Cycles proches, cycles évanescents et théorie de Hodge pour les morphismes sans pente

Matthieu Kochersperger

université PARIS-SACLAY

NNT : 2018SACLX041

Thèse de doctorat

Cycles proches, cycles evanescents et theorie de Hodge pour les morphismes sans pente.

Thèse de doctorat de l'Université Paris-Saclay
préparée à l'École Polytechnique

Ecole doctorale n°574 École doctorale de mathématiques Hadamard (EDMH)
Spécialité de doctorat : Mathématiques fondamentales

Thèse présentée et soutenue à Palaiseau, le 9/07/2018, par

MATTHIEU KOCHERSPERGER

Rapporteurs :

Nero BUDUR
KU Leuven
Philippe MAISONOBE
Universite de Nice Sophia-Antipolis

Composition du Jury :

Michel GRANGER, Universite d'Angers	Président du jury
Philippe MAISONOBE, Universite de Nice Sophia-Antipolis	Rapporteur
Fabrice ORGOGOZO, École polytechnique	Examinateur
Claude SABBAH, École Polytechnique	Directeur de thèse
Christian SEVENHECK, Technische Universitat Chemnitz	Examinateur

Remerciements

Je tiens à remercier très sincèrement, en premier lieu, mon directeur de thèse Claude Sabbah. Le temps qu'il a consacré à me transmettre avec patience et rigueur ses connaissances a été une aide précieuse pour aborder une théorie mathématique très dense. Il a également su éveiller mon intérêt pour des questions ambitieuses et, lorsque je me suis heurté à des difficultés, il m'a à chaque fois proposé de nouveaux angles d'attaque ingénieux. Enfin, je lui suis très reconnaissant d'avoir lu en détail mes productions mathématiques, et de m'avoir proposé des améliorations qui les ont tirées vers le haut.

Je remercie Nero Budur et Philippe Maisonobe, qui m'ont fait l'honneur de rapporter ma thèse, ainsi que Michel Granger, Fabrice Orgogozo et Christian Sevenheck qui ont accepté de faire partie de mon jury.

Je remercie particulièrement Michel Granger et Philippe Maisonobe de l'intérêt qu'ils ont montré pour mes travaux, et pour les discussions enrichissantes que nous avons eues. Je remercie également Étienne Mann de m'avoir invité à exposer mes travaux au séminaire de Géométrie algébrique de l'Université d'Angers, de m'avoir aidé à aborder la géométrie algébrique dérivée et d'avoir partagé avec moi l'expérience de son parcours mathématiques.

Je remercie mon tuteur, Serge Cantat, dont les conseils m'ont permis de trouver ma voie dans le foisonnement des spécialités mathématiques. Je le remercie également de m'avoir aidé à trouver mon directeur de stage de M2, Bruno Klingler. Je remercie chaleureusement ce dernier d'avoir accepté de diriger mon mémoire de Master, et de m'avoir guidé dans cette première expérience de la recherche contemporaine. Je le remercie aussi de m'avoir aidé, avec beaucoup de franchise, à choisir mon directeur de thèse.

Je remercie les professeurs qui ont nourri mon intérêt pour les mathématiques tout au long de ma scolarité : Monsieur Etessami, Marc Schaul, Patrick Genaux, Antoine Chambert-Loir et François Charles.

Je remercie Carole J., Carole K., Marine et Pascale pour leur accueil chaleureux au Centre de Mathématiques Laurent Schwartz, et pour l'aide qu'elles m'ont apportée tout au long de ma thèse. Je remercie aussi Danh, David, Jean-Luc et Sylvain les informaticiens du Centre, pour leur aide au quotidien, et en particulier David qui m'a aidé à mettre en place la page Indico du séminaire Réga. J'en profite pour remercier Cyrus de m'avoir confié l'organisation de ce séminaire, et Arthur et Salim mes coorganisateurs.

Merci aux doctorants du CMLS pour la bonne ambiance et les nombreux échanges mathématiques et extra-mathématiques. Un grand merci à Nicolas, mon jumeau de thèse, pour son impressionnante capacité à flairer les bons plans, sa rigueur administrative qui m'a bien souvent permis de me placer confortablement dans son sillage, et surtout pour sa bonne humeur, son ouverture d'esprit et son agréable compagnie lors de nos nombreux voyages mathématico-touristiques. Merci également à Aymeric, Bac, Benoit, Emiliano, Étienne, Fabio, Hsueh-Yung, Ivan, Jacek, Juanyong, Ludovic, Matilde, Nicolas, René, Rita, Takahiro, Tatiana, Thomas, Tien-Vinh, Timofey, Vincent, Xianglong, Yakine et Zakarias.

Merci à tous les amis qui m'ont soutenu. Henri, avec qui nous avons partagé la passion des mathématiques sur les bancs de l'école pendant plus de dix années, de l'école primaire à la classe préparatoire. David, Joris et Jordan, mes anciens compagnons musicaux dont l'amitié sincère est restée intacte malgré la raréfaction de nos réunions, merci à Kristine et Franz. Merci à mes camarades de prépa, Bruno, Carl-Johann, Dorian, Elsa, Eric, François, Gaël, Jean-Yves, Marc, Paul, Valentine et Valentin. Merci aux colocataires avec qui j'ai vécu pendant cette thèse. La collocation du Père Corentin, avec les amis de l'ENS : Amiel, Antoine, Marie et Oscar, dont les fortes personnalités bigarrées ont fait de la vie en commun une aventure passionnante, et Cyril que j'ai eu un grand plaisir à rencontrer ensuite. La collocation Camille Pelletan : Alexandre, Aurélien, Guillaume, Hugo et Simon, qui sont chacun un élément indispensable à l'harmonie, à la convivialité, voire à la franche poilade qu'est cette collocation. Merci à Samuel pour les nombreux moments musicaux passés et à venir. Merci à tous les amis qui ont croisé ma route pendant cette thèse, Adrien, Ambroise, Antoine, Baptiste, Charles, Joran, José, Marc, Maxime, Pierre, Raph, Romain, Vincent...

Merci aux membres de ma famille qui m'ont toujours soutenu et ont essayé, avec beaucoup de persévérance et de courage, de comprendre en quoi consiste le contenu de cette thèse. Merci à Sandrine, ma sœur, Christine et Jean-Claude mes parents, qui m'ont suivi et conseillé avec bienveillance. Merci à Anne et Georges, ma mamie et mon grapi, qui m'ont toujours accompagné et sont une importante source d'inspiration pour moi. Merci à Philippe et Madeleine, mes grands-parents.

Enfin, merci à Jessica, qui rend au quotidien ma vie plus passionnante, qui fait preuve d'une confiance indéfectible en moi, et avec qui je suis impatient de démarrer cette nouvelle étape de ma vie.

Table des matières

Introduction

This thesis is devoted to undestanding the Hodge theory of singularities of complex varieties of codimension greater than 1. Following the work of P. Maisonobe in [Mai13], we investigate the case of singularities coming from morphisms *without slopes*. The motivation is to generalise the tools developed for singularities of complex hypersurfaces to singularities of greater codimension.

Singularities of hypersurfaces

Let us recall known results for hypersurface singularities. Let $f : (\mathbb{C}^{n+1}, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ be a germ of holomorphic function. In [Mil68] J. Milnor showed that if we restrict our function to small balls around 0 in $\mathbb{C}^{n+1}$ and $\mathbb{C}$ then we get a locally trivial fibration above a small punctured disc. The fiber of this fibration is a smooth manifold called the Milnor fiber $Mil_{f,0}$. The topological invariants of the Milnor fiber are important invariants of the singularity. For example in the case of an isolated singularity we have the Milnor number $\mu := \dim_{\mathbb{C}} H^n(Mil_{f,0}, \mathbb{C})$ which is finite.

Using sheaves and his functorial formalism A. Grothendieck defined in [GDK72] a global version of the Milnor fiber called nearby cycles. For a morphism $f : X \to \mathbb{C}$ the nearby cycles $\Psi_f(\underline{\mathbb{C}}_X)$ are a complex of constructible sheaves with support on $f^{-1}(0)$ satisfying for all $x \in f^{-1}(0)$ and all $n \in \mathbb{N}$

$$\mathscr{H}^n \Psi_f(\underline{\mathbb{C}}_X)_x \simeq H^n(Mil_{f,x}, \mathbb{C}).$$

Actually we have the two functors of nearby and vanishing cycles $\Psi_f, \Phi_f : D^b_c(X) \to D^b_c(f^{-1}(0))$ between bounded derived categories of constructible sheaves. Inside the bounded derived categories of constructible sheaves lies the abelian category of perverse sheaves. O. Gabber showed that nearby and vanishing cycles preserve perversity in the following sense : if $\mathcal{F}$ is a perverse sheaf then $\Psi_f(\mathcal{F})[-1]$ and $\Phi_f(\mathcal{F})[-1]$ are perverse.

The Riemmann-Hilbert correspondence, proved independently by M. Kashiwara and Z. Mebkhout in [Kas84] and [Meb84], states the existence of an equivalence of categories between regular holonomic $\mathscr{D}$-modules and perverse sheaves. This suggests a $\mathscr{D}$-module version of nearby and vanishing cycles. This was achieved by B. Malgrange and M. Kashiwara, in [Mal83] and [Kas83], using what is now called the Kashiwara-Malgrange filtration. They constructed two functors $\Psi^{alg}_f, \Phi^{alg}_f : \mathrm{Mod}_{h,r}(\mathscr{D}_X) \to \mathrm{Mod}_{h,r}(\mathscr{D}_{f^{-1}(0)})$ corresponding to the nearby and vanishing functors on perverse sheaves via the Riemann-Hilbert correspondence.

Hodge theory

In [Ste76] J. H. M. Steenbrink constructed a mixed Hodge structure on the cohomology of the Milnor fiber called the limit mixed Hodge structure. This construction relies on the monodromy autmorphism which comes from the lifting of a loop around 0 in the Milnor fibration. This study was continued by E. Cattani, A. Kaplan and W. Schmid in [Sch73, CKS86, CKS87] and M. Kashiwara and T. Kawai in [KK87] who described the degeneration of abstract polarized variations of Hodge structures on the complement of a normal crossing divisor. On the other hand, in [Zuc79], S. Zucker showed that the cohomology of a polarized variation of Hodge structure on a punctured Riemann surface admits a natural Hodge structure. Relying on these results M. Saito constructed in [Sai88] and [Sai90] the category of mixed Hodge modules which can be seen as "variations of mixed Hodge structures with singularities". The nearby and vanishing cycles for perverse sheaves and for $\mathscr{D}$-modules play a key role in this construction.

Morphisms without slope

The following example of Lê shows that in general, for a morphism $\boldsymbol{f} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^p$ with $p \geqslant 2$, there is no Milnor fibration :

$$\begin{array}{cccc} \boldsymbol{f} & : & (\mathbb{C}^3, 0) & \to & (\mathbb{C}^2, 0) \\ & & (x, y, z) & \mapsto & (x^2 - y^2 z, y). \end{array}$$

Indeed it can be shown that there is no closed analytic subset F in $\mathbb{C}^2$ such that the number of connected components of the fiber of a representative of the germ of $\boldsymbol{f}$ is constant on $(\mathbb{C}^2 - F, 0)$.

In order to study morphisms $\boldsymbol{f} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^p$ with $p \geqslant 2$ we must then add conditions. In [HMS84] J. P. Henry, M. Merle and C. Sabbah introduce for the morphism $\boldsymbol{f} = (f_1, ..., f_p)$ the condition of being *without blow-up in codimension* 0. Under this condition they manage to construct stratifications of the morphism satisfying Whitney and Thom type conditions. Following ideas of Lê D. T. ([Lê77]), with such a stratification we get Milnor type fibrations above the strata of the target of the morphism. In [Sab83] C. Sabbah shows that, for any analytical morphism f, after a proper sequence of blowings-up of the target we can reduce to the case without blow-up in codimension 0.

If furthermore the critical locus of f is a subset of the union of the hypersurfaces $f_j^{-1}(0)$ for $j = 1, ..., p$, following [BMM02], the morphism is called *without slope*. For a $\mathscr{D}$-module $\mathcal{M}$ or a perverse sheaf $\mathcal{F}$ they also define what it means for pairs $(\boldsymbol{f}, \mathcal{M})$ or $(\boldsymbol{f}, \mathcal{F})$ to be *without slope*. In this case the former stratification of the target is the usual stratification associated with the coordinate hyperplanes.

In [Mai13] P. Maisonobe proves important results about these morphisms. He shows that if $\mathcal{M}$ corresponds to $\mathcal{F}$ via the Riemann-Hilbert correspondence, i.e. $\mathbf{DR}(\mathcal{M}) \simeq \mathcal{F}$, then it is equivalent to have $(\boldsymbol{f}, \mathcal{M})$ without slope or $(\boldsymbol{f}, \mathcal{F})$ without slope. He defines the functors $\Psi_{\boldsymbol{f}}^{alg}$, $\Phi_{\boldsymbol{f}}^{alg}$ and $\Psi_{\boldsymbol{f}}$ for pairs without slope. He shows that as for the Milnor fibration we have in this case

$$\Psi_{\boldsymbol{f}}(\mathcal{F})_0 \simeq R\Gamma(B_\epsilon \cap f^{-1}(D_\eta^*) \cap f^{-1}(t), \mathcal{F})$$

for $t \in D_\eta^*$ and $0 < \eta \ll \epsilon \ll 1$, where D_η^* is a polydisc of radius η minus the coordinate hyperplanes. He then shows that there exist natural isomorphisms

$$\begin{array}{ccc} \Psi_{\boldsymbol{f}}\mathcal{F} & \simeq & \Psi_{f_1}...\Psi_{f_p}\mathcal{F}, \\ \Psi_{\boldsymbol{f}}^{alg}\mathcal{M} & \simeq & \Psi_{f_1}^{alg}...\Psi_{f_p}^{alg}\mathcal{M}, \\ \Phi_{\boldsymbol{f}}^{alg}\mathcal{M} & \simeq & \Phi_{f_1}^{alg}...\Phi_{f_p}^{alg}\mathcal{M}. \end{array}$$

Content of the thesis

The leading problem of this thesis has its origins in the work of P. Maisonobe on $\mathscr{D}$-modules without slopes in [Mai13] on the one hand, and in results of M. Saito on mixed Hodge modules of normal crossing type in [Sai88] and [Sai90] on the other hand. Normal crossing being a special case of a morphism without slope and having in mind the results and technics of P. Maisonobe, the aim of this thesis is to extend the properties of mixed Hodge modules of normal crossing type to the without slope case. More precisely we want to prove results on the compatibility of the filtrations involved, namely the Kashiwara-Malgragne filtrations and the Hodge filtration.

In [Sai90], M. Saito shows that, for a mixed Hodge module of normal crossing type, the Kashiwara-Malgrange filtrations and the Hodge filtration are compatible in the sense of definition A.2.3. Using P. Maisonobe results, we show in chapter 2 the following proposition

Proposition. *If $((f_1, ..., f_p), \mathcal{M})$ is without slope then the Kashiwara-Malgrange filtrations for the p hypersurfaces $f_j^{-1}(0)$ are compatible in the sense of the definition A.2.3.*

The leading conjecture for this thesis is then the following

Conjecture A. *Let $\mathscr{M}$ be a mixed Hodge module with underlying $\mathscr{D}$-module $\mathcal{M}$ such that the pair $(\boldsymbol{f}, \mathcal{M})$ is without slope. Then the Kashiwara-Malgrange filtrations for the p hypersurfaces $f_j^{-1}(0)$* and the Hodge filtration $F_\bullet\mathcal{M}$ *are compatible in the sense of the definition A.2.3.*

A result of [DMST06] gives an evidence for this conjecture. In this article the authors showed the compatibility of the filtrations in the non-characteristic case which is a particular case of being without slope.

We will use two approaches to tackle this problem. The first will consists in using the description of nearby and vanishing cycles functors involving Nilsson classes. The functoriality of this description will enable us to make use of the power of M. Saito's theory of mixed Hodge modules. In this way, we will prove the commutativity of the different nearby and vanishing cycles functors for mixed Hodge modules, using their commutativity for the underlying $\mathscr{D}$-modules.

For the second approache, we will developed the theory of *strictly multispecialisable* $\widetilde{\mathscr{D}}$-modules which mimics the theory of $\mathscr{D}$-modules without slope, while taking the Hodge filtration into account. We will highlight the link between this notion and the compatibility of Kashiwara-Malgrange filtrations and the Hodge filtration. In this way we will prove the stability of these properties by a projective direct image. We will also give results on the monodromy filtrations inspired by the normal crossing case. We will then apply these results to quasi-ordinary hypersurface singularities.

The thesis is divided into two parts. In the first part, we work with $\mathscr{D}$-modules and we prove preliminary resultats about morphisms without slope. We construct a morphism of comparison between algebraic and topological nearby cycles and we construct a topological vanishing cycles functor for a morphism without slope.

In the second part, we add the Hodge filtration. We prove the commutativity of nearby and vanishing cycles functors for mixed Hodge modules. Then we define stricly multispecialisable $\widetilde{\mathscr{D}}$-modules and we prove a theorem of direct image.

Comparison theorem

In chapter 3 and chapter 4 we study the comparison, via the Riemann-Hilbert correspondence, between $\Psi_{\boldsymbol{f}}$ and $\Psi_{\boldsymbol{f}}^{alg}$. By iterating the comparison theorem of Malgrange and Kashiwara for hypersurfaces, we get an isomorphism

$$\Psi_{f_1}...\Psi_{f_p} \simeq \Psi_{f_1}^{alg}...\Psi_{f_p}^{alg}.$$

However this isomorphism could depend on the ordering of the functions $f_1, .., f_p$. In order to show the independence on the ordering we define, for a pair $(\boldsymbol{f}, \mathcal{M})$ without slope, a natural morphism $\mathbf{Comp} : \mathbf{DR}(\Psi_{\boldsymbol{f}}^{alg}\mathcal{M}) \to \Psi_{\boldsymbol{f}}\mathbf{DR}(\mathcal{M})$ and we prove the following theorem

Theorem A (Théorème 3.4.1). *The following diagram is commutative :*

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{DR}(\Psi^{alg}_{\boldsymbol{f}}\mathcal{M}) \arrow[r, "\boldsymbol{Comp}"] \arrow[d, "\simeq"] & \Psi_{\boldsymbol{f}}\mathbf{DR}(\mathcal{M}) \arrow[d, "\simeq"] \\
\mathbf{DR}(\Psi_{f_1}...\Psi_{f_p}\mathcal{M}) \arrow[r, "\simeq"] & \Psi^{alg}_{f_1}...\Psi^{alg}_{f_p}\mathbf{DR}(\mathcal{M})
\end{tikzcd}$$

where the lower arrow comes from the iteration of the comparison isomorphisms for hypersurfaces.

Thus we see, first, that **Comp** is an isomorphism and, second, that the iterated comparison morphisms are independent of the ordering of the functions.

In chapter 4 we give another proof that the morphism **Comp** is an isomorphism without using the hypersurface case. This proof highlights the local structure of morphisms without slope and the similarities with the Milnor fibration.

Vanishing cycles for perverse sheaves and morphisms without slope

In chapter 5 we study the vanishing cycles functors in the category of perverse sheaves. Following the idea of M. Kashiwara and P. Schapira in [KS94, 8.6] we give a functorial definition of $\Phi_{\boldsymbol{f}}$ to avoid the use of the mapping cone in derived categories. We show that this functor fits inside the expected diagram of distinguished triangles for a pair $(\boldsymbol{f}, \mathcal{F})$ without slope. This and the commutation of nearby cycles implies the following theorem

Theorem B (Théorème 5.3.3). *Let $(\boldsymbol{f}, \mathcal{F})$ be a pair made up of a morphism and a perverse sheaf without slope. We have a natural isomorpshim*

$$\Phi_{\boldsymbol{f}}(\mathcal{F}) \simeq \Phi_{f_1}...\Phi_{f_p}(\mathcal{F}).$$

This implies the commutation of the vanishing cycles functors for each function f_j for $j = 1, ..., p$ and the following corollary

Corollary. *Let $\mathcal{F}$ be a perverse sheaf, then $\Phi_{\boldsymbol{f}}(\mathcal{F})[-p]$ is perverse.*

Mixed Hodge modules without slope

In the second part of this thesis we study morphisms without slope and Hodge modules. Following [Sai88], a Hodge module is a triple $\mathscr{M} = (\mathcal{M}, F_\bullet\mathcal{M}, \mathcal{F})$ satisfying some Hodge conditions where :

1. $\mathcal{F}$ is a perverse sheaf over $\mathbb{Q}$,
2. $\mathcal{M}$ is a regular holonomic $\mathscr{D}$-module corresponding to $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathcal{F}$ via the Riemann-Hilbert correspondence, in other words $\mathbf{DR}(\mathcal{M}) \simeq \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathcal{F}$.
3. $F_\bullet\mathcal{M}$ is a good filtration by $\mathscr{O}$-coherent submodules of $\mathcal{M}$.

Nearby and vanishing cycles functors are among the main ingredients used in the inductive definition of Hodge modules by M. Saito. We give results on the relations between Kashiwara-Malgrange filtrations and the Hodge filtration $F_\bullet\mathcal{M}$ for a Hodge module $\mathscr{M}$ such that the pair $(\boldsymbol{f}, \mathcal{M})$ is without slope.

In chapter 7 we prove a theorem of commutation of the nearby and vanishing cycles applied to Hodge modules.

Theorem C (Théorème 7.6.2). *Let $\mathscr{M}$ be a Hodge module and let us suppose that $(\boldsymbol{f}, \mathcal{M})$ without slope where $\mathcal{M}$ is the $\mathscr{D}$-module underlying $\mathscr{M}$. Then we have the following isomorphisms*

$$\begin{array}{rcl} \Psi^{HM}_{f_1}...\Psi^{HM}_{f_p} & \simeq & \Psi^{HM}_{f_{\sigma(1)}}...\Psi^{HM}_{f_{\sigma(p)}}, \\ \Phi^{HM}_{f_1}...\Phi^{HM}_{f_p} & \simeq & \Phi^{HM}_{f_{\sigma(1)}}...\Phi^{HM}_{f_{\sigma(p)}} \end{array}$$

where σ is a permutation of $\{1,...,p\}$ and $\Psi^{HM}_{\boldsymbol{f}}$ and $\Phi^{HM}_{\boldsymbol{f}}$ are the nearby and vanishing cycles functors in the category of Hodge modules.

Remark. If conjecture A were true, then this theorem would be an easy consequence of it.

In chapter 8, mimicking the definition of being without slope for a pair $(\boldsymbol{f}, \mathcal{M})$, we give a definition of being *strictly multispecialisable* for the pair $(\boldsymbol{f}, \mathscr{M})$ and we prove the following theorem

Theorem D (Propositions 8.1.7 et 8.1.8). *Let $\mathscr{M}$ be a Hodge module and $\boldsymbol{f}$ a morphism such that the pair $(\boldsymbol{f}, \mathcal{M})$ is without slope, then the following statements are equivalent :*

1. *the pair $(\boldsymbol{f}, \mathscr{M})$ is strictly multispecialisable*
2. *the filtrations $(F_\bullet\mathcal{M}, V_1^\bullet\mathcal{M}, ..., V_p^\bullet\mathcal{M})$ are compatible.*

Here $V_j^\bullet\mathcal{M}$ is the Kashiwara-Malgrange filtration for the hypersurface $f_j^{-1}(0)$.

We then prove two theorems of push-forward for Hodge modules strictly multispecialisable.

Theorem E (Théorème 8.2.1). *Being strictly multispecialisable is preserved by proper push-forward and in this case the Kashiwara-Malgrange* multi*filtration, the nearby cycles $\Psi^{HM}_{\boldsymbol{f}}$ and the vanishing cycles $\Phi^{HM}_{\boldsymbol{f}}$ commute with the push-forward.*

Definition. Let A be an object in an abelian category equipped with p nilpotent endomorphisms $N_1, ..., N_p$. We say that $(A, N_1, ..., N_p)$ satisfy property (MF) if relative monodromy filtrations satisfy

$$W(N_1, W(N_2, W(...W(N_p))))A = W(N_1 + ... + N_p)A.$$

(See section 6.1 for definitions.)

Theorem F (Théorème 8.3.3). *Let $f : X \times \mathbb{C}^p_{\boldsymbol{t}} \to Y \times \mathbb{C}^p_{\boldsymbol{t}}$ be a projective morphism and suppose that $(\mathscr{M}, N_1, ..., N_p)$ satisfy property (MF), then $(\mathrm{gr}^V_{\boldsymbol{\alpha}}\mathscr{H}^j f_*\mathscr{M}, N_1, ..., N_p)$ also satisfy property (MF).*

As an application we prove conjecture A for quasi-ordinary hypersurface singularities.

Notations

Faisceaux

Soit X une variété complexe, on considérera les faisceaux suivants :
- $\mathcal{O}_X$ le faisceau des fonctions holomorphes sur X,
- Ω_X^p le faisceau p-formes holomorphes sur X,
- $\mathscr{D}_X$ le faisceau des opérateurs différentiels sur X,
- $F_\bullet\mathscr{D}_X$ la filtration par l'ordre des opérateurs de $\mathscr{D}_X$,
- $\widetilde{\mathscr{D}}_X := R_F\mathscr{D}_X$ le faisceau associé à $(\mathscr{D}_X, F_\bullet\mathscr{D}_X)$ par la construction de Rees A.2.6.

Catégories

Soit X une variété complexe, on considérera les catégories suivantes :
- la catégorie des faisceau pervers $\mathrm{Perv}(X)$,
- la catégorie des $\mathscr{D}_X$-modules holonomes réguliers $\mathrm{Mod}_{h,r}(\mathscr{D}_X)$,
- la catégorie des $\widetilde{\mathscr{D}}_X$-modules holonomes réguliers $\mathrm{Mod}_{h,r}(\widetilde{\mathscr{D}}_X)$,
- la catégorie dérivée bornée des faisceaux à cohomologie constructible $D_c^b(X)$,
- la catégorie dérivée bornée des $\mathscr{D}_X$-modules à cohomologie holonome régulière $D_{h,r}^b(\mathscr{D}_X)$,
- la catégorie des modules de Hodge purs polarisables de poids k $\mathrm{MH}^p(X, \mathbb{Q}, k)$,
- la catégorie des modules de Hodge mixtes polarisables $\mathrm{MHM}^p(X, \mathbb{Q})$.

Objets

On utilisera les notations suivantes pour les objets des catégories précédentes :
- $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in D_c^b(X)$,
- $\mathcal{M}, \mathcal{N} \in \mathrm{Mod}_{h,r}(\mathscr{D}_X)$,
- $\mathfrak{M}, \mathfrak{N} \in \mathrm{Mod}_{h,r}(\widetilde{\mathscr{D}}_X)$,
- $\mathscr{M}, \mathscr{N} \in \mathrm{MHM}^p(X, \mathbb{Q})$.

Multi-indices

Soit X une variété complexe de dimension d. Soient p hypersurfaces lisses H_i d'équation $t_i = 0$ pour un entier $1 \leqslant p \leqslant d$. On utilisera les notations suivantes :
- $\partial_i := \partial_{t_i} \in \mathscr{D}_X$,
- $\eth_i := \eth_{t_i} = z\partial_i \in \widetilde{\mathscr{D}}_X$,
- $E_i := t_i\partial_i$,
- $\boldsymbol{x} := (x_1, ..., x_{d-p})$,
- $\mathbf{1}_i := (0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)$ où le 1 est en position i,
- $\boldsymbol{\alpha} := (\alpha_1, ..., \alpha_p)$,
- $\boldsymbol{\alpha}_I := (\alpha_i)_{i\in I}$ pour $I \subset \{1, ..., p\}$,
- $\boldsymbol{t} := t_1...t_p$,
- $\boldsymbol{t}^{\boldsymbol{s}} := t_1^{s_1}...t_p^{s_p}$,
- $\mathscr{D}_X[\boldsymbol{s}] := \mathscr{D}_X[s_1, ..., s_p]$.

Première partie

Cycles proches et cycles évanescents par un morphisme sans pente

Chapitre 1

Notions préliminaires

Dans ce chapitre, on donne les définitions et principaux résultats sur les cycles proches et les cycles évanescents pour les faisceaux pervers et les $\mathscr{D}$-modules.

1.1 Fibration de Milnor, cycles proches et cycles évanescents topologiques

On définit ici les cycles proches et les cycles évanescents pour les faisceaux pervers et on explicite le lien avec la fibration de Milnor.

1.1.1 Fibration de Milnor

Théorème 1.1.1. *Soit $X \subset U \subset \mathbb{C}^n$ un espace analytique et $f : X \to \mathbb{C}$ une fonction analytique. Soit $x \in X$ tel que $f(x) = 0$. Alors il existe $0 < \eta \ll \epsilon \ll 1$ tels que la restriction*

$$f_{\eta,\epsilon} : B_\epsilon \cap X \cap f^{-1}(\mathring{D}_\eta - \{0\}) \to \mathring{D}_\eta - \{0\}$$

soit une fibration topologique localement triviale. Ici, B_ϵ est la boule fermée de centre x et de rayon ϵ dans $\mathbb{C}^n$ et $\mathring{D}_\eta$ est le disque ouvert de centre 0 et de rayon η dans $\mathbb{C}$.

Démonstration. Pour $X = \mathbb{C}^n$ et f polynomiale, ce résultat est dû à J. Milnor [Mil68]. Le cas général est dû à D.T. Lê [Lê77].

□

Remarque 1.1.2.
- La fibre de cette fibration ne dépend pas de ϵ et de η pourvu qu'ils soient suffisamment petits. On la note $Mil_{f,x} := f_{\eta,\epsilon}^{-1}(c)$ pour un point $c \in \mathring{D}_\eta - \{0\}$.
- En relevant le champ de vecteurs tournant autour de 0 dans $\mathring{D}_\eta - \{0\}$, le flot du champ de vecteurs obtenu fournit un automorphisme de la fibre. L'automorphisme induit sur la cohomologie de la fibre de Milnor est indépendant du relèvement, c'est l'automorphisme de monodromie

$$M : H^*(Mil_{f,x}, \mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} H^*(Mil_{f,x}, \mathbb{C}).$$

1.1.2 Cycles proches et cycles évanescents

Soit X une variété analytique complexe et $f : X \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. On va définir les foncteurs cycles proches et cycles évanescents. Considérons le diagramme suivant où les carrés sont cartésiens :

$$\begin{tikzcd} X_0 \arrow[r, "i"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & X \arrow[d, "f"] \arrow[dr, phantom, "\square"] & X^* \arrow[l, "j"'] \arrow[d, "f"] \arrow[dr, phantom, "\square"] & \widetilde{X} \arrow[l, "p"'] \arrow[d, "\tilde{f}"] \\ \{0\} \arrow[r, "i"] & \mathbb{C} & \mathbb{C}^* \arrow[l, "j"'] & \widetilde{\mathbb{C}^*} \arrow[l, "p"'] \end{tikzcd}$$

où $X_0 := f^{-1}(0)$, $\widetilde{\mathbb{C}^*}$ est un revêtement universel de $\mathbb{C}^*$ et on peut identifier le morphisme $p : \widetilde{\mathbb{C}^*} \to \mathbb{C}^*$ à

$$\begin{array}{rccc} \exp : & \mathbb{C} & \to & \mathbb{C}^* \\ & z & \mapsto & e^{2i\pi z}. \end{array}$$

Soit $D_c^b(X)$ la catégorie dérivée bornée des faisceaux à cohomologie constructible sur X. On définit le foncteur cycles proches de la façon suivante :

$$\begin{array}{rccc} \Psi_f : & D_c^b(X) & \to & D_c^b(X_0) \\ & \mathcal{F}^\bullet & \mapsto & i^{-1}\mathbf{R}(j \circ p)_*(j \circ p)^{-1}\mathcal{F}^\bullet. \end{array}$$

La translation

$$\begin{array}{rccc} \tau : & \widetilde{\mathbb{C}^*} & \to & \widetilde{\mathbb{C}^*} \\ & z & \mapsto & z+1. \end{array}$$

permet d'induire l'automorphisme de monodromie $T : \Psi_f\mathcal{F}^\bullet \to \Psi_f\mathcal{F}^\bullet$. Le foncteur cycles proches est lié à la fibration de Milnor par le résultat suivant.

Proposition 1.1.3. *Soit $\mathcal{F}^\bullet \in D_c^b(X)$ et $x \in X_0$. Il existe un isomorphisme compatible aux automorphismes de monodromie*

$$\mathscr{H}^k(\Psi_f\mathcal{F}^\bullet)_x \simeq \mathbb{H}^k(Mil_{f,x}.\mathcal{F}^\bullet).$$

Autrement dit, le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathscr{H}^k(\Psi_f\mathcal{F}^\bullet)_x \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "T"] & \mathbb{H}^k(Mil_{f,x}, \mathcal{F}^\bullet) \arrow[d, "M"] \\ \mathscr{H}^k(\Psi_f\mathcal{F}^\bullet)_x \arrow[r, "\sim"] & \mathbb{H}^k(Mil_{f,x}, \mathcal{F}^\bullet) \end{tikzcd}$$

Par adjonction, on a le morphisme naturel suivant :

$$c : i^{-1}\mathcal{F}^\bullet \to \Psi_f\mathcal{F}^\bullet.$$

On définit le complexe des cycles évanescents $\Phi_f\mathcal{F}^\bullet \in D_c^b(X_0)$ comme étant le cône du morphisme c. Ainsi, on obtient le triangle distingué suivant dans la catégorie $D_c^b(X_0)$:

$$i^{-1}\mathcal{F}^\bullet \xrightarrow{c} \Psi_f\mathcal{F}^\bullet \xrightarrow{\text{can}} \Phi_f\mathcal{F}^\bullet \xrightarrow{+1} . \tag{1.1}$$

Remarque 1.1.4. Le cône n'étant pas une construction fonctorielle dans les catégories dérivées, il faut faire attention au fait que cette définition des cycles évanescents n'est pas fonctorielle.

Soit Perv(X) la catégorie abélienne des faisceaux pervers sur X et notons ${}^p\Psi_f := \Psi_f[-1]$ et ${}^p\Phi_f := \Phi_f[-1]$. Le théorème suivant est dû à O. Gabber.

Théorème 1.1.5. *Si $\mathcal{F}^\bullet \in \mathrm{Perv}(X)$ alors ${}^p\Psi_f\mathcal{F}^\bullet$ et ${}^p\Phi_f\mathcal{F}^\bullet$ sont dans $\mathrm{Perv}(X_0)$.*

1.2 Généralités sur les $\mathscr{D}$-modules

On définit dans cette section les $\mathscr{D}$-modules holonomes et réguliers afin d'énoncer la correspondance de Riemann-Hilbert. On définit également le foncteur image directe.

1.2.1 $\mathscr{D}$-modules cohérents

Soit X une variété complexe de dimension n, on note $\mathscr{O}_X$ le faisceau des fonctions holomorphes sur X. On définit $\mathscr{D}_X$ comme étant le sous-faisceau de $\mathscr{H}om_{\mathbb{C}}(\mathscr{O}_X, \mathscr{O}_X)$ engendré par

– la multiplication par des fonctions holomorphes,

– la dérivation par des champs de vecteurs holomorphes.

Localement on a, pour tout $x \in X$, $\mathscr{D}_{X,x} \simeq \mathscr{D}_{\mathbb{C}^n,0} = \mathbb{C}\{z_1, ..., z_n\}\langle \partial_{z_1}, ..., \partial_{z_n}\rangle$ avec les relations suivantes :

$$[\partial_{z_i}, \partial_{z_j}] = 0$$

$$[\partial_{z_i}, z_j] = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad i \neq j \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Proposition 1.2.1. *Le faisceau d'anneaux $\mathscr{D}_X$ est cohérent.*

Démonstration. [MS02, 2.1]

□

Définition 1.2.2. On définit la filtration par l'ordre $F_\bullet\mathscr{D}_X$ de $\mathscr{D}_X$, indexée par les entiers, de la façon suivante :

– $F_k\mathscr{D}_X = 0$ si $k \leqslant -1$,

– $F_0\mathscr{D}_X = \mathscr{O}_X$,

– $P \in F_{k+1}\mathscr{D}_X$ si et seulement si $[P, \phi] \in F_k\mathscr{D}_X$ pour tout $\phi \in \mathscr{O}_X$.

Remarque 1.2.3. On a une équivalence de catégories entre $\mathscr{D}_X$-modules à droite et $\mathscr{D}_X$-modules à gauche donnée par les foncteurs quasi-inverses $\mathcal{M} \to \Omega_X^n \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathcal{M}$ et $\mathcal{N} \to \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\Omega_X^n, \mathcal{N})$.

Définition 1.2.4. Soit $\mathcal{M}$ un $\mathscr{D}_X$-module, il est cohérent s'il est localement de présentation finie, i.e., si pour tout $x \in X$ il existe un voisinage U de x et une suite exacte

$$\mathscr{D}^p_{X|U} \to \mathscr{D}^q_{X|U} \to \mathcal{M}_{|U} \to 0.$$

1.2.2 La variété caractéristique d'un $\mathscr{D}$-module

Définition 1.2.5. Soit $\mathcal{M}$ un $\mathscr{D}_X$-module et $F_\bullet\mathcal{M}$ une F-filtration de $\mathcal{M}$, i.e. une filtration croissante exhaustive de $\mathcal{M}$ par des $\mathscr{O}_X$-modules compatible à la filtration $F_k\mathscr{D}_X$ (i.e. pour tout $k, m \in \mathbb{Z}$, $F_k\mathscr{D}_X \cdot F_m\mathcal{M} \subset F_{m+k}\mathcal{M}$). La F-filtration $F_\bullet\mathcal{M}$ est une bonne filtration de $\mathcal{M}$ si pour tout $m \in \mathbb{Z}$, $F_m\mathcal{M}$ est un $\mathscr{O}_X$-module cohérent et s'il existe localement $m_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$F_k\mathscr{D}_X \cdot F_{m_0}\mathcal{M} = F_{m_0+k}\mathcal{M}.$$

Proposition 1.2.6. *Un $\mathscr{D}_X$-module cohérent admet localement une bonne filtration.*

Démonstration. [MS02, Proposition 2.4]

□

Soit $F_\bullet\mathcal{M}$ une F-filtration de $\mathcal{M}$. On note $\mathrm{gr}_k^F\mathscr{D}_X := F_k\mathscr{D}_X/F_{k-1}\mathscr{D}_X$ et $\mathrm{gr}_k^F\mathcal{M} := F_k\mathcal{M}/F_{k-1}\mathcal{M}$. On note également $\mathrm{Gr}^F\mathscr{D}_X := \bigoplus_{k\geqslant 0}\mathrm{gr}_k^F\mathscr{D}_X$ et $\mathrm{Gr}^F\mathcal{M} := \bigoplus_{k\geqslant 0}\mathrm{gr}_k^F\mathcal{M}$.

Proposition 1.2.7. *Soit $\pi : T^*X \to X$ la projection du fibré cotangent à X sur X. Le faisceau $\mathrm{Gr}^F \mathscr{D}_X$ est isomorphe au sous faisceau d'anneaux de $\pi_* \mathscr{O}_{T^*X}$ consistant en les fonctions polynomiales en les fibres de π.*

Démonstration. [MG93, Proposition 5] □

Proposition 1.2.8. *Le faisceau d'anneaux $\mathrm{Gr}^F \mathscr{D}_X$ est cohérent.*

Démonstration. [MG93, Proposition 9] □

Proposition 1.2.9. *Une F-filtration $F_\bullet \mathcal{M}$ de $\mathcal{M}$ est bonne si et seulement si $\mathrm{Gr}^F \mathcal{M}$ est un $\mathrm{Gr}^F \mathscr{D}_X$-module cohérent.*

Démonstration. [MG93, Theorem 1] □

Proposition 1.2.10. *Soit $\mathcal{M}$ un $\mathscr{D}_X$-module cohérent. Il existe un faisceau d'idéaux cohérent de $\mathrm{Gr}^F \mathscr{D}_X$ qui est localement égal à $\sqrt{ann_{\mathrm{Gr}^F \mathscr{D}_X} \mathrm{Gr}^F \mathcal{M}}$ pour toute bonne filtration $F_\bullet \mathcal{M}$.*

Démonstration. [MG93, Proposition 17 et Remark 6] □

On note $J(\mathcal{M})$ ce faisceau d'idéaux.

Définition 1.2.11. Étant donnée la proposition 1.2.7, on définit la *variété caractéristique* $\mathrm{car}(\mathcal{M})$ de $\mathcal{M}$ comme étant l'espace analytique fermé dans T^*X défini par le faisceau d'idéaux $J(\mathcal{M})$.

1.2.3 La correspondance de Riemann-Hilbert

Définition 1.2.12. Un $\mathscr{D}_X$-module $\mathcal{M}$ est *holonome* si sa variété caractéristique $\mathrm{car}(\mathcal{M})$ est de dimension n.

Un $\mathscr{D}_X$-module $\mathcal{M}$ est *régulier* s'il existe localement une bonne filtration $F_\bullet \mathcal{M}$ telle que $J(\mathcal{M}) = \mathrm{ann}_{\mathrm{Gr}^F \mathscr{D}_X} \mathrm{Gr}^F \mathcal{M}$.

On note Ω_X^n le faisceau des n-formes holomorphes sur X et $D_h^b(\mathscr{D}_X)$ la catégorie dérivée bornée des $\mathscr{D}_X$-modules à cohomologie holonome.

Définition 1.2.13. On définit le foncteur De Rham

$$\begin{array}{rccc} \mathbf{DR}: & D_h^b(\mathscr{D}_X) & \to & D_c^b(X) \\ & \mathcal{M} & \mapsto & \Omega^n \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{\mathscr{D}_X} \mathcal{M} \end{array}.$$

La notion de régularité a été introduite par P. Deligne dans le cas des connexions holomorphes dans [Del70]. Dans le cas des $\mathscr{D}$-modules, il existe deux définitions équivalentes de la régularité, l'une due à M. Kashiwara (cf.[Kas84]) et l'autre due à Z. Mebkhout (cf.[Meb04]).

Théorème 1.2.14. *La restriction du foncteur* **DR** *est une équivalence de catégorie entre la catégorie des $\mathscr{D}_X$-modules holonomes réguliers et la catégorie des faisceaux pervers*

$$\mathbf{DR} : \mathrm{Mod}_{h,r}(\mathscr{D}_X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Perv}(X).$$

Démonstration. [Kas84] ou [Meb84] selon la définition de régularité. □

1.2.4 Image inverse et image directe

Soit $f : X \to Y$ un morphisme de variétés analytiques complexes. On définit le module de transfert

$$\mathscr{D}_{X\to Y} := \mathscr{O}_X \otimes_{f^{-1}\mathscr{O}_Y} f^{-1}\mathscr{D}_Y.$$

Définition 1.2.15. Soit $\mathcal{M}^\bullet$ un complexe de $\mathscr{D}_Y$-modules, on définit l'image inverse de $\mathcal{N}^\bullet$ par f comme étant le complexe

$$f^*\mathcal{M}^\bullet := \mathscr{D}_{X\to Y} \otimes_{f^{-1}\mathscr{D}_Y} f^{-1}\mathcal{M}^\bullet.$$

Définition 1.2.16. Soit $\mathcal{N}^\bullet$ un complexe de $\mathscr{D}_X$-modules *à droite*, on définit les images directes de $\mathcal{N}^\bullet$ par f comme étant les complexes

$$\begin{aligned} f_*\mathcal{N}^\bullet &:= \mathbf{R}f_*(\mathcal{N}^\bullet \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{\mathscr{D}_X} \mathscr{D}_{X\to Y}), \\ f_!\mathcal{N}^\bullet &:= \mathbf{R}f_!(\mathcal{N}^\bullet \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{\mathscr{D}_X} \mathscr{D}_{X\to Y}). \end{aligned}$$

Pour un complexe de $\mathscr{D}_X$-modules à gauche, on utilise l'équivalence de catégorie 1.2.3 pour se ramener au cas précédent.

Le théorème suivant est connu sous le nom d'équivalence de Kashiwara.

Théorème 1.2.17. *Soit $i : Y \to X$ une immersion fermée, le foncteur i_* induit une équivalence de catégories entre la catégorie dérivée bornée des $\mathscr{D}_Y$-modules cohérents et celle des $\mathscr{D}_X$-modules cohérents supportés sur Y.*

Définition 1.2.18 (Micro-support (cf. [KS94]))**.** Soit $\mathcal{F} \in D^b(X)$ un objet de la catégorie dérivée bornée des faisceaux sur X. On définit le micro-support de $\mathcal{F}$, noté $SS(\mathcal{F})$, comme étant le complémentaire dans T^*X de l'ensemble des points $p \in T^*X$ satisfaisant à la condition suivante :

Il existe un voisinage U de p tel que, pour tout $x_0 \in X$ et toute fonction C^∞ réelle ψ définie dans un voisinage de x_0 satisfaisant à $\psi(x_0) = 0$ et $d\psi(x_0) \in U$, on ait :

$$(R\Gamma_{\{x;\psi(x)\geqslant 0\}}\mathcal{F})_{x_0} = 0.$$

Les deux théorèmes suivants permettent de contrôler la cohérence de l'image directe d'un $\mathscr{D}$-module.

Théorème 1.2.19. *Soit $\mathcal{M} \in D^b_h(\mathscr{D}_X)$ un complexe borné de $\mathscr{D}_X$-modules à cohomologie holonome et $\mathcal{F} \in D^b_{\mathbb{R}-c}(X)$ un complexe $\mathbb{R}$-constructible (i.e. à cohomologie localement constante sur les strates d'une stratification sous-analytique). On suppose, de plus, que la restriction de f à supp$(\mathcal{M}) \cap$ supp$(\mathcal{F})$ est propre et que*

$$car(\mathcal{M}) \cap SS(\mathcal{F}) = T^*_X X.$$

Alors $f_!(\mathcal{M} \otimes \mathcal{F}) \in D^b_h(\mathscr{D}_X)$, c'est en particulier un complexe à cohomologie cohérente.

Démonstration. [SS94, Theorem 4.2] □

On note $\pi : T^*X \to X$ la projection. Soit $\varphi : X \to \mathbb{R}$ une fonction analytique réelle. On définit

$$\begin{aligned} \Lambda_\varphi &= \{(x, d\varphi(x)) \mid x \in X\}, \\ Z_t &= \{x \in X \mid \varphi(x) \leqslant t\}, \\ U_t &= \{x \in X \mid \varphi(x) < t\}. \end{aligned}$$

Théorème 1.2.20. *Soient $\mathcal{M} \in D^b_h(\mathscr{D}_X)$ et $\mathcal{F} \in D^b_{\mathbb{R}-c}(X)$ tels que*

(i) pour tout $t \in \mathbb{R}$, f est propre sur supp$(\mathcal{M}) \cap$ supp$(\mathcal{F}) \cap Z_t$,

(ii) car$(\mathcal{M}) \cap SS(\mathcal{F}) = T^*_X X$,

(iii) il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que
$$\Lambda_\varphi \cap (car(\mathcal{M}) + SS(\mathcal{F})) \subset \pi^{-1}(Z_{t_0}).$$

Alors

(a) Si l'on pose $\mathcal{F}_t := \mathcal{F}_{U_t}$, alors le morphisme naturel
$$f_*(\mathcal{M} \otimes \mathcal{F}_t) \to f_*(\mathcal{M} \otimes \mathcal{F})$$
est un isomorphisme pour $t > t_0$,

(b) $f_*(\mathcal{M} \otimes \mathcal{F}) \in D^b(\mathscr{D}^h_X)$, c'est en particulier un complexe à cohomologie cohérente.

Démonstration. [SS94, Corollary 8.1]

□

Pour appliquer ces théorèmes, on utilisera la proposition suivante.

Proposition 1.2.21. *Soit $\Lambda \subset T^*X$ un sous-ensemble analytique complexe fermé conique et isotrope. Notons*
$$S := \{t \in \mathbb{R} \mid t = \varphi(x), d\varphi(x) \in \Lambda \text{ pour un } x \in X\}.$$
Supposons, de plus, que φ est propre sur $\pi(\Lambda)$. Alors S est un ensemble discret.

Démonstration. [KS94, Proposition 8.3.12]

□

1.3 Cycles proches et cycles évanescents algébriques

Pour définir les cycles proches et les cycles évanescents dans le cas des $\mathscr{D}$-modules, on introduit la filtration de Kashiwara-Malgrange. On énonce alors le théorème de comparaison entre cycles évanescents algébriques et topologiques.

1.3.1 V-filtration de Kashiwara-Malgrange

Soit $Y \subset X$ une hypersurface lisse d'idéal $\mathscr{I}_Y$. Pour tout entier $k < 0$, on pose $\mathscr{I}^k_{Y,x} = \mathscr{O}_X$.

Définition 1.3.1. On définit la V-filtration du faisceau $\mathscr{D}_X$ indexée par les entiers. Le terme d'ordre $k \in \mathbb{Z}$ est le sous-faisceau de $\mathscr{D}_X$ satisfaisant, pour tout $x \in X$, à
$$(V_k\mathscr{D}_X)_x := \{P \in \mathscr{D}_{X,x} \,|\, \forall m \in \mathbb{Z}, P(\mathscr{I}^{k+m}_{Y,x}) \subset \mathscr{I}^m_{Y,x}\}.$$

Proposition 1.3.2. *Le faisceau d'anneaux $V_0\mathscr{D}_X$ est cohérent.*

Démonstration. [MM04, Proposition 4.1-5]

□

Définition 1.3.3. Soit $\mathcal{M}$ un $\mathscr{D}_X$-module cohérent et $U_\bullet\mathcal{M}$ une V-filtration de $\mathcal{M}$, i.e. une filtration croissante exhaustive de $\mathcal{M}$ par des $V_0\mathscr{D}_X$-modules compatibles à la filtration $V_k\mathscr{D}_X$ (i.e. pour tout $k, m \in \mathbb{Z}$, $V_k\mathscr{D}_X \cdot U_m\mathcal{M} \subset U_{m+k}\mathcal{M}$). La V-filtration $U_\bullet\mathcal{M}$ est une bonne V-filtration de $\mathcal{M}$ si pour tout $m \in \mathbb{Z}$, $U_m\mathcal{M}$ est un $V_0\mathscr{D}_X$-module cohérent et s'il existe localement $m_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$V_k\mathscr{D}_X \cdot U_{m_0}\mathcal{M} = U_{m_0+k}\mathcal{M} \text{ et } V_{-k}\mathscr{D}_X \cdot U_{-m_0}\mathcal{M} = U_{-m_0-k}\mathcal{M}.$$

Proposition 1.3.4. *Soit t une équation locale réduite de Y et soit E la classe de l'opérateur $t\partial_t$ dans $\mathrm{gr}_0^V\mathscr{D}_X$, la classe E est indépendante de l'équation $t = 0$.*

Démonstration. [MM04, Lemme 4.1-12]

□

On notera également E un relèvement de E dans $V_0\mathscr{D}_X$.

Définition 1.3.5. Soit $\mathcal{M}$ un $\mathscr{D}_X$-module cohérent.

1. On dit que $\mathcal{M}$ est *spécialisable* si au voisinage de tout point de X, il existe une bonne V-filtration $U_\bullet(\mathcal{M})$ de $\mathcal{M}$ et un polynôme $b(s) \in \mathbb{C}[s]$ tels que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $b(E+k)U_k\mathcal{M} \subset U_{k-1}\mathcal{M}$.
2. On dit que $\mathcal{M}$ est *spécialisable par section* si, pour toute section locale m de $\mathcal{M}$, il existe un polynôme $b(s) \in \mathbb{C}[s]$ tel que $b(E)m \in V_{-1}\mathscr{D}_X \cdot m$.

Proposition 1.3.6. *Les deux définitions précédentes sont équivalentes et si la première est satisfaite pour une bonne V-filtration de $\mathcal{M}$, elle l'est pour toutes.*

Démonstration. [MM04, Proposition 4.2-2]

□

Proposition 1.3.7. *Les $\mathscr{D}_X$-modules holonomes sont spécialisables le long de toute hypersurface.*

Démonstration. [MM04, Proposition 4.4-2]

□

Définition 1.3.8. Soit $\mathcal{M}$ un $\mathscr{D}_X$-module spécialisable, les polynômes unitaires de plus bas degré satisfaisant les relations de la définition 1.3.5 sont appelés polynômes de Bernstein-Sato et sont notés $b_{U_\bullet}$ et b_m.

Si les racines des polynômes de Bernstein-Sato sont dans $\mathbb{R}$, on dira que $\mathcal{M}$ est $\mathbb{R}$-spécialisable.

Définition 1.3.9. On définit la filtration $V_\bullet(\mathcal{M})$ indexée par $\mathbb{C}$ suivante :

$$\forall x \in X,\ V_\alpha(\mathcal{M})_x := \{m \in \mathcal{M}_x;\ s \geqslant -\alpha - 1,\ \forall s \in b_m^{-1}(0)\}.$$

Cette V-filtration est appelée *V-filtration canonique* ou *V-filtration de Malgrange-Kashiwara*.

Proposition 1.3.10. *La V-filtration canonique satisfait à la propriété suivante : pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$, $V_{\alpha+\bullet}\mathcal{M}$ est l'unique bonne V-filtration telle que les racines de $b_{V_{\alpha+\bullet}}$ soient dans l'intervalle $[-\alpha-1, -\alpha[$.*

Démonstration. [MM04, Propositions 4.2-6 et 4.3-5]

□

1.3.2 Cycles proches algébriques

On note $V_{<\alpha}\mathcal{M} := \bigcup_{\beta<\alpha} V_\beta\mathcal{M}$ et $\mathrm{gr}^V_\alpha\mathcal{M} := V_\alpha\mathcal{M}/V_{<\alpha}\mathcal{M}$.

Définition 1.3.11. On définit les *cycles proches algébriques*

$$\Psi^{alg}_Y\mathcal{M} := \bigoplus_{-1\leqslant\alpha<0} \mathrm{gr}^V_\alpha\mathcal{M}$$

et les *cycles évanescents algébriques*

$$\Phi^{alg}_Y\mathcal{M} := \bigoplus_{-1<\alpha\leqslant 0} \mathrm{gr}^V_\alpha\mathcal{M}.$$

Théorème 1.3.12. *Soit $\mathcal{M}$ un $\mathscr{D}_X$-module holonome régulier. Le triangle distingué (cf.* (1.1)*)*

$$i^{-1}\mathbf{DR}\mathcal{M} \to \Psi_f\mathbf{DR}\mathcal{M} \to \Phi_f\mathbf{DR}\mathcal{M} \xrightarrow{+1}$$

est naturellement isomorphe au triangle distingué obtenu en appliquant le foncteur **DR** *au triangle distingué*

$$i^!\mathcal{M} \to \Psi^{alg}_Y\mathcal{M} \to \Phi^{alg}_Y\mathcal{M} \xrightarrow{+1} .$$

De plus, cet isomorphisme est compatible à la monodromie où les automorphismes de monodromie sur $\Psi^{alg}_Y\mathcal{M}$ et $\Phi^{alg}_Y\mathcal{M}$ sont induits par $\exp(-2i\pi E)$.

Démonstration. [MM04, Theorème 5.3-2]. On donnera également dans le chapitre 4 une démonstration de ce résultat pour les cycles proches dans le cas plus général d'un morphisme sans pente. □

1.4 Opérations sur les faisceaux

On liste ici quelques morphismes qui seront utilisés dans la suite. Soit $f : X \to Y$ une application continue, $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3 \in D^b(\underline{\mathbb{C}}_X)$ et $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2 \in D^b(\underline{\mathbb{C}}_Y)$, on a les morphismes suivants :

$$\mathbf{R}\mathscr{H}om(\mathcal{F}_1 \overset{\mathbf{L}}{\otimes} \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3) \simeq \mathbf{R}\mathscr{H}om(\mathcal{F}_1, \mathbf{R}\mathscr{H}om(\mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3)), \tag{1.2}$$

$$f^{-1}\mathcal{G}_1 \overset{\mathbf{L}}{\otimes} f^{-1}\mathcal{G}_2 \simeq f^{-1}(\mathcal{G}_1 \overset{\mathbf{L}}{\otimes} \mathcal{G}_2), \tag{1.3}$$

$$\mathbf{R}f_*\mathcal{F}_1 \overset{\mathbf{L}}{\otimes} \mathcal{G}_1 \to \mathbf{R}f_*(\mathcal{F}_1 \overset{\mathbf{L}}{\otimes} f^{-1}\mathcal{G}_2), \tag{1.4}$$

$$f^{-1}\mathbf{R}\mathscr{H}om(\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2) \to \mathbf{R}\mathscr{H}om(f^{-1}\mathcal{G}_1, f^{-1}\mathcal{G}_2). \tag{1.5}$$

Ce sont respectivement les morphismes (2.6.7), (2.6.18), (2.6.21) et (2.6.27) de [KS94].

Chapitre 2

Morphismes sans pente

Dans ce chapitre, on donne les principaux résultats sur les morphismes sans pente, on suivra essentiellement [Mai13]. On définit la V-multifiltration de Kashiwara-Malgrange d'un $\mathscr{D}_X$-module sans pente. Comme dans le cas d'une fonction, on utilise cette multifiltration pour définir les cycles proches algébriques.

On définit ensuite les cycles proches topologiques associés à un morphisme sans pente. Enfin, on introduit les fonctions de classe de Nilsson à plusieurs variables, ces fonctions seront utilisées dans la suite pour établir un lien entre cycles proches algébriques et cycles proches topologiques.

Notations On rappelle les notations relatives aux multi-indices :

- $d_X := \dim_{\mathbb{C}} X$,
- $\partial_i := \partial_{t_i}$,
- $E_i := t_i \partial_i$,
- $\boldsymbol{x} := (x_1, ..., x_{d_X - p})$,
- $\mathbf{1}_i := (0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)$ où le 1 est en position i,
- $\boldsymbol{\alpha} := (\alpha_1, ..., \alpha_p)$,
- $\boldsymbol{\alpha}_I := (\alpha_i)_{i \in I}$ pour $I \subset \{1, ..., p\}$,
- $\boldsymbol{t} := t_1 ... t_p$,
- $\boldsymbol{t}^{\boldsymbol{s}} := t_1^{s_1} ... t_p^{s_p}$,
- $\mathscr{D}_X[\boldsymbol{s}] := \mathscr{D}_X[s_1, ..., s_p]$.

2.1 $\mathscr{D}$-modules sans pente et V-multifiltration de Kashiwara-Malgrange

On définit la notion de $\mathscr{D}$-module sans pente le long d'une famille d'hypersurfaces lisses. On introduit alors pour un tel $\mathscr{D}$-module la V-multifiltration de Kashiwara-Malgrange.

Soit $\mathbf{H} = \{H_1, ..., H_p\}$ où les H_i sont des hypersurfaces lisses dont la réunion définit un diviseur à croisements normaux. On se place ici dans le cas où il existe localement des coordonnées $(\boldsymbol{x}, t_1, ..., t_p)$ telles que

$$\begin{array}{cccc} \boldsymbol{f} : & X & \to & \mathbb{C}^p \\ & (\boldsymbol{x}, t_1, ..., t_p) & \mapsto & (t_1, ..., t_p) \end{array}$$

et $H_i = \{t_i = 0\}$.

Définition 2.1.1. Notons, pour tout $1 \leqslant i \leqslant p$, $\mathcal{I}_i$ l'idéal de l'hypersurface H_i et $\mathcal{I}^{\boldsymbol{k}} := \prod_{i=1}^p \mathcal{I}_i^{k_i}$. Pour tout $\boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}^p$ et pour tout $x \in X$, on définit :

$$(V_{\boldsymbol{k}} \mathscr{D}_X)_x := \{P \in \mathscr{D}_{X,x} \mid \forall \boldsymbol{m} \in \mathbb{Z}^p, P(\mathcal{I}_x^{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{m}}) \subset \mathcal{I}_x^{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{m}}\},$$

ceci permet de définir une filtration croissante de $\mathscr{D}_X$ indexée par $\mathbb{Z}^p$.

Soit $\mathcal{M}$ un $\mathscr{D}_X$-module cohérent. Une *V-multifiltration* $U_\bullet\mathcal{M}$ de $\mathcal{M}$ est une filtration croissante indexée par $\mathbb{Z}^p$ satisfaisant à $V_{\boldsymbol{k}}\mathscr{D}_X \cdot U_{\boldsymbol{k}'}\mathcal{M} \subset U_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}'}\mathcal{M}$ pour tout $\boldsymbol{k}$ et $\boldsymbol{k}'$ dans $\mathbb{Z}^p$. Une telle V-multifiltration est *bonne* si elle est engendrée localement par un nombre fini de sections $(m_j)_{j\in J}$, c'est-à-dire que, pour tout $j \in J$, il existe $\boldsymbol{k}_j \in \mathbb{Z}^p$ tel que pour tout $\boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}^p$,

$$U_{\boldsymbol{k}}\mathcal{M} = \sum_{j\in J} V_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}_j}\mathscr{D}_X \cdot m_j.$$

Lorsque des inégalités entre nombres complexes apparaîtront, l'ordre considéré sera toujours l'ordre lexicographique sur $\mathbb{C}$, c'est-à-dire

$$x + iy \leqslant a + ib \iff x < a \text{ ou } (x = a \text{ et } y \leqslant b).$$

En suivant [Mai13], on commence par donner les conditions pour qu'un couple $(\mathbf{H}, \mathcal{M})$ soit sans pente, puis on définit la V-multifiltration de Malgrange-Kashiwara.

Définition 2.1.2. Soit $\mathcal{M}$ un $\mathscr{D}_X$-module cohérent.

1. On dit que le couple $(\mathbf{H}, \mathcal{M})$ est *multispécialisable sans pente* si, au voisinage de tout point de X, il existe une bonne V-multifiltration $U_\bullet(\mathcal{M})$ de $\mathcal{M}$ et des polynômes $b_i(s) \in \mathbb{C}[s]$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant p$ tels que pour tout $\boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}^p$, $b_i(E_i + k_i)U_{\boldsymbol{k}}\mathcal{M} \subset U_{\boldsymbol{k}-\mathbf{1}_i}\mathcal{M}$.
2. On dit que le couple $(\mathbf{H}, \mathcal{M})$ est *multispécialisable sans pente par section* si, pour toute section locale m de $\mathcal{M}$, il existe des polynômes $b_i(s) \in \mathbb{C}[s]$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant p$ tels que $b_i(E_i)m \in V_{-\mathbf{1}_i}\mathscr{D}_X \cdot m$.

Rappelons la proposition 1 de [Mai13] :

Proposition 2.1.3. *Les deux définitions précédentes sont équivalentes et, si la première est satisfaite pour une bonne V-multifiltration de $\mathcal{M}$, elle l'est pour toutes. On dit alors que le couple $(\mathbf{H}, \mathcal{M})$ est* sans pente.

On fixe $\mathcal{M}$ un $\mathscr{D}_X$-module cohérent tel que le couple $(\mathbf{H}, \mathcal{M})$ soit sans pente.

Définition 2.1.4. Le polynôme unitaire de plus bas degré vérifiant la propriété 1. de la définition pour l'indice i est appelé *polynôme de Bernstein-Sato d'indice i de la V-multifiltration $U_\bullet(\mathcal{M})$*, on le note $b_{i,U_\bullet(\mathcal{M})}$.

Le polynôme unitaire de plus bas degré vérifiant la propriété 2. de la définition pour l'indice i est appelé *polynôme de Bernstein-Sato d'indice i de la section m*, on le note $b_{i,m}$.

Proposition 2.1.5. *Soient, pour $1 \leqslant i \leqslant p$, des sections $\sigma_i : \mathbb{C}/\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ de la projection naturelle $\mathbb{C} \to \mathbb{C}/\mathbb{Z}$. Il existe une unique bonne V-multifiltration $V^\sigma_\bullet(\mathcal{M})$ de $\mathcal{M}$ telle que, pour tout i, les racines de $b_{i,V^\sigma_\bullet(\mathcal{M})}$ soient dans l'image de σ_i.*

La démonstration de cette proposition et celle de la proposition 2.1.7 sont identiques à celle du théorème 1. de [Mai13].

Définition 2.1.6. On définit la multifiltration $V_\bullet(\mathcal{M})$ indexée par $\mathbb{C}^p$ et vérifiant :

$$\forall x \in X,\ V_{\boldsymbol{\alpha}}(\mathcal{M})_x := \{m \in \mathcal{M}_x;\ s_i \geqslant -\alpha_i - 1,\ \forall s_i \in b^{-1}_{i,m}(0) \text{ et } 1 \leqslant i \leqslant p\}.$$

Cette V-multifiltration est appelée *V-multifiltration canonique* ou *V-multifiltration de Malgrange-Kashiwara.*

Si on considère l'ordre partiel standard sur $\mathbb{C}^p$

$$\boldsymbol{\alpha} \leqslant \boldsymbol{\beta} \iff \alpha_i \leqslant \beta_i \text{ pour tout } 1 \leqslant i \leqslant p,$$

on peut définir

$$V_{<\boldsymbol{\alpha}}(\mathcal{M}) := \sum_{\boldsymbol{\beta}<\boldsymbol{\alpha}} V_{\boldsymbol{\beta}}(\mathcal{M})$$

et

$$\mathrm{gr}_{\boldsymbol{\alpha}}(\mathcal{M}) := V_{\boldsymbol{\alpha}}(\mathcal{M})/V_{<\boldsymbol{\alpha}}(\mathcal{M}).$$

Soient $I \subset \{1, ..., p\}$ et I^c son complémentaire, on définit

$$V_{<\boldsymbol{\alpha}_I,\boldsymbol{\alpha}_{I^c}}(\mathcal{M}) := \sum_{\boldsymbol{\beta}_I<\boldsymbol{\alpha}_I} V_{\boldsymbol{\beta}_I,\boldsymbol{\alpha}_{I^c}}(\mathcal{M}).$$

Proposition 2.1.7. *On a l'égalité des V-multifiltrations $V_{(<\boldsymbol{\alpha}_I,\boldsymbol{\alpha}_{I^c})+\boldsymbol{k}}(\mathcal{M}) = V_{\boldsymbol{k}}^{\sigma_{<\boldsymbol{\alpha}_I,\boldsymbol{\alpha}_{I^c}}}(\mathcal{M})$ où $\sigma_{<\boldsymbol{\alpha}_I,\boldsymbol{\alpha}_{I^c}}$ est la section dont l'image est l'ensemble*

$$\left\{ \begin{array}{lll} \boldsymbol{a} \in \mathbb{C}^p & \textit{tel que} & -\alpha_i - 1 \leqslant a_i < -\alpha_i \ \forall\ i \in I^c \\ & \textit{et} & -\alpha_i - 1 < a_i \leqslant -\alpha_i \ \forall\ i \in I \end{array} \right\}.$$

Il existe un ensemble fini $A \subset [-1, 0[^p$ tel que la V-multifiltration canonique soit indexée par $A + \mathbb{Z}^p$. Ainsi, la V-multifiltration canonique est cohérente.

Soit $I \subset \{1, ..., p\}$ et $J \subset I^c$. Comme pour les $\mathscr{D}_X$-modules cohérents, on a une notion de $V_{\mathbf{0}_I}^{\mathbf{H}_I}\mathscr{D}_X$-module multispécialisable sans pente le long des hypersurfaces $\mathbf{H}_J := (H_i)_{i\in J}$.

Définition 2.1.8. Soit $\mathcal{M}$ un $V_{\mathbf{0}_I}^{\mathbf{H}_I}\mathscr{D}_X$-module cohérent et $J \subset I^c$, on note $q := \#J$.

1. On dit que le couple $(\mathbf{H}_J, \mathcal{M})$ est *multispécialisable sans pente* (ou *spécialisable* si $q = 1$) si au voisinage de tout point de X, il existe une bonne V-multifiltration $U_\bullet(\mathcal{M})$ de $\mathcal{M}$ et des polynômes $b_i(s) \in \mathbb{C}[s]$ pour tout $i \in J$ tels que pour tout $\boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}^q$, $b_i(E_i + k_i)U_{\boldsymbol{k}}\mathcal{M} \subset U_{\boldsymbol{k}-\mathbf{1}_i}\mathcal{M}$.
2. On dit que le couple $(\mathbf{H}_J, \mathcal{M})$ est *multispécialisable sans pente par section* (ou *spécialisable par section* si $q = 1$) si, pour toute section locale m de $\mathcal{M}$, il existe des polynômes $b_i(s) \in \mathbb{C}[s]$ pour tout $i \in J$ tels que $b_i(E_i)m \in V_{-\mathbf{1}_i}^{\mathbf{H}_J}(V_{\mathbf{0}_I}^{\mathbf{H}_I}\mathscr{D}_X) \cdot m = V_{-\mathbf{1}_i}\mathscr{D}_X \cdot m$.

