

Modélisation de la rupture d'un milieu fragile soumis à l'injection d'un fluide visqueux : Analyse de la singularité en pression et du décollement en pointe de fissure

Rogers Bill Cordova Hinojosa

▶ **To cite this version:**

Rogers Bill Cordova Hinojosa. Modélisation de la rupture d'un milieu fragile soumis à l'injection d'un fluide visqueux : Analyse de la singularité en pression et du décollement en pointe de fissure. Mécanique des solides [physics.class-ph]. Université Paris Saclay (COmUE), 2018. Français. NNT : 2018SACLY016 . tel-01981751

HAL Id: tel-01981751
https://pastel.hal.science/tel-01981751

Submitted on 15 Jan 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

université PARIS-SACLAY

ENSTA ParisTech université PARIS-SACLAY

NNT : 2018SACL016

Modélisation de la rupture d'un milieu fragile soumis à l'injection d'un fluide visqueux : Analyse de la singularité en pression et du décollement en pointe de fissure

Thèse de doctorat de l'Université Paris-Saclay
préparée à l'École nationale supérieure de techniques avancées ENSTA-Paristech

Ecole doctorale n°579 Sciences mécaniques et énergétiques, matériaux et géosciences (SMEMAG)
Spécialité de doctorat : Mécanique des solides

Thèse présentée et soutenue à Palaiseau, le 12 novembre 2018, par

M. ROGERS BILL CORDOVA HINOJOSA

Composition du Jury :

Jean-Jacques Marigo Professeur, École polytechnique	Président
Benoit Taisne Associate Professor, NTU Singapour	Examinateur
Agnes Maurel Directrice de recherche, ESPCI Paris	Rapporteur
Corrado Maurini Professeur, UPMC Paris VI	Rapporteur
Habibou Maitournam Professeur, IMSIA	Directeur de thèse
Kim Pham Maitre de conférences, ENSTA-ParisTech	Co-directeur de thèse
Corinne Rouby Maitre de conférences, ENSTA-ParisTech	Invitée

Thèse de doctorat

Numéro d'ordre : NNT : 2018SACL016

UNIVERSITE PARIS SACLAY
ENSTA PARISTECH

École doctorale **ED n°579 : sciences mécaniques et énergétiques, matériaux et géosciences (SMEMAG)**

Unité de recherche **IMSIA - Institut des Sciences de la Mécanique et Applications Industrielles**

Thèse présentée par **Rogers Bill Cordova Hinojosa**

Soutenue le **12 novembre 2018**

En vue de l'obtention du grade de docteur de l'UNIVERSITE PARIS SACLAY et de l'ENSTA PARISTECH

Discipline **Mécanique**

Spécialité **Mécanique des solides**

Titre de la thèse

Modélisation de la rupture d'un milieu fragile soumis à l'injection d'un fluide visqueux

Analyse de la singularité en pression et du décollement en pointe de fissure

Thèse dirigée par

Habibou Maitournam	directeur
Kim Pham	co-directeur
Corinne Rouby	co-encadrant

Composition du jury

Rapporteurs	Agnes MAUREL	ESPCI Paris	
	Corrado MAURINI	UPMC Paris VI	
Examinateurs	Jean-Jacques MARIGO	École polytechnique	président du jury
	Benoit TAISNE	NTU Singapour	
Directeurs de thèse	Habibou Maitournam	IMSIA	
	Kim Pham	ENSTA	
	Corinne Rouby	ENSTA	

UNIVERSITE PARIS SACLAY
ENSTA PARISTECH

École doctorale **ED n°579 : sciences mécaniques et énergétiques, matériaux et géosciences (SMEMAG)**

Unité de recherche **IMSIA - Institut des Sciences de la Mécanique et Applications Industrielles**

Thèse présentée par **Rogers Bill Cordova Hinojosa**

Soutenue le **12 novembre 2018**

En vue de l'obtention du grade de docteur de l'UNIVERSITE PARIS SACLAY et de l'ENSTA PARISTECH

Discipline **Mécanique**

Spécialité **Mécanique des solides**

Titre de la thèse

Modélisation de la rupture d'un milieu fragile soumis à l'injection d'un fluide visqueux

Analyse de la singularité en pression et du décollement en pointe de fissure

Thèse dirigée par

Habibou Maitournam	directeur
Kim Pham	co-directeur
Corinne Rouby	co-encadrant

Composition du jury

Rapporteurs	Agnes MAUREL	ESPCI Paris	
	Corrado MAURINI	UPMC Paris VI	
Examinateurs	Jean-Jacques MARIGO	École polytechnique	président du jury
	Benoit TAISNE	NTU Singapour	
Directeurs de thèse	Habibou Maitournam	IMSIA	
	Kim Pham	ENSTA	
	Corinne Rouby	ENSTA	

UNIVERSITE PARIS SACLAY
ENSTA PARISTECH

Doctoral School **ED n°579 : sciences mécaniques et énergétiques, matériaux et géosciences (SMEMAG)**

University Department **IMSIA - Institut des Sciences de la Mécanique et Applications Industrielles**

Thesis defended by **Rogers Bill Cordova Hinojosa**

Defended on **12th November, 2018**

In order to become Doctor from UNIVERSITE PARIS SACLAY and from ENSTA PARISTECH

Academic Field **Mechanics**

Speciality **Solid mechanics**

Thesis Title

Modeling of cracks in a brittle medium under a viscous fluid load

Analysis of the pressure singularity and fluid lag near the crack tip

Thesis supervised by	Habibou Maitournam	Supervisor
	Kim Pham	Co-Supervisor
	Corinne Rouby	Co-Monitor

Committee members

Referees	Agnes MAUREL	ESPCI Paris	
	Corrado MAURINI	UPMC Paris VI	
Examiners	Jean-Jacques MARIGO	École polytechnique	Committee President
	Benoit TAISNE	NTU Singapour	
Supervisors	Habibou Maitournam	IMSIA	
	Kim Pham	ENSTA	
	Corinne Rouby	ENSTA	

Mots clés : rupture fragile, équation de reynolds, developpement asymptotique,problème à frontière libre

Keywords: brittle fracture, reynolds equation, asymptotic expansion, free-boundary problem

Cette thèse a été préparée au

IMSIA - Institut des Sciences de la Mécanique et Applications Industrielles



1, avenue du général de Gaulle
92140 Clamart
France

☎ +33 (0)1 69 31 99 92
🖷 +33 (0)1 69 31 99 92
✉ habibou.maitournam@ensta-paristech.fr
Site http://www.imsia.cnrs.fr/

Je dédie ce travail à mes parents

Modélisation de la rupture d'un milieu fragile soumis à l'injection d'un fluide visqueux

Analyse de la singularité en pression et du décollement en pointe de fissure

Résumé

La propagation d'une fissure chargée par un écoulement de fluide visqueux est un phénomène complexe où la compréhension des phénomènes mécaniques mis en jeu en pointe de fissures reste encore partielle. C'est le cas de la zone de décollement entre le solide et le fluide qui apparaît pour un certain choix de débit d'injection, de viscosité du fluide et de ténacité du matériau. Cette thèse propose une modélisation simplifiée de ce problème d'interaction fortement couplé.

Dans un premier chapitre, on étudie un modèle simplifié unidimensionnel de film élastique collé sur un substrat rigide et on considère une injection de fluide visqueux entre le film et le substrat. On suppose que la propagation de la fissure est régie par la loi de Griffith. On néglige l'existence du retard possible entre le fluide et le solide et on choisit une loi de comportement non-linéaire pour le fluide visqueux. À partir d'une analyse asymptotique pour une faible viscosité, on établit une solution approchée du problème. On montre que le champ pression est singulier en pointe de fissure et on montre l'influence du débit d'injection sur la cinétique du trajet de fissuration. Dans le deuxième chapitre on propose de prendre en compte l'existence de la zone de décollement en modifiant la formulation du modèle et en le réécrivant sous la forme d'un problème d'optimisation en temps discret où les zones de décollement font partie des inconnues du problème. On valide la formulation proposée sur l'exemple analytique de l'écrasement d'une goutte par une barre rigide. On montre ensuite que cette formulation et l'algorithme lié à son implémentation sont capables de gérer l'évolution de l'écrasement de plusieurs gouttes de forme quelconque en capturant correctement les phase d'étalement des gouttes ainsi que de leur coalescence. On étend ensuite cette formulation au cas de l'écrasement d'une goutte par un film élastique. Dans le dernier chapitre, on examine la validité de l'hypothèse de lubrification utilisée en fracturation hydraulique. Á l'aide de la méthode de développement asymptotique, on construit une équation de Reynolds régularisée avec des termes de gradient supérieur tenant compte de la variation spatiale de la hauteur des parois. On compare alors le comportement des champs de pression donnés par les équations de Reynolds classique et régularisée sur des exemples d'écoulement entre des conduits de formes multiples.

Mots clés : rupture fragile, équation de reynolds, developpement asymptotique,problème à frontière libre

IMSIA - Institut des Sciences de la Mécanique et Applications Industrielles
1, avenue du général de Gaulle – 92140 Clamart – France

Modeling of cracks in a brittle medium under a viscous fluid load
Analysis of the pressure singularity and fluid lag near the crack tip

Abstract

The crack evolution under a viscous fluid action is a complex phenomenon where the understanding of the mechanical phenomena near the crack tip is still largely limited. This is the case for the lag between the solid and the fluid front propagation which appears for some configurations of injection rate, fluid viscosity and material toughness. This thesis proposes a simplified model for this strongly coupled interaction problem. The first chapter studies a simplified one-dimensional model of a elastic film bonded to a rigid substrate. We consider a viscous fluid injection between the film and the substrate. The crack propagation is assumed to follow the Griffith's law. The existence of the lag is neglected and a non-linear behavior law is chosen for the viscous fluid. Using an asymptotic analysis, an approximate solution is established for the low viscosity case. It is shown that the pressure field diverges at the crack tip and that the kinetics of the crack is influenced by the injection rate. The second chapter proposes to take into account the existence of the lag by modifying the model formulation and rewriting it as a discrete time optimisation problem where the delamination zones are part of the unknowns of the problem. This formulation is validated for the analytical example of a drop crushed by a rigid bar. It is shown that this formulation and its implementation can manage the evolution of several drops of any shape and correctly captures the drops spreading and coalescence. This formulation is then extended to the case of a drop crushed by an elastic film. In the last chapter, the validity of the lubrication hypothesis is examinated. Using an asymptotic analysis, a regularized Reynolds equation is constructed with higher gradient terms taking into account the spatial variation of the walls height. A comparison between the pressure fields behaviour given by the classical and the regularized Reynolds equation is shown for different conducts.

Keywords: brittle fracture, reynolds equation, asymptotic expansion, free-boundary problem

Sommaire

Résumé **xiii**

Sommaire **xv**

Introduction générale **1**

1 Étude bibliographique **5**
1.1 Contexte 5
1.2 Modèles de fissuration hydraulique 7
1.3 Solutions asymptotiques au problème de fracturation hydraulique 8
1.4 Approche numérique de la mécanique de la rupture 9
1.5 L'approche de lubrification de l'écoulement à l'intérieur de la fissure 12
1.6 Motivation 13

2 Décollement d'un film **15**
2.1 Formulation du problème 16
2.2 Problème adimensionné 24
2.3 Solution asymptotique 27
2.4 Résultats 34

3 Résolution de l'équation de Reynolds **43**
3.1 Étude du problème à frontière libre 44
3.2 Reformulation du problème d'évolution à frontière libre comme un problème d'optimisation 47
3.3 Extension de la reformulation duale du problème 57
3.4 Application de la méthode d'optimisation au problème de remplissage d'une fissure 71

4 Régularisation de l'équation de Reynolds **79**
4.1 Géométrie du conduit et formulation du problème 80

4.2 Adimensionnement des équations 81
4.3 Développement asymptotique 84
4.4 Équation de Reynolds régularisée 91
4.5 Solution itérative 92
4.6 Exemples d'application 92

Conclusion générale **105**

Bibliographie **109**

A Taux de restitution d'énergie élastique **113**
A.1 Taux de restitution d'énergie élastique 113
A.2 Développement asymptotique du taux de restitution d'énergie élastique 115

Introduction générale

L'évolution d'une fissure existant dans un milieu fragile, est un processus largement étudié par la mécanique de la rupture. Traditionnellement, cette évolution est conséquence d'un chargement considéré statique (ou quasi-statique) et connu à l'avance. Cependant, ils existent plusieurs processus impliquant chargements dépendants du temps en magnitude et en aire d'application. C'est le cas d'une fissure partielle ou complètement remplie de fluide où le chargement conduisant l'évolution de la fissure est résultat de la transmission par contact, de la pression interne du fluide. Ceci est un problème d'interaction fluide-structure dont la compréhension est encore limitée, néanmoins, un large nombre d'applications comme la fracturation hydraulique ou la prédiction du trajet du magma dans la croûte terrestre, requièrent de la compréhension de ce processus.

Dans ce contexte, la compréhension des phénomènes mécaniques mis en jeu en pointe de fissure reste encore limitée. La région près de la pointe de fissure est très complexe car la pointe de fissure est généralement liée à une singularité des efforts intérieures du milieu (résultat courant dans la mécanique de la rupture) ou du champ pression du fluide quand celui-ci remplis complètement l'intérieur fissure. Cette singularité peut être interprété, du point de vue physique, comme une limitation du modèle proposé pour modéliser ce phénomène. Alors, notre étude a pour objectif établir un modèle simple d'évolution de la fissure couplant l'évolution de l'écoulement d'un fluide visqueux au sein d'un milieu fragile, qui en plus, soit pertinent pour étudier l'origine et la nature de la singularité en pointe de fissure.

L'un des premiers études liés à l'établissement d'un modèle de ce phénomène, a été faite par Khristianovic et Zheltov [29] aux années 1960, qui présentent un modèle à géométrie bidimensionnelle simplifié. Ce modèle est développé

autour de la solution de l'équation de Reynolds, laquelle modélise l'évolution des écoulements de fluide sous l'hypothèse de lubrification. Mais ce modèle reste limité à des chargements de contact, uniformes ou équivalentes et au complet remplissage de l'intérieur de la fissure.

Aux années 1969 Geertsma et de Klerk [21] proposent le modèle nommé KGD et en 1961 Perkins et Kern [37] proposent une autre modèle, modifié par Nordgren [35] aux années 1972 pour conformer le modèle PKN. Ces modèles restent limités à des géométries prédéfinies de la fissure, cependant, ils conforment la pierre angulaire sur laquelle reposent les modèles numériques implémentés actuellement dans l'industrie de la fracturation hydraulique.

La plupart des contributions récentes à la compréhension de ce phénomène viennent des travaux de E. Detournay qui en 2016 présente un résumé de plus de vingt ans de recherche dans le sujet [10]. Detournay nous présente un modèle décrivant l'évolution d'une fissure hydraulique avec des solutions asymptotiques explicites, correspondant à situations limite en viscosité du fluide ou ténacité du milieu fragile. Solutions que conforment le point de référence pour les approches de modélisation actuelles.

Finalement, aux années plus récents, beaucoup des travaux sont inspirés par l'approche variationnelle de la fatigue et la fracturation proposé par J.J. Marigo et G. Francfort [16]. On peut mentionner ici les travaux de K. Yoshioka [47], D. Santillan [39] et C. Chuckwudozie [9]. Ces travaux proposent de décrire la fissure en utilisant un champ continu (nommé champ de phase) définie sur tout le domaine et concentrent leur analyse sur le comportement et l'évolution ce champ de phase dans le milieu fragile. Ces travaux sont tous des approches numériques et sont alors limités par son implémentation. En plus, ces travaux portent sur le comportement global de la fissure et donc la description de la région près de la pointe de fissure est limitée.

Dans la plupart des modèles mentionnées précédemment, l'existence de la singularité est toujours présente dans les situations où la fissure est complètement remplit de fluide. Aussi, la compréhension de la dépendance temporelle de l'écartement entre les fronts de propagation de la fissure et du fluide est encore limitée car les travaux mentionnés considèrent généralement que cet écartement est négligeable. Ainsi, on propose dans cette thèse d'étudier ce problème.

Dans un premier chapitre, on étudie un modèle simplifié unidimensionnel constitué par un film élastique collé sur un substrat rigide et on considère une injection de fluide visqueux entre le film et le substrat. On suppose que la propagation de la fissure est régie par la loi de Griffith. On néglige l'existence du retard entre le fluide et le solide et on choisit une loi de comportement non-linéaire pour décrire le fluide visqueux. À partir d'une analyse asymptotique pour une faible viscosité, on établit une solution approchée du problème. On montre que le champ pression est singulier en pointe de fissure et on montre l'influence du débit d'injection sur la cinétique du trajet de fissuration.

Dans le deuxième chapitre on propose de prendre en compte l'existence de la zone de décollement en modifiant la formulation du modèle et en le réécrivant sous la forme d'un problème d'optimisation en temps discret où les zones de décollement font partie des inconnues du problème. On valide la formulation proposée sur l'exemple analytique de l'écrasement d'une goutte par une barre rigide. On montre ensuite que cette formulation et l'algorithme lié à son implémentation, sont capables de gérer l'évolution de l'écrasement de plusieurs gouttes de forme quelconque en capturant correctement les phase d'étalement des gouttes ainsi que de leur coalescence. On étend ensuite cette formulation au cas de l'écrasement d'une goutte par un film élastique.

Dans le dernier chapitre, on examine la validité de l'hypothèse de lubrification utilisée en fracturation hydraulique. À l'aide de la méthode de développement asymptotique, on construit une équation de Reynolds régularisée avec des termes de gradient supérieur tenant compte de la variation spatiale du conduit où se développe l'écoulement. On compare alors le comportement des champs de pression donnés par les équations de Reynolds classique et régularisée sur des exemples d'écoulement entre des conduits de formes multiples.

Chapitre 1

Étude bibliographique

1.1 Contexte

Cette thèse porte sur la modélisation de la rupture d'un milieu fragile soumis à l'injection d'un fluide visqueux. Pour visualiser ce processus, considérons un milieu continu infini, élastique, fragile, et imperméable avec une unique fissure à l'intérieur. Une fissure est, dans ce contexte, définie comme un espace vide à l'intérieur du milieu, dont la géométrie est très similaire à celle d'une feuille, c'est à dire, si l'on suppose que le milieu est décrit par un domaine tridimensionnel, alors la fissure sera caractérisée par une surface bidimensionnelle (plan moyenne de la fissure) et son ouverture. Considérons aussi, un fluide que sera injecté à débit donné et directement dans la fissure de façon ponctuel. L'écoulement développé à l'intérieur de la fissure suite à l'injection du fluide, conduit à l'évolution de l'espace occupé par le fluide dans la fissure. La fissure est alors, partiellement ou totalement remplie de fluide à tout instant du temps, l'écartement entre le front de la fissure (courbe décrivant le borde de la surface) et le front du fluide (courbe décrivant la limite du domaine remplit de fluide) sera nommé dorénavant « lag ». En considérant le milieu comme imperméable, la pression liée à l'écoulement du fluide est transmise au milieu élastique par contact. Alors, l'évolution de l'écoulement produit une redistribution des efforts dans le milieu, ayant par conséquence l'évolution de la fissure au cours du temps. On peut visualiser cette fissure dans la figure 1.1. Un modèle rendant compte du

processus décrit, doit considérer le couplage entre les trois mécanismes suivants : la réponse élastique du milieu, l'évolution de l'écoulement à l'intérieur de la fissure et la propagation de la fissure.

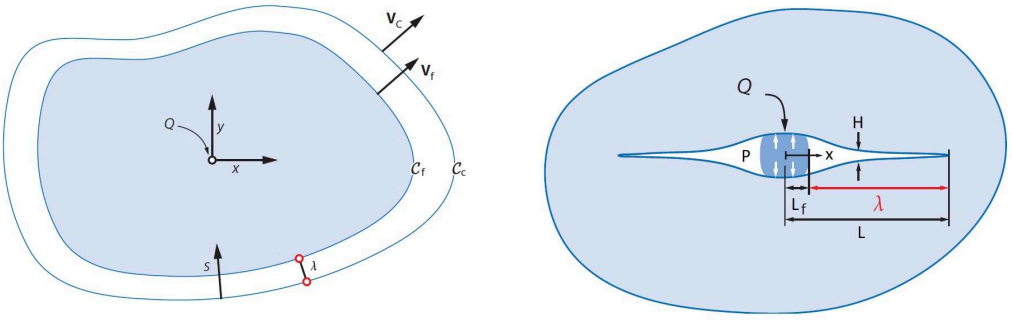


FIGURE 1.1 – Schema d'une fissure plane dans un milieu fragile partiellement rempli de fluide. On réprésente le front de propagation de fluide $\mathcal{C}_f$ et de propagation de fissure $\mathcal{C}_c$ se propageant à vitesse V_f et V_c respectivement. La taille du « lag » est réprésenté par λ, le débit d'injection de fluide par Q, la pression de fluide par P, la hauteur de la fissure par H et la démilonguer de la fissure par L. (Figure issue de [10]).

Dans l'industrie, la rupture d'un milieu fragile soumis à l'injection d'un fluide est généralement étudiée dans le cadre de la récupération des ressources pétrolières [13], la stimulation des réservoirs d'hydrocarbures [1], la création des réservoirs d'énergie géothermique ou l'élimination des déchets liquides [34]. Néanmoins, les mécanismes physiques qui interagissent dans ce processus peuvent se trouver dans différents phénomènes naturel comme par exemple la formation des structures géologiques d'origine magmatiques, comme les dykes ou les sills [32, 31, 32] qui sont formées lors de l'ascension du magma vers la surface terrestre.

L'observation expérimentale des processus mentionnés est généralement très compliquée voire impossible à l'échelle réel, ceci à cause des ordres de grandeur des magnitudes impliquées. La simulation numérique de ce processus se pose comme une alternative à ce problème. La représentativité de cette simulation numérique est fortement liée à la qualité du modèle mathématique utilisé pour décrire le phénomène en étude, ainsi une formulation soignée, capable de traiter le couplage entre les trois différents mécanismes physiques régissant ce phé-

nomène, est nécessaire. La formulation d'un modèle mathématique consiste à l'écriture d'un ensemble d'équations décrivant l'évolution de la géométrie de la fissure en fonction du débit de fluide injecté au cours de temps. Regardons alors, les différents modèles existants dans la littérature.

1.2 Modèles de fissuration hydraulique

La modélisation de la propagation des fissures soumises à l'injection du fluide est un problème compliqué à traiter. La formulation mathématique de ce problème consiste généralement en un ensemble d'équations intégrales et différentielles contenant des frontières mobiles où les équations dégénèrent de sorte que les solutions deviennent singulières. La complexité de ce problème a limité les premiers modèles à considérer des fissures à géométrie simplifiée. Les géométries le plus utilisés sont (voir Figure1.2) :

— Le modèle en déformation plane ou modèle KGD, développé par Khristianovic et Zheltov [29] et Geertsma et de Klerk [21], qui considère que l'évolution de la fissure se développe en état plan de déformations, pour une fissure de hauteur infinie.
— Le modèle PKN, introduit par Perkins et Kern [37] et Nordgren [35], dans lequel on suppose une fissure de section transversal elliptique et de hauteur constante. On considère aussi un état plan de déformations pour tout section transversale verticale.
— Le modèle radial ou en forme de penny, lequel suppose que la fissure se propage de façon axi-symétrique par rapport au point d'injection du fluide [8, 10, 19, 23].

On peut visualiser une représentation des géométries mentionnées sur la figure 1.2.

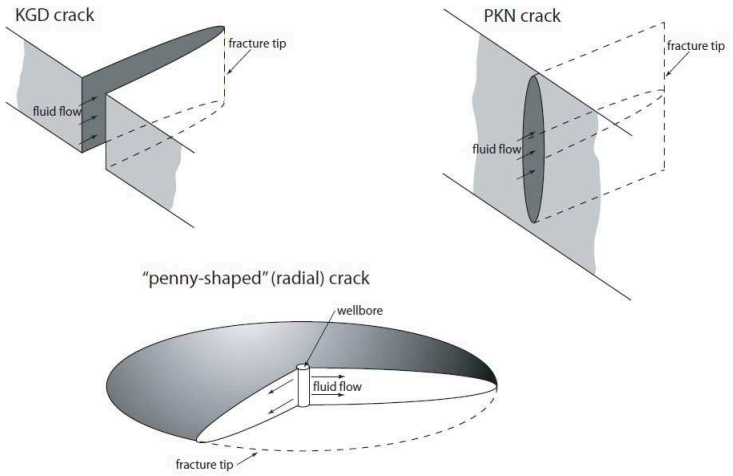


FIGURE 1.2 – Différents géométries simplifiées de la fissure (Figure prise de [1]).

1.3 Solutions asymptotiques au problème de fracturation hydraulique

Depuis la formulation des premiers modèles, il était nécessaire de trouver une façon de valider les résultats trouvés par ces modèles. Étant donnée la complexité des équations et l'impossibilité d'obtenir des solutions explicites, les solutions asymptotiques sont proposées comme des alternatives à ce problème [2, 10, 17, 40]. Durant les 20 dernières années de recherche sur le sujet, on a trouvé que la solution est grandement dépendant du comportement de la solution autour du front de fissure [18]. Alors, Garagash et Detournay [20] proposent de trouver des solutions au système d'équations du modèle en fonction d'une coordonnée mobile S (défini par $S = V_c T - X$) dont le point d'origine est le front de propagation de fissure. Cette coordonnée mobile permet à Garagash et Detournay de montrer que la solution au système d'équations est équivalente à la solution stationnaire d'un problème de propagation d'une fissure semi-infinie se propageant à vitesse constante V_c (à priori connu à l'avance) sous l'injection d'un fluide Newtonien qui remplit complètement la fissure. Ce nouveau problème permet d'obtenir des solutions, appelées « asymptotiques », construites pour des cas limites des paramètres principaux du problème, c'est à dire en prenant une

valeur de la viscosité du fluide ou de la ténacité du milieu très grande ou très petite.

Alors, en définissant une longueur de référence L^* et une hauteur de référence H^* qui sont fonction des paramètres du problème, on montre que près du point de fissuration ($S/L^* \leq 10^{-3}$) la hauteur de la fissure évolue comme $H/H^* \approx S^{1/2}$ [17] tandis que loin du front de fissuration ($S/L^* \geq 10^{-1}$) la hauteur de la fissure évolue comme $H/H^* \approx S^{2/3}$ [11, 31, 44]. La solution $H/H^* \approx S^{1/2}$ est obtenue dans le régime « à grande ténacité », qui est le cas d'une fissure où les effets de la ténacité du milieu sont largement supérieures aux effets de la viscosité du fluide. De façon analogue, la solution $H/H^* \approx S^{2/3}$ est obtenue dans le régime « à grande viscosité » (ou zéro ténacité) qui correspond au cas d'une fissure où les effets de la ténacité sont négligeables par rapport aux effets de la viscosité du fluide. D'ailleurs, une autre asymptote ($H/H^* \sim S^{5/8}$) a été trouvé par Lenoach [30] pour le cas d'une fissure dans un milieu perméable, que correspond à la région intermédiaire entre les solutions asymptotiques précédents et dépend de la vitesse de fuite de fluide.

En 2008, Bunger et Detorunay proposent une prèmierée approche de la validation expérimentale de ces solutions asymptotiques. Bunger et Detournay [8] analysent la propagation d'une fissure en forme de disque dans un milieu imperméable (consititué de polymethyl methacrylate et verre). Ces résultats sont comparés avec les solutions asymptotiques et on peut les observer sur la figure 1.3. Cette figure montre les mesures de l'épaisseur adimensionnée de la fissure H/H^* en fonction de la distance adimensionnée au front de propagation de fissure S/L^*.

1.4 Approche numérique de la mécanique de la rupture

Contrairement aux approches présentées dans la section précédente que dans l'objectif de trouver des solutions explicites au problème se trouvent limités aux géométries préfixés, l'approche numérique propose implémenter la large gamme d'avances existantes dans le domaine de la modélisation de propagation des

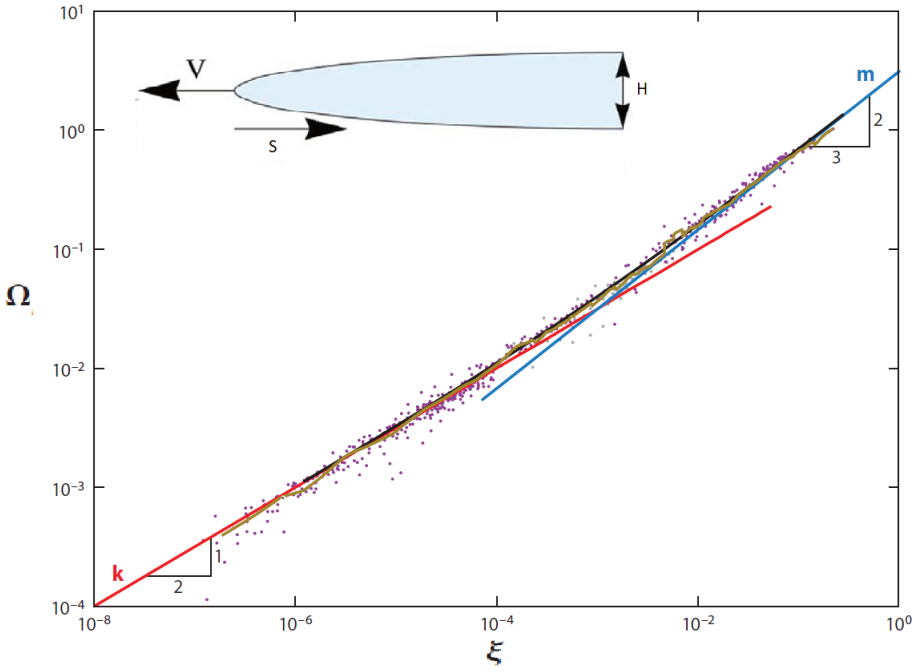


FIGURE 1.3 – Comparaison entre las solutions asymptotiques (courbes bleu et rouge) et les messures expérimentales en laboratoire (points) pour l'évolution d'une fissure en forme de penny. Ici, $\xi = S/L^*$ et $\Omega = H/H^*$ (figure adapté de [10]).

fissures de la mécanique de la rupture. Dans ce contexte on peut proposer une classification des approches numériques de la propagation d'une fissure, d'une part on a les modèles qui déterminent la géométrie de la fissure indépendamment du maillage ou discrétisation du domaine solide et d'autre parte on a les modèles qui déterminent géométrie de la fissure en fonction des éléments du maillage. Traditionnellement les approches numériques abordent le problème couplé solide-fluide en utilisant des éléments finis ou éléments de frontière pour la réponse élastique du milieu et des volumes finis ou différences finies pour l'écoulement du fluide.

Un aspect délicat des approches numériques mentionnés est la stabilité du schéma proposé. Étant donné la fort non-linéarité de l'équation modélisant l'écoulement de fluide, un choix approprié du pas de discrétisation temporelle et de la taille des éléments du maillage, est critique pour obtenir une bonne

représentativité de l'évolution de la forme de la fissure.

Les approches numériques de la modélisation de l'évolution d'une fissure soumis à l'injection d'un fluide, sont généralement basés sur les développements des techniques numériques existantes dans la mécanique de la rupture traditionnelle, alors dans ce contexte on peut classifier les différentes approches numériques selon la façon dont chaque approche représente la géométrie de la fissure. Sur la figure 1.4 on présente les approches les plus remarquables.

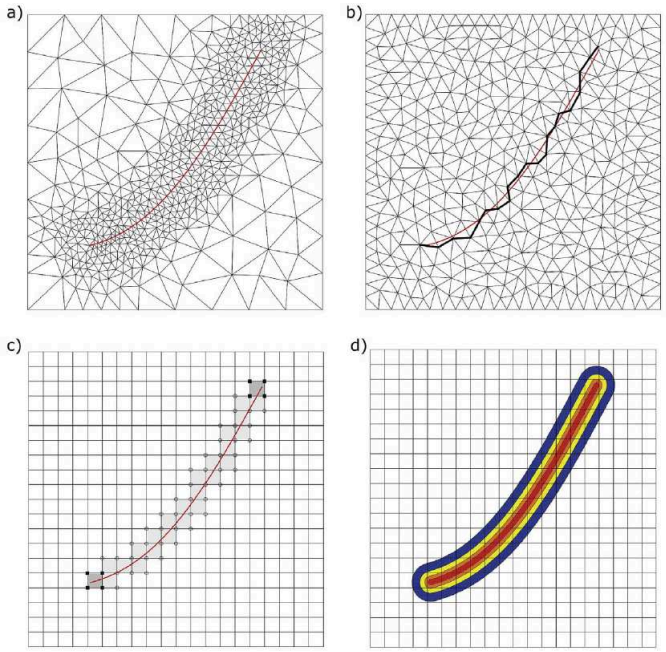


FIGURE 1.4 – Différentes approches de la modélisation d'une fissure dans un milieu fragile (la fissure réél est montré en rouge). a) Maillage adaptative, b) éléments de zone cohésif, c) éléments enrichies d) approche de champ de phase (figure issue de [2]).

D'abord on a les modèles que traitent l'évolution de la géométrie de la fissure à travers du raffinement adaptative du maillage de sorte que le maillage s'ajuste toujours à la forme fissure [43, 41]. On a aussi les modèles d'éléments de zone cohésif [3] qui représentent la géométrie de la fissure à travers des bords des éléments et qui peuvent être vues comme des modèles traitant l'évolution de la géométrie de la fissure comme évolution à chemin prédéfinie, donné à priori

par les bordes des éléments du maillage [42, 27, 22]. Une autre groupe contient les modèles que utilisent des élément enrichies pour modéliser la discontinuité en déplacements représentant la fissure, dans ce groupe on peut mentionner les modèles basés sur XFEM [5, 6, 33]. Finalement on a les modèles traitant l'évolution de la fissure avec l'approche du champ de phase [9, 39, 47] appelés aussi modèle d'endommagement [38] , qui propose que l'on peut modéliser la fissure à travers d'un champ continue définie sur tout le domaine que vaut 1 sur la région fissurée à l'intérieur du milieu et 0 sur la région du domaine qui est complètement saine. Le champ de phase connecte le reste du domaine par transition continue. L'approche consiste alors à une régularisation de la formulation variationnelle de la fracturation fragile [16, 7].

