Comportement thermomécanique de structures intégrant des alliages à mémoire de forme : Modélisation, Simulation et Expérimentation. Application aux façades adaptatives

Philippe Hannequart

▶ **To cite this version:**

Philippe Hannequart. Comportement thermomécanique de structures intégrant des alliages à mémoire de forme : Modélisation, Simulation et Expérimentation. Application aux façades adaptatives. Matériaux. Université Paris-Est, 2018. Français. NNT : 2018PESC1064 . tel-02128845

HAL Id: tel-02128845
https://pastel.hal.science/tel-02128845

Submitted on 14 May 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ PARIS-EST

École doctorale n° 531 : Sciences, ingénierie et environnement

Thèse de Doctorat

Spécialité doctorale "Structures et Matériaux"

Philippe Hannequart

Soutenue le 14 décembre 2018 à l'École Nationale des Ponts et Chaussées

Comportement thermomécanique de structures intégrant des alliages à mémoire de forme, Modélisations, Simulations et Expérimentations. Application aux façades adaptatives

Directeur de thèse : **Michael Peigney**
Directeur de thèse : **Jean-François Caron**
Co-encadrant de thèse : **Olivier Baverel**

Jury

M. Olivier Doaré,	Professeur, ENSTA ParisTech	Rapporteur
M. Gildas L'Hostis,	Maître de conférences, Université de Haute-Alsace	Rapporteur
M. Tarak Ben Zineb,	Professeur, Université de Lorraine	Président
Mme. Karine Lavernhe-Taillard,	Maître de conférences, ENS Cachan	Examinatrice
M. Emmanuel Viglino,	Directeur, Arcora, Groupe Ingérop	Invité

Meinem Opa gewidmet

À ma grand-mère

Remerciements

J'ai pu réaliser ce travail de thèse dans d'excellentes conditions, très bien entouré, et ces trois années furent pour moi extrêmement agréables et enrichissantes, ceci grâce à la contribution de nombreuses personnes que j'aimerais ici remercier.

Tout d'abord, mes deux directeurs de thèse m'ont transmis leur méthodologie, leur vision de la recherche, et ont toujours été disponibles pour moi. Merci Michaël pour ta gentillesse et pour la rigueur que tu m'as transmise. Merci Jean-François pour ton énergie et de m'avoir toujours poussé vers l'avant quand je me sentais bloqué. De même, mes co-encadrants ont accompagné de très près mon travail et m'ont beaucoup apporté. Côté Navier, merci Olivier pour tes idées foisonnantes et ton enthousiasme. Côté Arcora, merci Emmanuel pour ton soutien sans faille à toutes les idées nouvelles et pour l'intérêt constant que tu as porté à mes travaux. Merci aussi à Vincent et Emmanuel de m'avoir fait confiance au lancement de la thèse, c'était un saut dans l'inconnu ! De façon plus générale, merci à tous mes encadrants pour ce sujet de thèse qui me correspondait bien, merci d'avoir rendu cette collaboration entre Arcora et le laboratoire Navier particulièrement agréable, et de m'avoir permis de donner des cours et d'encadrer de travaux pratiques ou des projets d'élèves, une expérience que j'ai beaucoup appréciée. De même, j'aimerais remercier tout particulièrement les membres de mon jury, rapporteurs et examinateurs, d'avoir accepté d'évaluer mon travail.

Ensuite, j'aimerais remercier tous les collègues de l'équipe MSA pour l'ambiance conviviale dont j'ai profité pendant ces trois années. Les doctorants et stagiaires, Vianney, Pierre, Marie, Katya, Xavier, Charlotte, tous les Romain, tous les Nicolas, Robin, Grégoire, Bachar, Lionel, Leila, Chadi, Paul, Julien, Koliann, Hung, Baptiste, Sébastien et tous les autres, pour leur bonne humeur, l'entraide, les visites architecturales, l'ichtyologie, les chocolats etc... Les techniciens, Christophe (merci pour ces magnifiques démonstrateurs !), Géraldine, Gilles, Hocine et Daniel, toujours disponibles, qui m'ont été d'une grande aide pour les expérimentations et le prototypage, j'ai toujours apprécié la qualité de leur travail et de leurs conseils, et leur gentillesse. Ainsi que tous les autres membres de l'équipe que j'ai côtoyés et avec lesquels j'ai pu travailler, les collègues de couloir, et Marie-Françoise pour son aide précieuse.

Parallèlement, j'ai passé une partie de mon temps dans les locaux d'Arcora, où j'ai

été accueilli et intégré de façon remarquable. J'ai pu participer aux réunions d'équipe, aux activités de recherche et développement, aux événements internes, à l'encadrement d'un stage, etc... Je remercie chaleureusement tous mes collègues d'Arcora pour leur participation et leur implication au cours de la thèse, pour leur gentillesse, leur dynamisme et tout ce qu'ils m'ont appris sur l'ingénierie de l'enveloppe du bâtiment. Merci encore à Emmanuel d'avoir toujours encouragé mes échanges avec l'équipe. Merci enfin à François Lacroix et au groupe Ingérop d'avoir rendu cette thèse possible.

Enfin, il me reste à remercier tous les amis qui ont rendu la vie parisienne plus belle, merci à Rose pour la lettre M, merci aux Hippos de m'avoir changé les idées tous les mercredis soirs, et surtout merci aux colocs montreuillois.es Bianca, Raphaëlle, Hadrien et Thomas (et aussi un peu Audrey et Anne-Laure !). Pour conclure, un grand merci aussi à mes parents sans qui je ne serais certainement pas arrivé jusqu'ici.

Table des matières

Remerciements **3**

1 Introduction **11**

Introduction **11**

1.1 Verrou scientifique : Modéliser et caractériser le comportement thermomécanique des AMF 14
1.2 Verrou scientifique : Couplage AMF-structure 15
1.3 Verrou scientifique et technologique : Design d'actionneurs 15
1.4 Apports personnels dans la thèse 17

2 Modélisation thermomécanique et caractérisation expérimentale du fil AMF **19**

2.1 Introduction 19
2.2 Modélisation du comportement thermomécanique des alliages à mémoire de forme 23
2.3 Un modèle unidimensionnel d'alliage à mémoire de forme monocristallin . 25
2.3.1 Hypothèses 25
2.3.2 Formulation d'un modèle pour décrire le comportement thermomécanique de l'AMF monocristallin 26
2.3.3 Minimisation de l'énergie incrémentale 28
2.3.4 Détermination des températures de changement de phase à contrainte nulle 30
2.3.5 Equations constitutives de l'AMF monocristallin à haute température 30
2.3.6 Equations constitutives de l'AMF monocristallin à basse température 34
2.3.7 Equations constitutives de l'AMF monocristallin aux températures intermédiaires 34
2.3.8 Effet mémoire de forme pour l'AMF monocristallin 35
2.3.9 Conclusion 36
2.4 Un modèle unidimensionnel d'alliage à mémoire de forme polycristallin . . 37
2.4.1 Hypothèses 37

2.4.2 Formulation d'une énergie libre et d'un potentiel de dissipation pour décrire le comportement thermomécanique de l'AMF polycristallin . . . 38
2.4.3 Détermination des températures de changement de phase à contrainte nulle . . . 39
2.5 Solutions analytiques pour le modèle polycristallin soumis à des chargements simples . . . 40
2.5.1 Cas non-dissipatif à haute température . . . 40
2.5.2 Cas dissipatif à haute température . . . 42
2.5.3 Cas dissipatif à basse température . . . 45
2.5.4 Chargement thermique à contrainte constante . . . 46
2.6 Identification des paramètres par calorimétrie . . . 52
2.6.1 Protocole expérimental . . . 52
2.6.2 Grandeurs mesurées . . . 53
2.6.3 Exploitation des données . . . 54
2.7 Dispositif expérimental de traction sur fil AMF . . . 56
2.7.1 Contrôle de la température . . . 57
2.7.2 Vitesse de chargement . . . 57
2.7.3 Mesure de la déformation du fil AMF par corrélation d'images . . . 57
2.7.4 Estimation de l'incertitude de la mesure de déformation . . . 60
2.8 Essais de traction à température contrôlée et identification des paramètres 62
2.8.1 Reproductibilité de l'essai de traction isotherme . . . 62
2.8.2 Identification des paramètres du modèle . . . 64
2.9 Courbes déformation-température . . . 69
2.10 Modélisation du fil AMF - Conclusion du chapitre . . . 70

3 Calcul de structures intégrant des fils AMF 73
3.1 Problème de l'actionneur AMF monocristallin collé le long d'une poutre - Approche analytique . . . 74
3.1.1 Formulation du problème . . . 74
3.1.2 Pré-étirement du fil AMF . . . 76
3.1.3 Collage du fil AMF le long de la poutre . . . 77
3.1.4 Chauffage de la structure adaptative . . . 79
3.1.5 Refroidissement de la structure adaptative . . . 81
3.1.6 Deuxième chauffage . . . 85
3.1.7 Conclusion . . . 87
3.2 Actionneur AMF monocristallin avec ressort élastique - Approche analytique . . . 89
3.2.1 Cas où $\mu < \frac{G_1 - G_0}{\varepsilon^{tr}} \frac{1+\alpha E^{AMF}}{E^{AMF}}$ . . . 91
3.2.2 Cas où $\frac{G_1 - G_0}{\varepsilon^{tr}} \frac{1+\alpha E^{AMF}}{E^{AMF}} < \mu < \varepsilon^{tr} + \frac{G_1 - G_0}{\varepsilon^{tr}} \frac{1+\alpha E^{AMF}}{E^{AMF}}$ . . . 91
3.2.3 Cas où $\varepsilon^{tr} + \frac{G_1 - G_0}{\varepsilon^{tr}} \frac{1+\alpha E^{AMF}}{E^{AMF}} < \mu$ . . . 92

3.3 Implémentation numérique . . . 93
3.3.1 Discrétisation de la texture . . . 93
3.3.2 Discrétisation temporelle du problème . . . 94
3.3.3 Reformulation du problème . . . 95
3.3.4 Résolution du problème de complémentarité linéaire (LCP) . . . 97
3.3.5 Validation de la simulation numérique . . . 98
3.3.6 Conclusion . . . 99
3.4 UMAT Abaqus . . . 101
3.4.1 Implémentation de l'algorithme . . . 101
3.4.2 Validation de l'algorithme . . . 101
3.5 Calcul de structures intégrant des fils AMF - Conclusion du chapitre . . . 106

4 Conception de structures adaptatives : Expérimentations et confrontation aux modèles 109
4.1 Conception de protections solaires adaptatives en façade de bâtiment . . . 110
4.2 Contraintes liées à l'utilisation d'AMF dans des actionneurs en façade de bâtiment . . . 114
4.3 Actionneurs avec fil AMF extérieur à la structure . . . 116
4.3.1 Actionneur AMF + Ressort - Comparaison aux calculs analytiques avec le modèle AMF monocristallin . . . 116
4.3.2 Actionneur AMF + Ressort - Comparaison à la simulation avec le modèle AMF polycristallin . . . 118
4.3.3 Actionneurs AMF avec fil extérieur à la structure - Conclusion . . . 119
4.4 Fil AMF dans un matériau composite . . . 124
4.4.1 Mise au point d'un procédé de fabrication de lames composite-AMF 124
4.4.2 Lame composite-AMF : Comparaison aux modèles . . . 128
4.4.3 Lame composite-AMF : Réalisation d'un prototype . . . 133
4.5 Fatigue et comportement cyclique . . . 135
4.6 Conception de structures adaptatives : Conclusion du chapitre . . . 139

5 Conclusion et Perspectives 141

Annexes 153

A UMAT pour le modèle polycristallin 154

Résumé

Les propriétés thermomécaniques étonnantes des alliages à mémoire de forme (AMF) sont mises à profit dans de nombreux domaines. Ce matériau est capable de mettre en mouvement une structure suite à un changement de température. Or les façades de bâtiments contemporains, pour s'adapter à des conditions climatiques variables, doivent réguler le passage de la lumière et de l'énergie thermique, par exemple au moyen de systèmes motorisés. Le potentiel de fils AMF pour l'actionnement de protections solaires en façade est exploré ici. La modélisation du couplage mécanique induit par l'introduction de tels matériaux dans une structure a été peu étudiée : l'AMF agit sur la structure qui en retour modifie le comportement de l'AMF. La première étape de ce travail a consisté en une contribution à la modélisation du comportement thermomécanique de ce matériau reposant sur le choix d'une énergie libre, d'un potentiel de dissipation et de plusieurs variables internes. Deux modèles unidimensionnels ont été proposés : un premier modèle monocristallin reproduit de façon simplifiée le comportement du matériau, et un second modèle polycristallin propose une description plus fidèle. En parallèle un dispositif d'essai original à température contrôlée a été développé, il a permis une caractérisation fiable de fils Nickel-Titane et l'identification des paramètres des modèles. Dans un second temps ces modèles ont permis de résoudre des cas de couplage élémentaires (fil AMF + ressort, lame élastique + fil AMF noyé) pour des chargements thermomécaniques simples, et des solutions analytiques ont été établies. Les modèles ont été implémentés numériquement via un script matériau utilisateur (UMAT) pour le logiciel éléments finis ABAQUS et au moyen d'un algorithme d'optimisation sous contraintes. Ceci permet de simuler la réponse couplée de systèmes structuraux a priori quelconques intégrant des AMF, connectés à ou noyés dans, une structure. Dans un troisième temps, divers actionneurs ont été conçus, réalisés et testés dans le cadre de l'occultation solaire des façades. Le principe est d'utiliser un cycle de température permettant à l'AMF de déformer la structure, puis à l'énergie élastique de déformation de la structure d'assurer le retour à la forme originale. Le comportement réel de ces actionneurs a été comparé aux calculs analytiques et éléments finis. Des tests cycliques ont également été réalisés.

Abstract

The surprising thermomechanical properties of shape memory alloys (SMA) are harnessed in many engineering fields. This material is able to set a structure in motion upon a temperature change. Today, contemporary building facades must adapt to variable climate conditions as well as to evolving building use and occupancy. In particular, they must regulate light and thermal energy passing through the facade, with motorized systems, for example. We explore the potential of SMA wires for putting in motion solar shading devices in facades. The modelling of the mechanical coupling induced by the introduction of such materials in a structure has received little attention as of now. The SMA acts on the structure which in return modifies the SMA behavior. The first step of this work is a contribution to modelling the thermomechanical behavior of this material through the choice of a free energy, a dissipation potential and internal variables. We propose two one-dimensional models: a first monocrystalline model reproduces the material behavior in a simplified way, and a second polycrystalline model offers a more accurate description of it. An original temperature-controlled testing apparatus was developed in parallel. This led to a reliable characterization of Nickel-Titanium wires and the identification of the model parameters. In a second stage, these models allowed to solve elementary coupling cases (SMA wire + Spring, Elastic plate + Embedded SMA wire) for simple thermomechanical loadings and we established analytical solutions. The models were then numerically implemented via a user-material script (UMAT) for the finite elements software ABAQUS, by using a constrained optimization algorithm. This enables the simulation of the coupled response of, in principle, any structural system including SMA wires, connected or embedded in the structure. Finally, we designed, fabricated and tested different actuators in the context of sunlight control in facades. The working principle lies in using a temperature cycle which allows the SMA to deform the structure, and then allows the elastic strain energy in the structure to ensure the return to the original shape. The real behavior of these actuators have been compared to analytical and finite element calculations. We also performed cyclic tests.

Chapitre 1

Introduction

On appelle ”matériaux intelligents” ou ”matériaux actifs” les matériaux présentant un couplage entre plusieurs phénomènes physiques, ce qui leur permet de réagir à un stimulus physique extérieur (température ambiante, luminosité, champ magnétique, champ électrique, contrainte mécanique, etc...) à travers un changement physique du matériau (changement de couleur, déformation, changement de température, etc...). Ainsi, un matériau piézoélectrique présente un couplage entre le champ électrique et le champ de contraintes, et permet notamment de générer une tension électrique lors de l'application d'une contrainte mécanique. Un gel photosensible est capable de se déformer de façon contrôlée après application d'un stimulus lumineux (Kuksenok et al. (2014)). Ces matériaux peuvent donc présenter un intérêt en tant que capteurs, en tant qu'actionneurs, ou encore en tant que convertisseurs d'énergie.

Parmi ces matériaux, les alliages à mémoire de forme (AMF) forment une classe particulièrement intéressante pour les ingénieurs. Ils présentent un couplage thermomécanique permettant de générer des contraintes mécaniques lors d'un changement de température, ou encore de dissiper sous forme de chaleur des variations de contraintes mécaniques.

Or dans les bâtiments contemporains, et plus particulièrement les bâtiments tertiaires, le développement du mur-rideau et les progrès technologiques réalisés dans le domaine du verre ont progressivement permis la réalisation de façades présentant un important ratio de surface vitrée, ce qui confère à l'espace intérieur un grand confort visuel et lumineux. Cependant, alors que d'importants progrès ont été réalisés dans le domaine de l'isolation thermique (double ou triple vitrage, traitement des ponts thermiques, étanchéité à l'air, etc...), l'adaptation de ce type de bâtiments aux hautes températures estivales pose problème. Des éléments fixes de protection solaire, comme par exemple la casquette ou le brise-soleil vertical, permettant de profiter de la variation des angles d'incidence solaire entre l'hiver et l'été pour adapter l'énergie reçue par le bâtiment, peuvent être utilisés. Cependant, pour des façades dépassant 60 à 70% de surface vitrée, il faut éviter une consommation trop élevée des systèmes de refroidissement

en installant des dispositifs actifs de protection solaire sur les façades (Brandi (2006)). Ces systèmes adaptatifs peuvent par exemple être mobiles pour permettre une meilleure adaptation à la course du soleil et aux conditions météorologiques. Ainsi, on trouve parmi ces dispositifs le store à lamelles à montée/descente manuelle ou motorisée, le brise-soleil à lamelles orientables (BSO), ou encore le brise-soleil vertical à rotation motorisée. Ces systèmes mécaniques, de plus en plus répandus, ne donnent pas entièrement satisfaction. En effet, ce type de façade présente une grande complexité mécanique, demande un entretien régulier, et l'analyse de cycle de vie révèle une performance médiocre.

Par conséquent, l'idée d'utiliser des matériaux intelligents pour animer les façades de bâtiments s'est développée récemment. En effet, les mouvements que l'on souhaite réaliser dans un bâtiment répondent souvent à un changement de conditions physiques pouvant être détecté par un tel matériau, et les échelles de temps du bâtiment permettent souvent de se contenter d'un temps de réponse assez long, caractéristique de nombreux matériaux actifs. En Figure 1.0.1, les pavillons expérimentaux *Bloom* (enveloppe thermosensible à base de bilames métalliques) de Sung (2016) et *Hygroskin* (enveloppe réagissant à l'humidité ambiante grâce au gonflement hygroscopique du bois) de Reichert et al. (2015) témoignent d'un regain d'intérêt pour les matériaux actifs dans l'enveloppe du bâtiment.

FIGURE 1.0.1 – Pavillons *Bloom* (2011) et *Hygroskin* (2013)

Plus spécifiquement, les AMF sont de bons candidats au rôle d'actionneur pour des protections solaires adaptatives. En effet, ils permettent de générer des efforts importants au regard de leur masse (Mohd Jani et al. (2014)), et leur couplage thermomécanique pourrait permettre de réguler les apports thermiques d'un bâtiment par des mouvements générés par l'AMF en fonction de la température ambiante. Un inconvénient des AMF est la petite déformation qu'ils génèrent : il faut souvent recourir à des dispositifs d'amplification cinématique (Charpentier et al. (2017)) pour obtenir un déplacement susceptible de modifier les conditions d'éclairement du bâtiment. Dans ce travail, nous choisissons de nous intéresser au fil AMF, qui est disponible commercialement chez de

nombreux fournisseurs, dont le comportement est mieux connu que celui des plaques ou objets tridimensionnels, et dont la géométrie unidimensionnelle facilite la modélisation pour l'ingénieur. Le coût d'une structure adaptative uniquement composée d'AMF serait prohibitif : le fil AMF sera l'actionneur d'une structure plus grande, réalisant l'occultation solaire.

Les AMF sont actuellement utilisés avec succès dans de nombreux domaines (médical, aérospatial, robotique) mais ils sont presque absents du monde du bâtiment. Quels sont donc les obstacles au développement des AMF en tant qu'actionneurs pour des protections solaires en façade de bâtiment ? En section 1.1 à 1.3 nous détaillerons trois verrous scientifiques et technologiques qui ont été identifiés au cours de ce travail. Les différentes contributions personnelles cherchant à y apporter une réponse seront listées en section 1.4.

Cette thèse a été réalisée au laboratoire Navier (Ecole des Ponts ParisTech) et en partenariat avec le bureau d'études Arcora (Groupe Ingérop) dans le cadre d'une convention CIFRE. L'entreprise a permis d'apporter au projet l'expertise technique dans le domaine de la façade.

1.1 Verrou scientifique : Modéliser et caractériser le comportement thermomécanique des AMF

Le premier verrou scientifique dans cette recherche est la difficulté à observer et à décrire le comportement thermomécanique d'un alliage à mémoire de forme.

Premièrement, la modélisation de ce comportement est délicate. Le comportement d'un AMF dépend de l'histoire du chargement, ce qui nécessite l'introduction de variables internes comme cela est fait usuellement dans la modélisation de la plasticité, toutefois ces variables internes doivent être bornées. Ceci rend la résolution numérique des problèmes mécaniques plus complexe (Eleuteri et al. (2013)).

De surcroît, il est difficile de caractériser expérimentalement le comportement d'un alliage à mémoire de forme. Ainsi, le comportement mécanique des AMF est très sensible aux variations de température, et il est nécessaire de contrôler précisément la température à laquelle l'essai est mené pour obtenir des résultats exploitables. Les changements de phase intervenant dans le matériau sont exothermiques ou bien endothermiques, ce qui complique encore le contrôle de la température pour la réalisation d'essais isothermes (Shaw and Kyriakides (1995)). Le comportement est fortement non-linéaire, présente une hystérésis et est sensible à la vitesse de chargement. De nombreux phénoménes physiques tels que les changements de phase solide-solide, la plasticité et les déformations résiduelles accumulées après cyclage (Jones and Dye (2011),Ammar et al. (2017)), la fatigue (Miyazaki (2017)), la localisation des déformations avec propagation d'un front de transformation de phase (Shaw and Kyriakides (1997),Sittner et al. (2005)), ou encore une asymétrie du comportement en tension et en compression, peuvent être présents lors d'essais sur des AMF. La réponse expérimentale d'un AMF est donc très sensible aux conditions d'essai et il est difficile de distinguer la contribution de chaque phénomène physique ainsi que la contribution de chaque phase (austénite, martensite, R-phase) lors de l'analyse des résultats (Duerig et al. (2017)).

Enfin, d'infimes changements dans la compostition atomique d'un AMF ou bien dans les traitements thermiques appliqués au matériau peuveut entraîner d'importantes différences dans la réponse thermomécanique (Shaw et al. (2008), Pelton et al. (2000)). Ainsi, deux matériaux similaires issus de deux fournisseurs différents peuvent présenter des comportements très différents.

Il est donc difficile de maîtriser et de prédire le comportement d'un alliage à mémoire de forme, ce qui complique son utilisation par les ingénieurs. Ainsi, ces difficultés de caractérisation peuvent mener à des obstacles lors de l'étape réglementaire, du fait que ce matériau ne peut pas être décrit comme un matériau classique. Par exemple, la raideur d'un tel matériau est variable, et une valeur de module d'Young n'est pas représentative du comportement d'un AMF.

1.2 Verrou scientifique : Couplage AMF-structure

Le second verrou scientifique réside dans la simulation numérique d'éléments en alliage à mémoire de forme intégrés dans une structure, ces éléments réalisant par exemple une fonction d'actionneur ou encore de dissipateur d'énergie. Le couplage entre l'AMF et d'autres parties de la structure nécessite un effort particulier dans l'étape de modélisation.

Le comportement des AMF intégrés dans une structure constituée de matériaux différents ne peut être représenté par des solutions analytiques que dans des cas de chargement très simples. Pour des chargements complexes, comme par exemple la combinaison d'un chargement thermique et d'un chargement mécanique, ou encore des chargements cycliques, l'AMF ne pourra pas être simplement représenté par un chargement externe sur le reste de la structure, comme cela est fait habituellement pour modéliser un actionneur. Il faudra modéliser la structure avec ses éléments en AMF de façon couplée (Malagisi et al. (2014)). Le comportement global sera obtenu en résolvant numériquement les équations du problème de structure (Scirè Mammano (2015)), ou bien en ayant recours à la méthode des éléments finis (Yang and Seelecke (2009)). De telles simulations nécessitent un temps de calcul élevé et ne sont pas toujours très robustes.

Aussi, la littérature est encore assez pauvre en contributions qui proposeraient un modèle de fil AMF dont une implémentation numérique facile et robuste permettrait de simuler aisément des structures incluant des fils AMF.

1.3 Verrou scientifique et technologique : Design d'actionneurs

Le troisième verrou scientifique réside dans la conception et la réalisation de structures adaptatives contenant des actionneurs en AMF. Malgré le potentiel de tels actionneurs (Mohd Jani et al. (2014),Hannequart et al. (2017)) et les connaissances acquises sur le matériau AMF, il existe encore peu d'applications commerciales. Dans le domaine du bâtiment, et plus spécifiquement dans le domaine de la façade, il n'y a eu jusqu'à présent que quelques prototypes mettant en oeuvre des AMF (Fiorito et al. (2016)), mais aucun projet concrétisé. Les matériaux composites sont particulièrement adaptés à la réalisation de structures légères et déformables, et donc de structures adaptatives (Gurka (2015)). Ainsi, de nombreuses recherches ont été menées sur l'intégration des AMF dans les matériaux composites, notamment dans le secteur de l'aéronautique (Lester et al. (2015)). Toutefois, peu d'applications ont vu le jour. Quels sont les obstacles à la diffusion des AMF en tant qu'actionneurs ? Les limites des AMF qui freinent leur diffusion dans d'autres domaines sont-elles handicapantes dans le domaine du bâtiment ?

Tout d'abord, une structure mobile dans un bâtiment nécessite des actionneurs pro-

duisant de grands déplacements. Les déformations réversibles des AMF ne sont souvent pas suffisantes, à moins de recourir à des dispositifs d'amplification cinématique (Charpentier et al. (2017)). Ensuite, dans la plupart des applications potentielles le système doit être réversible, c'est-à-dire que le retour à la position d'origine après actionnement doit être garanti. Or, au moins lors des premiers cycles de chargement, l'AMF ne revient pas exactement à sa position d'origine. L'actionneur doit par ailleurs avoir un comportement satisfaisant en fatigue (Barbarino et al. (2014)) et, dans le cas d'une structure adaptative devant se maintenir en position déployée pendant une longue durée, comme ce serait le cas en façade de bâtiment, l'actionneur doit être stable, c'est-à-dire qu'il ne doit pas consommer d'énergie en continu.

Pour ce qui est de l'utilisation de l'actionneur, l'asservissement est délicat. En effet, il s'agit le plus souvent d'un chauffage par effet Joule, or la résistivité du fil change au cours du changement de phase. De plus, le chauffage par effet Joule ne permet pas de contrôler le refroidissement de l'actionneur. Ensuite, l'hystérésis du comportement thermomécanique pose problème : en effet, la configuration de l'actionneur dépend de l'histoire du chargement (Bil et al. (2013)). Par conséquent, un système entièrement passif est difficilement envisageable en façade.

Enfin, dans le cas des structures composites avec des fils AMF intégrés dans l'épaisseur du matériau, l'adhésion entre la résine et l'AMF est difficilement réalisable (Gurka (2015)). En effet, l'effet mémoire de forme est généralement déclenché par un chauffage par effet Joule, et l'interface entre l'AMF et la structure adaptative souffre car elle est soumise à de forts gradients thermiques et à d'importantes concentrations de contraintes.

1.4 Apports personnels dans la thèse

Pour les trois raisons exposées précédemment, les actionneurs AMF sont encore peu répandus dans l'industrie, et plus particulièrement dans le domaine du bâtiment. Au cours de cette thèse, les apports personnels suivants constituent des pistes vers une possible utilisation des AMF en façade de bâtiment.

Tout d'abord, un modèle de comportement thermomécanique unidimensionnel pour un fil AMF est proposé dans ce travail, avec une version monocristalline en section 2.3 et une version polycristalline en section 2.4. La première version permet un calcul simplifié de structures intégrant des fils AMF, et la seconde version permet de prendre en compte la texture du fil pour reproduire plus fidèlement le comportement de l'AMF.

Pour comparer ce modèle à la réalité, des essais de traction ont été menés sur un fil Nickel-Titane pour identifier les paramètres des deux modèles et la texture du fil. Décrit en section 2.7, un dispositif expérimental permettant de réaliser ces essais dans l'eau a été conçu, pour un contrôle précis de la température. Trois types d'essais de caractérisation ont été menés : des essais de calorimétrie en section 2.6, des essais de traction à température constante en section 2.8, ainsi que des essais de chargement thermique à contrainte constante en section 2.9.

Les modèles de comportement thermomécanique font intervenir la minimisation sous contraintes d'une expression représentant l'énergie libre du matériau, ce qui nécessite souvent une résolution numérique du problème. Toutefois, des solutions analytiques peuvent être obtenues pour le comportement du fil monocristallin (section 2.3), et dans le cas d'un fil monocristallin couplé à une structure élastique, comme par exemple un fil collé sur une poutre en section 3.1 ou bien un fil mis en série avec un ressort en section 3.2.

Le modèle de comportement polycristallin proposé permet d'obtenir des solutions analytiques pour le cas d'un fil avec chargement simple, comme un essai de traction à température constante ou bien un chargement thermique à contrainte constante. Les équations ainsi obtenues en section 2.5 permettent une comparaison rapide aux essais pour identifier les paramètres ainsi que la texture.

Le modèle proposé peut être aisément implémenté numériquement. Un code Matlab a donc été développé pour simuler le comportement d'un fil AMF, il sera décrit en section 3.3. Ensuite, ce code a été traduit en langage FORTRAN pour le développement d'une subroutine UMAT (User-defined Material) dans le logiciel Abaqus, permettant de simuler des situations complexes (section 3.4) par la méthode des éléments finis.

Enfin, le chapitre 4 du mémoire décrit le développement d'actionneurs avec fil AMF extérieur ou bien intégré dans des matériaux composites. La première catégorie d'actionneurs, décrite en section 4.3, est constituée de systèmes où le fil AMF est connecté à la

structure en ses extrémités. Plusieurs actionneurs de ce type ont été réalisés, dont un prototype à l'échelle 1 proposant une intégration en façade de l'actionneur AMF. Dans la seconde catégorie d'actionneurs, étudiée en section 4.4, les fils AMF sont intégrés dans le matériau composite verre-epoxy. L'actionneur élémentaire est une lamelle composite intégrant deux fils AMF collés. Un procédé de fabrication a été mis au point, permettant d'obtenir des lames composites à courbure variable en fonction de la température du fil. Pour finir, la robustesse de ces actionneurs est évaluée en section 4.5.

Chapitre 2

Modélisation thermomécanique et caractérisation expérimentale du fil AMF

2.1 Introduction

L'effet "mémoire de forme" a été découvert par hasard dans les années 1930 par Ölander (Ölander (1932)) dans l'alliage Au-Cd (Or-Cadmium). Ce phénomène physique remarquable a donné son nom à la classe des matériaux à mémoire de forme, et plus particulièrement des alliages à mémoire de forme (AMF). Un tel matériau peut, après chargement mécanique au-delà d'une certaine contrainte seuil, présenter une importante déformation résiduelle (de l'ordre de plusieurs % dans les alliages métalliques), puis retrouver sa configuration initiale (déformation nulle) lors d'un chauffage du matériau. Ainsi, en Figure 2.1.1 un fil AMF a été déformé à température ambiante jusqu'à obtenir la forme de gauche. Ensuite, il a été chauffé et a retrouvé sa forme initiale de fil droit.

Il a ensuite fallu attendre les années 1960 avec la découverte par Buehler et al. (1963) de l'effet mémoire de forme dans l'alliage équiatomique Nickel-Titane pour que des applications commerciales puissent être envisagées (Barbarino et al. (2014)). Différents alliages (Cu-Al-Ni, Cu-Al-Zn, etc...) peuvent présenter l'effet mémoire de forme dans certaines plages de température, mais l'alliage Nickel-Titane est le plus prometteur. En effet, ses propriétés mécaniques sont excellentes, les déformations de l'ordre de 8% restent réversibles et il présente de bonnes propriétés en fatigue.

Cet effet étonnant est dû à un changement de phase solide-solide. Deux phases cristallines peuvent coexister dans les alliages à mémoire de forme. Dans l'arrangement cristallin nommé **martensite**, les atomes de Nickel et Titane forment un réseau monoclinique (Huang et al. (2003)). Un autre arrangement atomique, nommé **austénite**, présente une structure cristalline plus symétrique, avec un arrangement cubique centré. Ces deux structures cristallines sont représentées en Figure 2.1.2. Les grandes déforma-

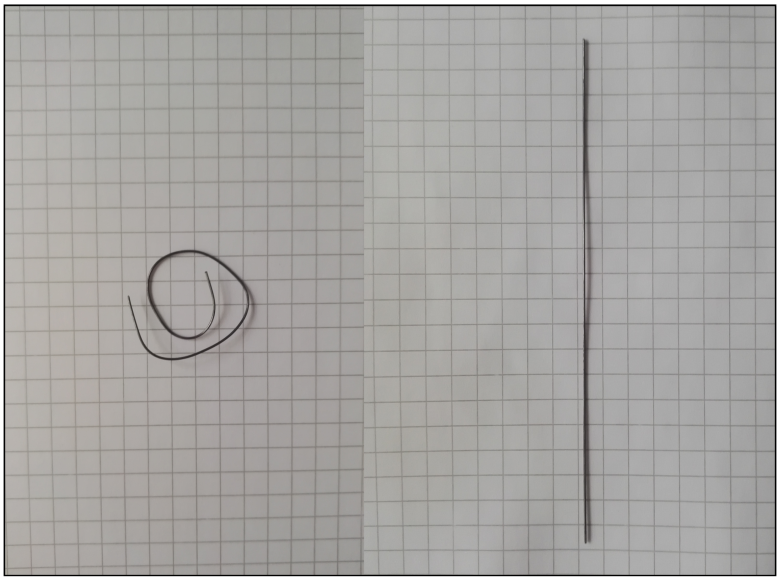

FIGURE 2.1.1 – L'effet mémoire de forme : un fil est déformé(à gauche), puis lors du chauffage il revient à sa forme droite (à droite)

tions réversibles observées dans les AMF sont dues à des distorsions locales, qui sont possibles dans la phase martensite car le réseau monoclinique peut s'orienter dans différentes directions. À l'inverse des déformations plastiques, ces mouvements se font sans déplacement macroscopique des atomes les uns par rapport aux autres, donc sans endommagement du matériau : les distances parcourues par les atomes sont inférieures à la distance interatomique. Lors du chauffage, la phase austénite devient plus stable énergétiquement et l'arrangement cristallin devient à nouveau cubique centré, ce qui donne lieu à l'effet mémoire de forme.

À basse température, un AMF sollicité mécaniquement présente le comportement de réorientation. Il se trouve toujours sous forme de martensite, mais au fur et à mesure de la déformation, la structure cristalline se réoriente grâce à des distorsions pour accomoder la déformation macroscopique. Nous nommons donc ce nouvel état **martensite orientée** dans le modèle. Lors du chauffage, la martensite orientée se transforme en austénite (effet mémoire de forme). Enfin, un refroidissement à contrainte nulle permet à l'AMF de retourner dans l'état martensitique sans déformation macroscopique : nous nommons cet état **martensite autoaccomodée**. Ainsi, en Figure 2.1.1 le fil se trouve dans la phase martensite orientée sur l'image de gauche, et le chauffage-refroidissement fait passer le fil par les phases austénite puis martensite autoaccomodée sur l'image de droite.

À haute température, un AMF présente un comportement superélastique, illustré en Figure 2.1.3 par une courbe expérimentale obtenue au cours de cette thèse. Le ma-

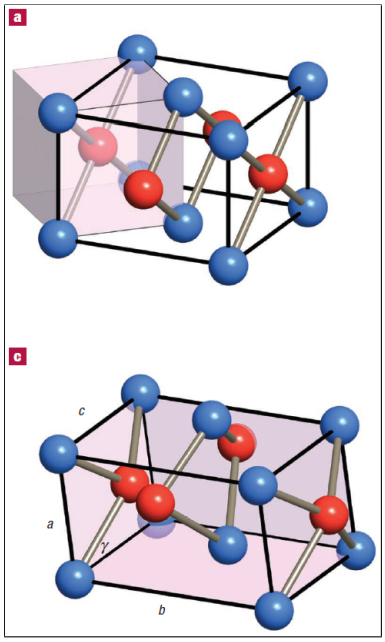

FIGURE 2.1.2 – Structure cristalline de l'austénite (haut) et de la martensite (bas), la martensite consistant en une déformation de la maille représentée en traits noirs (d'après Huang et al. (2003))

tériau se trouve initialement en phase austénite, et lors d'un chargement mécanique, si la contrainte appliquée est suffisamment haute, on observe l'apparition de martensite orientée accompagnée d'une grande déformation. Lorsque le fil est intégralement transformé en martensite orientée, on observe à nouveau un comportement approximativement élastique linéaire. Lors du déchargement, la diminution de la contrainte permet la réapparition de la phase austénite, et le fil retrouve son état initial. Le changement de phase permet donc de faire subir de grandes déformations réversibles (5 % dans le cas présent) au fil.

La maîtrise de ces phénomènes complexes pour des applications en ingénierie nécessite l'élaboration de modèles pertinents et dont l'implémentation numérique soit aisément réalisable.

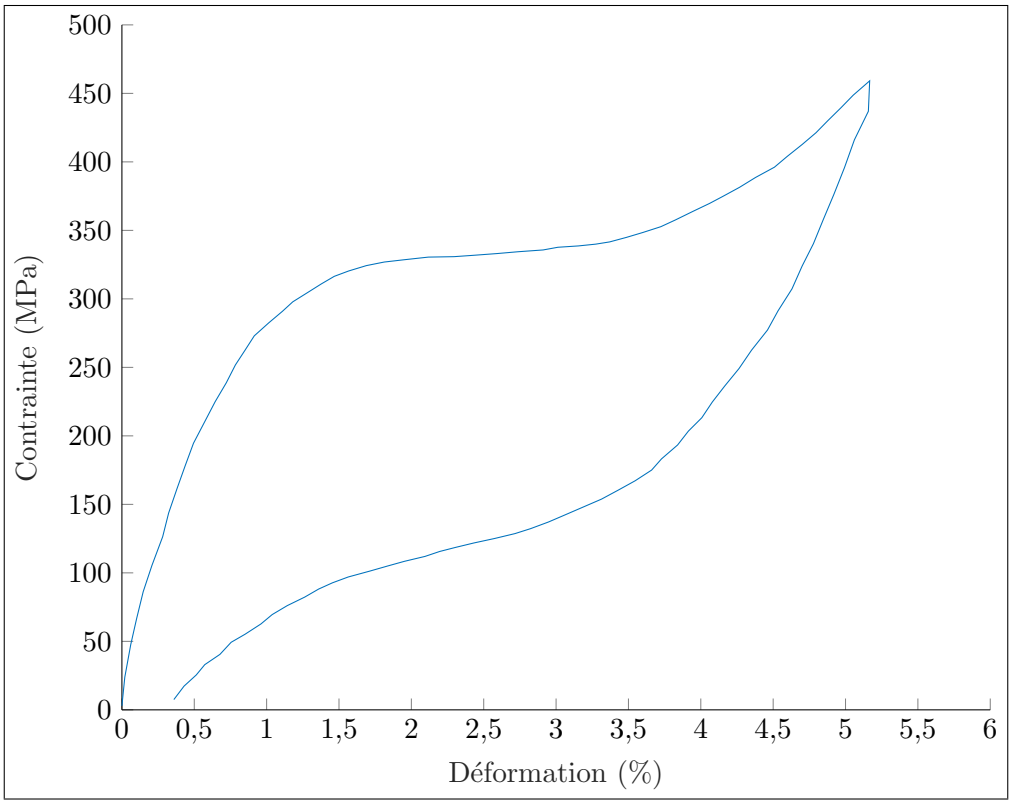

FIGURE 2.1.3 – Essai de traction à 70°C sur fil AMF Nickel-Titane

2.2 Modélisation du comportement thermomécanique des alliages à mémoire de forme

La modélisation du comportement thermomécanique des alliages à mémoire de forme constitue un champ de recherche actif. Les modèles existants peuvent être classés dans la catégorie des modèles phénoménologiques, pour lesquels on postule des équations reproduisant le plus fidèlement possible les courbes expérimentales, ou bien dans la catégorie des modèles micromécaniques, qui prennent appui sur la microstructure des AMF pour obtenir les équations de comportement macroscopique. La première catégorie regroupe des modèles unidimensionnels (Auricchio et al. (2009), Brinson (1993), Chang et al. (2006), Falk (1980), Frost et al. (2010), Liang and Rogers (1990), Marfia and Rizzoni (2013)) ainsi que des modèles tridimensionnels (Auricchio et al. (1997), Boyd and Lagoudas (1996), Chemisky et al. (2011), Frémond et al. (1996), Souza et al. (1998), Tanaka et al. (1986)). Enfin, certains modèles sont plus délicats à classer et constituent un intermédiaire entre l'approche phénoménologique et l'approche micromécanique, comme le modèle de Sadjadpour and Bhattacharya (2007).

Les différents modèles développés au cours de cette recherche appartiennent à la catégorie des modèles micromécaniques, nous pouvons y distinguer les modèles monocristallins et les modèles polycristallins. Ces deux types de modèles seront traités ici.

Dans le cas monocristallin, un seul cristal AMF est modélisé. Il peut contenir une seule ou plusieurs (Peigney et al. (2011), Sagar and Stein (2010)) variantes de martensite et le modèle peut être unidimensionnel (Bernardini and Pence (2002)) ou bien tridimensionnel (Govindjee and Miehe (2001), Stupkiewicz and Petryk (2002)).

Dans le cas polycristallin, le matériau est décrit par une liste de grains accompagnée de certains paramètres tels que l'orientation cristalline du grain. Les grains peuvent présenter une ou plusieurs variantes de martensite et le modèle peut être unidimensionnel (Nae et al. (2003)) ou bien tridimensionnel (Hackl and Heinen (2008), Kelly et al. (2016), Sagar and Stein (2010), Thamburaja and Anand (2001)).

La plupart de ces modèles introduisent une ou plusieurs variables internes permettant de décrire le comportement complexe de l'AMF. Le choix de ces variables ainsi que leur domaine de définition permettent aussi de distinguer les différents modèles.

Dans ce travail, un modèle micromécanique monocristallin est proposé en section 2.3, et un modèle micromécanique polycristallin est proposé en section 2.4. Leur spécificité réside dans leur implémentation numérique robuste, qui sera présentée dans le chapitre 3, ainsi que dans la possibilité de déterminer des solutions analytiques pour des cas de chargement simples, ce qui sera exposé en section 2.5. Ces solutions analytiques permettent d'identifier rapidement les paramètres du modèle à partir d'observations expérimentales. Le modèle monocristallin permet de décrire de façon simplifiée le com-

portement de l'AMF, alors que le modèle polycristallin, plus riche, permet de reproduire relativement fidèlement les courbes expérimentales.

2.3 Un modèle unidimensionnel d'alliage à mémoire de forme monocristallin

2.3.1 Hypothèses

Le modèle micromécanique développé au cours de cette recherche décrit la réponse thermomécanique d'un alliage à mémoire de forme unidimensionnel sous la forme d'un fil en traction. Il permet de décrire les phénomènes remarquables que peut présenter un AMF : la superélasticité, la réorientation des variantes de martensite ainsi que l'effet mémoire de forme. La même méthodologie pourrait être appliquée à un modèle tridimensionnel. Plusieurs hypothèses ont été faites pour construire le modèle.

Tout d'abord, nous modélisons un matériau homogène, c'est-à-dire que le comportement est uniforme tout le long du fil. Nous nous plaçons dans le cadre des matériaux standards généralisés introduits dans Halphen (1975), c'est-à-dire que les équations constitutives découlent de l'expression d'une énergie libre et d'un potentiel de dissipation.

Ensuite, de nombreux phénomènes physiques ne seront pas pris en compte dans ce modèle. Ainsi, la dilatation thermique, considérée comme petite par rapport aux déformations de transformation de phase, n'est pas considérée ici. De même, la plasticité, le fluage et la relaxation des contraintes ne seront pas modélisés ici. De plus, nous considérerons que les chargements mécaniques et les variations de température sont quasi-statiques : la température est toujours imposée et les échanges thermiques ne seront pas modélisés. Cette hypothèse est valable pour un fil, dont le diamètre est petit devant la longueur et qui se trouve donc toujours en équilibre thermique avec l'extérieur.

Dans cette partie nous supposons que le matériau étudié est un monocristal, ce que l'on rencontre rarement dans les applications industrielles. Le comportement particulier de l'AMF est obtenu grâce à l'introduction de deux variables internes décrivant la fraction volumique dans l'AMF des phases solides décrites en section 2.1 :

— La fraction volumique de martensite autoaccomodée θ_0
— La fraction volumique de martensite orientée θ_1

Par conséquent, la fraction volumique d'austénite est donnée par $1-\theta_0-\theta_1$. La configuration de référence sera supposée être celle où le matériau n'est soumis à aucune contrainte et se trouve en phase austénite, avec $\theta_0 = \theta_1 = 0$. Nous noterons $\mathbf{\Theta}$ le vecteur des fractions volumiques de martensite, avec $\mathbf{\Theta} = \begin{pmatrix} \theta_0 \\ \theta_1 \end{pmatrix}$.

Les paramètres matériau suivants sont adoptés :

— ε^{tr} la déformation maximale de transformation de phase, généralement de l'ordre de 5 à 8 %. Elle représente la quantité maximale de déformation non élastique

réversible que peut subir le matériau lors du changement de phase.
— E le module d'Young, que nous considérerons égal pour l'austénite et la martensite
— T_0 une température de référence
— λ la chaleur latente
— G_0 un paramètre de dissipation correspondant à la transformation de phase austénite - martensite autoaccomodée
— G_1 un paramètre de dissipation correspondant à la transformation de phase austénite - martensite orientée (avec $G_0 < G_1$)

Nous noterons par la suite $\lambda(T) = \lambda\dfrac{T - T_0}{T_0}$, où T est la température actuelle du matériau, pour alléger les notations.

2.3.2 Formulation d'un modèle pour décrire le comportement thermomécanique de l'AMF monocristallin

L'énergie libre suivante est utilisée pour décrire le comportement thermomécanique de l'AMF :

$$w(\varepsilon, \boldsymbol{\Theta}, T) = \frac{1}{2}E(\varepsilon - \theta_1\varepsilon^{tr})^2 + \lambda(T)(\theta_0 + \theta_1) \tag{2.3.1}$$

Où ε est la déformation du fil AMF dans la direction axiale. Le premier terme de cette énergie libre correspond à l'énergie de déformation élastique, et le second terme correspond à la contribution de la chaleur latente. Les contraintes suivantes s'appliquent aux variables internes :

$$\begin{cases} \theta_0 \geq 0 \\ \theta_1 \geq 0 \\ \theta_0 + \theta_1 \leq 1 \end{cases} \tag{2.3.2}$$

Nommons $\mathcal{T}$ ce domaine d'existence des (θ_0, θ_1) et $\mathcal{I}_{\mathcal{T}}$ sa fonction indicatrice.

Nous postulons le potentiel de dissipation suivant pour décrire le supplément d'énergie à fournir pour l'initiation du changement de phase :

$$\Phi(\dot{\boldsymbol{\Theta}}) = \Phi(\dot{\theta}_0, \dot{\theta}_1) = G_0|\dot{\theta}_0| + G_1|\dot{\theta}_1| \tag{2.3.3}$$

Ce choix est classique, il est par exemple similaire à la fonction adoptée dans Anand and Gurtin (2003), dans Peigney et al. (2011) ou encore dans Bernardini and Pence (2002).

Soit $\mathbf{A}$ la force d'entraînement thermodynamique :

$$\mathbf{A} = -\frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{\Theta}} \tag{2.3.4}$$

Nous nous plaçons dans le cadre de la mécanique "non-lisse" (Frémond (2001)) qui permet de prendre en compte les contraintes sur les variables internes. La résolution du problème physique se fait alors grâce à l'équation constitutive suivante, correspondant à la seconde loi de la thermodynamique :

$$\mathbf{A} \in \partial\Phi(\dot{\mathbf{\Theta}}) + \partial\mathcal{I}_{\mathcal{T}}(\mathbf{\Theta}) \tag{2.3.5}$$

où ∂ est le sous-différentiel. C'est un outil mathématique très utilisé dans le domaine de l'optimisation convexe (Rockafellar (1970)), permettant de prolonger la notion de dérivée à des fonctions continues non dérivables en un point. Il est défini ci-dessous :

Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ mais non dérivable en $\mathbf{x}_0$. Soit $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^2$. On note $\partial f(\mathbf{x}_0)$ le sous-différentiel de f en $\mathbf{x}_0$. Par définition, $\mathbf{B} \in \partial f(\mathbf{x}_0)$ est équivalent à :

$$\textit{Pour tout} \quad \mathbf{dx} \in \mathbb{R}^2 \ , \ \mathbf{B}.\mathbf{dx} \leq f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{dx}) - f(\mathbf{x}_0) \tag{2.3.6}$$

En particulier, pour f convexe, si $0 \in \partial f(\mathbf{x}_0)$ alors $\mathbf{x}_0$ est un minimum global de f. Toutefois dans les calculs nous adopterons une autre définition du sous-différentiel :

Un vecteur $\mathbf{B}$ de l'espace $\mathbb{R}^2$ appartient à $\partial\mathcal{I}_{\mathcal{T}}(\theta_0, \theta_1)$ si et seulement s'il existe $z \in \mathbb{R}_+$ et $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2_+$ tels que :

$$\begin{cases} \mathbf{B} = \begin{pmatrix} z \\ z \end{pmatrix} - \mathbf{a} \\ z(1 - \theta_0 - \theta_1) = 0 \\ \mathbf{a}.\begin{pmatrix} \theta_0 \\ \theta_1 \end{pmatrix} = 0 \end{cases} \tag{2.3.7}$$

Ici, les fonctions Φ et $\mathcal{I}_{\mathcal{T}}$ sont convexes et continues sur le domaine étudié, mais non dérivables en certains points. Par exemple, le potentiel de dissipation (2.3.3) n'est pas dérivable en 0. Toutefois, les sous-différentiels de Φ et $\mathcal{I}_{\mathcal{T}}$ existent. En Figure 2.3.1 est représenté le sous-différentiel de la fonction indicatrice $\mathcal{I}_{\mathcal{T}}$ du domaine $\mathcal{T} = \{(\theta_0, \theta_1) \in \mathbb{R}^2_+ \ : \ \theta_0 + \theta_1 \leq 1\}$.

On vérifie facilement qu'à l'intérieur du domaine $\mathcal{T}(\theta_0, \theta_1)$ le sous-différentiel de la fonction indicatrice est le vecteur nul. De plus, sur les arêtes du triangle représenté en Figure 2.3.1 les vecteurs appartenant au sous-différentiel sont normaux aux frontières du domaine. Enfin, sur les sommets du domaine $\mathcal{T}(\theta_0, \theta_1)$ le sous-différentiel regroupe une infinité de directions matérialisées par le secteur angulaire vert.

