



Modélisation des effets tournants du pneumatique et des forces decontact pour le bruit de roulement basses fréquences

Trong Dai Vu

► To cite this version:

Trong Dai Vu. Modélisation des effets tournants du pneumatique et des forces decontact pour le bruit de roulement basses fréquences. Mécanique des matériaux [physics.class-ph]. Université Paris-Est, 2014. Français. NNT : 2014PEST1051 . tel-01726945

HAL Id: tel-01726945

<https://pastel.hal.science/tel-01726945>

Submitted on 8 Mar 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ÉCOLE DOCTORALE SCIENCES, INGÉNIERIE ET ENVIRONNEMENT

T H È S E

de l'Université Paris-Est

Spécialité : STRUCTURES ET MATÉRIAUX

Présentée par

Trong Dai VU

**Modélisation des effets tournants du pneumatique et des forces de
contact pour le bruit de roulement basses fréquences**

Thèse soutenue le 18 février 2014 devant le jury composé de :

Jean-Jacques SINOUE, Ecole Centrale de Lyon, rapporteur

Mabrouk BEN TAHAR, Université de Technologie de Compiègne, rapporteur

Denis DUHAMEL, Université Paris-Est, directeur de thèse

Honoré YIN, Université Paris-Est, examinateur

Michel BÉRENGIER, IFSTTAR, examinateur

Arnaud GAUDIN, PSA Peugeot Citroën, examinateur

Zouhir ABBADI, PSA Peugeot Citroën, examinateur

Remerciements

Je tiens à remercier très chaleureusement Denis DUHAMEL, Honoré YIN, Arnaud GAUDIN et Zouhir ABBADI pour leur disponibilité et la qualité de leur encadrement au cours de ces trois années. L'intérêt et la rigueur scientifique qu'ils ont portés sur mon travail de recherche ont permis de le faire progresser efficacement.

J'exprime ma plus sincère gratitude envers Jean-Jacques SINOUE, Mabrouk BEN TAHAR et Michel BÉRENGIER qui m'ont fait l'honneur de participer au jury de ma thèse.

Je remercie également toute l'équipe " Sciences des Matériaux Mécaniques des Structures " du groupe Peugeot Citroën (PSA) pour son accueil chaleureux.

Mes plus sincères remerciements vont également à l'équipe Dynamique du laboratoire Navier dont le savoir-faire a été essentiel à la réussite de ma thèse.

Je remercie toutes les autres personnes, permanents, doctorants ou stagiaires, qui ont pu contribuer de près ou de loin à l'avancement de mon travail et ont su me donner de nombreux conseils scientifiques et techniques.

Enfin, je remercie toute ma famille et mes amis pour leur soutien au quotidien. Mes pensées amoureuses vont à Duong pour tout le bonheur qu'elle m'apporte chaque jour.

Résumé

Le bruit de roulement contribue fortement au bruit perçu à l'intérieur de l'habitacle des automobiles. Ce bruit a pour origine le contact du pneumatique sur une chaussée rugueuse. En basses fréquences (0-400 Hz), il est transmis dans l'habitacle du véhicule essentiellement par la voie solidienne. La méthode actuelle de prévision de ce bruit chez PSA Peugeot Citroën repose sur une approche mixte calcul-mesure longue, coûteuse et pas suffisamment prédictive. Pour contourner ces limitations, une filière purement numérique est envisagée. Elle demande de modéliser le comportement vibro-acoustique du pneumatique en prenant en compte les effets liés à la rotation et de résoudre le problème de contact avec une chaussée rugueuse. Concernant la modélisation d'un pneumatique en rotation, des formulations des effets tournants d'un solide déformable sont établies en utilisant une approche Arbitrairement Lagrangienne Eulérienne (ALE). Ces formulations sont validées par une application sur un nouveau modèle simplifié du pneumatique. Il s'agit d'un modèle d'anneau circulaire incluant les effets de cisaillement soumis localement à une charge représentative de la masse du véhicule. Un modèle plus complexe d'ensemble monté pneu/roue/cavité intégrant l'ensemble des effets liés à la rotation est également validé par une comparaison avec des essais. Ensuite, le contact avec une chaussée réelle est formulé par différentes approches permettant de réduire le temps de calcul pour une utilisation industrielle. En particulier, le calcul du contact est décomposé en un calcul statique non-linéaire suivi d'un calcul dynamique linéaire. La validation du modèle de contact est réalisée par une comparaison calcul/essai. Les résultats sont très satisfaisants.

Mots-clés : pneumatique, roue, cavité, bruit de roulement, vibration, contact pneumatique/chaussée, dynamique des structures, effets tournants, effets gyroscopiques, anneau circulaire

Abstract

The rolling noise contributes significantly to the noise inside the cars. This noise comes from the tire/road contact. In low frequencies (0-400Hz), it is transmitted into the cabin through structural vibrations. The current approach used at PSA Peugeot Citroën to predict the noise, is a mixed simulation/experimental which is long, expensive and not sufficiently predictive. In order to overcome these difficulties, a full numerical approach is considered. It requires modelling the tire vibrations by taking into account the rotating effects and the contact with rough surface. Concerning the model of rolling tire, a formulation of a deformable solid is constructed by using an Arbitrary Lagrangian Eulerian approach. This formulation is validated by an application on a new simplified tire model which is a circular ring model including shear stresses and non-linear effects due to the vehicle weight. A more complex model composed of a tire/wheel/cavity including rotating effects is also validated by comparison with experiments. Then, the contact with a real road is calculated by different approaches to get acceptable computing time for industrial uses. In particular, the calculation of the contact is divided into a non-linear static analysis followed by a linear dynamic calculation. The validation of this model is successfully by comparison with test results.

Keywords : rolling noise, vibrations, tire/road contact, structural dynamics, rotating effects, gyroscopic effects, circular ring model

Table des matières

Introduction	i
1 Introduction au bruit de roulement	1
1.1 Le bruit de roulement	2
1.1.1 Le bruit à l'intérieur et à l'extérieur du véhicule	2
1.1.2 Comparaison aux autres sources de bruit	4
1.1.3 Mécanismes de génération du bruit de roulement	6
1.1.4 Mécanismes de propagation	8
1.1.5 Influence du pneumatique et de la roue	9
1.1.6 Influence de la chaussée	10
1.2 Le calcul du bruit de roulement chez PSA Peugeot Citroën	13
1.2.1 Voie aérienne	13
1.2.2 Voie solidienne	14
1.2.3 Travail envisagé pour la thèse	19
1.3 Conclusion	20
2 Etat de l'Art	21
2.1 Dynamique d'un solide déformable en rotation	22
2.1.1 Approche Eulérienne	22
2.1.2 Approche Lagrangienne	23
2.1.3 Approche arbitrairement Lagrangien Eulérien (ALE)	23
2.1.4 Travail envisagé	24
2.2 Modèles vibratoires de pneumatique	24
2.2.1 Modèles analytiques	24
2.2.2 Modèles numériques	31
2.3 Modèles de contact	33
2.3.1 Loi de contact	33
2.3.2 Contact multi-points	36
2.3.3 Schémas numériques appliqués à la résolution du problème de contact	39
2.3.4 Quelques modèles de contact du pneumatique	44
2.3.5 Modèle du pneumatique pour traiter le contact	47
2.4 Conclusion	47
3 Solides déformables en rotation et en transformations finies	49
3.1 Introduction	50
3.2 Équations du mouvement	50
3.2.1 Description du mouvement	50
3.2.2 Équations d'équilibre de l'état stationnaire	52
3.2.3 Équations d'équilibre de l'état vibrant	54
3.3 Formulation variationnelle	58

3.4	Discrétisation du problème dynamique	63
3.5	Conclusion	66
4	Modèle d'anneau circulaire non-linéaire en géométrie	69
4.1	Introduction	70
4.2	Description du modèle	70
4.3	Mouvement stationnaire	71
4.3.1	Description du mouvement	71
4.3.2	Tenseur de transformation de Green	72
4.3.3	Loi de comportement	74
4.3.4	Equations d'équilibre	75
4.3.5	Poutre d'Euler Bernoulli avec l'hypothèse de petites déformations	80
4.3.6	Poutre de Timoshenko	82
4.4	Mouvement dynamique	83
4.4.1	Rappel de différentes configurations du modèle	83
4.4.2	Équations d'équilibre	88
4.4.3	Modèles simples dans la littérature	94
4.4.4	Premiers modes propres des modèles	97
4.5	Conclusion	104
5	Validation des modèles proposés et des effets tournants	105
5.1	Résolution numérique du modèle analytique	106
5.1.1	Cas stationnaire	106
5.1.2	Cas dynamique	107
5.2	Les MEF de pneumatiques utilisés pour la validation	107
5.2.1	MEF 2D constitué de poutres	107
5.2.2	MEF 3D constitué de coques	107
5.3	Validations	108
5.3.1	Cas sans rotation, modèle analytique vs. MEF poutre	108
5.3.2	Cas sans rotation, MEF poutre vs. MEF coque	112
5.3.3	Cas avec rotation, modèle analytique vs. MEF coque	113
5.4	Les effets de rotation sur un MEF Pneu/Roue/Cavité (PRC) complet	118
5.4.1	Description rapide du MEF PRC	118
5.4.2	Validation du modèle PRC à l'arrêt	119
5.4.3	Validation du modèle PRC en rotation	120
5.5	Conclusion	127
6	Modèles de contact	129
6.1	Introduction	130
6.2	Études analytiques et numériques de systèmes simples - contact 1D	131
6.2.1	Système élémentaire amorti masse/ressort/amortisseur	131
6.2.2	Systèmes de deux masse/ressort en série	134
6.3	Modèle d'anneau circulaire en contact avec une chaussée - contact 2D	138
6.3.1	Description des configurations	139

6.3.2	Calcul statique	141
6.3.3	Calcul dynamique	146
6.3.4	Application numérique et validations	147
6.4	Modèle de contact complet - contact 3D	151
6.4.1	Contact statique	151
6.4.2	Contact dynamique	154
6.4.3	Application numérique	157
6.5	Conclusion	160
7	Applications au roulage sur une chaussée réelle	163
7.1	Description de la surface de la chaussée	164
7.1.1	Identification du cylindre moyen de nuage des points	165
7.1.2	Projections de tous les points sur le cylindre moyenné	165
7.1.3	Construction d'une chaussée plane	166
7.1.4	Remaillage pour compléter les facettes dans les espaces blancs	167
7.2	Roulage sur une barrette	168
7.2.1	Le calcul dynamique direct	168
7.2.2	Approche statique suivi d'un calcul dynamique linéaire	171
7.3	Roulage sur une chaussée réelle	174
7.3.1	Contact du pneu seul sur une chaussée réelle	174
7.3.2	Contact de PRC sur une chaussée réelle	176
7.4	Conclusion	179
	Conclusions et Perspectives	181
	Matrice de rotation	185
	Développement des facteurs dans la formulation variationnelle	187
.1	Démonstration de la relation (3.45)	187
.2	Démonstration de la relation (3.41)	187
.3	Démonstration de la relation (3.73)	188
.4	Démonstration de la relation (3.99)	188
	Équilibre des poutres	189
.5	Equilibre du moment	189
.6	Force d'inertie due à la rotation	192
	Bibliographie	193

Table des figures

1.1	Schéma de mesure du bruit de roulement à l'extérieur du véhicule	2
1.2	Micro utilisé pour la mesure de bruit à l'intérieur du véhicule	3
1.3	Illustration du banc à rouleaux chez PSA Peugeot Citroën	4
1.4	Les sources de bruit [90]	5
1.5	Le bruit du véhicule et le bruit de roulement selon les conditions d'utilisation Volvo S40 (Sandberg [89])	6
1.6	Mécanisme de résonance de Helmholtz	7
1.7	Mise en évidence de la séparation du bruit aérien et du bruit solidien sur une Citroën C3	9
1.8	Mise en évidence de la séparation du bruit aérien et du bruit solidien sur une Peugeot 407	10
1.9	Niveau sonore global en fonction de la vitesse	11
1.10	Le bruit extérieur des véhicules correspondant à différents types de surfaces de chaussées (Watts [99])	12
1.11	Le bruit à l'intérieur correspondant à différents types de surfaces de chaussées	12
1.12	Exemple de maillage et de sources acoustiques utilisés pour le calcul du bruit aérien	13
1.13	Niveau de pression (en couleur) pariétaux et sur le maillage de visualisation externe avec intensité (flèche blanche)	13
1.14	La décomposition de véhicule pour traiter le bruit de roulement	14
1.15	Le principe de superposition utilisé pour le calcul du bruit de roulement chez PSA Peugeot Citroën	14
1.16	Comparaison des résultats de mesure directe et par l'approche de décomposition pour le cas d'une roue aluminium	15
1.17	Comparaison des résultats de mesure et de l'approche de décomposition pour le cas d'une roue tôle	16
1.18	Banc de mesure du torseur d'efforts de blocage au centre de roue	17
1.19	Modèle éléments finis de train et roues assemblé à des modèles réduits de pneumatique	18
1.20	Comparaison des résultats calculés (noir) et mesurés (rouge)	18
1.21	Modes vibratoires de jante (haut) et de pneumatique (bas)	19
1.22	Modèle d'un ensemble monté pneumatique/jante/cavité complet	19
2.1	(a) Fonction de transfert d'un point sur le pneu à $\Omega = 0rad/s$ (courbe continue) et à $\Omega = 20rad/s$ (courbe discontinue), (b) Les 10 premières fréquences à différentes vitesses.	22
2.2	Les différentes configurations dans l'approche ALE : configuration initiale, configuration actuelle et configuration de référence (bas)	24
2.3	Modèle d'anneau circulaire.	25
2.4	Comparaison des résultats de mesure et de simulation (Périsse [78]).	26
2.5	Modèle Ftire (Gipser [35])	27
2.6	Modes de vibration du pneu en encastrant la jante (Gipser [35])	27
2.7	Comparaison des forces transmises à la jante à la vitesse de 40 Km/h. Gauche : force normale. Droite : force tangentielle (Gipser [35])	28

2.8	Modèle à deux plaques du pneu (Muggleton).	28
2.9	Vitesse tangentielle d'un point du pneu calculée (ligne continue); et mesurée (ligne discontinue) (Larsson [58])	29
2.10	Modèle de la bande de roulement (Pinnington [81])	29
2.11	Modèle de pneumatique (Kim et Bolton [50])	30
2.12	Vitesse des points de la bande roulement (gauche) et nombre d'onde (droite) (Kim et Bolton [50])	31
2.13	Comparaison des résultats calculés et mesurés par Narasimha [70]	32
2.14	La géométrie du contact	34
2.15	Paramètres de loi de contact pour deux aspérités de forme quelconque	35
2.16	La distribution des contraintes dans l'aire de contact et les vecteurs de la vitesse de glissement [69]	44
2.17	Approche multi-aspérités à deux échelles [27]	45
2.18	Spectre de la force de contact au milieu de l'empreinte d'un pneumatique en contact avec une chaussée réelle [66]	46
2.19	Modèle bi-couche de Larson et Kropp [58]	47
3.1	Description du modèle.	51
4.1	Description du modèle d'anneau circulaire.	71
4.2	Description de la transformation.	72
4.3	Équilibres autour d'une portion de poutre.	76
4.4	Section droite	78
4.5	Illustration des différentes configurations	84
5.1	Modèle d'anneau circulaire sous Abaqus	108
5.2	Déplacement radial en fonction de la pression de gonflage	109
5.3	Configurations non-déformée vs. déformée du pneumatique résultant de calculs statiques non-linéaires	110
5.4	Configurations non-déformée vs. déformée du pneumatique résultant de calculs statiques non-linéaires et linéaire	110
5.5	Modes propres du cas centre roue encastré et la base de roue libre	111
5.6	Modes propres en encastrant le centre roue et la base de roue	111
5.7	Réponse de la force verticale au centre roue du problème forcé en base de roue	112
5.8	Fréquences en fonction de la vitesse de rotation	114
5.9	Fréquences propres de l'anneau circulaire à $\Omega = 100$ rad/s dans le cas non-linéaire en déformation	115
5.10	Réponse de l'anneau du problème forcé ($\Omega = 100$ rad/s)	116
5.11	Les réponses longitudinales et verticales au centre de roue	116
5.12	Cartographie de réaction verticale au centre de roue sous Abaqus (gauche) et Matlab (droite)	117
5.13	Réponse de l'anneau au problème de déplacement imposé	117
5.14	Analyse modale expérimentale du pneumatique : points de chargement (gauche) et maillage expérimental (droite)	119

5.15	Distribution des points des mesures	120
5.16	Fonction de transfert de l'accélération du point de mesure en excitant en trois directions	120
5.17	Bancs à rouleaux utilisés pour la mesure d'ensembles montés tournant	121
5.18	Comparaison des modes entre le calcul et la mesure	122
5.19	Fonction de transfert mesurée de la force verticale et du moment longitudinal au centre de la roue tôle	123
5.20	Fonction de transfert mesurée de la force verticale et du moment longitudinal au centre de la roue alu	124
5.21	Fonction de transfert calculée de la force verticale et du moment longitudinal au centre de la roue tôle	125
5.22	Fonction de transfert calculée de la force verticale et du moment longitudinal au centre de la roue alu	126
6.1	La structure du chapitre.	130
6.2	Système masse-ressort-amortisseur.	131
6.3	La solution analytique de contact du système masse-ressort.	133
6.4	La solution numérique à l'aide des fonctions de Green pour le contact du système masse-ressort.	133
6.5	La solution numérique de la méthode de Newmark appliquée au contact du système masse-ressort.	134
6.6	Système d'une série de masses et de ressorts.	134
6.7	Effets dynamiques associés aux patins de caoutchouc.	138
6.8	Modèle du pneumatique en contact avec la chaussée réelle.	139
6.9	Modèle de ressort du patin.	139
6.10	Configurations du modèle	140
6.11	Effort de contact	141
6.12	Algorithme de résolution du contact statique direct.	143
6.13	Décomposition du problème.	143
6.14	Algorithme de résolution du contact statique sur le sol lisse.	144
6.15	Algorithme de résolution du contact statique linéaire.	145
6.16	Algorithme de résolution du contact dynamique.	147
6.17	Configuration déformée sur le sol lisse.	148
6.18	Forces de contact sur le sol lisse.	148
6.19	Comparaison des approches du contact sur le sol sinusoïdal pour le calcul statique.	149
6.20	Réaction verticale au centre roue lors du contact dynamique sur le sol sinusoïdal.	149
6.21	Spectre de la partie stationnaire de la force verticale au centre roue lors du contact dynamique sur le sol sinusoïdal.	150
6.22	Force verticale et force longitudinale au centre roue lors du contact dynamique sur une barrette de 5 x 10 mm pour l'anneau circulaire	151
6.23	Spectre de la force verticale au centre roue lors du contact dynamique sur une barrette de 5 x 10 mm pour l'anneau circulaire	152
6.24	Force verticale au centre roue du problème de déplacements imposés.	153
6.25	L'algorithme de la résolution du contact statique sur une chaussée réelle.	155

6.26	Comparaison des déplacements des calculs statiques et dynamique au point du contact	156
6.27	Comparaison des forces du calcul statique et dynamique au point du contact	157
6.28	L'aire de contact du pneu avec une chaussée réelle.	158
6.29	Les efforts de contact du pneu avec une chaussée réelle.	159
6.30	Comparaison des spectres sans moyenné de la force verticale au centre roue.	159
6.31	Comparaison des spectres moyennés de la force verticale au centre roue.	160
6.32	Comparaison des spectres moyennés de la force longitudinale au centre roue.	160
7.1	Dispositif de mesure.	164
7.2	Secteur gravillonné dans les essais épinglés.	164
7.3	Cylindre approché.	165
7.4	Surface de la chaussée traitée.	166
7.5	Surface de la chaussée traitée.	167
7.6	Le maillage après correction des espaces blancs.	168
7.7	Surface de la chaussée réelle.	169
7.8	Roulage sur une barrette.	170
7.9	Spectre des efforts au centre roue.	170
7.10	Déplacement vertical et le spectre excité.	171
7.11	Le spectre de déplacement imposé à un point.	172
7.12	Le spectre de force imposée à un point.	172
7.13	L'algorithme du traitement statique.	173
7.14	Les forces au centre de roue calculées par deux méthodes.	174
7.15	Modèle du pneu utilisé dans les calculs.	175
7.16	Comparaison de la force verticale au centre roue de la mesure et du calcul.	175
7.17	Maillage grossier du pneu	176
7.18	Schéma du calcul des excitations du modèle grossier	176
7.19	Comparaison de la réponse de la force verticale au centre de roue	177
7.20	Comparaison du calcul et de la mesure - F_z	178
7.21	Comparaison du calcul et de la mesure - M_x	179
7.22	Comparaison du calcul et de la mesure - F_z	179
7.23	Comparaison du calcul et de la mesure - M_x	180

Liste des tableaux

2.1	Conditions de stabilité de la méthode de Newmark	42
2.2	Les méthodes numériques associées à la méthode de Newmark	42
4.1	Rappel des différentes configurations	84
5.1	Paramètres du modèle analytique	106
5.2	Comparaison des fréquences propres en Hz du MEF poutre et du MEF coque en fixant la base de roue	113
5.3	Les paramètres du modèle PRC	118
6.1	Les paramètres du modèle de deux masses et deux ressorts	137
6.2	Temps du traitement des contacts statiques sous Abaqus	152

Introduction

Dans un souci constant d'améliorer la perception de leurs véhicules, les constructions automobiles cherchent à réduire le bruit perçu dans l'habitacle d'une automobile comme à l'extérieur. Les sources de bruit du véhicule peuvent être classées en trois familles : le bruit aérodynamique (turbulences de l'air), le bruit causé par le groupe moto-propulseur (moteur, boîte de vitesse ...), le bruit émis par le contact entre le pneumatique et la chaussée (le bruit de roulement). Les technologies comme l'hybridation ou l'électrification permettent de réduire significativement la deuxième source de bruit. Des études dans la littérature démontrent que le bruit de contact d'un pneumatique avec une chaussée est plus important que les autres sources de bruit dans la phase de roulage à 80 km/h. Des études sur la prévision et la réduction du bruit de roulement ont été menées depuis plusieurs années. A titre d'exemple, on peut citer quelques projets français et européens comme PREDIT Texture-Bruit (2004-2007), SILVIA (2002-2005), HARMONOISE (2001-2004), DEUFRAKO P2RN (2006-2008). Ces projets portent sur les études théoriques et expérimentales pour appréhender les phénomènes physiques du bruit de roulement. Deux axes scientifiques sont suivis dans ces projets : les vibrations du pneumatique avec les conditions de mise sous charge et de rotation et le contact entre le pneumatique et la chaussée.

Chez le groupe PSA Peugeot Citroën, des études sur le calcul du bruit de roulement à l'intérieur du véhicule sont menées. Ces études portent sur la modélisation du pneumatique et les essais d'identification des sources de vibrations. Dans le cadre d'un projet de recherche, un modèle éléments finis de l'ensemble monté (pneu/roue/cavité) en configuration écrasée, c'est-à-dire suite à sa mise sous pression et à l'application de la charge du sol, a été développé. Ce modèle permet de bien représenter le comportement vibro-acoustique de l'ensemble sur la plage 0-400Hz. Il comporte, cependant, des limites qui empêchent de l'exploiter pleinement pour la prestation du bruit de roulement dans le cadre des projets :

- Il n'est valable qu'à l'arrêt (sans rotation du système). Les phénomènes physiques liés à la rotation, tels que les effets gyroscopiques/Doppler/centrifuges, ne sont donc pas représentés dans le modèle.
- Il n'existe pas aujourd'hui de chargement équivalent pertinent pour la prestation du bruit de roulement qui puisse être appliqué au niveau de la base du pneumatique (dans l'aire de contact) pour des calculs dans le domaine fréquentiel.

Compte tenu de ces deux limites, la filière utilisée aujourd'hui en projet pour la prestation du bruit de roulement est une filière mixte calcul-essai contraignante, longue, coûteuse et pas suffisamment prédictive mais sans alternative dans l'immédiat.

L'objectif de cette thèse est de contribuer à la mise en place d'une approche entièrement numérique pour le calcul du bruit de roulement. Plus précisément, les tâches principales portent sur :

- L'enrichissement du modèle éléments finis de l'ensemble monté pneumatique/roue/cavité par la prise en compte des effets tournants : formulation adaptée du problème (lagrangienne, lagrangienne mise-à-jour, eulérienne, mixte eulérienne-lagrangienne), construction des matrices associées aux différents

termes, méthodes de réduction pertinentes du système, implémentation dans les outils homologués au sein du groupe (environnement Vlab, codes EF Abaqus et Nastran).

- L'identification d'un profil routier représentatif du bruit de roulement et applicable au niveau de l'aire de contact du pneumatique : prise d'empreintes routières, détermination du profil lu par le pneumatique, passage du domaine temporel au domaine fréquentiel, construction d'excitations fréquentielles équivalentes en base de pneumatique, comparaison calculs/essais sur plusieurs pneumatiques.

Le premier axe scientifique de la thèse porte sur le formalisme adapté qui doit être privilégié pour la modélisation des effets tournants (gyroscopiques, centrifuges,...) sur l'ensemble couplé pneumatique/cavité/roue chargé par le sol en base de roue.

Le second axe concerne le contact avec la chaussée. Ce type d'interactions demeure un phénomène difficile à modéliser, notamment en dynamique. Néanmoins, une approche Arbitrairement Lagrangienne Eulérienne s'est révélée efficace pour le calcul de la pression entre surfaces rugueuses. Une des propositions consiste à étendre cette approche aux conditions de roulement pour des pneumatiques réels avec une description réaliste des textures de chaussées en profitant des simplifications possibles liées au domaine des basses fréquences. Il en est attendu une estimation pertinente des forces de contact jusqu'à 400 Hz qui pourra servir ensuite de source d'excitation pour les vibrations de la structure du pneumatique.

Le plan du mémoire de thèse

Le mémoire de thèse est divisé en sept chapitres.

Le premier chapitre est une introduction au bruit de roulement. Il décrit la distinction entre les bruit intérieur et extérieur, les méthodes de mesures associées. Il détaille ensuite les sources de ce type de bruit, les mécanismes de propagation et les paramètres influents. Enfin, la méthode de calcul du bruit de roulement utilisée actuellement à PSA est précisée avec ses avantages et inconvénients.

Le second chapitre est une étude bibliographique générale sur la dynamique des solides en rotation ainsi que les modèles vibratoires de pneumatiques et les modèles de contact pneu/chaussée existant dans la littérature.

Le troisième chapitre consiste à formuler le problème de la dynamique d'un solide déformable en rotation en s'appuyant sur une approche Arbitrairement Lagrangienne Eulérienne ALE. Les formules analytiques des équations d'équilibre de différentes configurations sont construites. Une méthode numérique est proposée pour établir les matrices associées à l'effet de rotation.

Le quatrième chapitre est consacré à la construction d'un modèle simple de pneumatique : un modèle d'anneau circulaire 2D incluant les effets de cisaillement et pouvant être soumis localement à une charge représentative de la masse du véhicule. En utilisant les formulations du chapitre 3, les équations d'équilibre sont détaillées analytiquement en deux états : stationnaire et dynamique. Les expressions analytiques d'autres modèles de la littérature sont retrouvées en reprenant leurs hypothèses.

Le cinquième chapitre concerne les validations des modèles proposés et des effets tournants. La

validation du modèle analytique d’anneau circulaire est faite par des comparaisons avec des modèles numériques sous Abaqus. Les effets tournants sont observés et confirmés par les mesures expérimentales. Un modèle pneu/roue/cavité (PRC) est construit. Son comportement vibratoire est validé à l’arrêt et en rotation.

Le sixième chapitre porte sur des modèles de contact et des approches de résolution envisagées pour le traitement du contact d’un pneu 3D avec une chaussée réelle. Des modèles de contact 1D et 2D sont proposés pour étudier et valider différentes hypothèses simplificatrices de calcul. Un problème de contact 3D est traité en appliquant les différentes hypothèses validées. En particulier, le calcul du contact est décomposé en un calcul statique non-linéaire suivi d’un calcul dynamique linéaire. Il est aussi validé par une comparaison avec une simulation sous Abaqus.

Enfin, le septième chapitre est dédié au traitement du problème de contact 3D entre un pneumatique et une chaussée réelle. La validation des hypothèses et de l’approche de calcul est obtenue par comparaison calcul/essais.

Introduction au bruit de roulement

Sommaire

1.1	Le bruit de roulement	2
1.1.1	Le bruit à l'intérieur et à l'extérieur du véhicule	2
1.1.2	Comparaison aux autres sources de bruit	4
1.1.3	Mécanismes de génération du bruit de roulement	6
1.1.4	Mécanismes de propagation	8
1.1.5	Influence du pneumatique et de la roue	9
1.1.6	Influence de la chaussée	10
1.2	Le calcul du bruit de roulement chez PSA Peugeot Citroën	13
1.2.1	Voie aérienne	13
1.2.2	Voie solidienne	14
1.2.3	Travail envisagé pour la thèse	19
1.3	Conclusion	20

1.1 Le bruit de roulement

1.1.1 Le bruit à l'intérieur et à l'extérieur du véhicule

Le bruit de roulement est le bruit provenant du contact entre les pneumatiques et le revêtement de la chaussée [24]. Les connaissances actuelles suggèrent que ce type de bruit est une contribution importante au bruit des véhicules. Il y a deux catégories de personnes concernées par le bruit de roulement :

- les personnes à proximité des axes routiers dont la gêne est liée notamment au trafic et à la vitesse de passage des véhicules.
- les personnes dans l'habitacle du véhicule. Le bruit est transmis par voies aériennes et solidiennes vers l'habitacle et gêne les passagers et le conducteur.

Cela conduit à distinguer deux catégories du bruit de roulement : le bruit à l'extérieur et le bruit à l'intérieur. Le bruit à l'extérieur se propage dans l'environnement autour du véhicule. Le bruit à l'intérieur est celui qui est perçu dans l'habitacle. Afin d'étudier ces bruits, il faut pouvoir les mesurer et en identifier les sources.

Les méthodes de mesure du bruit de roulement

Concernant la mesure du bruit à l'extérieur, la DIRECTIVE 2001/43/CE a détaillé ses principes avec ses normes [24]. Ce bruit est mesuré avec une paire de microphones situés de chaque côté du véhicule à une distance de 7.5 m de l'axe central de la piste et à 1.2 m de hauteur. Le véhicule est équipé de 4 pneus identiques et roule à une vitesse constante de 80 km/h pour un véhicule léger et de 70 km/h pour un poids lourd (cf. figure 1.1). Le revêtement est normalisé.

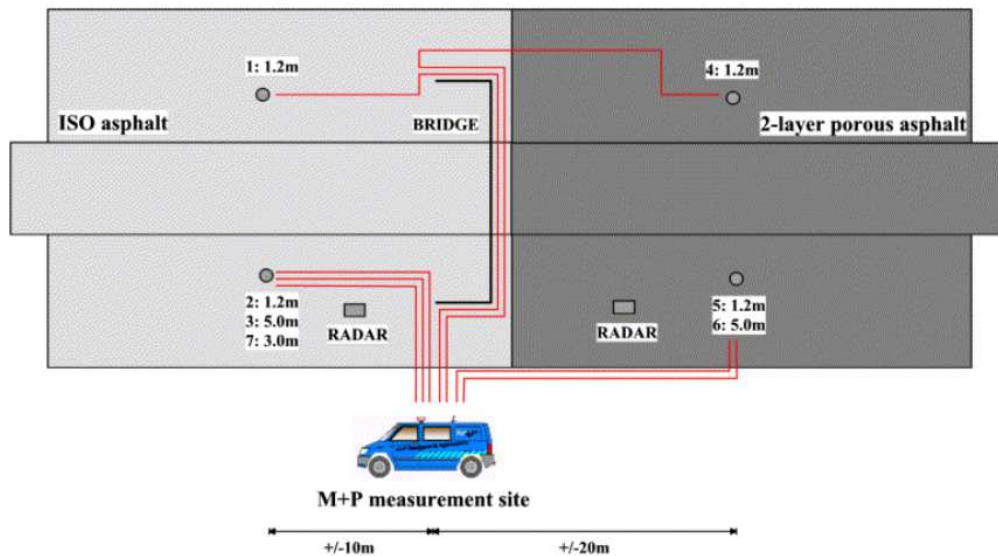


FIGURE 1.1 – Schéma de mesure du bruit de roulement à l'extérieur du véhicule

Concernant le bruit à l'intérieur, les mesures de bruit de roulement sont classiquement réalisées au niveau des appuie-têtes des passagers (cf. figure 1.2), à l'aide de microphones, lors du roulage sur revêtement gravillonné. Ces mesures sont effectuées soit à vitesse stabilisée, soit à vitesse dégressive, entre 140km/h et 40 km/h. Nous disposons de deux types de moyens pour appréhender le bruit de roulement : les pistes gravillonnées et les bancs à rouleaux gravillonnés :



FIGURE 1.2 – Micro utilisé pour la mesure de bruit à l'intérieur du véhicule

– Mesure sur piste

C'est une mesure du bruit ambiant dans l'habitacle sur une piste. Cette mesure permet de positionner un véhicule par rapport à un autre. Des traitements spécifiques sont nécessaires pour accéder à la participation des trains avant et arrière sur piste. Le critère d'acceptation d'un véhicule consiste à donner des valeurs maximales admissibles du niveau global de bruit en fonction de la vitesse. Les mesures sur piste sont des mesures de caractérisation de véhicule qui permettent de juger la qualité du véhicule en bruit de roulement.

– Mesure sur banc

Pour compléter ces caractérisations, des mesures sur banc sont faites afin de mieux comprendre la contribution des différents sous systèmes (train avant, train arrière, caisse ...). Des mesures sur un banc à rouleaux sont exécutées dans une salle semi anéchoïque (cf. figure 1.3). Chaque train est placé sur 2 rouleaux. L'un est lisse, l'autre est équipé de secteurs gravillonnés représentant l'excitation route. Les participations des trains au bruit de roulement intérieur peuvent être extraites aisément et l'analyse du comportement vibro-acoustique du véhicule est facilitée.

– Traitement des mesures

Les données des mesures permettent d'une part de calculer le niveau global de bruit à l'intérieur en fonction de la vitesse du véhicule, d'autre part de tracer les autospectres.

Chacune des deux démarches présente des avantages et inconvénients : La piste permet de reproduire des conditions proches du roulage client (mais pas identiques : un seul type de gravillons), et en particulier de faire des écoutes subjectives (ce que les rouleaux ne permettent pas à cause de la périodicité



FIGURE 1.3 – Illustration du banc à rouleaux chez PSA Peugeot Citroën

de l'excitation).

Le principal inconvénient du banc à rouleau est le coût de l'investissement (du banc, car le revêtement n'est pas un problème) et de l'entretien. La périodicité de l'excitation est aussi une difficulté (écoutes subjectives très perturbées, spectre de raies pour l'excitation). Pour ce qui est de l'analyse, l'inconvénient peut être tourné en avantage, dans la mesure où cela autorise la mise en oeuvre des méthodes d'analyse des machines tournantes (analyses en ordres en fonction du régime). Celles-ci sont plus précises que les méthodes d'analyse de cohérence, que l'excitation aléatoire des pistes impose. Le banc à rouleau présente aussi l'avantage d'être beaucoup plus répétitif (à chaque tour, la roue retrouve exactement la même surface). Cet avantage est significatif pour des analyses complexes, qui nécessitent un grand nombre de mesures, et donc la répétition des essais. Enfin, il est possible, sur un banc, de construire les montages nécessaires à l'analyse des organes isolés (trains, roues).

1.1.2 Comparaison aux autres sources de bruit

Il y a trois sources de bruit principales d'après Sandberg [90] (cf. figure 1.4) :

- Le bruit causé par des turbulences de l'air. Ce bruit dépend de la vitesse du véhicule et des conditions météo. Actuellement, les vitres isolantes sont utilisées pour limiter ce bruit à l'intérieur de l'habitacle mais il reste non-négligeable sur autoroute.
- Le bruit causé par des vibrations de pièces dans le véhicule comme : le moteur, le ventilateur, le système de transmission du mouvement Ce bruit dépend de la sollicitation du moteur et des conditions d'utilisation du véhicule. Il est très important en basse vitesse en particulier en phase d'accélération.
- Le bruit de roulement causé par le contact entre le pneu et la chaussée gravillonnée. Ce bruit est croissant avec la vitesse du véhicule. Il est fonction du type de revêtement et peut être dominé par le bruit d'air à haute vitesse.

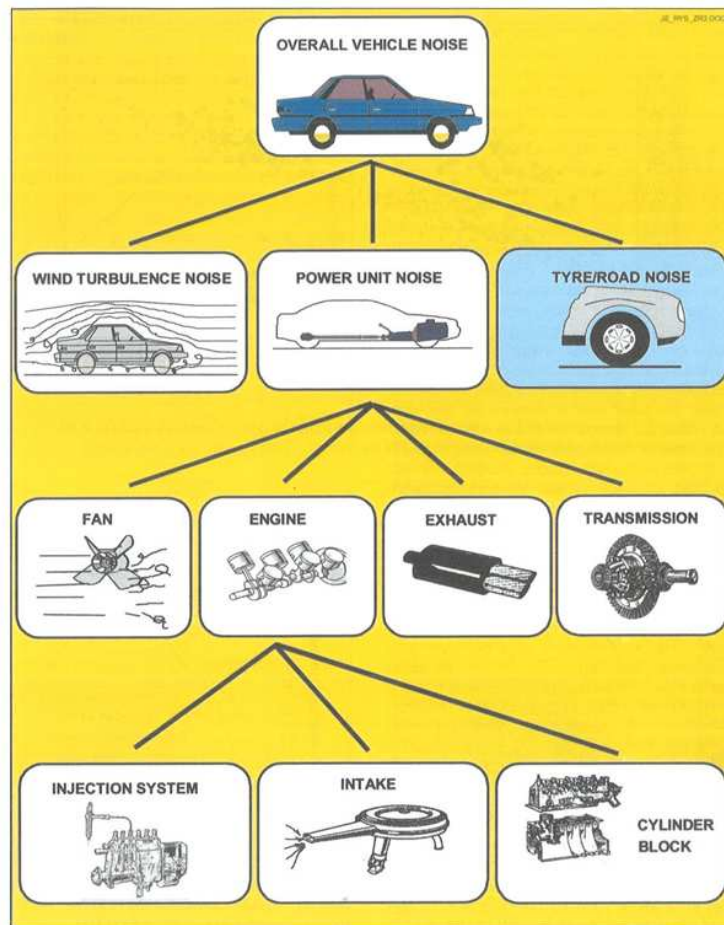


FIGURE 1.4 – Les sources de bruit [90]

Concernant l'influence de la vitesse du véhicule, Sandberg [89] [88] a mesuré le bruit à l'extérieur du véhicule et la contribution du bruit de roulement d'une voiture à vitesse constante (cf. figure 1.5) et à chaque passage de rapport. Ses résultats montrent que le niveau sonore augmente avec la vitesse du véhicule. Quand la vitesse du véhicule est grande (à partir de 80 km/h), la contribution au bruit du véhicule est essentiellement le bruit émis par le pneumatique. Par contre, à faible vitesse, le bruit du moteur est plus important. La phase d'accélération crée toujours un bruit élevé. Il a proposé un modèle simplifié pour calculer le niveau du bruit en fonction de la vitesse du véhicule :

$$L = A + B.Log(V) \quad (1.1)$$

où L est le niveau de puissance acoustique (dB), V la vitesse du véhicule (km/h), A et B deux constantes. Cette expression est une formule empirique. Les coefficients A et B varient pour chaque type de véhicule. Cela limite les applications de ce modèle.

On considère que les trois sources principales du bruit ne sont pas corrélées. Une technique de séparation de ces sources est donc mise en oeuvre pour faciliter les études de bruit. Concernant la contribution des sources au bruit à l'intérieur, chez PSA Peugeot Citroën, des analyses sont faites pour séparer

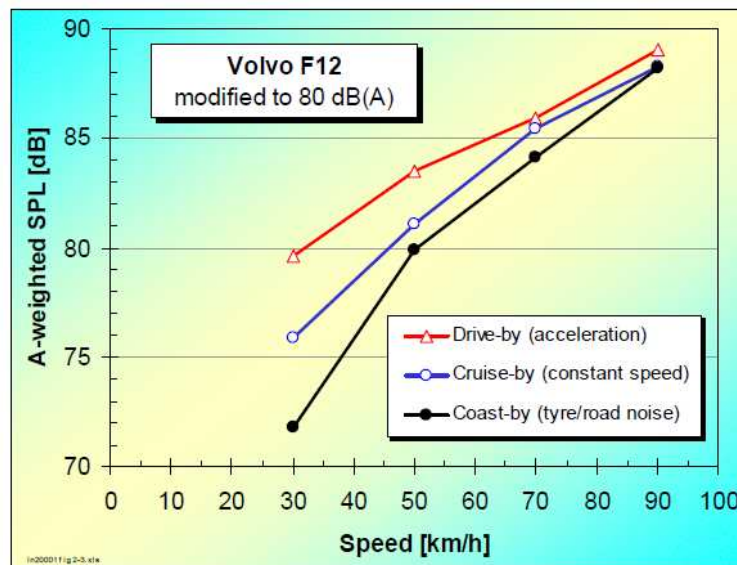


FIGURE 1.5 – Le bruit du véhicule et le bruit de roulement selon les conditions d'utilisation Volvo S40 (Sandberg [89])

les sources. A titre d'exemple, des mesures dans une soufflerie traitée acoustiquement sont réalisées pour étudier la contribution du bruit d'origine aérodynamique ; des mesures sur banc avec les secteurs lisses du rouleau servent à calculer le bruit du moteur dans l'habitacle ; des mesures sur revêtement gravillonné, moteur coupé, permettent d'appréhender le bruit de roulement.

1.1.3 Mécanismes de génération du bruit de roulement

1.1.3.1 Vibrations du pneumatique

Les vibrations du pneumatique constituent une source essentielle du bruit de roulement en basses fréquences (inférieures à 1000 Hz). Elles sont causées par des excitations provenant de l'aire de contact avec la chaussée.

1. Le contact entre le pneu et la chaussée.

Lors de la mise sous charge du véhicule, le pneumatique se déforme et se met en contact avec la chaussée. Comme le profil de la chaussée n'est pas régulier, l'aire de contact varie au cours du roulage. Cela implique que les forces générées dans l'aire de contact (excitées en base du pneumatique) varient en fonction du temps. Elles créent des vibrations de la bande de roulement. On les appelle vibrations radiales (car les forces excitées sont essentiellement normales à la surface du pneu). Elles se propagent ensuite aux flancs et à la roue. Elles sont transmises enfin par voie solidienne à l'habitacle et génèrent le bruit à l'intérieur. Ce mécanisme est prépondérant sur la plage 0-400 Hz.

Les vibrations de la surface extérieure du pneumatique mettent en mouvement l'air voisin et se propagent par voie aérienne dans l'environnement à l'extérieur du véhicule en particulier à plus

haute fréquence.

2. Glissement du pneumatique sur la chaussée.

Lors des phases d'accélération ou de freinage de véhicule, les forces tangentielles appliquées en base du pneumatique deviennent importantes. Si la limite d'adhérence entre le pneu et la chaussée est dépassée, le pneu va glisser et créer des vibrations tangentielles à la bande de roulement. Ce phénomène est appelé "stick/slip". Pour les cas de rotation libre ou de roulage à une vitesse constante, ce phénomène est considéré comme moins important.

Un autre phénomène physique appelé "Stick/snap" se produit dans le cas où la surface des patins en gomme est très collante et que la chaussée est très lisse. Dans ce cas, la force d'adhérence est très élevée. Elle excite le bord de l'empreinte du pneu et fait vibrer les patins. Le bruit généré par ce mécanisme est à hautes fréquences (cf. Larsson [57]) au delà de la fréquence de résonance des patins en caoutchouc (à partir de 2kHz).

1.1.3.2 Mécanismes acoustiques

1. Résonance de tuyaux

Lorsque le pneu s'écrase sur la chaussée, les rainures dans la zone de contact forment des cavités en forme de tuyaux qui permettent de créer des résonances acoustiques. Ces résonances sont caractérisées par la géométrie des rainures. Néanmoins, elles sont indépendantes de la vitesse de rotation [54]. La résonance de tube est modélisée par Van [96] et Disselhorst [26]. La fréquence de résonance d'un tube ouvert aux deux extrémités est donnée par la formule suivante :

$$f_n = \frac{nc}{2(L_{tube} + 0.3d_{tube})} \quad (1.2)$$

Où c est la vitesse du son, n un nombre entier, d_{tube} le diamètre du tube et L_{tube} la longueur du tube.

2. La résonance de Helmholtz

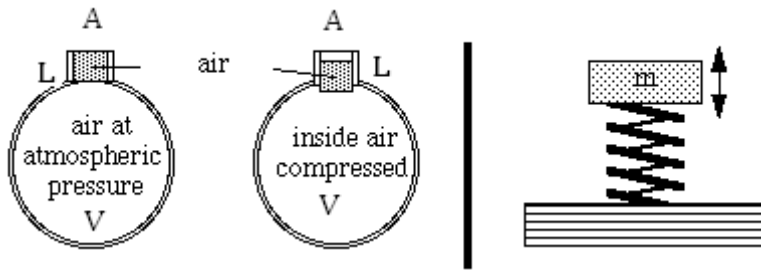


FIGURE 1.6 – Mécanisme de résonance de Helmholtz

La résonance de Helmholtz est un phénomène de résonance de l'air dans une cavité en sortie du contact. Elle se modélise simplement comme un système masse-ressort (cf. figure 1.6). Le volume d'air dans la cavité entre le pneu et la surface de la chaussée est considéré comme le ressort et l'air se présentant entre les rainures et la chaussée est comme une masse. Donc, la fréquence de

résonance est la suivante dans un modèle masse-ressort [40] :

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\gamma p A}{\rho V L}} \quad (1.3)$$

où ρ est la masse volumique de l'air, V le volume d'air entre les rainures et la chaussée, p la pression atmosphérique, γ le rapport des chaleurs spécifiques, A la section de tube d'air en sortie du contact et L la longueur.

On note que la vitesse du son est définie par $c = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}}$.

3. Le pompage d'air

Le phénomène "d'air pumping", est créé dans la zone de contact par l'air contenu dans le volume entre les rainures de la bande roulement et les motifs de la chaussée. Lors du roulage, l'air à l'avant de la zone de contact se retrouve comprimé. Par contre, à l'arrière du contact, l'air se retrouve décompressé. Au sein même de l'aire de contact, il y a des déplacements d'air importants. Cette variation des volumes d'air produit des écoulements et crée des vibrations [41] [31].

1.1.3.3 Mécanismes d'amplification

1. Effet dièdre

À côté du contact entre le pneu et la chaussée, la bande de roulement et la chaussée crée une structure en forme de "dièdre" vers la zone de contact. Ce dièdre fournit un mécanisme d'amplification important et influence la propagation des ondes acoustiques. Des mesures expérimentales montrent que l'effet dièdre est responsable d'environ 10 à 20dB d'augmentation du niveau de bruit [36].

2. Effet d'amplification dû à la résonance de la bande de roulement

Des ondes de flexion se propagent dans l'aire de contact dans deux directions autour du pneumatique et créent des ondes stationnaires. La résonance de bande de roulement est étudiée de façon approfondie par Kropp [52].

1.1.4 Mécanismes de propagation

Le bruit se propage suivant deux voies : la voie aérienne et la voie solidienne. Pour le bruit à l'extérieur, les pulsations d'air générées au voisinage du pneumatique vont se propager dans l'air en fonction de l'environnement : la transmission se fait pour la voie aérienne. Pour le bruit intérieur, les deux voies contribuent. Pour la partie aérienne, les pulsations d'air se propagent jusqu'à la surface des panneaux de l'habitacle (vitrage, plancher,...) et pénètrent à l'intérieur du fait de la transparence acoustique plus ou moins importante. La voie solidienne est associée à la transmission des vibrations de la roue dans les trains puis dans la caisse. La vibration engendrée des panneaux provoque celle de l'air dans l'habitacle et le bruit à l'intérieur.

Pour étudier la contribution des deux voies au bruit à l'intérieur, les spectres de répartition obtenus sur la gamme de fréquence 0-1200Hz sont tracés. Les mesures sur bancs ne permettent pas de séparer le bruit solidien et le bruit aérien (Le bruit enregistré dans l'habitacle contient le bruit solidien et le bruit aérien). La méthode des cohérences simultanées est utilisée chez PSA Peugeot Citroën [75] pour

identifier le bruit d'origine solidienne. Cette méthode est basée sur la mesure sur piste. Les accéléromètres sont disposés sur quatre roues et les micros sont placés dans l'habitacle. Un des fondements de cette méthode est de supposer que les sources autour de la roue (bruit aérien) ne sont pas cohérentes avec les vibrations du centre roue (bruit solidien). Le bruit solidien est cohérent avec les vibrations des centres roues.

La figure 1.7 montre la différence entre le niveau de bruit total et le bruit solidien. Cette différence est précisément le bruit aérien. On remarque que sur une Citroën C3, à partir de 400Hz, les deux courbes se séparent clairement : le bruit devient essentiellement aérien.

Afin de comparer la Citroën C3 et la Peugeot 407, les diagrammes pour des mesures de bruit de roulement effectuées sur une Peugeot 407 sont tracés sur la figure 1.8. On s'aperçoit que le bruit solidien intervient seulement en dessous de 250Hz ; en effet, les courbes continues et pointillées se séparent beaucoup plus tôt que sur la C3 (à 400 Hz). On peut également noter que si la séparation aérien - solidien semble intervenir à des fréquences différentes, elle paraît cependant arriver pour les mêmes niveaux en dB à savoir 55dB. La décroissance plus rapide des spectres sur 407 explique alors la différence de fréquences.

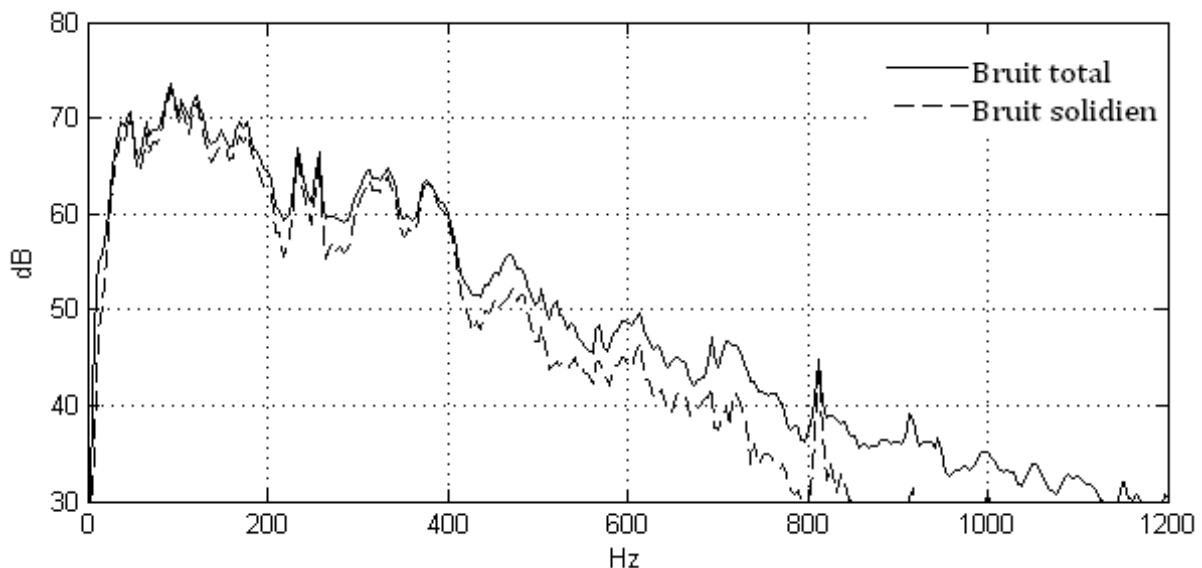


FIGURE 1.7 – Mise en évidence de la séparation du bruit aérien et du bruit solidien sur une Citroën C3

1.1.5 Influence du pneumatique et de la roue

Pour le bruit extérieur, les paramètres influant sur le bruit de roulement sont essentiellement ceux du pneumatique, de la chaussée et du roulage. L'ensemble de ces paramètres est décrit dans le travail de Sandberg [89].

A titre d'exemple, on peut citer les paramètres du pneumatique influant sur le bruit de roulement : la géométrie (largeur, diamètre, la forme des sculptures), les matériaux (propriétés de la gomme, de la carcasse), la structure de ceinture. Roovers [86] a réalisé des mesures de bruit de roulement à

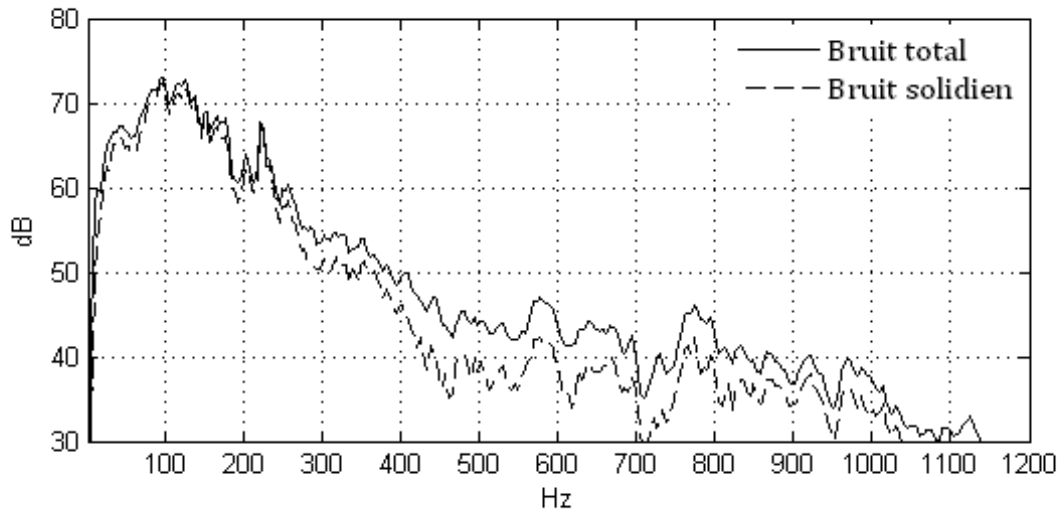


FIGURE 1.8 – Mise en évidence de la séparation du bruit aérien et du bruit solidien sur une Peugeot 407

l'extérieur d'un véhicule avec 26 pneumatiques différents et des conditions de charge du véhicule. Il a montré l'influence des différents pneumatiques sur le niveau de bruit mesuré. Si le pneumatique est parfaitement lisse (il n'y a pas de sculpture ou un pneu usé régulièrement), le bruit émis devient moindre. Mais, cela cause des problèmes de sécurité en roulage sur sol mouillé lorsque l'adhérence entre le pneumatique et la chaussée diminue en fonction de la profondeur des rainures.

Pour le bruit intérieur, l'effet du pneumatique et de la roue (communément appelée jante) est également important. A titre d'exemple, des mesures sont réalisées sur une Citroën C4 avec des roues en aluminium et des roues en tôle en conservant les mêmes pneumatiques. Les mesures sont effectuées avec des roues Radiale aluminium 16 pouces et des roues tôle 16 pouces. La figure 1.9 présente le niveau sonore global au niveau des oreilles aux places avant droite et avant gauche pour des roues aluminium et tôle de la Citroën C4 en fonction de la vitesse du véhicule lors d'une décélération de 140 à 40 km/h. On remarque bien que le niveau sonore au niveau des places avant est plus élevé dans des conditions de mesures avec des roues tôle qu'avec des roues aluminium. Il y a en effet un écart d'environ 3dB entre les roues tôle et aluminium ce qui est un écart important en ce qui concerne la qualité d'un véhicule au bruit de roulement.

1.1.6 Influence de la chaussée

En ce qui concerne les paramètres de chaussée, Sandberg [89] a fait des mesures de bruit extérieur sur des véhicules identiques à une vitesse constante de 80 km/h sur différentes surfaces de chaussées. De plus, Watts [99] a réalisé des mesures avec 6 types de chaussées et différents pneumatiques (cf. figure 1.10). A chaque texture de la chaussée et à une vitesse donnée, Watts [99] a proposé une relation expérimentale entre le niveau de bruit extérieur et la dimension du pneumatique. Par exemple, pour la surface de l'asphalte roulé à chaud HRA (Hot Rolled Asphalt), le niveau de bruit à 100 km/h est

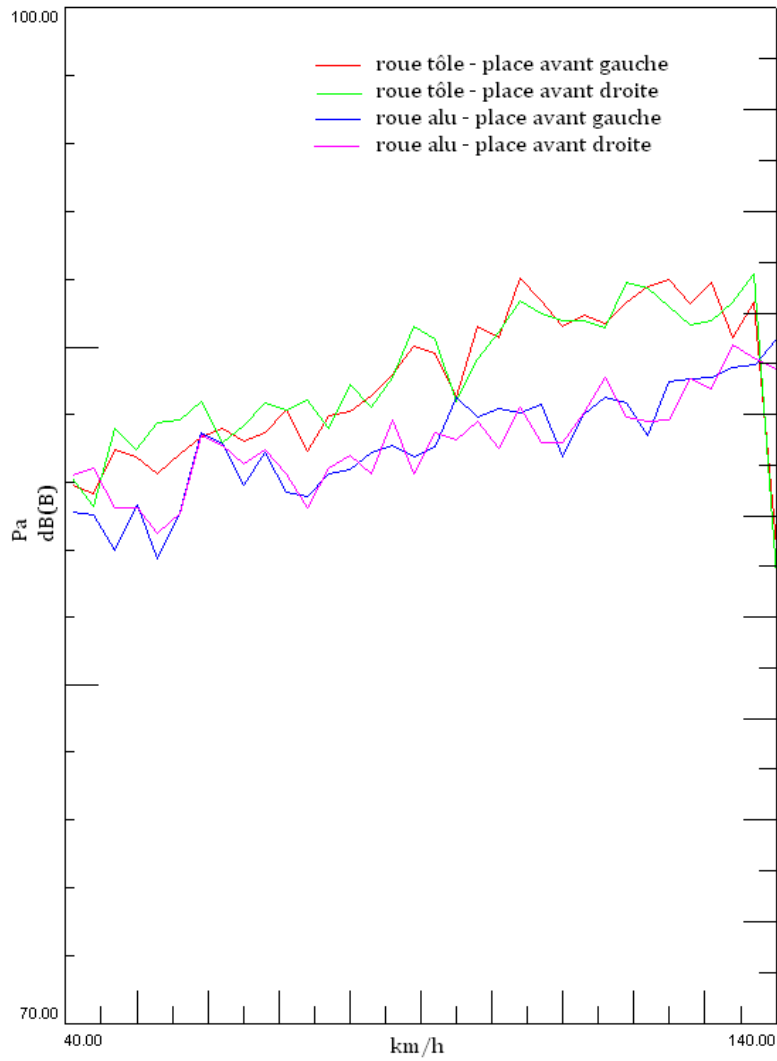


FIGURE 1.9 – Niveau sonore global en fonction de la vitesse

donné par l'expression suivante :

$$L_{HRA,100Km/h} = 102.4 + 0.076 * WIDTH - 0.020 * W_DIA \quad (1.4)$$

où L est le niveau du bruit(dB), $WIDTH$ la largeur de bande de roulement du pneu et W_DIA le diamètre du pneu. Comme le modèle de Sandberg [89] [88], cette formulation ne s'applique pas pour des véhicules différents. On considère que si la chaussée est parfaitement lisse, il n'y a pas de bruit de roulement.

Chez PSA Peugeot Citroën, des mesures du bruit à l'intérieur sont réalisées sur plusieurs routes françaises. La figure 1.11 montre des auto-spectres de niveaux sonores en fonction des routes. Des écarts de 10 à 15 dB peuvent être constatés entre les bonnes et les mauvaises routes.

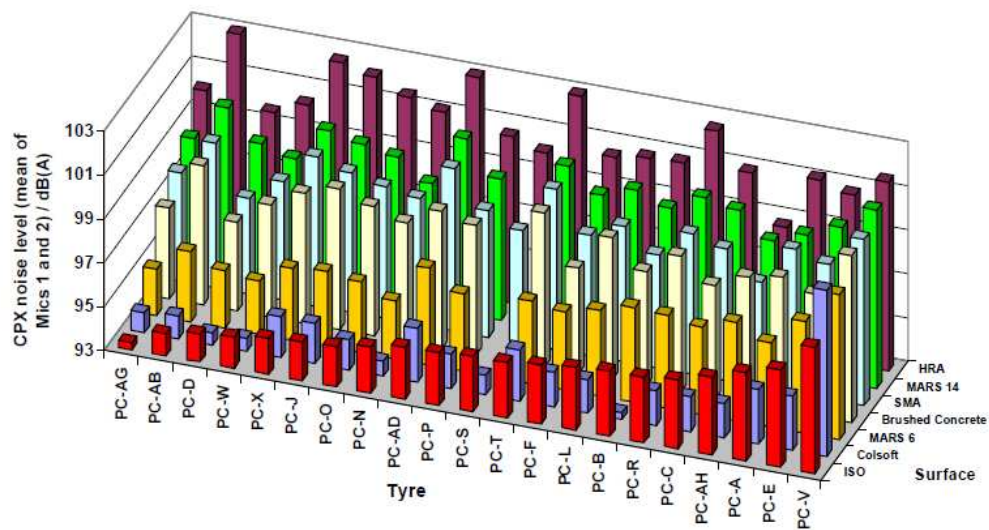


FIGURE 1.10 – Le bruit extérieur des véhicules correspondant à différents types de surfaces de chaussées (Watts [99])

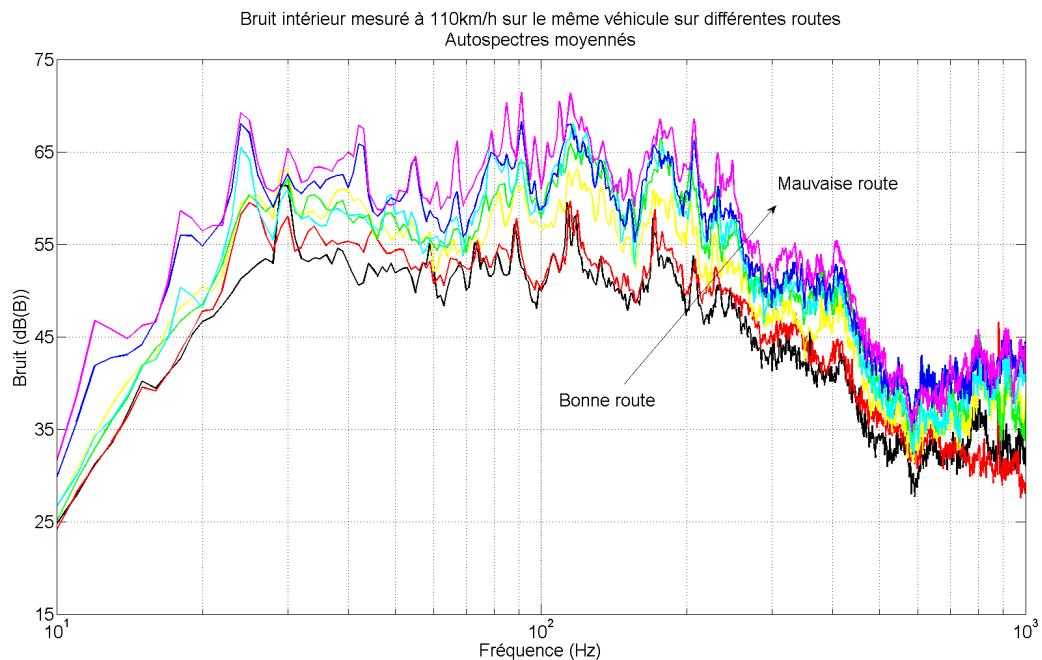


FIGURE 1.11 – Le bruit à l'intérieur correspondant à différents types de surfaces de chaussées

1.2 Le calcul du bruit de roulement chez PSA Peugeot Citroën

1.2.1 Voie aérienne

Le calcul du bruit aérien utilise une identification expérimentale des sources acoustiques par une méthode d'antennerie et ensuite une résolution numérique. Les sources du bruit de roulement sont considérées comme une excitation en ondes sphériques 8 points : 2 par roue. Les sources sont positionnées plus proche du coin pneu-route (cf. figure 1.12). Le traitement numérique est fait à l'aide du code "Sonate". Comme les méthodes numériques classiques (éléments finis ou éléments de frontières) ne sont pas adaptées pour le calcul à hautes fréquences, l'entreprise IMACS a développé ce code pour PSA Peugeot Citroën. Cette méthode est basée sur des formulations temporelles en éléments frontières. Cette approche permet de réduire la quantité de mémoire requise par rapport à la méthode des éléments de frontières classique. Enfin, tous les post-traitements sont réalisés sous Matlab : calcul de l'intensité acoustique, affichage des résultats La figure 1.13 montre le niveau des pressions acoustiques à l'extérieur et sur la caisse du véhicule.

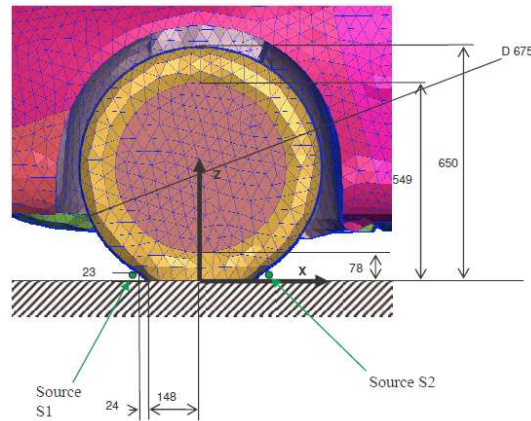


FIGURE 1.12 – Exemple de maillage et de sources acoustiques utilisés pour le calcul du bruit aérien

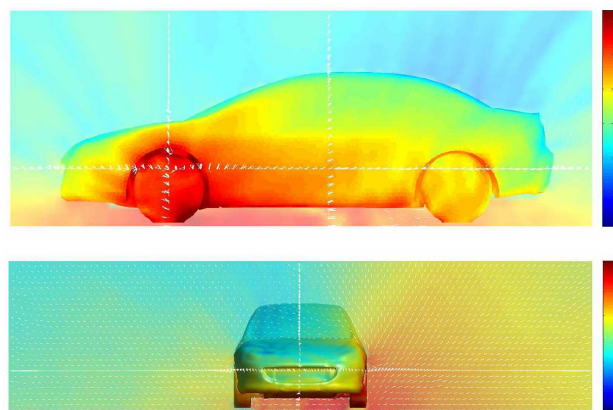


FIGURE 1.13 – Niveau de pression (en couleur) pariétaux et sur le maillage de visualisation externe avec intensité (flèche blanche)

1.2.2 Voie solidienne

1.2.2.1 Décomposition au centre de roue

Le bruit de roulement est un problème complexe, faisant intervenir de nombreux interlocuteurs (manufacturiers de pneumatique, concepteurs de liaison au sol et concepteurs de carrosserie). Il est donc important de pouvoir le découper en problèmes plus simples comme sur la figure 1.14. Cela suppose qu'on sache établir un lien entre les actions effectuées aux différents niveaux : compromis et cohérence des objectifs. Le principe de décomposition est décrit en détail par Gaudin [33]. En effet, quelques décompositions sont envisageables : train-carrosserie, roue-véhicule, roue-train ... Pour valider cette approche, des mesures expérimentales sont faites. En utilisant le principe de superposition présenté sur la figure 1.15, les efforts de blocage au centre de roue sont mesurés et la fonction de transfert du centre roue au point d'observation dans l'habitacle est également identifiée par une autre mesure.

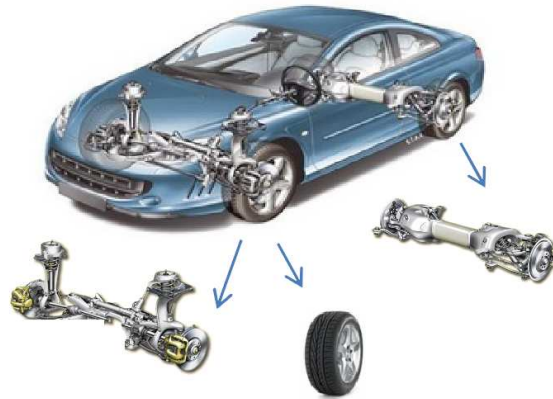


FIGURE 1.14 – La décomposition de véhicule pour traiter le bruit de roulement

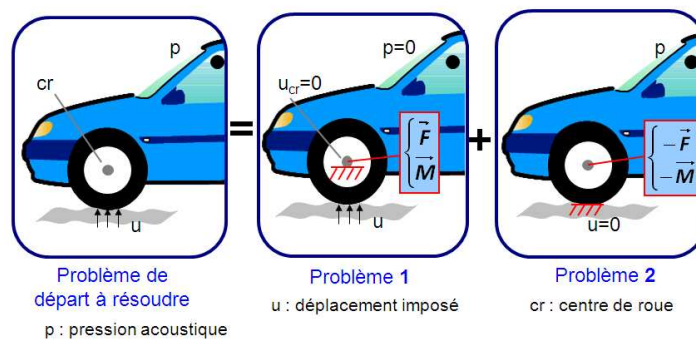


FIGURE 1.15 – Le principe de superposition utilisé pour le calcul du bruit de roulement chez PSA Peugeot Citroën

Comme il est impossible de construire un système fixant le centre roue de façon parfaitement rigide, la mesure des efforts de blocage au centre de roue pose un certain nombre de difficultés. Les résonances du bâti perturbent la qualité de mesure en particulier à hautes fréquences. Les efforts mesurés peuvent être validés en basses fréquences mais en hautes fréquences ils ne sont pas valables.

La mesure de fonction de transfert se fait également avec certaines limitations. Le centre de la roue n'est pas directement accessible et il est difficile d'exciter une interface avec un couple pur. Par conséquent, les fonctions de transfert doivent être reconstruites à partir de plusieurs mesures indirectes en utilisant la méthode de minimisation des moindres carrés. En outre, le roulement du pneumatique change ses propriétés et son comportement vibratoire. En particulier, les effets gyroscopique et centrifuge provoquent une séparation des résonances en fonction de la vitesse de rotation. Ainsi, les fonctions de transfert doivent être mesurées à différentes vitesses mais sur un revêtement parfaitement lisse. La mesure actuelle se fait en basse vitesse de rotation et il est très difficile pour trouver un protocole de mesure applicable à grande vitesse.

Toutes ces difficultés ne permettent pas d'obtenir de résultats exacts. La figure 1.16 présente le niveau de bruit au point d'observation dans l'habitacle avec la roue en aluminium. La courbe rouge est une mesure directe. La courbe noire est calculée par l'approche de décomposition. Les résultats sont valables jusqu'à 250 Hz. Au delà de cette fréquence, les écarts entre les deux courbes sont significatifs. Cela est expliqué par les difficultés de mesures des efforts notamment au passage des premiers modes de la roue alu.

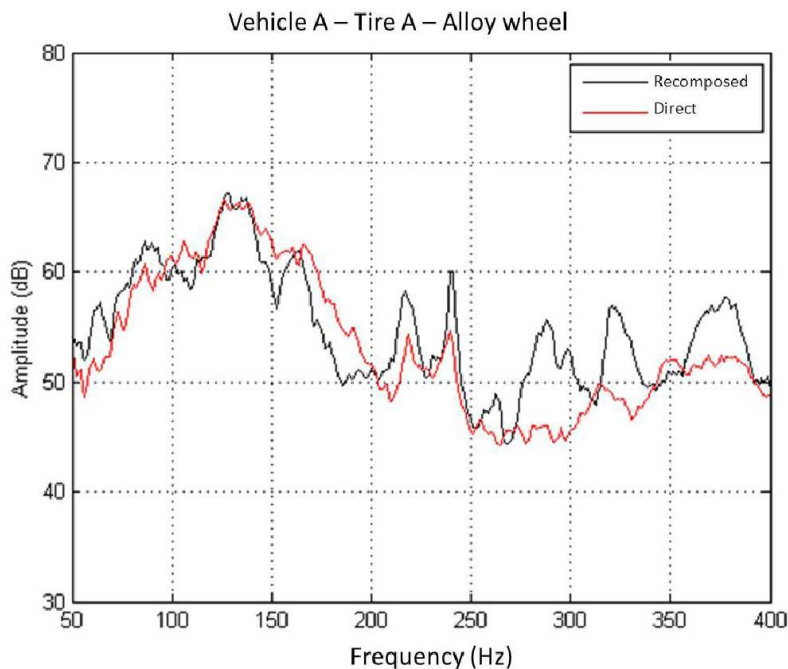


FIGURE 1.16 – Comparaison des résultats de mesure directe et par l'approche de décomposition pour le cas d'une roue aluminium

Ce résultat est retrouvé sur une roue en tôle d'acier (cf. figure 1.17). Les différences sont visibles vers 180 Hz ce qui correspond au premier mode de déformation de la roue tôle. Néanmoins, étant conscient de ces limites, les résultats sont assez bons pour analyser les voies de transmission.

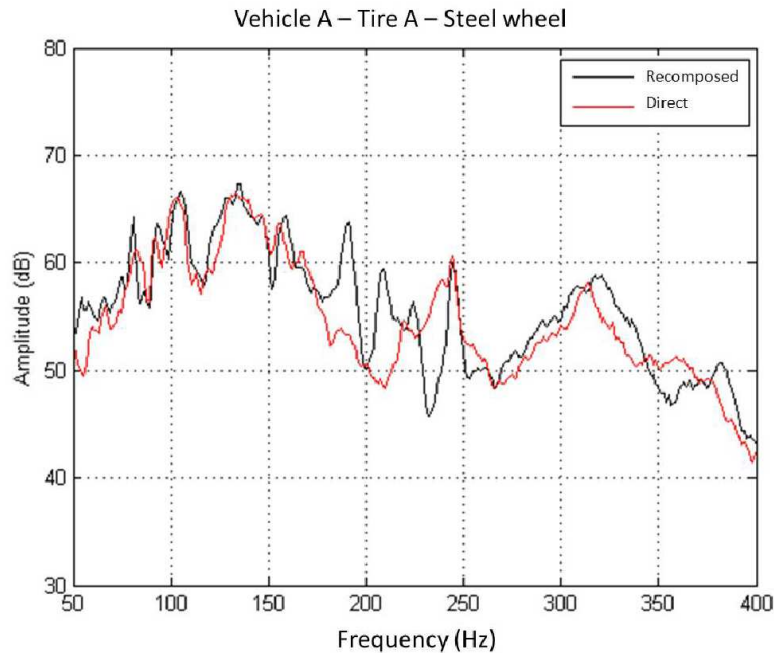


FIGURE 1.17 – Comparaison des résultats de mesure et de l'approche de décomposition pour le cas d'une roue tôle

1.2.2.2 Approche mixte calcul/mesure

En appliquant la méthode de décomposition, le calcul du bruit de roulement actuel est une filière mixte calcul/essai.

- Problème 1 : la mesure expérimentale sert à identifier des efforts transmis au centre de roue sous déplacements imposés en base de pneumatique, le centre roue est bloqué. Un banc d'essai spécifique est nécessaire pour mesurer les torseurs d'efforts au centre de roue. Cette étape n'est pas modélisée numériquement.
- Problème 2 : calcul numérique de la pression acoustique dans l'habitacle en appliquant les torseurs d'efforts mesurés au centre de roue sur des modèles vibroacoustiques du véhicule complet. La fonction de transfert du centre de roue aux points d'observation dans l'habitacle est estimée à l'aide d'un modèle éléments finis de la caisse, des trains, de pneumatique et de roue ...

1. La mesure expérimentale.

La figure 1.18 montre le banc d'essai. Le bâti est supposé très rigide. Les capteurs de force se placent au centre de roue pour mesurer des efforts. En base du pneumatique, on met un rouleau avec des secteurs gravillonnés qui ont la même texture que la chaussée étudiée. Ce rouleau tourne

autour d'un axe à une vitesse pouvant aller jusqu'à 140 km/h. La mesure est faite sur le pneu gonflé et chargé.

2. Le calcul numérique.

Ensuite, les torseurs des forces mesurées sont appliqués au modèle éléments finis (MEF) du véhicule (la caisse, les trains ...). Des analyses fréquentielles sont réalisées. Le niveau du bruit est celui de la pression acoustique calculée dans l'habitacle.

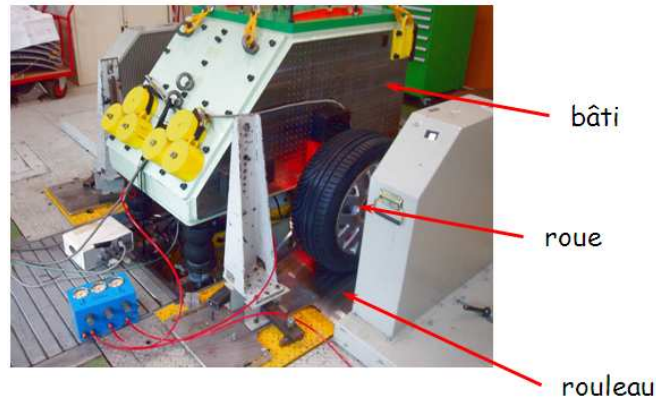


FIGURE 1.18 – Banc de mesure du torseur d'efforts de blocage au centre de roue

Validation de cette approche

La validation est réalisée par des comparaisons intermédiaires à l'interface entre les trains et la caisse. Le point d'observation est positionné à l'interface du train et de la caisse. Une mesure directe est faite. Parallèlement, l'approche mixte calcul/mesure est utilisée. Les modèles éléments finis de train et du pneu sont construits pour estimer numériquement la fonction de transfert du point d'observation au centre de roue (cf. figure 1.19). Les forces au point d'observation se calculent en appliquant les efforts mesurés au centre de roue (problème 1) sur le modèle éléments finis. La figure 1.20 montre de bonnes corrélations entre le calcul et la mesure en basses fréquences (cf. Gaudin [32]).

1.2.2.3 Modèles disponibles et limitations

Les modélisations disponibles au sein du groupe PSA Peugeot Citroën pour le calcul du bruit de roulement sont :

- Des modèles éléments finis de caisses habillées, équipées et fermées couplées aux cavités d'habitacle.
- Des modèles éléments finis ou réduits de trains avant et arrière.
- Des modèles éléments finis de roues et de pneumatiques avec leurs cavités à l'arrêt. La figure 1.21 montre quelques modes de vibration de modèles de la jante et du pneumatique. Des travaux en interne ont permis de proposer des préconisations de modélisations [2] [1] (cf. 1.21) et de valider le comportement vibroacoustique du modèle assemblé [3] (cf. 1.22).
- Des modèles réduits de pneumatiques seuls fournis par les manufacturiers comme Michelin. De tels modèles présentent l'inconvénient de ne pas pouvoir être couplés à des modèles de roue et à la cavité

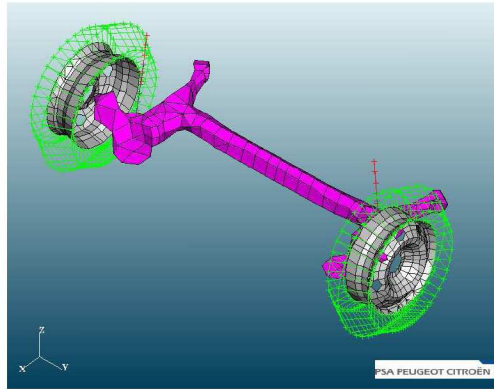


FIGURE 1.19 – Modèle éléments finis de train et roues assemblé à des modèles réduits de pneumatique

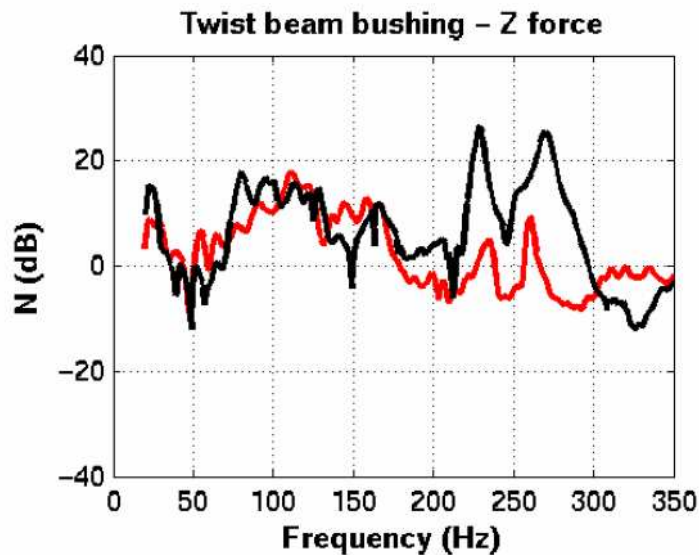


FIGURE 1.20 – Comparaison des résultats calculés (noir) et mesurés (rouge)

d'air. Dans le cadre d'un Projet de Recherche et d'Innovation et d'une collaboration avec Michelin, un modèle éléments finis de l'ensemble monté, pneumatique/roue/cavité en configuration écrasée, c'est-à-dire suite à sa mise sous pression et à l'application de la charge du sol, a été développé (cf. figure 1.22). Ce modèle permet de bien représenter le comportement vibroacoustique de l'ensemble sur la plage 0-400Hz [15].