1.5 L'approche de lubrification de l'écoulement à l'intérieur de la fissure

Comme mentionné dans les paragraphes précédents, la forme et l'évolution de la longueur de fissure sont des sujets largement abordés par la littérature concernant la fracturation hydraulique. Néanmoins, un point moins traité, concerne l'écoulement développé à l'intérieur de fissure. L'approche traditionnelle consiste à supposer valable « l'hypothèse de lubrification », laquelle en profitant de la géométrie de la fissure (forme de feuille), propose que l'on peut décrire cette écoulement à l'aide de l'équation de Reynolds. L'équation de Reynolds est un cas limite équations de Navier-Stokes qui sont la façon la plus générale de modéliser l'écoulement d'un fluide. Intuitivement, si l'on suppose que les surfaces correspondantes aux parois de la fissure sont assez uniformes et proches entre elles, alors l'écoulement peut être considéré comme laminaire et unidirectionnel, et donc le champ vitesse peut être calculé explicitement en fonction du gradient de pression. En ajoutant ce résultat à un bilan de masse local (écrit pour un élément de contrôle par exemple), on obtient l'équation de Reynolds.

Les conditions nécessaires pour l'applicabilité de l'équation de Reynolds sont bien présentées par Hamrock [26] ou Guyon [25]. D'après Hamrock, en plus des

considérations mentionnées dans le paragraphe précédent, considérer valable l'équation de Reynolds implique de négliger les effets des forces inertielles et volumiques (notamment l'effet de la pesanteur du fluide) et supposer une viscosité et une densité constantes.

Même si les hypothèses mentionnées semblent justes pour le phénomène en étude, les supposer valables dans tout le domaine de la fissure est une hypothèse assez délicate. Une conséquence directe de cet effet est dégénérescence des équations en point de fissure. Cette dégénérescence se traduit dans l'existence d'une singularité du champ de pression du fluide en pointe de fissure, quand le fluide remplit toute la fissure. Ce résultat a été retrouvé par différents approches dans la littérature ([10], [17],[31]) mais, du point de vue physique la pression doit rester finie en tout point (condition retenue par Khristianovic dans [29] par exemple).

Une alternative à ce problème est de supposer l'existence d'un retardement entre la propagation du front de fissuration et du front du fluide, de sort que le fluide n'est pas forcé à remplir la fissure entière, et donc la pression près du front de propagation de fissure devient nulle. Cette alternative sera étudiée dans le chapitre 3. Néanmoins, comme on peut constater dans la littérature, la plupart des modèles, décrivant la fracturation hydraulique, sont développés sous la supposition de que ce retardement est négligeable. Ainsi, une analyse plus détaillée de l'écoulement près du point de fissuration est nécessaire si l'on veut expliquer le comportement de la pression autour du point de fissuration, notamment pour le cas des fissures dont sa géométrie évolue en temps.

1.6 Motivation

Depuis les différents modèles mentionnés, on observe que le problème de la propagation d'une fissure soumis à une injection du fluide, est non-linéaire et difficile à traiter, même pour des géométries assez simples. Une partie de la difficulté vient du nature couplé des équations liées à la modélisation de la réponse élastique du fluide et de l'écoulement à l'intérieur de la fissure, puisque le problème contient des frontières libres évoluant au cours du temps.

Malgré la complexité du problème, le développement de nouveaux modèles

et la compréhension du phénomènes ont beaucoup progressé depuis le premier modèle proposé par Kristianovic et Zheltov, grace aux travaux de E. Detorunay [10], on a une idée assez claire du comportement global de ce type de fissures, des régimes d'évolution existants et de la nature multi-échelle impliqué dans ce phénomène. Cependant, la plupart des modèles proposés partagent un résultat en commun que l'on considère loin d'être bien compris. Lorsque le fluide remplit l'intérieur de la fissure, les équations composant le modèle dégénèrent, ce qui se traduit en une singularité du champ pression sur le front de propagation de fissure. Du point de vue de la physique, une pression infinie n'a pas de sens. Alors, dans cette thèse on propose comme objectif principal d'analyser la nature de cette singularité en pression. Pour ce faire, on propose d'étudier trois aspects que l'on considère pouvant nous aider à une meilleure compréhension de la singularité du champ pression. Dans le chapitre 2 on propose d'étudier l'influence de la non linéarité de l'équation modélisant le fluide, injecté à la fissure, à travers une loi en puissances décrivant la nature visqueuse du fluide pour géométrie simplifiée du problème. Dans le chapitre 3 on propose d'analyser la possibilité de la prise en compte du « lag » à travers de la ré-formulation de l'ensemble d'équations sous la forme d'un problème d'optimisation en temps discret où les zones de décollement font partie des résultats du processus d'optimisation. Le dernier problème que l'on propose d'étudier dans le chapitre 4 est destiné à étudier la validité de l'hypothèse de lubrification. Ceci en étudiant la déduction de l'équation de Reynolds à l'aide de la méthode de développement asymptotique et en gardant les termes d'ordre supérieur pour analyser leur influence sur la singularité du champ de pression près du point de fissuration.

Chapitre 2

Décollement d'un film soumis à l'injection d'un fluide non-newtonien

Ce chapitre est consacré à l'écriture et la résolution de l'ensemble d'équations modélisant l'évolution d'un film élastique collé à un substrat parfaitement rigide dont l'interface est complètement remplie d'un fluide visqueux. Dans l'objectif d'écrire un modèle simple admettant des solutions pouvant s'exprimer explicitement, le retardement entre fronts de propagation du fluide et de la fissure est supposé nul. La section 2.1 sera consacrée à la formulation du problème, qui sera adimensionnée à la section 2.2. Il sera ensuite analysé en utilisant la méthode des développements asymptotiques (section 2.3), et enfin les résultats seront discutés (section 2.4).

Le modèle proposé dans ce chapitre prend cependant en compte les trois aspects principaux décrits dans le chapitre précédent, à savoir la réponse élastique du film soumis à l'injection du fluide, l'écoulement développé à l'interface et l'évolution de la région décollée, qui sera désormais nommée « fissure ». Celle-ci sera supposée infinie dans une direction, selon laquelle le problème est donc supposé invariant.

La formulation de l'ensemble des équations constituant le modèle peut alors se faire avec des fonctions dépendant d'une unique variable spatiale. Dans ce contexte la réponse élastique du film sera modélisée comme un fil simplement appuyé sur les extrémités de la région décollée [46]. L'écoulement sera modélisé

en supposant valable l'approximation de lubrification. Il sera donc décrit par l'équation de Reynolds, choisie pour modéliser la nature visqueuse du fluide qui sera adaptée à une comportement en loi de puissances [25]. Enfin, la propagation de la fissure sera traitée selon l'approche énergétique de la théorie de Griffith [24].

2.1 Formulation du problème

En considérant que la fissure est complètement remplie de fluide à chaque instant du temps, on peut décrire la géométrie du film à l'aide de la fonction $H(T,X)$ représentant la hauteur du film et du fluide à l'instant T. On considère aussi que le volume du fluide augmente en raison d'une injection de fluide à débit $Q(T)$ au centre de la fissure pour tout instant $T > 0$. Le problème est représenté sur la figure 2.1.

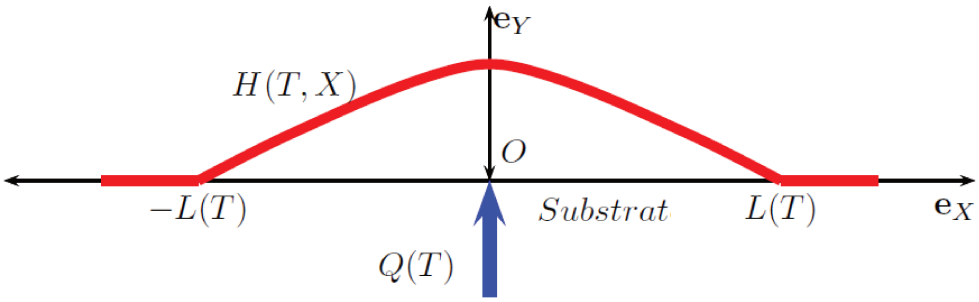


FIGURE 2.1 – Schéma représentant le problème.

Le problème consiste alors à trouver la hauteur $H(T,X,Z)$, la pression au sein de fluide $P(T,X,Z)$ et la demi-longueur de fissure $L(T)$ décrivant l'état du système à l'instant T soumis à l'action du chargement $Q(T)$, en considérant les conditions initiales $L(0) = L_r$ la longueur initiale de la fissure et $H(0,X) = H_r(X)$ la forme initiale du film contenant un volume initial de fluide $V_r = \int_{-L_r}^{L_r} H_r(X)dX$.

Dans les paragraphes suivants, on décrit la façon dont on modélise la réponse élastique du film, l'écoulement du fluide et la propagation de fissure, afin d'établir l'ensemble des équations modélisant le problème.

2.1.1 Film élastique

Le film collé au substrat est modélisé comme un fil flexible, décollé uniquement sur la région $]-L,L[$. La réponse élastique du film est alors déterminée à l'aide de l'équation d'équilibre du fil écrite sur cette région.

Si l'on suppose que l'écoulement de fluide développé à l'intérieur de la fissure transmet la pression du fluide sur le film comme une charge perpendiculaire $P(T,X)\mathbf{n}$ (avec $\mathbf{n}$ le vecteur normal au fil), alors l'équation d'équilibre du fil s'écrit [46],

$$\frac{\partial(N\mathbf{t})}{\partial S} + P\mathbf{n} = 0, \tag{2.1}$$

avec, N l'effort normal dans le fil, S la cordonnée curviligne décrivant le fil et $\mathbf{t},\mathbf{n}$ les vecteurs tangent et normal au point de cordonnée S. Dans le cas d'un fil dont son déplacement vertical est décrite par la fonction $H(T,X)$, la courbure κ du fil est déterminé par la relation

$$\frac{d\mathbf{t}}{dS} = \kappa\mathbf{n}\ ,$$

soit

$$\kappa = \frac{\frac{\partial^2 H}{\partial^2 X}}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial H}{\partial X}\right)^2}}.$$

Alors, l'équation (2.1) donne

$$N\kappa + P = 0\ ,\ \ \frac{\partial N}{\partial S} = 0\ ,$$

d'où on conclut que l'effort normal est constant et positif le long du fil. La restriction sur la positivité est liée à la stabilité de la position du fil, résultant de l'équation d'équilibre précédent [46], et il est liée alors au choix de la modélisation du film comme un fil. Dans le cas d'un effort normal nul, les modèles d'arc ou de poutre résultent plus pertinents. De plus, l'équation d'équilibre s'écrit,

$$N\frac{\frac{\partial^2 H}{\partial^2 X}}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial H}{\partial X}\right)^2}} + P = 0,\ \ \forall\ X \in]-L,L[\ .$$

Si on fait de plus l'hypothèse des petits déplacements, c'est à dire, on postule que $(\frac{\partial H}{\partial X})^2 \ll 1$, alors l'équation d'équilibre du film s'écrit

$$N\frac{\partial^2 H}{\partial X^2} + P = 0, \quad \forall \ X \in]-L, L[\,. \tag{2.2}$$

Cette équation doit être accompagnée de deux conditions aux limites. On considère d'une part que le déplacement en pointe de fissure est nul à chaque instant du temps, alors on doit satisfaire

$$H(T, L(T)) = 0, \quad \forall T > 0\,. \tag{2.3}$$

D'autre part, si l'on considère que le chargement produit par le fluide (pression P) est symétrique par rapport à l'axe OY, alors on peut écrire la condition

$$\frac{\partial H}{\partial X}(T, 0) = 0, \quad \forall T\,, \tag{2.4}$$

et donc analyser l'équation (2.2) uniquement sur la région $]0, L(T)[$ (cf figure 2.2).

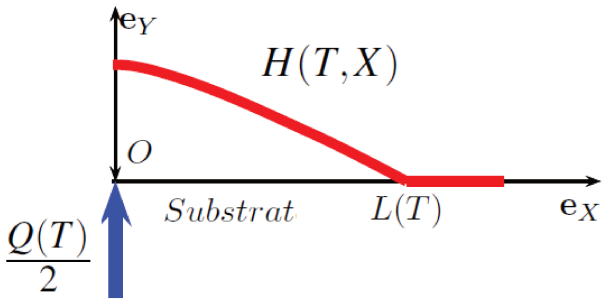


FIGURE 2.2 – Schéma représentant le problème sur la région $]0, L(T)[$.

2.1.2 Écoulement de fluide visqueux

Le fluide injecté engendre un écoulement dans la fissure qui peut être décrit de façon bidimensionnelle dans le plan OXY. En considérant valable l'hypothèse

de lubrification, les équations de Navier-Stokes modélisant l'écoulement peuvent être simplifiées et réduites à une version unidimensionnelle nommée équation de Reynolds. L'hypothèse de lubrification consiste à supposer que l'écoulement se développe dans un domaine mince, c'est-à-dire que l'une des dimensions est très petite devant l'autre. Dans la plupart des applications mentionnées au chapitre 1, on observe que la dimension liée à la hauteur de la fissure $H(T,X)$ est très petite par rapport à la longueur de la fissure $L(T)$. L'hypothèse de lubrification est alors applicable.

Le présent paragraphe est consacré à la simplification des équations de la mécanique des fluides qui en résulte. En considérant la nature visqueuse et incompressible du fluide, d'après Guyon [25], les équations de Navier-Stokes s'écrivent

$$\rho(\partial_T \mathbf{U} + (\mathbf{U}\cdot\nabla)\mathbf{U}) + \nabla P - \nabla\tau = 0\,, \tag{2.5}$$

$$\operatorname{div}(\mathbf{U}) = 0\,, \tag{2.6}$$

avec $\mathbf{U} = U\mathbf{e}_X + W\mathbf{e}_Y$ le champ vitesse et τ le tenseur des contraintes de viscosité du fluide.

On considère de plus des conditions d'adhérence sur les frontières du domaine. Ainsi, sur la paroi inférieure, que l'on considère statique, le champ de vitesse doit satisfaire,

$$\mathbf{U}(Y=0) = 0\,, \tag{2.7}$$

et sur la paroi supérieure, que l'on considère mobile, il doit satisfaire

$$\mathbf{U}(Y=H) = \frac{\partial H}{\partial T}\mathbf{e}_Y\,. \tag{2.8}$$

En rappelant que l'on considère un problème invariant dans la direction Z, l'équation d'incompressibilité (2.6) s'écrit comme

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial W}{\partial Y} = 0$$

d'où, en comparant les ordres de grandeur, on observe que $W \approx \frac{H_r}{L_r}U$, alors en considérant valable l'hypothèse de lubrification ($H_r \ll L_r$), on peut conclure

que la vitesse de l'écoulement est au premier ordre purement horizontal, soit $\mathbf{U} = U\mathbf{e}_X$. Si l'on considère de plus un écoulement stationnaire et entièrement développé, les équations de Navier-Stokes peuvent s'écrire comme

$$\frac{\partial P}{\partial X} - \frac{\partial \tau_{XY}}{\partial Y} = 0 \tag{2.9}$$

$$\frac{\partial P}{\partial Y} - \frac{\partial \tau_{YY}}{\partial Y} = 0\,. \tag{2.10}$$

Il est de plus nécessaire de se donner une loi capable de décrire le comportement visqueux du fluide. On considère que le modèle de « loi de puissance » est le plus adapté pour modéliser le comportement des fluides comme le magma [12] ou la plus part des fluides utilisées dans la fracturation hydraulique [36]. Cette loi de comportement postule que le tenseur des contraintes est liée au champ vitesse à travers du taux de glissement, qui est définie comme $\dot{\gamma} = \nabla\mathbf{U} + (\nabla\mathbf{U})^T$. En rappelant que l'on considère un écoulement horizontal, on obtient que l'unique élément non nul du tenseur de taux de glissement est $\dot{\gamma}_{XY} = \frac{\partial U}{\partial Y}$, en conséquence le tenseur des contraintes visqueuses a aussi une unique élément non nul τ_{XY}. Alors, la « loi de puissance » peut s'écrire comme

$$\tau_{XY} = M\left|\frac{\partial U}{\partial Y}\right|^{n-1}\left(\frac{\partial U}{\partial Y}\right), \tag{2.11}$$

où le paramètre M est nommé la consistance du fluide et $n \geq 0$ est l'indice d'écoulement. Ces deux paramètres du fluide servent à modéliser le comportement du fluide visqueux. Avec ce modèle et selon la valeur de n on peut décrire des fluides rhéoépaississant ($n > 1$), fluides newtoniens ($n = 1$) , rhéofluidifiant ($n \in]0, 1[$) ou fluides parfaitement plastiques ($n = 0$) (voir le chapitre 4 du Guyon [25] pour description plus précise de ces types de fluides). Alors, d'après les équations réduites de Navier-Stokes (2.10), on a

$$\frac{\partial P}{\partial Y} = \frac{\partial \tau_{YY}}{\partial Y} = 0,$$

et donc la pression P est constante en Y, ce qui permet d'obtenir le champ de vitesse U en fonction du gradient du champ de pression d'après l'équation (2.9)

en considérant les conditions d'adhérence $U(Y=0)=U(Y=H)=0$:

$$U=\frac{n}{n+1}\frac{1}{M^{1/n}}\frac{\partial P}{\partial X}\left|\frac{\partial P}{\partial X}\right|^{(1-n)/n}\left(\left|Y-\frac{H}{2}\right|^{(n+1)/n}-\left(\frac{H}{2}\right)^{(n+1)/n}\right). \tag{2.12}$$

D'autre part, en intégrant l'équation d'incompressibilité (2.6) par rapport à $Y\in[0,H]$, on obtient une relation liant l'évolution de la forme du film et le champ de vitesse du fluide qui s'écrit comme

$$\frac{\partial H}{\partial T}+\frac{\partial \Phi}{\partial X}=0,\ \ \forall\ X\in[-L,L],\ \ \forall\ T\geq 0, \tag{2.13}$$

avec $\Phi(T,X)$ le flux traversant une section transversal au point $X\in\Omega$, définie comme

$$\Phi=\int_0^H U\,dY.$$

En considérant la distribution de vitesse donnée par (2.12), le flux d'un écoulement de fluide non-newtonien modélisé par une loi de puissances sera,

$$\Phi(T,X)|\Phi(T,X)|^{n-1}=-\frac{1}{\mu'}H^{2n+1}\frac{\partial P}{\partial X}, \tag{2.14}$$

où $\mu'=2M\left(\frac{2(2n+1)}{n}\right)^n$ est la viscosité apparente du fluide.

Les équations (2.13) et (2.14), d'inconnues $H(X,T)$ et $\Phi(X,T)$ définies pour $X\in[-L(T),L(T)]$ et $T\geq 0$, forment un système dont la résolution nécessite des conditions aux extrémités et des valeurs initiales. On les munit ainsi d'une condition à l'extrémité $X=0$ où le fluide est injecté qui se traduit par

$$\Phi(T,0)=\frac{Q(T)}{2}, \tag{2.15}$$

et d'une en point de fissure $X=L(T0)$ où le flux est nul :

$$\Phi(T,L(T))=0\,. \tag{2.16}$$

La condition initiale est définie par la forme initiale du film à l'instant $T = 0$

$$H(0, X) = H_r(X)\,, \tag{2.17}$$

contenant un volume initial $V_r = \int_{-L}^{L} H_r(X)dX$.

2.1.3 Évolution de la fissuration

Pour modéliser le décollement, on suppose que l'évolution de la fissure est décrite par la théorie de Griffith sur la mécanique de la rupture [24]. Dans le contexte original de la théorie de Griffith (en absence de fluide visqueux), la croissance de la fissure dans une domaine fragile est donnée par un critère à seuil basé sur le taux de restitution d'énergie du système, que l'on notera G et son valeur critique noté G_c, lequel sera considéré comme un paramètre caractéristique du milieu qui quantifie sa capacité à résister à la propagation d'une fissure. Le critère de Griffith s'écrit alors

$$\dot{L} \geq 0, \quad G \leq G_c, \quad \dot{L}(G - G_c) = 0,$$

avec L la demi longueur de la fissure et $\dot{L}$ la vitesse d'avancée de la fissure. Le paramètre G_c est lié à la ténacité K_{Ic} par l'équation d'Irwin [28]. Le taux de restitution d'énergie est généralement obtenu en dérivant l'énergie potentielle à l'équilibre, par rapport à la longueur de la fissure. Cela n'a aucune ambiguïté pour les processus quasi-statiques, pour lesquels une dérivée par rapport à la longueur de fissure de l'énergie potentielle à chargement fixe est bien définie. Mais dans le présent problème où nous devons également considérer l'évolution du fluide visqueux, il est plus délicat de dériver un tel taux de restitution d'énergie. En effet, nous ne pouvons pas, à priori, isoler l'énergie potentielle du solide de celle du fluide car la pression exercée par le fluide sur la fissure ne peut être considérée comme un chargement externe puisqu'elle fait partie des inconnues du problème couplé.

Dans ce contexte, nous commençons par établir l'énergie potentielle de l'ensemble du système fluide-solide sur la base de laquelle l'évolution de la fissure sera formulée. Pour cela, on multiplie d'abord l'équation (2.2) par $\frac{\partial H}{\partial T}$ et

l'équation (2.13) par P. Puis, on combine ces deux équations et on les intègre sur le domaine spatial $(0, L)$ pour obtenir

$$\int_0^{L(T)} N\frac{\partial H}{\partial T}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial X^2}\right)dX - \int_0^{L(T)} P\frac{\partial \Phi}{\partial X}dX = 0.$$

En intégrant maintenant par parties chacun des intégrales et en utilisant les conditions aux limites, on obtient

$$\int_0^{L(T)} \frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{N}{2}\left(\frac{\partial H}{\partial X}\right)^2\right)dX - \int_0^{L(T)} \Phi\frac{\partial P}{\partial X}dX = \frac{Q}{2}P(T,0).$$

Si la demi-longueur de fissure est fixée, on peut intégrer cette équation par rapport au temps et écrire

$$E(T) = E_r + \int_0^T \frac{Q(\theta)}{2}P(\theta,0)d\theta, \tag{2.18}$$

où $E(T)$ est l'énergie potentielle du système couplé à l'équilibre qui est donnée par

$$E(T) = \int_0^{L(T)} \frac{N}{2}\left(\frac{\partial H}{\partial X}\right)^2 dx + \int_0^T \int_0^{L(T)} \left(\frac{1}{\mu}H^{\frac{2n+1}{n}}\right)\left|\frac{\partial P}{\partial X}\right|^{\frac{1-n}{n}}\left(\frac{\partial P}{\partial X}\right)^2 dXd\theta, \tag{2.19}$$

et E_r est l'énergie initiale du système.

Si maintenant on prend en compte la propagation de la fissure, on définit alors l'énergie totale du système comme la somme de l'énergie potentielle $E(T)$ et l'énergie dissipée par la propagation de la fissure $G_c L(T)$. En conséquence, on peut proposer un bilan d'énergie donné par :

$$E(T) + G_c L(T) = E_r + \int_0^T \frac{Q(\theta)}{2}P(\theta,0)d\theta\,. \tag{2.20}$$

Le taux de restitution d'énergie du système couplé sera alors obtenu en prenant la dérivée par rapport au temps de l'équation (2.20) que sera présenté dans la section suivante.

2.2 Problème adimensionné

Nous introduisons ici l'ensemble des variables adimensionnées en fonction des paramètres définis dans la section précédente. Le temps adimensionné t est définie par $Q_r T = V_r t$, le débit d'injection de fluide est adimensionné par $Q(T) = Q_r q(t)$ et la longueur de la fissure par $L(T) = L_r \ell(t)$. Avec Q_r, l'amplitude maximale du débit d'injection, V_r le volume de référence et L_r la longueur de référence définies au débout de la section 2.1.

Le problème considéré est un problème à « frontière libre », car la taille du domaine $\ell(t)$ est inconnue. On choisit alors de normaliser la taille du domaine décollé. La normalisation spatiale consiste à faire le changement de variable $y = X/L(T) = X/(L_r \ell(t)) \in [0,1]$. Enfin, les fonctions décrivant le système peuvent être remplacées par les fonctions adimensionnées suivantes,

$$h(t,y) = \frac{L_r}{V_r} H(T,X), \quad p(t,y) = \frac{L_r^3}{N V_r} P(T,X),$$
$$\phi(t,y) = \frac{\Phi(T,X)}{Q_r}, \quad e(t) = \frac{L_r^3}{N V_r^2} E(T).$$

Étant donné ces variables adimensionnées, la formulation mathématique du problème couplé peut être réécrite comme suit, où par souci de lisibilité, nous adoptons la notation $()' = \partial/\partial y$ pour la dérivée spatiale et $\dot{()} = \partial/\partial t$ pour la dérivée temporelle.

L'équation d'équilibre du solide (2.2) s'écrit

$$h'' + \ell^2 p = 0 \quad \forall\, y \in (0,1)\,, \tag{2.21}$$

et ses conditions aux extrémités (2.3) et (2.4)

$$h'(t,0) = h(t,1) = 0. \tag{2.22}$$

Pour l'équation du bilan de masse du fluide, en raison de la dérivée temporelle, il faut prendre en compte le terme convectif lié à la propagation de la

fissure. Par conséquence, l'équation (2.13), s'écrit

$$\ell\dot{h} - h'y\dot{\ell} + \phi' = 0 \quad \forall\, y \in (0,1)\,, \tag{2.23}$$

et ses conditions aux limites (2.15),(2.16) et initiales (2.17) peuvent être écrites comme

$$\phi(t,0) = \frac{q}{2}, \quad \phi(t,1) = 0, \quad h(0,y) = \frac{L_r}{V_r} H_r(L_r y). \tag{2.24}$$

De façon similaire l'équation (2.14) définissant le flux de fluide au point $y \in (0,1)$ peut être exprimée comme

$$\phi(t,y)|\phi(t,y)|^{n-1} = -\frac{1}{\mathcal{K}} \ell^{-1} h^{2n+1} p', \tag{2.25}$$

où l'on postule $p' < 0$ (condition qui devra être vérifiée a posteriori) et $\mathcal{K}$ est un paramètre adimensionné défini par $\mathcal{K} := \frac{\mu' L_r^{2n+5} Q_r^n}{N V_r^{2n+2}}$ qui sera nommé viscosité adimensionné et représente le rapport entre les effets visqueux et la réponse élastique du fil.

Il reste à exprimer le problème d'évolution de la fissure. Compte tenu de l'adimensionement décrit ci-dessus, nous pouvons réécrire l'énergie potentielle du système pour l'ensemble solution du problème $\{h, p, \ell\}$ comme

$$e(t) = \frac{1}{\ell(t)} \int_0^1 \frac{(h'(t,y))^2}{2} dy - \int_0^t \int_0^1 \phi(\tau,y) p'(\tau,y) dy d\tau - \int_0^t \frac{q(\tau)}{2} p(\tau,0) d\tau. \tag{2.26}$$

Le bilan d'énergie adimensionné s'écrit alors

$$e(t) + \mathcal{G}\ell(t) = e_r + \int_0^t \frac{q(\tau)}{2} p(\tau,0) d\tau\,, \tag{2.27}$$

où e_r est l'énergie initiale adimensionnée et le paramètre adimensionné $\mathcal{G} := \frac{G_c L_r^4}{N V_r^2}$ est nommé ténacité adimensionnée et représente le rapport entre l'énergie de propagation de la fissure et l'énergie élastique.

On est alors en mesure d'exprimer le taux de restitution d'énergie associé à la propagation de la fissure entraînée par le fluide. En prenant dérivant par

rapport au temps l'énergie totale (2.26), on obtient

$$\frac{\partial e}{\partial t} = \frac{-\dot{\ell}}{\ell^2}\int_0^1 \frac{h'^2}{2}dy + \frac{1}{\ell}\int_0^1 h'\dot{h}'dy - \int_0^1 \phi p'dy\frac{q}{2}p(t,0)\,.$$

En intégrant par parties le deuxième terme de droite, en utilisant l'équation d'équilibre dans le solide (2.21) ainsi que les conditions aux limites associées (2.22), il se réécrit $\ell\int_0^1 p\dot{h}dy$. En remplaçant $\dot{h}$ selon (2.23) on peut réécrire ce terme comme $\dot{\ell}\int_0^1 yph'dy - \int_0^1 p\phi'dy$, alors en utilisant les conditions (2.24) on peut exprimer la dérivée de l'énergie comme

$$\frac{\partial e}{\partial t} = \frac{-\dot{\ell}}{\ell^2}\int_0^1 \frac{h'^2}{2}dy + \dot{\ell}\int_0^1 pyh'dy\,.$$

En dérivant (2.27) par rapport au temps et en utilisant le résultat précédent, on obtient

$$\dot{\ell}(t)\left(\frac{1}{\ell^2}\int_0^1 \frac{h'^2}{2}dy - \int_0^1 yh'pdy - \mathcal{G}\right) = 0.$$

Cette équation nous donne le seuil à partir duquel la fissure se propagera. Par analogie avec l'approche originale de Griffith, nous définissons le taux de restitution d'énergie de fissuration comme

$$G = \frac{1}{\ell^2}\int_0^1 \frac{h'^2}{2}dy - \int_0^1 yh'pdy, \tag{2.28}$$

que l'on peut exprimer aussi comme (voir annexe A.1)

$$G = \int_0^1 h\left(\frac{3}{2}p + yp'\right)dy\,. \tag{2.29}$$

Finalement, le problème d'évolution de fissuration selon la théorie de Griffith peut être formulé comme

$$(G-\mathcal{G})\dot{\ell} = 0\,, \tag{2.30}$$

avec la condition d'irréversibilité

$$\dot{\ell} \geq 0\,, \tag{2.31}$$

et la condition

$$G \leq \mathcal{G}\,. \tag{2.32}$$

Enfin, le problème adimensionné est modélisé par l'ensemble d'équations (2.21) - (2.32) qui ne dépendent que des deux paramètres $\mathcal{K}$ et $\mathcal{G}$, nommées viscosité et ténacité adimensionnées.

2.3 Solution asymptotique

L'ensemble d'équations (2.21)-(2.32) est un système couplé avec des fortes non-linéarités associées au fluide et à la propagation de fissuration. Pour résoudre ce problème, nous choisissons de travailler dans un certain régime pour lequel nous serons en mesure d'exprimer des résultats analytiques, on parle ici du régime dit à « faible viscosité ». Un tel régime est souvent étudié dans la littérature sur les fractures hydrauliques, voir par exemple [10] et [8]. Il consiste à supposer que le système est tel que les effets de la ténacité plus grands que les effets de la viscosité du fluide. Pour la formulation du problème proposée ici, ceci peut être traduit par la condition $\mathcal{K} \ll \mathcal{G}$. Sur la base de ces hypothèses, nous proposons ici de fournir une analyse asymptotique en considérant $\mathcal{K} = \varepsilon \ll 1$.

L'idée de la solution par développement asymptotique est de développer les champs de solution $(t, y) \mapsto (h(t, y), p(t, y), \ell(t))$ en séries de puissances par rapport à ce petit paramètre ε ainsi que les équations d'évolution associées. On obtiendra alors de manière systématique la solution à chaque ordre dans le régime à grande ténacité.

Dans cette approche asymptotique, nous postulons les développements suivants pour la résolution du problème :

$$\begin{cases} h(t,y) = h_0(t,y) + \varepsilon h_1(t,y) + o(\varepsilon), \\ p(t,y) = p_0(t,y) + \varepsilon p_1(t,y) + o(\varepsilon), \\ \ell(t) = \ell_0(t) + \varepsilon \ell_1(t) + o(\varepsilon). \end{cases} \tag{2.33}$$

Le débit ϕ et le taux de restitution d'énergie G peuvent être aussi développés

en termes de ε

$$\phi = \phi_0 + \varepsilon\phi_1 + o(\varepsilon),\ G = G_0 + \varepsilon G_1 + o(\varepsilon)\,, \tag{2.34}$$

où ϕ_0, ϕ_1, G_0 et G_1 sont exprimés en fonction des développements de $\{h, p, \ell\}$ en utilisant (2.25) et (2.29) (voir Annexe A.2). Les équations formulées dans les sections précédentes sont analysées à l'ordre dominant puis au premier ordre dans les paragraphes suivants.

2.3.1 Solution à l'ordre dominant

En remplaçant le développement (2.33) dans l'ensemble d'équations (2.21) - (2.32) on obtient l'équation d'équilibre élastique (2.21) à l'ordre dominant

$$h_0'' + \ell_0^2 p_0 = 0 \quad \forall y \in (0,1), \tag{2.35}$$

munie des conditions aux extrémités

$$h_0(t,1) = h_0'(t,0) = 0. \tag{2.36}$$

De façon similaire le bilan de masse du fluide (2.23) à cet ordre s'écrit

$$\ell_0 \dot{h}_0 - y h_0' \dot{\ell}_0 + \phi_0' = 0 \quad \forall\, y \in (0,1), \tag{2.37}$$

et d'après la définition de la fonction flux (2.25) on obtient

$$\ell_0^{-1} p_0' h_0^{2n+1} = 0 \quad \forall\, y \in (0,1). \tag{2.38}$$

Les conditions sur le débit au point d'injection et en point de fissure s'écrivent à cet ordre

$$\phi_0(t,0) = \frac{q}{2}\,, \quad \phi_0(t,1) = 0\,, \tag{2.39}$$

et la condition initiale

$$h_0(0,y) = \frac{L_r}{V_r} H_r(L_r y). \tag{2.40}$$

Les trois principes de la formulation de Griffith (2.30)-(2.32) peuvent aussi être développés asymptotiquement et donc, à l'ordre dominant, s'écrivent

$$(G_0 - \mathcal{G})\dot{\ell}_0 = 0\,,\ G_0 \leq \mathcal{G}\,. \tag{2.41}$$

L'ensemble d'équations (2.35), (2.37), (2.38) peuvent être résolues de façon explicite en réécrivant le chargement à l'instant t, donné par la fonction débit de fluide $q(t)$, comme un chargement en volume $v(t)$ définie par

$$v(t) := 1 + \int_0^t q(\tau)d\tau \quad .$$

L'intégration de l'équation (2.37) par rapport à y, sur tout l'intervalle $(0,1)$, donne, en tenant compte des conditions aux extrémités (2.39),

$$\int_0^1 \partial_t(\ell_0 h_0)dy = \frac{q}{2}\,,$$

résultat qui peut être intégré en temps à l'aide de la condition initiale (2.40) pour obtenir la condition

$$\int_0^1 h_0 dy = \frac{V(t)}{2\ell_0}. \tag{2.42}$$

L'équation (2.35) peut être résolue grâce à l'équation (2.38) qui impose la non-dépendance en y de p_0. On peut alors obtenir h_0 en fonction de p_0 et d'après la condition (2.42) on peut obtenir la pression p_0 à l'ordre dominant de façon explicite :

$$p_0 = \frac{3V}{2\ell_0^3}\,,$$

et la hauteur de la fissure :

$$h_0(t,y) = \frac{3V}{4\ell_0}(1-y^2).$$

Finalement, on peut aussi calculer G_0 grâce à (2.29) :

$$G_0(t) = \int_0^1 h_0\left(\frac{3}{2}p_0 + yp_0'\right)dy = \frac{9V^2}{8\ell_0^4}\,,$$

et utiliser le principe de Griffith (2.30) ainsi que la condition (2.32) pour obtenir $\ell_0(t)$. On définit le volume critique de fluide $v_c := \sqrt{\frac{8\mathcal{G}}{9}}$ à partir duquel le processus de fissuration commence, et la solution des équations (2.21) - (2.32), à l'ordre dominant est :

— Si $v(t) \leq v_c$:

$$\ell_0(t) = 1\,, \tag{2.43}$$

$$p_0(t,y) = \frac{3}{2}v(t)\,, \tag{2.44}$$

$$h_0(t,y) = \frac{3v(t)}{4}(1-y^2)\,, \tag{2.45}$$

— Si $v(t) > v_c$:

$$\ell_0(t) = \sqrt[4]{\frac{9v(t)^2}{8\mathcal{G}}}\,, \tag{2.46}$$

$$p_0(t,y) = \frac{3v(t)}{2\ell_0^3}\,, \tag{2.47}$$

$$h_0(t,y) = \frac{3v(t)}{4\ell_0}(1-y^2)\,. \tag{2.48}$$

Cette solution montre que la solution à l'ordre dominant ne dépend que de $V(t)$. On n'observe notamment pas d'influence de la forme de la fonction de chargement $q(t)$ ni du paramètre de viscosité n. Cette solution ne nous montre qu'un comportement global du système. On propose d'examiner l'ordre supérieur pour avoir une meilleure description de l'évolution du système.