Remarque 2.1.9. Comme pour les $\mathscr{D}_X$-modules (proposition 2.1.3), les deux définitions sont équivalentes et, si elles sont satisfaites, on dira que le couple $(\mathbf{H}_J, \mathcal{M})$ est sans pente (ou spécialisable si $q = 1$). Les analogues des propositions 2.1.5 et 2.1.7 sont vrais pour les $V_{\mathbf{0}_I}^{\mathbf{H}_I}\mathscr{D}_X$-modules sans pente.

Proposition 2.1.10. *Soit $I \subset \{1, ..., p\}$ et $\mathcal{M}$ un $\mathscr{D}_X$-module cohérent tel que le couple $(\mathbf{H}, \mathcal{M})$ soit sans pente. Alors le couple $(\mathbf{H}_I, \mathcal{M})$ est sans pente et pour tout $\boldsymbol{\alpha}_I$ le couple $(\mathbf{H}_{I^c}, V_{\boldsymbol{\alpha}_I}^{\mathbf{H}_I}\mathcal{M})$ est sans pente. De plus, pour $I, J \subset \{1, ..., p\}$ disjoints, les V-multifiltrations de Malgrange-Kashiwara satisfont à :*

$$V_{\boldsymbol{\alpha}_I,\boldsymbol{\alpha}_J}^{\mathbf{H}_I\cup\mathbf{H}_J}(\mathcal{M}) = V_{\boldsymbol{\alpha}_I}^{\mathbf{H}_I}(\mathcal{M}) \cap V_{\boldsymbol{\alpha}_J}^{\mathbf{H}_J}(\mathcal{M}) = V_{\boldsymbol{\alpha}_I}^{\mathbf{H}_I}\left(V_{\boldsymbol{\alpha}_J}^{\mathbf{H}_J}(\mathcal{M})\right). \tag{2.1}$$

On a également l'analogue de [MM04, corollaire 4.2-7]

Proposition 2.1.11. *Pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$ et tout $j \in I^c$, l'application $\mathcal{M} \mapsto V_\alpha^{H_j}(\mathcal{M})$ définit un foncteur exact de la catégorie des $V_{\mathbf{0}_I}^{\mathbf{H}_I}\mathscr{D}_X$-modules spécialisables le long de H_j vers la catégorie des $V_0^{H_j}(V_{\mathbf{0}_I}^{\mathbf{H}_I})\mathscr{D}_X$-modules.*

Sachant que la V-multifiltration canonique est indexée par $A + \mathbb{Z}^p$ avec $A \subset [-1, 0[^p$ fini, quitte à renuméroter ces indices, on peut la supposer indexée par $\mathbb{Z}^p$ et appliquer la définition A.2.3 de l'appendice A.2 aux V-filtrations canoniques de $\mathcal{M}$.

La condition *sans pente* s'interprète de manière naturelle comme une condition de compatibilité des V-filtrations relatives aux différentes hypersurfaces considérées.

Proposition 2.1.12. *Si le couple* $(\mathbf{H}, \mathcal{M})$ *est sans pente, alors les filtrations* $V_\bullet^{H_1}(\mathcal{M}), ..., V_\bullet^{H_p}(\mathcal{M})$ *de* $\mathcal{M}$ *sont* compatibles *au sens de la définition A.2.3.*

Démonstration. Soit $\boldsymbol{\alpha} < \boldsymbol{\beta} \in \mathbb{C}^p$ et notons $I_q := \{1, ..., q\}$. On va construire par récurrence sur l'entier p le p-hypercomplexe X_p correspondant à la compatibilité des sous-objets

$$V_{\alpha_1}^{H_1}(V_{\boldsymbol{\beta}_{I_p}}^{\mathbf{H}_{I_p}}\mathcal{M}), ..., V_{\alpha_p}^{H_p}(V_{\boldsymbol{\beta}_{I_p}}^{\mathbf{H}_{I_p}}\mathcal{M}) \subseteq V_{\boldsymbol{\beta}_{I_p}}^{\mathbf{H}_{I_p}}\mathcal{M}.$$

D'après la remarque A.2.2, deux filtrations sont toujours compatibles. Supposons construit le q-hypercomplexe X_q. D'après la proposition 2.1.10, la propriété sans pente assure que les objets qui apparaissent dans X_q sont des $V_{\mathbf{0}_{I_q}}^{\mathbf{H}_{I_q}}\mathscr{D}_X$-modules cohérents spécialisables le long de H_{q+1}. On déduit alors de la proposition 2.1.11 que l'application de $V_{\alpha_{q+1}}^{H_{q+1}}(.)$ et $V_{\beta_{q+1}}^{H_{q+1}}(.)$ à de tels objets sont deux foncteurs exacts munis d'un monomorphisme de foncteurs donné par l'inclusion naturelle déduite de l'inégalité $\alpha_{q+1} \leqslant \beta_{q+1}$. On applique alors ces deux foncteurs à X_q, la fonctorialité fournit un $(q+1)$-hypercomplexe

$$0 \longrightarrow V_{\alpha_{q+1}}^{H_{q+1}}(X^q) \overset{i}{\hookrightarrow} V_{\beta_{q+1}}^{H_{q+1}}(X^q) \longrightarrow \mathrm{Coker}(i) \longrightarrow 0.$$

C'est le $(q+1)$-hypercomplexe X_{q+1} voulu. L'exactitude des différentes suites courtes provient de l'exactitude des suites courtes de X^q, de l'exactitude des foncteurs $V^{H_{q+1}}$-filtration ainsi que de l'exactitude du foncteur Coker(.) appliqué à des inclusions (lemme du serpent). On utilise également ici les identifications (2.1). Ceci nous donne par récurrence le p-hypercomplexe X_p. En prenant alors la limite inductive des p-hypercomplexes X_p sur $\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{C}^p$, on obtient le p-hypercomplexe correspondant à la compatibilité des sous-objets

$$V_{\alpha_1}^{H_1}(\mathcal{M}), ..., V_{\alpha_p}^{H_p}(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{M}.$$

Ceci étant vérifié pour tout $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{C}^p$, la proposition est démontrée. □

La proposition A.2.5 fournit le corollaire suivant.

Corollaire 2.1.13. *Si le couple* $(\mathbf{H}, \mathcal{M})$ *est sans pente, alors l'objet obtenu en appliquant successivement les gradués* $\mathrm{gr}_{\alpha_i}^{H_i}$ *par rapport aux V-filtrations canoniques* $V_\bullet^{H_i}$ *ne dépend pas de l'ordre dans lequel on applique ces foncteurs et est égal à* $\mathrm{gr}_{\boldsymbol{\alpha}}(\mathcal{M})$.

Proposition 2.1.14. *Soit* $\mathcal{M}$ *un* $\mathscr{D}_X$*-module cohérent tel que* $(\mathbf{H}, \mathcal{M})$ *soit sans pente et soit* $1 \leqslant i \leqslant p$. *Alors le* $\mathscr{D}_X$*-module* $\mathcal{M}(*H_i)$ *est cohérent et le couple* $(\mathbf{H}, \mathcal{M}(*H_i))$ *est sans pente. De plus, pour tout* $\boldsymbol{\alpha}$ *vérifiant* $\alpha_i < 0$, *le morphisme naturel de* $V_{\mathbf{0}}\mathscr{D}_X$*-modules :*

$$V_{\boldsymbol{\alpha}}(\mathcal{M}) \to V_{\boldsymbol{\alpha}}(\mathcal{M}(*H_i))$$

est un isomorphisme.

Démonstration. Comme $(\mathbf{H}, \mathcal{M})$ est sans pente, $\mathcal{M}$ est spécialisable le long de H_i et on peut appliquer [MM04, proposition 4.4-3] qui assure que $\mathcal{M}(*H_i)$ est cohérent, spécialisable le long de H_i et que pour $\alpha_i < 0$,

$$V_{\alpha_i}^{H_i}(\mathcal{M}) \to V_{\alpha_i}^{H_i}(\mathcal{M}(*H_i))$$

est un isomorphisme.

Montrons que le couple $(\mathbf{H}, \mathcal{M}(*H_i))$ est sans pente. C'est un problème local, on peut supposer que $H_i = \{t_i = 0\}$. Soit m' une section de $\mathcal{M}(*H_i)$, on a $m' = m/{t_i}^k$ où m est dans l'image de $\mathcal{M} \to \mathcal{M}[1/t_i]$ et $k \in \mathbb{N}$. Le couple $(\mathbf{H}, \mathcal{M})$ étant sans pente, pour tout $1 \leqslant j \leqslant p$, il existe un polynôme non nul $b_j(s_j)$ satisfaisant à

$$b_j(E_j)m \in V_{-\mathbf{1}_j}(\mathscr{D}_X)m.$$

On a alors

$$b_j(E_j)t_i^k m' \in V_{-\mathbf{1}_j}(\mathscr{D}_X)t_i^k m'$$
$$t_i^k b_j(E_j + \delta_{ij}k)m' \in t_i^k V_{-\mathbf{1}_j}(\mathscr{D}_X)m'.$$

En divisant par t_i^k, on obtient $b_j(E_j + \delta_{ij}k_i)m' \in V_{-\mathbf{1}_j}(\mathscr{D}_X)m'$, ce qui permet de conclure que $(\mathbf{H}, \mathcal{M}(*H_i))$ est sans pente.

D'après la proposition 2.1.10, $V_{\alpha_i}^{H_i}(\mathcal{M})$ et $V_{\alpha_i}^{H_i}(\mathcal{M}(*H_i))$ sont des $V_0^{H_i}\mathscr{D}_X$-modules sans pente le long de $\mathbf{H}_{\{i\}^c}$ donc, si $\boldsymbol{\alpha}$ satisfait à $\alpha_i < 0$, on a un isomorphisme

$$V_{\boldsymbol{\alpha}}(\mathcal{M}) \simeq V_{\boldsymbol{\alpha}_{\{i\}^c}}^{\mathbf{H}_{\{i\}^c}}\left(V_{\alpha_i}^{H_i}(\mathcal{M})\right) \xrightarrow{\sim} V_{\boldsymbol{\alpha}_{\{i\}^c}}^{\mathbf{H}_{\{i\}^c}}\left(V_{\alpha_i}^{H_i}(\mathcal{M}(*H_i))\right) \simeq V_{\boldsymbol{\alpha}}(\mathcal{M}(*H_i)),$$

ce qui conclut la démonstration de la proposition.

□

Corollaire 2.1.15. *Soit $\mathcal{M}$ un $\mathscr{D}_X$-module cohérent tel que $(\mathbf{H}, \mathcal{M})$ soit sans pente. Alors le $\mathscr{D}_X$-module $\mathcal{M}(*(H_1 \cup ... \cup H_p))$ est cohérent et le couple $(\mathbf{H}, \mathcal{M}(*(H_1 \cup ... \cup H_p)))$ est sans pente. De plus, pour tout $\boldsymbol{\alpha}$ vérifiant $\alpha_i < 0$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant p$, le morphisme naturel de $V_{\mathbf{0}}\mathscr{D}_X$-modules :*

$$V_{\boldsymbol{\alpha}}(\mathcal{M}) \to V_{\boldsymbol{\alpha}}(\mathcal{M}(*(H_1 \cup ... \cup H_p))$$

est un isomorphisme.

Démonstration. On effectue une récurrence sur le nombre d'hypersurfaces par rapport auxquelles on localise $\mathcal{M}$ et le corollaire est une conséquence immédiate de la proposition précédente.

□

2.2 Gradués d'un $\mathscr{D}_X$-module sans pente et cycles proches algébriques

Ici, on démontre des propriétés des gradués de la V-multifiltration de Malgrange-Kashiwara et on définit les cycles proches algébriques.

Proposition 2.2.1. *Soit $\mathcal{M}$ un $\mathscr{D}_X$-module tel que $(\mathbf{H}, \mathcal{M})$ soit sans pente. Pour tout $\beta \in \mathbb{C}$ et tout $1 \leqslant i \leqslant p$, l'endomorphisme $(E_i + \beta + 1)$ de*

$$V_{\beta, \boldsymbol{\alpha}_{\{i\}^c}}(\mathcal{M}) / V_{<\beta, \boldsymbol{\alpha}_{\{i\}^c}}(\mathcal{M})$$

est nilpotent.

Démonstration. Notons $\sigma := \sigma_{\beta,\boldsymbol{\alpha}_{\{i\}^c}}$ et $b_i(s)$ le polynôme de Bernstein-Sato d'indice i de la multifiltration correspondant à la section σ. Les racines de b_i sont donc dans l'intervalle $[-\beta-1,-\beta[$. Soit ℓ la multiplicité de la racine $-\beta-1$ de b_i. On pose $b_i(s) = b'_i(s)(s+\beta+1)^\ell$. On considère comme dans la preuve de [Kas83, Théorème 1] la V-multifiltration de $\mathcal{M}$ suivante :

$$U_{\boldsymbol{k}}(\mathcal{M}) := V^{\sigma}_{\boldsymbol{k}-\mathbf{1}_i}(\mathcal{M}) + (E_i + k_i + \beta + 1)^\ell V^{\sigma}_{\boldsymbol{k}}(\mathcal{M}).$$

On peut montrer que c'est une bonne V-multifiltration, que ses polynômes de Bernstein-Sato d'indice $j \neq i$ divisent ceux de $V^{\sigma}_{\bullet}$ et que son polynôme de Bernstein-Sato d'indice i divise $b'(s)(s+\beta)^\ell$. Les racines de $b'(s)(s+\beta)^\ell$ sont dans $]-\beta-1,-\beta]$, par unicité, la multifiltration $U_{\bullet}(\mathcal{M})$ est égale à la multifiltration $V^{\widetilde{\sigma}}_{\bullet}(\mathcal{M})$ où $\widetilde{\sigma} = \sigma_{<\beta,\boldsymbol{\alpha}_{\{i\}^c}}$. On a donc $U_{\mathbf{0}}(\mathcal{M}) = V_{<\beta,\boldsymbol{\alpha}_{\{i\}^c}}(\mathcal{M})$ et on en déduit que $(E_i+\beta+1)^\ell$ annule

$$V_{\beta,\boldsymbol{\alpha}_{\{i\}^c}}(\mathcal{M})/V_{<\beta,\boldsymbol{\alpha}_{\{i\}^c}}(\mathcal{M}).$$

□

Étant donnée la définition de $\mathrm{gr}_{\boldsymbol{\alpha}}(\mathcal{M})$, on déduit immédiatement de cette proposition le corollaire suivant.

Corollaire 2.2.2. *Soit $\mathcal{M}$ un $\mathscr{D}_X$-module tel que $(\mathbf{H},\mathcal{M})$ soit sans pente. Pour tout $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{C}^p$ et tout $1 \leqslant i \leqslant p$, l'endomorphisme $(E_i+\alpha_i+1)$ de $\mathrm{gr}_{\boldsymbol{\alpha}}(\mathcal{M})$ est nilpotent.*

Proposition 2.2.3. *Soit $\mathcal{M}$ un $\mathscr{D}_X$-module tel que $(\mathbf{H},\mathcal{M})$ soit sans pente. Pour tout $I \subset \{0,...,p\}$, le couple $(\mathbf{H}_{I^c}, \mathrm{gr}^{\mathbf{H}_I}_{\boldsymbol{\alpha}_I}\mathcal{M})$ est sans pente.*

Démonstration. [Mai13, Proposition 3]

□

Définition 2.2.4. Étant donné un couple $(\mathbf{H},\mathcal{M})$ sans pente, on définit les *cycles proches algébriques* de $\mathcal{M}$ relatifs à la famille d'hypersurfaces $\mathbf{H}$ de la manière suivante :

$$\Psi_{\mathbf{H}}\mathcal{M} := \bigoplus_{\boldsymbol{\alpha}\in[-1,0[^p} \mathrm{gr}_{\boldsymbol{\alpha}}(\mathcal{M}).$$

C'est un $\mathrm{gr}^V_{\mathbf{0}}\mathscr{D}_X$-module cohérent. Or, si l'on note $X_0 := \bigcap_{1\leqslant i\leqslant p} H_i$, on a $\mathrm{gr}^V_{\mathbf{0}}\mathscr{D}_X \simeq \mathscr{D}_{X_0}[E_1,...,E_p]$. Le corollaire 2.2.2 implique ainsi que $\Psi_{\mathbf{H}}\mathcal{M}$ est un $\mathscr{D}_{X_0}$-module cohérent. Les cycles proches algébriques sont munis d'endomorphismes de monodromie pour $1 \leqslant i \leqslant p$

$$T_i := \exp(-2i\pi E_i).$$

La proposition suivante est une conséquence du corollaire 2.1.13.

Proposition 2.2.5. *Soit $I \subset \{1,...,p\}$. Si le couple $(\mathbf{H},\mathcal{M})$ est sans pente, alors il existe un morphisme naturel de $\mathrm{gr}^V_{\mathbf{0}}\mathscr{D}_X$-modules*

$$\Psi_{\mathbf{H}}\mathcal{M} \to \Psi_{\mathbf{H}_I}(\Psi_{\mathbf{H}_{I^c}}\mathcal{M})$$

qui est un isomorphisme.

Dans le cas général $\boldsymbol{f} : X \to \mathbb{C}^p$, l'inclusion du graphe de $\boldsymbol{f}$ permet de définir les cycles proches algébriques.

Définition 2.2.6. Considérons le diagramme

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i_{\boldsymbol{f}}"] \arrow[dr, "\boldsymbol{f}"'] & X \times \mathbb{C}^p \arrow[d, "\boldsymbol{\pi}=(\pi_1,\ldots,\pi_p)"] \\ & \mathbb{C}^p. \end{tikzcd}$$

où $i_{\boldsymbol{f}}$ est le graphe de $\boldsymbol{f}$. Soit $H_i := \pi_i^{-1}(0)$. D'après ce qui précède, si le couple $(\mathbf{H}, i_{\boldsymbol{f}_+}\mathcal{M})$ est sans pente, alors $\Psi_{\mathbf{H}} i_{\boldsymbol{f}_+}\mathcal{M}$ est un $\mathscr{D}_{X\times 0}$-module cohérent à support $\{(\boldsymbol{x},0) | \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = 0\}$. On peut le voir comme un $\mathscr{D}_X$-module cohérent à support $\boldsymbol{f}^{-1}(0)$, on le note alors $\Psi_{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{alg}}\mathcal{M}$.

On déduit de la proposition 2.2.5 l'isomorphisme

$$\Psi_{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{alg}}\mathcal{M} \to \Psi_{\boldsymbol{f_I}}^{\mathrm{alg}}(\Psi_{\boldsymbol{f_{I^c}}}^{\mathrm{alg}}\mathcal{M}).$$

2.3 Morphismes sans pente dans le cas topologique

On donne la définition de la condition sans pente pour un couple $(\boldsymbol{f}, \Lambda)$ composé d'un morphisme et d'une sous-variété lagrangienne conique de T^*X. On explicite le lien avec la notion de $\mathscr{D}$-module sans pente.

Soit X une variété analytique et Y un sous-espace irréductible de X. Soient $f_1, ..., f_p$, p fonctions analytiques sur X. On note $F := f_1...f_p$ leur produit,

$$\begin{array}{cccc} \boldsymbol{f} & : & X & \to & \mathbb{C}^p \\ & & x & \mapsto & (f_1(x), ..., f_p(x)) \end{array}$$

et $\boldsymbol{f}|_Y$ la restriction à Y. On note $\pi : T^*X \to X$ la projection canonique du fibré cotangent et T_Y^*X l'espace conormal à Y dans X. On définit $W_{\boldsymbol{f},Y}^\sharp$ comme étant l'adhérence dans $T^*X \times \mathbb{C}^p$ de

$$\left\{(x, \xi + \sum_{1\leqslant i\leqslant p} s_i \frac{df_i(x)}{f_i(x)}, s_1, ..., s_p) \mid s_i \in \mathbb{C}, (x,\xi) \in T_Y^*X \text{ et } F(x) \neq 0\right\}.$$

Notons $\pi_1 : T^*X \times \mathbb{C}^p \to T^*X$ et $\pi_2 : T^*X \times \mathbb{C}^p \to \mathbb{C}^p$ les deux projections canoniques.

Proposition 2.3.1. *La projection par π_2 de $W_{\boldsymbol{f},Y}^\sharp \cap F^{-1}(0)$ est une réunion d'hyperplans vectoriels de $\mathbb{C}^p$.*

Démonstration. [BMM00, Proposition 2]

□

Définition 2.3.2. On dit que le morphisme $\boldsymbol{f}|_Y$ est *sans pente* si la projection $\pi_2\left(W_{\boldsymbol{f},Y}^\sharp \cap F^{-1}(0)\right)$ est la réunion d'hyperplans de coordonnées.

Soit Λ une variété lagrangienne conique de T^*X. On dit que le couple $(\boldsymbol{f}, \Lambda)$ est sans pente si, pour toute composante irréductible T_Z^*X de Λ, le morphisme $\boldsymbol{f}_I|_Z$ est sans pente où $I = \{1 \leqslant i \leqslant p \mid f_i|_Z \not\equiv 0\}$.

Proposition 2.3.3. *Le morphisme $\pi_1 : W_{\boldsymbol{f},Y}^\sharp \to T^*X$ est fini et propre.*

Démonstration. [BMM02, preuve du théorème 2.7]

□

Proposition 2.3.4. *Soit $i_{\boldsymbol{f}} : X \to X \times \mathbb{C}^p_{\boldsymbol{t}}$ l'injection du graphe de $\boldsymbol{f}$. Le morphisme $\boldsymbol{f}_{|Y}$ est sans pente si et seulement si $\boldsymbol{t}_{|Y}$ est sans pente.*

Théorème 2.3.5. *Soit $\mathcal{M}$ un $\mathscr{D}_X$-module holonome régulier. Soit un système de coordonnées $(x_1, ..., x_n, t_1, ..., t_p)$ de X et $H_i := \{t_i = 0\}$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *Le couple $((t_1, ..., t_p), car(\mathcal{M}))$ est sans pente.*
2. *Le couple $(\mathbf{H}, \mathcal{M})$ est sans pente.*

Démonstration. [Mai13, Théorème 3]

□

2.4 Cycles proches topologiques par un morphisme sans pente

Ici on définit le foncteur cycles proches topologiques associé à une fonction $f : X \to \mathbb{C}^p$ sans pente et appliqué à la catégorie des complexes de faisceaux à cohomologie $\mathbb{C}$-constructible.

Définition 2.4.1. Considérons le diagramme suivant où les carrés sont cartésiens :

$$\begin{tikzcd}
f^{-1}(0) \arrow[r, "i"] \arrow[d] & X \arrow[d, "f"] & X^* \arrow[l, "j"'] \arrow[d, "f_{|X^*}"] & \widetilde{X} \arrow[l, "p"'] \arrow[d, "\widetilde{f}"] \\
\{0\} \arrow[r, "i"] & \mathbb{C}^p & (\mathbb{C}^*)^p \arrow[l, "j"'] & \widetilde{(\mathbb{C}^*)^p}. \arrow[l, "p"']
\end{tikzcd}$$

Ici, $X^* = X - F^{-1}(0)$ avec $F = f_1...f_p$ et $\widetilde{(\mathbb{C}^*)^p}$ est le revêtement universel de $(\mathbb{C}^*)^p$.

Si $\mathcal{F}$ est un complexe de faisceaux à cohomologie $\mathbb{C}$-constructible, on définit :

$$\Psi_f \mathcal{F} := i^{-1} \boldsymbol{R} j_* p_* p^{-1} j^{-1} \mathcal{F},$$

c'est le *foncteur cycles proches.* On peut identifier le morphisme $\widetilde{(\mathbb{C}^*)^p} \to (\mathbb{C}^*)^p$ à

$$\begin{array}{cccc} \exp : & \mathbb{C}^p & \to & (\mathbb{C}^*)^p \\ & (z_1, ..., z_p) & \mapsto & (e^{2i\pi z_1}, ..., e^{2i\pi z_p}). \end{array}$$

Pour $1 \leqslant i \leqslant p$, les translations

$$\begin{array}{cccc} \tau_i : & \widetilde{(\mathbb{C}^*)^p} & \to & \widetilde{(\mathbb{C}^*)^p} \\ & (z_1, ..., z_i, ..., z_p) & \mapsto & (z_1, ..., z_i + 1, ..., z_p). \end{array}$$

permettent d'induire des endomorphismes de monodromie $T_i : \Psi_f \mathcal{F} \to \Psi_f \mathcal{F}$.

Proposition 2.4.2. *Soit $I \subset \{1, ..., p\}$. Si le couple $((f_1, ..., f_p), SS(\mathcal{F}))$ est sans pente, alors il existe un morphisme naturel*

$$\Psi_f \mathcal{F} \to \Psi_{f_I}(\Psi_{f_{I^c}} \mathcal{F}) \tag{2.2}$$

qui est un isomorphisme. Ici, $SS(\mathcal{F})$ est le micro-support de $\mathcal{F}$ (définition 1.2.18).

Démonstration. [Mai13, Théorème 4]

□

Proposition 2.4.3. *Soit $I \subset \{1, ..., p\}$. Si le couple $((f_1, ..., f_p), SS(\mathcal{F}))$ est sans pente, alors il existe un morphisme naturel*

$$i_I^{-1}(\Psi_{f_{I^c}} \mathcal{F}) \to \Psi_{f_{I^c}}(i_I^{-1} \mathcal{F}) \tag{2.3}$$

qui est un isomorphisme.

Démonstration. [Mai13, Théorème 5]

□

2.5 Fonctions de classe de Nilsson

On définit ici les fonction de classe de Nilsson à plusieurs variables. On se place à nouveau dans le cas d'une famille d'hypersurfaces qui forment un diviseur à croisements normaux. Quitte à diminuer X, on suppose qu'il existe un système de coordonnées $(\boldsymbol{x}, t_1, ..., t_p)$ tel que, pour tout $1 \leqslant i \leqslant p$, l'hypersurface H_i ait pour équation $t_i = 0$. On note

$$\begin{array}{cccc} \pi : & X & \to & \mathbb{C}^p \\ & (\boldsymbol{x}, t_1, ..., t_p) & \mapsto & (t_1, ..., t_p). \end{array}$$

Définition 2.5.1. Soit $\boldsymbol{\alpha} \in [-1,0[^p$ et $\boldsymbol{k} \in \mathbb{N}^p$. On note $\mathcal{N}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{k}}$ la connexion méromorphe sur $\mathbb{C}^p$:

$$\mathcal{N}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{k}} = \bigoplus_{0 \leqslant \boldsymbol{\ell} \leqslant \boldsymbol{k}} \mathcal{O}_{\mathbb{C}^p}[\frac{1}{z_1 ... z_p}] e_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\ell}}$$

avec la structure de $\mathscr{D}$-module donnée par la formule

$$z_i \partial_{z_i} e_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\ell}} = (\alpha_i + 1) e_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\ell}} + e_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\ell}-\mathbf{1}_i}.$$

On définit T_i, le morphisme de monodromie d'indice i, par la formule

$$T_i e_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\ell}} = \exp(2i\pi(\alpha_i + 1)) \sum_{0 \leqslant m \leqslant \ell_i} \frac{(2i\pi)^m}{m!} e_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\ell}-m.\mathbf{1}_i}. \tag{2.4}$$

Remarque 2.5.2. Pour se souvenir de la structure de $\mathscr{D}$-module et de la monodromie, il faut remarquer que la section $e_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\ell}}$ se comporte comme la fonction multiforme $\boldsymbol{z}^{\boldsymbol{\alpha}+\mathbf{1}} \frac{\log^{\ell_1} z_1}{\ell_1!} ... \frac{\log^{\ell_p} z_p}{\ell_p!}$.

Définition 2.5.3. Soit $\mathcal{M}$ un $\mathscr{D}_X$-module tel que le couple $(\mathbf{H}, \mathcal{M})$ soit sans pente. On définit :

$$\mathcal{M}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{k}} = \mathcal{M} \otimes_{\pi^{-1}\mathcal{O}_{\mathbb{C}^p}} \pi^{-1}(\mathcal{N}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{k}}) = \mathcal{M}[\frac{1}{t_1 ... t_p}] \otimes_{\pi^{-1}\mathcal{O}_{\mathbb{C}^p}} \pi^{-1}(\mathcal{N}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{k}}).$$

D'autre part, on a

$$\mathcal{M}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{k}} = \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \pi^*(\mathcal{N}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{k}})$$

où π^* est l'image inverse dans la catégorie des $\mathscr{D}$-modules. Ceci permet de munir $\mathcal{M}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{k}}$ d'une structure naturelle de $\mathscr{D}_X$-module. Notons $Y := \bigcap_{1 \leqslant i \leqslant p} H_i$. La restriction de $\mathcal{M}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{k}}$ à Y est munie d'endomorphismes T_i induits par les morphismes de monodromie de $\mathcal{N}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{k}}$ et définis par :

$$T_i(m \otimes e_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\ell}}) = m \otimes T_i e_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\ell}}.$$

Proposition 2.5.4. *Soit $\boldsymbol{\alpha} \in [-1,0[^p$, $\boldsymbol{k} \in \mathbb{N}^p$ et $\mathcal{M}$ un $\mathscr{D}_X$-module tel que le couple $(\mathbf{H}, \mathcal{M})$ soit sans pente. Le couple $(\mathbf{H}, \mathcal{M}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{k}})$ est sans pente. De plus, pour tout $\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{C}^p$, on a :*

$$V_{\boldsymbol{\beta}}(\mathcal{M}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{k}}) = \bigoplus_{\mathbf{0} \leqslant \boldsymbol{\ell} \leqslant \boldsymbol{k}} V_{\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}+\mathbf{1}} \left(\mathcal{M}[\frac{1}{t_1 ... t_p}] \right) e_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\ell}}.$$

On commence par un lemme qui sera utile dans la démonstration de cette proposition.

Définition 2.5.5. Soit $(\boldsymbol{x}, t_1, ..., t_p)$ un système de coordonnées locales où $t_i = 0$ est une équation de H_i. Soit $\mathcal{M}[1/\boldsymbol{t}, \boldsymbol{s}]\boldsymbol{t}^{\boldsymbol{s}}$ le $\mathcal{O}_X[\boldsymbol{s}]$-module isomorphe à $\mathcal{M}[1/\boldsymbol{t}, \boldsymbol{s}]$ par l'application $m \mapsto m\boldsymbol{t}^{\boldsymbol{s}}$. Il est muni d'une structure naturelle de $\mathscr{D}_X[\boldsymbol{s}]$-module par la formule :

$$\partial_i(m\boldsymbol{t}^{\boldsymbol{s}}) := (\partial_i m)\boldsymbol{t}^{\boldsymbol{s}} + (\frac{s_i m}{t_i})\boldsymbol{t}^{\boldsymbol{s}}.$$

Lemme 2.5.6. *Soit m une section locale de $\mathcal{M}[1/\boldsymbol{t}]$ et $b(s) \in \mathbb{C}[s]$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. $b(E_i)m \in V_{-\mathbf{1}_i}(\mathscr{D}_X)m$.
2. $b(-s_i - 1)m\boldsymbol{t}^{\boldsymbol{s}} \in \mathscr{D}_X[\boldsymbol{s}]t_i m\boldsymbol{t}^{\boldsymbol{s}}$.

Démonstration. Montrons que *1* implique *2*. Dans $\mathcal{M}[1/\boldsymbol{t}, \boldsymbol{s}]\boldsymbol{t}^{\boldsymbol{s}}$, on a l'égalité

$$(t_i\partial_i m)\boldsymbol{t}^{\boldsymbol{s}} = (-s_i - 1)m\boldsymbol{t}^{\boldsymbol{s}} + \partial_i(t_i m\boldsymbol{t}^{\boldsymbol{s}}).$$

On montre alors par récurrence que pour tout k,

$$((t_i\partial_i)^k m)\boldsymbol{t}^{\boldsymbol{s}} - (-s_i - 1)^k m\boldsymbol{t}^{\boldsymbol{s}} \in \mathscr{D}_X[\boldsymbol{s}]t_i m\boldsymbol{t}^{\boldsymbol{s}}.$$

On a donc pour tout polynôme $b(s) \in \mathbb{C}[s]$,

$$(b(E_i)m)\boldsymbol{t}^{\boldsymbol{s}} - b(-s_i - 1)m\boldsymbol{t}^{\boldsymbol{s}} \in \mathscr{D}_X[\boldsymbol{s}]t_i m\boldsymbol{t}^{\boldsymbol{s}}.$$

D'autre part, si $b(E_i)m \in V_{-\mathbf{1}_i}(\mathscr{D}_X)m$, une récurrence permet de montrer que $(b(E_i)m)\boldsymbol{t}^{\boldsymbol{s}} \in \mathscr{D}_X[\boldsymbol{s}]t_i m\boldsymbol{t}^{\boldsymbol{s}}$ et on en déduit *2*.

Montrons que *2* implique *1*. D'une part, on peut montrer par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $1 \leqslant \ell \leqslant k$, il existe $m_{k,\ell} \in \mathcal{M}[1/\boldsymbol{t}]$ satisfaisant à :

$$s_i^k m\boldsymbol{t}^{\boldsymbol{s}} = ((-\partial_i t_i)^k m)\boldsymbol{t}^{\boldsymbol{s}} + \sum_{\ell=1}^{k} \partial_i^\ell (m_{k,\ell}\boldsymbol{t}^{\boldsymbol{s}}). \tag{2.5}$$

D'autre part, en faisant opérer les $\partial^{\boldsymbol{\alpha}} = \partial_1^{\alpha_1}...\partial_p^{\alpha_p}$ et en annulant les coefficients du polynôme en les s_i que l'on obtient, on peut montrer le résultat suivant :

$$\left[\sum_{\boldsymbol{\alpha}} \partial^{\boldsymbol{\alpha}}(m_{\boldsymbol{\alpha}}\boldsymbol{t}^{\boldsymbol{s}}) = 0\right] \Rightarrow [m_{\boldsymbol{\alpha}} = 0 \ \ \forall\boldsymbol{\alpha}] \tag{2.6}$$

pour une somme finie sur les $\boldsymbol{\alpha}$. Enfin, si l'on regarde plus précisément la récurrence faite dans la première partie de la démonstration, on obtient

$$(b(E_i)m)\boldsymbol{t}^{\boldsymbol{s}} - b(-s_i - 1)m\boldsymbol{t}^{\boldsymbol{s}} \in \partial_i\mathscr{D}_X[\boldsymbol{s}]t_i m\boldsymbol{t}^{\boldsymbol{s}}.$$

L'hypothèse *2* implique

$$b(-s_i - 1)m\boldsymbol{t}^{\boldsymbol{s}} = \sum_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{k}} \partial^{\boldsymbol{\alpha}}\boldsymbol{s}^{\boldsymbol{k}} A_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{k}} t_i m\boldsymbol{t}^{\boldsymbol{s}},$$

où $A_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{k}}$ est un opérateur différentiel indépendant des ∂_i pour tout $1 \leqslant i \leqslant p$. En utilisant l'égalité (2.5), on peut substituer les s_j et on obtient

$$(b(E_i)m)\boldsymbol{t}^{\boldsymbol{s}} - \sum_{\boldsymbol{k}} \left[(-t_1\partial_1 - 1)^{k_1}...(-t_p\partial_p - 1)^{k_p} A_{\mathbf{0},\boldsymbol{k}} t_i m\right] \boldsymbol{t}^{\boldsymbol{s}} = \sum_{\boldsymbol{\alpha}>\mathbf{0}} \partial^{\boldsymbol{\alpha}}(m_{\boldsymbol{\alpha}}\boldsymbol{t}^{\boldsymbol{s}}),$$

avec $m_{\boldsymbol{\alpha}} \in \mathcal{M}[1/\boldsymbol{t}]$. En utilisant (2.6) et le fait que $(-t_1\partial_1 - 1)^{k_1}...(-t_p\partial_p - 1)^{k_p} A_{\mathbf{0},\boldsymbol{k}} t_i \in V_{-\mathbf{1}_i}(\mathscr{D}_X)$, on conclut que $b(E_i)m \in V_{-\mathbf{1}_i}(\mathscr{D}_X)m$.

□

Démonstration de la proposition 2.5.4. On commence par montrer que le couple $(\mathbf{H}, \mathcal{M}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{k}})$ est sans pente. Quel que soit $1 \leqslant i \leqslant p$, le $\mathscr{D}_{\mathbb{C}^p}$-module $\mathcal{N}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{k}}/\mathcal{N}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{k}-\mathbf{1}_i}$ s'identifie à $\mathcal{N}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{k}-k_i.\mathbf{1}_i}$ On a donc la suite exacte :

$$0 \to \mathcal{N}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{k}-\mathbf{1}_i} \to \mathcal{N}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{k}} \to \mathcal{N}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{k}-k_i.\mathbf{1}_i} \to 0.$$

Pour tout $\boldsymbol{k} \in \mathbb{N}^p$, le $\pi^{-1}\mathcal{O}_{\mathbb{C}^p}$-module $\pi^{-1}\mathcal{N}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{k}}$ est à fibres plates car libres, il est donc acyclique pour le foncteur de produit tensoriel par $\mathcal{M}[\frac{1}{t_1\ldots t_p}]$ et on a la suite exacte :

$$0 \to \mathcal{M}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{k}-\mathbf{1}_i} \to \mathcal{M}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{k}} \to \mathcal{M}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{k}-k_i.\mathbf{1}_i} \to 0. \tag{2.7}$$

Le module central est sans pente si et seulement si les deux autres modules le sont. En effet, comme dans le cas des bonnes V-filtration pour $p = 1$ (cf [MM04]), une bonne V-multifiltration du terme central induit des bonnes V-multifiltrations des termes extrêmes. On considère alors la suite exacte

$$0 \to U_{\boldsymbol{\ell}}\mathcal{M}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{k}-\mathbf{1}_i} \to U_{\boldsymbol{\ell}}\mathcal{M}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{k}} \to U_{\boldsymbol{\ell}}\mathcal{M}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{k}-k_i.\mathbf{1}_i} \to 0$$

et on observe que la condition multispécialisable sans pente de la définition 2.1.2 est satisfaite pour le module central si et seulement si elle l'est pour les deux autres modules. Par récurrence, on est alors ramené à montrer que $(\mathbf{H}, \mathcal{M}_{\boldsymbol{\alpha},\mathbf{0}})$ est sans pente. Soit m une section locale de $\mathcal{M}[\frac{1}{t_1\ldots t_p}]$. D'après la proposition 2.1.15, le couple $(\mathbf{H}, \mathcal{M}[\frac{1}{t_1\ldots t_p}])$ est sans pente et par conséquent, le lemme 2.5.6 donne localement, pour $1 \leqslant i \leqslant p$, des polynômes b_i non nuls vérifiant :

$$b_i(s_i)m\boldsymbol{t}^{\boldsymbol{s}} \in \mathscr{D}_X[\boldsymbol{s}]t_i m\boldsymbol{t}^{\boldsymbol{s}}.$$

Par définition du $\mathscr{D}_X[s]$-module $\mathcal{M}[1/\boldsymbol{t}, \boldsymbol{s}]\boldsymbol{t}^{\boldsymbol{s}}$, on obtient les équations :

$$b_i(s_i + \alpha_i + 1)(m \otimes e_{\boldsymbol{\alpha},\mathbf{0}})\boldsymbol{t}^{\boldsymbol{s}} \in \mathscr{D}_X[\boldsymbol{s}]t_i(m \otimes e_{\boldsymbol{\alpha},\mathbf{0}})\boldsymbol{t}^{\boldsymbol{s}}. \tag{2.8}$$

Soit $\boldsymbol{k}_0 \in \mathbb{N}^p$ tel que pour tout $k_i \in \mathbb{N}$ vérifiant $k_i \geqslant k_{0,i} + 1$, l'entier $-k_i$ n'est pas racine de $b_i(s_i + \alpha_i + 1) \in \mathbb{C}[s_i]$. En remplaçant les s_i par les entiers k_i dans la relation (2.8) et en multipliant éventuellement par des t_i, on obtient que, pour tout $\boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}^p$,

$$(m \otimes e_{\boldsymbol{\alpha},\mathbf{0}})\boldsymbol{t}^{\boldsymbol{k}} \in \mathscr{D}_X((m \otimes e_{\boldsymbol{\alpha},\mathbf{0}})\boldsymbol{t}^{-\boldsymbol{k}_0}).$$

De plus, pour tout $1 \leqslant i \leqslant p$, l'égalité $(\partial_i(m\otimes e_{\boldsymbol{\alpha},\mathbf{0}}))\boldsymbol{t}^{\boldsymbol{k}} = \partial_i((m\otimes e_{\boldsymbol{\alpha},\mathbf{0}})\boldsymbol{t}^{\boldsymbol{k}}) + k_i(m\otimes e_{\boldsymbol{\alpha},\mathbf{0}})\boldsymbol{t}^{\boldsymbol{k}-\mathbf{1}_i}$ montre que $(\partial_i(m\otimes e_{\boldsymbol{\alpha},\mathbf{0}}))\boldsymbol{t}^{\boldsymbol{k}} \in \mathscr{D}_X((m\otimes e_{\boldsymbol{\alpha},\mathbf{0}})\boldsymbol{t}^{-\boldsymbol{k}_0})$ pour tout $\boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}^p$. Comme $\mathcal{M}$ est engendré par un nombre fini de sections, en utilisant des extensions successives, on peut supposer que m engendre $\mathcal{M}$. On a donc $\mathcal{M}_{\boldsymbol{\alpha},\mathbf{0}} = \mathscr{D}_X((m \otimes e_{\boldsymbol{\alpha},\mathbf{0}})\boldsymbol{t}^{-\boldsymbol{k}_0})$. La filtration $\mathscr{D}_X(l)((m \otimes e_{\boldsymbol{\alpha},\mathbf{0}})\boldsymbol{t}^{-\boldsymbol{k}_0}))$ étant une bonne filtration du $\mathscr{D}_X$-module $\mathcal{M}_{\boldsymbol{\alpha},\mathbf{0}}$, celui-ci est cohérent. Les équations (2.8) ainsi que le lemme 2.5.6 permettent alors de conclure que $(\mathbf{H}, \mathcal{M}_{\boldsymbol{\alpha},\mathbf{0}})$ est sans pente et donc, par ce qui précède, que $(\mathbf{H}, \mathcal{M}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{k}})$ l'est.

Pour démontrer la deuxième partie de la proposition, on commence par noter

$$U_{\boldsymbol{\beta}}(\mathcal{M}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{k}}) := \bigoplus_{\mathbf{0}\leqslant\boldsymbol{\ell}\leqslant\boldsymbol{k}} V_{\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}+\mathbf{1}}\left(\mathcal{M}[\frac{1}{t_1\ldots t_p}]\right) e_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\ell}}$$

et on va montrer que c'est une bonne V-multifiltration qui satisfait à toutes les propriétés caractéristiques de la multifiltration de Malgrange-Kashiwara. Soit $m \in \mathcal{M}$, $\boldsymbol{\ell} \in \mathbb{N}^p$, $\beta \in \mathbb{C}$ et $1 \leqslant i \leqslant p$. On a localement

$$(t_i\partial_i + \beta)(m \otimes e_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\ell}}) = ((t_i\partial_i + \beta + \alpha_i + 1)m) \otimes e_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\ell}} + m \otimes e_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\ell}-\mathbf{1}_i} \tag{2.9}$$

et pour tout $\boldsymbol{n} \in \mathbb{Z}^p$

$$\boldsymbol{t}^{\boldsymbol{n}}(m \otimes e_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\ell}}) = (\boldsymbol{t}^{\boldsymbol{n}} m) \otimes e_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\ell}}.$$

Ceci permet de montrer que $U_{\bullet}(\mathcal{M}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{k}})$ est une V-multifiltration de $\mathcal{M}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{k}}$ (c'est-à-dire que cette multifiltration vérifie $V_{\boldsymbol{\ell}}\mathscr{D}_X.U_{\boldsymbol{\beta}}(\mathcal{M}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{k}}) \subset U_{\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\ell}}(\mathcal{M}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{k}})$ pour tout $\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{C}^p$ et pour tout $\boldsymbol{\ell} \in \mathbb{Z}^p$).

Pour montrer que c'est une bonne V-multifiltration, on fixe $\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{C}^p$ et on montre que la V-multifiltration indexée par $\mathbb{Z}^p$, $U_{\boldsymbol{\beta}+\bullet}(\mathcal{M}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{k}})$, est une bonne V-multifiltration de $\mathcal{M}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{k}}$. Comme la V-multifiltration indexée par $\mathbb{Z}^p$, $V_{\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}+\bullet+\mathbf{1}}\left(\mathcal{M}[\frac{1}{t_1 \ldots t_p}]\right)$, est une bonne V-multifiltration, elle est engendrée localement par un nombre fini de sections $\{m_j\}_{j \in J}$. Si $\boldsymbol{k} = \mathbf{0}$, l'égalité (2.9) permet de montrer que les sections $\{m_j \otimes e_{\boldsymbol{\alpha},\mathbf{0}}\}_{j \in J}$ engendrent la V-multifiltration $U_{\boldsymbol{\beta}+\bullet}(\mathcal{M}_{\boldsymbol{\alpha},\mathbf{0}})$. On peut alors montrer par récurrence, en considérant la suite exacte (2.7) et l'égalité (2.9), que, pour tout $\boldsymbol{k} \in \mathbb{N}^p$, les sections $m_j \otimes e_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\ell}}$, pour $j \in J$ et $0 \leqslant \boldsymbol{\ell} \leqslant \boldsymbol{k}$, engendrent la V-multifiltration $U_{\boldsymbol{\beta}+\bullet}(\mathcal{M}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{k}})$. C'est donc une bonne V-multifiltration de $\mathcal{M}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{k}}$.

On fixe maintenant $\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{C}^p$ et on va construire, pour tout $1 \leqslant i \leqslant p$, un polynôme $b_i(s)$ qui satisfait à

$$b_i(t_i\partial_i)U_{\boldsymbol{\beta}}(\mathcal{M}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{k}}) \subset U_{\boldsymbol{\beta}-\mathbf{1}_i}(\mathcal{M}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{k}}).$$

Par définition de la multifiltration de Malgrange-Kashiwara, on peut choisir, pour tout $1 \leqslant i \leqslant p$, un polynôme $c_i(s)$ vérifiant

$$c_i(t_i\partial_i + \alpha_i + \beta_i + 1)V_{\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}+\mathbf{1}}\left(\mathcal{M}[\frac{1}{t_1 \ldots t_p}]\right) \subset V_{\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}+\mathbf{1}-\mathbf{1}_i}\left(\mathcal{M}[\frac{1}{t_1 \ldots t_p}]\right)$$

et ayant ses racines dans l'intervalle $[-1, 0[$. Soit $m \in V_{\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}+\mathbf{1}}\left(\mathcal{M}[\frac{1}{t_1 \ldots t_p}]\right)$, l'égalité (2.9) permet de montrer que

$$c_i(t_i\partial_i + \beta_i)(m \otimes e_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\ell}}) = (c_i(t_i\partial_i + \beta_i + \alpha_i + 1)m) \otimes e_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\ell}} + \widetilde{m}$$

où $\widetilde{m} \in U_{\boldsymbol{\beta}}(\mathcal{M}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{k}-\mathbf{1}_i})$ si on pose $U_{\boldsymbol{\beta}}(\mathcal{M}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\ell}}) = 0$ pour $l_i < 0$. On peut donc construire par récurrence un polynôme $b_{i,m}(s)$ ayant ses racines dans l'intervalle $[-1, 0[$ et vérifiant

$$b_{i,m}(t_i\partial_i + \beta_i)(m \otimes e_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\ell}}) \in U_{\boldsymbol{\beta}-\mathbf{1}_i}(\mathcal{M}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{k}}).$$

Comme $U_{\boldsymbol{\beta}}(\mathcal{M}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{k}})$ est localement engendré par un nombre fini de sections de la forme $m \otimes e_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\ell}}$ pour $0 \leqslant \boldsymbol{\ell} \leqslant \boldsymbol{k}$, on peut construire $b_i(s)$ ayant ses racines dans $[-1, 0[$ tel que

$$b_i(t_i\partial_i + \beta_i)U_{\boldsymbol{\beta}}(\mathcal{M}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{k}}) \subset U_{\boldsymbol{\beta}-\mathbf{1}_i}(\mathcal{M}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{k}}).$$

Les racines du polynôme de Bernstein-Sato de la V-multifiltration $U_{\bullet}(\mathcal{M}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{k}-\mathbf{1}_i})$ sont donc dans l'intervalle $[-1, 0[$, ce qui permet de conclure que c'est bien la V-multifiltration de Malgrange-Kashiwara :

$$V_{\boldsymbol{\beta}}(\mathcal{M}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{k}}) = \bigoplus_{\mathbf{0} \leqslant \boldsymbol{\ell} \leqslant \boldsymbol{k}} V_{\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}+\mathbf{1}}\left(\mathcal{M}[\frac{1}{t_1 \ldots t_p}]\right) e_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\ell}}.$$

□

La proposition suivante sera utilisée dans le chapitre 4.

Proposition 2.5.7. *Soit $\mathcal{M}$ un $\mathscr{D}_X$-module holonome régulier et soit m une section engendrant $\mathcal{M}$. Le module $\mathscr{D}_X[\boldsymbol{s}]t_i m\boldsymbol{t}^{\boldsymbol{s}}$ est un $\mathscr{D}_X[\boldsymbol{s}]$-module cohérent de variété caractéristique*

$$car_{\mathscr{D}_X[\boldsymbol{s}]}(\mathscr{D}_X[\boldsymbol{s}]t_i m\boldsymbol{t}^{\boldsymbol{s}}) = \bigcup_{F_{|Y_\ell} \neq 0} W^{\sharp}_{\boldsymbol{f},Y_\ell}.$$

Ici, la variété caractéristique est définie en considérant la filtration de $\mathscr{D}_X[\boldsymbol{s}]$ pour laquelle s_i est de poids 1.

Démonstration. [Mai13, Proposition 9]

□

Chapitre 3

Morphisme de comparaison pour les cycles proches

On va construire un morphisme de comparaison entre les cycles proches algébriques d'un $\mathscr{D}_X$-module $\mathcal{M}$ et les cycles proches topologiques de $\mathbf{DR}(\mathcal{M})$ relativement à l'application

$$\begin{array}{rccc} \pi : & X & \to & \mathbb{C}^p \\ & (\boldsymbol{x}, t_1, ..., t_p) & \mapsto & (t_1, ..., t_p). \end{array}$$

On établira le lien avec la composition du morphisme de comparaison relatif aux r premières coordonnées t_i et de celui relatif aux $p - r$ coordonnées t_i suivantes, pour $1 < r < p$.

3.1 Comparaison avec les gradués

Commençons par donner deux définitions.

Définition 3.1.1. Soit $\mathcal{M}$ un $\mathscr{D}_X$-module tel que le couple $(\boldsymbol{H}, \mathcal{M})$ soit sans pente. On considère la famille $\{\mathrm{gr}_{\boldsymbol{k}}(\mathcal{M}), \partial_i\}_{\boldsymbol{k} \in \{0,1\}^p, 1 \leqslant i \leqslant p}$ composée des objets $\mathrm{gr}_{\boldsymbol{k}}(\mathcal{M})$ pour $\boldsymbol{k} \in \{0,1\}^p$ et des morphismes $\partial_i : \mathrm{gr}_{\boldsymbol{k}}(\mathcal{M}) \to \mathrm{gr}_{\boldsymbol{k}+\mathbf{1}_i}(\mathcal{M})$. On définit

$$i^\dagger \mathcal{M} := s(\mathrm{Cube}(\mathrm{gr}_\bullet(\mathcal{M})))$$

où $s(.)$ et $\mathrm{Cube}(.)$ sont les foncteurs définis dans l'annexe A.1.2 et A.1.5.

Par exemple, pour $p = 2$, on a

$$\begin{array}{cccccccc} i^\dagger \mathcal{M} = & 0 \to & \mathrm{gr}_{-1,-1}(\mathcal{M}) & \to & \mathrm{gr}_{0,-1}(\mathcal{M}) \bigoplus \mathrm{gr}_{-1,0}(\mathcal{M}) & \to & \mathrm{gr}_{0,0}(\mathcal{M}) & \to 0 \\ & & m & \mapsto & (\partial_1 m, -\partial_2 m) & & & \\ & & & & (m_1, m_2) & \mapsto & \partial_2 m_1 + \partial_1 m_2 & . \end{array}$$

Définition 3.1.2. De la même manière que pour la définition précédente, on considère la famille $\{V_{\boldsymbol{k}}(\mathcal{M}), \partial_i\}_{\boldsymbol{k} \in \{0,1\}^p, 1 \leqslant i \leqslant p}$ composée des objets $V_{\boldsymbol{k}}(\mathcal{M})$ pour $\boldsymbol{k} \in \{0,1\}^p$ et des morphismes $\partial_i : V_{\boldsymbol{k}}(\mathcal{M}) \to V_{\boldsymbol{k}+\mathbf{1}_i}(\mathcal{M})$. On définit

$$i^\# \mathcal{M} := s(\mathrm{Cube}(V_\bullet(\mathcal{M}))).$$

Remarque 3.1.3. 1. Notons que si on considère la famille $\mathscr{M} := \{\mathcal{M}, \partial_i\}_{\boldsymbol{k}\in\{0,1\}^p, 1\leqslant i\leqslant p}$, on a

$$s(\mathrm{Cube}(\mathscr{M})) \simeq \mathbf{DR}_{X/X_0}(\mathcal{M})$$

où l'on considère la projection

$$\begin{array}{cccc} \tau: & X & \to & X_0 \\ & (\boldsymbol{x}, t_1, ..., t_p) & \mapsto & (\boldsymbol{x}, 0, ..., 0). \end{array}$$

2. On étend ces définitions aux complexes en commençant par appliquer Cube(.) en chaque degré puis en prenant le complexe simple associé à l'hypercomplexe obtenu. On note encore $i^{\#}$ et $i^{\dagger}$ ces foncteurs appliqués aux complexes.

D'après la remarque précédente, les morphismes naturels pour tout $\boldsymbol{k} \in \{0,1\}^p$

$$\mathrm{gr}_{\boldsymbol{k}}(\mathcal{M}) \leftarrow V_{\boldsymbol{k}}(\mathcal{M}) \to \mathcal{M}$$

induisent les morphismes de complexes

$$\boxed{i^{\dagger}\mathcal{M} \leftarrow i^{\#}\mathcal{M} \to \mathbf{DR}_{X/X_0}(\mathcal{M})}. \tag{3.1}$$

Soit $I = \{1, ..., r\} \subset \{1, ..., p\}$ les r premiers entiers pour $r < p$, on note

$$\begin{array}{cccc} \pi_I: & X & \to & \mathbb{C}^r \\ & (\boldsymbol{x}, t_1, ..., t_p) & \mapsto & (t_1, ..., t_r) \end{array}$$

et $X_0^I := \pi_I^{-1}(0)$. On note $V_{\bullet}^I$ la V-multifiltration par rapport aux fonctions $t_1, ..., t_r$. La V-multifiltration de Malgrange-Kashiwara de $\mathcal{M}$ induit une V^{I^c}-multifiltration du $\mathscr{D}_{X_0^I}$-module $\mathrm{gr}^I_{\boldsymbol{\alpha}_I}(\mathcal{M})$ pour tout $\boldsymbol{\alpha}_I \in \mathbb{C}^r$. Pour tout $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{C}^p$, on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{gr}_{\boldsymbol{\alpha}}\mathcal{M} \arrow[d] & & V_{\boldsymbol{\alpha}}\mathcal{M} \arrow[ll] \arrow[d, equal] \\ \mathrm{gr}^{I^c}_{\boldsymbol{\alpha}_{I^c}}\left(\mathrm{gr}^I_{\boldsymbol{\alpha}_I}\mathcal{M}\right) & V^{I^c}_{\boldsymbol{\alpha}_{I^c}}\left(\mathrm{gr}^I_{\boldsymbol{\alpha}_I}\mathcal{M}\right) \arrow[l] & V^{I^c}_{\boldsymbol{\alpha}_{I^c}}\left(V^I_{\boldsymbol{\alpha}_I}\mathcal{M}\right). \arrow[l] \end{tikzcd} \tag{3.2}$$

On définit les foncteurs $i_I^{\dagger}$ et $i_I^{\#}$ en considérant respectivement les familles $\{\mathrm{gr}_{\boldsymbol{k}_I}(\mathcal{M}), \partial_i\}_{\boldsymbol{k}_I\in\{0,1\}^r, 1\leqslant i\leqslant r}$ et $\{V_{\boldsymbol{k}_I}(\mathcal{M}), \partial_i\}_{\boldsymbol{k}_I\in\{0,1\}^r, 1\leqslant i\leqslant r}$. On définit de manière analogue les foncteurs $i^{\dagger}_{I^c}$ et $i^{\#}_{I^c}$ appliqués à la catégorie des $\mathscr{D}_{X_0^I}$-modules en considérant la projection

$$\begin{array}{cccc} \pi_{I^c}: & X_0^I & \to & \mathbb{C}^{p-r} \\ & (\boldsymbol{x}, t_{r+1}, ..., t_p) & \mapsto & (t_{r+1}, ..., t_p). \end{array}$$

Les propriétés des hypercomplexes, du foncteur $s(.)$ et le diagramme commutatif (3.2) pour $\boldsymbol{\alpha} \in \{0,1\}^p$ fournissent le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} i^{\dagger}\mathcal{M} \arrow[d] & & i^{\#}\mathcal{M} \arrow[ll] \arrow[rr] \arrow[d, equal] & & \mathbf{DR}_{X/X_0}\mathcal{M} \arrow[d, equal] \\ i^{\dagger}_{I_c}(i^{\dagger}_I\mathcal{M}) & i^{\#}_{I_c}(i^{\dagger}_I\mathcal{M}) \arrow[l] & i^{\#}_{I_c}(i^{\#}_I\mathcal{M}) \arrow[l] \arrow[r] & i^{\#}_{I^c}(\mathbf{DR}_{X/X_0^I}\mathcal{M}) \arrow[r] & \mathbf{DR}_{X_0^I/X_0}(\mathbf{DR}_{X/X_0^I}\mathcal{M}). \end{tikzcd} \tag{3.3}$$

3.2 Le morphisme Nils

D'après la proposition 2.5.4, on a

$$\mathrm{gr}_{-\mathbf{1}}(\mathcal{M}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{k}}) = \bigoplus_{\mathbf{0}\leqslant\boldsymbol{\ell}\leqslant\boldsymbol{k}} \mathrm{gr}_{\boldsymbol{\alpha}}\left(\mathcal{M}[\frac{1}{t_1...t_p}]\right) e_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\ell}}.$$

La proposition 2.1.15 assure que pour $\boldsymbol{\alpha} \in [-1,0[^p$, on a l'isomorphisme

$$\mathrm{gr}_{\boldsymbol{\alpha}}(\mathcal{M}) \simeq \mathrm{gr}_{\boldsymbol{\alpha}}\left(\mathcal{M}[\frac{1}{t_1...t_p}]\right).$$

On définit alors le morphisme suivant :

$$\begin{array}{rccc} \Phi: & \mathrm{gr}_{\boldsymbol{\alpha}}(\mathcal{M}) & \longrightarrow & \mathrm{gr}_{-\mathbf{1}}(\mathcal{M}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{k}}) \\ & m & \longmapsto & \displaystyle\sum_{0\leqslant\boldsymbol{\ell}\leqslant\boldsymbol{k}} \Big[(-1)^{\ell_1+\ldots+\ell_p}(t_1\partial_1+\alpha_1+1)^{\ell_1}...(t_p\partial_p+\alpha_p+1)^{\ell_p}m\Big] \otimes e_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\ell}} \end{array}$$

qui induit un morphisme de complexes

$$\boxed{\mathbf{Nils} : \mathrm{gr}_{\boldsymbol{\alpha}}(\mathcal{M}) \to i^\dagger \mathcal{M}_{\boldsymbol{\alpha}}} \tag{3.4}$$

où l'on identifie $\mathrm{gr}_{\boldsymbol{\alpha}}(\mathcal{M})$ avec un complexe concentré en degré zéro et où $\mathcal{M}_{\boldsymbol{\alpha}}$ est la limite inductive des $\mathcal{M}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{k}}$ prise sur $\boldsymbol{k} \in \mathbb{N}^p$.

Remarque 3.2.1. Remarquons ici que $\mathcal{M}_{\boldsymbol{\alpha}}$ n'est pas un $\mathscr{D}_X$-module de type fini. Mais le fait qu'il soit limite des $\mathcal{M}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{k}}$ et que les couples $(\boldsymbol{H}, \mathcal{M}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{k}})$ soient sans pente suffit pour le reste de la construction et pour le théorème de comparaison.

En utilisant la définition 2.5.1, on obtient

$$\mathcal{O}_X \otimes_{\pi^{-1}\mathcal{O}_{\mathbb{C}^p}} \pi^{-1}(\mathcal{N}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{k}}) \simeq \left(\mathcal{O}_X \otimes_{\pi_I^{-1}\mathcal{O}_{\mathbb{C}^r}} \pi_I^{-1}(\mathcal{N}_{\boldsymbol{\alpha_I},\boldsymbol{k_I}})\right) \otimes_{\mathcal{O}_X} \left(\mathcal{O}_X \otimes_{\pi_{I^c}^{-1}\mathcal{O}_{\mathbb{C}^{p-r}}} \pi_{I^c}^{-1}(\mathcal{N}_{\boldsymbol{\alpha_{I^c}},\boldsymbol{k_{I^c}}})\right).$$

On déduit de cet isomorphisme et de la définition du morphisme Φ le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd} \mathrm{gr}_{\boldsymbol{\alpha}}\mathcal{M} \arrow[rr, "\mathbf{Nils}"] \arrow[dd] & & i^\dagger \mathcal{M}_{\boldsymbol{\alpha}} \arrow[d] \\ & & i^\dagger_{I_c}(i^\dagger_I \mathcal{M}_{\boldsymbol{\alpha}}) \arrow[d, equal] \\ \mathrm{gr}^{I^c}_{\boldsymbol{\alpha}_{I^c}}\left(\mathrm{gr}^I_{\boldsymbol{\alpha}_I}\mathcal{M}\right) \arrow[r] & \mathrm{gr}^{I^c}_{\boldsymbol{\alpha}_{I^c}}\left(i^\dagger_I \mathcal{M}_{\boldsymbol{\alpha}_I}\right) \arrow[r] & i^\dagger_{I^c}\left[(i^\dagger_I \mathcal{M}_{\boldsymbol{\alpha}_I})_{\boldsymbol{\alpha}_{I^c}}\right]. \end{tikzcd} \tag{3.5}$$

3.3 Le morphisme Topo

Rappelons le diagramme commutatif utilisé pour définir les cycles proches topologiques :

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(0) \arrow[r, "i"] \arrow[d] & X \arrow[d, "\pi"] & X^* \arrow[l, "j"'] \arrow[d, "\pi_{|X^*}"] & \widetilde{X} \arrow[l, "p"'] \arrow[d, "\widetilde{\pi}"] \\ \{0\} \arrow[r, "i"] & \mathbb{C}^p & (\mathbb{C}^*)^p \arrow[l, "j"'] & \widetilde{(\mathbb{C}^*)^p}. \arrow[l, "p"'] \end{tikzcd}$$

Lemme 3.3.1. *Soit $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{C}^p$, il existe un morphisme naturel*

$$\boxed{\mathbf{Topo} : \mathbf{DR}_X(\mathcal{M}_{\boldsymbol{\alpha}}) \to \Psi_\pi \mathbf{DR}_X(\mathcal{M}).}$$

Démonstration. Par définition, $\mathcal{M}_{\boldsymbol{\alpha}} = \mathcal{M} \otimes_{\pi^{-1}\mathcal{O}_{\mathbb{C}^p}} \pi^{-1}\mathcal{N}_{\boldsymbol{\alpha}}$, or, on a une inclusion $\mathcal{N}_{\boldsymbol{\alpha}} \subset j_* p_* p^{-1}\mathcal{O}_{(\mathbb{C}^*)^p}$ dans le faisceau des fonctions holomorphes multiformes. Par fonctorialité, on a donc le morphisme :

$$\mathbf{DR}_X(\mathcal{M}_{\boldsymbol{\alpha}}) \to \mathbf{DR}_X(\mathcal{M} \otimes \pi^{-1} j_* p_* p^{-1}\mathcal{O}_{(\mathbb{C}^*)^p}).$$

L'adjonction des foncteurs image inverse et image directe fournit un morphisme de foncteurs $\pi^{-1}(j \circ p)_* \to (j \circ p)_* \widetilde{\pi}^{-1}$. Ceci donne le morphisme :

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{DR}_X(\mathcal{M} \otimes \pi^{-1} j_* p_* p^{-1}\mathcal{O}) & \to & \mathbf{DR}_X(\mathcal{M} \otimes j_* p_* \widetilde{\pi}^{-1} p^{-1}\mathcal{O}) \\ & & = \mathbf{DR}_X(\mathcal{M} \otimes j_* p_* p^{-1} {\pi_{|X^*}}^{-1}\mathcal{O}). \end{array}$$

Par adjonction on a le morphisme :

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{DR}_X(\mathcal{M} \otimes j_* p_* p^{-1} {\pi_{|X^*}}^{-1}\mathcal{O}) & \to & \mathbf{R}j_* j^{-1}\mathbf{DR}_X(\mathcal{M} \otimes j_* p_* p^{-1} {\pi_{|X^*}}^{-1}\mathcal{O}) \\ & = & \mathbf{R}j_* \mathbf{DR}_X(j^{-1}\mathcal{M} \otimes j^{-1} j_* p_* p^{-1}\pi^{-1}\mathcal{O}) \\ & = & \mathbf{R}j_* \mathbf{DR}_X(j^{-1}\mathcal{M} \otimes p_* p^{-1}\pi^{-1}\mathcal{O}). \end{array}$$

On applique ensuite le morphisme (1.4) (formule de projection) à la fonction p, en considérant le fait que p_* est un foncteur exact car p est à fibres discrètes. Par fonctorialité, on a alors le morphisme suivant :

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{R}j_* \mathbf{DR}_X(j^{-1}\mathcal{M} \otimes p_* p^{-1}\pi^{-1}\mathcal{O}) & \to & \mathbf{R}j_* \mathbf{DR}_X(p_* p^{-1}(j^{-1}\mathcal{M} \otimes \pi^{-1}\mathcal{O})) \\ & = & \mathbf{R}j_* \mathbf{DR}_X(p_* p^{-1} j^{-1}\mathcal{M}). \end{array}$$

Sachant que $\mathbf{DR}_X \mathcal{M} = \Omega^n \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{\mathscr{D}_X} \mathcal{M}$, on peut appliquer le morphisme (1.4) à p (formule de projection) et on obtient le morphisme :

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{R}j_* \mathbf{DR}_X(p_* p^{-1} j^{-1}\mathcal{M}) & \to & \mathbf{R}j_* p_* \mathbf{DR}_X(p^{-1} j^{-1}\mathcal{M}) \\ & = & \mathbf{R}j_* p_* p^{-1} j^{-1}\mathbf{DR}_X(\mathcal{M}). \end{array}$$

Si l'on compose tous les morphismes naturels que l'on vient de construire, on obtient bien le morphisme naturel attendu :

$$\mathbf{DR}_X(\mathcal{M}_{\boldsymbol{\alpha}}) \to \Psi_\pi \mathbf{DR}_X(\mathcal{M}).$$

□

La naturalité de ce morphisme, ainsi que la définition du morphisme (2.2)

$$\Psi_\pi \mathbf{DR}_X(\mathcal{M}) \to \Psi_{\pi_{I^c}}(\Psi_{\pi_I} \mathbf{DR}_X(\mathcal{M}))$$

permettent de montrer que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} \mathbf{DR}_X \mathcal{M}_{\boldsymbol{\alpha}} \arrow[rr, "\mathbf{Topo}"] \arrow[d, equal] & & \Psi_\pi \mathbf{DR}_X \mathcal{M} \arrow[d] \\ \mathbf{DR}_X \left[(\mathcal{M}_{\boldsymbol{\alpha}_I})_{\boldsymbol{\alpha}_{I^c}}\right] \arrow[r] & \Psi_{\pi_{I^c}}(\mathbf{DR}_X \mathcal{M}_{\boldsymbol{\alpha}_I}) \arrow[r] & \Psi_{\pi_{I^c}}(\Psi_{\pi_I} \mathbf{DR}_X \mathcal{M}). \end{tikzcd} \tag{3.6}$$

3.4 Le morphisme de comparaison

En combinant les morphismes (3.1), **Nils** et **Topo**, on obtient la suite de morphismes suivante :

$$\mathbf{DR}_{X_0}\Psi_{\mathbf{H}}(\mathcal{M}) \xrightarrow{\mathbf{Nils}} \bigoplus_{\boldsymbol{\alpha}\in[-1,0[^p} \mathbf{DR}_{X_0} i^{\dagger}\mathcal{M}_{\boldsymbol{\alpha}} \leftarrow \bigoplus_{\boldsymbol{\alpha}\in[-1,0[^p} \mathbf{DR}_{X_0} i^{\#}\mathcal{M}_{\boldsymbol{\alpha}} \rightarrow$$
$$\bigoplus_{\boldsymbol{\alpha}\in[-1,0[^p} \mathbf{DR}_X(\mathcal{M}_{\boldsymbol{\alpha}}) \xrightarrow{\mathbf{Topo}} \Psi_\pi \mathbf{DR}_X(\mathcal{M}). \quad (3.7)$$

On a appliqué les morphisme (3.1) à $\mathcal{M}_{\boldsymbol{\alpha}}$, on a ensuite appliqué le foncteur $\mathbf{DR}_{X_0}$ et on a pris la somme sur $\boldsymbol{\alpha} \in]-1,0]^p$ en utilisant la définition

$$\Psi_{\mathbf{H}}(\mathcal{M}) := \bigoplus_{\boldsymbol{\alpha}\in[-1,0[^p} \mathrm{gr}_{\boldsymbol{\alpha}}(\mathcal{M}).$$

Théorème 3.4.1. *Si le couple* $(\mathbf{H},\mathcal{M})$ *est sans pente, alors les morphismes* (3.7) *sont des isomorphismes qui commutent aux endomorphismes de monodromie* T_i. *On obtient l'isomorphisme de comparaison*

$$\mathbf{DR}_{X_0}\Psi_{\mathbf{H}}(\mathcal{M}) \simeq \Psi_\pi \mathbf{DR}_X(\mathcal{M}).$$

De plus, si $I = \{1,...,r\} \subset \{1,...,p\}$ *et si l'on applique successivement cet isomorphisme de comparaison par rapport aux familles d'hypersurfaces* $\mathbf{H}_I$ *et* $\mathbf{H}_{I^c}$, *le résultat ne dépend pas de l'ordre dans lequel on applique l'isomorphisme. Autrement dit, le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{DR}_{X_0}\Psi_{\mathbf{H}_{I^c}}(\Psi_{\mathbf{H}_I}\mathcal{M}) \arrow[d, "\simeq"] & \mathbf{DR}_{X_0}\Psi_{\mathbf{H}}(\mathcal{M}) \arrow[l, "\sim"'] \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\simeq"] & \mathbf{DR}_{X_0}\Psi_{\mathbf{H}_I}(\Psi_{\mathbf{H}_{I^c}}\mathcal{M}) \arrow[d, "\simeq"] \\
\Psi_{\pi_{I^c}}(\Psi_{\pi_I}\mathbf{DR}_X(\mathcal{M})) & \Psi_\pi\mathbf{DR}_X(\mathcal{M}) \arrow[l, "\sim"'] \arrow[r, "\sim"] & \Psi_{\pi_I}(\Psi_{\pi_{I^c}}\mathbf{DR}_X(\mathcal{M})).
\end{tikzcd}$$

Démonstration. On raisonne par récurrence sur le nombre p d'hypersurfaces dans $\mathbf{H}$, le cas $p = 1$ est le théorème 1.3.12.

