



Étude du couplage aéro-mécanique au sein des moteurs à propergol solide

Stéphane Cerqueira

► To cite this version:

Stéphane Cerqueira. Étude du couplage aéro-mécanique au sein des moteurs à propergol solide. Autre. Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, 2012. Français. NNT : 2012ENMP0011 . tel-02003351

HAL Id: tel-02003351

<https://pastel.hal.science/tel-02003351>

Submitted on 1 Feb 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

École doctorale n°364 :
Sciences Fondamentales et Appliquées

Doctorat ParisTech

T H È S E

pour obtenir le grade de docteur délivré par

l'École nationale supérieure des mines de Paris

Spécialité « Mécanique numérique »

présentée et soutenue publiquement par

Stéphane CERQUEIRA

le 23 mars 2012

Étude du couplage aéro-mécanique
au sein des moteurs à propergol solide

~ ~ ~

Aero-mechanical coupling
inside solid propellant rocket motors

Directeur de thèse : **M. Frédéric FEYEL**

Thèse Confidentielle
23 mars 2017

Jury

M. Rodrigue DESMORAT, Professeur, LMT-Cachan, ENS Cachan
M. Frédéric FEYEL, Maître de Recherche, ONERA
M. Christian REY, Professeur, LMT-Cachan, ENS Cachan
M. Peter SCHMID, Professeur, LadHyX, École Polytechnique
M. Denis SIPP, Maître de Recherche, ONERA

Rapporteur
Directeur de thèse
Président du jury
Rapporteur
Membre du jury

MINES ParisTech
Centre de Mise en Forme des Matériaux
Rue Claude Daunesse B.P. 207, 06904 Sophia Antipolis Cedex, France

**T
H
È
S
E**

Table des matières

1	Introduction	9
1.1	Les instabilités de combustion	10
1.2	Réponse en combustion du propergol	11
1.3	Mécanismes hydrodynamiques en tant que source d'énergie acoustique : travaux précurseurs	12
1.4	Une problématique d'actualité : les MPS du lanceur Ariane 5 . .	17
1.4.1	Présentation et caractéristiques techniques du P230 d'Ariane 5	17
1.4.2	Modélisation de l'écoulement de base	20
1.5	Contexte et problématique de la thèse	23
2	Étude expérimentale	29
2.1	Description du montage expérimental	29
2.1.1	VALDO : un montage de conception modulable	29
2.1.2	Montage VALDO : instrumentation	31
2.2	Procédure expérimentale	33
2.2.1	Configurations d'essais	33
2.2.2	Conditions d'opérations	34
2.3	Résultats expérimentaux	37
2.3.1	Essais à vitesse d'injection constante	37
2.3.2	Essais à vitesse d'injection variable	45
2.4	Conclusion	59
3	Étude de stabilité linéaire globale	61
3.1	Introduction	61
3.1.1	Théorie de stabilité hydrodynamique linéaire	61
3.1.2	Oscillateurs et amplificateurs de bruit	62
3.1.3	Analyse de stabilité globale des oscillateurs	62
3.1.4	Non-normalité et analyse de stabilité globale des ampli- ficateurs	63
3.1.5	Stabilité linéaire de l'écoulement de Taylor-Culick	64
3.2	Formulation du problème de stabilité hydrodynamique linéaire .	66
3.2.1	Écoulement de base	67
3.2.2	Analyse par modes globaux : dynamique d'oscillateur . .	67
3.2.3	Réponse de l'écoulement à un forçage harmonique : dy- namique d'amplificateur	68
3.3	Écoulement induit par injection pariétale sans obstacle	72

3.3.1	Géométrie	72
3.3.2	Champ de base	74
3.3.3	Spectre de valeurs propres	74
3.3.4	Pseudo-résonance	78
3.3.5	Influence de la taille du domaine	82
3.3.6	Dépendance en fonction du nombre de Reynolds	86
3.3.7	Comparaison à l'expérience & discussion	87
3.4	Écoulement induit par injection pariétale avec obstacle	93
3.4.1	Géométrie	93
3.4.2	Champ de base	94
3.4.3	Spectre de Valeurs propres	96
3.4.4	Pseudo-résonance	97
3.4.5	Discussion	105
3.5	Conclusions et perspectives	106
4	Étude de l'élastomère GSM	109
4.1	Les élastomères et les polymères	109
4.1.1	Historique	109
4.1.2	Physique des élastomères	110
4.1.3	Matériau de l'étude	114
4.2	Caractérisation expérimentale du GSM	115
4.2.1	Techniques expérimentales	115
4.2.2	Résultats expérimentaux	119
4.2.3	Conclusion	128
4.3	Modélisation du comportement mécanique de l'élastomère	131
4.3.1	Comportement Hyperélastique	132
4.3.2	Hyperélasticité : prise en compte de l'effet Mullins	137
4.3.3	Comportement viscoplastique	141
4.3.4	Conclusion	143
4.4	Approche numérique du comportement du GSM	144
4.4.1	Identification des paramètres rhéologiques	144
4.4.2	Calculs de structure	148
4.5	Conclusion et perspectives	155
5	Approche numérique du couplage Fluide-Structure	157
5.1	Introduction	157
5.2	Mécanique des fluides et des solides	157
5.2.1	Mécanique des fluides	157
5.2.2	Mécanique des solides déformables	159
5.2.3	Problèmes couplés aéro-mécaniques	160
5.3	Méthodes de couplages multiphysiques	161
5.3.1	Algorithme de couplage partitionné	162
5.3.2	Maillage mobile et intégration logicielle	164
5.3.3	Validation de la méthodologie de couplage	165
5.3.4	Conclusion	172
5.4	Approche numérique non couplée	173
5.4.1	Paramètres de la simulation numérique	173

5.4.2	Résultats de la simulation non couplée	175
5.4.3	Bilan de la simulation non-couplée	179
5.5	Calcul couplé aéro-mécanique	180
5.5.1	Analyse dimensionnelle	180
5.5.2	Approche stationnaire	182
5.5.3	Approche instationnaire	183
5.6	Conclusion	187
6	Conclusion	189
	Bibliographie	193
A	Rappels de mécanique des milieux continus	205
B	Loi de comportement GSM55	211

Remerciements

Comme pour beaucoup, les raisons qui m'ont poussé à poursuivre en thèse de doctorat s'apparentent à d'étranges certitudes emplies de doutes. Si, dès mon stage, j'avais en tête cette idée bien arrêtée, je me rends compte que j'étais pourtant bien loin de réaliser l'ampleur de ce qui m'attendais. Il ne s'est donc fallu que de peu de choses (beaucoup de curiosité avec sûrement un brin d'inconscience) pour se lancer. S'en suivirent des années de noeuds aux cerveaux et de discussions passionnées. J'en garderai le souvenir d'une expérience intense, parfois laborieuse mais toujours enrichissante qui, au delà de m'avoir permis d'évoluer dans un contexte particulier, m'a offert l'opportunité de collaborer avec de multiples physiciens.

Merci à Francis Hirsinger et à Mohammed Habiballah de m'avoir accueilli au sein du département Énergétique Fondamentale et Appliquée de l'ONERA.

Merci à Frédéric Feyel, chef de l'unité Mécanique numérique du DMSM, d'avoir accepté cette aventure, pour le moins, riche en rebondissements. Ses encouragements ainsi que la confiance qu'il m'a accordée m'ont permis de mener à bien ce travail de recherche. De notre collaboration, j'ai beaucoup appris et pris beaucoup de plaisir.

Merci à Denis Sipp, chef de l'unité de mécanique des fluides du DAFE, de bien avoir voulu me suivre dans ce sujet de thèse. Je reste admiratif face à ton aisance scientifique et devant cet éternel enthousiasme que tu sais rendre contagieux. Merci pour ces discussions riches et stimulantes au détour d'un café à Meudon. Ce travail doit beaucoup à ton soutien sans faille.

Merci à François Vuillot, adjoint au directeur du DSNA, pour ces stimulantes et fructueuses discussions scientifiques. Je te suis reconnaissant d'avoir fait profiter ce manuscrit de ton expertise approfondie du domaine de la propulsion.

Merci à Gérard Avalon, ingénieur de recherche au sein de l'unité de Propulsion Solide du DEFA, pour m'avoir initié à la problématique des oscillations de pression. Le Chapitre 2 doit une grande part de son existence à sa maîtrise expérimentale.

Merci à Gilles Chaineray, ingénieur de recherche au DSNA, pour sa

précieuse contribution dans la mise en oeuvre des simulations multi-physiques. Je remercie également Marc-Paul Errera, en charge des projets multidisciplinaires au DSNA, pour son soutien de tous les instants.

Merci à Sabine Cantournet, enseignant chercheur au CDM des Mines de Paris, sans qui les élastomères auraient encore, pour moi, un bien étrange comportement. Son implication et sa sympathie ont fait de mes passages au CDM de bien agréables moments. Merci également à Jacques Besson, enseignant chercheur et Directeur du Centre, de m'avoir fait profité de ses connaissances approfondies en modélisation numérique.

Merci également aux membres du jury d'avoir évalué ce travail de thèse. A Peter Schmid et Rodrigues Desmorat d'avoir accepté la tâche de rapporteur ; ce fut un honneur. Merci également à Christian Rey d'avoir présidé le jury. Ce fut un réel plaisir de voir tant d'intérêt manifesté.

Comme toute expérience vécue, elle est d'autant plus riche qu'elle est partagée. Je profite donc de ces quelques lignes pour lancer un clin d'oeil à mes collègues, compagnons de galère, avec qui tant de bons moments, de discussions dans la forêt de Palaiseau, ont été partagés. Je fais donc ici honneur aux pauses " *What else* " et adresse mes remerciements à David, François-Xavier, Shihab, François (ouille), Shedia, Magali, Bastien ... beaucoup d'entre vous sont devenus des amis. Un grand merci également aux membres de l'unité de Propulsion Solide ainsi qu'à ceux du groupement de recherche sur les Oscillations de Pression. Collaborer avec vous fut un plaisir. Enfin, *last but not least*, je n'oublie pas Mme Rougerie, secrétaire au DEFA, qui a su veiller d'une façon si maternelle sur les doctorants ainsi que l'ensemble du personnel des Mines de Paris pour leur aide dans les méandres administratifs qui jalonnent une thèse.

Il y a ceux pour qui les mots ne suffisent à exprimer ma reconnaissance ; mes parents, ma famille. Si la thèse fut une étape majeure pour moi, elle n'en fut pas moins une réelle épreuve pour eux. Merci pour votre patience et votre soutien. Et puis, merci à Hélène, pour avoir cru en moi, pour tout.

Cette thèse à été réalisée au sein du Département d'Energétique Fondamentale et Appliquée de la branche Mécanique des Fluides et Energétique de l'ONERA. Elle a été financée par la Direction des LAnceurs du CNES et l'ONERA.

À mes grands-parents,

À ma famille.

Liste des sigles et acronymes

ALE	Arbitrary Lagrangian-Eulerian
ASSM	Aerodynamics of Segmented Solid Motors
CEDRE	Calcul d'Écoulements (Diphasiques) (Réactifs) pour l'Énergétique
CFL	Courant-Friedrichs-Lewy condition
CNES	Centre National d'Etudes Spatiales
CSS	Conventional Serial Staggered
DIAS	DIsspositif ASsouplisseur
EAP	Étage d'Accélération à Poudre
GNSL	opérateur Global de Navier-Stokes Linéarisé
IUSTI	Institut Universitaire des Systèmes Thermiques Industriels
LP3	maquette à l'échelle 1/15 ^{eme} du MPS P230
LP6	maquette à l'échelle 1/15 ^{eme} du MPS P230
LP9	maquette à l'échelle 1/35 ^{eme} du MPS P230
LP10	maquette à l'échelle 1/35 ^{eme} du MPS P230
MICAT	montage d'investigation ENSMA
MILES	Monotone Integrated Large Eddy Simulation
MpCCI	Multi-Physics Code Coupling Interface
MPS	Moteur à Propergol Solide
MUSCL	Monotonic Upwind Scheme for Conservation Laws
ONERA	Office National d'Etudes et de Recherches Aérospatiales
POP	Programme Oscillations de Poussée
PTF	Protection Thermique de Face
RMS	Root Mean Square
SRMU	Titan IV Solid Rocket Motor Upgrade
VALDO	Veine Axisymétrique pour Limiter le Développement des Oscillations
VECLA	Veine d'Étude de la Couche Limite Acoustique
VSA	Vortex Shedding d'Angle
VSO	Vortex Shedding d'Obstacle
VSP	Vortex Shedding Pariétal

Chapitre 1

Introduction

Vers la fin des années 1930, les premiers Moteurs à Propergolⁱ Solide (MPS) voient le jour en Amérique du nord. Les tirs d'essais accompagnant leur développement ont souvent mis en évidence un comportement, à la fois inattendu et indésirable, marquant ainsi le début de l'histoire des instabilités de combustion. Dans un récent ouvrage dédié aux *mouvements instables dans les chambres de combustion*, F.E.C Culick [37] établit un excellent état de l'art sur lequel il convient de s'appuyer afin de présenter les principaux mécanismes associés à cette thématique.

Pour des besoins inhérents à la seconde guerre mondiale puis à la guerre froide, une forte activité de recherche s'est entretenue autour de la problématique des instabilités de combustion. En outre, les MPS demeurent, encore aujourd'hui avec nombres d'études dédiées, l'un des systèmes propulsifs ayant reçu le plus d'attention ([37] et [105]). Une part importante de ces travaux fut initiée par les Américains avec l'émergence de nombreux programmes civils et militaires. L'une des principales observation qui en résulte est que ces instabilités se manifestent principalement par des fluctuations de la pression interne qui, en conséquence, génèrent des oscillations de poussée.

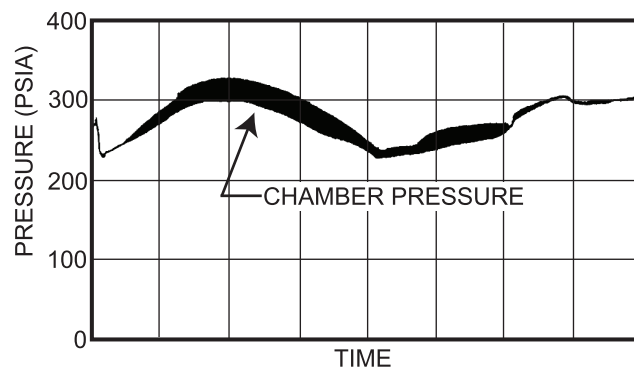


FIGURE 1.1 – Évolution de la pression interne lors de l'un des tirs de qualification du Minuteman II, d'après Culick [37].

i. Le propergol est un matériau élastomérique énergétique qui réunit le combustible et le comburant nécessaires à la propulsion des missiles et des lanceurs.

Parmi les nombreux exemples qui jalonnent l'histoire des instabilités de combustion, Culick [37] retient particulièrement celui du troisième étage du Minuteman II, exposé lors de la conférence AIAA/ASME Joint Propulsion de 1971. Lors de l'un des tirs de qualification, des oscillations de pression interne (figure 1.1), conduisant à la défaillance mécanique du moteur, sont relevées. Ces instabilités se manifestent essentiellement durant les quinze premières secondes du tir par des oscillations de haute fréquence (de l'ordre de 500 Hz). Au travers de la reproductibilité des fréquences et des niveaux des oscillations de pression, s'illustre une caractéristique commune aux configurations à système de propulsion solide.

Dans le sillage du Minuteman, d'importants moyens de recherche sur les instabilités de combustion seront mis en place, tant aux États-Unis qu'en Europe et notamment en France avec l'Office National d'Études et Recherches Aérospatiales (ONERA).

1.1 Les instabilités de combustion

Le terme *combustion* fait intrinsèquement référence à une chimie des espèces dont la cinétique évolue dans un milieu régi par la mécanique des fluides. Au sein des MPS, le processus de combustion proprement dit, se localise dans une fine zone de réaction exothermique (de l'ordre de quelques millimètres) adjacente au propergol [37] et est généralement stableⁱⁱ. Aussi, malgré la terminologie employée, les instabilités de combustion ne relèvent pas d'un processus de combustion instable.

De façon plus globale, le terme d'instabilité de combustion traduit, à travers les mesures de pression interne et les accélérations structurales, un mouvement transitoire d'un système dynamique ayant la capacité de maintenir des oscillations sur une large gamme de fréquence [37]. L'excitation et le maintien de telles oscillations résultent de l'existence d'un couplage entre le processus de combustion et la dynamique des gaz. On se trouve alors en présence d'un *système au complet* qui se manifeste comme instable. Plus précisément, les instabilités de combustion se traduisent par une dynamique instationnaire et structurée où un fluide, à forte composante acoustique, est piloté par le dégagement d'une énergie chimique. En outre, une caractéristique essentielle de ce phénomène est que cet écoulement transitoire rétroagit sur le processus de combustion générant alors, sous certaines conditions, des perturbations auto-entretenues d'amplitudes finies.

Ces considérations permettent de distinguer différents types de mécanismes fondamentaux [37], figure 1.2, explicitant aussi bien la réponse en combustion du propergol que des mécanismes purement hydrodynamiques. Comme souligné par Culick, si rien n'infirmait aujourd'hui que la sensibilité de la surface de combustion aux fluctuations de pression et de vitesse soit le mécanisme prédominant dans l'étude des instabilités de combustion, un mécanisme relativement différent impliquant le détachement de structures tourbillonnaires (ou

ii. on entend ici par stable le fait que la réaction chimique proprement dite est stable.

vortex shedding) n'en demeure pas moins un hypothétique responsable [136].

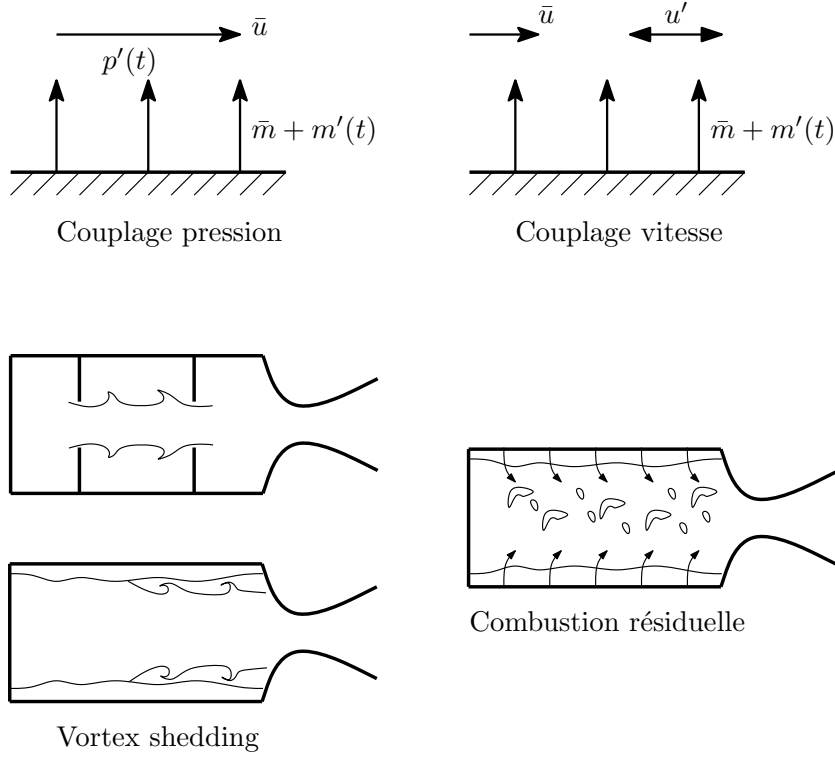


FIGURE 1.2 – Les 4 mécanismes possibles d’instabilité dans les moteurs à propergol solide, d’après Culick [37]. Les quantités moyennes sont désignées par $(\bar{})$ et les quantités fluctuantes par $()'$. u , p et m représentent respectivement la vitesse, la pression et le débit massique.

En effet, le couplage intervenant entre vorticité et acoustique est depuis longtemps un mécanisme reconnu [37] dans de multiples configurations autres que les MPS telles que les instruments à vents. Une revue des différents mécanismes responsables de détachements tourbillonnaires au sein des MPS peut être trouvée dans l’article [136].

1.2 Réponse en combustion du propergol

Comme explicité précédemment, parmi les différentes causes possibles exhibées par les instabilités de combustion, la dynamique de la surface de combustion demeure la plus commune. Bien que la dépendance de la vitesse de combustion en pression et en température soit depuis longtemps connue (et amplement démontrée à travers l’expérimentation et la théorie), l’analyse du processus par lequel les gaz et la phase condensée répondent dynamiquement demeure, en revanche, encore aujourd’hui incomplète [85].

Ce processus exhibe notamment une dépendance en fréquence [73] qui demeure d’une importance capitale, puisque définissant une certaine gamme pour laquelle les fluctuations de pression se voient amplifiées ; gamme de fréquence

incluant généralement certaines des fréquences acoustiques de la chambre. Une telle situation se retrouve, de façon récurrente, dans les MPS et demeure l'une des explications les plus simples pour les instabilités rencontrées au sein des missiles tactiques et stratégiques [104].

À l'origine de la problématique de dynamique de combustion, les fluctuations de vitesse des gaz quittant la zone de réaction impliquent un comportement local de la surface similaire à celui d'un piston oscillant, source d'ondes acoustiques [37]. Un tel comportement peut donc se traduire quantitativement par une fonction de réponseⁱⁱⁱ généralement définie comme le rapport des fluctuations de débit massique des gaz et des fluctuations de pression (ou de vitesse). Soit :

$$R_p = \frac{m'/\overline{m}}{p'/\overline{p}} \quad \text{ou} \quad R_u = \frac{m'/\overline{m}}{u'/\overline{u}} \quad (1.1)$$

L'importance de cette fonction de réponse vis-à-vis des instabilités de combustion apparaît alors comme évidente. D'après l'équation 1.1, une fluctuation de pression p' (respectivement de vitesse u') induit à travers R_p (respectivement R_u) une fluctuation de débit m' du fluide dont la phase relative à la fluctuation initiale p' (respectivement u') est un critère essentiel de stabilité. Ainsi, pour un MPS donné, la capacité de la dynamique de combustion du propergol à piloter des instabilités est proportionnelle à R_p . Au vu de ces considérations, il apparaît donc comme primordial de connaître la fonction de réponse de tout propergol utilisé dans la conception d'un moteur.

1.3 Mécanismes hydrodynamiques en tant que source d'énergie acoustique : travaux précurseurs

Un autre source d'apparition des instabilités de combustion repose sur la considération de mécanismes hydrodynamiques et est, par définition, intimement liée à la géométrie interne du MPS. La compréhension des phénomènes sous-jacents repose sur l'analyse de l'écoulement interne, où intervient de façon générale : le degré de segmentation du moteur (nombre et longueur de chaque segment) ainsi que la géométrie de chacun des blocs de propergol. Notons que, pour des raisons technologiques, les moteurs de grande échelle, tels que les MPS du lanceur Ariane 5, sont des moteurs segmentés et impliquent l'utilisation de Protections Thermiques de Face permettant d'inhiber thermiquement chacun des segments et donc de pouvoir contrôler de façon précise la régression de chacun des blocs. En outre, le matériau élastomérique qui compose ces PTF subit une ablation thermique plus lente que la régression de la surface de combustion, impliquant ainsi l'émergence d'une discontinuité géométrique supplémentaire [37], figure 1.3.

iii. La fonction de réponse est une fonction complexe introduite initialement dans le cadre de la théorie linéaire visant à étudier la combustion instationnaire du propergol.

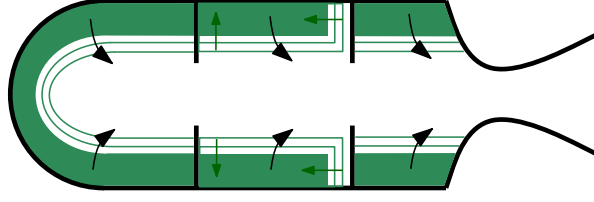


FIGURE 1.3 – Schématisation de l'émergence des PTF au sein des MPS lors de la combustion du propergol.

En 1974, Flandro & Jacobs [53] semblent avoir été les premiers, à proposer un modèle traduisant l'idée qu'un détachement tourbillonnaire issu de discontinuités géométriques^{iv} peut interagir avec l'acoustique interne de la chambre. Bien qu'initialement le lien avec les phénomènes dits d'*Edgetone* [92] n'ait pas été établi, le modèle suggéré prend correctement en compte, conformément à certains résultats expérimentaux, que les ondes acoustiques pilotent le vortex shedding (qui a donc lieu à la même fréquence).

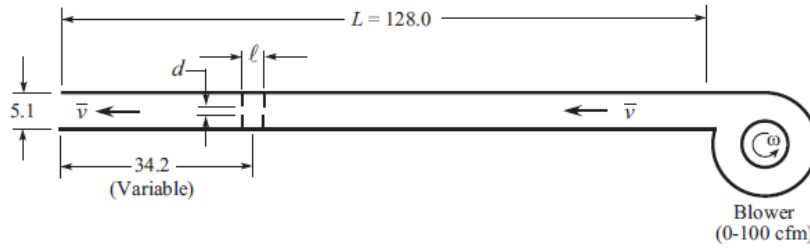


FIGURE 1.4 – Schéma du montage expérimental utilisé par Culick et Magiawala afin de démontrer l'excitation des modes acoustiques par une paire de diaphragmes. Les dimensions sont données en *cm*, d'après Culick & Magiawala [36].

En 1979, Culick & Magiawala menèrent l'une des premières études concernant l'écoulement au travers de diaphragmes circulaires. En utilisant un montage de conception relativement simple, figure 1.4, l'excitation de modes acoustiques a pu être observée lorsque la fréquence de vortex shedding coïncide avec une fréquence de mode acoustique. À travers la démonstration de cette propriété, où divers paramètres interviennent (tels que les grandeurs géométriques, la vitesse de l'écoulement moyen, la position des diaphragmes, l'épaisseur de la couche de cisaillement ou encore la vitesse du son), une première explication émerge alors dans le cadre des moteurs fortement segmentés. De ces expérimentations, une conclusion émise par les auteurs quant

^{iv}. La nature des discontinuités géométriques est propre à la géométrie interne de chaque MPS. Citons à titre d'exemple : les Protections Thermiques de Face inhibant chacun des segments (moteur segmenté) ou encore la géométrie des blocs de propergol tel qu'initialement investigué par Flandro.

à l'incapacité de mesurer une excitation acoustique d'amplitude significative en présence d'un seul diaphragme aura une importance capitale, puisque nombres d'expérimentations, voire la quasi-totalité entreprises ultérieurement mettront exclusivement en jeu une paire de diaphragme. Néanmoins, il convient de noter que, bien qu'elles furent de faibles amplitudes en comparaison à celle obtenues avec deux obstacles, des oscillations ont pu être mesurées lorsqu'un seul diaphragme était positionné vers le milieu de chambre.

Dans les années 1980, constatant que les méthodes analytiques de prédiction de stabilité peinent à prédire la stabilité du moteur Titan, Dunlap & Brown [42] entreprennent une série d'expériences sur une maquette à échelle réduite en gaz froid. Sous certaines conditions, des oscillations de pression d'amplitudes de l'ordre de 5% à 10% de la pression moyenne sont mesurées, et dépendent fortement de la position relative de la paire de diaphragmes par rapport au mode acoustique. En outre, lorsqu'elle se voit positionnée près d'un ventre de vitesse acoustique, la paire de diaphragmes permet l'excitation du mode acoustique en question [55].

Au cours d'une étude expérimentale au montage plus élaboré, où la combustion du propergol est simulée par un apport de quantité de mouvement radial au travers d'éléments poreux^v, Brown *et al.* [24] identifient, au travers de mesures de pression et d'anémométrie par fil chaud, que le vortex shedding est le mécanisme déclencheur des oscillations de pression observées au sein du Titan SRM. L'observation de l'émergence d'oscillations de pression à des fréquences correspondants aux modes acoustiques longitudinaux de la chambre, confirme l'existence d'une nouvelle source acoustique, jusque là non considérée dans les calculs de prédiction de stabilité. En effet, les calculs menés par la méthode en vigueur, dite du bilan acoustique^{vi}, prédisait des taux d'amplification largement négatif et donc un moteur stable pour tout instant du tir. L'échec de cette méthode dans le cadre des moteurs à propergol solide a non seulement été observée pour le Space Shuttle Booster mais également par l'ONERA sur les MPS du lanceur Ariane.

Parallèlement, Dunlap & Brown [42] imputent expérimentalement la création des oscillations de pression à la paire de diaphragmes localisée près du ventre de vitesse acoustique ; ce qui confirme les résultats précédemment établis par Brown *et al.* [24]. Au cours de leur étude, Dunlap & Brown [42] ne parviennent pas à mesurer des fluctuations de pression en présence d'un seul diaphragme. Si la notion de feedback entre les ondes acoustiques et les ondes de vorticité est évoquée, elle n'est toutefois pas développée au sein de l'analyse établie par ces auteurs.

En 1982, Nomoto & Culick [93], reprennent la démarche de Magiawala & Culick et procèdent à des expérimentations similaires sur une veine rectangu-

v. Afin de simuler l'apport de quantité de mouvement, Brown et al [24] utilisent des éléments poreux en bronze fritté.

vi. La méthode du bilan acoustique est une méthode linéarisée qui, jusque-là, ne prenait pas en compte les termes rotationels.

laire où une paire de diaphragmes est placée à différentes positions : l'excitation de modes acoustiques est observée lorsque la fréquence de vortex shedding coïncide avec une des fréquences acoustiques de modes longitudinaux.

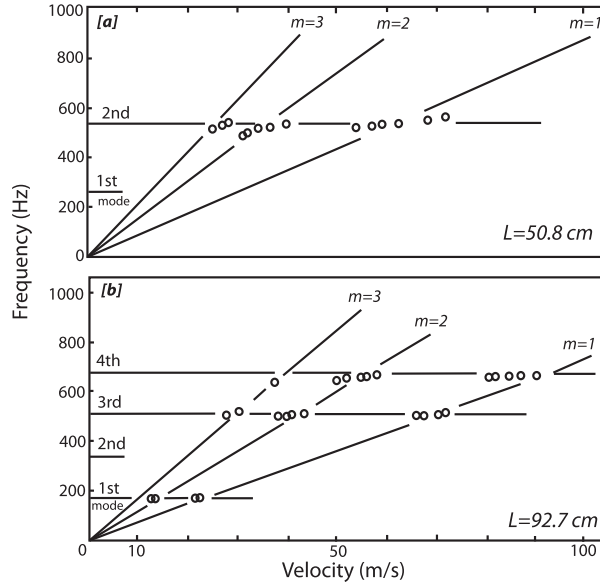


FIGURE 1.5 – Résultats expérimentaux de l'excitation des modes acoustiques par le vortex shedding, d'après Nomoto & Culick [93]. Les cercles identifient les conditions pour lesquelles des oscillations d'amplitudes significatives sont observées. L désigne la longueur de la chambre.

Les résultats, présentés sur la figure 1.5, mettent en évidence que les fréquences ne dépendent pas de façon triviale, de la longueur de chambre et de la vitesse de l'écoulement moyen. En outre, et comme remarqué par différents auteurs [136], un saut en fréquence avec le temps est une preuve tangible que le vortex shedding est l'un des mécanismes responsables des oscillations de pression au sein des MPS. La visualisation de l'écoulement entre deux diaphragmes, figure 1.6, permet d'observer un nombre entier de structures cohérentes. La synchronisation de l'appareil d'observation avec la fréquence des oscillations [1], permet indubitablement de conclure que le vortex shedding participe aux oscillations. Les fréquences observées, figure 1.5, sont constantes selon une large gamme de vitesse et semblent être dictées par les fréquences des modes acoustiques de la conduite. En se basant sur l'analyse de Rossiter [111], Nomoto suppose que les perturbations acoustiques, générées par la collision d'une structure tourbillonnaire sur le second diaphragme aval, se propagent et déclenchent l'émission d'une autre structure tourbillonnaire tel qu'il le serait dans un système isolé de type *Edgetone* [110]. Néanmoins, il fut dans l'incapacité d'expliquer pourquoi les oscillations ont lieu selon une certaine gamme de vitesse et d'espacement de diaphragme plutôt que simplement à l'intersection des lignes de Strouhal constant avec les lignes de fréquences constantes du résonateur acoustique. Suggérant qu'une certaine interaction entre les deux systèmes est susceptible d'avoir lieu et que la position de la paire de dia-

phragmes par rapport au mode acoustique demeure un paramètre important, Nomoto n'entreprend néanmoins aucune étude détaillée permettant de confirmer de telles hypothèses.

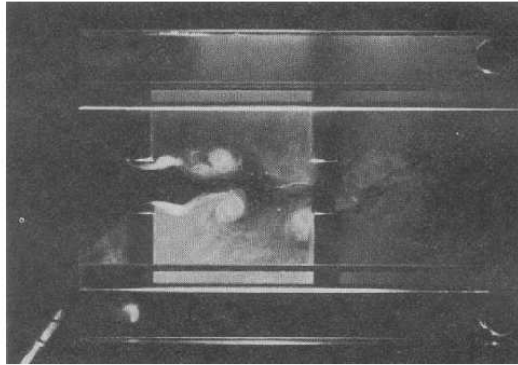


FIGURE 1.6 – Visualisation de l'écoulement lorsqu'une fréquence est mesurée, d'après Nomoto & Culick [93].

En 1985, Aaron [1] reprend le montage de Nomoto et propose un modèle décrivant l'interaction entre le système d'Edgetone et un résonateur acoustique. Deux éléments fondamentaux sont alors nécessaires pour que le mécanisme opère : une couche de cisaillement conduisant à l'émergence de structures tourbillonnaires et un obstacle aval. Un élément primordial pour la compréhension d'un tel phénomène est que la réponse acoustique agit comme une perturbation déclenchant une nouvelle structure tourbillonnaire au sein de la couche de mélange. Ces tourbillons, en retour, pilotent la résonance acoustique en interagissant avec l'obstacle. Puisque ces tourbillons sont initiés en phase avec la réponse acoustique, en changeant soit la distance entre le point d'émission et de séparation, soit la vitesse moyenne, on change la phase entre le forçage et la réponse acoustique de la résonance. La phase variant rapidement aux abords de fréquences propres pour tout oscillateur amorti, la fréquence demeure alors la même pour toutes conditions d'opération produisant des oscillations.

Douze années après avoir mis en évidence l'importance du phénomène de Vortex Shedding dans les analyses de stabilité des MPS, Flandro [52] propose, par l'adjonction d'un terme correctif α_{vs} , une extension de l'approche linéarisée du bilan acoustique. Limitée par certains aspects (grande sensibilité aux paramètres, fréquence du Vortex Shedding comme donnée d'entrée du modèle...), cette méthode fut essentiellement employée sur un plan qualitatif. Le critère permettant d'évaluer le risque de déstabilisation par Vortex Shedding se traduit par une relation de phase entre les ondes de vorticité et les ondes acoustiques, fonction de la distance du point d'émission tourbillonnaire à la surface d'impact. Le lecteur peut trouver une description détaillée de la méthode de Flandro dans les références [136, 135] ainsi qu'une application de cette dernière au P230 dans la référence [135]. Bien que non prédictif, le scénario proposé par Flandro a jeté les bases de la compréhension du couplage existant entre le Vortex Shedding et l'acoustique et représente, en ce sens, un apport considérable dans l'évaluation de la stabilité des MPS.

1.4 Une problématique d'actualité : les MPS du lanceur Ariane 5

Si les instabilités de combustion sont une caractéristique commune à tous les moteurs à système de propulsion solide, il apparaît néanmoins que les mécanismes responsables d'un tel phénomène varient en fonction de la configuration étudiée. Les explications que l'on pourra apporter seront différentes si l'on étudie un moteur de grande ou de petite taille, fortement segmenté ou non ... Dans la suite, on s'intéressera au cas particulier des MPS du lanceur Ariane 5.

1.4.1 Présentation et caractéristiques techniques du P230 d'Ariane 5

Les Moteurs à Propergol Solide (MPS) ou encore Étages Accélération à Poudre (EAP) du lanceur européen Ariane 5 présentent une architecture bien différente des précédentes versions. Avec une hauteur supérieure à 30 m, un diamètre de plus de 3 m, chaque MPS contient plus de 230 tonnes de propergol^{vii} ; ce qui leur vaut également d'être référencés sous l'appellation P230. Ils permettent d'arracher Ariane 5 à sa table de lancement. De par leurs dimensions et leurs performances, les EAP d'Ariane 5 demeurent les plus gros et plus puissants moteurs jamais construits en Europe. Ils assurent l'essentiel de la poussée (plus de 90%) lors du décollage et jusqu'à une altitude de 60 km, où la combustion s'achève après environ deux minutes passant alors le relais à la propulsion liquide du moteur Vulcain.

Dans la conception du MPS P230, le propergol est composé d'un combustible et d'un oxydant mélangés mécaniquement et moulés en chargements solides (voir figure 1.9), stables à température ambiante. De la poudre d'aluminium (le combustible) est alors mélangée à du perchlorate d'ammonium (NH_4ClO_4) (l'oxydant). L'utilisation d'un liant, tel que le *HTPB* (Hydroxy-Terminated Polybutadiène), permet d'assurer la cohésion du mélange tout en servant également de combustible. Divers additifs peuvent alors être adjoints afin de régler certains paramètres physiques (vitesse de combustion par exemple) ou mécaniques.



FIGURE 1.7 – Le lanceur Ariane 5 ES-ATV sur sa table mobile de lancement. Crédit photo : ESA.

vii. Chaque MPS du lanceur Ariane 5 contient précisément 237.7 tonnes de propergol.

Dès le lancement du programme Ariane 5 en 1987 et, au même titre que ses homologues américains (le SRMU de la fusée Titan IV et le SRB du NASA Space Shuttle, par exemple), le moteur P230 est pressenti pour exhiber des instabilités de fonctionnement [138]. Dès lors, la prévision et l'analyse de la stabilité du P230 devient un axe de recherche prioritaire et de nombreuses études, notamment à l'ONERA [139], sont initiées (programme ASSM et POP, voir section 1.5). En 1993, le premier tir B1 au banc d'essai a permis de confirmer les prévisions réalisées. Si les instabilités ne remettent pas en cause l'intégrité du lanceur, le couplage avec les modes de vibration de la structure du lanceur constitue un risque, non négligeable, pour la charge utile (un ou deux satellites). Afin d'éviter tout risque d'endommagement, des Dispositifs Assouplisseurs (DIAS) introduisent un amortissement entre l'Étage Principal Cryogénique (EPC) et la ferrure mobile du dispositif d'accrochage du P230. La pénalité, en terme de masse, résultant de l'utilisation des DIAS est aujourd'hui le prix à payer permettant d'assurer une fiabilité élevée.

Instabilités de fonctionnement du P230

Au cours de la phase de vol, par l'intermédiaire d'accéléromètres équipants les MPS, les vibrations structurelles du lanceur résultant des oscillations de la poussée sont mesurées. L'enregistrement obtenu au cours du vol 510 d'Ariane 5 peut alors être analysé dans le domaine spectral, donnant ainsi accès à la signature fréquentielle du phénomène, figure 1.8. Deux gammes de fréquence distinctes émergent pour des temps supérieurs à 70 s. La première s'étend de $f \in [18, 26]$ Hz et la seconde de $f \in [36, 48]$ Hz.

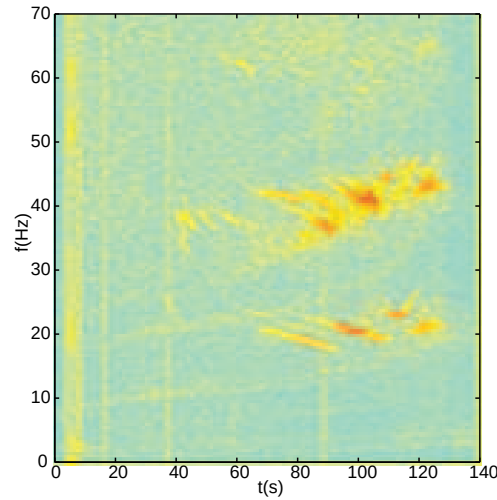


FIGURE 1.8 – Transformée de Fourier à fenêtre glissante du signal de l'accéléromètre de l'EAP 1 du tir 510 d'Ariane 5, d'après Chedevergne [32].

La présence de glissements en fréquence est représentative des oscillations de poussée, dont on sait aujourd'hui qu'elles résultent des fluctuations de pression (de l'ordre de 0.5% zéro-crête) de l'écoulement interne transmises par la tuyère [32]. Un rapide calcul des modes acoustiques longitudinaux du lanceur,

assimilable en première approximation à une conduite cylindrique close à ses deux extrémités, permet d'évaluer, à l'aide de la formule $f_{ac}^n = na/2L$, un premier mode aux alentours de 18 Hz et un second mode vers 36 Hz. Une telle observation permet d'affirmer que l'acoustique interne de la chambre de combustion joue un rôle primordial dans les oscillations des MPS [32].

Sources d'énergie acoustique

L'organisation de phénomènes vibratoires aux alentours des fréquences propres acoustiques du MPS ainsi que le glissement de fréquence qu'ils exhibent sont caractéristiques d'un phénomène d'accrochage aéroacoustique [92]. Ceci traduit le fait qu'une source d'instabilité dont la fréquence évolue au cours du temps interagit avec l'acoustique de la chambre. Se pose alors, tout naturellement, la question de savoir quelles instabilités de l'écoulement interne sont mises en jeu lors d'un tel phénomène. Les principaux candidats sont aujourd'hui bien connus [37] :

- la réponse en combustion du propergol, section 1.2,
- des phénomènes purement hydrodynamiques, section 1.3,
- la combustion résiduelle de gouttes d'aluminium dans la chambre [117].

Si rien ne permet, de prime abord, de suspecter un mécanisme prépondérant, tout semble indiquer que chacun intervient dans l'instabilité du système au complet [37]. Néanmoins, dans le MPS P230, la faible réponse en combustion du propergol dans la gamme des fréquences mesurées, permet, à priori, de conclure que cette dernière n'intervient pas de façon conséquente dans les instabilités observées. En outre, l'étude de chaque mécanisme étant un domaine à part entière, on se limitera, dans le cadre de cette thèse, à l'investigation de phénomènes d'origine *purement hydrodynamique*.

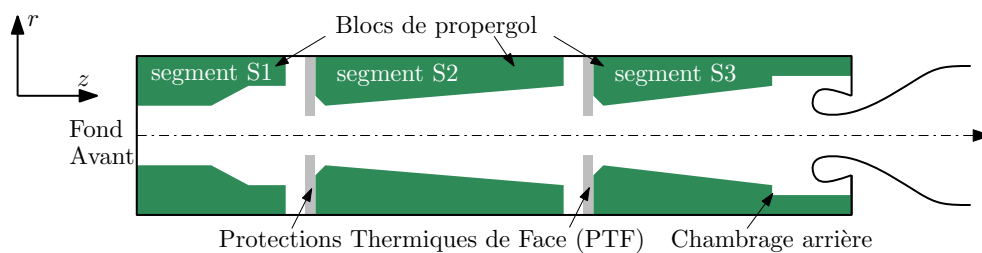


FIGURE 1.9 – Géométrie interne du MPS P230.

Géométrie interne

La description de l'hydrodynamique interne passe par la prise en compte des caractéristiques géométriques du P230, figure 1.9. Le moteur est composé de trois blocs de propergol ou segments que l'on note S1, S2 et S3, figure 1.9. Le premier segment, S1, intervient essentiellement à l'allumage pour la montée en pression de la chambre de combustion, assurant ainsi une grande partie de la poussée initiale. Les deux autres segments, S2 et S3, assurent la production de poussée pour le restant du tir. Entre les différents blocs, des Protections

Thermiques de Face (PTF) sont insérées afin d'inhiber la combustion des blocs par leur face amont. Au cours du tir, l'ablation de ces PTF par l'écoulement interne, à une température de près de 3000 K, est plus lente que la régression de la surface de combustion du propergol. En conséquence, ces PTF émergent au sein de l'écoulement interne sous la forme d'obstacles circulaires, figure 1.9. Enfin, et dû à la présence de la tuyère intégrée, un chambrage arrière est réalisé dans la géométrie du chargement au niveau du segment S3.

1.4.2 Modélisation de l'écoulement de base

L'écoulement interne moyen des MPS peut être modélisé, de façon simplifiée, par un écoulement induit par injection pariétale dans un canal axisymétrique semi-infini (figure 1.10). Avec une telle modélisation, une solution analytique peut être déterminée et utilisée comme solution de référence. Pour plus de détail concernant la modélisation de l'écoulement de base, le lecteur peut se référer aux travaux de thèse de doctorat de Griffond [63].

Notations

La configuration étant à géométrie axisymétrique, on se place dans un repère de coordonnées cylindriques $(O, \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta)$, figure 1.10, avec :

- O le centre du fond avant,
- $\mathbf{e}_x$ colinéaire à l'axe du demi-cylindre infini, orienté dans le sens de l'écoulement moyen,
- $\mathbf{e}_r$ normal aux parois débitantes, orienté vers l'extérieur,
- $\mathbf{e}_\theta$ la direction azimutale, telle que le repère soit direct.

On note R , le rayon du cylindre et $(U_x^*, U_r^*, U_\theta^*)$, les composantes du vecteur vitesse $\mathbf{U}^*$.

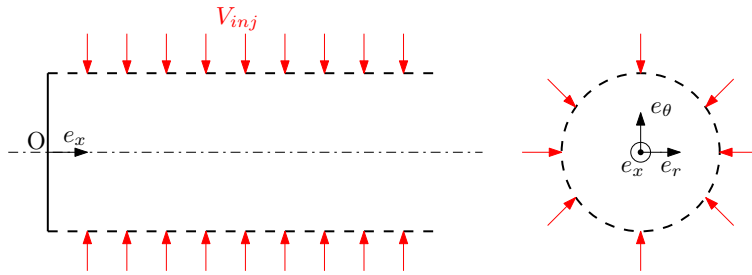


FIGURE 1.10 – Écoulement induit par injection pariétale en conduite axisymétrique semi-infinie.

Hypothèses

On considère un écoulement monophasique, non-réactif et incompressible dans un canal axisymétrique semi-infini. L'injection radiale est supposée normale à la paroi et de vitesse V_{inj} constante. De plus, on néglige l'action des

forces volumiques extérieures et, en particulier, la gravité. Cette approche permet de définir un écoulement de base pour tous les moteurs à propergol solide. En effet, d'après Griffond *et al.* [64], les termes liés à l'instationnarité des équations de Navier-Stokes en $\frac{\partial R}{\partial t}$ et $\frac{\partial V_{inj}}{\partial t}$ sont négligeables vis-à-vis des termes stationnaires (advection et diffusion visqueuse) pour l'écoulement de base. Par conséquent, l'écoulement de base à une vitesse d'injection V_{inj} donnée correspond à l'écoulement moyen d'un moteur à propergol solide à un instant t fixé.

Adimensionnement des équations

Ainsi modélisé, le problème ne fait intervenir que quatre paramètres : R , V_{inj} , ρ la masse volumique et μ la viscosité dynamique. Ces derniers permettent de rendre sans dimension les grandeurs physiques intervenant dans les équations de Navier-Stokes stationnaires et incompressibles : les longueurs sont donc adimensionnées par R , les vitesses par V_{inj} et la pression par la pression dynamique ρV_{inj}^2 .

Aussi, si l'on note x^* , toute grandeur dimensionnelle et $\bar{x}$, les quantités relatives à l'écoulement de base, on obtient, à l'aide des grandeurs physiques 1.2, le système d'équation 1.3.

$$\bar{x} = \frac{x^*}{R}, \quad \bar{r} = \frac{r^*}{R}, \quad \bar{U}_x = \frac{\bar{U}_x^*}{V_{inj}}, \quad \bar{U}_r = \frac{\bar{U}_r^*}{V_{inj}}, \quad \bar{U}_\theta = \frac{\bar{U}_\theta^*}{V_{inj}}, \quad \bar{P} = \frac{\bar{P}^*}{\rho V_{inj}^2}, \quad (1.2)$$

$$\begin{cases} \nabla \cdot \bar{\underline{U}} = 0, \\ \underline{\underline{\nabla \bar{U}}} \cdot \bar{\underline{U}} = -\underline{\underline{\nabla \bar{P}}} + \frac{1}{Re} \underline{\underline{\Delta \bar{U}}}, \end{cases} \quad (1.3)$$

où $Re = \frac{RV_{inj}}{\nu}$ est le nombre de Reynolds et $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ la viscosité cinématique.

Le problème étant à symétrie cylindrique, des solutions indépendantes de la coordonnée azimutale θ (invariance par rotation) sont alors cherchées :

$$\bar{U}_\theta = 0 \text{ et } \frac{\partial \bar{X}}{\partial \theta} = 0, \quad (1.4)$$

où $\bar{X}$ représente une grandeur moyenne. L'écoulement étant supposé stationnaire, l'écoulement de base s'écrit alors :

$$\bar{\underline{U}}(x, r, \theta, t) = (\bar{U}_x, \bar{U}_r, 0)(x, r). \quad (1.5)$$

Conditions aux limites

Le jeu de conditions aux limites associé au système 1.3 ne concerne donc que les deux premières composantes du vecteur vitesse et ne dépend que des coordonnées x et r . Pour plus de détail concernant la détermination des conditions aux limites, le lecteur peut se référer aux thèses [51] et [63].

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall x, \bar{U}_x(x, 1) = 0, \bar{U}_r(x, 1) = -1 \text{ à la paroi en } r = 1, \\ \forall x, \bar{U}_r(x, 0) = 0 \text{ sur l'axe en } r = 0, \\ \forall x, \forall n \in \mathbb{N}^* \frac{\partial^{2n} \bar{U}_r}{\partial r^{2n}} = \frac{\partial^{2n-1} \bar{U}_x}{\partial r^{2n-1}} = 0 \text{ sur l'axe en } r = 0, \\ \forall r, \bar{U}_x(0, r) = \bar{U}_r(0, r) = 0 \text{ au fond avant en } x = 0. \end{array} \right. \quad (1.6)$$

Ces conditions aux limites ne concernent que les composantes de vitesse $\bar{U}_r$ et $\bar{U}_\theta$ (équation 1.5) et ne font pas intervenir la pression $\bar{P}$. En effet, l'écoulement étant incompressible, seul le gradient de pression $\nabla \bar{P}$ intervient et la pression est alors connue à une constante près. Remarquons toutefois qu'il existe une incompatibilité entre deux conditions aux limites en $(x, r) = (0, 1)$: la vitesse radiale $\bar{U}_r$ doit être nulle en $x = 0$ et ce, quel que soit r , afin de vérifier la condition de non glissement à la paroi alors que $\bar{U}_r = -1$ en $r = 1$ dû à la condition d'injection. La condition d'adhérence au fond avant est donc incompatible avec l'hypothèse d'une injection appliquée jusqu'au fond avant.

Solution de Taylor-Culick

Dans la limite non visqueuse du problème, i.e. pour un nombre de Reynolds $Re \rightarrow \infty$, une solution analytique a été en premier lieu établie par Taylor [122] alors qu'il s'intéressait à un procédé de fabrication de la pâte à papier au travers d'une couche poreuse. Une dizaine d'années plus tard, Culick [35] retrouve indépendamment la solution de Taylor, lors de l'étude des moteurs à propulsion solide (ce qui explique pourquoi cette solution analytique est souvent référencée comme étant la solution de *Taylor-Culick*).

Par l'utilisation d'une fonction de courant cherchée sous la forme d'une solution de similitude, Culick [35] obtient alors une solution pour les champs de vitesse et de pression :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\Phi} = x \sin \left(\frac{\pi}{2} r^2 \right), \\ \bar{U}_x = \pi x \cos \left(\frac{\pi}{2} r^2 \right), \\ \bar{U}_r = -\frac{1}{r} \sin \left(\frac{\pi}{2} r^2 \right), \\ \bar{P} = P_0 - \frac{\pi^2}{2} x^2 - \frac{1}{2r^2} \left(\sin \left(\frac{\pi}{2} r^2 \right) \right)^2. \end{array} \right. \quad (1.7)$$

La nature non-visqueuse du problème résolu par Culick ne permet, à priori, que d'imposer trois conditions aux limites. Or, on s'aperçoit que la solution de Taylor-Culick vérifie les quatre conditions aux limites expliquant ainsi pourquoi il n'apparaît aucune couche limite due aux effets visqueux en proche paroi injectante [32]. De plus, rappelons que, ici encore, la condition d'adhérence au fond avant $x = 0$ n'est toujours pas vérifiée et que la solution de Taylor-Culick correspond donc à une solution avec glissement. À titre d'illustration, on représente sur les figures 1.11 et 1.12, les profils radiaux des composantes de vitesse longitudinale et radiale ainsi que les lignes de courant de l'écoulement de Taylor-Culick.

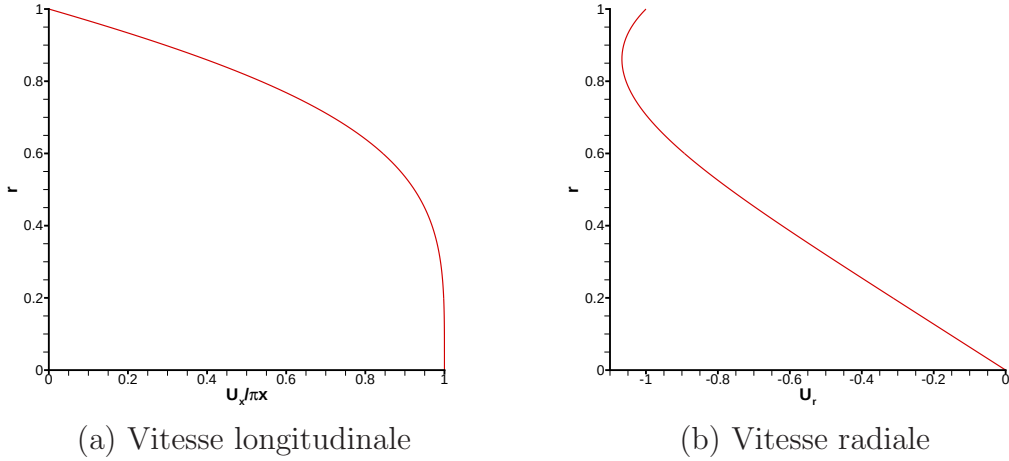


FIGURE 1.11 – Solution analytique de Taylor-Culick : profils de vitesse longitudinale et radiale.

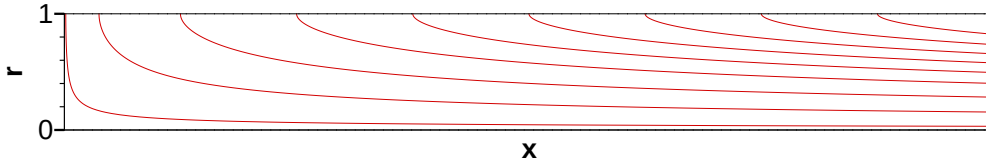


FIGURE 1.12 – Solution analytique de Taylor-Culick : lignes de courant.

Lorsque l'on compare les solutions de l'équation de Berman (visqueuse) (dont la détermination peut être trouvée dans la thèse de J. Griffond [63]) à la solution de Taylor-Culick (non-visqueuse), on constate que les écarts relatifs diminuent à mesure que le Re augmente [63]. Ainsi, Chedevergne [32] évoque, pour un nombre de Reynolds $Re = 1000$, un écart à r fixé de l'ordre de 0.1%. Dans le cadre des MPS, les nombres de Reynolds sont supérieurs à 1000 ($Re > 1000$), permettant ainsi de retenir la solution de Taylor-Culick comme solution de référence pour l'écoulement interne moyen.

1.5 Contexte et problématique de la thèse

En accompagnement du développement du P230, le CNES (Centre National d'Etudes Spatiales) a initié, entre les années 90 et 2000, deux programmes de Recherche & Technologie (R&T) dont la coordination scientifique fut confiée à l'ONERA : ASSM (Aerodynamics of Segmented Solid Motors) et POP (Programme Oscillations de Poussée). Dédiés à l'étude de l'aérodynamique interne des MPS, la finalité de ces programmes est alors de développer les compétences nécessaires à l'analyse des phénomènes observés et au développement d'outils prédictifs. Le postulat initial, dérivé essentiellement de l'expérience américaine, considère l'instabilité hydrodynamique induite par les Protections Thermiques

de Face (PTF) comme la source majeure des oscillations observées dans les MPS de grande taille. Une revue synthétisant la démarche scientifique et les principaux résultats obtenus dans le cadre de ces activités de recherche peut être trouvée dans la référence [47].

De cette activité de recherche (qui perdure encore aujourd'hui dans un cadre de R&T CNES) découle de nombreux travaux, parmi lesquels on peut distinguer :

1. des études expérimentales réalisées à l'aide de montages gaz froid :

- montage du Von Karman Institute (J. Anthoine [6]),
- montages VECLA et VALDO de l'ONERA (G.Avalon [10]),
- montage MICAT (Plourde *et al.* [132]).

Ces études ont permis d'étudier l'interaction de l'écoulement interne, en présence ou non d'obstacle, avec l'acoustique de la section d'essais.

2. des études expérimentales réalisées à l'aide de montages gaz chaud à échelle réduite du MPS P230 :

- LP3, moteur à l'échelle 1/15^{eme},
- LP6, moteur à l'échelle 1/15^{eme},
- LP9, moteur à l'échelle 1/35^{eme},
- LP10, moteur à l'échelle 1/35^{eme},

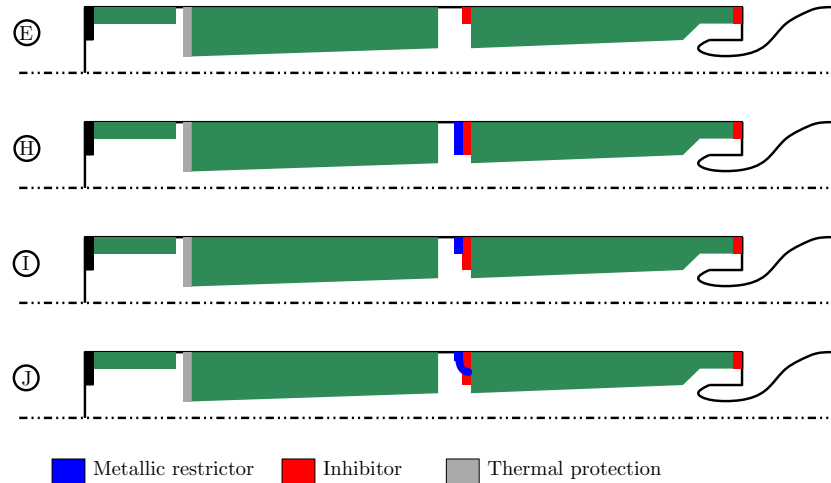


FIGURE 1.13 – Schématisation des 4 configurations de base du moteur LP6 permettant d'étudier l'impact des Protections Thermiques sur les Oscillations de Pression. D'après Le Breton *et al.* [74].

L'ensemble des tirs de ces moteurs ont été réalisés au laboratoire de propulsion de l'ONERA, sous la direction de M. Prévost [62]. À l'aide de diverses configurations, il a été possible d'analyser l'effet de la géométrie interne (présence des PTF (figure 1.13), géométrie des segments ...) et de la composition du propergol sur les instabilités de combustion.

3. des simulations numériques : codes de calcul SIERRA, MSD et CEDRE pour l'ONERA et les codes CPS et MOPTI pour la SNPE),
4. des contributions théoriques : analyses de stabilité linéaires [63, 51, 32].

Configuration	Mode 1L (280Hz)	Mode 2L (560Hz)	Mode 3L (840Hz)
E	6 - 9 s (0.010 MPa)		
H			3 - 4 s (0.003 MPa)
I		6 et 7 s (0.003 MPa)	4 et 4 s (0.004 MPa)
J	6.5 - 7.5 s (0.005 MPa)	7.5 s (0.002 MPa)	

Tableau 1.1 – Synthèse des résultats suite aux tirs des 4 configurations de base du moteur LP6, présentées en figure 1.13. Les amplitudes des oscillations de pression observées sont indiquées pour les trois premiers modes acoustique longitudinaux.

Ces travaux ont notamment permis d'observer que des oscillations de pression pouvaient avoir lieu, même si aucun obstacle ou discontinuité géométrique n'étaient présents dans la chambre de combustion (voir la figure 1.13 et le tableau 1.1), et ont ainsi, mis à mal le scénario initial^{viii}. Le phénomène de *Vortex Shedding Pariétal*^{ix}, initialement mis en évidence lors de tirs des moteurs LP3 et LP6 puis par simulation numérique [78], est alors relié au caractère instable de l'écoulement [130] et permet d'entrevoir des mécanismes relativement différents impliqués dans les instabilités de fonctionnement du MPS P230 [63][32].

A l'issue des travaux ASSM/POP, Vuillot [136] propose de classer les différents mécanismes d'instabilités d'origine hydrodynamique selon trois types de détachement tourbillonnaires :

- le VSO (Vortex Shedding d'Obstacle) pour le détachement tourbillonnaire induit par la présence des PTF,
- le VSA (Vortex Shedding d'Angle) pour le détachement tourbillonnaire induit par le chambrage du bloc aval,
- le VSP (Vortex Shedding Pariétal) pour le détachement tourbillonnaire induit par l'instabilité hydrodynamique de l'écoulement.

viii. Les oscillations de pression observées dans les MPS P230 ont une amplitude maximale sur le premier mode acoustique longitudinal. La configuration sans obstacle sollicite essentiellement le premier mode longitudinal, tandis que les configurations avec obstacle semblent agir sur les modes plus élevés de moteur LP6.

ix. La terminologie employée pour qualifier l'instabilité hydrodynamique de l'écoulement induit par injection pariétale provient du fait que la vorticité instationnaire s'organise en structures cohérentes dans la région proche de la paroi injectante [63].

Si un consensus s'est établi sur le fait que les oscillations de pression observées résultent d'un couplage fort entre des instabilités d'origine hydrodynamique et l'acoustique de la chambre de combustion, la question reste encore ouverte quant à l'identification précise du mécanisme excitateur. En outre, les (possibles et suspectées) interactions entre les différentes sources d'instabilité [131, 6] rendent, encore aujourd'hui, complexe la formalisation d'un scénario unique explicatif de l'émergence des oscillations de pression.

Parmi l'ensemble des possibles, un scénario semble se dégager pour les MPS P230 [137]. Ce dernier considère une interaction complexe entre les mécanismes dits de VSO et de VSP, interaction d'autant plus complexe que la géométrie interne du moteur est en perpétuelle évolution au cours du tir. En effet, la position de l'obstacle évolue (déflexion moyenne, taux de pénétration dans l'écoulement du à l'ablation thermique) et le savant couplage entre VSO et VSP est connu pour jouer un rôle crucial sur les fréquences émergentes [74, 65]. S'il reste, encore aujourd'hui, à déterminer sous quelles conditions et de quelle façon ce couplage fort peut intervenir, la dynamique d'amplificateur large bande associée au VSO laisse supposer [137] :

- un possible forçage du VSO par l'acoustique générée par le VSP,
- un impact sur le VSO de la réponse vibratoire de la PTF aux sollicitations aérodynamiques.

Lorsque l'on s'intéresse aux niveaux des fluctuations de pression, une *vision* monophasique et purement hydrodynamique seule ne semble suffire à expliquer les niveaux observés [79]. La présence d'une phase dispersée dans le moteur (combustion distribuée des particules d'aluminium) ou encore la dynamique vibratoire de la PTF restent des facteurs amplificateurs qu'il convient de continuer à étudier [47, 117].

C'est dans un tel contexte qu'a été initiée cette thèse ayant pour objet l'étude de l'écoulement induit par injection pariétale en géométrie axisymétrique. Plus particulièrement, on se concentrera sur **l'interaction qui peut avoir lieu entre cet écoulement et une structure** : les Protections Thermiques de Face (PTF). Quel est l'effet de la présence d'un tel obstacle sur l'écoulement interne ? Quels sont les mécanismes mis en jeu ? Quel est l'impact de la déflexion moyenne ainsi que la dynamique de l'obstacle sur ces derniers ? Pour répondre à ces questions, la présente étude se base sur le montage gaz froid VALDO de l'ONERA, alors considéré comme une modélisation représentative des MPS P230.

Cette simplification découle de plusieurs hypothèses. En premier lieu, l'utilisation d'un montage gaz froid présuppose une indépendance vis-à-vis des aspects thermiques, chimiques ou multiphasiques de l'écoulement. Bien que ces derniers jouent un rôle quantitatif non négligeable [117], la considération de mécanismes d'origine purement hydrodynamique permet, au premier ordre, de s'en affranchir. Une seconde hypothèse découle directement du rôle primordial joué par la géométrie interne propre à chaque MPS (géométrie des blocs, nombre de segments etc ...) dans l'appréhension des sources d'oscillations de pression. Si un tel constat peut sembler, de prime abord, comme

évident il n'en demeure pas moins essentiel pour l'étude d'un moteur donné. Rappelons que la problématique relative au lanceur américain Titan (7 segments) a conditionné l'utilisation d'une paire d'obstacles relativement proches dans nombre des études expérimentales menées jusqu'ici (voir section 1.3). Si une telle modélisation peut convenir dans le cas précis de moteurs fortement segmentés, elle semble à fortiori inadéquate pour une géométrie semblable à celle du P230, où l'utilisation de segments de grandes dimensions implique de considérer que *chaque obstacle opère de façon indépendante* [121, 72]. Cet aspect géométrique a notamment été étudié en détail par J. Anthoine [6]. Fort de ces hypothèses, une étude expérimentale de l'écoulement induit par injection pariétale en géométrie axisymétrique fait l'objet du chapitre 2 du présent manuscrit. Cette campagne expérimentale permettra de mettre en évidence l'impact de l'obstacle sur les instationnarités de l'écoulement.

Le chapitre 3 est consacré à l'analyse de stabilité globale de l'écoulement induit par injection pariétale en géométrie axisymétrique. On considère, à l'instar de l'étude expérimentale, à la fois la configuration sans puis avec obstacle. La particularité de cette étude est de pouvoir approcher la dynamique d'amplificateur de l'écoulement. L'objectif est d'étudier la réponse de l'écoulement à un forçage harmonique, et plus spécifiquement de déterminer les forçages conduisant à une énergie de perturbations maximale. Les résultats issus de l'analyse sont présentés puis discutés à la lumière des résultats expérimentaux.

L'étude expérimentale menée dans le chapitre 2 permet également d'investiguer les disparités pouvant apparaître lorsque l'obstacle est non plus considéré comme rigide mais comme possédant une dynamique propre. Dès lors, analyser le comportement de l'écoulement interne nécessite la considération de l'interaction entre un fluide à forte composante acoustique et une structure flexible. Cette *interaction fluide-structure* est alors approchée par simulation numérique et nécessite, en premier lieu, la caractérisation du comportement du matériau. Le chapitre 4 est ainsi dédié à la caractérisation expérimentale et à la définition d'un modèle traduisant fidèlement le comportement mécanique de l'élastomère utilisée dans la conception des PTF flexibles. La loi de comportement ainsi établie permet d'aboutir à la définition d'un modèle numérique représentatif de la structure.

Le chapitre 5 propose une approche numérique multiphysique permettant de simuler l'interaction des PTF avec l'écoulement interne. Une telle entreprise nécessite à la fois la mise au point d'outils dédiés et l'élaboration d'une méthodologie de couplage. Une fois validée, cette méthodologie est appliquée au montage VALDO. Un calcul numérique non couplé, pour un point de fonctionnement donné, est alors réalisé et considéré comme résultat numérique de référence. Le problème multiphysique est approché par le biais de deux algorithmes de couplage reposant sur la considération de temps caractéristiques propres à chacune des physiques. Les résultats intermédiaires sont présentés et analysés au regard des résultats expérimentaux. On établit ainsi la pertinence et la validité de l'approche développée pour l'étude des mécanismes aéro-mécaniques ayant lieu dans le montage VALDO et plus généralement dans les Moteurs à Propergol Solide.

L'ensemble de cette démarche scientifique est synthétisée et présentée sous la forme d'un organigramme. La figure 1.14 présente ainsi les interactions ayant lieu entre les différents chapitres qui composent le manuscrit. On précise également la ou les configurations étudiées (sans obstacle, avec obstacle rigide ou avec obstacle en élastomère) pour chacune des approches que l'on considère dans la présente étude.

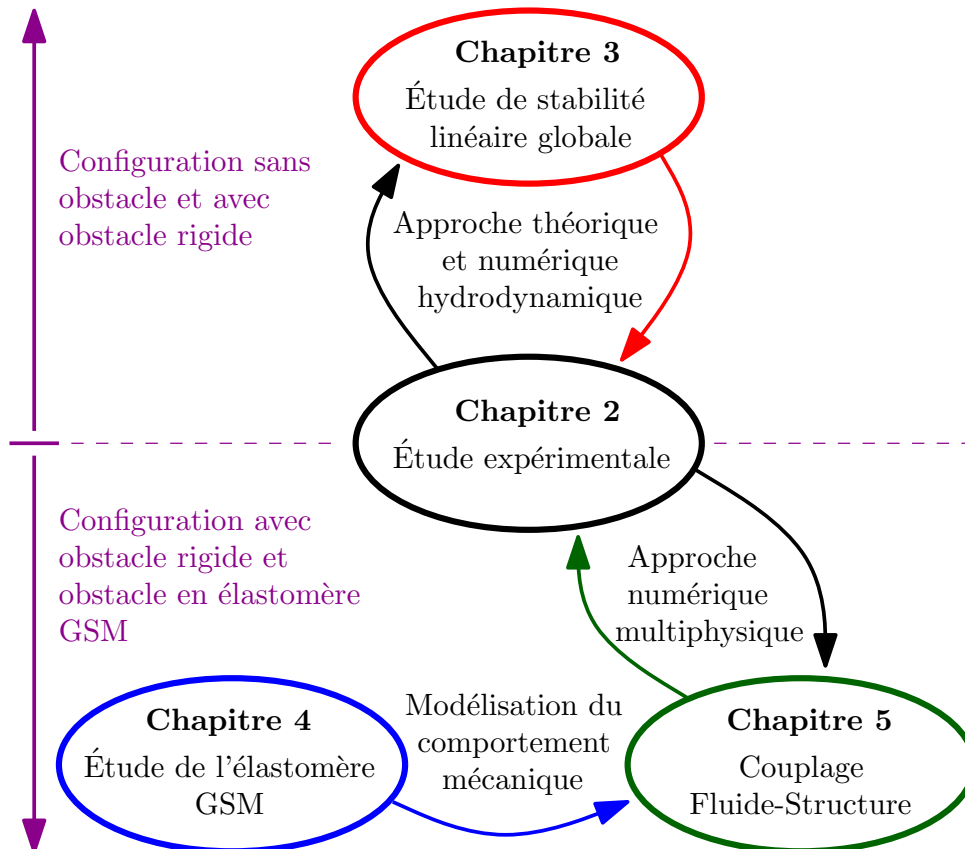


FIGURE 1.14 – Schématisation de la démarche scientifique mise en oeuvre.

Chapitre 2

Étude expérimentale

L'écoulement induit par injection pariétale en géométrie axisymétrique est connu pour exhiber des instationnarités qui se manifestent par l'émergence de fréquences au sein de l'écoulement. On se propose ici d'étudier expérimentalement l'impact de la présence d'un obstacle, modélisant les Protections Thermiques de Face des MPS, sur le caractère instable de cet écoulement interne.

Pour ce faire, une étude expérimentale reposant sur le montage VALDO a été menée à l'ONERA. Après avoir décrit le montage, section 2.1 et la procédure expérimentale employée, section 2.2, les résultats expérimentaux seront présentés et analysés dans la section 2.3. L'objectif de cette étude est de conclure quant au rôle joué par l'obstacle sur les instationnarités observées, section 2.4.

2.1 Description du montage expérimental

Conçu dans les années 2000, le montage VALDO (Veine Axisymétrique pour Limiter le Développement des Oscillations) est un dispositif expérimental permettant d'investiguer et de comprendre par quels mécanismes hydrodynamiques les oscillations de pression se manifestent au sein des MPS. Ce montage a une conception modulable similaire à celui développé par Brown et Dunlap [23].

2.1.1 VALDO : un montage de conception modulable

Présentation générale

Le montage VALDO est un montage gaz froid offrant nombre de configurations possibles. La base de toute configuration expérimentale est constituée d'au moins un élément injectant auquel peuvent être greffés différents jeux de cavités et/ou tuyères. Ces éléments injectants, au nombre maximum de 4, assurent l'injection pariétale de gaz dans la section d'essais et permettent ainsi de modéliser, en gaz froid, l'apport de quantité de mouvement induit par la combustion du propergol dans les MPS. Chaque élément, d'une longueur $L = 168$

mm et de rayon interne $R = 30$ mm, se compose de divers organes, figure 2.1, à savoir :

- un caisson extérieur qui se présente sous la forme d'une virole sur laquelle sont raccordés trois flexibles d'alimentation en air,
- une grille d'homogénéisation,
- un élément cylindrique en matériau appelé Poral.

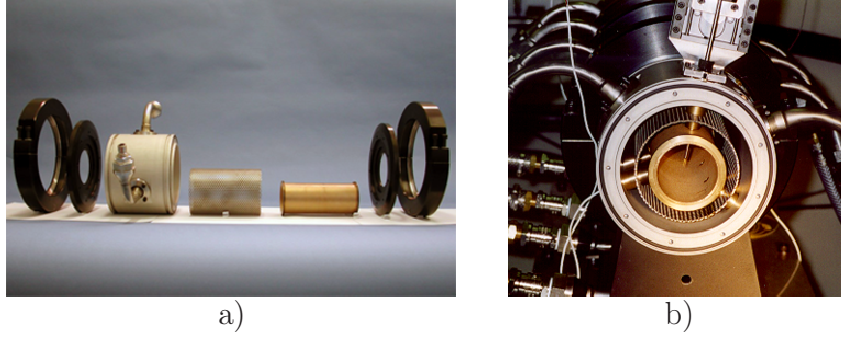


FIGURE 2.1 – (a) Vue éclatée d'un élément injectant (b) Élément injectant dans son ensemble et positionné en sortie du montage.

On peut alors décrire le processus par lequel le fluide, en provenance d'un réservoir à la pression de stagnation P_0 , est injecté dans la veine d'essai. Par l'intermédiaire des flexibles d'alimentation, équidistribués à 120° sur un élément injectant, le gaz pénètre dans le caisson d'alimentation et traverse la grille d'homogénéisation. On sait que l'injection au travers d'un élément poreux est fonction du différentiel de pression ΔP qui règne de part et d'autre de ce dernier. La loi de Darcy, équation 2.1, régit l'écoulement stationnaire d'un fluide incompressible de viscosité μ à la vitesse $\mathbf{u}$ à travers un milieu poreux de perméabilité κ

$$\mathbf{u} = -\frac{\kappa}{\mu} \nabla P. \quad (2.1)$$

Une autre particularité du montage VALDO est de pouvoir, contrairement aux autres montages gaz froid axisymétriques existant [6], contrôler de façon précise le débit d'injection. En amont du montage, au niveau des flexibles d'alimentation, l'injection s'effectue au travers de cols de section A^* fixée, permettant ainsi, une fois amorcés, de pouvoir évoluer à débit massique constant. En effet, on sait que pour une tuyère à col sonique, l'expression du débit massique est :

$$\dot{m} = \frac{A^* P_0}{\sqrt{T_0}} \sqrt{\frac{\gamma}{R} \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}} \approx 0.0404 \frac{A^* P_0}{\sqrt{T_0}}, \quad (2.2)$$

où P_0 et T_0 sont respectivement la pression et la température de stagnation. Le débit injecté $\dot{m}_{inj}$ s'écrit en fonction de la vitesse d'injection V_{inj} et de la pression P de la chambre :

$$V_{inj} = \frac{\dot{m}_{inj}}{S_{inj}} \frac{a^2}{\gamma P}, \quad (2.3)$$

où S_{inj} est la surface d'injection, a la célérité du son et γ le rapport des chaleurs massiques. Par conservation du débit, équations 2.2 et 2.3, il est alors aisé d'établir une relation entre la vitesse d'injection, la pression interne de la chambre, les grandeurs de stagnation et les caractéristiques géométriques du montage. Par exemple, pour une configuration composée de 3 éléments injectants, la vitesse d'injection peut être approximée par :

$$V_{inj} \approx 0.3 \frac{P_0}{P}. \quad (2.4)$$

Ainsi, par simple mesure de la pression interne de la section d'essais on peut déterminer de façon précise la vitesse d'injection V_{inj} . Il s'agit là d'une caractéristique essentielle dans la confrontation aux données théoriques.

2.1.2 Montage VALDO : instrumentation

Les montages gaz froid ont la particularité de permettre l'accès à un grand nombre de quantités thermodynamiques et physiques de l'écoulement. Dans le cas du montage VALDO, pression, température et vitesse sont analysées afin de pouvoir étudier l'écoulement interne au sein de la section d'essais.

Mesures de pression

Les fluctuations de pression sont mesurées à l'aide de capteurs piézo-résistifs Kulite XT-190 reliés à un amplificateur conditionneur ANS Model E300. Des prises de pression sont réparties sur le montage et se situent, figure 2.3 :

- au niveau de l'alimentation - P_0
- au niveau du fond avant - P_1
- en amont poral - P_2
- sur l'élément de mesure - P_3

La composante instationnaire des signaux de pression est obtenue par filtrage entre 50 Hz et 2 kHz à l'aide de filtres analogiques KEMO VBF 21. Une fois filtrée, le signal est amplifié par des amplificateurs ANS A400.

Contrôle de la température

La température est contrôlée dans la chambre au niveau de l'élément de mesure par une sonde PT100 et par un réchauffeur d'air Vulcanic Modèle DN 80. Ce dispositif permet d'assurer un fonctionnement à une température de l'ordre de 20°C dans la section d'essais et ce pour toutes les vitesses d'injection considérées.

Mesures par anémométrie à fil chaud

Les mesures de vitesses dans la section d'essais sont assurées par un système TSI IFA100 utilisant des sondes monofil modèle TSI 1210-T1.5. Ces sondes ne permettent de mesurer que la norme du vecteur vitesse. Par conséquent, lorsqu'il y aura confrontation, les données expérimentales seront comparées à la norme de la vitesse de l'écoulement de Taylor-Culick, équation 2.5 :

$$|\mathbf{U}| = \sqrt{U_r^2 + U_x^2}. \quad (2.5)$$

Mesures de déplacement

Lors des essais mettant en jeu des Protections Thermiques de Face (PTF) en élastomère, le suivi des vibrations est assuré par un vibromètre laser de marque Polytec PSV-400-3D Scanning Vibrometer. La technique de mesure utilisée par un tel dispositif est basée sur la détection de l'effet Doppler associé au déplacement d'un corps mobile. Les vibrations de l'objet dont on désire suivre le mouvement sont déterminées par le changement de fréquence du laser réfléchi. La vitesse de vibration est alors donnée par :

$$V_{vib} = \Delta f_{Doppler} \frac{\lambda}{2}, \quad (2.6)$$

où $\Delta f_{Doppler}$ est la fréquence Doppler et λ la longueur d'onde du laser ($\lambda_{He-Ne} = 632.8$ nm pour un laser He-Ne).

