



HAL
open science

Développements combinatoires autour des tableaux et des nombres eulériens

Zakaria Chemli

► **To cite this version:**

Zakaria Chemli. Développements combinatoires autour des tableaux et des nombres eulériens. Modélisation et simulation. Université Paris-Est, 2017. Français. NNT : 2017PESC1055 . tel-01760437

HAL Id: tel-01760437

<https://pastel.hal.science/tel-01760437>

Submitted on 6 Apr 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE DE DOCTORAT

Développements combinatoires autour des tableaux et des nombres eulériens

pour l'obtention du grade de

Docteur de l'université Paris-Est

Spécialité Informatique

École Doctorale de Mathématiques et des Sciences et Techniques de l'Information et de
la Communication

Présentée et soutenue publiquement par

Zakaria Chemli

le 31/03/2017

Devant le jury composé de

Hacène Belbachir	Examineur
François Bergeron	Rapporteur
Sylvie Corteel	Rapporteuse
Samuele Giraudo	Examineur
Christophe Hohlweg	Examineur
Jean-Gabriel Luque	Rapporteur
Jean-Christophe Novelli	Directeur de thèse

Laboratoire d'informatique Gaspard-Monge
UMR 8049 LIGM

5, bd Descartes, Champs-sur-Marne, 77454 Marne-la-Vallée Cedex 2, France

Remerciements

C'est avec beaucoup d'émotion que j'arrive aujourd'hui à la fin de mes trois années de thèse. Durant ce laps de temps, j'ai eu la chance et le plaisir d'interagir avec de nombreuses personnes toutes plus intéressantes les unes que les autres et que je voudrais remercier aujourd'hui.

En premier lieu, je tiens à remercier Jean-Christophe Novelli pour m'avoir donné la chance de m'engager dans cette aventure. Il m'a laissé beaucoup de liberté dans mes choix de sujets de recherche, tout en me recadrant lorsque c'était nécessaire. Je lui adresse ma profonde reconnaissance.

J'exprime ma gratitude envers François Bergeron, Sylvie Corteel et Jean-Gabriel Luque pour avoir accepté de rapporter cette thèse. Leurs remarques et suggestions ont grandement contribué à l'amélioration de ce mémoire. Je remercie Christophe Hohlweg de faire partie de mon jury ainsi que Samuele Giraud pour ses nombreuses questions, remarques et encouragements. Je suis également heureux que Hacène Belbachir ait accepté d'être dans mon jury, lui qui m'a fait découvrir la combinatoire énumérative et algébrique il y a de cela quelques années et avec qui j'ai eu le plaisir de collaborer récemment.

Je tiens à remercier Assia Tebtoub ainsi que l'équipe de combinatoire CATI pour leur accueil et leur partage. Un grand merci à Mathias Pétréolle avec qui le développement d'algorithmes compliqués devient une partie de plaisir. Je le remercie aussi de m'avoir accueilli à l'ICJ et introduit à l'équipe de combinatoire de Lyon. J'espère que nos collaborations pourront continuer dans les années à venir.

Durant cette thèse j'ai eu la chance de faire des séjours dans différents laboratoires de recherche. J'ai beaucoup apprécié l'accueil que j'ai reçu dans l'équipe de François Bergeron et de Christophe Hohlweg au LACIM et j'espère que nous aurons d'autres occasions de travailler ensemble. J'ai aussi apprécié mon séjour au LABRI, où j'ai été accueilli par Adrien Boussicault qui m'a appris beaucoup de choses en combinatoire et en programmation. Je

garde aussi de très bon souvenirs du cours d'introduction à Sage qu'on a eu l'occasion de faire ensemble à Dymacos en 2016. Je le remercie aussi pour sa bonne humeur et pour les nombreuses parties d'Hanabi que l'on a fait avec Paxti.

Je remercie sincèrement Jean-Yves Thibon auquel je dois entre autres ma compréhension de la combinatoire des tableaux, grâce à ses cours spécialisés de combinatoire algébrique ainsi que ses interventions aux séances du groupe de travail les vendredis matin. Je remercie aussi les membres de l'équipe de combinatoire algébrique (les anciens et les nouveaux) dont le contact a été plus qu'enrichissant : Nicolas Borie, Phillipe Biane, Olivier Bouillot, Christophe Cordero, Grégory Châtel, Samuele Giraudo, Viviane Pons, petit agneau, Lucas Randazzo, Matthieu Josuat-Vergès, Vincent Vong, sans oublier Arthur Nunge pour toutes nos discussions ainsi que pour les nombreux voyages que nous avons pu vivre ensemble. Je tiens à remercier particulièrement Rémi Maurice pour m'avoir initié à Sage, éclairé dans la rédaction de mes articles et mes exposés ainsi que pour ses nombreux conseils et sa grande disponibilité.

Comme le labo ne se limite pas à la combinatoire, je voudrais remercier tout le personnel administratif du LIGM de de l'école doctorale : Corinne Palescandolo, Séverine Giboz, Nathalie Rousseau, Pascale Souliez, Sylvie Cach, Patrice Hérault et en particulier Mina Constant et Angélique Crombez pour leurs blagues si particulières. Je remercie tous les collègues que je croise tous les jours. Je remercie mes amis du laboratoire : Francesco Dolce, Sonja Marjatta Hiltunen, Mohamed Ali Moussa, Feriel Abboud, Yosra Marnissi, Gia-Thuy Pham, Safa Hamdoun pour tous les souvenirs, les voyages et les soirées que nous avons passé ensemble. Je remercie aussi Zineb, Megdouda, Hichem, Younes, Younes, Manar, Fadhela, Maha, Ziad, Imad, Imad et tout ceux avec qui j'ai partagé la table du midi au Crous, ainsi que l'équipe du "troisième" : Dominique Revuz, Claire David, Antoine Meyer... et Marc Zipstein pour son saumon légendaire !

Je tiens à remercier ceux avec qui j'ai enseigné : Claire David, Antoine Meyer, Marc Zipstein, Nicolas Borie et Samuele Giraudo pour leur grande générosité, leurs précieux conseils et pour le temps qu'ils ont consacré à m'apprendre la pédagogie.

Un grand merci à Kiko, Lamine, Rouji, Riadh, Ramzi, Chawki, Walid, Walid, Fouzi... et ceux que j'ai oublié à cause du stress.

Je remercie profondément mes parents pour tout ce qu'ils ont fait pour moi ainsi que mon frère et ma sœur. Je remercie les membres de ma grande famille pour leur soutien et leur aide.

Enfin une mention particulière à Soraya, qui m'a encouragé, aidé et qui me supporte depuis quelques années... déjà !

Résumé - Abstract

Cette thèse se situe au carrefour de la combinatoire énumérative, algébrique et bijective. Elle se consacre d'une part à traduire des problèmes algébriques en des problèmes combinatoires, et inversement, utilise le formalisme algébrique pour traiter des questions combinatoires.

Après un rappel des notions classiques de combinatoire et de structures algébriques, nous abordons l'étude des tableaux de dominos décalés, qui sont des objets combinatoires définis dans le but de mieux comprendre la combinatoire des fonctions symétriques P et Q de Schur. Nous donnons la définition de ces tableaux et nous démontrons qu'ils sont en bijection avec les paires de tableaux de Young décalés. Cette bijection nous permet de voir ces objets comme des éléments du super monoïde plaxique décalé, qui est l'analogue décalé du super monoïde plaxique de Carré et Leclerc. Nous montrons aussi que ces tableaux décrivent un produit de deux fonctions P de Schur et en prenant un autre type de tableaux de dominos décalés, ils décrivent un produit de deux fonctions Q de Schur. Nous proposons aussi deux algorithmes d'insertion pour les tableaux de dominos décalés, analogues aux algorithmes d'insertion mixte et d'insertion gauche-droit de Haiman. Toujours dans le domaine de la combinatoire bijective, nous nous intéressons dans la deuxième partie de notre travail à des bijections en lien avec des statistiques sur les permutations et les nombres eulériens.

Dans cette deuxième partie de la thèse, nous introduisons l'unimodalité des suites finies associées aux différentes directions dans le triangle eulérien. Nous donnons dans un premier temps une interprétation combinatoire ainsi que la relation de récurrence des suites associées à la direction $(1, t)$ dans le triangle eulérien, où $t \geq 1$. Ces suites sont les coefficients de polynômes appelés les polynômes eulériens avec succession d'ordre t , qui généralisent les polynômes eulériens. Nous démontrons par une bijection entre les permutations et des chemins nord-est étiquetés que ces suites sont log-concaves et

donc unimodales. Puis nous prouvons que les suites associées aux directions (r, q) , où r est un entier positif et q est un entier, tel que $r + q \geq 0$, sont aussi log-concaves et donc unimodales.

Mots clés

Tableaux de Young, tableaux de Young décalés, tableaux de dominos, tableaux de dominos décalés, permutations, statistiques sur les permutations, descentes, montées, excédences, unimodalité, nombres eulériens, nombres eulériens avec succession d'ordre t , polynômes eulériens, polynômes eulériens avec succession d'ordre t , triangle eulérien, triangle eulérien avec succession d'ordre t .

Table des matières

Remerciements	iii
Résumé	v
Sommaire	vii
Introduction	1
1 Préliminaires	9
1.1 Classes et objets combinatoires	9
1.1.1 Classes combinatoires	9
1.1.2 Mots et permutations	11
1.1.3 Chemins nord-est étiquetés de Gasharov	15
1.1.4 Partitions d'entiers	22
1.1.5 2-quotient et 2-cœur d'une partition	24
1.1.6 Compositions d'entiers	28
1.2 Fonctions symétriques et tableaux	29
1.2.1 Fonctions symétriques	29
1.2.2 Tableaux de Young	31
1.2.3 Tableaux de Young décalés	39
1.2.4 Tableaux de dominos	47
1.3 Unimodalité des lignes du triangle eulérien	54
1.3.1 Suites unimodales et log-concaves	54
1.3.2 Nombres et polynômes eulériens	54
1.3.3 Unimodalité des lignes du triangle eulérien	56
2 Tableaux de dominos décalés	65
2.1 Définitions	66
2.2 Bijection avec les paires de tableaux de Young décalés	70

2.3	Super monoïde plaxique décalé	79
2.4	Algorithmes d'insertion	81
3	Unimodalité dans le triangle eulérien	107
3.1	Combinatoire des suites associées aux différentes directions . .	108
3.1.1	Nombres eulériens avec succession d'ordre 2	108
3.1.2	Nombres eulériens avec succession d'ordre $t + 1$	116
3.2	Unimodalité des suites associées aux différentes directions . . .	125
3.2.1	Unimodalité des suites de direction $(1, 1)$	125
3.2.2	Unimodalité des suites de direction $(1, t)$	131
3.2.3	Unimodalité des suites associées à toutes les directions finies	134
	Conclusion et perspectives	141
	Bibliographie	143

Table des figures

0.0.1 Relations entre les différents types de tableaux.	7
1.1.1 Standardisé du mot $ddabcbbaa$	15
1.1.2 Les niveaux associés aux pas d'un chemins nord-est.	16
1.1.3 Le diagramme de Ferrers de la partition $(6, 4, 3, 3, 1)$	23
1.1.4 Le diagramme de Ferrers décalé de $(6, 4, 3, 1)$	23
1.1.5 Le diagramme de Ferrers de $(4, 4, 4, 2, 1)$ et ses diagonales : la partie grisée est haut($(4, 4, 4, 2, 1)$) et la partie blanche est bas($(4, 4, 4, 2, 1)$).	23
1.2.6 Tableau de Young de forme $(4, 3, 1, 1)$	32
1.2.7 Tableau de Young standard de forme $(4, 3, 1, 1)$	33
1.2.8 L'équerre de la case $(1, 2)$ de la partition $(4, 4, 2, 1)$	33
1.2.9 Tableau de Young décalé semi-standard de forme $(7, 4, 3, 1)$	40
1.2.10 Tableau de Young décalé standard de forme $(7, 4, 3, 1)$	41
1.2.11 Tableau de dominos de forme $(8, 5, 5, 4, 4)$ et ses diagonales D_{2k}	48
1.2.12 Dominos de type 1 et dominos de type 2.	49
1.3.13 Étiquettes autour du point X	61
1.3.14 Nouvelles étiquettes autour du point X	62
1.3.15 Application de ϕ' à une paire de chemins nord-est étiquetés de Bóna et Ehrenborg.	63
2.1.1 Tableau de dominos décalé de forme $(8, 5, 5, 5, 5)$	67
2.1.2 Tableau de dominos décalé standard de forme $(8, 5, 5, 5, 5)$	69
2.3.3 Le tableau de dominos décalé associé à un mot obtenu en utilisant l'algorithme d'insertion mixte de Haiman et le théo- rème 2.2.1.	81
2.3.4 Le tableau de dominos décalé associé à un mot de $(A_1 \cup A_2)^*$ obtenu en utilisant L	82

2.4.5	Ligne et colonne associées à quelques dominos dans un tableau de dominos décalé de forme $(8, 5, 5, 5, 5)$	82
2.4.6	Le cas où la lettre $x = \omega_i^*$ est contenue dans un domino horizontal ou vertical de type différent du domino contenant la lettre ω_i^*	84
3.1.1	Chemins nord-est étiquetés avec succession d'ordre 2 de taille 6 ayant deux 2-pas verticaux et leur permutations correspondantes.	113
3.1.2	Chemins nord-est de $\mathcal{P}^{[t+1]}(6, 1)$ et leur permutations correspondantes de $\mathcal{E}^{[t+1]}(6, 1)$	121
3.2.3	Le lemme 3.2.2 appliqué à une paire de chemins nord-est (P, Q) de $\mathcal{P}(14, 4) \times \mathcal{P}(12, 6)$ en oubliant les étiquettes.	127
3.2.4	Application de $\Phi^{(2)}$ sur une paire (P, Q) de chemins nord-est de $\mathcal{P}(14, 4) \times \mathcal{P}(12, 6)$	129
3.2.5	Les applications $\Phi^{(2)}$ et $\Gamma^{(2)}$ appliquées a une paire (P, Q) de chemins nord-est de Gasharov de $\mathcal{P}(14, 4) \times \mathcal{P}(12, 6)$	131
3.2.6	L'application $\Phi^{(-2,2)}$ appliquée à la paire (P, Q) de chemins nord-est étiquetés de Gasharov de $\mathcal{P}(18, 10) \times \mathcal{P}(14, 6)$	136

Liste des tableaux

1.3.1 Le triangle eulérien, où n la taille de la permutation et k le nombre de descentes.	56
1.3.2 Les suites associées à la direction $(1, 2)$ dans le triangle eulérien.	56
3.1.1 Direction $(1, 1)$ dans le triangle eulérien.	108
3.1.2 Triangle eulérien avec succession d'ordre 2.	116
3.1.3 Le triangle eulérien avec succession d'ordre 3.	124
3.2.4 Les colonnes du triangle eulérien.	137

Introduction

Avant-propos

La *combinatoire* est l'étude des ensembles finis d'objets et comporte plusieurs branches. Sa plus ancienne branche est la *combinatoire énumérative*, qui s'intéresse au dénombrement d'objets combinatoires et à l'étude des suites d'entiers obtenues par le dénombrement. Elle donne aussi un sens à des suites d'entiers en les reliant à des objets combinatoires, soit en construisant ces objets, soit à l'aide de bijections. On cite souvent Fibonacci comme l'un des précurseurs de cette discipline en Occident. Sa suite est considérée comme l'exemple de base d'un problème de combinatoire énumérative. Plusieurs autres savants se sont aussi intéressés à la combinatoire énumérative comme Newton, Pascal ou Euler. Certains considèrent que la combinatoire énumérative a commencé avec le concept de *permutation* et que l'un de ses premiers résultats pourrait être le fait qu'il y a $n!$ permutations de n éléments.

La *combinatoire algébrique* est une autre branche de la combinatoire, elle vise à dévoiler des structures algébriques sur des familles d'objets combinatoires et obtenir des *structures algébriques combinatoires*. Ces structures sont formées d'un ensemble d'objets combinatoires combiné à un ou plusieurs produits, éventuellement complétés par des contraintes, le tout vérifiant un certain nombre d'axiomes. La plupart des structures sont soit finies, soit engendrées par un ensemble fini d'éléments, d'où l'intérêt d'étudier ces structures par des techniques algorithmiques et combinatoires. Par exemple, il est connu que les permutations de taille n forment un groupe appelé *le groupe symétrique* en considérant la composition des permutations. Mais on peut aussi considérer d'autres produits sur les permutations : *la concaténation des mots, la dé-concaténation des mots, le produit de mélange, etc.*, et obtenir d'autres structures algébriques : *anneaux, modules, corps, algèbres, bigèbres*,

algèbres de Hopf combinatoires, etc. En composant des assemblages et des désassemblages d'objets combinatoires, on arrive à avoir une compréhension plus fine de ces objets, ce qui permet de relier des objets d'une même famille ou de plusieurs familles différentes entre eux. De plus, ceci permet de relier les structures algébriques associées à ces objets. Inversement, en reliant les structures algébriques entre elles, on arrive à trouver des liens entre leurs éléments. Ceci amène de façon naturelle à des nouveaux résultats. Il est donc naturel de construire des structures algébriques sur divers objets combinatoires.

En rajoutant à ces deux branches la *combinatoire bijective* qui met en relation différents ensembles d'objets combinatoires, on obtient le domaine de la *combinatoire énumérative algébrique et bijective*. C'est un domaine à mi-chemin entre les mathématiques et l'informatique. Cette dernière est l'un des piliers fondamentaux de ce domaine car dès son arrivée au XXe siècle, elle a permis à la combinatoire de prendre un nouvel essor. Depuis, les liens qui unissent l'informatique et la combinatoire n'ont jamais cessé de se renforcer et de se développer. Il est aujourd'hui difficile de faire de la combinatoire sans l'aide de la machine, et faire ce qu'on appelle *l'exploration par ordinateur* d'un problème. Les objets que l'on utilise sont en général trop nombreux pour être traités à la main. La machine nous permet alors de générer ces objets et d'explorer leurs propriétés combinatoires en profondeur. Cet outil nous force aussi à simplifier nos objets et les opérations sur ces objets au maximum. Ces objets, qui sont une traduction de problèmes généralement complexes d'algèbre, de physique, d'informatique, de géométrie algébrique ou encore de théorie des représentations, doivent être façonnés à partir de règles élémentaires, pour que l'on puisse les faire comprendre facilement à la machine.

Des avancées importantes en combinatoire énumérative algébrique et bijective se sont faites par des bijections ces dernière années, à l'intérieur de ce domaine, nous nous sommes intéressé à deux champs différents. Le premier porte sur les fonctions symétriques et les tableaux et le deuxième traite l'étude de l'unimodalité des suites associées au triangle eulérien. Dans chaque partie nous avons mis en bijection différents ensembles d'objets combinatoires pour répondre à certaines questions. Nous allons maintenant détailler l'histoire relative à ces deux parties.

Fonctions symétriques et tableaux

Les *fonctions symétriques* sont des objets très importants en combinatoire algébrique, elles sont utilisées depuis le XIXe siècle pour répondre à des problèmes de dénombrement par Mac Mahon dans son livre *Combinatory*

analysis : A review of the present state of knowledge [Mac96]. Les fonctions symétriques interviennent souvent comme séries génératrices de permutations sous certaines contraintes : *cycles, descentes, montées, inversions, etc.* [Ges84, GR93]. La théorie des fonctions symétriques s'est considérablement développée quand Frobenius [Fro00] et Schur [Sch11] ont mis en lumière leurs liens avec la théorie des groupes et la théorie des représentations. Notamment les *fonctions de Schur* qui sont les caractères des représentations irréductibles des groupes symétriques et qui sont définies comme le quotient de deux alternants.

Parallèlement à la théorie des fonctions symétriques, des objets combinatoires très simples à définir, appelés *tableaux de Young* ont vu le jour en 1900 par Young [You00] comme des outils pour la théorie des représentations. Ces objets se sont imposés comme les objets centraux dans la théorie des représentations des groupes. Ils permettent de donner une définition simple et purement combinatoire des fonctions de Schur : c'est la somme des poids sur tous les tableaux de Young d'une forme donnée. En 1961, Schensted [Sch61] a développé un algorithme qui calcule la longueur de la plus longue sous-suite croissante d'un mot donné, la sortie de cet algorithme étant un tableau de Young. Dix ans plus tard, Knuth [Knu70] a trouvé les relations qui identifient les mots donnant le même tableau de Young par l'algorithme de Schensted. En prenant le quotient du monoïde libre par les relations de Knuth, on obtient un monoïde. Lascoux et Schützenberger [LS81] ont démontré qu'à chaque classe de ce monoïde correspond un unique tableau de Young et de manière équivalente que l'ensemble des tableaux de Young possède une structure de monoïde appelée le *monoïde plaxique* dans lequel le produit de deux tableaux de Young est donné par l'algorithme du *jeu de taquin* défini par Schützenberger. Le monoïde plaxique joue un rôle très important dans la théorie des fonctions symétriques et la théorie des représentations des groupes. La première application significative du monoïde plaxique a été d'apporter une démonstration combinatoire complète de la règle de Littlewood-Richardson, qui est un algorithme combinatoire pour évaluer le produit de deux fonctions de Schur. Autrement dit, c'est une règle qui décompose des produits tensoriels de représentations irréductibles du groupe linéaire en somme d'irréductibles.

En étendant les tableaux de Young aux *tableaux de Young décalés*, Worley [Wor84] et Sagan [Sag87] ont développé indépendamment une théorie combinatoire des tableaux de Young décalés, parallèle à la théorie des tableaux de Young. Les tableaux de Young décalés permettent de définir les fonctions P de Schur et Q de Schur qui sont respectivement les polynômes de Hall-Littlewood [Lit61] sur la base $P(x, t)$ en $t = -1$ et les polynômes de Hall-Littlewood sur la base $Q(x, t)$ en $t = -1$ [Mac95]. Ces fonctions sont

les caractères des représentations projectives irréductibles des groupes symétriques [Ste89]. Dans les années 80, un premier algorithme combinatoire pour faire le produit de deux fonctions P de Schur, la règle de Littlewood-Richardson décalée, a été donné par Stembridge [Ste89] en termes de tableaux de Young décalés. Haiman [Hai89] a introduit un algorithme d'insertion appelé *algorithme d'insertion mixte* qui associe à chaque permutation un tableau de Young décalé. En 2010, Serrano [Ser10] a étendu l'algorithme d'insertion mixte de Haiman aux mots et a identifié les relations entre les mots qui donnent le même tableau de Young décalé par cet algorithme. Le quotient du monoïde libre par ces relations définit le *monoïde plaxique décalé*. Il a démontré qu'à chaque classe de ce monoïde correspond un unique tableau de Young décalé. Le monoïde plaxique décalé est l'analogue décalé du monoïde plaxique de Lascoux et Schützenberger avec des applications similaires. Serrano a utilisé ce monoïde plaxique décalé pour donner une autre version de la règle de Littlewood-Richardson décalée.

Les *tableaux de dominos* sont une autre généralisation des tableaux de Young. Ils ont été très étudiés dans les années 90 [Sta90, CL95, FS98, VL99, VL01]. C'est un cas particulier des tableaux de rubans quand les rubans sont de taille 2. Dans [CL95], Carré et Leclerc ont étudié une bijection due à Stanton et White [Sta90] entre l'ensemble des tableaux de dominos de forme λ , où λ est une partition, et l'ensemble des paires de tableaux de Young de forme (μ, ν) , où (μ, ν) est le 2-quotient de λ . Ils ont donné une description plus simple de cette bijection qui a mis en avant le rôle des diagonales des tableaux. C'est une approche équivalente à celle de Fomin et Stanton [FS98]. Cette nouvelle description de la bijection leur a permis d'étendre le monoïde plaxique de Lascoux et Schützenberger au *super monoïde plaxique*. Ils ont démontré que chaque classe du super monoïde plaxique est représentée par un seul tableau de dominos, et ont proposé une description du produit de deux fonctions de Schur en termes de tableaux de dominos. Ceci a engendré une nouvelle interprétation des coefficients de la règle de Littlewood-Richardson en termes de tableaux de dominos.

Toujours dans l'univers de la combinatoire bijective, dans la deuxième partie de notre travail nous nous intéressons à des bijections en liens avec les statistiques sur les permutations et les nombres eulériens dans le but de démontrer l'unimodalité et la log-concavité de certaines suites dans le triangle eulérien.

Statistiques sur les permutations et nombres eulériens

L'étude moderne des *statistiques sur les permutations* a commencé avec les travaux de MacMahon [Mac17]. Ces statistiques ont été très étudiées depuis

les années 70 par Foata et Schützenberger [FS70, FZ90] ou encore Françon [Fra76]. Ce dernier avec Viennot [FV79] a construit une bijection liant le monde des chemins et des permutations. L'étude des statistiques a débouché sur beaucoup de résultats comme la définition de l'algèbre des descentes de Solomon [Sol76] grâce aux positions des descentes d'une permutation. De même, grâce aux valeurs des descentes d'une permutation, on peut retrouver une base de Sym définie par Tevlin [HNTT09].

Au début du vingtième siècle, MacMahon [Mac17] a observé que dans le groupe symétrique, le nombre de permutations ayant k descentes est égal au nombre de permutations ayant k excédences, et cela pour tout entier positif k . Dans [Foa64, Foa97], Foata en a donné une démonstration combinatoire. Ces nombres ont été étudiés en premier par Euler, et sont revenus à la surface sous le nom des *nombres eulériens*. Les nombres eulériens et les polynômes eulériens ont été très étudiés dans la littérature en mathématiques et en informatique [FS70, Knu99]. En effet, de nombreuses classes combinatoires, comme les permutations alternantes [And81], les permutations de Jacobi [Vie80], les arbres binaires non plans décroissants et les permutations d'André [FS73] sont comptées par ces nombres.

Unimodalité et log-concavité de suites combinatoire

Une suite finie de nombres réels est *unimodale* si elle croît jusqu'à un maximum, appelé le *mode*, puis décroît. Elle est *log-concave* si le carré de tout terme de la suite est inférieur au produit de ses deux termes adjacents. Il est facile de vérifier qu'une suite log-concave est unimodale [Wil]. Les suites log-concaves et unimodales apparaissent souvent en combinatoire, en algèbre, en informatique et aussi en probabilité et statistique où ces concepts ont été étudiés initialement. La définition de l'unimodalité d'une suite est simple et facile à comprendre, mais prouver qu'une suite est unimodale ou log-concave est une tâche difficile qui demande l'utilisation de constructions combinatoires complexes et d'outils mathématiques fins. On peut trouver un aperçu de plusieurs de ces techniques dans [Sta89, Bre89, Bal90].

Ce sont Tanny et Zuker [TZ74, TZ76, TZ78] qui ont étudié dans les années 70 l'unimodalité des suites se trouvant sur les diagonales du triangle de Pascal. Ils ont démontré que pour tout entier positif α et pour tout entier strictement positif n , la suite $\left(\binom{n-\alpha k}{k}\right)_{0 \leq k \leq \frac{n}{\alpha+1}}$ est unimodale. C'était la première fois qu'on s'intéressait à l'unimodalité des suites associées aux triangles arithmétiques. Plusieurs autres papiers ont traité la question de l'unimodalité des suites associées au triangle de Pascal. En 2008, Belbachir et Szalay [BS08] ont prouvé que les suites se trouvant sur n'importe quelle direction fi-

nie dans le triangle de Pascal sont unimodales. En 2015, Belbachir et Tebtoub [BT15] ont également étudié la question concernant le triangle de Stirling de première et de deuxième espèce, et ont démontré que les suites associées à quelques directions finies dans ces triangles sont unimodales.

Contributions et plan du mémoire

Notre travail est divisé en trois chapitres qui reposent sur les mêmes objets combinatoires : *les mots et les permutations*.

Le premier chapitre contient une introduction aux objets combinatoires avec lesquels nous allons travailler. Nous donnons dans un premier temps la définition des *classes combinatoires* et *des séries génératrices*, puis nous passons aux objets combinatoires : *mots, permutations, chemins nord-est étiquetés de Gasharov et les chemins nord-est étiquetés de Bóna et Ehrenborg ainsi que la bijection de ces deux derniers avec les permutations*. Nous abordons ensuite les partitions d'entiers et quelques algorithmes qui leur sont associés. Nous donnons aussi un bref aperçu de quelques bases des fonctions symétriques. Après avoir mis au clair toutes ces définitions, nous présentons trois types de tableaux : les tableaux de Young, tableaux de Young décalés et les tableaux de dominos ainsi que leurs relations avec les mots, les permutations et les fonctions symétriques. Dans le cas des tableaux de dominos, nous présentons la démonstration de Carré et Leclerc [CL95], de la bijection de Stanton et White [Sta90] entre l'ensemble des tableaux de dominos et l'ensemble des paires de tableaux de Young. Nous passons après à l'étude de l'unimodalité et de la log-concavité des suites réelles, où nous discutons la relation entre ces deux concepts. Nous présentons ensuite les polynômes et les nombres eulériens. Nous terminons ce chapitre par la présentation de deux démonstrations de l'unimodalité des suites associées aux coefficients des polynômes eulériens.

Dans le deuxième chapitre, nous présentons la première partie de nos travaux, partie qui traite de nouveaux objets combinatoires appelés les *tableaux de dominos décalés*. Ces objets peuvent être vus soit comme les analogues décalés des tableaux de dominos, soit comme une généralisation des tableaux de Young décalés (cf. figure 0.0.1). Le but de cette généralisation est de développer une théorie combinatoire des tableaux de dominos décalés parallèle à la théorie des tableaux de dominos pour mieux comprendre les propriétés combinatoires liées aux fonctions P et Q de Schur. Ensuite, nous présentons une bijection analogue à celle de Stanton et White, entre les tableaux de dominos décalés et les paires de tableaux de Young décalés. Nous démontrons par cette bijection que la somme sur tous les tableaux de dominos décalés d'une

forme donnée de monômes décrit un produit de deux fonctions P de Schur, et, en prenant un autre type de tableaux de dominos décalés, on décrit le produit de deux fonctions Q de Schur. Puis, nous étendons le monoïde plaxique décalé de Serrano au *super monoïde plaxique décalé*. Nous démontrons que chaque classe du super monoïde plaxique décalé est représentée par un unique tableau de dominos décalé. Enfin, nous présentons deux *algorithmes d'insertions L et H* , réalisés avec Mathias Pétréolle, analogues à la correspondance de Robinson-Schensted-Knuth, qui associent à un mot bicolore, un couple de tableaux de dominos décalés de même forme. Ces algorithmes sont une adaptation, pour les tableaux de dominos décalés, de l'algorithme d'insertion mixte et de l'algorithme d'insertion gauche-droit introduits par Haiman [Hai89] dans le cas des tableaux de Young décalés. On conjecture aussi que l'algorithme H appliqué à une permutation bicolore σ donne la même paire de tableaux de dominos décalés que l'algorithme L appliqué à σ^{-1} .

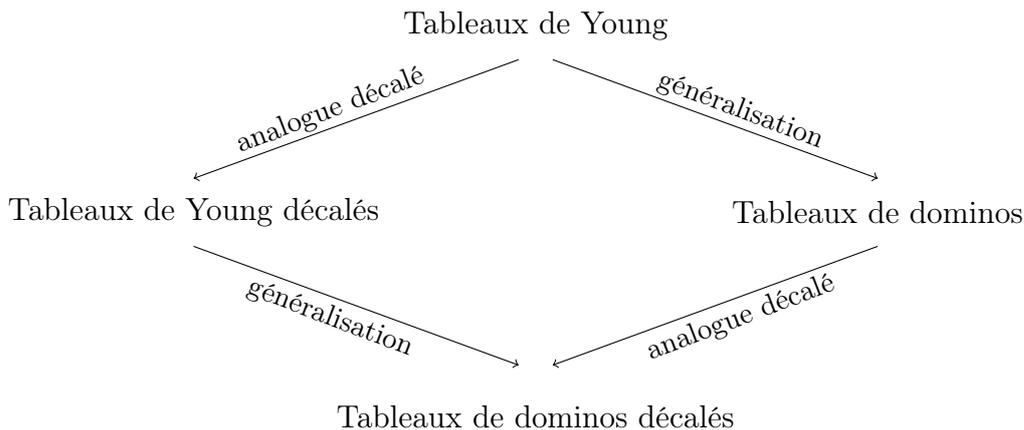


FIGURE 0.0.1 : Relations entre les différents types de tableaux.

Dans le troisième chapitre, nous présentons la deuxième partie de nos travaux. C'est un travail réalisé avec Hacène Belbachir et Assia Tebtoub, où nous nous intéressons à l'unimodalité des suites associées aux différentes directions dans le triangle eulérien. Nous généralisons dans un premier temps les polynômes eulériens aux *polynômes eulériens avec succession d'ordre 2*. Nous donnons la relation de récurrence ainsi qu'une interprétation combinatoire des suites associées aux coefficients de ces polynômes en termes de permutations et de chemins nord-est étiquetés. Ces suites de coefficients correspondent aux suites associées aux diagonales principales du triangle eulérien. Nous introduisons ensuite les *polynômes eulériens avec succession d'ordre t* , où t est un entier positif. Nous donnons aussi une interprétation combi-

Introduction

natoire des suites associées aux coefficients de ces polynômes en termes de permutations et de chemins nord-est étiquetés, puis on présente la relation de récurrence associée aux coefficients qui correspondent aux suites associées aux directions $(1, t)$ dans le triangle eulérien, où t est un entier positif. Puis, en utilisant l'approche de Gasharov [Gas98] pour démontrer l'unimodalité des lignes du triangle eulérien, nous prouvons que les diagonales principales du triangle eulérien sont elles aussi log-concaves et donc unimodales. et aussi que les suites associées aux directions $(1, t)$ dans le triangle eulérien, où t est un entier positif, sont log-concaves et unimodales. Pour terminer ce chapitre, nous prouvons que les suites associées aux directions (r, q) dans le triangle eulérien, où r est un entier positif et q est un entier, tel que $r + q \geq 0$, sont elles aussi log-concaves et unimodales.

Chapitre 1

Préliminaires

L'objectif de ce chapitre est d'introduire les notions essentielles pour la suite de ce mémoire. Le paragraphe 1.1 est consacré aux définitions des objets combinatoires élémentaires considérés dans ce document. Nous y introduisons à la fois les notations ainsi que quelques algorithmes liés aux structures algébriques qui leur sont associées. Dans le paragraphe 1.2, nous rappelons quelques bases de la théorie des polynômes symétriques ainsi que trois types de tableaux : les tableaux de Young, les tableaux de Young décalés et les tableaux de dominos. Nous présentons aussi les fonctions symétriques et les structures algébriques liées à ces tableaux, ainsi que quelques algorithmes et bijections qui leur sont associés. Pour terminer cette partie introductive, nous abordons dans le paragraphe 1.3, l'unimodalité et la log-concavité des suites. Nous rappelons aussi les polynômes eulériens et les nombres eulériens. En particulier, nous présentons deux démonstrations combinatoires [Gas98, BE99] de l'unimodalité des suites associées aux lignes du triangle eulérien.

1.1 Classes et objets combinatoires

1.1.1 Classes combinatoires

L'un des concepts fondamentaux en combinatoire est le *dénombrement*. Il sert à énumérer un ensemble fini ou même un ensemble infini muni d'une notion de *taille* telle que pour tout entier naturel n le nombre d'objets de taille n est fini.

Définition 1.1.1. Une *classe combinatoire* est un ensemble \mathcal{C} muni d'une application appelée *taille* $|\cdot| : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{N}$ qui associe à chaque élément c de \mathcal{C} un

entier naturel $|c|$. On demande de plus que, pour chaque entier naturel n , le nombre d'éléments de taille n de \mathcal{C} soit fini.

Exemple 1.1.2. L'ensemble des mots d'un alphabet fini muni de l'application taille *longueur du mot* est une classe combinatoire. Si on considère l'ensemble des mots sur 2 lettres muni de cette même application taille, alors, pour tout entier $n > 0$, il y a 2^n mots de taille n .

D'autres exemples de classes combinatoires sont l'ensemble des entiers naturels ayant pour taille leur valeur, les chemins sur un graphe donné ayant pour taille leur longueur, les pavages par un ensemble de tuiles donné d'une surface finie où la taille est celle de cette surface, les urnes composées de boules noires et blanches où la taille est le nombre de boules . . .

Remarque 1.1.3. Un ensemble peut être doté de plusieurs tailles différentes.

Disposant d'une classe combinatoire, on cherche à calculer le nombre d'objets de taille n pour tout entier n . Idéalement, on espère trouver une formule close en fonction de n , mais l'existence d'une telle formule n'est pas garantie. Une des techniques de base pour traiter ces problèmes d'énumération est celle des *séries génératrices*, qui sont des fonctions codant le nombre d'objets de taille n pour tout n et qui ont l'avantage de *capturer* certaines propriétés des classes combinatoires (l'union disjointe des classes combinatoires est la somme des séries génératrices, le produit cartésien des classes combinatoires est le produit des séries génératrices, . . .). Plus d'informations concernant les fonctions génératrices sont présentées dans [Com74, Mac96, Rio12] et aussi dans [BLL98] qui traite de la théorie des espèces que l'on ne considèrera pas dans ce mémoire.

Définition 1.1.4. Soit \mathcal{C} un ensemble et soit c_n le nombre d'éléments de taille n de \mathcal{C} . La *série génératrice ordinaire* associée à \mathcal{C} est la série $\mathcal{C}(x)$ définie par :

$$\mathcal{C}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n. \quad (1.1)$$

On considère parfois une autre expression équivalente pour la série génératrice ordinaire, à savoir :

$$\mathcal{C}(x) = \sum_{c \in \mathcal{C}} x^{|c|}. \quad (1.2)$$

Dans le cas de structures étiquetées, on considère aussi la *série génératrice exponentielle* :

$$EC(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{x^n}{n!} \quad (1.3)$$

qui a pour expression équivalente la série génératrice :

$$EC(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{|c|}}{|c|!}. \quad (1.4)$$

1.1.2 Mots et permutations

Les mots et les permutations sont des objets de base en combinatoire. De nombreuses opérations sur des objets plus complexes peuvent s'exprimer à l'aide des mots et de la concaténation. Nous aurons besoin de certaines notions et opérations classiques que nous définissons dès maintenant.

Définition 1.1.5. Un **alphabet** est un ensemble dont les éléments sont appelés **lettres**. On le note généralement A . Tous les alphabets considérés dans ce mémoire sont **totalelement ordonnés**. On utilise dans la suite deux alphabets différents : l'alphabet des lettres $\{a, b, \dots, z\}$ et l'alphabet des entiers $\{1, 2, \dots, n, \dots\}$. Ces deux alphabets, sauf mention contraire, sont ordonnés selon l'ordre usuel.

Définition 1.1.6. Un **mot** ω est une suite finie de **lettres**. La **longueur** d'un mot ω , notée $|\omega|$, est le nombre de lettres qui le composent. L'unique mot de longueur 0 est le **mot vide** que l'on note ϵ .

Définition 1.1.7. Soit $\omega = \omega_1 \cdots \omega_n$ un mot de longueur n sur l'alphabet A . Un **facteur** de ω est un mot $\omega_i \omega_{i+1} \cdots \omega_{i+\ell}$, où i et ℓ sont deux entiers vérifiant $1 \leq i \leq n$ et $i+\ell \leq n$. Un facteur $\omega_i \omega_{i+1} \cdots \omega_n$ est appelé un **suffixe**. Un **sous-mot** de ω est un mot composé d'un sous-ensemble des lettres de ω dont on a conservé l'ordre. En d'autres termes, c'est un mot de la forme $\omega_{j_1} \omega_{j_2} \cdots \omega_{j_n}$, avec $1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_n \leq n$.

Remarque 1.1.8. Les facteurs sont en particulier des sous-mots. Le mot vide est à la fois facteur et sous-mot de n'importe quel mot.

Exemple 1.1.9. Les mots *aadaddaa* et *bbacda* sont respectivement un sous-mot et un facteur du mot *abbacaddeaa*.

Définition 1.1.10. Étant donnés deux mots u et v sur l'alphabet A , la **concaténation** de u et v est le mot, noté $u \cdot v$, obtenu en écrivant les lettres de v à la suite de celles de u .

Exemple 1.1.11. Le concaténé de *acdb* et *bd* est le mot $acdb \cdot bd = acdbbd$.

Définition 1.1.12. L'ensemble des mots sur l'alphabet A muni de la concaténation a une structure de monoïde dont l'élément neutre est le mot vide. On l'appelle le **monoïde libre**, et on le note A^* .

Exemple 1.1.13. Soit un alphabet $A = \{a, b\}$. Les mots de taille 3 de A^* sont

$$aaa, aab, aba, baa, abb, bab, bba, bbb.$$

Définition 1.1.14. Soient ω un mot de A^* et B un sous-ensemble de A . La **restriction du mot ω à l'alphabet B** est le sous-mot de ω , noté $\omega|_B$, contenant toutes les lettres de ω qui sont dans B .

Exemple 1.1.15. Le mot $abbacdaddeaa$ de A restreint à l'alphabet $B = \{a, d\}$ est

$$abbacdaddeaa|_{\{a,d\}} = aadaddaa.$$

Définition 1.1.16. Étant donné un mot $\omega = \omega_1\omega_2\cdots\omega_n$ de longueur n de A^* , la paire (i, j) , où i et j sont des entiers entre 1 et n , est une **inversion** de ω , si $i < j$ et $w_i > w_j$. L'ensemble $Inv(\omega)$ est l'ensemble de toutes les inversions de ω .

Définition 1.1.17. Étant donné un mot $\omega = \omega_1\omega_2\cdots\omega_n$ de A^* , on dit que la position i , où i est un entier entre 1 et $n-1$, est une **descente** (resp. **montée**) de ω , si $\omega_i > \omega_{i+1}$ (resp. $\omega_i \leq \omega_{i+1}$). L'ensemble $Des(\omega)$ (resp. $Mon(\omega)$) est l'ensemble de toutes les descentes (resp. montées) de ω .

Exemple 1.1.18. Pour le mot $\omega = aadbcb$ sur l'alphabet $\{a, b, c, d\}$, on a

$$Inv(\omega) = \{(3, 4), (3, 5), (3, 6), (5, 6)\}$$

$$Des(\omega) = \{3, 5\}$$

$$Mon(\omega) = \{1, 2, 4\}$$

Définition 1.1.19. Un mot $\omega = \omega_1\omega_2\cdots\omega_n$ de A^* est un **mot de Yamanouchi** si pour chaque suffixe de ω , le nombre de lettres a est au moins égal au nombre de lettres b , le nombre de lettres b est au moins égal au nombre de lettres c , et ainsi de suite.

Exemple 1.1.20. Le mot $dcbaacba$ est un mot de Yamanouchi. Le mot $ebacbae$ ne l'est pas.

Les permutations forment un sous-ensemble de l'ensemble des mots, à savoir, les mots de taille n contenant une et une seule fois les lettres $\{1, 2, \dots, n\}$. La permutation est une des notions fondamentales en combinatoire pour des problèmes de dénombrement et de probabilités discrètes. Elle sert ainsi à définir et à étudier des problèmes classiques comme le carré magique, le carré latin, ou le Rubik's Cube. Les permutations jouent un rôle très important dans la théorie des groupes, celle des déterminants ou encore celle des fonctions symétriques.

Définition 1.1.21. Une **permutation** de taille n est un mot sur l'alphabet A où chaque lettre apparaît exactement une fois. On peut aussi voir les permutations de taille n comme une bijection entre l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$ et lui-même.

Définition 1.1.22. L'ensemble des permutations muni de la loi de composition des applications \circ est appelé le **groupe symétrique**, et on le note \mathfrak{S}_n . L'ensemble des éléments de \mathfrak{S}_n est fini et est de taille $n!$.

Exemple 1.1.23. Les 6 permutations de \mathfrak{S}_3 sont

$$123, 132, 213, 231, 312, 321.$$

Définition 1.1.24. Soient une permutation σ de \mathfrak{S}_n , un entier i entre 1 et n et un entier $k \geq 1$. L'**orbite** de i sous σ est l'ensemble fini $\{\sigma_i^n, n \in \mathbb{N}\}$, avec $\sigma_i^0 = i$. La longueur de l'orbite $\{i, \sigma_i, \sigma_i^2, \dots, \sigma_i^{k-1}\}$ est k .

Exemple 1.1.25. Considérons la permutation $\sigma = 953127648$. Pour trouver l'orbite de 1, on calcule l'image de 1 qui est 9, puis l'image de 9 qui est 8, et ainsi de suite, jusqu'à retrouver 1 (qui est l'image de 4). L'orbite de 1 est donc $\{1, 9, 8, 4\}$, l'orbite de 2 est $\{2, 5\}$, et celle de 3 est $\{3\}$ (on dit que 3 est un point fixe). Une orbite est la même pour tous ses éléments : l'orbite de 9, 8 et 4 est aussi $\{1, 9, 8, 4\}$.

Une permutation peut être décrite par ses orbites. Quand on a une permutation σ de taille n , on utilise les cycles pour visualiser les orbites de σ .

Définition 1.1.26. Une permutation σ de taille n est un **cycle** si tous ses éléments appartiennent à la même orbite. On note cette permutation par le n -uplet $(1, \sigma_1, \sigma_1^2, \dots, \sigma_1^{k-1})$.

Définition 1.1.27. Soient une permutation σ de \mathfrak{S}_n , un entier i entre 1 et n et un entier $k \geq 1$. Un **cycle** de longueur k , noté par le k -uplet $(i, \sigma_i, \sigma_i^2, \dots, \sigma_i^{k-1})$, correspond à l'orbite $\{i, \sigma_i, \sigma_i^2, \dots, \sigma_i^{k-1}\}$ de longueur k , où i est le plus petit élément de l'orbite.

Remarque 1.1.28. Si une permutation contient plusieurs cycles alors ils sont disjoints, puisque les orbites sont disjointes.

Définition 1.1.29. Soit σ une permutation de \mathfrak{S}_n . La **décomposition en cycles disjoints** de σ est la suite des cycles disjoints de σ , écrite dans l'ordre croissant de leur plus petit élément.

Exemple 1.1.30. La décomposition en cycles disjoints de la permutation 953127648 de \mathfrak{S}_9 est

$$(1, 9, 8, 4)(2, 5)(3)(6, 7).$$

Définition 1.1.31. Soient $\sigma = \sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_n$ une permutation de taille n et i un entier entre 1 et n . La valeur σ_i est une **excédence** de σ , si $\sigma_i > i$. L'ensemble $Exc(\sigma)$ est l'ensemble de toutes les excédences de σ .