2.3.2 Correction au premier ordre

On utilise ici la même démarche pour obtenir l'ensemble des équations à l'ordre ε, ce qui nous donnera des termes corrigeant la solution à l'ordre dominant afin d'obtenir une description plus complète de l'évolution du système.

À cet ordre, l'équation d'équilibre du solide (2.21) s'écrit

$$h_1'' + \ell_0^2 p_1 + 2\ell_0\ell_1 p_0 = 0 \ \ \forall \ \ y \in (0,1) \quad , \tag{2.49}$$

et les conditions aux extrémités (2.23),

$$h_1(t,1) = h_1'(t,0) = 0 \quad . \tag{2.50}$$

De façon similaire, le bilan de masse (2.23) exprimé à cet ordre s'écrit

$$\ell_0 \dot{h}_1 + \ell_1 \dot{h}_0 - y h_0' \dot{\ell}_1 + y h_1' \dot{\ell}_0) + \phi_1' = 0 \ \ \forall \ \ y \in (0,1) \quad , \tag{2.51}$$

et l'équation de Reynolds (2.24) devient

$$\ell_0^{-1} p_0' h_0^{2n} h_1 + \ell_0^{-1} p_1' h_0^{2n+1} - \ell_0^{-2} \ell_1 p_0' h_0^{2n+1} = -\phi_0 |\phi_0|^{n-1} \ \ \forall \ \ y \in]0,1[\quad . \tag{2.52}$$

Ces equations montrent l'influence de la solution à l'ordre dominant. Les conditions aux extrémités et initiales s'écrivent à cet ordre

$$\phi_1(t,0) = 0 \, , \ \phi_1(t,1) = 0 \, , \ h_1(0,y) = 0 \quad . \tag{2.53}$$

Le principe de Griffith (2.30)-(2.32) exprimé à cet ordre permet de définir les conditions que $\ell_1(t)$ doit satisfaire,

$$(G_0 - G)\dot{\ell}_1 + G_1 \dot{\ell}_0 = 0 \, . \tag{2.54}$$

Pour résoudre les équations (2.49) - (2.54), on utilise la même démarche que pour la solution à l'ordre dominant. Ainsi, on résout l'équation (2.52) pour obtenir $p_1(t,x)$ en fonction de la pression au point d'injection $p_1(t,0)$:

$$p_1(t,y) = p_1(t,0) - \int_0^y \frac{1}{(1-s^2)^{n+1}} \left| \alpha(t) \frac{(2+s)(1-s)}{(1+s)} + \beta(t) s \right|^n ds \, ,$$

avec

$$\alpha(t) = \frac{4q(t)\ell_0^2(t)}{9v^2(t)} \left(\frac{4\ell_0^2(t)}{3v(t)} \right)^{1/n} \quad , \quad \beta(t) = \frac{4\ell_0(t)\dot{\ell}_0(t)}{3v(t)} \left(\frac{4\ell_0^2(t)}{3v(t)} \right)^{1/n} \quad . \tag{2.55}$$

On peut alors résoudre (2.49) et obtenir le terme correctif pour la hauteur de

la fissure,

$$h_1(t,y) = \left(\frac{\ell_0^2}{2} p_1(t,0) + \ell_0 \ell_1 p_0\right)(1-y^2) - \ell_0^2 \int_y^1 \int_0^s \int_0^x \frac{1}{(1-u^2)^{n+1}} \left|\alpha \frac{(2+u)(1-u)}{(1+u)} + \beta u\right|^n du dx ds\,. \quad (2.56)$$

On intègre l'équation (2.51) de bilan de masse au premier ordre avec les conditions aux extrémités (2.53) pour obtenir une relation de conservation de volume au premier ordre :

$$\int_0^1 h_1(t,y) dy = -\frac{v\ell_1}{2\ell_0^2}\,,$$

résultat qui nous permet finalement de déterminer finalement la pression en point de d'injection

$$p_1(t,0) = 3 \int_0^1 \int_y^1 \int_0^s \int_0^x \frac{1}{(1-u^2)^{n+1}} \left|\alpha \frac{(2+u)(1-u)}{(1+u)} + \beta u\right|^n du dx ds dy - \frac{9V\ell_1}{2\ell_0^4}\,. \quad (2.57)$$

Afin de rendre la suite plus lisible, les fonctions suivantes sont définies :

$$I(t) := \int_0^1 \frac{1}{(1-y)^n (1+y)^{n+1}} \left|\alpha \frac{(2+y)(1-y)}{(1+y)} + \beta y\right|^n dy, \quad (2.58)$$

$$J(t) := \int_0^1 \frac{y}{(1-y^2)^n} \left|\alpha \frac{(2+y)(1-y)}{(1+y)} + \beta y\right|^n dy, \quad (2.59)$$

$$R(t,y) := \int_y^1 \int_0^s \int_0^x \frac{1}{(1-u^2)^{n+1}} \left|\alpha \frac{(2+u)(1-u)}{(1+u)} + \beta u\right|^n du dx ds. \quad (2.60)$$

On montre alors que (voir annexe) que la pression en point d'injection (2.57) peut se réécrire

$$p_1(t,0) = I - 3J - \frac{9v\ell_1}{2\ell_0^4}\,,$$

et le terme correctif pour la hauteur de la fissure (2.56) se réécrit

$$h_1(t,y) = \left(\ell_0^2 (I - 3J) - \frac{3v\ell_1}{2\ell_0^2}\right)\frac{(1-y^2)}{2} - \ell_0^2 R(t,y)\,.$$

De façon similaire à la résolution à l'ordre dominant, on peut calculer G_1 et utiliser le principe de Griffith (2.54) pour obtenir $\ell_1(t)$. Ainsi

$$G_1(t,y) = \int_0^1 \left[h_0\left(\frac{3}{2}p_1 + yp_1'\right) + h_1\left(\frac{3}{2}p_0 + yp_0'\right)\right] dy = -\frac{9v^2\ell_1}{2\ell_0^5} - \frac{3v}{4\ell_0}J\,,$$

et finalement la solution des équations (2.49) - (2.54) est :

— Si $v \leq v_c$:

$$\ell_1(t) = 0 \tag{2.61}$$

$$p_1(t,y) = I(t) - 3J(t) - \int_0^y \frac{1}{(1-s^2)^{n+1}} \left| \alpha \frac{(2+s)(1-s)}{(1+s)} + \beta s \right|^n ds \tag{2.62}$$

$$h_1(t,y) = \ell_0^2 (I(t) - 3J(t)) \frac{(1-y^2)}{2} - \ell_0^2 R(t,y) \tag{2.63}$$

— Si $v > v_c$:

$$\ell_1(t) = -\frac{\ell_0^4}{6v} J(t) \tag{2.64}$$

$$p_1(t,y) = I(t) - 3J(t) - \frac{9V\ell_1}{2\ell_0^4} - \int_0^y \frac{1}{(1-s^2)^{n+1}} \left| \alpha \frac{(2+s)(1-s)}{(1+s)} + \beta s \right|^n ds \tag{2.65}$$

$$h_1(t,y) = \left(\ell_0^2 I(t) - 3\ell_0^2 J(t) - \frac{3V\ell_1}{2\ell_0^2} \right) \frac{(1-y^2)}{2} - \ell_0^2 R(t,y) \tag{2.66}$$

Ces termes de correction complètent la solution à l'ordre dominant et doivent fournir une meilleure description de l'évolution du système. Alors que la solution à l'ordre dominant dépend uniquement du volume $v(t)$ et du paramètre matériel $\mathcal{G}$, les termes correctifs au premier ordre, exprimes ci-dessus, dépendent explicitement d'autres paramètres comme le débit d'injection de fluide $q(t)$, l'indice de comportement du fluide n et la vitesse de propagation de la fissure $\dot{\ell}_0(t)$. On peut alors construire la solution corrigée du problème au premier ordre, définie par (2.33), et l'analyser pour observer l'influence de ces paramètres.

2.4 Résultats

2.4.1 Injection de fluide à débit constante

On propose d'abord un chargement constant soit $q(t) = q_0$. L'évolution de la longueur de fissure est présenté en fonction du temps pour différentes valeurs de l'indice de comportement du fluide n sur la figure 2.3.

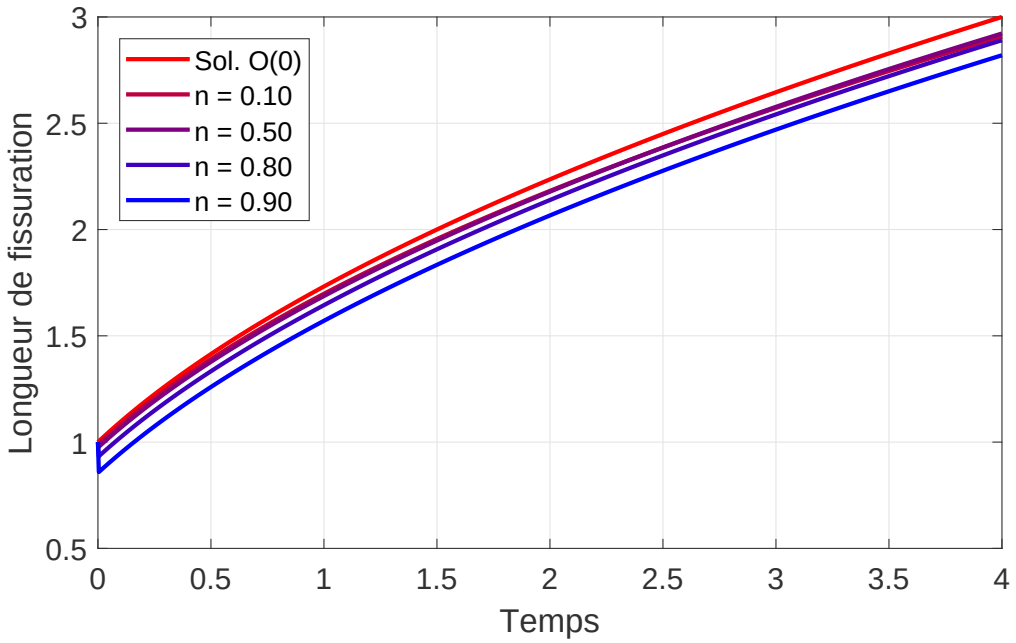


FIGURE 2.3 – Évolution de la longueur de fissure ($\ell = \ell_0 + \varepsilon\ell_1$) pour plusieurs valeurs du paramètre n en considérant $q_0 = 2, \varepsilon = 0.1$ et $\mathcal{G} = 1.125$.

On remarque que la solution corrigée pour les différentes valeurs de n est toujours plus lente que la solution à l'ordre dominant (en rouge). On attribue ce ralentissement à l'effet de la viscosité car on observe qu'il est directement lié à l'indice de comportement n.

2.4.2 Injection de fluide à débit linéaire

On propose maintenant un chargement de type linéaire par morceaux défini par

$$q(t) = \begin{cases} t\,, & \text{si } 0 \leq t < 2 \\ 2 - t\,, & \text{si } 2 \leq t < 4 \\ 0\,, & \text{si } t \geq 4 \end{cases} \tag{2.67}$$

qui représente le processus d'injection d'un volume fixe $v_i = 2$ et est schématisé sur la figure 2.4.

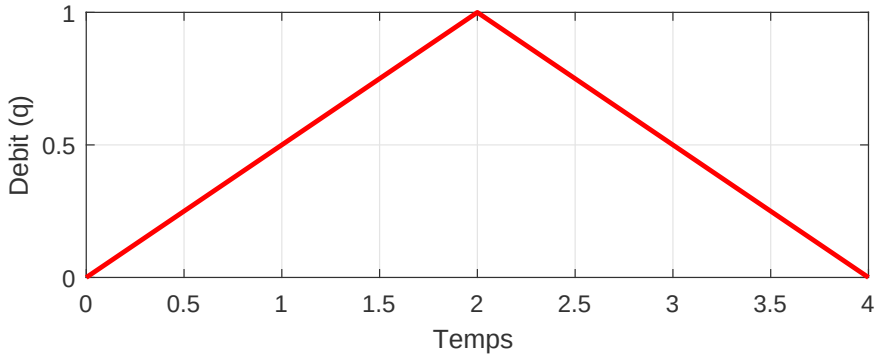


FIGURE 2.4 – Débit de fluide injecté selon l'équation (2.67).

L'évolution de la longueur de fissure est présenté en fonction du temps pour différentes valeurs de l'indice de comportement du fluide n sur la figure 2.5, pour $\varepsilon = 0.1$ et $\mathcal{G} = 1.125$. On observe que lorsque l'indice de comportement devient nul ($n \to 0$) la solution corrigée tend vers la solution à l'ordre dominant, alors que les solutions diffèrent lorsque $n \to 1$.

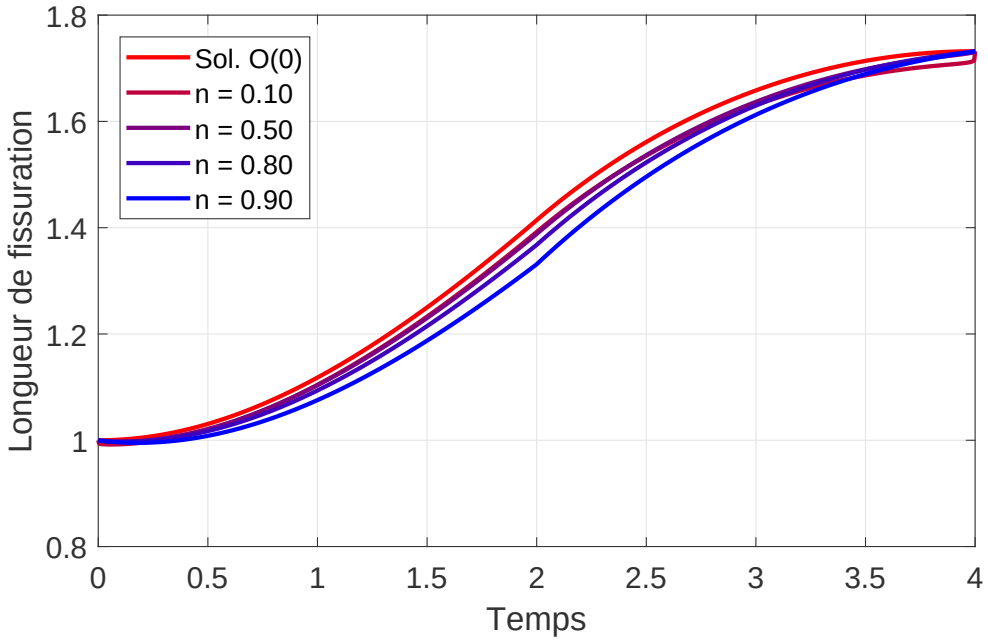


FIGURE 2.5 – Évolution de la longueur de fissure ($\ell = \ell_0 + \varepsilon\ell_1$) pour plusieurs valeurs du paramètre n en considérant $\varepsilon = 0.1$ et $\mathcal{G} = 1.125$.

2.4.3 Injection de fluide à volume fixé

Un autre exemple analysé est le cas de l'injection d'un volume fixé v_i, en considérant différentes vitesses d'injection. Les différents débits d'injection du fluide sont caractérisés par leurs amplitudes q_0, et sont définies par

$$q(t) = \begin{cases} \frac{q_0}{t_c} t\,, & \text{si } 0 \le t < t_c \\ \frac{q_0}{t_c}(2t_c - t)\,, & \text{si } t_c \le t < 2t_c \\ 0\,, & \text{si } t \ge 2t_c \end{cases} \tag{2.68}$$

avec $t_c = v_i/q_0$ et $2t_c$ le temps nécessaire pour injecter un volume v_i à débit q_0.

Sur la figure 2.7 et 2.8 est représenté l'influence de l'amplitude du débit d'injection q_0 sur la longueur de propagation de la fissure est étudiée en considérant les mêmes paramètres matériels que dans l'exemple précédent et en fixant $n = 0.9$.

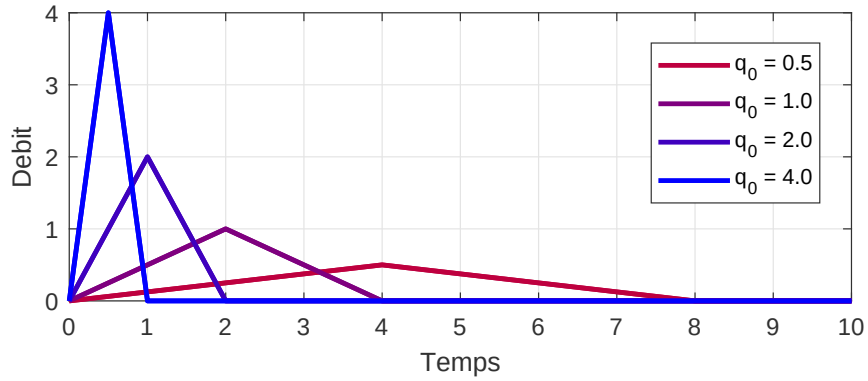


FIGURE 2.6 – Débit d'injection de fluide selon l'équation (2.67) pour un volume injecté $v_i = 2$.

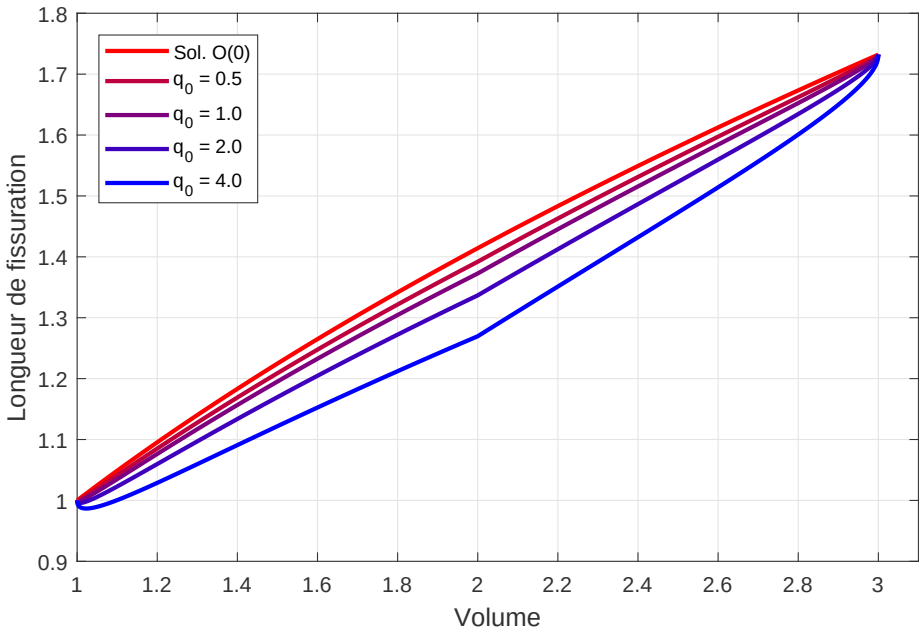


FIGURE 2.7 – Évolution de la longueur de fissure ($\ell = \ell_0 + \epsilon\ell_1$) en fonction du volume (V_t) pour plusieurs valeurs du débit q_0 en considérant $\mathcal{G} = 1.125$ et $n = 0.9$ pour un volume injecté $v_i = 2$.

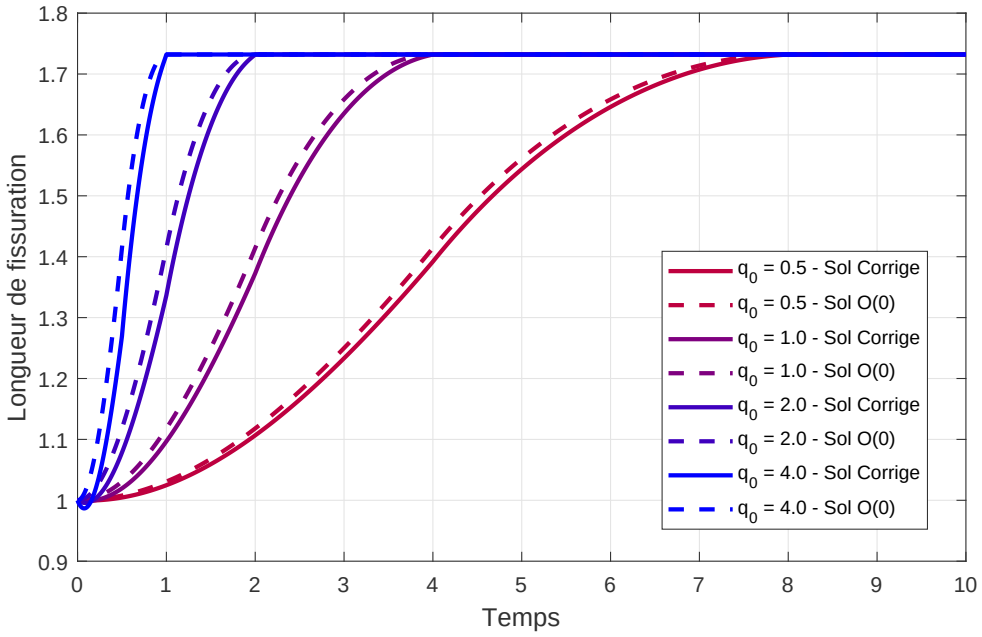


FIGURE 2.8 – Évolution de la longueur de fissure ($\ell = \ell_0 + \epsilon\ell_1$) en fonction du temps ($t$) pour plusieurs valeurs du débit q_0 en considérant $\mathcal{G} = 1.125$ et $n = 0.9$ pour un volume injecté $v_i = 2$.

Sur la figure 2.9 est représenté l'influence de l'amplitude du débit d'injection q_0 sur la hauteur maximale de la fissure est étudiée en considérant les mêmes paramètres matériels que dans l'exemple précédent et en fixant $n = 0.9$.

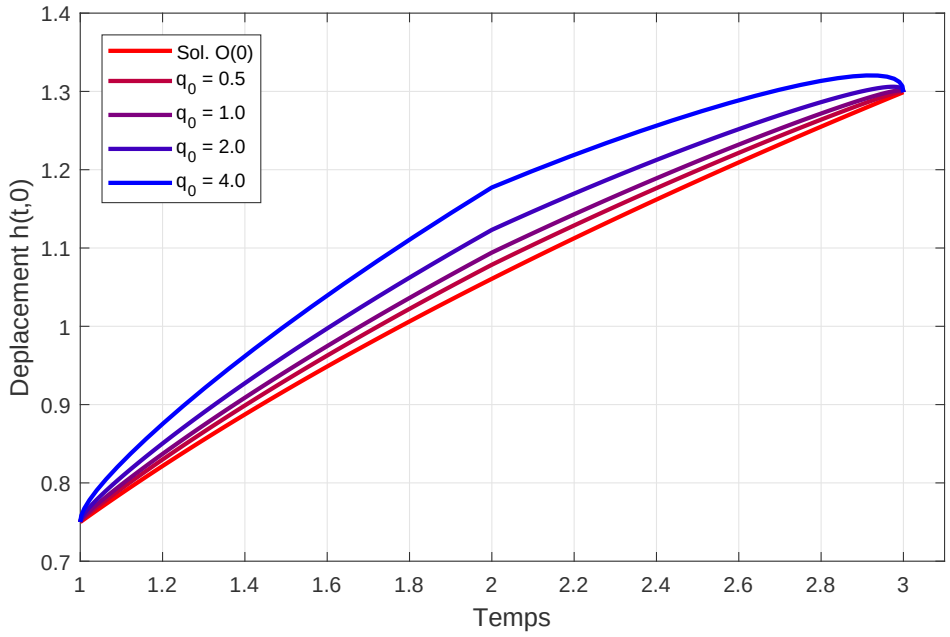


FIGURE 2.9 – Déplacement maximale ($h = h_0 + \epsilon h_1$) en fonction du volume (V_t) pour plusieurs valeurs du débit q_0 en considérant $\mathcal{G} = 1.125$ et $n = 0.9$ pour un volume injecté $v_i = 2$.

On remarque que l'écart entre la solution corrigée et la solution à l'ordre dominant croît avec l'amplitude du débit d'injection de fluide q_0. On observe que plus la vitesse d'injection est grande, plus le ralentissement de la longueur de propagation est important. De façon similaire on observe que la hauteur de fissure est aussi fortement influencée par l'amplitude de la vitesse d'injection du fluide.

Étant donné la nature ralentissant du terme correctif dans la longueur de fissuration, on observe que l'influence de l'injection de fluide sur le système montre une préférence pour la déformation plutôt que la fissuration, car pour un volume donné, un incrément dans la vitesse d'injection du fluide ralentit la propagation de la fissure mais augmente le déplacement près du point d'injection du fluide. Cette différence sur le déplacement est une conséquence de l'effet local de la source ponctuelle de fluide et on peut le voir sur la figure 2.10. On observe que le déplacement obtenu avec la solution modifiée est plus grand que celui

obtenu par la solution à l'ordre dominant, sur la région $[0, 0.6]$ et plus petite à l'extérieur de cette région.

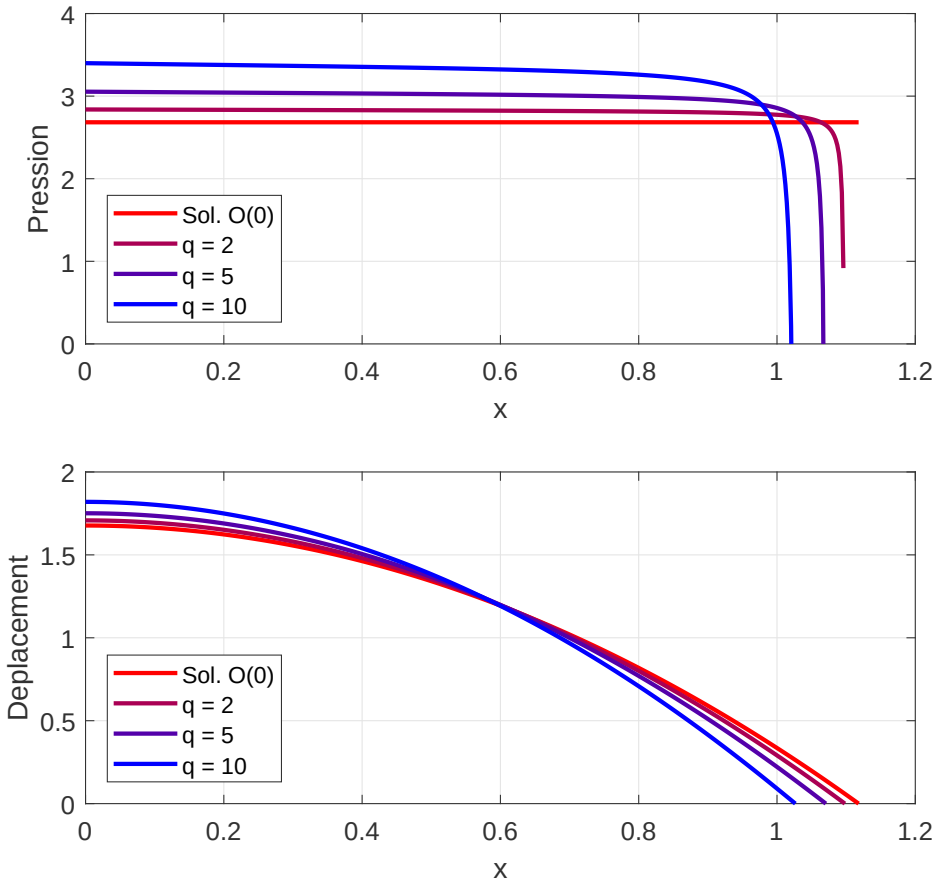


FIGURE 2.10 – Pression et déplacement pour un volume $v(t) = 2.5$ et $q = \{2, 5, 10\}$ en considérant $\mathcal{G} = 1.125$ et $n = 0.9$.

Une autre remarque importante est liée au comportement de la pression près du point de fissuration. On observe sur la figure 2.10 que lorsque $n \neq 0$, la pression $p(t, y)$ diverge comme $O(\log(1-y))$ lorsque $y \to 1$. Ce type de singularité en pointe de fissure a déjà été remarquée par A. Savitski et E. Detournay [40] dans le cas d'une fissure hydraulique circulaire chargée par un fluide newtonien ou dans le cas d'une fissure infinie. Cette singularité est un des points clés

qu'on abordera dans la suite, car il montre que le modèle est incapable de bien modéliser le comportement de la pression près du point de fissuration.

D'autre part on doit remarquer que la continuité du comportement de la fissuration est directement liée à la définition des fonctions $\alpha(t)$ et $\beta(t)$ (2.55), en raison de la relation directe entre $\beta(t)$ et $\dot{\ell}(t)$. De plus, d'après (2.64) on peut remarquer que $\ell_1(t)$ est toujours négatif, donc à un instant $t_c^+ > t_c$ postérieur à l'instant t_c où l'on atteint le volume critique v_c, la longueur totale $\ell(t_c^+) = \ell_0(t_c^+) + \varepsilon\ell_1(t_c^+)$ satisfera toujours $\ell(t_c^+) < \ell(0)$ (voir figure 2.11). Ce qui est en contradiction avec la condition d'irréversibilité (2.31) de la théorie de Griffith. On considère que ce résultat est lié au modèle à grande ténacité utilisé pour obtenir des solutions explicites car ce modèle néglige la présence du retard.

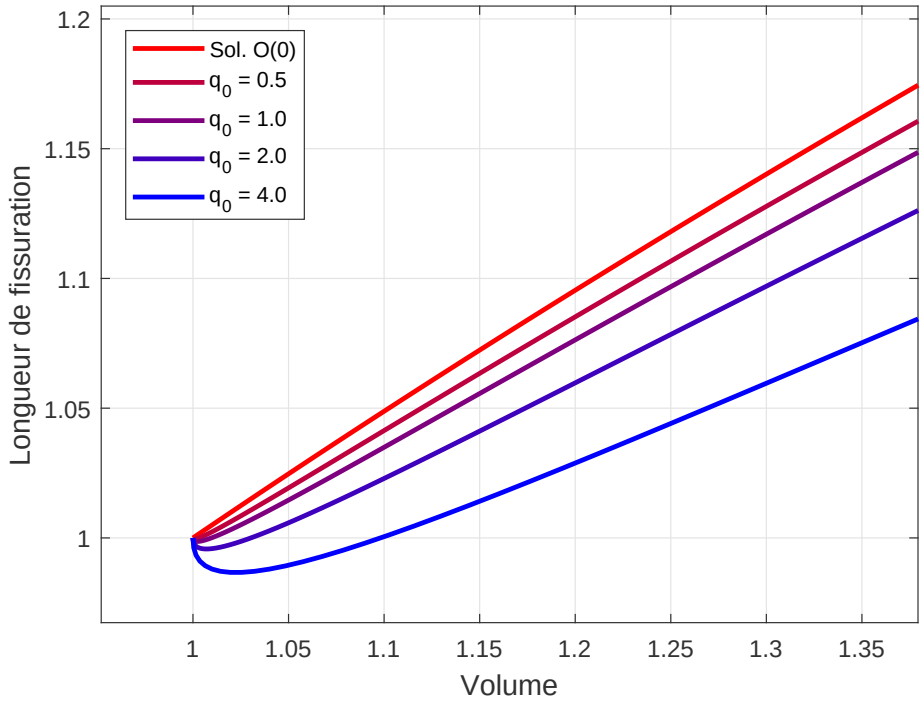


FIGURE 2.11 – Déplacement maximale ($h = h_0 + \epsilon h_1$) en fonction du volume $v(t)$ pour plusieurs valeurs du débit q_0 en considérant $\mathcal{G} = 1.125$ et $n = 0.9$.

Enfin, une dernière remarque vient de l'analyse du cas fluide newtonien ($n = 1$) pour lequel l'ensemble des équations proposées comme solution du modèle

n'a pas de solution explicite puisque le taux de restitution de l'énergie potentielle G (qui dépend de ℓ_1) diverge. On considère que ce problème n'appartient qu'au cas unidimensionnel, car d'après la littérature, notamment les travaux menés par E. Detournay par exemple, dans le cas bidimensionnel ou tridimensionnel le terme convectif induit par le processus de mis à l'échelle, présente une puissance différente, de sorte que la convergence des expressions intégrales est garantie.

Chapitre 3

Résolution de l'équation de Reynolds par un méthode d'optimisation

Le chapitre précédent a été consacré à l'écriture d'un modèle simplifié représentant le problème de la propagation d'une fissure soumise à l'injection d'un fluide visqueux, tenant compte des trois facteurs introduits au premier chapitre, soient la réponse élastique du film, l'écoulement du fluide à l'intérieur de la fissure et la propagation de la fissure. On a établi l'ensemble d'équations modélisant chaque aspect et finalement on a proposé une solution approchée au problème en utilisant la méthode de développement asymptotique. Néanmoins, à la fin du chapitre précédent on a pu observer que la solution du modèle simplifié montre des résultats contradictoires avec les hypothèses de départ, ce qui nous amène à reconsidérer la validité de ce modèle, notamment la validité des hypothèses considérées.