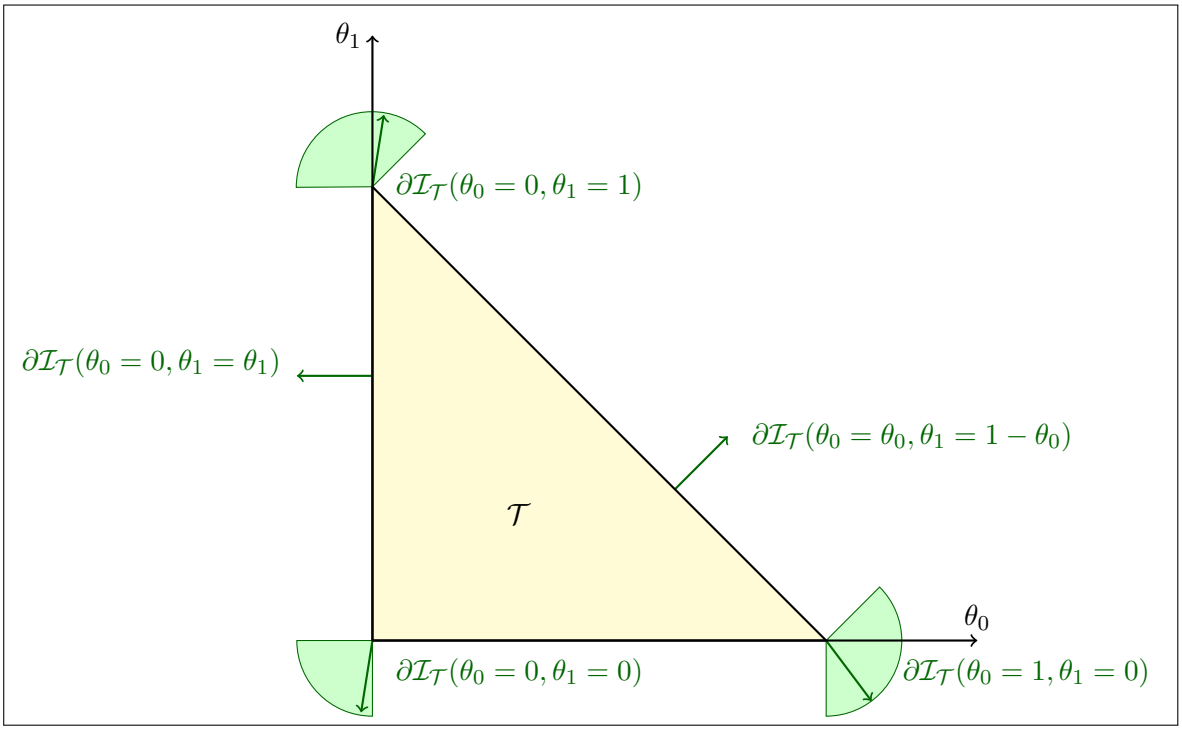

FIGURE 2.3.1 – Sous-différentiel de la fonction indicatrice $\mathcal{I}_\mathcal{T}(\theta_0, \theta_1)$

2.3.3 Minimisation de l'énergie incrémentale

Montrons à présent que la résolution de ce problème revient à minimiser une énergie incrémentale. L'équation (2.3.5) peut être réécrite sous la forme suivante :

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^d + \mathbf{A}^r \text{ avec } \mathbf{A}^d \in \partial\Phi(\dot{\mathbf{\Theta}}) \text{ et } \mathbf{A}^r \in \partial\mathcal{I}_\mathcal{T}(\mathbf{\Theta}) \tag{2.3.8}$$

En pratique, une discrétisation temporelle est nécessaire. Soient θ_0^0 et θ_1^0 les fractions volumiques actuelles de θ_0 et θ_1 respectivement, soit δt le pas de temps. Résoudre le problème (2.3.8) consiste à trouver les nouvelles fractions volumiques θ_0 et θ_1 suite à l'application d'un incrément de déformation, de température, ou de la combinaison des deux, en un intervalle de temps δt, et cela en connaissant l'état physique actuel du matériau, donné par θ_0^0 et θ_1^0. Soit $\mathbf{\Theta}^0$ le vecteur des deux fractions volumiques θ_0^0 et θ_1^0. Nous pouvons donc réécrire l'équation (2.3.8) à l'aide d'un schéma d'Euler implicite :

$$0 = -\mathbf{A} + \mathbf{A}^d + \mathbf{A}^r \text{ avec } \mathbf{A}^d \in \partial\Phi\left(\frac{\mathbf{\Theta} - \mathbf{\Theta}^0}{\delta t}\right) \text{ et } \mathbf{A}^r \in \partial\mathcal{I}_\mathcal{T}(\mathbf{\Theta}) \tag{2.3.9}$$

A partir de cette équation, il est possible de montrer que la solution est un minimum global. Pour cela, introduisons les fonctions ψ_1 et ψ_2 définies par :

$$\psi_1 = \delta t \Phi \left(\frac{\mathbf{\Theta} - \mathbf{\Theta}^0}{\delta t} \right) \tag{2.3.10}$$

$$\psi_2 = \psi_1 + \mathcal{I}_{\mathcal{T}}(\mathbf{\Theta}) \tag{2.3.11}$$

Nous cherchons à exprimer le problème 2.3.9 à l'aide de ψ_2. Une fonction est semi-continue inférieurement en x_0 si, quand x tend vers x_0, $f(x)$ est proche de $f(x_0)$ ou bien supérieure à $f(x_0)$. Φ est une fonction continue, donc à fortiori elle est semi-continue inférieurement. On vérifie facilement par définition de la fonction indicatrice, que $\mathcal{I}_{\mathcal{T}}$ est semi-continue inférieurement. Elles sont toutes deux des fonctions propres convexes, c'est-à-dire qu'elles ne valent jamais $-\infty$ et ne sont pas partout égales à $+\infty$. Donc ψ_1 et ψ_2 sont des fonction convexes, propres, semi-continues inférieurement. Cela permet d'écrire (Peigney et al. (2011)) :

$$\partial\psi_2 = \partial\psi_1 + \partial\mathcal{I}_{\mathcal{T}}(\mathbf{\Theta}) = \partial\Phi \left(\frac{\mathbf{\Theta} - \mathbf{\Theta}^0}{\delta t} \right) + \partial\mathcal{I}_{\mathcal{T}}(\mathbf{\Theta}) \tag{2.3.12}$$

Donc le problème (2.3.9) se réécrit :

$$\mathbf{0} \in \partial \left(w + \psi_2 \right) \tag{2.3.13}$$

La solution $\mathbf{\Theta}$ est donc un minimum global pour $w + \psi_2$, c'est-à-dire que :

$$\mathbf{\Theta} = Argmin \left(\delta t \Phi \left(\frac{\mathbf{\Theta} - \mathbf{\Theta}^0}{\delta t} \right) + w(\mathbf{\Theta}) + \mathcal{I}_{\mathcal{T}}(\mathbf{\Theta}) \right) \tag{2.3.14}$$

La condition $\mathbf{\Theta} \in \mathcal{T}$ permet de retirer l'expression $\mathcal{I}_{\mathcal{T}}$:

$$\mathbf{\Theta} = \underset{\mathbf{\Theta} \in \mathcal{T}}{Argmin} \left(\delta t \Phi \left(\frac{\mathbf{\Theta} - \mathbf{\Theta}^0}{\delta t} \right) + w(\mathbf{\Theta}) \right) \tag{2.3.15}$$

Notons que l'expression adoptée pour le potentiel de dissipation Φ décrit une évolution indépendante de la vitesse de chargement, ce qu'on retrouve dans la simplification par δt rendue possible dans l'équation (2.3.15). La résolution du problème est équivalente en pratique à la minimisation de la fonction suivante, formée à partir de l'énergie libre et du potentiel de dissipation :

$$\inf_{\Theta \in \mathcal{T}} \left(\frac{1}{2} E(\varepsilon - \theta_1 \varepsilon^{tr})^2 + \lambda(T)(\theta_0 + \theta_1) + G_0|\theta_0 - \theta_0^0| + G_1|\theta_1 - \theta_1^0| \right) \tag{2.3.16}$$

Pour un incrément de déformation ou de température donné, la solution Θ permet ensuite de calculer la contrainte actualisée :

$$\sigma = \frac{\partial w}{\partial \varepsilon} = E \left(\varepsilon - \theta_1 \varepsilon^{tr} \right) \tag{2.3.17}$$

2.3.4 Détermination des températures de changement de phase à contrainte nulle

Le modèle monocristallin permet de déterminer les températures de changement de phase à contrainte nulle (austénite vers martensite autoaccomodée, ou inversement) en fonction des paramètres du modèle. Cette expression peut ensuite être comparée aux résultats d'un essai de calorimétrie. Pour un fil avec $\sigma = 0$, le problème (2.3.16) devient :

$$\inf_{\Theta \in \mathcal{T}} \Big(\lambda(T)(\theta_0 + \theta_1) + G_0|\theta_0 - \theta_0^0| + G_1|\theta_1 - \theta_1^0| \Big) \tag{2.3.18}$$

Cette expression permet de remarquer que pour une température T suffisamment élevée, $\theta_0 = \theta_1 = 0$. Etudions à présent l'effet d'un refroidissement. Initialement les variables internes θ_0 et θ_1 sont nulles et ne peuvent qu'augmenter, donc on cherche :

$$\inf_{\Theta \in \mathcal{T}} \left(\lambda(T)(\theta_0 + \theta_1) + G_0\theta_0 + G_1\theta_1 \right) \tag{2.3.19}$$

On remarque donc que comme $G_0 < G_1$, on aura apparition de θ_0 lorsque la quantité $\lambda(T) + G_0$ devient négative, c'est-à-dire pour :

$$T^A = T_0 - \frac{T_0 G_0}{\lambda} \tag{2.3.20}$$

De la même façon on peut montrer que lors d'un chauffage à partir d'une température suffisamment basse, la température de formation d'austénite est :

$$T^B = T_0 + \frac{T_0 G_0}{\lambda} \tag{2.3.21}$$

2.3.5 Equations constitutives de l'AMF monocristallin à haute température

Pour des chargements simples, il est aussi possible de résoudre analytiquement (2.3.16) pour déterminer le comportement mécanique de l'AMF monocristallin. Calculons les courbes contraintes-déformations en traction à température constante, tout d'abord dans le cas de la haute température. Soit $\mathbf{A}$ la force thermodynamique associée aux variables internes (θ_0, θ_1) :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -\dfrac{\partial w}{\partial \theta_0} \\ -\dfrac{\partial w}{\partial \theta_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda(T) \\ \varepsilon^{tr} E(\varepsilon - \theta_1 \varepsilon^{tr}) - \lambda(T) \end{pmatrix} \tag{2.3.22}$$

Revenons à l'équation (2.3.9) et réécrivons $\mathbf{A^d}$ sous la forme :

$$\mathbf{A^d} = \begin{pmatrix} \phi_0 \\ \phi_1 \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} \partial\Phi(\frac{\theta_0 - \theta_0^0}{\delta t}) \\ \partial\Phi(\frac{\theta_1 - \theta_1^0}{\delta t}) \end{pmatrix} \tag{2.3.23}$$

$\mathbf{A^d}$ s'interprète comme une force dissipative et $\mathbf{A^r}$ comme une force de réaction thermodynamique aux contraintes sur les variables internes (Frémond (2001)). Par définition du sous-différentiel, le vecteur $\mathbf{A^d}$ est donné par les expressions suivantes :

$$\begin{cases} \phi_i \in [-G_i; G_i] \text{ si } \theta_i = \theta_i^0 \text{ avec } i = 0 \text{ ou } 1 \\ \phi_i = G_i sgn(\theta_i - \theta_i^0) \text{ si } \theta_i \neq \theta_i^0 \text{ avec } i = 0 \text{ ou } 1 \end{cases} \tag{2.3.24}$$

On déduit donc de (2.3.9) et (2.3.7) les équations d'évolution où Φ_i vérifie (2.3.24) :

$$\begin{cases} -\lambda(T) = z - a_0 + \phi_0 \\ \varepsilon^{tr} E(\varepsilon - \theta_1 \varepsilon^{tr}) - \lambda(T) = z - a_1 + \phi_1 \end{cases} \tag{2.3.25}$$

Nous nous plaçons ici dans le cas où la température imposée est haute : d'après la section 2.3.4, le fil se trouve à une température $T > T^A$ avec $\theta_0 = \theta_1 = 0$ donc la définition (2.3.7) permet d'écrire :

$$\begin{cases} \theta_0 = 0 & \text{d'où } a_0 \geq 0 \\ \theta_1 = 0 & \text{d'où } a_1 \geq 0 \\ 1 - \theta_0 - \theta_1 = 1 & \text{d'où } z = 0 \end{cases} \tag{2.3.26}$$

D'où

$$\begin{cases} -\lambda(T) = -a_0 + \phi_0 \\ \varepsilon^{tr} E\varepsilon - \lambda(T) = -a_1 + \phi_1 \end{cases} \tag{2.3.27}$$

A l'instant initial où $\varepsilon = 0$, on a $\theta_0 = \theta_0^0 = 0$ et $\theta_1 = \theta_1^0 = 0$ donc $\phi_0 \in [-G_0; G_0]$ et $\phi_1 \in [-G_1; G_1]$ d'après (2.3.24). Comme T est grand, on peut choisir :

$$\begin{cases} a_0 = \lambda(T) \\ a_1 = \lambda(T) \\ \phi_0 = 0 \\ \phi_1 = 0 \end{cases} \tag{2.3.28}$$

Au début du chargement, on choisit $a_1 = \lambda(T) - \varepsilon^{tr} E\varepsilon$. Cette quantité reste positive donc le raisonnement reste le même et la solution du problème est $\theta_0 = \theta_1 = 0$. Lorsque le chargement se poursuit, $\lambda(T) - \varepsilon^{tr} E\varepsilon$ devient négatif et on peut alors choisir :

$$\begin{cases} a_0 = \lambda(T) \\ a_1 = 0 \\ \phi_0 = 0 \\ \phi_1 = \varepsilon^{tr} E\varepsilon - \lambda(T) \end{cases} \tag{2.3.29}$$

La solution du problème reste alors toujours $\theta_0 = \theta_1 = 0$ jusqu'à ce que l'on atteigne une déformation ε^{seuil} pour laquelle $\phi_1 = \varepsilon^{tr} E\varepsilon - \lambda(T) = G_1$. D'après l'équation (2.3.24) le chargement ne peut pas se poursuivre avec $\dot{\theta_1} = 0$. Pour désigner une situation de ce type par la suite, nous écrirons à présent que la deuxième équation dans (2.3.27) "sature".

Ici, il y a donc initiation du changement de phase austénite-martensite orientée, avec apparition de θ_1. Comme illustré en Figure 2.3.2, le changement de phase débute donc pour :

$$\boxed{\varepsilon = \frac{\lambda(T) + G_1}{E\varepsilon^{tr}} \quad \text{et} \quad \sigma = \frac{\lambda(T) + G_1}{\varepsilon^{tr}}} \tag{2.3.30}$$

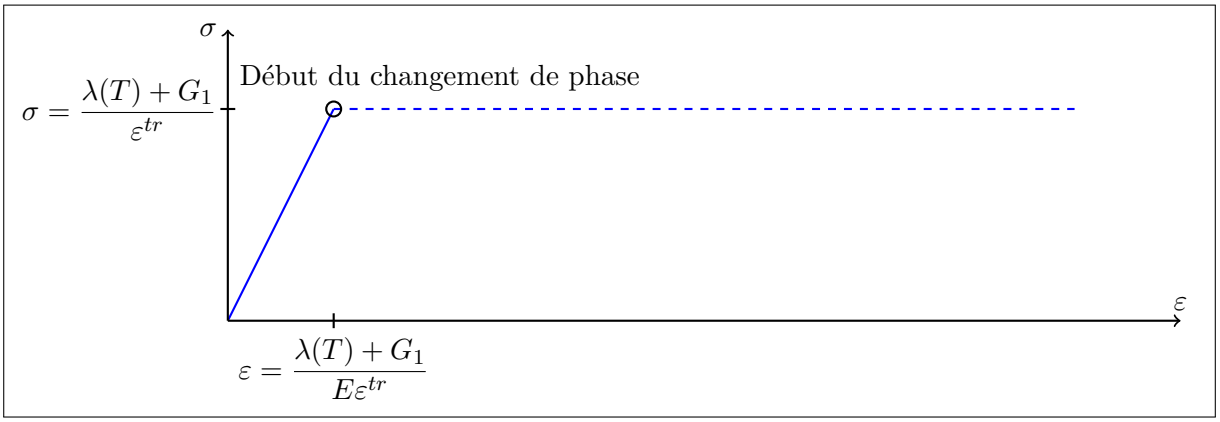

FIGURE 2.3.2 – Début du changement de phase lors d'un chargement en traction à haute température

On a ensuite, à σ constant, augmentation de θ_1 :

$$\begin{cases} \theta_0 = 0 & a_0 \geq 0 \\ \theta_1 \neq 0 & a_1 = 0 \\ 1 - \theta_0 - \theta_1 \neq 0 & z = 0 \end{cases} \tag{2.3.31}$$

D'où

$$\begin{cases} -\lambda(T) = -a_0 + \phi_0 \\ \varepsilon^{tr} E(\varepsilon - \theta_1 \varepsilon^{tr}) - \lambda(T) = G_1 \end{cases} \tag{2.3.32}$$

Cette évolution est possible jusqu'à $\theta_1 = 1$, où l'on a :

$$\boxed{\varepsilon = \frac{\lambda(T) + G_1}{E\varepsilon^{tr}} + \varepsilon^{tr} \quad \text{et} \quad \sigma = \frac{\lambda(T) + G_1}{\varepsilon^{tr}}} \tag{2.3.33}$$

Pour cet état, nous avons :

$$\begin{cases} \theta_0 = 0 & a_0 \geq 0 \\ \theta_1 = 1 & a_1 = 0 \\ 1 - \theta_0 - \theta_1 = 0 & z \geq 0 \end{cases} \tag{2.3.34}$$

Si l'augmentation de ε se poursuit, les équations constitutives deviennent donc :

$$\begin{cases} -\lambda(T) = z - a_0 + \phi_0 \\ \varepsilon^{tr} E(\varepsilon - \theta_1 \varepsilon^{tr}) - \lambda(T) = z + G_1 \end{cases} \tag{2.3.35}$$

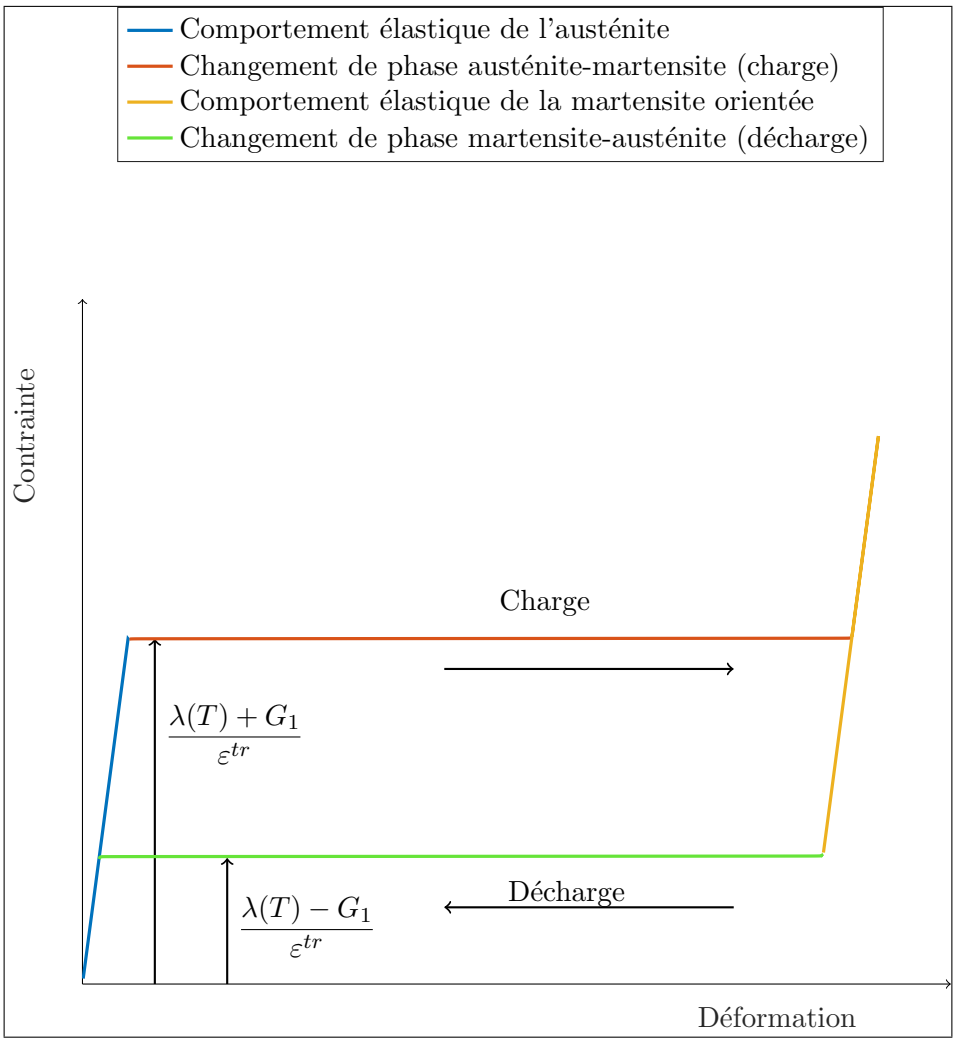

FIGURE 2.3.3 – Comportement mécanique analytique de l'AMF monocristallin à haute température (équations (2.3.30) et (2.3.33)) : la *superélasticité*

L'évolution est à nouveau élastique car on peut choisir z aussi grand qu'il le faut dans la seconde équation. De la même façon, il est possible de montrer que la décharge est élastique dans un premier temps, et que lorsque la contrainte $\sigma = \frac{\lambda(T) - G_1}{\varepsilon^{tr}}$ est atteinte, le changement de phase inverse se produit. Les courbes contraintes-déformations obtenues avec ce modèle sont donc linéaires par morceaux. En Figure 2.3.3 est représenté le comportement à haute température (comportement superélastique). La portion de la courbe à contrainte constante représente le changement de phase, on l'appelle *plateau de*

changement de phase. La longueur de ce plateau selon l'axe des abscisses correspond au paramètre ε^{tr}. La hauteur de ce plateau correspond à la contrainte de changement de phase : à haute température, elle vaut $\dfrac{\lambda(T)+G_1}{\varepsilon^{tr}}$ lors de la charge, et $\dfrac{\lambda(T)-G_1}{\varepsilon^{tr}}$ pour le changement de phase inverse. On retrouve donc dans le modèle la forte dépendance en température du comportement mécanique des AMF.

2.3.6 Equations constitutives de l'AMF monocristallin à basse température

Plaçons-nous à présent dans le cas où la température imposée est basse : d'après la section 2.3.4, le fil se trouve à une température $T < T^B$ avec $\theta_0 = 1$ et $\theta_1 = 0$ donc la définition (2.3.7) permet d'écrire :

$$\begin{cases} \theta_0 = 1 & \text{d'où} \quad a_0 = 0 \\ \theta_1 = 0 & \text{d'où} \quad a_1 \geq 0 \\ 1 - \theta_0 - \theta_1 = 0 & \text{d'où} \quad z \geq 0 \end{cases} \tag{2.3.36}$$

D'où

$$\begin{cases} -\lambda(T) = z + \phi_0 \\ \varepsilon^{tr} E\varepsilon - \lambda(T) = z - a_1 + \phi_1 \end{cases} \tag{2.3.37}$$

De façon similaire au calcul détaillé en section 2.3.5, on trouve au début du changement de phase de martensite vers martensite orientée :

$$\boxed{\varepsilon = \frac{G_0+G_1}{E\varepsilon^{tr}} \quad \text{et} \quad \sigma = \frac{G_0+G_1}{\varepsilon^{tr}} \quad \text{pour tout} \quad T < T^B} \tag{2.3.38}$$

On a ensuite, à σ constant, θ_0 diminue et θ_1 augmente. En Figure 2.3.4 est représenté le comportement à basse température, connu sous le nom de *réorientation* de martensite. Lors de la décharge, il n'y a pas de changement de phase inverse : la martensite orientée est stable à cette température même en l'absence de contrainte, on observe donc une importante déformation résiduelle, qui vaut ici $\varepsilon = \varepsilon^{tr}$. On remarque que contrairement à la situation à haute température, ici le comportement ne dépend pas de la température.

2.3.7 Equations constitutives de l'AMF monocristallin aux températures intermédiaires

Traitons à présent le cas de la traction isotherme menée à une température T telle que $T^B \leq T \leq T^A$. Dans cette situation, la seule donnée de la température ambiante ne permet pas de connaître l'état initial de l'AMF : il faut connaître l'histoire du chargement pour calculer les valeurs initiales de θ_0 et θ_1. Par exemple, si l'état initial est caractérisé par $\theta_0 = 0$ et $\theta_1 = 0$, on retrouve le comportement à haute température décrit en section 2.3.5. Si l'état initial est caractérisé par $\theta_0 = 1$ et $\theta_1 = 0$, on retrouve le comportement à basse température décrit en section 2.3.6.

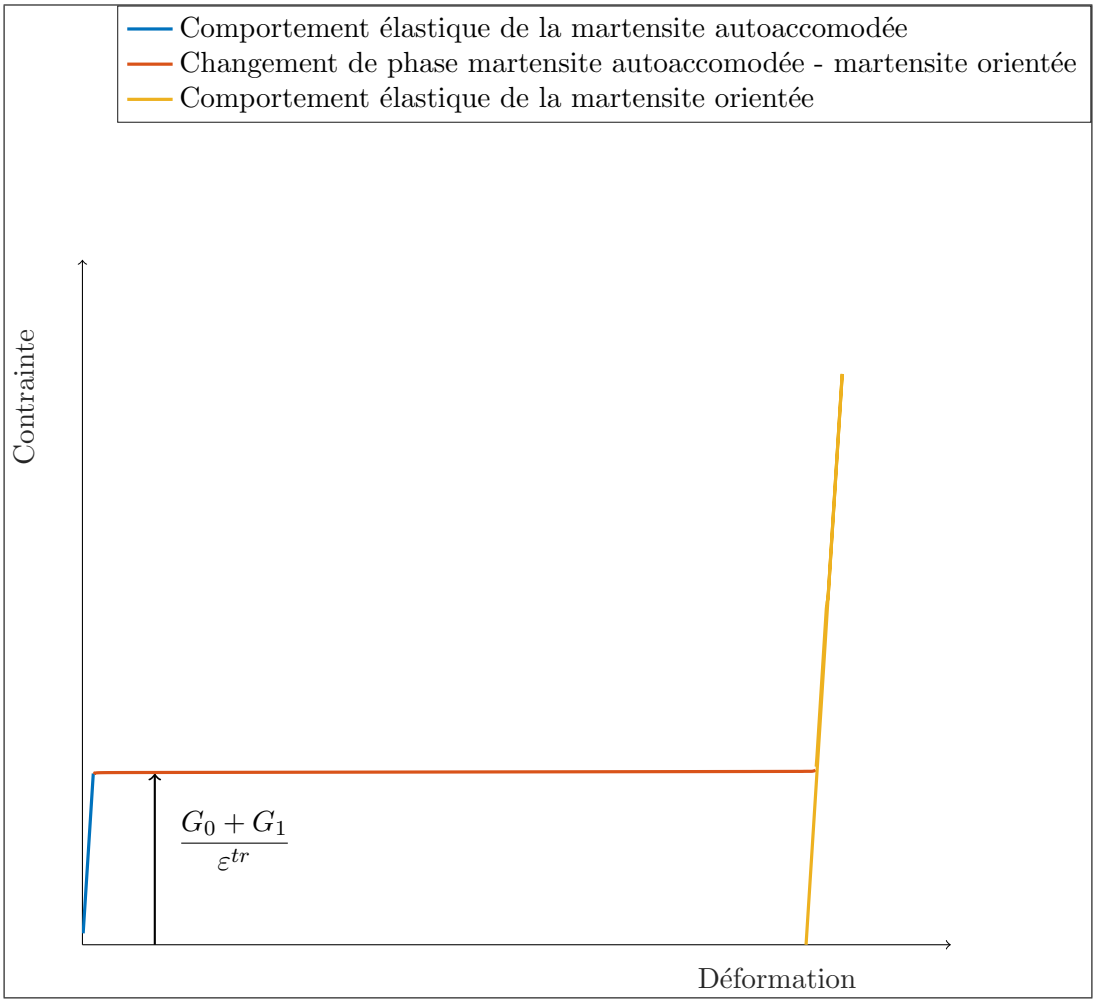

FIGURE 2.3.4 – Comportement mécanique analytique de l'AMF monocristallin à basse température (équation (2.3.38)) : la *réorientation*

2.3.8 Effet mémoire de forme pour l'AMF monocristallin

Vérifions à présent que le modèle est capable de décrire l'effet mémoire de forme, qui est mis à profit en pratique dans les actionneurs AMF. Fixons une température initiale T telle que $T < T^B$ donc $\lambda(T) < G_0$. Le fil est préalablement étiré à cette température, et de la martensite orientée est formée. On a donc d'après la section 2.3.6, en notant θ_1^{init} la fraction volumique de martensite orientée présente en fin d'étirement, l'état initial suivant :

$$\begin{cases} \varepsilon = \dfrac{G_0+G_1}{E\varepsilon^{tr}} + \theta_1^{init}\varepsilon^{tr} & \\ \sigma = \dfrac{G_0+G_1}{\varepsilon^{tr}} & \\ \theta_0 = 1-\theta_1^{init} & \text{d'où} \quad a_0 = 0 \\ \theta_1 = \theta_1^{init} & \text{d'où} \quad a_1 = 0 \\ 1-\theta_0-\theta_1 = 0 & \text{d'où} \quad z \geq 0 \end{cases} \tag{2.3.39}$$

Nous supposons par la suite que $\sigma = \dfrac{G_0+G_1}{\varepsilon^{tr}}$ est imposée. Nous avons donc les équations d'évolution suivantes :

$$\begin{cases} -\lambda(T) = z + \phi_0 \\ \sigma\varepsilon^{tr} - \lambda(T) = z + \phi_1 \end{cases} \tag{2.3.40}$$

On peut choisir $-\lambda(T) = z - G_0$, et l'évolution est possible jusqu'à $\lambda(T) = G_0$. Pour $T > T^B$, la première équation sature et on a disparition de θ_0 :

$$\begin{cases} \theta_0 = 0 & \text{d'où} \quad a_0 \geq 0 \\ \theta_1 = \theta_1^{init} & \text{d'où} \quad a_1 = 0 \\ 1-\theta_0-\theta_1 = 1-\theta_1^{init} & \text{d'où} \quad z = 0 \end{cases} \tag{2.3.41}$$

D'où :

$$\begin{cases} -\lambda(T) = -a_0 + \phi_0 \\ \sigma\varepsilon^{tr} - \lambda(T) = \phi_1 \end{cases} \tag{2.3.42}$$

La deuxième équation sature pour $\sigma\varepsilon^{tr} - \lambda(T) = G_1$: on a alors disparition de θ_1 et l'AMF se raccourcit par rapport à l'état initial, on obtient :

$$\boxed{\varepsilon = \frac{G_0+G_1}{E\varepsilon^{tr}} \quad \text{et} \quad \sigma = \frac{G_0+G_1}{\varepsilon^{tr}}} \tag{2.3.43}$$

Ce raccourcissement constitue l'effet mémoire de forme, que ce modèle est donc capable de décrire.

2.3.9 Conclusion

En conclusion, ce modèle monocristallin permet de décrire de façon simplifiée les phénomènes thermomécaniques remarquables que l'on peut observer chez les AMF (réorientation, superélasticité et effet mémoire de forme). Les équations peuvent être résolues rapidement de façon analytique, même dans certains cas de couplage avec une structure, ce qui sera présenté dans le chapitre 3.

2.4 Un modèle unidimensionnel d'alliage à mémoire de forme polycristallin

Le modèle détaillé en section 2.3 permet de décrire de façon très simplifiée le comportement d'un fil AMF. Toutefois, les courbes expérimentales ne sont pas linéaires par morceaux. En adoptant un modèle polycristallin, il sera possible de décrire une courbe contraintes-déformations non linéaire pendant le changement de phase. Ainsi, on observe souvent un écrouissage non linéaire en fin de transformation de phase (voir Figure 2.1.3 en introduction). Nous allons donc construire la version polycristalline du modèle précédent. Ce modèle polycristallin permet de prendre en compte la texture tridimensionnelle du fil AMF dans le calcul de la réponse axiale du matériau. Cette texture peut être décrite par différentes orientations cristallines, ce qui signifie que chaque grains du polycristal est orienté dans une certaine direction par rapport à l'axe du fil. La déformation de transformation de phase de chaque grain se fait donc aussi dans une certaine direction par rapport à l'axe du fil.

2.4.1 Hypothèses

On fait l'hypothèse qu'il n'y a pas d'énergie d'interaction entre les différents grains. Nous supposerons ici que chaque grain, lorsqu'il est soumis à un incrément de chargement (mécanique ou thermique) suffisant pour déclencher le changement de phase, se déforme dans la direction de la variante de martensite la mieux orientée par rapport à l'axe du fil (Nae et al. (2003)). Cette déformation est ensuite projetée sur l'axe du fil et représente la déformation de transformation de phase. Chaque orientation cristalline est désignée par l'abscisse $s \in [0, 1]$ et est caractérisée par :

— Sa déformation maximale de transformation de phase $\varepsilon^{tr}(s)$
— La fraction volumique totale $C(s)$ de grains présentant cette déformation maximale de transformation de phase $\varepsilon^{tr}(s)$

La distribution $C(s)$ doit vérifier $\int_0^1 C(s)ds = 1$. Remarquons qu'il est possible d'ordonner les orientations cristallines de façon à ce que $\varepsilon^{tr}(s)$ soit une fonction décroissante de s , avec $\varepsilon^{tr}_{max} = \varepsilon^{tr}(0)$ et $\varepsilon^{tr}_{min} = \varepsilon^{tr}(1)$. Ce choix se révèlera judicieux pour les calculs en section 2.5. Pour chaque orientation cristalline s, une valeur de $\varepsilon^{tr}(s)$ petite signifie que les grains sont orientés de façon défavorable au regard de la transformation de phase dans l'axe du fil. Au contraire, une valeur de $\varepsilon^{tr}(s)$ grande signifie que la transformation de phase se produira de façon privilégiée dans ces grains, capables de se déformer dans une direction proche de celle du fil. Chaque orientation cristalline s est aussi associée aux deux variables internes :

— Sa fraction volumique de martensite autoaccomodée $\theta_0(s)$
— Sa fraction volumique de martensite orientée $\theta_1(s)$

On notera $\mathbf{\Theta}(s) = \begin{pmatrix} \theta_0(s) \\ \theta_1(s) \end{pmatrix}$ le vecteur des fractions volumiques de martensite pour l'orientation s. De façon similaire aux conditions (2.3.2) on a ici la condition :

$$\mathbf{\Theta}(s) \in \mathcal{T}(s) \iff \begin{cases} \theta_0(s) \geq 0 \\ \theta_1(s) \geq 0 \\ \theta_0(s) + \theta_1(s) \leq C(s) \end{cases} \tag{2.4.1}$$

où $\mathcal{T}(s)$ est le domaine d'existence de $(\theta_0(s), \theta_1(s))$. De plus, les cinq paramètres matériau définis dans le modèle monocristallin sont à nouveau adoptés ici, ils sont égaux pour tous les grains. Nous noterons toujours $\lambda(T) = \lambda \dfrac{T - T_0}{T_0}$, où T est la température actuelle du matériau, pour alléger les notations.

2.4.2 Formulation d'une énergie libre et d'un potentiel de dissipation pour décrire le comportement thermomécanique de l'AMF polycristallin

L'énergie libre du polycristal s'écrit de façon similaire à l'expression (2.3.1) :

$$w(\varepsilon, \Theta, T) = \frac{1}{2} E \left(\varepsilon - \int_0^1 \theta_1(s) \varepsilon^{tr}(s) ds \right)^2 + \lambda(T) \int_0^1 (\theta_0(s) + \theta_1(s)) ds \tag{2.4.2}$$

Avec $0 \leq s \leq 1$. Dans ce modèle, la texture polycristalline du fil est donc décrite par les distributions $\varepsilon^{tr}(s)$ et $C(s)$. Le potentiel de dissipation suivant est adopté :

$$\Phi(\dot{\Theta}) = \int_0^1 G_0 |\dot{\theta_0}(s)| + G_1 |\dot{\theta_1}(s)| ds \tag{2.4.3}$$

La résolution du problème incrémental se fait donc, de façon similaire à (2.3.16) par la minimisation suivante :

$$\inf_{\Theta(s) \in \mathcal{T}(s)} w(\varepsilon, \Theta, T) + \int_0^1 G_0 |\theta_0(s) - \theta_0^0(s)| + G_1 |\theta_1(s) - \theta_1^0(s)| ds \tag{2.4.4}$$

Une fois les valeurs des variables internes obtenues, la contrainte est calculée comme suit :

$$\sigma = E \left(\varepsilon - \int_0^1 \theta_1(s) \varepsilon^{tr}(s) ds \right) \tag{2.4.5}$$

La résolution de ce problème n'est pas évidente, mais nous allons voir en section 2.5 que pour des chargements simples il est possible de trouver des solutions analytiques.

2.4.3 Détermination des températures de changement de phase à contrainte nulle

De façon similaire au calcul fait en section 2.3.4, nous pouvons retrouver les températures de transition de phase à contrainte nulle. Posons le problème :

$$\inf_{\Theta\in\mathcal{T}}\left(\lambda(T)\int_0^1(\theta_0(s)+\theta_1(s))+G_0\int_0^1|\theta_0(s)-\theta_0^0(s)|ds+G_1\int_0^1|\theta_1(s)-\theta_1^0(s)|ds\right) \tag{2.4.6}$$

Pour une température T suffisamment élevée, $\theta_0(s)=\theta_1(s)=0$ pour tout s. Etudions à présent l'effet d'un refroidissement. Initialement les variables internes θ_0 et θ_1 sont nulles et ne peuvent qu'augmenter, donc on cherche :

$$\inf_{\Theta\in\mathcal{T}}\left(\lambda(T)\int_0^1(\theta_0(s)+\theta_1(s))+G_0\int_0^1\theta_0(s)ds+G_1\int_0^1\theta_1(s)ds\right) \tag{2.4.7}$$

On remarque donc que comme $G_0<G_1$, pour tout s on aura apparition de $\theta_0(s)$ lorsque $\lambda(T)+G_0$ devient négatif, c'est-à-dire :

$$T^A=T_0-\frac{T_0G_0}{\lambda} \tag{2.4.8}$$

De la même façon on peut montrer que lors d'un chauffage à partir d'une température suffisamment basse, la température de formation d'austénite est :

$$T^B=T_0+\frac{T_0G_0}{\lambda} \tag{2.4.9}$$

Les températures de transformation de phase à contrainte nulle sont donc identiques dans le modèle monocristallin et dans le modèle polycristallin.

Pour conclure, ce modèle est construit de façon similaire au modèle monocristallin, mais au lieu de contenir des variables internes θ_0 et θ_1 ainsi qu'un paramètre ε^{tr} sous forme de scalaires, il est caractérisé par des fonctions $\theta_0(s)$ et $\theta_1(s)$ décrivant son état, et deux fonctions $\varepsilon^{tr}(s)$ et $C(s)$ décrivant la texture.

2.5 Solutions analytiques pour le modèle polycristallin soumis à des chargements simples

Dans cette section, nous allons établir des solutions analytiques au problème du comportement de l'AMF polycristallin, correspondant à l'équation (2.4.4). Ce problème peut être résolu pour des trajets de chargement mécanique à température constante, dans les Sections 2.5.1 à 2.5.3. Il peut aussi être résolu pour un chargement thermique à contrainte constante, en Section 2.5.4.

2.5.1 Cas non-dissipatif à haute température

Tout d'abord, étudions le cas de la dissipation nulle à haute température en choisissant $G_0 = G_1 = 0$ et $T > T_0$. Le problème (2.4.4) devient alors :

$$\inf_{\Theta(s) \in \mathcal{T}(s)} \frac{1}{2} E \left(\varepsilon - \int_0^1 \theta_1(s) \varepsilon^{tr}(s) ds \right)^2 + \lambda(T) \int_0^1 \theta_0(s) + \theta_1(s) ds \tag{2.5.1}$$

On remarque que pour tout Θ tel que $\theta_0(s) > 0$, $w(\varepsilon, \theta_0, \theta_1, T) > w(\varepsilon, 0, \theta_1, T)$ donc le problème devient :

$$\inf_{0 \leq \theta_1(s) \leq C(s)} w(\varepsilon, 0, \theta_1, T) \tag{2.5.2}$$

Ecrivons les conditions locales d'optimalité dans (2.5.2) :

$$-\sigma \varepsilon^{tr}(s) + \lambda(T) \begin{cases} = 0 & \text{si } \theta_1(s) \in]0, C(s)[\\ \geq 0 & \text{si } \theta_1(s) = 0 \\ \leq 0 & \text{si } \theta_1(s) = C(s) \end{cases} \tag{2.5.3}$$

On constate que si

$$\lambda(T) > \sigma \varepsilon^{tr}(s) \text{ pour tout } s \in [0, 1] \tag{2.5.4}$$

alors $\theta_1(s) = 0$ pour tout s, c'est-à-dire que le matériau est purement austénitique. De même, si

$$\lambda(T) < \sigma \varepsilon^{tr}(s) \text{ pour tout } s \in [0, 1] \tag{2.5.5}$$

alors $\theta_1(s) = C(s)$ pour tout s, c'est-à-dire que le matériau est purement martensitique.

Comme mentionné en section 2.4.1, $\varepsilon^{tr}(s)$ est une fonction décroissante de s. Les conditions (2.5.4) et (2.5.5) se simplifient donc en :

$$\begin{cases} \text{Pour } \lambda(T) \geq \sigma \varepsilon^{tr}_{max} & \text{, le matériau est en phase austénite pure} \\ \text{Pour } \lambda(T) \leq \sigma \varepsilon^{tr}_{min} & \text{, le matériau est en phase martensite pure} \end{cases} \tag{2.5.6}$$

Etudions à présent le cas intermédiaire où $\lambda(T)/\varepsilon^{tr}_{max} < \sigma < \lambda(T)/\varepsilon^{tr}_{min}$. Dans ce cas, les conditions d'optimalité (2.5.3) donnent :

$$\theta_1(s) = \begin{cases} C(s) & \text{pour } s \leq s^*, \\ 0 & \text{pour } s > s^* \end{cases} \tag{2.5.7}$$

Où s^* est donné par la relation $-\sigma\varepsilon^{tr}(s^*) + \lambda(T) = 0$, c'est-à-dire :

$$\lambda(T) = E\varepsilon^{tr}(s^*)\left(\varepsilon - \int_0^{s^*} C(s)\varepsilon^{tr}(s)ds\right) \tag{2.5.8}$$

Nous pouvons à présent déterminer l'allure de la courbe contraintes-déformations. Le choix classique est de la paramétrer par ε et d'utiliser les relations (2.5.8) puis (2.4.5) pour obtenir la courbe. Cependant, ce calcul est complexe, et il est plus judicieux dans le cas présent de paramétrer la courbe par σ. En effet, à condition de choisir une fonction $\varepsilon^{tr}(s)$ strictement décroissante, la courbe contraintes-déformations est strictement croissante. Notons f la fonction inverse de ε^{tr}. On peut réécrire l'équation (2.5.8) :

$$s^* = f\left(\frac{\lambda(T)}{\sigma}\right) \tag{2.5.9}$$

On a ainsi :

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \int_0^{s^*} C(s)\varepsilon^{tr}(s)ds \tag{2.5.10}$$

Dans l'intégrale ci-dessus, effectuons le changement de variables $s = f(x)$:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \int_{\varepsilon^{tr}_{max}}^{\lambda(T)/\sigma} f'(x)C(f(x))xdx \tag{2.5.11}$$

Cette équation est valide pour $\dfrac{\lambda(T)}{\varepsilon^{tr}_{max}} \leq \sigma \leq \dfrac{\lambda(T)}{\varepsilon^{tr}_{min}}$ et permet d'obtenir la courbe contraintes-déformations pendant le changement de phase. Les autres portions de la courbe sont des droites représentant une évolution élastique. Les équations décrivant la courbe contraintes-déformations sont donc les suivantes :

$$\begin{cases} \varepsilon = \dfrac{\sigma}{E} & \text{pour } 0 \leq \sigma \leq \frac{\lambda(T)}{\varepsilon^{tr}_{max}} \\ \varepsilon = \dfrac{\sigma}{E} + \displaystyle\int_{\varepsilon^{tr}_{max}}^{\frac{\lambda(T)}{\sigma}} f'(x)C(f(x))xdx & \text{pour } \frac{\lambda(T)}{\varepsilon^{tr}_{max}} \leq \sigma \leq \frac{\lambda(T)}{\varepsilon^{tr}_{min}} \\ \varepsilon = \dfrac{\sigma}{E} + \displaystyle\int_{\varepsilon^{tr}_{max}}^{\varepsilon^{tr}_{min}} f'(x)C(f(x))xdx & \text{pour } \frac{\lambda(T)}{\varepsilon^{tr}_{min}} \leq \sigma \end{cases} \tag{2.5.12}$$

Les fonctions $\varepsilon^{tr}(s)$ et $C(s)$ constituent la principale particularité de ce modèle, le choix de ces fonctions permettant d'adapter l'allure des courbes pendant le changement de phase. Ainsi, en Figure 2.5.1 sont tracées trois courbes contraintes-déformations avec $C(s) = 1$ et avec trois fonctions $\varepsilon^{tr}(s)$ différentes, listées dans la Table 2.1. Ces trois

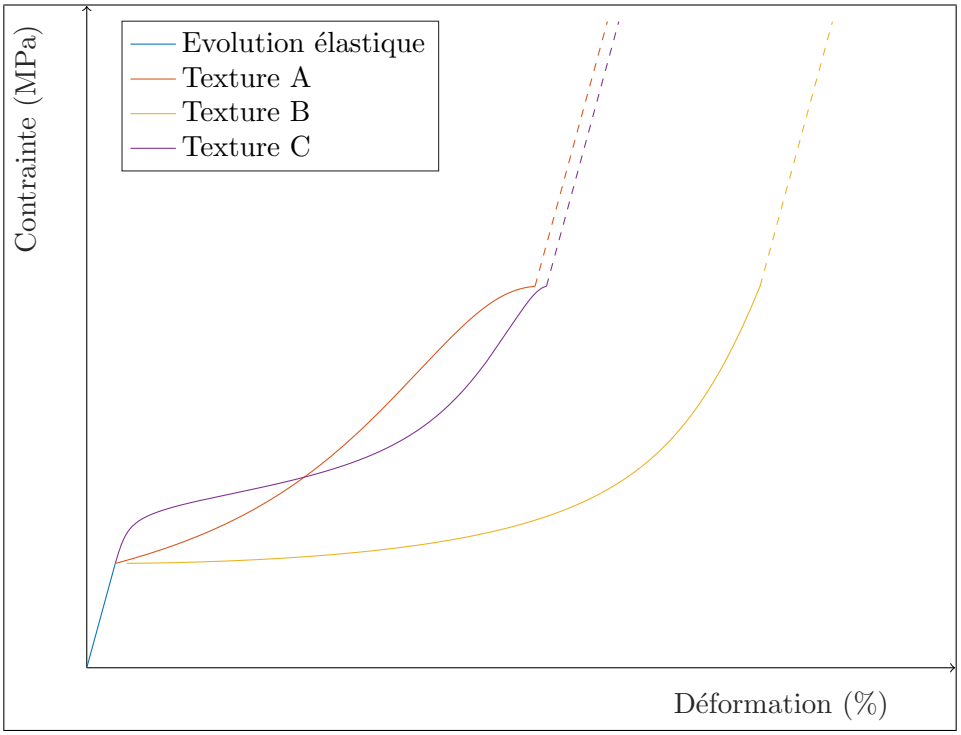

FIGURE 2.5.1 – L'allure du comportement mécanique de l'AMF polycristallin sans dissipation à haute température est déterminée par le choix de la texture dans les équations (2.5.12)

fonctions sont strictement décroissantes entre ε^{tr}_{max} et ε^{tr}_{min}. La texture C est celle qui a été adoptée ultérieurement en section 2.8.2. Ensuite, une fois la contrainte seuil $\dfrac{\lambda(T)}{\varepsilon^{tr}_{max}}$ atteinte, les courbes contraintes-déformations présentent des évolutions différentes. On remarque que suivant le choix de la texture, la courbe peut présenter des changements brusques de pente comme dans le modèle monocristallin, ou bien elle peut être arrondie. L'évolution élastique pour les petites déformations est la même pour les trois courbes. A la fin du changement de phase, la poursuite du chargement se fait de façon élastique : cette partie est représentée par des traits en pointillés pour les trois textures choisies. Sur ces courbes, la phase de décharge est confondue avec la phase de charge car nous considérons ici le modèle sans dissipation. L'allure des trois fonctions $\varepsilon^{tr}(s)$ est représentée en Figure 2.5.2. Les paramètres $\varepsilon^{tr}_{min} = 0,03$ et $\varepsilon^{tr}_{max} = 0,11$ ont été adoptés ici.

2.5.2 Cas dissipatif à haute température

Nous prenons à présent $G_0 > 0, G_1 > 0$ et $\theta_0(s) = \theta_1(s) = 0$ initialement pour tout s. Une déformation croissante $\varepsilon(t)$ est appliquée, le matériau étant maintenu à une température fixe T élevée, vérifiant $\lambda(T) > G_1$. Le problème à résoudre est :

TABLE 2.1 – Choix de fonctions texture

	Fonction texture $\varepsilon^{tr}(s)$
A	$(\varepsilon^{tr}_{max} - \varepsilon^{tr}_{min})(1-s)^3 + \varepsilon^{tr}_{min}$
B	$(\varepsilon^{tr}_{max} - \varepsilon^{tr}_{min})cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) + \varepsilon^{tr}_{min}$
C	$(\varepsilon^{tr}_{max} - \varepsilon^{tr}_{min})\left(\frac{1 - tanh(\beta(tan(\pi(s^\gamma - \frac{1}{2}))))}{2}\right) + \varepsilon^{tr}_{min}$ avec $\beta = \gamma = 0,3$
	Fonction inverse $f(x)$
A	$1 - \left(\frac{x - \varepsilon^{tr}_{min}}{\varepsilon^{tr}_{max} - \varepsilon^{tr}_{min}}\right)^{\frac{1}{3}}$
B	$\frac{2}{\pi} arccos\left(\frac{x - \varepsilon^{tr}_{min}}{\varepsilon^{tr}_{max} - \varepsilon^{tr}_{min}}\right)$
C	$\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} atan\left(\frac{1}{\beta} atanh\left(1 - 2\left(\frac{x - \varepsilon^{tr}_{min}}{\varepsilon^{tr}_{max} - \varepsilon^{tr}_{min}}\right)\right)\right)\right]^{\frac{1}{\gamma}}$

$$\inf_{\Theta} w(\varepsilon(t), \Theta, T) + G_0 \int_0^1 |\theta_0(s) - \theta_0^0(s)| ds + G_1 \int_0^1 |\theta_1(s) - \theta_1^0(s)| ds \tag{2.5.13}$$

Pour un état initialement austénitique avec chargement monotone, la variable interne θ_1 ne peut qu'augmenter. De plus, les termes θ_0^0 et θ_1^0 étant constants pour un état donné, de la même façon qu'en 2.5.2 le problème de minimisation devient :

$$\inf_{0 \leq \theta_1(s) \leq C(s)} w(\varepsilon(t), 0, \theta_1, T) + G_1 \int_0^1 \theta_1(s) ds \tag{2.5.14}$$

On peut résoudre la phase de charge en remplaçant $\lambda(T)$ par $\lambda(T) + G_1$ dans les expressions de la section 2.5.1, ainsi que la phase de décharge en remplaçant $\lambda(T)$ par $\lambda(T) - G_1$. Nous obtenons pour la charge :

$$\begin{cases} \varepsilon = \dfrac{\sigma}{E} & \text{pour } 0 \leq \sigma \leq \frac{\lambda(T)+G_1}{\varepsilon^{tr}_{max}} \\ \varepsilon = \dfrac{\sigma}{E} + \displaystyle\int_{\varepsilon^{tr}_{max}}^{\frac{\lambda(T)+G_1}{\sigma}} f'(x)C(f(x))xdx & \text{pour } \frac{\lambda(T)+G_1}{\varepsilon^{tr}_{max}} \leq \sigma \leq \frac{\lambda(T)+G_1}{\varepsilon^{tr}_{min}} \\ \varepsilon = \dfrac{\sigma}{E} + \displaystyle\int_{\varepsilon^{tr}_{max}}^{\varepsilon^{tr}_{min}} f'(x)C(f(x))xdx & \text{pour } \frac{\lambda(T)+G_1}{\varepsilon^{tr}_{min}} \leq \sigma \end{cases} \tag{2.5.15}$$

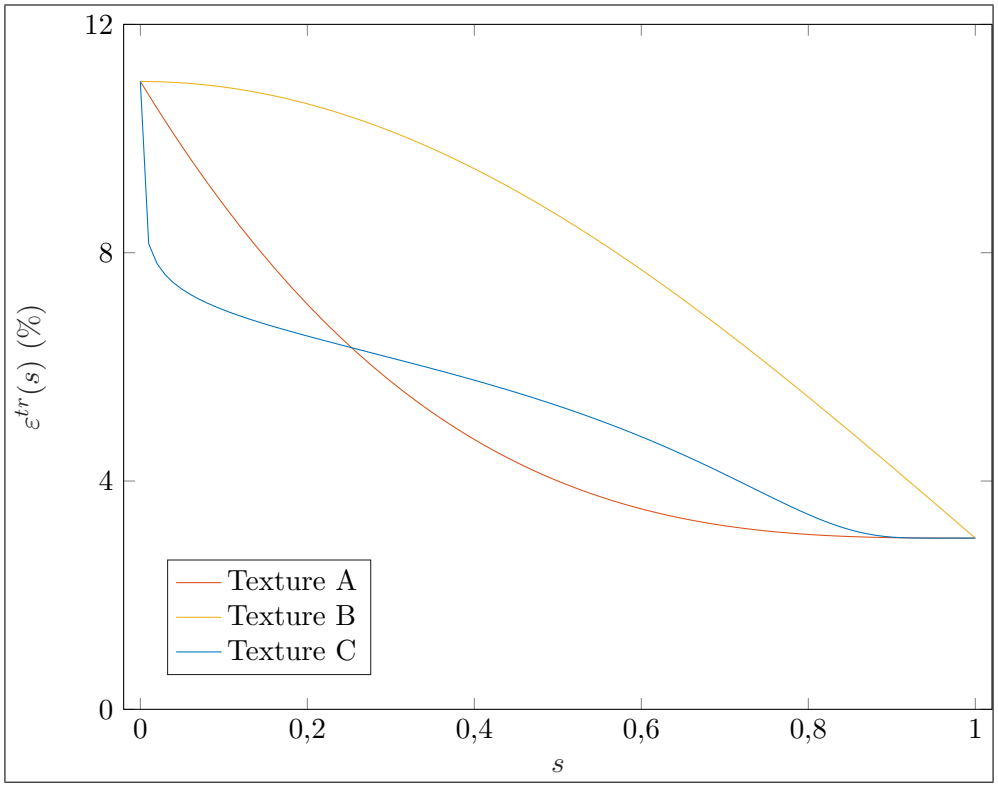

FIGURE 2.5.2 – Allure des fonctions texture $\varepsilon^{tr}(s)$

Et nous obtenons pour la décharge :

$$\begin{cases} \varepsilon = \dfrac{\sigma}{E} & \text{pour } 0 \leq \sigma \leq \frac{\lambda(T)-G_1}{\varepsilon^{tr}_{max}} \\ \varepsilon = \dfrac{\sigma}{E} + \displaystyle\int_{\varepsilon^{tr}_{max}}^{\frac{\lambda(T)-G_1}{\sigma}} f'(x)C(f(x))xdx & \text{pour } \frac{\lambda(T)-G_1}{\varepsilon^{tr}_{max}} \leq \sigma \leq \frac{\lambda(T)-G_1}{\varepsilon^{tr}_{min}} \\ \varepsilon = \dfrac{\sigma}{E} + \displaystyle\int_{\varepsilon^{tr}_{max}}^{\varepsilon^{tr}_{min}} f'(x)C(f(x))xdx & \text{pour } \frac{\lambda(T)-G_1}{\varepsilon^{tr}_{min}} \leq \sigma \end{cases} \tag{2.5.16}$$

Ces équations permettent de tracer les courbes contraintes-déformations à haute température. Ainsi, en Figure 2.5.3 la fonction texture C de la section 2.5.1 a été choisie et nous observons une courbe non linéaire durant le changement de phase. On peut distinguer un plateau de changement de phase et un raidissement du matériau en fin de changement de phase. Toutefois, sur cette simulation le changement de phase n'est jamais total. En effet, si ε^{tr}_{min} est très petit, la contrainte $\sigma = \dfrac{\lambda(T)+G_1}{\varepsilon^{tr}_{min}}$ est très grande. Dans la réalité, au sein du polycristal certaines orientations cristallines sont disposées de telle façon qu'une transformation de phase est très difficile à initier, c'est-à-dire qu'une contrainte très importante est nécessaire. On retrouve ainsi avec ce modèle ce qu'on

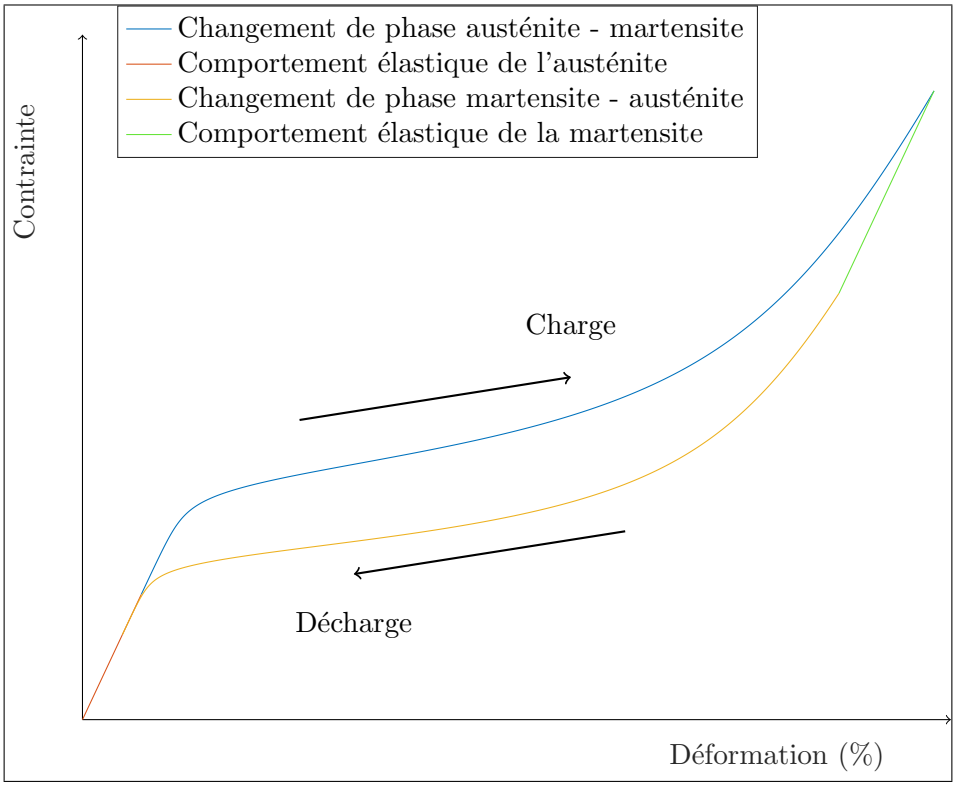

FIGURE 2.5.3 – Comportement mécanique de l'AMF polycristallin à haute température avec la texture C, donné par les équations (2.5.15) et (2.5.16)

observe expérimentalement, à savoir que même lorsque le changement de phase semble terminé, la pente de la courbe n'est pas la même en charge et en décharge (voir Figure 2.1.3).Ici, un incrément positif de déformation en fin de chargement provoque tout de même une légère transformation de phase, alors qu'un petit incrément négatif de déformation dans ce domaine conduit à une évolution élastique. Ce phénomène n'était pas modélisable avec le modèle monocristallin.

