the plane Π defined previously gives as the following results:

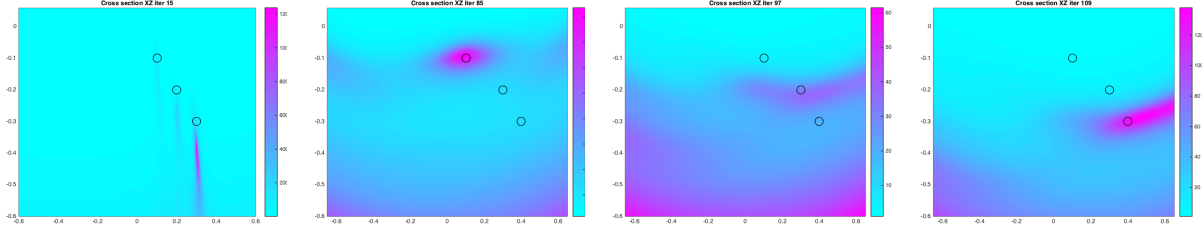


Figure 5.15 – Results for case where the function (5.30). The reconstruction the defect locations $C_j, j = 1, 2, 3$ from the data with 10% of noise.

With only two parallel paths of sources and by using the imaging function (5.30), we obtain poor reconstruction of the small dipolar defects.

Multidirectional path: The measurement data $\mathbb{F}$ are given for 2×4 different directions, with the same medium as in the last example.

By using the test function Ψ_2 and the imaging function I_{3D} , (5.33), we show in Figure 5.16, the 3D reconstruction.

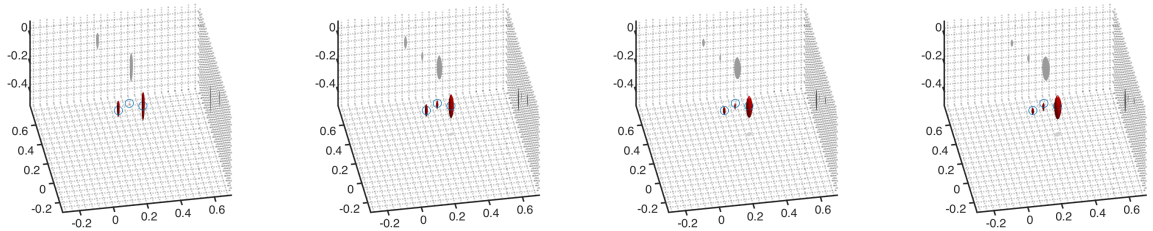


Figure 5.16 – Utilization of the expression (5.33) for the reconstruction the defects center's $C_j, j = 1, 2, 3$ from the data with 0%, 1%, 5%, and 10% of noise.

By using the test function Ψ_3 and the imaging function I_{3D} , (5.33), we show in Figure 5.17, the 3D reconstruction.

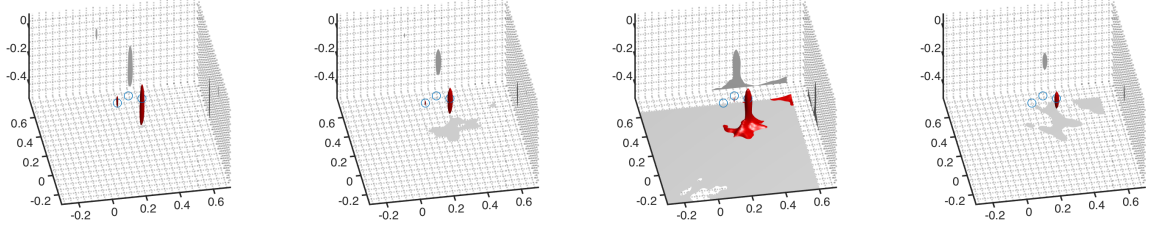


Figure 5.17 – Utilization of the expression (5.33) for the reconstruction the defects center's $C_j, j = 1, 2, 3$ from the data with 0%, 1%, 5%, and 10% of noise.

With the 3D imaging function, we obtain a good reconstruction by using the test function Ψ_2 , but a poor reconstruction by using the test function Ψ_3 .

The case of multipolar inclusions

All the inclusions $C_j, j = 1, \dots, M$ considered here are suppose to have non-null τ_j and λ_j . Note that in the case where τ_j and λ_j are unknown, the sole possible choice of the test function is Ψ_3 defined in (5.23).

Consider now that the medium contain 3 multipolar inclusions, in Figure 5.18 are represented the images obtained by computing the 3D function $z \in \mathbb{V} \mapsto I_{3D}(z)$, given by (5.33).

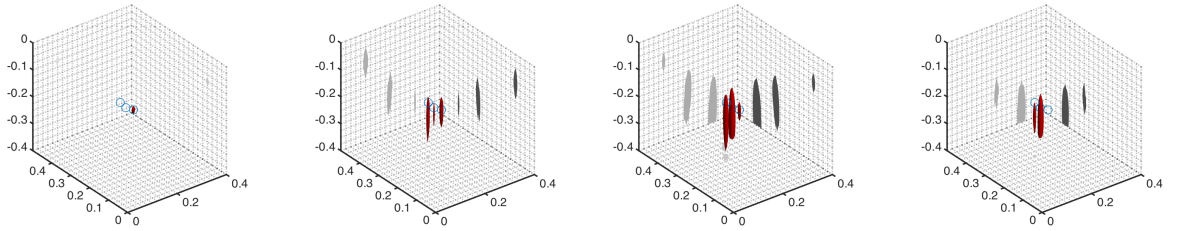


Figure 5.18 – Results based on utilization of the expression (5.33). The reconstruction of the defect locations $C_j, j = 1, 2, 3$ from the data with 0%, 1%, 5%, and 10% of noise.

The Algorithm of reconstruction based on the imaging function (5.33) seems to promote the desired qualities. Notice that a good localization is obtained for the defect with the greatest value of $C_j \cdot \vec{v}$.

The case of mixture of inclusions

In the following three paragraphs, we suppose that the medium contain mixture inclusions type. To this end, we base our algorithm of reconstruction on the expression (5.27). We

consider then, the medium that contains two different inclusions $C_1 = (\lambda, \lambda, -\lambda)^T$ and $C_2 = (2\lambda, 3\lambda, -\lambda)^T$.

One dipolar and one monopolar inclusion: We suppose that C_1 is dipolar and C_2 is monopolar. By using the imaging function (5.27) for 2×2 paths (multidirectional) of measurements. Therefore, from left-hand to right-hand image of Figure 5.19 present the 3D reconstruction according to the additive noise.

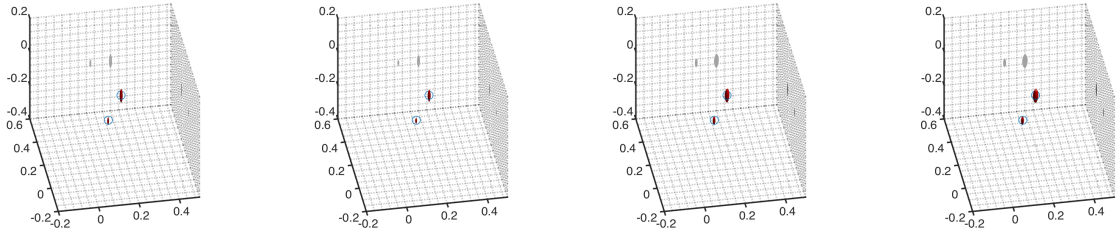


Figure 5.19 – Utilization of the expression (5.33) for the reconstruction of the defect locations $C_j, j = 1, 2$ from the data with 0%, 1%, 5%, and 10% of noise.

One dipolar and one multipolar inclusion: The same positions of the defection as previously, but now consider that C_1 is dipolar and C_2 is multipolar.

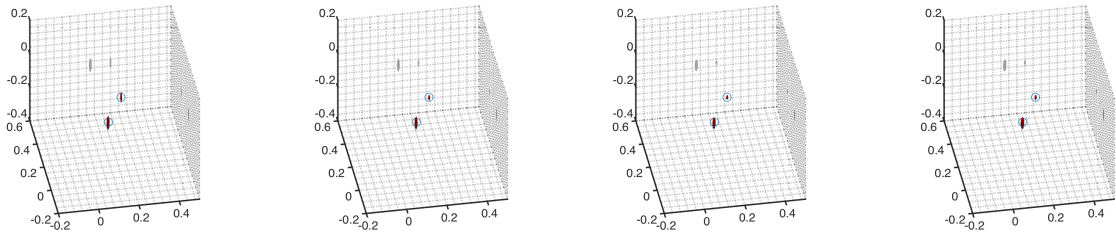


Figure 5.20 – Utilization of the expression (5.33) for the reconstruction of the defects locations $C_j, j = 1, 2$ from the data with 0%, 1%, 5%, and 10% of noise.

One monopolar and one multipolar inclusion: We complete the discussion by repeating process for a monopolar inclusion C_1 and a multipolar inclusion C_2 . The reconstruction produced by the calculation of I_{3D} is illustrated in Figure 5.21.

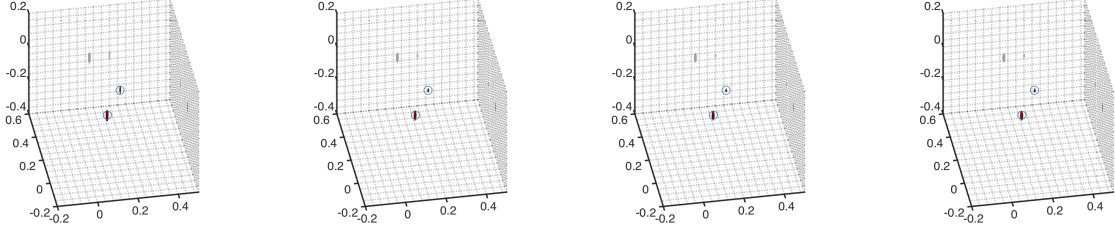


Figure 5.21 – Utilization of the expression (5.33) for the reconstruction of the defect locations $C_j, j = 1, 2$ from the data with 0%, 1%, 5%, and 10% of noise.

We have introduced a numerical model of imaging capable of producing useful three-dimensional reconstructions of small inclusions. The sampling method is based on the analysis of the scattered field expression in the near field and quasi-backscattering setting and the MUSIC type algorithm. The algorithm was successfully tested with simulated measurements.

5.3.4 Discussion of the case where the polarization tensor is not necessarily diagonal

In this configuration the expression of the near-field $\mathbb{F}$ is given by the expression (5.15). As we can see the problem is much more complicated comparing with the case of diagonal polarization tensor. To discuss this general case we consider two different approaches, the first one, is to see what happen if we make as if the polarization tensor was diagonal. The second one, is to define a new model of reconstruction that consider the non-diagonal character of this tensor.

Test of the model used in the diagonal case

We first study the possibility to use the imaging model defined by (5.33) from multi-directional path configuration. We test this model by using the test function Ψ_1 defined in (5.23). For the case where the medium contains two inclusions $C_1 = (\lambda, 2\lambda, -\lambda)$ and $C_2 = (2\lambda, \lambda, -2\lambda)$ with the following physical properties :

$$\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}_2 = \begin{pmatrix} 1 & .1 & .2 \\ .1 & 1 & .1 \\ .2 & .1 & 3 \end{pmatrix}, \tau_1 = 2.7k^2, \text{ and } \tau_2 = 4.3k^2, k = 2\pi/\lambda$$

The following Figure 5.22, represent the plot of $z \in \mathbb{V} \mapsto I_{3D}(z)$

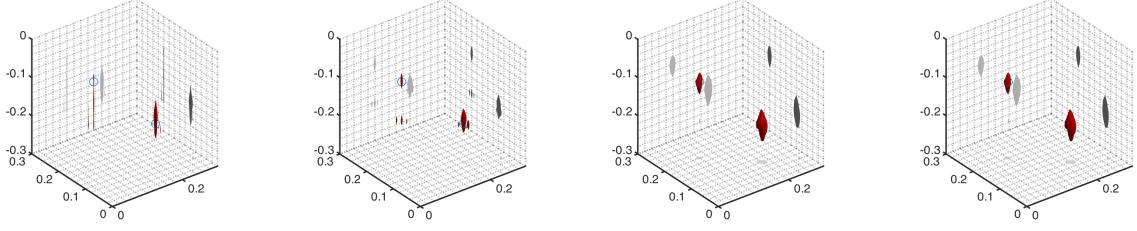


Figure 5.22 – Utilization of the imaging function (5.33) for the reconstruction of the defect locations $C_j, j = 1, 2$ with noisy datas.