Pour $p > 1$, soit $I = \{1,...,r\} \subset \{1,...,p\}$ avec $1 < r < p$, on va considérer les diagrammes commutatifs (3.3), (3.5) et (3.6). L'hypothèse sans pente permet d'appliquer la proposition 2.2.5 (resp. 2.4.2) qui assure que les flèches verticales des diagrammes (3.3) et (3.5) (resp. (3.6)) sont des isomorphismes. La commutativité de ces diagrammes permet de se ramener aux cas de r et $p-r$ hypersurfaces en appliquant successivement les deux isomorphismes de comparaison obtenus par récurrence. La commutativité donne alors également directement la deuxième partie du théorème. □

Pour un morphisme $\boldsymbol{f} : X \to \mathbb{C}^p$, l'inclusion du graphe de $\boldsymbol{f}$ permet de donner une version générale de ce théorème.

Corollaire 3.4.2. *Soit* $\boldsymbol{f} : X \to \mathbb{C}^p$ *un morphisme d'espaces analytiques complexes réduits et* $\mathcal{M}$ *un* $\mathscr{D}_X$*-module holonome régulier tel que le couple* $(\boldsymbol{H}, i_{\boldsymbol{f}*}\mathcal{M})$ *soit sans pente. On a un isomorphisme de comparaison*

$$\mathbf{DR}_X\Psi^{\mathrm{alg}}_{\boldsymbol{f}}(\mathcal{M}) \simeq \Psi_{\boldsymbol{f}}\mathbf{DR}_X(\mathcal{M}).$$

De plus, si $I = \{1,...,r\} \subset \{1,...,p\}$ *et si l'on applique successivement cet isomorphisme de comparaison par rapport aux fonctions* $\boldsymbol{f}_I$ *et* $\boldsymbol{f}_{I^c}$, *le résultat ne dépend pas de l'ordre dans lequel on* *applique l'isomorphisme. Autrement dit, le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{DR}_X\Psi^{\mathrm{alg}}_{\boldsymbol{f}_{I^c}}(\Psi^{\mathrm{alg}}_{\boldsymbol{f}_I}\mathcal{M}) \arrow[d, dash, "\simeq"] & \mathbf{DR}_X\Psi^{\mathrm{alg}}_{\boldsymbol{f}}(\mathcal{M}) \arrow[l, "\sim"'] \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, dash, "\simeq"] & \mathbf{DR}_X\Psi^{\mathrm{alg}}_{\boldsymbol{f}_I}(\Psi^{\mathrm{alg}}_{\boldsymbol{f}_{I^c}}\mathcal{M}) \arrow[d, dash, "\simeq"] \\
\Psi_{\boldsymbol{f}_{I^c}}(\Psi_{\boldsymbol{f}_I}\mathbf{DR}_X(\mathcal{M})) & \Psi_{\boldsymbol{f}}\mathbf{DR}_X(\mathcal{M}) \arrow[l, "\sim"'] \arrow[r, "\sim"] & \Psi_{\boldsymbol{f}_I}(\Psi_{\boldsymbol{f}_{I^c}}\mathbf{DR}_X(\mathcal{M})).
\end{tikzcd}$$

Démonstration. On applique le théorème 3.4.1 à $i_{\boldsymbol{f}*}\mathcal{M}$, on obtient l'isomorphisme

$$\mathbf{DR}_{X_0}\Psi_{\mathbf{H}}\left(i_{\boldsymbol{f}*}\mathcal{M}\right) \simeq \Psi_\pi\mathbf{DR}_{X\times\mathbb{C}^p}(i_{\boldsymbol{f}*}\mathcal{M}).$$

où $\pi : X\times\mathbb{C}^p \to \mathbb{C}^p$ est la projection. On applique le foncteur $i_{\boldsymbol{f}}{}^{-1}$ à cet isomorphisme. On observe qu'un théorème de changement de base propre donne l'isomorphisme de foncteur $\Psi_{\boldsymbol{f}}i_{\boldsymbol{f}}{}^{-1} \simeq i_{\boldsymbol{f}}{}^{-1}\Psi_\pi$. On en déduit l'isomorphisme

$$i_{\boldsymbol{f}}{}^{-1}\mathbf{DR}_{X_0}\Psi_{\mathbf{H}}\left(i_{\boldsymbol{f}*}\mathcal{M}\right) \simeq \Psi_{\boldsymbol{f}}i_{\boldsymbol{f}}{}^{-1}\mathbf{DR}_{X\times\mathbb{C}^p}(i_{\boldsymbol{f}*}\mathcal{M}).$$

On déduit enfin de l'équivalence de Kashiwara (théorème 1.2.17) appliquée à l'injection du graphe de $\boldsymbol{f}$ dans $X\times\mathbb{C}^p$ l'isomorphisme attendu

$$\mathbf{DR}_X\Psi^{\mathrm{alg}}_{\boldsymbol{f}}(\mathcal{M}) \simeq \Psi_{\boldsymbol{f}}\mathbf{DR}_X(\mathcal{M}).$$

La suite du corollaire se démontre de la même manière.

□

On déduit en particulier de ce corollaire que, dans le cas sans pente, si l'on applique l'isomorphisme de comparaison par rapport aux fonctions $f_1,...,f_p$ l'une après l'autre, l'isomorphisme

$$\mathbf{DR}_X\left(\Psi^{\mathrm{alg}}_{f_{\sigma(p)}}\left(...\Psi^{\mathrm{alg}}_{f_{\sigma(2)}}\left(\Psi^{\mathrm{alg}}_{f_{\sigma(1)}}\mathcal{M}\right)\right)\right) \simeq \Psi_{f_{\sigma(p)}}\left(...\Psi_{f_{\sigma(2)}}\left(\Psi_{f_{\sigma(1)}}\mathbf{DR}_X(\mathcal{M})\right)\right)$$

ne dépend pas de la permutation σ de $\{1,...,p\}$.

Chapitre 4

Démonstration du théorème de comparaison pour un morphisme sans pente

Dans ce chapitre, on redémontre le théorème de comparaison des cycles proches pour un morphisme sans pente sans se ramener au cas d'une fonction. Cette démonstration passe par une étude approfondie de la structure locale d'un morphisme sans pente. On observera ainsi une situation analogue à celle de la fibration de Milnor.

Dans la première section, on montre que, dans le cas sans pente, le morphisme **Nils** (3.4) est un isomorphisme.

Dans la deuxième section, on démontre le théorème de comparaison pour une connexion méromorphe à singularité régulière le long d'un diviseur à croisement normal. On commence par démontrer un résultat de forme normale pour les singularités régulières similaire au cas classique en dimension 1. On démontre alors le théorème grâce à une description explicite de la filtration de Kashiwara-Malgrange et de ses gradués.

Dans la troisième section, on démontre le théorème de comparaison dans le cas général. On va se ramener au cas précédent d'une connexion méromorphe en étudiant les images directes locales par le morphisme sans pente. N'étant plus dans le cas d'un morphisme propre, on a besoin du théorème d'image directe 1.2.20. On commence donc par vérifier que l'hypothèse sans pente implique que les conditions du théorème 1.2.20 sont satisfaites. On montre ensuite un théorème de commutation de la filtration de Kashiwara-Malgrange avec les images directes locales. On déduit finalement du cas d'une connexion méromorphe à singularité régulière le long d'un diviseur à croisement normal le théorème de comparaison dans le cas général.

4.1 Le morphisme Nils est un isomorphisme

On commence par montrer que, dans le cas sans pente, le morphisme **Nils** (3.4) est un isomorphisme.

Théorème 4.1.1. *Soit $\mathcal{M}$ un $\mathscr{D}_X$-module tel que le couple $(\boldsymbol{H}, \mathcal{M})$ soit sans pente et $\boldsymbol{\alpha} \in [-1, 0[^p$. Il existe un quasi-isomorphisme naturel de complexes :*

$$\mathrm{gr}_{\boldsymbol{\alpha}}(\mathcal{M}) \simeq \varinjlim i^{\dagger}\mathcal{M}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{k}}$$

où le complexe de gauche est concentré en degré zéro et la limite est prise sur l'indice $\boldsymbol{k} \in \mathbb{N}^p$. De *plus, l'action de monodromie T_j sur $\varinjlim i^\dagger \mathcal{M}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{k}}$ correspond à l'action de l'exponentielle de l'endomorphisme $-2i\pi E_j$ de $\mathrm{gr}_{\boldsymbol{\alpha}}(\mathcal{M})$ pour tout $1 \leqslant j \leqslant p$.*

Démonstration. Pour montrer la première partie du théorème, on va appliquer le théorème A.1.3 aux p-hypercomplexes $\varinjlim \mathrm{Cube}(\mathrm{gr}_\bullet(\mathcal{M}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{k}}))$ et $\mathrm{gr}_{\boldsymbol{\alpha}}(\mathcal{M})$ concentré en degré $(0, ..., 0)$. Calculons

$$\varinjlim H_p(\mathrm{Cube}(\mathrm{gr}_\bullet(\mathcal{M}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{k}})))$$

où H_p est le foncteur défini dans la partie A. On fixe $(\epsilon_1, ..., \epsilon_{p-1}) \in \{-1, 0\}^{p-1}$ et on note $\boldsymbol{\epsilon}_{-1} = (\epsilon_1, ..., \epsilon_{p-1}, -1)$ et $\boldsymbol{\epsilon}_0 = (\epsilon_1, ..., \epsilon_{p-1}, 0)$. On cherche à calculer la limite inductive du noyau et du conoyau du morphisme

$$\partial_p : \mathrm{gr}_{\boldsymbol{\epsilon}_{-1}}(\mathcal{M}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{k}}) \to \mathrm{gr}_{\boldsymbol{\epsilon}_0}(\mathcal{M}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{k}}). \tag{4.1}$$

(1) Commençons par calculer le noyau. La multiplication $t_p : \mathrm{gr}_{\boldsymbol{\epsilon}_0}(\mathcal{M}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{k}}) \to \mathrm{gr}_{\boldsymbol{\epsilon}_{-1}}(\mathcal{M}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{k}})$ est un isomorphisme, on est alors ramené au calcul de

$$\varinjlim \mathrm{Ker}\left[t_p\partial_p : \mathrm{gr}_{\boldsymbol{\epsilon}_{-1}}(\mathcal{M}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{k}}) \to \mathrm{gr}_{\boldsymbol{\epsilon}_{-1}}(\mathcal{M}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{k}})\right].$$

D'après la proposition précédente, une section m de $\mathrm{gr}_{\boldsymbol{\epsilon}_{-1}}(\mathcal{M}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{k}})$ s'écrit :

$$\sum_{\mathbf{0} \leqslant \boldsymbol{\ell} \leqslant \boldsymbol{k}} m_{\boldsymbol{\ell}} \otimes e_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\ell}}$$

où $m_{\boldsymbol{\ell}} \in \mathrm{gr}_{\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\epsilon}_{-1}+\mathbf{1}}\left(\mathcal{M}[\frac{1}{t_1...t_p}]\right)$. La section m est dans le noyau de $t_p\partial_p$ si et seulement si pour tout $\widetilde{\boldsymbol{\ell}} \in \mathbb{N}^{p-1}$ vérifiant $\mathbf{0}_{\{p\}^c} \leqslant \widetilde{\boldsymbol{\ell}} \leqslant \boldsymbol{k}_{\{p\}^c}$ (on fixe les $p-1$ premiers indices) :

$$\sum_{0 \leqslant \ell_p \leqslant k_p} \left((t_p\partial_p + \alpha_p + 1)m_{\widetilde{\boldsymbol{\ell}},\ell_p} + m_{\widetilde{\boldsymbol{\ell}},\ell_p+1}\right) \otimes e_{\boldsymbol{\alpha},(\widetilde{\boldsymbol{\ell}},\ell_p)} = 0$$

où $m_{\widetilde{\boldsymbol{\ell}},k_p+1} = 0$. Ce qui donne $m_{\widetilde{\boldsymbol{\ell}},\ell_p} = (-1)^{\ell_p}(t_p\partial_p + \alpha_p + 1)^{\ell_p} m_{\widetilde{\boldsymbol{\ell}},0}$ et $(t_p\partial_p + \alpha_p + 1)^{k_p+1} m_{\widetilde{\boldsymbol{\ell}},0} = 0$. Or, on déduit du corollaire 2.2.2 que l'endomorphisme $(t_p\partial_p + \alpha_p + 1)$ de $\mathrm{gr}_{\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\epsilon}_{-1}+\mathbf{1}}\left(\mathcal{M}[\frac{1}{t_1...t_p}]\right)$ est nilpotent. Donc, pour k_p suffisamment grand, on a un isomorphisme

$$\begin{array}{ccc} \displaystyle\sum_{\substack{\mathbf{0} \leqslant \boldsymbol{\ell} \leqslant \boldsymbol{k} \\ \ell_p = 0}} \mathrm{gr}_{\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\epsilon}_{-1}+\mathbf{1}}\left(\mathcal{M}[\frac{1}{t_1...t_p}]\right) e_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\ell}} & \longrightarrow & \mathrm{Ker}\left[\partial_p : \mathrm{gr}_{\boldsymbol{\epsilon}_{-1}}(\mathcal{M}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{k}}) \to \mathrm{gr}_{\boldsymbol{\epsilon}_0}(\mathcal{M}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{k}})\right] \\ \displaystyle\sum_{\substack{\mathbf{0} \leqslant \boldsymbol{\ell} \leqslant \boldsymbol{k} \\ \ell_p = 0}} m_{\boldsymbol{\ell}} \otimes e_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\ell}} & \longmapsto & \displaystyle\sum_{\substack{\mathbf{0} \leqslant \boldsymbol{\ell} \leqslant \boldsymbol{k} \\ \ell_p = 0}} \left(\sum_{0 \leqslant \ell \leqslant k_p} (-1)^\ell (t_p\partial_p + \alpha_p + 1)^\ell m_{\boldsymbol{\ell}} \otimes e_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\ell}}\right). \end{array}$$

On en déduit la limite inductive du noyau du morphisme (4.1).

(2) Calculons la limite inductive du conoyau du morphisme (4.1). Comme précédemment, la multiplication par t_p étant un isomorphisme, on est ramené au calcul de

$$\varinjlim \mathrm{Coker}\left[\partial_p t_p : \mathrm{gr}_{\boldsymbol{\epsilon}_0}(\mathcal{M}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{k}}) \to \mathrm{gr}_{\boldsymbol{\epsilon}_0}(\mathcal{M}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{k}})\right].$$

Soit $m \in \mathrm{gr}_{\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\epsilon}_0+\mathbf{1}}\left(\mathcal{M}[\frac{1}{t_1...t_p}]\right)$ et soit $\boldsymbol{\ell} \in \mathbb{N}^p$ on a :

$$m \otimes e_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\ell}} = \partial_p t_p(m \otimes e_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\ell}+\mathbf{1}_p}) - ((\partial_p t_p + \alpha_p + 1)m) \otimes e_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\ell}+\mathbf{1}_p}.$$

Par induction, on en déduit, pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$m \otimes e_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\ell}} = \partial_p t_p \left(\sum_{0 \leqslant n \leqslant N} (-1)^n \left((\partial_p t_p + \alpha_p + 1)^n m \right) \otimes e_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\ell}+(n+1).\mathbf{1}_p} \right) - \\ (-1)^N \left((\partial_p t_p + \alpha_p + 1)^{N+1} m \right) \otimes e_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\ell}+(N+1).\mathbf{1}_p}.$$

Comme précédemment, on déduit du corollaire 2.2.2 que l'endomorphisme

$$(\partial_p t_p + \alpha_p + 1) : \mathrm{gr}_{\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\epsilon}_0+\mathbf{1}} \left(\mathcal{M}[\frac{1}{t_1 \ldots t_p}] \right) \to \mathrm{gr}_{\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\epsilon}_0+\mathbf{1}} \left(\mathcal{M}[\frac{1}{t_1 \ldots t_p}] \right)$$

est nilpotent et donc, pour N suffisamment grand, la section $m \otimes e_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\ell}}$ est dans l'image de $\partial_p t_p$. On en déduit que la limite inductive du conoyau du morphisme (4.1) est nulle.

L'élément de degré $(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_p)$ du p-hypercomplexe $\varinjlim H_p(\mathrm{Cube}(\mathrm{gr}_\bullet(\mathcal{M}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{k}})))$ est donc nul si $\epsilon_p = 1$ et est isomorphe à

$$\varinjlim \sum_{\substack{\mathbf{0} \leqslant \boldsymbol{\ell} \leqslant \boldsymbol{k} \\ \ell_p = 0}} \mathrm{gr}_{\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\epsilon}_{-1}+\mathbf{1}} \left(\mathcal{M}[\frac{1}{t_1 \ldots t_p}] \right) e_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\ell}}$$

si $\epsilon_p = 0$. On peut donc le considérer comme un $(p-1)$-hypercomplexe et appliquer les mêmes raisonnements pour calculer la limite inductive de $H_{p-1}(H_p(\mathrm{Cube}(\mathrm{gr}_\bullet(\mathcal{M}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{k}}))))$ en utilisant le fait que la limite inductive commute aux foncteurs $H_l(.)$. Par induction, on montre alors que l'élément de degré $(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_p)$ du p-hypercomplexe $\varinjlim H_1(H_2(\ldots(H_p(\mathrm{Cube}(\mathrm{gr}_\bullet(\mathcal{M}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{k}}))))$ est nul si $(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_p) \neq (0, \ldots, 0)$ et que l'élément de degré $(0, \ldots, 0)$ est isomorphe à $\mathrm{gr}_{\boldsymbol{\alpha}} \left(\mathcal{M}[\frac{1}{t_1 \ldots t_p}] \right)$. De plus, cet isomorphisme est induit par le morphisme :

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & \mathrm{gr}_{\boldsymbol{\alpha}} \left(\mathcal{M}[\frac{1}{t_1 \ldots t_p}] \right) & \longrightarrow & \mathrm{gr}_{-\mathbf{1}}(\mathcal{M}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{k}}) \\ & m & \longmapsto & \displaystyle\sum_{\mathbf{0} \leqslant \boldsymbol{\ell} \leqslant \boldsymbol{k}} (-1)^{\ell_1+\ldots+\ell_p} (t_1\partial_1 + \alpha_1 + 1)^{\ell_1} \ldots (t_p\partial_p + \alpha_p + 1)^{\ell_p} m \otimes e_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\ell}} \end{array} \tag{4.2}$$

Étant donné que l'on a supposé $\boldsymbol{\alpha} \in [-1, 0[^p$, on peut appliquer la proposition 2.1.15 et on a un isomorphisme

$$\mathrm{gr}_{\boldsymbol{\alpha}} \left(\mathcal{M}[\frac{1}{t_1 \ldots t_p}] \right) \simeq \mathrm{gr}_{\boldsymbol{\alpha}}(\mathcal{M}).$$

Le p-hypercomplexe $\mathrm{gr}_{\boldsymbol{\alpha}}(\mathcal{M})$ concentré en degré $(0, \ldots, 0)$ est isomorphe à $H_1(H_2(\ldots(H_p(\mathrm{gr}_{\boldsymbol{\alpha}}(\mathcal{M})))))$. Le théorème A.1.3 assure alors que l'on a l'isomorphisme de complexes suivant :

$$\mathrm{gr}_{\boldsymbol{\alpha}}(\mathcal{M}) \simeq \varinjlim s(\mathrm{Cube}(\mathrm{gr}_\bullet(\mathcal{M}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{k}}))) = \varinjlim i^\dagger \mathcal{M}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{k}}$$

ce qui donne la première partie du théorème.

Pour déterminer l'action des morphismes de monodromie sur $\mathrm{gr}_{\boldsymbol{\alpha}}(\mathcal{M})$, on considère le morphisme (4.2). Soit $m \in \mathrm{gr}_{\boldsymbol{\alpha}}(\mathcal{M}) \simeq \mathrm{gr}_{\boldsymbol{\alpha}} \left(\mathcal{M}[\frac{1}{t_1 \ldots t_p}] \right)$, on observe que, pour connaître l'action de T_j sur m, il suffit de déterminer le coefficient devant $e_{\boldsymbol{\alpha},\mathbf{0}}$ de $T_j(\Phi(m))$. L'égalité (2.4) permet de calculer ce coefficient. En utilisant le fait que l'endomorphisme $(t_j\partial_j + \alpha_j + 1)$ de $\mathrm{gr}_{\boldsymbol{\alpha}}(\mathcal{M})$ est nilpotent, on montre alors que l'action de la monodromie T_j est donnée par l'endomorphisme $\exp(-2i\pi E_j)$ de $\mathrm{gr}_{\boldsymbol{\alpha}}(\mathcal{M})$, ce qui conclut la démonstration du théorème.

$\square$

4.2 Cas d'une connexion méromorphe à singularité régulière

Ici, on traite le cas d'une connexion méromorphe à singularité régulière sur un polydisque D et où les cycles proches sont pris relativement à la fonction Id_D.

4.2.1 V-multifiltration et gradués

On calcule la V-multifiltration de Kashiwara-Malgrange et ses gradués. Soit D un polydisque de centre 0 dans $\mathbb{C}^p$, muni des coordonnées $(t_1, ..., t_p)$. On note Y le diviseur à croisements normaux d'équation $\{t_1...t_p = 0\}$.

Définition 4.2.1. Soit $(\mathcal{M}, \nabla)$ une connexion méromorphe sur D à pôles le long de Y. On dit que $(\mathcal{M}, \nabla)$ est à *singularité régulière* le long de Y s'il existe une $\mathcal{O}_D(*Y)$ base de $\mathcal{M}$ dans laquelle les coefficients la matrice de ∇ sont dans le $\mathcal{O}_D$-module engendré par les $\frac{dt_i}{t_i}$ pour $1 \leqslant i \leqslant p$.

Lemme 4.2.2. *Si $(\mathcal{M}, \nabla)$ est à singularité régulière le long de Y, alors il existe une $\mathcal{O}_D(*Y)$-base de $\mathcal{M}$ dans laquelle la matrice de la connexion s'écrit :*

$$\sum_{i=1}^{p} R_i \frac{dt_i}{t_i}$$

où les R_i sont des matrices constantes qui commutent deux à deux et dont les valeurs propres vérifient $-1 \leqslant \lambda < 0$.

La preuve de ce lemme est similaire au cas classique en dimension 1. On commence par montrer le résultat d'algèbre linéaire suivant.

Lemme 4.2.3. *Soit $P \in End(\mathbb{C}^p)$ et $Q \in End(\mathbb{C}^p)$, l'équation*

$$XP - QX = Y$$

a une unique solution $X \in \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^p, \mathbb{C}^q)$ pour tout $Y \in \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^p, \mathbb{C}^q)$, si et seulement si P et Q n'ont pas de valeur propre en commun.

Démonstration du lemme 4.2.2. Si $(\mathcal{M}, \nabla)$ est à singularité régulière le long de Y, la matrice de la connexion s'écrit :

$$\sum_{i=1}^{p} R_i(t_1, ..., t_p) \frac{dt_i}{t_i}$$

où les R_i sont à coefficients holomorphes. Le fait que la connexion soit plate donne les relations de commutation suivantes pour tout couple (i, j) :

$$[R_i, R_j] = t_j \frac{\partial R_i}{\partial t_j} - t_i \frac{\partial R_j}{\partial t_i}. \tag{4.3}$$

Si on arrive à se ramener au cas de matrices R_i constantes, la platitude implique alors immédiatement que ces matrices commutent deux à deux.

Si B est une matrice de changement de base pour $\mathcal{M}$, alors la matrice de la connexion s'écrit dans la nouvelle base :

$$\sum_{i=1}^{p} \widetilde{R_i}(t_1, ..., t_p) \frac{dt_i}{t_i}$$

où

$$\widetilde{R_i} = BR_iB^{-1} + t_i \left(\frac{\partial B}{\partial t_i}\right) B^{-1}. \tag{4.4}$$

La démonstration se déroule en trois étapes :

1. On commence par se ramener au cas où :

$$\begin{array}{c}\text{Pour tout } i, \text{ les valeurs propres de la partie constante}\\ \text{de la matrice } R_i \text{ vérifient les inégalités } -1 \leqslant \lambda < 0.\end{array} \tag{4.5}$$

2. On construit alors, par récurrence, une matrice de changement de base à coefficients dans $\mathbb{C}[[t_1, ..t_p]]$, l'anneau des séries formelles, qui donne le résultat voulu.
3. On montre que cette matrice est en fait à coefficients convergents.

1. Notons $R_i(\mathbf{0})$ la partie constante de la matrice R_i et $\{\lambda_1, ..., \lambda_n\}$ l'ensemble des valeurs propres de la matrice $R_1(\mathbf{0})$. Si l'on fait un changement de base à coefficients constants, la deuxième partie de la formule (4.4) est nulle et on peut donc se ramener au cas où $R_1(\mathbf{0})$ est sous forme de Jordan :
$$R_1(\mathbf{0}) = \begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & Q_1 \end{pmatrix}$$
où P_1 est composé des blocs de Jordan associés à λ_1 et Q_1 de ceux associés aux valeurs propres de $R_1(\mathbf{0})$ différentes de λ_1. De plus, les relations de commutation (4.3) assurent que la partie constante des matrices R_i commutent deux à deux. Dans la nouvelle base, on a alors pour tout i :
$$R_i(\mathbf{0}) = \begin{pmatrix} P_i & 0 \\ 0 & Q_i \end{pmatrix}.$$
On peut effectuer alors le changement de base par la matrice
$$B = \begin{pmatrix} t_1 \mathrm{Id} & 0 \\ 0 & \mathrm{Id} \end{pmatrix}$$
et on vérifie, à l'aide de la formule (4.4), que dans la nouvelle base l'ensemble des valeurs propres de $R_1(\mathbf{0})$ est $\{\lambda_1 + 1, ..., \lambda_n\}$ et que les valeurs propres de $R_i(\mathbf{0})$, pour $i \geqslant 1$, n'ont pas été modifiées. De la même façon, on peut effectuer le changement de base par la matrice
$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{t_1} \mathrm{Id} & 0 \\ 0 & \mathrm{Id} \end{pmatrix}$$
et, dans la nouvelle base, l'ensemble des valeurs propres de $R_1(\mathbf{0})$ est $\{\lambda_1 - 1, ..., \lambda_n\}$ et les valeurs propres de $R_i(\mathbf{0})$ restent inchangées.
Avec des opérations de ce type, on peut donc se ramener au cas où, pour tout i, les valeurs propres de la partie constante de R_i satisfont à $-1 \leqslant \lambda < 0$.
2. On va montrer, par récurrence sur p, le nombre de matrices, que si l'hypothèse (4.5) est vérifiée alors on peut trouver une matrice $B(t_1, ..., t_p) \in \mathrm{Gl}(\mathbb{C}[[t_1, ..., t_p]])$ telle que $B(0, ..., 0) = \mathrm{Id}$ et telle que, pour tout i, on ait
$$BR_iB^{-1} + t_i \left(\frac{\partial B}{\partial t_i} \right) B^{-1} = R_i(\mathbf{0}).$$
Si $p = 0$, la condition est vide. Supposons que $p \geqslant 1$ et que l'hypothèse (4.5) est vérifiée. Notons $R_i(t_1, ..., t_p) = \sum_{k \geqslant 0} R_{i,k}(t_2, ..., t_p) t_1^k$. Dans un premier temps, on va se ramener au cas où $R_{1,0}$ est constante. On remarque que, si l'on fait un changement de base par une matrice $B(t_2, ..., t_p) \in \mathrm{Gl}(\mathbb{C}[[t_2, ..., t_p]])$ indépendante de t_1, alors, pour $i \geqslant 2$, la partie de R_i indépendante de t_1 devient
$$BR_{i,0}B^{-1} + t_i \left(\frac{\partial B}{\partial t_i} \right) B^{-1}.$$

De plus, la partie constante de la matrice $R_{i,0}$ est la matrice $R_i(\mathbf{0})$, donc les matrices $R_{2,0}, ..., R_{p,0}$ vérifient l'hypothèse (4.5). On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence aux matrices $R_{2,0}, ..., R_{p,0}$ et trouver une matrice $C(t_2, ..., t_p) \in \mathrm{Gl}(\mathbb{C}[[t_2, ..., t_p]])$ telle que $C(0, ..., 0) = \mathrm{Id}$ et telle que, pour $i \geqslant 2$,

$$CR_iC^{-1} + t_i \left(\frac{\partial C}{\partial t_i}\right) C^{-1} = R'_i$$

où la partie de R'_i indépendante de t_1 est constante. Dans cette nouvelle base, les relations (4.3) donnent, pour tout $i \geqslant 2$,

$$\left[R'_1, R'_i\right] = t_i \frac{\partial R'_1}{\partial t_i} - t_1 \frac{\partial R'_i}{\partial t_1}.$$

Si l'on regarde la partie indépendante de t_1 de cette égalité, on obtient :

$$\left[R'_{1,0}, R'_{i,0}\right] = t_i \frac{\partial R'_{1,0}}{\partial t_i}.$$

Fixons $i \leqslant 2$ et notons $R'_{1,0} = \sum_{k \geqslant 0} t_i^k R'_{1,0,k}(t_2, ..., t_{i-1}, t_{i+1}, ..., t_p)$. L'égalité précédente donne, pour tout $k \geqslant 0$,

$$(R'_{i,0} + k\mathrm{Id})R'_{1,0,k} - R'_{1,0,k}R'_{i,0} = 0.$$

Si l'on regarde cette équation pour tous les degrés en $(t_2, ..., t_{i-1}, t_{i+1}, ..., t_p)$, le lemme 4.2.3 et l'hypothèse (4.5) sur $R_i(\mathbf{0})$ assurent que, pour $k \neq 0$, $R'_{1,0,k} = 0$. Ceci est valable pour tout $i \geqslant 2$ donc $R'_{1,0}$ est constante. De plus, comme $C(0, ..., 0) = \mathrm{Id}$, la formule de changement de base (4.4) assure que $R'_{1,0} = R_1(\mathbf{0})$.
On peut alors construire $B_1(t_1, ..., t_p) \in \mathrm{Gl}(d, \mathbb{C}[[t_1, ..., t_p]])$ telle que

$$B_1R'_1B_1^{-1} + t_1 \left(\frac{\partial B_1}{\partial t_1}\right) B_1^{-1} = R'_1(\mathbf{0}).$$

ou, de manière équivalente,

$$B_1R'_1 + t_1 \left(\frac{\partial B_1}{\partial t_1}\right) = R'_1(\mathbf{0})B_1. \tag{4.6}$$

Pour faire cela, on écrit

$$B_1 = \sum_{(k_1,...k_p)\in\mathbb{N}^p} t_1^{k_1}...t_p^{k_p} B_{1,k_1...k_p} \text{ et } R'_1 = \sum_{(k_1,...k_p)\in\mathbb{N}^p} t_1^{k_1}...t_p^{k_p} R'_{1,k_1...k_p}$$

et on construit les matrices $B_{1,k_1...k_p}$ de manière inductive. En degré $(0, k_2, ..., k_p)$, l'équation (4.6) impose

$$B_{1,0,k_2,...,k_p}R'_{1,0...0} = R'_{1,0...0}B_{1,0,k_1...,k_p}$$

car, pour $(k_2, ..., k_p) \neq (0, ..., 0)$, $R'_{1,0,k_1...,k_p} = 0$. On pose $B_{1,0...0} = \mathrm{Id}$ et $B_{1,0,k_1...,k_p} = 0$ pour $(k_2, ..., k_p) \neq (0, ..., 0)$. Si $k_1 \neq 0$, l'équation (4.6) impose

$$B_{1,k_1...k_p}R'_{1,0...0} + (k_1\mathrm{Id} - R'_{1,0...0})B_{1,k_1...k_p} = \Phi\left(R'_{1,\ell_1...\ell_p}; B_{1,m_1...m_p}\right)_{\substack{(\ell_1,...,\ell_p)\in\mathbb{N}^p \\ (m_1,...,m_p)<(k_1,...k_p)}}.$$

Si les $B_{1,m_1...m_p}$ qui apparaissent dans la fonction de droite de l'égalité sont fixés, alors le lemme 4.2.3 et l'hypothèse (4.5) assurent l'existence (et l'unicité) de $B_{1,k_1...k_p}$. On peut donc construire les $B_{1,k_1...k_p}$ par induction sur l'entier $k_1 + ... + k_p$.

Dans la nouvelle base, notons $\widetilde{R_i} := B_1 R_i' B_1^{-1} + t_i \left(\frac{\partial B_1}{\partial t_i}\right) B_1^{-1}$. Les relations (4.3) donnent, pour tout $i \geqslant 2$,

$$\left[\widetilde{R}_1, \widetilde{R}_i\right] = -t_1 \frac{\partial \widetilde{R_i}}{\partial t_1}$$

car $\widetilde{R_1} = R_1(\mathbf{0})$ est constante. Si on écrit $\widetilde{R_i} = \sum_{k \geqslant 0} t_1^k \widetilde{R}_{i,k}(t_2, ..., t_p)$ dans l'égalité précédente, on a pour tout $k \geqslant 0$

$$(\widetilde{R}_1 + k\mathrm{Id})\widetilde{R}_{i,k} - \widetilde{R}_{i,k}\widetilde{R}_1 = 0.$$

Si l'on regarde cette équation pour tous les degrés en $(t_2, ..., t_p)$, le lemme 4.2.3 et l'hypothèse (4.5) sur $R_1(\mathbf{0})$ assurent que, pour $k \neq 0$, $\widetilde{R}_{i,k} = 0$, donc pour $i \geqslant 2$, les matrices $\widetilde{R}_i$ sont à coefficients indépendants de t_1. De plus, comme les coefficients de B_1 sont dans $\mathbb{C}[[t_1, ..., t_p]]$ et comme $B_{1,0...0} = \mathrm{Id}$, la formule (4.4) assure que la partie constante de R_i reste inchangée pour tout i. Les matrices $\widetilde{R}_2, ..., \widetilde{R}_p$ vérifient donc l'hypothèse de récurrence et on peut trouver $B_2(t_2, ..., t_p) \in \mathrm{Gl}(\mathbb{C}[[t_2, ..., t_p]])$ tel que

$$B_2 \widetilde{R}_i B_2^{-1} + t_i \left(\frac{\partial B_2}{\partial t_i}\right) B_2^{-1} = R_i(\mathbf{0})$$

pour tout $i \geqslant 2$. Les relation (4.3) assurent que, pour tout i, la matrice $\widetilde{R}_1$ commute avec $R_i(\mathbf{0})$ et avec $\widetilde{R}_i$, l'équation précédente nous donne, pour tout $i \geqslant 2$, l'équation

$$[B_2, \widetilde{R}_1]\widetilde{R}_i + t_i \left(\frac{\partial [B_2, \widetilde{R}_1]}{\partial t_i}\right) = R_i(\mathbf{0})[B_2, \widetilde{R}_1].$$

En considérant ces équations pour tout degré et en remarquant que $[B_2, \widetilde{R}_1](0, ..., 0) = [\mathrm{Id}, \widetilde{R}_1] = 0$, on montre, en appliquant un raisonnement analogue à ce qui a été fait précédemment, que $[B_2, \widetilde{R}_1] = 0$ et donc que

$$B_2 \widetilde{R}_1 B_2^{-1} + t_1 \left(\frac{\partial B_2}{\partial t_1}\right) B_2^{-1} = \widetilde{R}_1 = R_1(\mathbf{0}).$$

On peut donc prendre pour B la matrice $B_2 B_1 C$, ce qui conclut l'étape 2.

3. Il reste à montrer que les coefficients de la matrice B sont convergents. On montre que, pour tout i, si l'on fixe $(t_1, ..., t_{i-1}, t_{i+1}, ..., t_p) = (a_1, ..., a_{i-1}, a_{i+1}, ..., a_p)$ un $(p-1)$-uplet de nombres complexes suffisamment proches de zéro, alors

$$B_{\boldsymbol{a}}(t_i) := B(a_1, ..., a_{i-1}, t_i, a_{i+1}, ..., a_p) \in \mathrm{Gl}(\mathbb{C}[[t_i]])$$

est en fait à coefficients dans $\mathbb{C}\{t_i\}$, c'est-à-dire à coefficients convergents. La matrice R_i vérifie cette propriété et $B_{\boldsymbol{a}}$ est solution de

$$t_i \left(\frac{\partial B_{\boldsymbol{a}}}{\partial t_i}\right) = R_i(\mathbf{0})B_{\boldsymbol{a}}(t_i) + B_{\boldsymbol{a}}(t_i)R_{i,\boldsymbol{a}}(t_i).$$

Il suffit alors d'appliquer la proposition 1.1.2 du chapitre II de [Sab93] pour montrer que $B_{\boldsymbol{a}}(t_i)$ est à coefficients convergents. Ce résultat étant vrai pour tout i et tout $(p-1)$-uplet suffisamment proche de zéro, B est à coefficients convergents, ce qui conclut la démonstration du lemme.

$\square$

Notons C le $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie engendré par la base fournie par le lemme précédent. Étant donné que les matrices R_i commutent deux à deux, les sous-espaces propres généralisés de l'une de ces matrices sont stables par les autres. Comme les valeurs propres des R_i satisfont à $-1 \leqslant \lambda < 0$, on peut décomposer C de la façon suivante :

$$C = \bigoplus_{\boldsymbol{\alpha} \in [-1,0[^p} C_{\boldsymbol{\alpha}},$$

où

$$C_{\boldsymbol{\alpha}} := \bigcap_{1 \leqslant i \leqslant p} \operatorname{Ker}\left[(E_i + \alpha_i + 1)^{N_i} : C \to C\right]$$

pour des entiers N_i suffisamment grands. Les $\mathbb{C}$-espaces vectoriels $C_{\boldsymbol{\alpha}}$ sont de dimension finie et sont nuls sauf pour un nombre fini de $\boldsymbol{\alpha}$ vérifiant $\boldsymbol{\alpha} \in]-1,0]^p$. On définit alors pour $\boldsymbol{\alpha} \in]-1,0]^p$ et pour tout $\boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}^p$, le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $C_{\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{k}} := \boldsymbol{t}^{\boldsymbol{k}} C_{\boldsymbol{\alpha}}$. On vérifie facilement que, pour tout $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{C}^p$,

$$C_{\boldsymbol{\alpha}} \subset \bigcap_{1 \leqslant i \leqslant p} \operatorname{Ker}\left[(E_i + \alpha_i + 1)^{N_i} : \mathcal{M} \to \mathcal{M}\right]$$

pour des N_i suffisamment grands. Or, on a

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \mathcal{O}_D(*Y) \otimes_{\mathbb{C}} C \\ &= \bigoplus_{\boldsymbol{\alpha} \in [-1,0[^p} \mathcal{O}_D(*Y) \otimes_{\mathbb{C}} C_{\boldsymbol{\alpha}}. \end{aligned}$$

On en déduit que pour tout $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{C}^p$,

$$C_{\boldsymbol{\alpha}} = \bigcap_{1 \leqslant i \leqslant p} \operatorname{Ker}\left[(E_i + \alpha_i + 1)^{N_i} : \mathcal{M} \to \mathcal{M}\right]$$

pour des N_i suffisamment grands. On observe donc que :
- Si on note H_i les hyperplans d'équation $\{t_i = 0\}$, alors le couple $(\boldsymbol{H}, \mathcal{M})$ est sans pente.
- Le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $C_{\boldsymbol{\alpha}}$ est de dimension finie et nul sauf pour un nombre fini de $\boldsymbol{\alpha} + \mathbb{Z}^p$.
- Pour tout $1 \leqslant i \leqslant p$ et tout $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{C}^p$, on a un isomorphisme

$$t_i : C_{\boldsymbol{\alpha}} \xrightarrow{\sim} C_{\boldsymbol{\alpha}-\mathbf{1}_i}.$$

D'autre part, $\partial_i(C_{\boldsymbol{\alpha}}) \subset C_{\boldsymbol{\alpha}+\mathbf{1}_i}$ et $E_i : C_{\boldsymbol{\alpha}} \to C_{\boldsymbol{\alpha}}$ est une bijection pour $\alpha_i \neq -1$. On a donc un isomorphisme

$$\partial_i : C_{\boldsymbol{\alpha}} \xrightarrow{\sim} C_{\boldsymbol{\alpha}+\mathbf{1}_i}$$

pour tout $\boldsymbol{\alpha}$ vérifiant $\alpha_i \neq -1$. Si l'on considère la filtration de Kashiwara-Malgrange de $\mathcal{M}$, on observe que $V_{<\boldsymbol{\alpha}_I, \boldsymbol{\alpha}_{I^c}}(\mathcal{M})$ est le $\mathcal{O}_D$-module libre engendré par

$$\bigoplus_{\substack{\boldsymbol{\alpha}_I - \mathbf{1}_I \leqslant \boldsymbol{\beta}_I < \boldsymbol{\alpha}_I \\ \boldsymbol{\alpha}_{I^c} - \mathbf{1}_{I^c} < \boldsymbol{\beta}_{I^c} \leqslant \boldsymbol{\alpha}_{I^c}}} C_{\boldsymbol{\beta}_I, \boldsymbol{\beta}_{I^c}} \tag{4.7}$$

pour tout $I \subset \{1, ..., p\}$, $\boldsymbol{\alpha}_I \in \mathbb{C}^{\# I}$ et $\boldsymbol{\alpha}_{I^c} \in \mathbb{C}^{\# I^c}$. On déduit de ceci que

$$C_{\boldsymbol{\alpha}} \simeq \operatorname{gr}_{\boldsymbol{\alpha}}(\mathcal{M}).$$

Proposition 4.2.4. *Soit $i : \{0\} \hookrightarrow D$, on a un isomorphisme fonctoriel*

$$i^{-1}\mathbf{DR}(\mathcal{M}) \simeq \mathbf{DR}(i^\dagger \mathcal{M}) = i^\dagger \mathcal{M}$$

où $i^\dagger$ est le foncteur de la définition 3.1.1.

Démonstration. L'égalité $\mathbf{DR}(i^\dagger \mathcal{M}) = i^\dagger \mathcal{M}$ vient du fait que la variété sous-jacente à $i^\dagger \mathcal{M}$ est le point $\{0\}$. Si l'on considère la famille $\mathcal{M}^\bullet := \{\mathcal{M}^{\boldsymbol{k}}, \partial_i\}_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^p, 1\leqslant i\leqslant p}$ où, pour tout $\boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}^p$, $\mathcal{M}^{\boldsymbol{k}} := \mathcal{M}$, on observe que

$$DR(\mathcal{M}) \simeq s(\mathrm{Cube}(\mathcal{M}^\bullet)).$$

On cherche donc à construire un isomorphisme

$$s(\mathrm{Cube}(\mathcal{M}^\bullet))_{|\{0\}} \simeq s(\mathrm{Cube}(\mathrm{gr}_\bullet(\mathcal{M})))_{|\{0\}}.$$

Pour simplifier les notations, on pose pour tout $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{C}^p$, $\mathrm{gr}_{\boldsymbol{\alpha}} := \mathrm{gr}_{\boldsymbol{\alpha}}(\mathcal{M})$ et $V_{\boldsymbol{\alpha}} := V_{\boldsymbol{\alpha}}(\mathcal{M})$ et on oubliera de noter que les complexes sont restreints au point $\{0\}$. Pour tous les autres hypercubes considérés dans cette démonstration, les morphismes seront toujours les dérivés ∂_i pour $1 \leqslant i \leqslant p$.

On construira en fait deux isomorphismes :

$$s(\mathrm{Cube}(\mathcal{M}^\bullet)) \xleftarrow{\sim} s(\mathrm{Cube}(V_\bullet)) \xrightarrow{\sim} s(\mathrm{Cube}(\mathrm{gr}_\bullet)).$$

(1) Construisons l'isomorphisme $s(\mathrm{Cube}(V_\bullet)) \xrightarrow{\sim} s(\mathrm{Cube}(\mathcal{M}^\bullet))$. On a une injection naturelle

$$s(\mathrm{Cube}(V_\bullet)) \hookrightarrow s(\mathrm{Cube}(\mathcal{M}^\bullet)).$$

Par exactitude des foncteurs $s(.)$ et $\mathrm{Cube}(.)$, le conoyau de cette injection est $s(\mathrm{Cube}(\mathcal{M}^\bullet/V_\bullet))$. Pour montrer que l'on a un isomorphisme, il suffit donc de montrer que $s(\mathrm{Cube}(\mathcal{M}^\bullet/V_\bullet))$ est quasi-isomorphe au complexe nul. Comme $\mathcal{M}$ est filtré par les $V_{\boldsymbol{\alpha}}$, il suffit de montrer que pour tout $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{C}^p$ vérifiant $\boldsymbol{\alpha} > (0,...,0)$, le complexe $s(\mathrm{Cube}(V_{\boldsymbol{\alpha}+\bullet}/V_\bullet))$ est quasi-isomorphe à 0. On rappelle que l'ordre considéré est obtenu en prenant l'ordre total lexicographique de $\mathbb{C}$ provenant de l'ordre sur $\mathbb{R}$, puis en prenant l'ordre partiel naturel sur $\mathbb{C}^p$.

On fixe un $\boldsymbol{\alpha} > (0,...,0)$. Supposons par exemple $\alpha_1 > 0$, on a la suite exacte

$$0 \to s(\mathrm{Cube}(V_{(<\alpha_1, \boldsymbol{\alpha}_{\{1\}^c}+\bullet)}/V_\bullet)) \to s(\mathrm{Cube}(V_{\boldsymbol{\alpha}+\bullet}/V_\bullet)) \to s(\mathrm{Cube}(V_{\boldsymbol{\alpha}+\bullet}/V_{(<\alpha_1, \boldsymbol{\alpha}_{\{1\}^c}+\bullet)})) \to 0. \quad (4.8)$$

Montrons que le complexe de droite est quasi-isomorphe à 0. La proposition 2.2.1 assure que l'endomorphisme $(t_1\partial_1 + \alpha_1 + k_1)$ de $V_{\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{k}-\mathbf{1}_1}/V_{(<(\alpha_1+k_1-1), \boldsymbol{\alpha}_{\{1\}^c}+\boldsymbol{k}_{\{1\}^c})}$ est nilpotent, donc pour $\alpha_1 + k_1 > 0$ le morphisme

$$\partial_1 : V_{\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{k}-\mathbf{1}_1}/V_{(<(\alpha_1+k_1-1), \boldsymbol{\alpha}_{\{1\}^c}+\boldsymbol{k}_{\{1\}^c})} \to V_{\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{k}}/V_{(<(\alpha_1+k_1), \boldsymbol{\alpha}_{\{1\}^c}+\boldsymbol{k}_{\{1\}^c})}$$

est injectif. De même, l'endomorphisme $(\partial_1 t_1 + \alpha_1 + k_1)$ de $V_{\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{k}}/V_{(<(\alpha_1+k_1), \boldsymbol{\alpha}_{\{1\}^c}+\boldsymbol{k}_{\{1\}^c})}$ est nilpotent, donc pour $\alpha_1 + k_1 > 0$ le morphisme précédent est surjectif donc bijectif. Comme pour l'hypercube considéré, les éléments non nuls vérifient $k_1 \geqslant 0$ et comme $\alpha_1 > 0$, $F_1(\mathrm{Cube}(V_{\boldsymbol{\alpha}+\bullet}/V_{(<\alpha_1, \boldsymbol{\alpha}_{\{1\}^c}+\bullet)}))$ est exact (avec $F_1(.)$ le foncteur défini dans la partie A). Le corollaire A.1.4 assure alors que $s(\mathrm{Cube}(V_{\boldsymbol{\alpha}+\bullet}/V_{(<\alpha_1, \boldsymbol{\alpha}_{\{1\}^c}+\bullet)}))$ est quasi-isomorphe à 0. On déduit alors de la suite exacte (4.8) que le complexe $s(\mathrm{Cube}(V_{\boldsymbol{\alpha}+\bullet}/V_\bullet))$ est quasi-isomorphe à 0 si et seulement si $s(\mathrm{Cube}(V_{(<\alpha_1, \boldsymbol{\alpha}_{\{1\}^c}+\bullet)}/V_\bullet))$ l'est. On peut donc se ramener par récurrence au cas où $\alpha_1 = 0$. Le même raisonnement permet de se ramener au cas où tous les α_i sont nuls et dans ce cas le complexe $s(\mathrm{Cube}(V_{\boldsymbol{\alpha}+\bullet}/V_\bullet))$ est clairement nul. L'injection naturelle

$$s(\mathrm{Cube}(V_\bullet)) \hookrightarrow s(\mathrm{Cube}(\mathcal{M}^\bullet))$$

est donc bien un quasi-isomorphisme.

(2) Construisons l'isomorphisme $s(\mathrm{Cube}(V_\bullet)) \xrightarrow{\sim} s(\mathrm{Cube}(\mathrm{gr}_\bullet))$. On a une surjection naturelle

$$s(\mathrm{Cube}(V_\bullet)) \twoheadrightarrow s(\mathrm{Cube}(\mathrm{gr}_\bullet)).$$

Comme précédemment, l'exactitude des foncteurs $s(.)$ et $\mathrm{Cube}(.)$ assure que le noyau de cette surjection est $s(\mathrm{Cube}(V_{<\bullet}))$. On cherche donc à montrer que le complexe $s(\mathrm{Cube}(V_{<\bullet}))$ est quasi-isomorphe à 0. On va montrer ce résultat par récurrence sur la dimension p de D. Considérons la suite exacte de complexes

$$0 \to s(\mathrm{Cube}(V_{<\bullet_{\{1\}},\bullet_{\{1\}^c}})) \to s(\mathrm{Cube}(V_{<\bullet})) \to s(\mathrm{Cube}(V_{<\bullet}/V_{<\bullet_{\{1\}},\bullet_{\{1\}^c}})) \to 0. \tag{4.9}$$

On va montrer dans un premier temps que le complexe $s(\mathrm{Cube}(V_{<\bullet_{\{1\}},\bullet_{\{1\}^c}}))$ est quasi-isomorphe à 0. Pour pouvoir appliquer un raisonnement similaire à la partie (1) de la démonstration, on va montrer que pour tout $(k_2, ..., k_p) \in \{-1, 0\}^{p-1}$ le morphisme

$$\partial_1 : V_{<-1,k_2,...,k_p} \to V_{<0,k_2,...,k_p}$$

est un isomorphisme. Le morphisme de multiplication par t_1, $V_{<0,k_2,...,k_p} \xrightarrow{t_1\cdot} V_{<-1,k_2,...,k_p}$, est un isomorphisme car il admet la multiplication par $\frac{1}{t_1}$ comme réciproque, on est donc ramené à montrer que le morphisme

$$E_1 = t_1\partial_1 : V_{<-1,k_2,...,k_p} \to V_{<-1,k_2,...,k_p}$$

est un isomorphisme. On a vu précédemment (4.7) que

$$V_{<-1,k_2,...,k_p} = \bigoplus_{\substack{-2 \leqslant \alpha_1 < -1 \\ \boldsymbol{k}_{\{1\}^c}-\boldsymbol{1}_{\{1\}^c} < \boldsymbol{\beta}_{\{1\}^c} \leqslant \boldsymbol{k}_{\{1\}^c}}} \mathcal{O}_D \otimes_{\mathbb{C}} C_{\alpha_1,\boldsymbol{\beta}_{\{1\}^c}}$$

où les $C_{\alpha_1,\boldsymbol{\beta}_{\{1\}^c}}$ sont stables par $t_1\partial_1$ et non nuls pour un nombre fini de $(\alpha_1, \boldsymbol{\beta}_{\{1\}^c})$ apparaissant dans la somme directe. Il suffit donc de montrer que, pour tout $\alpha_1 < -1$, le morphisme

$$t_1\partial_1 : \mathcal{O}_D \otimes_{\mathbb{C}} C_{\alpha_1,\boldsymbol{\beta}_{\{1\}^c}} \to \mathcal{O}_D \otimes_{\mathbb{C}} C_{\alpha_1,\boldsymbol{\beta}_{\{1\}^c}}$$

est un isomorphisme. Par définition, on observe que le morphisme $t_1\partial_1 : C_{\alpha_1,\boldsymbol{\beta}_{\{1\}^c}} \to C_{\alpha_1,\boldsymbol{\beta}_{\{1\}^c}}$ s'écrit $-(\alpha_1 + 1)\mathrm{Id} + N$ où N est nilpotent. Soit c un élément du noyau de N, on a la suite exacte

$$0 \to \mathcal{O}_D \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}.c \to \mathcal{O}_D \otimes_{\mathbb{C}} C_{\alpha_1,\boldsymbol{\beta}_{\{1\}^c}} \to \mathcal{O}_D \otimes_{\mathbb{C}} C_{\alpha_1,\boldsymbol{\beta}_{\{1\}^c}}/\mathbb{C}.c \to 0$$

où les morphismes commutent à l'action de $t_1\partial_1$. Comme l'espace vectoriel $C_{\alpha_1,\boldsymbol{\beta}_{\{1\}^c}}$ est de dimension finie, une récurrence sur cette dimension et la suite exacte précédente permettent de se ramener au cas où $C_{\alpha_1,\boldsymbol{\beta}_{\{1\}^c}}$ est de dimension 1 et donc où $t_1\partial_1 = -(\alpha_1 + 1)\mathrm{Id}$. Dans ce cas, on a

$$\begin{array}{cccc} t_1\partial_1 : & \mathcal{O}_D \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}.c & \to & \mathcal{O}_D \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}.c \\ & \varphi \otimes c & \mapsto & (t_1\partial_1\varphi - (\alpha_1 + 1)\varphi) \otimes c. \end{array}$$

La bijectivité se montre alors facilement en développant φ en série convergente. On a donc montré que $F_1(\mathrm{Cube}(V_{<\bullet_{\{1\}},\bullet_{\{1\}^c}}))$ est exact et, par conséquent, le corollaire A.1.4 assure que $s(\mathrm{Cube}(V_{<\bullet_{\{1\}},\bullet_{\{1\}^c}}))$ est quasi-isomorphe à 0.

Montrons alors par récurrence sur la dimension p du polydisque D que le complexe $s(\mathrm{Cube}(V_{<\bullet}))$ est quasi-isomorphe à 0. On déduit de la suite exacte (4.9) et de ce qui précède que le complexe $s(\mathrm{Cube}(V_{<\bullet}))$ est quasi-isomorphe à 0 si et seulement si le complexe $s(\mathrm{Cube}(V_{<\bullet}/V_{<\bullet_{\{1\}},\bullet_{\{1\}^c}}))$ l'est. Si la dimension p du polydisque D est égale à 1, le complexe $s(\mathrm{Cube}(V_{<\bullet}/V_{<\bullet_{\{1\}},\bullet_{\{1\}^c}}))$ est nul et on en déduit le résultat. Supposons $p > 1$ et notons D' la sous-variété de D d'équation $\{t_1 = 0\}$, c'est un polydisque de centre 0 dans $\mathbb{C}^{p-1}$. Soit $(k_1, ..., k_p) \in \{-1, 0\}^p$ et notons

$$\mathcal{M}'_{k_1} := \mathrm{Ker}\left[(E_1 + k_1 + 1)^N : \mathcal{M} \to \mathcal{M}\right]$$

pour N assez grand. Comme $\mathcal{M}'_{k_1}$ est stable par l'action de ∂_i pour tout $2 \leqslant i \leqslant p$, la restriction de $\mathcal{M}'_{k_1}$ à D' a une structure de connexion méromorphe sur D' et la base de $\mathcal{M}$ fournie par le lemme 4.2.2 donne une base de $\mathcal{M}'_{k_1}$ vérifiant les mêmes propriétés. La décomposition (4.7) permet alors de montrer que

$$V_{<(k_1,...,k_2)}(\mathcal{M})/V_{<k_1,(k_2,...,k_p)}(\mathcal{M}) \simeq V^{D'}_{<(k_2,...,k_p)}(\mathcal{M}'_{k_1}).$$

On en déduit que le p-hypercomplexe $\left[\mathrm{Cube}(V_{<\bullet}(\mathcal{M})/V_{<\bullet_{\{1\}},\bullet_{\{1\}^c}}(\mathcal{M}))\right]$ est isomorphe à

$$0 \to \mathrm{Cube}(V^{D'}_{<\bullet}(\mathcal{M}'_{-1})) \to \mathrm{Cube}(V^{D'}_{<\bullet}(\mathcal{M}'_0)) \to 0.$$

L'hypothèse de récurrence assure que les complexes $s(\mathrm{Cube}(V^{D'}_{<\bullet}(\mathcal{M}'_{-1})))$ et $s(\mathrm{Cube}(V^{D'}_{<\bullet}(\mathcal{M}'_0)))$ sont quasi-isomorphes à 0. Donc le complexe obtenu en appliquant le foncteur $F_1(.)$ au complexe double

$$0 \to s(\mathrm{Cube}(V^{D'}_{<\bullet}(\mathcal{M}'_{-1}))) \to s(\mathrm{Cube}(V^{D'}_{<\bullet}(\mathcal{M}'_0))) \to 0$$

est exact et le corollaire A.1.4 assure alors que le complexe simple associé à ce complexe double est quasi-isomorphe à 0. Or, en appliquant la définition du foncteur $s(.)$, on observe que le complexe $s(\mathrm{Cube}(V_{<\bullet}/V_{<\bullet_{\{1\}},\bullet_{\{1\}^c}}))$ est isomorphe au complexe simple associé au complexe double précédent, ce qui montre que $s(\mathrm{Cube}(V_{<\bullet}/V_{<\bullet_{\{1\}},\bullet_{\{1\}^c}}))$ est quasi-isomorphe à 0.

On a donc montré par récurrence sur la dimension p du polydisque D que $s(\mathrm{Cube}(V_{<\bullet}))$ est quasi-isomorphe à 0 et donc que la surjection naturelle

$$s(\mathrm{Cube}(V_\bullet)) \twoheadrightarrow s(\mathrm{Cube}(\mathrm{gr}_\bullet)).$$

est un isomorphisme.

On a donc construit un isomorphisme

$$i^{-1}\mathbf{DR}(\mathcal{M}) \simeq s(\mathrm{Cube}(\mathcal{M}^\bullet))|_{\{0\}} \xleftarrow{\sim} s(\mathrm{Cube}(V_\bullet))|_{\{0\}} \xrightarrow{\sim} s(\mathrm{Cube}(\mathrm{gr}_\bullet))|_{\{0\}} \simeq \mathbf{DR}(i^\dagger\mathcal{M}) = i^\dagger\mathcal{M}.$$

La fonctorialité de la filtration de Kashiwara-Malgrange et des gradués associés à cette filtration implique la fonctorialité de cet isomorphisme.

□

4.2.2 Théorème de comparaison

On démontre le théorème de comparaison pour une connexion méromorphe à singularité régulière le long d'un diviseur à croisement normal.

Avec les notations de la définition 2.5.1, on observe que si $\mathcal{M}$ est à singularité régulière $\mathcal{M}\otimes\mathcal{N}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{k}}$ l'est aussi. On déduit alors de la proposition 4.2.4 un isomorphisme fonctoriel

$$i^{-1}\mathbf{DR}(\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{k}}) \simeq i^\dagger(\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{k}}) \tag{4.10}$$

pour tout $\boldsymbol{\alpha} \in [-1,0[^p$ et $\boldsymbol{k} \in \mathbb{N}^p$. On note

$$\mathcal{N}_{\boldsymbol{\alpha}} := \varinjlim_{\boldsymbol{k}} \mathcal{N}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{k}} \quad \text{et} \quad \mathcal{N} := \bigoplus_{\boldsymbol{\alpha} \in [-1,0[^p} \mathcal{N}_{\boldsymbol{\alpha}}.$$

On déduit alors du théorème 4.1.1 et de l'isomorphisme (4.10) un quasi-isomorphisme de complexes :

$$\bigoplus_{\boldsymbol{\alpha} \in [-1,0[^p} \mathrm{gr}_{\boldsymbol{\alpha}}(\mathcal{M}) \xrightarrow{\sim} i^{-1}\mathbf{DR}(\mathcal{M} \otimes \mathcal{N})$$

où le complexe de droite est concentré en degré 0. On redonne la définition du foncteur cycles proches pour la fonction $f = \mathrm{Id}_{\mathbb{C}^p}$.

Définition 4.2.5. Considérons les morphismes suivants :

$$\{0\} \overset{i}{\hookrightarrow} \mathbb{C}^p \xleftarrow{j} (\mathbb{C}^*)^p \xleftarrow{p} \widetilde{(\mathbb{C}^*)^p}$$

où $\widetilde{(\mathbb{C}^*)^p}$ est le revêtement universel de $(\mathbb{C}^*)^p$ isomorphe à $\mathbb{C}^p$ et l'application p est donnée par

$$\begin{array}{rccc} p: & \widetilde{(\mathbb{C}^*)^p} = \mathbb{C}^p & \to & (\mathbb{C}^*)^p \\ & (z_1, ..., z_p) & \mapsto & (e^{2i\pi z_1}, ..., e^{2i\pi z_p}). \end{array}$$

On définit Ψ le *foncteur cycles proches* de la catégorie des faisceaux d'espaces vectoriels complexes sur $\mathbb{C}^p$ dans la catégorie des espaces vectoriels complexes :

$$\Psi\mathcal{F} := i^{-1}\mathbf{R}j_*p_*p^{-1}j^{-1}\mathcal{F}.$$

On notera $\widetilde{\mathcal{O}}_{(\mathbb{C}^*)^p} := p_*p^{-1}\mathcal{O}_{(\mathbb{C}^*)^p}$ le faisceau des *fonctions holomorphes mutiformes* sur $(\mathbb{C}^*)^p$.

On notera encore Ψ la restriction du foncteur cycles proches au polydisque D et $D^* := D - \{t_1...t_p = 0\}$ avec $D^* \subset (\mathbb{C}^*)^p$.

Proposition 4.2.6. *Pour tout $\mathscr{D}_D$-module $\mathcal{M}$, on a un morphisme naturel*

$$i^{-1}\mathbf{DR}(\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}) \longrightarrow \Psi\mathbf{DR}(\mathcal{M}).$$

Si $\mathcal{M}$ est une connexion méromorphe à singularité régulière, ce morphisme est un isomorphisme.

Démonstration. On commence par construire le morphisme naturel de la même manière que dans la partie 3.

– De l'inclusion $\mathcal{N} \subset j_*\widetilde{\mathcal{O}}_{D^*}$, on déduit par fonctorialité le morphisme :

$$\mathbf{DR}(\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}) \longrightarrow \mathbf{DR}(\mathcal{M} \otimes j_*\widetilde{\mathcal{O}}_{D^*}).$$

– Par adjonction, on a le morphisme :

$$\begin{aligned} \mathbf{DR}(\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_D} j_*\widetilde{\mathcal{O}}_{D^*}) \longrightarrow \mathbf{R}j_*j^{-1}\mathbf{DR}(\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_D} j_*\widetilde{\mathcal{O}}_{D^*}) &= \mathbf{R}j_*\mathbf{DR}(j^{-1}\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_{D^*}} j^{-1}j_*\widetilde{\mathcal{O}}_{D^*}) \\ &= \mathbf{R}j_*\mathbf{DR}(j^{-1}\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_{D^*}} p_*p^{-1}\mathcal{O}_{D^*}) \end{aligned}$$

où la dernière égalité vient du fait que le foncteur $j^{-1}j_*$ est égal à l'identité.

– On peut alors appliquer le morphisme (1.4) en utilisant le fait que le foncteur p_* est exact, car p est à fibres discrètes. On obtient par fonctorialité :

$$\begin{array}{rcl}\mathbf{R}j_*\mathbf{DR}(j^{-1}\mathcal{M}\otimes_{\mathcal{O}_{D^*}} p_*p^{-1}\mathcal{O}_{D^*}) & \longrightarrow & \mathbf{R}j_*\mathbf{DR}(p_*(p^{-1}j^{-1}\mathcal{M}\otimes_{p^{-1}\mathcal{O}_{D^*}} p^{-1}\mathcal{O}_{D^*})) \\ & = & \mathbf{R}j_*\mathbf{DR}(p_*p^{-1}(j^{-1}\mathcal{M}\otimes_{\mathcal{O}_{D^*}} \mathcal{O}_{D^*})) \\ & = & \mathbf{R}j_*\mathbf{DR}(p_*p^{-1}j^{-1}\mathcal{M})\end{array} .$$

– En appliquant à nouveau le morphisme (1.4), on trouve, pour tout $0 \leqslant k \leqslant p$, un morphisme naturel $\Omega^k \otimes p_*p^{-1}\mathcal{M} \longrightarrow p_*p^{-1}(\Omega^k \otimes j^{-1}\mathcal{M})$ où Ω^k est le faisceau des k-formes holomorphes sur D^*. On montre que ce morphisme est un isomorphisme en considérant sa restriction aux fibres et en utilisant le fait que Ω^k est un $\mathcal{O}_{D^*}$-module de type fini. On a donc l'égalité

$$\mathbf{R}j_*\mathbf{DR}(p_*p^{-1}j^{-1}\mathcal{M}) = \mathbf{R}j_*p_*p^{-1}\mathbf{DR}(j^{-1}\mathcal{M}) = \mathbf{R}j_*p_*p^{-1}j^{-1}\mathbf{DR}(\mathcal{M}).$$

En composant les quatre morphismes précédents et en appliquant le foncteur i^{-1}, on obtient bien un morphisme

$$i^{-1}\mathbf{DR}(\mathcal{M}\otimes\mathcal{N}) \longrightarrow \Psi\mathbf{DR}(\mathcal{M}). \tag{4.11}$$

On suppose maintenant que $\mathcal{M}$ est une connexion méromorphe à singularité régulière. Comme les singularités de $\mathcal{M}$ sont sur le diviseur $\{t_1...t_p = 0\}$, la théorie classique des équations différentielles assure que $\mathbf{DR}(j^{-1}\mathcal{M})$ n'a de cohomologie qu'en degré 0, et que celle-ci est un faisceau localement constant de rang fini. Donc $p^{-1}\mathbf{DR}(j^{-1}\mathcal{M})$ est un faisceau constant de rang fini, car le revêtement universel de $(\mathbb{C}^*)^p$ est simplement connexe. L'image réciproque par $j\circ p$ de tout polydisque voisinage de $\{0\}$ dans D est simplement connexe, donc pour tout $k > 0$, le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $i^{-1}R^k(j \circ p)p^{-1}\mathbf{DR}(j^{-1}\mathcal{M})$ est nul et $i^{-1}R^0(j\circ p)p^{-1}\mathbf{DR}(j^{-1}\mathcal{M})$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie. Le morphisme p est à fibres discrètes, donc le foncteur p_* est exact et on a l'égalité $\mathbf{R}j_*p_* = \mathbf{R}(j\circ p)_*$. On en déduit que le complexe $\Psi\mathbf{DR}(\mathcal{M})$ n'a de cohomologie qu'en degré 0 et que celle-ci est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie. On a déjà vu que le complexe $\mathbf{DR}(\mathcal{M}\otimes\mathcal{N})$ n'a de cohomologie qu'en degré 0. Pour montrer que le morphisme (4.11) est un isomorphisme, il suffit alors de montrer qu'il induit un isomorphisme des $\mathscr{H}^0$.