L'ensemble de ces modèles présentent deux limites vis-à-vis du calcul du bruit de roulement. Premièrement, le modèle de l'ensemble pneu/roue/cavité disponible n'est valable qu'à l'arrêt. Les phénomènes physiques liés à la rotation, tels que les effets gyroscopiques et centrifuges, ne sont pas représentés dans ce modèle. Deuxièmement, il n'y a pas de modèle du contact entre le pneu et la chaussée.

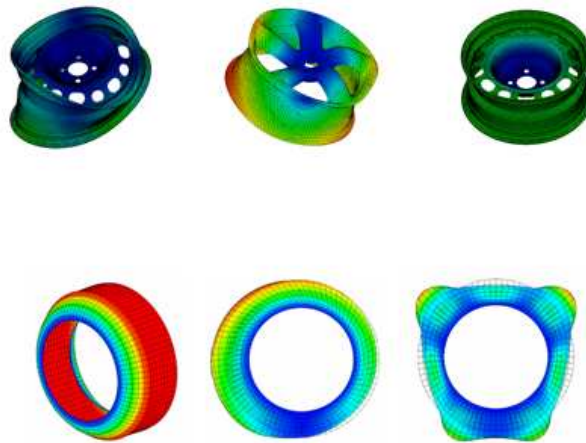


FIGURE 1.21 – Modes vibratoires de jante (haut) et de pneumatique (bas)

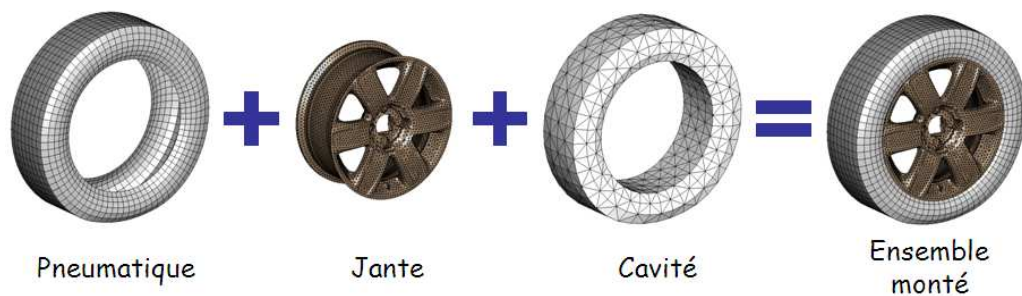


FIGURE 1.22 – Modèle d'un ensemble monté pneumatique/jante/cavité complet

1.2.3 Travail envisagé pour la thèse

En résumé, la méthode de calcul du bruit de roulement à PSA Peugeot Citroën est coûteuse et longue. L'objectif de cette thèse est de modéliser un pneumatique en rotation et son contact avec une chaussée afin de remplacer la procédure expérimentale.

Pour y parvenir, les axes scientifiques suivis sont :

- La prise en compte des effets liés à la rotation d'un solide déformable en transformation finie
- La modélisation du pneumatique, de la roue et du couplage avec la cavité d'air
- La modélisation du contact entre le pneumatique et la chaussée

En profitant des études faites dans la littérature, on cherche à améliorer et à enrichir les modèles actuels à PSA Peugeot Citroën.

1.3 Conclusion

Le bruit de roulement est un facteur important pour la prestation du bruit de véhicule à grandes vitesses. Il est causé par des vibrations du pneumatique lors des excitations par les rugosités de la chaussée et est transmis dans l'habitacle par voie solidienne et aérienne. En basses fréquences, la voie solidienne gouverne le bruit généré à l'intérieur. La texture de la chaussée, la raideur de la roue, la géométrie du pneumatique, la charge du véhicule et la pression de gonflement sont les paramètres principaux d'influence sur le bruit de roulement. L'objectif de la thèse est de mieux comprendre et maîtriser la source du bruit de roulement intérieur. Les travaux essentiels sont donc de modéliser les vibrations du pneumatique en rotation et son contact avec une chaussée réelle.

Etat de l'Art

Ce chapitre présente premièrement des approches pour traiter la dynamique d'un solide déformable en rotation. Ensuite, les modèles du pneumatique existant dans la littérature sont rappelés. Enfin, des modèles de contact du pneumatique sur une chaussée rugueuse ainsi les approches de résolution sont détaillés avec leurs avantages et leurs limitations.

Sommaire

2.1	Dynamique d'un solide déformable en rotation	22
2.1.1	Approche Eulérienne	22
2.1.2	Approche Lagrangienne	23
2.1.3	Approche arbitrairement Lagrangien Eulérien (ALE)	23
2.1.4	Travail envisagé	24
2.2	Modèles vibratoires de pneumatique	24
2.2.1	Modèles analytiques	24
2.2.2	Modèles numériques	31
2.3	Modèles de contact	33
2.3.1	Loi de contact	33
2.3.2	Contact multi-points	36
2.3.3	Schémas numériques appliqués à la résolution du problème de contact	39
2.3.4	Quelques modèles de contact du pneumatique	44
2.3.5	Modèle du pneumatique pour traiter le contact	47
2.4	Conclusion	47

2.1 Dynamique d'un solide déformable en rotation

La mécanique d'un solide déformable en rotation est utilisée dans de nombreux secteurs : automobile, aéronautique, machines tournantes.... Les méthodes de traitement de ces problèmes sont réparties en trois familles : approche Lagrangienne, approche Eulérienne, approche Arbitrairement Lagrangienne Eulérienne (ALE).

2.1.1 Approche Eulérienne

L'approche Eulérienne appliquée au problème de rotation de pneumatique a été abordée par différents auteurs comme Lopez [59], Périssé [77], Campanac [21], Bolton [17], Kim [50]. Les équations d'équilibre sont écrites analytiquement sur la configuration Eulérienne qui est la configuration courante. Sous l'hypothèse de petites déformations, très souvent utilisée, la configuration Eulérienne est calculée comme produit de la configuration initiale (configuration Lagrangienne) et d'une rotation rigide. La réponse du pneumatique est déterminée sur des coordonnées fixes (Eulérienne). Il reste alors à traiter un problème classique de mécanique des solides. Les résolutions sont réalisées soit analytiquement soit numériquement. Les solutions analytiques sont effectuées pour le cas des analyses modales (cf. Bolton [17], Kim [50]). Par contre, s'il y a un calcul de contact avec une chaussée ou un calcul de mise en charge, il est impossible d'avoir des solutions analytiques. Dans ce cas, une méthode numérique, généralement celle des éléments finis MEF, est appliquée pour résoudre. Les équations d'équilibre se mettent sous forme variationnelle dans la configuration Eulérienne. Ensuite, un maillage sur cette configuration est réalisé. Les résolutions se font classiquement comme pour le cas d'un système fixe.

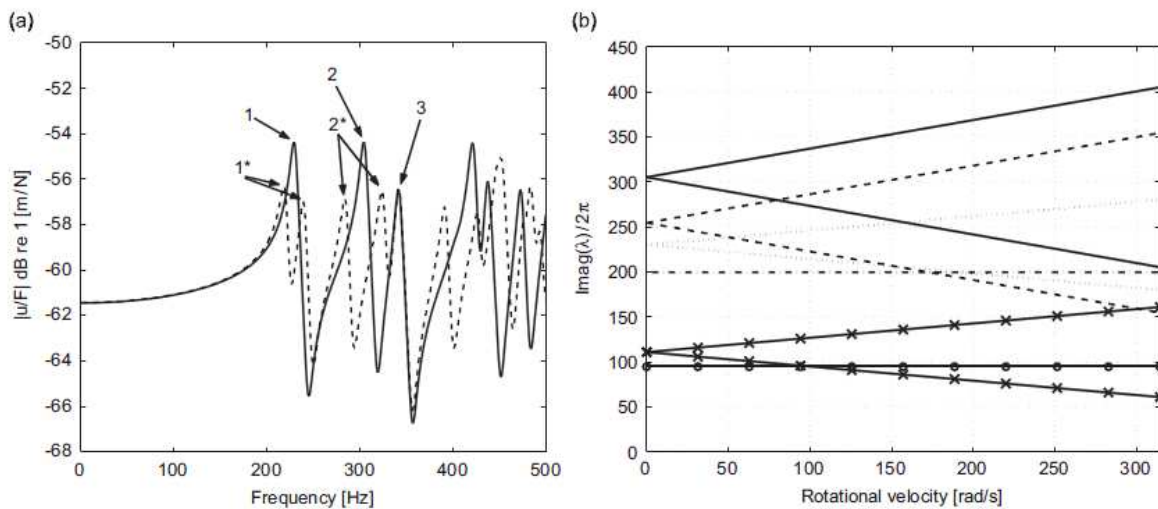


FIGURE 2.1 – (a) Fonction de transfert d'un point sur le pneu à $\Omega = 0 \text{ rad/s}$ (courbe continue) et à $\Omega = 20 \text{ rad/s}$ (courbe discontinue), (b) Les 10 premières fréquences à différentes vitesses.

La figure 2.1 illustre un résultat de Lopez [59]. Il a traité un modèle éléments finis 3D d'un pneumatique en rotation. L'avantage de cette approche est de ramener la résolution d'un système tournant à la résolution d'un système fixe en prenant en compte les effets de rotation. En revanche, la limitation

de cette approche est l'utilisation de l'hypothèse de petites déformations. Dans le cas de déformations plus importantes, la configuration Eulérienne n'est pas connue et la MEF ne peut être appliquée pour cette approche. Pour traiter le cas de déformations finies, l'approche Lagrangienne peut être utilisée.

2.1.2 Approche Lagrangienne

Concernant l'approche Lagrangienne, Guskov [38] a développé le principe variationnel de Hamilton pour la dynamique d'un solide déformable en rotation sur la configuration initiale (configuration lagrangienne) permettant d'appliquer une résolution par MEF. Le maillage est lié aux points matériels qui tournent avec le solide. Le traitement du problème de contact requiert alors un maillage homogène du solide. L'aire de contact ne peut être raffinée sans raffiner le reste du solide déformable. Cela pénalise fortement le temps de calcul.

Un autre inconvénient de cette approche provient de la décomposition de la transformation en rotation rigide d'une part et le déplacement des points matériels lors de la mise sous charge d'autre part ; la formulation des équations d'équilibres devient alors très complexe.

Brinkmeier [19] résume les inconvénients de cette approche comme suit :

- L'application de la méthode MEF nécessite un maillage identique du solide.
- La réponse en un point doit se calculer à partir de l'état de repos. Un calcul temporel est donc nécessaire.

On remarque que le coût de calcul de l'approche Lagrangienne du problème de contact est très important. La méthode Eulérienne n'est plus adaptée. C'est la raison pour laquelle l'approche Arbitrairement Lagrangienne Eulérienne (ALE) est développée.

2.1.3 Approche arbitrairement Lagrangien Eulérien (ALE)

Au milieu des années 80, Oden [73] et Padovan [76], Kennedy [49], Yukio [100] ont résolu une structure en rotation stationnaire en contact. Un modèle 3D a été traité par Bass [12]. Ils ont développé des descriptions cinématiques du pneu en rotation en état quasi stationnaire. Leurs méthodes ne sont ni une approche Lagrangienne ni Eulérienne. Elle est très cohérente avec l'approche arbitrairement Lagrangien Eulérien (ALE) [68] souvent utilisée pour traiter le problème de couplage fluide-structure. Nackenhorst [69] a détaillé cette approche et l'a appliquée pour un solide déformable en rotation et en transformation finie. L'approche ALE décompose le mouvement en trois configurations (cf. figure 2.2) : la configuration initiale (Lagrangienne), la configuration actuelle (Eulérienne) et une configuration de référence sur laquelle sont écrites les équations d'équilibre. Les deux premières configurations sont définies. La configuration de référence n'est, quant à elle, pas définie physiquement, c'est une image de la configuration initiale en rotation, sa géométrie est donc connue. En revanche, il n'y a pas de définition des points matériels sur cette configuration, seuls leurs positions sont définies sur cette configuration à chaque instant t . Cela permet d'écrire les équations d'équilibre comme a pu le formuler Nackenhorst pour le mouvement stationnaire et le mouvement dynamique en déformation infinitésimale [69] [19]. De plus, ces équations peuvent s'écrire sous forme variationnelle ce qui permet d'appliquer une résolution par MEF. On peut effectuer un maillage sur la configuration de référence. Les conditions de contact étant fixes par rapport à cette configuration, on peut raffiner la zone de contact et garder le maillage grossier dans la zone hors du contact. Cela permet d'éliminer un inconvénient de l'approche Lagrangienne. Étant donné les avantages de l'approche ALE, celle-ci est retenue pour traiter le problème

de la dynamique d'un solide en rotation et en transformation finie.

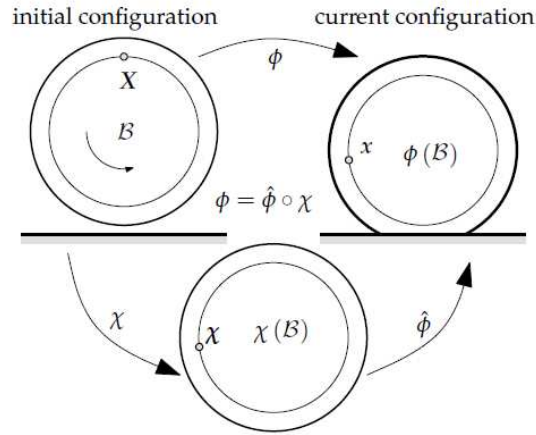


FIGURE 2.2 – Les différentes configurations dans l'approche ALE : configuration initiale, configuration actuelle et configuration de référence (bas)

2.1.4 Travail envisagé

La résolution du problème stationnaire et du problème dynamique d'un solide déformable en rotation et en petites déformations existent. Le travail envisagé consiste à étendre ces formulations au problème dynamique tournant en transformation finie. Il faut, en particulier, prendre en compte les effets de déformation non-linéaire en géométrie et de rotation. L'approche ALE nous permet de traiter ce problème. Elle est développée au chapitre 3.

2.2 Modèles vibratoires de pneumatique

Le comportement vibratoire d'un pneumatique est étudié depuis longtemps. Les études sont basées généralement sur la configuration du pneu gonflé et sans écrasement.

2.2.1 Modèles analytiques

L'objectif de construction de ces modèles est d'établir des réponses analytiques. Dans la littérature, les modèles analytiques du pneumatique peuvent être classés en trois grandes familles : modèles d'anneaux circulaires ; modèles de deux plaques ; modèles de plaques cylindriques.

Anneaux circulaires

On trouve dans la littérature des modèles d'anneaux circulaires 2D et 3D. Böhm [16], Heckl [42] et Kropp [52] ont modélisé la bande de roulement à l'aide d'une poutre circulaire de type Euler-Bernoulli (cf. figure 2.3). Les flancs sont remplacés par des ressorts radiaux et des ressorts tangentiels. Ce modèle prend en compte l'effet de précontrainte du pneu associé à sa mise sous

pression. C'est un modèle 2D décrit par les équations suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{ES}{a^2} (u'' + v') - \frac{B}{a^4} (v''' + v') &= \rho S \ddot{u} + k_t u \\ \frac{T_0}{a^2} (v'' + v') - \frac{ES}{a^2} (u' + v) - \frac{B}{a^4} (v'''' + v'') &= \rho S \ddot{v} + k_a v - q \end{aligned} \quad (2.1)$$

où E est le module de Young du matériau, S est l'aire de la surface de section transversale, a le rayon, B la raideur de flexion, ρ la masse volumique du matériau, k_a et k_t les raideurs élastiques radiale et tangentielle, T_0 la tension et q est la pression. v et u sont des déplacements radiaux et tangentiels de l'axe neutre.

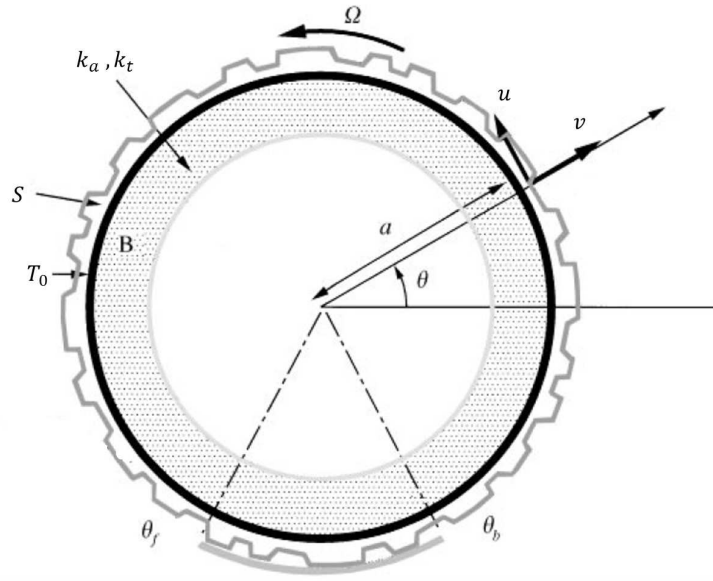


FIGURE 2.3 – Modèle d'anneau circulaire.

Ce modèle d'anneau circulaire est très utile pour analyser les vibrations radiales du pneumatique en basses fréquences. En 2000, Périsset [78] a comparé le calcul de la vitesse d'un point sur l'anneau avec sa mesure expérimentale (cf. figure 2.4) et montré une bonne concordance en basses fréquences (moins de 400 Hz).

Plusieurs auteurs ont développé des modèles d'anneau circulaire en ajoutant l'effet de rotation (Meftah [66] ; Périsset [77] ; Campagnac [21] [20]). Des termes d'accélération en rotation ont été ajoutés à droite des équations (2.1). Ce modèle permet de reproduire le phénomène de dédoublement des modes en fonction de la vitesse de rotation. Cette propriété est également retrouvée dans le travaux de Bolton [51]. De plus, Huang [45] a analysé le modèle d'anneau en rotation sous un système de suspension.

Finalement, le modèle d'anneau circulaire 2D permet de modéliser le comportement dynamique du pneu en basses fréquences [0-400 Hz]. Les fonctions de transfert analytiques permettent de traiter le problème de contact. Afin d'appliquer ces modèles, il faut identifier des paramètres (les raideurs des ressort, la raideur de flexion ...).

En revanche, le modèle d'anneau circulaire 2D ne permet pas d'observer des modes hors plan (mode de basculement). C'est la raison pour laquelle Eichler [29] et Gipser [35] ont enrichi un des modèles

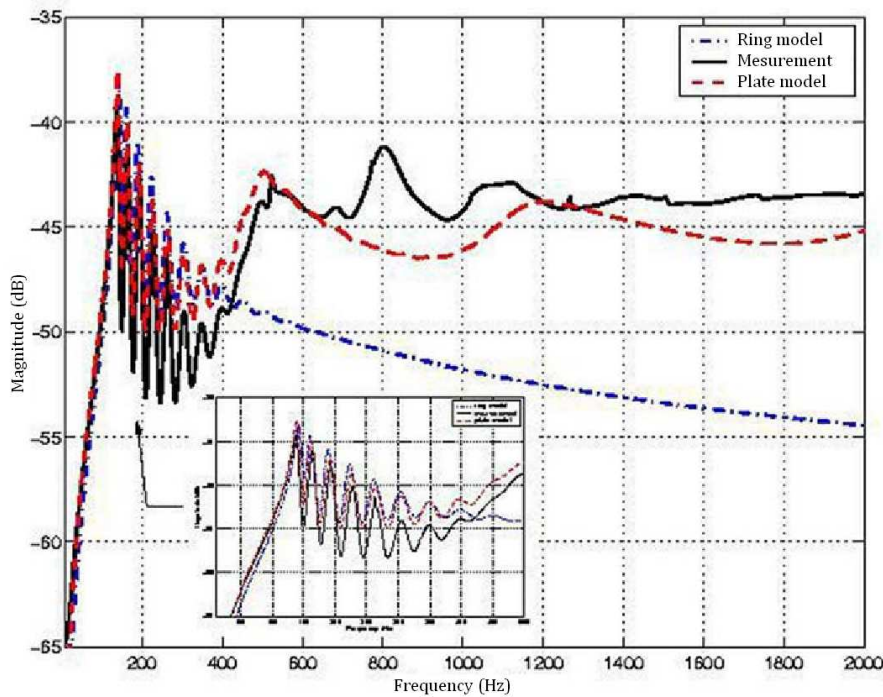


FIGURE 2.4 – Comparaison des résultats de mesure et de simulation (Périsse [78]).

d'anneau circulaire en ajoutant une raideur latérale de la bande de roulement C_{bend} et un modèle de jante rigide (figure 2.5). Ce modèle est appelé "Ftire".

Avec ce modèle, les 6 composantes des efforts transmis à la jante sont calculées. Parallèlement, 6 modes de vibrations sont également observés (cf. figure 2.6). Le modèle Ftire est appliqué au roulage. En effet, la comparaison des forces transmises à la jante calculées par son modèle d'une part et celles mesurées expérimentalement d'autre part a permis de valider le modèle jusqu'à 120 Hz. Il a considéré que le pneu roule à la vitesse de 40 km/h sur un obstacle de forme triangulaire (cf. figure 2.7). La simulation est suffisamment précise dans la prédiction des caractéristiques des pneumatiques en état stationnaire et lors du passage d'obstacles simples. Néanmoins, ce modèle ne peut pas s'appliquer pour un roulage sur de petits obstacles comme des gravillons. De plus, pour appliquer ce modèle, on a la même difficulté que pour le modèle d'anneau circulaire 2D. Les paramètres du modèle restent difficiles à identifier.

En résumé, les modèles d'anneau circulaire 2D ou 2.5D permettent de modéliser des vibrations du pneumatique en basses fréquences. Mais, leurs réponses ne sont pas validées en moyennes fréquences [78]. Plusieurs modèles 3D sont construits pour prévoir les vibrations d'un pneumatique à hautes fréquences.

Modèles de deux plaques - modèles 3D

En 2003, Muggleton [67] a modélisé un pneumatique à l'aide d'un modèle à deux plaques orthotropes en traction. La bande de roulement se modélise par une plaque et les flancs sont remplacés par deux plaques. La pression de gonflage crée une tension dans la bande de roulement. Donc, cette pression

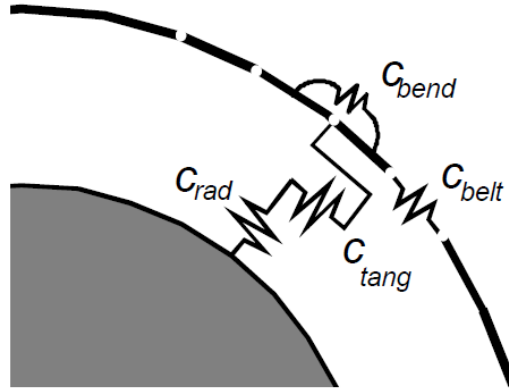


FIGURE 2.5 – Modèle Ftire (Gipser [35])

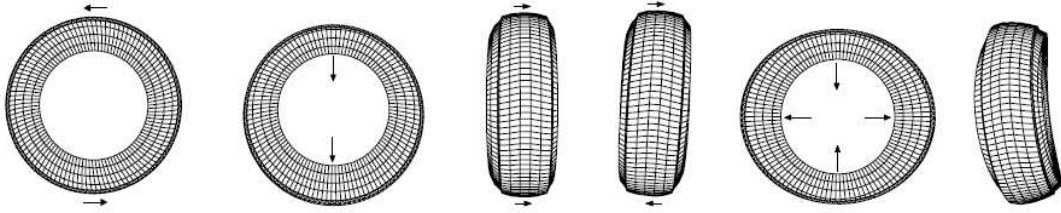


FIGURE 2.6 – Modes de vibration du pneu en encastrant la jante (Gipser [35])

est remplacée par une force normale appliquée aux deux extrémités A et A' (figure 2.8). Le lien entre les flancs et la bande de roulement est représenté par un ressort. L'équation dynamique est donnée ci-dessous :

$$\left[-T_{0x} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - T_{0y} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + B_x \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2B_{xy} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) + B_y \frac{\partial^4}{\partial y^4} + s + \rho h \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \omega(x, y, z, t) = p(x_0, y_0, t) \quad (2.2)$$

où T_{0x} et T_{0y} sont les tensions. B_x et B_y sont respectivement les rigidités de flexion de la plaque en deux directions x et y . s est la rigidité du ressort élastique de la fondation. p est la force appliquée.

Se basant sur ces équations, Hamet [39] a analysé les vibrations du pneumatique sous une force ponctuelle appliquée au centre de la plaque. Cela permet de construire des fonctions de Green du pneumatique utilisées pour traiter le problème de contact. Les deux modèles de Hamet [39] et Muggleton [67] ne prennent pas en compte l'effet de la courbure du pneu.

En effet, la structure interne du pneumatique (multi-couche) fait séparer la bande de roulement en deux couches dont les comportements sont très différents. La première couche dite "carcasse" permet de décrire des vibrations à basses fréquences. La deuxième couche dite "patins en caoutchouc" a des vibrations à hautes fréquences. Larsson [58] a proposé un modèle de deux couches sur une fondation

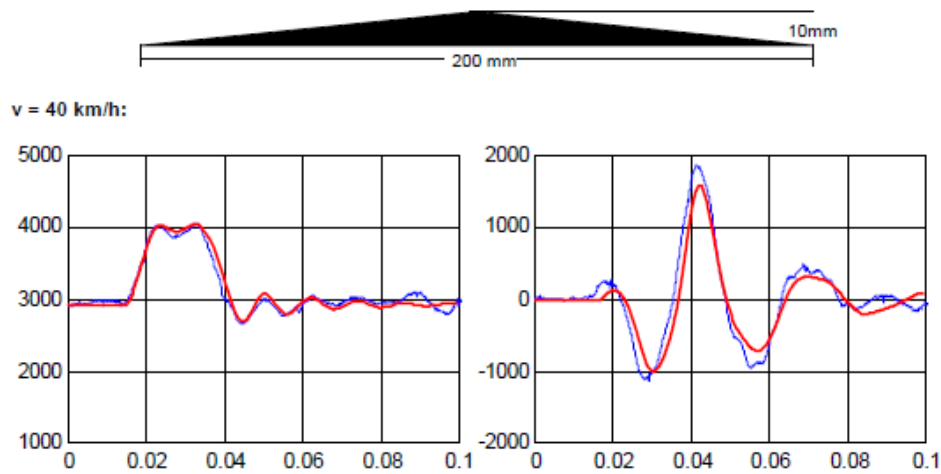


FIGURE 2.7 – Comparaison des forces transmises à la jante à la vitesse de 40 Km/h. Gauche : force normale. Droite : force tangentielle (Gipser [35])

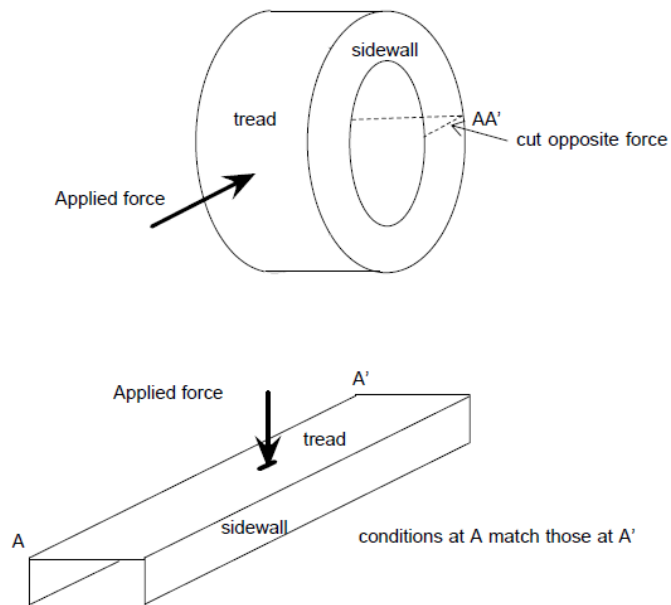


FIGURE 2.8 – Modèle à deux plaques du pneu (Muggleton).

élastique. Son modèle est validé par Andersson [4] (cf. figure 2.9).

Un autre modèle de type deux plaques est développé par Pinnington [81] [83] [82] (cf. figure 2.10). Son modèle prend en compte la courbure du pneumatique. L'effet de courbure du pneumatique est

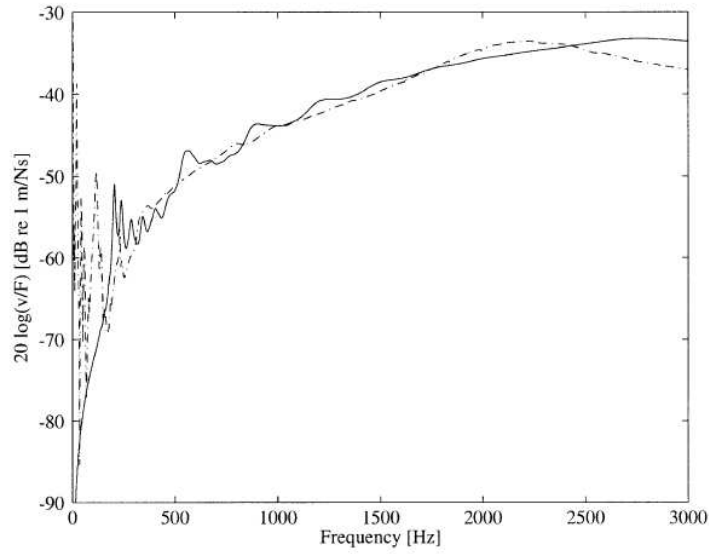


FIGURE 2.9 – Vitesse tangentielle d'un point du pneu calculée (ligne continue); et mesurée (ligne discontinue) (Larsson [58])

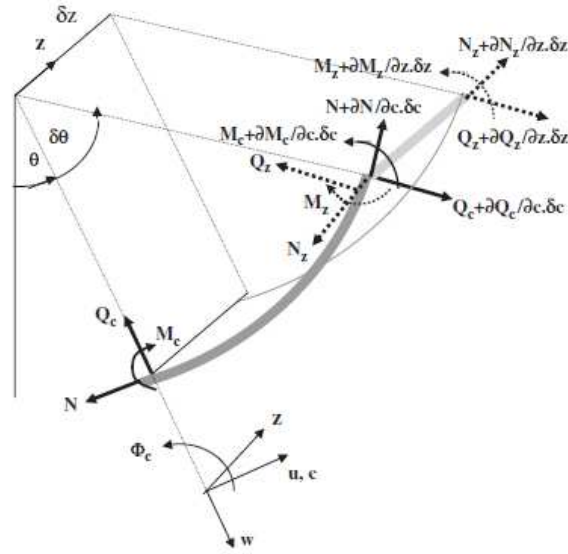


FIGURE 2.10 – Modèle de la bande de roulement (Pinnington [81])

de coupler les mouvements radial et circonférentiel et les effets des forces normales et des forces tangentielles dans toutes les réponses vibratoires du pneu. Les équations dynamiques de la bande de roulement sont écrites pour des ondes unidimensionnelles se propageant autour de la ceinture et une onde stationnaire à travers la bande. Les effets de courbure, de rigidité en cisaillement, d'inertie de rotation, de tension, de vitesse de rotation et de pression de l'air sont inclus. La plaque

bidimensionnelle de type Mindlin est utilisée pour formuler ce modèle. Celui-ci est applicable pour une large bande de fréquence (0-3 kHz). La difficulté du modèle est la détermination des paramètres de la bande de roulement ou des flancs.

Modèle de coque cylindrique - modèle 3D

Bolton et Kim [50] ont proposé un modèle de coque cylindrique en rotation (Fig 2.11). Les flancs sont modélisés par des ressorts radiaux et des amortisseurs. Les équations de ce modèle sont les suivantes :

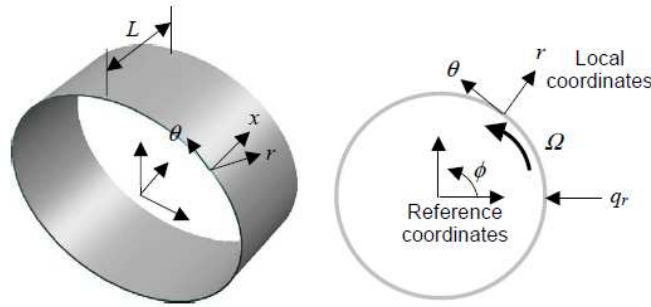


FIGURE 2.11 – Modèle de pneumatique (Kim et Bolton [50])

$$\begin{aligned}
 L_x(u_x, u_\theta, u_r) + \lambda \frac{Du_x}{Dt} + \rho h \frac{D^2 u_x}{Dt^2} &= q_x(x, \theta, r) \\
 L_\theta(u_x, u_\theta, u_r) + \lambda \frac{Du_\theta}{Dt} + \rho h \left(\frac{D^2 u_\theta}{Dt^2} + 2\Omega \frac{Du_r}{Dt} - \Omega^2 u_\theta \right) &= 0 \\
 L_r(u_x, u_\theta, u_r) + \lambda \frac{Du_r}{Dt} + \rho h \left(\frac{D^2 u_r}{Dt^2} + 2\Omega \frac{Du_\theta}{Dt} - \Omega^2 u_r \right) &= q_r(x, \theta, r)
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

où

$$\begin{aligned}
 L_x(u_x, u_\theta, u_r) &= -\frac{\partial N_{xx}}{\partial x} - \frac{1}{a} \frac{\partial N_{\theta x}}{\partial \theta} \\
 L_\theta(u_x, u_\theta, u_r) &= -\frac{\partial N_{x\theta}}{\partial x} - \frac{1}{a} \frac{\partial N_{\theta\theta}}{\partial \theta} - \frac{Q_{\theta r}}{a} \\
 L_r(u_x, u_\theta, u_r) &= -\frac{\partial Q_{xr}}{\partial x} - \frac{1}{a} \frac{\partial Q_{\theta r}}{\partial \theta} + \frac{N_{\theta\theta}}{a} - N_{xx} \frac{\partial^2 u_r}{\partial x^2} - \frac{N_{\theta\theta}}{a^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2}
 \end{aligned}$$

où u est le déplacement dans direction indiquée par l'indice. N et Q sont respectivement les résultantes des forces normale et de cisaillement, q_r la force appliquée, ρ la masse volumique, h l'épaisseur de la bande de roulement et a son rayon. Ω est la vitesse de rotation du cylindre.

On appelle respectivement f_s la fréquence naturelle du cylindre en absence de rotation et f la fréquence propre du système en rotation. Elles sont liées par l'approximation :

$$f = f_s \pm \frac{k_\phi a}{2\pi} \Omega \tag{2.4}$$

où k_ϕ est le nombre d'onde.

Les travaux de Kim et Bolton [50] ont permis de valider cette formulation par comparaison cal-

culs/essais (cf. figure 2.12).

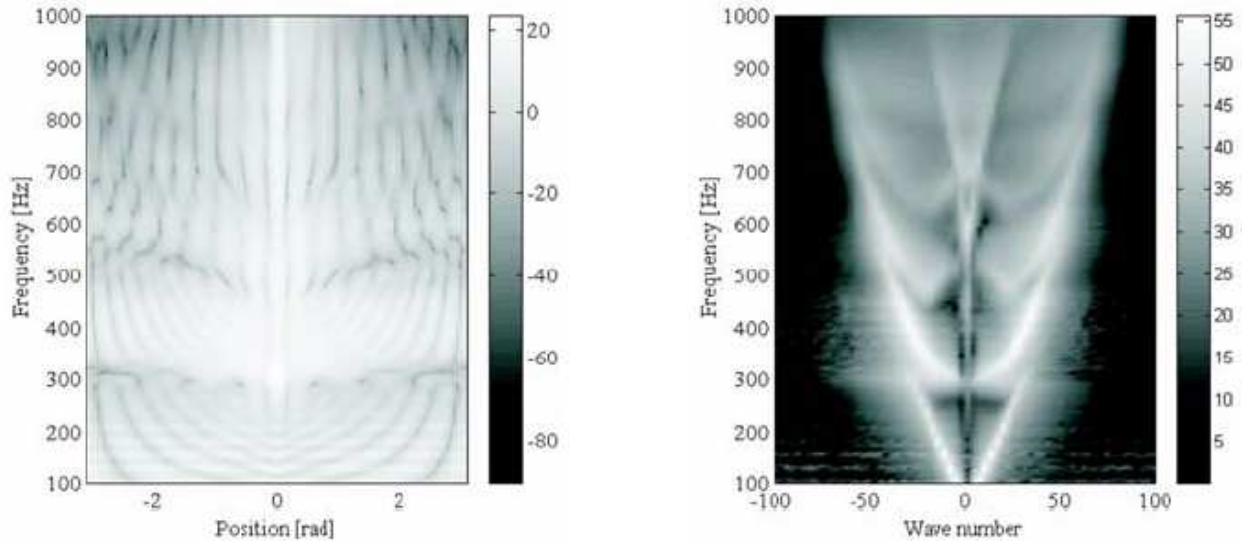


FIGURE 2.12 – Vitesse des points de la bande roulement (gauche) et nombre d'onde (droite) (Kim et Bolton [50])

Avantages des modèles analytiques

Tous les modèles analytiques du pneumatique sont rapides à résoudre. Ils permettent de décrire des phénomènes physiques. Les modèles sont validés jusqu'à 3 kHz (les modèles d'anneaux circulaires validés à 300 Hz, les modèles de coques et de plaques validés de 500 Hz à 3 kHz). En particulier, ces modèles analytiques sont très utiles pour des études théoriques.

Travail envisagé

Les modèles analytiques dans la littérature incluent l'effet de la pression de gonflage. Il n'y a pas de modèle de pneu écrasé. Afin de modéliser cet état du pneu, il faut enrichir un des modèles d'anneaux circulaires en prenant en compte l'effet de la déformation non-linéaire en géométrie.

2.2.2 Modèles numériques

Du fait de la complexité de la géométrie du pneumatique et des matériaux hétérogènes qui le constituent, un modèle analytique ne décrit pas complètement les vibrations du pneumatique. De plus le couplage entre la cavité d'air et la bande de roulement est difficile à modéliser analytiquement. Il est donc nécessaire de construire des modèles numériques de l'ensemble pneu/roue/cavité pour prédire les réponses vibratoires d'un pneumatique.

Parmi les modèles numériques, les modèles éléments finis sont utilisés fréquemment dans les secteurs automobile, aéronautique ...

A titre d'exemple, on peut les modèles de Takagi [95], Narasimha [70], Richards [85], Cho [23]....

Modèle éléments finis 2D

En prenant en compte les différents matériaux des couches du pneumatique, Takagi [95] a modélisé le pneu en éléments finis 2D. Les comportements des matériaux sont supposés linéaires. La pression de gonflage et la rotation sont prises en compte. Les modèles sont validés sur la plage [0-250 Hz].

Modèles éléments finis 3D

Le nombre de travaux sur la modélisation éléments finis d'un pneumatique est très élevé. On donne ci-dessous quelques modèles typiques.

Concernant les modèles numériques 3D, Fadavi [30] et Brinkmeier [18] ont modélisé un pneumatique dans le code commercial Abaqus. Les propriétés du modèle sont identifiées par des mesures expérimentales. La carcasse et les flancs sont modélisés avec des matériaux isotropes transverses. Les patins en gomme sont représentés par un matériau hyper-élastique. Le contact avec la chaussée est aussi modélisé. Ce modèle est validé jusqu'à 1500 Hz. Narasimha [70] a modélisé un pneu lisse en contact avec un obstacle. Deux méthodes de résolutions (méthode explicite et méthode ALE [69]) sont mises en oeuvre. Les comparaisons avec les mesures expérimentales permettent de démontrer que la méthode ALE est plus efficace que la méthode explicite (figure 2.13).

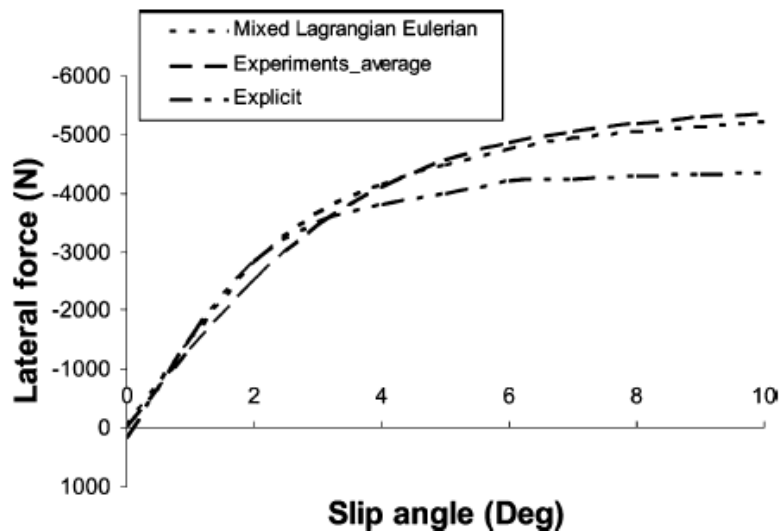


FIGURE 2.13 – Comparaison des résultats calculés et mesurés par Narasimha [70]

Richards [85] a modélisé le pneumatique avec la cavité d'air. Le couplage entre le fluide et la structure est inclus dans son modèle. En comparant avec la mesure, le modèle est validé jusqu'à 400Hz.

Modèles de guide d'onde

A coté des modèles éléments finis, des modèles de guide d'onde sont développés dans la littérature. Ces modèles sont plus légers lors d'utilisation de structures périodiques. Mead [63] [64] [65] a largement étudié ce type de structure. Mace [62] et Nguyen [72] ont détaillé la méthode des éléments finis pour une structure guide d'onde périodique. La limitation de ces modèles est l'application à des structures périodiques.

Travail envisagé

En profitant des modèles éléments finis, un modèle complet de l'ensemble du pneumatique (pneu/roue/cavité) sera développé en prenant en compte les effets de rotation et de la déformation non-linéaire en géométrie pour un pneu écrasé.

2.3 Modèles de contact

Dans la littérature, il existe des modèles de contact entre le pneumatique et la chaussée pour étudier les vibrations du pneumatique. Cette section présente des modèles analytiques et des modèles numériques ainsi que des algorithmes pour gérer le problème de contact dynamique.

2.3.1 Loi de contact

La notion de "Loi de contact" est utilisée pour établir la relation entre la force de contact et l'interpénétration entre deux corps. Cette force de contact est toujours en statique et le problème de contact est non-linéaire. Les lois de contact dépendent de la géométrie des solides en contact. En réalité, la loi de contact est essentiellement établie par le contact entre un demi espace infini et une aspérité avec une forme géométrique déterminée.

2.3.1.1 Contact de Hertz

Hertz [43] a développé le contact entre deux sphères élastiques. Ce contact est considéré comme un contact ponctuel. Les hypothèses de ce contact sont les suivantes :

- l'aire de contact est supposée circulaire et son rayon est très petit par rapport aux rayons des sphères. Cela permet de considérer que chaque sphère est comme un demi-espace élastique
- il n'y a pas de frottement entre les deux sphères. La pression générée dans l'aire de contact est toujours normale. Les forces tangentielles sont nulles.

La loi de contact s'écrit :

$$P = \frac{4}{3} E^* R^{\frac{1}{2}} \delta^{\frac{3}{2}} \quad (2.5)$$

où R est le rayon équivalent et se calcule par $R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$. R_1 et R_2 sont les rayons de deux sphères, E_1 et E_2 leurs raideurs respectives. $E^* = \frac{E_1 E_2}{E_1(1 - \nu_1^2) + E_2(1 - \nu_2^2)}$ est appelé le module d'élasticité

équivalent.

La loi de contact entre une sphère et un demi espace infini se déduit de (2.5) en utilisant $R_2 \rightarrow \infty$. Le rayon équivalent devient le rayon de la sphère.

D'autres études analytiques de la loi de contact proposée par Love [61] et Giannakopoulos [34] ont permis de développer le contact entre un demi espace avec un cône et une pyramide.

2.3.1.2 Loi de contact ponctuel

En généralisant cette loi de contact ponctuel, Sameur [87] et Cesbron [22] ont proposé une loi de puissance pour un contact entre une aspérité de forme quelconque et un demi espace infini :

$$P = CE^* \delta^\gamma \quad (2.6)$$

où C est une caractéristique de la géométrie et des dimensions de l'aspérité. L'exposant γ dépend de la forme de l'aspérité. Sameur [87] a réalisé des mesures expérimentales pour les cas d'une sphère, d'un cône et d'une pyramide. Il retrouve les paramètres des lois de contact de Hertz [43] et Love [61]. Cesbron [22] a développé une méthode numérique pour calculer le contact statique sur une aspérité. Sa méthode est basée sur les trois conditions de Signorini [91] et la formulation de Boussinesq.

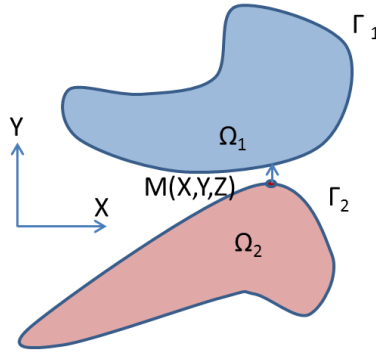


FIGURE 2.14 – La géométrie du contact

Les conditions de contact sont les suivantes :

- Si un point M est en contact entre deux solides Ω_1 et Ω_2 , ce point n'est pas interpénétré dans les deux solides.

$$\begin{aligned} \forall M \in \Omega_1, \quad \Gamma_2(\underline{M}) &\geq 0 \\ \text{et} \\ \forall M \in \Omega_2, \quad \Gamma_1(\underline{M}) &\geq 0 \end{aligned} \quad (2.7)$$

où Γ_1 et Γ_2 sont des fonctions de la géométrie du bord du solide 1 et du solide 2 respectivement (cf. figure 2.14).

- Conditions sur la force et la géométrie : quelque soit le point M sur le bord des deux solides, la relation ci-dessous est toujours satisfaite :

$$\begin{aligned} \forall M \in \Omega_1, \quad \underline{F_c}(\underline{M})\Gamma_1(\underline{M}) &= 0 \\ \text{et} \\ \forall M \in \Omega_2, \quad \underline{F_c}(\underline{M})\Gamma_2(\underline{M}) &= 0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

où $\underline{F}_c(\underline{M})$ est la force normale au point M . Elle est considérée égale à zéro s'il n'y a pas de contact et positive si le contact se produit.

La méthode de Cesbron considère un contact sans frottement :

$$\forall M \in \Omega_1^{contact}, \quad \underline{F}_c(M) \wedge \underline{n}(M) = 0 \quad (2.9)$$

Où $\underline{n}(M)$ est le vecteur normal de la surface de contact entre deux solides.

La relation entre les pressions de contact et les déplacements est établie à l'aide des formulations du problème de Boussinesq, en considérant que le solide Ω_2 est comme un demi espace élastique. Celui-ci est cohérent avec le cas du contact entre le pneu et la chaussée (les patins en gomme correspondent à un demi espace et chaque aspérité sur la chaussée est considérée comme un solide rigide). La formulation de Boussinesq s'écrit :

$$\forall M \in \Omega_2, \quad u(M) = \int_{\Omega_2} P(S)T(M|S)dS \quad (2.10)$$

où $u(\underline{M})$ est le déplacement vertical du point M . $P(S)$ est la pression au point S . $T(M|S)$ est la fonction d'influence de Boussinesq, définie par :

$$\forall (M, S) \in \Omega_2^2, \quad T(M|S) = \frac{1}{\pi E^* \sqrt{(x_M - x_S)^2 + (y_M - y_S)^2}} \quad (2.11)$$

La résolution des inéquations (2.7) et des équations (2.8) à (2.11), permet de déterminer l'aire de contact et la pression résultante. En appliquant cette méthode, Cesbron [22] a identifié des lois de contact d'un solide de forme quelconque avec un demi espace infini élastique pour un faible chargement. En écrivant

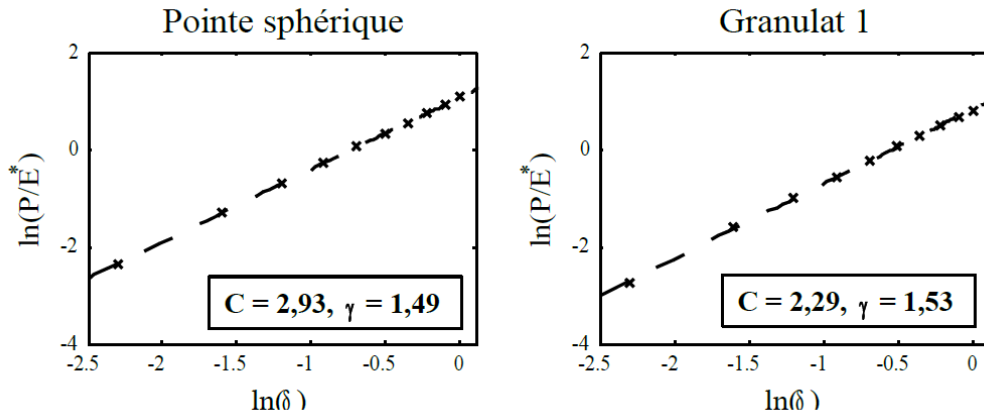


FIGURE 2.15 – Paramètres de loi de contact pour deux aspérités de forme quelconque

la loi de contact sous forme linéaire :

$$\ln \left(\frac{P}{E^*} \right) = \gamma \ln \delta + \ln C \quad (2.12)$$

les deux paramètres C et γ sont identifiés comme sur les courbes (2.15).

En tenant compte des formes de facettes des aspérités de la chaussée, la loi de contact va changer quand le chargement devient important. Dubois [27] a proposé une nouvelle loi pour ce cas :

$$P = \begin{cases} 0 & \text{si } \delta \leq 0 & \text{Non-contact} \\ CE^*\delta^\gamma & \text{si } 0 < \delta < d & \text{Loi de puissance} \\ KE^*(\delta - d) + Ce^*d^\gamma & \text{si } d \leq \delta & \text{Linéaire} \end{cases} \quad (2.13)$$

Le paramètre d peut s'interpréter comme un "enfouissement critique" défini grâce aux fonctions dérivées des lois de contact (cf. Dubois [28]). Toutes les lois de contact ci-dessus sont formulées pour un contact normal. Le frottement entre deux solides est négligé. Mais elles peuvent servir aux études de contact avec frottement.

2.3.2 Contact multi-points

Le problème du contact multi-points ne peut pas être étudié analytiquement. C'est un problème non-linéaire en général. La non-linéarité provient des inconnus que sont l'aire de contact et les efforts de contact. Pour résoudre ce problème, il faut tout d'abord faire une recherche de l'aire de contact et ensuite résoudre des formulations de contact.

2.3.2.1 Recherche de l'aire de contact

Quelques méthodes sur la détection de l'aire de contact rencontrées dans la littérature sont présentées dans ce qui suit :

- Master - slave. Cette méthode est utilisée souvent dans les codes éléments finis. La "master" surface est la surface du solide le plus rigide. La "slave" surface est superposée sur la "master" surface. La résolution du contact utilise des informations sur l'interpénétration entre des noeuds esclave et la surface maître qui est donnée par la projection normale d'un noeud esclave sur la surface maître. Comme l'aire de contact n'est pas connue a priori, il faut choisir une zone potentiellement en contact plus large que la zone effective de contact. L'aire de contact est déterminée lors du calcul à l'aide d'une procédure itérative. Un point est considéré ne pas être en contact lorsque la pression de contact en ce point est négative (contact comprimé).
- Inside-outside : Wang a proposé cet algorithme comme amélioration de l'algorithme "Inside-outside", [98]. L'algorithme propose une stratégie simple, selon laquelle ce noeud doit être repoussé vers l'arrière au moyen de la réaction des forces dirigées le long de la trajectoire du noeud (à l'intérieur et à l'extérieur sur la même ligne). Cet algorithme est rapide et robuste car aucune itération n'est impliquée. Cependant, il peut entraîner des erreurs près du bord d'intersection des deux surfaces de contact si le maillage de la surface n'est pas assez fin.
- Space Fillin Curve : Ju [48] a proposé un algorithme de contact spline cubique. L'algorithme utilise des interpolations cubiques particulières pour modéliser la surface de contact de manière à pouvoir adoucir les descriptions géométriques. Un noeud de contact peut glisser à travers plusieurs éléments à la fois pour avoir la déformation compatible et des directions normales et tangentes continues. Ces algorithmes peuvent être utilisés pour résoudre les problèmes de contact en 2D et 3D.
- D'autres méthodes de recherche de l'aire de contact existent dans la littérature : Linear Position code Algorithm [74], The local gap function algorithm [44], The local pinball algorithm [14] ...

En résumé, il y a des méthodes explicites comme "Inside-outside", " Space Fillin Curve"... et aussi des méthodes implicites "The local gap function algorithm", " Master - slave ".... Avec les méthodes implicites, la convergence n'est pas démontrée théoriquement. Mais, si la surface de contact initiale est choisie très proche de celle réelle, le calcul est convergent. Concernant les méthodes explicites, elles demandent un maillage très fin pour avoir des bonnes tolérances. Le contact pneu/chaussée utilise souvent l'algorithme "Master -slave" [27].

2.3.2.2 Résolution des équations de contact

Les équations du contact sont des relations entre les déplacements des points au contact et les forces générées dans l'aire de contact. Elles peuvent être résolues par différentes méthodes : méthode directe, pénalisation, multiplicateur de Lagrange, méthode utilisant les fonctions de Green.

Méthode directe

Les équations à résoudre sont sous forme discrétisée :

$$\underline{\underline{M}} \ddot{\underline{u}} + \underline{\underline{C}} \dot{\underline{u}} + \underline{\underline{K}} \underline{u} = \underline{F_c} \quad (2.14)$$

où $\underline{\underline{M}}$, $\underline{\underline{C}}$ et $\underline{\underline{K}}$ sont respectivement les matrices de masse, de raideur et d'amortissement du modèle de pneumatique. $\underline{F_c}$ et $\underline{u}$ sont respectivement les vecteurs inconnus des forces de contact et des déplacements.

Si l'aire de contact est connue, les conditions de contact de Signorini [91] permettent de calculer le vecteur de déplacements des points dans l'aire de contact. La résolution des équations (2.14) devient un problème à déplacements imposés. Le vecteur des déplacements s'écrit :

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} \underline{u}_1 \\ \underline{u}_2 \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

où $\underline{u}_1$ est le vecteur inconnu de déplacements des points hors de l'aire de contact. $\underline{u}_2$ est le vecteur connu de déplacements imposés aux points dans l'aire de contact.

Les matrices des équations (2.14) sont arrangées selon la séparation du vecteur déplacement. Elles deviennent :

$$\begin{pmatrix} \underline{\underline{M}}_{11} & \underline{\underline{M}}_{12} \\ \underline{\underline{M}}_{21} & \underline{\underline{M}}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\underline{u}}_1 \\ \ddot{\underline{u}}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \underline{\underline{C}}_{11} & \underline{\underline{C}}_{12} \\ \underline{\underline{C}}_{21} & \underline{\underline{C}}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\underline{u}}_1 \\ \dot{\underline{u}}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \underline{\underline{K}}_{11} & \underline{\underline{K}}_{12} \\ \underline{\underline{K}}_{21} & \underline{\underline{K}}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{u}_1 \\ \underline{u}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{0} \\ \underline{F_c} \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

De (2.16), le vecteur inconnu de déplacements est la solution de

$$\begin{pmatrix} \underline{\underline{M}}_{11} & \underline{\underline{M}}_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\underline{u}}_1 \\ \ddot{\underline{u}}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \underline{\underline{C}}_{11} & \underline{\underline{C}}_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\underline{u}}_1 \\ \dot{\underline{u}}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \underline{\underline{K}}_{11} & \underline{\underline{K}}_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{u}_1 \\ \underline{u}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{0} \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

On décompose les déplacements inconnus en deux parties : une partie statique et une partie dynamique.

$$\underline{u}_1 = \underline{u}_1^d + \underline{u}_1^s \quad (2.18)$$

où $\underline{u}_1^s$ est la réponse quasi statique. Elle est calculée par la relation statique de (2.17) :

$$\underline{\underline{K}}_{11} \underline{u}_1^s + \underline{\underline{K}}_{12} \underline{u}_2 = \underline{0} \quad (2.19)$$

Il vient :

$$\underline{u}_1^s = -\underline{K}_{11}^{-1} \underline{K}_{12} \underline{u}_2 \quad (2.20)$$

La réponse dynamique, $\underline{u}_1^d$, est calculée par la relation dynamique de (2.17) :

$$\underline{M}_{11} \ddot{\underline{u}}_1^d + \underline{C}_{11} \dot{\underline{u}}_1^d + \underline{K}_{11} \underline{u}_1^d = -\underline{M}_{11} \ddot{\underline{u}}_1^s - \underline{M}_{12} \ddot{\underline{u}}_2 - \underline{C}_{11} \dot{\underline{u}}_1^s - \underline{C}_{12} \dot{\underline{u}}_2 \quad (2.21)$$

La relation (2.20) donne :

$$\begin{cases} \dot{\underline{u}}_1^s = -\underline{K}_{11}^{-1} \underline{K}_{12} \dot{\underline{u}}_2 \\ \ddot{\underline{u}}_1^s = -\underline{K}_{11}^{-1} \underline{K}_{12} \ddot{\underline{u}}_2 \end{cases} \quad (2.22)$$

Donc, la relation (2.21) devient :

$$\underline{M}_{11} \ddot{\underline{u}}_1^d + \underline{C}_{11} \dot{\underline{u}}_1^d + \underline{K}_{11} \underline{u}_1^d = \left(\underline{M}_{11} \underline{K}_{11}^{-1} \underline{K}_{12} - \underline{M}_{12} \right) \ddot{\underline{u}}_2 + \left(\underline{C}_{11} \underline{K}_{11}^{-1} \underline{K}_{12} - \underline{C}_{12} \right) \dot{\underline{u}}_2 \quad (2.23)$$

La résolution des équations (2.23) donne des valeurs de $\underline{u}_1^d$ et le vecteur déplacements $\underline{u}_1$ est calculé par la relation (2.18). Enfin, les forces des points dans l'aire de contact se calculent par :

$$\begin{pmatrix} \underline{M}_{21} & \underline{M}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\underline{u}}_1 \\ \ddot{\underline{u}}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \underline{C}_{21} & \underline{C}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\underline{u}}_1 \\ \dot{\underline{u}}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \underline{K}_{21} & \underline{K}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{u}_1 \\ \underline{u}_2 \end{pmatrix} = \underline{F}_c \quad (2.24)$$

Méthode de pénalisation

Lors du contact, le solide se déforme et il y a de l'énergie ajoutée. La méthode de pénalisation consiste à minimiser l'énergie totale en ajoutant une fonction de pénétration :

$$\Pi^*(\underline{u}) = \Pi(\underline{u}) + \frac{k}{2} \underline{\xi}^T \underline{\xi} \quad (2.25)$$

où $\Pi(\underline{u})$ est l'énergie totale du solide, $\underline{u}$ les déplacements nodaux, $\underline{\xi}$ le vecteur de pénétration et k le paramètre de pénalisation.

Le facteur $\frac{k}{2} \underline{\xi}^T \underline{\xi}$ est une énergie associée aux efforts du contact. Les forces du contact se calculent donc par sa dérivation par rapport aux pénétrations :

$$\underline{F}_c = \frac{\partial \Pi^*(\underline{u})}{\partial \underline{\xi}} = k \underline{\xi} \quad (2.26)$$

Cette méthode est facile à appliquer. Mais la difficulté est d'identifier la valeur de k .

Méthode des multiplicateurs de Lagrange

Comme dans la méthode de pénalisation, l'énergie du système en contact s'écrit en ajoutant les multiplicateurs de Lagrange $\underline{\lambda}$:

$$\Pi^*(\underline{u}) = \Pi(\underline{u}) + \underline{\lambda}^T \underline{\xi} \quad (2.27)$$

La minimisation de l'équation (2.27) mène à l'équation différentielle :

$$\begin{aligned} \delta \Pi(\underline{u}) + \underline{\lambda}^T \delta \underline{\xi} &= 0 \\ \underline{\lambda}^T \delta \underline{\xi} &\leq 0 \end{aligned} \quad (2.28)$$

Cette méthode conduit à un temps de calcul élevé.

Méthode des fonctions de Green

La résolution avec cette méthode est similaire à celle de la méthode directe. La différence est liée à l'écriture de la relation entre les déplacements et les efforts de contact. Dans cette méthode, le déplacement nodal se calcule à l'aide de fonctions de Green et des efforts de contact :

$$\underline{u}(t) = \int_0^t \underline{G}(t - \tau) \underline{F}_c(\tau) d\tau \quad (2.29)$$

où G est la fonction de Green. Cette méthode est détaillée dans les références de Dubois [27], Cesbron [22] et Meftah [66].

2.3.3 Schémas numériques appliqués à la résolution du problème de contact

Le contact dynamique n'est pas souvent résolu analytiquement. Ce problème est non-linéaire avec pour inconnues : l'aire de contact et les forces de contact. Le calcul fréquentiel n'est pas applicable puisque le problème de contact n'est ni un problème de force imposée ni un problème de déplacement imposé. Les équations de contact dynamique doivent être résolues en temporel à partir de l'état au repos. Pour la méthode directe (cf. la section 2.3.2.2), les schémas numériques utilisés classiquement sont la méthode de Newmark, la méthode des différences centrées, la méthode de Houbolt ou la méthode de Wilson qui est une extension de celle de Newmark. Par la suite, les deux méthodes classiques de Newmark et des différences centrées sont présentées. Le schéma discrétisé en temps pour la méthode des fonctions de Green est également détaillé.

2.3.3.1 Méthode des différences centrées

La méthode des différences centrées est basée sur une approximation de l'accélération constante sur un intervalle de temps $[t_{i-1}, t_{i+1}]$. Le déplacement dans cet intervalle est donc décrit par un polynôme quadratique :

$$u = a\tau^2 + b\tau + c \quad (2.30)$$

Avec $-\delta t \leq \tau \leq \delta t$, δt étant défini par $t_i - t_{i-1}$.

Évaluant cette équation à $\tau = -\delta t$, 0 et δt , on estime les coefficients a , b et c comme suit :

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{2\delta t^2} (u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}) \\ b &= \frac{1}{2\delta t} (u_{i+1} - u_{i-1}) \\ c &= u_i \end{aligned} \quad (2.31)$$

Cette approximation est d'ordre δt^2 . La réponse à l'instant t_{i+1} est donnée par :

$$\left(\frac{m}{\delta t^2} + \frac{c}{2\delta t} \right) u_{i+1} = f_i + \left(\frac{2m}{\delta t^2} - k \right) u_i - \left(\frac{m}{\delta t^2} - \frac{c}{2\delta t} \right) u_{i-1} \quad (2.32)$$

Et la vitesse à l'instant t_i est donnée par :

$$\dot{u}_i = \frac{1}{2\delta t} (u_{i+1} - u_{i-1}) \quad (2.33)$$

L'accélération à l'instant t_i :

$$\ddot{u}_i = \frac{1}{\delta t^2} (u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}) \quad (2.34)$$

Par conséquent, la réponse u_{i+1} est calculée si on connaît les déplacements historiques u_i et u_{i-1} . Les conditions initiales nécessaires sont donc d'avoir deux valeurs de u_0 et u_1 . Pour les problèmes dynamiques, les valeurs initiales sont fréquemment le déplacement initial et la vitesse initiale. Le déplacement u_1 peut donc être évalué par ces conditions initiales :

$$u_1 = u_0 + \delta t \dot{u}_0 + \frac{1}{2} \delta t^2 \ddot{u}_0 \quad (2.35)$$

avec $\ddot{u}_0 = \frac{f_0 - c\dot{u}_0 - ku_0}{m}$

Remarque :

La méthode des différences centrées est une méthode explicite. Une instabilité peut se produire en fonction du pas de temps choisi. Le choix du pas de temps dépend de la fréquence de résonance du système. Ceci est illustré sur l'exemple d'un système simple : une masse m et un ressort de raideur k en condition libre. L'équation s'écrit donc sous la forme :

$$m\ddot{u} + k u = 0 \quad (2.36)$$

En utilisant la formulation (2.32), il vient :

$$\frac{m}{\delta t^2} u_{i+1} = \left(\frac{2m}{\delta t^2} - k \right) u_i - \frac{m}{\delta t^2} u_{i-1} \quad (2.37)$$

En arrangeant cette équation, on obtient :

$$u_{i+1} + \left((\omega_0 \delta t)^2 - 2 \right) u_i + u_{i-1} = 0 \quad (2.38)$$

avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$. La solution de l'équation (2.38) est sous la forme :

$$u_i = C \alpha^i \quad (2.39)$$

où C est une constante et α un paramètre à déterminer. Donc, α est la solution de l'équation :

$$\alpha^2 + \left((\omega_0 \delta t)^2 - 2 \right) \alpha + 1 = 0 \quad (2.40)$$

La réponse u_i est stable si $\|\alpha\| \leq 1$ et α est un nombre complexe. On appelle α_1 et α_2 deux solutions de l'équation (2.40). On écrit :

$$u_i = C_1 \alpha_1^i + C_2 \alpha_2^i \quad (2.41)$$

On a la relation : $\alpha_1 * \alpha_2 = 1$. Cela implique $\|\alpha_1\| \cdot \|\alpha_2\| = 1$. Le système est stable si $\|\alpha_1\| = \|\alpha_2\| = 1$. Cette condition ramène à :

$$\omega_0 \delta t < 2 \quad (2.42)$$

Le calcul numérique est donc stable quand le pas de temps est inférieur à $\frac{2}{\omega_0}$.

Il s'agit d'un schéma explicite. La résolution pour un pas de temps est très rapide. Par contre, l'inconvénient de nécessairement choisir un pas de temps suffisamment petit entraîne un grand nombre de calculs. Le temps de calcul global peut donc être très élevé.

2.3.3.2 Méthode de Newmark

La méthode de Newmark est une méthode de linéarisation de l'accélération [79] pour résoudre un système dynamique forcé en temporel. Cette méthode suppose que l'accélération du point matériel varie linéairement dans l'intervalle de temps $[t_i, t_{i+1}]$. Cela donne :

$$\ddot{u} = \ddot{u}_i + \frac{1}{\delta t} (\ddot{u}_{i+1} - \ddot{u}_i) \tau \quad (2.43)$$

avec $0 \leq \tau \leq \delta t$.

En intégrant cette formulation de 0 à δt , on obtient :

$$\dot{u} = \dot{u}_i + \ddot{u}_i \tau + \frac{1}{2\delta t} (\ddot{u}_{i+1} - \ddot{u}_i) \tau^2 \quad (2.44)$$

Avec $\dot{u} = \dot{u}_i$ quand $\tau = 0$. Intégrant encore une fois :

$$u = u_i + \dot{u}_i \tau + \frac{1}{2} \ddot{u}_i \tau^2 + \frac{1}{6\delta t} (\ddot{u}_{i+1} - \ddot{u}_i) \tau^3 \quad (2.45)$$

avec $u = u_i$ quand $\tau = 0$.

On évalue (2.44) et (2.45) à $\tau = \delta t$:

$$\dot{u}_{i+1} = \dot{u}_i + \frac{\delta t}{2} (\ddot{u}_i + \ddot{u}_{i+1}) \quad (2.46)$$

et

$$u_{i+1} = u_i + \dot{u}_i \delta t + \frac{\delta t^2}{6} (2\ddot{u}_i + \ddot{u}_{i+1}) \quad (2.47)$$

Dans la méthode de Newmark, les équations (2.46) et (2.47) sont supposées prendre la forme suivante :

$$\dot{u}_{i+1} = \dot{u}_i + \delta t ((1 - \gamma) \ddot{u}_i + \gamma \ddot{u}_{i+1}) \quad (2.48)$$

et

$$u_{i+1} = u_i + \dot{u}_i \delta t + \delta t^2 \left(\left(\frac{1}{2} - \beta \right) \ddot{u}_i + \beta \ddot{u}_{i+1} \right) \quad (2.49)$$

La réponse temporelle à l'instant t_{i+1} est obtenue en évaluant l'équation dynamique à cet instant :

$$m\ddot{u}_{i+1} + c\dot{u}_{i+1} + ku_{i+1} = f_{i+1} \quad (2.50)$$

Cette méthode est donc une méthode implicite. Afin d'avoir une équation sur u_{i+1} , l'équation (2.49) est résolue pour $\ddot{u}_{i+1}$:

$$\ddot{u}_{i+1} = \frac{1}{\beta \delta t^2} (u_{i+1} - u_i) - \frac{1}{\beta \delta t} \dot{u}_i - \left(\frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{u}_i \quad (2.51)$$

En remplaçant (2.51) dans (2.48), on a

$$\dot{u}_{i+1} = \frac{\gamma}{\beta \delta t} (u_{i+1} - u_i) + \left(1 - \frac{\gamma}{\beta} \right) \dot{u}_i + \delta t \left(1 - \frac{\gamma}{2\beta} \right) \ddot{u}_i \quad (2.52)$$

Maintenant, on substitue (2.52) et (2.51) dans (2.50) :

$$\begin{aligned} \frac{m}{\beta \delta t^2} (u_{i+1} - u_i) - \frac{m}{\beta \delta t} \dot{u}_i - m \left(\frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{u}_i + \frac{\gamma c}{\beta \delta t} (u_{i+1} - u_i) \\ + c \left(1 - \frac{\gamma}{\beta} \right) \dot{u}_i + c \delta t \left(1 - \frac{\gamma}{2\beta} \right) \ddot{u}_i + ku_{i+1} = f_{i+1} \end{aligned} \quad (2.53)$$

On a une équation linéaire pour u_{i+1} :

$$\begin{aligned} \left(\frac{m}{\beta \delta t^2} + \frac{\gamma c}{\beta \delta t} + k \right) u_{i+1} = \\ = f_{i+1} + \left(\frac{m}{\beta \delta t^2} + \frac{\gamma c}{\beta \delta t} \right) u_i + \left(\frac{m}{\beta \delta t} - c \left(1 - \frac{\gamma}{\beta} \right) \right) \dot{u}_i \\ + \left(m \left(\frac{1}{2\beta} - 1 \right) - c \delta t \left(1 - \frac{\gamma}{2\beta} \right) \right) \ddot{u}_i \end{aligned} \quad (2.54)$$

Si u_i , $\dot{u}_i$ et $\ddot{u}_i$ sont connus, on peut alors calculer u_{i+1} par la formulation (2.54). Ensuite, les formulations (2.52) et (2.51) sont utilisées pour évaluer $\dot{u}_{i+1}$ et $\ddot{u}_{i+1}$. Les conditions initiales permettent d'avoir la vitesse et le déplacement. L'accélération initiale est donnée par :

$$\ddot{u}_0 = (f_0 - c\dot{u}_0 - ku_0) / m \quad (2.55)$$

où f_0 est la valeur de la force à l'instant initial.

Convergence de la méthode de Newmark

Les propriétés de l'algorithme dépendent des deux paramètres γ et β (cf. tableau 2.1)

Domaine	Stabilité
$\gamma \leq \frac{1}{2}$	instable
$\gamma \leq \frac{1}{2}$ et $2\beta \leq \gamma$	conditionnellement stable
$\gamma \leq \frac{1}{2}$ et $\beta \geq \frac{1}{4} \left(\gamma + \frac{1}{2} \right)^2$	inconditionnellement stable

TABLE 2.1 – Conditions de stabilité de la méthode de Newmark

En choisissant $\gamma = \frac{1}{2}$, la méthode introduit un amortissement artificiel. Dans le cas $\gamma < \frac{1}{2}$, cet amortissement devient négatif. C'est la raison pour laquelle le schéma devient instable. On peut citer quelques méthodes classiques associées aux valeurs de γ et β (cf. tableau 2.2) :

Nom de la méthode	γ	β	stabilité
Différences centrées	$\gamma = \frac{1}{2}$	$\beta = 0$	conditionnellement stable
Accélération linéaire	$\gamma = \frac{1}{2}$	$\beta = \frac{1}{6}$	conditionnellement stable
Accélération moyenne	$\gamma = \frac{1}{2}$	$\beta = \frac{1}{4}$	inconditionnellement stable

TABLE 2.2 – Les méthodes numériques associées à la méthode de Newmark

Les deux méthodes de différences centrées et d'accélération linéaire sont convergentes quand le pas de temps utilisé est suffisamment petit (voir la méthode des différences centrées).

Remarque :

On utilise $\gamma = \frac{1}{2}$ et $\beta = \frac{1}{4}$ dans le schéma de Newmark (méthode d'accélération moyenne) pour traiter le problème dynamique. Le calcul est donc toujours stable.

2.3.3.3 Discrétisation de la méthode des fonctions de Green

Cette méthode est proposée dans le modèle de Kropp [53] et Larson [58]. Elle a été développée dans la thèse de Meftah [66] et utilisée dans la thèse de Dubois [27]. On part de la relation de Green (2.29) et en supposant que la solution à l'instant t est connue, il faut chercher la solution à l'instant $t + \Delta t$. On a :

$$u(t + \Delta t) = \int_0^{t+\Delta t} G(\tau) f_c(t + \Delta t - \tau) d\tau = \int_0^{t+\Delta t} G(t + \Delta t - \tau) f_c(\tau) d\tau \quad (2.56)$$

En approximation :

$$G(t + \Delta t - \tau) = G(t - \tau) + \Delta t \frac{\partial G}{\partial t}(t - \tau) \quad (2.57)$$

En remplaçant dans (2.56) :

$$\begin{aligned} u(t + \Delta t) &= \int_0^{t+\Delta t} \left(G(t - \tau) + \Delta t \frac{\partial G}{\partial t}(t - \tau) \right) f_c(\tau) d\tau \\ &= \int_0^t \left(G(t - \tau) + \Delta t \frac{\partial G}{\partial t}(t - \tau) \right) f_c(\tau) d\tau + \int_t^{t+\Delta t} \left(G(t - \tau) + \Delta t \frac{\partial G}{\partial t}(t - \tau) \right) f_c(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (2.58)$$

En posant

$$u^h(t) = \int_0^t \left(G(t - \tau) + \Delta t \frac{\partial G}{\partial t}(t - \tau) \right) f_c(\tau) d\tau$$

La réponse historique $u^h(t)$ est connue. Le calcul de $u(t + \Delta t)$ consiste à calculer l'intégration :

$$\int_t^{t+\Delta t} \left(G(t - \tau) + \Delta t \frac{\partial G}{\partial t}(t - \tau) \right) f_c(\tau) d\tau$$

qui est calculée par la méthode des points de Gauss. Par exemple :

$$\int_t^{t+\Delta t} \left(G(t - \tau) + \Delta t \frac{\partial G}{\partial t}(t - \tau) \right) f_c(\tau) d\tau \simeq \Delta t \left(G(\Delta t) + \Delta t \frac{\partial G}{\partial t}(\Delta t) \right) f_c(t + \Delta t) \quad (2.59)$$

Donc, la relation entre le déplacement et la force de contact s'écrit :

$$u(t + \Delta t) = u^h(t) + \Delta t \left(G(\Delta t) + \Delta t \frac{\partial G}{\partial t}(\Delta t) \right) f_c(t + \Delta t) \quad (2.60)$$

La relation (2.60) permet de résoudre le contact dynamique. Cette méthode est facile à mettre en oeuvre dans le cas où il existe une fonction analytique de Green. Sinon, les fonctions de Green peuvent être construites de manière numérique. On peut chercher une approximation de la fonction de Green en temporel (cf. Meftah [66]) :

$$G(t) = \sum_{n=1}^N \frac{A_n}{\omega_n^d} e^{-\xi_n \omega_n t} \sin \omega_n^d t \quad (2.61)$$

où N correspond au nombre de modes retenus. A_n , ω_n et ξ_n sont des paramètres à identifier et $\omega_n^d = \omega_n \sqrt{1 - \xi_n^2}$.

2.3.4 Quelques modèles de contact du pneumatique

La résolution par éléments finis de problèmes de contact a été proposée par Nackenhorst [69]. Une approche ALE a été utilisée pour traiter le contact en rotation tout en tenant compte du frottement. Les formulations 3D sont établies et un code éléments finis est appliqué par la suite. La configuration étudiée est le contact entre le pneu et une surface lisse. Il a considéré que la surface est non-déformable. Son maillage dans l'aire de contact est de l'ordre de 5 mm x 10 mm. La Fig 2.16 montre les efforts dans l'aire de contact et le vecteur de la vitesse de glissement du contact avec le sol lisse. La distribution des contraintes est concentrée au milieu de l'aire de contact.

Pour le traitement numérique du contact entre le pneumatique et une chaussée réelle, le maillage de la zone de contact est souvent adapté à la taille des aspérités de la chaussée. La taille moyenne de celles-ci étant d'environ 0.5 à 2 cm, la taille des mailles du pneumatique est situé entre 1 et 2 mm.

L'application de cette méthode pose le problème du temps de calcul. A titre d'exemple, sous Abaqus, le traitement du contact statique entre le pneumatique dont le maillage de l'aire de contact est d'environ 1 mm x 2 mm et la chaussée réelle requiert près de 18000 secondes avec un serveur performant. Cela ne permet pas de calculer la réponse dynamique en temporel en un temps raisonnable.

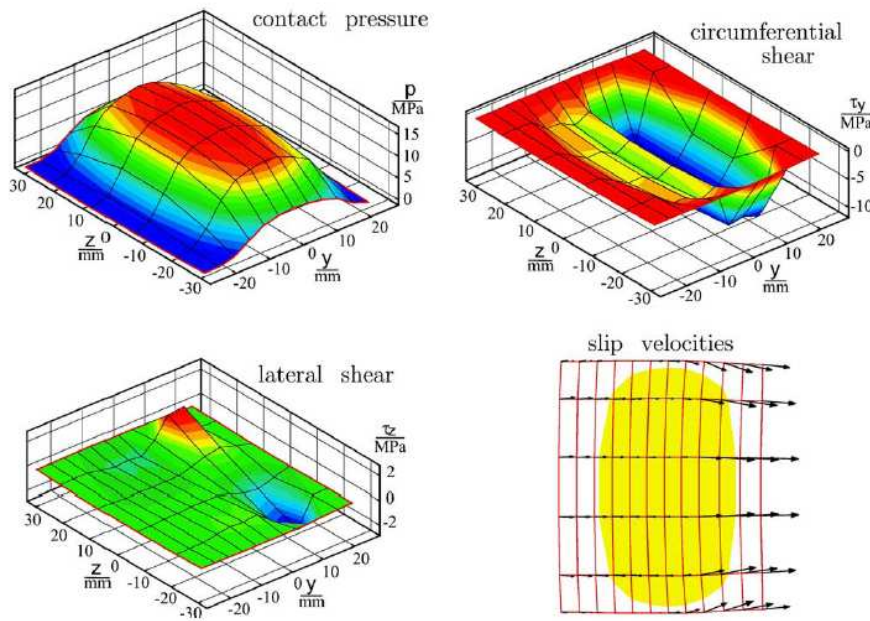


FIGURE 2.16 – La distribution des contraintes dans l'aire de contact et les vecteurs de la vitesse de glissement [69]

Afin d'améliorer le temps de calcul, Cesbron [22] et Dubois [27] ont proposé une méthode basée sur une loi de contact ponctuelle. Cette méthode est appelée Méthode Itérative à Deux Echelles (MIDE). La méthode comporte deux étapes de calcul, chacune à une échelle différente de contact. La chaussée doit être définie sous forme de multi-aspérités à l'aide d'une méthode de partitionnement détaillée dans [22] et [27]. Ensuite, pour chaque aspérité, une loi de contact de la forme (2.6) ou

(2.13) est identifiée. La première étape est un calcul dit macro-échelle. A cette étape, la force de contact est considérée comme une force normale appliquée au sommet de chaque aspérité. Cette étape utilise la méthode itérative de contact multipoints initiée dans la thèse de Sameur [87], enrichie d'une résolution à force imposée plutôt qu'en déplacement imposé. La surface de la chaussée se compose de N aspérités. Chaque aspérité est positionnée dans le repère $Oxyz$ comme l'illustre la figure 2.17.