2.5.3 Cas dissipatif à basse température

Etablissons à présent les équations de la courbe de comportement pour l'AMF polycristallin à basse température ($\lambda(T) < G_0$). Initialement, $\theta_0(s) = 1$ et $\theta_1(s) = 0$ pour tout s. Une déformation croissante $\varepsilon(t)$ est appliquée, $\theta_0(s)$ ne peut que diminuer et $\theta_1(s)$ ne peut qu'augmenter donc le problème à résoudre est :

$$\inf_{\Theta(s) \in \mathcal{T}(s)} \frac{1}{2} E \left(\varepsilon - \int_0^1 \theta_1(s) \varepsilon^{tr}(s) ds \right)^2 + (\lambda(T) - G_0) \int_0^1 \theta_0(s) ds + (\lambda(T) + G_1) \int_0^1 \theta_1(s) ds \tag{2.5.17}$$

Dans cette expression on remarque que comme $\lambda(T) - G_0 < 0$, $\theta_0(s)$ prend toujours la valeur maximale, c'est-à-dire $\theta_0(s) = 1 - \theta_1(s)$. Comme le terme $\lambda(T)$ est constant dans cette minimisation, on obtient alors :

$$\inf_{\Theta(s) \in \mathcal{T}(s)} \frac{1}{2} E \left(\varepsilon - \int_0^1 \theta_1(s) \varepsilon^{tr}(s) ds \right)^2 + (G_0 + G_1) \int_0^1 \theta_1(s) ds \tag{2.5.18}$$

On trouve donc, en remplaçant $\lambda(T) + G_1$ par $G_0 + G_1$ dans le problème en section 2.5.2, les équations suivantes en charge pour la courbe contraintes-déformations :

$$\begin{cases} \varepsilon = \dfrac{\sigma}{E} & \text{pour } 0 \leq \sigma \leq \frac{G_0+G_1}{\varepsilon^{tr}_{max}} \\ \varepsilon = \dfrac{\sigma}{E} + \displaystyle\int_{\varepsilon^{tr}_{max}}^{\frac{\lambda(T)+G_1}{\sigma}} f'(x) C(f(x)) x dx & \text{pour } \frac{G_0+G_1}{\varepsilon^{tr}_{max}} \leq \sigma \leq \frac{G_0+G_1}{\varepsilon^{tr}_{min}} \\ \varepsilon = \dfrac{\sigma}{E} + \displaystyle\int_{\varepsilon^{tr}_{max}}^{\varepsilon^{tr}_{min}} f'(x) C(f(x)) x dx & \text{pour } \frac{G_0+G_1}{\varepsilon^{tr}_{min}} \leq \sigma \end{cases} \tag{2.5.19}$$

Pour ce qui est de la décharge, par un raisonnement similaire et en remplaçant G_0+G_1 par $-G_0 - G_1$ on obtient une décharge élastique :

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \int_{\varepsilon^{tr}_{max}}^{\varepsilon^{tr}_{min}} f'(x) C(f(x)) x dx \quad \text{pour} \quad \sigma \geq 0 \tag{2.5.20}$$

Ainsi, contrairement à la situation haute température, la courbe est la même pour toute température T telle que $\lambda(T) < G_0$.

2.5.4 Chargement thermique à contrainte constante

Etudions à présent un cycle de chargement thermique à contrainte constante σ. Les conditions aux limites du problème sont à présent formulées en force, donc le potentiel à minimiser est le suivant :

$$w(\varepsilon(t), \Theta, T) + G_0 \int_0^1 |\theta_0(s) - \theta_0^0(s)| ds + G_1 \int_0^1 |\theta_1(s) - \theta_1^0(s)| ds - \sigma\varepsilon \tag{2.5.21}$$

Par définition,

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \int_0^1 \theta_1(s) \varepsilon^{tr}(s) ds \tag{2.5.22}$$

Donc en remplaçant dans l'expression 2.5.21, le problème de minimisation s'écrit :

$$\inf_{\varepsilon, \Theta} \frac{-\sigma^2}{2E} + \lambda(T) \int_0^1 \theta_0(s) + \theta_1(s) ds + G_0 \int_0^1 |\theta_0(s) - \theta_0^0(s)| ds + G_1 \int_0^1 |\theta_1(s) - \theta_1^0(s)| ds - \sigma \int_0^1 \theta_1(s) \varepsilon^{tr}(s) ds \tag{2.5.23}$$

Partons d'un état initialement austénitique, à une température $\widetilde{T}$ haute : $\theta_0(s) = \theta_1(s) = 0$ pour tout s. Appliquons alors la contrainte σ. On distingue trois cas :

Cas A : $\sigma < \dfrac{G_1 - G_0}{\varepsilon^{tr}_{max}}$

Avec cette condition, on a à fortiori $\sigma < \dfrac{\lambda(\widetilde{T}) + G_1}{\varepsilon^{tr}_{max}}$ donc d'après (2.5.15) nous obtenons l'état $\theta_0(s) = \theta_1(s) = 0$ pour tout s. Le cycle thermique débute par un refroidissement. Les deux variables internes $\theta_0(s)$ et $\theta_1(s)$ ne peuvent qu'augmenter donc le problème de minimisation (2.5.23) avec σ constant devient :

$$\inf_{\Theta} \quad \int_0^1 (\lambda(T) + G_0)\,\theta_0(s)ds + \int_0^1 \Big(\lambda(T) + G_1 - \sigma\varepsilon^{tr}(s)\Big)\,\theta_1(s)ds \tag{2.5.24}$$

On remarque que pour tout s et pour tout T, $\lambda(T) + G_0 < \lambda(T) + G_1 - \sigma\varepsilon^{tr}(s)$. Par conséquent, la martensite autoaccomodée θ_0 est plus stable sous cette contrainte que la martensite orientée θ_1 :

$$\begin{cases} \theta_0(s) = 0 \\ \theta_1(s) = 0 \end{cases} \quad \text{pour tout s, si } T \geq T^A = T_0 - \tfrac{T_0 G_0}{\lambda}$$
$$\begin{cases} \theta_0(s) = C(s) \\ \theta_1(s) = 0 \end{cases} \quad \text{pour tout s, si } T < T^A = T_0 - \tfrac{T_0 G_0}{\lambda} \tag{2.5.25}$$

On n'observe pas de déformation macroscopique en dehors de la déformation élastique causée par l'application de la contrainte σ, et lors du chauffage le comportement est similaire, avec une température seuil $T^B = T_0 + \dfrac{T_0 G_0}{\lambda}$: on retrouve le comportement de l'AMF à contrainte nulle, détaillé en section 2.4.2.

Cas B : $\dfrac{G_1 - G_0}{\varepsilon^{tr}_{max}} \leq \sigma \leq \dfrac{G_1 - G_0}{\varepsilon^{tr}_{min}}$

D'après (2.5.15) nous obtenons l'état suivant à l'issue de l'application de la contrainte σ :

$$\begin{cases} \text{Cas B.1 : } \begin{cases} \theta_0(s) = 0 \\ \theta_1(s) = 0 \end{cases} & \text{pour tout s, si } \frac{G_1 - G_0}{\varepsilon^{tr}_{max}} \leq \sigma \leq \frac{\lambda(\widetilde{T}) + G_1}{\varepsilon^{tr}_{max}} \\ \text{Cas B.2 : } \begin{cases} \theta_0(s) = 0 & \text{pour tout } s \\ \theta_1(s) = C(s) & \text{pour } 0 \leq s \leq f(\frac{\lambda(\widetilde{T}) + G_1}{\sigma}) \\ \theta_1(s) = 0 & \text{pour } f(\frac{\lambda(\widetilde{T}) + G_1}{\sigma}) \leq s \leq 1 \end{cases} & \text{si } \frac{\lambda(\widetilde{T}) + G_1}{\varepsilon^{tr}_{max}} \leq \sigma \leq \frac{\lambda(\widetilde{T}) + G_1}{\varepsilon^{tr}_{min}} \end{cases} \tag{2.5.26}$$

Remarquons que suivant la fonction texture $\varepsilon^{tr}(s)$, le cas B.2 peut ne pas exister. Dans le cas B.1, de même qu'en A on cherche pour le refroidissement :

$$\inf_{\Theta} \quad \int_0^1 (\lambda(T) + G_0)\,\theta_0(s)ds + \int_0^1 \Big(\lambda(T) + G_1 - \sigma\varepsilon^{tr}(s)\Big)\,\theta_1(s)ds \tag{2.5.27}$$

Donc rien ne se passe lors du refroidissement jusqu'à $T = T_0 + \dfrac{T_0(\sigma\varepsilon^{tr}_{max} - G_1)}{\lambda}$. Soit $s^* = f(\dfrac{G_1 - G_0}{\sigma})$, on a alors :

$$\begin{cases} \lambda(T) + G_0 \geq \lambda(T) + G_1 - \sigma\varepsilon^{tr}(s) & \text{pour } s \leq s^* \\ \lambda(T) + G_0 < \lambda(T) + G_1 - \sigma\varepsilon^{tr}(s) & \text{pour } s > s^* \end{cases} \tag{2.5.28}$$

A partir de cette température T on a donc apparition de θ_1 pour les orientations les plus favorables, en commençant par ε^{tr}_{max} et jusqu'à $\varepsilon^{tr}(s^*)$. Cette évolution s'accompagne d'un allongement de l'AMF. Ensuite, à partir de $T^A = T_0 - \dfrac{T_0 G_0}{\lambda}$ on a apparition de θ_0 pour toutes les orientations $s > s^*$. Dans cette deuxième partie du changement de phase, on n'observe pas de changement macroscopique dans l'AMF. Ce seuil s^* dépend de la texture $\varepsilon^{tr}(s)$. Par exemple, lorsqu'il vaut $s^* = 1$ on a transformation intégrale en θ_1.

Le cas B.2 est similaire mais il n'y a pas d'évolution élastique (Apparition de θ_0 sans déformation macroscopique) : on a directement apparition de θ_1 pour les orientations les plus favorables, en commençant par $s = f(\frac{\widetilde{\lambda(T)} + G_1}{\sigma})$. Pour les deux cas, les équations des courbes déformation-température lors du refroidissement sont donc :

$$\begin{cases} \varepsilon = \dfrac{\sigma}{E} & \text{pour } T \geq T_0 + \frac{T_0(\sigma\varepsilon^{tr}_{max} - G_1)}{\lambda} \quad \text{(dans le cas B.1)} \\ \varepsilon = \dfrac{\sigma}{E} + \displaystyle\int_0^{f(\frac{\lambda(T)+G_1}{\sigma})} C(s)\varepsilon^{tr}(s)ds & \text{pour } T^A < T < T_0 + \frac{T_0(\sigma\varepsilon^{tr}_{max} - G_1)}{\lambda} \\ \varepsilon = \dfrac{\sigma}{E} + \displaystyle\int_0^{f(\frac{G_1 - G_0}{\sigma})} C(s)\varepsilon^{tr}(s)ds & \text{pour } T \leq T^A \end{cases} \tag{2.5.29}$$

De la même façon, lors du chauffage à partir de $T \leq T^A$ on a d'abord disparition de θ_0 pour $T^B = T_0 + \frac{T_0 G_0}{\lambda}$ puis disparition de θ_1 à partir de $\lambda(T) = G_1 + \varepsilon^{tr}(s^*)$, soit $T = T_0 + \frac{T_0(2G_1 - G_0)}{\lambda}$. On peut alors montrer que les équations des courbes déformation-température sont :

$$\begin{cases} \varepsilon = \dfrac{\sigma}{E} + \displaystyle\int_0^{f(\frac{G_1 - G_0}{\sigma})} C(s)\varepsilon^{tr}(s)ds & \text{pour } T \leq T_0 + \frac{T_0(2G_1 - G_0)}{\lambda} \quad \text{(évolution élastique)} \\ \varepsilon = \dfrac{\sigma}{E} + \displaystyle\int_0^{f(\frac{\lambda(T) - G_1}{\sigma})} C(s)\varepsilon^{tr}(s)ds & \text{pour } T_0 + \frac{T_0(2G_1 - G_0)}{\lambda} < T < T_0 + \frac{T_0(\sigma\varepsilon^{tr}_{max} + G_1)}{\lambda} \\ \varepsilon = \dfrac{\sigma}{E} & \text{pour } T \geq T_0 + \frac{T_0(\sigma\varepsilon^{tr}_{max} + G_1)}{\lambda} \end{cases} \tag{2.5.30}$$

Cas C : $\dfrac{G_1 - G_0}{\varepsilon^{tr}_{min}} < \sigma$

D'après (2.5.15) nous obtenons l'état suivant à l'issue de l'application de la contrainte σ :

$$\left\{\begin{array}{lll}
\text{Cas C.1 : } \left\{\begin{array}{l}\theta_0(s)=0\\ \theta_1(s)=0\end{array}\right. & & \text{pour tout s, si } \frac{G_1-G_0}{\varepsilon^{tr}_{min}} \leq \sigma \leq \frac{\widetilde{\lambda(T)}+G_1}{\varepsilon^{tr}_{max}} \\
\text{Cas C.2 : } \left\{\begin{array}{l}\theta_0(s)=0\\ \theta_1(s)=C(s)\\ \theta_1(s)=0\end{array}\right. & \begin{array}{l}\text{pour tout } s\\ \text{pour } 0\leq s\leq f(\frac{\widetilde{\lambda(T)}+G_1}{\sigma})\\ \text{pour } f(\frac{\widetilde{\lambda(T)}+G_1}{\sigma})\leq s\leq 1\end{array} & \text{si } \frac{\widetilde{\lambda(T)}+G_1}{\varepsilon^{tr}_{max}} \leq \sigma \leq \frac{\widetilde{\lambda(T)}+G_1}{\varepsilon^{tr}_{min}} \\
\text{Cas C.3 : } \left\{\begin{array}{l}\theta_0(s)=0\\ \theta_1(s)=C(s)\end{array}\right. & & \text{pour tout s, si } \frac{\widetilde{\lambda(T)}+G_1}{\varepsilon^{tr}_{max}} \leq \sigma
\end{array}\right. \tag{2.5.31}$$

Suivant la fonction $\varepsilon^{tr}(s)$ adoptée, les situations C.1 et C.2 peuvent être impossibles. On cherche pour le refroidissement :

$$\inf_{\Theta} \quad \int_0^1 (\lambda(T)+G_0)\,\theta_0(s)ds + \int_0^1 \Big(\lambda(T)+G_1-\sigma\varepsilon^{tr}(s)\Big)\,\theta_1(s)ds \tag{2.5.32}$$

Pour les trois cas, on remarque que pour tout s, $\lambda(T)+G_0 > \lambda(T)+G_1-\sigma\varepsilon^{tr}(s)$ donc il n'y a jamais apparition de θ_0. On a apparition de θ_1 à partir de $T = T_0+\dfrac{T_0(\sigma\varepsilon^{tr}_{max}-G_1)}{\lambda}$. Les équations des courbes déformation-température lors du refroidissement sont donc :

$$\left\{\begin{array}{ll}
\varepsilon = \dfrac{\sigma}{E} & \text{pour } T \geq T_0+\frac{T_0(\sigma\varepsilon^{tr}_{max}-G_1)}{\lambda} \\
\varepsilon = \dfrac{\sigma}{E}+\displaystyle\int_0^{f(\frac{\lambda(T)+G_1}{\sigma})} C(s)\varepsilon^{tr}(s)ds & \text{pour } T_0+\frac{T_0(\sigma\varepsilon^{tr}_{min}-G_1)}{\lambda} < T < T_0+\frac{T_0(\sigma\varepsilon^{tr}_{max}-G_1)}{\lambda} \\
\varepsilon = \dfrac{\sigma}{E}+\displaystyle\int_0^{1} C(s)\varepsilon^{tr}(s)ds & \text{pour } T \leq T_0+\frac{T_0(\sigma\varepsilon^{tr}_{min}-G_1)}{\lambda}
\end{array}\right. \tag{2.5.33}$$

Pour les courbes de chauffage, on trouve :

$$\left\{\begin{array}{ll}
\varepsilon = \dfrac{\sigma}{E}+\displaystyle\int_0^{1} C(s)\varepsilon^{tr}(s)ds & \text{pour } T \leq T_0+\frac{T_0(\sigma\varepsilon^{tr}_{min}+G_1)}{\lambda} \\
\varepsilon = \dfrac{\sigma}{E}+\displaystyle\int_0^{f(\frac{\lambda(T)-G_1}{\sigma})} C(s)\varepsilon^{tr}(s)ds & \text{pour } T_0+\frac{T_0(\sigma\varepsilon^{tr}_{min}+G_1)}{\lambda} < T < T_0+\frac{T_0(\sigma\varepsilon^{tr}_{max}+G_1)}{\lambda} \\
\varepsilon = \dfrac{\sigma}{E} & \text{pour } T \geq T_0+\frac{T_0(\sigma\varepsilon^{tr}_{max}+G_1)}{\lambda}
\end{array}\right. \tag{2.5.34}$$

En Figure 2.5.4, trois cycles thermiques correspondant aux cas A, B et C sont représentés. Le cas A correspond à une contrainte imposée trop basse : La déformation

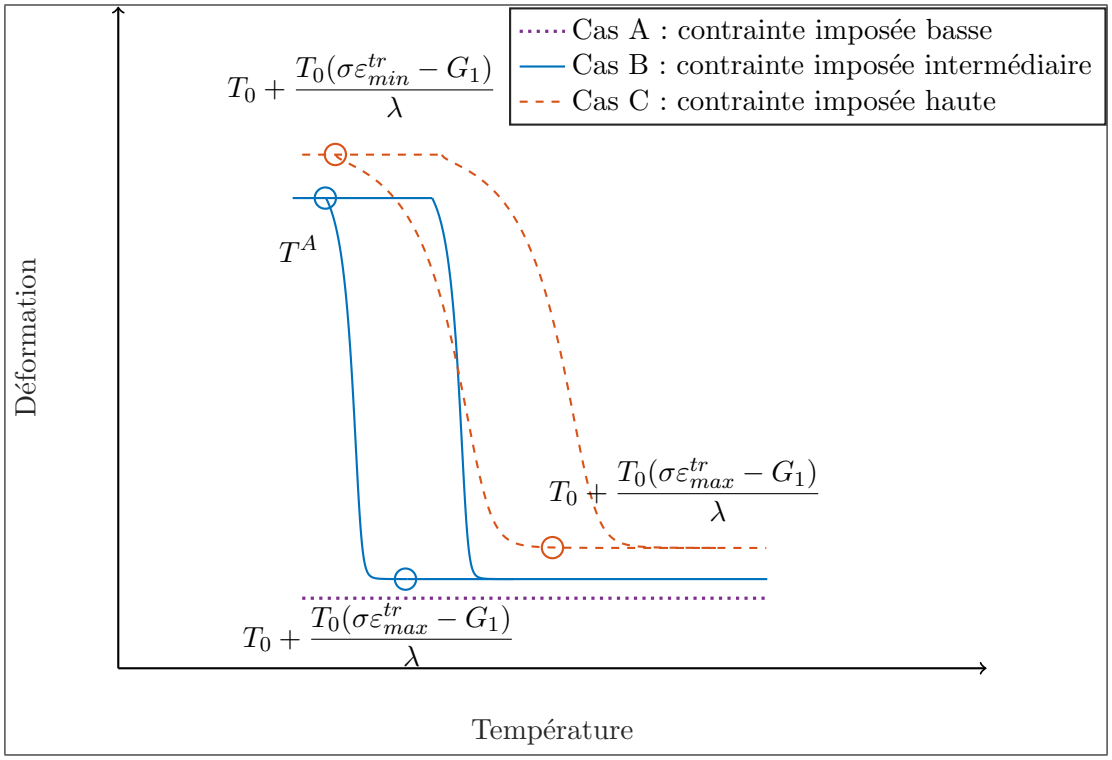

FIGURE 2.5.4 – Cycles thermiques à contrainte constante - trois cas distincts

correspond à la déformation élastique de l'AMF, mais aucun changement de phase n'a lieu et la déformation reste constante au cours du cycle thermique. Le cas B correspond à une contrainte intermédiaire, permettant de réaliser un cycle thermique où le fil s'étire lors du refroidissement jusqu'à la température T^A, puis raccourcit lors du chauffage. Dans le cas C, la contrainte appliquée est supérieure. La déformation atteinte à basse température est supérieure, est les températures de début et fin de transformation de phase sont décalées : un refroidissement moins important suffit à déclencher l'apparition de martensite.

Pour simplifier l'identification des paramètres du modèle, calculons la différence de température entre la courbe de chauffage et la courbe de refroidissement, à déformation ε fixée. Pour ceci, plaçons-nous dans la portion de la courbe correspondant au changement de phase, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} \dfrac{\sigma}{E} < \varepsilon < \dfrac{\sigma}{E} + \displaystyle\int_0^{f(\frac{G_1-G_0}{\sigma})} C(s)\varepsilon^{tr}(s)ds & \text{dans le cas B} \\ \dfrac{\sigma}{E} < \varepsilon < \dfrac{\sigma}{E} + \displaystyle\int_0^{1} C(s)\varepsilon^{tr}(s)ds & \text{dans le cas C} \end{cases} \tag{2.5.35}$$

Donc à ε fixé, nommons T_1 la température sur la courbe de chauffe et T_2 la température sur la courbe de refroidissement. On résout l'équation :

$$\int_0^{f(\frac{\lambda(T_1)-G_1}{\sigma})} C(s)\varepsilon^{tr}(s)ds = \int_0^{f(\frac{\lambda(T_2)+G_1}{\sigma})} C(s)\varepsilon^{tr}(s)ds \tag{2.5.36}$$

Comme la fonction $\varepsilon^{tr}(s)$ est strictement décroissante, on en déduit :

$$\lambda(T_2) + G_1 = \lambda(T_1) - G_1 \tag{2.5.37}$$

Donc la différence de température entre les deux courbes vaut :

$$\Delta T = \frac{2G_1T_0}{\lambda} \tag{2.5.38}$$

Cette relation permet d'identifier facilement le paramètre G_1 à partir des courbes de chauffe à contrainte fixée, les paramètres T_0 et λ étant identifiables par l'essai de calorimétrie.

2.6 Identification des paramètres par calorimétrie

La caractérisation d'un AMF commence généralement par l'essai de calorimétrie (Differential Scanning Calorimetry, DSC) où l'on fait varier la température d'un échantillon libre de contraintes pour provoquer des changements de phase. Il permet d'obtenir les valeurs des températures de changement de phase ainsi que les chaleurs latentes, avec lesquelles l'identification de certains paramètres du modèle est possible. Un petit échantillon du matériau est chauffé ou refroidi, et les flux de chaleur absorbés ou libérés par l'échantillon sont mesurés de façon précise. Dans cet essai où le matériau est libre de contraintes, les caractéristiques mécaniques n'interviennent pas, et le protocole expérimental est donc moins sujet à discussion que dans le cas d'essais de traction, où de nombreux paramètres d'essai ont une influence sur les résultats. Toutefois, il y a certaines précautions à prendre lors l'interprétation des résultats de cet essai (Shaw et al. (2008), Duerig and Bhattacharya (2015), Duerig et al. (2017)). Ainsi, il existe en réalité une troisième phase qui peut coexister avec l'austénite et la martensite dans certains AMF, notamment dans l'alliage Nickel-Titane, on la nomme *R-phase* pour son réseau cristallin rhomboédrique. La phase martensite est généralement plus stable que la R-phase aux basses températures, mais il arrive que la barrière d'énergie à franchir pour former la martensite soit plus importante que celle menant à la formation de R-phase, d'où l'existence de R-phase dans certaines plages de température (Duerig and Bhattacharya (2015)). Nous avons fait le choix de ne pas inclure cette phase dans le modèle, ce qui sera justifié ci-après.

2.6.1 Protocole expérimental

Un échantillon de fil vierge en alliage Nickel-Titane (55,3 % de Ni en masse, 44,4 % de Ti en masse, soit 50,4 % atomique de Ni et 49,6 % atomique de Ti) fourni par Memry Corp. (USA), recuit et redressé, de diamètre 0,5 mm et de masse 7,9 mg, a été testé. L'appareil est le DSC 250 (marque TA Instruments) avec flux d'azote inerte. Le protocole expérimental est le suivant : le fil est tout d'abord amené à haute température pour garantir qu'il se trouve dans un état austénitique. Ensuite, deux cycles refroidissement-chauffage sont réalisés (voir Table 2.2). La vitesse d'essai est de 10 °C par minute.

Table 2.2 – Protocole expérimental

Début d'essai à 20 °C
Rampe jusqu'à 250 °C (état initial austénite)
Rampe jusqu'à -90 °C
Rampe jusqu'à 250 °C
Rampe jusqu'à -90 °C
Rampe jusqu'à 250 °C

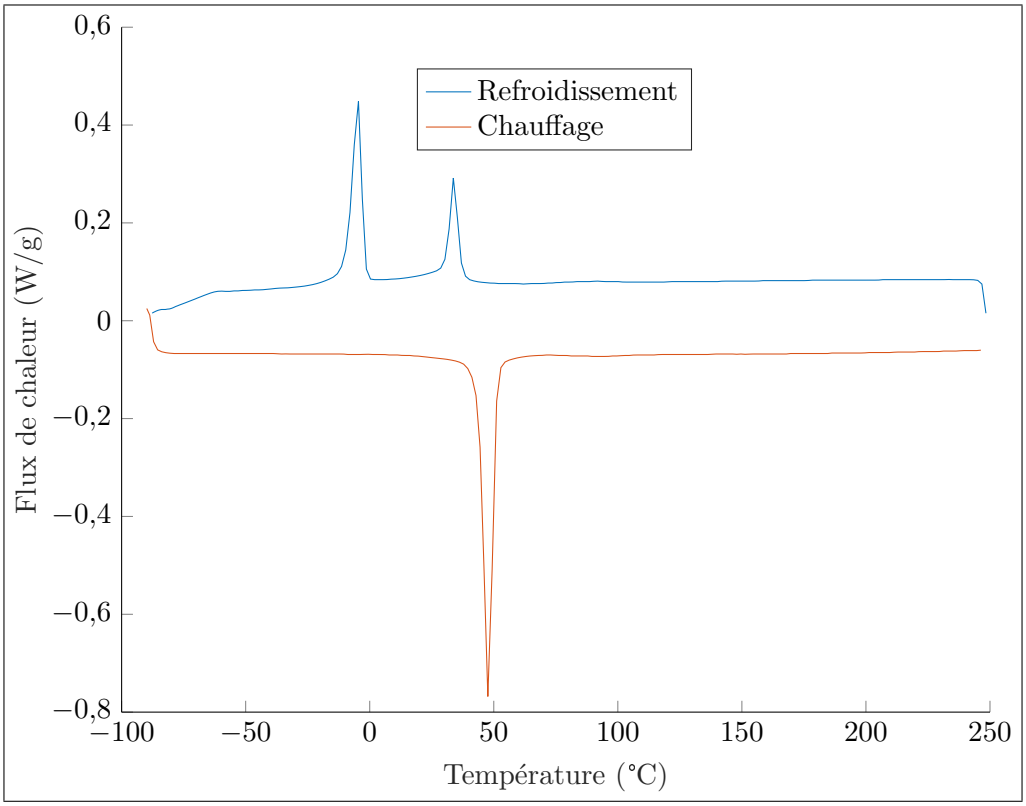

FIGURE 2.6.1 – Essai de calorimétrie

2.6.2 Grandeurs mesurées

Sur la figure 2.6.1 on peut observer que les courbes des deux cycles sont confondues. Lors du refroidissement (courbe bleue), un premier pic est observé aux alentours de 40 °C, correspondant à la transformation Austénite - R-phase. Un second pic, plus important, correspond à la transformation R-phase - Martensite. Il est important de refroidir le matériau suffisamment pour pouvoir observer les deux pics. En effet, l'absence de deuxième pic au refroidissement pourrait conduire à la conclusion de l'absence de R-phase, alors que la martensite aurait été masquée par la présence de R-phase à des températures intermédiaires (Duerig and Bhattacharya (2015)). Lors du chauffage (courbe rouge), un seul pic correspondant à la transformation Martensite - Austénite est observé, et deux situations sont possibles. La première interprétation est qu'il n'y a pas d'apparition de R-phase lors du chauffage, car la barrière cinétique à la formation d'austénite est franchie avant que la R-phase puisse apparaître. La deuxième interprétation possible est qu'il y a un pic de formation de R-phase confondu avec le pic de formation d'austénite : la R-phase n'existe que sur une plage de températures négligeable et se transforme immédiatement en austénite (Shaw et al. (2008)). Dans les deux cas, nous pouvons supposer que la R-phase n'existe pas lors du chauffage. Nous faisons aussi le choix d'ignorer la

présence de R-phase lors du refroidissement. En effet, elle a tendance à laisser place à la martensite lorsque le fil est soumis à une contrainte (Duerig et al. (2017)). Par la suite le fil AMF sera presque exclusivement étudié sous contrainte de traction, sauf au début du chargement mécanique. Pour cette raison, les essais mécaniques débuteront toujours sur un fil préalablement chauffé à 100 °C puis refroidi à -20 °C avant d'être porté à la température de l'essai, pour garantir que le fil se trouve initialement en phase martensite. Ainsi, les essais de chargement mécanique débutent toujours avec un fil AMF se trouvant en phase martensite autoaccomodée ou bien austénite.

Ici, le pic observé lors du chauffage est plus important que le pic de formation de martensite observé lors du refroidissement : Il correspond donc probablement à la disparition de la martensite ainsi qu'à la formation et disparition de la R-phase, les deux phénomènes étant confondus. Les valeurs mesurées sont reproduites en Table 2.3 :

TABLE 2.3 – Valeurs mesurées par calorimétrie

Pic	**Température**	**Enthalpie**
formation de martensite	-4,6 °C	11,5 J/g
formation d'austénite	48,1 °C	22,9 J/g

Cette mesure expérimentale est proche de la température donnée par le fabricant (Af = 53 °C), bien que celui-ci effectue la mesure sur l'alliage avant le processus de traitement thermique. Lors de ce processus, l'alliage est recuit et redressé, ce qui peut modifier les températures de changement de phase. Les mesures d'enthalpie sont cohérentes avec la littérature : par exemple dans Shaw et al. (2008) la chaleur latente de formation d'austénite vaut 19,7 J/g pour un fil désigné comme *shape memory*, c'est-à-dire qu'à température ambiante il se trouve en phase martensitique ou bien R-phase, comme le fil AMF étudié ici.

2.6.3 Exploitation des données

En section 2.3.4 nous avons calculé les températures de changement de phase données par le modèle monocristallin, et en section 2.4.3 celles données par le modèle polycristallin (équations (2.3.20) et (2.4.8)). Elles ont la même expression et font intervenir les mêmes paramètres, donc l'identification faite ici est valable pour les deux modèles. On observe que ces deux températures se trouvent à égale distance de T_0 : par conséquent, le paramètre T_0 du modèle correspond à la moyenne des deux températures de transformation et est facilement identifiable à l'aide de l'essai : $T_0 = 294,9$ °K soit $T_0 = 21,8$ °C

Le paramètre λ du modèle correspond à l'enthalpie volumique de transformation de phase. Nous choisissons de la mesurer expérimentalement à l'aide du pic de formation de martensite autoaccomodée lors du refroidissement, pour éviter la confusion avec

la formation de R-phase. L'essai de calorimétrie nous donne l'enthalpie massique de transformation de phase. En adoptant une densité de $\rho = 6,45$ mg/mm^3 pour le Nickel-Titane (Churchill et al. (2010)) on obtient $\lambda = 11,5 \times 6,45.10^{-3} = 7,42.10^{-2}$ J.mm^{-3} = 74,2 MPa

Comme démontré en section 2.4.2, ces deux paramètres sont valides à la fois pour le modèle monocristallin et pour le modèle polycristallin. En conclusion :

$$T_0 = 294,9 \text{ °K} \tag{2.6.1}$$

$$\lambda = 74,2 \text{ MPa} \tag{2.6.2}$$

2.7 Dispositif expérimental de traction sur fil AMF

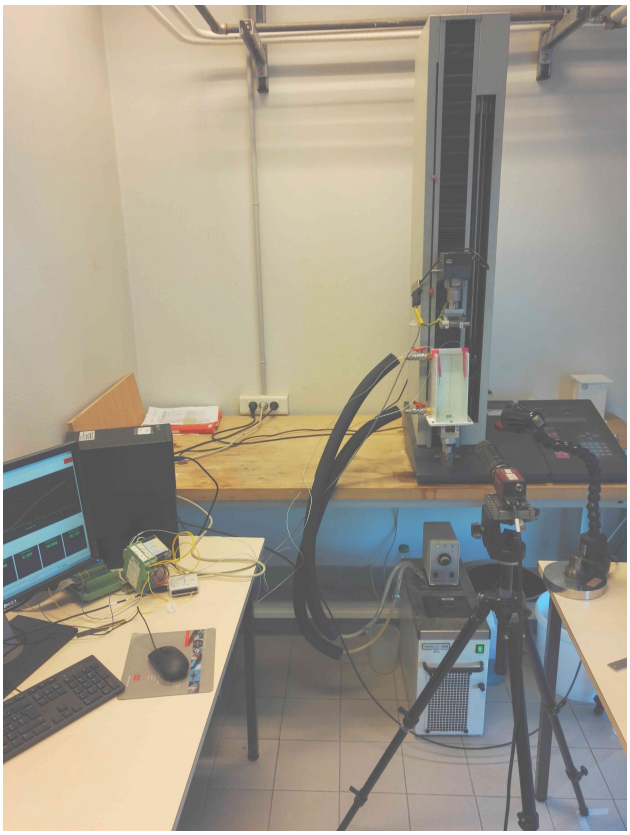

FIGURE 2.7.1 – Dispositif expérimental pour essais de traction sur fil AMF - vue d'ensemble

La réalisation d'essais mécaniques sur des fils AMF est délicate, car de nombreux paramètres d'essai comme la température ou la vitesse de chargement peuvent avoir une grande influence sur les résultats. Un dispositif expérimental adapté, photographié en Figure 2.7.1, a donc été mis au point au cours de la thèse. Il permet de réaliser des essais de traction sur un fil AMF dans l'eau, avec mesure des déformations par analyse d'images. Au centre du dispositif, une boîte en PMMA accueillant l'eau pour la régulation de température est fixée en partie basse par une pièce adaptée aux mors cylindriques de la machine, cette pièce permettant aussi le serrage du fil AMF. En partie haute, la boîte est ouverte et le fil AMF est pris dans des mors cylindriques fixés à la cellule de force d'une capacité de 100N. La machine de traction utilisée est une ADAMEL DY31. Un programme sous environnement MATLAB a été développé au laboratoire pour acquérir simultanément les valeurs mesurées par la cellule de force, la température d'essai ainsi que les images du fil. Nous détaillerons en section 2.7.1 le contrôle de la température d'essai, avant de justifier la vitesse de chargement en section 2.7.2, puis nous exposerons

la technique de mesure de la déformation du fil AMF en section 2.7.3.

2.7.1 Contrôle de la température

Pour réaliser des essais de traction sur fil AMF, il est crucial de garantir une température réellement constante. En effet, le changement de phase intervenant lors du chargement mécanique est exothermique (Churchill et al. (2010)). Lors d'un essai mécanique à basse température, la transformation de martensite autoaccomodée en martensite orientée (de θ_0 vers θ_1 dans le modèle) s'accompagne d'une production de chaleur. Lors d'un essai à haute température, la transformation d'austénite en martensite orientée, s'accompagne aussi d'une production de chaleur. Dans le premier cas, la décharge ne présente pas de changement de phase, mais dans le second cas, le changement de phase inverse lors de la décharge est endothermique. Pour contrôler précisément la température, le choix a donc été fait de réaliser les essais dans l'eau. Cet environnement favorisant les échanges thermiques, nous pouvons considérer que la température de l'eau est aussi celle du fil AMF. Un appareil de régulation thermique maintient l'eau à la température souhaitée et la fait circuler à travers la boîte en PMMA. L'eau entre dans la boîte par le bas, et en sort par débordement pour retourner dans l'appareil de régulation thermique. Enfin, deux thermocouples plongés dans l'eau permettent de mesurer la température de l'eau. Cette circulation d'eau est schématisée en Figure 2.7.2.

2.7.2 Vitesse de chargement

Plus la transformation de phase de l'AMF est rapide, plus la chaleur latente liée au changement de phase est libérée rapidement (Churchill et al. (2010)). Dans la littérature, une vitesse de chargement globale de 10^{-4} s^{-1} en déformation est généralement conseillée (Kim and Daly (2013)) pour ne pas provoquer de changements de température dans le fil. Dans Churchill et al. (2010) il est observé que les variations de température du fil lors de l'essai deviennent négligeables pour une vitesse de chargement de 10^{-5} s^{-1} dans l'air. Compte tenu des échanges thermiques facilités dans l'eau, il paraît raisonnable de réaliser les essais de traction à une vitesse de 10^{-4} s^{-1}. La traverse de la machine de traction se déplaçant à une vitesse de $1,8$ mm/min pour une longueur de fil de 300 mm, la vitesse de chargement globale en déformation vaut 10^{-4} s^{-1}, toutefois la vitesse de chargement observée localement sur le fil pourra être légèrement différente, du fait de l'hétérogénéité des déformations entre la portion du fil immergée dans l'eau et la portion exposée à l'air libre.

2.7.3 Mesure de la déformation du fil AMF par corrélation d'images

Lors d'essais de traction sur un fil AMF, il faut porter une attention particulière à la mesure de la déformation. En effet, lors des changements de phase, la déformation peut dans certains cas être inhomogène, suite à une localisation de la transformation (Shaw and Kyriakides (1995), Shaw and Kyriakides (1997)). Or le modèle de proposé ici est un

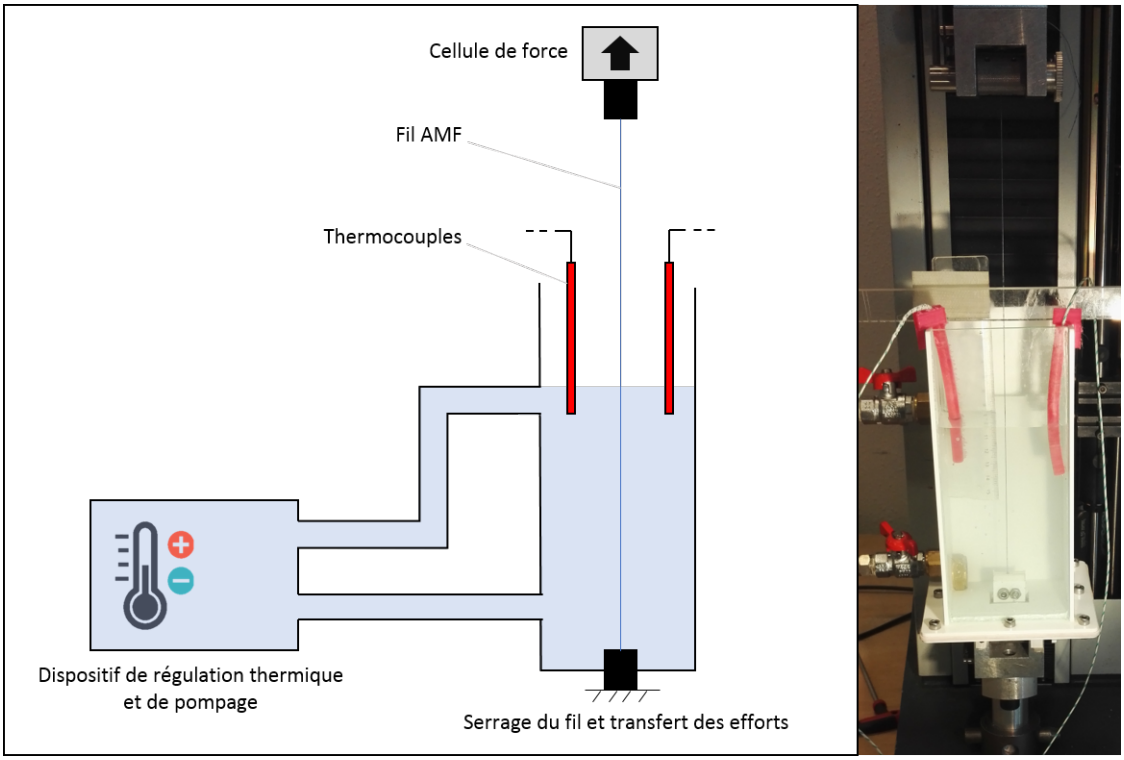

FIGURE 2.7.2 – Dispositif expérimental pour essais de traction sur fil AMF - Détail

modèle de comportement homogène : comme le soulignent Sittner et al. (2005), il serait erroné de mesurer une déformation uniquement de façon locale.

Pour éviter cet écueil, la technique de la corrélation d'images (Digital Image Correlation) est utilisée ici. Une paroi du dispositif expérimental est constituée d'une vitre en PMMA transparent, de façon à pouvoir acquérir les déformations par analyse d'images au moyen d'une caméra. Une caméra de la marque Allied Vision Technologies (modèle Pike F421B) enregistre à intervalles réguliers une photographie du fil préalablement recouvert d'un mouchetis de peinture blanche et noire (Reedlunn et al. (2013)). Le logiciel commercial GOM Correlate est ensuite utilisé pour mesurer dans les images *déformées* les déplacements d'une grille de points par rapport à une image *de référence*, ce qui permet ensuite d'en déduire les déformations. Pour identifier deux mêmes points entre l'image de référence et l'image déformée, on définit autour de chaque point une "facette" carrée d'une dizaine de pixels de côté, on parle de *point à facette*. Le fil AMF, dans les images expérimentales, a une largeur d'une vingtaine de pixels. Les gradients de nuances de gris permettent d'identifier les facettes grâce à un algorithme d'optimisation. Deux choix sont possibles pour l'image de référence. Dans la méthode itérative, les déplacements sont toujours mesurés par rapport à l'image précédente, ce qui facilite la reconnaissance des facettes par l'algorithme, moins distordues d'une image à l'autre,

mais l'inconvénient est l'accumulation des erreurs au cours de l'essai. A l'inverse, dans la méthode adoptée par la suite, les déplacements des centres des facettes sont toujours mesurés par rapport à la première image de l'essai : il y a une seule *image de référence*. On choisit ici la première image pour laquelle la valeur de force mesurée dépasse 1 N. Ainsi, le fil est suffisamment droit pour définir une zone de mesure de la déformation sur l'image de référence, nommée *région d'intérêt*. Le choix de l'image de référence à 1 N permet de diminuer l'accumulation des erreurs de mesure par rapport à la méthode itérative, mais la corrélation d'images est plus difficile : pour chaque essai, différentes tailles de facettes et différents intervalles pour la grille de points seront testés, et la configuration donnant les meilleurs résultats sera adoptée. Il est alors possible de définir des extensomètres virtuels, ou bien une zone d'analyse sur laquelle différents champs (déplacements, déformations, etc...) peuvent être calculés à l'aide des déplacements de la grille de points.

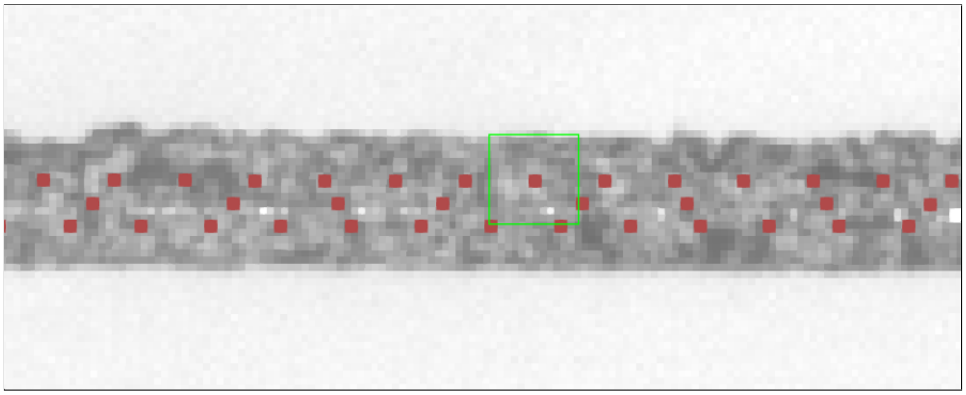

FIGURE 2.7.3 – Fil AMF avec mouchetis en nuances de gris, et grille de points à facette suivis pendant l'essai

Dans notre cas, une région d'intérêt est définie sur une portion de fil mesurant quelques centimètres de longueur. En Figure 2.7.3 les points à facette sont mis en évidence sur le fil avec son mouchetis en nuances de gris, ces points étant répartis sur la région d'intérêt avec un espacement de 10 pixels. L'un d'eux est entouré de sa facette carrée de 13 pixels de côté. Une fois l'analyse des images terminée, le logiciel GOM permet d'obtenir le champ de déplacements au cours du temps. Ces données permettent de calculer différentes grandeurs comme par exemple l'écart-type ou la moyenne du champ de déformations suivant l'axe du fil. Lors du premier essai sur le fil AMF vierge, une déformation localisée est souvent identifiée grâce à la fonction écart-type. Comme nous verrons en section 2.8, il faudra donc réaliser plusieurs essais et choisir un essai pour lequel la déformation du fil est homogène.

2.7.4 Estimation de l'incertitude de la mesure de déformation

La technique de la corrélation d'images présente l'avantage de ne pas être sensible à la température de l'essai et elle permet de mesurer de grandes déformations, ce qui la rend intéressante pour la réalisation d'essais en température sur des AMF. Mais dans le domaine des petites déformations élastiques, il est nécessaire d'estimer les incertitudes liées à l'utilisation de cette méthode. Il y a deux sources d'incertitude dans la mesure des déformations du fil AMF. La première réside dans le dispositif expérimental d'acquisition des images, c'est l'erreur extrinsèque (Carrier (2013)). Ainsi, l'utilisation de la caméra génère du bruit sur les images, et l'échantillon de fil peut subir des déplacements hors-plan menant à de fausses mesures de déplacements. La deuxième réside dans l'algorithme de corrélation d'images employé ainsi que la qualité du mouchetis, c'est l'erreur intrinsèque.

Nous adaptons ici la méthode de la déformation virtuelle employée dans Sutton et al. (2008) pour estimer l'erreur commise dans la mesure de la déformation globale du fil. Soit D la distance entre la lentille de la caméra et le fil AMF préalablement tendu, la mise au point étant effectuée pour cette distance D. Six images sont prises dans cette configuration, la première étant l'image de référence pour les mesures suivantes. La caméra est ensuite approchée du fil d'une valeur δd selon l'axe perpendiculaire au plan de l'image à l'aide d'une platine micrométrique, le fil ne subissant pas de changement. Six images sont prises pour chaque configuration, avec δd variant de 200 μm à 1000 μm : on connaît donc la déformation apparente théorique sur l'image, qui est de $\delta d/D$ d'après Sutton et al. (2008). La déformation apparente mesurée est obtenue avec le logiciel GOM Correlate en calculant la moyenne de la déformation axiale du fil sur une zone de quelques centimètres de fil, par rapport à l'image de référence. En Figure 2.7.4 on peut lire la comparaison entre les valeurs théoriques (traits noirs horizontaux) et les 6 valeurs mesurées pour chaque δd. On observe du bruit de mesure car les 6 images prises avec une position identique donnent des déformations apparentes variables. On peut conclure que l'erreur absolue, somme de l'erreur de mesure intrinsèque et de l'erreur de mesure extrinsèque, est de l'ordre de 0,02 % dans le domaine des petites déformations. Il est difficile de faire une estimation de l'erreur pour des déformations plus grandes (supérieures à 1 %) avec cette méthode, car les images ne seraient plus nettes pour δd grand. Toutefois, comme l'erreur est faible dans le domaine des petites déformations, nous supposerons qu'elle l'est aussi dans la plage des déformations mesurées sur les AMF. Notons que l'estimation de l'erreur obtenue ici est valable pour une déformation homogène du fil et non pour le calcul d'une déformation locale, car les mesures utilisées sont des moyennes de déformation sur la zone d'intérêt.