Chaîne de mesure

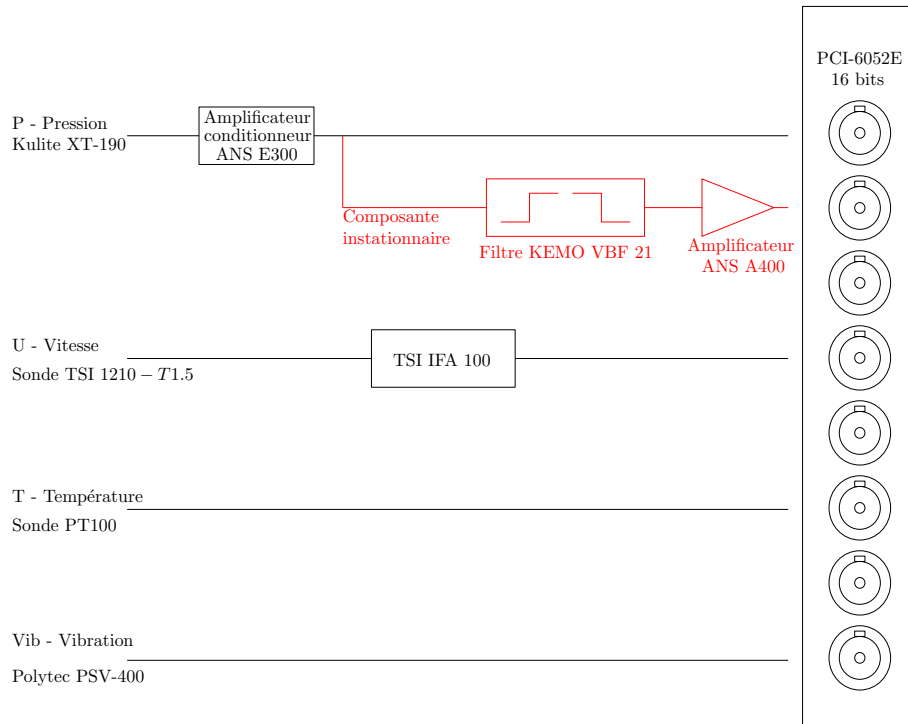


FIGURE 2.2 – Chaîne de mesure associée au montage VALDO.

La figure 2.2 présente une description générale de la chaîne d'acquisition du montage VALDO. Les signaux sont enregistrés par une carte d'acquisition 16 bits PCI-6052E de National Instrument. La fréquence d'acquisition est de 4 kHz, ce qui permet, d'après le théorème de Nyquist, d'observer des phénomènes instationnaires allant jusqu'à 2 kHz. On rappelle ici que les signaux observés ont à priori une fréquence inférieure à 1 kHz.

2.2 Procédure expérimentale

L'ensemble des essais expérimentaux menés sur le montage VALDO répondent à une procédure expérimentale dont la finalité est de mettre en évidence le rôle joué par les PTF sur l'écoulement interne. Par sa modularité (voir section 2.1.1), le montage VALDO permet de tester de multiples configurations. Bien que de nombreux résultats expérimentaux sont ici présentés, le lecteur pourra trouver une compilation plus exhaustive des résultats obtenus dans la référence [9].

2.2.1 Configurations d'essais

La procédure expérimentale choisie consiste en une approche comparative entre des essais réalisés en premier lieu sans puis avec une PTF dans la section d'essais. L'influence de l'obstacle sur les mécanismes d'instabilités est donc simplement obtenue par confrontation des résultats expérimentaux obtenus en configuration avec et sans PTF.

Configuration lisse

On dénommera par la suite *configuration lisse*, le montage VALDO constitué de 3 éléments injectants et ne contenant aucun obstacle, schématisé sur la figure 2.3 - partie haute. Une telle configuration permet l'étude de l'écoulement induit par injection pariétale dans une conduite cylindrique, écoulement dont la solution de Taylor-Culick (Chapitre 1 section 1.4.2) constitue une bonne approximation. Cet écoulement est connu pour exhiber des instationnarités qui peuvent se manifester par la création de structures cohérentes dans la région proche de la paroi injectante. Il a fait l'objet de nombreuses études, à la fois théoriques (voir par exemple [130], [63] et [28]), numériques ([136] ou encore [6]) et expérimentales ([142], [41], ...). Citons notamment les travaux de Ugurtas *et al.* [128], qui ont visualisé par fluorescence induite par laser (PLIF), en géométrie plane, la création de structures tourbillonnaires.

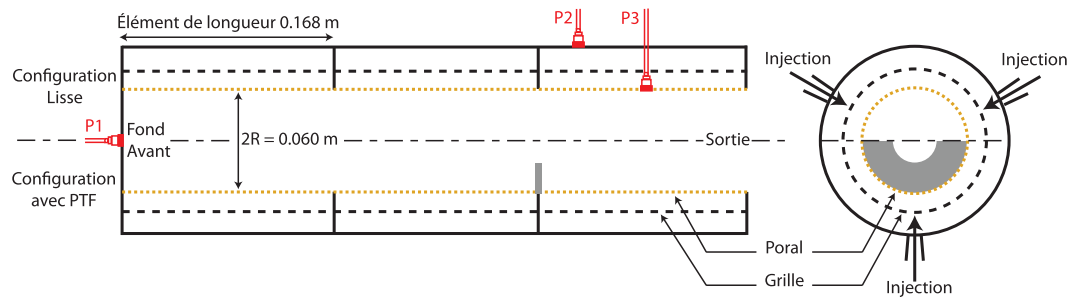


FIGURE 2.3 – Montage VALDO. Schématisation des deux configurations utilisées dans l'étude expérimentale. Partie haute - *configuration lisse* et partie basse - *configuration PTF*.

Configuration PTF

Lorsque l'on introduit une PTF dans la section d'essais, la configuration expérimentale est dénommée *configuration PTF*. Le montage VALDO est alors constitué de trois éléments injectants et d'un obstacle inséré au 2/3 de la section d'essais, schématisé sur la figure 2.3 - partie basse. Dans le cadre de la présente étude expérimentale, les structures utilisées ont une épaisseur de 1 mm. 4 diamètres intérieurs sont disponibles, à savoir $d_{int} = \{40; 45; 50; 55\}$ mm.

Dans l'objectif de démontrer l'impact de la présence de l'obstacle sur les instationnarités de l'écoulement, des essais sont en premier lieu réalisés à l'aide d'un obstacle en aluminium considéré comme infiniment rigide puis, en second lieu, avec des PTF en élastomères GSM, matériau utilisé dans la conception des PTF à l'échelle 1 du MPS P230 d'Ariane 5. Cette stratégie a pour vocation de découpler les effets dynamiques dus à la vibration de la structure des effets statiques où la présence de l'obstacle modifie la structure de l'écoulement.

2.2.2 Conditions d'opérations

Pour une configuration du montage VALDO donnée (lisse ou PTF), les essais ont été conduits à la fois à vitesse d'injection constante et à vitesse d'injection variable (figure 2.4). Les conditions de fonctionnement relatives à chaque essai sont récapitulées dans le tableau 2.1. La première variation permet d'analyser et de caractériser l'écoulement d'un point de vue statique, c'est-à-dire sous des conditions d'opérations fixes. La seconde variation à vitesse d'injection variable, dite dynamique, permet d'étudier l'éventuelle interaction de l'écoulement avec l'acoustique interne de la chambre.

Essais à vitesse d'injection constante

Lors des essais à vitesse d'injection constante, les conditions d'opération demeurant fixes, la mesure de profils de vitesse est alors possible. Les mesures par anémométrie par fil chaud sont réalisées à différentes positions axiales couvrant la plage 168 mm à 400 mm (voir tableau 2.2). Le pas de déplacement radial de la sonde monofil est alors de 1 mm et couvre la zone $r = [-27; 27]$ mm (tableau 2.1). Les signaux acquis sont également analysés dans le domaine spectral. Cette analyse est conduite en utilisant la méthode du périodogramme, [15], basée sur un algorithme de transformée de Fourier rapide à fenêtres glissantes (FFT). A chaque position de mesure (x, r) , 16384 points sont ainsi acquis à une fréquence d'échantillonnage de 4 kHz. Les spectres présentés sont obtenus par moyennage des différentes transformées de Fourier calculées sur une fenêtre de Hanning de longueur 4096 points et de recouvrement 25%. Ces conditions d'acquisition et de traitement des signaux expérimentaux permettent alors d'obtenir une résolution fréquentielle de l'ordre de 1 Hz.

Type d'injection	d_{int} - Diamètre intérieur de la PTF (mm)	V_{inj} - Vitesse d'injection (m.s ⁻¹)	x - Positions axiales de mesure du fil chaud (mm)	r - Positions radiales de mesure du fil chaud (mm)
Constante	pas de PTF	0.83/1.1/1.5	AI et PI (voir table 2.2)	de -27 à +27
	55	0.83/1.1/1.5	PI (voir table 2.2)	de -27 à +27
	50	0.83/1.1/1.5	PI (voir table 2.2)	de -27 à +27
	45	0.83/1.1/1.5	PI (voir table 2.2)	de -27 à +27
	40	0.83/1.1/1.5	PI (voir table 2.2)	de -27 à +27
Variable	pas de PTF	de 0.75 à 1.6	337 et 345	$\pm 27 / \pm 24$ $\pm 21 / \pm 18$
	55	de 0.7 à 1.6	337 et 345	± 27
	50	de 0.7 à 1.6	337 et 345	± 24
	45	de 0.7 à 1.6	337 et 345	± 21
	40	de 0.7 à 1.6	337 et 345	± 18

Tableau 2.1 – Conditions d'opérations expérimentales pour les essais à vitesse d'injection constante et variable.

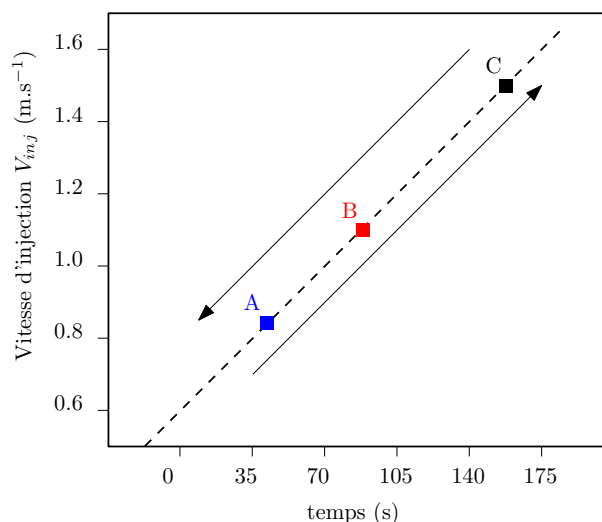


FIGURE 2.4 – Conditions d’opérations pour le montage VALDO. Les conditions pour les essais à vitesse d’injection constante sont A - $V_{inj} = 0.83 \text{ m.s}^{-1}$, B - $V_{inj} = 1.1 \text{ m.s}^{-1}$ et C - $V_{inj} = 1.5 \text{ m.s}^{-1}$. Pour les essais dynamiques, l’évolution de la vitesse d’injection V_{inj} est linéaire avec le temps (droite en pointillés).

Essais à vitesse d’injection variable

Pour les essais dynamiques, la vitesse d’injection varie linéairement entre 0.7 m.s^{-1} et 1.6 m.s^{-1} avec un taux approximatif de $5.2 \times 10^{-3} \text{ m.s}^{-2}$. Les fluctuations de vitesse sont alors mesurées par anémométrie par fil chaud à différentes positions dépendant de la configuration choisie (tableau 2.1). A l’instar des essais à vitesse d’injection constante, les signaux sont analysés dans le domaine spectral à l’aide de la méthode du périodogramme. Chaque fenêtre de Hanning est constituée de 16384 points avec un recouvrement de 50%. Ces conditions d’acquisition et de traitement des signaux expérimentaux permettent d’obtenir une résolution fréquentielle de l’ordre de 0.25 Hz.

Positions du fil chaud (m)	
En amont de l’obstacle (AI)	0.168
	0.217
	0.238
	0.268
	0.287
En aval de l’obstacle (PI)	0.336 to 0.340 (pas de 1 mm)
	0.340 to 0.350 (pas de 2 mm)
	0.350 to 0.360 (pas de 5 mm)
	0.360 to 0.400 (pas de 10 mm)

Tableau 2.2 – Positions axiales de mesures par anémométrie par fil chaud.

2.3 Résultats expérimentaux

Cette section présente les résultats expérimentaux obtenus selon la procédure expérimentale précédemment décrite. En outre, lorsqu'aucune information pertinente ne sera apportée par la multiplicité des conditions d'opération (vitesse d'injection, position de mesure ...), un choix sera effectué et seul un résultat représentatif sera commenté.

2.3.1 Essais à vitesse d'injection constante

Essais en configuration lisse

Afin de pouvoir qualifier le montage VALDO, il convient tout d'abord de vérifier que son utilisation permet de simuler de façon satisfaisante l'écoulement interne de la chambre de combustion des MPS. Pour cela, dans le cadre d'une utilisation en configuration lisse, les mesures de vitesse acquises par anémométrie à fil chaud sont comparées à la solution analytique pour l'écoulement de base.

L'injection pariétale de gaz au travers des éléments poreux est supposée uniforme et normale à la paroi. Or, on sait que pour la solution analytique de Taylor-Culick et sous de telles hypothèses, la vitesse axiale, à une position radiale donnée, évolue linéairement avec la position. La figure 2.5 présente l'évolution de la vitesse axiale en fonction de la position le long de l'axe de symétrie de la chambre. Pour les trois vitesses d'injections considérées (A, B et C, figure 2.4), la confrontation des mesures expérimentales, où la vitesse d'injection est déterminée à l'aide de la relation 2.4, avec les prédictions analytiques permet de s'assurer du faible écart existant. Ces résultats confirment, pour le montage VALDO, l'hypothèse d'une injection s'effectuant en moyenne normalement à la paroi et à vitesse uniforme.

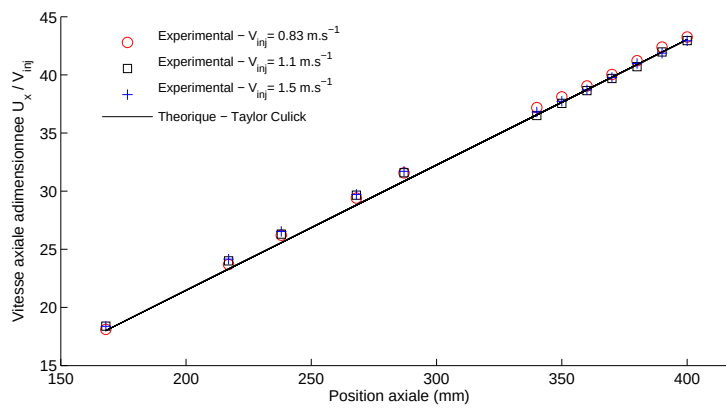


FIGURE 2.5 – Évolution de la vitesse axiale en fonction de la position x en $r = 0$.

On peut alors comparer les profils de vitesse moyenne acquis par anémométrie à fil chaud aux profils de vitesse de Taylor-Culick, figure 2.6-(a). Pour les trois vitesses d'injections choisies, on note un bon accord entre

profils expérimentaux et solution analytique. Si l'on examine plus en détail l'ensemble des profils de vitesse, de légères différences apparaissent, possiblement dues à un défaut d'injection local au niveau des poreux du 3^{ème} élément injectant. Ces résultats expérimentaux permettent d'affirmer que l'écoulement induit par injection pariétale au sein de la section d'essais du montage VALDO est représentatif de l'écoulement interne des MPS.

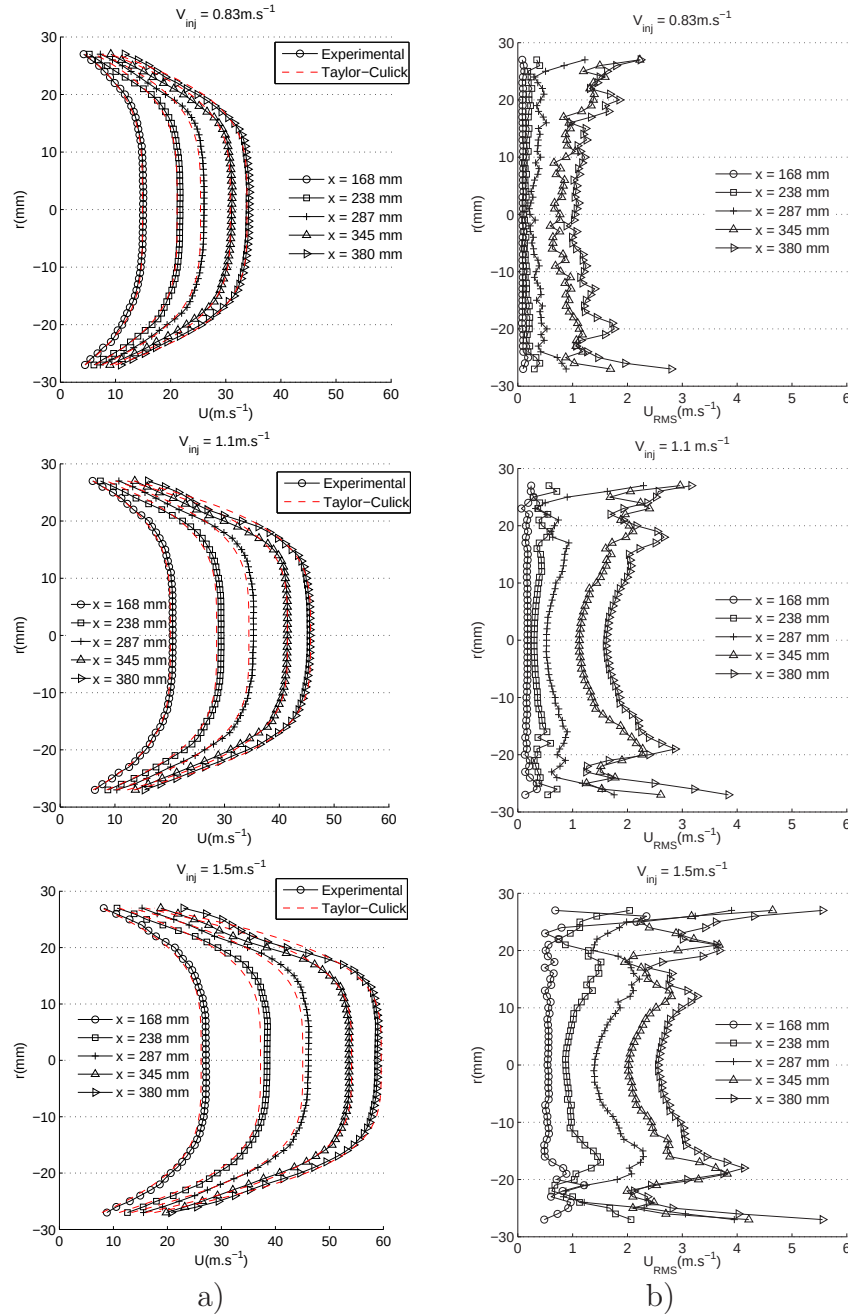


FIGURE 2.6 – (a) Profils de vitesse moyenne U et (b) fluctuations de vitesse RMS, U_{RMS} en différentes positions axiales. Les profils sont mesurés pour les trois vitesses d'injection V_{inj} .

De ces mesures, sont déduites les fluctuations de vitesse RMS (pour Root

Mean Square) représentées en figure 2.6-(b). On retrouve un comportement caractéristique de ce type d'écoulement, [54]. En effet, lorsque l'on approche la paroi d'injection, afin de respecter la condition de non-glissement, des oscillations acoustiques provenant des effets rotationnels apparaissent. La forme particulière que décrit la vitesse fluctuante peut alors être perçue comme une *couche limite acoustique*. Outre ce comportement oscillatoire, d'un point de vue plus global, le niveau moyen des fluctuations de vitesse RMS augmente à la fois avec la vitesse d'injection (apport d'énergie augmentant) et avec la position axiale. Le saut de vitesse RMS observé entre deux positions successives (plus précisément le saut de vitesse RMS adimensionnée $U_{RMS}/|U_{axe}|$) est caractéristique d'une transition laminaire/turbulent de l'écoulement interne. Ainsi, dans le cadre de cette étude expérimentale, la transition vers un état turbulent a lieu pour $9.6 < x/R < 11.2$. Dans un montage similaire, Dunlap *et al.* [41] ont observé la transition laminaire/turbulent de l'écoulement pour des valeurs $10.9 < x/R < 15.8$. On peut donc en conclure que, pour ce type d'écoulement, la transition a généralement lieu à une position axiale de l'ordre d'une dizaine de rayons de chambre, i.e à $x/R \simeq 11$.

Essais en configuration lisse : analyse spectrale

La figure 2.7 présente les spectres des fluctuations de vitesse selon un diamètre de chambre et à différentes positions axiales. Nous ne présentons ici que les résultats obtenus pour une vitesse d'injection $V_{inj} = 1.1 \text{ m.s}^{-1}$, les autres vitesses d'injection conduisant aux mêmes conclusions.

Le contenu fréquentiel des spectres se caractérise essentiellement par la présence d'une fréquence dominante de l'ordre de 365 Hz, accompagnée d'une harmonique à 730 Hz. Bien que ces fréquences soient présentes sur tout un diamètre de chambre, leur amplitude décroît à mesure que le fil chaud s'éloigne des parois injectantes. On remarque également que l'amplitude relative aux fréquences dominantes augmente avec l'abscisse, traduisant ainsi une amplification spatiale de l'instationnarité présente dans l'écoulement. Si l'on compare les spectres de fluctuations de vitesse au spectre de réponse en pression mesurée au fond avant de la section d'essais, figure 2.8, on constate une fréquence dominante commune aux deux signaux. On peut alors supposer que le fil chaud ne répond qu'aux fluctuations de vitesse d'origine acoustique. Afin de vérifier l'étendue d'une telle hypothèse, on évalue, à partir des mesures de pression fluctuantes l'ordre de grandeur des fluctuations de vitesse acoustique égales à $\frac{aP'}{\gamma P_0}$. Ainsi, pour une vitesse d'injection $V_{inj} = 1.1 \text{ m.s}^{-1}$, la pression normalisée au fond avant valant 0.12 % de la pression atmosphérique, la vitesse acoustique maximale induite est de l'ordre de 0.3 m.s^{-1} . Or, l'anémomètre mesure une composante de vitesse instationnaire de l'ordre de 3 m.s^{-1} , suggérant ainsi que le fil chaud n'est pas uniquement sensible aux oscillations d'origine acoustique et que l'écoulement est bien le siège d'instabilités d'origine hydrodynamique. On retrouve, dans la littérature, différentes dénominations pour une telle instabilité. Elle est ainsi dénommée instabilité de Taylor-Culick [32] faisant ainsi référence à la solution analytique de Taylor-Culick ou encore Vortex Shedding Pariétal [136] faisant alors écho à l'émission de structures tourbillonnaires dans

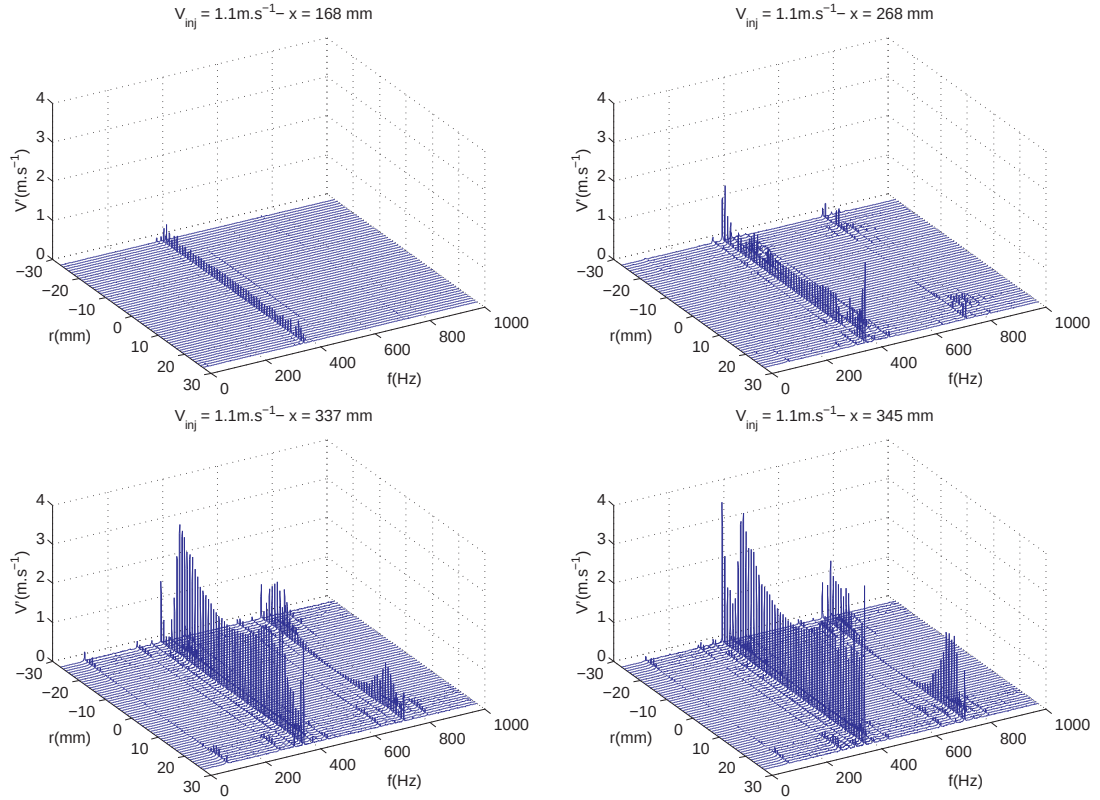


FIGURE 2.7 – Analyse spectrale des fluctuations de vitesse en différentes positions axiales et pour une vitesse d'injection $V_{inj} = 1.1 \text{ m.s}^{-1}$.

la région de proche paroi.

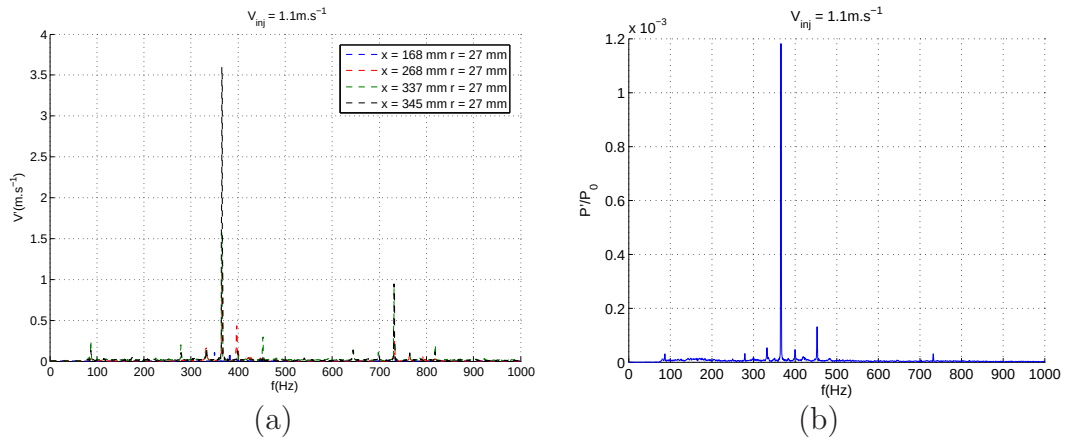


FIGURE 2.8 – Analyse spectrale (a) des fluctuations de vitesse et (b) de la pression au fond avant pour une vitesse d'injection $V_{inj} = 1.1 \text{ m.s}^{-1}$.

Ces observations, permettent de mettre en évidence l'existence d'un phénomène aéroacoustique. La corrélation entre les fluctuations de vitesse et de pression suggère que des instabilités hydrodynamiques agissent comme une source d'énergie acoustique, [136] et [43]. Sur un montage similaire au montage VALDO mais en géométrie plane, Ugurtas *et al.* [128] ont mis en évidence,

par fluorescence induite par laser, la présence de structures cohérentes en région de proche paroi. Ces structures cohérentes sont responsables de l'émission d'une onde de pression lorsqu'elles atteignent la sortie du montage. S'il n'est pas possible de procéder à une visualisation par le même procédé sur le montage VALDO, l'existence d'une même fréquence prédominante dans les signaux de pression et de vitesse suggère la présence du même phénomène d'origine aéroacoustique.

Essais en configuration PTF

Lorsque le montage VALDO est utilisé en *configuration PTF*, les profils de vitesse sont mesurés, pour les trois vitesses d'injection, à différentes positions axiales en aval de l'obstacle, figure 2.9. Précisons que, pour l'étude à vitesse d'injection constante, seules des PTF en aluminium rigides ne sont considérées. De façon évidente, l'introduction d'une PTF dégenère le profil de Taylor-Culick en un profil assimilable à celui d'un jet de type *top hat*. L'effet est d'autant plus prononcé que le diamètre interne de la PTF est faible. En effet, pour la PTF la moins pénétrante dans l'écoulement ($d_{int} = 55$ mm), l'influence due à la présence de l'obstacle demeure faible et les profils de vitesse moyenne proches de ceux de la solution analytique. Pour les autres obstacles ($d_{int} \leq 50$ mm), les profils de vitesse moyenne présentent un point d'inflexion caractérisant la formation d'une couche de cisaillement. Si la présence de l'obstacle tend à modifier l'écoulement moyen, l'injection pariétale a pour incidence de diminuer cet impact avec la distance axiale. Cette compétition entre constriction de l'écoulement et injection pariétale peut conduire, par exemple pour $d_{int} = 55$ mm, à la disparition complète de la couche de cisaillement à une distance suffisamment éloignée de la PTF.

De la même façon que pour la configuration lisse, les mesures de vitesses donnent accès aux fluctuations de vitesse RMS en aval des PTF, figure 2.10. La valeur maximale des fluctuations RMS est alors atteinte dans le sillage de la PTF en $x = 337$ mm, et donc pour la position de mesure la plus proche de l'origine de la couche de cisaillement. En outre, l'adoucissement du profil de vitesse moyenne avec la position axiale x a tendance à faire chuter les valeurs RMS. Ces dernières conservent toutefois une valeur suffisamment importante pour être significatives. Au delà de cette tendance, il semble qu'il existe une abscisse critique x_{crit} (non précisément déterminée ici) pour laquelle les amplitudes fluctuations de vitesse RMS réaugmentent. L'observation d'un tel phénomène suggère une amplification spatiale de l'instationnarité.

Essais en configuration PTF : analyse spectrale

La répartition spectrale de la composante de vitesse fluctuante est représentée sur la figure 2.11. Les spectres sont déterminés à une position axiale de $x = 345$ mm, i.e. à la même position que pour les essais menés en configuration lisse. Sous des conditions d'injection $V_{inj} = 1.1$ m.s⁻¹, ces spectres sont essentiellement caractérisés par une fréquence dominante et par sa première harmonique. Cette fréquence dominante connaît une amplitude maximale dans

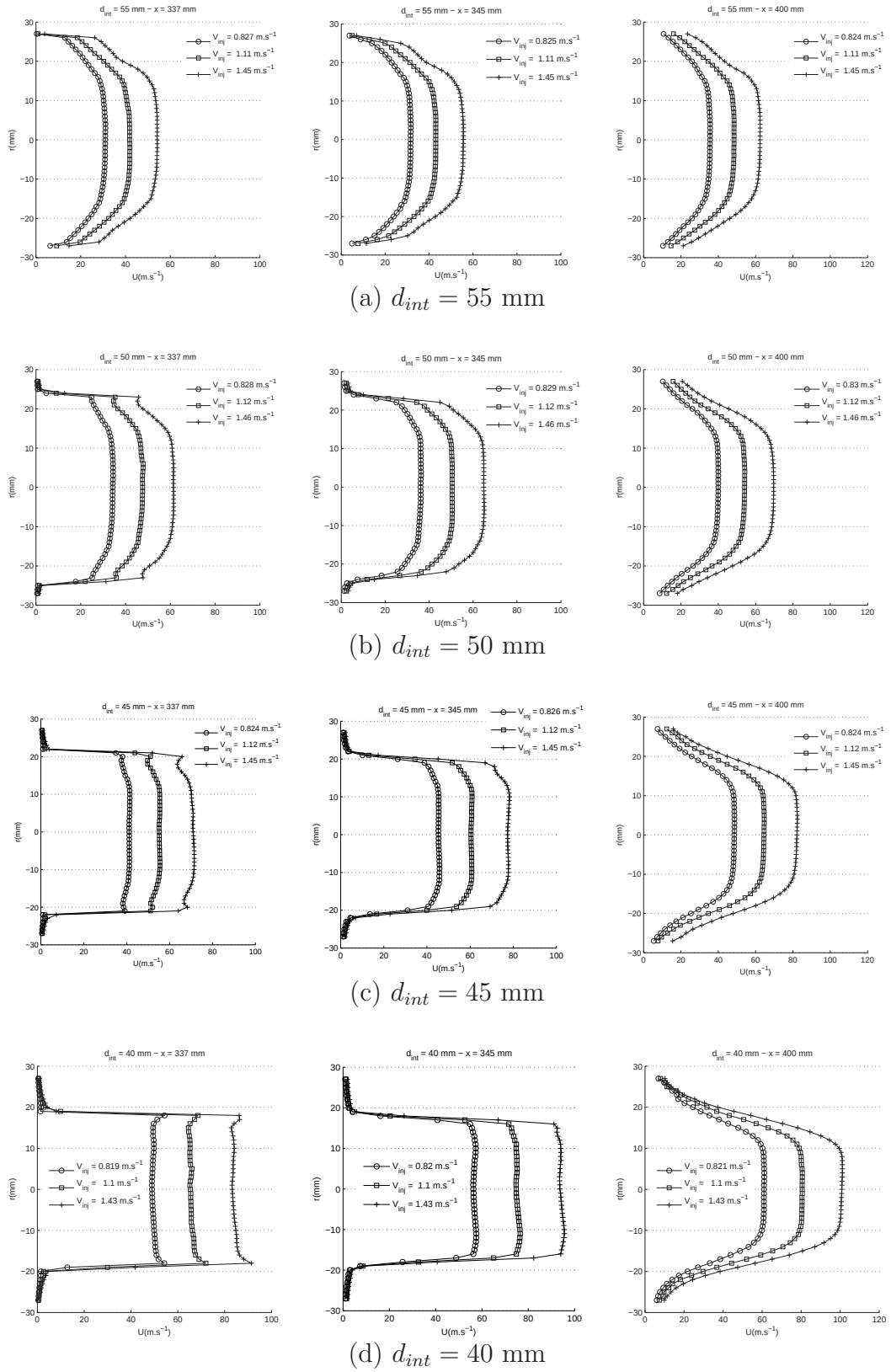


FIGURE 2.9 – Profils de vitesse moyenne U en aval de l'obstacle et pour les trois vitesses d'injection V_{inj} . Les mesures ont été effectuées pour les 4 diamètres intérieurs.

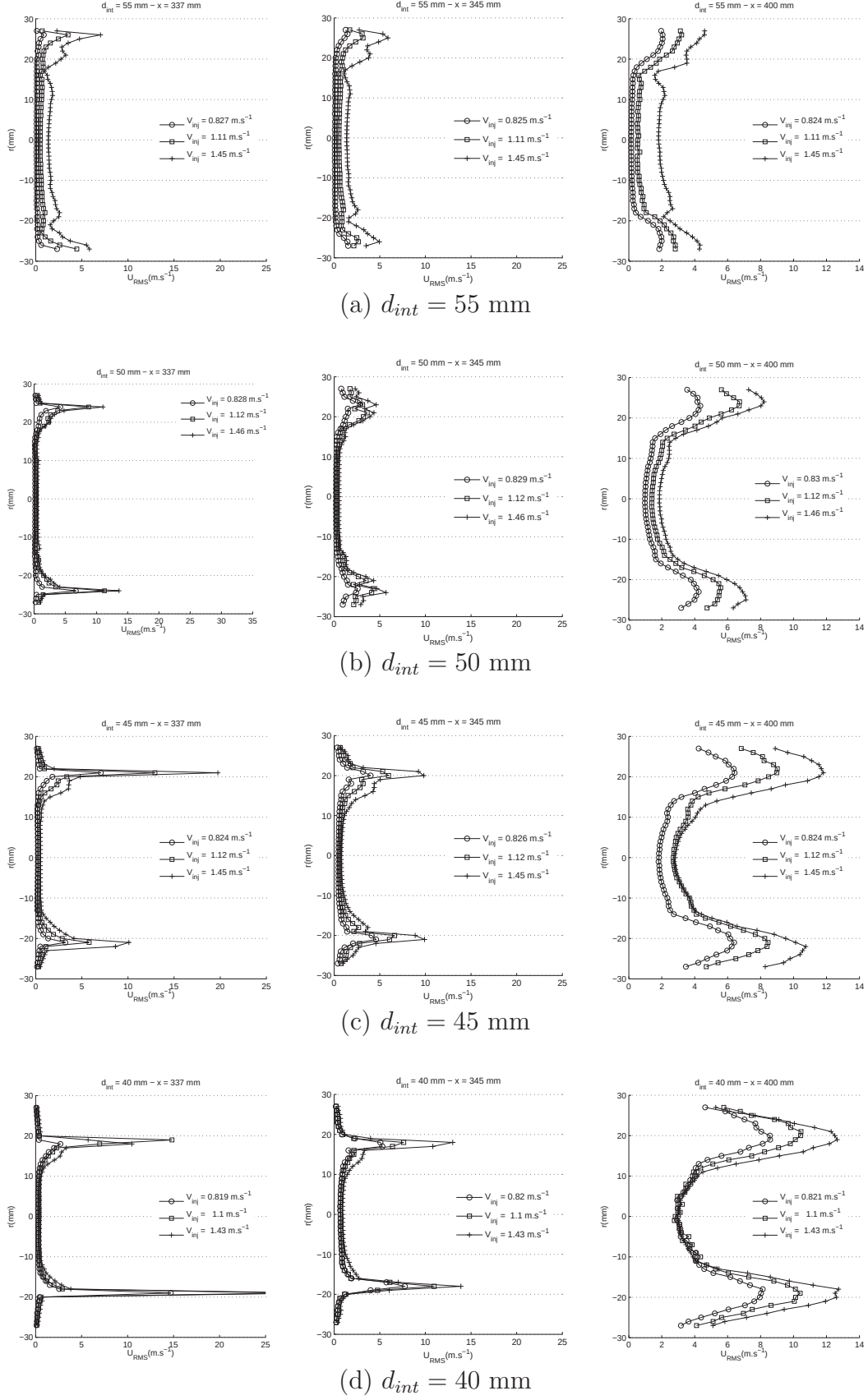


FIGURE 2.10 – Fluctuations de vitesse RMS, U_{RMS} en aval de l'obstacle. Les profils sont mesurés pour les trois vitesses d'injection V_{inj} .

le sillage de la PTF.

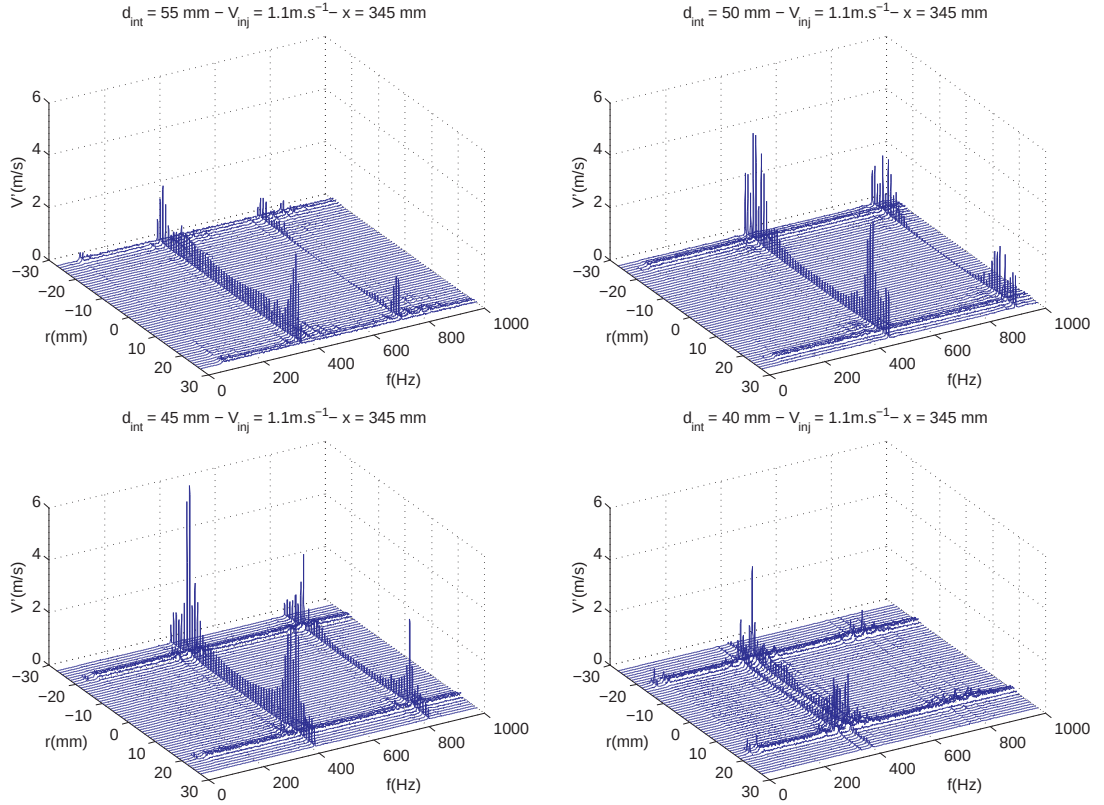


FIGURE 2.11 – Analyse spectrale des fluctuations de vitesse pour une vitesse d'injection $V_{inj} = 1.1 \text{ m.s}^{-1}$. Les mesures sont effectuées en $x = 0.345 \text{ m}$.

La figure 2.12 résume les spectres de vitesse et de pression fluctuantes permettant de mettre en évidence l'effet que peut avoir la présence de l'obstacle sur les instationnarités de l'écoulement. Le spectre de vitesse a été extrait à la position radiale où la fréquence dominante est d'amplitude maximale, c'est-à-dire dans le sillage de la PTF. Pour l'obstacle de plus grand diamètre intérieur $d_{int} = 55 \text{ mm}$, la fréquence dominante de la vitesse et de la pression sont identiques à celles observées dans le cas de la configuration lisse. Un tel comportement peut, en l'état actuel des observations, être expliqué par le fait que la présence de la PTF ne modifie que très faiblement l'écoulement de base et donc que l'on se trouve en présence d'une instabilité de l'écoulement induit par injection pariétale, telle qu'observée pour la *configuration lisse*. Concernant les autres PTF, un glissement de la fréquence dominante est observé. Notons que ce décalage en fréquence n'est pas inversement proportionnel au diamètre intérieur. En effet le décalage en fréquence le plus important est observé pour la PTF de diamètre intérieur $d_{int} = 50 \text{ mm}$ et diminue au delà.

Des analyses de stabilité linéaire conduites en approche locale sur une couche de mélange, [66] [58] et [86], ont démontré que la fréquence f la plus amplifiée d'une couche de cisaillement non forcée pouvait être reliée au différentiel de vitesse $\bar{U} = \frac{U_1 + U_2}{2}$ et à l'épaisseur de quantité de mouvement θ . On peut alors construire le nombre de Strouhal suivant :

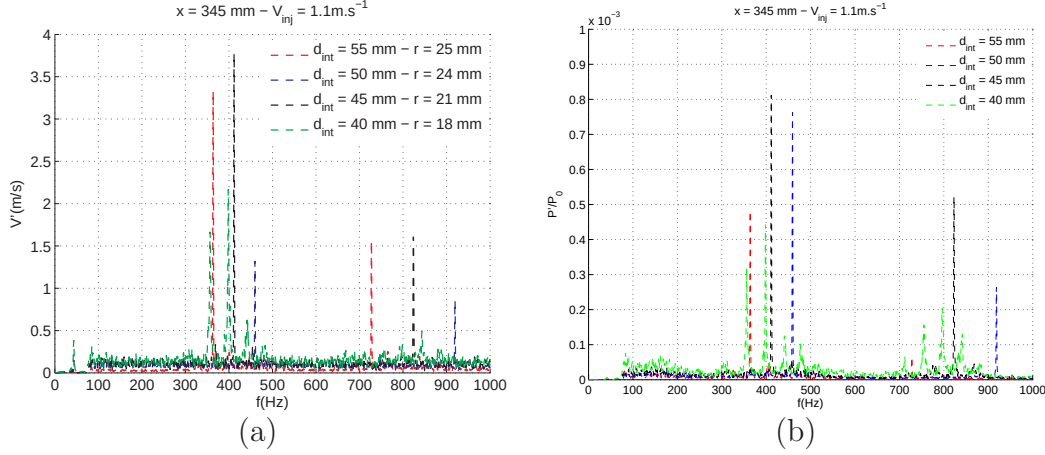


FIGURE 2.12 – Analyse spectrale (a) des fluctuations de vitesse et (b) de la pression au fond avant pour une vitesse d'injection $V_{inj} = 1.1 \text{ m.s}^{-1}$.

$$St = \frac{f\theta}{\bar{U}} = 0.032. \quad (2.7)$$

On peut également montrer [133] que l'épaisseur de quantité de mouvement est proportionnelle au diamètre intérieur de l'obstacle et à la vitesse de cisaillement $\Delta U = U_1 - U_2$:

$$\theta \propto \sqrt{\frac{\nu d_{int}}{\Delta U}}. \quad (2.8)$$

Les équations 2.7 et 2.8 permettent d'établir qu'à des conditions d'opérations fixées, réduire le diamètre intérieur de l'obstacle a pour conséquence de diminuer l'épaisseur de quantité de mouvement. En outre, si les instationnarités observées étaient exclusivement dues à l'instabilité de la couche de mélange, la fréquence la plus amplifiée devrait diminuer avec le diamètre intérieur, i.e. si $d_{int} \nearrow$ alors $\theta \nearrow$ et $\bar{U} \searrow$ et donc d'après l'équation 2.7, $f \searrow$.

Le comportement observé dans le cadre de la *configuration PTF* ne suit manifestement pas une telle loi d'évolution et semble plutôt suggérer l'existence d'une interaction complexe entre l'instabilité de Kelvin-Helmholtz (la couche de mélange) et l'instabilité naturelle de l'écoulement induit par injection pariétale. Dans le cadre de nos essais, il semble que l'on puisse définir une configuration *critique*, au sens où l'écart de la fréquence dominante par rapport à celle de la configuration lisse soit maximum. Cet état critique est identifié pour la PTF de diamètre intérieur $d_{int} = 50 \text{ mm}$.

2.3.2 Essais à vitesse d'injection variable

Essais en configuration lisse

On utilise le montage expérimental en *configuration lisse* et la vitesse d'injection varie de 0.7 m.s^{-1} à 1.6 m.s^{-1} . Au cours de ces essais, différentes posi-

tions pour le fil chaud ont été adoptées (voir tableau 2.1 et tableau 2.2), permettant ainsi de comparer ces résultats expérimentaux avec ceux obtenus en *configuration PTF*. La figure 2.13 présente un spectrogramme des fluctuations de vitesse et de pression en fonction de la vitesse d'injection. La corrélation observée entre fluctuations de vitesse et de pression illustre, au même titre que précédemment, la présence d'un phénomène aéroacoustique. Ces dernières sont caractérisées par une évolution quasi-linéaire de la fréquence dominante et présentent, pour une vitesse d'injection proche de 1.4 m.s^{-1} , un saut abrupt de fréquence. Ce saut en fréquence est associé à une faible variation de la vitesse d'injection et a lieu à une fréquence proche de 485 Hz.

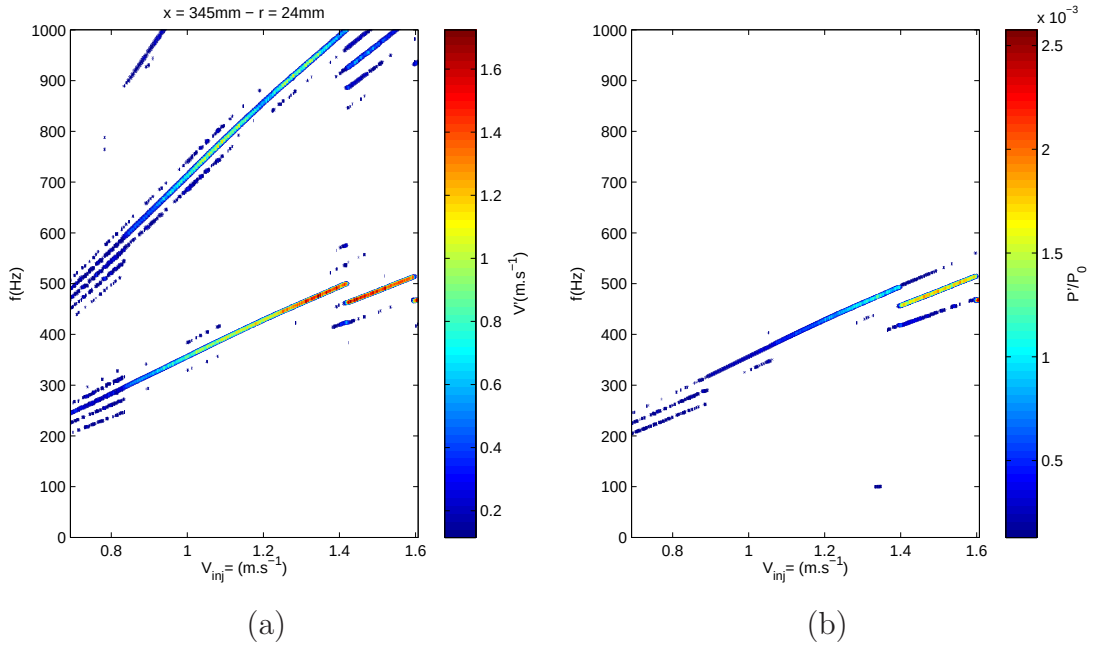


FIGURE 2.13 – Spectrogrammes des fluctuations de (a) vitesse et de (b) pression en fonction de la vitesse d'injection

Les amplitudes des fluctuations de pression sont représentées, en terme d'amplitude et de fréquence sur la figure 2.14. Ces fluctuations de pression sont essentiellement caractérisées par une amplitude croissante avec la vitesse d'injection. En outre, lorsque le saut en fréquence intervient, un saut en amplitude est également observé. On peut alors émettre l'hypothèse suivante : l'instabilité naturelle de l'écoulement induit par injection pariétale s'accroche sur les modes acoustiques de la chambre (effet dit de lock-in). Si l'on calcule les fréquences propres d'un tuyau cylindrique fermé à une extrémité et ouvert à l'autre, par l'intermédiaire de la formule $f_n = \frac{(2n-1)a}{4L}$, on trouve approximativement 510 Hz. Or, le saut de fréquence intervient autour de 485 Hz. Si le saut en fréquence a bien lieu autour d'une fréquence propre de la chambre, comment expliquer un tel écart entre la fréquence théorique et celle observée expérimentalement ? Cet écart, de l'ordre de 5%, peut être imputé à la présence de l'écoulement où les effets convectifs sont connus pour diminuer les fréquences propres mais également à l'impédance acoustique de sortie qui devrait être prise

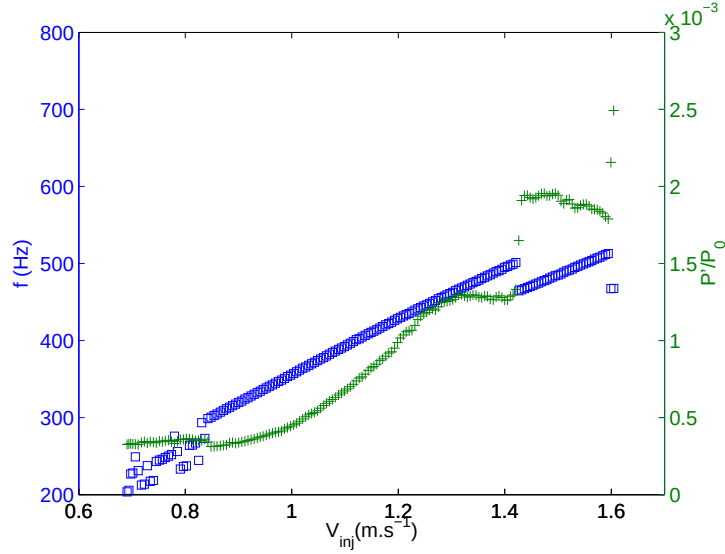


FIGURE 2.14 – Fréquence ($\square$) et amplitude (+) des fluctuations de pression en fonction de la vitesse d'injection.

en compte de façon plus précise dans le calcul des fréquences propres [88]. Notons qu'une telle problématique ne se pose pas lorsque le montage opère avec une tuyère car la tuyère à col sonique peut être considérée comme ayant une impédance équivalente à celle d'un mur [7, 131].

Essais en configuration lisse : hystérésis

La comparaison de la valeur de la fréquence dominante des fluctuations de vitesse et de pression, prise à une vitesse d'injection approximative $V_{inj} = 1.1 \text{ m.s}^{-1}$, aux mesures effectuées à vitesse d'injection constante, met en évidence un écart significatif entre les deux fréquences - $f_{variable} = 395 \text{ Hz}$ versus $f_{constant} = 365 \text{ Hz}$. Afin de comprendre comment un tel écart de la fréquence dominante peut se produire alors que les conditions d'opérations sont les mêmes, des essais à vitesse d'injection avec une évolution dans le sens croissant et décroissant ont été entrepris.

On remarque que, figure 2.15, pour les deux types d'évolution, le chemin emprunté par les fréquences hydrodynamiques les plus amplifiées dans l'écoulement diffère de façon conséquente lorsque l'on s'approche du régime d'accrochage $V_{inj} > 1.2 \text{ m.s}^{-1}$. La modification du domaine d'instabilité hydrodynamique lorsqu'il y a interaction forte entre deux mécanismes oscillatoires, dans notre cas l'instabilité naturelle de l'écoulement induit par injection pariétale et l'acoustique de la chambre, est couramment observée dans nombre de configurations tel que, par exemple, l'interaction d'un jet avec un obstacle flexible [92]. Ce comportement, que l'on qualifie d'hystérèse, a déjà été précédemment observé sur le montage VALDO [33]. Au regard de tels résultats, on peut alors émettre l'hypothèse que l'instabilité naturelle de l'écoulement induit par injection pariétale est fortement sensible à l'environnement externe et semble ainsi exhiber une dépendance vis-à-vis de l'histoire.

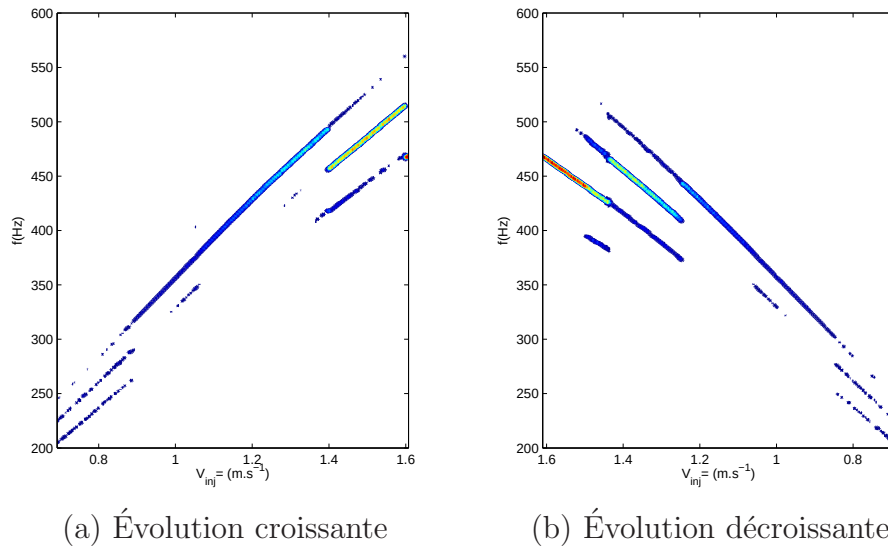


FIGURE 2.15 – Spectrogrammes de pression en fonction de la vitesse d'injection.

Essais en configuration lisse : vérification de l'accrochage aéroacoustique

Afin de confirmer l'hypothèse d'un phénomène aéroacoustique qui s'accroche sur les fréquences propres de la section d'essais, on entreprend une série d'essais complémentaires. Au cours de ces essais, la cavité située au fond avant permet de faire varier la longueur totale du montage VALDO, sans en changer les conditions d'essais. L'unique conséquence physique de l'introduction de la cavité au fond avant est la modification des fréquences propres de la chambre. Le phénomène d'accrochage devrait donc être observé à une fréquence moindre et donc à une vitesse d'injection inférieure.

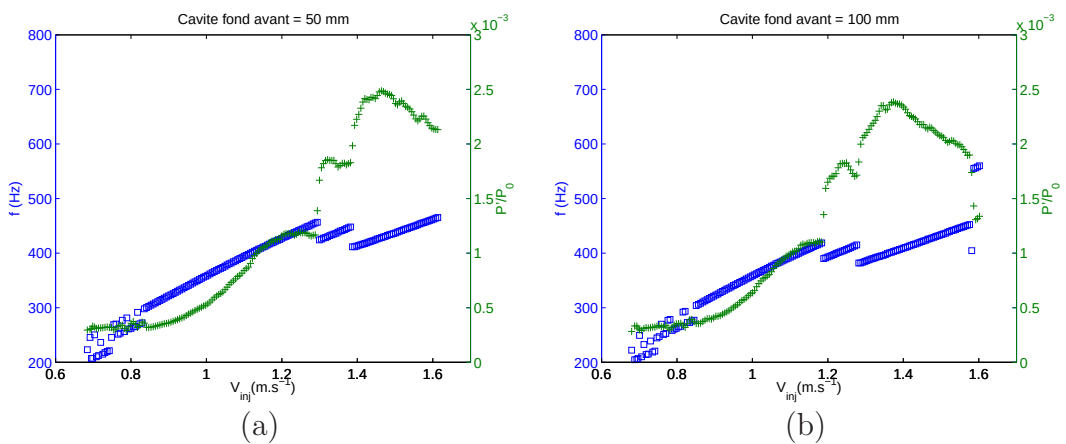


FIGURE 2.16 – Fréquence ($\square$) et amplitude (+) des fluctuations de pression en fonction de la vitesse d'injection pour une longueur de cavité au fond avant de (a) 50 mm et (b) 100 mm.

La cavité au fond avant a donc été ouverte de 50 mm et 100 mm. Les

amplitudes des fluctuations de pression sont représentées, en terme d'amplitude et de fréquence sur la figure 2.16. Les valeurs des fréquences propres acoustiques et des fréquences d'accrochage approximatives sont récapitulées dans le tableau 2.3. Pour les deux longueurs de cavité considérées, une variation de la longueur du montage, et donc de la fréquence propre acoustique, implique une variation du même ordre de grandeur de la fréquence d'accrochage. Cette constatation permet d'établir que le phénomène aéroacoustique s'accroche bien sur les fréquences propres de la chambre. Ces dernières sont sensiblement différentes des fréquences théoriques et ceci du fait de la présence d'effets convectifs non pris en compte dans la théorie.

L - Longueur du montage (mm)	Fréquence acoustique théorique (Hz)	Fréquence d'accrochage expérimentale (Hz)	Écart $\Delta f/f$
504	510	485	5.2 %
554	464	440	5.5 %
604	426	400	6.5 %

Tableau 2.3 – Variation de la fréquence acoustique théorique et de la fréquence d'accrochage en fonction de la longueur du montage VALDO.

Essais en configuration PTF

Les essais expérimentaux conduits à vitesse d'injection constante ont démontré que, lorsqu'une PTF était introduite dans la section d'essais, un glissement en fréquence, part rapport au cas lisse, est observé. De plus, il a été expérimentalement déterminé que les fluctuations de vitesse d'amplitude maximale sont mesurées dans le sillage de l'obstacle. Avec comme objectif l'étude de l'instabilité résultante de l'interaction de la couche de mélange générée par la PTF avec l'instabilité de l'écoulement induit par injection pariétale, des essais expérimentaux ont été conduits sur une large gamme de vitesse d'injection (voir tableau 2.1). Ces essais ont été menés en premier lieu pour des configurations à PTF rigides puis flexibles. Dans la suite, on prendra soin d'explicitier le moment où les PTF en élastomères seront introduites dans le montage VALDO.

Les figures 2.17 et 2.18 représentent respectivement, les spectres de fluctuations de vitesse et de pression en fonction de la vitesse d'injection. Étant donné que les essais conduits à vitesse d'injection constante ont démontré que la composante de vitesse fluctuante exhibait un maximum dans le sillage de la PTF, le fil chaud a été positionné en conséquence pour chaque PTF. Il est ici important de souligner que, à l'instar de la configuration lisse, i.e. sans obstacle, la vitesse et la pression exhibent le même comportement vis à vis de la vitesse d'injection. Cette corrélation indique la présence d'un phénomène aéroacoustique où des oscillations de pression sont générées par des fluctuations périodiques de vitesse. Pour toutes les PTF testées, figures 2.17 et 2.18, la fréquence évolue de façon linéaire avec la vitesse d'injection. Il apparaît alors comme intéressant de représenter, figure 2.19, le glissement de la fréquence la

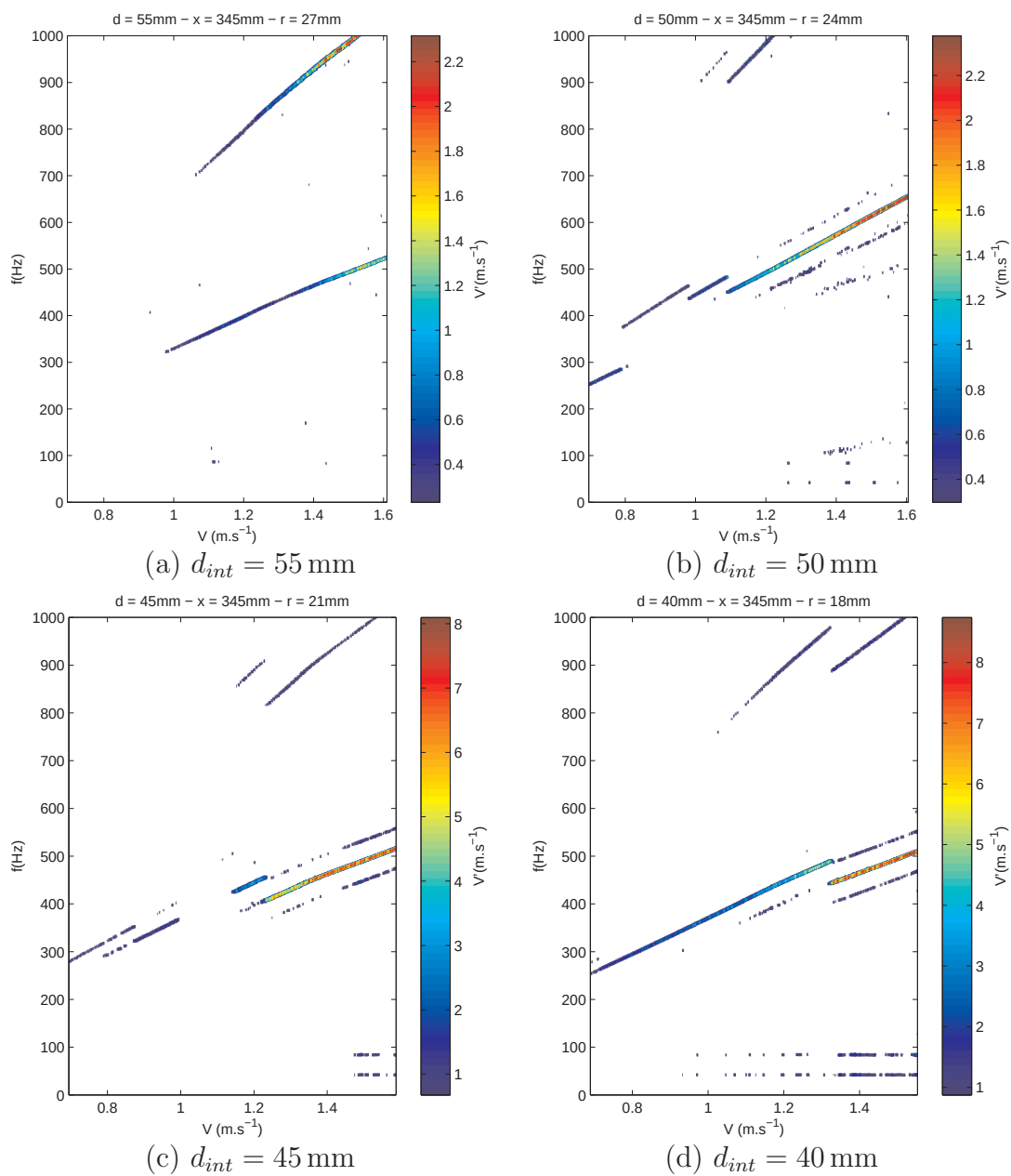


FIGURE 2.17 – Spectrogrammes de vitesse en fonction de la vitesse d'injection pour les 4 PTF testées.

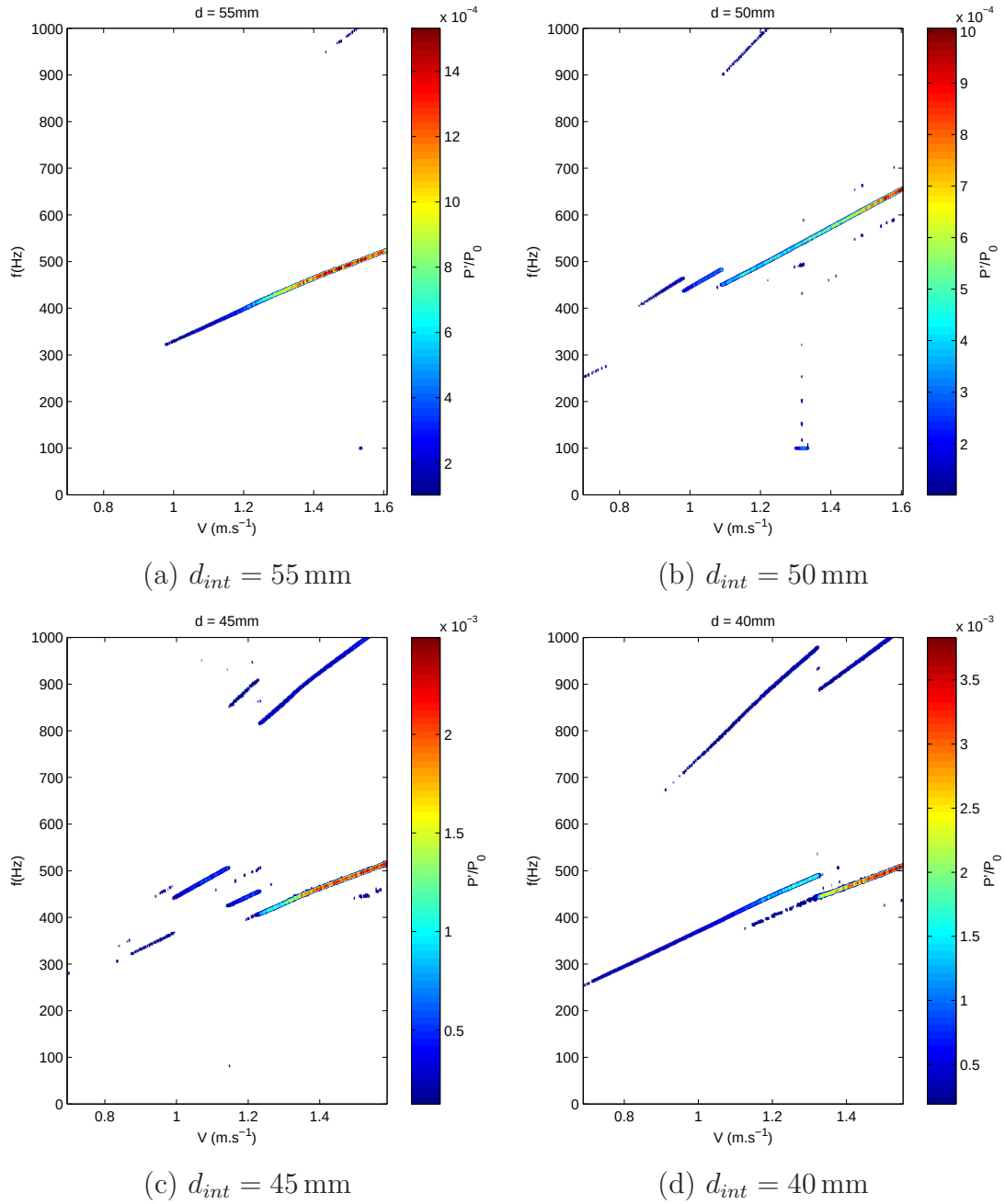


FIGURE 2.18 – Spectrogrammes de pression en fonction de la vitesse d'injection pour les 4 PTF testées.

plus amplifiée par rapport à la configuration lisse.

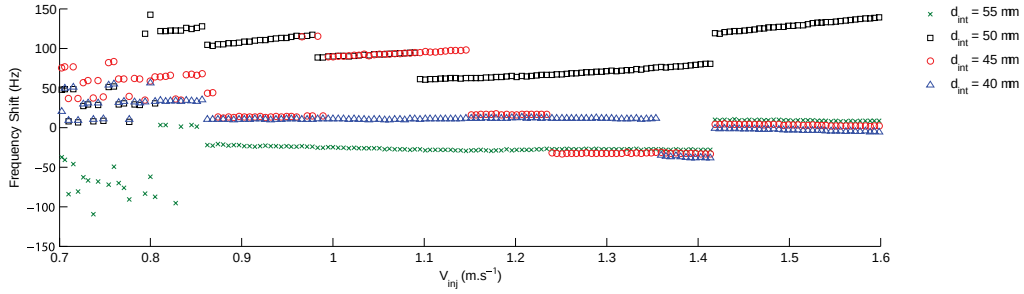


FIGURE 2.19 – Écart de fréquence observé entre la fréquence dominante en configuration lisse et en configuration PTF.

Ce décalage en fréquence présente un comportement relativement disparate pour les différents obstacles testés. Pour les PTF de diamètres intérieurs $d_{int} = 55$ mm et $d_{int} = 40$ mm, on observe un faible écart de la fréquence dominante par rapport à celle de la configuration lisse. En revanche, pour la PTF de diamètre intérieur $d_{int} = 50$ mm, cet écart est d'au moins 50 Hz sur toute la plage de vitesse d'injection considérée, permettant de qualifier l'interaction entre les deux sources potentielles d'instationnarité comme *critique*. Par le biais de cette simple étude paramétrique, on peut alors affirmer que non seulement le comportement instationnaire de l'écoulement diffère grandement lorsqu'une PTF est introduite dans la section d'essais mais que cette divergence est fonction de la PTF étudiée. Ainsi, au vu de tels résultats, il semble difficile d'établir une règle absolue concernant le rôle des PTF sur le caractère instable de l'écoulement. Les paramètres géométriques, tels que le diamètre intérieur d_{int} de l'obstacle, deviennent alors d'une importance capitale lorsque l'on veut étudier le caractère instable de l'écoulement interne.

De précédentes études expérimentales ayant comme objectif l'étude de l'interaction entre la couche de cisaillement induite par la PTF et l'instabilité de l'écoulement induit par injection pariétale ont été conduites par Vétel *et al.* [132] à l'aide d'un montage gaz froid plan à l'échelle 1/40^{eme} du MPS : le montage MICAT. Ils ont étudié l'influence du rapport d'aspect de la PTF sur les oscillations de pression mesurées et conclurent à une interaction forte entre la couche de mélange et l'instabilité de Taylor-Culick, impliquant une longueur de recouvrement associée à la couche de mélange. Les présents résultats sont en accord avec les observations de Vétel *et al.* en terme d'effet de dispersion (ce que les auteurs nomment le scattering effect). Dans une autre étude expérimentale, Yildiz *et al.* [143] étudient l'influence de la présence d'un obstacle au sein d'un écoulement induit par injection pariétale. Cette étude repose sur un montage gaz froid axisymétrique à l'échelle 1/30^{eme} avec une PTF placée en milieu de section d'essais. Dans leurs expériences, Yildiz *et al.* font appel à un paramètre adimensionnel l/h , où l représente la distance entre la PTF et la tuyère et $h = R - (d_{int}/2)$ la hauteur de l'obstacle. Dans leur étude, le paramètre l/h vaut 36.5, tandis qu'il est de l'ordre de $l/h = 33.6$ pour le montage VALDO.

Par conséquent, hormis une condition de sortie qui diffèreⁱ, les paramètres de fonctionnement utilisés par Yildiz *et al.* sont sensiblement identiques à ceux de la présente étude. Les auteurs observent des oscillations de pression près du premier mode acoustique longitudinal de la chambre, mais malheureusement, les amplitudes mesurées sont telles que leur faible niveau ne permet de tirer aucune conclusion. Notons qu'à l'échelle 1, l'ordre de grandeur de l/h dans les MPS du lanceur Ariane 5 est plutôt de l'ordre de 60, [11].

Essais en configuration PTF : étude de l'interaction critique

On vient de le voir, une interaction *critique*, traduisant le plus grand écart fréquentiel entre les deux configurations, se produit pour la PTF de diamètre intérieur $d_{int} = 50$ mm. Dès lors, on décide de se concentrer essentiellement sur cet obstacle qui permettra, par l'étude des phénomènes instationnaires, d'améliorer la compréhension de l'instabilité résultante. Par instabilité résultante on entend l'instabilité issue de l'interaction entre la couche de mélange et l'instabilité de l'écoulement induit par injection pariétale. Notons ici, que ce choix est d'autant plus justifié que si l'on procède à une rapide analyse dimensionnelle des MPS du lanceur Ariane 5, on s'aperçoit que la constriction de la section de passage par un tel obstacle se retrouve à l'échelle 1, [11]. On représente sur la figure 2.20, les fluctuations de pression, en termes de fréquence dominante et d'amplitude.

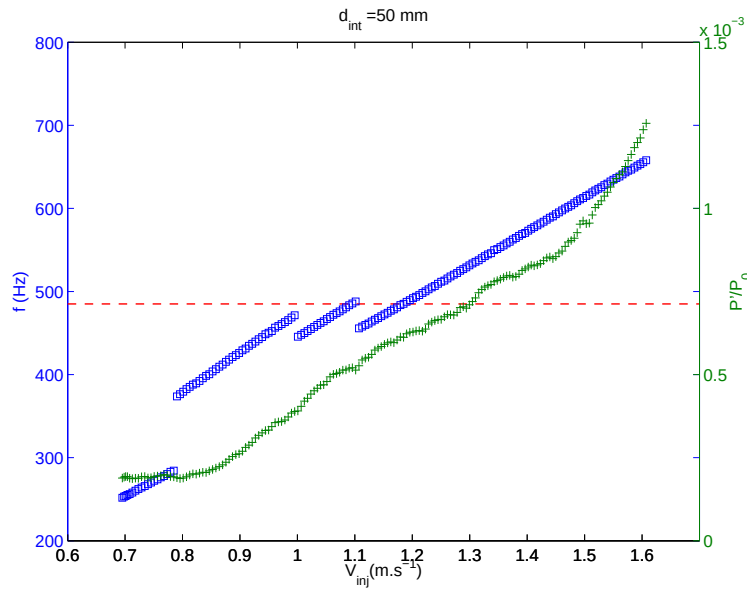


FIGURE 2.20 – Fréquence (□) et amplitude (+) des fluctuations de pression en fonction de la vitesse d'injection pour une PTF de diamètre intérieur $d_{int} = 50$ mm.

i. Dans l'étude expérimentale de Yildiz *et al.*, le montage gaz froid est terminé par une tuyère. Bien que non présentés ici, des essais ont été réalisés avec le montage VALDO en configuration tuyère. L'ensemble de ces résultats est consultable dans la référence [9]. On précise toutefois que les niveaux des fluctuations de pression mesurés avec le montage VALDO sont d'amplitude significative.

On observe un saut en fréquence aux abords du mode acoustique de la chambre $f_1 \simeq 485$ Hz. Cet accrochage est en fait présent pour trois des PTF testées, à savoir les obstacles de diamètres intérieurs $d_{int} = 50$ mm, $d_{int} = 45$ mm et $d_{int} = 40$ mm, figure 2.18. Si cet accrochage apparaît comme évident en terme de fréquence, son impact sur les fluctuations de pression est tout autre. En effet, on observe plutôt une augmentation monotone de l'amplitude des fluctuations de pression en fonction de la vitesse d'injection (et donc corrélée à un apport d'énergie cinétique) que des augmentations brusques de l'amplitude, caractéristiques d'une résonance. Des observations semblables furent reportées par Stubos *et al.* [121], dans le cadre d'un montage gaz froid à injection axiale ne mettant en jeu qu'une seule PTF. Les auteurs ont qualifié ce phénomène de *résonance faible* entre les instationnarités hydrodynamiques et l'acoustique de la chambre.

Essais en configuration PTF : vérification de l'accrochage aeroacoustique pour l'interaction critique

A l'instar de la *configuration lisse*, afin de vérifier l'hypothèse d'un phénomène aéroacoustique qui s'accroche sur les fréquences propres de la section d'essais, on entreprend une série d'essais en introduisant une cavité située au fond avant, figure 2.21. A des fins de comparaison, les fréquences acoustiques préalablement identifiées avec les essais en *configuration lisse* (voir tableau 2.3), sont reportées sur la figure 2.21. Il apparaît alors que la fréquence dominante s'écarte de son chemin d'origine, i.e. sans cavité au fond avant - figure 2.20, afin de pouvoir rester accrochée sur le mode acoustique de la chambre. En outre, ce phénomène s'accompagne d'une augmentation brusque des amplitudes de fluctuation de pression pour une certaine gamme de vitesse $1.2 \text{ m.s}^{-1} < V_{inj} < 1.5 \text{ m.s}^{-1}$ et indique clairement un mécanisme de résonance. Il apparaît cependant surprenant que ce mécanisme de résonance ne soit pas observé pour des vitesses d'injection $V_{inj} < 1 \text{ m.s}^{-1}$ et laisse ainsi supposer qu'un certain seuil d'énergie soit nécessaire pour que le mécanisme d'accrochage ait lieu.

Essais en configuration PTF : note sur l'hystérésis

Puisqu'une hystérèse a été observée en *configuration lisse*, le même type d'essais à vitesses d'injection croissante et décroissante a été conduit pour les quatre PTF étudiées. Dans tous les cas, les résultats à vitesse d'injection décroissante ont été rigoureusement identiques à ceux à vitesse d'injection croissante. Ce résultat semble donc indiquer que l'instabilité résultante serait plus déterministe que l'instabilité de l'écoulement induit par injection pariétale seule. Néanmoins, il convient de garder en tête que lorsque l'on introduit une cavité au fond avant, l'instabilité hydrodynamique résultante est capable d'emprunter un chemin fréquentiel différent afin de rester accrochée sur le mode acoustique de la chambre.

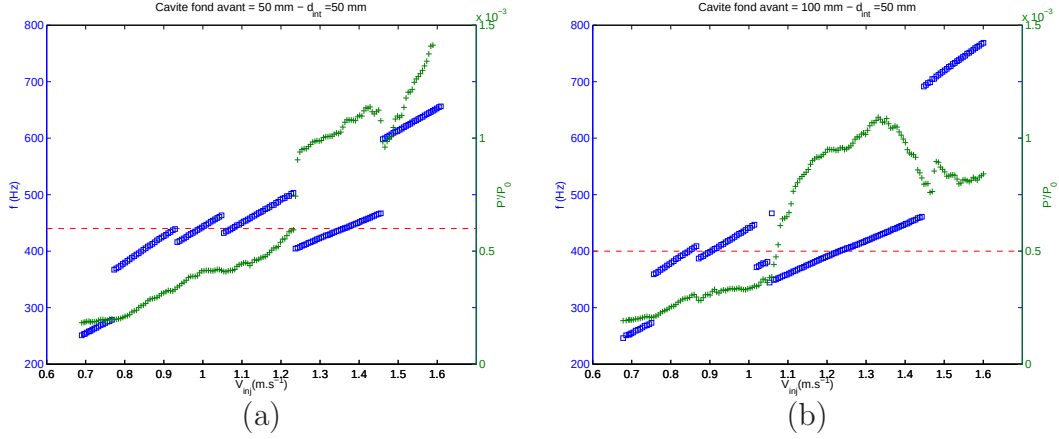


FIGURE 2.21 – Fréquence ($\square$) et amplitude (+) des fluctuations de pression en fonction de la vitesse d'injection pour une longueur de cavité au fond avant de (a) 50 mm et (b) 100 mm. PTF de diamètre intérieur $d_{int} = 50$ mm.