Exemple 1.1.32. L'ensemble des excédences de la permutation $\sigma = 2513647$ est

$$Exc(\sigma) = \{1, 2, 5\}.$$

On peut aussi voir le nombre d'excédences d'une permutation σ comme le nombre de montées dans la décomposition en cycles disjoints de la permutation σ . En effet, si $\sigma_i^k < \sigma_i^{k+1}$ dans l'orbite de i , cela veut dire que le nombre correspondant à σ_i^{k+1} dans la permutation σ est supérieur à sa position qui est σ_i^k . Donc σ_i^{k+1} est une excédence de σ .

Toutes les notions vues précédemment pour les mots (descentes, montées, inversions, sous-mots, facteurs \cdots) s'appliquent aussi aux permutations, puisque les permutations sont des mots particuliers.

Exemple 1.1.33. La permutation 651432 a pour descentes $\{1, 2, 4, 5\}$, pour montée $\{3\}$, pour inversions $\{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (4, 5), (4, 6), (5, 6)\}$ et a le sous-mot 6132 et le facteur 143.

On remarque qu'en général un mot n'est pas nécessairement une permutation. Une solution pour transformer un mot en une permutation est de le *standardiser*.

Définition 1.1.34. Étant donné un alphabet infini totalement ordonné A et un mot ω de taille n de A^* , le **standardisé** de ω , noté $std(\omega)$, est la permutation de taille n ayant exactement les mêmes inversions que ω . Le standardisé d'une permutation est la permutation elle-même.

Exemple 1.1.35. Le mot *baa* admet deux inversions, à savoir $(1, 2)$ et $(1, 3)$. La seule permutation de taille 3 admettant exactement ces deux inversions est $std(baa) = 312$.

Algorithmiquement parlant, en cas d'occurrences multiples d'une même lettre, la standardisation revient à numéroter les lettres de ω des plus petites aux plus grandes et de la gauche vers la droite (*cf.* figure 1.1.1).

Exemple 1.1.36. Pour retrouver le standardisé du mot *ddabcbbaa*, on numérote d'abord les *a* de la gauche vers la droite, puis de même les *b*, et ainsi de suite (*cf.* figure 1.1.1).

Passons maintenant à d'autres objets combinatoires, à savoir, les chemins nord-est étiquetés de Gasharov qui ont été introduits par Gasharov dans [Gas98] et qui sont en bijection avec les permutations. Gasharov a défini ces objets pour démontrer l'unimodalité des lignes du triangle eulérien. Nous présenterons sa démonstration dans le paragraphe 1.3 quand nous aborderons la question de l'unimodalité dans le triangle eulérien.

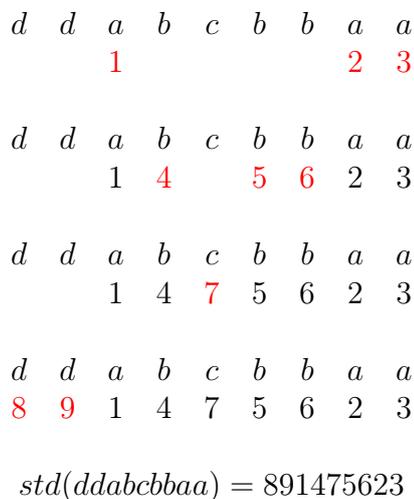
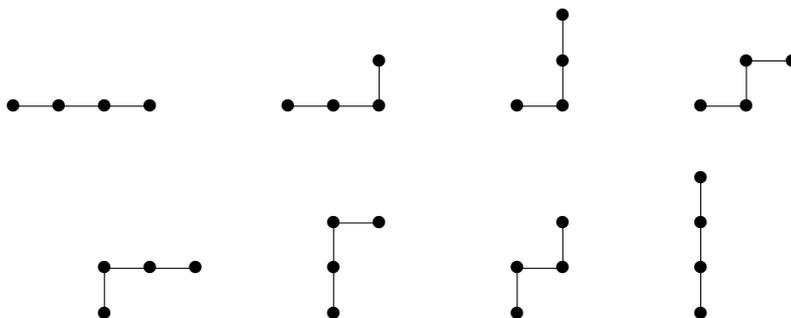


FIGURE 1.1.1 : Standardisé du mot $ddabcbbaa$.

1.1.3 Chemins nord-est étiquetés de Gasharov

Définition 1.1.37. Un chemin nord-est $P_0P_1 \cdots P_{n-1}$ de taille n est une suite de points dans \mathbb{Z}^2 , où P_0 est appelé le point initial, et (P_j, P_{j+1}) est un pas horizontal (est) ou vertical (nord), pour tout $0 \leq j \leq n-2$.

Exemple 1.1.38. Les 8 chemins nord-est de taille 4 sont



Définition 1.1.39. Soit P un chemin nord-est. Un pas horizontal H (resp. un pas vertical V) de P est au niveau $i+1$ dans P , si H (resp. V) a i pas verticaux (resp. horizontaux) en-dessous (resp. à sa droite) dans P . Le niveau de H (resp. V) dans P est noté $lev_P(H)$ (resp. $lev_P(V)$) (cf. figure 1.1.2).

Dans [Gas98], Gasharov a défini un étiquetage sur les chemins nord-est. Nous appellerons par la suite, les chemins nord-est munis de l'étiquetage de Gasharov, les chemins nord-est étiquetés de Gasharov.

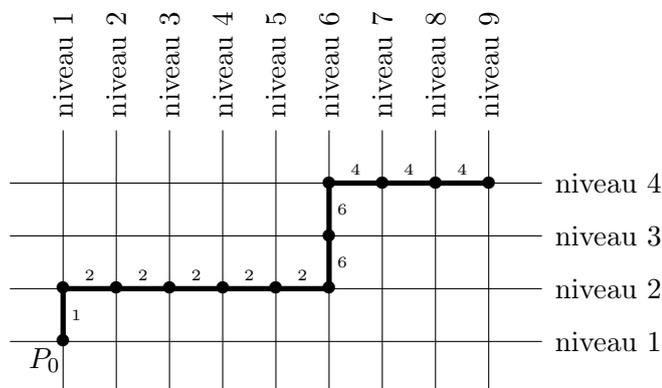
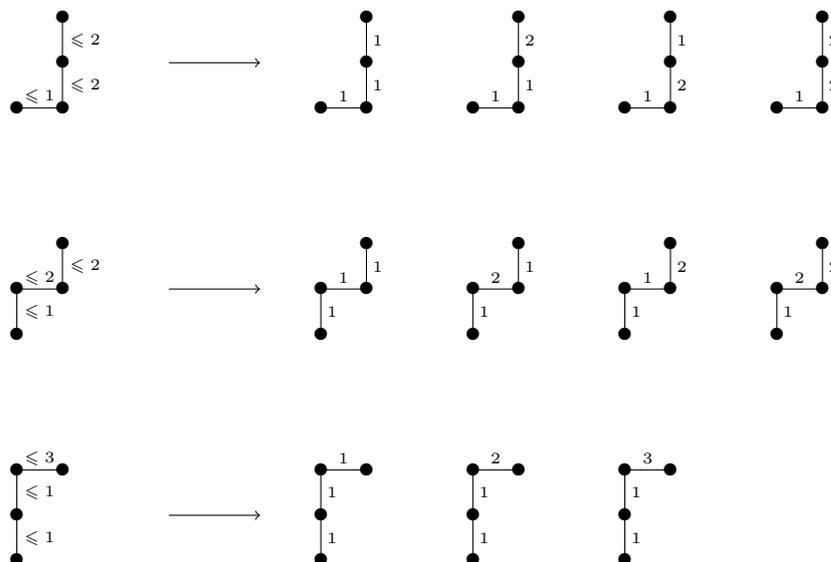


FIGURE 1.1.2 : Les niveaux associés aux pas d'un chemins nord-est.

Définition 1.1.40. Un *chemin nord-est étiqueté de Gasharov*, est un étiquetage de tous les pas d'un chemin nord-est de la façon suivante : un pas horizontal H (resp. vertical V) dans P est étiqueté par un entier strictement positif inférieur ou égal à $lev_p(H)$ (resp. $lev_p(V)$).

On note $\mathcal{P}(n)$ l'ensemble de tous les chemins nord-est étiquetés de Gasharov de taille n , et $\mathcal{P}(n, k)$ l'ensemble de tous les chemins de $\mathcal{P}(n)$ ayant k pas verticaux. On notera aussi $P(n, k)$ le nombre d'éléments de $\mathcal{P}(n, k)$.

Exemple 1.1.41. Les 11 chemins de l'ensemble $\mathcal{P}(4, 2)$ sont



Gasharov a prouvé que les permutations et les chemins nord-est étiquetés de Gasharov sont reliés par la proposition suivante :

Proposition 1.1.42 (Gasharov [Gas98]). *Pour tout $n \geq 0$ et $0 \leq k < n$, l'ensemble des permutations de taille n ayant k descentes et l'ensemble de tous les chemins étiquetés de Gasharov de taille n ayant k pas verticaux sont en bijection.*

Démonstration. Ajouter n dans une permutation de taille $n - 1$ crée soit une montée soit une descente, donc les positions d'insertion possibles se partitionnent en deux sous-ensembles (un pour les montées et l'autre pour les descentes). Soit σ une permutation de taille n . En insérant n dans la permutation $\sigma|_{\{1, \dots, n-1\}}$ qui contient k descentes, il y a $k + 1$ positions notées h_1, h_2, \dots, h_{k+1} qui permettent de créer une montée, et $n - k$ positions notées v_1, v_2, \dots, v_{n-k} qui permettent de créer une descente. Supposons que l'on a déjà construit le chemin nord-est étiqueté de Gasharov correspondant à $\sigma|_{\{1, \dots, n-1\}}$. On obtient le dernier pas du chemin nord-est étiqueté de Gasharov correspondant à σ et son étiquette, par le processus suivant :

- si n est à la position h_j de σ , où $1 \leq j \leq k + 1$, le dernier pas est horizontal et son étiquette est égale à j ;
- si n est à la position v_r de σ , où $1 \leq r \leq n - k$, le dernier pas est vertical et son étiquette est égale à r .

L'algorithme inverse qui permet de retrouver la permutation qui correspond à un chemin nord-est étiqueté de Gasharov P se fait comme suit : supposons que l'on a déjà construit la permutation σ ayant k descentes qui correspond aux $n - 1$ premiers pas de P . Soit α le n^e pas de P et ℓ son étiquette, alors :

- si α est horizontal, on insère n à la position h_ℓ de σ , où $1 \leq \ell \leq k + 1$;
- si α est vertical, on insère n à la position v_ℓ de σ , où $1 \leq \ell \leq n - k$.

□

Exemple 1.1.43. Le chemin nord-est étiqueté de Gasharov correspondant à la permutation 814239576 est obtenu comme suit (où les positions notées h_1, h_2, \dots permettent de créer une montée, et les positions notées v_1, v_2, \dots permettent de créer une descente) :

$$v_1 h_1 \rightarrow \bullet \qquad v_1 v_2 h_1 \rightarrow \bullet \overset{1}{\bullet} \qquad v_1 v_2 v_3 h_1 \rightarrow \bullet \overset{1}{\bullet} \overset{1}{\bullet}$$

$$v_1 v_2 4 h_1 2 v_3 3 h_2 \rightarrow \bullet \overset{1}{\bullet} \overset{1}{\bullet} \overset{2}{\bullet} \qquad v_1 v_2 4 h_1 2 v_3 3 v_4 5 h_2 \rightarrow \bullet \overset{1}{\bullet} \overset{1}{\bullet} \overset{2}{\bullet} \overset{2}{\bullet}$$

$$v_1 v_2 4 h_1 2 v_3 3 v_4 5 v_5 6 h_2 \rightarrow \bullet \overset{1}{\bullet} \overset{1}{\bullet} \overset{2}{\bullet} \overset{2}{\bullet} \overset{2}{\bullet}$$

$$v_1 v_2 4 h_1 2 v_3 3 v_4 5 v_5 7 h_2 6 h_3 \rightarrow \bullet \overset{1}{\bullet} \overset{1}{\bullet} \overset{2}{\bullet} \overset{2}{\bullet} \overset{2}{\bullet} \overset{5}{\bullet}$$

$$v_1 8 h_1 1 v_2 4 h_2 2 v_3 3 v_4 5 v_5 7 h_3 6 h_4 \rightarrow \bullet \overset{1}{\bullet} \overset{1}{\bullet} \overset{2}{\bullet} \overset{2}{\bullet} \overset{2}{\bullet} \overset{5}{\bullet} \overset{1}{\bullet}$$

$$v_1 8 h_1 1 v_2 4 h_2 2 v_3 3 v_4 9 h_3 5 v_5 7 h_4 6 h_5 \rightarrow \bullet \overset{1}{\bullet} \overset{1}{\bullet} \overset{2}{\bullet} \overset{2}{\bullet} \overset{2}{\bullet} \overset{5}{\bullet} \overset{1}{\bullet} \overset{4}{\bullet}$$

Dans [BE99], Bóna et Ehrenborg se sont inspirés des chemins nord-est étiquetés de Gasharov pour définir un autre type de chemins nord-est étiquetés que nous appelons les chemins nord-est étiquetés de Bóna et Ehrenborg.

Définition 1.1.44. *Un chemin nord-est étiqueté de Bóna et Ehrenborg de taille n est un chemin nord-est de taille $n + 1$ ayant les pas a_1, a_2, \dots, a_n*

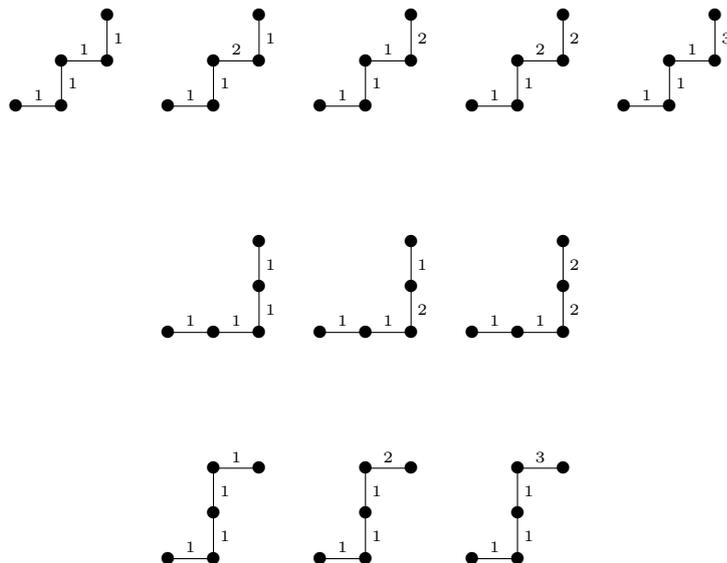
1.1 Classes et objets combinatoires

étiquetés respectivement par les entiers positifs e_1, e_2, \dots, e_n , tels que les trois conditions suivantes soient vérifiées :

1. le pas a_1 est horizontal et son étiquette est $e_1 = 1$;
2. si les deux pas a_i et a_{i+1} sont verticaux, ou horizontaux, alors $e_i \geq e_{i+1}$;
3. si a_i est perpendiculaire à a_{i+1} , alors $e_i + e_{i+1} \leq i + 1$.

On note $\mathcal{B}(n)$ l'ensemble de tous les chemins nord-est étiquetés de Bóna et Ehrenborg de taille n , et on note $\mathcal{B}(n, k)$ l'ensemble de tous les chemins de $\mathcal{B}(n)$ ayant k pas verticaux. On notera $B(n, k)$ le nombre d'éléments de $\mathcal{B}(n, k)$.

Exemple 1.1.45. Les 11 chemins nord-est étiquetés de $\mathcal{B}(4, 2)$ sont



A partir de la définition des chemins nord-est étiquetés de Bóna et Ehrenborg, les auteurs de [BE99] ont déduit la proposition suivante :

Proposition 1.1.46 (Bóna et Ehrenborg [BE99]). *Considérons un chemin nord-est étiqueté de Bóna et Ehrenborg B de taille n ayant les pas a_1, a_2, \dots, a_n étiquetés respectivement par les entiers positifs e_1, e_2, \dots, e_n . Le chemin B vérifie les deux propriétés suivantes :*

1. pour tout entier $i > 1$, l'étiquette $e_i < i$;
2. si on fixe l'étiquette e_i , alors le pas a_{i+1} peut prendre toutes les valeurs positives inférieures ou égales à e_{i+1} .

Remarque 1.1.47. Considérons un chemin nord-est étiqueté de Bóna et Ehrenborg de taille n ayant les pas a_1, a_2, \dots, a_n étiquetés respectivement par les entiers positifs e_1, e_2, \dots, e_n . Alors, toutes les restrictions sur e_{i+1} sont données par e_i , indépendamment des étiquettes qui précèdent e_i , où i est un entier entre 1 et n (cf. exemple 1.1.45).

Proposition 1.1.48 (Bóna et Ehrenborg [BE99]). *Les chemins nord-est étiquetés de Bóna et Ehrenborg de taille n ayant k pas verticaux sont en bijection avec les permutations de taille n ayant k descentes.*

Démonstration. Soient σ une permutation de taille n et $q_1 q_2 \dots q_i$ la permutation de taille i définie par $q_1 q_2 \dots q_i = std(\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_i)$ (cf. définition 1.1.34), pour $2 \leq i \leq n$. On obtient le pas a_i et son étiquette e_i comme suit :

- si la position $i - 1$ est une descente de la permutation σ , le pas a_i est vertical et son étiquette e_i est égale à q_i .
- si la position $i - 1$ est une montée de la permutation σ , le pas a_i est horizontal et son étiquette e_i est égale à $i + 1 - q_i$.

L'application décrite ci-dessus est injective : en effet, soit σ une permutation de taille n . Supposons que les positions i et $i - 1$ sont deux descentes de σ et soient $q_1 q_2 \dots q_i = std(\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_i)$ et $r_1 r_2 \dots r_{i+1} = std(\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_{i+1})$. Comme i est une descente de σ , alors $r_i > r_{i+1}$, et q_i est soit r_i soit $r_i - 1$. On a donc $q_i \geq r_{i+1}$ et la deuxième condition de la définition 1.1.44 est vérifiée dans ce cas. En raisonnant de la même manière sur les trois cas restants :

- les positions i et $i - 1$ sont des montées ;
- la position i est une descente et la position $i - 1$ est une montée ;
- la position i est une montée et la position $i - 1$ est une descente ;

on démontre que l'ensemble d'arrivée de l'application est l'ensemble des chemins nord-est étiquetés de Bóna et Ehrenborg de taille n .

L'application décrite ci-dessus est une bijection. En effet, on peut retrouver une permutation σ de taille n à partir de son image B . Pour cela, il suffit de retrouver σ_n , puis, utiliser la récurrence sur n pour retrouver le reste de σ . Rappelons que σ_n est égal à l'étiquette ℓ du dernier pas de B s'il est vertical, et à $n + 1 - \ell$ si le pas est horizontal. La deuxième et troisième condition de la définition 1.1.44 assurent qu'en procédant de cette manière on obtient toujours un nombre entre 1 et n pour σ_n . \square

Exemple 1.1.49. Le chemin nord-est étiqueté de Bóna et Ehrenborg qui correspond à la permutation $\sigma = 814239576$ est obtenu comme suit :

1.1 Classes et objets combinatoires

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= 8 \\ q_1 &= 1 \end{aligned} \rightarrow \bullet \overset{1}{\text{---}} \bullet$$

$$\begin{aligned} \sigma_1\sigma_2 &= 81 \\ q_1q_2 &= 21 \end{aligned} \rightarrow \bullet \overset{1}{\text{---}} \bullet \overset{1}{\text{---}} \bullet$$

$$\begin{aligned} \sigma_1\sigma_2\sigma_3 &= 814 \\ q_1q_2q_3 &= 312 \end{aligned} \rightarrow \bullet \overset{1}{\text{---}} \bullet \overset{1}{\text{---}} \bullet \overset{2}{\text{---}} \bullet$$

$$\begin{aligned} \sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4 &= 8142 \\ q_1q_2q_3q_4 &= 4132 \end{aligned} \rightarrow \bullet \overset{1}{\text{---}} \bullet \overset{1}{\text{---}} \bullet \overset{2}{\text{---}} \bullet \overset{2}{\text{---}} \bullet$$

$$\begin{aligned} \sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4\sigma_5 &= 81423 \\ q_1q_2q_3q_4q_5 &= 51423 \end{aligned} \rightarrow \bullet \overset{1}{\text{---}} \bullet \overset{1}{\text{---}} \bullet \overset{2}{\text{---}} \bullet \overset{2}{\text{---}} \bullet \overset{3}{\text{---}} \bullet$$

$$\begin{aligned} \sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4\sigma_5\sigma_6 &= 814239 \\ q_1q_2q_3q_4q_5q_6 &= 514236 \end{aligned} \rightarrow \bullet \overset{1}{\text{---}} \bullet \overset{1}{\text{---}} \bullet \overset{2}{\text{---}} \bullet \overset{2}{\text{---}} \bullet \overset{3}{\text{---}} \bullet \overset{1}{\text{---}} \bullet$$

$$\begin{aligned} \sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4\sigma_5\sigma_6\sigma_7 &= 8142395 \\ q_1q_2q_3q_4q_5q_6q_7 &= 6142375 \end{aligned} \rightarrow \bullet \overset{1}{\text{---}} \bullet \overset{1}{\text{---}} \bullet \overset{2}{\text{---}} \bullet \overset{2}{\text{---}} \bullet \overset{3}{\text{---}} \bullet \overset{1}{\text{---}} \bullet \overset{5}{\text{---}} \bullet$$

$$\begin{aligned} \sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4\sigma_5\sigma_6\sigma_7\sigma_8 &= 81423957 \\ q_1q_2q_3q_4q_5q_6q_7q_8 &= 71423856 \end{aligned} \rightarrow \bullet \overset{1}{\text{---}} \bullet \overset{1}{\text{---}} \bullet \overset{2}{\text{---}} \bullet \overset{2}{\text{---}} \bullet \overset{3}{\text{---}} \bullet \overset{1}{\text{---}} \bullet \overset{5}{\text{---}} \bullet \overset{3}{\text{---}} \bullet$$

$$\begin{aligned} \sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4\sigma_5\sigma_6\sigma_7\sigma_8\sigma_9 &= 814239576 \\ q_1q_2q_3q_4q_5q_6q_7q_8q_9 &= 814239576 \end{aligned} \rightarrow \bullet \overset{1}{\text{---}} \bullet \overset{1}{\text{---}} \bullet \overset{2}{\text{---}} \bullet \overset{2}{\text{---}} \bullet \overset{3}{\text{---}} \bullet \overset{1}{\text{---}} \bullet \overset{5}{\text{---}} \bullet \overset{3}{\text{---}} \bullet \overset{6}{\text{---}} \bullet$$

1.1.4 Partitions d'entiers

Dans la théorie des fonctions symétriques, plusieurs objets sont indexés par les partitions d'entiers (entre autres, les bases des fonctions symétriques). Leur combinatoire a donné lieu à de nombreux travaux, citons par exemple les travaux d'Andrews [And76] ainsi que ceux de Hardy et Ramanujan [Har40]. Nous allons établir les notations et la terminologie qui seront utilisées.

Définition 1.1.50. Une *partition* λ d'un entier positif n , notée $\lambda \vdash n$, est une suite finie décroissante au sens large d'entiers strictement positifs $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\ell)$ dont la somme, notée $|\lambda|$ et appelée *taille*, est n . Les valeurs λ_i sont les *parts* de λ , et sa *longueur* $\ell(\lambda)$ est son nombre de parts. Une partition est dite *partition stricte* si la suite de ses parts est strictement décroissante.

On désigne par P_n l'ensemble des partitions de n . Ainsi,

$$\begin{aligned} P_1 &= \{(1)\}, \\ P_2 &= \{(2), (1, 1)\}, \\ P_3 &= \{(3), (2, 1), (1, 1, 1)\}, \\ P_4 &= \{(4), (3, 1), (2, 2), (2, 1, 1), (1, 1, 1, 1)\}, \\ P_5 &= \{(5), (4, 1), (3, 2), (3, 1, 1), (2, 2, 1), (2, 1, 1, 1), \\ &\quad (1, 1, 1, 1, 1)\}. \end{aligned} \tag{1.5}$$

La fonction génératrice des partitions est

$$P_n(x) = \sum_{n \geq 0} p_n x^n = \prod_{k \geq 1} \frac{1}{1 - x^k} \tag{1.6}$$

où p_n est le nombre de partitions de n .

Définition 1.1.51. Toute partition $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_\ell)$ peut être représentée graphiquement par un *diagramme de Ferrers*, qui consiste en un ensemble de cellules, ajustées en bas et à gauche, tel que le nombre de cellules dans chaque ligne i est égal à λ_i . Les diagrammes de Ferrers sont représentés ici suivant la convention française (cf. figure 1.1.3).

En plongeant naturellement un diagramme de Ferrers dans \mathbb{R}^2 , la cellule en bas à gauche est la cellule d'indice $(1, 1)$ et on indexe les autres cellules suivant les coordonnées cartésiennes canoniques.

Définition 1.1.52. Le *diagramme de Ferrers décalé* d'une partition stricte λ , est le diagramme de Ferrers de λ dans lequel la i^{e} ligne est décalée de $i - 1$ unités à droite par rapport à la ligne du bas (cf. figure 1.1.4).

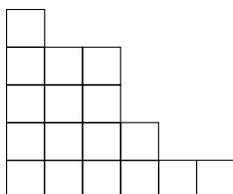


FIGURE 1.1.3 : Le diagramme de Ferrers de la partition $(6, 4, 3, 3, 1)$.

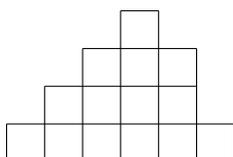


FIGURE 1.1.4 : Le diagramme de Ferrers décalé de $(6, 4, 3, 1)$.

Définition 1.1.53. Les **diagonales** D_k d'un diagramme de Ferrers sont les droites d'équations $y = x + k$, où k est un entier. Chaque cellule du diagramme de Ferrers est coupée par une seule diagonale D_k . La diagonale principale D_0 sépare le diagramme de Ferrers en deux parties, la partie $\text{haut}(\lambda)$ qui contient les cellules coupées (traversées) par D_k , pour tout entier strictement positif k , tandis que les cellules restantes définissent la partie $\text{bas}(\lambda)$ (cf. figure 1.1.5).

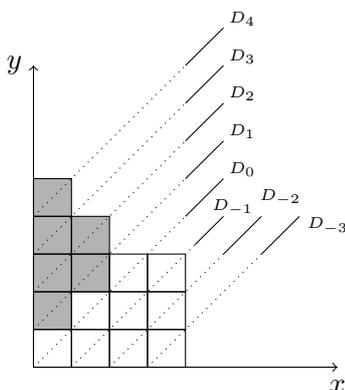


FIGURE 1.1.5 : Le diagramme de Ferrers de $(4, 4, 4, 2, 1)$ et ses diagonales : la partie grisée est $\text{haut}((4, 4, 4, 2, 1))$ et la partie blanche est $\text{bas}((4, 4, 4, 2, 1))$.

Remarque 1.1.54. Pour toute partition λ , le diagramme $\text{bas}(\lambda)$ est un diagramme de Ferrers décalé (cf. figure 1.1.5).

1.1.5 2-quotient et 2-cœur d'une partition

Définition 1.1.55. *Étant donnée une partition λ de longueur ℓ , le 2-quotient de λ , noté $2\text{-quotient}(\lambda)$, est la paire de partitions (μ, ν) obtenue par le processus suivant :*

1. on commence par construire la partition L dont le i^{e} élément est $\lambda_i + \ell - i$;
2. on construit le tuple M obtenu à partir de L , en remplaçant de la droite vers la gauche successivement ses nombres pairs par $0, 2, 4, \dots$, et ses nombres impairs par $1, 3, 5, \dots$;
3. pour obtenir μ , on soustrait des parts impaires de L les parts correspondantes de M , puis on divise le résultat par 2. La partition ν est obtenue par la même procédure appliquée aux parts paires.

Exemple 1.1.56. Illustrons ces étapes sur la partition $\lambda = (6, 4, 3, 1, 1)$:

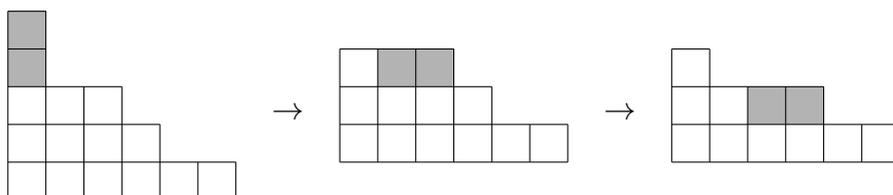
- la partition L est $(10, 7, 5, 2, 1)$;
- le tuple M est $(2, 5, 3, 0, 1)$;
- les deux partitions μ et ν sont alors :

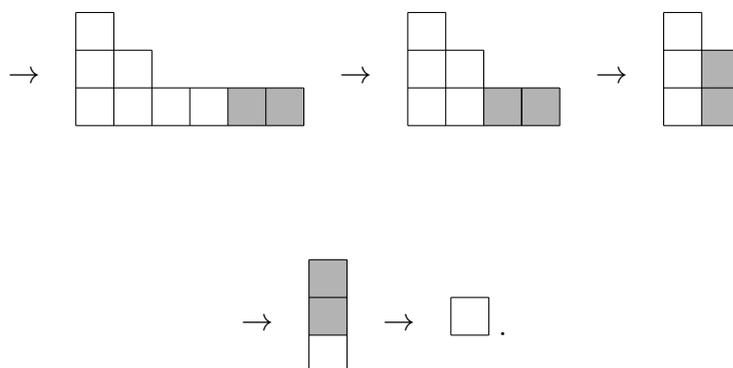
$$\mu = \frac{1}{2}((7, 5, 1) - (5, 3, 1)) = (1, 1) \quad \nu = \frac{1}{2}((10, 2) - (2, 0)) = (4, 1).$$

Le 2-quotient de $(6, 4, 3, 1, 1)$ est donc $((1, 1), (4, 1))$.

Définition 1.1.57. *Le 2-cœur d'une partition λ , noté $2\text{-cœur}(\lambda)$, est la partition obtenue à partir du diagramme de Ferrers de λ en supprimant à chaque étape un domino (i.e., un rectangle 1×2 ou 2×1) n'ayant aucune cellule ni au-dessus ni à sa droite, jusqu'à ce qu'il ne reste plus de tels dominos.*

Exemple 1.1.58. Le 2-cœur de la partition $(6, 4, 3, 1, 1)$ est obtenu comme suit :

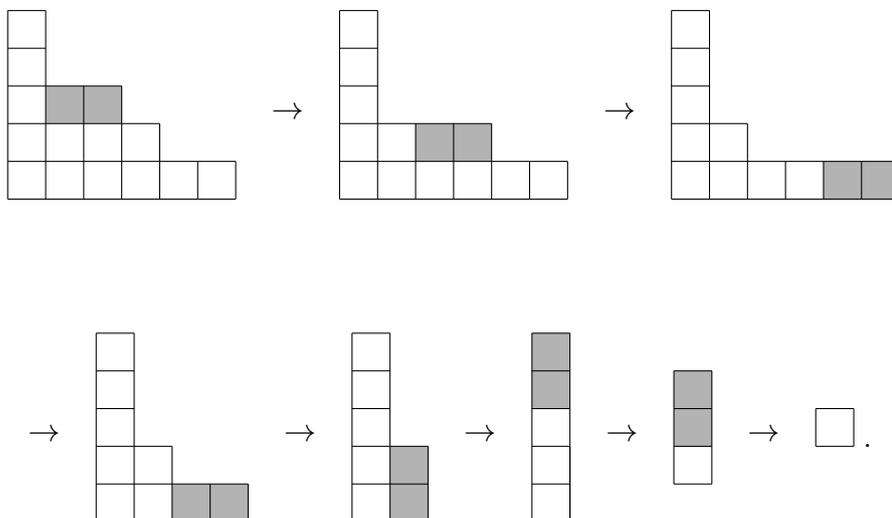




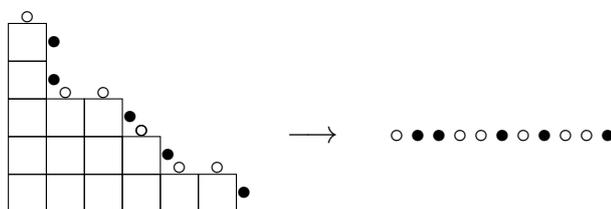
Le 2-cœur($(6, 4, 3, 1, 1)$) est donc la partition (1) .

Ce processus ne dépend pas de l'ordre dans lequel les dominos sont supprimés. Autrement dit, si on avait choisi un autre ordre de suppression des dominos, le résultat aurait été le même.

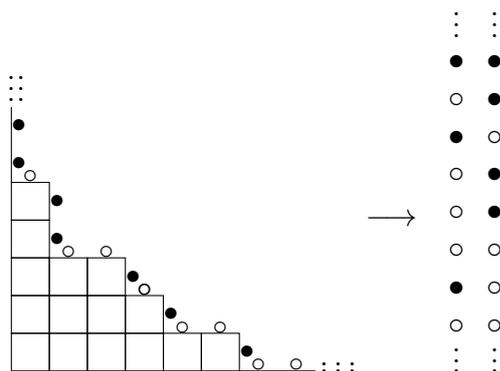
Exemple 1.1.59. Appliquons le processus sur la partition $(6, 4, 3, 1, 1)$ avec un autre ordre de suppression des dominos,



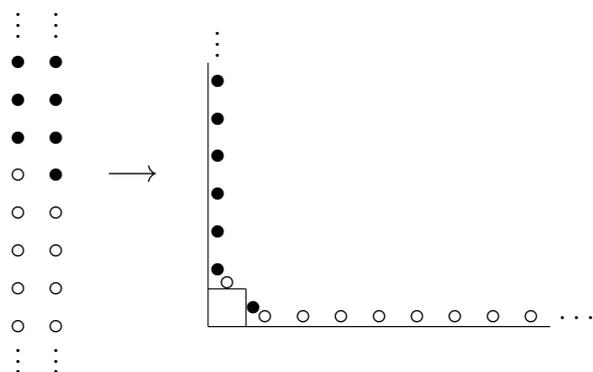
Prouver que l'ordre dans lequel on supprime les dominos ne change en aucun cas le résultat n'est pas facile. Nous présentons ici l'idée d'une démonstration due à James [JK81], qui utilise une représentation d'une partition λ de taille n en séquence de boules noires et de boules blanches définie de la façon suivante : en se déplaçant tout au long de la bordure extérieure du diagramme de Ferrers de λ du point nord-ouest au point sud-est, on étiquette chaque pas horizontal par une boule blanche, et chaque pas vertical par une boule noire. La partition $(6, 4, 3, 1, 1)$ ci-dessous a pour séquence :



On verra plus loin qu'il est utile de commencer par une infinité de boules noires et de terminer la séquence par une infinité de boules blanches. Puis, on arrange la séquence obtenue en alternant entre deux colonnes. Par conséquent, la partition $(6, 4, 3, 1, 1)$ donne



Dans cette nouvelle représentation de λ , un domino n'ayant aucune cellule ni au-dessus ni à sa droite, correspond à une boule noire ayant une boule blanche adjacente au-dessus. La suppression d'un tel domino dans λ revient à échanger les positions de la boule noire et de la boule blanche dans la représentation en deux colonnes. Le 2-cœur de λ est donc obtenu en poussant toutes les boules noires le plus loin possible vers le haut. Choisir un ordre dans lequel on supprime les dominos n'ayant aucune cellule ni au-dessus ni à leur droite revient à choisir un ordre dans lequel on pousse les boules noires vers le haut. En effet, l'ordre dans lequel les dominos sont supprimés ne change pas le résultat, puisqu'à la fin toutes les boules noires se retrouveront en haut. Le $2\text{-cœur}((6, 4, 3, 1, 1))$ est donc :



ce qui correspond à la partition (1). Pour reconstruire la partition λ à partir des deux colonnes associées au 2-cœur de λ , on a besoin de connaître le nombre de positions où chaque boule noire doit être déplacée vers le bas. Par exemple, pour les deux colonnes du 2-cœur((6, 4, 3, 1, 1)), on retrouve la partition (6, 4, 3, 1, 1) en poussant dans la première colonne, la dernière boule noire de 4 positions et l'avant-dernière boule noire d'une position. Dans la deuxième colonne on pousse la dernière et l'avant-dernière boule noire d'une position chacune, et on laisse les autres boules à leur places,

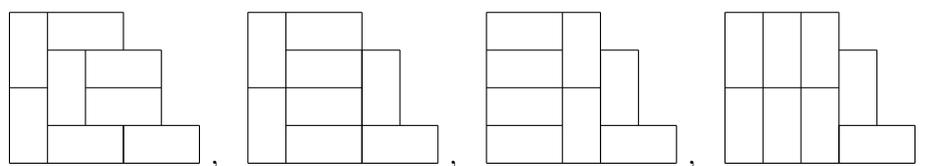


et on enregistre ces informations dans une paire de partitions (μ, ν) . Cette paire de partitions est le 2-quotient(λ). Notons que la somme des tailles des partitions μ et ν est égale au nombre de dominos supprimés. Donc $|\lambda| = |\gamma| + 2(|\mu| + |\nu|)$, où γ est le 2-cœur de λ . Si on ne considère que des colonnes ayant au moins autant de boules noires dans la deuxième colonne que dans la première, alors avec cette convention pour fixer l'ordre des partitions dans le 2-quotient, la correspondance présentée ci-dessus entre les partitions et les paires (2-cœur, 2-quotient) est bijective.

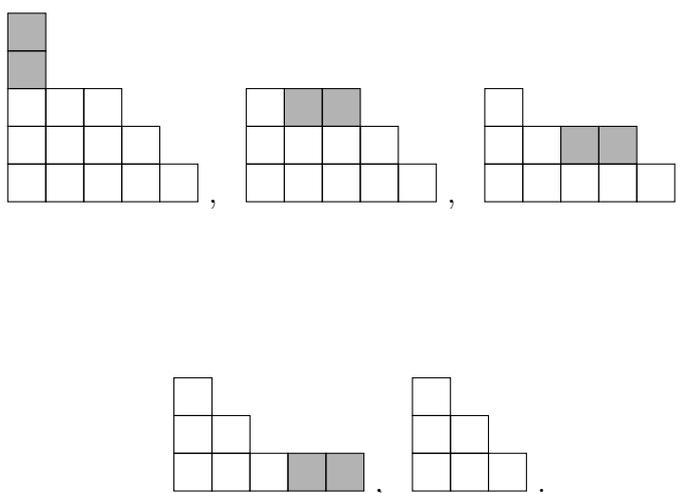
Définition 1.1.60. *Étant donnée une partition λ de 2-cœur vide, alors, on peut paver le diagramme de Ferrers de λ avec des dominos. Une telle partition*

est dite **pavable**. Autrement dit, une partition est pavable par des dominos si on peut recouvrir toute la surface de son diagramme de Ferrers par des dominos qui ne s'intersectent pas.

Exemple 1.1.61. La partition $(5, 4, 4, 3)$ a pour 2-cœur la partition vide. On donne ci-dessous quelques pavages possibles de cette partition avec des dominos :



Exemple 1.1.62. La partition $(5, 4, 3, 1, 1)$ n'est pas pavable puisque son 2-cœur n'est pas une partition vide :



1.1.6 Compositions d'entiers

Définition 1.1.63. Une **composition** π d'un entier positif n est une suite ordonnée d'entiers strictement positifs $(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_k)$ de somme n . Les valeurs π_i sont les parts de π , et sa longueur $\ell(\pi)$ est son nombre de parts.

Remarque 1.1.64. Une composition d'un entier n ordonnée dans l'ordre décroissant donne une partition du même entier n .

On désigne par C_n l'ensemble des compositions de n , et on a

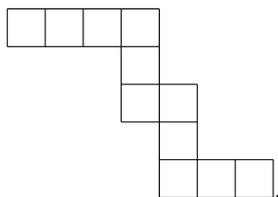
$$\begin{aligned}
 C_0 &= \{\{\}\}, \\
 C_1 &= \{(1)\}, \\
 C_2 &= \{(2), (1, 1)\}, \\
 C_3 &= \{(3), (2, 1), (1, 2), (1, 1, 1)\}, \\
 C_4 &= \{(4), (3, 1), (1, 3), (2, 2), (2, 1, 1), (1, 2, 1), \\
 &\quad (1, 1, 2), (1, 1, 1, 1)\}, \\
 C_5 &= \{(5), (4, 1), (1, 4), (3, 2), (2, 3), (3, 1, 1), (1, 3, 1), \\
 &\quad (1, 1, 3), (2, 2, 1), (2, 1, 2), (1, 2, 2), (2, 1, 1, 1), \\
 &\quad (1, 2, 1, 1), (1, 1, 2, 1), (1, 1, 1, 2), (1, 1, 1, 1, 1)\}.
 \end{aligned} \tag{1.7}$$

La fonction génératrice des compositions est

$$C_n(x) = \sum_{n \geq 0} c_n x^n = 1 + \sum_{n \geq 1} 2^{n-1} x^n. \tag{1.8}$$

où c_n est le nombre de compositions de n . Une composition π de longueur k admet une représentation sous forme de diagramme appelé *ruban*, qui consiste en k lignes, où chaque ligne i est composée de π_i cellules. Le ruban est construit en plaçant la première cellule de la ligne π_{i+1} sous la dernière cellule de la ligne π_i .

Exemple 1.1.65. Le ruban correspondant à la composition $(4, 1, 2, 1, 3)$ est



1.2 Fonctions symétriques et tableaux

1.2.1 Fonctions symétriques

Les fonctions symétriques forment un objet central de tout ce travail. Elles apparaissent dans de nombreux problèmes liés à la combinatoire, l'algèbre, la géométrie ou encore la théorie des représentations. Nous donnons ici un aperçu rapide de quelques bases et propriétés de ces fonctions.

Définition 1.2.1. On considère les polynômes en n variables. Le groupe symétrique \mathfrak{S}_n agit sur ces polynômes en permutant leurs variables. Un polynôme est **symétrique** s'il est invariant sous cette action. Autrement dit, un polynôme $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est symétrique, si pour toute permutation σ , on a

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_{\sigma_1}, x_{\sigma_2}, \dots, x_{\sigma_n}) \quad (1.9)$$

Exemple 1.2.2. Le polynôme en 3 variables suivant est symétrique :

$$x_1^2 x_2^3 + x_1 x_2^3 x_3^2 + x_1^2 x_2 x_3^3 + x_1^2 x_2^3 x_3 + x_1^3 x_2 x_3^2 + x_1^3 x_2^2 x_3.$$

Fonctions monomiales

Définition 1.2.3. Étant donnée une partition $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$, les **fonctions symétriques monomiales** notées m_λ sont définies par :

$$m_\lambda(x_1, x_2, \dots, x_k) = \sum_{\lambda_{\sigma_1}, \dots, \lambda_{\sigma_n}} x_{i_1}^{\lambda_{\sigma_1}} \dots x_{i_k}^{\lambda_{\sigma_k}}, \quad (1.10)$$

où la somme porte sur toutes les permutations distinctes σ de $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$.

Exemple 1.2.4. Pour les partitions de taille $\{0, 1, 2, 3\}$, on obtient les fonctions symétriques :

$$\begin{aligned} m_0(x_1, x_2, x_3) &= 1 \\ m_1(x_1, x_2, x_3) &= x_1 + x_2 + x_3 \\ m_2(x_1, x_2, x_3) &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \\ m_{11}(x_1, x_2, x_3) &= x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 \\ m_3(x_1, x_2, x_3) &= x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 \\ m_{21}(x_1, x_2, x_3) &= x_1 x_2^2 + x_1^2 x_2 + x_1 x_3^2 + x_1^2 x_3 + x_2 x_3^2 + x_2^2 x_3 \\ m_{111}(x_1, x_2, x_3) &= x_1 x_2 x_3. \end{aligned}$$

Les fonctions symétriques monomiales forment une base des polynômes symétriques. Il existe aussi d'autres bases des polynômes symétriques (fonctions sommes de puissances, fonctions symétriques élémentaires, fonctions symétriques homogène, fonctions de Schur).

Sommes de puissances

Définition 1.2.5. Étant donnée une partition $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$, les **fonctions sommes de puissances** notées p_λ sont définies algébriquement par

$$\begin{aligned} p_n &= m_n = \sum_i x_i^n, \text{ pour tout } n > 0, \text{ avec } p_0 = m_0 = 1 \\ p_\lambda &= p_{\lambda_1} p_{\lambda_2} \dots p_{\lambda_k}, \text{ si } \lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k). \end{aligned} \quad (1.11)$$

Fonctions symétriques élémentaires

Définition 1.2.6. *Étant donnée une partition $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$, les fonctions symétriques élémentaires notées e_λ sont définies par :*

$$e_n = m_{1^n} = \sum_{i_1 < \dots < i_n} x_{i_1} \dots x_{i_n}, \text{ pour tout } n > 0, \text{ avec } e_0 = m_0 = 1 \quad (1.12)$$

$$e_\lambda = e_{\lambda_1} e_{\lambda_2} \dots e_{\lambda_k}, \text{ si } \lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k).$$

Fonctions symétriques homogènes

Définition 1.2.7. *Étant donnée une partition $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$, les fonctions symétriques homogènes notées h_λ sont définies par :*

$$h_n = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda = \sum_{i_1 \leq \dots \leq i_n} x_{i_1} \dots x_{i_n}, \text{ pour tout } n > 0, \text{ avec } h_0 = m_0 = 1$$

$$h_\lambda = h_{\lambda_1} h_{\lambda_2} \dots h_{\lambda_k}, \text{ si } \lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k). \quad (1.13)$$

1.2.2 Tableaux de Young

Les tableaux de Young ont été introduits par Young dans sa série de travaux sur l'analyse substitutionnelle quantitative [You00]. On les retrouve aujourd'hui dans plusieurs domaines des mathématiques. Les tableaux de Young se sont révélés comme l'objet combinatoire central de la théorie des fonctions symétriques. Leur combinatoire est extrêmement riche [Sta90, LLT02, LS81, Knu70, Ful97].