The datas are simulated from the same geometrical configuration, and we use the same expression of the scattered field (5.36) with different polarization tensor.

$$\mathcal{M}_1 = \begin{pmatrix} 1 & .1 & .2 \\ .1 & 1 & .1 \\ .2 & .1 & 3 \end{pmatrix} \text{ and } \mathcal{M}_2 = \begin{pmatrix} 1 & .1 & .1 \\ .1 & 2 & .1 \\ .1 & .1 & 2 \end{pmatrix}, \tau_1 = 2.7k^2, \text{ and } \tau_2 = 4.3k^2, k = 2\pi/\lambda$$

The 3D plot of $z \in \mathbb{V} \mapsto I_{3D}(z)$, is given by the following images:

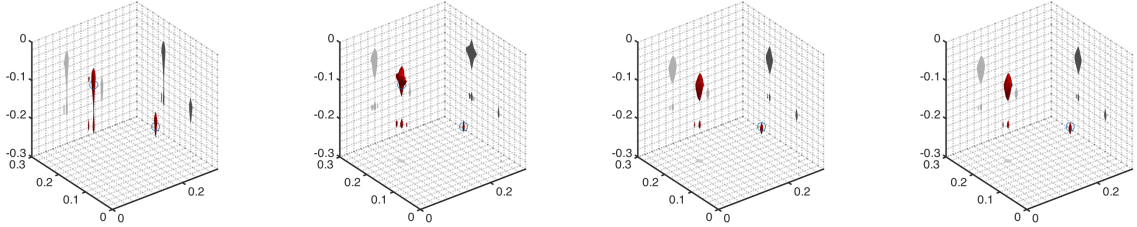


Figure 5.23 – Utilization of the imaging function (5.33) for the reconstruction the defect locations $C_j, j = 1, 2$ with noisy data.

The reconstruction presented in Figure 5.23 was computed using the imaging function I_{3D} (5.33) for a medium containing inclusion with a non diagonal polarization tensor. The numerical results looks good, but we don't have a theoretical justifications.

A possible approach to deal with the general case

Let us remember that in the general case, the polarization tensor in the expression of the near field (5.15) is non-diagonal with form $\lambda_j I$. The only thing we know about this tensor is the fact that it is symmetrical. Furthermore, this tensor can take the form :

$$\mathcal{M}_j = \begin{pmatrix} a_{1,j} & a_{2,j} & a_{3,j} \\ a_{2,j} & a_{4,j} & a_{5,j} \\ a_{3,j} & a_{5,j} & a_{6,j} \end{pmatrix}, \text{ for } j \in [1, \dots, M]$$

Let us define the function $\phi_s, s = 0, 1, \dots, 6$, for $z = (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{R}^3$, and $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned}
 \phi_0(x, z) &= \Phi^2(x, z) \\
 \phi_1(x, z) &= \Phi^2(x, z) \left(ik - \frac{1}{|x-z|} \right)^2 (x_1 - z_1)^2 \\
 \phi_2(x, z) &= 2\Phi^2(x, z) \left(ik - \frac{1}{|x-z|} \right)^2 (x_1 - z_1)(x_2 - z_2) \\
 \phi_3(x, z) &= 2\Phi^2(x, z) \left(ik - \frac{1}{|x-z|} \right)^2 (x_1 - z_1)(x_3 - z_3) \\
 \phi_4(x, z) &= \Phi^2(x, z) \left(ik - \frac{1}{|x-z|} \right)^2 (x_2 - z_2)^2 \\
 \phi_5(x, z) &= 2\Phi^2(x, z) \left(ik - \frac{1}{|x-z|} \right)^2 (x_2 - z_2)(x_3 - z_3) \\
 \phi_6(x, z) &= \Phi^2(x, z) \left(ik - \frac{1}{|x-z|} \right)^2 (x_3 - z_3)^2
 \end{aligned} \tag{5.37}$$

Therefore, the approximation (5.15) of the near field operator can be given by :

$$\begin{aligned}
 (\tilde{N}g)(x_0) &= \sum_{j=1}^M \sum_{s=0}^6 \alpha_j^{(s)} \phi_s(x_0, C_j) \int_{-\theta}^{\theta} g(\eta) \chi(\eta, C_j) d\eta \\
 &\quad + \sum_{j=1}^M \psi_2(x_0, C_j) \mathcal{M}_j \cdot \frac{(x_0 - C_j)}{|x_0 - C_j|} \int_{-\theta}^{\theta} g(\eta) \eta \chi(\eta, C_j) d\eta
 \end{aligned}$$

with ψ_2 is given by (5.7). With a specific choice of $\alpha_j^{(s)} (= a_{s,j} m_j, s = 1, \dots, 6$ and $= \tau_j m_j, s = 0)$, m_j corresponds to the integral in the expression of $\tilde{N}$. We can prove that $x_0 \in \mathbb{T} \mapsto \Psi(x_0, C_j) = \sum_{s=0}^7 \alpha_j^{(s)} \phi_s(x_0, C_j)$ is in the Range of $\tilde{N}$. Therefore $\Psi(\cdot, z) \in \text{Range} \tilde{N}$ if and only if $\Psi(\cdot, z) \in (\ker \tilde{N}^*)^\perp$. Let us consider $\{v_r, \dots, v_R\}$ the whole of dimension d that generates $\ker \tilde{N}^*$. We have the following criterion :

$$\sum_{s=0}^6 \alpha^{(s)}(\phi_s, v_k) = 0, k \in [r, \dots, R] \text{ iff } \Psi \in (\ker \tilde{N}^*)^\perp = \text{Range} \tilde{N}$$

Theorem 7. *Let us consider the matrix $A \in \mathcal{M}_{7,d}(\mathbb{C})$ defined by $A_{s,k} = (\phi_s, v_k)$. Then $\det(A^* A) = 0$ implies that, $\Psi(\cdot, z) \in (\ker \tilde{N}^*)^\perp$.*

Proof. Suppose that $\det(A^* A) = 0$, this means that zero is a singular value of A . Then there exist $a = (\alpha_i)_{i=0}^6 \in \mathbb{C}^6$ such that $Aa = 0$, and the proof is complete. $\square$

Defining, the function

$$I_{3D}(z) = \det(A^* A)^{-1}$$

this function is expected to have large values for $\Psi(\cdot, z) \in \text{Range} \tilde{N}$. However numerical results were not inclusive of this criterion. $I_{3D}(z)n$ z in the region of interest will be large when z is near the inclusions and small otherwise.

5.4 Conclusion

In this chapter we presented a new sampling method allowing the detection in three dimensions of inclusions immersed in a homogeneous medium. This is based on measurements of the

scattered field in a quasi-backscattering configuration. To give a characterization of the obstacles, our approach was based on the consideration of the asymptotic formulas of the scattered field. The numerical results presented validate our imaging procedure and explore the various limitations of the techniques for the case of the Tandem project. In fact, the reconstructions of inclusions are not perfect, but their locations are well localized.

Application of the method for quasi-backscattering data in other scenarios

Contents

6.1 Asymptotic form of the scattered field for the cylindrical configuration	117
6.1.1 Measurements on a circular path	117
6.1.2 Sources in a line configuration	118
6.2 Characterization of the small inclusions in the quasi-backscattering configuration	120
6.2.1 Algorithm of reconstruction in the cylindric case	121
6.3 Numerical Results and Discussion	126
6.3.1 Reconstruction in cylindric configuration	127
6.3.2 Reconstruction in spherical Configuration	131

Introduction

The goal of this chapter is to explore the use of the sampling method introduced in the previous chapter to other configurations of the measurements but keeping the quasi-backscattering ansatz. The main motivation in considering these different scenarios is possible applications to bio-medical imaging with microwaves [58, 57]. In this technique, one would like to differentiate different components of a biological tissue according to their dielectric properties. In particular, if some components have high contrast, for instance high conductivity with respect to surrounding tissues, their contribution to the scattered field will be dominant and one would therefore be able to locate them (or eventually visualize their geometry) from measurement of the scattered field. Example of such components are cancerous cells or high blood content tissues.

We shall address here the problem of locating small inclusions, which would be for instance early stage cancers, from electromagnetic data at a given frequency collected in a quasi-backscattering configuration. In this setting, a source is associated with an array of receivers surrounding the source and the device is swept on the probed body along a predefined path. The main difference with the configuration studied in the previous chapter is that the path does not have to be in a plane and the receivers array does not have to be a straight line. We shall investigate two main settings. The first one corresponds to a cylindrical external surface of the body. This is the configuration usually employed for this technique [29] where the probed region is embedded in a

cylindrical content with nearly similar dielectric properties. For this configuration, the sources path can be either a line parallel to the cylinder axis and the receivers on a perpendicular arc or a circle perpendicular to the cylinder axis and the receiver on a line parallel to the cylinder axis. The two experimental settings in the cylindrical configuration are illustrated in Figure 6.1. The second configuration corresponds with sources and receivers positioned on perpendicular circles that are on a sphere surrounding the probed domain. This configuration correspond with much more flexibility in the choice of the paths but may be of less interest in practical applications. Only a sketch of the method for this configuration will be given.

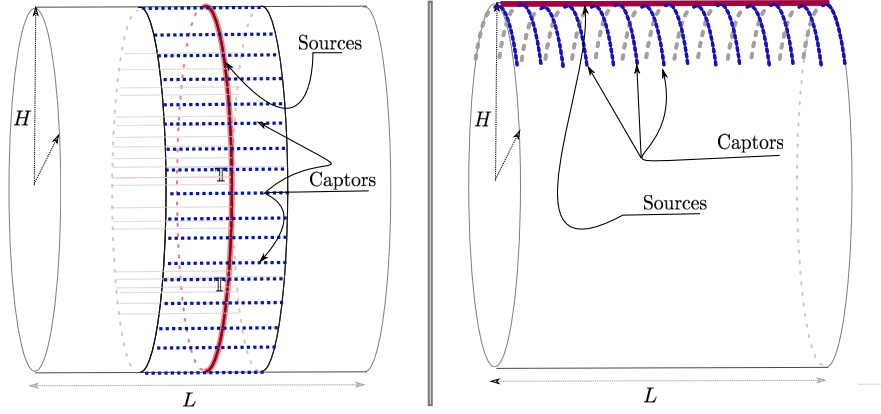


Figure 6.1 – Quasi-back-scattering for the Medical imaging case.

Similarly to the previous chapter, we shall only address the scalar problem modeled by the Helmholtz equation. We also assume that the inclusions are sufficiently small so that the scattered field generated by a point source at x_0 can be written as (see Chapter 4 and Chapter 5) for points x far from the inclusions,

$$u_\delta^{sc}(x_0, x) = \delta^3 \left(\sum_{j=1}^M \nabla \Phi(x, C_j) \mathcal{M}_j \cdot \nabla \Phi(x_0, C_j) + \tau_j \Phi(x, C_j) \Phi(x_0, C_j) \right) + O(\delta^4) \quad (6.1)$$

where δ is the small parameter related to the size of the inclusions, M denote the number of inclusions, τ_j and λ_j are related to the dielectric properties and the shape of the inclusions and $\Phi(x_0, \cdot)$ is the fundamental solution to the Helmholtz equation in $\mathbb{R}^3$. We here consider only the case where these polarization tensors are diagonal, i.e.

$$\mathcal{M}_j = \lambda_j I_3, \quad j = 1, 2, \dots, M \quad (6.2)$$

with $\lambda_j \geq 0$. This corresponds for instance to the case of spherical inclusions. This assumption will be made in all the remaining of this chapter otherwise indicated.

We denote by U^{sc} of the leading term of the asymptotic form of the scattered field u_δ^{sc} , given by

$$U^{sc}(x, x_0) = \sum_{j=1}^M \lambda_j \nabla \Phi(x, C_j) \cdot \nabla \Phi(x_0, C_j) + \tau_j \Phi(x, C_j) \Phi(x_0, C_j) \quad (6.3)$$

so that $u_\delta^{sc}(x, x_0) = \delta^3 U^{sc}(x, x_0) + O(\delta^4)$.

The outline of this chapter is the following. We start by giving the asymptotic form of the scattered field adapted to the MUSIC algorithm and that corresponds to the data quasi-backscattering configuration (Section 6.1). We then give the main results for the characterization of the small inclusions location using the sampling operator (Section 6.2). We finally describe the associated algorithms and provide validating numerical examples with noisy synthetic data (Section 6.3).

6.1 Asymptotic form of the scattered field for the cylindrical configuration

Our methodology to treat the cylindrical quasi-backscattering configuration is the same as for the Tandem configuration of Chapter 5. We first need to simplify the form of the scattered field in order to obtain an expression with separated variables : the first variable is related to the sources and the second variable is related to the receivers. We organize this section 6.1 in two parts 6.1.1 and 6.1.2. We start in subsection 6.1.1 by discussing the case where the sources are placed on a circle. In the second part we deal with the case where the sources are placed on a line parallel to the cylinder axis.

6.1.1 Measurements on a circular path

The starting point for our discussion is to consider the quasi-backscattering configuration schematized in Figure 6.2. To acquire the data the human body is illuminated with wave pulses from antennas on some circle on the cylinder orthogonal to the cylinder axis defined by a radius H and a length L . We assume that the inclusions are located inside a cylinder of radius h . To the source point x_0 are associated receivers that are placed on a line that passes by x_0 and is orthogonal to circle plane (therefore is parallel to the cylinder axis). This configuration will be referred to us: the circular configuration.