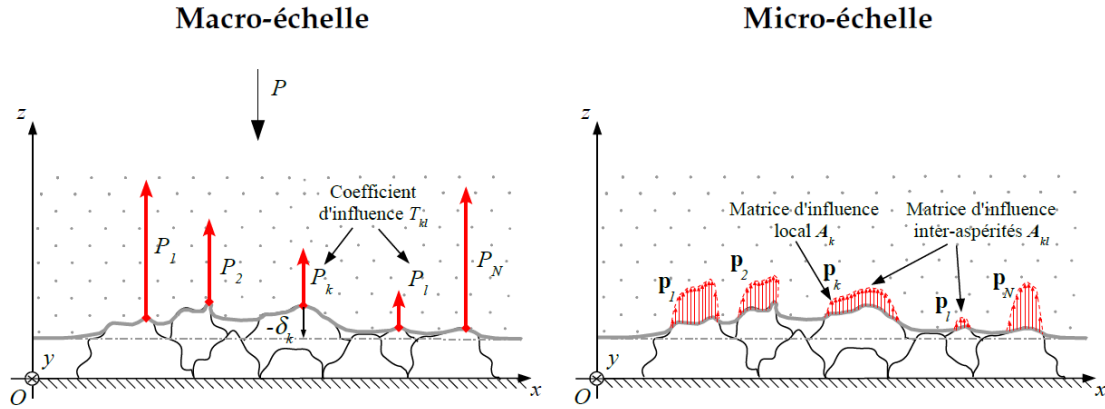


FIGURE 2.17 – Approche multi-aspérités à deux échelles [27]

Les équations de contact s'écrivent comme suit :

$$P_k = \begin{cases} C_k E^* (\delta_k - \sum_{l=1, l \neq k}^N T_{kl} P_l)^{\gamma_k} & \text{si } \delta_k > 0 \\ 0 & \text{si } \delta_k \leq 0 \end{cases} \quad (2.62)$$

où C_k et γ_k sont des paramètres de la loi de contact. T_{kl} est défini par (2.11). P est la force appliquée au sommet de chaque aspérité. δ_k est l'interpénétration entre l'aspérité et le massif.

Pour une résolution à force imposée, il faut ajouter l'équation d'équilibre des forces :

$$P = -\sum_{k=1}^N P_k \quad (2.63)$$

Les équations (2.62) sont non-linéaires et résolues par la méthode de Newton-Raphson.

La deuxième étape est le calcul à micro-échelle. Cette étape permet de calculer avec précision la distribution de la pression sur chaque aspérité. En effet, les équations sont données par (2.62) et écrites pour tous les points sur chaque aspérité. Ensuite, des zones locales autour chaque aspérité sont considérées et les équations sont écrites par bloc. L'algorithme itératif de Gauss-Seidel par bloc non-linéaire est utilisé avec des valeurs initiales qui sont déterminées d'après le calcul macro-échelle.

La méthode MIDE est efficace pour traiter le problème de contact statique. Pour le contact dynamique, Dubois [27] a utilisé la méthode proposée par Meftah [66]. A l'aide d'un modèle numérique du pneumatique, Meftah a identifié la fonction de Green notée $G(t)$ de tous les points dans la zone de contact sous la forme :

$$G(t) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{\omega_k^d} \exp^{-\xi_k \omega_k t} \sin(\omega_k^d t) \quad (2.64)$$

où N est le nombre de modes retenus. ω_k et ξ_k sont respectivement la fréquence et le taux d'amortissement du k^{ime} mode, et $\omega_k^d = \omega_k \sqrt{1 - \xi_k^2}$.

On part de l'équation de convolution pour calculer le déplacement :

$$u(t) = \int_0^t G(t - \tau)q(\tau)d\tau \quad (2.65)$$

La vitesse se calcule par :

$$v(t) = \int_0^t \frac{dG(t - \tau)}{dt} q(\tau)d\tau \quad (2.66)$$

En supposant que l'aire de contact est connue, le déplacement et sa vitesse sont définis par les conditions de contact [66]. La discrétisation en temps des équations (2.65) et (2.66) et une approximation de l'intégration par la méthode des points de Gauss, permet de calculer les forces dynamiques de contact. Cette méthode prend en compte l'effet dynamique du pneumatique. Mais son inconvénient est lié à la difficulté de calculer la vitesse des points dans l'aire de contact. En particulier pour le cas tridimensionnel, il faut disposer d'une chaussée décrite par une fonction dérivable en toute direction. Une autre difficulté porte sur les champs de déplacements ne sont pas toujours dérivables par rapport au temps. Ceci se produit typiquement aux instants du début et de la fin du contact. Si on néglige le temps de mise en contact (la discontinuité de la vitesse entre avant le contact et dans le contact), la vitesse du point du pneumatique rentrant dans le contact est imposée par la dérivation du point de contact sur la chaussée par rapport au temps.

La recherche de l'aire de contact est faite de manière itérative comme dans la méthode de Sameur [87]. La figure 2.18 montre un exemple de spectre de la force de contact au milieu de la base du pneumatique à trois vitesses différentes.

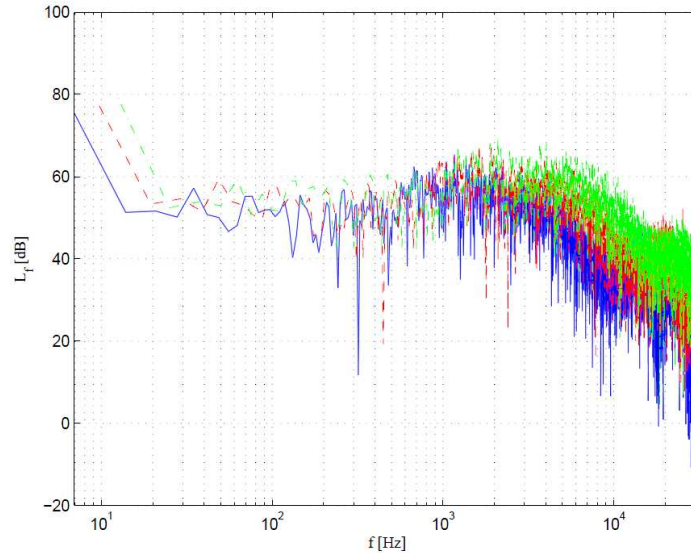


FIGURE 2.18 – Spectre de la force de contact au milieu de l'empreinte d'un pneumatique en contact avec une chaussée réelle [66]

Pour éviter le calcul de la vitesse des points dans l'aire de contact, Dubois [27] a utilisé la relation

(2.65) avec la force de contact $q(t)$ qui est calculée par la loi de contact (2.13) :

$$q(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } \delta(t) \leq 0 \\ CE^*\delta(t)^\gamma & \text{si } 0 < \delta(t) < d \\ KE^*(\delta(t) - d) + Ce^*d^\gamma & \text{si } d \leq \delta(t) \end{cases} \quad (2.67)$$

Il y a deux avantages au travail de Dubois. D'une part, le temps de calcul du contact est raisonnable. D'autre part, il évite de calculer la vitesse des points au contact.

2.3.5 Modèle du pneumatique pour traiter le contact

Kropp [53] a ajouté un tapis de ressorts sous la ceinture du pneu modélisé comme une plaque cylindrique. La pression de contact pneu/sol est représentée par les réactions des ressorts. C'est un modèle très léger en temps de calcul. De plus, la vibration du pneumatique est bien représentée dans le calcul de contact. En considérant que les points au contact sont indépendants, ce modèle n'introduit pas d'effet d'interaction entre eux. Pour améliorer cette limite, Larsson [58] a proposé un modèle de bi-couche (Fig 2.19). La première couche est une plaque modélisant la ceinture du pneu. La deuxième couche est une deuxième plaque liée directement avec le tapis de ressort. Les force de contact se calculent en deux étapes. La première étape est un calcul statique permettant d'obtenir une surface de contact et une précontrainte dans la ceinture. La seconde étape est un calcul dynamique réalisé sous l'hypothèse de petites perturbations associées à la rugosité de la chaussée. Par rapport au modèle développé par Kropp, Larsson a pris en compte l'effet d'interaction entre des points dans l'aire de contact. L'inconvénient des deux modèles est l'absence d'effets gyroscopiques créés par la rotation du pneumatique.

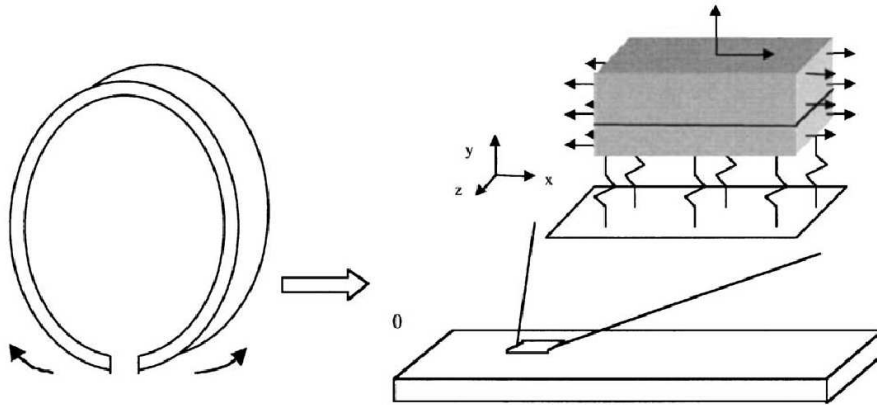


FIGURE 2.19 – Modèle bi-couche de Larson et Kropp [58]

2.4 Conclusion

Cette étude bibliographique sur les solides en rotation a permis de dresser un panorama sur les méthodes existantes permettant de prendre en compte les différents effets de rotation. La méthode ALE est retenue pour formuler notre problème de solide déformable en transformation finie et en rotation. Les modèles du pneumatique rencontrés sont le plus souvent utilisés pour analyser les vibrations du

pneumatique dans la configuration gonflée et en rotation mais sans prise en compte du chargement du véhicule. Les modèles analytiques présentés sont validés jusqu'à 2kHz et les modèles numériques jusqu'à 4kHz. Les effets liés à la rotation du pneumatique sont mis en évidence théoriquement à l'aide de différents modèles analytiques ainsi que par des mesures.

Concernant la modélisation du contact, plusieurs modèles sont proposés pour traiter le contact pneumatique/chaussée. Des approches sont proposées pour réduire le temps de calcul. De tels modèles peuvent être appliqués au contact pneumatique/chaussée réelle avec un maillage très fin. En combinant un tel modèle avec un modèle de pneumatique, le contact dynamique peut être calculé dans un temps raisonnable.

Solides déformables en rotation et en transformations finies

L'objectif de ce chapitre est d'utiliser une approche ALE (Arbitrairement Lagrangienne Eulérienne) pour formuler le problème d'un solide déformable en rotation. Dans un premier temps, nous rappelons la description du mouvement. Les équations d'équilibre sont ensuite écrites par rapport à une configuration de référence dont le choix est justifié. Enfin, on propose une formulation variationnelle associée.

Sommaire

3.1	Introduction	50
3.2	Équations du mouvement	50
3.2.1	Description du mouvement	50
3.2.2	Équations d'équilibre de l'état stationnaire	52
3.2.3	Équations d'équilibre de l'état vibrant	54
3.3	Formulation variationnelle	58
3.4	Discrétisation du problème dynamique	63
3.5	Conclusion	66

3.1 Introduction

Les explications présentées dans la section (2.1) justifient l'utilisation de l'approche ALE pour étudier la dynamique d'un solide déformable en rotation. On rappelle les avantages de cette approche par rapport à une approche Lagrangienne [69] [19] :

- La réponse stationnaire est indépendante du temps.
- Une discrétisation spatiale fixe pour la configuration de référence est utilisée.
- Le raffinement du maillage est déterminé par la discrétisation spatiale.
- La réponse dynamique est analysée facilement par la méthode modale classique.

Une étude de la dynamique d'un solide déformable en transformations finies et en rotation nécessite de définir différentes configurations. On différencie deux états de solide déformé :

- L'état stationnaire : C'est la configuration dans laquelle le solide se déforme de manière statique. Cela signifie que les déplacements des points matériels ne dépendent que de leurs positions.
- L'état dynamique : C'est une petite perturbation autour de l'état stationnaire. Cette perturbation dépend du temps.

L'approche ALE [69] et les méthodes des éléments finis [73] [100] [71] [13] développées dans la littérature restent valides pour traiter le mouvement stationnaire. On tire donc profit de l'approche ALE pour développer la formulation stationnaire. En ce qui concerne le mouvement dynamique, les formulations sur une référence choisie seront développées. L'explication des choix et les résultats sont détaillés dans la section 3.2.3.

3.2 Équations du mouvement

Dans cette section, les définitions des différentes configurations avec les différents mouvements sont détaillées. Ensuite, les équations d'équilibre correspondant à chaque état déformé sont construites.

3.2.1 Description du mouvement

Sur la figure 3.1, les quatre configurations possibles du solide au cours de la déformation sont présentées : la configuration initiale notée D_0 , la configuration tournante notée D_r , la configuration stationnaire notée D_s , la configuration vibrante (ou actuelle) notée D_t . Plus précisément, dans un repère orthonormé fixe $\mathfrak{R}(O, \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$, on introduit les notions suivantes :

- le temps t qui est une variable réelle.
- un point matériel dans l'espace physique qui est représenté par ses coordonnées (X_1, X_2, X_3) .
- des opérateurs mathématiques : gradient (grad), divergence (div) qui sont calculés par rapport aux variables de l'espace physique.
- la configuration initiale (D_0) qui représente l'ensemble des points matériels à l'instant $t = 0$.
- la configuration tournante (D_r) qui représente l'ensemble des points matériels à l'instant t sous un mouvement rigide.
- la configuration stationnaire (D_s) est celle du solide en régime quasi stationnaire dans laquelle l'ensemble des points matériels se déforment statiquement sous l'effet des charges extérieures.
- la configuration actuelle ou vibrante (D_t) représente les vibrations des points matériels autour de leurs positions dans la configuration stationnaire.

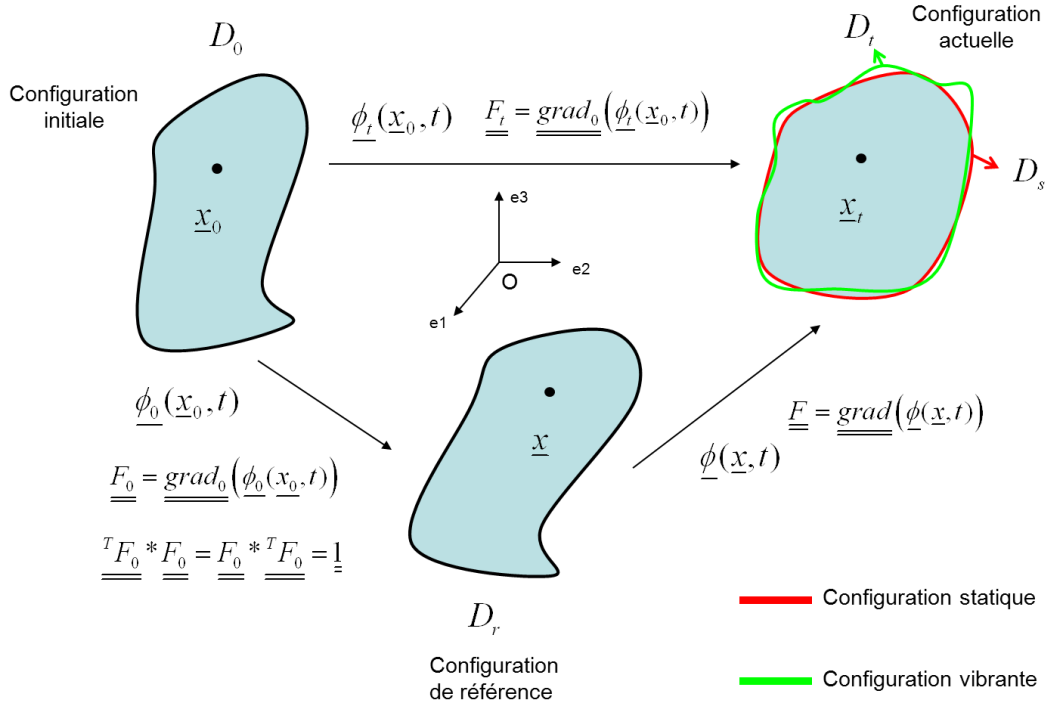


FIGURE 3.1 – Description du modèle.

Les quantités indicées par $(\cdot)_0, (\cdot)_r, (\cdot)_s, (\cdot)_t$ désignent respectivement celles relatives aux configurations D_0, D_r, D_s, D_t . Par exemple, un point matériel M est :

- M_0 dans la configuration D_0 . On peut ainsi écrire : $\underline{X}_0 = \underline{OM}_0 = X_{01}\underline{e}_1 + X_{02}\underline{e}_2 + X_{03}\underline{e}_3$
- M_r dans la configuration D_r : $\underline{X}_r = \underline{OM}_r = X_{r1}\underline{e}_1 + X_{r2}\underline{e}_2 + X_{r3}\underline{e}_3$
- M_s dans la configuration D_s : $\underline{X}_s = \underline{OM}_s = X_{s1}\underline{e}_1 + X_{s2}\underline{e}_2 + X_{s3}\underline{e}_3$
- M_t dans la configuration D_t : $\underline{X}_t = \underline{OM}_t = X_{t1}\underline{e}_1 + X_{t2}\underline{e}_2 + X_{t3}\underline{e}_3$

Les opérateurs : $\underline{\underline{grad}}_i$ et $\underline{\underline{div}}_i$ représentent respectivement les opérateurs gradient et divergence calculés dans la configuration D_i .

Les transformations ϕ_{ij} décrivent le passage de la configuration i à la configuration j . Par exemple, la transformation de la configuration initiale à la configuration de référence s'écrit : $\underline{X}_r = \underline{\phi}_{0r}(\underline{X}_0, t)$. La transformation de la configuration de référence à la configuration stationnaire s'écrit : $\underline{X}_s = \underline{\phi}_{rs}(\underline{X}_r, t)$. Le tenseur de Green du gradient de la transformation se calcule selon les configurations :

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\underline{F}}_{0r} = \frac{d\underline{X}_r}{d\underline{X}_0} \\ \underline{\underline{F}}_{rs} = \frac{d\underline{X}_s}{d\underline{X}_r} \\ \underline{\underline{F}}_{st} = \frac{d\underline{X}_t}{d\underline{X}_s} \\ \underline{\underline{F}}_{0s} = \frac{d\underline{X}_s}{d\underline{X}_0} \end{array} \right. \quad (3.1)$$

On a des relations entre les différentes configurations, par exemple : $\underline{F}_{0s} = \underline{F}_{0r} \underline{F}_{rs}$. On remarque que le tenseur $\underline{F}_{0r}$ d'une transformation rigidifiante doit satisfaire : $\underline{F}_{0r}^T \underline{F}_{0r} = \underline{F}_{0r} \underline{F}_{0r}^T = \underline{1}$.

3.2.2 Équations d'équilibre de l'état stationnaire

L'approche ALE est choisie pour traiter le mouvement stationnaire. La configuration de référence de cette étape est celle de rotation D_r . On va écrire les équations d'équilibre sur cette configuration de référence.

La conservation des quantités de mouvement sur la configuration stationnaire D_s conduit aux équations d'équilibre :

$$\rho_s \underline{\gamma}_s = \rho_s \underline{f}_s + \text{div}_s \left(\underline{\sigma}_s \right) \quad (3.2)$$

où ρ_s est la masse volumique du matériau dans D_s , $\underline{f}_s$ la force volumique extérieure appliquée dans D_s , $\underline{\gamma}_s$ l'accélération dans D_s et $\underline{\sigma}_s$ le tenseur des contraintes de Cauchy dans D_s .

L'équation (3.2) est écrite dans la configuration stationnaire. Il faut écrire tous les termes de cette équation dans la configuration de référence.

La masse volumique

La conservation de la masse nous donne : $\rho_s V_s = \rho_r V_r \longrightarrow \rho_s = \frac{V_r}{V_s} \rho_r$

ρ_r est la masse volumique du matériau dans la configuration tournante D_r .

On note $J = \frac{V_s}{V_r}$ le coefficient de la dilatation volumique du solide qui est égale à $\det(\underline{F}_{rs})$. On obtient donc : $\rho_s = \frac{\rho_r}{J}$.

L'accélération

L'accélération d'un point matériel se calcule par dérivation eulérienne par rapport au temps.

$$\underline{\gamma}_s = \frac{D^2 \underline{X}_s}{Dt^2} \quad (3.3)$$

De même, la vitesse d'un point matériel dans la configuration stationnaire est calculée par une dérivation du vecteur de sa position par rapport au temps :

$$\underline{v}_s = \frac{D \underline{X}_s}{Dt} \quad (3.4)$$

A l'état stationnaire du solide, la déformation d'un point matériel dans la configuration actuelle ne dépend que de sa position dans la configuration tournante. Cette déformation ne dépend pas du temps.

On note : $\underline{X}_s = \underline{\phi}_{rs}(\underline{X}_r)$. Alors, la vitesse absolue dans la configuration stationnaire est calculée par :

$$\underline{v}_s = \frac{D \underline{X}_s}{Dt} = \frac{\partial \underline{X}_s}{\partial \underline{X}_r} \frac{\partial \underline{X}_r}{\partial t} \quad (3.5)$$

Pour la configuration de référence, la vitesse se calcule par une dérivation spatiale en disant que la vitesse d'un point matériel sur la configuration de référence est connue. Effectivement, le mouvement rigidifiant s'écrit : $\underline{X}_r = \underline{\phi}_{0r}(\underline{X}_0, t) = \underline{C}(t) + \underline{\theta}(t)(\underline{X}_0 - \underline{C}(0))$

où $\underline{C}(t)$ et $\underline{C}(0)$ sont respectivement les vecteurs de position du centre de rotation du solide à l'instant t et à l'état initial. $\underline{\theta}(t)$ est la matrice orthogonale de rotation.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \underline{X}_r}{\partial t} &= \frac{\partial(\underline{C}(t) + \underline{\theta}(t)(\underline{X}_0 - \underline{C}(0)))}{\partial t} = \dot{\underline{C}}(t) + \dot{\underline{\theta}}(t)(\underline{X}_0 - \underline{C}(0)) \\ &= \dot{\underline{C}}(t) + \underline{\dot{\theta}}(t) \underline{\theta}(t)^{-1}(\underline{X}_r - \underline{C}(t)) \end{aligned} \quad (3.6)$$

On définit :

$$\underline{\Omega}(\underline{X}_r, t) = \dot{\underline{C}}(t) + \underline{\dot{\theta}}(t) \underline{\theta}(t)^{-1}(\underline{X}_r - \underline{C}(t)) \quad (3.7)$$

le vecteur de rotation du solide.

On remarque que la vitesse du point matériel de la configuration de référence est le vecteur de rotation. Elle est connue si on connaît la vitesse de rotation.

L'expression (3.5) devient :

$$\underline{v}_s = \frac{D\underline{X}_s}{Dt} = \underline{F}_{rs} \underline{\Omega}(\underline{X}_r, t) \quad (3.8)$$

A partir de (3.8), on calcule l'accélération dans (3.3) :

$$\underline{\gamma}_s = \frac{D^2 \underline{X}_s}{Dt^2} = \frac{D\underline{v}_s}{Dt} = \frac{D(\underline{F}_{rs} \underline{\Omega}(\underline{X}_r, t))}{Dt} = \frac{\partial(\underline{F}_{rs} \underline{\Omega}(\underline{X}_r, t))}{\partial t} + \frac{\partial(\underline{F}_{rs} \underline{\Omega}(\underline{X}_r, t))}{\partial \underline{X}_r} \underline{\Omega}(\underline{X}_r, t) \quad (3.9)$$

Donc,

$$\underline{\gamma}_s = \underline{F}_{rs} \frac{\partial(\underline{\Omega}(\underline{X}_r, t))}{\partial t} + \underline{\text{grad}}_r \left(\underline{F}_{rs} \underline{\Omega}(\underline{X}_r, t) \right) \underline{\Omega}(\underline{X}_r, t) \quad (3.10)$$

Les contraintes

Dans l'équation (3.2), le champ de contraintes est celui de Cauchy. C'est la contrainte sur la configuration déformée. Il faut la transformer en contrainte de Boussineq ou de Piola Kirchhoff qui sont des champs de contraintes de la configuration de référence [84] [11].

On calcule la façon dont une surface matérielle élémentaire d'aire dA_r et de normale unitaire $\underline{n}_r$ attachée à la configuration tournante se transforme en une surface d'aire dA_s et de normale $\underline{n}_s$ dans la configuration stationnaire :

$$dV_s = \underline{n}_s dA_s d\underline{X}_s = \underline{n}_s dA_s \underline{F}_{rs} d\underline{X}_r \quad (3.11)$$

Par ailleurs, le volume élémentaire de l'état stationnaire est égal au produit entre le coefficient de la dilatation volumique et le volume élémentaire dans la configuration tournante :

$$dV_s = J dV_r = J \underline{n}_r dA_r d\underline{X}_r \quad (3.12)$$

De (3.11) et (3.12) vient la relation :

$$\underline{n}_s dA_s = J^T \underline{F}_{rs}^{-1} \underline{n}_r dA_r \quad (3.13)$$

Le théorème de Stokes conduit à :

$$\begin{aligned}
 \int_{D_s} \text{div}_s \left(\underline{\underline{\sigma}}_s \right) dV_s &= \oint_{\partial D_s} \underline{\underline{\sigma}}_s \underline{\underline{n}}_s dA_s \\
 &= \oint_{\partial D_r} J \underline{\underline{\sigma}}_s^T \underline{\underline{F}}_{rs}^{-1} \underline{\underline{n}}_r dA_r \\
 &= \int_{D_r} \text{div}_r \left(J \underline{\underline{\sigma}}_s^T \underline{\underline{F}}_{rs}^{-1} \right) dV_r \\
 &= \int_{D_s} \frac{1}{J} \text{div}_r \left(J \underline{\underline{\sigma}}_s^T \underline{\underline{F}}_{rs}^{-1} \right) dV_s
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

Finalement :

$$\text{div}_s \left(\underline{\underline{\sigma}}_s \right) = \frac{1}{J} \text{div}_r \left(J \underline{\underline{\sigma}}_s^T \underline{\underline{F}}_{rs}^{-1} \right) \tag{3.15}$$

Les contraintes de Piola Kirchhoff $\underline{\underline{S}}_r$ sont liées aux contraintes de Cauchy $\underline{\underline{\sigma}}_s$ dans la configuration tournante D_r par :

$$\underline{\underline{S}}_r = J \underline{\underline{F}}_{rs}^{-1} \underline{\underline{\sigma}}_s^T \underline{\underline{F}}_{rs}^{-1} \tag{3.16}$$

L'expression (3.15) devient alors :

$$\text{div}_s \left(\underline{\underline{\sigma}}_s \right) = \frac{1}{J} \text{div}_r \left(\underline{\underline{F}}_{rs} \underline{\underline{S}}_r \right) \tag{3.17}$$

En résumé, l'équation d'équilibre de l'état stationnaire peut être écrite dans la configuration tournante sous la forme :

$$\underline{\underline{F}}_{rs} \frac{\partial(\underline{\underline{\Omega}}(\underline{\underline{X}}_r, t))}{\partial t} + \underline{\underline{\text{grad}}}_r \left(\underline{\underline{F}}_{rs} \underline{\underline{\Omega}}(\underline{\underline{X}}_r, t) \right) \underline{\underline{\Omega}}(\underline{\underline{X}}_r, t) = \underline{\underline{f}}_s + \frac{1}{\rho_r} \text{div}_r \left(\underline{\underline{F}}_{rs} \underline{\underline{S}}_r \right) \tag{3.18}$$

En supposant que $\frac{\partial(\underline{\underline{\Omega}}(\underline{\underline{X}}_r, t))}{\partial t} = 0$ (le cas sans force d'inertie ortho centrifuge), l'équation d'équilibre (3.18) se réécrit :

$$\boxed{\underline{\underline{\text{grad}}}_r \left(\underline{\underline{F}}_{rs} \underline{\underline{\Omega}}(\underline{\underline{X}}_r, t) \right) \underline{\underline{\Omega}}(\underline{\underline{X}}_r, t) = \underline{\underline{f}}_s + \frac{1}{\rho_r} \text{div}_r \left(\underline{\underline{F}}_{rs} \underline{\underline{S}}_r \right)} \tag{3.19}$$

3.2.3 Équations d'équilibre de l'état vibrant

3.2.3.1 Gradients de transformations et conditions de petites perturbations

Pour décrire le mouvement, les notions suivantes sont définies ou rappelées :

$$\begin{cases}
 \underline{\underline{X}}_r = \underline{\underline{\phi}}_{0r}(\underline{\underline{X}}_0, t) = \underline{\underline{C}}(t) + \underline{\underline{\theta}}(t) (\underline{\underline{X}}_0 - \underline{\underline{C}}(0)) \\
 \underline{\underline{X}}_s = \underline{\underline{\phi}}_{rs}(\underline{\underline{X}}_r, t) = \underline{\underline{X}}_r + \underline{\underline{U}}_s(\underline{\underline{X}}_r) \\
 \underline{\underline{X}}_t = \underline{\underline{\phi}}_{st}(\underline{\underline{X}}_s, t) = \underline{\underline{X}}_s + \underline{\underline{u}}(\underline{\underline{X}}_s, t) = \underline{\underline{X}}_r + \underline{\underline{U}}_s + \underline{\underline{u}}_t(\underline{\underline{X}}_r, t)
 \end{cases} \tag{3.20}$$

où $\underline{\underline{U}}_s(\underline{\underline{X}}_r)$ représente le déplacement stationnaire. $\underline{\underline{u}}(\underline{\underline{X}}_s, t), \underline{\underline{u}}_t(\underline{\underline{X}}_r, t)$ les petites perturbations autour de l'état stationnaire respectivement projetées sur la configuration stationnaire et sur la configuration de référence.

Les tenseurs de Green de la transformation des configurations sont donc donnés par :

$$\begin{cases} \underline{\underline{F}}_{0r} = \frac{d\underline{X}_r}{d\underline{X}_0} \\ \underline{\underline{F}}_{rs} = \frac{d\underline{X}_s}{d\underline{X}_r} = \underline{\underline{1}} + \underline{\underline{\text{grad}}}_r(\underline{U}_s(\underline{X}_r)) \\ \underline{\underline{F}}_{st} = \frac{d\underline{X}_t}{d\underline{X}_s} = \underline{\underline{1}} + \underline{\underline{\text{grad}}}_s(\underline{u}(\underline{X}_s, t)) \\ \underline{\underline{F}}_{rt} = \frac{d\underline{X}_t}{d\underline{X}_r} = \underline{\underline{1}} + \underline{\underline{\text{grad}}}_r(\underline{U}_s(\underline{X}_r)) + \underline{\underline{\text{grad}}}_r(\underline{u}_t(\underline{X}_r, t)) \end{cases} \quad (3.21)$$

En utilisant la relation $\underline{\underline{F}}_{rs}\underline{\underline{F}}_{st} = \underline{\underline{F}}_{rt}$, il vient :

$$\left(\underline{\underline{1}} + \underline{\underline{\text{grad}}}_r(\underline{U}_s(\underline{X}_r))\right) \left(\underline{\underline{1}} + \underline{\underline{\text{grad}}}_s(\underline{u}(\underline{X}_s, t))\right) = \underline{\underline{1}} + \underline{\underline{\text{grad}}}_r(\underline{U}_s(\underline{X}_r)) + \underline{\underline{\text{grad}}}_r(\underline{u}_t(\underline{X}_r, t)) \quad (3.22)$$

D'où la relation :

$$\left(\underline{\underline{1}} + \underline{\underline{\text{grad}}}_r(\underline{U}_s(\underline{X}_r))\right) \underline{\underline{\text{grad}}}_s(\underline{u}(\underline{X}_s, t)) = \underline{\underline{\text{grad}}}_r(\underline{u}_t(\underline{X}_r, t)) \quad (3.23)$$

Finalement, la condition dite de perturbations infinitésimales qui s'écrit :

$$\underline{\underline{\text{grad}}}_s(\underline{u}(\underline{X}_s, t)) \ll \underline{\underline{1}}$$

Conduit à :

$$\underline{\underline{\text{grad}}}_r(\underline{u}_t(\underline{X}_r, t)) \ll \underline{\underline{1}} \quad (3.24)$$

3.2.3.2 Idées de formulation du problème

La résolution des équations (3.19) donne les solutions de l'état d'équilibre stationnaire. L'étape suivante est d'analyser les vibrations autour de cet état. Il existe deux possibilités de mise en oeuvre des équations dynamiques :

- Les équations dynamiques d'équilibre sont écrites directement par rapport à la configuration stationnaire.
- Les équations dynamiques d'équilibre sont écrites par rapport à la configuration de référence en soustraction de la partie stationnaire.

La première façon nous sert à établir des formulations variationnelles pour appliquer un calcul éléments finis. La seconde est une extension des équations (3.19). Elle nous permet de détailler analytiquement les formulations. Par conséquent, nous pouvons avoir des solutions analytiques pour certains cas simples (cas du modèle d'anneau circulaire linéaire, du modèle de coque cylindrique linéaire) et des solutions semi numérique-analytique dans les cas plus complexes (cas du modèle d'anneau circulaire avec la non linéarité en géométrie ...).

3.2.3.3 Equations d'équilibre de l'état vibrant par rapport à la configuration stationnaire

Dans la configuration vibrante D_t , l'équation d'équilibre est obtenue de la même façon que dans le cas stationnaire :

$$\rho_t \underline{\underline{\gamma}}_t = \rho_t \underline{\underline{f}}_t + \text{div}_t(\underline{\underline{\sigma}}_t) \quad (3.25)$$

où ρ_t représente la masse volumique du matériau dans D_t , $\underline{\underline{f}}_t$ la force volumique extérieure appliquée dans D_t , $\underline{\underline{\gamma}}_t$ l'accélération dans D_t et $\underline{\underline{\sigma}}_t$ le tenseur des contraintes de Cauchy dans D_t .

Sous l'hypothèse de déformation infinitésimale, les configurations D_t et D_s sont confondues. Cela implique que $\rho_t = \rho_s$

On calcule la vitesse d'un point matériel dans la configuration actuelle :

$$\frac{DX_t}{Dt} = \frac{D\phi_{st}(X_s, t)}{Dt} = \frac{\partial\phi_{st}(X_s, t)}{\partial t} + \frac{\partial\phi_{st}(X_s, t)}{\partial X_s} \frac{\partial X_s}{\partial t} \quad (3.26)$$

Donc,

$$\frac{DX_t}{Dt} = \frac{\partial\phi_{st}(X_s, t)}{\partial t} + \underline{F}_{st} v_s(X_s, t) \quad (3.27)$$

L'accélération est :

$$\underline{\gamma}_t = \frac{D^2 X_t}{Dt^2} = \frac{D \left(\frac{\partial\phi_{st}(X_s, t)}{\partial t} + \underline{F}_{st} v_s(X_s, t) \right)}{Dt} \quad (3.28)$$

Après avoir développé, il vient :

$$\begin{aligned} \underline{\gamma}_t = & \frac{\partial^2 (\phi_{st}(X_s, t))}{\partial t^2} + 2 \frac{\partial \underline{F}_{st}}{\partial t} v_s(X_s, t) \\ & + \underline{F}_{st} \frac{\partial v_s(X_s, t)}{\partial t} + \underline{\text{grad}}_s (\underline{F}_{st} v_s(X_s, t)) v_s(X_s, t) \end{aligned} \quad (3.29)$$

La description du mouvement introduite dans la partie 3.2.3.1 permet d'écrire $X_t = \phi_{st}(X_s, t) = X_s + \underline{u}(X_s, t)$ dans la formule précédente, l'expression (3.29) devient :

$$\begin{aligned} \underline{\gamma}_t = & \frac{\partial^2 (\underline{u}(X_s, t))}{\partial t^2} + 2 \frac{\partial \underline{F}_{st}}{\partial t} v_s(X_s, t) \\ & + \underline{F}_{st} \frac{\partial v_s(X_s, t)}{\partial t} + \underline{\text{grad}}_s (\underline{F}_{st} v_s(X_s, t)) v_s(X_s, t) \end{aligned} \quad (3.30)$$

Comme dans le cas stationnaire, le tenseur d'incrément de contrainte de Piola Kirchhoff $\underline{S}_t$ est lié aux contraintes de Cauchy $\underline{\sigma}_t$ dans la configuration stationnaire D_s par :

$$\underline{S}_t = J \underline{F}_{st}^{-1} \underline{\sigma}_t^T \underline{F}_{st}^{-1} \quad (3.31)$$

L'équation d'équilibre s'écrit :

$$\frac{\partial^2 \underline{u}}{\partial t^2} + 2 \frac{\partial \underline{F}_{st}}{\partial t} v_s + \underline{F}_{st} \frac{\partial v_s}{\partial t} + \underline{\text{grad}}_s (\underline{F}_{st} v_s) v_s = \underline{f}_t + \frac{1}{\rho_s} \text{div}_s (\underline{F}_{st} \underline{S}_t) \quad (3.32)$$

D'autre part, on rappelle l'équation d'équilibre (3.2) dans la configuration stationnaire :

$$\rho_s \cdot \underline{\gamma}_s = \rho_s \cdot \underline{f}_s + \text{div}_s (\underline{\sigma}_s)$$

L'accélération d'un point matériel peut se calculer par dérivation de sa vitesse dans la configuration stationnaire :

$$\underline{\gamma}_s = \frac{D(v_s(X_s, t))}{Dt} = \frac{\partial v_s(X_s, t)}{\partial t} + \underline{\text{grad}}_s (v_s(X_s, t)) v_s(X_s, t) \quad (3.33)$$

L'équation d'équilibre dans la configuration stationnaire peut se mettre sous la forme :

$$\frac{\partial v_s(X_s, t)}{\partial t} + \underline{\text{grad}}_s (v_s(X_s, t)) v_s(X_s, t) = \underline{f}_s + \frac{1}{\rho_s} \text{div}_s (\underline{\sigma}_s) \quad (3.34)$$

Donc par une simple soustraction des deux équations (3.32) et (3.34), on obtient l'équation d'équilibre vibrante autour de l'état stationnaire :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \underline{u}}{\partial t^2} + 2 \frac{\partial \underline{F}_{st}}{\partial t} \underline{v}_s + \left(\underline{F}_{st} - \underline{1} \right) \frac{\partial \underline{v}_s}{\partial t} + \underline{\text{grad}}_s \left(\left(\underline{F}_{st} - \underline{1} \right) \underline{v}_s \right) \underline{v}_s \\ = (\underline{f}_t - \underline{f}_s) + \frac{1}{\rho_s} \text{div}_s \left(\underline{F}_{st} \underline{S}_t - \underline{\sigma}_s \right) \end{aligned} \quad (3.35)$$

Pour rappel, l'expression (3.21) donne :

$$\underline{F}_{st} = \frac{dX_t}{dX_s} = \underline{1} + \underline{\text{grad}}_s (\underline{u}(X_s, t))$$

En remplaçant dans l'expression (3.35) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \underline{u}}{\partial t^2} + 2 \frac{\partial \underline{\text{grad}}_s (\underline{u})}{\partial t} \underline{v}_s + \underline{\text{grad}}_s (\underline{u}) \frac{\partial \underline{v}_s}{\partial t} + \underline{\text{grad}}_s \left(\underline{\text{grad}}_s (\underline{u}) \underline{v}_s \right) \underline{v}_s \\ = (\underline{f}_t - \underline{f}_s) + \frac{1}{\rho_s} \text{div}_s \left(\underline{F}_{st} \underline{S}_t - \underline{\sigma}_s \right) \end{aligned} \quad (3.36)$$

On pose : $\tilde{\underline{S}}_t = \underline{S}_t - \underline{\sigma}_s$ qui est le tenseur d'incrément de la contrainte qui peut être calculée par la loi de comportement du matériau solide :

$$\tilde{\underline{S}}_t = \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{\varepsilon}} \quad (3.37)$$

où $\underline{\underline{C}}$ est le tenseur du comportement du matériau et $\underline{\underline{\varepsilon}}$ est le tenseur de la déformation de Green :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\text{grad}}_s (\underline{u}) + \underline{\text{grad}}_s (\underline{u})^T + \frac{1}{2} \underline{\text{grad}}_s (\underline{u})^T \underline{\text{grad}}_s (\underline{u}) \quad (3.38)$$

En utilisant l'hypothèse d'une petite perturbation : $\left| \underline{F}_{st} - \underline{1} \right| \ll 1$ comme : $\left| \underline{\text{grad}}_s (\underline{u}) \right| \ll 1$, et en négligeant tous les termes du second ordre, l'équation d'équilibre (3.36) peut être écrite :

$$\begin{aligned} \ddot{\underline{u}} + 2 \underline{\text{grad}}_s (\dot{\underline{u}}) \underline{v}_s + \underline{\text{grad}}_s (\underline{u}) \underline{\dot{v}}_s + \underline{\text{grad}}_s \left(\underline{\text{grad}}_s (\underline{u}) \underline{v}_s \right) \underline{v}_s \\ = (\underline{f}_t - \underline{f}_s) + \frac{1}{\rho_s} \text{div}_s \left(\tilde{\underline{S}}_t + \underline{\text{grad}}_s (\underline{u}) \underline{\sigma}_s \right) \end{aligned} \quad (3.39)$$

Physiquement, les termes dans la formule de cette équation d'équilibre sont définies par :

- L'accélération relative : $\ddot{\underline{u}}(\underline{X}_s, t)$
- L'accélération de Coriolis : $2 \underline{\text{grad}}_s (\dot{\underline{u}}(\underline{X}_s, t)) \underline{v}_s$
- L'accélération ortho-centripète : $\underline{\text{grad}}_s (\underline{u}) \frac{\partial \underline{v}_s}{\partial t}$
- L'accélération centripète : $\underline{\text{grad}}_s \left(\underline{\text{grad}}_s (\underline{u}(\underline{X}_s, t)) \underline{v}_s \right) \underline{v}_s$
- La force volumique : $(\underline{f}_t - \underline{f}_s)$

Remarque :

$\underline{v}_s$ est la vitesse de rotation (car à l'état stationnaire le déplacement ne dépend pas du temps). Donc, en considérant un régime dans lequel la vitesse de rotation est une constante, $\underline{v}_s$ est aussi une constante. Le terme de l'accélération de Coriolis est proportionnel à $\underline{v}_s$ et celui de l'accélération centripète est

proportionnel à cette vitesse au carré. Dans ce cas là, l'accélération ortho-centripète est nulle. Les équations (3.39) deviennent alors :

$$\boxed{\ddot{\underline{u}} + 2 \underline{\text{grad}}_s(\dot{\underline{u}}) \underline{v}_s + \underline{\text{grad}}_s(\underline{\text{grad}}_s(\underline{u}) \underline{v}_s) \underline{v}_s = (\underline{f}_t - \underline{f}_s) + \frac{1}{\rho_s} \text{div}_s(\tilde{\underline{S}}_t + \underline{\text{grad}}_s(\underline{u}) \underline{\sigma}_s)} \quad (3.40)$$

3.2.3.4 Équation d'équilibre de l'état vibrant par rapport à la configuration de référence

La position du point matériel dans la configuration vibrante s'écrit comme (3.20) :

$$\underline{X}_t = \underline{X}_r + \underline{U}_s(\underline{X}_r) + \underline{u}_t(\underline{X}_r, t)$$

Comme dans le développement de (3.27) à (3.29), l'expression de l'accélération d'un point matériel par rapport à la configuration tournante est donnée par :

$$\begin{aligned} \underline{\gamma}_t = & \frac{\partial^2 (\underline{u}_t(\underline{X}_R, t))}{\partial t^2} + 2 \frac{\partial \underline{F}_{rt}}{\partial t} \underline{\Omega}(\underline{X}_R, t) \\ & + \underline{F}_{rt} \frac{\partial \underline{\Omega}(\underline{X}_R, t)}{\partial t} + \underline{\text{grad}}_r(\underline{F}_{rt} \underline{\Omega}(\underline{X}_R, t)) \underline{\Omega}(\underline{X}_R, t) \end{aligned} \quad (3.41)$$

où $\underline{\Omega}(\underline{X}_R, t)$ est le vecteur de rotation du mouvement rigide.

Donc, les équations d'équilibre par rapport à la configuration tournante s'écrivent :

$$\boxed{\frac{\partial^2 \underline{u}_t}{\partial t^2} + 2 \frac{\partial \underline{F}_{rt}}{\partial t} \underline{\Omega} + \underline{F}_{rt} \frac{\partial \underline{\Omega}}{\partial t} + \underline{\text{grad}}_r(\underline{F}_{rt} \underline{\Omega}) \underline{\Omega} = \underline{f}_t + \frac{1}{\rho_r} \text{div}_r(\underline{F}_{rt} \tilde{\underline{S}}_r)} \quad (3.42)$$

Avec $\tilde{\underline{S}}_r$ représentant le tenseur de contrainte de Piola Kirchhoff.

L'avantage de cette écriture

L'équation (3.42) est une extension de l'équation (3.19). Cette extension se retrouve au niveau des termes de l'accélération relative $\left(\frac{\partial^2 \underline{u}_t}{\partial t^2}\right)$ et de l'accélération de Coriolis $\left(2 \frac{\partial \underline{F}_{rt}}{\partial t} \underline{\Omega}\right)$; les autres termes étant identiques. En faisant un développement détaillé de (3.19), il faut remplacer $\underline{U}_s(\underline{X}_r)$ par $\underline{U}_s(\underline{X}_r) + \underline{u}_t(\underline{X}_r, t)$ pour trouver (3.42). Ensuite, grâce à la relation (3.24), on peut linéariser (3.42) par rapport à $\underline{u}_t$. Dans certains cas simples de modèles analytiques du pneumatique (ex : l'anneau circulaire [66] [60], modèle de coque cylindrique [50]), des solutions analytiques existent pour tous les termes des équations (3.42).

3.3 Formulation variationnelle

L'approche variationnelle consiste à construire les équations numériques qui nous permettront d'analyser l'effet de rotation. A ce stade, la configuration stationnaire est considérée comme référence (en

appliquant les formulations (3.39)). L'indice "s" est volontairement omis dans toutes les expressions qui suivent afin d'alléger l'écriture. Les équations d'équilibre dans l'état vibrant sont rappelées :

$$\begin{aligned} \ddot{\underline{u}}(\underline{X}, t) + 2 \underline{\underline{\text{grad}}}(\dot{\underline{u}}(\underline{X}, t)) \underline{v} + \underline{\underline{\text{grad}}}(\underline{u}(\underline{X}, t)) \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} \\ + \underline{\underline{\text{grad}}}(\underline{\underline{\text{grad}}}(\underline{u}(\underline{X}, t)) \underline{v}) \underline{v} = \underline{f} + \frac{1}{\rho} \text{div} \left(\underline{\tilde{S}} + \underline{\underline{\text{grad}}}(\underline{u}(\underline{X}, t)) \underline{\underline{\sigma}} \right) \end{aligned} \quad (3.43)$$

où $\underline{v}$ est le vecteur de la vitesse d'un point matériel dans la configuration de référence, $\underline{u}$ est le déplacement dynamique d'un point matériel, $\underline{f}$ est la force volumique, $\underline{\tilde{S}}$ est le tenseur d'incrément de contrainte, $\underline{\underline{\sigma}}$ est le tenseur de pré-contrainte dans la configuration de référence.

Les équations d'équilibre dynamique autour de l'état stationnaire sont multipliées par un champ de déplacement virtuel $\delta \underline{u}$ cinématiquement admissible et sont intégrées sur un volume $\mathfrak{D}$:

$$\begin{aligned} \int_{\mathfrak{D}} \rho \delta \underline{u} \ddot{\underline{u}} dV + \int_{\mathfrak{D}} 2 \rho \delta \underline{u} \underline{\underline{\text{grad}}}(\dot{\underline{u}}) \underline{v} dV + \int_{\mathfrak{D}} \rho \delta \underline{u} \underline{\underline{\text{grad}}}(\underline{u}) \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} dV \\ + \int_{\mathfrak{D}} \rho \delta \underline{u} \underline{\underline{\text{grad}}}(\underline{\underline{\text{grad}}}(\underline{u}) \underline{v}) \underline{v} dV = \int_{\mathfrak{D}} \rho \delta \underline{u} \underline{f} dV + \int_{\mathfrak{D}} \delta \underline{u} \text{div} \left(\underline{\tilde{S}} + \underline{\underline{\text{grad}}}(\underline{u}) \underline{\underline{\sigma}} \right) dV \end{aligned} \quad (3.44)$$

Le facteur $\int_{\mathfrak{D}} \delta \underline{u} \text{div} \left(\underline{\tilde{S}} + \underline{\underline{\text{grad}}}(\underline{u}) \underline{\underline{\sigma}} \right) dV$ est développé en appliquant le théorème de Stokes (cf. annexe .1) :

$$\begin{aligned} \int_{\mathfrak{D}} \delta \underline{u} \text{div} \left(\underline{\tilde{S}} + \underline{\underline{\text{grad}}}(\underline{u}) \underline{\underline{\sigma}} \right) dV \\ = \oint_{\partial \mathfrak{D}} \delta \underline{u} \left(\underline{\tilde{S}} + \underline{\underline{\text{grad}}}(\underline{u}) \underline{\underline{\sigma}} \right) \underline{n} dS - \int_{\mathfrak{D}} \left(\underline{\tilde{S}} + \underline{\underline{\text{grad}}}(\underline{u}) \underline{\underline{\sigma}} \right)^T : \underline{\underline{\text{grad}}}(\delta \underline{u}) dV \end{aligned} \quad (3.45)$$

où $\partial \mathfrak{D}$ est la frontière du domaine de la configuration de référence. $\underline{n}$ est la normale extérieure de cette surface.

Deux conditions aux limites sont introduites :

- Condition de Dirichlet : $\underline{u}(P) = \underline{U}^{imp}(P)$, $\forall P \in \partial \mathfrak{D}^u$ (déplacement imposé).
- Condition de Neumann : $\underline{T}(P) = \left(\underline{\tilde{S}} + \underline{\underline{\text{grad}}}(\underline{u}) \underline{\underline{\sigma}} \right) \cdot \underline{n} = \underline{T}^{imp}(P)$; $\forall P \in \partial \mathfrak{D}^T$ (force imposée).

Il vient :

$$\int_{\mathfrak{D}} \delta \underline{u} \text{div} \left(\underline{\tilde{S}} + \underline{\underline{\text{grad}}}(\underline{u}) \underline{\underline{\sigma}} \right) dV = \oint_{\partial \mathfrak{D}^T} \delta \underline{u} \underline{T}^{imp}(P) \underline{n} dS - \int_{\mathfrak{D}} \left(\underline{\tilde{S}} + \underline{\underline{\text{grad}}}(\underline{u}) \underline{\underline{\sigma}} \right)^T : \underline{\underline{\text{grad}}}(\delta \underline{u}) dV \quad (3.46)$$

En supposant que la loi de comportement du matériau est la suivante :

$$\underline{\tilde{S}} = \underline{\underline{\underline{C}}} : \underline{\underline{\underline{\varepsilon}}} \quad (3.47)$$

où $\underline{\underline{\underline{C}}}$ est le tenseur de comportement du matériau. $\underline{\underline{\underline{\varepsilon}}}$ est le tenseur de la déformation. L'hypothèse de petites déformations permet d'écrire :

$$\underline{\underline{\underline{\varepsilon}}} = \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{\text{grad}}}(\underline{u}) + \underline{\underline{\text{grad}}}(\underline{u})^T \right)$$

Comme le tenseur d'incrément de contrainte $\tilde{\underline{\underline{S}}}$ est symétrique, il vient :

$$\begin{aligned}\tilde{\underline{\underline{S}}}^T : \underline{\underline{\text{grad}}}(\delta \underline{u}) &= \frac{1}{2} \left(\tilde{\underline{\underline{S}}} : \underline{\underline{\text{grad}}}(\delta \underline{u}) + \underline{\underline{\text{grad}}}(\delta \underline{u}) : \tilde{\underline{\underline{S}}}^T \right) = \frac{1}{2} \left(\tilde{\underline{\underline{S}}} : \underline{\underline{\text{grad}}}(\delta \underline{u}) + \underline{\underline{\text{grad}}}(\delta \underline{u})^T : \tilde{\underline{\underline{S}}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{\text{grad}}}(\delta \underline{u}) + \underline{\underline{\text{grad}}}(\delta \underline{u})^T \right) : \tilde{\underline{\underline{S}}} = \delta \underline{\underline{\varepsilon}} : \underline{\underline{\underline{C}}} : \underline{\underline{\varepsilon}} \quad (3.48)\end{aligned}$$

En appliquant (3.48) à (3.46), l'expression devient :

$$\begin{aligned}\int_{\mathfrak{D}} \delta \underline{u} \operatorname{div} \left(\tilde{\underline{\underline{S}}} + \underline{\underline{\text{grad}}}(\underline{u}) \underline{\underline{\sigma}} \right) dV &= \oint_{\partial \mathfrak{D}^T} \delta \underline{u} \underline{T}^{imp}(P) \underline{n} dS \\ &\quad - \int_{\mathfrak{D}} \delta \underline{\underline{\varepsilon}} : \underline{\underline{\underline{C}}} : \underline{\underline{\varepsilon}} dV - \int_{\mathfrak{D}} \left(\underline{\underline{\text{grad}}}(\underline{u}) \underline{\underline{\sigma}} \right)^T : \underline{\underline{\text{grad}}}(\delta \underline{u}) dV \quad (3.49)\end{aligned}$$

En remplaçant (3.49) dans (3.44), la formulation variationnelle des équations d'équilibre dynamique s'écrit finalement :

$$\begin{aligned}\int_{\mathfrak{D}} \rho \delta \underline{u} \ddot{\underline{u}} dV + \int_{\mathfrak{D}} 2\rho \delta \underline{u} \underline{\underline{\text{grad}}}(\dot{\underline{u}}) \underline{v} dV \\ + \int_{\mathfrak{D}} \rho \delta \underline{u} \underline{\underline{\text{grad}}}(\underline{u}) \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} dV + \int_{\mathfrak{D}} \rho \delta \underline{u} \underline{\underline{\text{grad}}}(\underline{\underline{\text{grad}}}(\underline{u}) \cdot \underline{v}) \underline{v} dV \\ = \int_{\mathfrak{D}} \rho \delta \underline{u} \underline{f} dV + \oint_{\partial \mathfrak{D}^T} \delta \underline{u} \underline{T}^{imp}(P) \underline{n} dS - \int_{\mathfrak{D}} \delta \underline{\underline{\varepsilon}} : \underline{\underline{\underline{C}}} : \underline{\underline{\varepsilon}} dV - \int_{\mathfrak{D}} \left(\underline{\underline{\text{grad}}}(\underline{u}) \underline{\underline{\sigma}} \right)^T : \underline{\underline{\text{grad}}}(\delta \underline{u}) dV \quad (3.50)\end{aligned}$$

Remarques :

L'expression (3.50) fait apparaître un gradient des déplacements au second ordre :

$$\int_{\mathfrak{D}} \rho \delta \underline{u} \underline{\underline{\text{grad}}}(\underline{\underline{\text{grad}}}(\underline{u}) \cdot \underline{v}) \underline{v} dV$$

Afin d'appliquer la méthode des éléments finis, il faut choisir une fonction de géométrie de classe C^1 . En effet, Padovan [76] a présenté des formulations de la méthode des éléments finis pour laquelle un gradient du second ordre est calculé avec la fonction d'approximation de la géométrie de classe C^1 . Néanmoins, Nackenhorst [69] a proposé une autre solution qui permet d'éviter de calculer un gradient au second ordre. En se basant sur ses résultats, on va développer cette opération dans la formulation (3.50).

On considère que la vitesse de rotation est constante. Cela implique que $\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} = \underline{0}$. L'équation (3.50) devient :

$$\begin{aligned}\int_{\mathfrak{D}} \rho \delta \underline{u} \ddot{\underline{u}} dV + \int_{\mathfrak{D}} 2\rho \delta \underline{u} \underline{\underline{\text{grad}}}(\dot{\underline{u}}) \underline{v} dV + \int_{\mathfrak{D}} \rho \delta \underline{u} \underline{\underline{\text{grad}}}(\underline{\underline{\text{grad}}}(\underline{u}) \underline{v}) \underline{v} dV \\ = \int_{\mathfrak{D}} \rho \delta \underline{u} \underline{f} dV + \oint_{\partial \mathfrak{D}^T} \delta \underline{u} \underline{T}^{imp}(P) \underline{n} dS - \int_{\mathfrak{D}} \delta \underline{\underline{\varepsilon}} : \underline{\underline{\underline{C}}} : \underline{\underline{\varepsilon}} dV - \int_{\mathfrak{D}} \left(\underline{\underline{\text{grad}}}(\underline{u}) \underline{\underline{\sigma}} \right)^T : \underline{\underline{\text{grad}}}(\delta \underline{u}) dV \quad (3.51)\end{aligned}$$

En développant le facteur $\int_{\mathfrak{D}} \rho \delta \underline{u} \underline{\text{grad}}(\underline{\dot{u}}) \underline{v} dV$ (cf. annexe .2) :

$$\begin{aligned} \int_{\mathfrak{D}} \rho \delta \underline{u} \underline{\text{grad}}(\underline{\dot{u}}) \underline{v} dV &= \int_{\mathfrak{D}} \text{div}(\rho(\delta \underline{u} \underline{\dot{u}}) \underline{v} dV) \\ &\quad - \int_{\mathfrak{D}} \rho \underline{\dot{u}} \underline{\text{grad}}(\delta \underline{u}) \underline{v} dV - \int_{\mathfrak{D}} \underline{\dot{u}} \delta \underline{u} \text{div}(\rho \underline{v}) dV \end{aligned} \quad (3.52)$$

La conservation de la masse à l'état stationnaire amène :

$$\text{div}(\rho \underline{v}) = 0 \quad (3.53)$$

où $\underline{v}$ est la vitesse de rotation dans la configuration stationnaire. Par ailleurs, d'après le théorème de Stokes :

$$\int_{\mathfrak{D}} \text{div}(\rho(\delta \underline{u} \underline{\dot{u}}) \underline{v}) dV = \oint_{\partial \mathfrak{D}} \rho(\delta \underline{u} \underline{\dot{u}}) \underline{v} \underline{n} dS \quad (3.54)$$

où $\underline{n}$ est le vecteur normal de la surface $\partial \mathfrak{D}$. Comme le vecteur de la vitesse de rotation $\underline{v}$ est toujours perpendiculaire avec le vecteur normal $\underline{n}$ pour toutes les conditions aux limites naturelles [69], le premier terme à droite de l'équation (3.51) disparaît. En remplaçant (3.53) et (3.54) dans l'équation (3.52), il vient :

$$\int_{\mathfrak{D}} \rho \delta \underline{u} \underline{\text{grad}}(\underline{\dot{u}}) \underline{v} dV = - \int_{\mathfrak{D}} \rho \underline{\dot{u}} \underline{\text{grad}}(\delta \underline{u}) \underline{v} dV \quad (3.55)$$

De la même façon :

$$\int_{\mathfrak{D}} \rho \delta \underline{u} \underline{\text{grad}}(\underline{\text{grad}}(\underline{u}) \underline{v}) \underline{v} dV = - \int_{\mathfrak{D}} \rho (\underline{\text{grad}}(\underline{u}) \underline{v}) \underline{\text{grad}}(\delta \underline{u}) \underline{v} dV \quad (3.56)$$

L'équation (3.51) s'écrit :

$$\begin{aligned} &\int_{\mathfrak{D}} \rho \delta \underline{u} \underline{\ddot{u}} dV + \int_{\mathfrak{D}} \rho \delta \underline{u} \underline{\text{grad}}(\underline{\dot{u}}) \underline{v} dV \\ &\quad + \int_{\mathfrak{D}} \rho \delta \underline{u} \underline{\text{grad}}(\underline{\dot{u}}) \underline{v} dV + \int_{\mathfrak{D}} \rho \delta \underline{u} \underline{\text{grad}}(\underline{\text{grad}}(\underline{u}) \underline{v}) \underline{v} dV \\ &= \int_{\mathfrak{D}} \rho \delta \underline{u} \underline{f} dV + \oint_{\partial \mathfrak{D}^T} \delta \underline{u} \underline{T}^{imp}(P) \underline{n} dS - \int_{\mathfrak{D}} \delta \underline{\varepsilon} : \underline{\underline{C}} : \underline{\varepsilon} dV - \int_{\mathfrak{D}} (\underline{\text{grad}}(\underline{u}) \underline{\sigma})^T : \underline{\text{grad}}(\delta \underline{u}) dV \end{aligned} \quad (3.57)$$

On remplace (3.55) et (3.56) dans l'équation (3.57), on a :

$$\begin{aligned} &\int_{\mathfrak{D}} \rho \delta \underline{u} \underline{\ddot{u}} dV + \int_{\mathfrak{D}} \rho \delta \underline{u} \underline{\text{grad}}(\underline{\dot{u}}) \underline{v} dV \\ &\quad - \int_{\mathfrak{D}} \rho \underline{\dot{u}} \underline{\text{grad}}(\delta \underline{u}) \underline{v} dV - \int_{\mathfrak{D}} \rho (\underline{\text{grad}}(\underline{u}) \underline{v}) \underline{\text{grad}}(\delta \underline{u}) \underline{v} dV \\ &= \int_{\mathfrak{D}} \rho \delta \underline{u} \underline{f} dV + \oint_{\partial \mathfrak{D}^T} \delta \underline{u} \underline{T}^{imp}(P) \underline{n} dS - \int_{\mathfrak{D}} \delta \underline{\varepsilon} : \underline{\underline{C}} : \underline{\varepsilon} dV - \int_{\mathfrak{D}} (\underline{\text{grad}}(\underline{u}) \underline{\sigma})^T : \underline{\text{grad}}(\delta \underline{u}) dV \end{aligned} \quad (3.58)$$

La vitesse $\underline{v}$ est donnée dans l'équation (3.8) par :

$$\underline{v} = \frac{D \underline{X}_s}{Dt} = \frac{\partial \underline{X}_s}{\partial \underline{X}_r} \frac{\partial \underline{X}_r}{\partial t} = \underline{F}_{rs} \underline{\Omega}(\underline{X}_r, t) \quad (3.59)$$

Si le mouvement est une simple rotation dans un plan et il n'y a pas de translation du centre de solide, le vecteur de rotation du solide (3.7) devient :

$$\underline{\Omega}(\underline{X}_r, t) = \underline{\dot{\theta}(t)\theta(t)^{-1}} (\underline{X}_r - \underline{C}(t)) \quad (3.60)$$

La matrice de rotation $\underline{\theta}$ possède la propriété (cf. annexe 7.4) :

$$\underline{\dot{\theta}(t)\theta(t)^{-1}} = \dot{\theta} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.61)$$

En notant $\Omega = \dot{\theta}$ vitesse de rotation angulaire, de (3.61) et (3.60), il vient :

$$\underline{\Omega}(\underline{X}_r, t) = \Omega \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} (\underline{X}_r - \underline{C}(t)) \quad (3.62)$$

En posant $\underline{R}(\underline{X}_r, t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} (\underline{X}_r - \underline{C}(t))$, l'expression (3.60) devient :

$$\underline{\Omega}(\underline{X}_r, t) = \Omega \underline{R}(\underline{X}_r, t) \quad (3.63)$$

En remplaçant (3.63) dans (3.59), on obtient :

$$\underline{v} = \Omega \underline{F}_{rs} \underline{R}(\underline{X}_r, t) \quad (3.64)$$

La formulation variationnelle (3.58) se réécrit sous la forme :

$$\begin{aligned} \int_{\mathfrak{D}} \rho \delta \underline{u} \ddot{\underline{u}} dV + \Omega \left(\int_{\mathfrak{D}} \rho \delta \underline{u} \underline{\text{grad}}(\dot{\underline{u}}) \left(\underline{F}_{rs} \underline{R} \right) dV - \int_{\mathfrak{D}} \rho \dot{\underline{u}} \underline{\text{grad}}(\delta \underline{u}) \left(\underline{F}_{rs} \underline{R} \right) dV \right) \\ - \Omega^2 \int_{\mathfrak{D}} \rho \left(\underline{\text{grad}}(\underline{u}) \left(\underline{F}_{rs} \underline{R} \right) \right) \underline{\text{grad}}(\delta \underline{u}) \left(\underline{F}_{rs} \underline{R} \right) dV = \int_{\mathfrak{D}} \rho \delta \underline{u} \underline{f} dV + \oint_{\partial \mathfrak{D}^T} \delta \underline{u} \underline{T}^{imp}(P) \underline{n} dS \\ - \int_{\mathfrak{D}} \delta \underline{\varepsilon} : \underline{\underline{C}} : \underline{\varepsilon} dV - \int_{\mathfrak{D}} \left(\underline{\text{grad}}(\underline{u}) \underline{\underline{\sigma}} \right)^T : \underline{\text{grad}}(\delta \underline{u}) dV \quad (3.65) \end{aligned}$$

La formulation variationnelle (3.65) a des facteurs au premier ordre du gradient. Une discrétisation spatiale peut donc être appliquée pour obtenir des équations numériques.

Remarque :

La formulation (3.58) met en évidence des termes d'énergies ajoutées au système lors de la rotation :

– Un terme d'énergie gyroscopique :

$$E^g = \Omega \left(\int_{\mathfrak{D}} \rho \delta \underline{u} \underline{\text{grad}}(\dot{\underline{u}}) \left(\underline{F}_{rs} \underline{R} \right) dV - \int_{\mathfrak{D}} \rho \dot{\underline{u}} \underline{\text{grad}}(\delta \underline{u}) \left(\underline{F}_{rs} \underline{R} \right) dV \right) \quad (3.66)$$

toujours proportionnelle à la vitesse de rotation.

– Un terme d'énergie de déformation centripète

$$E^c = \Omega^2 \int_{\mathfrak{D}} \rho \left(\underline{\text{grad}}(\underline{u}) \left(\underline{F}_{rs} \underline{R} \right) \right) \underline{\text{grad}}(\delta \underline{u}) \left(\underline{F}_{rs} \underline{R} \right) dV \quad (3.67)$$

qui dépend de la vitesse au carré.

3.4 Discrétisation du problème dynamique

On suppose que la solution de l'état stationnaire est connue. Une méthode numérique est adaptée pour résoudre le problème dynamique. En utilisant la démarche de Rayleigh-Ritz, le champ de déplacement est approché par une décomposition sur une base de n fonctions cinématiquement admissibles :

$$\underline{u}(\underline{X}, t) = \underline{H}(\underline{X}) \cdot \underline{q}(t) \quad (3.68)$$

$$\underline{q}(t) \text{ est le vecteur colonne des inconnues nodales : } \begin{pmatrix} q_1(t) \\ \vdots \\ q_n(t) \end{pmatrix}$$

où n est le nombre des points discrétisés.

Le vecteur $\underline{H}(\underline{X})$ doit être linéaire et indépendant :

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j H_{ij}(\underline{X}) = 0, \forall \underline{X}, \text{ implique } \alpha_j = 0, j = \overline{1, n} \quad \text{avec } i = \overline{1, 3} \quad (3.69)$$

En écrivant $\tilde{v} = \underline{F}_{rs} \underline{R}$, les développements des facteurs de l'équation (3.65) sont les suivants :

– Énergie cinétique

$$\int_{\mathfrak{D}} \rho \delta \underline{u} \ddot{\underline{u}} dV = \int_{\mathfrak{D}} \rho \underline{H} \delta \underline{q} \underline{H} \ddot{\underline{q}} dV = \delta \underline{q} \int_{\mathfrak{D}} \rho \underline{H}^T \underline{H} dV \ddot{\underline{q}} \quad (3.70)$$

On définit la matrice de masse :

$$\underline{M} = \int_{\mathfrak{D}} \rho \underline{H}^T \underline{H} dV$$

L'énergie cinétique s'écrit :

$$\int_{\mathfrak{D}} \rho \delta \underline{u} \ddot{\underline{u}} dV = \delta \underline{q} \underline{M} \ddot{\underline{q}} \quad (3.71)$$

– Énergie gyroscopique

$$E^g = \Omega \left(\int_{\mathfrak{D}} \rho \delta \underline{u} \underline{\underline{\text{grad}}}(\underline{\dot{u}}) \tilde{v} dV - \int_{\mathfrak{D}} \rho \underline{\dot{u}} \underline{\underline{\text{grad}}}(\delta \underline{u}) \tilde{v} dV \right) \quad (3.72)$$

Le gradient des déplacements s'écrit (cf. annexe .3) :

$$\underline{\underline{\text{grad}}}(\underline{u}) = \underline{\underline{\text{grad}}}(\underline{H} \underline{q}) = \underline{q} \underline{\underline{\text{grad}}}(\underline{H}^T) \quad (3.73)$$

En utilisant la relation (3.73), l'énergie dissipée gyroscopique s'écrit :

$$E^g = \Omega \left(\int_{\mathfrak{D}} \rho \underline{H} \delta \underline{q} \underline{\underline{\text{grad}}}(\underline{H}^T) \tilde{v} dV - \int_{\mathfrak{D}} \rho \underline{H} \underline{\dot{q}} \left(\delta \underline{q} \underline{\underline{\text{grad}}}(\underline{H}^T) \right) \tilde{v} dV \right) \quad (3.74)$$

Il vient :

$$E^g = \delta \underline{q} \Omega \left(\int_{\mathfrak{D}} \rho \underline{H}^T \left(\underline{\underline{\text{grad}}}(\underline{H}^T) \underline{\tilde{v}} \right)^T dV - \int_{\mathfrak{D}} \rho \left(\underline{\underline{\text{grad}}}(\underline{H}^T) \underline{\tilde{v}} \right) \underline{H} dV \right) \underline{\dot{q}} \quad (3.75)$$

La matrice gyroscopique se calcule par :

$$\underline{\underline{C}} = \Omega \left(\int_{\mathfrak{D}} \rho \underline{H}^T \left(\underline{\underline{\text{grad}}}(\underline{H}^T) \underline{\tilde{v}} \right)^T dV - \int_{\mathfrak{D}} \rho \left(\underline{\underline{\text{grad}}}(\underline{H}^T) \underline{\tilde{v}} \right) \underline{H} dV \right) \quad (3.76)$$

Cette matrice est antisymétrique. Notons que :

$$\underline{\underline{C}}_0 = \int_{\mathfrak{D}} \rho \underline{H}^T \left(\underline{\underline{\text{grad}}}(\underline{H}^T) \underline{\tilde{v}} \right)^T dV - \int_{\mathfrak{D}} \rho \left(\underline{\underline{\text{grad}}}(\underline{H}^T) \underline{\tilde{v}} \right) \underline{H} dV \quad (3.77)$$

est une matrice indépendante de la vitesse de rotation. Elle ne dépend que la masse volumique du solide et de sa géométrie. Finalement, l'énergie dissipée gyroscopique s'écrit sous la forme suivante :

$$E^g = \delta \underline{q} \underline{\underline{C}} \underline{\dot{q}} = \delta \underline{q} \Omega \underline{\underline{C}}_0 \underline{\dot{q}} \quad (3.78)$$

– Énergie de la déformation centripète

Cette énergie est donnée par l'expression suivante :

$$E^c = \Omega^2 \int_{\mathfrak{D}} \rho \left(\underline{\underline{\text{grad}}}(\underline{u}) \underline{\tilde{v}} \right) \underline{\underline{\text{grad}}}(\delta \underline{u}) \underline{\tilde{v}} dV \quad (3.79)$$

En utilisant la relation (3.73), il vient :

$$E^c = \Omega^2 \int_{\mathfrak{D}} \rho \left(\underline{q} \underline{\underline{\text{grad}}}(\underline{H}^T) \underline{\tilde{v}} \right) \left(\delta \underline{q} \underline{\underline{\text{grad}}}(\underline{H}^T) \underline{\tilde{v}} \right) dV \quad (3.80)$$

Puis,

$$E^c = \delta \underline{q} \Omega^2 \int_{\mathfrak{D}} \rho \left(\underline{\underline{\text{grad}}}(\underline{H}^T) \underline{\tilde{v}} \right) \left(\underline{\underline{\text{grad}}}(\underline{H}^T) \underline{\tilde{v}} \right)^T dV \underline{q} \quad (3.81)$$

La matrice centripète s'écrit :

$$\underline{\underline{K}}^c = \Omega^2 \int_{\mathfrak{D}} \rho \left(\underline{\underline{\text{grad}}}(\underline{H}^T) \underline{\tilde{v}} \right) \left(\underline{\underline{\text{grad}}}(\underline{H}^T) \underline{\tilde{v}} \right)^T dV \quad (3.82)$$

Notons que :

$$\underline{\underline{K}}_0^c = \int_{\mathfrak{D}} \rho \left(\underline{\underline{\text{grad}}}(\underline{H}^T) \underline{\tilde{v}} \right) \left(\underline{\underline{\text{grad}}}(\underline{H}^T) \underline{\tilde{v}} \right)^T dV \quad (3.83)$$

est aussi une matrice indépendante de la vitesse de rotation. Elle ne dépend que de la masse volumique de solide et de sa géométrie.

L'énergie de la déformation centripète est :

$$E^c = \delta \underline{q} \underline{\underline{K}}^c \underline{q} = \delta \underline{q} \Omega^2 \underline{\underline{K}}_0^c \underline{q} \quad (3.84)$$

– Les puissances des efforts externes

$$P = \int_{\mathfrak{D}} \rho \delta \underline{u} \underline{f} dV + \oint_{\partial \mathfrak{D}^T} \delta \underline{u} \underline{T}^{imp}(P) \underline{n} dS \quad (3.85)$$

$$P = \delta \underline{q} \left(\int_{\mathfrak{D}} \rho \underline{\underline{H}}^T \underline{f} dV + \oint_{\partial \mathfrak{D}^T} \underline{\underline{H}}^T \underline{T}^{imp}(P) \underline{n} dS \right) \quad (3.86)$$

Le vecteur des forces imposées $\underline{F}$ est défini par :

$$\underline{F} = \int_{\mathfrak{D}} \rho \underline{\underline{H}}^T \underline{f} dV + \oint_{\partial \mathfrak{D}^T} \underline{\underline{H}}^T \underline{T}^{imp}(P) \underline{n} dS \quad (3.87)$$

Finalement, la puissance du travail des efforts externes devient :

$$P = \delta \underline{q} \underline{F} \quad (3.88)$$

– Énergie de la déformation

Le tenseur de la déformation se réécrit en forme discrétisée :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\varepsilon}} &= \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{\text{grad}}}(\underline{u}) + \underline{\underline{\text{grad}}}(\underline{u})^T \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\underline{q} \underline{\underline{\underline{\text{grad}}}}(\underline{\underline{H}}^T) + \left(\underline{q} \underline{\underline{\underline{\text{grad}}}}(\underline{\underline{H}}^T) \right)^T \right) \end{aligned} \quad (3.89)$$

On définit un tenseur de troisième ordre $\underline{\underline{\underline{M}}}$ tel que :

$$\underline{\underline{\underline{M}}} = M_{jki} \underline{e}_j \otimes \underline{e}_k \otimes \underline{e}_i \quad \backslash \quad M_{jki} = \frac{1}{2} (H_{ji,k} + H_{ki,j}) \quad (3.90)$$

où $H_{ji,k} = \frac{\partial H_{ji}}{\partial X_k}$.

Le tenseur de la déformation peut donc être écrit :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\underline{M}}} \underline{q} \quad (3.91)$$

L'énergie de déformation se calcule :

$$E^d = \int_{\mathfrak{D}} \delta \underline{\underline{\varepsilon}} : \underline{\underline{\underline{C}}} : \underline{\underline{\varepsilon}} dV = \int_{\mathfrak{D}} \underline{\underline{\underline{M}}} \delta \underline{q} : \underline{\underline{\underline{C}}} : \underline{\underline{\underline{M}}} \underline{q} dV \quad (3.92)$$

Il vient

$$E^d = \delta \underline{q} \int_{\mathfrak{D}} \underline{\underline{\underline{M}}}^T : \underline{\underline{\underline{C}}} : \underline{\underline{\underline{M}}} dV \underline{q} \quad (3.93)$$

La matrice de raideur est alors :

$$\underline{\underline{K}} = \int_{\mathfrak{D}} \underline{\underline{\underline{M}}}^T : \underline{\underline{\underline{C}}} : \underline{\underline{\underline{M}}} dV \quad (3.94)$$

Finalement, l'énergie de la déformation devient :

$$E^d = \delta \underline{q} \underline{\underline{K}} \underline{q} \quad (3.95)$$

– Énergie créée par l'effet des efforts de précontraintes

Les contraintes internes $\underline{\underline{\sigma}}$ de l'état stationnaire créent une énergie dans le solide à l'état vibrant.

$$E^{pr} = \int_{\mathfrak{D}} \left(\underline{\underline{\underline{\text{grad}}}}(\underline{u}) \underline{\underline{\underline{\sigma}}} \right)^T : \underline{\underline{\underline{\text{grad}}}}(\delta \underline{u}) dV \quad (3.96)$$

En utilisant la relation (3.73), cette énergie devient

$$E^{pr} = \int_{\mathfrak{D}} \left(\underline{q} \underline{\text{grad}} (\underline{H}^T) \underline{\sigma} \right)^T : \delta \underline{q} \underline{\text{grad}} (\underline{H}^T) dV \quad (3.97)$$

On définit un tenseur du second ordre :

$$\underline{\underline{\Lambda}} = \Lambda_{mi} \underline{e}_m \otimes \underline{e}_i = (H_{ji,k} \sigma_{kl} H_{jm,l}) \underline{e}_m \otimes \underline{e}_i \quad (3.98)$$

Donc, l'énergie de la précontrainte s'écrit (cf. annexe .4) :

$$E^{pr} = \delta \underline{q} \int_{\mathfrak{D}} \underline{\underline{\Lambda}} dV \underline{q} \quad (3.99)$$

En posant

$$K^{pr} = \int_{\mathfrak{D}} \underline{\underline{\Lambda}} dV$$

la relation (3.99) devient

$$E^{pr} = \delta \underline{q} K^{pr} \underline{q} \quad (3.100)$$

En remplaçant les relations (3.71), (3.78), (3.84), (3.88), (3.95) et (3.100) dans l'équation (3.65), les équations discrétisées s'écrivent sous la forme :

$$\delta \underline{q} \underline{\underline{M}} \ddot{\underline{q}} + \delta \underline{q} \underline{\underline{C}} \dot{\underline{q}} - \delta \underline{q} \underline{\underline{K}}^c \underline{q} = \delta \underline{q} \underline{F} - \delta \underline{q} \underline{\underline{K}} \underline{q} - \delta \underline{q} \underline{\underline{K}}^{pr} \underline{q} \quad (3.101)$$

Les équations (3.101) sont toujours satisfaites quelque soit $\delta \underline{q}$. Cela ramène à l'équilibre :

$$\underline{\underline{M}} \ddot{\underline{q}} + \underline{\underline{C}} \dot{\underline{q}} + (\underline{\underline{K}} + \underline{\underline{K}}^{pr} - \underline{\underline{K}}^c) \underline{q} = \underline{F} \quad (3.102)$$

Remarque :

La matrice gyroscopique est toujours antisymétrique et la matrice centripète toujours symétrique. Ces deux matrices ne dépendent que de la géométrie du solide et de sa masse volumique. En absence de masse dans un modèle (modèle de ressort par exemple), il n'y a pas d'effets gyroscopique et centripète. L'effet de rotation se réduit à une force centripète appliquée au ressort.

En réalité, la modification de la raideur est très faible. L'effet de la matrice centripète peut être négligé. Par contre, l'effet gyroscopique présente une influence importante sur la réponse vibratoire. On observe par exemple, l'effet des dédoublements de fréquences en fonction de la vitesse de rotation (cf. Kim [50], Huang [46] [47] et Lopez [60] [59]). Cet effet est approfondi dans le chapitre 5 portant sur la validation des effets tournants.

3.5 Conclusion

Le problème dynamique d'un solide déformable en rotation basé sur une approche ALE a été formulé avec succès. Les équations d'équilibre sont écrites dans deux états : l'état stationnaire et l'état dynamique. La configuration choisie comme référence est la configuration tournante obtenue par rotation rigide de la configuration initiale.

Les équations stationnaires décrivent le mouvement stationnaire par rapport à la configuration de référence. Ce sont des équations différentielles indépendantes du temps qui ne peuvent pas être résolues analytiquement dans tous les cas.

