



HAL
open science

**Modèle d'ordre réduit en mécanique du contact.
Application à la simulation du comportement des
combustibles nucléaires**

Jules Fauque de Maistre

► **To cite this version:**

Jules Fauque de Maistre. Modèle d'ordre réduit en mécanique du contact. Application à la simulation du comportement des combustibles nucléaires. Mécanique [physics.med-ph]. Université Paris sciences et lettres, 2018. Français. NNT : 2018PSLEM073 . tel-02386690

HAL Id: tel-02386690

<https://pastel.hal.science/tel-02386690>

Submitted on 29 Nov 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE DE DOCTORAT

de l'Université de recherche Paris Sciences et Lettres
PSL Research University

Préparée à MINES ParisTech

Modèle d'ordre réduit en mécanique du contact. Application à la simulation du comportement des combustibles nucléaires.

École doctorale n°432 SCIENCES DES MÉTIERS POUR L'INGÉNIEUR

Spécialité MÉCANIQUE

Soutenue publiquement
par **Jules FAUQUE**
le 7 novembre 2018

Dirigée par **David RYCKELYNCK**
et encadrée par **Isabelle RAMIÈRE**

COMPOSITION DU JURY :

M. Aziz HAMDOUNI
Université de La Rochelle, Président

M. David DUREISSEIX
INSA Lyon, Rapporteur

M. Laurent GALLIMARD
Université de Paris Nanterre, Rapporteur

Mme Virginie EHLACHER
École des Ponts ParisTech, Examineur

M. Olivier FANDEUR
CEA Saclay, Examineur

M. David RYCKELYNCK
MINES ParisTech, Examineur

Mme Isabelle RAMIÈRE
CEA Cadarache, Examineur



*« Que chacun examine ses pensées, il les
retrouvera toutes occupées au passé et à l'avenir.
Nous ne pensons presque point au présent. »*

— Blaise Pascal

*« Un mathématicien est comme un aveugle dans une pièce noire,
cherchant à voir un chat noir, qui n'est peut-être même pas là ...
C'est Darwin qui l'avait dit, il avait raison ! »*

— Cédric Villani

*« Il y a bien moins de difficulté à
résoudre un problème qu'à le poser. »*

— Joseph de Maistre

*« Estimer correctement son degré d'ignorance
est une étape saine et nécessaire. »*

— Hubert Reeves

*« Moins on est intelligent, plus on a de chance
d'être romancier. Sinon, on écrit des thèses. »*

— Georges Simenon

Remerciements

Envisager de faire une thèse m'est venu assez tardivement et l'élément déclencheur en a été un projet réalisé en dernière année d'école d'ingénieurs dans l'équipe NACHOS du centre Inria Sophia Antipolis. C'est cette expérience qui m'a permis de découvrir le monde de la recherche et qui m'en a donné le goût. C'est pour cette raison que je souhaiterais commencer par remercier les membres de cette équipe et en particulier MM. Stéphane LANTERI et Jonathan VICQUERAT.

J'ai alors cherché un stage de fin d'études pouvant aboutir sur une thèse, stage que j'ai effectué au Laboratoire de Simulation du comportement des Combustibles du CEA Cadarache. A suivi la thèse et me voici aujourd'hui docteur en mécanique. À cet effet j'aimerais remercier pour son suivi minutieux et sa constance Mme Isabelle RAMIÈRE qui a encadré mon stage puis mon travail quotidien de doctorant, ainsi que M. David RYCKELYNCK, mon directeur de thèse, pour ses conseils éclairés. Je les remercie tous deux grandement pour la confiance qu'ils m'ont accordée, pour m'avoir accompagné tout au long de ma recherche ainsi que pour l'investissement sans faille dont ils ont fait preuve.

Je remercie également MM. David DUREISSEIX et Laurent GALLIMARD d'avoir accepté d'être rapporteurs de ce mémoire et tiens à saluer le travail consciencieux qu'ils ont réalisé. J'aimerais aussi remercier les autres membres du jury, à savoir M. Aziz HAMDOUNI qui l'a présidé ainsi que Mme Virginie EHRLACHER et M. Olivier FANDEUR pour leurs qualités d'examineurs. Vos remarques et interrogations montrent l'intérêt que vous avez porté à ce travail.

Je ne saurais oublier tous les collègues que j'ai pu côtoyer au CEA comme au Centre Des Matériaux et plus spécifiquement ceux qui m'ont aidé autant scientifiquement qu'administrativement sans omettre tous ceux qui ont permis de créer une ambiance sympathique et propice au travail.

Cette thèse n'aurait sans doute pas vu le jour sans le soutien indéfectible de mes proches. Leur ignorance des sphères mathématique et mécanique étant aussi immense que la foi qu'ils ont en moi, les temps de doutes et d'aridité que j'ai pu traverser en ont été considérablement allégés. À eux ma gratitude.

Enfin je dédie ce travail de recherche à tous ceux qui – même peut-être sans le savoir – par le regard qu'ils ont porté sur moi, les horizons qu'ils m'ont ouverts, les valeurs et les goûts qu'ils m'ont transmis, leurs exigences et leur exemple, m'ont permis de me construire.

Table des matières

Introduction	1
Notations	5
Abréviations	7
I Contexte	9
I.1 Contexte industriel	11
I.1.1 Réacteur à eau pressurisée	11
I.1.2 Cœur d'un réacteur à eau pressurisée	13
I.1.3 Comportement du crayon combustible	14
I.1.4 Modélisation du combustible	16
I.2 Objectifs et réalisations de la thèse	18
II État de l'art des méthodes de réduction d'ordre de modèles	21
II.1 Méthodes de réduction d'ordre de modèles	23
II.1.1 Méthodes <i>a priori</i>	23
II.1.2 Méthodes <i>a posteriori</i>	25
II.1.3 Outils utilisés par les méthodes de réduction d'ordre de modèles	29
II.2 Hyper-réduction en élasticité	35
II.2.1 Résolution par éléments finis d'un problème élastique	36
II.2.2 Construction d'une base réduite	39
II.2.3 Construction d'un domaine d'intégration réduit	40
II.2.4 Définition du problème hyper-réduit	41
II.3 Réduction d'ordre de modèles en mécanique du contact	42
II.3.1 Résolution par éléments finis d'un problème de contact élastique	42
II.3.2 Méthodes de réduction d'ordre de modèles en mécanique du contact	47
III Hyper-réduction hybride pour la mécanique du contact élastique	53
III.1 Hyper-réduction hybride pour le contact	55
III.1.1 Révision du domaine d'intégration réduit	55
III.1.2 Définition de l'hyper-réduction hybride	56
III.1.3 Reconstruction <i>a posteriori</i> des multiplicateurs de Lagrange	59
III.1.4 Indicateur d'erreur	59
III.2 Implémentation de l'hyper-réduction hybride	60
III.2.1 Implémentation en Python	60
III.2.2 Implémentation peu intrusive pour Cast3M	61
III.3 Hyper-réduction hybride appliquée à un cas test 1D	64
III.3.1 Cas test	64
III.3.2 Application de l'hyper-réduction hybride	65
III.3.3 Comparaison avec la PBM	68
III.4 Application de l'hyper-réduction hybride à un cas test 2D avec Cast3M	73
III.4.1 Cas test	73
III.4.2 Construction du modèle hyper-réduit	74

III.4.3	Résultats de l'hyper-réduction dans et en dehors de l'espace paramétrique	76
III.4.4	Étude de la condition LBB en fonction des ddl EF	79
III.4.5	Traitement d'un espace paramétrique plus grand et comparaison avec la PBM	84
III.5	Application de l'hyper-réduction hybride à un cas test 3D avec Cast3M	87
III.5.1	Cas représentatif de chargements thermo-mécaniques sur l'élément combustible	87
III.5.2	Construction de deux modèles par hyper-réduction hybride	89
III.5.3	Application de l'hyper-réduction hybride	91
III.5.4	Erreur du modèle HRH en fonction du seuil POD	93
IV	HRH pour la mécanique du contact entre matériaux non-linéaires	95
IV.1	Hyper-réduction hybride pour un matériau non-linéaire	97
IV.1.1	Résolution par éléments finis avec un comportement non-linéaire	97
IV.1.2	Hyper-réduction hybride pour un matériau non-linéaire	100
IV.2	Hyper-réduction hybride pour le contact avec des matériaux non-linéaires	101
IV.2.1	Mécanique du contact avec un comportement non-linéaire	101
IV.2.2	Hyper-réduction hybride en mécanique du contact pour un comportement non-linéaire	101
IV.3	Implémentation dans Cast3M	102
IV.4	Application de l'hyper-réduction hybride à un cas test 2D avec Cast3M	103
IV.4.1	Cas test 2D non-linéaire	103
IV.4.2	Réduction de l'ordre du modèle	105
IV.4.3	Résultats obtenus avec le modèle hyper-réduit hybride	106
	Conclusions et perspectives	112
	A Article	113
	Liste des illustrations	137
	Références bibliographiques	141

Introduction

Ce travail s'inscrit dans le cadre des études concernant le comportement des combustibles nucléaires de la filière des Réacteurs à Eau Pressurisée (REP) – qui constituent la totalité des réacteurs du parc électronucléaire français et la majorité du parc international – menées au Laboratoire de Simulation du comportement des Combustibles du Commissariat à l'Énergie Atomique et aux Énergies Alternatives (CEA) Cadarache.

Au cours de l'irradiation en réacteur, les pastilles de combustible vont entrer en contact avec la gaine qui les entoure. Ce phénomène est appelé interaction pastille-gaine (IPG) et peut dans certaines situations représenter un risque de percement ou de perte d'étanchéité de la gaine, première barrière de confinement des produits de fission. Pour garantir l'intégrité de la gaine, la démarche de sûreté consiste à limiter le domaine de fonctionnement autorisé des réacteurs. Dans le but de réduire les contraintes d'exploitation, des outils sont développés pour modéliser et simuler avec la meilleure précision le comportement du combustible nucléaire, et en particulier le phénomène d'IPG. Au CEA, c'est le logiciel ALCYONE de la plate-forme PLÉIADES, co-développée en collaboration avec Électricité De France (EDF) et FRAMATOME, qui permet de simuler le comportement du combustible nucléaire des REP.

Le schéma de calcul d'ALCYONE s'appuie sur un couplage multi-physiques de point fixe entre les différents modèles (neutronique, thermique, mécanique, physico-chimie, *etc*) intervenant dans la simulation du comportement des combustibles REP. L'essentiel du temps CPU d'un calcul ALCYONE est consommé par la résolution mécanique non-linéaire effectuée via le solveur éléments finis Cast3M [[Cast3M](#)], développé également au CEA.

Afin d'accélérer les temps de calcul d'ALCYONE, nous souhaitons étudier l'apport de la réduction d'ordre de modèles pour la simulation du comportement mécanique du crayon combustible. Le modèle d'ordre réduit obtenu avec ce type de méthodes permet d'accéder plus rapidement à une solution approchée de la solution du modèle d'ordre plein. L'erreur due à la réduction d'ordre peut être estimée. Pour la simulation mécanique du combustible nucléaire, la méthode de réduction d'ordre pourra alors être utilisée pour accélérer des phases d'optimisation dont la meilleure solution devra être vérifiée avec le modèle d'ordre plein. La méthode de réduction d'ordre de modèles devra être à la fois capable de réduire un problème de mécanique avec des matériaux ayant une loi de comportement non-linéaire, mais également être efficace pour la mécanique du contact. De plus, cette méthode devra être peu intrusive pour pouvoir être implémentée facilement dans Cast3M et respecter la manière dont le contact y est traité numériquement, à savoir par multiplicateurs de Lagrange.

La littérature scientifique concernant la réduction d'ordre de modèles est vaste. Dès le début des ordinateurs personnels dans les années 1970, différentes méthodes ont été proposées car les moyens de calcul était sommaires comparés aux possibilités offertes aujourd'hui. Elle a ensuite été laissée de côté pendant un temps à cause du développement très rapide de

l'informatique. Depuis une vingtaine d'années, la réduction d'ordre de modèles est revenue en force étant donné les limitations rencontrées pour proposer des processeurs toujours plus puissants et la volonté de résoudre des problèmes toujours plus complexes. En particulier en mécanique du contact, qui fait partie des problèmes les plus difficiles à résoudre étant donné la non-linéarité intrinsèque. Ce n'est que très récemment que quelques méthodes ont été proposées. Ces dernières ne répondant pas à l'ensemble de nos critères, nous avons décidé de développer une nouvelle méthode.

Nous proposons d'étendre la méthode d'hyper-réduction avec domaine d'intégration réduit [Ryckelynck, 2009], qui a été développée pour réduire l'ordre des modèles de mécanique pour des matériaux au comportement non-linéaire, à la mécanique du contact. Pour ce faire, nous nous appuyerons sur l'expérience des méthodes de réduction d'ordre de modèles ayant déjà été proposées pour réduire des problèmes de mécanique du contact traité par multiplicateurs de Lagrange mais qui ne sont pas adaptées pour réduire l'ordre de modèles avec des matériaux non-linéaires.

Cette thèse a été réalisée dans le cadre du projet SICOM (Simulation COMbustible) dédié au développement de la plate-forme logicielle PLÉIADES pour la simulation du comportement des éléments combustibles sous irradiation. Ces travaux sont cofinancés par le CEA (Commissariat à l'Énergie Atomique et aux Énergies Alternatives), EDF (Électricité de France) et FRAMATOME.

Plan du mémoire

Dans un premier temps le contexte de l'étude sera introduit, à savoir la simulation du comportement mécanique du combustible nucléaire. La problématique de la thèse sera ensuite clairement énoncée ainsi que le travail proposé pour y répondre.

La notion de réduction d'ordre de modèles sera développée dans le second chapitre et différentes méthodes seront discutées pour donner une vision générale de ce que recouvre ce terme générique. L'hyper-réduction avec domaine d'intégration réduit [Ryckelynck, 2009 ; Ryckelynck *et al.*, 2016] et les outils associés pour arriver au modèle d'ordre réduit seront ensuite abordés dans le cadre d'un problème élasto-statique. Un état de l'art plus détaillé sera réalisé sur les méthodes de réduction d'ordre de modèles qui ont été proposées pour traiter la mécanique du contact et plus particulièrement lorsque le contact est numériquement traité par multiplicateurs de Lagrange.

Dans le troisième chapitre nous proposerons une méthode – que nous nommerons hyper-réduction hybride – visant à réduire les problèmes de mécanique du contact. Elle y est formulée dans un cas élasto-statique et pour un contact sans frottement, traité par multiplicateurs de Lagrange. Nous proposerons également une possible construction du domaine d'intégration réduit dans le cas d'un problème de contact. S'ensuivra l'élaboration d'un indicateur d'erreur original ainsi qu'une stratégie de reconstruction des multiplicateurs de Lagrange sur toute la zone de contact potentiel. L'hyper-réduction hybride sera appliquée à différents problèmes de mécanique du contact avec des matériaux ayant un comportement élastique. Le premier sera un cas test 1D de la bibliographie [Haasdonk *et al.*, 2012] qui présente un contact entre un solide élastique et un obstacle indéformable. Après avoir été implémentée dans Cast3M, la méthode sera testée sur deux cas tests présentant un contact entre deux solides élastiques. L'un est 2D axisymétrique et le chargement est une pression variable tandis que l'autre est 3D et il s'agit d'un chargement thermique.

Le dernier chapitre consistera d'abord en l'extension de la méthode d'hyper-réduction hybride à des matériaux avec un comportement non-linéaire. Ensuite, la méthode d'hyper-

réduction hybride sera développée pour la mécanique du contact avec non-linéarité matérielle. Nous verrons que la formulation de cette dernière s'appuie largement sur les développements effectués en mécanique du contact élastique proposés dans le troisième chapitre. L'hyper-réduction hybride pour le contact avec non-linéarité matérielle sera également implémentée dans Cast3M et vérifiée sur un cas test 2D de contact entre un solide élasto-plastique et un solide visco-plastique.

Notations

Dans ce manuscrit, tenseurs et hypermatrices sont soulignés autant de fois que leur ordre. Par exemple, les vecteurs sont soulignés une fois $\underline{\cdot}$, tandis que les matrices sont soulignées deux fois $\underline{\underline{\cdot}}$, etc. Les indices d'un tenseur ou d'une hypermatrice permettent d'identifier les composantes. Par exemple, $(\underline{\underline{A}})_{ij}$ dénote la composante située à la i -ème ligne et j -ème colonne de $\underline{\underline{A}}$.

$\underline{0}$ et respectivement $\underline{\underline{0}}$ dénotent un vecteur et une matrice de zéros.

$\underline{\underline{I}}_N$ dénote la matrice identité de taille $N \times N$.

Une matrice diagonale s'écrit de manière abrégée $\text{diag}(x_1, \dots, x_N)$, en particulier $\underline{\underline{I}} = \text{diag}(1, \dots, 1)$.

La notation du langage de programmation Python est utilisée pour la restriction à certaines lignes et colonnes des vecteurs et matrices. Par exemple, la restriction d'une matrice $\underline{\underline{A}}$ à certaines lignes dont les indices sont dans \mathcal{L} et à l'ensemble des colonnes s'écrit $\underline{\underline{A}}[\mathcal{L},:]$.

La convention de sommation d'Einstein, ou notation d'Einstein, n'est pas utilisée dans ce document.

Le symbole " \odot " dénote le produit terme à terme. On a par exemple $(\underline{\underline{A}} \odot \underline{\underline{B}})_{ij} = (\underline{\underline{A}})_{ij}(\underline{\underline{B}})_{ij}$ ou $(\underline{a} \odot \underline{b})_{ij} = (a)_i(b)_{ij}$.

Le produit doublement contracté entre deux tenseurs s'écrit " $:$ ". Il consiste en la double contraction sur les deux derniers indices du premier tenseur et les deux premiers indices du deuxième tenseur. Le produit doublement contracté entre un tenseur d'ordre m et un tenseur d'ordre n donne un tenseur d'ordre $m + n - 4$. Par exemple, $(\underline{\underline{A}} : \underline{\underline{B}})_{ij} = \sum_{ij} (\underline{\underline{A}})_{ij}(\underline{\underline{B}})_{ij}$ donne un scalaire tandis que $(\underline{\underline{C}} : \underline{\underline{B}})_{ij} = \sum_{kl} (\underline{\underline{C}})_{ijkl}(\underline{\underline{B}})_{kl}$ donne un tenseur d'ordre 2.

Les parties positive et négative de $x \in \mathbb{R}$ sont respectivement définies par $[x]_+ = \max(x, 0)$ et $[x]_- = \min(x, 0)$, et pour un vecteur $\underline{x} \in \mathbb{R}^N$ par $[\underline{x}]_+ = ((x)_i)_i^N$ et $[\underline{x}]_- = ((x)_i)_i^N$. Un vecteur dont tous les éléments sont positifs est dit positif, et de même si négatif. Cela vaut également pour une matrice.

Nous notons $\llbracket i, j \rrbracket$ l'ensemble des entiers relatifs compris entre i et j .

Le symbole de Kronecker est défini par :

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

La norme Euclidienne ou norme 2 d'un vecteur se note $\|\cdot\|_2$:

$$\|\underline{U}\|_2 = (\underline{U}^T \underline{U})^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_i (\underline{U})_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

où l'exposant T désigne l'opération de transposition.

La norme de Frobenius d'une matrice se note $\|\cdot\|_F$ et vaut :

$$\|\underline{A}\|_F = (\underline{A} : \underline{A})^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i,j} (\underline{A})_{ij}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Le produit scalaire L^2 défini sur Ω s'écrit $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2(\Omega)}$, tel que :

$$\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} \underline{u}^T \underline{v} \, d\Omega.$$

La norme L^2 associée, définie sur Ω , s'écrit $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$ et est définie par :

$$\|\underline{u}\|_{L^2(\Omega)} = \left(\langle \underline{u}, \underline{u} \rangle_{L^2(\Omega)} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_{\Omega} \underline{u}^T \underline{u} \, d\Omega \right)^{\frac{1}{2}}.$$

La norme H^1 définie sur Ω s'écrit $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ et est définie par :

$$\|\underline{u}\|_{H^1(\Omega)} = \left(\|\underline{u}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{k=1}^D \|\partial_{x_k} \underline{u}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

avec D la dimension de l'espace.

Soit E un espace de Hilbert et F son espace dual. Leurs produits scalaires s'écrivent respectivement $\langle \cdot, \cdot \rangle_E$ et $\langle \cdot, \cdot \rangle_F$. En introduisant une base de E de dimension H_E , $\{\underline{\beta}_i\}_{i=1}^{H_E}$, nous pouvons écrire :

$$\langle \underline{u}, \underline{u}' \rangle_E = \underline{\xi}_u^T \underline{M}^E \underline{\xi}_{u'} \quad \forall \underline{u}, \underline{u}' \in E \times E$$

avec $\underline{\xi}_u$ et $\underline{\xi}_{u'}$ étant les coefficients associés à \underline{u} et \underline{u}' dans la base de E et $\underline{M}^E = \left(\langle \underline{\beta}_i, \underline{\beta}_j \rangle_E \right)_{i,j=1}^{H_E}$.

Nous avons alors la relation :

$$\langle \underline{v}, \underline{v}' \rangle_F = \underline{\xi}_v^T (\underline{M}^E)^{-1} \underline{\xi}_{v'} \quad \forall \underline{v}, \underline{v}' \in F \times F$$

avec $\underline{\xi}_v$ et $\underline{\xi}_{v'}$ qui sont les coefficients associés à \underline{v} et \underline{v}' dans la base de F duale à celle de E .

Abréviations

Sigle	Définition
CEA	Commissariat à l'Énergie Atomique et aux Énergies Alternatives
REP	Réacteur à Eau Pressurisée
IPG	Interaction Pastille-Gaine
EF	Éléments Finis
Ddl	Degré de liberté
FOM	Full-Order Model (modèle d'ordre plein)
ROM	Reduced-Order Model (modèle d'ordre réduit)
RBM	Reduced Basis Method (méthode des bases réduites)
POD	Proper Orthogonal Decomposition (décomposition orthogonale aux valeurs propres)
SVD	Singular Value Decomposition (décomposition en valeurs singulières)
DEIM	Discrete Empirical Interpolation Method (méthode d'interpolation empirique discrète)
HR	Hyper-Reduction (hyper-réduction)
RID	Reduced Integration Domain (domaine d'intégration réduit)
NNMF	Non-Negative Matrix Factorization (factorisation non-négative de matrice)
PBM	Projection-Based Method (méthode basée sur la projection)
HRH	Hyper-Réduction Hybride

Chapitre I

Contexte

Ce chapitre introduit le contexte de ce travail de thèse. Nous présentons en premier lieu le contexte industriel qui est la simulation du comportement du combustible nucléaire.

La problématique est que la résolution mécanique prend une grande partie du temps de calcul de la résolution globale multi-physiques. Ce temps s'explique par la complexité du problème mécanique qui fait intervenir une non-linéarité de contact ainsi que des non-linéarités matériaux.

L'objectif de la thèse est alors de proposer un moyen de réduire ce temps de calcul. Pour cela, nous nous intéressons à la réduction d'ordre de modèles.

Sommaire

I.1	Contexte industriel	11
I.1.1	Réacteur à eau pressurisée	11
I.1.2	Cœur d'un réacteur à eau pressurisée	13
I.1.3	Comportement du crayon combustible	14
I.1.4	Modélisation du combustible	16
I.2	Objectifs et réalisations de la thèse	18

I.1 Contexte industriel

Le développement de notre société est directement lié à l'énergie, ce qui en fait une notion majeure. Et pourtant, il s'agit d'une notion abstraite. C'est en fait l'aide des technologies qui permet à l'Homme d'en convertir une partie, qui va lui être utile, à partir des ressources disponibles (fossiles, eau, vent, soleil, *etc*).

Parmi les différentes technologies développées pour produire de l'électricité, il y a l'énergie nucléaire. La maîtrise de la fission nucléaire a d'abord été un enjeu militaire. Cela a ensuite favorisé un développement rapide du nucléaire civil au cours des années 1950. La maîtrise de l'atome pour produire de l'électricité représentait alors une source d'énergie inépuisable. A suivi une forte industrialisation et le développement de projets importants. Après les accidents de Three Mile Island en 1979, de Tchernobyl en 1986 et beaucoup plus récemment de Fukushima en 2011 qui eurent un fort impact sur l'opinion publique, nous assistons à un renforcement des exigences de sûreté vis-à-vis des centrales nucléaires.

Le combustible nucléaire contient des atomes dont le noyau est fissile. Ces noyaux ont la propriété de se casser, sous l'effet d'une collision avec un neutron, en produits de fission radioactifs tout en libérant de l'énergie. Une réaction en chaîne contrôlée permet alors de maintenir la fission des noyaux lourds et de récupérer de l'énergie en continu sous forme de chaleur. L'énergie contenue dans le combustible est très concentrée. Pour donner un ordre de grandeur, un kilogramme d'uranium utilisé dans un réacteur à eau sous pression produit environ 10 mille fois plus d'énergie qu'un kilogramme de charbon ou de pétrole dans une centrale thermique.

Depuis les débuts de l'industrie électronucléaire, différentes filières de réacteurs ont été développées à travers le monde. Ces filières se distinguent par des choix d'options technologiques mais trois caractéristiques majeures permettent de les différencier. La première est la nature de la matière fissile utilisée comme combustible nucléaire. Il s'agit le plus souvent de l'uranium, enrichi ou non d'uranium 235 – isotope fissile de l'uranium – ou de plutonium. La seconde est le modérateur qui sert à ralentir les neutrons libérés lors de la fission nucléaire, trop énergétiques pour provoquer efficacement une nouvelle fission (excepté pour la filière des réacteurs à neutrons rapides). La troisième est le fluide caloporteur qui permet de récupérer l'énergie sous forme de chaleur libérée lors de la fission et de la transmettre vers les systèmes qui transformeront cette chaleur en électricité : turbine et alternateur. Le caloporteur permet par ailleurs de maintenir la température du combustible à sa valeur nominale, compatible par exemple avec la tenue des matériaux. Le tableau I.1 rassemble différentes filières électronucléaires.

Nous nous focaliserons dans ce document sur la filière des Réacteurs à Eau Pressurisée – abrégé REP – qui est la plus présente dans le monde et qui représente la totalité du parc électronucléaire français.

I.1.1 Réacteur à eau pressurisée

Le principe de fonctionnement d'un REP est illustré sur la figure I.1. Nous pouvons y distinguer trois circuits. Le circuit primaire, d'abord, est le siège de la réaction nucléaire. L'eau pressurisée qui s'y trouve à 155 bars est à la fois le caloporteur et le modérateur. Elle rentre dans le cœur à environ 280°C et en ressort à environ 320°C. À l'aide d'un générateur de vapeur qui sert d'échangeur de chaleur entre les circuits primaire et secondaire, l'eau contenue dans le circuit secondaire est vaporisée et entraîne la rotation d'une turbine. Un alternateur permet ensuite de convertir l'énergie mécanique en énergie électrique. Enfin, le circuit tertiaire permet le refroidissement de l'eau du circuit secondaire à l'aide d'un condenseur.

Filière	Combustible	Modérateur	Caloporteur
Réacteur uranium naturel graphite gaz	Uranium naturel (0,7 % d'uranium 235)	Carbone solide (graphite)	Gaz carbonique
Réacteur à eau lourde	Uranium naturel	Eau lourde	Eau lourde sous pression
Réacteur bouillant de grande puissance	Uranium enrichi à ~ 2 % d'uranium 235	Carbone (graphite)	Eau bouillante
Réacteur à eau bouillante	Uranium enrichi à ~ 3 % d'uranium 235		Eau bouillante
Réacteur à eau pressurisée	Uranium enrichi à ~ 4 % d'uranium 235 ou oxyde mixte		Eau sous pression maintenue à l'état liquide
Réacteur à neutrons rapides	Uranium enrichi à ~ 20 % d'uranium 235 ou oxyde mixte	Aucun	Métal liquide ou gaz (par exemple sodium ou hélium)

TABLEAU I.1 – Différentes filières de réacteurs nucléaires d'après [CEA, 2016]

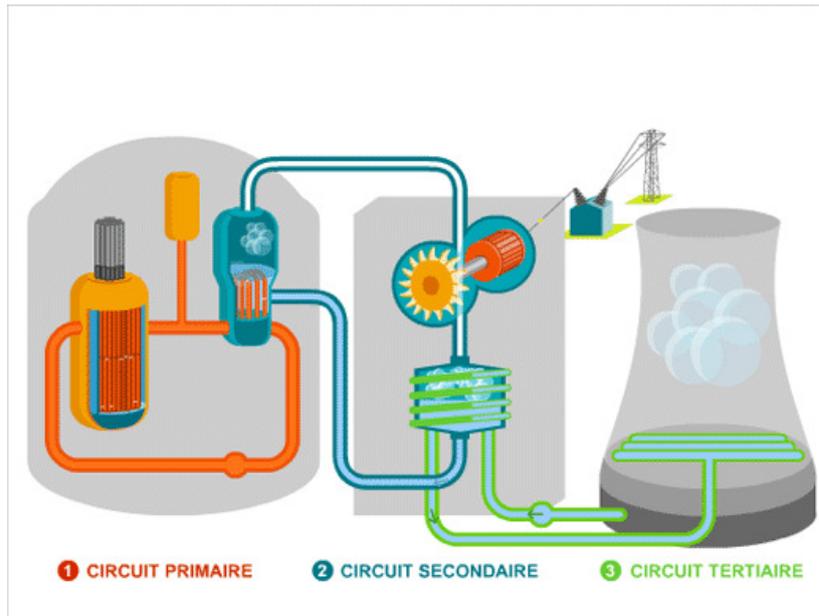


FIGURE I.1 – Représentation des différents circuits d'un réacteur à eau pressurisée

Pour des questions de sûreté, un REP compte trois barrières de confinement permettant d'empêcher le relâchement de produits éventuellement radioactifs à l'extérieur du réacteur nucléaire. La première est la gaine métallique entourant le combustible nucléaire, la seconde est une enveloppe métallique autour du circuit primaire et enfin la troisième est une enceinte de confinement du réacteur en béton de forte épaisseur.

Nous nous intéressons ici au circuit primaire et plus particulièrement au cœur du réacteur où a lieu la réaction de fission nucléaire. Pour plus de détails le lecteur pourra se référer à deux ouvrages sur le combustible nucléaire [Bailly *et al.*, 1997 ; Guillet *et al.*, 2008].

I.1.2 Cœur d'un réacteur à eau pressurisée

Le cœur d'un REP est constitué d'assemblages de crayons combustibles dans lesquels les crayons sont arrangés en réseau à maille carrée dans une structure assurant notamment leur maintien mécanique. Chaque assemblage est constitué de 264 crayons de combustibles contenant la matière fissile et de 25 tubes guides utilisés pour l'introduction de barres de commande permettant de contrôler la réaction nucléaire par absorption de neutrons. Un tube guide est réservé à l'instrumentation centrale (voir figure I.2). Cette configuration géométrique maximise la surface d'échange de chaleur et permet une bonne circulation du caloporteur entre les crayons, et donc l'évacuation de la chaleur hors du cœur du réacteur.

Un crayon, comme représenté en figure I.3, est un cylindre constitué d'un empilement de pastilles, appelée colonne combustible, entouré d'une gaine métallique fermée à ses deux extrémités par un bouchon soudé assurant l'étanchéité. La gaine contient également une chambre d'expansion, appelée plenum, permettant l'accommodation des gaz de fission relâchés et du gonflement axial de la colonne combustible par les produits de fission. Dans le plenum est placé un ressort qui maintient la colonne combustible. Le crayon est initialement rempli d'hélium sous une pression comprise entre 25 et 30 bars, de façon à compenser, en partie, la pression externe du fluide caloporteur.

Pour donner un ordre de grandeur, un réacteur d'une puissance de 900 MWe – mégawatt électrique, correspondant à la puissance produite sous forme électrique – compte 157 assem-

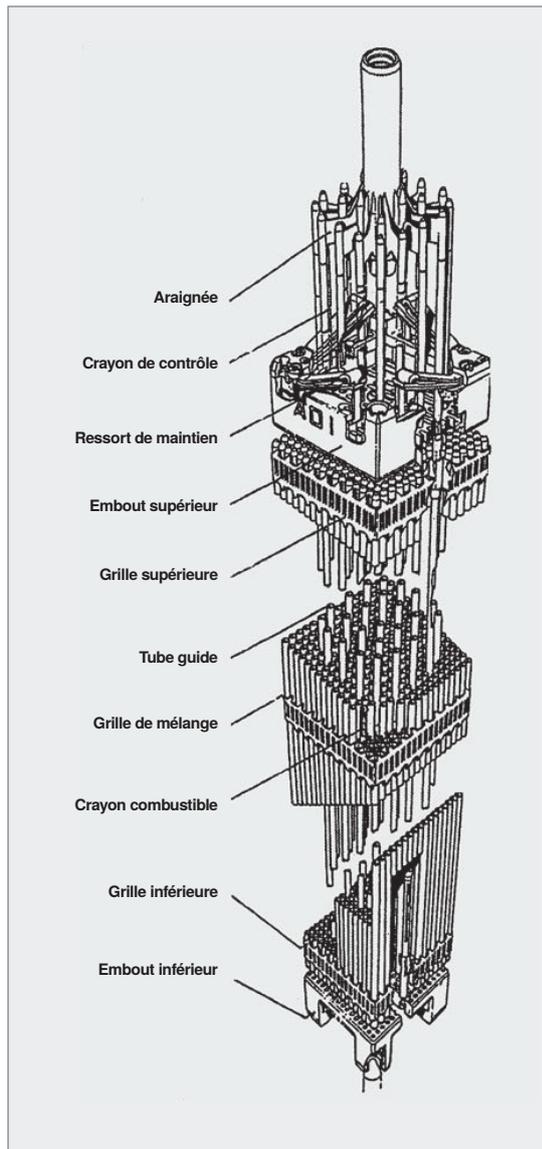


FIGURE I.2 – Schéma d'un assemblage combustible 17×17 d'un réacteur à eau pressurisée et d'une grappe de contrôle

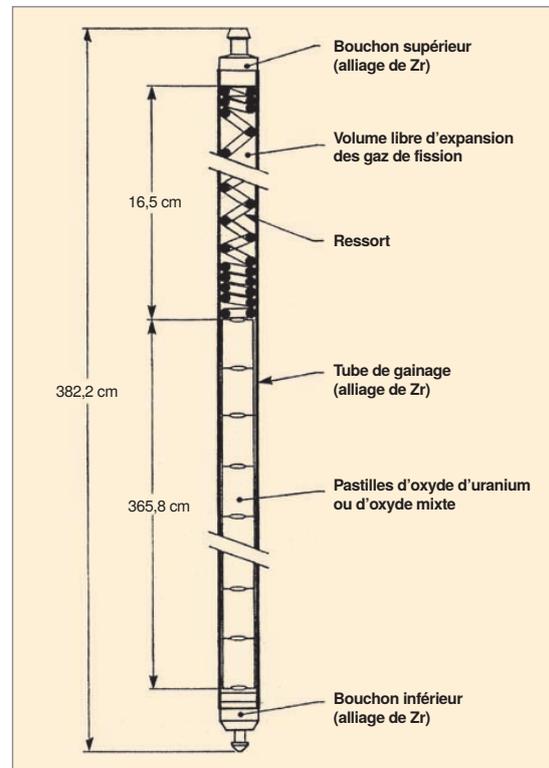


FIGURE I.3 – Schéma d'un crayon combustible d'un réacteur à eau pressurisée avec les dimensions d'un réacteur 900 MWe

blages, soit plus de 40 mille crayons comptant chacun 265 pastilles. Cela fait un total de près de 11 millions de pastilles de combustible contenues dans le cœur d'un REP 900 MWe. L'EPR, dernière génération de REP à niveau de sûreté accrue, compte 241 assemblages pour une puissance de 1600 MWe.