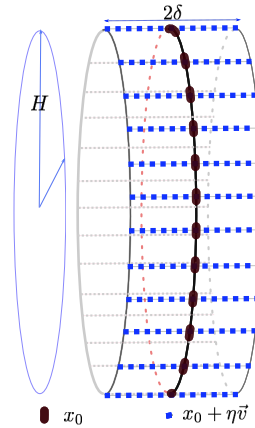


Figure 6.2 – Illustration of the circular data acquisition. The sources are placed on the circle, the receivers are placed on the line parallel to the cylinder axis.

Let us set $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ to be a orthonormal basis of $\mathbb{R}^3$ so that the cylinder axis is oriented along $\vec{v}$. The source path $\mathbb{T}_c$ corresponds with the circle defined as the set of points $x_0(\theta)$

$$x_0(\theta) = (H \cos \theta, y_0, H \sin \theta), \quad \theta \in [0; 2\pi],$$

where $y_0 \in [-\frac{L}{2}; \frac{L}{2}]$ is a fixed position for the circle. Indeed, the set of receivers x schematized in Figure 6.2 can be parametrized as, for fixed position x_0 of the source,

$$x(\eta) = x_0 + \eta \vec{v} \quad \eta \in [-\delta; \delta]$$

and that $x_0 \cdot \vec{v} = 0$. In this configuration we obtain the same type of parametrization as in the case of Tandem configuration considered in Chapter 5.

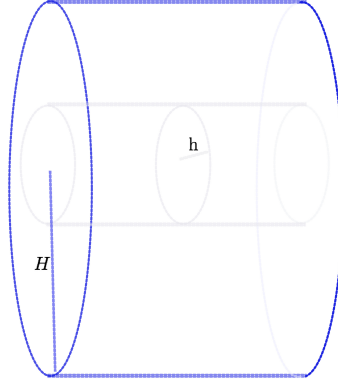


Figure 6.3 – Acquisition of data on the human body

Using the same calculations as in Section 5.2.1, under the assumption that $\delta \ll 1$ and $H \gg 1$, we arrive at

$$U^{sc}(\eta, x_0) = \tilde{U}^{sc}(\eta, x_0) + O\left(\frac{\delta}{H^3} + \frac{\delta^2}{H^2}\right) \quad (6.4)$$

where U^{sc} :

$$\tilde{U}^{sc}(\eta, x_0) = \sum_{j=1}^M \psi_{1,j}(C_j, x_0) \chi(\eta, C_j) + \sum_{j=1}^M \psi_{2,j}(C_j, x_0) \eta \chi(\eta, C_j) \quad (6.5)$$

with

$$\begin{aligned} \psi_{1,j}(C_j, x_0) &= \left(\tau_j + \lambda_j \left(ik - \frac{1}{|C_j - x_0|} \right)^2 \right) \Phi^2(x_0, C_j) \\ \psi_{2,j}(C_j, x_0) &= \lambda_j \left(ik - \frac{1}{|C_j - x_0|} \right) \frac{C_j \cdot \vec{v}}{|x_0 - C_j|^2} \Phi^2(x_0, C_j) \end{aligned}$$

and $\chi(\eta, y) := e^{-ik\eta \frac{\vec{v} \cdot y}{H}}$.

6.1.2 Sources in a line configuration

The configuration schematized in Figure 6.4 supposes that the sources are placed on a line in the direction of the cylinder axis and for any source point x_0 , the location of the receivers corresponds with an arc of circle around x_0 .

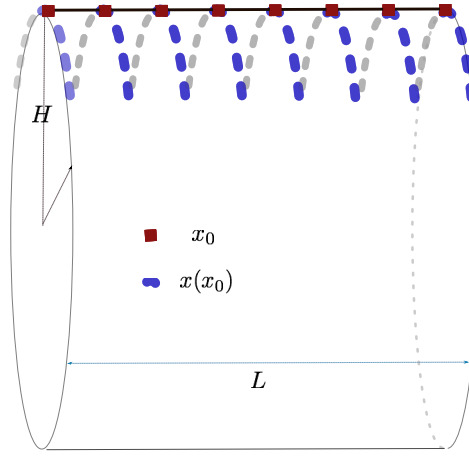


Figure 6.4 – Illustration of the linear configuration: the sources are on a line from the cylinder and the receivers form an arc of circle around.

Therefore for a given parameter $\theta_0 \in [-\pi; \pi]$ the sources $x_0 \in \mathbb{T}_d$ can be defined as

$$\mathbb{T}_d = \{x_0 = (H \cos \theta_0, y_0, H \sin \theta_0), y_0 \in [-L/2, L/2]\}.$$

The corresponding receivers form an arc of cylinder and for a given $\theta_0 \in [-\pi, \pi]$, the receivers x can be parametrized as

$$x(\theta_0, \alpha) = (H \cos(\theta_0 + \alpha), y_0, H \sin(\theta_0 + \alpha)), \alpha \in [-\varepsilon; \varepsilon].$$

Recalling that,

$$\begin{aligned} \cos(\theta_0 + \alpha) &= \cos \theta_0 \cos \alpha - \sin \theta_0 \sin \alpha \\ \sin(\theta_0 + \alpha) &= \sin \theta_0 \cos \alpha + \cos \theta_0 \sin \alpha \end{aligned}$$

Therefore, if we note by $\vec{w} := (-\sin \theta_0, 0, \cos \theta_0)^T$ and $\vec{u} := (\cos \theta_0, 0, \sin \theta_0)^T$, $\vec{v} = (0, 1, 0)^T$ we can write x as follows:

$$x = H \cos \alpha \vec{u} + y_0 \vec{v} + H \sin \alpha \vec{w}$$

We shall consider the configuration where $H\varepsilon \ll 1$ and $H \gg 1$. One has

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \alpha + O(\varepsilon) \\ \cos \alpha &= 1 + O(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

and therefore x can be given by

$$x = x_0 + H\alpha \vec{w} + O(H\varepsilon^2)$$

In addition, we have $x_0 \cdot \vec{w} = 0$ and therefore

$$|x - y| = |x_0 - y| - \alpha H \vec{w} \cdot \frac{y}{|x_0 - y|} + H^2 O\left(\frac{\varepsilon^2}{|x_0 - y|}\right)$$

uniformly with respect to x_0 and bounded values of $\vec{w} \cdot y$. If h is the radius of the cylinder containing the inclusions and $h = O(1)$, we also observe that

$$\frac{1}{|x_0 - y|} = \frac{1}{H} + O\left(\frac{1}{H^2}\right)$$

uniformly with respect to y inside the cylinder and $x_0 \in \mathbb{T}$. We then can write for large H :

$$e^{ik|x-y|} = e^{ik|x_0-y|}e^{-ik\alpha\vec{w}\cdot y} + O\left(H\varepsilon^2 + \frac{\varepsilon}{H}\right)$$

$$\frac{1}{|x-y|} = \frac{1}{|x_0-y|} + O\left(\frac{\varepsilon}{H^2}\right) \quad (6.6)$$

We then obtain the following asymptotic form for the Green Function:

$$\Phi(x, y) = \Phi(x_0, y)\tilde{\chi}(\alpha, y) + O\left(\varepsilon^2 + \frac{\varepsilon}{H^2}\right).$$

with

$$\tilde{\chi}(\alpha, y) = e^{-ik\alpha\vec{w}\cdot y}.$$

We also observe that

$$\frac{x-y}{|x-y|} = \frac{x_0-y}{|x_0-y|} + \frac{H\alpha}{|x_0-y|}\vec{w} + O\left(\frac{\varepsilon}{H}\right)$$

which leads to the following expansion

$$\begin{aligned} \nabla_x \Phi(x, y) &= \left(ik - \frac{1}{|x_0-y|}\right) \Phi(x_0, y)\tilde{\chi}(\alpha, y) \frac{x_0-y}{|x_0-y|} \\ &\quad + ik\Phi(x_0, y)\alpha H\tilde{\chi}(\alpha, y) \frac{\vec{w}}{|x_0-y|} + O\left(\varepsilon^2 + \frac{\varepsilon}{H^2}\right). \end{aligned}$$

Setting $\eta = H\alpha$ and $\delta = H\varepsilon$, we then observe that (6.4) still holds.

6.2 Characterization of the small inclusions in the quasi-backscattering configuration

In order to retrieve the inclusions location we turn our attention to the analysis of the near field operator. In the same way as the previous chapter we define the asymptotic form $\tilde{N}$ of the near field N , from the scattered field $\tilde{U}^{sc}$ as follow:

$$\begin{aligned} \tilde{N}: L^2[-\varepsilon; \varepsilon] &\longrightarrow L^2(\mathbb{T}) \\ g &\longmapsto (\tilde{N}g)(x_0) = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} g(\eta)\tilde{U}^{sc}(\eta, x_0)ds(\eta), \forall x_0 \in \mathbb{T}. \end{aligned} \quad (6.7)$$

with $x_0 \in \mathbb{T}$ ($= T_c$ or $\mathbb{T}_d$) according to the setting for the collection of the data. In the case where (6.2) holds, the functions $\Psi = \Psi_\ell, \ell = 1, 2, 3$, be the test function defined by the same expression (5.23) in the last chapter 5.

We obtain, the near field $\tilde{N}$ in its asymptotic form:

$$(\tilde{N}g)(x_0) = \sum_{j=1}^M (\tau_j \Psi_1(x_0, C_j) + \lambda_j \Psi_2(x_0, C_j)) \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} g(\eta)\chi(\eta, C_j)d\eta + \Psi_3(x_0, C_j) \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \eta g(\eta)\chi(\eta, C_j)d\eta$$

here we have, the following estimation:

$$\|N - \tilde{N}\| = O\left(\frac{\delta}{H^3} + \frac{\delta^2}{H^2}\right). \quad (6.8)$$

So, if we suppose that we collect our data N on a surface Σ , corresponding to one set $\mathbb{T}$ (i.e. line or circle) on the cylinder. Then, in the following we will describe the strategy allowing to retrieve the position of all the defects in the considered medium. In the same way as in the chapter 5, our strategy will be based on considering the orthogonal projection $\mathbb{P}$ of the test function Ψ on the kernel of N^* ($\ker N^*$).

To compute an imaging function we shall use the singular value decomposition of the near field operator $\tilde{N}$ denoted by (v_k, s_k, u_k) , $k = 1, 2, \dots$ where $v_k \in L^2(\mathbb{T})$, $u_k \in L^2([-\delta, \delta])$ are respectively the left and right singular vectors and s_k is the corresponding singular value. The orthogonal projection $\mathbb{P}$ will be defined as

$$\mathbb{P}\psi = \sum_{s_k \leq \epsilon} (\psi_\ell, v_k) v_k \quad (6.9)$$

where ϵ is a user parameter that will be fixed so that $\mathbb{P}$ can be considered as a good approximation of $\ker N^*$. The numerical examples will show that this parameter can be easily fixed in the case of a small number of inclusions.

Let us define the characteristic function J .

$$J(z) = \sum_{\ell=1}^3 \left(\sum_{s_k \leq \epsilon} \left| \int_{\mathbb{T}} \Psi_\ell(x_0, z) \cdot v_k(x_0) ds(x_0) \right|^2 \right). \quad (6.10)$$

We will use this function to define the imagine function I .

The aim of the following subsection 6.2.1, is to give a characterization of all the inclusions in the medium based on this previous (6.10). Thus, define the imaging function to recover all the inclusions in the medium.

6.2.1 Algorithm of reconstruction in the cylindric case

To give a characterization of the defects from the measurements data, we shall distinguish two different of the collection of data. We suppose that the cylinder of measurements have the radius H , and the length L . In the first one, we do our measurements in a circle. For this case we denote by the circle of sources $\mathbb{T}_c$. The second case corresponds to the measurements from a line and we denote this set of sources by $\mathbb{T}_d$. In all this paragraph we use the following cylindric basis : $\vec{v} = (0, 1, 0)^T$, that give the orientation of the axis of the cylinder. The two other directions are $\vec{u} = (\cos \theta, 0, \sin \theta)^T$ and $\vec{w} = (-\sin \theta, 0, \cos \theta)^T$.

The case of $\mathbb{T}_c$

Let us denote by $C = (r_c, \eta_c, \xi_c)$, and $z = (r_z, \eta_z, \xi_z)$, the coordinates of C and z in $\mathbb{R}^3$ with respect to the basis $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

We have the following results.

Lemma 3. $|x_0 - z| = |x_0 - C|$ for all $x_0 \in \mathbb{T}_c$ iff $r_z = r_c$, $\xi_z = \xi_c$, and $\eta_z = \pm\eta_c$.