Essais en configuration PTF : PTF en élastomère GSM

Comme mentionné ci-dessus, suite à l'observation d'une interaction que l'on a qualifié de *critique*, on concentre l'étude expérimentale sur l'obstacle de diamètre intérieur $d_{int} = 50$ mm. Désormais, on s'intéresse à une PTF, non plus en aluminium mais en élastomère GSM. Il s'agit là du matériau utilisé dans l'élaboration des PTF des MPS du lanceur Ariane 5.

On représente sur la figure 2.22 les spectrogrammes de vitesse et de pression obtenus pour la PTF en GSM de diamètre intérieur $d_{int} = 50$ mm confrontés à ceux de l'obstacle rigide. On observe un comportement très similaire, en terme de fréquence dominante, entre les essais réalisés avec un obstacle flexible et ceux réalisés avec un obstacle rigide. Le léger glissement de fréquence qui peut être observé semble alors être dû à la déflexion de l'obstacle. En effet, sous les contraintes fluides la PTF en GSM va se déformer et on se trouvera dans une configuration relativement différente de celle d'un obstacle rigide. Il apparaît donc normal que l'interaction résultante exhibe une certaine dépendance vis-à-vis de la déflexion. Au vu du faible glissement de fréquence, on s'attend donc à ce que l'obstacle ne se défléchisse que très peu. Cette hypothèse peut être vérifiée en mesurant la déformée et les vibrations de la PTF à l'aide du dispositif laser présenté dans la section 2.1.2. La figure 2.23 présente l'évolution de la flèche d'une PTF en GSM de diamètre intérieur $d_{int} = 50$ mm en fonction de la pression d'alimentation P_0 , et donc en fonction de la vitesse d'injection, équation 2.4.

L'évolution de la flèche est quasi-linéaire et atteint une valeur de l'ordre de $1.2 \cdot 10^{-4}$ m pour une pression d'alimentation correspondant à une vitesse d'injection $V_{inj} = 1.11 \text{ m.s}^{-1}$. La flèche maximale au cours d'un essai à vitesse d'injection variable est de l'ordre de $2 \cdot 10^{-4}$ m, tableau 2.4. Tel qu'on pouvait le supposer, la PTF en GSM de diamètre intérieur $d_{int} = 50$ mm se déforme peu sous l'effet des contraintes fluides ce qui explique en quoi le comportement de cette dernière diffère peu de celui de l'obstacle fixe. L'écoulement interne est

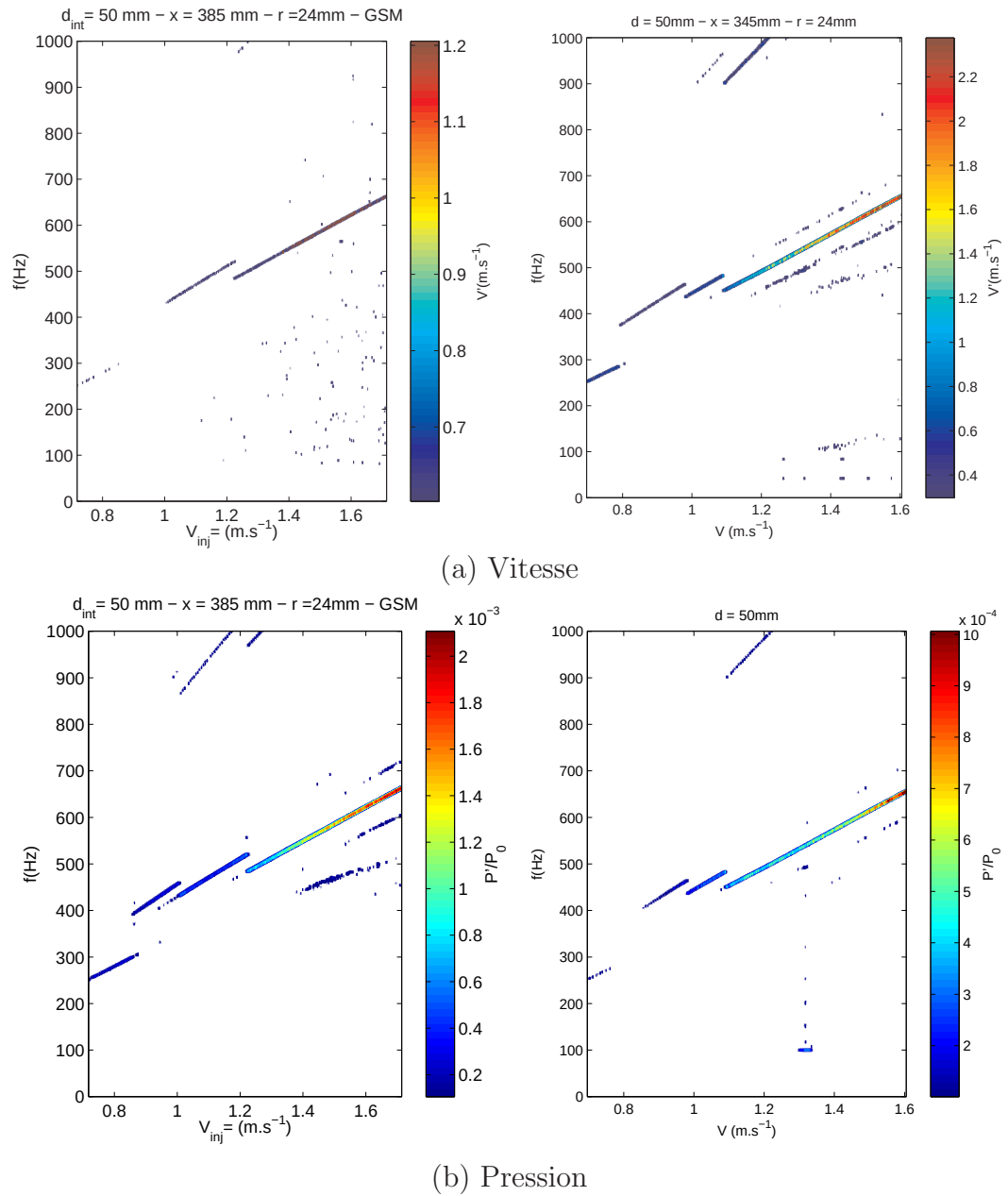


FIGURE 2.22 – Spectrogrammes de vitesse et de pression pour une PTF en GSM (à gauche) confrontée à une PTF rigide (à droite).

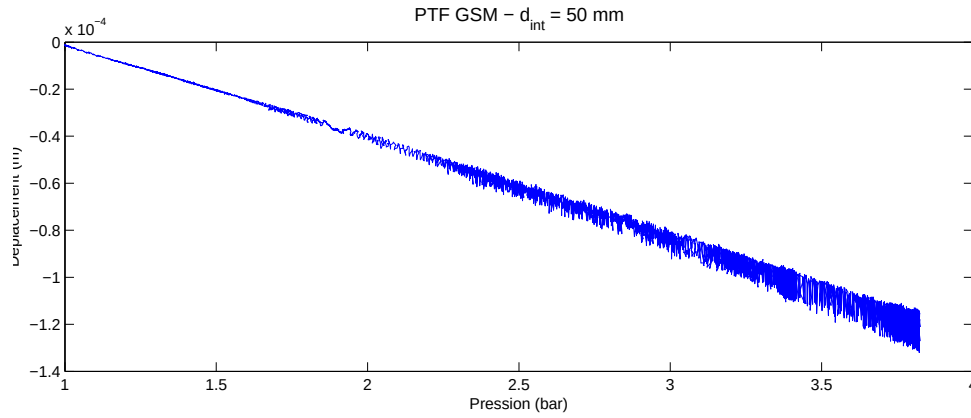


FIGURE 2.23 – Évolution de la flèche pour une PTF en GSM de diamètre intérieur $d_{int} = 50$ mm en fonction de la pression d'alimentation P_0 . Le point de mesure est situé en $r = 26$ mm.

alors faiblement altéré et son comportement instationnaire est en conséquence peu modifié. Outre le suivi de la déformée, le dispositif expérimental permet une acquisition précise des vibrations de la PTF. Les fluctuations de pression ainsi que les vibrations de l'obstacle sont présentées, en terme de fréquence et d'amplitude, sur la figure 2.24.

PTF - d_{int}	$V_{inj} = 0.83 \text{ m.s}^{-1}$	$V_{inj} = 1.11 \text{ m.s}^{-1}$	$V_{inj} = 1.45 \text{ m.s}^{-1}$
50	$7.4 \cdot 10^{-5} \text{ m}$	$1.19 \cdot 10^{-4} \text{ m}$	$1.75 \cdot 10^{-4} \text{ m}$
45	$2.84 \cdot 10^{-4} \text{ m}$	$3.68 \cdot 10^{-4} \text{ m}$	$5.36 \cdot 10^{-4} \text{ m}$
40	$8.30 \cdot 10^{-4} \text{ m}$	$1.3 \cdot 10^{-3} \text{ m}$	$1.4 \cdot 10^{-3} \text{ m}$

Tableau 2.4 – Flèches moyennes atteintes par les différentes PTF en GSM. Les points de mesures sont respectivement $r = 26$ mm, $r = 24.4$ mm et $r = 21.5$ mm pour les PTF de diamètre intérieur $d_{int} = 50$ mm, $d_{int} = 45$ mm et $d_{int} = 40$ mm.

Si, dans ce cas précis, le comportement en fréquence entre un obstacle flexible et rigide est sensiblement le même, les amplitudes des fluctuations de pression sont quant à elles relativement différentes. En effet, les amplitudes mesurées avec une PTF en GSM sont près de deux fois supérieures à celles avec une PTF rigide. L'introduction d'un oscillateur mécanique, i.e ; la PTF en élastomère, engendre à travers sa réponse mécanique un apport d'énergie acoustique. Il s'agit là d'une caractéristique commune à tous les essais menés avec des PTF en GSM.

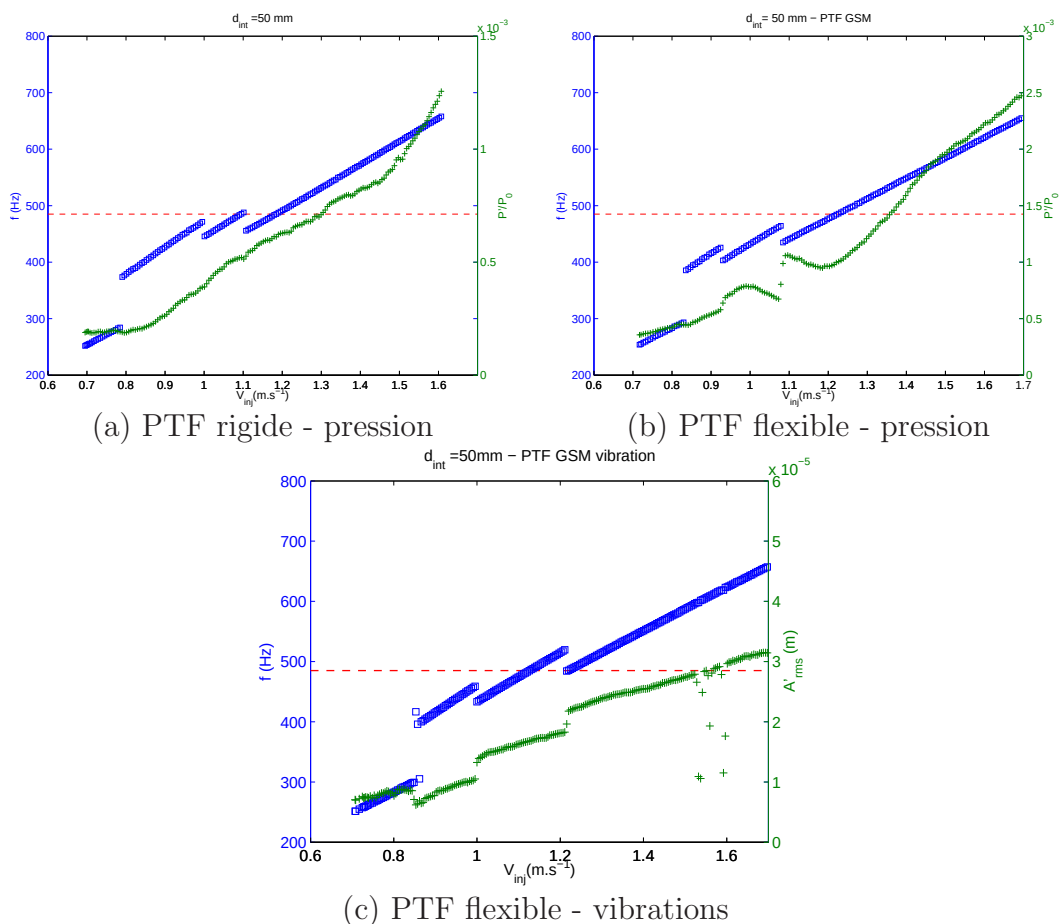


FIGURE 2.24 – Fréquence ($\square$) et amplitude (+) des fluctuations de pression en fonction de la vitesse d'injection pour (a) l'obstacle rigide et (b) l'obstacle en GSM. la figure (c) représente les vibrations de la PTF en GSM.

Notons, que pour tous les essais réalisés, il ne semble pas avoir été possible d'accrocher le phénomène aéroacoustique sur les modes propres des PTF. Deux explications peuvent alors être apportées : soit les modes propres des obstacles sont hors des gammes des fréquences mesurées, soit la variation de la vitesse d'injection est trop rapide lorsque l'on croise un mode propre.

2.4 Conclusion

Ce chapitre a été consacré à l'étude expérimentale de l'écoulement induit par injection pariétale au sein du montage VALDO. Cet écoulement, caractéristique de l'écoulement interne des MPS, est examiné dans une section d'essais axisymétrique en présence, ou non d'un obstacle modélisant les Protections Thermiques de Face. Les essais expérimentaux ont été conduits avec des conditions d'opérations figées, permettant ainsi une analyse précise de l'écoulement, et avec des conditions d'opérations variables afin de caractériser l'interaction des phénomènes instationnaires avec l'acoustique de la section d'essais.

Les essais menés en *configuration lisse* ont permis de mettre en évidence le caractère instable de l'écoulement induit par injection pariétale, couramment dénommé dans la littérature écoulement de Taylor-Culick. Si aucune visualisation n'est possible en géométrie axisymétrique, on peut supposer, sur la base d'essais réalisés en géométrie plane [128], qu'une telle instabilité hydrodynamique se manifeste par la création de structure tourbillonnaire (vortex shedding) en région de proche paroi. Par le biais d'un mécanisme de feedback acoustique, on se trouve alors en présence d'un phénomène que l'on qualifie d'aéroacoustique.

L'introduction d'une PTF au sein de la section d'essais, *configuration PTF*, a permis de mettre en évidence plusieurs caractéristiques hydrodynamiques. S'il est évident que l'obstacle modifie l'écoulement moyen, son impact sur le comportement instationnaire est également non négligeable. En effet, sa présence implique un glissement des fréquences les plus amplifiées vis-à-vis du cas *lisse*. Cette propriété permet d'ores et déjà de souligner le rôle crucial joué par les PTF au sein de l'écoulement, puisque déterminant dans la détermination des fréquences instables. L'interaction existante entre la couche de cisaillement issue de l'obstacle et l'écoulement induit par injection pariétale n'en demeure pas moins complexe avec l'existence d'un point critique, mis en évidence dans notre cas pour l'obstacle de diamètre intérieur $d_{nt} = 50$ mm. Lorsque l'obstacle est considéré comme flexible, à la fois sa déflexion moyenne et son comportement vibratoire sont des facteurs agissant sur le caractère instable de l'écoulement. En outre, pour des PTF en élastomère GSM, l'amplitude des fluctuations de pression mesurées se voit amplifiée de façon conséquente.

Notons que cette étude expérimentale n'a mis en jeu qu'un seul obstacle, tel que cela semble être le cas pour le lanceur Ariane 5, interagissant avec l'écoulement interne. Contrairement à ce qui a pu être le cas lors de précédentes études menées avec une injection axiale, on a pu clairement mettre en évidence ici le rôle majeur joué par ces obstacles dans l'étude du comportement instationnaire de l'écoulement interne.

Chapitre 3

Étude de stabilité linéaire globale

Le chapitre précédent fait état de résultats expérimentaux illustrant la présence d'instabilités au sein de la section d'essais du montage VALDO. Ces derniers démontrent notamment l'influence non négligeable d'un obstacle, symbolisant les Protections Thermiques de Face (PTF) des Moteurs à Propergol Solide, sur la dynamique de l'écoulement interne. On montre ainsi qu'une forte interaction entre l'obstacle et l'instabilité naturelle de l'écoulement engendre un décalage en fréquence des instationnarités observées.

En se basant sur une approche globale, l'ensemble de ce chapitre sera consacré à une analyse de stabilité linéaire de l'écoulement induit par injection pariétale dans une conduite cylindrique. Le formalisme qui s'y rattache est présenté dans la section 3.2. En outre, la stabilité de l'écoulement est examinée, d'abord dans une configuration sans obstacle, section 3.3, puis en présence d'un obstacle en milieu de chambre, section 3.4. Enfin, la section 3.5 est consacrée à une discussion sur l'intérêt d'une telle approche pour l'étude de la dynamique interne de l'écoulement.

3.1 Introduction

La présente introduction de l'étude de stabilité hydrodynamique linéaire de l'écoulement induit par injection pariétale dans une conduite cylindrique s'inspire largement de la vision adoptée dans [82], [118] et [120].

3.1.1 Théorie de stabilité hydrodynamique linéaire

La théorie de stabilité hydrodynamique est un formalisme permettant de décrire le comportement d'un écoulement soumis à des perturbations. Si l'on représente cet écoulement perturbé par un champ de vitesse et de pression $(\mathbf{u}, p)$ vérifiant les équations de Navier-Stokes, il est alors considéré comme la superposition de perturbations, notées $(\mathbf{u}^1, p^1)$, et d'un écoulement non perturbé $(\mathbf{u}^0, p^0)$, appelé champ de base. On définit la notion de stabilité comme la capacité de ce dernier à revenir vers un état stable, i.e. non perturbé [80].

Le cas échéant, l'écoulement est dit instable. Par conséquent, l'étude de la stabilité d'un écoulement se traduit généralement par l'analyse de l'évolution temporelle d'une perturbation introduite à un instant initial $t = 0$.

Dans le cadre de la théorie de la stabilité linéaire, l'amplitude de la perturbation initialement superposée est prise comme très faible par rapport à l'amplitude du champ de base. L'évolution temporelle de la perturbation est alors décrite par des équations linéaires, tant que son amplitude demeure petite (par rapport à celle du champ de base), obtenues par linéarisation des équations de Navier-Stokes autour du champ de base. D'après Marquet [80], l'objet d'une étude de stabilité linéaire consiste ainsi à déterminer si, pour un champ de base donné, l'amplitude de la perturbation linéaire peut croître suffisamment et devenir de l'ordre de grandeur de l'amplitude du champ de base. Si tel est le cas, le champ de base est qualifié de linéairement instable.

3.1.2 Oscillateurs et amplificateurs de bruit

Huerre & Rossi [68] distinguent deux grandes catégories d'instationnarités dans le cadre des écoulements ouvertsⁱ : l'écoulement peut, soit se comporter comme un *oscillateur* hydrodynamique et imposer sa propre dynamique, soit agir comme un *amplificateur de bruit* et répondre au bruit présent dans l'écoulement amont. On peut citer comme exemples, l'écoulement autour d'un cylindre pour un nombre de Reynolds compris dans la plage $47 < Re < 180$ [118], caractéristique de la famille des oscillateurs ou encore une couche limite de Blasius (par une approche globale) typique de la famille des amplificateurs de bruit.

Selon Sipp *et al.* [120], dans un contexte global, cette distinction entre oscillateur hydrodynamique et amplificateur de bruit se traduit par des propriétés de stabilité différentes de l'opérateur de Navier-Stokes linéarisé ou GNSL (pour opérateur Global de Navier-Stokes Linéarisé). Si on étudie le spectre de l'opérateur GNSL et que toutes les valeurs propres associées sont stablesⁱⁱ alors le champ de base $\mathbf{q}^0$ est dit globalement stable et inversement, globalement instable si au moins une des valeurs propres est instable. La notion d'oscillateur est associée à un opérateur GNSL instable et la notion d'amplificateur au cas d'un opérateur stable. Une approche linéaire permettant de décrire la dynamique globale de ces deux comportements est exposée par Sipp *et al.* [120] dans une récente revue traitant le cas d'écoulements ouverts fréquemment rencontrés en aérodynamique.

3.1.3 Analyse de stabilité globale des oscillateurs

Les premières analyses de stabilité linéaire basées sur une approche globale ont vu le jour vers la fin des années 80 avec les travaux de Zebib [146], et

i. On sous-entend par écoulement ouvert, tout écoulement où une particule de fluide pénètre dans le domaine par une frontière amont et est convectée vers une limite aval [97]. Les écoulements ouverts s'opposent aux écoulements fermés comme, par exemple, celui de Couette entre deux cylindres.

ii. atténuées ou amplifiées selon l'écriture de la forme modale choisie

Jackson [69] permettant de décrire la première bifurcation de l'écoulement de cylindre à $Re = 47$. L'approche globale de la stabilité linéaire des oscillateurs implique la résolution de problèmes aux valeurs propres de très grande taille. Il a donc fallu attendre l'avènement de techniques algorithmiques performantes telle que la méthode d'Arnoldi (Edwards *et al.* [44] et Lehoucq *et al.* [76]) pour s'attaquer à des configurations de plus en plus complexes (voir Barkley *et al.* [14] et Theofilis [123] pour une revue).

3.1.4 Non-normalité et analyse de stabilité globale des amplificateurs

Dans le cadre des écoulements de type amplificateur, l'approche globale de la théorie de la stabilité prévoit un écoulement globalement stable, i.e. toutes les valeurs propres du spectre de l'opérateur GNSL sont stables.

Au début des années 1990, il est démontré que, du fait de la présence de l'opérateur de convection, l'opérateur linéarisé de Navier-Stokes ne commute pas avec son adjoint et est donc par définition non-normal. Cette importante découverte a notamment permis à Schmid & Henningson [114] et Butler & Farrell [25] de démontrer, dans un formalisme local, que des écoulements parallèles cisailés amplifiaient très fortement pendant des temps finis des perturbations alors même que le système était stable du point de vue de ses valeurs propres. Trefethen *et al.* [125] ont alors introduit la notion de *pseudo-resonance* (voir [115]) pour expliquer que de tels systèmes puissent exhiber de fortes réponses pour un forçage harmonique alors même qu'aucune valeur propre ne se situe dans un voisinage proche de la fréquence d'excitation. À la lumière de ces concepts, de nouveaux scénarios furent alors proposés pour expliquer le comportement sous-critique des écoulements parallèles de Couette et de Poiseuille (voir [113] pour une revue), et par la suite étendus à des écoulements faiblement non-parallèles comme ceux de couche limite (voir [5] et [77]).

Dans le cadre global, peu d'études ont été consacrées à la description de la dynamique d'amplificateur : récemment, Chomaz [34] a proposé de la voir comme une conséquence directe de la non-normalité de l'opérateur GNSL [80]. Cette non-normalité provient de deux origines distinctes (voir [82] et [83]). D'après Sipp [118], on distingue ainsi la non-normalité de type *composante* due à l'advection de l'écoulement de base par les perturbations (mécanisme bidimensionnel d'Orr, mécanisme tridimensionnel de lift-up, [114] et instabilité de Kelvin Helmholtz) de la non-normalité *convective* due à l'advection vers l'aval des perturbations dans les écoulements ouverts, [34].

Ces propriétés sont à l'origine des instationnarités observées pour les écoulements dont la dynamique est celle d'un amplificateur de bruit : des perturbations externes entretenues sont filtrées et amplifiées par l'opérateur GNSL induisant ainsi un processus de sélection fréquentielle. Selon Trefethen *et al.* [125], cette dynamique peut être représentée de façon précise par une dynamique réduite construite à partir d'un nombre fini de modes globaux stables. Akervik & al [2] se sont ainsi intéressés à la croissance transitoire de l'énergie d'une perturbation dans le cas d'une cavité peu profonde et Ehrenstein & Gal-

laire [45] pour un écoulement de couche limite décollé. Si la dynamique réduite permet d'obtenir de fortes croissances transitoires elle peut s'avérer parfois insuffisante voire inefficace pour décrire l'ensemble du système. Barbagallo *et al.* [13] ont montré, à l'aide d'un contre-exemple dans le cas d'un écoulement de cavité, qu'une combinaison de modes stables globaux peut s'avérer inefficace pour représenter la dynamique non-modale : un nombre important de modes est alors nécessaire et parfois même certains très amortis. De plus, si ces modes pris individuellement ne possèdent pas de dynamique, il en est tout autre lorsque l'on les combine. En outre, la forte non-normalité rend difficile leur évaluation numérique du à l'important nombre de conditionnement associé au problème aux valeurs propres.

3.1.5 Stabilité linéaire de l'écoulement de Taylor-Culick

L'écoulement de Taylor-Culick (voir section 1.4.2), représentatif des moteurs à propergol solide (MPS), est connu pour exhiber des instabilités [128]. Les premiers travaux concernant son étude de stabilité linéaire remontent, en 1969, aux travaux de Varapaev et Yagodkin, [130], qui démontrent, par le biais d'une approche locale, que l'écoulement devient instable à partir d'une certaine abscisse critique. Leurs conclusions rejoignent celles de travaux expérimentaux menés par Yagodkin [142] mettant en évidence un phénomène d'instabilité hydrodynamique. Depuis, et motivé par les problématiques liées au fonctionnement du lanceur Ariane 5, des études ont été menées, essentiellement à l'ONERA, afin d'investiguer la stabilité de l'écoulement de Taylor-Culick.

Initiée par Griffond dans le cadre d'une approche locale faiblement non-parallèle [63], l'étude de stabilité linéaire hydrodynamique de Taylor-Culick a mis en évidence une instabilité de nature convective, où l'observation de fluctuations d'amplitude maximale dans la zone proche de la paroi injectante a conduit à lui attribuer le nom d'instabilité pariétale. Bien que l'approche quasi-parallèle soit très approximative dans le présent cas, où le non-parallélisme de l'écoulement est le moteur de l'instabilité, la décomposition en modes normaux fournit des résultats satisfaisants lorsque confrontée à des simulations numériques et résultats expérimentaux en géométrie plane (montage VECLA [128]). Les comportements observés au sein des MPS sont alors expliqués en considérant l'instabilité pariétale comme une source d'énergie avec un transfert du champ hydrodynamique vers le champ acoustique. Plus tard, Feraille [51] reprend cette même démarche et l'étend à l'étude de l'effet des particules d'aluminium sur l'instabilité pariétale.

Dans l'objectif de s'affranchir des limitations rencontrées avec l'approche locale quasi-parallèle, Feraille [51] puis Chedevergne [32] ont entrepris une étude de stabilité de l'écoulement de Taylor-Culick en approche globale. A l'aide d'une méthode d'interpolation par collocation spectrale, les auteurs concluent que l'instabilité pariétale de l'écoulement de Taylor-Culick se manifeste par des modes propres discrets, amortis en temps, figure 3.1 - (a), et croissants dans la direction longitudinale.

Malgré l'impossibilité de faire converger le spectre dans sa globalité (notamment pour des valeurs propres $\omega_r \geq 25$ [32]) et en ne conservant que la

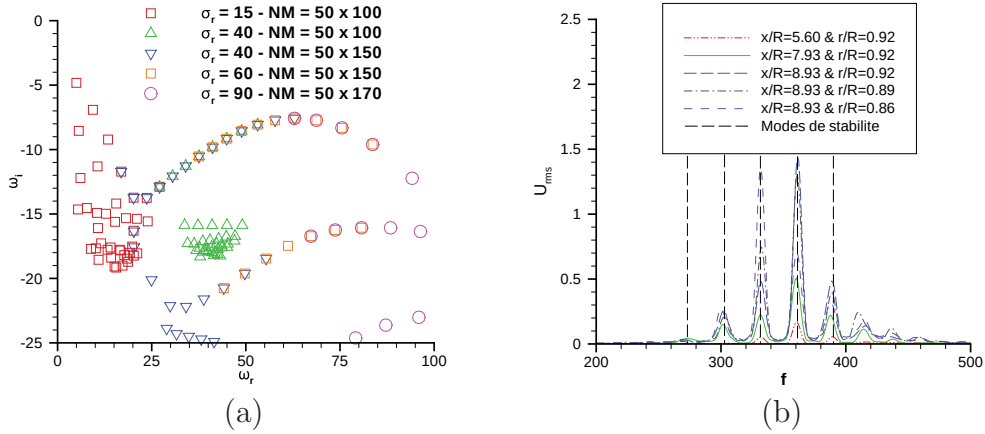


FIGURE 3.1 – Stabilité globale de l’écoulement de Taylor-Culick (a) spectre de valeurs propres et (b) comparaison entre les modes de stabilité et les mesures de vitesse rms dans le montage VALDO. $Re = 2100$. D’après Chedevergne [32].

branche supérieure des valeurs propres, Chedevergne se livre à une comparaison aux résultats expérimentaux issus de montages gaz froid axisymétrique et de moteurs à échelle réduite et connaît alors un certain succès (figure 3.1 - (b)). Les modes de stabilité sélectionnés présentent un bon accord avec les mesures expérimentales, à la fois en terme de fréquence mais également en terme de répartition spatiale des fluctuations de vitesseⁱⁱⁱ.

Ces résultats peuvent aujourd’hui être ré-analysés à la lumière d’approches de stabilité nouvelles traitant des amplificateurs de bruit dans une approche globale (voir [82] et [120]). En effet, l’écoulement de Taylor-Culick fait précisément partie de cette classe d’écoulements et la maturité des outils numériques rend aujourd’hui possible cette nouvelle étude.

iii. Une première confrontation à l’expérience est réalisée. Néanmoins rapelons que le faible nombre de points expérimentaux disponibles dans la direction radiale ne permet de se prononcer clairement sur une totale adéquation entre les fonctions propres et les mesures expérimentales

3.2 Formulation du problème de stabilité hydrodynamique linéaire

La géométrie considérée étant axisymétrique, on se place en coordonnées cylindriques (r, θ, z) avec une origine prise au fond avant. Toutes les grandeurs physiques sont rendues sans dimension à l'aide du rayon de la chambre R et de la vitesse d'injection V_{inj} . Le vecteur d'état $\mathbf{q}$ représente $(\mathbf{u}, p)^T$, où T désigne la transposé, $\mathbf{u} = (u_r, u_\theta, u_z)$ la vitesse du fluide (avec u_r, u_θ, u_z , respectivement les composantes radiale, azimutale et axiale de la vitesse) et p la pression. L'écoulement fluide est gouverné par les équations de Navier-Stokes incompressibles qui s'écrivent :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad , \quad \partial_t \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + \nabla p - \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u} = 0 \quad , \quad (3.1)$$

où Re est le nombre de Reynolds basé sur R et V_{inj} . On associe au jeu d'équations (3.1) les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= (-1, 0, 0) \text{ en } \Gamma_{in} \\ \mathbf{u} &= \mathbf{0} \text{ en } \Gamma_{wall} \cup \Gamma_{obs} \\ -p\mathbf{n} + Re^{-1}\nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} &= \mathbf{0} \text{ en } \Gamma_{out} \end{aligned} \quad (3.2)$$

Elles correspondent à une injection de fluide aux parois injectantes Γ_{in} , une condition de non-glissement aux parois solides $\Gamma_{wall} \cup \Gamma_{obs}$ et à une condition de sortie libre en sortie du domaine Γ_{out} . Ces conditions aux limites sont illustrées, dans le cadre des deux configurations étudiées, sur la figure 3.2.

L'analyse linéaire est menée en décomposant le vecteur d'état $\mathbf{q} = (\mathbf{u}, p)^T$ décrivant l'écoulement en :

- un champ stationnaire $\mathbf{q}^0 = (u_r^0, 0, u_z^0, p^0)^T$, d'ordre de grandeur $O(1)$,
- un champ instationnaire $\mathbf{q}^1 = \epsilon(u_r^1, u_\theta^1, u_z^1, p^1)^T$, d'ordre de grandeur $O(\epsilon)$.

Cette décomposition est introduite dans les équations de Navier-Stokes (3.1) en négligeant les termes d'ordre $O(\epsilon^2)$.

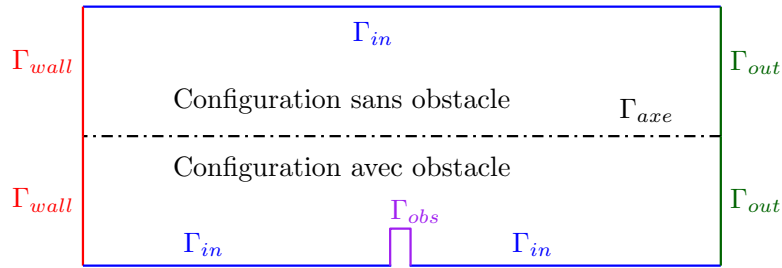


FIGURE 3.2 – Schématisation des différentes configurations et conditions aux limites associées. L'écoulement induit par injection pariétale en géométrie axisymétrique est étudié en configurations sans (partie haute) et avec (partie basse) obstacle. Γ_{in} , Γ_{wall} , Γ_{obs} , Γ_{axe} et Γ_{out} représentent respectivement les conditions aux limites d'injection, de paroi, de paroi sur l'obstacle, d'axe de symétrie et de sortie.

3.2.1 Écoulement de base

L'écoulement de base est recherché en tant que solution stationnaire, axisymétrique $\mathbf{q}^0 = (u_r^0, 0, u_z^0, p^0)^T$ des équations :

$$\nabla \cdot \mathbf{u}^0 = 0 \quad , \quad \nabla \mathbf{u}^0 \cdot \mathbf{u}^0 + \nabla p^0 - \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u}^0 = 0 \quad , \quad (3.3)$$

avec $u_r^0 = \partial_r u_z^0 = 0$ sur l'axe Γ_{axe} .

3.2.2 Analyse par modes globaux : dynamique d'oscillateur

Dans le cadre de cette thèse, on se limite, à l'instar des précédentes études de stabilité globale (voir [51] et [32]), à des perturbations axisymétriques. La stabilité asymptotique de l'écoulement de base stationnaire et axisymétrique est alors étudiée en considérant une perturbation axisymétrique de faible amplitude $\mathbf{q}^1 = (u_r^1, u_z^1, p^1)^T$ qui satisfait les équations instationnaires linéarisées autour de $\mathbf{q}^0$:

$$\nabla \cdot \mathbf{u}^1 = 0 \quad , \quad \partial_t \mathbf{u}^1 + \mathcal{C}(\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^0) + \nabla p^1 - \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u}^1 = 0 \quad , \quad (3.4)$$

où $\mathcal{C}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \nabla \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \nabla \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$ est l'opérateur d'advection linéarisé. L'opérateur $\mathcal{C}$ est symétrique, i.e. $\mathcal{C}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathcal{C}(\mathbf{b}, \mathbf{a})$. Lorsque l'on considère l'écoulement de base et la perturbation, respectivement $\mathbf{u}^0$ et $\mathbf{u}^1$, cet opérateur traduit l'advection de la perturbation par l'écoulement de base via le terme $\nabla \mathbf{u}^1 \cdot \mathbf{u}^0$ et l'advection de l'écoulement de base par la perturbation par le terme $\nabla \mathbf{u}^0 \cdot \mathbf{u}^1$. Etant donné que l'écoulement de base est axisymétrique, les perturbations sont choisies sous forme de modes normaux de longueur d'onde azimuthale m et de pulsation complexe $\sigma + i\omega$, où σ et ω sont respectivement le taux d'amplification et la pulsation du mode propre ($\sigma > 0$ pour un mode propre instable) :

$$\mathbf{q}^1 = \hat{\mathbf{q}}^1(r, z) e^{(\sigma + i\omega)t} + \text{c.c.}, \quad (3.5)$$

où $\hat{\mathbf{q}}^1 = (\hat{u}_r^1, \hat{u}_z^1, \hat{p}^1)^T$ est le mode global de directions propres (r, z) , *c.c.* désignant son complexe conjugué. Si on injecte la forme modale 3.5 dans le système 3.4, on obtient le problème généralisé aux valeurs propres pour $\sigma + i\omega$ et $\hat{\mathbf{q}}^1$:

$$\mathcal{A} \hat{\mathbf{q}}^1 = (\sigma + i\omega) \mathcal{B} \hat{\mathbf{q}}^1, \quad (3.6)$$

où $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont des opérateurs linéaires définis par :

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} -\mathcal{C}(\cdot, \mathbf{u}^0) + Re^{-1} \nabla^2 & -\nabla \\ \nabla^T & 0 \end{pmatrix} \quad \mathcal{B} = \begin{pmatrix} \mathcal{I}_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

Pour un mode $\hat{\mathbf{a}}$, l'opérateur gradient et le tenseur gradient de vitesse s'écrivent :

$$\nabla = \begin{pmatrix} \partial_r + \frac{1}{r} \\ \partial_z \end{pmatrix}, \quad \nabla \hat{\mathbf{a}} = \begin{pmatrix} \partial_r \hat{u}_r & \partial_z \hat{u}_r \\ \partial_r \hat{u}_z & \partial_z \hat{u}_z \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

et les conditions aux limites associées au problème 3.6 sont :

$$\begin{aligned} \partial_r \hat{u}_z^1 &= \hat{u}_r^1 = 0 \text{ en } \Gamma_{axe} \\ \hat{\mathbf{u}}^1 &= \mathbf{0} \text{ en } \Gamma_{in} \cup \Gamma_{wall} \cup \Gamma_{obs} \\ -\hat{p}^1 \mathbf{n} + Re^{-1} \nabla \hat{\mathbf{u}}^1 \cdot \mathbf{n} &= \mathbf{0} \text{ en } \Gamma_{out}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Ce formalisme théorique permet, au travers de l'examen des valeurs propres du spectre de l'opérateur GNSL, d'étudier la stabilité de l'écoulement et d'en qualifier la dynamique d'oscillateur.

3.2.3 Réponse de l'écoulement à un forçage harmonique : dynamique d'amplificateur

Trefethen *et al.* [125] ont démontré que des phénomènes de croissance transitoire résultent de la non-normalité de l'opérateur de Navier-Stokes linéarisé (voir [82] et [83]). Leurs travaux, menés dans le cadre des écoulements cisailés parallèles, ont permis de montrer que cette non-normalité engendrait de fortes réponses de l'écoulement à un forçage harmonique. Récemment, la réponse d'un écoulement à un même forçage a été introduite, dans un contexte global, par Marquet *et al.* [82] en étudiant un écoulement de recirculation se formant dans une entrée d'air de forme coudée et par Marquet et Sipp [81] dans le cas de la marche descendante introduite par Barkley *et al.* [14]. Un tel formalisme théorique permet d'étudier la dynamique d'amplificateur de bruit en modélisant celui-ci par un forçage harmonique.

L'écoulement est dorénavant régit par les équations de Navier-Stokes incompressibles et forcées :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad \partial_t \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + \nabla p - \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u} = \mathbf{f}, \quad (3.10)$$

avec $\mathbf{f}$ une source instationnaire volumique agissant comme un terme de forçage sur l'équation de quantité de mouvement. Ce terme permet de modéliser la présence d'un bruit dont on désire quantifier l'impact sur la dynamique de l'écoulement. Le forçage externe est considéré comme étant de faible amplitude, c'est-à-dire qu'il s'écrit sous la forme $\mathbf{f} = \epsilon \mathbf{f}^1$ avec $\epsilon \ll 1$ son amplitude.

Le champ de base n'étant pas affecté par le forçage instationnaire infinitésimal, il est donc toujours solution de l'équation (3.3). On fait l'hypothèse que ce forçage peut s'écrire sous la forme d'une onde harmonique $\mathbf{f}^1 = \hat{\mathbf{f}}^1(r, z)e^{i\omega t}$, de pulsation réelle ω et de structure spatiale le champ complexe $\hat{\mathbf{f}}^1 = (f, g)^T$. La solution générale des équations (3.10) peut se décomposer en deux termes (voir [113]) :

- un premier terme représentant la réponse de l'écoulement à une perturbation initiale,
- un second terme représentant la réponse périodique de l'écoulement au forçage.

Notons qu'un tel formalisme permet aussi bien de traiter la réponse auto-entretenue de l'écoulement que les éventuels transitoires, sommes d'ondes de pulsation ω . La réponse instationnaire de l'écoulement au forçage est cherchée sous la forme $(\mathbf{u}^1 = \hat{\mathbf{u}}^1(r, z)e^{i\omega t}, p^1 = \hat{p}^1(r, z)e^{i\omega t})^T$. Ce champ de perturbation est gouverné par l'opérateur global de Navier-Stokes linéarisé ou GNSL :

$$\nabla \cdot \hat{\mathbf{u}}^1 = 0 \quad , \quad i\omega \hat{\mathbf{u}}^1 + \mathcal{C}(\hat{\mathbf{u}}^1, \hat{\mathbf{u}}^0) + \nabla \hat{p}^1 - \frac{1}{Re} \nabla^2 \hat{\mathbf{u}}^1 = \hat{\mathbf{f}}^1 \quad , \quad (3.11)$$

ou encore :

$$(i\omega \mathcal{B} - \mathcal{A})\hat{\mathbf{q}}^1 = \mathcal{P}\hat{\mathbf{f}}^1, \quad (3.12)$$

avec $\mathcal{P}$ un opérateur de prolongement qui à un vecteur vitesse donné ajoute une composante de pression nulle et $\mathcal{P}^T$ un opérateur de restriction qui, à un vecteur vitesse-pression permet d'extraire la composante en vitesse. Les opérateurs linéaires $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ ont été précédemment définis (équation 3.7) et les conditions aux limites associées au problème forcé demeurent similaires à celles du cas non forcé (équation 3.9).

Passage au formalisme discret

Pour la suite, suivant Marquet *et al.* [82] on préférera l'écriture sous un formalisme discret plutôt qu'un formalisme continu. En effet, in fine, la résolution numérique du système nécessite la discrétisation des dérivées spatiales, faisant ainsi de l'écriture discrète un choix judicieux puisque supérieur, d'un point de vue numérique, au formalisme continu. Notons néanmoins, que l'ensemble des notions introduites ont une existence intrinsèque indépendante de la discrétisation choisie. On obtient ainsi, après discrétisation des dérivées spatiales, l'écriture pour les équations (3.12) suivante :

$$(i\omega \mathbf{B} - \mathbf{A})\hat{\mathbf{q}}^1 = \mathbf{P}\mathbf{M}\hat{\mathbf{f}}^1, \quad (3.13)$$

avec $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{M}$ et $\mathbf{P}$, des matrices creuses de grandes dimensions. La matrice $\mathbf{M}$ est, dans le cas des éléments finis, la matrice de masse. La matrice $\mathbf{B}$ est définie par $\mathbf{B} = \mathbf{P}\mathbf{M}\mathbf{P}^T$ tel que $(i\omega \mathbf{B} - \mathbf{A})$ soit l'opérateur GNSL dans le domaine fréquentiel. On retrouve ainsi que les modes globaux correspondent au problème généralisé aux valeurs propres lié aux matrices $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$. Notons ici que par T on désigne la transposée et par H la matrice trans-conjuguée (aussi appelée matrice adjointe). Pour une fréquence donnée ω , la réponse en vitesse $\hat{\mathbf{u}}^1$ est obtenue à partir du forçage $\hat{\mathbf{f}}^1$ par :

$$\hat{\mathbf{u}}^1 = \mathbf{R}(\omega)\hat{\mathbf{f}}^1, \quad (3.14)$$

avec $\mathbf{R}(\omega) = \mathbf{P}^T(i\omega \mathbf{B} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{P}\mathbf{M}$ la matrice résolvante de l'opérateur GNSL. Le rôle de la matrice résolvante en théorie de la stabilité linéaire a été introduit par Trefethen *et al.* [125] dans le cadre de la transition des écoulements de Couette et de Poiseuille. Dans leurs travaux, les auteurs ont introduit un résolvant local, c'est-à-dire associé à l'opérateur de Navier-Stokes

linéarisé local (ou parallèle). Dans la présente approche, l'opérateur défini par 3.14 est un résolvant global, c'est-à-dire associé à l'opérateur GNSL.

Décomposition en valeurs singulières de la résolvante

Pour une pulsation de forçage donnée $\omega \in \mathbb{R}$, on cherche à déterminer la distribution spatiale du forçage $\hat{\mathbf{f}}^1$ qui maximise une mesure de la réponse $\hat{\mathbf{u}}^1$ permettant ainsi d'établir le degré d'amplification des perturbations au travers de l'opérateur GNSL. On choisit comme mesure, l'énergie cinétique moyenne des structures spatiales intégrées sur l'espace. Par la suite, on dénommera simplement cette mesure comme étant l'énergie de la perturbation, définie par $\|\hat{\mathbf{f}}^1\|^2 = \hat{\mathbf{f}}^{1H} \mathbf{Q} \hat{\mathbf{f}}^1$ ou de la réponse définie par $\|\hat{\mathbf{u}}^1\|^2 = \hat{\mathbf{u}}^{1H} \mathbf{Q}' \hat{\mathbf{u}}^1$ avec $\mathbf{Q}$ et $\mathbf{Q}'$ des matrices hermitiennes définissant le produit scalaire relatif à l'énergie. $\mathbf{Q}$ et $\mathbf{Q}'$ sont donc respectivement, l'énergie sur tout le domaine et sur un sous-domaine. Dans le cas général, réponse et forçage seront recherchés sur le même domaine impliquant alors que $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}'$. Dans la suite, afin de ne pas surcharger les écritures, on fait le choix de confondre les deux produits scalaires et de le noter $\mathbf{Q}$. Lorsque les domaines de recherche de $\hat{\mathbf{f}}^1$ et $\hat{\mathbf{u}}^1$ seront disjoints, on prendra soin de le préciser pour éviter toute confusion.

Selon Marquet *et al.* [82], la réponse globale en fréquence est étudiée par l'intermédiaire du procédé d'algèbre linéaire de décomposition en valeurs singulières (ou SVD, de l'anglais Singular Value Decomposition) de la résolvante globale (par rapport à la matrice $\mathbf{Q}$) :

$$\mathbf{R}(\omega) = \hat{\mathbf{U}} \hat{\Sigma} \hat{\mathbf{F}}^H \mathbf{Q} , \quad (3.15)$$

$$\hat{\mathbf{U}}^H \mathbf{Q} \hat{\mathbf{U}} = \hat{\mathbf{F}}^H \mathbf{Q} \hat{\mathbf{F}} = \mathbf{I} , \quad (3.16)$$

où $\hat{\Sigma}$ est une matrice diagonale à valeurs σ_i positives appelées valeurs singulières^{iv}. Par convention les valeurs singulières sont rangées par valeurs décroissantes, $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots$. Les colonnes des matrices $\hat{\mathbf{U}}$ et $\hat{\mathbf{F}}$ sont respectivement dénommées vecteurs singuliers gauche et droit et seront notées $\hat{\mathbf{u}}_i$ et $\hat{\mathbf{f}}_i$. Les relations d'orthonormalité 3.16 indiquent que ces vecteurs sont ortho-normaux pour le produit scalaire associé à $\mathbf{Q}$, i.e. $\hat{\mathbf{u}}_i^H \mathbf{Q} \hat{\mathbf{u}}_j = \hat{\mathbf{f}}_i^H \mathbf{Q} \hat{\mathbf{f}}_j = \delta_{ij}$ avec δ_{ij} le symbole de Kronecher. On peut alors aisément vérifier, à partir de 3.15 et de 3.16, que les vecteurs singuliers droit et gauche sont reliés par :

$$\mathbf{R}(\omega) \hat{\mathbf{f}}_i = \sigma_i \hat{\mathbf{u}}_i . \quad (3.17)$$

Cette relation permet d'attribuer une explication physique aux valeurs et vecteurs singuliers. Un vecteur singulier droit $\hat{\mathbf{f}}_i$ correspond à un forçage externe d'énergie unitaire. La réponse de l'écoulement à ce forçage est donnée par $\sigma_i \hat{\mathbf{u}}_i$, avec $\hat{\mathbf{u}}_i$ le vecteur singulier gauche représentant la structure spatiale (d'énergie unitaire) de la réponse de l'écoulement et σ_i , la valeur singulière désignant son amplitude globale.

iv. La décomposition en valeurs singulières s'applique à toute matrice rectangulaire. En revanche, la décomposition en valeurs propres ne fonctionne que pour certaines matrices carrées.

On peut alors montrer en quoi cette décomposition caractérise directement la réponse fréquentielle globale à un forçage donné $\hat{\mathbf{f}}^1$. L'expansion du forçage en série de modes globaux de forçage est donnée par $\hat{\mathbf{f}}^1 = \sum_{i=1}^N \alpha_i \hat{\mathbf{f}}_i$, où les coefficients complexes α_i sont directement obtenus par le produit scalaire du forçage $\hat{\mathbf{f}}^1$ avec le mode global de forçage correspondant, i.e. $\alpha_i = \hat{\mathbf{f}}_i^H \mathbf{Q} \hat{\mathbf{f}}^1$. L'énergie du forçage est alors $\|\hat{\mathbf{f}}^1\|^2 = \sum_{i=1}^N |\alpha_i|^2$ traduisant le fait que l'amplitude du coefficient $|\alpha_i|$ est reliée à la fraction d'énergie du forçage portée par le $i^{\text{ème}}$ mode de forçage global. Si on introduit l'expansion en modes globaux du forçage dans le problème de réponse fréquentielle 3.14, on obtient la réponse de l'écoulement sous la forme d'une série de modes de réponse globale :

$$\hat{\mathbf{u}}^1 = \sum_{i=1}^N \sigma_i \alpha_i \hat{\mathbf{u}}_i. \quad (3.18)$$

Cette relation est primordiale, puisque pour un forçage donné $\hat{\mathbf{f}}^1$, elle permet de déterminer directement la réponse de l'écoulement $\hat{\mathbf{u}}^1$. Les coefficients $\sigma_i \alpha_i$ traduisent la fraction d'énergie portée par le $i^{\text{ème}}$ mode de réponse globale. Étant donné que la base de réponse optimale, $\hat{\mathbf{u}}_i$ est orthonormale, l'énergie de la réponse $\hat{\mathbf{u}}^1$ est directement donnée par :

$$\|\hat{\mathbf{u}}^1\|^2 = \sum_{i=1}^N \sigma_i^2 |\alpha_i|^2. \quad (3.19)$$

En outre, si $\sigma_1 \gg \sigma_2$ et dans l'objectif d'obtenir la réponse maximale de l'écoulement, on devra alors exciter l'écoulement à la fréquence ω pour laquelle la courbe $\sigma_1(\omega)$ présente un maximum et avec une structure de forçage proche de $\hat{\mathbf{f}}^1 = \hat{\mathbf{f}}_1(\omega)$. L'écoulement résultant sera donc de même structure spatiale que $\hat{\mathbf{u}}_1$ et aura une énergie égale à σ_1^2 .

Formulation sous la forme d'un problème aux valeurs propres et résolution numérique

La détermination numérique des valeurs singulières de la résolvante globale est basée sur la reformulation du problème aux valeurs singulières en un problème aux valeurs propres. Les valeurs singulières σ_i et les vecteurs singuliers droit $\hat{\mathbf{f}}_i$ peuvent ainsi être déterminés en résolvant le problème aux valeurs propres généralisé :

$$\mathbf{S} \hat{\mathbf{f}}_i = \sigma_i^2 \mathbf{Q} \hat{\mathbf{f}}_i, \quad (3.20)$$

avec $\mathbf{S} = \mathbf{R}(\omega)^H \mathbf{Q} \mathbf{R}(\omega)$ une matrice hermitienne et $\mathbf{Q}$ la matrice du produit scalaire. On normalise les vecteurs propres de telle façon à ce que $\hat{\mathbf{f}}_i^H \mathbf{Q} \hat{\mathbf{f}}_i = 1$. Les vecteurs singuliers gauches $\hat{\mathbf{u}}_i$ sont alors trouvés en résolvant le problème 3.17. Le problème aux valeurs propres généralisé 3.20 est alors re-écrit en un problème standard aux valeurs propres en considérant la matrice $\mathbf{Q}^{-1} \mathbf{S}$.

$$\mathbf{Q}^{-1} \mathbf{S} \hat{\mathbf{f}}_i = \sigma_i^2 \hat{\mathbf{f}}_i. \quad (3.21)$$

Ses valeurs propres les plus grandes sont déterminées à l'aide de la librairie ARPACK en mode régulier et en arithmétique complexe (driver znaupd). Ainsi, à chaque étape il faut évaluer, pour un vecteur $\mathbf{w}$ donné, la matrice $\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{S}\mathbf{w}$. A ce titre, on note que $\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{S} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{M}^T\mathbf{P}^T(\mathbf{C}^H)^{-1}\mathbf{P}\mathbf{Q}\mathbf{P}^T\mathbf{C}^{-1}\mathbf{P}\mathbf{M}$ avec $\mathbf{C} = i\omega\mathbf{B} - \mathbf{A}$. Par conséquent, pour un vecteur $\mathbf{w}$ donné, on applique consécutivement l'ensemble des opérateurs qui apparaissent dans cette expression. L'inverse $\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{w}$ peut être obtenue par l'utilisation d'une méthode de gradient conjugué de telle sorte que le point délicat de cet algorithme réside en l'évaluation de $\mathbf{C}^{-1}\mathbf{w}$ et de $\mathbf{C}^H\mathbf{w}$. Pour ce faire, on calcule explicitement la matrice creuse $\mathbf{C}$ et on utilise un solveur direct LU (package MUMPS, voir [3]). Le coût de l'algorithme est donc essentiellement le coût engendré par une seule décomposition LU.

3.3 Écoulement induit par injection pariétale sans obstacle

Le formalisme théorique présenté dans la section précédente permet l'étude, par une approche globale, de la dynamique d'un écoulement à la fois en tant qu'oscillateur hydrodynamique ou amplificateur de bruit. Dans cette section, on étudie la stabilité de l'écoulement induit par injection pariétale dans une configuration cylindrique. Cette étude de stabilité linéaire permet de compléter les travaux conduits sur l'écoulement de Taylor-Culick (voir [51] et [32]).

3.3.1 Géométrie

On considère l'écoulement induit par injection pariétale dans une chambre cylindrique (figure 3.3). Cet écoulement est similaire à celui de Taylor-Culick (Section 1.4.2) excepté en la région de fond avant où la condition d'adhérence est respectée et est ainsi, en ce sens, plus réaliste. On note Ω le domaine de calcul délimité par les frontières Γ_{in} , Γ_{wall} , Γ_a et Γ_{out} , traduisant respectivement l'injection pariétale de fluide, la paroi au fond avant, l'axe de symétrie et la sortie.

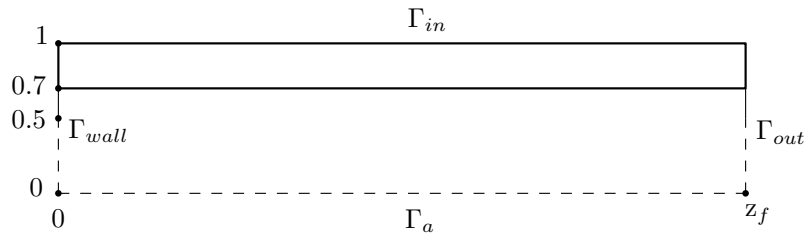


FIGURE 3.3 – Schématisation de la structure du maillage utilisée : Γ_{in} , Γ_{wall} , Γ_a et Γ_{out} représentent respectivement les conditions aux limites d'injection, de paroi, d'axe de symétrie et de sortie. z_f est la localisation de la condition de sortie. Les traits en pointillés, fins et épais sont respectivement caractérisés par une densité lineique de nœuds n_1 , n_2 et n_3 .

Les équations de Navier-Stokes stationnaires 3.3 ainsi que les problèmes généralisés aux valeurs propres 3.6 et 3.21 sont résolus numériquement sur Ω par la méthode des éléments finis. La discrétisation spatiale des champs de vitesse et de pression repose sur une formulation mixte utilisant des éléments de Taylor-Hood P2-P1 : des éléments triangulaires à 6 nœuds et à interpolation quadratique pour les vitesses (P2) et des éléments triangulaires linéaires à 3 nœuds pour la pression (P1). Les maillages ainsi que les matrices discrètes issues de la formulation variationnelle^v des problèmes 3.3, 3.6 et 3.21 projetés sont générés à l'aide du logiciel FreeFem++ [103] (utilisant une triangulation basée sur un algorithme de Delaunay-Voronoi).

Maillage	z_f	n_1	n_2	n_3	n_t	$n_{d.o.f}$
$C1$	8	50	70	100	107276	486085
$C2$	8	70	100	140	211760	957603
$C3$	8	100	140	200	465470	2101303
$C4$	11	50	70	100	203684	921661
$C5$	11	70	100	140	664028	2997444
$C6$	11	100	140	200	1502427	6774232

Tableau 3.1 – Écoulement induit par injection pariétale. Différents maillages ont été utilisés avec comme paramètre caractéristique : z_f la localisation de la sortie du domaine ; n_1 , n_2 et n_3 désignant respectivement les densités de noeuds sur les lignes pointillée, fine et épaisse représentées sur la figure 3.3. n_t est le nombre total de triangles constituant le maillage tandis que $n_{d.o.f}$ est le nombre de degré de liberté pour une inconnue (u_r, u_z, p). Les couples de maillage $\{C1, C2, C3\}$ et $\{C4, C5, C6\}$ ont les mêmes dimensions spatiales mais diffèrent de part leur densité. Les maillages $C1$ et $C4$ (resp. $C2$ et $C5$ ou encore $C3$ et $C6$) ont la même densité mais une longueur de domaine de calcul différente.

Six différents maillages triangulaires ont été considérés, nommés de C_1 à C_6 et présentant des disparités à la fois géométriques et en terme de densités de maillage. Le paramètre z_f détermine la longueur du domaine de calcul Ω . Les densités de chacun des maillages sont contrôlées par les paramètres n_1 , n_2 et n_3 fixant le nombre de nœuds par unité de longueur. Les caractéristiques de chacun des maillages sont présentées dans le tableau 3.1, où n_t est le nombre total de triangles et $n_{d.o.f}$ le nombre de degrés de liberté associé aux inconnues (u_r, u_z, p). Les maillages C_1 , C_2 et C_3 correspondent ainsi, par exemple, à une même géométrie mais à densité de maillage différente. Notons ici que le choix des abscisses de sortie z_f n'est pas arbitraire : il repose sur des considérations physiques liées à la transition de l'écoulement induit par injection pariétale. En effet, comme on a pu l'observer expérimentalement dans le cas du montage VALDO (Chapitre 2 section 2.3.1), cet écoulement transitionne vers la turbulence dans une région $11 < z < 13$, [41]. La prise en compte d'une zone

v. Pour palier à la singularité existante sur l'axe $r = 0$, toutes les équations sont multipliées par r^2 .

de non-linéarité, non traduite par la présente analyse, impose donc un choix restrictif sur la longueur du domaine de calcul. Ainsi, on considère ici que le domaine de validité de l'approche linéaire s'étend jusqu'à $z_f = 11$.

3.3.2 Champ de base

On cherche, en premier lieu, à déterminer une famille de champs de base $\mathbf{q}^0(Re)$ aux nombres de Reynolds désirés, à savoir $Re = \{1600; 2075; 2290\}$ ^{vi}. Une première solution approximative du champ de base $\mathbf{q}^0$ peut être obtenue, à un Re très faible : i.e. pour un nombre de Reynolds Re de l'ordre de 10 (que l'on suppose inférieur au nombre de Reynolds critique Re_c), en résolvant en temps les équations de Navier-Stokes 3.1. Cette solution approximative est utilisée comme solution d'initialisation d'une méthode de Newton permettant d'obtenir le champ de base stationnaire solution des équations 3.3. Cette méthode itérative, réalisée à l'aide du solveur direct LU de la librairie UMFPACK [38], nécessite l'inversion de matrices creuses non symétriques de taille $n_{d.o.f} \times n_{d.o.f}$. Les solutions stationnaires aux nombres de Reynolds Re supérieurs sont obtenues par continuation en utilisant une méthode de Newton et en supposant comme valeur d'initialisation le champ stationnaire déterminé au précédent nombre de Reynolds Re . Le détail de cette procédure numérique peut être trouvé dans [14] et [119]. Dans la présente étude, le processus itératif est conduit tant que la norme $\mathcal{L}^2$ du résidu est supérieure à 10^{-12} . De plus, il permet de calculer des solutions stationnaires pour tout nombre de Reynolds Re et ce, même lorsque l'écoulement devient instable.

Le champ de base $\mathbf{q}^0$ obtenu pour un nombre de Reynolds $Re = 1600$ est présenté sur la figure 3.4. Afin de s'assurer de la précision de la méthode numérique employée, le champ de base est confronté à la solution analytique de Taylor-Culick, figure 3.5. On rappelle ici que la solution de Taylor-Culick ne prend pas en compte la condition d'adhérence à la paroi au fond avant (section 1.4.2), et donc ne modélise aucunement la présence de la couche limite induite par la condition d'adhérence. Cette couche limite ne semble avoir qu'une influence locale sur l'écoulement de base. En effet, pour une abscisse $z \geq 2$, un excellent accord est observé entre les deux solutions. Néanmoins, la présence de la couche limite est pressentie comme pouvant avoir malgré tout un impact non négligeable sur la stabilité de l'écoulement. De telles considérations ont poussé Chedevergne [32] à considérer une distribution axiale de la vitesse d'injection. Dans le cadre de notre modélisation par éléments finis, la présence de la couche limite est intrinsèque faisant du champ de base une modélisation supérieure à la solution analytique de Taylor-Culick, puisque physiquement plus réaliste.

3.3.3 Spectre de valeurs propres

Une fois les champs de base $\mathbf{q}^0$ calculés, le problème de stabilité 3.6 est approché à l'aide d'une stratégie dite de *shift and invert*. Le problème aux

vi. Les nombres de Reynolds explorés correspondent aux vitesses d'injection étudiées dans l'étude expérimentale du chapitre 2

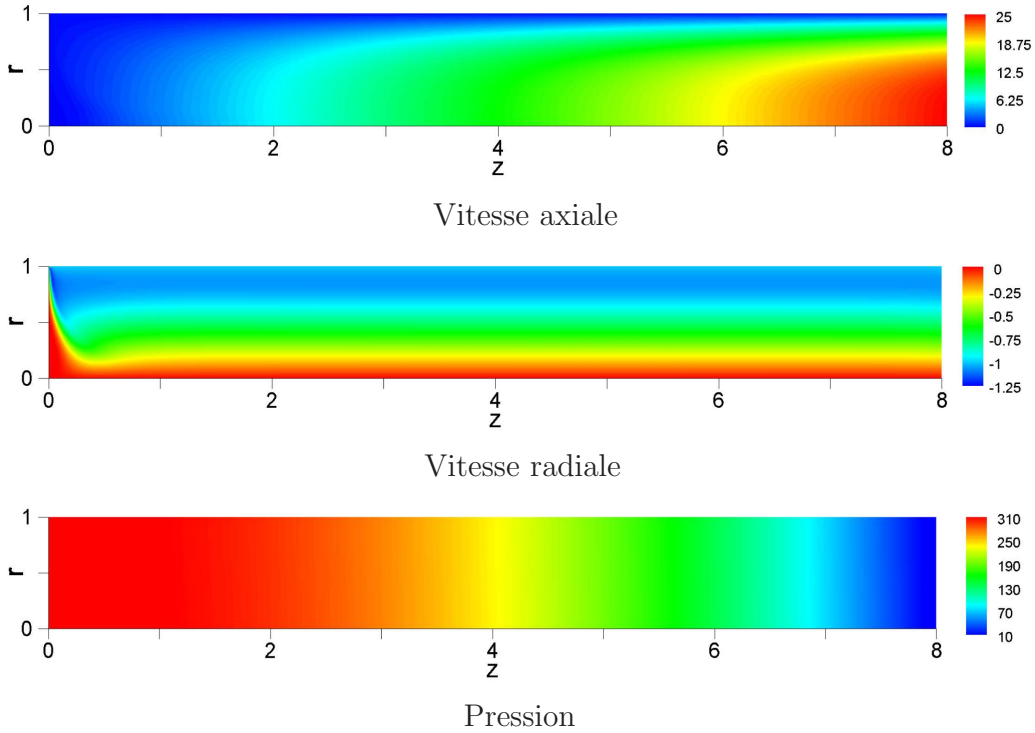


FIGURE 3.4 – Champ de base q^0 à $Re = 1600$ pour le maillage C_1

valeurs propres généralisé est résolu à l'aide de la méthode "Implicitly Restarted Arnoldi" présente dans la librairie ARPACK. L'ensemble des valeurs propres du problème 3.6 est dénommé spectre et est représenté dans le plan complexe (ω, σ) . L'ensemble du spectre est ainsi investigué pour différentes valeurs complexes cibles et paramétré en fonction du nombre de Reynolds Re et de l'abscisse de sortie z_f . La figure 3.6 illustre le spectre pour un nombre de Reynolds $Re = 1600$ et pour une abscisse de sortie $z_f = 8$.

Les valeurs propres ainsi déterminées doivent exhiber une totale indépendance vis-à-vis de la valeur de la cible choisie. Or, on remarque sur la figure 3.7 que si le recouvrement entre les valeurs propres identifiées à l'aide des différentes cibles est parfait pour certaines régions (autour de $\omega = 5$ par exemple, figure 3.7-a) il n'en est pas toujours le cas dans le plan complexe (ω, σ) (autour de $\omega = 55$ par exemple, figure 3.7-b). En effet, il semble que pour des pulsations $\omega > 20$ il n'y ait plus recouvrement des valeurs propres. Un tel comportement a déjà été observé par Feraille dans le cadre de l'étude de stabilité globale de l'écoulement de Taylor-Culick, [51]. Ce phénomène est caractéristique d'une certaine sensibilité des valeurs propres à de faibles perturbations, dont les deux principales sources sont essentiellement, [115] :

- l'approximation discrète des équations continues constituant le problème aux valeurs propres généralisées,
- les erreurs arithmétiques introduites par la précision machine.

Étudiée dans le cadre de l'écoulement de Poiseuille par Schmid et Henningson [115], cette sensibilité des valeurs propres à de faibles perturbations a été identifiée comme étant une conséquence directe de la non-normalité de

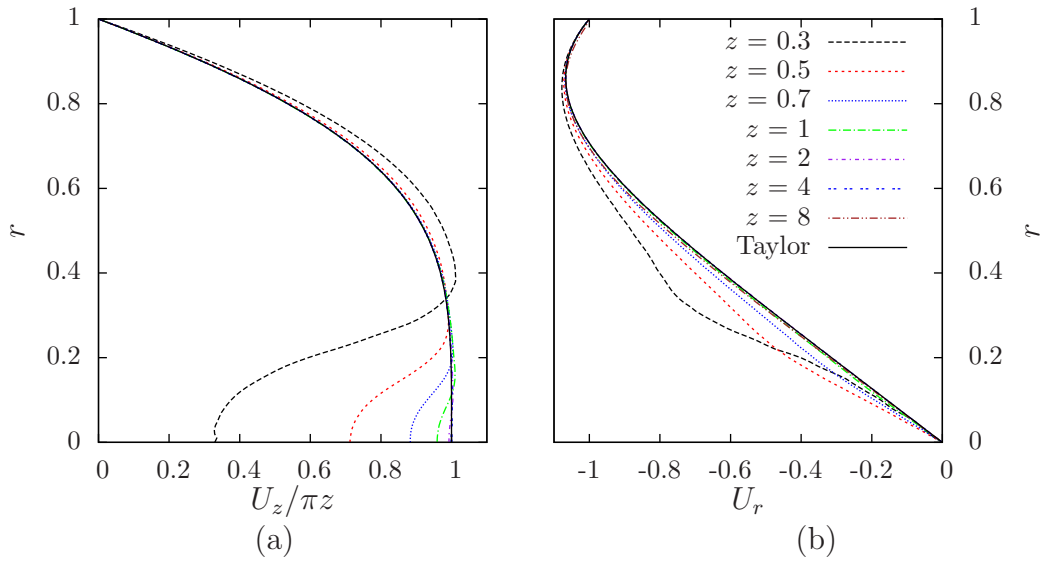


FIGURE 3.5 – (a) Profils radiaux de vitesse longitudinale U_z et (b) de vitesse radiale U_r illustrant la présence d’une couche limite au fond avant. $Re = 1600$ et maillage C_1 .

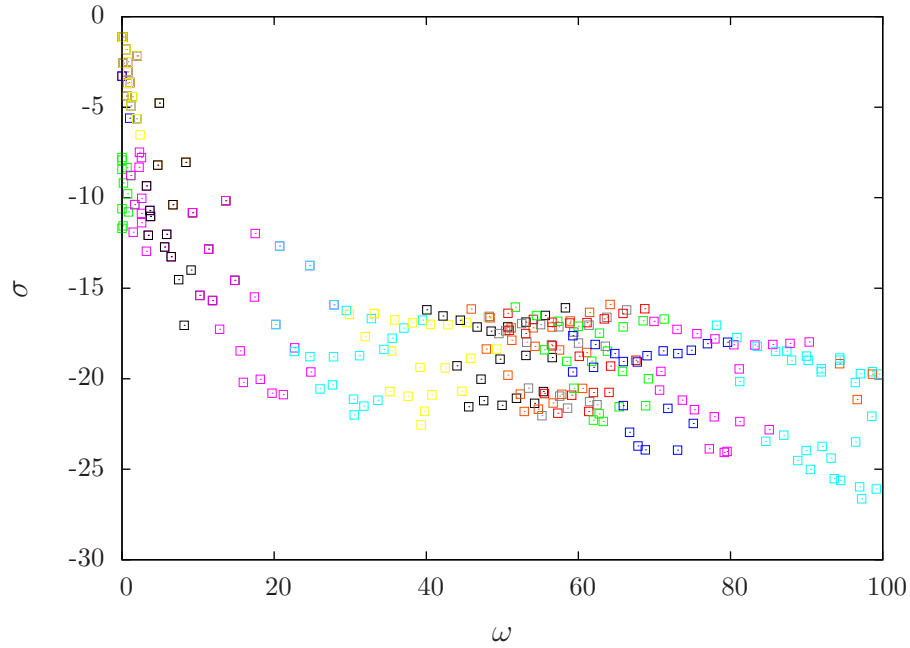


FIGURE 3.6 – Valeurs propres dans le plan (ω, σ) pour $Re=1600$. Maillage C_2 . Les différentes couleurs représentent les valeurs propres trouvées pour chaque cible.

l’opérateur de stabilité. Trefethen *et al.* [125] suggèrent ainsi de considérer le ϵ -pseudo-spectre de l’opérateur et non plus son spectre. L’idée sous-jacente est qu’il s’avère intéressant d’étudier non seulement les points où la résolvante d’un opérateur n’est pas définie (i.e. son spectre), mais également là où elle est en norme de taille significative (i.e. les ensembles pseudo-spectraux) définis

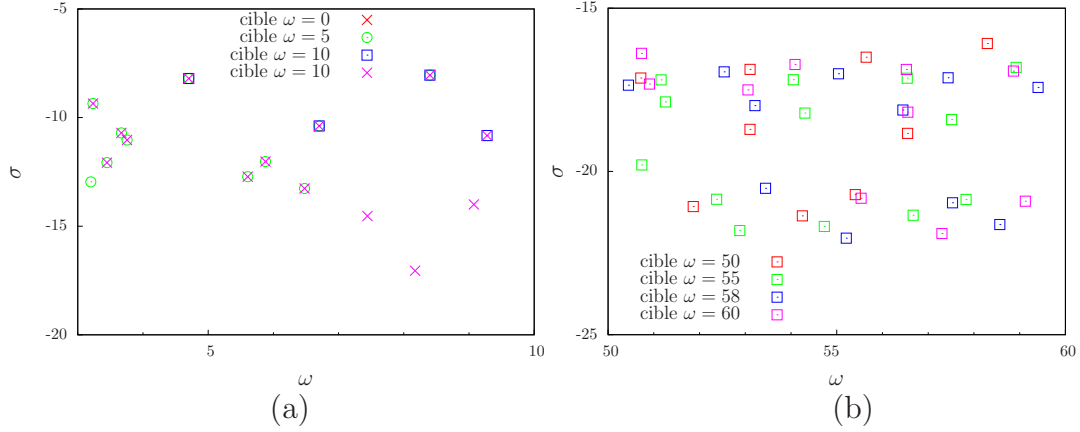


FIGURE 3.7 – (a) Valeurs propres autour de $\omega = 5$ et (b) de $\omega = 55$ dans le plan (ω, σ) pour $\text{Re}=1600$. Maillage C_2 . Les différentes couleurs représentent les valeurs propres trouvées pour chaque cible.

de la manière suivante : le ϵ -pseudo-spectre d'une matrice ou d'un opérateur $\mathcal{A}$ est défini pour une valeur strictement positive du paramètre ϵ comme le sous-ensemble du plan complexe, si on utilise le formalisme introduit par l'équation 3.14 :

$$\Lambda_\epsilon(\mathcal{A}) = \{z \in \mathbb{C}, \|\mathcal{R}(z)\| \geq \epsilon^{-1}\}, \quad (3.22)$$

avec $\mathcal{R}$ la résolvante définie de façon continue en tout point du plan complexe à l'exception du spectre de l'opérateur, où sa norme tend vers l'infini (i.e. si z appartient au spectre de l'opérateur $\mathcal{A}$, et donc vérifie 3.6, alors $\|(\mathcal{R}(z))^{-1}\| = \infty$, avec $\|\mathcal{R}\| = \sup \frac{\|\mathcal{R}(z)\|}{\|z\|} : z \neq 0$). Notons que les ϵ -pseudo-spectre d'un opérateur sont des ensembles croissants au sens de l'inclusion par rapport au paramètre strictement positif ϵ et qu'ils contiennent tous le spectre de l'opérateur. Un large panorama sur ce sujet est dressé dans l'ouvrage de Trefethen et Embree [126].

L'étude des ensembles ϵ -pseudo-spectraux d'un opérateur se réduit donc d'après la définition précédente à l'étude des lignes de niveau de la norme de sa résolvante. On apprécie ainsi, par ce biais, la stabilité spectrale par rapport à des perturbations. Le pseudo-spectre basé sur la norme de la résolvante est représenté sur la figure 3.8, les lignes représentant les iso-valeurs de la norme de la résolvante (échelle logarithmique). Au fur et à mesure que ϵ diminue les lignes de niveaux du ϵ -pseudo-spectre finissent par encercler, de façon discrète, les valeurs propres de l'opérateur $\mathcal{A}$. La figure 3.8-b illustre cet encerclement pour des valeurs de $\omega \approx 63.3$ et démontre ainsi la présence d'une valeur propre dans cette zone. Plus généralement, on observe que ce sont des zones entières du plan complexe (ω, σ) qui peuvent être considérées, du à l'important niveau des amplitudes atteintes, comme des valeurs propres de l'opérateur. Dès lors, cette observation permet d'affirmer que la notion de valeurs propres discrètes est une notion mal définie pour l'opérateur considéré. En outre, la définition des ensembles ϵ -pseudo-spectraux dans l'espace complexe (ω, σ) permet de conclure sur la stabilité globale de l'opérateur. Bien qu'il n'ait pas été possible de balayer

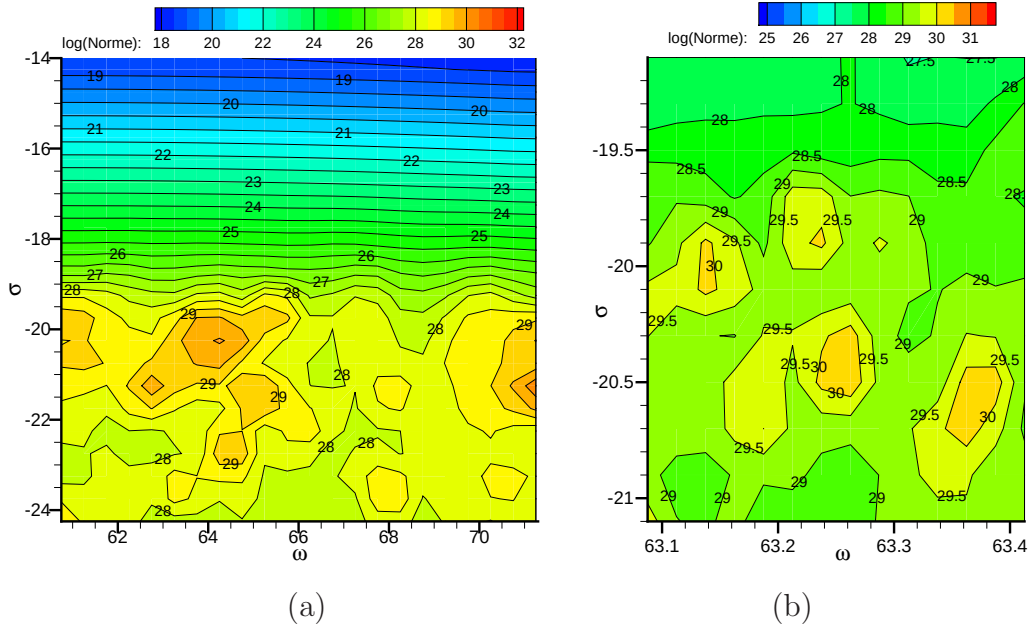


FIGURE 3.8 – Pseudospectre pour l'écoulement induit par injection pariétale basé sur la norme de la résolvante. (a) Vue générale pour $61 < \omega < 71$ et (b) zoom autour de $\omega = 63$. $Re=1600$ et maillage C_2 .

l'espace complexe au complet, pour des raisons relatives au coût numérique de l'évaluation de la résolvante, les iso-valeurs ont tendance à diminuer au fur et à mesure que l'on se rapproche de l'axe des réels. Ceci permet de conclure que l'ensemble des valeurs propres demeure à taux d'amplification négatif ($\sigma < 0$) et donc que l'écoulement est globalement stable. Plus qu'un artefact numérique dû au schéma de discrétisation, l'importante sensibilité de certaines parties du spectre de l'opérateur $\mathcal{A}$ est l'expression de l'une des propriétés d'un opérateur non-normal [115].

3.3.4 Pseudo-résonance

L'écoulement étant globalement stable, on procède donc à une analyse de sa dynamique en tant qu'amplificateur de bruit.

La réponse de l'écoulement à un forçage volumique instationnaire f^1 est examinée en résolvant le problème aux valeurs singulières associé à la résolvante globale 3.15. A chaque fréquence de forçage $f = \omega/2\pi$ on détermine les valeurs singulières σ_i grâce à la procédure précédemment présentée. La figure 3.9 présente les 10 plus grandes valeurs singulières $(\sigma_i)_{i=1..10}$ associées à la pulsation de forçage $\omega = 63.25$ et ordonnées par ordre décroissant. La première valeur singulière $\sigma_1 \approx 5.2$ est plus de cinq fois plus importante que les autres valeurs singulières : $\sigma_2 \approx 0.95$ et $\sigma_{10} \approx 0.4$. La dépendance de la première et de la seconde valeur singulière en fonction de la pulsation ω est représentée sur la figure 3.10. La première valeur singulière σ_1 , représentée en trait continu, présente une importante dépendance vis-à-vis de la fréquence de forçage avec

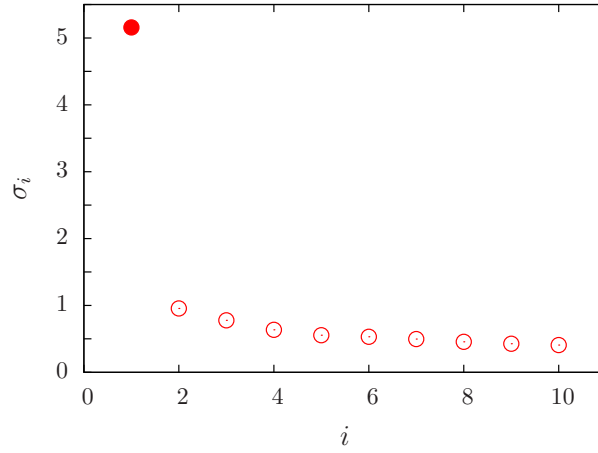


FIGURE 3.9 – Les 10 plus grandes valeurs singulières déterminées à la pulsation $\omega = 63.25$. Maillage C_2 et $Re = 1600$

un pic de réponse à la pulsation $\omega = 63.25$. Il s'agit de la pulsation que l'on dénommera, par la suite, comme étant la pulsation optimale au sens de la réponse de l'écoulement. La seconde valeur singulière, représentée en traits pointillés, ne varie que faiblement avec la pulsation de forçage indiquant alors que σ_1 est la valeur singulière dominante. La réponse de l'écoulement à un forçage résulte donc d'un important mécanisme de sélection fréquentielle, maximum à la pulsation $\omega_{opt} = 63.25$. Notons que cette étude a été conduite sur les différentes densités de maillage et a été convergée spatialement. On s'intéresse, par la suite, aux résultats obtenus pour cette fréquence de forçage optimale.