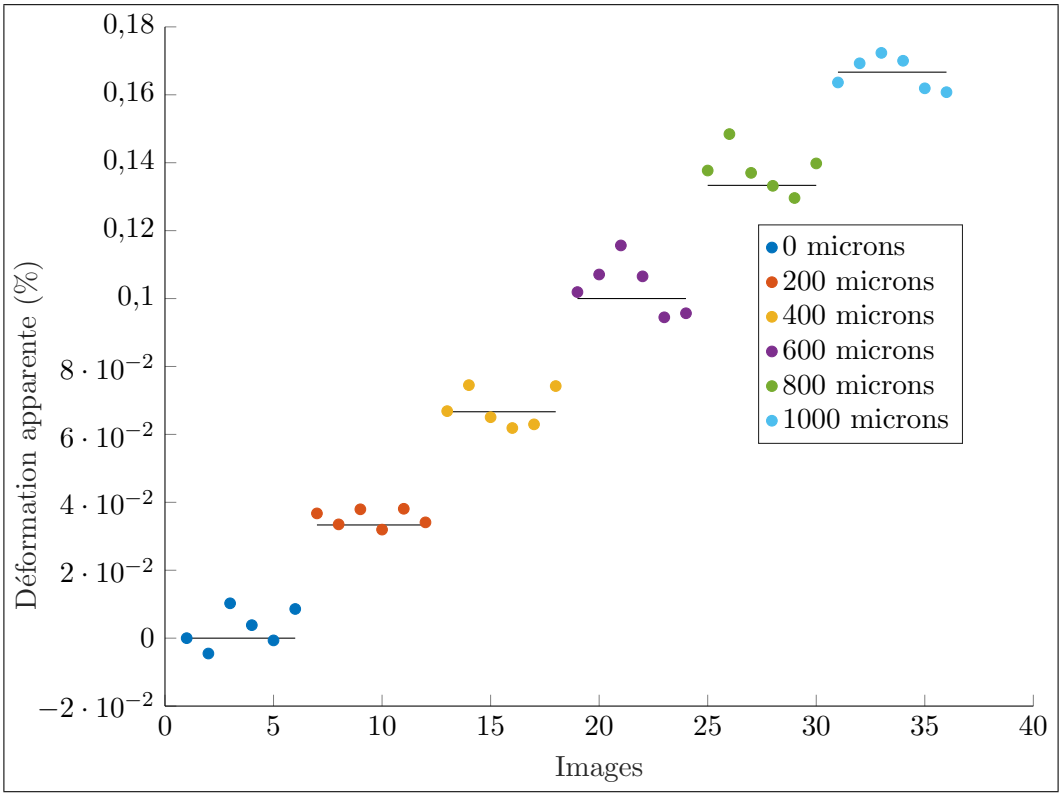

FIGURE 2.7.4 – Estimation de l'erreur de mesure par corrélation d'images pour différentes déformations apparentes réalisées en déplaçant la caméra avec une platine micrométrique

2.8 Essais de traction à température contrôlée et identification des paramètres

Plusieurs essais de traction isotherme à température ambiante (25 °C) ont été menés sur un même fil Nickel-Titane. L'objectif de ces essais est d'observer le comportement de réorientation à basse température de l'AMF : en effet, à température ambiante le matériau étudié présente un comportement basse température à condition de l'avoir préalablement refroidi au-dessous de la température seuil $T^A = T_0 - \frac{T_0 G_0}{\lambda}$, d'après les conclusions de l'essai de calorimétrie en section 2.6. Chaque essai est mené sur le fil ayant préalablement été porté à 100 °C dans une étuve puis à −20 °C dans un congélateur, de façon à mener l'essai sur un fil initialement en phase martensite autoaccomodée, avec une déformation de transformation de phase nulle. D'après l'essai de calorimétrie en section 2.6, si le fil n'est pas suffisamment refroidi entre deux essais, il se trouvera sous forme de R-phase, or cette phase n'est pas modélisée dans ce travail.

2.8.1 Reproductibilité de l'essai de traction isotherme

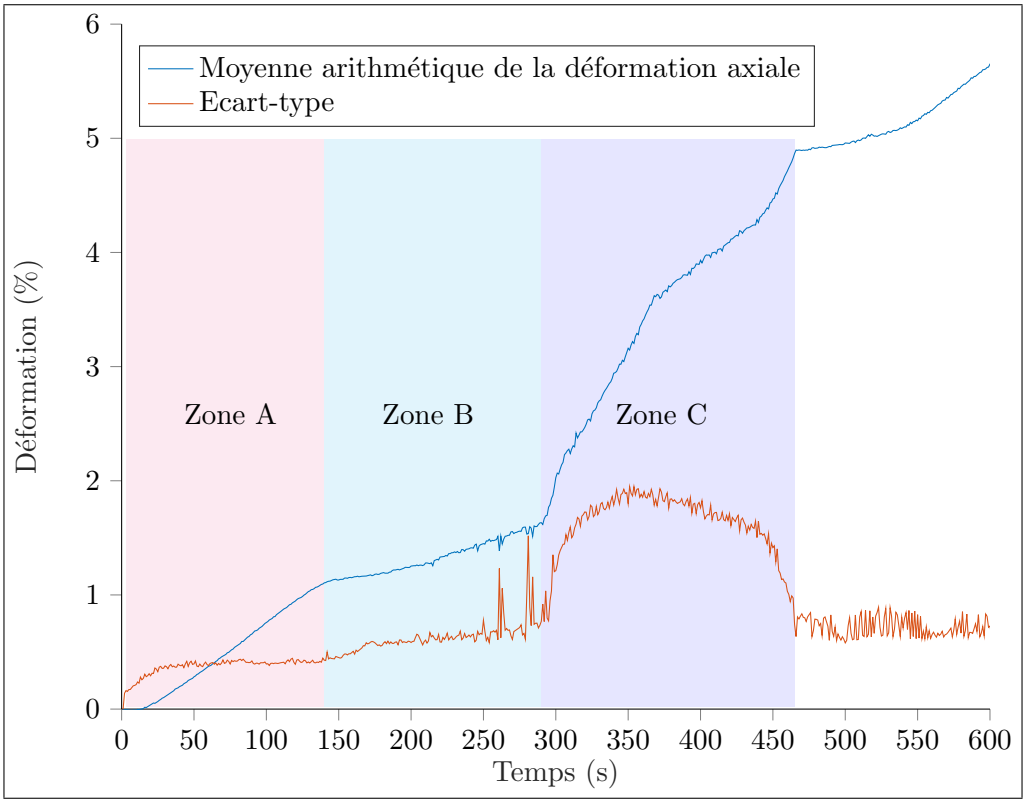

FIGURE 2.8.1 – Déformation localisée sur le fil vierge

Comme mentionné en section 2.7.3, les premiers essais réalisés sur un fil vierge ne

présentent généralement pas une déformation homogène. Ainsi, la Figure 2.8.1 représente la moyenne du champ de déformations suivant l'axe du fil ainsi que l'écart-type de cette donnée, obtenus à l'aide du logiciel GOM Correlate. Uniquement la charge a été représentée, car la reconnaissance des images était moins bonne durant la phase de décharge. Dans la zone A, la déformation augmente de façon homogène : cela correspond à la partie élastique du comportement du fil. Ensuite, dans la zone B la déformation n'augmente que faiblement : cela correspond probablement au début de la transformation de phase dans une zone non observée du fil (en dehors du champ de la caméra). Enfin, dans la zone C la transformation de phase se produit dans la zone du fil observée : on constate une forte croissance de la déformation avec une brusque augmentation de l'écart-type, signe que la déformation n'est plus homogène. Cette localisation semble disparaître au bout d'un certain nombre de cycles de chargement. En effet, sur la Figure 2.8.2, correspondant au quatrième essai réalisé sur le même fil, on constate que le champ de déformation est homogène tout au long de l'essai, y compris lors du changement de phase. Ici, la charge et la décharge sont représentées. Ce résultat est ensuite reproductible sur plusieurs essais. Ainsi, en Figure 2.8.3 les essais A, B et C ont été réalisés sur le même fil AMF. Parmi eux, c'est l'essai B qui sera utilisé pour l'identification des paramètres du modèle.

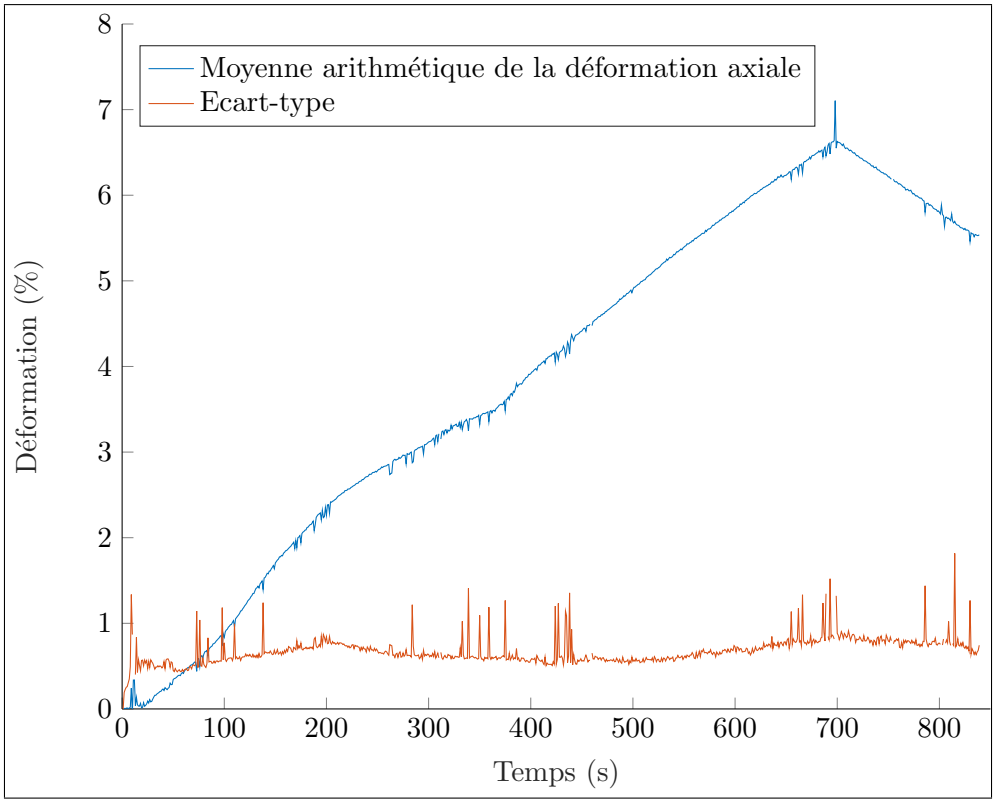

FIGURE 2.8.2 – Déformation homogène du fil AMF lors du quatrième cycle

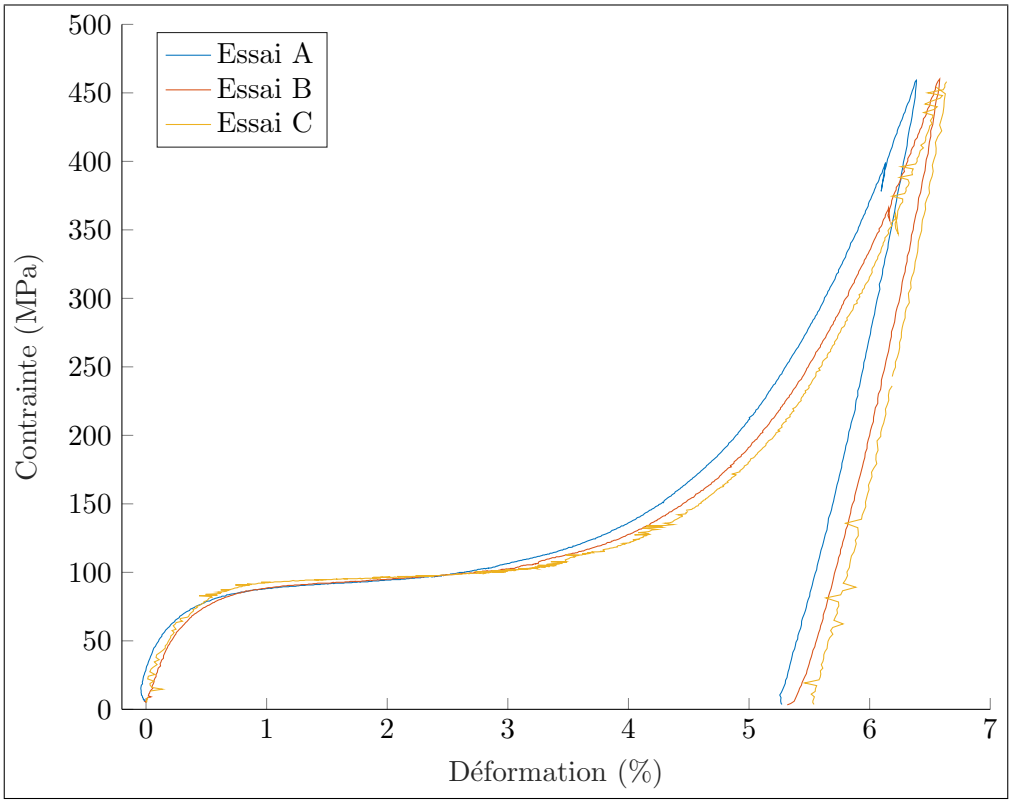

FIGURE 2.8.3 – Reproductibilité des essais de traction sur fil AMF

2.8.2 Identification des paramètres du modèle

A l'aide de l'essai de calorimétrie décrit en section 2.6, de l'essai de traction isotherme présenté ci-dessus, et de l'essai de cycle thermique à contrainte constante présenté en section 2.9 il est possible de déterminer l'ensemble des paramètres du matériau dans le modèle. Pour cela, il reste à postuler une fonction texture $\varepsilon^{tr}(s)$, introduite pour le modèle polycristallin en section 2.4. Les fils Nickel-Titane semblent généralement posséder une texture orientée (Thamburaja and Anand (2001), Laplanche et al. (2017),Bhattacharya (2003)), c'est-à-dire que les grains dans le polycristal ne sont pas orientés de façon aléatoire par rapport à l'axe du fil. On parle souvent de *texture de fibre*. Nous cherchons donc $\varepsilon^{tr}(s)$ sous la forme d'une fonction strictement décroissante de s, définie entre 0 et 1, qui possède un plateau horizontal dans la zone centrale, correspondant à une orientation majoritaire dans le polycristal. Nous adoptons l'expression suivante pour la fonction texture :

$$\varepsilon^{tr}(s) = (\varepsilon^{tr}_{max} - \varepsilon^{tr}_{min}) \left(\frac{1 - tanh(\beta(tan(\pi(s^{\gamma} - \frac{1}{2}))))}{2} \right) + \varepsilon^{tr}_{min} \tag{2.8.1}$$

où $(\beta, \gamma) \in \mathbb{R}^2_+$. Cette fonction présente l'avantage d'être inversible, et les paramètres

β et γ permettent de maîtriser la forme de la courbe pendant le changement de phase. La fonction inverse de $\varepsilon^{tr}(s)$ est :

$$f(x) = \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} atan\left(\frac{1}{\beta} atanh\left(1 - 2\left(\frac{x - \varepsilon^{tr}_{min}}{\varepsilon^{tr}_{max} - \varepsilon^{tr}_{min}}\right)\right)\right)\right]^{\frac{1}{\gamma}} \tag{2.8.2}$$

Le calcul des solutions analytiques nécessite l'expression de la dérivée de f. Pour cela, nous posons l'expression suivante :

$$H(x) = atanh\left(1 - 2\left(\frac{x - \varepsilon^{tr}_{min}}{\varepsilon^{tr}_{max} - \varepsilon^{tr}_{min}}\right)\right) \tag{2.8.3}$$

Nous avons alors :

$$f'(x) = \frac{\beta}{2\gamma\pi}\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} atan\left(\frac{H(x)}{\beta}\right)\right]^{\frac{1}{\gamma} - 1} \frac{1}{(\varepsilon^{tr}_{min} - x)(\beta^2 + H(x)^2)} \frac{1}{1 - \left(\frac{x - \varepsilon^{tr}_{min}}{\varepsilon^{tr}_{max} - \varepsilon^{tr}_{min}}\right)} \tag{2.8.4}$$

Le paramètre ε^{tr}_{max} correspond à la plus grande déformation de transformation de phase réalisable pour un grain orienté de façon optimale par rapport à l'axe du fil. D'après le modèle, les grains *favorablement orientés*, c'est-à-dire ceux qui subissent la plus grande déformation dans l'axe du fil lors du changement de phase, sont aussi les premiers à subir le changement de phase lors du chargement mécanique. En effet on observe dans les équations (2.5.19) que la contrainte de début de changement de phase dépend de ε^{tr}_{max} alors que la contrainte de fin de changement de phase dépend de ε^{tr}_{min}. Les grains présentant une faible déformation de changement de phase seront les derniers à entamer leur transformation de phase.

La théorie cristallographique de la transformation martensitique permet de calculer cette déformation maximale, elle vaut $13,1\%$ pour l'alliage Nickel-Titane de composition 49,8% de Ni d'après Matsumoto et al. (1987). Nous adoptons donc $\varepsilon^{tr}_{max} = 0,131$. Or d'après les équations (2.5.19) la contrainte de début de changement de phase vaut $\frac{G_0 + G_1}{\varepsilon^{tr}_{max}}$. En détectant la contrainte correspondant à une fin de linéarité de la courbe contraintes-déformations, il est donc possible de déterminer $G_0 + G_1$.

L'essai de traction B, mené à 25 °C, est représenté en Figure 2.8.4. On peut lire sur la courbe expérimentale une fin de domaine élastique pour $\sigma^{lin} = 50$ MPa. Nous avons donc :

$$G_0 + G_1 = \sigma^{lin}\varepsilon^{tr}_{max} = 6,5 \text{ MPa} \tag{2.8.5}$$

A présent, E est identifié à l'aide de la pente en début d'essai, dans la zone $\sigma < \sigma^{lin}$. Enfin, les paramètres restants ε^{tr}_{min}, β et γ sont identifiés par essai-erreur à l'aide des

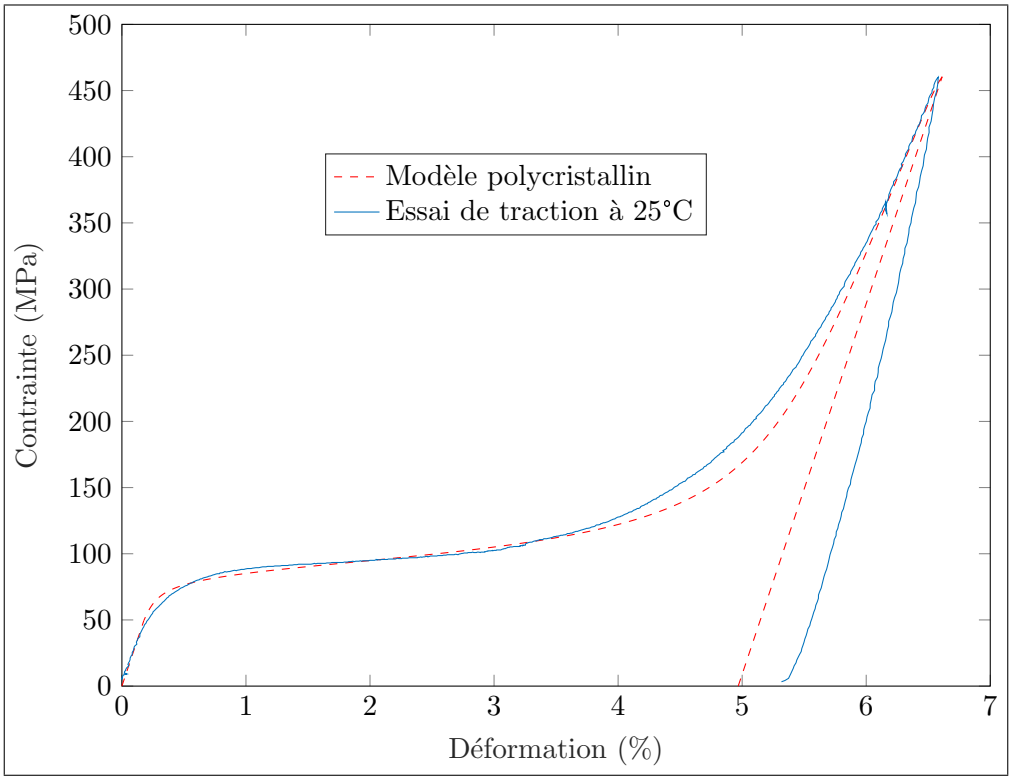

FIGURE 2.8.4 – Identification des paramètres du modèle polycristallin - Traction à 25 ℃

courbes numériques analytiques du polycristal. La courbe contraintes-déformations du modèle polycristallin, obtenue après identification des paramètres, est représentée en Figure 2.8.4. Les paramètres matériau obtenus pour ce fil Nickel-Titane sont listés en Table 2.4 pour le modèle polycristallin.

TABLE 2.4 – Identification des paramètres du polycristal

E	28000	MPa
λ	$74,2$	MPa
T_0	$294,9$	°K
ε^{tr}_{min}	$0,014$	
ε^{tr}_{max}	$0,131$	
β	$0,25$	
γ	$0,35$	
$G_0 + G_1$	$6,5$	MPa

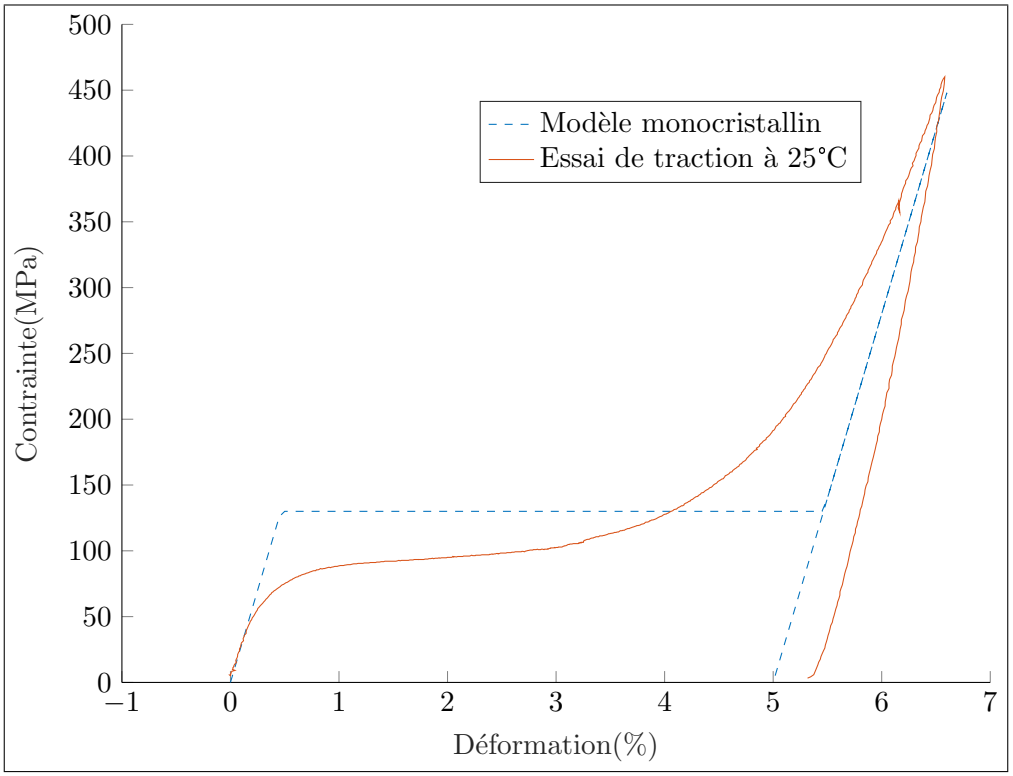

FIGURE 2.8.5 – Identification des paramètres du modèle monocristallin - Traction à 25 ℃

De même, il est possible d'identifier les paramètres du modèle monocristallin en traçant la courbe analytique à l'aide des équations (2.3.38). En adoptant les mêmes valeurs pour E, λ, T_0 et $G_0 + G_1$ il reste à identifier ε^{tr}_{max}. On donne à ce paramètre la valeur 5% : c'est l'ordre de grandeur de la déformation de transformation de phase que l'on observe en pratique dans un fil AMF. En Figure 2.8.5 sont représentées la courbe expérimentale et la courbe correspondant au modèle monocristallin. Les paramètres du modèle monocristallin sont listés en Table 2.5.

TABLE 2.5 – Identification des paramètres du monocristal

E	28000	MPa
λ	$74,2$	MPa
T_0	$294,9$	°K
ε^{tr}_{max}	$0,05$	
$G_0 + G_1$	$6,5$	MPa

Ces valeurs sont comparables avec les valeurs que l'on peut trouver dans la littérature, par exemple dans Chang et al. (2006) où le module d'Young de la martensite vaut $32,75$ GPa.

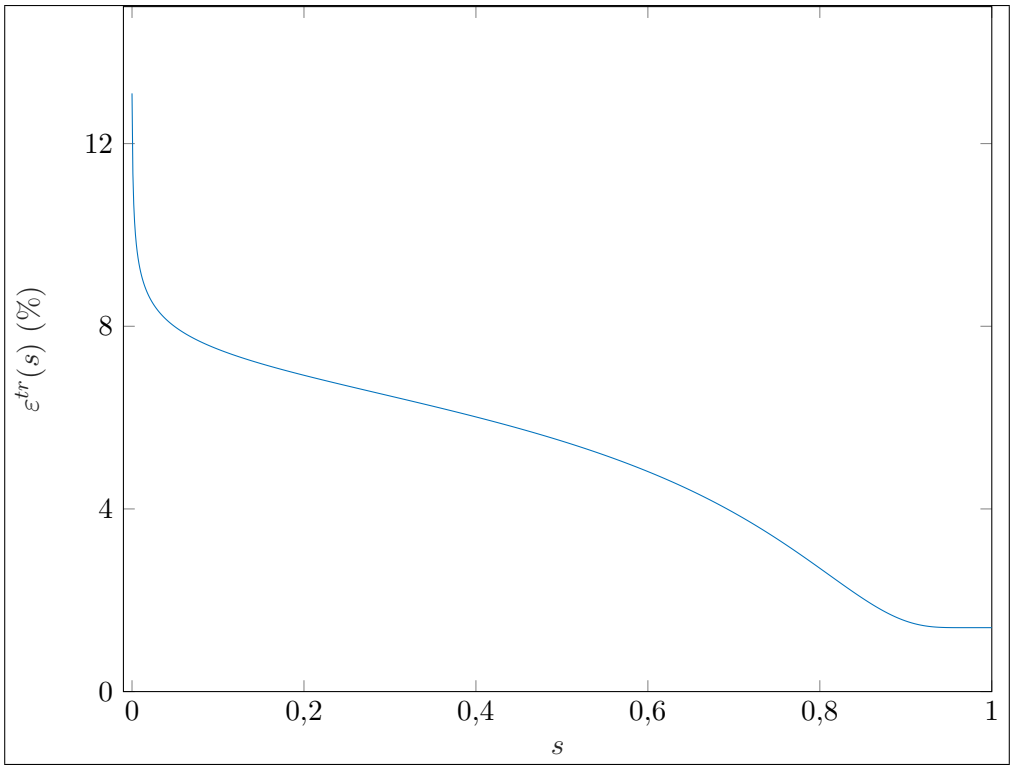

FIGURE 2.8.6 – Déformations de transformation de phase $\varepsilon^{tr}(s)$

En Figure 2.8.6 la distribution des déformations de transformation de phase $\varepsilon^{tr}(s)$ est représentée. Cette fonction détermine l'allure de la courbe contraintes-déformations lors du changement de phase. Une majorité de ces déformations est comprise entre 4 et 7 %. Ceci pourrait être une manifestation de la texture du fil, qui contiendrait des orientations privilégiées. Ainsi, la courbe contraintes-déformations présente un plateau de transformation de phase, correspondant à la transformation de ces grains majoritaires, et la fin de la courbe qui présente un écrouissage apparent correspond à la transformation des grains orientés moins favorablement (Kelly et al. (2016)). Ces derniers correspondent aux valeurs $\varepsilon^{tr}(s)$ petites, donc aux abscisses s proches de 1. Enfin, l'arrondi au début de la courbe, juste après la fin de la portion élastique pour $\sigma = \sigma^{lin}$, correspond aux abscisses s proches de 0, donc aux grains très favorablement orientés par rapport à l'axe du fil.

2.9 Courbes déformation-température

Dans la section précédente nous avons déterminé la somme des paramètres $G_0 + G_1$. Pour déterminer la valeur de G_1 et ainsi terminer l'identification des paramètres du modèle, un autre essai réalisable est le chargement thermique à contrainte constante, où l'on observe l'effet mémoire de forme qui sera mis à profit dans les actionneurs. Pour obtenir cette courbe, un fil AMF est tout d'abord chargé mécaniquement dans l'eau préalablement portée à haute température (85 °C), jusqu'à une contrainte de traction σ. Ensuite, cette contrainte est maintenue constante à l'aide d'un contrôleur PID inclus dans le logiciel TestWorks utilisé pour contrôler la presse électromécanique. On soumet alors le fil à des chargements thermiques (refroidissement puis chauffage) en contrôlant la température de l'eau dans le dispositif expérimental. On peut ainsi parcourir une plage de températures allant d'environ 10 à 90 °C. A noter que cet essai est généralement réalisé au moyen d'une presse hydraulique, qui permet de contrôler directement la force appliquée sur l'échantillon. Une telle machine n'était pas disponible au laboratoire, et la méthode décrite ci-dessus n'est pas la plus appropriée pour réaliser ce type d'essai. Ainsi, Bil et al. (2013) décrit les difficultés à contrôler la réponse d'un fil AMF à l'aide d'un contrôleur PID classique.

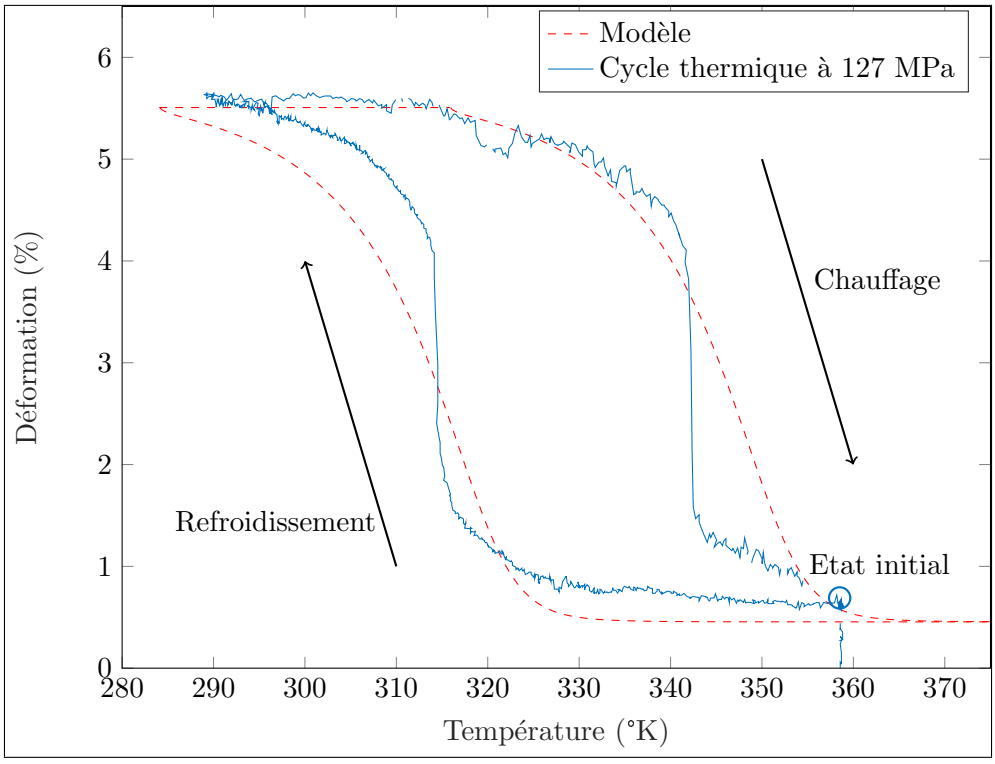

FIGURE 2.9.1 – Cycle thermique à 25N

En Figure 2.9.1 sont représentés les résultats de l'essai réalisé à une contrainte constante de 127 MPa (la force exercée par la machine est de 25 N). Avec cette courbe expérimentale, nous pouvons déterminer le paramètre G_1 du modèle en mesurant la différence de température ΔT entre les deux changements de phase, à l'aide de l'équation (2.5.38). On mesure ici $\Delta T = 27,8$ °K donc grâce aux paramètres identifiés par calorimétrie, nous avons $G_1 = 3,5$ MPa. Par conséquent, d'après la section 2.8.2 on a :

— $G_0 = 3,0$ MPa
— $G_1 = 3,5$ MPa

On trouve bien $G_0 < G_1$, comme le modèle le requiert. Il reste à vérifier avec ces paramètres qu'à la température de 25 °C on a bien $\lambda(T) < G_0$, ce qui permet de tracer la courbe du modèle analytique polycristallin en section 2.8.2 à l'aide des équations (2.5.19). Or $\lambda(T) = 0,82$ MPa donc l'inégalité est bien vérifiée.

Tous les paramètres du modèle polycristallin sont donc à présent identifiés, et il est possible de tracer la courbe analytique du comportement de l'AMF à contrainte constante, à l'aide des équations (2.5.33) et (2.5.34). Cette courbe est représentée en Figure 2.9.1. On observe que dans les zones de changement de phase, contrairement à la courbe donnée par le modèle, la déformation mesurée expérimentalement varie de façon importante sur un petit intervalle de températures. En dehors de ces zones, une bonne concordance est obtenue entre le modèle et l'expérience. Cette courbe témoigne de l'hystérésis du comportement thermomécanique de l'AMF, c'est-à-dire que la température du changement de phase austénite-martensite n'est pas la même que la température du changement de phase inverse, elles sont éloignées de 27.8 °C. Cette hystérésis est plus ou moins étendue dans les alliages à mémoire de forme, mais elle est toujours présente dans l'alliage Nickel-Titane (Mohd Jani et al. (2014)).

2.10 Modélisation du fil AMF - Conclusion du chapitre

Deux modèles de comportement pour un fil AMF ont été présentés au cours de ce chapitre. Un modèle monocristallin décrit de façon simplifiée le comportement d'un AMF, les courbes obtenues étant linéaires par morceaux. Un modèle polycristallin, plus proche de la réalité micromécanique du matériau, permet d'obtenir une meilleure concordance entre les courbes expérimentales et théoriques. Trois types d'essais ont été menés : l'essai de calorimétrie, l'essai de traction isotherme et l'essai de chargement thermique à contrainte imposée. Ils permettent d'identifier l'ensemble des paramètres des deux modèles. La caractérisation du matériau AMF est ainsi complète, elle sera utilisée dans les chapitres 3 et 4 pour valider le modèle.

L'obtention des courbes théoriques de comportement thermomécanique est aisée dans le cas du modèle monocristallin. Pour le modèle polycristallin, elle est plus complexe,

mais elle est aussi possible sans recourir à la simulation numérique. Toutefois, pour simuler le comportement d'un fil AMF polycristallin couplé à une structure en tant qu'actionneur, la simulation numérique devient nécessaire, et sera décrite dans le chapitre 3.

Chapitre 3

Calcul de structures intégrant des fils AMF

Le modèle développé dans le chapitre 2 permet de résoudre de manière analytique le problème du comportement d'un fil d'alliage à mémoire de forme dans des cas de chargement simples. Par exemple, il permet de calculer la réponse à un déplacement monotone imposé, en charge puis décharge, à température constante. Il permet donc d'identifier les paramètres du modèle ainsi qu'une fonction texture à partir des courbes expérimentales de traction par une approche essai-erreur. Toutefois, la résolution analytique faite en section 2.5 n'est plus envisageable pour des trajets de chargement plus complexes. Ainsi, en 2.5 la courbe avait été paramétrée par la déformation ε, mais si le matériau subit simultanément un changement de température et un changement de conditions aux limites, ce paramétrage n'est plus possible. Par exemple, un fil AMF utilisé en tant qu'actionneur est intégré à une structure et ne connaît pas d'évolution à contrainte constante ou à température constante. Considérons en Figure 3.0.1 l'exemple d'un fil AMF fixé au bâti en une extrémité, et attaché à un ressort à l'autre extrémité.

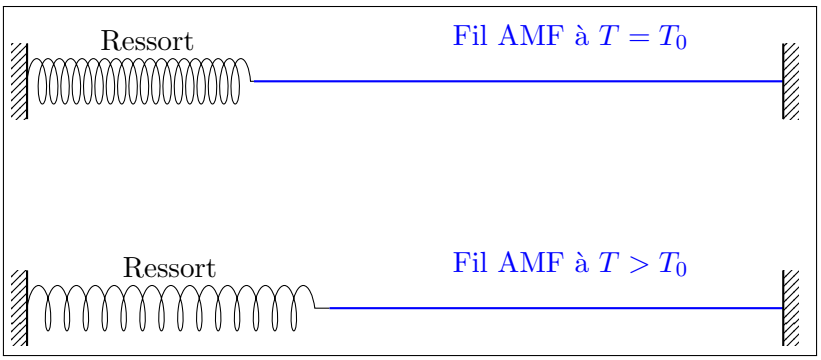

FIGURE 3.0.1 – Fil AMF couplé à un ressort

Lors du chauffage du fil AMF de la figure 3.0.1, l'état de déformation, l'état de

contraintes et la température du fil vont varier simultanément. Les méthodes analytiques ne permettent pas, du moins dans le cas du polycristal, de calculer la réponse du fil AMF, et il en sera de même pour la plupart des problèmes où le fil AMF est couplé à une autre structure. Ainsi, pour simuler le collage d'un fil AMF sur une poutre en flexion, ou pour tout autre problème où le fil AMF est couplé à une structure élastique, il est nécessaire poursuivre la discrétisation temporelle présentée en section 2.5.

Dans ce chapitre, une résolution analytique du problème d'un fil AMF monocristallin fixé sur une poutre en flexion est tout d'abord proposée en section 3.1, et la section 3.2 contient des résultats similaires pour le cas de l'actionneur avec ressort illustré en figure 3.0.1. Ensuite, la résolution numérique, nécessaire dans le cas du polycristal, sera exposée en section 3.3. Enfin, la traduction de ce modèle dans le logiciel de calcul par éléments finis ABAQUS sera présentée en section 3.4, pour le monocristal ainsi que pour le polycristal. Ces simulations seront confrontées aux expérimentations dans le chapitre 4.

3.1 Problème de l'actionneur AMF monocristallin collé le long d'une poutre - Approche analytique

Nous allons traiter ici le problème d'un actionneur composé d'un fil AMF monocristallin et d'une poutre élastique travaillant en flexion, le fil étant ou bien collé sur la poutre, ou bien noyé dans l'épaisseur de la poutre avec une certaine excentricité e par rapport à la fibre neutre. Le fonctionnement de cet actionneur est expliqué en Figure 3.1.1. Un fil AMF préalablement étiré puis collé sur une poutre élastique permet d'obtenir un actionneur dont la courbure dépend de la température du fil. Du fait du préétirement du fil AMF, la poutre sera en permanence courbée, mais cette courbure sera faible à basse température et importante à haute température, grâce à l'effet mémoire de forme. En adoptant le modèle monocristallin pour le fil, il est possible de résoudre ce problème de structure de façon analytique, ce qui sera détaillé dans cette section. Pour le modèle polycristallin, il sera nécessaire d'implémenter numériquement le comportement du fil AMF, comme nous le verrons en section 3.3.

3.1.1 Formulation du problème

Dans cette section, le module d'Young du fil AMF sera noté E^{AMF} pour éviter la confusion avec le module d'Young de la poutre, noté E. L'épaisseur totale de la poutre est h, et le fil se situe à une distance e de la fibre neutre. La courbure de la poutre est notée χ. La géométrie du système est représentée en Figure 3.1.2. La section de la poutre possède une inertie I, on notera $(EI)^{poutre}$ la rigidité en flexion. Les autres notations sont celles du chapitre 2 :

— θ_0 est la fraction volumique de martensite autoaccomodée.

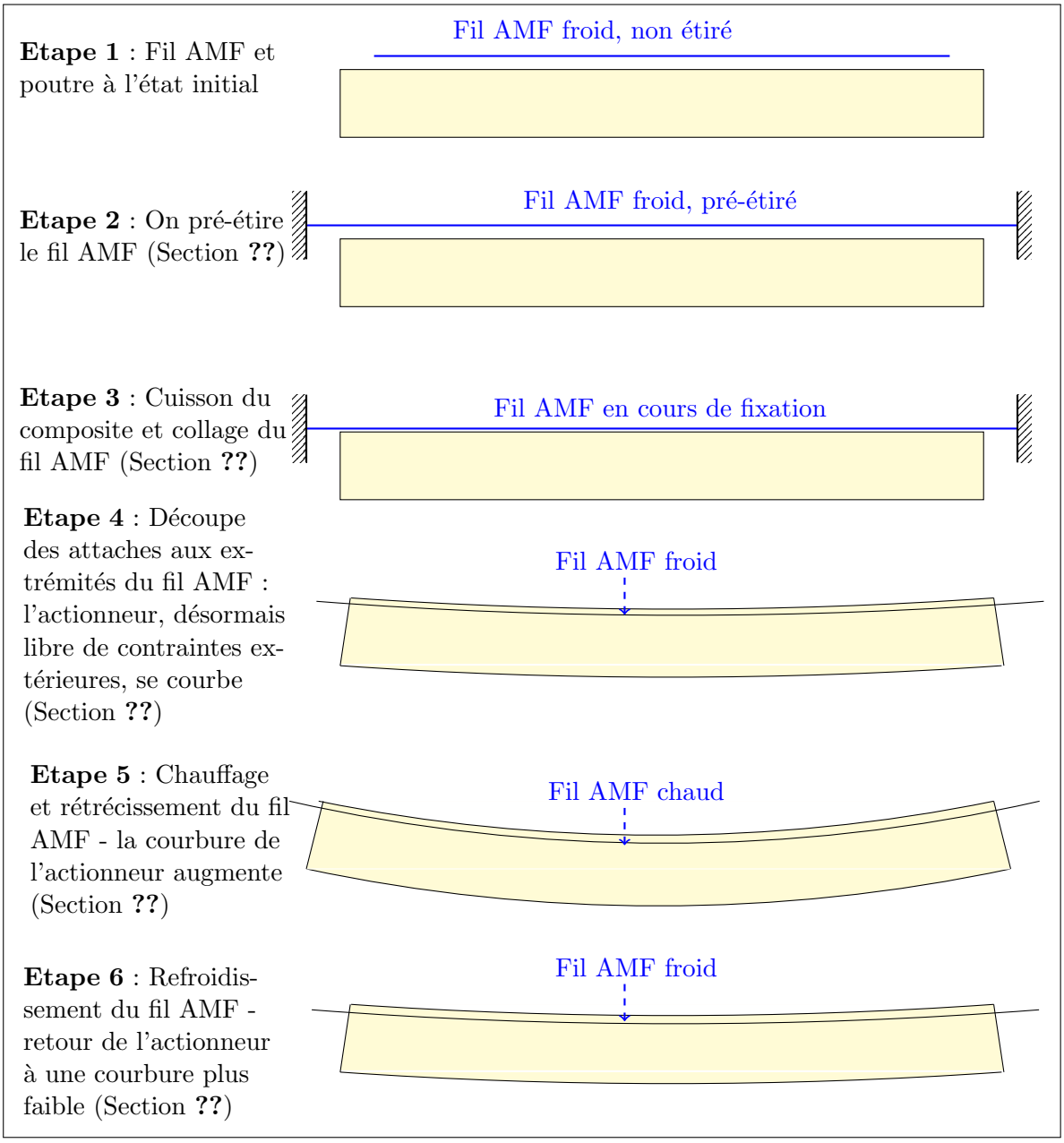

FIGURE 3.1.1 – Fonctionnement de l'actionneur : Poutre et fil AMF

— θ_1 est la fraction volumique de martensite orientée (la fraction volumique d'austénite est donc donnée par $1 - \theta_0 - \theta_1$).
— ε^{tr} est la déformation maximale de transformation de phase
— T_0 est la température de référence.
— λ est la chaleur latente.

— G_0 est un paramètre de dissipation correspondant à la transformation de phase austénite - martensite autoaccomodée.
— G_1 est un paramètre de dissipation correspondant à la transformation de phase austénite - martensite orientée (avec $G_0 < G_1$).

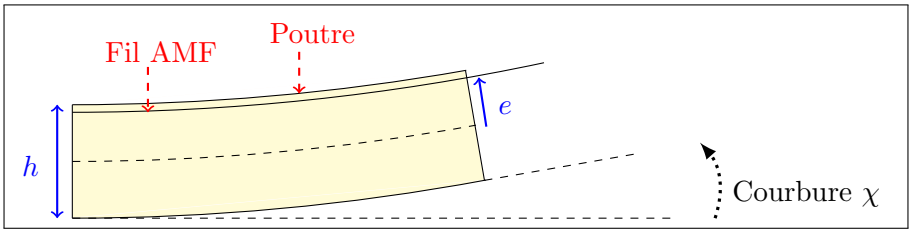

FIGURE 3.1.2 – Fil AMF collé sur une poutre courbée dans le sens positif

Rappelons ici les expressions des températures de changement de phase à contrainte nulle, calculées en section 2.3.4 :

$$\boxed{T^A = T_0 - \frac{T_0 G_0}{\lambda}} \tag{3.1.1}$$

$$\boxed{T^B = T_0 + \frac{T_0 G_0}{\lambda}} \tag{3.1.2}$$

Ces expressions sont valables pour le modèle monocristallin tout comme pour le modèle polycristallin.

3.1.2 Pré-étirement du fil AMF

Avant fixation sur la poutre, le fil AMF doit être pré-étiré à basse température pour pouvoir être utilisé en tant qu'actionneur d'une structure adaptative. Ce processus est représenté par l'Etape 2 sur la Figure 3.1.1. Nous parlons ici d'un pré-étirement plutôt que d'une précontrainte, car ce processus sera mesuré par une déformation initialement appliquée au fil avant la fixation à la poutre. Supposons que le fil AMF se trouve à une température $T < T^B$ avec $\theta_0 = 1$ et $\theta_1 = 0$. Le processus de pré-étirement du fil commence avec une charge élastique, suivie d'une transformation de phase à contrainte constante, la *réorientation* de martensite détaillée en section 2.3.6. Suivant la conception de l'actionneur, le fil est étiré jusqu'à un certain pré-étirement $\varepsilon^{\mathbf{pre}}$ pour lequel $\sigma = \sigma^{pre}$ et $\theta_{\mathbf{1}} = \theta_{\mathbf{1}}^{\mathbf{pre}}$ avec :

$$\frac{G_0 + G_1}{E^{AMF} \varepsilon^{tr}} < \varepsilon^{pre} \quad \text{et} \quad 0 < \theta_1^{pre} < 1 \tag{3.1.3}$$

Par conséquent,

$$\boxed{\sigma^{pre} = \frac{G_0 + G_1}{\varepsilon^{tr}} \quad \text{et} \quad \varepsilon^{pre} = \theta_1^{pre}\varepsilon^{tr} + \frac{G_0 + G_1}{E^{AMF}\varepsilon^{tr}}} \tag{3.1.4}$$

Ici, nous nous limitons au cas de la réorientaion partielle ou complète, sans poursuivre le chargement après la fin de la réorientation :

$$\varepsilon^{pre} \leq \varepsilon^{tr} + \frac{G_0 + G_1}{E^{AMF}\varepsilon^{tr}} \tag{3.1.5}$$

3.1.3 Collage du fil AMF le long de la poutre

Passons à présent à la phase de collage ou de fixation du fil, encore maintenu étiré, à la poutre (Etape 3 sur la Figure 3.1.1). La température est toujours $T < T^A$, et le fil se trouve dans son état σ^{pre} , ε^{pre}, θ_1^{pre}. La courbure χ de la poutre est supposée uniforme, et nous considérons que pour une contraction du fil (diminution de ε), χ augmente. Soit M le moment fléchissant exercé par le fil excentré fixé sur la poutre (voir figure 3.1.3) :

$$M = (EI)^{poutre}\chi = \sigma S e \tag{3.1.6}$$

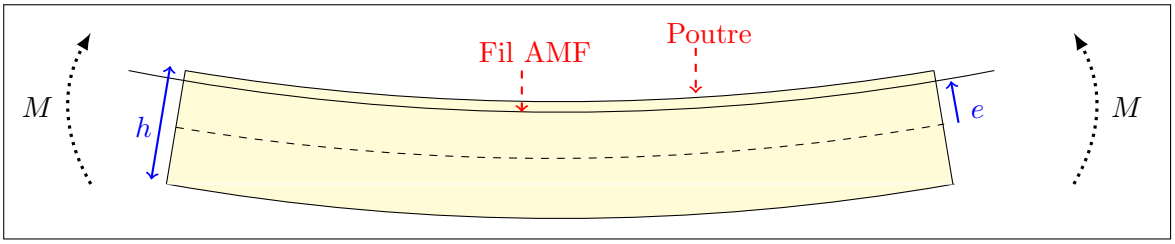

FIGURE 3.1.3 – Fil AMF fixé à la poutre courbée dans le sens positif

Avant et pendant la fixation, la courbure de la poutre est nulle (Etapes 1 à 3 en Figure 3.1.1). Après fixation, on retire le dispositif ayant permis de maintenir le pré-étirement du fil AMF (Etape 4). Le fil subit une décharge élastique et la poutre se courbe. Sa courbure vaut alors :

$$\chi = -\frac{\Delta(\varepsilon)}{e} \tag{3.1.7}$$

où $\Delta(\varepsilon)$ est la variation de déformation du fil AMF entre l'état au moment de la fixation et l'état actuel : $\Delta(\varepsilon) = \varepsilon - \varepsilon^{pre}$. En utilisant (3.1.6) et (3.1.7) on a :

$$\chi = \frac{\varepsilon^{pre} - \varepsilon}{e} \tag{3.1.8}$$

D'où :

$$\sigma = \frac{(EI)^{poutre}(\varepsilon^{pre} - \varepsilon)}{Se^2} \tag{3.1.9}$$

Lors de l'Etape 4, on a un transfert d'énergie élastique du fil vers la poutre courbée. Sur la courbe contrainte-déformation du fil AMF en Figure 3.1.4, on passe de l'état "fil pré-étiré" à l'état "fil collé au repos".