Définition 1.2.8. *Soit λ une partition. Un tableau de Young semi-standard t est un remplissage du diagramme de Ferrers de λ avec des lettres appartenant à un alphabet infini totalement ordonné $A = \{1 < 2 < 3 < \dots\}$, tel que ces lettres soient croissantes au sens large sur les lignes de la gauche vers la droite, et soient strictement croissantes sur les colonnes du bas vers le haut (cf. figure 1.2.6). La forme d'un tableau de Young t notée $sh(t)$ est la suite décroissante des longueurs de ses lignes. En d'autres mots, c'est la partition associée au diagramme de Ferrers obtenu en supprimant toutes les lettres des cellules du tableau de Young. La taille d'un tableau de Young est la taille de sa forme. L'ensemble des tableaux de Young de forme λ sur l'alphabet A est noté $Tab(\lambda, A)$.*

Définition 1.2.9. *La lecture ligne d'un tableau de Young t est le mot obtenu en lisant les lignes de t de la gauche vers la droite en commençant du haut et*

$$\begin{array}{cccc}
 & & & \vee \\
 & & & \begin{array}{|c|} \hline 6 \\ \hline \end{array} \\
 & & & \begin{array}{|c|} \hline 5 \\ \hline \end{array} \\
 & & & \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 2 & 3 \\ \hline \end{array} \\
 & & & \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 & 2 \\ \hline \end{array} \\
 & & & \leq
 \end{array}$$

FIGURE 1.2.6 : Tableau de Young de forme $(4, 3, 1, 1)$.

en allant vers le bas. La **lecture diagonale** de t est la suite de lettres lues du bas vers le haut sur chaque diagonale D_k , dans l'ordre décroissant des k , en séparant les lettres de chaque diagonale par "/". L'**évaluation** d'un tableau de Young t de taille n est une composition $(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n)$, où π_i est le nombre d'occurrence de la lettre i dans t .

Exemple 1.2.10. La lecture ligne du tableau de Young de la figure 1.2.6 est 652231122, sa lecture diagonale est 6/5/2/12/13/2/2 et son évaluation est $(2, 4, 1, 0, 1, 1)$.

Définition 1.2.11. Soient λ et μ deux partitions de n . Le **nombre de Kostka** $K_{\lambda\mu}$ est le nombre de tableaux de Young de forme λ et d'évaluation μ .

Exemple 1.2.12. Les quatre tableaux de Young associés au nombre de Kostka $K_{(3,2,1)(2,2,1,1)}$ sont

$$\begin{array}{|c|} \hline 4 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 3 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 \\ \hline \end{array} \quad
 \begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 4 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 \\ \hline \end{array} \quad
 \begin{array}{|c|} \hline 4 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 2 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 3 \\ \hline \end{array} \quad
 \begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 2 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 4 \\ \hline \end{array}$$

On n'a pas de formule explicite pour calculer les nombres de Kostka, mais une formule est connue pour $\mu = (1, 1, \dots, 1)$. Dans ce cas on s'intéresse à des tableaux de Young particuliers appelés les **tableaux de Young standard**, qui sont des tableaux de Young de taille n contenant une et une seule fois toutes les lettres entre 1 et n . En d'autres termes, se sont les tableaux de Young ayant pour lecture ligne une permutation (cf. figure 1.2.7). L'ensemble des tableaux de Young standards de forme λ sur l'alphabet A est noté $STab(\lambda, A)$. Pour une partition λ de taille n , le nombre $f_\lambda = K_{\lambda(1,1,\dots,1)}$ de tableaux de Young standards de forme λ est donné par la *formule des équerres* :

$$f_\lambda = \frac{n!}{\prod_{c \in \lambda} h_c}, \tag{1.14}$$

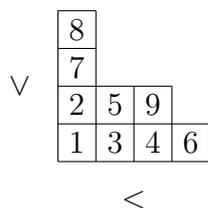


FIGURE 1.2.7 : Tableau de Young standard de forme $(4, 3, 1, 1)$.

où, pour une cellule $c = (i, j)$ du diagramme de Ferrers de λ , l'entier h_c est la *longueur d'équerre* de la cellule c , à savoir le nombre de cellules se trouvant à la droite de c sur la ligne j et au-dessus de c sur la colonne i et la cellule c elle-même (cf. figure 1.2.8). Une démonstration bijective directe de la formule des équerres est donnée dans [NPS+97].

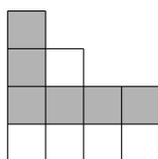
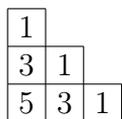
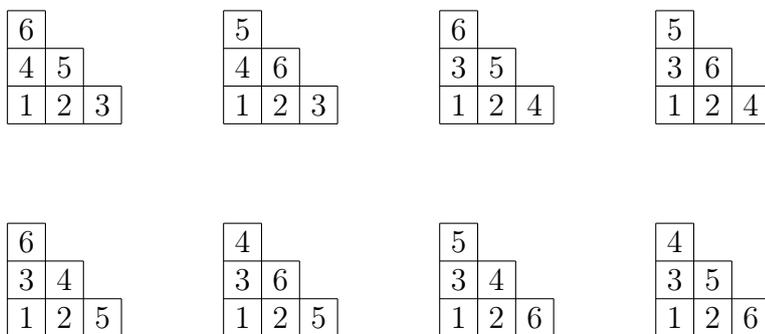


FIGURE 1.2.8 : L'équerre de la case $(1, 2)$ de la partition $(4, 4, 2, 1)$.

Exemple 1.2.13. Pour une partition $\lambda = (3, 2, 1)$, on a les valeurs d'équerres :



et comme $\frac{6!}{1 \times 1 \times 1 \times 3 \times 3 \times 5} = 16$, il y a 16 tableaux de Young standards de forme $(3, 2, 1)$:



6		5		6		4	
2	5	2	6	2	4	2	6
1	3	1	3	1	3	1	3
1	3	4		1	3	5	

5		4		3		3	
2	4	2	5	2	6	2	5
1	3	1	3	1	4	1	4
1	3	6		1	4	5	

Définition 1.2.14. *Étant donné un mot ω , on dit que ω est un **mot-tableau**, noté $\omega(t)$, si ω est la lecture ligne d'un tableau de Young t .*

Il y a donc une bijection entre l'ensemble des tableaux de Young et l'ensemble des mots-tableaux (deux tableaux de Young différents ont deux lectures lignes différentes).

Exemple 1.2.15. Parmi les 81 mots de longueur 4 de l'alphabet $\{1, 2, 3\}$, il y a les 39 mots-tableaux suivants :

1111, 1112, 1113, 1122, 1123, 1133, 1222, 1223, 1233, 1333,
 2111, 2112, 2113, 2122, 2123, 2133, 2211, 2222, 2223, 2233,
 2311, 2312, 2333, 3111, 3112, 3113, 3122, 3123, 3133, 3211,
 3212, 3213, 3222, 3223, 3233, 3311, 3312, 3322, 3333.

Pour passer d'un mot quelconque à un tableau de Young, Schensted [Sch61] a défini un algorithme, qui associe à un mot ω , un tableau de Young appelé le P -symbole de ω noté $P_{sym}(\omega)$. L'étape principale de cet algorithme consiste en l'insertion d'une lettre x dans une ligne du tableau (mot croissant au sens large) $\gamma = a_1 a_2 \cdots a_\ell$. L'insertion de x dans γ notée $P_{sym}(\gamma \leftarrow x)$ est $\gamma \cdot x$ (le point désigne la concaténation) si $x > a_\ell$, et $a_i \cdot \gamma'$ sinon, où a_i est la lettre la plus à gauche dans γ qui est strictement supérieur à x et γ' est la ligne obtenue en remplaçant a_i par x dans γ . Pour insérer une lettre x dans un tableau $t = \gamma_1 \gamma_2 \cdots \gamma_k$, on insère d'abord x dans la première ligne du tableau. Si $\gamma_k x$ n'est pas une ligne, alors $P_{sym}(\gamma_k \leftarrow x) = a \gamma'_k$ et on insère a dans la ligne γ_{k-1} et ainsi de suite. L'algorithme se termine lorsqu'une lettre est insérée à la droite d'une ligne ou bien lorsqu'on insère dans la ligne vide se situant au-dessus de la dernière ligne γ_1 .

Exemple 1.2.16. L'insertion de 1 dans le tableau de Young suivant

1.2 Fonctions symétriques et tableaux

8			
7			
2	5	9	
1	3	4	6

se fait comme suit :

$$P_{sym}(1346 \leftarrow 1) = 3 \cdot 1146$$

$$P_{sym}(259 \leftarrow 3) = 5 \cdot 239$$

$$P_{sym}(7 \leftarrow 5) = 7 \cdot 5$$

$$P_{sym}(8 \leftarrow 7) = 8 \cdot 7$$

ce qui donne

$$P_{sym}(8 \cdot 7 \cdot 259 \cdot 1346 \leftarrow 1) = 8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 239 \cdot 1146.$$

qui correspond au tableau de Young

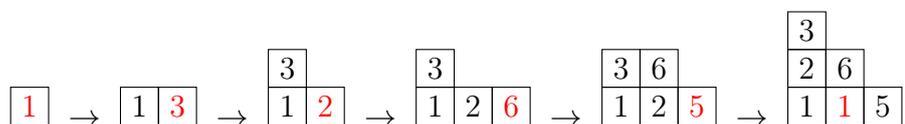
8			
7			
5			
2	3	9	
1	1	4	6

Soit $\omega(t) = \gamma_1 \gamma_2 \cdots \gamma_k$. Plus formellement, l'application $P_{sym}(\omega(t))$ est définie récursivement comme suit :

$$P_{sym}(\omega(t) \leftarrow x) = \begin{cases} \omega(t)x & \text{if } \gamma_k x \text{ est une ligne,} \\ P(\gamma_1 \gamma_2 \cdots \gamma_{k-1} \leftarrow a) \gamma'_k & \text{if } P(\gamma_k x) = a \gamma'_k. \end{cases} \quad (1.15)$$

Pour un tableau t ayant pour lignes $\gamma_1 \gamma_2 \cdots \gamma_k$ et un mot ω dans A^* , on a $P_{sym}(\omega x) = P_{sym}(P_{sym}(\omega)x)$.

Exemple 1.2.17. L'insertion $P_{sym}(132651)$ se fait de la gauche vers la droite comme suit :



Si on applique l'algorithme de Schensted à l'ensemble des mots, on remarque qu'il y a plusieurs mots qui vont donner le même tableau de Young. Knuth [Knu70] a caractérisé les mots qui donnent le même tableau de Young par l'algorithme de Schensted. Il a défini la relation d'équivalence :

$$u \equiv v \quad \text{si et seulement si} \quad P_{sym}(u) = P_{sym}(v),$$

par :

$$\begin{aligned} acb &\equiv cab && \text{avec } a \leq b < c, \\ bac &\equiv bca && \text{avec } a < b \leq c. \end{aligned} \tag{1.16}$$

Exemple 1.2.18. Les permutations suivantes sont équivalentes par les relations de Knuth :

$$35124 \equiv 31524 \equiv 31254 \equiv 13524 \equiv 13254$$

et donnent le tableau de Young suivant par l'algorithme de Schensted :

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 5 \\ \hline 1 & 2 & 4 \\ \hline \end{array}$$

La relation d'équivalence \equiv est compatible avec la concaténation :

$$u_1 \equiv u_2 \text{ et } v_1 \equiv v_2 \Rightarrow u_1 \cdot v_1 \equiv u_2 \cdot v_2 \tag{1.17}$$

Lascoux et Schützenberger [LS81] ont donc introduit le *monoïde plaxique* $Pl(A) := (A^*/\equiv)$, qui est le quotient du monoïde libre A^* par les relations de Knuth. Ils ont démontré que chaque mot ω est congru à son tableau de Young associé t (obtenu en appliquant l'algorithme de Schensted) $P_{sym}(\omega) \equiv t$ et donc à chaque classe plaxique est associée un seul tableau de Young.

Remarque 1.2.19. Les mots qui sont dans la même classe d'équivalence qu'un mot-tableau ω donnent le tableau de Young $P_{sym}(\omega)$ par l'algorithme de Schensted.

Exemple 1.2.20. Les tableaux de Young standards de taille 4 et leurs classes d'équivalences associées sont

$$\begin{array}{|c|} \hline 4 \\ \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline \end{array} \qquad 4123 \equiv 1243 \equiv 1423$$

$$\begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline 1 & 2 & 4 \\ \hline \end{array} \qquad 3124 \equiv 1324 \equiv 1342$$

$$\begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline 1 & 3 & 4 \\ \hline \end{array} \qquad 2134 \equiv 2314 \equiv 2341$$

1.2 Fonctions symétriques et tableaux

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 4 \\ \hline 3 \\ \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array} \quad 4312 \equiv 1432 \equiv 4132$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 4 \\ \hline 2 \\ \hline 1 & 3 \\ \hline \end{array} \quad 4231 \equiv 2431 \equiv 4213$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 3 \\ \hline 2 \\ \hline 1 & 4 \\ \hline \end{array} \quad 3214 \equiv 3241 \equiv 3421$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 4 \\ \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array} \quad 3412 \equiv 3142$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 4 \\ \hline 1 & 3 \\ \hline \end{array} \quad 2413 \equiv 2143$$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline \end{array} \quad 1234$$

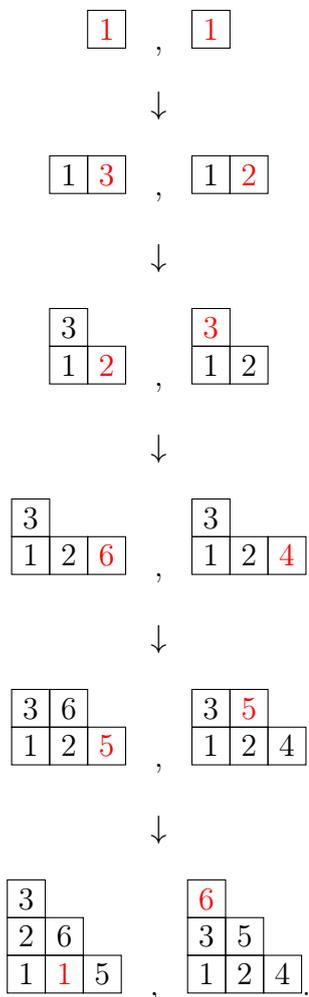
$$\begin{array}{|c|} \hline 4 \\ \hline 3 \\ \hline 2 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array} \quad 4321$$

L'ensemble de tous les tableaux de Young peut donc être vu comme une projection de A^* dans $Pl(A)$. On définit maintenant une application Q_{sym} qui associe à un mot ω dans A^* un tableau de Young standard de même forme que $P_{sym}(\omega)$ obtenu en enregistrant l'ordre dans lequel les cellules de $P(\omega)$ ont été rajoutées. L'application

$$\begin{aligned} \rho : A^* &\longrightarrow \bigcup_{\lambda} Tab(\lambda, A) \times STab(\lambda, A) \\ \omega &\longrightarrow (P_{sym}(\omega), Q_{sym}(\omega)) \end{aligned} \quad (1.18)$$

est une bijection, appelée la *correspondance de Robinson-Schensted-Knuth*.

Exemple 1.2.21. La correspondance de Robinson-Schensted-Knuth appliquée au mot 132651 donne :



L'idée pour retrouver le mot ω associé à la paire de tableaux de Young $(P_{sym}(\omega), Q_{sym}(\omega)) \in Tab(\lambda, A) \times STab(\lambda, A)$ est la suivante : étant données une ligne γ et une lettre y , il existe une ligne unique γ' et une lettre x tel que $y\gamma \equiv \gamma'x$. Donc l'algorithme de Schensted peut être inversé en spécifiant la case à supprimer. On peut alors construire $\omega = \rho^{-1}(P_{sym}(\omega), Q_{sym}(\omega))$ en supprimant successivement de $P_{sym}(\omega)$ les cellules étiquetées par $n, n - 1, \dots, 1$ dans $Q_{sym}(\omega)$. Si on restreint l'ensemble de départ de ρ à l'ensemble des permutations de taille n , on obtient la bijection :

$$\begin{aligned}
 \rho : S_n &\longrightarrow \bigcup_{\lambda} STab(\lambda, A) \times STab(\lambda, A) \\
 \omega &\longrightarrow (P(\omega), Q(\omega))
 \end{aligned} \tag{1.19}$$

Ceci permet en particulier de donner une preuve bijective d'une identité de Frobenius :

$$n! = \sum_{|\lambda|=n} f_\lambda^2 \quad (1.20)$$

où f_λ est le nombre de tableaux de Young standards de forme λ , un cas particulier du fait que la cardinalité d'un groupe fini est égale à la somme des carrés des dimensions de ses représentations irréductibles sur \mathbb{C} .

Le monôme d'un tableau de Young t d'évaluation (π_1, π_2, \dots) est donné par :

$$x^t = x_1^{\pi_1} x_2^{\pi_2} \dots \quad (1.21)$$

Pour toute partition λ , on va définir une autre base des polynômes symétriques en termes de tableaux de Young, à savoir la *fonction de Schur* s_λ qui est définie par :

$$s_\lambda = \sum_{t \in \text{Tab}(\lambda, A)} x^t. \quad (1.22)$$

Exemple 1.2.22. Les monômes associés aux tableaux de Young de forme $(2, 1)$ sur l'alphabet $\{1, 2, 3\}$ sont

$$\begin{array}{cccc} \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array} \\ x_1^2 x_2 & x_1^2 x_3 & x_1 x_2^2 & x_1 x_2 x_3 \\ \\ \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 2 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 3 \\ \hline \end{array} \\ x_1 x_2 x_3 & x_1 x_3^2 & x_2^2 x_3 & x_2 x_3^2 \end{array}$$

et donnent la fonction de Schur sur 3 variables :

$$s_{21}(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 + x_1^2 x_3 + 2x_1 x_2 x_3 + x_2^2 x_3 + x_1 x_3^2 + x_2 x_3^2.$$

1.2.3 Tableaux de Young décalés

Les tableaux de Young décalés ont été introduits indépendamment par Worley [Wor84] et Sagan [Sag87] dans les années 80. Ce sont les analogues décalés des tableaux de Young [Ste89].

Définition 1.2.23. Un *tableau de Young décalé semi-standard* t' (cf. figure 1.2.9) est un remplissage du diagramme de Ferrers décalé d'une partition stricte λ avec des lettres appartenant à un alphabet infini totalement ordonné $A' = \{1' < 1 < 2' < 2 < \dots\}$ tel que :

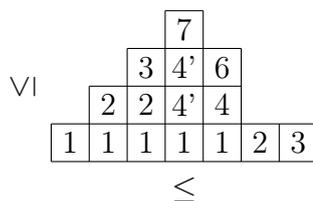


FIGURE 1.2.9 : Tableau de Young décalé semi-standard de forme $(7, 4, 3, 1)$.

- les lettres sont croissantes au sens large sur les lignes de la gauche vers la droite et sur les colonnes du bas vers le haut ;
- une lettre non prime apparaît au plus une fois dans chaque colonne ;
- une lettre prime apparaît au plus une fois dans chaque ligne ;
- une lettre prime n'apparaît jamais sur la diagonale principale D_0 .

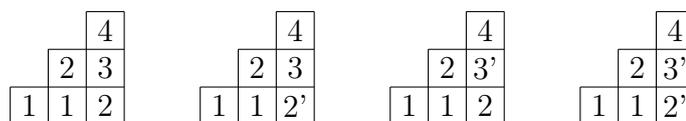
L'ensemble des tableaux de Young décalés de forme λ sur l'alphabet A' est noté $Tab'(\lambda, A')$.

Définition 1.2.24. La **forme** d'un tableau de Young décalé t' notée $sh(t')$ est la partition stricte associée aux longueurs de ses lignes. La **taille** d'un tableau de Young décalé est la taille de sa forme. La **lecture diagonale** d'un tableau de Young décalé t' est définie comme pour les tableaux de Young. L'**évaluation** d'un tableau de Young décalé t' est la composition $(\pi_1 + \pi_{1'}, \pi_2 + \pi_{2'}, \dots)$, où π_i est le nombre d'occurrences de la lettre i dans t' et $\pi_{i'}$ est le nombre d'occurrences de la lettre i' dans t' .

Exemple 1.2.25. La lecture diagonale du tableau de Young décalé de la figure 1.2.9 est $1237/124'/14'6/14/1/2/3$ et son évaluation est $(5, 3, 2, 3, 0, 1, 1)$.

Définition 1.2.26. Soient λ et μ deux partitions de n . Le **nombre de Kostka décalé** $K'_{\lambda\mu}$ est le nombre de tableaux de Young décalés de forme λ et d'évaluation μ .

Exemple 1.2.27. Les quatre tableaux de Young décalés associés au nombre de Kostka décalé $K'_{(3,2,1)(2,2,1,1)}$ sont



1.2 Fonctions symétriques et tableaux

Dans le cas où $\mu = (1, 1, \dots, 1)$, on obtient des tableaux de Young décalés de taille n contenant une et une seule fois toutes les lettres entre 1 et n (une lettre ne peut pas avoir un prime) appelés les *tableaux de Young décalés standard* (cf. figure 1.2.10). Pour une partition λ de taille n , le nombre $f'_\lambda =$

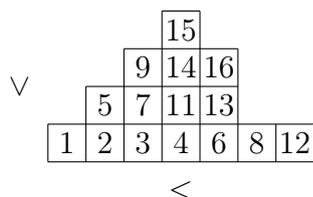


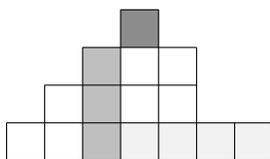
FIGURE 1.2.10 : Tableau de Young décalé standard de forme $(7, 4, 3, 1)$.

$K'_{\lambda(1,1,\dots,1)}$ de tableaux de Young décalés standards de forme λ est donné par la *formule des équerres décalée* :

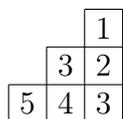
$$f'_\lambda = \frac{n!}{\prod_{c \in \lambda} h'_c}, \quad (1.23)$$

où, pour c une case du diagramme de Young de λ , la *longueur d'équerre décalée* de la case $c = (i, j)$ est donnée par l'entier $h'_c = |\{(i, j') | j' \geq j\} \cup \{(i', j) | i' \geq i\} \cup \{(i+1, i') | i' \geq i+1\}|$.

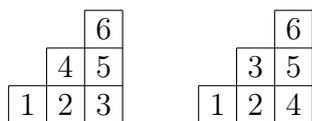
Exemple 1.2.28. L'équerre décalée associée à la cellule $(3, 1)$ de la partition stricte $(7, 4, 3, 1)$ est



Exemple 1.2.29. Pour $\lambda = (3, 2, 1)$ on a les valeurs d'équerres décalées :



il y a donc deux tableaux de Young standards décalés de forme $(3, 2, 1)$:



Haiman [Hai89] a introduit un algorithme appelé *l'insertion mixte décalée*, qui construit une bijection entre les permutations et les couples de tableaux de Young décalés standard. L'insertion mixte décalée peut être vue comme l'analogue décalé de la correspondance de Robinson-Schensted-Knuth (pour les permutations). Serrano [Ser10] a étendu cet algorithme aux mots et a défini l'insertion mixte décalée semi-standard (insertion mixte), qui est une correspondance entre les mots appartenant à un alphabet infini totalement ordonné A et les paires de tableaux de Young décalés (P, Q) , tels que :

- P et Q ont la même forme ;
- P est un tableau de Young décalé ;
- Q est un tableau de Young décalé standard.

Définition 1.2.30. *Étant donné un mot $\omega = \omega_1\omega_2, \dots, \omega_n$ de A^* , la paire de tableaux de Young décalés (P, Q) est construite par l'algorithme d'insertion mixte étape par étape en commençant par la paire de tableaux vides, puis on insère à chaque étape une lettre de ω en le lisant de la gauche vers la droite $(\emptyset, \emptyset) = (P_0, Q_0), (P_1, Q_1), \dots, (P_n, Q_n) = (P, Q)$: on pose $(P_0, Q_0) = (\emptyset, \emptyset)$. Pour $i = 1, 2, \dots, n$, on insère ω_i dans P_{i-1} dans la première ligne du tableau de Young décalé : on substitue ω_i à la plus petite lettre a qui est strictement supérieur à ω_i :*

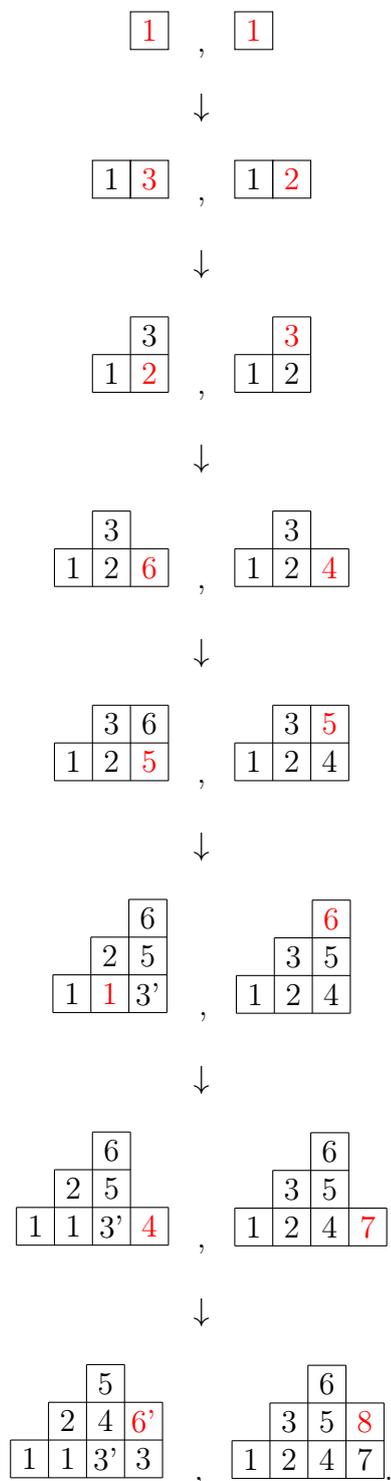
1. *si a n'est pas sur la diagonale principale, alors*
 - *si a est prime, on l'insère dans la colonne de droite suivante : on substitue a à la plus petite lettre dans cette colonne qui est strictement supérieur à a .*
 - *si a n'est pas prime, on l'insère dans la ligne suivante ;*
2. *si a est sur la diagonale principale, alors par définition, la lettre a n'est pas prime. On la marque avec un prime et on l'insère dans la colonne de droite suivante.*

L'algorithme se termine quand une lettre est insérée à la fin d'une ligne ou d'une colonne (sans la substituer à une autre). Le résultat obtenu est le tableau de Young décalé P_i . La forme de P_{i-1} et de P_i diffère d'une case. On rajoute cette case à Q_{i-1} pour obtenir Q_i et on l'étiquette par i .

*On appelle P le **tableau d'insertion mixte** associé à ω et Q le tableau de Young décalé standard qui enregistre l'ordre dans lequel les lettres de ω ont été insérées dans P . On les note respectivement $P_{mix}(\omega)$ et $Q_{mix}(\omega)$.*

1.2 Fonctions symétriques et tableaux

Exemple 1.2.31. L'algorithme d'insertion mixte appliqué au mot $\omega = 13265143$ donne :



Si on applique l'algorithme d'insertion mixte à l'ensemble des mots de A^* , on remarque que comme dans le cas de l'algorithme de Schensted, plusieurs mots vont donner le même tableau de Young décalé P_{mix} . Serrano [Ser10] a caractérisé les mots qui donnent le même tableau de Young décalé par l'algorithme d'insertion mixte. Il a défini la relation d'équivalence :

$$u \equiv' v \text{ si et seulement si } P_{mix}(u) = P_{mix}(v)$$

par :

1. $abdc \equiv' adbc$ avec $a \leq b \leq c < d$,
 2. $acdb \equiv' acbd$ avec $a \leq b < c \leq d$,
 3. $dacb \equiv' adcb$ avec $a \leq b < c < d$,
 4. $badc \equiv' bdac$ avec $a < b \leq c < d$,
 5. $cbda \equiv' cdba$ avec $a < b < c \leq d$,
 6. $dbca \equiv' bdca$ avec $a < b \leq c < d$,
 7. $bcda \equiv' bcad$ avec $a < b \leq c \leq d$,
 8. $cadb \equiv' cdab$ avec $a \leq b < c \leq d$.
- (1.24)

Exemple 1.2.32. Les mots suivants sont équivalents par \equiv' :

$$22111 \equiv' 21211 \equiv' 21121,$$

où nous avons utilisé les règles 8 et 1. Ils donnent donc le même tableau de Young décalé par l'algorithme d'insertion mixte :

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & 2 & & \\ \hline 1 & 1 & 1 & 2' \\ \hline \end{array}.$$

La relation \equiv' est compatible avec la concaténation, *i.e.* :

$$u_1 \equiv' u_2 \text{ et } v_1 \equiv' v_2 \Rightarrow u_1.v_1 \equiv' u_2.v_2.$$

Par conséquent, le tableau d'insertion mixte d'une concaténation de deux mots est uniquement déterminé par leur tableau d'insertion mixte. Serrano a donc défini le *monoïde plaxique décalé* $SPl := A^*/\equiv'$, qui est l'analogue décalé du monoïde plaxique de Lascoux et Schützenberger, comme le quotient du monoïde libre A^* par \equiv' . Il a prouvé que chaque mot ω est congru à son tableau de Young décalé t' associé (obtenu en appliquant l'algorithme d'insertion mixte) $P_{mix}(\omega) \equiv' t'$ et donc à chaque classe plaxique décalée est associée un seul tableau de Young décalé.

Exemple 1.2.33. Pour les permutations de taille 4, les classes d'équivalence et leurs tableaux de Young décalés associés sont

1.2 Fonctions symétriques et tableaux

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline & 4 & \\ \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline \end{array}$$

$$1243 \equiv' 1423$$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline & 4 & \\ \hline 1 & 2' & 3 \\ \hline \end{array}$$

$$2413 \equiv' 2143$$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline & 4 & \\ \hline 1 & 2 & 3' \\ \hline \end{array}$$

$$3412 \equiv' 3142$$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline & 4 & \\ \hline 1 & 2' & 3' \\ \hline \end{array}$$

$$3241 \equiv' 3421$$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline & 3 & \\ \hline 1 & 2 & 4 \\ \hline \end{array}$$

$$1324 \equiv' 1342$$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline & 3 & \\ \hline 1 & 2' & 4 \\ \hline \end{array}$$

$$2314 \equiv' 2341$$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline & 3 & \\ \hline 1 & 2 & 4' \\ \hline \end{array}$$

$$4132 \equiv' 1432$$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline & 3 & \\ \hline 1 & 2' & 4' \\ \hline \end{array}$$

$$4231 \equiv' 2431$$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline \end{array}$$

$$1234$$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2' & 3 & 4 \\ \hline \end{array}$$

$$2134$$

1 2 3' 4	3124
----------------	------

1 2 3 4'	4123
----------------	------

1 2' 3' 4	3214
-----------------	------

1 2' 3 4'	4213
-----------------	------

1 2 3' 4'	4312
-----------------	------

1 2' 3' 4'	4321
------------------	------

Proposition 1.2.34 (Serrano [Ser10]). *L'équivalence plaxique décalée est un raffinement de l'équivalence plaxique : chaque classe plaxique est une union disjointe de classes plaxiques décalées. En d'autres termes, si deux mots sont dans la même classe plaxique décalée, ils sont dans la même classe plaxique.*

Définition 1.2.35. *Soit λ une partition de longueur ℓ vérifiant que sa dernière part est supérieure ou égale au nombre de ses parts. Les tableaux de Young décalés peuvent aussi être définis comme un remplissage de la part haut(λ) par des X et de la part bas(λ) par des lettres dans $\{1' < 1 < 2' < 2 < \dots\}$, avec les mêmes conditions que dans la définition 1.2.23.*

Exemple 1.2.36. Le tableau suivant est équivalent au tableau de Young décalé de la figure 1.2.9 :

X	X	X	7			
X	X	3	4'	6		
X	2	2	4'	4		
1	1	1	1	1	2	3

1.2 Fonctions symétriques et tableaux

Étant donné un tableau de Young décalé t' ayant pour évaluation la composition $(\pi_1 + \pi_{1'}, \pi_2 + \pi_{2'}, \dots)$, son monôme correspondant est donné par :

$$x^{t'} = x_1^{\pi_1 + \pi_{1'}} x_2^{\pi_2 + \pi_{2'}} \dots \quad (1.25)$$

Pour toute partition λ , la *fonction P de Schur* P_λ est définie en termes de tableaux de Young décalés par :

$$P_\lambda = \sum_{Tab'(\lambda, A')} x^{t'}. \quad (1.26)$$

où la somme porte sur tous les tableaux de Young décalés de forme λ sur l'alphabet $A' = \{1' < 1 < 2' < 2 < \dots\}$.

Exemple 1.2.37. Les monômes associés aux tableaux de Young décalés de forme $(2, 1)$ sur l'alphabet $\{1, 2, 3\}$ sont

$$\begin{array}{cccc}
 \begin{array}{|c|c|} \hline & 2 \\ \hline 1 & 1 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline & 2 \\ \hline 1 & 2' \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline & 3 \\ \hline 1 & 1 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline & 3 \\ \hline 1 & 3' \\ \hline \end{array} \\
 x_1^2 x_2 & x_1 x_2^2 & x_1^2 x_3 & x_1 x_3^2 \\
 \\
 \begin{array}{|c|c|} \hline & 3 \\ \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline & 3 \\ \hline 1 & 2' \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline & 3 \\ \hline 2 & 2 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline & 3 \\ \hline 2 & 3' \\ \hline \end{array} \\
 x_1 x_2 x_3 & x_1 x_2 x_3 & x_2^2 x_3 & x_2 x_3^2
 \end{array}$$

et donnent la fonction P de Schur sur trois variables :

$$P_{21}(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 + x_1^2 x_3 + 2x_1 x_2 x_3 + x_2^2 x_3 + x_1 x_3^2 + x_2 x_3^2.$$

Étant donnée une partition λ , la *fonction Q de Schur* est donnée par $Q_\lambda = 2^{\ell(\lambda)} P_\lambda$. C'est la fonction génératrice d'un autre type de tableaux de Young décalés, à savoir, ceux dans lesquels on autorise les lettres primes sur la diagonale principale D_0 .

1.2.4 Tableaux de dominos

Les tableaux de dominos sont une généralisation des tableaux de Young. Ils décrivent un produit de deux fonctions de Schur. Dans ce paragraphe, on présente une bijection due à Stanton et White [SW85] qui relie les tableaux de dominos et les paires de tableaux de Young.

Définition 1.2.38. *Étant donnée une partition pavable λ , un **tableau de dominos** de forme λ est un pavage de λ par des dominos, où les dominos sont étiquetés par des lettres appartenant à l'alphabet infini totalement ordonné $A = \{1 < 2 < \dots\}$, telles que les lettres soient croissantes au sens large sur les lignes de la gauche vers la droite et soient strictement croissantes sur les colonnes du bas vers le haut (cf. figure 1.2.11).*

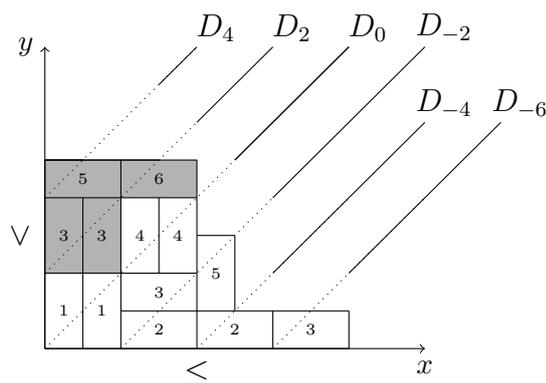


FIGURE 1.2.11 : Tableau de dominos de forme $(8, 5, 5, 4, 4)$ et ses diagonales D_{2k} .

Remarque 1.2.39. Les tableaux de dominos ont les mêmes conditions de croissance que celles des tableaux de Young. Ce sont une généralisation des tableaux de Young, puisque si on considère des tableaux de dominos pavés uniquement avec des dominos verticaux, ou uniquement avec des dominos horizontaux alors ils seront assimilables à des tableaux de Young.

Si on plonge un tableau de dominos dans \mathbb{R}^2 , et que l'on trace les diagonales $D_{2k} = x + 2k$, où k est un entier, on remarque que comme dans le cas des cellules des tableaux de Young, chaque domino du tableau de dominos est coupé par une seule diagonale D_{2k} .

Définition 1.2.40. *La **lecture diagonale** d'un tableau de dominos est la suite lue du bas vers le haut sur chaque diagonale D_{2k} , suivant l'ordre décroissant des k et séparé par des "/" . La **lecture colonne** d'un tableau de dominos T est la suite de lettres obtenue en lisant les lettres sur les colonnes de T du haut vers le bas et de la gauche vers la droite. Les dominos horizontaux, qui appartiennent à deux colonnes successives i et $i + 1$, sont lus une seule fois, quand on lit la colonne i .*

Définition 1.2.41. *On dit qu'un tableau de dominos est un **tableau de dominos de Yamanouchi** si sa lecture colonne est un mot de Yamanouchi.*

Exemple 1.2.42. La lecture diagonale du tableau de dominos de la figure 1.2.11 est $5/336/1144/235/2/3$ et sa lecture colonne est 5313164324523 .

Définition 1.2.43. La diagonale D_0 sépare les dominos d'un tableau de dominos de forme λ en deux parties. La partie $\text{haut}'(\lambda)$ contenant les dominos traversés par les diagonales D_{2k} , où k est un entier positif, et les dominos restants définissent la partie $\text{bas}'(\lambda)$.

Exemple 1.2.44. Dans la figure 1.2.11 on illustre un tableau de dominos de forme $(8, 5, 5, 4, 4)$ traversés par les diagonales D_{2k} , où la partie grisée est $\text{haut}'((8, 5, 5, 4, 4))$ et la partie blanche est $\text{bas}'((8, 5, 5, 4, 4))$.

De la façon dont les dominos sont traversés par D_{2k} , on distingue deux types de dominos, les dominos de type 1 et les dominos de type 2 (cf. figure 1.2.12).

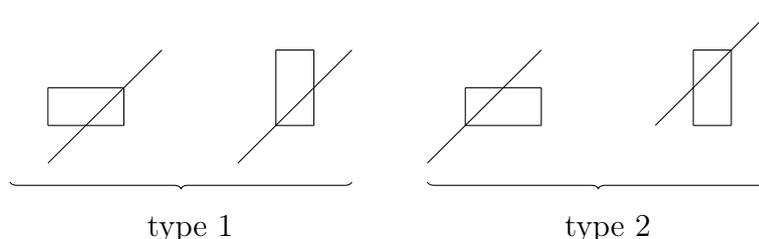


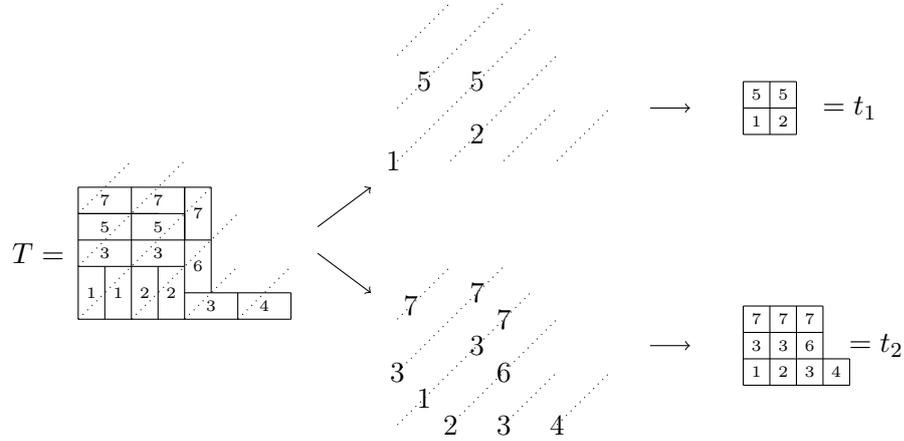
FIGURE 1.2.12 : Dominos de type 1 et dominos de type 2.

Étant donnés deux tableaux de Young t_1 et t_2 de formes respectives μ et ν , on dira par la suite que la paire (t_1, t_2) a la forme (μ, ν) . Dans [SW85], Stanton et White ont prouvé que les tableaux de dominos et les paires de tableaux de Young sont en bijection. Plus précisément,

Théorème 1.2.45 (Stanton et White [SW85]). *Étant donnée une partition pavable λ ayant pour 2-quotient la paire (μ, ν) , l'ensemble des tableaux de dominos de forme λ et l'ensemble des paires de tableaux de Young (t_1, t_2) de forme (μ, ν) sont en bijection.*

Dans [CL95], Carré et Leclerc ont donné une démonstration différente de celle de Stanton et White du théorème 1.2.45 en utilisant les diagonales des tableaux. Ils ont défini un algorithme que l'on note Γ , qui associe à un tableau de domino T de forme λ une paire de tableaux de Young (t_1, t_2) de forme (μ, ν) , où (μ, ν) est le 2-quotient de λ . L'algorithme Γ supprime sur chaque diagonale de T les étiquettes des dominos de type 1 (resp. type 2). La lecture diagonale des étiquettes restantes est la lecture diagonale du tableau

de Young t_1 (resp. t_2). L'algorithme Γ appliqué au tableau de dominos T suivant donne :



On obtient une paire de tableaux de Young (t_1, t_2) de forme $((2, 2), (4, 3, 3))$. L'algorithme inverse de Γ associe à une paire de tableaux de Young (t_1, t_2) de forme (μ, ν) un tableau de dominos T de forme λ . Cet algorithme commence par la paire $(t_1^{(0)}, t_2^{(0)})$ de tableaux de Young de forme $(\mu^{(0)}, \nu^{(0)})$, qui correspond au tableau de dominos $T^{(0)}$ de forme $\lambda^{(0)}$, où $\mu^{(0)}, \nu^{(0)}$ et $\lambda^{(0)}$ sont des partitions vides. Détaillons la i^e étape de cet algorithme : soit $(t_1^{(i_1)}, t_2^{(i_2)})$ une paire de tableaux de Young de forme $(\mu^{(i_1)}, \nu^{(i_2)})$, qui correspond au tableau de dominos $T^{(i)}$ de forme $\lambda^{(i)}$, où i, i_1 et i_2 sont des entiers positifs. Soit u la plus petite lettre dans (t_1, t_2) qui n'a pas encore été sélectionnée. L'algorithme consiste à coller toutes les cellules de (t_1, t_2) contenant l'entier u à $(t_1^{(i_1)}, t_2^{(i_2)})$, en respectant les mêmes positions des cellules. Cette opération nous donne une nouvelle paire $(t_1^{(i_1+1)}, t_2^{(i_2+1)})$ de tableaux de Young de forme $(\mu^{(i_1+1)}, \nu^{(i_2+1)})$. Pour construire le tableau de dominos $T^{(i+1)}$ de forme $\lambda^{(i+1)}$, on colle un domino de type 1 (resp. type 2) au tableau de domino $T^{(i)}$ sur la diagonale correspondante D_{2k} pour chaque cellule sur D_k contenant u dans $t_1^{(i_1+1)}$ (resp. $t_2^{(i_2+1)}$), tel que $-\max(\mu_1^{(i_1+1)}, \nu_1^{(i_2+1)}) \leq k \leq \max(\ell_{\mu^{(i_1+1)}}, \ell_{\nu^{(i_2+1)}})$, où $\ell_{\mu^{(i_1+1)}}$ et $\ell_{\nu^{(i_2+1)}}$ sont respectivement les longueurs de $\mu^{(i_1+1)}$ et $\nu^{(i_2+1)}$. L'algorithme inverse de Γ appliqué à la paire de tableaux (t_1, t_2) précédente donne :

$$\left(\begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 & 2 \\ \hline \end{array}$$

1.2 Fonctions symétriques et tableaux

$$\left(\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 3 & \\ \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 3 & & 3 & & \\ \hline 1 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ \hline \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 3 & 3 & & \\ \hline 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 3 & & 3 & & & \\ \hline 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 4 \\ \hline \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{|c|c|} \hline 5 & 5 \\ \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 3 & 3 & & \\ \hline 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 5 & & 5 & & & \\ \hline 3 & & 3 & & & \\ \hline 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 4 \\ \hline \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{|c|c|} \hline 5 & 5 \\ \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 3 & 3 & 6 & \\ \hline 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 5 & & 5 & & & \\ \hline 3 & & 3 & & 6 & \\ \hline 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 4 \\ \hline \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{|c|c|} \hline 5 & 5 \\ \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 7 & 7 & 7 & \\ \hline 3 & 3 & 6 & \\ \hline 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 7 & & 7 & & & \\ \hline 5 & & 5 & & 7 & \\ \hline 3 & & 3 & & 6 & \\ \hline 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 4 \\ \hline \end{array}$$

Le théorème 1.2.45 est formulé en termes de fonctions symétriques comme suit :

Théorème 1.2.46 (Carré et Leclerc [CL95]). *Soit λ une partition qui a pour 2-quotient la paire (μ, ν) . Alors on a :*

$$\sum_{T, sh(T)=\lambda} x^T = s_\mu s_\nu \tag{1.27}$$

où la somme porte sur tous les tableaux de dominos T de forme λ .

Soit λ et θ deux partitions. On définit $K_{\lambda\theta}^{(2)}$ comme le nombre de tableaux de dominos de forme λ et d'évaluation θ . La somme de l'équation (1.27) est une fonction symétrique en les variables (x_1, x_2, \dots) et son développement dans la base des fonctions monomiales est :

Corollaire 1.2.47 (Carré et Leclerc [CL95]). *Étant données deux partitions λ et θ , alors :*

$$\sum_{T, sh(T)=\lambda} x^T = \sum_{\theta} K_{\lambda\theta}^{(2)} m_{\theta} \quad (1.28)$$

où la première somme porte sur tous les tableaux de dominos T de forme λ et la deuxième somme porte sur toutes les partitions θ . Les nombres $K_{\lambda\theta}^{(2)}$ sont des analogues des nombres de Kostka.