Les équations dynamiques sont construites de deux façons. La première façon consiste à confondre les configurations dynamique (actuelle) et stationnaire sous l'hypothèse de petites perturbations. Ces équations sont linéaires par rapport au mouvement stationnaire. Une formulation variationnelle est écrite en vue d'une résolution par éléments finis. On a également identifié tous les termes dans l'équation d'équilibre. Deux termes sont ajoutés par la rotation : l'accélération de Coriolis et l'accélération centripète. La seconde façon consiste à profiter du résultat de l'état stationnaire. Des équations analytiques peuvent être construites pour les cas simples en géométrie et des équations semi analytiques-numériques pour les cas plus complexes, notamment le cas des grands déplacements.

Enfin, une discrétisation du problème est proposée afin de construire les matrices gyroscopique et centripète. Leur construction fait intervenir la géométrie du solide et sa masse volumique. Dans le cas d'une vitesse de rotation constante, l'effet gyroscopique varie linéairement avec celle-ci. La matrice centripète est proportionnelle à la vitesse au carré. Ces effets sont absents si le modèle de solide est sans masse (modèle de ressort ...).

Modèle d'anneau circulaire non-linéaire en géométrie

Ce chapitre présente le développement détaillé d'un modèle d'anneau circulaire. La première partie est dédiée à la description du modèle. Ensuite, les équations d'équilibre stationnaire sont écrites avec les hypothèses associées. Enfin, la construction des équations dynamiques est présentée. Des hypothèses simplificatrices sont appliquées pour retrouver les formulations des modèles existants dans la littérature.

Sommaire

4.1	Introduction	70
4.2	Description du modèle	70
4.3	Mouvement stationnaire	71
4.3.1	Description du mouvement	71
4.3.2	Tenseur de transformation de Green	72
4.3.3	Loi de comportement	74
4.3.4	Equations d'équilibre	75
4.3.5	Poutre d'Euler Bernoulli avec l'hypothèse de petites déformations	80
4.3.6	Poutre de Timoshenko	82
4.4	Mouvement dynamique	83
4.4.1	Rappel de différentes configurations du modèle	83
4.4.2	Équations d'équilibre	88
4.4.3	Modèles simples dans la littérature	94
4.4.4	Premiers modes propres des modèles	97
4.5	Conclusion	104

4.1 Introduction

Le modèle d'anneau circulaire est choisi pour deux raisons. Premièrement, c'est un modèle simple pour lequel des solutions peuvent être établies de façon analytique. Deuxièmement, dans la littérature on a plusieurs solutions de ce modèle avec différentes hypothèses. En effet, le modèle d'anneau circulaire qui décrit simplement un pneu, est établi depuis très longtemps par Böhm [16] et Heckl [42]. Ce modèle a été validé à l'arrêt. C'est à dire que l'effet de rotation du pneu n'était pas représenté. Dans les années précédentes, quelques auteurs comme Lopez [59], Périssé [77], Duhamel [21] l'ont complété en ajoutant l'effet de rotation. Ils ont négligé la déformation quasi-statique du pneu et ont confondu la configuration stationnaire avec la configuration de référence (on rappelle que la configuration de référence correspond à la configuration initiale qui subit une rotation rigide, et la configuration stationnaire est celle du solide en régime quasi stationnaire dans laquelle tous les points matériels se déforment statiquement sous les effets des charges extérieures).

Sous la charge du véhicule et l'effet de pression d'air, le pneumatique se déforme de façon non-linéaire en géométrie. Cela nous donne l'idée de remplacer l'hypothèse d'une transformation infinitésimale par une transformation finie qui se définit par une grande rotation et une petite déformation. Il faut donc distinguer la configuration déformée de celle non-déformée. La configuration déformée est illustrée par l'image du pneumatique écrasé. Cette configuration n'est pas connue. Elle est obtenue par les équations d'équilibre qui sont établies en régime stationnaire.

Concernant l'écriture des équations d'équilibre, dans la littérature, Antman [5] [6] [9] [7] [8] ; Lanzo [56] ; Pignataro [80] ; Green [37] ; Attard [10] ont établi des formulations analytiques générales du comportement des poutres. Simo [92] [94] [93] a écrit le problème de poutre non-linéaire avec grandes rotations en trois dimensions. Ils ont également proposé une méthode éléments finis pour le résoudre. Davi [25] a pris l'hypothèse de Kirchhoff pour construire des relations d'équilibre d'une poutre mince. Il a donc négligé la déformation due au cisaillement. En appliquant ces résultats Lanzo, [55] [56] a analysé la stabilité d'un modèle de poutre multi-couches en caoutchouc et l'influence d'un grand effort tranchant sur la déformation non-linéaire d'une poutre.

En profitant de ces résultats, le modèle d'anneau circulaire peut être développé à partir de deux idées :

- Une bonne représentation de la déformation de cisaillement.
- La prise en compte de la non-linéarité de déformation.

Dans le travail qui suit, deux types de poutres ont été analysés. Le premier est celui d'une poutre de type Euler Bernoulli. Le second est celui d'une poutre de Timoshenko incluant l'effort de cisaillement.

4.2 Description du modèle

La description du modèle d'anneau circulaire représentatif d'un pneumatique est rappelée et illustrée sur la figure (4.1). La bande de roulement se modélise comme une poutre circulaire. Les flancs sont modélisés à l'aide de ressorts radiaux et tangentiels. La mise sous pression est modélisée par une force uniformément répartie sur l'anneau. Enfin, le contact pneumatique/chaussée est représenté par un champ de forces appliquées en base de l'anneau. La roue, dont les déformations sont très petites par

rapport à celles des flancs et de la bande de roulement, est supposée rigide. Les ressorts radiaux et tangentiels sont encastrés à l'autre extrémité.

L'anneau circulaire a pour rayon R , une section droite A et une épaisseur e .

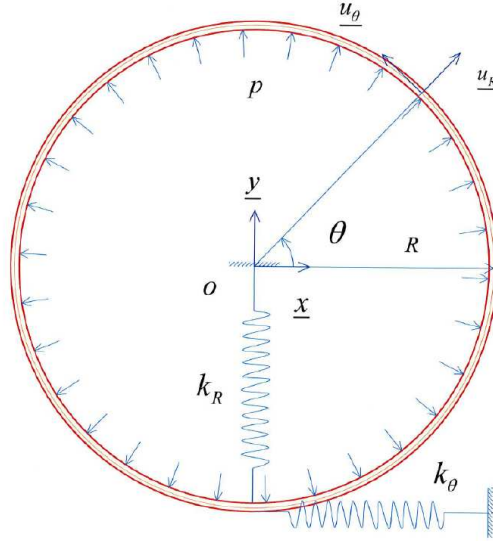


FIGURE 4.1 – Description du modèle d'anneau circulaire.

La poutre est supposée très mince avec la condition dite mince ($\frac{e}{R} \ll 1$) qui correspond à la géométrie de la bande de roulement. Il se comporte comme une poutre qui doit satisfaire les hypothèses suivantes :

- Le rayon de courbure de la ligne moyenne et sa longueur sont grands par rapport à la plus grande dimension transversale de la section droite.
- La surface de la section droite ne change pas après avoir été déformée.
- La poutre considérée est celle de Cosserat-Timoshenko. C'est-à-dire que l'effet de cisaillement est pris en compte et qu'il n'y a pas de gauchissement de la section droite.
- Le matériau de la poutre a un comportement élastique linéaire.

k_R, k_θ sont les raideurs radiales et tangentielles des ressorts. Enfin, toutes les grandeurs sont supposées ne dépendre que de θ .

4.3 Mouvement stationnaire

4.3.1 Description du mouvement

Chaque point matériel dans la configuration tournante est défini par deux variables (z, θ) dans le repère polaire $(\underline{u}_R, \underline{u}_\theta)$ avec z qui varie dans la plage $[-\frac{e}{2}; \frac{e}{2}]$ et θ qui varie dans $[0; 2\pi]$.

Dans la configuration tournante, un point matériel par définition peut être repéré de la façon suivante :

$$\underline{OP} = \underline{OS} + \underline{SP} = (R + z)\underline{u}_R \quad (4.1)$$

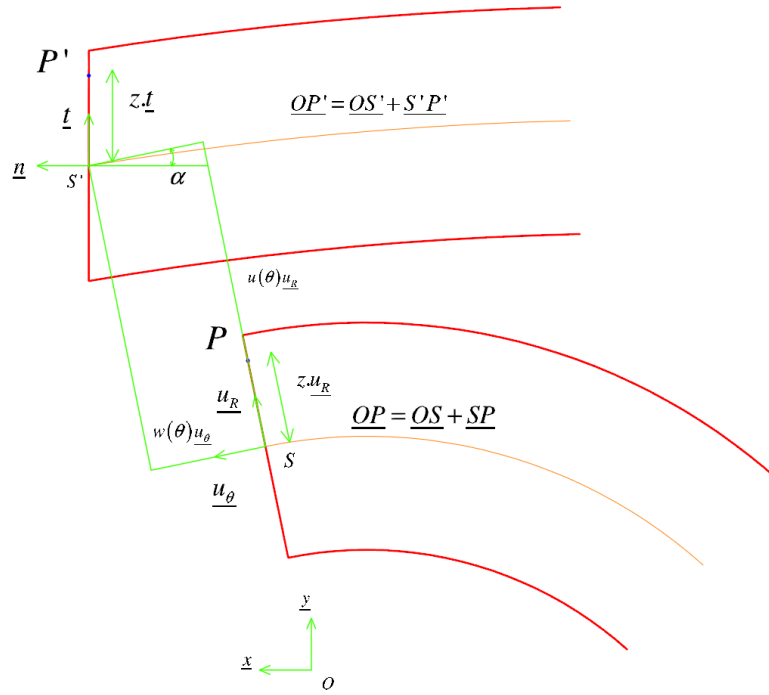


FIGURE 4.2 – Description de la transformation.

où S est un point sur la fibre moyenne de la poutre. S et P appartiennent à la même section.

En passant à la configuration stationnaire, un champ de déplacement est appliqué : $P \rightarrow P'$ et $S \rightarrow S'$. Le point S se déplace au point S' par deux translations $(u(\theta), w(\theta))$. Le point P tourne d'un angle α au point P' . Donc, la transformation du vecteur matériel se définit par :

$$\underline{OP'} = \underline{OS'} + \underline{S'P'} = (R + u + z \cos \alpha) \underline{u}_R + (w + z \sin \alpha) \underline{u}_\theta \quad (4.2)$$

Le vecteur déplacement des points matériels s'écrit alors :

$$\underline{u} = \underline{OP'} - \underline{OP} = (u + z(\cos \alpha - 1)) \underline{u}_R + (w + z \sin \alpha) \underline{u}_\theta \quad (4.3)$$

On a également la matrice du changement de repère :

$$\begin{pmatrix} \underline{t} \\ \underline{n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{u}_R \\ \underline{u}_\theta \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

4.3.2 Tenseur de transformation de Green

Pour établir la relation entre $d\underline{u}$ et $d\underline{OP}$, l'équation (4.1) est reprise pour calculer :

$$d\underline{OP} = d((R + z)\underline{u}_R) = d(R + z)\underline{u}_R + (R + z)d\underline{u}_R = dz\underline{u}_R + (R + z)d\theta\underline{u}_\theta$$

Ce qui permet d'écrire :

$$dz = \underline{u}_R \cdot d\underline{OP}; \quad d\theta = \frac{1}{R + z} \underline{u}_\theta \cdot d(\underline{OP}) \quad (4.5)$$

A partir de (4.3), il vient également :

$$d\underline{u} = d((u + z(\cos \alpha - 1))\underline{u}_R + (w + z \sin \alpha)\underline{u}_\theta)$$

En développant :

$$\begin{aligned} d\underline{u} = & (dz(\cos \alpha - 1) + (u' - z\alpha' \sin \alpha)d\theta - (w + z \sin \alpha)d\theta)\underline{u}_R \\ & + (dz \sin \alpha + (u + z(\cos \alpha - 1))d\theta + (w' + z\alpha' \cos \alpha)d\theta)\underline{u}_\theta \end{aligned}$$

où l'exposant $()'$ désigne la dérivation par rapport à θ , i.e. $()' = \frac{\partial}{\partial \theta}$.

En utilisant (4.5), l'expression devient :

$$\begin{aligned} d\underline{u} = & \left((\cos \alpha - 1)\underline{u}_R \otimes \underline{u}_R + \frac{1}{R+z}(u' - z\alpha' \sin \alpha - w - z \sin \alpha)\underline{u}_R \otimes \underline{u}_\theta + \right. \\ & \left. \sin \alpha \underline{u}_\theta \otimes \underline{u}_R + \frac{1}{R+z}(u + z(\cos \alpha - 1) + (w' + z\alpha' \cos \alpha))\underline{u}_\theta \otimes \underline{u}_\theta \right) . d\underline{OP} \end{aligned}$$

Où $\otimes$ désigne un produit tensoriel. Le gradient du champ de déplacement peut alors s'écrire sous forme matricielle dans la base $(\underline{u}_R, \underline{u}_\theta)$:

$$\underline{\underline{\text{grad}}}(\underline{u}) = \begin{pmatrix} \cos \alpha - 1 & \frac{1}{R+z}(u' - w - z\alpha' \sin \alpha - z \sin \alpha) \\ \sin \alpha & \frac{1}{R+z}(u + w' + z(\cos \alpha + \alpha' \cos \alpha - 1)) \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

Le tenseur du gradient de transformation se calcule par :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{F}} &= \underline{\underline{\text{grad}}}(\underline{u}) + \underline{\underline{1}} \\ \underline{\underline{F}} &= \begin{pmatrix} \cos \alpha & \frac{1}{R+z}(u' - w - z\alpha' \sin \alpha - z \sin \alpha) \\ \sin \alpha & \frac{1}{R+z}(R + u + w' + z(\cos \alpha + \alpha' \cos \alpha)) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.7)$$

En posant $\zeta = \frac{z}{R}$, la condition dite d'anneau mince s'écrit : $\zeta \ll 1$. Le tenseur de la transformation se réécrit :

$$\underline{\underline{F}} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \frac{1}{1+\zeta} \left(\frac{u' - w}{R} - \zeta(\alpha' \sin \alpha + \sin \alpha) \right) \\ \sin \alpha & \frac{1}{1+\zeta} \left(\frac{R + u + w'}{R} + \zeta(\cos \alpha + \alpha' \cos \alpha) \right) \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

Ou encore, en développant $\frac{1}{1+\zeta}$ au second ordre :

$$\underline{\underline{F}} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & (\zeta^2 - \zeta + 1) \left(\frac{u' - w}{R} - \zeta(\alpha' + 1) \sin \alpha \right) \\ \sin \alpha & (\zeta^2 - \zeta + 1) \left(\frac{R + u + w'}{R} + \zeta(\alpha' + 1) \cos \alpha \right) \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

Le tenseur de la déformation se calcule par :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2}({}^T \underline{\underline{F}} \underline{\underline{F}} - \underline{\underline{1}})$$

En détaillant chaque composant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{RR} = 0; \quad \varepsilon_{R\theta} = \varepsilon_{\theta R} = \frac{1}{2R} (\zeta^2 - \zeta + 1) ((u' - w) \cos \alpha + (R + u + w') \sin \alpha) \\ \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1 - 2\zeta + 3\zeta^2}{2R^2} ((u' - w)^2 + (R + u + w')^2 \\ \quad + 2R\zeta (\alpha' + 1) ((R + u + w') \cos \alpha - (u' - w) \sin \alpha) + R^2 \zeta^2 (\alpha' + 1)^2) - \frac{1}{2} \end{array} \right. \quad (4.10)$$

Remarque :

$\varepsilon_{RR} = 0$ signifie qu'il n'y a pas de déformation suivant la direction $\underline{u}_R$ ce qui est compatible avec l'hypothèse de la poutre mince.

4.3.3 Loi de comportement

Le comportement du matériau de l'anneau est supposé élastique linéaire. Le champ de contraintes est calculé par un produit doublement contracté entre le tenseur des modules élastiques et le tenseur des déformations. Il peut s'écrire avec la notation d'ingénieur comme suit :

$$\begin{pmatrix} S_{\theta\theta} \\ S_{R\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{\theta\theta} \\ 2\varepsilon_{R\theta} \end{pmatrix} \quad (4.11)$$

où E et G sont les modules d'Young et de cisaillement.

Les forces activées sur la section droite sont la force normale N , l'effort tranchant V et le moment M qui se calculent de la façon suivante dans la configuration de référence (u_R, u_θ) :

$$\left\{ \begin{array}{l} N = \int_A S_{\theta\theta} dA \\ V = \int_A S_{R\theta} dA \\ M = \int_A z S_{\theta\theta} dA \end{array} \right. \quad (4.12)$$

où A est l'aire de la section droite.

Après calcul, les expressions des efforts et du moment dans le repère local sont les suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} N = \frac{EA}{2R^2} ((u' - w)^2 + (R + u + w')^2 - R^2) + \frac{3EI}{2R^4} ((u' - w)^2 + (R + u + w')^2) \\ \quad - \frac{2EI}{R^3} (\alpha' + 1) ((R + u + w') \cos \alpha - (u' - w) \sin \alpha) + \frac{EI}{2R^2} (\alpha' + 1)^2 \\ V = \left(\frac{GA}{R} + \frac{GI}{R^3} \right) ((u' - w) \cos \alpha + (R + u + w') \sin \alpha) \\ M = -\frac{EI}{R^3} ((u' - w)^2 + (R + u + w')^2 \\ \quad + \frac{EI}{R^2} (\alpha' + 1) ((R + u + w') \cos \alpha - (u' - w) \sin \alpha) \end{array} \right. \quad (4.13)$$

où $I = \int_A z^2 dA$; $\int_A z dA = 0$ et $A = \int_A dA$.

On note l'effort sur la section droite dans la configuration de référence :

$$\underline{f}_r = V \underline{u}_R + N \underline{u}_\theta \quad (4.14)$$

Cet effort s'écrit dans la configuration stationnaire à l'aide de (4.4) :

$$\underline{f} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \underline{f}_r = N \underline{n} + V \underline{t} \quad (4.15)$$

Remarque : les composantes de l'effort sur la section droite par rapport à la configuration de référence $\underline{f}_r$ sont égales à celles de l'effort sur la section droite par rapport à la configuration stationnaire $\underline{f}$ (cf Simo [92]).

4.3.4 Equations d'équilibre

Les équations d'équilibre de l'état stationnaire par rapport à la configuration tournante, établies dans le chapitre précédent (cf. 3.2.2) dans l'équation (3.19), sont rappelées ci-dessous :

$$\underline{\text{grad}}_r \left(\underline{F}_{rs} \underline{\Omega}(X_r, t) \right) \underline{\Omega}(X_r, t) = \underline{f}_s + \frac{1}{\rho_r} \text{div}_r \left(\underline{F}_{rs} \underline{S}_r \right) \quad (4.16)$$

Pour simplifier l'écriture des formules, l'indice "r" est supprimé de tous les opérateurs. A partir de ce moment, tous les calculs sont dans la configuration tournante (la configuration non-déformée). Les équations d'équilibre s'écrivent :

$$\rho \underline{\text{grad}} \left(\underline{F} \underline{\Omega}(X, t) \right) \underline{\Omega}(X, t) = \rho \underline{f} + \text{div} \left(\underline{F} \underline{S} \right) \quad (4.17)$$

où ρ est la masse volumique, $\underline{F}$ le tenseur de la transformation, $\rho \underline{f} = \underline{q}^v$ est la force volumique appliquée à l'anneau, $\underline{\Omega}$ le vecteur de rotation, $\underline{S}$ le tenseur de contrainte de Piola Kirchhoff.

$\underline{F} \underline{S} = \underline{P}$ représente le champ de contrainte de Boussinesq.

Pour établir les équations d'équilibre sur l'anneau, ces équations sont intégrées sur une portion de poutre.

Équilibre des forces

La formule (4.17) est intégrée sur un volume $\mathfrak{D}$ de longueur de référence " ds " suivant l'axe neutre dans la configuration déformée :

$$\int_{\mathfrak{D}} \rho \underline{\text{grad}} \left(\underline{F} \underline{\Omega}(X, t) \right) \underline{\Omega}(X, t) dV = \int_{\mathfrak{D}} \underline{q}^v dV + \int_{\mathfrak{D}} \text{div} \left(\underline{P} \right) dV \quad (4.18)$$

Le tenseur $\underline{P}$ s'écrit sous la forme $\underline{P} = \underline{P}_1 \otimes \underline{s}_1 + \underline{P}_2 \otimes \underline{s}_2 + \underline{P}_3 \otimes \underline{s}$ où $(\underline{s}_1, \underline{s}_2, \underline{s})$ sont les vecteurs unitaires du repère orthogonal curviligne. $\underline{s}$ est le vecteur tangentiel de l'axe neutre.

Clairement, $\underline{P}_3 = \underline{P} \underline{s}$ est la contrainte de Boussinesq de la section droite dans la configuration non-déformée qui prend la valeur de la contrainte de Cauchy dans la configuration déformée. On appelle :

$$\underline{f} = \int_A \underline{P} \underline{s} dA \quad (4.19)$$

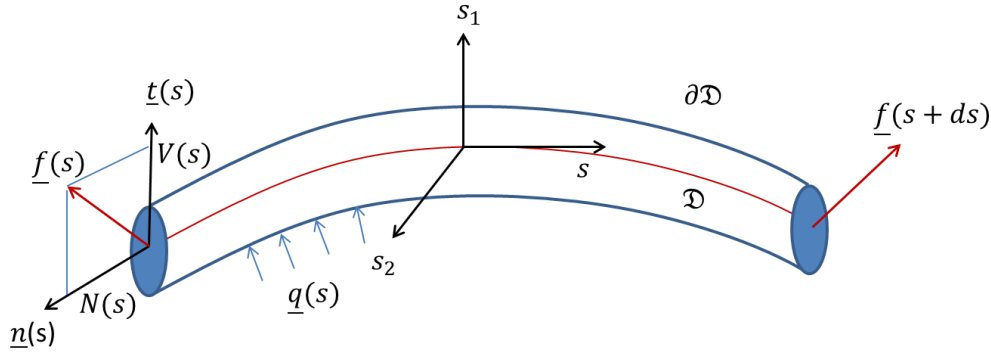


FIGURE 4.3 – Équilibres autour d'une portion de poutre.

la force activée sur la section droite dans la configuration déformée. La projection de $\underline{f}$ sur deux vecteurs unitaires de la base de section droite actuelle ($\underline{t}, \underline{n}$), donne respectivement l'effort tranchant et la force normale (V, N) (cf. relation 4.15). Le théorème de Green-Ostrogradski permet d'écrire :

$$\int_{\mathcal{D}} \text{div}(\underline{P}) dV = \underline{f}(s+ds) - \underline{f}(s) + \underline{q}(s) ds \quad (4.20)$$

$\underline{q} = \int_{\partial A} \underline{q}^s dl$ sont les forces surfaciques appliquées à la poutre provenant de la pression d'air, des forces de contact et des forces des ressorts. l est l'abscisse curviligne sur le bord de la section droite ∂A

On remplace la relation (4.20) dans l'équation (4.18) et on a :

$$\int_{\mathcal{D}} \rho \underline{\text{grad}}(\underline{F} \cdot \underline{\Omega}(\underline{X}, t)) \underline{\Omega}(\underline{X}, t) dV = \underline{f}(s+ds) - \underline{f}(s) + \underline{q}(s) ds + \int_{\mathcal{D}} \underline{q}^v dV \quad (4.21)$$

ds est considéré assez petit pour que $(\rho \underline{\text{grad}}(\underline{F} \cdot \underline{\Omega}(\underline{x}, t)) \underline{\Omega}(\underline{x}, t))$ et $\underline{q}^v$ soient constant le long de ds . L'équation (4.21) devient :

$$ds \int_A \rho \underline{\text{grad}}(\underline{F} \cdot \underline{\Omega}(\underline{X}, t)) \underline{\Omega}(\underline{X}, t) dA = \underline{f}(s+ds) - \underline{f}(s) + \underline{q}(s) ds + ds \int_A \underline{q}^v dA \quad (4.22)$$

L'équilibre des forces s'écrit :

$$\boxed{\frac{\partial \underline{f}}{\partial s} + \oint_{\partial A} \underline{q}^s dl + \int_A \underline{q}^v dA = \int_A \rho \underline{\text{grad}}(\underline{F} \cdot \underline{\Omega}(\underline{X}, t)) \underline{\Omega}(\underline{X}, t) dA} \quad (4.23)$$

L'équation (4.23) représente l'équilibre des forces d'un morceau de la poutre. $\frac{\partial \underline{f}}{\partial s}$ est une variation des efforts sur deux sections droites aux positions s et $s+ds$. $\oint_{\partial A} \underline{q}^s dl$ est la somme des forces surfaciques

appliquées à la poutre. $\int_A \underline{q}^v . dA$ est la somme des forces volumiques. $\int_A \rho \underline{\underline{\text{grad}}} (\underline{F} \underline{\Omega}(\underline{X}, t)) \underline{\Omega}(\underline{X}, t) dA$ est l'effort centripète lié à la rotation.

Équilibre du moment

De la même façon, l'équation d'équilibre du moment est construite. A partir de l'équation (4.17), un produit vectoriel est appliqué à gauche. Puis, l'expression est intégrée sur le domaine $\mathfrak{D}$:

$$\int_{\mathfrak{D}} \underline{S}' \underline{P}' \wedge \rho \underline{\underline{\text{grad}}} (\underline{F} \underline{\Omega}(\underline{X}, t)) \underline{\Omega}(\underline{X}, t) dV = \int_{\mathfrak{D}} \underline{S}' \underline{P}' \wedge \underline{q}^v dV + \int_{\mathfrak{D}} \underline{S}' \underline{P}' \wedge \text{div} (\underline{P}) dV \quad (4.24)$$

En considérant ds assez petit :

$$\begin{aligned} \int_{\mathfrak{D}} \underline{S}' \underline{P}' \wedge \rho \underline{\underline{\text{grad}}} (\underline{F} \underline{\Omega}(\underline{X}, t)) \underline{\Omega}(\underline{X}, t) dV &= ds \int_A \underline{S}' \underline{P}' \wedge \rho \underline{\underline{\text{grad}}} (\underline{F} \underline{\Omega}(\underline{X}, t)) \underline{\Omega}(\underline{X}, t) dA \\ \int_{\mathfrak{D}} \underline{S}' \underline{P}' \wedge \underline{q}^v dV &= ds \int_A \underline{S}' \underline{P}' \wedge \underline{q}^v dA \end{aligned}$$

Avec les développements détaillés en Annexe .5, l'équation d'équilibre du moment s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial s} + \frac{\partial \underline{OS}'}{\partial s} \wedge \underline{f} + \int_A \underline{S}' \underline{P}' \wedge \underline{q}^v dA \\ - \int_A \rho \underline{S}' \underline{P}' \wedge \underline{\underline{\text{grad}}} (\underline{F} \underline{\Omega}(\underline{X}, t)) \underline{\Omega}(\underline{X}, t) dA + \oint_{\partial A} (\underline{S}' \underline{P}' \wedge \underline{q}^s) dl = 0 \end{aligned} \quad (4.25)$$

Les équations (4.23) et (4.25) permettent de retrouver les équations d'équilibre d'une poutre établies par Davi [25], Simo [92], Antman [5] sous la forme dans la configuration stationnaire $(\underline{n}, \underline{t})$:

$$\begin{cases} \frac{\partial \underline{f}}{\partial s} + \underline{q} = 0 \\ \frac{\partial M}{\partial s} + \frac{\partial \underline{OS}'}{\partial s} \wedge \underline{f} + \underline{g} = 0 \end{cases} \quad (4.26)$$

Avec :

$\underline{f} = \begin{pmatrix} V \\ N \end{pmatrix}$ les forces activées sur la section droite dans la configuration $(\underline{n}, \underline{t})$ (cf relation 4.15).

M est le moment sur la section droite.

$\underline{q} = \oint_{\partial A} \underline{q}^s dl + \int_A \underline{q}^v dA - \int_A \rho \underline{\underline{\text{grad}}} (\underline{F} \underline{\Omega}(\underline{X}, t)) \underline{\Omega}(\underline{X}, t) dA$ sont les forces appliquées.

$\underline{g} = \int_{\partial A} \underline{S}' \underline{P}' \wedge \underline{q}^s dl + \int_A \underline{S}' \underline{P}' \wedge \underline{q}^v dA - \int_A \rho \underline{S}' \underline{P}' \wedge \underline{\underline{\text{grad}}} (\underline{F} \underline{\Omega}(\underline{X}, t)) \underline{\Omega}(\underline{X}, t) dA$ sont les moments appliqués le long de la poutre. Les équations d'équilibre (4.26) sont dans le repère local de la configuration

déformée $(\underline{t}, \underline{n})$.

$$\begin{cases} \frac{\partial(N\underline{n} + V\underline{t})}{\partial s} + \underline{q} = 0 \\ \frac{\partial M}{\partial s} + \frac{\partial OS'}{\partial s} \wedge \underline{f} + g = 0 \end{cases} \quad (4.27)$$

Elles se réécrivent dans la configuration de référence $(\underline{u}_R, \underline{u}_\theta)$:

$$\begin{cases} \frac{\partial \left(\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V \\ N \end{pmatrix} \right)}{\partial s} + \underline{q} = 0 \\ \frac{\partial M}{\partial s} + \frac{\partial OS'}{\partial s} \wedge \underline{f} + g = 0 \end{cases} \quad (4.28)$$

Il faut calculer les forces et le moment appliqués à la poutre dans la configuration de référence $(\underline{u}_R, \underline{u}_\theta)$.

4.3.4.1 Calcul des forces surfaciques

Dans notre cas, ces forces se composent de la pression d'air, de la force de contact et des réactions des ressorts.

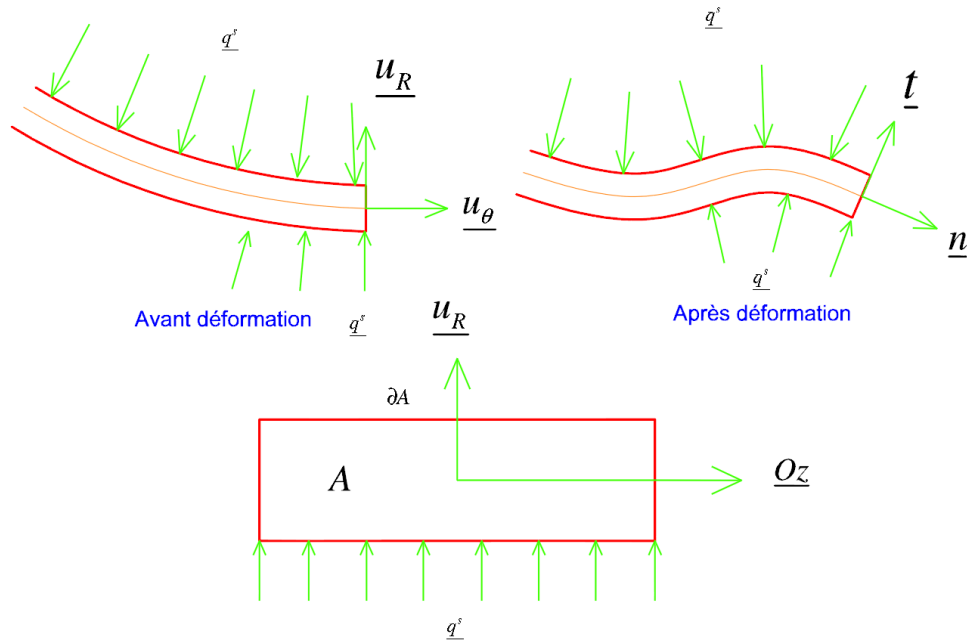


FIGURE 4.4 – Section droite

– La pression d'air

La pression d'air se traduit par une pression uniforme p le long de l'anneau. Elle est dans la direction de $\underline{u}_R$ du cas linéaire en déformation. Pour le cas non-linéaire, cette pression suit la déformation. Elle a donc pour expression :

$$\underline{p} = -p \underline{Oz} \wedge \left(\frac{\partial OS'}{\partial s} \right) = -p \underline{Oz} \wedge \left(\frac{\partial OS'}{R \partial \theta} \right)$$

– **Le contact**

Dans un premier temps, le contact pneu/chaussée est modélisé simplement par une force ponctuelle suivant la direction radiale $\begin{pmatrix} f_R \\ 0 \end{pmatrix}$.

– **Les ressorts**

Les efforts sont donnés par $\begin{pmatrix} f_R^{ressort} = k_R \cdot \Delta l_R \\ f_\theta^{ressort} = k_\theta \cdot \Delta l_\theta \end{pmatrix}$. Les allongements $\begin{pmatrix} \Delta l_R \\ \Delta l_\theta \end{pmatrix}$ sont calculés par :

$$\begin{pmatrix} \Delta l_R = \sqrt{(l_0 + u)^2 + w^2} - l_0 \\ \Delta l_\theta = \sqrt{(l_0 + w)^2 + u^2} - l_0 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} \quad (4.29)$$

En supposant que les longueurs initiales des ressorts l_0 sont très grandes par rapport à leurs déplacements $u \ll l_0$ et $w \ll l_0$

Les composantes $(f_R^{ressort}, f_\theta^{ressort})$ sont respectivement dans la direction de $\underline{u}_R$ et $\underline{u}_\theta$ du cas linéaire en déformation. Pour le cas non-linéaire, ces composantes suivent la déformation de l'axe neutre.

En résumé, les forces surfaciques sont dans le repère $(\underline{u}_R, \underline{u}_\theta)$:

$$\int_{\partial A} \underline{q}^s dl = \underline{p} + \begin{pmatrix} f_R - f_R^{ressort} \\ -f_\theta^{ressort} \end{pmatrix} \quad (4.30)$$

4.3.4.2 Calcul des forces volumiques

Dans ce travail, l'effet du poids propre du matériau est négligé. Il ne reste que la force d'inertie liée à la rotation.

– **La force d'inertie lors de la rotation**

A partir des équations d'équilibre (4.26), la force centripète se calcule par :

$$- \int_A \rho \underline{\underline{\text{grad}}} (\underline{\underline{F}} \underline{\underline{\Omega}}(\underline{X}, t)) \underline{\underline{\Omega}}(\underline{X}, t) dA$$

où $\underline{\underline{\Omega}}(\underline{X}, t)$ est le vecteur de rotation.

$$\underline{\underline{\Omega}}(\underline{X}, t) = \underline{\dot{C}}(t) + \underline{\dot{\theta}}(t) \cdot \underline{\underline{\theta}}(t)^{-1} \cdot [\underline{X} - \underline{C}(t)]$$

$\underline{\dot{C}}(t) = \underline{C}(t) = \underline{C}(0) = \underline{0}$ car le centre de la roue ne se déplace pas et correspond à l'origine du repère.

$\underline{\underline{\theta}}(t) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ est la matrice de rotation. Donc, avec $\underline{X} = (R + z)\underline{u}_R$ et $\underline{\Omega} = \dot{\theta}$, il vient :

$$\underline{\underline{\Omega}}(\underline{X}, t) = \underline{\Omega}(R + z)\underline{u}_\theta$$

En reprenant l'expression du tenseur du gradient de transformation donnée par (4.8) :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{F}} \underline{\underline{\Omega}}(\underline{X}, t) &= \begin{pmatrix} \cos \alpha & \frac{1}{R+z} (u' - w - z(\alpha' + 1) \sin \alpha) \\ \sin \alpha & \frac{1}{R+z} (R + w' + u + z(\alpha' + 1) \cos \alpha) \end{pmatrix} \underline{\Omega} \begin{pmatrix} 0 \\ R+z \end{pmatrix} \\ \underline{\underline{F}} \underline{\underline{\Omega}}(\underline{X}, t) &= \underline{\Omega} \begin{pmatrix} u' - w - z(\alpha' + 1) \sin \alpha \\ R + w' + u + z(\alpha' + 1) \cos \alpha \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.31)$$

Après développement (cf. annexe .6), il vient :

$$\underline{\underline{\text{grad}}}(\underline{F} \cdot \underline{\Omega}(\underline{X}, t)) \cdot \underline{\Omega}(\underline{X}, t) = \Omega^2 \begin{pmatrix} -R + u'' - 2w' - u - z \left(\cos(\alpha)(\alpha' + 1)^2 + \alpha'' \sin(\alpha) \right) \\ w'' + 2u' - w - z \left(\sin(\alpha)(\alpha' + 1)^2 - \alpha'' \cos(\alpha) \right) \end{pmatrix} \quad (4.32)$$

La force volumique est alors donnée en intégrant sur la section droite dans le repère $(\underline{u}_R, \underline{u}_\theta)$:

$$-\rho \int_A \underline{\underline{\text{grad}}}(\underline{F} \cdot \underline{\Omega}(\underline{X}, t)) \cdot \underline{\Omega}(\underline{X}, t) dA = -\rho \Omega^2 A \begin{pmatrix} -R + u'' - 2w' - u \\ w'' + 2u' - w \end{pmatrix} \quad (4.33)$$

4.3.4.3 Calcul du moment appliqué sur la poutre

Les forces surfaciques se déplacent et tournent autour du noeud pendant que la poutre est déformée. Donc, elles ne créent pas de moment sur la poutre car toutes les grandeurs sont indépendantes de la variable z (hypothèse de la poutre mince) :

$$\int_{\partial A} z \cdot \underline{t} \wedge \underline{q}^s dl = 0$$

De plus, le poids propre de la poutre est négligé. Donc, le moment est créé par la force volumique centripète. A l'aide de (4.32), le moment peut se calculer par :

$$g = -\rho \int_A z \underline{t} \wedge \underline{\underline{\text{grad}}}(\underline{F} \cdot \underline{\Omega}(\underline{x}, t)) \cdot \underline{\Omega}(\underline{x}, t) dA = -\rho \Omega^2 I \alpha'' \quad (4.34)$$

En conclusion, la combinaison des équations (4.28), (4.33) et (4.34) permet d'obtenir les équations d'équilibre dans le repère de la configuration de référence $(\underline{u}_R, \underline{u}_\theta)$:

$$\begin{cases} \frac{1}{R} \frac{d}{d\theta} \left(\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V \\ N \end{pmatrix} \right) + \underline{p} - \begin{pmatrix} f_R^{\text{ressort}} \\ f_\theta^{\text{ressort}} \end{pmatrix} \\ \quad - \rho \Omega^2 A \begin{pmatrix} -R + u'' - 2w' - u \\ w'' + 2u' - w \end{pmatrix} = 0 \\ \frac{1}{R} \frac{dM}{d\theta} + \frac{1}{R} \frac{\partial OS'}{\partial \theta} \wedge \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V \\ N \end{pmatrix} - \rho \Omega^2 I \alpha'' = 0 \end{cases} \quad (4.35)$$

où M, N, V sont donnés par (4.13).

4.3.5 Poutre d'Euler Bernoulli avec l'hypothèse de petites déformations

L'hypothèse d'Euler Bernoulli fait disparaître l'effet de cisaillement. C'est à dire que dans l'expression (4.11), le module de cisaillement G est infini et la déformation due au cisaillement $\varepsilon_{R\theta}$ nulle ce qui conduit à :

$$(u' - w) \cos(\alpha) + (R + u + w') \sin(\alpha) = 0 \quad (4.36)$$

En utilisant l'hypothèse de petits déplacements : $\frac{u}{R}; \frac{w}{R}; \frac{u'}{R}; \frac{w'}{R}; \alpha; \alpha' \ll 1$. Cette dernière expression donne une approximation de α

$$\alpha \cong \tan(\alpha) = \frac{w - u'}{R + u + w'} \cong \frac{w - u'}{R} \quad (4.37)$$

On recalcule la force normale et le moment à partir de (4.13) :

$$N = \frac{EA}{2R^2} \left((u' - w)^2 + (R + u + w')^2 - R^2 \right) + \frac{3EI}{2R^4} \left((u' - w)^2 + (R + u + w')^2 \right) - \frac{2EI}{R^3} (\alpha' + 1) \left((R + u + w') \cos \alpha - (u' - w) \sin \alpha \right) + \frac{EI}{2R^2} (\alpha' + 1)^2 \quad (4.38)$$

Et

$$M = -\frac{EI}{R^3} \left((u' - w)^2 + (R + u + w')^2 \right) + \frac{EI}{R^2} (\alpha' + 1) \left((R + u + w') \cos \alpha - (u' - w) \sin \alpha \right) \quad (4.39)$$

Tous les termes du second ordre sont négligés :

$$N = EA \left(\frac{u + w'}{R} \right) + \frac{EI}{R^2} \left(\frac{u + w'}{R} - \alpha' \right) \cong EA \left(\frac{u + w'}{R} \right) + \frac{EI}{R^2} \left(\frac{u + u''}{R} \right) \quad (4.40)$$

$$M = \frac{EI}{R} \left(\alpha' - \frac{u + w'}{R} \right) \cong -EI \frac{u + u''}{R^2} \quad (4.41)$$

Sous l'hypothèse de petites déformations :

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 1 & -\alpha \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}$$

Et

$$\begin{pmatrix} 1 & -\alpha \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V \\ N \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} V \\ N \end{pmatrix}$$

Ce qui permet de confondre la configuration stationnaire et tournante. La pression et les efforts des ressorts sont donnés par :

$$\begin{cases} \underline{p} = p \underline{u}_R \\ \underline{f}_R^{ressort} = k_R u \underline{u}_R \\ \underline{f}_\theta^{ressort} = k_\theta w \underline{u}_\theta \end{cases} \quad (4.42)$$

Les équations (4.35) deviennent :

$$\begin{cases} \frac{1}{R} \frac{d}{d\theta} \begin{pmatrix} V \\ N \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p + f_R - k_R u \\ -k_\theta w \end{pmatrix} - \rho \Omega^2 A \begin{pmatrix} -R + u'' - 2w' - u \\ w'' + 2u' - w \end{pmatrix} = 0 \\ \frac{1}{R} \frac{dM}{d\theta} + \frac{1}{R} \frac{\partial OS'}{\partial \theta} \times \begin{pmatrix} V \\ N \end{pmatrix} - \rho \Omega^2 I \alpha'' = 0 \end{cases} \quad (4.43)$$

Le terme : $\frac{\partial OS'}{\partial \theta} \times \begin{pmatrix} V \\ N \end{pmatrix}$ est calculé en négligeant les termes du second ordre :

$$\frac{\partial OS'}{\partial \theta} \times \begin{pmatrix} V \\ N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u' - w \\ R + u + w' \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} V \\ N \end{pmatrix} \cong -RV$$

Finalement, les équations d'équilibre s'écrivent dans le repère de la configuration de référence ($\underline{u}_R, \underline{u}_\theta$) :

$$\begin{cases} \frac{1}{R} \begin{pmatrix} V' - N \\ N' + V \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p + f_R - k_R u \\ -k_\theta w \end{pmatrix} - \rho \Omega^2 A \begin{pmatrix} -R + u'' - 2w' - u \\ w'' + 2u' - w \end{pmatrix} = 0 \\ \frac{1}{R} \frac{dM}{d\theta} - V - \rho \Omega^2 I \alpha'' = 0 \end{cases} \quad (4.44)$$

4.3.5.1 Le cas sans rotation

Si la vitesse de rotation Ω est nulle, les équations (4.44) deviennent :

$$\begin{cases} \frac{1}{R} \begin{pmatrix} V' - N \\ N' + V \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p + f_R - k_R u \\ -k_\theta w \end{pmatrix} = 0 \\ \frac{1}{R} M' - V = 0 \end{cases}$$

L'équation sur le moment permet d'obtenir l'expression de l'effet tranchant en utilisant (4.41) :

$$V = \frac{-EI}{R^3} (u' + u''') \quad (4.45)$$

Puis en combinant avec (4.40), les équations sur les efforts prennent la forme suivante :

$$\begin{cases} -\frac{EA}{R^2} (w' + u) - \frac{EI}{R^4} (u + u'') - \frac{EI}{R^4} (u'''' + u'') + p - f_R - k_R u = 0 \\ \frac{EA}{R^2} (w'' + u') - k_\theta w = 0 \end{cases} \quad (4.46)$$

4.3.5.2 Le cas incluant la rotation

L'effort tranchant a pour expression :

$$V = \frac{-EI}{R^3} (u' + u''') - \rho\Omega^2 \frac{I}{R} (w'' - u''') \quad (4.47)$$

En utilisant (4.40), (4.41) et (4.44), les équations deviennent :

$$\begin{cases} -\frac{EA}{R^2} (w' + u) - \frac{EI}{R^4} (u + u'') - \frac{EI}{R^4} (u'''' + u'') - \rho\Omega^2 I \frac{w''' - u'''}{R^2} \\ \quad + p + f_R - k_R u - \rho\Omega^2 A (-R + u'' - 2w' - u) = 0 \\ -\rho\Omega^2 I \frac{w'' - u'''}{R^2} + EA \frac{u' + w''}{R^2} - k_\theta w - \rho\Omega^2 A (w'' + 2u' - w) = 0 \end{cases} \quad (4.48)$$

4.3.6 Poutre de Timoshenko

4.3.6.1 Le cas linéaire

Dans un premier temps, le tenseur de déformation est supposé linéaire. Tous les termes du second ordre sont négligés. Les forces (4.13) deviennent :

$$\begin{cases} N = EA \frac{u + w'}{R} + \frac{EI}{R^2} \left(\frac{u + w'}{R} - \alpha' \right) \\ V = \left(GA + \frac{GI}{R^2} \right) \left(\frac{u' - w}{R} + \alpha \right) \\ M = \frac{EI}{R} \left(\alpha' - \frac{u + w'}{R} \right) \end{cases} \quad (4.49)$$

Lorsque les déplacements sont petits, les configurations stationnaire et tournante peuvent être confondues comme dans le cas de la poutre d'Euler Bernoulli. En combinant (4.49) et (4.44), il vient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{GA}{R} + \frac{GI}{R^3} \right) \left(\frac{u'' - w'}{R} + \alpha' \right) - \frac{EA}{R} \left(\frac{u + w'}{R} \right) - \frac{EI}{R^3} \left(\frac{u + w'}{R} - \alpha' \right) \\ \quad + p + f_R - k_R u - \rho \Omega^2 A (-R + u'' - 2w' - u) = 0 \\ \frac{EA}{R} \left(\frac{u' + w''}{R} \right) + \frac{EI}{R^3} \left(\frac{u' + w''}{R} - \alpha'' \right) + \left(\frac{GA}{R} + \frac{GI}{R^3} \right) \left(\frac{u' - w}{R} + \alpha \right) \\ \quad - k_\theta w - \rho \Omega^2 A (w'' + 2u' - w) = 0 \\ \frac{EI}{R^2} \left(\alpha'' - \frac{u' + w''}{R} \right) - \left(GA + \frac{GI}{R^2} \right) \left(\frac{u' - w}{R} + \alpha \right) - \rho \Omega^2 I \alpha'' = 0 \end{array} \right. \quad (4.50)$$

4.3.6.2 Le cas non-linéaire

Tous les termes non-linéaires sont conservés dans les formulations (4.13). Les équations d'équilibre considérées sont données par (4.35). Dans le calcul non-linéaire en géométrie, la pression p et les ressorts radiaux et tangentiels suivent la déformation de l'anneau. Cela donne la relation :

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{p} = -p \cdot \underline{Oz} \wedge \frac{\partial \underline{OS'}}{\partial s} = -p \cdot \underline{Oz} \wedge \frac{\partial \underline{OS'}}{R \partial \theta} \\ \underline{f}_R^{ressort} = -k_R u \cdot \underline{Oz} \wedge \frac{\partial \underline{OS'}}{\partial s} = -k_R u \cdot \underline{Oz} \wedge \frac{\partial \underline{OS'}}{R \partial \theta} \\ \underline{f}_\theta^{ressort} = -k_\theta w \cdot \frac{\partial \underline{OS'}}{\partial s} = -k_\theta w \cdot \frac{\partial \underline{OS'}}{R \partial \theta} \end{array} \right. \quad (4.51)$$

Comme $\underline{OS'} = (R + u)\underline{u}_R + w\underline{u}_\theta$, il vient :

$$\frac{\partial \underline{OS'}}{R \partial \theta} = \frac{1}{R} (u' - w) \underline{u}_R + \frac{1}{R} (R + u + w') \underline{u}_\theta \quad (4.52)$$

En intégrant ces expressions aux équations (4.35) et en calculant les dérivées, les trois équations d'équilibre suivantes sont obtenues :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{R} (V' \cos \alpha - N' \sin \alpha - (\alpha' + 1) (V \sin \alpha + N \cos \alpha)) + p \frac{R + u + w'}{R} \\ \quad + f_R - k_R u \frac{R + u + w'}{R} - k_\theta w \frac{u' - w}{R} - \rho \Omega^2 A (-R + u'' - 2w' - u) = 0 \\ \frac{1}{R} (V' \sin \alpha + N' \cos \alpha + (\alpha' + 1) (V \cos \alpha - N \sin \alpha)) - p \frac{u' - w}{R} \\ \quad + k_R u \frac{u' - w}{R} - k_\theta w \frac{R + u + w'}{R} - \rho \Omega^2 A (w'' + 2u' - w) = 0 \\ \frac{1}{R} M' + \frac{1}{R} \left((u' - w) (V \sin \alpha + N \cos \alpha) - \right. \\ \quad \left. (R + u + w') (V \cos \alpha - N \sin \alpha) \right) - \rho \Omega^2 I \alpha'' = 0 \end{array} \right. \quad (4.53)$$

4.4 Mouvement dynamique

4.4.1 Rappel de différentes configurations du modèle

Les configurations du système sont rappelées dans le tableau (4.4.1) et la figure (4.5).

Configuration initiale	Configuration tournante	Configuration stationnaire	Configuration vibrante
$\underline{X}_0 = R.\underline{u}_R$	$\begin{cases} \underline{X}_r = \underline{\theta}R.\underline{u}_R \\ \underline{\Omega}(\underline{X}_r) = \dot{\underline{\theta}}R.\underline{u}_\theta \end{cases}$	$\begin{cases} \underline{X}_s = \underline{X}_r + \underline{U} \\ \underline{U} = (u, w, \alpha) \end{cases}$	$\begin{cases} \underline{X}_t = \underline{X}_s + \underline{U}_t \\ \underline{U}_t = (u_t, w_t, \alpha_t) \end{cases}$

TABLE 4.1 – Rappel des différentes configurations

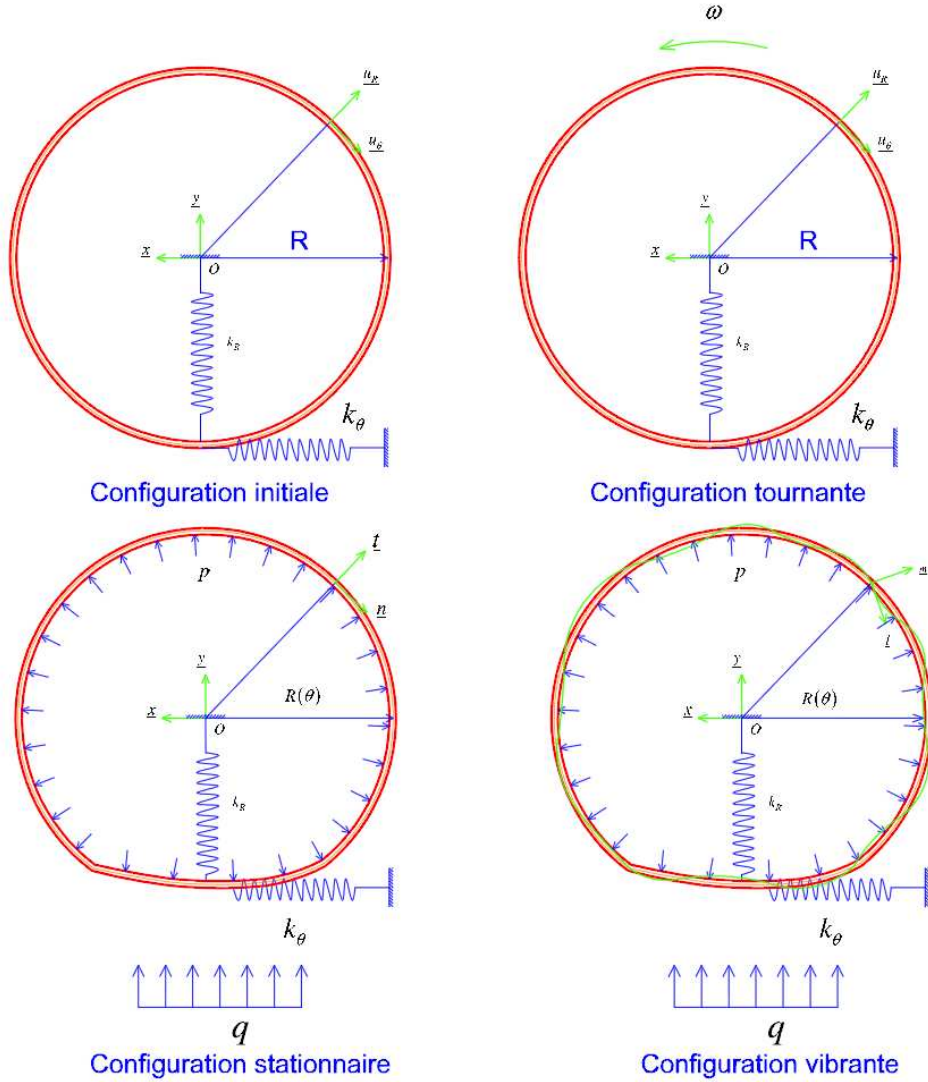


FIGURE 4.5 – Illustration des différentes configurations

En passant à la configuration vibrante, un nouveau champ de déplacement doit être défini :

$$\begin{cases} \underline{OS'} \rightarrow \underline{OS''} \\ \underline{S'P'} \rightarrow \underline{S''P''} \end{cases} \quad (4.54)$$

La transformation globale de la configuration tournante à la configuration vibrante correspond à :

$$\begin{cases} OS \rightarrow OS'' \\ SP \rightarrow S''P'' \end{cases} \quad (4.55)$$

Le déplacement total s'écrit :

$$\underline{u} = \underline{u}_s + \underline{u}_t$$

où $\underline{u}_s$ est le déplacement stationnaire et $\underline{u}_t$ est la petite perturbation dynamique.

Dans le chapitre 2, deux façons d'écrire les équations dynamiques sont présentées. Dans ce qui suit, l'application au modèle d'anneau circulaire est détaillée.

4.4.1.1 Mouvement par rapport à la configuration stationnaire

Dans cette partie, tous les calculs se font dans le repère local de la configuration stationnaire $(\underline{n}, \underline{t})$.

Le mouvement de l'axe neutre est donné par : $\underline{OS''} = \underline{OS'} + \tilde{u}_t(\theta, t) \cdot \underline{t} + \tilde{w}_t(\theta, t) \cdot \underline{n}$

où $(\underline{t}, \underline{n})$ sont les vecteurs tangentiel et normal de la section droite dans la configuration stationnaire, ils vérifient :

$$\begin{cases} \underline{t} = \cos \alpha \underline{u}_R + \sin \alpha \underline{u}_\theta \\ \underline{n} = -\sin \alpha \underline{u}_R + \cos \alpha \underline{u}_\theta \end{cases} \quad (4.56)$$

De plus,

$$\underline{S''P''} = z \cdot \underline{m}$$

où $\underline{m}$ et $\underline{l}$ sont respectivement le vecteur tangentiel et le vecteur normal de la section droite dans la configuration vibrante. L'angle entre deux vecteurs normaux de la section droite dans la configuration stationnaire et la configuration vibrante est appelé $\tilde{\alpha}_t$.

$$\begin{pmatrix} \underline{m} \\ \underline{l} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \tilde{\alpha}_t & \sin \tilde{\alpha}_t \\ -\sin \tilde{\alpha}_t & \cos \tilde{\alpha}_t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{t} \\ \underline{n} \end{pmatrix}$$

L'hypothèse de petites perturbations nous donne que les deux vecteurs $(\underline{m}, \underline{l})$ sont confondus avec $(\underline{n}, \underline{t})$. Donc, $\underline{S''P''} = z \cos(\tilde{\alpha}_t) \cdot \underline{t} + z \sin(\tilde{\alpha}_t) \cdot \underline{n}$. Le vecteur du déplacement se calcule par :

$$\underline{u}_t = \underline{OP''} - \underline{OP'} = \underline{OS''} - \underline{OS'} + \underline{S''P''} - \underline{S'P'} = \left(\tilde{u}_t + z (\cos(\tilde{\alpha}_t) - 1) \right) \cdot \underline{t} + \left(\tilde{w}_t + z \sin(\tilde{\alpha}_t) \right) \cdot \underline{n} \quad (4.57)$$

Comme $\tilde{\alpha}_t \ll 1$, le vecteur déplacement peut être approché par :

$$\underline{u}_t \cong \tilde{u}_t \underline{t} + (\tilde{w}_t + z \tilde{\alpha}_t) \underline{n} \quad (4.58)$$

– Le tenseur de gradient de la transformation de Green

Pour établir la relation entre $d\underline{u}_t$ et $d\underline{OP'}$, l'expression (4.2) est utilisée :

$$\begin{aligned} d(\underline{OP'}) &= d\left((R + u + z \cos \alpha) \underline{u}_R\right) + d\left((w + z \sin \alpha \underline{u}_\theta)\right) \\ &= \left(dz \cdot \cos \alpha + d\theta \cdot (u' - z\alpha' \sin \alpha - w - z \sin \alpha)\right) \underline{u}_R \\ &\quad + \left(dz \cdot \sin \alpha + d\theta \cdot (w' + z\alpha' \cos \alpha + R + u + z \cos \alpha)\right) \underline{u}_\theta \end{aligned} \quad (4.59)$$

En projetant sur $\underline{u}_R$ et $\underline{u}_\theta$, il vient :

$$\begin{cases} \underline{u}_R.d(OP') = dz.\cos\alpha + d\theta.(u' - z\alpha'\sin\alpha - w - z\sin\alpha) \\ \underline{u}_\theta.d(OP') = dz.\sin\alpha + d\theta.(w' + z\alpha'\cos\alpha + R + u + z\cos\alpha) \end{cases} \quad (4.60)$$

Puis, en appliquant (4.56) à (4.60) :

$$\begin{cases} \underline{t}.d(OP') = dz + d\theta.\left((u' - w)\cos\alpha + (u + w' + R)\sin\alpha\right) \\ \underline{n}.d(OP') = d\theta.\left((w' + R + u)\cos\alpha + z(\alpha' + 1) - (u' - w)\sin\alpha\right) \end{cases}$$

En posant :

$$\begin{cases} B(\theta) = (u' - w)\cos\alpha + (u + w' + R)\sin\alpha \\ A(z, \theta) = (w' + R + u)\cos\alpha + z(\alpha' + 1) - (u' - w)\sin\alpha \end{cases} \quad (4.61)$$

Il vient :

$$\begin{cases} \frac{\underline{n}.dOP'}{A} = d\theta \\ \underline{t}.dOP' - \frac{B}{A}\underline{n}.dOP' = dz \end{cases} \quad (4.62)$$

D'autre part, en reprenant la relation (4.58) et en notant que $d\underline{t} = (1 + \alpha')d\theta\underline{n}$ et $d\underline{n} = -(1 + \alpha')d\theta\underline{t}$, en ajoutant (4.62), le tenseur de gradient du déplacement peut se calculer de la façon suivante :

$$\begin{aligned} d\underline{u}_t &= \left(\tilde{u}'_t - (\tilde{w}_t + z\tilde{\alpha}_t)(1 + \alpha') \right) d\theta\underline{t} + \tilde{\alpha}_t dz\underline{n} + \left(\tilde{u}_t(1 + \alpha') + \tilde{w}'_t + z\tilde{\alpha}'_t \right) d\theta\underline{n} \\ d\underline{u}_t &= \left(\tilde{u}'_t \frac{\underline{t} \otimes \underline{n}}{A} + (\tilde{w}'_t + z\tilde{\alpha}'_t) \frac{\underline{n} \otimes \underline{n}}{A} + \tilde{\alpha}_t \left(\underline{n} \otimes \underline{t} - \frac{B}{A} \underline{n} \otimes \underline{n} \right) \right. \\ &\quad \left. + \tilde{u}_t(1 + \alpha') \frac{\underline{n} \otimes \underline{n}}{A} - (\tilde{w}_t + z\tilde{\alpha}_t)(1 + \alpha') \frac{\underline{t} \otimes \underline{n}}{A} \right) dOP' \end{aligned} \quad (4.63)$$

Sous la forme de tenseur dans le repère local $(\underline{t}, \underline{n})$, la relation conduit à :

$$\underline{\underline{\text{grad}_s}}(\underline{u}_t) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\tilde{u}'_t - (\tilde{w}_t + z\tilde{\alpha}_t)(1 + \alpha')}{A} \\ \tilde{\alpha}_t & \frac{\tilde{u}_t(1 + \alpha') + (\tilde{w}'_t + z\tilde{\alpha}'_t) - B\tilde{\alpha}_t}{A} \end{pmatrix} \quad (4.64)$$

Le tenseur de la transformation de Green Lagrange se calcule par :

$$F_{st} = \underline{\underline{1}} + \underline{\underline{\text{grad}_s}}(\underline{u}_t)$$

$$F_{st} = \underline{\underline{1}} + \begin{pmatrix} 0 & \frac{\tilde{u}'_t - (\tilde{w}_t + z\tilde{\alpha}_t)(1 + \alpha')}{A} \\ \tilde{\alpha}_t & \frac{\tilde{u}_t(1 + \alpha') + (\tilde{w}'_t + z\tilde{\alpha}'_t) - B\tilde{\alpha}_t}{A} \end{pmatrix} \quad (4.65)$$

– Le tenseur de déformation

Par définition :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2} (F_{st}^T F_{st} - \underline{\underline{1}})$$

– Loi de comportement

Sous l'hypothèse de déformation infinitésimale, le comportement du matériau est supposé élastique linéaire et isotrope.

$$\underline{\tilde{S}}_t = \lambda (tr \underline{\varepsilon}) \underline{1} + 2\mu \underline{\varepsilon} \quad (4.66)$$

Les forces sur la section droite sont (N, V, M) et se calculent comme pour la partie stationnaire (4.3.3) :

$$\begin{cases} N = \int_A \tilde{S}_{t\theta\theta} dA \\ V = \int_A \tilde{S}_{tR\theta} dA \\ M = \int_A z \tilde{S}_{t\theta\theta} dA \end{cases}$$

4.4.1.2 Mouvement par rapport à la configuration tournante

Dans cette partie, tous les développements sont réalisés dans le repère local $(\underline{u}_R, \underline{u}_\theta)$ de la configuration tournante. Le déplacement total et le déplacement stationnaire sont donnés par :

$$\underline{u} = \left(u + u_t + z (\cos(\alpha + \alpha_t) - 1) \right) \underline{u}_R + \left(w + w_t + z \sin(\alpha + \alpha_t) \right) \underline{u}_\theta \quad (4.67)$$

$$\underline{u}_s = \left(u + z(\cos \alpha - 1) \right) \underline{u}_R + (w + z \sin \alpha) \underline{u}_\theta$$

Comme (u_t, w_t, α_t) et $(\tilde{u}_t, \tilde{w}_t, \tilde{\alpha}_t)$ sont les composantes de la petite perturbation associées respectivement aux configurations tournante et stationnaire, elles sont reliées par (4.68) :

$$\begin{pmatrix} u_t \\ w_t \\ \alpha_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{u}_t \\ \tilde{w}_t \\ \tilde{\alpha}_t \end{pmatrix} \quad (4.68)$$

Les développements issus de la partie relative au mouvement stationnaire peuvent être utilisés. En particulier, le gradient de la transformation de Green Lagrange (4.7) par rapport à la configuration tournante est donné par :

$$\underline{\underline{F}}_{rt} = \underline{\underline{\text{grad}}}(\underline{u}) + \underline{1} = \underline{\underline{\text{grad}}}_s(\underline{u}_s + \underline{u}_t) + \underline{1}$$

Avec :

$$\underline{\underline{F}}_{rt} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha + \alpha_t) & \frac{1}{R+z} \left(u' + u'_t - w - w_t - z \sin(\alpha + \alpha_t) (1 + \alpha' + \alpha'_t) \right) \\ \sin(\alpha + \alpha_t) & \frac{1}{R+z} \left(R + u + u_t + w' + w'_t + z \cos(\alpha + \alpha_t) (1 + \alpha' + \alpha'_t) \right) \end{pmatrix} \quad (4.69)$$

En négligeant tous les termes du second ordre en $\underline{u}_t$:

$$\underline{\underline{F}}_{rt} = \begin{pmatrix} \cos \alpha - \alpha_t \sin \alpha & \frac{1}{R+z} \begin{pmatrix} u' + u'_t - w - w_t - z \alpha'_t \sin \alpha \\ -z (\sin \alpha + \alpha_t \cos \alpha) (1 + \alpha') \end{pmatrix} \\ \sin \alpha + \alpha_t \cos \alpha & \frac{1}{R+z} \begin{pmatrix} R + u + u_t + w' + w'_t + z \alpha'_t \cos \alpha \\ +z (\cos \alpha - \alpha_t \sin \alpha) (1 + \alpha') \end{pmatrix} \end{pmatrix} \quad (4.70)$$

4.4.2 Équations d'équilibre

4.4.2.1 Équations d'équilibre par rapport à la configuration stationnaire

Dans un premier temps, une façon analytique de construire les équations dynamiques est proposée. Les équations d'équilibre autour de l'état stationnaire construites dans le chapitre 3 sont rappelées :

$$\begin{aligned} \ddot{\underline{u}}_t + 2\underline{\text{grad}}_s(\underline{\dot{u}}_t) \underline{v}_s + \underline{\text{grad}}_s(\underline{u}_t) \underline{\dot{v}}_s + \underline{\text{grad}}_s(\underline{\nabla}_s(\underline{u}_t) \underline{v}_s) \underline{v}_s \\ = (\underline{f}_t - \underline{f}_s) + \frac{1}{\rho_s} \text{div}_s \left(\underline{F}_{st} \cdot \underline{\tilde{S}}_t - \underline{\nabla}_s(\underline{u}_t) \underline{\sigma}_s \right) \end{aligned} \quad (4.71)$$

Pour simplifier l'écriture des formules, l'indice "s" est supprimé dans tous les opérateurs. A partir de ce moment, tous les calculs sont faits dans la configuration stationnaire.

ρ est la masse volumique.

$\underline{u}$ est le vecteur du déplacement.

$(\underline{f}_t - \underline{f}_s)$ est la force volumique d'excitation sur l'anneau.

$\underline{v}_s = \Omega (\underline{u}' - \underline{w} - z(1 + \alpha') \sin \alpha) \underline{u}_R + \Omega (R + \underline{w}' + \underline{u} + z(1 + \alpha') \cos \alpha) \underline{u}_\theta$ est la vitesse d'un point matériel par rapport à la configuration tournante selon (3.8) et (4.31). Elle est réécrite dans le repère local $(\underline{t}, \underline{n})$:

$$\underline{v}_s = \Omega \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{u}' - \underline{w} - z \sin(\alpha) (1 + \alpha') \\ R + \underline{w}' + \underline{u} + z \cos(\alpha) (1 + \alpha') \end{pmatrix} = \Omega \begin{pmatrix} B \\ A \end{pmatrix} \quad (4.72)$$

où A et B sont donnés par (4.61) et $\underline{\sigma}_s$ est le champ de contrainte stationnaire.

$\underline{\tilde{S}}_t$ est le tenseur d'incrément de contrainte qui se calcule dans la formulation (4.66). Ainsi, chaque terme des équations (4.71) est bien déterminé. Les formulations du vecteur déplacement $\underline{u}$, de son gradient et du tenseur de contrainte d'incrément sont écrites ci-dessus. Tous les autres termes sont calculés à l'aide des résultats de la partie stationnaire. Théoriquement, les équations analytiques du système peuvent être construites. Malheureusement, ce travail est très lourd et il est impossible de résoudre analytiquement ces équations.

4.4.2.2 Équations d'équilibre analytiques par rapport à la configuration tournante

Comme précédemment, les développements faits pour établir les équations stationnaires sont réutilisés pour les équations dynamiques par rapport à la configuration tournante.

1. Cas sans rotation

Sans vitesse de rotation, les équations d'équilibre générales sont :

$$\rho \ddot{\underline{u}} = \rho \underline{f} + \text{div}(\underline{P}) \quad (4.73)$$

Où $\underline{P}$ est le tenseur des contraintes de Boussinesq. En intégrant cette formule sur un volume $\mathfrak{D}$

de longueur "ds" suivant l'axe neutre dans la configuration tournante :

$$\begin{cases} \int_{\mathfrak{D}} \rho \ddot{\underline{u}}.dV = \int_{\mathfrak{D}} \rho \underline{f}.dV + \int_{\mathfrak{D}} \underline{div}(\underline{P}).dV \\ \int_{\mathfrak{D}} z \underline{t} \wedge \rho \ddot{\underline{u}}.dV = \int_{\mathfrak{D}} z \underline{t} \wedge \rho \underline{f}.dV + \int_{\mathfrak{D}} z \underline{t} \wedge \underline{div}(\underline{P}).dV \end{cases} \quad (4.74)$$

La partie droite des équations (4.74) se développe de la même façon que dans la partie de "mouvement stationnaire 4.3". **Il reste à détailler les deux termes à gauche des équations (4.74).**

Le vecteur déplacement global projeté sur la base de $(\underline{u}_R, \underline{u}_\theta)$ s'écrit (4.67) :

$$\underline{u} = \left(u + u_t + z (\cos(\alpha + \alpha_t) - 1) \right) \underline{u}_R + \left(w + w_t + z \sin(\alpha + \alpha_t) \right) \underline{u}_\theta$$

En utilisant l'hypothèse de petites transformations en (u_t, w_t, α_t) le vecteur déplacement s'écrit :

$$\underline{u} = \left(u + u_t + z (\cos \alpha - 1) - z \alpha_t \sin \alpha \right) \underline{u}_R + \left(w + w_t + z \sin \alpha + z \alpha_t \cos \alpha \right) \underline{u}_\theta \quad (4.75)$$

Donc,

$$\ddot{\underline{u}} = \left(\ddot{u}_t - z \sin(\alpha) \ddot{\alpha}_t \right) \underline{u}_R + \left(\ddot{w}_t + z \cos(\alpha) \ddot{\alpha}_t \right) \underline{u}_\theta \quad (4.76)$$

En appliquant (4.76) à la partie gauche des équations (4.74), il vient :

$$\begin{aligned} \int_{\mathfrak{D}} \rho \ddot{\underline{u}}.dV &= \int_{\mathfrak{D}} \rho \left((\ddot{u}_t - z \ddot{\alpha}_t \sin \alpha) \underline{u}_R + (\ddot{w}_t + z \ddot{\alpha}_t \cos \alpha) \underline{u}_\theta \right) dV \\ &= \rho A (\ddot{u}_t \cdot \underline{u}_R + \ddot{w}_t \cdot \underline{u}_\theta) \\ \int_{\mathfrak{D}} z \underline{t} \wedge \rho \ddot{\underline{u}}.dV &= \int_{\mathfrak{D}} z (\cos \alpha \underline{u}_R + \sin \alpha \underline{u}_\theta) \wedge \rho ((\ddot{u}_t - z \ddot{\alpha}_t \sin \alpha) \underline{u}_R \\ &\quad + (\ddot{w}_t + z \ddot{\alpha}_t \cos \alpha) \underline{u}_\theta) dV = \rho I \ddot{\alpha}_t \underline{e}_z \end{aligned} \quad (4.77)$$

Cas linéaire

En combinant avec les équations (4.50) de poutre de Timoshenko (cf. la partie de la poutre de Timoshenko du cas linéaire), et en prenant $\Omega = 0$ (cas sans rotation), les équations d'équilibre deviennent :

$$\left\{ \begin{aligned} &\left(\frac{GA}{R} + \frac{GI}{R^3} \right) \left(\frac{(u + u_t)'' - (w + w_t)'}{R} + (\alpha + \alpha_t)' \right) - \\ &\quad \frac{EA}{R} \left(\frac{u + u_t + (w + w_t)'}{R} \right) - \frac{EI}{R^3} \left(\frac{u + u_t + (w + w_t)'}{R} - (\alpha + \alpha_t)' \right) \\ &\quad + p + p_t + f_R + f_R^t - k_R(u + u_t) = \rho A \ddot{u}_t \\ &\frac{EA}{R} \left(\frac{(u + u_t)' + (w + w_t)''}{R} \right) + \frac{EI}{R^3} \left(\frac{(u + u_t)' + (w + w_t)''}{R} - (\alpha + \alpha_t)'' \right) \\ &\quad + \left(\frac{GA}{R} + \frac{GI}{R^3} \right) \left(\frac{(u + u_t)' - w - w_t}{R} + \alpha + \alpha_t \right) - k_\theta(w + w_t) = \rho A \ddot{w}_t \\ &\frac{EI}{R^2} \left((\alpha + \alpha_t)'' - \frac{(u + u_t)' + (w + w_t)''}{R} \right) - \\ &\quad \left(GA + \frac{GI}{R^2} \right) \left(\frac{(u + u_t)' - w - w_t}{R} + \alpha + \alpha_t \right) = \rho I \ddot{\alpha}_t \end{aligned} \right. \quad (4.78)$$

Les équations stationnaires sont rappelées avec le cas Ω nul :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{GA}{R} + \frac{GI}{R^3} \right) \left(\frac{u'' - w'}{R} + \alpha' \right) - \frac{EA}{R} \left(\frac{u + w'}{R} \right) - \frac{EI}{R^3} \left(\frac{u + w'}{R} - \alpha' \right) \\ \quad + p + f_R - k_R u = 0 \\ \frac{EA}{R} \left(\frac{u' + w''}{R} \right) + \frac{EI}{R^3} \left(\frac{u' + w''}{R} - \alpha'' \right) + \left(\frac{GA}{R} + \frac{GI}{R^3} \right) \left(\frac{u' - w}{R} + \alpha \right) \\ \quad - k_\theta w = 0 \\ \frac{EI}{R^2} \left(\alpha'' - \frac{u' + w''}{R} \right) - \left(GA + \frac{GI}{R^2} \right) \left(\frac{u' - w}{R} + \alpha \right) = 0 \end{array} \right. \quad (4.79)$$

La soustraction des équations une à une donne :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{GA}{R} + \frac{GI}{R^3} \right) \left(\frac{u_t'' - w_t'}{R} + \alpha_t' \right) - \frac{EA}{R} \left(\frac{u_t + w_t'}{R} \right) - \frac{EI}{R^3} \left(\frac{u_t + w_t'}{R} - \alpha_t' \right) \\ \quad + p_t + f_R^t - k_R u_t = \rho A \ddot{u}_t \\ \frac{EA}{R} \left(\frac{u_t' + w_t''}{R} \right) + \frac{EI}{R^3} \left(\frac{u_t' + w_t''}{R} - \alpha_t'' \right) + \left(\frac{GA}{R} + \frac{GI}{R^3} \right) \left(\frac{u_t' - w_t}{R} + \alpha_t \right) \\ \quad - k_\theta w_t = \rho A \ddot{w}_t \\ \frac{EI}{R^2} \left(\alpha_t'' - \frac{u_t' + w_t''}{R} \right) - \left(GA + \frac{GI}{R^2} \right) \left(\frac{u_t' - w_t}{R} + \alpha_t \right) = \rho I \alpha_t'' \end{array} \right. \quad (4.80)$$

De la même façon, les équations d'équilibre du cas de la poutre d'Euler Bernoulli sont données à partir de (4.46) :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{EA}{R^2} (w_t' + u_t) - \frac{EI}{R^4} (u_t + u_t'') - \frac{EI}{R^4} (u_t'''' + u_t'') \\ \quad + p_t - f_R^t - k_R u_t = \rho A \ddot{u}_t \\ \frac{EA}{R^2} (w_t'' + u_t') - k_\theta w_t = \rho A \ddot{w}_t \end{array} \right. \quad (4.81)$$

Cas non-linéaire

L'hypothèse de petites perturbations donne :

$$\left(\frac{u_t}{R} \ll 1 \quad \frac{w_t}{R} \ll 1 \quad \alpha_t \ll 1 \right)$$

Les équations d'équilibre du cas stationnaire sont reprises de (4.53) en supprimant des termes de rotation :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{R} (V' \cos \alpha - N' \sin \alpha - (\alpha' + 1) (V \sin \alpha + N \cos \alpha)) + p \frac{R + u + w'}{R} \\ \quad + f_R - k_R u \frac{R + u + w'}{R} - k_\theta w \frac{u' - w}{R} = 0 \\ \frac{1}{R} (V' \sin \alpha + N' \cos \alpha + (\alpha' + 1) (V \cos \alpha - N \sin \alpha)) - p \frac{u' - w}{R} \\ \quad + k_R u \frac{u' - w}{R} - k_\theta w \frac{R + u + w'}{R} = 0 \\ \frac{1}{R} M' + \frac{1}{R} \left((u' - w) (V \sin \alpha + N \cos \alpha) - (R + u + w') (V \cos \alpha - N \sin \alpha) \right) = 0 \end{array} \right.$$

Avec :

$$\begin{cases} N = \frac{EA}{2R^2} \left((u' - w)^2 + (R + u + w')^2 - R^2 \right) + \frac{3EI}{2R^4} \left((u' - w)^2 + (R + u + w')^2 \right) \\ \quad - \frac{2EI}{R^3} (\alpha' + 1) \left((R + u + w') \cos \alpha - (u' - w) \sin \alpha \right) + \frac{EI}{2R^2} (\alpha' + 1)^2 \\ V = \left(\frac{GA}{R} + \frac{GI}{R^3} \right) \left((u' - w) \cos \alpha + (R + u + w') \sin \alpha \right) \\ M = -\frac{EI}{R^3} \left((u' - w)^2 + (R + u + w')^2 \right) \\ \quad + \frac{EI}{R^2} (\alpha' + 1) \left((R + u + w') \cos \alpha - (u' - w) \sin \alpha \right) \end{cases}$$

En remplaçant (u, w, α) dans ces équations par $(u + u_t, w + w_t, \alpha + \alpha_t)$, les équations globales sont obtenues avec des parties relatives à l'équilibre statique et à l'équilibre dynamique. Les efforts stationnaires sont également distingués des efforts dynamiques :

$$(N = N_s + N_t \quad V = V_s + V_t \quad M = M_s + M_t)$$

Cela implique :

$$(N - N_s = N_t \quad V - V_s = V_t \quad M - M_s = M_t) \quad (4.82)$$

où (N_s, M_s, V_s) sont les efforts statiques, (N_t, M_t, V_t) sont associés à la petite perturbation dynamique. En effet, (N_t, M_t, V_t) dépendent linéairement du déplacement dynamique $\underline{u}_t$ et sont fonctions des déplacements statiques. Ils sont obtenus par soustraction des efforts statiques des efforts globaux (4.82). En négligeant tous les termes du second ordre en $\underline{u}_t$, les efforts dynamiques sont calculés :

$$\begin{cases} N_t = \left(\frac{EA}{R^2} + \frac{3EI}{R^4} \right) \left((u' - w)(u'_t - w_t) + (u_t + w'_t)(R + u + w') \right) + \\ \quad \frac{EI}{R^2} \alpha'_t (\alpha' + 1) - \frac{2EI}{R^3} \alpha'_t \left((R + u + w') \cos \alpha - (u' - w) \sin \alpha \right) - \\ \quad \frac{2EI}{R^3} (\alpha' + 1) \left((u_t + w'_t) \cos \alpha - (u'_t - w_t) \sin \alpha - \alpha_t \left((R + u + w') \sin \alpha + (u' - w) \cos \alpha \right) \right) \\ V_t = \left(\frac{GA}{R} + \frac{GI}{R^3} \right) \left((u'_t - w_t) \cos \alpha + (u_t + w'_t) \sin \alpha \right) + \\ \quad \left(\frac{GA}{R} + \frac{GI}{R^3} \right) \alpha_t \left((R + u + w') \cos \alpha - (u' - w) \sin \alpha \right) \\ M_t = -\frac{2EI}{R^3} \left((u'_t - w_t)(u' - w) + (u_t + w'_t)(R + u + w') \right) + \\ \quad \frac{EI}{R^2} \alpha'_t \left((R + u + w') \cos \alpha - (u' - w) \sin \alpha \right) + \\ \quad \frac{EI}{R^2} (\alpha' + 1) \left((u_t + w'_t) \cos \alpha - (u'_t - w_t) \sin \alpha - \alpha_t \left((R + u + w') \sin \alpha + (u' - w) \cos \alpha \right) \right) \end{cases} \quad (4.83)$$