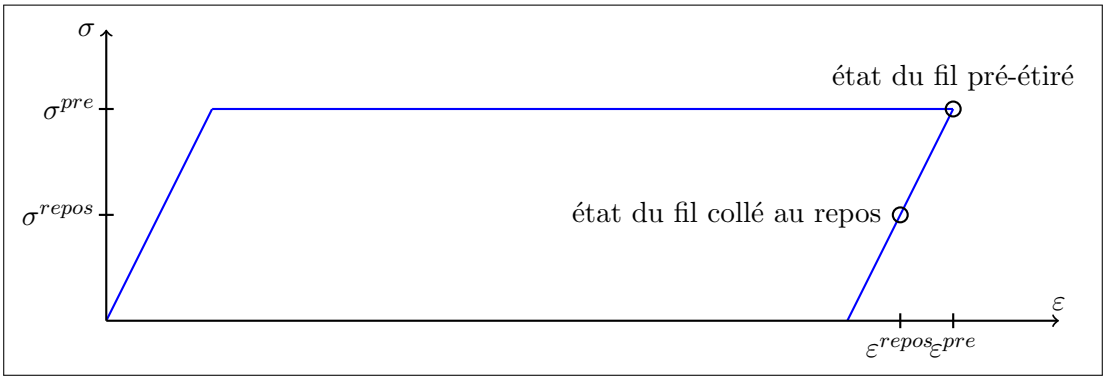

FIGURE 3.1.4 – Décharge élastique du fil AMF fixé à la poutre

Par conséquent, au repos, la déformation et la contrainte dans le fil valent ε^{repos} et σ^{repos} et le caractère élastique de la décharge permet d'écrire :

$$\sigma^{pre} - \sigma^{repos} = E^{AMF}\left(\varepsilon^{pre} - \varepsilon^{repos}\right) \tag{3.1.10}$$

Avec l'équation (3.1.9) on trouve :

$$\sigma^{repos} = \frac{(EI)^{poutre}(\sigma^{pre} - \sigma^{repos})}{E^{AMF}Se^2} \tag{3.1.11}$$

Pour simplifier les notations, introduisons le paramètre adimensionnel α, dépendant uniquement des modules des matériaux et des dimensions du système :

$$\alpha = \frac{E^{AMF}Se^2}{(EI)^{poutre}} \tag{3.1.12}$$

On a alors :

$$\sigma^{repos} = \frac{\sigma^{pre} - \sigma^{repos}}{\alpha} \tag{3.1.13}$$

D'où :

$$\sigma^{repos} = \frac{\sigma^{pre}}{\alpha + 1} = \frac{G_0 + G_1}{\varepsilon^{tr}(\alpha + 1)} \tag{3.1.14}$$

En conclusion, la structure adaptative au repos se trouve dans l'état suivant :

$$\boxed{\begin{aligned}
\varepsilon^{repos} &= \varepsilon^{pre} - \frac{\alpha(G_0+G_1)}{\varepsilon^{tr}E^{AMF}(\alpha+1)} \\
\sigma^{repos} &= \frac{G_0+G_1}{\varepsilon^{tr}(\alpha+1)} \\
\chi^{repos} &= \frac{\alpha(G_0+G_1)}{e\varepsilon^{tr}E^{AMF}(\alpha+1)} \\
\theta_0 &= 1-\theta_1^{pre} \\
\theta_1 &= \theta_1^{pre}
\end{aligned}} \tag{3.1.15}$$

3.1.4 Chauffage de la structure adaptative

A présent il est possible d'actionner la structure en chauffant le fil AMF collé (Etape 5 en Figure 3.1.1). Tout d'abord, étudions le cas où $\theta_0 \neq 0$ et $\theta_1 \neq 1$: c'est le cas de la réorientation incomplète dans la section 3.1.2. On a toujours :

$$\begin{cases} \theta_0 \neq 0 & a_0 = 0 \\ \theta_1 \neq 0 & a_1 = 0 \\ 1-\theta_0-\theta_1 = 0 & z \geq 0 \end{cases} \tag{3.1.16}$$

D'où

$$\begin{cases} -\lambda(T) = z + \phi_0 \\ \varepsilon^{tr}\sigma^{repos} - \lambda(T) = z + \phi_1 \end{cases} \tag{3.1.17}$$

Comme $\sigma^{repos} > 0$, la première équation *sature* en premier (voir section 2.3.5 pour l'explication de ce terme), pour la température :

$$\boxed{T^B = T_0 + \frac{T_0 G_0}{\lambda}} \tag{3.1.18}$$

Lorsque T atteint T^B, on a instantanément disparition de la fraction volumique θ_0 et formation d'austénite sans déformation macroscopique :

$$\begin{cases} \theta_0 = 0 & a_0 \geq 0 \\ \theta_1 \neq 0 & a_1 = 0 \\ 1-\theta_0-\theta_1 > 0 & z = 0 \end{cases} \tag{3.1.19}$$

D'où

$$\begin{cases} -\lambda(T) = -a_0 + \phi_0 \\ \varepsilon^{tr}\sigma^{repos} - \lambda(T) = \phi_1 \end{cases} \tag{3.1.20}$$

La deuxième équation sature pour la température :

$$\boxed{T^C = T_0 + \frac{T_0}{\lambda}(G_1 + \varepsilon^{tr}\sigma^{repos})} \tag{3.1.21}$$

A partir de cette température on a diminution de θ_1 et formation d'austénite. En continuant à chauffer on a l'évolution suivante :

$$\varepsilon^{tr}\sigma - \lambda(T) = -G_1 \tag{3.1.22}$$

Donc avec l'équation (3.1.9) on obtient que la déformation du fil, la contrainte dans le fil et la courbure de la poutre suivent l'évolution suivante pour $T \geq T^C$ (voir figure 3.1.5) :

$$\boxed{\begin{aligned} \varepsilon(T) &= \varepsilon^{pre} - \frac{\alpha\left(\lambda(T) - G_1\right)}{\varepsilon^{tr}E^{AMF}} \\ \sigma(T) &= \frac{\lambda(T) - G_1}{\varepsilon^{tr}} \\ \text{et} \quad \chi(T) &= \frac{\alpha\left(\lambda(T) - G_1\right)}{e\varepsilon^{tr}E^{AMF}} \end{aligned}} \tag{3.1.23}$$

Et ce, jusqu'à $\theta_1 = 0$ où la relation contrainte-déformation du fil AMF se réduit à $\sigma = \varepsilon E^{AMF}$:

$$\varepsilon^{tr}E^{AMF}\varepsilon - \lambda(T) = -G_1 \tag{3.1.24}$$

Par conséquent, on obtient les valeurs suivantes en fin de transformation :

$$\boxed{\begin{aligned} \sigma^{chaud} &= \frac{E^{AMF}\varepsilon^{pre}}{\alpha + 1} \\ \varepsilon^{chaud} &= \frac{\varepsilon^{pre}}{\alpha + 1} \\ T^D &= T_0 + \frac{T_0}{\lambda}\left(G_1 + \frac{\varepsilon^{pre}\varepsilon^{tr}E^{AMF}}{\alpha + 1}\right) \\ \chi^{chaud} &= \frac{1}{e}\frac{\alpha\varepsilon^{pre}}{\alpha + 1} \end{aligned}} \tag{3.1.25}$$

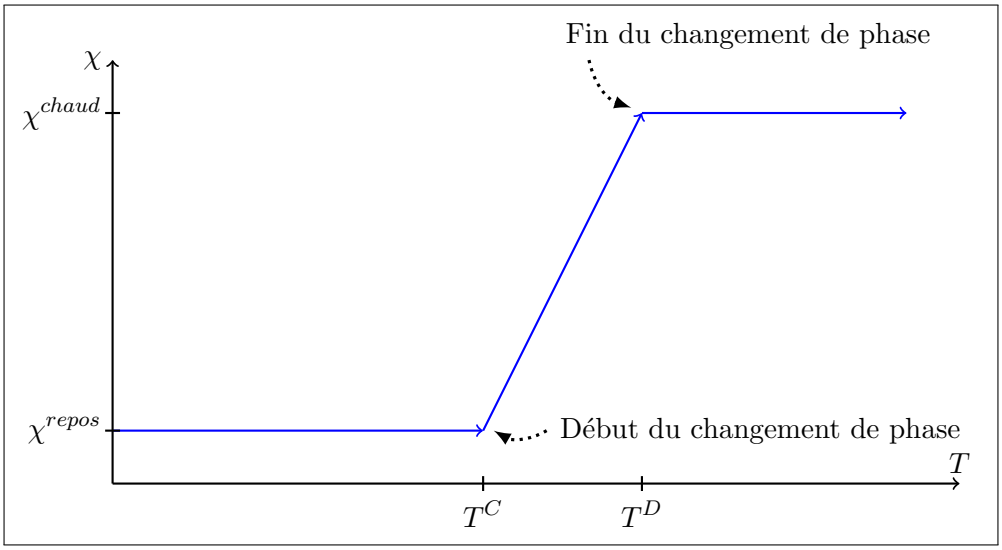

FIGURE 3.1.5 – Chauffage du fil AMF collé ou fixé à la structure adaptative

Au-delà de T^D, plus rien ne se passe en ce qui concerne la transformation de phase. L'évolution décrite par l'équation 3.1.23 lors du chauffage est schématisée en figure 3.1.5.

Etudions à présent le cas où $\theta_0 = 0$ et $\theta_1 = 1$: c'est le cas de la réorientation complète dans la section 3.1.2. On a :

$$\begin{cases} -\lambda(T) = z - a_0 + \phi_0 \\ \varepsilon^{tr}\sigma^{repos} - \lambda(T) = z + \phi_1 \end{cases} \tag{3.1.26}$$

La deuxième équation sature aussi pour la température T^C et on a la même évolution que pour le cas de la réorientation incomplète.

3.1.5 Refroidissement de la structure adaptative

Etudions à présent la réversibilité du comportement de cette structure adaptative : on provoque un refroidissement à partir de $T > T^D$ (Etape 6 en Figure 3.1.1). On a :

$$\begin{cases} \theta_0 = 0 & a_0 \geq 0 \\ \theta_1 = 0 & a_1 \geq 0 \\ 1 - \theta_0 - \theta_1 = 1 & z = 0 \end{cases} \tag{3.1.27}$$

D'où

$$\begin{cases} -\lambda(T) = -a_0 + \phi_0 \\ \varepsilon^{tr}\sigma^{chaud} - \lambda(T) = -a_1 + \phi_1 \end{cases} \tag{3.1.28}$$

Rien ne se passe jusqu'à $-\lambda(T) = G_0$ ou bien $\varepsilon^{tr}\sigma^{chaud} - \lambda(T) = G_1$. Il faut donc différencier deux températures critiques, suivant les valeurs des différents paramètres et variables :

$$\begin{cases} T = T_0 - \dfrac{T_0 G_0}{\lambda} & (3.1.29) \\ \text{ou bien} \quad T = T_0 + \dfrac{T_0}{\lambda}(\varepsilon^{tr}\sigma^{chaud} - G_1) & (3.1.30) \end{cases}$$

Ces températures suggèrent deux régimes différents, toutefois nous allons ici distinguer trois cas, et la pertinence de cette distinction apparaîtra dans les calculs :

— Pré-étirement petit : $\varepsilon^{pre} < \dfrac{(\alpha+1)(G_1 - G_0)}{\varepsilon^{tr} E^{AMF}}$

— Pré-étirement intermédiaire : $\dfrac{(\alpha+1)(G_1 - G_0)}{\varepsilon^{tr} E^{AMF}} < \varepsilon^{pre} < \varepsilon^{tr} + \dfrac{(\alpha+1)(G_1 - G_0)}{\varepsilon^{tr} E^{AMF}}$

— Pré-étirement grand : $\varepsilon^{tr} + \dfrac{(\alpha+1)(G_1 - G_0)}{\varepsilon^{tr} E^{AMF}} < \varepsilon^{pre}$

3.1.5.1 Cas du pré-étirement petit : $\varepsilon^{pre} < \dfrac{(\alpha+1)(G_1 - G_0)}{\varepsilon^{tr} E^{AMF}}$

Ce cas correspond aux petites valeurs de ε^{pre}. D'après l'équation (3.1.25) on a aussi :

$$\varepsilon^{tr}\sigma^{chaud} < G_1 - G_0 \tag{3.1.31}$$

L'équation (3.1.29) sature donc en premier, on a instantanément apparition de θ_0 et :

$$\begin{cases} \theta_0 = 1 & a_0 = 0 \\ \theta_1 = 0 & a_1 \geq 0 \\ 1 - \theta_0 - \theta_1 = 0 & z \geq 0 \end{cases} \tag{3.1.32}$$

D'où

$$\begin{cases} -\lambda(T) = z + \phi_0 \\ \varepsilon^{tr}\sigma^{chaud} - \lambda(T) = z - a_1 + \phi_1 \end{cases} \tag{3.1.33}$$

Le système d'équations est bien vérifié pour $T = T_0 - \dfrac{T_0 G_0}{\lambda}$. Lorsque le refroidissement continue, le terme $-\lambda(T)$ croît de la même façon dans les deux équations du système. Plus aucune transformation de phase ne se produit donc lors du refroidissement une fois que $\theta_0 = 1$. Par conséquent, rien ne se passe macroscopiquement et la poutre ne revient pas à sa courbure initiale. Pour concevoir un actionneur, il faut donc proscrire cette situation lors du dimensionnement de la structure, en choisissant une valeur de pré-étirement suffisamment grande (ces cas sont traités dans les paragraphes suivants) :

$$\boxed{\varepsilon^{pre} > \frac{(\alpha+1)(G_1-G_0)}{\varepsilon^{tr}E^{AMF}}} \tag{3.1.34}$$

3.1.5.2 Cas du pré-étirement intermédiaire : $\frac{(\alpha+1)(G_1-G_0)}{\varepsilon^{tr}E^{AMF}} < \varepsilon^{pre} < \varepsilon^{tr} + \frac{(\alpha+1)(G_1-G_0)}{\varepsilon^{tr}E^{AMF}}$

Dans ce cas, le pré-étirement ε^{pre} a été suffisamment important pour provoquer un changement de phase austénite-martensite orientée lors du refroidissement de l'actionneur. L'équation (3.1.30) sature en premier, pour la température :

$$T^E = T_0 + \frac{T_0}{\lambda}(\varepsilon^{tr}\sigma^{chaud} - G_1) \tag{3.1.35}$$

On a augmentation de θ_1 avec :

$$\begin{cases} \theta_0 = 0 & a_0 \geq 0 \\ \theta_1 \neq 0 & a_1 = 0 \\ 1-\theta_0-\theta_1 \geq 0 & z = 0 \end{cases} \tag{3.1.36}$$

D'où

$$\begin{cases} -\lambda(T) = -a_0 + \phi_0 \\ \varepsilon^{tr}E^{AMF}(\varepsilon - \theta_1\varepsilon^{tr}) - \lambda(T) = G_1 \end{cases} \tag{3.1.37}$$

Il faut à présent déterminer s'il y a augmentation de θ_1 durant tout le refroidissement, ou s'il existe une température pour laquelle θ_1 cesse d'augmenter et θ_0 augmente (saturation de l'équation (3.1.29)). Plaçons-nous dans le cas limite où θ_1 augmente jusqu'à atteindre $\theta_1 = 1$, mais l'équation (3.1.29) sature à cet instant. L'équation d'équilibre (3.1.9) permet d'écrire, à la fin du refroidissement :

$$\sigma = E^{AMF}(\varepsilon - \varepsilon^{tr}) = \frac{E^{AMF}(\varepsilon^{pre} - \varepsilon)}{\alpha} \tag{3.1.38}$$

On en déduit :

$$\varepsilon = \frac{\alpha\varepsilon^{tr} + \varepsilon^{pre}}{\alpha+1} \quad \text{et} \quad \sigma = \frac{E^{AMF}(\varepsilon^{pre} - \varepsilon^{tr})}{\alpha+1} \tag{3.1.39}$$

On atteint $\theta_1 = 1$ donc l'équation d'évolution (3.1.37) donne en fin de transformation :

$$-\lambda(T) = G_1 + \frac{\varepsilon^{tr}E^{AMF}(\varepsilon^{tr} - \varepsilon^{pre})}{\alpha+1} \tag{3.1.40}$$

Ce cas limite se produit lorsque la première équation en (3.1.37) sature pour $\theta_1 = 1$, c'est-à-dire :

$$G_1 + \frac{\varepsilon^{tr} E^{AMF}(\varepsilon^{tr} - \varepsilon^{pre})}{\alpha + 1} = G_0 \tag{3.1.41}$$

Ceci justifie donc la distinction en trois évolutions différentes pour la transformation de phase lors du refroidissement. Dans le cas présent, l'évolution est la suivante :

$$\boxed{\begin{aligned} \sigma(T) &= \frac{G_1 + \lambda(T)}{\varepsilon^{tr}} \\ \varepsilon(T) &= \varepsilon^{pre} - \frac{\alpha(G_1 + \lambda(T))}{\varepsilon^{tr} E^{AMF}} \\ \chi(T) &= \frac{\alpha(G_1 + \lambda(T))}{e\varepsilon^{tr} E^{AMF}} \end{aligned}} \tag{3.1.42}$$

Elle vaut jusqu'à une température où θ_1 cesse d'augmenter et θ_0 commence à évoluer. Cette température correspond à la saturation de la première équation en (3.1.37) et vaut T_A définie par :

$$T_A = T_0 - \frac{T_0 G_0}{\lambda} \tag{3.1.43}$$

A partir de T_A, θ_0 apparaît sans changement macroscopique de ε ni de σ, l'état final est :

$$\boxed{\begin{aligned} \theta_0 &= 1 - \theta_1 \\ \theta_1 &= \frac{\varepsilon^{pre}}{\varepsilon^{tr}} + \frac{(\alpha+1)(G_0 - G_1)}{(\varepsilon^{tr})^2 E^{AMF}} \\ \sigma^{froid} &= \sigma(T^A) = \frac{G_1 - G_0}{\varepsilon^{tr}} \\ \varepsilon^{froid} &= \varepsilon(T^A) = \varepsilon^{pre} - \frac{\alpha(G_1 - G_0)}{\varepsilon^{tr} E^{AMF}} \\ \chi^{froid} &= \chi(T^A) = \frac{\alpha(G_1 - G_0)}{e\varepsilon^{tr} E^{AMF}} \end{aligned}} \tag{3.1.44}$$

Le premier cycle chauffage-refroidissement de l'actionneur poutre+fil AMF est représenté en Figure 3.1.6.

3.1.5.3 Cas du pré-étirement grand : $\varepsilon^{tr} + \frac{(\alpha+1)(G_1 - G_0)}{\varepsilon^{tr} E^{AMF}} < \varepsilon^{pre}$

Dans ce cas on a toujours $\theta_0 = 0$ et l'évolution est la suivante :

$$\boxed{\begin{aligned} \sigma(T) &= \frac{G_1 + \lambda(T)}{\varepsilon^{tr}} \\ \varepsilon(T) &= \varepsilon^{pre} - \frac{\alpha(G_1 + \lambda(T))}{\varepsilon^{tr} E^{AMF}} \\ \chi(T) &= \frac{\alpha(G_1 + \lambda(T))}{e\varepsilon^{tr} E^{AMF}} \end{aligned}} \tag{3.1.45}$$

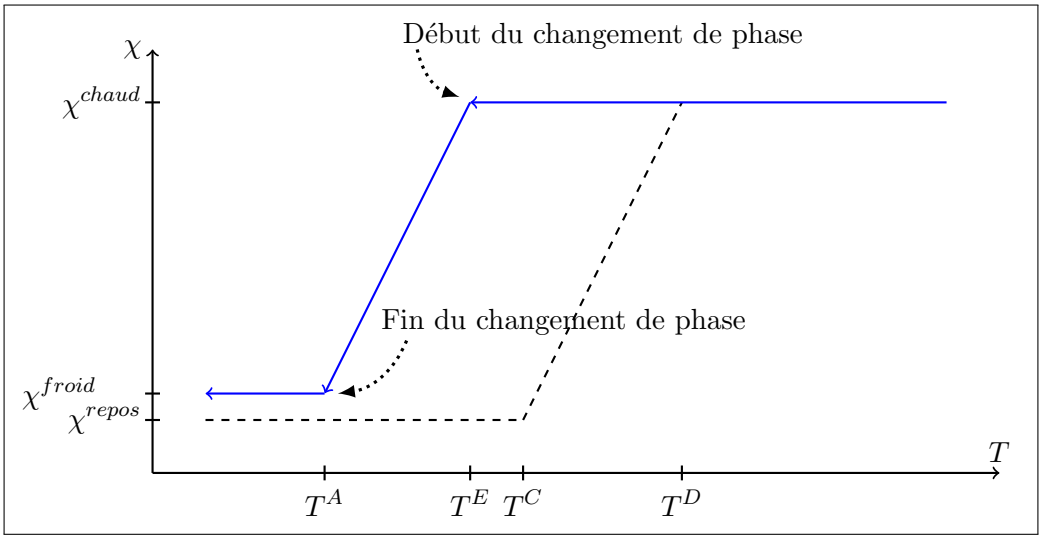

FIGURE 3.1.6 – Refroidissement du fil AMF collé dans le cas du pré-étirement intermédiaire

L'état final est :

$$\boxed{\begin{aligned} \theta_0 &= 0 \\ \theta_1 &= 1 \\ \sigma^{froid} &= \frac{E^{AMF}(\varepsilon^{pre} - \varepsilon^{tr})}{\alpha + 1} \\ \varepsilon^{froid} &= \frac{\varepsilon^{pre} + \alpha\varepsilon^{tr}}{\alpha + 1} \\ \chi^{froid} &= \frac{\alpha(\varepsilon^{pre} - \varepsilon^{tr})}{e(\alpha + 1)} \\ T^F &= T_0 + \frac{T_0}{\lambda}\left(\frac{\varepsilon^{tr} E^{AMF}(\varepsilon^{pre} - \varepsilon^{tr})}{\alpha + 1} - G_1\right) \end{aligned}} \tag{3.1.46}$$

On note qu'avec ce modèle monocristallin, la courbure de la poutre à la fin du premier refroidissement peut être différente de la courbure "au repos" après fabrication de l'actionneur (voir Figure 3.1.7). La température T^F de fin de refroidissement est supérieure à la température T^A de fin de refroidissement du cas précédent.

3.1.6 Deuxième chauffage

Vérifions à présent qu'après un cycle thermique, un nouveau chauffage de l'actionneur entraîne bien la même réponse. Tout d'abord nous partons de l'état en fin de refroidissement dans le cas où $\varepsilon^{pre} > \varepsilon^{tr} + \dfrac{(\alpha+1)(G_1 - G_0)}{\varepsilon^{tr} E^{AMF}}$ avec $\theta_0 = 0$ et $\theta_1 = 1$:

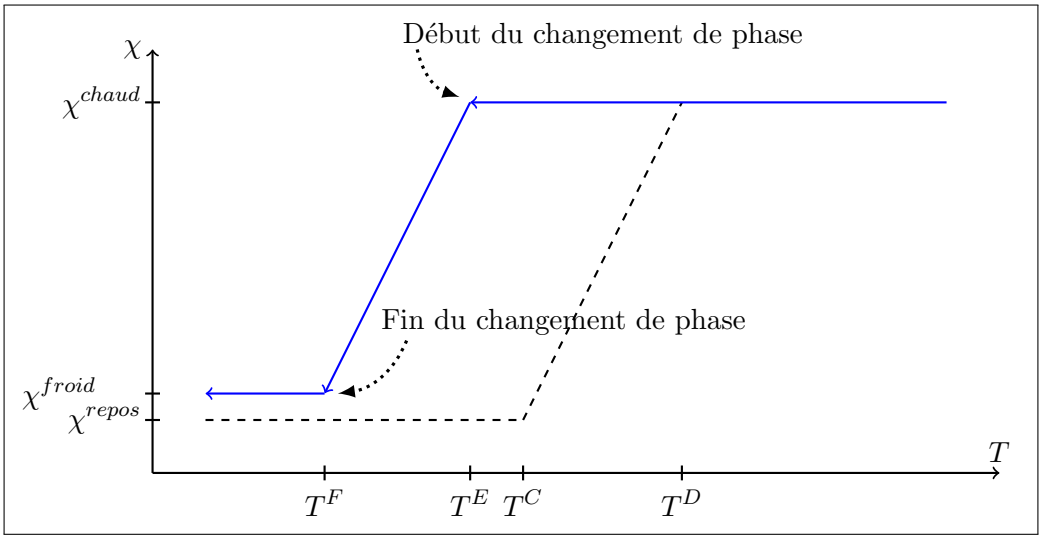

FIGURE 3.1.7 – Refroidissement du fil AMF collé dans le cas du pré-étirement grand

$$\begin{cases} -\lambda(T) = z - a_0 + \phi_0 \\ \varepsilon^{tr}\sigma^{froid} - \lambda(T) = z + \phi_1 \end{cases} \tag{3.1.47}$$

La deuxième équation sature pour :

$$T^G = T_0 + \frac{T_0}{\lambda}(G_1 + \varepsilon^{tr}\sigma^{froid}) \tag{3.1.48}$$

A partir de cette température on a diminution de θ_1 et formation d'austénite. En continuant à chauffer on a l'évolution suivante :

$$\varepsilon^{tr}\sigma - \lambda(T) = -G_1 \tag{3.1.49}$$

Par compatibilité des déformations du fil et de la poutre (équation (3.1.9)), la déformation du fil, la contrainte dans le fil et la courbure de la poutre suivent cette évolution pour $T \geq T^G$:

$$\boxed{\begin{aligned} \varepsilon(T) &= \varepsilon^{pre} - \frac{\alpha\,(\lambda(T) - G_1)}{\varepsilon^{tr} E^{AMF}} \\ \sigma(T) &= \frac{\lambda(T) - G_1}{\varepsilon^{tr}} \\ \text{et} \quad \chi(T) &= \frac{\alpha\,(\lambda(T) - G_1)}{e\varepsilon^{tr} E^{AMF}} \end{aligned}} \tag{3.1.50}$$

Nous obtenons bien la même évolution que dans la section 3.1.4, jusqu'à $\theta_1 = 0$ où l'on obtient à nouveau les mêmes valeurs de σ^{chaud}, ε^{chaud}, T^D et χ^{chaud} (Voir équation (3.1.25)).

Dans le cas où $\frac{(\alpha+1)(G_1-G_0)}{\varepsilon^{tr}E^{AMF}} < \varepsilon^{pre} < \varepsilon^{tr} + \frac{(\alpha+1)(G_1-G_0)}{\varepsilon^{tr}E^{AMF}}$, nous partons de l'état du système en fin de refroidissement :

$$\begin{cases} \theta_0 \neq 0 & a_0 = 0 \\ \theta_1 \neq 0 & a_1 = 0 \\ 1-\theta_0-\theta_1 = 0 & z \geq 0 \end{cases} \tag{3.1.51}$$

Donc l'évolution du système s'écrit :

$$\begin{cases} -\lambda(T) = z + \phi_0 \\ \varepsilon^{tr}\sigma - \lambda(T) = z + \phi_1 \end{cases} \tag{3.1.52}$$

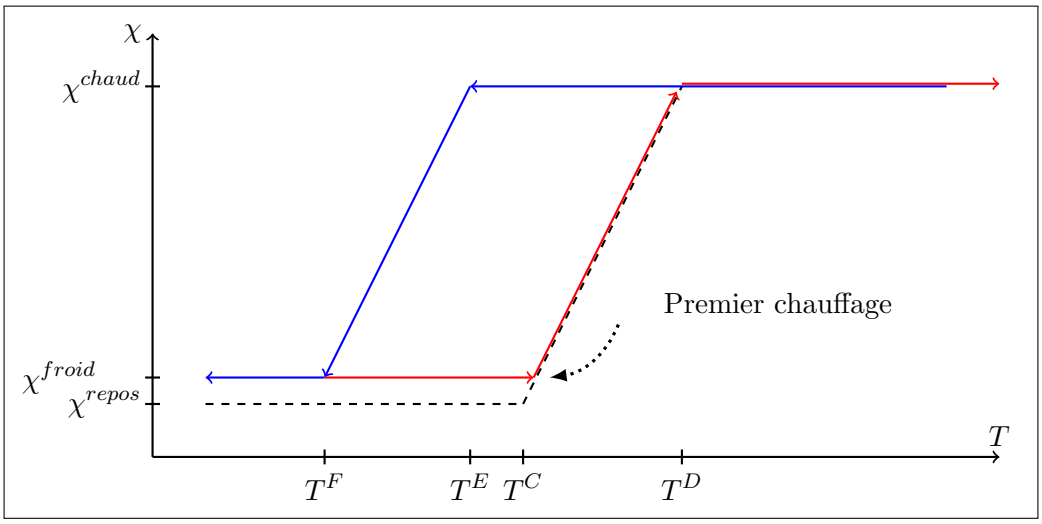

FIGURE 3.1.8 – Cycle stabilisé de l'actionneur poutre + fil AMF

La première équation sature en premier, pour $T^B = T_0 + \frac{T_0 G_0}{\lambda}$: on a disparition de θ_0 sans changement macroscopique de ε ni de σ. Ensuite, θ_1 disparaît progressivement et l'évolution est la même que dans l'expression (3.1.23). Par conséquent, pour les deux cas traités lors du refroidissement, on obtient la même évolution lors du deuxième chauffage ainsi que le même état final chaud. Avec ce modèle de comportement de l'AMF, à partir de la fin du premier cycle thermique, le comportement de l'actionneur ne change plus au fur et à mesure des cycles d'actionnement. Ce cycle stabilisé est illustré en Figure 3.1.8.

3.1.7 Conclusion

En conclusion, il est possible de décrire analytiquement la réponse d'une poutre élastique mise en flexion par un fil AMF monocristallin préalablement précontraint, fixé à sa surface et soumis à des chargements thermiques. C'est une structure adaptative

à courbure variable. Il a été montré qu'au bout d'un cycle thermique (chauffage puis refroidissement) nous obtenons un comportement stabilisé de la structure. La courbure dans l'état froid peut être supérieure ou inférieure à la courbure initialement obtenue juste après le collage, mais lors des cycles thermiques ultérieurs la courbure de la poutre varie entre deux courbures χ^{froid} et χ^{chaud}. En connaissant l'état initial du dispositif, il est possible de déterminer la réponse de l'actionneur à un changement de température. Ce modèle a permis de mettre en évidence une valeur minimale du pré-étirement du fil AMF avant fixation, en-dessous de laquelle la structure ne peux être actionnée qu'une seule fois. De la même façon, nous pouvons déterminer de façon analytique le comportement d'un fil AMF couplé à un ressort élastique, ce qui sera détaillé en section 3.2.

Toutefois, une telle approche analytique n'est plus envisageable dans le cas d'un modèle polycristallin qui reproduirait plus fidèlement le comportement du fil AMF. De même, la réponse d'un système composé de plusieurs structures adaptatives de ce type interagissant entre elles (par exemple par contact) ne pourra pas être déterminée de façon aussi immédiate. Pour résoudre ces problèmes, il faudra donc implémenter numériquement le modèle, ce qui a été proposé dans la suite de ce chapitre en section 3.3. Ainsi, il sera possible de confronter les résultats analytiques ci-dessus avec des simulations par éléments finis. Enfin, dans le chapitre 4 les calculs analytiques seront comparés à des expérimentations.

3.2 Actionneur AMF monocristallin avec ressort élastique - Approche analytique

Dans le cas de l'actionneur en flexion vu en section 3.1, l'énergie élastique emmagasinée dans la poutre pendant la phase de chauffage de l'AMF permet le retour à la position initiale de l'actionneur, lors du refroidissement. De la même façon, il est possible de réaliser avec un ressort élastique l'actionneur présenté en Figure 3.0.1, et les expressions établies dans la section précédente pour l'actionneur AMF couplé à une poutre peuvent être transposées au cas de l'actionneur constitué d'un fil AMF monocristallin et d'un ressort. Le fonctionnement de l'actionneur AMF avec ressort est détaillé en Figure 3.2.1. L'établissement des équations de comportement de l'actionneur étant similaire à la section 3.1, nous nous contenterons ici d'écrire les équations analytiques obtenues pour un AMF monocristallin.

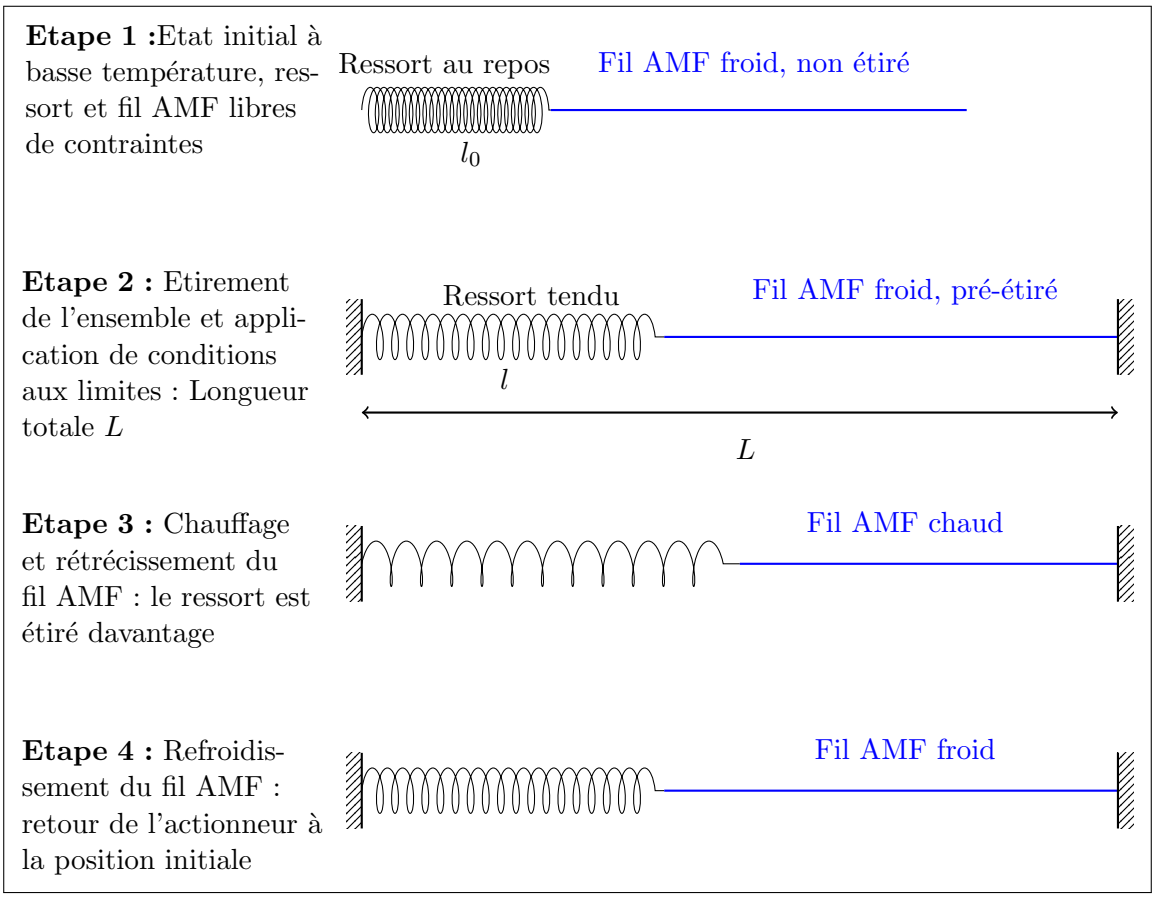

FIGURE 3.2.1 – Fonctionnement de l'actionneur : Ressort et fil AMF

Soit k la raideur du ressort, soit l sa longueur actuelle et l_0 sa longueur à vide. A l'étape 1 sur la Figure 3.2.1, le fil AMF se trouve à une température $T < T^B$ avec $\theta_0 = 1$

et $\theta_1 = 0$ (état martensitique). A la fin de l'étape 2, le fil AMF a été pré-étiré par rapport à sa longueur initiale L_0^{AMF} : par analogie avec la section 3.1, nommons cet étirement ε^{pre}. On suppose que l'étirement permet à l'AMF d'entamer le changement de phase, c'est-à-dire :

$$\frac{G_0 + G_1}{\varepsilon^{tr} E^{AMF}} < \varepsilon^{pre} < \varepsilon^{tr} + \frac{G_0 + G_1}{\varepsilon^{tr} E^{AMF}} \tag{3.2.1}$$

On a donc une contrainte $\sigma^{pre} = \dfrac{G_0 + G_1}{\varepsilon^{tr}}$ dans le fil (voir section 2.3.6). Enfin, notons S la section du fil AMF. Nous avons donc :

$$L = L_0^{AMF}(1 + \varepsilon^{pre}) + l_0 + \frac{\sigma^{pre} S}{k} \tag{3.2.2}$$

La longueur L reste constante au cours du fonctionnement de l'actionneur, donc à chaque instant, pour une déformation ε et une contrainte σ dans le fil AMF, la grandeur μ reste constante :

$$\mu = \varepsilon^{pre} + \frac{\sigma^{pre} S}{k L_0^{AMF}} = \varepsilon + \frac{\sigma S}{k L_0^{AMF}} = \varepsilon + \alpha\sigma \tag{3.2.3}$$

On a posé $\alpha = \dfrac{S}{k L_0^{AMF}}$ pour alléger les expressions. En chauffant à partir d'une température basse (Etape 3 sur la Figure 3.2.1) nous avons, de la même façon qu'en section 3.1, un changement de phase de martensite autoaccomodée en austénite à la température $T^B = T_0 + \dfrac{T_0 G_0}{\lambda}$ sans déformation observable, puis un changement de phase de martensite orientée en austénite à partir de la température $T^C_{ressort}$:

$$T^C_{ressort} = T_0 + \frac{T_0}{\lambda}(2G_1 + G_0) \tag{3.2.4}$$

Similaires aux équations (3.1.23), les équations d'évolution de l'AMF couplé au ressort lors du chauffage sont donc :

$$\boxed{\begin{aligned} \varepsilon(T) &= \mu - \frac{\alpha\,(\lambda(T) - G_1)}{\varepsilon^{tr}} \\ \\ \sigma(T) &= \frac{\lambda(T) - G_1}{\varepsilon^{tr}} \end{aligned}} \tag{3.2.5}$$

La fin de la transformation a lieu pour la température $T^D_{ressort}$ définie ci-dessous, on a alors de façon similaire aux équations (3.1.25) :

$$\boxed{\begin{aligned}\sigma^{chaud} &= \frac{E^{AMF}\mu}{1+\alpha E^{AMF}} \\ \varepsilon^{chaud} &= \frac{\mu}{1+\alpha E^{AMF}} \\ T^D_{ressort} &= T_0 + \frac{T_0}{\lambda}\left(G_1 + \varepsilon^{tr}\left(\frac{\mu E^{AMF}}{1+\alpha E^{AMF}}\right)\right)\end{aligned}} \tag{3.2.6}$$

De même qu'en section 3.1, la description du comportement lors du refroidissement (Etape 4 sur la Figure 3.2.1) nécessite de distinguer plusieurs cas. Tout d'abord, à partir de la température $T^E_{ressort} = T_0 + \frac{T_0}{\lambda}(\varepsilon^{tr}\sigma^{chaud} - G_1)$ on a apparition d'austénite :

$$\boxed{\begin{aligned}\varepsilon(T) &= \mu - \frac{\alpha\left(\lambda(T)+G_1\right)}{\varepsilon^{tr}} \\ \sigma(T) &= \frac{\lambda(T)+G_1}{\varepsilon^{tr}}\end{aligned}} \tag{3.2.7}$$

Ensuite, on distingue trois cas.

3.2.1 Cas où $\mu < \frac{G_1 - G_0}{\varepsilon^{tr}}\frac{1+\alpha E^{AMF}}{E^{AMF}}$

Dans ce cas, le pré-étirement n'était pas assez important pour permettre un retour vers une position "froide" lors du refroidissement : rien ne se passe et l'actionneur reste dans la configuration atteinte en fin de chauffage.

3.2.2 Cas où $\frac{G_1 - G_0}{\varepsilon^{tr}}\frac{1+\alpha E^{AMF}}{E^{AMF}} < \mu < \varepsilon^{tr} + \frac{G_1 - G_0}{\varepsilon^{tr}}\frac{1+\alpha E^{AMF}}{E^{AMF}}$

Dans ce cas, on a un changement de phase austénite - martensite jusqu'à une température où θ_1 cesse d'augmenter et θ_0 commence à apparaître. Cette température vaut T_A :

$$T_A = T_0 - \frac{T_0 G_0}{\lambda} \tag{3.2.8}$$

A partir de T_A, θ_0 apparaît sans changement macroscopique de ε ni de σ, l'état final est :

$$\boxed{\begin{aligned}\sigma^{froid} &= \frac{G_1 - G_0}{\varepsilon^{tr}} \\ \varepsilon^{froid} &= \varepsilon^{pre} - \frac{\alpha(G_1 - G_0)}{\varepsilon^{tr}E^{AMF}}\end{aligned}} \tag{3.2.9}$$

Ici encore, l'état de l'actionneur à la fin du premier cycle chauffage-refroidissement est différent de son état initial. Ensuite, de même que pour l'actionneur AMF avec poutre, tous les cycles sont identiques.

3.2.3 Cas où $\varepsilon^{tr} + \dfrac{G_1 - G_0}{\varepsilon^{tr}} \dfrac{1 + \alpha E^{AMF}}{E^{AMF}} < \mu$

Dans ce cas, le pré-étirement ε^{pre} a été suffisamment important pour provoquer un changement de phase total austénite-martensite orientée lors du refroidissement de l'actionneur. L'état final est :

$$\boxed{\begin{aligned} \sigma^{froid} &= \frac{E^{AMF}\left(\mu - \varepsilon^{tr}\right)}{1 + \alpha E^{AMF}} \\ \varepsilon^{froid} &= \frac{\mu + \alpha E^{AMF} \varepsilon^{tr}}{1 + \alpha E^{AMF}} \\ T^{F}_{ressort} &= T_0 + \frac{T_0}{\lambda}\left(\frac{\varepsilon^{tr} E^{AMF}\left(\mu - \varepsilon^{tr}\right)}{1 + \alpha E^{AMF}} - G_1\right) \end{aligned}} \tag{3.2.10}$$

On note que dans ce modèle monocristallin, l'état de l'actionneur à la fin du premier refroidissement peut être différent de son état initial.

3.3 Implémentation numérique

L'approche analytique présentée en section 3.1 et 3.2 n'est pas envisageable pour un modèle de fil AMF polycristallin couplé à une structure élastique quelconque, ou encore pour des systèmes avec plusieurs fils AMF monocristallins indépendants. Pour ces structures complexes, il faut recourir à une résolution numérique. Nous proposons ici une implémentation numérique du modèle AMF monocristallin et polycristallin. Pour le modèle polycristallin, une version discrète est adoptée ici.

3.3.1 Discrétisation de la texture

Au lieu de considérer des distributions $\varepsilon^{tr}(s)$ et $C(s)$ comme en section 2.4, la texture est ici donnée par une liste de n orientations cristallines, et il suffira de se restreindre à $n = 1$ pour traiter le cas du monocristal. Les notations adoptées sont donc semblables à celles de la section 2.4. Les variables internes sont, pour chaque orientation cristalline i :

- La fraction volumique de martensite autoaccomodée θ_{0i}
- La fraction volumique de martensite orientée θ_{1i}
- La fraction volumique d'austénite $C_i - \theta_{0i} - \theta_{1i}$

Les paramètres matériau sont les suivants :

- ε_i^{tr} la déformation maximale de transformation de phase pour l'orientation cristalline i
- E le module d'Young
- T_0 une température de référence
- λ un paramètre de chaleur latente
- G_0 un paramètre de dissipation correspondant à la transformation de phase austénite - martensite autoaccomodée
- G_1 un paramètre de dissipation correspondant à la transformation de phase austénite - martensite orientée (avec $G_0 < G_1$)

Nous noterons toujours $\lambda(T) = \lambda\dfrac{T - T_0}{T_0}$, où T est la température actuelle du matériau. Nous noterons aussi $\Theta = (\theta_{01}, ...\theta_{0n}, \theta_{11}....\theta_{1n})$. L'énergie libre du matériau s'écrit sous forme discrète pour le polycristal :

$$w(\varepsilon, \Theta, T) = \frac{1}{2}E(\varepsilon - \sum_{i=1}^{n} \theta_{1i}\varepsilon_i^{tr})^2 + \lambda(T)\sum_{i=1}^{n}(\theta_{0i} + \theta_{1i}) \tag{3.3.1}$$

Par conséquent, le problème de minimisation de l'équation (2.4.4) (section 2) devient :

$$\inf_{\Theta}\left(\frac{1}{2}E(\varepsilon - \sum_{i=1}^{n} \theta_{1i}\varepsilon_i^{tr})^2 + \lambda(T)(\sum_{i=1}^{n}(\theta_{0i} + \theta_{1i})) + G_0\sum_{i=1}^{n}|\dot{\theta}_{0i}| + G_1\sum_{i=1}^{n}|\dot{\theta}_{1i}|\right) \tag{3.3.2}$$

3.3.2 Discrétisation temporelle du problème

De la même façon qu'en section 3.1 nous écrivons pour l'orientation cristalline i la force d'entraînement thermodynamique $\mathbf{A_i}$:

$$\mathbf{A_i} = \begin{pmatrix} -\dfrac{\partial w}{\partial \theta_{0i}} \\ -\dfrac{\partial w}{\partial \theta_{1i}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda(T) \\ \varepsilon_i^{tr} E(\varepsilon - \sum_{j=1}^{n} \theta_{1j} \varepsilon_j^{tr}) - \lambda(T) \end{pmatrix} \tag{3.3.3}$$

La seconde loi de la thermodynamique donne la relation suivante :

$$\mathbf{A}_i \in \partial\Phi(\dot{\theta}_{0i}, \dot{\theta}_{1i}) + \partial\mathcal{I}_{\mathcal{T}_i}(\theta_{0i}, \theta_{1i}) \tag{3.3.4}$$

Où $\mathcal{T}_i$ est le domaine convexe défini par :

$$\mathcal{T}_i = \{(\theta_{0i}, \theta_{1i}) \in \mathbb{R}_+^2 \quad qui \quad satisfait \quad \theta_{0i} + \theta_{1i} \leq C_i\} \tag{3.3.5}$$

Et $\mathcal{I}_{\mathcal{T}_i}(\theta_{0i}, \theta_{1i})$ est la fonction indicatrice de ce domaine. De la même façon qu'en section 3.1.1 on définit $\partial\mathcal{I}_{\mathcal{T}_i}(\theta_{0i}, \theta_{1i})$ le sous-différentiel de cette fonction.

Par définition, un vecteur $\mathbf{B}_i$ de l'espace $\mathbb{R}^2$ appartient à $\partial\mathcal{I}_{\mathcal{T}_i}(\theta_{0i}, \theta_{1i})$ si et seulement s'il existe $z_i \in \mathbb{R}_+$ et $\mathbf{a}_i = \begin{pmatrix} a_{0i} \\ a_{1i} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_+^2$ tels que :

$$\begin{cases} \mathbf{B}_i = \begin{pmatrix} z_i \\ z_i \end{pmatrix} - \mathbf{a}_i \\ z_i(C_i - \theta_{0i} - \theta_{1i}) = 0 \\ \text{et} \quad \mathbf{a}_i . \begin{pmatrix} \theta_{0i} \\ \theta_{1i} \end{pmatrix} = 0 \end{cases} \tag{3.3.6}$$

Procédons à présent à la discrétisation temporelle du problème. Soient θ_{0i}^0 et θ_{1i}^0 les fractions volumiques actuelles de martensite auto-accomodée et orientée dans l'orientation cristalline i obtenues par le calcul numérique à l'incrément précédent. Pour déterminer les nouvelles valeurs θ_{0i} et θ_{1i}, l'équation d'évolution se réécrit sous la forme :

$$\mathbf{A_i} = \mathbf{B^d}_i + \mathbf{B^r}_i \tag{3.3.7}$$

Avec

$$\begin{cases} \mathbf{B^d}_i = \begin{pmatrix} B_{0i}^d \\ B_{1i}^d \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} \partial\Phi(\theta_{0i} - \theta_{0i}^0) \\ \partial\Phi(\theta_{1i} - \theta_{1i}^0) \end{pmatrix} \\ \mathbf{B^r}_i = \begin{pmatrix} B_{0i}^r \\ B_{1i}^r \end{pmatrix} \in \partial\mathcal{I}_{\mathcal{T}_i}(\theta_{0i}, \theta_{1i}) \end{cases} \tag{3.3.8}$$

Nous obtenons donc un système de $2n$ équations avec $4n$ contraintes. Il est possible de procéder à un changement de variables pour obtenir un problème de complémentarité linéaire (LCP) où le système est constitué de $7n$ équations linéaires mais où les

contraintes s'expriment de façon plus simple. Ce type de problème a été largement étudié dans le domaine de l'optimisation mathématique, et des algorithmes robustes existent pour résoudre les LCP.

3.3.3 Reformulation du problème

Dans Peigney et al. (2011) la reformulation du problème d'un monocristal tridimensionnel avec plusieurs variantes de martensite avait été menée, pour obtenir un problème de complémentarité linéaire (LCP). De façon similaire, nous allons ici reformuler le problème d'un polycristal unidimensionnel à deux variantes de martensite à l'aide d'un changement de variables. Définissons les 9 variables suivantes :

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha_{0i}^{+} = G_0 - \mathbf{B_{0i}^{d}} = G_0 + \lambda(T) + z_i - a_{0i} \\ \alpha_{0i}^{-} = G_0 + \mathbf{B_{0i}^{d}} = G_0 - \lambda(T) - z_i + a_{0i} \\ \alpha_{1i}^{+} = G_1 - \mathbf{B_{1i}^{d}} = G_1 - \varepsilon_i^{tr} E(\varepsilon - \sum_{j=1}^{n} \theta_{1j}\varepsilon_j^{tr}) + \lambda(T) + z_i - a_{1i} \\ \alpha_{1i}^{-} = G_1 + \mathbf{B_{1i}^{d}} = G_1 + \varepsilon_i^{tr} E(\varepsilon - \sum_{j=1}^{n} \theta_{1j}\varepsilon_j^{tr}) - \lambda(T) - z_i + a_{1i} \\ \mu_{0i}^{+} = \langle \theta_{0i} - \theta_{0i}^{0} \rangle_{+} \\ \mu_{0i}^{-} = \langle \theta_{0i} - \theta_{0i}^{0} \rangle_{-} \\ \mu_{1i}^{+} = \langle \theta_{1i} - \theta_{1i}^{0} \rangle_{+} \\ \mu_{1i}^{-} = \langle \theta_{1i} - \theta_{1i}^{0} \rangle_{-} \\ \gamma_i = C_i - \theta_{0i} - \theta_{1i} \end{array}\right. \tag{3.3.9}$$

Ainsi, μ_{0i}^{+} est l'incrément positif de fraction volumique de martensite autoaccomodée pendant le pas de temps considéré. Introduisons les vecteurs $\mathbf{s}$ et $\mathbf{x}$ de taille $7n$:

$$\mathbf{s} = \begin{pmatrix} \alpha_{0i}^{+} \\ \alpha_{0i}^{-} \\ \alpha_{1i}^{+} \\ \alpha_{1i}^{-} \\ \theta_{0i} E(\varepsilon_i^{tr})^2 \\ \theta_{1i} E(\varepsilon_i^{tr})^2 \\ \gamma_i E(\varepsilon_i^{tr})^2 \end{pmatrix} \quad \texttt{et} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mu_{0i}^{+} E(\varepsilon_i^{tr})^2 \\ \mu_{0i}^{-} E(\varepsilon_i^{tr})^2 \\ \mu_{1i}^{+} E(\varepsilon_i^{tr})^2 \\ \mu_{1i}^{-} E(\varepsilon_i^{tr})^2 \\ a_{0i} \\ a_{1i} \\ z_i \end{pmatrix} \tag{3.3.10}$$

Observons que la définition du problème impose les conditions suivantes :

$$\left\{\begin{array}{l} \mathbf{s} \geq 0 \\ \mathbf{x} \geq 0 \\ \mathbf{s}.\mathbf{x} = 0 \end{array}\right. \tag{3.3.11}$$

On peut remarquer que :

$$\left\{\begin{array}{l}\theta_{0i} = \theta_{0i}^0 + \mu_{0i}^+ - \mu_{0i}^- \\ \theta_{1i} = \theta_{1i}^0 + \mu_{1i}^+ - \mu_{1i}^- \\ \gamma_i = C_i - \theta_{0i}^0 - \mu_{0i}^+ + \mu_{0i}^- - \theta_{1i}^0 - \mu_{1i}^+ + \mu_{1i}^-\end{array}\right. \tag{3.3.12}$$

On peut alors réécrire les équations de comportement (3.3.3), (3.3.6), (3.3.7) et (3.3.8) sous la forme d'un système linéaire de taille $7n$:

$$\mathbf{s} = \mathbf{M}\mathbf{x} + \mathbf{q} \tag{3.3.13}$$

Soit I la matrice identité de taille n. La matrice M, de taille $7n$ x $7n$ est définie comme suit :

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -I & 0 & +I \\ 0 & 0 & 0 & 0 & +I & 0 & -I \\ 0 & 0 & +\frac{\varepsilon_i^{tr}}{\varepsilon_j^{tr}} & -\frac{\varepsilon_i^{tr}}{\varepsilon_j^{tr}} & 0 & -I & +I \\ 0 & 0 & -\frac{\varepsilon_i^{tr}}{\varepsilon_j^{tr}} & +\frac{\varepsilon_i^{tr}}{\varepsilon_j^{tr}} & 0 & +I & -I \\ +I & -I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +I & -I & 0 & 0 & 0 \\ -I & +I & -I & +I & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.3.14}$$

Dans cette matrice, les termes $\frac{\varepsilon_j^{tr}}{\varepsilon_i^{tr}}$ représentent une matrice de taille $n \times n$ dont les termes valent $\frac{\varepsilon_j^{tr}}{\varepsilon_i^{tr}}$ avec $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq i \leq n$. Enfin, le vecteur $\mathbf{q}$ dépend de l'état actuel du matériau :

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} G_0 + \lambda(T) \\ G_0 - \lambda(T) \\ G_1 + \lambda(T) - \varepsilon_i^{tr} E(\varepsilon - \sum_{j=1}^{n} (\theta_{1j}^0 \varepsilon_j^{tr})) \\ G_1 - \lambda(T) + \varepsilon_i^{tr} E(\varepsilon - \sum_{j=1}^{n} (\theta_{1j}^0 \varepsilon_j^{tr})) \\ \theta_{0i}^0 E(\varepsilon_i^{tr})^2 \\ \theta_{1i}^0 E(\varepsilon_i^{tr})^2 \\ \left(C_i - \theta_{0i}^0 - \theta_{1i}^0\right) E(\varepsilon_i^{tr})^2 \end{pmatrix} \tag{3.3.15}$$

Les équations constitutives sont donc équivalentes au Problème de Complémentarité Linéaire (LCP) :

$$\text{Trouver } \mathbf{s} \in \mathbb{R}_+^{7n} \text{ et } \mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^{7n} \text{ tels que } \left\{\begin{array}{l}\mathbf{s} = \mathbf{M}\mathbf{x} + \mathbf{q} \\ \mathbf{s}.\mathbf{x} = 0\end{array}\right. \tag{3.3.16}$$

Remarquons que la matrice $\mathbf{M}$ ne dépend pas des paramètres du problème, alors que $\mathbf{q}$ dépend des paramètres matériau mais aussi de l'état actuel du matériau (température, déformation actuelle et variables internes). Les termes $E(\varepsilon_i^{tr})^2$ qui apparaissent dans la définition des vecteurs $\mathbf{s}$, $\mathbf{x}$ et $\mathbf{q}$ sont introduits pour des questions de conditionnement du problème. Ceci permet d'obtenir en (3.3.14) une matrice $\mathbf{M}$ dont les termes sont du même ordre de grandeur.

3.3.4 Résolution du problème de complémentarité linéaire (LCP)

L'intérêt de ce changement de variables et de la réécriture du problème est que des algorithmes efficaces existent pour résoudre des problèmes LCP (Cottle et al. (1992)). Nous utilisons ici un algorithme adapté de la méthode de Lemke (Erleben (2011)), disponible en ligne en langage MATLAB. Il est tout d'abord utilisé dans l'environnement MATLAB pour valider l'algorithme, et en section 3.4 il est adapté en langage FORTRAN. Les vecteurs s et x sont les solutions du problème, et s contient les nouvelles valeurs θ_{0i} et θ_{1i} des variables d'état qui permettent ensuite de calculer la contrainte actualisée σ. A noter qu'un modèle tridimensionnel pourrait être développé avec la même approche et la même reformulation en LCP. Nous pouvons à présent détailler dans l'algorithme 1 la procédure donnant le comportement du matériau à chaque pas de temps.

Algorithme 1 Comportement du fil AMF polycristallin

Input:
- Paramètres du matériau
- Les $2n$ valeurs des variables internes θ_{0i}^0 et θ_{1i}^0
- La déformation actuelle ε^0
- Un incrément de déformation $d\varepsilon$
- La température actuelle T^0
- Un incrément de température dT

$\varepsilon = \varepsilon^0 + d\varepsilon$
$T = T^0 + dT$
Remplissage de $\mathbf{q}$ à l'aide des nouvelles valeurs ε et T
Résolution du problème LCP $\mathbf{s} = \mathbf{M}\mathbf{x} + \mathbf{q}$ et obtention de $\mathbf{x}$
Calcul de $\mathbf{s} = \mathbf{M}\mathbf{x} + \mathbf{q}$
for $i \leq n$ **do**

$$\theta_{0i} = \frac{s(4n+i)}{E(\varepsilon_i^{tr})^2}$$

$$\theta_{1i} = \frac{s(5n+i)}{E(\varepsilon_i^{tr})^2}$$

end for

$$\sigma = E\left(\varepsilon - \sum_{i=1}^{n} \theta_{1i}\varepsilon_i^{tr}\right)$$

Output:
- Les $2n$ valeurs des variables internes θ_{0i} et θ_{1i}
- La contrainte σ

3.3.5 Validation de la simulation numérique

Pour valider l'algorithme 1 de résolution numérique du comportement mécanique de l'AMF, la simulation d'un essai de traction isotherme est menée : on peut ainsi comparer la solution analytique donnée en section 2.5 avec la simulation numérique de la version discrète du modèle polycristallin décrite en section 3.3.4. Tout d'abord, simulons l'essai de traction isotherme à 25 °C réalisé en section 2.8, à l'aide des paramètres identifiés dans le chapitre 2. Pour discrétiser la texture, nous considérons un AMF avec 50 orientations cristallines. Comme la fonction texture $\varepsilon^{tr}(s)$ identifiée en section 2.8 varie très rapidement au voisinage de $s = 0$, nous faisons le choix de discrétiser plus finement dans cette zone. En Figure 3.3.1, un diagramme en bâtons représente la texture discrète adoptée : la largeur et la hauteur de chaque bâton correspondent respectivement à C_i et ε_i^{tr}.