D'un point de vue algébrique, on considère le monoïde obtenu par le produit direct de deux monoïdes plaxiques sur deux alphabets infinis totalement ordonnés $A_1 := \{a_1^1 < a_2^1 < a_3^1 < \dots\}$ et $A_2 := \{a_1^2 < a_2^2 < a_3^2 < \dots\}$. Ce monoïde est le quotient du monoïde libre $(A_1 \cup A_2)^*$ par les relations :

$$\begin{aligned} a_j^1 a_i^1 a_k^1 &\equiv a_j^1 a_k^1 a_i^1 \text{ et } a_j^2 a_i^2 a_k^2 \equiv a_j^2 a_k^2 a_i^2 \text{ pour } i < j < k, \\ a_i^1 a_k^1 a_j^1 &\equiv a_k^1 a_i^1 a_j^1 \text{ et } a_i^2 a_k^2 a_j^2 \equiv a_k^2 a_i^2 a_j^2 \text{ pour } i < j < k, \\ a_j^1 a_j^1 a_i^1 &\equiv a_j^1 a_i^1 a_j^1 \text{ et } a_j^2 a_j^2 a_i^2 \equiv a_j^2 a_i^2 a_j^2 \text{ pour } i < j, \\ a_j^1 a_i^1 a_i^1 &\equiv a_i^1 a_j^1 a_i^1 \text{ et } a_j^2 a_i^2 a_i^2 \equiv a_i^2 a_j^2 a_i^2 \text{ pour } i < j, \\ a_i^1 a_j^2 &\equiv a_j^2 a_i^1 \text{ pour tous entiers postifs } i \text{ et } j. \end{aligned} \quad (1.29)$$

Les 8 premières relations sont les relations plaxiques de Lascoux et Schützenberger, et la dernière relation nous permet d'échanger deux lettres adjacentes appartenant à deux alphabets différents. On appelle ce monoïde le *super monoïde plaxique* et on le note $SPI(A_1 \cup A_2)$. Le théorème 1.2.45 montre que les éléments de ce monoïde peuvent être vu comme des tableaux de dominos. Le tableau de dominos de la figure 1.2.11 représente entre autres les éléments de $SPI(A_1 \cup A_2)$:

$$a_5^2 a_3^1 a_1^1 a_3^2 a_1^2 a_6^2 a_4^1 a_3^1 a_2^2 a_4^2 a_5^2 a_2^2 a_3^2 \equiv a_3^1 a_1^1 a_4^1 a_3^2 a_5^2 a_3^2 a_1^2 a_6^2 a_2^2 a_4^2 a_5^2 a_2^2 a_3^2.$$

La règle de Littlewood-Richardson est un algorithme combinatoire qui permet de calculer le produit de deux fonctions de Schur

$$s_{\mu} s_{\nu} = \sum_{\lambda} c_{\mu\nu}^{\lambda} s_{\lambda}, \quad (1.30)$$

où les coefficients $c_{\mu\nu}^{\lambda}$ sont des entiers positifs et μ, ν et λ sont des partitions. Une interprétation combinatoire de ces nombres a été donnée par Littlewood et Richardson. Puis, Lascoux et Schützenberger ont donné une démonstration complète de cette règle en utilisant le monoïde plaxique [LS81]. Carré et Leclerc ont donné dans [CL95], une nouvelle interprétation des coefficients de la règle de Littlewood-Richardson en termes de tableaux de dominos.

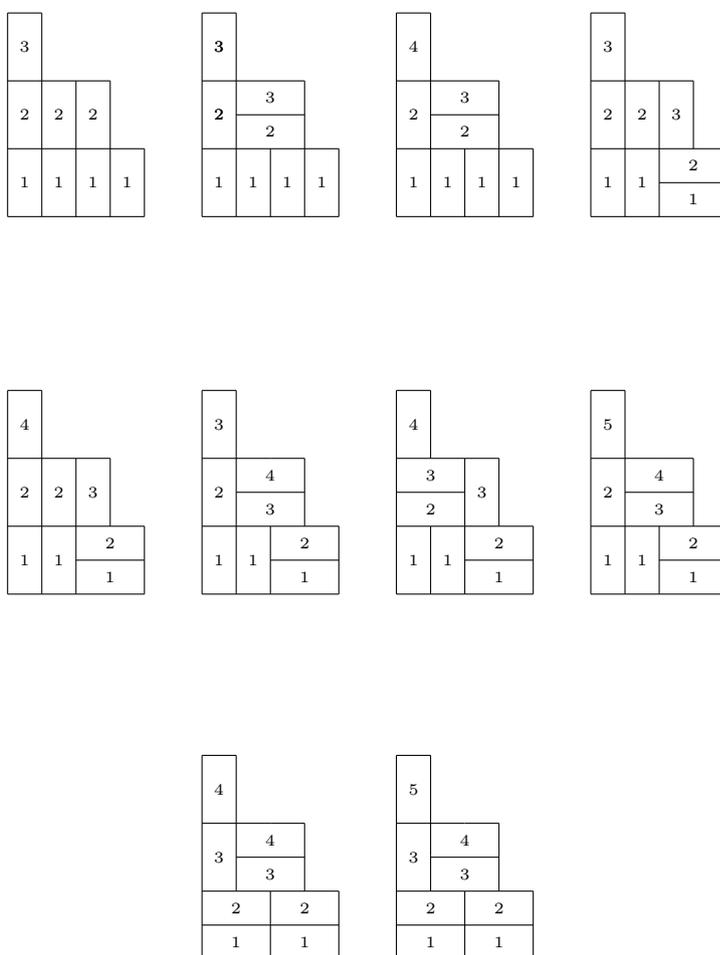
1.2 Fonctions symétriques et tableaux

Corollaire 1.2.48 (Carré et Leclerc [CL95]). *Soient μ et ν deux partitions et soit λ la partition qui a pour 2-quotient la paire (μ, ν) . Pour toute partition γ*

$$s_\mu s_\nu = \sum_{\gamma} c_{\mu\nu}^{\gamma} s_{\gamma}, \quad (1.31)$$

où la multiplicité $c_{\mu\nu}^{\gamma}$ est égale au nombre de tableaux de dominos de Yamanouchi de forme λ et d'évaluation γ .

Exemple 1.2.49. On choisit $\mu = (2, 2, 1)$ et $\nu = (2, 1)$. Dans ce cas $\lambda = (4, 4, 3, 3, 1, 1)$ et il y a 10 tableaux de dominos de Yamanouchi de forme λ :



desquels on déduit que :

$$s_{221} s_{21} = s_{431} + s_{422} + s_{4211} + s_{332} + s_{3311} + 2s_{3221} + s_{32111} + s_{2222} + s_{22211}.$$

1.3 Unimodalité des lignes du triangle eulérien

1.3.1 Suites unimodales et log-concaves

Les suites log-concaves et unimodales apparaissent souvent en combinatoire [Sta89], en algèbre, en informatique, et aussi en probabilités et statistiques où ces concepts ont été introduits initialement.

Définition 1.3.1. Soit n un entier positif. Une suite finie $(a_k)_{0 \leq k \leq n}$ de nombres réels est **unimodale** s'il existe au plus un entier $0 \leq j \leq n$ tel que $a_0 \leq \dots \leq a_j \geq a_{j+1} \geq \dots \geq a_n$.

Définition 1.3.2. Soit n un entier positif. Une suite finie $(a_k)_{0 \leq k \leq n}$ de nombres réels est **logarithmiquement concave** (log-concave) si $a_j^2 \geq a_{j+1}a_{j-1}$, pour tout entier j entre 1 et n . Une suite log-concave est unimodale [Wil].

Remarque 1.3.3. Une suite log-concave $(a_k)_{0 \leq k \leq n}$ est unimodale puisque si elle ne l'est pas, alors elle a trois valeurs consécutives qui vérifient $a_{i-1} > a_i < a_{i+1}$, ce qui contredit la définition de la log-concavité.

Remarque 1.3.4. Les définitions et les propriétés ci-dessus restent valables si on considère des suites infinies.

1.3.2 Nombres et polynômes eulériens

Définition 1.3.5. Soient n et k deux entiers positifs. Les **nombres eulériens** $E(n, k)$ comptent le nombre de permutations de taille n ayant k descentes.

Exemple 1.3.6. Pour tout $1 \leq n \leq 3$ et $1 \leq k \leq n - 1$, les nombres eulériens $E(n, k)$ correspondent aux permutations :

$$\begin{aligned} E(1, 0) &= 1 \longrightarrow \{1\} \\ E(2, 0) &= 1 \longrightarrow \{12\} \\ E(2, 1) &= 1 \longrightarrow \{21\} \\ E(3, 0) &= 1 \longrightarrow \{123\} \\ E(3, 1) &= 4 \longrightarrow \{132, 213, 231, 312\} \\ E(3, 2) &= 1 \longrightarrow \{321\} \end{aligned}$$

Les nombres eulériens vérifient la relation de récurrence :

$$E(n, k) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = k = 0, \\ (k + 1)E(n - 1, k) + (n - k)E(n - 1, k - 1) & \text{si } 0 \leq k < n, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (1.32)$$

1.3 Unimodalité des lignes du triangle eulérien

En effet, d'une permutation σ de taille $n-1$ ayant k descentes, on obtient une permutation de taille n ayant k descentes, en plaçant n à la fin de σ ou entre deux lettres formant l'une des k descentes de σ . Il y a donc $k+1$ façons de placer n . D'une permutation σ de taille $n-1$ ayant $k-1$ descentes, on obtient une permutation de taille n ayant k descentes en mettant n au début de σ ou entre toutes les entrées consécutives qui forment une montée de σ afin de créer une nouvelle descente, on a alors $n-k$ façons pour le faire. Soit γ une permutation de taille n ayant k descentes. En supprimant n de γ , on obtient soit une permutation de taille $n-1$ ayant $k-1$ descentes si n se trouve entre deux entiers qui forment une montée, soit une permutation de taille $n-1$ ayant k descentes si n se trouve entre deux entiers qui forment une descente.

Définition 1.3.7. *Pour tous les entiers positifs ou nuls n , le polynôme :*

$$E_n(x) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} x^{|\text{Des}(\sigma)|} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} x^{|\text{Exc}(\sigma)|} = \sum_{k=1}^n E(n, k)x^k \quad (1.33)$$

est appelé le n^e polynôme eulérien.

La fonction génératrice exponentielle des nombres eulériens est donnée par

$$\sum_{n \geq 0} E_n(x) \frac{z^n}{n!} = \frac{1-x}{e^{z(x-1)} - x} \quad (1.34)$$

où $E_0(x) = 1$. Cette fonction génératrice est attribuée à Euler dans [Knu99].

Définition 1.3.8. *Le triangle eulérien est une disposition des coefficients des polynômes eulériens en triangle (cf. table 1.3.1).*

Les polynômes eulériens ont plusieurs propriétés intéressantes qui peuvent être prouvées par des méthodes purement combinatoires. La somme des entiers sur la n^e ligne du triangle eulérien est $n!$ (le nombre de permutations de taille n). Chaque ligne du triangle est palindromique et symétrique (*i.e.*, pour un entier n strictement positif et pour tout $0 \leq k < n$, on a $E(n, k) = E(n, n-k-1)$). Une autre propriété connue est que les lignes du triangle eulérien sont unimodales.

Définition 1.3.9. *La suite associée à une direction (r, q) dans le triangle eulérien est la suite des nombres eulériens $(E(n-qk, rk))_{0 \leq k \leq n}$, où r est un entier positif et q un entier, tel que $r+q$ est positif.*

Exemple 1.3.10. Les suites associées à la direction $(1, 2)$ sont illustrées dans la table 1.3.2.

$n \setminus k$	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1						
2	1	1					
3	1	4	1				
4	1	11	11	1			
5	1	26	66	26	1		
6	1	57	302	302	57	1	
7	1	120	1191	2416	1191	120	1

TABLE 1.3.1 : Le triangle eulérien, où n la taille de la permutation et k le nombre de descentes.

$n \setminus k$	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1						
2	1	1					
3	1	4	1				
4	1	11	11	1			
5	1	26	66	26	1		
6	1	57	302	302	57	1	
7	1	120	1191	2416	1191	120	1

TABLE 1.3.2 : Les suites associées à la direction $(1, 2)$ dans le triangle eulérien.

1.3.3 Unimodalité des lignes du triangle eulérien

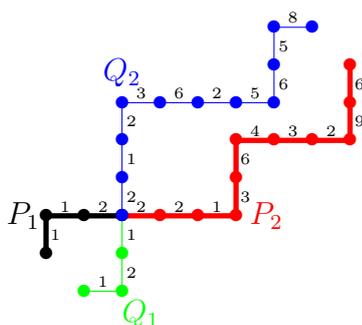
Théorème 1.3.11. *Pour $n \geq 0$, la suite de nombres eulériens $(E(n, k))_{0 \leq k < n}$ est log-concave et donc unimodale.*

Le théorème 1.3.11 est une conséquence d'un résultat d'analyse plus fort qui trouve ses racines chez Newton et qui est relié aux polynômes à racines réelles [Com74]. En 1998, Gasharov a donné une démonstration combinatoire de l'unimodalité des lignes du triangle eulérien en utilisant la bijection entre ses chemins nord-est étiquetés (*cf.* définition 1.1.40) et les permutations (bijection vue dans le paragraphe 1.1). Avant de voir la démonstration de Gasharov, on présente d'abord quelques lemmes que l'on a déduit de [Gas98].

1.3 Unimodalité des lignes du triangle eulérien

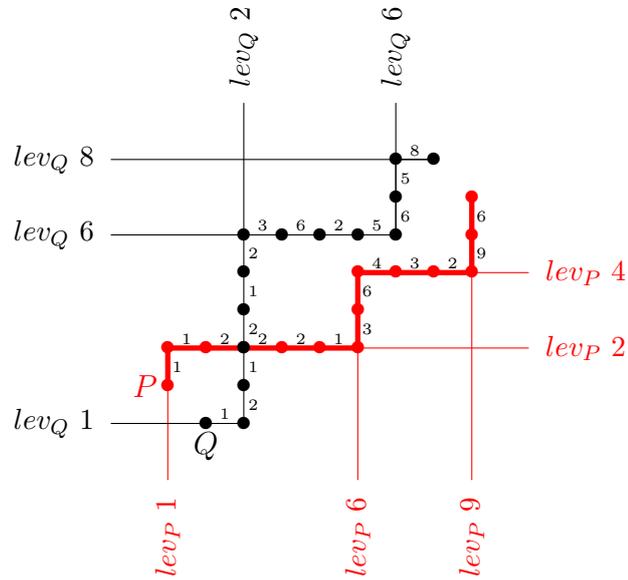
Lemme 1.3.12 (Gasharov [Gas98]). *Soit (P, Q) une paire de chemins nord-est étiquetés de Gasharov de $\mathcal{P}(n, k - 1) \times \mathcal{P}(n, k + 1)$. On place le point initial de P et Q respectivement aux positions $(0, 0)$ et $(1, -1)$. Alors, P et Q s'intersectent. Leur dernier point d'intersection (les points d'intersection sont ordonnés du sud-ouest au nord-est), décompose P et Q respectivement en $P_1 \cup P_2$ et $Q_1 \cup Q_2$.*

Exemple 1.3.13. Soient (P, Q) une paire de chemins nord-est étiquetés de Gasharov de $\mathcal{P}(13, 5) \times \mathcal{P}(13, 7)$. Par le lemme 1.3.12 on obtient :

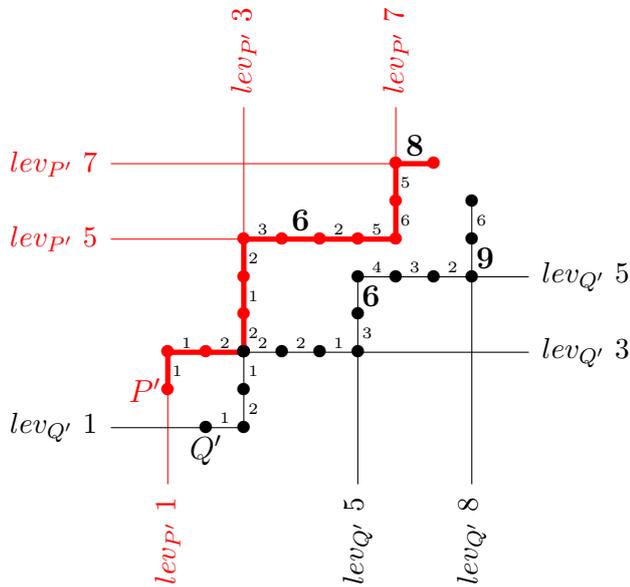


Lemme 1.3.14 (Gasharov [Gas98]). *Soient les chemins nord-est $P' = P_1 \cup Q_2$ et $Q' = Q_1 \cup P_2$, où P_1, P_2, Q_1 et Q_2 sont définis comme dans le lemme 1.3.12. Soient H_1, H_2, \dots, H_{s+1} les pas horizontaux de P_2 et G_1, G_2, \dots, G_s les pas horizontaux de Q_2 . Alors, $lev_{Q'}(H_i) = lev_P(H_i) + 1$ et $lev_{P'}(G_i) = lev_Q(G_i) - 1$.*

On observe que si (P, Q) est une paire de chemins nord-est étiquetés de Gasharov de $\mathcal{P}(n, k - 1) \times \mathcal{P}(n, k + 1)$, en utilisant le lemme 1.3.14, les chemins étiquetés P' et Q' ne sont pas nécessairement des chemins nord-est étiquetés de Gasharov. En effet, pour la paire de chemins nord-est étiquetés de Gasharov suivante, les étiquettes en gras ne sont plus supérieures à leurs niveaux respectifs :



↓ lemme 1.3.14



Gasharov a défini un ré-étiquetage de P' et Q' afin de les transformer en chemins nord-est étiquetés de Gasharov.

Lemme 1.3.15 (Gasharov [Gas98]). *En reprenant les notations du lemme 1.3.14, soient l_i l'étiquette du pas horizontal H_i de P et m_i l'étiquette du pas horizontal G_i de Q , où $1 \leq i \leq s$. On ré-étiquette les pas horizontaux H_i et G_i*

1.3 Unimodalité des lignes du triangle eulérien

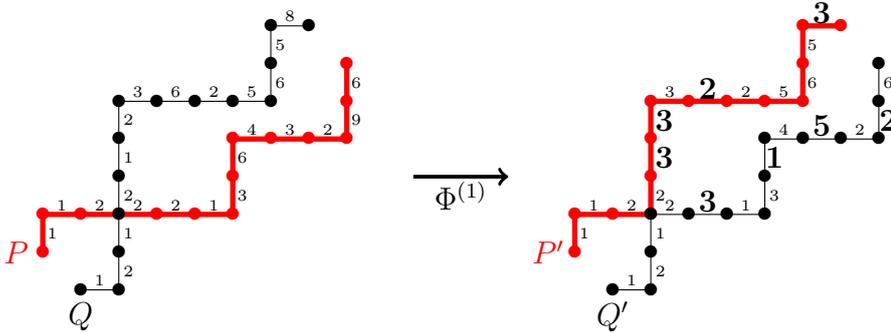
de Q' et P' respectivement par l'_i et m'_i , où :

$$(l'_i, m'_i) = \begin{cases} (l_i, m_i) & \text{si } m_i < \text{lev}_Q(G_i), \\ (\text{lev}_{Q'}(H_i), l_i) & \text{si } m_i = \text{lev}_Q(G_i), \end{cases} \quad (1.35)$$

et on ne change pas les étiquettes des pas horizontaux restants. Concernant les pas verticaux, on les ré-étiquette de la même manière en les voyant comme les pas horizontaux des chemins nord-est étiquetés de Gasharov symétriques de P et Q par rapport à la diagonale $(1, 1)$. Alors, la paire (P', Q') de chemins nord-est étiquetés de Gasharov obtenue est dans l'ensemble $\mathcal{P}(n, k) \times \mathcal{P}(n, k)$.

Étant donnée une paire (P, Q) de chemins nord-est étiquetés de Gasharov de $\mathcal{P}(n, k-1) \times \mathcal{P}(n, k+1)$, on définit une application $\Phi^{(1)} : \mathcal{P}(n, k-1) \times \mathcal{P}(n, k+1) \rightarrow \mathcal{P}(n, k) \times \mathcal{P}(n, k)$, telle que $\Phi^{(1)}(P, Q) = (P', Q')$, où la paire (P', Q') est obtenue en utilisant les lemmes 1.3.14 et 1.3.15.

Exemple 1.3.16. Pour la paire de chemins nord-est étiquetés suivante, les chemins nord-est étiquetés de Gasharov obtenus en utilisant $\Phi^{(1)}$ sont



Afin de prouver combinatoirement que les lignes du triangle eulérien sont log-concaves, Gasharov a démontré que pour tout $n \geq 1$ et $0 \leq k < n$, l'application $\Phi^{(1)}$ est injective.

Démonstration. (Théorème 1.3.11) Soit \mathcal{U} le sous-ensemble des paires (P', Q') de $\mathcal{P}(n, k) \times \mathcal{P}(n, k)$ qui vérifient les conditions suivantes : placer le point initial de P' et Q' respectivement en positions $(0, 0)$ et $(1, -1)$ (le point final de P' et Q' est $(n - k, k)$ et $(n - k + 1, k - 1)$) respectivement. Alors

1. les chemins P' et Q' s'intersectent, et leur dernier point d'intersection (les points d'intersections sont ordonnés du sud-ouest au nord-est) les décomposent respectivement en $P'_1 \cup P'_2$ et $Q'_1 \cup Q'_2$.

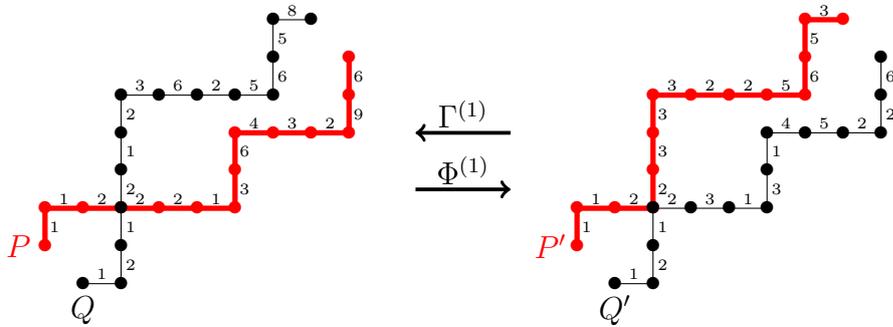
2. soient H_1, H_2, \dots, H_{s+1} les pas horizontaux de Q'_2 étiquetés respectivement par l'_1, \dots, l'_{s+1} et G_1, G_2, \dots, G_s les pas horizontaux de P'_2 étiquetés respectivement par m'_1, \dots, m'_s . Alors, l'étiquette $l'_{s+1} < lev_{Q'}(H_{s+1})$ et pour $1 \leq i \leq s$, on a $l'_i < lev_{Q'}(H_i)$, ou bien $l'_i = lev_{Q'}(H_i)$ et $m'_i < lev_{Q'}(H_i)$;
3. les conditions précédentes restent valables pour les chemins nord-est étiquetés de Gasharov symétriques de P' et Q' par rapport à la diagonale $(1, 1)$.

Par le lemme 1.3.14 et 1.3.15, on a $\Phi^{(1)}(\mathcal{P}(n, k-1) \times \mathcal{P}(n, k+1)) \subseteq \mathcal{U}$. Pour prouver que $\Phi^{(1)}$ est injective, on doit démontrer que $\Phi^{(1)}$ est une bijection entre $\mathcal{P}(n, k-1) \times \mathcal{P}(n, k+1)$ et \mathcal{U} . On définit l'application $\Gamma^{(1)} : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{P}(n, k-1) \times \mathcal{P}(n, k+1)$ comme suit : soient $(P', Q') \in \mathcal{U}$, $P = P'_1 \cup Q'_2$ et $Q = Q'_1 \cup P'_2$. Alors H_1, H_2, \dots, H_{s+1} sont les pas horizontaux de Q'_2 et G_1, G_2, \dots, G_s sont les pas horizontaux de P'_2 . L'étiquette H_{s+1} ne change pas, et pour $1 \leq i \leq s$, on ré-étiquette H_i et G_i comme pas horizontaux dans $P = P'_1 \cup P'_2$ et $Q = Q'_1 \cup Q'_2$ respectivement par l_i et m_i , où :

$$(l_i, m_i) = \begin{cases} (l'_i, m'_i) & \text{si } l'_i < lev_{Q'}(H_i), \\ (m'_i, lev_{P'}(G_i) + 1) & \text{si } l'_i = lev_{Q'}(H_i), \end{cases} \quad (1.36)$$

et on ré-étiquette les pas verticaux en les voyant comme les pas horizontaux des chemins nord-est étiquetés de Gasharov symétriques à P' et Q' par rapport à la diagonale $(1, 1)$. Il s'en suit que $P \in \mathcal{P}(n, k-1)$ et $Q \in \mathcal{P}(n, k+1)$. Alors $\Gamma^{(1)}\Phi^{(1)}(P, Q) = (P, Q)$ et $\Phi^{(1)}\Gamma^{(1)}(P', Q') = (P', Q')$ pour toute paire de chemins dans $(P, Q) \in \mathcal{P}(n, k-1) \times \mathcal{P}(n, k+1)$ et $(P', Q') \in \mathcal{U}$. Donc $\Phi^{(1)}$ est injective. \square

Exemple 1.3.17. Les applications $\Phi^{(1)}$ et $\Gamma^{(1)}$ appliquées à deux chemins nord-est étiquetés :



1.3 Unimodalité des lignes du triangle eulérien

En se basant sur le travail de Gasharov, Bóna et Ehrenborg [BE99][Bón12] ont donné en 1999 une autre démonstration combinatoire du théorème 1.3.11 en utilisant une bijection entre les permutations et leurs chemins nord-est étiquetés (cf. définition 1.1.44).

Démonstration. (Théorème 1.3.11) On construit une application injective :

$$\phi' : (P, Q) \in \mathcal{B}(n+1, k-1) \times \mathcal{B}(n+1, k+1) \rightarrow \mathcal{B}(n+1, k) \times \mathcal{B}(n+1, k). \quad (1.37)$$

L'application ϕ' va être définie différemment sur deux parties du domaine. Soit (P, Q) une paire de chemins nord-est étiquetés de Bóna et Ehrenborg dans $\mathcal{B}(n, k-1) \times \mathcal{B}(n, k+1)$. On place le point initial de P et Q respectivement en positions $(0, 0)$ et $(1, -1)$. Alors, P et Q s'intersectent. Leur premier point d'intersection X (les points d'intersections sont ordonnés du sud-ouest au nord-est), décompose P et Q respectivement en $P_1 \cup P_2$ et $Q_1 \cup Q_2$. Soient a, b, c, d les étiquettes des quatre pas adjacents à X (cf. figure 1.3.13). Par

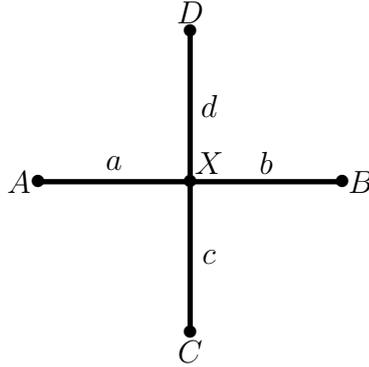


FIGURE 1.3.13 : Étiquettes autour du point X .

définition des chemins nord-est de Bóna et Ehrenborg, on a $a \geq b$ et $c \geq d$. Il est possible que ces quatre pas ne soient pas tous distincts. Les points A et C sont toujours distincts puisque X est le premier point d'intersection de P et Q , mais il se peut que le point $B = D$ et donc le pas $BX = DX$. Ce cas particulier peut être traité de façon similaire au cas que l'on va décrire ci-dessous et il ne sera donc pas présenté ici. Soient $P' = P_1 \cup Q_2$ et $Q' = Q_1 \cup P_2$:

- si P' et Q' sont des chemins nord-est étiquetés de Bóna et Ehrenborg, alors, on pose $\phi'(P, Q) = (P', Q')$. De cette façon on définit ϕ' pour les paires (P, Q) de $\mathcal{B}(n+1, k) \times \mathcal{B}(n+1, k)$ dans lesquels $a + d \leq i$ et $b + c \leq i$ (puisque P' et Q' sont des chemins nord-est étiquetés

de Bóna et Ehrenborg), où i est la position du pas XD dans et XB . On fait remarquer ici que l'on n'a pas changé les étiquettes de P et Q pour obtenir (P', Q') , donc, dans (P', Q') on a toujours $a \geq b$ et $c \geq d$, mais cette condition n'est plus nécessaire dans (P', Q') (puisque ces étiquettes n'appartiennent plus au même chemin). Alors, la paire $\phi'(P, Q) = (P', Q')$ appartient à un sous-ensemble de $\mathcal{B}(n+1, k) \times \mathcal{B}(n+1, k)$, donc ϕ' est injective dans cette partie du domaine.

- si P' et Q' ne sont pas des chemins nord-est étiquetés de Bóna et Ehrenborg (soit $a + d > i$ ou bien $b + c > i$). Dans ce cas, on change l'étiquette du pas AX en $i - c$ et celle du pas CX en $i - a$ (cf. figure 1.3.14). Les chemins que l'on obtient après ce ré-étiquetage sont

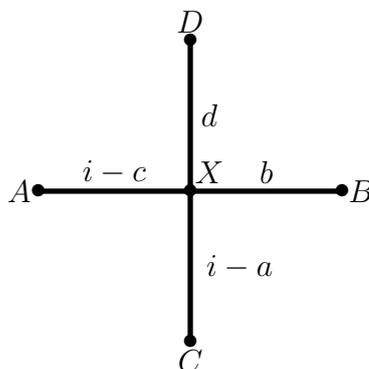


FIGURE 1.3.14 : Nouvelles étiquettes autour du point X .

des chemins nord-est étiquetés de Bóna et Ehrenborg. En effet, on a au moins $a + d > i$ ou $b + c > i$, alors on doit avoir $a + c > i$ puisque $a \geq b$ et $c \geq d$. Donc $i - a < c$ et $i - c < a$. On a alors diminué les valeurs des étiquettes de AX et de CX et ceci est toujours possible d'après la proposition 1.1.46. De plus, aucune contrainte n'a été violée sur les autres pas de P' et Q' qui sont adjacents à X puisque $i - c + d \leq i$ et $i - a + b \leq i$. Donc, ϕ' est aussi injective dans cette partie du domaine. Enfin, on a besoin de démontrer que l'image de cette partie du domaine est disjointe par rapport à la partie précédente. Ceci est vrai puisque dans cette partie du domaine on a au moins $i - c < b$ ou bien $i - a < d$, alors dans l'image, au moins une des paires de pas (AX, XB) ou bien (CX, XD) ne vérifie pas la propriété que l'étiquette du premier pas est au moins supérieure à l'étiquette du deuxième pas, alors que tous les éléments de l'image dans l'autre partie du domaine ont cette propriété.

1.3 Unimodalité des lignes du triangle eulérien

L'application ϕ' que l'on vient de créer est alors injective (*cf.* figure 1.3.15).

□

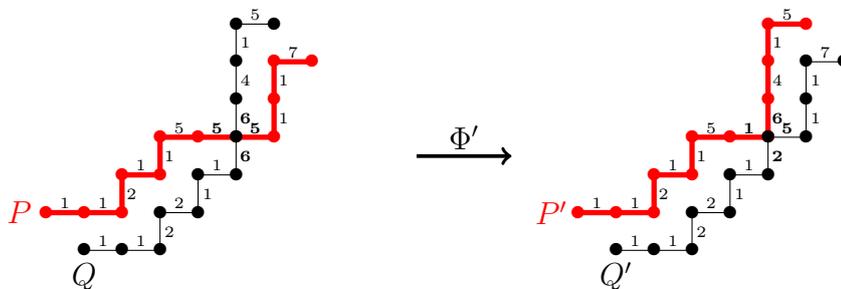


FIGURE 1.3.15 : Application de ϕ' à une paire de chemins nord-est étiquetés de Bóna et Ehrenborg.

Chapitre 2

Tableaux de dominos décalés

En 1995, Carré et Leclerc [CL95], comme on l'a vu dans le premier chapitre, ont étudié une bijection due à Stanton et White [SW85] entre les tableaux de dominos et les paires de tableaux de Young. Ils ont décrit plus simplement cette bijection en utilisant les diagonales des tableaux. Ceci leur a permis d'étendre le monoïde plaxique de Lascoux et Schützenberger aux dominos et de définir le super monoïde plaxique. Ils ont démontré que chaque classe du super monoïde plaxique est représentée par un unique tableau de dominos, et ont aussi proposé une nouvelle description des coefficients de la règle de Littlewood-Richardson en termes de tableaux de dominos.

Dans ce chapitre, nous définissons dans le paragraphe 2.1 les *tableaux de dominos décalés*. Dans le paragraphe 2.2, nous présentons une bijection analogue à celle de Stanton et White, entre les tableaux de dominos décalés et les paires de tableaux de Young décalés et les conséquences de cette bijection. Dans le paragraphe 2.3, nous étendons le monoïde plaxique décalé de Serrano au super monoïde plaxique décalé. Nous démontrons que chaque classe du super monoïde plaxique décalé est représentée par un unique tableau de dominos décalé. Enfin, dans le paragraphe 2.4, nous présentons deux algorithmes d'insertions L et H , analogues à la correspondance de Robinson-Schensted-Knuth, qui associent à un mot bicolore, un couple de tableaux de dominos décalés de même forme. On donne aussi une conjecture reliant les permutations bicolorées et les algorithmes H et L . Ce travail a fait l'objet d'une soumission de l'article [Che16].

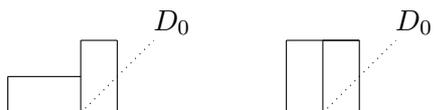
Le paragraphe 2.4 est un travail en commun avec Mathias Pétréolle suite à un échange de doctorants entre l'université de Paris-Est Marne-la-Vallée et celle de Lyon 1 financé par le groupe de travail CombAlg du GDR-IM.

2.1 Définitions

Avant de définir les tableaux de dominos décalés, on va d'abord définir les partitions pavées décalées qui sont les partitions pavées associées aux tableaux de dominos décalés.

Définition 2.1.1. Soit λ une partition pavée (cf. définition 1.1.60) ayant pour 2-quotient (cf. définition 1.1.55) la paire (μ, ν) . On dit que λ est une **partition pavée décalée** si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

- la dernière part de μ (resp. ν) est supérieure ou égale à sa longueur ;
- il n'y a pas de domino vertical d sur la diagonale principale D_0 , tel que d n'a que des dominos adjacents à sa gauche qui sont strictement au-dessus de D_0 (non coupés par D_0). Autrement dit, les deux motifs suivants sont interdits sur D_0 :

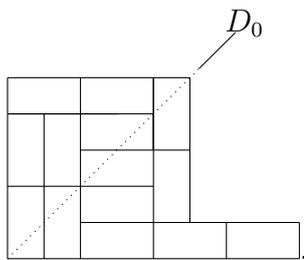


Remarque 2.1.2. Une partition pavée décalée peut contenir un domino vertical en position $(1, 1)$ (le domino composé des cases $(1, 1)$ et $(1, 2)$). Ceci ne contredit pas la deuxième condition de la définition 2.1.1, puisque ce domino n'a aucun domino adjacent à sa gauche.

Remarque 2.1.3. Une partition pavable peut être une partition pavée décalée pour certains pavages mais pas pour d'autres.

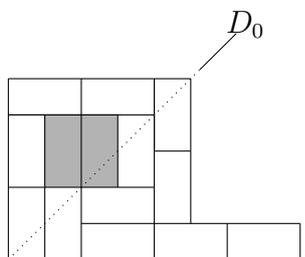
Exemple 2.1.4. La partition $(5, 5, 3, 1, 1)$ ayant pour 2-quotient la paire de partitions $((3), (3, 1, 1))$ ne vérifie pas la première condition de la définition 2.1.1. Elle n'est donc pas une partition pavée décalée. En effet, la dernière part de $(3, 1, 1)$ est strictement inférieure à son nombre de parts.

La partition $(8, 5, 5, 5, 5)$ ayant pour 2-quotient la paire de partitions $((2, 2), (4, 3, 3))$ vérifie la première condition de la définition 2.1.1. Cette partition, pavée avec le pavage :



2.1 Définitions

est une partition pavée décalée. Par contre, la même partition pavée avec le pavage :



n'est pas une partition pavée décalée puisque cette dernière contient un motif interdit (dominos grisés) sur D_0 .

Définition 2.1.5. *Étant donnée une partition pavée décalée λ , un tableau de dominos décalé, cf. figure 2.1.1, est un remplissage des dominos de la*

	X	X				
	X	4				
	X	3				
		2'				
1	1	2'	2	3		

FIGURE 2.1.1 : Tableau de dominos décalé de forme $(8, 5, 5, 5, 5)$.

partie haut'(λ) (cf. définition 1.2.43) par des X et des dominos de la partie bas'(λ) (cf. définition 1.2.43) par des lettres appartenant à un alphabet infini totalement ordonné $A' = \{1' < 1 < 2' < 2 < \dots\}$ tel que :

- les lettres sont croissantes au sens large sur les lignes de la gauche vers la droite et sur les colonnes du bas vers le haut ;
- une lettre non prime apparaît au plus une fois dans chaque colonne ;
- une lettre prime apparaît au plus une fois dans chaque ligne ;
- une lettre prime n'apparaît jamais sur la diagonale principale D_0 .

La *forme* d'un tableau de dominos décalé T' notée $sh(T')$ est définie comme pour les tableaux de dominos (cf. définition 1.2.40). La *taille* d'un tableau de dominos décalé est la taille de sa forme. La *lecture colonne* et la *lecture diagonale* d'un tableau de dominos décalé sont définies comme pour les tableaux de dominos (cf. définition 1.2.40). L'*évaluation* d'un tableau de dominos décalé

T' est la composition $(\pi_1 + \pi_{1'}, \pi_2 + \pi_{2'}, \dots)$, où π_i est le nombre de dominos contenant la lettre i dans T' et $\pi_{i'}$ est le nombre de dominos contenant la lettre i' dans T' .

Exemple 2.1.6. La lecture diagonale du tableau de dominos décalé de la Figure 2.1.1 est 11345/2'2'5'/2/3, sa lecture colonne est 11432'2'55'23 et son évaluation est (2, 3, 2, 1, 2).

Remarque 2.1.7. Les tableaux de dominos décalés ont les mêmes conditions de croissance que les tableaux de Young décalés. Ils sont une généralisation des tableaux de Young décalés, puisque si on considère des tableaux de dominos décalés pavés uniquement avec des dominos horizontaux, alors ils seront assimilables à des tableaux de Young décalés.

Comme dans le cas des tableaux de dominos, nous allons définir les nombres de Kostka pour les tableaux de dominos décalés.

Définition 2.1.8. Soit λ une partition pavée décalée de taille n et soit μ une partition de n . L'analogie des nombres de Kostka décalés pour les tableaux de dominos décalés, noté $K'_{\lambda\mu}^{(2)}$, est le nombre de tableaux de dominos décalés de forme λ et d'évaluation μ .

Exemple 2.1.9. Les 8 tableaux de dominos décalés associés au nombre de Kostka décalé $K'_{(5,5,5,5)(4,2,0,2)}$ sont

X	2		4	4
X	2		4	4
1	1	1	1	2

X	2		4	4
X	2		4	4
1	1	1	1	2'

X	2		2	4
X	2		2	4
1	1	1	1	4'

X	4		4	
X	2		4	
1	1	1	1	2

X	4		4	
X	2		4	
1	1	1	1	2'

X	4		4	
X	2		4	
1	1	1	2'	
			1	

2.1 Définitions

X			
X	2	4	4
1	1	1	2
			1

X			
X	2	4	4
1	1	1	2'
			1

Dans le cas où l'on s'intéresse aux tableaux de dominos décalés associés au nombre de Kostka $K'_{\lambda(1,1,\dots,1)}^{(2)}$, on obtient les tableaux de la définition suivante.

Définition 2.1.10. Un *tableau de dominos décalé standard*, (voir Figure 2.1.2), est un tableau de dominos décalé de taille n et d'évaluation $(1, 1, \dots, 1)$. Au-

X	X				
X	9				
X	7				
		4			
1	2	3	5	6	

FIGURE 2.1.2 : Tableau de dominos décalé standard de forme $(8, 5, 5, 5, 5)$.

tremement dit, c'est un tableau de dominos décalé de taille n , dans lequel chaque lettre entre 1 et n apparaît exactement une fois (une lettre ne peut pas être prime).

Nous allons maintenant donner la définition de deux relations d'équivalence entre les tableaux dont nous aurons besoin pour démontrer la bijection du paragraphe suivant.

Définition 2.1.11. Soit t un tableau de Young (sans conditions de croissances particulières) de forme λ . Le tableau $t \setminus \text{haut}(\lambda)$ est le tableau obtenu en supprimant les cellules de la partie $\text{haut}(\lambda)$ de t . Deux tableaux de Young (sans conditions de croissances particulières) t_1 et t_2 sont \cong -équivalents si et seulement si :

- les tableaux t_1 et t_2 ont la même forme λ ;
- le tableau $t_1 \setminus \text{haut}(\lambda)$ est égal au tableau $t_2 \setminus \text{haut}(\lambda)$.

Exemple 2.1.12. Les tableaux t_1 et t_2 sont \cong -équivalents :

$$t_1 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 5 & 6 & 8 \\ \hline 4 & 4 & 7 \\ \hline 1 & 2 & 2 & 3 \\ \hline \end{array} \cong t_2 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & 5 & 8 \\ \hline 3 & 4 & 7 \\ \hline 1 & 2 & 2 & 3 \\ \hline \end{array},$$

puisque t_1 et t_2 ont même forme et

$$t_1 \setminus \text{haut}(\lambda) = t_2 \setminus \text{haut}(\lambda) = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & 8 & \\ \hline & 4 & 7 & \\ \hline 1 & 2 & 2 & 3 \\ \hline \end{array}$$

Définition 2.1.13. Soit T un tableau de dominos (sans conditions de croissances particulières) de forme λ . Le tableau $T \setminus \text{haut}'(\lambda)$ est le tableau obtenu en supprimant les dominos de la partie $\text{haut}'(\lambda)$ de T . Deux tableaux de dominos (sans conditions de croissances particulières) T_1 et T_2 sont \cong' -équivalents si et seulement si :

- les tableaux T_1 et T_2 ont la même forme λ ;
- le tableau $T_1 \setminus \text{haut}'(\lambda)$ est égal au tableau $T_2 \setminus \text{haut}'(\lambda)$.

Exemple 2.1.14. Les tableaux T_1 et T_2 sont \cong' -équivalents :

$$T_1 = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 6 & 8 & & & \\ \hline 6 & 8 & 6 & & \\ \hline 5 & 5 & & & \\ \hline 2 & 2 & & & \\ \hline 1 & 4 & 3 & 3 & \\ \hline \end{array} \cong' T_2 = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 4 & 7 & & & \\ \hline 5 & 8 & 6 & & \\ \hline 3 & 5 & & & \\ \hline 2 & 2 & & & \\ \hline 1 & 4 & 3 & 3 & \\ \hline \end{array},$$

puisque T_1 et T_2 ont même forme et

$$T_1 \setminus \text{haut}'(\lambda) = T_2 \setminus \text{haut}'(\lambda) = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & 6 & \\ \hline & 8 & & \\ \hline & 5 & & \\ \hline 2 & 2 & 8 & \\ \hline 1 & 4 & 3 & 3 \\ \hline \end{array}$$

2.2 Bijection avec les paires de tableaux de Young décalés

Les tableaux de dominos décalés et les paires de tableaux de Young décalés sont reliés par le théorème suivant.

Théorème 2.2.1. Soit λ une partition pavée décalée ayant pour 2-quotient la paire (μ, ν) . L'ensemble des tableaux de dominos décalés de forme λ et l'ensemble des paires de tableaux de Young décalés de forme (μ, ν) sont en bijection.

Avant de démontrer le théorème 2.2.1, on va introduire quelques notions et notations dont nous aurons besoin dans la démonstration.

2.2 Bijection avec les paires de tableaux de Young décalés

Définition 2.2.2. L'ensemble des **tableaux de dominos généralisés**, noté TDG , est l'ensemble des partitions pavées décalées λ , étiquetées par des lettres de l'alphabet infini totalement ordonné $\{1' < 1 < 2' < 2 < \dots\}$, vérifiant que :

- les lettres sont croissantes au sens large sur les lignes de la gauche vers la droite et sur les colonnes du bas vers le haut ;
- une lettre non prime apparaît au plus une fois dans chaque colonne ;
- une lettre prime apparaît au plus une fois dans chaque ligne ;
- une lettre prime n'apparaît jamais sur la diagonale principale D_0 .
- une lettre sur D_0 n'est pas comparable à une lettre adjacente de même couleur sur D_2 (on ignore l'ordre entre ces deux lettres).

Autrement dit, l'ensemble TDG est l'ensemble d'un autre type (plus général) de tableaux de dominos décalés de forme λ , à savoir, ceux dans lesquels les dominos de la partie haut'(λ) ne sont pas étiquetés par des X , mais sont étiquetés de la même manière que les dominos de la partie bas'(λ) et où les lettres adjacentes de même couleur appartenant à deux parties différentes ne sont pas comparables.

Exemple 2.2.3. Les deux partitions pavées décalées étiquetées suivantes :

7	8'			
3	5	6		
1	4			
	3'	5'		
1	2	3'	3	3

3				
3'	6			
2	3			
	2'	5'		
1	1	1	1	2

appartiennent à l'ensemble TDG .

Définition 2.2.4. L'ensemble des paires de **tableaux de Young généralisés**, noté TYG , est l'ensemble des paires de partitions (μ, ν) étiquetées par des lettres appartenant à l'alphabet infini totalement ordonné $\{1' < 1 < 2' < 2 < \dots\}$, vérifiant que dans μ et ν :

- les lettres sont croissantes au sens large sur les lignes de la gauche vers la droite et sur les colonnes du bas vers le haut ;
- une lettre non prime apparaît au plus une fois dans chaque colonne ;
- une lettre prime apparaît au plus une fois dans chaque ligne ;
- une lettre prime n'apparaît jamais sur la diagonale principale D_0 ;

- une lettre sur D_0 n'est pas comparable à sa lettre adjacente qui se trouve sur D_1 (on ignore l'ordre entre ces deux lettres).
- si la longueur de μ est supérieure ou égale à 2, et si on étiquette une cellule de μ sur D_0 par ℓ_1 et on étiquette la cellule se trouvant à la même position dans ν par une lettre ℓ_2 , telle que $\ell_2 \geq \ell_1$, alors il doit y avoir une lettre ℓ_3 juste à gauche de ℓ_2 sur la même ligne, vérifiant que $\ell_1 < \ell_3$.

Exemple 2.2.5. Les deux paires de partitions étiquetées suivantes :

$$\left(\begin{array}{|c|c|} \hline 5 & 9' & 6 \\ \hline 2 & 2 & 4 \\ \hline 1 & 2' & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 5 & 9' & 6 & \\ \hline 2 & 2 & 4 & \\ \hline 1 & 2' & 2 & 3' \\ \hline \end{array} \right), \left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline 5 & 6 & 7 \\ \hline 2 & 4 & 5' \\ \hline 1 & 1 & 1 & 3 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 5 & 6 & 8 & \\ \hline 2 & 2 & 3' & 3 \\ \hline \end{array} \right)$$

appartiennent à l'ensemble TYG . Par contre, la paire de partitions étiquetées ci-dessous n'appartient pas à TYG :

$$\left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & 5 & 7 \\ \hline 3 & 4 & 5' & 6 \\ \hline 1 & 3' & 3 & 4 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline 6 & 7 & 7 \\ \hline 5 & 5 & 8 \\ \hline 4 & 4 & 6 \\ \hline 1 & 1 & 2 & 8 \\ \hline \end{array} \right)$$

En effet, dans les cellules grisées (3, 3) on a $\ell_1 = 8 > 7 = \ell_3$ mais à la gauche de ℓ_2 , toutes les lettres sont inférieures à ℓ_1 .