Proof. For all x_0 in $\mathbb{T}_c$, we have $x_0 = (H \cos \theta, 0, H \sin \theta)$, $\theta \in [0, 2\pi]$ with respect to the orthonormal basis $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

Note that we can suppose that $H = 1$. Then, for all $z \in \mathbb{R}^3$, we have

$$|z - x_0|^2 = |z|^2 + 1 - 2r_z \cos \theta - 2\xi_z \sin \theta,$$

we do the same for C :

$$|C - x_0|^2 = |C|^2 + 1 - 2r_c \cos \theta - 2\xi_c \sin \theta,$$

Therefore, $|C - x_0| = |z - x_0|$, and by taking $\theta = 0, \pi$, implies that, $r_z = r_c$. We take $\theta = \pm\pi/2$, and then obtain $\xi_z = \xi_c$. From $\eta_z^2 = \eta_c^2$, follow the proof of the lemma. $\square$

Lemma 4. We assume that for all $j = 1, \dots, M$ the equality $|z - x_0| = |C_j - x_0|$, $\forall x_0 \in \mathbb{T}_c$ is not verified. Then $x_0 \in \mathbb{T}_c \mapsto \Phi^2(x_0, z)p(1/|x_0 - z|)$ with p is given by (5.20) cannot be in the range of $\tilde{N}$.

Proof. Let us suppose that $H = 1$. We denote by (r_z, ξ_z, η_z) the coordinates of z and (r_j, ξ_j, η_j) the coordinates of C_j , in the basis $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$, then we have:

$$|x_0 - z| = \sqrt{1 + |z|^2} \left(1 - 2 \frac{r_z}{(1 + |z|^2)} \cos \theta - 2 \frac{\xi_z}{(1 + |z|^2)} \sin \theta\right)^{1/2}$$

for $\theta \sim 0$, we can have:

$$\begin{aligned} |x_0 - z| &= \sqrt{1 + |z|^2} \left(1 - \frac{r_z}{(1 + |z|^2)} - \frac{\xi_z}{(1 + |z|^2)} \theta + O(\theta^2)\right) \\ &= \frac{1 + |z|^2 - r_z}{\sqrt{1 + |z|^2}} \left(1 + \frac{\xi_z}{r_z - 1 - |z|^2} \theta\right) + O(\theta^2) \end{aligned} \quad (6.11)$$

Let us denote by

$$\begin{aligned} \mu_r(z) &= \frac{1 + |z|^2 - r_z}{\sqrt{1 + |z|^2}} \text{ and } \mu_\xi(z) = \frac{1 + |z|^2 - \xi_z}{\sqrt{1 + |z|^2}} \\ \nu_r(z) &= \frac{r_z}{\xi_z - 1 - |z|^2} \text{ and } \nu_\xi(z) = \frac{\xi_z}{r_z - 1 - |z|^2} \end{aligned}$$

then we note by Then

$$\frac{1}{|x_0 - z|} = \frac{1}{\mu_r(z)} \left(1 + \frac{\xi_z}{1 + |z|^2 - r_z} \theta\right) + O(\theta^2)$$

For $\theta' \sim \pi/2$, we take $\theta = \pi/2 - \theta'$ we then obtain the assumption:

$$|x_0 - z| = \mu_\xi(z) \left(1 + \frac{r_z}{\xi_z - 1 - |z|^2} \theta\right) + O(\theta^2) \quad (6.12)$$

Then

$$\frac{1}{|x_0 - z|} = \frac{1}{\mu_\xi(z)} \left(1 + \frac{r_z}{1 + |z|^2 - \xi_z} \theta \right) + O(\theta^2)$$

Let us now prove the lemma statement by a contradiction argument. Assume that the function $x_0 \in \mathbb{T} \rightarrow e^{2ik|x_0-z|}/|x_0-z|p(1/|x_0-z|)$ is in the range of $\tilde{N}$. Then there exist $(\alpha_j)_{j=1}^M$ in $\mathbb{C}$, such that:

$$\frac{e^{2ik|x_0-z|}}{|x_0-z|^2} p(1/|x_0-z|) = \sum_{j=1}^M \alpha_j \frac{e^{2ik|x_0-C_j|}}{|x_0-C_j|^2} p_j(1/|x_0-C_j|) \quad (6.13)$$

Then from the previous assumptions using (6.11) and (6.12) we obtain:

$$\left(\frac{e^{2ik\mu_r(z)}}{\mu_r(z)^2} p(1/\mu_r(z)) e^{2ik\nu_r(z)\theta} - \sum_{j=1}^M \alpha_j \frac{e^{2ik\mu_{r_j}(z)}}{\mu_{r_j}(C_j)^2} p_j(1/\mu_{r_j}(C_j)) e^{2ik\nu_{r_j}(C_j)\theta} \right) = 0$$

and

$$\left(\frac{e^{2ik\mu_\xi(z)}}{\mu_\xi(z)^2} p(1/\mu_\xi(z)) e^{2ik\nu_\xi(z)\theta} - \sum_{j=1}^M \alpha_j \frac{e^{2ik\mu_{\xi_j}(z)}}{\mu_{\xi_j}(C_j)^2} p_j(1/\mu_{\xi_j}(C_j)) e^{2ik\nu_{\xi_j}(C_j)\theta} \right) = 0$$

Let us remark that p does not vanishes on $\mathbb{R}_+$. The analyticity of $\theta \mapsto e^{ib_j\theta}$ implies that the two equalities above should hold for all $\theta \in \mathbb{C}$, and this implies that there exist $j_0 = 1, \dots, M$ such that : $\mu_r(z) = \mu_{r_{j_0}}(C_{j_0})$, and $\alpha_j = 0, j \neq j_0$, then we have, $j = j_0$ $\mu_\xi(z) = \mu_{\xi_{j_0}}(C_{j_0})$.

Finally, if we replace α_j by their values (6.13), we obtain for $j = j_0$, $\frac{e^{2ik|x_0-z|}}{|x_0-z|^2} p(1/|x_0-z|) = \frac{e^{2ik|x_0-C_j|}}{|x_0-C_j|^2} p(1/|x_0-C_j|)$. which gives a contradiction with $|x_0-z| \neq |x_0-C_j|$ for all $j = 1, \dots, M$. □

Based on the approximated expression of near field operator, we can show that it is an finite rank operator.

Then, we prove these results in the same way as in the case of the configuration studied in the previous chapter.

Theorem 8. *Let $z \in \mathbb{R}^3$ and $\psi(x_0, z) = \Psi_\ell(x_0, z), \ell = 1, 2, 3$ be the function defined from Ψ_ℓ in (5.23), we suppose that $C_j \neq C_r$ for $j \neq r$. Let $\mathcal{I}_0$ be the maximal set of indices such that $C_j \cdot \vec{v} \neq C_r \cdot \vec{v}$ for $r \neq j \in \mathcal{I}_0$. Then the following statements are equivalent:*

- (i) $\psi(\cdot, z)$ is in the range of $\tilde{N}$;
- (ii) $|z - x_0| = |C_j - x_0|$, for all $x_0 \in \mathbb{T}_c$ and for some $j \in \mathcal{I}_0$, and $\lambda_j = 0$ if $\ell = 1$, $\tau_j = 0$ if $\ell = 2$, and $\lambda_j C_j \cdot \vec{v} \neq 0$ if $\ell = 3$.

Using this Theorem 8 and the Lemma 3, we obtain a characterization of all the defects of the center $C_j, j \in \mathcal{I}_0$ that satisfy $C_j \cdot \vec{v} \neq C_r \cdot \vec{v}, j \in \mathcal{I}_0$.

So, with two circles $\mathbb{T}_c^{(1)}$ and $\mathbb{T}_c^{(2)}$ from the cylinder, we can determine the position of all the inclusions $C_j, j \in \mathcal{I}_0$. Therefore, by defining the following function imaging function:

$$I_{3D}^{(c)}(z) = \left(J_c^{(1)}(z) + J_c^{(2)}(z) \right)^{-1} \quad (6.14)$$

where $J_c^{(r)}$, $r = 1, 2$ is the characteristic function given by (6.10) for $\mathbb{T}_c^r$, $r = 1, 2$. In fact $J_c^{(r)}$, $r = 1, 2$ is very small for $C_j = (r_j, \eta_j, \xi_j)$, and $C_j^* = (r_j, [\eta_j], \xi_j)$ for $j \in \mathcal{I}_0$. By C_j^* , we refer to the symmetric of C_j with respect to the center of the circle $\mathbb{T}_c^{(r)}$, in the direction $\vec{v}$. Then, from Theorem 8, the expression of the imaging function $I_{3D}(z)$ given by (6.14) z in the region of interest will be large when z is near the inclusions C_j , $j \in \mathcal{I}_0$ and small otherwise.

The case of $\mathbb{T}_d$

In this configuration the set of sources form a line $\mathbb{T}_d$ on the cylinder 6.4. The analysis here is similar to the case of Tandem configuration given in the Chapter 5. We then have the same Theorem:

Theorem 9. *Let $z \in \mathbb{R}^3$ and $x_0 \in \mathbb{T}_d \mapsto \psi(x_0, z) = \Psi_3(x_0, z)$ be the function defined from Ψ_3 , in (5.23) we suppose that $C_j \neq C_r$ for $j \neq r$ such that $C_j \cdot \vec{w} \neq C_r \cdot \vec{w}$. Then the following statements are equivalent:*

- (i) $\psi(z, \cdot)$ is in the range of $\tilde{N}$;
- (ii) $|z - x_0| = |C_j - x_0|$, for all $x_0 \in \mathbb{T}_d$ and for some $j \in \{1, 2, \dots, M\}$.

Let us denote by $\mathcal{C}_j$ the following circle:

$$\mathcal{C}_j = \{|z - x_0| = |C_j - x_0|, x_0 \in \mathbb{T}_d\} \quad (6.15)$$

Then, for the equivalent characteristic function J_d defined by from $\mathbb{T}_d$, we can prove the following result.

Corollary 1. $J_d(z) = 0$ iff $z \in \mathcal{C}_j$, for $j \in [1, \dots, M]$ such that $C_j \cdot \vec{w} \neq C_i \cdot \vec{w}$ for all $j \neq i$.

Let us suppose now that we dispose of the measurements corresponding to two lines $\mathbb{T}_d^{(r)}$, $r = 1, 2$. Then we define the imaging function :

$$I_{3D}^{(d)}(z) = \left(J_d^{(1)}(z) + J_d^{(2)}(z) \right)^{-1} \quad (6.16)$$

This imaging function (6.16) allows us to retrieve all the points $z \in \bigcup_{j,k=1}^M \mathcal{C}_j^{(2)} \cap \mathcal{C}_k^{(1)}$. In fact, $I_{3D}^{(d)}(z)$ will be large for all these points, with $\mathcal{C}^{(r)}$, $r = 1, 2$ the circle defined in (6.15) from $\mathbb{T}_d^{(r)}$. It may be interesting to consider a superposition of the case of $\mathbb{T}_c$ and $\mathbb{T}_d$ to improve the scheme of reconstruction.

To obtain the inclusions location's, we can define the following imaging function:

$$I_{3D}(z) = I_{3D}^{(d)} + I_{3D}^{(c)} \quad (6.17)$$

the right term of this expression allows us to retrieve the inclusions that satisfy the Theorem 8. While with the term in the left side of (6.17), we retrieve the inclusions satisfying the Theorem 9.

Reconstruction Algorithm from Spherical Configuration

The first remark we make here is that, with the cylindric instrument, we can identify only the inclusions that satisfy this condition. The inclusions that satisfy the Theorem 8, and those satisfy in addition to Theorem 9, $\bigcup_{j,k=1}^M \mathcal{C}_j^{(2)} \cap \mathcal{C}_k^{(1)} = \{C_j, j = 1, \dots, M\}$.

We can fix this problem using other cylinder with axis (example $\vec{u}$ or $\vec{w}$) orthogonal to the axis $\vec{v}$ of the first cylinder.

However, we prefer to present another equivalent configuration, consisting in supposing a spherical setting, in which the sources can be placed in 3 different circles (e.g, the circles in the three principal directions).

Futhermore Furthermore, the algorithm can be improved for better reconstruction. Consider for example as in Figure 6.5 the 3 circles from sphere oriented by the three principals vectors of $\mathbb{R}^3$ basis.

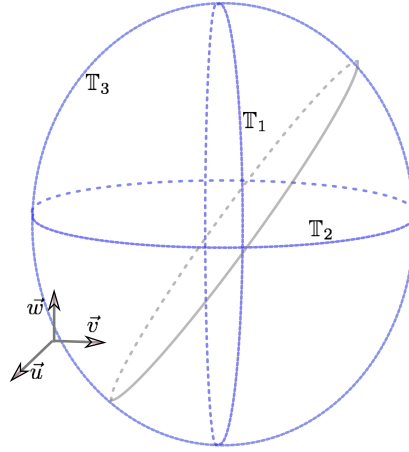


Figure 6.5 – The set-up of the spherical configuration: the sources are on the 3 circles.