I.1.3 Comportement du crayon combustible

I.1.3.a Combustible nucléaire

Dans les REP, le combustible nucléaire est constitué soit de dioxyde d'uranium (UO_2) enrichi entre 3 et 5% en noyaux fissiles ($^{235}_{92}\text{U}$), soit d'un mélange d'oxydes appelé MOX contenant du dioxyde d'uranium naturel et entre 5 et 10% de dioxyde de plutonium (PuO_2). L'oxyde d'uranium, comme l'oxyde mixte, se présente sous la forme d'une poudre noire. Celle-

ci est comprimée puis frittée pour donner des pastilles de combustible. Il s'agit d'une céramique fragile avec une contrainte de rupture comprise entre 100 MPa et 150 MPa. La fissuration des pastilles va alors apparaître dès la première montée en puissance du réacteur sous l'effet des contraintes thermiques.

La figure I.4 permet d'apprécier la géométrie et les dimensions caractéristiques d'une pastille combustible destinée à un REP. Comme on peut le voir sur cette figure, elle présente un évidement hémisphérique à ses deux extrémités destiné à compenser l'excès de dilatation thermique du centre de la pastille par rapport à la périphérie. Elle présente également un chanfrein qui à la fois facilite l'introduction dans la gaine et permet également d'accomoder une partie de la déformation en forme de diabolos que subit la pastille au cours de l'irradiation et qui est ainsi plus importante au plan inter-pastille comme représenté figure I.5. Cette déformation est induite par un fort gradient thermique entre le centre de la pastille et sa périphérie, amplifié par la fragmentation de la pastille.

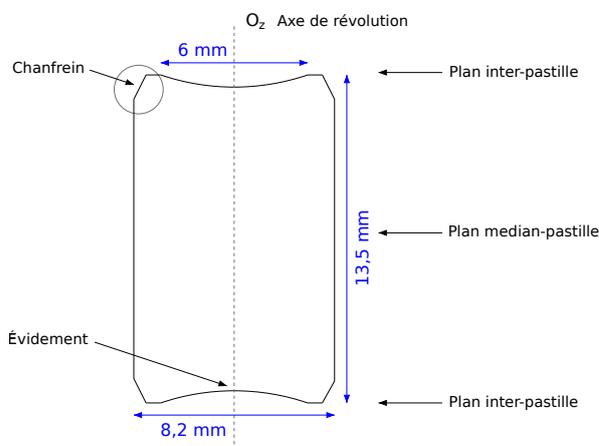


FIGURE I.4 – Dimensions d'une pastille de combustible d'un réacteur à eau pressurisée

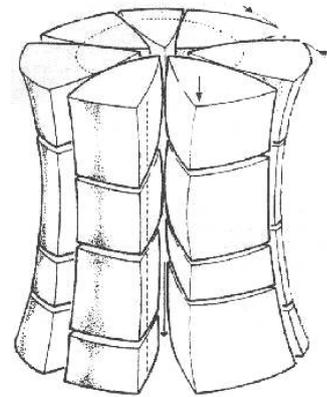


FIGURE I.5 – Déformation d'une pastille sous forme de diabolos [Gittus, 1972]

I.1.3.b Gaine

La gaine métallique qui entoure le combustible constitue la première barrière de confinement des matières radioactives. La tenue de cette première barrière de confinement dans les différentes situations de fonctionnement est primordiale. Pour cela, la gaine doit être résistante à l'irradiation et à la corrosion. Elle doit également avoir une faible absorption des neutrons et une grande conductivité thermique afin d'évacuer vers le fluide caloporteur la chaleur produite par la réaction nucléaire.

Le matériau de gainage est de manière générale à base de zirconium, choisi pour sa transparence aux neutrons. Le plus couramment utilisé en REP est le Zircaloy-4, zirconium auquel sont rajoutés quelques éléments d'alliage pour améliorer ses performances. On y trouve notamment de l'étain (entre 1,2 et 1,7%) et de l'oxygène (0,1%) pour une meilleure résistance mécanique ainsi que du fer (0,2%) et du chrome (0,1%) pour améliorer la résistance à la corrosion aqueuse en peau externe.

D'autres matériaux de gainage ont été développés plus récemment. En particulier l'alliage zirconium niobium M5[®] est en passe de remplacer le Zircaloy-4 car sa tenue à la corrosion aqueuse lui est supérieure.

I.1.3.c Interaction pastille-gaine

Le jeu radial initial entre la colonne combustible et la gaine vaut environ $80 \mu\text{m}$. Au cours de l'irradiation, on assiste d'une part à l'accroissement du diamètre du combustible engendré par la dilatation thermique et le gonflement dû aux produits de fission gazeux, et d'autre part à la réduction du diamètre de la gaine par fluage d'irradiation, du fait de la pression du caloporteur. Cela conduit à une fermeture du jeu entre le combustible et la gaine. En raison de l'effet diabolique, le contact intervient d'abord au niveau du plan inter-pastille (cf. figure I.6).

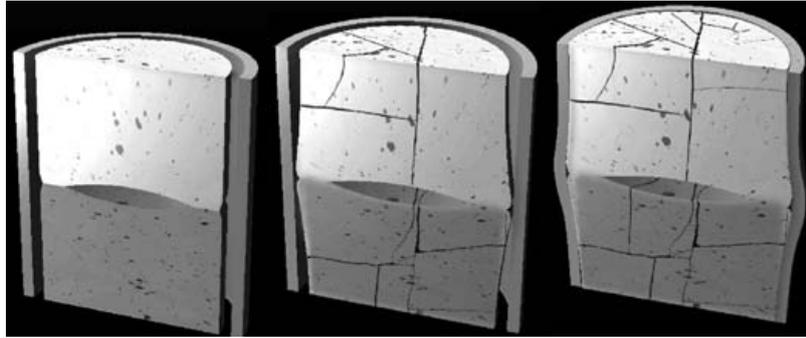


FIGURE I.6 – Schématisation de la fracturation des pastilles, de la mise en diabolique et de l'évolution du jeu entre les pastilles et la gaine au cours de l'irradiation

En cas d'augmentation importante de la puissance, la température au cœur de la pastille s'accroît fortement. L'effet diabolique est exacerbé et des produits de fission volatils agressifs pour la gaine, tels l'iode, sont relâchés, préférentiellement au niveau des fissures du combustible. Toutes les conditions sont ainsi potentiellement réunies pour amorcer un phénomène de corrosion sous contrainte en peau interne de la gaine dans le plan inter-pastille, en regard d'une fissure radiale du combustible. Cette corrosion peut amorcer une fissure radiale de la gaine voire entraîner sa rupture.

En raison du risque de rupture de gaine lors d'un transitoire de puissance, l'interaction pastille-gaine (IPG) est donc un phénomène important dans la démarche de sûreté de l'élément combustible des REP. L'intégrité de la gaine doit être garantie pour tous les transitoires d'exploitation (classe 1) et pour tous les transitoires incidentels (classe 2, probabilité d'occurrence supérieure à 1% par réacteur et par an). Pour se prémunir de ce risque, la démarche de sûreté consiste à limiter le domaine de fonctionnement autorisé des réacteurs, au niveau de la puissance maximale admissible (via des seuils de protection neutronique) et au niveau de la manœuvrabilité du cœur (notamment via des contraintes sur la cinétique des transitoires d'exploitation et sur la durée de fonctionnement à puissance intermédiaire). L'exploitant nucléaire est naturellement très intéressé par la réduction des contraintes d'exploitation de ses réacteurs.

C'est une des motivations pour modéliser et simuler précisément le comportement du combustible nucléaire, et en particulier le phénomène d'IPG.

I.1.4 Modélisation du combustible

La modélisation/simulation de différents phénomènes physiques complexes est devenue incontournable. Lorsqu'elle est validée par l'expérimental, elle devient un outil extrêmement intéressant pour le dimensionnement, la prévision ou encore l'optimisation. Elle peut d'ailleurs permettre d'orienter de futures expérimentations pour confirmer ou infirmer les résultats de simulation obtenus et ainsi continuer d'enrichir les modèles et les algorithmes de résolution.

La modélisation du comportement du combustible a débuté au CEA avec le code MÉTÉOR, basé sur une formulation 1D axisymétrique [Garcia *et al.*, 2002] avec couplage de chacun des phénomènes mis en jeu. MÉTÉOR fournit une estimation des évolutions géométriques moyennes, et évalue le comportement des produits de fission et les modifications microstructurales associées.

Une description détaillée des conditions de chargement local, indispensable pour modéliser l'IPG, nécessite cependant une représentation 3D de l'élément combustible. À cette fin, l'application combustible 3D TOUTATIS [Bentejac et Hourdequin, 2004] a été développée à partir du code éléments finis Cast3M [Cast3M] développé également au CEA. Plus récemment, une application multi-dimensions, ALCYONE [Thouvenin *et al.*, 2006], a été développée pour les REP dans le cadre de la plate-forme combustible PLÉIADES [Plancq *et al.*, 2004] – acronyme de Plate-forme Logicielle pour les Éléments Irradiés dans les Assemblages en Démonstration, en Expérimentation ou en Service – pour permettre d'intégrer l'ensemble des modélisations avancées mises au point dans les codes MÉTÉOR et TOUTATIS.

La modélisation du problème 1D dans ALCYONE, issue du code MÉTÉOR, se fait à différentes hauteurs dans le crayon combustible. Cette modélisation est appelée calcul multi-tranches ou calcul 1,5D et permet la simulation d'un crayon combustible entier. Une représentation de ce problème est proposée figure I.7.

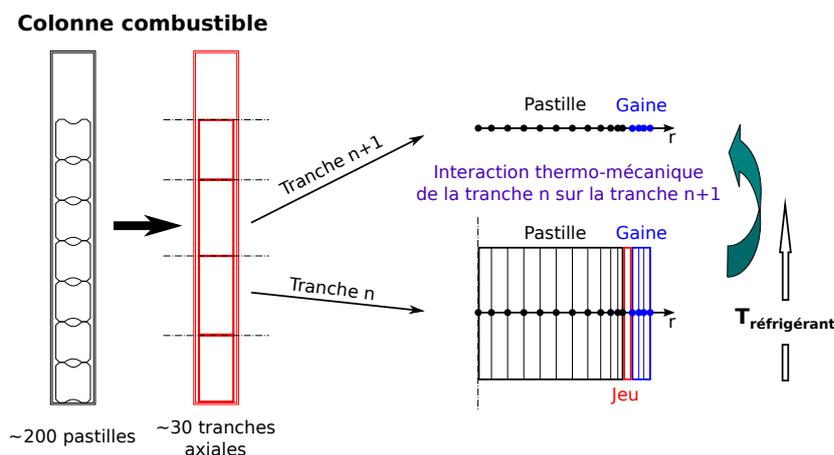


FIGURE I.7 – Modélisation 1,5D d'un crayon combustible dans ALCYONE [Goldbronn *et al.*, 2016]

Le logiciel ALCYONE propose également deux modélisations 2D du comportement du combustible. L'utilisateur a le choix entre :

- Une configuration 2D axisymétrique qui ne suppose pas de fissuration dans la pastille mais permet la modélisation de l'effet diabolo, dénotée 2Drz représentée partie gauche de la figure I.8. Pour des raisons de symétrie, seule une demie hauteur de pastille est considérée.
- Une configuration 2D sous l'hypothèse des déformations planes, dénotée 2Dr θ , permettant de simuler l'effet de la fissuration de la pastille sur la gaine. La modélisation 2Dr θ repose sur une hypothèse de fissuration régulière de la pastille combustible [Nonon *et al.*, 2004], en 8 fragments égaux. En raison des symétries existantes, cette modélisation considère 1/16-ème du plan inter-fragment, cf. la partie droite de la figure I.8.

La modélisation 3D repose sur les mêmes hypothèses géométriques que les modélisations 2Drz et 2Dr θ . Ainsi, une représentation géométrique d'1/32-ème d'une pastille et de la gaine qui l'entoure (voir fig. I.9) est utilisée en 3D. Afin de bien modéliser les contraintes et les déformations locales maximales, les études portant sur l'IPG utilisent principalement ce modèle 3D d'ALCYONE [Michel *et al.*, 2008a ; Michel *et al.*, 2008b ; Sercombe *et al.*, 2012 ; Michel

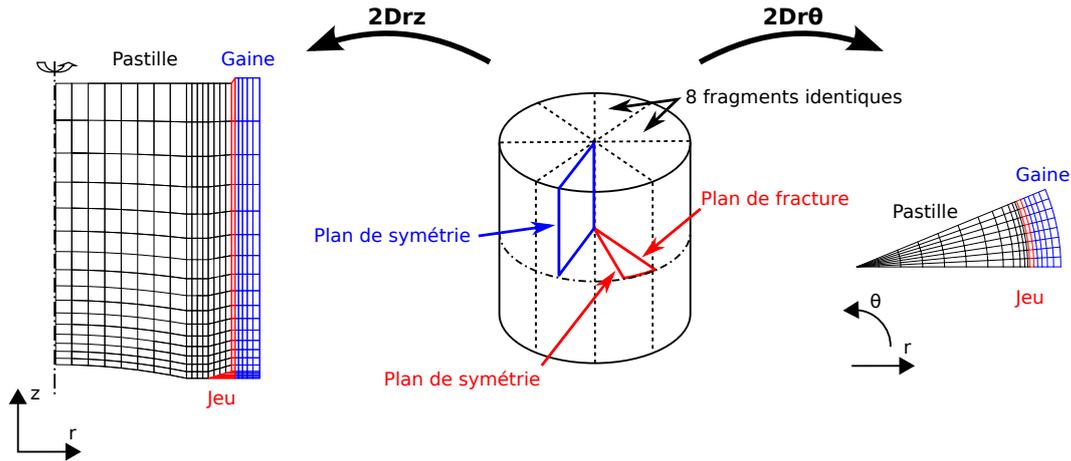


FIGURE I.8 – Modélisations 2Drz ou 2Dr θ d'une pastille de combustible nucléaire et du morceau de gaine correspondant dans ALCYONE [Goldbronn *et al.*, 2016]

et al., 2013], inspiré initialement de TOUTATIS mais ayant incorporé depuis des améliorations de modélisation et de robustesse numérique.

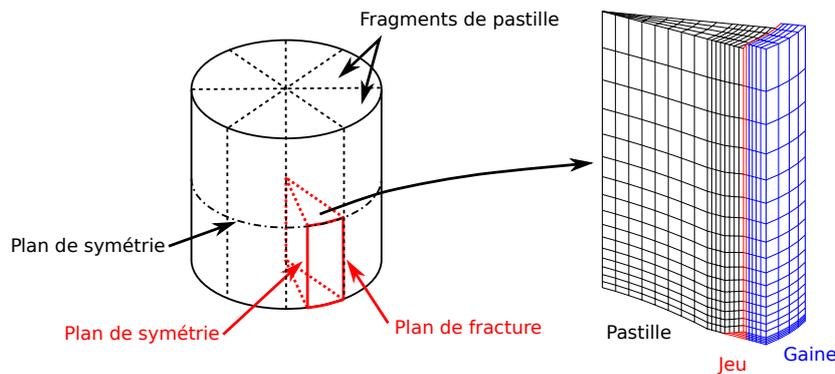


FIGURE I.9 – Modélisation 3D d'une pastille de combustible nucléaire et du morceau de gaine correspondant dans ALCYONE [Goldbronn *et al.*, 2016]

ALCYONE, comme l'ensemble des applications de la plate-forme PLÉIADES, utilise un schéma de couplage des différents modèles physiques intervenant dans la simulation du comportement du combustible sous irradiation représenté sur la figure I.10. En particulier, la boucle multi-physiques entre les phénomènes fortement couplés est résolue par un couplage de point fixe de type Gauss-Seidel par bloc.

Dans ce document, nous nous intéressons plus particulièrement au modèle mécanique utilisé pour la simulation du combustible nucléaire.

I.2 Objectifs et réalisations de la thèse

Le modèle mécanique résolu avec le solveur éléments finis Cast3M [Cast3M] prend une part très importante du temps de résolution du schéma de couplage multi-physiques. Il est donc intéressant d'évaluer l'apport de méthodes de réduction d'ordre de modèles dans ce contexte. Le but d'une telle démarche est de réduire le temps de calcul de la résolution du modèle mécanique tout en proposant une solution approximée proche de celle de référence. Le modèle d'ordre réduit trouvera alors son intérêt pour des phases de mise au point ou d'optimisation mais le résultat obtenu devra être confirmé par le modèle d'ordre plein. La

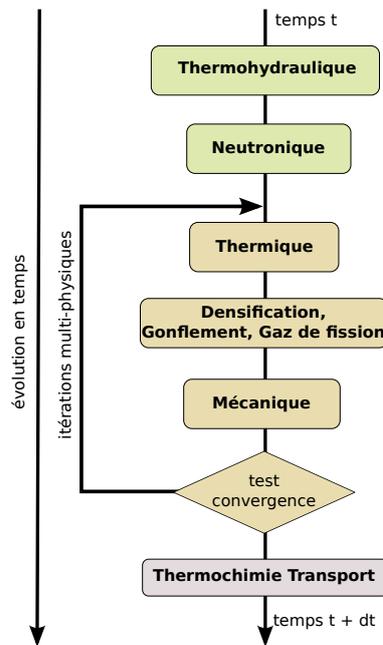


FIGURE I.10 – Schéma de couplage des applications PLÉIADES

méthode de réduction d'ordre de modèles doit être peu intrusive pour pouvoir être intégrée dans le logiciel EF Cast3M tout en utilisant les méthodes de résolution disponibles dans ce logiciel, et être adaptée à des comportements non-linéaires ainsi qu'à des problèmes de contact.

Pour arriver à ce résultat, nous proposons d'étendre la méthode d'hyper-réduction (HR) [Ryckelynck, 2009] – qui est une méthode *a posteriori* peu intrusive, développée pour réduire des modèles mécaniques pour des matériaux ayant un comportement non-linéaire – aux problèmes de contact traité numériquement par multiplicateurs de Lagrange (cf. section II.3.1). En effet, c'est cette technique de résolution qui est utilisée dans Cast3M pour la résolution du contact.

Dans un premier temps, nous nous sommes focalisés sur des comportements élastiques afin d'avancer une nouvelle formulation hybride de la méthode HR qui va nous permettre de traiter des problèmes de contact résolus par multiplicateurs de Lagrange (inégalités variationnelles). Cette formulation est détaillée dans la section III.1. L'application de la méthode à un cas test unidimensionnel de la bibliographie [Haasdonk *et al.*, 2012 ; Balajewicz *et al.*, 2016 ; Bader *et al.*, 2016], qui représente un problème de contact entre un solide élastique et un obstacle indéformable, et la comparaison des résultats obtenus avec ceux fournis par une autre méthode de réduction d'ordre [Balajewicz *et al.*, 2016] ont permis de rapidement mettre en évidence l'intérêt de l'HR pour un cas élastique (voir section III.3). Cette application a été réalisée à l'aide d'une implémentation de l'HR hybride avec le langage de programmation Python, voir section III.2.1. La formulation et l'application de l'HR hybride dans le cas élastique ont fait l'objet d'un workshop WORM 2016 [Fauque *et al.*, 2016], d'une conférence internationale CP 2017 [Fauque *et al.*, 2017b] et d'une publication dans un journal à comité de lecture [Fauque *et al.*, 2018a].

Une fois la formulation mathématique établie et la première application de la méthode validée avec succès, la méthode HR hybride a été implémentée dans le logiciel Cast3M et vérifiée sur des problèmes élastiques bidimensionnel et tridimensionnel. Il est question de l'implémentation dans Cast3M section III.2.2. Ces résultats obtenus sont ensuite détaillés dans les sections III.4 et III.5 et ont été présentés au club utilisateur Cast3M 2017 [Fauque *et al.*, 2017a] ainsi qu'au symposium MORCOS 2018 [Fauque *et al.*, 2018b].

Enfin, la méthode HR hybride a été étendue section IV.1 aux non-linéarités matérielles. L'HR hybride a ensuite été développée pour des problèmes de contact entre matériaux non-linéaires. La formulation mathématique, qui repose en grande partie sur la formulation en mécanique du contact pour des comportements élastiques, est décrite section IV.2. Cette dernière a également été implémentée dans Cast3M, voir section IV.3. Les résultats obtenus avec Cast3M sur un cas test 2D de mécanique du contact entre un solide élastique et un solide suivant une loi de comportement élasto-plastique, qui ne sont initialement pas en contact, se trouvent en section IV.4. La formulation de l'HR hybride pour des matériaux non-linéaires et son application ont fait l'objet d'une présentation au congrès international WCCM 2018 [Fauque *et al.*, 2018c].

Même si la vérification/validation de la méthode reste encore à faire dans le schéma multi-physiques PLÉIADES, la méthode proposée devrait permettre d'accélérer les études paramétriques (calibration, validation, calcul d'incertitudes, *etc*) ainsi que la prise en compte de nouvelles situations dans la simulation du comportement du combustible nucléaire. La méthode permettrait d'accéder plus rapidement à une solution qu'il faudra tout de même vérifier à l'aide du modèle d'ordre plein.

L'utilisation de méthodes de réduction d'ordre de modèles devrait également permettre de simuler en des temps de calcul plus raisonnables des phénomènes multi-échelles apparaissant dans la simulation du comportement du combustible nucléaire. On peut penser notamment à la prise en compte du comportement micro-mécanique de la microstructure dans des algorithmes de type multi-échelles (cf. la méthode EF² [Feyel et Chaboche, 2000] mise en place au sein de la plate-forme PLÉIADES [Blanc, 2009 ; Ramière *et al.*, 2017]), où la réduction d'ordre de modèles à l'échelle de la microstructure a déjà prouvé son intérêt (cf. NTFA [Largenton, 2012] ou pRBMOR [Fritzen et Hodapp, 2016]). La réduction d'ordre de modèles s'avérerait également intéressante pour la simulation 3D complète du crayon combustible où chaque pastille combustible serait représentée par un modèle réduit provenant de simulations 3D locales. Enfin cette réduction peut être prometteuse dans le cadre de couplages multi-disciplines (thermo-hydraulique, thermo-mécanique, neutronique, *etc* ...).

Chapitre II

État de l'art des méthodes de réduction d'ordre de modèles

L'objectif de la thèse, comme expliqué au chapitre I, est de proposer un moyen de réduire le temps de calcul de la simulation du comportement mécanique du combustible nucléaire. Pour cela, nous nous intéressons à la réduction d'ordre de modèles. Dans ce chapitre nous allons donc expliciter cette notion et discuter des différentes méthodes afin de donner un aperçu de ce que la réduction d'ordre de modèles recouvre.

Nous réaliserons aussi un état de l'art plus approfondi des méthodes de réduction d'ordre de modèles qui ont été appliquées à des problèmes de contact et plus particulièrement des méthodes *a posteriori* dédiées à des problèmes de contact traités numériquement à l'aide de multiplicateurs de Lagrange.

Les méthodes de la littérature qui seront utilisées dans la suite du document sont exposées avec plus de détails. En particulier la méthode d'hyper-réduction avec domaine d'intégration réduit classique est détaillée pour un comportement élastique.

Sommaire

II.1	Méthodes de réduction d'ordre de modèles	23
II.1.1	Méthodes <i>a priori</i>	23
II.1.2	Méthodes <i>a posteriori</i>	25
II.1.3	Outils utilisés par les méthodes de réduction d'ordre de modèles	29
II.2	Hyper-réduction en élasticité	35
II.2.1	Résolution par éléments finis d'un problème élastique	36
II.2.2	Construction d'une base réduite	39
II.2.3	Construction d'un domaine d'intégration réduit	40
II.2.4	Définition du problème hyper-réduit	41
II.3	Réduction d'ordre de modèles en mécanique du contact	42
II.3.1	Résolution par éléments finis d'un problème de contact élastique	42
II.3.2	Méthodes de réduction d'ordre de modèles en mécanique du contact	47

II.1 Méthodes de réduction d'ordre de modèles

La simulation numérique des différents phénomènes physiques passe le plus souvent par la résolution d'équations aux dérivées partielles (EDP). De nombreuses méthodes d'approximation numérique ont été développées pour résoudre toutes sortes d'EDP. Parmi les plus connues, on peut citer la méthode des éléments finis (EF) [Zienkiewicz *et al.*, 1971 ; Ciarlet, 1978] – qui est la plus employée en mécanique des structures et qui va nous intéresser dans ce document –, des différences finies [Smith, 1965], des volumes finis [Eymard *et al.*, 2000], des éléments discrets [Cundall et Strack, 1979], des éléments frontières [Banerjee et Butterfield, 1981], *etc.*

Bien que les progrès faits dans le domaine de l'informatique soient considérables et nous permettent actuellement de résoudre numériquement un grand nombre de problèmes qui semblaient insolubles il y a quelques dizaines d'années, nous souhaitons en permanence pousser la modélisation dans ses retranchements (petites échelles ou très grandes échelles) et obtenir davantage de précision pour des temps de calcul toujours plus faibles. Pour réduire le temps de calcul, des moyens indépendants de l'évolution de la puissance des processeurs ont été développés. Le plus connu est le calcul parallèle dans le domaine de l'informatique mais cela revient à faire des calculs avec un plus gros équipement informatique. Un autre moyen est la réduction d'ordre de modèles qui propose un complément, ou une alternative, aux méthodes d'approximation classiques dans le but de diminuer la taille du problème à résoudre. C'est ce moyen que nous développons dans cette section.

Dans sa définition la plus générale, la réduction d'ordre de modèles consiste à proposer un modèle dont le nombre de degrés de liberté (ddl) est réduit, ROM pour Reduced-Order Model en anglais, comparé à un modèle d'ordre plein, abrégé FOM pour Full-Order Model en anglais, obtenu par une méthode d'approximation classique. Pour réduire le nombre de ddl, l'idée est de chercher la solution du problème dans un espace d'approximation le plus petit possible. La réduction du temps de calcul dépend directement de la faculté de l'espace des solutions, pour un certain espace paramétrique d'étude, à être approximé par un espace de petite dimension. C'est la construction de cet espace d'approximation qui différencie les méthodes de réduction d'ordre de modèles.

Le domaine que recouvre le terme de réduction d'ordre de modèles est très vaste. C'est pourquoi nous ne tenterons pas de faire un inventaire des méthodes existantes mais simplement de présenter de manière succincte celles qui sont les plus utilisées et d'approfondir graduellement les méthodes qui vont concerner directement ce travail. Comme cela se fait souvent dans la littérature, nous commencerons par distinguer deux catégories principales pour classer les méthodes qui vont être exposées. La section II.1.1 sera dédiée aux méthodes dites *a priori* où l'espace d'approximation est construit à la volée. La section II.1.2 portera sur les méthodes *a posteriori* qui utilisent des résultats de calcul avec le FOM pour construire l'espace d'approximation permettant de réduire la taille du problème à résoudre. Ces dernières rentrent dans le cadre des méthodes d'apprentissage automatique (machine learning) non supervisées, où une connaissance empirique est extraite de données de simulation qui ne sont pas annotées. En pratique, cela se fait en général à l'aide de méthodes de factorisation de matrices après avoir regroupé les données dans des matrices.

II.1.1 Méthodes *a priori*

Les méthodes dites *a priori* ou “on the fly” vont construire et enrichir l'espace d'approximation de la solution itérativement. Elles ne nécessitent pas de résolution du FOM. Par contre le temps de résolution est plus long puisque l'espace d'approximation est adapté en cours de

calcul.

II.1.1.a Décomposition Propre Généralisée

La méthode la plus connue dans cette catégorie est certainement la Décomposition Propre Généralisée [Ammar *et al.*, 2006 ; Chinesta *et al.*, 2013a] – abrégée PGD pour Proper Generalized Decomposition en anglais – qui repose sur la représentation de la solution du problème sous la forme d'une somme de produits de fonctions à variables séparées [Chinesta et Ladevèze, 2014].

Pour une solution s dépendante des variables $(x_1, \dots, x_D) \in \Omega_1 \times \dots \times \Omega_D$, x_i pouvant désigner une coordonnée spatiale, le temps ou encore un paramètre du problème, l'approximation de rang l de s est représentée par l'équation (II.1) où l et les $f_i^j(x_j)$, avec $i \in \llbracket 1, l \rrbracket$ et $j \in \llbracket 1, D \rrbracket$, sont *a priori* inconnues.

$$s(x_1, \dots, x_D) \approx s_l(x_1, \dots, x_D) = \sum_{i=1}^l \left(\prod_{j=1}^D f_i^j(x_j) \right). \quad (\text{II.1})$$

Le nombre de termes l requis pour obtenir une bonne approximation de la solution de référence dépend alors de son caractère séparable. Les fonctions $f_i^j(x_j)$ sont déterminées par enrichissement successif à l'aide d'un algorithme glouton (cf. section II.1.3.a). À l'étape d'enrichissement $n + 1$, les fonctions $f_i^j(x_j)$ des étapes précédentes $i \leq n$ sont connues et il faut déterminer le nouveau produit des D fonctions $f_{n+1}^j(x_j)$. Pour ce faire, on utilise l'approximation de rang $n + 1$ de s dans la formulation faible du problème. On obtient ainsi un système non-linéaire qui va être résolu à l'aide d'un algorithme itératif. La résolution de ce système revient à résoudre un problème 1D pour chacune des D fonctions $f_{n+1}^j(x_j)$ définie dans Ω_j .

Contrairement aux modèles de grande dimension construits à l'aide des méthodes classiques de discrétisation où le nombre de ddl croît exponentiellement avec la dimension D du problème, le nombre de ddl d'un ROM construit par PGD croît linéairement avec la dimension du problème. Cette faculté qu'a la PGD de gérer les problèmes de grande dimension se retrouve dans un grand nombre d'articles, en particulier [Ammar *et al.*, 2006 ; Ammar *et al.*, 2007 ; Chinesta *et al.*, 2010 ; Chinesta *et al.*, 2011 ; Chinesta *et al.*, 2013b] et les références associées.

La PGD se trouve être une généralisation de la méthode d'approximation radiale – radial loading approximation en anglais – utilisée dans le cadre de la MAGIT (Méthode À Grand Incrément de Temps) [Ladevèze, 1985 ; Ladevèze, 1996 ; Ladevèze, 1999], plus connue sous le nom de méthode LATIN (LARGE Time INcrement) en anglais, qui est une stratégie de résolution non-incrémentale en temps (contrairement à ce que son nom peut laisser penser) développée pour les problèmes de mécanique définis sur un domaine espace-temps $\Omega \times [0, T]$. La méthode LATIN repose sur trois grands principes :

1. Le premier est une séparation des difficultés. Les équations sont séparées pour former un problème linéaire qui peut être global en espace (équations d'équilibre, de compatibilité et d'état) et un problème local en espace qui peut être non-linéaire (loi de comportement, conditions de contact). La solution au problème est alors l'intersection entre les problèmes linéaire et local.
2. Un algorithme itératif en deux étapes qui permet de chercher la solution telle qu'elle vérifie alternativement chacun des deux problèmes (linéaire et local) jusqu'à convergence.
3. Le problème linéaire est résolu à l'aide de la méthode d'approximation radiale où l'approximation de rang l de la solution s s'écrit comme dans l'équation (II.2).

$$s(x,t) \approx s_l(x,t) := \sum_{i=1}^l v_i(x) \gamma_i(t), \quad (x,t) \in \Omega \times [0,T]. \quad (\text{II.2})$$

Depuis son introduction, la méthode LATIN a été appliquée à de nombreux problèmes mécaniques. Elle a comme principal défaut d'être une méthode assez intrusive. On trouvera une liste assez détaillée de ces applications dans la partie bibliographique de la thèse de doctorat [Capaldo, 2015], en particulier pour les problèmes multi-échelles. Une première vision de la méthode LATIN comme une méthode de décomposition de domaine pourra être trouvée dans [Dureisseix et Ladevèze, 1998].

II.1.1.b *A priori* réduction et *a priori* hyper-réduction

Parmi les méthodes *a priori*, on trouve également l'*A Priori* Réduction (APR) [Ryckelynck, 2002]. Il s'agit d'une méthode incrémentale en temps basée sur un algorithme permettant d'enrichir l'espace d'approximation réduit associé à la variable d'espace jusqu'à en obtenir un qui décrit au mieux la solution sur tout l'intervalle de temps considéré. L'enrichissement se fait à l'aide des sous-espaces de Krylov [Krylov, 1931] sur un intervalle de temps donné et jusqu'à convergence du résidu de l'équation d'équilibre.