Remarque 2.2.6. Si on remplace chaque étiquette de la partie haut'(λ) d'un élément de l'ensemble TDG (resp. chaque étiquette de la partie haut(μ) et haut(ν) d'un élément de l'ensemble TYG) par un X , on obtient un tableau de dominos décalé (resp. une paire de tableaux de Young décalés).

Pour démontrer le théorème 2.2.1, on prouve dans un premier temps qu'il existe une bijection entre l'ensemble TDG et l'ensemble TYG . Puis, on démontre que le quotient de l'ensemble TDG par \cong' est en bijection avec le quotient de l'ensemble TYG par \cong .

Démonstration. (Théorème 2.2.1) Même si les conditions d'étiquetage des éléments de l'ensemble TDG sont différents des conditions d'étiquetage des éléments de l'ensemble des tableaux de dominos, l'algorithme Γ (cf. démonstration du théorème 1.2.45) associe à chaque élément T de forme λ dans l'ensemble TDG une unique paire de tableaux (t_1, t_2) de forme (μ, ν) vérifiant :

- les lettres de t_1 et t_2 sont croissantes au sens large sur les lignes de la gauche vers la droite et sur les colonnes du bas vers le haut ;

2.2 Bijection avec les paires de tableaux de Young décalés

- une lettre non prime apparaît au plus une fois dans chaque colonne de t_1 et t_2 ;
- une lettre prime apparaît au plus une fois dans chaque ligne de t_1 et t_2 ;
- une lettre prime n'apparaît jamais sur la diagonale principale D_0 de t_1 et t_2 .
- une lettre sur D_0 dans t_1 (resp. t_2) n'est pas comparable à sa lettre adjacente qui se trouve sur D_1 dans t_1 (resp. t_2) (on ignore l'ordre entre ces deux lettres).

De plus, quand la longueur de μ est supérieure ou égale à 2, s'il y a une lettre ℓ_1 dans t_1 sur la diagonale principale D_0 et une lettre ℓ_2 dans la même position dans le tableau t_2 , avec $\ell_2 \geq \ell_1$, alors il existe toujours une lettre ℓ_3 à la gauche de ℓ_2 , sur la même ligne, vérifiant $\ell_1 < \ell_3$:

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \ell_3 & \diagup \\ \hline \ell_1 & \ell_2 \\ \hline \end{array} \xrightarrow{D_0} \left[\dots \mid \ell_1 \right], \left[\dots \mid \ell_3 \mid \ell_2 \right] \quad \text{avec } \ell_2 \geq \ell_1 \text{ et } \ell_3 > \ell_1$$

En effet, si $\ell_1 \geq \ell_3$, cela veut dire que l'on doit avoir un domino vertical de type 1 dans λ sur D_0 qui a seulement des dominos appartenant à $\text{haut}'(\lambda)$ à sa gauche (un motif interdit sur D_0), ce qui est impossible puisque λ est une partition pavée décalée. Donc, ceci définit une application de TDG dans TYG . L'algorithme inverse de Γ (cf. démonstration du théorème 1.2.45) associe à chaque paire de tableaux dans TYG un unique élément dans TDG . En effet, l'algorithme inverse de Γ retranscrit les conditions de croissances de la paire de tableaux de TYG dans l'élément de TDG et les conditions sur les lettres ℓ_1, ℓ_2 et ℓ_3 nous assure qu'en appliquant l'algorithme inverse de Γ à un élément de TYG , on ne peut pas avoir un domino vertical de type 1 ayant à sa gauche que des dominos qui sont strictement au-dessus de D_0 . Autrement dit, le seul moyen d'avoir les motifs interdits sur D_0 est que dans une certaine ligne de la paire (t_1, t_2) , on ait :

$$\left[\dots \mid \ell_1 \right], \left[\dots \mid \ell_3 \mid \ell_2 \right] \xrightarrow{D_0} \left[\ell_3 \mid \begin{array}{|c|c|} \hline & \diagup \\ \hline \ell_1 & \ell_2 \\ \hline \end{array} \right] \quad \text{avec } \ell_2 \geq \ell_1 \text{ et } \ell_3 < \ell_1$$

ou bien,

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \dots & \ell_1 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline \dots & \ell_3 & \ell_2 \\ \hline \end{array} \longrightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline \ell_3 & \ell_1 & \ell_2 \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} D_0 \\ \text{avec } \ell_2 \geq \ell_1 \text{ et } \ell_3 < \ell_1 \end{array}$$

Ce qui définit une application inverse de TYG dans TDG . Alors les ensembles TDG et TYG sont en bijection.

Rappelons que $t_1 \cong t_2$ si et seulement si t_1 et t_2 ont la même forme μ , et $t_1 \setminus \text{haut}(\mu)$ est égal à $t_2 \setminus \text{haut}(\mu)$. Et $T_1 \cong' T_2$ si et seulement si T_1 et T_2 ont la même forme λ , et $T_1 \setminus \text{haut}(\lambda)$ est égal à $T_2 \setminus \text{haut}(\lambda)$. Considérons deux éléments T et T' dans TDG qui sont dans la même classe d'équivalence pour la relation \cong' . Alors, on obtient par Γ deux paires de tableaux (t_1, t_2) et (t'_1, t'_2) dans TYG telles que $t_1 \cong t'_1$ et $t_2 \cong t'_2$. Ceci définit une application de TDG / \cong' dans TYG / \cong . Inversement, on définit une application de TYG / \cong dans TDG / \cong' en considérant deux paires de tableaux (t_1, t_2) et (t'_1, t'_2) dans TYG qui sont \cong -équivalentes. L'algorithme inverse de Γ nous donne deux éléments T et T' de TDG qui sont \cong' -équivalents. Donc, les ensembles TDG / \cong' et TYG / \cong sont en bijection.

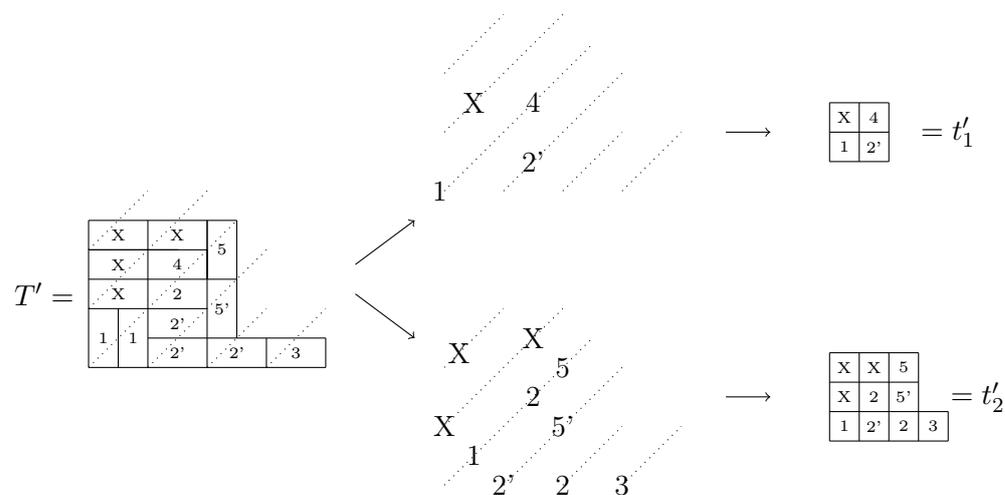
Les lettres et les relations entre elles dans les parties hautes ne changent pas le résultat puisqu'on s'intéresse seulement aux parties basses. On peut alors étiqueter tous les dominos des parties hautes par des X . Ainsi, l'ensemble des tableaux de dominos décalés de forme λ et l'ensemble des paires (t_1, t_2) de tableaux de Young décalés de forme (μ, ν) sont en bijection. \square

Exemple 2.2.7. Considérons le tableau de dominos décalé suivant :

$$T' = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline X & X & & & \\ \hline X & 4 & & & \\ \hline X & 2 & & & \\ \hline 1 & 1 & 2' & & \\ \hline & & 2' & 2' & 3 \\ \hline \end{array}$$

L'algorithme Γ appliqué au tableau de dominos décalé T' donne :

2.2 Bijection avec les paires de tableaux de Young décalés



On obtient donc une paire de tableaux de Young décalés (t'_1, t'_2) de forme $((2, 2), (4, 3, 3))$. L'algorithme inverse de Γ appliqué à la paire (t'_1, t'_2) de tableaux de Young décalés ci-dessus, donne :

$$\left(\boxed{1}, \boxed{1} \right) \rightarrow \boxed{1 \ 1}$$

$$\left(\boxed{1 \ 2'}, \boxed{1 \ 2'} \right) \rightarrow \boxed{1 \ 1 \ 2' \ 2'}$$

$$\left(\boxed{1 \ 2'}, \boxed{\begin{array}{c} X \ 2 \\ 1 \ 2' \ 2 \end{array}} \right) \rightarrow \boxed{\begin{array}{c} X \ 2 \\ 1 \ 1 \ 2' \ 2 \\ 2' \end{array}}$$

$$\left(\boxed{1 \ 2'}, \boxed{\begin{array}{c} X \ 2 \\ 1 \ 2' \ 2 \ 3 \end{array}} \right) \rightarrow \boxed{\begin{array}{c} X \ 2 \\ 1 \ 1 \ 2' \ 2 \ 3 \\ 2' \end{array}}$$

$$\left(\boxed{\begin{array}{c} X \ 4 \\ 1 \ 2' \end{array}}, \boxed{\begin{array}{c} X \ 2 \\ 1 \ 2' \ 2 \ 3 \end{array}} \right) \rightarrow \boxed{\begin{array}{c} X \ 4 \\ X \ 2 \\ 1 \ 1 \ 2' \ 2 \ 3 \\ 2' \end{array}}$$

$$\left(\begin{array}{|c|c|} \hline X & 4 \\ \hline 1 & 2' \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline X & 2 & 5' \\ \hline 1 & 2' & 2 & 3 \\ \hline \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline X & 4 & & \\ \hline X & 2 & & 5' \\ \hline 1 & 1 & 2' & \\ \hline & & 2' & 2 & 3 \\ \hline \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{|c|c|} \hline X & 4 \\ \hline 1 & 2' \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline X & X & 5 \\ \hline X & 2 & 5' \\ \hline 1 & 2' & 2 & 3 \\ \hline \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline X & X & & 5 \\ \hline X & 4 & & \\ \hline X & 2 & & 5' \\ \hline 1 & 1 & 2' & \\ \hline & & 2' & 2 & 3 \\ \hline \end{array}$$

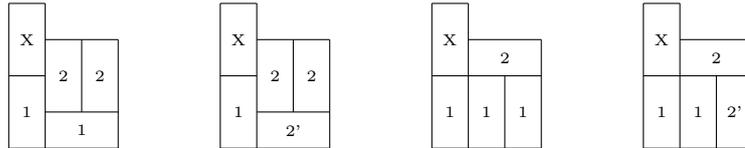
En termes de fonctions symétriques, le théorème 2.2.1 devient,

Théorème 2.2.8. Soit λ une partition pavée décalée ayant pour 2-quotient la paire (μ, ν) . On a

$$\sum_{T' ; sh(T')=\lambda} x^{T'} = P_\mu P_\nu, \tag{2.1}$$

où la somme porte sur tous les tableaux de dominos décalés T' de forme λ .

Exemple 2.2.9. Soit la partition $(3, 3, 3, 1)$ ayant pour 2-quotient la paire de partitions $((2, 1), (1))$. Les 4 tableaux de dominos décalés de forme $(3, 3, 3, 1)$, étiquetés par les lettres $\{1' < 1 < 2' < 2\}$, sont



et correspondent au produit des deux fonctions P de Schur sur deux variables :

$$\sum_{T' ; sh(T')=(3,3,3,1)} x^{T'} = 4x_1^2x_2 + 4x_1x_2^2 = P_{21}(x_1, x_2) P_1(x_1, x_2),$$

où la somme porte sur tous les tableaux de dominos décalés T' de forme $(3, 3, 3, 1)$ étiquetés par des lettres de $\{1' < 1 < 2' < 2\}$.

Démonstration. (Théorème 2.2.8) Soit (μ, ν) le 2-quotient d'une partition pavée décalée λ . Par le théorème 2.2.1, l'évaluation d'un tableau de dominos

2.2 Bijection avec les paires de tableaux de Young décalés

décalé T' de forme λ est la somme des deux évaluations de la paire de tableaux de Young décalés (t'_1, t'_2) de forme (μ, ν) qui correspond à T' , Donc, on a

$$\sum_{T' ; sh(T')=\lambda} x^{T'} = \sum_{t'_1 ; sh(t'_1)=\mu} x^{t'_1} \sum_{t'_2 ; sh(t'_2)=\nu} x^{t'_2} = P_\mu P_\nu. \quad (2.2)$$

□

Soient λ et θ deux partitions. La somme dans l'équation (2.1) est une fonction symétrique en (x_1, x_2, \dots) et son développement sur la base des fonctions monomiales (cf. définition 1.2.3) est donné par :

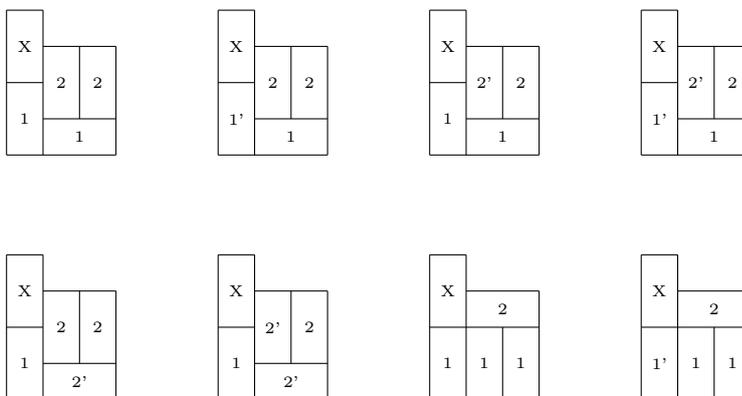
Corollaire 2.2.10. *Soient λ et μ deux partitions. Alors,*

$$\sum_{T' ; sh(T')=\lambda} x^{T'} = \sum_{\mu} K'_{\lambda\mu}{}^{(2)} m_\mu, \quad (2.3)$$

où la première somme porte sur tous les tableaux de dominos décalés T' de forme λ , la deuxième somme porte sur toutes les partitions μ et $K'_{\lambda\mu}{}^{(2)}$ est le nombre de tableaux de dominos décalés de forme λ et d'évaluation μ .

Remarque 2.2.11. Ces résultats restent valables dans le cas où on considère les fonctions Q de Schur au lieu des fonctions P de Schur, en considérant un autre type de tableaux de dominos décalés, à savoir, ceux dans lesquels on autorise des lettres primes sur la diagonale principale D_0 .

Exemple 2.2.12. Soit la partition $(3, 3, 3, 1)$ ayant pour 2-quotient la paire de partitions $((2, 1), (1))$. Les 32 tableaux de dominos décalés dans lesquels on autorise des lettres primes sur la diagonale principale D_0 , de forme $(3, 3, 3, 1)$, étiquetés par des lettres de $\{1' < 1 < 2' < 2\}$, sont



<table border="1"><tr><td>X</td><td colspan="2">2'</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr></table>	X	2'		1	1	1	<table border="1"><tr><td>X</td><td colspan="2">2'</td></tr><tr><td>1'</td><td>1</td><td>1</td></tr></table>	X	2'		1'	1	1	<table border="1"><tr><td>X</td><td colspan="2">2</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>2'</td></tr></table>	X	2		1	1	2'	<table border="1"><tr><td>X</td><td colspan="2">2'</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>2'</td></tr></table>	X	2'		1	1	2'												
X	2'																																						
1	1	1																																					
X	2'																																						
1'	1	1																																					
X	2																																						
1	1	2'																																					
X	2'																																						
1	1	2'																																					
<table border="1"><tr><td>X</td><td colspan="2">2</td></tr><tr><td>1</td><td colspan="2">2'</td></tr><tr><td></td><td colspan="2">1</td></tr></table>	X	2		1	2'			1		<table border="1"><tr><td>X</td><td colspan="2">2'</td></tr><tr><td>1</td><td colspan="2">2'</td></tr><tr><td></td><td colspan="2">1</td></tr></table>	X	2'		1	2'			1		<table border="1"><tr><td>X</td><td colspan="2">2</td></tr><tr><td>1'</td><td colspan="2">2'</td></tr><tr><td></td><td colspan="2">1</td></tr></table>	X	2		1'	2'			1		<table border="1"><tr><td>X</td><td colspan="2">2'</td></tr><tr><td>1'</td><td colspan="2">2'</td></tr><tr><td></td><td colspan="2">1</td></tr></table>	X	2'		1'	2'			1	
X	2																																						
1	2'																																						
	1																																						
X	2'																																						
1	2'																																						
	1																																						
X	2																																						
1'	2'																																						
	1																																						
X	2'																																						
1'	2'																																						
	1																																						
<table border="1"><tr><td>X</td><td colspan="2">2</td></tr><tr><td>1</td><td colspan="2">2'</td></tr><tr><td></td><td colspan="2">2'</td></tr></table>	X	2		1	2'			2'		<table border="1"><tr><td>X</td><td colspan="2">2'</td></tr><tr><td>1</td><td colspan="2">2'</td></tr><tr><td></td><td colspan="2">2'</td></tr></table>	X	2'		1	2'			2'		<table border="1"><tr><td>X</td><td colspan="2">2</td></tr><tr><td>1'</td><td colspan="2">2'</td></tr><tr><td></td><td colspan="2">2'</td></tr></table>	X	2		1'	2'			2'		<table border="1"><tr><td>X</td><td colspan="2">2'</td></tr><tr><td>1'</td><td colspan="2">2'</td></tr><tr><td></td><td colspan="2">2'</td></tr></table>	X	2'		1'	2'			2'	
X	2																																						
1	2'																																						
	2'																																						
X	2'																																						
1	2'																																						
	2'																																						
X	2																																						
1'	2'																																						
	2'																																						
X	2'																																						
1'	2'																																						
	2'																																						
<table border="1"><tr><td>X</td><td colspan="2">2</td></tr><tr><td>2'</td><td colspan="2">2'</td></tr><tr><td>1</td><td colspan="2"></td></tr></table>	X	2		2'	2'		1			<table border="1"><tr><td>X</td><td colspan="2">2'</td></tr><tr><td>2'</td><td colspan="2">2'</td></tr><tr><td>1</td><td colspan="2"></td></tr></table>	X	2'		2'	2'		1			<table border="1"><tr><td>X</td><td colspan="2">2</td></tr><tr><td>1</td><td colspan="2">2'</td></tr><tr><td>1'</td><td colspan="2"></td></tr></table>	X	2		1	2'		1'			<table border="1"><tr><td>X</td><td colspan="2">2'</td></tr><tr><td>1</td><td colspan="2">2'</td></tr><tr><td>1'</td><td colspan="2"></td></tr></table>	X	2'		1	2'		1'		
X	2																																						
2'	2'																																						
1																																							
X	2'																																						
2'	2'																																						
1																																							
X	2																																						
1	2'																																						
1'																																							
X	2'																																						
1	2'																																						
1'																																							
<table border="1"><tr><td>X</td><td colspan="2">2</td></tr><tr><td>2'</td><td colspan="2">2'</td></tr><tr><td>1'</td><td colspan="2"></td></tr></table>	X	2		2'	2'		1'			<table border="1"><tr><td>X</td><td colspan="2">2'</td></tr><tr><td>2'</td><td colspan="2">2'</td></tr><tr><td>1'</td><td colspan="2"></td></tr></table>	X	2'		2'	2'		1'			<table border="1"><tr><td>X</td><td colspan="2">2</td></tr><tr><td>1'</td><td colspan="2">2'</td></tr><tr><td>1'</td><td colspan="2"></td></tr></table>	X	2		1'	2'		1'			<table border="1"><tr><td>X</td><td colspan="2">2'</td></tr><tr><td>1'</td><td colspan="2">2'</td></tr><tr><td>1'</td><td colspan="2"></td></tr></table>	X	2'		1'	2'		1'		
X	2																																						
2'	2'																																						
1'																																							
X	2'																																						
2'	2'																																						
1'																																							
X	2																																						
1'	2'																																						
1'																																							
X	2'																																						
1'	2'																																						
1'																																							
<table border="1"><tr><td>X</td><td colspan="2">2</td></tr><tr><td>1</td><td colspan="2">1</td></tr><tr><td>1'</td><td colspan="2"></td></tr></table>	X	2		1	1		1'			<table border="1"><tr><td>X</td><td colspan="2">2'</td></tr><tr><td>1</td><td colspan="2">1</td></tr><tr><td>1'</td><td colspan="2"></td></tr></table>	X	2'		1	1		1'			<table border="1"><tr><td>X</td><td colspan="2">2</td></tr><tr><td>1'</td><td colspan="2">1</td></tr><tr><td>1'</td><td colspan="2"></td></tr></table>	X	2		1'	1		1'			<table border="1"><tr><td>X</td><td colspan="2">2'</td></tr><tr><td>1'</td><td colspan="2">1</td></tr><tr><td>1'</td><td colspan="2"></td></tr></table>	X	2'		1'	1		1'		
X	2																																						
1	1																																						
1'																																							
X	2'																																						
1	1																																						
1'																																							
X	2																																						
1'	1																																						
1'																																							
X	2'																																						
1'	1																																						
1'																																							

et correspondent au produit des deux fonctions Q de Schur sur deux variables :

$$\sum_{T'; sh(T')=(3,3,3,1)} x^{T'} = 8x_1^3x_2 + 16x_1^2x_2^2 + 8x_1x_2^3 = Q_{21}(x_1, x_2) Q_1(x_1, x_2),$$

où la somme porte sur tous les tableaux de dominos décalés T' dans lesquels on autorise des lettres primes sur la diagonale principale D_0 , de forme $(3, 3, 3, 1)$ étiquetés par des lettres de $\{1' < 1 < 2' < 2\}$.

2.3 Super monoïde plaxique décalé

Rappelons que les fonctions symétriques P de Schur sont les polynômes de Hall-Littlewood [Lit61] sur la base $P(x, t)$ en $t = -1$, et les fonctions symétriques Q de Schur sont les polynômes de Hall-Littlewood sur la base $Q(x, t)$ en $t = -1$ [Mac95]. Ce sont les caractères des représentations projectives irréductibles des groupes symétriques [Ste89]. C'est dans le but d'étudier ces fonctions que Worley [Wor84] et Sagan [Sag87] ont développé la théorie des tableaux de Young décalés qui forme un monoïde appelé le monoïde plaxique décalé, qui est l'analogue décalé du monoïde plaxique de Lascoux et Schützenberger. Dans le paragraphe suivant, nous allons étendre le monoïde plaxique décalé au super monoïde plaxique décalé qui est le produit direct de deux monoïdes plaxiques décalés.

2.3 Super monoïde plaxique décalé

Définition 2.3.1. Soient $A_1 := \{a_1^1 < a_2^1 < a_3^1 < \dots\}$ et $A_2 := \{a_1^2 < a_2^2 < a_3^2 < \dots\}$ deux alphabets infinis totalement ordonnés. Le super monoïde plaxique décalé, noté $\text{SPld}(A_1, A_2)$ est le quotient du monoïde libre $(A_1 \cup A_2)^*$ par les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
a_i^1 a_j^1 a_l^1 a_k^1 &\sim a_i^1 a_l^1 a_j^1 a_k^1 \text{ et } a_i^2 a_j^2 a_l^2 a_k^2 \sim a_i^2 a_l^2 a_j^2 a_k^2 \text{ pour } i \leq j \leq k < l, \\
a_i^1 a_l^1 a_k^1 a_j^1 &\sim a_i^1 a_k^1 a_j^1 a_l^1 \text{ et } a_i^2 a_l^2 a_k^2 a_j^2 \sim a_i^2 a_k^2 a_j^2 a_l^2 \text{ pour } i \leq j < k \leq l, \\
a_l^1 a_i^1 a_k^1 a_j^1 &\sim a_l^1 a_l^1 a_k^1 a_j^1 \text{ et } a_l^2 a_i^2 a_k^2 a_j^2 \sim a_l^2 a_l^2 a_k^2 a_j^2 \text{ pour } i \leq j < k < l, \\
a_j^1 a_i^1 a_l^1 a_k^1 &\sim a_j^1 a_l^1 a_i^1 a_k^1 \text{ et } a_j^2 a_i^2 a_l^2 a_k^2 \sim a_j^2 a_l^2 a_i^2 a_k^2 \text{ pour } i < j \leq k < l, \\
a_k^1 a_j^1 a_l^1 a_i^1 &\sim a_k^1 a_l^1 a_j^1 a_i^1 \text{ et } a_k^2 a_j^2 a_l^2 a_i^2 \sim a_k^2 a_l^2 a_j^2 a_i^2 \text{ pour } i < j < k \leq l, \\
a_l^1 a_j^1 a_k^1 a_i^1 &\sim a_l^1 a_l^1 a_k^1 a_i^1 \text{ et } a_l^2 a_j^2 a_k^2 a_i^2 \sim a_l^2 a_l^2 a_k^2 a_i^2 \text{ pour } i < j \leq k < l, \\
a_j^1 a_k^1 a_l^1 a_i^1 &\sim a_j^1 a_k^1 a_i^1 a_l^1 \text{ et } a_j^2 a_k^2 a_l^2 a_i^2 \sim a_j^2 a_k^2 a_i^2 a_l^2 \text{ pour } i < j \leq k \leq l, \\
a_k^1 a_i^1 a_l^1 a_j^1 &\sim a_k^1 a_l^1 a_i^1 a_j^1 \text{ et } a_k^2 a_i^2 a_l^2 a_j^2 \sim a_k^2 a_l^2 a_i^2 a_j^2 \text{ pour } i \leq j < k \leq l, \\
a_i^1 a_j^2 &\sim a_j^2 a_i^1 \text{ pour tous entiers positifs } i \text{ et } j.
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Une classe d'équivalence de $\text{SPld}(A_1 \cup A_2)$ est appelée une *super classe plaxique décalée*.

Théorème 2.3.2. Chaque super classe plaxique décalée est représentée par un unique tableau de dominos décalé.

Démonstration. Soient w_1 et w_2 deux mots de $(A_1 \cup A_2)^*$. Suivant la définition de $\text{SPld}(A_1 \cup A_2)$, les mots w_1 et w_2 sont dans la même super classe plaxique décalée si et seulement si $w_{1|A_1} \equiv' w_{2|A_1}$ et $w_{1|A_2} \equiv' w_{2|A_2}$. En d'autres termes, deux mots w_1 et w_2 sont dans la même super classe plaxique décalée si $w_{1|A_1}$

et $w_{2|A_1}$ sont dans la même classe plaxique décalée associée à un tableau de Young décalé t'_1 et que $w_{1|A_2}$ et $w_{2|A_2}$ sont dans la même classe plaxique décalée associée à un tableau de Young décalé t'_2 . Alors, on peut associer à chaque super classe plaxique décalée une unique paire de tableaux de Young décalés (t'_1, t'_2) . Par le théorème 2.2.1 (bijection entre les tableaux de dominos décalés et les paires de tableaux de Young décalés), on conclut que chaque super classe plaxique décalée est représentée par un unique tableau de dominos décalé. \square

Exemple 2.3.3. Le tableau de dominos décalé suivant

x		x	5	
x		4		
x		2	5'	
1	1	2'		
		2'	2	3

représente la super classe plaxique décalée du mot $\omega = a_2^1 a_4^1 a_1^1 a_2^2 a_5^2 a_5^2 a_2^2 a_2^2 a_1^2 a_3^2$, où ω est le mot obtenu en concaténant la lecture mixte décalée de t'_1 et t'_2 (voir [Ser10]).

Pour rappel, si deux mots sont dans la même classe plaxique décalée, ils sont alors dans la même classe plaxique [Ser10]. Par conséquent, on a :

Proposition 2.3.4. *L'équivalence super plaxique décalée est un raffinement de l'équivalence super plaxique. Chaque classe super plaxique est une union disjointe de super classes plaxiques décalées. En d'autres termes, si deux mots sont équivalents dans le monoïde super plaxique, alors ils sont équivalents dans le monoïde super plaxique décalé.*

Soient $A_1 := \{a_1^1 < a_2^1 < a_3^1 < \dots\}$ et $A_2 := \{a_1^2 < a_2^2 < a_3^2 < \dots\}$ deux alphabets infinis totalement ordonnés. Pour retrouver le tableau de dominos décalé T' associé à la classe super plaxique décalée d'un mot ω de $(A_1 \cup A_2)^*$, on sépare ω en deux sous-mots $w|_{A_1}$ et $w|_{A_2}$. L'algorithme d'insertion mixte de Haiman [Hai89] appliqué à $w|_{A_1}$ et $w|_{A_2}$ donne les deux tableaux de Young décalés $P_{mix}(w|_{A_1}) = t'_1$ et $P_{mix}(w|_{A_2}) = t'_2$. Par le théorème 2.2.1, on obtient le tableau de dominos décalé T' associé à ω (cf. figure 2.3). Dans le paragraphe suivant nous présentons un algorithme d'insertion analogue à l'algorithme de Robinson-Schensted-knuth, noté L , qui associe à un mot ω de $(A_1 \cup A_2)^*$, un tableau de dominos décalé sans passer ni par l'algorithme d'insertion mixte de Haiman ni par le théorème 2.2.1 (cf. figure 2.3.4). Cet algorithme est une adaptation de l'algorithme d'insertion mixte de Haiman aux tableaux de dominos décalés. Cette partie est un travail commun avec Mathias Pétréolle.

2.4 Algorithmes d'insertion

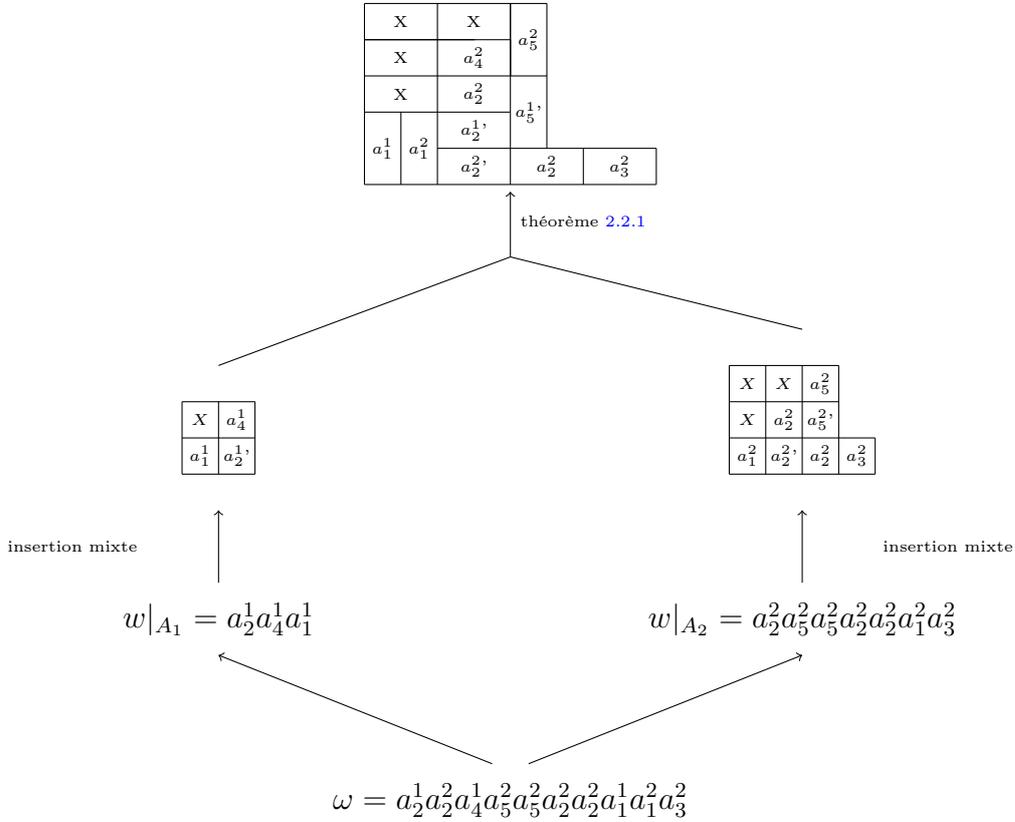


FIGURE 2.3.3 : Le tableau de dominos décalé associé à un mot obtenu en utilisant l'algorithme d'insertion mixte de Haiman et le théorème 2.2.1.

2.4 Algorithmes d'insertion

Avant de présenter l'algorithme d'insertion L , nous allons d'abord définir la ligne et la colonne associées à un domino appartenant à une partition pavée. La notion de ligne et de colonne pour un domino n'est pas aussi évidente que celles associées à une cellule dans un tableau de Young ou dans un tableau de Young décalé.

Définition 2.4.1. Soit λ une partition pavée décalée contenant un domino composé des cases (a, b) et (c, d) . On définit la **ligne** du domino par $b + d - 1$ et sa **colonne** par $a + c - 1$ (cf. figure 2.4.5).

Définition 2.4.2. Soient $A_1 := \{a_1^1 < a_2^1 < a_3^1 < \dots\}$ et $A_2 := \{a_1^2 < a_2^2 < a_3^2 < \dots\}$ deux alphabets infinis totalement ordonnés. Soient ω un mot de $(A_1 \cup A_2)^*$ de taille n et $\mathfrak{C} = \emptyset$. L'algorithme L associé à ω une paire de

X	X	a_5^2		
X	a_4^2	a_5^1		
X	a_2^2	a_5^1		
a_1^1	a_1^2	a_2^1	a_2^2	a_3^2

↑
 L

$$\omega = a_2^1 a_2^2 a_4^1 a_5^2 a_5^2 a_2^2 a_2^2 a_1^1 a_1^2 a_3^2$$

FIGURE 2.3.4 : Le tableau de dominos décalé associé à un mot de $(A_1 \cup A_2)^*$ obtenu en utilisant L .

X	X	5		
X	4	5'		
X	2	5'		
1	1	2'	2	3

↙
↘

2^e ligne
1^e ligne

1^e colonne
6^e colonne

FIGURE 2.4.5 : Ligne et colonne associées à quelques dominos dans un tableau de dominos décalé de forme $(8, 5, 5, 5, 5)$.

tableaux de dominos décalés noté $(P'_{mix}(\omega), Q'_{mix}(\omega))$. Il construit étape par étape la suite de tableaux de dominos décalés $(\emptyset, \emptyset) = (P'_0, Q'_0), (P'_1, Q'_1), \dots, (P'_n, Q'_n) = (P'_{mix}(\omega), Q'_{mix}(\omega))$ en insérant à chaque étape la lettre ω_i^* , où $* \in \{1, 2\}$ et i est un entier entre 1 et n .

L'étape principale de cet algorithme consiste en l'insertion du domino de type $*$ contenant ω_i^* dans la première ligne du tableau de dominos décalé P'_{i-1} . Si ω_i^* ne peut pas être insérée dans cette ligne, on l'insère dans la ligne suivante de P'_{i-1} . On pose $\mathfrak{C} = \omega_i^*$ et on effectue successivement les étapes suivantes :

A. si la lettre ω_i^* est supérieure à toutes les lettres de la ligne, alors on insère

2.4 Algorithmes d'insertion

le domino de ω_i^* à la fin de cette ligne, on supprime ω_i^* de l'ensemble \mathfrak{C} et on passe à l'étape E;

- B. s'il existe une lettre $x = \omega_i$ contenue dans un domino horizontal de type différent du domino de ω_i^* , on insère le domino de ω_i^* à la place du domino de x (ils s'intersectent en une case, voir figure 2.4.6). On rajoute à \mathfrak{C} les lettres dont les dominos s'intersectent avec le domino de ω_i^* dans sa nouvelle position, on supprime ω_i^* de l'ensemble \mathfrak{C} et on passe à l'étape D;
- C. sinon on insère le domino de ω_i^* à la place du domino contenant la plus petite lettre qui est strictement supérieure à ω_i^* . On rajoute à \mathfrak{C} les lettres dont les dominos s'intersectent avec le domino de ω_i^* dans sa nouvelle position, on supprime ω_i^* de l'ensemble \mathfrak{C} et on passe à l'étape D;
- D. tant que l'ensemble \mathfrak{C} n'est pas vide, on traite ses éléments dans l'ordre croissant. Soit a la plus petite lettre de \mathfrak{C} :

(1) si le domino de a n'est pas sur D_0 alors :

- (i) si a est une lettre prime et que son domino est de même type que le domino de ω_i^* , alors on l'insère dans la colonne suivante si possible, sinon on l'insère dans la colonne qui suit :
- (a) si la lettre a est supérieure à toutes les lettres de la colonne, alors on insère le domino de a à la fin de cette colonne. On supprime a de l'ensemble \mathfrak{C} et on passe à l'étape D;
- (b) s'il existe une lettre $x = a$ contenue dans un domino vertical de type différent du domino de a , on insère le domino de a à la place du domino de x (ils s'intersectent en une case, voir figure 2.4.6). On supprime a de l'ensemble \mathfrak{C} et on rajoute à \mathfrak{C} les lettres dont les dominos s'intersectent avec le domino de a dans sa nouvelle position;
- (c) sinon on insère le domino de a à la place du domino contenant la plus petite lettre qui est strictement supérieure à a . On supprime a de l'ensemble \mathfrak{C} et on rajoute à \mathfrak{C} les lettres dont les dominos s'intersectent avec le domino de a dans sa nouvelle position;
- (ii) dans tous les autres cas, on insère le domino contenant a dans la ligne suivante;

(2) si le domino contenant la lettre a est sur D_0 alors :

- i. s'il est de même type que le domino contenant la lettre ω_i^* , alors a n'est par définition pas une lettre prime. On la marque avec un prime et on l'insère dans la colonne suivante;

ii. dans tous les autres cas, on insère le domino contenant la lettre a dans la ligne suivante.

E. si $\mathfrak{C} = \emptyset$, le tableau de domino décalé Q_i est obtenu en rajoutant un domino étiqueté par i à Q'_{i-1} afin que Q'_i ait la même forme que P'_i et l'insertion de ω_i^* se termine.

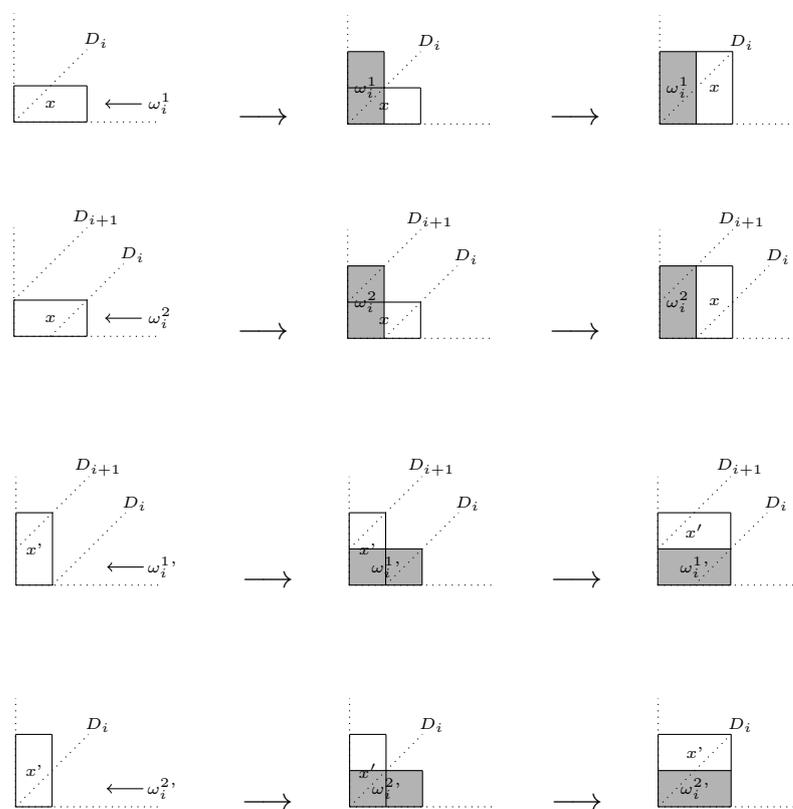


FIGURE 2.4.6 : Le cas où la lettre $x = \omega_i^*$ est contenue dans un domino horizontal ou vertical de type différent du domino contenant la lettre ω_i^* .

Exemple 2.4.3. Soient P' un tableau de dominos décalé et Q' le tableau de dominos décalé standard correspondant à P' obtenu par l'algorithme L :

2.4 Algorithmes d'insertion

$$P' = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline X & & & & & \\ \hline & X & 9 & & & \\ \hline X & X & 7 & & & \\ \hline & 4 & 6 & & & \\ \hline 2 & 3 & & 4 & 5 & 7' \\ \hline 1 & 2 & & & & \\ \hline \end{array}, \quad \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline X & & & & & \\ \hline & X & 11 & & & \\ \hline X & X & 9 & 10 & & \\ \hline & 7 & & & & \\ \hline 1 & 2 & 4 & 5 & 8 & \\ \hline & & 3 & & 6 & \\ \hline \end{array} = Q'.$$

Appliquons l'algorithme L pour insérer la lettre 1^1 dans le tableau de dominos décalé P' . L'algorithme commence par l'ensemble $\mathfrak{C} = \{1^1\}$. La première position possible du domino de type 1 contenant 1^1 est représentée par le rectangle gris

X					
	X	9			
X	X	7			
	4	6			
2	3		4	5	7'
1	2				

Le domino de 1^1 intersecte les dominos contenant 1^2 et 2^1 , donc $\mathfrak{C} = \{1^2, 2^1\}$. Par l'étape B de l'algorithme L , on insère 1^2 en ligne, ce qui donne

X					
	X	9			
X	X	7			
	4	6			
1	1	3	4	5	7'
		2			

Comme 2^1 appartient au même alphabet que la lettre insérée, par l'étape D.2.i, on marque 2^1 avec un prime et on l'insère dans la prochaine colonne. La première position possible en colonne du domino de type 1 contenant 2^1 est représentée par le rectangle gris

X					
	X	9			
X	X	7			
	4	6			
1	1	3	4	5	7'
		2			

L'ensemble \mathfrak{C} devient $\mathfrak{C} = \{2^2, 3^1\}$. Par l'étape D.1.ii, on insère le 2^2 en ligne, ce qui donne

X						
	X	9				
X	X	7				
	4	6				
1	1	2'	2	4	5	7'

L'ensemble \mathfrak{C} devient $\mathfrak{C} = \{3^1\}$. Par l'étape D.1.ii on insère 3^1 en ligne. La première position possible du domino de type 1 contenant 3^1 est représentée par le rectangle gris

X						
	X	9				
X	X	7				
	4	6				
1	1	2'	2	4	5	7'

le domino de 3^1 intersecte le domino contenant 4^1 , on insère 3^1 à la place de 4^1 , ce qui donne, par l'étape D.2.i

X						
	X	9				
X	X	7				
	3	6				
1	1	2'	2	4	5	7'

On marque 4^1 avec un prime et on l'insère dans la prochaine colonne. Sa première position possible est représentée par le rectangle gris

X						
	X	9				
X	X	7				
	3	6				
1	1	2'	2	4	5	7'

Le domino grisé contenant 4^1 est de même type que la lettre insérée, donc $\mathfrak{C} = \{4^1\}$. Par l'étape D.1.ii, on insère 4^1 dans la ligne suivante. La première position possible du domino de type 1 contenant 4^1 est représentée par le rectangle gris

2.4 Algorithmes d'insertion

X						
	X		9			
X		X		7		
		3		6		
1	1	2'	2	4'	5	7'

L'ensemble \mathfrak{C} devient $\mathfrak{C} = \{6^1\}$. Par l'étape D.1.ii on insère 6^1 en ligne. La première position possible du domino de type 2 contenant 6^1 est représentée par le rectangle gris

X						
	X		9			
X		X		7		
		3		4		
1	1	2'	2	4'	5	7'

donc $\mathfrak{C} = \{7^2\}$. Par l'étape D.2.ii on insère 7^2 en ligne. Il intersecte le domino de type 1 contenant 9^1 . On marque 9^1 avec un prime et on l'insère dans la prochaine colonne. La première position possible en colonne du domino de type 1 contenant $9^{1'}$ est représentée par le rectangle gris

X						
	X		X		7	
			6			
X		3		4		
1	1	2'	2	4'	5	7'

L'ensemble \mathfrak{C} devient $\mathfrak{C} = \{9^{1'}\}$. Par l'étape D.1.i.b, on insère $9^{1'}$ en colonne, ce qui donne

X						
	X		X		7	
			6			
X		3		4		9'
1	1	2'	2	4'	5	7'

Puisque $\mathfrak{C} = \emptyset$, l'algorithme s'arrête et rajoute un domino de type 1 au tableau de dominos décalé standard Q' étiqueté par 12 pour qu'il ait la même forme que le tableau ci dessus :

X					
	X		11		
X	X		9	10	
	7				12
1	2		4	5	8
			3		6

Nous donnons maintenant quelques propriétés de l'algorithme L .

Propriété 2.4.4. Soient $A_1 := \{a_1^1 < a_2^1 < a_3^1 < \dots\}$ et $A_2 := \{a_1^2 < a_2^2 < a_3^2 < \dots\}$ deux alphabets infinis totalement ordonnés. Dans le tableau Q'_{mix} obtenu par L , si le dernier domino inséré est de type 1 (resp. type 2) alors la dernière lettre insérée est dans A_1 (resp. A_2).

Démonstration. C'est une conséquence du fait que le nombre de dominos de type 1 et le nombre de dominos de type 2 dans une partition pavée décalée ne dépend ni du pavage ni des étiquettes des dominos. En effet, étant donnée une partition pavée décalée ayant le 2-quotient (μ, ν) , le nombre de dominos de type 1 (resp. type 2) correspond à la taille de la partition μ (resp. ν) (cf. paragraphe 2.2 ou la démonstration dans [CL95] de la bijection entre les tableaux de dominos et les paires de tableaux de Young). \square

Remarque 2.4.5. Soit P'_i le tableaux de dominos décalé obtenu en appliquant l'algorithme L à $\omega_1\omega_1 \dots \omega_i$. Soit P'_{i+1} le tableaux obtenu en insérant la lettre ω_{i+1} dans P'_i par l'algorithme L . Même si le pavage du tableau de dominos décalé P'_{i+1} est différent de celui P'_i , la forme de P'_{i+1} se déduit de celle de P'_i en ajoutant un domino.