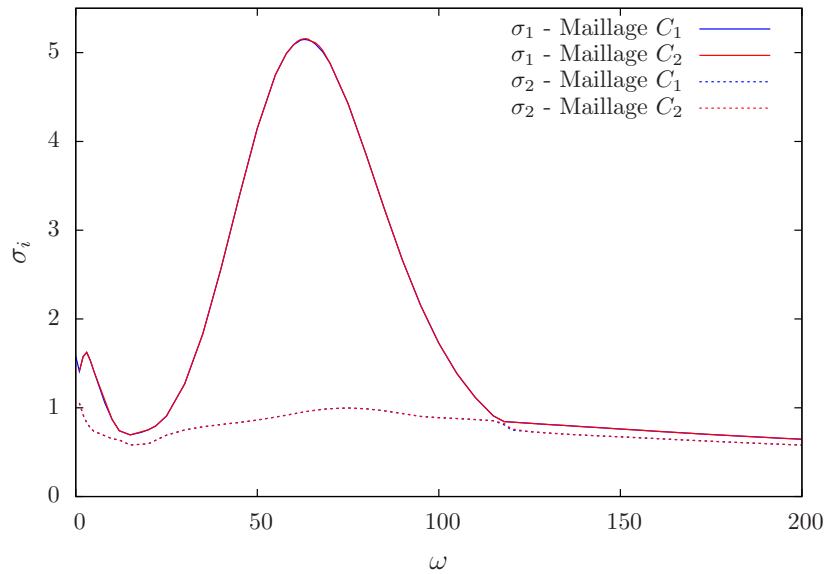


FIGURE 3.10 – Première et seconde valeurs singulières en fonction de la pulsation de forçage ω . $Re = 1600$.

Forçage optimal et réponse optimale

On désigne par $\hat{\mathbf{f}}_{opt}^1$ la structure spatiale du forçage de pulsation ω_{opt} et par $\hat{\mathbf{u}}_{opt}^1$ la distribution spatiale de la réponse optimale de l'écoulement. Les grandeurs physiques $\mathbf{f}^1$ ou $\mathbf{u}^1$ sont obtenues à partir des champs complexes $\hat{\mathbf{f}}^1$ ou $\hat{\mathbf{u}}^1$ selon :

$$\mathbf{f}^1(r, z, t) = \text{Re}(\hat{\mathbf{f}}^1(z, r)) \cos(\omega t) - \text{Im}(\hat{\mathbf{f}}^1(z, r)) \sin(\omega t) \quad (3.23)$$

$$\mathbf{u}^1(r, z, t) = \text{Re}(\hat{\mathbf{u}}^1(z, r)) \cos(\omega t) - \text{Im}(\hat{\mathbf{u}}^1(z, r)) \sin(\omega t) \quad (3.24)$$

La partie réelle des composantes radiale et longitudinale des modes de forçage et de réponse de l'écoulement associés à la valeur singulière σ_1 sont présentées sur la figure 3.11 (de (a) à (d)).

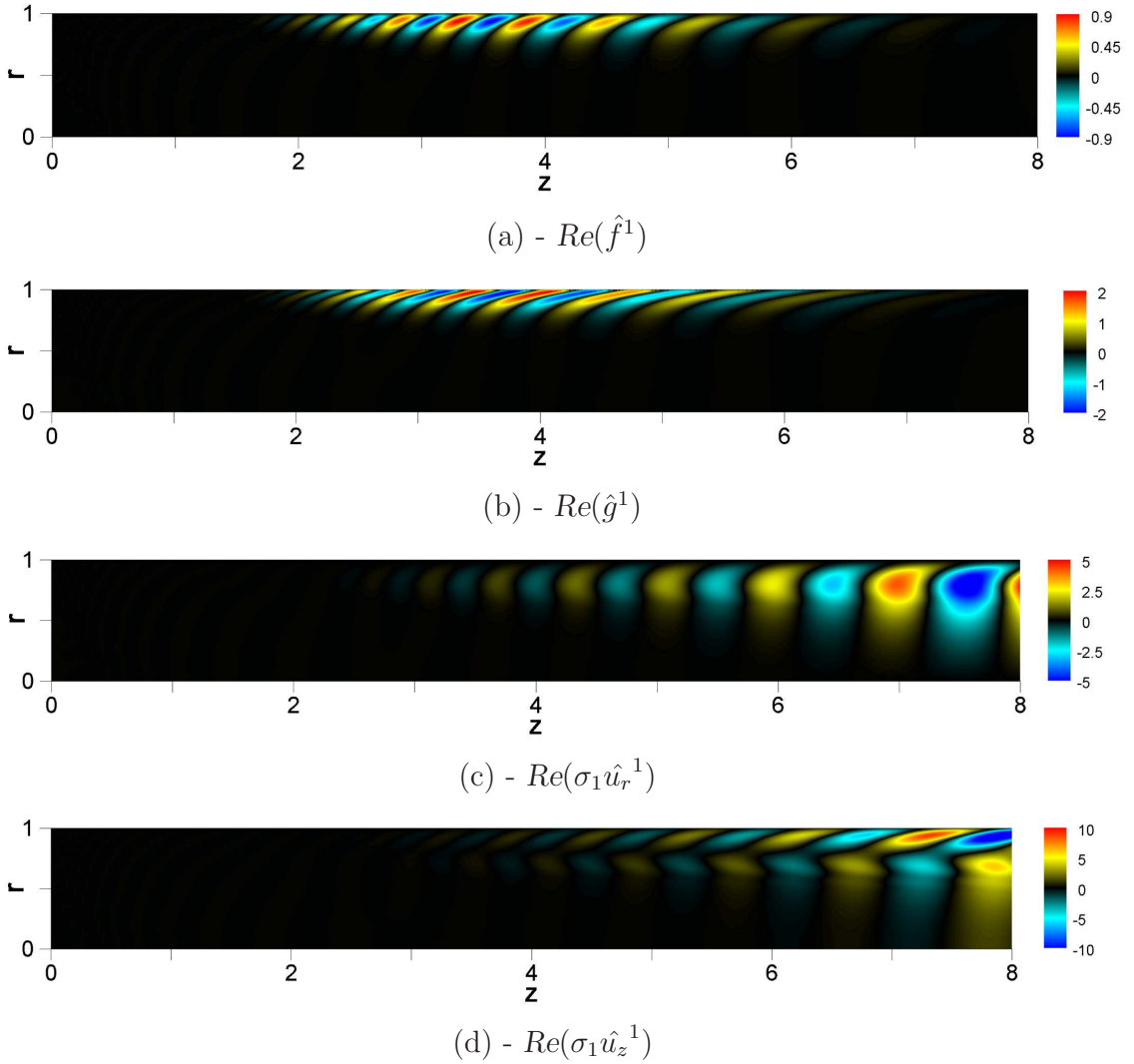


FIGURE 3.11 – Forçage et réponse associés à la valeur singulière σ_1 et à la pulsation $\omega = 63.25$. $\text{Re}=1600$ et maillage C_2 .

L'amplitude du forçage optimal $\hat{\mathbf{f}}_{opt}^1$, figures 3.11-(a) et 3.11-(b), est maximale dans la région $3 < z < 5$. Ce forçage optimal se présente sous la forme de structures de signes alternés, allongées et inclinées dans la direction opposée à l'écoulement de base évoquant un mécanisme axisymétrique similaire à celui de Orr [95], où la rotation des perturbations joue un rôle dans la croissance transitoire de leur énergie. L'amplitude de la réponse optimale $\hat{\mathbf{u}}_{opt}^1$ est représentée sur les figures 3.11-(c) et 3.11-(d) et atteint des valeurs significatives dans la région $4 < z < z_f$. Cette réponse optimale est constituée de structures similaires à celles de la perturbation optimale à l'exception qu'elles sont moins inclinées et de taille plus significative.

Notons ici que la partie imaginaire des composantes de vitesse, non représentée, a une structure similaire mais est en quadrature de phase spatiale. Ce déphasage, illustré sur la figure 3.12, indique que les modes de forçage et de réponse optimales prennent la forme d'une onde se propageant vers l'aval.

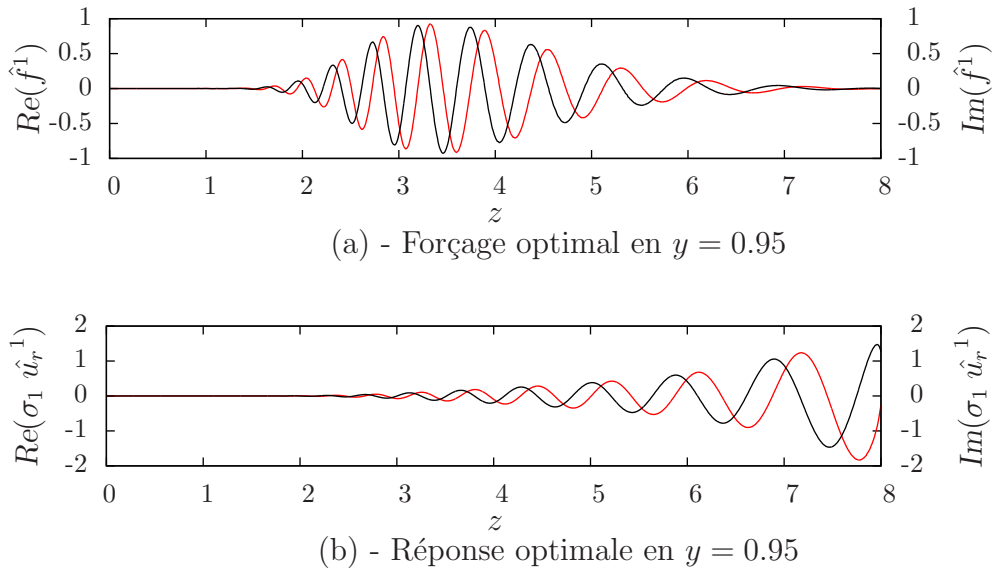


FIGURE 3.12 – Parties réelle et imaginaire des fluctuations de vitesse radiale du forçage et de la réponse associés à la valeur singulière σ_1 et à la pulsation $\omega = 63.25$. Paramètres : $Re=1600$ et maillage C_2 .

La comparaison des figures 3.11-(a), 3.11-(b) et 3.11-(c), 3.11-(d) et des figures 3.12-(a) et 3.12-(b) indique clairement une séparation spatiale de l'amplitude du forçage optimal et de la réponse optimale. La région de l'écoulement la plus réceptive à un forçage instationnaire est donc distincte de la région où l'écoulement répond le plus fortement à cette perturbation. Une telle séparation spatiale est caractéristique des écoulements ouverts [34] et résulte de la *non-normalité convective* de l'opérateur GNSL. Plus précisément, cette non-normalité s'exprime au travers de l'advection de la perturbation par l'écoulement de base (terme de transport $\nabla \mathbf{u}^1 \cdot \mathbf{u}^0$).

Afin de mieux illustrer la séparation spatiale du forçage et de la réponse, on représente sur la figure 3.13 l'amplitude locale du forçage optimal $\|\hat{\mathbf{f}}_{opt}^1\|_L$

(courbe en pointillés) et de la réponse optimale $\|\hat{\mathbf{u}}_{opt}^1\|_L$ (courbe pleine) correspondant à la valeur singulière σ_1 . Pour une section $S(x)$ donnée, l'amplitude locale d'un champ vectoriel $\mathbf{a}$ est définie par $\|\mathbf{a}\|_L = (\int_{S(x)} (\|\mathbf{a}\|^2 r dr))^{1/2}$.

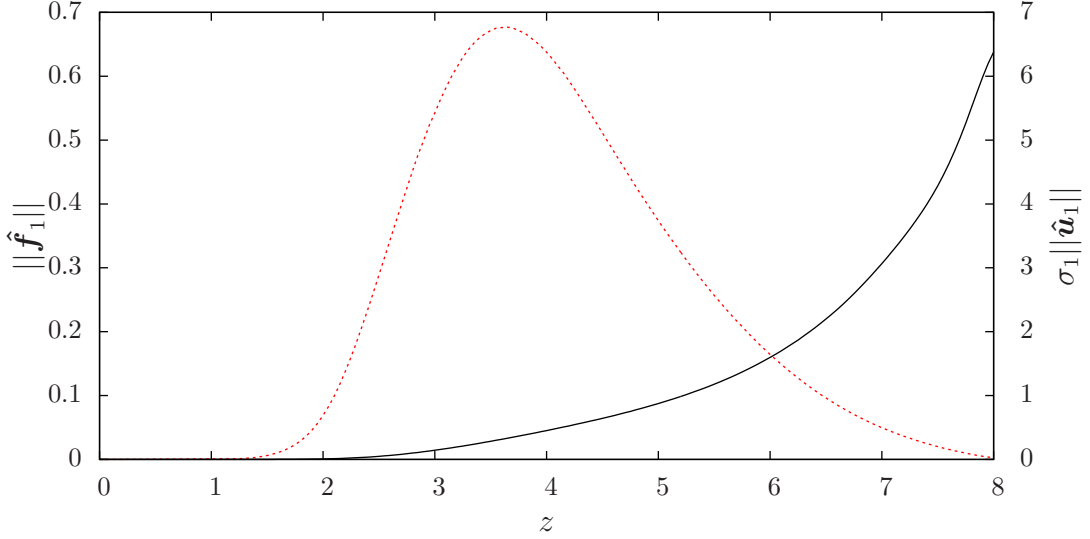


FIGURE 3.13 – Amplitudes locales des modes globaux de forçage (ligne pointillée) et de réponse (ligne pleine) en fonction de l'abscisse z . $Re=1600$ et maillage C_2 .

La répartition des amplitudes locales permet de souligner la forte séparation spatiale qui existe entre le forçage optimal et la réponse optimale. La distribution des amplitudes locales atteint son maximum en $z = 4$ pour la perturbation et en $z = z_f = 8$ pour la réponse. Dans la région spatiale $4 < z < z_f$, l'amplitude du forçage décroît tandis que, parallèlement, l'amplitude de la réponse croît fortement. Ce comportement illustre l'effet crucial que joue la *non-normalité convective* dans la dynamique de l'écoulement induit par injection pariétale dans une conduite cylindrique semi-ouverte.

Une grandeur d'intérêt dans l'étude des instabilités au sein d'une telle configuration (voir Chapitre 2) est la réponse en pression au fond avant de la chambre. Ainsi, on détermine la valeur de p en $z = (0, 0)$ afin d'observer la dépendance des fluctuations de pression en fonction de la pulsation ω , figure 3.14. On observe une parfaite corrélation entre la réponse en pression et la réponse en vitesse de l'écoulement, indiquant ainsi que la pression exhibe le même mécanisme de pseudo-résonance que la vitesse et est, en conséquence, d'amplitude maximum pour une pulsation de forçage ω_{opt} .

3.3.5 Influence de la taille du domaine

Avec l'observation de l'amplitude maximale de la réponse optimale de l'écoulement en sortie de domaine, se pose, tout naturellement, la question de l'influence de l'abscisse z_f . Afin de vérifier l'indépendance des résultats de stabilité vis-à-vis de z_f , on compare les résultats obtenus pour un domaine de calcul défini par $z_f = 8$ (maillages C_1 à C_3) à celui défini par $z_f = 11$

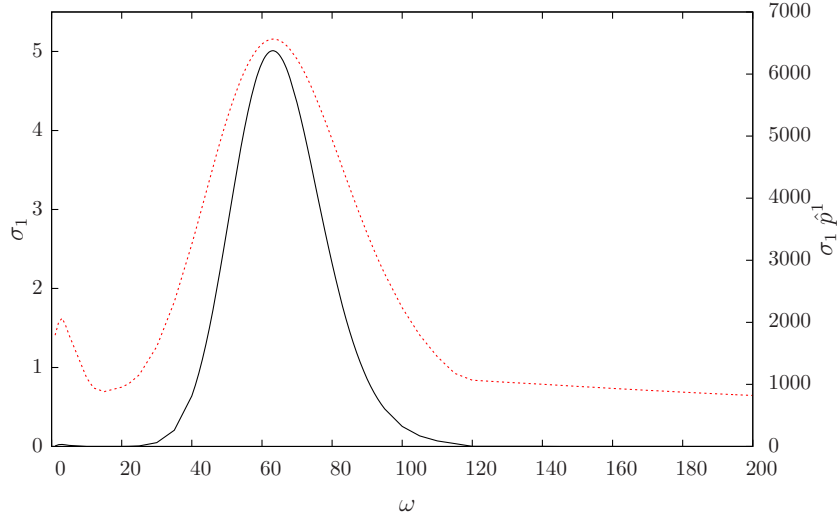


FIGURE 3.14 – Réponse en pression au fond avant (ligne pleine) et première valeur singulière (ligne pointillée) en fonction de la pulsation ω pour un $Re = 1600$. Maillage C_2 et $z_f = 8$.

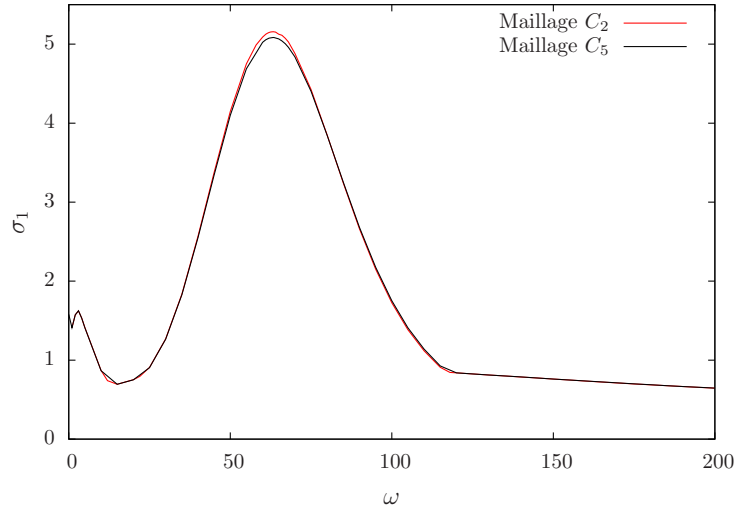


FIGURE 3.15 – Première valeur singulière en fonction de la pulsation de forçage ω . Dans les deux cas la recherche du forçage optimal est effectuée dans le sous domaine $\Omega_f = \{z \leq 8\}$. $Re = 1600$.

(maillages C_4 à C_6). Dans les deux cas, la réponse optimale est cherchée non pas dans tout le domaine Ω mais dans le sous-domaine $\Omega_f = \{z \leq 8\}$. À ce stade, il semble essentiel de s'arrêter quelque peu sur ce choix, relatif à la taille du sous-domaine d'optimisation. On vient de le voir, les mécanismes associés à l'amplification des instabilités sont de nature convective. La recherche de la réponse optimale dans le sous-domaine Ω_f a comme incidence de localiser le forçage dans ce même sous domaine par l'intermédiaire de l'équation 3.21, où cette fois $\mathbf{S} = \mathbf{R}(\omega)^H \mathbf{Q}' \mathbf{R}(\omega)$. Au cours de notre étude, on a remarqué que si

l'on considèrerait comme sous-domaine Ω_f le sous-domaine $\{z \leq 11\}$, un léger glissement de la fréquence optimale vers les hautes fréquences avait lieu. En outre, ce point illustre l'importance non négligeable jouée par le choix du sous-domaine de réponse optimale. Au regard de l'apparition d'effets non linéaires vers $z = 11$, il semble néanmoins physiquement admissible de ne rechercher la réponse optimale que sur $\Omega_f = \{z \leq 8\}$.

La dépendance de la première valeur singulière en fonction de la pulsation de forçage ω est présentée sur la figure 3.15. Pour les deux longueurs de domaine de calcul considérées, son évolution est identique et le phénomène de *pseudo-résonance* est centré sur la même valeur de pulsation optimale $\omega_{opt} = 63.25$. On examine alors la structure spatiale du forçage optimal $\hat{\mathbf{f}}_{opt}^1$ et de la réponse optimale $\hat{\mathbf{u}}_{opt}^1$ de l'écoulement pour une longueur de domaine $z_f = 11$, figure 3.16.

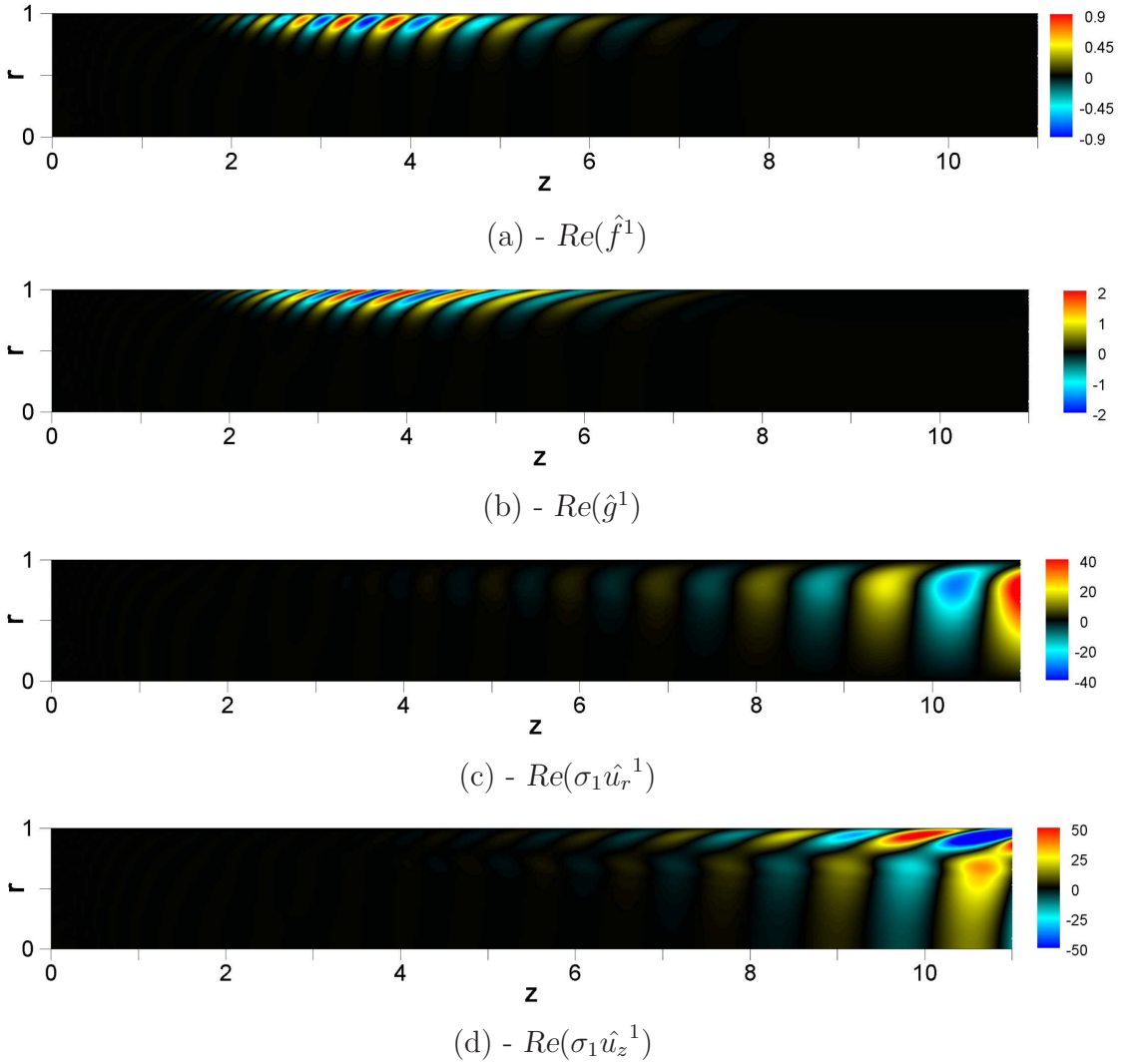


FIGURE 3.16 – Forçage et réponse associés à la valeur singulière σ_1 et à la pulsation $\omega = 63.25$. $Re=1600$ et maillage C_5 .

Si la répartition spatiale du forçage optimal demeure identique, l'extension du domaine de calcul a une conséquence directe sur la réponse optimale de l'écoulement. En effet, la nature convective de l'instabilité tend à amplifier spatialement le forçage optimal permettant ainsi à la réponse de l'écoulement d'atteindre, pour une même localisation spatiale du forçage, des amplitudes plus conséquentes. En outre, précisons que la forme spatiale de cette réponse demeure la même quelle que soit la longueur du domaine de calcul choisie (figures 3.16-(c) et 3.16-(d)). Pour mieux analyser l'influence du choix de z_f , on représente, figure 3.17, l'amplitude locale du forçage optimal $\|\hat{\mathbf{f}}_{opt}^1\|_L$ (courbe en pointillés) et de la réponse optimale $\|\hat{\mathbf{u}}_{opt}^1\|_L$ (courbe noire pleine pour $z_f = 8$ et courbe bleue en trait-pointillés pour $z_f = 11$) correspondant à la valeur singulière σ_1 .

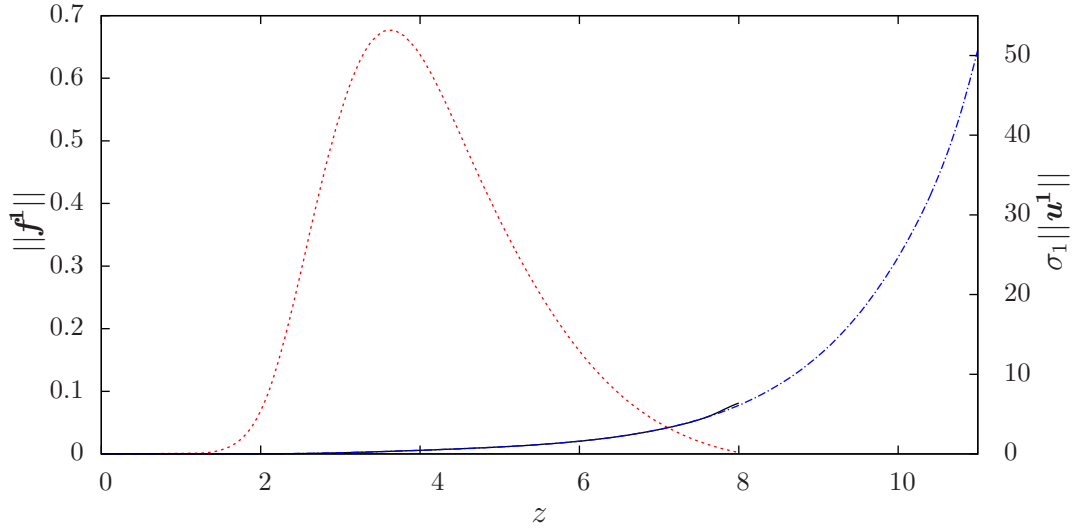


FIGURE 3.17 – Amplitudes locales des modes globaux de forçage (ligne en pointillés) et de réponse pour $z_f = 8$ (ligne noire pleine) et pour $z_f = 11$ (ligne bleue en trait-pointillés) en fonction de l'abscisse z . $Re=1600$ et maillages C_2 et C_5 .

On observe alors que la condition de sortie libre influence l'amplitude locale de la réponse dans une zone proche de la sortie du domaine. Plus précisément, l'écart quantitatif entre les amplitudes locales de la réponse optimale demeure inférieur à 1% pour la région $z \leq 7.7$ tandis qu'il atteint près de 5% en $z = 8$. De ces écarts relatifs, on peut conclure que la taille du domaine de calcul a un impact local et limité en n'influant ni sur la pulsation optimale ω_{opt} ni sur l'amplitude de la valeur singulière la plus énergétique.

3.3.6 Dépendance en fonction du nombre de Reynolds

La dépendance des résultats de stabilité vis-à-vis du nombre de Reynolds est examinée pour les trois valeurs $Re = \{1600; 2075; 2290\}$. Pour chaque nombre de Reynolds, la réponse de l'écoulement à un forçage instationnaire volumique est déterminée en résolvant le problème aux valeurs propres 3.20. La valeur de la première valeur singulière σ_1 est représentée sur la figure 3.18 en fonction de la pulsation de forçage.

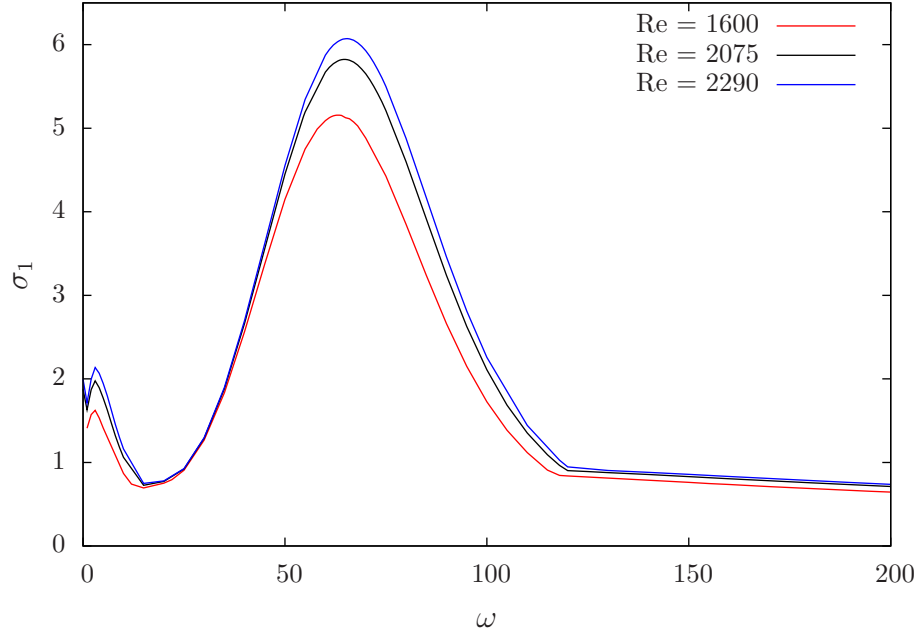


FIGURE 3.18 – Première valeur singulière en fonction de la pulsation de forçage ω . Maillage C_1 .

Pour l'ensemble des fréquences, l'amplitude de la valeur singulière σ_1 augmente avec le nombre de Reynolds mais demeure du même ordre de grandeur. En outre, on observe un très léger glissement vers les hautes fréquences de la pulsation optimale ω_{opt} lorsque le nombre de Reynolds augmente. Le forçage optimal associé aux nombres de Reynolds $Re=2075$ et $Re=2290$ est représenté sur la figure 3.18. Ces figures permettent de conclure que la distribution spatiale du forçage optimal est indépendante du nombre de Reynolds. La région de plus forte réceptivité de l'écoulement, quel que soit le nombre de Reynolds, est localisée en proche paroi pour $3 < z < 5$.

L'effet du nombre de Reynolds sur la distribution spatiale de la réponse de l'écoulement est étudié au travers de l'amplification spatiale des perturbations optimales. Pour ce faire, on représente sur la figure 3.20, et pour les trois valeurs du nombre de Reynolds, l'amplitude locale de la réponse optimale. Si, pour toute section $S(z)$, l'amplitude des perturbations augmente lorsque le nombre de Reynolds augmente, elle demeure néanmoins du même ordre de grandeur (de la même façon que l'amplitude de σ_1). On peut alors conclure que, dans le cadre de l'écoulement induit par injection pariétale, l'effet du

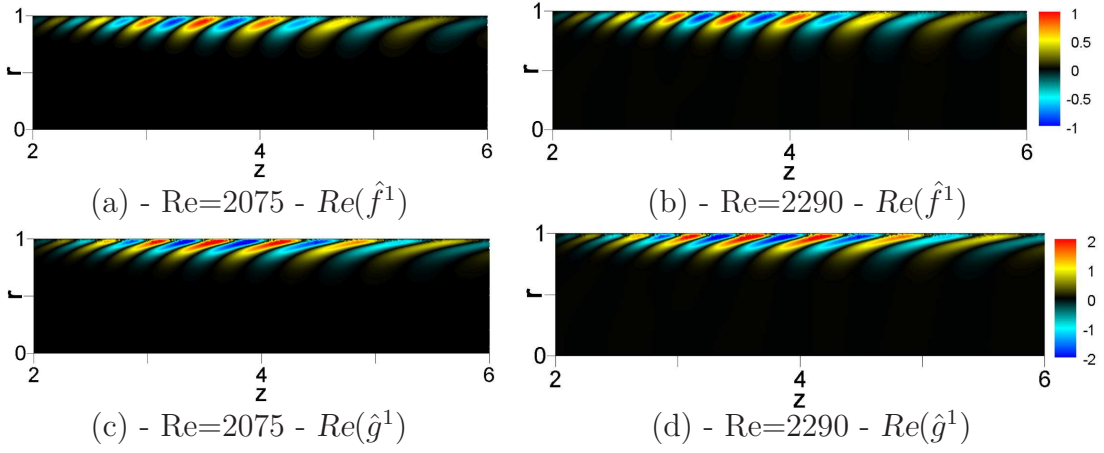


FIGURE 3.19 – Forçage optimal associé à la valeur singulière σ_1 pour les différents nombres de Reynolds considérés. Maillage C_2 .

nombre de Reynolds n'est pas significatif permettant de qualifier le mécanisme d'amplification comme essentiellement non-visqueux.

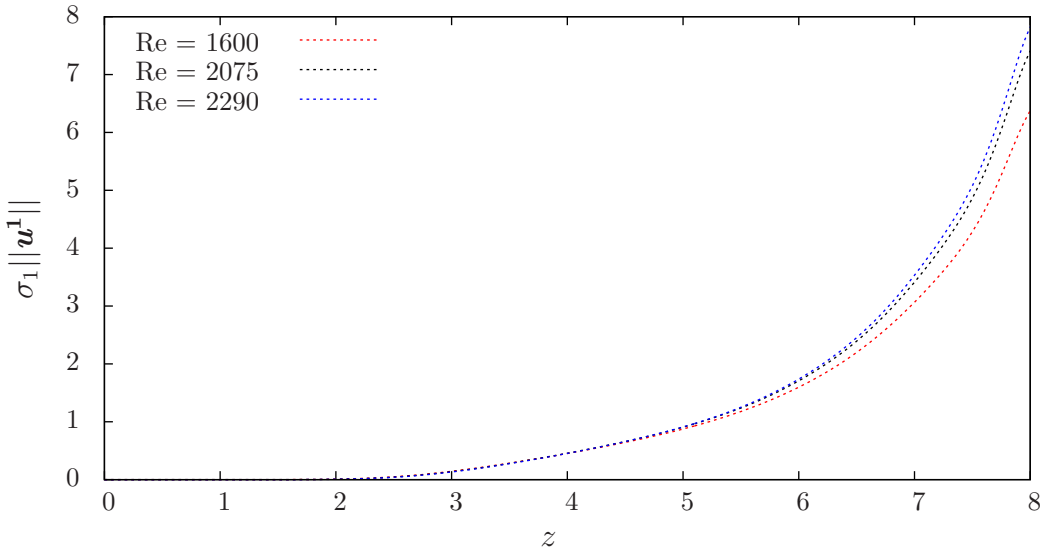


FIGURE 3.20 – Amplitudes locales des modes globaux de la réponse optimale pour $z_f = 8$ en fonction de l'abscisse z . Maillage C_1 .

3.3.7 Comparaison à l'expérience & discussion

Les résultats issus de la théorie linéaire de stabilité en approche globale peuvent être confrontés aux résultats expérimentaux obtenus à l'aide du montage VALDO (Chapitre 2). On se réfère ici aux résultats expérimentaux obtenus pour le montage en configuration sans obstacle, section 2.3.1 et 2.3.2.

Fréquences

La détermination des valeurs propres de l'opérateur $\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{S}$ dans une large gamme de pulsation de forçage permet de déterminer la réponse de l'écoulement à un bruit blanc aléatoirement distribué en espace et en composante, [49]. Il est alors intéressant de confronter la réponse de l'écoulement en fréquence aux différents spectres de fluctuations de vitesse (respectivement de pression) mesurés au sein du montage VALDO. La figure 3.21 présente ainsi les résultats obtenus pour deux valeurs du nombre de Reynolds, $Re=1600$ et $Re=2075$. Rappelons que le nombre de Reynolds utilisé est basé sur la vitesse d'injection V_{inj} et le rayon R de la chambre. On remarque que l'ensemble des fréquences expérimentales émergent dans le voisinage immédiat de la pulsation optimale associée à la première valeur singulière σ_1 . D'un point de vue plus quantitatif, le tableau 3.2 récapitule l'écart existant entre la fréquence la plus amplifiée expérimentalement et la fréquence optimale.

V_{inj}	Re	Fréquence expérimentale Montage VALDO	Fréquence optimale associée à σ_1	Écart relatif
0.84	1600	272	281	3.2%
1.09	2075	388	374	3.6%
1.2	2290	427	417	2.4%

Tableau 3.2 – Comparaison entre la fréquence la plus amplifiée expérimentalement et la fréquence optimale prédite par la théorie de la stabilité linéaire en approche globale.

Cet écart relatif est de l'ordre de 3% et démontre ainsi que le phénomène de *pseudo-résonance* semble être le mécanisme conduisant à l'émergence d'instabilités au sein de l'écoulement induit par injection pariétale.

Profils de vitesse RMS

La théorie de stabilité en approche globale permet la détermination des structures spatiales du forçage optimal $\hat{\mathbf{f}}_{opt}^1$ et de la réponse optimale $\hat{\mathbf{u}}_{opt}^1$. La figure 3.22 confronte ainsi les profils de vitesse *RMS* expérimentaux à ceux déduits de la théorie, pour un nombre de Reynolds $Re=1600$. Notons ici que la renormalisation des profils théoriques est effectuée, pour l'ensemble des positions longitudinales examinées, à l'aide d'un seul et unique coefficient de pondération. En outre, les profils sont extraits en des positions longitudinales où les effets non-linéaires demeurent négligeables, i.e. $z \leq 11$.

Bien que certains écarts subsistent, il en ressort un bon accord entre les profils issus de la théorie de stabilité linéaire et les profils expérimentaux. Que ce soit en terme d'évolution radiale où en terme d'amplification spatiale longitudinale, l'étude linéaire de la dynamique de l'écoulement en tant qu'amplificateur de bruit permet de transcrire fidèlement la distribution des fluctuations de vitesse dans la chambre.

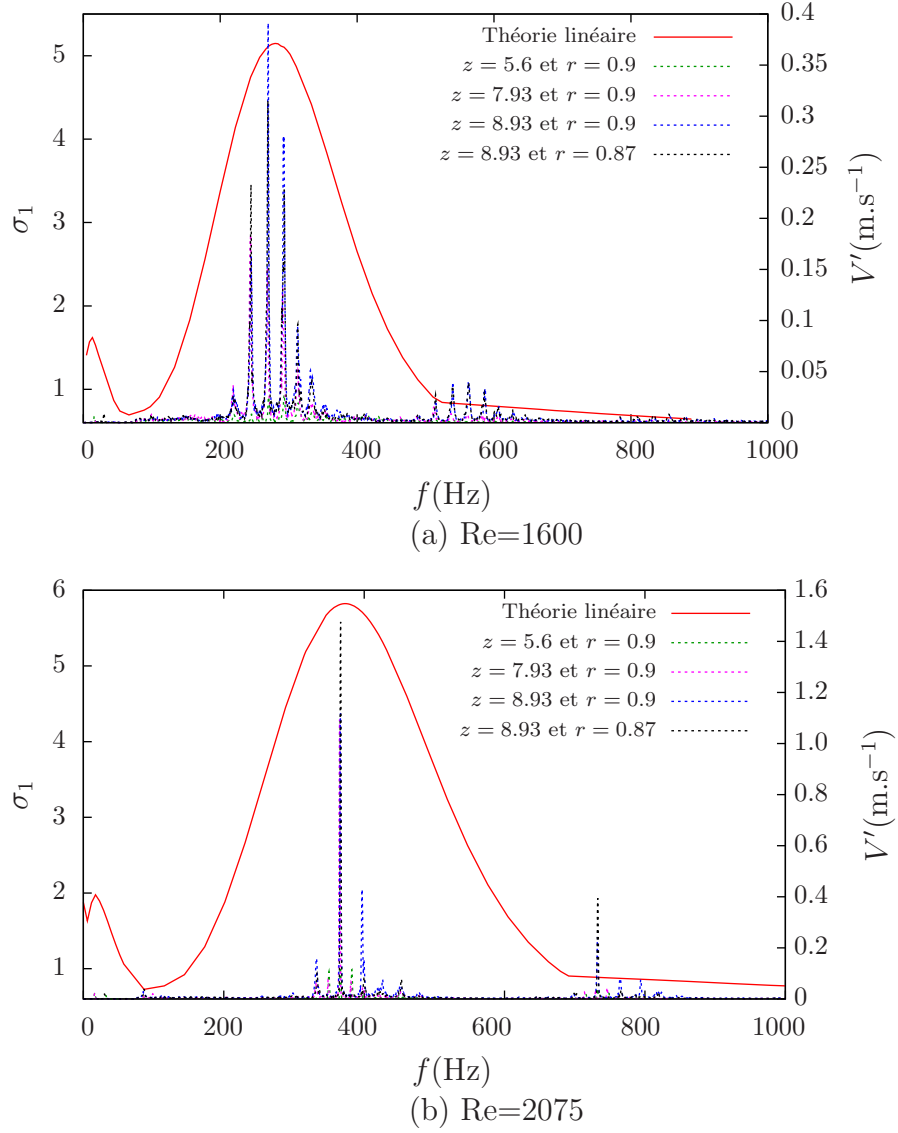


FIGURE 3.21 – Comparaison entre les résultats issus de la théorie de stabilité linéaire globale et les mesures expérimentales sur le banc d'essais VALDO. Les spectres de vitesse issus des mesures par fil chaud sont comparés à l'évolution fréquentielle de la première valeur singulière σ_1 pour différents nombres de Reynolds. Paramètres : maillage C_2 .

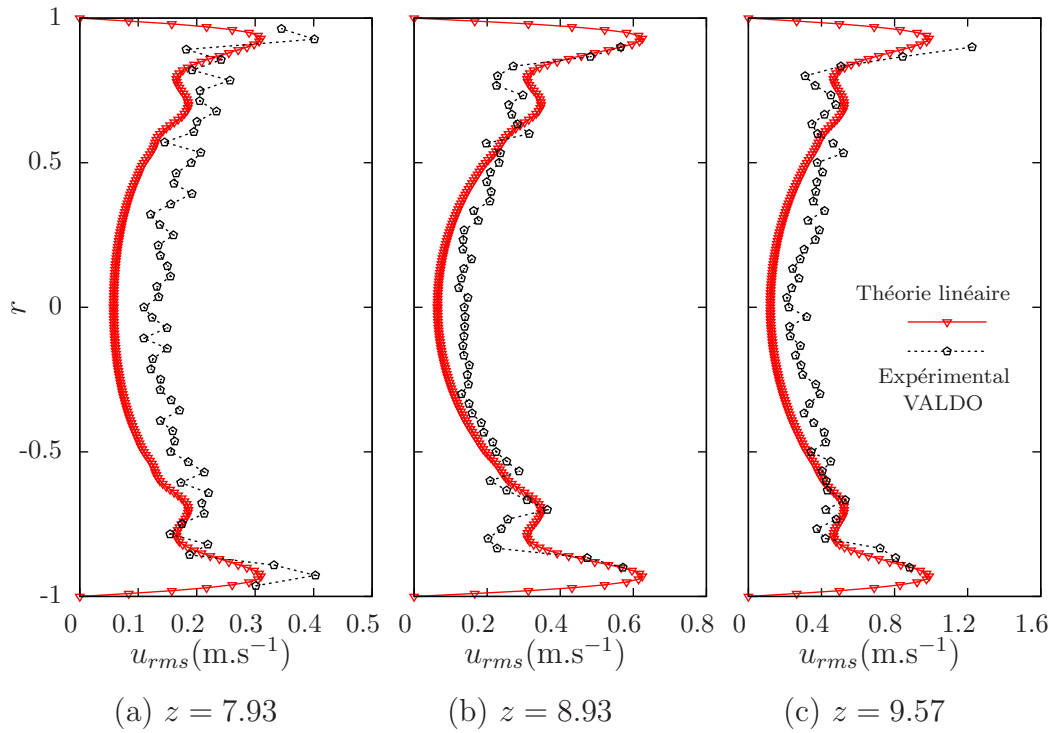


FIGURE 3.22 – Comparaison entre les résultats issus de la théorie de stabilité linéaire globale et les mesures expérimentales sur le banc d'essais VALDO. Valeurs *RMS* de la réponse optimale ($\omega = 63.25$) pour différentes positions longitudinales dans la chambre. Paramètres : $Re=1600$, maillage C_5 . L'amplitude de la réponse linéaire a été renormalisée à l'aide des résultats expérimentaux de (a), en $z = 7.93$. L'amplification en aval de cette position, i.e. pour $z \geq 7.93$, est ensuite déduite de la structure de la réponse optimale.

Discussion

La comparaison des résultats issus de la théorie de stabilité linéaire aux données expérimentales a permis de mettre en évidence les mécanismes liés à l'amplification d'instabilités au sein du montage VALDO. On a ainsi vu que la dynamique de l'écoulement est caractérisée par une réponse optimale à un forçage instationnaire assimilable à un bruit blanc. Si la fréquence la plus amplifiée expérimentalement semble être extrêmement proche de la fréquence optimale, il apparaît néanmoins que le spectre de réponse prédit par le biais de la théorie linéaire est continu et non discret tel que cela peut l'être expérimentalement sur la figure 3.21. Cette propriété, qui a été obtenue en analysant la dynamique d'amplificateur de l'écoulement, est à mettre en parallèle avec de précédents travaux, [32] et [33], qui favorisent une approche discrète où les fréquences les plus amplifiées correspondent aux valeurs propres fortement stables du spectre. Ainsi, par le biais d'une telle approche et en ne considérant qu'une région particulière de tout le spectre (la branche supérieure), Chedevergne parvient à retrouver les fréquences observées expérimentalement, ou du moins la plus amplifiée [33], ainsi que l'amplification axiale de l'instabilité. On pense, dans la présente étude, qu'une telle approche n'est pas totalement convaincante et ce pour plusieurs raisons. Premièrement, le simple fait de tenter de définir les valeurs propres discrètes de l'opérateur s'est avéré impossible. De plus, l'idée que les réponses de très fortes amplitudes sont associées à la présence de valeurs propres discrètes est intrinsèquement liée à la définition d'un opérateur normal, ce qui pour cette étude n'est évidemment pas le cas, l'écoulement étant gouverné par une instabilité convective. En fait, il semble que Féraïlle [51] ait initié une réflexion analogue sur le pseudo-spectre de l'opérateur mais n'en ait pas tiré de conclusions. Ces remarques ont d'autant plus d'importances que non pas une, mais plusieurs fréquences sont observées expérimentalement.

Puisque la première valeur singulière σ_1 domine, la réponse de l'écoulement à un forçage peut alors être approximée par :

$$\hat{\mathbf{u}}^1 \sim \sigma_1 \alpha_1 \hat{\mathbf{u}}_1. \quad (3.25)$$

où $\alpha_1 = \hat{\mathbf{f}}_1^H \mathbf{Q} \hat{\mathbf{f}}^1$ est la projection du forçage sur la base de forçage optimale. Il est donc primordial de bien décrire le forçage imposé, à la fois du point de vue fréquentiel et spatial. Cette forte sensibilité au forçage est en fait une propriété générale et commune aux écoulements ouverts dont les mécanismes d'amplification sont essentiellement convectifs. Dans le cadre du montage VALDO, l'injection de fluide au travers d'éléments poreux ainsi que la forte composante acoustique (chapitre 2 section 2.3.1 et 2.3.2) sont à prendre en compte afin de déterminer la nature du forçage (longueur d'onde ...). Ceci est d'autant plus vrai que la perturbation optimale se présente sous la forme de structures localisées en région de proche paroi injectante. Il apparaît comme intéressant de rechercher, comme première étape, ce forçage optimal non plus sous une forme de source de quantité de mouvement volumique mais plutôt surfacique

assimilable ainsi au bruit d'injection. Une étude préliminaire a été réalisée avec ce type de forçage. La figure 3.23-(a) permet de comparer la dépendance en fréquence de la valeur singulière de plus forte amplitude, identifiée sur la figure 3.23-(b), et associée au deux types de forçages instationnaires.

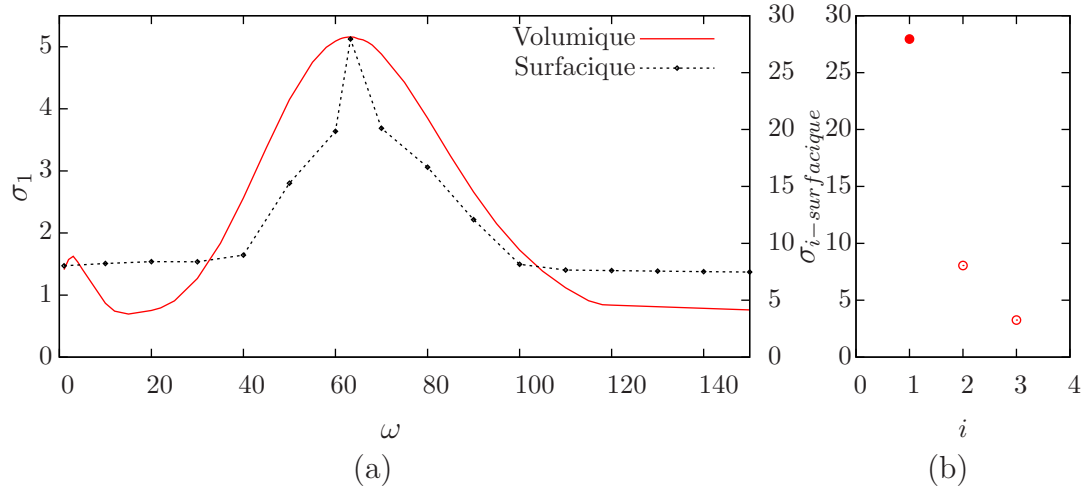


FIGURE 3.23 – (a) Première valeur singulière en fonction de la pulsation de forçage ω pour un forçage volumique (trait plein) et surfacique (trait pointillé) et (b) les 3 plus grandes valeurs singulières déterminées à la pulsation $\omega = 63.25$ pour le forçage surfacique. Paramètres : $Re=1600$ et maillage C_2 .

On retrouve ainsi, dans le cas d'un forçage surfacique, une forte dépendance de la première valeur singulière $\sigma_{1-surfacique}$ vis-à-vis de la fréquence de forçage avec un pic de réponse à la pulsation $\omega = 63.25$. La prise en compte d'un forçage du type surfacique conduit donc, à priori, au même mécanisme de *pseudo-resonance* identifié précédemment dans le cadre d'un forçage volumique.

Tableau 3.3 – Écoulement induit par injection pariétale avec un obstacle en milieu de chambre. Différents maillages ont été utilisés avec comme paramètre caractéristique : z_f la localisation de la sortie du domaine ; n_1 , n_2 et n_3 désignant respectivement les densités de noeuds sur les lignes pointillée, fine et épaisse représentées sur la figure 3.24. n_t est le nombre total de triangles constituant le maillage tandis que $n_{d.o.f}$ est le nombre de degré de liberté pour une inconnue (u_r, u_z, p) . Les maillages *C7*, *C8* et *C9* ont les mêmes dimensions spatiales mais diffèrent de part leur densité.

Trois maillages triangulaires ont été considérés, nommés de C_7 à C_9 et présentant des disparités en terme de densité de maillage. Le paramètre z_f détermine la longueur du domaine de calcul Ω . Les densités de chacun des maillages sont contrôlées par les paramètres n_1 , n_2 et n_3 fixant le nombre de nœuds par unité de longueur. Les caractéristiques de chacun des maillages sont présentées dans le tableau 3.3, où n_t est le nombre total de triangles et $n_{d.o.f}$ le nombre de degré de liberté associé aux inconnues (u_r, u_z, p) . Notons ici que l'objectif d'une telle configuration est de quantifier l'impact de la présence de l'obstacle sur les résultats de stabilité linéaire.

3.4.2 Champ de base

De la même façon que pour la configuration sans obstacle et en utilisant la même procédure numérique, on cherche à déterminer une famille de champs de base $\mathbf{q}^0(Re)$ aux nombres de Reynolds désirés, à savoir $Re = \{1600; 2075; 2290\}$. Le champ de base $\mathbf{q}^0$ obtenu pour un nombre de Reynolds $Re = 1600$ est présenté sur la figure 3.25.

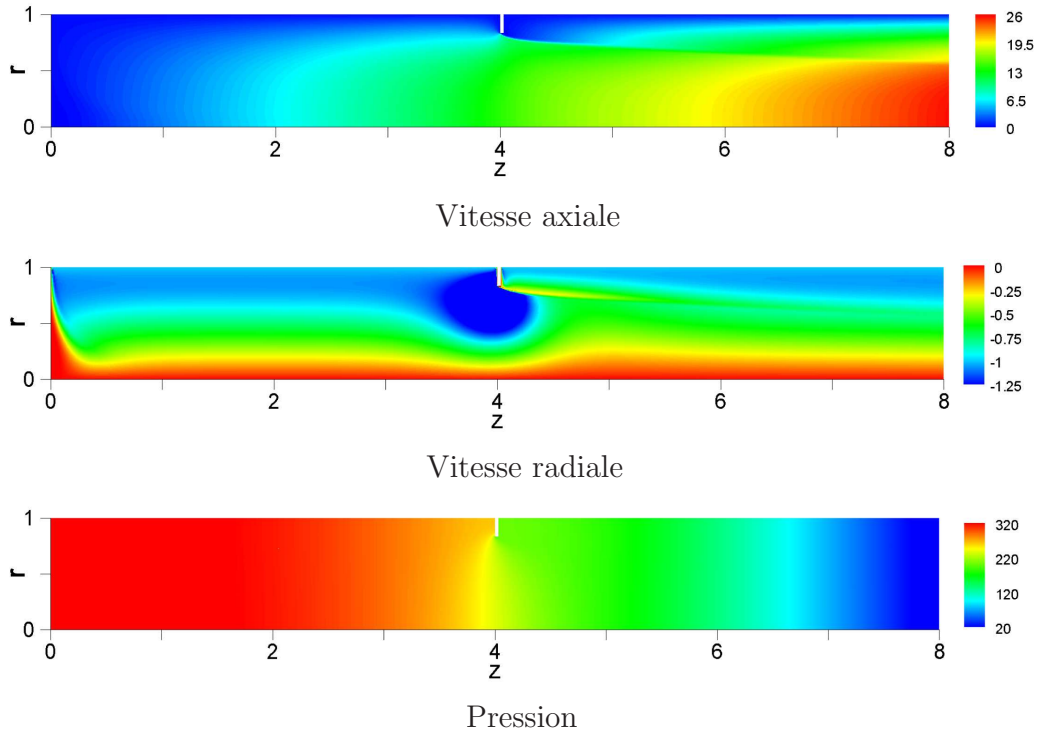


FIGURE 3.25 – Champ de base $\mathbf{q}^0$ à $Re = 1600$ pour le maillage C_7 .

Si l'on compare le champ de base obtenu avec celui de la configuration sans obstacle, figure 3.4, on se rend aisément compte que la présence de l'obstacle en milieu de chambre a un impact conséquent à la fois sur la vitesse et sur la distribution de pression. Les profils de vitesse axiale et radiale sont représentés sur la figure 3.26.

On distingue la région pré de la région post-obstacle. En effet, pour l'écoulement en amont de l'obstacle, on retrouve un profil de vitesse qui tend

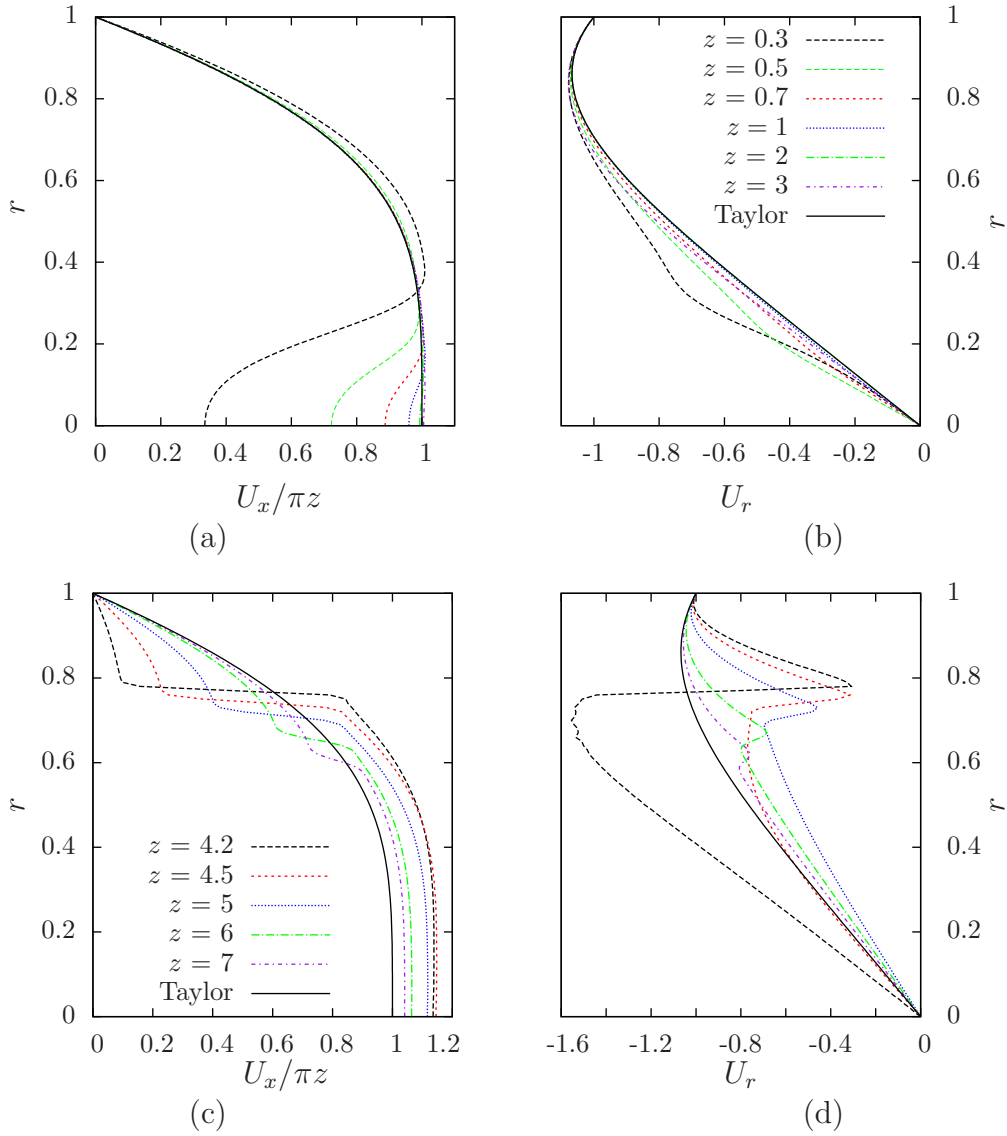


FIGURE 3.26 – (a) Profils de vitesse axiale U_x et (b) de vitesse radiale U_r pour la région pré-obstacle ($z < 4$). (c) Profils radiaux de vitesse longitudinale U_x et (d) de vitesse radiale U_r pour la région post-obstacle ($z > 4$). $Re = 1600$ et maillage C_7 .

vers la solution analytique de Taylor-Culick, avec la présence de la couche limite au fond avant, figure 3.26-(a) et figure 3.26-(b). Pour la région post-obstacle, $z > 4$, figure 3.26-(c) et figure 3.26-(d), le profil de vitesse est fortement influencé par l'obstacle qui génère alors un fort cisaillement de vitesse. En outre, le profil de vitesse longitudinal s'apparente, dans la région immédiatement en aval de l'obstacle, à un profil du type *top-hat*. L'injection pariétale de quantité de mouvement en aval de l'obstacle tend à estomper cet effet. Au regard d'un tel écoulement de base, où de nombreux facteurs sont favorables au développement d'instabilités (écoulement induit par injection pariétale et couche de mélange à profil inflexionnel générée par la présence de l'obstacle), on s'attend à ce que son comportement du point de vue de la stabilité hydrodynamique diffère de

façon conséquente de celui de la configuration sans obstacle.

3.4.3 Spectre de Valeurs propres

Une fois les champs de base $\mathbf{q}^0$ calculés, on vérifie la sensibilité de l'opérateur GNSL pour la configuration avec obstacle, en résolvant le problème de stabilité 3.6. Le spectre des valeurs propres correspondant est représenté dans le plan complexe (ω, σ) et est illustré sur la figure 3.27. L'ensemble du spectre est investigué pour différentes valeurs complexes cibles.

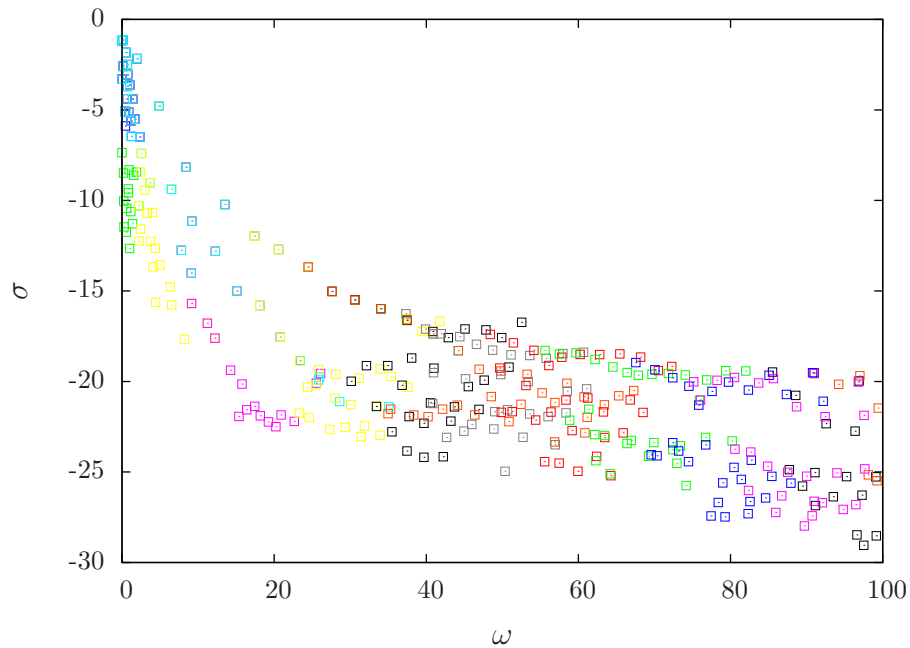


FIGURE 3.27 – Valeurs propres dans le plan (ω, σ) pour $Re=1600$. Maillage C_8 . Les différentes couleurs représentent les valeurs propres trouvées pour chaque cible.

A l'instar de la configuration sans obstacle, figure 3.6, si le recouvrement entre les valeurs propres de basses pulsations est parfait (autour de $\omega = 5$ par exemple, figure 3.28-a), il n'est pas possible de faire converger le spectre en fonction des différentes cibles pour des valeurs propres de pulsation $\omega > 20$ (figure 3.28-b).

La sensibilité des valeurs propres, résultant de la non-normalité de l'opérateur, impose alors de préférer à la notion de spectre, la notion de résolvante (voir section 3.3.3). Outre sa capacité à apprécier la sensibilité de l'opérateur, la norme de la résolvante de l'opérateur GNSL permet de conclure, de la même manière que pour la configuration sans obstacle, que l'écoulement induit par injection pariétale avec obstacle est globalement stable.

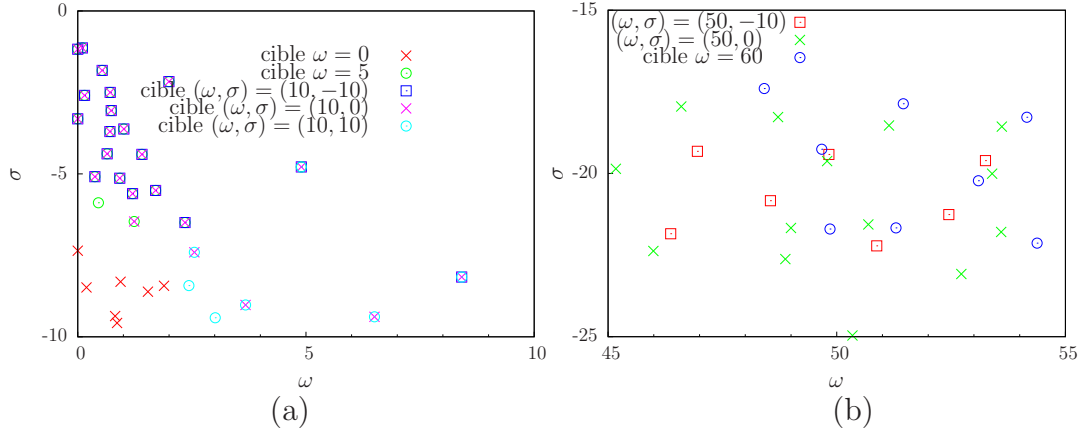


FIGURE 3.28 – (a) Valeurs propres autour de $\omega = 5$ et (b) de $\omega = 50$ dans le plan (ω, σ) pour $\text{Re}=1600$. Maillage C_8 . Les différentes couleurs représentent les valeurs propres trouvées pour chaque cible.

3.4.4 Pseudo-résonance

L'écoulement étant globalement stable, on analyse sa dynamique en tant qu'amplificateur de bruit. Basée sur la reformulation du problème aux valeurs singulières en problème aux valeurs propres, la procédure numérique permettant de déterminer les valeurs singulières de la résolvante globale est présentée, en détail, dans la section 3.3.4.

Réponse globale à un forçage

La réponse de l'écoulement à un forçage volumique instationnaire $\mathbf{f}^1$ est ainsi examinée en résolvant le problème aux valeurs singulières associé à la résolvante globale 3.15. À chaque fréquence de forçage $f = \omega/2\pi$ on détermine les valeurs singulières σ_i . La figure 3.29 présente les 10 plus grandes valeurs singulières $(\sigma_i)_{i=1..10}$ associées à la pulsation de forçage $\omega = 74$ et ordonnées par ordre décroissant. Immédiatement, on s'aperçoit que l'amplitude de la première valeur singulière $\sigma_1 \simeq 5.10^1$ est supérieure de plus d'un ordre de grandeur à celle atteinte dans la configuration sans écoulement, figure 3.9.

La dépendance de la première et de la seconde valeur singulière en fonction de la pulsation ω est représentée sur la figure 3.30. La première valeur singulière σ_1 présente une importante dépendance vis-à-vis de la fréquence de forçage avec un pic de réponse à la pulsation $\omega_{opt\sigma_1} = 335$ et une amplitude de l'ordre de 10^7 . Si l'on compare ces résultats avec ceux obtenus pour la configuration sans obstacle, figure 3.9, on remarque non seulement que la réponse optimale se voit déplacée vers les très hautes pulsations mais également qu'elle atteint une amplitude de près de 5 ordres de grandeurs supérieurs. L'introduction de l'obstacle en milieu de chambre a donc eu un impact conséquent sur les valeurs singulières du système. Ce comportement à fort taux d'amplification sur une large bande de hautes fréquences est caractéristique des couches de mélanges de très faible épaisseur. Dans le cadre d'une approche locale un tel prototype d'écoulement a été amplement étudié par Michalke [86] et Ho & Huerre [66].

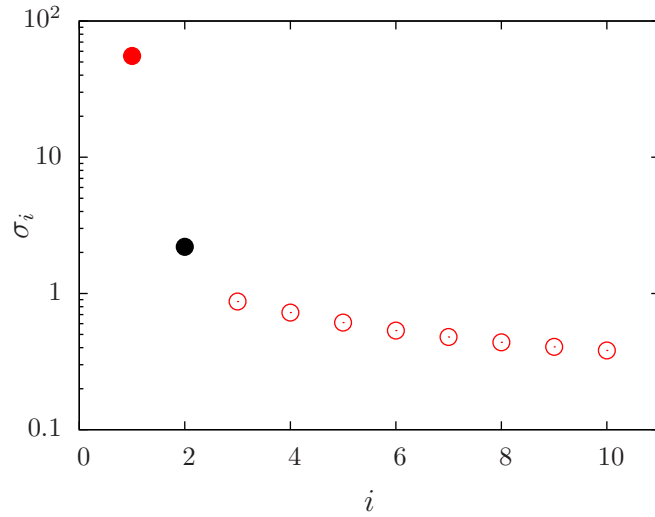


FIGURE 3.29 – Les 10 plus grandes valeurs singulières déterminées à la pulsation $\omega = 74$. Maillage C_8 et $Re = 1600$.

En outre, on dénommera par la suite cette première valeur singulière comme étant une valeur singulière du type Kelvin-Helmholtz.

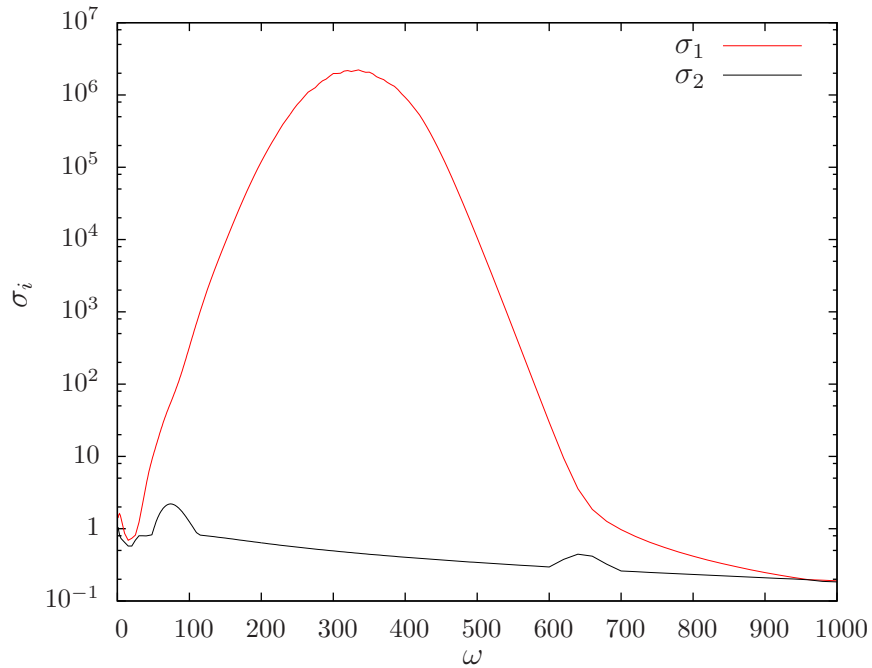


FIGURE 3.30 – Première et seconde valeurs singulières en fonction de la pulsation de forçage ω . Maillage C_8 et $Re = 1600$.

Si la seconde valeur singulière σ_2 peut sembler ne varier que très légèrement avec la pulsation de forçage, il convient de confronter son amplitude maximale de l'ordre de $\sigma_2 \simeq 2.2$ à celle atteinte par la première valeur singulière dans la configuration sans obstacle, figure 3.31. On remarque alors que, bien qu'elle

soit inférieure, l'amplitude maximale atteinte par cette seconde valeur propre demeure du même ordre de grandeur que celle sans obstacle. En outre, le pic de réponse à lieu à la pulsation $\omega_{opt\sigma_2} = 74$ et non plus à $\omega = 63.25$ tel que cela pouvait être le cas pour la configuration sans obstacle. Par son analogie avec la valeur singulière prédominante de la configuration sans obstacle, on nommera cette seconde valeur singulière σ_2 comme étant une valeur singulière du type Taylor.

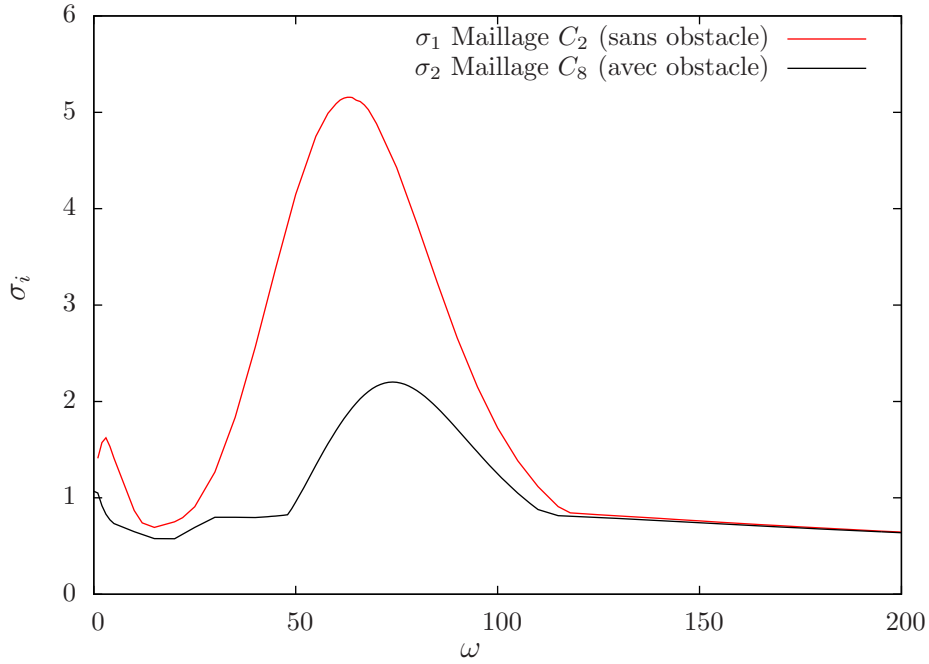


FIGURE 3.31 – Première valeur singulière pour la configuration sans obstacle (en rouge) et seconde valeur singulière pour la configuration avec obstacle (en noir) en fonction de la pulsation de forçage ω . $Re = 1600$.

On s'intéresse à la distribution spatiale du forçage et de la réponse optimale associées aux valeurs singulières σ_1 et σ_2 , respectivement aux pulsations optimales $\omega_{opt\sigma_1}$ et $\omega_{opt\sigma_2}$.

Forçage optimal et réponse optimale : valeur singulière du type Kelvin-Helmholtz

La partie réelle de la composante radiale et longitudinale des modes de forçage et de réponse de l'écoulement, associés à la valeur singulière σ_1 , sont présentées sur la figure 3.32 (de (a) à (d)). La partie imaginaire des composantes de vitesse, non représentée ici, a une structure similaire mais est en quadrature de phase spatiale. Ce déphasage indique que les vitesses de forçage et de réponse optimales prennent la forme d'une onde se propageant vers l'aval. À la pulsation de forçage $\omega_{opt\sigma_1} = 335$, l'amplitude du forçage optimal $\hat{f}_{opt}^1$, figures 3.32-(a) et 3.32-(b), est maximale dans la proche région située en amont de l'obstacle $3.5 < z < 4$ et se présente sous la forme de structures de signes

alternés de très faible longueur d'onde. La réponse optimale de l'écoulement à un tel forçage est représentée sur la figure 3.32-(c) et 3.32-(d).

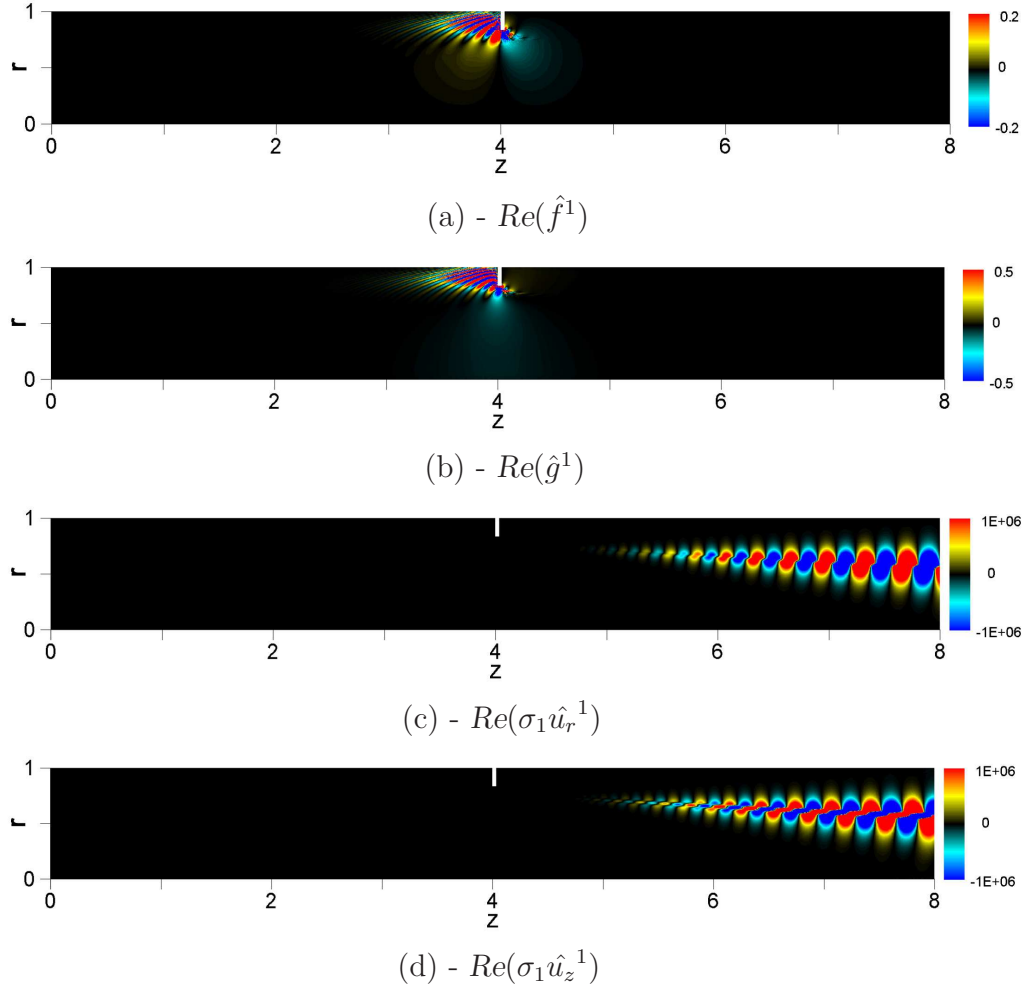


FIGURE 3.32 – Forçage et réponse associés à la valeur singulière σ_1 et à la pulsation $\omega = 335$. $Re=1600$ et maillage C_8 .

Cette réponse se caractérise également par des structures de signes alternées mais qui se développent dans la couche de mélange induite par la présence de l'obstacle. C'est donc un cisaillement de vitesse, et plus particulièrement le point d'inflexion du profil de vitesse, qui induit une telle réponse qui peut être ainsi désignée comme une instabilité du type Kelvin-Helmholtz.