Notations and Reconstruction Scheme: We begin our study by some fundamental notation, $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ is basis of $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned}\vec{u} &= (\cos \theta \cos \phi_0, \sin \theta \cos \phi_0, \sin \phi_0), \theta \in [-\pi, \pi], \\ \vec{v} &= (\cos \theta \cos \phi_1, \sin \theta \cos \phi_1, \sin \phi_1), \theta \in [-\pi, \pi], \\ \vec{w} &= (\cos \theta_0 \cos \phi, \sin \theta_0 \cos \phi, H \sin \phi), \phi \in [-\pi, \pi],\end{aligned}$$

with $\phi_1 = \phi_0 + \pi/2$. Let us define also $(\vec{u}', \vec{v}', \vec{w}')$ the basis obtained as follow: $\vec{u}'$ and $\vec{v}'$ from $\vec{u}$ with $\phi'_0 = \phi_0 + \pi/4$. $\vec{w}'$ from $\vec{w}$ with $\theta'_0 = \theta_0 + \pi/4$.

$\mathbb{T}_c^\ell, \mathbb{T}_c^{\ell'}, \ell = 1, 2, 3$ corresponds to the circles oriented receptively by the three principal directions $\vec{u}, \vec{u}', \vec{v}, \vec{v}'$ and $\vec{w}, \vec{w}'$ as in Figure 6.5 .

Let us consider the corresponding characteristic function $J_\ell, J'_\ell, \ell = 1, 2, 3$. Using Theorem 8, we can prove the following result.

Corollary 2. *Let us consider M different inclusions $C_j, j = 1, \dots, M$, and note by $\vec{e}_\ell, \ell = 1, 2, 3$, respectively $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$. For $\ell = 1, 2, 3$, we note now by $\mathcal{I}_\ell$ the sets from $\mathcal{I} = [1, \dots, M]$ such that $C_j \cdot \vec{e}_\ell \neq C_i \cdot \vec{e}_\ell$, for all $j \neq i \in \mathcal{I}$. Then $\bigcup_{\ell=1}^3 \mathcal{I}_\ell = \mathcal{I}$.*

Proof. For all $j \neq i \in \mathcal{I}$ there exists $\ell = 1, 2, 3$ such that $C_j \cdot \vec{e}_\ell \neq C_i \cdot \vec{e}_\ell$. □
Thus we define, the imaging function for all $z \in \mathbb{R}^3$ by:

$$I_{3D}(z) := \sum_{\ell=1}^3 \frac{1}{J_\ell(z) + J'_\ell(z)} \quad (6.18)$$

Therefore, we have the following characterization of the defect locations.

Corollary 3. $I_{3D}(z) = \infty$, iff $z \in \{C_1, C_2, \dots, C_M\}$.

In the following we present the numerical results corresponding to the two previous settings of instrument. For the cylindrical case, we suppose that we dispose of two lines and two circles of sources. Whereas, in the spherical case we consider that the sources are placed on the three principal circles as in the Figure 6.5.

6.3 Numerical Results and Discussion

In the following we present the numerical results, according to each case of the discussed algorithm of reconstruction from the synthetic data in the previous paragraph.

We conserve the same notation as the numerical part of the previous chapter 5. We refer by x_0 the source location's, and x the position of the receivers. Then, we define the response matrix $\mathbb{F}$ as follow:

$$\mathbb{F}_{n,r} = \delta^3 \left(\sum_{j=1}^M \nabla \Phi(x^{(r,n)}, C_j) \cdot \mathcal{M}_j \Phi(x_0^{(n)}, C_j) + \tau_j \Phi(x^{(r,n)}, C_j) \Phi(x_0^{(n)}, C_j) \right). \quad (6.19)$$

for $1 \leq n \leq L$ $1 \leq r \leq R$, with δ the common magnitude of the M small defect $C_j, j = 1, 2, \dots, M$, which generates this corresponding scattered field. In order to avoid inverse crime, we also consider the case of noisy measurements by applying our algorithm to the noisy operator:

$$\tilde{\mathbb{F}}_{n,r} := \mathbb{F}_{n,r}(1 + \sigma \mathbb{D}_{n,r}) \quad 1 \leq n \leq L \quad 1 \leq r \leq R$$

where $\mathbb{D}_{n,r}$ are random complex numbers uniformly distributed in the unit square ($|\mathbb{D}_{n,r}| \leq 1$) and σ denotes the noise level.

To fix the parameter of the numerical experiments, we refer the reader to the section of the chapter 5 of the numerical results. In all the numerical results the radius $H = 15\lambda$, and $L = 40, R = 11$.

6.3.1 Reconstruction in cylindric configuration

With the same notations as previously the parametrization of the line $\mathbb{T}_d^{(r)}$ is given by:

$$\mathbb{T}_d^{(r)} = \{x_0 = (H \cos \theta_r, y_0(t), H \sin \theta_r), t \in [t_i, t_f]\}, r = 1, 2.$$

with t_i and t_f correspond to the first and last instant of measurement, $\theta_1 = -\pi/4, \theta_2 = \pi/4$.

We take also $\mathbb{T}_c^{(r)}$ the circle of sources given by:

$$\mathbb{T}_c^{(r)} = \{x_0 = (H \cos \theta, y_0(t_r), H \sin \theta), \theta \in [0, 2\pi]\}, r = 1, 2.$$

We suppose that the lines contain $N = 41$ source points, and the circle also contain the same number of sources. $y_0(t_0)$ corresponds to the center of the human body, $\theta_1 = -\pi/4$, and $\theta_2 = \pi/4$.

Single Inclusion We suppose our region contain one inclusion $C_1 = (\lambda, \lambda, -\lambda)^T$. With the scheme of reconstruction defined previously, we first plot the slices in the 3 different plans $\Pi_1 = \{z \in \mathbb{V} : z \cdot \vec{u} = C_1 \cdot \vec{u}\}$, $\Pi_2 = \{z \in \mathbb{V} : z \cdot \vec{v} = C_1 \cdot \vec{v}\}$ and $\Pi_3 = \{z \in \mathbb{V} : z \cdot \vec{w} = C_1 \cdot \vec{w}\}$. For 4 levels of noisy data, given respectively by the relative proportions 0%, 1%, 5% and 10%. Now we present in Figure 6.6 the isosurface of the characteristic function I_{3D} , in the volume $\mathbb{V}$, according to the noisy data.

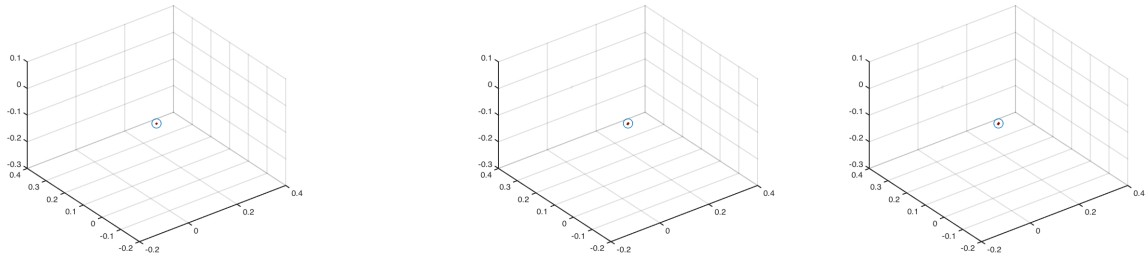


Figure 6.6 – Plot of $I_{3D}(z)$ given above, for z contained in the region of interest that contains one target C_1 according to the noise 1%, 5%, and 10%.

From the left to the right side we plot the 3 slice, and from the from top to bottom the level of noise. From the top to bottom images in the Figure 6.7 the 3 slice according to the level of noise (0%, 1%, 5% and 10%).

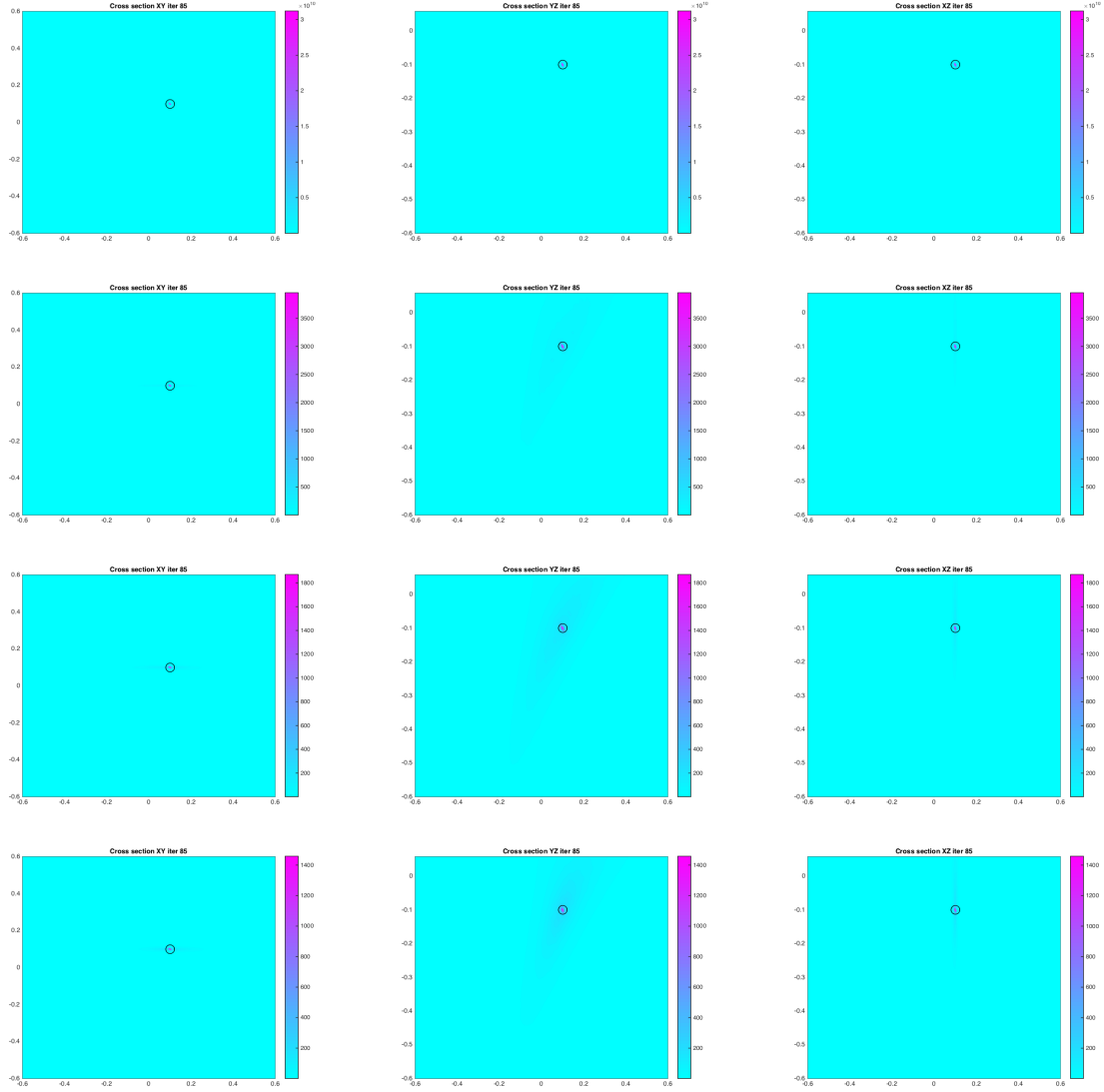


Figure 6.7 – Cross section of the imaging function I_{3D} in for $j = 1, 2, 3$ the plane Π_j : From the left to right side, the x-axis of the peak gives $C_1 \cdot \vec{v}$, the y-axis of the peak gives $C_1 \cdot \vec{u}$, and z-axis give $C_1 \cdot \vec{w}$. In the same order the result corresponds to 0%, 1%, 5% and 10% of white noise.

The imaging function gives a good reconstruction in the case of singular inclusion. Indeed, in each cross section one finds a good localization of the inclusion.