Exemple 2.4.6. L'insertion du mot $1^12^12^26^15^11^1$ de $(A_1 \cup A_2)$ par l'algorithme L donne :

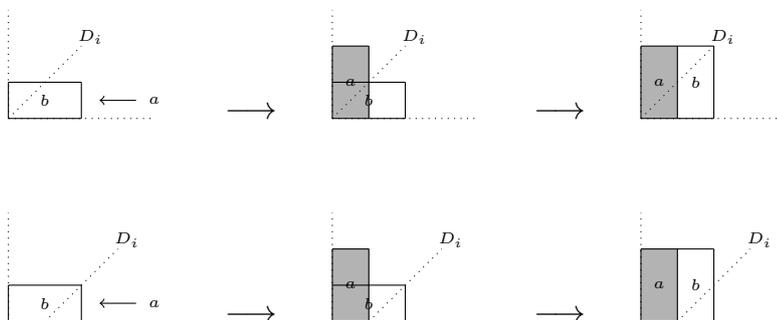
$$\begin{aligned}
 P'_{mix}(1^1) &= \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array}, & \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array} &= Q'_{mix}(1^1) \\
 & \downarrow \\
 P'_{mix}(1^12^1) &= \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array}, & \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array} &= Q'_{mix}(1^12^1) \\
 & \downarrow \\
 P'_{mix}(1^12^12^2) &= \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 2 \\ \hline \end{array}, & \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array} &= Q'_{mix}(1^12^12^2)
 \end{aligned}$$

2.4 Algorithmes d'insertion

$$\begin{array}{ccc}
 & & \downarrow \\
 P'_{mix}(1^1 2^1 2^2 6^1) = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 2 & \\ \hline & & & 6 \\ \hline \end{array}, & \begin{array}{|c|c|c|} \hline & 3 & \\ \hline 1 & 2 & 4 \\ \hline \end{array} = Q'_{mix}(1^1 2^1 2^2 6^1) \\
 & & \downarrow \\
 P'_{mix}(1^1 2^1 2^2 6^1 5^1) = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & 6 & \\ \hline 1 & 2 & 2 & \\ \hline & & & 5 \\ \hline \end{array}, & \begin{array}{|c|c|c|} \hline & 5 & \\ \hline 1 & 3 & \\ \hline & 2 & 4 \\ \hline \end{array} = Q'_{mix}(1^1 2^1 2^2 6^1 5^1) \\
 & & \downarrow \\
 P'_{mix}(1^1 2^1 2^2 6^1 5^1 1^1) = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & 2 & 2 & 6' \\ \hline 1 & & 1 & 5 \\ \hline \end{array}, & \begin{array}{|c|c|c|} \hline & 5 & 6 \\ \hline 1 & 3 & \\ \hline & 2 & 4 \\ \hline \end{array} = Q'_{mix}(1^1 2^1 2^2 6^1 5^1 1^1)
 \end{array}$$

Propriété 2.4.7. Soient $A_1 := \{a_1^1 < a_2^1 < a_3^1 < \dots\}$ et $A_2 := \{a_1^2 < a_2^2 < a_3^2 < \dots\}$ deux alphabets infinis totalement ordonnés. L'insertion d'une lettre de A_1 (resp. A_2) par l'algorithme L dans un tableau de dominos décalé T' , ne change pas les diagonales des dominos contenant les lettres de A_2 (resp. A_1) dans T' .

Démonstration. Soient $A_1 := \{a_1^1 < a_2^1 < a_3^1 < \dots\}$ et $A_2 := \{a_1^2 < a_2^2 < a_3^2 < \dots\}$ deux alphabets infinis totalement ordonnés. Soient a et b deux lettres appartenant à deux alphabets différents. Si $a = b$ (égaux en valeurs mais ont des types de dominos différents), soit a est insérée à la droite de b qui est sur D_i (dans ce cas b reste sur la diagonale D_i), soit on est dans l'un de ces cas



Si b est la plus petite lettre qui est strictement supérieure à a et que b est sur D_i alors

2.4 Algorithmes d'insertion

Dans tous les cas (même pour les insertions en colonne), le domino de type 1 et le domino de type 2 s'intersectent sur une seule case, le domino contenant b passe à la prochaine ligne ou colonne et reste toujours sur la même diagonale, car tout domino qui se trouverait à cette place s'intersecterait à son tour avec le domino de b et sera inséré en ligne ou en colonne, car il serait plus grand que b d'après les conditions de croissance dans les tableaux de dominos décalés. \square

Théorème 2.4.8. Soient $A_1 := \{a_1^1 < a_2^1 < a_3^1 < \dots\}$ et $A_2 := \{a_1^2 < a_2^2 < a_3^2 < \dots\}$ deux alphabets infinis totalement ordonnés. Étant donné un mot ω de $(A_1 \cup A_2)^*$, soient t'_1 et t'_2 les deux tableaux de Young décalés associés à $w|_{A_1}$ et $w|_{A_2}$ respectivement, obtenus par l'algorithme d'insertion mixte de Haiman à l'étape i . Soit $P'_{mix}(\omega)$ le tableaux obtenu, à l'étape i , en appliquant l'algorithme L à ω . Alors, les lettres de A_1 (resp. A_2) lues sur les diagonales de $P'_{mix}(\omega)$ sont les même lettres lues sur les diagonales de (t'_1) (resp. (t'_2)).

Démonstration. Par la propriété 2.4.7. \square

Corollaire 2.4.9. Soient $A_1 := \{a_1^1 < a_2^1 < a_3^1 < \dots\}$ et $A_2 := \{a_1^2 < a_2^2 < a_3^2 < \dots\}$ deux alphabets infinis totalement ordonnés. Étant donné un mot ω de $(A_1 \cup A_2)^*$, tous les mots obtenus par le produit de mélange de $w|_{A_1}$ et $w|_{A_2}$ donnent le même tableau de dominos décalé $P'_{mix}(\omega)$ par l'algorithme L , mais pas le même $Q'_{mix}(\omega)$.

Démonstration. Par la propriété 2.4.7. \square

Remarque 2.4.10. En appliquant l'algorithme L , si on s'intéresse qu'aux lettres appartenant au même alphabet, alors leur insertion aura le même comportement que leur insertion l'algorithme d'insertion de Haiman.

Exemple 2.4.11. L'insertion des mots $1^1 2^1 2^2 6^1 5^1 1^1$ et $1^1 2^1 6^1 5^1 2^2 1^1$ de $(A_1 \cup A_2)$ par l'algorithme L donne respectivement les deux paires de tableaux de dominos décalés :



Théorème 2.4.12. L'algorithme L est bijectif et associe à chaque mot de $(A_1 \cup A_2)^*$, une paire $(P'_{mix}(\omega), Q'_{mix}(\omega))$ de tableaux de dominos décalés, telles que :

- $P'_{mix}(\omega)$ et $Q'_{mix}(\omega)$ ont la même forme ;
- $P'_{mix}(\omega)$ est un tableau de domino décalé ;

- $Q'_{mix}(\omega)$ est un tableau de dominos décalé standard.

Démonstration. Soient $A_1 := \{a_1^1 < a_2^1 < a_3^1 < \dots\}$ et $A_2 := \{a_1^2 < a_2^2 < a_3^2 < \dots\}$ deux alphabets infinis totalement ordonnés. Étant donné un mot ω de $(A_1 \cup A_2)^*$, le tableau $P'_{mix}(\omega)$ est un tableau de domino décalé par construction. Il ne contient pas de lettre prime sur la diagonale car si une lettre prime est insérée dans une colonne, alors elle n'est plus sur D_0 et si on insère à sa place un domino de type différent, elle ne change pas de diagonale (cf. propriété 2.4.7), et si elle est substituée par une lettre de même type, on l'insère à la prochaine ligne (la diagonale augmente). Il est immédiat par construction que $P'_{mix}(\omega)$ et $Q'_{mix}(\omega)$ ont même forme et que $Q'_{mix}(\omega)$ est standard sans lettre prime par construction.

L'algorithme inverse de L est défini comme suit : soit (P', Q') une paire de tableaux de dominos décalés de même forme et de taille n , où Q' est standard. Notons $\mathcal{C}' = \emptyset$. L'étape principale de cet algorithme est de retrouver la dernière lettre ω_n qui a été insérée dans le tableaux P' . On identifie le n^e domino d de type $*$ qui a été inséré dans Q' et on rajoute à \mathcal{C}' l'ensemble des dominos qui s'intersectent avec la position de d dans P' .

A. tant que \mathcal{C}' n'est pas vide, on traite ses lettres dans l'ordre décroissant. Soit a la plus grande lettre de \mathcal{C}' :

- (1) si a n'est pas une lettre prime, alors :
 - (i) si le domino de a ne s'intersecte avec aucun autre domino, on supprime a de l'ensemble \mathcal{C}' et on passe à l'étape A.
 - (ii) sinon la lettre a a été insérée en ligne et provient donc d'une ligne en dessous. En partant de la ligne actuelle et en allant vers le bas, on cherche la première position possible pour le domino contenant a . On rajoute à \mathcal{C}' les lettres dont les dominos s'intersectent avec ce domino dans sa nouvelle position et on passe à l'étape A ;
- (2) si a est une lettre prime, alors :
 - (i) si le domino contenant a est de même couleur que le n^e domino de Q' alors il a été inséré en colonne, il provient donc d'une colonne à gauche. En partant de la colonne actuelle et en allant vers la gauche, on cherche la première position possible pour le dominos de a . On rajoute dans \mathcal{C}' les dominos qui s'intersectent avec ce domino dans sa nouvelle position. Si sa position précédente est sur D_0 alors on lui enlève le prime. Dans les deux cas on passe à l'étape A ;

2.4 Algorithmes d'insertion

- (ii) si le domino contenant a n'est pas de même couleur que le n^e domino de Q' alors il a été inséré en ligne, et provient donc d'une ligne au-dessous. En partant de la ligne actuelle et en allant vers le bas, on cherche la première position possible pour le domino de a . On rajoute à \mathfrak{C}' les lettres dont les dominos s'intersectent avec ce domino dans sa nouvelle position et on passe à l'étape A.

B. si le domino de a n'intersecte aucun autre domino et est à sa première position possible et que $\mathfrak{C}' = \emptyset$ alors $a = \omega_n$.

En traitant tous les dominos contenant $n-1, n-2, \dots, 1$ on obtient toutes les lettres du mot $\omega = \omega_1 \omega_2 \dots \omega_n$ associé à la paire (P', Q') . \square

Exemple 2.4.13. Considérons la paire de tableaux de dominos décalés suivante :

$$P' = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline X & & & & & & \\ \hline & X & X & & 7 & & \\ \hline & & 6 & & & & \\ \hline X & & 3 & 4 & & 9' & \\ \hline & & & & & & \\ \hline 1 & 1 & 2' & 2 & 4' & 5 & 7' \\ \hline \end{array}, \quad \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline X & & & & & \\ \hline & X & 11 & & & \\ \hline & X & & & & \\ \hline X & & 9 & 10 & & \\ \hline & & 7 & & & 12 \\ \hline & & & 4 & & 8 \\ \hline 1 & 2 & & 3 & 5 & 6 \\ \hline \end{array} = Q'$$

En appliquant l'algorithme inverse de L , on retrouve la dernière lettre qui a été inséré dans P' comme suit : on identifie dans P' la position du dernier domino rajouté à Q' :

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline X & & & & & \\ \hline & X & X & & 7 & \\ \hline & & 6 & & & \\ \hline X & & 3 & 4 & 9' & \\ \hline & & & & & \\ \hline 1 & 1 & 2' & 2 & 4' & 5 & 7' \\ \hline \end{array}$$

Le dernier domino qui a été inséré est de type 1, donc la dernière lettre insérée est dans A_1 . On pose l'ensemble $\mathfrak{C}' = \{9^{1'}\}$. Le domino de $9^{1'}$ est de même type que le dernier domino inséré, alors il a été inséré en colonne. Par l'étape A.2.i, on obtient

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline X & & & & & \\ \hline & X & X & & 7 & \\ \hline & & 6 & & & \\ \hline X & & 3 & 4 & & \\ \hline & & & & & \\ \hline 1 & 1 & 2' & 2 & 4' & 5 & 7' \\ \hline \end{array},$$

L'ensemble \mathfrak{C} devient $\mathfrak{C} = \{6^1\}$, le domino de 6^1 est de même type différent que le domino de la lettre insérée, il est sur D_0 et pas à sa première position, donc il a été inséré en ligne, par l'étape A.1.ii, on trouve

X							
	X	9					
X							
	X	7					
			3	6			
1	1	2'	2	4'	5	7'	

L'ensemble \mathfrak{C} devient $\mathfrak{C} = \{4^1\}$, le domino de 4^1 est de même type différent que le domino de la lettre insérée, il est sur D_0 et pas à sa première position, donc il a été inséré en ligne, par l'étape A.1.ii, on trouve

X							
	X	9					
X							
	X	7					
			3	6			
1	1	2'	2	4'	5	7'	

L'ensemble \mathfrak{C} devient $\mathfrak{C} = \{4^{1'}\}$, le $4^{1'}$ n'est pas à sa première position, il a été inséré en colonne, par l'étape A.2.ii, on obtient

X							
	X	9					
X							
	X	7					
			3	6			
1	1	2'	2	4	5	7'	

Donc $\mathfrak{C} = \{3^1\}$, le 3^1 n'est pas à sa première position, il a été inséré en ligne, par l'étape A.1.ii, on trouve

X							
	X	9					
X							
	X	7					
			4	6			
1	1	2'	2	4	5	7'	

L'ensemble \mathfrak{C} devient $\mathfrak{C} = \{2^{1'}, 2^2\}$, Comme le domino de 2^2 n'est pas du même type que le domino inséré, alors il a été inséré en ligne. Le domino de $2^{1'}$ est de même type que le dernier domino inséré, alors il a été inséré en colonne. Par les étapes A.2.i et A.2.ii, on obtient

2.4 Algorithmes d'insertion

X					
	X	9			
X		X	7		
		4	6		
1	1	3	4	5	7'
		2			

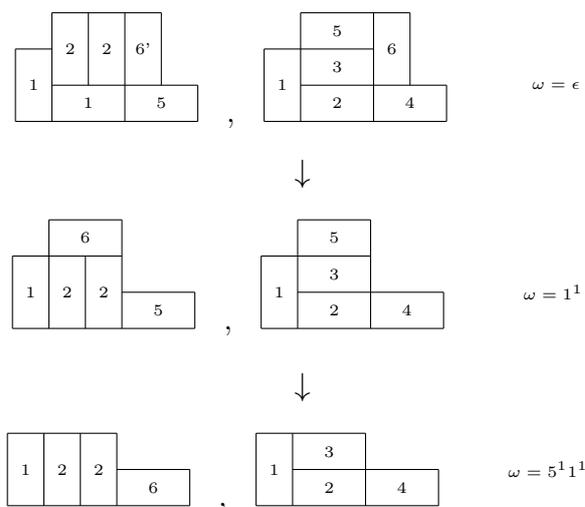
Donc $\mathfrak{C} = \{1^1, 1^2\}$, Comme le domino de 1^2 n'est pas du même type que le domino inséré, alors il a été inséré en ligne, par l'étape A.1.i, on a

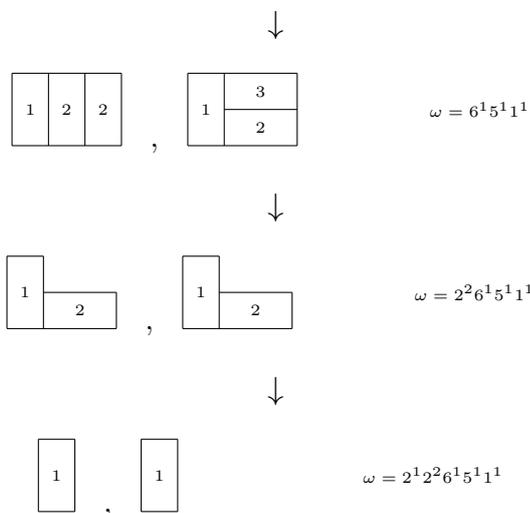
X					
	X	9			
X		X	7		
		4	6		
2		3	4	5	7'
1		2			

Le domino de 1^1 est à sa première position, donc l'algorithme s'arrête. La dernière lettre insérée est donc 1^1 . Le tableau de dominos décalé Q' devient :

X					
	X	11			
X		X	9	10	
		7			
1	2	4	5	8	
		3		6	

Exemple 2.4.14. Le mot ω de $(A_1 \cup A_2)$ associé à la paire de tableaux de dominos décalés suivante est obtenu par l'algorithme inverse de L comme suit :





donc le mot associé à la paire de tableaux de dominos décalés de départ est $\omega = 1^1 2^1 2^2 6^1 5^1 1^1$.

Théorème 2.4.15. *Deux mots ω_1 et ω_2 sont dans la même super classe plaxique décalée si et seulement s'ils ont le même tableau de dominos décalé par l'algorithme L (i.e, $P'_{mix}(\omega_1) = P'_{mix}(\omega_2)$).*

Démonstration. Par le théorème 2.4.12 et la propriété 2.4.7. □

Lemme 2.4.16. *L'algorithme L est compatible à la troncature. Autrement dit, étant donné un tableau de dominos décalé T' associé à un mot ω de $(A_1 \cup A_2)^*$, alors en supprimant les dominos des lettres supérieures à k^* , où $* = \{1, 2\}$, dans T' , on obtient le tableau de dominos décalé associé au mot $\omega|_{\{1^*, \dots, k^*\}}$.*

Démonstration. À partir des règles d'insertion de l'algorithme L , on observe que les lettres qui sont supérieures à une lettre k , n'affectent jamais le placement des lettres qui sont inférieures ou égales à k . □

Passons maintenant à un autre algorithme appelé H , qui associe à une permutation bicolore, un couple de tableaux de dominos décalé standard.

Définition 2.4.17. *Soient $A_1 := \{a_1^1 < a_2^1 < a_3^1 < \dots\}$ et $A_2 := \{a_1^2 < a_2^2 < a_3^2 < \dots\}$ deux alphabets infinis totalement ordonnés. Soit $\sigma = \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_n$ une permutation de $(A_1 \cup A_2)^*$ de taille n . Soit $\mathfrak{C} = \emptyset$. L'algorithme H associe à σ une paire de tableaux de dominos décalés standards notée $(P'_{mix}(\sigma), Q'_{mix}(\sigma))$. L'algorithme H construit étape par étape la suite de tableaux de dominos décalés standards $(\emptyset, \emptyset) = (P'_0, Q'_0), (P'_1, Q'_1), \dots, (P'_n, Q'_n) = (P'_{mix}(\sigma), Q'_{mix}(\sigma))$ en insérant à chaque étape la lettre σ_i^* . L'étape principale de cet algorithme*

2.4 Algorithmes d'insertion

consiste en l'insertion du domino de type $*$ contenant σ_i^* dans la première ligne du tableau de dominos décalé standard P'_{i-1} . Si σ_i^* ne peut pas être insérée dans cette ligne, on l'insère dans la ligne suivante de P'_{i-1} . On pose $\mathfrak{C} = \sigma_i^*$:

A. si la lettre σ_i^* est supérieure à toutes les lettres de la ligne, alors on insère le domino de σ_i^* à la fin de cette ligne, on supprime σ_i^* de l'ensemble \mathfrak{C} et on passe à l'étape D ;

B. sinon on insère σ_i^* à la position du domino contenant la plus petite lettre a qui est strictement supérieure à σ_i^* . On rajoute dans \mathfrak{C} les lettres dont les dominos s'intersectent avec le domino de σ_i^* dans sa nouvelle position. On supprime σ_i^* de l'ensemble \mathfrak{C} et on passe à l'étape C ;

C. tant que l'ensemble \mathfrak{C} n'est pas vide, on traite ses éléments dans l'ordre croissant. Soit a la plus petite lettre de cet ensemble :

(1) si le domino contenant la lettre a n'est pas sur D_0 alors on insère le domino contenant a dans la ligne suivante ;

(2) si le domino contenant la lettre a est sur D_0 alors :

(i) si le domino contenant la lettre a est de même type que le domino de la lettre σ_i^* , alors on l'insère dans la colonne suivante, et toutes les insertions qui vont suivre (provoquées par σ_i^*) s'insèrent en colonne ;

(ii) dans tous les autres cas, on insère le domino contenant a dans la ligne suivante.

D. le tableau de domino décalé Q_i est obtenu en rajoutant un domino à Q'_{i-1} afin que Q_i ait la même forme que P'_i . Ce domino est étiqueté avec i si la dernière insertion est en ligne et par i' sinon.

Propriété 2.4.18. Soient $A_1 := \{a_1^1 < a_2^1 < a_3^1 < \dots\}$ et $A_2 := \{a_1^2 < a_2^2 < a_3^2 < \dots\}$ deux alphabets infinis totalement ordonnés. L'insertion d'une lettre de A_1 (resp. A_2) par l'algorithme H dans un tableau de dominos décalé standard T' ne change pas les diagonales auxquelles appartiennent les dominos contenant les lettres de A_2 (resp. A_1) dans T' .

Démonstration. On procède de la même manière que pour la démonstration de la propriété 2.4.7. □

Exemple 2.4.19. Soit P' un tableau de dominos décalé et soit Q' le tableau de dominos décalé standard correspondant à P' obtenu par l'algorithme H à une certaine étape :

$$P' = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline X & & & \\ \hline & X & 12 & \\ \hline X & X & 11 & \\ \hline & 6 & 10 & \\ \hline 3 & 5 & 8 & 9 \\ \hline 1 & 4 & 7 & \\ \hline \end{array}, \quad \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline X & & & \\ \hline & X & 11 & \\ \hline X & X & 7 & 10 \\ \hline & 5 & & \\ \hline 1 & 2 & 4 & 6' \\ \hline & & 3' & 8 \\ \hline \end{array} = Q'.$$

On va insérer la lettre 2^1 dans le tableau de dominos décalé P' , et voir en détail les étapes utilisées pour cette insertion. L'algorithme commence par l'ensemble $\mathfrak{C}' = \{2^1\}$. La première position possible du domino de type 1 contenant 2^1 est représentée par le rectangle gris

X			
	X	12	
X	X	11	
	6	10	
	3	5	8
	1	4	7
			9

Par l'étape B de l'algorithme H , le domino de 2^1 est inséré à la position de 3^1 . Comme 3^1 est sur D_0 et que son domino est de même type que le domino de la lettre insérée, alors par l'étape C.2.i, on l'insère dans la prochaine colonne, donc l'ensemble \mathfrak{C}' devient $\mathfrak{C}' = \{3^1\}$. La première position possible du domino de type 1 contenant 3^1 est représentée par le rectangle gris

X			
	X	12	
X	X	11	
	6	10	
	2	5	8
	1	4	7
			9

Il intersecte les dominos de 4^2 et 5^1 , donc $\mathfrak{C} = \{4^2, 5^1\}$. Le domino de 4^2 est de type différent du domino de la lettre insérée, par l'étape C.2.ii, le domino de 4^2 est donc inséré en ligne et par l'étape l'étape C.2.i le domino de 5^1 est inséré en colonne, sa première position possible est représentée par le rectangle gris

X			
	X	12	
X	X	11	
	6	10	
	2	3	8
	1	4	7
			9

2.4 Algorithmes d'insertion

Il intersecte les dominos de 7^2 et 8^1 , donc $\mathfrak{C} = \{7^2, 8^1\}$, le domino de 7^2 est de type différent du domino de la lettre insérée, par l'étape C.2.ii, le domino de 7^2 est donc inséré en ligne et par l'étape l'étape C.2.i le domino de 8^1 est inséré en colonne, sa première position possible est représentée par le rectangle gris

X							
	X	12					
X	X	11					
	6	10					
2							
1	3	4	5	7	9		

Par l'étape C.2.i de l'algorithme H , le domino de 8^1 est inséré à la position de 9^1 . Comme le domino de 9^1 est de même type que la lettre insérée, alors par l'étape C.2.i, on l'insère dans la prochaine colonne, donc l'ensemble \mathfrak{C}' devient $\mathfrak{C}' = \{9^1\}$. La première position possible du domino de type 1 contenant 9^1 est représentée par le rectangle gris

X							
	X	12					
X	X	11					
	6	10					
2							
1	3	4	5	7	8		

il n'intersecte aucun domino, donc $\mathfrak{C} = \emptyset$. On l'insère à cette position

X							
	X	12					
X	X	11					
	6	10					
2							
1	3	4	5	7	8	9	

et on rajoute au tableau de dominos décalé Q' un domino pour qu'il ait la même forme que le tableau ci-dessus, puisque ce domino a été crée par une insertion en colonne alors on l'étiquette par $12^{1'}$, et on obtient

X							
	X	11					
X	X	7	10				
	5						
1	2	4	6'	9'			
		3'		8	12'		

Exemple 2.4.20. L'insertion de la permutation bicolore $2^2 3^1 5^1 4^1 6^2 1^2$ de $(A_1 \cup A_2)^*$ par l'algorithme H donne :

$$\begin{aligned}
 P'_{mix}(2^2) &= \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline \end{array} , \quad \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array} = Q'_{mix}(2^2) \\
 &\downarrow \\
 P'_{mix}(2^2 3^1) &= \begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array} , \quad \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array} = Q'_{mix}(2^2 3^1) \\
 &\downarrow \\
 P'_{mix}(2^2 3^1 5^1) &= \begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 5 \\ \hline \end{array} , \quad \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline \end{array} = Q'_{mix}(2^2 3^1 5^1) \\
 &\downarrow \\
 P'_{mix}(2^2 3^1 5^1 4^1) &= \begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 5 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 4 \\ \hline \end{array} , \quad \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 4 \\ \hline \end{array} = Q'_{mix}(2^2 3^1 5^1 4^1) \\
 &\downarrow \\
 P'_{mix}(2^2 3^1 5^1 4^1 6^2) &= \begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 5 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 4 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 6 \\ \hline \end{array} , \quad \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 4 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 5 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 6 \\ \hline \end{array} = Q'_{mix}(2^2 3^1 5^1 4^1 6^2) \\
 &\downarrow \\
 P'_{mix}(2^2 3^1 5^1 4^1 6^2 1^2) &= \begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 5 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 4 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 6 \\ \hline \end{array} , \quad \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 4 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 5 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 6 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 6' \\ \hline \end{array} = Q'_{mix}(2^2 3^1 5^1 4^1 6^2 1^2)
 \end{aligned}$$

Théorème 2.4.21. Soient $A_1 := \{a_1^1 < a_2^1 < a_3^1 < \dots\}$ et $A_2 := \{a_1^2 < a_2^2 < a_3^2 < \dots\}$ deux alphabets infinis totalement ordonnés. Étant donnée une permutation bicolore σ de $(A_1 \cup A_2)^*$, soient t'_1 et t'_2 les deux tableaux de Young décalés associés à $\sigma|_{A_1}$ et $\sigma|_{A_2}$ respectivement, obtenus par l'algorithme d'insertion gauche-droit de Haiman [Hai89] à l'étape i . Soit $P'_{mix}(\sigma)$ le tableau obtenu, à l'étape i , en appliquant l'algorithme H à σ . Alors, les lettres de A_1 (resp. A_2) lues sur les diagonales de $P'_{mix}(\sigma)$ sont les mêmes lettres que celles lues sur les diagonales de (t'_1) (resp. (t'_2)).

Démonstration. Par la propriété 2.4.18. □

Corollaire 2.4.22. Soient $A_1 := \{a_1^1 < a_2^1 < a_3^1 < \dots\}$ et $A_2 := \{a_1^2 < a_2^2 < a_3^2 < \dots\}$ deux alphabets infinis totalement ordonnés. Étant donnée une permutation bicolore σ de $(A_1 \cup A_2)^*$, tous les mots obtenus par le produit de mélange de $\sigma|_{A_1}$ et $\sigma|_{A_2}$ donnent le même tableau de dominos décalé $P'_{mix}(\sigma)$ par l'algorithme H , mais pas le même $Q'_{mix}(\sigma)$.

Démonstration. Par la propriété 2.4.18. □

Théorème 2.4.23. L'algorithme H est bijectif et associe à chaque permutation de $(A_1 \cup A_2)^*$ une paire $(P'_{mix}(\sigma), Q'_{mix}(\sigma))$ de tableaux de dominos décalés standard, tels que :

- $P'_{mix}(\sigma)$ et $Q'_{mix}(\sigma)$ ont la même forme ;
- $P'_{mix}(\sigma)$ est un tableau de domino décalé standard ;
- $Q'_{mix}(\sigma)$ est un tableau de dominos décalé standard avec lettre primes.

Démonstration. L'algorithme inverse de H est défini comme suit : soit (P', Q') une paire de tableaux de dominos décalés standards de même forme et de taille n , où P' est sans lettre prime. Soit $\mathfrak{C}' = \emptyset$. L'étape principale de cet algorithme est de retrouver la dernière lettre σ_n qui a été insérée dans le tableaux P' . On identifie le n^e domino d de type $*$ qui a été inséré dans Q' et on rajoute à \mathfrak{C}' l'ensemble des dominos qui s'intersectent avec la position de d dans P' .

A. tant que \mathfrak{C}' n'est pas vide, on traite ses lettres dans l'ordre décroissant. Soit a la plus grande lettre de \mathfrak{C}' :

- (1) si d ne contient pas une lettre prime, alors :
 - (i) si le domino de a ne s'intersecte avec aucun autre domino, on supprime a de l'ensemble \mathfrak{C}' et on passe à l'étape A ;
 - (ii) sinon la lettre a a été insérée en ligne et donc elle provient d'une ligne au-dessous. En partant de la ligne actuelle et en allant vers le bas, on cherche la première position possible pour le domino contenant a . On rajoute à \mathfrak{C}' les lettres dont les dominos s'intersectent avec ce domino dans sa nouvelle position et on passe à l'étape A ;
- (2) si d contient une lettre prime, alors :

- (i) si le domino contenant a est de même couleur que le n^e domino de Q' alors il a été inséré en colonne, elle provient donc d'une colonne à gauche. En partant de la colonne actuelle et en allant vers la gauche, on cherche la première position possible pour le domino de type $*$ contenant a . On rajoute à \mathfrak{C}' les lettres dont les dominos s'intersectent avec ce domino dans sa nouvelle position et on passe à l'étape A ;
- (ii) si le domino contenant a n'est pas de même couleur que le n^e domino de Q' alors il a été inséré en ligne, et il provient d'une ligne au-dessous. En partant de la ligne actuelle et en allant vers le bas, on cherche la première position possible pour le domino de type $*$ contenant a . On rajoute à \mathfrak{C}' les lettres dont les dominos s'intersectent avec ce domino dans sa nouvelle position et on passe à l'étape A ;

B. si le domino de a ne s'intersecte avec aucun autre domino et est à sa première position possible alors $a = \sigma_n$. Dans ce cas $\mathfrak{C}' = \emptyset$;

En traitant les dominos contenant $n - 1, n - 2, \dots, 1$ de Q' on obtient toutes les lettres du mot $\sigma = \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_n$ associé à la paire (P', Q') . \square

Exemple 2.4.24. Considérons la paire de tableaux de dominos décalés suivante :

$$P' = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline X & & & & & & & \\ \hline & X & 12 & & & & & \\ \hline X & X & 11 & & & & & \\ \hline & 6 & 10 & & & & & \\ \hline 2 & & & & & & & \\ \hline 1 & & & & & & & \\ \hline \end{array}, \quad \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline X & & & & & & \\ \hline & X & 11 & & & & \\ \hline X & X & & 7 & 10 & & \\ \hline & 5 & & & & & \\ \hline 1 & 2 & & 4 & & 9' & \\ \hline & & & 3' & 6' & 8 & 12' \\ \hline \end{array} = Q'$$

En appliquant l'algorithme inverse de H , on retrouve la dernière lettre qui a été insérée dans P' comme suit : on identifie dans P' la position du dernier domino rajouté à Q' ,

X							
	X	12					
X	X	11					
	6	10					
2							
1							9

Le dernier domino inséré est de type 1 et contient une lettre prime, donc la dernière lettre insérée est dans A_1 et elle a été insérée en colonne. On pose l'ensemble $\mathfrak{C}' = \{9^1\}$. Par l'étape A.2.i, on obtient

2.4 Algorithmes d'insertion

X						
	X	12				
X	X	11				
	6	10				
2						
1	3	4	5	7	9	

L'ensemble \mathcal{C} devient $\mathcal{C}' = \{8^1\}$, le domino de 8^1 est de même type que le domino inséré, donc il a été inséré en colonne, sa dernière position est la position grisée

X						
	X	12				
X	X	11				
	6	10				
2						
1	3	4	5	7	9	

L'ensemble \mathcal{C} devient $\mathcal{C}' = \{5^1, 7^2\}$, le domino de 5^1 est de même type que le domino inséré, donc il a été inséré en colonne, sa dernière position est la position grisée. Le domino de 7^2 est de type différent du type du domino inséré, il a donc été inséré en ligne, par l'étape A.2.ii, on obtient

X						
	X	12				
X	X	11				
	6	10				
2						
1	3	4	8	9		

L'ensemble \mathcal{C} devient $\mathcal{C}' = \{3^1, 4^2\}$, le domino de 3^1 est de même type que le domino inséré, donc il a été inséré en colonne, sa dernière position est la position grisée. Le domino de 4^2 est de type différent du type du domino inséré, il a donc été inséré en ligne, par l'étape A.2.ii, on obtient

X						
	X	12				
X	X	11				
	6	10				
2						
1	4	7	8	9		

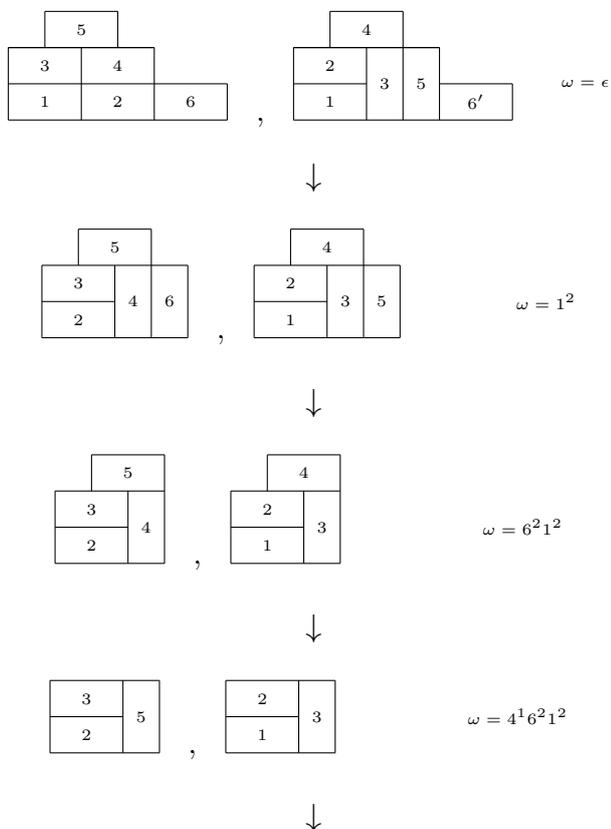
L'ensemble \mathcal{C} devient $\mathcal{C}' = \{2^1\}$, le domino de 2^1 est à sa première position, il est de même type que le domino inséré, donc l'algorithme termine. La lettre qui a été insérée est la lettre 2^1 dans le tableau suivant

X				
	X	12		
X	X	11		
	6	10		
3	5	8		9
1	4	7		

qui correspond au tableau de domino décalé standard avec des lettre prime Q' suivant

X				
	X	11		
X	X	7	10	
	5			
1	2	4	6'	9'
		3'		8

Exemple 2.4.25. La permutation σ de $(A_1 \cup A_2)$ associée à la paire de tableaux de dominos décalés suivante est obtenue par l'algorithme inverse de H comme suit :



2.4 Algorithmes d'insertion

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array} , & \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array} & \omega = 5^1 4^1 6^2 1^2 \\
 & \downarrow & \\
 \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline \end{array} , & \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array} & \omega = 3^1 5^1 4^1 6^2 1^2
 \end{array}$$

Donc la permutation bicoloré associée à la paire de tableaux de dominos décalés standards de départ est $\sigma = 2^2 3^1 5^1 4^1 6^2 1^2$.

Conjecture 2.4.26. Soient $A_1 := \{a_1^1 < a_2^1 < a_3^1 < \dots\}$ et $A_2 := \{a_1^2 < a_2^2 < a_3^2 < \dots\}$ deux alphabets infinis totalement ordonnés. Étant donnée une permutation bicoloré σ de $(A_1 \cup A_2)^*$, alors :

$$L(\sigma) = (P, Q) \Leftrightarrow H(\sigma^{-1}) = (Q, P)$$

Exemple 2.4.27. L'insertion de la permutation bicoloré $6^2 1^2 2^1 4^1 3^1 5^2$ de $(A_1 \cup A_2)$ qui est l'inverse de la permutation de l'exemple 2.4.20 par l'algorithme L donne :

$$\begin{array}{ccc}
 P'_{mix}(6^2) = \begin{array}{|c|} \hline 6 \\ \hline \end{array} , & \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array} = Q'_{mix}(6^2) \\
 & \downarrow & \\
 P'_{mix}(6^2 1^2) = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 6' \\ \hline \end{array} , & \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array} = Q'_{mix}(6^2 1^2) \\
 & \downarrow & \\
 P'_{mix}(6^2 1^2 2^1) = \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 6' \\ \hline 1 & \\ \hline \end{array} , & \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & \\ \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array} = Q'_{mix}(6^2 1^2 2^1) \\
 & \downarrow & \\
 P'_{mix}(6^2 1^2 2^1 4^1) = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & & 6' \\ \hline 1 & 4 & \\ \hline \end{array} , & \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 4 \\ \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array} = Q'_{mix}(6^2 1^2 2^1 4^1) \\
 & \downarrow & \\
 P'_{mix}(6^2 1^2 2^1 4^1 3^1) = \begin{array}{|c|c|c|} \hline & 4 & \\ \hline 2 & & 6' \\ \hline 1 & 3 & \\ \hline \end{array} , & \begin{array}{|c|c|} \hline & 5 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array} = Q'_{mix}(6^2 1^2 2^1 4^1 3^1) \\
 & \downarrow & \\
 P'_{mix}(6^2 1^2 2^1 4^1 3^1 5^2) = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & 4 & & \\ \hline 2 & & & 6' \\ \hline 1 & 3 & 5 & \\ \hline \end{array} , & \begin{array}{|c|c|c|} \hline & 5 & \\ \hline 3 & 4 & \\ \hline 1 & 2 & 6 \\ \hline \end{array} = Q'_{mix}(6^2 1^2 2^1 4^1 3^1 5^2)
 \end{array}$$

Chapitre 3

Unimodalité dans le triangle eulérien

La question de l'unimodalité des suites associées aux triangles arithmétiques trouve ses racines dans dans les travaux de Tanny et Zuker [TZ74, TZ76, TZ78] sur l'unimodalité des suites se trouvant sur les diagonales du triangle de Pascal. Plusieurs autres travaux ont traité la question de l'unimodalité des suites associées au triangle de Pascal. En 2015, Belbachir et Szalay [BS08] ont prouvé que les suites se trouvant sur n'importe quelle direction finie dans le triangle de Pascal sont unimodales. Le triangle de Pascal n'est pas le seul triangle arithmétique qui a été étudié, d'autres triangles comme les triangles de Stirling de première et deuxième espèce ont aussi été étudiés dans ce sens.

Dans ce chapitre, nous nous intéressons aux suites associées aux différentes directions dans le triangle eulérien. Nous commençons dans le paragraphe 3.1 par une étude combinatoire de ces suites en donnant l'interprétation combinatoire ainsi que la relation de récurrence des suites associées à la direction $(1, 1)$ dans le triangle eulérien, puis on généralise ce résultat pour les suites associées à la direction $(1, t)$, où t est un entier positif. Nous démontrons ensuite dans le paragraphe 3.2 que les suites se trouvant sur n'importe quelle direction finie sont log-concaves et donc unimodales. Pour aboutir à ce résultat, nous passons par trois étapes : nous démontrons dans un premier temps que les suites associées à la direction $(1, 1)$ dans le triangle eulérien sont log-concaves et donc unimodales. Puis, nous généralisons ce résultat aux directions $(1, t)$ dans le triangle eulérien, où t est un entier positif. Enfin, nous démontrons que les suites associées aux directions (r, q) , où r est un entier positif ou nul et q est un entier, tel que $r + q \geq 0$, sont log-concaves et donc unimodales.

Ce chapitre est un travail en commun avec Hacène Belbachir et Assia Tebtoub suite à un séjour d'Assia à l'université de Marne-la-Vallée.

3.1 Combinatoire des suites associées aux différentes directions

3.1.1 Nombres eulériens avec succession d'ordre 2

Dans ce paragraphe, on s'intéresse aux suites se trouvant sur les diagonales principales du triangle eulérien. En d'autres mots, ce sont les suites associées à la direction $(1, 1)$ du triangle eulérien (cf. table 3.1.1). On donne

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1						
2	1	1					
3	1	4	1				
4	1	11	11	1			
5	1	26	66	26	1		
6	1	57	302	302	57	1	
7	1	120	1191	2416	1191	120	1

TABLE 3.1.1 : Direction $(1, 1)$ dans le triangle eulérien.

une interprétation combinatoire de ces suites en terme de permutations et de chemins nord-est étiquetés, puis on présente la relation de récurrence associée à ces suites.

Définition 3.1.1. Soit $\sigma = \sigma_1\sigma_2 \cdots \sigma_n$ une permutation de taille n et soit i un entier positif, où $1 \leq i \leq n-2$. On dit que la position i est une **2-descente** de σ si $\sigma_i > \sigma_{i+1} > \sigma_{i+2}$.

Définition 3.1.2. Soit $\mathfrak{S}_n^{[2]}$ l'ensemble des permutations de taille n tel que le nombre de descentes dans chaque bloc maximal de descentes consécutives est pair. La permutation de taille n n'ayant pas de descentes est aussi dans $\mathfrak{S}_n^{[2]}$.

Exemple 3.1.3. La permutation 753214986 à deux blocs maximaux de descentes consécutives. Le premier bloc 75321 comporte quatre descentes et le deuxième 986 en comporte deux. Chaque bloc a un nombre pair de descentes. La permutation 753214986 appartient donc à l'ensemble $\mathfrak{S}_9^{[2]}$.

En revanche, la permutation 431975286 a trois blocs maximaux de descentes consécutives. Le premier bloc 431 comporte deux descentes, le deuxième 9752

3.1 Combinatoire des suites associées aux différentes directions

en comporte trois et le troisième 86 comporte une seule descente. Le nombre de descentes dans le deuxième et troisième bloc n'est pas un nombre pair. La permutation 431975286 n'appartient donc pas à l'ensemble $\mathfrak{S}_9^{[2]}$.

Exemple 3.1.4. Les éléments de $\mathfrak{S}_6^{[2]}$ ayant deux 2-descentes disjointes sont

165432, 265431, 321654, 365421, 421653, 431652, 432651, 465321,
 521643, 531642, 532641, 541632, 542631, 543216, 543621, 564321,
 621543, 631542, 632541, 641532, 642531, 643215, 643521, 651432,
 652431, 653214, 653421, 654213, 654312.

Définition 3.1.5. Soient n et k deux entiers positifs vérifiant $0 \leq 2k < n$. On notera $\mathcal{E}^{[2]}(n, k)$ l'ensemble des permutations de $\mathfrak{S}_n^{[2]}$ ayant k 2-descentes disjointes tel que par récurrence sur n :

- soit $\sigma|_{\{1, \dots, n-2\}} \in \mathcal{E}^{[2]}(n-2, k-1)$;
- ou $\sigma|_{\{1, \dots, n-1\}} \in \mathcal{E}^{[2]}(n-1, k)$.

Le nombre eulérien avec succession d'ordre 2, noté $E^{[2]}(n, k)$, est le cardinal de $\mathcal{E}^{[2]}(n, k)$.

Exemple 3.1.6. Les éléments de $\mathcal{E}^{[2]}(6, 2)$ sont

165432, 321654, 365421, 431652, 543216, 543621,
 564321, 651432, 653214, 653421, 654312.

Remarque 3.1.7. Entre autres, la permutation 654213 qui appartient à $\mathfrak{S}_6^{[2]}$ n'est pas dans $\mathcal{E}^{[2]}(6, 2)$ puisque la permutation $654213|_{\{1,2,3,4,5\}} = 54213$ comporte un nombre impair de descentes (elle n'est donc pas dans $\mathcal{E}^{[2]}(5, 2)$) et la permutation $654213|_{\{1,2,3,4\}} = 4213$ n'est pas dans $\mathcal{E}^{[2]}(4, 1)$, car la permutation $4213|_{\{1,2,3\}} = 213$ comporte un nombre impair de descentes (elle n'est donc pas dans $\mathcal{E}^{[2]}(3, 1)$), la permutation $4213|_{\{1,2\}} = 21$ a aussi un nombre impair de descentes (elle n'est donc pas dans $\mathcal{E}^{[2]}(2, 0)$).