Les équations d'équilibre linéarisées du vecteur des déplacements (u_t, w_t, α_t) sont obtenues par une soustraction de la partie stationnaire des équations (4.53) de la même façon que dans le cas linéaire. Les termes du second ordre en (u_t, w_t, α_t) sont négligés et les équations dynamiques sont dans le repère $(\underline{u}_R, \underline{u}_\theta)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{R} \left(V'_t \cos \alpha - N'_t \sin \alpha - \alpha'_t (V \sin \alpha + N \cos \alpha) \right) + p \frac{u_t + w'_t}{R} + p_t \frac{R + u + w'}{R} \\ \quad + \frac{1}{R} \left(-\alpha_t (V' \sin \alpha + N' \cos \alpha) - (\alpha' + 1) (V_t \sin \alpha + N_t \cos \alpha + \alpha_t (V \cos \alpha - N \sin \alpha)) \right) \\ \quad + f_R^t - k_R u_t \frac{R + u + w'}{R} - k_R u \frac{u_t + w'_t}{R} - k_\theta w_t \frac{u' - w}{R} - k_\theta w \frac{u'_t - w_t}{R} = \rho A \ddot{u}_t \\ \frac{1}{R} \left(V'_t \sin \alpha + N'_t \cos \alpha + \alpha'_t (V \cos \alpha - N \sin \alpha) \right) - p \frac{u'_t - w_t}{R} - p_t \frac{u' - w}{R} \\ \quad + \frac{1}{R} \left(\alpha_t (V' \cos \alpha - N' \sin \alpha) + (\alpha' + 1) (V_t \cos \alpha - N_t \sin \alpha - \alpha_t (N \cos \alpha + V \sin \alpha)) \right) \\ \quad + k_R u_t \frac{u' - w}{R} + k_R u \frac{u'_t - w_t}{R} - k_\theta w_t \frac{R + u + w'}{R} - k_\theta w \frac{u_t + w'_t}{R} = \rho A \ddot{w}_t \\ \frac{1}{R} M'_t + \frac{1}{R} \left((u'_t - w_t) (V \sin \alpha + N \cos \alpha) - (u_t + w'_t) (V \cos \alpha - N \sin \alpha) \right) + \\ \quad \frac{1}{R} \left((u' - w) (V_t \sin \alpha + N_t \cos \alpha) - (R + u + w') (V_t \cos \alpha - N_t \sin \alpha) \right) + \\ \quad \frac{1}{R} \left(\alpha_t (u' - w) (V \cos \alpha - N \sin \alpha) + \alpha_t (R + u + w') (V \sin \alpha + N \cos \alpha) \right) = \rho I \ddot{\alpha}_t \end{array} \right. \quad (4.84)$$

2. Cas avec rotation

Les équations d'équilibre général sont écrites par rapport à la configuration tournante (3.42) :

$$\rho \ddot{\underline{u}} + 2\rho \underline{\text{grad}}_r(\dot{\underline{u}}) \underline{\Omega}(\underline{X}_r, t) + \rho \underline{\text{grad}}_r \left(\underline{F}_{rt} \underline{\Omega}(\underline{X}_r, t) \right) \underline{\Omega}(\underline{X}_r, t) = \rho \underline{f} + \text{div}_r \left(\underline{F}_{rt} \underline{S}_r \right) \quad (4.85)$$

où $\underline{u}$ est le vecteur déplacement global $\underline{u} = \underline{u}_s + \underline{u}_t$. Comme dans le cas précédent, on intègre cette formule sur un morceau de poutre de longueur "ds" suivant l'axe neutre dans la configuration tournante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\mathfrak{D}} \rho \ddot{\underline{u}} dV + \int_{\mathfrak{D}} 2\rho \underline{\text{grad}}_r(\dot{\underline{u}}) \underline{\Omega}(\underline{X}_r, t) dV + \\ \quad \int_{\mathfrak{D}} \rho \underline{\text{grad}}_r \left(\underline{F}_{rt} \underline{\Omega}(\underline{x}_r, t) \right) \underline{\Omega}(\underline{X}_r, t) dV = \int_{\mathfrak{D}} \rho \underline{f} + \text{div}_r \left(\underline{F}_{rt} \underline{S}_r \right) dV \\ \int_{\mathfrak{D}} z \underline{t} \wedge \rho \ddot{\underline{u}} dV + \int_{\mathfrak{D}} z \underline{t} \wedge 2\rho \underline{\text{grad}}_r(\dot{\underline{u}}) \underline{\Omega}(\underline{x}_r, t) dV + \\ \quad \int_{\mathfrak{D}} z \underline{t} \wedge \rho \underline{\text{grad}}_r \left(\underline{F}_{rt} \underline{\Omega}(\underline{x}_r, t) \right) \underline{\Omega}(\underline{x}_r, t) dV = \int_{\mathfrak{D}} z \underline{t} \wedge \left(\rho \underline{f} + \text{div}_r \left(\underline{F}_{rt} \underline{S}_r \right) \right) dV \end{array} \right. \quad (4.86)$$

Dans les équations (4.86), il n'y a que le terme concernant l'effet gyroscopique qui n'a pas encore été détaillé. En utilisant le calcul du gradient de la transformation (4.70), on a

$$\underline{\text{grad}}_r(\dot{\underline{u}}) = \begin{pmatrix} -\dot{\alpha}_t \sin \alpha & \frac{1}{R+z} (\dot{u}'_t - \dot{w}_t - z \dot{\alpha}_t (1 + \alpha') \cos \alpha - z \dot{\alpha}'_t \sin \alpha) \\ \dot{\alpha}_t \cos \alpha & \frac{1}{R+z} (\dot{u}_t + \dot{w}'_t - z \dot{\alpha}_t (1 + \alpha') \sin \alpha + z \dot{\alpha}'_t \cos \alpha) \end{pmatrix} \quad (4.87)$$

On détaille le terme gyroscopique :

$$\underline{\underline{\text{grad}_r}}(\underline{\dot{u}}) \cdot \underline{\Omega}(\underline{X}_r, t) = \Omega \begin{pmatrix} \dot{u}'_t - \dot{w}_t - z\dot{\alpha}_t(1 + \alpha') \cos \alpha - z\dot{\alpha}'_t \sin \alpha \\ \dot{u}_t + \dot{w}'_t - z\dot{\alpha}_t(1 + \alpha') \sin \alpha + z\dot{\alpha}'_t \cos \alpha \end{pmatrix} \quad (4.88)$$

Finalement :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\mathcal{V}} 2\rho \underline{\underline{\text{grad}_r}}((\underline{\dot{u}})) \cdot \underline{\Omega}(\underline{x}_r, t) dV = 2\rho\Omega A (\dot{u}'_t - \dot{w}_t) \underline{u}_R + 2\rho\Omega A (\dot{u}_t + \dot{w}'_t) \underline{u}_\theta \\ \int_{\mathcal{V}} z \cdot \underline{t} \wedge 2\rho \underline{\underline{\text{grad}_r}}((\underline{\dot{u}})) \cdot \underline{\Omega}(\underline{x}_r, t) dV = 2\rho\Omega I \dot{\alpha}'_t \end{array} \right. \quad (4.89)$$

Cas linéaire

Dans le cas linéaire, en ajoutant (4.89) aux équations (4.80), les équations deviennent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{GA}{R} + \frac{GI}{R^3} \right) \left(\frac{u''_t - w'_t}{R} + \alpha'_t \right) - \frac{EA}{R} \left(\frac{u_t + w'_t}{R} \right) - \frac{EI}{R^3} \left(\frac{u_t + w'_t}{R} - \alpha'_t \right) \\ \quad + p_t + f_R^t - k_R u_t - \rho\Omega^2 A (u''_t - 2w'_t - u_t) = \rho A \ddot{u}_t + 2\rho\Omega A (\dot{u}'_t - \dot{w}_t) \\ \frac{EA}{R} \left(\frac{u'_t + w''_t}{R} \right) + \frac{EI}{R^3} \left(\frac{u'_t + w''_t}{R} - \alpha''_t \right) + \left(\frac{GA}{R} + \frac{GI}{R^3} \right) \left(\frac{u'_t - w_t}{R} + \alpha_t \right) \\ \quad - k_\theta w_t - \rho\Omega^2 A (w''_t + 2u'_t - w_t) = \rho A \ddot{w}_t + 2\rho\Omega A (\dot{u}_t + \dot{w}'_t) \\ \frac{EI}{R^2} \left(\alpha''_t - \frac{u'_t + w''_t}{R} \right) - \left(GA + \frac{GI}{R^2} \right) \left(\frac{u'_t - w_t}{R} + \alpha_t \right) - \rho\Omega^2 I \alpha''_t = \rho I \alpha''_t + 2\rho\Omega I \dot{\alpha}'_t \end{array} \right. \quad (4.90)$$

Cas non-linéaire

Les équations d'équilibre du cas sans rotation (4.84) sont reprises en ajoutant des termes dus à la rotation :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{R} \left(V'_t \cos \alpha - N'_t \sin \alpha - (\alpha'_t + 1) (V \sin \alpha + N \cos \alpha) \right) + p \frac{u_t + w'_t}{R} + p_t \frac{R + u + w'}{R} \\ \quad + \frac{1}{R} \left(-\alpha_t (V' \sin \alpha + N' \cos \alpha) - (\alpha' + 1) (V_t \sin \alpha + N_t \cos \alpha + \alpha_t (V \cos \alpha - N \sin \alpha)) \right) \\ \quad + f_R^t - k_R u_t \frac{R + u + w'}{R} - k_R u \frac{u_t + w'_t}{R} - k_\theta w_t \frac{u' - w}{R} - k_\theta w \frac{u'_t - w_t}{R} \\ \quad - \rho\Omega^2 A (u''_t - 2w'_t - u_t) = \rho A \ddot{u}_t + 2\rho\Omega A (\dot{u}'_t - \dot{w}_t) \\ \frac{1}{R} \left(V'_t \sin \alpha + N'_t \cos \alpha + (\alpha'_t + 1) (V \cos \alpha - N \sin \alpha) \right) - p \frac{u'_t - w_t}{R} - p_t \frac{u' - w}{R} \\ \quad + \frac{1}{R} \left(+\alpha_t (V' \cos \alpha - N' \sin \alpha) + (\alpha' + 1) (V_t \cos \alpha - N_t \sin \alpha - \alpha_t (N \cos \alpha + V \sin \alpha)) \right) \\ \quad + k_R u_t \frac{u' - w}{R} + k_R u \frac{u'_t - w_t}{R} - k_\theta w_t \frac{R + u + w'}{R} - k_\theta w \frac{u_t + w'_t}{R} \\ \quad - \rho\Omega^2 A (w''_t + 2u'_t - w_t) = \rho A \ddot{w}_t + 2\rho\Omega A (\dot{u}_t + \dot{w}'_t) \\ \frac{1}{R} M'_t + \frac{1}{R} \left((u'_t - w_t) (V \sin \alpha + N \cos \alpha) - (u_t + w'_t) (V \cos \alpha - N \sin \alpha) \right) + \\ \quad \frac{1}{R} \left((u' - w) (V_t \sin \alpha + N_t \cos \alpha) - (R + u + w') (V_t \cos \alpha - N_t \sin \alpha) \right) + \\ \quad \frac{1}{R} \left(\alpha_t (u' - w) (V \cos \alpha - N \sin \alpha) + \alpha_t (R + u + w') (V \sin \alpha + N \cos \alpha) \right) \\ \quad - \rho\Omega^2 I \alpha''_t = \rho I \alpha''_t + 2\rho\Omega I \dot{\alpha}'_t \end{array} \right. \quad (4.91)$$

4.4.2.3 Construction des équations d'équilibre numérique

En réalité, les équations d'équilibre stationnaires ne sont pas résolues analytiquement. On propose ici une méthode numérique pour résoudre les équations différentielles ordinaires (4.35). Les équations d'équilibre stationnaire discrétisées s'écrivent sous la forme :

$$\underline{g}(\underline{u}_s) = \underline{f}_s \quad (4.92)$$

où $\underline{g}$ représente la fonction des efforts internes dans la poutre qui ne sont pas toujours linéaires avec le déplacement $\underline{u}_s$. En ajoutant une petite perturbation $\underline{u}_t$, la relation dynamique devient :

$$\underline{\underline{M}} \ddot{\underline{u}}_t + \underline{\underline{C}} \dot{\underline{u}}_t + \underline{g}(\underline{u}_s + \underline{u}_t) = \underline{f}_s + \underline{f}_t \quad (4.93)$$

L'équation (4.93) est linéarisée autour de $\underline{u}_t$. On a :

$$\underline{g}(\underline{u}_s + \underline{u}_t) = \underline{g}(\underline{u}_s) + \frac{\partial \underline{g}}{\partial \underline{u}_s} \underline{u}_t \quad (4.94)$$

On remplace (4.92) et (4.94) dans l'équation (4.93) :

$$\underline{\underline{M}} \ddot{\underline{u}}_t + \underline{\underline{C}} \dot{\underline{u}}_t + \frac{\partial \underline{g}}{\partial \underline{u}_s} \underline{u}_t = \underline{f}_t \quad (4.95)$$

En posant :

$$\frac{\partial \underline{g}}{\partial \underline{u}_s} = \underline{\underline{K}}$$

Finalement, les équations numériques sont les suivantes :

$$\underline{\underline{M}} \ddot{\underline{u}}_t + \underline{\underline{C}} \dot{\underline{u}}_t + \underline{\underline{K}} \underline{u}_t = \underline{f}_t \quad (4.96)$$

La matrice $\underline{\underline{K}}$ est déterminée par la solution stationnaire. Il nous reste à déterminer deux matrices $\underline{\underline{M}}$ et $\underline{\underline{C}}$. En fait, la matrice $\underline{\underline{M}}$ se construit facilement par la discrétisation du terme de l'accélération relative dans l'équation dynamique. La matrice $\underline{\underline{C}}$ est la matrice gyroscopique qui est construite par la discrétisation des équations analytiques.

4.4.3 Modèles simples dans la littérature

Dans cette section, les modèles d'anneau circulaire issus de la littérature sont retrouvés en utilisant leurs hypothèses.

4.4.3.1 Modèle d'anneau sous une faible pression

Cas sans rotation

Le pneu est gonflé par la pression d'air. Il n'y a pas de charge due au véhicule. Le système reste toujours axi-symétrique et la solution stationnaire prend la forme :

$$\begin{cases} u = cte \\ w = 0 \\ \alpha = 0 \end{cases} \quad (4.97)$$

En reprenant l'hypothèse que la déformation suivant l'axe neutre est très petite (la pression est petite) :

$$\varepsilon_{\theta\theta}|_{z=0} \ll 1$$

En utilisant l'expression (4.10) avec $\zeta = 0$, la déformation suivant l'axe neutre se calcule par :

$$\varepsilon_{\theta\theta}|_{z=0} = \frac{(u+R)^2}{2R^2} - \frac{1}{2} = \frac{u}{R} + \frac{1}{2} \left(\frac{u}{R} \right)^2 \ll 1 \rightarrow \frac{u}{R} \ll 1 \rightarrow \frac{R+u}{R} \cong 1$$

L'hypothèse de petits déplacements s'applique pour ce cas. Les cas de Timoshenko et d'Euler Bernoulli donnent la même solution car il n'y a pas d'effort tranchant. La solution stationnaire des équations (4.46) (pour le cas linéaire en géométrie) est donnée par :

$$u = p \left(\frac{EA}{R^2} + \frac{EI}{R^4} + k_R \right)^{-1} \quad (4.98)$$

Lorsque la poutre est mince, nous avons $\frac{EA}{R^2} \gg \frac{EI}{R^4}$ et $GA \gg \frac{GI}{R^2}$. Les efforts internes se calculent dans la configuration stationnaire par les relations (4.13) en négligeant les petits termes :

$$\begin{cases} N_s \cong \frac{EA}{R} u \\ V_s \cong 0 \\ M_s \cong 0 \end{cases} \quad (4.99)$$

Où

$$u \simeq p \left(\frac{EA}{R^2} + k_R \right)^{-1} \quad (4.100)$$

De plus, les efforts dynamiques se calculent par (4.83) :

$$\begin{cases} N_t \cong \frac{EA}{R} (u_t + w_t') \\ V_t \cong GA \left(\frac{u_t' - w_t}{R} + \alpha_t \right) \\ M_t \cong \frac{EI}{R} \left(\alpha_t' - \frac{u_t + w_t'}{R} \right) \end{cases} \quad (4.101)$$

De plus, les équations d'équilibre (4.84) deviennent, en négligeant tous les termes du second ordre :

$$\begin{cases} \frac{1}{R} (V_t' - \alpha_t' N_s - N_t) + p_t \frac{R+u}{R} + f_t^R - k_R u_t \frac{R+u}{R} + p \left(\frac{u_t + w_t'}{R} \right) - k_R u \left(\frac{u_t + w_t'}{R} \right) = \rho A \ddot{u}_t \\ \frac{1}{R} (N_t' + V_t - \alpha_t N_s) - k_\theta w_t \frac{R+u}{R} - p \left(\frac{u_t' - w_t}{R} \right) + k_R u \left(\frac{u_t' - w_t}{R} \right) = \rho A \ddot{w}_t \\ \frac{1}{R} M_t' - V_t \frac{R+u}{R} + \left(\frac{u_t' - w_t}{R} + \alpha_t \frac{R+u}{R} \right) N_s = \rho I \ddot{\alpha}_t \end{cases} \quad (4.102)$$

En remplaçant (4.101) dans (4.102), les équations d'équilibre de la poutre de Timoshenko s'écrivent

de la façon suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{GA}{R} \left(\frac{u_t'' - w_t'}{R} + \alpha_t' \right) - \frac{\alpha_t' N_s}{R} - \frac{EA}{R^2} (u_t + w_t') + p_t \frac{R+u}{R} + f_R^t \\ \quad - k_R u_t \frac{R+u}{R} + p \left(\frac{u_t + w_t'}{R} \right) - k_R u \left(\frac{u_t + w_t'}{R} \right) = \rho A \ddot{u}_t \\ \frac{EA}{R^2} (u_t' + w_t'') + \frac{GA}{R} \left(\frac{u_t' - w_t}{R} + \alpha_t \right) - \frac{\alpha_t N_s}{R} \\ \quad - k_\theta w_t \frac{R+u}{R} - p \left(\frac{u_t' - w_t}{R} \right) + k_R u \left(\frac{u_t' - w_t}{R} \right) = \rho A \ddot{w}_t \\ \frac{EI}{R^2} \left(\alpha_t'' - \frac{u_t' + w_t''}{R} \right) - GA \left(\frac{u_t' - w_t}{R} + \alpha_t \right) \frac{R+u}{R} + \left(\frac{u_t' - w_t}{R} + \alpha_t \frac{R+u}{R} \right) N_s = \rho I \ddot{\alpha}_t \end{array} \right. \quad (4.103)$$

4.4.3.2 Modèle de Böhm

Böhm a utilisé un modèle d'anneau circulaire sous pression avec l'hypothèse d'Euler Bernoulli. L'hypothèse de la poutre d'Euler Bernoulli est rappelée (4.37)

$$\alpha_t = \frac{w_t - u_t'}{R} \quad (4.104)$$

Les équations d'équilibre à l'état vibrant se réécrivent comme (4.102) en supprimant un degré de liberté de la rotation de la section droite α_t en considérant que l'énergie cinétique due à la rotation de la section droite est négligée et en utilisant l'approximation $\frac{R+u}{R} \cong 1$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{R} \left(V_t' - \frac{w_t' - u_t''}{R} N_s - N_t \right) + p_t + f_R^t - k_R u_t + p \left(\frac{u_t + w_t'}{R} \right) - k_R u \left(\frac{u_t + w_t'}{R} \right) = \rho A \ddot{u}_t \\ \frac{1}{R} \left(N_t' + V_t - \frac{w_t - u_t'}{R} N_s \right) - k_\theta w_t - p \left(\frac{u_t' - w_t}{R} \right) + k_R u \left(\frac{u_t' - w_t}{R} \right) = \rho A \ddot{w}_t \\ \frac{1}{R} M_t' - V_t = 0 \end{array} \right. \quad (4.105)$$

En combinant la troisième équation de (4.105), (4.101) et (4.104), les efforts et le moment s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} N_t = \frac{EA}{R} (u_t + w_t') \\ V_t = \frac{M_t'}{R} = -\frac{EI}{R^3} (u_t' + u_t''') \\ M_t = -\frac{EI}{R^2} (u_t + u_t'') \end{array} \right. \quad (4.106)$$

Les équations d'équilibre (4.105) deviennent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{R} \left(\frac{1}{R} M_t'' - \frac{w_t' - u_t''}{R} N_s - N_t \right) + p_t + f_R^t - k_R u_t + p \left(\frac{u_t + w_t'}{R} \right) - k_R u \left(\frac{u_t + w_t'}{R} \right) = \rho A \ddot{u}_t \\ \frac{1}{R} \left(N_t' + \frac{1}{R} M_t' - \frac{w_t - u_t'}{R} N_s \right) - k_\theta w_t - p \left(\frac{u_t' - w_t}{R} \right) + k_R u \left(\frac{u_t' - w_t}{R} \right) = \rho A \ddot{w}_t \end{array} \right. \quad (4.107)$$

De (4.99) et (4.100), on déduit la relation :

$$\frac{N_s}{R} = p - k_R u \quad (4.108)$$

En remplaçant (4.108) dans (4.107), les équations (4.107) deviennent :

$$\begin{cases} \frac{1}{R} \left(\frac{1}{R} M_t'' - \frac{w_t' - u_t''}{R} N_s - N_t \right) + p_t + f_R^t - k_R u_t + \frac{N_s}{R} \left(\frac{u_t + w_t'}{R} \right) = \rho A \ddot{u}_t \\ \frac{1}{R} \left(N_t' + \frac{1}{R} M_t' - \frac{w_t - u_t'}{R} N_s \right) - k_\theta w_t - \frac{N_s}{R} \left(\frac{u_t' - w_t}{R} \right) = \rho A \ddot{w}_t \end{cases} \quad (4.109)$$

Finalement, en remplaçant (4.106) dans (4.109), les équations sont :

$$\begin{cases} \frac{N_s}{R^2} (u_t + u_t'') - \frac{EI}{R^4} (u_t'''' + u_t'') - \frac{EA}{R^2} (u_t + w_t') + p_t + f_R^t - k_R u_t = \rho A \ddot{u}_t \\ \frac{EA}{R^2} (u_t' + w_t'') - \frac{EI}{R^4} (u_t'''' + u_t') - k_\theta w_t = \rho A \ddot{w}_t \end{cases} \quad (4.110)$$

Ce qui permet de retrouver les équations proposées par Böhm [16].

4.4.4 Premiers modes propres des modèles

Cette partie est dédiée à l'étude des premiers modes de vibration propre de quelques modèles simplifiés. L'objectif est d'obtenir des solutions analytiques qui permettent de mieux comprendre les différentes hypothèses utilisées, l'effet de la précontrainte de la pression et l'effet de rotation.

Dans les différents cas, les solutions analytiques de la vibration naturelle qui s'appuient sur l'hypothèse de linéarité en géométrie, sont cherchées sous la forme :

$$\begin{cases} u_t = e^{i\bar{\omega}t} \sum_{-\infty}^{\infty} u_t^n e^{in\theta} \\ w_t = e^{i\bar{\omega}t} \sum_{-\infty}^{\infty} w_t^n e^{in\theta} \\ \alpha_t = e^{i\bar{\omega}t} \sum_{-\infty}^{\infty} \alpha_t^n e^{in\theta} \end{cases} \quad (4.111)$$

Dans le cas général (poutre de Timoshenko avec la rotation dans le cas linéaire), les équations naturelles s'écrivent comme (4.90) en supprimant toutes les forces appliquées (p_t , f_R^t) :

$$\begin{cases} \left(\frac{GA}{R} + \frac{GI}{R^3} \right) \left(\frac{u_t'' - w_t'}{R} + \alpha_t' \right) - \frac{EA}{R} \left(\frac{u_t + w_t'}{R} \right) - \frac{EI}{R^3} \left(\frac{u_t + w_t'}{R} - \alpha_t' \right) \\ \quad - k_R u_t - \rho \Omega^2 A (u_t'' - 2w_t' - u_t) = \rho A \ddot{u}_t + 2\rho \Omega A (\dot{u}_t' - \dot{w}_t) \\ \frac{EA}{R} \left(\frac{u_t' + w_t''}{R} \right) + \frac{EI}{R^3} \left(\frac{u_t' + w_t''}{R} - \alpha_t'' \right) + \left(\frac{GA}{R} + \frac{GI}{R^3} \right) \left(\frac{u_t' - w_t}{R} + \alpha_t \right) \\ \quad - k_\theta w_t - \rho \Omega^2 A (w_t'' + 2u_t' - w_t) = \rho A \ddot{w}_t + 2\rho \Omega A (\dot{u}_t + \dot{w}_t') \\ \frac{EI}{R^2} \left(\alpha_t'' - \frac{u_t' + w_t''}{R} \right) - \left(GA + \frac{GI}{R^2} \right) \left(\frac{u_t' - w_t}{R} + \alpha_t \right) - \rho \Omega^2 I \alpha_t'' = \rho I \alpha_t'' + 2\rho \Omega I \dot{\alpha}_t' \end{cases} \quad (4.112)$$

Les fréquences propres sont les solutions des équations :

$$\left\| \begin{pmatrix} -\left(\frac{GA}{R^2} + \frac{GI}{R^4}\right)n^2 \\ -\left(\frac{EA}{R^2} + \frac{EI}{R^4}\right) - k_R \\ +\rho A\Omega^2(n^2 + 1) \\ +2\rho A\Omega\tilde{\omega}n + \rho A\tilde{\omega}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\left(\frac{GA}{R^2} + \frac{GI}{R^4}\right)ni \\ -\left(\frac{EA}{R^2} + \frac{EI}{R^4}\right)ni \\ 2\rho A\Omega^2ni + 2\rho A\Omega\tilde{\omega}i \end{pmatrix} \frac{EI}{R^3}ni + \left(\frac{GA}{R} + \frac{GI}{R^3}\right)ni \\ \begin{pmatrix} \left(\frac{GA}{R^2} + \frac{GI}{R^4}\right)ni \\ +\left(\frac{EA}{R^2} + \frac{EI}{R^4}\right)ni \\ -2\rho A\Omega^2ni - 2\rho A\Omega\tilde{\omega}i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\left(\frac{GA}{R^2} + \frac{GI}{R^4}\right)n^2 \\ -\left(\frac{EA}{R^2} + \frac{EI}{R^4}\right)n^2 \\ -k_\theta + \rho A\tilde{\omega}^2 \\ +\rho A\Omega^2(n^2 + 1) \\ +2\rho A\Omega\tilde{\omega}n \end{pmatrix} \frac{EI}{R^3}n^2 + \left(\frac{GA}{R} + \frac{GI}{R^3}\right) \\ -\frac{EI}{R^3}ni - \left(\frac{GA}{R} + \frac{GI}{R^3}\right)ni \quad \frac{EI}{R^3}n^2 + \left(\frac{GA}{R} + \frac{GI}{R^3}\right) \begin{pmatrix} -\frac{EI}{R^2}n^2 - \left(GA + \frac{GI}{R^2}\right) \\ +\rho I\Omega^2n^2 + \rho I\tilde{\omega}^2 \\ +2\rho I\Omega\tilde{\omega}n \end{pmatrix} \right\| = 0 \quad (4.113)$$

En arrangeant les équations (4.113), elles deviennent :

$$\left\| \begin{pmatrix} -\left(\frac{GA}{R^2} + \frac{GI}{R^4}\right)n^2 \\ -\left(\frac{EA}{R^2} + \frac{EI}{R^4}\right) - k_R \\ +\rho A(\tilde{\omega} + n\Omega)^2 + \rho A\Omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\left(\frac{GA}{R^2} + \frac{GI}{R^4}\right)ni \\ -\left(\frac{EA}{R^2} + \frac{EI}{R^4}\right)ni \\ 2i\rho A\Omega(n\Omega + \tilde{\omega}) \end{pmatrix} \frac{EI}{R^3}ni + \left(\frac{GA}{R} + \frac{GI}{R^3}\right)ni \\ \begin{pmatrix} \left(\frac{GA}{R^2} + \frac{GI}{R^4}\right)ni \\ +\left(\frac{EA}{R^2} + \frac{EI}{R^4}\right)ni \\ -2i\rho A\Omega(n\Omega + \tilde{\omega}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\left(\frac{GA}{R^2} + \frac{GI}{R^4}\right) - k_\theta \\ -\left(\frac{EA}{R^2} + \frac{EI}{R^4}\right)n^2 \\ +\rho A(\tilde{\omega} + n\Omega)^2 + \rho A\Omega^2 \end{pmatrix} \frac{EI}{R^3}n^2 + \left(\frac{GA}{R} + \frac{GI}{R^3}\right) \\ -\frac{EI}{R^3}ni - \left(\frac{GA}{R} + \frac{GI}{R^3}\right)ni \quad \frac{EI}{R^3}n^2 + \left(\frac{GA}{R} + \frac{GI}{R^3}\right) \begin{pmatrix} -\frac{EI}{R^2}n^2 - \left(GA + \frac{GI}{R^2}\right) \\ +\rho I(\tilde{\omega} + n\Omega)^2 \end{pmatrix} \right\| = 0 \quad (4.114)$$

En appelant $\tilde{\omega}_0$ la fréquence propre du système sans rotation, elle est donc une solution des équations 4.114 en supprimant tous les termes de rotation :

$$\left\| \begin{pmatrix} -\left(\frac{GA}{R^2} + \frac{GI}{R^4}\right)n^2 \\ -\left(\frac{EA}{R^2} + \frac{EI}{R^4}\right) - k_R \\ +\rho A\tilde{\omega}_0^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\left(\frac{GA}{R^2} + \frac{GI}{R^4}\right)ni \\ -\left(\frac{EA}{R^2} + \frac{EI}{R^4}\right)ni \end{pmatrix} \frac{EI}{R^3}ni + \left(\frac{GA}{R} + \frac{GI}{R^3}\right)ni \\ \begin{pmatrix} \left(\frac{GA}{R^2} + \frac{GI}{R^4}\right)ni \\ +\left(\frac{EA}{R^2} + \frac{EI}{R^4}\right)ni \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\left(\frac{GA}{R^2} + \frac{GI}{R^4}\right) - k_\theta \\ -\left(\frac{EA}{R^2} + \frac{EI}{R^4}\right)n^2 \\ +\rho A\tilde{\omega}_0^2 \end{pmatrix} \frac{EI}{R^3}n^2 + \left(\frac{GA}{R} + \frac{GI}{R^3}\right) \\ -\frac{EI}{R^3}ni - \left(\frac{GA}{R} + \frac{GI}{R^3}\right)ni \quad \frac{EI}{R^3}n^2 + \left(\frac{GA}{R} + \frac{GI}{R^3}\right) \begin{pmatrix} -\frac{EI}{R^2}n^2 - \left(GA + \frac{GI}{R^2}\right) \\ +\rho I\tilde{\omega}_0^2 \end{pmatrix} \right\| = 0 \quad (4.115)$$

Le terme $\rho A\Omega^2$ est négligeable par rapport aux deux termes diagonaux de l'équation (4.114) notamment quand n devient grand. Il est alors facile de montrer que d'après (4.115) :

$$\tilde{\omega} = \tilde{\omega}_0 - n\Omega \quad (4.116)$$

est une solution des équations (4.114). Cette formule est validée pour n positif ou négatif.

Cela implique :

$$\frac{\tilde{\omega}}{2\pi} = \frac{\tilde{\omega}_0}{2\pi} - \frac{n\Omega}{2\pi} \quad (4.117)$$

La fréquence propre du cas avec rotation peut donc être approchée par la fréquence propre du cas sans rotation :

$$f = f_0 - \frac{n\Omega}{2\pi} \quad (4.118)$$

Dans le cas $n = 0$, le terme $(\rho A \Omega^2)$ n'est pas négligeable. C'est la raison pour laquelle une étude des modes $n = 0$ est faite dans la suite.

4.4.4.1 Modèle linéaire sans précontrainte à l'arrêt

Cas d'une poutre d'Euler Bernoulli

En reprenant les équations (4.81) avec $n = 0$, la première fréquence propre $\tilde{\omega}_1$ est la plus petite solution de (4.119) :

$$\left\| \begin{pmatrix} -\frac{EA}{R^2} - \frac{EI}{R^4} & 0 \\ -k_R + \rho A \tilde{\omega}^2 & 0 \\ 0 & -k_\theta + \rho A \tilde{\omega}^2 \end{pmatrix} \right\| = 0 \quad (4.119)$$

Comme un modèle du pneu vérifie $k_\theta < \frac{EA}{R^2} + \frac{EI}{R^4} + k_R$, la plus petite solution est : $\tilde{\omega}_1 = \sqrt{\frac{k_\theta}{\rho A}}$

Le vecteur propre associé est : $\begin{cases} u_t^0 = 0 \\ w_t^0 = cte \end{cases}$

Ce mode correspond donc à la rotation rigide de l'anneau autour de son axe, seuls les ressorts tangentiels sont déformés.

Cas d'une poutre de Timoshenko

En profitant des équations (4.115), on cherche toujours la plus petite solution correspondant à $n = 0$:

$$\left\| \begin{pmatrix} -\left(\frac{EA}{R^2} + \frac{EI}{R^4}\right) - k_R + \rho A \tilde{\omega}^2 & 0 & 0 \\ 0 & \begin{pmatrix} -\left(\frac{GA}{R^2} + \frac{GI}{R^4}\right) \\ -k_\theta + \rho A \tilde{\omega}^2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \frac{GA}{R} + \frac{GI}{R^3} \end{pmatrix} \\ 0 & \begin{pmatrix} \frac{GA}{R} + \frac{GI}{R^3} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -\left(GA + \frac{GI}{R^2}\right) \\ +\rho I \tilde{\omega}^2 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \right\| = 0$$

Ainsi :

$$\left\| \begin{pmatrix} -\left(\frac{GA}{R^2} + \frac{GI}{R^4}\right) & \begin{pmatrix} \frac{GA}{R} + \frac{GI}{R^3} \end{pmatrix} \\ -k_\theta + \rho A \tilde{\omega}^2 & \begin{pmatrix} -\left(GA + \frac{GI}{R^2}\right) \\ +\rho I \tilde{\omega}^2 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \right\| = 0$$

On pose :

$$\left\| \begin{pmatrix} -\left(\frac{GA}{R^2} + \frac{GI}{R^4}\right) \\ -k_\theta + \rho A \tilde{\omega}^2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \frac{GA}{R} + \frac{GI}{R^3} \\ \left(\frac{GA}{R} + \frac{GI}{R^3}\right) \end{pmatrix} \right\| = f(\tilde{\omega})$$

Et

$$\left(GA + \frac{GI}{R^2}\right) = X$$

On a :

$$f(\tilde{\omega}) = \rho^2 AI \tilde{\omega}^4 - \tilde{\omega}^2 \left(\rho \frac{I}{R^2} X + \rho I k_\theta + \rho AX \right) + k_\theta X$$

La condition dite mince correspond à "l'épaisseur e est très petite par rapport au rayon de l'anneau R " : $\frac{e}{R} \ll 1$

Cela implique que :

$$\frac{I}{R^2} \ll A$$

Donc,

$$f(\tilde{\omega}) \cong \rho^2 AI \tilde{\omega}^4 - \tilde{\omega}^2 (\rho I k_\theta + \rho AX) + k_\theta X \quad (4.120)$$

La plus petite fréquence propre est proche de la solution de l'équation suivante :

$$\rho^2 AI \tilde{\omega}^4 - \tilde{\omega}^2 (\rho I k_\theta + \rho AX) + k_\theta X = 0 \quad (4.121)$$

La plus petite solution de l'équation (4.121) est :

$$\tilde{\omega}_1 = \sqrt{\frac{k_\theta}{\rho A}} \quad (4.122)$$

Le vecteur propre associé est :

$$\begin{cases} \alpha_t^0 = cte \\ w_t^0 = cte \\ \frac{\alpha_t^0}{w_t^0} = \frac{1}{R} \end{cases}$$

La première valeur propre du modèle de Timoshenko est proche de celle d'Euler Bernoulli.

4.4.4.2 Modèle linéaire avec précontrainte à l'arrêt

Etude du premier mode : $n = 0$

Cas de la poutre d'Euler Bernoulli

En utilisant les équations (4.110), on cherche la fréquence propre correspondant à $n = 0$. $\tilde{\omega}_1$ est la plus petite solution de :

$$\left\| \begin{pmatrix} -\frac{EA}{R^2} + \frac{N_s}{R^2} - k_R + \rho A \tilde{\omega}^2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ -k_\theta + \rho A \tilde{\omega}^2 \end{pmatrix} \right\| = 0$$

Lorsque $k_\theta < \frac{EA}{R^2} - \frac{N_s}{R^2} + k_R$, la plus petite solution est :

$$\tilde{\omega}_1 = \sqrt{\frac{k_\theta}{\rho A}}$$

Le vecteur propre associé est : $\begin{cases} u_t^0 = 0 \\ w_t^0 = cte \end{cases}$. Ce mode est le même que dans le cas linéaire sans précontrainte.

On peut conclure que la pression d'air n'influence pas le premier mode.

Cas de la poutre de Timoshenko

En utilisant les équations (4.103) et l'approximation $\frac{R+u}{R} \cong 1$, on cherche la fréquence propre correspondant à $n = 0$. $\tilde{\omega}_1$ est la plus petite solution de :

$$\left\| \begin{pmatrix} -\frac{EA}{R^2} - k_R + \frac{p}{R} \\ -\frac{k_R u}{R} + \rho A \tilde{\omega}^2 \end{pmatrix} \quad 0 \quad 0 \right. \\ \left. \begin{matrix} 0 & \begin{pmatrix} -\frac{GA}{R^2} + \frac{p}{R} - \frac{k_R u}{R} \\ -k_\theta + \rho A \tilde{\omega}^2 \end{pmatrix} & \frac{GA}{R} - \frac{N_s}{R} \\ 0 & \frac{GA}{R} - \frac{N_s}{R} & \begin{pmatrix} -GA + N_s \\ +\rho I \tilde{\omega}^2 \end{pmatrix} \end{matrix} \right\| = 0 \quad (4.123)$$

Donc :

$$\left\| \begin{pmatrix} -\frac{GA}{R^2} + \frac{p}{R} - \frac{k_R u}{R} \\ -k_\theta + \rho A \tilde{\omega}^2 \end{pmatrix} \quad \frac{GA}{R} - \frac{N_s}{R} \right. \\ \left. \frac{GA}{R} - \frac{N_s}{R} \quad \begin{pmatrix} -GA + N_s \\ +\rho I \tilde{\omega}^2 \end{pmatrix} \right\| = 0$$

En utilisant la relation (4.108) : $\frac{N_s}{R} = p - k_R u$, cette équation devient :

$$\left\| \begin{pmatrix} -\frac{GA}{R^2} + \frac{N_s}{R^2} \\ -k_\theta + \rho A \tilde{\omega}^2 \end{pmatrix} \quad \frac{GA}{R} - \frac{N_s}{R} \right. \\ \left. \frac{GA}{R} - \frac{N_s}{R} \quad \begin{pmatrix} -GA + N_s \\ +\rho I \tilde{\omega}^2 \end{pmatrix} \right\| = 0$$

En posant :

$$\left\| \begin{pmatrix} -\frac{GA}{R^2} + \frac{N_s}{R^2} \\ -k_\theta + \rho A \tilde{\omega}^2 \end{pmatrix} \quad \frac{GA}{R} - \frac{N_s}{R} \right. \\ \left. \frac{GA}{R} - \frac{N_s}{R} \quad \begin{pmatrix} -GA + N_s \\ +\rho I \tilde{\omega}^2 \end{pmatrix} \right\| = f(\tilde{\omega}^2)$$

Et

$$(GA - N_s) = X$$

On a :

$$f(\tilde{\omega}) = \rho^2 A I \tilde{\omega}^4 - \tilde{\omega}^2 \left(\rho \frac{I}{R^2} X + \rho I k_\theta + \rho A X \right) + k_\theta X$$

La condition dite mince correspond à "l'épaisseur e est très petite par rapport au rayon de l'anneau R " : $\frac{e}{R} \ll 1$

Cela implique que :

$$\frac{I}{R^2} \ll A$$

Donc,

$$f(\tilde{\omega}) \cong \rho^2 AI \tilde{\omega}^4 - \tilde{\omega}^2 (\rho I k_\theta + \rho A X) + k_\theta X \quad (4.124)$$

La plus petite fréquence propre est proche de la solution de l'équation suivante :

$$\rho^2 AI \tilde{\omega}^4 - \tilde{\omega}^2 (\rho I k_\theta + \rho A X) + k_\theta X = 0 \quad (4.125)$$

La plus petite solution de l'équation (4.125) est :

$$\tilde{\omega}_1 = \sqrt{\frac{k_\theta}{\rho A}} \quad (4.126)$$

Le vecteur propre associé :

$$\begin{cases} w_t^0 = cte \\ \alpha_t^0 = cte \\ \frac{\alpha_t^0}{w_t^0} = \frac{1}{R} \end{cases}$$

Donc,

$$\tilde{\omega}_1 = \sqrt{\frac{k_\theta}{\rho A}}$$

comme le cas d'Euler Bernoulli.

4.4.4.3 Modèle linéaire en rotation

On étudie le cas de la poutre de Timoshenko. Les fréquences propres du système sont données par (4.114) : Avec $n = 0$, on a :

$$\begin{vmatrix} \begin{pmatrix} -\left(\frac{EA}{R^2} + \frac{EI}{R^4}\right) - k_R \\ +\rho A \Omega^2 + \rho A \tilde{\omega}^2 \end{pmatrix} & 2\rho A \Omega \tilde{\omega} i & 0 \\ -2\rho A \Omega \tilde{\omega} i & \begin{pmatrix} -\left(\frac{GA}{R^2} + \frac{GI}{R^4}\right) - k_\theta \\ +\rho A \Omega^2 + \rho A \tilde{\omega}^2 \end{pmatrix} & \left(\frac{GA}{R} + \frac{GI}{R^3}\right) \\ 0 & \left(\frac{GA}{R} + \frac{GI}{R^3}\right) & -\left(GA + \frac{GI}{R^2}\right) + \rho I \tilde{\omega}^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (4.127)$$

On pose :

$$\begin{vmatrix} \begin{pmatrix} -\left(\frac{EA}{R^2} + \frac{EI}{R^4}\right) - k_R \\ +\rho A \Omega^2 + \rho A \tilde{\omega}^2 \end{pmatrix} & 2\rho A \Omega \tilde{\omega} i & 0 \\ -2\rho A \Omega \tilde{\omega} i & \begin{pmatrix} -\left(\frac{GA}{R^2} + \frac{GI}{R^4}\right) - k_\theta \\ +\rho A \Omega^2 + \rho A \tilde{\omega}^2 \end{pmatrix} & \left(\frac{GA}{R} + \frac{GI}{R^3}\right) \\ 0 & \left(\frac{GA}{R} + \frac{GI}{R^3}\right) & -\left(GA + \frac{GI}{R^2}\right) + \rho I \tilde{\omega}^2 \end{vmatrix} = f(\tilde{\omega}^2) \quad (4.128)$$

Les solutions analytiques sont : $f(\tilde{\omega}^2) = 0$.

On a :

$$f(0) = \begin{vmatrix} \left(-\left(\frac{EA}{R^2} + \frac{EI}{R^4} \right) - k_R \right) & 0 & 0 \\ 0 & \left(-\left(\frac{GA}{R^2} + \frac{GI}{R^4} \right) - k_\theta \right) & \left(\frac{GA}{R} + \frac{GI}{R^3} \right) \\ 0 & \left(\frac{GA}{R} + \frac{GI}{R^3} \right) & -\left(GA + \frac{GI}{R^2} \right) \end{vmatrix} \quad (4.129)$$

Il vient :

$$f(0) = \left(-\frac{EA}{R^2} - \frac{EI}{R^4} - k_R + \rho A \Omega^2 \right) \left(GA + \frac{GI}{R^2} \right) (k_\theta - \rho A \Omega^2) \quad (4.130)$$

On calcule $f\left(\frac{k_\theta - \rho A \Omega^2}{\rho A}\right)$:

$$f\left(\frac{k_\theta - \rho A \Omega^2}{\rho A}\right) = \begin{vmatrix} \left(-\left(\frac{EA}{R^2} + \frac{EI}{R^4} \right) - k_R + k_\theta \right) & 2\rho A \Omega \sqrt{\frac{k_\theta - \rho A \Omega^2}{\rho A}} i & 0 \\ -2\rho A \Omega \sqrt{\frac{k_\theta - \rho A \Omega^2}{\rho A}} i & -\left(\frac{GA}{R^2} + \frac{GI}{R^4} \right) & \left(\frac{GA}{R} + \frac{GI}{R^3} \right) \\ 0 & \left(\frac{GA}{R} + \frac{GI}{R^3} \right) & -\left(GA + \frac{GI}{R^2} \right) + \rho I \frac{k_\theta - \rho A \Omega^2}{\rho A} \end{vmatrix} \quad (4.131)$$

Il vient :

$$f\left(\frac{k_\theta - \rho A \Omega^2}{\rho A}\right) = -\left(-\frac{EA}{R^2} - \frac{EI}{R^4} - k_R + k_\theta \right) \left(\frac{GA}{R^2} + \frac{GI}{R^4} \right) \rho I \frac{k_\theta - \rho A \Omega^2}{\rho A} - 4\rho^2 A^2 \Omega^2 \frac{k_\theta - \rho A \Omega^2}{\rho A} \left(-GA - \frac{GI}{R^2} + \rho I \frac{k_\theta - \rho A \Omega^2}{\rho A} \right) \quad (4.132)$$

Comme un modèle du pneu en rotation vérifie :

$$\begin{cases} -\frac{EA}{R^2} - \frac{EI}{R^4} - k_R + k_\theta < 0 \\ -\frac{EA}{R^2} - \frac{EI}{R^4} - k_R + \rho A \Omega^2 < 0 \\ -GA - \frac{GI}{R^2} + \rho I \frac{k_\theta - \rho A \Omega^2}{\rho A} < 0 \end{cases} \quad (4.133)$$

A partir de (4.130), (4.132) et (4.133), il est facile de démontrer que :

$$f(0) f\left(\frac{k_\theta - \rho A \Omega^2}{\rho A}\right) < 0$$

Donc, il existe une solution dans l'intervalle :

$$\tilde{\omega}^2 \in \left[0, \frac{k_\theta - \rho A \Omega^2}{\rho A} \right]$$

Ou

$$\tilde{\omega}^2 \in \left[\frac{k_\theta - \rho A \Omega^2}{\rho A}, 0 \right]$$

Pour que la fréquence propre soit réelle, il faut que la vitesse de rotation respecte la condition :

$$\frac{k_\theta - \rho A \Omega^2}{\rho A} > 0$$

La vitesse de rotation critique est donc donnée par :

$$\Omega_{cr} = \sqrt{\frac{k_\theta}{\rho A}}$$

Si la vitesse de rotation est supérieure à Ω_{cr} , l'anneau devient instable.

4.5 Conclusion

Dans ce chapitre, les équations analytiques d'un modèle d'anneau circulaire avec l'hypothèse de grands déplacements ont été établies. Ces formulations avec des hypothèses simplificatrices permettent de retrouver quelques modèles de la littérature. Par exemple, en utilisant l'hypothèse de déformations infinitésimales et l'hypothèse d'Euler Bernoulli, on retrouve le modèle de Böhm [16] à l'arrêt.

Les équations d'équilibre écrites pour le mouvement stationnaire sont des équations différentielles ordinaires du second ordre. La résolution analytique est très difficile à mettre en œuvre. Une méthode de résolution numérique par discrétisation est proposée dans le chapitre suivant.

Dans la partie dynamique, on a établi également deux types d'équations d'équilibre. L'un consiste en des équations analytiques qui sont de forme très complexe, l'autre en des équations numériques. La partie numérique s'appuie sur la résolution statique. Elle nous évite de recalculer la matrice de raideur et la matrice de masse du modèle. Ces matrices ressemblent à celles de la méthode des éléments finis (MEF). La partie analytique permet une construction des matrices gyroscopiques et de la matrice centripète. Les premières analyses de premier mode sont très pertinentes. Ces résultats donnent une valeur de la vitesse de rotation critique qui dépend de la raideur tangentielle des flancs.

Validation des modèles proposés et des effets tournants

Dans ce chapitre, des modèles numériques de pneumatique sont construits et simulés dans le code éléments finis Abaqus. Ensuite, la résolution numérique du modèle analytique est présentée. La validation du modèle analytique est réalisée par des comparaisons avec des modèles éléments finis Abaqus. Enfin, la prise en compte des effets de rotation du pneumatique est validée par comparaison à des résultats expérimentaux.

Sommaire

5.1	Résolution numérique du modèle analytique	106
5.1.1	Cas stationnaire	106
5.1.2	Cas dynamique	107
5.2	Les MEF de pneumatiques utilisés pour la validation	107
5.2.1	MEF 2D constitué de poutres	107
5.2.2	MEF 3D constitué de coques	107
5.3	Validations	108
5.3.1	Cas sans rotation, modèle analytique vs. MEF poutre	108
5.3.2	Cas sans rotation, MEF poutre vs. MEF coque	112
5.3.3	Cas avec rotation, modèle analytique vs. MEF coque	113
5.4	Les effets de rotation sur un MEF Pneu/Roue/Cavité (PRC) complet	118
5.4.1	Description rapide du MEF PRC	118
5.4.2	Validation du modèle PRC à l'arrêt	119
5.4.3	Validation du modèle PRC en rotation	120
5.5	Conclusion	127

5.1 Résolution numérique du modèle analytique

5.1.1 Cas stationnaire

Le système d'équations différentielles du second ordre (4.35) possède des conditions aux limites qui respectent les conditions périodiques :

$$\begin{cases} \underline{u} = \underline{f}(\theta, \underline{u}, \underline{u}') \\ \underline{u}(0) = \underline{u}(2\pi) \\ \underline{u}'(0) = \underline{u}'(2\pi) \end{cases} \quad (5.1)$$

où $\underline{u}$ est le vecteur de déplacements.

La solution exacte est approchée par une solution discrétisée. Pour cela, un maillage de N points est défini avec $\underline{\theta} = (\theta_1 = 0; \theta_2; \dots; \theta_i; \dots; \theta_N = 2\pi(N-1)/N)$. Les valeurs discrétisées sont les suivantes :

$$\begin{cases} \underline{u}'(\theta_i) = \frac{\underline{u}(\theta_{i+1}) - \underline{u}(\theta_{i-1})}{2h} = \frac{\underline{u}_{i+1} - \underline{u}_{i-1}}{2h} \\ \underline{u}''(\theta_i) = \frac{\underline{u}(\theta_{i+1}) - 2\underline{u}(\theta_i) + \underline{u}(\theta_{i-1}))}{h^2} = \frac{\underline{u}_{i+1} - 2\underline{u}_i + \underline{u}_{i-1}}{h^2} \\ \underline{u}''(\theta_i) = f(\theta_i, \underline{u}(\theta_i), \underline{u}'(\theta_i)) \leftrightarrow \frac{\underline{u}_{i+1} - 2\underline{u}_i + \underline{u}_{i-1}}{h^2} = f(\theta_i, \underline{u}_i, \frac{\underline{u}_{i+1} - \underline{u}_{i-1}}{2h}) \end{cases} \quad (5.2)$$

Les conditions aux limites s'écrivent :

$$\underline{u}(0) = \underline{u}(2\pi) \rightarrow \begin{cases} \underline{u}_1' = \frac{\underline{u}_2 - \underline{u}_N}{2h}; \underline{u}_N' = \frac{\underline{u}_1 - \underline{u}_{N-1}}{2h} \\ \underline{u}_1'' = \frac{\underline{u}_2 - 2\underline{u}_1 + \underline{u}_N}{h^2}; \underline{u}_N'' = \frac{\underline{u}_1 - 2\underline{u}_N + \underline{u}_{N-1}}{h^2} \end{cases} \quad (5.3)$$

Les relations (5.2) et (5.3) fournissent N équations avec N inconnues. Dans le cas linéaire, trouver $\underline{u}$ est immédiat. Pour le cas non-linéaire, la méthode de Newton est utilisée. Les paramètres du modèle sont indiqués dans le tableau (5.1).

Paramètre	Description	Valeur	Unité
E	Module d'Young	2.6611e9	Pa
ρ	Masse volumique	1160.7	kgm^{-3}
R	Rayon de l'anneau	0.285	m
e	Épaisseur de la poutre	0.01	m
b	Largeur de la poutre	0.085	m
k_R	Raideur radiale	4.35e6	Pa
k_θ	Raideur tangentielle	3.19e5	Pa
ν	Coefficient de Poisson	0.3	

TABLE 5.1 – Paramètres du modèle analytique

5.1.2 Cas dynamique

Les équations dynamiques s'écrivent sous la forme :

$$\underline{\underline{M}} \ddot{u}_t + \underline{\underline{C}} \dot{u}_t + \underline{\underline{K}} u_t = f_t \quad (5.4)$$

où $\underline{\underline{M}}$ est la matrice de masse, $\underline{\underline{C}}$ la matrice gyroscopique et $\underline{\underline{K}}$ la matrice de raideur.

Les matrices $\underline{\underline{M}}$ et $\underline{\underline{C}}$ sont construites directement à l'aide des équations analytiques. Dans le cas de la déformation statique linéaire, la matrice de raideur $\underline{\underline{K}}$ ne change pas au cours de la déformation. Elle se construit directement par les équations analytiques sans rotation ou avec rotation (cf. chapitre 4). Dans le cas où l'effet des grands déplacements est pris en compte, la matrice de raideur varie au cours de la déformation. La matrice de raideur obtenue à la fin de l'état statique est celle considérée dans le calcul dynamique. Il y a deux façons pour calculer cette matrice : soit à l'aide des équations analytiques en utilisant les solutions stationnaires, soit comme le Jacobien des équations stationnaires (cf. chapitre 4) calculé par résolution numérique du cas stationnaire.

Afin de valider le modèle analytique d'anneau circulaire, il est comparé au résultat de la simulation de ce modèle sous Abaqus.

5.2 Les MEF de pneumatiques utilisés pour la validation

5.2.1 MEF 2D constitué de poutres

Ce modèle est construit pour valider les formulations analytiques du modèle d'anneau circulaire. Il ne prend pas en compte l'effet de rotation. Les paramètres et les conditions de chargement sont identiques au modèle analytique. Dans le code éléments finis Abaqus, on utilise les éléments de poutres d'Euler Bernoulli (élément B23), et des poutres de Timoshenko (élément B21). L'anneau est discrétisé en N nœuds dont chacun est relié à deux ressorts : un ressort radial et un ressort tangentiel. Les valeurs des raideurs des ressorts sont calculées à partir des raideurs des ressorts analytiques comme suit :

$$\begin{cases} k_R^{num} = R \Delta \theta k_R \\ k_\theta^{num} = R \Delta \theta k_\theta \end{cases} \quad (5.5)$$

5.2.2 MEF 3D constitué de coques

Pour prendre en compte les effets de rotation du modèle d'anneau circulaire, la fonctionnalité ***STEADY STATE TRANSPORT** disponible sous Abaqus est utilisée. Celle-ci ne peut s'appliquer, toutefois, que sur des éléments coques ou solides. C'est pour cette raison qu'un modèle équivalent à base d'éléments coques est construit. Les paramètres de la géométrie du modèle ne changent pas (cf. figure 5.1). Les ressorts radiaux et tangentiels sont également conservés. Une validation en statique est réalisée avant toute application des effets de rotation.

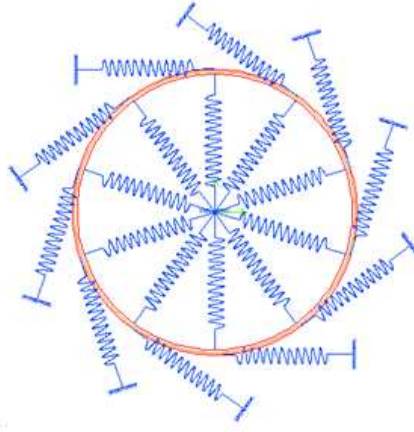


FIGURE 5.1 – Modèle d’anneau circulaire sous Abaqus

5.3 Validations

5.3.1 Cas sans rotation, modèle analytique vs. MEF poutre

Les résultats de l’état stationnaire entre le calcul sous Matlab et le calcul sous Abaqus sont comparés à iso-conditions aux limites et iso-chargement. Ces comparaisons ont été présentées à la conférence ISMA 2012 [97].

1. Pression de gonflage

Tout d’abord, les résultats Matlab et Abaqus sont comparés dans le cas d’un pneumatique mis sous une pression de 2.5 bar. Le centre de roue est fixé. Comme le pneumatique n’est pas chargé, le système est axisymétrique. Le déplacement tangentiel est nul et le déplacement radial est constant en tout point de l’anneau. Il n’y a ni flexion ni cisaillement. Les deux types de poutre Euler-Bernoulli et Timoshenko conduisent au même résultat (cf. figure 5.2).

Les solutions analytiques sont données ci-dessous :

– **Cas linéaire :**

$$u^L = p \left(\frac{EA}{R^2} + \frac{EI}{R^4} + k_R \right)^{-1}$$

– **Cas non-linéaire :**

$$\frac{1}{2} \left(\frac{EA}{R^3} + \frac{EI}{R^5} + 2\frac{k_R}{R} \right) (u^{NL})^2 + \left(\frac{EA}{R^2} + \frac{EI}{R^4} + k_R - \frac{p}{R} \right) u^{NL} - p = 0$$

Les déplacements radiaux sont calculés pour deux types de poutres, Euler-Bernoulli et Timoshenko, et deux hypothèses, non-linéarité en géométrie et petites déformations. Sur la figure 5.2, les résultats sont bien corrélés entre les deux modèles à faible pression. La résolution numérique dans Matlab correspond bien à la solution analytique. Lorsque la pression d’air augmente, les écarts entre les résultats Abaqus et Matlab sont significatifs. Ces écarts sont expliqués par une hypothèse utilisée sous Matlab mais pas sous Abaqus. C’est l’hypothèse que l’aire de section

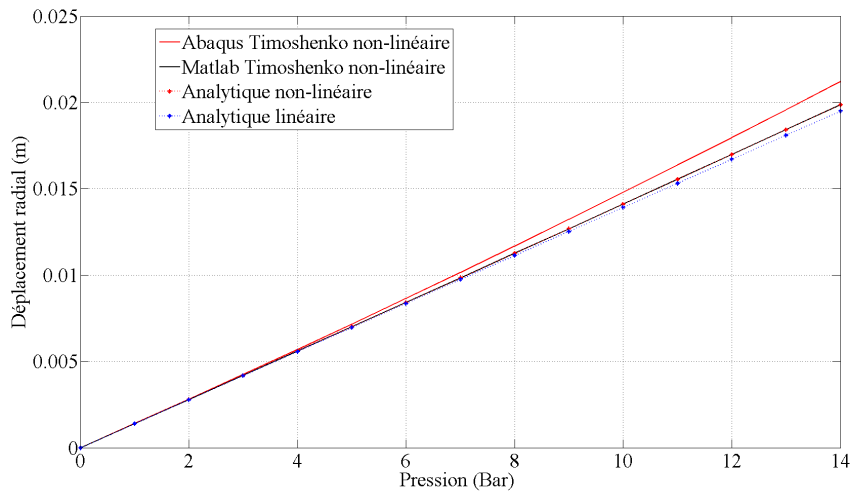


FIGURE 5.2 – Déplacement radial en fonction de la pression de gonflage

droite ne change pas au cours de la déformation. En activant l'option **NLGEOM=YES**, le calcul sous Abaqus inclut la déformation sur cette section. A faible pression, cette déformation est négligeable. Si la pression est importante, la section droite devient plus petite. Donc, la raideur de flexion et celle de tension sont diminuées. L'allongement de l'anneau est plus grand. Par conséquence, le modèle analytique développé est validé jusqu'à 4 bar. En réalité, la pression d'un pneu varie de 2 à 3 bar. Sur cette plage, les solutions avec l'hypothèse des déformations infinitésimales et l'hypothèse de grandes déformations sont identiques.

2. Charge du véhicule

La charge du véhicule est appliquée au centre de roue. Elle est représentée par une force ponctuelle imposée en base du pneumatique. La comparaison entre la modélisation Matlab et la simulation Abaqus est présentée sur la figure 5.3. Une bonne corrélation des déformées est observée. On remarque que les résultats de la poutre d'Euler Bernoulli et ceux de la poutre de Timoshenko sont identiques. Cela est expliqué par l'utilisation de l'hypothèse de la poutre mince (l'effet de cisaillement est négligé).

3. Comparaison des configurations déformées linéaire et non-linéaire

La comparaison des configurations déformées du cas linéaire et du cas non-linéaire en géométrie est présentée sur la figure 5.4. Il y a des écarts autour du point excité. En conclusion, le modèle linéaire n'est pas valable en cas d'application de la charge du véhicule. En revanche, s'il n'y a que la pression de gonflage, un modèle linéaire est suffisant.

4. Modes de vibration

Les fréquences propres du pneumatique dans sa configuration déformée sont comparées. Deux types de conditions aux limites sont considérées : base de roue libre et base de roue fixe. Les résultats obtenus sous Matlab et Abaqus sont très proches. Les écarts sont inférieurs à 1.2% ce qui est satisfaisant. Les déformées modales sont également identiques. On rappelle que n est le

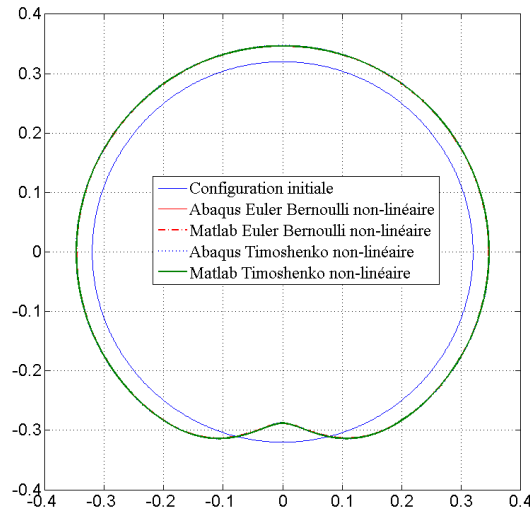


FIGURE 5.3 – Configurations non-déformée vs. déformée du pneumatique résultant de calculs statiques non-linéaires

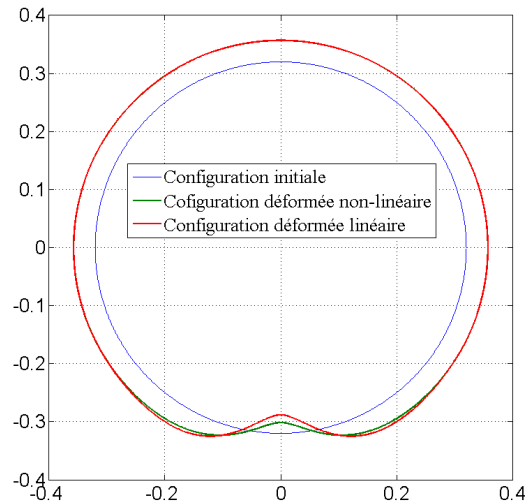


FIGURE 5.4 – Configurations non-déformée vs. déformée du pneumatique résultant de calculs statiques non-linéaires et linéaire

nombre d'onde circonférentiel, i.e. le déplacement radial s'écrit $u_R = A \cos(n\theta + \phi)$.

Dans le cas où la base de roue est libre, la symétrie de l'anneau est conservée. Dans ce cas, des modes dédoublés à la même fréquence sont observés et obtenus l'un à partir de l'autre par une rotation de $\frac{\pi}{2n}$ (cf. figure 5.5). En revanche, si la base de roue est fixe, cette propriété est perdue (cf. figure 5.6). Pour conclure, le modèle analytique est bien validé jusqu'à 400 Hz.

5. Fonctions de transfert

Un exemple de fonction de transfert est représenté sur la figure 5.7. Elle correspond à la force de réaction verticale au centre de roue résultant d'un effort dynamique vertical appliqué en base du

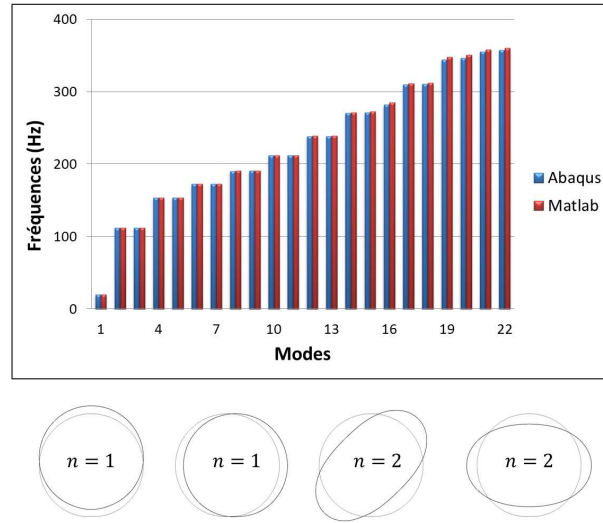


FIGURE 5.5 – Modes propres du cas centre roue encastré et la base de roue libre

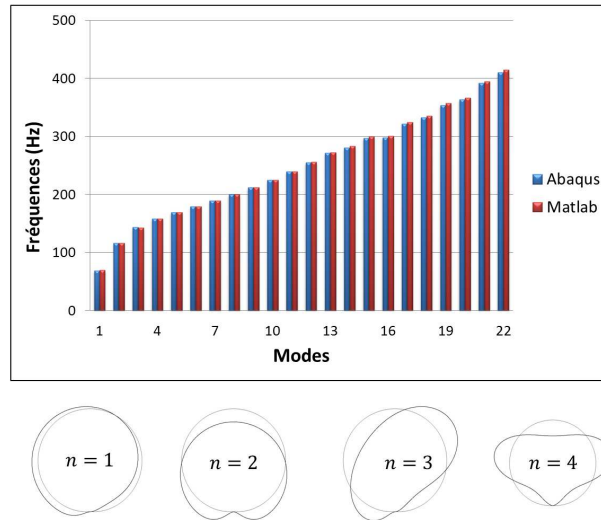


FIGURE 5.6 – Modes propres en encastrant le centre roue et la base de roue

pneu avec une amplitude constante et égale à l'unité. La force de réaction verticale au centre de roue qui est la somme des réactions verticales des ressorts radiaux et des ressorts tangentiels, est obtenue comme suit :

$$R_y = \int_0^{2\pi} k_R u_t \cdot (\underline{u}_R, \underline{y}) d\theta + \int_0^{2\pi} k_\theta w_t \cdot (\underline{u}_\theta, \underline{y}) d\theta \quad (5.6)$$

où $(\cdot)$ représente produit scalaire dans $\mathbb{R}^2$. Les courbes de Matlab et Abaqus sont superposées jusqu'à 300Hz et présentent de petites différences autour de la fréquence de 350Hz parce que les fréquences propres calculées dans Matlab et Abaqus sont légèrement différentes, $f_{20} = 346\text{Hz}$ sous Abaqus et $f_{20} = 350\text{Hz}$ sous Matlab (cf. figure 5.7). La différence reste très faible. Nous obtenons un bon accord entre les résultats Matlab et Abaqus.

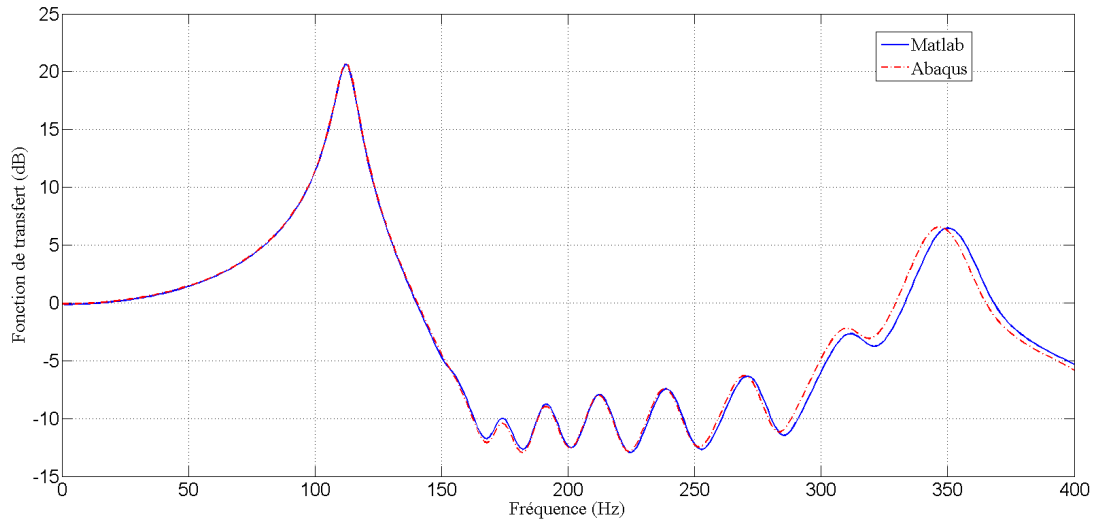


FIGURE 5.7 – Réponse de la force verticale au centre roue du problème forcé en base de roue

5.3.2 Cas sans rotation, MEF poutre vs. MEF coque

Afin de simuler l'effet de rotation dans le code éléments finis Abaqus, on propose de construire un modèle avec éléments de type coque équivalent au modèle poutre. L'effet de rotation ne peut, en effet, être ajouté à un modèle de type poutres. Avant de comparer des résultats en rotation, le modèle de coque doit être validé à l'arrêt.

1. Calcul statique

Premièrement, les déplacements calculés dans le modèle de poutre et de coque doivent être comparés. Dans le modèle de coque, la pression de gonflage de 2.5 bar est remplacée par une force surfacique de $2,5 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$ appliquée sur la bande de roulement. La charge du véhicule est représentée par une force linéique imposée en base du pneumatique.

2. Calcul dynamique à l'arrêt

On compare les modes des modèles coque et poutre en 2D. Tous les degrés de liberté hors plan sont donc encastres. Les fréquences propres calculées sont synthétisées dans le tableau (5.2). De petites différences entre le modèle de coque et le modèle de poutre sont observées mais elles restent petites.

En général, le modèle de coque est plus proche de celui de poutre de Timoshenko. En basses fréquences, la corrélation est très bonne. L'écart reste inférieur à 2.05% jusqu'à 350 Hz . En conclusion, le modèle de coque est validé en basses fréquences.

Modèle de coque	Modèle de poutre Timoshenko	Erreur Timoshenko (%)	Modèle de poutre Euler Bernoulli	Erreur Euler Bernoulli (%)
92,208	92,21	0,00%	92,14	0,08%
186,38	185,40	0,53%	185,21	0,63%
190,63	190,13	0,26%	190,12	0,27%
234,85	234,59	0,11%	234,53	0,14%
235,08	234,96	0,05%	234,79	0,12%
248,18	248,12	0,02%	247,47	0,29%
249,14	249,06	0,03%	249,06	0,03%
254,7	254,55	0,06%	253,69	0,40%

TABLE 5.2 – Comparaison des fréquences propres en Hz du MEF poutre et du MEF coque en fixant la base de roue

5.3.3 Cas avec rotation, modèle analytique vs. MEF coque

Dans le chapitre 3, le développement des formulations analytiques a montré que la prise en compte des effets tournants consiste à ajouter une matrice de raideur centripète et une matrice d'amortissement gyroscopique. L'effet sur la modification de la raideur de la structure est très faible. Par contre, l'amortissement gyroscopique fait changer fortement la réponse dynamique et provoque un dédoublement de la fréquence en fonction de la vitesse de rotation. Il est démontré par le travail théorique et expérimental de Bolton et Kim [50]. Ce résultat est confirmé dans cette partie.

1. Le cas linéaire en déformation

Concernant le cas linéaire, les fréquences propres se calculent analytiquement. Parallèlement, un calcul peut être effectué à l'aide des équations numériques dans le domaine fréquentiel :

$$-\tilde{\omega}_n^2 \underline{\underline{M}} \underline{u}_n + i\tilde{\omega}_n \underline{\underline{C}} \underline{u}_n + \underline{\underline{K}} \underline{u}_n = \underline{0} \quad (5.7)$$

où $\underline{u}_n$ est le vecteur de déplacements de l'anneau.

En posant $\tilde{\underline{u}}_n = \begin{pmatrix} \underline{u}_n \\ i\tilde{\omega}_n \underline{u}_n \end{pmatrix}$ le vecteur propre complexe, les équations (5.7) deviennent :

$$i\tilde{\omega}_n \begin{pmatrix} \underline{\underline{K}} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{M}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{u}_n \\ i\tilde{\omega}_n \underline{u}_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \underline{\underline{0}} & -\underline{\underline{K}} \\ \underline{\underline{K}} & \underline{\underline{C}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{u}_n \\ i\tilde{\omega}_n \underline{u}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} \end{pmatrix} \quad (5.8)$$

Donc, la fréquence numérique $\tilde{\omega}_n$ est donnée par :

$$\det \left\| i\tilde{\omega}_n \begin{pmatrix} \underline{\underline{K}} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{M}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \underline{\underline{0}} & -\underline{\underline{K}} \\ \underline{\underline{K}} & \underline{\underline{C}} \end{pmatrix} \right\| = 0 \quad (5.9)$$

Lorsque les matrices $\underline{\underline{M}}$ et $\underline{\underline{K}}$ sont symétriques et que la matrice $\underline{\underline{C}}$ est anti-symétrique, la première matrice à gauche de l'équation (5.9) est symétrique et la seconde est anti-symétrique.

Il est facile de montrer que les valeurs propres sont imaginaires. Cela implique que les fréquences propres du système sont réelles. On vérifie à l'instar du cas à l'arrêt, que les fréquences propres calculées par les modèles analytique et numérique à différentes vitesses sont très proches. On montre que les fréquences propres dépendent de la vitesse de rotation. Cet effet est illustré sur la figure 5.8.

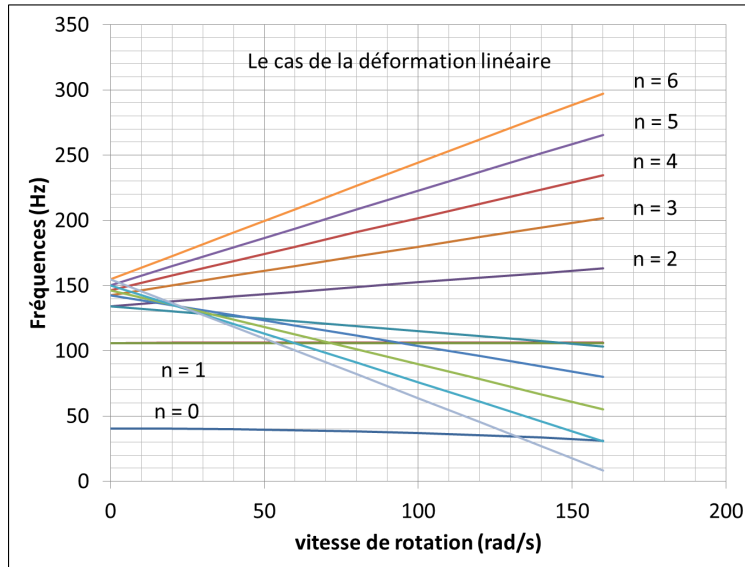


FIGURE 5.8 – Fréquences en fonction de la vitesse de rotation

Interprétation des modes

Une attention particulière est portée aux modes $n = 0$ et $n = 1$. Concernant le premier mode, la fréquence décroît en fonction de la vitesse de rotation. Ce phénomène est démontré analytiquement dans la partie 4.4.4. Il est rappelé que la première fréquence propre du modèle d'anneau circulaire est dans l'intervalle $\left[0; \frac{k_\theta - \rho A \Omega^2}{\rho A}\right]$. Cette fréquence diminue en fonction de la vitesse

de rotation. Si la vitesse de rotation est plus grande que $\sqrt{\frac{k_\theta}{\rho A}}$, la fréquence est négative. Le système devient instable.

En ce qui concerne le mode $n = 1$, la figure 5.8 montre que la fréquence est constante. Autrement dit, cette fréquence est indépendante de la vitesse de rotation. Cela est cohérent avec la démonstration théorique faite dans le chapitre 4. En fait, le mode $n = 1$, de fréquence $f_1 = 106 \text{ Hz}$, a une déformée correspondant à "un mouvement rigide" de l'anneau. C'est à dire qu'aucune déformation de l'anneau n'est observée. Il n'y a que les ressorts qui se déforment. Comme le modèle des ressorts n'a pas de masse, c'est la raison pour laquelle il n'y a pas d'effet de rotation. Ce résultat est confirmé. Des effets de dédoublement sont observés pour d'autres modes. La relation

approchée de Bolton et Kim [50] est confirmée :

$$f = f_s \pm \frac{n}{2\pi} V \quad (5.10)$$

où f est la fréquence à la vitesse de rotation V , f_s la fréquence à la vitesse nulle et n le nombre d'onde.

2. Le cas non-linéaire en déformation

N'ayant pas de solution analytique, une comparaison directe des résultats numériques sous Matlab et sous Abaqus est réalisée. Comme précédemment, les solutions dynamiques du pneumatique sont comparées autour de la configuration stationnaire déformée sous charge : vitesse de rotation de $\Omega = 100$ rad/s, pression gonflage de $p = 2.5$ bar et une charge de véhicule de $q = 250$ kg. Une bonne corrélation des fréquences propres calculées dans Matlab et Abaqus sont observées, comme l'illustre la figure 5.9. L'écart augmente avec la fréquence. Cependant, sur la plage de $[0, 400$ Hz], l'écart maximum est de 7.3% ce qui reste modéré. En conclusion, le modèle analytique en déformation non-linéaire est validé en basses fréquences.

Comme pour le cas sans rotation (cf. figure 5.7), les réponses dynamiques au centre de roue sont comparées. La formulation (5.6) est reprise pour évaluer la réaction verticale. A partir de la configuration déformée, une force harmonique de $1e^{i\omega t}$ est imposée en base de roue. La réponse est tracée en fonction de la fréquence. Sous Abaqus, la matrice de masse et la matrice de raideur sont extraites du modèle. A l'aide de ces matrices, le calcul de la fonction de transfert est effectué sous Matlab.

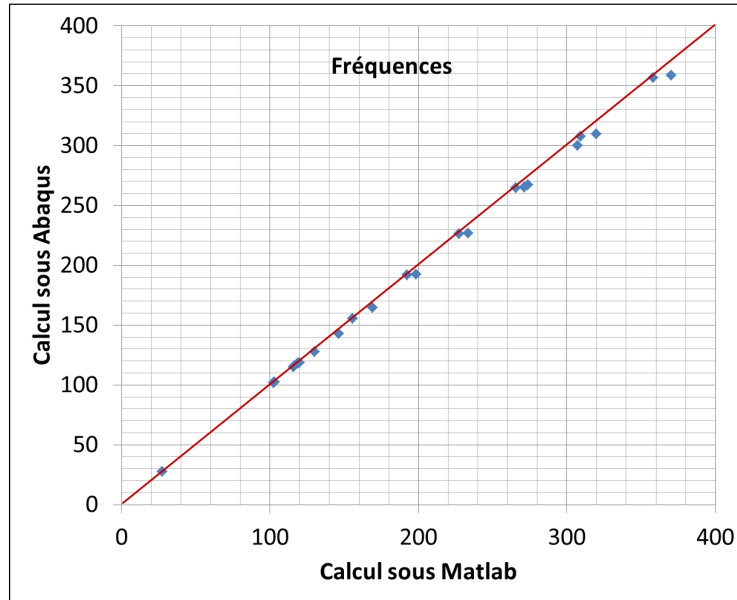


FIGURE 5.9 – Fréquences propres de l'anneau circulaire à $\Omega = 100$ rad/s dans le cas non-linéaire en déformation

La figure 5.10 montre la comparaison des fonctions de transfert. En basses fréquences, les résultats sont très proches. Des écarts commencent à apparaître à partir de 250 Hz.