Une variante de l'APR a été développée pour encore plus réduire le temps de calcul et en particulier pour les problèmes mécaniques non-linéaires. Il s'agit de l'*A Priori* Hyper-Réduction (APHR) [Ryckelynck, 2005 ; Ryckelynck et al., 2006] qui a comme particularité la résolution des équations sur un maillage réduit appelé domaine d'intégration réduit – abrégé RID pour Reduced Integration Domain en anglais –. Comme son nom l'indique, l'intégration sur le RID des équations sous leur forme faible et en particulier de la loi de comportement vont permettre une économie de temps importante. Les nouvelles conditions aux limites sur le RID sont imposées par une projection de type Petrov-Galerkin [Ryckelynck et al., 2016].

Les sous-espaces de Krylov, obtenus grâce aux méthodes les plus répandues [Lanczos, 1950 ; Arnoldi, 1951], ont été utilisés pour un certain nombre de méthodes de réduction d'ordre de modèles. Le lecteur pourra se référer à [Kamon et al., 2000 ; Rewieński, 2003] ainsi que les références associées. L'APHR a été abandonnée car la taille de l'espace d'approximation produit par les sous-espaces de Krylov devenait vite trop grand et les phases d'enrichissement puis d'orthogonalisation trop lourdes. Une méthode équivalente à l'APHR a par contre été développée en tant que méthode *a posteriori*. L'espace d'approximation associé à la variable d'espace est alors construit à partir de données collectées. Cette méthode qui va nous intéresser dans ce document sera présentée dans la section II.1.2.b et détaillée section II.2.

II.1.2 Méthodes *a posteriori*

Les méthodes dites *a posteriori* supposent connu le comportement de l'objet d'étude. Pour ce type de méthodes, ce sont des données qui permettent de construire la base réduite (BR) engendrant le sous-espace d'approximation. Les données récoltées sont généralement le fruit de résultats de calculs, obtenus à l'aide du FOM, dans l'espace paramétrique ou temporel étudié. Ces résultats de calcul sont communément appelés snapshots d'après la terminologie de Sirovich [Sirovich, 1987]. La BR est alors composée soit de snapshots, soit de vecteurs obtenus en extrayant avec une méthode de compression de données l'information la plus importante contenue dans ces snapshots. Il est possible d'apparenter ce type de méthodes à la méthode d'analyse en composante principale utilisée en apprentissage automatique non supervisé. Le ROM est ensuite obtenu par projection de (Petrov-)Galerkin du FOM sur la BR.

Pour rappel, la projection de Galerkin consiste à prendre comme fonctions tests les fonctions engendrant le sous-espace d’approximation, à la différence de la projection de Petrov-Galerkin. Contrairement aux méthodes *a priori*, les méthodes *a posteriori* sont en général plus faciles à mettre en place dans un solveur existant.

II.1.2.a Méthodes de projection sur base réduite

Méthode des bases réduites

La stratégie adoptée par la méthode des bases réduites – abrégé RBM pour Reduced Basis Method en anglais – consiste à projeter le FOM sur un sous-espace engendré par une base de fonctions choisies pour bien représenter les solutions du FOM pour un certain espace d’étude. Les premiers travaux concernant ce type de méthode ont été réalisés vers la fin des années 1970 pour des problèmes de mécanique des structures linéaires et non-linéaires [Almroth *et al.*, 1978 ; Nagy, 1979 ; Noor et Peters, 1980 ; Almroth *et al.*, 1981a ; Almroth *et al.*, 1981b ; Noor, 1981 ; Noor, 1982].

Il faudra attendre les années 2000 pour qu’un fond plus mathématique soit développé [Prud’Homme *et al.*, 2002 ; Maday *et al.*, 2002a ; Maday *et al.*, 2002b ; Maday et Rønquist, 2002 ; Veroy *et al.*, 2003]. Ces travaux ont été déterminants pour la RBM car ils ont menés à :

- un critère efficace pour la sélection des snapshots constituant la BR engendrant le sous-espace d’approximation. Il s’agit de l’utilisation d’un algorithme glouton (cf. section II.1.3.a) qui va à la fois limiter le nombre d’appel au FOM et la taille de la BR utilisée pour réduire le modèle.
- un découpage de la procédure en deux parties :
 1. une partie “offline” – appelée également phase d’apprentissage – où les objets indépendants des paramètres sont construits – comme le sous-espace d’approximation et la projection sur ce dernier lorsque cela est réalisable une fois pour toutes – ,
 2. une partie “online” qui consiste en la résolution du problème réduit dépendant des paramètres, après projection sur le sous-espace d’approximation lorsque cela n’a pas été possible dans la partie “offline”.
- L’utilisation d’un estimateur d’erreur qui garantit la qualité de la solution du problème réduit.

Pour une vision globale de la RBM et des applications de la méthode dans différents domaines, le lecteur pourra se référer au livre [Quarteroni *et al.*, 2015].

Projection sur base réduite compressée

Les méthodes de projection sur base réduite compressée peuvent être vues comme un cas particulier de la RBM où la BR engendrant le sous-espace d’approximation, sur laquelle va être projeté le FOM, est construite à l’aide d’une méthode de compression de données. Dans ce cas, la manière de choisir les snapshots est moins importante que pour la RBM puisque la possible redondance de l’information contenue dans les snapshots auxquels va être appliquée la méthode va être éliminée, ce qui va permettre de diminuer la taille de la BR. Il est donc possible d’utiliser différentes méthodes classiques d’échantillonnage pour le choix des snapshots. Comme pour la RBM, un algorithme glouton pourra tout de même être utilisé pour le choix des snapshots dans le but de limiter leur nombre.

La méthode la plus connue et la plus utilisée en réduction d'ordre de modèles est la POD-Galerkin qui repose sur la décomposition orthogonale aux valeurs propres (POD), qui sera introduite section II.1.3.d, car elle permet d'obtenir une BR optimale. Sa première utilisation a été réalisée dans [Aubry *et al.*, 1988]. Des études et applications plus récentes pourront être trouvées dans [Liberge et Hamdouni, 2010 ; Akkari, 2012 ; Akkari *et al.*, 2014].

II.1.2.b Méthodes de type hyper-réduction

Dans le cadre des EDP non-linéaires, la résolution se fait à l'aide de méthodes itératives de type Newton. La projection standard pour construire un ROM, dans le cas des méthodes basées sur la projection des équations sur une BR, n'est alors plus efficace car l'évaluation à chaque itération des termes non-linéaires de grande dimension et des produits qu'ils impliquent est trop coûteuse. En effet les projections ne peuvent pas se faire dans la partie offline.

C'est dans ce contexte qu'ont été introduites les méthodes de type hyper-réduction qui permettent de limiter la complexité du problème non-linéaire à un certain nombre d'entrées qui ne dépend plus du maillage EF complet. Nous présentons différentes approches qui ont été développées dans ce but en réduction d'ordre de modèles.

Il est à noter que d'autres méthodes que celles de type HR ont été appliquées pour la résolution d'EDP non-linéaires. On trouve par exemple celles de type approximation polynomiale [Banerjee *et al.*, 1998 ; Rewieński, 2003 ; Dong et Roychowdhury, 2003 ; Maier, 2015] – connues sous les noms de Trajectory Piece-Wise Linear (TPWL) et Piece-Wise Polynomial (PWL) en anglais –. Malheureusement, ces dernières ne sont pas performantes pour des problèmes à forte non-linéarité car il faut soit prendre un nombre trop important de polynômes, soit augmenter fortement le degré de ces derniers. De plus, ces méthodes ont comme défaut que le choix des points d'approximation n'est pas évident [Dong et Roychowdhury, 2003].

Approximation du terme non-linéaire par interpolation

L'idée des méthodes de réduction d'ordre de modèles approximant le terme non-linéaire par interpolation se rapproche du principe de la Gappy-POD [Everson et Sirovich, 1995], méthode appliquée en traitement d'images. Soit \underline{I} un vecteur colonne contenant les valeurs des pixels d'une image, connues seulement sur un ensemble \mathcal{G} , et \underline{V} une BR de l colonnes construite par POD (cf. section II.1.3.d). La Gappy-POD propose une prédiction \underline{I}_l des valeurs de l'image :

$$\underline{I}_l = \underline{V}(\underline{V}[\mathcal{G},:]^T \underline{V}[\mathcal{G},:])^{-1} \underline{V}[\mathcal{G},:]^T \underline{I}[\mathcal{G}]. \quad (\text{II.3})$$

Dans le cas des méthodes de réduction d'ordre de modèles qui vont être présentées, c'est le terme non-linéaire qui va être approximé à partir de quelques valeurs. Ce qui varie, c'est la méthode avec laquelle la BR a été construite et le choix des points d'interpolation (cf. ensemble \mathcal{G}).

La première méthode de ce type à avoir été proposée est la méthode d'interpolation empirique [Barrault *et al.*, 2004 ; Maday et Mula, 2013], abrégée EIM pour Empirical Interpolation Method en anglais. Cette dernière travaille au niveau continu et se situe dans la suite des travaux sur la RBM (cf. section II.1.2.a); la BR est donc directement constituée de fonctions bien sélectionnés. Les points d'interpolation empirique – également appelés “points magiques” d'après [Maday *et al.*, 2009] – sont obtenus à l'aide d'un algorithme glouton (cf. section II.1.3.a) où à chaque itération le point retenu est celui qui maximise l'erreur entre la $(i + 1)$ -ème fonction de la BR et sa reconstruction à l'aide des i points d'interpolation déjà calculés. Il y a donc autant d'itérations que de fonctions dans la BR. Des applications de

cette méthode pourront être trouvées dans [Grepel *et al.*, 2007 ; Galbally *et al.*, 2010 ; Grepel, 2012 ; Drohmann *et al.*, 2012].

La méthode d'interpolation avec les meilleurs points [Nguyen et Peraire, 2008 ; Nguyen *et al.*, 2008] – abrégée BPIM pour Best Points Interpolation Method en anglais – travaille également au niveau continu. Contrairement à l'EIM qui sélectionne les points d'interpolation avec un algorithme glouton, la BPIM résout un problème de minimisation par moindres carrés entre la projection des snapshots sur la BR obtenue par POD et leur reconstruction à partir des points d'interpolation. Les points d'interpolation obtenus avec la BPIM sont meilleurs que ceux obtenus avec l'EIM mais la résolution du problème de minimisation peut se révéler très coûteuse.

La version discrète de l'EIM [Chaturantabut et Sorensen, 2010 ; Chaturantabut, 2011] – abrégée DEIM pour Discrete EIM en anglais – s'applique à une BR construite de préférence par POD. Comme l'EIM, la sélection des points d'interpolation se fait à l'aide d'un algorithme glouton. Ce dernier sera détaillé en algorithme II.2 de la section II.2.3. L'avantage de fournir une BR obtenue par POD à l'algorithme DEIM est que les vecteurs colonnes sont ordonnés par importance. Les points d'interpolation sont alors choisis de manière itérative de façon à approximer au mieux les vecteurs par ordre d'importance. Le nombre de points obtenu est égal au nombre de colonnes de la BR, $\text{card}(\mathcal{G}) = l$. Dans ce cas, l'équation II.3 devient :

$$\underline{I}_l = \underline{V}(\underline{V}[\mathcal{G},:])^{-1} \underline{I}[\mathcal{G}] \quad (\text{II.4})$$

car $\underline{V}[\mathcal{G},:]$ est une matrice carrée $l \times l$ inversible. \underline{I}_l dénote alors l'approximation du terme non-linéaire \underline{I} calculé pour un ensemble de lignes \mathcal{G} .

Il est possible de choisir les points d'interpolation autrement. Ces derniers peuvent être, par exemple, choisis à l'aide d'un algorithme glouton de manière à minimiser un conditionnement lié à la BR restreinte aux points d'interpolation, comme cela a été fait dans [Willcox, 2006] et pour la Missing Point Estimation [Astrid *et al.*, 2008].

Certaines méthodes se démarquent par une projection de type Petrov-Galerkin. C'est le cas par exemple de la méthode Gauss Newton with Approximated Tensors [Carlberg *et al.*, 2011 ; Carlberg *et al.*, 2013]. Pour cette méthode, trois BR sont utilisées et chacune construite par POD. Deux sont dédiés à aux fonctions tests associées à la jacobienne et au résidu, et une à la solution. Les points d'interpolation sont obtenus à l'aide d'un algorithme glouton du même type que celui utilisé par la DEIM, à la différence qu'il tient compte de deux BR simultanément.

Méthodes de type quadrature

Les méthodes de “cubature” [An *et al.*, 2008 ; Hernández *et al.*, 2014 ; Farhat *et al.*, 2014] permettent de réduire le temps de calcul en approximant les intégrales en espace qui interviennent dans la formulation faible, par seulement quelques contributions élémentaires.

Considérons par exemple le vecteur des forces internes $\underline{f}_{\text{int}}(\underline{\gamma})$ réduit, dépendant des ddl associés aux déplacements $\underline{\gamma}$ obtenus par projection sur un sous-espace de dimension réduit, dont l'évaluation est très lourde pour un comportement non-linéaire. Son approximation s'écrit :

$$\underline{f}_{\text{int}}(\underline{\gamma}) = \int_{\Omega} \underline{g}(\underline{x}, \underline{\gamma}) \, d\Omega \approx \sum_{\underline{x}_i \in E} w_i \underline{g}(\underline{x}_i, \underline{\gamma}) \quad (\text{II.5})$$

avec \underline{g} la densité d'énergie, \underline{x} la position, E un ensemble réduit d'éléments et w_i des poids positifs. Les points d'intérêt \underline{x}_i ainsi que les poids associés w_i à la contribution globale sont alors déterminés par un processus d'optimisation connaissant $\underline{f}_{\text{int}}(\underline{\gamma})$ pour un certain nombre de $\underline{\gamma}$.

Hyper-réduction basée sur un domaine d'intégration réduit

L'hyper-réduction (HR) [Ryckelynck, 2009] basée sur un domaine d'intégration réduit – abrégé RID pour Reduced Integration Domain – fait suite à la méthode APHR introduite en section II.1.1.b. Elle repose à la fois sur la projection des équations sur une BR mais également sur la résolution du modèle sur un RID. Pour la mécanique non-linéaire, la méthode permet de fortement réduire le temps de calcul car à chaque itération la projection des termes non-linéaires qui doit être réalisée ne dépend plus de la complexité du FOM et par ailleurs l'intégration de la loi de comportement se fait uniquement sur le RID.

Du fait qu'elle soit à la fois peu intrusive et ait déjà fait ses preuves pour des problèmes de mécanique avec des matériaux non-linéaires; cette méthode va nous intéresser pour réduire un problème de mécanique du contact avec non-linéarités matérielles. Elle sera détaillée dans la section II.2 pour un problème élastique. Une extension de cette méthode sera proposée, section III.1, pour la mécanique du contact. Enfin elle sera formulée, section IV.2, pour un problème de contact avec des matériaux à comportement non-linéaires. Par souci de simplicité, elle sera appelée méthode HR dans la suite du document ; à ne pas confondre avec les méthodes de type HR qui englobent les méthodes rassemblées dans cette section II.1.2.b.

II.1.3 Outils utilisés par les méthodes de réduction d'ordre de modèles

Parmi les méthodes utilisées pour construire un ROM, certaines ont été développées initialement pour d'autres applications que la réduction d'ordre de modèles. Nous présentons ici certains des outils qui sont les plus utilisés pour construire un ROM mais qui ne sont pas, à proprement parler, des méthodes de réduction d'ordre de modèles.

II.1.3.a Algorithme glouton

L'algorithme glouton [Edmonds, 1971 ; Vince, 2002] est classiquement utilisé en optimisation combinatoire où le problème, dans sa forme la plus générale, consiste à trouver dans un ensemble discret le meilleur sous-ensemble réalisable. La notion de "meilleur" est définie par rapport à une fonction objectif. Pour trouver une solution au problème d'optimisation, il serait suffisant d'essayer tous les sous-ensembles possibles mais la complexité et le temps de résolution varient exponentiellement avec la taille de l'ensemble discret. L'algorithme glouton est un algorithme itératif qui va à chaque étape opter pour un optimum local. Selon le problème, il peut permettre de trouver un optimum global mais dans le cas général c'est une heuristique. Il reste beaucoup utilisé pour sa rapidité et sa puissance lorsque la taille de l'ensemble discret est raisonnable.

Algorithme glouton en réduction d'ordre de modèles

L'algorithme glouton est régulièrement utilisé par les méthodes de réduction d'ordre de modèles. Il est par exemple utilisé en PGD pour construire une approximation de la solution par une représentation à variables séparées, voir section II.1.1.a. Pour les méthodes de type hyper-réduction avec approximation du terme non-linéaire par interpolation, nous avons également vu qu'il est souvent utilisé pour la sélection des points d'interpolation (cf. section II.1.2.b). Mais il est le plus utilisé pour la sélection des snapshots dans le cadre des méthodes *a posteriori*. Certaines méthodes reposent d'ailleurs entièrement sur son utilisation comme la RBM présentée en section II.1.2.a.

Nous détaillons ici ce dernier point. Dans ce cas l'ensemble discret est la discrétisation de l'espace paramétrique \mathcal{P} , que l'on note \mathcal{S} et qui est également appelé ensemble des paramètres d'entraînement. Le problème d'optimisation consiste à trouver l'ensemble des paramètres pour le calcul des snapshots $\mathcal{S}_{\text{snap}} \subset \mathcal{S}$, pour un nombre de snapshots donné, minimisant l'erreur de référence, c'est-à-dire l'erreur entre les solutions obtenues avec les FOM et ROM. Or l'erreur de référence requiert la résolution du FOM que nous ne voulons justement pas calculer sur l'ensemble \mathcal{S} . C'est pourquoi la fonction objectif utilisée est fournie par un estimateur ou indicateur d'erreur (voir section II.1.3.b). On parle alors d'algorithme glouton sous sa forme faible. Ce dernier est résumé dans l'algorithme II.1.

Algorithme II.1 : Forme faible de l'algorithme glouton pour la sélection des snapshots

Entrées : nombre maximum de snapshots N_{max} , seuil de tolérance η_{max} , ensemble des paramètres d'entraînement \mathcal{S} , estimateur d'erreur η_{est}

Sorties : ensemble des paramètres pour le calcul des snapshots $\mathcal{S}_{\text{snap}}$

$N = 0$;

$\mathcal{S}_{\text{snap}} = \emptyset$;

tant que $N < N_{\text{max}}$ **faire**

pour $\underline{\mu} \in \mathcal{S}$ **faire**

 calculer $\eta_{\text{est}}(\underline{\mu})$;

$\underline{\mu}_{\text{max}} = \underset{\underline{\mu} \in \mathcal{S}}{\text{argmax}}(\eta_{\text{est}}(\underline{\mu}))$;

$\mathcal{S}_{\text{snap}} = [\mathcal{S}_{\text{snap}} \ \underline{\mu}_{\text{max}}]$;

si $\eta_{\text{max}} > \eta_{\text{est}}(\underline{\mu}_{\text{max}})$ **alors**

 arrêt de l'algorithme ;

$N = N + 1$;

L'utilisation d'un algorithme glouton peut sembler coûteuse mais elle permet de minimiser le nombre de calculs avec le FOM à réaliser dans la partie offline. En effet, les snapshots sont pris aux endroits qui font rapidement chuter l'erreur et l'algorithme s'arrête lorsque le seuil d'erreur demandé est atteint par l'erreur estimée. On comprend facilement que son efficacité dépend par contre entièrement de l'indicateur d'erreur utilisé. Par ailleurs, son utilisation est limitée aux espaces paramétriques de faible dimension à cause du fléau de la dimension.

II.1.3.b Indicateur d'erreur

La notion d'indicateur ou d'estimateur d'erreur est fondamentale pour les méthodes d'approximation numérique classiques afin de savoir si le modèle discret permet de bien représenter le modèle continu. Un grand nombre d'estimateurs d'erreur *a posteriori* ont été développés pour obtenir une approximation de l'erreur de discrétisation.

Pour la méthode des EF et concernant la mécanique des solides, nous pouvons par exemple citer [Babuška et Rheinboldt, 1978 ; Ladevèze et Leguillon, 1983 ; Zienkiewicz et Zhu, 1987 ; Verfürth, 1999] pour les problèmes linéaires puis [Gallimard *et al.*, 1996 ; Grätsch et Bathe, 2005] pour les problèmes non-linéaires. L'indicateur d'erreur *a posteriori* est souvent utilisé pour raffiner le maillage dans les zones où l'erreur est la plus grande afin d'améliorer la qualité des résultats.

Indicateur d'erreur en réduction d'ordre de modèles

Dans le cadre des méthodes de réduction d'ordre de modèles, les indicateurs d'erreur permettent d'approximer l'erreur de référence, à savoir l'erreur entre les solutions obtenues avec les FOM et ROM. Différents indicateurs d'erreur ont été développés pour les différentes méthodes de réduction d'ordre de modèles. Nous pouvons par exemple citer [Prud'Homme *et al.*, 2002 ; Veroy *et al.*, 2003 ; Grepl et Patera, 2005] pour la RBM. Un indicateur d'erreur rigoureusement construit pour surestimer l'erreur, mais assez coûteux, dans [Eftang *et al.*, 2010] pour l'EIM. Différents indicateurs d'erreur pourront être trouvés pour la DEIM dans [Chaturantabut et Sorensen, 2012 ; Wirtz *et al.*, 2014]. Nous pouvons également citer [Ryckelynck *et al.*, 2015] pour l'HR. En réduction d'ordre de modèles, chaque indicateur d'erreur est en général développé pour une méthode. En effet, il n'est pas évident de trouver un indicateur d'erreur existant qui puisse être adapté à une autre méthode que celle pour laquelle il a été développé.

Comme cela a été vu dans la section II.1.3.a, l'indicateur d'erreur peut être utilisé pour sélectionner les snapshots dans le cadre d'un algorithme glouton. Pour cette utilisation, il se doit de posséder quelques qualités :

- être peu coûteux puisqu'il va être appelé autant de fois que la taille de l'ensemble des paramètres d'entraînement à chaque itération.
- indiquer des points dans l'espace paramétrique qui vont apporter des données permettant une décroissance rapide de l'erreur de référence.
- dans l'idéal, le rapport entre l'erreur estimée et l'erreur de référence – appelé indice d'efficacité – doit approcher 1 en restant supérieur pour que l'algorithme s'arrête aussitôt le seuil d'erreur demandé atteint.

L'indicateur d'erreur peut également permettre l'enrichissement de la BR au cours du calcul comme cela est fait dans les méthodes APR et APHR (cf. section II.1.1.b).

II.1.3.c Décomposition en valeurs singulières

La décomposition en valeurs singulières [Beltrami, 1873 ; Eckart et Young, 1936 ; Golub et Van Loan, 1983 ; Stewart, 1993], abrégée SVD pour Singular Value Decomposition en anglais, est décrite ici car c'est un outil qui est grandement utilisé en réduction d'ordre de modèles pour fournir une BR compressée à partir de snapshots comme on le verra section II.1.3.d.

La SVD permet de décomposer une matrice rectangle quelconque en trois matrices ayant des propriétés intéressantes. Cette méthode peut être vue comme la généralisation de la diagonalisation aux matrices rectangles.

Soit $\underline{\underline{S}} \in \mathbb{R}^{N \times N_s}$ une matrice de rang $d \leq \min(N, N_s)$. D'après la théorie SVD, on sait qu'il existe une décomposition de $\underline{\underline{S}}$ telle que :

$$\underline{\underline{S}} = \underline{\underline{V}}_s \underline{\underline{\Sigma}}_s \underline{\underline{W}}_s^T \quad (\text{II.6})$$

où $\underline{\underline{V}}_s \in \mathbb{R}^{N \times N}$ et $\underline{\underline{W}}_s \in \mathbb{R}^{N_s \times N_s}$ sont des matrices orthogonales, $\underline{\underline{V}}_s^T \underline{\underline{V}}_s = \underline{\underline{V}}_s \underline{\underline{V}}_s^T = \underline{\underline{I}}_N$ et $\underline{\underline{W}}_s^T \underline{\underline{W}}_s = \underline{\underline{W}}_s \underline{\underline{W}}_s^T = \underline{\underline{I}}_{N_s}$, et $\underline{\underline{\Sigma}}_s \in \mathbb{R}^{N \times N_s}$ s'écrit :

$$\underline{\underline{\Sigma}}_s = \begin{pmatrix} \underline{\underline{D}}_s & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N \times N_s} \quad \text{avec} \quad \underline{\underline{D}}_s = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_d) \quad \text{t.q.} \quad \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_d > 0.$$

Les vecteurs colonnes $\underline{\underline{V}}_s[:, i]$ et $\underline{\underline{W}}_s[:, i]$ sont respectivement appelés vecteurs singuliers à gauche et vecteurs singuliers à droite de $\underline{\underline{S}}$. Les σ_d , rangées par ordre décroissant, sont appelées

valeurs singulières. Les vecteurs singuliers à gauche de $\underline{\underline{S}}$ correspondent aux vecteurs propres de $\underline{\underline{S}}\underline{\underline{S}}^T$, les vecteurs singuliers à droite de $\underline{\underline{S}}$ correspondent aux vecteurs propres de $\underline{\underline{S}}^T\underline{\underline{S}}$ et enfin le carré de chaque valeur singulière de $\underline{\underline{S}}$ vaut la valeur propre correspondante de $\underline{\underline{S}}\underline{\underline{S}}^T$ et $\underline{\underline{S}}^T\underline{\underline{S}}$. Cela s'obtient directement à l'aide des relations :

$$\underline{\underline{S}}\underline{\underline{S}}^T = \underline{\underline{V}}_s \underline{\underline{\Sigma}}_s \underline{\underline{\Sigma}}_s^T \underline{\underline{V}}_s^T, \quad (\text{II.7})$$

$$\underline{\underline{S}}^T \underline{\underline{S}} = \underline{\underline{W}}_s \underline{\underline{\Sigma}}_s^T \underline{\underline{\Sigma}}_s \underline{\underline{W}}_s^T. \quad (\text{II.8})$$

En particulier, la relation (II.6) peut se simplifier en retirant les termes qui vont donner un résultat nul et qui ne font qu'alourdir le produit matriciel. L'équation devient :

$$\underline{\underline{S}} = \underline{\underline{V}}_s[:,1:d] \underline{\underline{D}}_s \underline{\underline{W}}_s^T[1:d,:]. \quad (\text{II.9})$$

Cette décomposition est unique au signe près des vecteurs singuliers à gauche et à droite.

La SVD permet de trouver, pour un nombre de vecteurs donné, la meilleure approximation en norme de Frobenius d'une matrice $\underline{\underline{S}}$ et de plus les valeurs singulières sont directement liées à l'erreur d'approximation. Les vecteurs singuliers associés aux plus grandes valeurs singulières sont ceux qui vont le mieux approximer la matrice $\underline{\underline{S}}$. La relation entre l'erreur d'approximation d'une matrice $\underline{\underline{S}}$ de rang d par sa SVD tronquée $\underline{\underline{S}}_l$ de rang $l \leq d$ et les valeurs singulières σ_i de $\underline{\underline{S}}$ s'écrit :

$$\|\underline{\underline{S}} - \underline{\underline{S}}_l\|_F = \left(\sum_{k=l+1}^d \sigma_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{avec} \quad \underline{\underline{S}}_l = \underline{\underline{V}}_s[:,1:l] \underline{\underline{D}}_s[1:l,1:l] \underline{\underline{W}}_s^T[1:l,:]. \quad (\text{II.10})$$

Prenons un exemple concret en traitement d'images. Considérons une image de 512×512 pixels en noir et blanc qui peut être vue comme une matrice de 512 lignes et 512 colonnes où chaque composante correspond à un niveau de gris compris entre 0 et 255. Il est alors possible de visualiser sur la figure II.1 son approximation de rang inférieur à 512 obtenu par SVD en ne tenant compte que des vecteurs singuliers les plus importants.

La figure II.2 représente la décroissance de l'erreur relative en norme de Frobenius au carré entre les matrices originale et approximée en fonction du rang de la matrice approximée par SVD. La courbe décroît assez rapidement pour un rang d'approximation peu élevé. En effet, l'évolution est rapide entre les images approximées de rang 5, 10 et 20 comme il est possible de le voir sur la figure II.1. Puis la décroissance diminue sur la figure II.2 comme il est possible de le constater entre les images approximées de rang 20, 50 et 100. Malgré cette décroissance qui semble peu rapide, l'erreur devient très petite et difficile à voir à l'œil nu à partir de l'image approximée de rang 100. Cela montre la capacité qu'a la SVD à approximer une matrice par une autre de rang bien inférieur.

Par ailleurs, la SVD est largement utilisée pour calculer le rang d'une matrice. En effet, le rang de la matrice $\underline{\underline{S}}$ est directement donné par celui de la matrice $\underline{\underline{D}}_s$ qui est diagonale.

$$\text{rang}(\underline{\underline{S}}) = \text{rang}(\underline{\underline{D}}_s). \quad (\text{II.11})$$

En pratique, puisque la SVD de $\underline{\underline{S}}$ est calculée numériquement, il faut définir un seuil de tolérance ϵ_{rang} à partir duquel une valeur est considérée comme valant numériquement zéro. Le rang de $\underline{\underline{S}}$ vaut alors :

$$d = \underset{i \in \mathbb{N}}{\text{argmin}}(\sigma_i > \epsilon_{\text{rang}}). \quad (\text{II.12})$$

La SVD représente encore un sujet actif de recherche. Étant donné son utilisation massive pour différentes applications, un des axes de recherche est la performance. Nous pouvons



FIGURE II.1 – Image originale classiquement utilisée en traitement d’images puis approximations successives par SVD de rang 5, 10, 20, 50 et 100

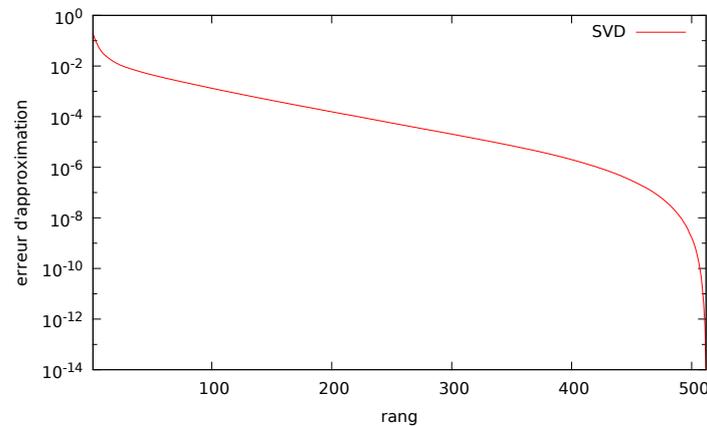


FIGURE II.2 – Décroissance de l’erreur relative en norme de Frobenius au carré entre les matrices originale et approximée par SVD de rang inférieur, la matrice originale correspondant à la première image de la figure II.1

par exemple penser aux algorithmes itératifs de type aléatoires [Mahoney, 2011], randomized algorithms en anglais, qui permettent le calcul de la SVD tronquée pour des matrices de très grande dimension. Un autre axe de recherche est la généralisation de la SVD aux tenseurs de dimension strictement supérieure à deux. Nous pouvons citer les méthodes High Order SVD [Lathauwer *et al.*, 2000], de décomposition de Tucker hiérarchique [Hackbusch et Kühn, 2009] ainsi que la TT-cross [Oseledets et Tyrtshnikov, 2010] – basée sur la décomposition en train de tenseurs – dont on pourra trouver une application récente en plasticité [Olivier, 2017].

Des techniques ont été proposées [Brand, 2002] pour approcher la SVD de matrices possédant un grand nombre de colonnes par des calculs incrémentaux. L’idée de ces méthodes est de mettre à jour les approximations des termes de la SVD en incorporant au fur et à

mesure les colonnes de la matrice à laquelle est appliquée la SVD. On parle alors de SVD incrémentale. Ces méthodes peuvent ainsi être utilisées pour enrichir la SVD d'une matrice avec de nouveaux vecteurs, provenant de nouveaux calculs.

II.1.3.d Décomposition orthogonale aux valeurs propres

Le concept de décomposition orthogonale aux valeurs propres, abrégé POD pour Proper Orthogonal Decomposition en anglais, a été introduit pour extraire les structures cohérentes d'un écoulement turbulent [Lumley, 1967]. Il s'agit donc à la base d'une méthode d'analyse de données dont le but est d'extraire un nombre réduit de variables contenant la majorité de l'information de départ. Cette idée générique d'extraction de données a été développée dans de nombreux domaines et le plus souvent de manière indépendante. Elle est présente dans la SVD présentée dans la section II.1.3.c, l'analyse en composantes principales [Pearson, 1901 ; Jolliffe, 1986] – abrégé PCA pour Principal Component Analysis en anglais –, l'analyse d'Hotelling [Hotelling, 1933], le développement de Karhunen-Loève [Karhunen, 1946 ; Loève, 1955] – abrégé KLD pour Karhunen-Loève Development en anglais –, *etc.* À ce propos, des développements concernant les relations entre les méthodes POD, KLD, PCA et SVD pourront être trouvés dans l'article [Liang *et al.*, 2002].

La POD sera plus tard reprise pour donner la populaire Méthode des Snapshots [Sirovich, 1987]. La différence entre les deux POD est que celle de Lumley utilise une moyenne temporelle et une corrélation spatiale tandis que celle de Sirovich fait l'inverse, à savoir une moyenne spatiale et une corrélation temporelle. Celle qui nous intéresse dans ce document est la Méthode des Snapshots car nous avons généralement plus de ddl associés aux déplacements dans le FOM que de snapshots temporels (plus généralement paramétriques), ce qui permet de réduire la taille du problème aux valeurs propres à résoudre.