Les nombres eulériens avec succession d'ordre 2 vérifient la relation de récurrence suivante :

Théorème 3.1.8. Soient n et k deux entiers positifs. On a :

$$E^{[2]}(n, k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0 \text{ et } 0 \leq n < 2, \\ (k+1)E^{[2]}(n-1, k) + (n-2k)E^{[2]}(n-2, k-1) & \text{si } n \geq 2 \text{ et } 0 \leq 2k < n, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.1)$$

Démonstration. Pour obtenir une permutation de taille n ayant k 2-descentes à partir d'une permutation σ de $\mathcal{E}^{[2]}(n-1, k)$, on place n soit à la fin de σ , soit entre les deux premiers éléments qui forment une des k 2-descentes de σ . Dans ce cas, on a $k+1$ positions possibles pour placer n . Pour obtenir une permutation de taille n ayant k 2-descentes à partir d'une permutation σ de $\mathcal{E}^{[2]}(n-2, k-1)$, on place n et $n-1$ qui forment une descente dans toutes les positions sauf celles qui forment les $k-1$ 2-descentes de σ , et on a $(n-2) - 2(k-1) = n-2k$ positions possibles pour le faire. Les permutations obtenues à partir des permutations de $\mathcal{E}^{[2]}(n-1, k)$ et $\mathcal{E}^{[2]}(n-2, k-1)$ sont toujours différentes. En effet, les premières sont obtenues en posant n soit à la fin de σ , soit entre les deux premières positions qui forment une des k 2-descentes de σ , de sorte que, dans cet ensemble, n et $n-1$ ne forment jamais de descente. Et comme on prend en compte toutes les positions possibles, on obtient tous les éléments de $\mathcal{E}^{[2]}(n, k)$. \square

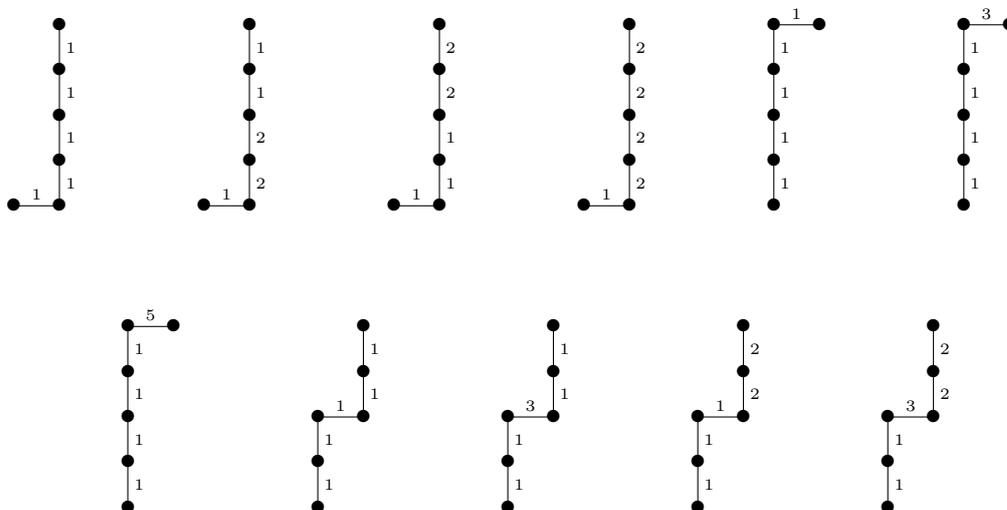
Définition 3.1.9. *Un chemin nord-est étiqueté avec succession d'ordre 2 noté $P^{[2]}$ est un chemin nord-est de Gasharov vérifiant que tout pas vertical appartient à un bloc maximal de pas verticaux consécutifs de cardinal pair et que chaque pas horizontal est à un niveau impair et tel que :*

- *le i^e pas horizontal de $P^{[2]}$ est étiqueté avec l'un des entiers $1, 3, 5, \dots, 1+2k_i$, où k_i est le nombre de 2-pas verticaux parmi les i premiers pas de $P^{[2]}$;*
- *en regroupant les pas verticaux par paires disjointes de 2-pas verticaux, le i^e 2-pas vertical de $P^{[2]}$ est étiqueté par un même entier inférieur ou égal à un plus le nombre de pas horizontaux parmi les i premiers pas de $P^{[2]}$.*

On notera $\mathcal{P}^{[2]}(n)$ l'ensemble des chemins nord-est étiquetés avec succession d'ordre 2 de taille n , et on notera $\mathcal{P}^{[2]}(n, k)$ l'ensemble des chemins de $\mathcal{P}^{[2]}(n)$ ayant k 2-pas verticaux. Le cardinal de $\mathcal{P}^{[2]}(n, k)$ sera noté $P^{[2]}(n, k)$.

Exemple 3.1.10. Les chemins nord-est étiquetés avec succession d'ordre 2 de $\mathcal{P}^{[2]}(6, 2)$ sont

3.1 Combinatoire des suites associées aux différentes directions



Théorème 3.1.11. Soient n et k deux entiers positifs vérifiant $2k < n$. Il y a une bijection entre l'ensemble $\mathcal{E}^{[2]}(n, k)$ et l'ensemble $\mathcal{P}^{[2]}(n, k)$.

On rappelle que pour tout $n \geq 1$ et $0 \leq k < n$, il y a une bijection due à Gasharov entre l'ensemble des permutations de taille n ayant k descentes et l'ensemble de tous les chemins étiquetés de Gasharov de taille n ayant k pas verticaux (cf. proposition 1.1.42). Pour prouver le théorème 3.1.11 on démontre que la bijection de Gasharov reste valable si on restreint l'ensemble des permutations de taille n ayant k descentes à l'ensemble $\mathcal{E}^{[2]}(n, k)$ et l'ensemble de tous les chemins étiquetés de Gasharov de taille n ayant k pas verticaux à l'ensemble $\mathcal{P}^{[2]}(n, k)$.

Démonstration. (Théorème 3.1.11) Soit $P^{[2]}$ un chemin nord-est étiqueté avec succession d'ordre 2 de $\mathcal{P}^{[2]}(n, k)$. En utilisant la bijection de Gasharov (cf. proposition 1.1.42), on obtient sa permutation correspondante σ de taille n ayant k 2-descentes.

Par récurrence sur n , si le dernier pas de $P^{[2]}$ est un pas horizontal, alors en le supprimant, on obtient un chemin nord-est étiqueté avec succession d'ordre 2 de taille $n - 1$ qui correspond à $\sigma|_{\{1, \dots, n-1\}}$. Cette permutation $\sigma|_{\{1, \dots, n-1\}}$ aura donc k 2-descentes. Si le dernier pas de $P^{[2]}$ est un pas vertical, en le supprimant avec le pas vertical qui le précède, on obtient un chemin nord-est étiqueté avec succession d'ordre 2 de taille $n - 2$ qui correspond à la permutation $\sigma|_{\{1, \dots, n-2\}}$ qui a donc $k - 1$ 2-descentes. Alors, les permutations qui correspondent aux chemins nord-est étiquetés avec succession d'ordre 2 de taille n ayant k double pas verticaux sont les permutations de $\mathcal{E}^{[2]}(n, k)$. Il y a donc une injection de $\mathcal{P}^{[2]}(n, k)$ dans $\mathcal{E}^{[2]}(n, k)$. Il reste à montrer que le chemin correspondant à une permutation de $\mathcal{E}^{[2]}(n, k)$ se trouve bien dans

$\mathcal{P}^{[2]}(n, k)$. On fait cela par récurrence sur n . D'après la relation de récurrence du théorème 3.1.8, pour passer d'une permutation σ de $\mathcal{E}^{[2]}(n-1, k)$ à une permutation σ' dans $\mathcal{E}^{[2]}(n, k)$ on place n entre les deux premières positions qui forment une 2-descente ou bien à la fin de cette permutation et il y a donc $2k+1$ positions pour le faire. Ce qui se traduit dans le chemin nord-est étiqueté de Gasharov correspondant par la création d'un pas horizontal étiqueté avec les entiers $1, 3, 5, \dots, 2k+1$. D'après la même relation de récurrence du théorème 3.1.8, pour passer d'une permutation σ de $\mathcal{E}^{[2]}(n-1, k-1)$ à une permutation σ' dans $\mathcal{E}^{[2]}(n, k)$, on place n et $n-1$ entre les positions qui forment une montée ou bien au début de cette permutation et il y a donc $n-2k$ positions pour le faire, ce qui se traduit dans le chemin nord-est étiqueté de Gasharov correspondant par la création d'un 2-pas vertical tels que les 2 pas verticaux qui le forment sont étiquetés par le même entier entre 1 et le nombre de montées plus un (où le nombre de montées correspond au nombre de pas horizontaux). Donc le chemin correspondant à une permutation de $\mathcal{E}^{[2]}(n, k)$ se trouve bien dans $\mathcal{P}^{[2]}(n, k)$. \square

Exemple 3.1.12. Les permutations de $\mathcal{E}^{[2]}(6, 2)$ sont

$$165432, 321654, 365421, 431652, 543216, 543621, \\ 564321, 651432, 653214, 653421, 654312.$$

et correspondent aux chemins nord-est étiquetés avec succession d'ordre 2 de taille 6 ayant deux 2-pas verticaux de la figure 3.1.1.

Corollaire 3.1.13. *Soient n et k deux entiers positifs. Le nombre de chemins nord-est étiquetés avec succession d'ordre 2 de taille n ayant k 2-pas verticaux $P^{[2]}(n, k)$ vérifie la relation de récurrence*

$$P^{[2]}(n, k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0 \text{ et } 0 \leq n < 2, \\ (k+1)P^{[2]}(n-1, k) + (n-2k)P^{[2]}(n-2, k-1) & \\ \text{si } n \geq 2 \text{ et } 0 \leq 2k < n, & \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.2)$$

Démonstration. Par le théorème 3.1.11. \square

Définition 3.1.14. *Soit $\sigma = \sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_n$ une permutation de taille n et soit i un entier positif, où $1 \leq i \leq n-2$. On dit que la position i est une 2-montée de σ si $\sigma_i < \sigma_{i+1} < \sigma_{i+2}$.*

Étant donnée une permutation σ , on rappelle que le nombre d'excédences de σ est le nombre de montées dans la décomposition en cycles disjoints de σ .

3.1 Combinatoire des suites associées aux différentes directions

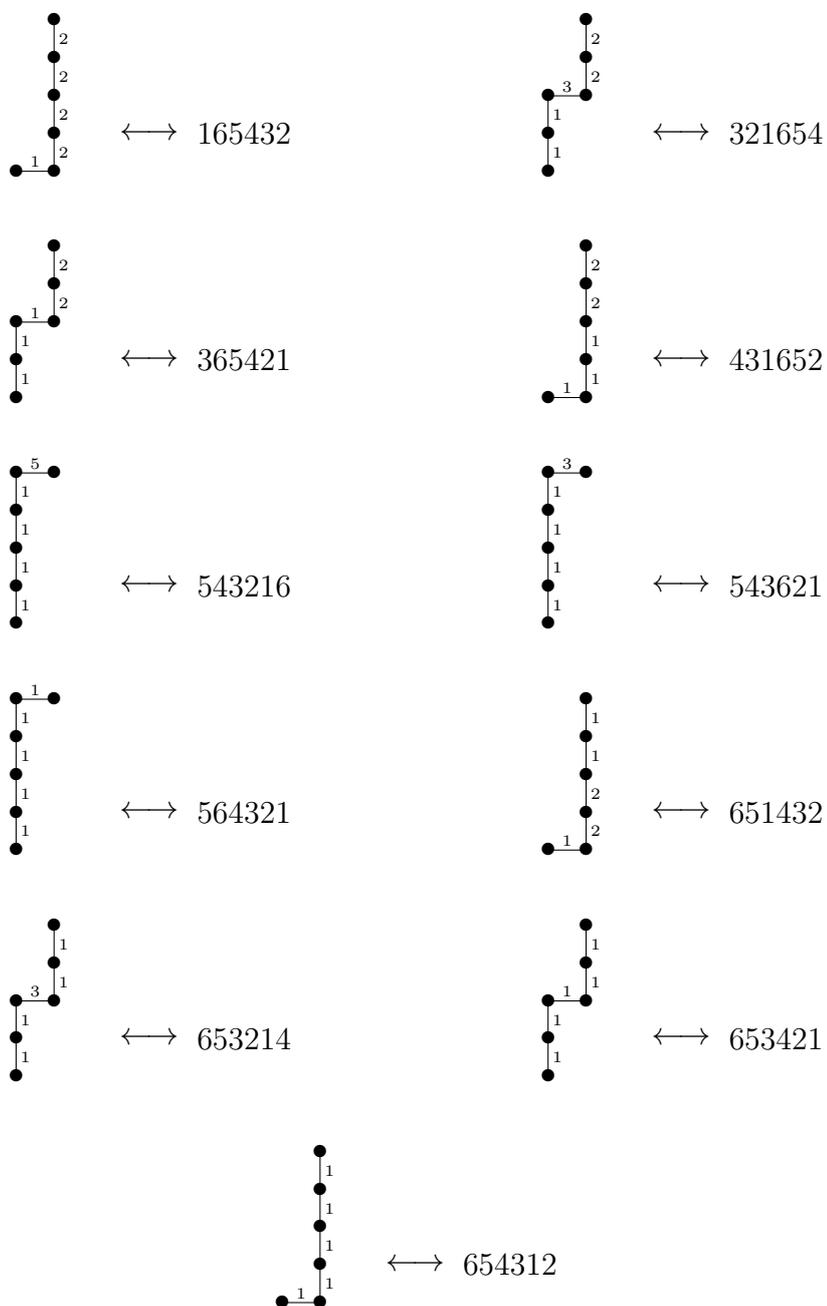


FIGURE 3.1.1 : Chemins nord-est étiquetés avec succession d'ordre 2 de taille 6 ayant deux 2-pas verticaux et leur permutations correspondantes.

Définition 3.1.15. Soit $\mathfrak{S}_n^{Exc[2]}$ l'ensemble des permutations de taille n tel que dans leur décomposition en cycles disjoints le nombre de montées dans chaque bloc maximal de montées consécutives est pair. La permutation de taille n n'ayant pas de montée dans sa décomposition en cycles disjoints est aussi dans $\mathfrak{S}_n^{Exc[2]}$.

Exemple 3.1.16. La permutation 327568194 à la décomposition en cycles disjoints (137)(2)(45689) qui à deux blocs maximaux de montées consécutives. Le premier bloc 137 comporte deux montées et le deuxième 45689 en comporte quatre. Le nombre de montées dans chaque bloc est pair. La permutation 327568194 appartient donc à l'ensemble $\mathfrak{S}_9^{Exc[2]}$.

En revanche, la permutation 365421 à la décomposition en cycles disjoints (13526) qui à deux blocs maximaux de montées consécutives. Le premier bloc 135 comporte deux montées et le deuxième 26 en comporte une seule. Le deuxième bloc a un nombre impair de montées. La permutation 365421 n'appartient donc pas à l'ensemble $\mathfrak{S}_6^{Exc[2]}$.

Définition 3.1.17. Soit σ une permutation de $\mathfrak{S}_n^{Exc[2]}$. Le nombre de **2-excédences** de σ est le nombre de 2-montées consécutives et disjointes dans la décomposition en cycles disjoints de σ .

Exemple 3.1.18. Les permutations de $\mathfrak{S}_4^{Exc[2]}$ ayant une 2-excédence et leurs décomposition en cycles disjoints correspondantes

$$\begin{aligned} 1342 &\leftrightarrow (1)(234), & 2314 &\leftrightarrow (123)(4), \\ 2413 &\leftrightarrow (1243), & 2431 &\leftrightarrow (124)(3), \\ 3142 &\leftrightarrow (1342), & 3241 &\leftrightarrow (134)(2). \end{aligned}$$

Définition 3.1.19. Soient n et k deux entiers positifs vérifiant $2k < n$. L'ensemble $\mathcal{E}x^{[2]}(n, k)$, est l'ensemble des permutations $\mathfrak{S}_n^{Exc[2]}$ ayant k 2-excédences tel que, par récurrence sur n :

- soit $\sigma|_{1, \dots, n-2} \in \mathcal{E}x^{[2]}(n-2, k-1)$;
- ou $\sigma|_{1, \dots, n-1} \in \mathcal{E}x^{[2]}(n-1, k)$.

Le nombre $Ex^{[2]}(n, k)$ est le cardinal de $\mathcal{E}x^{[2]}(n, k)$.

Théorème 3.1.20. Soient n et k deux entiers positifs. On a :

$$Ex^{[2]}(n, k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0 \text{ et } 0 \leq n < 2, \\ (k+1)Ex^{[2]}(n-1, k) + (n-2k)Ex^{[2]}(n-2, k-1) & \text{si } n \geq 2 \text{ et } 0 \leq 2k < n, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.3)$$

3.1 Combinatoire des suites associées aux différentes directions

Démonstration. Pour obtenir une permutation de taille n ayant k 2-excédences à partir d'une permutation σ de $\mathcal{E}x^{[2]}(n-1, k)$, on place n soit à la fin de la décomposition en cycles disjoints de σ (comme un point fixe de σ), soit entre les deux derniers éléments qui forment une des k 2-montées dans la décomposition en cycles disjoints de σ . Dans ce cas, on a $k+1$ positions possibles pour placer n . Pour obtenir une permutation de taille n ayant k 2-excédences à partir d'une permutation σ de $\mathcal{E}x^{[2]}(n-2, k-1)$, on place n et $n-1$ qui forment une montée dans toutes les positions sauf celles qui forment les $k-1$ 2-montées dans la décomposition en cycles disjoints de σ , et on a $(n-2) - 2(k-1) = n - 2k$ positions possibles pour le faire. Les permutations obtenues à partir des permutations de $\mathcal{E}x^{[2]}(n-1, k)$ et $\mathcal{E}x^{[2]}(n-2, k-1)$ sont toujours différentes. En effet, les premières sont obtenues en posant n soit à la fin de la décomposition en cycles disjoints de σ (comme un point fixe de σ), soit entre les deux derniers éléments qui forment une des k 2-montées dans la décomposition en cycles disjoints de σ et donc n et $n-1$ ne forment jamais de montée. Et comme on prend en compte toutes les positions possibles, on obtient toutes les permutations de $\mathcal{E}x^{[2]}(n, k)$. \square

Exemple 3.1.21. Les permutations de taille 4 ayant une 2-excédence de $\mathcal{E}x^{[2]}(4, 1)$ et leurs décomposition en cycles disjoints correspondantes

$$\begin{aligned} 1342 &\leftrightarrow (1)(234), & 2314 &\leftrightarrow (123)(4), \\ 2413 &\leftrightarrow (1243), & 3241 &\leftrightarrow (134)(2). \end{aligned}$$

Définition 3.1.22. Pour tout entier n , le polynôme

$$E_n^{[2]}(x) = \sum_{k=1}^n E^{[2]}(n, k)x^k \quad (3.4)$$

est appelé le n^e polynôme eulérien avec succession d'ordre 2.

Définition 3.1.23. Le triangle eulérien avec succession d'ordre 2 est une disposition des nombres eulériens avec succession d'ordre 2 en triangle, cf. table 3.1.2.

Proposition 3.1.24. Les lignes du triangle eulérien avec succession d'ordre 2 sont les diagonales principales du triangle eulérien :

$$E^{[2]}(n, k) = E(n-k, k). \quad (3.5)$$

Démonstration. On démontre ce résultat par récurrence sur n . Pour une permutation de taille 0 on a $E^{[2]}(0, 0) = E(0, 0)$. Observons aussi que pour

$n \backslash k$	0	1	2	3
0	1			
1	1			
2	1			
3	1	1		
4	1	4		
5	1	11	1	
6	1	26	11	
7	1	57	66	1

TABLE 3.1.2 : Triangle eulérien avec succession d'ordre 2.

$n = 1$, on a $E^{[2]}(1, 0) = E(1, 0)$ puisque la permutation 1 n'a ni descente ni 2-descente.

Supposons que cette égalité est vrai jusqu'à un certain entier $n - 1$ ($E^{[2]}(n - 1, k) = E(n - k - 1, k)$), et démontrons que cette égalité reste vrai pour $E^{[2]}(n, k) = E(n - k, k)$, on a d'après la relation de récurrence de $E(n, k)$:

$$\begin{aligned}
 E(n, k) &= (k + 1)E(n - 1, k) + (n - k)E(n - 1, k - 1) \\
 E(n - k, k) &= (k + 1)E(n - k - 1, k) + (n - k - k)E(n - k - 1 - 1, k - 1) \\
 E(n - k, k) &= (k + 1)E(n - k - 1, k) + (n - 2k)E(n - k - 2, k - 1)
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

d'après l'hypothèse de récurrence

$$E(n - k, k) = (k + 1)E^{[2]}(n - 1, k) + (n - 2k)E(n - 2, k - 1) = E^{[2]}(n, k) \tag{3.7}$$

□

3.1.2 Nombres eulériens avec succession d'ordre $t + 1$

Dans ce paragraphe, on s'intéresse aux suites se trouvant sur les diagonales de directions $(1, t)$ dans le triangle eulérien, où t est un entier supérieur à 1. On donne une interprétation combinatoire de ces suites en termes de permutations et de chemins nord-est étiquetés, et on présente la relation de récurrence de ces suites. Les suites de direction $(1, 2)$ dans le triangle eulérien sont illustrées dans la table 1.3.2.

3.1 Combinatoire des suites associées aux différentes directions

Définition 3.1.25. Soit $\sigma = \sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_n$ une permutation de taille n et soient i et t deux entiers positifs, tel que $t > 1$ et $1 \leq i \leq n - t - 1$. On dit que la position i est une $(t + 1)$ -descente de σ si $\sigma_i > \sigma_{i+1} > \cdots > \sigma_{i+t+1}$.

Définition 3.1.26. Soit $\mathfrak{S}_n^{[t+1]}$ l'ensemble des permutations de taille n tel que le nombre de descentes dans chaque bloc maximal de descentes consécutives est un multiple de $(t + 1)$. La permutation de taille n n'ayant pas de descentes est aussi dans $\mathfrak{S}_n^{[t+1]}$.

Exemple 3.1.27. La permutation 752184319 à deux blocs maximaux de descentes consécutives. Le premier bloc 7521 comporte trois descentes et le deuxième 8431 en comporte aussi trois. Chaque bloc a un nombre multiple de trois de descentes. La permutation 752184319 appartient donc à l'ensemble $\mathfrak{S}_9^{[3]}$.

En revanche, la permutation 976532184 à deux blocs maximaux de descentes consécutives. Le premier bloc 9765321 comporte six descentes et le deuxième 81 comporte une seule descente. Le nombre de descentes dans le deuxième bloc n'est pas un nombre multiple de trois. La permutation 976532184 n'appartient donc pas à l'ensemble $\mathfrak{S}_9^{[3]}$.

Exemple 3.1.28. Les éléments de $\mathfrak{S}_6^{[3]}$ ayant une 3-descentes sont

126543, 136542, 146532, 154326, 156432, 164325, 165324, 165423,
 236541, 246531, 254316, 256431, 264315, 265314, 265413, 346521,
 354216, 356421, 364215, 365214, 365412, 432156, 453216, 456321,
 463215, 465213, 465312, 532146, 542136, 543126, 563214, 564213,
 564312, 632145, 642135, 643125, 652134, 653124, 654123.

Définition 3.1.29. Soient n et k deux entiers positifs vérifiant $0 \leq (t + 1)k < n$. On notera $\mathcal{E}^{[t+1]}(n, k)$ l'ensemble des permutations de $\mathfrak{S}_n^{[t+1]}$ ayant k $t + 1$ -descentes disjointes tel que par récurrence sur n :

- soit $\sigma|_{\{1, \dots, n-t\}} \in \mathcal{E}^{[t+1]}(n - t - 1, k - 1)$;
- ou $\sigma|_{\{1, \dots, n-1\}} \in \mathcal{E}^{[t+1]}(n - 1, k)$.

Le nombre eulérien avec succession d'ordre $(t + 1)$, noté $E^{[t+1]}(n, k)$, est le cardinal de $\mathcal{E}^{[t+1]}(n, k)$.

Exemple 3.1.30. Les éléments de $\mathcal{E}^{[3]}(6, 1)$ sont

126543, 154326, 156432, 165423, 432156, 453216,
 463215, 456321, 543126, 564312, 654123.

Les nombres eulériens avec succession d'ordre $(t + 1)$ vérifient la relation de récurrence suivante :

Théorème 3.1.31. *Soient n, k et t des entiers positifs, avec $n \geq 1, 0 \leq k < n$ et $t \geq 1$. On a :*

$$E^{[t+1]}(n, k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0 \text{ et } 0 \leq n < 2, \\ (k + 1)E^{[t+1]}(n - 1, k) + (n - k(t + 1))E^{[t+1]}(n - t - 1, k - 1) & \text{si } n \geq 2 \text{ et } 0 \leq (t + 1)k < n, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.8)$$

Démonstration. Pour obtenir une permutation de taille n ayant k $(t + 1)$ -descentes à partir d'une permutation σ de $\mathcal{E}^{[t+1]}(n - 1, k)$, on place n soit à la fin de σ , soit entre les deux premiers éléments qui forment une des k $(t + 1)$ -descentes de σ . Dans ce cas, on a $k + 1$ positions possibles pour placer n . Pour obtenir une permutation de taille n ayant k $(t + 1)$ -descentes à partir d'une permutation σ de $\mathcal{E}^{[t+1]}(n - t - 1, k - 1)$, on place $n, n - 1, \dots, n - t$ qui forment une (t) -descente dans toutes les positions sauf celles qui forment les $k - 1$ $(t + 1)$ -descentes de σ , et on a $(n - t - 1) - (t + 1)(k - 1) = n - k(t + 1)$ positions possibles pour le faire. Les permutations obtenues à partir des permutations de $\mathcal{E}^{[t+1]}(n - 1, k)$ et $\mathcal{E}^{[t+1]}(n - t - 1, k - 1)$ sont toujours différentes. En effet, les premières sont obtenues en posant n soit à la fin de σ , soit entre les deux premières positions qui forment une des k $(t + 1)$ -descentes de σ et donc $n, n - 1, \dots, n - t$ ne forment jamais de t -descente. Et comme on prend en compte toutes les positions possibles, on obtient tous les éléments de $\mathcal{E}^{[t+1]}(n, k)$. \square

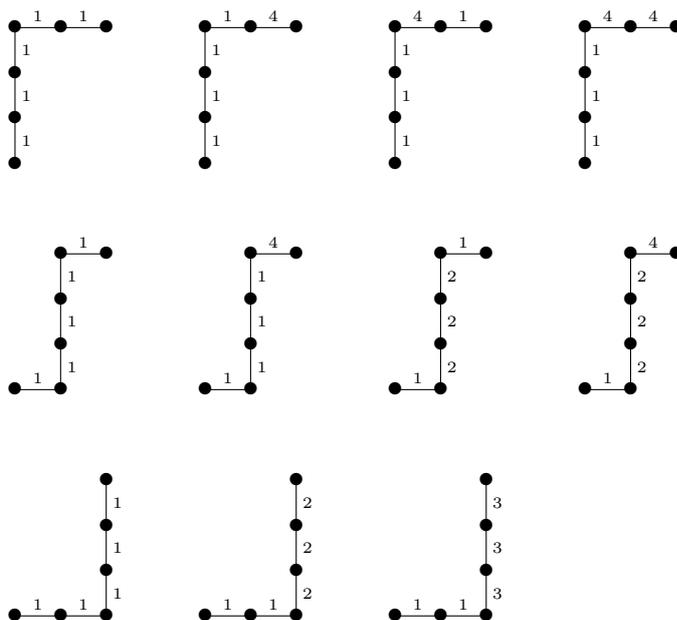
Définition 3.1.32. *Un chemin nord-est étiqueté avec succession d'ordre $t + 1$ noté $P^{[t+1]}$ est un chemin nord-est de Gasharov vérifiant que tout pas vertical appartient à un bloc maximal de pas verticaux consécutifs de cardinal multiple de $(t + 1)$ et tel que :*

- le i^e pas horizontal de $P^{[t+1]}$ est étiqueté avec l'un des entiers $1, 1 + (t + 1), 1 + 2(t + 1), \dots, 1 + k_i(t + 1)$, où k_i est le nombre de $(t + 1)$ -pas verticaux parmi les i premiers pas de $P^{[t+1]}$.
- en regroupant les pas verticaux par bloc de $(t + 1)$ disjoints de $(t + 1)$ -pas verticaux, les pas du i^e $(t + 1)$ -pas vertical de $P^{[t+1]}$ sont étiquetés par un entier inférieur ou égal à un plus le nombre de pas horizontaux parmi les i premiers pas de $P^{[t+1]}$.

3.1 Combinatoire des suites associées aux différentes directions

On notera $\mathcal{P}^{[t+1]}(n)$ l'ensemble des chemins nord-est étiquetés avec succession d'ordre $(t+1)$ de taille n , et on notera $\mathcal{P}^{[t+1]}(n, k)$ l'ensemble des chemins de $\mathcal{P}^{[t+1]}(n)$ ayant k $(t+1)$ -pas verticaux. Le cardinal de $\mathcal{P}^{[t+1]}(n, k)$ sera noté $P^{[t+1]}(n, k)$.

Exemple 3.1.33. Les chemins nord-est étiquetés avec succession d'ordre 3 de $\mathcal{P}^{[3]}(6, 1)$ sont



Étant donnés des entiers n , k et t tels que $n \geq 1$, $0 \leq k < n$ et $t \geq 1$, la bijection entre l'ensemble des permutations de taille n ayant k descentes et l'ensemble de tous les chemins étiquetés de Gasharov de taille n ayant k pas verticaux (cf. proposition 1.1.42) reste valable si on restreint l'ensemble des permutations de taille n ayant k descentes à l'ensemble des permutations de $\mathcal{E}^{[t+1]}(n, k)$ et l'ensemble de tous les chemins étiquetés de Gasharov de taille n ayant k pas verticaux à l'ensemble $\mathcal{P}^{[t+1]}(n, k)$.

Théorème 3.1.34. Soient n et k deux entiers positifs vérifiant $(t+1)k < n$. L'ensemble $\mathcal{E}^{[t+1]}(n, k)$ est en bijection avec l'ensemble $\mathcal{P}^{[t+1]}(n, k)$.

Démonstration. Soit $P^{[t+1]}$ un chemin nord-est étiqueté avec succession d'ordre $(t+1)$ de $\mathcal{P}^{[t+1]}(n, k)$. En utilisant la bijection de Gasharov (cf. proposition 1.1.42), on obtient sa permutation correspondante σ de taille n ayant k $(t+1)$ -descentes. Par récurrence sur n , si le dernier pas de $P^{[t+1]}$ est un pas horizontal, alors en le supprimant, on obtient un chemin nord-est étiqueté avec succession d'ordre $(t+1)$ de taille $n-1$ qui correspond à $\sigma|_{\{1, \dots, n-1\}}$.

Cette permutation $\sigma|_{\{1, \dots, n-1\}}$ aura donc $k(t+1)$ -descentes. Si le dernier pas de $P^{[t+1]}$ est un pas vertical, en le supprimant ainsi que les (t) -pas verticaux qui le précèdent, on obtient un chemin nord-est étiqueté avec succession d'ordre $(t+1)$ de taille $n-t-1$ qui correspond à $\sigma|_{\{1, \dots, n-t-1\}}$ et qui a donc $k-1(t+1)$ -descentes. Alors, les permutations qui correspondent aux chemins nord-est étiquetés avec succession d'ordre $(t+1)$ de taille n ayant $k(t+1)$ -pas verticaux sont les permutations de $\mathcal{E}^{[t+1]}(n, k)$. Il y a donc une injection de $\mathcal{P}^{[t+1]}(n, k)$ dans $\mathcal{E}^{[t+1]}(n, k)$. Il reste à montrer que le chemin correspondant à une permutation de $\mathcal{E}^{[t+1]}(n, k)$ se trouve bien dans $\mathcal{P}^{[t+1]}(n, k)$. On fait ce la par récurrence sur n . D'après la relation de récurrence du théorème 3.1.31, pour passer d'une permutation σ de $\mathcal{E}^{[t+1]}(n-1, k)$ à une permutation σ' dans $\mathcal{E}^{[t+1]}(n, k)$ on place n entre les deux premières positions qui forment une $(t+1)$ -descente ou bien à la fin de cette permutation et il y a donc $1+(t+1)k$ positions pour le faire. Ce qui se traduit dans le chemin nord-est étiqueté de Gasharov correspondant par une création d'un pas horizontal étiqueté avec l'un des entiers $1, 1+(t+1), 1+2(t+1), \dots, 1+k(t+1)$. D'après la même relation de récurrence du théorème 3.1.31, pour passer d'une permutation σ de $\mathcal{E}^{[t+1]}(n-1, k-1)$ à une permutation σ' dans $\mathcal{E}^{[t+1]}(n, k)$ on place $n, n-1, n-2, \dots, n-t$ entre les positions qui forment une montée ou bien au début de cette permutation et il y a donc $n-(t+1)k$ positions pour le faire, ce qui se traduit dans le chemin nord-est étiqueté de Gasharov correspondant par une création d'un $(t+1)$ -pas vertical tels que les $(t+1)$ pas qui le forment sont étiquetés par le même entier entre 1 et le nombre de montées plus un (où le nombre de montées correspond au nombre de pas horizontaux). Donc le chemin correspondant à une permutation de $\mathcal{E}^{[t+1]}(n, k)$ se trouve bien dans $\mathcal{P}^{[t+1]}(n, k)$. \square

Exemple 3.1.35. Les éléments de $\mathcal{E}^{[t+1]}(6, 1)$ et leurs chemins nord-est étiquetés $\mathcal{P}^{[t+1]}(6, 1)$ correspondants sont présentés dans la figure 3.1.2.

Corollaire 3.1.36. *Soient n, k et t des entiers positifs, avec $n \geq 1, 0 \leq k < n$ et $t \geq 1$. Le nombre de chemins nord-est étiquetés avec succession d'ordre $(t+1)$ de taille n ayant $k(t+1)$ -pas verticaux $P^{[t+1]}(n, k)$ vérifie la relation de récurrence*

$$P^{[t+1]}(n, k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0 \text{ et } 0 \leq n < 2, \\ (k+1)P^{[t+1]}(n-1, k) + (n-(t+1)k)P^{[t+1]}(n-t-1, k-1) & \\ \text{si } n \geq 2 \text{ et } 0 \leq 2k < n, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.9)$$

Démonstration. Par le théorème 3.1.34. \square

3.1 Combinatoire des suites associées aux différentes directions

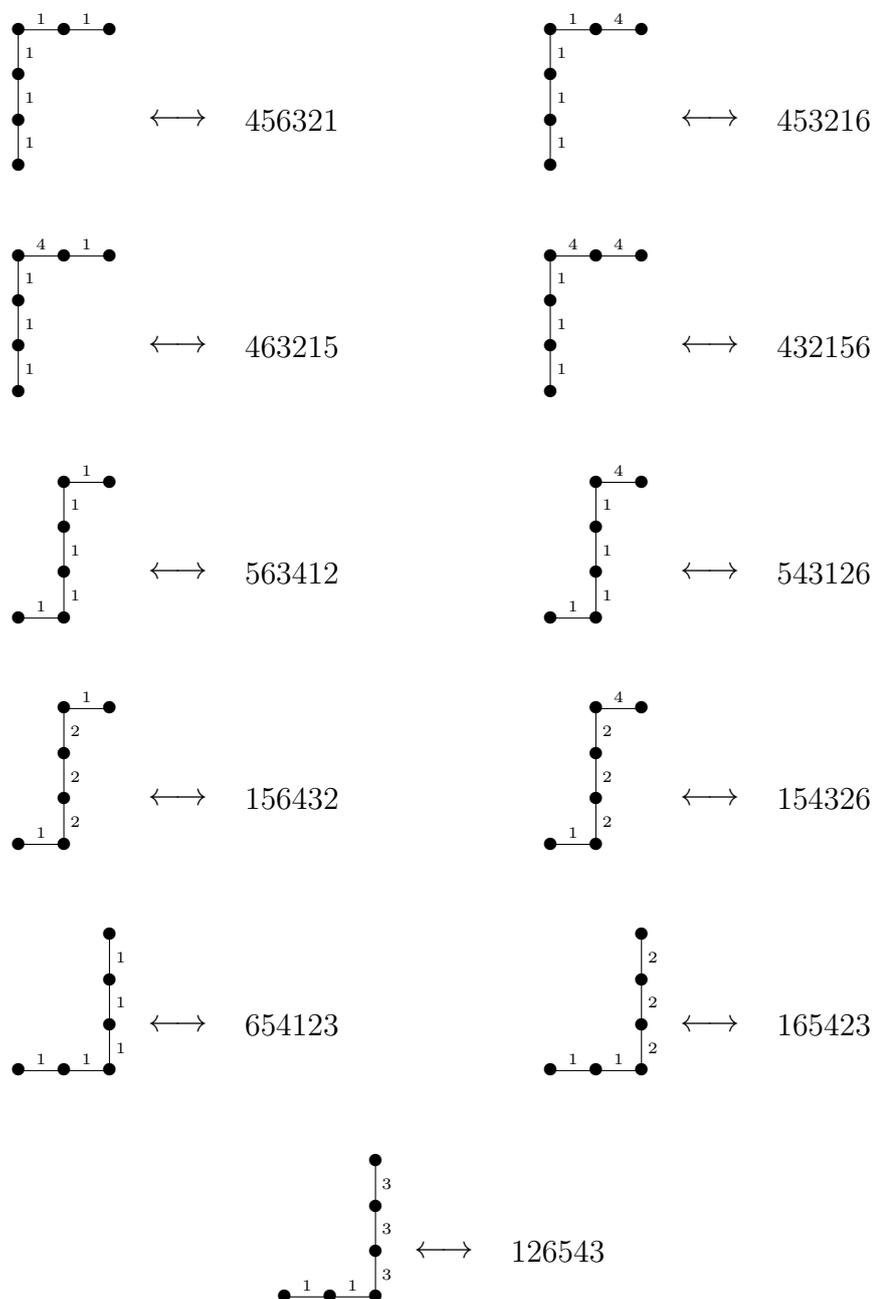


FIGURE 3.1.2 : Chemins nord-est de $\mathcal{P}^{[t+1]}(6, 1)$ et leur permutations correspondantes de $\mathcal{E}^{[t+1]}(6, 1)$.

Définition 3.1.37. Soit $\sigma = \sigma_1\sigma_2 \cdots \sigma_n$ une permutation de taille n et soit

i un entier positif, où $1 \leq i \leq n - t - 1$. On dit que la position i est une $(t + 1)$ -montée de σ si $\sigma_i < \sigma_{i+1} < \dots < \sigma_{i+t+1}$.

On rappelle que le nombre d'excédences d'une permutation σ est le nombre de montées dans la décomposition en cycles disjoints de σ .

Définition 3.1.38. Soit $\mathfrak{S}_n^{Exc[t+1]}$ l'ensemble des permutations de taille n tel que dans leur décomposition en cycles disjoints le nombre de montées dans chaque bloc maximal de montées consécutives est un multiple de $(t + 1)$. La permutation de taille n n'ayant pas de montée dans sa décomposition en cycles disjoints est aussi dans $\mathfrak{S}_n^{Exc[t+1]}$.

Exemple 3.1.39. La permutation 327568941 à la décomposition en cycles disjoints (1379)(2)(4568) qui à deux blocs maximaux de montées consécutives. Le premier bloc 1379 comporte trois montées et le deuxième 4568 en comporte aussi trois. Le nombre de montées dans chaque bloc est un multiple de 3. La permutation 327568941 appartient donc à l'ensemble $\mathfrak{S}_9^{Exc[3]}$.

En revanche, la permutation 135674892 à la décomposition en cycles disjoints (1)(235789)(46) qui à deux blocs maximaux de montées consécutives. Le premier bloc 235789 comporte cinq montées et le deuxième 46 en comporte une seule. La permutation 135674892 n'appartient donc pas à l'ensemble $\mathfrak{S}_9^{Exc[5]}$.

Définition 3.1.40. Soit σ une permutation de $\mathfrak{S}_n^{Exc[t+1]}$. Le nombre de $(t + 1)$ -excédences de σ est le nombre de $(t + 1)$ -montées consécutives et disjointes dans la décomposition en cycles disjoints de σ .

Exemple 3.1.41. Les permutations de $\mathfrak{S}_5^{Exc[3]}$ ayant une 3-excédence et leurs décomposition en cycles disjoints correspondantes

$$\begin{aligned} 13452 &\leftrightarrow (1)(2345), & 23541 &\leftrightarrow (1235)(4), \\ 24153 &\leftrightarrow (12453), & 24351 &\leftrightarrow (1245)(3), \\ 31452 &\leftrightarrow (13452), & 32451 &\leftrightarrow (1345)(2). \end{aligned}$$

Définition 3.1.42. Soient n et k deux entiers positifs vérifiant $2k < n$. L'ensemble $\mathcal{E}x^{[t+1]}(n, k)$, est l'ensemble des permutations $\mathfrak{S}_n^{Exc[t+1]}$ ayant k $(t + 1)$ -excédences tel que, par récurrence sur n :

- soit $\sigma|_{1, \dots, n-t} \in \mathcal{E}x^{[t+1]}(n - t - 1, k - 1)$;
- ou $\sigma|_{1, \dots, n-1} \in \mathcal{E}x^{[t+1]}(n - 1, k)$.

Le nombre $Ex^{[t+1]}(n, k)$ est le cardinal de $\mathcal{E}x^{[t+1]}(n, k)$.

Théorème 3.1.43. *Soient n et k deux entiers positifs. On a :*

$$Ex^{[t+1]}(n, k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0 \text{ et } 0 \leq n < 2, \\ (k+1)Ex^{[t+1]}(n-1, k) + (n-(t+1)k)Ex^{[t+1]}(n-t-1, k-1) & \\ \text{si } n \geq 2 \text{ et } 0 \leq (t+1)k < n, & \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.10)$$

Démonstration. Pour obtenir une permutation de taille n ayant k $(t+1)$ -excédences à partir d'une permutation σ de $\mathcal{E}x^{[t+1]}(n-1, k)$, on place n soit à la fin de la décomposition en cycles disjoints de σ (comme un point fixe de σ), soit entre les deux derniers éléments qui forment une des k $(t+1)$ -montées dans la décomposition en cycles disjoints de σ . Dans ce cas, on a $(k+1)$ positions possibles pour placer n . Pour obtenir une permutation de taille n ayant k $(t+1)$ -excédences à partir d'une permutation σ de $\mathcal{E}x^{[t+1]}(n-t-1, k-1)$, on place $n-t, n-t+1, \dots, n$ qui forment une t -montée dans toutes les positions sauf celles qui forment les $k-1$ $(t+1)$ -montées dans la décomposition en cycles disjoints de σ , et on a $(n-t-1)-(t+1)(k-1) = n-k(t+1)$ positions possibles pour le faire. Les permutations obtenues à partir des permutations de $\mathcal{E}x^{[t+1]}(n-1, k)$ et $Ex^{[t+1]}(n-t-1, k-1)$ sont toujours différentes. En effet, les premières sont obtenues en posant n soit à la fin de la décomposition en cycles disjoints de σ (comme un point fixe de σ), soit entre les deux derniers éléments qui forment une des k $(t+1)$ -montées dans la décomposition en cycles disjoints de σ et donc $n-t, n-t+1, \dots, n$ ne forment jamais de t -montée. Et comme on prend en compte toutes les positions possibles, alors on obtient toutes les permutations de $\mathcal{E}x^{[t+1]}(n, k)$. \square

Exemple 3.1.44. Les permutations de taille 6 ayant une 3-excédence et qui sont comptées par les nombres eulériens avec succession d'ordre 3 sont

$$\begin{aligned} 324615 &\leftrightarrow (13465)(2), & 324516 &\leftrightarrow (1345)(2)(6), \\ 134625 &\leftrightarrow (1)(23465), & 134526 &\leftrightarrow (1)(2345)(6), \\ 236154 &\leftrightarrow (12364)(5), & 234156 &\leftrightarrow (1234)(5)(6), \\ 236145 &\leftrightarrow (123654), & 235146 &\leftrightarrow (12354)(6), \\ 124563 &\leftrightarrow (1)(2)(3456), & 143562 &\leftrightarrow (1)(1456)(3), \\ & & 423561 &\leftrightarrow (1456)(2)(3). \end{aligned}$$

Définition 3.1.45. Soient n, k et t des entiers positifs, avec $n \geq 1, 0 \leq k < n$ et $t \geq 1$. Le polynôme :

$$E_n^{[t+1]}(x) = \sum_{k=1}^n E^{[t+1]}(n, k)x^k \quad (3.11)$$

est appelé le n^e polynôme eulérien avec succession d'ordre $(t + 1)$.

Définition 3.1.46. Le triangle eulérien avec succession d'ordre $(t+1)$ est une disposition des nombres eulériens avec succession d'ordre $(t + 1)$ en triangle, voir table 3.1.3.

$n \backslash k$	0	1	2
0	1		
1	1		
2	1		
3	1		
4	1	1	
5	1	4	
6	1	11	
7	1	26	1
8	1	57	11
9	1	120	66

TABLE 3.1.3 : Le triangle eulérien avec succession d'ordre 3.

Proposition 3.1.47. Soit t un entier positif. Les lignes du triangle eulérien avec succession d'ordre $(t + 1)$ sont les diagonales de direction $(1, t)$:

$$E^{[t+1]}(n, k) = E(n - tk, k). \quad (3.12)$$

Démonstration. On démontre ce résultat par récurrence sur n . Pour une permutation de taille 0 on a $E^{[t+1]}(0, 0) = E(0, 0)$. Observons aussi que pour $n = 1$, on a $E^{[t+1]}(1, 0) = E(1, 0)$ puisque la permutation 1 n'a ni descente ni $(t + 1)$ -descente. Supposons que cette égalité est vrai jusqu'à un certain entier $n - 1$ ($E^{[t+1]}(n - 1, k) = E(n - tk - 1, k)$), et démontrons que cette égalité reste vrai pour $E^{[t+1]}(n, k) = E(n - tk, k)$, on a d'après la relation de

3.2 Unimodalité des suites associées aux différentes directions

réurrence de $E(n, k)$:

$$\begin{aligned}
 E(n, k) &= (k+1)E(n-1, k) + (n-k)E(n-1, k-1) \\
 E(n-tk, k) &= \\
 & (k+1)E(n-tk-1, k) + (n-tk-k)E(n-tk-t-1, k-1) \\
 E(n-tk, k) &= \\
 & (k+1)E(n-tk-1, k) + (n-(t+1)k)E(n-(t+1)k-1, k-1)
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

d'après l'hypothèse de récurrence

$$\begin{aligned}
 E(n-tk, k) &= \\
 & (k+1)E^{[t+1]}(n-1, k) + (n-k(t+1))E^{[t+1]}(n-t-1, k-1) \\
 & = E^{[t+1]}(n, k)
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

□

3.2 Unimodalité des suites associées aux différentes directions

Jusqu'à ce point, nous nous sommes intéressés aux propriétés combinatoires des suites associées aux différentes directions dans le triangle eulérien. Dans ce paragraphe, nous nous intéresserons à l'unimodalité de ces suites. Nous allons démontrer que les suites se trouvant sur n'importe quelle direction finie sont log-concaves et donc unimodales. Pour cela on utilise les chemins nord-est de Gasharov définis dans le chapitre 1.

3.2.1 Unimodalité des suites de direction $(1, 1)$

Dans ce paragraphe, on s'intéresse aux suites se trouvant sur les diagonales principales dans le triangle eulérien (*cf.* table 3.1.1). En utilisant l'approche de Gasharov [Gas98] pour démontrer l'unimodalité des lignes du triangle eulérien, on prouve que les diagonales principales du triangle eulérien sont elles aussi log-concaves et donc unimodales.

Pour rappel, un chemin nord-est étiqueté de Gasharov P est un chemin nord-est dont un pas horizontal H (resp. vertical V) dans P est étiqueté par des entiers strictement positifs inférieurs ou égaux à $lev_p(H)$ (resp. $lev_p(V)$), où $lev_p(H)$ et $lev_p(V)$ sont les niveaux de H et de V respectivement (*cf.* définition 1.1.39). Étant donné n et k deux entiers positifs tels que $k \leq n$, on rappelle aussi que l'on note $\mathcal{P}(n, k)$ l'ensemble de tous les chemins nord-est étiquetés de Gasharov de taille n ayant k pas verticaux.