Forçage optimal et réponse optimale : valeur singulière du type Taylor

On représente la partie réelle de la composante radiale et longitudinale des modes de forçage et de réponse de l'écoulement associés à la valeur singulière σ_2 , figure 3.33 (de (a) à (d)), pour la pulsation de forçage $\omega_{opt\sigma_2} = 74$. Encore une fois, la partie imaginaire des composantes de vitesse est de structure similaire et en quadrature de phase spatiale. Les forçage et réponse optimales prennent

donc la forme d'une onde se propageant vers l'aval. L'amplitude du forçage optimal $\hat{\mathbf{f}}_{opt}^1$, figures 3.33-(a) et 3.33-(b), est maximale dans la région de proche paroi située en aval de l'obstacle, i.e. pour $4.5 < z < 7$. La distribution spatiale du forçage est constituée de structures de signes alternés, allongées et inclinées dans la direction opposée à l'écoulement. A l'instar de la configuration sans obstacle, un pareille structure suggère un mécanisme transitoire semblable à celui de Orr.

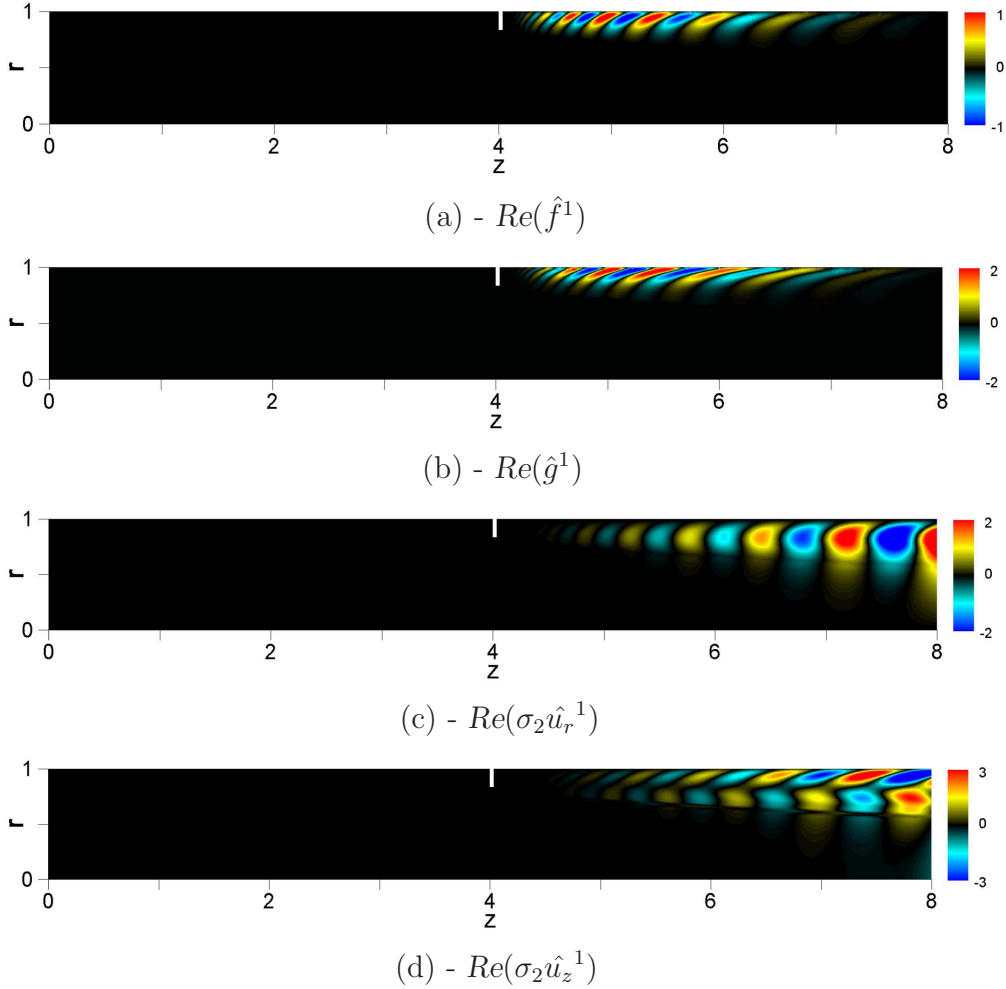


FIGURE 3.33 – Forçage et réponse associés à la valeur singulière σ_2 et à la pulsation $\omega = 74$. $Re=1600$ et maillage C_8 .

La partie réelle de la réponse optimale de l'écoulement soumis à un tel forçage est représentée sur la figure 3.33-(c) et 3.33-(d). Cette dernière est constituée de structures similaires à celles du forçage optimal à l'exception qu'elles sont moins inclinées, de taille plus significative et localisées en aval de l'obstacle. La réponse de l'écoulement associée à la valeur singulière σ_2 atteint des valeurs significatives dans la région $6 < z < z_f$. La présence de l'obstacle a donc eu pour effet de localiser dans la région post obstacle à la fois le forçage et la réponse optimale de l'écoulement associé à σ_2 .

Amplitudes locales

De la même façon que pour le cas sans obstacle, et ce dans le but d'illustrer la séparation spatiale pouvant exister entre le forçage et la réponse, on représente sur les figures 3.34 et 3.35 l'amplitude locale du forçage optimal $\|\hat{\mathbf{f}}_{opt}^1\|_L$ (courbe en pointillés) et de la réponse optimale $\sigma\|\hat{\mathbf{u}}_{opt}^1\|_L$ (courbe pleine) respectivement associées aux valeurs singulières σ_1 et σ_2 .

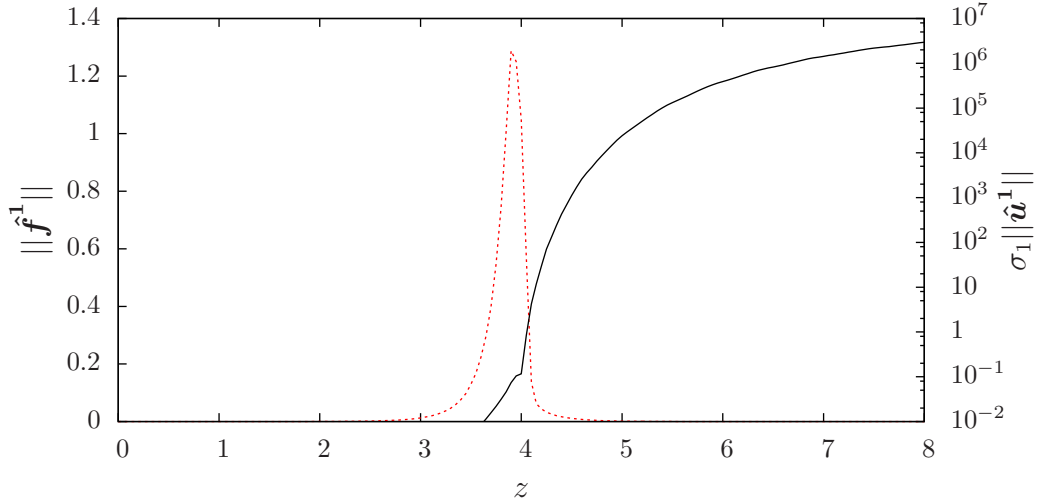


FIGURE 3.34 – Amplitudes locales des modes globaux de forçage (ligne pointillée) et de réponse (ligne pleine) associés à la valeur singulière σ_1 en fonction de l'abscisse z . $\omega_{opt\sigma_1} = 335$, $\text{Re}=1600$ et maillage C_8 .

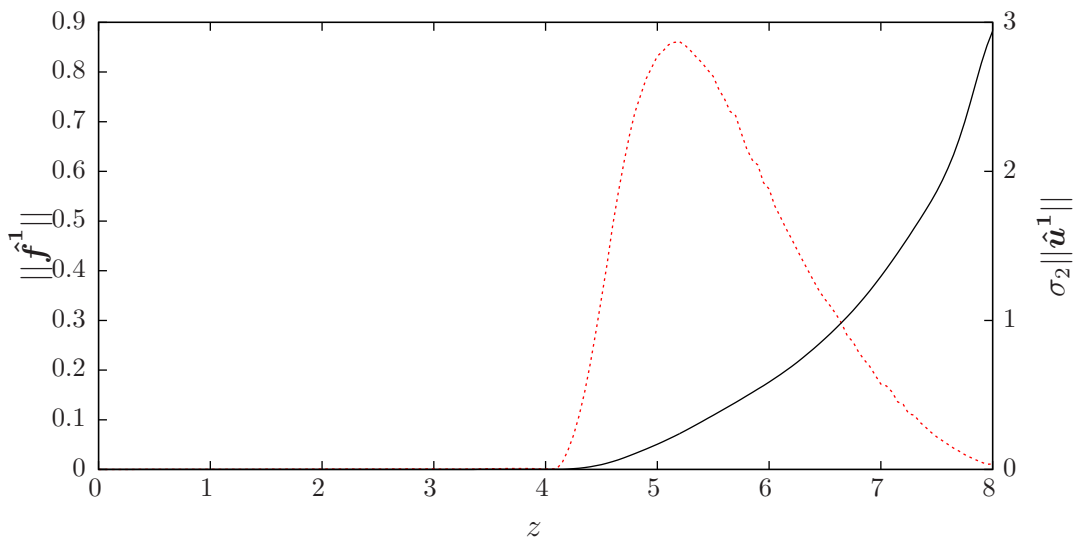


FIGURE 3.35 – Amplitudes locales des modes globaux de forçage (ligne pointillée) et de réponse (ligne pleine) associés à la valeur singulière σ_2 en fonction de l'abscisse z . $\omega_{opt\sigma_2} = 74$, $\text{Re}=1600$ et maillage C_8 .

Des amplitudes locales remarquablement importantes, $\mathcal{O}(10^6)$, sont observées pour la réponse optimale associée à la valeur singulière σ_1 , figure 3.34. La distribution des amplitudes locales atteint son maximum en $z = 3.9$, juste en amont de l'obstacle, pour le forçage et en $z = z_f = 8$ pour la réponse. Dans la région post-obstacle, l'amplitude locale du forçage est essentiellement nulle, tandis que l'amplitude de la réponse croît de façon exponentielle. Ce comportement illustre le rôle joué par la couche de mélange en tant que mécanisme amplificateur.

Si l'on observe les amplitudes locales associées à la valeur singulière σ_2 à la pulsation $\omega_{opt_{\sigma_2}} = 74$, figures 3.35, on observe une séparation spatiale semblable à celle observée pour la configuration sans obstacle. En fait, les amplitudes sont nulles pour la région en amont de l'obstacle $z < 4$ et tout indique que cette seconde valeur singulière traduit l'instabilité de l'écoulement induit par injection pariétale pour la zone post-obstacle. La distribution des amplitudes locales atteint un maximum en $z = 5.2$ pour le forçage et en $z = z_f = 8$ pour la réponse. Dans la région spatiale $5.2 < z < z_f$, l'amplitude du forçage décroît tandis que, parallèlement, l'amplitude de la réponse croît pour atteindre un valeur du même ordre de grandeur que pour le cas sans obstacle, figure 3.13.

L'ensemble des comportements décrits par les deux valeurs singulières σ_1 et σ_2 illustre, encore ici, l'effet de la *non-normalité convective* de l'opérateur GNSL dans la dynamique de l'écoulement. La première valeur singulière, dont l'amplitude est très nettement supérieure à celle des autres, est associée à un mécanisme de type Kelvin-Helmholtz. La seconde valeur singulière, traduit la réponse de l'écoulement à un forçage instationnaire au travers d'un mécanisme de type Taylor. L'introduction de l'obstacle au sein de l'écoulement a donc eu un effet non négligeable sur son comportement.

Réponse en pression au fond avant

De la même façon que pour la configuration sans obstacle, on examine la réponse en pression au fond avant de la chambre. La valeur de p en $z = (0, 0)$ associée aux deux premières valeurs singulières est ainsi représentée, en fonction de la pulsation ω , sur les figures 3.36 et 3.37.

On observe une forte corrélation entre la réponse en pression et les amplitudes des valeurs singulières σ_1 et σ_2 . La réponse en pression pour σ_2 semble toutefois en léger déphasage en fréquence par rapport à la pulsation optimale $\omega_{opt_{\sigma_2}} = 74$. On peut néanmoins en conclure que c'est dans le voisinage immédiat de la pulsation optimale que la réponse en pression au fond avant sera maximale.

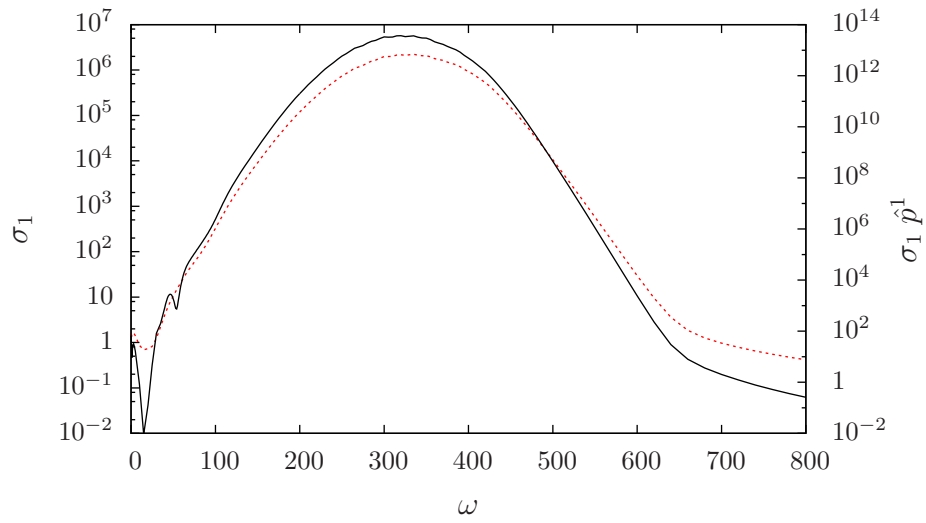


FIGURE 3.36 – Réponse en pression au fond avant pour σ_1 en fonction de la pulsation ω . $Re = 1600$ et Maillage C_8 .

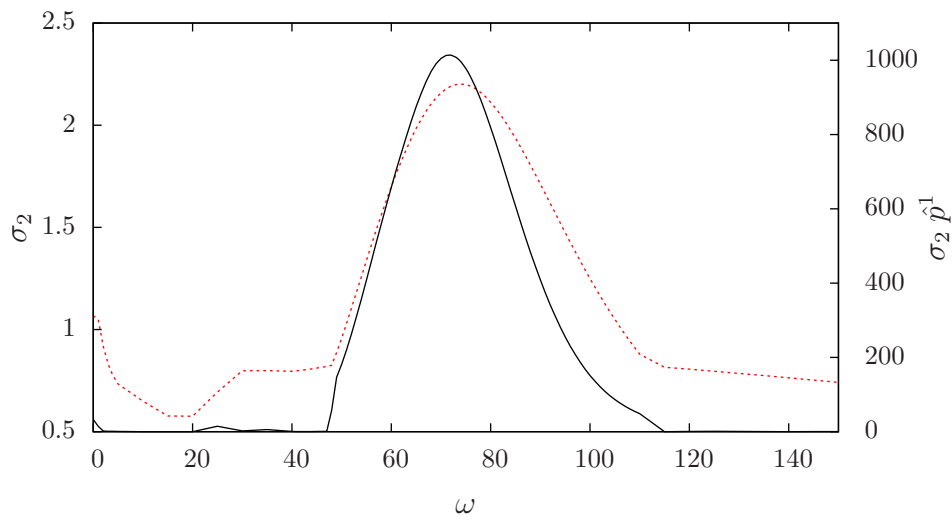


FIGURE 3.37 – Réponse en pression au fond avant pour σ_2 en fonction de la pulsation ω . $Re = 1600$. Maillage C_8 .

3.4.5 Discussion

Si l'ensemble des résultats expérimentaux obtenus avec le montage VALDO, en configuration avec obstacle (chapitre 2 section 2.3.1 et 2.3.2) ne peuvent être directement confrontés à la théorie de la stabilité linéaire en approche globale, leur considération permet néanmoins une approche critique des précédents résultats. En effet, les nombreuses configurations expérimentales étudiées diffèrent, de part leurs caractéristiques géométriques, de la configuration utilisée dans l'étude de stabilité linéaire. Néanmoins, il a été expérimentalement observé que lorsque l'on introduisait un obstacle au sein de l'écoulement induit par injection pariétale un glissement de la fréquence des instabilités avait lieu. C'est à la lumière d'une telle conclusion expérimentale que les résultats obtenus à l'aide de la théorie linéaire sont abordés.

Ainsi la présente configuration a pour vocation de mieux comprendre les mécanismes d'amplification des instabilités au sein d'un écoulement induit par injection pariétale en présence d'un obstacle. Il a été démontré, dans le cadre de l'approche linéaire, que la première valeur singulière, d'une amplitude très largement supérieure aux autres valeurs singulières, exhibait une réponse optimale à de très hautes pulsations $\omega_{opt\sigma_1} = 335$ (correspondant à une fréquence dimensionnelle de l'ordre de $f_{opt\sigma_1} \simeq 1500\text{Hz}$). Cette réponse optimale semble bien éloignée du comportement type auquel on pourrait s'attendre. En revanche, si l'on examine l'écart de fréquence entre la seconde valeur singulière σ_2 et la première valeur singulière pour la configuration sans obstacle, on remarque que cet écart s'inscrit dans l'ordre de grandeur observé expérimentalement.

En considérant les deux premières valeurs singulières, la réponse de l'écoulement à un forçage donné est :

$$\hat{\mathbf{u}}^1 \sim \sigma_1 \alpha_1 \hat{\mathbf{u}}_1 + \sigma_2 \alpha_2 \hat{\mathbf{u}}_2, \quad (3.26)$$

où $\alpha_i = \hat{\mathbf{f}}_i^H \mathbf{Q} \hat{\mathbf{f}}^1$ est la i^{eme} composante du forçage dans la base des modes globaux de forçage. De la même façon que pour la configuration sans obstacle, la projection du forçage sur la base de forçage optimale apparaît comme essentielle. On rappelle que le forçage optimal associé à σ_1 est fortement localisé dans la région très proche de l'obstacle. Or, dans le cadre du montage VALDO, on serait plus à même de favoriser un forçage localisé en paroi d'injection. En conséquence, la première composante du forçage projeté sur la base des modes globaux de forçage, α_1 peut être largement inférieure à celle du second mode, i.e. $\alpha_2 \gg \alpha_1$. Ainsi, bien que de gain supérieur, la première valeur singulière peut avoir une influence limitée sur la réponse de l'écoulement ce qui constitue une explication somme toute probable aux résultats expérimentaux.

De plus, il semble également intéressant d'envisager une approche de stabilité non-linéaire visant à prédire la transition vers la turbulence. L'un des effets attendu est alors de "tuer" les hautes pulsations. En outre, la considération de caractéristiques géométriques réelles de configurations expérimentales induit le plus souvent des abscisses qui s'étendent au delà de $z = 11$. De telles configurations ne pourront être approchées que dans le cadre d'une théorie non-linéaire en approche globale.

3.5 Conclusions et perspectives

Ce chapitre a été consacré à l'étude de stabilité linéaire en approche globale de l'écoulement induit par injection pariétale dans une conduite cylindrique en présence ou non d'un obstacle. Pour l'ensemble des nombres de Reynolds explorés et pour les deux types de configuration, l'écoulement est globalement stable aux perturbations axisymétriques. On montre ainsi que la notion de valeurs propres est une notion peu robuste et que la forte sensibilité de l'opérateur Global de Navier-Stokes Linéarisé (GNSL) aux perturbations rend leur détermination difficile. La notion de résolvante de l'opérateur est ainsi introduite et permet notamment l'étude de sa dynamique en tant qu'amplificateur hydrodynamique en approche globale. La réponse de l'écoulement à un forçage harmonique est alors examinée.

Dans le cadre de l'étude de l'écoulement induit par injection pariétale sans obstacle, la mise en évidence d'un mécanisme de *pseudo-resonance* a permis d'apporter une nouvelle perspective dans l'étude d'instationnarités jusque-là perçues comme « l'émergence de modes de stabilité sans que l'on sache comment », [32]. Ce formalisme théorique, corroboré par des résultats expérimentaux, permet ainsi l'analyse de la réponse optimale de l'écoulement soumis à un bruit blanc. Il a été démontré que les mécanismes d'amplification associés résultent de la non-normalité convective de l'opérateur GNSL. Rappelons ainsi que :

- le spectre de réponse prédit par le biais de la théorie linéaire est continu et non discret,
- la structure spatiale de la réponse est validée expérimentalement à la fois en terme d'évolution radiale et d'amplification spatiale longitudinale,
- l'approche permettant l'étude de la dynamique d'amplificateur en approche globale est plus adaptée et mieux posée que l'approche par valeurs propres jusque là utilisée [32] puisque faisant appel à des grandeurs robustes.

Lorsqu'un obstacle est introduit au sein de l'écoulement induit par injection pariétale, un mécanisme d'instabilité relatif au développement d'une couche de mélange vient s'ajouter à la dynamique de l'écoulement. Ce mécanisme, optimal à de très haute pulsations, exhibe des amplifications de très fortes amplitudes dont les structures s'apparentent à un mécanisme de type Kelvin-Helmholtz. L'introduction de l'obstacle a également pour effet de repousser au delà de l'obstacle les distributions spatiales du forçage et de la réponse associés à la seconde valeur singulière qui elle, est de type Taylor, c'est-à-dire similaire au mécanisme observé dans la configuration sans obstacle.

In fine, la réponse de l'écoulement à un forçage donné impose une connaissance précise de ce dernier, tant du point de vue spectral que spatial. En effet, la projection du forçage $\hat{\mathbf{f}}^1$ sur la base des forçages optimaux $\hat{\mathbf{f}}_i$ déterminera, par l'intermédiaire de la décomposition en valeurs singulières, la réponse de l'écoulement soumis à un tel forçage. En outre, de nombreux éléments, tel

que l'aspect discret des fréquences expérimentales (que la présente méthode, seule, ne parvient à retrouver, voir discussions 3.3.7 et 3.4.5) ou encore la présence d'une forte composante acoustique, indiquent que la considération d'un mécanisme purement hydrodynamique seul ne suffit pas à expliquer les fréquences discrètes observées.

Perspectives dans le cadre de l'étude des oscillations de pression

Complémentaire des précédentes études de stabilité menées sur la solution de Taylor-Culick ([130, 63, 51] et [32]), l'analyse de la dynamique de l'écoulement en tant qu'amplificateur de bruit permet d'alimenter le discours scientifique et laisse entrevoir de nombreuses perspectives dans la prédiction des oscillations des pression au sein des MPS.

Si l'apparition de fréquences discrètes reste non décrite, la prise en compte du mécanisme de pseudo-résonance souligne le degré de précaution qu'il convient d'adopter lorsque l'on décide de fonder un raisonnement sur les valeurs propres de l'opérateur. Par conséquent, et à la lumière des présents résultats, les récentes analyses menées sur les MPS [12] et basées sur la constitution d'un faisceau discrets de valeurs propres peuvent sembler quelque peu hâtives. La prédiction du spectre discret devient alors du premier intérêt et le formalisme ici employé ouvre la voie à de nombreuses investigations.

La mise en évidence de la forte dépendance de la dynamique de l'écoulement vis-à-vis du forçage (voir les discussion 3.3.7 et 3.4.5) fait de sa caractérisation (fréquentielle et spatiale) un axe majeur de recherche. En outre, la modélisation du bruit de combustion (ou d'injection dans le cas du montage VALDO), de la réponse en combustion du propergol ou encore l'étude de l'interaction avec l'acoustique interne de la chambre (par résolution d'un système couplé) devrait être en mesure d'apporter de nouveaux éléments de réponse.

Au delà d'offrir une robustesse numérique, la méthode de discrétisation choisie, i.e. par éléments finis, autorise l'étude de l'écoulement induit par injection pariétale en géométrie complexe. Cette potentialité, ici utilisée pour analyser l'effet de la présence de la PTF, permettrait d'aller plus en avant en analysant une géométrie donnée au cours du tir (prise en compte des cavités et de la déflexion moyenne de l'obstacle, par exemple) et semble, à ce titre, particulièrement adaptée à la problématique des MPS. Avec ce désir de complexification de l'étude de stabilité, il est alors important de garder à l'esprit que certains phénomènes, tel que la vibration de la PTF, semblent difficilement abordables^{vii}.

Parallèlement aux analyses de stabilité, la résolution directe des équations de Navier-Stokes demeure une approche complémentaire qui, sous certaines conditions de modélisation, permet d'apporter des informations sur les mécanismes déclencheurs des oscillations de pression observées.

vii. Le couplage d'un oscillateur mécanique avec une instabilité hydrodynamique se base sur la modélisation de cette dernière en tant qu'oscillateur fluide [134]. Ce concept d'oscillateur fluide nécessite de qualifier l'instabilité comme ayant une dynamique propre.

Chapitre 4

Étude de l'élastomère GSM

L'étude de stabilité hydrodynamique linéaire, conduite en approche globale, a permis d'apporter certains éléments de réponse à l'émergence d'instabilités sous la forme de fréquences discrètes au sein du montage VALDO. Néanmoins, linéaire par essence, cette approche ne permet pas de modéliser les interactions complexes qui peuvent avoir lieu dans l'écoulement, par exemple avec les Protections Thermiques de Face. En outre le chapitre 2 a identifié ces structures comme ayant un rôle non négligeable dans l'apparition des oscillations de pression.

Dans l'objectif d'établir une modélisation numérique fine permettant d'étudier l'influence des PTF en élastomère au sein de l'écoulement, ce chapitre aborde expérimentalement le comportement mécanique du matériau, section 4.2, afin d'en dégager les phénomènes physiques prépondérants indispensables à la construction d'un modèle réaliste, section 4.3. Bien souvent, les simulations numériques entreprises [140] [141] utilisent une loi de comportement pour le matériau qui se révèle trop simplifiée. Ce chapitre vise donc à remédier à cette lacune en définissant un modèle mécanique numérique dans la section 4.4 plus réaliste et directement utilisable lors de simulations numériques.

4.1 Les élastomères et les polymères

4.1.1 Historique

Sous la terminologie *élastomère* est regroupé une classe de matériaux aux propriétés physiques et à la structure moléculaire semblables mais dont la composition chimique peut varier. Sur le plan étymologique, le préfixe *élasto* rappelle leur faculté à supporter de grandes déformations et le suffixe *mère* évoque leur constitution moléculaire polymérique. À ceci s'ajoute une capacité à dissiper de l'énergie, qui en fait aujourd'hui des matériaux fortement répandus et aux applications diverses dans le monde de l'industrie.

Longtemps, le seul élastomère connu, le caoutchouc naturel, est produit par la coagulation de suc de différentes espèces végétales, principalement l'Hévéa, et constitue une matière première d'origine végétale courante. Avec une formulation chimique découverte par Faraday en 1826, $(C_5H_8)_n$ avec n de l'ordre

de 1000, le caoutchouc naturel résulte de la polymérisation de l'isoprène, figure 4.1. Ce principe de polymérisation, qui par un réarrangement des liaisons permet la formation d'une longue chaîne moléculaire à partir de monomères, inspira la fabrication de caoutchoucs synthétiques aujourd'hui largement utilisés.

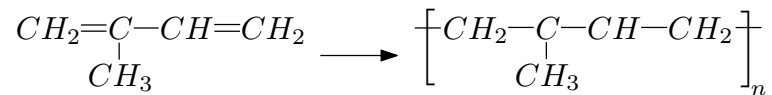


FIGURE 4.1 – Réaction de polymérisation du monomère isoprène en polyisoprène (ou caoutchouc naturel).

Cependant, à l'état brut, le caoutchouc n'offre qu'un très faible nombre de possibilité d'emploi : il est notamment peu résistant au fluage sous contrainte. Afin d'obtenir un matériau présentant de meilleures propriétés, le caoutchouc subit un traitement chimique : la vulcanisation. Ce procédé, découvert accidentellement par Goodyear en 1839 [84], consiste en l'adjonction de soufre au caoutchouc brut. Une fois chauffé, le mélange se transforme en un matériau élastique, stable sur une large gamme de température et résistant au fluage sous contrainte. Au niveau microscopique, la vulcanisation uni les longues molécules en chaînes qui constituent le caoutchouc par la formation de liaisons pontales. Ce pontage entre les chaînes, appelé réticulation, est indispensable : en son absence le comportement du matériau serait de type fluide avec des chaînes libres de s'écouler. A l'issue de la vulcanisation, le réseau moléculaire est tri-dimensionnel sans direction privilégiée. La nature repliée des chaînes permet à l'élastomère de subir de forts taux de déformation : elles peuvent être étirées et s'orienter dans la direction de l'allongement ; les liaisons forçant le retour vers l'état initial lorsque toute contrainte cesse.

Au matériau élastomère on ajoute souvent nombre d'additifs en fonction de l'application : certains sont nécessaires à la vulcanisation (soufre, oxyde de zinc...), d'autres protègent (antidégredants) ou encore ramollissent (lithopone, oxyde de zinc ...) le vulcanisat. Parmi ces additifs, on distingue notamment les charges qui permettent d'agir sur les caractéristiques mécaniques (élasticité ou résistance du produit final) et chimiques du matériau. La principale charge renforçante utilisée demeure le noir de carbone qui se présente sous la forme de petites particules mélangées avant vulcanisation. La mise en œuvre de ces matériaux chargés implique une polymérisation en présence de charges : le polymère constitue alors un réseau continu avec des inclusions de charges sous forme d'agglomérats. Un élastomère est donc un matériau diphasique composé de nombreux constituants aux propriétés mécaniques variées.

4.1.2 Physique des élastomères

Les élastomères présentent, de par leur nature chimique (réseau de longues chaînes moléculaires réparties aléatoirement), des caractéristiques multiples et complexes. Ils se distinguent des autres matériaux par la présence de

phénomènes macroscopiques dont, pour certains, l'origine exacte n'est pas encore aujourd'hui clairement identifiée. Ces phénomènes mécaniques sont l'élasticité non-linéaire (ou caoutchoutique), la viscoélasticité, l'effet Mullins, l'amplification des déformations et l'effet Payne. On tentera ici de décrire de façon succincte ces différents phénomènes, mais le lecteur pourra en trouver une description plus détaillée dans les ouvrages [57],[67] et [127].

Élasticité non-linéaire et Viscoélasticité

Une des caractéristiques physiques les plus évidentes d'un état élastomérique est l'important degré de déformabilité sous un état de contraintes relativement faible. Cette remarquable élasticité, due à leur structure moléculaire, peut être illustrée sur un essai classique d'extension (figure 4.2). Avec une extensibilité maximum de l'ordre de 500% – 1000%, les élastomères exhibent un comportement non linéaire (i.e. la loi de Hooke ne peut s'appliquer) qui ne permet pas de définir une valeur globale pour le module d'Young, excepté dans la proche région des faibles déformationsⁱ.

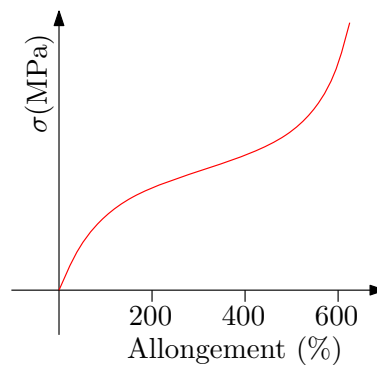


FIGURE 4.2 – Courbe de traction caractéristique pour un élastomère vulcanisé.

Ce comportement non-linéaire est illustré par une courbe en forme de S , figure 4.2, qui comprend un point d'inflexion caractéristique du comportement hyperélastique. Toutefois, ce comportement n'est pas parfaitement élastique : par exemple, au cours d'un essai cyclique à vitesse de déformation constante, figure 4.3, le chemin emprunté par la charge diffère de celui de la décharge. Il y a donc dissipation d'énergie.

Cette hystérèse est présente pour tous les élastomères mais son importance diffère selon la composition chimique et est d'autant plus importante que le mélange est chargé.

Comme autres propriétés mécaniques essentielles, on peut également citer la quasi-incompressibilité des élastomères et leur caractère visqueux. En effet, le module de compressibilité est le plus souvent supérieur de 2 ordres de grandeur

i. Le module d'Young peut alors être approximé par un module tangent pris à 0.5%. Cette technique, peu précise à cause de la forte non-linéarité, fournit des modules d'Young de l'ordre de 20Mpa.

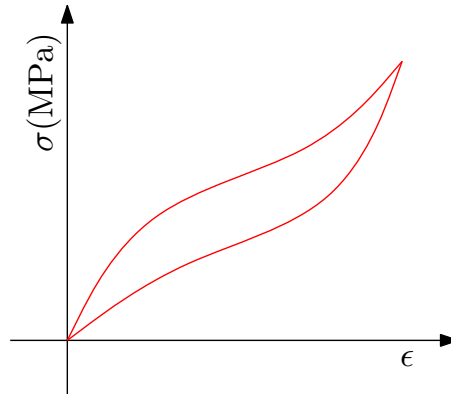


FIGURE 4.3 – Hystérèse pour un élastomère vulcanisé.

au module en traction et permet, le plus souvent, de considérer des transformations isochores. De plus, les élastomères sont des matériaux viscoélastiques et leur comportement dépend du temps [16] et notamment de la vitesse de sollicitation (figure 4.4).

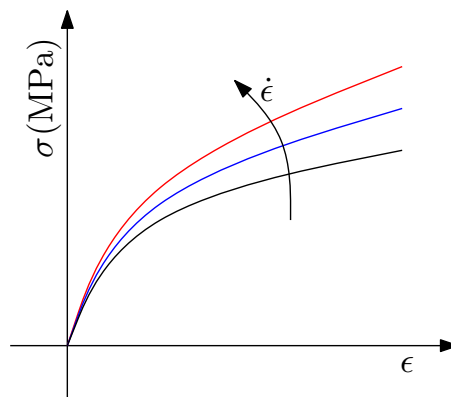


FIGURE 4.4 – Réponse d'un élastomère soumis à différents taux de déformation pour une traction uniaxiale.

On constate que, plus la vitesse de sollicitation est grande plus le matériau montre une rigidité importante car les chaînes n'ont pas le temps de s'organiser et de glisser les unes par rapport aux autres.

L'effet Mullins

Lorsqu'un élastomère est soumis à une série de chargements croissants, un adoucissement, ou en anglais *stress softening*, est observé et résulte d'un certain mécanisme d'endommagement. Ce phénomène physique a été étudié en détail par Mullins (voir [89], [91] et [90]) sur le caoutchouc vulcanisé, auquel il a laissé son nom : l'effet Mullins. Cet effet se traduit, après une première sollicitation, par un adoucissement de la loi de comportement du matériau. En outre, si l'on ne dépasse pas le niveau d'élongation maximum atteint, pour toute autre

sollicitation, le matériau s'accommodera en quelques cycles et exhibera un adoucissement qui se manifestera par une chute de la contrainte.

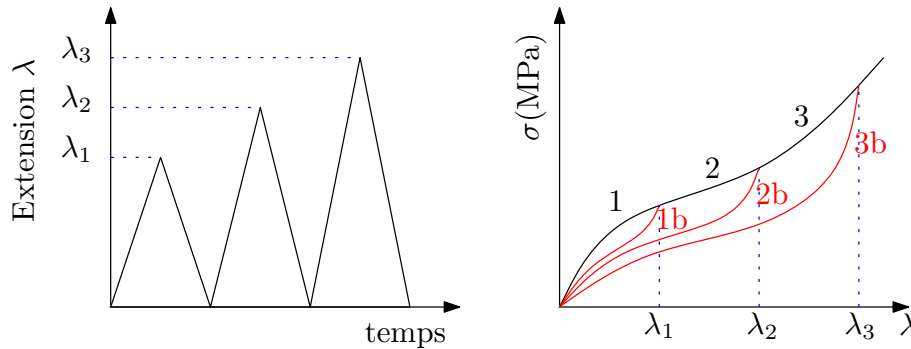


FIGURE 4.5 – Effet Mullins.

Afin d'expliquer les principaux mécanismes qui entrent en jeu dans l'effet Mullins, considérons un essai de traction cyclique, illustré sur la figure 4.5, en négligeant les effets viscoélastiques (et donc à très faible taux de déformation). Cet effet peut se décrire de façon idéalisée :

- Si on soumet un matériau vierge de toute déformation à une première élongation λ_1 , les contraintes correspondantes décrivent alors la courbe 1 et la décharge a lieu selon 1b,
- Lorsque l'on applique une deuxième extension $\lambda_2 > \lambda_1$, les contraintes suivent alors le chemin 1b jusqu'à rejoindre le chemin 2. La décharge se fait alors selon le chemin 2b.
- L'ensemble des courbes 1, 2, 3 décrit une asymptote au comportement mécanique du matériau.

Ce phénomène est observable sur l'ensemble des élastomères, mais est plus prononcé dans le cadre des élastomères chargés. Actuellement, deux théories cohabitent et permettent d'expliquer les mécanismes microscopiques mis en jeu dans l'effet Mullins. Comme base d'une étude bibliographique sur ce sujet le lecteur pourra consulter l'article de Qi & Boyce [106].

L'effet Payne

Cet effet, connu depuis plus de 50 ans ([99]), intervient dès les faibles déformations. Propre aux élastomères renforcés, il se caractérise par une forte non linéarité des variations du module dynamique (voir section 4.2.1) sous une sollicitation périodique d'amplitude et de fréquence variables. Si l'on considère un matériau soumis à une sollicitation périodique de fréquence donnée et d'amplitude variable, à une variation croissante des amplitudes s'accompagne une diminution du module élastique, figure 4.6. L'amortissement, traduit par le module de perte, augmente dans un premier temps en fonction de l'amplitude, puis diminue.

De nombreuses explications de l'effet Payne coexistent encore aujourd'hui en faisant un sujet d'actualité et objet de controverses. On parle généralement de mécanismes de destruction et reformation du réseau de charges, de libération

4.2 Caractérisation expérimentale du GSM

Afin de caractériser le matériau d'étude, à savoir le GSM, une campagne expérimentale a été menée au Centre des Matériaux de l'École des Mines de Paris et ce afin de pouvoir établir, in fine, une modélisation numérique adaptée à son comportement mécanique. On présente ici la démarche expérimentale suivie permettant de constituer la base expérimentale nécessaire au choix de la loi de comportement mécanique et servant à l'identification des paramètres rhéologiques.

4.2.1 Techniques expérimentales

Dispositif expérimental : l'ElectroPuls

La machine d'essais utilisée pour la caractérisation du matériau est une ElectroPuls E1000 de marque INSTRON, figure 4.8-(a). Ce système, commandé électrodynamiquement, permet la réalisation d'essais dynamiques et statiques de traction, compression et double cisaillement. Ses principales caractéristiques techniques sont :

- gamme de fréquence : $f \in [0.01; 100]$ Hz,
- course de déplacement : $\Delta L = 60$ mm,
- capacité de charge statique : $\Delta F_{stat} = \pm 1000$ N,
- capacité de charge dynamique : $\Delta F_{dyn} = \pm 710$ N.

Un facteur limitant à prendre en considération est l'accélération maximale que peut supporter la machine, qui détermine ainsi un domaine d'utilisation effectif fréquence-déplacement représenté sur l'abaque de la figure 4.8-(b). Par exemple, on ne pourra imposer un déplacement supérieur à 1 mm pour une fréquence de sollicitation de 40 Hz. La machine est équipée de capteurs de charge Dynacell de 250 N et de 2 kN, adaptés aux essais dynamiques, ainsi que de deux capteurs de déplacement : un capteur LVDT et un capteur numérique.

Dans le cadre de cette étude expérimentale, l'ElectroPuls E1000 est utilisée en contrôle de déplacement afin de réaliser des essais de traction dynamique sur des éprouvettes de type lanière ainsi que des essais de compression sur des éprouvettes de type plot.

Méthode du fondamental

Les élastomères renforcés se caractérisent par une aptitude à dissiper, notamment sous forme de chaleur, une partie relativement importante de l'énergie qui leur est conférée. Ainsi, au cours d'un cycle de chargement, ils exhibent une courbe d'hystérèse (figure 4.9) qui traduit les propriétés d'amortissement du matériauⁱⁱ.

Dans l'objectif de caractériser l'amortissement d'une structure, correspondant alors à l'énergie dissipée au cours d'un cycle, on définit les notions fon-

ii. Dans le cadre d'oscillations libres, cet aspect se traduit par une diminution de l'amplitude des vibrations au cours du temps.

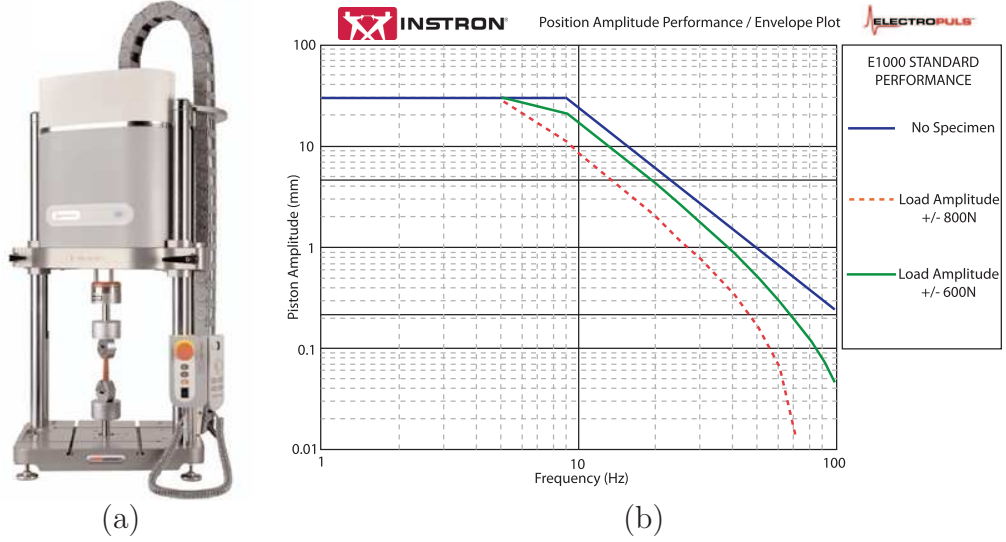


FIGURE 4.8 – (a) Instron ElectroPuls E1000 et (b) Courbe de performance de l'ElectroPuls.

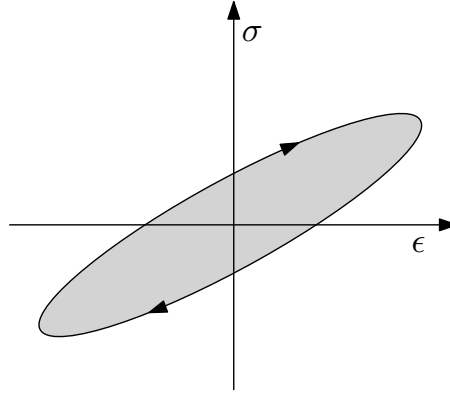


FIGURE 4.9 – Cycle d'hystérésis représenté dans le plan (ϵ, σ) . Contrainte $\epsilon(t) = \epsilon_0 \sin(\omega t)$ et déformation $\sigma(t) = \sigma_0 \sin(\omega t + \delta)$.

damentales d'angle de perte et de module complexe. En effet, si l'on considère le cas où un système est soumis à des déformations sinusoidales périodiques :

$$\epsilon(t) = \epsilon_0 \sin(\omega t), \quad (4.1)$$

La contrainte transmise répond elle aussi de façon sinusoidale mais avec un déphasage ou angle de perte, noté δ . On peut alors écrire :

$$\sigma(t) = \sigma_0 \sin(\omega t + \delta). \quad (4.2)$$

De façon générale, cette hypothèse, dite de premier harmonique, n'est pas suffisante et il convient de considérer pour la réponse en effort des harmoniques d'ordre supérieur. La réponse réelle peut alors s'écrire :

$$\sigma(t) = \sum_k \sigma_k \sin(\omega_k t + \delta_k), \quad (4.3)$$

dans le cas de l'hypothèse de premier harmonique, l'énergie dissipée au cours d'un cycle correspond à l'aire de l'ellipse représentée en figure 4.9 et s'exprime comme :

$$U_c = \oint \sigma d\epsilon = \sigma_0 \epsilon_0 \int_0^T \cos(\omega t) \sin(\omega t + \delta) \omega dt = \sigma_0 \epsilon_0 \pi \sin(\delta) \quad (4.4)$$

Si l'on utilise la représentation complexe des équations 4.1 et 4.2, le module d'Young est alors complexe : $E^* = \frac{\sigma}{\epsilon}$

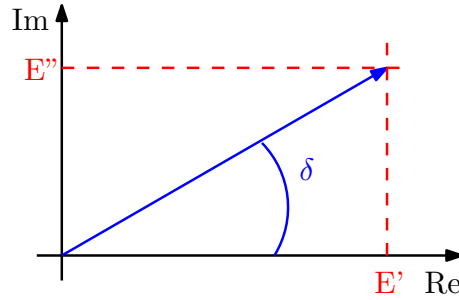


FIGURE 4.10 – Représentation du module dynamique dans le plan complexe.

$$\begin{aligned} E^* &= \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} e^{i\delta} = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} (\cos \delta + i \sin \delta) \\ &= E' + iE'' = E'(1 + i \tan \delta) \end{aligned} \quad (4.5)$$

Où :

- $|E^*| = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0}$,
- $E' = |E^*| \cos \delta$ est la partie réelle du module dynamique. Cette grandeur caractérise la partie de la réponse en phase avec l'excitation. On l'appelle également module de stockage ("storage modulus") : c'est une mesure de l'énergie emmagasinée et restituée au cours d'un cycle.
- $E'' = |E^*| \sin \delta$ est la partie imaginaire du module dynamique. Cette grandeur caractérise la partie de la réponse en quadrature de phase avec l'excitation. On l'appelle module de perte ("loss modulus") : c'est une mesure de l'énergie dissipée sous forme de chaleur pendant le cycle.

Les caractéristiques de l'amortissement sont donc E'' ou δ . Ces grandeurs caractérisent l'amortissement à température et fréquence données.

Un raisonnement similaire peut être fait pour introduire un module de cisaillement complexe G^* . En ce qui concerne les élastomères, l'amortissement est principalement dû à un réarrangement moléculaire au niveau de la structure interne du matériau : les chaînes moléculaires glissent les unes par rapport aux autres, entraînant un frottement générant des pertes d'énergie. Deux principaux types de mécanismes sont invoqués pour expliquer ces propriétés amortissantes :

- un mécanisme d'origine visqueuse, reposant sur la résistance à la réorganisation des chaînes moléculaires. Celle ci ne peut se produire instantanément, et génère ainsi une dépendance en temps de type viscoélastique. On remarque que l'amortissement est d'autant plus important que le matériau est chargé.
- Le second mécanisme proposé est dû à la présence de charges : l'accroissement de l'amortissement serait alors dû à une résistance dans les interfaces caoutchouc-carbone et carbone-carbone.

Il faut également noter que toutes ces grandeurs caractéristiques (module d'Young E^* ou de Coulomb G^* complexes) évoluent enfin de façon significative avec la température, la fréquence, ou encore l'amplitude de l'excitation imposée.

Analyse spectrale des signaux expérimentaux

Lorsque l'on désirera déterminer le module complexe du matériau soumis expérimentalement à un chargement cyclique, on procédera à une analyse spectrale des signaux acquis à l'aide d'un algorithme de transformé de Fourier discret. Cet algorithme associe à toute fonction discrete intégrable $s(n)$, la représentation spectrale :

$$S(k) = \sum_{n=0}^{N-1} s(n)e^{-2i\pi \frac{kn}{N}} \text{ avec } n \in [0, N] \quad (4.6)$$

Notons que d'après le théorème de Nyquist-Shanon, la fréquence d'échantillonnage f_{ec} d'un signal doit être égale ou supérieure au double de la fréquence maximale contenue dans ce signal. Au cours des différents essais, les fréquences d'échantillonnages seront choisies afin de pouvoir s'affranchir de tout risque de repliement de spectre.

Méthodologie expérimentale

La caractérisation des différents mécanismes physiques (non-linéarité, viscoélasticité, effet Mullins, effet Payne ou encore dépendance en fréquence) intervenant dans le comportement mécanique de l'élastomère GSM est réalisée à l'aide d'essais de traction uniaxiale et de compression. Bien que, à priori, on ignore tout du niveau de déformation que subira le matériau, on peut néanmoins estimer que l'ordre de grandeur des déformations locales demeure inférieur à 15%. En conséquence, la matrice d'essais expérimentaux comprend différentes valeurs de déformation nominale (tableau 4.1). Puisque le matériau est à priori viscoélastique les essais sont réalisés pour différentes vitesses de sollicitation, à savoir $10^{-1}s^{-1}$, $10^{-2}s^{-1}$ et $10^{-3}s^{-1}$.

Pour des contraintes inhérentes à l'utilisation machine (voir section 4.2.1) des essais préliminaires visant à déterminer quelle longueur minimale de l'échantillon est admissible, ont été menés avec l'objectif de maximiser à la fois la plage d'amplitude et de fréquence. Ces essais ont permis de déterminer un rapport minimum d'aspect $h/l = 6$ (et non de 10 comme le plus souvent

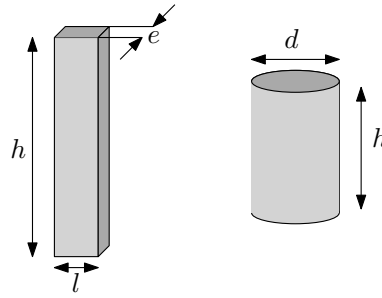


FIGURE 4.11 – Éprouvettes de type lanière et plot de compression utilisés pour les essais de caractérisation mécanique du GSM.

utilisé en vertu du principe de Saint-Venant), où h est la hauteur entre mors et l la largeur de l'échantillon (figure 4.11). Ce ratio géométrique sera vérifié, à minima, dans la totalité des essais de traction uniaxiale.

Déformation		8%	11%	16%	-11%	-16%
Taux de Déformation (s ⁻¹)	10 ⁻¹	×	×	×		
	10 ⁻²	×	×	×	×	×
	10 ⁻³	×	×	×	×	

Tableau 4.1 – Matrice expérimentale des essais menés sur le GSM. Les déformations négatives correspondent à des essais de compression.

Les premiers essais sont menés de façon cyclique sur une dizaine de cycles afin que le matériau atteigne un comportement stabilisé [107]. Ils permettent, une fois le matériau cyclé, d'étudier le comportement dynamique autour d'une précharge ϵ_{stat} que l'on qualifie de déformation statique. Les déformations périodiques ϵ_{dyn} que l'on impose autour du niveau de déformation moyen ϵ_{stat} sont résumées dans le tableau 4.2. L'objectif de ces essais dynamiques est d'étudier, en balayant plusieurs fréquences et niveaux d'amplitudes, l'effet Payne et la dépendance en fréquence du GSM.

4.2.2 Résultats expérimentaux

On présente dans cette section les résultats expérimentaux obtenus à l'issue de la campagne de caractérisation du GSM. On rappelle que les élastomères se distinguent des autres matériaux par leurs propriétés mécaniques particulières, notamment en termes de déformabilité, de viscosité et de forte dépendance à l'environnement.

Non linéarité

Un simple essai de traction suffit pour mettre en évidence nombre de caractéristiques physiques propres aux élastomères. Cet essai, représenté sur

Taux de Déformation (s^{-1})	Fréquence (Hz)	Déformation Dynamique		
		0.5%	1.0%	1.4%
10^{-1}	15		×	
	30		×	
	45		×	
10^{-2}	15	×	×	×
	30	×	×	×
	45	×	×	×
10^{-3}	15		×	
	30		×	
	45		×	

Tableau 4.2 – Matrice expérimentale des essais dynamiques menés sur le GSM. Pour chacune des sollicitations dynamiques un essai est effectué autour d'une précharge de 7%, 10% et 14%.

la figure 4.12 et conduit jusqu'à rupture de l'éprouvette, permet d'observer pour le GSM une extension maximale de l'ordre de 400% ainsi qu'une forte non-linéarité. La réponse du matériau est relativement rigide aux petites déformations et s'adoucit selon la déformation vue. On retrouve ici un comportement classique et commun à tous les élastomères [127].

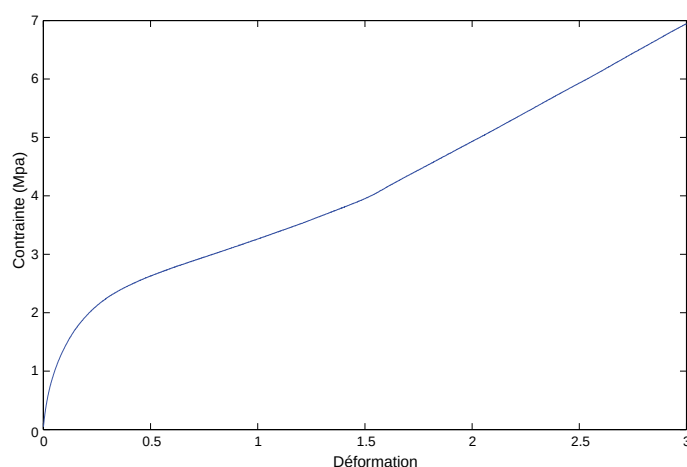


FIGURE 4.12 – Essai de traction réalisé sur une éprouvette de type lanière. Vitesse de traverse de 0.6 mm.s^{-1} .

Viscoplasticité

Le comportement viscoélastique du GSM peut être étudié par l'intermédiaire d'essais de traction uniaxiale en charge-décharge à différents taux de déformation. Ces essais, illustrés sur la figure 4.13 pour une déformation maximale de 11%, sont conduits pour des déformations de l'ordre de grandeur de celles qui seront observées sur la structure sous sollicitations.

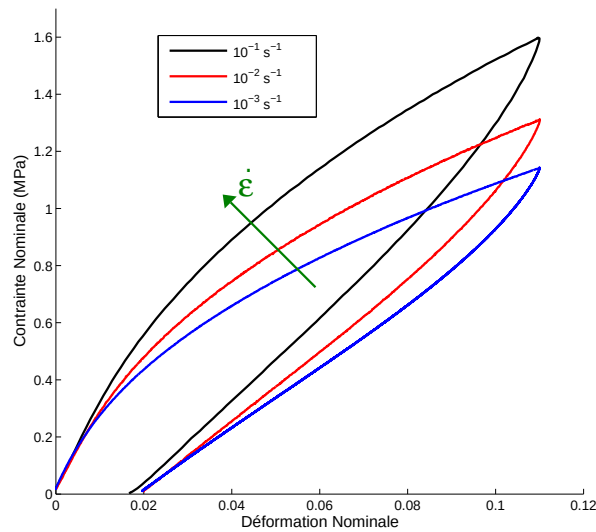


FIGURE 4.13 – Essai de traction uniaxiale cyclique.

Une forte dépendance vis-à-vis de la vitesse de sollicitation est alors observée, avec un matériau qui se rigidifie avec le taux de déformation. Si l'on évalue le module tangent, défini par la pente de l'origine à 0.5%, l'indépendance en vitesse du module est vérifiée sur trois décades de vitesses de déformation (10^{-1} s^{-1} , 10^{-2} s^{-1} , 10^{-3} s^{-1}) et conduit à un module tangent de l'ordre de $E = 34 \text{ MPa}$. Le comportement des élastomères étant un comportement non linéaire, il est courant de calculer le module tangent à la courbe afin d'obtenir la rigidité du matériau pour une déformation donnée. On détermine de la même façon, le module tangent calculé pour le premier cycle et à la déformation $\epsilon_{max} = 11\%$. L'aspect viscoélastique du matériau se traduit alors par une augmentation des modules tangents avec la vitesse de chargement. Ces résultats sont synthétisés dans le tableau 4.3. Lorsque l'on considère des cycles dynamiques, la mesure de la norme du module d'Young complexe, $|E^*|$, permet directement d'accéder au module tangent. Par conséquent en terme de rigidité, les modules tangents statiques du tableau 4.3 peuvent être confrontés aux valeurs de $|E^*|$.

Lors de la décharge du matériau, le chemin suivi décrit une boucle d'hystérésis que l'on associe à la capacité du matériau à dissiper de l'énergie sous forme de chaleur. On note également la présence d'une déformation dite rémanente, i.e. une déformation non nulle à contrainte nulle. Cette dernière peut être expliquée par la présence de deux phénomènes : la plasticité et la viscosité. Comme pour les matériaux métalliques, au delà d'un certain niveau de déformation, le matériau plastifie donnant alors lieu à une déformation résiduelle irréversible. Néanmoins, un élastomère présente peu de déformation rémanente comparativement aux plastiques et cette dernière est ici essentiellement due au caractère visqueux. Si l'on attend suffisamment longtemps la déformation rémanente va diminuer jusqu'à la valeur plastique : ce phénomène

est appelé recouvrance. De façon synthétique, on dira que la déformation rémanente est, juste après décharge, la somme d'une déformation plastique et d'une déformation recouvrable.

$\dot{\epsilon}$ (s ⁻¹)	10 ⁻¹	10 ⁻²	10 ⁻³
E_t (MPa) à $\epsilon = 11.4\%$	8.6	6.7	6.2

Tableau 4.3 – Modules tangents déterminés à la charge du GSM pour une déformation de 11.4%.

Point sur la modélisation du comportement du GSM : À ce stade, l'identification expérimentale de phénomènes propres aux élastomères et présents dans le comportement mécanique du GSM implique la nécessité d'une loi de comportement hyperélastique-viscoplastique écrite dans un formalisme de grandes déformations.

Effet Mullins et adoucissement associé

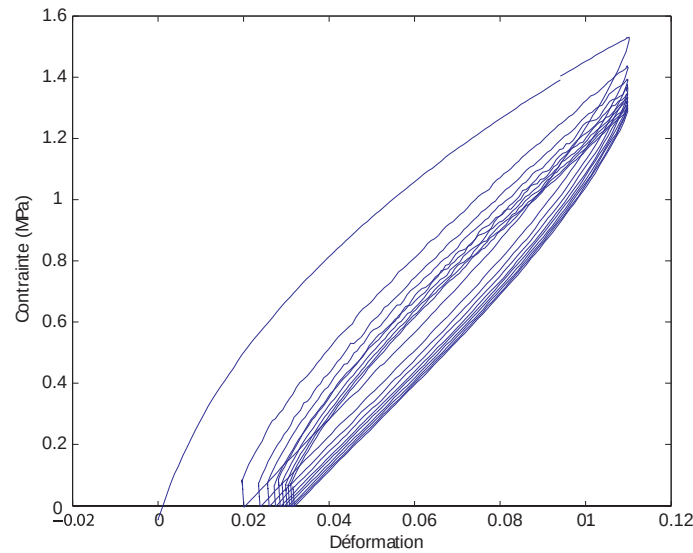
L'effet Mullins se manifeste lorsque le matériau est soumis à une série de chargements (section 4.1.2). La figure 4.14 illustre un essai de traction cyclique pour une déformation maximale $\epsilon_{max} = 11.4\%$ et une vitesse de sollicitation $\dot{\epsilon} = 10^{-1} \text{ s}^{-1}$. De cet essai, plusieurs propriétés peuvent alors être identifiées :

- Lors du second cycle de chargement, la rigidité du matériau est inférieure à celle de la première charge. Cette propriété est communément désignée comme étant l'adoucissement du matériau et se traduit par une chute de la contrainte à déformation donnée. Le tableau 4.4 illustre l'évolution de la rigidité en fonction du nombre de cycles. Cette dernière est notamment pilotée par la déformation maximale atteinte.
- Après quelques cycles, le matériau s'accommode vers un état stabilisé. Au cours de cet essai, la chute de contrainte entre le premier et le second cycle est de l'ordre de 10% tandis qu'elle devient inférieure à 1% entre le neuvième et le dixième cycle. On fera donc dorénavant l'hypothèse que le GSM peut être dit stabilisé après une sollicitation de l'ordre d'une dizaine de cycles et le dernier cycle sera ainsi dénommé *cycle stabilisé* [27].
- Lorsque la déformation devient proche du niveau maximum imposé lors des précédents cycles, la contrainte tend à se rapprocher de la contrainte maximale vue par le premier cycle.
- L'essentiel de la déformation rémanente a lieu entre le premier et le second cycle.

Afin d'investiguer plus en détail l'adoucissement associé au comportement du matériau, un essai de traction uniaxiale cyclique à différentes déformations a été entrepris. Cet essai, synthétisé sur la figure 4.15, consiste en trois cycles de charge et de décharge consécutifs à un niveau de déformation croissant et pour un taux de déformation $\dot{\epsilon} = 10^{-1} \text{ s}^{-2}$. Pour comparaison on reporte également sur la même figure un essai de traction uniaxiale réalisé sur une

	$E_t(MPa)$ à 0%		$E_t(MPa)$ à 11%	
Nombre de cycle	1	10	1	10
$E_t(MPa)$	34	28	8.5	13

Tableau 4.4 – Evolution du module tangent en fonction du nombre de cycles

FIGURE 4.14 – Essai de traction uniaxiale cyclique. Déformation maximale $\epsilon_{max} = 11.4\%$ et vitesse de sollicitation $\dot{\epsilon} = 10^{-1} \text{ s}^{-1}$.

autre éprouvette, vierge de toute déformation, à une déformation supérieure à 12% et au même taux de déformation.

On retrouve pour le second (courbe noire) et le troisième cycle (courbe rouge) l'adoucissement précédemment identifié lorsque l'on demeure en dessous du niveau de déformation maximum imposé. Lorsque l'on dépasse le niveau de déformation maximum, c'est-à-dire au delà de 7% en charge pour la courbe noire et de 10% pour la courbe rouge, le matériau tend à suivre le même chemin que celui emprunté par une éprouvette qui n'aurait subi aucune décharge. L'ensemble de ces observations permet d'affirmer que le GSM exhibe une forte dépendance vis-à-vis de l'histoire des déformations subies avec un comportement piloté par la déformation maximale vue par le matériau.

Point sur la modélisation du comportement du GSM : Les essais de traction cyclique ont permis d'identifier la présence de l'effet Mullins pour le GSM. À ce titre, le modèle qui visera à décrire son comportement mécanique devra prendre en compte et traduire correctement l'effet Mullins.

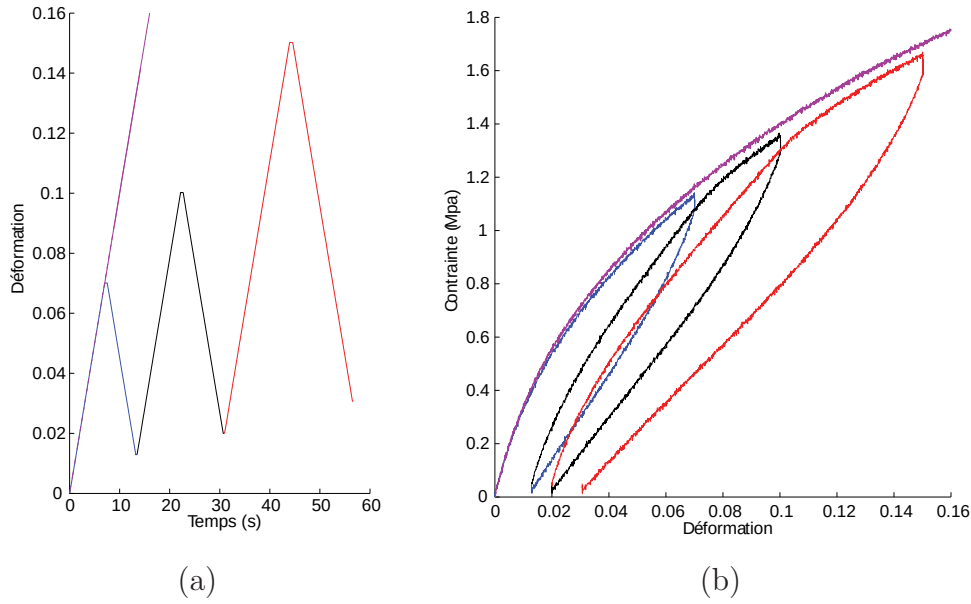


FIGURE 4.15 – Essai de traction uniaxiale cyclique. (a) cycles de déformations imposés et (b) réponse du matériau.

Effet Payne et comportement en fréquence : non linéarité du comportement dynamique

La non linéarité du comportement dynamique du matériau se manifeste lorsque l'on sur-impose une déformation dynamique ϵ_{dyn} autour d'une précharge statique ϵ_{stat} . La figure 4.16, présente à la fois le cycle de précharge ainsi que les cycles dynamiques stabilisés du matériau. Notons que l'examen du comportement du GSM à trois fréquences nécessite trois éprouvettes distinctes, tableau 4.2. Cette simple figure permet d'illustrer clairement que la rigidité apparente du GSM n'est pas constante, i.e. le module tangent à l'origine est distinct de chacun des modules tangents des cycles dynamiques.

La quantification de l'effet Payne et du comportement en fréquence nécessite la détermination d'un module complexe E^* . Cette grandeur est généralement approchée par l'utilisation de la méthode du fondamental (section 4.2.1). Il convient donc de vérifier, en premier lieu, qu'une telle approximation convient pour l'étude du comportement du GSM. La figure 4.17 présente la confrontation d'un signal réel, en bleu, et d'un signal reconstruit par transformée de Fourier inverse, en rouge, en ne considérant que le fondamental. On observe que, bien que de légers écarts existent, cette approximation permet de traduire un comportement extrêmement proche de la réalité. Dans la suite, l'ensemble des modules complexes calculés le seront sur la base d'une telle approximation.

La dépendance en fréquence du matériau peut être illustrée par l'essai représenté sur la figure 4.18. L'historique de précharge est constitué d'une dizaine de cycles de déformation maximale 8% à une vitesse $v_3 = 10^{-3} s^{-1}$. Les amplitudes du chargement dynamique sont $\epsilon_{dyn} = 1\%$ et ont lieu autour de la déformation statique $\epsilon_{stat} = 7\%$. Il apparaît alors que le module élastique

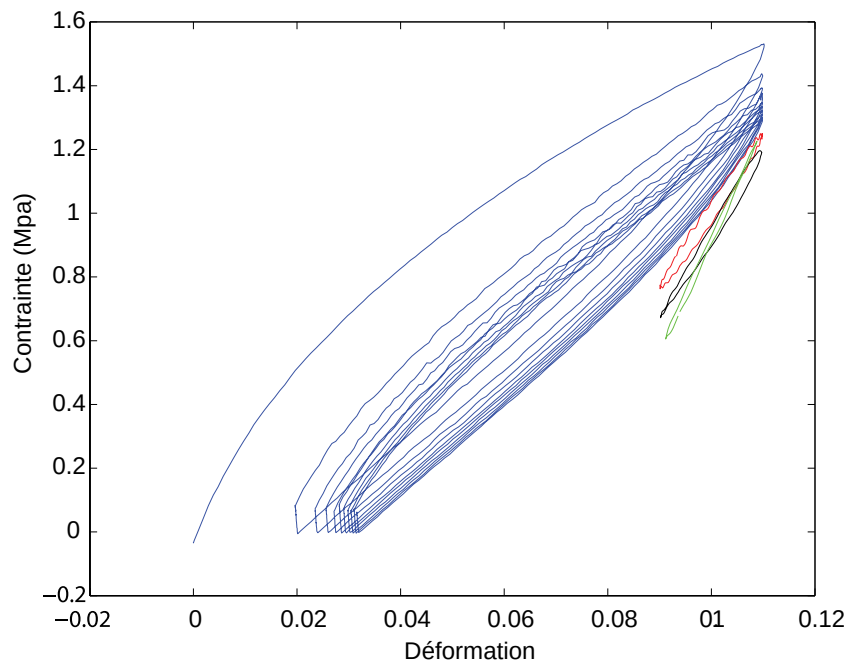


FIGURE 4.16 – Réponse du matériau en contrainte vs déformation, cycle le précharge et cycles dynamiques stabilisés pour trois fréquences 15 Hz, 30 Hz et 45 Hz.

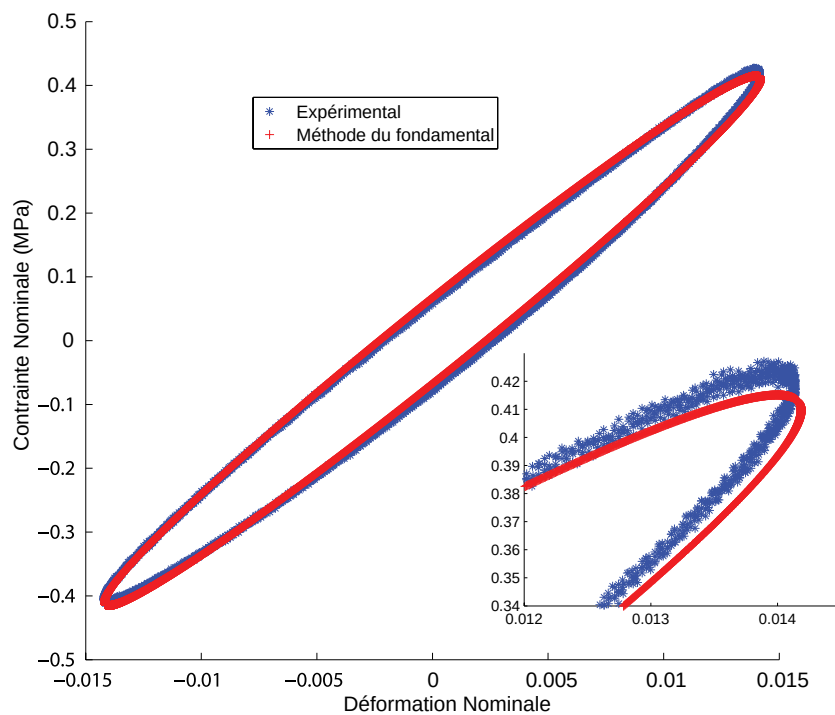


FIGURE 4.17 – Comparaison entre les signaux réels et les signaux reconstruits par la méthode du fondamental.

E' ainsi que la norme du module complexe augmentent avec la fréquence de chargement. La dissipation du matériau, représentée par le module de perte E'' , varie quant à elle inversement avec la fréquence de sollicitation. Ces caractéristiques peuvent être généralisées à l'ensemble des essais de la matrice expérimentale 4.2.

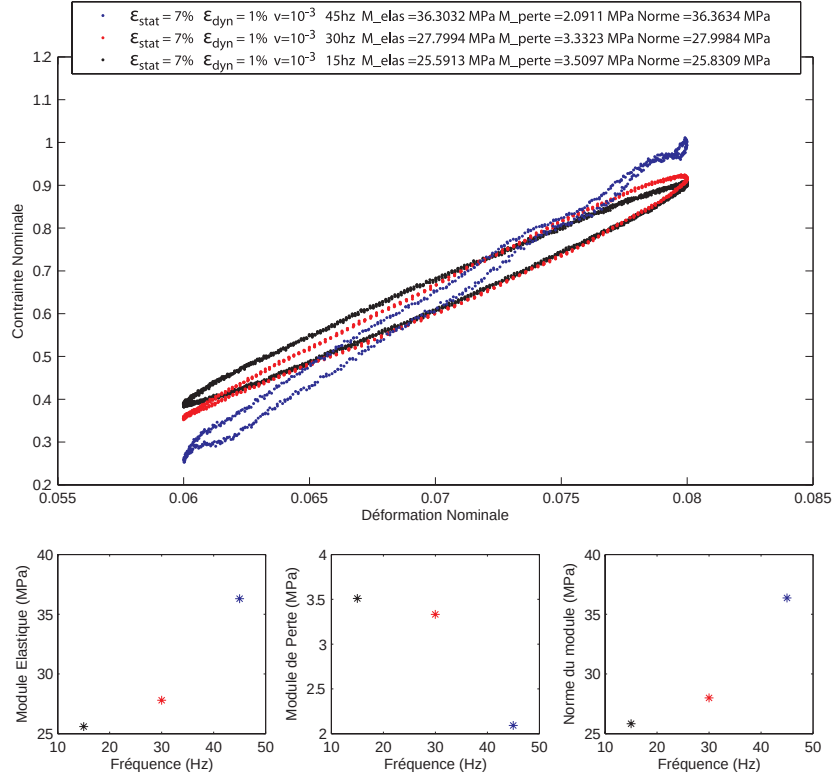


FIGURE 4.18 – Réponse du matériau en contrainte vs déformation pour 3 fréquences : 15 Hz, 30 Hz, 45 Hz : précharge statique, vitesse de précharge et amplitude dynamique fixées : 7%, $10^{-3}s^{-1}$, $+/- 1\%$.

Si on se limite à l'analyse de ces modules, le chargement statique semble peu influencer la réponse du matériau. En d'autres termes, on pourrait déduire de façon erronée que l'historique du chargement influence peu la réponse du matériau. C'est en examinant les différentes réponses du GSM pour différentes précharges statiques, figure 4.19, que l'on s'aperçoit que la seule analyse des modules dynamiques classiques n'est pas suffisante pour caractériser le niveau de contraintes atteint par le matériau. En outre, la précharge statique ϵ_{stat} a une influence non négligeable sur le niveau de contrainte subit par le matériau.

Les essais conduits sur la base de la matrice expérimentale permettent d'identifier les paramètres de chargement affectant la non linéarité du matériau, à savoir le niveau de précharge, l'amplitude de chargement dynamique ainsi que la fréquence de chargement ; on ne dispose alors que de 9 valeurs. Une méthode expérimentale plus adaptée [71] permet d'obtenir une courbe de tendance sur une large gamme d'amplitudes et de fréquences. Cette méthode, décrite sur la figure 4.20, consiste en une discrétisation fine de la plage de fréquence et

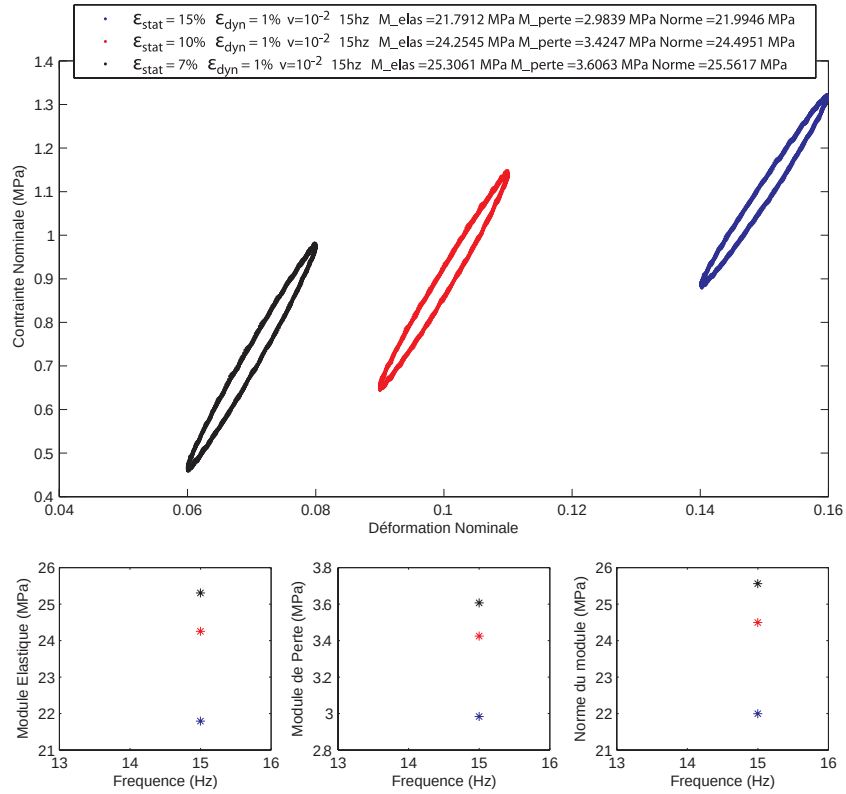


FIGURE 4.19 – Influence de la précharge statique sur la réponse du matériau à fréquence et amplitude fixées

d'amplitude considérée autour d'une précharge imposée.

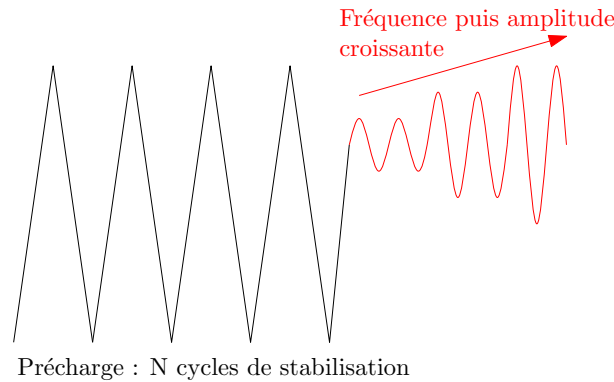


FIGURE 4.20 – Schématisation des essais de traction uniaxiale cycliques. Les sollicitations dynamiques sont sinusoïdales, d'après [71].

Les figures 4.21-(a), 4.21-(b) et 4.22 présentent respectivement les évolutions des modules élastique (ou de stockage), de perte ainsi que de la norme du module complexe en fonction de la fréquence et de l'amplitude de sollicitation dynamique. Puisque l'étude dynamique est réalisée autour d'une précharge statique $\epsilon_{stat} = 10\%$ et que le niveau d'amplitude dynamique maxi-

mum que l'on souhaite imposer est de 1.4%, les chargements cycliques visant à stabiliser le matériau ont donc été conduits jusqu'à une déformation maximale de $\epsilon_{max} = 10 + 1.4 = 11.4\%$.

On observe une diminution du module élastique et une augmentation du module de perte avec l'amplitude de sollicitation périodique. Du point de vue du comportement en fréquence, plus la fréquence augmente plus le module élastique est important et plus le module de perte est faible. Ces observations, en accord avec le comportement général observé sur les élastomères, traduisent l'effet Payne ainsi que la dépendance en fréquence pour le GSM. Notons que, d'un point de vue quantitatif, la rigidité apparente du matériau varie d'un facteur 2 pour l'ensemble des conditions d'essais, figure 4.22.

Point sur la modélisation du comportement du GSM : Lors d'une sollicitation dynamique autour d'une précharge statique, à la fois l'effet Payne et une dépendance en fréquence se manifestent dans le comportement mécanique du GSM. Si le modèle vise à décrire le comportement dynamique de l'élastomère, il devra traduire correctement cette non linéarité de la rigidité du matériau.

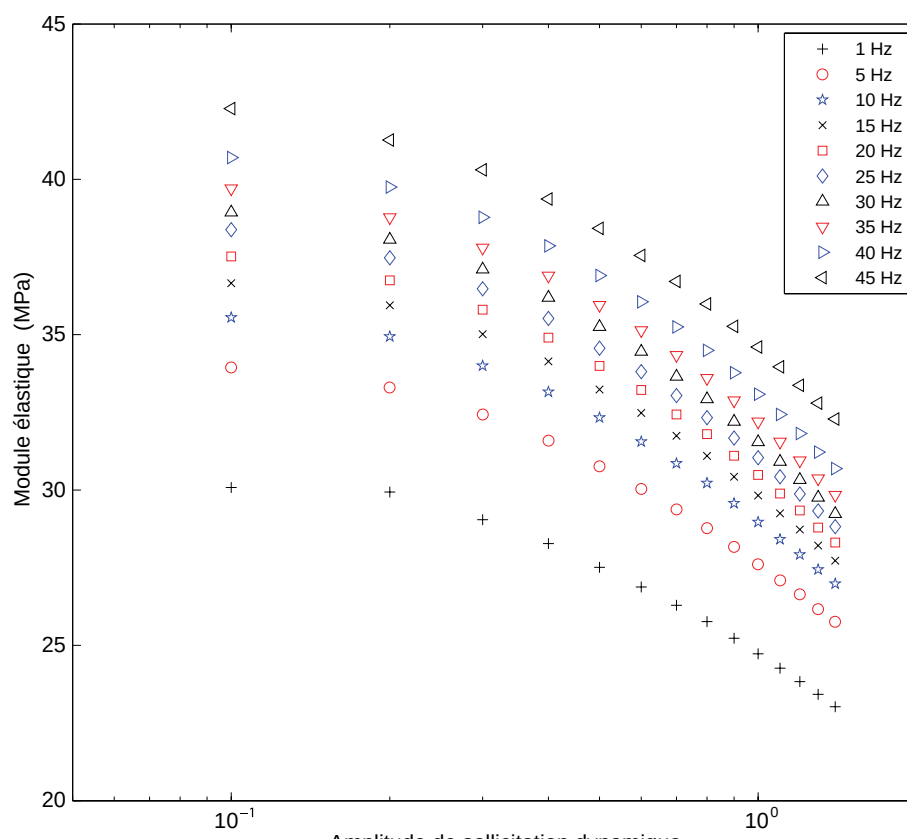
Visualisation de l'endommagement

À titre d'illustration, une visualisation au Microscope Électronique à Balayage (MEB) du matériau vierge de toute sollicitation ainsi qu'après essais est présentée sur la figure 4.23. La comparaison des deux clichés permet de mettre en évidence le mécanisme d'endommagement que subit le GSM et qui se traduit par les nombreuses caractéristiques physiques qui ont été précédemment mises en évidence.