Une hypothèse simplificatrice importante considérée lors de l'écriture du modèle du chapitre précédent a consisté à négliger le retard entre fronts de propagation, c'est à dire que l'on a supposé que l'interface entre le film élastique et le substrat rigide était complètement remplie par le fluide à chaque instant. Dans ce chapitre on propose de lever cette hypothèse et de considérer l'existence d'un écart entre le front de propagation du fluide et le front de fissuration qui désormais sera appelé « Lag ». Le problème résultant est un problème à double frontière libre compliqué à traiter, on propose donc de garder les autres

hypothèses simplificatrices : l'approche de lubrification est supposée valide, les forces de volume sont négligées et on considère de plus une fissure à l'arrêt. Ainsi, dans l'objectif de conserver un modèle simple, on se concentre sur la modélisation de la propagation du front de fluide à l'intérieur de la fissure en supposant que la longueur de la fissure n'évolue pas.

L'objectif de ce chapitre est donc de modéliser l'évolution du front de propagation du fluide en partant d'une position initiale donnée jusqu'au remplissage de l'espace interstitiel entre le film élastique et le substrat rigide. On montrera que ce problème peut être traité comme un problème d'optimisation dont on proposera des algorithmes de résolution numérique. Les résultats obtenus seront analysés en fin de chapitre.

3.1 Étude du problème à frontière libre

L'objectif principal de ce chapitre est l'étude du problème à frontière libre de propagation du fluide. Cette propagation est bien évidement liée à la modélisation choisie pour l'écoulement, c'est-à-dire ici l'équation de Reynolds. Avant de traiter la complexité du problème liée au couplage entre l'écoulement et la réponse élastique du film, on propose donc d'analyser un exemple plus simple où la composante élastique du problème est supprimée pour se concentrer uniquement sur la propagation du fluide. Pour cela on propose d'analyser le problème de l'écrasement d'une goutte de fluide visqueux entre deux surfaces rigides.

Ainsi, considérons le problème d'une plaque plane, parfaitement rigide s'approchant verticalement d'un substrat parfaitement rigide comme montré dans la figure 3.1. On suppose qu'entre la plaque et le substrat existe une goutte de volume constant V. La plaque s'approche du substrat en exerçant une force F sur le fluide, supposée constante. Finalement, en gardant l'esprit du chapitre précédent, on suppose que le problème est invariant selon la direction Z et peut être décrit dans le plan OXY.

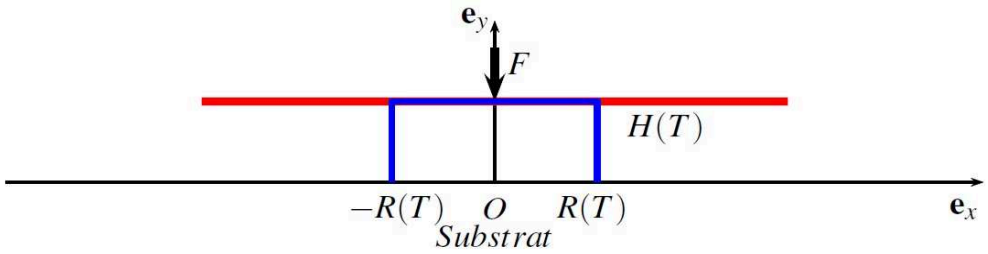


FIGURE 3.1 – Plaque parfaitement rigide écrasant une goutte visqueuse.

En rappelant que les forces de volume sont supposées négligeables, la forme de la goutte est complètement déterminée par la fonction $H(T)$ représentant la hauteur de la goutte à chaque instant du temps et le domaine occupé par le fluide noté $\Omega = [-R(T), R(T)]$. En notant $P(T,X)$ la pression au sein du fluide, l'évolution de la goutte est décrite par l'équation de Reynolds présentée au chapitre 2 qui est composée par l'équation de bilan de masse (2.13) et l'équation de flux (2.14). Ces deux équations peuvent être combinées en une équation, qui s'écrit dans le cas d'un fluide newtonien

$$\frac{\partial H}{\partial T} = \frac{\partial}{\partial X}\left(\frac{1}{\mu'}H^3\frac{\partial P}{\partial X}\right), \tag{3.1}$$

avec μ' la viscosité décrite au chapitre 2. Cette équation est accompagnée des conditions aux extrémités, en l'absence de fluide la pression doit être nulle :

$$P(T,-R) = P(T,R) = 0. \tag{3.2}$$

De plus, étant donné la symétrie du problème, le flux au milieu de la goutte doit être nulle, ce qui d'après la définition du flux $\phi(x) = H^3\frac{\partial P}{\partial X}$ (équation (2.14)) se traduit par

$$\frac{\partial P}{\partial X}(T,0) = 0. \tag{3.3}$$

D'autre part, en considérant les paramètres suivants : la distance entre la plaque et le substrat $H_r = H(0)$, la longueur horizontale du domaine étudié $L_r = 2R(0)$ et la vitesse moyenne de l'écoulement U_r, on peut définir le changement

des variables suivant :

$$X = L_r x,\ Y = H_r y,\ H(X_1, T) = H_r h(x_1, t),\ T = \frac{L_r}{U_r} t,\ P = \rho U_r^2 p, \tag{3.4}$$

et réécrire l'équation de Reynolds adimensionnée, comme

$$\dot{h} = \left(K h^3 p'\right)', \tag{3.5}$$

avec les conditions

$$p(t,-r) = p(t,r) = 0 \text{ et } p'(t,0) = 0\,, \tag{3.6}$$

et la constante définie par $K := \frac{H_r^2 U_r}{L_r} \frac{\rho}{\mu'}$ représentant la viscosité adimensionné.

Finalement, en rappelant que la hauteur de la goutte h est ici uniforme sur tout le domaine, le problème consiste à trouver le champ pression $p(x)$ satisfaisant l'équation

$$p''(t,x) = \frac{\dot{h}}{K h^3},\ \ si\ \ |x| \le r(t) \tag{3.7}$$

munie des conditions (3.6). En intégrant l'équation (3.7) par rapport à x avec les conditions aux extrémités (3.6), on obtient

$$\begin{cases} p(t,x) = \frac{\dot{h}}{2Kh^3}(x^2 - r^2) & si\ \ |x| \le r(t)\,, \\ p(t,x) = 0, & si\ \ |x| > r(t)\,. \end{cases} \tag{3.8}$$

En rappelant que la plaque s'approche du substrat en exerçant une force F sur le fluide, l'équilibre des efforts impose $\int_{-R}^{R} P dX = F$, soit

$$\int_{-r}^{r} p dX = f := \frac{F}{\rho L_r U_r^2}\,. \tag{3.9}$$

Compte tenu de la forme du champ de pression (3.8), la hauteur vérifie donc l'équation

$$\dot{h} = -\frac{3Kf}{2r^3} h^3\,. \tag{3.10}$$

Pour résoudre cette équation on doit ajouter une condition liant $r(t)$ et $h(t)$. En absence d'injection du fluide cette condition vient de la conservation du volume, si on note le volume constant de la goutte par V, alors à chaque instant t, on doit satisfaire $2r(t)h(t) = V$. En tenant compte de cette condition, on peut résoudre l'équation différentielle en temps (3.10) avec la condition initiale $h(t = 0) = h_0$. On obtient donc finalement,

$$h(t) = \left(\frac{1}{h_0^5} + \frac{60Kft}{V^3}\right)^{-1/5} \tag{3.11}$$

$$r(t) = \frac{V}{2}\left(\frac{1}{h_0^5} + \frac{60Kft}{V^3}\right)^{1/5} \tag{3.12}$$

3.2 Reformulation du problème d'évolution à frontière libre comme un problème d'optimisation

Le problème consiste à déterminer les fonctions $h(t)$, $r(t)$ et $p(t,x)$ satisfaisant (3.7). Dans cette section on en présente une reformulation comme un problème d'optimisation. On propose d'abord de traiter la discrétisation temporelle du problème en considérant qu'à chaque instant l'ensemble de fonctions solution sont aussi des points optimaux pour une fonctionnelle qui sera précisée ultérieurement.

Pour discrétiser en temps l'équation de Reynolds on se donne une série discrète d'instants $(t_i)_{i\in\mathbb{N}}$ avec un pas de temps constant Δt. La dérivée temporelle de $h(t)$ peut ainsi être approximée au premier ordre par

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{h(t_i) - h(t-1)}{\Delta t}\,.$$

Le problème en temps discret consiste alors à déterminer $\{h_i = h(t_i), r_i = r(t_i), p_i(x) = p(t_i, x)\}$ à chaque instant t_i, satisfaisant

$$\begin{cases} h_i - h_{i-1} = \Delta t K h_{i-1}^3 p_i'', & si\ \ |x| \le r_i\,, \\ p_i = 0, & si\ \ |x| > r_i\,, \end{cases} \tag{3.13}$$

où, l'on propose d'approcher le terme cubique de l'équation de Reynolds (3.5) par h_{i-1}^3, la hauteur du fluide à l'instant t_{i-1}. On justifie ce choix pour éviter les complexités liés à la non linéarité du terme cubique, sous la condition d'une validation ultérieur.

Le problème à trois inconnues, décrit par (3.13), peut être réécrit en tirant profit du fait que l'évolution de la goutte se produit uniquement aux endroits où la pression de contact est non-nulle (soit $p > 0$ si l'on considère une force $f > 0$). On peut alors dire que le domaine de la goutte est le support du champ de pression $p(t,x)$ et ainsi réduire le nombre d'inconnues.

En conséquence, le problème consiste à trouver $\{h_i, p_i(x)\}$ à chaque instant t_i, satisfaisant

$$\begin{cases} h_i - h_{i-1} = \Delta t K h_{i-1}^3 p_i'', & \forall x \in \Omega \quad si \;\; p_i > 0\,, \\ h_i - h_{i-1} = 0, & \forall x \in \Omega \quad si \;\; p_i = 0\,, \end{cases} \tag{3.14}$$

avec la condition $\int_\Omega p_i dx = f$ et la condition initiale $2r_0 h_0 = V$, où $\Omega \subset \mathbb{R}$ est un domaine contenant le support de $p(t,0)$.

Le problème précédent peut se réécrire comme un problème d'optimisation Inf-Sup, avec la fonction objectif définie par le lagrangien

$$J(h,p) = \int_\Omega \left(-p(h - h_{i-1}) - \frac{1}{2}\Delta t K \left(h_{i-1}^3 \right) (p')^2 \right) dx + f h\,. \tag{3.15}$$

À chaque instant t_i le problème d'optimisation consiste alors à trouver h_i et $p_i(x)$, satisfaisant

$$\begin{cases} J(h_i, p_i) = \inf_{h \in \mathcal{C}_h} \sup_{p \in \mathcal{C}_p} J(h,p)\,, \\ \mathcal{C}_h = \mathbb{R}^+\,, \\ \mathcal{C}_p = \{ p \in H^1(\Omega) : \;\; p \geq 0 \;\; \forall x \in \Omega \}\,. \end{cases} \tag{3.16}$$

Cette nouvelle formulation est importante car ici les zones de contact ne sont pas connues à l'avance et résultent de l'optimisation de la fonctionnelle $J(h,p)$ en accord avec la définition faite pour la zone de contact. D'autre part, on voit que la fonctionnelle $J(h,p)$ assure la régularité de p, au moins où $h_{i-1} > 0$.

Examinons le lien entre la formulation duale (3.16) proposée et la formulation locale (3.14). Soient h_i et p_i les champs optimaux de $J(h,p)$, on examine d'abord

le inf en h à p_i donné. La condition d'optimalité au premier ordre en h s'écrit alors

$$\frac{\partial J}{\partial h}(h_i, p_i)(\tilde{h} - h_i) \geq 0, \quad \forall\, \tilde{h} \in \mathcal{C}_h\,, \tag{3.17}$$

avec

$$\frac{\partial J}{\partial h}(h, p)(\delta h) = -\int_\Omega p\delta h dx + f\,\delta h\,.$$

En choisissant $\tilde{h} = h_i \pm \delta h$ avec $\delta h \in \mathcal{C}_h$, on trouve

$$\frac{\partial J}{\partial h}(h_s^i, p^i)(\delta h) = 0, \quad \forall\ \ \delta h \in \mathcal{C}_h\,,$$

et on obtient donc l'une des conditions nécessaires pour la solution du problème, soit $\int_\Omega p dx = f$. De façon similaire, examinons maintenant le sup en p à h_i donné. La condition d'optimalité dans ce cas s'écrit

$$\frac{\partial J}{\partial p}(h_i, p_i)(\tilde{p} - p_i) \leq 0, \quad \forall\, \tilde{p} \in \mathcal{C}_p\,, \tag{3.18}$$

avec

$$\frac{\partial J}{\partial p}(h, p)(\delta p) = -\int_\Omega \left(\Delta t K\left(h_{i-1}^3\right)\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \delta p}{\partial x}\right) + (h - h_{i-1})\delta p\right) dx\,.$$

En choisissant $\tilde{p} = p_i + \delta p$ avec $\delta p \geq 0$, on trouve

$$\frac{\partial J}{\partial p}(h_i, p_i)(\delta p) \leq 0, \quad \forall\, \delta p \in \mathcal{C}_p\,.$$

En intégrant par parties la dernière expression on obtient

$$\int_{\Omega_s} \delta p\left((h_i - h_{i-1}) - \Delta t K h_{i-1}^3 (p_i)''\right) dx + \Delta t K [h_{i-1}^3 (p_i)' \delta p]_{\partial\Omega} \geq 0, \quad \forall\, \delta p \in \mathcal{C}_p\,,$$

et on en déduit

$$\begin{cases} (h_i - h_{i-1}) - \Delta t K h_{i-1}^3 (p^i)'' \geq 0\,, \\ \Delta t K [h_{i-1}^3 (p_i)']_{\partial\Omega} \geq 0\,. \end{cases} \tag{3.19}$$

Par ailleurs, en choisissant successivement $\tilde{p} = p_i/2$ et $\tilde{p} = 2p_i$ dans (3.18), on trouve

$$\frac{\partial J}{\partial p}(h_i, p_i)(p_i) = 0\,.$$

En faisant une intégration par parties on obtient finalement

$$\begin{cases} p_i\left[(h_i - h_{i-1}) - \Delta t K (h_{i-1}^3)(p_i)''\right] = 0\,, \\ p_i[(h_{i-1}^3)(p_i)']_{\partial\Omega} = 0\,. \end{cases} \tag{3.20}$$

On retrouve ainsi l'équation discrète de Reynolds (3.14). De plus, on obtient des conditions naturelles sur le bord où la pression n'est pas imposée. Finalement, on peut conclure que si h_i et p_i sont les champs solution du problème d'optimisation (3.16), alors ils satisfont l'ensemble d'équations locales (3.14).

3.2.1 Régularisation du problème d'optimisation

La régularité de p_i est assurée par la définition (3.15) de la fonctionnelle $J(h,p)$ quand $h_{i-1} > 0$, mais dans la région où $h_{i-1} = 0$, il peut y avoir des pertes de régularité pouvant poser problème. Pour assurer la régularité de p_i dans tout le domaine, on va donc travailler avec une fonctionnelle régularisée définie par

$$J(h,p) := \int_\Omega \left(-p(h - h_{i-1}) - \frac{1}{2}\Delta t K \left(h_{i-1}^3 + c\right)(p')^2\right) dx + fh\,, \tag{3.21}$$

où c est un petit paramètre résiduel positif à calibrer dans chaque cas particulier. La sensibilité du modèle au choix du paramètre c est analysée dans la suite.

3.2.2 Validation du modèle régularisé dans le cas de l'écrasement d'une goutte

Pour analyser la sensibilité de la solution au choix du paramètre c, on propose de résoudre numériquement les équations résultant des conditions d'optimalité appliquées à la fonctionnelle modifiée. Les conditions (3.17) et (3.18) donnent une équation d'équilibre des forces

$$-\int_\Omega p\,dx + f = 0\,, \tag{3.22}$$

une équation locale de conservation de flux (équation de Reynolds) en temps discret

$$(h_i - h_{i-1}) - \Delta t K(h_{i-1}^3 + c)(p^i)'' = 0\,, \tag{3.23}$$

et une condition de conservation de flux global

$$\left(\Delta t K(h_{i-1}^3 + c)(p_i)'\right)_{\partial\Omega} = 0\,. \tag{3.24}$$

Pour résoudre ces équations en temps discret, on note $[-r_i, r_i]$ le support du champ de pression $p_i(x)$ à l'instant t_i. La hauteur du fluide h_{i-1}, considérée connue, peut être vue comme une fonction de $x \in \Omega$ qui est non nulle uniquement sur la région $[-r_{i-1}, r_{i-1}] \subset (-r_i, r_i)$. On cherche donc la hauteur h_i ainsi que la pression $p_i(x)$ à l'instant $t_i = t_{i-1} + \Delta t$, satisfaisant (3.22)-(3.24). Le passage entre les instants t_{i-1} et t_i est illustré sur la figure 3.2.

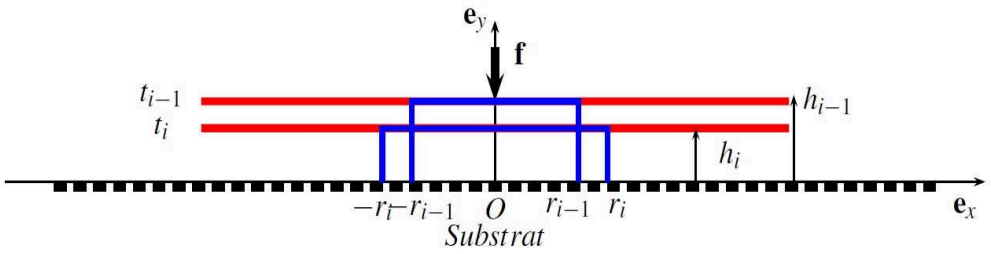


FIGURE 3.2 – Passage entre les instants t_{i-1} et t_i.

En considérant cette description du passage entre les instants t_{i-1} et t_i, l'équation d'équilibre des forces (3.22) peut s'écrire

$$f = \int_{-r_i}^{r_i} p_i dx\,. \tag{3.25}$$

De façon similaire, l'équation de Reynolds (3.23) permet d'obtenir la pression en

résolvant

$$\begin{cases} p_i'' = \frac{h_i - h_{i-1}}{\Delta t K (h_{i-1}^3 + c)}, & \text{si } x \in [-r_{i-1}, r_{i-1}], \\ p_i'' = \frac{h_i}{\Delta t K c}, & \text{si } x \in [-r_i, -r_{i-1}] \cup [r_{i-1}, r_i], \\ p_i = 0, & \text{si } x \in \Omega \setminus supp(p_i), \end{cases} \tag{3.26}$$

avec les conditions de continuité de flux $cp_i'(r_{i-1,-}) = cp_i'(r_{i-1,+})$, et de continuité de pression $p_i(r_{i-1,-}) = p_i(r_{i-1,+})$. Par ailleurs, h_i et $p_i(x)$ doivent aussi satisfaire les conditions aux limites du flux $cp_i'(-r_i) = cp_i'(r_i) = 0$, et de pression $p_i(-r_i) = p_i(r_i) = 0$. La condition de conservation de flux global (3.24) peut être réécrite, en considérant valable l'équation (3.24), comme $\int_\Omega (h_i - h_{i-1})dx = 0$, ce qui signifie que le volume de la goutte de fluide est conservé entre les instants t_{i-1} et t_{i-1} :

$$2h_{i-1}r_{i-1} = 2h_i r_i = V \tag{3.27}$$

En résolvant l'équation différentielle (3.26) et en utilisant les conditions aux limites, on en déduit donc

$$p_i(x) = \begin{cases} \frac{h_i - h_{i-1}}{2\Delta t K (h_{i-1}^3 + c)}(x^2 - r_{i-1}^2) + \frac{h_i (r_{i-1} - r_i)^2}{2\Delta t K c}, & \text{si } x \in [-r_{i-1}, r_{i-1}], \\ \frac{h_i}{2\Delta t K c}(x - r_i)^2, & \text{si } x \in [-r_i, -r_{i-1}] \cup [r_{i-1}, r_i], \\ 0, & \text{si } x \in \Omega \setminus supp(p_i). \end{cases}$$

Finalement, en remplaçant ce résultat dans l'équilibre des forces (3.25) on obtient h_i en résolvant l'équation

$$\frac{r_{i-1}^3 h_i}{\Delta t K}\left(-\frac{1}{3c}\left(1 - \frac{r_i}{r_{i-1}}\right)^3 + \frac{1}{c}\left(1 - \frac{r_i}{r_{i-1}}\right)^2 - \frac{2}{3(h_{i-1}^3 + c)}\left(1 - \frac{h_{i-1}}{h_i}\right)\right) = f\,.$$

En utilisant la conservation du volume (3.27) la solution s'écrit

$$\frac{h_i}{h_{i-1}^3}\left(\frac{h_{i-1}}{h_i} - 1\right)\left(\frac{1}{3}\left(\frac{h_{i-1}}{h_i} - 1\right)^2 + \left(\frac{h_{i-1}}{h_i} - 1\right) + \frac{2c}{3(h_{i-1}^3 + c)}\right) = \frac{8 f \Delta t K}{V^3} c\,. \tag{3.28}$$

Regardons maintenant le comportement de cette solution par rapport à la solution théorique. Étant donné que le modèle est adimensionné, on peut fixer les

paramètres suivants :

$$K = \frac{1}{12},\ \Delta t = 0.02,\ c = 0.1,\ f = 1,\ h_0 = 1,\ r_0 = 0.5\,,$$

et présenter les résultats de résoudre l'équation (3.28) pour obtenir la hauteur h_i en fonction du temps, résultat qui est représenté sur la figure 3.3.

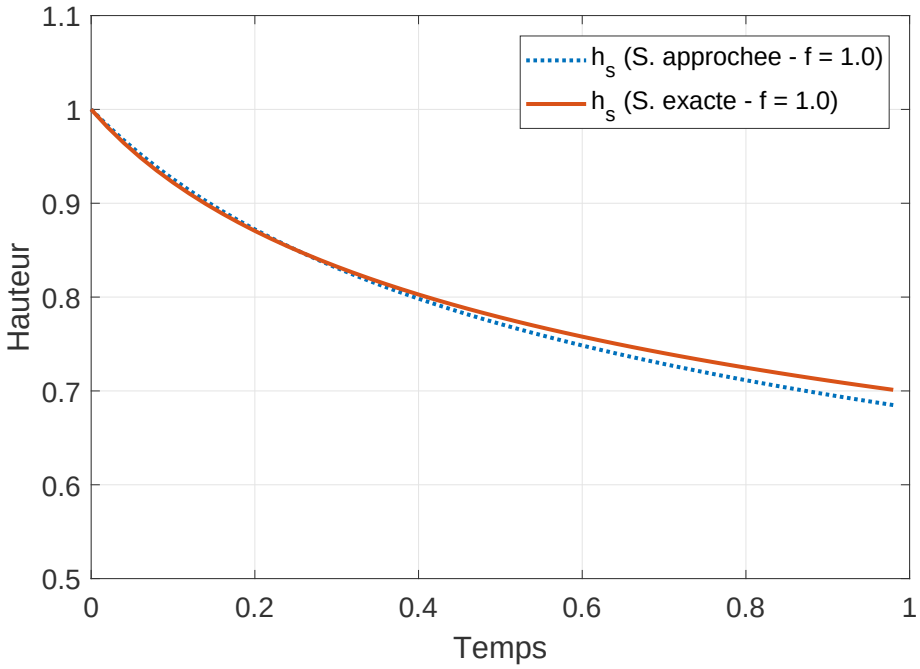


FIGURE 3.3 – Évolution de la hauteur adimensionnée de la goutte en fonction du temps t adimensionnée. Comparaison entre la solution approchée par l'équation (3.28) (courbe bleu) et la solution exacte, équation (3.11) (courbe rouge), en considérant $K = \frac{1}{12}, \Delta t = 0.02, c = 0.1, f = 1, h_0 = 1$ et $r_0 = 0.5$.

On obtient aussi la distribution de la pression sur la figure 3.4, celle-ci est représentée à l'instant $t_i = 0.2$. On remarque des différences entre le champ de pression obtenue par solution approchée (3.42) et la solution exacte (3.42), dans les zones proches du front de propagation de la goutte, ceci est conséquence de la régularisation de la fonctionnelle $J(h, p)$ par rapport à p', mentionnée en la section 3.2.1.

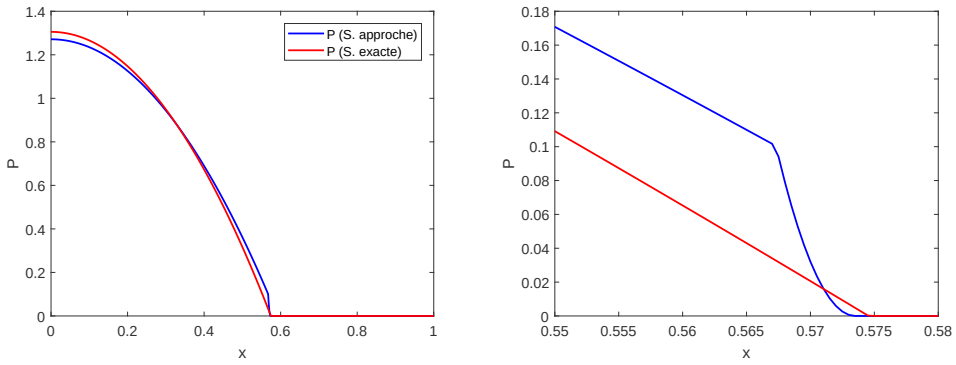


FIGURE 3.4 – Distribution du champ de pression à l'instant $t_i = 0.2$. Solution approché (courbe bleu), solution exacte (courbe rouge), en considérant $K = \frac{1}{12}, \Delta t = 0.02, c = 0.1, f = 1, h_0 = 1$ et $r_0 = 0.5$. À gauche, la distribution global du champ de pression et à droite une ampliation de la région près du front de propagation de la goutte.

On peut également aborder le sujet de la sensibilité du modèle régularisé par rapport au paramètre de régularisation c. On teste d'abord le modèle pour différentes valeurs de f. Les résultats sont présentés sur la figure 3.5. On remarque que dès que la force devient grande, le modèle s'éloigne de la solution théorique.

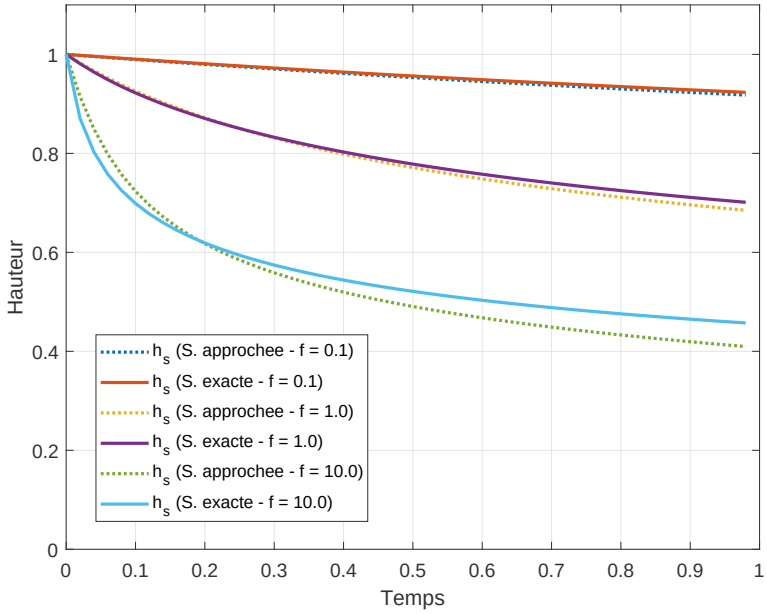


FIGURE 3.5 – Évolution de la hauteur adimensionnée de la goutte pour différentes valeurs de la force extérieure, solution approchée (lignes discontinues), solution exacte (lignes continues) en considérant $K = \frac{1}{12}, \Delta t = 0.02, c = 0.1, h_0 = 1$ et $r_0 = 0.5$.

Si maintenant on fixe la valeur de la force $f = 10$ pour modifier uniquement le paramètre c, on observe sur la figure 3.6, que le modèle devient plus éloigné que dans le cas précédent où on considérait $c = 0.1$. Cependant, si on modifie c et aussi le pas de temps Δt, on obtient une solution plus proche de la solution exacte. On peut donc conclure, qu'on peut toujours obtenir la précision souhaitée en calibrant bien le pas du temps et le paramètre c du modèle.

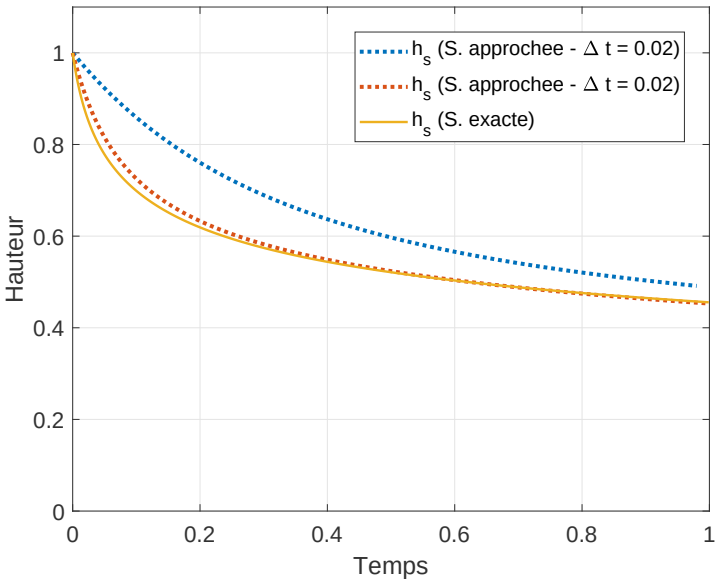


FIGURE 3.6 – Évolution de la hauteur adimensionnée de la goutte à force extérieure fixée $f = 10$ pour différentes valeurs des paramètres Δt. Solution exacte en ligne continue, solutions approchées en lignes discontinues. Solutions obtenues en considérant $K = \frac{1}{12}, c = 0.01, h_0 = 1$ et $r_0 = 0.5$.

Cette conclusion est plus évidente si l'on décide de mesurer la différence entre la solution approchée (à c et Δt fixés) et la solution exacte (3.12) dans l'intervalle de temps $t \in [0,1]$. On définit l'erreur associée à la solution approchée à c et Δt fixés, par

$$\delta(c, \Delta t) = \frac{\|h_{approche}(t) - h_{exacte}(t)\|_2}{\|h_{exacte}(t)\|_2}.$$

Cette valeur donne une mesure de l'erreur associée à chaque paire (c , Δt). Elle est représentée pour plusieurs valeurs de c et Δt sur la figure 3.7.

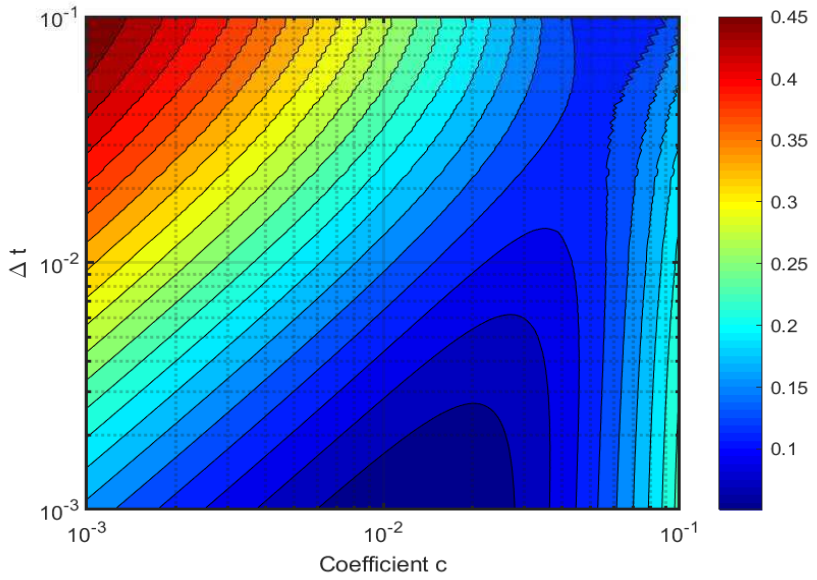


FIGURE 3.7 – Différence entre la solution approchée et la solution exacte pour différents valeurs du coefficient c et Δt en considérant $K = \frac{1}{12}, f = 10, h_0 = 1$ et $r_0 = 0.5$.

3.3 Extension de la reformulation duale du problème

Dans la section précédente, on a montré qu'il est possible de reformuler le problème consistant à résoudre l'équation de Reynolds, comme un problème d'optimisation. On remarque dans cette reformulation que le domaine de la goutte n'est plus une donnée du problème mais un résultat car il est défini comme le support du champ de pression. On propose maintenant d'exploiter cette caractéristique du problème d'optimisation, car le fait que la fonctionnelle $J(h, p)$ ne dépende pas explicitement du domaine de la goutte mais d'un domaine Ω contenant le support du champ $p(x)$, nous permet de considérer d'autres cas comme l'existence de plusieurs gouttes. Cette formulation représente donc un avantage par rapport au traitement du problème où l'on doit supposer différents scénarios considérant la possible fusion des gouttes avant de résoudre l'équation de Reynolds, ce qui n'est pas le cas dans le problème d'optimisation. Pour étendre la formulation variationnel du problème à plusieurs gouttes, on doit d'abord

modifier la formulation locale du problème. Pour une seule goutte, on a considéré une hauteur unique de fluide. Dans le cas de plusieurs gouttes de formes quelconques, on doit considérer une fonction qui décrit la hauteur des gouttes. On propose donc de décrire la hauteur du fluide par un champ $h_f(t,x)$ tandis que la position de la plaque rigide sera décrit par la fonction $h_s(t)$. En gardant la même discrétisation temporelle qu'à la section précédente, le problème en temps discret consiste à trouver $h_s^i, h_f^i(x)$ et $p^i(x)$ à chaque instant t_i, satisfaisant

$$\begin{cases} h_f^i - h_f^{i-1} = \Delta t K (h_f^{i-1} + c_f)^3 (p^i)'', & \forall x \in \Omega \quad si \;\; p^i > 0\,, \\ h_f^i - h_f^{i-1} = 0, & \forall x \in \Omega \quad si \;\; p^i = 0\,, \end{cases} \tag{3.29}$$

l'équilibre des forces $\int_\Omega p^i dx = f$, la condition initiale $\int_\Omega h_f^0 dx = V$ et la condition $h_f^i(x) \le h_s^i \;\forall x \in \Omega$. Cette dernière condition peut s'écrire de façon équivalente par

$$\begin{cases} h_f^i = h_s^i, & \forall x \in \Omega \quad si \;\; p^i > 0\,, \\ h_f^i = h_f^{i-1}, & \forall x \in \Omega \quad si \;\; p^i = 0\,. \end{cases} \tag{3.30}$$

Ainsi, la reformulation de ce problème comme un problème d'optimisation consiste à trouver $\{h_s^i, h_f^i(x), p^i(x)\}$ à chaque instant t_i, satisfaisant

$$\begin{cases} J(h_s^i, p^i) = \inf_{h \in \mathcal{C}_h} \sup_{p \in \mathcal{C}_p} J(h,p)\,, \\ \mathcal{C}_h = \mathbb{R}^+\,, \\ \mathcal{C}_p = \{p \in H^1(\Omega) : \;\; p \ge 0 \;\; \forall x \in \Omega\}\,, \end{cases} \tag{3.31}$$

avec $J(h,p)$ la fonctionnelle défini par

$$J(h,p) = \int_\Omega \left(-p(h - h_f^{i-1}) - \frac{1}{2}\Delta t K \left((h_f^{i-1})^3 + c_f \right) (p')^2 \right) dx + fh\,, \tag{3.32}$$

$h_f^i(x)$ définie par (3.30) et la condition initiale $\int_\Omega h_f^0 dx = V$. L'évolution du problème en temps discret consiste alors à trouver h_s^i, p^i solution du problème (3.31) et h_f^i suivant (3.30) pour chaque instant du temps $(t_i)_{i \ge 1}$.