On considère alors une $\mathcal{O}_D(*Y)$-base de $\mathcal{M}$ fournie par le lemme 4.2.2, dans laquelle la connexion s'écrit

$$\sum_{i=1}^{p} R_i \frac{dt_i}{t_i}$$

où les R_i sont des matrices constantes commutant deux à deux. Si les R_i sont toutes des matrices scalaires, alors un élément de la base considérée engendre une connexion méromorphe de rang 1 incluse dans $\mathcal{M}$. Si, par exemple, R_1 n'est pas scalaire, on peut considérer l'un de ses sous-espaces propres non nuls, il est stable par les R_i pour $i > 1$, il engendre donc une connexion méromorphe incluse dans $\mathcal{M}$ de rang strictement inférieur à celui de $\mathcal{M}$. On peut ainsi trouver, par induction sur le rang de $\mathcal{M}$, une connexion méromorphe de rang 1 incluse dans $\mathcal{M}$ que l'on note $\mathcal{M}_1$. On considère alors la suite exacte :

$$0 \to \mathcal{M}_1 \to \mathcal{M} \to \mathcal{M}/\mathcal{M}_1 \to 0.$$

Par fonctorialité, et étant donné que le $\mathscr{H}^1$ des complexes considérés est nul, on a le morphisme de suites exactes suivant :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathscr{H}^0 i^{-1}\mathbf{DR}(\mathcal{M}_1\otimes\mathcal{N}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathscr{H}^0 i^{-1}\mathbf{DR}(\mathcal{M}\otimes\mathcal{N}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathscr{H}^0 i^{-1}\mathbf{DR}(\mathcal{M}/\mathcal{M}_1\otimes\mathcal{N}) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathscr{H}^0\Psi\mathbf{DR}(\mathcal{M}_1) \arrow[r] & \mathscr{H}^0\Psi\mathbf{DR}(\mathcal{M}) \arrow[r] & \mathscr{H}^0\Psi\mathbf{DR}(\mathcal{M}/\mathcal{M}_1) \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

Il suffit donc de montrer le résultat pour $\mathcal{M}$ de rang 1, une récurrence permettant alors de conclure. Dans ce cas, il existe un vecteur m engendrant $\mathcal{M}$ sur $\mathcal{O}_D(*Y)$ et des nombres complexes $(\alpha_1, ..., \alpha_p)$ dont la partie réelle est dans l'intervalle $[-1, 0[$, tels que pour tout $1 \leqslant i \leqslant p$, on ait $t_i\partial_i m = -(\alpha_i + 1)m$.

Comme précédemment, on remarque que l'image réciproque de tout polydisque D_0 voisinage de $\{0\}$ par $j \circ p$ est le produit de p demi-plans dans $\mathbb{C}^p$ et donc $H^k((j \circ p)^{-1}D_0, \mathcal{O}_{\widetilde{D^*}}) = 0$ pour $k > 0$. On en déduit l'égalité

$$\Psi\mathcal{O}_D = i^{-1}\mathbf{R}(j \circ p)_* p^{-1}\mathcal{O}_{D^*} = i^{-1}j_* p_* p^{-1}\mathcal{O}_{D^*}.$$

D'autre part, étant donné que $\mathcal{M}_{|D^*} \simeq \mathcal{O}_{D^*}$ comme $\mathcal{O}_{D^*}$-module, le complexe $\mathbf{DR}(\mathcal{M}_{|D^*})$ est composé de $\mathcal{O}_{D^*}$-modules libres où l'isomorphisme envoie la section $m \in M_{|D^*}$ sur $1 \in \mathcal{O}_{D^*}$. On déduit de ceci que

$$\mathscr{H}^0\Psi\mathbf{DR}(\mathcal{M}) \simeq \bigcap_{1 \leqslant i \leqslant p} \operatorname{Ker}\left[\partial_i - \frac{\alpha_i + 1}{t_i} : \Psi\mathcal{O}_D \longrightarrow \Psi\mathcal{O}_D\right].$$

Comme la multiplication par t_i sur $\Psi\mathcal{O}_D$ est bijective, $\mathscr{H}^0\Psi\mathbf{DR}(\mathcal{M})$ est formé des germes en 0 de fonctions holomorphes multiformes φ sur D^* solutions de

$$[t_i\partial_i - (\alpha_i + 1)]\,\varphi = 0 \tag{4.12}$$

pour tout $1 \leqslant i \leqslant p$. Si l'on note $\varphi_{\boldsymbol{\alpha}} := \boldsymbol{t}^{-(\boldsymbol{\alpha}+\mathbf{1})}\varphi$, on voit que la fonction holomorphe multiforme $\varphi_{\boldsymbol{\alpha}}$ doit être solution de

$$t_i\partial_i\varphi_{\boldsymbol{\alpha}} = 0$$

pour tout $1 \leqslant i \leqslant p$. On effectue alors le changement de variable $t_i = e^{2i\pi z_i}$ où les z_i sont les coordonnées du revêtement universel $\widetilde{D}^*$ de D^*. On cherche alors les fonctions holomorphes sur $\widetilde{D}^*$ solutions de :

$$\frac{\partial\varphi_{\boldsymbol{\alpha}}}{\partial_{z_i}} = 0$$

pour tout $1 \leqslant i \leqslant p$. Comme D^* est connexe, ce sont les fonctions constantes. Les solutions de (4.12) sont donc de la forme $c\boldsymbol{t}^{\boldsymbol{\alpha}+\mathbf{1}}$ où c est une constante.

De manière analogue, on observe que comme $\mathcal{M}_{|D^*} \simeq \mathcal{O}_{D^*}$,

$$\mathscr{H}^0 i^{-1}\mathbf{DR}(\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}) \simeq \bigcap_{1 \leqslant i \leqslant p} \operatorname{Ker}\left[t_i\partial_i - (\alpha_i + 1) : \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{N}\right].$$

Comme, pour tout $c \in \mathbb{C}$, la fonction holomorphe multiforme $c\boldsymbol{t}^{\boldsymbol{\alpha}+\mathbf{1}} \in \mathcal{N}$, on a bien

$$i^{-1}\mathbf{DR}(\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}) \simeq \Psi\mathbf{DR}(\mathcal{M}).$$

Ceci conclut la démonstration de la proposition.

□

Conclusion 4.2.7. Finalement, on a montré en combinant le théorème 4.1.1, la proposition 4.2.4 et la proposition 4.2.6 que si $\mathcal{M}$ est une connexion méromorphe à singularité régulière sur le polydisque de centre 0, $D \in \mathbb{C}^p$, alors on a un isomorphisme fonctoriel naturel

$$\bigoplus_{\boldsymbol{\alpha} \in [-1,0[^p} \operatorname{gr}_{\boldsymbol{\alpha}}(\mathcal{M}) \xrightarrow{\sim} \Psi\mathbf{DR}(\mathcal{M}).$$

4.3 Le théorème de comparaison : cas général

Soit $D \subset \mathbb{C}^p$ un polydisque et $f : X \to D$ un morphisme d'espaces analytiques complexes réduits. Dans ce chapitre, on démontre le théorème de comparaison :

Théorème 4.3.1. *Soit $\mathcal{M}$ un $\mathscr{D}_X$-module holonome régulier. On suppose, de plus, que le couple $(f, \mathrm{car}(\mathcal{M}))$ est sans pente. On note $\mathcal{M}'$ l'image directe de $\mathcal{M}$ par le graphe de f et $p : X \times D \to D$ la projection. Alors, les complexes*

$$\Psi_p \mathbf{DR}_{X\times D}(\mathcal{M}') \quad \textit{et} \quad \mathbf{DR}_{X_0} \bigoplus_{\boldsymbol{\alpha}\in[-1,0[^p} \mathrm{gr}_{\boldsymbol{\alpha}}(\mathcal{M}')$$

sont naturellement isomorphes avec $X_0 := X \times \{0\}$.

Le théorème 4.1.1 fournit par fonctorialité un isomorphisme naturel

$$\mathbf{DR}_{X_0} \bigoplus_{\boldsymbol{\alpha}\in[-1,0[^p} \mathrm{gr}_{\boldsymbol{\alpha}}(\mathcal{M}') \simeq \mathbf{DR}_{X_0} \bigoplus_{\boldsymbol{\alpha}\in[-1,0[^p} i^\dagger \mathcal{M}'_{\boldsymbol{\alpha}}. \tag{4.13}$$

On va montrer que sous les hypothèses du théorème 4.3.1, les autres morphismes apparaissant dans (3.7) sont des isomorphismes, ce qui conclura la démonstration de ce théorème. C'est un problème local, on va se ramener au cas d'une connexion méromorphe sur le polydisque D et de la fonction Id_D, en étudiant les images directes locales des différents modules en jeu.

4.3.1 Images directes locales

Pour simplifier, on considérera dans cette section des $\mathscr{D}$-modules à *droite*. Soit $\mathcal{M}$ un $\mathscr{D}_X$-module holonome régulier vérifiant $\mathcal{M} = \mathcal{M}\left[\frac{1}{f_1 \cdots f_p}\right]$. Considérons le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i_f"] \arrow[dr, "f"'] & X \times D \arrow[d, "p"] \\ & D \end{tikzcd}$$

où le morphisme $i_f : (x_1, ..., x_n) \mapsto (x_1, ..., x_n, f_1(\boldsymbol{x}), ..., f_p(\boldsymbol{x}))$ est le graphe de f et p la projection. On suppose de plus que le couple $(f, \mathrm{car}(\mathcal{M}))$ est sans pente.

On étudiera le $\mathscr{D}_{X\times D/D}$-module $i_{f+}\mathcal{M}$, image directe au sens des $\mathscr{D}$-modules de $\mathcal{M}$ par i_f, que l'on notera $\mathcal{M}' := i_{f+}\mathcal{M}$. On a $\mathrm{car}(\mathcal{M}') = i_{f\pi}({}^t i'_f)^{-1}\mathrm{car}(\mathcal{M})$ où l'on considère le diagramme entre espaces cotangents associé à i_f :

$$T^* \xleftarrow{{}^t i'_f} X \times_{X\times D} T^*(X \times D) \xrightarrow{i_{f\pi}} X \times D\,.$$

Si l'on note $(t_1, ..., t_p)$ les coordonnées du polydisque D, la proposition 2.3.4 assure que le couple $((t_1, ..., t_p), \mathrm{car}(\mathcal{M}'))$ est sans pente.

On veut montrer que, sous ces hypothèses, l'image directe (dans la catégorie dérivée des $\mathscr{D}_{X\times D/D}$-modules) $p_{\epsilon *} V_{\boldsymbol{\alpha}}\mathcal{M}'$ est un complexe à cohomologie $\mathcal{O}_D$-cohérente où p_ϵ est la restriction de p à $B_\epsilon \times D$ pour ϵ assez petit. On appliquera le théorème 1.2.20 à $V_{\boldsymbol{\alpha}}\mathcal{M}'$ et au faisceau constant en considérant le morphisme $p : X \times D \to D$ et la fonction analytique réelle

$$\begin{array}{cccc} \varphi : & X \times D & \to & \mathbb{R} \\ & (x,t) & \mapsto & \sum_i |x_i|^2 \end{array}.$$

Pour appliquer le corollaire dans ce cas-là, il faut montrer que le $V_{\mathbf{0}}\mathscr{D}_{X\times D}$-module cohérent $V_{\boldsymbol{\alpha}}\mathcal{M}'$ est $\mathscr{D}_{X\times D/D}$-cohérent et il faut contrôler l'intersection

$$\Lambda_\varphi \cap \pi^{-1}\mathrm{car}_{\mathscr{D}_{X\times D/D}}(V_{\boldsymbol{\alpha}}\mathcal{M}')$$

où $\pi : T^*(X\times D) \to T^*(X\times D/D)$ est la projection et $\Lambda_\varphi = \{(x,t,d\varphi(x,t)) : (x,t)\in X\times D\}$.

Soit m une section de $\mathcal{M}$ qui engendre $\mathcal{M}$. Le $\mathscr{D}_{X\times D}$-module (à droite) $\mathcal{M}'$ est engendré par un élément que l'on notera $m\otimes\delta(\boldsymbol{t}-\boldsymbol{f})$ et qui vérifie, pour tout $1\leqslant i\leqslant n$ et tout $1\leqslant j\leqslant p$,

- $m\otimes\delta(\boldsymbol{t}-\boldsymbol{f})x_i = mx_i\otimes\delta(\boldsymbol{t}-\boldsymbol{f})$,
- $m\otimes\delta(\boldsymbol{t}-\boldsymbol{f})t_j = mf_j\otimes\delta(\boldsymbol{t}-\boldsymbol{f})$,
- $m\otimes\delta(\boldsymbol{t}-\boldsymbol{f})\partial_{x_i} = m\partial_{x_i}\otimes\delta(\boldsymbol{t}-\boldsymbol{f}) - \sum_{1\leqslant j\leqslant p} m\dfrac{\partial f_j}{\partial x_i}\otimes\delta(\boldsymbol{t}-\boldsymbol{f})\partial_{t_j}$.

Définition 4.3.2. On note $\mathcal{M}[\boldsymbol{s}]\boldsymbol{f}^{\boldsymbol{s}}$ le $\mathcal{O}_X[\boldsymbol{s}]$-module isomorphe à $\mathcal{M}[\boldsymbol{s}]$ et on le munit d'une structure de $\mathscr{D}_X[\boldsymbol{s}]$-module à droite de la manière suivante, pour toute section m de $\mathcal{M}[\boldsymbol{s}]$ et pour tout $1\leqslant i\leqslant n$:

$$(m\boldsymbol{f}^{\boldsymbol{s}})\partial_{x_i} := m\boldsymbol{f}^{\boldsymbol{s}}\partial_{x_i} + \sum_{1\leqslant j\leqslant p} m\boldsymbol{f}^{\boldsymbol{s}}\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\frac{s_j}{f_j}.$$

Soit m une section qui engendre $\mathcal{M}$, on peut munir le $\mathscr{D}_X[\boldsymbol{s}]$-module engendré par $m\boldsymbol{f}^{\boldsymbol{s}}$ d'une structure de $V_{\mathbf{0}}\mathscr{D}_{X\times D}$-module en fixant les relations suivantes :

$(m\boldsymbol{f}^{\boldsymbol{s}})t_j\partial_{t_j} := -m\boldsymbol{f}^{\boldsymbol{s}}s_j$,
$(m\boldsymbol{f}^{\boldsymbol{s}})t_j := m\boldsymbol{f}^{\boldsymbol{s}}f_j$,

et les relations de commutation

$t_js_i = s_it_j$ si $i\neq j$,
$t_js_j = s_jt_j + t_j$.

Les $V_{\mathbf{0}}\mathscr{D}_{X\times D}$-modules $m\otimes\delta(\boldsymbol{t}-\boldsymbol{f})V_{\mathbf{0}}\mathscr{D}_{X\times D}$ et $m\boldsymbol{f}^{\boldsymbol{s}}\mathscr{D}_X[\boldsymbol{s}]$ sont respectivement engendrés par les sections $m\otimes\delta(\boldsymbol{t}-\boldsymbol{f})$ et $m\boldsymbol{f}^{\boldsymbol{s}}$. De plus, si $P\in V_{\mathbf{0}}\mathscr{D}_{X\times D}$, on peut montrer par récurrence sur le degré de P en les ∂_{x_i} que si

$$(m\otimes\delta(\boldsymbol{t}-\boldsymbol{f}))P = \sum_{\boldsymbol{k}} m_{\boldsymbol{k}}\otimes\delta(\boldsymbol{t}-\boldsymbol{f})\partial_{\boldsymbol{t}}^{\boldsymbol{k}},$$

où les $m_{\boldsymbol{k}}$ sont des sections de $\mathcal{M}$, alors

$$m\boldsymbol{f}^{\boldsymbol{s}}P = \sum_{\boldsymbol{k}} \boldsymbol{f}^{\boldsymbol{s}}m_{\boldsymbol{k}}\frac{(-1)^{|\boldsymbol{k}|}\boldsymbol{s}^{\boldsymbol{k}}}{\boldsymbol{f}^{\boldsymbol{k}}}.$$

On en déduit que

$$(m\otimes\delta(\boldsymbol{t}-\boldsymbol{f}))P = 0 \iff m\boldsymbol{f}^{\boldsymbol{s}}P = 0.$$

Les $V_{\mathbf{0}}\mathscr{D}_{X\times D}$-modules $m\otimes\delta(\boldsymbol{t}-\boldsymbol{f})V_{\mathbf{0}}\mathscr{D}_{X\times D}$ et $m\boldsymbol{f}^{\boldsymbol{s}}\mathscr{D}_X[\boldsymbol{s}]$ sont donc isomorphes.

On utilisera dans la suite un résultat que l'on énonce sans démonstration. Soit Y une variété complexe, $m\in\mathbb{N}$ et $\pi : Y\times\mathbb{P}^m\to Y$ la projection. On note $\mathcal{O}_{Y\times\mathbb{P}^m}(\star H_\infty)$ le faisceau des sections méromorphes de $Y\times\mathbb{P}^m$ à pôles le long de $Y\times H_\infty$ où H_∞ est l'hyperplan à l'infini de $\mathbb{P}^m$. On remarque que $\pi_*\mathcal{O}_{Y\times\mathbb{P}^m}(\star H_\infty)\simeq\mathcal{O}_Y[t_1,\dots,t_m]$. On introduit les deux foncteurs suivants :

$$\begin{array}{rrcl} \pi_* : & \mathrm{Mod}(\mathcal{O}_{Y\times\mathbb{P}^m}(\star H_\infty)) & \to & \mathrm{Mod}(\mathcal{O}_Y[t_1,\dots,t_m]) \\[2ex] \pi^*_{H_\infty} : & \mathrm{Mod}(\mathcal{O}_Y[t_1,\dots,t_m]) & \to & \mathrm{Mod}(\mathcal{O}_{Y\times\mathbb{P}^m}(\star H_\infty)) \\[2ex] & F & \mapsto & \pi^{-1}F\otimes_{\pi^{-1}\mathcal{O}_Y[t_1,\dots,t_m]}\mathcal{O}_{Y\times\mathbb{P}^m}(\star H_\infty). \end{array}$$

Définition 4.3.3. Soit $\mathcal{F}$ un faisceau de $\mathcal{O}_{Y\times\mathbb{P}^m}(\star H_\infty)$-modules. On dira que $\mathcal{F}$ est π-*good* si tout point $y \in Y$ admet un voisinage V_y, tel qu'il existe un $\mathcal{O}_{V_y\times\mathbb{P}^m}$-module cohérent $\mathcal{G}$ inclus dans $\mathcal{F}_{|V_y\times\mathbb{P}^m}$ vérifiant

$$\mathcal{F}_{|V_y\times\mathbb{P}^m} = \mathcal{G}\otimes_{\mathcal{O}_{V_y\times\mathbb{P}^m}}\mathcal{O}_{Y\times\mathbb{P}^m}(\star H_\infty).$$

On notera $\mathrm{Mod}_{\pi\text{-good}}(\mathcal{O}_{Y\times\mathbb{P}^m}(\star H_\infty))$ la catégorie des $\mathcal{O}_{Y\times\mathbb{P}^m}(\star H_\infty)$-modules π-good. On notera également $\mathrm{Mod}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{O}_Y[t_1,...,t_m])$ la catégorie des $\mathcal{O}_Y[t_1,...,t_m]$-modules cohérents.

Théorème 4.3.4. *On a les résultats suivants :*
- *Si* $\mathcal{F}\in\mathrm{Mod}_{\pi\text{-}good}(\mathcal{O}_{Y\times\mathbb{P}^m}(\star H_\infty))$, *alors* $\pi_*\mathcal{F}$ *est un* $\mathcal{O}_Y[t_1,...,t_m]$*-module cohérent.*
- *Si* $\mathcal{F}\in\mathrm{Mod}_{coh}(\mathcal{O}_Y[t_1,...,t_m])$, *alors* $\pi^*_{H_\infty}\mathcal{F}$ *est un* $\mathcal{O}_{Y\times\mathbb{P}^m}(\star H_\infty)$*-module* π*-good.*
- *Si l'on restreint les foncteurs* π_* *et* $\pi^*_{H_\infty}$ *aux catégories* $\mathrm{Mod}_{\pi\text{-}good}(\mathcal{O}_{Y\times\mathbb{P}^m}(\star H_\infty))$ *et* $\mathrm{Mod}_{coh}(\mathcal{O}_Y[t_1,...,t_m])$, *alors ils sont quasi-inverses l'un de l'autre.*

Résultat de cohérence On montre ici que les $V_{\mathbf{0}}\mathscr{D}_{X\times D}$-modules cohérents $(m\otimes\delta(\boldsymbol{t}-\boldsymbol{f}))V_{\mathbf{0}}\mathscr{D}_{X\times D}$, $(m\otimes\delta(\boldsymbol{t}-\boldsymbol{f}))V_{\boldsymbol{k}}\mathscr{D}_{X\times D}$ et $V_{\boldsymbol{\alpha}}\mathcal{M}'$ sont $\mathscr{D}_{X\times D/D}$-cohérents pour tout $\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^p$ et tout $\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{C}^p$.

Lemme 4.3.5. *Le module* $m\boldsymbol{f}^{\boldsymbol{s}}\mathscr{D}_X[\boldsymbol{s}]$ *est* $\mathscr{D}_{X\times D/D}$*-cohérent.*

Démonstration. Le module $m\boldsymbol{f}^{\boldsymbol{s}}\mathscr{D}_X[\boldsymbol{s}]$ est cohérent sur $\mathscr{D}_X[\boldsymbol{s}]$ et donc aussi sur $\mathscr{D}_{X\times D/D}[\boldsymbol{s}]$. On filtre ces anneaux en donnant le poids 1 aux s_j. Le $\mathscr{D}$-module $\mathcal{M}$ est holonome, donc $\mathrm{car}(\mathcal{M}) = \bigcup_{\ell\in L} T^*_{Y_\ell}X$ où les Y_ℓ sont les projections sur X des composantes irréductibles de $\mathrm{car}(\mathcal{M})$. D'après l'hypothèse de régularité et la proposition 2.5.7, la variété caractéristique de $m\boldsymbol{f}^{\boldsymbol{s}}\mathscr{D}_X[\boldsymbol{s}]$ comme $\mathscr{D}_X[\boldsymbol{s}]$-module est

$$\mathrm{car}_{\mathscr{D}_X[\boldsymbol{s}]}m\boldsymbol{f}^{\boldsymbol{s}}\mathscr{D}_X[\boldsymbol{s}] = \bigcup_{F_{|Y_\ell}\neq 0} W^{\#}_{\boldsymbol{f},Y_\ell}$$

où $F = f_1...f_p$. On va calculer la variété caractéristique de $m\boldsymbol{f}^{\boldsymbol{s}}\mathscr{D}_X[\boldsymbol{s}]$ comme $\mathscr{D}_{X\times D/D}[\boldsymbol{s}]$-module.

On considère la bonne filtration suivante :

$$F_k(m\boldsymbol{f}^{\boldsymbol{s}}\mathscr{D}_X[\boldsymbol{s}]) := m\boldsymbol{f}^{\boldsymbol{s}}F_k(\mathscr{D}_X[\boldsymbol{s}]) \simeq m\boldsymbol{f}^{\boldsymbol{s}}F_k(\mathscr{D}_{X\times D/D}[\boldsymbol{s}])$$

qui coïncide quand on regarde $m\boldsymbol{f}^{\boldsymbol{s}}\mathscr{D}_X[\boldsymbol{s}]$ comme un module sur $\mathscr{D}_X[\boldsymbol{s}]$ ou $\mathscr{D}_{X\times D/D}[\boldsymbol{s}]$. Notons $\{P_\ell(x,\xi,s)\}_\ell$, une famille de générateurs locaux de l'idéal

$$\mathrm{Ann}_{\mathrm{gr}\mathscr{D}_X[s]}(\mathrm{gr}(m\boldsymbol{f}^{\boldsymbol{s}}\mathscr{D}_X[\boldsymbol{s}])).$$

Il est clair que les $\{P_l(x,\xi,s)\}_l$ appartiennent à l'idéal

$$\mathrm{Ann}_{\mathrm{gr}\mathscr{D}_{X\times D/D}[s]}(\mathrm{gr}(m\boldsymbol{f}^{\boldsymbol{s}}\mathscr{D}_X[\boldsymbol{s}])).$$

Soit $1\leqslant j\leqslant p$, on va montrer que le polynôme $(t_j - f_j)$ est dans $\mathrm{Ann}_{\mathrm{gr}\mathscr{D}_{X\times D/D}[s]}(\mathrm{gr}(m\boldsymbol{f}^{\boldsymbol{s}}\mathscr{D}_X[\boldsymbol{s}]))$. Soit $Q(x,\xi,t,s)\in F_k(\mathscr{D}_{X\times D/D}[\boldsymbol{s}])$, on peut écrire :

$$Q(x,\partial_x,t,s) = \sum_{\boldsymbol{\ell}} Q_{\boldsymbol{\ell}}(x,\partial_x,t)\boldsymbol{s}^{\boldsymbol{\ell}}.$$

Alors

$$m\boldsymbol{f}^{\boldsymbol{s}}Q(x,\partial_x,t,s)(t_j-f_j) = \sum_{\boldsymbol{\ell}} m\boldsymbol{f}^{\boldsymbol{s}}Q_{\boldsymbol{\ell}}(x,\partial_x,t)(t_j-f_j)\boldsymbol{s}^{\boldsymbol{\ell}} + \sum_{\boldsymbol{\ell}} m\boldsymbol{f}^{\boldsymbol{s}}Q_{\boldsymbol{\ell}}(x,\partial_x,t)[\boldsymbol{s}^{\boldsymbol{\ell}},(t_j-f_j)].$$

Or, $m\boldsymbol{f}^{\boldsymbol{s}}Q_{\boldsymbol{\ell}}(x,\partial_x,t)(t_j-f_j)=0$ et $[\boldsymbol{s}^{\boldsymbol{\ell}},(t_j-f_j)]\in F_{|\boldsymbol{\ell}|-1}(\mathscr{D}_{X\times D/D}[\boldsymbol{s}])$. On en déduit que

$$m\boldsymbol{f}^{\boldsymbol{s}}Q(x,\partial_x,t,s)(t_j-f_j)\in F_{k-1}(m\boldsymbol{f}^{\boldsymbol{s}}\mathscr{D}_X[\boldsymbol{s}])$$

et donc que $(t_j-f_j)\in \mathrm{Ann}_{\mathrm{gr}\mathscr{D}_{X\times D/D}[s]}(\mathrm{gr}(m\boldsymbol{f}^{\boldsymbol{s}}\mathscr{D}_X[\boldsymbol{s}]))$.

Réciproquement, soit $P(x,\xi,s,t)\in \mathrm{Ann}_{\mathrm{gr}\mathscr{D}_{X\times D/D}[s]}(\mathrm{gr}(m\boldsymbol{f}^{\boldsymbol{s}}\mathscr{D}_X[\boldsymbol{s}]))$. On peut écrire

$$\begin{aligned} P(x,\xi,s,t) &= \sum_{\boldsymbol{m}} Q_{\boldsymbol{m}}(x,\xi,s)\boldsymbol{t}^{\boldsymbol{m}} \\ &= \sum_{\boldsymbol{m}} Q_{\boldsymbol{m}}(x,\xi,s)(\boldsymbol{t}-\boldsymbol{f}+\boldsymbol{f})^{\boldsymbol{m}}. \end{aligned}$$

En développant $(\boldsymbol{t}-\boldsymbol{f}+\boldsymbol{f})^{\boldsymbol{m}}$, on remarque que

$$P(x,\xi,s,t)=P(x,\xi,s,f)+Q(x,\xi,s,t)$$

où Q appartient à l'idéal engendré par les $\{(t_j-f_j)\}_{1\leqslant j\leqslant p}$. Étant donné que

$$P(x,\xi,s,t)\in \mathrm{Ann}_{\mathrm{gr}\mathscr{D}_{X\times D/D}[s]}(\mathrm{gr}(m\boldsymbol{f}^{\boldsymbol{s}}\mathscr{D}_X[\boldsymbol{s}])),$$

on montre, en étudiant comme précédemment la commutativité de $P(x,\partial_x,s,t)$ et de $s^{\boldsymbol{\ell}}$, que le polynôme $P(x,\xi,s,f)\in \mathrm{Ann}_{\mathrm{gr}\mathscr{D}_X[s]}(\mathrm{gr}(m\boldsymbol{f}^{\boldsymbol{s}}\mathscr{D}_X[\boldsymbol{s}]))$ qui est engendré par la famille $\{P_\ell(x,\xi,s)\}_\ell$. Le polynôme $P(x,\xi,s,t)$ est donc dans l'idéal engendré par les polynômes $\{P_\ell(x,\xi,s)\}_\ell$ et $\{(t_j-f_j)\}_{1\leqslant j\leqslant p}$.

On en déduit que l'idéal $\mathrm{Ann}_{\mathrm{gr}\mathscr{D}_{X\times D/D}[s]}(\mathrm{gr}(m\boldsymbol{f}^{\boldsymbol{s}}\mathscr{D}_X[\boldsymbol{s}]))$ est engendré par les polynômes $\{P_\ell(x,\xi,s)\}_\ell$ et $\{(t_j-f_j)\}_{1\leqslant j\leqslant p}$, et donc que $\mathrm{car}_{\mathscr{D}_{X\times D/D}[\boldsymbol{s}]}m\boldsymbol{f}^{\boldsymbol{s}}\mathscr{D}_X[\boldsymbol{s}]$ est égale à l'image de $\bigcup_{F_{|Y_\ell}\neq 0} W^{\#}_{\boldsymbol{f},Y_\ell}$ par le morphisme

$$\begin{array}{llll} i_f: & T^*X\times\mathbb{C}^p & \to & T^*X\times\mathbb{C}^p\times D \\ & (x,\xi,s) & \mapsto & (x,\xi,s,f_1(x),...,f_p(x)). \end{array}$$

On considère alors le morphisme

$$\begin{array}{llll} \pi: & T^*X\times\mathbb{C}^p\times D & \to & T^*X\times D=T^*(X\times D/D) \\ & (x,\xi,s,t) & \mapsto & (x,\xi,t). \end{array}$$

Comme le couple $(\boldsymbol{f},\mathrm{car}(\mathcal{M}))$ est sans pente, la proposition 2.3.3 assure que la restriction de π à $\mathrm{car}_{\mathscr{D}_{X\times D/D}[\boldsymbol{s}]}m\boldsymbol{f}^{\boldsymbol{s}}\mathscr{D}_X[\boldsymbol{s}]$ est un morphisme fini et propre. On va déduire de ce résultat, en utilisant le théorème 4.3.4, que le $\mathrm{gr}\mathscr{D}_{X\times D/D}[s]$-module cohérent $\mathrm{gr}_{\mathscr{D}_{X\times D/D}[s]}(m\boldsymbol{f}^{\boldsymbol{s}}\mathscr{D}_X[\boldsymbol{s}])$ est cohérent sur $\mathrm{gr}\mathscr{D}_{X\times D/D}$. Or, ce module est le gradué de $m\boldsymbol{f}^{\boldsymbol{s}}\mathscr{D}_X[\boldsymbol{s}]$ vu comme $\mathscr{D}_{X\times D/D}$-module pour la filtration $F_k(m\boldsymbol{f}^{\boldsymbol{s}}\mathscr{D}_X[\boldsymbol{s}])=m\boldsymbol{f}^{\boldsymbol{s}}F_k(\mathscr{D}_{X\times D/D}[\boldsymbol{s}])$. On déduira alors de la cohérence que c'est une bonne filtration par rapport au faisceau d'anneau $\mathscr{D}_{X\times D/D}$ et donc que $m\boldsymbol{f}^{\boldsymbol{s}}\mathscr{D}_X[\boldsymbol{s}]$ est cohérent sur $\mathscr{D}_{X\times D/D}$.

La cohérence étant une propriété locale, quitte à restreindre X, on peut supposer que X est un ouvert de $\mathbb{C}^n$ et on a alors $\mathrm{gr}\mathscr{D}_{X\times D/D}[s]\simeq \mathcal{O}_{X\times D}[\boldsymbol{\xi}][\boldsymbol{s}]$ où $\boldsymbol{\xi}$ est la deuxième coordonnée de $T^*X\simeq X\times\mathbb{C}^n$. Pour alléger les notations, on pose $\mathcal{F}:=\mathrm{gr}_{\mathscr{D}_{X\times D/D}[s]}(m\boldsymbol{f}^{\boldsymbol{s}}\mathscr{D}_X[\boldsymbol{s}])$. On veut montrer que $\mathcal{F}$ est $\mathcal{O}_{X\times D}[\boldsymbol{\xi}]$-cohérent.

On va appliquer le théorème de cohérence de l'image directe par un morphisme fini dans le cas analytique. Pour se ramener au cas analytique, on va utiliser l'équivalence de catégories du théorème 4.3.4 ainsi que la version suivante légèrement différente. On introduit le foncteur

$$\tau^*_{H_\infty}:\mathrm{Mod}_{coh}(\mathcal{O}_{X\times D}[\boldsymbol{\xi}][\boldsymbol{s}])\to \mathrm{Mod}_{\tau\text{-good}}(\mathcal{O}_{X\times D\times\mathbb{P}^n}(\star H_\infty)[\boldsymbol{s}])$$

de la même manière qu'à la section précédente. On a un théorème analogue au théorème 4.3.4, qui assure que $\tau^*_{H_\infty}$ est une équivalence de catégories admettant τ_* comme quasi-inverse. On note

$$\begin{aligned} \tau^*_{H_\infty}\mathcal{F} &\simeq \mathcal{G}\otimes_{\mathcal{O}_{X\times D\times\mathbb{P}^n}[s]}\mathcal{O}_{X\times D\times\mathbb{P}^n}(\star H_\infty)[s] \\ &\simeq \mathcal{G}\otimes_{\mathcal{O}_{X\times D\times\mathbb{P}^n}}\mathcal{O}_{X\times D\times\mathbb{P}^n}(\star H_\infty) \end{aligned}$$

où $\mathcal{G}$ est un $\mathcal{O}_{X\times D\times\mathbb{P}^n}[s]$-module cohérent. On peut supposer que $\mathcal{G}$ n'a pas de h-torsion où h est une équation locale de H_∞. Le support de $\mathcal{G}$ n'a donc pas de composante irréductible incluse dans H_∞. Notons $\mathcal{G}^{an}$ l'analytifié de $\mathcal{G}$ par rapport aux variables polynomiales $\boldsymbol{s}$ et $\mathcal{F}^{an}$ l'analytifié de $\mathcal{F}$ par rapport aux variables $\boldsymbol{s}$ et $\boldsymbol{\xi}$. On a $\operatorname{supp}(\mathcal{G}^{an})=\overline{\operatorname{supp}(\mathcal{F}^{an})}$ où l'on considère l'adhérence dans $X\times D\times\mathbb{P}^n\times\mathbb{C}^p$. Or, $\operatorname{supp}(\mathcal{F}^{an})=\operatorname{car}_{\mathscr{D}_{X\times D/D}[\boldsymbol{s}]}m\boldsymbol{f}^{\boldsymbol{s}}\mathscr{D}_X[\boldsymbol{s}]$ est conique par rapport aux variables $\boldsymbol{s}$ et $\boldsymbol{\xi}$, on en déduit que le morphisme

$$\begin{aligned} \pi':\ \ & X\times\mathbb{P}^n\times\mathbb{C}^p\times D &&\to X\times\mathbb{P}^n\times D \\ & (x,\xi,s,t) &&\mapsto (x,\xi,t) \end{aligned}$$

est encore un morphisme fini et propre sur le support de $(\mathcal{G}^{an})$.

On introduit alors le foncteur

$$\widetilde{\tau}^*_{H_\infty}:\mathrm{Mod}_{coh}(\mathcal{O}_{X\times D\times\mathbb{P}^n}[\boldsymbol{s}])\to\mathrm{Mod}_{\widetilde{\tau}\text{-good}}(\mathcal{O}_{X\times D\times\mathbb{P}^n\times\mathbb{P}^d}(\star\widetilde{H}_\infty)[\boldsymbol{s}]).$$

D'après le théorème 4.3.4, $\widetilde{\tau}_*\widetilde{\tau}^*_{H_\infty}\mathcal{G}\simeq\mathcal{G}$. Or, comme π' est fini et propre sur le support de $(\mathcal{G}^{an})$, on a $\operatorname{supp}(\widetilde{\tau}^*_{H_\infty}\mathcal{G})\cap\widetilde{H}_\infty=\varnothing$ et donc $\widetilde{\tau}^*_{H_\infty}\mathcal{G}=\mathcal{G}^{an}$. Le module $\mathcal{G}$ vu comme un $\mathcal{O}_{X\times D\times\mathbb{P}^n}$-module est alors égal à $\pi'_*\mathcal{G}^{an}$, qui est $\mathcal{O}_{X\times D\times\mathbb{P}^n}$-cohérent par le théorème de cohérence de l'image directe par un morphisme fini. On en déduit que $\tau^*_{H_\infty}\mathcal{F}\in\mathrm{Mod}_{\tau\text{-good}}(\mathcal{O}_{X\times D\times\mathbb{P}^n}(\star H_\infty))$ et, d'après le théorème 4.3.4, $\mathcal{F}\simeq\tau_*\tau^*_{H_\infty}\mathcal{F}$ est $\mathcal{O}_{X\times D}[\boldsymbol{\xi}]$-cohérent.

Finalement, on a montré que $\operatorname{gr}_{\mathscr{D}_{X\times D/D}[s]}(m\boldsymbol{f}^{\boldsymbol{s}}\mathscr{D}_X[\boldsymbol{s}])$ est cohérent sur $\operatorname{gr}\mathscr{D}_{X\times D/D}$. Or, ce module est le gradué de $m\boldsymbol{f}^{\boldsymbol{s}}\mathscr{D}_X[\boldsymbol{s}]$ vu comme $\mathscr{D}_{X\times D/D}$-module pour la filtration $F_k(m\boldsymbol{f}^{\boldsymbol{s}}\mathscr{D}_X[\boldsymbol{s}])=m\boldsymbol{f}^{\boldsymbol{s}}F_k(\mathscr{D}_{X\times D/D}[\boldsymbol{s}])$, on en déduit que $m\boldsymbol{f}^{\boldsymbol{s}}\mathscr{D}_X[\boldsymbol{s}]$ est $\mathscr{D}_{X\times D/D}$-cohérent.

□

Lemme 4.3.6. *Pour tout $\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^p$, $(m\otimes\delta(\boldsymbol{t}-\boldsymbol{f}))V_{\boldsymbol{k}}\mathscr{D}_{X\times D}$ est un $\mathscr{D}_{X\times D/D}$-module cohérent.*

Démonstration. On a vu que $(m\otimes\delta(\boldsymbol{t}-\boldsymbol{f}))V_{\boldsymbol{0}}\mathscr{D}_{X\times D}$ et $m\boldsymbol{f}^{\boldsymbol{s}}\mathscr{D}_X[\boldsymbol{s}]$ sont isomorphes en tant que $V_{\boldsymbol{0}}\mathscr{D}_{X\times D}$-modules, le lemme précédent assure donc que $(m\otimes\delta(\boldsymbol{t}-\boldsymbol{f}))V_{\boldsymbol{0}}\mathscr{D}_{X\times D}$ est un $\mathscr{D}_{X\times D/D}$-module cohérent. Fixons $\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^p$ et notons $\boldsymbol{k}^-$ l'ensemble des k_i tels que $k_i\leqslant 0$ et $\boldsymbol{k}^+$ l'ensemble des k_i tels que $k_i>0$. On a alors l'égalité

$$V_{\boldsymbol{k}}\mathscr{D}_{X\times D}=\sum_{\boldsymbol{\ell}\leqslant\boldsymbol{k}^+}V_{\boldsymbol{0}}\mathscr{D}_{X\times D}\boldsymbol{t}^{\boldsymbol{k}^-}\partial^{\boldsymbol{\ell}}.$$

On sait que $(m\otimes\delta(\boldsymbol{t}-\boldsymbol{f}))V_{\boldsymbol{0}}\mathscr{D}_{X\times D}$ est localement de type fini sur $\mathscr{D}_{X\times D/D}$ et on observe que s'il est localement engendré par les sections $\{(m\otimes\delta(\boldsymbol{t}-\boldsymbol{f}))P_j\}_{j\in J}$, alors $(m\otimes\delta(\boldsymbol{t}-\boldsymbol{f}))V_{\boldsymbol{k}}\mathscr{D}_{X\times D}$ est localement engendré par les sections

$$\left\{(m\otimes\delta(\boldsymbol{t}-\boldsymbol{f}))P_j\boldsymbol{t}^{\boldsymbol{k}^-}\partial^{\boldsymbol{\ell}}\right\}_{\substack{j\in J\\ \boldsymbol{\ell}\leqslant\boldsymbol{k}^+}}.$$

On a donc montré que, pour tout $\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^p$, $(m\otimes\delta(\boldsymbol{t}-\boldsymbol{f}))V_{\boldsymbol{k}}\mathscr{D}_{X\times D}$ est un $\mathscr{D}_{X\times D/D}$-module localement de type fini. Or, $(m\otimes\delta(\boldsymbol{t}-\boldsymbol{f}))V_{\boldsymbol{k}}\mathscr{D}_{X\times D}\subset\mathcal{M}'$ et $\mathcal{M}'$ étant $\mathscr{D}_{X\times D}$-cohérent, il admet localement une filtration exhaustive par des $\mathscr{D}_{X\times D/D}$-modules cohérents. Le $\mathscr{D}_{X\times D/D}$-module $(m\otimes\delta(\boldsymbol{t}-\boldsymbol{f}))V_{\boldsymbol{k}}\mathscr{D}_{X\times D}$ étant localement de type fini, il est localement inclus dans l'un de ces $\mathscr{D}_{X\times D/D}$-modules cohérents et il est donc cohérent sur $\mathscr{D}_{X\times D/D}$.

□

Lemme 4.3.7. *La V-multifiltration de Malgrange-Kashiwara de $\mathcal{M}'$ vérifie que, pour tout $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{C}^p$, le module $V_{\boldsymbol{\alpha}}\mathcal{M}'$ est cohérent sur $\mathscr{D}_{X\times D/D}$.*

Démonstration. La multifiltration $(m \otimes \delta(\boldsymbol{t} - \boldsymbol{f}))V_{\boldsymbol{k}}\mathscr{D}_{X\times D}$ de $\mathcal{M}'$ est une bonne V-multifiltration. Fixons $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{C}^p$. On peut obtenir $V_{\boldsymbol{\alpha}}\mathcal{M}'$ en effectuant un nombre fini d'opérations élémentaires de décalage par des entiers à partir des $(m\otimes\delta(\boldsymbol{t}-\boldsymbol{f}))V_{\boldsymbol{k}}\mathscr{D}_{X\times D}$ pour un nombre fini de $\boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}^p$. Le résultat de ces opérations élémentaires reste localement de type fini sur $\mathscr{D}_{X\times D/D}$. Par le même argument que dans la démonstration du lemme précédent, on conclut que $V_{\boldsymbol{\alpha}}\mathcal{M}'$ est $\mathscr{D}_{X\times D/D}$-cohérent.

□

Contrôle de la variété caractéristique Ici, on compare les variétés caractéristiques des $\mathscr{D}_{X\times D/D}$-modules $(m\otimes\delta(\boldsymbol{t}-\boldsymbol{f}))V_{\boldsymbol{0}}\mathscr{D}_{X\times D}$, $(m\otimes\delta(\boldsymbol{t}-\boldsymbol{f}))V_{\boldsymbol{k}}\mathscr{D}_{X\times D}$ et $V_{\boldsymbol{\alpha}}\mathcal{M}'$ pour tout $\boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}^p$ et tout $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{C}^p$.

Lemme 4.3.8. *Soit $\boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}^p$. Le $\mathscr{D}_{X\times D/D}$-module $(m \otimes \delta(\boldsymbol{t} - \boldsymbol{f}))V_{\boldsymbol{k}}\mathscr{D}_{X\times D}$ satisfait à*

$$\operatorname{car}_{\mathscr{D}_{X\times D/D}}\left[(m \otimes \delta(\boldsymbol{t} - \boldsymbol{f}))V_{\boldsymbol{k}}\mathscr{D}_{X\times D}\right] \subset \operatorname{car}_{\mathscr{D}_{X\times D/D}}\left[(m \otimes \delta(\boldsymbol{t} - \boldsymbol{f}))V_{\boldsymbol{0}}\mathscr{D}_{X\times D}\right].$$

Démonstration. Soit $\boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}$. On note $\{F_qV_{\boldsymbol{0}}\}_{q\in\mathbb{N}}$ une bonne filtration du $\mathscr{D}_{X\times D/D}$-module cohérent $(m\otimes\delta(\boldsymbol{t}-\boldsymbol{f}))V_{\boldsymbol{0}}\mathscr{D}_{X\times D}$. On définit $\boldsymbol{k}^+$ et $\boldsymbol{k}^-$ comme dans la démonstration du lemme 4.3.6 et on a

$$(m \otimes \delta(\boldsymbol{t} - \boldsymbol{f}))V_{\boldsymbol{k}}\mathscr{D}_{X\times D} = \sum_{\boldsymbol{\ell}\leqslant\boldsymbol{k}^+} (m \otimes \delta(\boldsymbol{t} - \boldsymbol{f}))V_{\boldsymbol{0}}\mathscr{D}_{X\times D}\boldsymbol{t}^{\boldsymbol{k}^-}\partial^{\boldsymbol{\ell}}.$$

On note $|\boldsymbol{\ell}|$ la somme des ℓ_i et on pose

$$F_qV_{\boldsymbol{k}} := \sum_{\boldsymbol{\ell}\leqslant\boldsymbol{k}^+} (F_{q-|\boldsymbol{\ell}|}V_{\boldsymbol{0}})\boldsymbol{t}^{\boldsymbol{k}^-}\partial^{\boldsymbol{\ell}}. \tag{4.14}$$

Commençons par vérifier que, pour tout $q \in \mathbb{N}$, $F_qV_{\boldsymbol{k}}$ est un $\mathcal{O}_{X\times D}$-module. La multiplication par les x_i pour $0 \leqslant i \leqslant n$ et par les t_j pour les indices j de $\boldsymbol{k}^-$ laisse $F_qV_{\boldsymbol{k}}$ stable, car pour tout $q \in \mathbb{N}$, $F_qV_{\boldsymbol{0}}$ est un $\mathcal{O}_{X\times D}$-module. Soit j un indice de $\boldsymbol{k}^+$, on a

$$\partial^{\boldsymbol{\ell}}t_j = t_j\partial^{\boldsymbol{\ell}} + \partial^{\boldsymbol{\ell}-\boldsymbol{1}_j}.$$

On en déduit que

$$(F_{q-|\boldsymbol{\ell}|}V_{\boldsymbol{0}})\boldsymbol{t}^{\boldsymbol{k}^-}\partial^{\boldsymbol{\ell}}t_j \subset (F_{q-|\boldsymbol{\ell}|}V_{\boldsymbol{0}})\boldsymbol{t}^{\boldsymbol{k}^-}\partial^{\boldsymbol{\ell}} + (F_{q-|\boldsymbol{\ell}|+1}V_{\boldsymbol{0}})\boldsymbol{t}^{\boldsymbol{k}^-}\partial^{\boldsymbol{\ell}-\boldsymbol{1}_j}.$$

La multiplication par t_j laisse $F_qV_{\boldsymbol{k}}$ stable et $F_qV_{\boldsymbol{k}}$ est bien un $\mathcal{O}_{X\times D}$-module.

On vérifie ensuite que $\{F_qV_{\boldsymbol{k}}\}_{q\in\mathbb{N}}$ est une bonne filtration du $\mathscr{D}_{X\times D/D}$-module cohérent $(m\otimes\delta(\boldsymbol{t}-\boldsymbol{f}))V_{\boldsymbol{k}}\mathscr{D}_{X\times D}$. Pour tout $q \in \mathbb{N}$, $F_qV_{\boldsymbol{0}}$ est un $\mathcal{O}_{X\times D}$-module cohérent, l'expression (4.14) assure alors que, pour tout $q \in \mathbb{N}$, $F_qV_{\boldsymbol{k}}$ est localement de type fini sur $\mathcal{O}_{X\times D}$. Or, $(m\otimes\delta(\boldsymbol{t}-\boldsymbol{f}))V_{\boldsymbol{k}}\mathscr{D}_{X\times D}$ est un $\mathscr{D}_{X\times D/D}$-module cohérent et admet donc une filtration exhaustive par des $\mathcal{O}_{X\times D}$-modules cohérents. Comme $F_qV_{\boldsymbol{k}}$ est localement de type fini sur $\mathcal{O}_{X\times D}$, il est inclus dans l'un de ces $\mathcal{O}_{X\times D}$-modules et il est donc $\mathcal{O}_{X\times D}$-cohérent.

L'expression (4.14) assure également que $(F_qV_{\boldsymbol{k}})(F_p\mathscr{D}_{X\times D/D}) \subset F_{q+p}V_{\boldsymbol{k}}$ pour tout $(q,p) \in \mathbb{N}^2$, car la filtration $\{F_qV_{\boldsymbol{0}}\}_{q\in\mathbb{N}}$ vérifie cette propriété.

Soit $q_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $q \in \mathbb{N}$, $(F_{q_0}V_{\boldsymbol{0}})(F_q\mathscr{D}_{X\times D/D}) = F_{q_0+q}V_{\boldsymbol{0}}$. Soit $\boldsymbol{\ell}_0 \leqslant \boldsymbol{k}^+$, on a

$$F_{q_0+q+|\boldsymbol{k}^+|-|\boldsymbol{\ell}_0|}V_{\boldsymbol{0}} = (F_{q_0+|\boldsymbol{k}^+|-|\boldsymbol{\ell}_0|}V_{\boldsymbol{0}})(F_q\mathscr{D}_{X\times D/D}).$$

On en déduit que

$$(F_{q_0+q+|\boldsymbol{k}^+|-|\boldsymbol{\ell}_0|}V_{\mathbf{0}})\boldsymbol{t}^{\boldsymbol{k}^-}\partial^{\boldsymbol{\ell}_0} \subset \sum_{\boldsymbol{\ell}\leqslant\boldsymbol{\ell}_0}(F_{q_0+|\boldsymbol{k}^+|-|\boldsymbol{\ell}|}V_{\mathbf{0}})\boldsymbol{t}^{\boldsymbol{k}^-}\partial^{\boldsymbol{\ell}}(F_q\mathscr{D}_{X\times D/D})$$

et donc, pour tout $q \in \mathbb{N}$,

$$(F_{q_0+|\boldsymbol{k}^+|}V_{\boldsymbol{k}})(F_q\mathscr{D}_{X\times D/D}) = F_{q_0+|\boldsymbol{k}^+|+q}V_{\boldsymbol{k}}.$$

Ceci assure que $\{F_qV_{\boldsymbol{k}}\}_{q\in\mathbb{N}}$ est une bonne filtration de $(m\otimes\delta(\boldsymbol{t}-\boldsymbol{f}))V_{\boldsymbol{k}}\mathscr{D}_{X\times D}$.

En considérant le gradué associé à ces bonnes filtrations, on va montrer que

$$\operatorname{Ann}_{\operatorname{gr}\mathscr{D}_{X\times D/D}}(\operatorname{gr}(m\otimes\delta(\boldsymbol{t}-\boldsymbol{f}))V_{\mathbf{0}}\mathscr{D}_{X\times D}) \subset \operatorname{Ann}_{\operatorname{gr}\mathscr{D}_{X\times D/D}}(\operatorname{gr}(m\otimes\delta(\boldsymbol{t}-\boldsymbol{f}))V_{\boldsymbol{k}}\mathscr{D}_{X\times D}).$$

Soit $P(x,\xi,t) \in \operatorname{Ann}_{\operatorname{gr}\mathscr{D}_{X\times D/D}}(\operatorname{gr}(m\otimes\delta(\boldsymbol{t}-\boldsymbol{f}))V_{\mathbf{0}}\mathscr{D}_{X\times D})$. On peut supposer P homogène de degré d, alors, pour tout q,

$$(F_qV_{\mathbf{0}})P(x,\partial_x,t) \subset F_{q+d-1}V_{\mathbf{0}}.$$

Pour $\boldsymbol{\ell} \leqslant \boldsymbol{k}^+$, on a

$$(F_{q-|\boldsymbol{\ell}|}V_{\mathbf{0}})\boldsymbol{t}^{\boldsymbol{k}^-}\partial^{\boldsymbol{\ell}}P(x,\partial_x,t) = (F_{q-|\boldsymbol{\ell}|}V_{\mathbf{0}})P(x,\partial_x,t)\boldsymbol{t}^{\boldsymbol{k}^-}\partial^{\boldsymbol{\ell}} + (F_{q-|\boldsymbol{\ell}|}V_{\mathbf{0}})[\boldsymbol{t}^{\boldsymbol{k}^-}\partial^{\boldsymbol{\ell}}, P(x,\partial_x,t)].$$

Or, $(F_{q-|\boldsymbol{\ell}|}V_{\mathbf{0}})P(x,\partial_x,t)\boldsymbol{t}^{\boldsymbol{k}^-}\partial^{\boldsymbol{\ell}} \subset (F_{q-|\boldsymbol{\ell}|+d-1}V_{\mathbf{0}})\boldsymbol{t}^{\boldsymbol{k}^-}\partial^{\boldsymbol{\ell}}$ et en considérant les relations de commutation en t_i et ∂_i, on observe que

$$(F_{q-|\boldsymbol{\ell}|}V_{\mathbf{0}})[\boldsymbol{t}^{\boldsymbol{k}^-}\partial^{\boldsymbol{\ell}}, P(x,\partial_x,t)] \subset \sum_{\boldsymbol{\ell}'\leqslant\boldsymbol{\ell}}(F_{q-|\boldsymbol{\ell}|+d}V_{\mathbf{0}})\boldsymbol{t}^{\boldsymbol{k}^-}\partial^{\boldsymbol{\ell}'} \subset \sum_{\boldsymbol{l}'\leqslant\boldsymbol{\ell}}(F_{q-|\boldsymbol{l}'|+d-1}V_{\mathbf{0}})\boldsymbol{t}^{\boldsymbol{k}^-}\partial^{\boldsymbol{l}'}.$$

On en déduit que, pour tout q,

$$(F_qV_{\boldsymbol{k}})P(x,\partial_x,t) \subset F_{q+d-1}V_{\boldsymbol{k}}$$

et donc que $P(x,\xi,t) \in \operatorname{Ann}_{\operatorname{gr}\mathscr{D}_{X\times D/D}}(\operatorname{gr}(m\otimes\delta(\boldsymbol{t}-\boldsymbol{f}))V_{\boldsymbol{k}}\mathscr{D}_{X\times D})$. On a montré que

$$\operatorname{Ann}_{\operatorname{gr}\mathscr{D}_{X\times D/D}}(\operatorname{gr}(m\otimes\delta(\boldsymbol{t}-\boldsymbol{f}))V_{\mathbf{0}}\mathscr{D}_{X\times D}) \subset \operatorname{Ann}_{\operatorname{gr}\mathscr{D}_{X\times D/D}}(\operatorname{gr}(m\otimes\delta(\boldsymbol{t}-\boldsymbol{f}))V_{\boldsymbol{k}}\mathscr{D}_{X\times D}).$$

Ceci implique finalement que

$$\operatorname{car}_{\mathscr{D}_{X\times D/D}}\left[(m\otimes\delta(\boldsymbol{t}-\boldsymbol{f}))V_{\boldsymbol{k}}\mathscr{D}_{X\times D}\right] \subset \operatorname{car}_{\mathscr{D}_{X\times D/D}}\left[(m\otimes\delta(\boldsymbol{t}-\boldsymbol{f}))V_{\mathbf{0}}\mathscr{D}_{X\times D}\right].$$

□

Lemme 4.3.9. *Soit $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{C}^p$. Le $\mathscr{D}_{X\times D/D}$-module $V_{\boldsymbol{\alpha}}\mathcal{M}'$ vérifie*

$$\operatorname{car}_{\mathscr{D}_{X\times D/D}}V_{\boldsymbol{\alpha}}\mathcal{M}' \subset \operatorname{car}_{\mathscr{D}_{X\times D/D}}\left[(m\otimes\delta(\boldsymbol{t}-\boldsymbol{f}))V_{\mathbf{0}}\mathscr{D}_{X\times D}\right].$$

Démonstration. Soit $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{C}^p$. Comme dans la démonstration du lemme 4.3.7, on remarque que $V_{\boldsymbol{\alpha}}\mathcal{M}'$ s'obtient en effectuant un nombre fini d'opérations élémentaires de décalage d'entiers à partir des $(m\otimes\delta(\boldsymbol{t}-\boldsymbol{f}))V_{\boldsymbol{k}}\mathscr{D}_{X\times D}$. On va montrer qu'à chaque étape, on contrôle la variété caractéristique relative du $\mathscr{D}_{X\times D/D}$-module cohérent obtenue.

Une opération élémentaire de décalage d'entiers est de la forme

$$U'_{\boldsymbol{k}} := U_{\boldsymbol{k}-\mathbf{1}_i} + U_{\boldsymbol{k}}(t_i\partial_i - \lambda)^{\ell}$$

où on suppose que $\{U_{\boldsymbol{k}}\}_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}}$ est une bonne V-multifiltration de $\mathcal{M}'$ et que les $U_{\boldsymbol{k}}$ sont $\mathscr{D}_{X\times D/D}$-cohérents. Alors, $\{U'_{\boldsymbol{k}}\}_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}}$ et une bonne V-multifiltration de $\mathcal{M}'$ et les $U'_{\boldsymbol{k}}$ sont $\mathscr{D}_{X\times D/D}$-cohérents. Fixons $\{F_qU_{\boldsymbol{k}}\}_{q\in\mathbb{N}}$ une bonne filtration de $U_{\boldsymbol{k}}$, on pose

$$F_qU'_{\boldsymbol{k}} := F_qU_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{1_i}} + \sum_{r=0}^{\ell-1} F_{q+l-r}U_{\boldsymbol{k}}t_i(t_i\partial_i - \lambda)^r + F_qU_{\boldsymbol{k}}(t_i\partial_i - \lambda)^\ell.$$

On peut alors vérifier que pour tout $q \in \mathbb{N}$, $F_qU'_{\boldsymbol{k}}$ est un $\mathcal{O}_{X\times D}$-module et que $\{F_qU'_{\boldsymbol{k}}\}_{q\in\mathbb{N}}$ est une bonne filtration du $\mathscr{D}_{X\times D/D}$-module cohérent $U'_{\boldsymbol{k}}$. En considérant le gradué associé à ces bonnes filtrations on vérifie alors que

$$\mathrm{Ann}_{\mathrm{gr}\mathscr{D}_{X\times D/D}}(\mathrm{gr}U_{\boldsymbol{k}}) \cap \mathrm{Ann}_{\mathrm{gr}\mathscr{D}_{X\times D/D}}(\mathrm{gr}U_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{1_i}}) \subset \mathrm{Ann}_{\mathrm{gr}\mathscr{D}_{X\times D/D}}(\mathrm{gr}U'_{\boldsymbol{k}}).$$

Ceci implique que

$$\mathrm{car}_{\mathscr{D}_{X\times D/D}}(U'_{\boldsymbol{k}}) \subset \mathrm{car}_{\mathscr{D}_{X\times D/D}}(U_{\boldsymbol{k}}) \cup \mathrm{car}_{\mathscr{D}_{X\times D/D}}(U_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{1_i}}).$$

Étant donné que $V_{\boldsymbol{\alpha}}\mathcal{M}'$ peut être obtenu après un nombre fini d'opérations de ce type en partant des $(m\otimes\delta(\boldsymbol{t}-\boldsymbol{f}))V_{\boldsymbol{k}}\mathscr{D}_{X\times D}$ le lemme précédent assure que

$$\mathrm{car}_{\mathscr{D}_{X\times D/D}}V_{\boldsymbol{\alpha}}\mathcal{M}' \subset \mathrm{car}_{\mathscr{D}_{X\times D/D}}\left[(m\otimes\delta(\boldsymbol{t}-\boldsymbol{f}))V_{\boldsymbol{0}}\mathscr{D}_{X\times D}\right].$$

□

Dans le lemme suivant on notera $\pi_X : T^*X \to X$ et $\pi_{X\times D} : T^*(X\times D) \to X\times D$ les projections.

Lemme 4.3.10. *Il existe t_0 suffisamment petit tel que pour tout $0 < \epsilon' \leqslant t_0$, quitte à réduire le polydisque D, le $\mathscr{D}_{X\times D/D}$-module $(m\otimes\delta(\boldsymbol{t}-\boldsymbol{f}))V_{\boldsymbol{0}}\mathscr{D}_{X\times D}$ satisfait à*

$$\Lambda_\varphi \cap \pi^{-1}\mathrm{car}_{\mathscr{D}_{X\times D/D}}(m\otimes\delta)V_{\boldsymbol{0}}\mathscr{D}_{X\times D} \cap \pi^{-1}_{X\times D}\left(\overline{B}_{t_0}\times D - B_{\epsilon'}\times D\right) = \varnothing.$$

où B_{t_0} est la boule de centre 0 et de rayon t_0 dans X.

Démonstration. On note $W^0_{\boldsymbol{f},Y_\ell} := W_{\boldsymbol{f},Y_\ell}\cap\{f=0\}$. On applique la proposition 1.2.21 en considérant la fonction analytique réelle

$$\begin{array}{cccc} \widetilde{\varphi}: & X & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \sum_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i|^2 \end{array}$$

et le sous-ensemble $\bigcup_{F|_{Y_\ell}\neq 0} W^0_{\boldsymbol{f},Y_\ell} \subset T^*X$. Cet ensemble est clairement fermé, conique et analytique. Pour appliquer la proposition il reste à voir qu'il est isotrope. Le couple $(\boldsymbol{f},\mathrm{car}(\mathcal{M}))$ est sans pente donc le théorème 2 de [Mai13] assure que pour tout ℓ, $f_{|Y_\ell}$ est sans éclatement en codimension 0 et $W^0_{\boldsymbol{f},Y_\ell}$ est donc une sous-variété lagrangienne de T^*X. On peut donc appliquer la proposition 1.2.21 qui assure que l'ensemble

$$\{t\in\mathbb{R} | t=\widetilde{\varphi}(x), d\widetilde{\varphi}(x)\in\bigcup_{F|_{Y_\ell}\neq 0} W^0_{\boldsymbol{f},Y_\ell}\cap\{f=0\} \text{ pour un certain } x\in X\}$$

est discret. Pour t_0 suffisamment petit on a alors

$$\Lambda_{\widetilde{\varphi}} \cap \bigcup_{F|_{Y_\ell}\neq 0} W^0_{\boldsymbol{f},Y_\ell} \cap \pi_X^{-1}(\overline{B}_{t_0}) \subset \{0\}. \tag{4.15}$$

Fixons un tel t_0 et soit $0 < \epsilon' \leqslant t_0$, on va montrer par l'absurde que pour η suffisamment petit on a

$$\Lambda_{\widetilde{\varphi}} \cap \bigcup_{F|_{Y_\ell} \neq 0} W_{\boldsymbol{f},Y_\ell} \cap \{|f| \leqslant \eta\} \cap \pi_X^{-1}\left(\overline{B}_{t_0} - B_{\epsilon'}\right) = \varnothing.$$

Supposons que cet énoncé soit faux, il existe alors une suite $\{(x_n, \xi_n)\}_n \in T^*X$ vérifiant

$$(x_n, \xi_n) \in \Lambda_{\widetilde{\varphi}} \cap \bigcup_{F|_{Y_\ell} \neq 0} W_{\boldsymbol{f},Y_\ell} \cap \{|f| \leqslant \frac{1}{n}\} \cap \pi_X^{-1}\left(\overline{B}_{t_0} - B_{\epsilon'}\right).$$

L'ensemble $\Lambda_{\widetilde{\varphi}} \cap \pi_X^{-1}\left(\overline{B}_{t_0} - B_{\epsilon'}\right)$ est compact donc la suite $\{(x_n, \xi_n)\}_n$ admet une valeur d'adhérence (x, ξ) qui vérifie

$$(x, \xi) \in \Lambda_{\widetilde{\varphi}} \cap \bigcup_{F|_{Y_\ell} \neq 0} W_{\boldsymbol{f},Y_\ell} \cap \{f = 0\} \cap \pi_X^{-1}\left(\overline{B}_{t_0} - B_{\epsilon'}\right),$$

ceci est en contradiction avec (4.15). Soit η_0 vérifiant

$$\Lambda_{\widetilde{\varphi}} \cap \bigcup_{F|_{Y_\ell} \neq 0} W_{\boldsymbol{f},Y_\ell} \cap \{|f| \leqslant \eta_0\} \cap \pi_X^{-1}\left(\overline{B}_{t_0} - B_{\epsilon'}\right) = \varnothing.$$

On fixe D un polydisque contenu dans la boule de centre 0 et de rayon η_0. Ce qui précède implique que

$$\Lambda_\varphi \cap \pi^{-1} i_f \left(\bigcup_{F|_{Y_\ell} \neq 0} W_{\boldsymbol{f},Y_\ell} \cap \{|f| \leqslant \eta_0\} \right) \cap \pi_{X \times D}^{-1}\left(\overline{B}_{t_0} \times D - B_{\epsilon'} \times D\right) = \varnothing.$$

Or

$$\pi^{-1} \mathrm{car}_{\mathscr{D}_{X \times D/D}}(m \otimes \delta) V_{\mathbf{0}} \mathscr{D}_{X \times D} = \pi^{-1} i_f \left(\bigcup_{F|_{Y_\ell} \neq 0} W_{\boldsymbol{f},Y_\ell} \right)$$

d'où le résultat.

□

Application du théorème d'image directe On est alors en mesure d'appliquer le théorème 1.2.20 pour montrer le résultat qui nous intéresse. On note p_ϵ la restriction de p à $B_\epsilon \times D$ et $\overline{p}_\epsilon$ la restriction de p à $\overline{B}_\epsilon \times D$.

Théorème 4.3.11. *Il existe t_0 tel que pour tout $0 < \epsilon' \leqslant t_0$ on puisse trouver $D(\epsilon')$ un polydisque suffisamment petit vérifiant : quitte à restreindre la projection p à $X \times D(\epsilon')$ on a pour tout $\epsilon' < \epsilon \leqslant t_0$ l'image directe*

$$p_{\epsilon *} V_{\boldsymbol{\alpha}} \mathcal{M}' = \overline{p}_{\epsilon *} V_{\boldsymbol{\alpha}} \mathcal{M}'.$$

De plus c'est un complexe à cohomologie $\mathcal{O}_D$-cohérente qui ne dépend pas de $\epsilon \in]\epsilon', t_0]$.