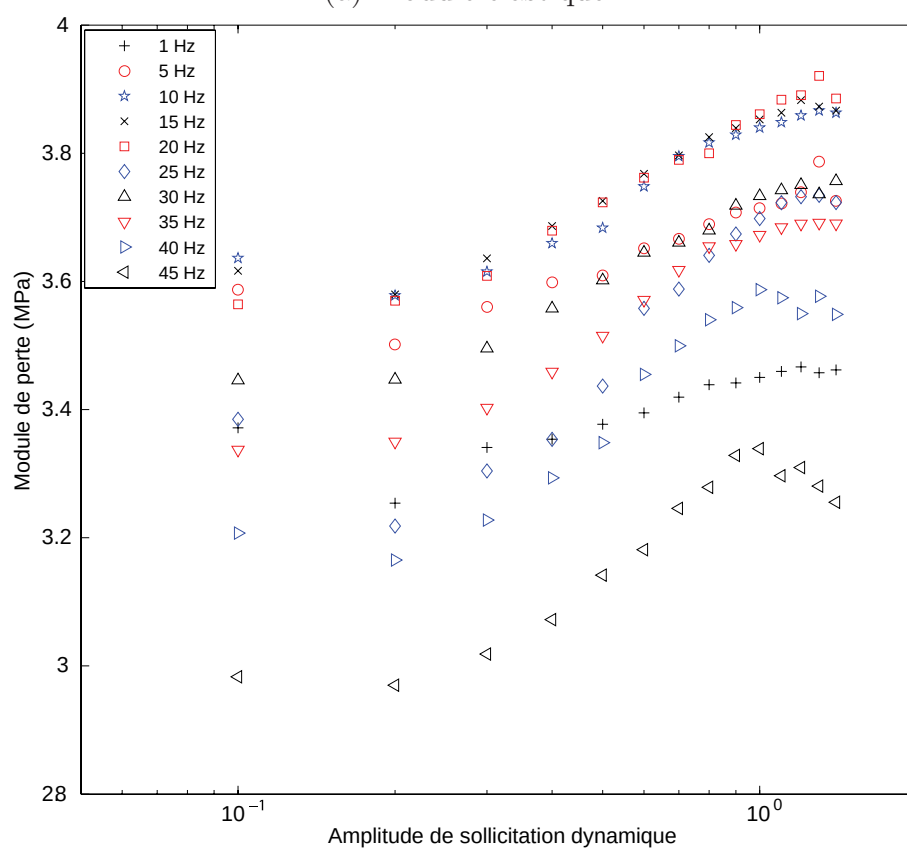
On sait aujourd'hui [127] que ces mécanismes d'endommagement font intervenir un réseau de longues chaînes qui interagissent avec des charges renforçantes. Néanmoins, puisque l'on ignore tout de la composition précise ainsi que du mode de fabrication du GSM, on ne se risquera pas à une interprétation hasardeuse des clichés obtenus par visualisation au MEB. On pourra cependant observer que la rupture de liaison au sein du réseau moléculaire conduit à l'apparition de cavité plus ou moins profondes.

4.2.3 Conclusion

L'étude expérimentale du GSM a permis de mettre en évidence un certain nombre de caractéristiques mécaniques. Comme la plupart des élastomères, le GSM est un matériau hyper-visco-plastique auquel s'ajoute la présence des effets Mullins et Payne. Avec l'objectif de modéliser son comportement mécanique, il convient d'aborder l'ensemble de ces caractéristiques comme un cahier des charges que l'on tentera de respecter le plus fidèlement possible. Néanmoins, l'étude des élastomères est, encore aujourd'hui, un domaine très actif de recherche et la complexité de leur composition (matériau composite) ainsi que la multiplicité des phénomènes physiques en font des matériaux difficiles à modéliser.



(a) Module élastique



(b) Module de perte

FIGURE 4.21 – Évolution des modules élastique et de perte en fonction de l'amplitude de sollicitation dynamique et de la fréquence.

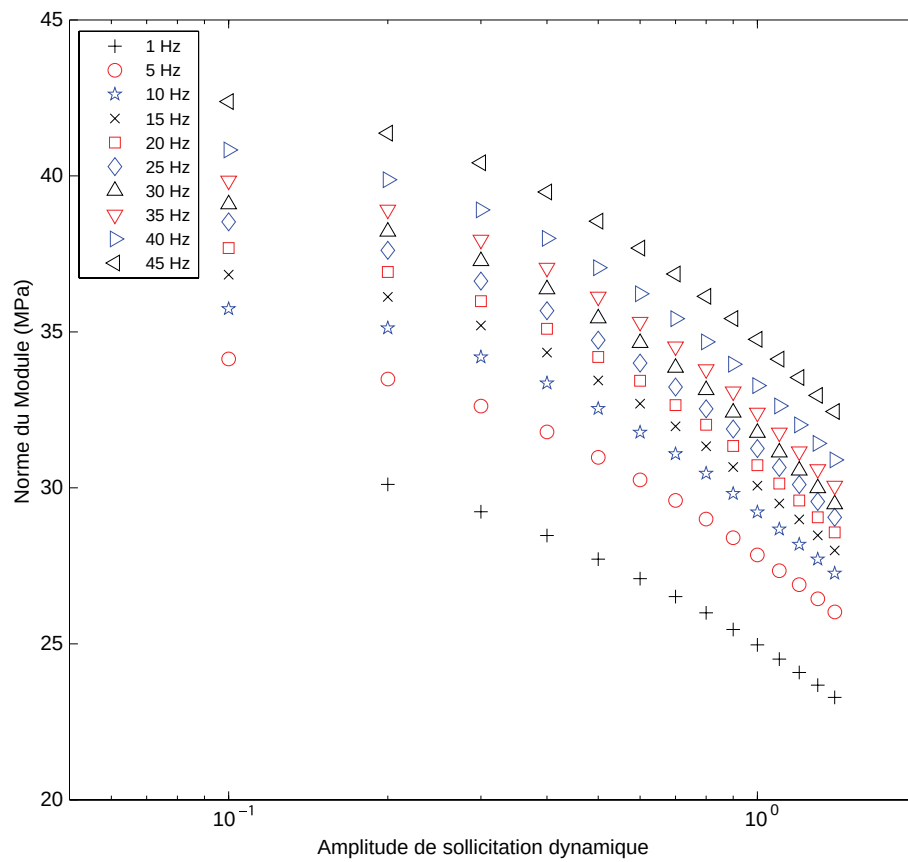


FIGURE 4.22 – Evolution de la norme du module complexe en fonction de l'amplitude de sollicitation dynamique et de la fréquence.

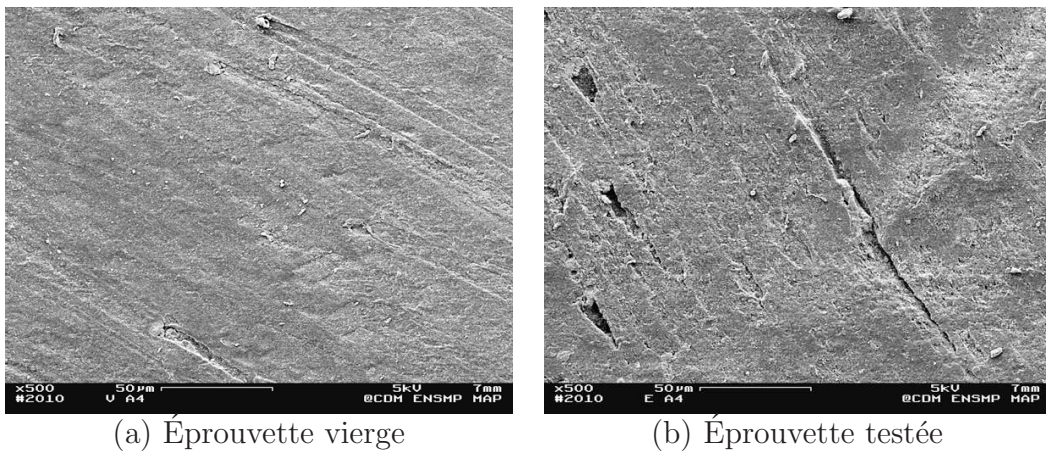


FIGURE 4.23 – Visualisation au MEB (a) d'une éprouvette vierge et (b) d'une éprouvette testée.

4.3 Modélisation du comportement mécanique de l'élastomère

Le choix d'un modèle est intimement lié à sa capacité à décrire une certaine partie des caractéristiques mécaniques du matériau. En 2005, Qi & Boyce [107] ont proposé un modèle, généralisable à l'ensemble de la classe des thermoplastiques, qui permet de traduire les principales caractéristiques du comportement en contrainte-déformation. Ce modèle, composé de deux branches associées en parallèle, figure 4.24, sert de point de départ à la modélisation du GSM réalisée en coopération étroite avec le Centre des Matériaux de l'École Nationale Supérieure des Mines de Paris [19].

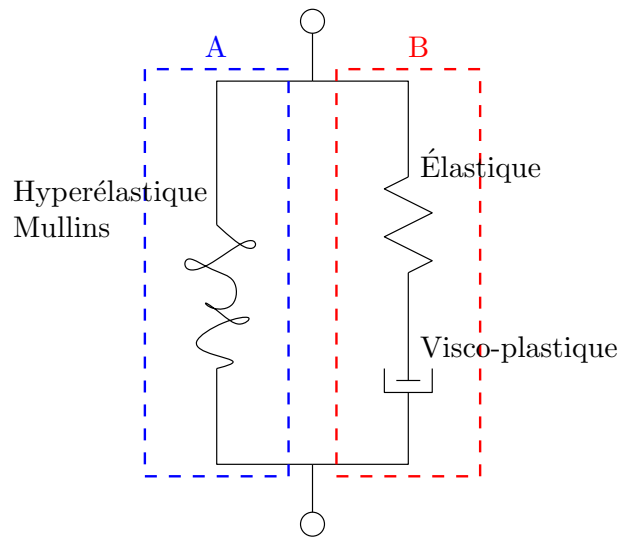


FIGURE 4.24 – Modèle de Qi & Boyce [107] servant à décrire le comportement des élastomères thermoplastiques.

La première branche, branche A, est une branche hyperélastique avec adjonction d'une participation *endommageable* traduisant l'effet Mullins. Elle traduit l'évolution de l'entropie du matériau résultant des phénomènes intramoléculaires. Cette modélisation peut être mise en parallèle avec le potentiel thermodynamique, proposé par Cantournet et Desmorat [112], qui permet de décrire l'hystérésis des élastomères ainsi que leur adoucissement cyclique sans introduire de viscosité ni d'endommagement. La seconde branche, branche B, hérite des travaux menés sur les métaux et traduit l'élasto-viscoplasticité tridimensionnelle. Elle est constituée d'un élément élastique linéaire caractérisant la contribution initiale de l'énergie interne ainsi que d'un élément viscoplastique traduisant la dépendance en temps ainsi que la présence de plasticité.

Les deux branches étant en parallèle le comportement hyperélastique est donc calculé indépendamment du comportement viscoélastique, permettant ainsi une grande flexibilité du modèle du point de vue du champ d'application à un grade de matériau. De par sa structure, la décomposition des déformations

au sein du modèle est :

$$\underline{\mathbf{F}} = \underline{\mathbf{F}}^A = \underline{\mathbf{F}}^B, \quad (4.7)$$

où $\underline{\mathbf{F}}$ est le gradient de transformation. L'exposant A fait ainsi référence à la branche hyperélastique et l'exposant B à la branche viscoélastique. Les contraintes de Cauchy résultantes s'écrivent :

$$\underline{\boldsymbol{\sigma}} = \underline{\boldsymbol{\sigma}}^A + \underline{\boldsymbol{\sigma}}^B, \quad (4.8)$$

Les sections qui suivent ont pour objectif de décrire les lois gouvernant chacune des branches constitutives du modèle. Un rappel de mécanique des milieux continus permettant de spécifier l'ensemble des grandeurs utilisées est présenté en annexe A

4.3.1 Comportement Hyperélastique

À l'aide du second et du premier principe de la thermodynamique (bilan d'énergie mécanique et thermique du système) et en introduisant l'énergie libre de Helmholtz ψ , on obtient l'inégalité de Clausius-Duhem en configuration Lagrangienne [57] [67] :

$$\mathcal{D} = \underline{\boldsymbol{\Pi}} : \dot{\underline{\mathbf{E}}} - \rho_0(\dot{\psi} + \dot{T}s_0) - \underline{\mathbf{Q}} \cdot \frac{\underline{\mathbf{G}}}{T} \geq 0. \quad (4.9)$$

Les théorèmes de réductions appliqués aux corps élastiques montrent que le jeu de variables privilégiées pour la représentation des solides élastiques anisotropes est :

$$\psi = \psi(\underline{\mathbf{E}}, T, \underline{\mathbf{G}}), \quad (4.10)$$

où $\underline{\mathbf{E}}$ est la déformation de Green-Lagrange reliée de manière univoque au tenseur droit de Cauchy-Green $\underline{\mathbf{C}}$, T la température, $\underline{\mathbf{G}}$ le gradient de température Lagrangien et $\underline{\boldsymbol{\Pi}}$ le second tenseur de Piola-Kirchhoff. Ce qui permet d'écrire, par dérivation en chaîne :

$$\dot{\psi} = \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\mathbf{E}}} : \dot{\underline{\mathbf{E}}} + \frac{\partial \psi}{\partial T} \dot{T} + \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\mathbf{G}}} \cdot \dot{\underline{\mathbf{G}}}. \quad (4.11)$$

En substituant 4.11 dans 4.9 et en ordonnant les termes, la dissipation devient :

$$\mathcal{D} = (\underline{\boldsymbol{\Pi}} - \rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\mathbf{E}}}) : \dot{\underline{\mathbf{E}}} - \rho_0 (\frac{\partial \psi}{\partial T} + s_0) \dot{T} - \rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\mathbf{G}}} \cdot \dot{\underline{\mathbf{G}}} - \underline{\mathbf{Q}} \cdot \frac{\underline{\mathbf{G}}}{T} \geq 0. \quad (4.12)$$

La dissipation $\mathcal{D}$ doit être positive et ce pour tous processus thermodynamique et donc pour toute valeur de $\dot{\underline{\mathbf{E}}}, \dot{T}, \dot{\underline{\mathbf{G}}}$. $\mathcal{D}$ étant clairement linéaire en ces incréments, les termes devant $\dot{\underline{\mathbf{E}}}, \dot{T}, \dot{\underline{\mathbf{G}}}$ doivent donc s'annuler, et on obtient alors :

$$\underline{\Pi} = \rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\mathbf{E}}}, \quad (4.13a)$$

$$s_0 = -\frac{\partial \psi}{\partial T}, \quad (4.13b)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \underline{\mathbf{G}}} = 0. \quad (4.13c)$$

Ces relations constituent les lois de comportement dites *hyperélastiques* pour les contraintes et l'entropie. Elles démontrent que l'énergie libre ψ est un **potentiel d'élasticité** dont découlent les relations contraintes-déformations et entropie-température.

Hyperélasticité isotrope

D'après 4.13, on peut écrire :

$$\psi = \psi(\underline{\mathbf{E}}, T) = \psi(\underline{\mathbf{C}}, T). \quad (4.14)$$

On sait qu'un corps hyperélastique est isotrope si son énergie libre est une fonction isotrope de ses arguments. En particulier, d'après le théorème de représentation pour les fonctions scalaires d'une variable tensorielle, elle est fonction des invariants principaux de $\underline{\mathbf{C}}$ [57], donc :

$$\underline{\Pi} = 2\rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\mathbf{C}}} = 2\rho_0 \left(\frac{\partial \psi}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \underline{\mathbf{C}}} + \frac{\partial \psi}{\partial I_2} \frac{\partial I_2}{\partial \underline{\mathbf{C}}} + \frac{\partial \psi}{\partial I_3} \frac{\partial I_3}{\partial \underline{\mathbf{C}}} \right). \quad (4.15)$$

Les invariants de $\underline{\mathbf{C}}$ s'expriment par :

$$I_1 = \text{trace}(\underline{\mathbf{C}}) = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2, \quad (4.16a)$$

$$I_2 = \frac{1}{2} [(\text{trace}(\underline{\mathbf{C}}))^2 - \text{trace}(\underline{\mathbf{C}}^2)] = \text{trace}(\underline{\mathbf{C}}^{-1}) \det(\underline{\mathbf{C}}),$$

$$= \lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_1^2 \lambda_3^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2, \quad (4.16b)$$

$$I_3 = \det(\underline{\mathbf{C}}) = J^2 = \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2. \quad (4.16c)$$

Avec les λ_i correspondant aux élongations dans les directions principales de $\underline{\mathbf{C}}$. La relation reliant les contraintes aux déformations est alors obtenue en dérivant ces invariants par rapport à $\underline{\mathbf{C}}$. On a :

$$\frac{\partial I_1}{\partial \underline{\mathbf{C}}} = \underline{\mathbf{1}}, \quad (4.17a)$$

$$\frac{\partial I_2}{\partial \underline{\mathbf{C}}} = I_1 \underline{\mathbf{1}} - \underline{\mathbf{C}}, \quad (4.17b)$$

$$\frac{\partial I_3}{\partial \underline{\mathbf{C}}} = I_3 \underline{\mathbf{C}}^{-1}. \quad (4.17c)$$

Si on injecte les relations 4.17 dans l'équation 4.15, on obtient :

$$\begin{aligned}
\tilde{\Pi} &= 2\rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial \tilde{\mathbf{C}}} = 2\rho_0 \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \psi}{\partial I_k} \frac{\partial I_k}{\partial \tilde{\mathbf{C}}}, \\
&= 2\rho_0 \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial I_1} + I_1 \frac{\partial \psi}{\partial I_2} \right) \mathbf{1} - \frac{\partial \psi}{\partial I_2} \tilde{\mathbf{C}} + I_3 \frac{\partial \psi}{\partial I_3} \tilde{\mathbf{C}}^{-1} \right].
\end{aligned} \tag{4.18}$$

En configuration eulérienne, la relation contrainte-déformation est obtenue en utilisant la relation de passage :

$$\begin{aligned}
\tilde{\boldsymbol{\sigma}} &= \frac{1}{J} \tilde{\mathbf{F}} \tilde{\Pi} \tilde{\mathbf{F}}^T, \\
&= 2\rho \left[I_3 \frac{\partial \psi}{\partial I_3} \mathbf{1} + \left(\frac{\partial \psi}{\partial I_1} + I_1 \frac{\partial \psi}{\partial I_2} \right) \tilde{\mathbf{B}} - \frac{\partial \psi}{\partial I_2} \tilde{\mathbf{B}}^2 \right].
\end{aligned} \tag{4.19}$$

Matériau hyperélastique incompressible

Les élastomères peuvent supporter des déformations sans exhiber de variation de volume. Il s'agit d'une propriété fondamentale permettant de considérer que les déformations se font à volume constant. Il s'agit de l'hypothèse d'incompressibilité :

$$dv = \text{constante} \Leftrightarrow J = \det(\tilde{\mathbf{F}}) = 1, \tag{4.20}$$

qui est une condition nécessaire et suffisante pour qu'une transformation soit isochore. Cette condition d'incompressibilité peut être directement introduite dans l'expression de l'énergie de déformation en l'écrivant sous la forme :

$$\bar{\psi} = \psi(\tilde{\mathbf{C}}, T) - p(J - 1), \tag{4.21}$$

où $\bar{\psi}$ est définie pour $J = \det(\tilde{\mathbf{F}}) = 1$ et p est un multiplicateur de Lagrange. Ainsi, seuls interviennent dans ψ les deux premiers invariants du tenseur des déformations (puisque $I_3 = 1$) et on a $\psi(\tilde{\mathbf{C}}, T) = \psi(I_1, I_2, T)$.

En dérivant l'énergie de déformation, $\bar{\psi}$, par rapport à $\tilde{\mathbf{F}}$, on retrouve le premier tenseur de Piola-Kirchhoff, $\tilde{\mathbf{P}}$.

$$\tilde{\mathbf{P}} = -p\rho_0 \tilde{\mathbf{F}}^{-T} + \rho_0 \frac{\partial \psi(\tilde{\mathbf{F}})}{\partial \tilde{\mathbf{F}}}, \tag{4.22}$$

et en multipliant par $\tilde{\mathbf{F}}^{-1}$, le second tenseur de Piola-Kirchhoff, $\tilde{\Pi}$:

$$\begin{aligned}
\tilde{\Pi} &= -p\rho_0 \tilde{\mathbf{C}}^{-1} + 2\rho_0 \frac{\partial \psi(\tilde{\mathbf{C}})}{\partial \tilde{\mathbf{C}}}, \\
&= 2\rho_0 \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial I_1} + I_1 \frac{\partial \psi}{\partial I_2} \right) \mathbf{1} - \frac{\partial \psi}{\partial I_2} \tilde{\mathbf{C}} \right] - p\rho_0 \tilde{\mathbf{C}}^{-1}.
\end{aligned} \tag{4.23}$$

En formulation eulérienne, on a alors :

$$\begin{aligned}\underline{\underline{\sigma}} &= \underline{\underline{F}} \underline{\underline{\Pi}} \underline{\underline{F}}^T, \\ &= 2\rho_0 \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial I_1} + I_1 \frac{\partial \psi}{\partial I_2} \right) \underline{\underline{B}} - \frac{\partial \psi}{\partial I_2} \underline{\underline{B}}^2 \right] - p\rho_0 \underline{\underline{1}}.\end{aligned}\quad (4.24)$$

Différentes formulations de l'énergie de déformation existent. Parmi celles-ci, on distingue celles qui sont écrites en fonction des invariants de celles écrites en fonction des élongations principales. Ces deux premières reposent sur une modélisation gaussienne de la distribution des chaînes. Depuis, la théorie statistique non-gaussienne est venue enrichir ces lois de comportement.

Énergie de déformation en fonction des invariants

L'une des premières approches phénoménologiques permettant de modéliser de grandes déformations est à attribuer à Mooney [87]. Développée sur la base d'arguments purement mathématiques impliquant la considération de symétries, la théorie de Mooney permet d'écrire pour l'énergie de déformation :

$$\psi = C_1(I_1 - 3) + C_2(I_2 - 3), \quad (4.25)$$

où C_1 et C_2 sont deux constantes. Une généralisation de ce modèle a été obtenue, quelques années plus tard, par Rivlin (voir [108] et [109]) :

$$\psi = \sum_{i+j=1}^N C_{ij}(I_1 - 3)^i(I_2 - 3)^j, \quad (4.26)$$

où l'ordre du polynome est proportionnel à la plage de déformation que l'on souhaite traduire. Cette loi permet de modéliser correctement des taux de déformations modérés, ce qui lui vaut d'être couramment implémentée dans les codes de calculs. Le premier terme des modèles de Mooney et de Rivlin ($i = 1$ et $j = 0$) correspond au modèle dit "Néo-Hookéen" :

$$\psi = C_{10}(I_1 - 3), \quad (4.27)$$

qui n'est autre que la formulation de l'énergie de déformation que l'on obtient par la théorie statistique gaussienne de la distribution des chaînes. L'ensemble de ces lois polynomiales, bien que facilement identifiables aux résultats expérimentaux, ne convient pas pour une modélisation s'étendant à une région de très grandes déformations.

Énergie de déformation en fonction des élongations principales

L'introduction des invariants étant une complication mathématique, à priori non nécessaire, Ogden [94] propose en 1972 une formulation basée sur les élongations principales :

$$\psi = \psi(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \sum_{k=1}^N \frac{\mu_k}{\alpha_k} (\lambda_1^{\alpha_k} + \lambda_2^{\alpha_k} + \lambda_3^{\alpha_k} - 3), \quad (4.28)$$

où μ_k désignent des coefficients de cisaillement et α_k des constantes, déterminées expérimentalement. Ce modèle phénoménologique est l'un des plus sophistiqué permettant de modéliser correctement de grandes déformations (en général $N = 3$) et de prendre en compte une grande variété de sollicitations. Toutefois, dû à son aspect empirique, cette formulation nécessite un grand nombre d'essais afin de pouvoir déterminer l'ensemble de ses paramètres.

Énergie de déformation : théorie statistique non-gaussienne

Afin de mieux comprendre les mécanismes physiques observés sur les élastomères, et plus généralement sur les polymères, des théories fondées sur la constitution chimique de ces matériaux ont été développées. Elles reposent sur des méthodes statistiques permettant de prendre en compte la nature aléatoire de l'enchevêtrement des chaînes. Initialement basées sur une approximation gaussienne, non valide dans la région des très grandes déformations, cette approche s'est étendue à une représentation non-gaussienne dont les fonctions de distribution sont plus réalistes et où la notion d'extensibilité limite des chaînes a permis de traduire les très grandes déformations.

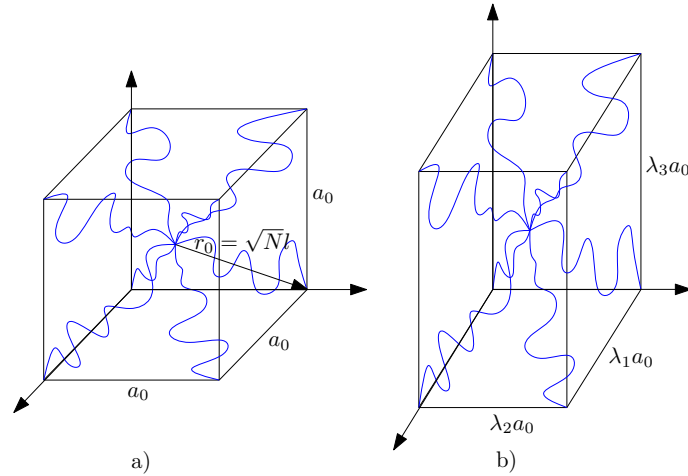


FIGURE 4.25 – Réseau à huit chaînes proposé par Arruda & Boyce - a) configuration initiale et b) configuration déformée.

Arruda et Boyce [8] ont développé un modèle reposant sur une représentation d'un réseau à huit orientations de chaînes, figure 4.25. Supérieur aux modèles obtenus avec une modélisation à trois [127] et quatre [56] chaînes, il permet d'écrire, pour un réseau de huit chaînes constituées chacune de N segments de longueur égale l , l'énergie de déformation :

$$\psi = \mu_r \left(\sqrt{N} \lambda_{chain} \beta + N \ln \frac{\beta}{\sinh \beta} \right), \quad (4.29)$$

avec $\mu_r = nk\theta$ où k est la constante de Boltzmann, θ la température absolue et n la densité de chaîne (nombre de chaîne moléculaires par unité de volume).

$\lambda_{chain} = \sqrt{\frac{I_1}{3}}$ est l'élongation de chaîne et $\beta = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\lambda_{chain}}{\sqrt{N}}\right)$ où $\mathcal{L}^{-1}$ est la fonction inverse de Langevin définie par $\mathcal{L}(\beta) = \coth \beta - (1/\beta)$.

C'est ce modèle, par sa capacité à traduire correctement les grandes déformations, figure 4.26, qui est utilisé dans la modélisation du comportement de l'élastomère GSM.

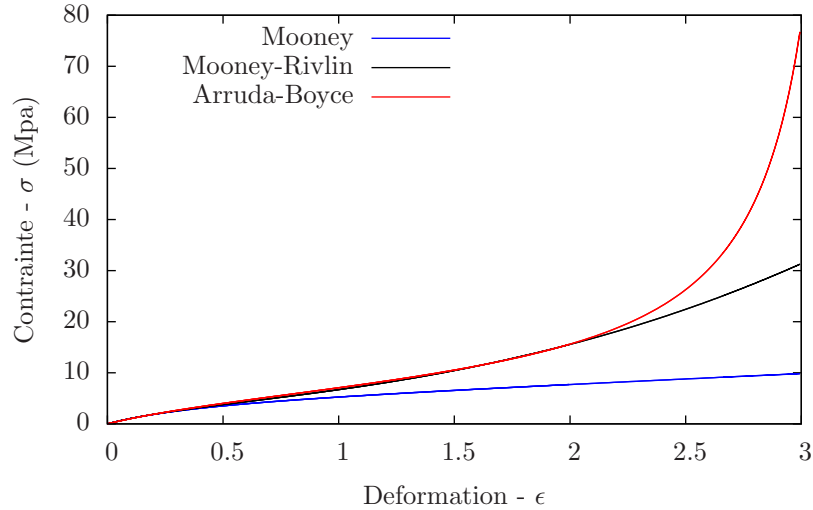


FIGURE 4.26 – Illustration du comportement hyperélastique modélisé par les énergies de déformation de Mooney, Rivlin et Arruda-Boyce

4.3.2 Hyperélasticité : prise en compte de l'effet Mullins

La modélisation de l'effet Mullins (voir section 4.1.2 et section 4.2.2) est obtenue en considérant l'élastomère comme un matériau composite, figure 4.27, constitué d'une matrice (phase molle ou Soft Domains) de fraction volumique ν_s , et de charges (phase dure ou Hard Domains) de fraction volumique ν_h . On a alors :

$$\nu_s + \nu_h = 1. \quad (4.30)$$

L'adoucissement est alors vu comme une conséquence directe d'une réorganisation quasi-irréversible du réseau moléculaire au cours de la déformation. Lorsque certaines chaînes atteignent leur extension limite, un déplacement des liaisons pontales induit une évolution des domaines qui se traduit par une augmentation de la fraction volumique du domaine mou. Mullins & Tobin [91] ont ainsi introduit la notion de déformation amplifiée. La déformation moyenne dans la matrice Λ se voit amplifiée, pour une sollicitation uniaxiale, selon :

$$\Lambda = 1 + X(\lambda - 1), \quad (4.31)$$



FIGURE 4.27 – Modélisation diphasique des élastomères. HD (Hard Domains) domaines durs et SD (Soft Domains) domaines mous, d'après Petrovic & Fergurson [100].

où λ est la déformation macroscopique globale appliquée au composite et X le facteur d'amplification qui peut s'écrire sous la forme générique $X = 1 + a\nu_h + b\nu_h^2$. Dans le cadre des thermoplastiques-élastomères, on retiendra la forme polynomiale proposée par Bergstrom & Boyce [16] :

$$\begin{aligned} X(\nu_s) &= 1 + 3.5\nu_h + 18\nu_h^2, \\ &= 1 + 3.5(1 - \nu_s) + 18(1 - \nu_s)^2. \end{aligned} \quad (4.32)$$

L'amplification de la déformation dans la phase molle (SD) peut être généralisée au cas tridimensionnel en écrivant le premier invariant du tenseur des déformations amplifié [16] :

$$\langle I_1 \rangle_m = X(\langle I_1 \rangle - 3) + 3, \quad (4.33)$$

où $\langle I_1 \rangle_m$ est le premier invariant moyen de la matrice (SD) et $\langle I_1 \rangle$ le premier invariant macroscopique du matériau composite (HD+SD). Puisque l'adoucissement constaté au cours du chargement est dû à l'évolution de la fraction volumique de la phase molle ν_s , la prise en compte de l'effet Mullins conduit à l'énergie de déformation d'Arruda & Boyce modifiée (voir [16] et [106]) :

$$\psi = \nu_s \mu_r \left(\sqrt{N} \Lambda_{chain} \beta + N \ln \frac{\beta}{\sinh \beta} \right), \quad (4.34)$$

avec $\Lambda_{chain} = \sqrt{X(\lambda_{chain}^2 - 1)^2 + 1}$, l'élongation de chaîne amplifiée. Notons que les fractions volumiques ν_s et ν_h doivent être perçues comme des fractions effectives qui, de manière générale, diffèrent des fractions volumiques réelles intervenant dans la composition du matériau.

L'évolution de la fraction volumique de la phase molle ν_s avec la déformation traduit la libération de zones initialement occluses dans le domaine dur ainsi que la dégradation, considérée comme irréversible, de la phase dure en phase molle. D'après Qi & Boyce [106], l'évolution de ν_s est alors gouvernée par la déformation locale maximale Λ_{chain}^{max} :

$$\dot{\nu}_s = A (\nu_{ss} - \nu_s) \frac{\lambda_{chain}^{lock} - 1}{(\lambda_{chain}^{lock} - \Lambda_{chain}^{max})^2} \dot{\Lambda}_{chain}^{max}, \quad (4.35)$$

où $\lambda_{chain}^{lock} = \sqrt{N}$ est l'élongation maximale d'une chaîne et

$$\dot{\Lambda}_{chain} = \begin{cases} 0 & \text{si } \Lambda_{chain} < \Lambda_{chain}^{max} \\ \dot{\Lambda}_{chain} & \text{si } \Lambda_{chain} \geq \Lambda_{chain}^{max} \end{cases} \quad (4.36)$$

ν_s évolue donc tant que $\Lambda_{chain} \geq \Lambda_{chain}^{max}$ et conserve la valeur atteinte à Λ_{chain}^{max} pour toute extension locale inférieure. Cette évolution est caractérisée par un paramètre A et une valeur de saturation ν_{ss} atteinte lorsque $\Lambda_{chain} = \lambda_{chain}^{lock}$. L'intégration de la loi d'évolution 4.35 permet ainsi d'écrire pour la fraction volumique ν_s :

$$\nu_s = \nu_{ss} - (\nu_{ss} - \nu_{s0}) \exp \left(-A \frac{\Lambda_{chain} - 1}{\sqrt{N} - \Lambda_{chain}} \right), \quad (4.37)$$

avec ν_{s0} , la fraction volumique initiale du domaine mou.

Illustration de la prise en compte de l'effet Mullins

Afin d'illustrer l'effet de la modélisation de l'effet Mullins sur le comportement mécanique, on présente, sur la figure 4.28, l'évolution de la fraction volumique de la phase molle ν_s ainsi que la réponse en contrainte pour un élément de volume soumis à un chargement cyclique. Ce chargement est constitué de deux cycles : on impose en premier lieu une déformation égale à 2 puis, pour le cycle suivant, une déformation de 3. On confronte ainsi la réponse correspondant au modèle d'Arruda-Boyce, équation 4.29, à celle correspondant au même modèle mais avec la prise en compte de l'effet Mullins, équation 4.34.

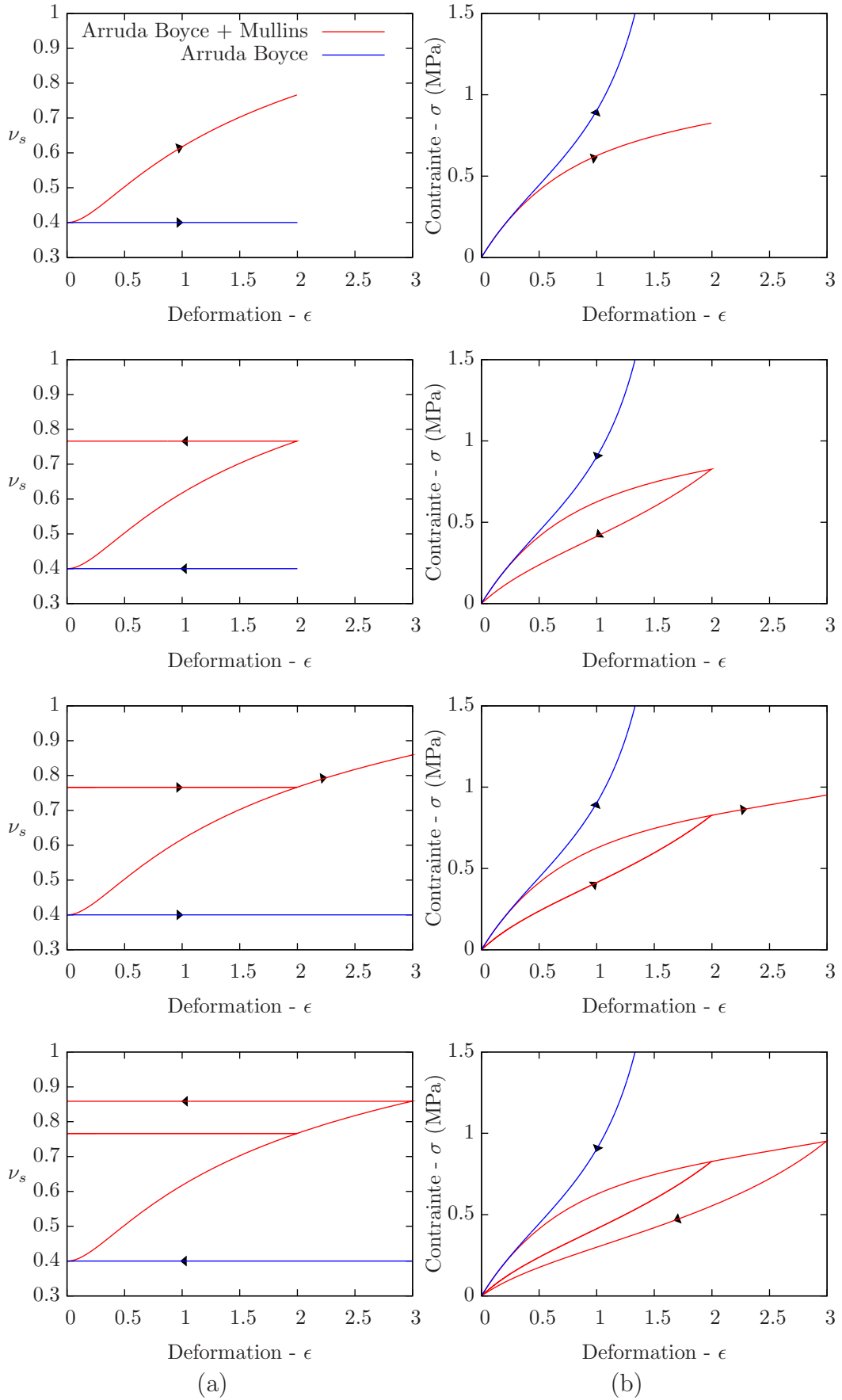


FIGURE 4.28 – Comparaison entre une loi de type Arruda-Boyce avec et sans la prise en compte de l'effet Mullins. (a) Évolution de la fraction volumique ν_s de la phase molle (SD) et (b) réponse en contrainte nominale.

4.3.3 Comportement viscoplastique

On présente ici le modèle de viscoplasticité utilisé dans le modèle. Pour plus de détail, le lecteur pourra se reporter à l'ouvrage de Besson, Cailletaud, Chaboche et Forest [18] ainsi qu'à l'article de Qi & Boyce [106].

Dans toute transformation réelle finie, l'énergie mécanique fournie au matériau n'est restituée par celui-ci qu'en partie. Cette dissipation peut engendrer une réorganisation de la structure interne du matériau conduisant à un nouvel état dans lequel les propriétés mécaniques peuvent ou non évoluer. Cette évolution est traduite par des lois d'écrouissage.

Notion de configuration intermédiaire

La viscoplasticité en transformations finies implique l'existence de grandes déformations et de grandes rotations et, en conséquence, implique un rôle majeur joué par le concept d'objectivité dans le développement des théories. On utilise la décomposition multiplicative du gradient de transformation $\tilde{\mathbf{F}}$ introduite par Lee & Liu [75]. Le mouvement élasto-viscoplastique est vu comme une décomposition en un écoulement plastique sous contrainte nulle, conduisant à une configuration intermédiaire, et une déformation élastique sous contrainte, figure 4.29. L'idée est alors d'introduire en un point un relâchement local des contraintes conduisant à une configuration intermédiaire dite relâchée.

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{F}} &= \tilde{\mathbf{F}}^e \cdot \tilde{\mathbf{F}}^p, \\ \tilde{\mathbf{F}}^e &= \tilde{\mathbf{R}}^e \cdot \tilde{\mathbf{U}}^e,\end{aligned}\tag{4.38}$$

où $\tilde{\mathbf{F}}^e$ et $\tilde{\mathbf{F}}^p$ sont respectivement la partie élastique et inélastique du gradient de déformation. La décomposition droite polaire du tenseur de déformation élastique $\tilde{\mathbf{F}}^e$ est également explicitée.

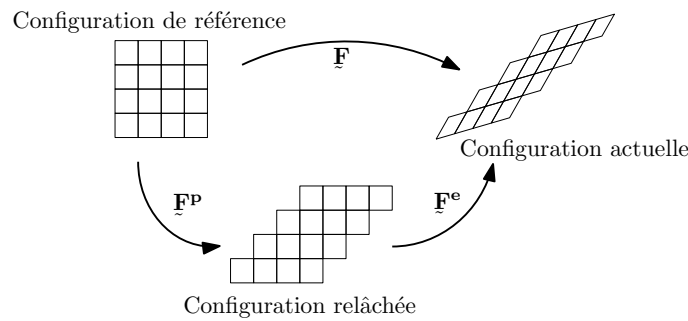


FIGURE 4.29 – Cinématique d'un milieu élastoplastique admettant une configuration relâchée, d'après [18].

La partie élastique du tenseur droit de Green Lagrange est alors définie par :

$$\mathbf{C}^e = \tilde{\mathbf{F}}^{eT} \cdot \tilde{\mathbf{F}}^e.\tag{4.39}$$

La mesure de la déformation élastique lagrangienne par rapport à la configuration relâchée est :

$$\underline{\underline{E}}^e = \frac{1}{2}(\underline{\underline{F}}^{eT} \cdot \underline{\underline{F}}^e - \underline{\underline{1}}). \quad (4.40)$$

La configuration relâchée présente l'avantage que les tenseurs des propriétés y sont constants. La déformation plastique s'effectue donc sans changement de volume, i.e. $\det \underline{\underline{F}}^p = 1 \Rightarrow J = \det \underline{\underline{F}} = \det \underline{\underline{F}}^e$.

On introduit les contraintes $\underline{\underline{S}}^e$ attachées à la configuration relâchée et définies par l'équation de transport :

$$\underline{\underline{S}}^e = J \underline{\underline{F}}^{e-1} \cdot \underline{\underline{S}}^e \cdot \underline{\underline{F}}^{e-T}, \quad (4.41)$$

et le gradient des vitesses de déformations s'exprime tel que :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{L}} &= \dot{\underline{\underline{F}}} \cdot \underline{\underline{F}}^{-1}, \\ &= \underline{\underline{L}}^e + \underline{\underline{F}}^e \cdot \underline{\underline{L}}^p \cdot \underline{\underline{F}}^{e-1} \text{ avec } \underline{\underline{L}}^p = \dot{\underline{\underline{F}}}^p \cdot \underline{\underline{F}}^{p-1}, \\ &= \underline{\underline{L}}^e + \underline{\underline{D}}^p + \underline{\underline{W}}^p, \end{aligned} \quad (4.42)$$

où la vitesse de rotation liée à la viscoplasticité est nulle, $\underline{\underline{W}}^p = 0$ [21].

Viscoplasticité en transformation finie

Une théorie de plasticité ou de viscoplasticité nécessite, dans le cas général, la définition d'une fonction de charge, d'une fonction d'écoulement et d'une fonction d'écrouissage. La forme qui s'impose fait intervenir un domaine d'élasticité dont l'évolution est gouvernée par une variable tensorielle $\underline{\underline{X}}$ qui définit le centre (écrouissage cinématique), et une variable scalaire qui définit le rayon (écrouissage isotrope).

On traite ici le cas d'un écrouissage cinématique non linéaire et on se place dans le cadre d'un formalisme de viscoplasticité associé. La fonction de charge s'écrit, en introduisant la variable tensorielle $\underline{\underline{X}}$ pour modéliser l'écrouissage cinématique :

$$F(\underline{\underline{S}}^e, \underline{\underline{X}}) = J(\underline{\underline{S}}^e - \underline{\underline{X}}) - \sigma_y + \frac{D}{2C} J^2(\underline{\underline{X}}) \quad (4.43)$$

avec $J(\underline{\underline{X}}) = (\frac{3}{2} \underline{\underline{X}} : \underline{\underline{X}})^{1/2}$. Dans un tel modèle, qui dérive du modèle général introduit par Chaboche [31], les coefficients dépendant du matériau sont la limite d'élasticité initiale, σ_y et deux coefficients représentant l'évolution de l'écrouissage cinématique, C et D .

La positivité de la dissipation intrinsèque évaluée par une approche thermodynamique implique l'existence d'un potentiel Ω définissant l'évolution des variables d'état. La variable tensorielle $\underline{\underline{\alpha}}$ associée à la variable d'écrouissage $\underline{\underline{X}}$, qui n'est autre que la déformation viscoplastique ϵ^{vp} , s'écrit :

$$\dot{\underline{\underline{\alpha}}} = \frac{\partial \Omega}{\partial \underline{\underline{X}}} = \frac{\partial \Omega}{\partial F} \frac{\partial F}{\partial \underline{\underline{X}}} = \dot{\gamma} \frac{\partial F}{\partial \underline{\underline{X}}} = \epsilon^{vp}, \quad (4.44)$$

Le premier terme, $\partial \Omega / \partial F$, désigne l'intensité de l'écoulement : la fonction de viscosité, et le second, $\partial F / \partial \underline{\underline{X}}$, donne la direction de l'écoulement définie

par la normale à la surface de charge (hypothèse de normalité). En adoptant le critère de von Mises, la direction de l'écoulement est alors donnée par :

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{\tilde{X}}} = \left(\mathbf{\tilde{n}} - \frac{3D}{2C} \mathbf{\tilde{X}} \right) = \left(\frac{3Dev(\mathbf{\tilde{S}}^e)}{2J} - \frac{3D}{2C} \mathbf{\tilde{X}} \right), \quad (4.45)$$

où Dev désigne le déviateur. La fonction Ω est ici un potentiel viscoplastique : sa donnée suffit à caractériser complètement l'écoulement en intensité et direction. À l'inverse de la plasticité, où le multiplicateur plastique $\dot{\lambda}$ est déterminé à l'aide de la condition de cohérence $\dot{F} = 0$, choisir une fonction F et une forme de potentiel Ω suffit à définir un modèle de viscoplasticité. Dans le cadre de la présente modélisation, deux lois d'écoulement sont proposées : le modèle de Norton et le modèle de Sellars et Teggart (où la fonction $\sinh$ remplace la forme exponentielle proposée par Qi & Boyce [106] [107]) :

$$\begin{aligned} \text{Norton : } \dot{\gamma} &= \left\langle \frac{F}{K} \right\rangle^n \\ \text{SellarsTegart : } \dot{\gamma} &= d_0 \left\langle \sinh \left(\frac{F}{\sigma_0} \right) \right\rangle^m \end{aligned} \quad (4.46)$$

4.3.4 Conclusion

Comme stipulé par Qi & Boyce, la modélisation des élastomères n'est pas chose triviale. Le modèle ainsi proposé permet de prendre en compte la non-linéarité de la loi de comportement, la dépendance vis-à-vis de la vitesse de sollicitation, la plasticité ainsi que l'effet Mullins et son adoucissement associé. Le modèle développé et utilisé pour la modélisation du comportement mécanique du GSM reprend celui de Qi & Boyce auquel on a ajouté un écrouissage cinématique non-linéaire, modifié la loi de viscosité et remplacé l'élasticité linéaire de la branche B par un ressort hyperélastique gouverné par une simple loi Néo-Hookéenne. Ce modèle est synthétisé sur la figure 4.30.

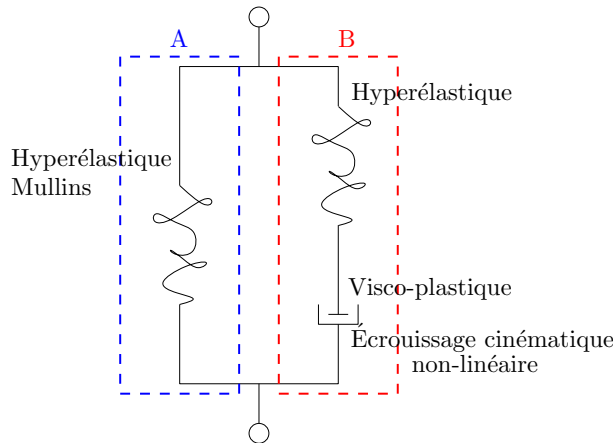


FIGURE 4.30 – Modèle retenu pour la modélisation du GSM.

4.4 Approche numérique du comportement du GSM

Une fois la modélisation de la loi de comportement du matériau établie et implémentée dans le code de calcul numérique ZeBuLoN [19], s'en suit une étape d'identification des paramètres rhéologiques ainsi qu'une validation par simulation numérique sur une structure complète. Cette section présente la méthode d'identification retenue ainsi que l'utilisation du modèle dans la définition d'un modèle mécanique numérique.

4.4.1 Identification des paramètres rhéologiques

Afin de déterminer les paramètres rhéologiques de la loi de comportement du GSM, on a recours à des algorithmes d'optimisation implémentés dans le code de calcul ZeBuLoN et dont l'objectif est de minimiser une fonction de coût ou fonction objectif. Cette fonction de coût est déterminée par la confrontation des simulations numériques et des essais expérimentaux décrits dans la section 4.2.2. La procédure d'optimisation choisie fait consécutivement appel à deux algorithmes :

- un algorithme d'optimisation *génétique*, qui doit son nom à son analogie avec la théorie de l'évolution développée par Darwin,
- un algorithme d'optimisation dit du *simplex*, créé par le mathématicien George Dantzig en 1947.

À ces algorithmes d'optimisation s'ajoute une phase d'optimisation *à la main* qui permet d'initialiser le jeu de données sur la base de considération physiques. Une première tentative d'optimisation est ainsi conduite à l'aide de l'algorithme génétique. Cet algorithme repose sur le principe de survie et de reproduction des individus les mieux adaptés à leur environnement et dont l'évolution a pour conséquence d'une part la transmission des caractéristiques nécessaires à la survie et d'autre part, la convergence évolutive des espèces. Ce principe est alors complété par un principe de mutation qui vient alors augmenter la diversité génétique. Cette méthode à convergence itérative est donc stochastique et a pour avantage d'optimiser une fonction objectif quelconque sans exigence de continuité ou de dérivabilité. A l'issue de l'optimisation conduite avec l'algorithme génétique, plusieurs groupes d'individus (ou jeux de paramètres) sont retenus. On procède alors à une optimisation basée sur une méthode de programmation linéaire : l'algorithme du simplex. Cette méthode est aujourd'hui très populaire et fortement utilisée dans le domaine de l'optimisation. Son principe repose sur des considérations géométriques où l'ensemble des inégalités linéaires définit un polytope dans l'espace dont il s'agit de trouver le sommet optimal.

Dans leur étude, Qi & Boyce [107] décomposent le comportement du matériau en deux parties : une composante à l'équilibre qui ne dépend pas du temps qu'ils nomment *equilibrium path* et une composante dépendante du temps, *rate-dependent part*, dont le rôle est de modéliser la dérive par rapport au comportement à l'équilibre. Si la considération du chemin à l'équilibre

procure l'avantage de pouvoir déterminer les paramètres du modèle *à la main* pour le grade de matériau qu'ils considèrent, elle nécessite néanmoins la donnée d'essais de multi-relaxation de très grande durée. En outre, ces essais de relaxations font intervenir un temps de relaxation qui reste difficile à déterminer et qui font du chemin à l'équilibre une notion peu robuste. La stratégie mise en œuvre dans cette étude repose également sur le comportement stabilisé du matériau, mais en considérant les cycles stabilisés dans leur ensemble. Ainsi, pour tous les essais expérimentaux considérés, on optimisera sur la base du cycle stabilisé. Les cycles précédant le cycle stabilisé ne seront que le chemin permettant de modéliser correctement le comportement stabilisé du matériau.

Résultats de l'optimisation

On présente sur la figure 4.31 des résultats obtenus après optimisation des paramètres de la loi de comportement.

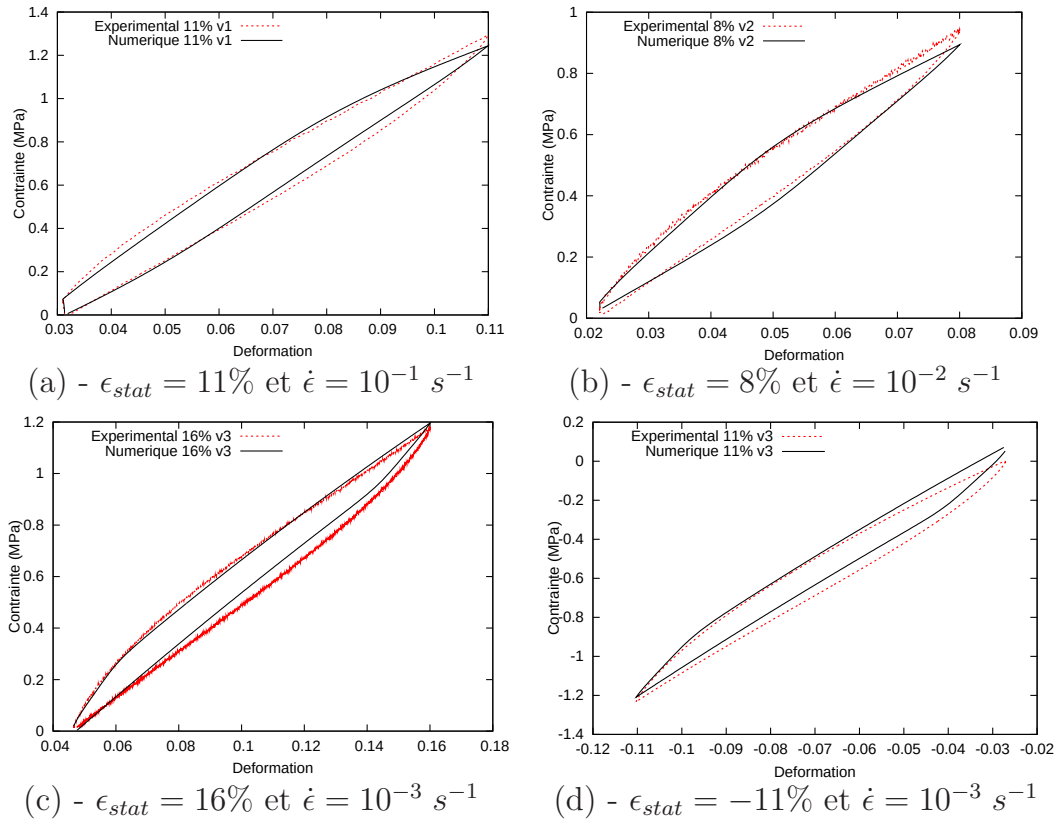


FIGURE 4.31 – Comparaison du cycle stabilisé expérimental et du cycle stabilisé numérique. Différents essais à différentes déformations et différents taux de déformations ont été représentés.

La confrontation du cycle stabilisé à différents taux de déformation, à savoir $10^{-1}s^{-1}$, $10^{-2}s^{-1}$, $10^{-3}s^{-1}$, ainsi que pour différentes déformations 8%, 11%, -11% et 16%, permet de s'assurer de la bonne modélisation ainsi que de la bonne représentativité du comportement du matériau. Le jeu de paramètres identifié et présenté dans l'annexe B, permet d'obtenir une loi de comportement modélisant fidèlement le comportement stabilisé du GSM. À titre

d'exemple permettant d'observer l'expression du modèle dans son ensemble, la figure 4.32 traduit la modélisation numérique d'un essai expérimental dans son ensemble. On peut y observer la modélisation des différentes caractéristiques physiques telles que la déformation résiduelle, l'hysteresis ou encore l'adoucissement cyclique. Si l'écart de comportement en contrainte-déformation sur l'ensemble des cycles, figure 4.32-(c), peut sembler significatif, il n'est en fait que de 15% sur le premier cycle ce qui est somme toute satisfaisant étant donné la complexité du comportement mécanique du matériau. L'ensemble des paramètres rhéologiques ainsi déterminé permet d'envisager le calcul de structures représentatives des PTF.

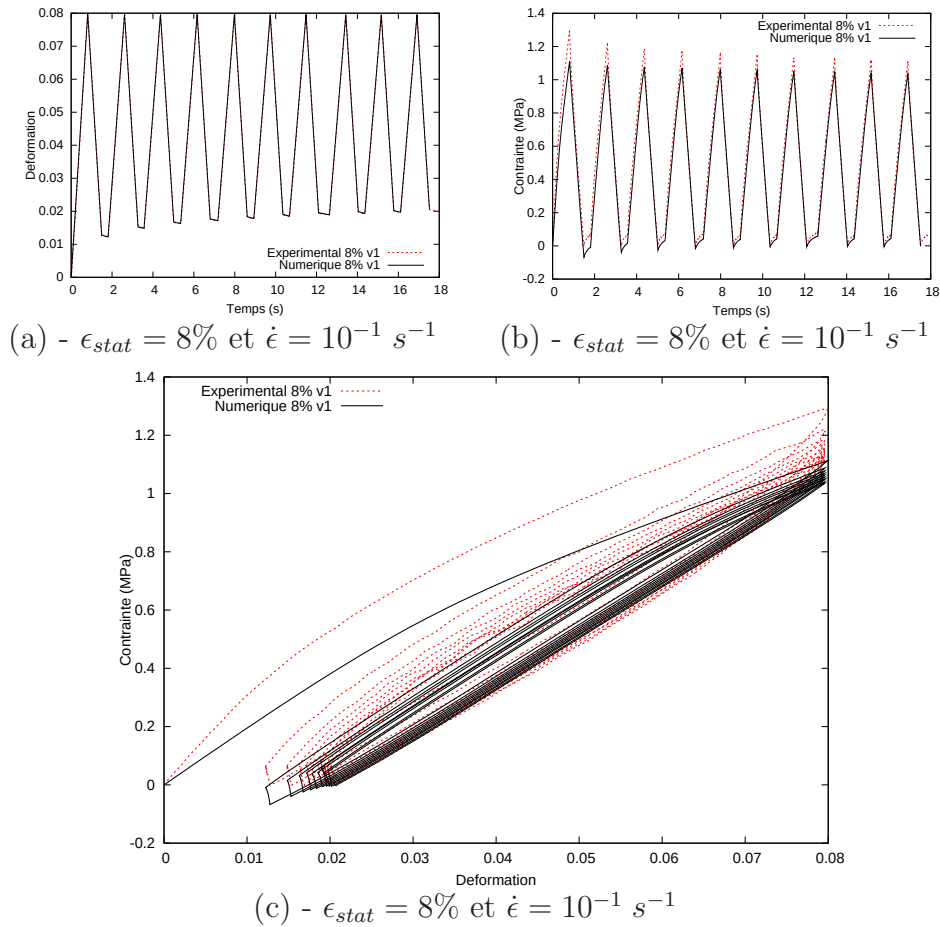


FIGURE 4.32 – Modélisation numérique d'un essai expérimental dans son ensemble. L'expérience est représentée en traits pointillés et la simulation numérique en traits pleins.

A propos de l'effet Payne

Lors de la formulation théorique du modèle, aucune brique théorique n'a été introduite avec comme objectif particulier de prendre la modélisation de l'effet Payne. Si pour autant rien n'infirme que cet effet n'est pas traduit par le présent modèle, l'une des seules solutions envisagées est de reproduire les

essais expérimentaux introduits dans la section 4.2.2. L'évolution des modules élastique et de perte est présentée sur la figure 4.33.

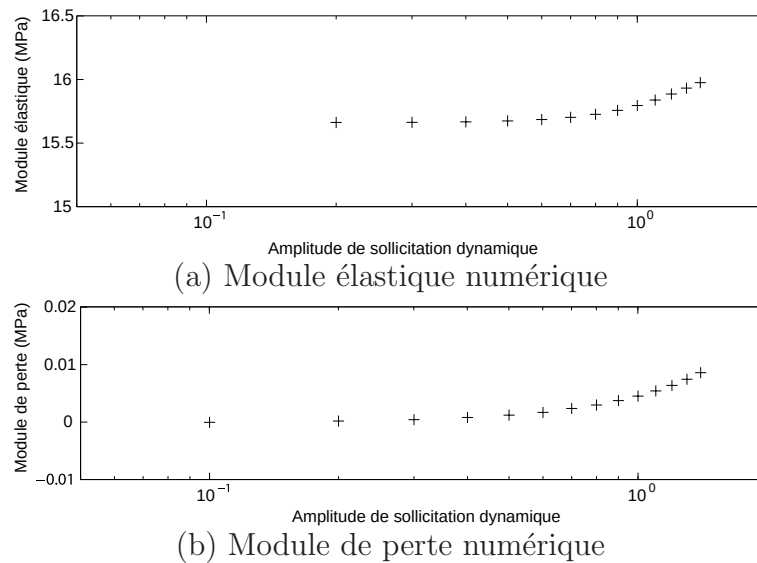


FIGURE 4.33 – Évolution numérique des modules élastique et de perte en fonction de l'amplitude de sollicitation dynamique et de la fréquence. Simulation numérique de l'essai présenté en figure 4.21

Les modules élastique et de perte obtenus par simulation numérique sont à confronter directement aux données expérimentales présentées sur les figures 4.21-(a) et 4.21-(b). Les modules élastique et de perte demeurent en fait quasi-identiques au module tangent à la précharge statique imposée et n'exhibent aucune dépendance envers la fréquence ou l'amplitude de sollicitation (toutes les courbes sont confondues). Bien que non surprenante, une telle observation est essentielle et devra être considérée lorsque l'on utilisera ce modèle pour une application dynamique autour d'une précharge statique. La physique entrant en jeu dans l'effet Payne ainsi que le comportement en fréquence sont absents de la modélisation proposée.

4.4.2 Calculs de structure

Les paramètres rhéologiques permettant de décrire le comportement du GSM étant déterminés, on procède à des simulations sur des structures complètes. L'ensemble de ces simulations numériques a pour vocation l'élaboration d'un modèle permettant le calcul de la déformée d'une PTF sous des contraintes fluides.

Convergence en maillage et nature des éléments finis

Étant donné que les PTF sont modélisées au sein du montage VALDO par des disques circulaires percés, on peut procéder à des simulations numériques axisymétriques. La géométrie est donnée sur la figure 4.34 où L représente la largeur du disque et e son épaisseur.

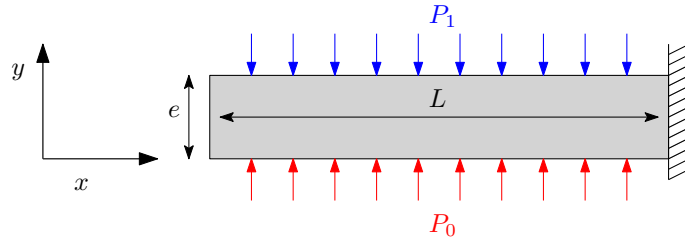


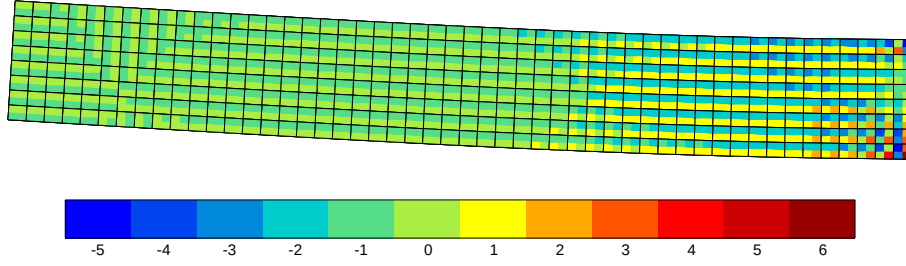
FIGURE 4.34 – Géométrie d'une PTF telle qu'utilisée dans le montage VALDO.

Une première série de calculs est alors entreprise afin d'établir un choix concernant la nature et la finesse du maillage. Ces calculs sont réalisés sous l'hypothèse de grandes déformations axisymétriques. La partie latérale droite de la structure, figure 4.34, est bloquée en déplacement et a ainsi pour vocation de modéliser l'encastrement de la structure. On impose de part et d'autre de la structure des pressions sur la face supérieure et inférieure. De façon générale, on établira comme convention que $P_0 > P_1$ et on précisera pour chaque cas la valeur de chacune des pressions. Le chargement des élastomères étant une procédure délicate, on choisit comme stratégie une évolution linéaire de la pression avec le temps.

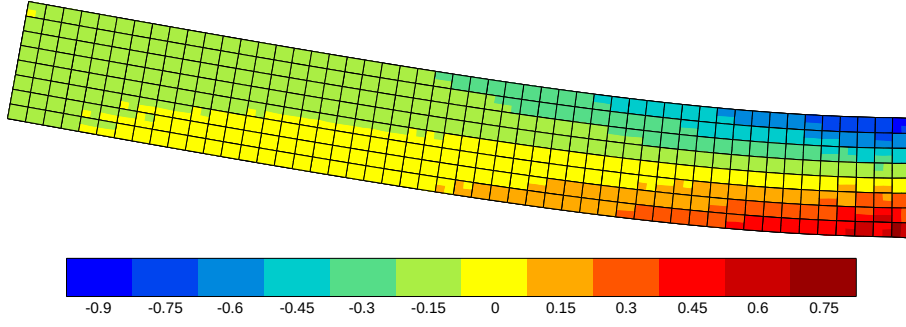
La figure 4.35 présente l'état de contrainte σ_{xx} dans le matériau. L'utilisation d'éléments finis linéaires est connue pour être problématique en flexion (phénomène de verrouillage) et exhibe des inhomogénéités ayant pour conséquence de sous évaluer la déformée. Cette problématique est résolue par l'utilisation d'éléments dits à intégration sélective permettant ainsi d'éviter les oscillations de pression dans les éléments quand le matériau est quasi-incompressible. Cette méthode repose sur la modification du gradient de transformation en un gradient $\bar{\mathbf{F}}$ défini par :

$$\bar{\mathbf{F}} = \left(\frac{\bar{J}}{J} \right)^{1/3} \mathbf{F}, \quad (4.47)$$

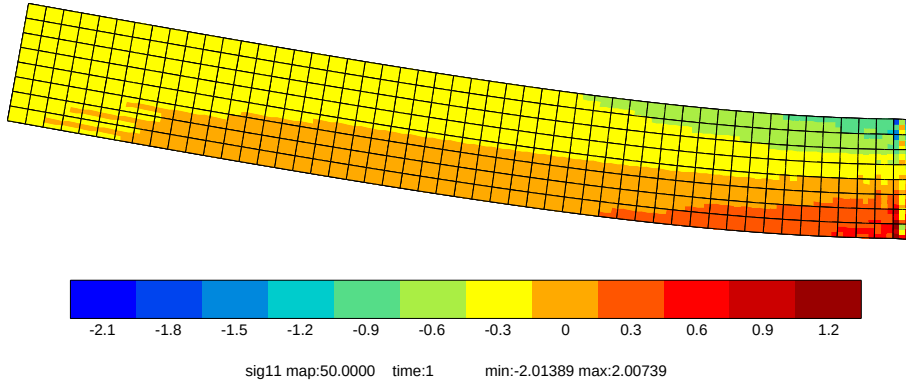
où :



(a) Maillage en quadrangles linéaires



(b) Maillage en quadrangles linéaires à intégration sélective



(a) Maillage en quadrangles quadratiques

FIGURE 4.35 – Contrainte σ_{xx} au point de Gauss pour les différents types d'éléments finis étudiés dans le calcul de structure. Conditions de calcul : $P0 = 106325$ Pa et $P1 = 101325$ Pa.

$$\bar{J} = \frac{\int_V J dV}{\int_V dV}. \quad (4.48)$$

L'utilisation d'éléments linéaires à intégration sélective permet d'obtenir les mêmes résultats que lorsque l'on utilise des éléments quadratiques, figure 4.36. En outre, on choisira dans la suite comme type d'élément des éléments quadrangles à intégration quadratique. Ce choix est basé sur le fait que le gain en temps de calcul obtenu par l'utilisation d'éléments à intégration sélective demeure très faible dans notre cas. Une étude en convergence du maillage à également été menée, tableau 4.5, et a permis de retenir le maillage $M2$ avec lequel l'erreur commise sur la prévision de la flèche demeure inférieure à 1% par rapport au maillage $M4$ deux fois plus dense.

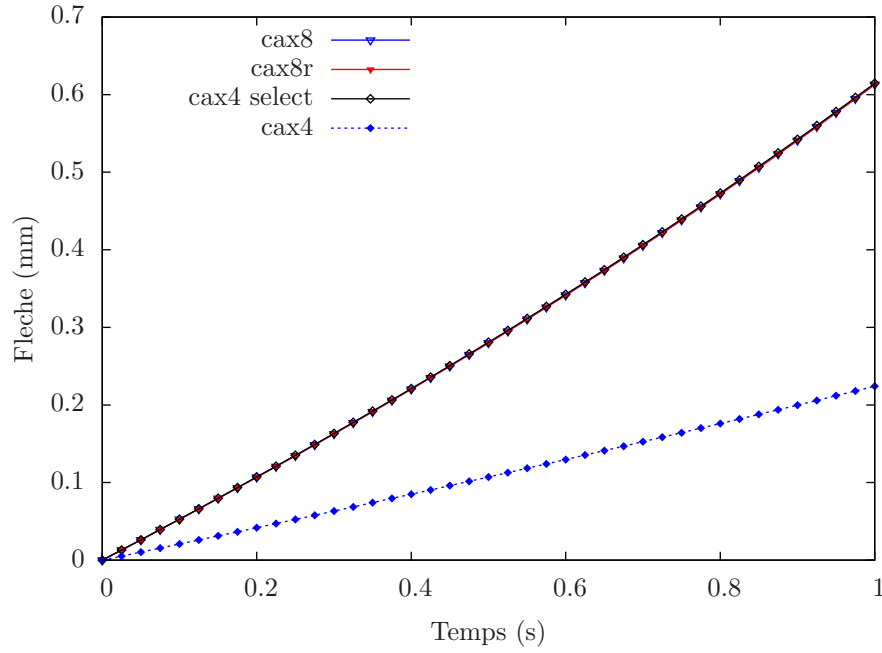


FIGURE 4.36 – Évolution de la flèche maximale en fonction du type d'élément choisi.

Maillage	nombre d'éléments	Écart relatif pour la flèche
M_1	20×4	2.5%
M_2	30×6	1%
M_3	40×8	0.3%
M_4	50×10	-

Tableau 4.5 – Écart relatif de flèche entre les différents maillages quadrangles à intégration quadratique. Conditions de calcul : $P_0 = 106325$ Pa et $P_1 = 101325$ Pa.

Confrontation à la solution de Timoshenko

Afin de valider le modèle numérique mis en oeuvre pour le calcul de structure, on peut comparer le résultat de simulations numériques à la solution analytique de Timoshenko [124]. Ce modèle, déterminé dans le cadre des petites déformations, permet d'obtenir une expression de la flèche maximale d'une plaque circulaire percée en son centre et encastree à ses extrémités en fonction de la pression imposée P :

$$w_{max} = k_1 \frac{Pa^4}{Eh^3}, \quad (4.49)$$

où w_{max} est la flèche maximale, a le rayon extérieur du disque, b le rayon intérieur, h l'épaisseur et E le module d'Young. L'ensemble de ces données est explicité sur la figure 4.37. D'après l'étude expérimentale et les paramètres rhéologiques du matériau, il est possible de déterminer un module d'Young

apparent du GSM compris entre $15 \text{ MPa} < E_{GSM} < 34 \text{ MPa}$.

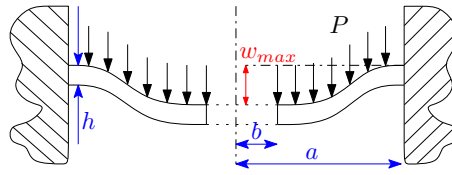


FIGURE 4.37 – Plaque circulaire encastée et percée en son milieu, d’après [124] - cas 10.

Le tableau 4.6 synthétise l’ensemble des résultats obtenus pour différentes géométries de disque dans le cadre des petites déformations. Cette étude a notamment permis de définir un coefficient k_{ptf} pour les ratio $a/b = 1.33$ et $a/b = 1.2$ qui correspondent aux dimensions des PTF utilisées dans le montage VALDO. On évalue $k_{ptf1} = 0.004677$ et $k_{ptf2} = 0.000979$. Cette solution analytique pourra être utilisée lorsque les déformations demeureront petites, et ce même lorsque l’épaisseur du disque est de l’ordre de grandeur de a/b .

a/b	épaisseur (mm)	E (MPa)	ν	numérique w_{max} (mm)	analytique w_{max} (mm)	écart
1.25	0.1	34000	0.3	$1.4216 \cdot 10^{-2}$	$1.4222 \cdot 10^{-2}$	0.04%
1.25	1	34	0.3	$1.4636 \cdot 10^{-2}$	$1.4222 \cdot 10^{-2}$	2.9%
4/3	0.1	34000	0.3	$3.3426 \cdot 10^{-2}$	$k_{ptf1} \frac{30^4 0.0003}{34}$	-
4/3	1	34	0.3	$3.4186 \cdot 10^{-2}$	$k_{ptf1} \frac{30^4 0.0003}{34}$	-
1.2	0.1	34000	0.3	$6.9939 \cdot 10^{-3}$	$k_{ptf2} \frac{30^4 0.0003}{34}$	-
1.2	1	34	0.3	$7.2938 \cdot 10^{-3}$	$k_{ptf2} \frac{30^4 0.0003}{34}$	-

Tableau 4.6 – Déformée maximale pour un disque circulaire soumis à une pression $P0 = 300 \text{ Pa}$ et $P1 = 0 \text{ Pa}$.

La validité d’une telle approche est finalement testée hors du strict champ d’application des petites déformations. Ceci est effectué en imposant une pression d’un ordre de grandeur supérieur à celle servant à déterminer les coefficients de la loi analytique. Les résultats des simulations numériques pour les disques de rapport $a/b = 4/3$ et $a/b = 1.2$ sont respectivement présentés sur les figures 4.38 et 4.39. Les cas de quasi-incompressibilité sont également considérés afin d’obtenir un encadrement plus précis du module apparent de la loi de comportement du GSM. On remarque que, pour de telles conditions de calcul, le modèle analytique approxime de façon satisfaisante la flèche déterminée numériquement. Précisons toutefois que cette conclusion est obtenue dans le cas où l’on n’impose qu’une seule pression à la structure et mériterait donc d’être vérifiée avec l’ajout d’une composante moyenne. Cette étude n’a pas été réalisée ici car elle demeure sans réel intérêt dans la mesure où l’unique objectif de ces calculs est de valider le modèle numérique établi.

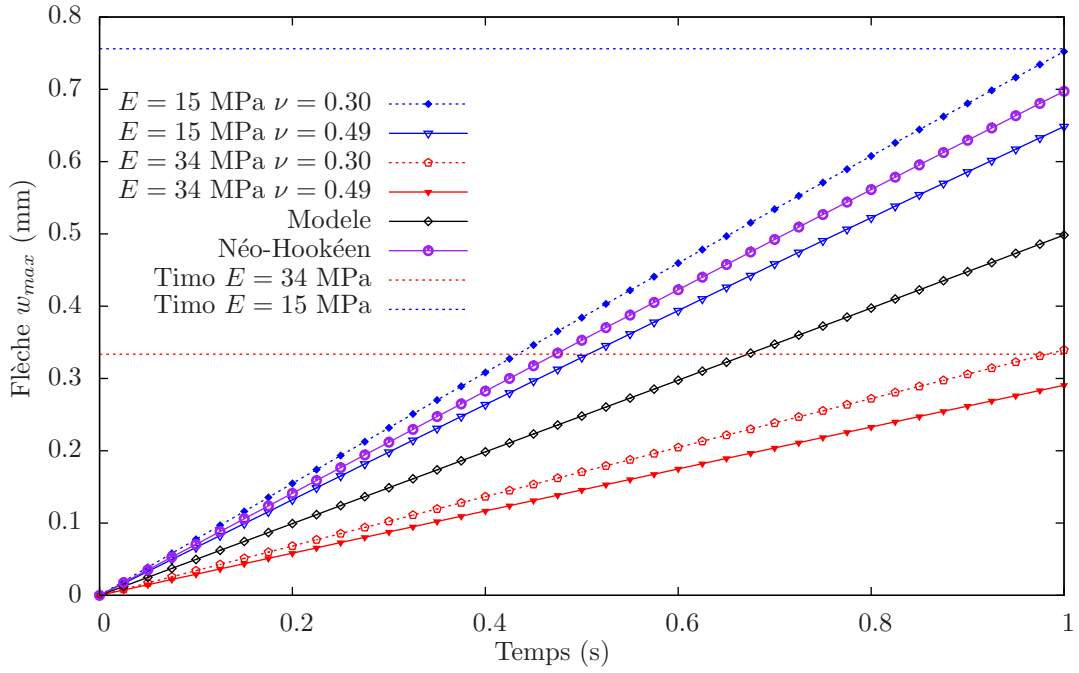


FIGURE 4.38 – Déflexion pour une pression de 0.003 MPa imposée linéairement en temps. Calcul axisymétrique de la PTF 45. Le modèle Néo Hookéen est paramétré pour $C_{10} = 2.33$ Mpa.

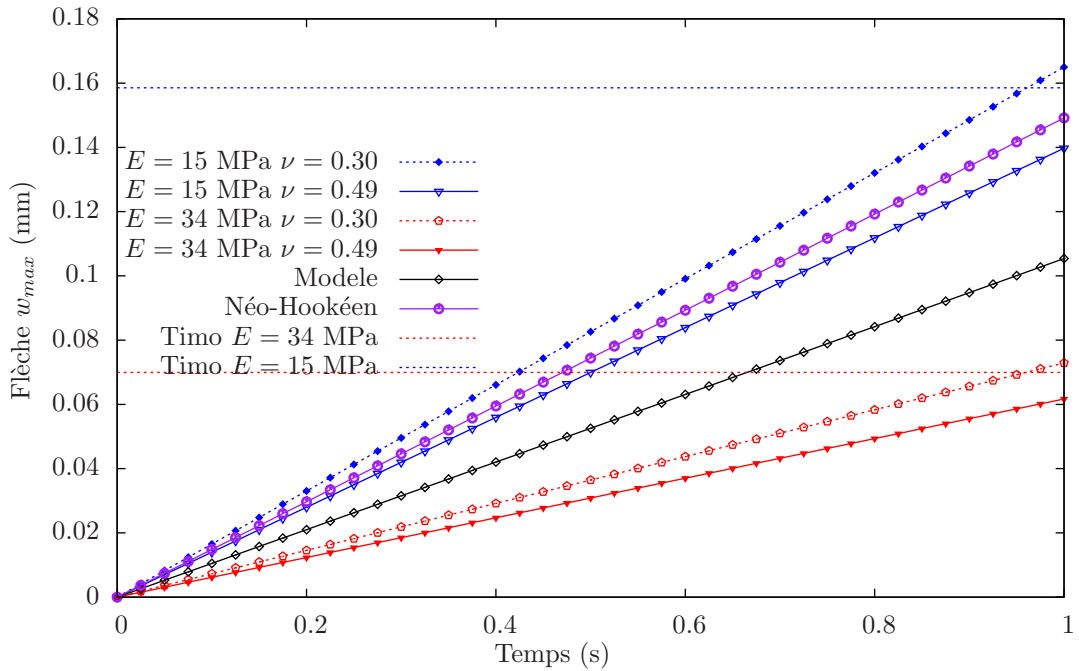


FIGURE 4.39 – Déflexion pour une pression de 0.003 MPa imposée linéairement en temps. Calcul axisymétrique de la PTF 50. Le modèle Néo Hookéen est paramétré pour $C_{10} = 2.33$ Mpa.

Influence de la vitesse de chargement

Le modèle numérique ayant été validé, on se propose ici d'évaluer l'influence de la vitesse de sollicitation sur la flèche de la structure. La pression étant

imposée comme une fonction qui varie linéairement en fonction du temps il est alors aisé de procéder à de telles simulations.