Pour résoudre le problème d'optimisation (3.31) on propose la démarche suivante. D'abord, en utilisant la condition d'optimalité (3.17) on peut optimiser

$J(h,p)$ par rapport à h et travailler sur une fonctionnelle $\tilde{J}(p)$ définie par

$$\tilde{J}(p) = \int_\Omega \left(-p h_f^{i-1} + \frac{1}{2}\Delta t K \left((h_f^{i-1})^3 + c \right) (p')^2 \right) dx + \alpha \left(\int_\Omega p dx - f \right)^2 . \tag{3.33}$$

Le problème (3.31) peut alors s'écrire

$$\begin{cases} \tilde{J}(p^i) = \inf_{p \in \mathcal{C}_p} \tilde{J}(p) , \\ \mathcal{C}_p = \{ p \in H^1(\Omega) : \ \ p \geq 0 \ \ \forall x \in \Omega \} , \end{cases} \tag{3.34}$$

où la condition d'équilibre des forces est imposée par pénalisation en introduisant un coefficient $\alpha > 0$ suffisamment grand. Il reste alors à déterminer la hauteur de la plaque rigide h_s^i. Elle sera calculée en utilisant la condition de conservation de volume et la condition (3.30). Alors,

$$\int_{supp(p^i)} h_s^i dx = V - \int_{\Omega \setminus supp(p^i)} h_f^{i-1}(x) dx . \tag{3.35}$$

L'évolution du problème en temps discret s'écrit alors :

Étant donné h_f^0 tel que $\int_\Omega h_f^0 dx = V$, pour tout instant $(t_i)_{i \geq 1}$:

1. p^i solution du problème (3.34),
2. h_s^i solution de (3.35),
3. h_f^i est mis à jour suivant (3.30).

Étant donné que ce problème n'a pas de solution explicite pour une donnée $h_f^i(x)$ quelconque, on propose une approche numérique pour obtenir une solution numérique de (3.34). On propose d'approcher le champ pression $p^i(x)$ et le champ de la hauteur de la goutte $h_f^i(x)$ par des polynômes linéaires du type Lagrange. Considérons pour cela Ω^d le maillage uniforme du domaine Ω constitué d'une collection de points $(x_j)_{j=0,N+1}$, nommés sommets des éléments finis, distribués sur Ω avec une séparation constante Δx. On approche alors la pression par

$$p^i(x) \approx \sum_{j=0}^{N+1} p(x_j) \psi_j(x) , \tag{3.36}$$

et la hauteur de fluide par

$$h_f^i(x) \approx \sum_{j=0}^{N+1} h_f(x_j)\psi_j(x)\,, \tag{3.37}$$

où ψ_j sont les fonctions de base définies par

$$\psi_{2j}(x) = \bar{\psi}_1\left(\frac{x-x_j}{\Delta x}\right),$$
$$\psi_{2j+1}(x) = \bar{\psi}_2\left(\frac{x-x_j}{\Delta x}\right),$$

avec

$$\bar{\psi}_1(\xi) = \begin{cases} 1-\xi, \text{ si } \xi \in (0,1)\,, \\ 0, \text{ si } \xi \notin (0,1)\,, \end{cases}$$

et

$$\bar{\psi}_2(\xi) = \begin{cases} \xi, \text{ si } \xi \in (0,1)\,, \\ 0, \text{ si } \xi \notin (0,1)\,, \end{cases}$$

En utilisant (3.36) et (3.37), la fonctionnelle $J(h,p)$ peut s'écrire de façon discrète comme

$$J^d(\mathbf{P}) = \frac{1}{2}\mathbf{P}^T \cdot \left(\mathbb{K}_{pp} + 2\alpha \mathbf{F}\mathbf{F}^T\right) \cdot \mathbf{P} - \mathbf{P}^T\left(\mathbb{K}_{hp}\mathbf{H}_f^{i-1} + 2\alpha f \mathbf{F}\right), \tag{3.38}$$

qui est une forme quadratique en $\mathbf{H}$ et $\mathbf{P}$, avec :

- $\mathbb{K}_{hp}$ la matrice définie par $(\mathbb{K}_{hp})_{i,j} = \int_\Omega \psi_i(x)\psi_j(x)dx$,
- $\mathbb{K}_{pp}$ la matrice définie par $(\mathbb{K}_{pp})_{i,j} = \int_\Omega \Delta t K((h_f^{i-1}(x))^3 + c)\psi_i'(x)\psi_j'(x)dx$,
- $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^N$ le vecteur définie par $(\mathbf{F})_i = \int_\Omega \psi_i(x)dx$,
- $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^N$ le vecteur de pression de contact dont la j^{eme} composante vaut $p(x_j)$.
- $\mathbf{H}_f^{i-1} \in \mathbb{R}^N$ le vecteur de hauteur de fluide dont la j^{eme} composante vaut $h_f^{i-1}(x_j)$.

Finalement l'évolution du problème discrétisé s'écrit :

Étant donné $\mathbf{H}_f^0$, pour tout instant $(t_i)_{i\in\mathbb{N}^+}$:

1. $\mathbf{P}^i$ solution du problème

$$\begin{cases} J^d(\mathbf{P}^i) = \inf_{h \in \mathcal{C}_P^d} J^d(\mathbf{P}) \,, \\ \mathcal{C}_P^d = \{P \in \mathbb{R}^N : P_k \geq 0 \ \forall \ k \in \mathbb{N}\} \,, \end{cases}$$

2. h_s^{i+1} solution de

$$h_s^{i+1} \Delta x \, (\mathbf{1}_\Omega \cdot \mathbf{1}_P) = V - \Delta x (\mathbf{H}_f^{i+1} \cdot (\mathbf{1}_\Omega - \mathbf{1}_P)) \,,$$

3. mettre à jour $\mathbf{H}_f^i$ suivant

$$\begin{cases} (\mathbf{H}_f^i)_j = h_s^i, & si \ \ (\mathbf{P}^i)_j > 0 \,, \\ (\mathbf{H}_f^i)_j = (\mathbf{H}_f^{i-1})_j, & si \ \ (\mathbf{P}^i)_j = 0 \,. \end{cases}$$

Les notations suivantes on été introduites : $\mathbf{1}_P \in \mathbb{R}^N$ est le vecteur défini par

$$\begin{cases} (\mathbf{1}_P)_j = 1, & si \ \ (p^i)_j > 0 \,, \\ (\mathbf{1}_P)_j = 0, & si \ \ (p^i)_j = 0 \,, \end{cases}$$

et $\mathbf{1}_\Omega \in \mathbb{R}^N$ est le vecteur défini par $(\mathbf{1}_\Omega)_j = 1 \ \forall \ j \in \mathbb{N}^+$.

3.3.1 Validation de la formulation d'optimisation duale dans le cas de l'écrasement d'une goutte

On se place ici dans le cas d'une goutte de forme initiale carré, afin de pouvoir examiner le comportement de cette solution par rapport à la solution théorique. On fixe les paramètres suivants :

$$K = \frac{1}{12}, \ \ \Delta t = 0.02, \ \ c = 0.1, \ \ f = 1, \ \ h_0 = 1, \ \ r_0 = 0.5 \,,$$

Sur la figure (3.8) sont représentées la hauteur h^i obtenue selon la solution exacte (3.11), la solution obtenue par optimisation (3.16) et celle par éléments finis à partir de (3.30).

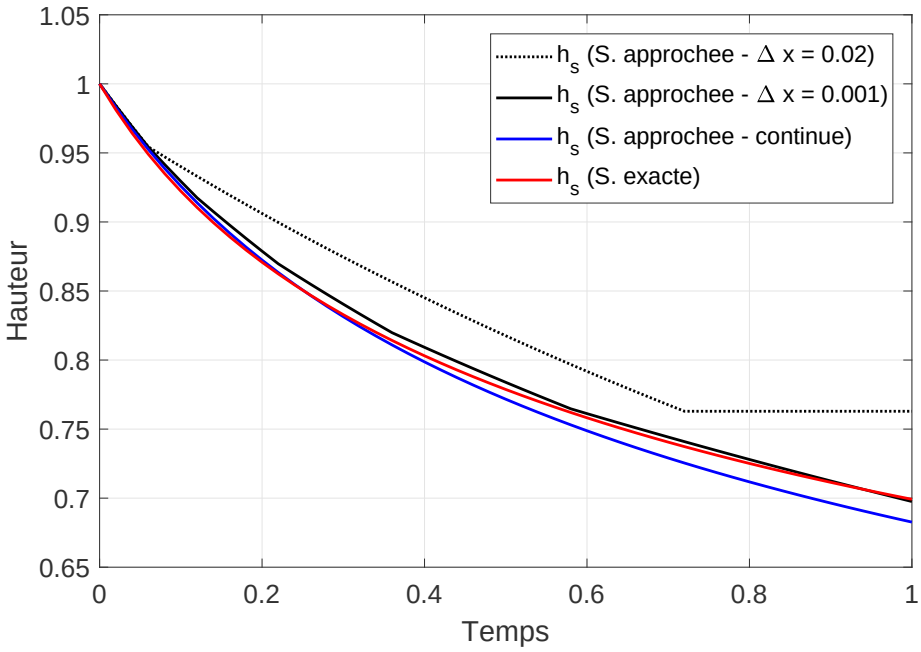


FIGURE 3.8 – Évolution de la hauteur adimensionnée de la goutte en fonction du temps t adimensionnée. Solution approchée de façon discrète (courbes noires), solution approché de façon continue en espace (courbe bleu), solution exacte (courbe rouge) en considérant $K = \frac{1}{12}, \Delta t = 0.02, c = 0.1, f = 1, h_0 = 1$ et $r_0 = 0.5$.

On remarque que l'approche par éléments finis fournit une bonne approximation de la solution exacte. On remarque aussi que Δx doit être bien choisi, car s'il est trop grand le front de propagation du fluide a une vitesse telle que le modèle discret ne peut pas le suivre : dans ce cas le modèle discret reste « bloqué » à partir d'un certain instant comme on peut le voir sur la courbe noire en pointillés sur la figure 3.8.

L'effet du choix du pas de discrétisation spatiale est montré de façon comparative pour trois valeurs de Δx sur la figure 3.9. On représente l'évolution en temps de l'erreur

$$\delta = \left| \frac{h_{approche}(t) - h_{exacte}(t)}{h_{exacte}(t)} \right|$$

pour tout instant $t \in [0,1]$, et on observe que cette différence devient petite lorsque la discrétisation spatiale est plus fine.

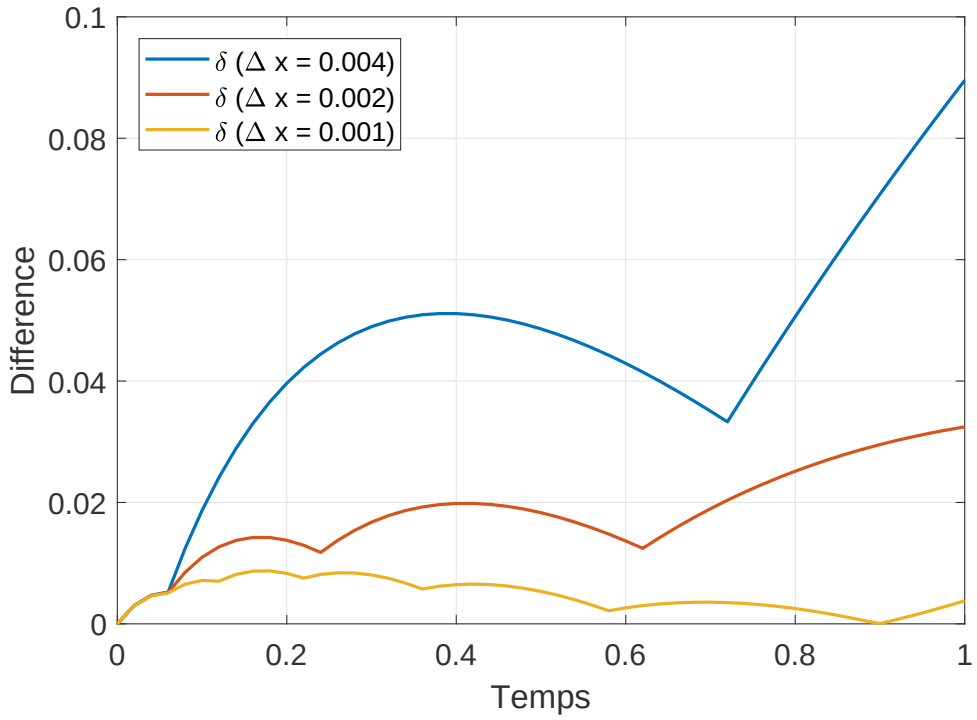


FIGURE 3.9 – Évolution de la différence entre la hauteur adimensionnée de la goutte calculée de façon approché (optimisation) et la solution exacte, en fonction du temps t adimensionnée en considérant $K = \frac{1}{12}, \Delta t = 0.02, c = 0.1, f = 1, h_0 = 1$ et $r_0 = 0.5$.

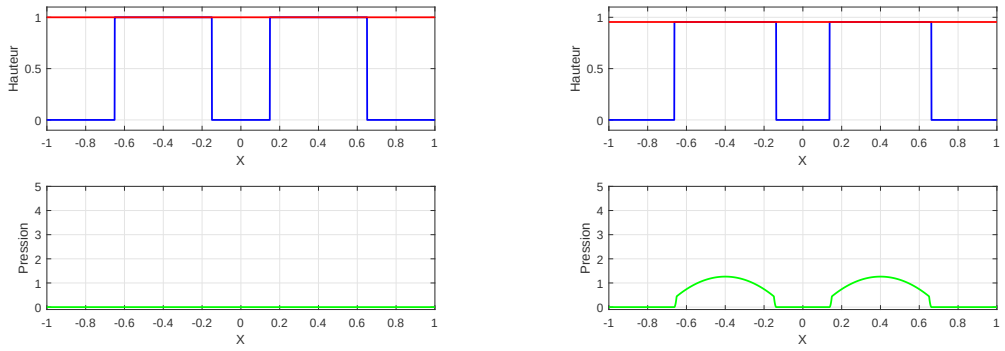
3.3.2 Application de la formulation d'optimisation duale au cas de deux gouttes carrées

Un des avantages de l'approche présentée ci-dessus est de pouvoir aborder le cas de l'étalement de plusieurs gouttes sans modifier la démarche proposée. Il suffit de se donner $\mathbf{H}_f^0$ décrivant la position initiale de toutes les gouttes. Par exemple, si on se donne

$$h_f^0 = 1 \; \forall \; x \; \in [-0.65, -0.15] \cup [0.15, 0.65] \, ,$$

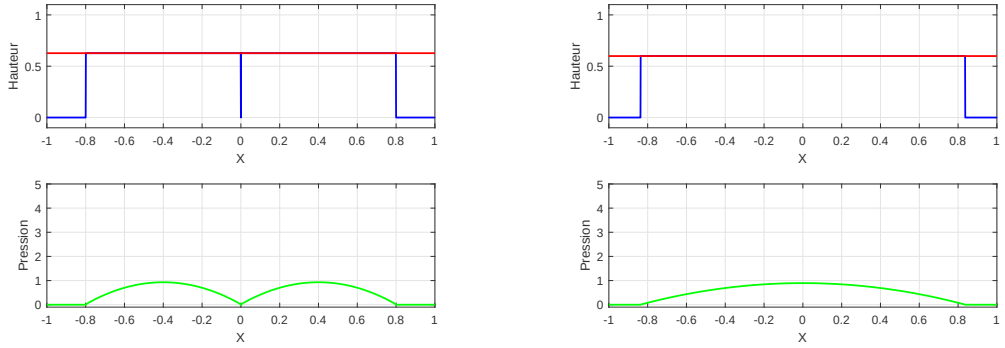
décrivant une position initiale des gouttes comme celle représenté sur la figure 3.10a, on en déduit l'évolution du système représentée sur l'ensemble des figures

3.10b - 3.10d à différents instants.



(a) Configuration de référence

(b) $t_i = 0.02$



(c) $t_i = 0.48$

(d) $t_i = 1.00$

FIGURE 3.10 – Évolution de la position de la barre rigide (courbe rouge), la forme de la goutte (courbe bleue) et du champ de pression (courbe vert) pour différentes valeurs de t_i en considérant $K = \frac{1}{12}, \Delta t = 0.02, c = 0.1, \Delta x = 0.001$ et $f = 1$.

L'évolution de la hauteur de la plaque rigide au cours du temps est représentée sur la figure 3.11.

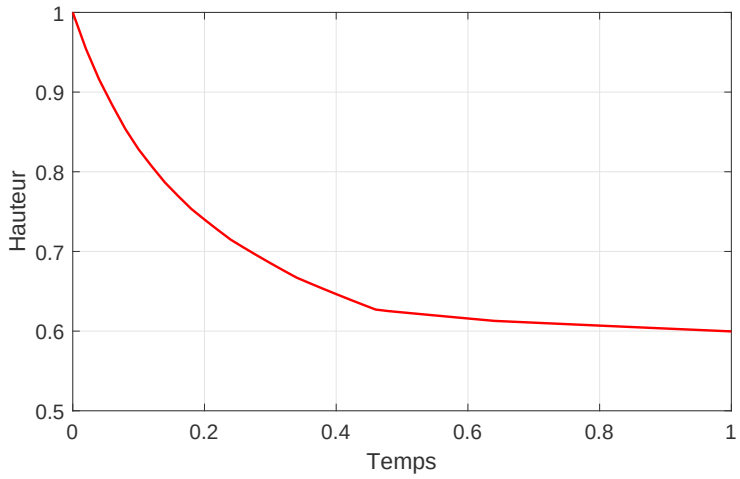


FIGURE 3.11 – Évolution de la hauteur de la plaque en fonction du temps en considérant $K = \frac{1}{12}, \Delta t = 0.02, c = 0.1, \Delta x = 0.001$ et $f = 1$.

et des fronts de propagation de fluide dans la figure (3.12).

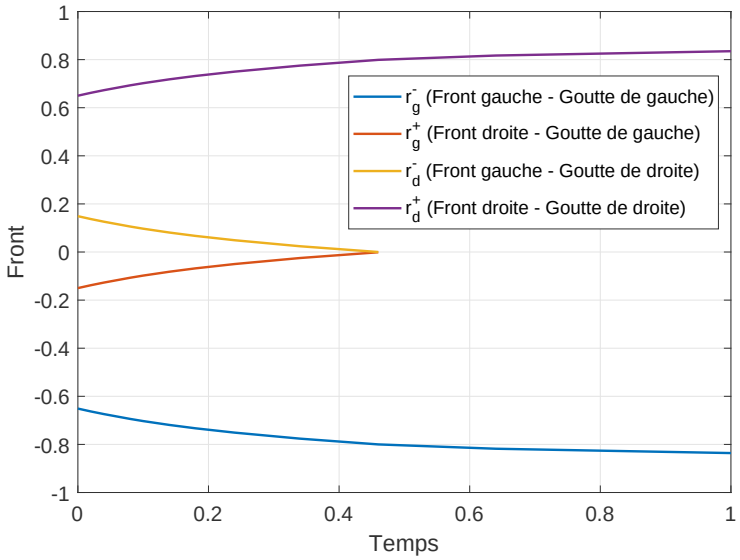


FIGURE 3.12 – Positions des frontières des gouttes en considérant $K = \frac{1}{12}, \Delta t = 0.02, c = 0.1, \Delta x = 0.001$ et $f = 1$. r_g^- et r_g^+ représentent les positions des fronts de propagation du fluide de la goutte de gauche et r_d^- et r_d^+ les positions des fronts de propagation du fluide de la goutte de droite.

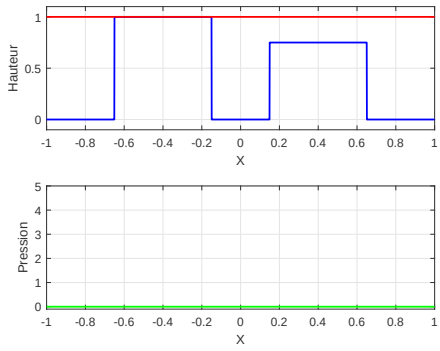
On observe sur les figures 3.11 et 3.12 l'instant auquel les gouttes fusionnent et deviennent une goutte unique. Pour le jeu de paramètres choisi, cet instant vaut $t = 0.48$ qui est très proche de l'instant $t = 0.4743$ obtenu en supposant que chaque goutte est écrasée avec une force $f/2$ et en utilisant la solution analytique donnée par l'équation (3.13).

3.3.3 Application de la formulation d'optimisation duale au cas de deux gouttes carrées de hauteur initiale différente

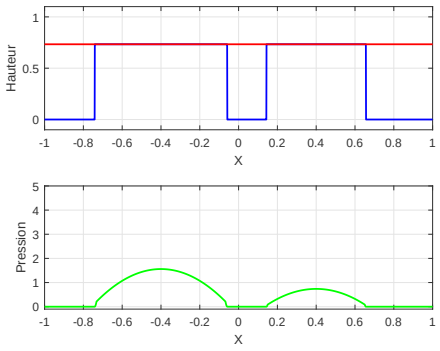
Un autre exemple est donné par la configuration initiale

$$h_f^0 = 1 \ \forall \ x \ \in [-0.65, -0.15] \text{ et } h_f^0 = 0.75 \ \forall \ x \ \in [-0.65, -0.15] \, ,$$

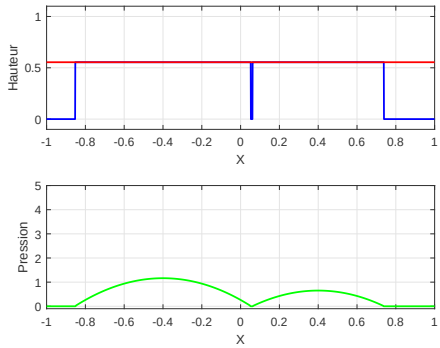
décrivant une position initiale des gouttes comme celle représenté sur la figure 3.13a, L'évolution du système est représenté sur l'ensemble des figures 3.13b - 3.13d à différents instants du temps.



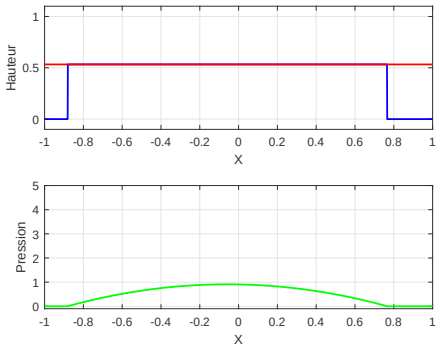
(a) Configuration de référence



(b) Configuration avec contact à $t_i = 0.08$



(c) Configuration avec contact à $t_i = 0.56$



(d) Configuration avec contact à $t_i = 1.00$

FIGURE 3.13 – Évolution de la position de la barre rigide (courbe rouge), la forme de la goutte (courbe bleue) et le champ pression (courbe vert) pour différentes valeurs de t_i en considérant $K = \frac{1}{12}, \Delta t = 0.02, c = 0.1, \Delta x = 0.001$ et $f = 1$.

L'évolution des fronts de propagation est représentée dans ce cas sur la figure 3.14

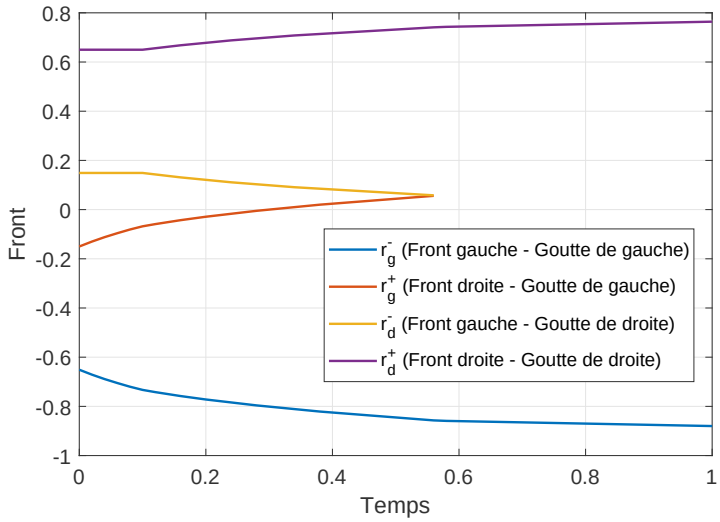


FIGURE 3.14 – Positions des frontières des gouttes en considérant $K = \frac{1}{12}, \Delta t = 0.02, c = 0.1, \Delta x = 0.001$ et $f = 1$. r_g^- et r_g^+ représentent les positions des fronts de propagation du fluide de la goutte de gauche et r_d^- et r_d^+ les positions des fronts de propagation du fluide de la goutte de droite.

et une évolution de la hauteur de la plaque montré dans la figure (3.15)

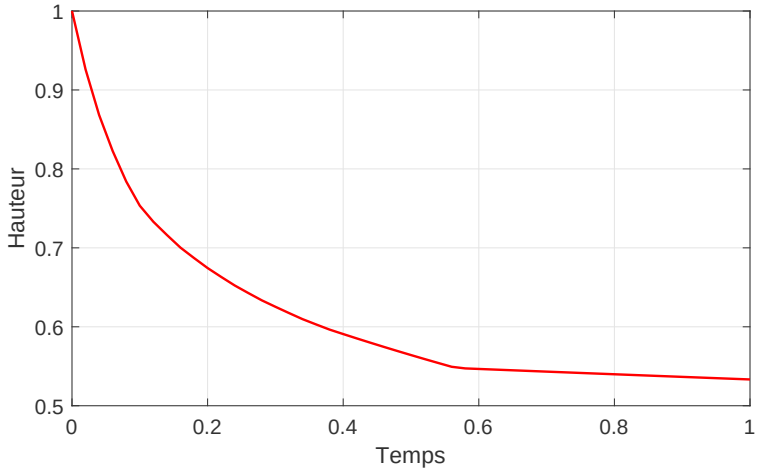


FIGURE 3.15 – Évolution de la hauteur de la plaque en fonction du temps en considérant $K = \frac{1}{12}, \Delta t = 0.02, c = 0.1, \Delta x = 0.001$ et $f = 1$.

On observe qu'initialement seule la plus grande goutte s'étale, car elle est la première à être en contact avec la plaque rigide, et après un temps $t = 0.08$, qui est en accord avec la solution exacte donnée par l'équation (3.12), la deuxième goutte entre aussi en contact avec la plaque et commence à s'étaler. À l'instant $t = 0.56$, les deux gouttes fusionnent en une seule goutte en raison de la rencontre des fronts de propagation. Tout le processus décrit ci dessus est automatiquement calculé comme résultat du processus d'optimisation numérique, aucune hypothèse est faite sur l'instant auquel la deuxième goutte commence à s'étaler ou sur l'instant auquel les gouttes fusionnent. C'est cette caractéristique de l'approche d'optimisation dont on pourra tirer profit pour analyser d'autres problèmes comme le remplissage de l'interface entre un film élastique et une surface parfaitement rigide dans la section suivante.

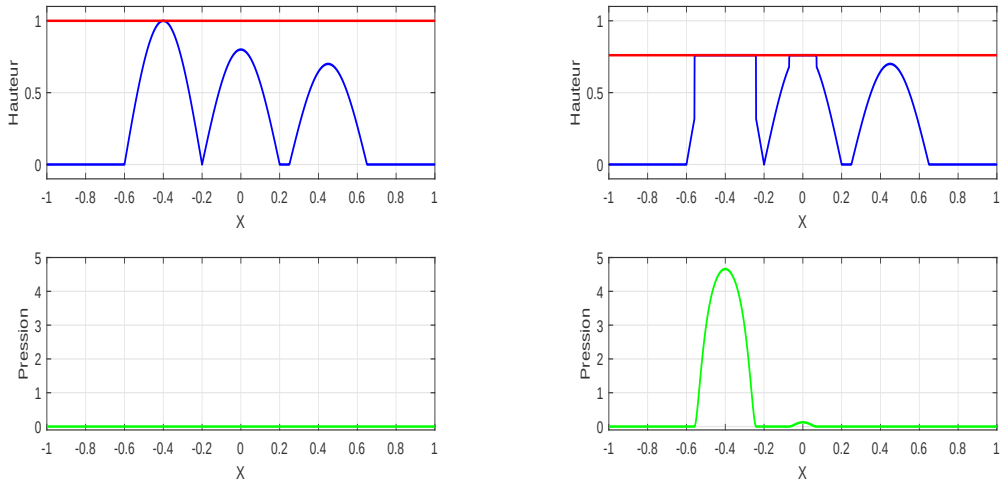
3.3.4 Application de la formulation d'optimisation duale au cas de gouttes de formes quelconques

La puissance de la démarche établie ici peut être appréciée dans d'autres situations, comme l'étalement d'une goutte de forme initiale quelconque. Illustrons cela sur le cas où on considère un ensemble de trois goutes, chacune de différente hauteur initiale. On peut décrire la forme initiale de cette ensemble des gouttes par

$$h_f^0 = \begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{2r_0}(x+2r_0)\right) & \text{si } x \in [-3r_0, -r_0] \\ 0.8\cos\left(\frac{\pi}{2r_0}(x)\right) & \text{si } x \in [-r_0, r_0] \\ 0.7\cos\left(\frac{\pi}{2r_0}(x-2.25r_0)\right) & \text{si } x \in [1.25r_0, 3.25r_0] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Dans cette situation il est très compliqué d'obtenir une solution analytique car en plus des hypothèses sur l'extension de la région de contact on doit faire des hypothèses sur la forme que prend la goutte en se déformant, c'est à dire sur la transition entre une goutte aux parois en forme de cosinus et une goutte aux parois complètement droites. Ceci pour chaque goutte entrant en contact avec la barre rigide, en plus on doit prévoir l'interaction (coalescence) entre les

différentes gouttes. Cependant, l'approche présentée dans la section précédente est facilement applicable car il suffit de modifier la forme initiale de la goutte et l'algorithme est capable de gérer ce changement de forme. On peut apprécier le résultat sur la figure 3.16



(a) Configuration de référence

(b) $t_i = 0.01$

(c) $t_i = 0.07$

(d) $t_i = 1.00$

FIGURE 3.16 – Évolution de la position de la barre rigide (courbe rouge), la forme de la goutte (courbe bleue) et le champ pression (courbe vert) pour différentes valeurs de t_i en considérant $K = \frac{1}{12}, \Delta t = 0.01, c = 0.1, \Delta x = 0.001$ et $f = 1$.

3.4 Application de la méthode d'optimisation au problème de remplissage d'une fissure

En ayant validé la démarche proposée pour traiter le problème à frontière libre dans le cas de l'écrasement d'une goutte par une plaque rigide, on propose dans cette section d'appliquer cette démarche au cas d'une poutre élastique attachée à ses extrémités, qui est un modèle simplifié du problème du remplissage d'une fissure à longueur fixé. Étant donnée la réponse élastique du film, il faut modifier le fonctionnelle à optimiser pour prendre en compte la réponse élastique du film. On peut alors utiliser la même démarche que dans la section 3.2 et partir de l'équation local modélisant la réponse élastique du film.

La principale différence entre le remplissage d'une fissure et l'écrasement d'une goutte par une plaque rigide est la réponse de la composante solide. Dans la section précédente, on considérait une plaque parfaitement rigide, alors la fonction qui décrivait la position du solide, était constante sur tout le domaine et dépendait uniquement du temps, on notait cette fonction par $h_s(t)$. Par contre, dans le cas décrit dans le chapitre 2 la partie solide du problème était constitué par un film élastique dont la réponse élastique était donnée par l'équation (2.2), soit

$$N\frac{\partial^2 H_s}{\partial X^2} + P = 0 \ \ \forall \ \ X \in [-L_s, L_s]\,,$$

avec les conditions aux extrémités $H_s(T,-L_s) = H_s(T,L_s) = 0$ qui, en adimensionnant selon (3.4), peut s'écrire comme

$$K_s h'' + p = 0 \ \ \forall \ \ x \in [-\ell_s, \ell_s]\,, \tag{3.39}$$

avec des conditions aux extrémités $h_s(t,-\ell_s) = h_s(t,\ell_s) = 0$. Où ℓ_s est la demi-longueur de fissuration et K_s la constante de rigidité adimensionnée du solide, définie comme $K_s := \frac{NH_r}{\rho U_r^2 L_r^2}$. L'équation régissant le fluide est l'équation de Reynolds (3.15) et le couplage entre le solide et le fluide est bien décrit par la relation (3.31).