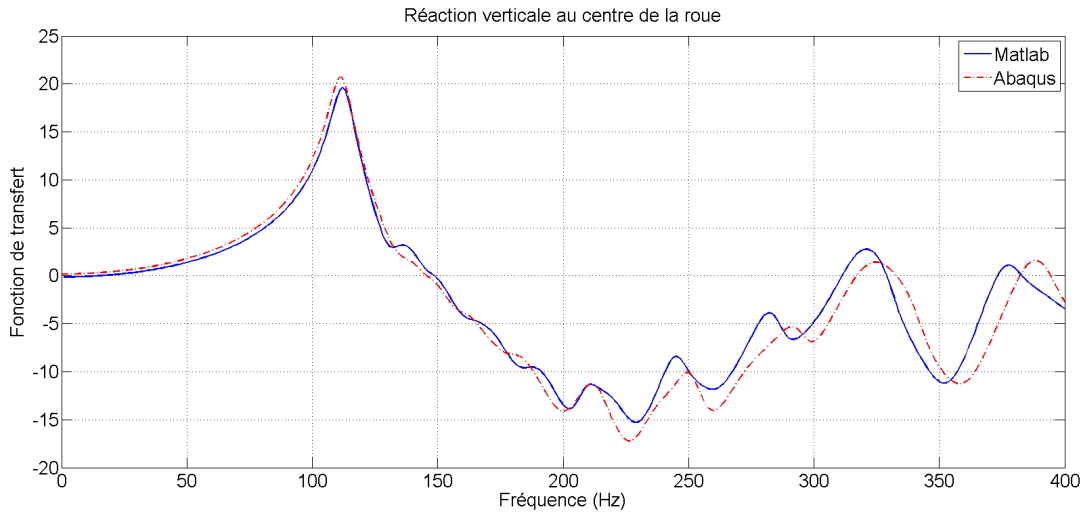


FIGURE 5.10 – Réponse de l'anneau du problème forcé ($\Omega = 100$ rad/s)

En ce qui concerne l'effet de rotation, on trace les fonctions de transfert en fonction de la vitesse de rotation sur les figures 5.11(a) et 5.11(b). La première résonance correspond à la fréquence 112 Hz du mode de "ressort", il n'y a pas de dédoublement. L'explication se retrouve par l'absence de masse des ressorts (voir la partie du cas linéaire).

Afin d'observer l'effet de dédoublement en fréquence, on construit une cartographie de la fonction

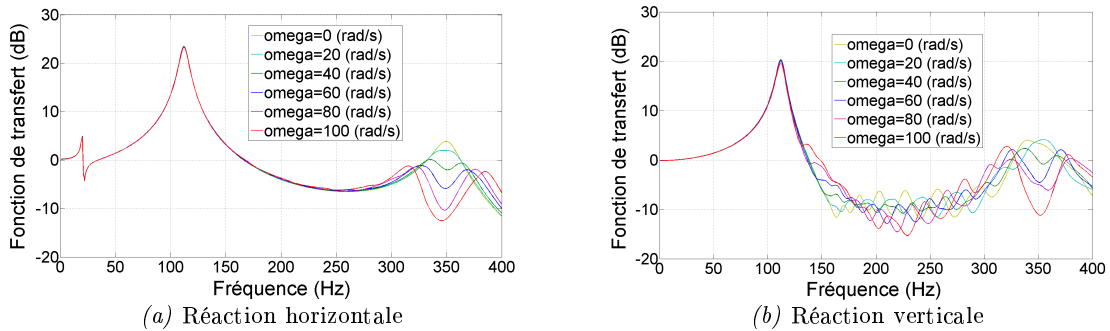


FIGURE 5.11 – Les réponses longitudinales et verticales au centre de roue

de transfert au centre de roue en fonction de la vitesse. La figure 5.12 représente la réaction verticale au centre de roue. L'axe horizontal est la fréquence et l'axe vertical est la vitesse linéaire. Les cartographies construites sous Matlab et sous Abaqus sont très proches ce qui permet de valider le modèle d'anneau circulaire avec effet tournant. Le dédoublement en fonction de la vitesse se voit sous la forme de deux branches partant des vitesses nulles. L'écartement entre les branches est fonction du nombre d'onde comme dans la formule (5.10). Il n'affecte que les modes incluant la déformation de la bande de roulement. Pour le premier mode du modèle, la bande de roulement ne se déforme pas, donc, il n'y a pas de dédoublement. Cela est validé et démontré

dans le cas linéaire.

Pour le huitième mode, deux dédoublements sont observables. Un premier correspond à $n = 8$, et le second à $n = 2$. Cela est expliqué en regardant la configuration déformée de ce mode. En fait, ce mode est une combinaison entre deux vibrations du pneumatique : une vibration radiale et une vibration en traction-compression. La vibration radiale présente huit pics sur la configuration déformée. L'autre vibration possède deux maximums. Un nombre égal à 2 peut être associé à cette vibration tangente à la fibre neutre. C'est la raison pour laquelle deux dédoublements sont observés.

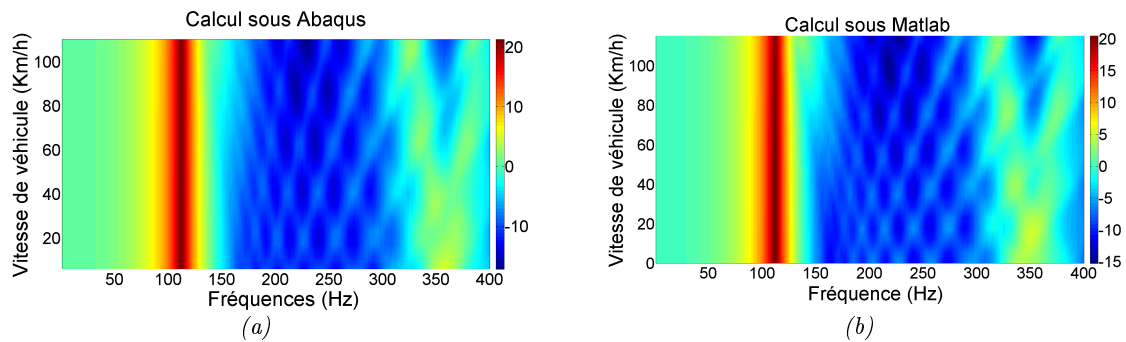


FIGURE 5.12 – Cartographie de réaction verticale au centre de roue sous Abaqus (gauche) et Matlab (droite)

En excitant en déplacement imposé (au lieu d'un effort imposé) en base de pneu $u = 1e^{i\omega t}$, les mêmes résultats sont obtenus (cf. figure 5.13).

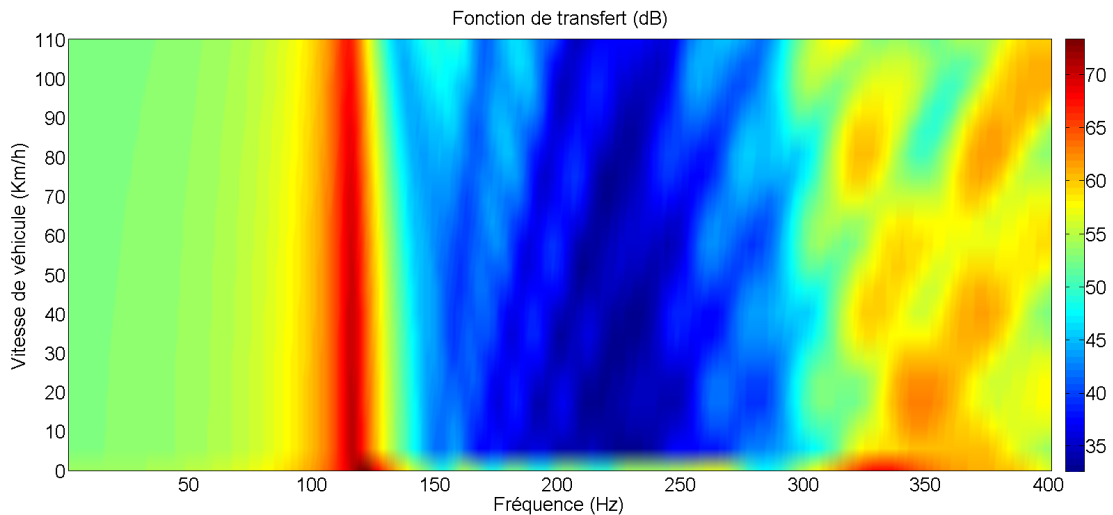


FIGURE 5.13 – Réponse de l'anneau au problème de déplacement imposé

5.4 Les effets de rotation sur un MEF Pneu/Roue/Cavité (PRC) complet

5.4.1 Description rapide du MEF PRC

Les modèles de pneumatiques disponibles chez PSA Peugeot Citroën sont fournis essentiellement par le manufacturier Michelin. Les modèles numériques du pneumatique se composent des matrices de masse, de raideur et d'amortissement condensées (ou super éléments). Seuls les degrés de liberté physiques du centre roue et de l'aire de contact sont accessibles. Ils peuvent être utilisés comme nœuds d'excitation et/ou d'observation pour des calculs statiques et dynamiques sans rotation. Aucun modèle éléments finis prenant en compte les effets tournants n'est disponible à ce jour. Pour contourner cette limite, un MEF est en cours de développement en interne afin d'intégrer les effets de rotation. Le modèle Michelin reste comme une référence pour valider la construction de ce modèle à l'arrêt.

Le pneumatique est composé de trois parties principales : la bande de roulement, les patins en caoutchouc et les flancs. Chaque partie possède des propriétés et des paramètres différents. La bande roulement et les flancs sont modélisés à l'aide de coques orthotropes. Les patins en caoutchouc sont modélisés par des hexaèdres orthotropes. Les paramètres à identifier sont résumés dans le tableau 5.3. Ils doivent respecter les conditions d'orthotropie suivantes :

– pour les flancs et la bande de roulement :

$$\nu_{12}^{fl} < \sqrt{\frac{E_1^{fl}}{E_2^{fl}}} \quad \nu_{12}^{bdr} < \sqrt{\frac{E_1^{bdr}}{E_2^{bdr}}}$$

– pour les patins en caoutchouc :

$$\nu_{ij} > \sqrt{\frac{E_i}{E_j}} \quad 1 - \nu_{12}\nu_{13} - \nu_{13}\nu_{23} - \nu_{12}\nu_{23} - 2\nu_{12}\nu_{23}\nu_{13} > 0$$

Partie du pneumatique	Paramètres à identifier
Bande de roulement	$E_1^{bdr} E_2^{bdr} G_{12}^{bdr} G_{13}^{bdr} G_{23}^{bdr} \nu_{12}^{bdr} \rho^{bdr}$
flancs	$E_1^{fl} E_2^{fl} G_{12}^{fl} G_{13}^{fl} G_{23}^{fl} \nu_{12}^{fl} \rho^{fl}$
Patins caoutchoucs	$E_1^{pa} E_2^{pa} E_3^{pa} G_{12}^{pa} G_{13}^{pa} G_{23}^{pa} \nu_{12}^{pa} \nu_{13}^{pa} \nu_{23}^{pa} \rho^{bdr}$

TABLE 5.3 – Les paramètres du modèle PRC

La cavité d'air est modélisée à l'aide d'éléments acoustiques 3D. La roue en tôle est modélisée avec des éléments coques. La roue en alliage d'aluminium est maillée en volumique.

L'identification des paramètres du modèle PRC est réalisée dans la configuration gonflée et écrasée. Les paramètres du modèle analytique d'anneau circulaire, du modèle MEF poutre, du modèle MEF coque, du modèle MEF PRC complet, sont identifiés à l'aide du modèle de Michelin.

La filière d'identification utilisée s'appuie sur Matlab pour ses fonctionnalités d'optimisation et Abaqus adapté pour des calculs non-linéaires et des calculs multi-étapes comme par exemple :

- calcul de mise sous pression et d'écrasement au sol : A l'état initial, une pression est mise dans le pneu et une charge est imposée au centre de roue. La base de roue est mise en contact avec une surface rigide. Ces calculs incluent l'effet des grands déplacements.
- calculs dynamiques (linéaires) autour de cette configuration déformée permettant de déterminer les modes propres de vibrations, des fonctions de transfert...

Matlab dispose de fonctionnalités d'optimisation non-linéaire sous contraintes avec fonction mono-objectif ou multi-objectifs.

5.4.2 Validation du modèle PRC à l'arrêt

Pour valider le modèle PRC à l'arrêt, des mesures expérimentales ont été réalisées sur un pneumatique Michelin monté sur une roue en aluminium, mis sous une pression de 2.4 bar et mis sous une charge de 400 kg. Le pneumatique est excité à l'aide d'un marteau de choc sur des points marqués sur la figure 5.14. Des accéléromètres 3D sont utilisés pour mesurer les réponses. Ils sont disposés sur des points d'observation autour du pneumatique (cf. figure 5.15) afin de décrire les déformées propres du pneumatique. Les fonctions de transfert sont utilisées pour extraire les fréquences propres. Les courbes sur la figure 5.16 sont des exemples d'accéléérations dans la direction Z créée par trois excitations selon X, Y et Z. Elles permettent de calculer les fréquences de résonance ainsi que les taux d'amortissement. Le mode à 230.2 Hz est peu amorti. C'est le premier mode de cavité. Par contre, les modes du pneumatique sont nettement plus amortis. La première comparaison entre le calcul et la mesure sert à valider des modes. A chaque fréquence extraite, la déformée du pneumatique est observée pour identifier les modes. La même chose est utilisée dans le calcul. Compte tenu de la rigidité de la roue en aluminium, on utilise des éléments rigides pour la roue. Dans un premier temps, la cavité d'air n'est pas modélisée. La validation des modes de cavité d'air et de la roue sera discutée dans la partie incluant l'effet de rotation. Après identification, les résultats de calcul et ceux de la mesure sont très proches (cf. figure 5.18). En conclusion, le modèle numérique du pneumatique identifié est validé à l'arrêt.

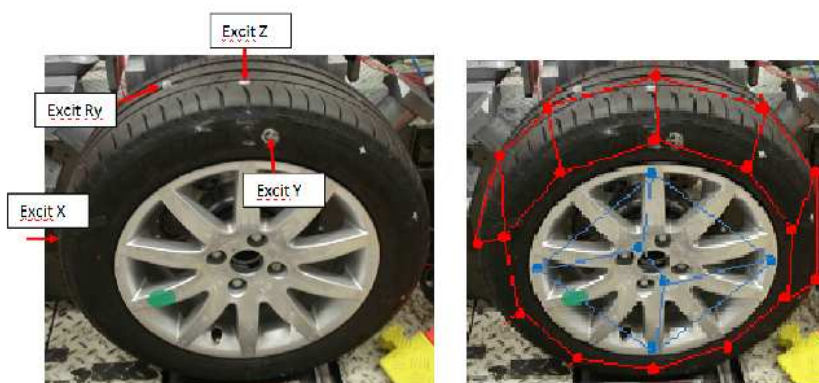


FIGURE 5.14 – Analyse modale expérimentale du pneumatique : points de chargement (gauche) et maillage expérimental (droite)

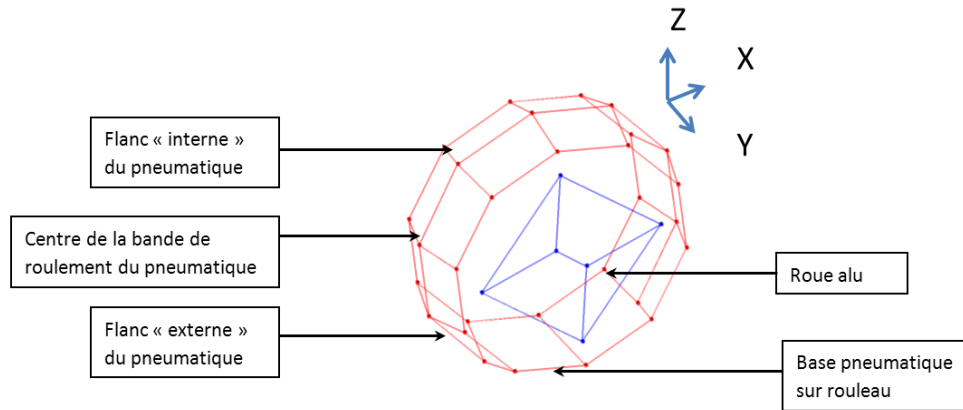


FIGURE 5.15 – Distribution des points des mesures

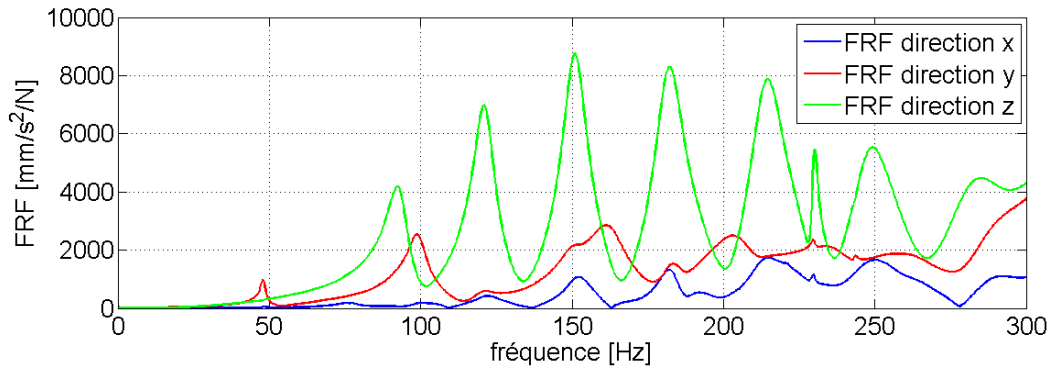


FIGURE 5.16 – Fonction de transfert de l'accélération du point de mesure en excitant en trois directions

5.4.3 Validation du modèle PRC en rotation

Une fois le modèle numérique PRC validé à l'arrêt, l'effet de rotation est ajouté. La validation est réalisée par la comparaison des effets tournants obtenus par le calcul et par la mesure. Le moyen d'essai utilisé est illustré sur la figure 5.17 : le marbre sur lequel la roue est fixée en son centre est conçu de manière à être le plus rigide possible afin de ne interférer avec les mesures sur la bande fréquentielle d'intérêt. La rotation autour de l'axe de la roue est laissée libre. Une charge est appliquée lorsque le pneumatique est à l'arrêt. A sa base, le pneumatique est en contact avec un rouleau motorisé qui permet de simuler un roulage. Le rouleau peut être équipé de secteurs gravillonnés ou laissé nu avec une surface lisse. Les capteurs de force sont placés au niveau de l'interface du centre de roue et permettent de mesurer le torseur des efforts F_x, F_y, F_z, M_x et M_z . Pour chacune de ces grandeurs, la cartographie est construite en fonction de la fréquence et de la vitesse de rotation.

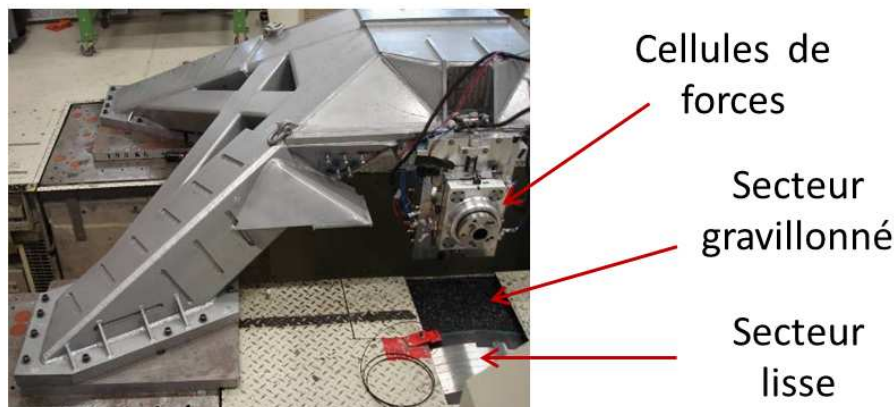


FIGURE 5.17 – Bancs à rouleaux utilisés pour la mesure d'ensembles montés tournant

Le pneu étudié est celui de la partie précédente monté sur une roue en tôle et une autre roue en aluminium. Les figures 5.19 et 5.20 sont des exemples de cartographies de la force verticale et du moment longitudinal dans le cas d'un pneu assemblé avec une roue tôle et une roue alu respectivement. L'excitation étant périodique de période le tour de rouleau, les différents ordres apparaissent en diagonale. En s'accommodant de ce phénomène, l'effet de dédoublement lié à la vitesse de rotation apparaît. Le premier dédoublement sur les deux cartographies de la force verticale correspondent aux deux premiers modes transversaux du pneu. Ensuite, on observe les dédoublements associés aux modes de la cavité d'air. Ces modes sont à 250 Hz pour les deux roues. L'effet de la roue est faible sur ces modes. Enfin, on trouve le dédoublement du mode de la roue tôle (224Hz). Comme la raideur de la roue alu est plus grande que celle de la roue tôle, le mode de la roue alu apparaît à plus haute fréquence. Sur les cartographies du moment longitudinal, les mêmes phénomènes physiques sont observés. Les autres modes du pneumatique ne sont pas bien observés car on ne peut pas éliminer les bruits de mesures provenant des harmoniques de tour de rouleau. Une cartographie équivalente calculée sous Abaqus sur le modèle PRC soumis à un déplacement unitaire imposé est représentée. L'excitation n'est pas représentative du roulage sur les gravillons abordés dans les chapitres suivants mais elle permet de voir les effets liés à la rotation. Par conséquent, la comparaison/validation par rapport aux essais s'effectue en termes d'apparition et de localisation de dédoublements et pas en termes de niveau. L'état stationnaire est celui du pneumatique en contact avec le sol lisse. Ensuite, les déplacements unitaires verticaux sont imposés à tous les points dans l'aire de contact. Les cartographies de la force verticale et du moment longitudinal sont tracées respectivement sur la figure 5.21 et la figure 5.22. Ces dernières établies pour la roue tôle figure 5.21 et la roue alu figure 5.22 peuvent être comparées qualitativement aux cartographies construites à partir des mesures réalisées. Une comparaison quantitative, i.e. en niveau, pourra être possible une fois qu'une excitation pneu/chaussée réaliste aura été déterminée. En termes de qualité de résultats, on retrouve bien les dédoublements de modes radiaux de pneumatique fonctions de l'ordre du mode, n , et de la vitesse de la rotation, Ω , donnée approximativement par $+/- n\Omega$. A partir de la réponse à l'arrêt, nous parvenons à identifier les modes du pneumatique, les

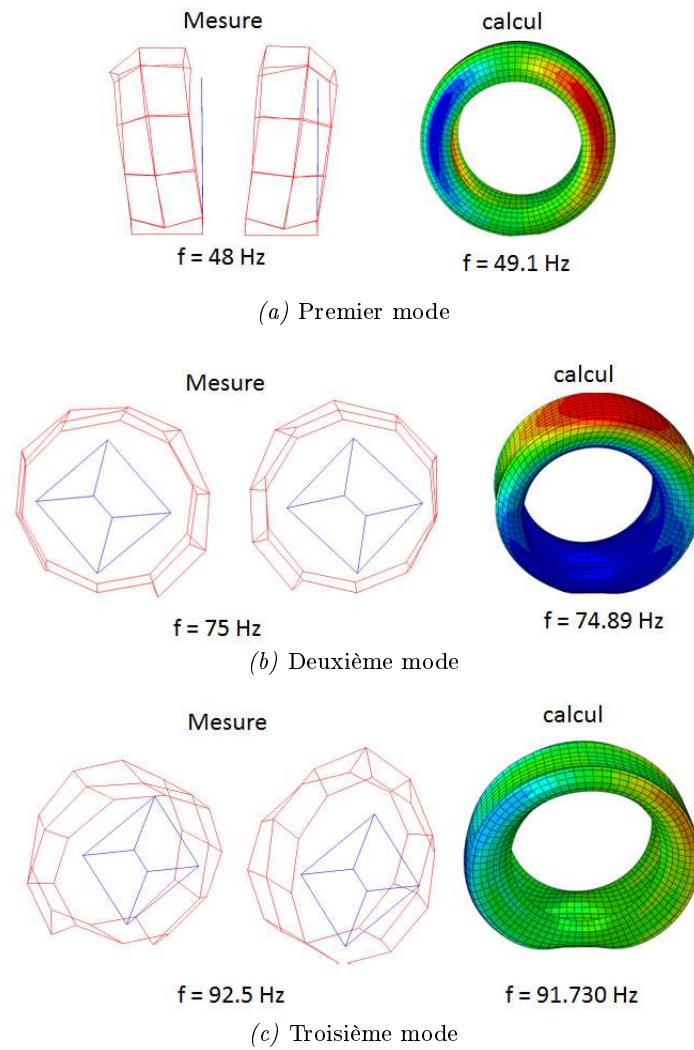


FIGURE 5.18 – Comparaison des modes entre le calcul et la mesure

modes de roue et le premier mode de cavité intervenant sur les différents dédoublements constatés sur 0-400Hz. Les cartographies de roue tôlée permettent de faire ressortir le mode de basculement de roue autour de 224Hz associé au mode transversal de pneumatique. Pour la roue alu, ce mode est absent car celui-ci est beaucoup plus haut en fréquence. Cela permet de valider l'effet de rotation ajouté au modèle PRC.

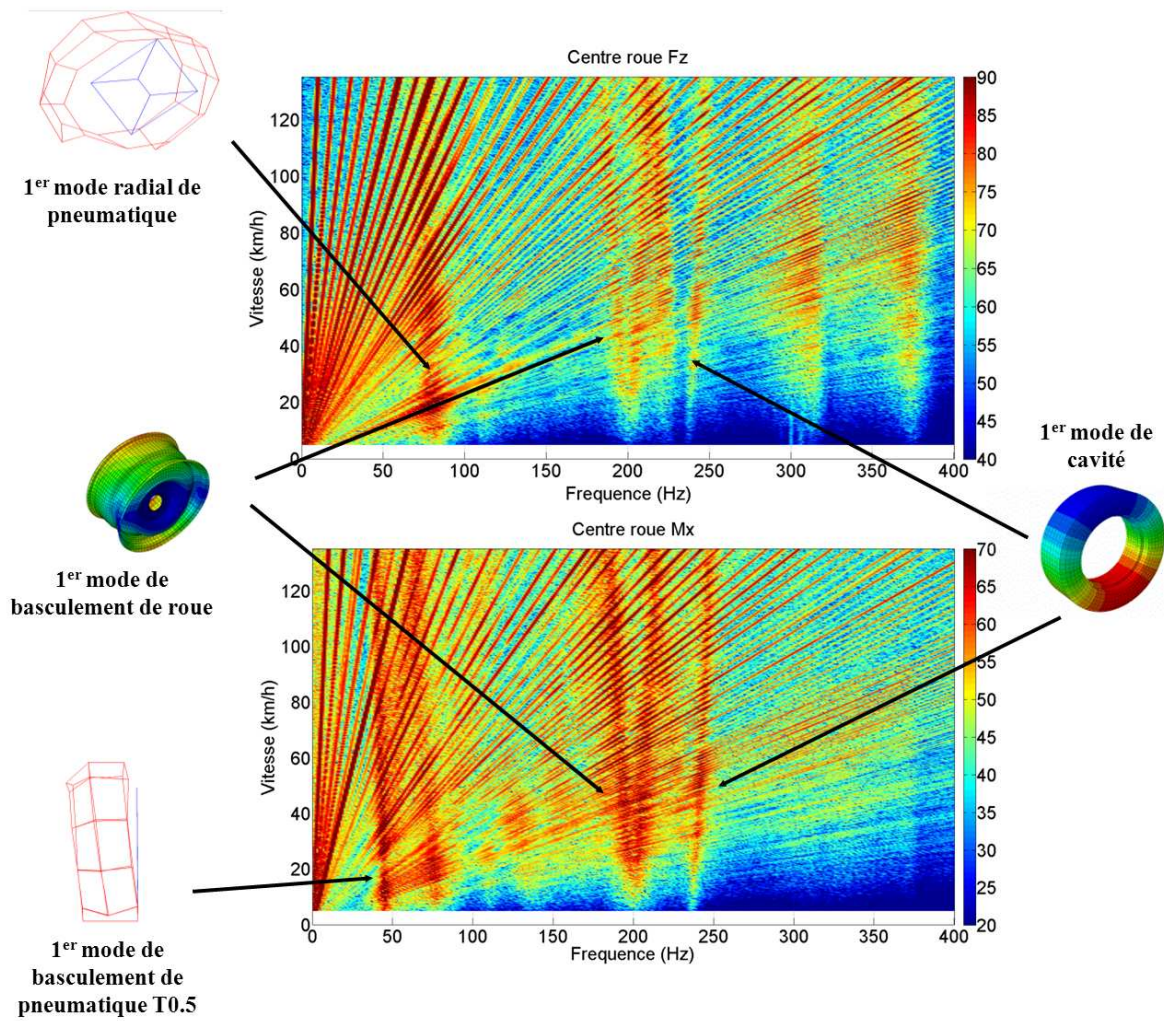


FIGURE 5.19 – Fonction de transfert mesurée de la force verticale et du moment longitudinal au centre de la roue tôle

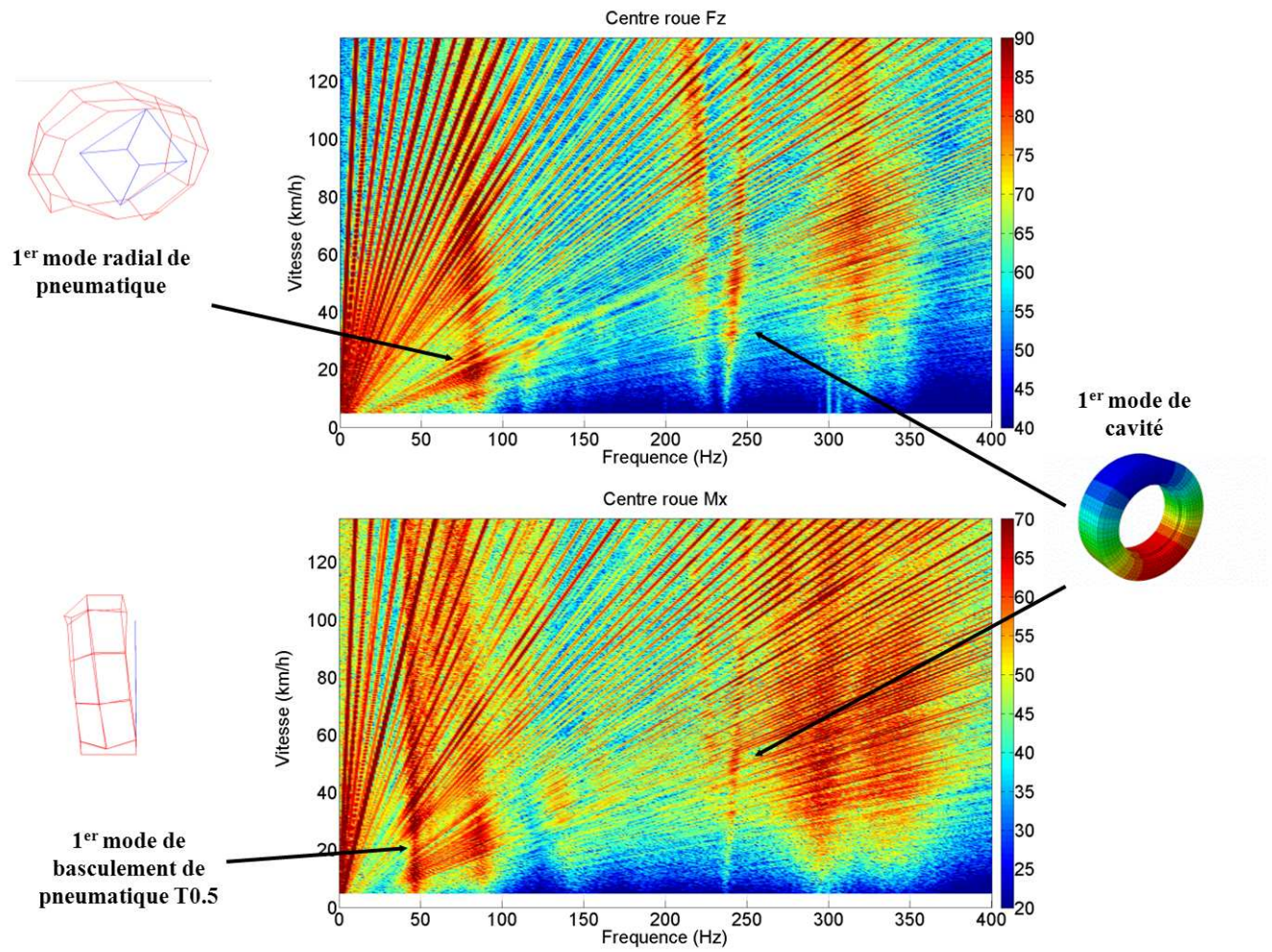


FIGURE 5.20 – Fonction de transfert mesurée de la force verticale et du moment longitudinal au centre de la roue alu

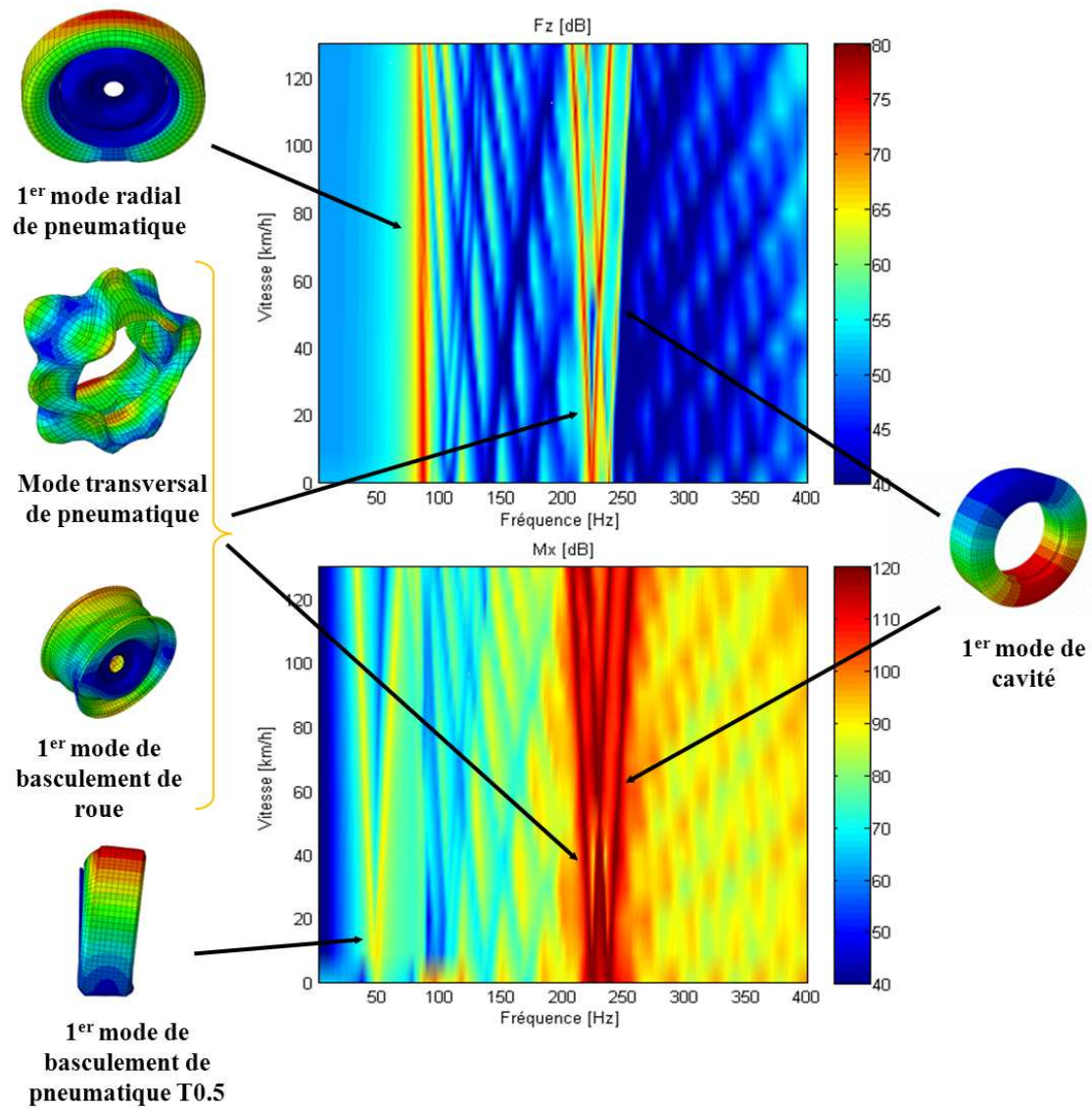


FIGURE 5.21 – Fonction de transfert calculée de la force verticale et du moment longitudinal au centre de la roue tôle

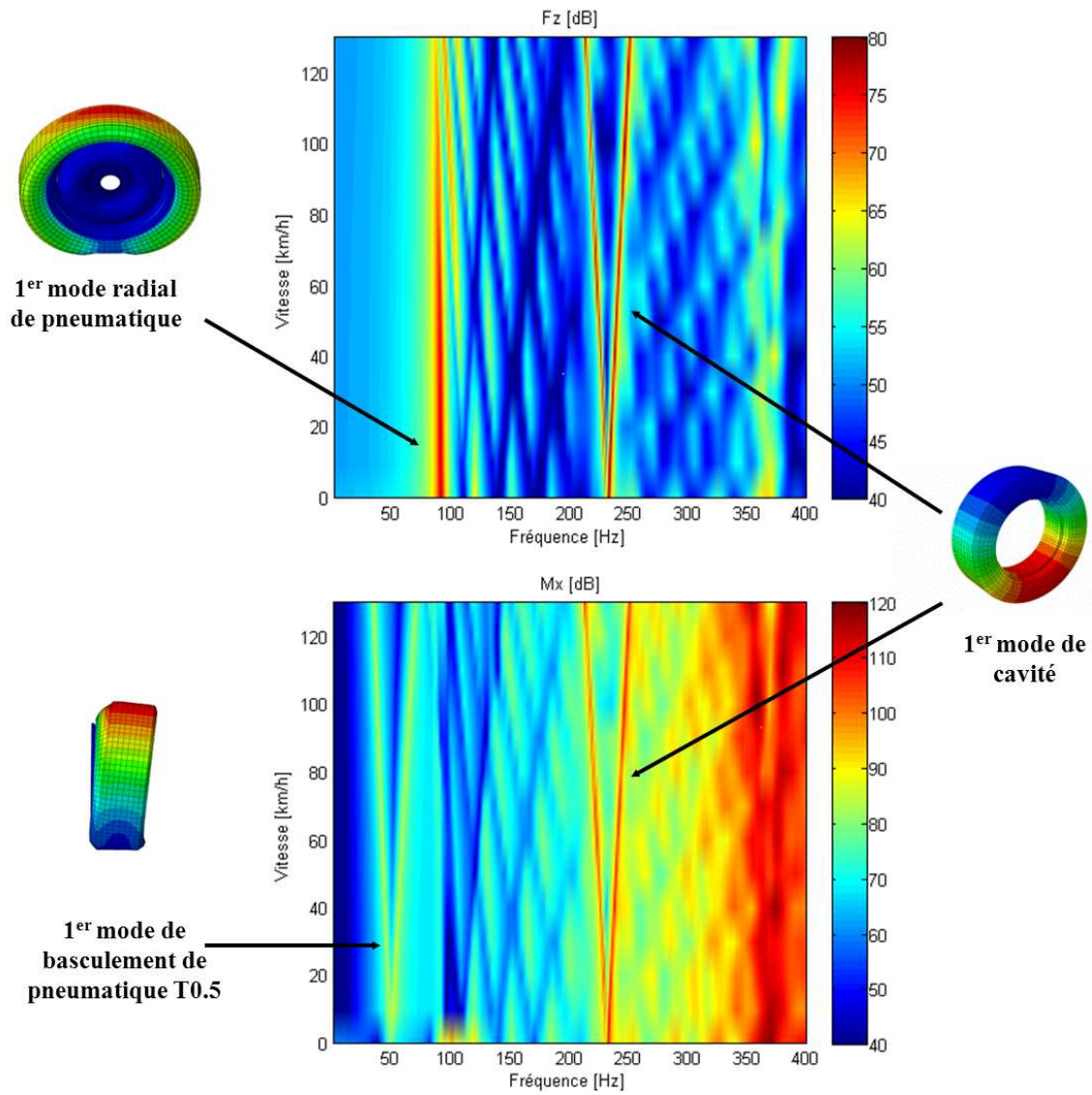


FIGURE 5.22 – Fonction de transfert calculée de la force verticale et du moment longitudinal au centre de la roue alu

5.5 Conclusion

Les simulations du modèle de l'anneau circulaire sous Abaqus et la résolution des équations analytiques sous Matlab ont été présentées. Les faibles écarts entre les résultats permettent de valider les formulations analytiques et les résolutions numériques. Ces écarts sont expliqués par l'hypothèse de non-linéarité en géométrie. Sous Abaqus, la déformation sur la section droite des éléments de poutre est prise en compte. Par contre, sous Matlab, aucune déformation n'est introduite. Cette hypothèse est validée pour le cas réel (une pression de gonflage inférieure à 4 bar et un poids de véhicule de l'ordre de 400kg). En ce qui concerne le modèle PRC, la construction du modèle a été décrite. Avec les paramètres identifiés, les réponses vibratoires du pneumatique entre le calcul et la mesure sont très proches. Les effets de rotation sont mis en évidence et sont similaires entre le calcul et la mesure expérimentale. Il reste à corrélérer l'amplitude de la réponse du calcul avec celle de la mesure. C'est la raison pour laquelle un modèle de contact entre le pneumatique et la chaussée est développé afin d'évaluer la fonction de transfert au centre de roue. Les hypothèses de résolution d'un problème de contact sont détaillées dans le chapitre 6.

Modèles de contact

Ce chapitre présente des modèles de contact du pneumatique sur une chaussée. Tout d'abord, le modèle 1D est construit à l'aide d'un système composé d'une masse et d'un ressort. Ensuite, le modèle 2D ainsi que les approches du calcul de contact associées sont proposés. Enfin, le modèle 3D est construit en appliquant ces approches.

Sommaire

6.1	Introduction	130
6.2	Études analytiques et numériques de systèmes simples - contact 1D	131
6.2.1	Système élémentaire amorti masse/ressort/amortisseur	131
6.2.2	Systèmes de deux masse/ressort en série	134
6.3	Modèle d'anneau circulaire en contact avec une chaussée - contact 2D	138
6.3.1	Description des configurations	139
6.3.2	Calcul statique	141
6.3.3	Calcul dynamique	146
6.3.4	Application numérique et validations	147
6.4	Modèle de contact complet - contact 3D	151
6.4.1	Contact statique	151
6.4.2	Contact dynamique	154
6.4.3	Application numérique	157
6.5	Conclusion	160

6.1 Introduction

Le contact d'un pneumatique sur une chaussée rugueuse est difficile à modéliser à cause de la complexité des phénomènes physiques qui se produisent dans l'aire de contact. La prise en compte de la texture d'une chaussée amène des difficultés dans la résolution des équations régissant le contact. Ce chapitre propose des modèles de contact entre un pneumatique et une chaussée avec des hypothèses simplificatrices pour accélérer le calcul. Ces hypothèses simplificatrices sont validées par des modèles simples pour lesquels nous disposons des solutions analytiques (des approches de calcul sont validées par des comparaisons avec les références). La structure de ce chapitre est décrite dans la figure 6.1 ci-dessous :

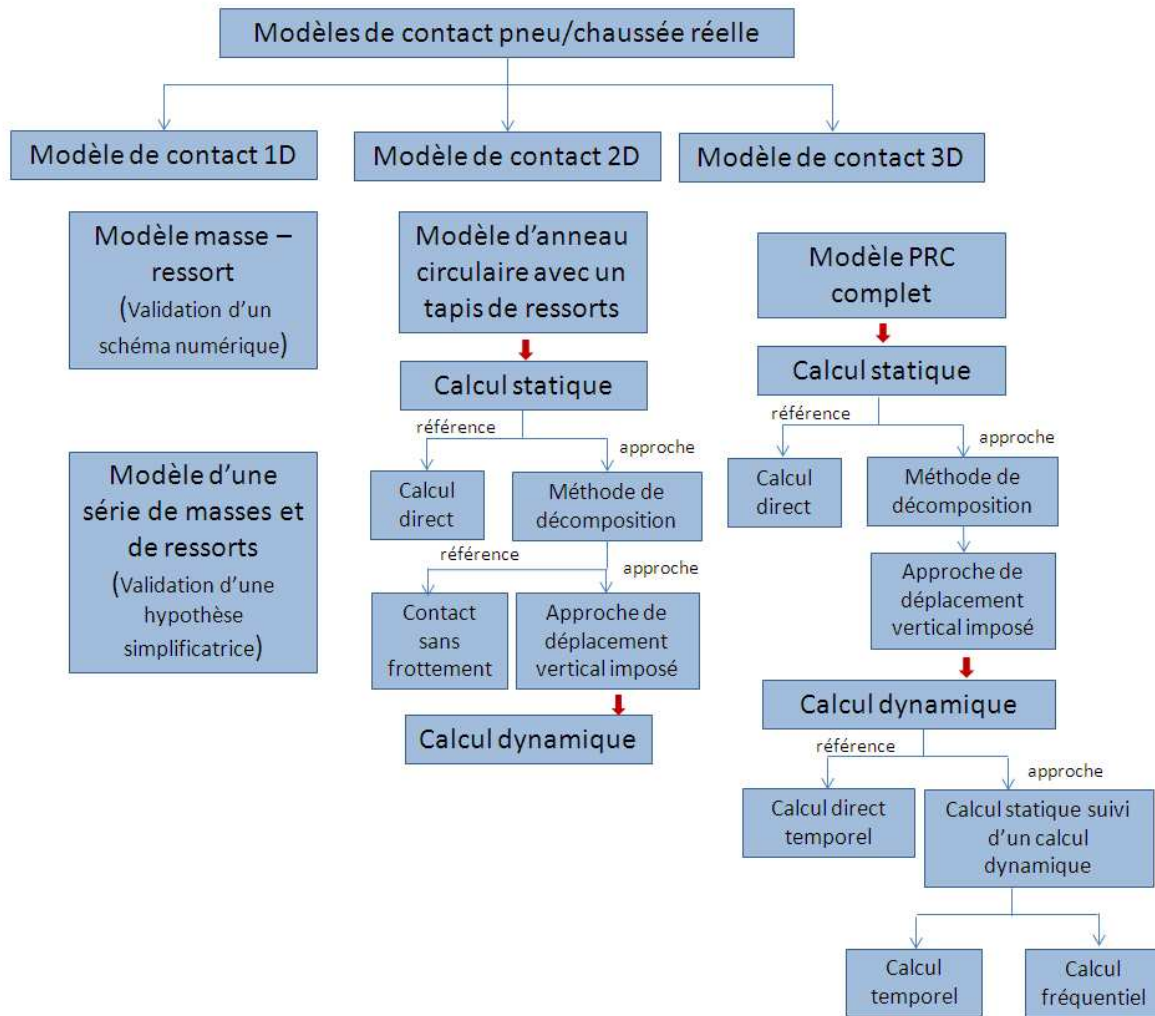


FIGURE 6.1 – La structure du chapitre.

Dans le cadre de cette thèse, nous n'étudions que le contact sans frottement.

6.2 Études analytiques et numériques de systèmes simples - contact 1D

6.2.1 Système élémentaire amorti masse/ressort/amortisseur

On considère un système constitué d'une masse m , d'un amortissement c et d'un ressort k représentant de manière simplifiée le comportement vertical d'un pneumatique. On suppose qu'il se déplace à une vitesse horizontale constante et peut être potentiellement en contact avec une surface rigide. Sans prendre en compte la force de gravité, l'équation dynamique du mouvement de ce système s'écrit :

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = f_c(t) \quad (6.1)$$

où $u(t)$ est le déplacement vertical de la masse, $f_c(t)$ la force de contact entre la masse et la surface.

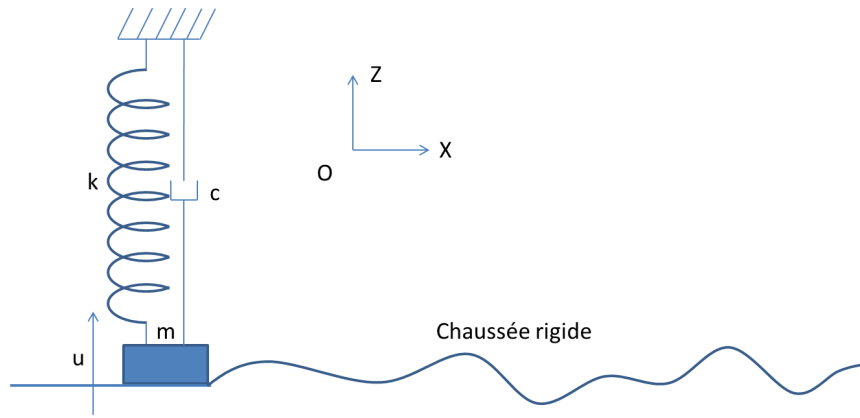


FIGURE 6.2 – Système masse-ressort-amortisseur.

La condition de contact masse/chaussée se traduit par la relation géométrique suivante de non-interpénétration :

$$\begin{cases} u(t) \geq u^{ch} \\ f_c(t) \geq 0 \end{cases} \quad (6.2)$$

où u^{ch} est la hauteur de la surface. De plus, la condition dite de contact de Signorini s'écrit :

$$(u(t) - u^{ch}) f_c(t) = 0 \quad (6.3)$$

On admet qu'il n'y a qu'une force de réaction verticale au contact.

A l'instant initial, le système est supposé au repos :

$$u(0) = 0; \quad v(0) = \dot{u}(0) = 0; \quad (6.4)$$

S'il y a contact, la solution du problème est donnée par :

$$\begin{aligned} u(t) &= u^{ch} \\ f_c(t) &= m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) \end{aligned} \quad (6.5)$$

En absence de contact, la solution est celle de la vibration libre :

$$\begin{aligned} u(t) &= e^{-\xi\omega_0(t-t_0)} \left(u_0 \cos(\omega_d(t-t_0)) + \frac{v_0 + \xi\omega_0 u_0}{\omega_d} \sin(\omega_d(t-t_0)) \right) \\ f_c(t) &= 0 \end{aligned} \quad (6.6)$$

où t_0 correspond à l'instant de sortie du contact. $u_0 = u(t_0)$ et $v_0 = v(t_0)$ sont respectivement le déplacement et la vitesse de la masse à cet instant, ω_0 et ω_d correspondent aux fréquences propres du système non-amorti et amorti respectivement. Leurs expressions sont données par :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \omega_d = \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}$$

avec

$$\xi = \frac{c}{2\sqrt{km}}$$

De plus, la solution peut être écrite en utilisant la fonction de Green $G(t)$ comme suit :

$$u(t) = \int_0^t G(\tau) f_c(t - \tau) d\tau \quad (6.7)$$

Détermination de la fonction Green :

La fonction de Green est la solution dans la domaine fréquentiel de :

$$(-\omega^2 m + i\omega c + k) G(\omega) = 1 \quad (6.8)$$

Donc,

$$G(\omega) = \frac{1}{m} \frac{1}{-\omega^2 + 2i\xi\omega\omega_0 + \omega_0^2} \quad (6.9)$$

En appliquant une transformée de Fourier inverse à $G(\omega)$:

$$G(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (6.10)$$

On obtient :

$$G(t) = \frac{1}{m\omega_d} e^{-\xi\omega_0 t} \sin(\omega_d t) H(t) \quad (6.11)$$

où $H(t)$ est la fonction de Heaviside, i.e. $H(t) = 0, \forall t < 0$ et $H(t) = 1, \forall t \geq 0$.

Remarque :

Le choc lors de l'entrée en contact n'est pas pris en compte dans la modélisation. Donc, le champ de déplacement n'est pas dérivable au moment où la masse entre en contact et quitte le contact. Cela implique que la vitesse et l'accélération de la masse à cet instant ne sont pas définies. La force de contact ne peut donc pas être estimée. Mais on peut définir l'impulsion :

$$\int_{t_c - \epsilon}^{t_c + \epsilon} f(t) dt = m[v(t_c^+) - v(t_c^-)] \quad (6.12)$$

où t_c est l'instant la masse entre en contact ou quitte le contact. ϵ est une petite variation de temps, v la vitesse de la masse.

On fait l'hypothèse que le temps de mise en contact est négligeable. Une fois mise en contact, la masse

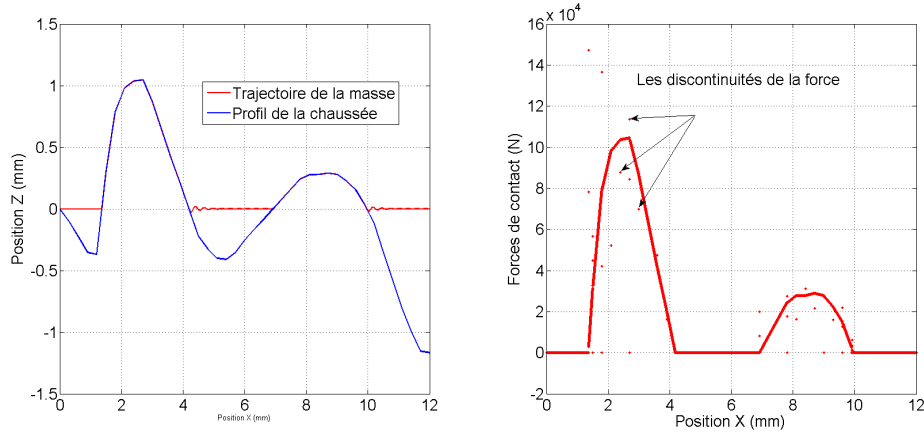


FIGURE 6.3 – La solution analytique de contact du système masse-ressort.

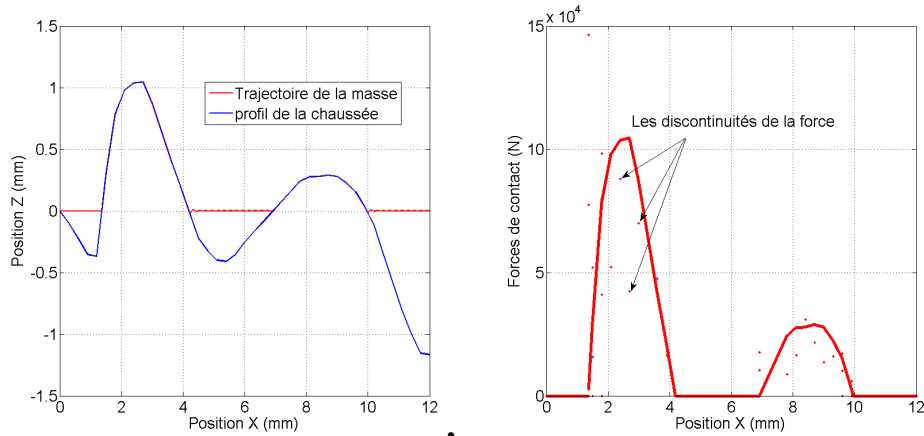


FIGURE 6.4 – La solution numérique à l'aide des fonctions de Green pour le contact du système masse-ressort.

est pilotée par la chaussée. La vitesse et l'accélération de la masse sont alors définies par celles de la chaussée :

$$v(t_c) = \frac{du^{ch}}{dt}(t_c) \quad a(t_c) = \frac{d^2u^{ch}}{dt^2}(t_c) \quad (6.13)$$

où t_c est l'instant d'entrée en contact, v et a représentent respectivement la vitesse et l'accélération de la masse. Cette hypothèse a été utilisée dans la thèse de Meftah (cf Meftah[66]). La force de contact est calculée par l'expression (6.5). Cela crée des discontinuités sur la courbe de force dans les figures (6.3) (6.4) et (6.5). Les méthodes numériques donnent des résultats proches des solutions analytiques. Les différences sont dues aux discontinuités de la force de contact qui sont mal estimées. Pour avoir une estimation plus précise à ces points, il faut modéliser le choc du contact. Afin d'éviter cette difficulté, on introduit une raideur de contact (modèle de contact de Hertz [43], de multi-aspérités [27] ...) ou un troisième corps dont le comportement de contact est statique. Quelques comportements des solides en contact statique sont exprimés par les lois de contact (cf Cesbron [22] et Dubois [27]). Une

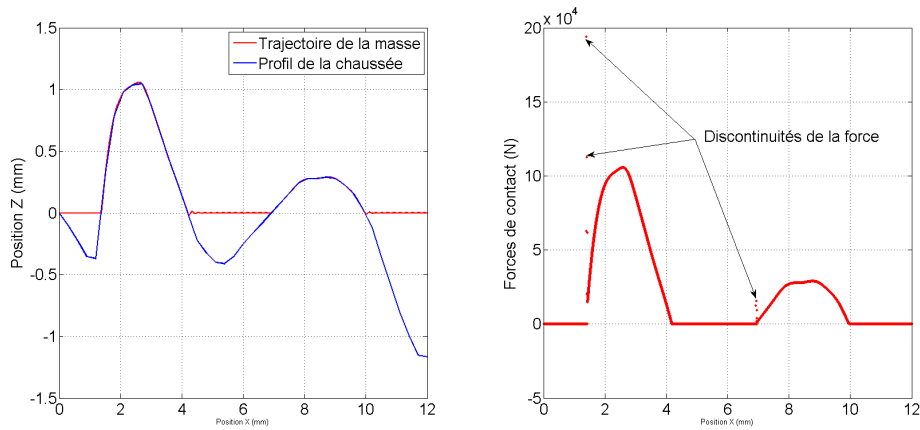


FIGURE 6.5 – La solution numérique de la méthode de Newmark appliquée au contact du système masse-ressort.

discussion sur l'importance de l'effet dynamique au niveau du troisième corps est présentée dans la partie suivante. Comme la solution de la méthode de Newmark est proche de la solution analytique, cette méthode est retenue pour le calcul dynamique direct.

6.2.2 Systèmes de deux masse/ressort en série

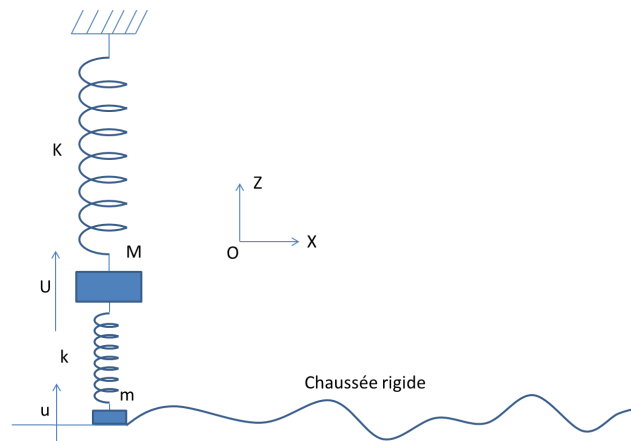


FIGURE 6.6 – Système d'une série de masses et de ressorts.

Un système de deux masse/ressort en série vise à représenter de manière distincte les deux parties du pneumatique que sont la carcasse et les patins en caoutchouc. Le premier ressort représente le comportement vertical de carcasse avec sa raideur K et sa masse M . Le deuxième ressort modélise le comportement de la partie des patins en caoutchouc dont la raideur et la masse sont k et m . On

introduit les notations suivantes :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{M}}; \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Comme la fréquence propre des patins est très grande par rapport à celle de la carcasse, on admet que :

$$m \ll M; \quad \omega_0 \ll \omega_1 \quad (6.14)$$

Les équations du mouvement de deux masses s'écrivent sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} -KU + k(u - U) &= M\ddot{U} \\ -k(u - U) + F_c &= m\ddot{u} \end{aligned} \quad (6.15)$$

Les formulations équivalentes dans le domaine fréquentiel sont :

$$\begin{aligned} (K + k - M\omega^2)U - ku &= 0 \\ -kU + (k - m\omega^2)u &= F_c \end{aligned} \quad (6.16)$$

Les fréquences propres du système sont déterminées par l'équation suivante :

$$(K + k - M\omega^2)(k - m\omega^2) - k^2 = 0 \quad (6.17)$$

Si on divise l'expression (6.17) par mM :

$$\left(\omega_0^2 + \frac{k}{M} - \omega^2\right)(\omega_1^2 - \omega^2) - \frac{k^2}{mM} = 0 \quad (6.18)$$

On obtient :

$$\omega^4 - \left(\omega_0^2 + \omega_1^2 + \frac{k}{M}\right)\omega^2 + \omega_0^2\omega_1^2 = 0 \quad (6.19)$$

Les deux solutions de cette équation sont :

$$\tilde{\omega}_{1,2}^2 = \frac{\omega_0^2 + \omega_1^2 + \frac{k}{M} \pm \sqrt{(\omega_0^2 + \omega_1^2 + \frac{k}{M})^2 - 4\omega_0^2\omega_1^2}}{2} \quad (6.20)$$

L'hypothèse (6.14) permet d'écrire :

$$\begin{aligned} m \ll M; \quad \omega_0 \ll \omega_1 \\ \frac{k}{M} = \frac{k}{m} \frac{m}{M} \ll \frac{k}{m} = \omega_1^2 \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} \frac{\omega_0^2 + \frac{k}{M}}{\omega_1^2} &\ll 1 \\ \frac{\omega_0^2}{\omega_1^2} - \frac{k^2}{mM\omega_1^4} &= \frac{\omega_0^2}{\omega_1^2} - \frac{k}{M\omega_1^2} \ll 1 \end{aligned}$$

Les solutions données par (6.20) peuvent être alors simplifiées :

$$\tilde{\omega}_{1,2}^2 = \frac{1}{2} \left(\omega_0^2 + \omega_1^2 + \frac{k}{M} \pm \omega_1^2 \sqrt{1 + 2\frac{\omega_0^2 + \frac{k}{M}}{\omega_1^2} - 4\frac{\omega_0^2}{\omega_1^2}} \right) \quad (6.21)$$

On obtient donc :

$$\tilde{\omega}_{1,2}^2 = \frac{1}{2} \left(\omega_0^2 + \omega_1^2 + \frac{k}{M} \pm \left(\omega_1^2 - \omega_0^2 + \frac{k}{M} \right) \right)$$

Soit :

$$\begin{cases} \tilde{\omega}_1^2 = \omega_0^2 \\ \tilde{\omega}_2^2 = \omega_1^2 + \frac{k}{M} \end{cases}$$

En conclusion, la plus petite fréquence propre est celle de la carcasse. En revanche, la plus grande fréquence propre est changée. En basses fréquences, la dynamique de la deuxième masse ne modifie pas les fréquences propres. Peut-on négliger la masse des patins ? Afin de répondre à cette question, on écrit la solution sous la forme de la fonction Green. On rappelle la formulation générale (6.7) :

$$u(t) = \int_0^t G(\tau) f_c(t - \tau) d\tau$$

On cherche le déplacement u sous l'excitation exercée sur la masse m . La fonction de Green est alors (6.11) :

$$G = \frac{1}{m\omega_d} e^{-\xi\omega_1\tau} \sin(\omega_d\tau) \quad (6.22)$$

Avec ξ très petit, $\omega_1 = \tilde{\omega}_1$ la fréquence propre associée au mode propre, la fréquence amortie est $\omega_d = \omega_1 \sqrt{1 - \xi^2}$.

Nous avons :

$$u(t) = \int_0^t \frac{1}{m\omega_d} e^{-\xi\omega_1\tau} \sin(\omega_d\tau) f_c(t - \tau) d\tau \quad (6.23)$$

Si on suppose que la force d'excitation $f_c(t)$ varie lentement par rapport à ω_d , on a :

$$u(t) \simeq \left(\int_0^\infty \frac{1}{m\omega_d} e^{-\xi\omega_1\tau} \sin(\omega_d\tau) d\tau \right) f_c(t) \quad (6.24)$$

Il est alors facile de démontrer que :

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{1}{m\omega_d} e^{-\xi\omega_1\tau} \sin(\omega_d\tau) d\tau &= \\ \frac{1}{m\omega_d} \left[\frac{1}{\omega_d^2 + \xi^2\omega_1^2} e^{-\xi\omega_1\tau} (-\xi\omega_1 \sin(\omega_d\tau) - \omega_d \cos(\omega_d\tau)) \right]_0^\infty &= \\ = \frac{1}{m\omega_d} \frac{\omega_d}{\omega_1^2} = \frac{1}{m\omega_1^2} = \frac{1}{k} \end{aligned} \quad (6.25)$$

Soit :

$$u(t) = \frac{f_c(t)}{k} \quad (6.26)$$

Cette relation montre un comportement statique du contact, i.e les efforts de contact entre le pneu et la chaussée suivent une loi statique. Cette hypothèse a été utilisée dans la thèse de Dubois [27].

En réalité, si le véhicule roule à une vitesse de $v = 130$ km/h, le temps entre l'entrée d'un point au contact et la sortie de ce même point du contact est d'environ $\frac{1}{360}$ s en supposant que la dimension

de l'aire de contact est de $L = 10$ cm. Donc, la fréquence correspondante est $\frac{L}{v} = 360$ Hertz. Cette fréquence est très petite par rapport à la fréquence de la résonance de la partie des patins. L'hypothèse

de la variation lente de la force d'excitation par rapport à la fréquence de résonance est donc justifiée. Par conséquent, on peut admettre que le contact entre les patins et la chaussée suit une loi statique.

Application numérique

Pour modéliser un pneu chargé et mis en contact avec la chaussée, le système d'une série de deux ressorts et deux masses est soumis à une force équivalente au poids du véhicule. Les équations (6.15) devient :

$$\begin{aligned} -KU + k(u - U) &= M\ddot{U} \\ -k(u - U) + F_c &= P + m\ddot{u} \end{aligned} \quad (6.27)$$

A l'instant initial, les deux masses sont au repos. Les valeurs des paramètres sont données dans le tableau ci-dessous :

paramètres	valeur	univité
M	8	kg
m	0.08 ou 0	kg
K	3158.3	N/mm
k	458	N/mm
P	4000	N

TABLE 6.1 – Les paramètres du modèle de deux masses et deux ressorts

Le schéma de Newmark est utilisé pour résoudre les équations (6.27) pour deux cas $m = 0$ et $m = 0.08$ kg. Dans le cas $m = 0$, l'effet dynamique du deuxième ressort est négligé. En revanche, dans le second cas, l'effet d'inertie de la deuxième masse est pris en compte. La réaction au centre de roue qui est celle au point d'encastrement (cf. la figure 6.3) est calculée par la relation :

$$R = KU(t) \quad (6.28)$$

La condition géométrique de contact est exprimée par :

$$\begin{cases} u \geq u^{ch} & \text{non contact} \\ u < u^{ch} & \text{contact} \end{cases} \quad (6.29)$$

Le système est supposé en mouvement horizontalement à une vitesse constante de 30 km/h sur un profil de chaussée rugueuse. La figure 6.7 montre les résultats numériques dans deux cas : sans masse (courbe rouge) ou avec masse des patins (courbe noire). La figure de gauche montre le trajectoire de la petite masse. Dans les deux cas, ces trajectoires sont très proches. La figure de droite montre la force de réaction au centre roue. L'écart entre les deux courbes rouge et noire est du à l'effet d'inertie des patins. Cet écart reste petit. Donc, l'effet d'inertie est négligeable. Cela est cohérent avec l'analyse théorique menée précédemment.

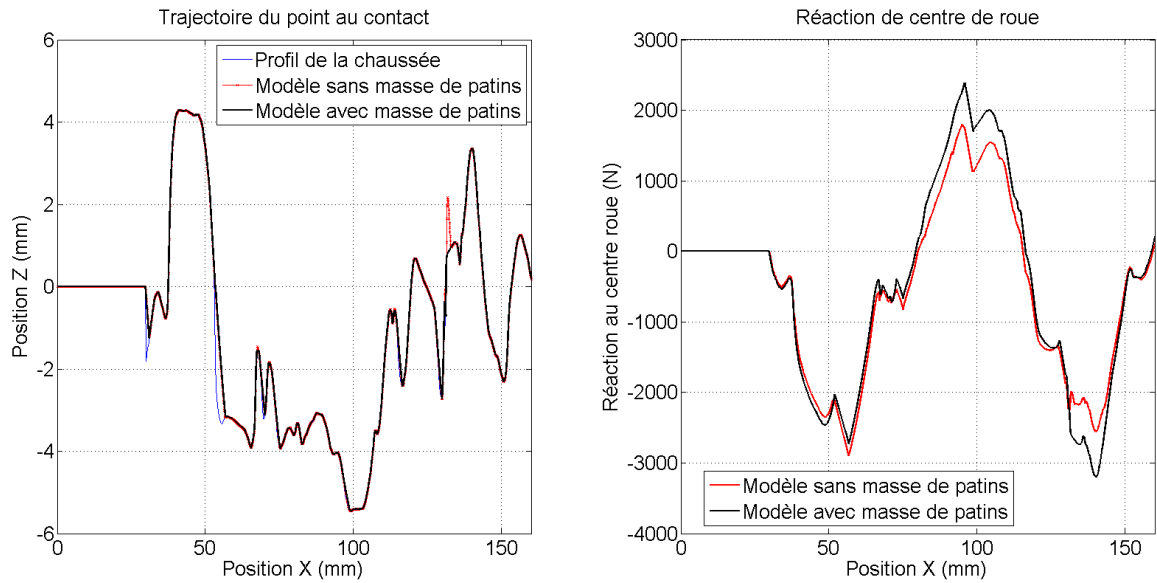


FIGURE 6.7 – Effets dynamiques associés aux patins de caoutchouc.

En conclusion, la masse des patins en caoutchouc peut être négligée pour le calcul dynamique en basses fréquences.

Le modèle des ressorts ne permet d'étudier que le contact vertical, i.e., la force de contact est toujours verticale. Dans le cas plus général du contact sans frottement, la force de contact est normale à la surface de contact qui n'est pas toujours horizontale. Pour modéliser ce type de contact, il faut utiliser un modèle bi-dimensionnel. Un modèle de contact 2D du pneumatique avec une chaussée réelle est détaillé dans la section suivante.

6.3 Modèle d'anneau circulaire en contact avec une chaussée - contact 2D

Dans le chapitre 4, un modèle d'anneau circulaire a été construit pour le comportement vibratoire du pneumatique. Il représente le comportement de la carcasse du pneumatique. La section précédente a montré que la masse de patins peut être négligée. C'est la raison pour laquelle un modèle sans masse sera ajouté autour du modèle d'anneau circulaire. De façon similaire au travail de Kropp [53], on représente les patins du pneumatique par un tapis de ressorts (cf. figure 6.8).

On suppose que les ressorts peuvent s'allonger ou se raccourcir uniquement dans la direction normale à la surface de l'anneau et la raideur des ressorts représente celle des patins en caoutchouc (cf. figure 6.9).

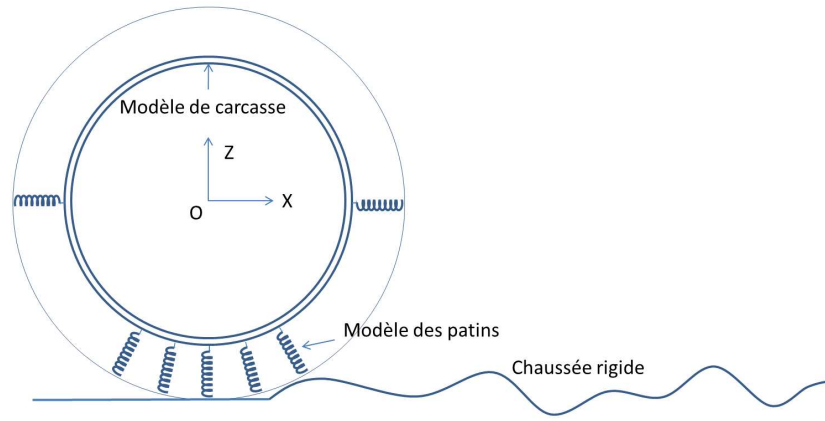


FIGURE 6.8 – Modèle du pneumatique en contact avec la chaussée réelle.

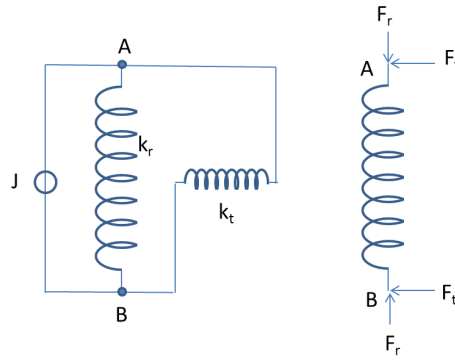


FIGURE 6.9 – Modèle de ressort du patin.

$$\begin{cases} k_r = \text{raideur de patin en caoutchouc} \\ k_t = \infty \\ J = \infty \end{cases} \quad (6.30)$$

où k_r est la raideur radiale, k_t la raideur tangentielle, J la raideur de rotation de ressort.

6.3.1 Description des configurations

A l'état initial, le $i^{\text{ième}}$ noeud sur l'anneau a pour coordonnées (X_i, Z_i) dans le repère OXZ

$$\begin{cases} X_i = R \sin \theta_i \\ Z_i = -R \cos \theta_i \end{cases} \quad (6.31)$$

Et le noeud correspondant sur un patin a pour coordonnées (X_{li}, Z_{li}) :

$$\begin{cases} X_{li} = (R + l_0) \sin \theta_i \\ Z_{li} = -(R + l_0) \cos \theta_i \end{cases} \quad (6.32)$$

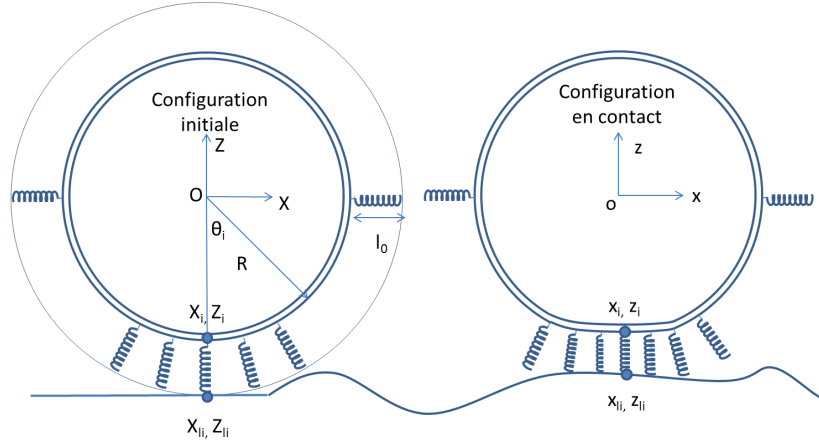


FIGURE 6.10 – Configurations du modèle

où R est le rayon de l'anneau, l_0 la longueur des ressorts à l'état non déformé, θ_i l'angle de ce point par rapport à une référence fixée (cf. figure 6.10).

La configuration déformée est repérée dans le repère oxz . Si le $i^{\text{ième}}$ point sur le patin n'est pas en contact, le ressort correspondant ne se déforme pas. Alors, seule la déformation du point correspondant sur l'anneau se produit :

$$\begin{cases} x_i = X_i + u_{Xi} \\ z_i = Z_i + u_{Zi} \end{cases} \quad \begin{cases} x_{li} = x_i + l_0 \underline{n}_i \underline{e}_X \\ z_{li} = z_i + l_0 \underline{n}_i \underline{e}_Z \end{cases} \quad (6.33)$$

où $\underline{n}_i$ est le vecteur normal à la surface de l'anneau déformé du $i^{\text{ième}}$ ressort à l'état déformé, (u_{Xi}, u_{Zi}) sont les déplacements horizontal et vertical de l'anneau.

Si le $i^{\text{ième}}$ point sur le patin est en contact, le ressort est comprimé de δl_i . Le déplacement du $i^{\text{ième}}$ point sur l'anneau a toujours comme expression : $\underline{u}_i = u_{Xi} \underline{e}_X + u_{Zi} \underline{e}_Z$. Mais il faut ajouter la déformation des patins :

$$\begin{cases} x_i = X_i + u_{Xi} \\ z_i = Z_i + u_{Zi} \end{cases} \quad \begin{cases} x_{li} = x_i + (l_0 - \delta l_i) \underline{n}_i \underline{e}_X \\ z_{li} = z_i + (l_0 - \delta l_i) \underline{n}_i \underline{e}_Z \end{cases} \quad (6.34)$$

En effet le point (x_{li}, z_{li}) est en contact avec la surface de la chaussée. Le profil de la chaussée peut être décrite dans le repère oxz par une fonction continue :

$$z^{ch} = f_{ch}(x) \quad (6.35)$$

La condition géométrique du contact est donnée par la relation suivante :

$$z_{li} = f_{ch}(x_{li}) \quad (6.36)$$

6.3.2 Calcul statique

6.3.2.1 Approche directe

Supposons que le contact est sans frottement, la force de contact est donc normale à la surface de contact (cf. figure 6.11). Notons $\underline{t}^{ch}$ le vecteur tangentiel de la chaussée au point de contact (x_{li}, z_{li}) .

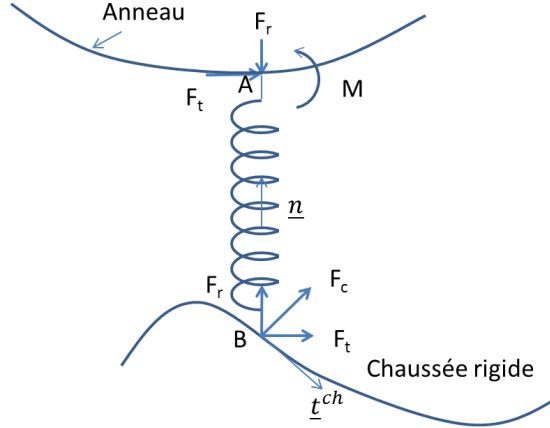


FIGURE 6.11 – Effort de contact

Il est calculé par l'expression suivante :

$$\underline{t}^{ch} = \underline{e}_X + \frac{df^{ch}}{dx}(x_{li})\underline{e}_Z \quad (6.37)$$

La force de contact est décomposée en deux directions :

$$\underline{F}_c = F_r \underline{n} + F_t (\underline{n} \wedge \underline{e}_Y) \quad (6.38)$$

où $\underline{n}$ est le vecteur unité suivant la direction du ressort déformé et $\underline{e}_Y = \underline{e}_Z \wedge \underline{e}_X$. L'hypothèse de contact sans frottement conduit à :

$$\underline{F}_c \underline{t}^{ch} = 0 \quad (6.39)$$

En injectant la relation (6.38) dans (6.39), nous obtenons :

$$F_t = -\frac{F_r (\underline{n} \underline{t}^{ch})}{(\underline{n} \wedge \underline{e}_Y) \underline{t}^{ch}} \quad (6.40)$$

De plus, la force suivant l'axe du ressort produit une déformation δl :

$$F_r = k\delta l \quad (6.41)$$

où k est la raideur du ressort. Donc, (6.40) devient :

$$F_t = -\frac{k \delta l (\underline{n} \underline{t}^{ch})}{(\underline{n} \wedge \underline{e}_Y) \underline{t}^{ch}} \quad (6.42)$$

Finalement, les forces dans les directions normale et tangentielle appliquées à un noeud de patin sont $\underline{F}_r$ et $\underline{F}_t$. Elles sont transmises au point correspondant sur l'anneau et un couple est créé par le vecteur force tangentielle :

$$\begin{cases} \underline{F}_r = k\delta l \underline{n} \\ \underline{F}_t = -\frac{k\delta l (\underline{n} \underline{t}^{ch})}{(\underline{n} \wedge \underline{e}_Y) \underline{t}^{ch}} (\underline{n} \wedge \underline{e}_Y) \\ m = F_t (l_0 - \delta l) = -\frac{k\delta l (\underline{n} \underline{t}^{ch})}{(\underline{n} \wedge \underline{e}_Y) \underline{t}^{ch}} (l_0 - \delta l) \end{cases} \quad (6.43)$$

En prenant en compte les forces déterminées par (6.43) et les équations d'équilibre (4.53) de l'anneau établies dans le chapitre 4, les équations d'équilibre s'écrivent dans le repère polaire :

$$\begin{cases} \frac{1}{R} (V' \cos \alpha - N' \sin \alpha - (\alpha' + 1) (V \sin \alpha + N \cos \alpha)) + p \frac{R + u + w'}{R} \\ \quad + (\underline{F}_r + \underline{F}_t) \underline{u}_R - k_R u \frac{R + u + w'}{R} - k_\theta w \frac{u' - w}{R} = 0 \\ \frac{1}{R} (V' \sin \alpha + N' \cos \alpha + (\alpha' + 1) (V \cos \alpha - N \sin \alpha)) - p \frac{u' - w}{R} \\ \quad + (\underline{F}_r + \underline{F}_t) \underline{u}_\theta + k_R u \frac{u' - w}{R} - k_\theta w \frac{R + u + w'}{R} = 0 \\ \frac{1}{R} M' + \frac{1}{R} \left((u' - w) (V \sin \alpha + N \cos \alpha) \right. \\ \quad \left. - (R + u + w') (V \cos \alpha - N \sin \alpha) \right) = F_t (l_0 - \delta l) \end{cases} \quad (6.44)$$

Il est possible d'exprimer le déplacement $\underline{u}_i = u_{Xi} \underline{e}_X + u_{Zi} \underline{e}_Z$ dans le repère polaire avec des variables (u, w) .

$$\begin{cases} u_{Xi} = u \sin \theta_i + w \cos \theta_i \\ u_{Zi} = -u \cos \theta_i + w \sin \theta_i \end{cases} \quad (6.45)$$

A partir de (6.34) (6.37) (6.43) et (6.45), on peut constater que $\underline{F}_r, \underline{F}_t$ sont fonctions des variables $(\delta l, \underline{n}, u, w)$. Donc les inconnues des équations (6.44) sont $(\delta l, \underline{n}, u, w, \alpha)$. Ces équations peuvent être écrites sous la forme implicite suivante :

$$\mathfrak{N}(\delta l, \underline{n}, u, w, \alpha) = 0 \quad (6.46)$$

De plus, le vecteur $\underline{n}$ est supposé normal à la surface de l'anneau. Cela implique :

$$\underline{n} \frac{\partial OS'}{R \partial \theta} = \frac{1}{R} (u' - w) (\underline{n} \underline{u}_R) + \frac{1}{R} (R + u + w') (\underline{n} \underline{u}_\theta) = 0 \quad (6.47)$$

où $\underline{OS'}$ est le vecteur de la position d'un point matériel sur l'axe neutre de l'anneau dans la configuration déformée (cf Chapitre 4). Les ressorts dans le contact doivent être comprimés, i.e $\delta l > 0$. En regroupant des équations (6.36) (6.46) et (6.47), les équations d'équilibre deviennent finalement :

$$\begin{cases} \mathfrak{N}(\delta l, \underline{n}, u, w, \alpha) = 0 \\ \frac{1}{R} (u' - w) (\underline{n} \underline{u}_R) + \frac{1}{R} (R + u + w') (\underline{n} \underline{u}_\theta) = 0 \\ z_{li} - f_{ch}(x_{li}) = 0 \\ \delta l > 0 \end{cases} \quad (6.48)$$

Ces équations peuvent être résolues en considérant l'hypothèse de la déformation non linéaire en géométrie par l'algorithme dans la figure 6.12 :

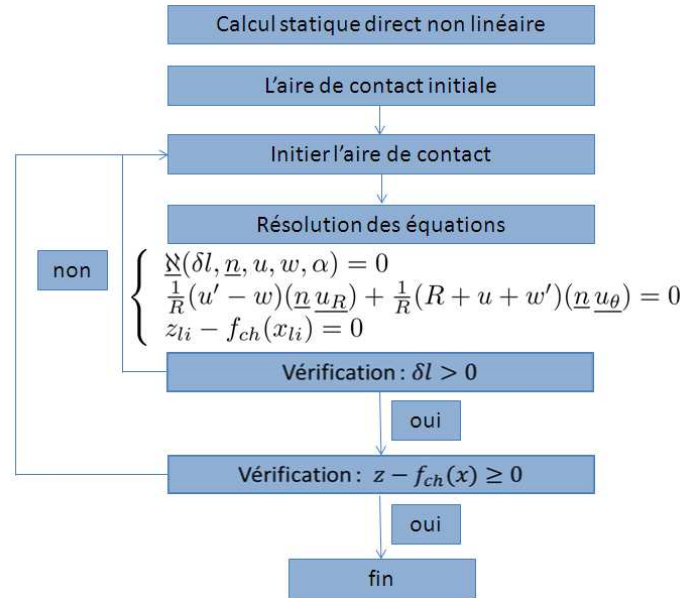


FIGURE 6.12 – Algorithme de résolution du contact statique direct.