L'idée de la POD est de chercher l'ensemble des $(\underline{\psi}_i)_{i=1}^l$ deux à deux orthogonaux qui permettent d'approximer au mieux, au sens des moindres carrés, l'ensemble des réalisations $(\underline{u}(\mu_j))_{j=1}^{N_s}$ (qui correspondent aux snapshots en réduction d'ordre de modèles) :

$$\min_{\underline{\psi}_1, \dots, \underline{\psi}_l} \sum_{j=1}^{N_s} \left\| \underline{u}(\mu_j) - \sum_{i=1}^l \langle \underline{u}(\mu_j), \underline{\psi}_i \rangle_X \underline{\psi}_i \right\|_X^2 \quad \text{t.q.} \quad \langle \underline{\psi}_i, \underline{\psi}_k \rangle_X = \delta_{ij} \quad \forall i, k \in \llbracket 1, l \rrbracket^2. \quad (\text{II.13})$$

pour un produit scalaire et sa norme associée donnés.

En reprenant le problème de minimisation (II.13) et en se plaçant dans le cas du produit scalaire canonique sur L^2 , il est possible de se ramener à un problème de minimisation discrétisé en espace en écrivant les $\underline{u}(\mu_j)$ et les $\underline{\psi}_i$ sur les fonctions de base du FOM $(\varphi_a)_{a=1}^N$. Pour les développements, il faut noter que le produit scalaire L^2 et sa norme associée s'écrivent :

$$\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle_{L^2} = \underline{U}^T \underline{M} \underline{V} \quad \text{et} \quad \|\underline{u}\|_{L^2} = \|\underline{L}^T \underline{U}\|_2 \quad (\text{II.14})$$

avec \underline{U} , \underline{V} les vecteurs contenant les coefficients de \underline{u} , \underline{v} écrits dans la base FOM et \underline{M} la matrice de masse du FOM, définie par :

$$(\underline{M})_{ab} = \langle \varphi_a, \varphi_b \rangle_{L^2}, \quad \forall a, b \in \llbracket 1, N \rrbracket^2, \quad (\text{II.15})$$

qui avec une factorisation de Cholesky s'écrit :

$$\underline{M} = \underline{L} \underline{L}^T. \quad (\text{II.16})$$

Le problème de minimisation devient :

$$\underline{V} = \underset{\underline{Z} \in \mathbb{R}^{N \times l}}{\operatorname{argmin}} \left\| \underline{A} - \underline{Z} \underline{Z}^T \underline{A} \right\|_F^2 \quad \text{t.q.} \quad \underline{Z}^T \underline{Z} = \underline{I} \quad (\text{II.17})$$

avec $\underline{\underline{A}} = L^T \underline{\underline{S}}$ et $\underline{\underline{Z}} = L^T \underline{\underline{\Psi}}$, où $\underline{\underline{S}}$ et $\underline{\underline{\Psi}}$ ont respectivement pour colonnes les vecteurs contenant les coefficients de $(\underline{u}(\mu_j))_{j=1}^{N_s}$ et $(\underline{\psi}_i)_{i=1}^l$ écrits dans la base EF.

D'après le théorème d'Eckart-Young [Eckart et Young, 1936], la base POD notée $\underline{\underline{V}}$ solution de (II.17) et contenant l vecteurs colonnes est obtenue en prenant les l premiers vecteurs singuliers à gauche de la décomposition SVD (II.9) de la matrice $\underline{\underline{A}}$, $\underline{\underline{V}} = \underline{\underline{V}}_s[:,1:l]$. On a alors $\underline{\underline{\Psi}} = L^{-T} \underline{\underline{V}}$.

De plus, la SVD permet l'obtention du nombre de vecteurs l à prendre dans la BR car il est possible de connaître l'erreur commise dans l'approximation de la matrice des snapshots en fonction du nombre de vecteurs retenus, cf. équation (II.10). En définissant un taux d'énergie transporté par les k premiers vecteurs singuliers :

$$\mathcal{E}(k) = \frac{\sum_{i=1}^k \sigma_i^2}{\sum_{i=1}^d \sigma_i^2} = 1 - \frac{\sum_{i=k+1}^d \sigma_i^2}{\sum_{i=1}^d \sigma_i^2}, \quad (\text{II.18})$$

l est défini comme le plus petit nombre de vecteurs singuliers à prendre tel que le taux d'énergie est supérieur à un certain seuil :

$$l = \underset{k \in \mathbb{N}}{\operatorname{argmin}} (\mathcal{E}(k) \geq 1 - \epsilon_{\text{tol}}) \quad (\text{II.19})$$

où ϵ_{tol} est l'erreur relative d'approximation acceptable.

En pratique, parce que la matrice de masse des EF n'est pas évidente à calculer, au lieu de chercher la base POD qui minimise le problème continu II.13, nous chercherons la base POD qui minimise l'erreur en norme de Frobenius :

$$\underline{\underline{V}} = \underset{\underline{\underline{Z}} \in \mathbb{R}^{N \times l}}{\operatorname{argmin}} \|\underline{\underline{S}} - \underline{\underline{Z}} \underline{\underline{Z}}^T \underline{\underline{S}}\|_F^2 \quad \text{t.q.} \quad \underline{\underline{Z}}^T \underline{\underline{Z}} = \underline{\underline{I}}. \quad (\text{II.20})$$

Pour obtenir $\underline{\underline{V}}$ de manière à vérifier le problème de minimisation (II.20), la SVD doit être appliquée à $\underline{\underline{S}}$. L'erreur relative d'approximation en norme de Frobenius au carré vérifie alors :

$$\frac{\|\underline{\underline{S}} - \underline{\underline{V}} \underline{\underline{V}}^T \underline{\underline{S}}\|_F^2}{\|\underline{\underline{S}}\|_F^2} \leq \epsilon_{\text{tol}} \quad (\text{II.21})$$

où $\underline{\underline{V}} \underline{\underline{V}}^T \underline{\underline{S}}$ est équivalent à $\tilde{\underline{\underline{S}}}_l$ comme défini dans l'équation II.10.

Il faut noter que dans le cadre des méthodes de réduction d'ordre de modèles, le seuil POD utilisé pour la construction de la base POD, qui va elle-même servir à construire le ROM, ne permet pas de connaître l'erreur commise par le ROM. Le seuil POD donne parfois des résultats contre-intuitifs, voir section III.5.4.

II.2 Hyper-réduction en élasticité

La méthode d'hyper-réduction (HR) qui va nous servir de base pour ce travail utilise également la projection sur BR mais se distingue des autres méthodes en utilisant le fait que ce petit nombre de ddl peut être déterminé au moment de la résolution sur un maillage réduit, appelé domaine d'intégration réduit (RID). Cette particularité permet de réduire le temps de calcul puisque la projection se fait sur la BR restreinte au RID : il n'y a alors plus de

dépendance à la taille du système obtenu avec la méthode d'approximation classique. Le gain en temps de calcul est particulièrement important pour des problèmes non-linéaires résolus à l'aide d'un algorithme de type Newton où il faut pour les autres méthodes de réduction d'ordre, à chaque itération, projeter la matrice jacobienne de grande taille sur la BR ainsi qu'intégrer la loi de comportement sur tout le domaine. On diminue ainsi fortement le temps de résolution de la partie online.

Bien que l'HR ait été introduite pour traiter des matériaux à comportement non-linéaire, les équations sont formulées ici pour un comportement élastique afin d'avoir une meilleure compréhension de la méthode.

II.2.1 Résolution par éléments finis d'un problème élastique

Puisque le modèle HR repose sur la projection du FOM, commençons par détailler la manière d'obtenir ce dernier par la méthode des EF pour un problème classique de mécanique élasto-statique.

II.2.1.a Formulation forte du problème élastique

Soit $\Omega \in \mathbb{R}^D$ un domaine borné représentant la configuration de référence d'un solide de dimension D . L'équation d'équilibre statique du solide qui relie le tenseur des contraintes $\underline{\underline{\sigma}}$, par définition symétrique, à la densité volumique d'efforts \underline{f} s'écrit :

$$\operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}} + \underline{f} = \underline{0} \quad \text{dans } \Omega. \quad (\text{II.22})$$

En supposant que le matériau est élastique linéaire et sous l'hypothèse des petites perturbations, la loi de comportement s'écrit :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{\varepsilon}} \quad \text{dans } \Omega, \quad (\text{II.23})$$

où le tenseur des déformations linéarisé $\underline{\underline{\varepsilon}}$ est défini à partir du champ de déplacement \underline{u} suivant l'équation :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2} (\operatorname{grad} \underline{u} + (\operatorname{grad} \underline{u})^T) \quad \text{dans } \Omega. \quad (\text{II.24})$$

Le tenseur des modules d'élasticité $\underline{\underline{C}}$ intervenant dans l'équation de comportement (II.23) est d'ordre 4 et possède les symétries suivantes :

$$(\underline{\underline{C}})_{ijkl} = (\underline{\underline{C}})_{jikl} = (\underline{\underline{C}})_{klij} \quad (\text{II.25})$$

Le solide est soumis à des déplacements \underline{u}_0 imposés sur Γ^D – condition aux limites de Dirichlet – et des efforts surfaciques \underline{g} sur Γ^N – condition aux limites de Neumann – :

$$\underline{u} = \underline{u}_0 \quad \text{sur } \Gamma^D, \quad (\text{II.26})$$

$$\underline{\underline{\sigma}} \underline{n} = \underline{g} \quad \text{sur } \Gamma^N, \quad (\text{II.27})$$

où \underline{n} dénote le vecteur unitaire normal sortant. Par ailleurs, il est nécessaire que les surfaces Γ^D et Γ^N forment une partition de $\partial\Omega$, le bord de Ω . C'est-à-dire que les surfaces Γ^D et Γ^N sur lesquelles sont imposées les conditions aux limites (II.26) et (II.27) doivent vérifier $\partial\Omega = \Gamma^D \cup \Gamma^N$ et $\Gamma^D \cap \Gamma^N = \emptyset$. Le problème est alors bien posé au sens où les conditions aux limites garantissent l'existence et l'unicité de la solution en déplacement et en contrainte. Si Γ^D est de mesure nulle, le déplacement solution \underline{u} est unique à mouvement de corps rigide près.

De manière condensée, la formulation forte du problème élasto-statique sous l'hypothèse des petites déformations s'écrit comme le système d'équations suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{f}} & \text{dans } \Omega, \\ \underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{\varepsilon}} & \text{dans } \Omega, \\ \underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2} (\operatorname{grad} \underline{u} + (\operatorname{grad} \underline{u})^T) & \text{dans } \Omega, \\ \underline{u} = \underline{u}_0 & \text{sur } \Gamma^D, \\ \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} = \underline{g} & \text{sur } \Gamma^N. \end{array} \right. \quad (\text{II.28})$$

II.2.1.b Formulation faible du problème élastique

Soit \mathcal{V}_0 l'espace vectoriel des champs de déplacements admissibles défini tel que :

$$\mathcal{V}_0 = \{ \underline{v} \in (H^1(\Omega))^D \mid \underline{v} = \underline{0} \text{ sur } \Gamma^D \}, \quad (\text{II.29})$$

et \mathcal{V} , tenant compte du relèvement $r(\underline{u}_0)$ du déplacement imposé \underline{u}_0 sur Ω , défini par :

$$\mathcal{V} = \{ \underline{v} = r(\underline{u}_0) + \tilde{\underline{u}} \mid \tilde{\underline{u}} \in \mathcal{V}_0 \}. \quad (\text{II.30})$$

La formulation intégrale primale équivalente à l'équation d'équilibre statique (II.22), obtenue en faisant le produit scalaire $L^2(\Omega)$ avec une application $\underline{v} \in \mathcal{V}_0$, s'écrit :

$$- \int_{\Omega} \operatorname{div}(\underline{\underline{\sigma}})^T \underline{v} \, d\Omega = \int_{\Omega} \underline{\underline{f}}^T \underline{v} \, d\Omega, \quad \forall \underline{v} \in \mathcal{V}_0. \quad (\text{II.31})$$

En remplaçant l'objet sous l'intégrale du premier terme de l'équation (II.31) par son équivalent dans la relation :

$$\operatorname{div}(\underline{\underline{\sigma}}^T \underline{v}) = \operatorname{div}(\underline{\underline{\sigma}})^T \underline{v} + \underline{\underline{\sigma}} : \operatorname{grad} \underline{v}, \quad (\text{II.32})$$

l'équation (II.31) devient :

$$- \int_{\Omega} \operatorname{div}(\underline{\underline{\sigma}}^T \underline{v}) \, d\Omega + \int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}} : \operatorname{grad} \underline{v} \, d\Omega = \int_{\Omega} \underline{\underline{f}}^T \underline{v} \, d\Omega, \quad \forall \underline{v} \in \mathcal{V}_0. \quad (\text{II.33})$$

En appliquant le théorème de flux-divergence, appelé aussi théorème de Green-Ostrogradski, au premier terme de l'équation (II.33), cette dernière s'écrit :

$$- \int_{\partial\Omega} (\underline{\underline{\sigma}} \underline{v})^T \underline{n} \, d\Gamma + \int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}} : \operatorname{grad} \underline{v} \, d\Omega = \int_{\Omega} \underline{\underline{f}}^T \underline{v} \, d\Omega, \quad \forall \underline{v} \in \mathcal{V}_0. \quad (\text{II.34})$$

Puisque $\underline{\underline{\sigma}}$ est symétrique, on se sert de la relation (II.35) dans le premier terme de l'équation (II.34).

$$(\underline{\underline{\sigma}} \underline{v})^T \underline{n} = (\underline{\underline{\sigma}} \underline{n})^T \underline{v} \quad (\text{II.35})$$

La symétrie de $\underline{\underline{\sigma}}$ permet également de simplifier le deuxième terme de l'équation (II.34) en remarquant que le produit doublement contracté entre $\underline{\underline{\sigma}}$ et la partie antisymétrique de $\operatorname{grad} \underline{v}$ (II.36) est nul. La décomposition de $\operatorname{grad} \underline{v}$ comme une somme d'un tenseur symétrique et d'un tenseur antisymétrique, en tenant compte du fait que la partie symétrique est le tenseur des déformations linéarisé (II.24), s'écrit :

$$\operatorname{grad} \underline{v} = \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{v}) + \frac{1}{2} (\operatorname{grad} \underline{v} - (\operatorname{grad} \underline{v})^T). \quad (\text{II.36})$$

Avec ces deux modifications prises en compte dans l'équation (II.34), on obtient la forme faible de l'équation locale d'équilibre (II.22) :

$$\int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{v}) \, d\Omega = \int_{\Omega} \underline{\underline{f}}^T \underline{v} \, d\Omega + \int_{\partial\Omega} (\underline{\underline{\sigma}} \underline{n})^T \underline{v} \, d\Gamma, \quad \forall \underline{v} \in \mathcal{V}_0. \quad (\text{II.37})$$

En tenant compte dans l'équation (II.37) du comportement élastique (II.23) et de la définition du produit doublement contracté, de la condition aux limites de type Neumann (II.27), du fait que $\underline{v} \in \mathcal{V}_0$, la formulation variationnelle primale du problème (II.28) s'écrit sous ces conditions :

$$\begin{cases} \text{Trouver } \underline{u} \in \mathcal{V} \text{ tel que} \\ a(\underline{u}, \underline{v}) = l(\underline{v}), \quad \forall \underline{v} \in \mathcal{V}_0, \end{cases} \quad (\text{II.38})$$

où les applications a et l sont respectivement définies par les équations (II.39) et (II.40) :

$$a(\underline{u}, \underline{v}) = \int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{v}) : \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}) \, d\Omega, \quad (\text{II.39})$$

$$l(\underline{v}) = \int_{\Omega} \underline{f}^T \underline{v} \, d\Omega + \int_{\Gamma^N} \underline{g}^T \underline{v} \, d\Gamma. \quad (\text{II.40})$$

II.2.1.c Méthode des éléments finis pour un matériau au comportement élastique

Le domaine Ω est discrétisé en un ensemble d'éléments K_i tel que $\bigcup_i \bar{K}_i = \bar{\Omega}$. Cette discrétisation spatiale est appelée maillage. Dans ce document, nous n'aborderons que les éléments finis de type Lagrange qui déterminent entièrement l'approximation polynomiale par les valeurs des fonctions aux nœuds (certains points du maillage). Notons $(\varphi_j)_{j=1}^m$ les fonctions de base de Lagrange, également appelée fonctions de forme, avec m le nombre de nœuds du maillage auquel on a retiré ceux appartenant à Γ^D . Nous introduisons les fonctions $(\underline{\varphi}_i)_{i=1}^N$, $N = mD$, telles qu'elles vérifient :

$$\underline{\varphi}_i = \varphi_j \underline{e}_k \quad \text{avec} \quad i = (j-1)D + k, \quad j \in \llbracket 1, m \rrbracket, \quad k \in \llbracket 1, D \rrbracket \quad (\text{II.41})$$

avec $(\underline{e}_k)_{k=1}^D$ les vecteurs de la base canonique associée aux coordonnées cartésiennes. Les $(\underline{\varphi}_i)_{i=1}^N$ définis par (II.41) forment une base du sous-espace de dimension finie $\mathcal{V}_h \subset \mathcal{V}_0$. La méthode de Galerkin consiste alors à chercher un champ de déplacement de la forme :

$$\underline{u}_h(\underline{x}) = \underline{r}(\underline{u}_0)(\underline{x}) + \sum_{i=1}^N \underline{\varphi}_i(\underline{x}) u_i, \quad \forall \underline{x} \in \Omega, \quad (\text{II.42})$$

soit comme la somme d'une solution particulière $\underline{r}(\underline{u}_0)$ cinématiquement admissible, appelée relèvement de \underline{u}_0 , et d'une combinaison linéaire de fonctions cinématiquement admissibles à zéro. Ces fonctions sont choisies de manière *a priori* de sorte que le support de chaque $\underline{\varphi}_i$ soit localisé. Cela implique une mise en œuvre et une évaluation plus rapide des intégrations numériques et une matrice de raideur – provenant de l'intégration numérique de a (II.39) – très creuse car les supports de deux fonctions sont le plus souvent disjoints. Les fonctions de forme EF $(\varphi_j)_{j=1}^m$ de type Lagrange sont choisies de manière que chaque fonction de forme φ_j vaille 1 au nœud \underline{x}_j associé et 0 aux autres nœuds du maillage $(\underline{x}_i)_{i \neq j}$:

$$\varphi_j(\underline{x}_i) = \delta_{ij}, \quad \forall i, j \in \llbracket 1, m \rrbracket^2. \quad (\text{II.43})$$

Dans ce document, nous ne considérerons comme fonctions de forme que des polynômes de degré 1 par morceaux. Après projection de Galerkin, la nouvelle inconnue est alors le vecteur contenant les ddl EF associés aux $(\underline{\varphi}_i)_{i=1}^N$, que l'on note $\underline{U} = (u_i)_{i=1}^N$.

En appliquant la méthode des éléments finis, on se ramène à partir de la formulation faible (II.38) au problème discrétisé s'écrivant :

$$\begin{cases} \text{Trouver } \underline{U} \in \mathbb{R}^N \text{ tel que} \\ \underline{\underline{K}} \underline{U} = \underline{\underline{F}} \end{cases} \quad (\text{II.44})$$

où $\underline{\underline{K}}$ et \underline{F} sont respectivement la matrice de rigidité et le vecteur des forces généralisées, définis par :

$$(\underline{\underline{K}})_{ij} = a(\underline{\varphi}_j, \underline{\varphi}_i), \quad \forall i, j \in \llbracket 1, N \rrbracket^2, \quad (\text{II.45})$$

$$(\underline{F})_i = l(\underline{\varphi}_i) - \int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}(r(\underline{u}_0)) : \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\varphi}_i) \, d\Omega, \quad \forall i \in \llbracket 1, N \rrbracket. \quad (\text{II.46})$$

Le relèvement de \underline{u}_0 est donné par une méthode usuelle fournie par le solveur EF (multiplicateurs de Lagrange, élimination, relèvement, *etc*).

II.2.2 Construction d'une base réduite

Dans les méthodes d'approximations classiques, y compris celle des EF, la taille du système à résoudre dépend directement du maillage. Plus le maillage est raffiné, plus la dimension de l'espace d'approximation augmente et plus l'erreur d'approximation faite par la méthode devrait diminuer. Dans les méthodes de réduction d'ordre de modèles, l'idée est de chercher une solution dans un espace d'approximation réduit qui ne dépend plus de la taille du maillage. Contrairement à la méthode des EF présentée ci-dessus où l'on cherche le champ de déplacement de la forme (II.42), ce champ s'écrit ici :

$$\underline{u}_l(\underline{x}) = r(\underline{u}_0)(\underline{x}) + \sum_{k=1}^l \underline{\psi}_k(\underline{x}) \gamma_k, \quad \forall \underline{x} \in \Omega, \quad (\text{II.47})$$

avec l très petit devant N . La problématique est alors de trouver un nombre réduit de fonctions, $(\underline{\psi}_k)_{k=1}^l$, qui permettent la bonne approximation de la solution \underline{u} du problème (II.38). Pour cela, les méthodes *a posteriori* utilisent des snapshots qui doivent permettre une bonne approximation de l'espace des solutions étudié. Comme introduit en section II.1.2, la sélection des snapshots peut se faire avec une méthode d'échantillonnage (grille régulière, tirage aléatoire, hypercube latin – abrégé LHS pour Latin Hypercube Sampling en anglais –, *etc*) ou à l'aide d'un algorithme glouton couplé à un indicateur d'erreur.

Dans le cadre de l'HR, une méthode de compression de données est utilisée pour obtenir une BR la plus petite possible à partir des snapshots. Le plus généralement, c'est la POD qui est utilisée car la BR est alors optimale (cf. section II.1.3.d).

Chacune des fonctions $\underline{\psi}_k$ de la BR peut s'écrire dans la base des fonctions de forme EF $(\underline{\varphi}_i)_{i=1}^N$ en notant $\underline{\underline{V}}$ la discrétisation de la BR :

$$\underline{\psi}_k(\underline{x}) = \sum_{i=1}^N \underline{\varphi}_i(\underline{x})(\underline{\underline{V}})_{ik}, \quad \forall \underline{x} \in \Omega. \quad (\text{II.48})$$

En insérant (II.48) dans (II.47), on obtient :

$$\underline{u}_l(\underline{x}) = r(\underline{u}_0)(\underline{x}) + \sum_{i=1}^N \underline{\varphi}_i(\underline{x}) \left(\sum_{k=1}^l (\underline{\underline{V}})_{ik} \gamma_k \right). \quad (\text{II.49})$$

Pour les méthodes de projection classiques, par rapport à la formulation du déplacement EF (II.42), le déplacement projeté s'écrit dans la base des fonctions de forme EF (II.49) en remplaçant l'ensemble des ddl EF \underline{U} par la combinaison linéaire de la BR discrète $\underline{\underline{V}}$:

$$\underline{U} = \underline{\underline{V}} \underline{\gamma} \quad (\text{II.50})$$

avec $\underline{\gamma} = (\gamma_k)_{k=1}^l$ le vecteur contenant les ddl associés aux fonctions de la BR $(\underline{\psi}_k)_{k=1}^l$. Le ROM est alors déduit facilement à partir du FOM (II.44) en remplaçant \underline{U} par $\underline{\underline{V}} \underline{\gamma}$ (II.50) et

en projetant à gauche sur la discrétisation des fonctions tests dans la base EF – à savoir \underline{V} , cf. équation (II.48) – :

$$\begin{cases} \text{Trouver } \underline{\gamma} \in \mathbb{R}^l \text{ tel que} \\ \underline{V}^T \underline{K} \underline{V} \underline{\gamma} = \underline{V}^T \underline{F}. \end{cases} \quad (\text{II.51})$$

II.2.3 Construction d'un domaine d'intégration réduit

La spécificité de la méthode HR repose sur la notion de RID. Il existe différentes manières de construire ce dernier. L'une d'elles est de le construire directement à partir de la connaissance des zones importantes à inclure. Une méthode plus automatisée ne nécessitant pas de connaissance de l'utilisateur, et dont nous allons nous servir dans ce document, est basée sur l'algorithme de sélection des points d'interpolation utilisé par la DEIM, écrit en algorithme II.2. Cet algorithme prend en entrée une BR, dénotée ici $\underline{V} \in \mathbb{R}^{N \times l}$, et retourne un ensemble d'indices d'interpolation empirique \mathcal{L} . Dans cet algorithme, la fonction $\text{argmax}(\cdot)$ prend en argument un vecteur et renvoie l'indice de sa plus grande composante et \underline{e}_i est le i -ème vecteur colonne de la matrice identité de taille N . En résumé, l'ensemble \mathcal{L} est construit itérativement de manière à ce qu'à chaque étape k de l'algorithme, le nouvel indice corresponde à la composante maximale de l'erreur absolue entre le vecteur k de la BR et son approximation par les $(k-1)$ précédents vecteurs de BR interpolés à partir des $(k-1)$ points empiriques déjà obtenus. Le nombre final d'indices est égal au nombre de vecteurs colonnes dans la BR, $\text{card}(\mathcal{L}) = l$.

Un résultat important est que la restriction de la BR \underline{V} de rang l à l'ensemble des indices d'interpolation \mathcal{L} obtenu avec l'algorithme DEIM appliqué à \underline{V} , $\underline{V}[\mathcal{L},:] \in \mathbb{R}^{l \times l}$, est une matrice de rang plein et n'importe quelle extension de l'ensemble des indices d'interpolation \mathcal{L}_{ext} de taille $l_{\text{ext}} \geq l$ conservera le fait que $\underline{V}[\mathcal{L}_{\text{ext}},:] \in \mathbb{R}^{l_{\text{ext}} \times l}$ est une BR de rang l .

Algorithme II.2 : Algorithme utilisé par la méthode d'interpolation empirique discrète (DEIM) pour la sélection des indices d'interpolation

Entrées : base réduite $\underline{V} = [v_1, \dots, v_l]$

Sorties : liste des indices d'interpolation $\mathcal{L} = \{i_1, \dots, i_l\}$

$i_1 = \text{argmax}(|v_1|)$;

$\mathcal{L} = \{i_1\}$, $\tilde{\underline{V}} = \underline{V}[:,1]$, $\underline{P} = [e_{i_1}]$;

pour $k = 2, \dots, l$ **faire**

résoudre $\underline{P}^T \tilde{\underline{V}} \underline{c} = \underline{P}^T v_k$ pour $\underline{c} \in \mathbb{R}^{k-1}$;

$\underline{r} = v_k - \tilde{\underline{V}} \underline{c}$;

$i_k = \text{argmax}(|\underline{r}|)$;

$\mathcal{L} = \{\mathcal{L}, i_k\}$, $\tilde{\underline{V}} = \underline{V}[:,1:k]$, $\underline{P} = [\underline{P}, e_{i_k}]$;

Généralement, comme proposé dans [Ryckelynck et al., 2016], l'algorithme DEIM est appliqué à plusieurs BR incluant par exemple celle associée au champ de contrainte. L'idée est d'obtenir un RID permettant de capter le plus d'information possible. Alors, le RID est défini par la relation (II.52) où $\text{supp}(\varphi_i)$ dénote le support EF de φ_i , et \mathcal{L} l'union de l'ensemble des indices obtenus avec l'algorithme DEIM appliqué à différentes BR.

$$\Omega_A = \bigcup_{i \in \mathcal{L}} \text{supp}(\varphi_i) \quad (\text{II.52})$$

Le RID peut également être enrichi d'une ou plusieurs couches d'éléments ou d'une ou plusieurs régions d'intérêt dans un besoin d'améliorer la précision de la prédiction HR.

On dénote Ω_B le sous-domaine de Ω complémentaire de Ω_A qui vérifie $\Omega = \Omega_A \cup \Omega_B$ et

$$\Gamma^I = \Omega_A \cap \Omega_B \quad (\text{II.53})$$

où Γ^I est l'interface entre les deux sous-domaines. On introduit \mathcal{I} comme :

$$\mathcal{I} = \left\{ i \in \llbracket 1, N \rrbracket \mid \int_{\Gamma^I} \underline{\varphi}_i^T \underline{\varphi}_i d\Gamma \neq 0 \right\}. \quad (\text{II.54})$$

On définit \mathcal{A} comme l'ensemble des ddl EF non connectés à Ω_B :

$$\mathcal{A} = \left\{ i \in \llbracket 1, N \rrbracket \mid \int_{\Omega_B} \underline{\varphi}_i^T \underline{\varphi}_i d\Omega = 0 \right\} \quad (\text{II.55})$$

et $\underline{\psi}_k^A$ le mode empirique $\underline{\psi}_k$ mis à zéro dans Ω_B :

$$\underline{\psi}_k^A(\underline{x}) = \sum_{i \in \mathcal{A}} \varphi_i(\underline{x}) (\underline{V})_{ik}, \quad \forall \underline{x} \in \Omega. \quad (\text{II.56})$$

Le complémentaire de $\underline{\psi}_k^A$ est dénoté $\underline{\psi}_k^B$ et s'obtient par :

$$\underline{\psi}_k^B(\underline{x}) = \underline{\psi}_k(\underline{x}) - \underline{\psi}_k^A(\underline{x}), \quad \forall \underline{x} \in \Omega. \quad (\text{II.57})$$

II.2.4 Définition du problème hyper-réduit

On commence par définir l'espace qui va se substituer à \mathcal{V} pour résoudre le problème réduit sur Ω_A . Ce sous-espace est défini par :

$$\mathcal{V}_{HR}^{\Omega_A} = \left\{ \underline{v} = r_{\Omega_A}(\underline{u}_0) + \tilde{r}_{\Omega_A}(\underline{u}_I) + \tilde{\underline{u}} \mid \tilde{\underline{u}} \in \text{vect}\{\underline{\psi}_k^A\}_{k=1}^l \right\} \quad (\text{II.58})$$

avec \underline{u}_I une condition aux limites de type Dirichlet sur le nouveau bord Γ^I , $\tilde{r}_{\Omega_A}(\underline{u}_I)$ son relèvement sur Ω_A , $r_{\Omega_A}(\underline{u}_0)$ la restriction de $\underline{r}(\underline{u}_0)$ à Ω_A et $\{\underline{\psi}_k^A\}_{k=1}^l$ les modes POD de la base primale restreints à \mathcal{A} comme définis dans l'équation (II.56). L'équation d'équilibre hyper-réduite est définie par :

$$\begin{cases} \text{Trouver } \underline{u} \in \mathcal{V}_{HR}^{\Omega_A} \text{ tel que} \\ a_{\Omega_A}(\underline{u}, \underline{v}) = l_{\Omega_A}(\underline{v}), \quad \forall \underline{v} \in \text{vect}\{\underline{\psi}_k^A\}_{k=1}^l \end{cases} \quad (\text{II.59})$$

où a_{Ω_A} et l_{Ω_A} dénotent les formes a et l introduites dans (II.39) et (II.40) où l'intégration est réduite à Ω_A puisque \underline{v} s'annule sur Ω_B . Le champ de déplacement HR est de la forme :

$$\underline{u}_{HRH}(\underline{x}) = r_{\Omega_A}(\underline{u}_0)(\underline{x}) + \tilde{r}_{\Omega_A}(\underline{u}_I)(\underline{x}) + \sum_{k=1}^l \underline{\psi}_k^A(\underline{x}) \gamma_k, \quad \forall \underline{x} \in \Omega_A. \quad (\text{II.60})$$

La méthode HR standard [Ryckelynck *et al.*, 2016] fournit le relèvement de \underline{u}_I sur Ω . Ce dernier s'écrit :

$$\tilde{r}(\underline{u}_I)(\underline{x}) = \sum_{k=1}^l \underline{\psi}_k^B(\underline{x}) \gamma_k^B, \quad \forall \underline{x} \in \Omega \quad (\text{II.61})$$

où les γ_k^B sont des paramètres additionnels choisis tels que $\gamma_k^B = \gamma_k$, $k \in \llbracket 1, l \rrbracket$, de manière à retrouver l'approximation par BR classique (II.47). Le champ de déplacement approximé est de la forme :

$$\underline{u}_{HRH}(\underline{x}) = \underline{r}(\underline{u}_0)(\underline{x}) + \sum_{k=1}^l \underline{\psi}_k(\underline{x}) \gamma_k, \quad \forall \underline{x} \in \Omega.$$

Alors $\underline{u}_{\text{HRH}} \in \mathcal{V}_{\text{POD}} = \{v = r(\underline{u}_0) + \tilde{u} \mid \tilde{u} \in \text{vect}\{\underline{\psi}_k\}_{k=1}^l\}$.

Après discrétisation du problème (II.59), on obtient le problème :

$$\begin{cases} \text{Trouver } \gamma \in \mathbb{R}^l \text{ tel que} \\ \underline{V}[\mathcal{A},:]^T \underline{K}[\mathcal{A},:] \underline{V} \gamma = \underline{V}[\mathcal{A},:]^T \underline{F}[\mathcal{A}]. \end{cases} \quad (\text{II.62})$$

On retrouve dans le problème (II.62) la projection de Petrov-Galerkin puisque les fonctions tests ne sont pas dans le même espace que les fonctions pour exprimer le champ de déplacement projeté. Il est possible de simplifier la projection de la matrice de rigidité EF \underline{K} en remarquant que, du fait que le support des fonctions de forme EF est localisé, seuls les ddl $\mathcal{A} \cup \mathcal{I}$ sont connectés aux ddl dans \mathcal{A} à travers \underline{K} . Le problème discret s'écrit alors :

$$\begin{cases} \text{Trouver } \gamma \in \mathbb{R}^l \text{ tel que} \\ \underline{V}[\mathcal{A},:]^T \underline{K}[\mathcal{A}, \mathcal{A} \cup \mathcal{I}] \underline{V}[\mathcal{A} \cup \mathcal{I},:] \gamma = \underline{V}[\mathcal{A},:]^T \underline{F}[\mathcal{A}]. \end{cases} \quad (\text{II.63})$$

II.3 Réduction d'ordre de modèles en mécanique du contact

Comme précisé dans le chapitre I, le problème mécanique qui nous intéresse fait en particulier intervenir du contact. Nous nous intéressons ici à la mécanique du contact et son traitement numérique dans le cadre de la méthode des éléments finis (EF). Dans ce document, le contact est considéré non frottant. Par ailleurs, nous développerons plus en détails la méthode des multiplicateurs de Lagrange pour le traitement numérique du contact. Enfin nous introduirons les méthodes de réduction d'ordre de modèles ayant déjà en mécanique du contact avec une attention particulière pour celles qui ont été appliquées avec un contact traité par la méthode des multiplicateurs de Lagrange.