Multiple Inclusions

We will study here the impact of the positions of the inclusions on the quality of the reconstruction. As we noted in the previous chapter 5, the inclusions that have the same component in the direction of the measurement path poses a problem. In the cylindric setting, the measurement path corresponds to the cylinder axis. We propose to present first the case of 2 inclusions C_1 and C_2 . We distinguish three cases, the first one $C_1 \cdot \vec{v} = C_2 \cdot \vec{v}$, $C_2 \cdot \vec{u} = C_2 \cdot \vec{u}$, and finally

$$C_1 \cdot \vec{w} = C_2 \cdot \vec{w}.$$

Exact positions $C_1 = (\lambda, \lambda, -\lambda)$, $C_2 = (\lambda, 2\lambda, -2\lambda)$, **the reconstruction** is given by :

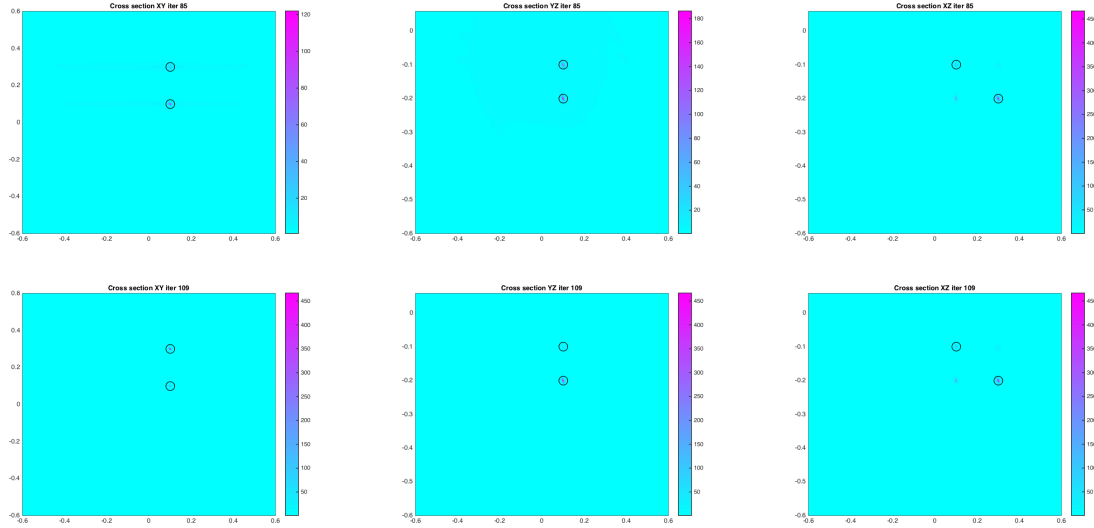


Figure 6.8 – Cross section of the imaging function I in for $j = 1, 2, 3$ the plane $\Pi_j^{(l)}$, $l = 1, 2$: From the left to right side, the x-axis of the peak gives $C_l \cdot \vec{v}$, the y-axis of the peak gives $C_l \cdot \vec{u}$, and z-axis give $C_l \cdot \vec{w}$. In the same order the result corresponds to 1% of white noise.

The plot of the isosurface function of I , in the following:

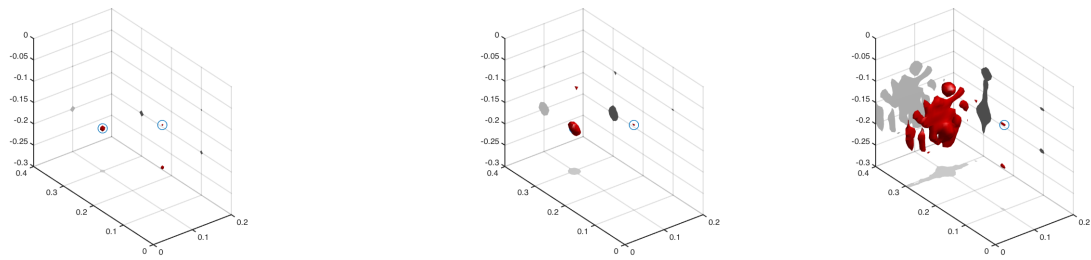


Figure 6.9 – Plot of $I(z)$ given above, for z contained in the region of interest that contains the targets C_1, C_2 .

Exact positions $C_1 = (\lambda, \lambda, -\lambda)$, $C_2 = (2\lambda, \lambda, -2\lambda)$, **the reconstruction** is given by :

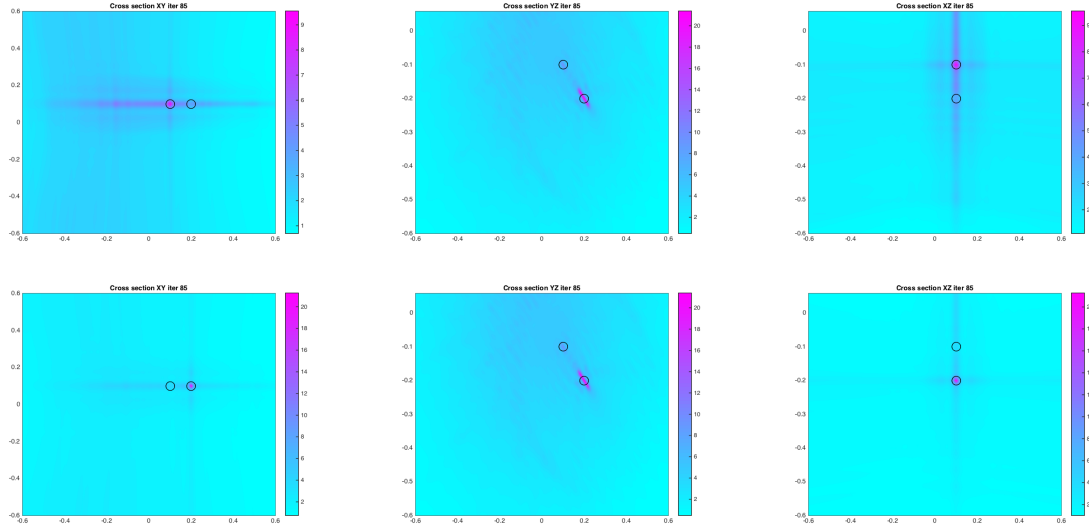


Figure 6.10 – Cross section of the imaging function I in for $j = 1, 2, 3$ the plane $\Pi_j^{(l)}$, $l = 1, 2$: From the left to right side, the x-axis of the peak gives $C_l \cdot \vec{v}$, the y-axis of the peak gives $C_l \cdot \vec{u}$, and z-axis give $C_l \cdot \vec{w}$. In the same order the result corresponds to 1% of white noise.

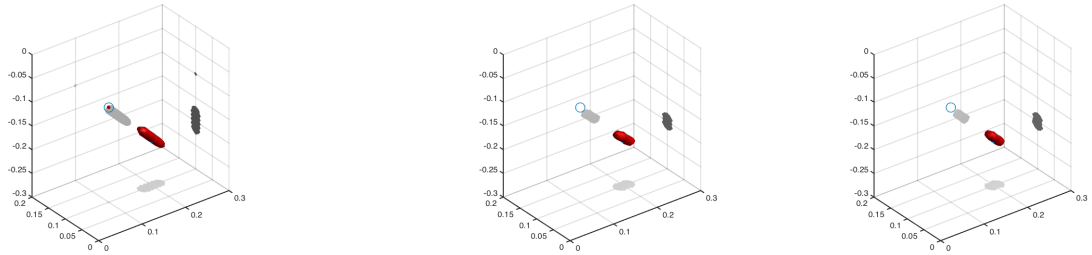


Figure 6.11 – Plot of $I_{3D}(z)$ given above, for z contained in the region of interest that contains the targets C_1, C_2 .

Exact position $C_1 = (\lambda, \lambda, -\lambda)$, $C_2 = (2\lambda, 3\lambda, -\lambda)$, **the reconstruction** is given by:

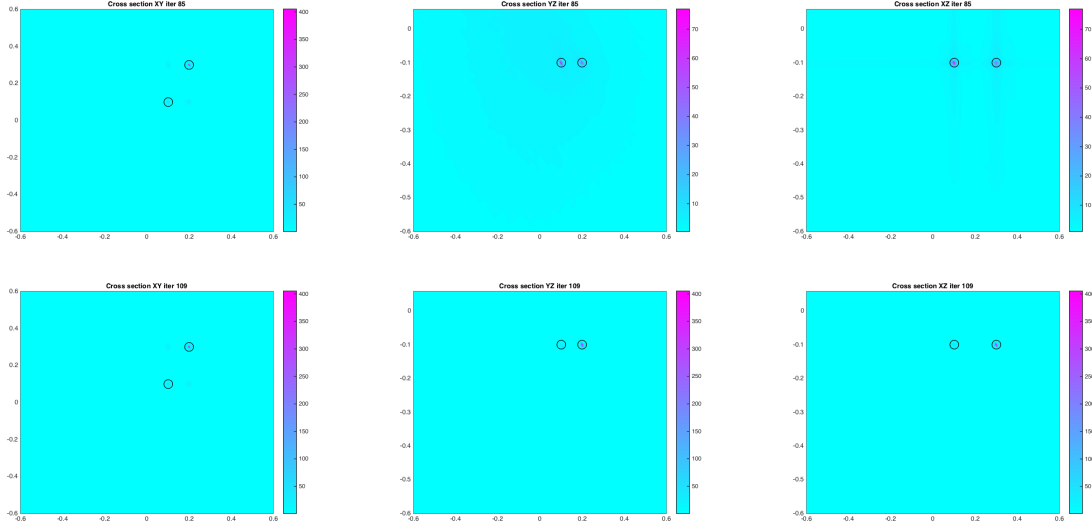


Figure 6.12 – Cross section of the imaging function I in for $j = 1, 2, 3$ the plane $\Pi_j^{(l)}$, $l = 1, 2$: From the left to right side, the x-axis of the peak gives $C_l \cdot \vec{v}$, the y-axis of the peak gives $C_l \cdot \vec{u}$, and z-axis give $C_l \cdot \vec{w}$. In the same order the result corresponds to 1% of white noise.

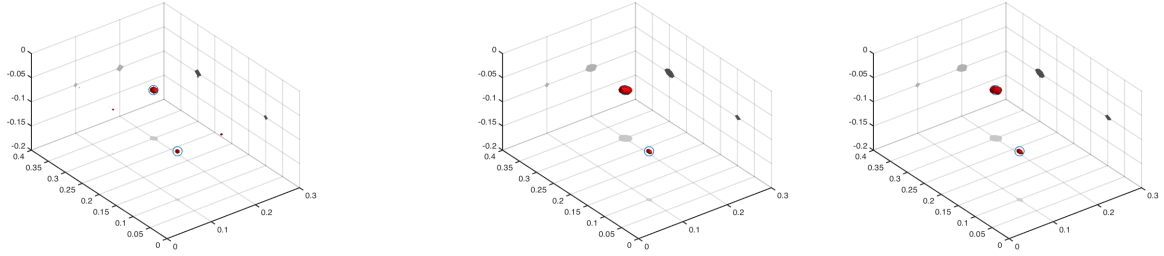


Figure 6.13 – Plot of $I_{3D}(z)$ given above, for z contained in the region of interest that contains the targets C_1, C_2 .

6.3.2 Reconstruction in spherical Configuration

We consider here, the spherical configuration: the parametrization of the 3 circles $\mathbb{T}_c^1, \mathbb{T}_c^2$, and $\mathbb{T}_c^3$ defined from the sphere by :

$$\mathbb{T}_c^2 = \{x_0 = (H \cos \theta \cos \phi_1, H \sin \theta \cos \phi_1, H \sin \phi_1), \theta \in [-\pi, \pi]\},$$

$$\mathbb{T}_c^2 = \{x_0 = (H \cos \theta \cos \phi_2, H \sin \theta \cos \phi_2, H \sin \phi_2), \theta \in [-\pi, \pi]\},$$

$$\mathbb{T}_c^3 = \{x_0 = (H \cos \theta_0 \cos \phi, H \sin \theta_0 \cos \phi, H \sin \phi), \phi \in [-\pi, \pi]\},$$

with $\phi_1 = 0, \phi_2 = \pi/2$, and $\theta_0 = \pi/2$ and $H = 15\lambda$ (see Figure 6.14),.

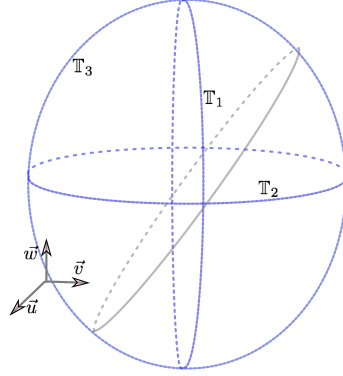


Figure 6.14 – Illustration source locations: we measure the data from the three blue circles 'the three principal directions'.

To test the imaging function defined in (6.18), from an spherical instrument with this 3 circles of sources, we present in the following the numerical results. We start our numerical study with the simple case, where the region contains only one inclusion and then consider the more general case.

Single Inclusion: We compute the imaging function I_{3D} given by (6.18), for data that corresponds to a region containing $C_1 = (3\lambda, 3\lambda, -2\lambda)^T$. The plot of the isosurface of this function around the position of the inclusion is given by the following figure. In the same Figure 6.15 are presented respectively, the result from the given noisy data $\tilde{N}$ with σ ($= 0\%, 5\%$ and 10%).