Cet algorithme est convergent si le choix de l'aire contact initiale est suffisamment proche de la solution. Si non, la boucle peut être divergente. Afin d'avoir un bon choix, il faut charger progressivement le pneu et prendre le résultat de l'étape précédente pour le calcul de l'étape actuelle.

6.3.2.2 Approche de décomposition

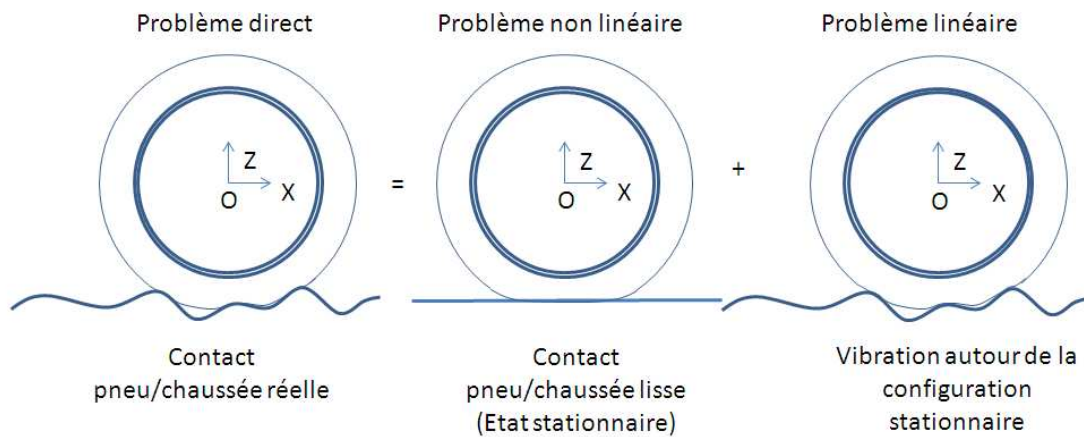


FIGURE 6.13 – Décomposition du problème.

Le calcul statique direct est très long du fait de la résolution des équations non linéaires (6.48) (cf. la

méthode de Newton Raphson). Une approche de décomposition est proposée pour accélérer le calcul. Le calcul statique direct est décomposé en deux étapes (cf. figure 6.13) :

- Le contact entre le pneu et une surface lisse. Ce type de contact est traité de manière non linéaire en géométrie. A la fin de cette étape, l'équilibre stationnaire est établi.
- A partir de la configuration déformée sur un sol lisse, le contact est calculé en ajoutant des petites perturbations dues à la rugosité de la surface de chaussée.

Contact pneu/sol lisse

Dans ce cas, les hauteurs de la chaussée sont constantes. Les équations (6.48) deviennent :

$$\begin{cases} \underline{\mathbb{N}}(\delta l, \underline{n}, u, w, \alpha) = 0 \\ \frac{1}{R}(u' - w)(\underline{n} \underline{u}_R) + \frac{1}{R}(R + u + w')(\underline{n} \underline{u}_\theta) = 0 \\ z_{li} = h \\ \delta l > 0 \end{cases} \quad (6.49)$$

où h est la hauteur de la chaussée. L'algorithme est présenté dans la figure 6.14. La résolution des

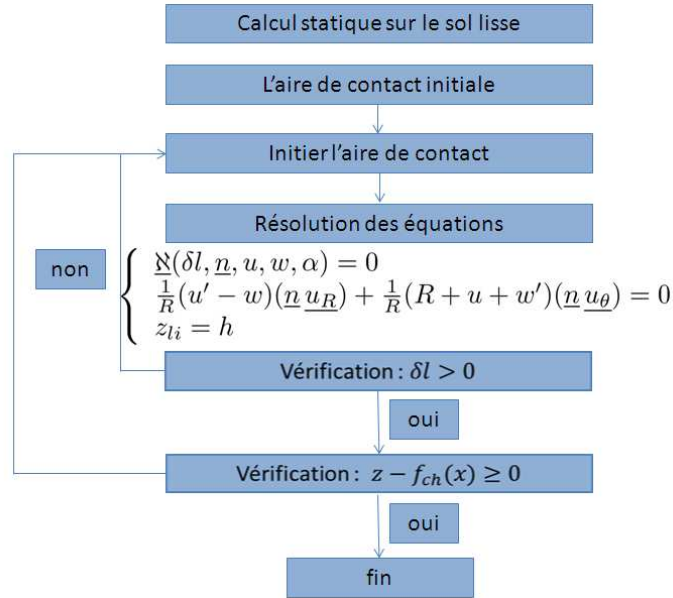


FIGURE 6.14 – Algorithme de résolution du contact statique sur le sol lisse.

équations (6.49) est rapide et convergente. On notera $(u_s, w_s, \alpha_s, \delta l_s, \underline{n}_s)$ les solutions stationnaires du problème de contact pneu/sol lisse (6.49).

Contact statique linéaire

Le contact statique linéaire est calculé en ajoutant des perturbations en base du pneu. On suppose que les directions des ressorts ne changent pas au cours de la déformation $\underline{n}_s \simeq \underline{n}_s + \underline{n}$. Les équations d'équilibre s'écrivent :

$$\begin{cases} \underline{\mathbb{N}}(\delta l_s + \delta l, \underline{n}_s, u_s + u, w_s + w, \alpha_s + \alpha) = 0 \\ z_{li} - f_{ch}(x_{li}) = 0 \\ \delta l > 0 \end{cases} \quad (6.50)$$

La linéarisation des équations (6.50) donne :

$$\begin{cases} \frac{\partial \underline{\mathbb{N}}(u_s, w_s, \alpha_s, \delta l_s, \underline{n}_s)}{\partial (u, w, \alpha, \delta l, \underline{n})}(u, w, \alpha, \delta l, \underline{n}_s) + \underline{\mathbb{N}}(u_s, w_s, \alpha_s, \delta l_s, \underline{n}_s) = 0 \\ z_{li} - f_{ch}(x_{li}) = 0 \\ \delta l > 0 \end{cases} \quad (6.51)$$

La première équation de (6.51) est linéaire. La résolution est faite directement. Donc, on évite l'utilisation de la méthode itérative. Le calcul est plus rapide que le calcul direct.

Avantage de cette approche

Le calcul sur le sol lisse est fait une fois. Tous les calculs statiques sur une chaussée réelle sont réalisés de manière rapide. Donc, le calcul global est accéléré. L'algorithme est résumé dans la figure 6.15.

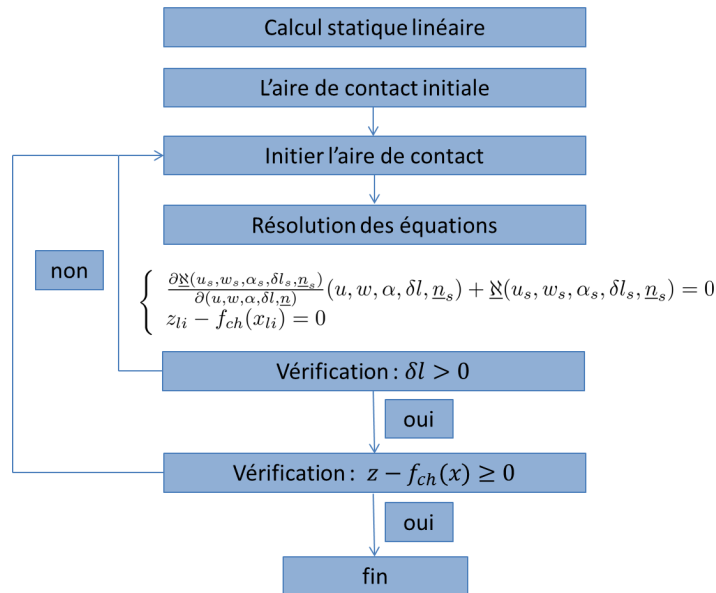


FIGURE 6.15 – Algorithme de résolution du contact statique linéaire.

Limitation des algorithmes

Les algorithmes du calcul statique direct, du calcul statique sur le sol lisse et du calcul statique linéaire ont deux boucles imbriquées. Cela peut conduire à une situation où il est impossible de sortir des boucles. La raison d'une telle situation est liée à la prise en compte des déplacements latéraux. Comme l'hypothèse de contact sans frottement est utilisée, les déplacements latéraux sont pris en compte dans l'algorithme du calcul de contact. Ils conduisent à une nouvelle aire de contact à la fin de la première boucle. Lors de la vérification de la condition d'interpénétration, certains points hors de l'aire de contact peuvent être ramenés dans celle-ci. Il faut alors reprendre la première boucle. Pour éviter cette difficulté, un modèle de contact avec le déplacement vertical imposé est proposé.

6.3.2.3 Contact avec le déplacement vertical imposé

On suppose que les déplacements latéraux sont faibles dans l'aire de contact, donc ils sont imposés à zéro. Cette hypothèse sera confirmée dans l'application numérique. Les équations d'équilibre (6.51) deviennent :

$$\begin{cases} \frac{\partial \underline{\mathbb{N}}(u_s, w_s, \alpha_s, \delta l_s, \underline{n}_s)}{\partial (u, w, \alpha, \delta l, \underline{n})}(u, w, \alpha, \delta l, \underline{n}_s) + \underline{\mathbb{N}}(u_s, w_s, \alpha_s, \delta l_s, \underline{n}_s) = 0 \\ z_{li} - f_{ch}(X_{li}) = 0 \\ \delta l > 0 \end{cases} \quad (6.52)$$

A partir de la relation $z_{li} - f_{ch}(X_{li}) = 0$, le déplacement vertical imposé est déduit directement. La résolution des équations (6.52) est directe.

6.3.3 Calcul dynamique

Dans cette partie, le contact dynamique entre un pneu et une chaussée est formulé. On considère que l'état dynamique est celui perturbé autour de l'état d'équilibre statique. Le problème dynamique est calculé par l'approche avec le déplacement vertical imposé. Les solutions du problème dynamique autour de l'état stationnaire sont notées : $(u_t, w_t, \alpha_t, \delta l_t, \underline{n}_t)$. On considère que la configuration dynamique est confondue avec celle stationnaire du cas de contact avec le sol lisse. Les équations dynamiques sont déduites de (6.52) en ajoutant les forces inerties :

$$\begin{cases} \underline{F}^{in}(\ddot{u}_t, \ddot{w}_t, \ddot{\alpha}_t) + \frac{\partial \underline{\mathbb{N}}(u_s, w_s, \alpha_s, \delta l_s, \underline{n}_s)}{\partial (u, w, \alpha, \delta l, \underline{n})}(u, w, \alpha, \delta l, \underline{n}_s) + \underline{\mathbb{N}}(u_s, w_s, \alpha_s, \delta l_s, \underline{n}_s) = 0 \\ z_{li} - f_{ch}(X_{li}) = 0 \\ \delta l > 0 \end{cases} \quad (6.53)$$

où $\underline{F}^{in}(\ddot{u}_t, \ddot{w}_t, \ddot{\alpha}_t)$ est définie dans la section par :

$$\underline{F}^{in}(\ddot{u}_t, \ddot{w}_t, \ddot{\alpha}_t) = \begin{cases} \rho A \ddot{u}_t \\ \rho A \ddot{w}_t \\ \rho I \ddot{\alpha}_t \end{cases}$$

Les équations linéaires (6.53) sont résolues par la schéma numérique de Newmark. L'algorithme est présenté dans la figure 6.16.

Les hypothèses

Hypothèse I : Il existe un état d'équilibre stationnaire

Cette hypothèse est validée si l'ensemble pneu-roue est à symétrie de révolution ce qui est valable pour notre domaine de fréquences ($\leq 400 \text{ Hz}$) pour lequel les effets des rainures transversales du pneumatique ou des dissymétries de la roue peuvent être négligées.

Hypothèse II : La réponse de l'anneau à l'état dynamique est très petite par rapport à celle à l'état stationnaire

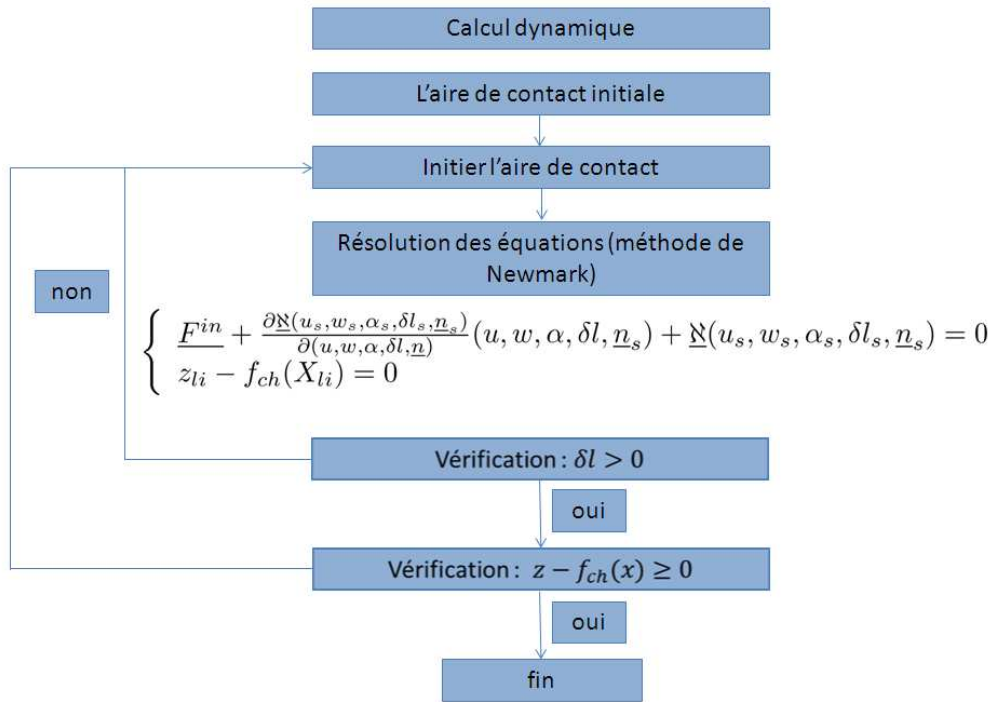


FIGURE 6.16 – Algorithme de résolution du contact dynamique.

La configuration déformée change très peu par rapport à la configuration stationnaire. La variation de force au centre roue est plus petite que la force stationnaire. Ce point sera discuté dans la partie suivante avec des résultats numériques.

6.3.4 Application numérique et validations

Les paramètres du modèle de pneumatique sont dans le tableau (5.1) et la raideur des ressorts modélisant les patins est de $9 \cdot 10^7 N/mm$ et leurs longueurs initiales sont de $1 cm$.

6.3.4.1 Calcul statique

Contact du pneu sur le sol lisse

Tout d'abord, le contact entre le pneu et une surface lisse est traité. Ce calcul prend en compte la non linéarité en déformation. La figure 6.17 montre les configurations du pneumatique en contact avec un sol lisse. Une charge de $400 kg$ est appliquée au centre de roue et le pneu est mis sous une pression de $2.5 Bar$. La longueur de l'aire de contact obtenue est d'environ $10 cm$ et le déplacement vertical du centre roue est de $7 mm$. Ces chiffres sont très proches du cas réel. Comme le contact est supposé sans frottement, les forces de contact tangentielles (confondue avec l'axe Ox) sont nulles. Les courbes des forces de contact dans les deux directions (normale et tangentielle) sont tracées dans la figure 6.18. La pression de contact est maximale au centre de l'aire de contact. Par contre, au bord de l'aire de

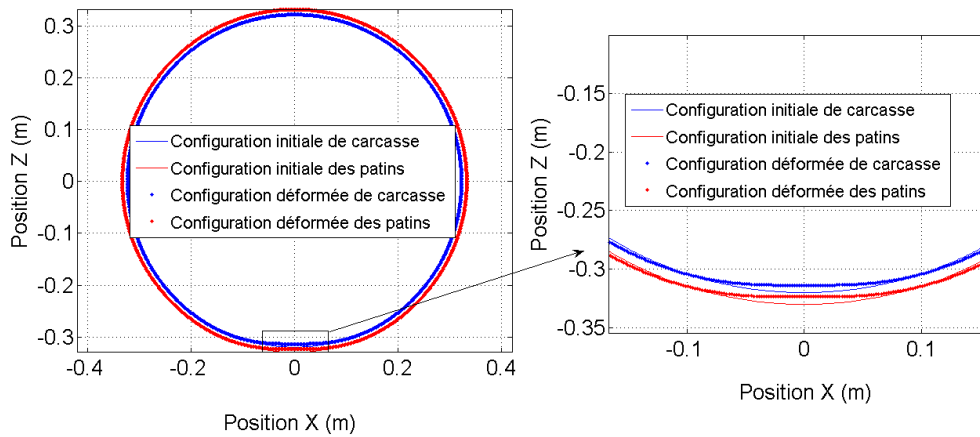


FIGURE 6.17 – Configuration déformée sur le sol lisse.

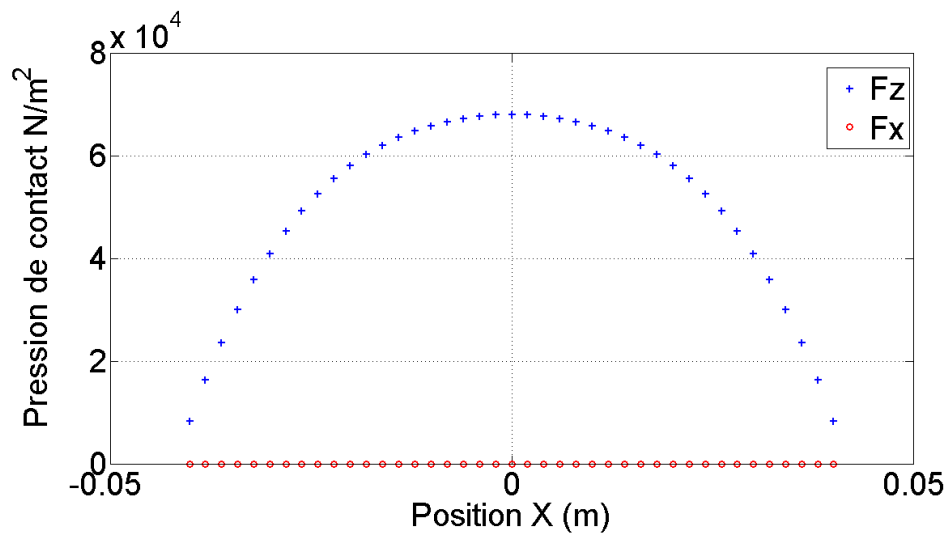


FIGURE 6.18 – Forces de contact sur le sol lisse.

contact les pressions normales sont petites et deviennent nulles.

Contact du pneu sur une chaussée sinusoïdale

La validation de la méthode de décomposition est réalisée par comparaison avec le calcul statique direct pour une surface sinusoïdale. On suppose que la chaussée a une forme ondulée dont l'amplitude est de 7 mm et la longueur d'onde est de 4 cm. Le calcul de contact statique sur cette chaussée est fait par trois approches : calcul direct, calcul avec l'approche de décomposition (incluant le déplacement latéral des points au contact), calcul avec le déplacement vertical imposé. La figure 6.19 montre des configurations déformées par ces trois approches. On peut remarquer que les résultats sont très proches. L'approche de décomposition donne le résultat plus proche de celui avec dé-

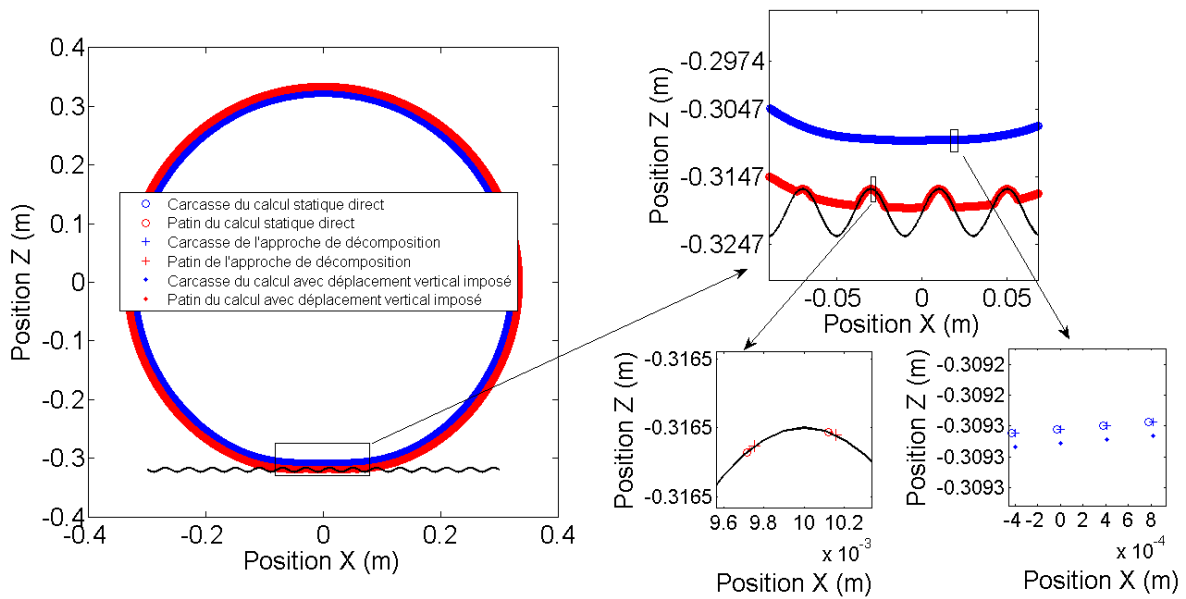


FIGURE 6.19 – Comparaison des approches du contact sur le sol sinusoïdal pour le calcul statique.

placement vertical imposé. Les déplacements latéraux des points au contact du calcul direct sont petits.

6.3.4.2 Calcul dynamique

Réponse dynamique sur une chaussée sinusoïdale

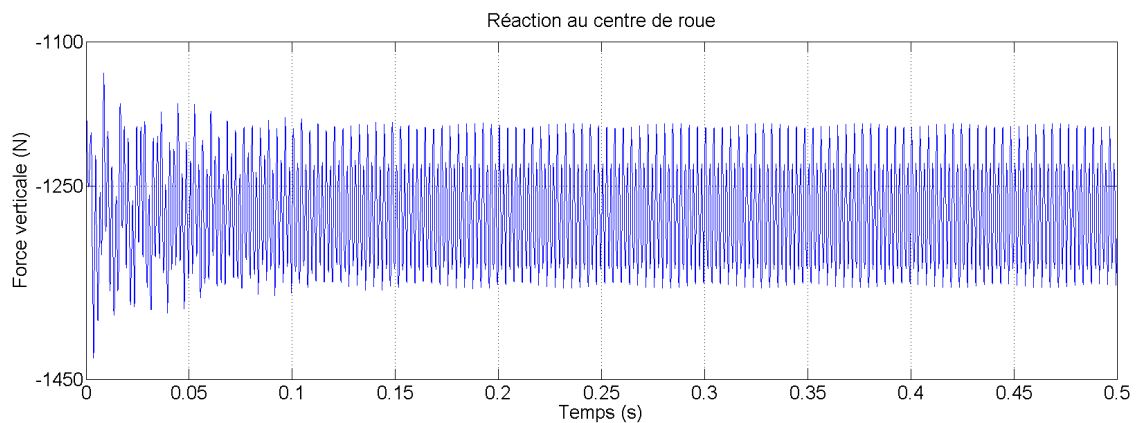


FIGURE 6.20 – Réaction verticale au centre roue lors du contact dynamique sur le sol sinusoïdal.

La figure 6.20 présente la force verticale au centre de la roue lors d'un roulage du pneumatique sur une chaussée sinusoïdale à la vitesse de 10 m/s. Cette force est calculée par la somme des réactions

verticales des ressorts radiaux et des ressorts tangentiels entre la carcasse (l'anneau) et le centre roue. Après une phase transitoire d'une durée d'environ 1 seconde, la réponse devient périodique. Elle est la somme des harmoniques du sinus d'excitation. La figure 6.21 montre le spectre associé. Dans l'ordre

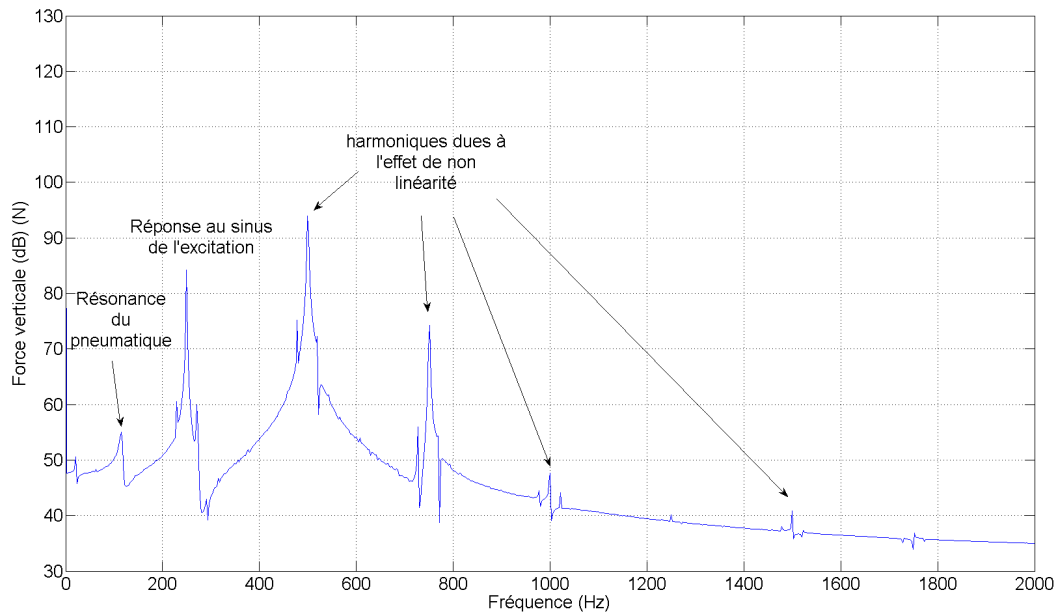


FIGURE 6.21 – Spectre de la partie stationnaire de la force verticale au centre roue lors du contact dynamique sur le sol sinusoïdal.

croissant des fréquences, on observe successivement des résonances du pneu, la réponse du sinus de l'excitation et des harmoniques dues à la non linéarité du problème de contact. En effet, l'excitation en base du pneu est de forme sinusoïdale. La fréquence d'excitation est calculée par le rapport de la vitesse de l'anneau divisée par la longueur d'onde de la chaussée (250 Hz). Ce sinus et ses harmoniques sont présentes dans la réponse stationnaire. Par ailleurs, les résonances du pneu participent à la réponse finale du fait des petits chocs à l'entrée ou à la sortie de l'aire de contact. C'est la raison pour laquelle on observe des résonances de l'anneau sur la courbe du spectre. Enfin, le problème de contact est non linéaire car l'aire de contact change à chaque instant. La non linéarité génère des harmoniques périodiques dans la réponse.

Pour analyser les résonances du pneumatique, on complètera l'étude par le calcul avec une excitation de type choc.

Réponse dynamique sur une barrette

On calcule les réponses au centre de la roue lors d'un roulage sur une barrette de section rectangulaire de 5 mm de hauteur et 10 mm de largeur. Les réponses temporelles de la force verticale et de la force longitudinale sont tracées dans la figure 6.22. La courbe rouge est la réponse de la force verticale. La

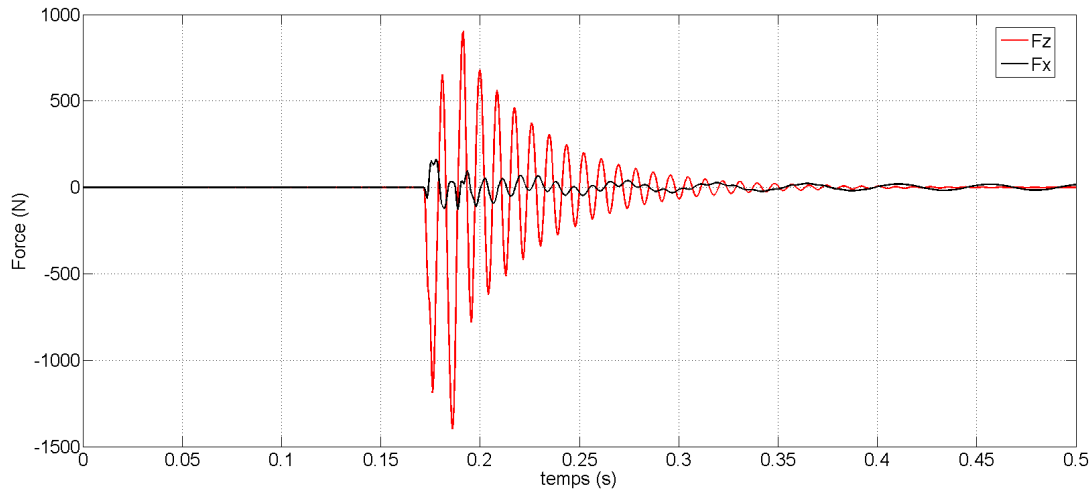


FIGURE 6.22 – Force verticale et force longitudinale au centre roue lors du contact dynamique sur une barrette de 5 x 10 mm pour l’anneau circulaire

la courbe noire est la réponse de la force longitudinale. Comme la vitesse de roulage est de 10 m/s, le passage sur la barrette est très rapide (environ 0.01 s). Donc, l’excitation due à la barrette peut être assimilée à un choc vertical en base du pneumatique. La barrette fait toute la largeur du pneumatique et ce choc excite les modes radiaux. On remarque que le niveau de la force verticale est plus important que celle longitudinale. L’oscillation de la courbe rouge est essentiellement autour de la première fréquence du mode d’ovalisation du pneu (116 Hz). Sur la figure 6.23, le spectre de la force verticale au centre de la roue est présenté. On observe un niveau important sur la première résonance du pneumatique. Les anti-résonance sur cette courbe sont expliquées par le choc de la barrette. Les explications seront données dans le chapitre suivant.

6.4 Modèle de contact complet - contact 3D

6.4.1 Contact statique

6.4.1.1 Calcul direct

Le contact statique du pneu sur une chaussée rugueuse est modélisé directement sous Abaqus avec deux hypothèses sans frottement et adhérence parfaite. Ce calcul inclut l’effet de déformation non linéaire en géométrie. Le temps de ce traitement sous Abaqus sur un serveur de calcul mono processeur est dans le tableau suivant :

Avec ces temps de traitement, le calcul du contact dynamique ne peut pas être envisagé directement sous Abaqus. C’est la raison pour laquelle la méthode de décomposition est proposée. Le calcul direct reste une référence pour valider cette approche.

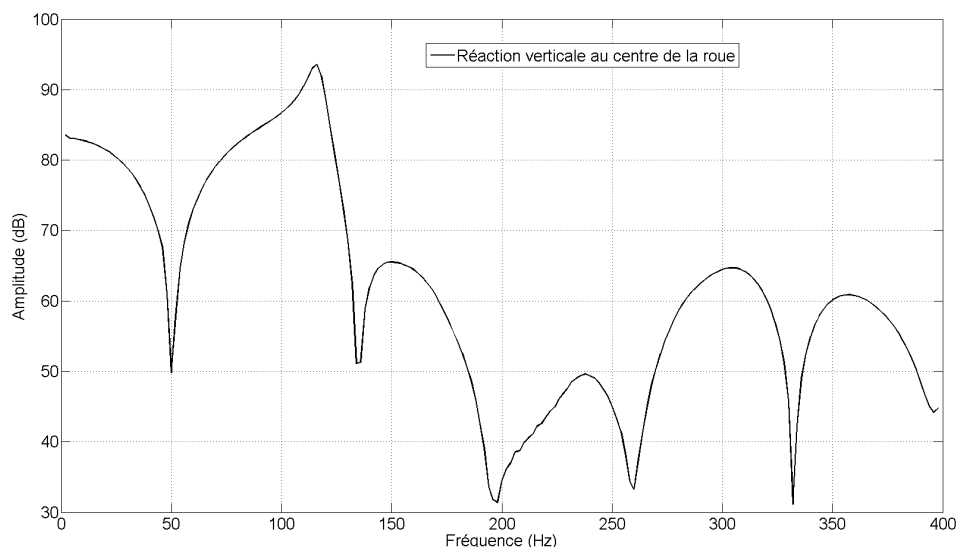


FIGURE 6.23 – Spectre de la force verticale au centre roue lors du contact dynamique sur une barrette de 5 x 10 mm pour l’anneau circulaire

	Sans frottement	adhérence parfait
Temps du calcul (CPU)	6490 s	24247 s

TABLE 6.2 – Temps du traitement des contacts statiques sous Abaqus

6.4.1.2 Approche de décomposition

Comme dans le cas 2D, le contact du pneu sur une chaussée réelle se compose de deux étapes. La première est le contact avec le sol lisse (la non linéarité en géométrie est incluse dans ce calcul). La seconde est le calcul linéaire avec les déplacements verticaux imposés.

Contact pneu/sol lisse

Le pneu est mis sous une pression de 2.5Bar et chargé de 400kg . Le problème de contact avec le sol lisse est résolu directement sous Abaqus. Les matrices ($\underline{\underline{K}} \ \underline{\underline{M}}$) sont extraites par une option sous Abaqus. Comme la masse des patins est négligeable, la matrice de masse est corrigée en mettant des zéros à la place des valeurs correspondant aux degrés de liberté des nœuds de patins. Afin de vérifier la validité de cette simplification, des comparaisons des fonctions de transfert ont été faites. Sur la configuration d’équilibre sur le sol lisse, un chargement unitaire vertical est introduit au niveau de l’aire de contact, les directions horizontales sont libres. La force verticale au centre roue est calculée. Le premier calcul est fait directement sous Abaqus. Le deuxième calcul est fait sous Matlab à l’aide des matrices extraites sous Abaqus avec la matrice de masse corrigée. La comparaison a été réalisée avec l’amortissement structural de 6% puis avec l’amortissement proportionnel $\underline{\underline{C}} = \alpha \underline{\underline{M}} + \beta \underline{\underline{K}}$ avec $\alpha = 23.69$ et $\beta = 1.57 \cdot 10^{-6}$ (les unités utilisées : T,N,mm). Les réponses de la force verticale au centre

de roue sont présentées dans la figure 6.24. La courbe rouge est la réponse sous Matlab et la courbe bleue est la réponse sous Abaqus. Les deux courbes sont parfaitement superposées.

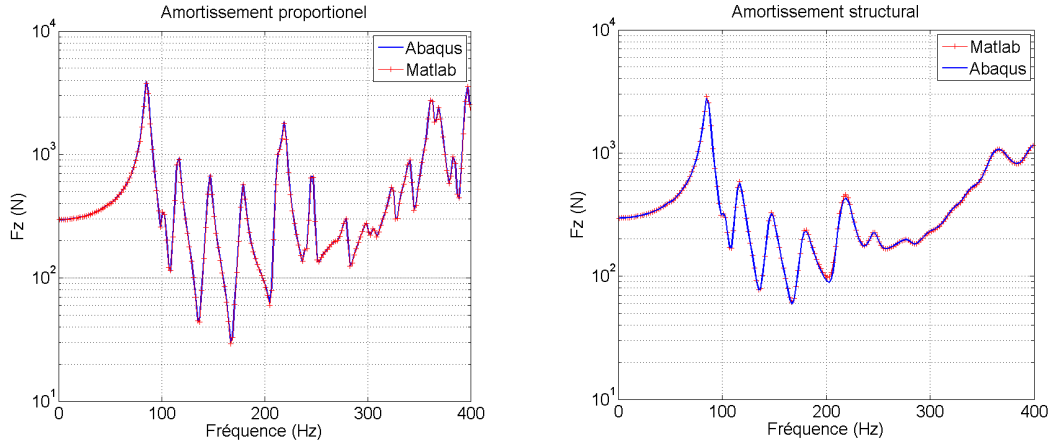


FIGURE 6.24 – Force verticale au centre roue du problème de déplacements imposés.

Contact avec les déplacements verticaux imposés

On part de l'équation d'équilibre autour de l'état du contact avec une surface lisse qui est écrite de façon implicite :

$$\underline{g}(\underline{u}_s) = \underline{F}_{sol} \quad (6.54)$$

Où $\underline{g}$ est le vecteur des fonctions des efforts internes, $\underline{u}_s$ le vecteur déplacements par rapport à la configuration initiale, $\underline{F}_{sol}$ le vecteur des forces de contact avec le sol lisse.

On ajoute à cette équation une petite perturbation $\underline{u}$, la nouvelle équation d'équilibre est la suivante :

$$\underline{g}(\underline{u}_s + \underline{u}) = \underline{F}_c \quad (6.55)$$

Où $\underline{u}$ est le vecteur déplacements par rapport à la configuration déformée sur le sol lisse, $\underline{F}_c$ le vecteur des efforts de réactions au contact avec une chaussée rugueuse. Cette équation est linéarisée autour de $\underline{u}_s$:

$$\underline{g}(\underline{u}_s) + \frac{\partial \underline{g}}{\partial \underline{u}}(\underline{u}_s) \underline{u} = \underline{F}_c \quad (6.56)$$

La matrice de raideur tangente est définie par l'expression suivante :

$$\frac{\partial \underline{g}}{\partial \underline{u}}(\underline{u}_s) = \underline{\underline{K}} \quad (6.57)$$

En injectant (6.57) et (6.54) dans (6.56), on a :

$$\underline{\underline{K}} \underline{u} = \underline{F}_c - \underline{F}_{sol} \quad (6.58)$$

Les conditions de contact :

Condition géométrique : il n'y a aucun noeud du pneu interpénétré dans la chaussée. Comme dans le cas de l'anneau circulaire, les déplacements horizontaux sont considérés très petits par rapport

aux déplacements verticaux dans l'aire de contact. Cela permet de négliger tous les déplacements horizontaux. Donc, les positions des noeuds du pneu en contact sont leurs projections verticales sur la chaussée. En notant X_i, Y_i, Z_i les positions d'un noeud dans la configuration déformée sur le sol lisse, dans la zone de contact elles subissent la transformation suivante :

$$\begin{cases} X_i \longrightarrow X_i \\ Y_i \longrightarrow Y_i \\ Z_i \longrightarrow f_{ch}(X_i, Y_i) \end{cases} \quad (6.59)$$

où f_{ch} est la fonction donnant la hauteur de la chaussée.

Les déplacements imposés dans la zone de contact sont les suivants :

$$\begin{cases} u_{Xi} = 0 \\ u_{Yi} = 0 \\ u_{Zi} = f_{ch}(X_i, Y_i) - Z_i \end{cases} \quad (6.60)$$

Donc, la condition de géométrie permet de construire le vecteur déplacements imposés.

Condition sur la force de contact : à la condition de déplacements verticaux imposés, il faut ajouter celle des forces verticales de contact positives.

$$F_c^v > 0 \quad (6.61)$$

Donc, on a le système :

$$\begin{cases} \underline{K} \underline{u} = \underline{F}_c - \underline{F}_{sol} \\ \begin{cases} u_{Xi} = 0 \\ u_{Yi} = 0 \\ u_{Zi} = f_{ch}(X_i, Y_i) - Z_i \\ F_c^v > 0 \end{cases} \end{cases} \quad \text{si contact} \quad (6.62)$$

L'algorithme de résolution du système (6.62) est présenté dans la figure 6.25.

6.4.2 Contact dynamique

En ajoutant dans les équations (6.62) des termes correspondant aux forces d'inerties, aux forces amorties et aux forces gyroscopiques, le système devient :

$$\begin{cases} \underline{M} \ddot{\underline{u}} + \underline{C} \dot{\underline{u}} + \underline{K} \underline{u} = \underline{F}_c - \underline{F}_{sol} \\ \begin{cases} u_{Xi} = 0 \\ u_{Yi} = 0 \\ u_{Zi} = f_{ch}(X_i, Y_i) - Z_i \\ F_c^v > 0 \end{cases} \end{cases} \quad \text{si contact} \quad (6.63)$$

où la matrice $\underline{C}$ est la matrice d'amortissement globale (comprenant l'effet de rotation et le couplage fluide structure). Les matrices $\underline{M}$ et $\underline{K}$ sont extraites sous Abaqus.

On peut résoudre (6.63) de deux manières : approche directe et approche par un calcul statique suivi d'un calcul dynamique.

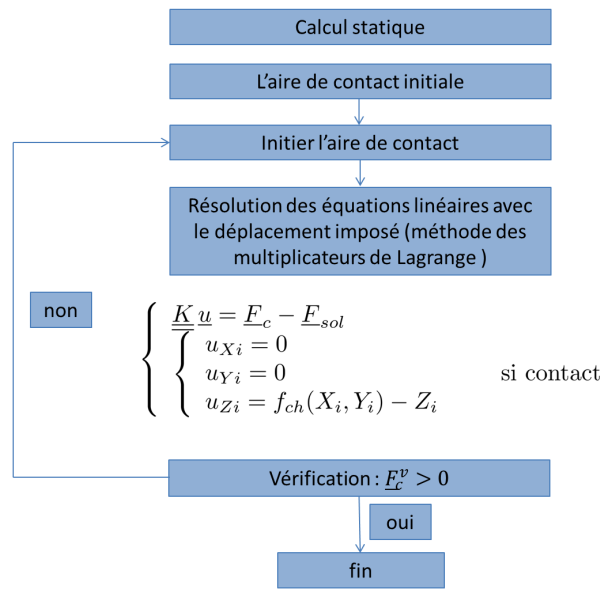


FIGURE 6.25 – L’algorithme de la résolution du contact statique sur une chaussée réelle.

6.4.2.1 Approche directe

Comme l’aire de contact change à chaque instant, on ne peut pas appliquer un calcul fréquentiel. L’approche directe est un calcul temporel. En utilisant le schéma de Newmark, la première équation dans (6.63) est discrétisée par les coefficients de Newmark. La résolution devient comme pour le problème statique (cf. figure 6.25) :

$$\begin{cases} \underline{K}_d \underline{u} = \underline{F}_h + \underline{F}_c - \underline{F}_{sol} \\ \begin{cases} u_{X_i} = 0 \\ u_{Y_i} = 0 \\ u_{Z_i} = f_{ch}(X_i, Y_i) - Z_i \\ F_c^v > 0 \end{cases} \end{cases} \quad \text{si contact} \quad (6.64)$$

où $\underline{K}_d$ est la raideur dynamique définie par la méthode de Newmark et $\underline{F}_h$ est la force historique (cf. méthode de Newmark).

La résolution des équations (6.64) est faite sous Matlab. Le temps du calcul pour un pas de temps est très rapide (45 s pour le modèle du pneu seul). En revanche, le nombre de calculs est très élevé (calcul temporel). Pour un temps de calcul équivalent à celui des essais, le temps global du traitement complet est d’environ 42 jours ce qui serait excessif. Une nouvelle approche est donc proposée pour accélérer le calcul.

6.4.2.2 Approche par un calcul statique suivi d’un calcul dynamique

La résolution des équations (6.63) est faite en deux étapes. L’étape 1 est une série de calculs statiques pour déterminer les excitations. L’étape 2 est un calcul dynamique en imposant ces excitations.

Etape 1 : calcul statique

On suppose qu'en basses fréquences, l'aire de contact obtenue par les équations dynamiques (6.63) et celle obtenue par les équations statiques (6.62) à la même position sur une chaussée rugueuse sont proches. Sur cette chaussée, le contact statique est calculé pour chaque position. Les forces et les déplacements des points dans la zone de contact sont enregistrés à chaque position $(X(t), Y(t))$. A la vitesse V du pneu constante, la position longitudinale s'écrit $X(t) = Vt$, ces excitations sont transformées en une fonction temporelle $\underline{F}_c(Vt, Y(t)) = \underline{f}_c(t)$, $\underline{U}_c(Vt, Y(t)) = \underline{u}_c(t)$. Les réponses dynamiques sont les solutions des équations :

$$\begin{cases} \underline{M} \ddot{u} + \underline{C} \dot{u} + \underline{K} u = \underline{f}_c(t) \\ \underline{u}^{imp} = \underline{u}_c(t) \end{cases} \quad (6.65)$$

Comme en un point dans l'aire de contact, on ne peut pas imposer en même temps un déplacement et une force, il faut choisir une zone sur laquelle les forces de contact sont imposées et une autre zone sur laquelle les déplacements sont imposés (l'intersection des deux zones est vide). Si les efforts ou les déplacements étaient calculés dynamiquement, les deux solutions seraient identiques (forces imposées ou déplacements imposés). Comme les efforts dynamiques dans l'aire de contact sont différents des efforts statiques alors que les déplacements statiques et dynamiques sont proches (cf. figure 6.26) et (6.27)), le choix retenu est donc d'appliquer les déplacements dans l'aire de contact calculée pour un sol lisse et les efforts sur les autres points qui viennent au contact.

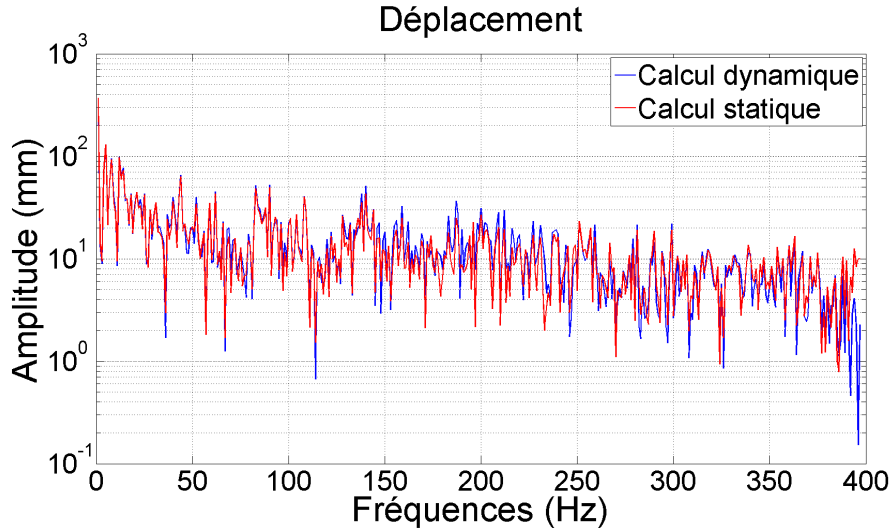


FIGURE 6.26 – Comparaison des déplacements des calculs statiques et dynamique au point du contact

Etape 2 : calcul dynamique

Les équations (6.65) peuvent être résolues en temporel ou en fréquentiel.

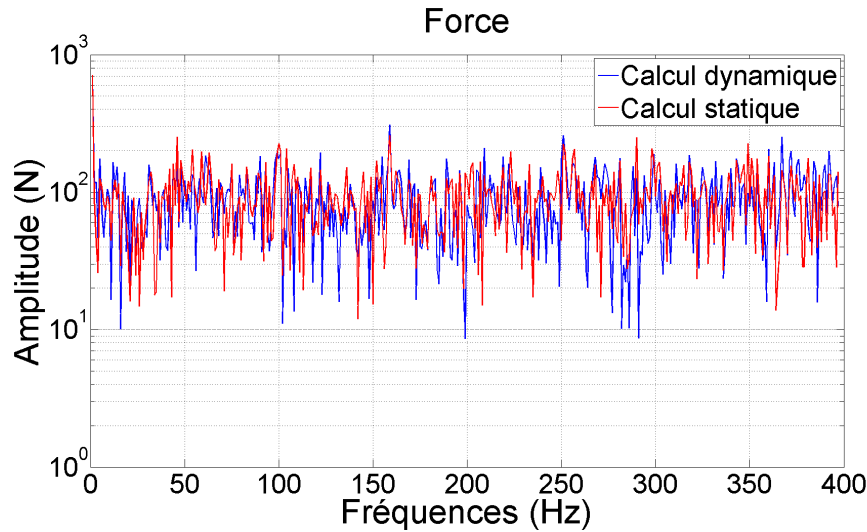


FIGURE 6.27 – Comparaison des forces du calcul statique et dynamique au point du contact

Calcul temporel

La résolution temporelle des équations (6.65) est réalisée à l'aide du schéma de Newmark et de la méthode des multiplicateurs de Lagrange. Le temps du calcul pour un pas de temps pour le modèle de pneu seul est d'environ 4 s. Ce calcul est dix fois plus rapide que le calcul direct.

Calcul fréquentiel

Le calcul est fait dans la plage des fréquences inférieures à 400 Hz. Ensuite, la résolution est faite directement avec la méthode des multiplicateurs de Lagrange pour prendre en compte les déplacements imposés.

6.4.3 Application numérique

Contact statique

Les résultats numériques issus des deux approches sont comparés : le calcul direct et l'approche de décomposition. Le premier calcul est fait directement sous Abaqus en prenant en compte la déformation non linéaire en géométrie. L'approche de décomposition est faite sous Matlab avec les mêmes chargements. Les surfaces de contact calculées sont tracées dans la figure 6.28. Dans Abaqus, deux problèmes de contact l'un avec adhérence parfaite et l'autre sans frottement sont traités. Le contact avec adhérence maintient les déplacements horizontaux et les déplacements latéraux des points dans l'aire de contact. En revanche, dans le contact sans frottement, ces déplacements sont libres. Les points rouges sur la figure 6.28 illustrent l'aire de contact sans frottement et les points noirs illustrent l'aire de contact avec adhérence. Ils sont très proches. On conclut que les déplacements horizontaux et latéraux dans le cas de contact sans frottement sont très petits. Les petits cercles sur la figure 6.28 montrent l'aire de contact dans l'approche de décomposition traitée sous Matlab. Les équations (6.62) indiquent que ce modèle de contact maintient les déplacements horizontaux et latéraux des points dans le contact

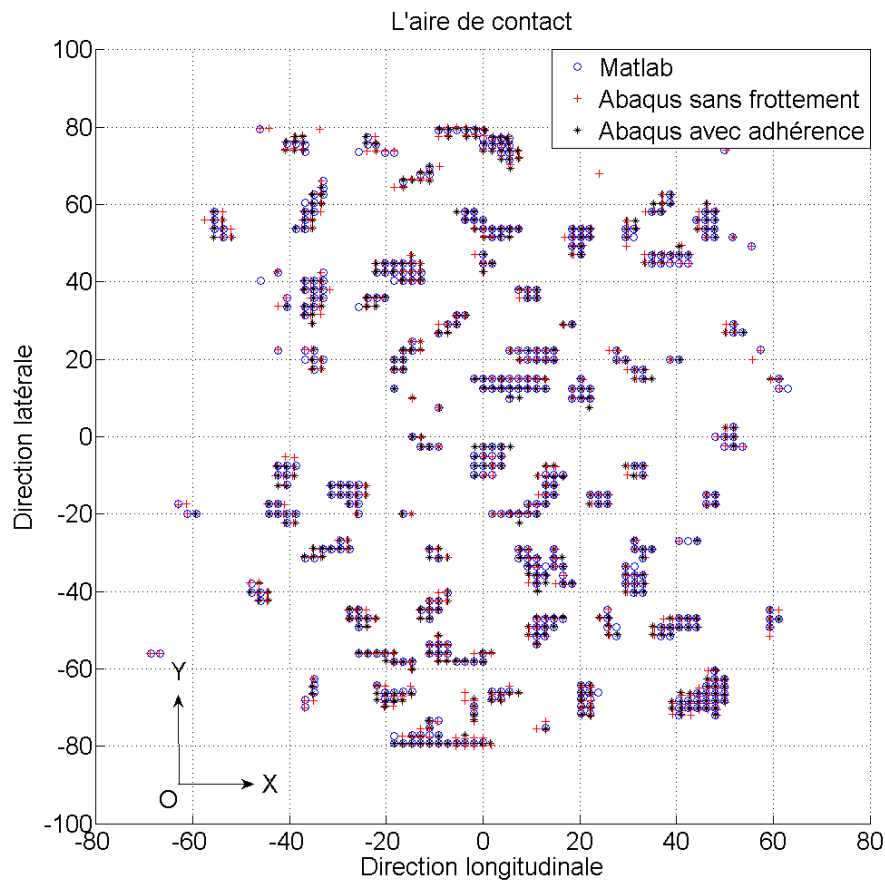


FIGURE 6.28 – L'aire de contact du pneu avec une chaussée réelle.

ce qui est cohérent avec l'hypothèse de contact avec adhérence. La figure 6.28 montre que les trois modèles donnent des résultats très proches. La figure 6.29 montre les comparaisons des composantes des forces normales de contact calculées sous Matlab et Abaqus. Le résultat dans Matlab est très proche des résultats calculés sous Abaqus. Cela permet de valider l'approche de décomposition et le modèle du contact avec déplacement vertical imposé.

Contact dynamique

Afin de valider l'approche de calcul statique suivi d'un calcul dynamique, on lance un calcul dynamique direct sur une portion de la chaussée mesurée. L'approche de calcul statique suivi d'un calcul dynamique fréquentiel est faite sous Matlab. La figure 6.30 montre une comparaison des spectres de la force verticale au centre de roue lors d'une excitation de la chaussée rugueuse. Les deux réponses sont presque superposées jusqu'à 100 Hz. Jusqu'à 330 Hz, il y a des petits écarts entre deux courbes. Au delà de 330 Hz, les deux courbes se séparent. Donc, l'approche est validée en basses fréquences. A hautes fréquences, l'effet dynamique des excitations en base du pneu n'est pas négligeable.

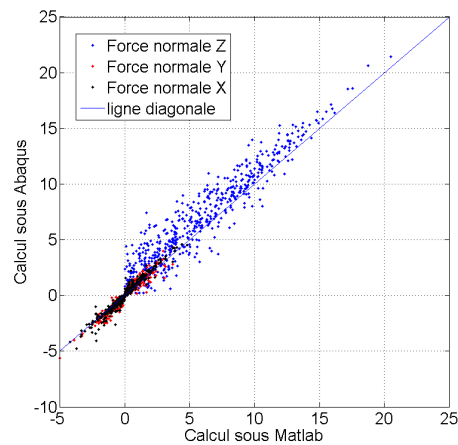


FIGURE 6.29 – Les efforts de contact du pneu avec une chaussée réelle.

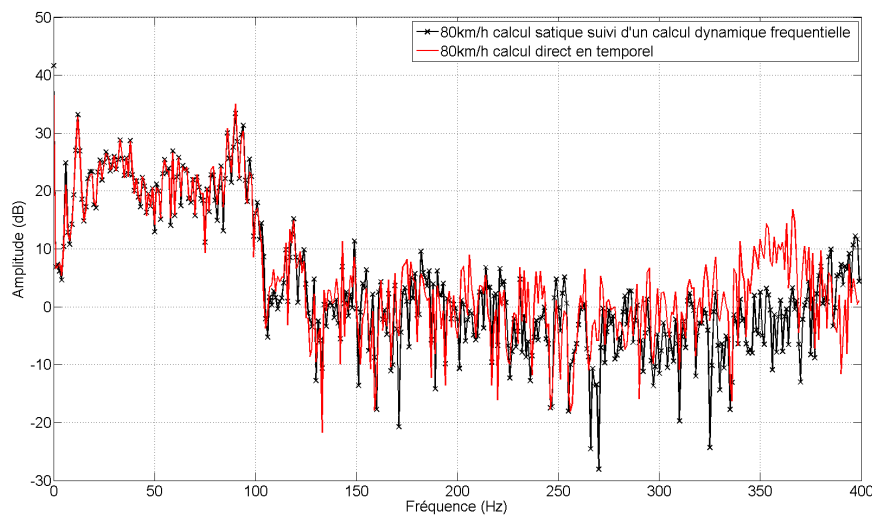


FIGURE 6.30 – Comparaison des spectres sans moyenné de la force verticale au centre roue.

L'excitation du banc à rouleaux est périodique de période le tour de rouleau. Pour contourner cette limitation, on fait varier la vitesse du rouleau de 90 à 70 km/h en 41 secondes et des spectres sont calculés pour chaque seconde du signal. Le calcul dynamique direct est fait pour les 41 s alors que le calcul des 41 spectres est fait manuellement avec la méthode de décomposition. Une comparaison des spectres moyennés de la force verticale est tracée dans la figure 6.31. On observe que les deux spectres sont très proches jusqu'à 230 Hz. Au delà de cette fréquence, les deux courbes sont éloignées. Avant 230 Hz, les niveaux des résonances sont bons. Les fréquences sont légèrement décalées. Les mêmes résultats sont observés sur les courbes de la force longitudinale (cf. figure 6.32).

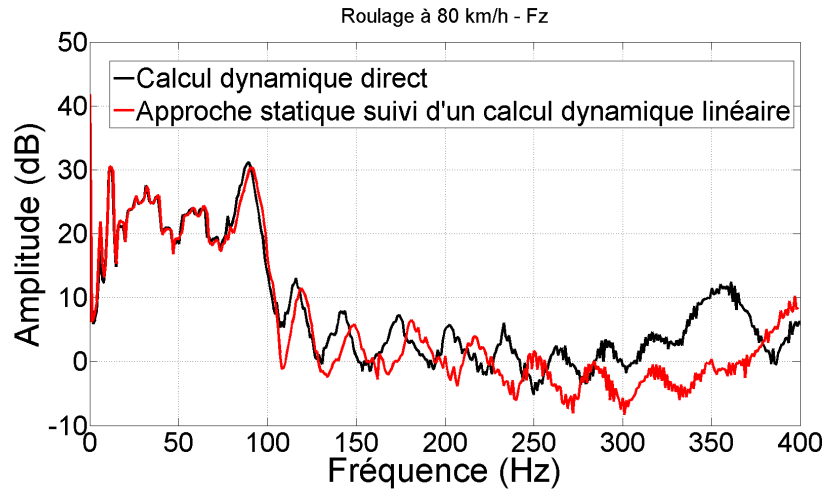


FIGURE 6.31 – Comparaison des spectres moyennés de la force verticale au centre roue.

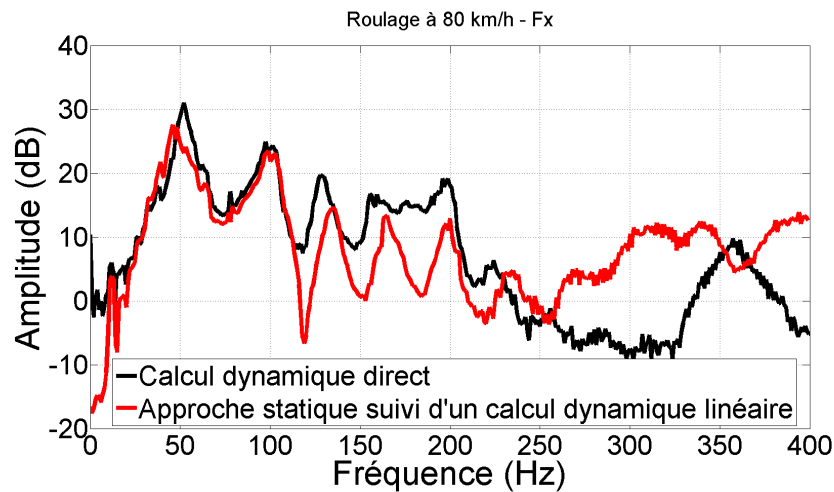


FIGURE 6.32 – Comparaison des spectres moyennés de la force longitudinale au centre roue.

6.5 Conclusion

Dans ce chapitre, trois modèles de contact (1D, 2D et 3D) ont été proposés. Ensuite, les applications numériques ont été réalisées dans le but de comparer les modèles.

Le modèle de contact 1D (système de ressorts) présente le contact normal sans frottement. La force tangentielle de contact est négligée. Ce modèle permet de valider que l'effet dynamique des patins en caoutchouc est négligeable. Donc, il n'est pas nécessaire de prendre en compte le choc lorsque les masses des patins entrent en contact.

Le modèle de contact 2D est construit sur un modèle d'anneau circulaire en ajoutant les ressorts modélisant les patins de gomme. Plusieurs méthodes de résolution du problème de contact pour ce modèle

ont été construites pour réduire les temps de calcul. La première est liée au contact sans frottement qui est simplifiée comme un problème de déplacements verticaux imposés (cf. Dubois [27]). La seconde est basée sur l'hypothèse de décomposition du mouvement en un calcul statique non linéaire suivi d'un calcul dynamique linéaire.

En utilisant les simplifications des modèles 1D et 2D, le contact 3D sur une chaussée réelle est formulé. Les hypothèses simplificatrices permettent d'accélérer le calcul tout en gardant un niveau de précision suffisant.

Applications au roulage sur une chaussée réelle

Dans ce chapitre, une description de la chaussée réelle est présentée. Ensuite, nous comparerons des résultats de mesures et de calculs dans le cas d'un pneu roulant sur une barrette puis sur une chaussée réelle.

Sommaire

7.1	Description de la surface de la chaussée	164
7.1.1	Identification du cylindre moyen de nuage des points	165
7.1.2	Projections de tous les points sur le cylindre moyenné	165
7.1.3	Construction d'une chaussée plane	166
7.1.4	Remaillage pour compléter les facettes dans les espaces blancs	167
7.2	Roulage sur une barrette	168
7.2.1	Le calcul dynamique direct	168
7.2.2	Approche statique suivi d'un calcul dynamique linéaire	171
7.3	Roulage sur une chaussée réelle	174
7.3.1	Contact du pneu seul sur une chaussée réelle	174
7.3.2	Contact de PRC sur une chaussée réelle	176
7.4	Conclusion	179

7.1 Description de la surface de la chaussée

La surface de la chaussée étudiée est celle des secteurs de rouleau utilisés dans les bancs d'essai (cf. figure 7.1). C'est une chaussée cylindrique avec un diamètre proche de 1.18 m . Les gravillons sur les secteurs ont une taille de 10 à 20 mm . Leurs surfaces sont numérisées et données sous forme de nuages de points et de facettes. Les données brutes sont tracées dans la figure 7.2. Sur cette figure, des espaces

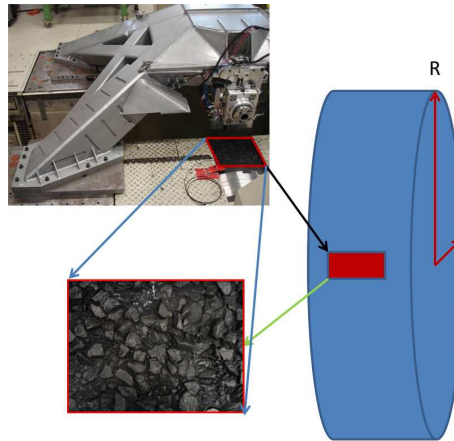


FIGURE 7.1 – Dispositif de mesure.

blancs correspondent à des endroits sur lesquels il n'y a pas de maillage, du fait que le maillage est réalisé par un logiciel qui ne permet pas de créer des triangles trop grands.

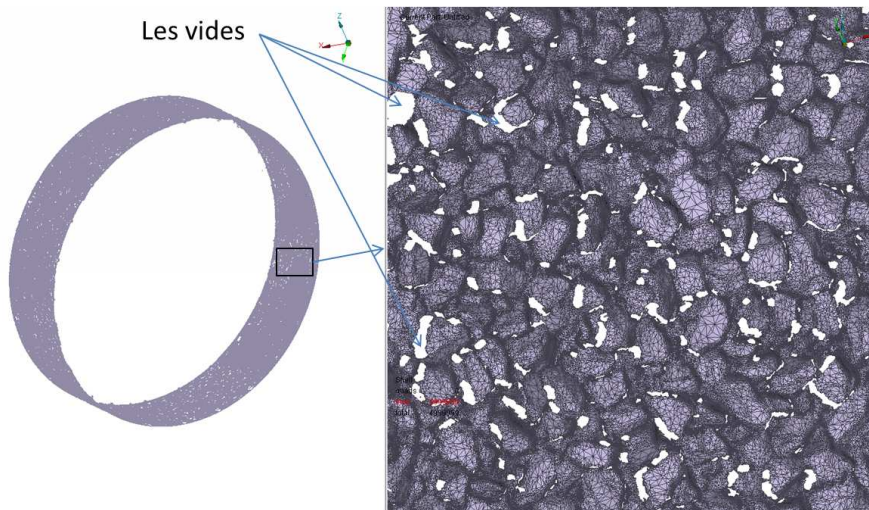


FIGURE 7.2 – Secteur gravillonné dans les essais épinglés.

Le maillage donné n'est pas uniforme. Les endroits où il y a des fortes variations de pentes sont maillés finement. En revanche, les endroits où il y a de faibles variations de pentes, sont maillés avec de grands éléments. Ce maillage est suffisamment précis pour le traitement du contact. Puisque sur une aspérité,

il y a environ 30 à 50 noeuds. Les données initiales ne sont pas utilisées directement pour la résolution du contact à cause des espaces blancs. Pour rendre les données utilisables, la procédure suivante de pré-traitement est faite pour les remplir :

- Identification du cylindre moyen du nuage des points.
- Projection de tous les points sur ce cylindre.
- Construction d'une chaussée dans le plan.
- Remaillage pour compléter des facettes dans les espaces vides.

Les détails de cette procédure sont présentés dans sections suivantes.

7.1.1 Identification du cylindre moyen de nuage des points

Le cylindre moyen est déterminé par son axe $\underline{n}$, le rayon R dans le plan central. Un point quelconque A dans le nuage des points numérisés se projette verticalement sur le cylindre au point H et sur l'axe principal du cylindre $\underline{n}$ au point M (cf. figure 7.3).

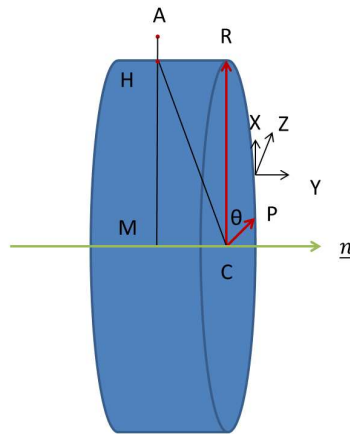


FIGURE 7.3 – Cylindre approché.

On détermine ($\underline{n}$ et R) du cylindre par la procédure de minimisation suivante :

$$\forall A, \quad \text{minimisation} \quad \Sigma(MH - R)^2 \quad (7.1)$$

Le rayon du cylindre ainsi déterminé est de 596 mm.

7.1.2 Projections de tous les points sur le cylindre moyenné

Comme les données initiales sont repérées dans un repère local, il faut les transmettre dans le repère du cylindre moyenné ($OXYZ$). L'axe OY se confond avec l'axe du cylindre $\underline{n}$, l'axe OX suit la direction circonférentielle du cylindre, l'axe OZ suit la direction radiale du cylindre (figure 7.3). Donc, un point

A est repéré par ses coordonnées suivantes :

$$\begin{cases} Z_A = \delta |HA| \\ Y_A = -|CM| \\ X_A = R \sin \theta \end{cases} \quad (7.2)$$

Où δ est une fonction de signe : $\begin{cases} \delta = +1 & \text{si } (\underline{HAOZ}) > 0 \\ \delta = -1 & \text{si } (\underline{HAOZ}) < 0 \end{cases}$, C est un point sur l'axe principal et il est choisit de telle sorte que $(\underline{CMn}) < 0$, θ est l'angle du point H sur son cercle par rapport à une position initiale (P) (cf. figure 7.3).

Les nouveaux vecteurs des points sont obtenus par assemblage des positions des points.

7.1.3 Construction d'une chaussée plane

Comme la longueur de l'aire contact réelle du pneumatique avec le rouleau (8 cm) est très petite par rapport au périmètre du rouleau (3.745 m) et à celui du pneu (1.88 m), l'aire de contact est supposée plane. L'influence de la courbure de rouleau est faible. Dans la figure 7.4, en prenant la longueur de

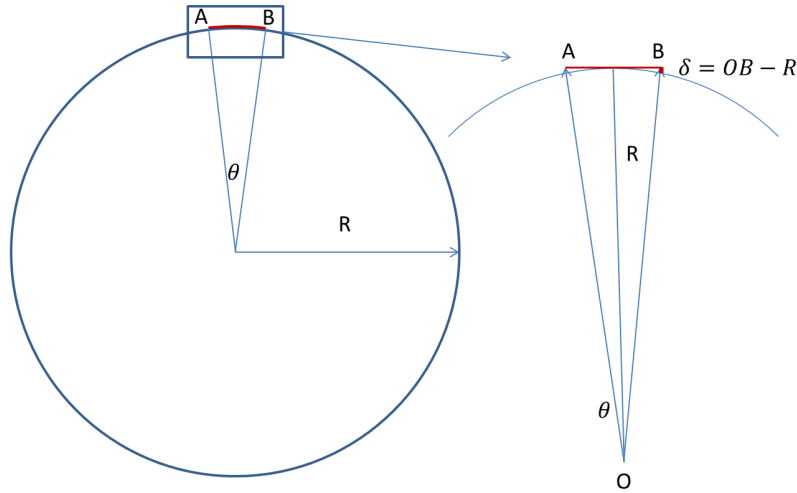


FIGURE 7.4 – Surface de la chaussée traitée.

contact AB égal à 0.08 m et le rayon du rouleau R égal à 0.56 m, l'angle $\theta \cong \frac{AB}{R}$ a alors une valeur proche de 0.1786 rad. L'effet de la courbure de rouleau est exprimé par la variation de $\delta = OB - R$. Donc :

$$\delta = R \left(\frac{1}{\cos(\frac{\theta}{2})} - 1 \right) \cong 1.4 \text{ mm} \quad (7.3)$$

Cette variation est très petite par rapport aux hauteurs des aspérités (environs 10 mm). La surface de rouleau est ramenée à une surface plane comme dans la figure 7.5. Sur une portion, le repère local ($OXYZ$) devient le repère cartésien car la courbure est négligée. Les coordonnées des points de la chaussée dans le repère cartésien sont celles dans le repère cylindrique (cf relations (7.2)). La longueur

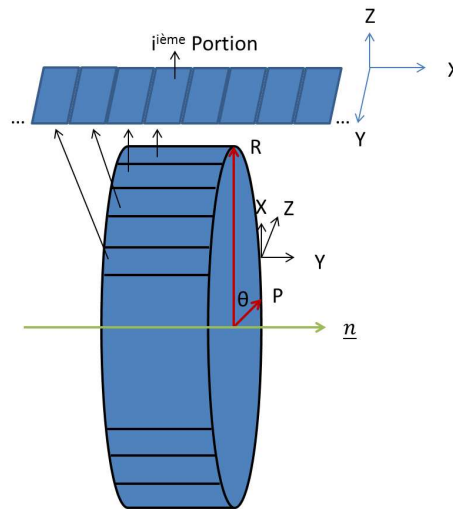


FIGURE 7.5 – Surface de la chaussée traitée.

de la chaussée construite est celle du périmètre de rouleau. Pour un roulage sur plusieurs tours de rouleau, il faut multiplier cette chaussée avec le nombre de tours de rouleau.

7.1.4 Remaillage pour compléter les facettes dans les espaces blancs

Certains espaces n'ont pas pu être maillés lors de la numérisation de la surface (car l'algorithme de numérisation ne permet pas de créer des éléments triangulaire de grande taille). Dans ces espaces blancs, la variation en hauteur de la chaussée est très faible. Pour remplir ces espaces, il faut créer des faces par les points au bord des espaces vides. Cela conduit à un maillage très irrégulier comme on peut le constater dans la figure 7.6. La densité des points est concentrée aux endroits où la variation de hauteur est forte, situés au bord des aspérités. Sur la figure 7.6, les formes des aspérités sont définies.

Le maillage corrigé n'est pas utile pour traiter le problème de contact car les informations dans les zones entre les aspérités ne sont pas importantes. Ce qui importe, ce sont les facettes potentiellement en contact. Elles sont plutôt proches du sommet des aspérités. La taille moyenne d'une aspérité est d'ordre $10 \times 20 \text{ mm}$, il est nécessaire d'avoir un maillage de la chaussée de taille $1 \times 1 \text{ mm}$. Afin de limiter le temps de traitement du contact, un maillage d'éléments rectangulaires de taille $1 \times 1 \text{ mm}$ est proposé et adapté aux données initiales. La figure 7.7 montre une image d'une portion de la chaussée numérisée. La couleur symbolise la hauteur des gravillons qui varie de -5 mm à 5 mm . L'image en haut correspond au maillage rectangulaire régulier et l'image en bas correspond au maillage initial. Le maillage final garde les informations essentielles de la surface numérisée de départ, en tout cas pour le calcul du contact.

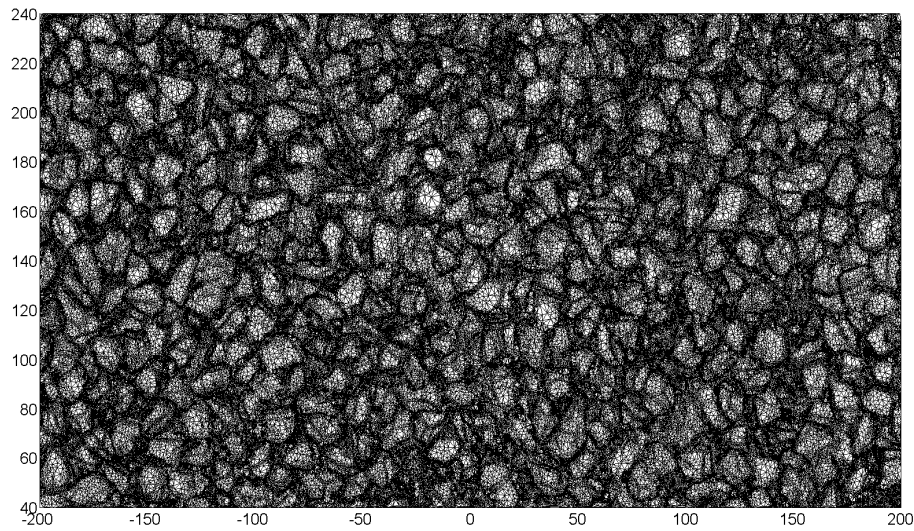


FIGURE 7.6 – Le maillage après correction des espaces blancs.

7.2 Roulage sur une barrette

Des essais de roulage sur une barrette de dimension 5×20 mm sont effectués (cf. figure 7.8). Les efforts de blocage au centre de roue sont mesurés. Les mesures sur une barrette 5×20 sont réalisées chez Michelin avec d'autres pneus 15" et 17". Les mesures sont comparées au calcul fait avec un autre pneumatique 16" percutant le même obstacle. Comme les pneus sont différents, les fréquences de résonances ne seront pas identiques mais les phénomènes physiques doivent être retrouvés. Comme l'effet de la cavité d'air et de la roue n'influence pas les résultats, on utilise le modèle du pneu seul pour étudier le contact sur une barrette.

7.2.1 Le calcul dynamique direct

Dans le chapitre 6, on a construit un modèle de contact du pneu et de la chaussée avec différentes approches de résolution. Dans un premier temps, le calcul dynamique direct est comparé aux mesures. Le pneu est mis sous une pression de 2.2 Bar. Une charge de 4000N est appliquée au centre de roue qui roule à 30 km/h. Le temps et le pas de temps du calcul sont identiques à ceux enregistrés dans les essais. La durée totale est de 0.27 s. A chaque pas de temps, le calcul de contact dynamique est résolu en environ 40 secondes. La durée globale du calcul est d'environ 1.27 jours.

La figure 7.9 montre les spectres des efforts verticaux et longitudinaux au centre de la roue. La courbe bleue montre le résultat du calcul numérique avec le pneu 16". Les courbes noire et rouge montrent des résultats mesurés respectivement avec un pneu 15" et un pneu 17". On remarque que les résonances ont des rayons légèrement différents car les pneus sont différents mais les phénomènes physiques sont bien

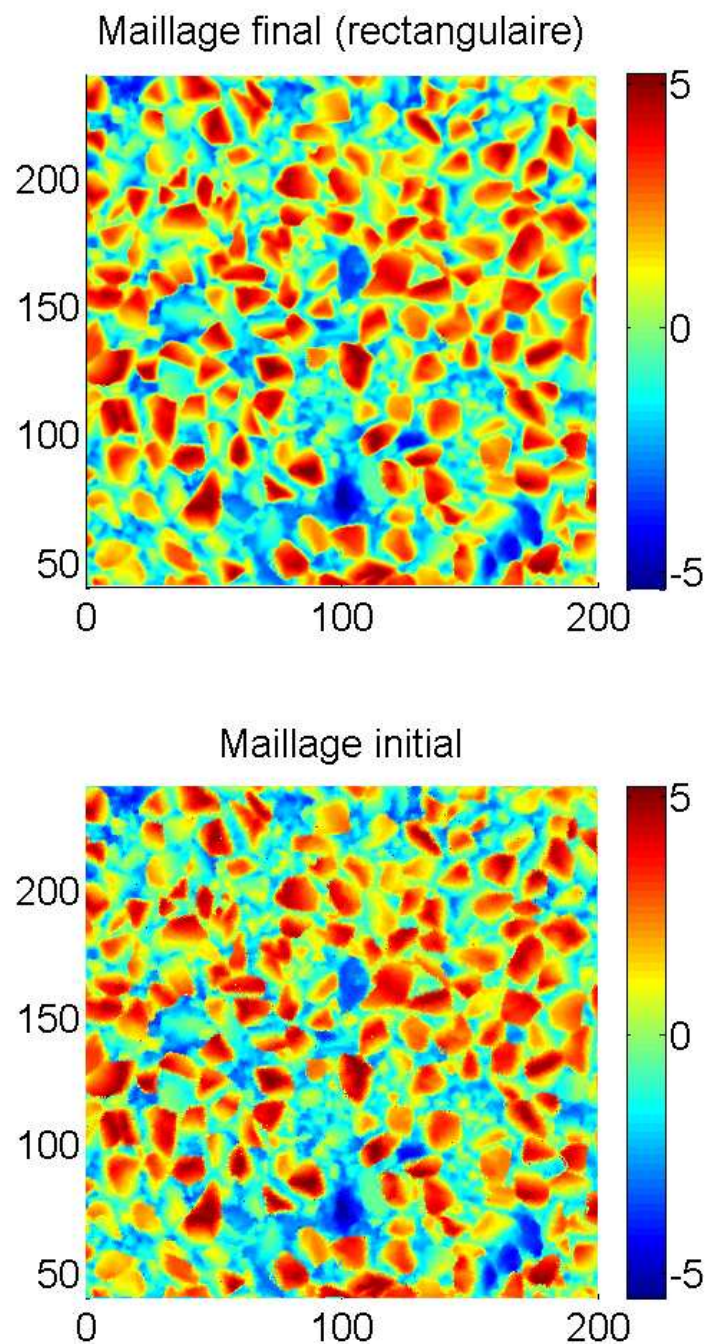


FIGURE 7.7 – Surface de la chaussée réelle.

représentés et l'ordre de grandeur est correct. La première anti-résonance du spectre d'effort vertical est lié au spectre des déplacements imposés. En effet, la base du pneu subit un choc lors du passage sur une barrette.