Alors on propose d'approcher cette problème avec la même démarche de la

section précédent sauf que cette fois-ci la fonction $h_s(t,x)$ dépends du temps et de l'espace et devra satisfaire l'équation différentielle (3.39). Dans la démarche utilisée pour établir le fonctionnelle $J(h,p)$ dans la section 3.2 on reconnait le terme fh représentant le travail fourni par la force f au système. Dans le cas d'une fil élastique on peut remplacer ce terme fh par l'énergie de déformation du film $\int_\Omega \frac{1}{2}K_s(h')^2dx$, avec lequel le fonctionnel régularisé s'écrit

$$J(h,p) := \int_\Omega \left(\frac{1}{2}K_s(h')^2 - p(h-h_{i-1}) - \frac{1}{2}\Delta tK\left(h_{i-1}^3 + c\right)(p')^2\right)dx, \tag{3.40}$$

où Ω est un domaine plus grande que le domaine de la fissure ($[-\ell,\ell] \subset \Omega$). On peut montrer que la condition d'optimalité par rapport à h nous donne bien l'équation (3.39) et la condition d'optimalité par rapport à p nous donne bien l'équation (3.14). Alors, l'évolution du problème en temps discret, consiste à trouver h_s^i et p^i solution du problème

$$\begin{cases} J(h_s^i,p^i) = \inf_{h\in\mathcal{C}_h}\sup_{p\in\mathcal{C}_p} J(h,p)\,, \\ \mathcal{C}_h = \{h\in H^1(\Omega):\ \ h\geq 0 \text{ et } h(-\ell)=h(\ell)=0\ \ \forall x\in\Omega\}\,, \\ \mathcal{C}_p = \{p\in H^1(\Omega):\ \ p\geq 0\ \ \forall x\in\Omega\}\,, \end{cases}$$

et h_f^i suivant

$$\begin{cases} h_f^i = h_s^i, & \forall x\in\Omega \quad si\ \ p^i>0\,, \\ h_f^i = h_f^{i-1}, & \forall x\in\Omega \quad si\ \ p^i=0\,. \end{cases}$$

pour chaque instante $(t_i)_{i\geq 1}$, en considérant la condition initial h_f^0 tel que $\int_\Omega h_f^0 dx = V$.

En utilisant (3.34) et (3.36), on peut discrétiser le fonctionnelle $J(h,p)$ et l'écrire comme

$$J^d(\mathbf{H},\mathbf{P}) = \frac{1}{2}\mathbf{H}^T\cdot(\mathbb{K}_{hh})\cdot\mathbf{H} - \mathbf{P}^T\mathbb{K}_{hp}\left(\mathbf{H}-\mathbf{H}_f^{i-1}\right) - \frac{1}{2}\mathbf{P}^T\cdot\left(\mathbb{K}_{pp}\right)\cdot\mathbf{P}\,, \tag{3.41}$$

qui est une forme quadratique en $\mathbf{H}$ et $\mathbf{P}$, avec :

— $\mathbb{K}_{hh}$ la matrice définie par $(\mathbb{K}_{hh})_{i,j} = \int_\Omega K_s\psi_i'(x)\psi_j'(x)dx$,
— $\mathbb{K}_{hp}$ la matrice définie par $(\mathbb{K}_{hp})_{i,j} = \int_\Omega \psi_i(x)\psi_j(x)dx$,
— $\mathbb{K}_{pp}$ la matrice définie par $(\mathbb{K}_{pp})_{i,j} = \int_\Omega \Delta tK((h_f^{i-1}(x))^3+c)\psi_i'(x)\psi_j'(x)dx$,

— $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^N$ le vecteur de hauteur de solide dont la j^{eme} composante vaut $h_s(x_j)$,
— $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^N$ le vecteur de pression de contact dont la j^{eme} composante vaut $p(x_j)$,
— $\mathbf{H}_f^{i-1} \in \mathbb{R}^N$ le vecteur de hauteur de fluide dont la j^{eme} composante vaut $h_f^{i-1}(x_j)$,

Finalement l'évolution du problème discrétisé s'écrit comme

Étant donné $\mathbf{H}_f^0$ pour tout instant $(t_i)_{i\in\mathbb{N}^+}$:

1. $\mathbf{H}_s^i, \mathbf{P}^i$ solution du problème

$$\begin{cases} J^d(\mathbf{H}_s^i, \mathbf{P}^i) = \inf_{h\in\mathcal{C}_h} \sup_{p\in\mathcal{C}_p} J^d(\mathbf{H}, \mathbf{P}) \,, \\ \mathcal{C}_h^d = \{H \in \mathbb{R}^N : H_k \geq 0 \ \geq 0 \ \forall\, k \in \mathbb{N},\ H_1 = H_N = 0\} \,, \\ \mathcal{C}_P^d = \{P \in \mathbb{R}^N : P_k \geq 0 \ \forall\, k \in \mathbb{N}\} \,, \end{cases} .$$

2. Mettre à jour $\mathbf{H}_f^i$ suivant

$$\begin{cases} (\mathbf{H}_f^i)_j = (\mathbf{H}_s^i)_j, \ \text{si} \ (\mathbf{P}^i)_j > 0 \,, \\ (\mathbf{H}_f^i)_j = (\mathbf{H}_f^{i-1})_j, \ \text{si} \ (\mathbf{P}^i)_j = 0 \,, \end{cases}$$

Il nous reste à résoudre numériquement le problème dual d'optimisation Inf-Sup à l'instant t_i. Pour ce faire, on propose d'introduire l'algorithme d'Uzawa décrit par M. Fortin et R. Glowinski [15]. Il s'agit d'une méthode du type gradient avec projection appliquée au problème dual. Le gradient avec projection permet de prendre en compte la contrainte de positivité du champ $p(x)$. L'algorithme proposé pour résoudre le problème Inf-Sup peut alors s'écrire

Algorithme d'Uzawa :

1. Initialisation : choix de $\mathbf{P}_0 \in \mathcal{C}_P^d$
2. Pour $k = 1, 2, \ldots$ faire :
   (a) Trouver $\mathbf{H}_k$ solution du problème $\inf_{\mathbf{H}\in\mathcal{C}_h^d} J^d(\mathbf{H}, \mathbf{P}_{k-1})$
   (b) Vérifier si le critère d'arrêt est satisfait ($\|\mathbf{P}_k - \mathbf{P}_{k-1}\|_\infty \leq tol$).
   (c) $\mathbf{P}_k = \mathbf{P}_{k-1} + \alpha\, (\nabla_P J^d(\mathbf{H}_k, \mathbf{P}_{k-1}))^+$, où $\alpha > 0$ est un pas bien choisi.

Dans la suite on propose d'analyser deux exemples d'application de la démarche proposée dans ce chapitre. Les cas d'analyse sont : une goutte carrée à l'intérieur d'un film élastique et doux gouttes paraboliques à l'intérieur d'un film soumis à l'injection d'un fluide.

3.4.1 Goutte centrée

Le premier cas d'analyse consiste à une goutte centrée à l'origine des coordonnées é à l'intérieur d'un film élastique. On représente la configuration initiale de cette goutte sur la figure 3.17. On propose le support initiale sur l'intervalle $[-0.5, 0.5]$ et un film élastique défini sur $\Omega = [-1, 1]$.

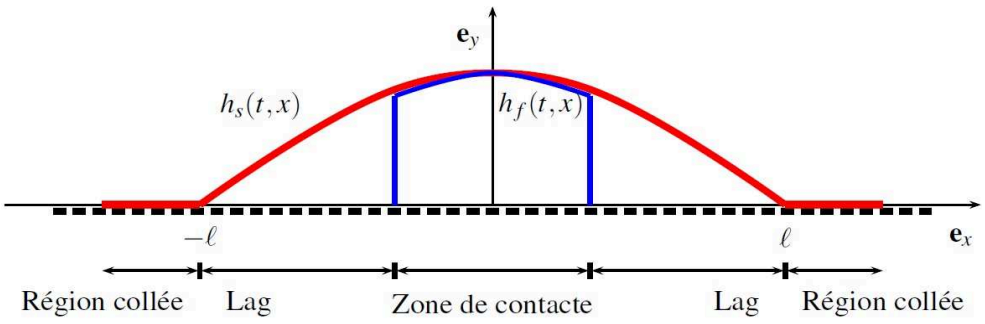
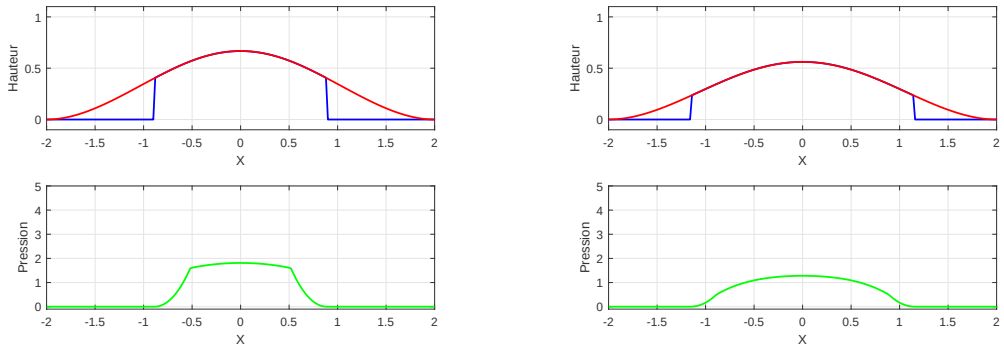


FIGURE 3.17 – Film élastique contenant une goutte visqueux à l'interface.

On fixe les paramètres suivants,

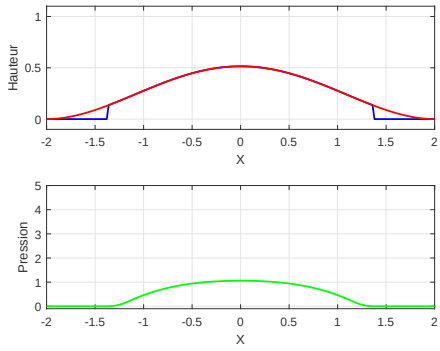
$$K_s = 1,\ K = 100,\ \Delta t = 0.02,\ \Delta x = 0.004,\ c = 0.1,\ h_0 = 1,\ r_0 = 0.5\ ,$$

et on obtient l'évolution du système pour différents instants du temps sur la figure 3.18.

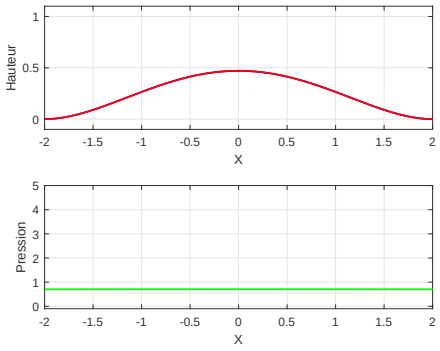


(a) $t_i = 0.1$

(b) $t_i = 0.2$



(c) $t_i = 0.3$



(d) $t_i = 0.6$

FIGURE 3.18 – Évolution de la forme de la goutte (courbe bleue), déformé du film (courbe rouge) et champ pression (courbe vert) pour différentes instants t_i en considérant $K_s = 1$, $K = 100$, $\Delta t = 0.1$, $\Delta x = 0.004$, $c = 0.1$ et $h_0 = 1$.

3.4.2 Goutte avec injection de fluide

En profitant des avantages de la démarche proposée dans la subsection précédent, on propose maintenant d'analyser le cas d'un ensemble de deux gouttes paraboliques à l'intérieur d'un film soumis à l'injection d'un fluide. On représente la configuration initiale de cet ensemble sur la figure 3.19. En plus on considère l'injection au point $x_0 = 0$ d'un débit adimensionné de fluide $q_0(t)$ fonction du temps.

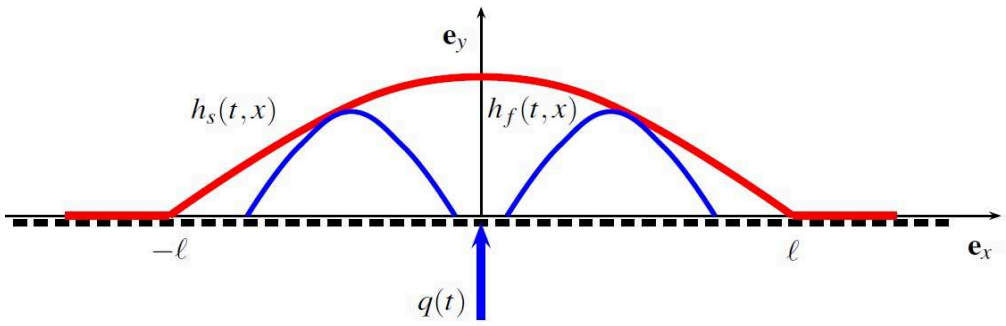


FIGURE 3.19 – Film élastique contenant une goutte à l'interface avec injection de fluide.

Ce dernier cas est conçu pour montrer la flexibilité du modèle proposé, notamment du lagrangien. L'injection du fluide est considérée comme une force extérieure pour le fluide et donc le lagrangien doit incorporer le travail développé par cette force. Il s'écrit donc

$$J(h,p) = \int_{\Omega_s} \left(\frac{1}{2} k_s (h'')^2 - p(h - h_f^{i-1}) - \frac{1}{2} \Delta t k_f \left((h_f^{i-1})^3 + c \right) (p')^2 \right) dx + p(t_i, 0) q_0(t_i) \tag{3.42}$$

que l'on peut réécrire de façon discrète, en faisant la même démarche que dans la section traitement numérique du chapitre 3

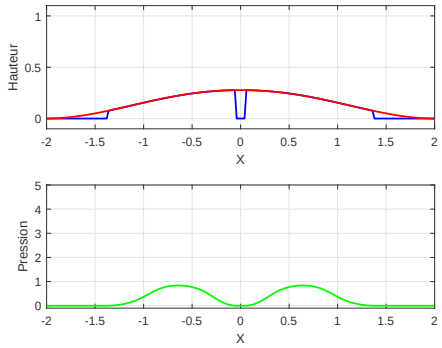
$$J^d(\mathbf{H},\mathbf{P}) = \frac{1}{2}\mathbf{H}^T \cdot \mathbb{K}_{hh} \cdot \mathbf{H} - \mathbf{P}^T \cdot \mathbb{K}_{hp} \cdot (\mathbf{H} - \mathbf{H}_f^{i-1}) - \frac{1}{2}\mathbf{P}^T \cdot \mathbb{K}_{pp} \cdot \mathbf{P} + \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{Q}_0 \tag{3.43}$$

où, $\mathbf{Q}_0 \in \mathbb{R}^N$ est le vecteur débit dont les composantes valent 0 sauf dans le cas $x_j = 0$, dans ce cas $(\mathbf{Q}_0)_j = q_0(t_i)$.

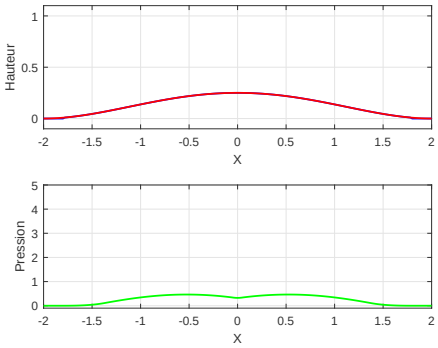
On propose alors un support initiale sur l'intervalle $[-0.75, -0.25] \bigcup [0.25, 0.75]$ et un film défini sur l'intervalle $\Omega = [-1, 1]$. On considère les mêmes paramètres et la même discrétisation spatio-temporelle que dans les cas précédents et on définit le débit par

$$q_0(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t \leq 1 \\ 2, & \text{si } 1 < t \leq 2 \\ 0, & \text{si } t > 2 \end{cases}$$

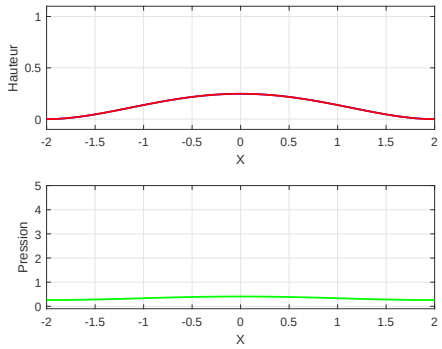
Après l'implémentation numérique on obtient alors les résultats présentés sur l'ensemble de figures 3.20.



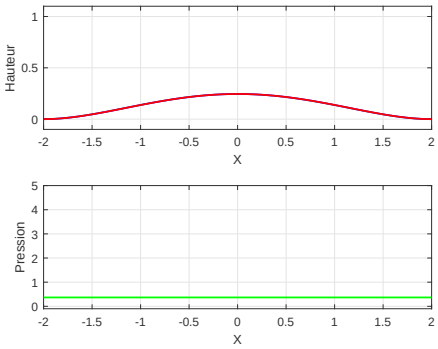
(a) $t_i = 0.1$



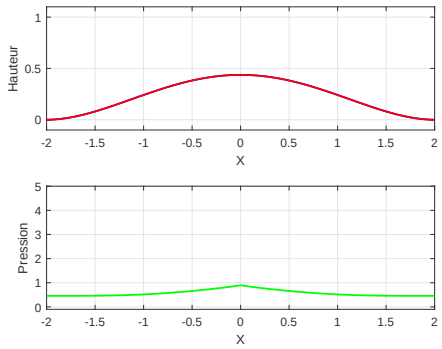
(b) $t_i = 0.2$



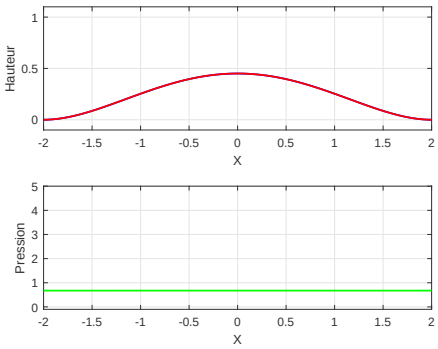
(c) $t_i = 0.4$



(d) injection du débit à $t_i = 1$



(e) Arrêt de l'injection du débit à $t_i = 2$



(f) $t_i = 3$

FIGURE 3.20 – Évolution de la forme de la goutte (courbe bleu), déformée du film (courbe rouge) et champ de pression (courbe vert) pour différentes valeurs de t_i.

On observe entre les figures 4.11b et 4.11c, une évolution similaire à celle décrit dans la subsection précédent pour le cas de l'écrasement des gouttes de forme quelconque. On observer la transition de forme parabolique vers une forme carrée des gouttes et la fusion des gouttes jusqu'au remplissage de l'espace entre le film et le substrat, instant auquel on ajoute le débit de fluide. On observe alors le changement de la forme du champ de pression (figure 4.11d) à partir e cet instant, qui fait augmenter le volume du domaine fluide et aussi la déformation du film, pour finalement s'arrêter au temps $t_i = 5$. Après cet instant, le champ de pression continue à évoluer jusqu'à obtenir une distribution presque uniforme sur tout le domaine.

Les résultats présentés montrent un comportement acceptable du point de vue qualitatif, mais en absence d'une méthode de validation on ne peut pas assurer l'exactitude de ces résultats comme solution du problème. On doit mentionner de plus, que contrairement au cas de l'écrasement d'une goute par une barre rigide, la condition de conservation de volume n'a pas été imposée dans l'algorithme de solution et on observe une perte de volume numérique. Ce défaut appartient uniquement au cas d'un film élastique et l'on considère qu'il est lié à l'algorithme de solution numérique du problème d'optimisation duale. Alors, d'autres méthodes d'optimisation duale peuvent être proposées en gardant la démarche établie car celle a été déjà validée précédemment.

Chapitre 4

Régularisation de l'équation de Reynolds par développement asymptotique

L'hypothèse principale de l'approximation de lubrification, qui conduit à l'équation de Reynolds, est la faible épaisseur du fluide devant les directions transversales [26]. Cette hypothèse permet de réduire la description de l'écoulement d'une modélisation tridimensionnelle à une description bidimensionnelle. Dans le cas d'un écoulement dans une fissure, cette approximation est justifiée dans presque tout le domaine de la fissure sauf en pointe de fissure où l'écoulement vertical peut ne plus être négligeable devant l'écoulement horizontal. Tenir compte de la vitesse dans la direction verticale peut conduire à donner une meilleure description du champ de pression près du front de propagation de fissure.

Dans ce chapitre on propose d'examiner les effets des termes du deuxième ordre dans l'équation de Reynolds, en prenant comme référence les travaux de A. Tamizer [45] et J. Fabricius et al [14], qui abordent la même problématique mais dans le contexte des problèmes de lubrification et inclusion des rugosités. On étudie l'écoulement d'un fluide newtonien s'écoulant entre deux plaques rigides. On considère que cet écoulement est invariant dans la direction Z de sorte que l'on peut l'analyser dans le plan OXY en considérant une profondeur

unitaire. On modélise l'écoulement par les équations de Navier-Stokes et on fait l'hypothèse de « film mince » en gardant les termes d'ordres supérieurs pour finalement écrire une version modifiée de l'équation de Reynolds qui tient compte des effets du deuxième ordre. Cette équation modifiée sera comparée à l'équation de Reynolds standard pour analyser l'influence de la géométrie de la plaque sur le champ pression.

4.1 Géométrie du conduit et formulation du problème

Supposons un conduit défini par deux plaques ; l'une parfaitement plane et l'autre décrite par la fonction $Y = H(X,T)$. Supposons de plus que l'espace compris entre les deux plaques est rempli par un fluide newtonien, qui s'écoule dans le sens des X croissants. La géométrie du problème est schématisée sur la figure 4.1.

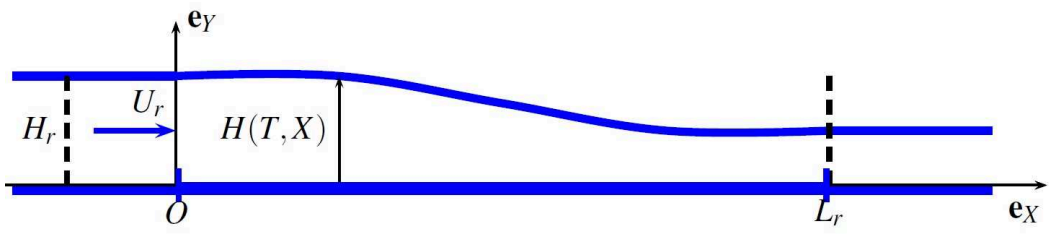


FIGURE 4.1 – Géométrie du problème.

On va concentrer notre analyse sur la région $\Omega = \{(X,Y) \in \mathbb{R}^2 \ : 0 \leq X \leq L_r \text{ et } 0 \leq Y \leq H(T,X)\}$, hors de laquelle les plaques seront considérées parallèles et parfaitement horizontales de sorte que l'écoulement associé est horizontal et décrit par la loi de Poiseuile [26].

Pour décrire l'évolution de l'écoulement développe entre les plaques dans la région Ω, on part des équations de Navier-Stokes pour un fluide newtonien incompressible de densité ρ et de viscosité cinématique constante ν, dont les inconnues sont le champ de vitesse $\mathbf{U} = U\mathbf{e}_X + W\mathbf{e}_Y$ et le champ de pression P.

L'écoulement est donc décrit par le bilan de quantité de mouvement

$$\partial_T \mathbf{U} + (\mathbf{U}\cdot\nabla)\mathbf{U} + \frac{1}{\rho}\nabla P = \nu\Delta\mathbf{U}$$

et le bilan de masse

$$\nabla\cdot\mathbf{U} = 0\,.$$

On munit ces équations des conditions aux frontières suivantes. On considère que la plaque inférieure ne se déplace pas. La condition de non-glissement s'écrit donc

$$\mathbf{U} = 0 \;\; \forall\, \mathbf{X} \in \{\mathbf{X} : Y = 0\}\;.$$

On considère aussi que la plaque supérieure se déplace verticalement et la condition de non-glissement sur cette plaque s'écrit

$$\mathbf{U} = \partial_T H \mathbf{e}_Y \;\; \forall\, \mathbf{X} \in \{\mathbf{X} : Y = H(T,X)\}\;.$$

Finalement, on considère une distribution du champ de vitesse suivant la loi de Poiseuille à l'extrémité gauche du domaine Ω, qui s'écrit en fonction de sa valeur moyenne comme

$$\mathbf{U} = U_r\left(\frac{Y}{H}\right)\left(1-\frac{Y}{H}\right)\mathbf{e}_X \;\; \forall\, \mathbf{X} \in \{\mathbf{X} : X = 0\}\;.$$

4.2 Adimensionnement des équations

Considérons l'épaisseur maximale entre plaques noté H_r, la longueur horizontale du domaine étudie L_r et la vitesse moyenne de l'écoulement à l'entrée U_r. Ces paramètres nous permettent de définir les changements de variables suivants :

$$X = L_r x,\; Y = H_r y,\; H(T,X) = H_r h(t,x),\; \mathbf{U} = U_r\mathbf{u},\; T = \frac{L_r}{U_r}t,\; P = \rho U_r^2 p\;.$$

avec $\mathbf{u} = u\mathbf{e}_X + w\mathbf{e}_Y$ le champ de vitesse adimenionné et p le champ de pression adimensionné. En substituant ces variables dans les équations de Navier-Stokes,

le bilan de quantité de mouvement s'écrit

$$\partial_t u + u\partial_x u + \frac{L_r}{H_r} w\partial_y u + \partial_x p = \frac{\nu}{U_r L_r}\partial^2_{xx} u + \frac{\nu L_r}{U_r H_r^2}\partial^2_{yy} u \ ,$$

$$\partial_t w + u\partial_x w + \frac{L_r}{H_r} w\partial_y w + \frac{L_r}{H_r}\partial_y p = \frac{\nu}{U_r L_r}\partial^2_{xx} w + \frac{\nu L_r}{U_r H_r^2}\partial^2_{yy} w \ ,$$

et le bilan de masse s'écrit

$$\frac{H_r}{L_r}\partial_x u + \partial_y w = 0 \ .$$

On peut définir les nombres sans dimension $Re := \frac{U_r L_r}{\nu}$ le nombre de Reynolds et $\epsilon := \frac{H_r}{L_r}$ le rapport d'aspect. Le nombre de Reynolds mesure le rapport entre les effets d'inertie et les effets visqueux. La géométrie de l'écoulement entre deux plaques en étude, corresponde bien à la description des films minces où en général les effets inertielles sont considérés négligeables devant les effets visqueux [26], on propose alors de supposer que le nombre de Reynolds est de l'ordre de ϵ, soit $Re = \epsilon R$, où R est de l'ordre de l'unité. Ceci permet d'écrire l'ensemble d'équations de Navier-Stokes comme :

$$\begin{cases} \epsilon^3(\partial_t u + u\partial_x u) + \epsilon^2 w\partial_y u + \epsilon^3\partial_x p = \frac{\epsilon^2}{R}\partial^2_{xx} u + \frac{1}{R}\partial^2_{yy} u \ , \\ \epsilon^3(\partial_t w + u\partial_x w) + \epsilon^2 w\partial_y w + \epsilon^2\partial_y p = \frac{\epsilon^2}{R}\partial^2_{xx} w + \frac{1}{R}\partial^2_{yy} w \ , \\ \epsilon\partial_x u + \partial_y w = 0 \ . \end{cases}$$

L'objectif de ce chapitre est de prendre en compte les effets des ordres supérieures du rapport d'aspect ϵ, qui sont négligés dans l'équation de Reynolds standard. Si l'on suppose que h ne s'annule jamais, on peut proposer le changement $z = y/h$ pour élargir et uniformiser la dimension verticale. Le problème est alors défini sur le domaine uniformisé unitaire représenté sur la figure 4.2

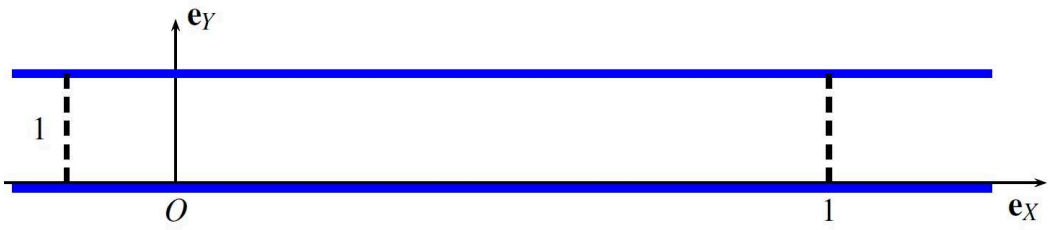


FIGURE 4.2 – Domaine à échelle unitaire.

Le changement de variable proposé implique les formules de dérivation suivantes. Si l'on passe d'une fonction $\tilde{f}(t,x,y)$ à une fonction $f(t,x,z) := \tilde{f}(t,x,hz)$, les dérivées spatiales s'écrivent

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{z}{h}\frac{\partial h}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial z}\ ,\\ \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y} &= \frac{1}{h}\frac{\partial f}{\partial z}\ ,\end{aligned}$$

et la dérivé temporelle

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial t} - \frac{z}{h}\frac{\partial h}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial z}.$$

Les dérivées spatiales d'ordre deux s'écrivent

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2\frac{z}{h}\frac{\partial h}{\partial x}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} + \left(\frac{z}{h}\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + \frac{z}{h}\left(\frac{2}{h}\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2 - \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}\right)\frac{\partial f}{\partial z}\ ,\\ \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial y^2} &= \frac{1}{h^2}\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.\end{aligned}$$

En conséquence, le bilan de quantité de mouvement dans la direction X s'écrit

$$\begin{aligned}&\epsilon^3(h^2\partial_t u - h\partial_t h z\partial_z u) + \epsilon^3(h^2 u\partial_x u - h\partial_x h z u\partial_z u) + \epsilon^2 h w\partial_z u + \epsilon^3(h^2\partial_x p - h\partial_x h z\partial_z p) =\\ &\epsilon^2\left(h^2\partial^2_{xx}u - 2zh\partial_x h\partial^2_{xz}u + (z\partial_x h)^2\partial^2_{zz}u - (h\partial^2_{xx}h - 2(\partial_x h)^2)z\partial_z u\right) + \partial^2_{zz}u \quad (4.1)\end{aligned}$$

et dans la direction Y s'écrit

$$\epsilon^3(h^2\partial_t w - h\partial_t hz\partial_z w) + \epsilon^3(h^2 u\partial_x w - h\partial_x hzu\partial_z w) + \epsilon^2 hw\partial_z w + \epsilon^2 h\partial_z p = \\ \epsilon^2\left(h^2\partial^2_{xx} w - 2zh\partial_x h\partial^2_{xz} w + (z\partial_x h)^2\partial^2_{zz} w - (h\partial^2_{xx} h - 2(\partial_x h)^2)z\partial_z w\right) + \partial^2_{zz} w\,. \quad (4.2)$$

De façon similaire, le bilan de masse s'écrit

$$\epsilon(h\partial_x u - \partial_x hz\partial_z u) + \partial_z w = 0\,. \quad (4.3)$$

La condition de non-glissement et déplacement nul de la plaque inférieure s'écrit

$$\mathbf{u} = 0 \;\; \forall\, \mathbf{x} \in \{\mathbf{x} : z = 0\}\;, \quad (4.4)$$

la condition de non-glissement et de déplacement purement vertical de la plaque supérieure s'écrit

$$\mathbf{u} = \epsilon\partial_t h\mathbf{e}_Y \;\; \forall\, \mathbf{x} \in \{\mathbf{x} : z = 1\}\,, \quad (4.5)$$

et la vitesse à l'extrémité gauche s'écrit

$$\mathbf{u} = \left(\frac{z}{h}\right)\left(1 - \frac{z}{h}\right)\mathbf{e}_X \;\; \forall\, \mathbf{x} \in \{\mathbf{x} : x = 0\}\;. \quad (4.6)$$

4.3 Développement asymptotique

On propose maintenant de chercher la solution à l'ensemble d'équations différentielles en utilisant la méthode de développement asymptotique. Cette démarche est inspirée des travaux de G. Bayada et M. Chambat [4], qui montrent que la solution obtenue par développement asymptotique est aussi une solution à la formulation faible de l'équation de Stokes et pour les travaux de A. Tamizer [45] et J. Fabricius [14] dans l'étude de l'influence des rugosités sur l'écoulement des fluides lubrifiantes. On suppose donc que la solution $\{\mathbf{u}, p\}$ satisfaisant l'ensemble d'équations (4.1)-(4.6) peut s'exprimer comme une série de puissances de ϵ :

$$\mathbf{u} = \sum_{i=0}^{2} \epsilon^i \mathbf{u}_i \;\;,\;\; p = \sum_{i=-3}^{-1} \epsilon^i p_i\,. \quad (4.7)$$

4.3.1 Solution à l'ordre dominant

En substituant les expressions (4.7) dans l'ensemble d'équations (4.1)-(4.3), à l'ordre ϵ^{-1} on obtient

$$h\partial_z p_{-3} = 0\,. \tag{4.8}$$

Cette équation nous montre que la pression à l'ordre dominant est indépendant de z, on peut écrire alors

$$p_{-3} = p_{-3}(x,t)\,. \tag{4.9}$$

A l'ordre dominant ou ordre ϵ^0, le bilan de quantité de mouvement (4.1) est

$$h^2\partial_x p_{-3} - h\partial_x hz\partial_z p_{-3} = \frac{1}{R}\partial^2_{zz}u_0\,, \tag{4.10}$$

le bilan (4.2) est

$$h\partial_z p_{-2} = \frac{1}{R}\partial^2_{zz}w_0\,, \tag{4.11}$$

et le bilan de masse (4.3) est

$$\partial_z w_0 = 0\,. \tag{4.12}$$

Grâce au résultat (4.9), l'équation (4.10) est une équation différentielle d'inconnu u_0, qui peut être résolue en considérant les conditions aux bords, $u_0(z=0) = u_0(z=1) = 0$. On obtient alors la vitesse en fonction du gradient du champ pression

$$u_0(t,x,z) = \frac{R}{2}h^2\partial_x p_{-3} z(z-1). \tag{4.13}$$

De façon analogue, on peut résoudre l'équation (4.12) en considérant les conditions aux bords $w_0(z=0) = w_0(z=1) = 0$. On obtient ici

$$w_0(t,x,z) = 0. \tag{4.14}$$

On propose maintenant d'analyser le bilan de masse (4.3) à l'ordre suivant (ordre ϵ), lequel s'écrit

$$h\partial_x u_0 - \partial_x hz\partial_z u_0 + \partial_z w_1 = 0\,. \tag{4.15}$$

En utilisant le résultat (4.13), on peut intégrer l'équation (4.15) par rapport à

z en considérant les conditions aux bords $w_1(z=0)=0$ et $w_1(z=1)=\partial_t h$. On obtient ainsi

$$\frac{R}{12}\partial_x(h^3\partial_x p_{-3}) = \partial_t h\,. \tag{4.16}$$

Résultat qui nous permet d'introduire la fonction $\phi_0(t,x)$ définie par

$$\phi_0(t,x) = -\frac{R}{12}(h^3\partial_x p_{-3}), \tag{4.17}$$

de sorte que l'équation (4.16) s'écrit $\phi_0' = -\dot{h}$ et nous permet alors d'obtenir ϕ_0 en fonction de h

$$\phi_0 = \phi_0|_{x=0} - \int_0^x \dot{h}dx\,. \tag{4.18}$$

On peut maintenant exprimer la pression à l'ordre dominant grâce à (4.17) comme

$$p_{-3} = p_{-3}|_{x=0} - \frac{12}{R}\int_0^x \frac{\phi_0}{h^3}dx\,. \tag{4.19}$$