Démonstration. Soit t_0 fourni par le lemme 4.3.10 et soit $0 < \epsilon' \leqslant t_0$ et supposons D suffisamment petit pour avoir le résultat de ce lemme. Soit $\epsilon \in]\epsilon', t_0]$. On applique le théorème 1.2.20 au faisceau constant sur $B_\epsilon \times D$ et à $V_{\boldsymbol{\alpha}} \mathcal{M}'|_{B_\epsilon \times D}$ qui est, d'après le lemme 4.3.7, $\mathscr{D}_{B_\epsilon \times D/D}$-cohérent. Posons

$$\begin{array}{rccc} \psi : & B_\epsilon \times D & \to & \mathbb{R} \\ & (x, t) & \mapsto & \frac{\phi(x)}{\epsilon - \phi(x)} \end{array}$$

et $\tau_0 = \frac{\epsilon'}{1+\epsilon'}$ (tel que $\psi(\tau_0) = \epsilon'$). D'après les lemmes 4.3.9 et 4.3.10 on a

$$\Lambda_\psi \cap \pi^{-1}\mathrm{car}_{\mathscr{D}_{B_\epsilon \times D/D}} V_{\boldsymbol{\alpha}}\mathcal{M}' \subset \pi^{-1}_{B_\epsilon \times D}(Z_{\tau_0})$$

où $Z_{\tau_0} = \{(x,t) \in B_\epsilon \times D | \psi(x,t) \leqslant \tau_0\}$.

Les hypothèses du théorème 1.2.20 sont donc vérifiées. On conclut que pour tout $\widetilde{\epsilon} \in]\epsilon', \epsilon]$

$$\overline{p}_{\widetilde{\epsilon}*} V_{\boldsymbol{\alpha}}\mathcal{M}' = p_{\epsilon *} V_{\boldsymbol{\alpha}}\mathcal{M}'.$$

De plus ce sont des complexes à cohomologie $\mathcal{O}_D$-cohérente. Ceci est vérifié pour tout $\epsilon' < \epsilon \leqslant t_0$ ce qui conclut la démonstration du théorème.

□

4.3.2 Démonstration du théorème de comparaison

On est en mesure de montrer le théorème de comparaison :

Théorème 4.3.12. *Soit $\mathcal{M}$ un $\mathscr{D}_X$-module holonome régulier. On suppose de plus que le couple $(f, \mathrm{car}(\mathcal{M}))$ est sans pente. On note $\mathcal{M}'$ l'image directe de $\mathcal{M}$ sur le graphe de f et $p : X \times D \to D$ la projection. Alors les complexes*

$$\Psi_p \mathbf{DR}_{X\times D}(\mathcal{M}') \quad \textit{et} \quad \mathbf{DR}_{X_0} \bigoplus_{\boldsymbol{\alpha} \in [-1,0[^p} \mathrm{gr}_{\boldsymbol{\alpha}}(\mathcal{M}')$$

sont naturellement isomorphes.

Le théorème 4.1.1 fournit par fonctorialité un isomorphisme naturel

$$\mathbf{DR}_{X_0} \bigoplus_{\boldsymbol{\alpha} \in [-1,0[^p} \mathrm{gr}_{\boldsymbol{\alpha}}(\mathcal{M}') \simeq \mathbf{DR}_{X_0} \bigoplus_{\boldsymbol{\alpha} \in [-1,0[^p} i^\dagger \mathcal{M}'_{\boldsymbol{\alpha}}. \tag{4.16}$$

On va montrer que sous les hypothèses du théorème 4.3.12 les morphismes de (3.7) :

$$\bigoplus_{\boldsymbol{\alpha} \in [-1,0[^p} \mathbf{DR}_{X_0}(i^\# \mathcal{M}'_{\boldsymbol{\alpha}}) \to \bigoplus_{\boldsymbol{\alpha} \in [-1,0[^p} \mathbf{DR}_{X_0}(i^\dagger \mathcal{M}'_{\boldsymbol{\alpha}}).$$

et

$$\bigoplus_{\boldsymbol{\alpha} \in [-1,0[^p} \mathbf{DR}_{X_0}(i^\# \mathcal{M}'_{\boldsymbol{\alpha}}) \to \bigoplus_{\boldsymbol{\alpha} \in [-1,0[^p} i^{-1}\mathbf{DR}_{X\times D}(\mathcal{M}'_{\boldsymbol{\alpha}}) \to \Psi_\pi \mathbf{DR}_{X\times D}(\mathcal{M}').$$

sont des isomorphismes, ce qui conclura la démonstration de ce théorème. C'est un problème local, l'étude précédente des images directes locales permet de se ramener au cas d'une connexion méromorphe sur le polydisque D et de la fonction Id_D traité dans la partie 4.2. On aura besoin du résultat suivant :

Théorème 4.3.13. *Soit $f : X \to Y$ une application holomorphe entre deux variétés complexes, et $F = f \times Id : X \times \mathbb{C}^p \to Y \times \mathbb{C}^p$. Soit $\mathcal{M}$ un $\mathscr{D}_{X\times\mathbb{C}^p}$-module holonome régulier tel que le couple $((t_1, ..., t_p), \mathrm{car}(\mathcal{M}))$ soit sans pente où les $(t_1, ..., t_p)$ sont les coordonnés de $\mathbb{C}^p$. Soit $\mathcal{F}$ un faisceau $\mathbb{R}$-constructible sur $X \times \mathbb{C}^p$. On suppose de plus que pour $\boldsymbol{\alpha}$ suffisamment grand*

$$\pi^{-1}\mathrm{car}_{F|\mathbb{C}^p} V_{\boldsymbol{\alpha}}\mathcal{M} \cap SS(\mathcal{F}) \subset T^*_X X \tag{4.17}$$

et que F est propre sur $\mathrm{supp}(\mathcal{M}) \cap \mathrm{supp}(\mathcal{F})$. *Alors pour tout $k \in \mathbb{Z}$:*

– *Le $\mathscr{D}_{Y\times\mathbb{C}^p}$-module $\mathscr{H}^k F_*(\mathcal{M} \otimes \mathcal{F})$ est cohérent.*

– *le couple* $\big((t_1,...,t_p),\mathrm{car}(\mathscr{H}^k F_*(\mathcal{M}\otimes\mathcal{F}))\big)$ *est sans pente.*
– *Pour tout* $\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{C}$ *la* V*-multifiltration de Malgrange-Kashiwara par rapport aux fonctions* $(t_1,...,t_p)$ *satisfait à*

$$\mathscr{H}^k F_*(V_{\boldsymbol{\alpha}}\mathcal{M}\otimes\mathcal{F})\simeq V_{\boldsymbol{\alpha}}\mathscr{H}^k F_*(\mathcal{M}\otimes\mathcal{F}) \tag{4.18}$$

et

$$\mathscr{H}^k F_*(gr_{\boldsymbol{\alpha}}\mathcal{M}\otimes\mathcal{F})\simeq gr_{\boldsymbol{\alpha}}\mathscr{H}^k F_*(\mathcal{M}\otimes\mathcal{F}) \tag{4.19}$$

Remarque 4.3.14. D'après la partie précédente (Lemme 4.3.7) les hypothèses faites sur $\mathcal{M}$ assurent que $V_{\boldsymbol{\alpha}}\mathcal{M}$ est $\mathscr{D}_{X\times\mathbb{C}^p/\mathbb{C}^p}$-cohérent et donc que cela a un sens de parler de $\mathrm{car}_{F|\mathbb{C}^p}V_{\boldsymbol{\alpha}}\mathcal{M}$.

Démonstration. Pour $\boldsymbol{\alpha}$ suffisamment grand les propriétés de bonne filtration nous donnent un morphisme surjectif

$$\mathscr{D}_{X\times\mathbb{C}^p}\otimes_{\mathscr{D}_{X\times\mathbb{C}^p/\mathbb{C}^p}}V_{\boldsymbol{\alpha}}\mathcal{M}\twoheadrightarrow\mathcal{M}$$

et on en déduit

$$\mathrm{car}_F(\mathcal{M})\subset\pi^{-1}\mathrm{car}_{F|\mathbb{C}^p}V_{\boldsymbol{\alpha}}\mathcal{M}.$$

Ainsi la relation (4.17) implique

$$\mathrm{car}_F(\mathcal{M})\cap SS(\mathcal{F})\subset T^*_XX$$

et le théorème 1.2.19 assure que $\mathscr{H}^k F_*(\mathcal{M}\otimes\mathcal{F})$ est $\mathscr{D}_{Y\times\mathbb{C}^p}$-cohérent.

On définit une V-multifiltration de $\mathscr{H}^k F_*(\mathcal{M}\otimes\mathcal{F})$ de la manière suivante :

$$U_{\boldsymbol{\alpha}}\mathscr{H}^k F_*(\mathcal{M}\otimes\mathcal{F}):=\mathrm{image}[\mathscr{H}^k F_*(V_{\boldsymbol{\alpha}}\mathcal{M}\otimes\mathcal{F})\to\mathscr{H}^k F_*(\mathcal{M}\otimes\mathcal{F})]. \tag{4.20}$$

On va montrer que le morphisme naturel

$$\mathscr{H}^k F_*(V_{\boldsymbol{\alpha}}\mathcal{M}\otimes\mathcal{F})\to\mathscr{H}^k F_*(\mathcal{M}\otimes\mathcal{F})$$

est une injection, puis que la V-multifiltration (4.20) est une bonne V-multifiltration et qu'elle vérifie les propriétés de la V-multifiltration de Malgrange-Kashiwara. Ceci impliquera que le couple $\big((t_1,...,t_p),\mathrm{car}(\mathscr{H}^k F_*(\mathcal{M}\otimes\mathcal{F}))\big)$ est sans pente et fournira l'isomorphisme naturel (4.18). Enfin on construira l'isomorphisme (4.19).

Injectivité :

Montrons que le morphisme naturel

$$\mathscr{H}^k F_*(V_{\boldsymbol{\alpha}}\mathcal{M}\otimes\mathcal{F})\to\mathscr{H}^k F_*(\mathcal{M}\otimes\mathcal{F})$$

est une injection. On va montrer ceci par récurrence sur l'entier p en utilisant la propriété 7.5.8 de [MS02] pour $p=1$. On va montrer que les deux morphismes suivants sont des injections

$$\mathscr{H}^k F_*(V_{\boldsymbol{\alpha}}\mathcal{M}\otimes\mathcal{F})\underset{(1)}{\to}\mathscr{H}^k F_*(V^{\boldsymbol{H}_{2,...,p}}_{\alpha_2,...,\alpha_p}\mathcal{M}\otimes\mathcal{F})\underset{(2)}{\to}\mathscr{H}^k F_*(\mathcal{M}\otimes\mathcal{F}).$$

où $V^{\boldsymbol{H}_{2,...,p}}_{\alpha_2,...,\alpha_p}\mathcal{M}$ est la V-multifiltration de Malgrange-Kashiwara associée aux $p-1$ fonctions $t_2,...,t_p$ et le morphisme (1) découle de l'égalité $V_{\boldsymbol{\alpha}}\mathcal{M}=V^{H_1}_{\alpha_1}(V^{\boldsymbol{H}_{2,...,p}}_{\alpha_2,...,\alpha_p}\mathcal{M})$. Notons $\mathcal{N}^\bullet:=F_*(V^{\boldsymbol{H}_{2,...,p}}_{\alpha_2,...,\alpha_p}\mathcal{M}\otimes\mathcal{F})$ muni de la V-filtration $U_{\alpha_1}\mathcal{N}^\bullet:=F_*(V_{\boldsymbol{\alpha}}\mathcal{M}\otimes\mathcal{F})$ relativement à l'hyperplan $\{t_1=0\}$. Pour considérer $U_{\alpha_1}\mathcal{N}^\bullet$ comme un sous-objet de $\mathcal{N}^\bullet$ on utilise ici une définition du foncteur F_* avec des résolutions

explicites données dans [MS02] définition 4.3.3, $F_*\mathcal{M}$ est le complexe simple associé au complexe double
$$F_*\mathcal{M} := F_*\mathrm{God}^\bullet\left(\mathcal{M} \otimes_{\mathscr{D}_{X\times\mathbb{C}^p}} \mathrm{Sp}^\bullet_{X\times\mathbb{C}^p\to Y\times\mathbb{C}^p}(\mathscr{D}_{X\times\mathbb{C}^p})\right).$$
Le morphisme (1) se réécrit
$$\mathscr{H}^k(U_{\alpha_1}\mathcal{N}^\bullet) \underset{(1)}{\to} \mathscr{H}^k(\mathcal{N}^\bullet).$$
Vérifions les trois hypothèses de la propriété 7.5.8 de [MS02] :

1. L'hypothèse sans pente assure que $\mathrm{gr}^U\mathcal{N}^\bullet$ est monodromique.
2. Par définition de la V-multifiltration de Malgrange-Kashiwara, pour $\alpha_1 < 0$ la multiplication à gauche par t_1 induit un isomorphisme $t_1 : U_{\alpha_1}\mathcal{N}^j \xrightarrow{\sim} U_{\alpha_1-1}\mathcal{N}^j$ pour tout j.
3. La remarque 4.3.4(4) de [MS02] assure que pour $k > 2\dim X+p$, pour tout α_1, $\mathscr{H}^k(U_{\boldsymbol{\alpha}}\mathcal{N}^\bullet) = 0$.

Ainsi le morphisme (1) est injectif. On applique l'hypothèse de récurrence pour montrer que le morphisme (2) est une injection. Le morphisme naturel
$$\mathscr{H}^kF_*(V_{\boldsymbol{\alpha}}\mathcal{M}\otimes\mathcal{F}) \to \mathscr{H}^kF_*(\mathcal{M}\otimes\mathcal{F}) \tag{4.21}$$
est bien une injection.

Propriétés de bonne V-multifiltration :

La suite exacte courte pour $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{C}^p$
$$0 \to V_{\boldsymbol{\alpha}-\mathbf{1}_i}\mathcal{M} \to V_{\boldsymbol{\alpha}}\mathcal{M} \to V_{\boldsymbol{\alpha}}\mathcal{M}/V_{\boldsymbol{\alpha}-\mathbf{1}_i}\mathcal{M} \to 0$$
implique que
$$\mathrm{car}_{F|\mathbb{C}^p}V_{\boldsymbol{\alpha}}\mathcal{M} = \mathrm{car}_{F|\mathbb{C}^p}V_{\boldsymbol{\alpha}-\mathbf{1}_i}\mathcal{M} \cup \mathrm{car}_{F|\mathbb{C}^p}\left(V_{\boldsymbol{\alpha}}\mathcal{M}/V_{\boldsymbol{\alpha}-\mathbf{1}_i}\mathcal{M}\right).$$
On considère de plus l'isomorphisme de multiplication par ∂_{t_i} pour $\alpha_i > -1$
$$\partial_{t_i} : V_{\boldsymbol{\alpha}}\mathcal{M}/V_{\boldsymbol{\alpha}-\mathbf{1}_i}\mathcal{M} \xrightarrow{\sim} V_{\boldsymbol{\alpha}+\mathbf{1}_i}\mathcal{M}/V_{\boldsymbol{\alpha}}\mathcal{M}$$
qui induit un isomorphisme des variétés caractéristiques relatives. On observe ainsi que pour $\boldsymbol{\alpha}$ suffisamment grand on a, pour tout $\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{C}^p$
$$\mathrm{car}_{F|\mathbb{C}^p}V_{\boldsymbol{\beta}}\mathcal{M} \subset \mathrm{car}_{F|\mathbb{C}^p}V_{\boldsymbol{\alpha}}\mathcal{M}. \tag{4.22}$$

Montrons que la V-multifiltration (4.20) est une bonne V-multifiltration, il faut montrer que pour tout $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{C}^p$ la V-multifiltration, indicée par $\mathbb{Z}^p$, $U_{\boldsymbol{\alpha}+\bullet}(\mathscr{H}^kF_*(\mathcal{M}\otimes\mathcal{F}))$ est bonne. Pour alléger les notations on traite le cas $\boldsymbol{\alpha} = 0$. La propriété d'injectivité du morphisme (4.21) fournit l'isomorphisme
$$\mathscr{H}^kF_*(V_{\boldsymbol{k}}\mathcal{M}\otimes\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} U_{\boldsymbol{k}}(\mathscr{H}^kF_*(\mathcal{M}\otimes\mathcal{F})).$$
Les hypothèses du théorème et l'inclusion (4.22) permettent d'appliquer le théorème 1.2.19 à $V_{\boldsymbol{k}}\mathcal{M}$ et $\mathcal{F}$ et de déduire que $\mathscr{H}^kF_*(V_{\boldsymbol{k}}\mathcal{M}\otimes\mathcal{F})$ est $\mathscr{D}_{Y\times\mathbb{C}^p/\mathbb{C}^p}$-cohérent ainsi que $U_{\boldsymbol{k}}(\mathscr{H}^kF_*(\mathcal{M}\otimes\mathcal{F}))$. Il découle facilement que $U_{\boldsymbol{k}}(\mathscr{H}^kF_*(\mathcal{M}\otimes\mathcal{F}))$ est $V_{\mathbf{0}}\mathscr{D}_{Y\times\mathbb{C}^p}$-cohérent.

Notons que, pour tout $1 \leqslant i \leqslant p$ et $\boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}^p$ vérifiant $k_i \leqslant 1$, l'isomorphisme de multiplication par t_i
$$t_i : V_{\boldsymbol{k}}\mathcal{M} \xrightarrow{\sim} V_{\boldsymbol{k}-\mathbf{1}_i}\mathcal{M}$$

induit un isomorphisme

$$t_i : U_{\boldsymbol{k}}(\mathscr{H}^k F_*(\mathcal{M} \otimes \mathcal{F})) \xrightarrow{\sim} U_{\boldsymbol{k}-\mathbf{1}_i}(\mathscr{H}^k F_*(\mathcal{M} \otimes \mathcal{F})). \tag{4.23}$$

considérons la suite exacte courte

$$0 \to V_{\boldsymbol{k}-\mathbf{1}_i}\mathcal{M} \otimes \mathcal{F} \to V_{\boldsymbol{k}}\mathcal{M} \otimes \mathcal{F} \to V_{\boldsymbol{k}}\mathcal{M}/V_{\boldsymbol{k}-\mathbf{1}_i}\mathcal{M} \otimes \mathcal{F} \to 0$$

et appliquons le foncteur F_*. On a la suite exacte longue associée,

$$\begin{aligned} ... \to \mathscr{H}^k F_*(V_{\boldsymbol{k}-\mathbf{1}_i}\mathcal{M} \otimes \mathcal{F}) \to \mathscr{H}^k F_*(V_{\boldsymbol{k}}\mathcal{M} \otimes \mathcal{F}) \to \mathscr{H}^k F_*(V_{\boldsymbol{k}}\mathcal{M}/V_{\boldsymbol{k}-\mathbf{1}_i}\mathcal{M} \otimes \mathcal{F}) \to \\ \mathscr{H}^{k+1} F_*(V_{\boldsymbol{k}-\mathbf{1}_i}\mathcal{M} \otimes \mathcal{F}) \to \mathscr{H}^{k+1} F_*(V_{\boldsymbol{k}}\mathcal{M} \otimes \mathcal{F}) \to ... \end{aligned}$$

D'après (4.21) le premier morphisme et le dernier morphisme sont injectifs, on a donc la suite exacte courte

$$0 \to U_{\boldsymbol{k}-\mathbf{1}_i}\mathscr{H}^k F_*(\mathcal{M} \otimes \mathcal{F}) \to U_{\boldsymbol{k}}\mathscr{H}^k F_*(\mathcal{M} \otimes \mathcal{F}) \to \mathscr{H}^k F_*(V_{\boldsymbol{k}}\mathcal{M}/V_{\boldsymbol{k}-\mathbf{1}_i}\mathcal{M} \otimes \mathcal{F}) \to 0.$$

Considérons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & U_{\boldsymbol{k}-\mathbf{1}_i}\mathscr{H}^k F_*(\mathcal{M} \otimes \mathcal{F}) \arrow[r] \arrow[d, "\partial_{t_i}\cdot"] & U_{\boldsymbol{k}}\mathscr{H}^k F_*(\mathcal{M} \otimes \mathcal{F}) \arrow[r] \arrow[d, "\partial_{t_i}\cdot"] & \mathscr{H}^k F_*(V_{\boldsymbol{k}}\mathcal{M}/V_{\boldsymbol{k}-\mathbf{1}_i}\mathcal{M} \otimes \mathcal{F}) \arrow[r] \arrow[d, "\partial_{t_i}\cdot"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & U_{\boldsymbol{k}}\mathscr{H}^k F_*(\mathcal{M} \otimes \mathcal{F}) \arrow[r] & U_{\boldsymbol{k}+\mathbf{1}_i}\mathscr{H}^k F_*(\mathcal{M} \otimes \mathcal{F}) \arrow[r] & \mathscr{H}^k F_*(V_{\boldsymbol{k}+\mathbf{1}_i}\mathcal{M}/V_{\boldsymbol{k}}\mathcal{M} \otimes \mathcal{F}) \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

Pour $k_i \geqslant 0$, d'après les propriétés de la V-multifiltration de Malgrange-Kashiwara, la troisième flèche verticale du diagramme est un isomorphisme. En utilisant le lemme du serpent on déduit que

$$U_{\boldsymbol{k}+\mathbf{1}_i}\mathscr{H}^k F_*(\mathcal{M} \otimes \mathcal{F}) = U_{\boldsymbol{k}}\mathscr{H}^k F_*(\mathcal{M} \otimes \mathcal{F}) + \partial_{t_i} U_{\boldsymbol{k}}\mathscr{H}^k F_*(\mathcal{M} \otimes \mathcal{F}).$$

Ce résultat ainsi que l'isomorphisme (4.23) donnent la propriété de bonne V-multifiltration de

$$U_{\boldsymbol{k}}\mathscr{H}^k F_*(\mathcal{M} \otimes \mathcal{F}).$$

V-multifiltration de Malgrange-Kashiwara :

Montrons que la bonne V-multifiltration $U_\bullet\mathscr{H}^k F_*(\mathcal{M}\otimes\mathcal{F})$ est la V-multifiltration de Malgrange-Kashiwara. Soit $(y,t) \in Y \times \mathbb{C}^p$ et soit $1 \leqslant i \leqslant p$, on va trouver un polynôme $b_i(s) \in \mathbb{C}[s]$ vérifiant pour tout $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{C}^p$, $b_i(E_i + \alpha_i)(U_{\boldsymbol{\alpha}}\mathscr{H}^k F_*(\mathcal{M} \otimes \mathcal{F}))_{(y,t)} \subset (U_{\boldsymbol{\alpha}-\mathbf{1}_i}\mathscr{H}^k F_*(\mathcal{M} \otimes \mathcal{F}))_{(y,t)}$. Soit $x \in f^{-1}(y)$, par définition de la V-multifiltration de Malgrange-Kashiwara il existe un voisinage ouvert U de (x,t) et un polynôme $b_i^x(s) \in \mathbb{C}[s]$ vérifiant pour tout $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{C}^p$, $b_i^x(E_i + \alpha_i)V_{\boldsymbol{\alpha}}\mathcal{M}|_U \subset V_{\boldsymbol{\alpha}-\mathbf{1}_i}\mathcal{M}|_U$ et dont les racines sont dans l'intervalle $[-1, 0[$. L'application F étant propre sur $\mathrm{supp}(\mathcal{M}) \cap \mathrm{supp}(\mathcal{F})$, $f^{-1}(y) \cap \mathrm{supp}\mathcal{M} \cap \mathrm{supp}(\mathcal{F})$ est compacte, il existe donc un ensemble fini J, des points $x_j \in f^{-1}(y)$ pour tout $j \in I$ et un voisinage ouvert V de $f^{-1}(y) \times \{t\}$ tels que

$$\prod_{j\in J} b_i^{x_j}(E_i + \alpha_i)V_{\boldsymbol{\alpha}}\mathcal{M}|_V \subset V_{\boldsymbol{\alpha}-\mathbf{1}_i}\mathcal{M}|_V.$$

Par définition de l'image directe on a alors

$$\prod_{j\in J} b_i^{x_j}(E_i + \alpha_i)(U_{\boldsymbol{\alpha}}\mathscr{H}^k F_*(\mathcal{M} \otimes \mathcal{F}))_{(y,t)} \subset (U_{\boldsymbol{\alpha}-\mathbf{1}_i}\mathscr{H}^k F_*(\mathcal{M} \otimes \mathcal{F}))_{(y,t)}.$$

Les racines des polynômes $b_i^{x_j}(s)$ sont dans l'intervalle $[-1, 0[$. Ceci assure que $U_\bullet \mathscr{H}^k F_*(\mathcal{M} \otimes \mathcal{F})$ est la filtration de Malgrange-Kashiwara. Combiné avec la propriété d'injectivité, ceci donne l'isomorphisme naturel (4.18)

$$\mathscr{H}^k F_*(V_{\boldsymbol{\alpha}} \mathcal{M} \otimes \mathcal{F}) \simeq V_{\boldsymbol{\alpha}} \mathscr{H}^k F_*(\mathcal{M} \otimes \mathcal{F}).$$

Gradués :

On va commencer par montrer par récurrence que pour tout $1 \leqslant r \leqslant p$, si on note $I_r := \{1, ..., r\} \subset \{1, ..., p\}$ alors on a un isomorphisme

$$\mathscr{H}^k F_*(V_{<\boldsymbol{\alpha}_{I_r}, \boldsymbol{\alpha}_{I_r^c}} \mathcal{M} \otimes \mathcal{F}) \simeq V_{<\boldsymbol{\alpha}_{I_r}, \boldsymbol{\alpha}_{I_r^c}} \mathscr{H}^k F_*(\mathcal{M} \otimes \mathcal{F}). \tag{4.24}$$

L'isomorphisme (4.18) règle le cas $r = 1$. Supposons la propriété démontrée au rang r et considérons la suite courte

$$0 \to V_{<\boldsymbol{\alpha}_{I_r}, <\alpha_{r+1}, \boldsymbol{\alpha}_{I_{r+1}^c}} \to V_{<\boldsymbol{\alpha}_{I_r}, \alpha_{r+1}, \boldsymbol{\alpha}_{I_{r+1}^c}} \bigoplus V_{\boldsymbol{\alpha}_{I_r}, <\alpha_{r+1}, \boldsymbol{\alpha}_{I_{r+1}^c}} \to V_{<(\boldsymbol{\alpha}_{I_r}, \alpha_{r+1}), \boldsymbol{\alpha}_{I_{r+1}^c}} \to 0 \tag{4.25}$$

où l'on omet d'écrire $\mathcal{M} \otimes \mathcal{F}$ pour alléger les notations et où $< \alpha_{r+1}$ est le prédécesseur de α_{r+1}. On montre l'exactitude de cette suite en utilisant la compatibilité des V-filtrations de la proposition 2.1.12. On considère le p-hypercomplexe X correspondant à la compatibilité des sous-objets

$$\{V_{\alpha_1, ..., <\alpha_i, ..., \alpha_p}\}_{1 \leqslant i \leqslant p}.$$

Si on note $\boldsymbol{k}^r \in \{-1, 0, 1\}^p$ le multi-indice vérifiant $k_i^r = 1$ si $i \leqslant r$ et $k_i^r = 0$ sinon, l'exactitude de la suite (4.25) est équivalente à l'injectivité du morphisme

$$X^{\boldsymbol{k}^r - \mathbf{1}_{r+1}} \to X^{\boldsymbol{k}^r}.$$

On applique alors le foncteur $\mathscr{H}^k F_*$ à cette suite exacte, ce foncteur étant additif le premier morphisme reste injectif par hypothèse de récurrence. En observant la suite exacte longue associée au foncteur F_* et en utilisant l'hypothèse de récurrence on obtient la suite exacte courte

$$\begin{aligned} 0 \to V_{<\boldsymbol{\alpha}_{I_r}, <\alpha_{r+1}, \boldsymbol{\alpha}_{I_{r+1}^c}} \mathscr{H}^k F_*(\mathcal{M} \otimes \mathcal{F}) \to& \\ V_{<\boldsymbol{\alpha}_{I_r}, \alpha_{r+1}, \boldsymbol{\alpha}_{I_{r+1}^c}} \mathscr{H}^k F_*(\mathcal{M} \otimes \mathcal{F}) \bigoplus V_{\boldsymbol{\alpha}_{I_r}, <\alpha_{r+1}, \boldsymbol{\alpha}_{I_{r+1}^c}} \mathscr{H}^k F_*(\mathcal{M} \otimes \mathcal{F}) \to& \\ \mathscr{H}^k F_*(V_{<(\boldsymbol{\alpha}_{I_r}, \alpha_{r+1}), \boldsymbol{\alpha}_{I_{r+1}^c}} \mathcal{M} \otimes \mathcal{F}) \to 0.& \end{aligned}$$

Par propriété universelle on déduit l'isomorphisme

$$V_{<(\boldsymbol{\alpha}_{I_r}, \alpha_{r+1}), \boldsymbol{\alpha}_{I_{r+1}^c}} \mathscr{H}^k F_*(\mathcal{M} \otimes \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \mathscr{H}^k F_*(V_{<(\boldsymbol{\alpha}_{I_r}, \alpha_{r+1}), \boldsymbol{\alpha}_{I_{r+1}^c}} \mathcal{M} \otimes \mathcal{F}).$$

On a montré par récurrence l'existence de l'isomorphisme (4.24).

Construisons maintenant l'isomorphisme (4.19). On considère la suite exacte courte

$$0 \to V_{<\boldsymbol{\alpha}} \mathcal{M} \otimes \mathcal{F} \to V_{\boldsymbol{\alpha}} \mathcal{M} \otimes \mathcal{F} \to \mathrm{gr}_{\boldsymbol{\alpha}} \mathcal{M} \otimes \mathcal{F} \to 0$$

et appliquons le foncteur F_*. On a la suite exacte longue associée,

$$\begin{aligned} ... \to \mathscr{H}^k F_*(V_{<\boldsymbol{\alpha}} \mathcal{M} \otimes \mathcal{F}) \to \mathscr{H}^k F_*(V_{\boldsymbol{\alpha}} \mathcal{M} \otimes \mathcal{F}) \to \mathscr{H}^k F_*(\mathrm{gr}_{\boldsymbol{\alpha}} \mathcal{M} \otimes \mathcal{F}) \to& \\ \mathscr{H}^{k+1} F_*(V_{<\boldsymbol{\alpha}} \mathcal{M} \otimes \mathcal{F}) \to \mathscr{H}^{k+1} F_*(V_{\boldsymbol{\alpha}} \mathcal{M} \otimes \mathcal{F}) \to ...& \end{aligned}$$

D'après l'isomorphisme (4.24) cette suite est égale à la suite

$$... \to V_{<\boldsymbol{\alpha}}\mathscr{H}^kF_*(\mathcal{M}\otimes\mathcal{F}) \to V_{\boldsymbol{\alpha}}\mathscr{H}^kF_*(\mathcal{M}\otimes\mathcal{F}) \to \mathscr{H}^kF_*(\mathrm{gr}_{\boldsymbol{\alpha}}\mathcal{M}\otimes\mathcal{F}) \to V_{<\boldsymbol{\alpha}}\mathscr{H}^{k+1}F_*(\mathcal{M}\otimes\mathcal{F}) \to V_{\boldsymbol{\alpha}}\mathscr{H}^{k+1}F_*(\mathcal{M}\otimes\mathcal{F}) \to ...$$

Par définition de $V_{<\boldsymbol{\alpha}}$ et le premier morphisme et le dernier morphisme sont injectifs et on a donc la suite exacte courte

$$0 \to V_{<\boldsymbol{\alpha}}\mathscr{H}^kF_*(\mathcal{M}\otimes\mathcal{F}) \to V_{\boldsymbol{\alpha}}\mathscr{H}^kF_*(\mathcal{M}\otimes\mathcal{F}) \to \mathscr{H}^kF_*(\mathrm{gr}_{\boldsymbol{\alpha}}\mathcal{M}\otimes\mathcal{F}) \to 0.$$

La propriété universelle du conoyau fournit alors l'isomorphisme naturel (4.19)

$$\mathrm{gr}^V_{\boldsymbol{\alpha}}\mathscr{H}^kF_*(\mathcal{M}\otimes\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \mathscr{H}^kF_*(\mathrm{gr}^V_{\boldsymbol{\alpha}}\mathcal{M}\otimes\mathcal{F}).$$

□

Exemple 4.3.15.

1. Si $\mathcal{F}$ est le faisceau constant et si le morphisme F est propre on obtient que l'image directe par un morphisme propre commute à la V-multifiltration de Malgrange-Kashiwara.
2. Si $\mathcal{F}$ est le faisceau constant sur $\overline{B_\epsilon}\times D$, nul ailleurs et si $F : X\times D \to D$ est la projection, en suivant le théorème 4.3.11 on obtient

$$\mathscr{H}^k\overline{p}_{\epsilon*}V_{\boldsymbol{\alpha}}\mathcal{M} \simeq V_{\boldsymbol{\alpha}}\mathscr{H}^k\overline{p}_{\epsilon*}\mathcal{M}$$

et

$$\mathscr{H}^k\overline{p}_{\epsilon*}\mathrm{gr}_{\boldsymbol{\alpha}}\mathcal{M} \simeq \mathrm{gr}_{\boldsymbol{\alpha}}\mathscr{H}^k\overline{p}_{\epsilon*}\mathcal{M}.$$

Lemme 4.3.16. *Soit $\mathcal{M}$ un $\mathscr{D}_X$-module holonome régulier et $\mathcal{M}'$ l'image directe de $\mathcal{M}$ sur le graphe de f. Le morphisme naturel*

$$\mathbf{DR}_{X_0}(i^\#\mathcal{M}') \to \mathbf{DR}_{X_0}(i^\dagger\mathcal{M}')$$

est un isomorphisme.

Démonstration. Soit $x\in X$, on se place sur une carte locale de X au voisinage de x. On notera $\overline{p}_\epsilon$ la restriction de p à $\overline{B_\epsilon}\times D$ où $\overline{B_\epsilon}$ est la boule fermée de centre x et de rayon ϵ.

En raisonnant avec des coordonnées locales $(x_1,...,x_n,t_1,...,t_p)$ de $X\times D$ on observe que

$$\mathbf{DR}_{X_0}(i^\#\mathcal{M}') \simeq i^{-1}s(\mathrm{Cube}(\mathbf{DR}_{X\times D/D}V_\bullet\mathcal{M}')), \tag{4.26}$$

$$\mathbf{DR}_{X_0}(i^\dagger\mathcal{M}') \simeq i^{-1}s(\mathrm{Cube}(\mathbf{DR}_{X\times D/D}\mathrm{gr}_\bullet\mathcal{M}')). \tag{4.27}$$

Dans la partie de droite on applique le foncteur Cube(.) à des $p^{-1}\mathscr{D}_D$-modules en considérant les morphismes de multiplication par ∂_i.

On a alors le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
\left(\mathscr{H}^k\mathbf{DR}_{X_0}(i^\#\mathcal{M}')\right)_x \arrow[r] \arrow[d, "(1)"', "\cong"] & \left(\mathscr{H}^k\mathbf{DR}_{X_0}(i^\dagger\mathcal{M}')\right)_x \arrow[d, "\cong"] \\
\lim\limits_{\epsilon\to0}\mathscr{H}^k\mathbf{R}\Gamma\left(\overline{B_\epsilon}, i^{-1}s(\mathrm{Cube}(\mathbf{DR}_{X\times D/D}V_\bullet\mathcal{M}'))\right) \arrow[r] \arrow[d, "(2)"', "\cong"] & \lim\limits_{\epsilon\to0}\mathscr{H}^k\mathbf{R}\Gamma\left(\overline{B_\epsilon}, i^{-1}s(\mathrm{Cube}(\mathbf{DR}_{X\times D/D}\mathrm{gr}_\bullet\mathcal{M}'))\right) \arrow[d, "\cong"] \\
\lim\limits_{\epsilon\to0}\mathscr{H}^k\left(i^{-1}\mathbf{R}\overline{p}_{\epsilon*}s(\mathrm{Cube}(\mathbf{DR}_{X\times D/D}V_\bullet\mathcal{M}'))\right) \arrow[r] \arrow[d, "(3)"', "\cong"] & \lim\limits_{\epsilon\to0}\mathscr{H}^k\left(i^{-1}\mathbf{R}\overline{p}_{\epsilon*}s(\mathrm{Cube}(\mathbf{DR}_{X\times D/D}\mathrm{gr}_\bullet\mathcal{M}'))\right) \arrow[d, "\cong"] \\
\lim\limits_{\epsilon\to0}\mathscr{H}^k\left(i^{-1}s(\mathrm{Cube}(\overline{p}_{\epsilon*}V_\bullet\mathcal{M}'))\right) \arrow[r, "(5)"'] & \lim\limits_{\epsilon\to0}\mathscr{H}^k\left(i^{-1}s(\mathrm{Cube}(\overline{p}_{\epsilon*}\mathrm{gr}_\bullet\mathcal{M}'))\right)
\end{tikzcd}$$

– L'isomorphisme (1) se déduit de (4.26) et (4.27) par fonctorialité.
– L'isomorphisme (2) se déduit de la formule de changement de base propre appliquée au diagramme cartésien

$$\begin{tikzcd} \overline{B_\epsilon} \times \{0\} \arrow[r, "i"] \arrow[d] & \overline{B_\epsilon} \times D \arrow[d, "\overline{p}_\epsilon"] \\ \{0\} \arrow[r, "i"] & D. \end{tikzcd}$$

– L'isomorphisme (3) se déduit de la définition de l'image directe au sens des $\mathscr{D}$-modules appliquée à une projection. On a également fait commuter $s(\mathrm{Cube}(.))$ et $\mathbf{R}\overline{p}_{\epsilon *}$ car le foncteur Cube est appliqué à des $p^{-1}\mathscr{D}_D$-modules.

Pour montrer que le morphisme (5) est un isomorphisme on considère les complexes doubles obtenus en appliquant $i^{-1}s(\mathrm{Cube}(.))$ en chaque degré aux familles de complexes $\overline{p}_{\epsilon *}(V_\bullet \mathcal{M}')$ et $\overline{p}_{\epsilon *}(\mathrm{gr}_\bullet \mathcal{M}')$. Les suites spectrales associées à ces complexes doubles permettent de calculer $\mathscr{H}^k\left(i^{-1}s(\mathrm{Cube}(\overline{p}_{\epsilon *}V_\bullet \mathcal{M}'))\right)$ à partir des $\mathscr{H}^l\left(i^{-1}s(\mathrm{Cube}(\mathscr{H}^m\overline{p}_{\epsilon *}V_\bullet \mathcal{M}'))\right)$ pour $l+m=n$ et de la même manière $\mathscr{H}^k\left(i^{-1}s(\mathrm{Cube}(\overline{p}_{\epsilon *}\mathrm{gr}_\bullet \mathcal{M}'))\right)$ à partir des $\mathscr{H}^l\left(i^{-1}s(\mathrm{Cube}(\mathscr{H}^m\overline{p}_{\epsilon *}\mathrm{gr}_\bullet \mathcal{M}'))\right)$ pour $l+m=n$.

L'exemple 4.3.15 montre que pour tout $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{C}^p$, $\mathscr{H}^k\overline{p}_{\epsilon *}V_{\boldsymbol{\alpha}}\mathcal{M} \simeq V_{\boldsymbol{\alpha}}\mathscr{H}^k\overline{p}_{\epsilon *}\mathcal{M}$ et $\mathscr{H}^k\overline{p}_{\epsilon *}\mathrm{gr}_{\boldsymbol{\alpha}}\mathcal{M} \simeq \mathrm{gr}_{\boldsymbol{\alpha}}\mathscr{H}^k\overline{p}_{\epsilon *}\mathcal{M}$ donc pour tout $(l,m) \in \mathbb{Z}^2$

$$\begin{aligned} \mathscr{H}^l\left(i^{-1}s(\mathrm{Cube}(\mathscr{H}^m\overline{p}_{\epsilon *}V_\bullet \mathcal{M}'))\right) &= \mathscr{H}^l\left(i^{-1}s(\mathrm{Cube}(V_\bullet \mathscr{H}^m\overline{p}_{\epsilon *}\mathcal{M}'))\right) \\ &= \mathscr{H}^l\left(i^{\dagger}\mathscr{H}^m\overline{p}_{\epsilon *}\mathcal{M}'\right) \end{aligned}$$

et de manière analogue

$$\mathscr{H}^l\left(i^{-1}s(\mathrm{Cube}(\mathscr{H}^m\overline{p}_{\epsilon *}\mathrm{gr}_\bullet \mathcal{M}'))\right) = \mathscr{H}^l\left(i^{\#}\mathscr{H}^m\overline{p}_{\epsilon *}\mathcal{M}'\right).$$

D'autre part les hypothèses du lemme que l'on est en train de démontrer et le théorème 4.3.11 assurent que pour ϵ suffisamment petit, pour tout $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{C}^p$, $\mathscr{H}^k\overline{p}_{\epsilon *}(V_{\boldsymbol{\alpha}}\mathcal{M}') = V_{\boldsymbol{\alpha}}\mathscr{H}^k\overline{p}_{\epsilon *}(\mathcal{M}')$ est un complexe à cohomologie $\mathcal{O}_D$-cohérent. On est donc dans le cas d'une connexion méromorphe à singularité régulière que l'on a traité précédemment. On a alors pour tout $(l,m) \in \mathbb{Z}^2$ un quasi-isomorphisme

$$\mathscr{H}^l i^{\#}\mathscr{H}^m\overline{p}_{\epsilon *}(\mathcal{M}') \xrightarrow{\sim} \mathscr{H}^l i^{\dagger}\mathscr{H}^m\overline{p}_{\epsilon *}(\mathcal{M}').$$

On en déduit que le morphisme (5) est un isomorphisme.

Finalement la première ligne du diagramme est un isomorphisme pour tout $x \in X$ et tout $k \in \mathbb{Z}$. Le morphisme

$$\mathbf{DR}_{X_0}(i^{\#}\mathcal{M}') \to \mathbf{DR}_{X_0}(i^{\dagger}\mathcal{M}')$$

est donc un isomorphisme. □

Lemme 4.3.17. *Soit $\mathcal{M}$ un $\mathscr{D}_X$-module holonome régulier et $\mathcal{M}'$ l'image directe de $\mathcal{M}$ sur le graphe de f. Les morphismes naturels*

$$\bigoplus_{\boldsymbol{\alpha} \in [-1,0[^p} \mathbf{DR}_{X_0}(i^{\#}\mathcal{M}'_{\boldsymbol{\alpha}}) \to \bigoplus_{\boldsymbol{\alpha} \in [-1,0[^p} i^{-1}\mathbf{DR}_{X\times D}(\mathcal{M}'_{\boldsymbol{\alpha}}) \to \Psi_p \mathbf{DR}_{X\times D}(\mathcal{M}').$$

sont des isomorphismes.

Démonstration. On raisonne de la même manière que pour le lemme précédent. Soit $x \in X$, par les même arguments que précédemment on obtient les diagrammes commutatifs suivants :

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{H}^k\left(\mathbf{DR}_{X_0}(i^{\#}\mathcal{M}'_{\boldsymbol{\alpha}})\right)_x \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & i^{-1}\mathscr{H}^k\left(\mathbf{DR}_{X\times D}(\mathcal{M}'_{\boldsymbol{\alpha}})\right)_x \arrow[d, "\simeq"] \\
\lim\limits_{\epsilon\to 0}\mathscr{H}^k\left(i^{-1}s(\mathrm{Cube}(\overline{p}_{\epsilon *}\mathrm{gr}_{\bullet}\mathcal{M}'_{\boldsymbol{\alpha}}))\right) \arrow[r, "\sim", "(a)"'] & \lim\limits_{\epsilon\to 0}\mathscr{H}^k\left(\mathbf{DR}_D\overline{p}_{\epsilon *}(\mathcal{M}'_{\boldsymbol{\alpha}})\right)
\end{tikzcd}$$

et

$$\begin{tikzcd}
\bigoplus\limits_{\boldsymbol{\alpha}\in[-1,0[^p} i^{-1}\mathscr{H}^k\left(\mathbf{DR}_{X\times D}(\mathcal{M}'_{\boldsymbol{\alpha}})\right)_x \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & \mathscr{H}^k\left(\Psi_p\mathbf{DR}_{X\times D}(\mathcal{M}')\right)_x \arrow[d, "\simeq"] \\
\bigoplus\limits_{\boldsymbol{\alpha}\in[-1,0[^p} \lim\limits_{\epsilon\to 0}\mathscr{H}^k\left(\mathbf{DR}_D\overline{p}_{\epsilon *}(\mathcal{M}'_{\boldsymbol{\alpha}})\right) \arrow[r, "\sim", "(b)"'] & \lim\limits_{\epsilon\to 0}\mathscr{H}^k\left(\Psi_{\mathrm{id}_D}\mathbf{DR}_D\overline{p}_{\epsilon *}(\mathcal{M}')\right)
\end{tikzcd}$$

Comme dans la démonstration du lemme précédent on considère les suites spectrales associées aux complexes doubles en jeu. Ceci qui permet de se ramener au cas d'une connexion méromorphe à singularité régulière $\mathscr{H}^k\overline{p}_{\epsilon *}(\mathcal{M}')$ et d'en déduire que les morphismes (a) et (b) sont des isomorphismes. On en déduit que les morphismes

$$\mathscr{H}^k\left(\mathbf{DR}_{X_0}(i^{\#}\mathcal{M}'_{\boldsymbol{\alpha}})\right)_x \to \mathscr{H}^k\left(\mathbf{DR}_{X\times D}(\mathcal{M}'_{\boldsymbol{\alpha}})\right)_x$$

et

$$\bigoplus_{\boldsymbol{\alpha}\in[-1,0[^p} i^{-1}\mathscr{H}^k\left(\mathbf{DR}_{X\times D}(\mathcal{M}'_{\boldsymbol{\alpha}})\right)_x \to \mathscr{H}^k\left(\Psi_p\mathbf{DR}_{X\times D}(\mathcal{M}')\right)_x$$

sont des isomorphismes pour tout $x \in X$ et tout $k \in \mathbb{Z}$. Finalement les morphismes naturels

$$\bigoplus_{\boldsymbol{\alpha}\in[-1,0[^p} \mathbf{DR}_{X_0}(i^{\#}\mathcal{M}'_{\boldsymbol{\alpha}}) \to \bigoplus_{\boldsymbol{\alpha}\in[-1,0[^p} i^{-1}\mathbf{DR}_{X\times D}(\mathcal{M}'_{\boldsymbol{\alpha}}) \to \Psi_p\mathbf{DR}_{X\times D}(\mathcal{M}').$$

sont des isomorphismes.

□

On combine alors l'isomorphisme naturel (4.16) et les isomorphismes naturels des lemmes 4.3.16 et 4.3.17 pour obtenir un isomorphisme naturel

$$\mathbf{DR}_{X_0}\bigoplus_{\boldsymbol{\alpha}\in[-1,0[^p}\mathrm{gr}_{\boldsymbol{\alpha}}(\mathcal{M}') \cong \Psi_p\mathbf{DR}_{X\times D}(\mathcal{M}')$$

ce qui conclut la démonstration du théorème 4.3.12.

Soit $I = \{1,...,r\} \subset \{1,...,p\}$, $p_I = (t_1,...,t_r)$ et $p_{I^c} = (t_{r+1},...,t_p)$. On note $\mathrm{gr}_{\bullet}^{I^c}\mathcal{M}'$ le gradué de la V-multifiltration de Malgrange-Kashiwara relative aux fonctions $(t_{r+1},...,t_p)$. La proposition 2.2.3 et le théorème 2.3.5 assurent que si le couple $((t_1,...,t_p),\mathrm{car}(\mathcal{M}'))$ est sans pente alors $(p_{I|p_{I^c}^{-1}(0)},\mathrm{car}(\mathrm{gr}^{I^c}_{\boldsymbol{\alpha}_{I^c}}\mathcal{M}'))$ est sans pente. Dans le cas sans pente on peut donc appliquer l'isomorphisme de comparaison pour les fonctions $t_1,...,t_p$ l'une après l'autre. Suivant le chapitre 3 on en déduit que si le couple $((t_1,...,t_p),\mathrm{car}(\mathcal{M}))$ est sans pente alors l'isomorphisme

$$\mathbf{DR}_{X_0}\bigoplus_{\alpha_p\in[-1,0[}\mathrm{gr}^{\{p\}}_{\alpha_p}\left(...\bigoplus_{\alpha_2\in[-1,0[}\mathrm{gr}^{\{2\}}_{\alpha_2}\left(\bigoplus_{\alpha_1\in[-1,0[}\mathrm{gr}^{\{1\}}_{\alpha_1}\mathcal{M}'\right)\right) \simeq \Psi_{t_p}\left(...\Psi_{t_2}\left(\Psi_{t_1}\mathbf{DR}_X(\mathcal{M}')\right)\right)$$

ne dépend pas de l'ordre des indices $\{1,...,p\}$.

Chapitre 5

Théorème de commutativité pour les cycles évanescents

Dans ce chapitre, on étudie la commutativité des foncteurs cycles évanescents appliqués aux faisceaux pervers dans le cas sans pente. L'idée est d'utiliser les résultats de commutativité des cycles proches et des restrictions des propositions 2.4.2 et 2.4.3 et d'utiliser les triangles distingués des cycles proches/évanescents. Néanmoins, pour faire fonctionner cette stratégie, on a besoin de fonctorialité, c'est pourquoi on utilisera l'approche de [KS94, 8.6] qui permet de définir les cycles évanescents de manière fonctorielle.

5.1 Cas d'une fonction

On rappelle ici l'approche de [KS94, 8.6] pour définir les cycles proches et les cycles évanescents. Soit $f : X \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Considérons le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} f^{-1}(0) \arrow[r, hook, "i"] & X \arrow[d, "f"] \arrow[dr, phantom, "\square"] & \widetilde{X^*} \arrow[l, "\tilde{p}"'] \arrow[d, "\tilde{f}"] \\ & \mathbb{C} & \widetilde{\mathbb{C}^*} \arrow[l, "p"'] \end{tikzcd} .$$

On note A_Y le faisceau constant sur Y. On définit les complexes de $D^b_c(\mathbb{C})$ suivants :

$$\begin{array}{ccccccccc} I & : & 0 & \to & 0 & \to & A_{\mathbb{C}} & \to & 0 \\ N & : & 0 & \to & p_! A_{\widetilde{\mathbb{C}^*}} & \to & 0 & \to & 0 \\ V & : & 0 & \to & p_! A_{\widetilde{\mathbb{C}^*}} & \to & A_{\mathbb{C}} & \to & 0 \\ & & & & \bullet & & & & \end{array} \tag{5.1}$$

où le symbole $\bullet$ désigne le degré zéro. En suivant [KS94, 8.6], on peut utiliser ces complexes pour définir les cycles proches et les cycles évanescent de la manière suivante. Soit $\mathcal{F} \in D^b_c(X)$, on a

$$\begin{array}{rcl} \Psi_f(\mathcal{F}) & \simeq & i^{-1}\mathbf{R}\mathscr{H}om(f^{-1}N, \mathcal{F}) \\ \Phi_f(\mathcal{F}) & \simeq & i^{-1}\mathbf{R}\mathscr{H}om(f^{-1}V, \mathcal{F}) \\ i^{-1}(\mathcal{F})[1] & \simeq & i^{-1}\mathbf{R}\mathscr{H}om(f^{-1}I, \mathcal{F}). \end{array}$$

On a une suite exacte naturelle de complexes

$$0 \to I \to V \to N \to 0 \tag{5.2}$$

qui induit le triangle distingué

$$i^{-1}(\mathcal{F}) \to \Psi_f(\mathcal{F}) \to \Phi_f(\mathcal{F}) \underset{+1}{\to} . \tag{5.3}$$

5.2 Cas de deux fonctions

Soient deux fonctions holomorphes $f_1, f_2 : X \to \mathbb{C}$. On va définir les cycles proches et les cycles évanescents associés à la fonction $\boldsymbol{f} = (f_1, f_2) : X \to \mathbb{C}^2$. On considère le diagramme suivant pour $j = 1, 2$:

$$\begin{tikzcd}
{f_j}^{-1}(0) \arrow[r, hook, "i_j"] & X \arrow[d, "f_j"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & \widetilde{X^*} \arrow[l, "\widetilde{p_j}"'] \arrow[d, "\widetilde{f_j}"] \\
& \mathbb{C} & \widetilde{\mathbb{C}^*} \arrow[l, "p_j"']
\end{tikzcd} .$$

Avec les définitions (5.1), on définit les complexes de $D_c^b(\mathbb{C}^2)$ suivants :

$$\begin{array}{rcl} N & := & N_1 \boxtimes N_2 \\ V & := & V_1 \boxtimes V_2 \end{array}$$

où $\boxtimes$ est défini à partir des deux projections de $\mathbb{C}^2$ dans $\mathbb{C}$. On considère le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
\boldsymbol{f}^{-1}(0) \arrow[r, hook, "i"] & X \arrow[d, "\boldsymbol{f}"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & \widetilde{X^*} \arrow[l, "\widetilde{p}"'] \arrow[d, "\widetilde{\boldsymbol{f}}"] \\
& \mathbb{C}^2 & \widetilde{(\mathbb{C}^*)^2} \arrow[l, "p"']
\end{tikzcd} .$$

On définit alors

$$\begin{array}{rcl} \Psi_{\boldsymbol{f}}(\mathcal{F}) & := & i^{-1}\mathbf{R}\,\mathscr{H}om(\boldsymbol{f}^{-1}N, \mathcal{F}) \\ \Phi_{\boldsymbol{f}}(\mathcal{F}) & := & i^{-1}\mathbf{R}\,\mathscr{H}om(\boldsymbol{f}^{-1}V, \mathcal{F}). \end{array}$$

On va montrer, comme dans [KS94, 8.6.2], que la définition de $\Psi_{\boldsymbol{f}}(\mathcal{F})$ coïncide avec la définition 2.4.1.

Lemme 5.2.1. *Il existe un isomorphisme $N \simeq p_! A_{\widetilde{(\mathbb{C}^*)^2}}$.*

Démonstration. Ces deux faisceaux sont faiblement constructibles relativement à la stratification $\mathbb{C}^2 = \{0\} \coprod (\mathbb{C}^* \times \{0\}) \coprod (\{0\} \times \mathbb{C}^*) \coprod (\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*)$.

– Si $x \in \{0\} \coprod (\mathbb{C}^* \times \{0\}) \coprod (\{0\} \times \mathbb{C}^*)$, $N_x \simeq \left(p_! A_{\widetilde{(\mathbb{C}^*)^2}}\right)_x = 0$.

– Si $x \in (\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*)$, $N_x \simeq \mathbb{C}^{(\mathbb{Z})} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^{(\mathbb{Z})}$ et $\left(p_! A_{\widetilde{(\mathbb{C}^*)^2}}\right)_x \simeq \mathbb{C}^{(\mathbb{Z}^2)}$.

L'isomorphisme

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^{(\mathbb{Z})} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^{(\mathbb{Z})} & \to & \mathbb{C}^{(\mathbb{Z}^2)} \\ (a_k)_{k\in\mathbb{Z}} \otimes (b_\ell)_{\ell\in\mathbb{Z}} & \mapsto & (a_k \cdot b_\ell)_{(k,\ell)\in\mathbb{Z}^2} \end{array}$$

ainsi que l'identification des monodromies permettent de conclure.

□

Proposition 5.2.2. *Les cycles proches de la définition 2.4.1 sont isomorphes à $\Psi_{\boldsymbol{f}}(\mathcal{F})$*

Démonstration.

$$\begin{array}{rcl}\Psi_{\boldsymbol{f}}(\mathcal{F}) & = & i^{-1}\mathbf{R}\mathscr{H}om(\boldsymbol{f}^{-1}N,\mathcal{F}) \\ & \simeq & i^{-1}\mathbf{R}\mathscr{H}om(\boldsymbol{f}^{-1}p_!A_{\widetilde{(\mathbb{C}^*)^2}},\mathcal{F}) \\ & \simeq & i^{-1}\mathbf{R}\mathscr{H}om(\widetilde{p}_!\widetilde{\boldsymbol{f}}^{-1}A_{\widetilde{(\mathbb{C}^*)^2}},\mathcal{F}) \\ & \simeq & i^{-1}\mathbf{R}\mathscr{H}om(\widetilde{p}^{-1}A_X,\widetilde{p}^{-1}\mathcal{F}) \\ & \simeq & i^{-1}\mathbf{R}\mathscr{H}om(A_X,\widetilde{p}_*\widetilde{p}^{-1}\mathcal{F}) \\ & \simeq & i^{-1}\widetilde{p}_*\widetilde{p}^{-1}\mathcal{F}.\end{array}$$

□

En utilisant les propositions 2.4.2 et 2.4.3 on va montrer que dans le cas *sans pente*

$$\Phi_{\boldsymbol{f}}(\mathcal{F}) \simeq \Phi_{f_1}\Phi_{f_2}(\mathcal{F}).$$

Considérons le diagramme de suites exactes courtes suivant :

$$\begin{tikzcd} N_1\boxtimes I_2 \arrow[r] & N_1\boxtimes V_2 \arrow[r] & N_1\boxtimes N_2 \\ V_1\boxtimes I_2 \arrow[r] \arrow[u] & V_1\boxtimes V_2 \arrow[r] \arrow[u] & V_1\boxtimes N_2 \arrow[u] \\ I_1\boxtimes I_2 \arrow[r] \arrow[u] & I_1\boxtimes V_2 \arrow[r] \arrow[u] & I_1\boxtimes N_2 \arrow[u] \end{tikzcd} \tag{5.4}$$

Soient $K_j = I_j, N_j$ ou V_j, pour $j = 1, 2$, on a

$$\begin{array}{rcl} i^{-1}\mathbf{R}\mathscr{H}om(\boldsymbol{f}^{-1}(K_1\boxtimes K_2),\mathcal{F}) & \overset{(a)}{=} & i^{-1}\mathbf{R}\mathscr{H}om(f_1^{-1}K_1\otimes f_2^{-1}K_2,\mathcal{F}) \\ & \overset{(b)}{=} & i^{-1}\mathbf{R}\mathscr{H}om(f_1^{-1}K_1,\mathbf{R}\mathscr{H}om(f_2^{-1}K_2,\mathcal{F}))\end{array}$$

où (a) vient de (1.3) et (b) de (1.2). On applique ensuite le morphisme (1.5), qui nous donne

$$i^{-1}\mathbf{R}\mathscr{H}om(f_1^{-1}K_1,\mathbf{R}\mathscr{H}om(f_2^{-1}K_2,\mathcal{F})) \to i_1^{-1}\mathbf{R}\mathscr{H}om(i_2^{-1}f_1^{-1}K_1, i_2^{-1}\mathbf{R}\mathscr{H}om(f_2^{-1}K_2,\mathcal{F})).$$

On obtient ainsi un morphisme

$$i^{-1}\mathbf{R}\mathscr{H}om(\boldsymbol{f}^{-1}(K_1\boxtimes K_2),\mathcal{F}) \to i_1^{-1}\mathbf{R}\mathscr{H}om(i_2^{-1}f_1^{-1}K_1, i_2^{-1}\mathbf{R}\mathscr{H}om(f_2^{-1}K_2,\mathcal{F})). \tag{5.5}$$

Par exemple, pour $K_1 = N_1$ et $K_2 = N_2$, ceci nous donne un morphisme

$$\Psi_{\boldsymbol{f}}(\mathcal{F}) \to \Psi_{f_1}(\Psi_{f_2}(\mathcal{F})).$$

En appliquant le foncteur contravariant $i^{-1}\mathbf{R}\mathscr{H}om(\boldsymbol{f}^{-1}(\bullet),\mathcal{F})$ au diagramme (5.4), on obtient le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} i_2^{-1}\Psi_{f_1}(\mathcal{F})[1] \arrow[r] & i_2^{-1}\Phi_{f_1}(\mathcal{F})[1] \arrow[r] & i^{-1}(\mathcal{F})[2] \\ i^{-1}\mathbf{R}\mathscr{H}om(\boldsymbol{f}^{-1}(N_1\boxtimes V_2),\mathcal{F}) \arrow[r] \arrow[u] & \Phi_{\boldsymbol{f}}(\mathcal{F}) \arrow[r] \arrow[u] & i_1^{-1}\Phi_{f_2}(\mathcal{F})[1] \arrow[u] \\ \Psi_{\boldsymbol{f}}(\mathcal{F}) \arrow[r] \arrow[u] & i^{-1}\mathbf{R}\mathscr{H}om(\boldsymbol{f}^{-1}(V_1\boxtimes N_2),\mathcal{F}) \arrow[r] \arrow[u] & i_1^{-1}\Psi_{f_2}(\mathcal{F})[1] \arrow[u] \end{tikzcd} \tag{5.6}$$

où les lignes et les colonnes sont des triangles distingués. En appliquant la construction du triangle distingué (5.3) successivement pour f_1 puis f_2, on obtient le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
i_2^{-1}\Psi_{f_1}(\mathcal{F})[1] \arrow[r] & i_2^{-1}\Phi_{f_1}(\mathcal{F})[1] \arrow[r] & i_2^{-1}i_1^{-1}(\mathcal{F})[2] \\
\Phi_{f_2}\Psi_{f_1}(\mathcal{F}) \arrow[r] \arrow[u] & \Phi_{f_2}\Phi_{f_1}(\mathcal{F}) \arrow[r] \arrow[u] & \Phi_{f_2}(i_1^{-1}\mathcal{F})[1] \arrow[u] \\
\Psi_{f_2}\Psi_{f_1}(\mathcal{F}) \arrow[r] \arrow[u] & \Psi_{f_2}\Phi_{f_1}(\mathcal{F}) \arrow[r] \arrow[u] & \Psi_{f_2}(i_1^{-1}\mathcal{F})[1] \arrow[u]
\end{tikzcd} \tag{5.7}$$

dont les lignes et les colonnes sont aussi des triangles distingués. Les morphismes (5.5) fournissent un morphisme de diagramme entre (5.6) et (5.7). Supposons désormais que le couple $(\boldsymbol{f}, \mathcal{F})$ soit sans pente. D'après les propositions 2.4.2 et 2.4.3, les morphismes (5.5) construits entre les objets situés aux quatre coins des diagrammes (5.6) et (5.7) sont des isomorphismes. En utilisant les propriétés des morphismes de triangles distingués, on en déduit que tous les morphismes (5.5) sont des isomorphismes. En particulier, on en déduit l'isomorphisme

$$\Phi_{\boldsymbol{f}}(\mathcal{F}) \simeq \Phi_{f_2}\Phi_{f_1}(\mathcal{F}).$$

Corollaire 5.2.3. *Si $\mathcal{F}$ est un faisceau pervers et si le couple $(\boldsymbol{f}, \mathcal{F})$ est sans pente, alors $\Phi_{\boldsymbol{f}}(\mathcal{F})[-2]$ est pervers.*

5.3 Cas de p fonctions

Soient p fonctions holomorphes $f_1, ..., f_p : X \to \mathbb{C}$. On va définir les cycles proches et les cycles évanescents associés à la fonction $\boldsymbol{f} = (f_1, ..., f_p) : X \to \mathbb{C}^p$. On considère le diagramme suivant pour $j = 1, ..., p$:

$$\begin{tikzcd}
f_j^{-1}(0) \arrow[r, hook, "i_j"] & X \arrow[d, "f_j"] \arrow[dr, phantom, "\square"] & \widetilde{X^*} \arrow[l, "\widetilde{p_j}"'] \arrow[d, "\widetilde{f_j}"] \\
& \mathbb{C} & \widetilde{\mathbb{C}^*} \arrow[l, "p_j"']
\end{tikzcd}.$$

Avec les définitions (5.1), on définit les complexes de $D_c^b(\mathbb{C}^p)$ suivants :

$$\begin{aligned}
N &:= N_1 \boxtimes ... \boxtimes N_p \\
V &:= V_1 \boxtimes ... \boxtimes V_p
\end{aligned}$$

où $\boxtimes$ est défini à partir des p projections de $\mathbb{C}^p$ dans $\mathbb{C}$. On considère le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
\boldsymbol{f}^{-1}(0) \arrow[r, hook, "i"] & X \arrow[d, "\boldsymbol{f}"] \arrow[dr, phantom, "\square"] & \widetilde{X^*} \arrow[l, "\widetilde{p}"'] \arrow[d, "\widetilde{\boldsymbol{f}}"] \\
& \mathbb{C}^p & \widetilde{(\mathbb{C}^*)^p} \arrow[l, "p"']
\end{tikzcd}.$$

On définit alors

$$\begin{aligned}
\Psi_{\boldsymbol{f}}(\mathcal{F}) &:= i^{-1}\mathbf{R}\mathscr{H}om(\boldsymbol{f}^{-1}N, \mathcal{F}) \\
\Phi_{\boldsymbol{f}}(\mathcal{F}) &:= i^{-1}\mathbf{R}\mathscr{H}om(\boldsymbol{f}^{-1}V, \mathcal{F}).
\end{aligned}$$

Comme dans le cas de deux fonctions, on va montrer que la définition de $\Psi_{\boldsymbol{f}}(\mathcal{F})$ coïncide avec la définition 2.4.1.

Lemme 5.3.1. *Il existe un isomorphisme* $N \simeq p_! A_{\widetilde{(\mathbb{C}^*)^p}}$.

Démonstration. Ces deux faisceaux sont faiblement constructibles relativement à la partition canonique donnée par les hyperplans de coordonnées de $\mathbb{C}^p$ (le cas $p = 2$ est donné dans la démonstration du lemme 5.2.1).

– Si $x \in \mathbb{C}^p$ appartient à une strate différente de la strate $(\mathbb{C}^*)^p$, alors $N_x \simeq \left(p_! A_{\widetilde{(\mathbb{C}^*)^p}}\right)_x = 0$.

– Si $x \in (\mathbb{C}^*)^p$, $N_x \simeq (\mathbb{C}^{(\mathbb{Z})})^{\otimes p}$ et $\left(p_! A_{\widetilde{(\mathbb{C}^*)^2}}\right)_x \simeq \mathbb{C}^{(\mathbb{Z}^p)}$.

L'isomorphisme

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{C}^{(\mathbb{Z})})^{\otimes p} & \to & \mathbb{C}^{(\mathbb{Z}^p)} \\ (a^1_{k_1})_{k_1 \in \mathbb{Z}} \otimes ... \otimes (a^p_{k_p})_{k_p \in \mathbb{Z}} & \mapsto & (a^1_{k_1} \cdot ... \cdot a^p_{k_p})_{(k_1,...,k_p) \in \mathbb{Z}^p} \end{array}$$

ainsi que l'identification des monodromies permettent de conclure.

□

Proposition 5.3.2. *Les cycles proches définis de la définition 2.4.1 sont isomorphes à* $\Psi_{\boldsymbol{f}}(\mathcal{F})$.