II.3.1 Résolution par éléments finis d'un problème de contact élastique

D'un point de vue mécanique, le contact est la notion d'interaction entre un ou plusieurs objets qui vont échanger de l'énergie. Il intervient à l'interface entre deux objets qui se rencontrent. Sa nature discontinue en fait un phénomène très non-linéaire.

Sans perte de généralité, nous considérons un problème de contact entre deux solides élastiques représentés chacun par un domaine borné $\Omega_1 \in \mathbb{R}^D$ et $\Omega_2 \in \mathbb{R}^D$ avec D la dimension du problème (voir figure II.3).

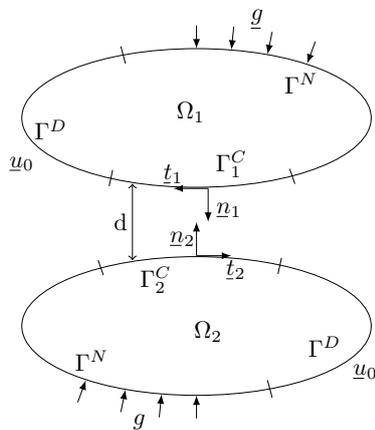


FIGURE II.3 – Géométrie d'un problème de contact générique entre deux solides

La totalité du domaine est définie par $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$. On dénote $\partial\Omega = \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2$ le bord de Ω . Celui-ci est partitionné en trois surfaces Γ^D , Γ^N , Γ^C qui vérifient les relations :

- $\partial\Omega = \Gamma^D \cup \Gamma^N \cup \Gamma^C$
- $\Gamma^D \cap \Gamma^N = \emptyset$
- $\Gamma^D \cap \Gamma^C = \emptyset$

Sur les différentes surfaces sont imposées les conditions aux limites :

- sur Γ^D les conditions aux limites de Dirichlet.
- sur Γ^N les conditions aux limites de Neumann.
- Γ^C est la zone de contact potentiel sur laquelle sont imposées les conditions de contact. On a $\Gamma^C = \Gamma_1^C \cup \Gamma_2^C$ avec Γ_i^C la surface de contact potentiel associée à Ω_i , $i \in \llbracket 1,2 \rrbracket$.

II.3.1.a Formulation forte du problème avec contact

Soit \underline{n}_i le vecteur unitaire normal sortant associé à Ω_i , $i \in \llbracket 1,2 \rrbracket$. On partitionne le champ de déplacement \underline{u} en \underline{u}_i sur Ω_i . Les points sur chacune des surfaces de Γ^C sont appariés par un critère de distance minimale de manière à pouvoir évaluer le déplacement normal relatif u_N sur chaque paire de points de Γ^C . On note $\{\underline{x}, \underline{x}'\}$ une paire de points faisant le lien entre Γ_1^C et Γ_2^C . Le déplacement normal relatif vaut alors :

$$u_N = \underline{u}_1(\underline{x})^T \underline{n}_1(\underline{x}) + \underline{u}_2(\underline{x}')^T \underline{n}_2(\underline{x}'), \quad \forall \text{ paires } \{\underline{x}, \underline{x}'\} \in (\Gamma_1^C, \Gamma_2^C). \quad (\text{II.64})$$

Sous l'hypothèse des petites perturbations, $\underline{n}_1(\underline{x}) = -\underline{n}_2(\underline{x}')$, $\forall \{\underline{x}, \underline{x}'\} \in (\Gamma_1^C, \Gamma_2^C)$. La force de contact \underline{F}^i définie sur Γ_i^C se décompose en une partie normale et une tangentielle de la sorte :

$$\underline{F}^i(\underline{x}) = \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) \underline{n}_i = F_N^i(\underline{x}) \underline{n}_i(\underline{x}) + \underline{F}_T^i(\underline{x}), \quad \forall \underline{x} \in \Gamma_i^C. \quad (\text{II.65})$$

Dans ce document, nous supposons un contact sans frottement. La composante tangentielle de la force de contact est donc nulle :

$$\underline{F}_T^i = 0. \quad (\text{II.66})$$

La contrainte de contact imposée aux déplacements s'écrit :

$$u_N \leq d \quad (\text{II.67})$$

où d dénote le jeu initial entre les deux objets. Il s'agit de la condition de non-pénétration. Lorsque les deux objets rentrent en contact, une force de contact apparaît. En supposant que le contact est non-adhésif, la force de contact normale ne peut pas être positive. Cela s'écrit :

$$F_N = F_N^1 = F_N^2 \leq 0. \quad (\text{II.68})$$

En plus des conditions cinématique (II.67) et statique (II.68), il faut rajouter une condition permettant d'imposer une force normale nulle lorsqu'il n'y a pas contact. Cette condition de complémentarité s'écrit :

$$(d - u_N) F_N = 0. \quad (\text{II.69})$$

Les équations (II.67), (II.68) et (II.69) réunies portent le nom de conditions de Hertz-Signorini-Moreau. Ces conditions coïncident avec les conditions de Karush-Kuhn-Tucker [Karush, 1939 ; Kuhn et Tucker, 1951] en théorie de l'optimisation. Cette loi est représentée sur la figure II.4 où l'espace admissible est tracé en rouge. Il n'y a que deux statuts possibles : soit il y a contact ($u_N = d$ et $F_N \leq 0$), soit il y a décollement ($u_N < d$ et $F_N = 0$).

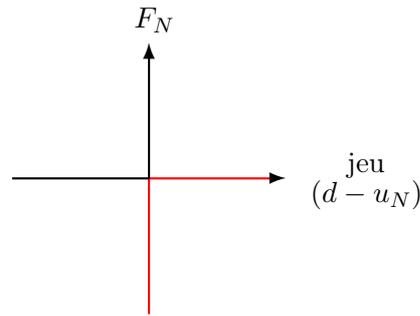


FIGURE II.4 – Loi de contact de Hertz-Signorini-Moreau

La formulation forte du problème élasto-statique (II.28) auquel on a rajouté les conditions de contact de Hertz-Signorini-Moreau sans frottement est un système d'équations qui s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}} = \underline{f} & \text{dans } \Omega, \\ \underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{\varepsilon}} & \text{dans } \Omega, \\ \underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2} (\operatorname{grad} \underline{u} + (\operatorname{grad} \underline{u})^T) & \text{dans } \Omega, \\ \underline{u} = \underline{u}_0 & \text{sur } \Gamma^D, \\ \underline{\underline{\sigma}} \underline{n} = \underline{g} & \text{sur } \Gamma^N, \\ \underline{\underline{\sigma}} \underline{n} = F_N \underline{n} & \text{sur } \Gamma^C, \\ u_N \leq d, F_N \leq 0, (d - u_N) F_N = 0 & \text{sur } \Gamma^C. \end{array} \right. \quad (\text{II.70})$$

II.3.1.b Traitement du contact

Différentes méthodes sont utilisées pour traiter numériquement le contact dont les principales sont :

- la méthode de pénalisation où l'idée est qu'un terme de pénalité va s'activer dès qu'il y a interpénétration, ce dernier pouvant s'apparenter à une rigidité. Les conditions de contact sont alors régularisées. Cette méthode autorise une légère interpénétration et nécessite de choisir le terme de pénalité. Plus celui-ci est petit, plus l'interpénétration est grande. D'un autre côté, plus le terme de pénalité est grand, au mieux les conditions de contact sont vérifiées mais cela provoque un mauvais conditionnement des systèmes linéaires à résoudre. La méthode reste facile à mettre en œuvre numériquement (cf. les logiciels EF Zebulon, Abaqus, *etc*).
- la méthode des multiplicateurs de Lagrange qui consiste en la résolution d'un problème d'optimisation basée sur la condition de non-pénétration (II.67). Un multiplicateur de Lagrange, noté λ , est alors introduit pour vérifier la contrainte d'inégalité. Cela conduit à un problème de point-selle. Le multiplicateur de Lagrange introduit est en fait équivalent à la force de contact (au signe près) et permet de vérifier exactement l'ensemble des conditions de contact. Cette méthode oblige par contre à rajouter au problème EF des ddl associés à la variable duale.
- la méthode du Lagrangien augmenté qui est une méthode hybride entre les deux précédentes.

Pour plus de détails sur ces méthodes, ainsi que d'autres qui n'ont pas été mentionnées ici, le lecteur pourra se référer à [Raous *et al.*, 1988 ; Raous, 1999] ainsi qu'aux livres de référence sur le traitement numérique de la mécanique du contact [Glowinski *et al.*, 1978 ; Wriggers, 2006].

Dans le code éléments finis Cast3M [Cast3M] utilisé pour la simulation mécanique du combustible nucléaire, le problème de contact est numériquement traité par multiplicateurs de Lagrange. Dans ce document, nous focaliserons donc notre attention sur cette méthode.

II.3.1.c Formulation faible du problème de contact traité par multiplicateurs de Lagrange

Les équations fortes qui régissent le contact s'écrivent avec des inégalités (II.70), ce qui rend difficile leurs prises en compte dans la formulation faible. Une formulation rigoureuse du problème mène à une inégalité variationnelle contrairement à la formulation faible sans contact qui s'écrit comme une égalité variationnelle, voir section II.2.1.b. La formulation variationnelle primale du problème (II.70) peut s'écrire d'après [Duvaut et Lions, 1976] :

$$\begin{cases} \text{Trouver } \underline{u} \in \mathcal{V}_C \text{ tel que} \\ a(\underline{u}, \underline{v} - \underline{u}) \geq l(\underline{v} - \underline{u}), \quad \forall \underline{v} \in \mathcal{V}_C \end{cases} \quad (\text{II.71})$$

avec

$$\mathcal{V}_C = \{\underline{v} \in \mathcal{V} \mid v_N \leq d \text{ sur } \Gamma^C\} \quad (\text{II.72})$$

et où \mathcal{V} , a et l sont définis comme précédemment dans (II.30), (II.39) et (II.40) pour le problème sans contact. Pour rappel : $\mathcal{V} = \{\underline{v} = \underline{r}(u_0) + \tilde{\underline{u}} \mid \tilde{\underline{u}} \in \mathcal{V}_0\}$, $\mathcal{V}_0 = \{\underline{v} \in (H^1(\Omega))^D \mid \underline{v} = \underline{0} \text{ sur } \Gamma^D\}$ et

$$\begin{aligned} a(\underline{u}, \underline{v}) &= \int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{v}) : \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}) \, d\Omega, \\ l(\underline{v}) &= \int_{\Omega} \underline{f}^T \underline{v} \, d\Omega + \int_{\Gamma^N} \underline{g}^T \underline{v} \, d\Gamma. \end{aligned}$$

À cause de l'inéquation variationnelle, le problème de contact est un problème intrinsèquement non-linéaire. L'existence et l'unicité d'une solution à l'inéquation variationnelle (II.71) ont été réalisées dans [Fichera, 1973]. Dans [Duvaut et Lions, 1976], il est démontré que la solution du problème (II.71) peut être obtenue par minimisation de l'énergie potentielle. Le problème s'écrit :

$$\min_{\underline{v} \in \mathcal{V}_C} J(\underline{v}) = \frac{1}{2} a(\underline{v}, \underline{v}) - l(\underline{v}). \quad (\text{II.73})$$

La minimisation de J est alors équivalente à un problème de point-selle en introduisant les multiplicateurs de Lagrange [Kikuchi et Oden, 1988 ; Chabrand *et al.*, 1998]. Le problème de point-selle s'écrit :

$$\begin{cases} \text{Trouver } (\underline{u}, \lambda) \in \mathcal{V} \times \mathcal{W} \text{ tel que} \\ a(\underline{u}, \underline{v}) + b(\underline{v}, \lambda) = l(\underline{v}), & \forall \underline{v} \in \mathcal{V}_0 \\ b(\underline{u}, \kappa - \lambda) \leq \langle d, \kappa - \lambda \rangle_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma^C), H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma^C)}, & \forall \kappa \in \mathcal{W} \end{cases} \quad (\text{II.74})$$

avec $\mathcal{W} = \{\kappa \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma^C) \mid \kappa \geq 0\}$ où $H^{-\frac{1}{2}}$ dénote le dual de $H^{\frac{1}{2}}$, $b(\underline{v}, \kappa) = \langle v_N, \kappa \rangle_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma^C), H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma^C)}$ et $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H^{\frac{1}{2}}, H^{-\frac{1}{2}}}$ le produit de dualité.

Remarques : la solution (\underline{u}, λ) vérifie la condition de complémentarité (II.69). En effet, en prenant pour fonction test $\kappa = 0$ et $\kappa = 2\lambda$, puis en considérant la définition de b , nous obtenons $\langle d - u_N, \lambda \rangle_{H^{\frac{1}{2}}, H^{-\frac{1}{2}}} = 0$. Aussi, le multiplicateur de Lagrange obtenu en résolvant (II.74) est physiquement représentatif de l'opposé de la force de contact, $\lambda = -F_N$.

II.3.1.d Méthode des éléments finis pour la mécanique du contact traité par multiplicateurs de Lagrange

En appliquant la méthode des éléments finis comme cela a été fait dans la section II.2.1.c, on se ramène au problème discrétisé suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\underline{U}, \underline{\Lambda}) \in \mathbb{R}^N \times (\mathbb{R}^+)^{N_\lambda} \text{ tel que} \\ \underline{K}\underline{U} + \underline{B}^T \underline{\Lambda} = \underline{F} \\ \underline{\Lambda}^T (\underline{D} - \underline{B}\underline{U}) = 0 \\ \underline{B}\underline{U} \leq \underline{D} \end{array} \right. \quad (\text{II.75})$$

où N et N_λ correspondent respectivement au nombre de ddl associés à la variable primale et au nombre total de contacts potentiels. $\underline{K} \in \mathbb{R}^{N \times N}$, $\underline{B} \in \mathbb{R}^{N_\lambda \times N}$, $\underline{F} \in \mathbb{R}^N$, $\underline{D} \in \mathbb{R}^{N_\lambda}$, \underline{U} et $\underline{\Lambda}$ introduits dans (II.75) sont respectivement la discrétisation de a , b , l , d , u et λ que l'on trouve dans l'équation (II.74). \underline{B} est appelée matrice de rigidité de contact. Chaque ligne de \underline{B} correspond à un contact potentiel et le produit $\underline{B}\underline{U}$ correspond au déplacement relatif sur la zone de contact. L'inégalité $\underline{B}\underline{U} \leq \underline{D}$ est utilisée pour exprimer que pour chaque ligne $i \in \llbracket 1, N_\lambda \rrbracket$, on a $(\underline{B}\underline{U})_i \leq (\underline{D})_i$.

Remarque : la condition de complémentarité (II.69) est vérifiée en tout point car les ddl associés à la variable duale sont positifs ou nuls ($\underline{\Lambda} \geq 0$), le jeu est positif ou nul ($\underline{D} - \underline{B}\underline{U} \geq 0$) et que puisque la somme de termes positifs ou nuls est nulle ($\underline{\Lambda}^T (\underline{D} - \underline{B}\underline{U}) = 0$), cela implique que chaque terme est nul. Nous avons donc en particulier :

$$\underline{\Lambda} \odot (\underline{D} - \underline{B}\underline{U}) = \underline{0}. \quad (\text{II.76})$$

Dans Cast3M, la méthode de résolution utilisée pour résoudre (II.75) est une méthode des statuts [Abide et al., 2016], ou active-set strategy en anglais, qui permet de se ramener d'une inégalité variationnelle à une égalité variationnelle que l'on sait résoudre par les méthodes de résolution standard. Pour cela la méthode va activer/désactiver les statuts de contact jusqu'à trouver une solution qui vérifie l'ensemble des conditions de contact. L'algorithme peut s'écrire de manière simplifiée, cf. algorithme II.3.

Algorithme II.3 : Algorithme des statuts pour le traitement du contact par multiplicateurs de Lagrange

Entrées : le système à résoudre, la liste des contacts activés initialement

Sorties : la solution avec les multiplicateurs de Lagrange, la liste des contacts actifs
Initialisation des statuts pour rentrer dans la boucle ;

tant que des statuts sont modifiés faire

 Résolution du problème de contact avec la liste des contacts actifs actualisée ;

si le contact est imposé et que le multiplicateur de Lagrange est négatif **alors**

 Suppression de la condition de contact de la liste des contacts actifs ;

si le contact n'est pas imposé et que le jeu est négatif **alors**

 Ajout de la condition de contact à la liste des contacts actifs ;

Le problème de point-selle (II.75) est bien posé. En effet, il vérifie la condition inf-sup ou Ladyzenskaia-Babuška-Brezzi (LBB) [Babuška, 1973 ; Brezzi, 1974] car par construction la rigidité de contact \underline{B} est de rang plein en ligne.

II.3.2 Méthodes de réduction d'ordre de modèles en mécanique du contact

Différentes méthodes de réduction d'ordre de modèles ont récemment été appliquées à la mécanique du contact ou plus généralement à des problèmes sous contrainte d'inégalité.

Une stratégie multi-échelles avec approximation par BR, construite par POD, a été proposée pour un contact avec frottement [Giacoma *et al.*, 2014]. Le FOM consiste en une combinaison de la méthode LATIN (cf. section II.1.1.a) et d'un solveur multi-grilles. Également avec la méthode LATIN, l'article [Giacoma *et al.*, 2016] montre qu'il est possible de construire une BR quasi-optimale par PGD pour un problème de contact quasi-statique avec frottement. Dans ces deux articles, la résolution du problème de contact avec la méthode LATIN est proche de la méthode du Lagrangien augmenté.

La RBM a très récemment été appliquée en mécanique du contact pour des contacts non frottants ainsi que frottants et des matériaux avec un comportement plastique localisé [Ballani *et al.*, 2018]. Dans cet article, le contact est traité par Lagrangien augmenté. Une formulation hybride est proposée sur la variable primale pour traiter les non-linéarités locales.

Des méthodes de type hyper-réduction, voir section II.1.2.b, ont également été proposées pour le contact. Il est possible de trouver une extension de l'EIM pour traiter des problèmes formulés par une inéquation variationnelle et résolu par pénalité [Bader *et al.*, 2016]. Une variante non-négative de la DEIM [Amsallem et Nordström, 2016] a été proposée pour permettre l'approximation de termes ayant une contrainte de positivité. Cette méthode pourrait servir à l'approximation des multiplicateurs de Lagrange par interpolation. La DEIM a aussi permis de réduire un problème sous contrainte d'inégalité traitée par pénalité [Balajewicz et Toivanen, 2017].

Nous détaillons maintenant les méthodes de réduction d'ordre de modèles *a posteriori* qui ont été appliquées à un problème de contact résolu par multiplicateurs de Lagrange.

II.3.2.a Méthodes *a posteriori* ayant déjà été appliquées à un contact traité par multiplicateurs de Lagrange

Dans le cas d'un contact traité par la méthode des multiplicateurs de Lagrange, on rajoute comme inconnues au problème les multiplicateurs de Lagrange qui représentent les forces de contact (au signe près). Pour réduire au plus le modèle, il semble justifié de construire, en plus de la BR associée aux déplacements, une BR associée aux multiplicateurs de Lagrange. C'est ce qui est fait dans les articles [Haasdonk *et al.*, 2012] et [Balajewicz *et al.*, 2016]. Il faut noter que contrairement à la BR primale (associée aux déplacements), il est mieux que la BR duale (associée aux multiplicateurs de Lagrange) soit positive de manière à vérifier naturellement la condition de non-adhésion (II.68).

Les BR primale et duale discrétisées sont respectivement notées $\underline{\underline{V}}_u$ et $\underline{\underline{V}}_\lambda$ et contiennent respectivement l_u et l_λ vecteurs colonnes. Après projection du modèle EF (II.75) sur les deux bases réduites, le ROM s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\underline{\underline{\gamma}}_u, \underline{\underline{\gamma}}_\lambda) \in \mathbb{R}^{l_u} \times (\mathbb{R}^+)^{l_\lambda} \text{ tel que} \\ \underline{\underline{V}}_u^T \underline{\underline{K}} \underline{\underline{V}}_u \underline{\underline{\gamma}}_u + \underline{\underline{V}}_u^T \underline{\underline{B}}^T \underline{\underline{V}}_\lambda \underline{\underline{\gamma}}_\lambda = \underline{\underline{V}}_u^T \underline{\underline{F}} \\ \underline{\underline{\gamma}}_\lambda^T (\underline{\underline{V}}_\lambda^T \underline{\underline{D}} - \underline{\underline{V}}_\lambda^T \underline{\underline{B}} \underline{\underline{V}}_u \underline{\underline{\gamma}}_u) = 0 \\ \underline{\underline{V}}_\lambda^T \underline{\underline{B}} \underline{\underline{V}}_u \underline{\underline{\gamma}}_u \leq \underline{\underline{V}}_\lambda^T \underline{\underline{D}} \end{array} \right. \quad (\text{II.77})$$

avec $\underline{\underline{\gamma}}_u$ et $\underline{\underline{\gamma}}_\lambda$ les ddl respectivement associés aux BR primale et duale.

La solution obtenue avec le ROM (II.77) vérifie alors des conditions de contact projetées et

en particulier, la condition de complémentarité réduite (II.69) ($\underline{\gamma}_\lambda \odot (\underline{V}_\lambda^T \underline{D} - \underline{V}_\lambda^T \underline{B} \underline{V}_u \underline{\gamma}_u) = \underline{0}$). Mais en se ramenant aux ddl associés aux fonctions de base EF à l'aide des relations $\underline{U} = \underline{V}_u \underline{\gamma}_u$ et $\underline{\Lambda} = \underline{V}_\lambda \underline{\gamma}_\lambda$, seule la condition de non-adhésion (II.68) est vérifiée grâce à la positivité de la BR duale et des ddl associés ($\underline{\Lambda} \geq \underline{0}$). La condition de non-pénétration (II.67) n'est pas vérifiée :

$$\underline{V}_\lambda^T (\underline{D} - \underline{B} \underline{U}) \geq \underline{0} \quad \not\Rightarrow \quad \underline{D} - \underline{B} \underline{U} \geq \underline{0}. \quad (\text{II.78})$$

Pour ce qui est de la condition de complémentarité, bien que l'on ait la relation :

$$\underline{\Lambda}^T (\underline{D} - \underline{B} \underline{U}) = 0, \quad (\text{II.79})$$

puisque la condition de non-pénétration n'est pas vérifiée, le produit terme à terme n'est pas forcément nul et la condition de complémentarité n'est pas nécessairement localement vérifiée :

$$\underline{\Lambda} \odot (\underline{D} - \underline{B} \underline{U}) \neq \underline{0}. \quad (\text{II.80})$$

Les deux articles qui proposent un ROM s'écrivant comme le système (II.77) se distinguent par la manière de construire les deux BR. Voici un résumé de ces deux articles et en particulier sur la façon dont ils vérifient la condition de non-adhésion :

1. le premier article [Haasdonk *et al.*, 2012] consiste en une extension de la RBM (cf. section II.1.2.a) au contact. Les deux BR sont alors directement construites à partir des snapshots judicieusement sélectionnés avec un algorithme glouton. Une procédure d'orthogonalisation de type Gram-Schmidt [Gram, 1883 ; Schmidt, 1907] est tout de même appliquée à la BR primale pour travailler avec une BR orthogonale. La BR duale obtenue est naturellement positive. La procédure d'orthogonalisation n'est pas appliquée à cette dernière pour ne pas perdre son caractère positif. Le défaut de cette dernière méthode est qu'elle fournit des BR peu compressées.
2. dans le deuxième article [Balajewicz *et al.*, 2016], l'idée est d'appliquer des méthodes de factorisation de matrice aux matrices de snapshots pour obtenir les BR. La POD (cf. section II.1.3.d) est utilisée pour construire la BR primale et, puisque la POD ne conviendrait pas pour construire la BR duale, une méthode de factorisation non-négative de matrice – abrégée NNMF pour Non-Negative Matrix Factorization en anglais – est utilisée pour construire la BR duale. Cette dernière sera détaillée en section II.3.2.c.

La principale difficulté pour ces deux méthodes est la construction d'une BR duale permettant une bonne approximation des multiplicateurs de Lagrange. La méthode développée dans ce document sera comparée à la deuxième méthode que nous appellerons dans la suite PBM pour Projection-Based Method. Nous introduisons dans la section suivante (section II.3.2.b) les choix réalisés pour cette méthode qui nous serviront dans la suite du document. La raison pour laquelle nous ne comparons pas notre méthode – qui sera introduite au chapitre III – avec la première méthode est qu'elle n'utilise pas de méthodes de compression de données, telle la POD, et peut donc mener à une BR de grande dimension pour un grand nombre de snapshots comme cela est expliqué dans [Balajewicz *et al.*, 2016].

II.3.2.b Modèle réduit par projection sur base réduite

Nous rappelons brièvement le principe de la PBM [Balajewicz *et al.*, 2016] introduite en section précédente II.3.2.a car dans le chapitre III nous comparerons les résultats obtenus pour cette méthode avec ceux obtenus avec l'approche que nous proposons, l'hyper-réduction hybride. La PBM repose à la fois sur une BR primale construite par POD ainsi que sur une BR duale construite par NNMF (cf. section II.3.2.c) de manière à ce qu'elle soit positive et ainsi respecter nativement la condition de contact de non-adhésion (II.68).

L'algorithme NNMF prend en entrée le nombre de ddl associés à la BR duale l_λ . Dans la partie applicative, ce nombre est choisi tel que $l_\lambda = l_u$ avec l_u le nombre de ddl associés à la BR primale fixé préalablement. Ainsi, l_λ est le plus grand possible pour approximer au mieux la solution duale tout en vérifiant la condition nécessaire $l_\lambda \leq l_u$ pour que le problème de point-selle (II.77) soit bien posé (LBB).

Indicateur d'erreur dédié à la sélection des snapshots avec un algorithme glouton

Couplé avec un algorithme glouton, voir section II.1.3.a, l'indicateur d'erreur permet de sélectionner les snapshots qui vont permettre de construire un ROM robuste. L'indicateur d'erreur proposé dans [Balajewicz *et al.*, 2016], et dédié à la PBM, est basé sur la non-vérification des conditions de contact. Il s'écrit :

$$\mathcal{I}(\underline{\mu}, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \alpha_1 \| [r_1(\underline{\mu})]_- \|_2^2 + \alpha_2 \| r_2(\underline{\mu}) \|_2^2 + \alpha_3 \| [r_3(\underline{\mu})]_- \|_2^2 \quad (\text{II.81})$$

où les coefficients α_i servent à pondérer les résidus r_i de chacune des conditions de contact, définis par :

$$\begin{aligned} r_1(\underline{\mu}) &= \underline{D}(\underline{\mu}) - \underline{B}(\underline{\mu}) \underline{V}_u \underline{\gamma}_u(\underline{\mu}), \\ r_2(\underline{\mu}) &= (\underline{B}^+(\underline{\mu}) (\underline{K}(\underline{\mu}) \underline{V}_u \underline{\gamma}_u(\underline{\mu}) - \underline{F}(\underline{\mu}))) \odot (\underline{D}(\underline{\mu}) - \underline{B}(\underline{\mu}) \underline{V}_u \underline{\gamma}_u(\underline{\mu})), \\ r_3(\underline{\mu}) &= \underline{B}^+(\underline{\mu}) (\underline{K}(\underline{\mu}) \underline{V}_u \underline{\gamma}_u(\underline{\mu}) - \underline{F}(\underline{\mu})), \end{aligned}$$

où \underline{B}^+ dénote la pseudo-inverse de Moore-Penrose de \underline{B} .

L'indicateur d'erreur qui sera utilisé dans ce document portera uniquement sur la condition de non-pénétration $\mathcal{I}(\underline{\mu}, 1, 0, 0)$ car il permet d'obtenir de très bons résultats d'après [Balajewicz *et al.*, 2016] tout en étant peu coûteux. Il sera noté plus simplement :

$$I(\underline{\mu}) = \| [\underline{D}(\underline{\mu}) - \underline{B}(\underline{\mu}) \underline{V}_u \underline{\gamma}_u(\underline{\mu})]_- \|_2^2. \quad (\text{II.82})$$

II.3.2.c Méthode de factorisation non-négative de matrice

Le principe de factorisation d'une matrice sous contrainte de positivité des facteurs (NNMF) a été introduit dans les années 90 [Paatero *et Tapper*, 1994 ; Lee *et Seung*, 1999]. En notant $\underline{S} \in \mathbb{R}^{N \times N_s}$ une matrice positive, c'est-à-dire que tous ses éléments sont positifs ou nuls, la NNMF consiste à minimiser la différence entre la matrice \underline{S} et son approximation de rang l définie par un produit de matrices positives. Cela s'écrit :

$$\min_{\substack{\underline{W} \in \mathbb{R}^{N \times l}, \underline{H} \in \mathbb{R}^{l \times N_s}} \|\underline{S} - \underline{W} \underline{H}\|^2 \quad \text{t.q.} \quad \begin{cases} \underline{W} \geq \underline{0}, \\ \underline{H} \geq \underline{0}. \end{cases} \quad (\text{II.83})$$

Cette technique trouve son intérêt dans de nombreux domaines : imagerie [Wild *et al.*, 2004], reconnaissance de formes [Lee *et Seung*, 1997], fouille de textes [Xu *et al.*, 2003], systèmes de recommandations [Melville *et Sindhvani*, 2010], génomique [Devarajan, 2008] ... De manière générale, la NNMF est faite pour être appliquée à des matrices creuses contenant des données positives. Différents algorithmes pour résoudre le problème (II.83) pour diverses applications ont été développés avec différentes initialisations et contraintes. Contrairement à la SVD et sa factorisation unique (II.9), la solution du problème (II.83) ne l'est pas et de plus, les algorithmes convergent le plus souvent vers un minimum local. C'est pourquoi l'initialisation de cet algorithme est critique [Langville *et al.*, 2014]. L'article [Berry *et al.*, 2007] décrit brièvement les différents algorithmes disponibles dans la littérature ainsi que leurs propriétés.

Dans la suite, nous utiliserons la librairie Python Nimfa [Zitnik et Zupan, 2012] pour construire la BR duale par NNMF. Parmi les méthodes existantes, nous allons utiliser un algorithme de type minimisation par moindres carrés alternés qui exploite le fait que si le problème (II.83) n'est pas convexe à la fois en \underline{W} et \underline{H} , il l'est en \underline{W} et \underline{H} pris séparément. Une méthode de gradient projeté est utilisée pour chaque sous-problème. L'algorithme prend en entrée plusieurs paramètres, à savoir le rang de l'approximation l , le nombre maximum d'itérations pour obtenir la factorisation, l'initialisation des matrices \underline{W} et \underline{H} , le nombre de fois que l'algorithme est lancé, *etc.* Plutôt qu'une initialisation avec des termes aléatoires positifs, pour laquelle il est conseillé de lancer l'algorithme plusieurs fois et de garder la meilleure solution, nous optons pour une initialisation utilisant la Non-Negative Double SVD (NNDSVD) [Boutsidis et Gallopoulos, 2008]. Cette méthode consiste à appliquer la SVD à la matrice \underline{S} que nous désirons factoriser avec la NNMF, puis à séparer les vecteurs singuliers en une partie positive et une partie négative que l'on change de signe. Cela permet d'obtenir facilement, à partir de la SVD, des vecteurs positifs pour l'initialisation de la NNMF. L'initialisation avec la NNDSVD nous permet d'avoir des résultats reproductibles, c'est-à-dire que pour les mêmes paramètres d'entrée l'algorithme nous donnera toujours les mêmes résultats.

À titre d'illustration, de même que pour la SVD en section II.1.3.c, on s'intéresse à l'application de la NNMF en traitement d'images. Nous allons approximer par NNMF la matrice positive issue de la première image représentée figure II.6. On trace sur la figure II.5 la décroissance de l'erreur relative en norme de Frobenius au carré entre les matrices originale et approximée par NNMF de rang inférieur. On trace le résultat obtenu pour deux nombres d'itérations maximum, 10^2 et 10^4 . Comme attendu, l'erreur d'approximation faite par la NNMF est toujours supérieure à celle commise par la SVD du fait du théorème d'Eckart-Young [Eckart et Young, 1936]. Nous pouvons noter que l'écart entre les erreurs est très petit pour une approximation de rang faible. La NNMF, contrairement à la SVD, ne permet pas en général de tendre vers l'erreur numérique pour une approximation dont le rang tend vers le rang de la matrice originale. La valeur du seuil atteint est dépendant du nombre d'itérations maximum. Plus ce dernier est grand, plus l'erreur diminue mais le temps pour obtenir la BR est long. Dans la suite, nous faisons le choix de prendre 10^2 comme nombre maximal d'itérations de la NNMF. Ce choix est justifié par le fait que l'on s'intéresse en réduction d'ordre de modèles aux approximations de rang faible et que l'on souhaite obtenir une BR dans un délai correct.

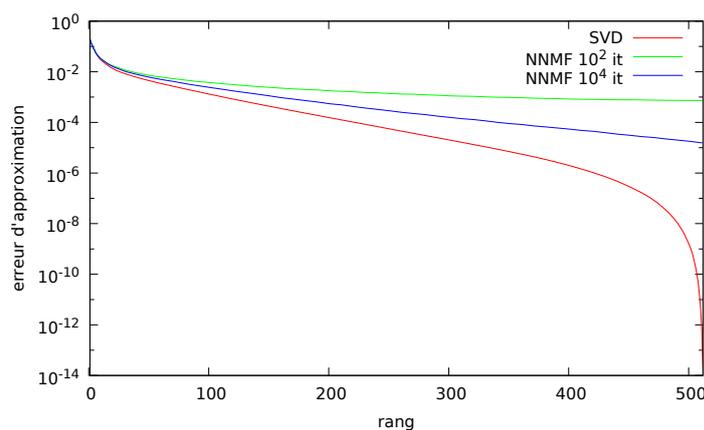


FIGURE II.5 – Décroissance de l'erreur relative en norme de Frobenius au carré entre les matrices originale et approximée par SVD ainsi que par NNMF de rang inférieur pour deux nombres d'itérations maximum, la matrice originale correspondant à la première image de la figure II.6

Nous représentons sur la figure II.6 les approximations successives par NNMF de rang 5, 10, 20, 50 et 100 pour un nombre d'itérations maximum valant 10^2 . Nous pouvons remarquer que pour un rang faible l'image approximée par NNMF est proche de celle approximée par

SVD, voir figure II.1. Cela est certainement dû à l'initialisation de la NNMF avec la NNDSVD, basée sur la SVD.