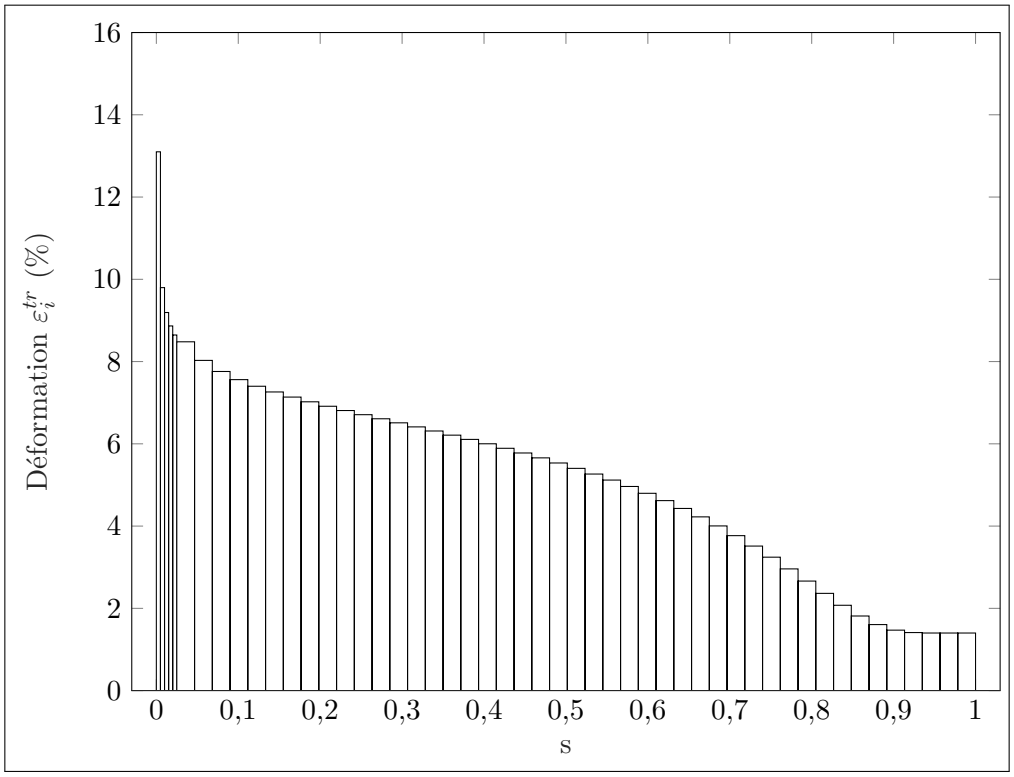

FIGURE 3.3.1 – Texture à 50 grains

La simulation numérique permet d'obtenir la courbe tracée en Figure 3.3.2, où l'on peut observer une succession de petites portions élastiques et de petits plateaux de changement de phase, dont la position et la longueur dépendent de la texture ε_i^{tr} et C_i adoptée. On remarque que la discrétisation adoptée (voir Figure 3.3.1) permet d'obtenir une courbe assez lisse au début du changement de phase. Sur la même figure, la courbe numérique est comparée à la courbe analytique et à la courbe expérimentale : une bonne concordance est observée entre les trois courbes.

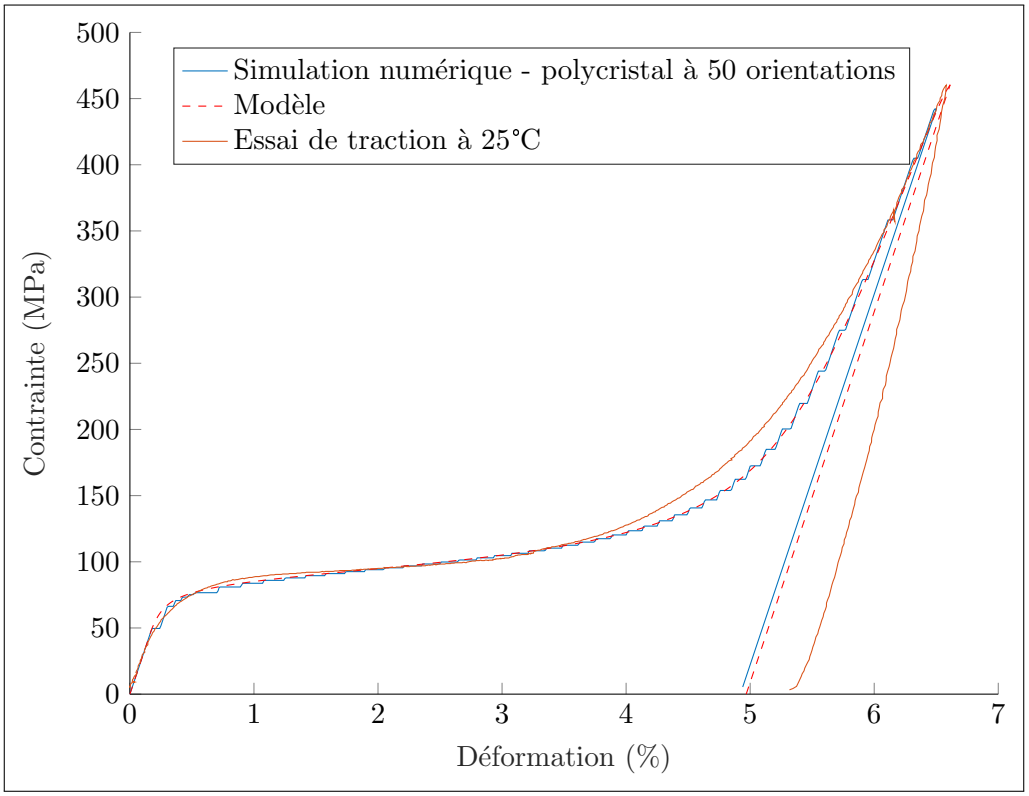

FIGURE 3.3.2 – Simulation numérique - Polycristal à 50 orientations cristallines, traction à 25°C

L'algorithme de résolution numérique est aussi valide à haute température. En Figure 3.3.3 est représentée la simulation d'une traction isotherme à 70°C ainsi que la courbe analytique correspondante, avec les mêmes paramètres matériau.

3.3.6 Conclusion

En conclusion, l'implémentation numérique de la version discrète du modèle AMF polycristallin a été effectuée en transformant un problème de minimisation sous contraintes d'une énergie non dérivable, en la recherche d'une solution à un système linéaire de plus grande dimension. Un algorithme existant a été utilisé pour résoudre le problème de complémentarité linéaire (LCP). L'algorithme obtenu est robuste et permet de simuler le comportement de l'AMF à basse température et à haute température. En section 3.4 où il sera implémenté dans le logiciel de calcul par élements finis ABAQUS, nous verrons qu'il est aussi capable de simuler le comportement sous chargement thermique et donc l'effet mémoire de forme utilisé dans les actionneurs.

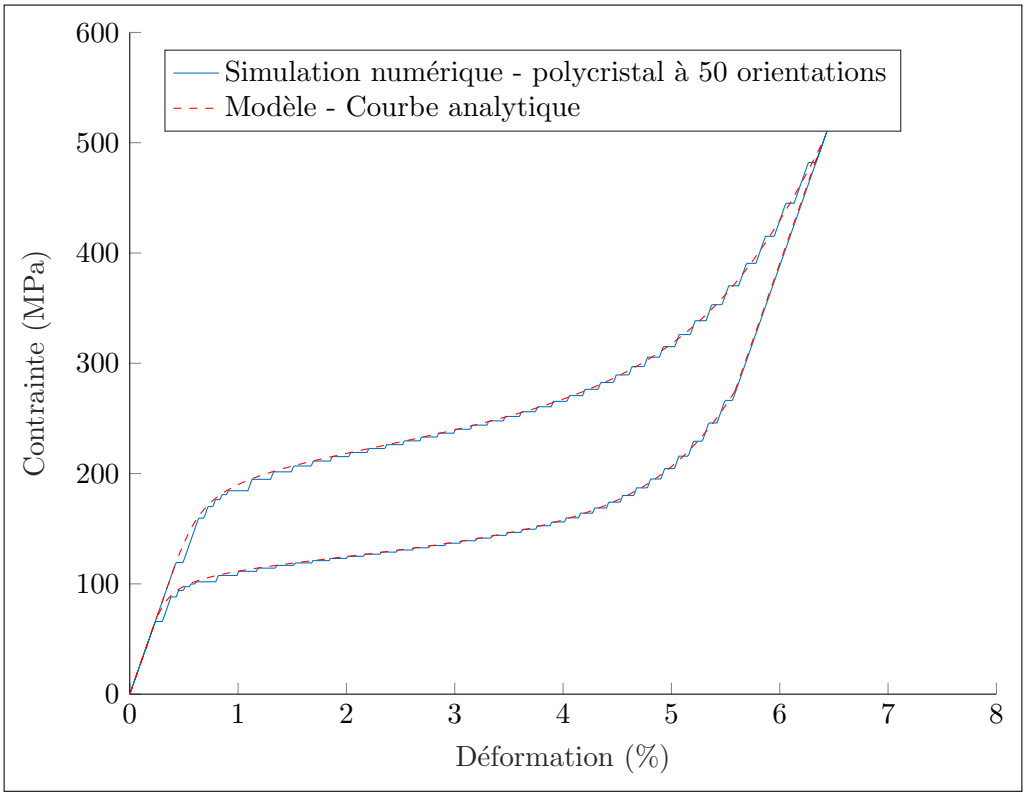

FIGURE 3.3.3 – Simulation numérique - Polycristal à 50 orientations cristallines, traction à 70°C

3.4 UMAT Abaqus

3.4.1 Implémentation de l'algorithme

L'algorithme développé en section 3.3 reproduit en une dimension le comportement de l'AMF polycristallin, et donc aussi celui de l'AMF monocristallin si l'on considère uniquement un grain. En transposant cet algorithme dans un code éléments finis, il est à présent possible de simuler des structures contenant des fils AMF. Le logiciel ABAQUS est choisi ici, car il permet à l'utilisateur d'implémenter un comportement matériau grâce à un script UMAT (User Material subroutine) écrit en langage FORTRAN. Le fil AMF sera modélisé par des éléments de barre linéaires *T3D2* dont le comportement matériau est unidimensionnel. L'algorithme contenu dans le script UMAT est similaire à l'algorithme 1, mais il doit aussi fournir à ABAQUS la raideur tangente E^T du matériau en sortie. Une fois le problème LCP résolu, des tests sont donc menés sur le vecteur solution $\mathbf{x}$ et sur les variables internes θ_{1i} pour déterminer si le matériau se trouve dans un stade élastique ou bien dans une transformation de phase. Dans le cas d'une évolution élastique, la raideur tangente E^T est égale au module E du matériau. Dans le cas où une des variables θ_{1i} est différente de ses valeurs extrêmes (0 et C_i) et qu'en même temps on a $x_{2n+i} \neq 0$ ou $x_{3n+i} \neq 0$ (c'est-à-dire un changement d'une variable interne), alors la raideur tangente E^T est nulle. L'algorithme 2 décrit le contenu du script UMAT, et le code du script UMAT peut être consulté en Annexe A.

3.4.2 Validation de l'algorithme

Nous allons dans cette section comparer le résultat de la simulation par éléments finis d'une poutre contenant un fil AMF monocristallin en tant qu'actionneur, avec les résultats analytiques de la section 3.1. Pour simuler ce problème, il a été choisi de recourir à l'option *EMBEDDED* qui permet de contraindre des éléments (ici, les éléments barre constituant le fil AMF) à l'intérieur d'un volume (ici, les éléments volumiques constituant la poutre élastique). Les degrés de liberté en translation des noeuds des éléments du fil AMF sont supprimés, et ces noeuds sont contraints à suivre les déplacements des noeuds des éléments volumiques, par interpolation. La poutre est modélisée par des hexaèdres quadratiques à 20 noeuds et à intégration réduite *C3D20R*. Pour ce problème impliquant de grands déplacements, la prise en compte des non-linéarités géométriques est activée. Considérons un fil AMF monocristallin de diamètre $0,5$mm, préalablement étiré jusqu'à ce que la réorientation de martensite soit complète. On a donc d'après (3.1.4) :

$$\varepsilon^{pre} = \frac{G_0 + G_1}{\varepsilon^{tr}_{max} E^{AMF}} + \varepsilon^{tr}_{max} \tag{3.4.1}$$

Le fil AMF est collé sur une poutre d'épaisseur h, de largeur b et de longueur L. Le module d'Young de la poutre est noté E^p. On suppose que le fil se trouve à une distance $e = 0,9$mm de la fibre neutre. Les paramètres matériau de l'AMF sont ceux qui ont été identifiés en section 2.8 et sont listés dans le tableau 3.1 avec les paramètres

Algorithme 2 UMAT pour ABAQUS - AMF polycristallin

Input:
- Nombre de variables internes 2n
- Paramètres du matériau
- Les $2n$ valeurs des variables internes θ_{0i}^0 et θ_{1i}^0
- La déformation actuelle ε^0
- Un incrément de déformation $d\varepsilon$
- La température actuelle T^0
- Un incrément de température dT

$\varepsilon = \varepsilon^0 + d\varepsilon$ # Actualisation de la déformation
$T = T^0 + dT$ # Actualisation de la température
Remplissage de $\mathbf{q}$ à l'aide des nouvelles valeurs ε et T
Résolution du problème LCP $\mathbf{s} = \mathbf{Mx} + \mathbf{q}$ et obtention de $\mathbf{x}$
Calcul de $\mathbf{s} = \mathbf{Mx} + \mathbf{q}$
for $i \leq n$ **do**
  $\theta_{0i} = \dfrac{s(4n+i)}{E(\varepsilon_i^{tr})^2}$ # Actualisation des variables internes
  $\theta_{1i} = \dfrac{s(5n+i)}{E(\varepsilon_i^{tr})^2}$
end for
$\sigma = E\left(\varepsilon - \sum_{i=1}^{n} \theta_{1i}\varepsilon_i^{tr}\right)$
$\eta = 10^{-6}$ # Paramètre de tolérance
$E^T = E$ # Valeur par défaut de la raideur tangente
for $i \leq n$ **do**
  if $[\ |x(3n+i) - x(2n+i)| > \eta \quad and \quad \eta < \theta_{1i} < C_i - \eta\ ]$ **then**
    $E^T = 0$ # Variation de $\theta_1 i$
  end if
end for

Output:
- Les $2n$ valeurs des variables internes θ_{0i} et θ_{1i}
- La contrainte σ
- La raideur tangente E^T

géométriques du problème.

TABLE 3.1 – Paramètres matériau pour l'AMF et paramètres géométriques de l'assemblage

E^{AMF}	28000	MPa
λ	74,2	MPa
T_0	294,9	°K
ε^{tr}_{max}	0,05	
G_0	3,0	MPa
G_1	3,5	MPa
h	2	mm
b	10	mm
L	200	mm
E^p	12000	MPa
e	0,9	mm

Pour cette simulation, la contrainte *EMBEDDED* ne doit être activée qu'après le pré-étirement du fil. Or, dans ABAQUS elle ne peut pas être inactive en début de simulation puis activée en cours de simulation entre deux étapes. Il a donc été nécessaire de modifier légèrement le comportement du matériau dans le script UMAT pour obtenir le comportement d'un fil AMF pré-étiré. Pour ceci, déterminons l'état de l'AMF à l'issue du pré-étirement :

$$\begin{cases} \theta_0 = 0 \\ \theta_1 = 1 \\ \varepsilon = \varepsilon^{pre} = \dfrac{G_0 + G_1}{\varepsilon^{tr}_{max} E^{AMF}} + \varepsilon^{tr}_{max} \\ \sigma = \dfrac{G_0 + G_1}{\varepsilon^{tr}_{max}} \end{cases} \tag{3.4.2}$$

Tout d'abord, nous imposons donc des conditions initiales sur les variables internes θ_0 et θ_1 pour tous les éléments de fil AMF. Ensuite, dans le script UMAT, nous modifions le calcul de la déformation actualisée au début de l'algorithme. La formule suivante est implémentée :

$$\varepsilon = \varepsilon^0 + d\varepsilon + \varepsilon^{pre} \tag{3.4.3}$$

Ainsi, la déformation et la contrainte calculées en début de simulation valent :

$$\begin{cases} \varepsilon = \varepsilon^{pre} \\ \sigma = E^{AMF}\left(\varepsilon^{pre} - \varepsilon^{tr}_{max}\right) = \dfrac{G_0 + G_1}{\varepsilon^{tr}_{max}} \end{cases} \tag{3.4.4}$$

Lors de la première étape de la simulation, la poutre est encastrée sur une face et libre de contraintes sur l'autre. La contrainte *EMBEDDED* correspondant au collage du fil est active, on réalise donc la décharge élastique du fil AMF décrite en section 3.1.3. La poutre initialement droite devient légèrement courbée, ε et σ diminuent dans l'AMF, et les variables internes θ_0 et θ_1 sont modifiées. On obtient à la fin de cette première étape l'équilibre entre le fil AMF pré-étiré et la poutre élastique décrit par les équations (3.1.15). Ensuite, toujours avec le même algorithme où le calcul de la déformation actualisée est adapté au problème, il est possible de simuler des chargements thermiques pour faire varier la courbure de l'actionneur. Les étapes de la simulation sont résumées dans le tableau 3.2. Pour pouvoir observer l'intégralité du changement de phase, l'étape 1 de la simulation est menée à un température de 260 °K, puis le fil est chauffé jusqu'à 620 °K lors de l'étape 2. Toutefois, cette température ne sera pas atteinte expérimentalement car le collage ne résistera pas à une forte chaleur.

TABLE 3.2 – Etapes de la simulation ABAQUS du problème du fil AMF collé sur une poutre

Etape	**Conditions aux limites**	**Chargements**
1 : Equilibre fil-poutre	Encastrement à la base de la poutre	Température imposée 260 °K
2 : Chauffage du fil	Encastrement à la base de la poutre	Chauffage du fil à 620 °K
3 : Refroidissement	Encastrement à la base de la poutre	Refroidissement du fil à 260 °K

TABLE 3.3 – Rayons de courbure analytiques calculés avec le modèle monocristallin

Etape	**Expression**	**Valeur**
Au repos, après collage	$R_c = \dfrac{e\varepsilon^{tr}E^{AMF}(\alpha+1)}{\alpha(G_0+G_1)}$	3676 mm
Haute température	$R_c = \dfrac{e(\alpha+1)}{\alpha\varepsilon^{pre}}$	312 mm
Basse température	$R_c = \dfrac{e(\alpha+1)}{\alpha(\varepsilon^{pre}-\varepsilon^{tr})}$	3676 mm

A l'aide des équations (3.1.15) et (3.1.25) on peut calculer les rayons de courbure théoriques de l'actionneur au repos (après fabrication) et de l'actionneur avec le fil AMF chaud. La contrainte dans le fil à haute température vaut ici $\sigma^{chaud} = 1449$ MPa donc en calculant les expressions en section 3.1.5 on peut établir que lors du refroidissement on se trouve dans la situation correspondant aux équations (3.1.46). Nous pouvons donc lister dans le tableau 3.3 les rayons de courbure analytiques obtenus avec le modèle AMF monocristallin, au repos après collage, à haute température et à basse température. Le paramètre adimensionnel $\alpha = \dfrac{E^{AMF}Se^2}{(EI)^{poutre}}$ introduit en section 3.1.3 est repris ici. Notons

que dans cette simulation les valeurs numériques ne sont pas toutes réalistes, en effet pour une contrainte de 1449 MPa le fil AMF entrerait probablement dans le domaine de la plasticité. De même, la température pour laquelle la courbure maximale est atteinte ne sera pas imposée au fil en pratique. Dans un cas pratique, avec ces paramètres de fabrication la courbure à haute température ne serait jamais atteinte. On remarque que dans le cas présent, le rayon de courbure à basse température après actionnement est le même que le rayon de courbure après collage, au repos, ce qui n'est pas toujours vrai.

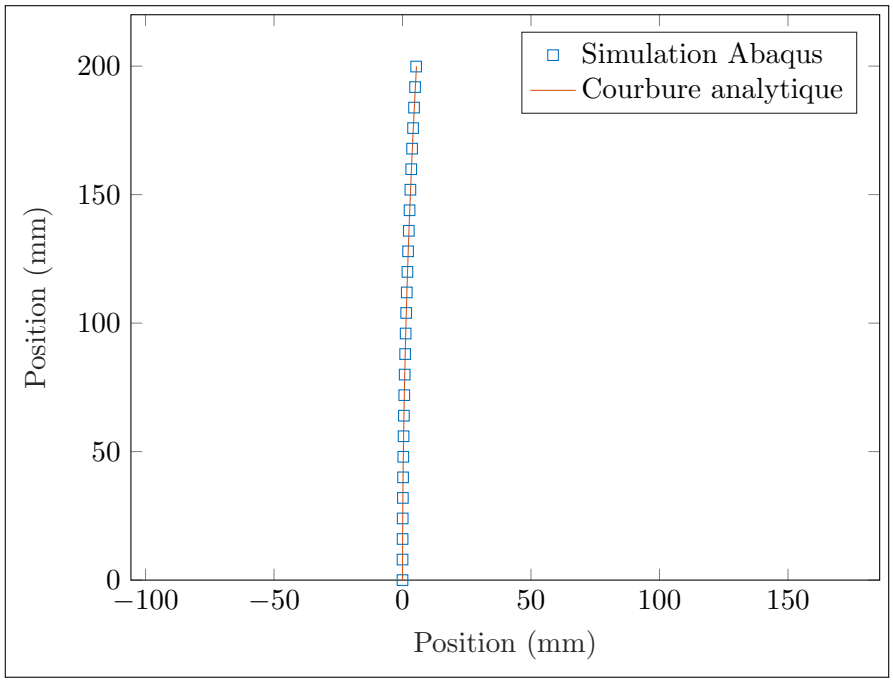

FIGURE 3.4.1 – Comparaison des déformées - Calcul éléments finis sous ABAQUS et courbure analytique - état au repos, après collage du fil

Un maillage d'hexaèdres de dimensions 4mm × 1mm × 2mm est adopté. Il permet d'avoir deux éléments dans l'épaisseur de la poutre. Les résultats des simulations éléments finis sont représentés en Figures 3.4.1, 3.4.2 et 3.4.3. La déformée théorique, tracée à partir des rayons de courbure analytiques, y est comparée avec la déformée résultant du calcul éléments finis, où sont représentées les positions des noeuds des éléments AMF.

On voit donc que l'implémentation numérique du modèle de comportement monocristallin dans un script UMAT pour ABAQUS permet de simuler correctement des structures incluant des fils AMF monocristallins. Dans le chapitre 4 le script UMAT sera utilisé dans sa version polycristalline, pour comparer les résultats expérimentaux aux simulations par éléments finis.

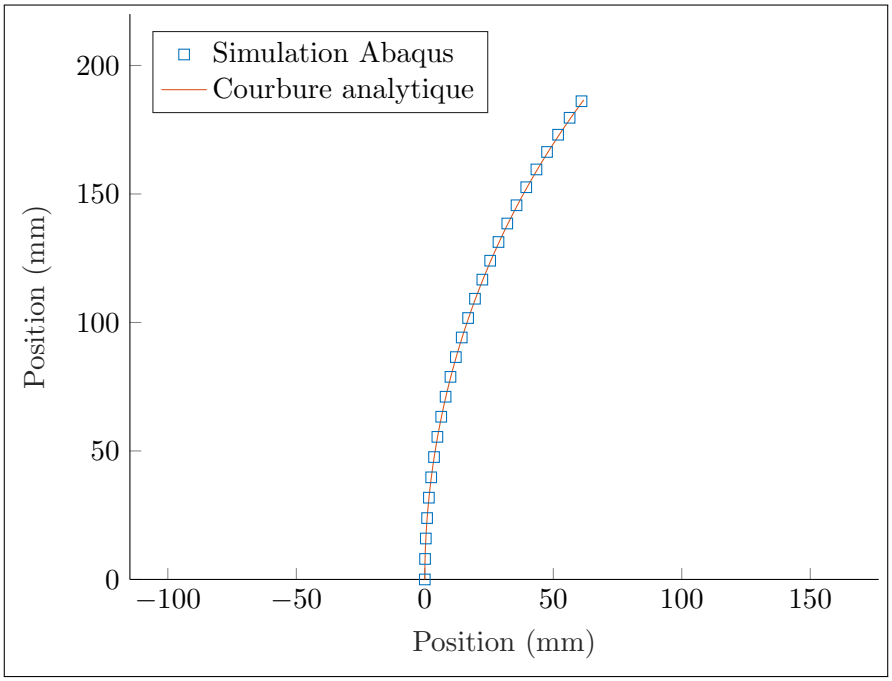

FIGURE 3.4.2 – Comparaison des déformées - Calcul éléments finis sous ABAQUS et courbure analytique - état à haute température

3.5 Calcul de structures intégrant des fils AMF - Conclusion du chapitre

Le modèle AMF introduit dans le chapitre 2 peut être implémenté numériquement, autant dans sa version monocristalline que dans sa version polycristalline. Dans le cas du monocristal, certains problèmes de structure peuvent être résolus de façon analytique, comme il a été vu en sections 3.1 et 3.2. Mais dans le cas du modèle polycristallin, représentant plus fidèlement le comportement de l'AMF, il est nécessaire de passer par la méthode des éléments finis pour simuler des actionneurs contenant des fils AMF. Le script UMAT décrit en section 3.4 a été validé dans sa version monocristalline. Il permet de réaliser des simulations faisant intervenir plusieurs fils (monocristallins ou bien polycristallins), avec par exemple des contraintes cinématiques ou encore des conditions de contact, ce qui n'aurait pas été accessible de façon analytique.

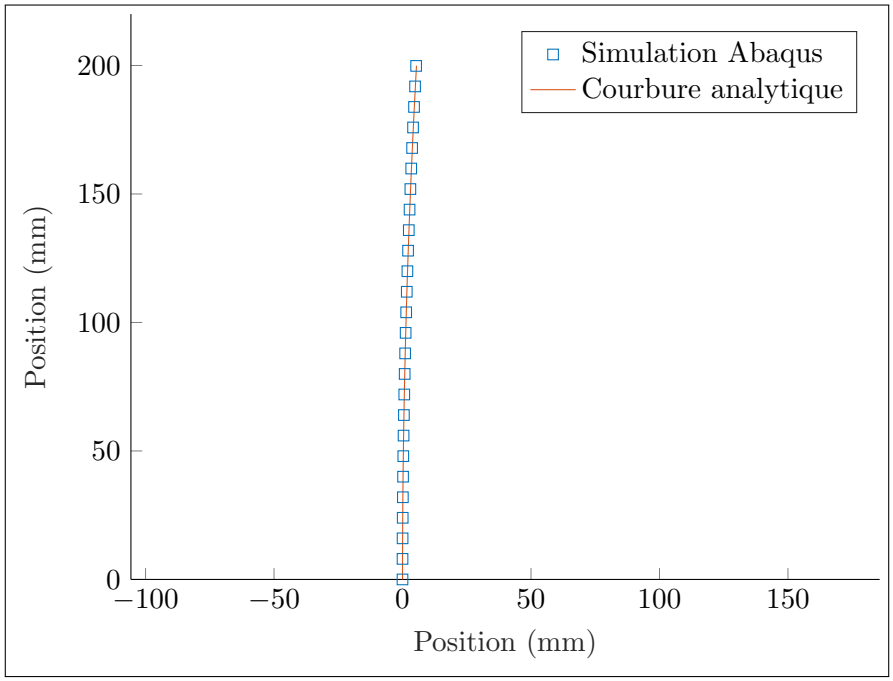

FIGURE 3.4.3 – Comparaison des déformées - Calcul éléments finis sous ABAQUS et courbure analytique - état à basse température

Chapitre 4

Conception de structures adaptatives : Expérimentations et confrontation aux modèles

Les travaux qui ont été présentés dans les deux chapitres précédents permettent de calculer et simuler des structures adaptatives actionnées par des fils AMF. Ce chapitre traite de la conception et de la fabrication de ces structures adaptatives. Des prototypes de brise-soleil mobiles ont été réalisés à différentes échelles au cours de la thèse. Ils peuvent être classés par principe d'actionnement, l'utilisation de fils AMF offrant deux choix d'intégration dans l'actionneur : ou bien le fil est à l'extérieur de la structure, et exerce des efforts sur celle-ci uniquement en ses extrémités, ou bien le fil est noyé dans la structure, et transfère des efforts à celle-ci sur toute la longueur de fil. De la même façon qu'au chapitre 3, nous dirons ici qu'après fabrication et avant le premier chauffage du fil l'actionneur se trouve dans la configuration "*au repos*". Ensuite, les cycles thermiques peuvent faire alterner l'état de l'actionneur entre les configurations "*à chaud*" et "*à froid*". Les actionneurs AMF auxquels nous nous intéressons sont ceux capables de retourner dans une configuration "*à froid*" après le premier déploiement, c'est-à-dire qu'ils ne sont pas à usage unique. Le mode de fonctionnement est le suivant : lors du chauffage, le fil AMF se déforme et entraîne une accumulation d'énergie de déformation dans la structure élastique qui lui est couplée. Ensuite, lors du refroidissement du fil AMF la libération de cette énergie élastique provoque le retour du système à une position "*à froid*".

Dans ce chapitre, la conception de protections solaires adaptatives pour les façades de bâtiments sera tout d'abord exposée en section 4.1, puis nous en déduirons les contraintes liées à l'utilisation d'AMF pour actionner ces protections solaires en section 4.2. Ensuite, en section 4.3 sera présentée la réalisation de prototypes où le fil est extérieur, et en section 4.4 sera présentée la réalisation de prototypes où le fil est intégré dans un matériau composite stratifié. La réponse des prototypes sera aussi comparée aux simulations par éléments finis et aux calculs analytiques à l'aide des résultats du chapitre 3. Enfin, la robustesse de ces actionneurs sera évaluée en section 4.5.

4.1 Conception de protections solaires adaptatives en façade de bâtiment

Les bâtiments tertiaires actuels présentent de grandes surfaces vitrées en façade, qui offrent un certain confort visuel aux occupants du bâtiment, par une grande quantité de lumière naturelle et une vue dégagée sur l'extérieur du bâtiment. Grâce aux vitrages isolants, ces façades permettent aussi, sous les latitudes européennes, de limiter les déperditions thermiques en hiver et ainsi de diminuer les consommations d'énergie pour chauffer les bâtiments. Toutefois, ces bâtiments sont mal adaptés à des irradiations estivales élevées. En effet, ils sont victimes de phénomènes de surchauffe (Ulpiani et al. (2017)), ce qui conduit à un inconfort des usagers, ou bien à une forte consommation d'énergie pour refroidir le bâtiment, refroidissement pouvant être à son tour source d'inconfort pour l'usager.

Le rayonnement solaire est principalement consitué d'une part visible, qui permet d'améliorer l'ambiance lumineuse à l'intérieur du bâtiment, et d'une part infrarouge, qui est responsable d'une grande partie de l'échauffement de l'intérieur du bâtiment. Il existe des technologies pour filtrer certains types de rayonnements entrant dans le bâtiment : ainsi, les vitrages à couche de contrôle solaire (couche faiblement émissive) laissent principalement passer la partie visible du rayonnement solaire, tout en réfléchissant ou absorbant en partie le rayonnement infrarouge. Cette sélectivité des vitrages modernes n'est toutefois pas suffisante (Farrar-Nagy et al. (2000)), car les rayons du spectre visible échauffent l'intérieur du bâtiment et accroissent les apports internes liés à l'occupation des locaux (humains, équipements). Il faut donc élaborer d'autres stratégies pour protéger le bâtiment des rayonnements solaires estivaux. L'une d'elles consiste à bloquer les rayons directs du soleil à l'aide d'éléments au moins partiellement opaques nommés brise-soleil.

La première catégorie est celle des brise-soleil fixes. On trouve fréquemment en façade de bâtiment des brise-soleil horizontaux nommés *casquette*, ou aussi des protections solaires verticales. Pour une façade orientée au Sud, la casquette permet de profiter des rayons solaires hivernaux, lorsque la position du soleil est plutôt proche de l'horizon, et de bloquer les rayons solaires estivaux, lorsque la position du soleil se rapproche du zénith. Pour une façade orientée à l'Est ou à l'Ouest, un brise-soleil vertical permet de bloquer les rayons rasant la façade, lors des heures chaudes de la journée, tout en conservant la vue vers l'extérieur.

La seconde catégorie de protections solaires est celle des brise-soleil mobiles. Ils permettent de faire varier l'occultation de la façade au cours de la journée, et donc d'optimiser la configuration du brise-soleil pour une moindre consommation d'énergie du bâtiment, ou pour un plus grand confort des utilisateurs. Le plus souvent, le mouvement est une mise en rotation d'éléments plans de grande taille, autour d'un axe vertical ou horizontal.

FIGURE 4.1.1 – Protection solaire mobile extérieure, projet Arcora (Siège du Crédit Mutuel à Nantes, Architectes : A.I.A Architecture)

Les brise-soleil mobiles peuvent se trouver à l'extérieur du bâtiment, c'est la configuration pour laquelle ils sont les plus efficaces du point de vue de la protection contre la surchauffe du bâtiment, car ils filtrent le rayonnement thermique avant qu'il n'entre dans le bâtiment. En Figure 4.1.1 est photographiée une protection solaire extérieure constituée de lames de verre sérigraphié. Elle sont chacune tenues en 4 points par des pattes en acier inoxydable moulé pouvant être mises en rotation autour d'un axe vertical. Un rail horizontal, mis en translation par des vérins, permet de faire pivoter les brise-soleil au moyen de biellettes. Cette façade entre dans la catégorie des *double peaux*, les brise-soleil formant la peau extérieure. Pour cette configuration, la protection solaire ainsi que son dispositif d'entraînement (vérins électriques dans cet exemple) doivent être dimensionnés pour résister aux efforts de vent, et doivent supporter les conditions extérieures incluant des variations importantes de température et d'hygrométrie, tout comme la présence de poussière ou d'oiseaux, ou encore le vandalisme.

Les brise-soleil peuvent aussi se trouver protégés de l'extérieur dans une cavité appelée *lame d'air*. La façade *double-peau ventilée* permet d'abriter la protection solaire dans cette lame d'air, qui fait aussi office de tampon thermique entre l'extérieur et l'intérieur. La ventilation de la lame d'air permet de réguler l'hygrométrie de cette cavité et donc d'éviter les problèmes de condensation. En Figure 4.1.2 on peut voir une telle façade, composée, de l'extérieur vers l'intérieur, d'un simple vitrage, d'une lame d'air qui accueille un store à lames faisant office de brise-soleil (non visible sur la photographie), puis d'un double vitrage (l'ouvrant étant ici en position ouverte). Le principe de cette

FIGURE 4.1.2 – Façade double-peau ventilée, projet Arcora (ZAC Bédier, Paris 13e, Architecte : Jean-Marc Ibos et Myrto Vitart), en chantier

façade *double-peau ventilée* abritant un store est représenté en coupe verticale en Figure 4.1.3

Au cours de cette recherche, le choix a été fait de privilégier l'étude d'une protection solaire abritée à l'intérieur d'une lame d'air : en effet, l'actionnement par des fils AMF se prête bien à la réalisation de structures légères adaptatives, fonctionnant par exemple par mise en flexion ou en torsion d'éléments élancés. De plus, une protection solaire extérieure motorisée nécessite que le moteur supporte un effort de blocage conséquent pour garantir le maintien en position et la résistance aux efforts de vent. Cet effort de blocage semble difficilement atteignable avec une quantité raisonnable d'AMF.

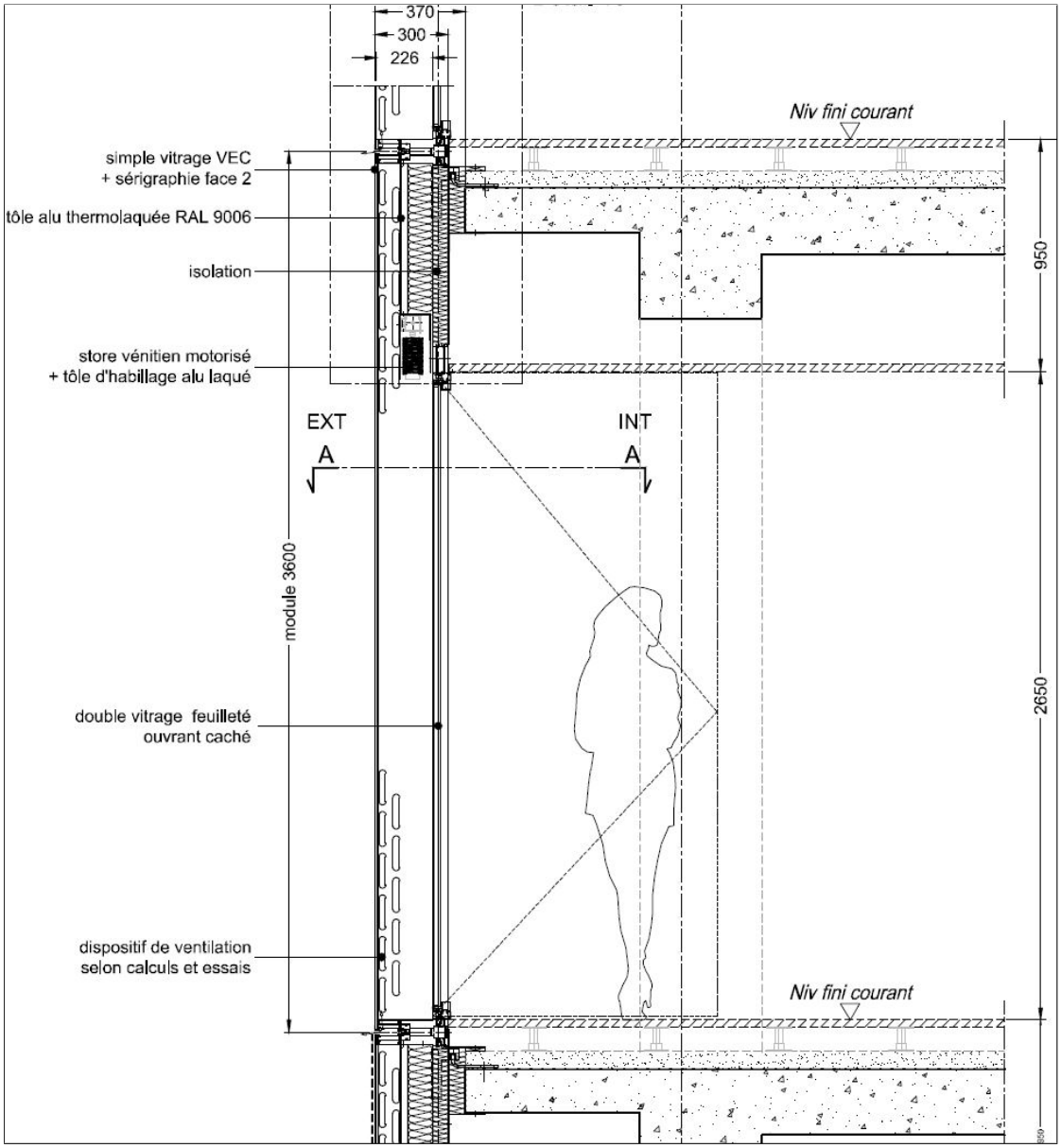

FIGURE 4.1.3 – Coupe verticale d'une façade double-peau ventilée, projet Arcora (ZAC Bédier, Paris 13e, Architecte : Jean-Marc Ibos et Myrto Vitart)

4.2 Contraintes liées à l'utilisation d'AMF dans des actionneurs en façade de bâtiment

Nous avons vu dans le chapitre 2 que les fils AMF sont capables de présenter de grandes déformations réversibles lors de l'application de chargements thermiques. Comme nous le verrons en section 4.3, ils peuvent aussi générer des efforts suffisamment importants pour mettre en mouvement une structure. Mais pour une utilisation en tant qu'actionneur de protection solaire, plusieurs contraintes d'utilisation liées au comportement thermomécanique de ce matériau doivent être prises en compte.

Tout d'abord, l'hystérésis du comportement thermomécanique de l'alliage Nickel-Titane (section 2.9) pose problème dans la conception d'actionneurs. Cette différence entre les températures de transformation de phase peut être utile dans certaines applications où le changement de phase de l'AMF n'intervient qu'une seule fois, comme par exemple dans la précontrainte de structures en béton au moyen de barres en AMF (Malagisi et al. (2014)). A l'inverse, pour des applications où l'effet mémoire de forme est mis à profit de façon répétée, cette hystérésis est contraignante. En effet, il faudra une différence de température suffisante entre l'état *froid* et l'état *chaud* pour que les changements de phase se produisent bien dans les deux sens. Pour le matériau utilisé dans cette recherche, cette hystérésis vaut environ 30°C. Par conséquent, un actionnement passif, c'est-à-dire déclenché par les variations de température ambiante dans l'environnement du fil AMF, n'est pas envisageable en façade de bâtiment : à l'issue d'une période de déploiement de la protection solaire, il faudrait une baisse de la température ambiante de plus de 30°C pour que le système retourne à l'état *froid*. Or, suivant les scenarii d'utilisation et d'occupation du bâtiment, cette température peut être décorrélée du besoin d'occultation. C'est pourquoi un contrôle électrique de l'actionneur AMF, avec échauffement du fil par effet Joule, est choisi ici. A température ambiante, on souhaite donc que l'actionneur demeure dans l'état *froid*. La température de changement de phase de martensite vers austénite doit être supérieure aux températures atteignables lors des pics de chaleur estivaux, ces températures pouvant être assez élevées à l'intérieur d'une façade. Par exemple, dans une façade ventilée la lame d'air accueillant une protection solaire peut, suivant la conception de la façade, atteindre des températures de l'ordre de 75°C (CSTB (2013)). Or dans les actionneurs AMF, le fil AMF est précontraint, donc la température d'apparition d'austénite est supérieure à la température T_B définie en section 2.3.4, qui est valable pour une situation libre de contraintes. Pour un fil suffisamment précontraint, l'actionneur ne se déploiera donc pas de façon inopinée. Pour les actionneurs fabriqués au cours de ce travail, la température de déploiement se situe entre 70 et 80°C, et la température de retour à l'état *froid* se situe autour de 50°C, ce qui semble donc raisonnable pour une intégration en façade avec commande électrique.

La seconde contrainte principale liée à l'utilisation d'AMF est celle du maintien en position. En effet, pour un actionneur AMF simple, il est nécessaire de maintenir le fil AMF à une température constante pour garantir une position fixe dans l'état *chaud*. Dans

le cas d'un actionnement électrique, cela implique donc une consommation en continu qui n'est pas souhaitable. Il semble donc intéressant de combiner des actionneurs AMF avec des dispositifs de blocage pour maintenir la position déployée de la protection solaire sans consommation continue d'énergie.

Enfin, un actionneur AMF subira la fatigue fonctionnelle du matériau, c'est-à-dire que le travail mécanique fourni par le fil AMF décroît au fur et à mesure des cycles de chauffage-refroidissement. La durée de vie et la performance à long terme d'un fil AMF dépendent de nombreux facteurs, dont notamment la contrainte appliquée et le niveau de déformation du fil lors du changement de phase (Miyazaki (2017)). Il y a donc un compromis à trouver entre la capacité de déformation du fil, l'importance de la contrainte générée, et la durée de vie de l'actionneur. En section 4.5 est présentée une étude expérimentale sur le comportement cyclique du fil Nickel-Titane étudié.

Toutefois, l'utilisation de fils AMF comme actionneurs présente aussi certains avantages par rapport aux systèmes actuels, le plus souvent motorisés. Ainsi, le changement de phase dans l'AMF est silencieux et permet de réaliser des protections solaires dont le mouvement est plus discret qu'un actionnement motorisé. De plus, la haute densité énergétique des AMF a pour conséquence que de petites quantités de matériau sont suffisantes pour mettre en mouvement de grandes structures (Lagoudas (2008)). Sous réserve d'une mise en oeuvre sous protection (chocs), il suffit donc d'avoir recours à des fils AMF relativement fins, et un actionneur AMF peut donc être léger et peu encombrant.

4.3 Actionneurs avec fil AMF extérieur à la structure

Une façon d'utiliser des fils AMF pour mettre en mouvement des structures est d'attacher les fils à la structure en leur extrémité : ainsi, l'AMF se déforme sur toute sa longueur mais ne transmet des efforts qu'aux points de liaison avec la structure. L'actionneur le plus simple à réaliser de cette manière est l'actionneur composé d'un ressort élastique et d'un fil AMF, illustré en Figure 3.2.1. A condition d'étirer préalablement l'ensemble pour que l'AMF et le ressort soient tendus, le chauffage du fil AMF entraîne son raccourcissement et l'étirement du ressort. Lors de l'arrêt du chauffage, l'AMF s'étire (phase de *réorientation* présentée en section 2.3.6) grâce à l'énergie élastique stockée dans le ressort, ce qui garantit le retour à la position "*à froid*". Un tel actionneur a été réalisé et testé expérimentalement : sa réponse à un cycle thermomécanique sera ici comparée aux solutions analytiques pour l'AMF monocristallin ainsi qu'à une simulation numérique pour l'AMF polycristallin.

4.3.1 Actionneur AMF + Ressort - Comparaison aux calculs analytiques avec le modèle AMF monocristallin

L'actionneur Ressort + AMF a été réalisé avec le même AMF que celui préalablement caractérisé au chapitre 2. Comparons tout d'abord la réponse expérimentale à un cycle thermomécanique avec les solutions analytiques présentées en section 3.2 pour un modèle AMF monocristallin.

Le dispositif expérimental de traction à température contrôlée présenté en section 2.7 a été réutilisé ici, le nouvel essai ayant été mis en place est présenté en Figure 4.3.1. Cette fois-ci, toute la longueur du fil est plongée dans l'eau pour pouvoir contrôler sa température : en effet, comme il a été vu en section 3.2, le comportement de l'actionneur dépend de la longueur totale de fil AMF, et les équations ont été établies pour un fil dont la température est constante le long du fil. Un noeud de huit est réalisé avec le fil AMF pour attacher son extrémité supérieure au ressort, l'extrémité inférieure du fil étant toujours fixée aux mors de la même façon. Le ressort est attaché à la cellule de force en partie haute. Le ressort utilisé a pour raideur $k = 5,02$ N/mm, et sa longueur à vide vaut $l_0 = 39$ mm. Dans la simulation ABAQUS il est modélisé par une barre élastique de module $E^{spring} = \frac{5,02 \times 39}{1} = 195,8$ MPa. La longueur initiale du fil AMF vaut $L_0^{AMF} = 177$ mm. L'essai débute par une phase de traction à la vitesse de 1 mm/min et à une température d'environ 15 °C, jusqu'à atteindre une force de 30 N, ce qui se produit pour une déformation d'environ $4,8$ % d'après la mesure par analyse d'images. Le déplacement de la traverse est alors bloqué, on réalise ainsi la condition $\mu = constante$ qui a été utilisée en section 3.2 : la longueur totale de l'ensemble fil AMF + Ressort est maintenue constante. On effectue ensuite un cycle thermique en chauffant l'eau jusqu'à environ 85 °C, avant de la refroidir à 15 °C. On mesure ainsi simultanément la température du fil AMF, la contrainte dans le fil ainsi que sa déformation par analyse d'images.

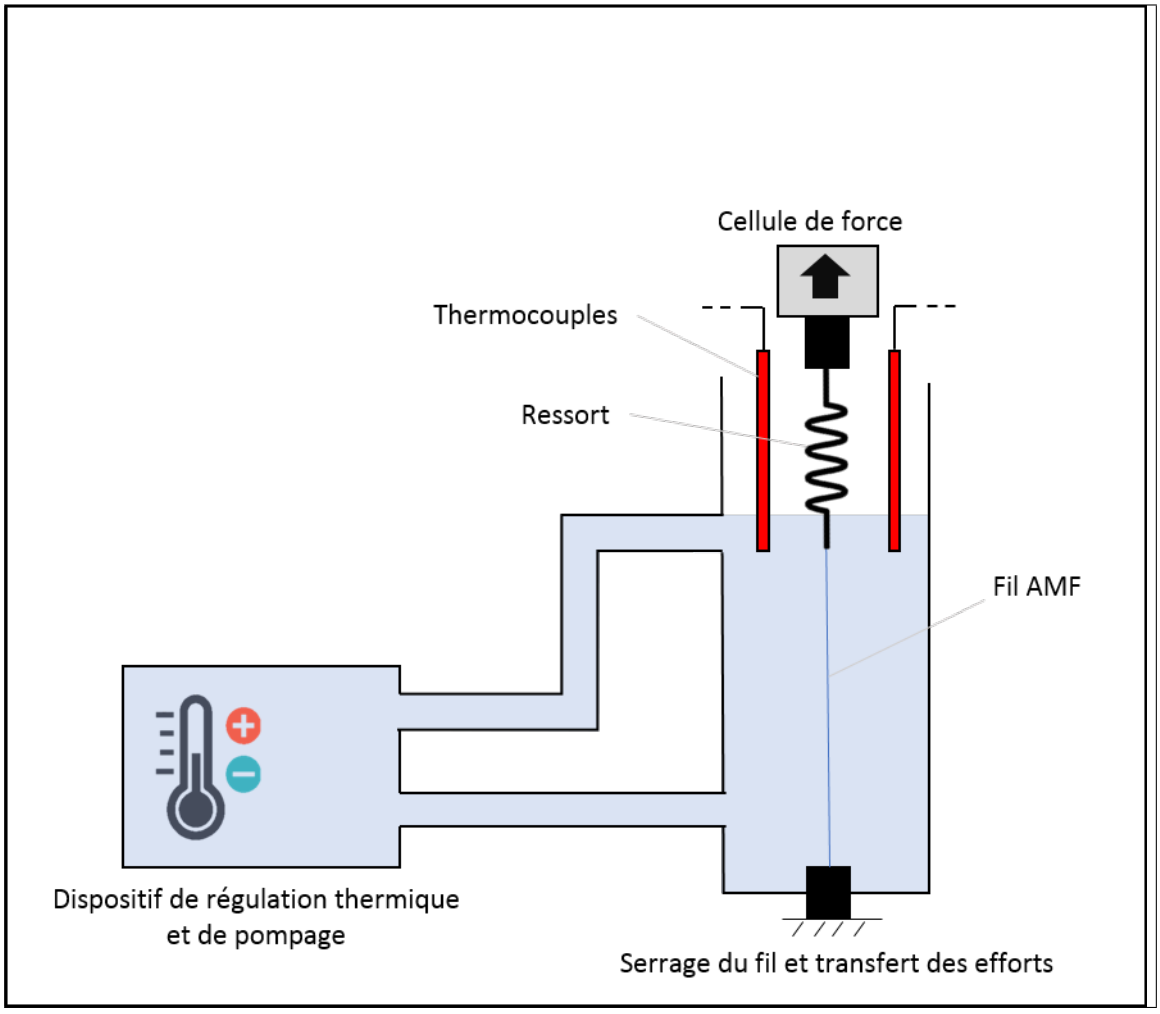

FIGURE 4.3.1 – Dispositif expérimental pour essais sur l'actionneur AMF + Ressort

En Figure 4.3.2 est représentée la déformation du fil AMF couplé à un ressort en fonction de la température du fil. La courbe expérimentale est superposée à la courbe donnée par le modèle monocristallin à l'aide des solutions analytiques établies en section 3.2. Nous nous trouvons ici dans le cas où $\frac{\mu E^{AMF}}{1+\alpha E^{AMF}} > G_1 - G_0$ décrit en section **??**. Le pré-étirement $\varepsilon^{pre} = 4,8\%$ a été mesuré expérimentalement et a été utilisé pour le tracé de la solution analytique. Le premier cycle thermique a été représenté, c'est pourquoi on observe l'état "*au repos*" suivi de l'état "*à chaud*" et de l'état "*à froid*". On remarque qu'avec le modèle AMF monocristallin la déformation du fil varie lentement sur une plage importante de température, alors que lors de l'essai la déformation se produit sur une plage de températures assez réduite. Toutefois, le modèle prédit de façon précise l'état de déformation "*à froid*" à la fin du premier cycle thermique, où l'on observe une déformation supérieure à la déformation à l'état "*au repos*".