Démonstration.

$$\begin{array}{rcl} \Psi_{\boldsymbol{f}}(\mathcal{F}) & = & i^{-1}\mathbf{R}\mathscr{H}om(\boldsymbol{f}^{-1}N, \mathcal{F}) \\ & \simeq & i^{-1}\mathbf{R}\mathscr{H}om(\boldsymbol{f}^{-1}p_! A_{\widetilde{(\mathbb{C}^*)^p}}, \mathcal{F}) \\ & \simeq & i^{-1}\mathbf{R}\mathscr{H}om(\widetilde{p}_! \widetilde{\boldsymbol{f}}^{-1} A_{\widetilde{(\mathbb{C}^*)^p}}, \mathcal{F}) \\ & \simeq & i^{-1}\mathbf{R}\mathscr{H}om(\widetilde{p}^{-1} A_X, \widetilde{p}^{-1}\mathcal{F}) \\ & \simeq & i^{-1}\mathbf{R}\mathscr{H}om(A_X, \widetilde{p}_* \widetilde{p}^{-1}\mathcal{F}) \\ & \simeq & i^{-1}\widetilde{p}_* \widetilde{p}^{-1}\mathcal{F}. \end{array}$$

□

On va raisonner comme dans le cas de deux fonctions pour établir le lien entre $\Phi_{\boldsymbol{f}}(\mathcal{F})$ et les cycles évanescents itérés. On définit les complexes suivants :

$$C_i^{k_i} := \left\{ \begin{array}{lll} 0 & \text{si} & k_i \notin \{-1, 0, 1\} \\ I_i & \text{si} & k_i = -1 \\ V_i & \text{si} & k_i = 0 \\ N_i & \text{si} & k_i = 1. \end{array} \right.$$

On utilisera dans la suite la notion d'hypercomplexes dont la définition se trouve dans l'annexe A.1. On définit le p-hypercomplexe X dont les objets sont

$$X^{\boldsymbol{k}} := C_1^{k_1} \boxtimes ... \boxtimes C_p^{k_p}$$

et les morphismes sont induits par les morphismes

$$I_i \to V_i \to N_i$$

pour tout $1 \leqslant i \leqslant p$. Le cas $p = 2$ est donné par le 2-hypercomplexe (5.4). Dans toutes les directions, les lignes de X sont des suites exactes courtes. Soient $I \subset \{1, ..., p\}$ et I^c son complémentaire. On notera :

$$C_I^{\boldsymbol{k}_I} := \boxtimes_{i \in I} C_i^{k_i}.$$

Pour tout $\boldsymbol{k} \in \{-1, 0, 1\}$, on a

$$\begin{aligned} i^{-1}\mathbf{R}\mathscr{H}om(\boldsymbol{f}^{-1}(C_1^{k_1} \boxtimes ... \boxtimes C_p^{k_p}), \mathcal{F}) &\overset{(a)}{=} i^{-1}\mathbf{R}\mathscr{H}om(\boldsymbol{f}_I^{-1}C_I^{\boldsymbol{k}_I} \otimes \boldsymbol{f}_{I^c}^{-1}C_{I^c}^{\boldsymbol{k}_{I^c}}, \mathcal{F}) \\ &\overset{(b)}{=} i^{-1}\mathbf{R}\mathscr{H}om(\boldsymbol{f}_I^{-1}C_I^{\boldsymbol{k}_I}, \mathbf{R}\mathscr{H}om(\boldsymbol{f}_{I^c}^{-1}C_{I^c}^{\boldsymbol{k}_{I^c}}, \mathcal{F})) \end{aligned}$$

où (a) vient de (1.3) et (b) de (1.2). On note i_I la composition des morphismes i_i pour $i \in I$. On applique le morphisme (1.5), qui nous donne

$$i^{-1}\mathbf{R}\mathscr{H}om(\boldsymbol{f}_I^{-1}C_I^{\boldsymbol{k}_I}, \mathbf{R}\mathscr{H}om(\boldsymbol{f}_{I^c}^{-1}C_{I^c}^{\boldsymbol{k}_{I^c}}, \mathcal{F})) \to i_I^{-1}\mathbf{R}\mathscr{H}om(i_{I^c}^{-1}\boldsymbol{f}_I^{-1}C_I^{\boldsymbol{k}_I}, i_{I^c}^{-1}\mathbf{R}\mathscr{H}om(\boldsymbol{f}_{I^c}^{-1}C_{I^c}^{\boldsymbol{k}_{I^c}}, \mathcal{F})).$$

On obtient ainsi un morphisme

$$i^{-1}\mathbf{R}\mathscr{H}om(\boldsymbol{f}^{-1}(C_1^{k_1} \boxtimes ... \boxtimes C_p^{k_p}), \mathcal{F}) \to i_I^{-1}\mathbf{R}\mathscr{H}om(i_{I^c}^{-1}\boldsymbol{f}_I^{-1}C_I^{\boldsymbol{k}_I}, i_{I^c}^{-1}\mathbf{R}\mathscr{H}om(\boldsymbol{f}_{I^c}^{-1}C_{I^c}^{\boldsymbol{k}_{I^c}}, \mathcal{F})). \quad (5.8)$$

Par exemple, si pour tout $1 \leqslant i \leqslant p$, $k_i = 1$, ceci nous donne un morphisme

$$\Psi_{\boldsymbol{f}}(\mathcal{F}) \to \Psi_{\boldsymbol{f}_I}(\Psi_{\boldsymbol{f}_{I^c}}(\mathcal{F})).$$

En appliquant le foncteur contravariant $i^{-1}\mathbf{R}\mathscr{H}om(\boldsymbol{f}^{-1}(\bullet), \mathcal{F})$ au p-hypercomplexe X, on obtient le p-hypercomplexe $\widetilde{X}$ dont les lignes sont des triangles distingués dans toutes les directions.

D'autre part, on peut appliquer $i_{I^c}^{-1}\mathbf{R}\mathscr{H}om(\boldsymbol{f}_{I^c}^{-1}(\bullet), \mathcal{F}))$ à l'hypercomplexe X_{I^c} défini comme X, mais en utilisant uniquement les indices appartenant à I^c, on note $\widetilde{X_{I^c}}$ l'hypercomplexe obtenu. Avec les mêmes notations, on applique ensuite $i_I^{-1}\mathbf{R}\mathscr{H}om(i_{I^c}^{-1}\boldsymbol{f}_I^{-1}(\bullet), \widetilde{X_{I^c}}))$ à X_I pour obtenir le p-hypercomplexe Y dont les lignes dans toutes les directions sont des triangles distingués.

Les morphismes (5.8) fournissent un morphisme de p-hypercomplexes

$$\widetilde{X} \to Y.$$

Supposons désormais que le couple $(\boldsymbol{f}, \mathcal{F})$ soit sans pente. D'après les propositions 2.4.2 et 2.4.3, pour tout $\boldsymbol{k}$ tel que pour tout $1 \leqslant i \leqslant p$, $k_i \neq 0$, le morphisme (5.8) est un isomorphisme. En utilisant les propriétés des morphismes de triangles distingués, on en déduit que tous les morphismes (5.8) sont des isomorphismes. En particulier, on en déduit l'isomorphisme

$$\Phi_{\boldsymbol{f}}(\mathcal{F}) \simeq \Phi_{\boldsymbol{f}_I}(\Phi_{\boldsymbol{f}_{I^c}}(\mathcal{F})).$$

Ceci donne le théorème suivant

Théorème 5.3.3. *Supposons le couple $(\boldsymbol{f}, \mathcal{F})$ sans pente. Alors on a un isomorphisme naturel*

$$\Phi_{\boldsymbol{f}}(\mathcal{F}) \simeq \Phi_{f_1}...\Phi_{f_p}(\mathcal{F}).$$

Corollaire 5.3.4. *Si $\mathcal{F}$ est un faisceau pervers et si le couple $(\boldsymbol{f}, \mathcal{F})$ est sans pente, alors $\Phi_{\boldsymbol{f}}(\mathcal{F})[-p]$ est pervers.*

Deuxième partie

Théorie de Hodge et morphismes sans pente

Chapitre 6

Théorie de Hodge : modules de Hodge mixtes

Dans la suite, on étudiera la théorie de Hodge des morphismes sans pente. On donne dans ce chapitre les notions relatives à la théorie des modules de Hodge mixtes de M. Saito, qui seront utilisées dans la suite. On suivra essentiellement [Sai88] et [Sai90].

6.1 Filtrations monodromiques relatives

Proposition 6.1.1. *Soient $\mathscr{A}$ catégorie abélienne et H un objet de $\mathscr{A}$ muni d'un endomorphisme nilpotent N. Il existe une unique filtration $M_\bullet H$ satisfaisant à :*

1. *pour tout $\ell \in \mathbb{Z}$, $N(M_\ell H) \subset M_{\ell-2}H$*
2. *pour tout $\ell \geqslant 1$, N^ℓ induit un isomorphisme, $\mathrm{gr}_\ell^M H \xrightarrow{\sim} \mathrm{gr}_{-\ell}^M H$.*

Cette filtration est appelée filtration monodromique *associée à N.*

Démonstration. [PS08, Lemma-Definition 11.9]

□

Proposition 6.1.2. *Soient $\mathscr{A}$ catégorie abélienne et $(H, L_\bullet H)$ un objet filtré de $\mathscr{A}$ muni d'un endomorphisme nilpotent filtré N. Il existe au plus une filtration $M_\bullet H$ satisfaisant à :*

1. *pour tout $\ell \in \mathbb{Z}$, $N(M_\ell H) \subset M_{\ell-2}H$,*
2. *pour tout $\ell \geqslant 1$, et tout $k \in \mathbb{Z}$, N^ℓ induit un isomorphisme $\mathrm{gr}_{\ell+k}^M \mathrm{gr}_k^L H \xrightarrow{\sim} \mathrm{gr}_{-\ell+k}^M \mathrm{gr}_k^L H$.*

Si cette filtration existe, elle est appelée filtration monodromique relative *associée à N.*

Démonstration. [Sai90, 1.1]

□

6.2 Structures de Hodge-Lefschetz p-graduées polarisées

6.2.1 Structures de Lefschetz graduées polarisées

Définition 6.2.1. Une *structure de Lefschetz graduée* consiste en la donnée d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel gradué $\mathcal{H}$ muni d'un endomorphisme nilpotent N satisfaisant, pour tout $\ell \in \mathbb{Z}$

$$\mathcal{H}_\ell = \mathrm{gr}_\ell^M \mathcal{H}$$

où $M_\bullet$ est la filtration monodromique associée à N. Pour $\ell \in \mathbb{N}$, on note $P_\ell \mathcal{H} := \ker N^{\ell+1} : \mathcal{H}_\ell \to \mathcal{H}_{-\ell}$ la partie primitive de degré ℓ.

L'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ admet pour base :

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les commutateurs sont donnés par les formules suivantes :

$$[X, Y] = H, \quad [X, H] = -2X, \quad [Y, H] = 2Y.$$

Lemme 6.2.2. 1. *Soit $(\mathcal{H}, N)$ une structure de Lefschetz graduée. Il existe une unique représentation de $\rho : \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \to \mathcal{H}$ telle que $\rho(Y) = N$ et, pour tout $\ell \in \mathbb{Z}$, $\mathcal{H}_\ell$ est l'espace propre de $\rho(H)$ pour la valeur propre ℓ.*

2. *Soit $M \in End(\mathcal{H})$, si M commute avec $\rho(H)$ et $\rho(Y)$, alors M commute avec $\rho(X)$.*

Démonstration. 1. [PS08, Lemma 1.21]

2. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, les endomorphismes $(e^{-tM}\rho(X)e^{tM}, \rho(Y), \rho(H))$ forment également une représentation de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$, par unicité on a $e^{-tM}\rho(X)e^{tM} = \rho(X)$. Ceci étant vérifié pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a $[\rho(X), M] = 0$.

□

Définition 6.2.3. Pour une structure de Lefschetz graduée $(\mathcal{H}, N)$ de représentation de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ correspondante ρ, on définit $w := e^{-\rho(X)}e^{\rho(Y)}e^{-\rho(X)}$.

Définition 6.2.4. Une *polarisation* d'une structure de Lefschetz graduée est une forme bilinéaire graduée

$$k : \mathcal{H} \otimes \mathcal{H} \to \mathbb{R}$$

telle que pour tout $x, y \in \mathcal{H}$

$$k(Nx, y) + k(x, Ny) = 0$$

et telle que, pour tout $\ell \in \mathbb{N}$, la restriction de $k(., N^\ell.)$ à $P_\ell \mathcal{H}$ est symétrique définie positive.

Proposition 6.2.5. *Une forme bilinéaire k est une polarisation de $(\mathcal{H}, N)$ si et seulement si la forme bilinéaire*

$$h(.,.) := k(., w.)$$

est symétrique définie positive.

Démonstration. [GNA90, (4.3)]

□

6.2.2 Structures de Lefschetz p-graduées polarisées

Définition 6.2.6. Une *structure de Lefschetz p-graduée* consiste en la donnée d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel p-gradué $\mathcal{H}$ muni d'endomorphismes nilpotents N_i, pour $1 \leqslant i \leqslant p$, qui commutent deux à deux et tels que, pour tout $1 \leqslant i \leqslant p$ et pour tout $(\ell_1, ..., \ell_{i-1}, \ell_{i+1}, .., \ell_p) \in \mathbb{Z}^{p-1}$, $(\mathcal{H}_{\ell_1,...,\ell_{i-1},\bullet,\ell_{i+1},..,\ell_p}, N_i)$ est une structure de Lefschetz graduée.

Ainsi, une structure de Lefschetz p-graduée admet p actions de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$. En identifiant les éléments de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ et leurs images dans $\mathrm{End}(\mathcal{H})$, on obtient, pour $1 \leqslant i \leqslant p$, les endomorphismes $(X_i, Y_i, H_i) \in \mathrm{End}(\mathcal{H})$.

Lemme 6.2.7. *Pour $i \neq j$, Y_i, X_i et H_i commutent avec X_j, Y_j et H_j. Donc w_i et w_j commutent.*

Démonstration. Ceci découle du lemme 6.2.2.

□

On définit $\boldsymbol{w} := w_1 ... w_p$.

Définition 6.2.8. Une *polarisation* d'une structure de Lefschetz p-graduée est une forme bilinéaire p-graduée

$$k : \mathcal{H} \otimes \mathcal{H} \to \mathbb{R}$$

telle que pour tout $x, y \in \mathcal{H}$ et tout $1 \leqslant i \leqslant p$

$$k(N_i x, y) + k(x, N_i y) = 0$$

et telle que, pour tout $\boldsymbol{\ell} \in \mathbb{N}^p$, la restriction de $k(., N_1^{\ell_1} ... N_p^{\ell_p}.)$ à $P_{\boldsymbol{\ell}}\mathcal{H}$ est symétrique définie positive. Ici,

$$P_{\boldsymbol{\ell}}\mathcal{H} := \mathcal{H}_{\boldsymbol{\ell}} \cap \ker N_1^{\ell_1+1} \cap ... \cap N_p^{\ell_p+1}.$$

Proposition 6.2.9. *Une forme bilinéaire k est une polarisation de $(\mathcal{H}, N_1, ..., N_p)$ si et seulement si, pour tout $x, y \in \mathcal{H}$ et tout $1 \leqslant i \leqslant p$*

$$k(N_i x, y) + k(x, N_i y) = 0$$

et la forme bilinéaire

$$h(., .) := k(., \boldsymbol{w}.)$$

est symétrique définie positive.

Démonstration. [GNA90, (4.3)]

□

Quitte à réindexer, considérons $i = 1$ et $j = 2$, les endomorphismes $X := X_1 + X_2$, $Y := Y_1 + Y_2$ et $H := H_1 + H_2$ donnent une action de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ telle que $w = w_1 w_2$. Ainsi, en posant

$$\mathcal{H}_{\ell, \ell_3, ..., \ell_p} := \bigoplus_{\ell_1 + \ell_2 = \ell} \mathcal{H}_{\ell_1, \ell_2, \ell_3, ..., \ell_p},$$

on obtient une structure de Lefschetz $(p-1)$-graduée.

Proposition 6.2.10. *Si $(\mathcal{H}, N_1, ... N_p, k)$ est une structure de Lefschetz p-graduée polarisée, alors $(\mathcal{H}, N = N_1 + N_2, N_3 ... N_p, k)$ est une structure de Lefschetz $(p-1)$-graduée polarisée.*

Démonstration. C'est une conséquence immédiate de la proposition 6.2.9 si l'on remarque que $\boldsymbol{w} = w_1 w_2 w_3 ... w_p = w w_3 ... w_p$.

□

6.2.3 Structures de Hodge-Lefschetz p-graduées polarisées

Définition 6.2.11. Une structure de Hodge-Lefschetz p-graduée centrée en m est une structure de Lefschetz p-graduée $(\mathcal{H}, N_1, ..., N_p)$ telle que, pour tout $\boldsymbol{\ell} \in \mathbb{Z}$, $\mathcal{H}_{\boldsymbol{\ell}}$ a une structure de Hodge réelle de poids $m + \ell_1 + ... + \ell_p$ et telle que, pour tout $1 \leqslant i \leqslant p$, $N_i : \mathcal{H} \to \mathcal{H}(-1)$ est un morphisme de structure de Hodge. Ici (-1) désigne le twist de Tate.

Définition 6.2.12. Une forme bilinéaire

$$k : \mathcal{H} \otimes \mathcal{H} \to \mathbb{R}$$

est une polarisation de la structure de Hodge-Lefschetz p-graduée centrée en m $(\mathcal{H}, N_1, ..., N_p)$, si pour tout $x, y \in \mathcal{H}$ et tout $1 \leqslant i \leqslant p$

$$k(N_i x, y) + k(x, N_i y) = 0$$

et pour tout $\boldsymbol{\ell} \in \mathbb{N}^p$,

$$P_{\boldsymbol{\ell}} k : P_{\boldsymbol{\ell}} \mathcal{H} \otimes P_{\boldsymbol{\ell}} \mathcal{H} \to \mathbb{R}$$

est une polarisation de la structure de Hodge de poids $m + \ell_1 + ... + \ell_p$ $P_{\boldsymbol{\ell}} \mathcal{H}$.

Proposition 6.2.13. *Si $(\mathcal{H}, N_1, ...N_p, k)$ est une structure de Hodge-Lefschetz p-graduée polarisée centrée en m, alors $(\mathcal{H}, N = N_1 + N_2, N_3 ... N_p, k)$ est une structure de Lefschetz $(p-1)$-graduée polarisée centrée en m.*

Démonstration. La démonstration est identique à celle de la proposition 6.2.10. □

6.3 Modules de Hodge-Lefschetz p-gradués polarisés

6.3.1 Modules de Hodge purs

Soit X une variété complexe lisse. Soit $\mathrm{MF}_h(\mathscr{D}_X)$ la catégorie des $\mathscr{D}_X$-modules holonomes munis d'une bonne filtration F.

Définition 6.3.1. Soit Y une hypersurface lisse d'équation $t = 0$ et soit $(\mathcal{M}, F) \in \mathrm{MF}_h(\mathscr{D}_X)$ où $\mathcal{M}$ est $\mathbb{R}$-spécialisable le long de Y (définition 1.3.5). On dit que $(\mathcal{M}, F)$ est *strictement* $\mathbb{R}$*-spécialisable* si

1. $\forall \alpha < 0$ et $\forall p \in \mathbb{Z}$, $t : F_p V_\alpha \mathcal{M} \to F_p V_{\alpha-1} \mathcal{M}$ est un isomorphisme
2. $\forall \alpha > -1$ et $\forall p \in \mathbb{Z}$, $\partial_t : F_p \mathrm{gr}_\alpha^V \mathcal{M} \to F_{p+1} \mathrm{gr}_{\alpha+1}^V \mathcal{M}$ est un isomorphisme
3. $\mathrm{gr}^F \mathrm{gr}_{\alpha+1}^V \mathcal{M}$ est un $\mathrm{gr}^F \mathscr{D}_Y$-module cohérent.

Soit $g : X \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe, on dit que $(\mathcal{M}, F) \in \mathrm{MF}_h(\mathscr{D}_X)$ est strictement $\mathbb{R}$-spécialisable le long de g si l'image directe de $(\mathcal{M}, F)$ par le graphe de g est strictement spécialisable le long de l'hypersurface définie par la coordonnée de $\mathbb{C}$.

On définit la catégorie

$$\mathrm{MF}_h(\mathscr{D}_X, \mathbb{Q}) := \mathrm{MF}_h(\mathscr{D}_X) \times_{\mathrm{Perv}_{\mathbb{C}}(X)} \mathrm{Perv}_{\mathbb{Q}}(X),$$

un objet de $\mathrm{MF}_h(\mathscr{D}_X, \mathbb{Q})$ est la donnée d'un couple $((\mathcal{M}, F), \mathcal{F}) \in \mathrm{MF}_h(\mathscr{D}_X) \times \mathrm{Perv}_{\mathbb{Q}}(X)$ et d'un isomorphisme

$$\mathbf{DR}(\mathcal{M}) \simeq \underline{\mathbb{C}}_X \otimes_{\mathbb{Q}} \mathcal{F}.$$

Définition 6.3.2. Soit $(\mathcal{M}, F, \mathcal{F}) \in \mathrm{MF}_h(\mathscr{D}_X, \mathbb{Q})$ tel que $(\mathcal{M}, F)$ soit strictement $\mathbb{R}$-spécialisable le long d'une fonction holomorphe g, on définit les cycles proches et les cycles évanescents :

$$\Psi_g(\mathcal{M}, F, \mathcal{F}) := (\Psi_g^{alg}\mathcal{M}, F[1], \Psi_g\mathcal{F})$$

et

$$\Phi_g(\mathcal{M}, F, \mathcal{F}) := (\Phi_g^{alg}\mathcal{M}, F, \Phi_g\mathcal{F}).$$

Pour définir la filtration F sur $\Psi_g^{alg}\mathcal{M}$ et $\Phi_g^{alg}\mathcal{M}$ on filtre les gradués pour la filtration de Kashiwara-Malgrange de la manière suivante :

$$F_p\mathrm{gr}_\alpha^V\mathcal{M} := \frac{F_p\mathcal{M} \cap V_\alpha\mathcal{M}}{F_p\mathcal{M} \cap V_{<\alpha}\mathcal{M}}.$$

Définition 6.3.3. Soit $(\mathcal{M}, F, \mathcal{F}) \in \mathrm{MF}_h(\mathscr{D}_X, \mathbb{Q})$ tel que $(\mathcal{M}, F)$ soit strictement $\mathbb{R}$-spécialisable le long de toute fonction holomorphe g localement définie sur X. On dit que $(\mathcal{M}, F, \mathcal{F})$ est *strictement S-décomposable* si, pour toute fonction holomorphe g localement définie sur X, il existe une décomposition

$$(\mathcal{M}, F, \mathcal{F}) = (\mathcal{M}_1, F, \mathcal{F}_1) \oplus (\mathcal{M}_2, F, \mathcal{F}_2)$$

telle que

- $(\mathcal{M}_1, F)$ et $(\mathcal{M}_2, F)$ sont strictement $\mathbb{R}$-spécialisables le long de g,
- $\mathrm{supp}(M_1) \subset g^{-1}(0)$,
- $(\mathcal{M}_2, F, \mathcal{F}_2)$ n'a ni sous-objet ni quotient supporté sur $g^{-1}(0)$.

On note $\mathrm{MF}_h(\mathscr{D}_X, \mathbb{Q})_S$ la sous-catégorie de $\mathrm{MF}_h(\mathscr{D}_X, \mathbb{Q})$ des modules strictement S-décomposables.

Définition 6.3.4. On définit la catégorie $\mathrm{MH}(X, \mathbb{Q}, n)$ des *modules de Hodge de poids* n comme étant la sous-catégorie de $\mathrm{MF}_h(\mathscr{D}_X, \mathbb{Q})_S$ dont les objets satisfont à

- si $(\mathcal{M}, F, \mathcal{F}) \in \mathrm{MH}(X, \mathbb{Q}, n)$ et si $\mathrm{supp}\mathcal{M} = \{x\}$, alors $(\mathcal{M}, F, \mathcal{F}) \simeq i_{x*}(H_\mathbb{C}, F, H_\mathbb{Q})$ où $(H_\mathbb{C}, F, H_\mathbb{Q})$ est une structure de Hodge de poids n et $i_x : \{x\} \hookrightarrow X$,
- si $(\mathcal{M}, F, \mathcal{F}) \in \mathrm{MH}(X, \mathbb{Q}, n)$ et si $\dim\mathrm{supp}\mathcal{M} > 0$ et g est une fonction holomorphe localement définie sur X, alors pour tout $\ell \in \mathbb{Z}$,

$$\mathrm{gr}_\ell^M\Psi_g(\mathcal{M}, F, \mathcal{F}) \in \mathrm{MH}(X, \mathbb{Q}, \ell + n - 1)$$

et

$$\mathrm{gr}_\ell^M\Phi_g(\mathcal{M}, F, \mathcal{F}) \in \mathrm{MH}(X, \mathbb{Q}, \ell + n).$$

Définition 6.3.5. Soit $\mathrm{MF}_hW(\mathscr{D}_X, \mathbb{Q})$ la catégorie des objets de $\mathrm{MF}_h(\mathscr{D}_X, \mathbb{Q})$ munis d'une filtration croissante localement finie W. On définit la sous-catégorie $\mathrm{MHW}(X, \mathbb{Q})$ composée des objets satisfaisant, pour tout $i \in \mathbb{Z}$, à

$$\mathrm{gr}_i^W\mathscr{M} \in \mathrm{MH}(X, \mathbb{Q}, i).$$

Proposition 6.3.6. *Les catégories* $\mathrm{MH}(X, \mathbb{Q}, n)$ *et* $\mathrm{MHW}(X, \mathbb{Q})$ *sont des catégories abéliennes.*

Démonstration. [Sai88, Proposition 5.1.14]

□

Définition 6.3.7. On définit la catégorie $\mathrm{MHL}(X, \mathbb{Q}, n, p)$ des *modules de Hodge-Lefschetz p-gradués centrés en n* dont les objets sont les uplets $(\mathcal{M}, F, \mathcal{F}, N_1, ..., N_p)$ tels que

- si $\mathrm{supp}\mathcal{M} = \{x\}$, alors il existe une structure de Hodge-Lefschetz p graduée centrée en n (définition 6.2.11) $(\mathcal{H}_\mathbb{C}, F, \mathcal{H}_\mathbb{Q}, N_1', ..., N_p')$ telle que $(\mathcal{M}, F, \mathcal{F}, N_1, ..., N_p) \simeq i_{x*}(\mathcal{H}_\mathbb{C}, F, \mathcal{H}_\mathbb{Q}, N_1', ..., N_p')$,
- si $\dim\mathrm{supp}\mathcal{M} > 0$ et g est une fonction holomorphe localement définie sur X, alors

$$\mathrm{gr}_\bullet^M\Psi_g(\mathcal{M}, F, \mathcal{F}, N_1, ..., N_p, N) \in \mathrm{MHL}(X, \mathbb{Q}, n-1, p+1).$$

6.3.2 Polarisation

On note $a_X : X \to \{*\}$ et on définit le twist de Tate pour $\mathcal{F} \in \mathrm{Perv}_{\mathbb{Q}}(X)$ pour $r \in \mathbb{Z}$,

$$\mathcal{F}(r) := \mathcal{F} \otimes \mathbb{Z}(r)$$

où $\mathbb{Z}(r) := (2i\pi)^r \mathbb{Z} \subset \mathbb{C}$.

Définition 6.3.8. Soit $(\mathcal{M}, F, \mathcal{F}) \in \mathrm{MF}_h(\mathscr{D}_X, \mathbb{Q})_S$ et

$$S : \mathcal{F} \otimes \mathcal{F} \to a_X^! \underline{\mathbb{Q}}_X(r)$$

un accouplement. On dit que S est *compatible avec la filtration* F s'il existe un (unique) morphisme

$$(\mathcal{M}, F, \mathcal{F}) \to \mathbf{D}(\mathcal{M}, F, \mathcal{F})(r)$$

tel que lorsqu'on applique le foncteur d'oubli vers la catégorie des faisceaux pervers, on obtienne le morphisme

$$\mathcal{F} \to \mathbf{D}\mathcal{F}(r)$$

correspondant à S.

Définition 6.3.9. Soit $(\mathcal{M}, F, \mathcal{F}) \in \mathrm{MH}(X, \mathbb{Q}, n)$. On dit que $(\mathcal{M}, F, \mathcal{F})$ est *polarisable* s'il existe un accouplement $S : \mathcal{F} \otimes \mathcal{F} \to a_X^! \underline{\mathbb{Q}}_X(-n)$ compatible avec la filtration F tel que

- si $\mathrm{supp}\mathcal{M} = \{x\}$, alors il existe une structure de Hodge de poids n polarisée $(H_{\mathbb{C}}, F, H_{\mathbb{Q}}, S')$ telle que $(\mathcal{M}, F, \mathcal{F}) \simeq i_{x*}(H_{\mathbb{C}}, F, H_{\mathbb{Q}})$ et $S = i_{x*}S'$,
- si $\dim \mathrm{supp}\mathcal{M} > 0$ et g est une fonction holomorphe localement définie sur X, alors, pour tout $\ell \in \mathbb{Z}$,

$$P_\ell \Psi_g S \circ (\mathrm{Id} \otimes N^\ell) : P_\ell \Psi_g \mathcal{F} \otimes P_\ell \Psi_g \mathcal{F} \to a_X^! \underline{\mathbb{Q}}_X(1 - n - \ell)$$

  est une polarisation de la partie primitive $P_\ell \Psi_g(\mathcal{M}, F, \mathcal{F})$.

Proposition 6.3.10. *Soit* $\mathrm{MH}^{(p)}(X, \mathbb{Q}, n) \subset \mathrm{MH}(X, \mathbb{Q}, n)$ *la sous-catégorie pleine des modules de Hodge de poids n polarisables. La catégorie* $\mathrm{MH}^{(p)}(X, \mathbb{Q}, n)$ *est semi-simple.*

Démonstration. [Sai88, Corollaire 5.2.13] □

Définition 6.3.11. On définit la sous-catégorie $\mathrm{MHW}^{(p)}(X, \mathbb{Q})$ de $\mathrm{MHW}(X, \mathbb{Q})$ dont les objets satisfont, pour tout $i \in \mathbb{Z}$, à

$$\mathrm{gr}_i^W \mathscr{M} \in \mathrm{MH}^{(p)}(X, \mathbb{Q}, i).$$

Définition 6.3.12. Soit $(\mathcal{M}, F, \mathcal{F}, N_1, ..., N_p) \in \mathrm{MHL}(X, \mathbb{Q}, n, p)$ et soit

$$S : \mathcal{F} \otimes \mathcal{F} \to a_X^! \underline{\mathbb{Q}}_X(-n)$$

un accouplement. S est une polarisation de $(\mathcal{M}, F, \mathcal{F}, N_1, ..., N_p)$ si, pour tout $1 \leqslant i \leqslant p$,

$$S \circ (\mathrm{Id} \otimes N_i) + S \circ (N_i \otimes \mathrm{Id}) = 0$$

et pour tout $\boldsymbol{\ell} \in \mathbb{Z}^p$,

$$S \circ (\mathrm{Id} \otimes N_1^{\ell_1} ... N_p^{\ell_p}) : P_{\boldsymbol{\ell}}\mathcal{F} \otimes P_{\boldsymbol{\ell}}\mathcal{F} \to a_X^! \underline{\mathbb{Q}}_X(-n - \ell_1 - ... - \ell_p)$$

est une polarisation de $P_{\boldsymbol{\ell}}\mathcal{F} \in \mathrm{MH}(X, \mathbb{Q}, n + \ell_1 + ... + \ell_p)$.

On note $\mathrm{MHL}^{(p)}(X, \mathbb{Q}, n, p)$ la catégorie des modules de Hodge-Lefschetz p-gradués centrés en n polarisables.

6.3.3 Image directe

Soient $f : X \to Y$ un morphisme projectif, g une fonction holomorphe sur Y et $h := g \circ f$.

Théorème 6.3.13. *Soit* $(\mathcal{M}, F, \mathcal{F}) \in \mathrm{MH}^{(p)}(X, \mathbb{Q}, n)$*,*
- $\mathcal{H}^i f_*(\mathcal{M}, F, \mathcal{F}) \in \mathrm{MH}^{(p)}(Y, \mathbb{Q}, n+i)$*,*
- $\Psi_g \mathcal{H}^i f_*(\mathcal{M}, F, \mathcal{F}) \simeq \mathcal{H}^i f_* \Psi_h(\mathcal{M}, F, \mathcal{F})$*,*
- $\Phi_g \mathcal{H}^i f_*(\mathcal{M}, F, \mathcal{F}) \simeq \mathcal{H}^i f_* \Phi_h(\mathcal{M}, F, \mathcal{F})$*,*
- *on considère la filtration image*

$$W\mathcal{H}^i f_* \Psi_h(\mathcal{M}, F, \mathcal{F}) := \mathrm{Im}\left(\mathcal{H}^i f_* W \Psi_h(\mathcal{M}, F, \mathcal{F}) \to \mathcal{H}^i f_* \Psi_h(\mathcal{M}, F, \mathcal{F})\right).$$

Cette filtration est égale à la filtration monodromique de N sur $\Psi_g \mathcal{H}^i f_*(\mathcal{M}, F, \mathcal{F})$.

Démonstration. [Sai88, Théorème 5.3.1 et Proposition 5.3.4] □

Théorème 6.3.14. *Si* $(\mathcal{M}, F, \mathcal{F}, N_1, ..., N_p) \in \mathrm{MHL}^{(p)}(X, \mathbb{Q}, n, p)$ *alors* $\mathcal{H}^i f_*(\mathcal{M}, F, \mathcal{F}, N_1, ..., N_p) \in \mathrm{MHL}^{(p)}(Y, \mathbb{Q}, n+i, p)$*.*

Démonstration. [Sai88, Proposition 5.3.5] □

6.4 Modules de Hodge mixtes

6.4.1 Définition

Définition 6.4.1. Soit $(\mathcal{M}, F, \mathcal{F}; W) \in \mathrm{MHW}(X, \mathbb{Q})$ et g une fonction holomorphe localement définie sur X. On dit que *les foncteurs cycles évanescents sont bien définis le long de g pour* $(\mathcal{M}, F, \mathcal{F}; W)$ si
- localement les filtrations F, W et la filtration canonique le long de $g^{-1}(0)$ V de $\mathcal{M}$ sont compatibles au sens de la définition A.2.3,
- la filtration monodromique relative sur $({}^p\Psi_g \mathcal{F}, L)$ et $({}^p\Phi_g \mathcal{F}, L)$ existe, où

$$\begin{aligned} L_i({}^p\Psi_g \mathcal{F}) &:= {}^p\Psi_g(W_{i+1}\mathcal{F}) \\ L_i({}^p\Phi_g \mathcal{F}) &:= {}^p\Phi_g(W_i\mathcal{F}). \end{aligned}$$

Définition 6.4.2. Soit g une fonction holomorphe localement définie sur X et $\mathscr{M} = (\mathcal{M}, F, \mathcal{F}; W) \in \mathrm{MHW}(X - g^{-1}(0), \mathbb{Q})$. On note $j : X - g^{-1}(0) \hookrightarrow X$ l'immersion ouverte. On dit que *l'image directe j_* (resp. $j_!$) est bien définie pour $\mathscr{M}$* s'il existe une extension $\widetilde{\mathscr{M}} \in \mathrm{MHW}(X, \mathbb{Q})$ de $\mathscr{M}$, notée $j_*\mathscr{M}$ (resp. $j_!\mathscr{M}$) telle que
- pour toute fonction holomorphe f localement définie sur un ouvert $U \subset X$ telle que $f^{-1}(0) = U \cap g^{-1}(0)$, les foncteurs cycles évanescents sont bien définis le long de f pour $\widetilde{\mathscr{M}}|_U$.
- $\widetilde{\mathcal{F}} = j_*\mathcal{F}$ (resp. $j_!\mathcal{F}$).

Définition 6.4.3. On définit la sous-catégorie pleine $\mathrm{MHM}(X, \mathbb{Q}) \subset \mathrm{MHW}(X, \mathbb{Q})$ des *modules de Hodge mixtes.* Soit $\mathscr{M} \in \mathrm{MHW}(X, \mathbb{Q})$, $\mathscr{M} \in \mathrm{MHM}(X, \mathbb{Q})$ si et seulement si pour toute variété complexe Y et tout ensemble fini de fonctions holomorphes localement définies $g_1, ..., g_n$, la condition suivante est satisfaite inductivement pour tout $r \geqslant 1$:

les foncteurs cycles évanescents sont bien définis le long de g_r pour $\mathscr{M}_r$ et les images directes $(j_r)_*$ $(j_r)_!$ sont bien définies pour $j_r^{-1}\mathscr{M}_r$.

Avec $j_r : X - g_r^{-1}(0) \hookrightarrow X$, $\mathscr{M}_1 := \mathscr{M} \boxtimes \mathbb{Q}_Y^H[d_Y]$ (où $\mathbb{Q}_Y^H[d_Y]$ est le module de Hodge constant sur Y) et, pour $r > 0$, $\mathscr{M}_{r+1} = \Psi_{g_r}\mathscr{M}_r$, $\Phi_{g_r}\mathscr{M}_r$, $(j_r)_* j_r^{-1}\mathscr{M}_r$ où $(j_r)_! j_r^{-1}\mathscr{M}_r$.

Définition 6.4.4. On définit la catégorie des *modules de Hodge mixtes polarisables* comme étant

$$\mathrm{MHM}^{(p)}(X,\mathbb{Q}) = \mathrm{MHM}(X,\mathbb{Q}) \cap \mathrm{MHW}^{(p)}(X,\mathbb{Q}).$$

Proposition 6.4.5. *Les catégories* $\mathrm{MHM}^{(p)}(X,\mathbb{Q})$*et* $\mathrm{MHM}(X,\mathbb{Q})$ *sont abéliennes.*

Démonstration. [Sai90, Théorème 0.1]

□

Proposition 6.4.6. *Soit* $\varphi_H : \mathscr{M} \to \mathscr{N}$ *un morphisme dans la catégorie* $\mathrm{MHM}(X,\mathbb{Q})$*. Notons* $\varphi_D : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ *le morphisme sous-jacent dans la catégorie des* $\mathscr{D}_X$*-modules holonomes. Si* φ_D *est un isomorphisme, alors* φ_H *l'est aussi.*

Démonstration. La catégorie $\mathrm{MHM}(X,\mathbb{Q})$ étant abélienne, on peut considérer $\mathscr{K}$ et $\mathscr{C}$ le noyau et le conoyau de φ_H. Le morphisme φ_D étant un isomorphisme, et le foncteur d'oubli étant exact, les $\mathscr{D}_X$-modules holonomes sous-jacents à $\mathscr{K}$ et $\mathscr{C}$ sont nuls. D'autre part, le foncteur d'oubli est fidèle, ceci implique que $\mathscr{K}$ et $\mathscr{C}$ sont eux-mêmes nuls et donc que φ_H est un isomorphisme.

□

6.4.2 Image inverse

Définition 6.4.7. Soit $\mathscr{M} \in \mathrm{MHM}(Y,\mathbb{Q})$ et soit $i : X \hookrightarrow Y$ une immersion fermée telle que $X = \cap g_i^0$ où $g_1, ..., g_r$ sont des fonctions holomorphes sur Y. On note $U_i := \{g_i \neq 0\}$ et, pour $I \subset \{1, ..., r\}$,

$$j_I : U_I := \bigcap_{i\in I} U_i \to Y$$

l'inclusion. On définit $i_*\mathcal{H}^j i^*\mathscr{M}$ comme étant la j-ième cohomologie du complexe

$$\bigoplus_{|I|=-\bullet} (j_I)_! j_I^{-1}\mathscr{M}$$

où $(j_I)_! j_I^{-1}\mathscr{M}$ existe grâce à la condition d'images directes bien définies (définition 6.4.2) pour les modules de Hodge mixtes (définition 6.4.3).

Définition 6.4.8. Soit $f : X \to Y$ un morphisme lisse de variétés complexes avec $\mathrm{dim}X - \mathrm{dim}Y = \ell$ et $\mathscr{M} = (\mathcal{M}, F, \mathcal{F}; W) \in \mathrm{MHW}(X,\mathbb{Q})$. On définit $\mathscr{H}^{-\ell} f^! \mathscr{M} = (\mathcal{M}', F', \mathcal{F}'; W')$ avec

$$(\mathcal{M}', F'; W') = f^*(\mathcal{M}, F; W[-\ell])$$
$$(\mathcal{F}'; W') = f^!(\mathcal{F}; W[-\ell])[-\ell].$$

Pour la première égalité on passe par l'équivalence de catégorie entre $\mathscr{D}$-modules à droite et à gauche pour appliquer le foncteur image inverse pour les $\mathscr{D}$-modules à gauche. On définit également

$$\mathscr{H}^{\ell} f^* \mathscr{M} = \mathscr{H}^{-\ell} f^! \mathscr{M}(-\ell)$$

6.4.3 Image directe

Théorème 6.4.9. *Soient* $\mathscr{M} \in \mathrm{MHM}^{(p)}(X,\mathbb{Q})$*,* $f : X \to Y$ *un morphisme projectif,* g *une fonction holomorphe sur* Y *et* $h = g \circ f$*.*

– *Pour tout* $i \in \mathbb{Z}$*,* $\mathcal{H}^i f_* \mathscr{M} \in \mathrm{MHM}^{(p)}(Y,\mathbb{Q})$*,*

- *considérons* $(\mathcal{M}', F, \mathcal{F}'; L, W) = (\Psi_h(\mathcal{M}, F, \mathcal{F}); L, W)$ *ou* $(\Phi_h(\mathcal{M}, F, \mathcal{F}); L, W)$ *où* W *est la filtration monodromique relative à* L.
  On considère la filtration image

$$W\mathcal{H}^i f_*(\mathcal{M}', F, \mathcal{F}') := \mathrm{Im}\left(\mathcal{H}^i f_* W(\mathcal{M}', F, \mathcal{F}') \to \mathcal{H}^i f_*(\mathcal{M}', F, \mathcal{F}')\right).$$

  Alors $W\mathcal{H}^i f_*(\mathcal{M}', F, \mathcal{F}')[j]$ *est la filtration monodromique relative de* $(\mathcal{H}^i f_*(\mathcal{M}', F, \mathcal{F}'), \mathcal{H}^i f_* L[j])$.

Démonstration. [Sai90, Proposition 2.16]

□

6.4.4 Localisation

Soit $j : Y \hookrightarrow X$ l'inclusion d'une hypersurface lisse, on considère ici la filtration de Kashiwara-Malgrange le long de cette hypersurface. On définit la localisation le long de Y.

Définition 6.4.10. Soit $\mathscr{M} = (\mathcal{M}, F, \mathcal{F}; W) \in \mathrm{MHM}^{(p)}(X, \mathbb{Q})$, on définit le localisé naïf de $R_F\mathcal{M}$ comme étant

$$R_F\mathcal{M}(*Y) := R_F\mathcal{M} \otimes_{\widetilde{\mathscr{O}}_X} \widetilde{\mathscr{O}}_X(*Y).$$

On pose

$$V_0 R_F\mathcal{M}(*Y) := V_{-1}(R_F\mathcal{M})t^{-1} \subset R_F\mathcal{M}(*Y)$$

et on définit le localisé de $R_F\mathcal{M}$ comme étant

$$R_F\mathcal{M}[*Y] := V_0 R_F\mathcal{M}(*Y) \cdot \widetilde{\mathscr{D}}_X.$$

6.4.5 Recollement

Théorème 6.4.11. *Soit* $i : X \hookrightarrow Y$ *une immersion fermée et* $j : U := Y - X \hookrightarrow Y$ *l'immersion ouverte. Soit* $\mathrm{MHM}(U)^{(p)}_Y$ *la sous-catégorie pleine de* $\mathrm{MHM}(U)^{(p)}$ *des objets que l'on peut étendre sur* Y *et* $\mathrm{MHM}(U, X)^{(p)}_{ex}$ *la catégorie dont les objets sont* $\{\mathscr{M}', \mathscr{M}'', u, v\}$ *où*

- $\mathscr{M}' \in \mathrm{MHM}(U)^{(p)}_Y$ *et* $\mathscr{M}'' \in \mathrm{MHM}(X)^{(p)}$,
- $u \in \mathrm{Hom}(\Psi_{g,1}\mathscr{M}', \mathscr{M}'')$, $v \in \mathrm{Hom}(\mathscr{M}'', \Psi_{g,1}\mathscr{M}'(-1))$ *et* $v \circ u = N$.

Alors le foncteur

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{MHM}(Y)^{(p)} & \to & \mathrm{MHM}(U, X)^{(p)}_{ex} \\ \mathscr{M} & \mapsto & (j^{-1}\mathscr{M}, \Phi_{g,1}\mathscr{M}, can, var) \end{array}$$

est une équivalence de catégories.

Démonstration. [Sai90, Proposition 2.28]

□

Chapitre 7

Théorème de commutativité des cycles proches et des cycles évanescents pour les modules de Hodge mixtes

Dans ce chapitre, on démontre le résultat de commutativité pour les modules de Hodge mixtes suivants :

Soit $\mathscr{M} \in \mathrm{MHM}^p(X \times \Delta_{\boldsymbol{t}}^p)$ *un module de Hodge mixte sur* $X \times \Delta_{\boldsymbol{t}}^p$ *tel que le couple* $(\mathbf{H}, \mathcal{M})$ *soit sans pente où* $\mathcal{M}$ *est le* $\mathscr{D}_{X \times \Delta_{\boldsymbol{t}}^p}$*-module à droite sous-jacent à* $\mathscr{M}$*. Alors, pour toute permutation* σ *de* $\{1, ..., p\}$*, on a un isomorphisme*

$$\Psi_{t_1} ... \Psi_{t_p} \mathscr{M} \simeq \Psi_{t_{\sigma(1)}} ... \Psi_{t_{\sigma(p)}} \mathscr{M}.$$

On va utiliser les résultats de commutativité de la proposition 2.2.5 pour le $\mathscr{D}$-module sous-jacent à $\mathscr{M}$. Néanmoins, cette proposition permet de comparer les cycles évanescents itérés en passant par les cycles évanescents pour plusieurs fonctions. A priori, on ne sait pas munir ces derniers d'une structure de module de Hodge mixte. On utilisera donc plutôt la définition des cycles proches algébriques impliquant le module des fonctions de classe de Nilsson. Cette définition nous permettra d'utiliser la puissance du formalisme fonctoriel de la catégorie des modules de Hodge mixtes.

Ainsi, on commencera par munir le module des fonctions de classe de Nilsson d'une structure de module de Hodge mixte. On définira ensuite le morphisme **Nils** (cf. section 3.2) pour les modules de Hodge mixtes. Ceci nous permettra de construire un morphisme de comparaison entre les cycles évanescents itérés *dans la catégorie des modules de Hodge mixtes*. On pourra alors utiliser les résultats sur les $\mathscr{D}$-modules grâce à la proposition 6.4.6.

Notations

On rappelle quelques notations qui seront utilisées dans ce chapitre :

- On fixe X une variété analytique complexe.
- On note $\mathscr{D}_X$ le faisceau des opérateurs différentiels holomorphes sur X et $\widetilde{\mathscr{D}}_X := R_F \mathscr{D}_X$ le faisceau associé par la construction de Rees à $\mathscr{D}_X$ muni de la filtration par l'ordre des opérateurs différentiels.
- On indiquera en bas à gauche de chaque foncteur la catégorie de faisceaux dans laquelle on se place. On utilisera les lettres D, $\widetilde{D}$, P et H pour désigner respectivement les catégories $\mathrm{Mod}(\mathscr{D}_X)$, $\mathrm{Mod}(\widetilde{\mathscr{D}}_X)$, $\mathrm{Perv}(\mathbb{Q}_X)$ et $\mathrm{MHM}^p(X)$. Par exemple, le foncteur image inverse par un morphisme lisse dans la catégorie des faisceaux pervers sur $\mathbb{Q}$ sera noté ${}_P f^*$ et le foncteur produit tensoriel dans la catégorie des modules de Hodge mixtes polarisables sera noté ${}_H\otimes$.

Remarque 7.0.12. Dans la catégorie $\mathrm{MHM}^p(X)$, le produit tensoriel de $\mathscr{M}$ et $\mathscr{N}$ est défini par la formule suivante :

$$\mathscr{M}\,{}_H\!\otimes \mathscr{N} := {}_H\delta^* \left(\mathscr{M}\,{}_H\!\boxtimes \mathscr{N}\right)$$

où $\delta : X \to X \times X$ est l'inclusion de la diagonale.

7.1 Le module de Hodge mixte $\mathscr{N}_{q,k}$

Soit $\Delta \subset \mathbb{C}$ un disque de centre 0, de rayon suffisamment petit et de coordonnée s. On note $\Delta^* := \Delta - \{0\}$. On commence par définir une structure de Hodge mixte polarisée de poids k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Définition 7.1.1. Soient $k \in \mathbb{N}$ et V_k le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel de base $\{v_\ell\}_{0\leqslant\ell\leqslant k}$, on définit :
- la filtration décroissante $F^pV_k := \mathrm{Vect}(\{v_\ell\}_{p\leqslant\ell\leqslant k})$,
- l'endomorphisme nilpotent N satisfaisant, pour tout $0 \leqslant \ell \leqslant k$, à $N(v_\ell) = v_{\ell-1}$,
- la forme bilinéaire Q satisfaisant, pour tout $0 \leqslant \ell \leqslant k$, à $Q(v_\ell, v_{k-\ell'}) = \delta_{\ell\ell'}$.

La filtration par le poids de cette structure de Hodge mixte polarisée est donnée par

$$W_iV_k = \mathrm{Vect}(\{v_\ell\}_{0\leqslant\ell\leqslant\frac{i}{2}}).$$

L'orbite nilpotente associée à cette structure de Hodge mixte polarisée est une variation de structure de Hodge polarisée sur Δ^* de rayon suffisamment petit, on la note $\mathcal{H}_k$. Le $\mathbb{Q}$-système local correspondant est donné par l'application de monodromie $\exp(N)$. La filtration de Hodge est donnée par la formule suivante :

$$F^p\mathcal{H}_k := \exp\left(\frac{\log s}{2i\pi}N\right)F^pV_k.$$

On note $\{e_\ell\}_{0\leqslant\ell\leqslant k}$ la base de sections holomorphes définie par

$$e_\ell := (2i\pi)^\ell \sum_{0\leqslant j\leqslant\ell} \frac{1}{j!}\left(\frac{\log s}{2i\pi}\right)^j v_{\ell-j},$$

on a

$$s\partial_s \cdot e_\ell = e_{\ell-1},$$

et

$$F^p\mathcal{H}_k = \bigoplus_{p\leqslant\ell\leqslant k} \mathcal{O}_{\Delta^*}e_\ell.$$

On passe à la convention $\mathscr{D}_{\Delta^*}$-modules à droite et on note $\mathscr{H}_k$ le module de Hodge polarisé correspondant à la variation de structure de Hodge polarisée $\mathcal{H}_k$. En suivant l'équivalence de catégories du théorème 6.4.11, on va définir un module de Hodge mixte polarisé sur Δ. On considère les données suivantes :
- $\mathscr{H}_k$ vu comme module de Hodge mixte polarisé sur Δ^*,
- la structure de Hodge mixte polarisée V_k vue comme module de Hodge mixte polarisé sur $\{0\}$,
- les morphismes

$$u : \begin{array}{ccc} {}_H\Psi_{t,1}\mathscr{H}_k & \to & V_k \\ e_\ell & \mapsto & v_{\ell-1}, \end{array} \quad v : \begin{array}{ccc} V_k & \to & {}_H\Psi_{t,1}\mathscr{H}_k \\ v_\ell & \mapsto & e_\ell \end{array}.$$

Définition 7.1.2. On définit l'objet $\mathscr{N}_k \in \mathrm{MHM}^p(\Delta)$ en appliquant l'équivalence de catégories du théorème 6.4.11 au quadruplet

$$(\mathscr{H}_k, V_k, u, v)\,.$$

Le $\widetilde{\mathscr{D}}_\Delta$-module à droite sous-jacent à $\mathscr{N}_k$ est engendré par les sections $\left\{\frac{\widetilde{e}_\ell}{s}\right\}_{0\leqslant \ell\leqslant k}$, où $\widetilde{e}_\ell := \frac{e_\ell}{z^\ell}$. On a

$$\frac{\widetilde{e}_\ell}{s}\cdot s\eth_s = -\frac{\widetilde{e}_{\ell-1}}{s}.$$

Considérons l'application

$$\begin{array}{rccc} r_q : & \Delta & \rightarrow & \Delta \\ & s & \mapsto & t = s^q \end{array}.$$

Définition 7.1.3. On définit un module de Hodge mixte polarisé :

$$\mathscr{N}_{q,k} := {}_H r_{q*}\mathscr{N}_k.$$

On note $V^{\mathbb{Q}}_{q,k}$ le faisceau pervers rationnel sous-jacent à $\mathscr{N}_{q,k}$ et $\{v_{p,\ell}\}_{\substack{0\leqslant \ell\leqslant k\\ 1\leqslant p\leqslant q}}$ la base naturelle de ${}_P\Psi_t V^{\mathbb{Q}}_{q,k}$. Le $\widetilde{\mathscr{D}}_\Delta$-module à droite sous-jacent à $\mathscr{N}_{q,k}$ s'écrit

$$\bigoplus_{1\leqslant p\leqslant q}\mathfrak{N}_{-\frac{p}{q},k},$$

où $\mathfrak{N}_{-\frac{p}{q},k}$ est le $\widetilde{\mathscr{D}}_\Delta$-module à droite engendré par les sections $\left\{\widetilde{e}_{-\frac{p}{q},\ell}\right\}_{0\leqslant \ell\leqslant k}$ où $\widetilde{e}_{-\frac{p}{q},\ell} := s^{-p}q^\ell\widetilde{e}_\ell$. On a

$$\widetilde{e}_{-\frac{p}{q},\ell}\cdot t\eth_t = -\left(1-\frac{p}{q}\right)z\cdot\widetilde{e}_{-\frac{p}{q},\ell} - \widetilde{e}_{-\frac{p}{q},\ell-1}. \tag{7.1}$$

Ainsi, pour tout $\alpha\in\mathbb{Q}\cap[-1,0[$ et pour tout $k\in\mathbb{N}$, $\mathfrak{N}_{\alpha,k}$ et facteur direct d'un module de Hodge mixte polarisable.

D'autre part, pour tout $\alpha\in\mathbb{Q}\cap[-1,0[$ et pour tout $k\in\mathbb{N}$, $\mathfrak{N}_{\alpha,k}$ est égal à sont localisé. En effet, si $\alpha\in]-1,0[$,

$$V_0\mathfrak{N}_{\alpha,k} = V_\alpha\mathfrak{N}_{\alpha,k} = V_\alpha\left(\mathfrak{N}_{\alpha,k}(*\{0\})\right) = V_0\left(\mathfrak{N}_{\alpha,k}(*\{0\})\right).$$

Donc, d'après la définition 6.4.10, $\mathfrak{N}_{\alpha,k} = \mathfrak{N}_{\alpha,k}[*\{0\}]$. Pour $\alpha=-1$, l'égalité (7.1) donne

$$\frac{\widetilde{e}_{-1,\ell}}{t} = \widetilde{e}_{-1,\ell}\cdot\eth_t + \widetilde{e}_{-1,\ell-1}.$$

On en déduit que

$$V_{-1}\mathfrak{N}_{-1,k}t^{-1}\subset V_0\mathfrak{N}_{-1,k}$$

et donc, d'après la définition 6.4.10, que $\mathfrak{N}_{-1,k} = \mathfrak{N}_{-1,k}[*\{0\}]$.

7.2 Calcul de la V-filtration de $\mathfrak{M}_{\alpha,k}$

Dans cette section, on fixe $\mathfrak{M}$ un $\widetilde{\mathscr{D}}_{X\times\Delta}$-module sous-jacent à un module de Hodge mixte polarisable et on considère la projection

$$\begin{array}{rccc} \pi : & X\times\Delta & \rightarrow & \Delta \\ & (x,t) & \mapsto & t \end{array}.$$

On note $X_0 := X\times\{0\}$.

Définition 7.2.1. Pour $\alpha \in \mathbb{Q} \cap [-1, 0[$ et $k \in \mathbb{N}$, on définit

$$\mathfrak{M}_{\alpha,k} := \mathfrak{M} \ {}_{\tilde{D}}\!\otimes \ \left({}_{\tilde{D}}\pi^* \mathfrak{N}_{\alpha,k}\right).$$

Remarque 7.2.2. Dans la définition 7.2.1, on utilise le produit tensoriel entre deux $\widetilde{\mathscr{D}}$-modules à droite, on le définit de la manière suivante : soient $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ deux $\widetilde{\mathscr{D}}_X$-modules à droite, leur produit tensoriel est donné par la formule suivante :

$$\mathfrak{M} \ {}_{\tilde{D}}\!\otimes \ \mathfrak{N} := \mathfrak{M} \otimes_{\tilde{\mathfrak{O}}_X} \mathscr{H}om_{\tilde{\mathfrak{O}}_X}(\tilde{\omega}_X, \mathfrak{N}).$$

Ce $\widetilde{\mathfrak{O}}_X$-module est muni de la structure de $\widetilde{\mathscr{D}}_X$-module à droite provenant de la structure de $\widetilde{\mathscr{D}}_X$-module à gauche de $\mathscr{H}om_{\tilde{\mathfrak{O}}_X}(\tilde{\omega}_X, \mathfrak{N})$.

Proposition 7.2.3. *Soient $\alpha \in \mathbb{Q} \cap [-1, 0[$ et $k \in \mathbb{N}$, le $\widetilde{\mathscr{D}}_{X\times\Delta}$-module $\mathfrak{M}_{\alpha,k}$ est strictement $\mathbb{R}$-spécialisable le long de X_0 et pour tout $\beta \in \mathbb{R}$, on a :*

$$V_\beta(\mathfrak{M}_{\alpha,k}) = \bigoplus_{0\leqslant \ell \leqslant k} V_{\beta+\alpha+1}\left(\mathfrak{M}\left[*X_0\right]\right) \tilde{e}_{\alpha,\ell}.$$

avec la localisation de la définition 6.4.10.

Démonstration. D'après ce qui précède, $\mathfrak{M}_{\alpha,k}$ est facteur direct d'un $\widetilde{\mathscr{D}}_{X\times\Delta}$-module sous-jacent à un module de Hodge mixte polarisable, il est donc strictement $\mathbb{R}$-spécialisable le long de X_0.

On note

$$U_\beta(\mathfrak{M}_{\alpha,k}) := \bigoplus_{0\leqslant \ell \leqslant k} V_{\beta+\alpha+1}\left(\mathfrak{M}[*X_0]\right) \tilde{e}_{\alpha,\ell}.$$

Soit $m \in \mathfrak{M}[*X_0]$, $\ell \in \mathbb{N}$ et $\gamma \in \mathbb{R}$, on a

$$(m \otimes \tilde{e}_{\alpha,\ell})(t\eth_t + \gamma z) = (m(t\eth_t + \gamma z - (\alpha+1)z)) \otimes \tilde{e}_{\alpha,\ell} - m \otimes \tilde{e}_{\alpha,\ell-1}, \tag{7.2}$$

ainsi, pour tout $\beta \in \mathbb{R}$, $U_\beta(\mathfrak{M}_{\alpha,k})$ est un $V_0\widetilde{\mathscr{D}}_{X\times\Delta}$-module.

Montrons que $U_\beta(\mathfrak{M}_{\alpha,k}) \subset V_\beta(\mathfrak{M}_{\alpha,k})$. Soit $m \in V_{\beta+\alpha+1}\left(\mathfrak{M}[*X_0]\right)$, il existe des polynômes

– $b(s) = \prod_{a\in A}(s - az)$ tel que pour tout $a \in A$, $a \leqslant \beta + \alpha + 1$,

– $P(s) \in \widetilde{\mathscr{D}}_{X\times\Delta/\Delta}[s]$ à coefficients indépendants de $\eth_t$

tels que

$$m \cdot (b(t\eth_t) - tP(t\eth_t)) = 0.$$

On déduit de l'égalité (7.2) que

$$(m \otimes \tilde{e}_{\alpha,\ell}) \cdot (b\left(t\eth_t + (\alpha+1)z\right) - tP(t\eth_t + (\alpha+1)z)) \in \bigoplus_{0\leqslant \ell' < \ell} V_{\beta+\alpha+1}\left(\mathfrak{M}[*X_0]\right) \tilde{e}_{\alpha,\ell'},$$

or les racines de $b\left(s + (\alpha+1)z\right)$ sont inférieures ou égales à β, on montre ainsi par récurrence que $(m \otimes \tilde{e}_{\alpha,\ell}) \in V_\beta(\mathfrak{M}_{\alpha,k})$ et donc que $U_\beta(\mathfrak{M}_{\alpha,k}) \subset V_\beta(\mathfrak{M}_{\alpha,k})$.

Réciproquement, considérons la suite exacte de $V_0(\widetilde{\mathscr{D}}_X)$-modules :

$$0 \to U_\beta(\mathfrak{M}_{\alpha,k-1}) \to U_\beta(\mathfrak{M}_{\alpha,k}) \to U_\beta(\mathfrak{M}_{\alpha,0}) \to 0,$$

d'après ce qui précède, il suffit de montrer que $U_\beta(\mathfrak{M}_{\alpha,0}) = V_\beta(\mathfrak{M}_{\alpha,0})$ pour conclure que $U_\beta(\mathfrak{M}_{\alpha,k}) = V_\beta(\mathfrak{M}_{\alpha,k})$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Soit $(m \otimes \tilde{e}_{\alpha,0}) \in V_\beta(\mathfrak{M}_{\alpha,0})$, il existe des polynômes

– $b(s) = \prod_{a\in A}(s - az)$ tel que pour tout $a \in A$, $a \leqslant \beta$,

– $P(s) \in \widetilde{\mathscr{D}}_{X\times\Delta/\Delta}[s]$ à coefficients indépendants de $\eth_t$

tels que
$$(m \otimes \widetilde{e}_{\alpha,0}) \cdot (b(t\eth_t) - tP(t\eth_t)) = 0.$$
On déduit de l'égalité (7.2) que
$$[m \cdot (b(t\eth_t - (\alpha+1)z) - tP(t\eth_t - (\alpha+1)z))] \otimes \widetilde{e}_{\alpha,0} = 0,$$
et donc
$$m \cdot (b(t\eth_t - (\alpha+1)z) - tP(t\eth_t - (\alpha+1)z)) = 0.$$
Finalement, $m \in V_{\beta+\alpha+1}(\mathfrak{M}[*X_0])$, ce qui conclut la démonstration.

□

7.3 Le morphisme Nils

Définition 7.3.1. Soit $\mathfrak{M}$ un $\widetilde{\mathscr{D}}_{X\times\Delta}$-module sous-jacent à un module de Hodge mixte polarisable. En suivant la proposition 7.2.3, on définit le morphisme suivant :
$$\begin{array}{rccc} {}_{\tilde{D}}\mathbf{N}: & \mathrm{gr}^V_\alpha(\mathfrak{M}) & \longrightarrow & \mathrm{gr}^V_{-1}(\mathfrak{M}_{\alpha,k}) \\ & m & \longmapsto & \displaystyle\sum_{0\leqslant \ell\leqslant k} \left[m \cdot (t\eth_t - \alpha z)^\ell\right] \otimes \widetilde{e}_{\alpha,\ell}. \end{array}$$

Définition 7.3.2. On considère ici le faisceau pervers rationnel $V^{\mathbb{Q}}_{q,k}$ de la définition 7.1.3. Soit $K \in Perv(\mathbb{Q}_{X\times\Delta})$ un faisceau pervers rationnel sur $X\times\Delta$. On définit ${}_P\mathbf{N} : {}_P\Psi_t(K) \longrightarrow {}_P\Psi_{t,1}(K \;{}_P\!\otimes {}_P\pi^! V^{\mathbb{Q}}_{q,k}[1])$ comme étant le morphisme de faisceaux pervers
$$\sum_{\substack{0\leqslant\ell\leqslant k\\ 1\leqslant p\leqslant q}} (\log T_u)^\ell \otimes v_{p,\ell}$$
composé avec la projection de ${}_P\Psi_t$ sur ${}_P\Psi_{t,1}$. Ici, T_u est la partie unipotente de la monodromie.

Définition 7.3.3. Soit $\mathscr{M} \in \mathrm{MHM}^p(X\times\Delta)$ un module de Hodge mixte sur $X\times\Delta$. Il existe un ensemble fini A de nombres rationnels dans $[-1,0[$ tel que la V-filtration du $\widetilde{\mathscr{D}}_{X\times\Delta}$-module sous-jacent à $\mathscr{M}$ soit indexée par $A+\mathbb{Z}$. Soit $q\in\mathbb{N}$ tel que $A \subset \{-\frac{p}{q} | 1 \leqslant p \leqslant q\}$, on définit :
$$\mathscr{M}_{q,k} := \mathscr{M} \;{}_H\!\otimes {}_H\pi^!(\mathscr{N}_{q,k})$$
où ${}_H\pi^!$ est définit par 6.4.8. Si $\mathcal{M}$ est un $\mathscr{D}_{X\times\Delta}$-module, la monodromie sur ${}_P\Psi_t\mathbf{DR}_{X\times\Delta}\mathcal{M}$ correspond à l'action de $\exp(2i\pi t\partial_t)$ sur ${}_D\Psi_t\mathcal{M}$. En combinant les définitions 7.3.1 et 7.3.2, on obtient un morphisme de modules de Hodge mixtes
$${}_H\mathbf{N} : \Psi_t(\mathscr{M}) \longrightarrow \Psi_{t,1}(\mathscr{M}_{q,k}).$$

Lemme 7.3.4. *Soit k_α l'ordre de nilpotence de la multiplication à droite par $(t\eth_t - \alpha z)$ sur $\Psi_{t,\lambda}\mathscr{M}$ où $\lambda := e^{2i\pi\alpha}$. Alors, pour tout $k \geqslant \max_{\alpha\in[-1,0[} k_\alpha$, le morphisme*
$$\mathrm{can} \circ {}_H\mathbf{N} : \Psi_t\mathscr{M} \to \Phi_{t,1}(\mathscr{M}_{q,k})$$
est nul.

Démonstration. On vérifie cela sur la définition de ${}_{\widetilde{D}}\mathbf{N}$. Le foncteur d'oubli de la catégorie des modules de Hodge mixtes vers celle des $\widetilde{\mathscr{D}}$-modules est fidèle, donc si $\mathrm{can}\circ {}_{\widetilde{D}}\mathbf{N}$ est nul, alors $\mathrm{can}\circ {}_{H}\mathbf{N}$ l'est aussi.

□

Définition 7.3.5. On a la suite exacte (2.24.3) de [Sai90, Corollaire 2.24]

$$0 \to {}_Hi_*\mathscr{H}^{-1}{}_Hi^*\left(\mathscr{M}_{q,k}\right) \to \Psi_{t,1}\left(\mathscr{M}_{q,k}\right) \xrightarrow{\mathrm{can}} \Phi_{t,1}\left(\mathscr{M}_{q,k}\right) \to {}_Hi_*\mathscr{H}^0{}_Hi^*\left(\mathscr{M}_{q,k}\right) \to 0. \tag{7.3}$$

Combiné avec le lemme précédent 7.3.4, ceci fournit un morphisme naturel

$$\boxed{\mathbf{Nils} : \Psi_t\mathscr{M} \to {}_Hi_*\mathscr{H}^{-1}{}_Hi^*\left(\mathscr{M}_{q,k}\right).}$$

Remarque 7.3.6. Ici, i est l'inclusion de X_0 dans $X \times \Delta$. On note $j : X \times \Delta^* \hookrightarrow X \times \Delta$ l'inclusion du complémentaire de X_0. D'après la définition 6.4.7, ${}_Hi_*\mathscr{H}^{-1}{}_Hi^*\mathscr{M}$ est le $\mathscr{H}^{-1}$ du complexe

$$0 \to {}_Hj_!{}_Hj^*\mathscr{M} \to \underset{\bullet}{\mathscr{M}} \to 0.$$

7.4 Morphisme naturel pour deux hypersurfaces

Dans cette section on construit, à l'aide de ce qui précède, un morphismes de comparaison entre $\Psi_{t_1}\Psi_{t_2}\mathscr{M}$ et $\Psi_{t_1}\Psi_{t_2}\mathscr{M}$. Les objets intermédiaires apparaissant dans cette construction seront définis à l'aide de foncteurs usuels. Grâce au formalisme fonctorielle de M. Saito, le morphisme de comparaison sera ainsi un morphisme définit *dans la catégorie des modules de Hodge mixtes* contrairement au morphisme qui découle de la proposition 2.2.5.

Définition 7.4.1. Soit $\mathscr{N} \in \mathrm{MHM}^p(X)$, on dira que $\mathscr{N}$ est *plat* si le $\mathscr{D}_X$-module qui lui est sous-jacent est plat en tant que $\mathscr{O}_X$-module.

Lemme 7.4.2. *Si $\mathscr{N} \in \mathrm{MHM}^p(X)$ est plat, alors le foncteur $\cdot {}_H\!\otimes \mathscr{N}$ est exact.*

Démonstration. Le foncteur produit tensoriel dans la catégorie $\mathrm{MHM}^p(X)$ correspond au produit tensoriel des $\mathscr{D}_X$-modules via le foncteur d'oubli naturel. Soit $0 \to \mathscr{M}_1 \to \mathscr{M}_2 \to \mathscr{M}_3 \to 0$ une suite exacte dans $\mathrm{MHM}^p(X)$ que l'on voit comme un complexe $\mathscr{M}_\bullet$. Pour tout $i \in \mathbb{Z}$, le $\mathscr{D}_X$-module sous-jacent à $\mathscr{H}^i(\mathscr{M}_\bullet {}_H\!\otimes \mathscr{N})$ est nul par platitude du $\mathscr{O}_X$-module sous-jacent à $\mathscr{N}$. On en déduit que, pour tout $i \in \mathbb{Z}$, $\mathscr{H}^i(\mathscr{M}_\bullet {}_H\!\otimes \mathscr{N})$ est le module de Hodge mixte nul et donc que $\mathscr{M}_\bullet {}_H\!\otimes \mathscr{N}$ est une suite exacte courte.