FIGURE II.6 – Image originale classiquement utilisée en traitement d'images puis approximations successives par NNMF de rang 5, 10, 20, 50 et 100

Chapitre III

Hyper-réduction hybride pour la mécanique du contact élastique

Dans ce chapitre, une extension de l'hyper-réduction classique reposant sur une formulation hybride (en gardant des ddl EF) est proposée pour les problèmes de contact élastique, sans frottement, traité par multiplicateurs de Lagrange.

Dans un premier temps, la méthode est appliquée à un cas 1D élastique de la bibliographie [Haasdonk *et al.*, 2012] et une comparaison approfondie est réalisée avec la méthode de projection sur bases réduites [Balajewicz *et al.*, 2016].

L'hyper-réduction hybride est ensuite implémentée dans le code EF Cast3M [Cast3M], puis appliquée à deux cas tests élastiques. Le premier est un cas test 2D axisymétrique où le contact est induit par une force externe. Le deuxième est un cas test 3D où les dilatations thermiques sont prises en compte pour simuler l'effet diabolique comme dans PLEIADES/ALCYONE.

Sommaire

III.1	Hyper-réduction hybride pour le contact	55
III.1.1	Révision du domaine d'intégration réduit	55
III.1.2	Définition de l'hyper-réduction hybride	56
III.1.3	Reconstruction <i>a posteriori</i> des multiplicateurs de Lagrange	59
III.1.4	Indicateur d'erreur	59
III.2	Implémentation de l'hyper-réduction hybride	60
III.2.1	Implémentation en Python	60
III.2.2	Implémentation peu intrusive pour Cast3M	61
III.3	Hyper-réduction hybride appliquée à un cas test 1D	64
III.3.1	Cas test	64
III.3.2	Application de l'hyper-réduction hybride	65
III.3.3	Comparaison avec la PBM	68
III.4	Application de l'hyper-réduction hybride à un cas test 2D avec Cast3M	73
III.4.1	Cas test	73
III.4.2	Construction du modèle hyper-réduit	74
III.4.3	Résultats de l'hyper-réduction dans et en dehors de l'espace paramétrique	76
III.4.4	Étude de la condition LBB en fonction des ddl EF	79
III.4.5	Traitement d'un espace paramétrique plus grand et comparaison avec la PBM	84
III.5	Application de l'hyper-réduction hybride à un cas test 3D avec Cast3M	87
III.5.1	Cas représentatif de chargements thermo-mécaniques sur l'élément combustible	87
III.5.2	Construction de deux modèles par hyper-réduction hybride	89
III.5.3	Application de l'hyper-réduction hybride	91
III.5.4	Erreur du modèle HRH en fonction du seuil POD	93

III.1 Hyper-réduction hybride pour la mécanique du contact numériquement traité par multiplicateurs de Lagrange

Nous souhaitons étendre la méthode d'hyper-réduction classique introduite section II.2 aux problèmes de contact numériquement traité par multiplicateurs de Lagrange. Le contact est considéré sans frottement.

Pour cela il faut en premier lieu réviser la construction du domaine réduit afin de correctement tenir compte des conditions de contact dans ce dernier. Nous développons ensuite la méthode d'hyper-réduction hybride, abrégée HRH, proposée pour la mécanique du contact numériquement traité par multiplicateurs de Lagrange. Nous l'appelons hybride pour deux raisons. La première est que les multiplicateurs de Lagrange introduits pour traiter le contact ne sont pas projetés sur une BR, ils sont traités sur la base EF. La deuxième est que nous introduisons aussi un aspect hybride sur la variable primale en ajoutant aux modes POD constituant la BR primale quelques fonctions de forme EF, d'une part pour que le problème soit mathématiquement bien défini, mais également afin de mieux traiter le contact.

Nous proposons en complément de la méthode HRH un post-traitement permettant de reconstruire *a posteriori* les multiplicateurs de Lagrange sur toute la zone de contact potentiel car ils ne sont définis que dans le RID après résolution du problème hyper-réduit, contrairement aux déplacements où la BR associée est définie partout et permet cette reconstruction naturellement.

Enfin, nous proposons également un indicateur d'erreur développé pour l'hyper-réduction hybride. Ce dernier permet d'accéder à une erreur estimée pour les solutions primale et duale et va servir, couplé avec un algorithme glouton, à sélectionner les snapshots pour construire un modèle hyper-réduit robuste.

III.1.1 Révision du domaine d'intégration réduit

L'application directe de la méthode HR dans le cadre d'un problème de contact soulève le problème de calcul du jeu sur le RID. En effet, la construction du RID telle que décrite section II.2.3 ne garantit pas que le jeu puisse être calculé sur tous les nœuds de $\Gamma^C \cap \partial\Omega_A$ (voir fig. III.1). Or il est impossible d'introduire et calculer un multiplicateur de Lagrange aux endroits où le jeu ne peut pas être calculé. Cette incompatibilité nous amène à revoir la définition du RID.

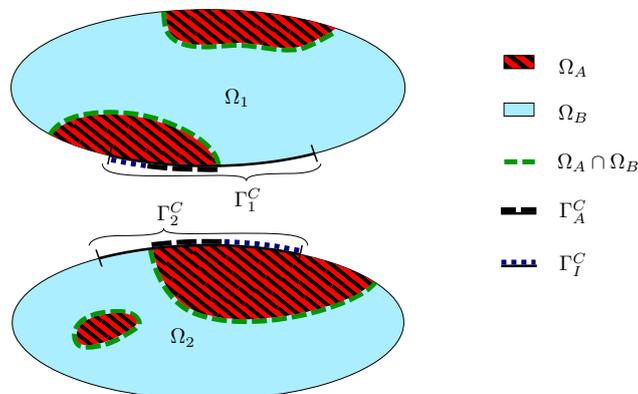


FIGURE III.1 – Problème de contact entre deux solides sur un domaine réduit

Deux choix s'offrent à nous :

- soit il nous faut étendre l'interface Γ^I à Γ_I^C (voir fig. III.2a) où Γ_I^C dénote la partie de $\Gamma^C \cap \partial\Omega_A$ où le jeu ne peut pas être calculé faute d'un point manquant en face. Cela revient à imposer sur ces nœuds une condition de pseudo-Dirichlet et à ne pas traiter le contact
- soit on étend le domaine réduit aux nœuds permettant le calcul du jeu dans tout le RID, c'est-à-dire à ceux appairés aux nœuds de Γ_I^C (cf. fig. III.2b).

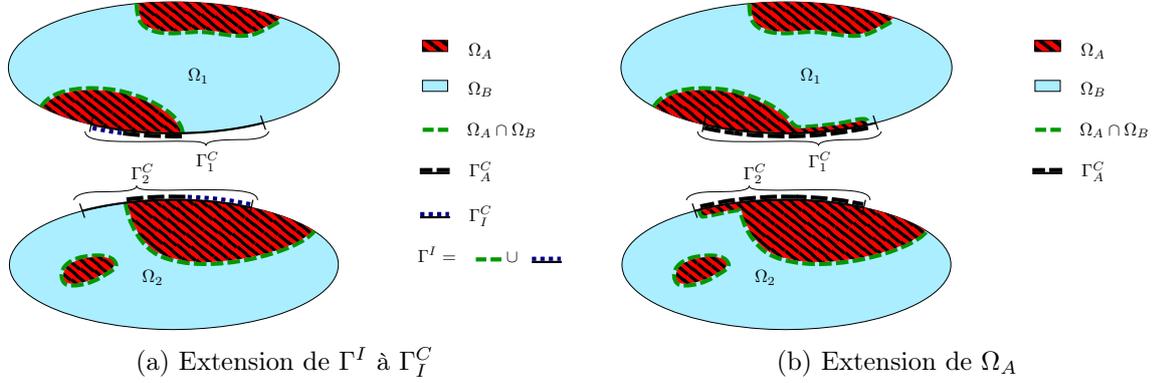


FIGURE III.2 – Révision du RID

Dans le cas de la première solution, Γ^I s'écrit :

$$\Gamma^I = (\Omega_A \cap \Omega_B) \cup \Gamma_I^C \quad (\text{III.1})$$

Il faut alors adapter la définition de \mathcal{A} qui devient :

$$\mathcal{A} = \left\{ i \in \llbracket 1, N \rrbracket \mid \int_{\Omega_B} \underline{\varphi}_i^T \underline{\varphi}_i d\Omega + \int_{\Gamma_I^C} \underline{\varphi}_i^T \underline{\varphi}_i d\Gamma = 0 \right\}. \quad (\text{III.2})$$

\mathcal{A} est alors l'ensemble des ddl associés aux déplacements qui ne sont ni connectés à Ω_B ni dans Γ_I^C . Alors, les équations de Hertz-Signorini-Moreau réduites sont restreintes à $\Gamma_A^C = (\Gamma^C \cap \partial\Omega_A) \setminus \Gamma_I^C$.

La deuxième solution est celle que l'on va utiliser car elle permet de traiter un plus grand nombre de contacts. Dans ce cas, il faut redéfinir Ω_A en amont. Ce dernier s'écrit :

$$\Omega_A = \bigcup_{i \in \mathcal{L}} \text{supp}(\underline{\varphi}_i) \cup \bigcup_{x'_j \in (\Gamma_I^C)'} \text{supp}(\varphi_j) \quad (\text{III.3})$$

où le premier terme vient de la définition classique de Ω_A , voir équation (II.52), et le deuxième terme correspond au support des φ_j associés aux nœuds x'_j dans $(\Gamma_I^C)'$ qui dénote le bord appairé à Γ_I^C . Ω_B , Γ^I , \mathcal{I} et \mathcal{A} sont ensuite définis de la même manière que pour l'HR classique à partir de Ω_A .

Quelque soit le choix pour la révision du RID, il ne modifie pas la forme des équations qui suivent.

III.1.2 Définition de l'hyper-réduction hybride

Étant donné la difficulté d'approximer les multiplicateurs de Lagrange avec une BR, nous proposons de conserver une approximation EF locale des multiplicateurs de Lagrange pour l'hyper-réduction hybride. Ceci est raisonnable car la restriction du domaine au RID va diminuer le nombre de contacts à traiter. De plus, en mécanique des matériaux, il est essentiel

d'avoir une bonne prévision des forces de contact car l'état de contrainte local en dépend directement.

Le problème HRH s'écrit à partir du problème HR classique (II.59) et du problème de point-selle (II.74) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\underline{u}, \lambda) \in \mathcal{V}_{HR}^{\Omega_A} \times \mathcal{W}_{HR}^{\Omega_A} \text{ tel que} \\ a_{\Omega_A}(\underline{u}, \underline{v}) + b_{\Gamma_A^C}(\underline{v}, \lambda) = l_{\Omega_A}(\underline{v}), \quad \forall \underline{v} \in \text{vect}\{\psi_k^A\}_{k=1}^l \\ b_{\Gamma_A^C}(\underline{u}, \kappa - \lambda) \leq \langle d, \kappa - \lambda \rangle_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_A^C), H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_A^C)}, \quad \forall \kappa \in \mathcal{W}_{HR}^{\Omega_A} \end{array} \right. \quad (\text{III.4})$$

avec $\mathcal{W}_{HR}^{\Omega_A} = \{\kappa \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_A^C) \mid \kappa \geq 0\}$ et $b_{\Gamma_A^C}(\underline{v}, \kappa) = \langle v_N, \kappa \rangle_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_A^C), H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_A^C)}$. Pour rappel, $\mathcal{V}_{HR}^{\Omega_A} = \{\underline{v} = r_{\Omega_A}(\underline{u}_0) + \tilde{r}_{\Omega_A}(\underline{u}_I) + \tilde{\underline{u}} \mid \tilde{\underline{u}} \in \text{vect}\{\psi_k^A\}_{k=1}^l\}$, voir équation (II.58). De cette manière, la solution \underline{u} vérifie $\langle u_N - d, \lambda \rangle_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_A^C), H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_A^C)} = 0$, soit l'équation de complémentarité.

On introduit \mathcal{A}_c l'ensemble des ddl de \mathcal{A} localisés sur la zone de contact potentiel, \mathcal{A}_λ l'ensemble des ddl associés à la variable duale connectés à \mathcal{A}_c par la matrice \underline{B} et \mathcal{A}'_c l'ensemble des ddl associés à la variable primale connectés à \mathcal{A}_λ par \underline{B} :

$$\mathcal{A}_c = \{j \in \mathcal{A} \mid \exists i \in \llbracket 1, N_\lambda \rrbracket \text{ t.q. } (\underline{B})_{ij} \neq 0\}, \quad (\text{III.5})$$

$$\mathcal{A}_\lambda = \{i \in \llbracket 1, N_\lambda \rrbracket \mid \exists j \in \mathcal{A}_c \text{ t.q. } (\underline{B})_{ij} \neq 0\}, \quad (\text{III.6})$$

$$\mathcal{A}'_c = \{j \in \llbracket 1, N \rrbracket \mid \exists i \in \mathcal{A}_\lambda \text{ t.q. } (\underline{B})_{ij} \neq 0\}, \quad (\text{III.7})$$

avec N et N_λ le nombre de ddl associés à la variable primale et le nombre de contacts potentiels. Nous avons alors $\mathcal{A}_c \subseteq \mathcal{A}$ mais pas nécessairement $\mathcal{A}'_c \subseteq \mathcal{A}$. Par ailleurs, par définition $\mathcal{A}_c \subseteq \mathcal{A}'_c$. Si le problème de contact est de type obstacle ou que le contact est numériquement traité par un algorithme nœud-à-nœud exigeant des maillages avec des nœuds en vis-à-vis, alors $\mathcal{A}_c = \mathcal{A}'_c \subseteq \mathcal{A}$. On note pour la suite N_λ^C le cardinal de \mathcal{A}_λ .

Après discrétisation du problème (III.4), on obtient le problème à résoudre dans la phase online :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\underline{\gamma}, \underline{\Lambda}[\mathcal{A}_\lambda]) \in \mathbb{R}^l \times (\mathbb{R}^+)^{N_\lambda^C} \text{ tel que} \\ \underline{V}[\mathcal{A}, :]^T \underline{K}[\mathcal{A}, \mathcal{A} \cup \mathcal{I}] \underline{V}[\mathcal{A} \cup \mathcal{I}, :] \underline{\gamma} + \underline{V}[\mathcal{A}_c, :]^T \underline{B}[\mathcal{A}_\lambda, \mathcal{A}_c]^T \underline{\Lambda}[\mathcal{A}_\lambda] = \underline{V}[\mathcal{A}, :]^T \underline{F}[\mathcal{A}] \\ \underline{\Lambda}[\mathcal{A}_\lambda]^T (\underline{D}[\mathcal{A}_\lambda] - \underline{B}[\mathcal{A}_\lambda, \mathcal{A}'_c] \underline{V}[\mathcal{A}'_c, :] \underline{\gamma}) = 0 \\ \underline{B}[\mathcal{A}_\lambda, \mathcal{A}'_c] \underline{V}[\mathcal{A}'_c, :] \underline{\gamma} \leq \underline{D}[\mathcal{A}_\lambda] \end{array} \right. \quad (\text{III.8})$$

où $\underline{B}[\mathcal{A}_\lambda, :]$, $\underline{D}[\mathcal{A}_\lambda]$ et $\underline{\Lambda}[\mathcal{A}_\lambda]$ sont respectivement la matrice de rigidité de contact, le vecteur du jeu initial et l'approximation des multiplicateurs de Lagrange restreints à \mathcal{A}_λ .

Un avantage de cette formulation est que la solution vérifie les conditions de contact de Hertz-Signorini-Moreau dans le RID (sans projection). En particulier, puisque la somme de termes positifs ou nuls est nulle grâce à la deuxième équation du problème (III.8), la condition de complémentarité (II.69) est vérifiée comme celle du problème EF (II.76) :

$$\underline{\Lambda}[\mathcal{A}_\lambda] \odot (\underline{D}[\mathcal{A}_\lambda] - \underline{B}[\mathcal{A}_\lambda, \mathcal{A}'_c] \underline{U}[\mathcal{A}'_c]) = 0 \quad (\text{III.9})$$

Propriété : Dans le cas où $\mathcal{A}_c = \mathcal{A}'_c$, si $\underline{B}[\mathcal{A}_\lambda, \mathcal{A}_c] \underline{V}[\mathcal{A}_c, :]$ est de rang plein en ligne, alors le problème (III.8) est consistant avec la formulation EF (II.75) (en notant $\underline{U} = \underline{V} \underline{\gamma}$).

Preuve : Supposons $\mathcal{A}_c = \mathcal{A}'_c$. Une condition nécessaire pour que le problème de point-selle (III.8) soit bien posé est donnée par la condition inf-sup ou Ladyzenskaia-Babuška-Brezzi [Babuška, 1973 ; Brezzi, 1974] (LBB), qui est équivalente à ce que le produit $\underline{B}[\mathcal{A}_\lambda, \text{actif}, \mathcal{A}_c] \underline{V}[\mathcal{A}_c, :]$

soit de rang plein en ligne. $\mathcal{A}_{\lambda, \text{actif}}$ dénote les ddl de \mathcal{A}_λ associés à un contact actif, c'est-à-dire qui vérifient :

$$\mathcal{A}_{\lambda, \text{actif}} = \{j \in \mathcal{A}_\lambda \mid \underline{B}[j, \mathcal{A}_c] \underline{V}[\mathcal{A}_c, :] \underline{\gamma} = \underline{D}[j]\} \quad (\text{III.10})$$

Comme les contacts actifs sont *a priori* inconnus, on étend cette condition à une autre plus forte qui est que $\underline{B}[\mathcal{A}_\lambda, \mathcal{A}_c] \underline{V}[\mathcal{A}_c, :]$ est de rang plein en ligne. Une condition nécessaire pour vérifier la condition LBB discrète étendue est $l \geq N_\lambda^C$, soit que le nombre de vecteurs colonnes dans la BR est supérieur ou égal au nombre de contacts potentiels. Si la condition LBB discrète est vérifiée, étant donné que le terme $\underline{V}[\mathcal{A}, :]^T \underline{K}[\mathcal{A}, \mathcal{A} \cup \mathcal{I}] \underline{V}[\mathcal{A} \cup \mathcal{I}, :]$ est bien défini par l'HR classique (voir section II.2), alors le problème (III.8) admet une unique solution. De plus, le problème (III.8) est construit à partir du problème EF (II.75) en restreignant les vecteurs et matrices au RID, en projetant l'équation d'équilibre sur $\underline{V}[\mathcal{A}, :]$ et en remplaçant $\underline{U}[\mathcal{A} \cup \mathcal{I}]$ par $\underline{V}[\mathcal{A} \cup \mathcal{I}, :] \underline{\gamma}$, d'où la consistance avec la formulation EF. \square

Nous nous plaçons dorénavant dans le cas où $\mathcal{A}_c = \mathcal{A}'_c$. Si la condition LBB étendue ($\underline{B}[\mathcal{A}_\lambda, \mathcal{A}_c] \underline{V}[\mathcal{A}_c, :]$ est de rang plein en ligne) n'est pas vérifiée, nous allons chercher à augmenter le nombre de vecteurs colonnes l de la BR \underline{V} afin de respecter la condition. Une possibilité est de rajouter, comme cela a été fait dans [Rozza, 2005], une participation de la BR duale s'écrivant $\underline{B}^T \underline{V}_\lambda$ dans la BR primale. La nouvelle BR primale s'écrit $\underline{\bar{V}} = (\underline{V} \mid \underline{B}^T \underline{V}_\lambda)$. Nous proposons plutôt d'adopter une stratégie hybride couplant modèle d'ordre élevé et modèle d'ordre réduit, généralement utilisée pour mieux traiter une non-linéarité. Ce type de méthode a déjà été développé pour d'autres méthodes de réduction d'ordre de modèles comme dans le cadre de la PGD [Ammar *et al.*, 2011], de la POD pour modéliser la rupture de matériaux quasi-fragiles [Kerfriden *et al.*, 2012] ou un comportement élasto-plastique [Radermacher *et Reese*, 2014], d'une méthode de type hyper-réduction par quadrature simplifiée pour la résolution des équations de Navier-Stokes incompressibles [Baiges *et al.*, 2013] et tout dernièrement de la RBM pour la mécanique du contact [Ballani *et al.*, 2018].

Concrètement, la stratégie hybride ne va modifier dans la procédure de l'HRH que la BR primale qui devient également hybride. Cette BR primale hybride contient les modes POD habituels auxquels on rajoute quelques fonctions de forme EF. Ces fonctions de forme EF sont ici liées aux nœuds sur Γ_A^C pour pouvoir augmenter le rang de $\underline{B}[\mathcal{A}_\lambda, \mathcal{A}_c] \underline{V}[\mathcal{A}_c, :]$. En notant $(i_\alpha^c)_{\alpha=1}^{\text{card}(\mathcal{A}_c)}$ les indices dans \mathcal{A}_c , la BR primale hybride s'écrit :

$$\underline{\bar{\psi}}_k = \begin{cases} \psi_k & \text{si } k \leq l \\ \varphi_{i_{k-l}^c} & \text{si } l < k \leq \bar{l} \end{cases}, \quad k \in \llbracket 1, \bar{l} \rrbracket \quad (\text{III.11})$$

avec $\text{card}(\mathcal{A}) \geq \bar{l} \geq \max(l, N_\lambda^C)$ défini tel que $\underline{B}[\mathcal{A}_\lambda, \mathcal{A}_c] \underline{\bar{V}}[\mathcal{A}_c, :]$ soit de rang plein en ligne, et $(\varphi_i)_{i=1}^N$ les fonctions de forme EF. La matrice $\underline{\bar{V}}[\mathcal{A}_c, :]$ étant définie comme la discrétisation de $\underline{\bar{\psi}}_k$, elle s'écrit :

$$\underline{\bar{V}} = \left(\underline{V} \mid \underline{I}_N \left[:, (i_{k-l}^c)_{k=l+1}^{\bar{l}} \right] \right). \quad (\text{III.12})$$

dans le cas où l'on a des EF de Lagrange. Le problème (III.8) est alors défini avec $\underline{\bar{V}}$ au lieu de \underline{V} . Par simplicité, dans la suite $\underline{\bar{V}}$ est toujours appelée \underline{V} .

Si $D > 1$ et le nombre de nœuds sur Γ_A^C est suffisamment petit, il peut être intéressant de traiter tous les ddl de la variable primale sur la zone de contact avec des fonctions de forme EF dans le but d'assurer la condition LBB, une bonne stabilité du modèle et également d'obtenir une bonne approximation des solutions sur la zone de contact.

Dans le cas général où $\mathcal{A}'_c \subset \mathcal{A}_c$ le problème HR (III.8) est non trivial car n'est plus symétrique, $(\underline{V}[\mathcal{A}_c, :]^T \underline{B}[\mathcal{A}_\lambda, \mathcal{A}_c]^T)^T \neq \underline{B}[\mathcal{A}_\lambda, \mathcal{A}'_c] \underline{V}[\mathcal{A}'_c, :]$. Ce cas n'a pas été traité dans cette thèse mais mérite d'être approfondi car il correspond à un cas plus général où le contact serait traité avec un algorithme de type nœud-à-surface.

III.1.3 Reconstruction *a posteriori* des multiplicateurs de Lagrange à partir de la solution hyper-réduite hybride

Comme pour la méthode HR standard, le choix du relèvement de \underline{u}_I (II.61) permet à la solution primale d'être définie sur tout le domaine initial par $\underline{U} = \underline{V}\underline{\gamma}$. Un inconvénient de la méthode HRH proposée est alors que la condition de non-pénétration (II.67) n'est pas forcément vérifiée en dehors du RID.

La base duale EF limitée au RID ne nous permet pas de reconstruire les forces de contact en dehors du RID. La question de la reconstruction des forces de contact sur Γ^C nous ramène à la difficulté de trouver une BR duale fiable pour post-traiter les prédictions HRH.

Nous proposons alors le post-traitement suivant. À partir des snapshots de la variable duale, en utilisant les résultats de simulation avec le FOM pour collecter les snapshots de la variable primale, on extrait N_s snapshots linéairement indépendants tels que $N_s \leq N_\lambda^C + N_\lambda$ et on note la matrice composée de ces snapshots \underline{S}_λ . Notre stratégie est de trouver les coefficients $\underline{\gamma}_\lambda$, sous contrainte de positivité pour assurer la condition de non-adhésion (II.68), associés aux colonnes de \underline{S}_λ minimisant la condition de complémentarité (II.69) – un jeu positif doit donner un multiplicateur de Lagrange nul – ainsi que la distance avec la solution duale obtenue en résolvant le modèle HRH. La reconstruction proposée est obtenue en résolvant le problème (III.13) de type moindres carrés sous contrainte de positivité où \underline{U} et $\underline{\Delta}[\mathcal{A}_\lambda]$ sont les solutions primale et duale obtenues en résolvant le modèle HRH (III.8).

$$\min_{\underline{\gamma}_\lambda} \left\| \begin{pmatrix} \underline{S}_\lambda[\mathcal{A}_\lambda, :] \\ [D - \underline{B}\underline{U}]_+ \odot \underline{S}_\lambda \end{pmatrix} \underline{\gamma}_\lambda - \begin{pmatrix} \underline{\Delta}[\mathcal{A}_\lambda] \\ \underline{0} \end{pmatrix} \right\|_2^2 \quad \text{t.q.} \quad \underline{\gamma}_\lambda \geq 0. \quad (\text{III.13})$$

Les multiplicateurs de Lagrange sont alors définis en dehors du RID par la relation (III.14) où $\underline{\gamma}_\lambda$ est obtenu en résolvant le problème de minimisation (III.13).

$$\underline{\Delta}[[1, N_\lambda] \setminus \mathcal{A}_\lambda, :] = \underline{S}_\lambda[[1, N_\lambda] \setminus \mathcal{A}_\lambda, :] \underline{\gamma}_\lambda. \quad (\text{III.14})$$

III.1.4 Indicateur d'erreur pour la sélection des snapshots avec un algorithme glouton

La capacité d'une BR à correctement approximer l'espace des solutions associé à l'espace paramétrique étudié dépend principalement des snapshots. Pour les choisir du mieux possible, nous pouvons utiliser un algorithme glouton (cf. algorithme II.1) qui va les sélectionner de manière itérative de sorte qu'ils minimisent un indicateur d'erreur.

Des indicateurs d'erreur ont déjà été proposés pour les différentes méthodes de réduction d'ordre de modèles (cf. section II.1.3.b) mais ces derniers ne sont pas adaptés à la méthode HRH proposée. Pour exemple, celui proposé pour la PBM dans [Balajewicz *et al.*, 2016], et détaillé section II.3.2.b, est basé sur la non-vérification des conditions de contact. Or le modèle d'ordre réduit obtenu avec la méthode HRH (III.8) vérifie, par construction, ces conditions dans le RID. L'indicateur d'erreur proposé dans [Ryckelynck *et al.*, 2015] nécessite de construire une BR de champ de contraintes vérifiant l'équilibre au sens de la méthode des EF. Or ce type de champ n'est pas facile à construire pour les problèmes de contact. C'est pourquoi nous proposons un indicateur d'erreur *a posteriori*, simple mais efficace, adapté à l'HRH. Cet indicateur est particulièrement adapté à la mécanique du contact car il permet d'estimer à la fois l'erreur primale et l'erreur duale.

La première étape consiste à interpoler en un point $\underline{\mu}$ dans l'espace paramétrique étudié discrétisé $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}$, des snapshots $\mathcal{S}_{\text{snap}} \subset \mathcal{P}$ de la solution primale restreints aux ddl dans \mathcal{I} –

qui sont situés sur l'interface Γ^I (II.54) – :

$$\tilde{U}(\underline{\mu})[\mathcal{I}] = \sum_{\rho \in \mathcal{S}_{\text{snap}}} \alpha_{\rho}(\underline{\mu}) \underline{U}(\underline{\rho})[\mathcal{I}] \quad (\text{III.15})$$

avec $\alpha_{\rho}(\underline{\mu})$ les coefficients d'interpolation. Lorsque l'interpolation ne vérifie pas la condition de non-pénétration sur la zone de contact, on impose un jeu nul pour ne pas surestimer la valeur des forces de contact dans le RID.

La deuxième étape est la résolution d'un problème EF défini sur Ω_A avec comme condition au bord sur l'interface du RID Γ^I une condition de Dirichlet imposée par la solution interpolée (III.15). La solution ainsi obtenue nous donne une approximation de la solution EF de référence dans le RID. L'approximation est à la fois primale $\tilde{U}[\mathcal{A}]$ et duale $\tilde{\Lambda}[\mathcal{A}_{\lambda}]$. De plus, l'approximation tend vers la solution de référence sur le RID lorsque l'erreur d'interpolation tend vers zéro.

L'indicateur d'erreur est défini comme l'erreur relative entre la solution HRH du problème (III.8) (\underline{U} , $\underline{\Lambda}$) et l'approximation de la solution EF de référence (\tilde{U} , $\tilde{\Lambda}$) pour des normes $\|\cdot\|_{X_1}$ et $\|\cdot\|_{X_2}$ données :

$$\eta(\underline{\mu}) = \eta_u(\underline{\mu}) + \eta_{\lambda}(\underline{\mu}) \quad \text{avec} \quad \eta_u(\underline{\mu}) = \frac{\|(\underline{U} - \tilde{U})(\underline{\mu})[\mathcal{A}]\|_{X_1}}{\|\tilde{U}(\underline{\mu})[\mathcal{A}]\|_{X_1}}, \quad (\text{III.16})$$

$$\eta_{\lambda}(\underline{\mu}) = \frac{\|(\underline{\Lambda} - \tilde{\Lambda})(\underline{\mu})[\check{\mathcal{A}}_{\lambda}]\|_{X_2}}{\|\tilde{\Lambda}(\underline{\mu})[\check{\mathcal{A}}_{\lambda}]\|_{X_2}}.$$

En pratique, nous utiliserons soit les normes H_1 et $(H_1)'$ – norme duale de la norme H_1 – pour respectivement les erreurs primale et duale, soit la norme 2 pour le calcul des deux erreurs.

L'interpolation dans l'espace paramétrique utilisée dans la suite est multi-linéaire. Plus la dimension de l'espace paramétrique augmente, plus cette interpolation devient coûteuse et donne des résultats mitigés. Il pourrait être intéressant d'utiliser une interpolation plus sophistiquée comme une interpolation sur la variété [Lopez *et al.*, 2018].

III.2 Implémentation de l'hyper-réduction hybride

L'hyper-réduction hybride a d'abord été implémentée en Python afin de faciliter les choix algorithmiques. Pour vérifier la méthode et les développements effectués, un cas test 1D de la littérature a tout d'abord été étudié. Afin de pouvoir appliquer la méthode à des cas tests avec une géométrie plus complexe, l'HRH a ensuite été implémentée dans le logiciel EF Cast3M. Nous détaillons ici les choix et les étapes clés de la programmation pour des comportements élastiques.

III.2.1 Implémentation en Python

Pour formuler les problèmes discrets à résoudre, nous faisons appel à la librairie Python SciPy développée pour le calcul scientifique. Et plus particulièrement nous utilisons le module NumPy qui permet de formaliser les tableaux et matrices. La classe LinAlg de NumPy permet de faire les opérations principales d'algèbre linéaire comme le calcul de produits matriciels, de différents nombres liés à une matrice (déterminant, rang, conditionnement, norme), la factorisation de matrices (Cholesky, QR, SVD) ou encore la résolution d'équations.

Le problème EF 1D quasi-statique élastique est directement écrit en Python sous sa forme discrète et sa résolution se fait à l'aide des outils de la classe LinAlg. Pour traiter le contact,

une méthode des statuts a été implémentée (cf. algorithme II.3). Le solveur linéaire de la classe LinAlg appelle celui proposé par la routine “_gesv” de la librairie d’algèbre linéaire LAPACK [Anderson *et al.*, 1992] qui résout le système à l’aide d’une factorisation LU.

Le modèle hyper-réduit hybride est ensuite obtenu par restriction et projection du problème EF. La base POD est obtenue par SVD à l’aide de la classe LinAlg qui fait elle-même appel à la routine “_gesdd” de LAPACK. L’algorithme DEIM II.2, utilisé pour la construction du RID, a été implémenté en Python. Il est important de noter qu’à partir des snapshots, la construction de la base POD et l’application de l’algorithme DEIM sont génériques et peuvent être appliqués quelque soit la dimension du problème. Les algorithmes utilisés pour la résolution du ROM sont ensuite les mêmes que ceux pour le FOM, en particulier l’algorithme des statuts.

Les stratégies proposées pour l’HRH dans les sections III.1.3 et III.1.4, à savoir la reconstruction de la solution duale sur toute la zone de contact et la sélection des snapshots à l’aide d’un algorithme glouton, ont également été implémentées en Python. Pour la reconstruction, le problème (III.13) est résolu par moindres carrés sous contrainte positive. Pour cela on utilise dans Python l’opérateur NNLS qui se trouve dans la classe Optimize de la librairie SciPy. Pour l’algorithme glouton, ce dernier est écrit sans difficulté en Python. Seule l’interpolation est réalisée à l’aide de la procédure GridData se trouvant dans la classe Interpolate de la librairie SciPy.

Le fait d’écrire directement le problème EF discrétisé est une limite de l’implémentation en Python. Il devient rapidement difficile de l’écrire lorsque la dimension est supérieure à un et pour un maillage quelconque. Néanmoins, cette étape nous a permis de rapidement mettre en place une méthode de réduction d’ordre de modèles en l’appliquant à un cas test 1D tout en maîtrisant tous les aspects. L’idée est ensuite de la mettre en place dans un logiciel EF, qui est ici Cast3M, de manière à traiter des cas tests plus complexes sans se préoccuper de l’obtention du problème EF.

Par ailleurs, afin de comparer notre approche à la PBM, cette dernière a également été implémentée en Python. La NMF utilisée pour obtenir une BR positive dans le cadre de la PBM est réalisée à l’aide de la librairie Nimfa [Zitnik et Zupan, 2012]. La résolution du ROM obtenu par PBM se fait ensuite avec les mêmes algorithmes que ceux utilisés pour le FOM ainsi que le ROM obtenu par HRH.