L'équation (4.13) nous donne l'expression de la composante horizontal de la vitesse à cet ordre comme

$$u_0 = \frac{R}{2}h^2\partial_x p_{-3}(z^2-z) = -6\frac{\phi_0}{h}(z^2-z)\,, \tag{4.20}$$

et finalement, la composante vertical de la vitesse est

$$w_0 = 0\,. \tag{4.21}$$

4.3.2 Effets du premier ordre

De façon similaire au premier ordre (ordre ϵ) le bilan de quantité de mouvement selon (4.1) est

$$h^2\partial_x p_{-2} - zh\partial_x h\partial_z p_{-2} = \frac{1}{R}\partial^2_{zz}u_1\,, \tag{4.22}$$

et le bilan selon (4.2) est

$$h\partial_z p_{-1} = \frac{1}{R}\partial^2_{zz}w_1\,. \tag{4.23}$$

Le résultat (4.14) et l'équation (4.11) nous permettent de montrer qu'à l'ordre

ϵ la pression est aussi indépendante de z,

$$p_{-2} = p_{-2}(t,x)\,. \tag{4.24}$$

Ensuite, en considérant le résultat (4.13), l'équation différentielle de premier ordre et d'inconnue w_1 (4.15), peut se résoudre en considérant la condition de déplacement nul sur la plaque inférieure $w_1(z=0)=0$. Cette équation différentielle nous permet obtenir w_1 de façon explicite

$$w_1 = \frac{R}{2}\left[\partial_x h h^2 \partial_x p_{-3}\left(\frac{2}{3}z^3 - \frac{1}{2}z^2\right) - h\partial_x(h^2\partial_x p_{-3})\left(\frac{1}{3}z^3 - \frac{1}{2}z^2\right)\right]\,, \tag{4.25}$$

De façon similaire, grâce au résultat (4.24), l'équation différentielle (4.22) peut se résoudre en considérant les conditions aux bords $u_1(z=0)=u_1(z=1)=0$ et nous permet déterminer la composante horizontale de la vitesse à l'ordre ϵ,

$$u_1(t,x,z) = \frac{R}{2}h^2\partial_x p_{-2} z(z-1). \tag{4.26}$$

En suivant la même démarche qu'à la section précédente, on propose d'analyser le bilan de masse (4.3) à l'ordre ϵ^2, ceci s'écrit

$$h\partial_x u_1 - z\partial_x h\partial_z u_1 + \partial_z w_2 = 0\,. \tag{4.27}$$

à l'aide du résultat (4.26) on peut intégrer cette équation par rapport à z en considérant les conditions aux bordes $w_2(z=0)=0$ et $w_2(z=1)=0$. On obtient ainsi

$$\frac{R}{12}\partial_x(h^3\partial_x p_{-2}) = 0. \tag{4.28}$$

Résultat qui nous permet d'introduire la fonction $\phi_1(t,x)$ définie comme

$$\phi_1(t,x) = -\frac{R}{12}(h^3\partial_x p_{-2})\,. \tag{4.29}$$

L'équation (4.28) nous permet de montrer que la fonction ϕ_1 est constante et peut s'exprimer comme

$$\phi_1 = \phi_1|_{x=0}\,. \tag{4.30}$$

Le champ pression à l'ordre ϵ est obtenu grâce à (4.29), alors

$$p_{-2} = p_{-2}|_{x=0} - \frac{12}{R}\int_0^x \frac{\phi_1}{h^3} dx\,. \tag{4.31}$$

En injectant cette expression dans l'équation (4.26) on obtient la composante horizontale du champ de vitesse à l'ordre ϵ

$$u_1 = \frac{R}{2}h^2\partial_x p_{-3}(z^2 - z) = -6\frac{\phi_1}{h}(z^2 - z)\,, \tag{4.32}$$

et en l'injectant dans l'équation (4.25) on obtient la composante verticale du champ vitesse à l'ordre ϵ

$$w_1 = -6\frac{\partial_x h}{h}\phi_0\left(z^3 - z^2\right) - 6\dot{h}\left(\frac{1}{3}z^3 - \frac{1}{2}z^2\right). \tag{4.33}$$

4.3.3 Effets de deuxième ordre

Finalement à l'ordre ϵ^2 le bilan de quantité de mouvement (4.1) est

$$\begin{aligned} &hw_0\partial_z u_0 + h^2\partial_x p_{-1} - z(h\partial_x h\partial_z p_{-1}) = \\ &\frac{1}{R}\left(h^2\partial^2_{xx}u_0 - 2zh\partial_x h\partial^2_{xz}u_0 + (z\partial_x h)^2\partial^2_{zz}u_0 - (h\partial^2_{xx}h - 2(\partial_x h)^2)z\partial_z u_0\right) + \frac{1}{R}\partial^2_{zz}u_2\,, \end{aligned} \tag{4.34}$$

et le bilan (4.2) est

$$\begin{aligned} &hw_0\partial_z w_0 + h\partial_z p_0 = \\ &\frac{1}{R}\left(h^2\partial^2_{xx}w_0 - 2zh\partial_x h\partial^2_{xz}w_0 + (z\partial_x h)^2\partial^2_{zz}w_0 - (h\partial^2_{xx}h - 2(\partial_x h)^2)z\partial_z w_0\right) + \frac{1}{R}\partial^2_{zz}w_2\,, \end{aligned} \tag{4.35}$$

La pression à cet ordre est déterminée à une constante près, en substituant w_1 dans l'équation (4.23) et en résolvant l'équation différentielle résultant en

fonction de la distribution de la pression sur la plaque inférieure. Alors,

$$p_{-1} = p_{-1}(z=0) + \frac{1}{2}\Big[\partial_x h h \partial_x p_{-3}(2z^2 - z) - \partial_x(h^2\partial_x p_{-3})(z^2 - z)\Big]. \,. \tag{4.36}$$

On notera $p^*_{-1} = p^*_{-1}(x, z=0)$ la distribution de la pression à $z = 0$.

La solution de l'ensemble d'équations à l'ordre ϵ^2 est obtenue de façon analogue aux ordres précédents. L'équation (4.27) est une équation différentielle de premier ordre que l'on peut résoudre en utilisant le résultat (4.26) et la condition $w_2(z=0) = 0$. Ainsi w_2 est obtenue de façon explicite,

$$w_2 = \frac{R}{2}\Big[h^2\partial_x h \partial_x p_{-2}\Big]\Big(\frac{2}{3}z^3 - \frac{1}{2}z^2\Big) - \frac{R}{2}\Big[h\partial_x(h^2\partial_x p_{-2})\Big]\Big(\frac{1}{3}z^3 - \frac{1}{2}z^2\Big)\,. \tag{4.37}$$

En injectant les résultats précédents on peut obtenir u_2 comme solution de l'équation différentielle d'ordre deux (4.34) en considérant les conditions $u_2(z = 0) = u_2(z = 1) = 0$. On obtient ainsi

$$u_2 = \frac{R}{2}(h^2\partial_x p^*_{-1})(z^2 - z) + \frac{R}{6}(h^3\partial^2_{xx} h\partial_x p_{-3} + 2h^3\partial_x h\partial^2_{xx} p_{-3} + h^4\partial^3_{xxx} p_{-3})(z^3 - z) + \frac{R}{12}(-h^4\partial^3_{xxx} p_{-3})(z^4 - z)\,. \tag{4.38}$$

Finalement, le bilan de masse à l'ordre ϵ^3 s'écrit

$$h\partial_x u_2 - z\partial_x h\partial_z u_2 + \partial_z w_3 = 0\,, \tag{4.39}$$

équation que l'on peut intégrer par rapport à z, en considérant les conditions aux extrémités $w_3(z=0) = w_3(z=0) = 0$, pour obtenir

$$0 = \frac{R}{12}\partial_x(h^3\partial_x p^*_{-1}) + \partial_x\left[\frac{R}{24}h^4\partial^2_{xx} h\partial_x p_{-3} + \frac{R}{12}h^4\partial_x h\partial^2_{xx} p_{-3} + \frac{R}{60}h^5\partial^3_{xxx} p_{-3}\right]. \tag{4.40}$$

On remarque que d'après l'équation (4.16) on peut exprimer $\partial^3_{xxx} p_{-3}$ et $\partial^2_{xx} p_{-3}$

en fonction des dérivées de $\partial_t h$, comme

$$h^3\partial^2_{xx}p_{-3} = \frac{12}{R}\partial_t h - 3h^2\partial_x h\partial_x p_{-3}\,, \tag{4.41}$$

$$h^3\partial^3_{xxx}p_{-3} = \frac{12}{R}\partial^2_{xt}h - 3\partial_x(h^2\partial_x h)\partial_x p_{-3} - 6h^2\partial_x h\partial^2_{xx}p_{-3}\,, \tag{4.42}$$

et donc l'équation (4.40) peut se réécrire comme

$$0 = \frac{R}{12}\partial_x(h^3\partial_x p^*_{-1}) + \partial_x\left[R\left(-\frac{1}{20}h^3(\partial_x h)^2 - \frac{1}{120}h^4\partial^2_{xx}h\right)\partial_x p_{-3} + \frac{1}{5}h^2\partial^2_{xt}h - \frac{1}{5}h\partial_x h\partial_t h\right]. \tag{4.43}$$

De façon analogue aux ordres précédents, on définit la fonction $\phi_2(t,x)$, par

$$\phi_2(t,x) = -\frac{R}{12}(h^3\partial_x p^*_{-1}) - \left[R\left(-\frac{1}{20}h^3(\partial_x h)^2 - \frac{1}{120}h^4\partial^2_{xx}h\right)\partial_x p_{-3} + \frac{1}{5}h^2\partial^2_{xt}h - \frac{1}{5}h\partial_x h\partial_t h\right].$$

Ceci permet de exprimer l'équation (4.40) comme

$$\phi_2 = \phi_2|_{x=0}\,, \tag{4.44}$$

et donc on peut montrer que la distribution de la pression p^*_{-1}, nécessaire pour déterminer le champ pression est

$$p^*_{-1} = p^*_{-1}|_{x=0} - \frac{12}{R}\int_0^x \frac{\phi_2}{h^3} + \frac{1}{h^3}\left[R\left(-\frac{1}{20}h^3(\partial_x h)^2 - \frac{1}{120}h^4\partial^2_{xx}h\right)\partial_x p_{-3} + \frac{1}{5}h^2\partial^2_{xt}h - \frac{1}{5}h\partial_x h\partial_t h\right]dx\,. \tag{4.45}$$

Alors, le champ de pression s'exprime à l'ordre ϵ^2 comme

$$p_{-1} = p_{-1}|_{x=z=0} - \frac{12}{R}\int_0^x \left[\frac{\phi_2}{h^3} + \frac{1}{5}\left(\frac{\dot{h}'}{h} - \frac{\dot{h}h'}{h^2}\right) + \left(\frac{3}{5}(h')^2 + \frac{1}{10}hh''\right)\frac{\phi_0}{h^3}\right]dx - \frac{6}{R}\left[\frac{\dot{h}}{h}(z^2-z) + h'\frac{\phi_0}{h^2}(3z^2-2z)\right], \tag{4.46}$$

la composante horizontale du champ de vitesse à l'ordre ϵ^2 (4.28) est

$$u_2 = \frac{R}{2}(h^2\partial_x p^*_{-1})(z^2-z) + \frac{R}{6}(h^3\partial^2_{xx}h\partial_x p_{-3} + 2h^3\partial_x h\partial^2_{xx}p_{-3} + h^4\partial^3_{xxx}p_{-3})(z^3-z) + \frac{R}{12}(-h^4\partial^3_{xxx}p_{-3})(z^4-z)\,. \quad (4.47)$$

À l'aide de (4.41) et (4.42), elle peut s'exprimer comme

$$u_2 = -6\frac{\phi_2}{h}(z^2-z) - \frac{1}{5}h''\phi_0(15z^4-20z^3+3z^2+2z) - \frac{6}{5}(h')^2\frac{\phi_0}{h}(-10z^4+10z^3+3z^2-3z) + \frac{1}{5}h'\dot{h}(30z^4-40z^3+6z^2+4z) + \frac{1}{5}h\dot{h}'(-5z^4+10z^3-6z^2+z)\,. \quad (4.48)$$

et la composante verticale du champ de vitesse est

$$w_2 = \frac{R}{2}\left[\partial_x h h^2 \partial_x p_{-2}\right]\left(\frac{2}{3}z^3 - \frac{1}{2}z^2\right) - \frac{R}{2}\left[h\partial_x(h^2\partial_x p_{-2})\right]\left(\frac{1}{3}z^3 - \frac{1}{2}z^2\right), \quad (4.49)$$

qui peut aussi s'exprimer comme

$$w_2 = -6h'\frac{\phi_1}{h}(z^3-z^2)\,. \quad (4.50)$$

4.4 Équation de Reynolds régularisée

Alors, en considérant le développement asymptotique (4.7) limité à l'ordre 2, on peut combiner les équations (4.16), (4.28) et (4.43) pour obtenir

$$\epsilon^3\frac{R}{12}\partial_x(h^3\partial_x p^*) + \epsilon^5\partial_x\left[R\left(-\frac{1}{20}h^3(\partial_x h)^2 - \frac{1}{120}h^4\partial^2_{xx}h\right)\partial_x p^* + \frac{1}{5}h^2\partial^2_{xt}h - \frac{1}{5}h\partial_x h\partial_t h\right] = \partial_t h\,, \quad (4.51)$$

avec $p^* = p(t,x,z=0)$ la pression mesurée sur la plaque inférieure. On peut reconnaître ici l'équation de Reynolds standard composé par le premier terme de gauche et le terme de droite. Le terme qui reste (d'ordre ϵ^2) est le terme correctif contenant les effets de second ordre qui sont négligés par l'équation de Reynolds standard. On observe que ce terme correctif dépend fortement de $\partial_x h$, ce qui signifie que dans le cas des parois parfaitement planes ce terme est nul et donc l'équation classique de Reynolds est parfaitement valable.

4.5 Solution itérative

Cette section est destinée à la construction de la solution du système d'équations (4.1)-(4.6) en utilisant les résultats obtenues dans la section 4.3. On peut combiner ces résultats à l'aide de l'équation (4.7) pour obtenir d'abord le flux définie par $\phi(t,x) = \phi(t,x)_0 + \epsilon\phi(t,x)_1 + \epsilon^2\phi(t,x)_2$. En utilisant (4.18), (4.30) et (4.44) on obtient alors

$$\phi = \phi|_{x=0} - \int_0^x \dot{h} dx \,. \tag{4.52}$$

Ensuite, le champ de pression est construit comme $p(t,x,z) = \epsilon^{-3}p(t,x,z)_{-3} + \epsilon^{-2}p(t,x,z)_{-2} + \epsilon^{-1}p(t,x,z)_{-1}$. En rappelant (4.19), (4.31) et (4.46) on obtient alors

$$p = p|_{x=z=0} - \frac{12}{R}\epsilon^{-3}\int_0^x \frac{\phi}{h^3} - \frac{12}{R}\epsilon^{-1}\int_0^x \left[\frac{1}{5}\left(\frac{\dot{h}'}{h} - \frac{\dot{h}h'}{h^2}\right) + \left(\frac{3}{5}(h')^2 + \frac{1}{10}hh''\right)\frac{\phi}{h^3}\right] dx$$
$$- \frac{6}{R}\epsilon^{-1}\left[\frac{\dot{h}}{h}(z^2 - z) + h'\frac{\phi}{h^2}(3z^2 - 2z)\right] . \tag{4.53}$$

Finalement, le champ de vitesse est construit comme $\mathbf{u}(t,x,z) = \epsilon^0\mathbf{u}(t,x,z)_0 + \epsilon^1\mathbf{u}(t,x,z)_1 + \epsilon^2\mathbf{u}(t,x,z)_2$. En utilisant (4.20), (4.32) et (4.48) on retrouve alors la composante horizontale du champ de vitesse

$$u = -6\frac{\phi}{h}(z^2 - z) + \epsilon^2\left[-\frac{1}{5}h''\phi(15z^4 - 20z^3 + 3z^2 + 2z) - \frac{6}{5}(h')^2\frac{\phi}{h}(-10z^4 + 10z^3 + 3z^2 - 3z)\right.$$
$$\left. + \frac{1}{5}h'\dot{h}(30z^4 - 40z^3 + 6z^2 + 4z) + \frac{1}{5}h\dot{h}'(-5z^4 + 10z^3 - 6z^2 + z)\right] , \tag{4.54}$$

et en utilisant (4.21), (4.33) et (4.50) la composante verticale du champ de vitesse

$$w = -6\epsilon h'\frac{\phi}{h}(z^3 - z^2) - 6\epsilon\dot{h}\left(\frac{z^3}{3} - \frac{z^2}{2}\right) . \tag{4.55}$$

4.6 Exemples d'application

Dans la suite on propose d'analyser l'influence des termes d'ordre supérieur sur le champ de pression et le champ de vitesse en considérant la forme de la paroi supérieure $h(t,x)$ et le flux à gauche $\phi(t,x=0)$ comme données du

problème.

4.6.1 Cas stationnaire

D'abord on propose l'exemple d'un cas stationnaire (la paroi supérieure ne se déplace pas) pour se concentrer sur les effets de la courbure de la paroi supérieure sur l'écoulement. Supposons alors que cette paroi est décrite par la fonction

$$h(x) = \begin{cases} h_i & \text{si } 0 \le x < \ell_i \,, \\ \mathbb{P}_3 & \text{si } \ell_i \le x < 1 - \ell_f \,, \\ h_f & \text{si } x \ge 1 - \ell_f \,, \end{cases} \tag{4.56}$$

avec h_i, h_f, ℓ_i et ℓ_f définis sur la figure 4.1 et $\mathbb{P}_3$ un polynôme du cinquième degré permettant un transition souple entre h_i et h_f.

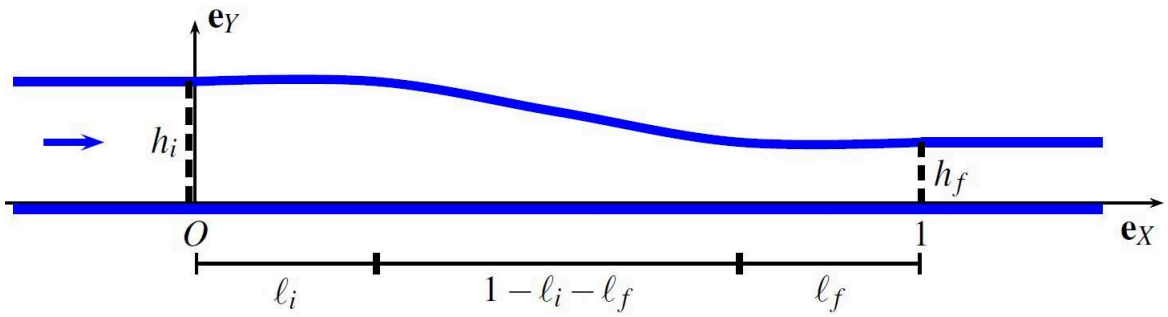


FIGURE 4.3 – Géométrie transversale de l'écoulement entre deux plaques.

On peut comparer la distribution du champ pression p obtenue par régularisation (équation 4.53) et obtenue par l'équation de Reynolds classique en se fixant $p(x = z = 0) = 0$. Ceci est montré sur la figure 4.4.

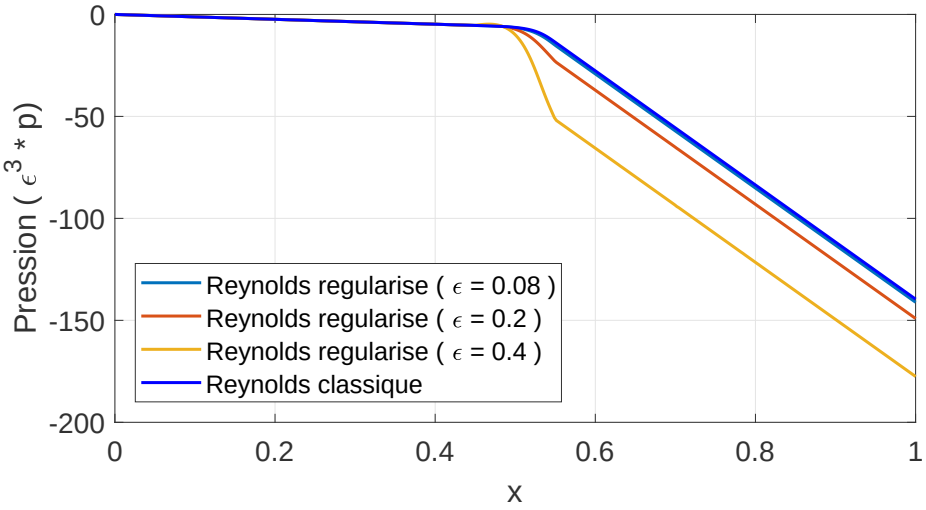


FIGURE 4.4 – Champ pression $p(t,x,z=0)$ calculé pour une plaque définie par l'équation (4.56) en considérant $\ell_i = 0.45$, $\ell_f = 0.45$, $h_i = 1$, $h_f = 0.4$, $\phi(x=0) = 1$ et $R = 1$.

On observe que le comportement linéaire de la distribution du champ de pression prédit par l'équation de Reynolds classique est préservé dans toutes les régions où h est uniforme. Sur la région $x \leq \ell_i$ par exemple, les solutions régularisées et classique coïncident complètement. Par contre, sur la région $\ell_i \leq x < 1 - \ell_f$, où la fonction $h(x)$ n'est pas uniforme, on trouve une différence entre la solution classique et régularisée qui croit avec ϵ. D'ailleurs, on peut aussi observer l'influence des termes de régularisation sur la distribution du champ vitesse, on montre par exemple sur la figure 4.5 une comparaison entre la composante horizontale du champ de vitesse obtenue par régularisation (4.54) et la distribution parabolique correspondant à un écoulement de Poiseuille, pour une section transversale en $x = 0.5$.

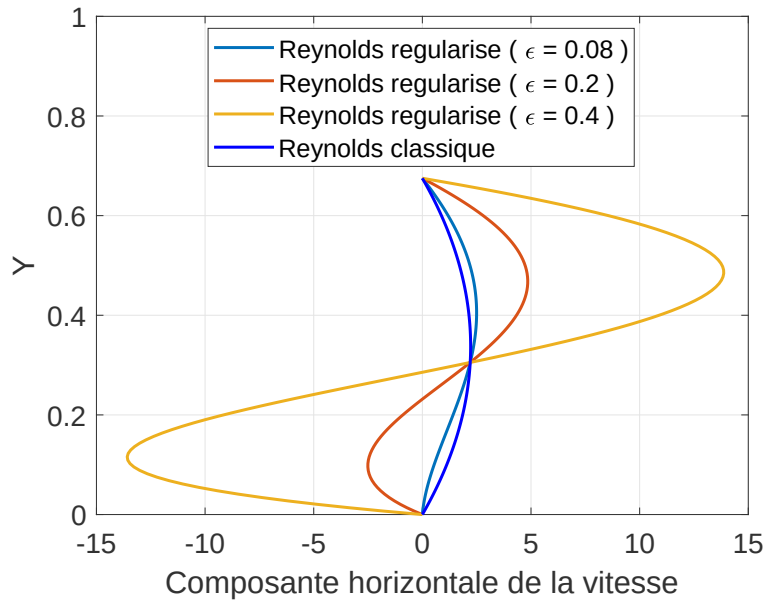
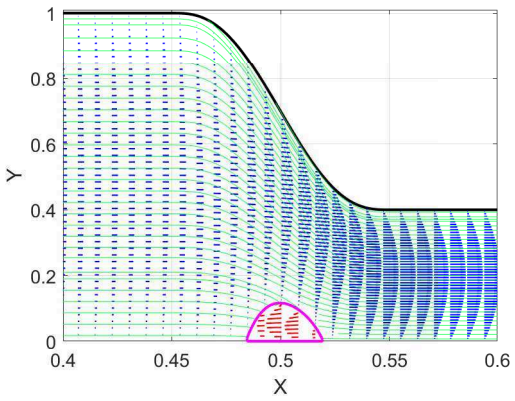


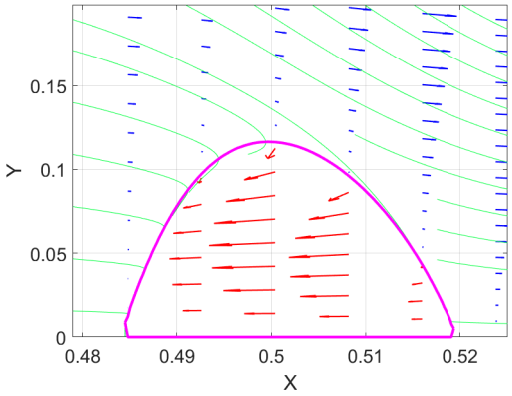
FIGURE 4.5 – Composant horizontal du champ de vitesse $w(t, x = 0.5, z)$ calculé pour une plaque définie par l'équation (4.56) en considérant $\ell_i = 0.45$, $\ell_f = 0.45$, $h_i = 1$, $h_f = 0.4$ et $R = 1$.

On remarque que l'amplitude de la différence entre la solution régularisée et la distribution parabolique du champ de vitesse croit quand la valeur du rapport d'aspect augmente.

On observe aussi que la vitesse horizontale régularisée change de direction nous signalant l'existence d'une zone de re-circulation de fluide, ce qui n'est pas prévu par l'approche classique de la théorie de lubrification. Ceci est observable sur la figure 4.6 où on représente le champ de vitesse par des flèches bleues lorsque sa composante horizontale est positive et rouges si elle est négative. On montre aussi les lignes de courant (courbes vertes). On observe la zone de re-circulation (intérieur de la courbe magenta) sur la figure 4.6b.



(a) Champ de vitesse (flèches bleues et rouges) et lignes de courant (lignes verts).



(b) Zone de re-circulation.

FIGURE 4.6 – Champ de vitesse $w(t,x,z)$ calculé pour une plaque définie par l'équation (4.56) en considérant $\ell_i = 0.45$, $\ell_f = 0.45$, $h_i = 1$, $h_f = 0.4$, $\epsilon = 0.1$ et $R = 1$.

D'autre part, les équations (2.36)-(2.38) nous donnent une description bidimensionnelle de l'écoulement, on peut alors montrer la distribution du champ de pression sur la figure 4.7.

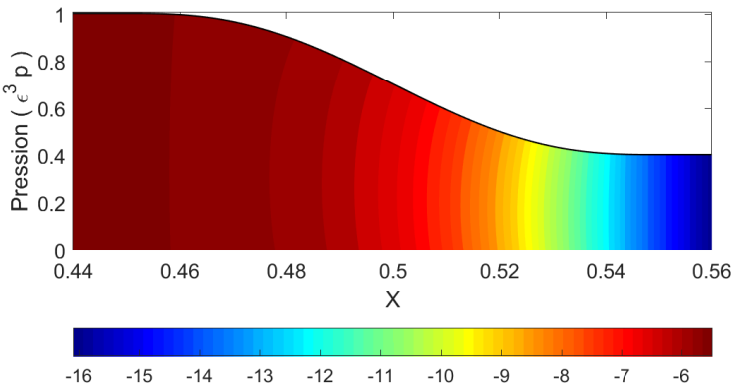


FIGURE 4.7 – Distribution du champ de pression $p(t,x,z)$ calculé pour une plaque définie par l'équation (4.56) en considérant $\ell_i = 0.45$, $\ell_f = 0.45$, $h_i = 1$, $h_f = 0.4$, $\epsilon = 0.01$ et $R = 1$.

On observe que la distribution du champ de pression est presque uniforme en hauteur (selon z) sauf dans la région où $h(x)$ varie de façon polynomiale.

On peut aussi observer les effets de deuxième ordre dans les composantes du champ de vitesse sur les figures 4.8 et 4.9.

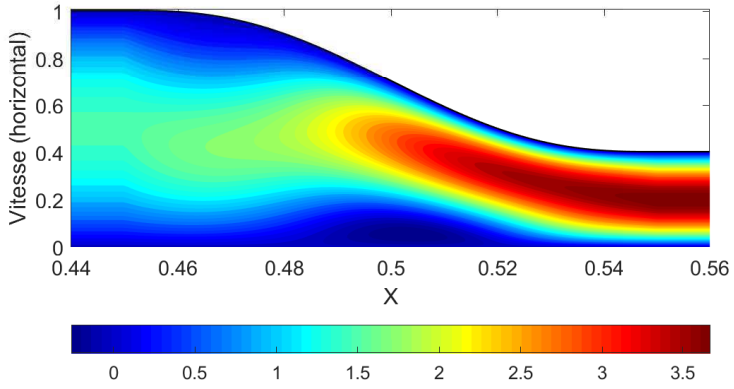


FIGURE 4.8 – Distribution de la composant horizontal du champ de vitesse $w(t,x,z)$ calculé pour une plaque définie par l'équation (4.56) en considérant $\ell_i = 0.45$, $\ell_f = 0.45$, $h_i = 1$, $h_f = 0.4$, $\epsilon = 0.01$ et $R = 1$.

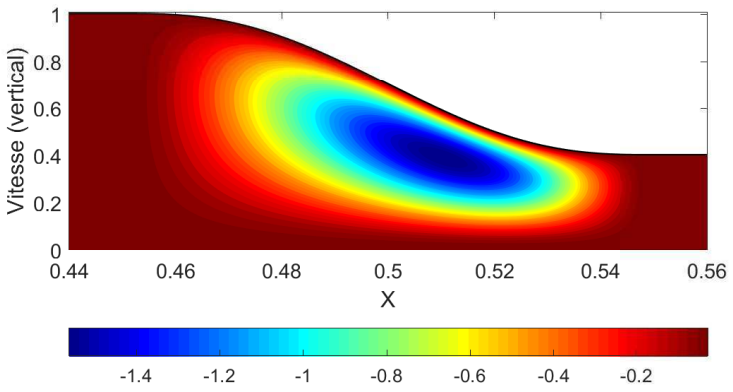


FIGURE 4.9 – Distribution de la composant vertical du champ de vitesse $w(t, x = 0.5, z)$ calculé pour une plaque définie par l'équation (4.56) en considérant $\ell_i = 0.45$, $\ell_f = 0.45$, $h_i = 1$, $h_f = 0.4$, $\epsilon = 0.01$ et $R = 1$.

On confirme la non-nullité de la composante verticale de la vitesse, ce qui a pour conséquence la variation verticale du champ de pression. On observe aussi que l'influence des effets d'ordre supérieur sur la composante horizontale du champ vitesse est petite pour cette valeur du rapport d'aspect, mais comme on a montré sur la figure 4.5, ces effets croissent avec ce rapport et nous montrent une région de recirculation.

4.6.2 Cas dépendant du temps

On propose maintenant l'exemple d'une paroi supérieure qui évolue en temps. Considérons une variante du problème de la section précédente, supposons que la hauteur de droite est maintenant dépendant du temps $h_f(t) = h_f(0) + v_h t$, avec $h_f(0)$ sa valeur initiale et v_h la vitesse à laquelle elle se déplace. La paroi supérieure est alors décrite par la fonction

$$h(t,x) = \begin{cases} h_i & \text{si } 0 \le x < \ell_i\,, \\ \mathbb{P}_3(t) & \text{si } \ell_i \le x < 1-\ell_f\,, \\ h_f(t) & \text{si } x \ge 1-\ell_f\,. \end{cases} \tag{4.57}$$

avec $h_i, h_f(t), \ell_i, \ell_f$ définis dans la figure 4.10 et $\mathbb{P}_3(t)$ un polynôme du cinquième degré permettant un transition souple entre h_i et $h_f(t)$.

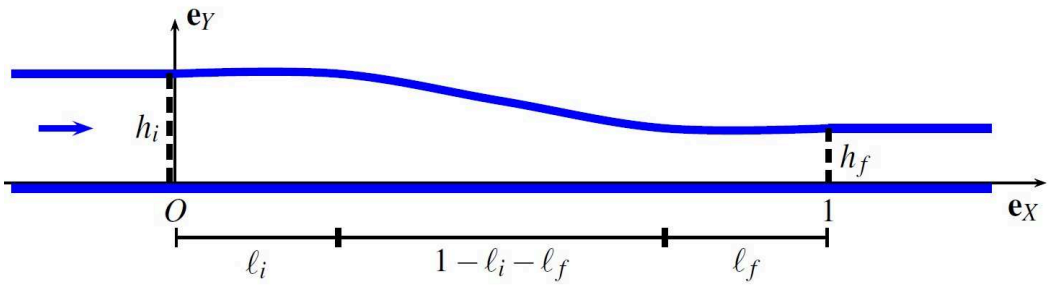
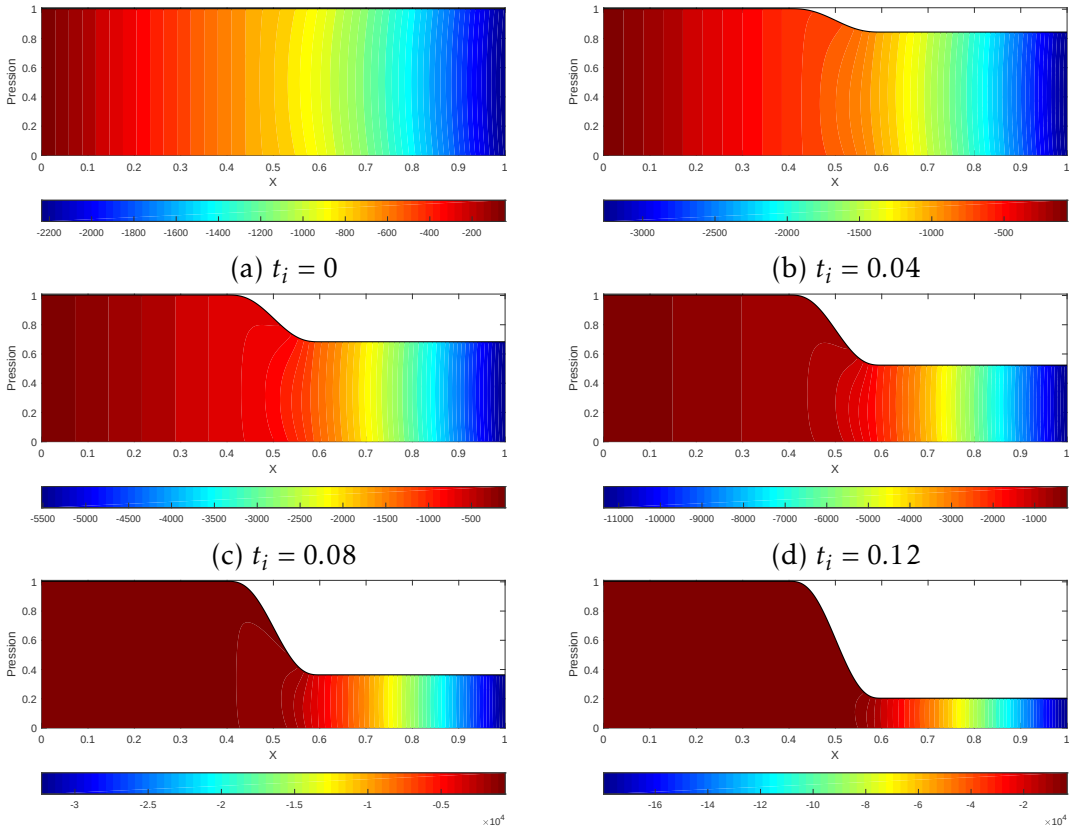


FIGURE 4.10 – Géométrie transversal de l'écoulement entre deux plaques.