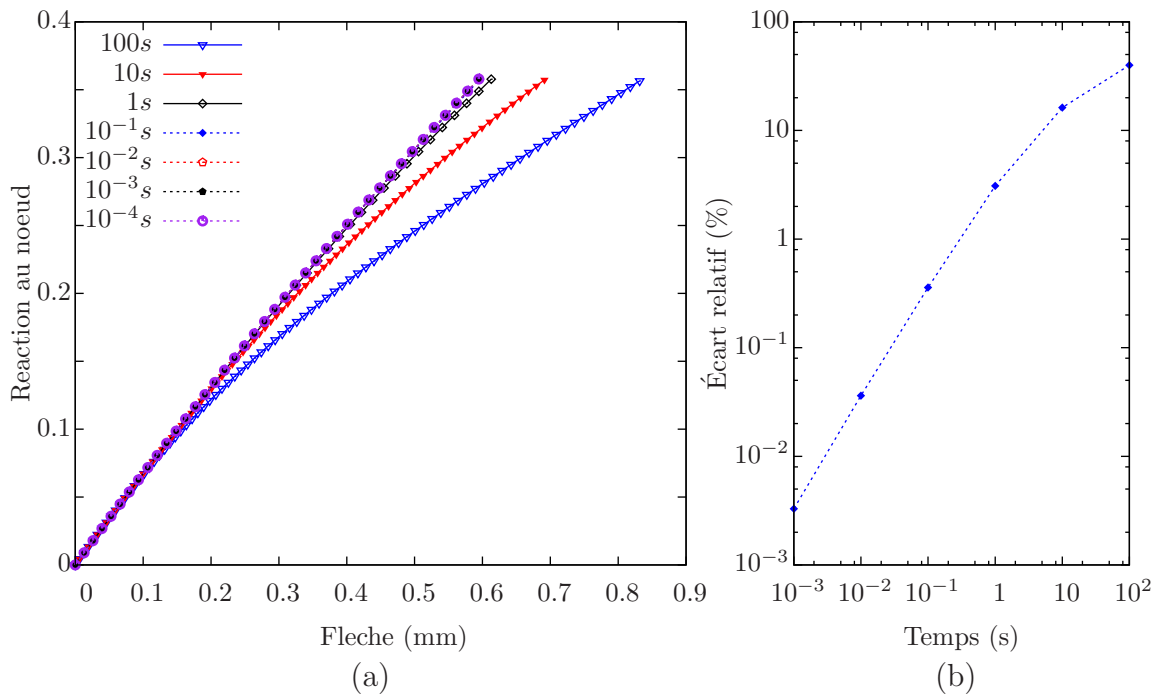


FIGURE 4.40 – (a) Evolution de la flèche maximale en fonction de la vitesse de sollicitation et (b) écart relatif de la flèche par rapport à la sollicitation la plus rapide.

La figure 4.40 présente l'évolution de la flèche en fonction de la vitesse de sollicitation. On observe alors un raidissement de la structure avec la vitesse de sollicitation et un écart relatif entre la vitesse la plus rapide et la plus lente de près de 40%. De telles simulations confirment que la prise en compte du temps dans les simulations de structure en GSM est d'une importance cruciale dans la prédiction des déformations. A titre d'illustration, la figure 4.41 présente l'état déformé de la structure.

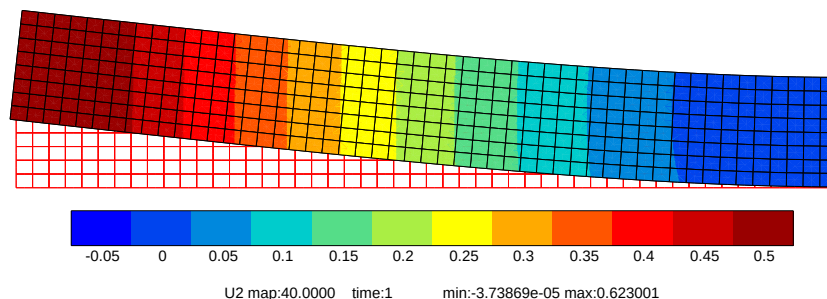


FIGURE 4.41 – Résultats d'une simulation numérique d'un essai de traction uniaxiale sur le GSM.

Modes propres

La détermination des fréquences des modes propres de vibrations des PTF est d'un intérêt majeur lorsqu'il s'agira de prendre en compte leur comportement dynamique. Néanmoins, comme on a pu le voir, le modèle en l'état actuel peine à traduire l'effet Payne ce qui a un impact certain sur la rigidité du matériau (qui peut être de l'ordre de 2) et donc sur la prédiction des fréquences propres. De plus, une réflexion similaire pourrait être conduite sur la méthode même de l'évaluation numérique des fréquences de vibrations qui par essence ne prend également pas en compte l'amplitude des vibrations. Il s'agit donc là d'une problématique, bien que majeure, encore non résolue. À titre indicatif, des calculs ont cependant été réalisés pour les disques précédemment étudiés et les fréquences trouvées sont résumées dans les tableaux 4.7 et 4.8.

Mode	PTF			
	d55	d50	d45	d40
1	5138.2 Hz	1535.7 Hz	711.00 Hz	404.42 Hz
2	5137.9 Hz	1539.5 Hz	718.62 Hz	416.94 Hz
3	5140.0 Hz	1552.7 Hz	746.07 Hz	462.70 Hz

Tableau 4.7 – Modes propres de la structure en élastomère en configuration non déformée. La modélisation du comportement est celle précédemment établie.

Les fréquences propres déterminées avec la modélisation ici établie sont confrontées aux fréquences propres obtenues avec un simple modèle Néo-Hookéen utilisé dans de précédentes études ($C_{10} = 2.3$ MPa) [140] [141]. L'écart relatif est de l'ordre de 40% et ce quelque soit le diamètre intérieur où le mode considéré. Ces résultats confirment ainsi l'importance d'une modélisation précise du comportement du matériau lorsque l'on s'intéresse à son comportement dynamique.

Mode	PTF			
	d55	d50	d45	d40
1	3048.0 Hz	853.63 Hz	397.84 Hz	233.75 Hz
2	3050.7 Hz	859.40 Hz	406.63 Hz	246.26 Hz
3	3058.7 Hz	877.30 Hz	434.16 Hz	284.91 Hz

Tableau 4.8 – Modes propres de la structure en élastomère en configuration non déformée. Loi de comportement Mooney Rivlin.

À titre d'illustration, la figure 4.42 fournit une représentation spatiale des trois premiers modes de vibration des PTF.

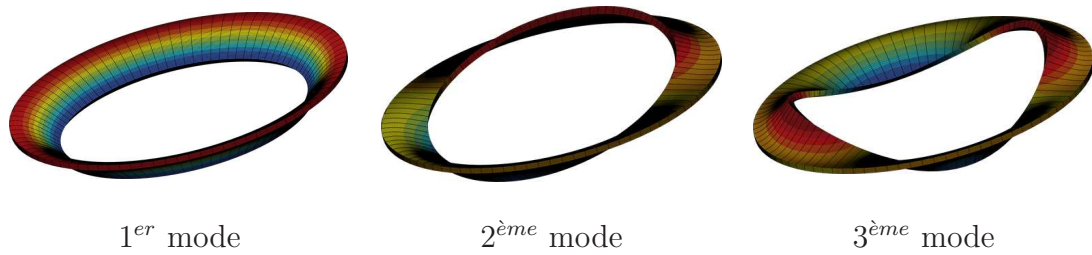


FIGURE 4.42 – Trois premiers modes de vibration de la structure en élastomère GSM.

4.5 Conclusion et perspectives

Dans ce chapitre, le comportement mécanique du GSM a été approché par étude expérimentale. La méthodologie développée a permis l'identification et la quantification de mécanismes physiques propres aux élastomères et a ainsi orienté le choix du modèle vers celui proposé par Qi & Boyce en 2005. Le modèle proposé pour le GSM reprend ainsi le modèle de Qi & Boyce où la loi de viscosité a été modifiée et un écrouissage cinématique non-linéaire ajouté. L'identification des paramètres rhéologiques a pu être effectuée sur la base d'essais expérimentaux.

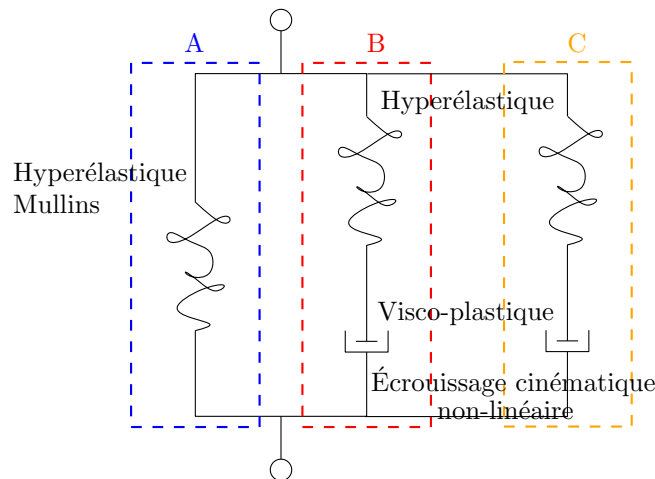


FIGURE 4.43 – Modèle proposé permettant de prendre en compte l'effet Payne dans le comportement des élastomères. La branche *C* peut être choisie identique en nature à la branche *B* mais sera dépourvue d'écrouissage.

La loi de comportement du GSM fixée, une seconde partie de ce chapitre a été consacrée à la définition et à la validation d'un modèle numérique permettant le calcul de structures telles que les PTF utilisées dans le montage VALDO. Cette modélisation numérique a été validée et notamment corroborée par une solution analytique.

Si le modèle décrivant le comportement du GSM s'est révélé efficace dans la prise en compte de la majeure partie des caractéristiques propres aux élastomères, il peine notamment à traduire l'effet Payne. Cette *carence* pourra

avoir un effet non négligeable sur le comportement dynamique des structures. Afin d'y remédier, on propose d'ajouter une branche C au modèle, figure 4.43. Cette branche pourra être prise comme identique à la branche B à l'exception faite d'un écrouissage nul.

Un tel modèle est disponible dans ZeBuLoN et une tentative d'optimisation des paramètres a été initiée mais n'a conduit à l'heure actuelle à aucun résultat probant.

Chapitre 5

Approche numérique du couplage Fluide-Structure

Dans ce chapitre, une approche numérique multiphysique permettant de simuler l'interaction des PTF avec l'écoulement interne est développée et validée. Cette méthodologie repose sur une approche partitionnée entre le code CEDRE et le code ZeBuLoN. Avec la définition d'un modèle numérique pour le fluide, les simulations couplées sont rendues possibles en utilisant le modèle pour la structure établi dans le chapitre 4. Ces simulations aéro-mécaniques seront notamment comparées aux résultats issus de l'étude expérimentale menée à l'aide du montage VALDO, chapitre 2.

5.1 Introduction

La Mécanique des solides considère généralement les fluides environnants comme d'influence négligeable, tandis que la Mécanique des fluides ne voit dans les solides que des frontières du domaine d'analyse. Cette phrase d'introduction du cours Fluides & Solides de E. de Langre [39] résume parfaitement les approximations, bien souvent légitimes, conduites dans un grand nombre de cas. Toutefois, il existe des situations où Mécanique des fluides et des solides doivent être considérées conjointement afin d'aboutir à une modélisation satisfaisante des phénomènes physiques. Il s'agit là de la Mécanique des interactions fluide-structure. Qu'il s'agisse du flottement d'une aile d'avion ou encore de la rupture du pont de Tacoma [20], de nombreux exemples [39] traduisent à la fois l'étendue scientifique et l'importance des interactions fluide-structure dans la résolution de problèmes réels.

5.2 Mécanique des fluides et des solides

5.2.1 Mécanique des fluides

La simulation numérique des écoulements fluides compressibles est basée sur la résolution des équations de conservation de la masse, de quantité de mouvement et d'énergie. Bien que connues depuis longtemps, ces équations posent

encore de nombreux problèmes, tant sur le plan théoriqueⁱ que numérique. Dans ce qui suit, une description succincte des principaux concepts qui s'y rattachent est établie et le lecteur est invité à consulter différents ouvrages tels que [26] et [116] afin d'approfondir le sujet.

La résolution numérique des équations de la mécanique des fluides compressibles est entreprise à l'aide du code de calcul CEDRE développé à l'ONERA [96] et dédié à la simulation numérique d'écoulements dans un contexte se rapportant aux problématiques rencontrées en énergétique et propulsion. Si le code en question permet de considérer le milieu fluide comme un mélange d'espèces éventuellement réactif, l'approche multi-espèce et réactive ne sera pas utilisée dans le cadre de cette étude. Une description théorique et numérique complète de la chaîne de calcul peut être trouvée dans la référence [29].

Equations de conservation en mécanique des fluides

L'évolution d'un fluide est régie par les équations de conservation de trois quantités : masse, quantité de mouvement et énergie :

$$\frac{\partial \rho_F}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_F \mathbf{u}) = 0 \quad (5.1a)$$

$$\frac{\partial \rho_F \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_F \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) = \rho_F \mathbf{g} + \nabla \cdot \underline{\underline{\sigma_F}} \quad (5.1b)$$

$$\frac{\partial \rho_F e}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_F \mathbf{u} e) = -\nabla \cdot (\rho_F \mathbf{u}) + \nabla \cdot (\underline{\underline{\sigma_F}} \cdot \mathbf{u}) + \rho_F \mathbf{g} \cdot \mathbf{u} - \nabla \cdot \mathbf{q} \quad (5.1c)$$

où $\rho_F(\mathbf{x}, t)$ est la masse volumique du fluide, $p(\mathbf{x}, t)$ la pression, $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ le vecteur vitesse, $\mathbf{g}(\mathbf{x}, t)$ une force volumique extérieure (par exemple la gravité) et $\underline{\underline{\sigma_F}}(\mathbf{x}, t)$ le tenseur des contraintes du fluide donné par $\underline{\underline{\sigma_F}} = -p\mathbf{1} + \underline{\underline{\tau}}$. $\underline{\underline{\tau}}(\mathbf{x}, t) = -\mu(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T)$ est le tenseur des contraintes visqueuses et $\mu(p, T)$ la viscosité dynamique du fluide. e est l'énergie totale et $\mathbf{q}$ le flux de chaleur. Selon le fluide considéré, une loi d'état vient compléter ces équations en précisant la relation entre la pression, la masse volumique et la température. Dans le cas d'un gaz parfait, on a par exemple :

$$p = \rho RT \quad (5.2)$$

R étant la constante des gaz parfait. Ce système d'équations est complété par un jeu de conditions aux limites et initiales.

Discretisation spatiale et temporelle

La résolution numérique des équations de conservation impose le choix d'une discrétisation spatiale et temporelle.

Le code CEDRE utilise comme support de la discrétisation spatiale, un maillage non structuré général où chaque élément est un polyèdre à nombre

i. L'existence et la régularité d'une solution aux équations de Navier-Stokes demeure un problème d'actualité désigné comme l'un des 7 problèmes du millénaire par l'institut de mathématiques Clay.

de faces quelconque. La résolution des équations aux dérivées partielles de bilan repose sur une discrétisation spatiale de type volumes finis centrés sur les cellules : chacun des polyèdres constituant le maillage est un volume de contrôle pour les bilans des quantités conservées, et les flux aux interfaces des cellules sont évalués à partir des moyennes de mailles prises dans un certain voisinage. Pour une évaluation suffisamment stable et précise des flux convectifs, le code CEDRE utilise une extension non structurée des méthodes de reconstruction MUSCL : dans chaque cellule, on se donne une représentation linéaire (ou plus généralement polynômiale de degré k) des variables d'état, les gradients (et éventuellement les dérivées d'ordre supérieur) étant évalués algébriquement à partir des moyennes de mailles d'un voisinage. Cette représentation, assortie d'une procédure non linéaire de limitation, permet d'évaluer à chaque interface une valeur à gauche et une valeur à droite servant d'arguments à une formule de flux numérique décentrée.

Avec les hypothèses de discrétisation spatiale brièvement décrites ci-dessus, les équations de bilan constituent un système d'équations différentielles ordinaires dont les degrés de liberté sont les moyennes des quantités conservées sur les cellules du maillage. L'intégration temporelle de ce système peut être effectuée à l'aide de méthodes explicites (schéma de Runge-Kutta d'ordre 2) ou implicites (Euler implicite linéarisé, méthode de Gear...).

5.2.2 Mécanique des solides déformables

La résolution des équations de la Mécanique des solides est souvent mise en œuvre par la méthode des éléments finis. Dans le cadre de cette étude, on s'intéressera uniquement au comportement purement mécanique, i.e. on négligera les équations de la thermique du solide, que l'on résout à l'aide du code ZeBuLoN [144]. Ce code est développé conjointement par l'École des Mines de Paris, Northwest Numerics et l'ONERA et permet la résolution de problèmes de mécanique non-linéaire. Notons que ce logiciel est développé selon une architecture *objet* qui lui confère une grande flexibilité. Une description plus complète des capacités de ZeBuLoN peut être trouvée dans la documentation [145].

Equations de conservation en mécanique des solides

Les équations de la mécanique du solide découlent, tout comme pour la mécanique des fluides, de la mécanique des milieux continus [57]. Elles sont généralement formulées en description Lagrangienne ; c'est-à-dire dans un repère attaché au solide et suivant le déplacement de ces particules. Le principe de conservation de la quantité de mouvement se traduit par l'équation :

$$\rho_S \frac{\partial^2 \boldsymbol{\xi}}{\partial t^2} = \rho_F \mathbf{f} + \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}_S) \quad (5.3)$$

Où ρ_S est la masse volumique du matériau, $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{X}, t)$ le champ de déplacements, $\boldsymbol{\sigma}_S$ le tenseur des contraintes d'ordre 2 et $\mathbf{f}$ une force volumique externe, par exemple la gravité. Cette équation est complétée par une loi de

comportement qui permet de relier les contraintes aux déformations dans le solide, des conditions initiales ainsi que des conditions au bord. La loi de comportement est dépendante de nombreux facteurs : nature du matériau, nature et amplitude des déformations et est, dans le cas de notre étude, non linéaire (voir chapitre 4).

Discretisation et résolution

La résolution des équations de conservation en Mécanique des solides est généralement approchée par une méthode de discrétisation par éléments finis [46]. À l'exception du cas particulier des matériaux élastiques en petites déformations, le système d'équations obtenu est non-linéaire. Il est alors résolu par une méthode itérative de type Newton. Ainsi, à partir d'une situation d'équilibre, les équations sont écrites par une méthode de perturbation et résolues de manière incrémentale.

La discrétisation temporelle est basée sur un schéma d'intégration implicite de Newton. Notons que, dans certaines situations, le temps intervient au travers de la loi de comportement (visco-élasticité du matériau par exemple) et la méthode d'intégration temporelle devra être adaptée afin de prendre en considération les non-linéarités vues par la structure au cours de son évolution.

5.2.3 Problèmes couplés aéro-mécaniques

Le problème couplé que nous abordons dans cette étude fait intervenir l'interaction d'une structure avec un écoulement. On se place donc dans le cadre d'un couplage aéro-mécanique représenté de façon schématique sur la figure 5.1.

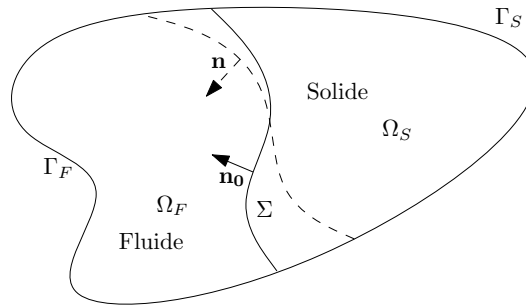


FIGURE 5.1 – Problème couplé : Ω_F et Ω_S représentent respectivement les domaines fluide et solide de frontière Γ_F et Γ_S . Σ représente l'interface mobile entre le fluide et le solide. La normale $\mathbf{n}$ est orientée du solide vers le fluide et est généralement différente de la normale initiale $\mathbf{n}_0$.

Aux conditions aux limites de chaque domaine s'appliquant sur leurs frontières externes, doivent s'ajouter des conditions qui s'appliquent à l'interface entre le fluide et le solide. Ces conditions d'interface contiennent une condition cinématique qui traduit la continuité du vecteur vitesse au passage

de l'interface et une condition statique qui exprime la continuité du vecteur contrainte. Ces conditions se traduisent par :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) &= \frac{\partial \boldsymbol{\xi}(\mathbf{X}, t)}{\partial t} \\ [-p(\mathbf{x}, t)\mathbf{1} + 2\mu\mathbf{d}(\mathbf{x}, t)] \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}, t) &= \boldsymbol{\sigma}_S(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}, t) \end{aligned} \quad (5.4)$$

où $\mathbf{d} = \frac{1}{2}(\nabla^T \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u})$. Notons que ces conditions sont vérifiées sur la configuration actuelle et que la normale $\mathbf{n}$ est généralement différente de la normale initiale $\mathbf{n}_0$.

5.3 Méthodes de couplages multiphysiques

La considération d'un problème multiphysique fait appel à un ensemble de modélisations qui se traduisent par un système plus ou moins couplé d'équations aux dérivées partielles en espace et en temps (telles que celles précédemment exposées). L'étude numérique de ces problèmes est possible par l'intermédiaire de différentes méthodes [50] :

- les méthodes *d'élimination de champs*, impliquant l'utilisation de principes de réduction de modèle à certains champs,
- les méthodes *monolithiques*, modélisant le problème dans son ensemble,
- les méthodes *partitionnées*, cherchant à isoler les différents champs les uns des autres.

Les méthodes de couplage partitionnées considèrent une écriture dissociée de chaque physique et permettent ainsi une intégration temporelle distincte pour chacune des modélisations. L'influence d'une physique sur la (ou les) autre(s) se fait au travers de conditions au bord.

A contrario, les méthodes monolithiques conservent une écriture globale des différentes physiques et intègrent ainsi simultanément les différentes équations. Cette approche a pour principal avantage de ne pas ajouter d'instabilités supplémentaires à un système complexe (ce qui demeure le principal inconvénient des méthodes partitionnées). A cette classification des différentes méthodes de couplage s'ajoute la notion de couplage faible ou fort. Cette distinction repose essentiellement sur le respect (ou non) du principe d'action-réaction. Un couplage sera dit fort, respectivement faible, si ce principe d'action réaction est respecté, respectivement non-respecté.

On ne détaillera pas ici davantage les méthodes de couplage autres que celles sur lesquelles notre choix s'est porté, à savoir les méthodes partitionnées faibles. Toutefois, le lecteur pourra trouver dans la thèse de doctorat de J.D. Garaud [59] une revue complète et historique des algorithmes de couplages employés dans la modélisation numérique multiphysique. Le choix d'une méthode partitionnée a été essentiellement motivé par les nombreux avantages qu'elle propose. Citons à titre d'exemple :

- la flexibilité concernant la modélisation des différents phénomènes physiques,
- l'indépendance de la modélisation de chaque physique permettant l'utilisation de modèles non coïncidents,

- la pérennisation d'outils existants et adaptés,
- l'extensibilité, c'est-à-dire, la possibilité de continuer le développement de nouveaux modèles dans chaque code, indépendamment de l'aspect couplage.

5.3.1 Algorithme de couplage partitionné

L'utilisation des méthodes partitionnées n'est pas exempte de difficultés. En effet, le principal inconvénient de ces méthodes, identifié dès les premiers algorithmes [98], réside dans les difficultés de stabilité vis-à-vis de l'intégration temporelle. La séparation de chacune des physiques induit un décalage lors de l'intégration temporelle, qui abouti à une incohérence entre les sous-problèmes à chaque pas de temps. Ce déséquilibre peut, selon les cas, conduire à la destabilisation du calcul couplé. De plus, si la stabilité de chaque problème peut être assurée indépendamment, rien n'assure que le problème est, dans son ensemble, stable (problème de flottement, par exemple). C'est justement la manifestation de tels phénomènes qui motive le recours à une approche couplée. A ces problèmes physiques s'ajoutent les problèmes numériques liés à la convergence du couplage et plus généralement à l'approche discrète.

Un certain type d'algorithmes partitionnés dits *décalés* présente un intérêt particulier pour notre étude. Une revue concernant l'utilisation de tels algorithmes peut être trouvée dans [101, 102]. Ces algorithmes peuvent être décrits de façon générique par une algorithmique commune. Si on adapte les notations introduites dans [59], où N est le nombre de pas de temps de calcul, $\mathbf{u}_\Sigma^n$, $\mathbf{u}_S^n$, $\mathbf{u}_F^n$ représentent respectivement les déplacements de l'interface couplée Σ , du domaine fluide Ω_F et du domaine solide Ω_S et $\mathbf{v}^n$ et p^n sont la vitesse et la pression du fluide à l'instant n ; l'algorithme partitionné dit *décalé* permettant d'obtenir l'état $n + 1$ s'écrit :

Algorithme partitionné séquentiel (CSS)		
pour $n = 1 \dots N$ faire		
a	prédire le déplacement de l'interface couplée	$\mathbf{u}_\Sigma^n = \mathcal{P}(*^{n-1})$
b	en déduire le déplacement de l'ensemble du domaine fluide	$\mathbf{u}_F^n = \mathcal{D}(\mathbf{u}_\Sigma^n, *^{n-1})$
c	résoudre le problème fluide dans ce domaine mobile	$(\mathbf{v}^n, p^n) = \mathcal{F}(\mathbf{u}_F^n, *^{n-1})$
d	en déduire les efforts exercés sur l'interface couplée	$f_\Sigma^n = \mathcal{R}(\mathbf{v}^n, p^n, *^{n-1})$
e	résoudre le problème solide	$\mathbf{u}_S^n = \mathcal{S}(f_\Sigma^n, *^{n-1})$
fin		

La terminologie *décalée* attribuée à ces algorithmes provient du fait que les différentes physiques sont intégrées indifféremment en temps impliquant un décalage entre les différents calculs.

Lorsque la prédiction faite à l'étape 1 est égale au déplacement calculé à l'itération précédente, i.e. $\mathbf{u}_\Sigma^n = \mathbf{u}_\Sigma^{n-1}$, l'algorithme est appelé CSS (pour

Conventional Serial Staggered) et à un coût de calcul égal à la somme des temps de calcul fluide et solide. Un tel algorithme est schématisé sur la figure 5.2.

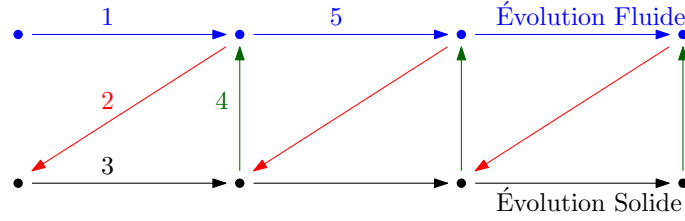


FIGURE 5.2 – Algorithme partitionné séquentiel (CSS). L'étape 1 correspond aux point (b) et (c) de l'algorithme et l'étape 2 au point (d). L'étape 3 est le point (e) et l'étape 4, le point (a).

En pratique, et pour des problèmes de stabilité, cet algorithme est rarement utilisé tel quel. Une des variantes qui sera utilisée pour cette étude sera l'algorithme sous-cyclé, où chacune des physiques est résolue avec un pas de temps adapté et le couplage n'a lieu qu'à certains instants. La détermination des temps caractéristiques de chaque physique joue donc ici un rôle primordial à la fois dans le sous-cyclage et dans la périodicité des échanges. Cet algorithme est représenté sur la figure 5.3, dans le cas le plus fréquent où la dynamique du fluide possède des temps caractéristiques inférieurs à ceux du solide.

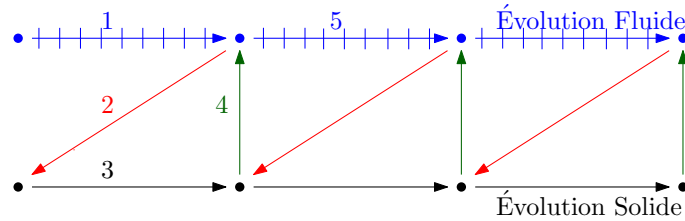


FIGURE 5.3 – Algorithme partitionné séquentiel sous-cyclé (CSS sous-cyclé). Cet algorithme nécessite la détermination de trois pas de temps : celui du fluide, du solide ainsi que du couplage (pris ici égal à celui du solide).

Entre deux instants de couplage, le fluide utilise une interpolation linéaire de la position du solide. Notons que l'évolution de la frontière couplée entre deux instants de couplage est alors gérée par le code fluide seul et fait appel à des méthodes dites de *maillage mobile*. L'algorithme qui résulte d'une telle stratégie est, bien souvent, moins coûteux que la version non sous-cyclée et ne dégrade pas nécessairement la stabilité du schéma de couplage. Cette stratégie a pour avantage de ne pas surestimer le nombre d'itérations nécessaire en adoptant un pas de temps de calcul adapté à chaque physique.

Il existe de nombreuses autres variantes de l'algorithme partitionné séquentiel que l'on ne présentera pas car non utilisées dans le cadre de cette étude numérique. Citons néanmoins à titre d'exemple les variantes parallèles, à échanges désynchronisés ou encore à méthodes prédictives améliorées [59].

5.3.2 Maillage mobile et intégration logicielle

La mise en oeuvre logicielle du couplage aéro-mécanique entre les codes CEDRE et ZeBuLoN s'est révélée être un exercice complexe, essentiellement du point de vue informatique. En outre, elle est encore, à l'heure actuelle, non totalement achevée et a été en grande partie réalisée à l'ONERA dans le cadre du Projet Fédérateur COCOMAT (pour Couplage de Codes en Mécanique et AéroThermique). À ce titre, les présents travaux héritent non seulement du savoir faire mais également des outils développés. On réutilisera ainsi le *plugin de couplage* déjà implémenté dans ZeBuLoN par J.D. Garaud et validé au cours de sa thèse [59] ainsi que le *moteur de couplage* permettant de bénéficier de la bibliothèque MpCCI.

La nécessité d'un calcul fluide en géométrie mobile devient alors évidente (où le déplacement de l'interface couplée résultant du calcul fluide-structure) et implique d'écrire les équations de conservation de la Mécanique des fluides non plus sous une forme Eulérienne, mais sous une forme Arbitrairement Lagrangienne Eulérienne (ALE). Cette formulation est à mi-chemin entre la formulation Lagrangienne et Eulérienne et permet d'attribuer une vitesse arbitraire au maillage. L'application de cette formulation au code CEDRE est présentée en détail dans [30] et a été réalisée au sein du département DSNA de l'ONERA. Notons que le schéma numérique de discrétisation spatiale modifié respecte la *loi de conservation géométrique* [48] qui stipule que le schéma numérique doit représenter exactement les solutions uniformes quel que soit le mouvement du maillage.

La formulation ALE nécessite la connaissance complète des déplacements de chaque noeud du maillage fluide. Or, dans un calcul couplé seul la déformation de l'interface est à priori connue et résulte des déplacements du solide. Pour palier à ce manque d'information, des méthodes dites de *déformation de maillage* propagent la déformation de l'interface à l'intérieur du domaine fluide en traitant ce dernier comme une structure déformable. Les contraintes que l'on impose alors ne sont pas de calculer la déformation du maillage telle que l'on pourrait le faire en mécanique du solide (trop coûteux) mais plutôt d'obtenir un maillage déformé qui garde de bonnes propriétés (cohérence, finesse ...) lors de son déplacement. De nombreuses méthodes de déformation de maillage relativement sophistiquées existent. Citons, par exemple, la méthode élastique qui traite le domaine fluide comme un matériau élastique ou encore celle des ressorts qui modélise le maillage comme un treillis de ressorts.

Dans cette étude, les déformations de maillage seront, à priori, fortement localisées et le choix s'est porté sur une loi analytique permettant de calculer la vitesse de chacun des noeuds par une simple loi de propagation géométrique selon la logique :

Cette loi de propagation nécessite la définition de 3 paramètres, à savoir :

- un rayon de saturation, r_{sat} , pour lequel tout noeud compris dans la sphère de rayon r_{sat} subira un mouvement de corps rigide,
- un rayon d'action, r_{prop} , pour lequel tout noeud au delà de la sphère d'influence ne subira aucun déplacement
- un coefficient d'amortissement, α , permettant de calculer le déplacement

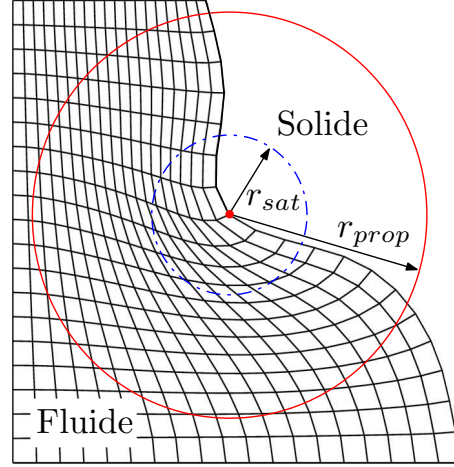


FIGURE 5.4 – Loi de propagation analytique des déplacements des noeuds de l'interface.

Algorithme de propagation

pour chaque noeud du maillage **faire**

- 1 | recherche de la paroi mobile la plus proche
 - 2 | définition autour du point mobile d'une sphère
d'influence par son rayon et son origine
 - 3 | amortissement de la loi en fonction de la distance à la paroi
- fin**
-

de chacun des noeuds compris entre les deux sphères précédemment définies. Ce coefficient est déterminé par une loi d'amortissement que l'on prendra dans cette étude en $1/r$.

On peut ainsi déterminer pour tous les points du domaine fluide une position et une vitesse de déplacement, telles que :

$$X(t + dt) = X(t) + \alpha dX_p, \quad (5.5)$$

$$\mathbf{V}(t + dt) = \mathbf{V}(t) + \alpha d\mathbf{V}_p, \quad (5.6)$$

où dX_p et $d\mathbf{V}_p$ sont respectivement le déplacement et la vitesse du point de la paroi mobile le plus proche.

5.3.3 Validation de la méthodologie de couplage

Afin de vérifier la potentialité du couplage de codes à simuler correctement les problèmes d'interaction fluide-structure, deux cas de validation ont été considérés. Le premier dispose d'une solution analytique simple et permet une mise en oeuvre rapide du couplage [70]. Le second est un cas expérimental du laboratoire IUSTI ("Institut Universitaire des Systèmes Thermiques Industriels") conduit par J. Giordano [61], souvent repris dans la communauté de la propulsion solide afin de valider les outils numériques couplés [22].

Pour les deux cas de validation, l'algorithme de couplage considéré est l'algorithme partitionné séquentiel sous-cyclé présenté dans la section 5.3.1 et la déformation du maillage réalisée par l'intermédiaire de la simple loi analytique précédemment exposée. L'interface entre les domaines fluide et solide est supposée adiabatique et non-réactive et sera donc traitée comme une discontinuité de contact. La finalité étant de s'assurer, en premier lieu, de la précision du schéma de couplage de code, les calculs ont été réalisés sur des maillages coïncidents permettant ainsi de s'affranchir de toute erreur d'interpolation réalisée par la librairie MpCCI.

Présentation du problème 1D

Le problème choisi est celui d'un fluide non-visqueux et compressible interagissant avec un solide élastique. Ce problème implique une analyse instationnaire du couplage, où la propagation d'une onde de détente dans le fluide interagit avec une onde de compression dans le solide.

À l'état initial, le système est découplé. Le solide ne subit aucune contraintes et le fluide est uniforme (figure 5.5). À l'instant $t = 0$, la pression uniforme est appliquée au solide ; en résulte un mouvement de l'interface à la vitesse constante u_i . Ce problème peut être perçu comme celui d'une piston mobile avec des ondes de détente dans le domaine fluide et des ondes de compression dans le domaine solide.

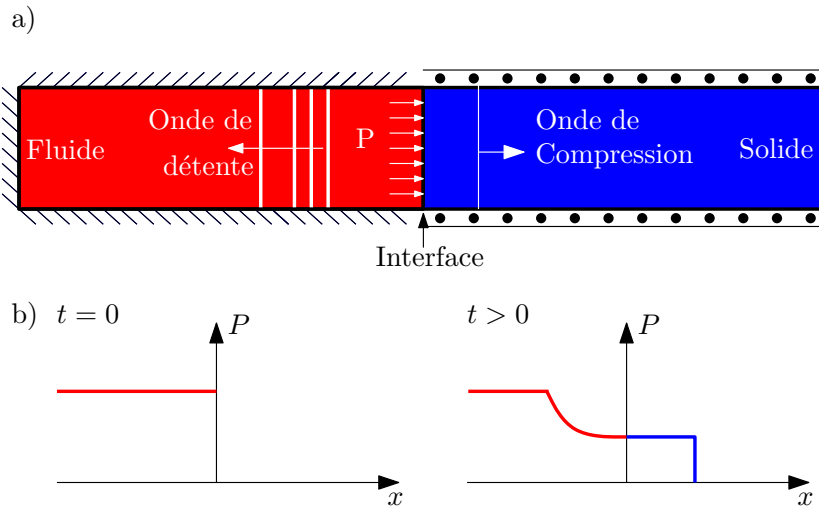


FIGURE 5.5 – (a) Représentation schématique du problème couplé 1D et (b) pression en fonction de x pour une onde de détente simple dans le domaine fluide et une onde de compression dans le domaine solide.

À l'interface ($x = 0$) des deux domaines, aucun flux de masse, saut de vitesse normale ou encore de contrainte normale n'est permis et on ne considère que des ondes non réfléchissantes.

Solution analytique : Une onde de détente est produite dans le domaine fluide suite au mouvement de l'interface solide. Une telle onde se propageant

à gauche, ou encore *left-running wave*, est définie comme une onde simple de caractéristiques C_- d'équation $x = (u - a)t$, sur lesquelles les propriétés du fluide sont conservées. En outre, puisque l'onde a pour origine le point d'interface $(x, t) = (0, 0)$, elle est dénommée onde d'expansion centrée.

Si on considère une transformation isentropique et que l'on applique la méthode des caractéristiques [4], l'invariant de Riemann J_+ pour un gaz parfait se conserve au travers d'une onde d'expansion. On a donc :

$$u + \frac{2a}{\gamma - 1} = \text{cste au travers de l'onde d'expansion}, \quad (5.7)$$

où u et a sont les valeurs locales de la vitesse et de la vitesse du son, respectivement. En appliquant la relation 5.7 à la région contenant le fluide :

$$u(x, t) + \frac{2c(x, t)}{\gamma - 1} = 0 + \frac{2c_o}{\gamma - 1} = u_i + \frac{2c_i}{\gamma - 1}, \quad (5.8)$$

avec les indices o et i désignant respectivement l'état initial et les valeurs prises à l'interface. En outre, puisque le fluide considéré est isentropique, on a $p_i/p_o = (\rho_i/\rho_o)^\gamma$, où ρ désigne la masse volumique et p la pression. L'équation 5.8 permet d'écrire :

$$\frac{p_i}{p_o} = \left[1 - \frac{\gamma - 1}{2} \left(\frac{u_i}{c_o} \right) \right]^{\frac{2\gamma}{\gamma - 1}}, \quad (5.9)$$

et détermine les propriétés du fluide au sein d'une onde d'expansion simple en fonction de la vitesse du gaz. Considérons un matériau isentropique au comportement élastique linéaire qui occupe le domaine à droite de l'interface. Pour des temps $t > 0$, l'équation de Navier [129] détermine, sous des hypothèses de contraintes planes, la propagation mono-dimensionnelle d'une onde longitudinale de compression (*onde P*) :

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{c_d^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}, \quad (5.10)$$

avec ξ le champ de déplacement, $c_d = \sqrt{\frac{E}{\rho_s(1-\nu^2)}}$ la vitesse longitudinale de propagation de l'onde P dans le solide, E le module d'Young, ν le coefficient de Poisson et ρ_s la masse volumique du solide. Sous une pression uniforme σ_i appliquée à l'interface, on obtient :

$$|\sigma_i| = \rho_s c_d \dot{\xi}_i. \quad (5.11)$$

Le système couplé (équations 5.9 et 5.11) peut être résolu par l'utilisation d'un algorithme de Newton en imposant la continuité cinématique ($u_i = \dot{\xi}_i$) et l'équilibre mécanique ($\sigma_i = p_i$) à l'interface.

Solution numérique couplée : Le fluide considéré est de l'air de rapport des chaleurs spécifiques $\gamma = 1.4$ à température $T = 300^\circ\text{K}$ et à pression initiale $P_o = 101325 \text{ Pa}$. Le solide est un matériau fictif régi par un comportement élastique de coefficient de Poisson $\nu = 0.29$, de module d'Young $E = 10 \text{ MPa}$

et de masse volumique $\rho_s = 2800 \text{ kg.m}^{-3}$. Avec de telles propriétés, la vitesse du son dans le fluide est de $a = 347 \text{ m.s}^{-1}$ et la vitesse de propagation des ondes longitudinales dans le solide est de $c_d = 62.45 \text{ m.s}^{-1}$ dans le solide sous l'hypothèse de contrainte plane. La résolution du système couplé conduit à une vitesse d'interface analytique $u_i = 0.578 \text{ m.s}^{-1}$.

Dans cette approche partitionnée, le problème est résolu numériquement en utilisant une période de couplage $T_{\text{couplage}} = 10^{-6} \text{ s}$ égale aux pas de temps des codes fluide et solide.

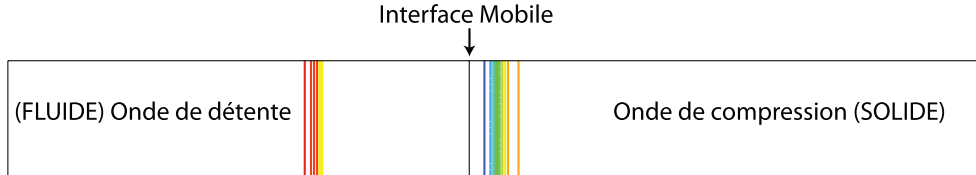


FIGURE 5.6 – Iso-contours de pression et de contrainte σ_{11} .

La figure 5.6 montre l'évolution de l'onde de détente dans le domaine fluide et l'onde de compression se propageant dans le domaine solide. Les distributions de contraintes et de pression obtenus numériquement permettent de s'assurer de la conformité de l'hypothèse mono-dimensionnelle. De plus, différentes simulations ont été réalisées avec différentes densités de maillage et ont conduit aux mêmes conclusions.

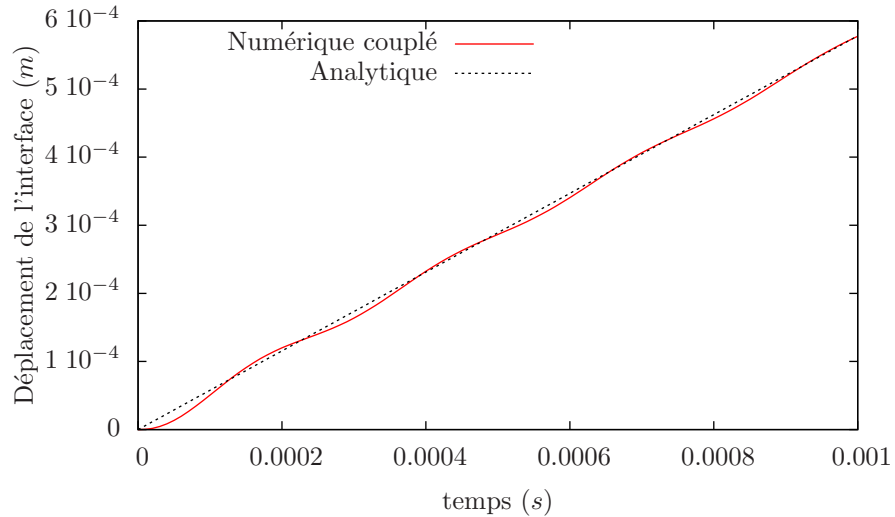


FIGURE 5.7 – Déplacement analytique et numérique couplé de l'interface en fonction du temps

La figure 5.7 présente la comparaison entre la solution analytique et le déplacement numérique de l'interface de couplage durant la première milliseconde de simulation. La vitesse d'interface prédite par le couplage de code est, malgré quelques oscillations, cohérente avec la vitesse uniforme prédite analytiquement. L'erreur relative entre les deux vitesses d'interface (analytique et

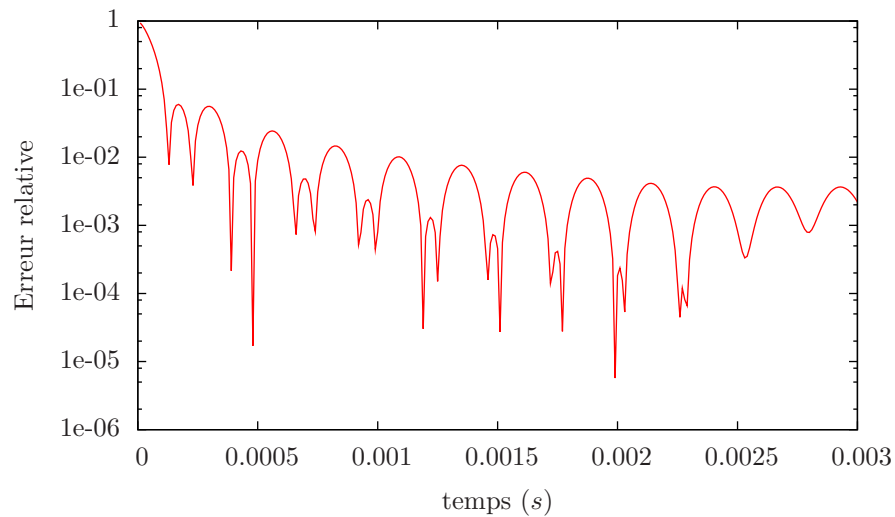


FIGURE 5.8 – Erreur relative du déplacement de l'interface en fonction du temps. L'erreur est donnée par $|\Delta u_i|/u_{analytique}$

numérique), figure 5.8, tend vers une valeur inférieure à 10^{-2} et suggère que le schéma de couplage peut avoir une certaine influence sur le résultat.

Présentation du cas 2D : l'expérience IUSTI

Ce cas de validation a fait l'objet d'une campagne expérimentale au sein du laboratoire IUSTI à Marseille et concerne l'étude d'une structure déformable soumise au passage d'une onde de choc, [61]. Une schématisation détaillée du dispositif expérimental est représentée sur la figure 5.9.

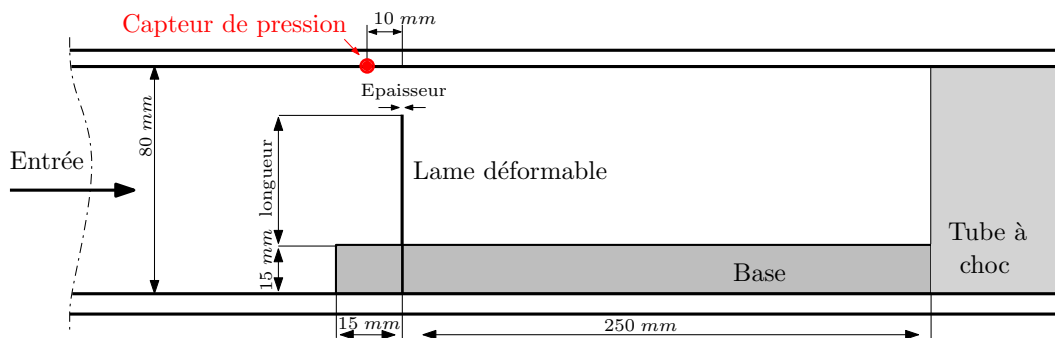


FIGURE 5.9 – Montage IUSTI interaction onde de choc / structure déformable.

L'un des intérêts d'un tel cas de validation est, en plus de disposer de résultats expérimentaux, sa similitude avec le mouvement des Protections Thermiques de Face que l'on retrouve au sein des moteurs à propergol solide du lanceur Ariane 5. La lame flexible est fixée sur une base admise comme infiniment rigide. Un tube à choc permet de générer une onde de choc qui évolue dans la section d'essais. Lorsque l'onde de choc passe sur l'obstacle, ce

dernier fléchit sous l'effet du gradient de pression induit. Au cours de cette expérimentation, à la fois l'évolution de la pression interne et la déflexion de la lame sont mesurées. En outre, le dispositif expérimental de diagnostic comprend une caméra rapide qui fournit des clichés ombroscopiques de l'écoulement, données qualitatives utiles puisque directement confrontables aux simulations numériques. Une présentation plus détaillée du montage ainsi qu'une analyse complète des résultats expérimentaux peut être trouvée dans la thèse de J. Giordano, [60].

Modèle numérique : Le montage IUSTI permet de tester plusieurs jeux de lames, de géométries et de matériaux différents. La cas simulé reprend une lame en acier (traité en élasticité linéaire avec un module d'Young $E = 220$ GPa et une masse volumique $\rho_s = 7600$ kg.m⁻³) d'une hauteur de 40 mm et d'épaisseur 1 mm. Les conditions d'entrée sont imposées par l'expérience où, les conditions de Rankine-Hugoniot permettent de déterminer les valeurs de pression, vitesse et température à imposer afin de générer une onde incidente évoluant à Mach=1.2.

Le domaine de calcul fluide est approximativement composé de 45000 cellules quadratiques avec une dimension caractéristique minimale de l'ordre de 1 mm pour la region de proche paroi et proche obstacle. Dans cette approche partitionnée, le problème est résolu numériquement en utilisant une période de couplage $T_{\text{coupling}} = 10^{-6}$ s égale aux pas de temps des codes fluide et solide. La période de couplage est de l'ordre de 100 fois inférieure au temps caractéristique de la structure.

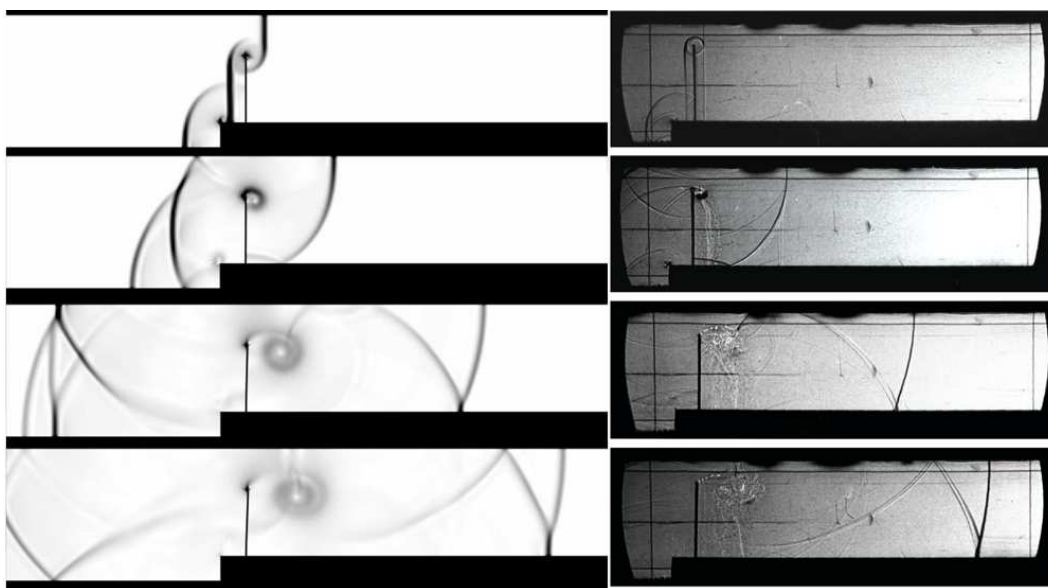


FIGURE 5.10 – Schlierens numériques (norme du gradient de masse volumique), à gauche, confrontées aux clichés ombroscopiques expérimentaux, à droite.

Solution numérique couplée : L'interaction entre l'onde de choc incidente et l'obstacle mobile donne naissance à la fois à une onde transmise et à une onde réfléchie. La confrontation des clichés ombroscopiques et des schlierens numériques, figure 5.10, permet de s'assurer qualitativement que la dynamique de l'écoulement est bien reproduite numériquement.

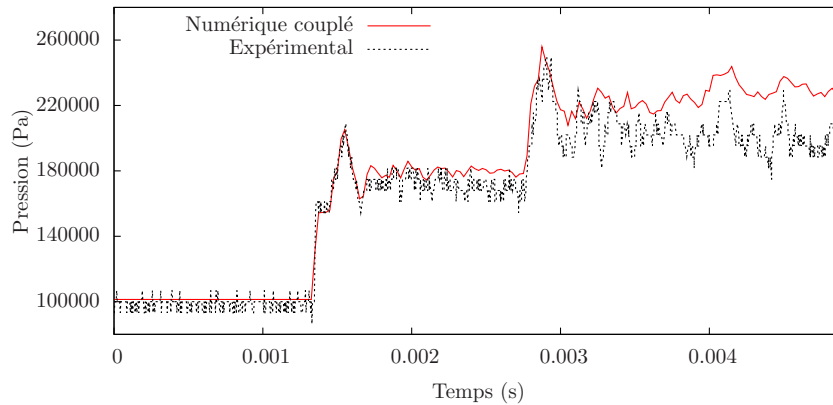


FIGURE 5.11 – Evolution de la pression expérimentale et numérique couplée au niveau du capteur en fonction du temps

Si on s'intéresse à l'évolution de la pression au niveau du capteur expérimental, figure 5.11, on observe une bonne concordance globale entre les résultats numériques couplés et expérimentaux. Que ce soit au niveau du premier saut de pression dû au choc incident, ou encore du second induit par les chocs réfléchis, la méthodologie de couplage permet de capter de façon précise la dynamique et l'amplitude de l'évolution en pression. La tendance numérique à surestimer la pression (notamment pour $t > 0.0025$ s) peut être expliquée par des erreurs de réflexion au niveau des conditions aux limites.

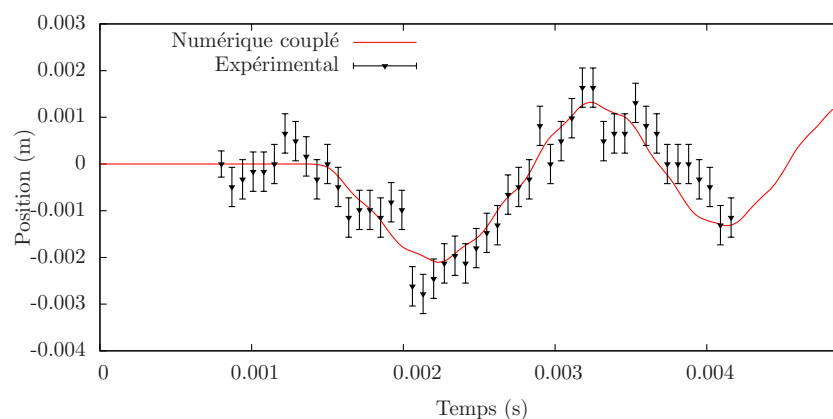


FIGURE 5.12 – Flèche expérimentale et numérique couplée de l'obstacle mobile en fonction du temps

Sous l'effet du chargement dynamique du fluide, l'obstacle fléchit jusqu'à atteindre une flèche expérimentale de 2.4 ± 0.4 mm pour la première

sollicitation puis de $1.8^{\pm 0.4}$ mm. La figure 5.12 présente les variations de la flèche confrontées aux résultats de la simulation numérique couplée. Au vu des incertitudes expérimentales relatives à la détermination de cette dernière, le faible écart existant entre les résultats numériques et expérimentaux aussi bien en terme d'amplitude, d'amortissement et de période de vibration, permet de conclure quant à une bonne modélisation de l'interaction entre l'écoulement et la structure.

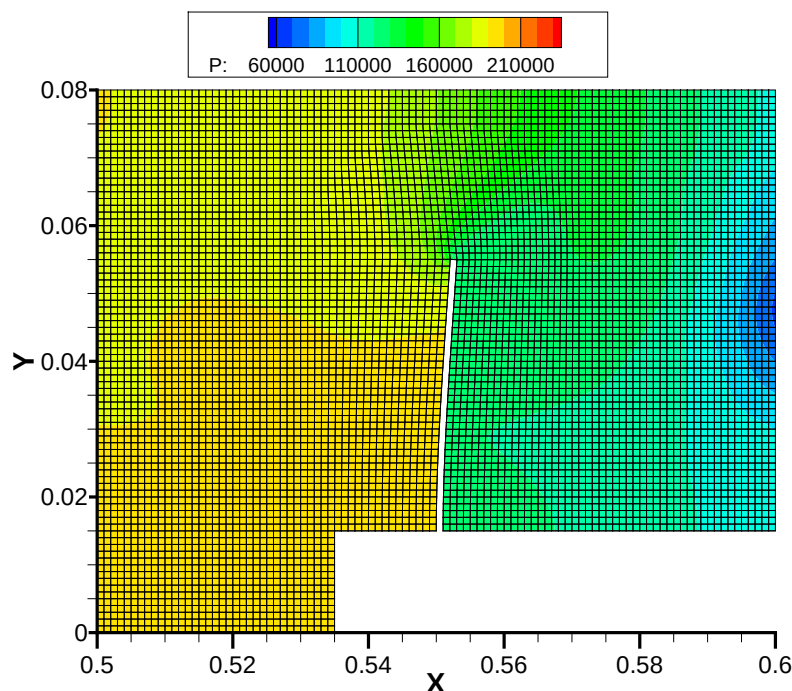


FIGURE 5.13 – Cas de validation 2D. Visualisation du maillage déformé.

À titre d'illustration, la figure 5.13 présente le maillage déformé sous l'action du mouvement de la structure déformable. La loi de propagation ici utilisée est la loi analytique précédemment décrite dans la section 5.3.2.

5.3.4 Conclusion

Une méthodologie de couplage a été développée entre les codes CEDRE et ZeBuLoN afin de modéliser numériquement les interactions mécaniques entrant en jeu lors d'une interaction fluide-structure. Cette méthodologie repose sur une approche partitionnée et un algorithme de couplage séquentiel, sous-cyclé ou non. La validation de cette approche numérique a pu être obtenue en simulant un cas monodimensionnel, disposant d'une solution analytique, et un cas bidimensionnel plan, représentatif d'une expérience.

5.4 Approche numérique non couplée

Comme il a été démontré lors de l'étude expérimentale conduite à l'aide du montage VALDO (Chapite 2), la présence d'obstacle rigide présente déjà un grand intérêt du point de vue de la compréhension physique des mécanismes entrant en jeu lors d'apparition des oscillations de pression. La simulation numérique d'une telle configuration apporte donc, en confrontant les résultats obtenus aux résultats expérimentaux, une première explication. Ce calcul numérique servira également de simulation de référence permettant de conclure sur la pertinence et sur la nécessité de la considération d'une approche couplée. Les simulations numériques étant extrêmement coûteuses, il n'a pas été possible de multiplier les conditions de calcul, en terme de vitesse d'injection. Le choix a donc été fait de se concentrer sur le point d'opération expérimental correspondant à une pression d'alimentation de 2.8 bar. Ce choix est une des valeurs possibles de vitesse d'injection parmi tant d'autres. Néanmoins, il nous a semblé intéressant de modéliser un phénomène qui à lieu, à priori, hors accrochage sur un mode acoustique et ainsi plus difficile à capter d'un point de vue énergétique (et donc numériquement).

5.4.1 Paramètres de la simulation numérique

Domaine de calcul et maillage

Le domaine de calcul utilisé dans cette première approche numérique du montage VALDO reprend les dimensions exactes du montage expérimental présenté dans le chapitre 2. Comme mentionné dès le début de l'étude, on choisit de se concentrer sur la PTF de diamètre intérieur 50 mm. Le maillage utilisé est tridimensionnel et est constitué d'environ 260000 tétraèdres avec une dimension caractéristique minimale de l'ordre de $100\ \mu\text{m}$. Le choix d'une configuration tridimensionnelle est essentiellement motivé par des considérations inhérentes au couplage de code. En effet, à l'heure actuelle, la formulation maillage mobile n'est disponible, dans le code CEDRE, qu'en formulation 2D plan ou 3D. Ainsi, bien que tout semble indiquer qu'une approche axisymétrique serait suffisante pour cette approche non couplée, l'objectif de réutilisation d'un modèle fluide validé impose une géométrie tridimensionnelle. Cette contrainte est néanmoins respectée à minima avec l'utilisation de seulement deux mailles dans la direction azimutale pour un secteur de 12° , figure 5.14.

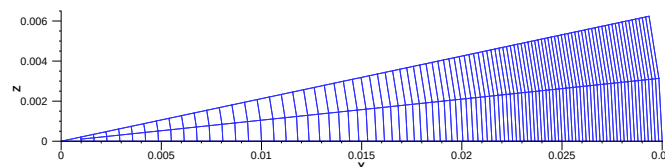


FIGURE 5.14 – Maillage utilisé pour la simulation numérique non couplée. Coupe transverse à la direction de l'écoulement.

La figure 5.15 présente le maillage dans la zone la plus raffinée, à savoir la région proche obstacle.

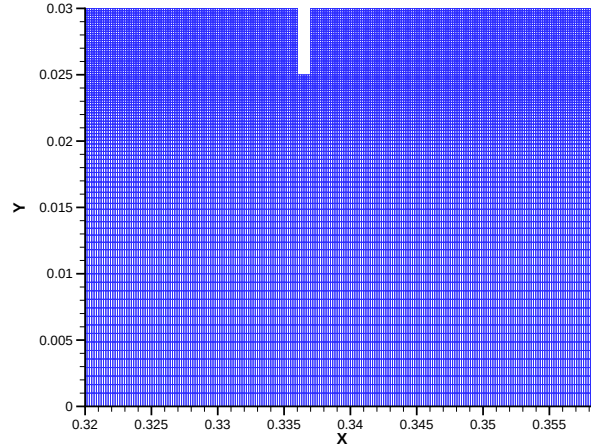


FIGURE 5.15 – Maillage utilisé pour la simulation numérique non couplée. Coupe radiale zoomée dans la région de proche obstacle.

Conditions aux limites et méthodes numériques

Le calcul a été conduit à l'aide d'une approche de type LES et plus précisément avec une approche MILES qui ne considère aucune modélisation explicite des termes de sous-maîles. Le maillage est donc utilisé comme filtre haute-fréquence des échelles spatiales. Les conditions aux limites imposées sont des conditions de périodicité sur les parois latérales, une condition d'injection à débit surfacique imposé (ce qui permet d'être en parfait accord avec l'expérience) et une condition de sortie subsonique à pression imposée. Précisons que, pour cette dernière on impose en fait une pression moyenne sur la section permettant ainsi d'assurer l'équilibre radial. Les schémas de discrétisation temporelle retenus sont un schéma implicite d'ordre 2 [17] et un schéma de Runge-Kutta d'ordre 2 explicite. Le premier est utilisé afin de faire une mise en régime de l'écoulement à partir de l'état initial (pression uniforme imposée dans toute la chambre égale à la pression atmosphérique). L'état d'équilibre asymptotique atteint (dont l'un des critères de convergence est l'égalité des flux entrant et sortant sur une dizaine de temps caractéristiques de convection) sert de champ d'initialisation à une simulation instationnaire explicite en temps. Le temps de simulation du régime instationnaire est de plus de 20 temps caractéristiques convectifs à un $CFL \simeq 0.3$. Au niveau du schéma de discrétisation spatiale, le code CEDRE utilise un schéma décentré de Roe avec une extension au second ordre (méthode MUSCL, limiteur de pente de Van-Leer et des flux ODF [17]). Cette simulation numérique a été réalisée sur 4 processeurs du calculateur super-scalaire de l'ONERA pour une durée de 2 mois.

5.4.2 Résultats de la simulation non couplée

Écoulement moyen

La figure 5.16 illustre l'allure générale des champs de pression et de vitesse moyens dans le montage VALDO. On observe une répartition quasi-monodimensionnelle de la pression pour la région en amont de l'obstacle ainsi qu'une zone d'accélération du fluide due à la constriction de l'écoulement par la PTF. Il est alors intéressant de noter que ces champs moyennés au cours du temps sont fortement similaires au champ de base calculé lors l'approche de stabilité globale conduite dans le chapitre 3.

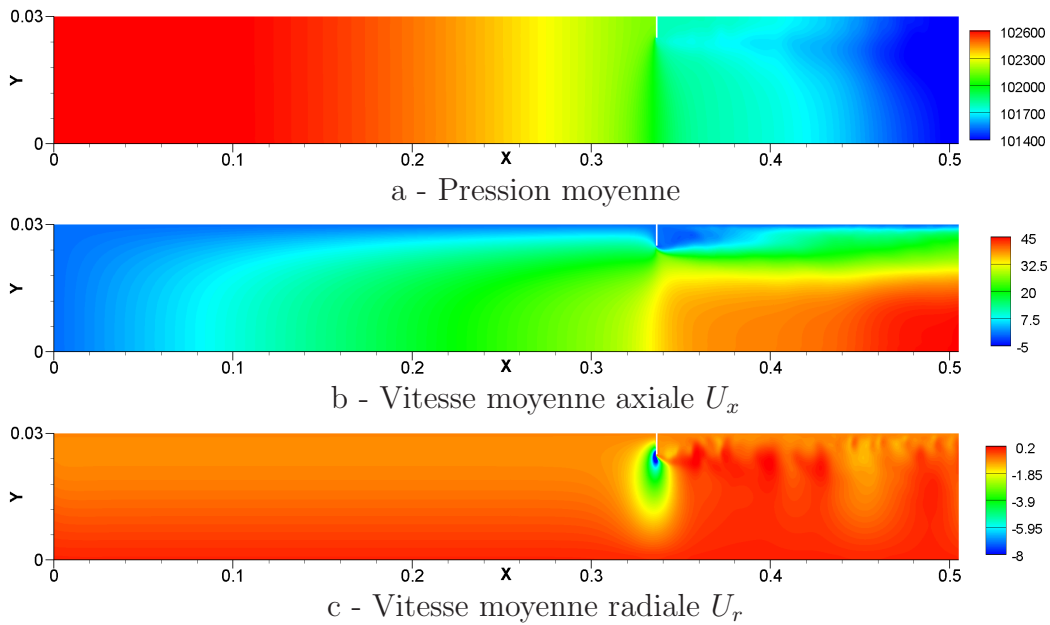


FIGURE 5.16 – Champ moyens.

De la même façon que dans l'étude expérimentale, on peut comparer les profils de vitesse longitudinale et radiale moyens de la région pré-obstacle à la solution analytique de Taylor-Culick. On observe ainsi sur la figure 5.17 un excellent accord entre le modèle analytique et la simulation numérique. Notons toutefois qu'un léger écart apparaît sur le profil de vitesse radial lorsque l'on se rapproche de l'obstacle et traduit l'influence de l'obstacle sur l'écoulement moyen amont.

Si on s'intéresse à la zone post-obstacle, les profils de vitesse moyenne sont cette fois comparés aux mesures expérimentales conduites sur le montage VALDO. La comparaison des profils de vitesse est illustrée sur la figure 5.18 et permet de conclure à l'excellente représentativité du champ moyen pour l'écoulement post-obstacle. De façon plus générale, ces comparaisons permettent de conclure positivement sur la représentativité de l'écoulement moyen induit par injection pariétale en présence d'un obstacle par la simulation numérique.

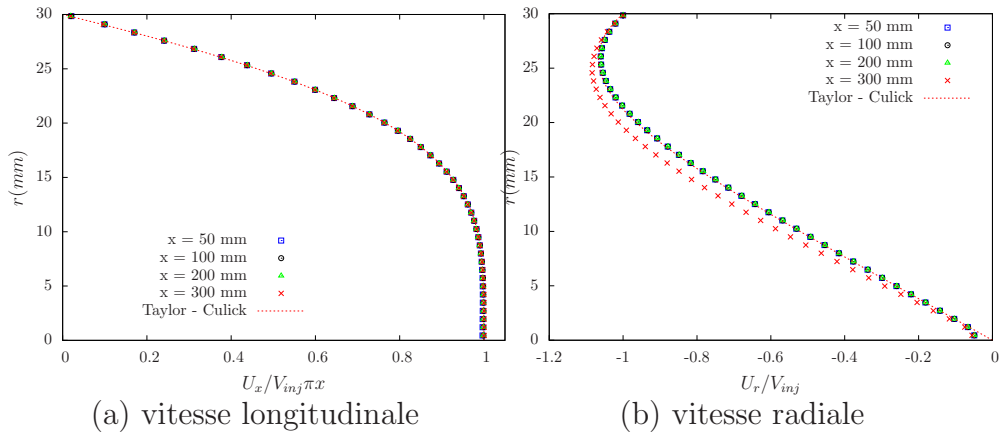


FIGURE 5.17 – Profils moyens de vitesse longitudinale et radiale pour la région en amont de la PTF. Comparaison à la solution analytique de Taylor-Culick.

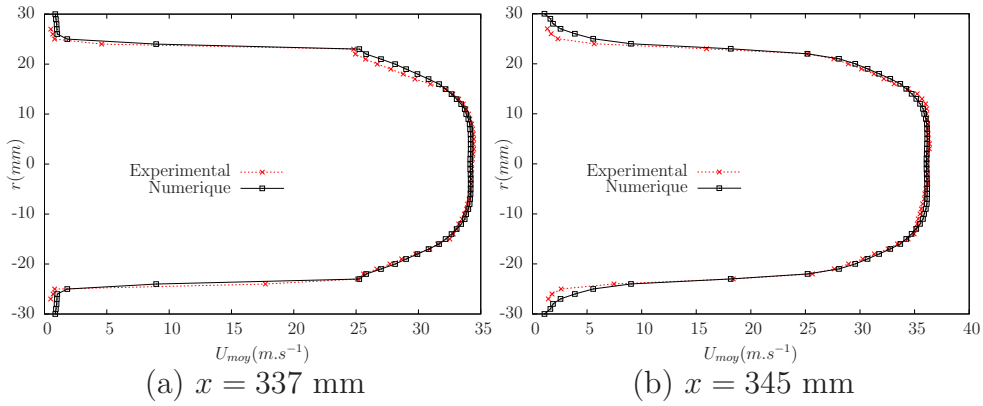


FIGURE 5.18 – Profils de vitesse moyenne en deux stations en aval de la PTF. Les profils numériques ont été symétrisés pour pouvoir effectuer la comparaison au montage VALDO sur un diamètre en entier.

Étude de la dynamique instationnaire

L'étude de la dynamique instationnaire de l'écoulement est rendue possible par le biais de capteurs numériques permettant l'enregistrement de toutes les variables primitives (u, v, w, P et T) au cours du temps. L'une des valeurs qui est d'une importance capitale lorsque l'on désire quantifier l'intensité d'instationnarités est la valeur RMS de la vitesse. Les profils des intensités de fluctuations de vitesse RMS sont déterminés à la même position longitudinale que celles où les mesures expérimentales sont réalisées, figure 5.19.

On observe alors un très nette tendance du calcul numérique à surestimer les intensités des fluctuations de vitesse RMS de l'écoulement avec un facteur quasiment de 2. Cette surestimation, notamment sur l'axe de symétrie tend à indiquer que le modèle numérique ne dissipe pas assez. Une étude avec un maillage plus fin ou avec un modèle contenant une modélisation explicite de sous-maille pourrait apporter une réponse à ce sujet. En outre, la sous-

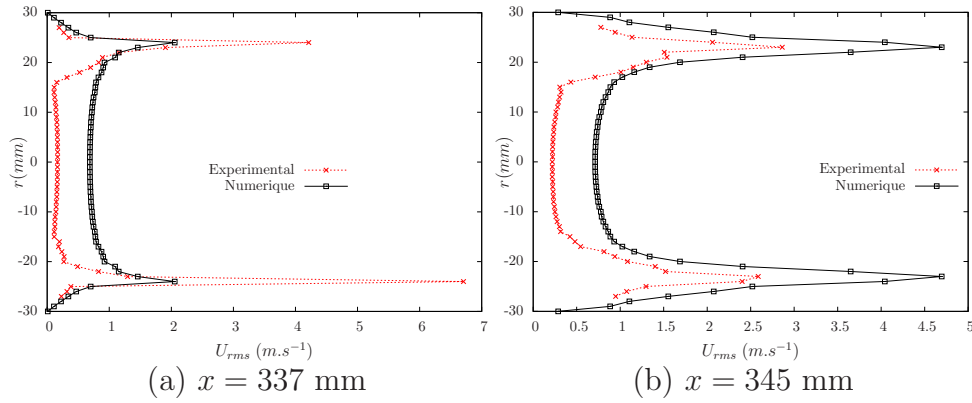


FIGURE 5.19 – Fluctuations de vitesse RMS en deux positions longitudinales. Les profils numériques ont été symétrisés pour pouvoir effectuer la comparaison au montage VALDO sur un diamètre entier.

estimation de l'intensité RMS dans la zone de fort cisaillement en $x = 337$ mm doit être abordée avec prudence car elle peut être due à l'aspect discret des valeurs représentées où un pic se situerait entre deux points de mesure.

Les signaux acquis numériquement sont également analysés dans le domaine spectral. Leur acquisition a été effectuée à une très haute fréquence, très sûrement surestimée, de l'ordre de 3 Mhz, permettant ainsi de s'affranchir de manière quasi-certaine des effets de repliement de spectre lors de l'analyse spectrale. De tels paramètres numériques permettent d'assurer une résolution fréquentielle de l'ordre de 2 Hz. Les spectres de vitesse sont représentés sous forme de spectrogrammes, figure 5.20, et comparés aux mesures expérimentales. Si la répartition spatiale des fréquences les plus amplifiées semble respectée, on observe un écart de près de 70 Hz entre les mesures expérimentales (390 Hz) et les signaux numériques (320 Hz). Cet écart semble significatif et peut avoir plusieurs origines. On peut encore une fois ici remettre en question la pertinence de l'absence du modèle de sous maille où l'évaluation du tenseur de sous maille apporterait une meilleure modélisation de la turbulence et notamment des interactions entre les différentes échelles présentes dans l'écoulement. Cet effet peut être particulièrement prononcé dans la zone de cisaillement créée par l'obstacle, siège d'instabilités hydrodynamiques. Une seconde explication se base sur les conclusions issues de l'analyse de stabilité globale conduite dans le Chapitre 3. Il a été explicité l'importance de la qualification du bruit venant perturber l'écoulement dans la réponse de ce dernier. Il n'est donc pas exclu, ici, que l'indétermination de ce bruit d'injection soit une explication possible au fait que les fréquences numériques ne correspondent pas aux fréquences expérimentales. Par ailleurs, l'influence de l'ajout d'un bruit numérique sur le couplage aéro-acoustique est une caractéristique qui a déjà été mise en évidence dans le cadre de l'instabilité naturelle de l'écoulement induit par injection pariétale, [128] et [32].

La figure 5.21 présente le spectre de pression au fond avant confronté au spectre de pression expérimental. De la même manière que pour les spectres de

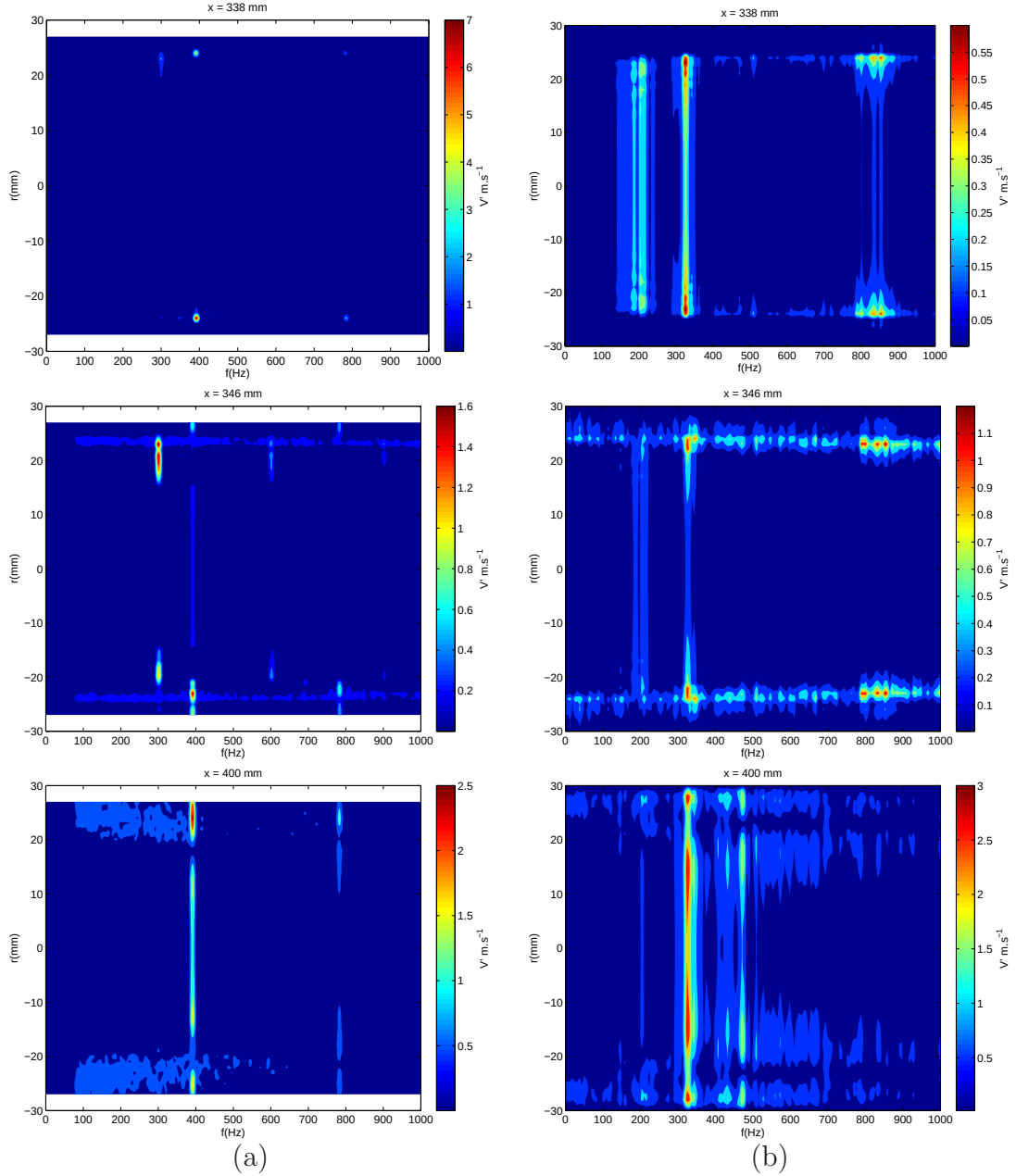


FIGURE 5.20 – Spectres de vitesse fluctuante (a) expérimentaux et (b) numériques

vitesse, la fréquence la plus amplifiée est relativement distincte de la fréquence expérimentale. Toutefois, cette fréquence dominante est ici de l'ordre de 500 Hz (bien qu'un pic soit toujours présent à 320 Hz). Cette fréquence dont l'origine est inconnue est l'expression même que la détermination de la pression au fond avant, grandeur souvent utilisée comme référence dans les oscillations de pression des MPS, demeure numériquement extrêmement difficile à prévoir. La détermination correcte au fond avant ne nécessite non pas seulement un modèle d'intégration adapté mais également, par sa nature aéroacoustique, des conditions aux limites très précises. Notons toutefois que cette fréquence de l'ordre de

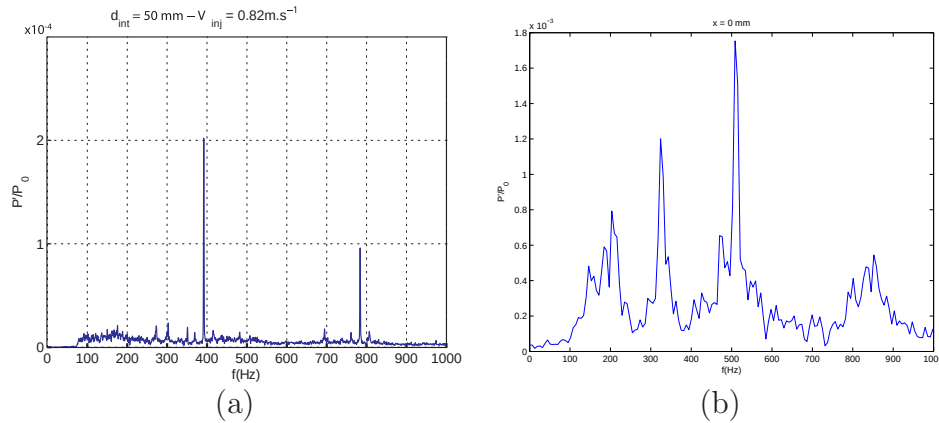


FIGURE 5.21 – Spectres de pression fluctuante au fond avant (a) expérimental et (b) numérique

500 Hz, obtenue numériquement, semble correspondre au mode acoustique en trois-quart d'onde de la chambre (voir section 2.3.2). Pour une certaine raison, qui demeure encore inexpliquée, la simulation numérique traduit le phénomène aéroacoustique sur un mode propre acoustique ; ce qui n'est manifestement pas le cas lors des essais expérimentaux et suggère une inadéquation partielle du modèle numérique choisi.