La figure 7.10 montre les déplacements verticaux imposés successivement dans l'aire de contact. Avec $L = l_0 + 2\alpha h_0 + l_e$, où α est un coefficient égal à 0.5, l_0 est la largeur de l'obstacle, h_0 la

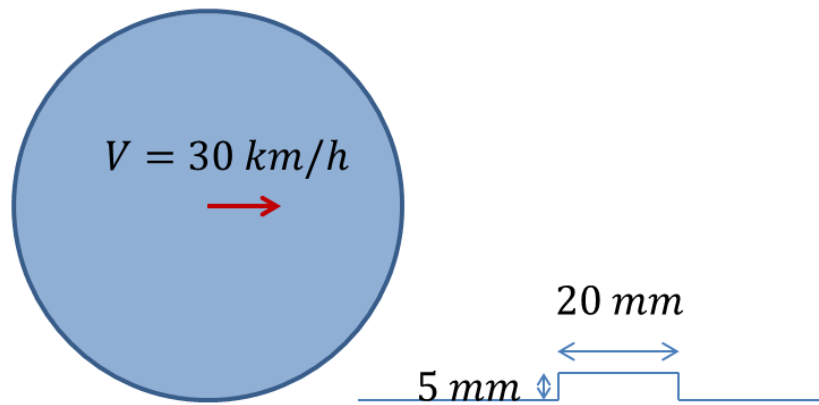


FIGURE 7.8 – Roulage sur une barrette.

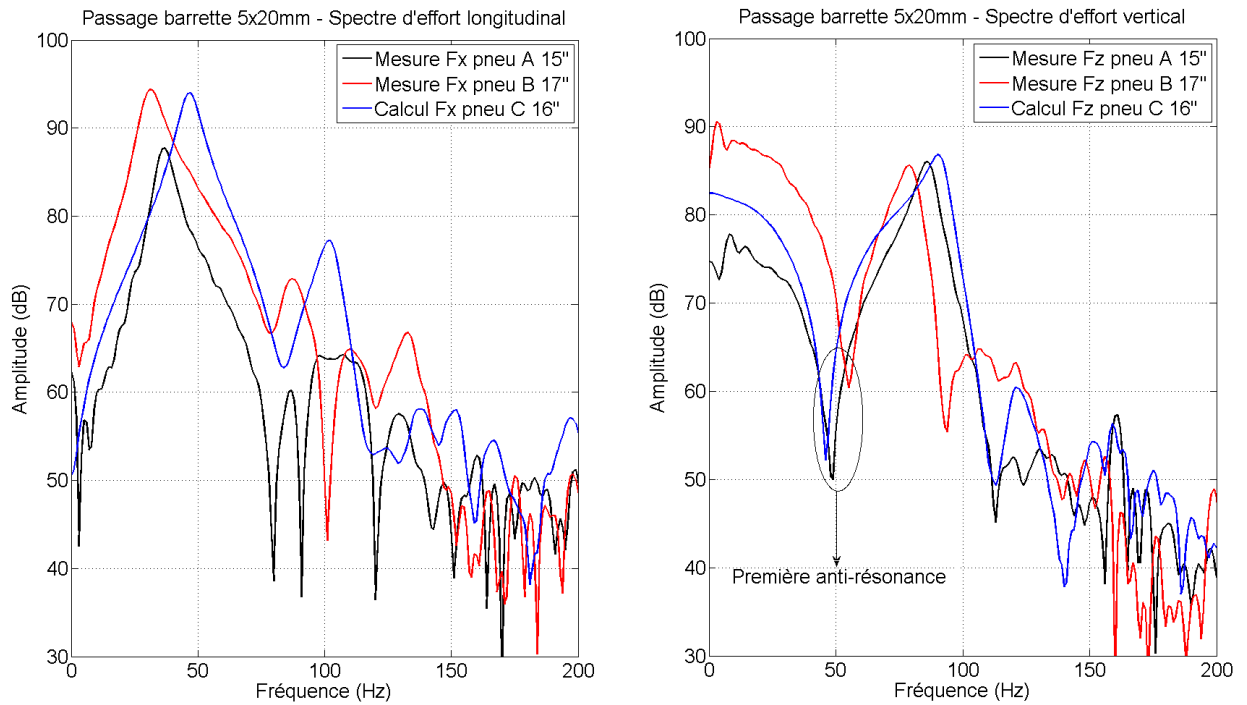


FIGURE 7.9 – Spectre des efforts au centre roue.

hauteur de l'obstacle et l_e la longueur de l'empreinte, la première anti résonance est à la fréquence $\frac{1}{T} = \frac{V}{L} \approx 55.66 \text{ Hz}$. Les anti-résonances sont transmises au centre de roue. Ce phénomène physique est observé dans la mesure et le calcul (cf. figure 7.9).

Les premières résonances sont les plus importantes en terme de niveau. A partir de 150 Hz, le

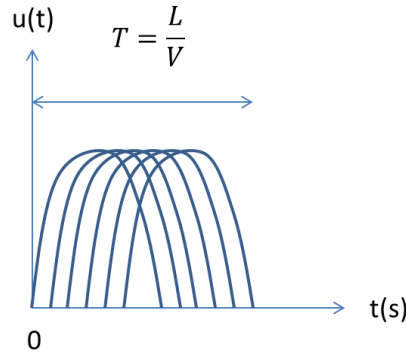


FIGURE 7.10 – Déplacement vertical et le spectre excité.

niveau devient faible (inférieur à 60 dB). La première résonance de la force de réaction longitudinale correspond au premier mode de l'ensemble pneu roue. Il s'agit d'une rotation de la roue autour de son axe reprise par la raideur longitudinale des flancs. Le premier pic dans le spectre de la force verticale correspond au premier mode radial du pneumatique.

7.2.2 Approche statique suivi d'un calcul dynamique linéaire

L'approche de décomposition avec les déplacements verticaux imposés est retenue pour traiter le contact dynamique. On rappelle que le calcul est fait en deux étapes :

- Calcul non linéaire sur le sol lisse. C'est un calcul statique à l'arrêt réalisé sous Abaqus. On récupère les matrices de masse et de raideur pour l'utilisation dans la deuxième étape.
- Calcul dynamique linéaire sur la barrette. En utilisant la configuration du pneumatique écrasé sur le sol lisse, le contact est traité sous Matlab à l'aide des matrices extraites à l'étape précédente.

7.2.2.1 Calcul statique

La barrette est fixée sur le rouleau. Le contact statique est calculé pour chaque position du pneu sur le rouleau. La longueur de rouleau est de 3745 mm et on effectue un calcul statique par pas de 1 mm. Donc, un total de 3745 pas ont été réalisés.

A la fin de chaque calcul statique, les forces de contact, l'aire de contact et les déplacements des points au contact sont enregistrés. Les vecteurs de la force de contact et de déplacement dépendent de la position X du pneumatique $(f_i(X), u_i(X))$, où f_i est la force de contact au point "i", u_i le déplacement à ce point, X la coordonnée du pneu par rapport au rouleau. Comme le pneu roule à une

vitesse $V = 30$ km/h, X est donnée par :

$$X = Vt$$

On réécrit la force et le déplacement dans l'aire de contact dans le domaine temporel :

$$\begin{cases} f_i(X) = f_i(Vt) = F_i(t) \\ u_i(X) = u_i(Vt) = U_i(t) \end{cases}$$

Avant de lancer le calcul dynamique, il faut interpoler les forces et les déplacements à tous les pas de temps du calcul temporel. Donc, les excitations sont calculées à chaque instant t :

$$\begin{cases} f_i^{excitation}(t) = \text{Interpolation}(f_i)(P \rightarrow [0 : 1 : 3745])(t) \\ u_i^{excitation}(t) = \text{Interpolation}(u_i)(P \rightarrow [0 : 1 : 3745])(t) \end{cases}$$

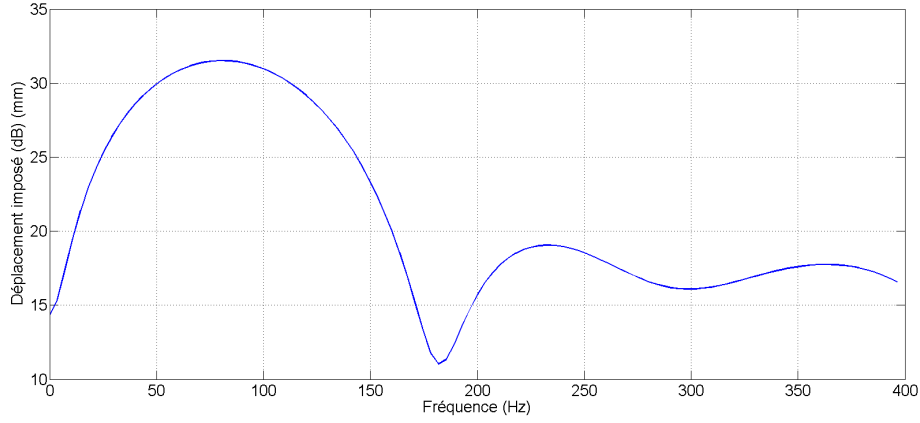


FIGURE 7.11 – Le spectre de déplacement imposé à un point.

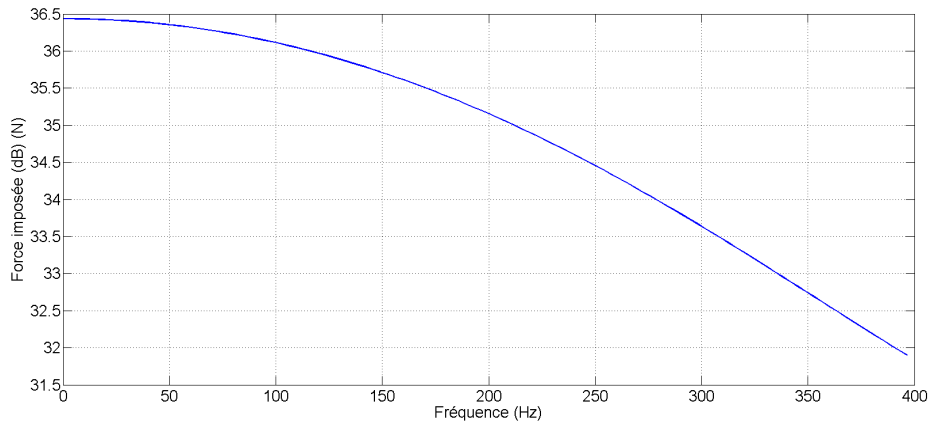


FIGURE 7.12 – Le spectre de force imposée à un point.

Les figures 7.11 et 7.12 montrent des spectres de déplacement et de force imposés.

En résumé, le traitement statique est illustré dans la figure 7.13. Une fois, les vecteurs imposés en temps

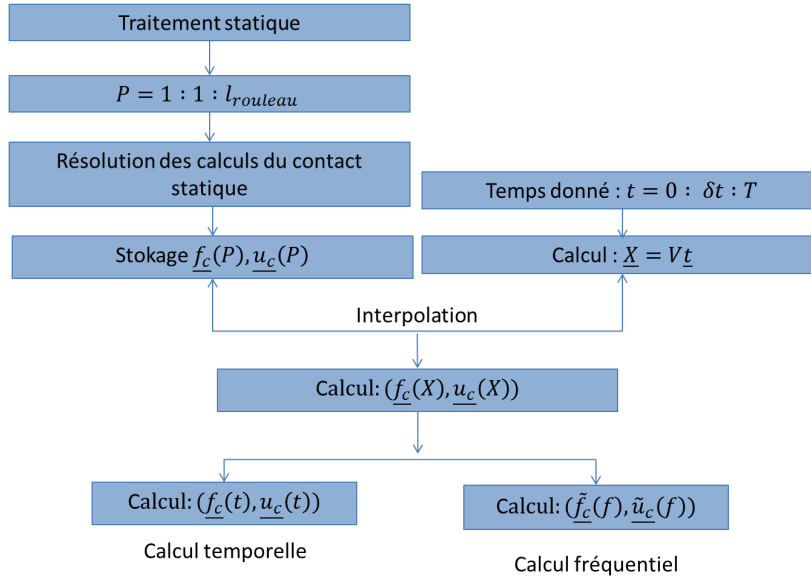


FIGURE 7.13 – L’algorithme du traitement statique.

construits, le calcul dynamique de contact est résolu avec ces excitations imposées. Ce type de calcul est fait de manière temporelle ou fréquentielle. Les deux méthodes donnent à priori les mêmes résultats. Le calcul temporelle est plus long que le calcul fréquentiel (car le nombre de calculs temporels est élevé), et le calcul fréquentiel est privilégié pour le calcul dynamique.

7.2.2.2 Calcul dynamique suivi du calcul statique

Le calcul dynamique est fait de manière classique en résolvant :

$$\begin{cases} (-\omega^2 \underline{\underline{M}} + i\omega \underline{\underline{C}} + \underline{\underline{K}}) \underline{u} = \underline{\tilde{f}}^{excitation}(\omega) \\ \underline{u}^{imp} = \underline{\tilde{u}}^{excitation}(\omega) \end{cases} \quad (7.4)$$

où $\omega = 2\pi f$.

Ces équations sont résolues par la méthode des multiplicateurs de Lagrange pour la prise en compte des déplacements imposés. Les calculs sont réalisés de 0 jusqu’à 400 Hz avec un pas de 1 Hz. Le temps des calculs est d’environ 4000 secondes (1.1 heure). Ce calcul est 30 fois plus rapide que le calcul dynamique direct.

La figure 7.14 montre les forces verticale et longitudinale au centre de roue calculées par les deux méthodes. La courbe rouge montre le résultat du calcul dynamique direct. La courbe noire montre le résultat du calcul statique suivi du calcul dynamique fréquentiel. Les deux courbes sont très proches en basses fréquences (moins de 230 Hz). A partir de cette fréquence, les résultats sont plus éloignés.

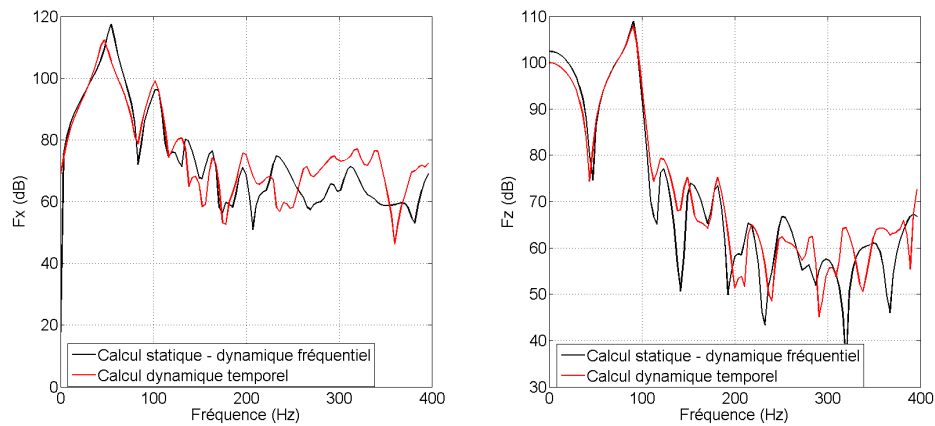


FIGURE 7.14 – Les forces au centre de roue calculées par deux méthodes.

7.3 Roulage sur une chaussée réelle

Avant de lancer le calcul du modèle complet PRC sur une chaussée réelle, on validera l'approche du calcul statique suivi du calcul dynamique sur un modèle du pneu seul sur la chaussée réelle.

7.3.1 Contact du pneu seul sur une chaussée réelle

7.3.1.1 Calcul statique

Le modèle de pneumatique recalé peut être utilisé pour des calculs de contact avec la chaussée. Un raffinement peut être apporté aux patins en caoutchouc aussi bien dans la direction orthoradiale que suivant l'axe de rotation du pneumatique. Ce raffinement est illustré sur la figure 7.15, il permet d'obtenir des patches de 2mmx2mm requis pour un calcul de contact suffisamment précis, en particulier pour un contact avec une surface réaliste, tout en conservant une taille acceptable de la structure discrétisée, avec près de 100 000 degrés de liberté.

Comme dans le cas du roulage sur une barrette, le contact statique est réalisé pour déterminer des excitations en base du pneu. Un calcul est simulé dans des conditions similaires à la mesure. Pour éviter des excitations périodiques dues à la limitation de la longueur de rouleau, à la mesure, la vitesse du pneu varie de 5 km/h à 135 km/h pendant 272 secondes. Le calcul temporel pendant 272 s est impossible car le nombre de calculs correspondant est de 557241. Si un calcul dynamique direct dure 45 secondes, le temps global est d'environ 291 jours. Il est nécessaire d'utiliser l'approche statique suivi d'un calcul dynamique. L'algorithme pour le calcul statique est illustré dans la figure (7.13). Il faut calculer le contact statique direct pour toutes les positions de rouleau. Comme dans le cas de la barrette, les excitations sont calculées sur un tour de rouleau. Ce calcul est effectué toutes les 1 mm. Il y a au total 3745 calculs. Le temps du traitement statique est de 1 jour.

Comme expliqué au paragraphe 6.4.3, pour éviter d'avoir une excitation périodique, on fait varier la vitesse du rouleau de 90 à 70 km/h et l'on calcule des spectres moyennés (en fait, des densités spectrales

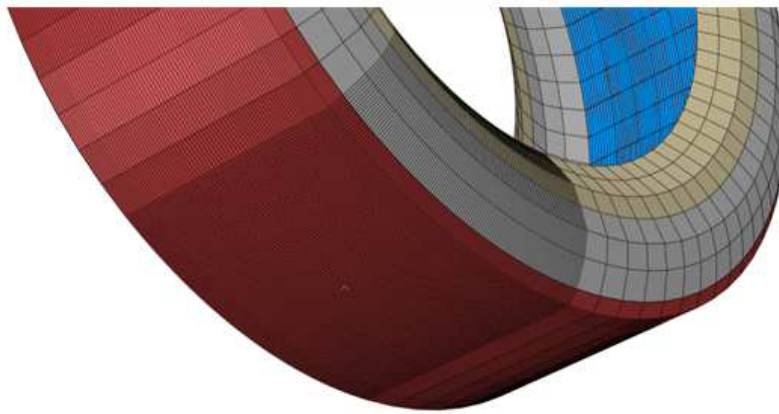


FIGURE 7.15 – Modèle du pneu utilisé dans les calculs.

de puissance) au calcul comme à la mesure.

7.3.1.2 Calcul dynamique

Avec les excitations calculées précédemment on lance le calcul fréquentiel à l'aide des équations (7.4). Puis, on calcule les densités spectrales de puissance.

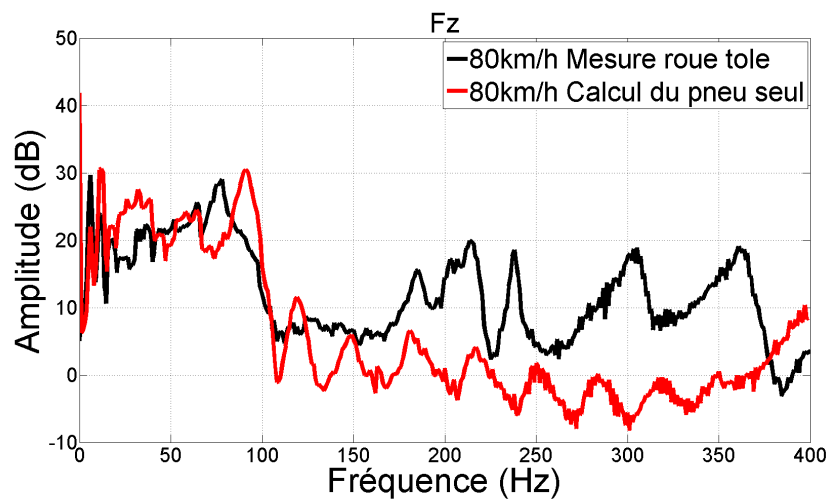


FIGURE 7.16 – Comparaison de la force verticale au centre roue de la mesure et du calcul.

La figure 7.16 montre une comparaison de la force verticale au centre roue entre la mesure et le calcul. Les amplitudes numériques et expérimentales de la première résonance sont comparables. La fréquence de ce mode est décalée de 10 Hz. Ceci pourrait s'expliquer par le changement du comportement du pneu en rotation. En effet, le modèle du pneumatique est construit à partir de mesures à l'arrêt (cf. paragraphe 5.4.2). En roulage, le pneumatique s'échauffe au contact de la route. La raideur et

l'amortissement du caoutchouc sont alors modifiés et peuvent expliquer les écarts en fréquence et en niveau.

7.3.2 Contact de PRC sur une chaussée réelle

Le maillage du modèle PRC est aussi raffiné que le modèle du pneu. Le temps du calcul dynamique fréquentiel du modèle de pneu seul est d'environ 8 heures. Le temps de ce calcul pour le modèle PRC est d'environ 9 jours. Pour accélérer le calcul, on propose un modèle PRC plus grossier. Un maillage de 23 x 24 mm est retenu (cf. figure 7.17). Pour confirmer que le fait du changement de maillage n'influence que légèrement les résultats, on propose une comparaison des calculs pour un pneu seul.

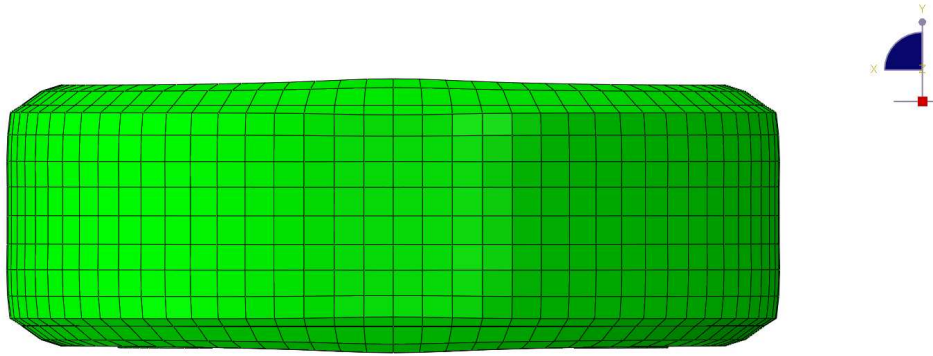


FIGURE 7.17 – Maillage grossier du pneu

7.3.2.1 Calcul du modèle de pneu grossier sur une chaussée réelle

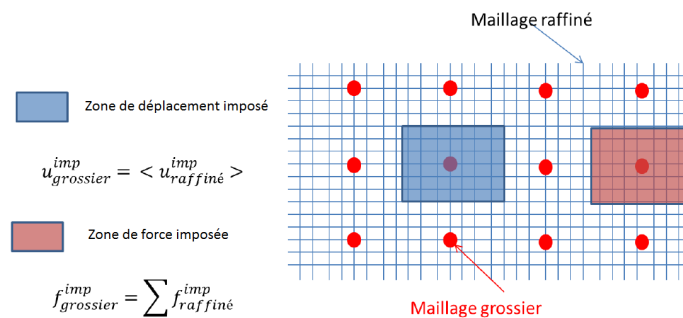


FIGURE 7.18 – Schéma du calcul des excitations du modèle grossier

Les excitations sont construites pour le modèle raffiné. Il faut les moyenner dans le modèle grossier. On partitionne la surface du modèle raffiné en N zones sur lesquelles un noeud du maillage grossier est au centre. Dans la zone de déplacements imposés, le déplacement au noeud du maillage grossier est calculé en prenant le moyenne des déplacements de la zone. Dans la zone de forces imposées, la force

au noeud du maillage grossier est la somme des forces dans cette zone (cf. figure 7.18). On obtient ainsi l'excitation pour le modèle grossier.

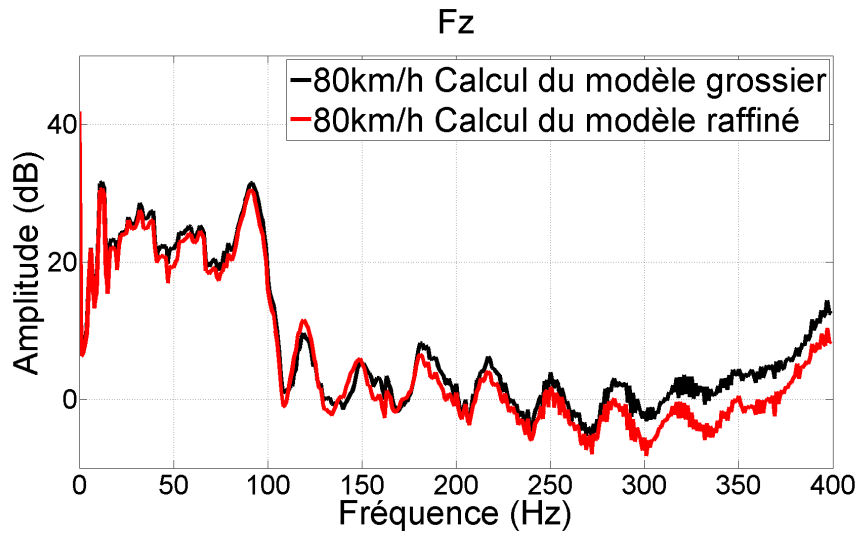


FIGURE 7.19 – Comparaison de la réponse de la force verticale au centre de roue

La figure 7.19 présente une comparaison des forces verticales au centre de roue des deux modèles l'un raffiné et l'autre grossier. On peut remarquer que les deux courbes sont très proches jusqu'à 270 Hz. Au delà de cette fréquence, les écarts deviennent plus grands. Le modèle grossier et la méthode de construction des excitations sont donc validés. De plus, le calcul du modèle grossier est beaucoup plus rapide que celui du modèle raffiné.

7.3.2.2 Calcul du modèle PRC grossier sur une chaussée réelle

En utilisant le modèle PRC grossier, le temps du traitement est d'environ 4 heures pour un roulage de 90 km/h à 70 km/h pendant 41 secondes. Les figures (7.20), (7.21), (7.22) et (7.23) présentent des comparaisons des force verticales et des moments longitudinaux au centre de roue de deux calculs : roue tôle et roue alu. Pour la roue alu, on observe que le mode de cavité apparait à la fréquence de 245 Hz et 215 Hz. La séparation de la fréquence est liée à l'effet tournant. Ce phénomène est observé sur les deux courbes de F_z et M_x . En termes de niveaux, la force verticale est très proche de la mesure. Par contre, le moment M_x calculé est loin de la mesure pour les basses fréquences (moins de 200Hz). Mais les phénomènes physiques semblent corrects. Les dédoublements des fréquences liés à la rotation apparaissent dans le calcul et la mesure. Pour la roue tôle, des résultats similaires sont observés. Le mode de la roue apparait plus tôt que le mode de cavité d'air car la raideur de la roue tôle est plus petite que celle de la roue alu. Le dédoublement lié à ce mode est présent dans le calcul et la mesure (180 Hz et 202 Hz). On remarque que les résultats au delà de 300 Hz ne sont pas comparables. Ces écarts peuvent être attribués au manque de rigidité du moyen de mesure sur lequel la roue est fixée. Les niveaux sur les pics des calculs sont différents par rapport aux mesures. Cela peut être expliqué par la prise en compte de l'effet de température du pneu tournant qui n'est pas pris en compte

dans notre modèle. En effet, le pneu tournant sur un banc est réchauffé du fait du frottement. Cette température fait changer le module de Young du caoutchouc et son amortissement visqueux. Cela conduit aux décalages des fréquences des résonances du pneumatique et des niveaux des réponses.

Les différences des courbes du moment longitudinal M_x en basses fréquences pourraient être expliquées par la prise en compte de l'hypothèse des déplacements verticaux imposés. En effet, en basses fréquences, les excitations latérales excitent les modes transversaux du pneumatique. Ce phénomène entre en compétition avec la génération d'un moment par excitation en déplacements verticaux avec prise en compte de la dissymétrie apportée pour la roue. Dans notre modèle de contact, ces excitations ne sont pas présentes. Pour améliorer la réponse de ce moment en basses fréquences, il pourrait être intéressant de modéliser le contact avec les déplacements latéraux.

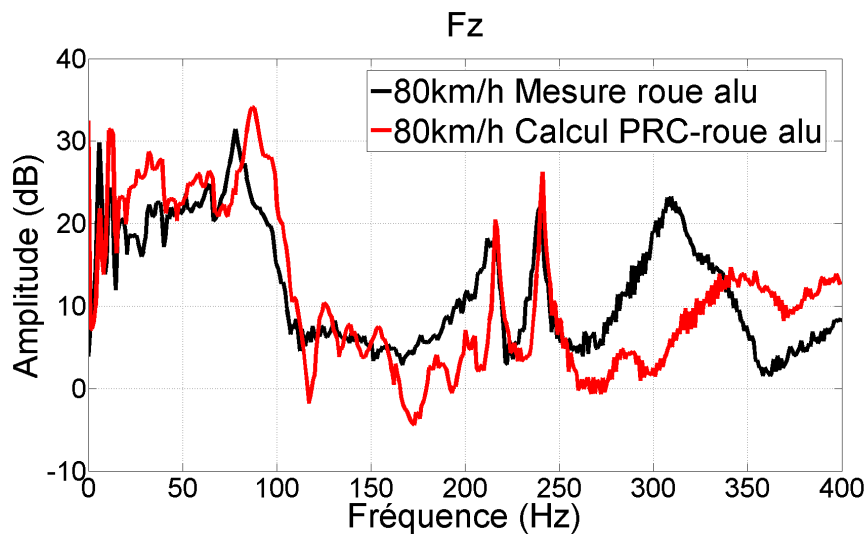


FIGURE 7.20 – Comparaison du calcul et de la mesure - Fz

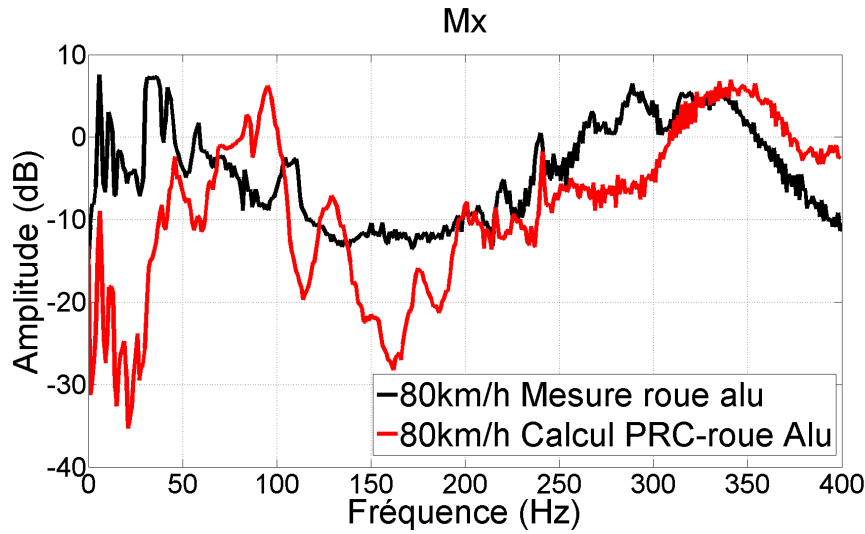


FIGURE 7.21 – Comparaison du calcul et de la mesure - Mx

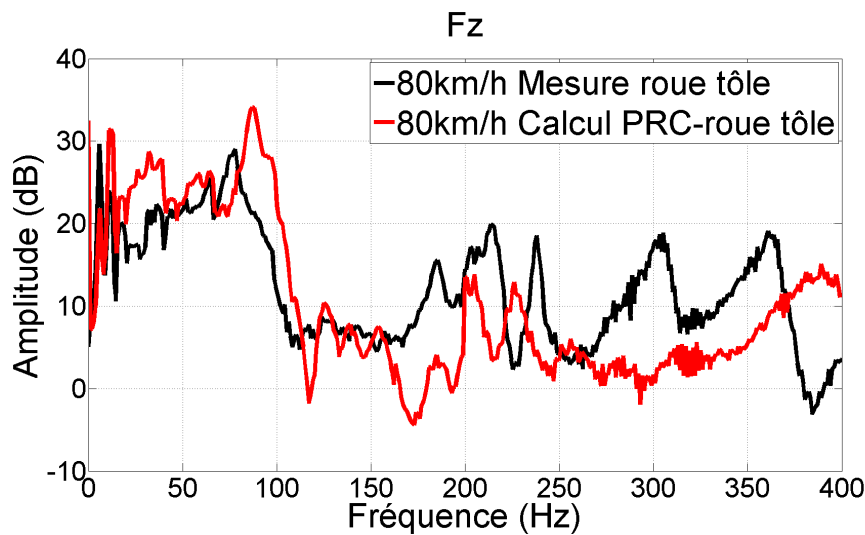


FIGURE 7.22 – Comparaison du calcul et de la mesure - Fz

7.4 Conclusion

Dans ce chapitre, la chaussée numérisée est traitée pour calculer le contact. Ensuite, le roulage sur une barrette à 30 km/h est simulé avec le modèle développé dans le chapitre précédent. Les résultats permettent de valider le modèle ainsi que les approches de calcul.

Le roulage sur une chaussée est fait pour le modèle raffiné du pneu seul. Le résultat est satisfaisant en terme de niveau à la première résonance du pneumatique. La fréquence est décalée légèrement. Le temps du calcul est d'environ 9 heures ce qui reste long. Un maillage plus grossier a été proposé pour accélérer le calcul.

Les résultats du contact sur la même chaussée obtenus avec un maillage grossier du pneu seul sont

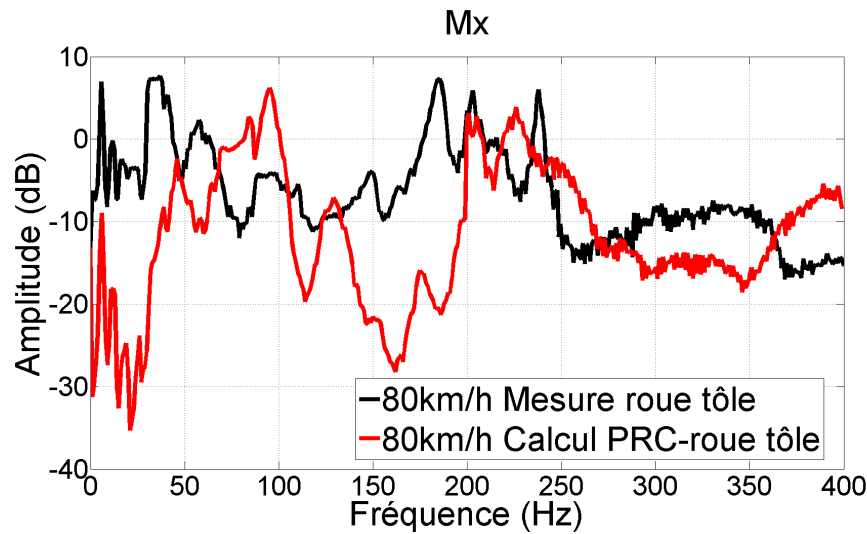


FIGURE 7.23 – Comparaison du calcul et de la mesure - Mx

très proches de ceux obtenus avec un maillage raffiné. Cela permet de valider le modèle et la façon de calculer les excitations. Ensuite, le calcul du modèle PRC avec un maillage grossier est réalisé. Les comparaisons entre ces calculs et les mesures montrent qu'il y a de petits décalages en fréquences et en niveaux des réponses. Les phénomènes physiques liés à la rotation sont observés au calcul et à la mesure. Les décalages des pics peuvent être expliqués par l'effet de température du roulage sur un banc. Les différences de niveaux de réponses sur la courbe du moment longitudinal restent à être réduites par des études ultérieures.

Conclusions et Perspectives

Conclusions

Pour améliorer sa méthodologie de calcul du bruit de roulement, PSA Peugeot Citroën souhaite développer une filière purement numérique et modéliser le comportement vibro-acoustique du pneumatique en rotation roulant sur une chaussée rugueuse.

L'étude du pneumatique en rotation développé s'appuie sur une approche Arbitrairement Lagrangienne Eulérienne (ALE). Cette approche permet de formuler l'état stationnaire et l'état dynamique avec les effets de rotation, c'est à dire avec la prise en compte des termes gyroscopiques et centripètes. Le terme gyroscopique est toujours antisymétrique et le terme centripète est symétrique. Ils modifient légèrement la raideur du système et entraînent des dédoublements des fréquences en fonction de la vitesse de rotation. Ils ne dépendent que de la forme géométrique, de la masse du solide et de la vitesse de rotation.

La validation de l'approche ALE est faite analytiquement par l'utilisation d'un modèle simple d'anneau circulaire 2D. Il prend en compte les effets de cisaillement et les non-linéarités en géométrie dues à l'application de la charge du véhicule. L'utilisation d'hypothèses supplémentaires permet de retrouver un modèle décrit dans la littérature. La résolution numérique de ce modèle permet de confirmer l'effet de rotation. Les séparations en fréquences sont observées. Les résultats du modèle analytique sont corrélés avec les résultats numériques.

Par la suite, un modèle éléments finis du pneumatique, de la roue et de la cavité est utilisé pour simuler la prise en compte des effets tournants. Son comportement vibratoire est recalé par rapport à des mesures faites à l'arrêt sur un pneumatique existant. Une excitation verticale unitaire est appliquée dans l'aire de contact et les efforts de blocage au centre roue sont calculés en fonction de la vitesse. Des dédoublements apparaissent pour les premiers modes de pneumatique, de la cavité d'air et de la roue. Les mêmes phénomènes sont observés à la mesure lorsque le pneumatique roule sur un revêtement gravillonné. Des décalages en fréquence sont expliqués par le changement du comportement du caoutchouc en roulage du fait d'une augmentation de température.

Concernant les modèles de contact, deux modèles de contact 1D (masse-ressort et une série de masses-ressorts) permettent de valider le schéma numérique (méthode de Newmark) et l'hypothèse pour négliger la masse des patins en caoutchouc. En utilisant cette hypothèse, un modèle de contact 2D est construit. Ce modèle se compose du modèle d'anneau circulaire relié avec des ressorts (représentant les patins). Le contact est traité avec l'hypothèse sans frottement et prend en compte

des déplacements latéraux et verticaux dans l'aire de contact. Le contact est réalisé avec l'hypothèse de la déformation non-linéaire en géométrie. Le calcul direct est très long. Pour accélérer le calcul, une méthode de décomposition est proposée. Cette méthode comprend un calcul statique non-linéaire sur le sol lisse suivi d'un calcul linéaire sur une chaussée rugueuse. La difficulté associée à la résolution est liée au choix de l'aire de contact initiale. Pour régler cette difficulté, on propose une autre approche où les déplacements verticaux sont imposés en supposant que les déplacements latéraux sont petits. Cette hypothèse est validée par l'application numérique. Ensuite, le modèle de contact 3D (PRC) est utilisé. L'approche ALE permet de raffiner l'aire de contact en gardant un maillage grossier par ailleurs. Le contact est traité comme un problème avec les déplacements verticaux imposés. Le calcul est fait en deux étapes : calcul non-linéaire sur le sol lisse et calcul linéaire en ajoutant les rugosités de la chaussée. Les résultats statiques permettent de valider les hypothèses utilisées. Le calcul dynamique direct en temporel sur une chaussée réelle n'est pas réaliste car le temps du calcul est très long. Pour accélérer le calcul dynamique sur la chaussée rugueuse, on propose la méthode du calcul statique suivi d'un calcul dynamique. Un calcul fréquentiel est alors appliqué pour la résolution dynamique. Le résultat obtenu par cette méthode est satisfaisant.

Enfin, des comparaisons des résultats mesurés et des calculs du modèle PRC sur la chaussée numérisée ont été faites. Une comparaison intermédiaire sur le contact du pneu seul sur une barrette à 30 km/h est effectuée. Les réponses calculées sont proches des mesures de référence. La comparaison du contact du modèle PRC sur une chaussée rugueuse est ensuite réalisée. Une bonne cohérence pour la force verticale est observée. Mais, les courbes du moment longitudinal sont différentes pour le calcul et la mesure. Les différences pourraient être expliquées par la construction des excitations appliquées au calcul dynamique. Notre modèle ne permet pas de prendre en compte les déplacements latéraux dans l'aire de contact. Cela conduit à des écarts de niveaux entre les deux courbes du moment. Néanmoins, notre modèle modélise bien l'effort vertical.

Les développements réalisés pour la prise en compte des effets tournants et la modélisation du contact avec la chaussée constituent des avancées majeures pour la construction d'une filière purement numérique qui paraît désormais envisageable.

Perspectives

Pour améliorer la représentativité du modèle du pneumatique, il faudrait pouvoir prendre en compte les modifications de comportement du caoutchouc liées à l'échauffement lors du roulage sur la chaussée.

La prédiction du moment longitudinal doit également être améliorée car il s'agit d'une voie de passage prépondérante du bruit de roulement. Pour cela, la modélisation des excitations latérales dans l'aire de contact pourrait s'avérer nécessaire.

Enfin, la méthode du calcul statique suivi d'un calcul dynamique n'est valable qu'en basses fréquences. Pour calculer la réponse en hautes fréquences, il faut trouver une méthode de réduction afin d'appliquer un calcul dynamique direct.

Matrice de rotation

Le solide roule dans un plan avec une vitesse de rotation $\dot{\theta}(t)$. En utilisant le repère OXYZ tel que l'axe de rotation est l'axe OZ, la matrice de rotation s'écrit :

$$\underline{\underline{\theta}} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5)$$

L'inversion de la matrice de rotation s'écrit :

$$\underline{\underline{\theta}}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (6)$$

De (5) et (6), il vient :

$$\underline{\underline{\dot{\theta}\theta^{-1}}} = \dot{\theta} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (7)$$

Développement des facteurs dans la formulation variationnelle

.1 Démonstration de la relation (3.45)

Soit $\underline{\underline{A}}$ une matrice et $\underline{b}$ un vecteur dans l'espace Euclidien, la relation suivante est toujours valable :

$$\underline{b} \operatorname{div} (\underline{\underline{A}}) = \operatorname{div} (\underline{b} \underline{\underline{A}}) - \underline{\underline{A}}^T : \underline{\underline{\operatorname{grad}}} (\underline{b}) \quad (8)$$

Démonstration

Par définition :

$$\operatorname{div} (\underline{b} \underline{\underline{A}}) = \frac{\partial (A_{ij} b_i)}{\partial x_j} = \frac{\partial A_{ij}}{\partial x_j} b_i + A_{ij} \frac{\partial b_i}{\partial x_j} = \operatorname{div} (\underline{\underline{A}}) \underline{b} + \underline{\underline{A}}^T : \underline{\underline{\operatorname{grad}}} (\underline{b}) \quad (9)$$

En appliquant avec $\begin{cases} \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{\tilde{S}}} + \underline{\underline{\operatorname{grad}}} (\underline{u}(\underline{X}, t)) \underline{\underline{\sigma}} \\ \underline{b} = \delta \underline{u} \end{cases}$, il vient :

$$\begin{aligned} \delta \underline{u} \operatorname{div} (\underline{\underline{\tilde{S}}} + \underline{\underline{\operatorname{grad}}} (\underline{u}) \underline{\underline{\sigma}}) \\ = \operatorname{div} (\delta \underline{u} (\underline{\underline{\tilde{S}}} + \underline{\underline{\operatorname{grad}}} (\underline{u}) \underline{\underline{\sigma}})) - (\underline{\underline{\tilde{S}}} + \underline{\underline{\operatorname{grad}}} (\underline{u}) \underline{\underline{\sigma}})^T : \underline{\underline{\operatorname{grad}}} (\delta \underline{u}) \end{aligned} \quad (10)$$

.2 Démonstration de la relation (3.41)

Si $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{v}$ sont trois vecteurs dans l'espace Euclidien, la relation suivante est toujours satisfaite :

$$\operatorname{div} ((\underline{a} \underline{b}) \underline{v}) = \underline{\underline{\operatorname{grad}}} (\underline{a} \underline{b}) \underline{v} + (\underline{a} \underline{b}) \operatorname{div} (\underline{v}) \quad (11)$$

D'ailleurs,

$$\underline{\underline{\operatorname{grad}}} (\underline{a} \underline{b}) = \underline{b} \underline{\underline{\operatorname{grad}}} (\underline{a}) + \underline{a} \underline{\underline{\operatorname{grad}}} (\underline{b}) \quad (12)$$

En remplaçant (12) dans (11), il vient :

$$\operatorname{div} ((\underline{a} \underline{b}) \underline{v}) = \underline{b} \underline{\underline{\operatorname{grad}}} (\underline{a}) \underline{v} + \underline{a} \underline{\underline{\operatorname{grad}}} (\underline{b}) \underline{v} + \underline{a} \underline{b} \operatorname{div} (\underline{v}) \quad (13)$$

En utilisant : $\begin{cases} \underline{a} = \delta \underline{u} \\ \underline{b} = \underline{\dot{u}} \\ \underline{v} = \rho \underline{v} \end{cases}$ pour l'équation (13). Il vient :

$$\operatorname{div} ((\delta \underline{u} \underline{\dot{u}}) \rho \underline{v}) = \underline{\dot{u}} \underline{\underline{\operatorname{grad}}} (\delta \underline{u}) \rho \underline{v} + \delta \underline{u} \underline{\underline{\operatorname{grad}}} (\underline{\dot{u}}) \rho \underline{v} + (\delta \underline{u} \underline{\dot{u}}) \operatorname{div} (\rho \underline{v}) \quad (14)$$

Finalement,

$$\delta \underline{u} \underline{\underline{\operatorname{grad}}} (\underline{\dot{u}}) \rho \underline{v} = \operatorname{div} ((\delta \underline{u} \underline{\dot{u}}) \rho \underline{v}) - \underline{\dot{u}} \underline{\underline{\operatorname{grad}}} (\delta \underline{u}) \rho \underline{v} - (\delta \underline{u} \underline{\dot{u}}) \operatorname{div} (\rho \underline{v}) \quad (15)$$

.3 Démonstration de la relation (3.73)

Par la définition :

$$\underline{\underline{\text{grad}}}(\underline{H}\underline{q}) = \frac{\partial H_{ij} q_j}{\partial X_k} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_k = \frac{\partial H_{ij}}{\partial X_k} q_j \underline{e}_i \otimes \underline{e}_k = \underline{q} \underline{\underline{\text{grad}}}(\underline{H}^T) \quad (16)$$

.4 Démonstration de la relation (3.99)

Par les définitions, on écrit

$$\begin{aligned} & \left(\underline{q} \underline{\underline{\text{grad}}}(\underline{H}^T) \underline{\sigma} \right)^T : \delta \underline{q} \underline{\underline{\text{grad}}}(\underline{H}^T) \\ &= \delta q_m (H_{ji,k} \sigma_{kl} H_{jm,l}) q_i \\ &= \delta q_m \underline{e}_m (H_{ji,k} \sigma_{kl} H_{jm,l}) \underline{e}_m \otimes \underline{e}_i q_i \underline{e}_i \\ &= \delta \underline{q} \underline{\underline{\Lambda}} \underline{q} \end{aligned} \quad (17)$$

Équilibre des poutres

.5 Équilibre du moment

Proposition 1 : Quelque soit le vecteur $\underline{a}$ et le tenseur du second ordre $\underline{\underline{A}}$ définis dans l'espace Euclidien sur un domaine $\mathfrak{D}$, on a toujours :

$$\int_{\mathfrak{D}} \underline{a} \wedge \operatorname{div} (\underline{\underline{A}}) dV = \int_{\partial\mathfrak{D}} (\underline{a} \wedge \underline{\underline{A}} \underline{n}) dS + \int_{\mathfrak{D}} \underline{v} dV$$

Avec $\underline{n}$ le vecteur normal vers l'extérieur du bord de Ω , $\underline{v}$ un vecteur dont les composantes sont données par :

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}; \quad \underline{\underline{\operatorname{grad}}(a)} \underline{\underline{A}}^T - \underline{\underline{A}} \underline{\underline{\operatorname{grad}}(a)}^T = \begin{pmatrix} 0 & -v_3 & v_2 \\ & 0 & -v_1 \\ \text{anti-sym} & & 0 \end{pmatrix}$$

Démonstration : Comme les opérations de gradient et de divergence ne dépendent pas du repère choisi, pour simplifier la démonstration, on considère les coordonnées cartésiennes. En écrivant dans ce repère, on a :

$$\int_{\mathfrak{D}} \underline{a} \wedge \operatorname{div} (\underline{\underline{A}}) dV = \int_{\mathfrak{D}} (a_i \cdot \underline{e}_i) \wedge (A_{ij,j} \cdot \underline{e}_i) dV$$

Avec

$$A_{ij,j} = \frac{\partial A_{ij}}{\partial x_j}$$

Donc,

$$\begin{aligned} \int_{\mathfrak{D}} \underline{a} \wedge \operatorname{div} (\underline{\underline{A}}) dV = \int_{\mathfrak{D}} ((a_2 \cdot A_{3j,j} - a_3 \cdot A_{2j,j}) \underline{e}_1 + \\ (a_3 \cdot A_{1j,j} - a_1 \cdot A_{3j,j}) \underline{e}_2 + (a_1 \cdot A_{2j,j} - a_2 \cdot A_{1j,j}) \underline{e}_3) dV \end{aligned}$$

En appliquant le théorème de Stokes, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{\mathfrak{D}} (a_2 \cdot A_{3j,j} - a_3 \cdot A_{2j,j}) \underline{e}_1 dV &= \oint_{\partial\mathfrak{D}} (a_2 \cdot A_{3j} \cdot n_j - a_3 \cdot A_{2j} \cdot n_j) \underline{e}_1 dS - \int_{\mathfrak{D}} (a_{2,j} \cdot A_{3j} - a_{3,j} \cdot A_{2j}) \underline{e}_1 dV \\ \int_{\mathfrak{D}} (a_3 \cdot A_{1j,j} - a_1 \cdot A_{3j,j}) \underline{e}_2 dV &= \oint_{\partial\mathfrak{D}} (a_3 \cdot A_{1j} \cdot n_j - a_1 \cdot A_{3j} \cdot n_j) \underline{e}_2 dS - \int_{\mathfrak{D}} (a_{3,j} \cdot A_{1j} - a_{1,j} \cdot A_{3j}) \underline{e}_2 dV \\ \int_{\mathfrak{D}} (a_1 \cdot A_{2j,j} - a_2 \cdot A_{1j,j}) \underline{e}_3 dV &= \oint_{\partial\mathfrak{D}} (a_1 \cdot A_{2j} \cdot n_j - a_2 \cdot A_{1j} \cdot n_j) \underline{e}_3 dS - \int_{\mathfrak{D}} (a_{1,j} \cdot A_{2j} - a_{2,j} \cdot A_{1j}) \underline{e}_3 dV \end{aligned}$$

Où n_j sont les composantes des vecteurs normaux vers l'extérieur du domaine $\mathfrak{D}$. Alors,

$$\begin{aligned} \int_{\mathfrak{D}} \underline{a} \wedge \operatorname{div} (\underline{\underline{A}}) dV &= \int_{\partial \mathfrak{D}} (\underline{a} \wedge \underline{\underline{A}} \cdot \underline{n}) \cdot dS - \int_{\mathfrak{D}} (a_{2,j} \cdot A_{3j} - a_{3,j} \cdot A_{2j}) \underline{e}_1 \cdot dV \\ &\quad - \int_{\mathfrak{D}} (a_{3,j} \cdot A_{1j} - a_{1,j} \cdot A_{3j}) \underline{e}_2 \cdot dV - \int_{\mathfrak{D}} (a_{1,j} \cdot A_{2j} - a_{2,j} \cdot A_{1j}) \underline{e}_3 \cdot dV \quad (18) \end{aligned}$$

Si on pose :

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{3,j} \cdot A_{2j} - a_{2,j} \cdot A_{3j} \\ a_{1,j} \cdot A_{3j} - a_{3,j} \cdot A_{1j} \\ a_{2,j} \cdot A_{1j} - a_{1,j} \cdot A_{2j} \end{pmatrix}$$

Par ailleurs :

$$\underline{\underline{\operatorname{grad}}} (a) \underline{\underline{A}}^T - \underline{\underline{A}} \underline{\underline{\operatorname{grad}}} (a)^T = (a_{i,k} \cdot A_{jk} - A_{ik} \cdot a_{j,k}) \cdot \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j$$

Sous forme matricielle :

$$\underline{\underline{\operatorname{grad}}} (a) \underline{\underline{A}}^T - \underline{\underline{A}} \underline{\underline{\operatorname{grad}}} (a)^T = \begin{pmatrix} 0 & -v_3 & v_2 \\ & 0 & -v_1 \\ \text{sym} & & 0 \end{pmatrix}$$

On obtient :

$$\int_{\mathfrak{D}} \underline{a} \wedge \operatorname{div} (\underline{\underline{A}}) dV = \int_{\partial \mathfrak{D}} (\underline{a} \wedge \underline{\underline{A}} \cdot \underline{n}) \cdot dS + \int_{\mathfrak{D}} \underline{v} \cdot dV$$

On applique cette relation dans (4.24) et on obtient :

$$\int_{\mathfrak{D}} \underline{S'P'} \wedge \operatorname{div} (\underline{\underline{P}}) dV = \oint_{\partial \mathfrak{D}} (\underline{S'P'} \wedge \underline{\underline{P}} \cdot \underline{n}) \cdot dV + \int_{\mathfrak{D}} \underline{v} \cdot dV \quad (19)$$

Et

$$\begin{aligned} \oint_{\partial \mathfrak{D}} (\underline{S'P'} \wedge \underline{\underline{P}} \cdot \underline{n}) \cdot dV &= \int_{A_{s+ds}} (\underline{S'P'} \wedge \underline{\underline{P}}_{s+ds} \cdot \underline{s}) \cdot dA - \int_{A_s} (\underline{S'P'} \wedge \underline{\underline{P}}_s \cdot \underline{s}) \cdot dA + \\ &\quad + \int_{\partial \mathfrak{D}^{\text{lateral}}} (\underline{S'P'} \wedge \underline{\underline{P}} \cdot \underline{n}) \cdot dA = M_{s+ds} - M_s + ds \cdot \oint_{\partial A} (\underline{S'P'} \wedge \underline{\underline{P}} \cdot \underline{n}) \cdot dl \quad (20) \end{aligned}$$

Où M_{s+ds} et M_s sont respectivement les moments sur la section droite à la position $(s + ds)$ et (s) .

Par définition :

$$\begin{aligned} \int_{A_{s+ds}} (\underline{S'P'} \wedge \underline{\underline{P}}_{s+ds} \cdot \underline{s}) \cdot dA &= M_{s+ds} \\ \int_{A_s} (\underline{S'P'} \wedge \underline{\underline{P}}_s \cdot \underline{s}) \cdot dA &= M_s \end{aligned}$$

On calcule les composantes du vecteur $\underline{v}$ dans l'équation (19) :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\text{grad}}} (S'P') \underline{\underline{P}}^T - \underline{\underline{P}} \underline{\underline{\text{grad}}} (S'P')^T &= \underline{\underline{\text{grad}}} (OP' - OS') \underline{\underline{P}}^T - \underline{\underline{P}} \underline{\underline{\text{grad}}} (OP' - OS')^T \\ &= \underline{\underline{\text{grad}}} (OP') \underline{\underline{P}}^T - \underline{\underline{P}} \underline{\underline{\text{grad}}} (OP')^T - \left(\underline{\underline{\text{grad}}} (OS') \underline{\underline{P}}^T - \underline{\underline{P}} \underline{\underline{\text{grad}}} (OS')^T \right) \\ &= \underline{\underline{F}} \underline{\underline{P}}^T - \underline{\underline{P}} \underline{\underline{F}}^T - \left(\underline{\underline{\text{grad}}} (OS') \underline{\underline{P}}^T - \underline{\underline{P}} \underline{\underline{\text{grad}}} (OS')^T \right) \end{aligned}$$

Comme le tenseur de contrainte de Piola Kirchhoff est toujours symétrique, on a :

$$\underline{\underline{S}} = \underline{\underline{S}}^T \rightarrow \underline{\underline{F}} \underline{\underline{S}} \underline{\underline{F}}^T = \underline{\underline{F}} \underline{\underline{S}}^T \underline{\underline{F}}^T \rightarrow \underline{\underline{P}} \underline{\underline{F}}^T = \underline{\underline{F}} \underline{\underline{P}}^T \rightarrow \underline{\underline{F}} \underline{\underline{P}}^T - \underline{\underline{P}} \underline{\underline{F}}^T = \underline{\underline{0}}$$

Donc,

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\text{grad}}} (S'P') \underline{\underline{P}}^T - \underline{\underline{P}} \underline{\underline{\text{grad}}} (S'P')^T &= - \left(\underline{\underline{\text{grad}}} (OS') \underline{\underline{P}}^T - \underline{\underline{P}} \underline{\underline{\text{grad}}} (OS')^T \right) \\ &= - \left(\left(\frac{\partial (OS')}{\partial s} \otimes \underline{s} \right) \cdot (\underline{P}_i \otimes \underline{s}_i + \underline{P}_3 \otimes \underline{s})^T - (\underline{P}_i \otimes \underline{s}_i + \underline{P}_3 \otimes \underline{s}) \cdot \left(\frac{\partial (OS')}{\partial s} \otimes \underline{s} \right)^T \right) \\ &= - \left(\left(\frac{\partial (OS')}{\partial s} \otimes \underline{P}_3 \right) - \left(\underline{P}_3 \otimes \frac{\partial (OS')}{\partial s} \right) \right) \end{aligned}$$

Par la définition du vecteur $\underline{v}$ dans la proposition, on trouve que :

$$\underline{v} = \frac{\partial (OS')}{\partial s} \wedge \underline{P}_3 \quad (21)$$

On combine (19), (20) et (21) :

$$\begin{aligned} \int_{\mathfrak{D}} \underline{S}' \underline{P}' \wedge \text{div} (\underline{\underline{P}}) dV &= M_{s+ds} - M_s + ds \oint_{\partial A} (\underline{S}' \underline{P}' \wedge \underline{\underline{P}} \underline{n}) dl + \int_{\mathfrak{D}} \frac{\partial (OS')}{\partial s} \wedge \underline{P}_3 dV \\ &= M_{s+ds} - M_s + ds \oint_{\partial A} (\underline{S}' \underline{P}' \wedge \underline{q}^s) dl + ds \int_A \frac{\partial (OS')}{\partial s} \wedge \underline{P}_3 dA \\ &= M_{s+ds} - M_s + ds \oint_{\partial A} (\underline{S}' \underline{P}' \wedge \underline{q}^s) dl + ds \frac{\partial (OS')}{\partial s} \wedge \int_A \underline{P}_3 dA \\ &= M_{s+ds} - M_s + ds \oint_{\partial A} (\underline{S}' \underline{P}' \wedge \underline{q}^s) dl + ds \frac{\partial (OS')}{\partial s} \wedge \underline{f} \quad (22) \end{aligned}$$

De (4.24), (4.3.4) et (22), on a :

$$\begin{aligned} \int_A \rho \underline{S}' \underline{P}' \wedge \underline{\underline{\text{grad}}} (\underline{\underline{F}} \underline{\Omega}(\underline{x}, t)) \underline{\Omega}(\underline{x}, t) dA \\ = \int_A \underline{S}' \underline{P}' \wedge \underline{q}^v \cdot dA + \frac{M_{s+ds} - M_s}{ds} + \oint_{\partial A} (\underline{S}' \underline{P}' \wedge \underline{q}^s) dl + \frac{\partial (OS')}{\partial s} \wedge \underline{f} \end{aligned}$$

On a l'équation d'équilibre :

$$\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial s} + \frac{\partial (OS')}{\partial s} \wedge \underline{f} + \int_A \underline{S}' \underline{P}' \wedge \underline{q}^v \cdot dA \\ - \int_A \rho \underline{S}' \underline{P}' \wedge \underline{\underline{\text{grad}}} (\underline{\underline{F}} \underline{\Omega}(\underline{x}, t)) \underline{\Omega}(\underline{x}, t) dA + \oint_{\partial A} (\underline{S}' \underline{P}' \wedge \underline{q}^s) dl = 0 \quad (23) \end{aligned}$$

.6 Force d'inertie due à la rotation

En prenant l'équation (4.31) :

$$\begin{aligned} d(\underline{\underline{F}}\underline{\underline{\Omega}}) = \Omega & \left((- (\alpha' + 1) \sin \alpha dz + (u'' - w' - z(\alpha'' \sin \alpha + (\alpha' + 1)\alpha' \cos \alpha)) d\theta) \underline{u}_R \right. \\ & + (u' - w - z(\alpha' + 1) \sin \alpha) d\theta \underline{u}_\theta - (R + w' + u + z(\alpha' + 1) \cos \alpha) d\theta \underline{u}_R \\ & \left. ((\alpha' + 1) \cos \alpha dz + (w'' + u' + z(\alpha'' \cos \alpha - (\alpha' + 1)\alpha' \sin \alpha)) d\theta) \underline{u}_\theta \right) \quad (24) \end{aligned}$$

En remplaçant la relation (4.5), il vient

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\text{grad}}}(\underline{\underline{F}}\underline{\underline{\Omega}}) = \Omega & \left(-(\alpha' + 1) \sin \alpha \underline{u}_R \otimes \underline{u}_R + \right. \\ & \frac{1}{R + z} (-R + u'' - 2w' - u - z(\alpha'' \sin \alpha + (\alpha' + 1)^2 \cos \alpha)) \underline{u}_R \otimes \underline{u}_\theta + (\alpha' + 1) \cos \alpha \underline{u}_\theta \otimes \underline{u}_R \\ & \left. \frac{1}{R + z} (w'' + 2u' - w - z(-\alpha'' \cos \alpha + (\alpha' + 1)^2 \sin \alpha)) \underline{u}_\theta \otimes \underline{u}_\theta \right) \quad (25) \end{aligned}$$

Finalement,

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\text{grad}}}(\underline{\underline{F}}\underline{\underline{\Omega}}) \underline{\underline{\Omega}} = \Omega^2 & \left((-R + u'' - 2w' - u - z(\alpha'' \sin \alpha + (\alpha' + 1)^2 \cos \alpha)) \underline{u}_R \right. \\ & \left. + (w'' + 2u' - w - z(-\alpha'' \cos \alpha + (\alpha' + 1)^2 \sin \alpha)) \underline{u}_\theta \right) \quad (26) \end{aligned}$$

Bibliographie

- [1] Z. Abbadi. Compléments sur les propositions de préconisations de maillages EF de roue toile pour des calculs vibroacoustiques. Technical report, PSA Peugeot Citroën, 2008.
- [2] Z. Abbadi. Préconisations de maillages EF de modèle de roue toile et alu. Technical report, PSA Peugeot Citroën, 2008.
- [3] Z. Abbadi. Préconisations de modélisation de l'ensemble pneu roue (ensemble monté). Technical report, PSA Peugeot Citroën, 2008.
- [4] P. Andersson and K. Larsson. Validation of a high frequency three-dimensional tyre model. *Acta acustica united with acustica*, 91(1) :121–131, 2005.
- [5] S.S. Antman. The theory of rods (rods theory covering constitutive equations, boundary value problems, variational formulation of equilibrium problems and uniqueness theorems).
- [6] S.S. Antman. Kirchhoff's problem for nonlinearly elastic rods (for axial extension and cross section shear). *Quarterly of applied mathematics*, 32 :221–240, 1974.
- [7] S.S. Antman. Bifurcation problems for nonlinearly elastic structures. *Applications of Bifurcation Theory*, pages 73–125, 1977.
- [8] S.S. Antman. *Nonlinear problems of elasticity*, volume 107. Springer Science+ Business Media, 2005.
- [9] S.S. Antman and K.B. Jordan. Qualitative aspects of the spatial deformation of non-linearly elastic rods. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh : Section A Mathematics*, 73(1) :85–105, 1975.
- [10] M.M. Attard. Finite strain—beam theory. *International journal of solids and structures*, 40(17) :4563–4584, 2003.
- [11] C. Bacon and J. Pouyet. *Mécanique des solides déformables*. Hermès science, 2000.
- [12] J.M. Bass. Three-dimensional finite deformation, rolling contact of a hyperelastic cylinder : formulation of the problem and computational results. *Computers & structures*, 26(6) :991–1004, 1987.
- [13] A. Becker and B. Seifert. Simulation of wear with a fe tyre model using a steady state rolling formulation. In *International conference on contact mechanics*, pages 119–128, 1997.
- [14] T. Belytschko and M.O. Neal. Contact-impact by the pinball algorithm with penalty and lagrangian methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 31(3) :547–572, 1991.
- [15] J.F. Béniguel, A. Gaudin, Z. Abbadi, and D. Le Pen. Tire-wheel-cavity dynamic model for structure-borne road noise simulation. *Acoustics 2012 Nantes*, 2012.
- [16] F. Böhm. Mechanik des guertelreifens. *Archive of Applied Mechanics*, 35(2) :82–101, 1966.

- [17] J.S. Bolton and Y.J. Kim. Wave number domain representation of tire vibration. 2000.
- [18] M. Brinkmeier, U. Nackenhorst, S. Petersen, and O. Von Estorff. A finite element approach for the simulation of tire rolling noise. *Journal of Sound and Vibration*, 309(1) :20–39, 2008.
- [19] M. Brinkmeier, U. Nackenhorst, and M. Ziefle. Finite element analysis of rolling tires—a state of the art review. In *Proceedings of International CTI Conference Automotive Tire Technology, Stuttgart, Germany*, 2007.
- [20] P. Campanac, D. Duhamel, and K. Nonami. Modeling of tire vibrations. In *INCE Conference Proceedings*, volume 106, pages 113–118, 1999.
- [21] P. Campanac, K. Nonami, and D. Duhamel. Application of the vibration analysis of linear systems with time periodic coefficients to the dynamics of a rolling tyre. *Journal of sound and vibration*, 231(1) :37–77, 2000.
- [22] J. Cesbron. *Influence de la texture de chaussée sur le bruit de contact pneumatique/chaussée*. PhD thesis, 2007.
- [23] J.R. Cho, K.W. Kim, W.S. Yoo, and S.I. Hong. Mesh generation considering detailed tread blocks for reliable 3d tire analysis. *Advances in engineering software*, 35(2) :105–113, 2004.
- [24] European Commission et al. Directive 2001/43/ec of the european parliament and of the council of 27 june 2001 amending council directive 92/23/eec relating to tyres for motor vehicles and their trailers and to their fitting, 2001.
- [25] F. Davi. The theory of kirchhoff rods as an exact consequence of three dimensional elasticity. *Journal of elasticity*, 29(3) :243–262, 1992.
- [26] J.H.M. Disselhorst and V. Wijngaarden. Flow in the exit of open pipes during acoustic resonance. *Journal of Fluid Mechanics*, 99(Part 2) :293–319, 1980.
- [27] G. Dubois. *Modèle de contact dynamique pneumatique chaussée par approche multi-aspérités : application au bruit de roulement*. PhD thesis, Ecole centrale de nantes-ECN, 2012.
- [28] G. Dubois, J. Cesbron, H. P. Yin, and F. Anfosso-Lédée. Numerical evaluation of tyre/road contact pressures using a multi-asperity approach. *International Journal of Mechanical Sciences*, 54(1) :84–94, 2012.
- [29] M. Eichler. A ride comfort tyre model for vibration analysis in full vehicle simulations. *Vehicle System Dynamics*, 27(S1) :109–122, 1997.
- [30] A. Fadavi. *Modélisation numérique des vibrations d’un pneumatique et de la propagation du bruit de contact*. PhD thesis, 2002.
- [31] M.J. Gagen. Novel acoustic sources from squeezed cavities in car tires. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 106 :794, 1999.
- [32] A. Gaudin. Recomposition du bruit de roulement à partir de mesures centre roue entre 0 et 400hz. Technical report, PSA Peugeot Citroën, 2011.
- [33] A. Gaudin. Création d’un super-élément de l’ensemble pneu-roue-cavité avec effets tournant. Technical report, PSA Peugeot Citroën, 2012.

- [34] A.E. Giannakopoulos. Elastic and viscoelastic indentation of flat surfaces by pyramid indentors. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 54(7) :1305–1332, 2006.
- [35] M. Gipser. Ftire, a new fast tire model for ride comfort simulations. In *International ADAMS User's Conference Berlin*, pages 1–11, 1999.
- [36] R.A.G. Graf, C.-Y. Kuo, A.P. Dowling, and W.R. Graham. On the horn effect of a tyre/road interface, part i : Experiment and computation. *Journal of Sound and Vibration*, 256(3) :417–431, 2002.
- [37] A.E. Green. The equilibrium of rods. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 3(1) :417–421, 1959.
- [38] M. Guskov. *Dynamique non-linéaire des systèmes multirotors. Etudes numérique et expérimentale*. PhD thesis, Ecole Centrale de Lyon, 2007.
- [39] J.F. Hamet. Tire/road noise : time domain green's function for the orthotropic plate model. *Acta Acustica united with Acustica*, 87(4) :470–474, 2001.
- [40] M. Han. *Sound reduction by a Helmholtz resonator*. PhD thesis, Lehigh University, 2008.
- [41] R.E. Hayden. Roadside noise from the interaction of a rolling tire with the road surface. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 50 :113, 1971.
- [42] M. Heckl. Tyre noise generation. *Wear*, 113(1) :157–170, 1986.
- [43] H. Hertz. Über die berührung fester elastischer körper. *J. für die reine u. angew. Math.*, 92, 1882.
- [44] G. Hirota, S. Fisher, C. Lee, and H. Fuchs. An implicit finite element method for elastic solids in contact. In *Computer Animation, 2001. The Fourteenth Conference on Computer Animation. Proceedings*, pages 136–254. IEEE, 2001.
- [45] S.C. Huang and B.S. Hsu. An approach to the dynamic analysis of rotating tire wheel suspension units. *Journal of sound and vibration*, 156(3) :505–519, 1992.
- [46] S.C. Huang and W. Soedel. Effects of coriolis acceleration on the free and forced in-plane vibrations of rotating rings on elastic foundation. *Journal of Sound and Vibration*, 115(2) :253–274, 1987.
- [47] S.C. Huang and W. Soedel. Response of rotating rings to harmonic and periodic loading and comparison with the inverted problem. *Journal of Sound and Vibration*, 118(2) :253–270, 1987.
- [48] S.H. Ju. A cubic-spline contact element for frictional contact problems. *Journal of the Chinese Institute of Engineers*, 21(2) :119–128, 1998.
- [49] R. Kennedy and J. Padovan. Finite element analysis of steady and transiently moving/rolling nonlinear viscoelastic structure ii. shell and three-dimensional simulations. *Computers & structures*, 27(2) :259–273, 1987.
- [50] Y.J. Kim and J.S. Bolton. Effects of rotation on the dynamics of a circular cylindrical shell with application to tire vibration. *Journal of sound and vibration*, 275(3) :605–621, 2004.

- [51] Y.J. Kim and S Bolton. Modeling tire treadband vibration. In *Inter-Noise 2001. International Congress and Exhibition on noise control engineering*, 2001.
- [52] W. Kropp. Structure-borne sound on a smooth tyre. *Applied Acoustics*, 26(3) :181–192, 1989.
- [53] W. Kropp. *Ein Modell zur Beschreibung des Rollgeräusches eines unprofilierten Gürtelreifens auf rauher Strassenoberfläche*. VDI-Verlag, 1992.
- [54] A.H.W.M. Kuijpers and G. Van Blokland. Tyre/road noise models in the last two decades : a critical evaluation. *Proc. of the Inter-Noise'01*, 2001.
- [55] A.D. Lanzo. On elastic beam models for stability analysis of multilayered rubber bearings. *International journal of solids and structures*, 41(20) :5733–5757, 2004.
- [56] A.D. Lanzo. Nonlinear analysis of elastic high shear deformable plane frames by a mixed fem path following approach. *International Journal of Solids and Structures*, 46(7) :1764–1771, 2009.
- [57] K. Larsson, S. Barrelet, and W. Kropp. Modelling of tangential contact forces. In *Proc. of the International Congress on Acoustics (ICA), Seattle*, 1998.
- [58] K. Larsson and W. Kropp. A high-frequency three-dimensional tyre model based on two coupled elastic layers. *Journal of sound and vibration*, 253(4) :889–908, 2002.
- [59] I. Lopez, R.E.A. Blom, N.B. Roozen, and H. Nijmeijer. Modelling vibrations on deformed rolling tyres a modal approach. *Journal of Sound and Vibration*, 307(3) :481–494, 2007.
- [60] I. Lopez, R.R.J.J. van Doorn, R. van der Steen, N.B. Roozen, and H. Nijmeijer. Frequency loci veering due to deformation in rotating tyres. *Journal of Sound and Vibration*, 324(3) :622–639, 2009.
- [61] A.E.H. Love. Boussinesq's problem for a rigid cone. *The Quarterly Journal of Mathematics*, (1) :161–175, 1939.
- [62] B.R. Mace, D. Duhamel, M.J. Brennan, and L. Hinke. Finite element prediction of wave motion in structural waveguides. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 117 :2835, 2005.
- [63] D.J. Mead. A general theory of harmonic wave propagation in linear periodic systems with multiple coupling. *Journal of Sound and Vibration*, 27(2) :235–260, 1973.
- [64] D.J. Mead. Wave propagation and natural modes in periodic systems : I. mono-coupled systems. *Journal of Sound and Vibration*, 40(1) :1–18, 1975.
- [65] D.J. Mead. Wave propagation and natural modes in periodic systems : II. multi-coupled systems, with and without damping. *Journal of Sound and Vibration*, 40(1) :19–39, 1975.
- [66] R. Meftah. *Une approche par formalisme de green réduit pour le calcul des structures en contact dynamique : application au contact pneumatique/chaussée*. PhD thesis, Université Paris-Est, 2011.
- [67] J.M. Muggleton, B.R. Mace, and M.J. Brennan. Vibrational response prediction of a pneumatic tyre using an orthotropic two-plate wave model. *Journal of sound and vibration*, 264(4) :929–950, 2003.

- [68] U. Nackenhorst. On the finite element analysis of steady state rolling contact. *Contact Mechanics–Computational Techniques. Computational Mechanics Publication, Southampton, Boston*, 53, 1993.
- [69] U. Nackenhorst. The ale-formulation of bodies in rolling contact : Theoretical foundations and finite element approach. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 193(39) :4299–4322, 2004.
- [70] K.V. Narasimha Rao and R.K. Kumar. Simulation of tire dynamic behavior using various finite element techniques. *International Journal for Computational Methods in Engineering Science and Mechanics*, 8(5) :363–372, 2007.
- [71] L. Nasdala, M. Kaliske, A. Becker, and H. Rothert. An efficient viscoelastic formulation for steady-state rolling structures. *Computational Mechanics*, 22(5) :395–403, 1998.
- [72] H.H. Nguyen. *Une nouvelle approche pour structures périodiques. Application au calcul des vibrations d’un pneumatique*. PhD thesis, Ecole des Ponts ParisTech, 2008.
- [73] J.T. Oden and T.L. Lin. On the general rolling contact problem for finite deformations of a viscoelastic cylinder. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 57(3) :297–367, 1986.
- [74] M. Oldenburg and L. Nilsson. The position code algorithm for contact searching. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 37(3) :359–386, 1994.
- [75] C. Osmont and A. Gaudin. Développement de nouvelles méthodes pour analyser les mesures de bruit de roulement et de percussions sur piste. Technical report, PSA Peugeot Citroën, 2008.
- [76] J. Padovan. Finite element analysis of steady and transiently moving/rolling nonlinear viscoelastic structure i. theory. *Computers & structures*, 27(2) :249–257, 1987.
- [77] J. Perisse. A study of radial vibrations of a rolling tyre for tyre–road noise characterisation. *Mechanical systems and signal processing*, 16(6) :1043–1058, 2002.
- [78] J. Perisse and J.F. Hamet. A comparison of the 2d ring and 3d orthotropic plate for modelling of radial tire vibrations. In *Proceedings of the Internoise Conference*, 2000.
- [79] M. Petyt. *Introduction to finite element vibration analysis*. Cambridge university press, 1990.
- [80] M. Pignataro, A. Di Carlo, and R. Casciaro. On nonlinear beam models from the point of view of computational post buckling analysis. *International Journal of Solids and Structures*, 18(4) :327–347, 1982.
- [81] R.J. Pinnington. A wave model of a circular tyre. In *Proceedings of Forum Acusticum, Sevilla*, 2002.
- [82] R.J. Pinnington. A wave model of a circular tyre. part 1 : belt modelling. *Journal of Sound and Vibration*, 290(1) :101–132, 2006.
- [83] R.J. Pinnington. A wave model of a circular tyre. part 2 : side-wall and force transmission modelling. *Journal of sound and vibration*, 290(1) :133–168, 2006.

- [84] J.-P. Ponthot. Traitement unifié de la mécanique des milieux continus solides en grandes transformations par la méthode des éléments finis. 1995.
- [85] T.L. Richards. Finite element analysis of structural-acoustic coupling in tyres. *Journal of sound and vibration*, 149(2) :235–243, 1991.
- [86] M.S. Roovers. Tyre/road noise measurements for passenger cars according to eu directive 2001/43. available from the downloads section of <http://www.silentroads.nl>, 2002.
- [87] A. Sameur. *Modèle de contact pneumatique/chaussée pour la prévision du bruit de roulement*. PhD thesis, Ecole des Ponts ParisTech, 2004.
- [88] U. Sandberg. Low noise road surfaces : A state-of-the-art review. In *Proceedings of the Euro-symposium, The Mitigation of Traffic Noise in Urban Areas (LCPC, Nantes, France, 1992)*, 1992.
- [89] U. Sandberg. Tyre/road noise : myths and realities. Technical report, Swedish National Road and Transport Research Institute, 2001.
- [90] U. Sandberg and J.A. Ejsmont. *Tyre/road noise reference book*, volume 59040. Informex Kisa, Sweden, 2002.
- [91] A. Signorini. Sopra alcune questioni di elastostatica. *Atti della Società Italiana per il Progresso delle Scienze*, 1933.
- [92] J.C. Simo. A finite strain beam formulation. the three dimensional dynamic problem. part i. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 49(1) :55–70, 1985.
- [93] J.C. Simo and L. Vu-Quoc. On the dynamics of flexible beams under large overall motions. the plane case. i, ii. *ASME, Transactions, Journal of Applied Mechanics*, 53 :849–863, 1986.
- [94] J.C. Simo and L. Vu-Quoc. A three dimensional finite strain rod model. part ii : Computational aspects. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 58(1) :79–116, 1986.
- [95] R. Takagi and S. Takanari. Tire structural parameter analysis for road noise using an accurate fem model. *SAE transactions*, 100(5) :987–996, 1991.
- [96] L. Van Wijngaarden. On the oscillations near and at resonance in open pipes. *Journal of Engineering Mathematics*, 2(3) :225–240, 1968.
- [97] T.D. Vu, D. Duhamel, Z. Abbadi, H.P. Yin, and A. Gaudin. Dynamic analysis of a tire using a nonlinear timoshenko ring model. *ISMA2012-USD2012*, 2012.
- [98] S.P. Wang and E. Nakamachi. The inside–outside contact search algorithm for finite element analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 40(19) :3665–3685, 1997.
- [99] G. Watts and P. Abbott. Tyre and road surface parameters affecting tyre/road noise. *Tyre and road surface parameters affecting tyre/road noise*, 1(1) :1–12, 2005.
- [100] N. Yukio and J. Padovan. Finite element analysis of steady and transiently moving/rolling non-linear viscoelastic structure iii. impact/contact simulations. *Computers & structures*, 27(2) :275–286, 1987.