III.2.2 Implémentation peu intrusive pour Cast3M

Cast3M [Cast3M] est un logiciel EF développé par le CEA. Le code source est écrit dans un langage appelé ESOP, proche du FORTRAN et de bas niveau. Une interface de programmation applicative (API) est proposée à l’utilisateur. Il s’agit d’un langage appelé GIBIANE qui consiste en des opérateurs variés permettant de construire, résoudre et post-traiter des problèmes de mécanique ou de thermique.

Nous proposons d’implémenter dans Cast3M l’hyper-réduction hybride pour la mécanique du contact traité par multiplicateurs de Lagrange. Nous nous intéressons dans cette section au cas élastique. Pour cela nous allons construire en amont et à l’aide des opérateurs GIBIANE le ROM à partir du FOM. Le ROM sera ensuite résolu avec l’opérateur RESO qui sert habituellement à résoudre le FOM. Lorsque RESO est appelé pour résoudre un problème de contact, il fait appel à l’opérateur UNILATER qui permet la résolution du contact à l’aide d’une méthode des statuts, voir algorithme II.3. Dans Cast3M, le contact est traité par un algorithme de type nœud-à-surface. Pour qu’il soit traité nœud-à-nœud, nous avons réalisé une procédure automatisée qui impose les conditions de contact pour le FOM comme pour

le ROM. Une des deux surfaces potentiellement en contact est balayée et une condition de contact est imposée entre chaque paire des points les plus proches. Pour que les résultats obtenus via cette stratégie soient corrects, il faut donc que les maillages potentiellement en contact soient conformes (nœuds face à face).

La figure III.3 permet de représenter les différentes étapes effectuées pour construire le ROM, nous les détaillons ici :

- les snapshots sont réalisés avec Cast3M en résolvant le FOM avec l'opérateur RESO. Ils sont ensuite sortis dans des fichiers avec l'opérateur SORT. Ce dernier a dû être modifié afin de sortir le maximum de chiffres significatifs sur les snapshots.
- la BR associée au déplacement construite par POD ainsi que les nœuds associés aux ddl obtenus avec l'algorithme DEIM pour la construction du RID sont obtenus avec Python comme indiqué dans la section précédente III.2.1. Cela pourrait être réalisé dans Cast3M en GIBIANE ou directement en ESOPE avec quelques modifications et ajouts. Il existe déjà un opérateur POD permettant de construire une BR mais il faut donner en entrée le nombre de vecteurs à retenir alors que nous préférons définir automatiquement ce nombre en fonction de l'approximation des snapshots faite par cette BR, cf. équation (II.10). L'algorithme DEIM devrait par contre être implémenté.
- la BR et les nœuds sont ensuite récupérés et convertis en objets GIBIANE à l'aide de l'opérateur MANU. Nous rajoutons à l'ensemble des NOEUDS ceux qui sont appairés à ces derniers sur la zone de contact de manière à en traiter un maximum. On choisit donc l'option 2 pour la définition du RID, voir section III.1.1. Les lignes suivantes sont l'implémentation Gibiane correspondant à l'extension de \mathcal{L} en rajoutant le deuxième terme de l'équation (III.3).

```
NOEUDTMP = NOEUDS ;
REPE bloc (NBNO NOEUDTMP) ; * boucle sur les nœuds associés à  $\mathcal{L}$ 
  PTMP = NOEUDTMP POIN &bloc ;
  SI (PTMP DANS (CHAN 'POI1' GC1)) ; * GC1 désigne  $\Gamma_1^C$ 
    NOEUDS = NOEUDS ET ((CHAN 'POI1' GC2) POIN 'PROCHE' PTMP) ;
  FINSI ;
  SI (PTMP DANS (CHAN 'POI1' GC2)) ; * GC1 désigne  $\Gamma_2^C$ 
    NOEUDS = NOEUDS ET ((CHAN 'POI1' GC1) POIN 'PROCHE' PTMP) ;
  FINSI ;
FIN bloc ;
```

C'est également ici que l'on rajoute dans NOEUDS une ou plusieurs régions d'intérêt. Le RID Ω_A , appelé MAILRID dans le code, est alors construit à partir de NOEUDS par la commande :

```
MAILRID = MAILINI ELEM 'APPUYE' 'LARGEMENT' NOEUDS ;
```

avec MAILINI le maillage initial. Parce que nous ne voulons pas définir Ω_B , nous reformulons Γ^I (II.53). Ce dernier s'écrit $\Gamma^I = \partial\Omega_A \setminus (\partial\Omega \cap \partial\Omega_A)$. Γ^I et les nœuds associés à \mathcal{A} sont respectivement définis à partir de Ω_A par les commandes :

```
INTERF = DIFF (CONT MAILRID) ((CONT MAILINI) INTE (CONT MAILRID)) ;
```

```
MAILR = DIFF (CHAN 'POI1' MAILRID) (CHAN 'POI1' INTERF) ;
```

Dans ces lignes, l'opérateur CONT est remplacé par l'opérateur ENVE en 3D.

On effectue les restrictions de la BR \underline{V} à MAILRID et MAILR pour obtenir respectivement $\underline{V}[\mathcal{A} \cup \mathcal{I},:]$ et $\underline{V}[\mathcal{A},:]$ qui sont notées VUR et VUZ :

```
VUR = REDU VU MAILRID ; VUZ = REDU VUR MAILR ;
```

En pratique, nous réduisons également la matrice de rigidité \underline{K} et le second membre \underline{F} au RID avant de les projeter pour éviter des calculs inutiles :

```
KR = REDU K MAILRID ; FZ = REDU F MAILR ;
```

Puis on calcule chacune des composantes de la projection de \underline{K} et de \underline{F} :

$$KRP_{ij} = YTMX \ VUR_j \ VUZ_i \ KR ; \quad FZP_i = XTY \ VUZ_i \ FZ ;$$

Comme voulu, les ddl de la variable primale associés au ROM ne dépendent plus du maillage du FOM. On introduit alors la notion de maillage imaginaire pour le support des ddl associés à la BR car ces derniers n'ont plus de sens physique. Les rigidité et second membre projetés sont définis avec l'opérateur MANU.

Si le FOM fait intervenir du contact, nous définissons la rigidité de contact sur le RID que l'on note BRID. Il n'est pas possible de l'obtenir avec REDU car son support dépend à la fois de la variable primale et de la variable duale. On projette ensuite BRID sur la BR primale :

$$BRP = BRID \ ' * ' \ VUR ;$$

Les opérateurs RELA et DEPIMP permettent enfin de définir la nouvelle relation de contact projetée BRP et définir le jeu initial associé.

Ces opérations ont été écrites dans une procédure Cast3M afin d'automatiser ces étapes.

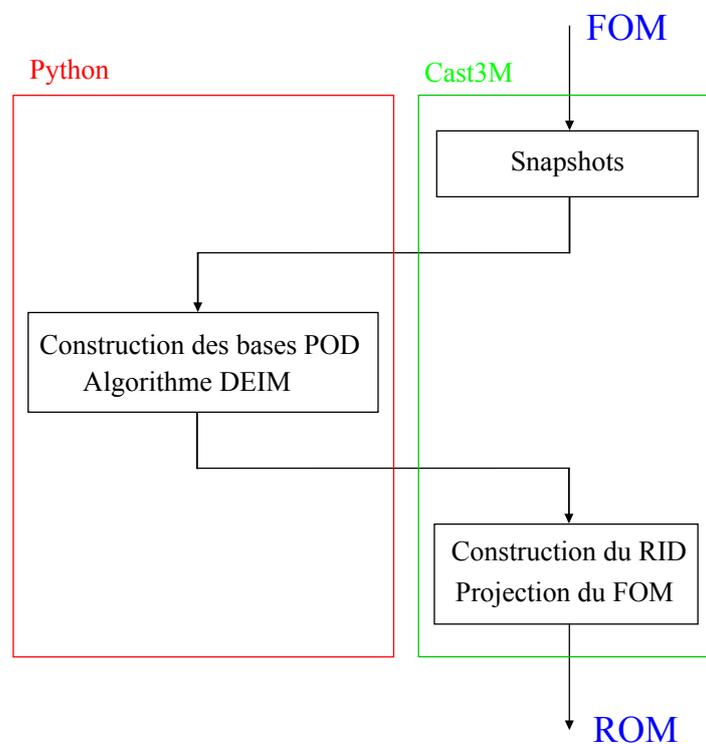


FIGURE III.3 – Représentation de la construction du ROM à l'aide de Cast3M

La reconstruction de la solution duale sur toute la zone de contact se fait avec Python. En effet, il n'existe pas de procédure dans Cast3M pour résoudre un problème par moindres carrés sous contrainte positive. De même, pour la sélection des snapshots avec un algorithme glouton, la structure du code repose sur ce qui a déjà été réalisé en Python.

Pour la PBM, la BR duale construite par NNMF est également produite dans le script Python avant d'être intégrée dans Cast3M pour projection.

L'implémentation de l'HRH est peu intrusive dans Cast3M car elle utilise des opérateurs GIBIANE existants. Elle pourrait facilement être implémentée dans d'autres logiciels EF à condition qu'ils possèdent une API suffisante pour faire les opérations présentées ici. Sinon elle pourrait également être développée dans le code source.

III.3 Application de la méthode d'hyper-réduction hybride à un cas test 1D de la bibliographie

Le cas test étudié dans cette section est tiré de l'article [Haasdonk *et al.*, 2012] et a été repris dans d'autres articles [Balajewicz *et al.*, 2016 ; Bader *et al.*, 2016]. Il s'agit d'une chaînette 1D élastique pendue par ses deux extrémités, subissant une gravité et qui va rencontrer un obstacle indéformable. Il n'y a pas de force de frottement au niveau du contact.

Ce cas test, qui a été implémenté dans le langage de programmation Python, a permis de valider assez rapidement des choix algorithmiques. Une grande partie des résultats présentés dans cette section a fait l'objet de la publication [Fauque *et al.*, 2018a] qui pourra être trouvée en annexe A.

Nous présentons en premier lieu le cas test étudié auquel nous appliquons ensuite l'HRH. Les résultats sont obtenus soit en prenant les snapshots sur une grille régulière, soit en les sélectionnant à l'aide d'un algorithme glouton. Dans les deux cas ils sont comparés à ceux obtenus avec une autre méthode de réduction de modèles, la PBM pour les choix justifiés en section II.3.2.a, dans des conditions similaires.

III.3.1 Cas test

Soit une chaînette 1D élasto-statique définie sur $\Omega = [0,1]$, pendue par ses deux bouts ($\Gamma^D = \{0,1\}$), qui subit une gravité définie par une fonction f et qui va rencontrer un obstacle indéformable défini par une fonction h . Son déplacement vertical, noté u , est décrit par l'équation de Poisson sous contrainte (III.17) avec ν l'élasticité et $\Gamma^C =]0,1[$ la zone de contact potentiel.

$$\begin{cases} -\nu \operatorname{div}(\operatorname{grad} u) = f, & \text{dans } \Omega, \\ u = 0, & \text{sur } \Gamma^D, \\ u \geq h, & \text{sur } \Gamma^C. \end{cases} \quad (\text{III.17})$$

La fonction f est choisie constante et vaut $f(x) = -1$. Aucune condition de Neumann n'est imposée, $\Gamma^N = \emptyset$.

Nous faisons varier le problème (III.17) à l'aide d'un couple de coefficients. Le premier paramètre μ_1 est le coefficient de Poisson de la moitié gauche de la chaînette, l'élasticité étant définie comme suit :

$$\nu(x, \mu_1) = \mu_1 1_{[0,0.5]}(x) + \nu_0 1_{]0.5,1]}(x) \quad \text{avec } \nu_0 = 0.15 \quad \text{et} \quad 1_{\Xi}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \Xi, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (\text{III.18})$$

Le deuxième paramètre μ_2 agit sur l'obstacle défini par la fonction h :

$$h(x, \mu_2) = -0.2(\sin(\pi x) - \sin(3\pi x)) - 0.5 + \mu_2(x - 0.5), \quad \forall x \in \Omega. \quad (\text{III.19})$$

L'espace de variation des paramètres est défini par $\mathcal{P} = \{(\mu_1, \mu_2) \in [0.05, 0.25] \times [-0.05, 0.5]\}$.

Nous traçons sur les figures III.4 et III.5 les solutions du problème (III.17) obtenues par la méthode des EF linéaires avec une discrétisation spatiale du domaine Ω en 100 nœuds équidistants et en faisant varier respectivement les paramètres μ_1 et μ_2 dans \mathcal{P} . Les solutions obtenues avec ce FOM seront prises pour références. Nous avons deux zones de contact actif qui correspondent aux deux sommets où l'obstacle est le plus haut.

Ce cas test a quelques particularités. La première est qu'il y a autant de ddl EF pour la variable duale que pour la variable primale. Le nombre de contacts potentiels est donc assez

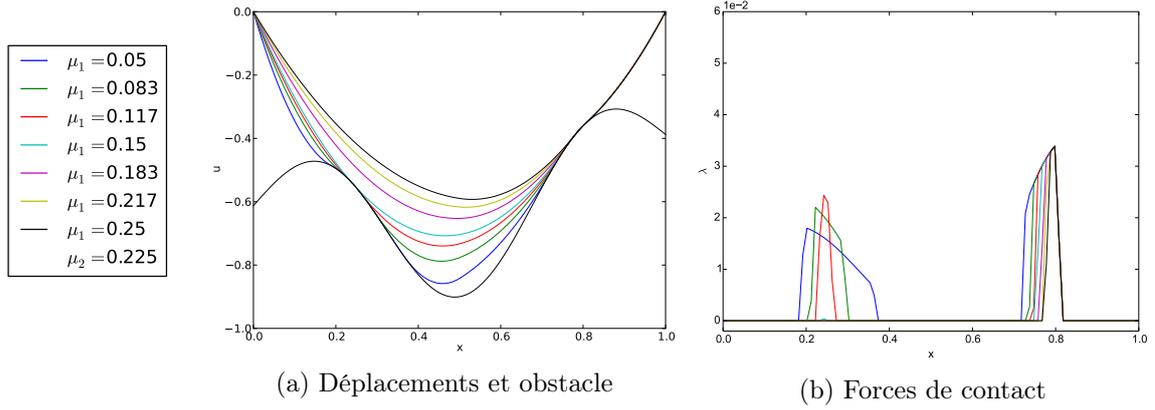


FIGURE III.4 – Cas test 1D élastique – Déplacements et forces de contact obtenus avec le FOM pour une élasticité variable ($\mu_1 \in [0.05, 0.25]$) et un obstacle fixe ($\mu_2 = 0.225$)

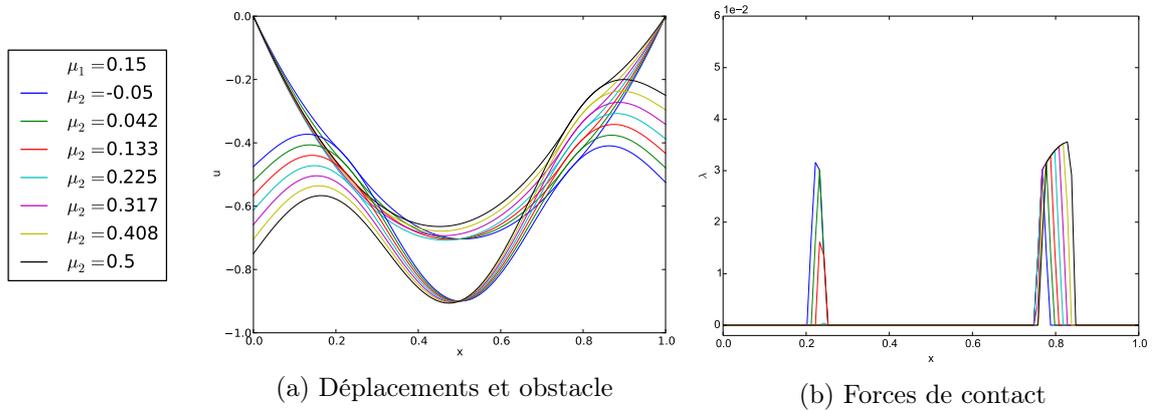


FIGURE III.5 – Cas test 1D élastique – Déplacements et forces de contact obtenus avec le FOM pour une élasticité fixe ($\mu_1 = 0.15$) et un obstacle variable ($\mu_2 \in [-0.05, 0.5]$)

important vis-à-vis de la taille du problème. Aussi, le nombre de ddl EF étant déjà très petit (problème 1D), cela rend difficile une réduction de l'ordre du modèle. Dans le cadre de l'HRH, cela rend également difficile la construction d'un domaine réduit.

III.3.2 Application de l'hyper-réduction hybride

III.3.2.a Construction de la base réduite primale et du domaine réduit

Afin d'illustrer la construction du modèle hyper-réduit hybride pour ce cas test 1D, les snapshots des variables primale et duale sont pris sur une grille régulière 10×12 , notée $\mathcal{S}_{\text{snap}}$, discrétisant l'espace paramétrique \mathcal{P} .

La BR primale est construite par POD. Nous traçons sur la figure III.6 quelques-uns des $l = 9$ modes POD qui forment la BR primale, sélectionnés pour un seuil POD $\epsilon_{\text{tol}} = 10^{-7}$, voir équation (II.19). Comme nous pouvons le remarquer sur cette figure, plus le numéro du mode est élevé, plus les gradients dans le mode sont importants.

Pour la construction du RID, l'algorithme DEIM est appliqué à la BR primale puis à une BR duale construite par POD dans le but d'inclure dans le RID la majeure partie des zones de contact actif les plus importantes. La base POD associée à la variable duale sert uniquement à la construction du RID et non à la projection des équations. Pour cet exemple, le seuil POD pour construire la BR duale est pris grand car tous les nœuds fournis par l'algorithme DEIM

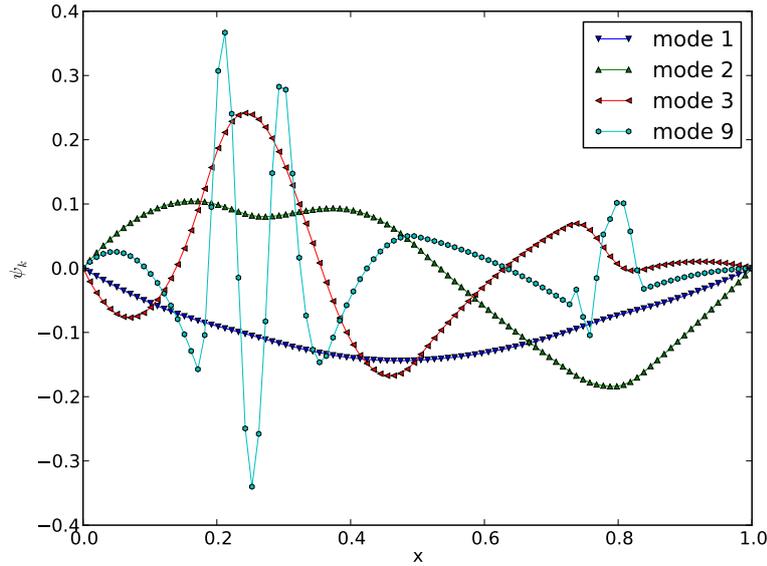


FIGURE III.6 – Cas test 1D élastique – Modes POD contenus dans la BR primale construite à partir de 10×12 snapshots pris sur une grille régulière

appliqué à la BR primale sont situés sur la zone de contact. Il vaut $\epsilon_{tol} = 10^{-1}$ et donne 1 mode POD.

Le RID est défini comme l'union des deux domaines fournis par les éléments reposant sur les ddl obtenus avec l'algorithme DEIM appliqué aux BR primale et duale. Le maillage initial comptant peu d'éléments, nous n'étendons pas le RID aux éléments voisins comme cela est fait souvent [Ryckelynck *et al.*, 2015]. Nous représentons sur la partie haute de la figure III.7 le RID obtenu et sur le bas un exemple d'obstacle ($\mu_2 = 0.17$). Nous pouvons remarquer que le RID, construit de manière automatique, se situe principalement là où l'obstacle est le plus haut et plus particulièrement où vont se trouver les zones de contact actif. Le RID compte 28 nœuds dans Ω_A dont 14 dans Γ_A^C (traits rouges) alors que le domaine initial EF compte 100 nœuds. Les 14 nœuds dans Γ^I (traits verts) permettent d'imposer les nouvelles conditions aux limites.

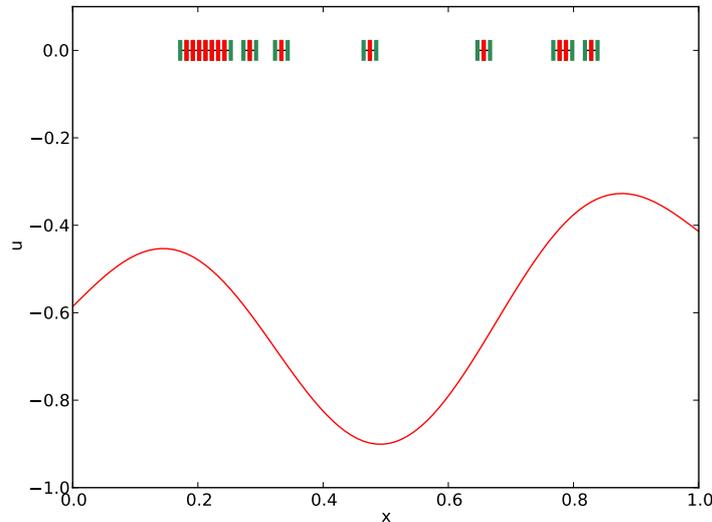


FIGURE III.7 – Cas test 1D élastique – En haut : RID construit à partir de 10×12 snapshots pris sur une grille régulière, les traits rouges représentent l'ensemble \mathcal{A} et les verts l'ensemble \mathcal{I} . En bas : exemple d'obstacle pour $\mu_2 = 0.17$.

Pour respecter la condition nécessaire étendue ($l \geq N_\lambda^C$), au moins 5 ddl associés à la variable primale devraient être traités classiquement par EF. Il faut également que $\underline{V}[\mathcal{A},:]$ n'ait pas plus de colonnes que de lignes ($l \leq \text{card}(\mathcal{A})$) pour rester une base. Dans cet exemple, il y a autant de ddl pour la variable duale que pour la variable primale. On a alors $\text{card}(\mathcal{A}) = N_\lambda^C$. Il faut donc rajouter 5 ddl EF. Pour ce cas test, de manière à en activer le bon nombre ($\text{card}(\mathcal{A}) - l$) et parce qu'ils se situent forcément sur la zone de contact, nous activons comme ddl EF ceux qui ne viennent pas de l'algorithme DEIM appliqué à la BR primale, au nombre de l .

III.3.2.b Résultats avec le modèle hyper-réduit hybride

Soit \mathcal{S} une grille fine de 100×120 points uniformément répartis dans l'espace paramétrique \mathcal{P} . Nous comparons, à chaque point de \mathcal{S} , les solutions obtenues avec les FOM et ROM pour un modèle HRH construit à partir des snapshots pris dans $\mathcal{S}_{\text{snap}} \not\subset \mathcal{S}$. Pour comparer les solutions, nous considérons les erreurs relatives primales et duales qui seront respectivement notées e_u et e_λ . Nous les appelons erreurs de référence.

Nous représentons sur la figure III.8 l'erreur relative en norme 2 sur l'ensemble des points de la grille \mathcal{S} , à la fois du déplacement et de la force de contact. Les erreurs relatives primale et duale en norme 2 seront notées $\|e_u\|_2$ et $\|e_\lambda\|_2$, et sont définies par :

$$\|e_u\|_2 = \frac{\|\underline{U}_{\text{EF}} - \underline{U}_{\text{HRH}}\|_2}{\|\underline{U}_{\text{EF}}\|_2}, \quad \|e_\lambda\|_2 = \frac{\|\underline{\Delta}_{\text{EF}} - \underline{\Delta}_{\text{HRH}}\|_2}{\|\underline{\Delta}_{\text{EF}}\|_2}$$

avec $(\underline{U}_{\text{EF}}, \underline{\Delta}_{\text{EF}})$ la solution EF obtenue en résolvant le problème (II.75) et $(\underline{U}_{\text{HRH}}, \underline{\Delta}_{\text{HRH}})$ la solution HRH obtenue en résolvant le problème (III.8). L'erreur primale est calculée sur Ω tandis que l'erreur duale est calculée soit sur Γ_A^C , soit sur Γ^C après reconstruction de la solution duale.

Les valeurs moyenne et maximum des erreurs de références de la solution primale, calculées sur Ω , dans \mathcal{S} valent respectivement 0.34 % et 1.13 % (cf. figure III.8a). Les valeurs moyenne et maximum des erreurs de références de la solution duale, calculées sur Γ_A^C , dans \mathcal{S} valent respectivement 24 % et 148 % (cf. figure III.8b). Comme on peut le voir sur la figure III.8b, l'erreur duale maximum est très localisée. Il s'agit certainement d'une erreur due à un faible contact et donc de petits multiplicateurs de Lagrange au dénominateur de l'erreur relative. Ces résultats montrent bien qu'il est plus difficile d'approximer la solution duale que la primale. Les résultats obtenus avec l'HRH sont globalement bons excepté dans une partie de l'espace paramétrique. Cela est dû à la sélection des snapshots sur une grille régulière $\mathcal{S}_{\text{snap}}$ qui ne permet pas de capter la forme des solutions partout. On remarquera que l'HRH est assez stable puisque la résolution du ROM converge sur l'ensemble des 100×120 points que comptent \mathcal{S} .

En utilisant la stratégie *a posteriori* de reconstruction de la solution duale introduite section III.1.3, les valeurs moyenne et maximum des erreurs de références de la solution duale, calculées sur Γ^C , dans \mathcal{S} valent respectivement 39 % et 127 % (voir figure III.8c). L'erreur relative moyenne sur Γ^C est légèrement plus grande qu'avant reconstruction mais reste correcte. La stratégie de reconstruction proposée donne de très bons résultats, à condition bien sûr que la solution duale avant reconstruction soit déjà bonne.

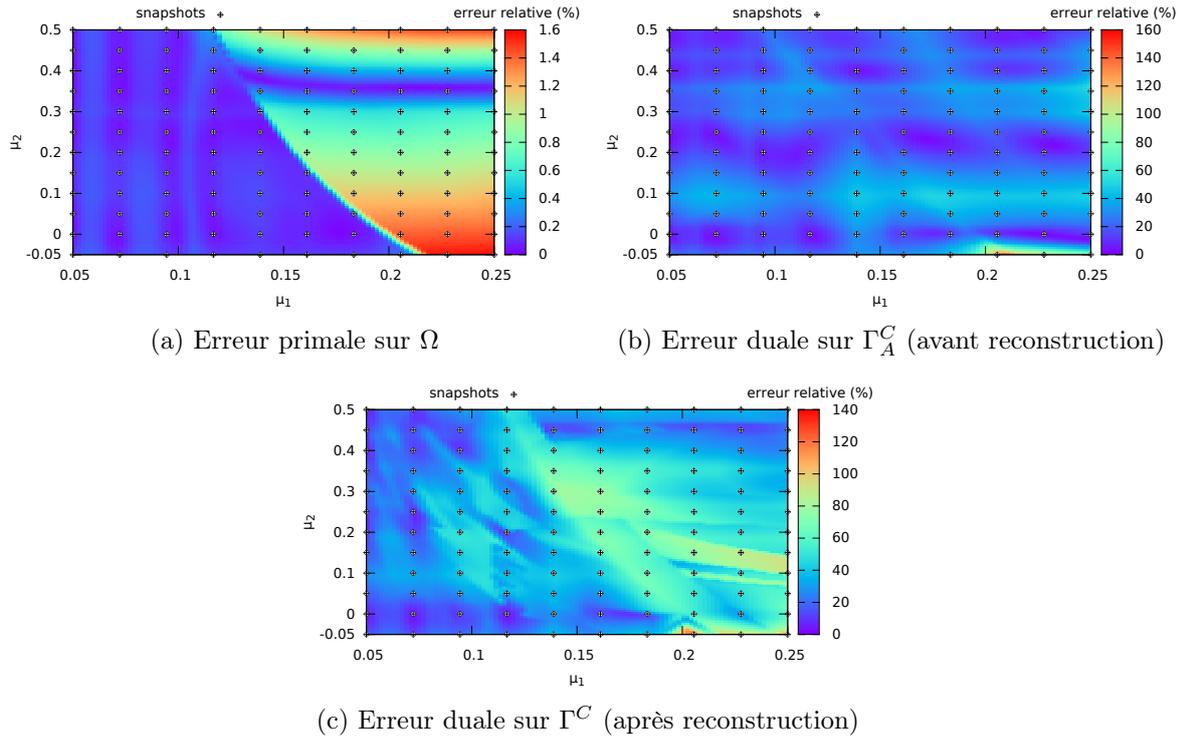


FIGURE III.8 – Cas test 1D élastique – Erreurs de références en norme 2 aux 100×120 points de \mathcal{S} pour un ROM construit avec l'HRH à partir des 10×12 snapshots pris dans $\mathcal{S}_{\text{snap}}$. Les snapshots sont représentés dans \mathcal{P} par le symbole “ \diamond ”.

III.3.3 Comparaison avec la PBM

III.3.3.a Grille régulière

Nous commençons par comparer le modèle HRH introduit dans la section III.3.2 précédente avec la PBM pour deux couples de BR différents. Pour l'HRH comme pour la PBM, la BR primale est construite par POD. Pour l'HRH, la BR primale est constituée 9 modes POD sélectionnés pour un seuil valant $\epsilon_{tol} = 10^{-7}$. Afin de respecter la condition LBB, 5 vecteurs sont rajoutés à la BR primale utilisée pour la construction du modèle HRH, on a alors $l = 14$. Le premier des modèles construit avec la PBM a une BR primale contenant les mêmes $l_u = 9$ modes POD inclus dans celle utilisée par le modèle HRH. Puisque des vecteurs sont rajoutés dans la BR primale hybride pour l'HRH, la BR primale du deuxième modèle est construite par POD de manière à en avoir autant, soit $l_u = 14$ obtenu en imposant $\epsilon_{tol} = 6 \times 10^{-9}$. La BR duale pour les modèles obtenus par PBM est construite par NNMF et possède autant de vecteurs que la BR primale ($l_\lambda = l_u$) tandis qu'il s'agit de la base duale du FOM restreinte au RID dans l'HRH.

Nous traçons sur les figures III.9 et III.10 les solutions obtenues avec l'HRH et les PBM, à comparer avec la solution de référence obtenue avec le FOM, pour un point $(\mu_1, \mu_2) = (0.07, 0.17)$ dans \mathcal{P} n'appartenant pas à ceux utilisés pour le calcul des snapshots $\mathcal{S}_{\text{snap}}$. Les détails des calculs sont rassemblés dans le tableau III.1. Comme nous pouvons le voir sur les figures III.9a et III.10a, la solution primale est très bien approximée. Nous pouvons tout de même remarquer sur la figure III.10a une légère interpénétration, autour de $x = 0.3$, de la part de la PBM pour le cas $l_u = 9$. Les erreurs de références sur la variable primale (voir tableau III.1) sont toutes très petites et les écarts entre elles sont assez cohérents. En effet, c'est le modèle avec le plus petit nombre de vecteurs dans la BR primale qui commet la plus grande erreur (PBM avec $l_u = 9$) et pour un même nombre de vecteurs dans la BR, c'est celui où tous

les vecteurs ont été obtenus par POD qui commet la plus petite erreur (PBM avec $l_u = 14$). Concernant les solutions duales obtenues avec la PBM et représentées figure III.10b, elles sont non-nulles à des endroits similaires mais les amplitudes sont significativement différentes comparées à la solution duale obtenue avec le FOM comme nous pouvons le voir sur les erreurs commises dans le tableau III.1. En comparaison, la solution duale obtenue avec le modèle HRH sans reconstruction des multiplicateurs de Lagrange, représentée figure III.9b, est meilleure. Cela provient du fait de la non-projection sur une BR duale. En particulier l'erreur duale commise par le modèle HRH vaut 13 % contre 23 % pour le modèle obtenu par PBM pour le même nombre d'inconnues (cf. tableau III.1). L'accélération du temps de calcul CPU est assez proche dans chacun des cas lorsque, pour l'HRH, le temps consacré à la reconstruction de la solution duale sur toute la zone de contact à l'aide du post-traitement proposé en section III.1.4 n'est pas pris en compte. Cette accélération est fortement corrélée au nombre d'itérations de la méthode des statuts pour le traitement du contact. Cela permet par exemple d'expliquer pourquoi l'accélération en temps de calcul est plus importante pour le cas PBM avec $l_u = 14$ que celui avec $l_u = 9$. Le temps consacré à la reconstruction des multiplicateurs de Lagrange pour la méthode HRH est assez important mais permet d'obtenir de très bons résultats sur l'erreur duale.