5.4.3 Bilan de la simulation non-couplée

La simulation numérique du montage VALDO a permis de mettre en données le modèle numérique fluide qui sera utilisé dans l'approche multiphysique. La confrontation des résultats numériques aux résultats expérimentaux du montage VALDO a mis en évidence une certaine disparité du point de vue du comportement instationnaire de l'écoulement. Si les mécanismes hydrodynamiques conduisant à l'émergence de fréquences semble relativement bien captés, l'écart fréquentiel exhibé semble indiquer que la modélisation n'est pas totalement complète. Ces disparités peuvent provenir :

- de la non description précise du bruit d'injection et ce essentiellement par le manque d'informations expérimentales dont on dispose à son sujet,
- d'une sous-résolution spatiale due au maillage,
- d'une modélisation tridimensionnelle trop simplifiée (géométrie complète ramenée à un secteur de 12°).

Bien qu'incomplet, ce modèle numérique de la description fluide sera conservé pour l'approche couplée. En effet, hormis cet écart fréquentiel, il semble décrire de façon relativement précise l'essentiel de la physique qui a lieu dans une telle configuration.

5.5 Calcul couplé aéro-mécanique

Cette section aborde la simulation numérique couplée entre la PTF et l'écoulement induit par injection pariétale en conduite axisymétrique. Pour ce faire, on utilise la méthodologie de couplage présentée dans la section 5.3 qui met en interaction la modélisation fluide précédemment définie et le modèle numérique du solide déterminé et validé dans le chapitre 4. Cette étude numérique de l'interaction fluide-structure sera conduite à la fois en approche stationnaire et instationnaire.

5.5.1 Analyse dimensionnelle

Avant de simuler numériquement l'interaction entre le milieu fluide et le solide, il apparaît intéressant de procéder à une étude dimensionnelle. En effet, en plus des paramètres relatifs à la dynamique du fluide et du solide, il existe des nombres adimensionnels qui traduisent l'interaction des deux milieux. Pour un écoulement de fluide à la vitesse de référence U_o , de masse volumique ρ_F et en utilisant le module d'Young E et une densité ρ_S pour le solide, on définit classiquement deux nombres adimensionnels :

$$\mathcal{M} = \frac{\rho_F}{\rho_S}, \quad \mathcal{C}_Y = \frac{\rho_F U_o^2}{E}, \quad (5.12)$$

qui sont respectivement le nombre de masse et le nombre de Cauchy, communément utilisés dans le domaine des interactions fluide-structure [39]. Le nombre de masse est de l'ordre de 10^{-3} pour l'interaction protection thermique-écoulement d'air. Puisque le nombre de masse quantifie l'effet de masse ajoutée causé par le mouvement fluide, lui même généré par le mouvement du solide, cet effet d'inertie pourra être supposé ici comme négligeable.

Le nombre de Cauchy quantifie, pour sa part, les déformations élastiques d'un solide sous l'effet d'un écoulement fluide et est défini comme le rapport de la pression dynamique et du module d'Young [39]. Pour un module d'Young approximatif de l'ordre de 30 MPa pour le GSM (voir chapitre 4), et pour un écoulement de l'ordre de 20 m.s^{-1} , le nombre de Cauchy correspondant est de l'ordre de 10^{-4} . En fait, de façon plus rigoureuse, il faut prendre en compte l'élancement de la structure dans l'évaluation des déformations, on définit donc l'élancement de la structure $\mathcal{E}$ comme étant le rapport de la hauteur L et de l'épaisseur e , figure 5.22.

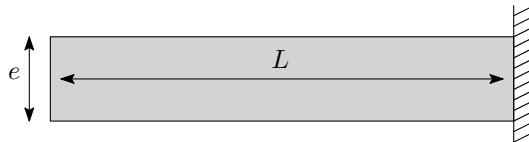


FIGURE 5.22 – Notations géométriques utilisées pour l'analyse dimensionnelle

Les déformations d'une poutre élancée sous un chargement transverse sont proportionnelles à $\mathcal{E}^3$ [40] et le jeu de nombres sans dimension qui convient s'écrit :

$$\mathcal{M} = \frac{\rho_F}{\rho_S}, \quad \mathcal{E} = \frac{L}{e}, \quad \mathcal{C}_Y = \frac{\rho_F U_o^2 L^2}{E e^2} = \frac{\rho_F U_o^2}{E} \mathcal{E}^2, \quad (5.13)$$

et des déplacements qui varient comme :

$$\frac{\xi}{L} = \mathcal{O}(\mathcal{C}_Y \mathcal{E}), \quad (5.14)$$

Dans le cas d'un disque circulaire, on est tenté de pondérer cette relation par un facteur correctif k qui peut être aisément calculé à l'aide de la solution analytique de Timoshenko présentée dans la section 4.4.2 du Chapitre 4 et qui dépend de la PTF considérée.

$$\mathcal{C}_Y = k \frac{\rho_F U_o^2}{E} \mathcal{E}^2, \quad (5.15)$$

Lorsque l'on s'intéresse aux effets dynamiques, on utilise souvent la vitesse réduite U_R définie comme étant le rapport d'une vitesse caractéristique du fluide et d'une vitesse du solide. Puisque la célérité des ondes élastiques dans le solide a pour ordre de grandeur $c_s = \mathcal{O}(\sqrt{E/\rho_s})$, une échelle de temps caractéristique associée à la dynamique du solide est donnée par $T_{solide} = e/c_s$. De la même manière, $T_{fluide} = U_0/e$ est un temps réduit pour le fluide, caractéristique du temps de passage du fluide le long de la distance caractéristique e . Avec ces jeux de paramètres, la vitesse réduite a pour ordre de grandeur :

$$U_R = \mathcal{O}\left(\frac{T_S}{T_F}\right) = \mathcal{O}\left(\frac{U_0}{c_s}\right) < 1 \quad (5.16)$$

ce qui signifie qu'à l'échelle de temps du mouvement du solide, le fluide peut être approximé comme étant quasi-statique. Précisons néanmoins que cette analyse n'est valable que lorsque les deux échelles de temps explicitées ci-dessus traduisent effectivement la dynamique du fluide et du solide. Lorsque l'on se trouve en présence d'un forçage par l'écoulement, les temps caractéristiques peuvent devenir du même ordre de grandeur. Il ne faudra alors plus considérer pour le solide comme temps caractéristique celui des ondes élastiques mais plutôt un temps caractéristique construit sur une période d'oscillation. Le temps caractéristique du fluide est lui lié au phénomène de forçage (le plus souvent se traduisant par détachement tourbillonnaire). La vitesse réduite s'écrit alors :

$$U_R = \frac{U_0}{c_s} = \frac{T_{solide}}{T_{fluide}} = \mathcal{O}(1) \quad (5.17)$$

Ces considérations dimensionnelles permettent alors de distinguer, à l'appui d'observations expérimentales du chapitre 2, deux régimes dans l'interaction entre le fluide et les PTF :

- un mouvement vers la position d'équilibre de la PTF où le fluide peut être considéré comme quasi-statique,
- des oscillations dynamique de la structure à des fréquences identiques à celle du fluide et donc traduisant une interaction fortement couplée.

Ces deux régimes permettent d'entrevoir deux approches distinctes dans la mise en place du calcul aéro-mécanique.

5.5.2 Approche stationnaire

La prise en compte des échelles de temps intervenant dans la déformation de la PTF sous des contraintes fluides permet de considérer le fluide comme quasi-statique. La figure 5.23 présente l'algorithme utilisé, où le fluide peut être considéré comme stationnaire.

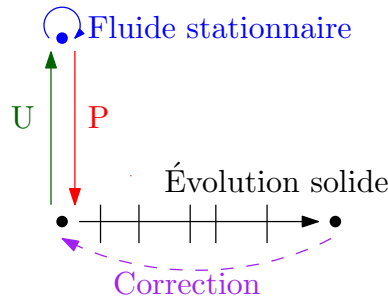


FIGURE 5.23 – Algorithme de couplage pour obtenir la convergence de la structure vers un état stabilisé. Le fluide est considéré stationnaire, U représente le transfert du champ de déplacement et P celui du champ de pression. Dans ce schéma, la phase corrective correspond à une itération de couplage supplémentaire.

L'utilisation de cet algorithme semble particulièrement bien adaptée à la modélisation numérique de l'évolution de la structure, et ce pour plusieurs raisons. D'abord du point de vue du couplage, la modélisation stationnaire du fluide s'avère bien moins coûteuse qu'une modélisation instationnaire. Ensuite, pour des raisons inhérentes au matériau. Le GSM est un élastomère et répond donc à un comportement hyper-visco-plastique. Le temps joue donc un rôle essentiel dans la prédiction des déformations sous contraintes (voir section 4.4.2 chapitre 4), au même titre que l'histoire des déformations vues (effet Mullins). Cet algorithme de couplage a la particularité d'admettre que la structure peut gouverner seule son évolution et offre ainsi la possibilité de contrôler à la fois la vitesse et la fonction de chargement appliquée. Pour ce calcul, la vitesse de déformation est prise égale à celle utilisée expérimentalement dans le montage VALDO. La pression est appliquée linéairement en fonction du temps pendant 1 s. Les conditions de calcul ont ainsi été choisies afin d'être les plus représentatives des conditions expérimentales. La figure 5.24 présente l'évolution de la flèche maximale de la structure en fonction du nombre d'itération de couplage.

L'algorithme de couplage converge alors très rapidement vers un point fixe. En fait, si l'on avait choisi comme critère de convergence une variation de la flèche inférieure à 1%, le couplage aurait cessé dès la troisième itération. Si l'on compare la valeur de la flèche à la position de mesure expérimentale, i.e. à $r = 26$ mm, on trouve une flèche de $8.06 \cdot 10^{-5}$ m. Cette valeur est à comparer avec la flèche expérimentale représentée par la courbe 2.23 et déterminée pour une valeur de la pression d'alimentation du montage VALDO de 2.8 bar, à savoir $7.4 \cdot 10^{-5}$ m. La cohérence entre la flèche prédite par le couplage et celle mesurée expérimentalement permet de valider l'ensemble de la méthodologie

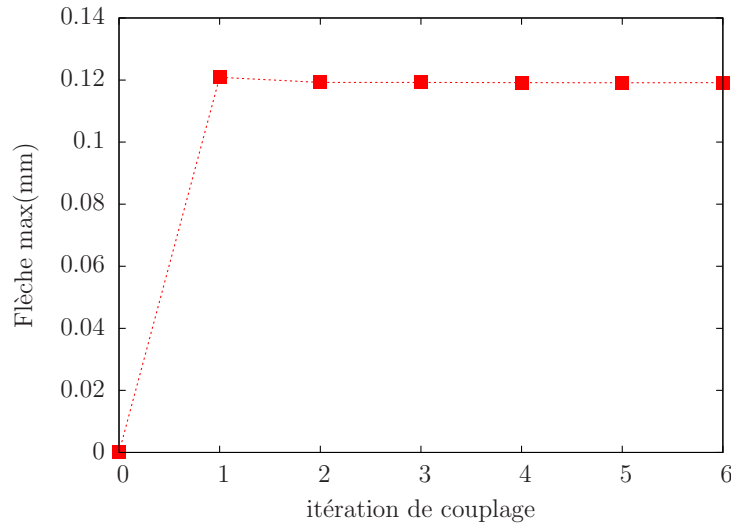


FIGURE 5.24 – Flèche maximale en fonction du nombre d'itération.

mise en place. L'écart d'environ 9% que l'on observe peut être expliqué par la non-modélisation de l'histoire de la structure au cours de la campagne expérimentale; ce qui, comme il l'a été démontré, a un impact certain sur la rigidité apparente du matériau et donc sur la prévision des déformations.

Afin d'analyser l'impact de la déflexion de la PTF sur l'écoulement, les profils de vitesse longitudinale et radiale moyennes sont représentés sur la figure 5.25. La déflexion de l'obstacle semble, sans réelle surprise, n'avoir qu'un impact mineur sur les profils de vitesse moyens, avec un écart de vitesse tout au plus de quelques dixièmes de m.s^{-1} dans la région de proche obstacle (figure 5.25-(a)). A titre d'illustration on présente sur la figure 5.26 le déplacement de l'interface couplée ainsi que le champ de pression résultant dans le maillage fluide. On remarque que, de la même manière que pour les champs de vitesse, le champ de pression n'est que très peu influencé par le déplacement de l'interface. Cette constatation est en accord avec les résultats expérimentaux obtenus sur le montage VALDO où le comportement avec une structure en GSM de diamètre intérieur 50 mm est sensiblement le même que lorsque l'obstacle est rigide.

5.5.3 Approche instationnaire

L'étude de la dynamique instationnaire est effectuée par l'intermédiaire de l'algorithme partitionné séquentiel sous-cyclé présenté dans la section 5.3.1. Le modèle numérique pour le fluide est identique à celui mis au point dans l'approche non-couplée, à l'exception de la phase implicite de mise en régime de l'écoulement qui n'est pas effectuée. En effet, le chargement de la structure étant directement piloté par l'algorithme de couplage (contrairement à l'approche stationnaire), il convient d'effectuer les échanges entre les codes relativement fréquemment en temps afin d'éviter toute instabilité liée à la non-linéarité du problème mécanique. Le problème est alors résolu numériquement avec une période de couplage égale au pas de temps du calcul du solide, à savoir

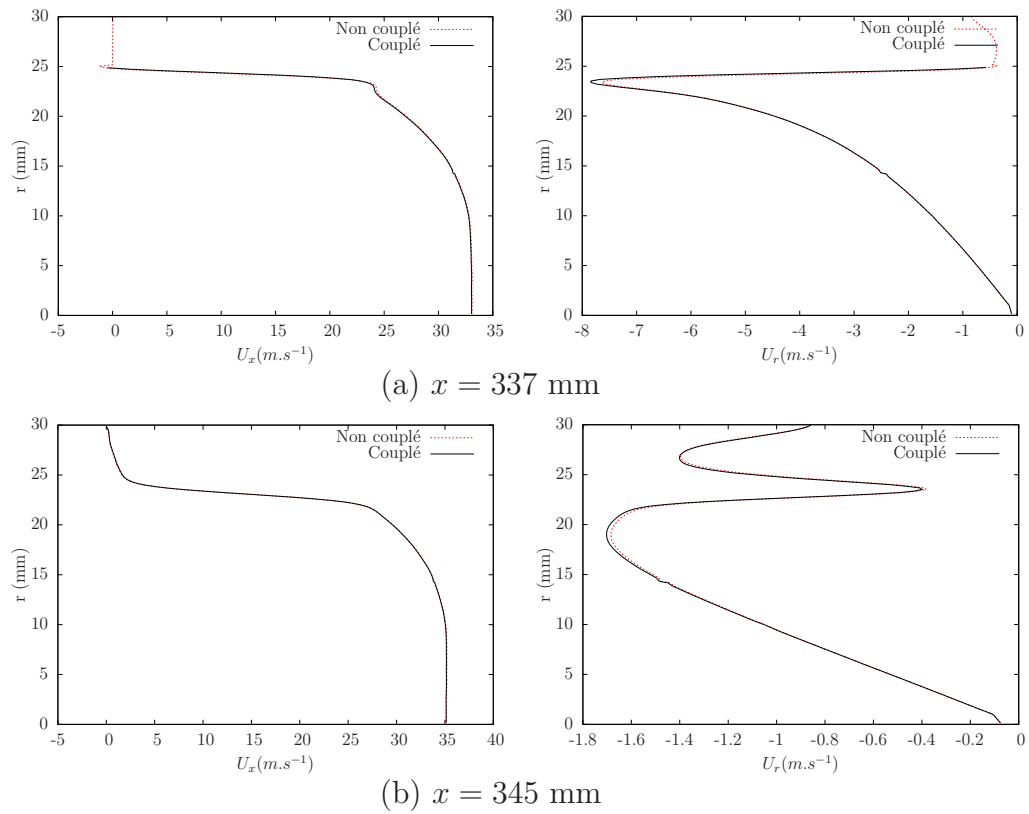


FIGURE 5.25 – Profils de vitesse longitudinale et radiale moyennes à l'itération 0 (sans couplage) et à l'itération 6 (couplage convergé).

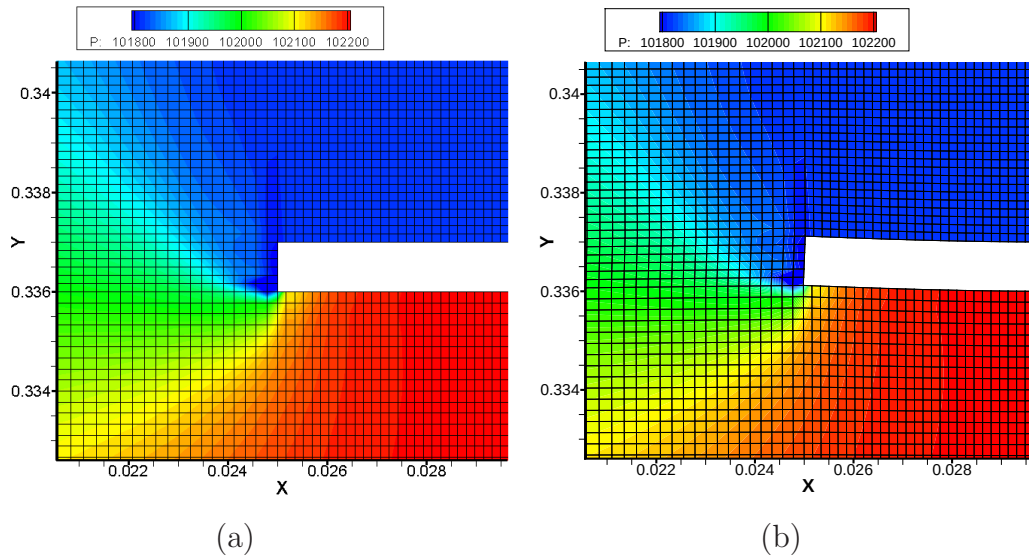


FIGURE 5.26 – Maillage fluide et distribution de pression associée pour l'itération 0 (sans couplage) et pour l'itération 6 (couplage convergé). La figure de droite permet de se rendre compte de la déformation de l'interface fluide-solide

$T_{coupling} = T_{solide} = 10^{-4}$ s. Cette discrétisation temporelle est à priori suffisante pour l'observation de phénomènes périodiques de l'ordre de la centaine de Hz, tel que peuvent le suggérer l'étude expérimentale ainsi que l'approche non couplée.

Pour des raisons de coût de calcul, le calcul couplé n'a pu être mené que sur un temps physique de 0.08 s. En effet, la fréquence élevée des échanges sollicite fréquemment le code ZeBuLoN dont chaque itération est à peu près 5 fois plus chère (dans notre configuration numérique, seul le domaine fluide est formulé en multi-domaine) qu'une itération fluide. L'évolution de la flèche maximale de la structure est représentée en fonction du temps sur la figure 5.27. Une fois le régime transitoire dépassé ($t > 0.04$ s), il semble que l'obstacle entretienne des vibrations autour d'une position d'équilibre, que l'on évalue numériquement par moyennage sur les dernières 0.04 s à $1.28 \cdot 10^{-4}$ m. Cette valeur est directement comparable à la flèche maximale obtenue par l'approche stationnaire, c'est-à-dire $1.19 \cdot 10^{-4}$ m. L'écart relatif n'est alors que de 7%, mais semble toutefois suggérer que le calcul instationnaire mérite d'être prolongé afin de converger en moyenne vers le même point fixe.

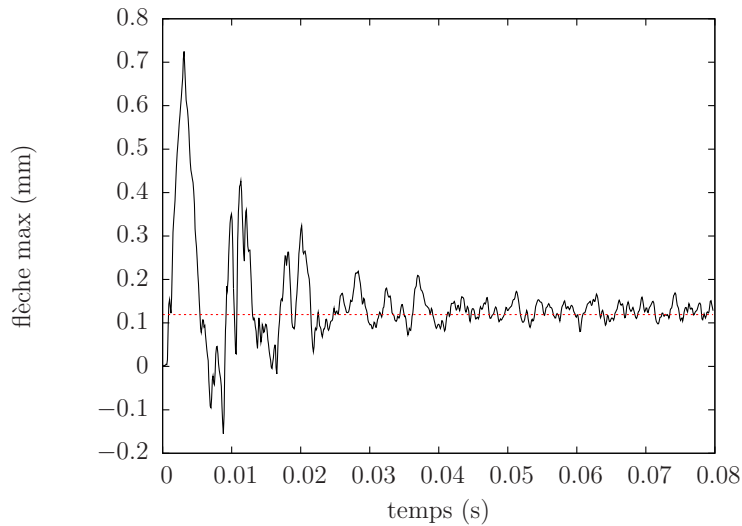


FIGURE 5.27 – Flèche maximale de la PTF en fonction du temps. La droite en pointillé rouge représente la flèche déterminée par l'approche stationnaire.

Bien que la période d'acquisition soit ici très nettement inférieure à celle utilisée dans l'approche non-couplée, on se propose de réaliser quand même une analyse spectrale des signaux de vibrations. Comme mentionné dans le chapitre 4, la non prise en compte de l'effet Payne et de la dépendance en fréquence dans la modélisation du comportement mécanique peut avoir une influence considérable sur la prédiction des amplitudes de vibrations. L'hypothèse est ici faite que le fluide impose les vibrations à la structure par l'intermédiaire des contraintes, hypothèse qui s'avère justifiée par l'étude expérimentale des vibrations des PTF dans le montage VALDO. Le spectre des vibrations de l'obstacle est représenté sur la figure 5.28.

La fréquence dominante observée est de l'ordre de 240 Hz. Compte tenu de

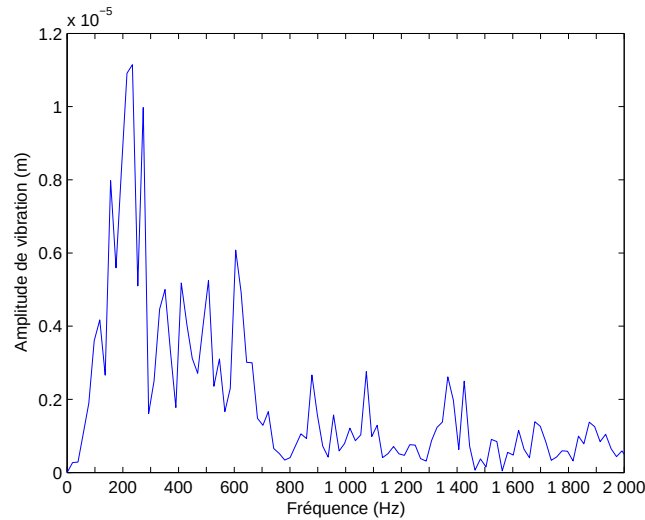


FIGURE 5.28 – Analyse spectrale des vibrations de la PTF. Résolution fréquentielle de 20 Hz.

la résolution spectrale de 20 Hz, cette fréquence de vibration semble cohérente avec la valeur expérimentale de 270 Hz. Il aurait alors été fortement intéressant de conduire une démarche similaire sur les signaux traduisant l'évolution temporelle des variables primitives du domaine fluide, mais cette fonctionnalité est malheureusement encore indisponible lorsque l'on utilise la formulation ALE du code CEDRE. À titre d'illustration du calcul multiphysique tridimensionnel instationnaire, on représente, sur la figure 5.29, un état déformé au cours du temps de la PTF ainsi que le champ de pression dans le domaine fluide associé.

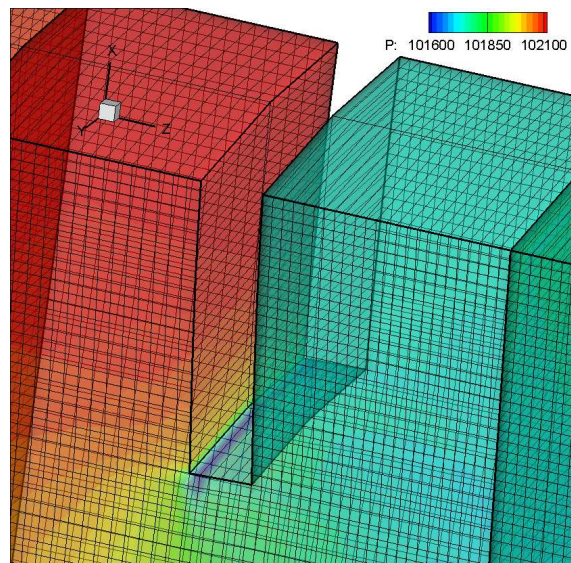


FIGURE 5.29 – Flèche maximale en fonction du nombre d'itérations.

5.6 Conclusion

Dans ce chapitre, l'interaction fluide-structure initialement identifiée par l'expérience sur le montage VALDO a été approchée par voie entièrement numérique. La méthode développée entre les codes de calcul CEDRE et ZeBu-LoN repose sur une classe d'algorithmes de couplage partitionnés séquentiels. Cette méthodologie a pu être validée à travers deux cas de calculs.

Une modélisation fluide de la chambre interne du montage VALDO, en interaction avec une PTF, a pu être étudiée numériquement. Si, pour des raisons de coût de calcul, les simulations n'ont pas été menées jusqu'à un temps physique permettant une analyse physique approfondie, une méthodologie de couplage dans l'étude de l'interaction de l'écoulement interne avec une PTF est néanmoins proposée. Ainsi, dans la pratique, on initialisera le calcul multiphysique par une approche dite stationnaire où le fluide est considéré comme stationnaire, permettant ainsi de contrôler avec une grande flexibilité le chemin par lequel le solide atteint un régime asymptotique. Une fois la position *statique* de la PTF déterminée, une approche instationnaire visant à simuler une interaction forte (au sens d'une vitesse réduite proche de l'unité) peut alors être entreprise avec, par exemple, l'utilisation d'un algorithme sous-cyclé.

Notons que le cas d'étude choisi, à savoir une PTF de diamètre intérieur 50 mm, exhibe un faible niveau de déformation qui ne permet pas de tirer pleinement profit de la potentialité de la loi de comportement à traduire les grandes déformation ainsi que celle du maillage à propager le mouvement. Sur la base de la méthodologie d'étude de l'interaction fluide-structure, d'autres PTF pourront être étudiées.

Chapitre 6

Conclusion

L'objectif de cette thèse était de mieux comprendre l'interaction qui peut avoir lieu entre l'écoulement induit par injection pariétale en géométrie axisymétrique et une structure : la Protection Thermique de Face ou encore PTF. Cette problématique a été posée dans le contexte *particulier* des oscillations de pression des Moteurs à Propergol Solide du lanceur Ariane 5. Contexte qualifié de *particulier*, avant tout parce que la considération d'un moteur plutôt qu'un autre oriente de façon conséquente l'étude et la considération de certains mécanismes physiques. C'est autour de cette idée centrale, *que les mécanismes intervenant dans les MPS P230 peuvent être foncièrement différents de ceux jusque-là identifiés*, que s'articule l'ensemble de ce travail.

On sait, depuis plusieurs années maintenant, que l'écoulement induit par injection pariétale est le siège d'instabilités hydrodynamiques. L'une des premières questions qui se pose naturellement est d'identifier, en configuration axisymétrique, quel est l'effet (si il y en a un) de l'introduction d'une PTF sur ces instabilités hydrodynamiques ? Ce premier point est abordé dans une étude expérimentale réalisée à l'aide du montage VALDO de l'ONERA et fait l'objet du chapitre 2. On a ainsi démontré expérimentalement que la présence de l'obstacle modifiait non seulement l'écoulement moyen mais avait également un impact non négligeable sur la dynamique instationnaire. Cette influence se traduit essentiellement par un glissement des fréquences les plus amplifiées par rapport au cas sans obstacle. L'étude expérimentale a donc permis de confirmer la nécessité de prendre en compte les PTF dans la prédiction des oscillations de pression du P230. À ce stade, la multitude des configurations possibles ne pouvant vraisemblablement pas toutes être étudiées et, sur la base d'arguments physiques mais également de représentativité de l'échelle 1, il a été choisi de se concentrer sur une PTF en particulier.

Si les phénomènes d'instabilités hydrodynamiques ont été identifiés expérimentalement et que les mécanismes physiques sous-jacents semblent aujourd'hui bien compris pour le canal à injection pariétale, ces derniers demeurent néanmoins encore partiellement inexpliqués en présence d'un obstacle. Face à un tel constat, le chapitre 3 se voit consacré à une analyse de stabilité linéaire en approche globale pour ces deux configurations.

Indépendamment de la configuration choisie, l'écoulement induit par injection pariétale est trouvé globalement stable aux perturbations axisymétriques pour l'ensemble des nombres de Reynolds explorés. La notion de valeurs propres fréquemment utilisée lors de l'analyse d'un opérateur s'est révélée être une notion peu robuste et ce, en conséquence directe de la non-normalité de l'opérateur Global de Navier-Stokes Linéarisé. La dynamique d'amplificateur de l'écoulement est alors approchée et rendue possible par l'introduction de la notion de résolvante de l'opérateur. Une telle étude n'avait jamais été, à notre connaissance, réalisée sur de pareilles configurations. L'examen de la réponse de l'écoulement à un forçage harmonique a conduit à l'identification d'un mécanisme de *pseudo-resonance* qui permet d'apporter un regard nouveau sur l'amplification des instabilités.

Qu'advient-il des oscillations de pression lorsque l'obstacle n'est plus considéré comme infiniment rigide? Derrière cette question se cache un véritable souci de transposition des mécanismes jusque là étudiés vers l'échelle 1. L'introduction d'obstacles en GSM dans le montage VALDO, matériau utilisé pour la fabrication des PTF du MPS P230, est alors entreprise et analysée, chapitre 2. La prise en compte de la dynamique de la structure est alors perçue comme ayant un impact notable sur les fréquences amplifiées et les niveaux des fluctuations de pression. Une modélisation de ces interactions nécessite donc la considération d'un fluide à forte composante acoustique interagissant avec une structure en élastomère. Seule une approche par simulation numérique peut apporter la flexibilité et les potentialités nécessaires à l'étude de cette interaction complexe fluide-structure.

Une conséquence directe de cette entreprise numérique est la définition, avant toute approche couplée, d'une modélisation représentative du comportement du matériau. Le chapitre 4 est ainsi consacré à la caractérisation ainsi qu'à la définition d'un modèle numérique traduisant le comportement mécanique du GSM. L'étude expérimentale a permis d'identifier les principaux mécanismes physiques régissant le comportement du matériau : à savoir l'hyperélasticité, la viscoplasticité ou encore les effets Mullins et Payne. En 2005, Qi & Boyce [107] ont proposé un modèle générique permettant de traduire le comportement mécanique des thermoplastiques-élastomères. Ce modèle est repris et modifié, notamment par l'adjonction d'un écrouissage non-linéaire cinématique, et appliqué au calcul de structures représentatives des PTF à l'aide du code de calcul ZeBuLoN.

L'approche numérique du montage VALDO est conduite dans le chapitre 5. Simuler numériquement les oscillations de pression est une étape courante en propulsion solide et s'inscrit à la fois dans une logique de compréhension et de conception des futurs lanceurs. Une simulation fluide est alors réalisée pour un point de fonctionnement du montage et est considérée comme cas de référence pour l'approche multiphysique. Ce calcul conclu positivement sur la capacité du code fluide CEDRE à traduire les mécanismes physiques malgré certaines disparités vis-à-vis de l'expérience. Les hypothétiques responsables de l'écart observé en terme de fréquence sont un modèle numérique trop simplifié

avec l'absence de modélisation explicite des termes de sous-mailles ou encore une imprécision des conditions aux limites. Une autre piste non négligeable est le manque de données expérimentales sur la condition d'injection que l'on modélise par une simple condition à débit fixé, ce qui, bien que physiquement admissible, semble trop simplifié dans notre cas.

Ce modèle numérique fluide est conservé en l'état et couplé à la modélisation solide déterminée dans le chapitre 4, via une approche partitionnée. Cette approche utilise la bibliothèque MpCCI pour assurer la réinterpolation et l'échange des champs en conservant l'indépendance entre les codes. Deux cas simples de validation ont permis de vérifier la précision de la solution de couplage par échange de pression-déplacements. Le couplage aéromécanique est alors abordé et deux algorithmes sont proposés. Le premier repose, sur la base de considérations dimensionnelles, sur une simplification d'un fluide à l'état quasi-stationnaire. Cette approche s'est révélée satisfaisante dans la prédiction de la déformée moyenne expérimentale de l'obstacle. Les instationnarités, tant dans le fluide que dans le solide, sont quant à elle traitées par l'intermédiaire d'un couplage partitionné séquentiel sous-cyclé. Pour des raisons de temps de calculs, l'aspect instationnaire n'a pu être simulé sur un temps physique suffisamment long pour permettre d'en tirer des conclusions définitives. Toutefois, les premiers résultats permettent de valider l'approche instationnaire du couplage avec notamment des vibrations de l'obstacle à des fréquences proches de celles mesurées expérimentalement. Rappelons que à la fois la modélisation d'une structure non-linéaire et celle d'un fluide complexe ne semblaient, à priori, pas une tâche aisée du point de vue du couplage.

Bibliographie

- [1] K.M. Aaron and F.E.C. Culick. Coupled vortex shedding and acoustic resonances in a duct. *22nd JANNAF Combustion Meeting*, 1985.
- [2] E. Akervik, J. Hoepffner, U. Ehrenstein, and D. Henningson. Optimal growth, model reduction and control in separated boundary-layer flow using global modes. *Journal of Fluid Mechanics*, 579(-1) :305–314, 2007.
- [3] P. R. Amestoy, I. S. Duff, J.-Y. L'Excellent, and J. Koster. A fully asynchronous multifrontal solver using distributed dynamic scheduling. *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, 23(1) :15–41, 2001.
- [4] J.D. Anderson and J. Anderson. *Modern Compressible Flow : With Historical Perspective*. McGraw-Hill Science/Engineering/Math, 3^{ème} édition, July 2002.
- [5] P. Andersson, M. Berggren, and D.S. Henningson. Optimal disturbances and bypass transition in boundary layers. *Physics of Fluids*, 11(1) :134–150, 1999.
- [6] J. Anthoine. *Experimental and Numerical Study of Aeroacoustic Phenomena in Large Solid Propellant Boosters*. PhD thesis, Von Karman Institute For Fluid Dynamics, 2000.
- [7] J. Anthoine and D. Olivari. Investigation of flow acoustic coupling in a model of solid propellant boosters. In R. A. Harris, editor, *Aerothermodynamics for space vehicles*, volume 426 of *ESA Special Publication*, page 583, 1999.
- [8] E.M. Arruda and M.C. Boyce. A three-dimensional constitutive model for the large stretch behavior of rubber elastic materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 41, 1993.
- [9] G. Avalon, D. Lambert, and S. Cerqueira. Montage VALDO : activités expérimentales sur le couplage fluide-structure. *ONERA rapport technique RT 8/12910 DEFA*, 2008.
- [10] G. Avalon, B. Ugurtas, F. Grisch, and A. Bresson. Numerical computations and visualization tests of the flow inside a cold gas simulation with characterization of a parietal vortex shedding. *36th AIAA/SAE/ASME Joint Propulsion Conference and Exhibit, AIAA Paper 2000-3387*, July 2000.

- [11] S. Ballereau and F. Godfroy. Données relatives au mps du lanceur ariane 5, communication privée. Technical report, SNPE.
- [12] S. Ballereau, F. Godfroy, S. Gallier, O. Orlandi, J. Thepenier, E. Robert, and N. Cesco. Evaluation method of thrust oscillations in large SRM - application to segmented SRMs. *47th AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference and Exhibit*, 2011.
- [13] A. Barbagallo, D. Sipp, and P.J. Schmid. Closed-loop control of an open cavity flow using reduced-order models. *Journal of Fluid Mechanics*, 641(-1) :1–50, 2009.
- [14] D. Barkley, M. Gomes, and R. Henderson. Three-dimensional instability in flow over a backwardfacing step. *Journal of Fluid Mechanics*, 473 :167–190, 2002.
- [15] J. S. Bendat and A. G. Piersol. *Engineering Applications of Correlations and Spectral Analysis*. Wiley-Interscience Publication, 1980.
- [16] J.S. Bergstrom and M.C. Boyce. Constitutive modeling of the large strain time-dependent behavior of elastomers. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 46, 1998.
- [17] N. Bertier. *Simulation des grandes échelles en aérothermique sur des maillages non-structurés généraux*. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie (Paris VI), Avril 2006.
- [18] J. Besson, G. Cailletaud, J.L. Chaboche, and S. Forest. *Mécanique non-linéaire des matériaux*. édition Hermès, 2001.
- [19] J. Besson and S. Cantournet. Modélisation du comportement des tpe. modèle et implémentation dans zebulon. *Communication privée*, 2008.
- [20] K. Y. Billah and R. H. Scanlan. Resonance, Tacoma Narrows bridge failure, and undergraduate physics textbooks. *American Journal of Physics*, 59 :118–124, 1991.
- [21] M.C. Boyce, D.M. Parks, and A.S. Argon. Large inelastic deformation of glassy polymers. part i : rate dependent constitutive model. *Mechanics of Materials*, 7(1) :15–33, 1988.
- [22] M. Brandyberry, R. Fiedler, and C. McLay. Verification and validation of the rocstar 3d multi-physics solid rocket motor simulation program. *41st AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference and Exhibit*, 2005.
- [23] R.S. Brown, R. Dunlap, S.W. Young, and R.C. Waugh. Vortex shedding as an additional source of acosutic energy in segmented solid propellant rocket motor. *AIAA-80-1092*, 1980.

-
- [24] R.S. Brown, R. Dunlap, S.W. Young, and R.C. Waugh. Vortex shedding as an additional source of acoustic energy in segmented solid propellant rocket motor. *Journal of Spacecraft and Rocket*, 18 :312–319, 1981.
 - [25] K. M. Butler and B. F. Farrell. Three-dimensional optimal perturbations in viscous shear flow. *Physics of Fluids*, 4 :1637–1650, August 1992.
 - [26] S. Candel. *Mécanique des fluides*. Dunod, 2001.
 - [27] S. Cantournet. Mullins effect and cyclic stress softening of filled elastomers by internal sliding and friction thermodynamics model. *International Journal of Solids and Structures*, 46(11-12) :2255 – 2264, 2009.
 - [28] G. Casalis, G. Avalon, and J. P. Pineau. Spatial instability of planar channel flow with fluid injection through porous walls. *Physics of Fluids*, 10(10) :2558–2568, 1998.
 - [29] CEDRE. Code d’Écoulements (Diphasiques)(Réactifs) pour l’Énergétique. <http://cedre.onera.fr/>.
 - [30] S. Cerqueira, G. Chaineray, B. Courbet, M. Errera, F. Feyel, and F. Vuillot. Validation of fluid-structure coupling computations for solid propellant rocket motors applications. *3rd European Conference for AeroSpace Sciences (EUCASS)*, 2009.
 - [31] J.L. Chaboche. Sur l’utilisation des variables d’état interne pour la description de la viscoplasticité cyclique avec endommagement. *Problèmes non linéaires de Mécanique, Symposium Franco-Polonais de rhéologie et mécanique*, 1977.
 - [32] F. Chedevergne. *Instabilités intrinsèques des moteurs à propergol solide*. PhD thesis, Ecole Nationale Supérieure de l’Aéronautique et de l’Espace (ENSAE), 2007.
 - [33] F. Chedevergne, G. Casalis, and Th. Feraille. Biglobal linear stability analysis of the flow induced by wall injection. *Physics of Fluids*, 18, 2006.
 - [34] J.-M. Chomaz. Global instabilities in spatially developing flows : Non-Normality and Nonlinearity. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 37 :357–392, January 2005.
 - [35] F. E. C. Culick. Rotational axisymmetric mean flow and damping of acoustic waves in a solid propellant rocket. *AIAA Journal*, 4(8) :1462–1464, 1966.
 - [36] F. E. C. Culick and K. Magiawala. Excitation of acoustic modes in a chamber by vortex shedding. *Journal of Sound and Vibration*, 64(3) :455–457, 1979.
 - [37] F.E.C. Culick. *Unsteady motions in combustion chambers for propulsion systems*. NATO Research and Technology Organisation, December 2006.

- [38] T.A. Davis and I.S. Duff. An unsymmetric-pattern multifrontal method for sparse lu factorization. *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, 18(1) :140–158, 1997.
- [39] E. de Langre. *Fluides et solides*. Ecole Polytechnique (editions), 2002.
- [40] E. de Langre. Effects of wind on plants. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 40 :141–168, 2008.
- [41] R. Dunlap, A. M. Blackner, R. C. Waugh, R. S. Brown, and P. G. Willoughby. Internal flow field studies in a simulated cylindrical port rocket chamber. *Journal of Propulsion and Power*, 6(6) :690–704, 1990.
- [42] R. Dunlap and R. S. Brown. Exploratory experiments on acoustic oscillations driven by periodic vortex shedding. *AIAA Journal*, 19(3) :408–409, 1981.
- [43] J. Dupays. *Contribution à l'étude du rôle de la phase condensée dans la stabilité d'un propulseur à propergol solide pour lanceur spatial*. PhD thesis, Ecole Nationale Supérieure de l'Aéronautique et de l'Espace (ENSAE), 1996.
- [44] W. S. Edwards, L. S. Tuckerman, R. A. Friesner, and D. C. Sorensen. Krylov methods for the incompressible navier-stokes equations. *J. Comput. Phys.*, 110(1) :82–102, 1994.
- [45] U. Ehrenstein and F. Gallaire. Optimal perturbations and low-frequency oscillations in a separated boundary-layer flow. *5th AIAA Theoretical Fluid Mechanics Conference*, AIAA paper 2008-4232, 2008.
- [46] A. Ern and J. Guermond. *Éléments Finis : théorie, applications, mise en oeuvre*. Springer, 2002.
- [47] Y. Fabignon, P. Kuentzmann, F. Vuillot, M. Prévost, R. Bec, E. Robert, and P. Marion Duval. A survey of french research and technology program on the internal aerodynamics of segmented solid motors. *2nd European Conference on Launcher Technology*, 2000.
- [48] C. Farhat, P. Geuzaine, and C. Grandmont. The discrete geometric conservation law and the nonlinear stability of ale schemes for the solution of flow problems on moving grids. *Journal of Computational Physics*, 174(2) :669–694, 2001.
- [49] B.F. Farrell and P. J. Ioannou. Generalized stability theory part i : autonomous operators. *J. Atmos. Sci.*, 53(14) :2025–2040, 1996.
- [50] C. Felippa, K. C. Park, and C. Farhat. Partitioned analysis of coupled mechanical systems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190 :3247–3270, 2001.

-
- [51] T. Féraïlle. *Instabilités de l'écoulement interne des moteurs à propergol solide*. PhD thesis, Ecole Nationale Supérieure de l'Aéronautique et de l'Espace (ENSAE), 2004.
 - [52] G. A. Flandro. Vortex driving mechanism in oscillatory rocket flows. *Journal of Propulsion and Power*, 2(3) :206–214, 1986.
 - [53] G. A. Flandro and H. R. Jacobs. Vortex generated sound in cavities. *AIAA Paper 73-1014*, October 1973.
 - [54] G. A. Flandro and J. Majdalani. Aeroacoustic instability in rockets. *AIAA Journal*, 41(3) :485–497, 2003.
 - [55] A.B. Flatau. *Vortex driven sound in a cylindrical cavity*. PhD thesis, University of Utah, 1990.
 - [56] P.J. Flory and J. Rehner. Statistical mechanics of swelling of crosslinked polymer networks. *Journal of Chemical Physics*, 11 :521–526, 1943.
 - [57] S. Forest, M. Amestoy, S. Cantournet, G. Damamme, S. Kruch, and V. Maurel. *Mécanique des milieux continus I et II*. Ecole des Mines de Paris, 2007-2008.
 - [58] P. Freymuth. On transition in a separated laminar boundary layer. *Journal of Fluid Mechanics*, 1966.
 - [59] J.D. Garaud. *Développement de méthodes de couplage aérothermo-mécanique pour la prédiction d'instabilités dans les structures aérospatiales chaudes*. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie (Paris VI), 2008.
 - [60] J. Giordano. *Contribution à la modélisation numérique des problèmes d'interactions fluide-fluide et fluide-structure*. PhD thesis, Université d'Aix-Marseille I, Décembre 2004.
 - [61] J. Giordano and al. Shock wave impacts on deforming panel, an application of fluid-structure interaction. *Shock Waves*, 14 :103–110, 2005.
 - [62] J.C. Godon and M. Prevost. Revue globale des tirs sur propulseur lp6 du programme d'oscillations de poussée (pop). analyse du comportement instationnaire de la maquette du moteur p230 d'ariane 5 à l'échelle 1/15. *ONERA rapport technique RTF 1/06725 DMAE*, 2002.
 - [63] J. Griffond. *Instabilité pariétale et accrochage aéroacoustique dans les conduits à parois débitantes simulant les moteurs à propergol solide d'Ariane 5*. PhD thesis, Ecole Nationale Supérieure de l'Aéronautique et de l'Espace (ENSAE), 2001.
 - [64] J. Griffond and G. Casalis. Linear stability of injection induced flow : effect of weak unsteadiness. *International Conference on Stability and Turbulence*, April 1999.

- [65] J. Hijlkema, M. Prevost, and G. Casalis. On the importance of reduced scale ariane 5 p230 solid rocket motor models in the comprehension and prevention of thrust oscillations. *CEAS Space Journal*, 2011.
- [66] C. Ho and P. Huerre. Perturbed free shear layer. *Annual review of Fluid Mechanics*, 1984.
- [67] G.H Holzapfel. *Non-linear solid mechanics*. John Wiley & Sons, LTD, 1999.
- [68] P. Huerre and M. Rossi. *Hydrodynamic instabilities in open flows*. Chapitre dans l'ouvrage Hydrodynamics and Nonlinear Instabilities. Cambridge University press, 1998.
- [69] C. P. Jackson. A finite-element study of the onset of vortex shedding in flow past variously shaped bodies. *Journal of Fluid Mechanics*, 182 :23–45, 1987.
- [70] R.K. Jaiman, X. Jiao, P.H. Geubelle, and E. Loth. Assessment of conservative load transfer for fluid-solid interface with non-matching meshes. *International Journal for numerical methods in engineering*, 64 :2014–2038, 2005.
- [71] J.H. Ji-Hyun Cho and S.K. Youn. A viscoelastic constitutive model of rubber under small oscillatory load superimposed on large static deformation considering the payne effect. *Journal of Applied Polymer Science*, 75, 2006.
- [72] B. Karthik, S.R. Chakravarthy, and R.I. Sujith. The effect of orifice thickness on the vortex-acoustic interaction in a duct. *7th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference, AIAA Paper 2001-2182*.
- [73] P. Kuentzmann. *Instabilités de combustion*. Combustion of Solid Propellants, AGARD LS-180, 1991.
- [74] P. Le Breton, J.F. Guery, F. Vuillot, and M. Prevost. Recent advances in the prediction of srm thrust oscillations. *1^{er} Colloque Européen sur la Technologie des Lanceurs "Vibration des Lanceurs"*, 1999.
- [75] E.H. Lee and D.T. Liu. Finite strain elastic-plastic theory with application to. plane-wave analysis. *Journal of Applied Physics*, 38(19), 1967.
- [76] R.B. Lehoucq and J.A. Scott. Implicitly restarted arnoldi methods and subspace iteration. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 23(2) :551–562, 1997.
- [77] P. Luchini. Reynolds-number-independent instability of the boundary layer over a flat surface : optimal perturbations. *Journal of Fluid Mechanics*, 404(-1) :289–309, 2000.

-
- [78] N. Lupoglazoff and F. Vuillot. Parietal vortex shedding as a cause of instability for long solid propellant motors. *34th AIAA Aerospace Sciences Meeting, AIAA Paper 96-0761*, January 1996.
- [79] N. Lupoglazoff, F. Vuillot, J. Dupays, and Y. Fabignon. Numerical simulations of the unsteady flow inside ariane 5 p230 srm booster with burning aluminum particles. *2nd European Conference on Launcher Technology, Space Solid Propulsion*, 2000.
- [80] O. Marquet. *Stabilité globale et contrôle d'écoulements de recirculation*. PhD thesis, Université de Poitiers, 2007.
- [81] O. Marquet and D. Sipp. Noise amplifiers in a global approach. *Under consideration for publication in Journal of Fluid Mechanics*, 2010.
- [82] O. Marquet, D. Sipp, J.-M. Chomaz, and L. Jacquin. Amplifier and resonator dynamics of a low-reynolds-number recirculation bubble in a global framework. *Journal of Fluid Mechanics*, 605(-1) :429–443, 2008.
- [83] P. Meliga, J.-M. Chomaz, and D. Sipp. Unsteadiness in the wake of disks and spheres : Instability, receptivity and control using direct and adjoint global stability analyses. *Journal of Fluids and Structures*, 25 :601–616, May 2009.
- [84] K. Memmler. *The science of rubber*. 1934.
- [85] N. Meynet. *Simulation numérique de la combustion d'un propergol solide*. PhD thesis, Université Paris VI, 2005.
- [86] A. Michalke. On spatially growing disturbances in an inviscid shear layer. *Journal of Fluid Mechanics*, 1965.
- [87] M. Mooney. A theory of large elastic deformation. *Journal of Applied Physics*, 11(9) :582–592, 1940.
- [88] P. M. Morse and K. U. Ingard. *Theoretical Acoustics*. McGraw-Hill, 1968.
- [89] L. Mullins. Effect of stretching on the properties of rubber. *Journal of Rubber Research*, 1947.
- [90] L. Mullins. Softening of rubber by deformation. *ubber Chemistry and Technology*, 42 :339–362, 1969.
- [91] L. Mullins and N.R. Tobin. Theoretical model for the elastic behavior of filled-reinforced vulcanized rubber. *Rubber Chemistry and Technology*, 30 :555–571, 1957.
- [92] E. Naudascher and D. Rockwell. *Flow-Induced Vibrations*. A.A. Balkema, Rotterdam, 1994.

- [93] H. Nomoto and F. E. C. Culick. An experimental investigation of pure tone generation by vortex shedding in a duct. *Journal of Sound and Vibration*, 84(2) :247–252, 1982.
- [94] R.W. Ogden. Large deformation isentropic elasticity - on the correlation of theory and experiment for incompressible rubberlike solids. *Proceedings of the Royal Society of London*, A326, 1972.
- [95] W.M.F. Orr. The stability or instability of the steady motions of a perfect liquid and of a viscous liquid. *Proc R. Irish Acad. Ser. A.*, 27(9) :69–138, 1907.
- [96] Chevalier P. and al. Cedre : development and validation of a multiphysic computational software. 1st *European Conference for Aerospace Sciences (EUCASS)*, 2005.
- [97] R.L. Panton. *Incompressible flow*, 2nd ed. John Wiley, 1996.
- [98] K. C. Park, C. Felippa, and J.A. Deruntz. Stabilization of staggered solution procedures for fluidstructure interaction analysis. *Computational Methods for fluid-structure interaction problems*, 26 :95–124, 1977.
- [99] A.P. Payne. A note on the existence of a yield point in the dynamic modulus of loaded vulcanizates. *Journal of Applied Polymer Science*, 3, 1960.
- [100] Z. Petrovic and J. Ferguson. Polyurethane elastomers. *Progress in Polymer Science*, 16 :695–836, 1991.
- [101] S. Piperno. *Simulation numérique de phénomènes d'interaction fluide-structure*. PhD thesis, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées (ENPC), 1995.
- [102] S. Piperno and C. Farhat. Partitioned procedures for the transient solution of coupled aeroelastic problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190(24) :3147–3170, 2001.
- [103] O. Pironneau, F. Hecht, and J. Morice. Freefem++. <http://www.freefem.org>.
- [104] E.W. Price. Review of combustion instability in solid propellant rockets. *Bulletin of the 17th JANAF ARPA NASA Solid Propellant Group*, 1 :165–193, 1961.
- [105] E.W. Price. Solid rocket combustion instability - an american historical account,” chapitre 1 dans nonsteady burning and combustion stability of solid propellants. *AIAA Progress in Astronautics and Aeronautics*, 143 :1–16, 1992.
- [106] H.J. Qi and M.C. Boyce. Constitutive model for stretch induced softening of the stress stretch behavior of elastomeric materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 52, 2004.

-
- [107] H.J. Qi and M.C. Boyce. Stress strain behavior of thermoplastic polyurethanes. *Mechanics of Materials*, 37, 2005.
 - [108] R.S. Rivlin. Large elastic deformations of isotropic materials i. fundamental concepts. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, A240 :459–490, 1948.
 - [109] R.S. Rivlin. Large elastic deformations of isotropic materials iv. further developments of the general theory. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, A241 :379–397, 1948.
 - [110] D. Rockwell and E. Naudascher. Oscillations of impinging shear layers. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 11 :67–94, 1979.
 - [111] J.E. Rossiter. Wind tunnel experiments on the flow over rectangular cavities at subsonic and transonic speeds. Technical Report 3438, Aeronautical research council, Ministry of Aviation, 1964.
 - [112] Cantournet S. and Desmorat R. Thermodynamics modelling of internal friction and hysteresis of elastomers. *Comptes Rendus Mecanique*, 331(4) :265–270, 2003.
 - [113] P. J. Schmid. Nonmodal Stability Theory. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 39 :129–162, January 2007.
 - [114] P. J. Schmid and D. S. Henningson. A new mechanism for rapid transition involving a pair of oblique waves. *Physics of Fluids*, 4 :1986–1989, September 1992.
 - [115] P.J. Schmid and D. S. Henningson. *Stability and Transition in Shear Flows*. Springer Verlag, 2001.
 - [116] A.H. Shapiro. *The dynamics and thermodynamics of compressible fluid flow*. The Ronald Press Company, New York, 1954.
 - [117] M. Simoes. *Modélisation eulérienne de la phase dispersée dans les moteurs à propergol solide, avec prise en compte de la pression particulaire*. PhD thesis, Institut National Polytechnique De Toulouse, 2006.
 - [118] D. Sipp. Dynamique et contrôle des instationnarités en aérodynamique. *Habilitation à Diriger des Recherche*, 2009.
 - [119] D. Sipp and A. Lebedev. Global stability of base and mean flows : a general approach and its applications to cylinder and open cavity flows. *Journal of Fluid Mechanics*, 593 :333–358, 2007.
 - [120] D. Sipp, O. Marquet, P. Meliga, and A. Barbagallo. Dynamics and control of global instabilities in open-flows : a linearized approach. *Applied Mechanics Reviews*, 63(3), 2010.

- [121] A. K. Stubos, C. Benocci, E. Palli, G. K. Stoubos, and D. Olivari. Aerodynamically generated acoustic resonance in a pipe with annular flow restrictors. *Journal of Fluids and Structures*, 13 :755–778, 1999.
- [122] G.I. Taylor. Fluid flow in regions bounded by porous surfaces. *Proceedings of the Royal Society London*, 234 :456–475, 1956.
- [123] V. Theofilis. Advances in global linear instability analysis of nonparallel and three-dimensional flows. *Progress in Aerospace Sciences*, 39 :249–315, 2003.
- [124] S. Timoshenko and S. Woinowsky-Krieger. *Theory of plates and shells*. McGraw-Hill Book Co., 1959.
- [125] L. N. Trefethen, A. E. Trefethen, S. C. Reddy, and T. A. Driscoll. Hydrodynamic stability without eigenvalues. *Science*, 261 :578–584, 1993.
- [126] L.N. Trefethen and M. Embree. *Spectra and Pseudospectra : The Behavior of Nonnormal Matrices and Operators*. Princeton University Press, 2005.
- [127] L.R.G. Treloar. *The physics of rubber elasticity*. 1975.
- [128] B. Ugurtas. *Etudes numérique et expérimentale des instabilités hydrodynamiques et du couplage aéro-acoustique dans un écoulement de Taylor*. PhD thesis, Université Paris VI, 2000.
- [129] R. Van Der Hilst. Essentials of geophysics. MIT OpenCourseWare, Lecture notes, 2004.
- [130] V.N. Varapaev and V.I. Yagodkin. Flow stability in a channel with porous walls. *Izv. AN SSSR. Mekhanika Zhidkosi i Gaza*, 4(5) :91–95, 1969.
- [131] J. Vetel, F. Plourde, and S. Doan-Kim. Dynamics of an internal flowfield driven by two hydrodynamic instabilities. *AIAA Journal*, 41(3) :424–435, 2003.
- [132] J. Vetel, F. Plourde, and S. Doan-Kim. Amplification of shear layer instability by vorticity generation at an injecting wall. *AIAA Journal*, 42(1) :35–46, 2004.
- [133] J.P. Villechalane. Etude préliminaire du couplage acoustique-vortex shedding-structure. *ONERA - Rapport technique n° RT 64/6133 EN*, 1995.
- [134] R. Violette. *Modèle linéaire des vibrations induites par vortex de structures élancées*. PhD thesis, ÉCOLE POLYTECHNIQUE, 2009.

-
- [135] F. Vuillot. Prise en compte du détachement tourbillonnaire dans les approches linéarisées par la méthode de flandro. *Colloque CNES-ONERA - Fonctionnement des moteurs à Propergol Solide Segmentés pour lanceurs spatiaux*, 1992.
 - [136] F. Vuillot. Vortex shedding phenomena in solid rocket motors. *Journal of Propulsion and Power*, 11 :626–639, 1995.
 - [137] F. Vuillot and G. Casalis. Recent advances on the stability of large segmented space boosters. *2nd European Conference on Launcher Technology, Space Solid Propulsion*, 2000.
 - [138] F. Vuillot and N. Lupoglazoff. Numerical simulation of vortex-shedding phenomenon in 2-d test case solid rocket motors. *30th Aerospace Sciences Meeting*, 1992.
 - [139] F. Vuillot, J.C. Traineau, M. Prevost, and N. Lupoglazoff. Experimental validation of stability assessment methods for segmented solid propellant motors. *29th AIAA, SAE, ASME, and ASEE, Joint Propulsion Conference and Exhibit*, 1993.
 - [140] B. Wasistho, R.A. Fiedler, A. Namazifard, and M.D. Brandyberry. 3-d coupled simulations of flexible inhibitors in the rsm. *AIAA Paper 2005-3996, AIAA, SAE, ASME, and ASEE, 41st Joint Propulsion Conference and Exhibit, Tucson, Arizona*, 2005.
 - [141] M.A. Weaver, K.C. Gramoll, and R.L. Roach. Structural analysis of a flexible structural member protruding into an interior flow field. In *34th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference*, pages 1228–1235, April 1993.
 - [142] V.I. Yagodkin. Use of channels with porous walls for studying flows which occur during combustion of solid propellants. *Transactions of 18th International Astronautical Congress*, 1967.
 - [143] D. Yildiz, J. Anthoine, and J.-M. Buchlin. Influence of radial injected flow on the aeroacoustic coupling in solid propellant boosters. *7th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference and Exhibit, AIAA Paper 2001-2101*, May 2001.
 - [144] Z-Set. Finite element solver and material constitutive model library. *www.nwnumerics.com*.
 - [145] Z-Set. User manual. *http://www.nwnumerics.com/Downloads/*.
 - [146] A. Zebib. Stability of viscous flow past a circular cylinder. *Journal of Engineering Mathematics*, 21 :155–165, 1987.

Annexe A

Rappels de mécanique des milieux continus

On présente ici les fondements théoriques nécessaires à la compréhension du modèle permettant de décrire le comportement mécanique du GSM. Pour un cours plus complet, le lecteur pourra consulter les ouvrages [18], [57] et [67].

Considérons $\mathcal{M}$ un corps matériel, ensemble de particules physiques, qui occupe à différents instants des positions successives dans un espace $\mathcal{E}$ muni d'un référentiel $\mathcal{R}$, figure A.1. On note Ω_t la région qu'occupe $\mathcal{M}$ dans $(\mathcal{E}, \mathcal{R})$ à l'instant t : on donne à Ω_t le nom de configuration. La configuration de référence, notée Ω_0 , est alors la région occupée par le corps matériel $\mathcal{M}$ à un instant choisi t_0 . La transformation Φ met en correspondance, à chaque instant t , les positions d'un point matériel P dans Ω_0 et Ω_t :

$$\begin{aligned}\Phi : \Omega_0 &\rightarrow \Omega_t \\ \mathbf{X} &\mapsto \mathbf{x} = \Phi(\mathbf{X}, t),\end{aligned}\tag{A.1}$$

où les positions du point matériel P dans la configuration de référence et actuelle sont respectivement notées $\mathbf{X}$ et $\mathbf{x}$. On admet que Φ est bijective et bicontinue par rapport au temps.

L'évolution de grandeurs physiques et mécaniques d'un corps matériel dans son mouvement peut être décrite en adoptant deux points de vue particuliers et distincts : la description lagrangienne ou eulérienne.

Description lagrangienne

La description lagrangienne du mouvement consiste à décrire les grandeurs physiques et mécaniques comme des fonctions de la variable $\mathbf{X} \in \Omega_0$. On nomme alors variables de Lagrange les trois composantes du vecteur $\mathbf{X}$ ainsi que le temps t . Pour suivre la trajectoire d'un point matériel, on observe son déplacement $\mathbf{u}$, figure A.1, défini par :

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{X} + \mathbf{u}(\mathbf{X}, t).\tag{A.2}$$

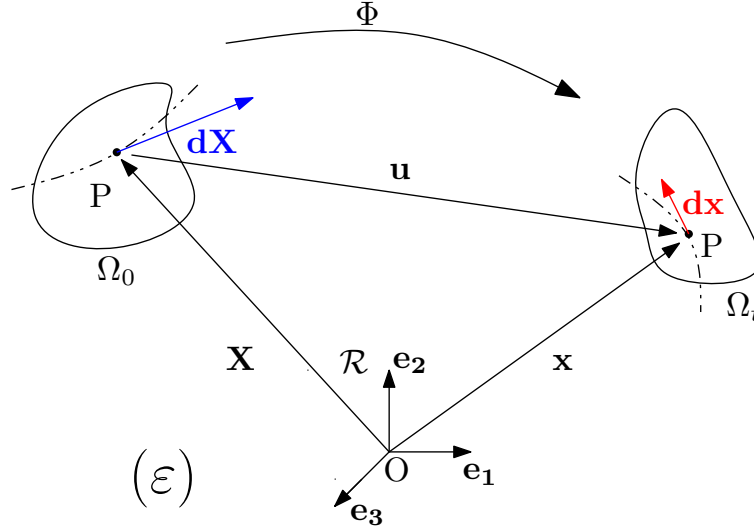


FIGURE A.1 – Placement du corps matériel $\mathcal{M}$ dans l'espace physique en configurations initiale et déformée.

Description eulérienne

La description eulérienne du mouvement décrit les grandeurs physiques et mécaniques comme des fonctions du point géométrique $\mathbf{x} \in \mathcal{E}$ sans considérer quels points matériels occupent cette position au cours du temps. On nomme alors variables d'Euler les trois composantes du vecteur $\mathbf{x}$ ainsi que le temps t .

Gradient de transformation

On adopte ici le point de vue lagrangien et on considère la transformation Φ d'une configuration initiale Ω_0 à une configuration actuelle Ω_t . Pour caractériser la transformation localement dans un voisinage du point $\mathbf{X}$, on fait appel à la différentielle par rapport aux coordonnées spatiales initiales de la relation A.1.

$$d\mathbf{x} = \underline{\mathbf{F}} \cdot d\mathbf{X} \text{ avec } \underline{\mathbf{F}} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}}, \quad (\text{A.3})$$

où $d\mathbf{X}$ et $d\mathbf{x}$ sont des éléments des espaces vectoriels tangents à Ω_0 et Ω_t en $\mathbf{X}$ et $\mathbf{x}$ respectivement. $\underline{\mathbf{F}}$ est une application linéaire tangente : le **gradient de la transformation**. Dans une base cartésienne orthonormée $(\mathbf{E}_i)$, la relation A.3 s'écrit :

$$dx_i = F_{ij} dX_j \text{ avec } F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \text{ et } \underline{\mathbf{F}} = F_{ij} \mathbf{E}_i \otimes \mathbf{E}_j. \quad (\text{A.4})$$

Ce qui permet d'écrire :

$$\underline{\mathbf{F}} = \mathbf{Grad}(\mathbf{x}), \quad (\text{A.5})$$

où l'on a introduit le tenseur gradient des déplacements **Grad** défini par rapport à la configuration de référence. Si on se restreint au cas d'un gradient $\underline{\mathbf{F}}$ inversible, son inverse permet de transporter un vecteur tangent de la configuration actuelle vers la configuration de référence :

$$\mathbf{dX} = \underline{\mathbf{F}}^{-1} \cdot \mathbf{dx}. \quad (\text{A.6})$$

Soit :

$$dX_j = F_{ji}^{-1} dx_i \text{ avec } F_{ji}^{-1} = \frac{\partial X_j}{\partial x_i}. \quad (\text{A.7})$$

La relation A.7 s'écrit également :

$$\underline{\mathbf{F}}^{-1} = \mathbf{grad}(\mathbf{X}), \quad (\text{A.8})$$

où l'on a introduit le tenseur gradient des déplacements **grad** défini par rapport à la configuration actuelle. Le gradient de la transformation s'exprime aussi en fonction du gradient de déplacement :

$$\underline{\mathbf{F}} = \underline{\mathbf{1}} + \mathbf{Grad}(\mathbf{u}). \quad (\text{A.9})$$

Le transport d'une fibre matérielle se fait par l'intermédiaire du gradient de la transformation, ce qui permet alors de caractériser les variations de volume entre la configuration initiale et la configuration actuelle, par l'intermédiaire du jacobien de la transformation Φ , i.e le déterminant du gradient de Φ : $J = \det(\underline{\mathbf{F}})$. On parle de transformation homogène d'un corps matériel lorsque le gradient de la transformation est une fonction de t seulement : l'ensemble des particules qui décrit le corps matériel se déforme de la même façon. Lors de la caractérisation des propriétés mécaniques du matériau, les échantillons seront dimensionnés afin d'obtenir un état de transformation homogène (aux effets de bord près).

Mesures de déformations

Pour caractériser le changement de forme (ou déformation) du corps matériel entre les configurations Ω_0 et Ω_t , on mesure notamment les variations de longueur et d'angle des lignes de fibres matérielles au cours du mouvement. Ainsi, si on considère deux directions matérielles $\mathbf{dX}_1$ et $\mathbf{dX}_2$ au point $\mathbf{X} \in \Omega_0$, elles se transforment respectivement en $\mathbf{dx}_1$ et $\mathbf{dx}_2$ au point $\mathbf{x} \in \Omega_t$. Parmi la multitude de façons de quantifier la déformation des corps matériels et selon la configuration privilégiée, plusieurs mesures des déformations sont possibles. Ainsi, si on adopte une description lagrangienne, le produit scalaire des fibres matérielles s'écrit $\mathbf{dx}_1 \cdot \mathbf{dx}_2 = \mathbf{dX}_1 \cdot \underline{\mathbf{C}} \cdot \mathbf{dX}_2$, avec $\underline{\mathbf{C}} = \underline{\mathbf{F}}^T \cdot \underline{\mathbf{F}}$ le tenseur de Cauchy-Green droit. Ce tenseur, symétrique et défini positif, définit une métrique sur la configuration de référence à partir de la métrique canonique sur Ω_t . Le tenseur de déformation associé est le tenseur de Green-Lagrange :

$$\underline{\mathbf{E}} = \frac{1}{2}(\underline{\mathbf{C}} - \underline{\mathbf{1}}). \quad (\text{A.10})$$

De la même manière, du point de vue eulérien, le produit scalaire des fibres matérielles s'écrit $\mathbf{dX}_1 \cdot \mathbf{dX}_2 = \mathbf{dx}_1 \cdot \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{dx}_2$, avec $\mathbf{B} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T$ le tenseur de Cauchy-Green gauche. Ce tenseur, symétrique et défini positif, instaure une métrique sur la configuration actuelle Ω_t à partir de la métrique canonique initiale. Le tenseur de déformation associé est le tenseur d'Almansi :

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}(\mathbf{1} - \mathbf{B}^{-1}). \quad (\text{A.11})$$

Vitesses de déformations

Le champ de vitesse sur un corps matériel $\mathcal{M}$ dans une transformation Φ de la configuration de référence Ω_0 vers la configuration actuelle Ω_t est défini par :

$$\mathbf{V}(\mathbf{X}, t) := \frac{\partial \Phi}{\partial t}(\mathbf{X}, t). \quad (\text{A.12})$$

La description eulérienne de ce champ de vitesse est :

$$\mathbf{v}(\mathbf{X}, t) := \frac{\partial \Phi}{\partial t}(\mathbf{X}, t). \quad (\text{A.13})$$

Si on dérive la relation de transport des fibres matérielles (équation A.3) par rapport au temps, on obtient une relation pour la vitesse d'évolution des lignes matérielles :

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{dx}} &= \dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{dX}, \\ &= \mathbf{L} \cdot \mathbf{dx} \text{ avec } \mathbf{L} = \dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1}, \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

où $\mathbf{L}$ est un tenseur permettant de suivre l'évolution des fibres matérielles au cours du mouvement. Il s'agit du tenseur eulérien gradient des vitesses défini par :

$$\mathbf{L}(\mathbf{x}, t) = \text{grad} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t). \quad (\text{A.15})$$

Le gradient des vitesses peut être décomposé en parties symétrique et anti-symétrique :

$$\mathbf{L} = \mathbf{D} + \mathbf{W}, \quad (\text{A.16})$$

avec

$$\mathbf{D} := \frac{1}{2}(\mathbf{L} + \mathbf{L}^T), \quad \mathbf{W} := \frac{1}{2}(\mathbf{L} - \mathbf{L}^T). \quad (\text{A.17})$$

Le tenseur $\mathbf{D}$ s'appelle tenseur eulérien vitesse de déformation ou tenseur taux de déformation et le tenseur $\mathbf{W}$ s'appelle tenseur taux de rotation.

Description des efforts intérieurs - Contraintes

Les contraintes sont caractérisées à partir des efforts intérieurs à travers un élément de surface relatif à une configuration donnée (figure A.2). Suivant le choix de la configuration pour la mesure de l'effort et de la surface, on pourra avoir une description eulérienne, mixte, ou lagrangienne des contraintes.

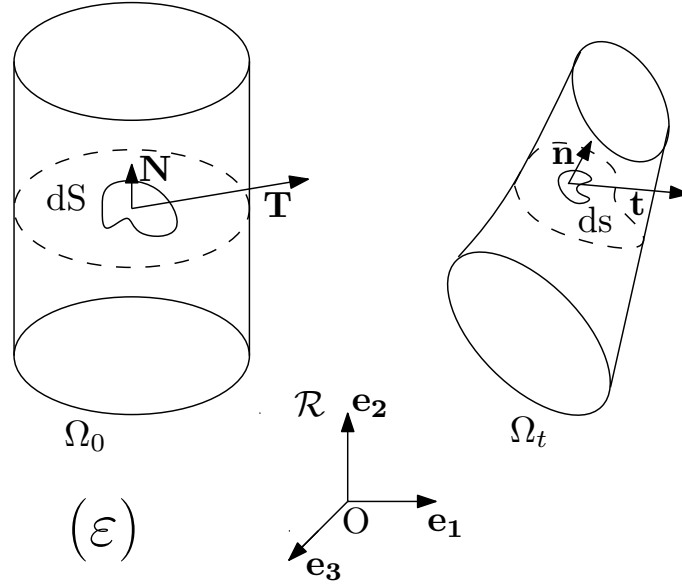


FIGURE A.2 – Placement du corps matériel $\mathcal{M}$ dans l'espace physique en configurations initiale et déformée.

Description eulérienne : Le tenseur des contraintes le plus naturel est le tenseur eulérien $\underline{\sigma}$. Il est défini par :

$$\mathbf{t} = \underline{\sigma} \cdot \mathbf{n} \quad (\text{A.18})$$

où $\mathbf{t}$ est l'effort mesuré par unité de surface définie dans la configuration actuelle, s'appliquant sur l'élément de surface ds de normale extérieure $\mathbf{n}$. L'effort résultant (actuel) agissant sur l'élément de surface est noté $d\mathbf{f}$. Cet effort est lié au vecteur contrainte par :

$$d\mathbf{f} = \mathbf{t}ds = \underline{\sigma} \mathbf{n}ds \quad (\text{A.19})$$

Le tenseur de Cauchy $\underline{\sigma}$ est un tenseur symétrique.

Description mixte : On peut également relier la force élémentaire $d\mathbf{f}$ de la configuration actuelle à l'élément d'aire dS de la configuration initiale, par la relation :

$$d\mathbf{f} = \mathbf{T}dS \quad (\text{A.20})$$

Il s'agit alors d'une description mixte où le vecteur $\mathbf{T}$ représente le vecteur contrainte de Piola-Kirchhoff 1 (ou vecteur de Boussinesq). Il mesure la force par unité de surface définie dans la configuration de référence et agit sur la

région actuelle. Contrairement au vecteur de contrainte de Cauchy $\mathbf{t}$, il est fonction des positions $\mathbf{X}$ et de la normale $\mathbf{N}$ à la frontière $\partial\Omega_0$. Le tenseur des contraintes associé est le premier tenseur de Piola Kirchhoff $\mathbf{P}$ défini par :

$$d\mathbf{f} = \mathbf{T}dS = \mathbf{P}\mathbf{N}dS \quad (\text{A.21})$$

De la même façon que $\mathbf{F}$, le tenseur $\mathbf{P}$ n'est ni lagrangien, ni eulérien : on parle de tenseur mixte.

Description lagrangienne : Pour avoir un tenseur complètement défini en fonction des variables lagrangiennes, on transporte la force $d\mathbf{f}$ agissant sur le volume actuel vers la configuration initiale non déformée selon :

$$d\mathbf{f}_0 = \mathbf{F}^{-1}d\mathbf{f} \quad (\text{A.22})$$

On est alors en présence d'une force fictive $d\mathbf{f}_0$ agissant sur la surface initiale. Le tenseur de Piola Kirchhoff 2 associé est défini par :

$$d\mathbf{f}_0 = \mathbf{\Pi}\mathbf{N}dS \quad (\text{A.23})$$

$\mathbf{\Pi}$ est un tenseur symétrique et purement lagrangien. La relation de passage entre le tenseur de Cauchy et le tenseur de Piola Kirchhoff 2 s'écrit :

$$J\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{F}\mathbf{\Pi}\mathbf{F}^T \quad (\text{A.24})$$

où $J = \det(\mathbf{F})$.

Annexe B

Loi de comportement GSM55

Afin de permettre de poursuivre l'étude numérique initiée dans la présente étude, le tableau B.1 rappelle les valeurs numériques des différents paramètres intervenant dans la loi de comportement du GSM. Pour des raisons de confidentialité, ces valeurs ne peuvent être incluses dans le manuscrit.

Hyperélasticité		Mullins			Visco			Plast
N	ν	A	μ_{s0}	μ_{ss}	d_0	m	σ_0	R_0
27.8	0.68	30	0.78	0.98	0.0154	0.44	2.8	$8.8 \cdot 10^{-6}$
Ecouissage		Elasticité						
C_k	D_k	E	ν					
17	2.5	15	0.48					

Tableau B.1 – Valeurs numériques de la loi de comportement retenue après optimisation.

Étude du couplage aéro-mécanique au sein des moteurs à propergol solide

Résumé : Les Moteurs à Propergol Solide sont le siège d'instabilités de combustion qui se manifestent par des fluctuations de la pression interne et, en conséquence, de la poussée induite. Les phénomènes oscillatoires observés résultent d'un couplage entre l'acoustique de la chambre de combustion et une ou plusieurs instabilités hydrodynamiques de l'écoulement interne.

Dans cette thèse, on s'intéresse à l'étude de l'écoulement induit par injection pariétale en géométrie axisymétrique. Plus particulièrement, on se concentre sur l'interaction qui peut avoir lieu entre cet écoulement et une structure : les Protections Thermiques de Face. Une étude expérimentale reposant sur le montage gaz froid VALDO de l'ONERA, modélisation représentative des MPS P230, a permis d'examiner l'influence d'obstacles, rigides et en élastomère, sur les instationnarités de l'écoulement. Le caractère instable de l'écoulement induit par injection pariétale est alors confirmé et le rôle primordial joué par les PTF sur les fréquences émergeant au sein de l'écoulement a été identifié.

L'analyse de stabilité linéaire de l'écoulement, conduite en approche globale, permet l'étude de sa dynamique en tant qu'amplificateur de bruit. Les mécanismes mis en jeu dans l'instabilité de l'écoulement induit par injection pariétale ainsi que son interaction complexe avec la couche de cisaillement issue de l'obstacle sont analysés. La réponse de l'écoulement à un forçage harmonique est alors examinée à la lumière des résultats expérimentaux.

Cette étude a été complétée par une approche numérique de l'Interaction Fluide-Structure sur une configuration jugée critique. Une étape préliminaire à la simulation multi-physique est l'élaboration d'un modèle réaliste du comportement des PTF en élastomère, en coopération étroite avec le Centre des Matériaux de l'École Nationale Supérieure des Mines de Paris. L'identification et la prise en considération des mécanismes propres aux élastomères dans la loi de comportement est ainsi détaillée. Les résultats issus des simulations sont confrontés aux résultats expérimentaux et rendent possible la validation d'un scénario de couplage dédié à l'Interaction Fluide-Structure au sein des MPS.

Mots clés : Propulsion Solide, Interaction Fluide-Structure, Instabilité hydrodynamique, Vortex Shedding, Ariane 5.

Aero-mechanical coupling inside solid propellant rocket motors

Abstract : Large segmented Solid Propellant Rocket Motors exhibit unpredicted and undesirable pressure and thrust oscillations. This oscillatory behavior results from the coupling of several hydrodynamic instabilities with the acoustic modes of the chamber.

The present thesis is focused on the axisymmetric flow induced by wall injection. The emphasis is given to interaction between the internal flow and a structure : Frontal Thermal Protections. An experimental study is conducted on the cold flow model VALDO, representative of MPS P230. Influence of both, rigid and elastomeric inhibitors on flow instationnarities has been investigated. The hydrodynamic instability of the flow induced by wall injection is then confirmed and the impact of obstacle on dominant frequencies identified.

In a linear global framework, the dynamics of the flow, acting as a noise amplifier, is investigated. Amplifying mechanisms related to the instability of the flow itself and its complex interaction with unstable shear layer are analyzed. The linear response of the flow to harmonic sustained forcing is investigated and examined with respect to experimental results.

The present research is completed by a numerical Fluid-Structure investigation of a critical configuration. A preliminary step to multi-physics computation is precise modelisation of the behavior of elastomeric FTP. This model has been established in close collaboration with the Center of Materials at École Nationale Supérieure des Mines de Paris. Identification of material parameters and consideration of proper physical mechanisms is discussed. Numerical simulations are performed and confronted to experimental results. Finally, a coupling scenario dedicated to Fluid-Structure Interaction inside Solid Propellant Rocket Motors is proposed and validated.

Keywords : Solid Propulsion, Fluid-Structure Interaction, Hydrodynamic instability, Vortex Shedding, Ariane 5.