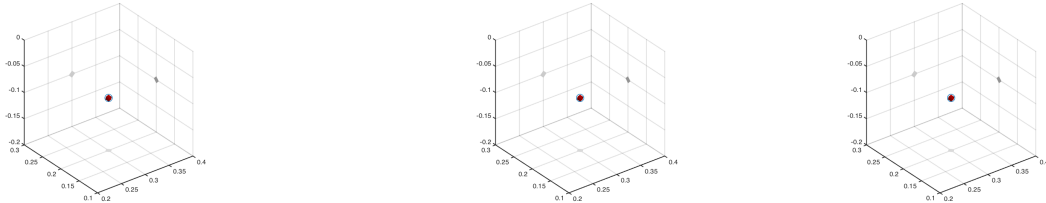
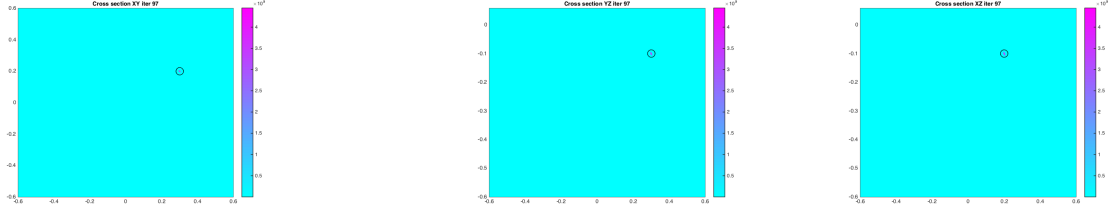


Figure 6.15 – Plot of $I(z)$ given (6.18), for z contained in the region of interest: From the left side to right the noisy data $\tilde{F}$ is given respectively with σ ($= 0\%, 5\%$ and 10%).

In the following, we show the cross section at $C_1 = (3\lambda, 2\lambda, -\lambda)$.

Figure 6.16 – Cross section at C_1 , $I(z)$ given by 1% of noise.

As we can see in the Figure 6.16, we obtain exactly the position of the defect center C_1 .

Multiple inclusions: The same region contain four inclusions $C_1 = (3\lambda, 2\lambda, -\lambda)^T$, $C_2 = (3\lambda, 3\lambda, -2\lambda)^T$, $C_3 = (2\lambda, 3\lambda, -2\lambda)^T$, $C_4 = (2\lambda, 3\lambda, -2.5\lambda)^T$, in fact, this regroup all the possible configurations $C_j \cdot \vec{e} = C_r \cdot \vec{e}$, $r \neq j$ where $\vec{e} = \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$. The plot of isosurface of the function I defined in (6.18), from the noisy data in the considered spherical setting, for σ ($= 0\%, 5\%$ and 10%):

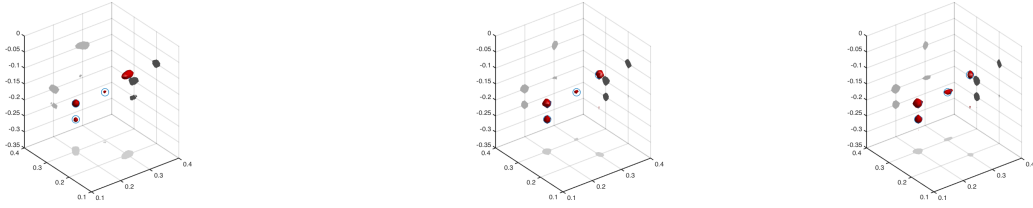
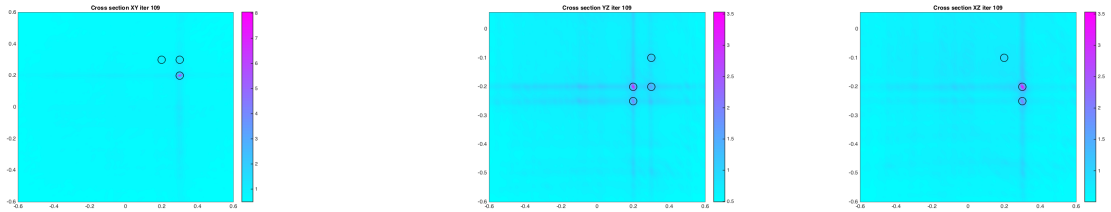


Figure 6.17 – Plot of $I_{3D}(z)$ given (6.18), for z contained in the region of interest which supposed contains 4 inclusions: From the left side to right the noisy data $\tilde{\mathbb{F}}$ is given respectively with σ ($= 0\%, 5\%$ and 10%) .

For example if we show the cross section at the point $C_1 = (3\lambda, 2\lambda, -\lambda)^T$, we obtain the following result:

Figure 6.18 – Cross section at C_1 , $I_{3D}(z)$ given by 5% of noise.

The two Figures 6.15 and 6.17 show the numerical results for the indicator function $I_{3D}(z)$ given above, we see that, this method is robust to noise. The algorithm defined from spherical quasi-backscattering configuration, gives a good reconstruction of the inclusion locations independently of their positions in the medium.

In the simulated numerical experiments of the last paragraph, we observe that if the measurements data from the three principals circles assumed to be known, the reconstruction is very successful. However, as demonstrated in the algorithm, to successfully reconstruct the inclusions the measurements corresponding on two circles for each direction are required.

Conclusion Générale

Nous concluons cette thèse par un résumé rapide du contenu et quelques perspectives.

Résultats et contributions :

Mon projet de thèse s'inscrit dans le cadre du projet FUI-Tandem, il vise le développement d'une solution aéroportée pour la détection des mines antichar et antipersonnel dans des sols désertiques. Notons que la détection des mines enfouies est une préoccupation majeure en matière de sécurité civile. Elle intéresse des États, des organisations non gouvernementales et des organisations internationales, pour mettre un point au désastre causé par ces engins explosifs qui créent chaque année un nombre important de victimes, principalement des civils. Cette thèse est donc une contribution dans la mise au point de solutions innovantes dans ce domaine.

Nous avons commencé par exploiter les résultats connus dans le domaine de l'imagerie radar pour modéliser notre problème. Il s'agissait d'adapter les techniques SAR à nos fins de détection. La justification des techniques d'imagerie radar à ouverture synthétique est basée sur une analyse asymptotique du champ diffracté dans le cas d'un milieu homogène. Numériquement, elle donne pleine satisfaction dans cette configuration idéale. La possibilité d'étendre cette technique, pour des raisons de cartographie de mines dans des milieux beaucoup plus complexes dont la modélisation prend en compte le caractère non homogène du sol, a été explorée et étudiée numériquement pour un milieu bicouche. Nous avons montré à travers les résultats de simulations numériques que ces modèles donnent des résultats satisfaisants de visualisation 2D des mines. En revanche, les résultats numériques montrent aussi qu'en présence de petites perturbations dans le milieu, ces techniques trouvent des limitations. D'autres alternatives ont été proposées pour définir un système d'imagerie plus fiable en inversant l'opérateur de convolution (définissant le modèle direct) via des régularisation de type variations totales. Le problème de ces techniques d'inversion est qu'elles demandent un temps de calcul important, ce qui rend impossible leur utilisation en temps réel.

Afin d'aller plus loin dans la recherche des mines et de rendre accessible l'information 3D, nous avons proposé une méthodologie complètement nouvelle s'inspirant des algorithmes MUSIC pour la détection de position de petites inclusions. Notre méthode trouve sa justification dans l'analyse du champ proche en configuration quasi-backscattering bien choisie. Après son étude dans des configurations planes de collecte des données (adaptées au projet Tandem) notre technique a également été adaptée à des configurations proches d'applications en imagerie biomédicale.

Ce travail de thèse a nécessité le développement d'une bibliothèque de codes informatiques matlab. Il a aussi ouvert plusieurs axes de développements que nous exposons dans la suite.

Quelques perspectives

Notons tout d'abord que les solveurs inverses développés tout au long de cette thèse n'étaient validés que sur des données synthétiques générées par la résolution du problème direct. Ceci ne

donne pas toutes les garanties de produire des données réalistes. Seul le traitement de mesures réelles sera à même de définir les améliorations à apporter aux solveurs inverses et de cerner les besoins en pratiques des outils développés dans cette thèse. Malheureusement, bien que planifié au début de la thèse, cette validation n'a pas pu avoir lieu car le dispositif expérimental n'a pas été opérationnel jusqu'à la rédaction de ce mémoire. Un premier axe de poursuite de ce travail serait donc de tester ces solveurs sur des données expérimentales.

Le deuxième axe concerne l'utilisation du même processus d'imagerie développé dans la deuxième partie de cette thèse pour des configurations plus générales. Nous pensons en effet que cette modélisation peut être étendue pour localiser des objets de plus grandes tailles. Il serait également intéressant d'étudier l'extension de cette stratégie d'imagerie pour la détection d'anomalies dans des milieux de référence non-nécessairement homogènes. Nous pensons possible l'extension des résultats de la deuxième partie à des modèles plus généraux tels que l'électromagnétisme (équation de Maxwell) où l'élastodynamique. Une voie encore plus prometteuse serait d'étendre cette technique à des données temporelles (ou multifréquences).

Bibliographie

- [1] Habib Ammari, Roland Griesmaier, and Martin Hanke. Identification of small inhomogeneities : asymptotic factorization. *Mathematics of computation*, 76(259) :1425–1448, 2007. (Cited on page 83.)
- [2] Habib Ammari, Ekaterina Iakovleva, and Dominique Lesselier. A music algorithm for locating small inclusions buried in a half-space from the scattering amplitude at a fixed frequency. *Multiscale Modeling & Simulation*, 3(3) :597–628, 2005. (Cited on pages 78 and 80.)
- [3] RJ Astley, GJ Macaulay, and JP Coyette. Mapped wave envelope elements for acoustical radiation and scattering. *Journal of Sound and Vibration*, 170(1) :97–118, 1994. (Cited on page 22.)
- [4] Lorenzo Audibert. *Qualitative methods for heterogeneous media*. PhD thesis, Ecole Doctorale Polytechnique, 2015. (Cited on page 81.)
- [5] Lorenzo Audibert, Alexandre Girard, and Houssem Haddar. Identifying defects in an unknown background using differential measurements. *Inverse Problems & Imaging*, 9(3), 2015. (Cited on page 81.)
- [6] Lorenzo Audibert and Houssem Haddar. A generalized formulation of the linear sampling method with exact characterization of targets in terms of farfield measurements. *Inverse Problems*, 30(3) :035011, 2014. (Cited on page 81.)
- [7] Markus Bachmayr and Martin Burger. Iterative total variation schemes for nonlinear inverse problems. *Inverse Problems*, 25(10) :105004, 2009. (Cited on page 66.)
- [8] Eliane Bécache, Sandrine Fauqueux, and Patrick Joly. Stability of perfectly matched layers, group velocities and anisotropic waves. *Journal of Computational Physics*, 188(2) :399–433, 2003. (Cited on page 22.)
- [9] Gernot Beer and John O Watson. *Introduction to finite and boundary element methods for engineers*. Wiley, 1992. (Cited on page 23.)
- [10] Yves Blanchard. *Le radar, 1904-2004 : Histoire d'un siècle d'innovations techniques et opérationnelles*. Ellipses, 2004. (Cited on page 5.)
- [11] Jean-Pierre Bérenger. A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves. *Journal of computational physics*, 114(2) :185–200, 1994. (Cited on page 22.)
- [12] F. Cakoni and D. Colton. *A Qualitative Approach to Inverse Scattering Theory*. Springer, New York, 2014. (Cited on page 83.)
- [13] Fioralba Cakoni, David Colton, and Houssem Haddar. On the determination of Dirichlet or transmission eigenvalues from far field data. *Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série I, Mathématique*, 348(7-8) :379–383, 2010. (Cited on page 26.)
- [14] Fioralba Cakoni, David Colton, and Houssem Haddar. On the determination of dirichlet or transmission eigenvalues from far field data. *Comptes Rendus Mathématique*, 348(7-8) :379–383, 2010. (Cited on page 83.)