Lemme 3.2.1. *Soit n et k deux entiers positifs tels que $k \leq n$. Soit (P, Q) une paire de chemins nord-est de $\mathcal{P}(n - k + 1, k - 1) \times \mathcal{P}(n - k - 1, k + 1)$. On place les points initiaux de P et Q respectivement en $(0, 0)$ et $(2, -1)$. Alors, les chemins P et Q s'intersectent. Leur dernier point d'intersection (ordonné du sud-ouest au nord-est) décompose P et Q respectivement en $P_1 \cup P_2$ et $Q_1 \cup Q_2$.*

Démonstration. Si (P, Q) est une paire de chemins nord-est de $\mathcal{P}(n - k + 1, k - 1) \times \mathcal{P}(n - k - 1, k + 1)$, où n et k sont deux nombres positifs tels que $k \leq n$, quand on place les points initiaux de P et Q respectivement en $(0, 0)$ et $(2, -1)$, les points finaux de P et Q sont respectivement en $((n - k + 1) + 0, (k - 1) + 0)$ et $((n - k - 1) - (k + 1) + 2, (k + 1) - 1)$. Donc les chemins nord-est P et Q s'intersectent au moins une fois. \square

Lemme 3.2.2. *Soit $P' = P_1 \cup Q_2$ et $Q' = Q_1 \cup P_2$, où P_1, P_2, Q_1 et Q_2 sont définis comme dans le lemme 3.2.1. Alors, les chemins nord-est P' et Q' ont k pas verticaux chacun.*

Démonstration. Soit (P, Q) une paire de chemins nord-est définis comme dans le lemme 3.2.1. Alors, il y a un pas vertical de plus dans Q_1 que dans P_1 , et il y a un pas vertical de plus dans Q_2 que dans P_2 . Puisqu'on échange P_2 avec Q_2 pour construire $P' = P_1 \cup Q_2$ et $Q' = Q_1 \cup P_2$, alors on se retrouve avec le même nombre de pas verticaux dans P' et Q' (cf. figure 3.2.1). \square

Lemme 3.2.3. *En reprenant les notations du lemme 3.2.2, on note par H_1, H_2, \dots, H_{s+2} les pas horizontaux de P_2 et on note par G_1, G_2, \dots, G_s les pas horizontaux de Q_2 . Alors, $lev_{Q'}(H_i) = lev_P(H_i) + 1$ et $lev_{P'}(G_i) = lev_Q(G_i) - 1$. De même, on note par V_1, V_2, \dots, V_{s+2} les pas verticaux de P_2 et par C_1, C_2, \dots, C_s les pas verticaux de Q_2 , on obtient donc $lev_{P'}(C_i) = lev_Q(C_i) + 2$ et $lev_{Q'}(V_i) = lev_P(V_i) - 2$.*

Démonstration. Soit (P, Q) une paire de chemins nord-est définis comme dans le lemme 3.2.1. Comme les points initiaux de P et Q sont respectivement en position $(0, 0)$ et $(2, -1)$, le chemin P_2 est à une unité au-dessus de Q_2 et Q_2 est à deux unités à droite de P_2 . \square

Remarque 3.2.4. Si (P, Q) est une paire de chemins nord-est étiquetés de Gasharov de $\mathcal{P}(n - k + 1, k - 1) \times \mathcal{P}(n - k - 1, k + 1)$, en utilisant le lemme 3.2.2, les chemins nord-est étiquetés P' et Q' ne sont pas nécessairement des chemins nord-est étiquetés de Gasharov.

En effet, pour la paire (P, Q) de chemins nord-est de Gasharov suivante,

la paire (P', Q') obtenue en appliquant le lemme 3.2.3 à (P, Q) n'est pas une paire de chemins nord-est étiquetés de Gasharov vu que les étiquettes en gras sont supérieures à leurs niveaux respectifs.

Pour transformer une paire (P', Q') de chemins nord-est étiquetés obtenue en appliquant le lemme 3.2.2 à une paire (P, Q) de chemins nord-est étiquetés de Gasharov de $\mathcal{P}(n - k, k) \times \mathcal{P}(n - k, k)$, on ré-étiquette P' et Q' comme suit :

Lemme 3.2.5. *En reprenant les notations du lemme 3.2.3, soit l_i l'étiquette du pas horizontal H_i de P et soit m_i l'étiquette du pas horizontal G_i de Q , où $0 \leq i \leq s$. On ré-étiquette H_i et G_i comme pas horizontaux dans Q' et P' par l'_i et m'_i respectivement :*

$$(l'_i, m'_i) = \begin{cases} (l_i, m_i) & \text{si } m_i < \text{lev}_Q(G_i), \\ (\text{lev}_{Q'}(H_i), l_i) & \text{si } m_i = \text{lev}_Q(G_i), \end{cases} \quad (3.15)$$

et on ne change pas les étiquettes des pas horizontaux restants de P_2 . Concernant les pas verticaux, soit b_i l'étiquette du pas vertical V_i de P et soit n_i l'étiquette du pas vertical C_i de Q , où $0 \leq i \leq s$. On ré-étiquette V_i et C_i comme pas verticaux dans Q' et P' par b'_i et n'_i respectivement :

$$(b'_i, n'_i) = \begin{cases} (b_i, n_i) & \text{si } b_i \leq \text{lev}_{Q'}(V_i), \\ (n_i, b_i - (\text{lev}_P(V_i) - \text{lev}_{P'}(C_i))) & \text{si } b_i > \text{lev}_{Q'}(V_i), \end{cases} \quad (3.16)$$

et on ne change pas les étiquettes des pas verticaux restants de P_2 . Alors la paire (P', Q') de chemins nord-est obtenue est une paire de chemins nord-est étiquetés de Gasharov de $\mathcal{P}(n - k, k) \times \mathcal{P}(n - k, k)$.

Démonstration. Étant donnée une paire (P, Q) de chemins nord-est étiquetés de Gasharov de $\mathcal{P}(n - k + 1, k - 1) \times \mathcal{P}(n - k - 1, k + 1)$, en utilisant le lemme 3.2.2, on obtient une paire de chemins nord-est étiquetés (P', Q') de taille $n - k$ ayant k pas verticaux. A cette étape, la paire (P', Q') n'est pas nécessairement dans $\mathcal{P}(n - k, k) \times \mathcal{P}(n - k, k)$. Si (P', Q') n'est pas dans $\mathcal{P}(n - k, k) \times \mathcal{P}(n - k, k)$, on ré-étiquette les pas horizontaux (resp. pas verticaux) de P_2 (resp. Q_2) qui sont supérieurs à leur niveaux dans P' (resp. Q') par les étiquettes de leur pas horizontaux correspondants dans de Q_2 (resp. pas verticaux de P_2) qui sont, par le lemme 3.2.3, à une unité en-dessous d'eux (resp. deux unités à leur gauche). Et on ré-étiquette les pas horizontaux correspondants (resp. pas verticaux) de P_2 (resp. Q_2) par leur propre niveau (resp. par un nombre supérieur à celui de leur niveau dans Q_2). Alors la paire (P', Q') de chemins nord-est étiquetés obtenue est une paire de chemins nord-est étiquetés de Gasharov dans $\mathcal{P}(n - k, k) \times \mathcal{P}(n - k, k)$. \square

3.2 Unimodalité des suites associées aux différentes directions

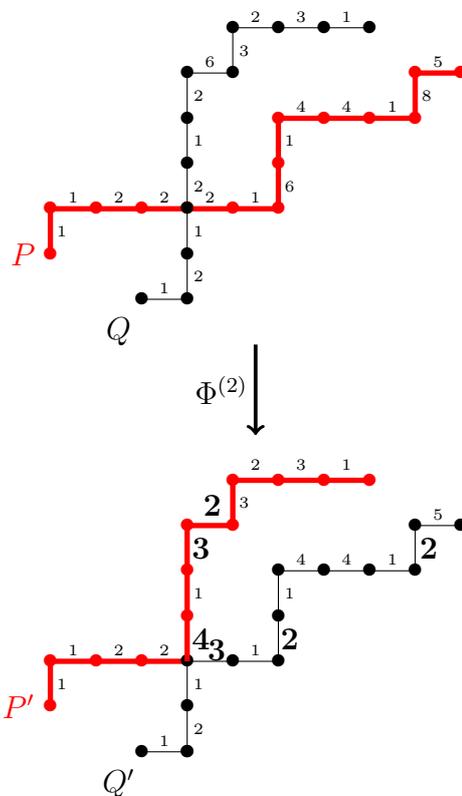


FIGURE 3.2.4 : Application de $\Phi^{(2)}$ sur une paire (P, Q) de chemins nord-est de $\mathcal{P}(14, 4) \times \mathcal{P}(12, 6)$.

Étant donnée une paire (P, Q) de chemins nord-est étiquetés de Gasharov dans $\mathcal{P}(n - k + 1, k - 1) \times \mathcal{P}(n - k - 1, k + 1)$, on définit l'application $\Phi^{(2)}$ par $\Phi^{(2)} : \mathcal{P}(n - k + 1, k - 1) \times \mathcal{P}(n - k - 1, k + 1) \rightarrow \mathcal{P}(n - k, k) \times \mathcal{P}(n - k, k)$, telle que $\Phi^{(2)}(P, Q) = (P', Q')$, où la paire (P', Q') est obtenue en utilisant les lemmes 3.2.2, 3.2.3 et 3.2.5.

Exemple 3.2.6. Dans la figure 3.2.4, on a appliqué $\Phi^{(2)}$ sur une paire (P, Q) de chemins nord-est de $\mathcal{P}(14, 4) \times \mathcal{P}(12, 6)$.

Théorème 3.2.7. *Pour $n \geq 1$, la suite de nombres eulériens $(E(n - k, k))_{0 \leq k < n}$ est log-concave, et donc unimodale.*

Pour prouver ce théorème, comme dans la démonstration de Gasharov (cf. démonstration 1.3.3), on démontre que pour tout $n \geq 1$ et $1 \leq k < n$, l'application $\Phi^{(2)}$ est injective.

Démonstration. Soit \mathcal{W} le sous-ensemble des paires $(P', Q') \in \mathcal{P}(n-k, k) \times \mathcal{P}(n-k, k)$ vérifiant les conditions suivantes : on place les points initiaux de P' et Q' respectivement en $(0, 0)$ et $(2, -1)$ (les points finaux sont respectivement $(n-2k+2, k)$ et $(n-k+1, k-1)$). Alors,

1. les chemins P' et Q' s'intersectent, et leur dernier point d'intersection les décompose respectivement en $P'_1 \cup P'_2$ et $Q'_1 \cup Q'_2$.
2. soit H_1, \dots, H_{s+2} les pas horizontaux de Q'_2 étiquetés respectivement par l'_1, \dots, l'_{s+2} . Soit G_1, G_2, \dots, G_s les pas horizontaux de P'_2 étiquetés respectivement par m'_1, \dots, m'_s . Alors $l'_\epsilon < lev_{Q'}(H_\epsilon)$ pour $\epsilon > s$, et pour $1 \leq i \leq s$, $l'_i < lev_{Q'}(H_i)$ ou $l'_i = lev_{Q'}(H_i)$ et $m'_i < lev_{Q'}(H_i)$;
3. soit V_1, V_2, \dots, V_{s+2} les pas verticaux de P'_2 étiquetés respectivement par b'_1, \dots, b'_{s+2} . Soit C_1, C_2, \dots, C_s les pas verticaux de Q'_2 étiquetés respectivement par n'_1, \dots, n'_s . Alors $b'_\epsilon < lev_{Q'}(V_\epsilon)$ pour $\epsilon > s$, et pour $1 \leq i \leq s$, $n'_i \leq lev_{Q'}(C_i)$ ou $(n'_i > lev_{Q'}(C_i)$ et $b'_i < lev_{P'}(V_i))$.

Comme dans la démonstration de Gasharov, on démontre que $\Phi^{(2)}$ est une bijection entre $\mathcal{P}(n-k+1, k-1) \times \mathcal{P}(n-k-1, k+1)$ et \mathcal{W} . Pour cela, on définit $\Gamma^{(2)} : \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{P}(n-k+1, k-1) \times \mathcal{P}(n-k-1, k+1)$ comme suit : soient $(P', Q') \in \mathcal{W}$, $P = P'_1 \cup Q'_2$ et $Q = Q'_1 \cup P'_2$. Alors H_1, H_2, \dots, H_{s+2} sont les pas horizontaux de Q'_2 et G_1, G_2, \dots, G_s sont les pas horizontaux de P'_2 . Pour $1 \leq i \leq s$, on ré-étiquette H_i et G_i comme des pas horizontaux de P et Q respectivement par l_i et m_i , où :

$$(l_i, m_i) = \begin{cases} (l'_i, m'_i) & \text{si } l'_i < lev_{Q'}(H_i), \\ (m'_i, lev_{P'}(G_i) + 1) & \text{si } l'_i = lev_{Q'}(H_i). \end{cases} \quad (3.17)$$

Les étiquettes des pas horizontaux restants de Q'_2 ne changent pas, et pour $1 \leq i \leq s$ on ré-étiquette V_i et C_i comme pas verticaux dans P et Q respectivement par b_i et n_i , où :

$$(b_i, n_i) = \begin{cases} (b'_i, n'_i) & \text{si } n'_i \leq lev_{Q'}(C_i), \\ (n'_i, b'_i + (lev_P(V_i) - lev_{P'}(C_i))) & \text{si } n'_i > lev_{Q'}(C_i). \end{cases} \quad (3.18)$$

Les étiquettes des pas horizontaux restants de P'_2 ne changent pas. Il s'en suit que $P \in \mathcal{P}(n-k+1, k-1)$ et $Q \in \mathcal{P}(n-k-1, k+1)$. Donc l'application $\Phi^{(2)}$ est injective, puisque $\Gamma^{(2)}\Phi^{(2)}(P, Q) = (P, Q)$ et $\Phi^{(2)}\Gamma^{(2)}(P', Q') = (P', Q')$ pour tout $(P, Q) \in \mathcal{P}(n-k+1, k-1) \times \mathcal{P}(n-k-1, k+1)$ et $(P', Q') \in \mathcal{W}$ (cf. figure 3.2.1). \square

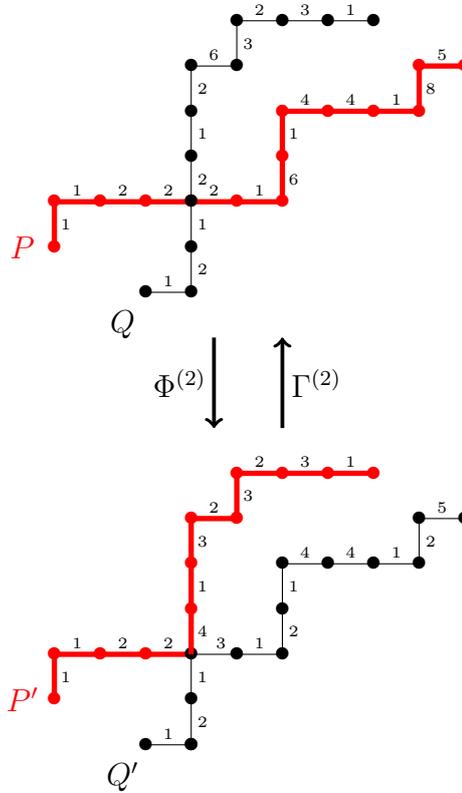


FIGURE 3.2.5 : Les applications $\Phi^{(2)}$ et $\Gamma^{(2)}$ appliquées a une paire (P, Q) de chemins nord-est de Gasharov de $\mathcal{P}(14, 4) \times \mathcal{P}(12, 6)$.

Corollaire 3.2.8. *Les lignes du triangle eulérien avec succession d'ordre 2 sont log-concaves et donc unimodales.*

Démonstration. Les lignes du triangle eulérien avec succession d'ordre 2 sont les diagonales de direction $(1, 1)$ dans le triangle eulérien (cf. proposition 3.1.24). □

3.2.2 Unimodalité des suites de direction $(1, t)$

Dans ce paragraphe on s'intéresse aux suites se trouvant sur les diagonales de directions $(1, t)$ dans le triangle eulérien, où t est un entier supérieur à 1. On prouve que ces suites sont log-concaves et donc unimodales. Par exemple, les suites de direction $(1, 2)$ dans le triangle eulérien sont illustrées dans la table 1.3.2.

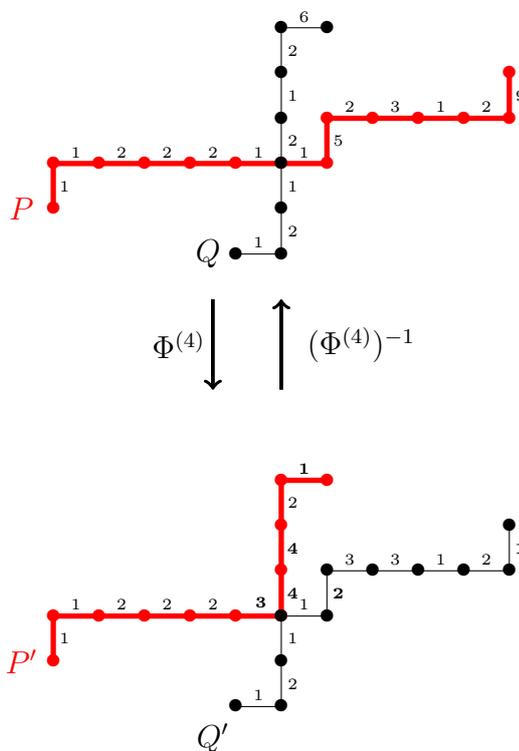
Théorème 3.2.9. *Pour $n \geq 1$ et $t \geq 0$, la suite des nombres eulériens $(E(n - tk, k))_{0 < k < n}$ est log-concave, et donc unimodale.*

Pour prouver ce théorème on utilise aussi les chemins nord-est étiquetés de Gasharov. On rappelle qu'un chemin nord-est de Gasharov P est un chemin nord-est dont un pas horizontal H (resp. vertical V) dans P est étiqueté par des entiers strictement positifs inférieurs ou égaux à $lev_p(H)$ (resp. $lev_p(V)$), où $lev_p(H)$ et $lev_p(V)$ sont les niveaux de H et de V respectivement (cf. définition 1.1.39). Étant donnés n et k deux entiers positifs tels que $k \leq n$, on rappelle aussi que l'on note $\mathcal{P}(n, k)$ l'ensemble de tous les chemins nord-est étiquetés de Gasharov de taille n ayant k pas verticaux.

Démonstration. Soient n, t et k des nombres positifs tels que $tk \leq n$. Comme dans la démonstration du théorème 3.2.7, on démontre que l'application $\Phi^{(t+1)} : \mathcal{P}(n-t(k-1), k-1) \times \mathcal{P}(n-t(k+1), k+1) \rightarrow \mathcal{P}(n-tk, k) \times \mathcal{P}(n-tk, k)$ est injective, où $\Phi^{(t+1)}$ est définie comme suit : soit (P, Q) une paire de chemins nord-est étiquetés de Gasharov de $\mathcal{P}(n-t(k-1), k-1) \times \mathcal{P}(n-t(k+1), k+1)$. On place les points initiaux de P et Q respectivement en $(0, 0)$ et $(t+1, -1)$. Donc, comme dans le lemme 3.2.1 et 3.2.2, les chemins P et Q s'intersectent, puisque les points finaux de P et Q sont respectivement en $((n-k+1)+0, (k-1)+0)$ et $((n-k-1)-(k+1)+(t+1), (k+1)-1)$. Donc, les chemins nord-est P et Q s'intersectent au moins une fois. Les chemins $P' = P_1 \cup Q_2$ et $Q' = Q_1 \cup P_2$, où P_1, P_2, Q_1 et Q_2 sont définis comme dans le lemme 3.2.1, ont $k(t+1)$ -pas verticaux. En effet, il y a $(t+1)$ pas verticaux de plus dans Q_1 que dans P_1 , et il y a $(t+1)$ pas verticaux de plus dans Q_2 que dans P_2 . Puisqu'on échange P_2 avec Q_2 pour construire $P' = P_1 \cup Q_2$ et $Q' = Q_1 \cup P_2$, alors on se retrouve avec $k(t+1)$ -pas verticaux dans P' et Q' . On note par $H_1, H_2, \dots, H_{s+t+1}$ les pas horizontaux de P_2 et on note par G_1, G_2, \dots, G_s les pas horizontaux de Q_2 . Alors, $lev_{Q'}(H_i) = lev_P(H_i) + 1$ et $lev_{P'}(G_i) = lev_Q(G_i) - 1$. De même on note par $V_1, V_2, \dots, V_{s+t+1}$ les pas verticaux de P_2 et par C_1, C_2, \dots, C_s les pas verticaux de Q_2 , et on a, $lev_{P'}(V_i) = lev_Q(V_i) + t + 1$ et $lev_{Q'}(C_i) = lev_P(C_i) - t - 1$. Dans le cas où (P', Q') n'est pas une paire de chemins nord-est étiquetés de Gasharov, on ré-étiquette P' et Q' , afin de les transformer en chemins nord-est de Gasharov comme suit : soit l_i l'étiquette de H_i comme pas horizontal de P et soit m_i l'étiquette de G_i comme pas horizontal de Q , où $0 \leq i \leq s$. On ré-étiquette H_i et G_i comme pas horizontaux de Q' et P' par l'_i et m'_i respectivement, où :

$$(l'_i, m'_i) = \begin{cases} (l_i, m_i) & \text{si } m_i < lev_Q(G_i), \\ (lev_{Q'}(H_i), l_i) & \text{si } m_i = lev_Q(G_i), \end{cases} \quad (3.19)$$

et on ne change pas les étiquettes des pas horizontaux restants de P_2 . Concernant les pas verticaux, soit b_i l'étiquette de V_i comme pas vertical de P et soit



3.2.3 Unimodalité des suites associées à toutes les directions finies

Dans ce paragraphe, on généralise les résultats des paragraphes précédents à toutes les directions (r, q) , où r et q sont des entiers, tel que $r + q \geq 0$. On démontre donc que toutes les suites se trouvant sur les diagonales finies du triangle eulérien sont log-concaves, et donc unimodales.

Théorème 3.2.11. *Pour $n \geq 0$, $r \geq 1$, et $q \in \mathbb{Z}$ tel que $r + q \geq 0$, la suite de nombres eulériens $(E(n - qk, rk))_{0 \leq k < n}$ est log-concave, et donc unimodale.*

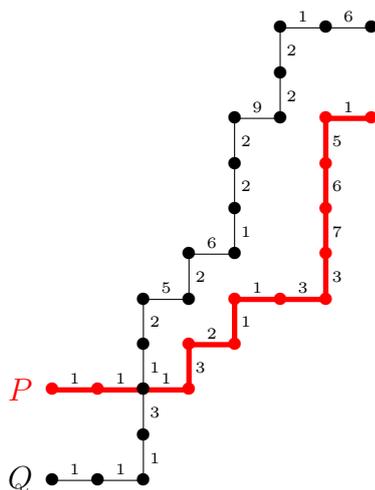
Démonstration. Pour $n \geq 0$, $r \geq 1$, et $q \in \mathbb{Z}$ tel que $r + q \geq 0$, on démontre que l'application

$$\Phi^{(r,q)} : \mathcal{P}(n - q(k - 1), r(k - 1)) \times \mathcal{P}(n - q(k + 1), r(k + 1)) \rightarrow \mathcal{P}(n - qk, rk)^2 \quad (3.21)$$

est injective. On procède comme dans les démonstrations précédentes, la différence étant que la paire (P, Q) est dans $\mathcal{P}(n - q(k + 1), r(k + 1)) \times \mathcal{P}(n - q(k - 1), r(k - 1))$, et les points initiaux de P et Q sont respectivement en $(0, 0)$ et $(q + r, -r)$. \square

3.2 Unimodalité des suites associées aux différentes directions

Exemple 3.2.12. Soient $n = 8$, $k = 4$, $q = -2$, $r = 2$ et (P, Q) la paire de chemins nord-est étiquetés de Gasharov de $\mathcal{P}(n - q(k + 1), r(k + 1)) \times \mathcal{P}(n - q(k - 1), r(k - 1)) = \mathcal{P}(18, 10) \times \mathcal{P}(14, 6)$ suivante, où on place le point initial de P en $(0, 0)$ et celui de Q en $(0, -2)$:



L'application $\Phi^{(-2,2)}$ appliquée à la paire (P, Q) donne la paire de chemins nord-est étiquetés de Gasharov (P', Q') de $(16, 8) \times (16, 8)$ de la figure 3.2.3.

Corollaire 3.2.13. *Les colonnes du triangle eulérien sont log-concaves.*

Démonstration. Les lignes du triangle eulérien sont symétriques. En effet, on peut définir une application α qui envoie toutes les permutations de taille n ayant k descentes sur des permutations de taille n ayant $n - k - 1$ descentes, pour $0 \leq k < n$, comme suit : soit $\sigma = \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_n$ une permutation de taille n ayant k descentes, alors $\alpha(\sigma) = \psi_1 \psi_2 \cdots \psi_n$, où $\psi_j = n - \sigma_j + 1$ pour $1 \leq j \leq n$. Donc pour un $k \geq 0$ fixé, les suites $(E(n, k))_{n>0} = (E(n, n - k - 1))_{n>0}$, et par le théorème 3.2.11, on conclut que les colonnes du triangle eulérien sont log-concaves. \square

Proposition 3.2.14. *Pour tout entier positif n , ℓ , c , d et p tels que $n > \ell$, $d - \ell \geq 0$, $k + c + p < n$ et $p \leq n$ on a :*

$$E(n, k) \times E(n + d - \ell, k + p + c) \leq E(n - \ell, k + c) \times E(n + d, k + p). \quad (3.22)$$

En d'autres termes, si on considère quatre nombres eulériens qui correspondent aux quatre sommets d'un parallélogramme dans le triangle eulérien, alors le produit des sommets nord-ouest et sud-est est toujours supérieur ou égal au produit des sommets nord-est et sud-ouest.

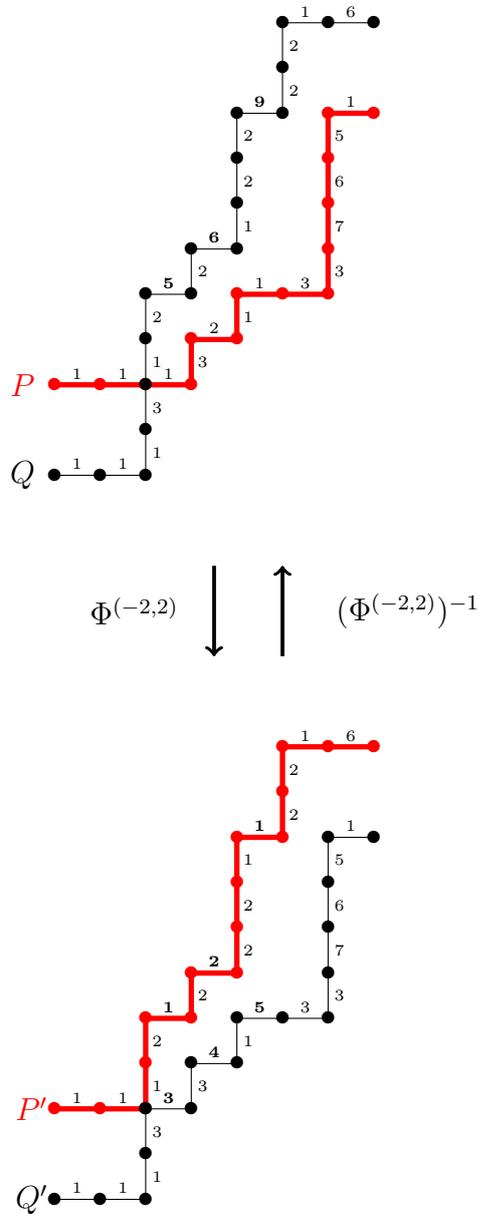


FIGURE 3.2.6 : L'application $\Phi^{(-2,2)}$ appliquée à la paire (P, Q) de chemins nord-est étiquetés de Gasharov de $\mathcal{P}(18, 10) \times \mathcal{P}(14, 6)$.

Exemple 3.2.15. Soient $n = 5$, $k = 0$, $\ell = 1$, $d = 3$, $c = 1$ et $p = 3$. Alors les sommets du parallélogramme correspondent aux nombres eulériens entourés dans la table :

3.2 Unimodalité des suites associées aux différentes directions

$n \setminus k$	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
	↓						
1	1						
	↓						
2	1	1					
	↓	↓					
3	1	4	1				
	↓	↓	↓				
4	1	11	11	1			
	↓	↓	↓	↓			
5	1	26	66	26	1		
	↓	↓	↓	↓	↓		
6	1	57	302	302	57	1	
	↓	↓	↓	↓	↓	↓	
7	1	120	1191	2416	1191	120	1

TABLE 3.2.4 : Les colonnes du triangle eulérien.

$n \setminus k$	0	1	2	3	4	5	6	6
0	1							
1	1							
2	1	1						
3	1	4	1					
4	1	11	11	1				
5	1	26	66	26	1			
6	1	57	302	302	57	1		
7	1	120	1191	2416	1191	120	1	
8	1	247	4293	15619	15619	4293	247	1

Alors on a

$$E(5, 0) \times E(7, 4) = 1 \times 1191 \leq E(4, 1) \times E(8, 3) = 11 \times 15619.$$

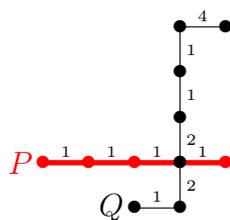
Démonstration. On démontre que l'application

$$\alpha : \mathcal{P}(n, k) \times \mathcal{P}(n+d-\ell, k+p+c) \rightarrow \mathcal{P}(n-\ell, k+c) \times \mathcal{P}(n+d, k+p) \quad (3.23)$$

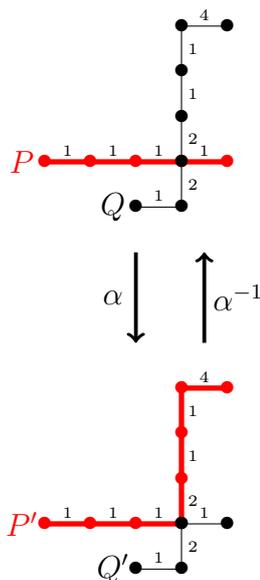
est injective. On procède de la même manière que dans les démonstrations précédentes, la seule différence est que la paire (P, Q) est dans $\mathcal{P}(n, k) \times$

$\mathcal{P}(n + d - \ell, k + p + c)$, et les points initiaux de P et Q sont respectivement en $(0, 0)$ et $(c + l, -c)$. \square

Exemple 3.2.16. Soient $n = 5$, $k = 0$, $\ell = 1$, $d = 3$, $c = 1$ et $p = 3$ et (P, Q) la paire de chemins nord-est étiquetés de Gasharov de $\mathcal{P}(n, k) \times \mathcal{P}(n + d - \ell, k + p + c) = \mathcal{P}(5, 0) \times \mathcal{P}(7, 4)$ suivante, où on place le point initial de P en $(0, 0)$ et celui de Q en $(2, -1)$:



En appliquant l'algorithme à la paire (P, Q) on obtient la paire de chemins nord-est étiquetés de Gasharov (P', Q') de $(4, 1) \times (8, 3)$



Pour démontrer nos résultats, on s'est inspiré dans tout ce chapitre de l'approche de Gasharov [Gas98] utilisée pour prouver que les lignes du triangle eulérien sont unimodales. On a changé les positions initiales des chemins nord-est étiquetés de Gasharov selon la direction que l'on considère dans le triangle eulérien. qu'on a voulu redémontrer ces mêmes résultats en utilisant les chemins nord-est étiquetés de Bóna et Ehrenborg [BE99] (cf. définition 1.1.44). On a pris alors une paire de chemins nord-est de

3.2 Unimodalité des suites associées aux différentes directions

$\mathcal{P}'(n - k + 1, k - 1) \times \mathcal{P}'(n - k - 1, k + 1)$ et on a placé les points initiaux de P et Q respectivement en $(0, 0)$ et $(2, -1)$. Les chemins P et Q s'intersectent. Leur premier point d'intersection décompose P et Q respectivement en $P_1 \cup P_2$ et $Q_1 \cup Q_2$. Soient $P' = P_1 \cup Q_2$ et $Q' = Q_1 \cup P_2$. En faisant un ré-étiquetage de P' et Q' en utilisant la même approche de Bóna et Ehrenborg (*cf.* démonstration 1.1.3) on se retrouve avec un sous-ensemble de chemins nord-est qui ne vérifient pas la définition des chemins nord-est étiquetés de Bóna et Ehrenborg. Leur définition est beaucoup plus *rigide* que celle des chemins nord-est étiquetés de Gasharov et cela ne nous a pas permis de réutiliser cette méthode (de changement de position des points initiaux) sur ces chemins.

Conclusion et perspectives

De nombreuses perspectives de recherche sont naturellement apparues tout au long de notre étude.

Tableaux de dominos décalés

Nous souhaitons à cours terme, prolonger notre étude sur les algorithmes L et H pour démontrer la conjecture 2.4.26 et développer un algorithme analogue au *jeu de taquin* pour les tableaux de dominos décalés afin de définir un produit directement sur ces objets. Dans [CL95], Carré et Leclerc ont prouvé que les coefficients de la règle de Littlewood-Richardson peuvent être décrits en termes de tableaux de dominos de Yamanouchi. Ils ont aussi démontré que grâce à une statistique appelée *spin*, les tableaux de dominos décalés interprètent certains pléthysmes de fonctions de Schur. Nous nous sommes posés ces questions dans le cas des tableaux de dominos décalés mais nous n'avons pas réussi jusque là à trouver une interprétation des coefficients de la règle de Littlewood-Richardson décalée en termes de tableaux de dominos décalés particuliers. Nous espérons qu'avec du recul et un nouvel angle d'attaque, on pourrait reconsidérer ces questions. Nous aimerions aussi étendre les tableaux de rubans [LLT97] qui sont une généralisation des tableaux de dominos, aux tableaux de rubans décalés, afin d'étudier leurs propriétés combinatoires et leurs liens avec les fonctions symétriques.

Polynômes eulériens avec succession d'ordre t

L'unimodalité des suites finies associées aux diagonales de plusieurs triangles arithmétiques a été étudiée ces dernières années, nous savons par exemple, que les suites finies se trouvant sur les diagonales du triangle de Pascal

[TZ74, TZ76, TZ78, BS08], triangle eulérien, quelques diagonales du triangle de Stirling de deuxième espèce [BT15] sont unimodales. Nous souhaitons prolonger et approfondir nos recherches pour essayer de définir une méthode générique pour traiter ce type de questions concernant les triangles arithmétiques.

Nous aimerions aussi trouver une fonction génératrice pour les polynômes eulériens avec succession d'ordre t . Nous voulons aussi définir des polynômes q -eulériens avec succession d'ordre t en considérant à la fois les statistiques inversion et descentes, indice major et descentes, inversion et excédences ainsi qu'indice major et excédences. Le fait d'avoir des séries génératrices pour les polynômes q -eulériens avec succession d'ordre t nous permettra peut être de relier ces polynômes aux fonctions symétriques ou quasi-symétriques comme c'est le cas dans la série de travaux [SW07, SW10, SSW11] de Shareshian et Wachs.

Bibliographie

- [And81] D. André. Sur les permutations alternées. *Journal de mathématiques pures et appliquées*, pages 167–184, 1881. [5](#)
- [And76] G. E. Andrews. The theory of partitions, volume 2 of encyclopedia of mathematics and its applications, 1976. [22](#)
- [Bal90] M. Balazard. Quelques exemples de suites unimodales en théorie des nombres. *Journal de théorie des nombres de Bordeaux*, 2(1) :13–30, 1990. [5](#)
- [BE99] M. Bóna and R. Ehrenborg. A combinatorial proof of the log-concavity of the numbers of permutations with k runs. *arXiv preprint math/9902020*, 1999. [9](#), [18](#), [19](#), [20](#), [61](#), [138](#)
- [BLL98] F. Bergeron, G. Labelle, and P. Leroux. *Combinatorial species and tree-like structures*. Number 67. Cambridge University Press, 1998. [10](#)
- [Bón12] M. Bóna. *Combinatorics of permutations*. CRC Press, 2012. [61](#)
- [Bre89] F. Brenti. *Unimodal, Log-concave and Pólya Frequency Sequences in Combinatorics*, volume 413. American Mathematical Soc., 1989. [5](#)
- [BS08] H. Belbachir and L. Szalay. Unimodal rays in the ordinary and generalized pascal triangles. *Journal of Integer Sequences*, 11(2) :3, 2008. [5](#), [107](#), [142](#)
- [BT15] H. Belbachir and A. F. Tebtoub. The 2-successive associated stirling numbers, fibonacci-stirling numbers and unimodality. *Comptes rendus mathématiques*, 353(9) :767–771, 2015. [6](#), [142](#)

BIBLIOGRAPHIE

- [Che16] Z. Chemli. Shifted domino tableaux. *arXiv preprint arXiv :1603.04706*, 2016. [65](#)
- [CL95] C. Carré and B. Leclerc. Splitting the square of a Schur function into its symmetric and antisymmetric parts. *Journal of algebraic combinatorics*, 4(3) :201–231, 1995. [4](#), [6](#), [49](#), [51](#), [52](#), [53](#), [65](#), [88](#), [141](#)
- [Com74] L. Comtet. Advanced combinatorics. 1974. *Reidel, Dordrecht*, 1974. [10](#), [56](#)
- [Foa64] D. Foata. Algèbre sur un énoncé de macmahon. *Comptes rendus hebdomadaire des séances de l'académie des sciences*, 258(6) :1672, 1964. [5](#)
- [Foa97] D. Foata. Rearrangements of words. *M. Lothaire, Combinatorics on Words, Cambridge University Press, Cambridge*, 1997. [5](#)
- [Fra76] J. Françon. Arbres binaires de recherche : propriétés combinatoires et applications. *Revue française d'automatique informatique recherche opérationnelle. Informatique théorique*, 10(3) :35–50, 1976. [5](#)
- [Fro00] F. G. Frobenius. Über die charaktere der symmetrischen gruppe. 1900. [3](#)
- [FS70] D. Foata and M. P. Schützenberger. *Théorie géométrique des polynômes eulériens*. Springer, 1970. [5](#)
- [FS73] D. Foata and M. P. Schützenberger. Nombres d'euler et permutations alternantes. In *A survey of combinatorial theory (Proc. Internat. Sympos., Colorado State Univ., Fort Collins, Colo., 1971)*, pages 173–187, 1973. [5](#)
- [FS98] S. Fomin and D. Stanton. Rim hook lattices. *St Petersburg mathematical journal of Algebra*, 9 :1007–1016, 1998. [4](#)
- [Ful97] W. Fulton. Young tableaux, volume 35 of london mathematical society student texts, 1997. [31](#)
- [FV79] J. Françon and G. Viennot. Permutations selon leurs pics, creux, doubles montées et double descentes, nombres d'euler et nombres de genocchi. *Discrete Mathematics*, 28(1) :21–35, 1979. [5](#)

BIBLIOGRAPHIE

- [FZ90] D. Foata and D. Zeilberger. Denert's permutation statistic is indeed euler-mahonian. *Studies in applied mathematics*, 83(1) :31–59, 1990. [5](#)
- [Gas98] V. Gasharov. On the neggers–stanley conjecture and the eulerian polynomials. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 82(2) :134–146, 1998. [8](#), [9](#), [14](#), [15](#), [17](#), [56](#), [57](#), [58](#), [125](#), [138](#)
- [Ges84] I. M. Gessel. Multipartite p-partitions and inner products of skew schur functions. *Contemp. Math*, 34(289-301) :101, 1984. [3](#)
- [GR93] I. M. Gessel and C. Reutenauer. Counting permutations with given cycle structure and descent set. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 64(2) :189–215, 1993. [3](#)
- [Hai89] M. D. Haiman. On mixed insertion, symmetry, and shifted young tableaux. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 50(2) :196–225, 1989. [4](#), [7](#), [42](#), [80](#), [100](#)
- [Har40] G. H. Hardy. Ramanujan cambridge univ. *Press, London/New York*, 1940. [22](#)
- [HNTT09] F. Hivert, J.-C. Novelli, L. Tevlin, and J.-Y. Thibon. Permutation statistics related to a class of noncommutative symmetric functions and generalizations of the genocchi numbers. *Selecta Mathematica*, 15(1) :105–119, 2009. [5](#)
- [JK81] G. James and A. Kerber. The representation theory of the symmetric group. *Reading, Mass*, 1981. [25](#)
- [Knu70] D. Knuth. Permutations, matrices, and generalized young tableaux. *Pacific Journal of Mathematics*, 34(3) :709–727, 1970. [3](#), [31](#), [35](#)
- [Knu99] D. Knuth. The art of computer programming. *Sorting and searching*, 3 :426–458, 1999. [5](#), [55](#)
- [Lit61] D. E. Littlewood. On certain symmetric functions. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 3(1) :485–498, 1961. [3](#), [79](#)
- [LLT97] A. Lascoux, B. Leclerc, and J.-Y. Thibon. Ribbon tableaux, hall–littlewood functions, quantum affine algebras, and unipotent varieties. *Journal of Mathematical Physics*, 38(2) :1041–1068, 1997. [141](#)

BIBLIOGRAPHIE

- [LLT02] A. Lascoux, B. Leclerc, and J.-Y. Thibon. The plactic monoid. *Algebraic Combinatoric on Words*, page 10, 2002. [31](#)
- [LS81] A. Lascoux and M. P. Schützenberger. Le monoïde plaxique. *Ricerca Scient*, (109), 1981. [3](#), [31](#), [36](#), [52](#)
- [Mac96] P. A. MacMahon. Combinatory analysis : A review of the present state of knowledge. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 1(1) :5–32, 1896. [3](#), [10](#)
- [Mac17] P. A. MacMahon. Two applications of general theorems in combinatory analysis :(1) to the theory of inversions of permutations;(2) to the ascertainment of the numbers of terms in the development of a determinant which has amongst its elements an arbitrary number of zeros. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 2(1) :314–321, 1917. [4](#), [5](#)
- [Mac95] I. G. Macdonald. *Symmetric functions and Hall polynomials*. New York, 1995. [3](#), [79](#)
- [NPS⁺97] J.-C. Novelli, I. Pak, A. Stoyanovskii, et al. A direct bijective proof of the hook-length formula. *Discrete Mathematics & Theoretical Computer Science*, 1(1) :53–67, 1997. [33](#)
- [Rio12] J. Riordan. *Introduction to combinatorial analysis*. Courier Corporation, 2012. [10](#)
- [Sag87] B. E. Sagan. Shifted tableaux, Schur Q-functions, and a conjecture of R. Stanley. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 45(1) :62–103, 1987. [3](#), [39](#), [79](#)
- [Sch11] I. J. Schur. Über die darstellung der symmetrischen und der alternierenden gruppe durch gebrochene lineare substitutionen. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 139 :155–250, 1911. [3](#)
- [Sch61] C. Schensted. Longest increasing and decreasing subsequences. *Canad. J. Math*, 13(2) :179–191, 1961. [3](#), [34](#)
- [Ser10] L. Serrano. The shifted plactic monoid. *Mathematische Zeitschrift*, 266(2) :363–392, 2010. [4](#), [42](#), [44](#), [46](#), [80](#)
- [Sol76] L. Solomon. A mackey formula in the group ring of a coxeter group. *Journal of Algebra*, 41(2) :255–264, 1976. [5](#)

BIBLIOGRAPHIE

- [SSW11] B. Sagan, J. Shareshian, and M. Wachs. Eulerian quasisymmetric functions and cyclic sieving. *Advances in Applied Mathematics*, 46(1) :536–562, 2011. [142](#)
- [Sta89] R. P. Stanley. Log-concave and unimodal sequences in algebra, combinatorics, and geometry. *Ann. New York Acad. Sci.*, 576(1) :500–535, 1989. [5](#), [54](#)
- [Sta90] D. Stanton. *Invariant theory and tableaux*, volume 19. Springer Verlag, 1990. [4](#), [6](#), [31](#)
- [Ste89] J. R. Stembridge. Shifted tableaux and the projective representations of symmetric groups. *Advances in Mathematics*, 74(1) :87–134, 1989. [4](#), [39](#), [79](#)
- [SW85] D. W. Stanton and D. E. White. A Schensted algorithm for rim hook tableaux. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 40(2) :211–247, 1985. [47](#), [49](#), [65](#)
- [SW07] J. Shareshian and M. Wachs. q -eulerian polynomials : excedance number and major index. *Electronic Research Announcements of the American Mathematical Society*, 13(4) :33–45, 2007. [142](#)
- [SW10] J. Shareshian and M. Wachs. Eulerian quasisymmetric functions. *Advances in Mathematics*, 225(6) :2921–2966, 2010. [142](#)
- [TZ74] S. M. Tanny and M. Zuker. On a unimodal sequence of binomial coefficients. *Discrete Mathematics*, 9(1) :79–89, 1974. [5](#), [107](#), [142](#)
- [TZ76] S. M. Tanny and M. Zuker. On a unimodal sequence of binomial coefficients ii. *Combin. Inform. System Sci*, 1(1) :81–91, 1976. [5](#), [107](#), [142](#)
- [TZ78] S. M. Tanny and M. Zuker. Analytic methods applied to a sequence of binomial coefficients. *Discrete Mathematics*, 24(3) :299–310, 1978. [5](#), [107](#), [142](#)
- [Vie80] G. Viennot. Une interprétation combinatoire des coefficients des développements en série entière des fonctions elliptiques de jacobini. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 29(2) :121–133, 1980. [5](#)
- [VL99] M. A. A. Van Leeuwen. Edge sequences, ribbon tableaux, and an action of affine permutations. *European Journal of Combinatorics*, 20(2) :179–195, 1999. [4](#)

BIBLIOGRAPHIE

- [VL01] M. A. A. Van Leeuwen. Some bijective correspondences involving domino tableaux. *Journal of combinatorics*, 7(1) :R35–R35, 2001. [4](#)
- [Wil] H. Wilf. *Generatingfunctionology*,(1990). [5](#), [54](#)
- [Wor84] D. R. Worley. *A theory of shifted Young tableaux*. PhD thesis, Massachusetts Institute of Technology, 1984. [3](#), [39](#), [79](#)
- [You00] A. Young. On quantitative substitutional analysis. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 1(1) :97–145, 1900. [3](#), [31](#)