□

Lemme 7.4.3. *Soit $i : Y \to X$ l'inclusion d'une hypersurface lisse, $\mathscr{M}$ et $\mathscr{N}$ des objets de $\mathrm{MHM}^p(X)$ avec $\mathscr{N}$ plat. Il existe un morphisme naturel*

$${}_Hi_*\mathscr{H}^{-1}{}_Hi^*(\mathscr{M}{}_H\!\otimes\mathscr{N}) \to ({}_Hi_*\mathscr{H}^{-1}{}_Hi^*\mathscr{M}){}_H\!\otimes\mathscr{N}. \tag{7.4}$$

Démonstration. Dans cette démonstration, on omettra l'indice H des foncteurs pour alléger les notations. On va utiliser la définition de la remarque 7.3.6 du foncteur $i_*\mathscr{H}^{-1}i^*$. Notons $j : X\backslash Y \to X$ l'inclusion. On considère le carré commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
(j_!j^*\mathscr{M}) \otimes \mathscr{N} \arrow[r] & \mathscr{M} \otimes \mathscr{N} \\
j_!j^*\left((j_!j^*\mathscr{M}) \otimes \mathscr{N}\right) \arrow[u, "\psi"] \arrow[r, "\phi"] & j_!j^*(\mathscr{M} \otimes \mathscr{N}). \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Le foncteur $j_!j^*$ ne dépend que de la restriction à $X\backslash Y$, donc le morphisme ϕ est un isomorphisme. On en déduit que le morphisme de complexes induit par f est un quasi-isomorphisme. On a donc un morphisme de complexes

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & (j_!j^*\mathscr{M}) \otimes \mathscr{N} \arrow[r] & \mathscr{M} \otimes \mathscr{N} \arrow[r] & 0 \\ 0 \arrow[r] & j_!j^*(\mathscr{M} \otimes \mathscr{N}) \arrow[r] \arrow[u, "\psi\circ\phi^{-1}"] & \mathscr{M} \underset{\bullet}{\otimes} \mathscr{N} \arrow[r] \arrow[u, equal] & 0. \end{tikzcd}$$

Ceci induit un morphisme entre les $\mathscr{H}^{-1}$ des deux complexes, en appliquant la définition de la remarque 7.3.6 du foncteur $i_*\mathscr{H}^{-1}i^*$, on obtient le morphisme

$$i_*\mathscr{H}^{-1}i^*(\mathscr{M} \otimes \mathscr{N}) \longrightarrow (i_*\mathscr{H}^{-1}i^*\mathscr{M}) \otimes \mathscr{N},$$

on utilise ici l'exactitude du foncteur $\cdot \otimes \mathscr{N}$.

□

Considérons la projection

$$\begin{array}{rccc} \pi = (\pi_1, \pi_2): & X \times \Delta^2 & \to & \Delta^2 \\ & (x, t_1, t_2) & \mapsto & (t_1, t_2). \end{array}$$

On note $H_i := \{t_i = 0\}$ pour $i \in \{1, 2\}$, on a les inclusions naturelles
- $i_1 : H_1 \hookrightarrow X \times \Delta^2$,
- $i_2 : H_2 \hookrightarrow X \times \Delta^2$,
- $i_{(1,2)} : H_1 \cap H_2 \hookrightarrow X \times \Delta^2$.

On définit le module de Hodge mixte polarisable sur Δ^2 suivant :

$$\mathscr{N}_{\boldsymbol{q},\boldsymbol{k}} := \mathscr{N}_{q_1,k_1} \ {}_H\boxtimes \ \mathscr{N}_{q_2,k_2}$$

et

$$\mathscr{M}_{\boldsymbol{q},\boldsymbol{k}} := \mathscr{M} \ {}_H\otimes \ {}_H\pi^!\mathscr{N}_{\boldsymbol{q},\boldsymbol{k}}.$$

Proposition 7.4.4. *Soit $\mathscr{M} \in \mathrm{MHM}^p(X \times \Delta^2)$, il existe des morphismes naturels*

$$\begin{array}{c} {}_Hi_{1*}\mathscr{H}^{-1}{}_Hi_1^*({}_Hi_{2*}\mathscr{H}^{-1}{}_Hi_2^*(\mathscr{M}_{q_1,k_1}) \ {}_H\otimes \ {}_H\pi_2{}^!\mathscr{N}_{q_2,k_2}) \\ \Big\uparrow \\ {}_Hi_{(1,2)*}\mathscr{H}^{-2}{}_Hi_{(1,2)}^*(\mathscr{M}_{\boldsymbol{q},\boldsymbol{k}}) \\ \Big\downarrow \\ {}_Hi_{2*}\mathscr{H}^{-1}{}_Hi_2^*({}_Hi_{1*}\mathscr{H}^{-1}{}_Hi_1^*(\mathscr{M}_{q_2,k_2}) \ {}_H\otimes \ {}_H\pi_1{}^!\mathscr{N}_{q_1,k_1}). \end{array} \tag{7.5}$$

Remarque 7.4.5. Le foncteur ${}_Hi_{(1,2)*}\mathscr{H}^{-2}{}_Hi_{(1,2)}^*$ est ici aussi défini en suivant la définition 6.4.7.

Démonstration. On va construire le morphisme naturel

$${}_Hi_{(1,2)*}\mathscr{H}^{-2}{}_Hi_{(1,2)}^*(\mathscr{M}_{\boldsymbol{q},\boldsymbol{k}}) \to {}_Hi_{1*}\mathscr{H}^{-1}{}_Hi_1^*({}_Hi_{2*}\mathscr{H}^{-1}{}_Hi_2^*(\mathscr{M}_{q_1,k_1}) \ {}_H\otimes \ {}_H\pi_2{}^!\mathscr{N}_{q_2,k_2}),$$

le deuxième s'en déduisant par symétrie. On omettra l'indice H des foncteurs pour alléger les notations. On note $U_i := H_i^c = \{t_i \neq 0\}$ pour $i \in \{1, 2\}$, on a les inclusions naturelles

– $j_1 : U_1 \hookrightarrow X \times \Delta^2$,
– $j_2 : U_2 \hookrightarrow X \times \Delta^2$,
– $j_{(1,2)} : U_1 \cap U_2 = X \times (\Delta^*)^2 \hookrightarrow X \times \Delta^2$.

D'après la définition 6.4.7, $i_{(1,2)*}\mathscr{H}^{-2}i^*_{(1,2)}(\mathscr{M}_{\boldsymbol{q},\boldsymbol{k}})$ est le $\mathscr{H}^{-2}$ du complexe simple associé au complexe double suivant :

$$\begin{tikzcd} j_{1!}j_1^*\mathscr{M}_{\boldsymbol{q},\boldsymbol{k}} \arrow[r] & \overset{\bullet}{\mathscr{M}}_{\boldsymbol{q},\boldsymbol{k}} \\ j_{(1,2)!}j^*_{(1,2)}\mathscr{M}_{\boldsymbol{q},\boldsymbol{k}} \arrow[r] \arrow[u] & j_{2!}j_2^*\mathscr{M}_{\boldsymbol{q},\boldsymbol{k}}. \arrow[u] \end{tikzcd} \tag{7.6}$$

Considérons le carré cartésien

$$\begin{tikzcd} U_1 \cap U_2 \arrow[r, "j_2"] \arrow[d, "j_1"] & U_1 \arrow[d, "j_1"] \\ U_2 \arrow[r, "j_2"] & X. \end{tikzcd}$$

Par adjonction, on a une transformation naturelle de changement de base propre

$$j_{2!}j_1^* \to j_1^*j_{2!}.$$

Si on applique ce morphisme à un module de Hodge mixte, les faisceaux pervers sous-jacents au noyau et au conoyau sont nuls, car le changement de base propre est un isomorphisme dans la catégorie des faisceaux pervers. Ainsi, le noyau et le conoyau sont nuls dans la catégorie $\mathrm{MHM}^p(X)$. La transformation naturelle de changement de base propre est donc un isomorphisme dans $\mathrm{MHM}^p(X)$.

On en déduit l'isomorphisme de foncteurs

$$j_{(1,2)!}j^*_{(1,2)} \xrightarrow{\sim} j_{1!}j_1^*j_{2!}j_2^*$$

en utilisant l'égalité $j_{(1,2)} = j_2 \circ j_1$. On déduit alors du complexe double (7.6) le diagramme commutatif suivant, où les suites courtes sont exactes :

$$\begin{tikzcd} i_{1*}\mathscr{H}^{-1}i_1^*\left(\mathscr{M}_{\boldsymbol{q},\boldsymbol{k}}\right) \arrow[r] & j_{1!}j_1^*\mathscr{M}_{\boldsymbol{q},\boldsymbol{k}} \arrow[r] & \overset{\bullet}{\mathscr{M}}_{\boldsymbol{q},\boldsymbol{k}} \\ i_{1*}\mathscr{H}^{-1}i_1^*\left(j_{2!}j_2^*\mathscr{M}_{\boldsymbol{q},\boldsymbol{k}}\right) \arrow[r] \arrow[u] & j_{1!}j_1^*j_{2!}j_2^*\mathscr{M}_{\boldsymbol{q},\boldsymbol{k}} \arrow[r] \arrow[u] & j_{2!}j_2^*\mathscr{M}_{\boldsymbol{q},\boldsymbol{k}} \arrow[u] \\ i_{1*}\mathscr{H}^{-1}i_1^*\left(i_{2*}\mathscr{H}^{-1}i_2^*\left(\mathscr{M}_{\boldsymbol{q},\boldsymbol{k}}\right)\right). \arrow[u] & & \end{tikzcd}$$

On a $i_{1*}\mathscr{H}^{-2}i_1^* = 0$, donc l'exactitude de la suite courte verticale provient du résultat analogue pour les faisceaux pervers. Comme $i_{(1,2)*}\mathscr{H}^{-2}i^*_{(1,2)}(\mathscr{M}_{\boldsymbol{q},\boldsymbol{k}})$ est le $\mathscr{H}^{-2}$ du complexe simple associé au complexe double (7.6), on a l'isomorphisme

$$i_{(1,2)*}\mathscr{H}^{-2}i^*_{(1,2)}(\mathscr{M}_{\boldsymbol{q},\boldsymbol{k}}) \simeq i_{1*}\mathscr{H}^{-1}i_1^*\left(i_{2*}\mathscr{H}^{-1}i_2^*\left(\mathscr{M}_{\boldsymbol{q},\boldsymbol{k}}\right)\right). \tag{7.7}$$

Le module de Hodge mixte ${}_H\pi_2{}^!\mathscr{N}_{q_2,k_2}$ est plat au sens de la définition 7.4.1. En effet, d'après la définition 6.4.8, le $\mathscr{D}_{X\times\Delta^2}$-module qui lui est sous-jacent est l'image inverse au sens des $\mathscr{D}$-modules du module sous-jacent à $\mathscr{N}_{q_2,k_2}$. Ce dernier est un $\mathscr{O}_\Delta$-module libre et sont image inverse par la projection sur Δ est encore libre donc plate. On applique alors le lemme 7.4.3 à i_2, $\mathscr{M}_{q_1,k_1}$ et ${}_H\pi_2{}^!\mathscr{N}_{q_2,k_2}$. On obtient le morphisme

$$i_{2*}\mathscr{H}^{-1}i_2^*(\mathscr{M}_{\boldsymbol{q},\boldsymbol{k}}) \to i_{2*}\mathscr{H}^{-1}i_2^*(\mathscr{M}_{q_1,k_1}) \otimes \pi_2{}^!\mathscr{N}_{q_2,k_2}. \tag{7.8}$$

En combinant les morphismes (7.7) et (7.8), on obtient le morphisme attendu.

□

En appliquant le morphisme **Nils** de la définition 7.3.5 pour les fonctions $t_1 : X \times \Delta^2 \to \mathbb{C}$ et $t_2 : X \times \Delta^2 \to \mathbb{C}$, on ajoute deux morphismes au diagramme (7.5) de la façon suivante :

$$\begin{tikzcd}
\Psi_{t_1}\Psi_{t_2}\mathscr{M} \arrow[r] & {}_Hi_{1*}\mathscr{H}^{-1}{}_Hi_1^*\left({}_Hi_{2*}\mathscr{H}^{-1}{}_Hi_2^*(\mathscr{M}_{q_2,k_2})\ {}_H\!\otimes\ {}_H\pi_2{}^!\mathscr{N}_{q_1,k_1}\right) \\
 & {}_Hi_{(1,2)*}\mathscr{H}^{-2}{}_Hi_{(1,2)}^*(\mathscr{M}_{\boldsymbol{q},\boldsymbol{k}}) \arrow[u] \arrow[d] \\
\Psi_{t_2}\Psi_{t_1}\mathscr{M} \arrow[r] & {}_Hi_{2*}\mathscr{H}^{-1}{}_Hi_2^*\left({}_Hi_{1*}\mathscr{H}^{-1}{}_Hi_1^*(\mathscr{M}_{q_1,k_1})\ {}_H\!\otimes\ {}_H\pi_1{}^!\mathscr{N}_{q_2,k_2}\right).
\end{tikzcd} \tag{7.9}$$

7.5 Application du foncteur d'oubli

Dans cette section, on considère encore la projection

$$\begin{array}{rccc} \pi = (\pi_1,\pi_2) : & X \times \Delta^2 & \to & \Delta^2 \\ & (x,t_1,t_2) & \mapsto & (t_1,t_2). \end{array}$$

On note $\mathbf{H} := \{H_1, H_2\}$. Soit $\mathcal{M}$ un $\mathscr{D}_{X\times\Delta^2}$-module à droite cohérent tel que le couple $(\mathbf{H},\mathcal{M})$ soit *sans pente*. D'après le corollaire 2.1.13, la V-multifiltration canonique vérifie pour tout $(\alpha_1,\alpha_2) \in \mathbb{C}^2$,

$$\mathrm{gr}_{\alpha_1}^{V^{H_1}}\mathrm{gr}_{\alpha_2}^{V^{H_2}}\mathcal{M} \xleftarrow{\sim} \mathrm{gr}_{\alpha_1,\alpha_2}^{V^{\mathbf{H}}}\mathcal{M} \xrightarrow{\sim} \mathrm{gr}_{\alpha_2}^{V^{H_2}}\mathrm{gr}_{\alpha_1}^{V^{H_1}}\mathcal{M}. \tag{7.10}$$

Définition 7.5.1. Soit $\mathcal{N}_{\alpha,k}$ le $\mathscr{D}_\Delta$-module sous-jacent au $\widetilde{\mathscr{D}}_\Delta$-module de la définition 7.1.3. Soient $\boldsymbol{\alpha} \in [-1,0[^2$ et $\boldsymbol{k} \in \mathbb{N}^2$, on définit le $\mathscr{D}_{\Delta^2}$-module suivant :

$$\mathcal{N}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{k}} := \mathcal{N}_{\alpha_1,k_1}\ {}_D\boxtimes\ \mathcal{N}_{\alpha_2,k_2},$$

pour $\mathbf{0} \leqslant \boldsymbol{\ell} \leqslant \boldsymbol{k}$, on note

$$e_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\ell}} := e_{\alpha_1,\ell_1} \otimes e_{\alpha_2,\ell_2}.$$

On définit

$$\mathcal{M}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{k}} := \mathcal{M}\ {}_D\!\otimes\ {}_D\pi^*\mathcal{N}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{k}}.$$

Proposition 7.5.2. *Soient $\boldsymbol{\alpha} \in [-1,0[^2$ et $\boldsymbol{k} \in \mathbb{N}^2$. Sous les hypothèses précédentes, le couple $(\mathbf{H},\mathcal{M}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{k}})$ est sans pente et pour tout $\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{C}^2$, on a :*

$$V_{\boldsymbol{\beta}}(\mathcal{M}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{k}}) = \bigoplus_{\mathbf{0}\leqslant\boldsymbol{\ell}\leqslant\boldsymbol{k}} V_{\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}+\mathbf{1}}\left(\mathcal{M}[\frac{1}{t_1t_2}]\right)e_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\ell}}.$$

Démonstration. C'est le cas $p = 2$ de la proposition 2.5.4.

□

Définition 7.5.3. On définit le morphisme suivant :

$$\begin{array}{rccc} {}_{\mathbf{D}}\mathbf{N}_{(1,2)} : & \mathrm{gr}^{V^{\mathbf{H}}}_{\boldsymbol{\alpha}}\mathcal{M} & \longrightarrow & \mathrm{gr}^{V^{\mathbf{H}}}_{-1,-1}\mathcal{M}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{k}} \\ & m & \longmapsto & \displaystyle\sum_{\mathbf{0}\leqslant\boldsymbol{\ell}\leqslant\boldsymbol{k}} m\cdot(t_1\partial_{t_1}-\alpha_1)^{\ell_1}(t_2\partial_{t_2}-\alpha_2)^{\ell_2}\otimes e_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\ell}}. \end{array}$$

Proposition 7.5.4. *Considérons le complexe double suivant :*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{gr}^{V^{\mathbf{H}}}_{-1,0}\mathcal{M}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{k}} \arrow[r, "\cdot\partial_{t_1}"] & \mathrm{gr}^{V^{\mathbf{H}}}_{0,0}\mathcal{M}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{k}} \\ \mathrm{gr}^{V^{\mathbf{H}}}_{-1,-1}\mathcal{M}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{k}} \arrow[r, "\cdot\partial_{t_1}"] \arrow[u, "\cdot\partial_{t_2}"] & \mathrm{gr}^{V^{\mathbf{H}}}_{0,-1}\mathcal{M}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{k}} \arrow[u, "\cdot\partial_{t_2}"'] \end{tikzcd} \tag{7.11}$$

et notons $\mathbf{Gr}_\bullet$ *le complexe simple associé, concentré en degrés* -2, -1 *et* 0. *Si, pour* $i=1$ *et* $i=2$, k_i *est plus grand que l'ordre de nilpotence de la multiplication à droite par* $(t_i\partial_{t_i}-\alpha_i)$ *sur* $\mathrm{gr}^{V^{\mathbf{H}}}_{\boldsymbol{\alpha}}\mathcal{M}$, *alors le morphisme* ${}_{\mathbf{D}}\mathbf{N}_{(1,2)}$ *se factorise en un isomorphisme*

$${}_{\mathbf{D}}\mathbf{N}_{(1,2)} : \mathrm{gr}^{V^{\mathbf{H}}}_{\boldsymbol{\alpha}}\mathcal{M} \xrightarrow{\sim} \mathscr{H}^{-2}(\mathbf{Gr}_\bullet).$$

Démonstration. Par définition, $\mathscr{H}^{-2}(\mathbf{Gr}_\bullet)$ est l'intersection des noyaux de la multiplication à droite par $\partial_{t_1} : \mathrm{gr}^{V^{\mathbf{H}}}_{-1,-1}\mathcal{M}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{k}} \to \mathrm{gr}^{V^{\mathbf{H}}}_{0,-1}\mathcal{M}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{k}}$ et par $\partial_{t_2} : \mathrm{gr}^{V^{\mathbf{H}}}_{-1,-1}\mathcal{M}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{k}} \to \mathrm{gr}^{V^{\mathbf{H}}}_{-1,0}\mathcal{M}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{k}}$. D'autre part la multiplication à droite par t_1 et t_2 sur $\mathcal{M}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{k}}$ étant bijective, les propriétés de la V-multifiltration canonique assurent que les morphismes de multiplication à droite par $t_1 : \mathrm{gr}^{V^{\mathbf{H}}}_{0,-1}\mathcal{M}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{k}} \to \mathrm{gr}^{V^{\mathbf{H}}}_{-1,-1}\mathcal{M}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{k}}$ et par $t_2 : \mathrm{gr}^{V^{\mathbf{H}}}_{-1,0}\mathcal{M}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{k}} \to \mathrm{gr}^{V^{\mathbf{H}}}_{-1,-1}\mathcal{M}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{k}}$ sont bijectifs. On a donc

$$\mathscr{H}^{-2}(\mathbf{Gr}_\bullet) = \bigcap_{1\leqslant i\leqslant 2} \ker[\cdot\partial_{t_i}t_i : \mathrm{gr}^{V^{\mathbf{H}}}_{-1,-1}\mathcal{M}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{k}} \to \mathrm{gr}^{V^{\mathbf{H}}}_{-1,-1}\mathcal{M}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{k}}]. \tag{7.12}$$

D'après la proposition 7.5.2, un élément de $\mathrm{gr}^{V^{\mathbf{H}}}_{-1,-1}\mathcal{M}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{k}}$ est de la forme suivante :

$$\sum_{\substack{0\leqslant\ell_1\leqslant k_1\\ 0\leqslant\ell_2\leqslant k_2}} m_{\ell_1,\ell_2}\otimes e_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\ell}}$$

où les m_{ℓ_1,ℓ_2} sont dans $\mathrm{gr}^{V^{\mathbf{H}}}_{\boldsymbol{\alpha}}\left(\mathcal{M}[\frac{1}{t_1t_2}]\right)$. D'après l'égalité (7.12), cet élément est dans $\mathscr{H}^{-2}(\mathbf{Gr}_\bullet)$ si et seulement si pour tout couple (ℓ_1,ℓ_2) :

$$m_{\ell_1,\ell_2}\cdot(t_1\partial_{t_1}-\alpha_1) - m_{\ell_1+1,\ell_2} = m_{\ell_1,\ell_2}\cdot(t_2\partial_{t_2}-\alpha_2) - m_{\ell_1,\ell_2+1} = 0,$$

ce qui est équivalent à avoir pour tout couple (ℓ_1,ℓ_2) :

$$m_{\ell_1,\ell_2} = m_{0,0}\cdot(t_1\partial_{t_1}-\alpha_1)^{\ell_1}(t_2\partial_{t_2}-\alpha_2)^{\ell_2}.$$

D'autre part, comme $\alpha_1<0$ et $\alpha_2<0$, on a $\mathrm{gr}^{V^{\mathbf{H}}}_{\boldsymbol{\alpha}}\left(\mathcal{M}[\frac{1}{t_1t_2}]\right) = \mathrm{gr}^{V^{\mathbf{H}}}_{\boldsymbol{\alpha}}(\mathcal{M})$. En notant que, d'après l'hypothèse faite sur la taille des k_i, pour tout $m\in\mathrm{gr}^{V^{\mathbf{H}}}_{\boldsymbol{\alpha}}(\mathcal{M})$

$$m\cdot(t_1\partial_{t_1}-\alpha_1)^{k_1} = m\cdot(t_2\partial_{t_2}-\alpha_2)^{k_2} = 0,$$

on conclut que ${}_{\mathbf{D}}\mathbf{N}_{(1,2)}$ se factorise en un isomorphisme

$${}_{\mathbf{D}}\mathbf{N}_{(1,2)} : \mathrm{gr}^{V^{\mathbf{H}}}_{\boldsymbol{\alpha}}\mathcal{M} \xrightarrow{\sim} \mathscr{H}^{-2}(\mathbf{Gr}_\bullet).$$

□

Lemme 7.5.5. *On a un isomorphisme naturel*

$$ {}_Di_{(1,2)*}\mathscr{H}^{-2}\,{}_Di^!_{(1,2)}(\mathcal{M}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{k}}) \xrightarrow{\sim} \mathscr{H}^{-2}(\mathbf{Gr}_\bullet). $$

Démonstration. En suivant la démonstration de la proposition 7.4.4, on observe qu'on a les isomorphismes naturels

$$ {}_Di_{2*}\mathscr{H}^{-1}\,{}_Di^!_2\,{}_Di_{1*}\mathscr{H}^{-1}\,{}_Di^!_1(\mathcal{M}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{k}}) \xleftarrow{\sim} {}_Di_{(1,2)*}\mathscr{H}^{-2}\,{}_Di^!_{(1,2)}(\mathcal{M}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{k}}) \xrightarrow{\sim} {}_Di_{1*}\mathscr{H}^{-1}\,{}_Di^!_1\,{}_Di_{2*}\mathscr{H}^{-1}\,{}_Di^!_2(\mathcal{M}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{k}}) $$

Dans la catégorie des $\mathscr{D}$-modules, on a encore la suite exacte (7.3) (cf [Sai90, (2.24.3)]). On l'applique deux fois au complexe double (7.11) et, en utilisant l'exactitude des foncteurs cycles proches, on obtient le diagramme de suites exactes suivant :

$$ \begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{gr}_0^{V^{H^2}}\left({}_Di_{1*}\mathscr{H}^{-1}\,{}_Di^!_1\mathcal{M}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{k}}\right) \arrow[r] & \mathrm{gr}^{V^{\mathbf{H}}}_{-1,0}\mathcal{M}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{k}} \arrow[r] & \mathrm{gr}^{V^{\mathbf{H}}}_{0,0}\mathcal{M}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{k}} \\
0 \arrow[r] & \mathrm{gr}_{-1}^{V^{H^2}}\left({}_Di_{1*}\mathscr{H}^{-1}\,{}_Di^!_1\mathcal{M}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{k}}\right) \arrow[r] \arrow[u] & \mathrm{gr}^{V^{\mathbf{H}}}_{-1,-1}\mathcal{M}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{k}} \arrow[r] \arrow[u] & \mathrm{gr}^{V^{\mathbf{H}}}_{0,-1}\mathcal{M}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{k}} \arrow[u] \\
0 \arrow[r] & {}_Di_{(1,2)*}\mathscr{H}^{-2}\,{}_Di^!_{(1,2)}(\mathcal{M}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{k}}) \arrow[r] \arrow[u] & \mathrm{gr}_{-1}^{V^{H^1}}\left({}_Di_{2*}\mathscr{H}^{-1}\,{}_Di^!_2\mathcal{M}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{k}}\right) \arrow[r] \arrow[u] & \mathrm{gr}_{0}^{V^{H^1}}\left({}_Di_{2*}\mathscr{H}^{-1}\,{}_Di^!_2\mathcal{M}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{k}}\right) \arrow[u] \\
& 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] & 0. \arrow[u]
\end{tikzcd} $$

Les lignes et les colonnes de ce diagramme étant exactes, on a bien un isomorphisme

$$ {}_Di_{(1,2)*}\mathscr{H}^{-2}\,{}_Di^!_{(1,2)}(\mathcal{M}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{k}}) \xrightarrow{\sim} \mathscr{H}^{-2}(\mathbf{Gr}_\bullet). $$

□

On déduit du lemme 7.5.5 et de la proposition 7.5.4 un isomorphisme

$$ \mathrm{gr}^{V^{\mathbf{H}}}_{\boldsymbol{\alpha}}\mathcal{M} \xrightarrow{\sim} {}_Di_{(1,2)*}\mathscr{H}^{-2}\,{}_Di^!_{(1,2)}(\mathcal{M}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{k}}). $$

On combine ceci aux morphismes (7.10) et au diagramme (7.9) auquel on applique le foncteur d'oubli de la catégorie des modules de Hodge mixtes vers celle des $\mathscr{D}_X$-modules et on obtient le diagramme commutatif suivant :

$$ \begin{tikzcd}
\mathrm{gr}^{V^{H_1}}_{\alpha_1}\mathrm{gr}^{V^{H_2}}_{\alpha_2}\mathcal{M} \arrow[r, "(a)"] & {}_Di_{1*}\mathscr{H}^{-1}\,{}_Di^!_1\left({}_Di_{2*}\mathscr{H}^{-1}\,{}_Di^!_2(\mathcal{M}_{\alpha_2,k_2})\ {}_D\!\otimes\ {}_D\pi_1{}^*\mathcal{N}_{\alpha_1,k_1}\right) \\
\mathrm{gr}^{V^{\mathbf{H}}}_{\boldsymbol{\alpha}}\mathcal{M} \arrow[r, "\simeq"] \arrow[u, "\simeq"] \arrow[d] & {}_Di_{(1,2)*}\mathscr{H}^{-2}\,{}_Di^!_{(1,2)}(\mathcal{M}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{k}}) \arrow[u] \arrow[d] \\
\mathrm{gr}^{V^{H_2}}_{\alpha_2}\mathrm{gr}^{V^{H_1}}_{\alpha_1}\mathcal{M} \arrow[r] & {}_Di_{2*}\mathscr{H}^{-1}\,{}_Di^!_2\left({}_Di_{1*}\mathscr{H}^{-1}\,{}_Di^!_1(\mathcal{M}_{\alpha_1,k_1})\ {}_D\!\otimes\ {}_D\pi_2{}^*\mathcal{N}_{\alpha_2,k_2}\right).
\end{tikzcd} \tag{7.13} $$

Proposition 7.5.6. *Le morphisme* (a) *est un isomorphisme.*

Démonstration. On montre, de la même façon que pour la proposition 7.5.4, que pour $j \in \{1,2\}$

$$ \mathrm{gr}^{V^{H_j}}_{\alpha_j}\mathcal{M} \simeq {}_Di_{j*}\mathscr{H}^{-1}\,{}_Di^!_j(\mathcal{M}_{\alpha_j,k_j}) $$

pour k_1 et k_2 suffisamment grands. Il suffit alors d'appliquer deux fois cet isomorphisme pour conclure.

□

7.6 Théorème de commutativité

Théorème 7.6.1. *Soit $\mathscr{M} \in \mathrm{MHM}^p(X \times \Delta^2)$ un module de Hodge mixte sur $X \times \Delta^2$, tel que le couple $(\mathbf{H}, \mathcal{M})$ soit sans pente où $\mathcal{M}$ est le $\mathscr{D}_{X\times\Delta^2}$-module à droite sous-jacent à $\mathscr{M}$. On a alors un isomorphisme*

$$\Psi_{t_1}\Psi_{t_2}\mathscr{M} \simeq \Psi_{t_2}\Psi_{t_1}\mathscr{M}.$$

Démonstration. On considère le diagramme (7.9)

$$\begin{tikzcd}
\Psi_{t_1}\Psi_{t_2}\mathscr{M} \arrow[r] & {}_H i_{1*}\mathscr{H}^{-1}\, {}_H i_1^*\left({}_H i_{2*}\mathscr{H}^{-1}\, {}_H i_2^*(\mathscr{M}_{q_2,k_2})\ {}_H\!\otimes\ {}_H \pi_2{}^! \mathscr{N}_{q_1,k_1}\right) \\
& {}_H i_{(1,2)*}\mathscr{H}^{-2}\, {}_H i^*_{(1,2)}(\mathscr{M}_{\boldsymbol{q},\boldsymbol{k}}) \arrow[u] \arrow[d] \\
\Psi_{t_2}\Psi_{t_1}\mathscr{M} \arrow[r] & {}_H i_{2*}\mathscr{H}^{-1}\, {}_H i_2^*\left({}_H i_{1*}\mathscr{H}^{-1}\, {}_H i_1^*(\mathscr{M}_{q_1,k_1})\ {}_H\!\otimes\ {}_H \pi_1{}^! \mathscr{N}_{q_2,k_2}\right).
\end{tikzcd}$$

On va montrer que sous les hypothèses du théorème, toutes les flèches de ce diagramme sont des isomorphismes. Quand on applique le foncteur d'oubli de la catégorie des modules de Hodge mixtes vers celle des $\mathscr{D}_X$-modules à droite, le diagramme (7.13) et la proposition 7.5.6 assurent que les flèches du diagramme (7.9) sont des isomorphismes dans la catégorie des $\mathscr{D}_X$-modules à droite. Or, d'après la proposition 6.4.6, un morphisme de modules de Hodge mixtes qui est un isomorphisme entre les $\mathscr{D}_X$-modules à droite sous-jacents est un isomorphisme de modules de Hodge mixtes. Ainsi, on obtient un isomorphisme

$$\Psi_{t_1}\Psi_{t_2}\mathscr{M} \simeq \Psi_{t_2}\Psi_{t_1}\mathscr{M}.$$

□

Considérons la projection

$$\begin{array}{rccc}
\pi = (\pi_1, ..., \pi_p) : & X \times \Delta^p & \to & \Delta^p \\
& (x, t_1, ..., t_p) & \mapsto & (t_1, ..., t_p)
\end{array}$$

et $\mathbf{H} := \{H_1, ..., H_p\}$ où $H_i := \{t_i = 0\}$. On déduit du théorème 7.6.1 le corollaire suivant.

Corollaire 7.6.2. *Soit $\mathscr{M} \in \mathrm{MHM}^p(X \times \Delta^p)$ un module de Hodge mixte sur $X \times \Delta^p$ tel que le couple $(\mathbf{H}, \mathcal{M})$ soit sans pente où $\mathcal{M}$ est le $\mathscr{D}_{X\times\Delta^p}$-module à droite sous-jacent à $\mathscr{M}$. Alors, pour tout permutation σ de $\{1, ..., p\}$, on a un isomorphisme*

$$\Psi_{t_1}...\Psi_{t_p}\mathscr{M} \simeq \Psi_{t_{\sigma(1)}}...\Psi_{t_{\sigma(p)}}\mathscr{M}.$$

Démonstration. On utilise la proposition 2.2.3 qui assure que si $(\mathbf{H}, \mathcal{M})$ est sans pente alors pour tout $I \subset \{1, ..., p\}$ le couple $(\mathbf{H}_{I^c}, \mathrm{gr}^{V^{\mathbf{H}_I}}_{\boldsymbol{\alpha}_I}\mathcal{M})$ est sans pente. On peut donc appliquer autant de fois qu'il est nécessaire le théorème 7.6.1 aux couples de foncteurs Ψ_{t_i} qui se succèdent. On obtient ainsi l'isomorphisme recherché.

□

Chapitre 8

Modules de Hodge mixtes sans pente

Dans ce chapitre, on définit une condition analogue à la condition sans pente pour un $\mathscr{D}$-module *filtré*. Cette condition sera appelée $\mathbb{R}$-multispécialisabilité stricte. On considérera en réalité le module de Rees associé à un module filtré (cf. A.2.6). On définira la $\mathbb{R}$-multispécialisabilité stricte pour un $R_F\mathscr{D}$-module.

Dans la section 8.1, on définit la $\mathbb{R}$-multispécialisabilité stricte. On établit ensuite le lien entre le cas des $\mathscr{D}$-modules filtrés et celui des $R_F\mathscr{D}$-modules quand ceux-ci sont sous-jacents à un module de Hodge mixte. On verra que la notion de compatibilité des filtrations joue un rôle central (cf. A.2.3).

Dans la section 8.2, on démontre la stabilité de la condition $\mathbb{R}$-multispécialisabilité stricte par image directe propre. C'est l'analogue du théorème d'image directe de M. Saito pour les modules de Hodge mixtes. L'approche utilisant les $R_F\mathscr{D}$-modules diffère de celle de M. Saito qui considère des $\mathscr{D}$-modules filtrés. Ceci nous permet d'évoluer dans une catégorie *abélienne* et de manipuler plus aisément le foncteur d'image directe dans la catégorie dérivée correspondante.

Dans la section 8.3, on étudie le comportement des filtrations par le poids. On s'attend à observer le même comportement que dans le cas d'une variation de structures de Hodge polarisable au voisinage d'un diviseur à croisement normaux. On démontre la stabilité de cette condition par image directe par un morphisme projectif.

Dans la section 8.4, on s'intéresse au cas des hypersurfaces à singularité quasi-ordinaires. Certains modules de Hodge purs supportés sur de telles singularités apparaissent naturellement comme l'image directe de variation de structures de Hodge définies en dehors d'un diviseur à croisement normal. On pourra ainsi leur appliquer les résultats des sections précédentes.

8.1 Condition de $\mathbb{R}$-multispécialisabilité stricte

Ici, on définit la $\mathbb{R}$-multispécialisabilité stricte et on démontre le lien entre cette condition et la compatibilité des différentes filtrations en jeu au sens de la définition A.2.3.

Définition 8.1.1 (multispécialisabilité)**.** Soient $\mathbf{H} := \{H_1, ..., H_p\}$ p hypersurfaces lisses de X et soit $\mathfrak{M}$ un $\widetilde{\mathscr{D}}_X$-module (à droite) cohérent.

1. On dit que $\mathfrak{M}$ est *multispécialisable* le long de $\mathbf{H}$, si au voisinage de tout point, il existe une bonne V-multifiltration $U_{\bullet}\mathfrak{M}$ de $\mathfrak{M}$, des polynômes $b_i(s) = \prod(s - \alpha_i z)$ (pour $1 \leqslant i \leqslant p$) et des entiers $\ell_i \in \mathbb{N}$ (pour $1 \leqslant i \leqslant p$) tels que pour tout $\boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}^p$

$$U_{\boldsymbol{k}}\mathfrak{M} \cdot z^{\ell_i} b_i(E_i - k_i z) \subset U_{\boldsymbol{k}-\mathbf{1}_i}\mathfrak{M}. \tag{8.1}$$

2. On dit que $\mathfrak{M}$ est *multispécialisable par section* le long de $\mathbf{H}$ si, pour toute section locale m de $\mathfrak{M}$ et pour tout $1 \leqslant i \leqslant p$, il existe $\ell_i \in \mathbb{N}$, $b_i(s) = \prod(s - \alpha_i z)$ et $P_i \in V_{-\mathbf{1}_i}\widetilde{\mathscr{D}}_X$ tels que
$$m \cdot (z^{\ell_i} b_i(E_i) - P_i) = 0. \tag{8.2}$$

Remarque 8.1.2.
- Ces deux définitions sont équivalentes, et si elles sont satisfaites, alors la condition 1. l'est pour toute bonne V-multifiltration.
- Si $\mathfrak{M}$ est multispécialisable le long de $\mathbf{H}$, les polynômes unitaires de plus bas degré vérifiant l'équation (8.1) ou l'équation (8.2) sont appelés *polynômes de Bernstein faibles.*
- Si ces deux propriétés sont vérifiées et si les racines des polynômes b_i sont réelles, on dit que $\mathfrak{M}$ est $\mathbb{R}$-multispécialisable le long de $\mathbf{H}$.
- Dans le cas $\mathbb{R}$-multispécialisable par section, on peut définir la multifiltration par l'ordre le long de $\mathbf{H}$, en considérant les polynômes unitaires de plus bas degré vérifiant les équations (8.2) pour une section locale m donnée.

Définition 8.1.3. Soit $\mathcal{M}$ un $\mathscr{D}_X$-module tel que le couple $(\mathbf{H}, \mathcal{M})$ soit sans pente et tel que les racines des polynômes de Bernstein-Sato soient réelles. On dira également que $\mathcal{M}$ est $\mathbb{R}$-multispécialisable le long de $\mathbf{H}$.

Lemme 8.1.4. *Soit $\mathcal{M}$ un $\mathscr{D}_X$-module cohérent muni d'une F-filtration cohérente. Si $\mathcal{M}$ est $\mathbb{R}$-multispécialisable le long de $\mathbf{H}$, alors le module de Rees $R_F\mathcal{M}$ est $\mathbb{R}$-multispécialisable le long de $\mathbf{H}$ et réciproquement.*

Démonstration. Supposons que $\mathcal{M}$ est $\mathbb{R}$-multispécialisable le long de $\mathbf{H}$. Soit m une section locale de $R_F\mathcal{M}$, elle s'écrit comme une somme finie $\sum m_k z^k$ où $m_k \in F_k\mathcal{M}$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$. On va construire une équation du type (8.2) pour m, en raisonnant par récurrence sur le nombre de m_k non nuls.

Fixons $1 \leqslant i \leqslant p$ et $k \in \mathbb{Z}$ tel que $m_k \neq 0$. Par hypothèse, il existe un polynôme $b_{i,k}(s) = \prod(s - \alpha_i)$ et un opérateur différentiel $P_{i,k} \in V_{-\mathbf{1}_i}\mathscr{D}_X$ tels que
$$m_k \cdot (b_{i,k}(E_i) - P_{i,k}) = 0.$$
Notons
$$P_{i,k} = \sum_{|\boldsymbol{k}|=0}^{k_0} a_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x})\partial^{\boldsymbol{k}}.$$
On définit
$$\widetilde{P_{i,k}} = \sum_{|\boldsymbol{k}|=0}^{k_0} z^{k_0 - |\boldsymbol{k}|} a_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x})\eth^{\boldsymbol{k}}$$
et $\widetilde{b_{i,k}}(s) = z^{k_0 - \deg(b_{i,k})} \prod(s - \alpha_i z)$. Le morphisme de multiplication par $(\widetilde{b_{i,k}}(E_i) - \widetilde{P_{i,k}})$ est un morphisme gradué de degré k_0 de $\mathscr{M}$ qui annule la section $m_k z^k$. On peut alors appliquer l'hypothèse de récurrence à la section $m \cdot (\widetilde{b_{i,k}}(E_i) - \widetilde{P_{i,k}})$ pour construire une équation du type (8.2) pour m. On a montré que $R_F\mathcal{M}$ est $\mathbb{R}$-multispécialisable par section le long de $\mathbf{H}$.

Réciproquement, supposons que $R_F\mathcal{M}$ soit $\mathbb{R}$-multispécialisable par section le long de $\mathbf{H}$, et soit m une section locale de $\mathcal{M}$. Il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $m \in F_k\mathcal{M}$. Par hypothèse, pour tout $1 \leqslant i \leqslant p$, il existe un entier $\ell_i \in \mathbb{N}$, un polynôme $b_{i,k}(s) = \prod(s - \alpha_i)$ et un opérateur différentiel $P_{i,k} \in V_{-\mathbf{1}_i}\widetilde{\mathscr{D}}_X$ tels que
$$mz^k \cdot (z^{\ell_i} b_{i,k}(E_i) - P_{i,k}) = 0.$$
En fixant $z = 1$, on montre que $\mathcal{M}$ est $\mathbb{R}$-multispécialisable par section le long de $\mathbf{H}$.

□

Définition 8.1.5 ($\mathbb{R}$-multispécialisabilité stricte)**.** Soit $\mathfrak{M}$ un $\widetilde{\mathscr{D}}_X$-module $\mathbb{R}$-multispécialisable le long de $\mathbf{H}$. On dit que $\mathfrak{M}$ est *strictement* $\mathbb{R}$-multispécialisable le long de $\mathbf{H}$, si

1. il existe un ensemble fini $A \in]-1,0]^p$ tel que la multifiltration par l'ordre le long de $\mathbf{H}$ est une bonne V-multifiltration indexée par $A + \mathbb{Z}^p$,
2. pour tout $I \subset \{1,...,p\}$ et tout $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^p$, $V_{\boldsymbol{\alpha}}\mathfrak{M}/V_{<\boldsymbol{\alpha}_I,\boldsymbol{\alpha}_{I^c}}\mathfrak{M}$ est strict,
3. pour tout $1 \leqslant i \leqslant p$ et tout $\alpha_i < 0$, le morphisme $t_i : \mathrm{gr}_{\boldsymbol{\alpha}}\mathfrak{M} \to \mathrm{gr}_{\boldsymbol{\alpha}-\mathbf{1}_i}\mathfrak{M}$ est surjectif,
4. pour tout $1 \leqslant i \leqslant p$ et tout $\alpha_i > -1$, le morphisme $\eth_i : \mathrm{gr}_{\boldsymbol{\alpha}}\mathfrak{M} \to \mathrm{gr}_{\boldsymbol{\alpha}+\mathbf{1}_i}\mathfrak{M}(-1)$ est surjectif.

Dans ce cas-là, on appelle la V-multifiltration par l'ordre *V-multifiltration canonique*.

Remarque 8.1.6.

Si $\mathfrak{M}$ est *strictement* $\mathbb{R}$-multispécialisable le long de $\mathbf{H}$, alors
- pour tout $1 \leqslant i \leqslant p$ et tout $\alpha_i < 0$, le morphisme $t_i : \mathrm{gr}_{\boldsymbol{\alpha}}\mathfrak{M} \to \mathrm{gr}_{\boldsymbol{\alpha}-\mathbf{1}_i}\mathfrak{M}$ est un isomorphisme,
- pour tout $1 \leqslant i \leqslant p$ et tout $\alpha_i > -1$, le morphisme $\eth_i : \mathrm{gr}_{\boldsymbol{\alpha}}\mathfrak{M} \to \mathrm{gr}_{\boldsymbol{\alpha}+\mathbf{1}_i}\mathfrak{M}(-1)$ est un isomorphisme.

Démonstration.

Soit m une section de $\mathrm{gr}_{\boldsymbol{\alpha}}\mathfrak{M}$ alors, pour tout $1 \leqslant i \leqslant p$, m est annulé par un opérateur de la forme $z^{\ell_i}(E_i - \alpha_i z)^{k_i}$.
- Soit m une section non nulle de $\mathrm{gr}_{\boldsymbol{\alpha}}\mathfrak{M}$. Supposons que $m \cdot t_i = 0$, alors $m \cdot z^{\ell_i + k_i}\alpha_i^{k_i} = 0$. Or, d'après le point 2., $\mathrm{gr}_{\boldsymbol{\alpha}}\mathfrak{M}$ est strict donc $\alpha_i = 0$. Ainsi, pour tout $1 \leqslant i \leqslant p$ et tout $\alpha_i < 0$, le morphisme $t_i : \mathrm{gr}_{\boldsymbol{\alpha}}\mathfrak{M} \to \mathrm{gr}_{\boldsymbol{\alpha}-\mathbf{1}_i}\mathfrak{M}$ est injectif.
- Soit m une section non nulle de $\mathrm{gr}_{\boldsymbol{\alpha}}\mathfrak{M}$. Supposons que $m \cdot \eth_i = 0$, alors $m \cdot z^{\ell_i + k_i}(\alpha_i + 1)^{k_i} = 0$. Or, d'après le point 2., $\mathrm{gr}_{\boldsymbol{\alpha}}\mathfrak{M}$ est strict donc $\alpha_i = -1$. Ainsi, pour tout $1 \leqslant i \leqslant p$ et tout $\alpha_i > -1$, le morphisme $t_i : \mathrm{gr}_{\boldsymbol{\alpha}}\mathfrak{M} \to \mathrm{gr}_{\boldsymbol{\alpha}-\mathbf{1}_i}\mathfrak{M}$ est injectif.

□

Proposition 8.1.7. *Soit $\mathcal{M}$ un $\mathscr{D}_X$-module cohérent, $\mathbb{R}$-multispécialisable le long de $\mathbf{H}$ et muni d'une F-filtration cohérente tel que*

1. *le module de Rees $R_F\mathcal{M}$ est sous-jacent à un module de Hodge mixte,*
2. *les filtrations $(F_\bullet\mathcal{M}, V_\bullet^1\mathcal{M}, ..., V_\bullet^p\mathcal{M})$ sont compatibles.*

Alors $R_F\mathcal{M}$ est strictement $\mathbb{R}$-multispécialisable le long de $\mathbf{H}$.

Démonstration. D'après le lemme 8.1.4, $R_F\mathcal{M}$ est $\mathbb{R}$-multispécialisable le long de $\mathbf{H}$. On définit une V-multifiltration de $R_F\mathcal{M}$ de la façon suivante :

$$U_{\boldsymbol{\alpha}}R_F\mathcal{M} := \bigoplus_{p\in\mathbb{Z}}(F_pV_{\boldsymbol{\alpha}}\mathcal{M})z^p. \tag{8.3}$$

Par définition, il existe un ensemble fini $A \subset]-1,0]^p$ tel que cette V-multifiltration est indexée par $A + \mathbb{Z}^p$. Les filtrations $(F_\bullet\mathcal{M}, V_\bullet^1\mathcal{M}, ..., V_\bullet^p\mathcal{M})$ étant compatibles, on obtient immédiatement que pour tout $I \subset \{1,...,p\}$ et tout $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^p$, $U_{\boldsymbol{\alpha}}R_F\mathcal{M}/U_{<\boldsymbol{\alpha}_I,\boldsymbol{\alpha}_{I^c}}R_F\mathcal{M} = R_F\left(V_{\boldsymbol{\alpha}}\mathcal{M}/V_{<\boldsymbol{\alpha}_I,\boldsymbol{\alpha}_{I^c}}\mathcal{M}\right)$, donc $U_{\boldsymbol{\alpha}}R_F\mathcal{M}/U_{<\boldsymbol{\alpha}_I,\boldsymbol{\alpha}_{I^c}}R_F\mathcal{M}$ est strict.

Soit mz^p une section locale de $(F_pV_{\boldsymbol{\alpha}}\mathcal{M})z^p$, pour tout $1 \leqslant i \leqslant p$, il existe un entier ν_i tel que

$$mz^p(t_i\eth_i - \alpha_i z)^{\nu_i} \in (F_{p+\nu_i}V_{\alpha_1,...,<\alpha_i,...,\alpha_p}\mathcal{M})z^{p+\nu_i},$$

ainsi, on a $U_{\boldsymbol{\alpha}}R_F\mathcal{M} \subset V_{\boldsymbol{\alpha}}R_F\mathcal{M}$.

On va montrer que la V-multifiltration $U_\bullet R_F\mathcal{M}$ est une bonne V-multifiltration, ceci impliquera que c'est la V-multifiltration canonique et donc que les points 1. et 2. de la définition 8.1.5 sont vérifiés. On commence par montrer les points 3. et 4. de la définition 8.1.5. Le module de Rees $R_F\mathcal{M}$ étant sous-jacent à un module de Hodge mixte, il est strictement $\mathbb{R}$-spécialisable le long de toute hypersurface, en particulier on a pour tout $1 \leqslant i \leqslant p$:

(a') $\forall p$ et $\forall \alpha_i < 0, t_i : F_pV^{H_i}_{\alpha_i}\mathcal{M} \to F_pV^{H_i}_{\alpha_i-1}\mathcal{M}$ est un isomorphisme,

(b') $\forall p$ et $\forall \alpha_i > -1, \partial_i : F_p\mathrm{gr}^{V_i}_{\alpha_i}\mathcal{M} \to F_{p+1}\mathrm{gr}^{V_i}_{\alpha_i+1}\mathcal{M}$ est un isomorphisme.

D'autre part, on déduit de la propriété de $\mathbb{R}$-multispécialisabilité de $\mathcal{M}$ que, pour tout $1 \leqslant i \leqslant p$:

(a") $\forall \alpha_i < 0, t_i : V_{\boldsymbol{\alpha}}\mathcal{M} \to V_{\boldsymbol{\alpha}-\mathbf{1}_i}\mathcal{M}$ est un isomorphisme,

(b") $\forall \alpha_i > -1, \partial_i : \mathrm{gr}_{\boldsymbol{\alpha}}\mathcal{M} \to \mathrm{gr}_{\boldsymbol{\alpha}+\mathbf{1}_i}\mathcal{M}$ est un isomorphisme.

On peut alors déduire que pour tout $1 \leqslant i \leqslant p$:

(a) $\forall p$ et $\forall \alpha_i < 0, t_i : F_pV_{\boldsymbol{\alpha}}\mathcal{M} \to F_pV_{\boldsymbol{\alpha}-\mathbf{1}_i}\mathcal{M}$ est un isomorphisme,

(b) $\forall p$ et $\forall \alpha_i > -1, \partial_i : F_p\mathrm{gr}_{\boldsymbol{\alpha}}\mathcal{M} \to F_{p+1}\mathrm{gr}_{\boldsymbol{\alpha}+\mathbf{1}_i}\mathcal{M}$ est un isomorphisme.

Démontrons (b), pour alléger les notations, on prend $i = 1$. L'injectivité découle immédiatement de (b"). Pour la surjectivité, on utilise la compatibilité des filtrations. Soit $\overline{m} \in F_{p+1}\mathrm{gr}_{\boldsymbol{\alpha}+\mathbf{1}_1}\mathcal{M}$ et $m \in F_{p+1}V_{\alpha_2,\dots,\alpha_p}\mathrm{gr}^{V_1}_{\alpha_1+1}\mathcal{M}$ un représentant. D'après la surjectivité de (b'), il existe $\widetilde{m} \in F_p\mathrm{gr}^{V_1}_{\alpha_1}\mathcal{M}$ telle que $\partial_1\widetilde{m} = m$. D'après la surjectivité de (b"), il existe $m' \in V_{\alpha_2,\dots,\alpha_p}\mathrm{gr}^{V_1}_{\alpha_1}\mathcal{M}$ et $n \in \sum_{j=2}^p V_{\alpha_2,\dots,<\alpha_j,\dots,\alpha_p}\mathrm{gr}^{V_1}_{\alpha_1+1}\mathcal{M}$ telles que $\partial_1m' = n + m$. Pour $2 \leqslant i \leqslant p$, il existe des réels β_i tels que $\beta_i \geqslant \alpha_i$ et $\widetilde{m} - m' \in V_{\beta_2,\dots,\beta_p}\mathrm{gr}^{V_1}_{\alpha_1}\mathcal{M}$. D'après (b"), le morphisme $\partial_1 : \mathrm{gr}^{V_2}_{\beta_2}\mathrm{gr}_{\alpha_1,\beta_3\dots,\beta_p}\mathcal{M} \to \mathrm{gr}^{V_2}_{\beta_2}\mathrm{gr}_{\alpha_1+1,\beta_3\dots,\beta_p}\mathcal{M}$ est injectif. Or, la classe de n dans $\mathrm{gr}^{V_2}_{\beta_2}\mathrm{gr}_{\alpha_1+1,\beta_3\dots,\beta_p}\mathcal{M}$ est nulle et $\partial_1(\widetilde{m} - m') = n$. On en déduit que $\widetilde{m} - m' \in V_{<\beta_2,\dots,\beta_p}\mathrm{gr}^{V_1}_{\alpha_1}\mathcal{M}$. Ainsi, on montre par induction que $\widetilde{m} - m' \in V_{\alpha_2,\dots,\alpha_p}\mathrm{gr}^{V_1}_{\alpha_1}\mathcal{M}$. Finalement, $\widetilde{m} \in F_pV_{\alpha_2,\dots,\alpha_p}\mathrm{gr}^{V_1}_{\alpha_1}\mathcal{M}$ et $\partial_1\widetilde{m} = m$, d'où la surjectivité dans (b). L'assertion (a) se démontre de manière analogue.

Ceci implique clairement les points 3. et 4. de la définition 8.1.5 pour la V-multifiltration $U_\bullet R_F\mathcal{M}$.

Il reste donc à montrer que c'est une bonne V-multifiltration. Étant donné que l'ensemble A des indices dans $[-1,0]^p$ de la multifiltration $U_\bullet R_F\mathcal{M}$ est fini, pour montrer la cohérence il suffit de montrer que pour tout $\boldsymbol{\alpha} \in [-1,0]^p$, le module $U_{\boldsymbol{\alpha}}R_F\mathcal{M}$ est $V_{\mathbf{0}}R_F\mathscr{D}_X$-cohérent, et de conclure en utilisant les deux isomorphismes ci-dessus. On va montrer plus précisément que $U_{\boldsymbol{\alpha}}R_F\mathcal{M}$ est $R_F\mathscr{D}_{X/\mathbb{C}^p}$-cohérent où l'on considère des équations locales réduites $(t_1,\dots,t_p) : X \to \mathbb{C}^p$ de $\mathbf{H}$.

Montrons que $F_pV_{\boldsymbol{\alpha}}\mathcal{M}$ est $\mathcal{O}_X$-cohérent pour tout p. Le module $\mathcal{M}$ est $\mathbb{R}$-multispécialisable le long de $\mathbf{H}$ donc $V_{\boldsymbol{\alpha}}\mathcal{M}$ est $V_{\mathbf{0}}\mathscr{D}_X$-cohérent, on peut donc filtrer $V_{\boldsymbol{\alpha}}\mathcal{M}$ par des sous-modules $\mathcal{O}_X$-cohérents $(V_{\boldsymbol{\alpha}}\mathcal{M})_l$. La suite croissante de $\mathcal{O}_X$-modules cohérents $F_p\mathcal{M} \cap (V_{\boldsymbol{\alpha}}\mathcal{M})_l$ est incluse dans $F_p\mathcal{M}$ donc elle stationne localement, ainsi $F_pV_{\boldsymbol{\alpha}}\mathcal{M}$ est $\mathcal{O}_X$-cohérent.

Il reste à montrer que, localement, il existe p_0 tel que $F_p\mathscr{D}_{X/\mathbb{C}^p} \cdot F_{p_0}V_{\boldsymbol{\alpha}}\mathcal{M} = F_{p+p_0}V_{\boldsymbol{\alpha}}\mathcal{M}$ pour tout $p \geqslant 0$. Le module de Rees $R_F\mathcal{M}$ est sous-jacent à un module de Hodge mixte et les filtrations $(F_\bullet\mathcal{M}, V^1_\bullet\mathcal{M}, \dots, V^p_\bullet\mathcal{M})$ sont compatibles, donc $R_F\mathrm{gr}_{\boldsymbol{\alpha}}\mathcal{M}$ est également sous-jacent à un module de Hodge mixte sur $\cap_iH_i$ et est donc $R_F\mathscr{D}_{\cap_iH_i}$-cohérent. On en déduit la $R_F\mathscr{D}_{\cap_iH_i}$-cohérence de

$$\frac{R_FV_{\boldsymbol{\alpha}}\mathcal{M}}{\sum\limits_{1\leqslant i\leqslant p} R_FV_{\boldsymbol{\alpha}-\mathbf{1}_i}\mathcal{M}}$$

et donc l'existence de p_0 tel que, pour tout $p \geqslant 0$,

$$F_p\mathscr{D}_{\cap_iH_i} \cdot \frac{F_{p_0}V_{\boldsymbol{\alpha}}\mathcal{M}}{\sum\limits_{1\leqslant i\leqslant p} F_{p_0}V_{\boldsymbol{\alpha}-\mathbf{1}_i}\mathcal{M}} = \frac{F_{p+p_0}V_{\boldsymbol{\alpha}}\mathcal{M}}{\sum\limits_{1\leqslant i\leqslant p} F_{p+p_0}V_{\boldsymbol{\alpha}-\mathbf{1}_i}\mathcal{M}}. \tag{8.4}$$

Notons $U_{\boldsymbol{\alpha},p} := F_p\mathscr{D}_{X/\mathbb{C}^p} \cdot F_{p_0}V_{\boldsymbol{\alpha}}\mathcal{M}$. D'après (a), si $\boldsymbol{\alpha} \in [-1,0[^p$, alors on peut réécrire l'égalité (8.4) :

$$\frac{U_{\boldsymbol{\alpha},p}}{\sum\limits_{1\leqslant i\leqslant p} U_{\boldsymbol{\alpha},p} \cdot t_i} = \frac{F_{p+p_0}V_{\boldsymbol{\alpha}}\mathcal{M}}{\sum\limits_{1\leqslant i\leqslant p} F_{p+p_0}V_{\boldsymbol{\alpha}}\mathcal{M} \cdot t_i}.$$

Par le lemme de Nakayama, ceci implique que $U_{\boldsymbol{\alpha},p} = F_{p+p_0}V_{\boldsymbol{\alpha}}\mathcal{M}$ au voisinage de $\cap_i H_i$.

Il reste à traiter le cas où $\alpha_i = 0$ pour un indice $1 \leqslant i \leqslant p$. On raisonne par récurrence sur le nombre d'indices $1 \leqslant i \leqslant$ tels que $\alpha_i = 0$. Pour simplifier, on suppose qu'il existe $1 \leqslant k \leqslant p$ tel que $(\alpha_1, ..., \alpha_k) \in [-1,0[^k$ et $\alpha_{k+1} = ... = \alpha_p = 0$. On peut appliquer ce qui précède à $R_F\mathrm{gr}^{H_{k+1}...H_p}_{\alpha_{k+1}...\alpha_p}\mathcal{M}$ et en déduire que

$$F_p\mathscr{D}_{(\bigcap_{i>k} H_i)/\mathbb{C}^k}F_{p_0}V_{\alpha_1...\alpha_k}\mathrm{gr}_{\alpha_{k+1}...\alpha_p}\mathcal{M} = F_{p+p_0}V_{\alpha_1...\alpha_k}\mathrm{gr}_{\alpha_{k+1}...\alpha_p}\mathcal{M}.$$

On peut réécrire cette égalité

$$F_{p+p_0}V_{\boldsymbol{\alpha}}\mathcal{M} = F_p\mathscr{D}_{X/\mathbb{C}^p}F_{p_0}V_{\boldsymbol{\alpha}}\mathcal{M} + \sum_{k+1\leqslant i\leqslant p} F_{p+p_0}V_{\alpha_1...<\alpha_i...\alpha_p}\mathcal{M}.$$

Dans la somme de droite, on a diminué de 1 le nombre d'indices $1 \leqslant i \leqslant$ tels que $\alpha_i = 0$. Ainsi, par hypothèse de récurrence, on a

$$F_{p+p_0}V_{\alpha_1...<\alpha_i...\alpha_p}\mathcal{M} = F_p\mathscr{D}_{X/\mathbb{C}^p}F_{p_0}V_{\alpha_1...<\alpha_i...\alpha_p}\mathcal{M}$$

et on en déduit que

$$F_{p+p_0}V_{\boldsymbol{\alpha}}\mathcal{M} = F_p\mathscr{D}_{X/\mathbb{C}^p}F_{p_0}V_{\boldsymbol{\alpha}}\mathcal{M}.$$

La multifiltration (8.3) est donc une bonne V-multifiltration de $R_F\mathcal{M}$, on en déduit que c'est la multifiltration canonique, ce qui donne les points 1. et 2. de la définition 8.1.5 et permet de conclure la démonstration de la proposition.

□

Dans l'autre sens, la stricte $\mathbb{R}$-multispécialisabilité implique la compatibilité des filtrations.

Proposition 8.1.8. *Si $R_F\mathcal{M}$ est strictement $\mathbb{R}$-multispécialisable le long de $\mathbf{H}$, alors les filtrations $(F_\bullet\mathcal{M}, V^1_\bullet\mathcal{M}, ..., V^p_\bullet\mathcal{M})$ sont compatibles.*

Démonstration. Pour démontrer cette proposition, on notera $\mathscr{M}$ le $\mathbb{C}[z, y_1, ..., y_p]$-module obtenu par la construction de Rees de la définition A.2.6 à partir de $\mathcal{M}$, de la filtration $F_\bullet\mathcal{M}$ et des V-filtrations canoniques $V^{H_i}_\bullet\mathcal{M}$. Pour montrer la compatibilité des filtrations, on montrera que $\mathscr{M}$ est un $\mathbb{C}[z, y_1, ..., y_p]$-module plat (proposition A.2.7). D'après le corollaire A.2.10, il suffit de montrer que, pour tout $0 \leqslant k \leqslant p$, la suite $y_1, ..., y_k, z$ est régulière.

Commençons par montrer que la multiplication par y_ℓ sur $\mathscr{M}/(y_1, ..., y_{\ell-1})\mathscr{M}$ est injective pour tout $1 \leqslant \ell \leqslant k$. Considérons le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} \mathscr{M}/(y_1, ..., y_{\ell-1})\mathscr{M} \arrow[r, "\cdot y_\ell"] \arrow[d] & \mathscr{M}/(y_1, ..., y_{\ell-1})\mathscr{M} \arrow[d] \\ \mathscr{M}/(y_1, ..., y_{\ell-1}, z-1)\mathscr{M} \arrow[r, "\cdot y_\ell"] & \mathscr{M}/(y_1, ..., y_{\ell-1}, z-1)\mathscr{M}. \end{tikzcd}$$

D'après le lemme 8.1.4, $\mathcal{M}$ est $\mathbb{R}$-multispécialisable le long de $\mathbf{H}$. D'après la proposition 2.1.12, les filtrations $(V^{H_1}_\bullet\mathcal{M}, ..., V^{H_p}_\bullet\mathcal{M})$ de $\mathcal{M}$ sont donc compatibles. On en déduit que le morphisme horizontal inférieur du diagramme précédent est injectif. D'après le point 2. de la définition 8.1.5, $\mathscr{M}/(y_1, ..., y_{\ell-1})\mathscr{M}$ est un $\mathbb{C}[z]$-module gradué strict, de plus, la multiplication par y_ℓ sur $\mathscr{M}/(y_1, ..., y_{\ell-1})\mathscr{M}$ est un morphisme de $\mathbb{C}[z]$-modules gradués de degré zéro. Ceci implique que la multiplication par y_ℓ sur $\mathscr{M}/(y_1, ..., y_{\ell-1})\mathscr{M}$ est injective. De la même manière, $\mathscr{M}/(y_1, ..., y_k)\mathscr{M}$ est un $\mathbb{C}[z]$-module strict d'après le point 2. de la définition 8.1.5, la multiplication par z est donc injective. La suite $y_1, ..., y_k, z$ est donc régulière et ceci conclut la démonstration de la proposition.

□

Proposition 8.1.9. *Soit $I \subset \{1, ..., p\}$ et notons $\mathbf{H}_I := \{H_i\}_{i\in I}$. Soit $\mathcal{M}$ un $\mathscr{D}_X$-module cohérent muni d'une F-filtration cohérente tel que $R_F\mathcal{M}$ est sous-jacent à un module de Hodge mixte. Si $R_F\mathcal{M}$ est strictement $\mathbb{R}$-multispécialisable le long de $\mathbf{H}$, alors*

- *$R_F\mathcal{M}$ est strictement $\mathbb{R}$-multispécialisable le long de $\mathbf{H}_I$,*
- *la $V^{\mathbf{H}_I}$-multifiltration canonique de $R_F\mathcal{M}$ satisfait à : $V^{\mathbf{H}_I}_{\boldsymbol{\alpha}_I} R_F\mathcal{M} = \sum_{\boldsymbol{\alpha}_{I^c}\in\mathbb{C}^{I^c}} V^{\mathbf{H}_I}_{\boldsymbol{\alpha}_I,\boldsymbol{\alpha}_{I^c}} R_F\mathcal{M}$,*
- *pour tout $\boldsymbol{\alpha}_I \in \mathbb{R}^I$, $\mathrm{gr}^{\mathbf{H}^I}_{\boldsymbol{\alpha}_I} R_F\mathcal{M}$ est strictement $\mathbb{R}$-multispécialisable le long de $\mathbf{H}_{I^c}$.*

Démonstration. D'après [Mai13, corollaire 1] $\mathcal{M}$ est $\mathbb{R}$-multispécialisable le long de $\mathbf{H}_I$. De plus, d'après la proposition 8.1.8, les filtrations $(F_\bullet\mathcal{M}, V^1_\bullet\mathcal{M}, ..., V^p_\bullet\mathcal{M})$ sont compatibles, on a donc la compatibilité des filtrations $(F_\bullet\mathcal{M}, \{V^i_\bullet\mathcal{M}\}_{i\in I})$. La proposition 8.1.7 donne donc la strict $\mathbb{R}$-multispécialisabilité de $R_F\mathcal{M}$ le long de $\mathbf{H}_I$.

On déduit de l'égalité (8.3) de la preuve de la proposition 8.1.7 et de [Mai13, corollaire 1] que la $V^{\mathbf{H}_I}$-multifiltration canonique de $R_F\mathcal{M}$ satisfait à : $V^{\mathbf{H}_I}_{\boldsymbol{\alpha}_I} R_F\mathcal{M} = \sum_{\boldsymbol{\alpha}_{I^c}\in\mathbb{C}^{I^c}} V^{\mathbf{H}_I}_{\boldsymbol{\alpha}_I,\boldsymbol{\alpha}_{I^c}} R_F\mathcal{M}$.

La compatibilité des filtrations implique que $\mathrm{gr}^{\mathbf{H}^I}_{\boldsymbol{\alpha}_I} R_F\mathcal{M} = R_F\mathrm{gr}^{\mathbf{H}^I}_{\boldsymbol{\alpha}_I}\mathcal{M}$ est sous-jacent à un module de Hodge mixte. De plus, d'après A.2, les filtrations $(F_\bullet\mathrm{gr}^{\mathbf{H}^I}_{\boldsymbol{\alpha}_I}\mathcal{M}, \{V^i_\bullet\mathrm{gr}^{\mathbf{H}^I}_{\boldsymbol{\alpha}_I}\mathcal{M}\}_{i\in I^c})$ sont encore compatibles. On déduit une fois encore grâce à la proposition 8.1.7 que $\mathrm{gr}^{\mathbf{H}^I}_{\boldsymbol{\alpha}_I} R_F\mathcal{M}$ est strictement $\mathbb{R}$-multispécialisable le long de $\mathbf{H}_{I^c}$.

□

8.2 Image directe

On montre ici la stabilité de la condition strictement $\mathbb{R}$-multispécialisable par image directe propre. On montre également la commutativité, sous cette condition, de la V-multifiltration canonique et de ses gradués avec l'image directe propre.