- [15] Fioralba Cakoni, David Colton, and Houssem Haddar. Inverse scattering theory and transmission eigenvalues, 2016. (Cited on pages [i](#), [26](#) and [81](#).)
- [16] Anne Capelle. Document de référence sur les mines antipersonnel, l'action contre les mines et le développement. Technical report, Handicap International et l'Agence Canadienne de Développement International, 2007. (Cited on page [2](#).)
- [17] Antonin Chambolle. An algorithm for total variation minimization and applications. *Journal of Mathematical imaging and vision*, 20(1-2) :89–97, 2004. (Cited on page [66](#).)
- [18] Antonin Chambolle and Thomas Pock. A first-order primal-dual algorithm for convex problems with applications to imaging. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 40(1) :120–145, 2011. (Cited on pages [66](#) and [67](#).)
- [19] Nicolas Chaulet. *Modèles d'impédance généralisée en diffraction inverse*. PhD thesis, Ecole Polytechnique X, 2012. (Cited on page [67](#).)
- [20] M. Cheney and B. Borden. *Fundamentals of Radar Imaging*. CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM, 3600 Market Street, Floor 6, Philadelphia, PA 19104), 2009. (Cited on pages [5](#), [19](#), [20](#) and [26](#).)
- [21] Margaret Cheney and Brett Borden. Problems in synthetic-aperture radar imaging. *Inverse problems*, 25(12) :123005, 2009. (Cited on page [84](#).)
- [22] D Colton and R Kress. *Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory*. Springer, New York, 3rd edition, 2013. (Cited on pages [19](#), [20](#), [21](#) and [28](#).)
- [23] David Colton, Houssem Haddar, and Peter Monk. The linear sampling method for solving the electromagnetic inverse scattering problem. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 24(3) :719–731, 2003. (Cited on page [i](#).)
- [24] David Colton, Houssem Haddar, and Michele Piana. The linear sampling method in inverse electromagnetic scattering theory. *Inverse problems*, 19(6) :S105, 2003. (Cited on page [i](#).)
- [25] David J Daniels. A review of GPG for landmine detection. *Sensing and Imaging : An international journal*, 7(3) :90–123, 2006. (Cited on page [4](#).)
- [26] M. Demangeon. Lutte contre les mines antipersonnel : Comment éradiquer ce fléau mondial ? *Technical report, Mémoire de DEA, Université Paris*, 1997. (Cited on page [2](#).)
- [27] Julien Diaz. *Approches analytiques et numériques de problèmes de transmission en propagation d'ondes en régime transitoire. Application au couplage fluide-structure et aux méthodes de couches parfaitement adaptées*. PhD thesis, ENSTA ParisTech, 2005. (Cited on page [22](#).)
- [28] Charles G Don and Andrew J Rogers. Using acoustic impulses to identify a buried non-metallic object. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 95(5) :2837–2838, 1994. (Cited on page [3](#).)
- [29] E.C. Fear, S.C. Hagness, M. Meaney P.M., Okoniewski, and M.A. Stuchly. Enhancing breast tumor detection with near-field imaging. *IEEE Microwave Magazine*, March :48–56, 2002. (Cited on page [115](#).)
- [30] Rune Fjellanger. Case studies on training mine detection dogs. *Mine Detection Dogs : Training, Operations*, page 53, 2003. (Cited on page [3](#).)

- [31] Hichem Frigui, KC Ho, and Paul Gader. Real-time landmine detection with ground-penetrating radar using discriminative and adaptive hidden Markov models. *EURASIP Journal on Advances in Signal Processing*, 2005(12) :1–19, 2005. (Cited on page 4.)
- [32] K Gerdes. A summary of infinite element formulations for exterior Helmholtz problems. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 164(1) :95–105, 1998. (Cited on page 22.)
- [33] GICHD. A guide to mine action and explosive remnants of war. Technical report, Geneva International Centre for Humanitarian Demining., 2014. (Cited on page 3.)
- [34] CP Gooneratne, SC Mukhopahyay, and G Sen Gupta. A review of sensing technologies for landmine detection : Unmanned vehicle based approach. In *Proceedings of the 2nd International Conference on Autonomous Robots and Agents, Palmerston North, New Zealand*, pages 401–407, 2004. (Cited on page 3.)
- [35] Roland Griesmaier and Martin Hanke. Music-characterization of small scatterers for normal measurement data. *Inverse Problems*, 25(7) :075012, 2009. (Cited on page 83.)
- [36] Housseem Haddar and Ridha Mdimagh. Identification of small inclusions from multistatic data using the reciprocity gap concept. *Inverse Problems*, 28(4) :045011, 2012. (Cited on pages 78 and 81.)
- [37] Housseem Haddar and Jacob D Rezac. A quasi-backscattering problem for inverse acoustic scattering in the Born regime. *Inverse Problems*, 31(7) :075008, 2015. (Cited on pages 77 and 83.)
- [38] Christophe Hazard and Pierre-Marie Cutzach. Existence, uniqueness and analyticity properties for electromagnetic scattering in a two-layered medium. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 21 :433–461, 1998. (Cited on page 47.)
- [39] Frédéric Hecht, Olivier Pironneau, A. Le Hyaric, and K. Ohtsuka. *Freefem++ manual*, 2005. (Cited on page 24.)
- [40] Andreas Kirsch. Characterization of the shape of a scattering obstacle using the spectral data of the far field operator. *Inverse problems*, 14(6) :1489, 1998. (Cited on page 26.)
- [41] Andreas Kirsch. The MUSIC algorithm and the factorization method in inverse scattering theory for inhomogeneous media. *Inverse Problems*, 18(4) :1025–1040, 2002. (Cited on page 83.)
- [42] Andreas Kirsch. *An introduction to the mathematical theory of inverse problems*, volume 120. Springer Science & Business Media, 2011. (Cited on pages 66 and 67.)
- [43] Stephen Langdon and Simon N. Chandler-Wilde. Finite element methods for acoustic scattering. Technical report, University of Reading., 2007. (Cited on page 23.)
- [44] Jacqueline MacDonald, JR Lockwood, John McFee, Thomas Altshuler, and Thomas Broach. Alternatives for landmine detection. Technical report, DTIC Document, 2003. (Cited on page 3.)
- [45] S. Maslen. Guide de la lutte antimines. Technical report, Technical report, Centre International de Déminage Humanitaire, Genève, 2004. (Cited on pages 2 and 3.)
- [46] Robert N. McDonough and John C. Curlander. *Synthetic Aperture Radar : Systems and Signal Processing*. Wiley-Interscience, 1 edition, 1991. (Cited on pages 6 and 10.)

- [47] Patrick Millot. *Imagerie radar subsurface à haute résolution : application à la détection de mines*. PhD thesis, ONEAR-Centre de Toulouse, 2002. (Cited on page 4.)
- [48] Peter Monk. *Finite element methods for Maxwell's equations*. Oxford University Press, 2003. (Cited on page 23.)
- [49] Joonki Paik, Cheolha P. Lee, and Mongi A. Abidi. Image processing-based mine detection techniques : A review. *Subsurface Sensing Technologies and Applications*, 3(3) :153–202, 2002. (Cited on page 4.)
- [50] Lassi Päiväranta and Rainer Kress. On the far field in obstacle scattering. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 59(4) :1413–1426, 1999. (Cited on page 26.)
- [51] Alan Poling, Christophe Cox, Bart Weetjens, Negussie Beyene, and Andrew Sully. Two strategies for landmine detection by giant pouched rats. *Journal of Conventional Weapons Destruction*, 14(1) :23, 2015. (Cited on page 3.)
- [52] Alan Poling, Bart Weetjens, Christophe Cox, Negussie W Beyene, Harvard Bach, and Andrew Sully. Using trained pouched rats to detect land mines : Another victory for operant conditioning. *Journal of applied behavior analysis*, 44(2) :351–355, 2011. (Cited on page 3.)
- [53] Delphine Potin. *Traitement des signaux pour la détection de mines antipersonnel*. PhD thesis, Ecole Centrale de Lille, 2007. (Cited on pages 2, 3 and 4.)
- [54] Sripad Ram, E Sally Ward, and Raimund J Ober. Beyond Rayleigh's criterion : a resolution measure with application to single-molecule microscopy. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 103(12) :4457–4462, 2006. (Cited on page 7.)
- [55] Franz Rellich. Über das asymptotische verhalten der Lösungen von... $u + \dots u = 0$ in unendlichen Gebieten. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 53 :57–65, 1943. (Cited on page 16.)
- [56] Leonid I Rudin, Stanley Osher, and Emad Fatemi. Nonlinear total variation based noise removal algorithms. *Physica D : Nonlinear Phenomena*, 60(1) :259–268, 1992. (Cited on pages 64 and 65.)
- [57] S.Y. Semenov, R.H. Svenson, V.G. Posukh, W. Chen, A.G. Nazarov, Y.E. Sizov, J. Kassel, and G.P. Tatsis. Dielectrical spectroscopy of canine myocardium during ischemia and hypoxia at frequency spectrum from 100khz to 6ghz. *IEEE Trans MI*, 21(6) :703–707, 2001. (Cited on page 115.)
- [58] S.Y. Semenov, R.H. Svenson, and G.P. Tatsis. Microwave spectroscopy of myocardial ischemia and infarction. 1. experimental study. *Annals of Biomedical Engineering*, 28(1) :48–54, 2000. (Cited on page 115.)
- [59] Anne Sentenac, Patrick C Chaumet, and Kamal Belkebir. Beyond the Rayleigh criterion : grating assisted far-field optical diffraction tomography. *Physical review letters*, 97(24) :243901, 2006. (Cited on page 7.)
- [60] Nobuhiro Shimoi, Yoshihiro Takita, Kenzo Nonami, and Katsumi Wasaki. Smart sensing for mine detection studies with ir cameras. In *Computational Intelligence in Robotics and Automation, 2001. Proceedings 2001 IEEE International Symposium on*, pages 356–361. IEEE, 2001. (Cited on page 4.)

-
- [61] TANDEM. Technique aéroportée numérique de détection de mines. Technical report, Société BULL Amesys., 2011. (Cited on page 5.)
- [62] IN Vekua. Metaharmonic functions. *trudy tbilisskogo matematicheskogo instituta* 12 : 105–174. xu y, mawata c, lin w (2000) generalized dual space indicator method for underwater imaging. *Inverse Problems*, 16 :1761–1776, 1993. (Cited on page 16.)
- [63] Michael S Vogelius and Darko Volkov. Asymptotic formulas for perturbations in the electromagnetic fields due to the presence of inhomogeneities of small diameter. *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 34(4) :723–748, 2000. (Cited on pages 78 and 79.)

Titre : Méthodes d'inversion pour la reconstruction de mines enfouies à partir de mesures d'antennes radar

Mots clefs : Problèmes de diffraction direct et inverse, détection de mines, imagerie Radar, analyse asymptotique du champ proche, méthode de type MUSIC.

Résumé : Ce travail de thèse s'inscrit dans le cadre du projet FUI Tandem portant sur l'imagerie radar de mines enfouies dans un sol sec par des antennes héliportées. Les données d'antennes correspondent à des mesures de champ électromagnétique (composante tangentielle à l'antenne) en configuration 'back-scattering' : une seule antenne émettrice-réceptrice. L'objectif premier de la thèse est de valider/modifier la méthodologie SAR (Synthetic Aperture Radar) proposée par les ingénieurs pour traiter les données d'antenne et imager les mines. La difficulté essentielle réside dans le fait que la méthode SAR repose sur le principe d'un milieu de référence homogène alors que le cas d'étude ne l'est pas. Nous avons étudié l'incorporation d'une approximation bicouche du milieu de référence pour corriger l'effet du sol et obtenir des images moins sensibles à l'effet de celui-ci. La première solution consiste à imiter la technique SAR pour construire une indicatrice de la géométrie via la rétro-propagation de la donnée dans le milieu

bi-couche en utilisant la formule donnée par l'approximation de Born. La deuxième option, beaucoup plus coûteuse numériquement consiste à inverser le modèle de Born avec une technique de régularisation de type variation totale. Nous nous intéressons dans une deuxième partie à l'adaptation de méthodes d'inversion de type MUSIC (Multiple Signal Classification) pour retrouver l'information 'profondeur' non fournie par les méthodes SAR. S'inspirant de la problématique Tandem, nous avons proposé l'extension de ces méthodes au cas de données en configuration quasi-back-scattering : une antenne émettrice couplée à un réseau 1D d'antennes réceptrices. La méthodologie est complètement nouvelle et la justification de la méthode repose sur l'analyse asymptotique du problème de diffraction dans le régime petit obstacle et champ lointain. L'étude a également été étendue à des configurations cylindriques qui pourraient être adaptées à l'imagerie bio-médicale.

Title : Inversion methods for the reconstruction of buried landmines from radar measurements.

Keywords : Inverse scattering problems, Radar imaging, MUSIC type algorithm, asymptotic Analysis, landmines detection.

Abstract : This work is a part of the FUI Tandem project on radar imaging of mines buried in dry ground by heliborne antennas. The antenna data correspond to measurements of the electromagnetic field (component tangential to the antenna) in the back-scattering configuration: a single transmitter/transceiver antenna. The primary objective of the thesis is to validate / modify the SAR (Synthetic Aperture Radar) methodology proposed by engineers to process the antenna data and to image the mines. The main difficulty lies in the fact that the SAR method is based on the principle of a homogeneous background whereas the study case is not. We have studied the incorporation of a two-layer approximation of the reference medium to correct the effect of the soil and to obtain images that are less sensitive to the effect of the latter. The first solution consists in mimicking the SAR technique to construct an indicator of the geometry via the back propagation of the

data in the bi-layer medium using the formula given by the Born approximation. The second option, much more costly numerically consists in inverting the Born model with a regularization technique of the total variation type. In a second part, we are interested in adapting MUSIC (Multiple Signal Classification) methods to retrieve the "depth" information not provided by SAR methods. Based on the Tandem experiment, we proposed the extension of these methods to the case of data in quasi-back-scattering configuration: a transmitting antenna coupled to a 1D array of receiving antennas. The methodology is completely new and the justification of the method is based on the asymptotic analysis of the scattering problem in the small obstacle and far field regime. The study was also extended to cylindrical configurations that could be adapted to biomedical imaging.