En se fixant $p(x = z = 0) = 0$ et en utilisant les équations (2.36)-(2.38), on peut tracer la distribution bidimensionnelle du champ de pression sur la figure 4.11



(a) $t_i = 0$ (b) $t_i = 0.04$

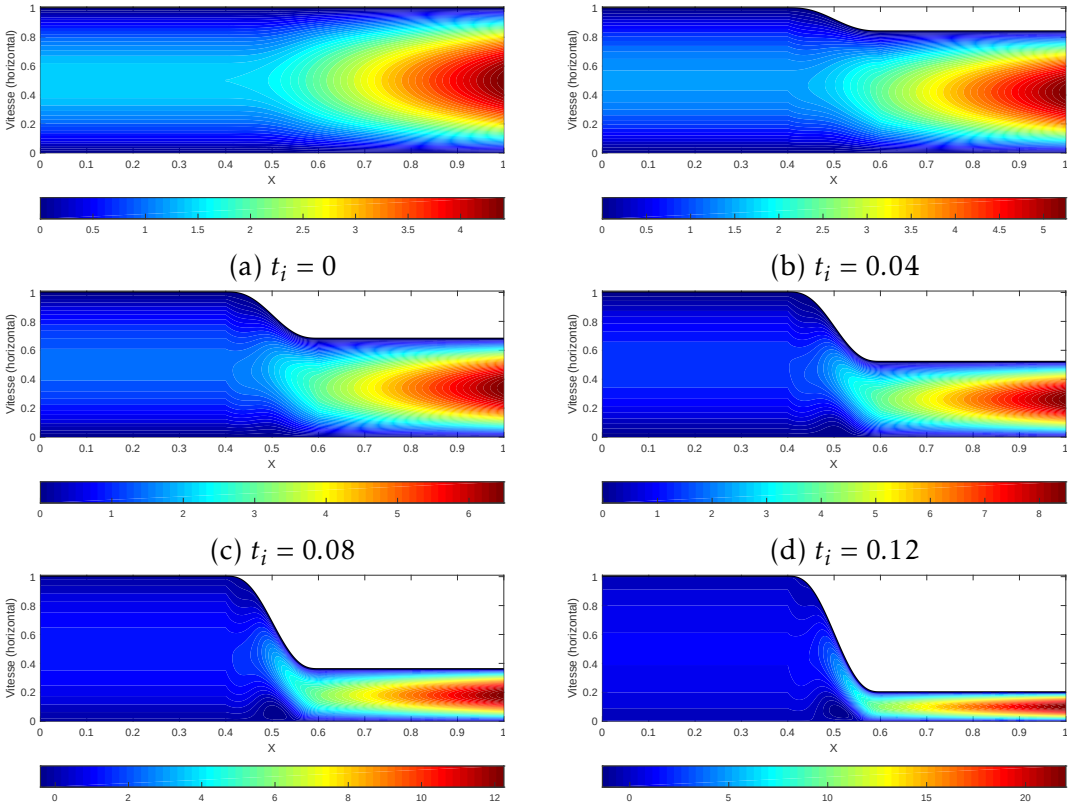
(c) $t_i = 0.08$ (d) $t_i = 0.12$

(e) $t_i = 0.16$ (f) $t_i = 0.2$

FIGURE 4.11 – Distribution du champ de pression $p(t,x,z)$ calculé pour une plaque définie par l'équation (4.56) en considérant $\ell_i = 0.4$, $\ell_f = 0.4$, $h_i = 1$, $h_f = 1 - 2t$, $\epsilon = 0.2$ et $R = 1$.

On observe la transition de la distribution uniforme en hauteur de la pression vers une distribution qui varie en hauteur dans la région où $h(t,x)$ est non-uniforme, ce qui montre l'influence des effets d'ordre supérieur sur la distribution de la pression et n'est pas prévue par l'approche classique de la théorie de lubrification.

On peut aussi observer les effets de deuxième ordre dans les composantes du champ de vitesse sur les figures 4.12 et 4.13.

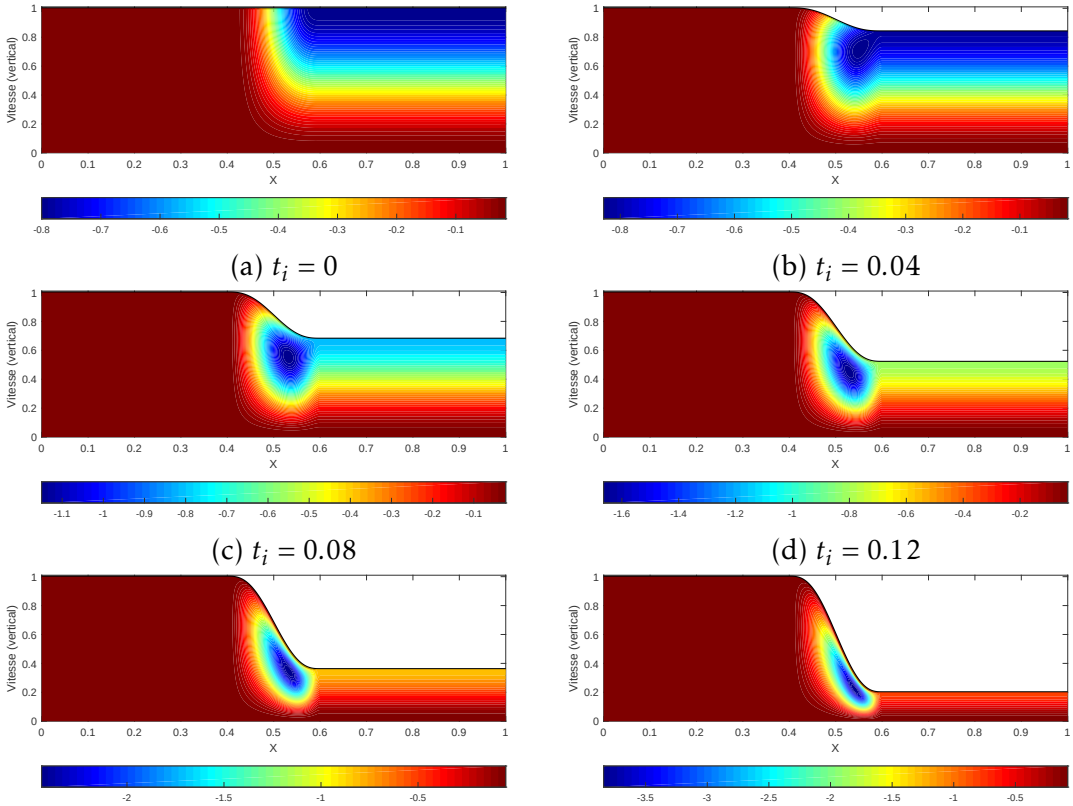


(a) $t_i = 0$ (b) $t_i = 0.04$

(c) $t_i = 0.08$ (d) $t_i = 0.12$

(e) $t_i = 0.16$ (f) $t_i = 0.2$

FIGURE 4.12 – Distribution de la composant horizontal du champ de vitesse $w(t,x,z)$ calculé pour une plaque définie par l'équation (4.56) en considérant $\ell_i = 0.45$, $\ell_f = 0.45$, $h_i = 1$, $h_f = 0.4$, $\epsilon = 0.2$ et $R = 1$.



(a) $t_i = 0$ (b) $t_i = 0.04$

(c) $t_i = 0.08$ (d) $t_i = 0.12$

(e) $t_i = 0.16$ (f) $t_i = 0.2$

FIGURE 4.13 – Distribution de la composant vertical du champ de vitesse $w(t, x = 0.5, z)$ calculé pour une plaque définie par l'équation (4.56) en considérant $\ell_i = 0.45$, $\ell_f = 0.45$, $h_i = 1$, $h_f = 0.3$, $\epsilon = 0.2$ et $R = 1$.

On confirme la non-nullité de la composante verticale de la vitesse, ce qui a pour conséquence la variation verticale du champ de pression. On observe aussi que l'influence des effets d'ordre supérieur sur la composante horizontale du champ de vitesse est petite pour cette valeur du rapport d'aspect, mais ces effets croisent avec la variable verticale. On peut aussi observer l'influence des termes de régularisation dépendant du temps sur la distribution de la composante horizontale du champ de vitesse, ceci est montré sur la figure 4.14. On montre l'évolution temporelle de la composante horizontale du champ de vitesse pour une section transversale en $x = 0.5$. De façon analogue à l'exemple précédent on trouve que, dès que h_f dévient assez petit, il apparait une zone de recirculation près de la plaque inférieure. Ceci est observé sur la figure 4.13f.

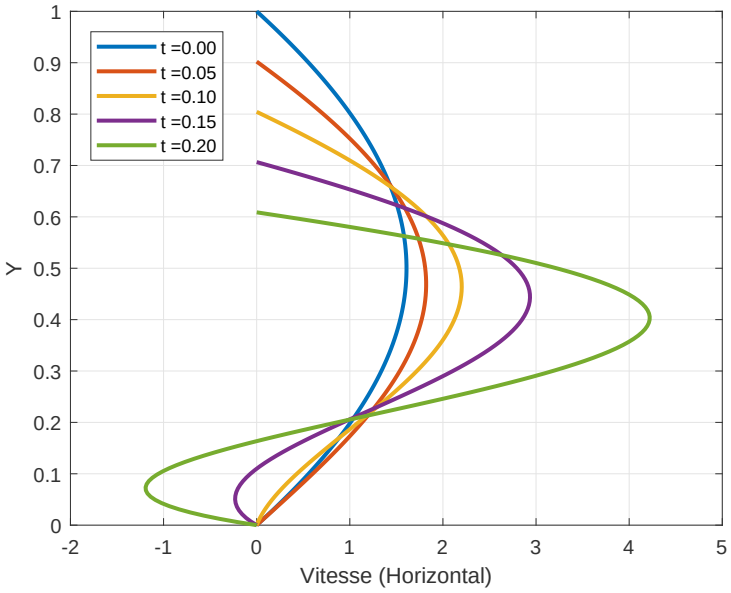


FIGURE 4.14 – Composant horizontal du champ de vitesse $w(t, x = 0.5, z)$ calculé pour une plaque définie par l'équation (4.57) en considérant $\ell_i = 0.4$, $\ell_f = 0.4$, $h_i = 1$, $h_f = 1 - 2t$, $\epsilon = 0.2$ et $R = 1$.

Finalement, une dernière remarque correspond à la sensibilité des solutions (4.53)-(4.55) par rapport à la continuité de $h(t, x)$. On observe que $h(t, x)$ doit être au moins $\mathcal{C}^2$ pour que le champ de pression et le champ de vitesse soient continus. Ce qui n'est pas le cas pour les formulations standard des équations de Navier-Stokes. On considère cette restriction comme une limitation de notre modèle et peut être abordée dans un travail postérieur.

Conclusion générale

Dans ce travail nous avons abordé le problème de l'évolution d'une fissure à l'intérieur d'un milieu fragile, soumise à l'injection d'un fluide. Nous nous sommes intéressés en particulier à la singularité de pression en pointe de fissure apparaissant dans la modélisation de ce problème, et nous avons proposé différentes approches pour aborder cette problématique.

Dans un premier temps, nous écrivons un ensemble d'équations constituant le modèle à géométrie simplifiée du problème d'un film élastique collé sur un substrat rigide soumis à l'injection d'un fluide visqueux. En considérant que le retard entre le fluide et le film (« lag ») est négligeable, ce modèle prend en compte les trois principaux mécanismes régissant le problème : la réponse élastique du milieu solide (film), l'évolution de l'écoulement à l'intérieur de la fissure et la propagation de la fissure. L'étude réalisée se traduit en un modèle adimensionné qui dépend de deux paramètres : la ténacité adimensionnée et la viscosité adimensionnée. En utilisant la méthode de développement asymptotique, nous avons obtenu une solution approchée pour le régime à faible viscosité. À l'ordre dominant, la solution dépend uniquement du volume total injecté au système et du paramètre de ténacité adimensionnée. Nous avons montré que la viscosité du fluide et l'amplitude du débit d'injection ont une influence directe, au premier ordre, sur la vitesse de propagation de la longueur de fissure. La solution corrigée par développement asymptotique présente un champ de pression singulier en pointe de fissure. Par ailleurs l'hypothèse d'irréversibilité n'est pas respectée instants après l'amorçage du décollement mais ce défaut reste local et la solution corrigée décrit bien le l'évolution globale de la propagation du décollement.

Dans un second temps, nous nous sommes concentrés sur la prise en compte de la zone de décollement entre le solide et le fluide. Nous avons proposé une

première approche à ce problème en enlevant la propagation de fissure et en se concentrant sur la modélisation de la propagation du front du fluide. Dans ce contexte nous avons formulé un modèle sous la forme d'un problème d'optimisation en temps discret où les zones de décollement font partie des inconnues du problème. Nous avons proposé d'obtenir les zones de contact entre le solide et le fluide, comme le support du champ pression. Nous avons montré que la solution du problème d'optimisation satisfait aussi l'ensemble d'équations de bilan local. Nous avons proposé une démarche d'implémentation numérique et nous avons validé cette démarche à l'aide de la solution exacte d'un cas particulier : l'écrasement d'une goutte par une barre rigide. Nous avons trouvé que la démarche donne des résultats très proches de la solution exacte et nous avons étudié la sensibilité de la démarche par rapport au paramètre de régularisation, du pas de discrétisation temporelle et de la taille de la discrétisation spatial. Nous avons montré que cette formulation et l'algorithme lié à son implémentation numérique sont capables de gérer correctement l'évolution de l'écrasement de plusieurs gouttes de forme quelconque en capturant correctement les phases d'étalement des gouttes ainsi que de leur coalescence. Nous avons étendu la démarche proposée au cas de l'écrasement d'une goutte par un film élastique. Nous avons trouvé des résultats cohérents du point de vue qualitatif.

Nous avons finalement examiné la validité de l'hypothèse de lubrification utilisée en fracturation hydraulique, dans les écoulements à géométrie similaire à celle près du front de fissuration. Ceci dans l'objectif d'étudier l'influence du rapport d'aspect sur l'équation de Reynolds. Dans ce contexte, nous avons étudié l'écoulement d'un fluide à l'intérieur d'un conduit de section variable en espace et en temps. Sous l'hypothèse d'un faible nombre de Reynolds, nous avons étudié la déduction de l'équation de Reynolds à partir des équations de Navier-Stokes en gardant les termes de premier et deuxième ordre. À l'aide de la méthode de développement asymptotique, nous avons construit une équation de Reynolds régularisée avec des termes de gradient supérieur tenant compte de la variation spatial de la hauteur des parois. Nous avons également reconstruit à posteriori la solution aux équations formulées précédemment, c'est à dire le champ de pression du fluide et le champ de vitesse de fluide dans la section transversale à l'intérieur de la conduite, en gardant les termes supplémentaires d'ordre

supérieur. Nous avons trouvé que les termes d'ordre supérieur dépendent explicitement de la première et deuxième dérivée spatiales de la hauteur du conduit. Ces termes sont nuls quand le conduit est constitué de deux plaques parallèles et sont négligés dans l'équation de Reynolds standard. Nous avons ensuite proposé deux cas d'application pour mesurer l'influence des termes d'ordre supérieur. Nous avons montré la non-nullité au premier ordre de la composante vertical du champ de vitesse et la variation non uniforme en hauteur du champ de pression. Nous avons montré aussi l'existence des zones de recirculation près des zones de fort gradient spatial de la hauteur, dont la taille dépend du rapport d'aspect. Finalement, malgré le fait que l'aspect fissuration n'a pas été pris en compte dans le dernier chapitre, le cas analysé sert à comprendre le comportement de l'écoulement dans les régions où la hauteur du conduit devient petit et en conséquence, nous donne une meilleure compréhension du comportement du champ de pression et de sa singularité en pointe de fissure.

Bibliographie

[1] J. Adachi et al. « Computer simulation of hydraulic fractures ». In : *Journal of rock mechanics and mining sciences* 44 (2007), p. 739-757.

[2] Lecampion B., Bunger A. et Zhang X. « Numerical methods for hydraulic fracture propagation : a review of recent trends ». In : *Journal of natural gas science and engineering* 156 (2017), p. 513-535.

[3] G.I. Barenblatt. « The mathemathical theory of equilibrium cracks in brittle fracture ». In : *Journal of Advanced applied mechanics* 7 (1962), p. 55-129.

[4] G. Bayada et Chambat M. « The transition between the Stokes equation and the Reynolds equation : A mathematical proof ». In : *Journal of applied mathematics and optimization* 14 (1986), p. 73-93.

[5] T. Belytschko et T. Black. « Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing ». In : *Journal for numerical methods in engineering* 45 (1999), p. 601-620.

[6] T. Belytschko, R. Gracie et G. Ventura. « A review of extended/generalized finite element methods for material modelling ». In : *Journal of modelling and simulation in materials science and engineering* 17 (2009), p. 24.

[7] B. Bourdin, G. Francfort et J-J. Marigo. « Numerical experiments in revisited brittle fracture ». In : *Journal of the mechanics and physics of solids* 48 (2000), p. 797-826.

[8] A. P. Bunger et E. Detournay. « Early time solution for a penny-shaped hydraulic fracture ». In : *Journal of engineering mechanics* 0 (2007), p. 534-540.

[9] C. Chukwudozie. « Application of the variational fracture model to hydraulic fracturing in poroelastic media ». Thèse de doct. Louisiana state university, agricultural et mechanical college.

[10] E. Detournay. « Mechanics of hydraulic fractures ». In : *Annual review of fluid mechanics* 0 (2016), p. 311-339.

[11] E. Detournay, A. P. Peirce et A. P. Bunger. « Viscosity-dominated hydraulic fractures ». In : *Rock Mechanics : Meeting society's challenges and demands* 0 (2007), p. 16949-1656.

[12] T. Divoux et al. « Influence of non-newtonian rheology on magma degassing ». In : *Geophysical Research Letters 38* 12 (2011), n/a-n/a.

[13] M. Economides et K. Nolte. *Reservoir stimulation*. Chichester UK : John Wiley & sons, 2000.

[14] J. Fabricius et al. « Asymptotic behaviour of stokes flow in a thin domain with moving rough boundary ». In : *Proceedings of the royal society A* 470 (2013), p. –.

[15] M. Fortin et R. Glowinski. *Augmented lagrangian methods : Application to the numerical solution of boundary value problems*. Amsterdam, Netherlands : Elsevier science publishers, 1983.

[16] G. Francfort. « Quasistatic brittle fracture seen as an energy minimizing movement ». In : *GAMM-Mitteilungen* 29 (2006), p. 172-191.

[17] D. I. Garagash. « Hydraulic fracture propagation in elastic rock with large thoughness ». In : *Rock around the rim : 4th north american rock mechanics symposium* 0 (2000), p. 221-228.

[18] D. I. Garagash. « Scaling of physical processes in fluid-driven fracture : prespective from the tip ». In : *IUTAM Symposium on scaling in solid mechanics* 10 (2009), p. 91-100.

[19] D. I. Garagash et E. Detournay. « Plane strain propagation of a fluid driven fracture : small thoughnes solution ». In : *ASME Journal of applied mechanics* 72 (2005), p. 916-928.

[20] D. I. Garagash et E. Detournay. « The tip region of a fluid driven fracture in a elastic medium ». In : *ASME Journal of applied mechanics* 67 (2000), p. 183-192.

[21] J. Geertsma et F. de Klerk. « A rapid method of predicting width and extent of hydraulic induced fractures ». In : *Journal of petroleum technology* 246 (1969), p. 1571-1581.

[22] S.V. Golovi et al. « Hydraulic fracture numerical model free of explicit tip tracking ». In : *Journal of rock mechanics and mining sciences* 76 (2015), p. 174-181.

[23] Y. Gordeyev et V. Entonv. « The pressure distribution around a growing crack ». In : *Journal of applied mathematics and mechanics* 61 (1997), p. 1025-1029.

[24] A. Griffith. « The phenomena of rupture and flow in solids ». In : *Philosophical transactions of the royal society of london, series A, containing papers of a mathematical or physical character* 221 (1921), p. 163-198.

[25] E. Guyon, J-P. Hulin et L. Petit. *Hydrodynamique physique*. EDP Sciences - CNRS Éditions, 2001.

[26] B. Hamrock, S. Schmid et B. Jacobson. *Fundamentals of fluid film lubrication*. Ohio USA : Marcel Dekker, Inc, 2004.

[27] M.J. Hunsweck, Y. Shen et A.J. Lew. « A finite element approach to the simulation of hydraulic fractures with lag ». In : *Journal of numerical and analytical methods in geomechanics* 37 (2013), p. 63-191.

[28] G. R. Irwin. « Analysis of stresses and strains near the end of crack traversing a plate ». In : *Journal of Applied Mechanics* 24 (1957), p. 361-364.

[29] S. A. Khristianovic et Y. P. Zheltov. « Formation of vertical fractures by means of highly viscous liquid ». In : *Proceedings fourth world petroleum congress* 0 (1955), p. 579-586.

[30] B. Lenoach. « The crack tip solution for hydraulic fracturing in a permeable solid ». In : *Journal of the mechanics and physics of solids* 43 (1995), p. 1025-1043.

[31] J. R. Lister. « Bouyancy-driven fluid fracture : similarity solution for the horizontal and vertical propagation of fluid-filled cracks ». In : *Journal of fluid mechanics* 0 (1990), p. 213-239.

[32] J. R. Lister et R. C. Kerr. « Fluid-Mechanical models of crack propagation and their applications to magma transport in dykes ». In : *Journal of geophysical research* 0 (1991), p. 10049-10077.

[33] J.M. Melenk et I. Babuska. « The partition of unity finite element method : basic theory and applications ». In : *Journal of computer methods in applied mechanics and engineering* 139 (1996), p. 289-314.

[34] D. A. Mendelsohn. « A review of hydraulic fracture modelling - Part I : General concepts, 2D odels, motivation for 3D modeling ». In : *Journal of energy resources technology* 0 (1984), p. 369-376.

[35] R. Nordgren. « Propagation of vertical hydraulic fractures ». In : *Journal of petroleum technology* 253 (1972), p. 306-314.

[36] A. Osiptsov. « Fluid mechanics of hydraulic fracturing : a review ». In : *Journal of petroleum science and engineering* 156 (2017), p. 513-535.

[37] T. Perkins et L. Kern. « Widths of hydraulic fractures ». In : *Journal of petroleum technology* 222 (1961), p. 937-949.

[38] K. Pham et al. « Gradient damage models and their use to approximate brittle fracture ». In : *Journal of damage mechanics* 20 (2011), p. 618-652.

[39] D. Santilla, R. Juanes et L. Cueto-Felgueroso. « Phase-field model of fluid-driven fracture in elastic media : immersed-fracture formulation and validation with analytical solutions ». In : *Journal of geophysics research : solid earth* 122 (2017), p. 2565-2589.

[40] A. Savitski et E. Detournay. « Propagation of a penny-shaped fluid-driven fracture in an impermeable rock : asymptotic solutions ». In : *International journal of solids and structures* 39 (2002), p. 6311-6337.

[41] S. Secchi, L. Simoni et B. A. Schrefler. « Mesh adaptation and transfer schemes for discret fracture propagation in porus materials ». In : *Journal of numerical and analytical methods in geomechanics* 31 (2007), p. 331-345.

[42] R.R. Settgast et al. « A fully coupled method for massively parallel simulation of hydraulically driven fractures in 3-dimensions ». In : *Journal of numerical and analytical methods in geomechanics* 41 (2017), p. 627-653.

[43] L. Simoni et S. Secchi. « Cohesive fracture mechnics for a multi-phase porous medium ». In : *Engineering Computations* 20 (2003), p. 675-698.

[44] D. A. Spence et P. Sharp. « Self-similar solutions for elastohydrodynamic cavity flow ». In : *Proceedings of the royal society London* 0 (1985), p. 289-313.

[45] I. Tamizer et S. Stupkiewicz. « Formulation of the reynolds equation on a time-dependent lubrication surface ». In : *Proceedings of the royal society A* 472 (2016), p. –.

[46] F. Voldoire et Y. Bamberger. *Mécanique des structures*. Paris, France : Presses de l'école nationale des ponts et chaussées, 2008.

[47] K. Yoshioka et B. Bourdin. « A variational hydraulic fracturing model coupled to a reservoir simulator ». In : *Journal of rock mechanics & mining sciences* 88 (2016), p. 137-150.

Annexe A

Taux de restitution d'énergie élastique

Cette partie présente les détails de calcul de la déduction du taux de libération d'énergie élastique présentée au chapitre 2.

A.1 Taux de restitution d'énergie élastique

Étant donné le fonctionnelle d'énergie

$$e = \frac{1}{\ell}\int_0^1 \frac{(h')^2}{2}dy - \int_0^t \int_0^1 \phi p' dy dt - \int_0^t \frac{q}{2}p(t,0)\,,dt$$

on dérive cette fonctionnelle par rapport au temps, alors

$$\begin{aligned}
\frac{\partial e}{\partial t} =& \frac{-\dot{\ell}}{\ell^2}\int_0^1 \frac{(h')^2}{2}dy + \frac{1}{\ell}\int_0^1 h'\dot{h}'dy - \int_0^1 \phi p' dy - \frac{q}{2}p(t,0)\\
\frac{\partial e}{\partial t} =& \frac{-\dot{\ell}}{\ell^2}\int_0^1 \frac{(h')^2}{2}dy + \frac{1}{\ell}\left(h'\dot{h}|_0^1 - \int_0^1 h''\dot{h}dy\right) - \int_0^1 \phi p' dy - \frac{q}{2}p(t,0)\\
\frac{\partial e}{\partial t} =& \frac{-\dot{\ell}}{\ell^2}\int_0^1 \frac{(h')^2}{2}dy + \frac{1}{\ell}\int_0^1 \ell^2 p\dot{h}dy - \int_0^1 \phi p' dy - \frac{q}{2}p(t,0)\\
\frac{\partial e}{\partial t} =& \frac{-\dot{\ell}}{\ell^2}\int_0^1 \frac{(h')^2}{2}dy + \ell\int_0^1 p\left(yh'\frac{\dot{\ell}}{\ell} - \frac{\phi'}{\ell}\right)dy - \int_0^1 \phi p' dy - \frac{q}{2}p(t,0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial e}{\partial t} &= \frac{-\dot{\ell}}{\ell^2}\int_0^1 \frac{(h')^2}{2}dy + \int_0^1 yph'\dot{\ell}dy - \int_0^1 (\phi p)'dy - \frac{q}{2}p(t,0)\\
\frac{\partial e}{\partial t} &= \frac{-\dot{\ell}}{\ell^2}\int_0^1 \frac{(h')^2}{2}dy + \int_0^1 \bar{p}y\bar{h}'\dot{\ell}dy - \phi(t,1)p(t,1) + \phi(t,0)p(t,0) - \frac{q}{2}p(t,0)\\
\frac{\partial e}{\partial t} &= \left(\frac{-1}{\ell^2}\int_0^1 \frac{(h')^2}{2}dy + \int_0^1 yh'pdy\right)\dot{\ell}\,.
\end{aligned}$$

En considérant l'identité

$$\frac{\partial e}{\partial t} = \frac{\partial e}{\partial \ell}\frac{\partial \ell}{\partial t} = \frac{\partial e}{\partial \ell}\dot{\ell}\,,$$

on peut définir $G := -\frac{\partial e}{\partial \ell}$ alors

$$\begin{aligned}
G &= \frac{1}{\ell^2}\int_0^1 \frac{(h')^2}{2}dy - \int_0^1 yh'pdy\\
G &= \frac{1}{2\ell^2}\left(h'h|_0^1 - \int_0^1 h''hdy\right) - \int_0^1 yph'dy\\
G &= \frac{1}{2\ell^2}\int_0^1 \ell^2 phdy - yph|_0^1 + \int_0^1 (yp)'hdy\\
G &= \int_0^1 h\left(\frac{1}{2}p + (yp)'\right)dy\\
G &= \int_0^1 h\left(\frac{3}{2}p + yp'\right)dy
\end{aligned}$$

A.2 Développement asymptotique du taux de restitution d'énergie élastique

Le développement asymptotique du taux de libération d'énergie élastique G peut s'exprimer en fonction de la hauteur de la fissure h et du champ de pression p, alors

$$G = \int_0^1 h\left(\frac{3}{2}p + yp'\right)dy$$

$$G = \int_0^1 (h_0 + \epsilon h_1)\left(\frac{3}{2}(p_0 + \epsilon p_1) + y(p_0' + \epsilon p_1')\right)dy$$

$$G = \int_0^1 \left[h_0\left(\frac{3}{2}p_0 + yp_0'\right) + \epsilon\left(h_0\left(\frac{3}{2}p_1 + yp_1'\right) + h_1\left(\frac{3}{2}p_0 + yp_0'\right)\right) + O(\epsilon^2)\right]dy$$

$$G = \int_0^1 h_0\left(\frac{3}{2}p_0 + yp_0'\right)dy + \epsilon\int_0^1 \left(h_0\left(\frac{3}{2}p_1 + yp_1'\right) + h_1\left(\frac{3}{2}p_0 + yp_0'\right)\right)dy + O(\epsilon^2)$$

université PARIS-SACLAY

ÉCOLE DOCTORALE
Sciences mécaniques et énergétiques, matériaux et géosciences (SMEMAG)

Titre : Modélisation de la rupture d'un milieu fragile soumis à l'injection d'un fluide visqueux : Analyse de la singularité en pression et du décollement en pointe de fissure

Mots clés : Rupture fragile, équation de Reynolds, developpement asymptotique,problème à frontière libre

Résumé : La propagation d'une fissure chargée par un écoulement de fluide visqueux est un phénomène complexe où la compréhension des phénomènes mécaniques mis en jeu en pointe de fissures reste encore partielle. C'est le cas de la zone de décollement entre le solide et le fluide qui apparaît pour un certain choix de débit d'injection, de viscosité du fluide et de ténacité du matériau. Cette thèse propose une modélisation simplifiée de ce problème d'interaction fortement couplé. Dans un premier chapitre, on étudie un modèle simplifié unidimensionnel de film élastique collé sur un substrat rigide et on considère une injection de fluide visqueux entre le film et le substrat. On suppose que la propagation de la fissure est régie par la loi de Griffith. On néglige l'existence du retard possible entre le fluide et le solide et on choisit une loi de comportement non-linéaire pour le fluide visqueux. À partir d'une analyse asymptotique pour une faible viscosité, on établit une solution approchée du problème. On montre que le champ pression est singulier en pointe de fissure et on montre l'influence du débit d'injection sur la cinétique du trajet de fissuration. Dans le deuxième chapitre on propose de prendre en compte l'existence de la zone de décollement en modifiant la formulation du modèle et en le réécrivant sous la forme d'un problème d'optimisation en temps discret où les zones de décollement font partie des inconnues du problème. On valide la formulation proposée sur l'exemple analytique de l'écrasement d'une goutte par une barre rigide. On montre ensuite que cette formulation et l'algorithme lié à son implémentation sont capables de gérer l'évolution de l'écrasement de plusieurs gouttes de forme quelconque en capturant correctement les phase d'étalement des gouttes ainsi que de leur coalescence. On étend ensuite cette formulation au cas de l'écrasement d'une goutte par un film élastique. Dans le dernier chapitre, on examine la validité de l'hypothèse de lubrification utilisée en fracturation hydraulique. Á l'aide de la méthode de développement asymptotique, on construit une équation de Reynolds régularisée avec des termes de gradient supérieur tenant compte de la variation spatiale de la hauteur des parois. On compare alors le comportement des champs de pression donnés par les équations de Reynolds classique et régularisée sur des exemples d'écoulement entre des conduits de formes multiples.

Title : Modeling of cracks in a brittle medium under a viscous fluid load : Analysis of the pressure singularity and fluid lag near the crack tip

Keywords : Brittle fracture, Reynolds equation, asymptotic expansion, free-boundary problem

Abstract : The crack evolution under a viscous fluid action is a complex phenomenon where the understanding of the mechanical phenomena near the crack tip is still largely limited. This is the case for the lag between the solid and the fluid front propagation which appears for some configurations of injection rate, fluid viscosity and material toughness. This thesis proposes a simplified model for this strongly coupled interaction problem. The first chapter studies a simplified one-dimensional model of a elastic film bonded to a rigid substrate. We consider a viscous fluid injection between the film and the substrate. The crack propagation is assumed to follow the Griffith's law. The existence of the lag is neglected and a non-linear behavior law is chosen for the viscous fluid. Using an asymptotic analysis, an approximate solution is established for the low viscosity case. It is shown that the pressure field diverges at the crack tip and that the kinetics of the crack is influenced by the injection rate. The second chapter proposes to take into account the existence of the lag by modifying the model formulation and rewriting it as a discrete time optimisation problem where the delamination zones are part of the unknowns of the problem. This formulation is validated for the analytical example of a drop crushed by a rigid bar. It is shown that this formulation and its implementation can manage the evolution of several drops of any shape and correctly captures the drops spreading and coalescence. This formulation is then extended to the case of a drop crushed by an elastic film. In the last chapter, the validity of the lubrication hypothesis is examined. Using an asymptotic analysis, a regularized Reynolds equation is constructed with higher gradient terms taking into account the spatial variation of the walls height. A comparison between the pressure fields behaviour given by the classical and the regularized Reynolds equation is shown for different conducts.

Université Paris-Saclay
Espace Technologique / Immeuble Discovery
Route de l'Orme aux Merisiers RD 128 / 91190 Saint-Aubin, France