Théorème 8.2.1. *Soit $h : X \to Y$ une application holomorphe propre entre deux variétés complexes, et $f = h \times Id : X \times \mathbb{C}^p \to Y \times \mathbb{C}^p$. On note $\mathbf{H}$ l'ensemble des hyperplans d'équation $\{t_i = 0\}$ pour $1 \leqslant i \leqslant p$ où les t_i sont les coordonnées de $\mathbb{C}^p$. Soit $\mathcal{M}$ un $\mathscr{D}_{X\times\mathbb{C}^p}$-module cohérent muni d'une bonne F-filtration. On suppose que $R_F\mathcal{M}$ est strictement $\mathbb{R}$-multispécialisable le long de $\mathbf{H}$ et que $R_F\mathcal{M}$ est sous-jacent à un module de Hodge mixte. Alors pour tout $k \in \mathbb{Z}$:*

- *le $R_F\mathscr{D}_{Y\times\mathbb{C}^p}$-module $\mathcal{H}^k f_*(R_F\mathcal{M})$ est strictement $\mathbb{R}$-multispécialisable le long de $\mathbf{H}$.*
- *Pour tout $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{C}^p$, la V-multifiltration canonique par rapport aux fonctions $(t_1, ..., t_p)$ satisfait à*

$$\mathcal{H}^k f_*(V_{\boldsymbol{\alpha}} R_F\mathcal{M}) \simeq V_{\boldsymbol{\alpha}}\mathcal{H}^k f_*(R_F\mathcal{M}) \tag{8.5}$$

et à

$$\mathcal{H}^k f_*(gr_{\boldsymbol{\alpha}} R_F\mathcal{M}) \simeq gr_{\boldsymbol{\alpha}}\mathcal{H}^k f_*(R_F\mathcal{M}). \tag{8.6}$$

Démonstration. On définit une V-multifiltration de $\mathcal{H}^k f_*(R_F\mathcal{M})$ de la manière suivante :

$$U_{\boldsymbol{\alpha}}\mathcal{H}^k f_*(R_F\mathcal{M}) := \text{image}[\mathcal{H}^k f_*(V_{\boldsymbol{\alpha}} R_F\mathcal{M}) \to \mathcal{H}^k f_*(R_F\mathcal{M})]. \tag{8.7}$$

On va commencer par trouver localement, pour tout $1 \leqslant i \leqslant p$, des polynômes satisfaisant à

$$(U_{\boldsymbol{\alpha}}\mathcal{H}^k f_*(R_F\mathcal{M}))b_i(E_i - \alpha_i z) \subset (U_{\boldsymbol{\alpha}-\mathbf{1}_i}\mathcal{H}^k f_*(R_F\mathcal{M}))$$

et dont les racines sont dans l'intervalle $[-1, 0[$. On va ensuite montrer que le morphisme naturel

$$\mathcal{H}^k f_*(V_{\boldsymbol{\alpha}} R_F\mathcal{M}) \to \mathcal{H}^k f_*(R_F\mathcal{M})$$

est une injection, que la V-multifiltration (8.7) est une bonne V-multifiltration et qu'elle vérifie les propriétés de la V-multifiltration canonique. Ceci impliquera que $\mathcal{H}^k f_*(R_F\mathcal{M})$ est strictement $\mathbb{R}$-multispécialisable le long de $\mathbf{H}$ et fournira l'isomorphisme naturel (8.5). Enfin, on construira l'isomorphisme (8.6).

Polynômes annulateurs. Soit $(y, t) \in Y \times \mathbb{C}^p$ et soit $1 \leqslant i \leqslant p$, on va trouver un polynôme $b_i(s) \in \mathbb{C}[s]$ vérifiant pour tout $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{C}^p$, $(U_{\boldsymbol{\alpha}}\mathcal{H}^k f_*(R_F\mathcal{M}))_{(y,t)}b_i(E_i - \alpha_i z) \subset (U_{\boldsymbol{\alpha}-\mathbf{1}_i}\mathcal{H}^k f_*(R_F\mathcal{M}))_{(y,t)}$. Soit $x \in f^{-1}(y)$, par définition de la V-multifiltration canonique il existe un voisinage ouvert U de (x, t) et un polynôme $b_i^x(s) \in \mathbb{C}[s]$ vérifiant pour tout $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{C}^p$, $V_{\boldsymbol{\alpha}} R_F\mathcal{M}_{|U} b_i^x(E_i - \alpha_i z) \subset V_{\boldsymbol{\alpha}-\mathbf{1}_i} R_F\mathcal{M}_{|U}$ et dont les racines sont dans l'intervalle $[-1, 0[$. L'application f étant propre, $f^{-1}(y)$ est compact, il existe donc un ensemble fini J, des points $x_j \in f^{-1}(y)$ pour tout $j \in I$ et un voisinage ouvert V de $f^{-1}(y) \times \{t\}$ tels que

$$V_{\boldsymbol{\alpha}} R_F\mathcal{M}_{|V} \prod_{j\in J} b_i^{x_j}(E_i - \alpha_i z) \subset V_{\boldsymbol{\alpha}-\mathbf{1}_i} R_F\mathcal{M}_{|V}.$$

Par fonctorialité, l'action de E_i sur le $\mathscr{D}_X$-module $V_{\boldsymbol{\alpha}} R_F\mathcal{M}/V_{\boldsymbol{\alpha}-\mathbf{1}_i} R_F\mathcal{M}$ descend à

$$\Big(U_{\boldsymbol{\alpha}}\mathcal{H}^k f_*(R_F\mathcal{M})\Big) / \Big(U_{\boldsymbol{\alpha}-\mathbf{1}_i}\mathcal{H}^k f_*(R_F\mathcal{M})\Big)$$

et

$$(U_{\boldsymbol{\alpha}}\mathcal{H}^k f_*(R_F\mathcal{M}))_{(y,t)} \prod_{j\in J} b_i^{x_j}(E_i - \alpha_i z) \subset (U_{\boldsymbol{\alpha}-\mathbf{1}_i}\mathcal{H}^k f_*(R_F\mathcal{M}))_{(y,t)}.$$

Les racines des polynômes $b_i^{x_j}(s)$ sont dans l'intervalle $[-1, 0[$.

Injectivité. Montrons que le morphisme naturel

$$\mathcal{H}^k f_*(V_{\boldsymbol{\alpha}} R_F\mathcal{M}) \to \mathcal{H}^k f_*(R_F\mathcal{M})$$

est une injection. On va montrer ceci par récurrence sur l'entier p, en utilisant la propriété 7.5.8 de [MS02]. On va montrer que les deux morphismes suivants sont des injections :

$$\mathcal{H}^k f_*(V_{\boldsymbol{\alpha}} R_F\mathcal{M}) \underset{(1)}{\to} \mathcal{H}^k f_*(V^{\boldsymbol{H}_{2,\ldots,p}}_{\alpha_2,\ldots,\alpha_p} R_F\mathcal{M}) \underset{(2)}{\to} \mathcal{H}^k f_*(R_F\mathcal{M}),$$

où $V^{\boldsymbol{H}_{2,\ldots,p}}_{\alpha_2,\ldots,\alpha_p} R_F\mathcal{M}$ est la V-multifiltration canonique associée aux $p - 1$ fonctions $t_2, \ldots, t_p$. Notons $\mathcal{N}^\bullet := f_*(V^{\boldsymbol{H}_{2,\ldots,p}}_{\alpha_2,\ldots,\alpha_p} R_F\mathcal{M})$ muni de la V-filtration $U_{\alpha_1}\mathcal{N}^\bullet := f_*(V_{\boldsymbol{\alpha}} R_F\mathcal{M})$ relativement à l'hyperplan $\{t_1 = 0\}$. Pour considérer $U_{\alpha_1}\mathcal{N}^\bullet$ comme un sous objet de $\mathcal{N}^\bullet$, on utilise ici une définition du foncteur f_* avec des résolutions explicites données dans [MS02] définition 4.3.3, $f_* R_F \mathcal{M}$ est le complexe simple associé au complexe double

$$f_* R_F \mathcal{M} := f_* \mathrm{God}^\bullet \left(R_F \mathcal{M} \otimes_{R_F \mathscr{D}_{X \times \mathbb{C}^p}} \mathrm{Sp}^\bullet_{X \times \mathbb{C}^p \to Y \times \mathbb{C}^p} (R_F \mathscr{D}_{X \times \mathbb{C}^p}) \right).$$

Le morphisme (1) se réécrit

$$\mathcal{H}^k(U_{\alpha_1} \mathcal{N}^\bullet) \underset{(1)}{\to} \mathcal{H}^k(\mathcal{N}^\bullet).$$

Vérifions les trois hypothèses de la propriété 7.5.8 de [MS02] :

1. Montrons que $\mathrm{gr}^U \mathcal{N}^\bullet$ est strict, c'est-à-dire que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{H}^k \mathrm{gr}^U \mathcal{N}^\bullet$ est strict. On a, par compatibilité des filtrations, $\mathcal{H}^k \mathrm{gr}^U \mathcal{N}^\bullet = \mathcal{H}^k f_*(V^{\boldsymbol{H}_{2,\dots,p}}_{\alpha_2,\dots,\alpha_p} \mathrm{gr}^{H_1}_{\alpha_1} R_F \mathcal{M})$. Par définition des modules de Hodge mixtes, $\mathrm{gr}^{H_1}_{\alpha_1} R_F \mathcal{M}$ satisfait également aux hypothèses du théorème. Par récurrence on obtient donc
$$\mathcal{H}^k f_*(V^{\boldsymbol{H}_{2,\dots,p}}_{\alpha_2,\dots,\alpha_p} \mathrm{gr}^{H_1}_{\alpha_1} R_F \mathcal{M}) \simeq V^{\boldsymbol{H}_{2,\dots,p}}_{\alpha_2,\dots,\alpha_p} \mathcal{H}^k f_*(\mathrm{gr}^{H_1}_{\alpha_1} R_F \mathcal{M}).$$
D'après le théorème d'image directe 6.4.9, $\mathrm{gr}^{H_1}_{\alpha_1} R_F \mathcal{M}$ étant sous-jacent à un module de Hodge mixte, $\mathcal{H}^k f_*(\mathrm{gr}^{H_1}_{\alpha_1} R_F \mathcal{M})$ est strict. Ainsi $\mathrm{gr}^U \mathcal{N}^\bullet$ est strict.
2. La stricte $\mathbb{R}$-spécialisabilité et le fait que f est propre permettent de montrer, comme précédemment, l'existence de polynômes annulateurs de $\mathrm{gr}^U \mathcal{N}^\bullet$ et donc l'hypothèse de monodromie de la propriété 7.5.8 de [MS02].
3. Par définition de la V-multifiltration canonique, pour $\alpha_1 < 0$, la multiplication à droite par t_1 induit un isomorphisme $t_1 : U_{\alpha_1} \mathcal{N}^j \xrightarrow{\sim} U_{\alpha_1 - 1} \mathcal{N}^j$ pour tout j.
4. La remarque 4.3.4(4) de [MS02] assure que pour $k > 2 \mathrm{dim} X + p$ et pour tout α_1, $\mathcal{H}^k(U_{\alpha_1} \mathcal{N}^\bullet) = 0$.

Ainsi, le morphisme (1) est injectif. On applique l'hypothèse de récurrence pour montrer que le morphisme (2) est une injection. Le morphisme naturel

$$\mathcal{H}^k f_*(V_{\boldsymbol{\alpha}} R_F \mathcal{M}) \to \mathcal{H}^k f_*(R_F \mathcal{M}) \tag{8.8}$$

est bien une injection. Ainsi on a

$$\mathcal{H}^k f_*(V_{\boldsymbol{\alpha}} R_F \mathcal{M}) = U_{\boldsymbol{\alpha}} \mathcal{H}^k f_*(R_F \mathcal{M}) \tag{8.9}$$

De plus la propriété 7.5.8 de [MS02] fournit également l'égalité

$$\mathrm{gr}^{U_1}_{\alpha_1} \mathcal{H}^k f_*(V_{\alpha_2,\dots,\alpha_p} R_F \mathcal{M}) = \mathcal{H}^k f_*(V_{\alpha_2,\dots,\alpha_p} \mathrm{gr}^{V_1}_{\alpha_1} R_F \mathcal{M}). \tag{8.10}$$

Propriétés de bonne V-multifiltration. Montrons que la V-multifiltration (8.7) est une bonne V-multifiltration. Il faut montrer que, pour tout $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{C}^p$, la V-multifiltration $U_{\boldsymbol{\alpha}+\bullet}(\mathcal{H}^k f_*(R_F \mathcal{M}))$ (indicée par $\mathbb{Z}^p$) est bonne. Pour alléger les notations, on traite le cas $\boldsymbol{\alpha} = 0$. D'après (8.9) on a

$$\mathcal{H}^k f_*(V_{\boldsymbol{k}} R_F \mathcal{M}) \xrightarrow{\sim} U_{\boldsymbol{k}}(\mathcal{H}^k f_*(R_F \mathcal{M})). \tag{8.11}$$

La propriété de compatibilité assure que $V_{\boldsymbol{k}} R_F \mathcal{M} = R_F(V_{\boldsymbol{k}} \mathcal{M})$, donc $V_{\boldsymbol{k}} R_F \mathcal{M}$ est un $V_{\boldsymbol{0}} \widetilde{\mathscr{D}}_{Y \times \mathbb{C}^p}$-module cohérent et strict. Il est donc filtré par les $\mathcal{O}_{Y \times \mathbb{C}^p}$-modules

$$\sum_{0 \leqslant \ell \leqslant p} F_\ell V_{\boldsymbol{k}} \mathcal{M} z^\ell$$

qui en donnent une bonne filtration. Comme f est propre on peut alors appliquer le théorème de cohérence de Grauert à ces $\mathcal{O}_{Y\times\mathbb{C}^p}$-modules. On en déduit que $\mathcal{H}^k f_*(V_{\boldsymbol{k}} R_F\mathcal{M})$ est $V_{\boldsymbol{0}}\widetilde{\mathscr{D}}_{Y\times\mathbb{C}^p}$-cohérente. Ainsi, $U_{\boldsymbol{k}}(\mathcal{H}^k f_*(R_F\mathcal{M}))$ est $V_{\boldsymbol{0}}\widetilde{\mathscr{D}}_{Y\times\mathbb{C}^p}$-cohérent.

Notons que, pour tout $1 \leqslant i \leqslant p$ et $\boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}^p$ vérifiant $k_i \leqslant -1$, l'isomorphisme de multiplication par t_i

$$t_i : V_{\boldsymbol{k}}\mathcal{M} \xrightarrow{\sim} V_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{1}_i}\mathcal{M}$$

induit un isomorphisme

$$t_i : U_{\boldsymbol{k}}(\mathcal{H}^k f_*(R_F\mathcal{M})) \xrightarrow{\sim} U_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{1}_i}(\mathcal{H}^k f_*(R_F\mathcal{M})). \tag{8.12}$$

Pour alléger les notations on note ici $\mathfrak{M}$ à la place de $R_F\mathcal{M}$. Considérons la suite exacte courte

$$0 \to V_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{1}_i}\mathfrak{M} \to V_{\boldsymbol{k}}\mathfrak{M} \to V_{\boldsymbol{k}}\mathfrak{M}/V_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{1}_i}\mathfrak{M} \to 0$$

et appliquons le foncteur f_*. On a la suite exacte longue associée,

$$\begin{aligned} ... \to \mathcal{H}^k f_*(V_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{1}_i}\mathfrak{M}) \to \mathcal{H}^k f_*(V_{\boldsymbol{k}}\mathfrak{M}) \to \mathcal{H}^k f_*(V_{\boldsymbol{k}}\mathfrak{M}/V_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{1}_i}\mathfrak{M}) \to \\ \mathcal{H}^{k+1} f_*(V_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{1}_i}\mathfrak{M}) \to \mathcal{H}^{k+1} f_*(V_{\boldsymbol{k}}\mathfrak{M}) \to ... \end{aligned}$$

D'après (8.8), le premier morphisme et le dernier morphisme sont injectifs, on a donc la suite exacte courte

$$0 \to U_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{1}_i}\mathcal{H}^k f_*(\mathfrak{M}) \to U_{\boldsymbol{k}}\mathcal{H}^k f_*(\mathfrak{M}) \to \mathcal{H}^k f_*(V_{\boldsymbol{k}}\mathfrak{M}/V_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{1}_i}\mathfrak{M}) \to 0.$$

Considérons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & U_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{1}_i}\mathcal{H}^k f_*(\mathfrak{M}) \arrow[r] \arrow[d, "\cdot\eth_{t_i}"] & U_{\boldsymbol{k}}\mathcal{H}^k f_*(\mathfrak{M}) \arrow[r] \arrow[d, "\cdot\eth_{t_i}"] & \mathcal{H}^k f_*(V_{\boldsymbol{k}}\mathfrak{M}/V_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{1}_i}\mathfrak{M}) \arrow[r] \arrow[d, "\cdot\eth_{t_i}"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & U_{\boldsymbol{k}}\mathcal{H}^k f_*(\mathfrak{M}) \arrow[r] & U_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{1}_i}\mathcal{H}^k f_*(\mathfrak{M}) \arrow[r] & \mathcal{H}^k f_*(V_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{1}_i}\mathfrak{M}/V_{\boldsymbol{k}}\mathfrak{M}) \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

Pour $k_i \geqslant 0$, d'après les propriétés de la V-multifiltration canonique, la troisième flèche verticale du diagramme est un isomorphisme. En utilisant le lemme du serpent, on déduit que

$$U_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{1}_i}\mathcal{H}^k f_*(\mathfrak{M}) = U_{\boldsymbol{k}}\mathcal{H}^k f_*(\mathfrak{M}) + U_{\boldsymbol{k}}\mathcal{H}^k f_*(\mathfrak{M}) \cdot \eth_{t_i}.$$

Ce résultat, ainsi que l'isomorphisme (8.12), donnent la propriété de bonne V-multifiltration de

$$U_{\bullet}\mathcal{H}^k f_*(R_F\mathcal{M}).$$

Gradués. On va montrer que pour tout $I \subset \{1, ..., p\}$ et tout $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^p$,

$$\frac{U_{\boldsymbol{\alpha}}\mathcal{H}^k f_*(R_F\mathcal{M})}{U_{<\boldsymbol{\alpha}_I,\boldsymbol{\alpha}_{I^c}}\mathcal{H}^k f_*(R_F\mathcal{M})} \simeq U_{\boldsymbol{\alpha}_{I^c}}\mathcal{H}^k f_*(\mathrm{gr}^{\mathbf{H}_I}_{\boldsymbol{\alpha}_I} R_F\mathcal{M}). \tag{8.13}$$

On va raisonner par récurrence sur le cardinal de I. Quitte à renuméroter on suppose que $1 \in I$. En omettant d'écrire $\mathcal{H}^k f_*(R_F\mathcal{M})$ on a

$$\frac{U_{\boldsymbol{\alpha}}}{U_{<\boldsymbol{\alpha}_I,\boldsymbol{\alpha}_{I^c}}} = \frac{U_{\boldsymbol{\alpha}}}{U_{<\alpha_1,\boldsymbol{\alpha}_{\{1\}^c}}} \Big/ \sum_{i\in I-\{1\}} \frac{U_{\alpha_1,...,<\alpha_i,...}}{U_{<\alpha_1,...,<\alpha_i,...}} \tag{8.14}$$

D'après (8.9), (8.10) et la compatibilité des filtrations canoniques de $R_F\mathcal{M}$ on a

$$\frac{U_{\boldsymbol{\alpha}}}{U_{<\alpha_1,\boldsymbol{\alpha}_{\{1\}^c}}} = \mathrm{gr}^{U_1}_{\alpha_1}\mathcal{H}^k f_*(V_{\alpha_2,\dots,\alpha_p}R_F\mathcal{M}) = \mathcal{H}^k f_*(V_{\alpha_2,\dots,\alpha_p}\mathrm{gr}^{V_1}_{\alpha_1}R_F\mathcal{M}) = U_{\alpha_2,\dots,\alpha_p}\mathcal{H}^k f_*(\mathrm{gr}^{V_1}_{\alpha_1}R_F\mathcal{M}).$$

De la même manière on obtient, en utilisant (8.14),

$$\frac{U_{\boldsymbol{\alpha}}}{U_{<\boldsymbol{\alpha}_I,\boldsymbol{\alpha}_{I^c}}} = \frac{U_{\boldsymbol{\alpha}_{\{1\}^c}}\mathcal{H}^k f_*(\mathrm{gr}^{V_1}_{\alpha_1}R_F\mathcal{M})}{U_{<\boldsymbol{\alpha}_{I-\{1\}},\boldsymbol{\alpha}_{I^c}}\mathcal{H}^k f_*(\mathrm{gr}^{V_1}_{\alpha_1}R_F\mathcal{M})}.$$

Étant donné que $\mathrm{gr}^{V_1}_{\alpha_1}R_F\mathcal{M}$ satisfait aux hypothèse du théorème on a, par hypothèse de récurrence,

$$\frac{U_{\boldsymbol{\alpha}}\mathcal{H}^k f_*(R_F\mathcal{M})}{U_{<\boldsymbol{\alpha}_I,\boldsymbol{\alpha}_{I^c}}\mathcal{H}^k f_*(R_F\mathcal{M})} = U_{\boldsymbol{\alpha}_{I^c}}\mathcal{H}^k f_*(\mathrm{gr}^{\mathbf{H}_{I-\{1\}}}_{\boldsymbol{\alpha}_{I-\{1\}}}\mathrm{gr}^{V_1}_{\alpha_1}R_F\mathcal{M}) = U_{\boldsymbol{\alpha}_{I^c}}\mathcal{H}^k f_*(\mathrm{gr}^{\mathbf{H}_I}_{\boldsymbol{\alpha}_I}R_F\mathcal{M})$$

où la dernière égalité provient de la compatibilité des filtrations.

Propriétés de V-multifiltration canonique. Montrons que la V-multifiltration $U_\bullet\mathscr{H}^k f_*(R_F\mathcal{M})$ satisfait aux propriétés de la définition 8.1.5 de la V-multifiltration canonique. On a déjà montré la propriété de bonne V-multifiltration.

D'après l'isomorphisme (8.13), le module

$$\frac{U_{\boldsymbol{\alpha}}\mathscr{H}^k f_*(R_F\mathcal{M})}{U_{<\boldsymbol{\alpha}_I,\boldsymbol{\alpha}_{I^c}}\mathscr{H}^k f_*(R_F\mathcal{M})}$$

est un sous-objet de $\mathscr{H}^k f_*(\mathrm{gr}^{\mathbf{H}_I}_{\boldsymbol{\alpha}_I}R_F\mathcal{M})$. Or, étant donné que $R_F\mathcal{M}$ est sous-jacent à un module de Hodge mixte, $\mathrm{gr}^{\mathbf{H}_I}_{\boldsymbol{\alpha}_I}R_F\mathcal{M}$ l'est aussi, ainsi son image directe est stricte et on en déduit que

$$\frac{U_{\boldsymbol{\alpha}}\mathscr{H}^k f_*(R_F\mathcal{M})}{U_{<\boldsymbol{\alpha}_I,\boldsymbol{\alpha}_{I^c}}\mathscr{H}^k f_*(R_F\mathcal{M})}$$

est strict pour tout $I \subset \{1,\dots,p\}$ et tout $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^p$.

On déduit les propriétés de surjectivité de la multiplication par t_i et $\eth_i$ de l'isomorphisme

$$\mathscr{H}^k f_*(\mathrm{gr}_{\boldsymbol{\alpha}}R_F\mathcal{M}) \simeq \mathrm{gr}^U_{\boldsymbol{\alpha}}\mathscr{H}^k f_*(R_F\mathcal{M}),$$

et du fait que

- pour tout $1 \leqslant i \leqslant p$ et tout $\alpha_i < 0$, le morphisme $t_i : \mathrm{gr}_{\boldsymbol{\alpha}}R_F\mathcal{M} \to \mathrm{gr}_{\boldsymbol{\alpha}-\mathbf{1}_i}R_F\mathcal{M}$ est un isomorphisme,
- pour tout $1 \leqslant i \leqslant p$ et tout $\alpha_i > -1$, le morphisme $\eth_i : \mathrm{gr}_{\boldsymbol{\alpha}}R_F\mathcal{M} \to \mathrm{gr}_{\boldsymbol{\alpha}+\mathbf{1}_i}R_F\mathcal{M}(-1)$ est un isomorphisme.

Ainsi, la V-multifiltration

$$U_\bullet\mathscr{H}^k f_*(R_F\mathcal{M})$$

est la V-multifiltration canonique, $\mathscr{H}^k f_*(R_F\mathcal{M})$ est donc strictement $\mathbb{R}$-multispécialisable le long de $\mathbf{H}$ et on a les isomorphismes suivants

$$\mathscr{H}^k f_*(V_{\boldsymbol{\alpha}}R_F\mathcal{M}) \simeq V_{\boldsymbol{\alpha}}\mathscr{H}^k f_*(R_F\mathcal{M})$$

et

$$\mathscr{H}^k f_*(\mathrm{gr}^V_{\boldsymbol{\alpha}}R_F\mathcal{M}) \simeq \mathrm{gr}^V_{\boldsymbol{\alpha}}\mathscr{H}^k f_*(R_F\mathcal{M}).$$

$\square$

8.3 Image directe des filtrations monodromiques relatives

Soient X une variété analytique complexe, $\mathscr{M} \in \mathrm{MH}(X \times \mathbb{C}^p_{\boldsymbol{t}})$ un module de Hodge pur sur $X \times \mathbb{C}^p_{\boldsymbol{t}}$ et $S(.,.)$ une polarisation de $\mathscr{M}$. On suppose que $\mathscr{M}$ est strictement $\mathbb{R}$-multispécialisable le long de $\mathbf{H}$ où $H_i := \{t_i = 0\}$. On note $V_i\mathscr{M}$ la filtration de Malgrange-Kashiwara de $\mathscr{M}$ relative à la fonction t_i pour $1 \leqslant i \leqslant p$. Fixons $\boldsymbol{\alpha} \in [0,1]^p$, le module de Hodge mixte $\mathrm{gr}^V_{\boldsymbol{\alpha}}\mathscr{M}$ est muni de p endomorphismes nilpotents N_i, pour $1 \leqslant i \leqslant p$, qui correspondent à la multiplication à droite par $(t_i\eth_i - \alpha_i)$.

Définition 8.3.1. Soit A un objet d'une catégorie abélienne muni de p endomorphismes nilpotents $N_1, ..., N_p$. On dira que $(A, N_1, ..., N_p)$ satisfait à la propriété (FM) si les filtrations monodromiques relatives (définition 6.1.2) satisfont à

$$W(N_1, W(N_2, W(...W(N_p))))A = W(N_1 + ... + N_p)A.$$

Remarque 8.3.2. D'après [Sch73, 4.12] et [CKS86, Proposition 4.72] cette condition est satisfaite dans le cas d'une orbite nilpotente.

Théorème 8.3.3. *Soit $f : X \times \mathbb{C}^p_{\boldsymbol{t}} \to Y \times \mathbb{C}^p_{\boldsymbol{t}}$ un morphisme projectif et supposons que $(\mathrm{gr}^V_{\boldsymbol{\alpha}}\mathscr{M}, N_1, ..., N_p)$ satisfait à la propriété (FM), alors $(\mathrm{gr}^V_{\boldsymbol{\alpha}}\mathscr{H}^j f_*\mathscr{M}, N_1, ..., N_p)$ satisfait également à (FM).*

On commence par montrer un lemme.

Lemme 8.3.4. *Soit $(\mathscr{M}, N_1, ..., N_p, S)$ un module de Hodge-Lefschetz p-gradué polarisé par S (définition 6.3.12). Si l'on introduit la $(p-1)$-graduation*

$$\mathscr{M}_{\ell,\ell_3,...,\ell_p} = \bigoplus_{\ell_1+\ell_2=\ell} \mathscr{M}_{\ell_1,\ell_2,\ell_3,...,\ell_p},$$

alors $(\mathscr{M}, N_1 + N_2, N_3, ..., N_p, S)$ est un module de Hodge-Lefschetz gradué polarisé par S.

Démonstration. On raisonne par induction sur la dimension du support de $\mathscr{M}$. En utilisant l'équivalence de Kashiwara on ramène le cas de dimension 0 à celui des structures de Hodge-Lefschetz polarisées de la proposition 6.2.13.

Soit g un germe de fonction holomorphe. La définition 6.3.7 par induction des modules de H-L gradués polarisés implique que

$$(P_\ell\Psi_{g,\lambda}\mathscr{M}, P_\ell\Psi_{g,\lambda}N_1, ..., P_\ell\Psi_{g,\lambda}N_p, N, P_\ell\Psi_{g,\lambda}S)$$

est un module de H-L $(p+1)$-gradué polarisé. Localement, on a une décomposition

$$\mathscr{M} = \bigoplus_Z \mathscr{M}_Z$$

où Z est irréductible et $\mathscr{M}_Z$ est à support strict Z. Si g est identiquement nul sur Z, alors $\Psi_{g,\lambda}\mathscr{M}_Z = 0$ pour tout λ, sinon $\Psi_{g,\lambda}\mathscr{M}_Z$ a un support de codimension 1 dans Z. On a donc diminué strictement la dimension du support et, par induction, on obtient que

$$\begin{aligned} & (P_\ell\Psi_{g,\lambda}\mathscr{M}, (P_\ell\Psi_{g,\lambda}N_1 + P_\ell\Psi_{g,\lambda}N_2), P_\ell\Psi_{g,\lambda}N_3, ..., P_\ell\Psi_{g,\lambda}N_p, N, P_\ell\Psi_{g,\lambda}S) \\ = \; & (P_\ell\Psi_{g,\lambda}\mathscr{M}, P_\ell\Psi_{g,\lambda}(N_1 + N_2), P_\ell\Psi_{g,\lambda}N_3, ..., P_\ell\Psi_{g,\lambda}N_p, N, P_\ell\Psi_{g,\lambda}S) \end{aligned}$$

est un module de H-L bigradué polarisé. Ainsi, $(\mathscr{M}, N_1 + N_2, N_3, ..., N_p, S)$ satisfait à la définition par induction des modules de Hodge-Lefschetz gradués polarisés.

□

Démonstration du théorème 8.3.3. On doit montrer que

$$W(N_1, W(N_2, W(...W(N_p))))\mathrm{gr}^V_{\boldsymbol{\alpha}}\mathscr{H}^j f_*\mathscr{M} = W(N_1 + ... + N_p)\mathrm{gr}^V_{\boldsymbol{\alpha}}\mathscr{H}^j f_*\mathscr{M}. \tag{8.15}$$

Notons $\mathscr{N} := \mathrm{gr}^V_{\boldsymbol{\alpha}}\mathscr{M}$ et $W\mathscr{N} := W(N_1, W(N_2, W(...W(N_p))))\mathscr{N} = W(N_1+...+N_p)\mathscr{N}$. D'après l'hypothèse strictement $\mathbb{R}$-multispécialisable et le théorème 8.2.1, on a

$$\mathrm{gr}^V_{\boldsymbol{\alpha}}\mathscr{H}^j f_*\mathscr{M} \simeq \mathscr{H}^j f_*\mathrm{gr}^V_{\boldsymbol{\alpha}}\mathscr{M} = \mathscr{H}^j f_*\mathscr{N}.$$

On définit la filtration suivante :

$$W\mathrm{gr}^V_{\boldsymbol{\alpha}}\mathscr{H}^j f_*\mathscr{M} := \mathrm{Im}(\mathscr{H}^j f_* W\mathscr{N} \to \mathscr{H}^j f_*\mathscr{N}). \tag{8.16}$$

On va montrer que cette filtration est égale aux deux filtrations apparaissant dans (8.15). D'après le théorème 6.3.13, la filtration

$$\mathrm{Im}(\mathscr{H}^j f_* W(N_p)\mathrm{gr}^{V_p}_{\alpha_p}\mathscr{M} \to \mathscr{H}^j f_*\mathrm{gr}^{V_p}_{\alpha_p}\mathscr{M})$$

de $\mathscr{H}^j f_*\mathrm{gr}^{V_p}_{\alpha_p}\mathscr{M}$ est la filtration associée à N_p. D'autre part, par définition des modules de Hodge purs, on peut considérer le module de Hodge mixte $(\mathrm{gr}^{V_p}_{\alpha_p}\mathscr{M}, W(N_p))$. Les résultats d'image directe pour les modules de Hodge mixtes (théorème 6.4.9) assurent que la filtration

$$\mathrm{Im}(\mathscr{H}^j f_* W(N_{p-1}, W(N_p))\mathrm{gr}^{V_{p-1}}_{\alpha_{p-1}}\mathrm{gr}^{V_p}_{\alpha_p}\mathscr{M} \to \mathscr{H}^j f_*\mathrm{gr}^{V_{p-1}}_{\alpha_{p-1}}\mathrm{gr}^{V_p}_{\alpha_p}\mathscr{M})$$

est égale à

$$W(N_{p-1}, W(N_p))\mathrm{gr}^{V_{p-1}}_{\alpha_{p-1}}\mathscr{H}^j f_*\mathrm{gr}^{V_p}_{\alpha_p}\mathscr{M} \simeq W(N_{p-1}, W(N_p))\mathrm{gr}^{V_{p-1}}_{\alpha_{p-1}}\mathrm{gr}^{V_p}_{\alpha_p}\mathscr{H}^j f_*\mathscr{M}.$$

On peut ainsi, par induction, en appliquant les théorèmes d'image directe à chaque étape, montrer l'égalité entre la première filtration de (8.15) et celle de (8.16) :

$$W\mathrm{gr}^V_{\boldsymbol{\alpha}}\mathscr{H}^j f_*\mathscr{M} \simeq W(N_1, W(N_2, W(...W(N_p))))\mathrm{gr}^V_{\boldsymbol{\alpha}}\mathscr{H}^j f_*\mathscr{M}. \tag{8.17}$$

Pour la deuxième filtration de (8.15), on va utiliser le lemme 8.3.4. Considérons le module de H-L bigradué polarisé suivant :

$$\left(\bigoplus_{\boldsymbol{\ell}} \mathrm{Gr}^{W(N_1)}_{\ell_1}...\mathrm{Gr}^{W(N_p)}_{\ell_p}\mathscr{N}, N_1, ..., N_p, S\right).$$

En itérant [Kas86, Theorem 3.2.9], on obtient

$$\mathrm{Gr}^{W(N_1, W(N_2, W(...W(N_p))))}_{\ell}\mathscr{N} = \bigoplus_{k_1+...+k_p=\ell} \mathrm{Gr}^{W(N_1)}_{k_1}...\mathrm{Gr}^{W(N_p)}_{k_p}\mathscr{N}. \tag{8.18}$$

L'égalité $W(N_1, W(N_2, W(...W(N_p))))\mathscr{N} = W(N_1 + ... + N_p)\mathscr{N}$ et l'itération du lemme 8.3.4 impliquent alors que

$$\left(\bigoplus_{\ell} \mathrm{Gr}^{W(N_1+...+N_p)}_{\ell}\mathscr{N}, N_1 + ... + N_p, S\right)$$

est un module de Hodge-Lefschetz gradué polarisé. Le théorème d'image directe 6.3.14 assure alors que la filtration

$$\mathrm{Im}(\mathscr{H}^j f_* W(N_1 + ... + N_p)\mathscr{N} \to \mathscr{H}^j f_*\mathscr{N})$$

est égale à la filtration monodromique

$$W(N_1 + ... + N_p)\mathscr{H}^j f_* \mathscr{N}.$$

D'où l'égalité

$$W\mathrm{gr}^V_{\boldsymbol{\alpha}} \mathscr{H}^j f_* \mathscr{M} \simeq W(N_1 + ... + N_p)\mathrm{gr}^V_{\boldsymbol{\alpha}} \mathscr{H}^j f_* \mathscr{M}. \tag{8.19}$$

En combinant (8.17) et (8.19), on obtient l'égalité attendue

$$W(N_1, W(N_2, W(...W(N_p))))\mathrm{gr}^V_{\boldsymbol{\alpha}} \mathscr{H}^j f_* \mathscr{M} = W(N_1 + ... + N_p)\mathrm{gr}^V_{\boldsymbol{\alpha}} \mathscr{H}^j f_* \mathscr{M}.$$

□

8.4 Application : hypersurfaces à singularité quasi-ordinaire

On applique ici les résultats précédents au cas de certains modules de Hodge mixtes définis sur une hypersurface à singularité quasi-ordinaire.

Définition 8.4.1. Un germe d'espace analytique complexe $(Z, 0)$ de dimension p est à singularité *quasi-ordinaire* s'il admet une projection finie $(Z, 0) \to (\mathbb{C}^p, 0)$ non ramifiée en dehors d'un diviseur à croisement normal dans $(\mathbb{C}^p, 0)$.

Si $(Z, 0)$ est une hypersurface irréductible à singularité quasi-ordinaire, alors elle admet une paramétrisation

$$\begin{array}{cccc} y & : & \mathbb{C}^p_{\boldsymbol{t}} & \to & \mathbb{C}^{p+1}_{\boldsymbol{z}} \\ & & (t_1, ..., t_p) & \mapsto & (t_1^k, ..., t_p^k, H(t_1, ..., t_p)) \end{array}$$

où H est une série convergente.

Soit $D := \{t_1 ... t_p = 0\} \subset \mathbb{C}^p_{\boldsymbol{t}}$ et $U := \mathbb{C}^p_{\boldsymbol{t}} \backslash D$.

Proposition 8.4.2. *Soit $(\mathcal{M}, F_\bullet \mathcal{M})$ un $\mathscr{D}_X$-module filtré sous-jacent à un module de Hodge pur polarisable $\mathscr{M}$ à support strict $\mathbb{C}^p_{\boldsymbol{t}}$ et dont la restriction à U est lisse (autrement dit $\mathscr{M}$ est l'extension intermédiaire d'une variation de structure polarisée supportée sur U). Alors l'image directe $y_+ R_F \mathcal{M}$, qui est également sous-jacente à un module de Hodge pur polarisable, est strictement $\mathbb{R}$-multispécialisable le long de la famille $\mathbf{H}_{\boldsymbol{z}}$ donnée par les hyperplans de coordonnées $H_{z_i} := \{z_i = 0\}$ pour $1 \leqslant i \leqslant p$. De plus, pour tout $j \in \mathbb{Z}$, le module de Hodge-Lefschetz $(\mathrm{gr}^V_{\boldsymbol{\alpha}} \mathscr{H}^j y_+ \mathscr{M}, N_1, ..., N_p)$, satisfait à la propriété (FM).*

Démonstration. Considérons la famille d'hypersurfaces $\mathbf{H}_{\boldsymbol{t}}$ donnée par les hyperplans de coordonnées $H_{t_i} := \{t_i = 0\}$ pour $1 \leqslant i \leqslant p$. D'après [Sai90, 3.b], les filtrations de $\mathcal{M}$ $(F_\bullet \mathcal{M}, V^{H_{t_1}}_\bullet \mathcal{M}, ..., V^{H_{t_i}}_\bullet \mathcal{M})$ sont compatibles. De plus, en utilisant la définition 2.3.2 et le théorème 2.3.5, on observe que $\mathcal{M}$ est $\mathbb{R}$-multispécialisable le long de $\mathbf{H}_{\boldsymbol{t}}$. D'après la proposition 8.1.7, $R_F \mathcal{M}$ est strictement $\mathbb{R}$-multispécialisable le long de $\mathbf{H}_{\boldsymbol{t}}$.

Soit

$$\begin{array}{cccc} i & : & \mathbb{C}^p_{\boldsymbol{t}} & \to & \mathbb{C}^p_{\boldsymbol{t}} \times \mathbb{C}^p_{\boldsymbol{z}} \\ & & (t_1, ..., t_p) & \mapsto & (t_1, ..., t_p, t_1^k, ..., t_p^k), \end{array}$$

l'inclusion par le graphe. D'après [Sai90, Théorème 3.4], $i_+ R_F \mathcal{M}$ est également strictement $\mathbb{R}$-multispécialisable le long de $\mathbf{H}_{\boldsymbol{z}}$.

D'après le théorème 8.2.1, $(y \times id_{\mathbb{C}^p_{\boldsymbol{z}}})_+ i_+ R_F \mathcal{M}$ est strictement $\mathbb{R}$-multispécialisable le long de $\mathbf{H}_{\boldsymbol{z}}$. Or, $(y \times id_{\mathbb{C}^p_{\boldsymbol{z}}}) \circ i = j \circ y$ où

$$\begin{array}{cccc} j & : & \mathbb{C}^{p+1}_{\boldsymbol{z}} & \to & \mathbb{C}^{p+1}_{\boldsymbol{z}} \times \mathbb{C}^p_{\boldsymbol{z}} \\ & & (z_1, ..., z_{p+1}) & \mapsto & (z_1, ..., z_{p+1}, z_1, ..., z_p) \end{array}$$

est l'inclusion du graphe de la projection sur les p premières coordonnées. Ainsi $j_+ y_+ R_F \mathcal{M}$ est strictement $\mathbb{R}$-multispécialisable le long de $\mathbf{H}_{\boldsymbol{z}}$.

D'après le théorème de l'orbite nilpotente [Sch73, 4.12] et [CKS86, Proposition 4.72], $(\mathrm{gr}^V_{\boldsymbol{\alpha}} \mathscr{M}, N_1, ..., N_p)$ satisfait à la propriété (FM). Le théorème 8.3.3 implique alors que $(\mathrm{gr}^V_{\boldsymbol{\alpha}} \mathscr{H}^j y_+ \mathscr{M}, N_1, ..., N_p)$ satisfait à la propriété (FM).

□

Corollaire 8.4.3. *Avec les notations de la proposition précédente, les filtrations*

$$(F_\bullet y_+ \mathcal{M}, V_\bullet^{H_{z_1}} y_+ \mathcal{M}, ..., V_\bullet^{H_{z_i}} y_+ \mathcal{M})$$

sont compatibles.

Démonstration. Ceci découle du théorème 8.2.1 et de la proposition 8.1.8.

□

Annexe A

Hypercomplexes et filtrations compatibles

Dans ce chapitre, on introduit les hypercomplexes, le complexe simple associé et une condition sur un morphisme d'hypercomplexes assurant que le morphisme induit sur les complexes simples associés soit un quasi-isomorphisme. On définira également une notion de compatibilité entre plusieurs filtrations d'un même objet.

A.1 Hypercomplexes

On définit ici les n-hypercomplexes qui correspondent aux complexes n^{uple} naïfs introduits par P. Deligne au paragraphe 0.4 de [Del73].

Définition A.1.1. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie abélienne, on définit par induction la catégorie abélienne des *n-hypercomplexe* de la façon suivante :

- Les 1-hypercomplexes sont les complexes d'objets de $\mathcal{C}$.
- Les n-hypercomplexes sont les complexes de (n-1)-hypercomplexes.

On notera $\boldsymbol{C}^n(\mathcal{C})$ la catégorie abélienne des n-hypercomplexes d'objets de $\mathcal{C}$. Par exemple, les 2-hypercomplexes sont les complexes doubles. Un n-hypercomplexe est donc la donnée, pour tout $\boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}^n$, d'un objet $X^{\boldsymbol{k}}$ de $\mathcal{C}$ et, pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$, de morphismes $d^{(i)\boldsymbol{k}} : X^{\boldsymbol{k}} \to X^{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{1}_i}$ vérifiant les propriétés suivantes :

$$\begin{array}{lll} d^{(i)} \circ d^{(i)} = 0 & \text{pour tout} & i \\ d^{(i)} \circ d^{(j)} = d^{(j)} \circ d^{(i)} & \text{pour tout} & (i,j) \end{array}$$

pour les exposants $\boldsymbol{k}$ convenables.

Soit X un n-hypercomplexe, pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$, et tout $m \in \mathbb{Z}$ on note X_i^m le $(n-1)$-hypercomplexe composé des $X^{\boldsymbol{k}}$ avec $k_i = m$ et des différentielles correspondantes. Les différentielles $d^{(i)\boldsymbol{k}}$ avec $k_i = m$ définissent un morphisme

$$d_i^m : X_i^m \to X_i^{m+1}$$

qui vérifie $d_i^{m+1} \circ d_i^m = 0$ par définition d'un n-hypercomplexe. On a donc pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$ un foncteur

$$\begin{array}{rccc} F_i : & \boldsymbol{C}^n(\mathcal{C}) & \to & \boldsymbol{C}(\boldsymbol{C}^{(n-1)}(\mathcal{C})) \\ & X & \mapsto & \{X_i^m, d_i^m\}_{m \in \mathbb{Z}} \end{array}$$

de la catégorie des n-hypercomplexes dans la catégorie des complexes de $(n-1)$-hypercomplexes. On introduit alors le $(n-1)$-hypercomplexe :

$$H_i^p(X) := H^p(F_i(X)),$$

et le n-hypercomplexe :

$$H_i(X) := \ldots \to H_i^p(X) \xrightarrow{0} H_i^{p+1}(X) \to \ldots$$

où toutes les flèches horizontales sont nulles.

Définition A.1.2. Si un n-hypercomplexe X vérifie la propriété de finitude suivante,

$$\text{pour tout } m \in \mathbb{Z} \text{ l'ensemble } \{(k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{Z}^n | k_1 + \ldots + k_n = m, X^{\boldsymbol{k}} \neq 0\} \text{ est fini,} \tag{A.1}$$

alors on peut associer à X un complexe simple $s(X)$. On pose

$$s(X)^m := \bigoplus_{k_1+\ldots+k_n=m} X^{\boldsymbol{k}}.$$

Soit $\boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}^n$ tel que $k_1 + \ldots + k_n = m$, on note $i_{\boldsymbol{k}} : X^{\boldsymbol{k}} \to s(X)^m$ et $p_{\boldsymbol{k}} : s(X)^m \to X^{\boldsymbol{k}}$ les morphismes naturels. On peut alors définir la différentielle $d_{s(X)}^m : s(X)^m \to s(X)^{m+1}$ du complexe $s(X)$ par

$$p_{\boldsymbol{l}} \circ d_{s(X)}^m \circ i_{\boldsymbol{k}} = \begin{cases} (-1)^{k_1+\ldots+k_{j-1}} d^{(j)\boldsymbol{k}} & \text{si} \quad \#\{i | k_i \neq l_i\} = 1 \quad \text{où } j \text{ vérifie } k_j \neq l_j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

pour tout $\boldsymbol{k}$ et $\boldsymbol{l}$ vérifiant $k_1 + \ldots + k_n = m$ et $l_1 + \ldots + l_n = m+1$. On peut alors vérifier que $d_{s(X)}^{m+1} \circ d_{s(X)}^m = 0$ et $(s(X), d_{s(X)})$ est donc bien un complexe. On a défini un foncteur

$$\begin{array}{rccc} s : & \boldsymbol{C}_f^n(\mathcal{C}) & \to & \boldsymbol{C}(\mathcal{C}) \\ & X & \mapsto & (s(X), d_{s(X)}) \end{array}$$

où $\boldsymbol{C}_f^n(\mathcal{C})$ est la catégorie des n-hypercomplexes vérifiant la propriété (A.1). De plus, on observe facilement que $s(.)$ est un foncteur exact.

Théorème A.1.3. *Soit $f : X \to Y$ un morphisme de n-hypercomplexes où X et Y vérifient la propriété* (A.1) *et supposons que f induise un isomorphisme :*

$$f : H_1(H_2(\ldots H_n(X))) \simeq H_1(H_2(\ldots H_n(Y))).$$

Alors, $s(f) : s(X) \to s(Y)$ est un quasi-isomorphisme.

Démonstration. On raisonne par récurrence sur l'entier n. Pour $n = 1$, c'est la définition d'un quasi-isomorphisme, pour $n = 2$, c'est le théorème 1.9.3 de [KS94]. On suppose que $n \geqslant 3$. Pour tout $p \in \mathbb{Z}$, on a deux $(n-1)$-hypercomplexes, $H_n^p(X)$ et $H_n^p(Y)$, qui vérifient les hypothèses du théorème et donc, par hypothèse de récurrence, f induit un quasi-isomorphisme entre $s(H_n^p(X))$ et $s(H_n^p(Y))$. Or $H_n^p(X) = H^p(F_n(X))$ et $H^p(.)$ est un foncteur additif, il commute donc avec le foncteur $s(.)$ et f induit un quasi-isomorphisme entre $H^p(\{s(X_n^m), s(d_n^m)\}_{m\in\mathbb{Z}})$ et $H^p(\{s(Y_n^m), s(d_n^m)\}_{m\in\mathbb{Z}})$ pour tout $p \in \mathbb{Z}$. Mais ce quasi-isomorphisme correspond aux conditions du théorème pour les complexes doubles $\{s(X_i^m), s(d_i^m)\}_{m\in\mathbb{Z}}$ et $\{s(Y_i^m), s(d_i^m)\}_{m\in\mathbb{Z}}$. Les complexes simples associés à ces deux complexes doubles sont donc quasi-isomorphes par hypothèse de récurrence pour $n = 2$. En appliquant la définition du foncteur s, on montre alors que ces deux derniers complexes simples sont en fait les complexes simples associés à X et à Y, ce qui conclut la démonstration du théorème.

□

Corollaire A.1.4. *Soit X un n-hypercomplexe tel qu'il existe un indice i pour lequel le complexe $F_i(X)$ soit exact, alors $s(X)$ est quasi-isomorphe au complexe nul.*

Démonstration. Le théorème précédent est évidemment vérifié si l'on permute les indices des H_i. Si le complexe $F_i(X)$ est exact, alors $H_i(X) \simeq H_i(0_n)$ où 0_n est le n-hypercomplexe nul. On a donc

$$H_1(...H_{i-1}(H_{i+1}(...H_n(H_i(X))) \simeq H_1(...H_{i-1}(H_{i+1}(...H_n(H_i(0_n)))$$

et on peut appliquer le théorème précédent, $s(X) \simeq s(0_n)$, $s(X)$ est quasi-isomorphe au complexe nul.

$\square$

Définition A.1.5. Soit $\{X^{\boldsymbol{k}}, f^{(i)\boldsymbol{k}}\}_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^n, 1\leqslant i\leqslant n}$ une famille d'objets de $\mathcal{C}$ et de morphismes $f^{(i)\boldsymbol{k}}$: $X^{\boldsymbol{k}} \to X^{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{1}_i}$, on appelle hypercube associé à X le n-hypercomplexe noté $\mathrm{Cube}(X)^\bullet$ vérifiant

$$\mathrm{Cube}(X)^{k_1,\dots,k_n} = \begin{cases} X^{k_1-1,\dots,k_n-1} & \text{si} \quad \boldsymbol{k} \in \{0,1\}^n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

les morphismes étant ceux donnés par les $f^{(i)\boldsymbol{k}}$. On vérifie facilement que Cube(.) définit un foncteur exact.

Par exemple, pour $n = 3$ on a

$$\mathrm{Cube}(X) = \begin{tikzcd} & X^{-1,0,0} \arrow[rr] & & X^{0,0,0} \\ X^{-1,-1,0} \arrow[ur] \arrow[rr] & & X^{0,-1,0} \arrow[ur] & \\ & X^{-1,0,-1} \arrow[uu] \arrow[rr] & & X^{0,0,-1} \arrow[uu] \\ X^{-1,-1,-1} \arrow[uu] \arrow[ur] \arrow[rr] & & X^{0,-1,-1} \arrow[uu] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

où le reste de l'hypercomplexe est nul et $X^{-1,-1,-1}$ est en degré $(0,0,0)$.

A.2 Filtrations compatibles, suites régulières et complexes de Koszul

A.2.1 Filtrations compatibles

Les définitions qui suivent ont été introduites par Morihiko Saito dans [Sai88]

Définition A.2.1. Soit A un objet de la catégorie abélienne $\mathcal{C}$ et $A_1, ..., A_n \subseteq A$ des sous-objets de A. On dit que $A_1, ..., A_n$ sont des *sous-objets compatibles* de A s'il existe un n-hypercomplexe X satisfaisant à :

1. $X^{\boldsymbol{k}} = 0$ si $\boldsymbol{k} \notin \{-1, 0, 1\}^n$.

2. $X^{\mathbf{0}} = A$.
3. $X^{\mathbf{0}-\mathbf{1}_i} = A_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$.
4. Pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$ et tout $\boldsymbol{k} \in \{-1,0,1\}^n$ tel que $k_i = 0$, la suite

$$0 \to X^{\boldsymbol{k}-\mathbf{1}_i} \to X^{\boldsymbol{k}} \to X^{\boldsymbol{k}+\mathbf{1}_i} \to 0$$

est une suite exacte courte.

Remarque A.2.2. – En utilisant les propriétés universelles fournies par les suites exactes courtes, on observe que si les sous-objets $A_1, ..., A_n$ sont compatibles, alors le n-hypercomplexe X est déterminé de manière unique. Par exemple, si $\boldsymbol{k} \in \{-1,0\}^n$ et si $I = \{i; k_i = -1\} \subset \{1, ..., n\}$, alors

$$X^{\boldsymbol{k}} = \bigcap_{i \in I} A_i.$$

– Si $n = 1$, le complexe X est la suite exacte courte

$$0 \to A_1 \to A \to A/A_1 \to 0.$$

– Si $n = 2$, deux sous-objets A_1 et A_2 sont toujours compatibles et X est le complexe double suivant :

$$\begin{tikzcd}
A_1/(A_1 \cap A_2) \arrow[r] & A/A_2 \arrow[r] & A/(A_1 + A_2) \\
A_1 \arrow[r] \arrow[u] & A \arrow[r] \arrow[u] & A/A_1 \arrow[u] \\
A_1 \cap A_2 \arrow[r] \arrow[u] & A_2 \arrow[r] \arrow[u] & A_2/(A_1 \cap A_2). \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

– Si $n \geqslant 3$, des sous-objets $A_1, ..., A_n$ ne sont pas compatibles en général.
– Par définition, si $A_1, ..., A_n \subseteq A$ sont compatibles, alors pour tout $I \subset \{1, ..., n\}$, les sous-objets $(A_i)_{i \in I} \subseteq A$ sont compatibles et l'hypercomplexe correspondant est le $\#I$-hypercomplexe X_I dont les objets sont les $X^{\boldsymbol{k}}$ tels que $k_i = 0$ pour tout $i \in I^c$.

Définition A.2.3. Soient $F^1_\bullet, ..., F^n_\bullet$ des filtrations croissantes indexées par $\mathbb{Z}$ d'un objet A, on dit que ces filtrations sont *compatibles* si, pour tout $\boldsymbol{\ell} \in \mathbb{Z}^n$, les sous-objets $F^1_{\ell_1}, ..., F^n_{\ell_n}$ de A sont compatibles.

Remarque A.2.4. – D'après la remarque précédente, toute sous-famille d'une famille de filtrations compatibles est compatible.
– On peut montrer que si $F^1_\bullet, ..., F^n_\bullet$ sont compatibles, alors pour tout $\ell \in \mathbb{Z}$, les filtrations induites par $F^1_\bullet, ..., F^{n-1}_\bullet$ sur $\mathrm{gr}^{F_n}_\ell$ sont compatibles.
– Si $F^1_\bullet, ..., F^n_\bullet$ sont compatibles, alors les filtrations induites sur $F^1_{\ell_1} \cap ... \cap F^n_{\ell_n}$ sont compatibles.

La proposition suivante correspond à [Sai88, corollaire 1.2.13].

Proposition A.2.5. *Soit $F^1_\bullet, ..., F^n_\bullet$ des filtrations compatibles d'un objet A. L'objet obtenu en appliquant successivement les gradués $\mathrm{gr}^{F_{\sigma(j)}}_{\ell_{\sigma(j)}}$ par rapport aux filtrations $F_{\sigma(j)}$ induites sur $\mathrm{gr}^{F_{\sigma(j-1)}}_{\ell_{\sigma(j-1)}} ... \mathrm{gr}^{F_{\sigma(1)}}_{\ell_{\sigma(1)}} A$ pour $1 \leqslant j \leqslant n$, ne dépend pas de la permutation σ de $\{1, ..., n\}$ et est égal à*

$$\frac{F^1_{\ell_1} A \cap ... \cap F^n_{\ell_n} A}{\sum_j F^1_{\ell_1} A \cap ... \cap F^1_{\ell_j - 1} A \cap ... \cap F^n_{\ell_n} A}.$$

A.2.2 Construction de Rees

Définition A.2.6. Soit $(A, F^1_\bullet A, ..., F^n_\bullet A)$ un objet filtré tel que les filtrations $F^i_\bullet A$ soient indexées par $S + \mathbb{Z}$ où $S \subset [0,1[$ est un ensemble fini contenant 0. Soit $\varphi : \mathbb{Z} \to S + \mathbb{Z}$ l'unique bijection préservant l'ordre et satisfaisant à $\varphi(0) = 0$. On définit le $\mathbb{C}[y_1, ..., y_p]$-*module gradué de Rees* $\mathscr{A}$ associé à cet objet comme étant le sous $\mathbb{C}[x_1, ..., x_p]$-module de $A \otimes \mathbb{C}[x_1, x_1^{-1} ..., x_p, x_p^{-1}]$ suivant :

$$\mathscr{A} := \bigoplus_{\boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}^n} F_{\varphi(\boldsymbol{k})} A \cdot x_1^{k_i} ... x_p^{k_n}$$

où $F_{\varphi(\boldsymbol{k})} A := F_{\varphi(k_1)} A \cap ... \cap F_{\varphi(k_n)} A$.

Proposition A.2.7. *Un $\mathbb{C}[x_1, ..., x_n]$-module gradué $\mathscr{A}$ est le module de Rees d'un objet muni de n filtrations compatibles si et seulement si c'est un $\mathbb{C}[x_1, ..., x_n]$-module plat.*

Lemme A.2.8. *Un $\mathbb{C}[x_1, ..., x_n]$-module $\mathscr{A}$ est plat si et seulement si toute permutation de $x_1, ..., x_n$ est une suite $\mathscr{A}$-régulière.*

A.2.3 Suites régulières et complexes de Koszul

Soit $\mathcal{R}$ un anneau commutatif et $\mathscr{A}$ un $\mathcal{R}$-module. Soit $x_1, ..., x_p \in \mathcal{R}$, on note $K(x_1, ..., x_p; \mathscr{A})$ le complexe de Koszul de $\mathscr{A}$ associé aux éléments $x_1, ..., x_p$ et situé entre les degré $-p$ et 0.

Proposition A.2.9. *La suite $x_1, ..., x_p$ de $\mathcal{R}$ est $\mathscr{A}$-régulière si et seulement si pour tout $1 \leqslant k \leqslant p$, le complexe de Koszul $K(x_1, x_2, ..., x_k; \mathscr{A})$ est une résolution à gauche de $\mathscr{A}/(x_1, x_2, ..., x_k)\mathscr{A}$.*

Démonstration. Supposons $x_1, ..., x_p$ $\mathscr{A}$-régulière, alors pour tout $1 \leqslant k \leqslant p$, la suite $x_1, ..., x_k$ est $\mathscr{A}$-régulière. Le fait que le complexe de Koszul $K(x_1, x_2, ..., x_k; \mathscr{A})$ soit une résolution à gauche de $\mathscr{A}/(x_1, x_2, ..., x_k)\mathscr{A}$ est alors un résultat classique. Réciproquement, on observe que l'annulation de $\mathcal{H}^{-1}(K(x_1, x_2, ..., x_k; \mathscr{A}))$ pour $1 \leqslant k \leqslant p$ implique que le morphisme de multiplication par x_k

$$\mathscr{A}/(x_1, x_2, ..., x_{k-1})\mathscr{A} \xrightarrow{x_k} \mathscr{A}/(x_1, x_2, ..., x_{k-1})\mathscr{A}$$

soit injectif. Ce résultat pour tout $1 \leqslant k \leqslant p$ signifie que la suite $x_1, ..., x_p$ est $\mathscr{A}$-régulière.

□

Corollaire A.2.10. *Les deux énoncés suivants sont équivalents :*

1. *Toute permutation de $x_1, ..., x_p$ est $\mathscr{A}$-régulière.*
2. *Toute sous-suite de $x_1, ..., x_p$ est $\mathscr{A}$-régulière.*

Démonstration. Le complexe de Koszul associé à une suite d'éléments ne dépend pas de la manière dont ils sont ordonnés. On déduit alors de la proposition précédente que les énoncés 1. et 2. sont équivalents à l'énoncé suivant : Pour tout sous-ensemble $J \subset \{1, ..., p\}$, le complexe de Koszul $K(\{x_j\}_{j \in J}; \mathscr{A})$ est une résolution à gauche de $\mathscr{A}/\mathscr{J}\mathscr{A}$ où $\mathscr{J}$ est l'idéal engendré par les x_j pour $j \in J$.

□

Bibliographie

[BMM00] J. Briançon, P. Maisonobe & M. Merle – « Constructibilité de l'idéal de Bernstein », in *Singularities—Sapporo 1998*, Adv. Stud. Pure Math., vol. 29, Kinokuniya, Tokyo, 2000, p. 79–95.

[BMM02] J. Briançon, P. Maisonobe & M. Merle – « éventails associés à des fonctions analytiques », *Tr. Mat. Inst. Steklova* **238** (2002), no. Monodromiya v Zadachakh Algebr. Geom. i Differ. Uravn., p. 70–80.

[CKS86] E. Cattani, A. Kaplan & W. Schmid – « Degeneration of Hodge structures », *Ann. of Math. (2)* **123** (1986), no. 3, p. 457–535.

[CKS87] — , « L^2 and intersection cohomologies for a polarizable variation of Hodge structure », *Invent. Math.* **87** (1987), no. 2, p. 217–252.

[Del70] P. Deligne – *équations différentielles à points singuliers réguliers*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 163, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1970.

[Del73] P. Deligne – « Cohomologie à supports propres (exposé XVII) », in *SGA 4*, Lect. Notes in Math., vol. 305, Springer-Verlag, 1973, p. 252–480.

[DMST06] A. Dimca, P. Maisonobe, M. Saito & T. Torrelli – « Multiplier ideals, V-filtrations and transversal sections », *Math. Ann.* **336** (2006), no. 4, p. 901–924.

[GDK72] A. Grothendieck, P. Deligne & N. Katz – *Groupes de monodromie en géométrie algébrique : Sga 7*, Groupes de Monodromie en Géométrie Algébrique : SGA 7, no. v. 1, Springer-Verlag, 1972.

[GNA90] F. Guillén & V. Navarro Aznar – « Sur le théorème local des cycles invariants », *Duke Math. J.* **61** (1990), no. 1, p. 133–155.

[HMS84] J. P. Henry, M. Merle & C. Sabbah – « Sur la condition de Thom stricte pour un morphisme analytique complexe », *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **17** (1984), no. 2, p. 227–268.

[Kas83] M. Kashiwara – « Vanishing cycles sheaves and holonomic systems of differential equations », in *Algebraic geometry (Tokyo/Kyoto, 1982)*, Lect. Notes in Math., vol. 1016, Springer-Verlag, 1983, p. 134–142.

[Kas84] M. Kashiwara – « The Riemann-Hilbert problem for holonomic systems », *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **20** (1984), no. 2, p. 319–365.

[Kas86] — , « A study of variation of mixed Hodge structure », *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **22** (1986), no. 5, p. 991–1024.

[KK87] M. Kashiwara & T. Kawai – « The Poincaré lemma for variations of polarized Hodge structure », *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **23** (1987), no. 2, p. 345–407.

[KS94] M. Kashiwara & P. Schapira – *Sheaves on manifolds*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, vol. 292, Springer-Verlag, Berlin, 1994, Corrected reprint of the 1990 original.

[Lê77] D. T. Lê – « Some remarks on relative monodromy », (1977), p. 397–403.

[Mai13] P. Maisonobe – « Cycles évanescents algébriques et topologiques par un morphisme sans pente », *J. Singul.* **7** (2013), p. 157–189.

[Mal83] B. Malgrange – « Polynômes de Bernstein-Sato et cohomologie évanescente », in *Analysis and topology on singular spaces, II, III (Luminy, 1981)*, Astérisque, vol. 101, Soc. Math. France, Paris, 1983, p. 243–267.

[Meb84] Z. Mebkhout – « Une autre équivalence de catégories », *Compositio Math.* **51** (1984), no. 1, p. 63–88.

[Meb04] Z. Mebkhout – « Le théorème de positivité, le théorème de comparaison et le théorème d'existence de Riemann », in *Éléments de la théorie des systèmes différentiels géométriques*, Sémin. Congr., vol. 8, Soc. Math. France, Paris, 2004, p. 165–310.

[MG93] P. Maisonobe & M. Granger – *A basic course on differential modules*, Travaux en Cours [Works in Progress], vol. 45, Hermann, Paris, 1993, Papers from the CIMPA Summer School held in Nice, August and September 1990.

[Mil68] J. Milnor – *Singular points of complex hypersurfaces*, Princeton University Press, 1968.

[MM04] P. Maisonobe & Z. Mebkhout – « Le théorème de comparaison pour les cycles évanescents », in *Éléments de la théorie des systèmes différentiels géométriques*, Sémin. Congr., vol. 8, Soc. Math. France, Paris, 2004, p. 311–389.

[MS02] P. Maisonobe & C. Sabbah – *Aspects of the theory of $\mathcal{D}_x$-modules*, Lect. Notes Kaiserslautern, 2002.

[PS08] C. Peters & J. Steenbrink – *Mixed Hodge Structures*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge, vol. 52, Springer-Verlag, Berlin, 2008.

[Sab83] C. Sabbah – « Morphismes analytiques stratifiés sans éclatement et cycles évanescents », in *Analysis and topology on singular spaces, II, III (Luminy, 1981)*, Astérisque, vol. 101, Soc. Math. France, Paris, 1983, p. 286–319.

[Sab93] C. Sabbah – *Introduction to algebraic theory of linear systems of differential equations*, In Éléments de la théorie des systèmes différentiels, Hermann, Paris, 1993.

[Sai88] M. Saito – « Modules de Hodge polarisables », *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **24** (1988), no. 6, p. 849–995 (1989).

[Sai90] — , « Mixed Hodge modules », *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **26** (1990), no. 2, p. 221–333.

[Sch73] W. Schmid – « Variation of Hodge structure : the singularities of the period mapping », *Invent. Math.* **22** (1973), p. 211–319.

[SS94] P. Schapira & J.-P. Schneiders – *Index theorem for elliptic pairs*, Astérisque, Société mathématique de France, 1994.

[Ste76] J. Steenbrink – « Limits of Hodge structures », *Invent. Math.* **31** (1975/76), no. 3, p. 229–257.

[Zuc79] S. Zucker – « Hodge theory with degenerating coefficients. L_2 cohomology in the Poincaré metric », *Ann. of Math. (2)* **109** (1979), no. 3, p. 415–476.

Titre : Cycles proches, cycles évanescents et théorie de Hodge pour les morphismes sans pente.

Mots clés : D-modules, faisceaux pervers, modules de Hodge mixtes, cycles proches, cycles évanescents, multifiltration de Kashiwara-Malgrange, morphismes sans pente.

Résumé : Dans cette thèse, nous nous intéressons aux singularités d'espaces analytiques complexes définis comme le lieu des zéros d'un morphisme sans pente. Nous étudions dans un premier temps les cycles proches et les cycles évanescents associés à un tel morphisme. Dans un deuxième temps, nous cherchons à comprendre la théorie de Hodge des morphismes sans pente.

La première partie de cette thèse est consacrée à apporter des compléments au travail de P. Maisonobe sur les morphismes sans pente. Nous commençons par construire un morphisme de comparaison entre cycles proches algébriques (pour les D-modules) et cycles proches topologiques (pour les faisceaux pervers). Nous montrons ensuite que ce morphisme est un isomorphisme dans le cas d'un morphisme sans pente. Enfin, nous construisons un foncteur cycles évanescents topologiques pour un morphisme sans pente et nous démontrons que ce foncteur et le foncteur cycles proches topologiques de P. Maisonobe se placent dans le diagramme de triangles distingués attendu.

Dans la seconde partie de cette thèse, nous étudions les morphismes sans pente pour les modules de Hodge mixtes. Nous démontrons dans un premier temps la commutativité des cycles proches et des cycles évanescents itérés appliqués à un module de Hodge mixte dans le cas d'un morphisme sans pente. Dans un deuxième temps, nous définissons la notion ≪ strictement sans pente ≫ pour un module de Hodge mixte et nous démontrons sa stabilité par image directe propre. Nous démontrons comme application la compatibilité de la filtration de Hodge et des filtrations de Kashiwara-Malgrange pour certains modules de Hodge purs, supportés sur une hypersurface à singularités quasi-ordinaires.

Title : Nearby cycles, vanishing cycles and Hodge theory for morphisms without slope.

Keywords : D-modules, perverse sheaves, mixed Hodge modules, nearby cycles, vanishing cycles, Kashiwara-Malgrange multifiltration, morphisms without slope.

Abstract : In this thesis we are interested in singularities of complex varieties defined as the zero locus of a morphism without slope. We begin by studying nearby cycles and vanishing cycles associated with such morphisms. Then we will try to understand Hodge theory for morphisms without slope.

The first part of this thesis aims at adding some complements to the work of P. Maisonobe on morphisms without slope. We start with the construction of a comparison morphism between algebraic nearby cycles (for D-modules) and topological nearby cycles (for perverse sheaves). Then we show that this morphism is an isomorphism in the case of a morphism without slope. Finally we construct a topological vanishing cycles functor for a morphism without slope and we prove that this functor and the topological nearby cycles functor of P. Maisonobe fit into the expected diagram of distinguished triangles.

In the second part of the thesis we study morphisms without slope for mixed Hodge modules. We first show the commutativity of iterated nearby cycles and vanishing cycles applied to a mixed Hodge module in the case of a morphism without slope. Then we define the notion "strictly without slope" for a mixed Hodge module and we show the preservation of this condition under the direct image by a proper morphism. As an application we prove the compatibility of the Hodge filtration and Kashiwara-Malgrange filtrations for some pure Hodge modules with support an hypersurface with quasi-ordinary singularities.

Université Paris-Saclay
Espace Technologique / Immeuble Discovery
Route de l'Orme aux Merisiers RD 128 / 91190 Saint-Aubin, France