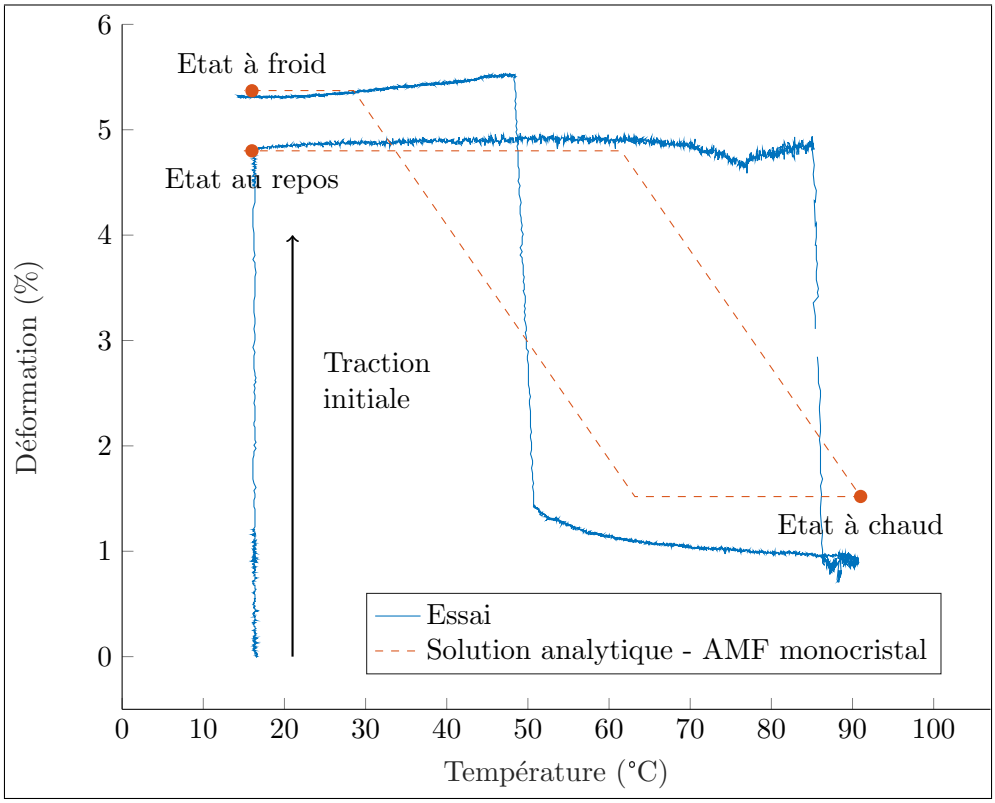

FIGURE 4.3.2 – Déformation du fil AMF couplé à un ressort au cours du premier cycle thermique

De la même façon, en figure 4.3.3 est représentée la contrainte dans le fil AMF couplé au ressort en fonction de la température du fil au cours du même essai. Cette fois-ci, les variations de la contrainte dans le fil en fonction de la température se font avec une pente similaire, mais le modèle prédit mal l'état du système à la fin du premier cycle thermique. Dans l'expérience, la contrainte "*à froid*" est beaucoup plus basse que la contrainte "*au repos*". D'après le modèle, elle est effectivement plus basse, mais la différence est moins marquée que ce qui est observé dans l'expérience.

4.3.2 Actionneur AMF + Ressort - Comparaison à la simulation avec le modèle AMF polycristallin

Comparons à présent les résultats expérimentaux avec la simulation éléments finis d'un ressort mis en série avec un fil AMF polycristallin, à l'aide du script UMAT pour Abaqus présenté en section 3.4. Nous retrouvons en Figure 4.3.4 les courbes de la déformation en fonction de la température, et en Figure 4.3.5 les courbes de la contrainte en fonction de la température. On peut observer que le modèle polycristallin paraît plus

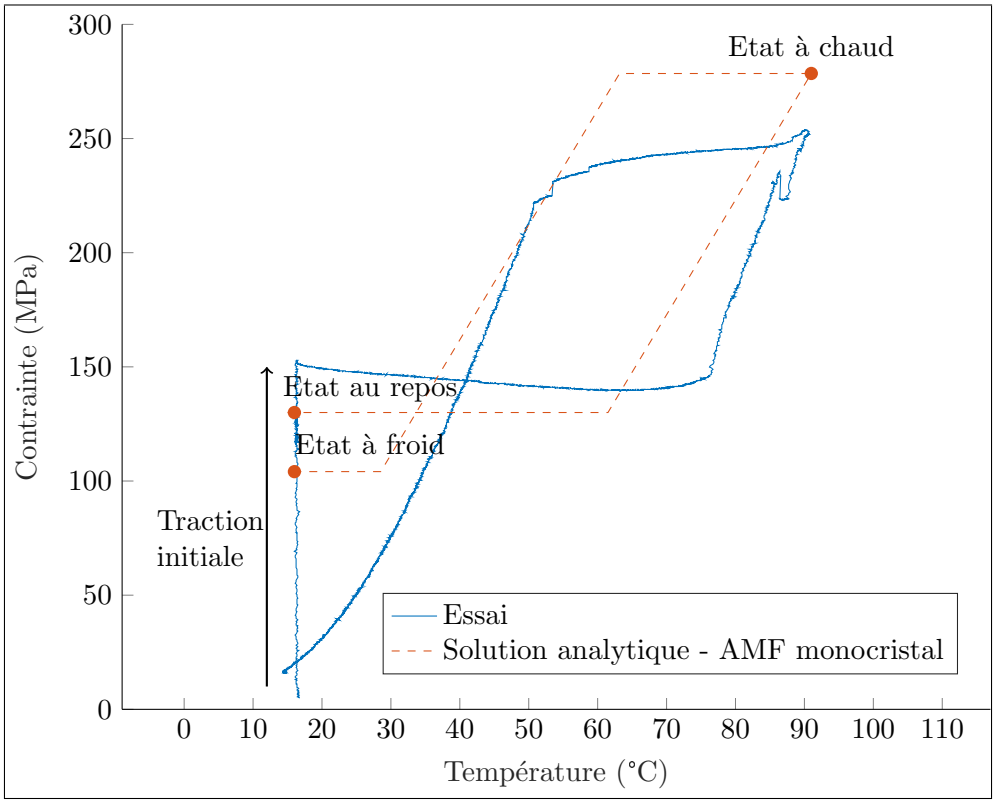

FIGURE 4.3.3 – Contrainte axiale dans le fil AMF couplé à un ressort au cours du premier cycle thermique

éloigné de l'expérience que le modèle monocristallin.

Toutefois, le matériau AMF est utilisé ici dans des conditions différentes des conditions dans lesquelles l'identification des paramètres a été menée (contrainte imposée ou déformation imposée, par exemple). Ici, ni la contrainte ni la déformation ne sont imposées au fil AMF, et le comportement est donc différent de celui qui a été caractérisé dans le chapitre 2. Il est difficile d'identifier un jeu de paramètres permettant de modéliser correctement l'AMF dans toutes les situations. En adoptant des paramètres différents pour le modèle polycristallin, il serait possible d'obtenir des simulations se rapprochant davantage des essais.

4.3.3 Actionneurs AMF avec fil extérieur à la structure - Conclusion

En conclusion, les modèles de comportement thermomécanique proposés dans le chapitre 2 permettent de reproduire l'allure de la réponse d'un actionneur Ressort + Fil AMF. On retrouve notamment les trois états stables de l'actionneur "*au repos*", "*à chaud*" et "*à froid*". Toutefois, les paramètres matériau identifiés précédemment ne semblent pas

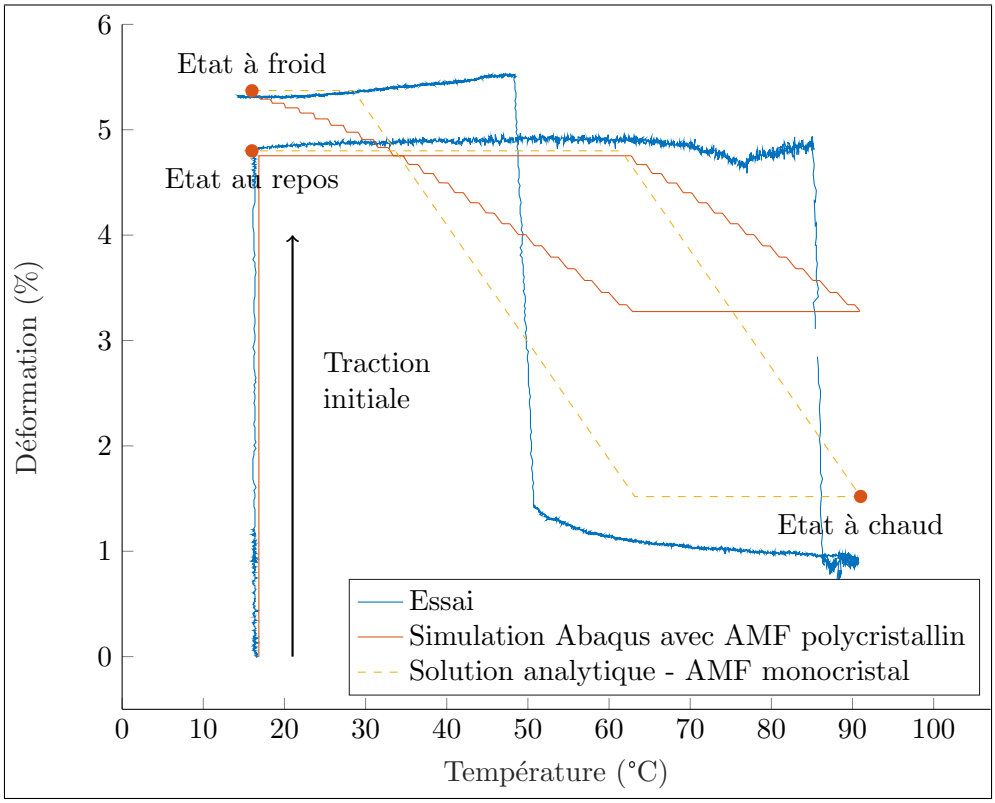

FIGURE 4.3.4 – Déformation du fil AMF couplé à un ressort au cours du premier cycle thermique

permettre une prédiction précise de ce comportement, en particulier pendant le changement de phase.

Les résultats obtenus peuvent être utilisés pour la conception d'actionneurs reposant sur le système Ressort + Fil. Un prototype de système de façade reposant sur un actionneur de ce type a été conçu et réalisé au laboratoire, cependant il ne sera pas présenté dans ce mémoire pour des raisons de confidentialité.

D'autres actionneurs avec un fil AMF extérieur à la structure sont aussi envisageables. Ainsi, dans Scirè Mammano (2015) un actionneur reposant sur la mise en flexion de deux lames d'acier par un fil AMF central est proposé. Il a été reproduit au cours de la thèse, on peut l'observer en Figure 4.3.6. Les deux charnières jaunes permettent de maintenir les lames d'acier et de transférer les efforts du fil vers les lames et inversement. Un actionneur reposant sur la mise en torsion puis le déversement d'une bande d'acier (*feuillard*) a aussi été réalisé pendant la thèse. Présenté dans Hannequart et al. (2017), il est composé d'une bande d'acier, souple grâce à un élancement important, fixée en ses extrémités sur des pivots d'axe vertical. Un fil AMF est tendu entre les pivots avec une certaine excen-

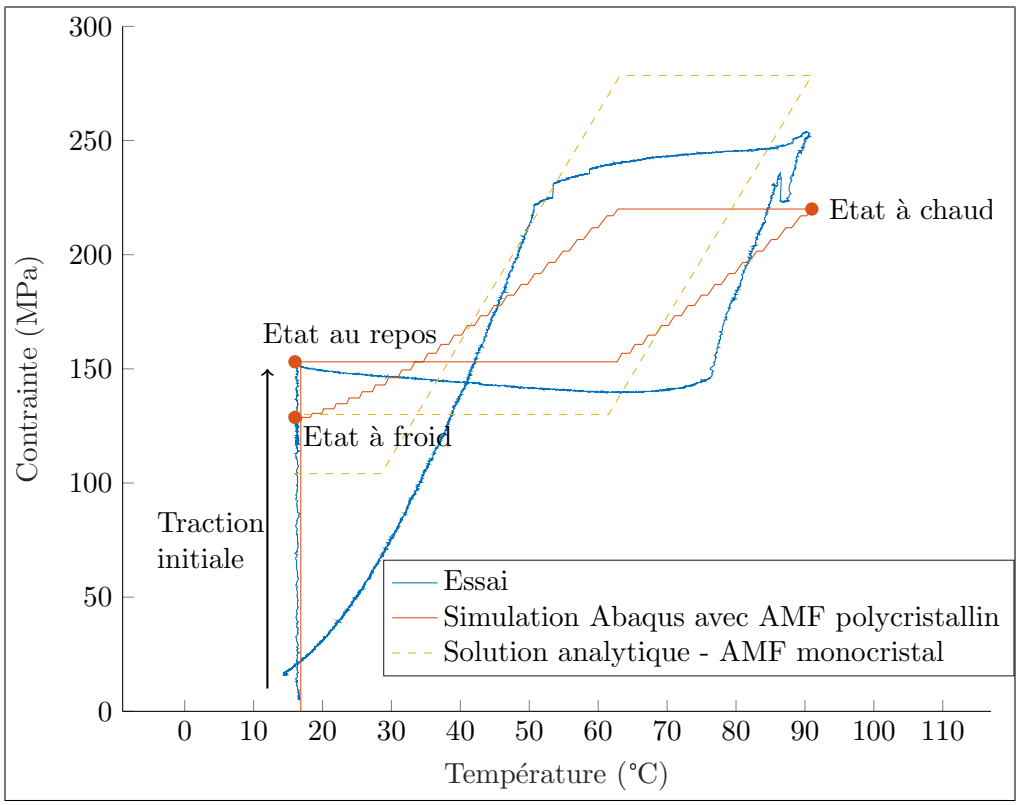

FIGURE 4.3.5 – Contrainte axiale dans le fil AMF couplé à un ressort au cours du premier cycle thermique

tricité. La configuration au repos de l'actionneur est visible dans la partie gauche de la Figure 4.3.7. Lors du chauffage du fil AMF, les pivots entrent en rotation de sens opposés, ce qui entraîne une torsion de la bande d'acier suivie d'un déversement de l'ensemble. Cette seconde configuration, stable grâce à la gravité, est visible dans la partie droite de la Figure 4.3.7. Toutefois, pour un retour à l'état initial il faut alors une autre action : l'énergie élastique emmagasinée dans la bande d'acier n'est pas suffisante pour vaincre la gravité et permettre un redressement de la structure dans cette configuration. Un second fil AMF tendu du côté opposé des pivots pourrait peut-être permettre ce retour à l'état initial. Cet actionneur est stable en position déployée, c'est-à-dire qu'il ne nécessite pas de chauffage en continu du fil AMF pour maintenir cette position. Toutefois, il paraît trop souple pour pouvoir envisager une application réelle. Une augmentation de la raideur de la structure (par une augmentation de la section de la bande d'acier par exemple) annulerait l'avantage de la position déployée stable : l'énergie élastique stockée dans la bande est dans ce cas suffisante pour vaincre la gravité lors du refroidissement du fil AMF.

Enfin, il existe des configurations intermédiaires entre le cas où le fil AMF est extérieur à la structure et le cas, traité dans la section suivante, où le fil est noyé dans une

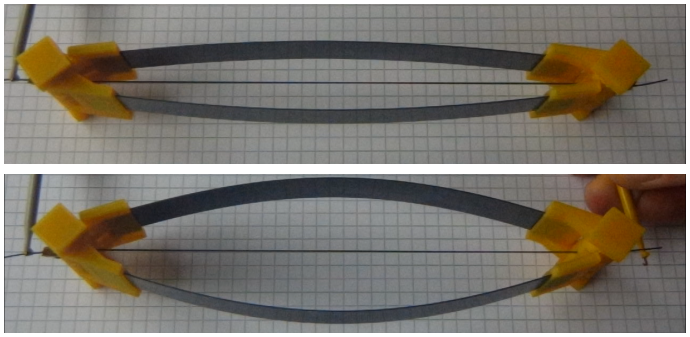

FIGURE 4.3.6 – Actionneur reposant sur la mise en flexion de lames d'acier

matrice élastique. Ainsi, un système de contrôle thermique pour missions spatiales a été proposé dans Bertagne et al. (2017a) et Bertagne et al. (2017b) : Une coque cylindrique mince en composite carbone-époxy a été munie de fils AMF attachés en ses extrémités. Les fils AMF peuvent glisser sur la surface de la coque, qui garde une forme cylindrique dans toutes les configurations : les fils AMF sont donc en permanence en contact avec la surface. Lors du chauffage des fils, leur rétrécissement entraîne un déploiement des panneaux cylindriques (augmentation de leur rayon de courbure). Grâce à deux faces dont l'émissivité est différente, la structure est capable de dissiper des quantités variables de chaleur dans l'espace, en fonction de l'ouverture du dispositif.

En conclusion, il existe de nombreux actionneurs à fil AMF extérieur, qui présentent de nombreux avantages comme le refroidissement des fils AMF par convection ou encore la simplicité de la modélisation. Toutefois, dans cette configuration les fils AMF sont exposés aux agressions extérieures, d'autant plus que la section des fils est souvent petite car la densité énergétique des AMF est élevée : il semble intéressant d'envisager des structures où le fil AMF serait noyé dans une matrice élastique, ce qui lui conférerait une protection contre les agressions extérieures. De plus, le comportement mécanique d'un tel dispositif sera totalement différent, pour peu que l'on assure la continuité des déplacements et contraintes par un bon collage fil/matrice. Le transfert des déformations du fil à la structure sera beaucoup plus intime et pourra être beaucoup plus efficace que via le simple effet de corde induit par un fil extérieur. Ce type de solution est l'objet de la section suivante.

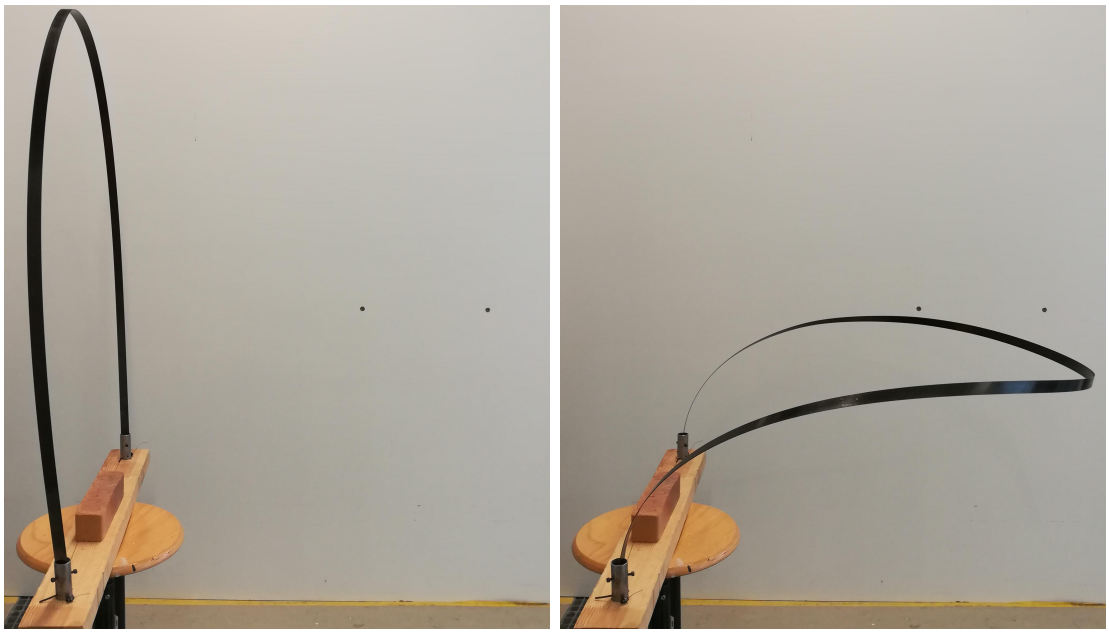

FIGURE 4.3.7 – Actionneur AMF à lame en torsion-déversement réalisé au laboratoire - configuration au repos et configuration déployée

4.4 Fil AMF dans un matériau composite

La deuxième grande famille d'actionneurs basés sur des fils AMF est celle des structures réalisées à partir de matériaux composites avec des fils AMF intégrés. En général, on parle de structures *composites avec AMF* lorsque les fils AMF sont noyés dans une matrice, ce qui leur permet de transmettre des efforts à la structure sur toute leur longueur. Cette matrice peut être un matériau composite stratifié, par exemple un composite fibre de verre - résine époxy que nous utiliserons dans cette étude. Mais les fils AMF peuvent aussi être noyés dans d'autres matériaux plus souples comme le silicone PDMS (Rodrigue et al. (2015), Rodrigue et al. (2017)). Enfin, les fils AMF peuvent aussi être collés sur une structure : ils sont ainsi "noyés" dans la colle utilisée et transmettent aussi des efforts à la structure tout le long du fil. Le matériau constituant la structure élastique adaptative est souvent un matériau composite. En effet, ce type de matériau offrant un rapport résistance-densité particulièrement élevé (Ashby (2004)) permet de réaliser des structures minces et légères capables d'effectuer de grands mouvements tout en restant dans le domaine élastique du matériau. La position à l'intérieur d'un tel matériau permet de protéger le fil AMF, souvent très fin, des agressions extérieures. Ceci permet aussi d'obtenir une structure qui se déforme sans mécanisme apparent : il n'y a plus besoin d'éléments mécaniques mobiles comme les charnières, les glissières, etc... Cette moindre complexité mécanique et l'intérêt esthétique d'une telle structure adaptative en font un bon candidat pour la conception d'éléments de façade de bâtiment. Tout d'abord, un procédé d'intégration de ces fils AMF dans un matériau composite a été mis au point (Section 4.4.1), puis des lames à courbure variable, que nous nommerons par la suite *lame composite-AMF*, ont été fabriquées et testées (Section 4.4.2).

4.4.1 Mise au point d'un procédé de fabrication de lames composite-AMF

Un procédé de fabrication a été mis au point, visant à reproduire le fonctionnement de l'actionneur Poutre+AMF illustré en Figure 3.1.1 : un fil AMF pré-étiré est intégré dans l'épaisseur d'une lame composite pendant la polymérisation de cette dernière. On obtient après la cure du composite une lame courbe dans laquelle le fil AMF est précontraint. Le point faible de ce type de structures est le plus souvent l'interface entre le fil AMF et la structure hôte : il est crucial d'obtenir une bonne adhésion du fil AMF.

Tout d'abord, une intégration du fil directement dans la résine époxy d'un tissu pré-imprégné verre-époxy a été testée. Un composite verre-époxy est ici utilisé car il ne conduit pas l'électricité : un chauffage du fil AMF par effet Joule n'est pas envisageable dans un composite carbone-époxy, car le courant conduit par les fibres de carbone échaufferait en fait l'intégralité de la structure. Nous utilisons un tissu préimprégné Vicotex, avec une résine Hexcel M10 (taux de résine 42%). Le cycle de cuisson conseillé par le fabricant est une vitesse de chauffe de 3°C par minute, puis un maintien pendant 1 heure à 120°C, suivi d'un refroidissement à 3°C par minute. De petits échantillons ont été réalisés pour observer la qualité de l'adhérence entre l'AMF et la résine, sur 4 plis de

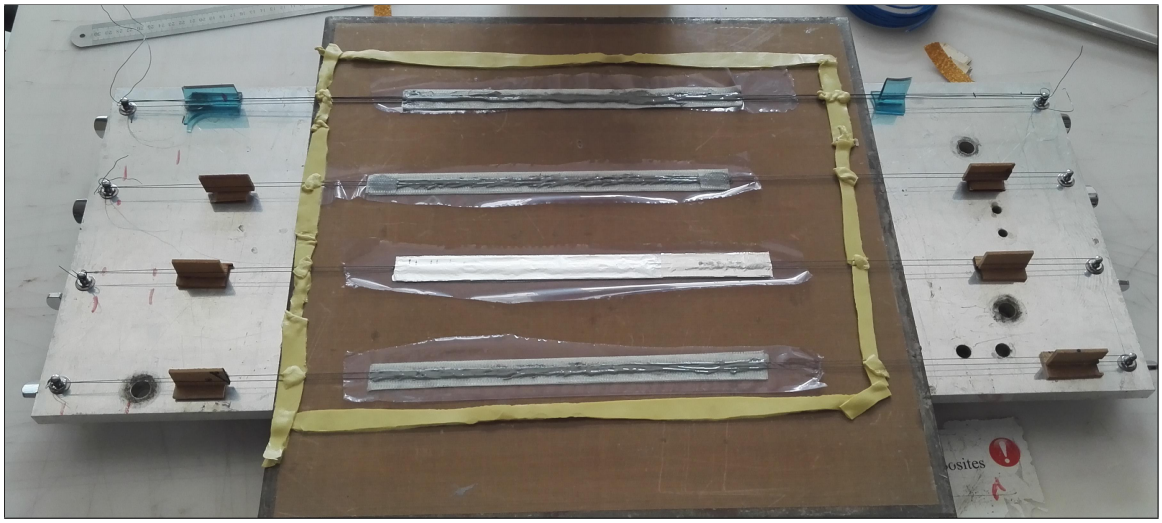

FIGURE 4.4.1 – Bâti pour la cuisson des composites avec pré-étirement de fils AMF

préimprégné. Plusieurs empilements ont été réalisés : ou bien le fil AMF se trouve à la surface des 4 plis, ou bien il se trouve entre le 3e et le 4e pli. Les fils AMF sont préalablement nettoyés à l'acétone et brossés au papier de verre, pour améliorer l'adhésion. Ils sont ensuite pré-étirés jusqu'à 5% et maintenus pendant la cuisson du composite grâce au bâti présenté en Figure 4.4.1. Des mécaniques pour cordes de guitare ont été implantées aux extrémités d'une plaque aluminium pour pré-étirer les fils AMF puis maintenir cet étirement pendant la cuisson.

Après fabrication, les échantillons ont été testés : ils ont été observés à la loupe binoculaire et le fil AMF a été chauffé par effet Joule, avec un courant d'intensité $2,0$A. Le résultat est présenté en Figure 4.4.2 : on y voit le fil AMF dans la zone où il est noyé dans la résine (à gauche) et dans la zone où il est à l'extérieur (à droite). L'image du haut a été prise après la fabrication, et l'image du bas a été prise après chauffage. On observe une interface fil-résine plus claire sur l'image du bas. Ceci correspond à un décollement du fil chauffé accompagné d'un déplacement, lié à l'effet mémoire de forme, qui a été observé à la loupe. Aucun des échantillons décrits ci-dessus ne résiste au chauffage de l'AMF. Le procédé d'infusion avec post-cuisson ultérieure (pour conférer à la résine une résistance à la montée en température du fil AMF) a aussi été expérimenté, mais n'a pas donné de résultat satisfaisant.

Des lames composite-AMF sans pré-étirement de l'AMF ont alors été fabriquées, pour pouvoir observer l'effet de la montée en température du fil sans l'influence de la contrainte mécanique de cisaillement entre le fil et la résine. Lors du chauffage du fil AMF dans un tel élément, il n'y a pas d'*effet mémoire de forme*, l'AMF passe de la phase martensite autoaccomodée à la phase austénite sans déformation macroscopique. Certains échantillons ont aussi été fabriqués avec une température de cuisson plus éle-

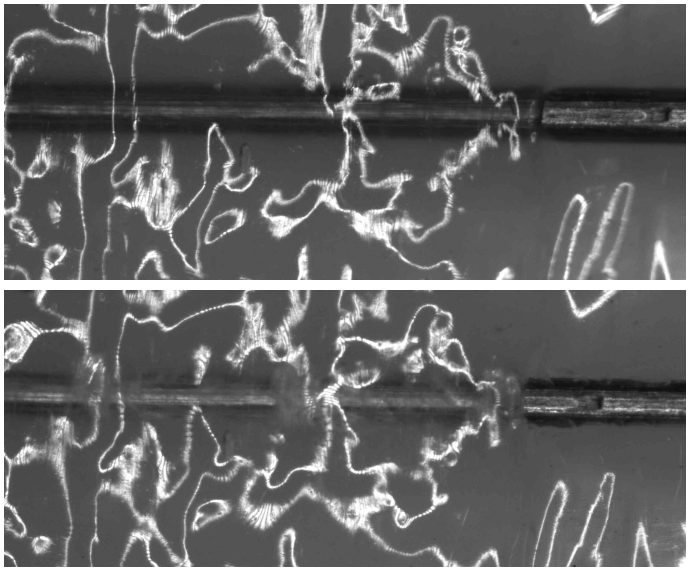

FIGURE 4.4.2 – Fil AMF noyé dans un préimprégné verre-epoxy, observé à la loupe binoculaire lors de l'effet mémoire de forme. En haut, la situation après fabrication. En bas, la situation après chauffage du fil AMF

vée, ou une post-cuisson. On observe à la loupe binoculaire une fonte de la résine époxy. En particulier, les échantillons ayant été post-cuits ou cuits à une température supérieure semblent résister davantage à l'augmentation locale de température. Nous avons supposé que le fil AMF chauffé par effet Joule, emprisonné dans la résine, connaît des températures plutôt élevées, car il ne peut pas dissiper de chaleur par convection. En conséquence, la résine ne supporte probablement pas cette température élevée. Pour les échantillons avec pré-étirement du fil AMF, la résine époxy entourant le fil AMF est à la fois soumise à une forte température par le fil AMF chauffé, et à des contraintes mécaniques de cisaillement dues à l'effet mémoire de forme de l'AMF pré-étiré.

Nous avons donc cherché à dissiper l'excès de chaleur produite par effet Joule dans le fil AMF noyé dans la résine, pour ne pas soumettre celle-ci à de trop forts gradients de température, la chaleur produite dans le fil ne pouvant pas être évacuée facilement. Le choix a été fait de fixer le fil AMF à la structure au moyen d'une colle spécifique, capable de résister à une température importante, et capable de conduire la chaleur pour dissiper les excès de chaleur produits par le fil AMF parcouru par un courant électrique. Un adhésif époxy bicomposant chargé en poudre d'aluminium (LOCTITE EA 3479) a été sélectionné ici.

Le procédé final adopté pour la fabrication de lames AMF-composite est détaillé dans la Table 4.1. La géométrie de la lame est illustrée en figure 4.4.3. Deux fils AMF sont

TABLE 4.1 – Procédé de fabrication des lames composite-AMF

Etape	**Détails**
10 cycles thermomécaniques de stabilisation du comportement des fils AMF	Traction jusqu'à 5% de déformation puis chauffage du fil au décapeur thermique
Sablage du fil AMF et nettoyage à l'acétone	
Installation du fil AMF dans le bâti de cuisson	Utilisation d'écarteurs pour maintenir une distance constante d'environ 5mm entre les fils AMF
Pré-étirement de l'AMF jusqu'à 5%	La mesure des 5% de déformation se fait à la règle, elle est donc peu précise
Empilement du tissu pré-imprégné verre-epoxy	4 plis
Mélange de l'adhésif époxy bicomposant	Proportions 50%-50%
Assemblage	L'empilement composite est placé sous les fils tendus, puis les fils sont enduits d'adhésif.
Mise sous vide de l'ensemble	Bâche microperforée et bâche plastique pour éliminer les bulles d'air dans le composite
Cuisson	140 °C pendant 1 heure
Post-cuisson	160 °C pendant 1 heure

collés à la surface de la lame, et sont attachés mécaniquement en une extrémité par une pièce métallique, ce qui permet de réaliser le contact électrique entre les deux fils AMF et donc de chauffer les deux fils par effet Joule en branchant les deux autres extrémités à un générateur de courant. Une vue d'ensemble de la lame composite-AMF lors de sa fabrication à plat, puis lors du chauffage, est présentée en Figure 4.4.4.

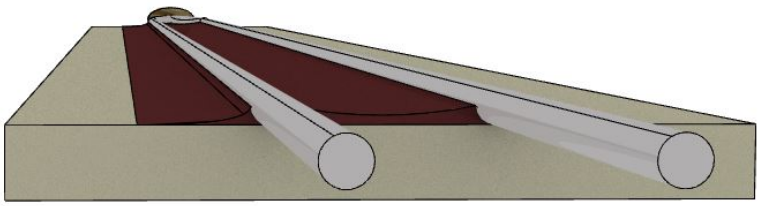

FIGURE 4.4.3 – Lame composite-AMF : Détail

Trois lames composite-AMF représentatives ont été fabriquées pour effectuer la comparaison aux modèles en section 4.4.2 et les tests de fatigue en section 4.5. La lame nommée A a été fabriquée suivant le procédé de fabrication décrit en Table 4.1, mais avec une température de cuisson de 120 °C et une température de post-cuisson de 150

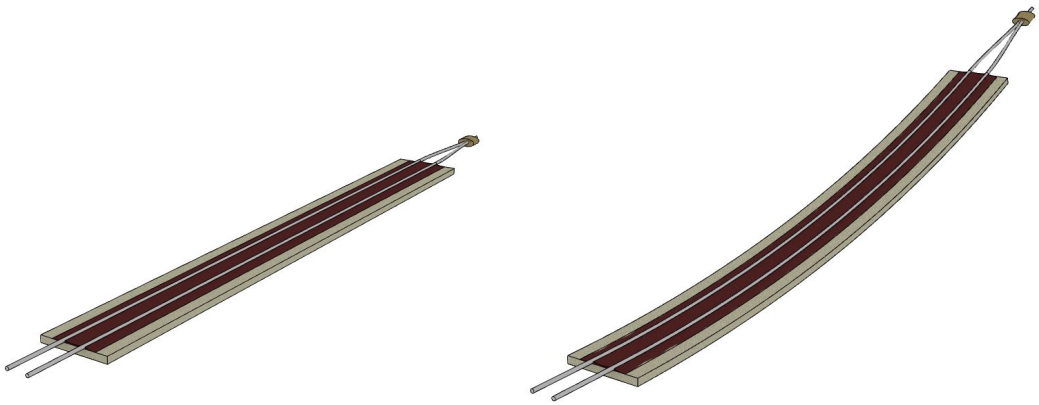

FIGURE 4.4.4 – Lame A et B : Fabrication à plat, et configuration courbée lors du chauffage

°C : ces températures sont plus basses que celles prévues dans le protocole de fabrication. La lame B a été fabriquée exactement d'après le procédé de fabrication de la Table 4.1. Enfin, la lame C a été fabriquées avec les températures de cuisson de la Table 4.1, mais un renforcement des extrémités de la lame, supposées être les parties les plus sensibles au décollement entre le fil AMF et la résine, a été mis en place. Comme schématisé en Figure 4.4.5, une bande de 2cm de long de tissu préimprégné a été ajoutée au-dessus des fils enduits d'adhésif époxy. Ainsi, aux extrémités de la lame, le fil ne se trouve plus collé à la surface, mais collé entre deux plis.

4.4.2 Lame composite-AMF : Comparaison aux modèles

Les lames composite-AMF décrites précédemment ont été testées expérimentalement en faisant passer un courant de $1,9$A dans le fil AMF pour l'actionnement. La lame est tout d'abord observée à température ambiante dans son état *au repos*. Ensuite, le courant est appliqué aux extrémités du fil AMF pendant 90 secondes, pour arriver à un état chaud. Puis, le courant est coupé pendant 270 secondes pour permettre un refroidissement suffisant du fil AMF. Trois cycles ont été réalisés de cette façon. Les rayons de courbure sont obtenus par analyse d'images grâce au logiciel GOM Correlate. A gauche en Figure 4.4.6 est représentée une image de la lame de profil, dont la tranche a été couverte de points blancs à suivre par corrélation d'images. A droite, les points suivis ainsi que le cercle passant par trois de ces points sont représentés. On observe que la lame composite-AMF adopte bien une forme circulaire, on peut donc en déduire que le fil AMF transmet des efforts à la lame sur toute sa longueur, et que le moment engendré sur la lame composite est constant.

La température a été mesurée en mettant un thermocouple en contact avec le fil AMF

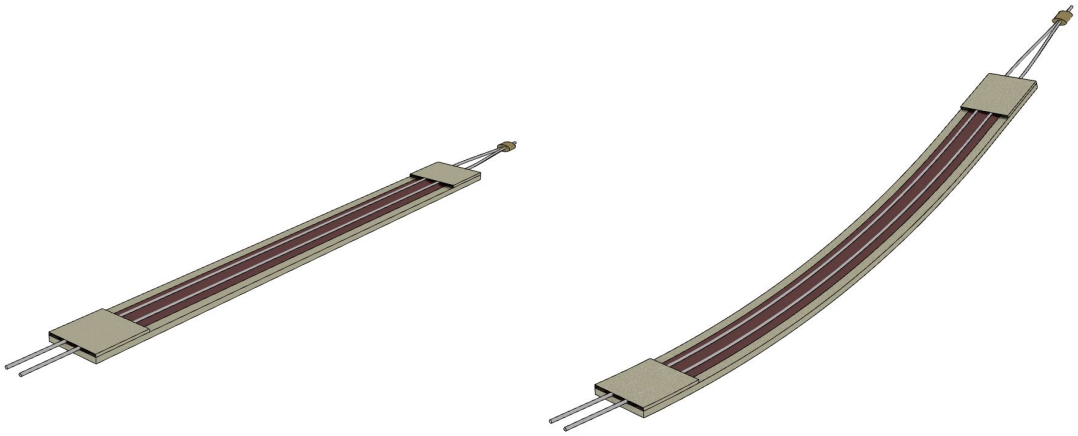

FIGURE 4.4.5 – Lame C : Fabrication à plat, et configuration courbée lors du chauffage

libre à une extrémité de la lame, au moyen d'une pâte thermique conductrice de chaleur à base de silicone (*Heat Sink Compound*, KONTAKT CHEMIE). On mesure donc la température du fil AMF extérieur à la lame, qui n'est vraisemblablement pas la même que la température du fil pris à l'intérieur de la résine. Cette mesure de température n'est donc qu'une indication de l'évolution de la température à l'intérieur de la lame. En Figure 4.4.7 est représentée la courbure expérimentale en fonction de la température mesurée pour les lames B et C. On observe une importante augmentation de la courbure lors du premier chauffage, puis le comportement des lames se stabilise pour les cycles suivants : les cycles 2 et 3 sont confondus. On observe aussi que le résultat est reproductible : les deux lames présentent un comportement très similaire. Sur ces courbes expérimentales on n'observe pas l'hystérésis du comportement de l'AMF, ce qui paraît anormal. En effet, à partir du premier refroidissement, les courbes de refroidissement et de chauffage sont confondues. Nous en avons déduit que la mesure de température sur le fil AMF extérieur n'était pas une mesure fiable pour estimer la température du fil à l'intérieur. Peut-être que la pâte thermique utilisée pour joindre le thermocouple et le fil AMF, supposée conduire efficacement la température, engendre d'autres effets thermiques. Par exemple, si elle possède une grande inertie thermique elle ne permet pas une bonne mesure des variations rapides de température du fil. Nous ferons donc le choix par la suite de ne pas considérer les données de température sur ces courbes.

Le comportement expérimental de ces lames peut être comparé aux simulations numériques éléments finis et au modèle analytique Fil+poutre décrit en section 3.1. Tout d'abord, les solutions analytiques ont été utilisées pour tracer la réponse d'une lame composite-AMF avec le modèle monocristallin. La lame contient deux fils AMF dont les paramètres matériau sont ceux identifiés en section 2.8. L'épaisseur de la lame est de $0,8$ mm, sa largeur est de 18 mm. Le fil est supposé agir à la surface de la lame, c'est-à-dire qu'il se trouve à une distance de $0,4$ mm de la fibre neutre de la poutre. Le

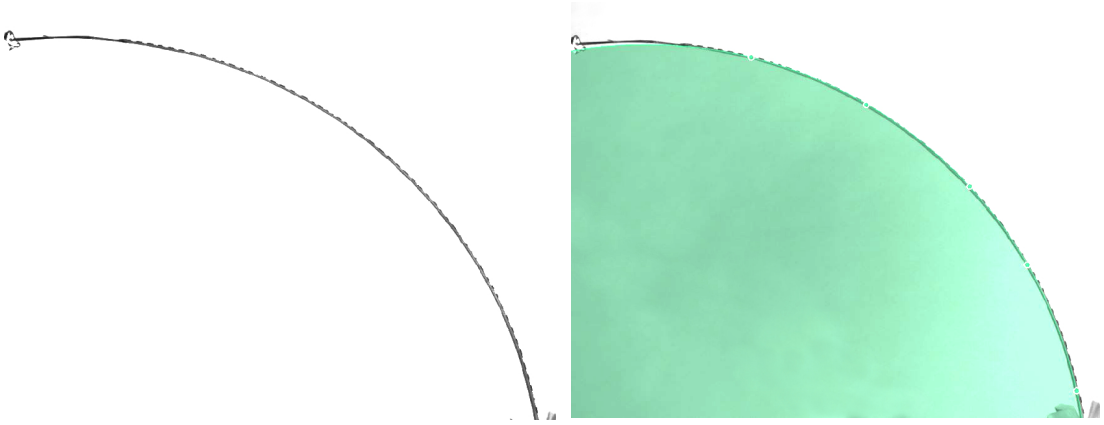

FIGURE 4.4.6 – Mesure du rayon de courbure des lames composite-AMF par analyse d'images. A droite, cercle passant par trois points de la lame

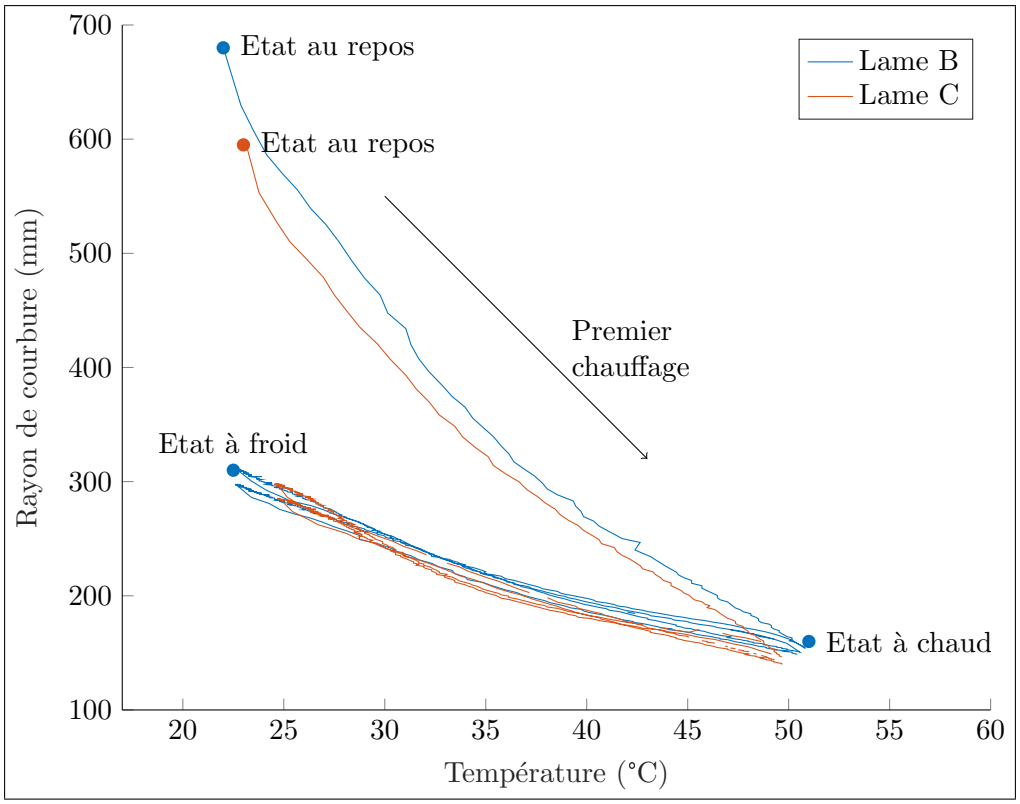

FIGURE 4.4.7 – Essai : Rayon de courbure lors des trois premiers cycles thermiques pour les lames B et C

module du composite verre-epoxy fabriqué ici est difficilement mesurable, car sa section est irrégulière, et une face est couverte de l'adhésif époxy. Nous avons obtenu grâce à

un essai de traction une valeur d'environ 10 GPa pour le module du composite. Il est inférieur au module classique d'un composite verre-époxy, car aucun tissu d'arrachage n'a été utilisé pendant la fabrication : le taux de fibres dans le composite est donc relativement bas. Dans un premier temps, nous adoptons cette valeur de 10 GPa pour les calculs analytiques et les simulations présentés ici.

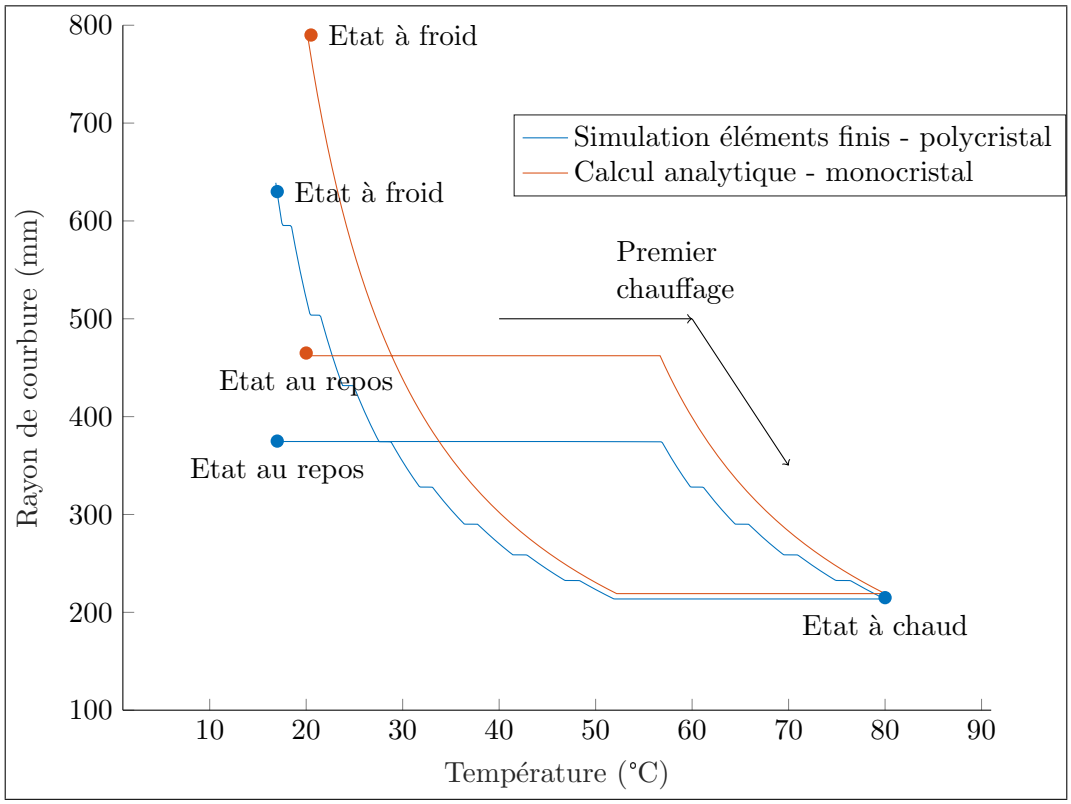

FIGURE 4.4.8 – Rayons de courbure donnés par les modèles monocristallin et polycristallin

Les simulations éléments finis permettent de calculer la réponse de cette lame munie de deux fils polycristallins. Les fils sont modélisés par un seul fil central de section double dans ABAQUS. Un maillage d'hexaèdres quadratiques à 20 noeuds et à intégration réduite *C3D20R* de dimensions $0,5$ mm $\times$ $0,4$ mm $\times$ $0,56$ mm est adopté pour le matériau composite. L'adhésion entre le fil AMF et le composite est simulée grâce à l'option EMBEDDED (voir Section 3.4). Dans cette simest placé à une distance de $0,39$ mm de la fibre neutre au lieu de $0,40$ mm car la simulation nulation, le fil AMF e converge pas lorsque le fil est trop proche de la surface. La procédure décrite en section 3.4.2 a été utilisée pour modéliser un fil AMF précontraint à l'intérieur de la lame. En Figure 4.4.8 sont représentées les rayons de courbure calculées analytiquement grâce au modèle monocristallin, ainsi que les rayons de courbure calculés par la méthode des éléments

finis avec le script UMAT pour le modèle polycristallin.

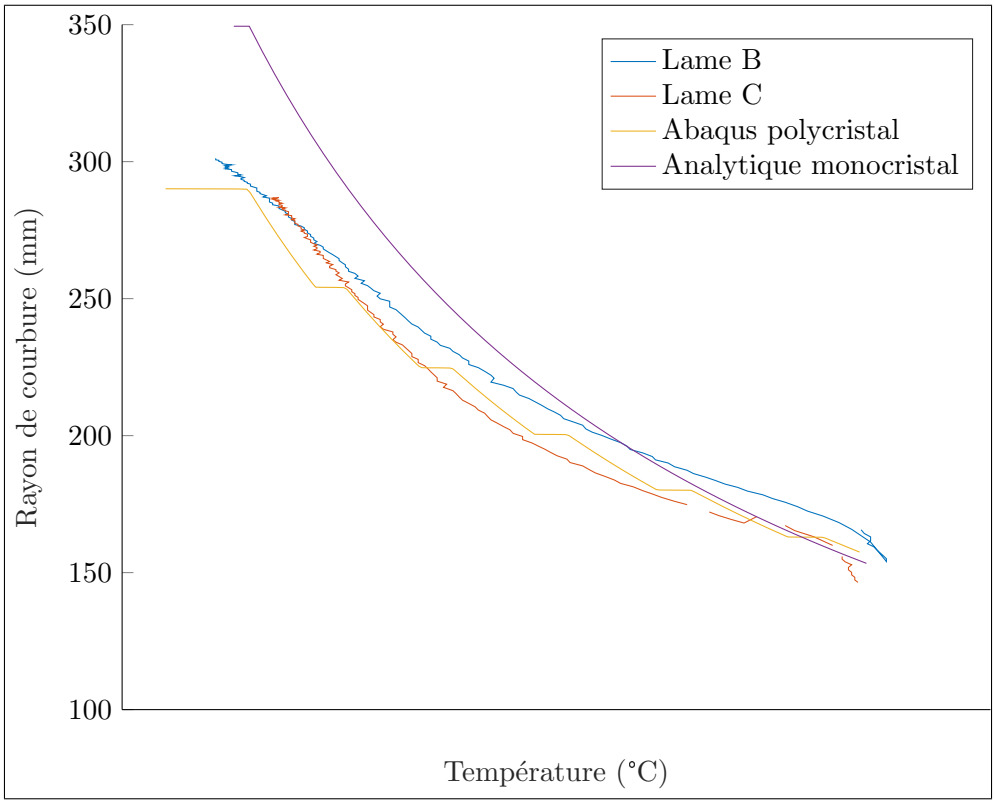

FIGURE 4.4.9 – Lames composite-AMF : Comparaison entre les essais et les résultats du modèle

Au premier abord, ces courbes théoriques courbure-température semblent difficilement comparables aux résultats expérimentaux des lames B et C. Cependant, il y a de nombreuses incertitudes sur les paramètres de calcul. La température du fil AMF à l'intérieur du composite est mal connue, le module d'Young mesuré sur la lame est approximatif, et les paramètres géométriques (section de la lame et excentricité du fil) sont irréguliers et difficilement mesurables. En adoptant un module E de la lame composite plus faible, on peut obtenir avec les calculs analytiques et les simulations des résultats plus proches de l'expérience. De plus, les plages de température sur lesquelles se produit le changement de phase semblent avoir la même étendue, environ 20 à 30°C. Les courbes expérimentales et théoriques sont fortement décalées horizontalement, mais avec les observations précédentes nous pouvons considérer que la température réelle du fil AMF n'est pas connue, et donc décaler les courbes selon l'axe horizontal. Nous observons donc en Figure 4.4.9 uniquement les variations de courbure. Les courbes données par les modèles sont tracées en adoptant un module $E = 7$ GPa pour le composite, et on trace uniquement le comportement à partir de la fin du premier chauffage. L'hystérésis,

matérialisée par un décalage en température des courbes de chauffage et refroidissement, n'est donc pas visible ici pour les simulations numériques.

Ici, le modèle polycristallin semble plus proche de la réalité, sa pente est plus proche de la pente de la courbe expérimentale.

4.4.3 Lame composite-AMF : Réalisation d'un prototype

Le procédé de fabrication décrit en section 4.4.1 a permis de développer un prototype de principe reposant sur les lames composite-AMF, illustré en Figure 4.4.10 et présenté en conférence (Hannequart et al. (2017)). Ces lames sont fabriquées à partir d'un tissu composite verre-époxy préimprégné et à partir du fil AMF caractérisé précédemment. Elles sont capables de supporter des éléments d'occultation, matérialisés ici par des plaques de carton-bois collées sur les lames. Ces plaques sont rendues flexibles par la découpe au laser d'un motif ajouré à la manière du *wood kerfing*. Chaque élément ainsi assemblé est contrôlable individuellement grâce à un circuit électrique et une carte Arduino munie de relais. En se courbant, ces éléments viennent augmenter l'occultation de la baie vitrée représentée ici par une plaque de plexiglas.

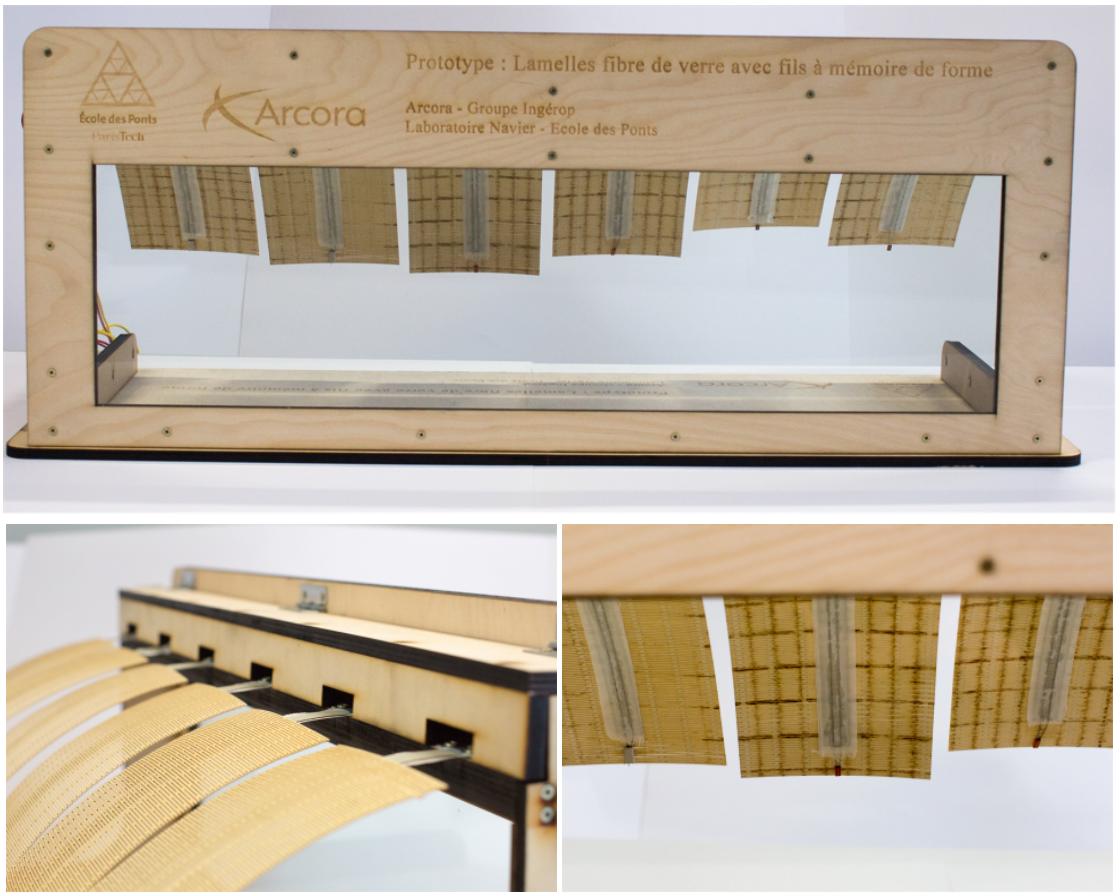

FIGURE 4.4.10 – Prototype basé sur des lames composite-AMF

4.5 Fatigue et comportement cyclique

Pour envisager une application en façade de bâtiment des actionneurs présentés, il faut prévoir plusieurs cycles d'actionnement par jour, donc un grand nombre de cycles de fonctionnement de l'actionneur pendant sa durée de vie. Une étude du comportement sous cycles thermiques des lames composite-AMF présentées en section 4.4 a donc été menée. La lame A a été testée sur 236 cycles, la lame B sur 480 cycles, et la lame C sur 270 cycles. La mesure des rayons de courbure se fait de la même façon que lors de l'expérience décrite en section 4.4.2. Le chauffage du fil AMF pendant 90 secondes avec des intervalles de refroidissement de 270 secondes a été automatisé au moyen d'un script MATLAB et d'un relais contrôlé sous Arduino pour interrompre le passage du courant aux bornes du générateur de courant. En Figure 4.5.1 sont représentés les rayons de courbure "à froid" et "à chaud" des lames composite-AMF B et C, en fonction du nombre de cycles. Le rayon de courbure "à froid" est le rayon maximal lors du cycle thermique, et le rayon de courbure "à chaud" est le rayon minimal lors du cycle.

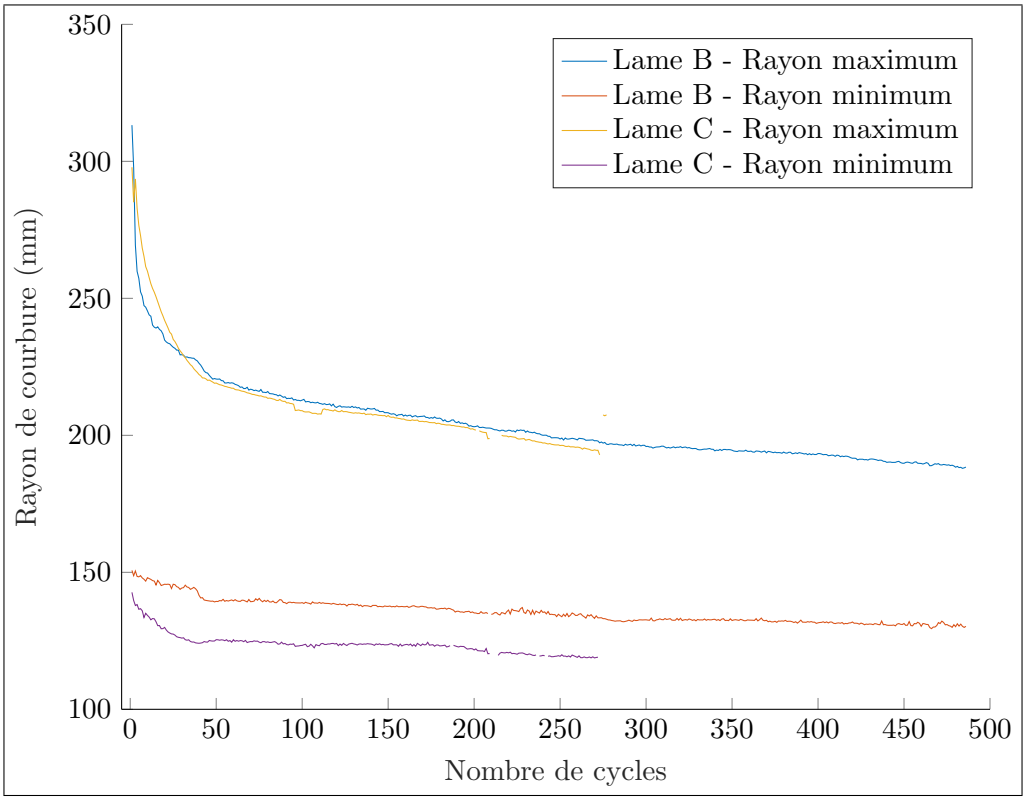

FIGURE 4.5.1 – Lames composite-AMF : Rayon de courbure minimal et maximal lors de chargements thermiques cycliques

Cette courbe de fatigue de l'actionneur met en évidence la dégradation de ses per-

formances au fur et à mesure du nombre de cycles. En Figure 4.5.2 est représentée l'amplitude des variations de rayon de courbure de l'actionneur pour chaque cycle, obtenue par différence des courbes de la Figure 4.5.1. Le comportement ne semble pas se stabiliser pour un grand nombre de cycles, on observe jusqu'à la fin des cycles effectués une diminution de l'amplitude mesurée. La lame A a été ajoutée sur cette dernière Figure, on observe que l'amplitude de son mouvement est beaucoup plus faible que celle des lames B et C, ce qui prouve l'intérêt des températures de cuisson relativement hautes préconisées en section 4.4.1. La lame A se dégrade très rapidement, probablement à cause d'un endommagement de la résine du pré-imprégné ou de l'adhésif au voisinage du fil AMF. Il possible que la résine qui n'a pas été portée à une température suffisamment haute pendant la cuisson de la lame, subisse une post-cuisson pendant les premiers cycles d'actionnement. Les lames B et C ont des comportements similaires, mais on observe tout de même que la lame C présente une plus grande amplitude de mouvement : il est possible que la lame B se dégrade préférentiellement à ses extrémités, où l'on s'attend à trouver des concentrations de contraintes, et que le renforcement apporté dans la lame C ait ralenti ce phénomène.

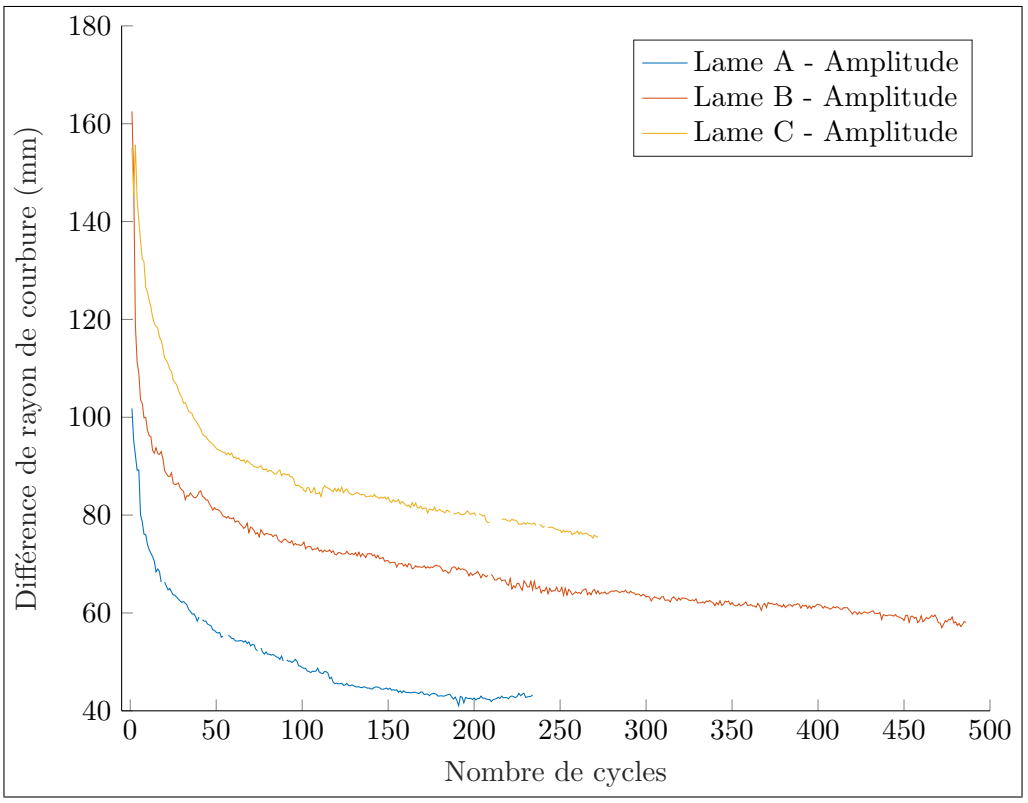

FIGURE 4.5.2 – Lames composite-AMF : Amplitude du mouvement lors de chargements thermiques cycliques

On peut alors se demander si cette dégradation des propriétés d'actionnement est due à l'assemblage, par exemple à l'adhésion entre la colle utilisée et le fil, ou si elle est due au fil AMF lui-même. Nous avons donc essayé d'obtenir des données expérimentales sur la *fatigue fonctionnelle* du fil AMF utilisé. Par opposition à la fatigue d'un matériau classique, la fatigue fonctionnelle (Scirè Mammano (2014)) désigne la dégradation du travail mécanique fourni par l'AMF au cours du cyclage. Ainsi, des cycles thermiques à contrainte imposée ou des cycles thermiques à déformation imposée font intervenir de façon répétée l'effet mémoire de forme, mais celui-ci se dégrade au fur et à mesure des cycles. La fatigue fonctionnelle est associée à l'apparition de déformations *non recouvrables*, c'est-à-dire qu'elles ne peuvent plus être annulées lors du chauffage du fil. Il est toutefois difficile de reproduire expérimentalement les conditions auxquelles est soumis le fil AMF au sein de l'actionneur, car il est rarement utilisé à contrainte constante ou à déformation constante.

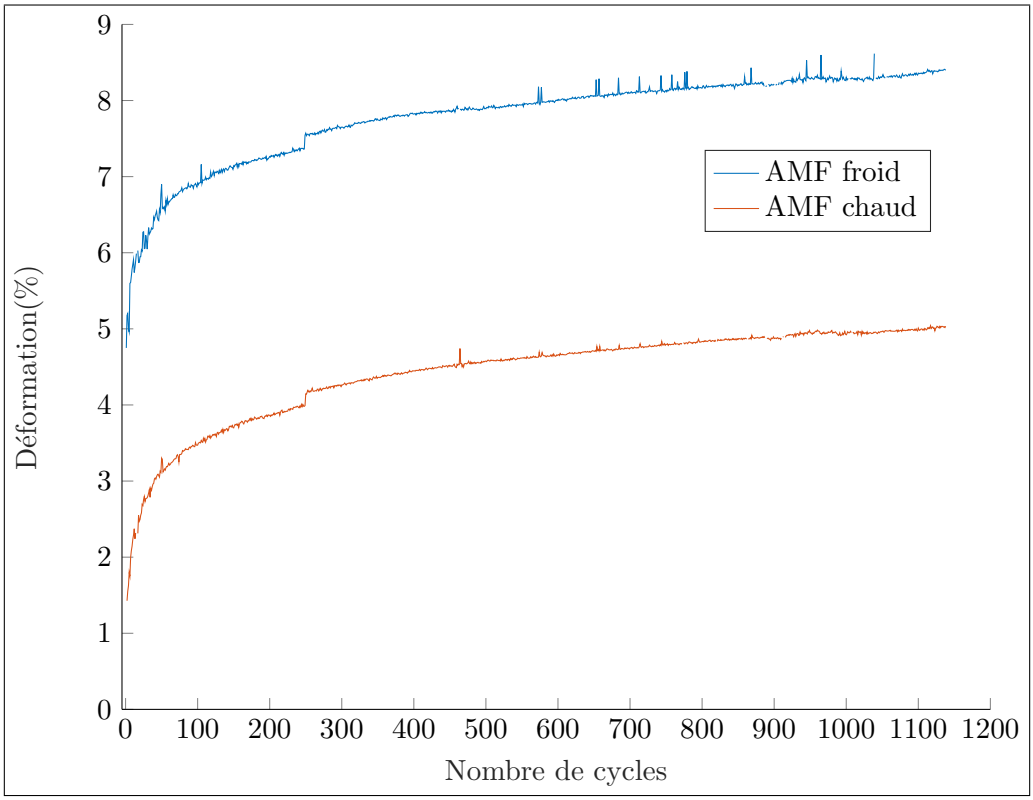

FIGURE 4.5.3 – Comportement en fatigue du fil AMF soumis à une contrainte constante

Pour pouvoir comparer l'essai de fatigue de l'actionneur "lame AMF-composite" à la fatigue du matériau AMF seul, nous avons donc réalisé un essai de chargement thermique cyclique sur un fil AMF seul, auquel un poids a été suspendu, pour exercer un effort constant de $28,4$N sur le fil. Ce fil est chauffé par effet Joule de façon cyclique

avec un courant d'intensité $1,9$A. Il est soumis à ce courant pendant 40 secondes, avant d'être refroidi par convection à température ambiante pendant 120 secondes. Cet essai a été mené sur environ 1100 cycles. Dans l'état non chauffé, le fil est donc étiré sous l'effet de la masse suspendue : l'AMF subit le phénomène de *réorientation* et la déformation du fil est grande. Dans l'état chaud, le fil rétrécit grâce à l'*effet mémoire de forme* : la déformation est plus petite. En Figure 4.5.3 ces deux états extrêmes sont représentés en fonction du nombre de cycles : on observe que le fil AMF a tendance à s'étirer au fur et à mesure du cyclage. L'effet de la fatigue du matériau AMF est donc important pour les niveaux de déformation et les niveaux de contraintes imposés ici : la déformation imposée par le poids suspendu en début d'essai est de l'ordre de 5%, similaire à la déformation imposée au fil AMF noyé dans la résine composite. Pour ces valeurs de déformation, la résistance à la fatigue de l'AMF utilisé dans ce travail semble donc être mauvaise, avec une dégradation rapide de la performance de l'actionneur. On retrouve ici des tendances identifiées dans la littérature sur la fatigue fonctionnelle des AMF (Scirè Mammano (2014), Jones and Dye (2011), Benafan et al. (2014)) : pour une plage de fonctionnement avec une déformation importante (de l'ordre de 5%) ou avec une contrainte importante (de l'ordre de 200 MPa), une dégradation significative de l'effet mémoire de forme est observable au fur et à mesure des cycles et le comportement ne converge pas toujours vers une alternance entre deux états stabilisés.

En conclusion, le comportement en fatigue observé ici ne permet pas à ce stade d'envisager un actionneur capable de réaliser un nombre de cycles important. Il semblerait intéressant d'essayer d'intégrer les fils AMF dans la lame composite avec une valeur de pré-étirement inférieure à celle adoptée dans ce travail (5%). Cette valeur de pré-étirement plus basse permettrait peut-être de diminuer la déformation résiduelle accumulée à chaque cycle. Toutefois, il faudra trouver un compromis avec la situation inverse où le pré-étirement ne serait pas assez grand pour assurer l'effet mémoire de forme au bout d'un nombre important de cycles du fait d'une déformation résiduelle augmentant avec le nombre de cycles.

4.6 Conception de structures adaptatives : Conclusion du chapitre

Dans ce chapitre plusieurs prototypes d'actionneurs réalisés ont été décrits, testés et comparés aux modèles. Une première famille concerne les actionneurs avec fil extérieur, les plus simples à réaliser, mais offrant une liberté de conception assez limitée. Un prototype échelle 1 :4 de brise soleil intégrant un tel système a été réalisé ainsi, et fonctionne parfaitement. Pour des raisons de confidentialité il n'est pas décrit dans le mémoire. La deuxième famille concerne les actionneurs à fil intégré dans le matériau (ici, des composites verre-époxy). Plus efficaces, permettant une plus grande créativité et une meilleure intégration, ils sont aussi beaucoup plus compliqués à mettre au point technologiquement. En effet, ils requièrent un procedé de fabrication avec précontrainte, et la température importante de l'AMF lors du fonctionnement induit un endommagement des matériaux qui encapsulent. Quelques prototypes de lames composite/AMF ont été développés et des points technologiques en partie résolus. De tels actionneurs AMF en facade de bâtiment s'intégreraient assez facilement dans une façade double-peau ventilée. Les modèles développés dans les chapitres précédents permettent de prévoir l'allure du comportement de ces actionneurs.

Pour notre application, une commande électrique des actionneurs paraît appropriée. Toutefois il est crucial dans ce cas que l'actionneur ne consomme pas d'énergie électrique en continu, mais uniquement lors du changement de forme. Les actionneurs présentés dans ce chapitre devraient donc être améliorés pour pouvoir être implantés en façade de bâtiment. Pour ne pas devoir maintenir une température haute dans le fil AMF lors du maintien en position déployée, il faut imaginer un dispositif de blocage de l'actionneur. Celui-ci pourrait éventuellement lui-même étre constitué d'un actionneur AMF.

Chapitre 5

Conclusion et Perspectives

Ce travail a contribué à une compréhension plus fine du fonctionnement mécanique de l'alliage à mémoire de forme (en l'occurence l'alliage Nickel-Titane) et de son potentiel pour la réalisation d'actionneurs. Bien que les propriétés de ces actionneurs aient été étudiées au regard d'une utilisation en façade de bâtiment, ils pourraient aussi trouver leur place dans d'autres applications.

Tout d'abord, le matériau a été modélisé en une dimension pour reproduire le comportement d'un fil AMF. Deux modèles thermomécaniques ont été proposés : un modèle monocristallin simplifié, à deux variables internes, et un modèle polycristallin enrichi, à $2N$ variables internes. Ils permettent de calculer de façon analytique le comportement thermomécanique d'un fil AMF monocristallin ou polycristallin. Ces modèles ont été validés par des essais sur des fils Nickel-Titane sous chargement mécanique ou thermique. Pour réaliser ces essais, il est crucial de contrôler précisément la température du fil AMF. Pour ceci, un dispositif expérimental adapté a été mis au point. Le fil AMF se trouve dans l'eau pendant l'essai, et ses déformations sont mesurées par corrélation d'images. A l'aide des modèles présentés, il est possible de reproduire fidèlement le comportement de l'AMF dans les conditions étudiées : traction à basse température ou bien cycle thermique à contrainte constante. Plus spécifiquement, le modèle polycristallin permet de traduire l'influence de la texture sur le comportement thermomécanique (et en particulier l'écrouissage apparent dans la réponse en traction).

Il est possible d'enrichir les modèles proposés, par exemple par l'ajout de la R-phase aux trois phases déjà modélisées. Ceci se traduirait par l'ajout d'une variable interne dans le modèle monocristallin et de N variables internes dans le modèle polycristallin. La courbe de calorimétrie pourrait notamment être reproduite par le modèle. Une modélisation plus poussée d'un actionneur AMF nécessiterait aussi de prendre en compte d'autres phénomènes physiques comme la plasticité, la fatigue ou encore le couplage thermomécanique.

Les modèles développés au cours de cette thèse ont ensuite été implémentés nu-

mériquement, il est donc possible de simuler le couplage AMF/structure de systèmes tridimensionnels soumis à tout type de trajet de chargement thermomécanique. Pour les structures simples contenant un seul fil AMF monocristallin, comme la poutre en flexion avec fil AMF collé ou bien le fil AMF couplé à un ressort, des solutions analytiques ont été établies. Elles permettent de pré-dimensionner aisément de tels actionneurs. Des structures plus complexes peuvent présenter une géométrie particulière ou contenir plusieurs fils, monocristallins ou polycristallins. Dans ce cas, une résolution numérique du problème de structure par la méthode des éléments finis est nécessaire. Pour ceci, un script UMAT a été développé pour le logiciel ABAQUS, permettant de simuler un fil AMF monocristallin ou polycristallin. La reformulation des équations sous forme d'un problème de complémentarité linéaire (LCP) permet de tirer profit d'algorithmes existants d'optimisation sous contraintes. Le temps de calcul est alors dépendant de l'algorithme utilisé. Notre choix s'est porté sur la méthode de Lemke mais d'autres méthodes auraient pu être choisies, notamment des méthodes de points intérieurs.

Enfin, des actionneurs contenant des fils AMF ont été mis au point, fabriqués et testés. Le fil AMF peut agir sur la structure uniquement en ses extrémités ou bien sur toute sa longueur, en étant noyé dans une matrice élastique. De nombreux actionneurs peuvent être ainsi développés, en jouant sur la forme de la structure à laquelle est couplé le fil, ou bien en utilisant divers modes de déformation de cette structure (flexion, torsion ou bien déformation axiale par exemple). Leur comportement a été comparé aux calculs effectués à l'aide des modèles. On peut notamment prédire les configurations *au repos*, *à chaud* et *à froid* de ces actionneurs grâce au modèle AMF. Dans le cas des lames composite-AMF, la forte sensibilité aux paramètres géométriques rend la modélisation de la réponse de l'actionneur difficile. Un prototype de protection solaire reposant sur le procédé de fabrication de lames composite-AMF a été fabriqué. De plus, un élément de façade fonctionnel, proche de l'échelle 1, a été conçu et réalisé. Il permet d'envisager à moyen terme une intégration à grande échelle dans une façade de bâtiment. En parallèle, une réflexion a été menée avec Arcora sur le cahier des charges en matière de performance énergétique, de respect des normes et d'intégration à la façade.

La robustesse des actionneurs développés a aussi été étudiée. Les performances en fatigue de l'AMF Nickel-Titane ne semblent pas assez bonnes pour notre application. En effet, même en recourant à des stratégies d'amplification cinématique, l'AMF doit fournir une grande amplitude de déformation pour engendrer de grands déplacements de la structure. Ceci réduit donc la durée de vie de l'actionneur et augmente sa fatigue fonctionnelle. Le comportement cyclique de l'AMF est encore mal connu, ce qui constitue un frein à la mise au point de structures autres que les actionneurs à usage unique. La prise en compte de la fatigue fonctionnelle dans le modèle pourrait se faire par l'introduction de 2N variables supplémentaires (une pour chaque phase).

Pour résumer, les alliages à mémoire de forme présentent des propriétés intéressantes qui permettent d'envisager la réalisation de protections solaires mises en mouvement par

des fils AMF. Un fonctionnement entièrement passif n'est pas possible du fait de l'hystérésis dans le comportement thermomécanique, mais une commande électrique paraît appropriée. Des fils AMF remplaceraient dans ce cas les moteurs électriques habituellement utilisés, tout en ayant des mouvements fluides et silencieux. Avec ce type de structure adaptative, il est possible d'obtenir des mouvements qui n'étaient pas réalisables avec des mécanismes de corps rigide, ce qui présente un grand intérêt pour l'architecture. Cependant, certains freins à un développement de tels actionneurs subsistent. En particulier, l'évolution du comportement du matériau au cours des cycles thermiques, peu maîtrisée, semble être le princpal obstacle à la diffusion d'actionneurs AMF pour réaliser de grands déplacements d'une structure pendant de nombreux cycles. L'alliage à mémoire de forme idéal pour notre application serait capable d'effectuer plusieurs centaines de milliers de cycles identiques avec une grande amplitude de déformation et peu d'hystérésis. Certains travaux récents sur les matériaux martensitiques (Song et al. (2013)) autres que le Nickel-Titane présentent des avancées intéressantes en ce sens.

Bibliographie

Ammar, O., N. Haddar, and L. Dieng
2017. Experimental investigation of the pseudoelastic behaviour of niti wires under strain- and stress-controlled cyclic tensile loadings. *Intermetallics*, 81.

Anand, L. and M. E. Gurtin
2003. Thermal effects in the superelasticity of crystalline shape-memory materials. *Journal of Mechanics Physics of Solids*, 51 :1015–1058.

Ashby, M.
2004. *Materials Selection in Mechanical Design*. Elsevier Science.

Auricchio, F., A. Reali, and U. Stefanelli
2009. A macroscopic 1d model for shape memory alloys including asymmetric behaviors and transformation-dependent elastic properties. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 198(17) :1631 – 1637.

Auricchio, F., R. L. Taylor, and J. Lubliner
1997. Shape-memory alloys : macromodelling and numerical simulations of the superelastic behavior. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 146(3) :281 – 312.

Barbarino, S., E. Saavedra, R. Ajaj, I. Dayyani, and M. Friswell
2014. A review on shape memory alloys with applications to morphing aircraft. *Smart Materials and Structures*, 23 :063001.

Benafan, O., R. Noebe, S. Padula, D. Brown, S. Vogel, and R. Vaidyanathan
2014. Thermomechanical cycling of a niti shape memory alloy-macroscopic response and microstructural evolution. *International Journal of Plasticity*, 56 :99 – 118.

Bernardini, D. and T. Pence
2002. Models for one-variant shape memory materials based on dissipation functions. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 37(8) :1299–1317.

Bertagne, C., T. Cognata, R. B. Sheth, C. E. Dinsmore, and D. Hartl
2017a. Testing and analysis of a morphing radiator concept for thermal control of crewed space vehicles. *Applied Thermal Engineering*, 124.

Bertagne, C. L., J. D. Whitcomb, D. J. Hartl, and L. Erickson
2017b. Experimental characterization of a composite morphing radiator prototype in a relevant thermal environment. In *25th AIAA/AHS Adaptive Structures Conference*, P. 1877.

Bhattacharya, K.
2003. *Microstructure of Martensite : Why it Forms and how it Gives Rise to the Shape-memory Effect*, Oxford Series on Materials Modelling. OUP Oxford.

Bil, C., K. Massey, and E. J. Abdullah
2013. Wing morphing control with shape memory alloy actuators. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 24(7) :879–898.

Boyd, J. G. and D. C. Lagoudas
1996. A thermodynamical constitutive model for shape memory materials. part i. the monolithic shape memory alloy. *International Journal of Plasticity*.

Brandi, U.
2006. *Lighting Design : Principles, Implementation, Case Studies*, number vol. 10 in Detail Praxis. Edition Detail.

Brinson, L.
1993. One-dimensional constitutive behavior of shape memory alloys : Thermomechanical derivation with non-constant material functions and redefined martensite internal variable. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 4(2) :229–242.

Buehler, W. J., J. V. Gilfrich, and R. C. Wiley
1963. Effect of Low-Temperature Phase Changes on the Mechanical Properties of Alloys near Composition TiNi. *Journal of Applied Physics*, 34 :1475–1477.

Carrier, B.
2013. *Influence of water on the short-term and long-term mechanical properties of swelling clays : experiments on self-supporting films and molecular simulations*. Theses, Université Paris-Est.

Chang, B., J. Shaw, and M. Iadicola
2006. Thermodynamics of shape memory alloy wire : Modeling, experiments, and application. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 18(1-2) :83–118.

Charpentier, V., P. Hannequart, S. Adriaenssens, O. Baverel, E. Viglino, and S. Eisenman
2017. Kinematic amplification strategies in plants and engineering. *Smart Materials and Structures*, 26 :063002.

Chemisky, Y., A. Duval, E. Patoor, and T. B. Zineb
2011. Constitutive model for shape memory alloys including phase transformation, martensitic reorientation and twins accommodation. *Mechanics of Materials*, 43(7) :361 – 376.

Churchill, C., J. Shaw, and M. Iadicola
2010. Tips and tricks for characterizing shape memory alloy wire : Part 4 – thermomechanical coupling. *Experimental Techniques*, 34 :63 – 80.

Cottle, R., J. Pang, and R. Stone
1992. *The Linear Complementarity Problem*, Classics in Applied Mathematics. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM, 3600 Market Street, Floor 6, Philadelphia, PA 19104).

CSTB
2013. Cahier des prescriptions techniques no. 3677 - conception des stores vénitiens intégrés entre vitrages non scellés. *Cahiers du CSTB*.

Duerig, T. W. and K. Bhattacharya
2015. The influence of the r-phase on the superelastic behavior of niti. *Shape Memory and Superelasticity*, 1(2) :153–161.

Duerig, T. W., A. R. Pelton, and K. Bhattacharya
2017. The measurement and interpretation of transformation temperatures in nitinol. *Shape Memory and Superelasticity*, 3(4) :485–498.

Eleuteri, M., L. Lussardi, and U. Stefanelli
2013. Thermal control of the souza-auricchio model for shape memory alloys. *Discrete and Continuous Dynamical Systems. Series S*, 2.

Erleben, K.
2011. num4lcp. published online at code.google.com/p/num4lcp/. *Open source project for numerical methods for linear complementarity problems in physics-based animation.*

Falk, F.
1980. Model free energy, mechanics, and thermodynamics of shape memory alloys. *Acta Metallurgica*, 28(12) :1773 – 1780.

Farrar-Nagy, S., R. Anderson, C. E. Hancock, and P. Reeves
2000. Impacts of shading and glazing combinations on residential energy use in a hot dry climate.

Fiorito, F., M. Sauchelli, D. Arroyo, M. Pesenti, M. Imperadori, G. Masera, and G. Ranzi
2016. Shape morphing solar shadings : a review. *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, 55 :863–884.

Frémond, M.
2001. *Non-Smooth Thermomechanics*, Physics and astronomy online library. Springer Berlin Heidelberg.

Frémond, M., S. Miyazaki, and I. C. for Mechanical Sciences
1996. *Shape memory alloys / M. Fremond, S. Miyazaki*, Courses and lectures - International Centre for Mechanical Sciences. Springer.

Frost, M., P. Sedlák, M. Sippola, and P. Šittner
2010. Thermomechanical model for niti shape memory wires. *Smart Materials and Structures*, 19(9) :094010.

Govindjee, S. and C. Miehe
2001. A multi-variant martensitic phase transformation model : formulation and numerical implementation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191 :215–238.

Gurka, M.
2015. *Active hybrid structures made of shape memory alloys and fiber-reinforced composites.*

Hackl, K. and R. Heinen
2008. A micromechanical model for pretextured polycrystalline shape-memory alloys including elastic anisotropy. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 19(8) :499–510.

Halphen, Bernard et Son Nguyen, Q.
1975. Sur les matériaux standard généralisés. *Journal de Mécanique*, 14 :39–63.

Hannequart, P., M. Peigney, J.-F. Caron, O. Baverel, and E. Viglino
2017. *The Potential of Shape Memory Alloys in Deployable Systems - A Design and Experimental Approach.* Springer.

Huang, X., G. Ackland, and K. Rabe
2003. Crystal structures and shape-memory behaviour of niti. *Nature materials*, 2 :307–11.

Jones, N. and D. Dye
2011. Martensite evolution in a niti shape memory alloy when thermal cycling under an applied load. *Intermetallics*, 19(10) :1348 – 1358.

Kelly, A., A. P. Stebner, and K. Bhattacharya
2016. A micromechanics-inspired constitutive model for shape-memory alloys that accounts for initiation and saturation of phase transformation. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 97(C).

Kim, K. and S. Daly
2013. Experimental studies of phase transformation in shape memory alloys. In *Application of Imaging Techniques to Mechanics of Materials and Structures, Volume 4*, T. Proulx, ed., Pp. 267–269, New York, NY. Springer New York.

Kuksenok, O., D. Deb, X. Yong, and A. C. Balazs
2014. Designing biomimetic reactive polymer gels. *Materials Today*, 17(10) :486 – 493.

Lagoudas, D.
2008. *Shape Memory Alloys : Modeling and Engineering Applications*, Springer ebook collection / Chemistry and Materials Science 2005-2008. Springer US.

Ölander, A.
1932. An electrochemical investigation of solid cadmium-gold alloys. *Journal of the American Chemical Society*, 54(10) :3819–3833.

Laplanche, G., T. Birk, S. Schneider, J. Frenzel, and G. Eggeler
2017. Effect of temperature and texture on the reorientation of martensite variants in niti shape memory alloys. *Acta Materialia*, 127 :143 – 152.

Lester, B., T. Baxevanis, Y. Chemisky, and D. Lagoudas
2015. Review and Perspectives : Shape Memory Alloy Composite Systems. *Acta Mechanica*, P. 60p.

Liang, C. and C. Rogers
1990. One-dimensional thermomechanical constitutive relations for shape memory materials. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 1(2) :207–234.

Malagisi, S., S. Marfia, E. Sacco, and J. Toti
2014. Modeling of smart concrete beams with shape memory alloy actuators. *Engineering Structures*, 75 :63 – 72.

Marfia, S. and R. Rizzoni
2013. One-dimensional constitutive sma model with two martensite variants : Analytical and numerical solutions. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 40(Supplement C) :166 – 185.

Matsumoto, O., S. Miyazaki, K. Otsuka, and H. Tamura
1987. Crystallography of martensitic transformation in ti-ni single crystals. *Acta Metallurgica*, 35(8) :2137 – 2144.

Miyazaki, S.
2017. My experience with ti–ni-based and ti-based shape memory alloys. *Shape Memory and Superelasticity*, 3.

Mohd Jani, J., M. Leary, A. Subic, and M. Gibson
2014. A review of shape memory alloy research, applications and opportunities. *Materials and Design*, 56 :1078–1113.

Nae, F. A., Y. Matsuzaki, and T. Ikeda
2003. Micromechanical modeling of polycrystalline shape-memory alloys including thermo-mechanical coupling. *Smart Materials and Structures*, 12(1) :6.

Peigney, M., J. Seguin, and E. Hervé-Luanco
2011. Numerical simulation of shape memory alloys structures using interior-point methods. *International Journal of Solids and Structures*, 48(20) :pp. 2791–2799.

Pelton, A. R., J. Dicello, and S. Miyazaki
2000. Optimisation of processing and properties of medical grade nitinol wire. *Minimally Invasive Therapy & Allied Technologies*, 9(2) :107–118.

Reedlunn, B., S. Daly, L. Hector, P. Zavattieri, and J. Shaw
2013. Tips and tricks for characterizing shape memory wire part 5 : Full-field strain measurement by digital image correlation. *Experimental Techniques*, 37(3) :62–78.

Reichert, S., A. Menges, and D. Correa
2015. Meteorosensitive architecture. *Comput. Aided Des.*, 60(C) :50–69.

Rockafellar, R. T.
1970. *Convex analysis*. Princeton, N.J. : Princeton University Press. Bibliography : pp.433-446.

Rodrigue, H., W. Wang, B. Bhandari, M.-W. Han, and S.-H. Ahn
2015. Sma-based smart soft composite structure capable of multiple modes of actuation. *Composites Part B : Engineering*, 82 :152 – 158.

Rodrigue, H., W. Wang, D.-R. Kim, and S.-H. Ahn
2017. Curved shape memory alloy-based soft actuators and application to soft gripper. *Composite Structures*, 176.

Sadjadpour, A. and K. Bhattacharya
2007. A micromechanics inspired constitutive model for shape-memory alloys : the one-dimensional case. *Smart Materials and Structures*, 16(1) :S51.

Sagar, G. and E. Stein
2010. Contributions on the theory and computation of mono-and poly-crystalline cyclic martensitic phase transformations. *ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 90(9) :655–681.

Scirè Mammano, Giovanni et Dragoni, E.
2014. Functional fatigue of ni–ti shape memory wires under various loading conditions. *International Journal of Fatigue*, 69 :71–83.

Scirè Mammano, Giovanni et Dragoni, E.
2015. Modelling, simulation and characterization of a linear shape memory actuator with compliant bow-like architecture. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 26(6) :718–729.

Shaw, J., C. Churchill, and M. Iadicola
2008. Tips and tricks for characterizing shape memory alloy wire : Part 1—differential scanning calorimetry and basic phenomena. *Experimental Techniques*, 32(5) :55–62.

Shaw, J. and S. Kyriakides
1997. On the nucleation and propagation of phase transformation fronts in a niti alloy. *Acta Materialia*, 45(2) :683 – 700.

Shaw, J. A. and S. Kyriakides
1995. Thermomechanical aspects of niti. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 43(8) :1243 – 1281.

Sittner, P., Y. Liu, and V. Novak
2005. On the origin of Lüders-like deformation of NiTi shape memory alloys. *Journal of Mechanics Physics of Solids*, 53 :1719–1746.

Song, Y., X. Chen, V. Dabade, T. Shield, and R. James
2013. Enhanced reversibility and unusual microstructure of a phase-transforming material. *Nature*, 502(7469) :85–88.

Souza, A. C., E. N. Mamiya, and N. Zouain
1998. Three-dimensional model for solids undergoing stress-induced phase transformations. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 17(5) :789 – 806.

Stupkiewicz, S. and H. Petryk
2002. Modelling of laminated microstructures in stress-induced martensitic transformations. *Journal of Mechanics Physics of Solids*, 50 :2303–2331.

Sung, D.
2016. Smart geometries for smart materials : Taming thermobimetal to behave. *Journal of Architectural Education*, 70 :96–106.

Sutton, M. A., J. H. Yan, V. Tiwari, H. W. Schreier, and J.-J. Orteu
2008. The effect of out-of-plane motion on 2D and 3D digital image correlation measurements. *Optics and Lasers in Engineering*, 46(10) :746–757.

Tanaka, K., S. Kobayashi, and Y. Sato
1986. Thermomechanics of transformation pseudoelasticity and shape memory effect in alloys. *International Journal of Plasticity*, 2(1) :59–72.

Thamburaja, P. and L. Anand
2001. Polycrystalline shape-memory materials : Effect of crystallographic texture. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 49(4) :709–737.

Ulpiani, G., M. Benedettelli, C. di Perna, and B. Naticchia
2017. Overheating phenomena induced by fully-glazed facades : Investigation of a sick building in italy and assessment of the benefits achieved via model predictive control of the ac system. *Solar Energy*, 157 :830 – 852.

Yang, S. and S. Seelecke
2009. Fe analysis of sma-based bio-inspired bone–joint system. *Smart Materials and Structures*, 18(10) :104020.

Annexes

Annexe A

UMAT pour le modèle polycristallin

Le script permettant d'utiliser le modèle AMF développé dans cette thèse avec ABAQUS est présenté ici, il est écrit en langage FORTRAN. Ce script permet à la fois de modéliser le monocristal ou le polycristal. Le programme repose sur la résolution d'un problème de complémentarité linéaire résolu dans notre cas par un algorithme existant, suivant la méthode de Lemke (Erleben (2011)). Cet algorithme est disponible en ligne en langage MATLAB et a été traduit ici en FORTRAN. Dans le logiciel ABAQUS il faut spécifier le nombre de variables internes NSTATV qui vaut 2N pour le polycristal et 2 pour le monocristal. ABAQUS demande aussi une liste de paramètres matériau. Les cinq premiers paramètres sont les suivants :

- PROPS(1) = E le module d'Young
- PROPS(2) = λ la chaleur latente
- PROPS(3) = T_0 la température de référence
- PROPS(4) = G_0 le paramètre de dissipation correspondant à la transformation de phase austénite - martensite autoaccomodée
- PROPS(5) = G_1 le paramètre de dissipation correspondant à la transformation de phase austénite - martensite orientée

Ensuite, dans la liste PROPS on retrouve les déformations maximales de transformation de phase ε_i^{tr}. Pour le monocristal il suffit d'entrer PROPS(7) = ε^{tr}. Pour le polycristal il faut entrer la liste des ε_i^{tr} en commençant par ε_{max}^{tr}. La longueur de la liste PROPS est donc $5 + N$ avec N le nonbre d'orientations cristallines dans le polycristal. Ce script est valable pour un état initial libre de contraintes avec toutes les variables internes nulles. Il est possible de modifier la valeur initiale des variables internes grâce à l'option SDVINI dans ABAQUS.

```
      SUBROUTINE UMAT(STRESS,STATEV,DDSDDE,SSE,SPD,SCD,
     1 RPL,DDSDDT,DRPLDE,DRPLDT,
     2 STRAN,DSTRAN,TIME,DTIME,TEMP,DTEMP,PREDEF,DPRED,CMNAME,
     3 NDI,NSHR,NTENS,NSTATV,PROPS,NPROPS,COORDS,DROT,PNEWDT,
     4 CELENT,DFGRD0,DFGRD1,NOEL,NPT,LAYER,KSPT,KSTEP,KINC)
!
      IMPLICIT NONE
      CHARACTER*80 CMNAME
      INTEGER I,J,NPROPS
!
      DOUBLE PRECISION STRESS, STRAN, DSTRAN, TEMP, DDSDDE, PREDEF
      DOUBLE PRECISION TIME(2), COORDS(3),DDSDDT(1),DFGRD0(3,3)
      DOUBLE PRECISION DFGRD1(3,3), DPRED(1),DROT(3,3),DRPLDE
      INTEGER NTENS, NSTATV
      INTEGER CELENT,DRPLDT,DTEMP,DTIME,KSPT,KSTEP,LAYER,NDI
      INTEGER NOEL,NPT,NSHR,PNEWDT,RPL,SCD,SPD,SSE,KINC
      DOUBLE PRECISION PROPS(NPROPS), STATEV(NSTATV), DNORI
      DOUBLE PRECISION EPSTR(NSTATV), Q(7*NSTATV/2),S(7*NSTATV/2)
      DOUBLE PRECISION X(7*NSTATV/2),MULTI(NSTATV),CR(NSTATV/2)
      DOUBLE PRECISION MATRIX(7*NSTATV/2,7*NSTATV/2)
      DOUBLE PRECISION EV, ETA, ZERO, ONE
      INTEGER NORI, NMAT ! Nombre d'orientations cristallines et taille de la
          matrice M
!
!     Nombre d'orientations et nombre de variables.
!     ATTENTION NSTATV doit etre multiple de 2 !!!
!
      ZERO=0.D0; ONE=1.D0;
      NORI=NSTATV/2      ! Nombre d'orientations cristallines
      NMAT=7*NORI        ! Taille de la matrice M du probleme LCP
      DNORI=DBLE(NORI)
      EV = STRAN + DSTRAN ! Calculer la deformation actualisee
!
!     Texture
!
      DO I=1,NORI
         EPSTR(I) = ZERO    ! Martensite autoaccomodee
         EPSTR(NORI+I) = PROPS(5+I) ! Deformation de transformation de phase
         CR(I) = 1/DNORI ! fractions volumiques de chaque orientation
             cristalline
      END DO
!
!     Initialisation de M
!
      DO I=1,NMAT
          DO J=1,NMAT
              MATRIX(I,J)=ZERO
          END DO
      END DO
```

```
!
!     Remplissage de M - Coin superieur gauche
!
      DO I=2*NORI+1,3*NORI
          DO J=2*NORI+1,3*NORI
              MATRIX(I,J)= EPSTR(I-NORI)/EPSTR(J-NORI)
              MATRIX(I,J+NORI)= -EPSTR(I-NORI)/EPSTR(J-NORI)
              MATRIX(I+NORI,J)= -EPSTR(I-NORI)/EPSTR(J-NORI)
              MATRIX(I+NORI,J+NORI)= EPSTR(I-NORI)/EPSTR(J-NORI)
          END DO
      END DO
!
!     Remplissage de M - Coin superieur droit
!
      DO I=1,NORI
          MATRIX(I,I+4*NORI)=-ONE
          MATRIX(I,I+6*NORI)=+ONE
          MATRIX(I+NORI,I+4*NORI)=+ONE
          MATRIX(I+NORI,I+6*NORI)=-ONE
          MATRIX(I+2*NORI,I+5*NORI)=-ONE
          MATRIX(I+2*NORI,I+6*NORI)=+ONE
          MATRIX(I+3*NORI,I+5*NORI)=+ONE
          MATRIX(I+3*NORI,I+6*NORI)=-ONE
      END DO
!
!     Remplissage de M - Coin inferieur gauche
!
      DO I=1,NORI
          MATRIX(I+4*NORI,I)=+ONE
          MATRIX(I+4*NORI,I+NORI)=-ONE
          MATRIX(I+5*NORI,I+2*NORI)=+ONE
          MATRIX(I+5*NORI,I+3*NORI)=-ONE
          MATRIX(I+6*NORI,I)=-ONE
          MATRIX(I+6*NORI,I+NORI)=+ONE
          MATRIX(I+6*NORI,I+2*NORI)=-ONE
          MATRIX(I+6*NORI,I+3*NORI)=+ONE
      END DO
!
!     Remplissage de Q
!
      DO I=1,NSTATV
          MULTI(I)=EPSTR(I)*STATEV(I)
      END DO
      DO I=1,NORI
          Q(I)=PROPS(4)+PROPS(2)*((TEMP-PROPS(3))/PROPS(3))
          Q(I+NORI)=PROPS(4)-PROPS(2)*((TEMP-PROPS(3))/PROPS(3))
          Q(I+2*NORI)=PROPS(5)
     1 +PROPS(2)*((TEMP-PROPS(3))/PROPS(3))
     2 -PROPS(1)*EPSTR(I+NORI)*(EV-SUM(MULTI))
```

```
          Q(I+3*NORI)=PROPS(5)
     1 -PROPS(2)*((TEMP-PROPS(3))/PROPS(3))
     2 +PROPS(1)*EPSTR(I+NORI)*(EV-SUM(MULTI))
          Q(I+4*NORI)=STATEV(I)*PROPS(1)*(EPSTR(I+NORI))**2
          Q(I+5*NORI)=STATEV(I+NORI)*PROPS(1)*(EPSTR(I+NORI))**2
          Q(I+6*NORI)=(CR(I)-STATEV(I)-STATEV(I+NORI))
     1  *PROPS(1)*(EPSTR(I+NORI))**2
       END DO
!
!      Calculer les nouvelles valeurs des fractions volumiques de martensite
!      par la resolution du Probleme de Complementarite Lineaire (LCP)
!
       CALL LEMKE (MATRIX,Q,NMAT,X)
       S = MATMUL(MATRIX,X) ! S = M X + Q
       DO I=1,NMAT
          S(I) = S(I) + Q(I)
       END DO
!
       ETA = 1.0D-6  ! Parametre de tolerance
       DO I = 1,NORI
          STATEV(I) = S(4*NORI+I)/(PROPS(1)*(EPSTR(NORI+I))**2)
          STATEV(NORI+I) = S(5*NORI+I)/(PROPS(1)*(EPSTR(NORI+I))**2)
         ! Actualiser les variables d'etat
       END DO
!
       DO I = 1,NSTATV
          MULTI(I) = STATEV(I)*EPSTR(I)
       END DO
       STRESS = PROPS(1)*(EV-SUM(MULTI)) ! Calculer la nouvelle contrainte
!
       DDSDDE = PROPS(1) ! Valeur par defaut de la raideur tangente
!
       DO I=1,NORI
          IF ((ABS(X(2*NORI+I)-X(3*NORI+I)) .GT. ETA) .AND.
     1 (STATEV(NORI+I) .GT. ETA) .AND.
     2 (STATEV(NORI+I) .LT. CR(I)-ETA)) THEN
              DDSDDE = ZERO ! Raideur tangente nulle
          END IF
       END DO
!
       RETURN
       END SUBROUTINE
!
!      --------- Resolution du probleme LCP par la methode de Lemke -----
!
       SUBROUTINE LEMKE (MATRXX,QU,NMATT,XI)
!
       IMPLICIT NONE
!
```

```
      INTEGER I,J,ITER,MAXITR,T,ENTER,LEAVE,LVIND,NMATT,INFO
      DOUBLE PRECISION ZERTOL, PIVTOL, TVAL, RATIO,THETA
      DOUBLE PRECISION ZERO, ONE
      DOUBLE PRECISION B(NMATT,NMATT),BSTOR(NMATT,NMATT)
      DOUBLE PRECISION MATRXX(NMATT,NMATT)
      DOUBLE PRECISION XSUB(NMATT),XI(NMATT),MX(NMATT),BE(NMATT)
      DOUBLE PRECISION D(NMATT),THETAV(NMATT)
      DOUBLE PRECISION ONES(NMATT),BONES(NMATT),QU(NMATT)
      DOUBLE PRECISION Z(2*NMATT)
      INTEGER BAS(NMATT),IPVT(NMATT)
      LOGICAL INDICE(NMATT)
!
      ZERO=0.D0; ONE=1.D0;
      ZERTOL = 1.0D-5; PIVTOL = 1.0D-8; MAXITR = 10000;
!
!  Check if trivial solution exists
!
      IF (MINVAL(QU) .GE. ZERO) THEN
          DO I=1,NMATT
              XI(I) = ZERO
          END DO
          RETURN
      END IF
      DO I=1,2*NMATT
         Z(I) = ZERO
      END DO
!
!  Determine initial basis
!
      DO I=1,NMATT
          INDICE(I) = .FALSE.
          BAS(I)=NMATT+I
          DO J=1,NMATT
              B(I,J) = ZERO
          END DO
          B(I,I)=-ONE
          XI(I) = ZERO
      END DO
!
!  Determine initial values
!
      DO I=1,NMATT ! XSUB=-(B\QU)
        XSUB(I) = QU(I)
           DO J=1,NMATT
               BSTOR(I,J)=B(I,J)
           END DO
      END DO ! Initialisation de XSUB
      CALL DGESV(NMATT,1,BSTOR,NMATT,IPVT,XSUB,NMATT,INFO)
     ! Now XSUB (copy of -QU) has been overwritten by the solution XSUB
```

```
      DO I=1,NMATT
          XSUB(I) = -XSUB(I)
      END DO
!
!  Check if initial basis provides solution
!
      IF (MINVAL(XSUB) .GE. ZERO) THEN
          DO I=1,NMATT
              XI(I) = ZERO
          END DO
          RETURN
      END IF
!
      T = 2*NMATT+1   ! Artificial variable
      ENTER = T       ! is the first entering variable
!
!  Determine initial leaving variable
!
      DO I=1,NMATT
        MX(I) = -XSUB(I)
      END DO
      TVAL = MAXVAL(MX)
      LVIND = MAXLOC(MX,1)
      LEAVE = BAS(LVIND)
      BAS(LVIND) = T ! Pivot in the artificial variable
      DO I=1,NMATT
         XSUB(I) = XSUB(I)+TVAL
         ONES(I) = ONE
         BE(I) = ZERO
      END DO
      XSUB(LVIND) = TVAL
      BONES = MATMUL(B,ONES)
      DO I=1,NMATT
         B(I,LVIND) = -BONES(I)
      END DO
!
!   Main iterations begin here
!
      DO ITER=1,MAXITR
         IF (LEAVE .EQ. T) THEN
              B(1,1)=0
           EXIT !  Check if done; if not, get new entering variable
         ELSE IF (LEAVE .LE. NMATT) THEN
             ENTER = NMATT + LEAVE
             DO I=1,NMATT
                 BE(I) = ZERO
             END DO
             BE(LEAVE) = -ONE
         ELSE
```

```
            ENTER = LEAVE - NMATT
            DO I = 1,NMATT
                BE(I) = MATRXX(I,ENTER)
            END DO
          END IF
          DO I=1,NMATT ! D = B\BE
              D(I) = BE(I)
              DO J=1,NMATT
                  BSTOR(I,J) = B(I,J)
              END DO
          END DO ! Initialisation de D
          CALL DGESV(NMATT,1,BSTOR,NMATT,IPVT,D,NMATT,INFO)
        ! Now D (copy of BE) has been overwritten by the solution D
!
!       Find new leaving variable
!
          DO I=1,NMATT  ! indices of d>0
              IF (D(I) .GT. PIVTOL) THEN
                  INDICE(I) = .TRUE.
              ELSE
                  INDICE(I) = .FALSE.
              END IF
          END DO
          DO I=1,NMATT
              IF (INDICE(I)) THEN
                  THETAV(I) = (XSUB(I)+ZERTOL)/D(I)
              ELSE
                  THETAV(I) = HUGE(ONE)
              END IF
          END DO
          THETA = MINVAL(THETAV) ! minimal ratios, d>0
          DO I=1,NMATT
              IF ((XSUB(I)/D(I)) .GT. THETA) THEN
                  INDICE(I) = .FALSE.
              END IF
          END DO  !  indices of minimal ratios, d>0, in INDICE
          J = 0
          DO I=1,NMATT ! check if artificial among these
              IF (INDICE(I) .AND. (BAS(I).EQ.T)) THEN
               J = I
           END IF
          END DO
          IF (J .GT. 0) THEN ! Always use artifical if possible
              LVIND = J
          ELSE  ! otherwise pick among set of max d
             DO I=1,NMATT
                IF (INDICE(I)) THEN
                    THETAV(I) = D(I)
                ELSE
```

```
                THETAV(I) = -HUGE(ONE)
              END IF
            END DO
            LVIND = MAXLOC(THETAV,1)
          END IF
          LEAVE = BAS(LVIND)
!
!     Perform pivot
!
          RATIO = XSUB(LVIND)/D(LVIND)
          DO I=1,NMATT
              XSUB(I) = XSUB(I) - RATIO*D(I)
          END DO
          XSUB(LVIND) = RATIO
          DO I=1,NMATT
              B(I,LVIND) = BE(I)
          END DO
          BAS(LVIND) = ENTER
        END DO    ! end of iterations
        IF ((ITER .GE. MAXITR) .AND. (LEAVE .NE. T)) THEN
          RETURN
        END IF
        DO I=1,NMATT
          Z(BAS(I)) = XSUB(I);
        END DO
        DO I=1,NMATT
          XI(I) = Z(I);
        END DO
        RETURN
!
        END SUBROUTINE
```