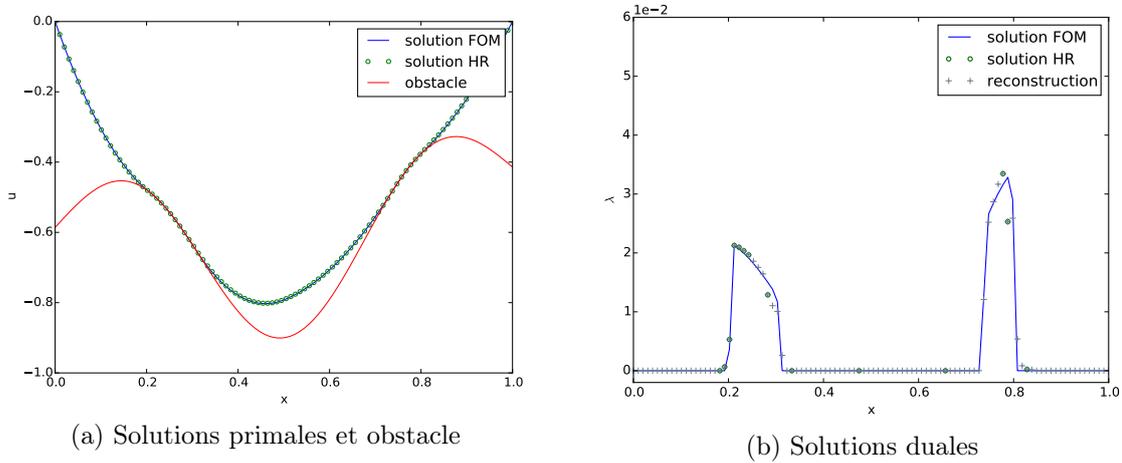


FIGURE III.9 – Cas test 1D élastique – Solution HRH pour des snapshots pris sur une grille régulière, à comparer avec la solution EF, au point $(\mu_1, \mu_2) = (0.07, 0.17)$ dans \mathcal{P}

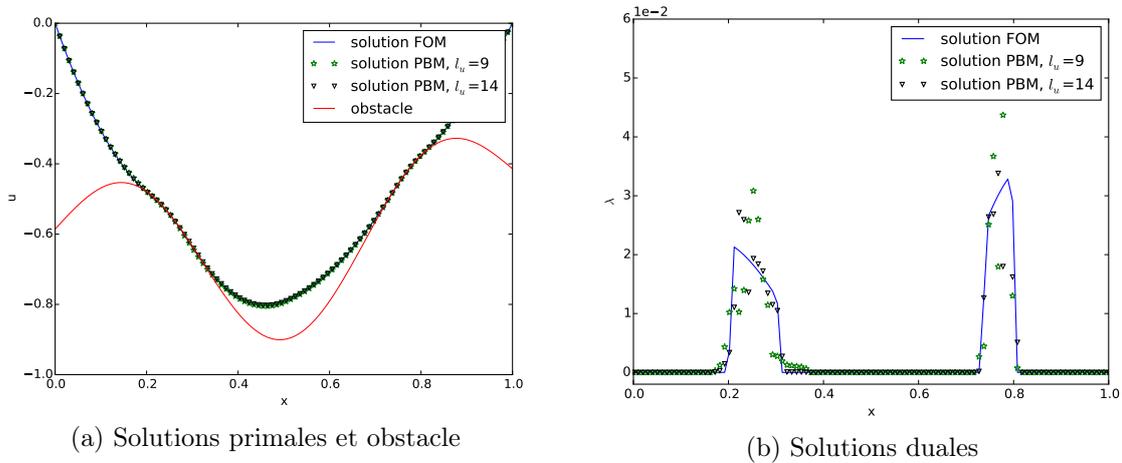


FIGURE III.10 – Cas test 1D élastique – Deux solutions obtenues par PBM avec $l_u = 9$ et $l_u = 14$ pour des snapshots pris sur une grille régulière, à comparer avec la solution EF, au point $(\mu_1, \mu_2) = (0.07, 0.17)$ dans \mathcal{P}

Bien que ce cas test soit difficile à réduire, l'HRH a été appliquée à ce dernier avec succès.

	HRH ($l = 9 + 5$)	PBM ($l_u = 9$)	PBM ($l_u = 14$)
Nombre total d'inconnues	28	18	28
Accélération du temps CPU	8.5/5.9	8.4	9.1
Itérations de contact	4	6	5
$\ e_u\ _2$ (%)	0.15	0.32	0.04
$\ e_\lambda\ _2$ (%)	13/12	44	23

TABLEAU III.1 – Cas test 1D élastique – Comparaison des méthodes HRH et PBM pour le point $(\mu_1, \mu_2) = (0.07, 0.17)$, pour des snapshots pris sur une grille régulière. Dans la colonne HRH sont précisés les résultats sans/avec la reconstruction des multiplicateurs de Lagrange.

Comme nous avons pu le voir, l'HRH permet d'obtenir de très bons résultats en terme d'erreur ainsi qu'en temps de calcul. Une comparaison avec une autre méthode de réduction d'ordre de modèles a en particulier permis de montrer que l'HRH permet d'obtenir une très bonne approximation de la variable duale.

III.3.3.b Algorithme glouton

Afin de comparer au mieux les approches HRH et PBM pour des snapshots sélectionnés à l'aide d'un algorithme glouton, nous allons comparer les résultats obtenus avec les deux méthodes pour des snapshots pris d'une part avec l'indicateur d'erreur η introduit section II.1.3.b dédié à l'HRH proposée dans ce document et d'autre part l'indicateur d'erreur I introduit section II.3.2.b dédié à la PBM.

Le seuil POD primal est fixé à $\epsilon_{tol} = 10^{-10}$ pour les deux méthodes. Pour la méthode HRH, le seuil POD dual pour la construction du RID est fixé à 5×10^{-2} tandis que pour la PBM, le nombre de vecteurs contenus dans la BR duale est le même que celui de la BR primale. Les seuils POD sont plus petits que dans le cas de la grille régulière de manière à obtenir un bon RID dès le début de l'algorithme glouton. Durant l'algorithme, le RID peut seulement être élargi de manière à obtenir un RID conséquent capable de tenir compte des variations des différentes variables. Le RID utilisé pour la construction du modèle HRH est ainsi l'union du RID à l'itération précédente et celui construit à l'itération en cours. L'algorithme glouton est arrêté au bout de la 50-ème itération.

Sur la figure III.11 est tracé l'évolution de l'erreur relative pour les deux méthodes en utilisant les snapshots obtenus grâce à l'indicateur d'erreur η appliqué à la méthode HRH. Dans ce cas, la norme H^1 est utilisé pour l'indicateur primal η_u et la norme $(H^1)'$ pour l'indicateur dual η_λ , voir équation (III.16). L'erreur de référence HRH, correspondant à l'erreur entre le ROM et le FOM, est l'erreur relative calculée sur Ω pour la solution primale et sur Γ_A^C pour la duale. L'erreur duale après reconstruction est calculée sur Γ^C . Les composantes primale et duale de l'indicateur d'erreur surestiment l'erreur de référence car le modèle HRH converge plus rapidement vers le FOM que l'approximation EF pour des conditions aux limites interpolées. En d'autres termes, l'erreur d'interpolation converge plus lentement que l'erreur HRH. La convergence du modèle HRH dépend directement du seuil POD de la BR primale qui est plutôt faible ici. En norme H^1 , l'erreur primale du modèle HRH est clairement inférieure à celle du modèle PBM comme nous pouvons le voir sur la figure III.11a tandis qu'elle est légèrement inférieure en norme 2, voir figure III.11c. Cela signifie que le modèle HRH approxime

mieux le gradient de déplacement, donc la déformation, que le modèle PBM. En accord avec le tableau III.1, le fait que l'erreur en norme 2 commise par le modèle HRH soit légèrement plus faible peut être attribué à un nombre plus grand de vecteurs dans la BR primale, $l \geq l_u$. L'erreur en norme duale $(H^1)'$ commise par le modèle HRH est équivalente à celle commise par le modèle PBM, pour un petit nombre d'itérations, comme nous pouvons le voir sur la figure III.11b. Parce que la norme $(H^1)'$ est difficile à appréhender, nous avons également tracé sur la figure III.11d l'erreur duale en norme 2. Avec cette norme, l'erreur duale HRH est clairement meilleure que celle commise avec la PBM même après reconstruction sur Γ^C . Nous retrouvons ainsi les premières conclusions qui émanaient des résultats sur une grille régulière et rassemblées dans le tableau III.1.

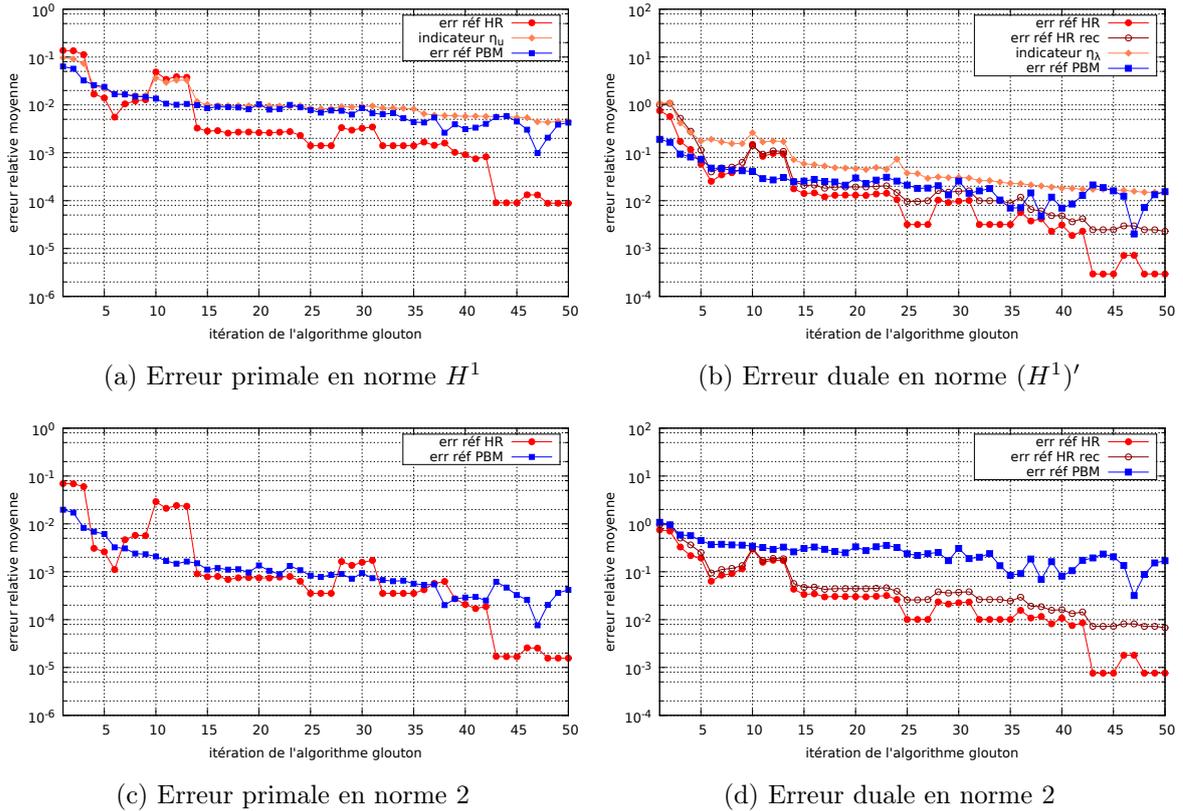


FIGURE III.11 – Cas test 1D élastique – Décroissance des erreurs relatives moyennes au cours de la sélection des snapshots avec l'algorithme glouton basé sur l'indicateur d'erreur η appliqué à l'HRH

Nous traçons sur la figure III.12 l'évolution de l'erreur relative moyenne des deux modèles construits à partir des snapshots obtenus avec l'indicateur d'erreur $I(\mu)$ appliqué à la PBM. Nous ne traçons que l'erreur en norme 2 car l'indicateur d'erreur $I(\mu)$ s'exprime avec cette dernière. L'erreur relative moyenne du modèle HRH décroît plus rapidement que lorsque les snapshots sont sélectionnés avec l'indicateur d'erreur η (cf. figure III.11) mais est plus instable. Une fois de plus, l'erreur commise par le modèle HRH est plus faible que celle de la PBM, surtout l'erreur duale. Notons toutefois la très bonne approximation de l'erreur de référence primale de la PBM par l'indicateur d'erreur $I(\mu)$, comme cela a déjà été montré dans [Balajewicz *et al.*, 2016].

À la fin de l'algorithme glouton sont tracées sur la figure III.13 les erreurs relatives de référence en norme 2, obtenues à l'aide du modèle HRH construit avec l'indicateur d'erreur η associé, sur une grille régulière fine \mathcal{S} de 100×120 points. Le tableau III.2 rassemble les différentes valeurs moyenne et maximum des erreurs relatives en norme 2. Nous pouvons remarquer que l'erreur est bien plus lisse que lorsque les snapshots ont été sélectionnés sur une

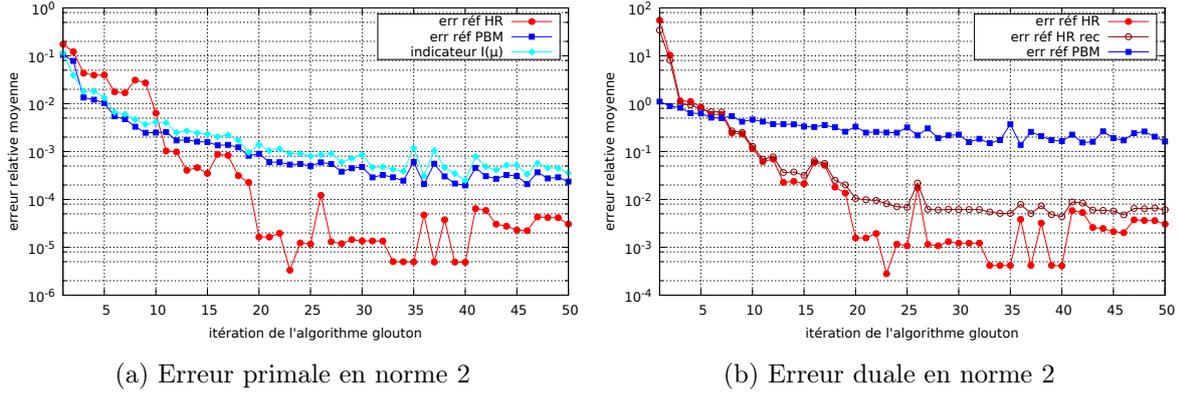


FIGURE III.12 – Cas test 1D élastique – Décroissance des erreurs relatives moyennes au cours de la sélection des snapshots avec l’algorithme glouton basé sur l’indicateur d’erreur I appliqué à la PBM

grille régulière (voir figure III.8). Cela montre l’efficacité de l’indicateur d’erreur η , proposé en section II.1.3.b pour être couplé avec un algorithme glouton, pour la sélection des snapshots. L’erreur maximale est localisée, pour la variable primale (cf. figure III.13a) comme pour la variable duale (cf. figure III.13b), où μ_1 est petit et donc la zone de contact actif est plus importante mais les valeurs restent faibles. Après reconstruction de la solution duale sur l’ensemble de la zone de contact potentiel, l’erreur reste plus forte aux endroits où l’erreur était la plus grande, soit lorsque μ_1 est petit, mais reste globalement petite. Nous pouvons tout de même remarquer que l’erreur est assez faible là où ont été faits les snapshots, ce qui est cohérent puisque la reconstruction utilise la connaissance des snapshots de la solution duale.

	Erreur moyenne	Erreur maximum
$\ e_u\ _2$ sur Ω (%)	0.004	0.077
$\ e_\lambda\ _2$ sur Γ_A^C (%)	0.34	10
$\ e_\lambda\ _2$ sur Γ^C (%)	1.3	18

TABLEAU III.2 – Cas test 1D élastique – Valeurs moyenne et maximum des erreurs de références en norme 2 du modèle HRH, construit à partir de snapshots sélectionnés à l’aide d’un algorithme glouton basé sur l’indicateur d’erreur η associé, sur une grille régulière fine \mathcal{S}

Ce cas test, implémenté en Python, a permis de tester rapidement l’HRH ainsi que l’indicateur d’erreur et le post-traitement pour la reconstruction des multiplicateurs de Lagrange. Il en ressort que l’HRH permet d’obtenir de très bonnes approximations, notamment de la solution duale, et cela a été confirmé par sa comparaison avec la PBM. L’indicateur d’erreur a été mis en place avec un algorithme glouton dans le but de sélectionner les snapshots de manière automatique. Ces snapshots permettent de faire décroître l’erreur de manière très rapide et d’accéder à des niveaux d’erreur très bas. Enfin, le post-traitement proposé pour la reconstruction des multiplicateurs de Lagrange permet d’obtenir de très bons résultats.

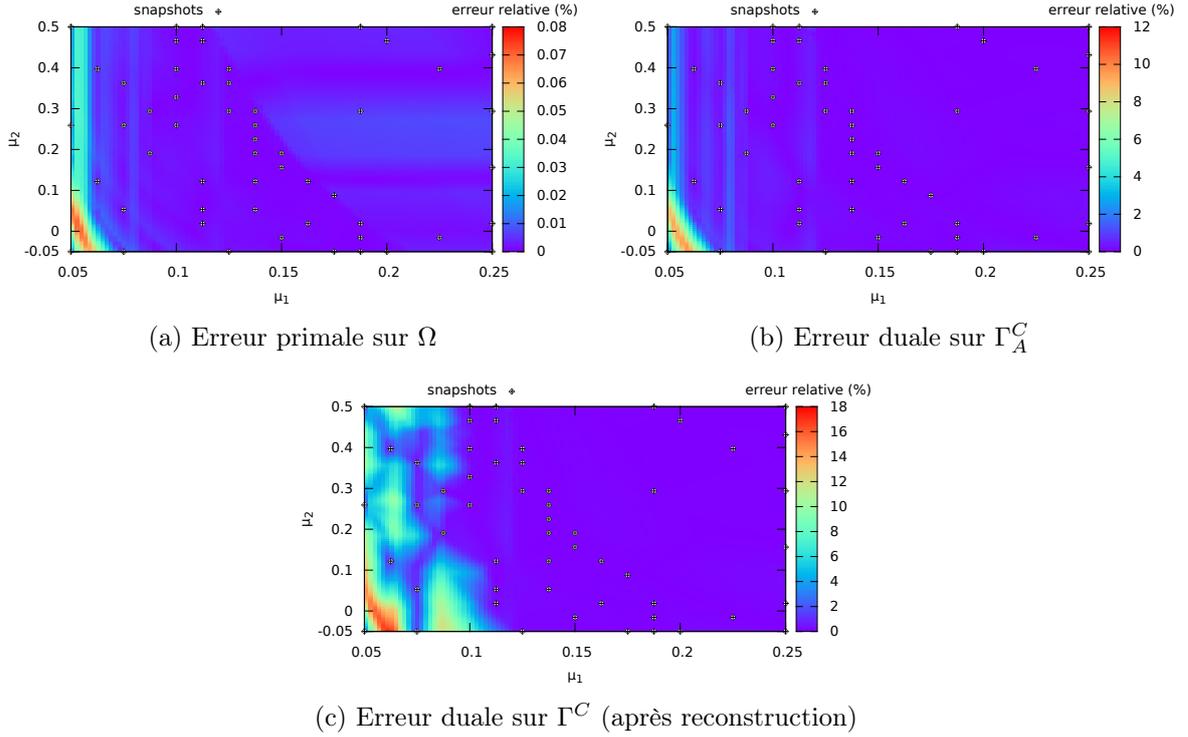


FIGURE III.13 – Cas test 1D élastique – Erreurs relatives entre le ROM construit avec l'HRH, à partir de l'algorithme glouton couplé à l'indicateur d'erreur η , et le FOM. Les snapshots sont représentés dans \mathcal{P} par le symbole “ \boxplus ”.

III.4 Application de l'hyper-réduction hybride à un cas test 2D avec Cast3M

III.4.1 Cas test

Nous nous intéressons ici à un cas test 2D axisymétrique introduit dans [Liu *et al.*, 2017] et visant à représenter de manière simplifiée le contact entre le combustible nucléaire et la gaine dans le contexte des REP, voir la modélisation 2D r_z figure I.8. Nous représentons figure III.14 le cas test ainsi que les conditions aux limites. Les deux solides suivent une loi de comportement élastique isotrope avec un module de Young et un coefficient de Poisson valant $E = 190$ GPa et $\nu = 0.3$ pour le combustible, $E = 78$ GPa et $\nu = 0.34$ pour la gaine. Le jeu initial vaut $2 \mu\text{m}$.

Nous faisons varier deux paramètres, la pression P_1 et la hauteur h_1 sur laquelle est appliquée cette pression. L'objectif est de fournir un ROM sur l'espace paramétrique 2D \mathcal{P} défini par $P_1 \in [160, 240]$ MPa, $h_1 \in [0.5, 0.7]$ mm. Pour une telle pression P_1 , le contact est toujours actif sur la partie basse du combustible et varie légèrement en hauteur selon h_1 . Le contact est numériquement traité par un algorithme nœud-à-nœud et le maillage est adapté pour que les nœuds situés sur la zone de contact soient en face. De plus, le cas test présente un faible déplacement selon u_z , permettant une bonne modélisation du contact par l'algorithme nœud-à-nœud.

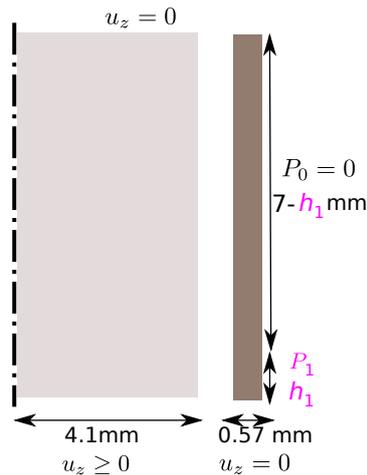


FIGURE III.14 – Cas test 2D axisymétrique de mécanique du contact entre deux solides élastiques

III.4.2 Construction du modèle hyper-réduit

Nous détaillons ici la construction de la BR primale ainsi que du RID à partir de 5×5 snapshots pris régulièrement dans l'espace paramétrique \mathcal{P} et que l'on note $\mathcal{S}_{\text{snap}}$. Un snapshot pris pour une faible pression, où tous les contacts sont inactifs, est rajouté aux 25 précédents afin de construire une BR primale pour laquelle il est possible de ne pas avoir de contact actif. Cela permet d'augmenter le rang de la matrice $\underline{\underline{B}}[\mathcal{A}_\lambda, \mathcal{A}_c] \underline{\underline{V}}[\mathcal{A}_c, :]$ avant d'avoir rajouté des ddl EF dans la BR primale $\underline{\underline{V}}$.

III.4.2.a Construction de la base réduite

Après avoir appliqué la SVD – comme introduite section II.1.3.c – à la matrice des snapshots primale, on trace figure III.15 la décroissance de l'erreur relative en norme de Frobenius au carré entre la matrice des snapshots et son approximation, en fonction du rang de l'approximation. La matrice de snapshots est de rang 8 (avec un seuil SVD valant 10^{-14}), ce

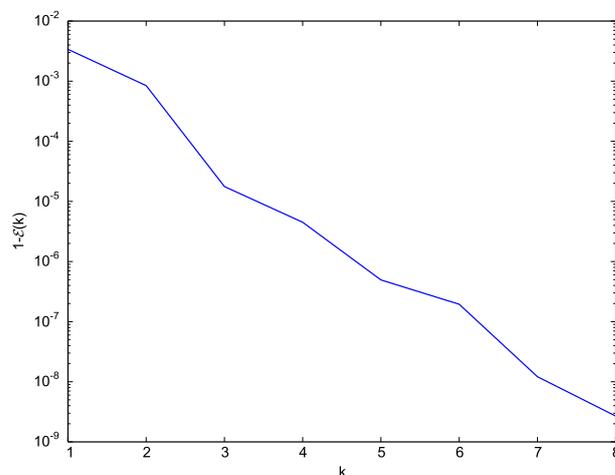


FIGURE III.15 – Cas test 2D élastique – Décroissance de l'erreur relative en norme de Frobenius au carré entre la matrice des snapshots et son approximation en fonction du rang de l'approximation

qui montre la redondance de l'information contenue par les 26 snapshots. Avec un seuil POD valant $\epsilon_{\text{tol}} = 10^{-8}$, 8 vecteurs sont sélectionnés dans la BR primale et ces derniers permettent de représenter exactement les snapshots. Une partie des vecteurs de la BR est représentée sur la figure III.16. On peut remarquer que plus le numéro du mode est grand, plus il est localisé et plus forts sont les gradients. Aussi, le dernier mode représenté (cf. figure III.16d) est localisé sur la zone de changement de statut de contact. De manière plus générale, une discontinuité apparaît clairement au niveau du jeu entre pastille et gaine bien que le jeu ne soit lui pas visible.

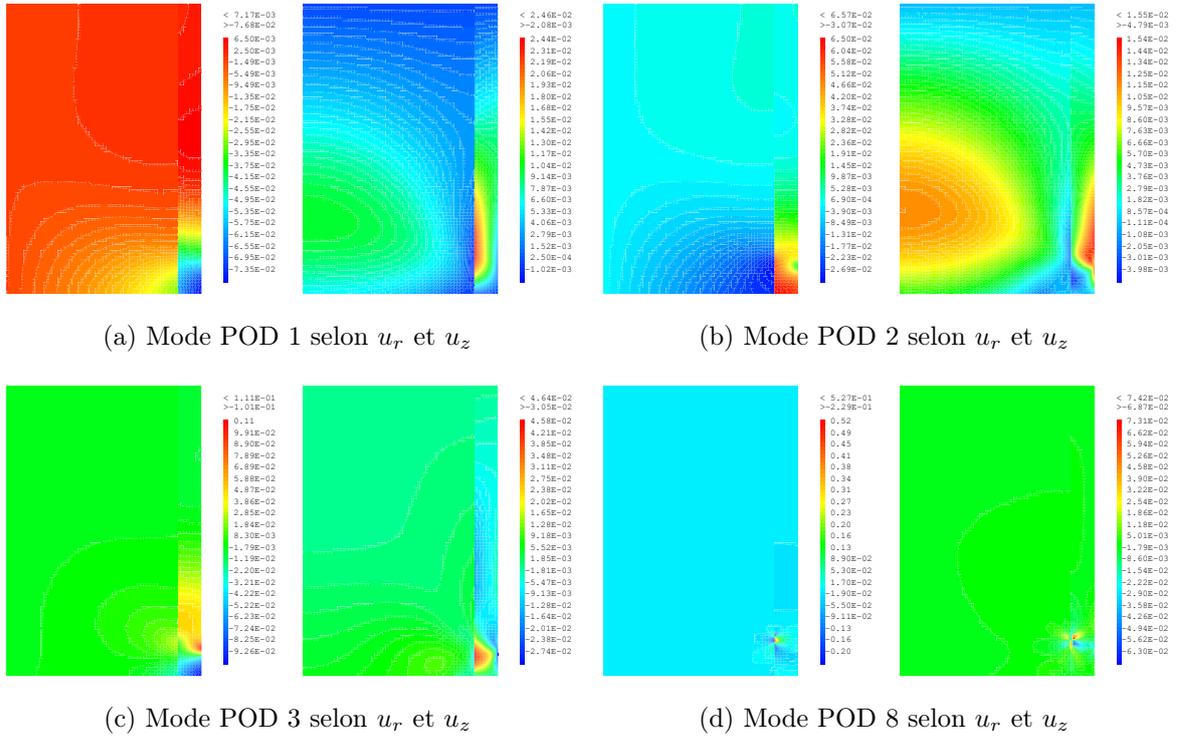


FIGURE III.16 – Cas test 2D élastique – Modes POD associés au déplacement représentés selon u_r et u_z

Remarque : une seule base POD a été construite pour les deux solides. À l'avenir, il serait intéressant d'explorer la possibilité de construire une base POD pour chacun des solides. Cela ne modifierait pas la forme des équations de l'hyper-réduction hybride, mais seulement les données d'entrée du modèle d'ordre réduit.

III.4.2.b Construction du domaine réduit

Pour la construction du domaine réduit, l'algorithme DEIM est appliqué à la base POD primale et également à la base POD duale, spécialement construite pour l'occasion avec un seuil $\epsilon_{\text{tol}} = 10^{-8}$, afin de bien tenir compte des conditions de contact. Dans cet exemple, le RID n'est pas construit en exploitant des modes POD associés au tenseur des contraintes comme cela peut être fait habituellement dans la littérature [Ryckelynck *et al.*, 2015].

On trace figure III.17 le maillage initial comptant 6800 éléments et 101 contacts potentiels et le maillage réduit qui ne compte plus que 30 éléments et 11 contacts potentiels. Le combustible est maillé en noir et la gaine en bleue. Le domaine réduit, construit de manière automatisé, se situe sur la paroi extérieure de la gaine sur une partie de la zone où la pression P_1 est appliquée ainsi que sur une partie de la zone de contact actif. Le RID est très petit comparé au maillage initial mais se concentre sur les zones les plus importantes.

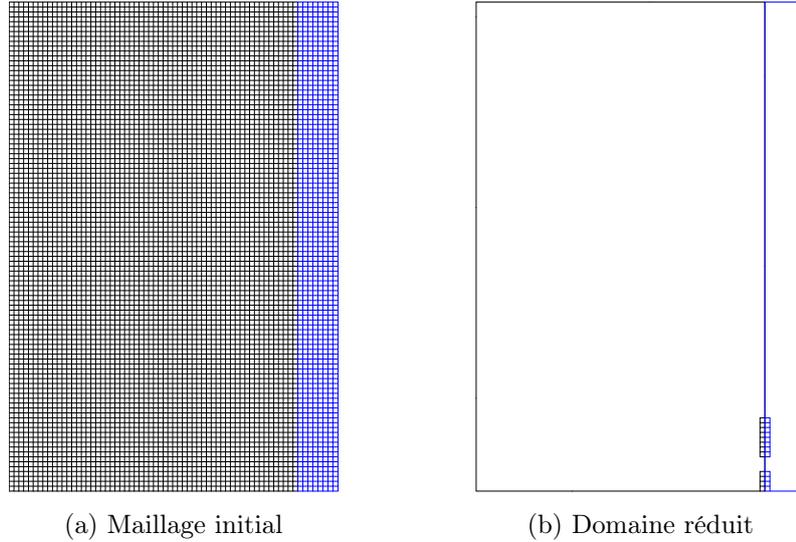


FIGURE III.17 – Cas test 2D élastique – Maillage initial et domaine réduit

III.4.3 Résultats de l'hyper-réduction dans et en dehors de l'espace paramétrique

Le modèle HRH est basé sur la BR primale construite section III.4.2.a et le RID construit section III.4.2.b. Ici une base primale hybride, cf. équation (III.12), est *a priori* choisie en ajoutant des ddls EF primaux sur toute la zone de contact du RID pour nous assurer que le problème de point-selle associé au ROM soit bien posé et que le contact soit alors bien traité. En pratique, les ddl EF sont rajoutés seulement d'un côté puisque le contact est traité nœud-à-nœud, et seulement sur la composante u_r . Une étude sur l'influence des ddl EF nécessaires pour respecter la condition LBB, voir section III.1.2, est faite plus tard en section III.4.4.

Nous allons ici comparer les solutions EF et HRH pour le point dans l'espace paramétrique défini par $P_1 = 190$ MPa et $h_1 = 0.62$ mm qui n'a pas été pris dans les snapshots. On trace sur la figure III.18 les solutions EF et HRH en déplacement. Une très bonne approximation est réalisée par l'HRH. L'erreur primale de référence calculée sur tout le domaine Ω et en norme 2 vaut 0.032 %. On trace ensuite sur la figure III.19 les déformées EF et HRH avec un jeu amplifié par un facteur 50 pour bien voir la zone en contact. Sur cette même figure sont représentées les forces de contact, sans puis avec reconstruction des multiplicateurs de Lagrange, qui sont également très similaires bien que toute la zone de contact actif ne soit pas dans le RID. L'erreur duale de référence calculée en norme 2 sur Γ_A^C (zone de contact incluse dans le RID) vaut 0.21 %. Après reconstruction des multiplicateurs de Lagrange sur l'ensemble de la zone de contact Γ^C avec le post-traitement proposé en section III.1.3, l'erreur duale en norme 2 vaut 0.27 %.

Le rapport entre le temps CPU du modèle HRH et celui EF pour ce calcul est de 4.1 en incluant l'ensemble des projections, c'est-à-dire la construction du modèle HRH à partir de celui EF. Il est de 50 en comparant seulement les temps de résolution. Il faut noter qu'une marge de progression existe pour diminuer le temps de la projection en optimisant la programmation de l'HRH. On peut également relativiser ce temps dans le cas où un grand nombre de calculs doit être fait et que certains objets peuvent être projetés une seule fois pour tous les calculs. Pour ce cas test, il serait par exemple possible de projeter une seule fois la rigidité ($\underline{V}[\mathcal{A},:]^T \underline{K}[\mathcal{A}, \mathcal{A} \cup \mathcal{I}] \underline{V}[\mathcal{A} \cup \mathcal{I},:]$) et la rigidité de contact ($\underline{B}[\mathcal{A}_\lambda, \mathcal{A}_c] \underline{V}[\mathcal{A}_c, :]$), cf. problème (III.8). Seule la force extérieure doit être projetée pour chaque point dans l'espace paramétrique puisqu'elle dépend à la fois de la valeur de P_1 et de la hauteur h_1 où elle est appliquée.

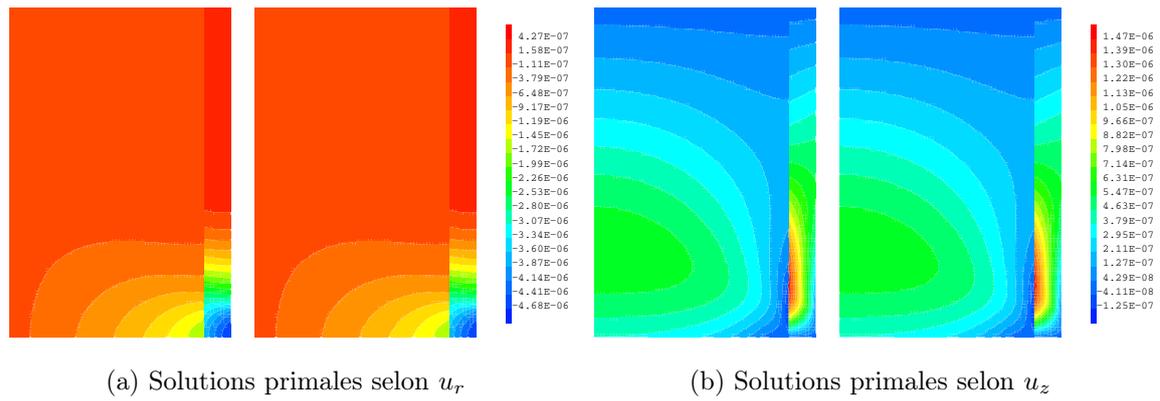


FIGURE III.18 – Cas test 2D élastique – Comparaison des solutions primales EF et HRH selon u_r et u_z avec les mêmes échelles

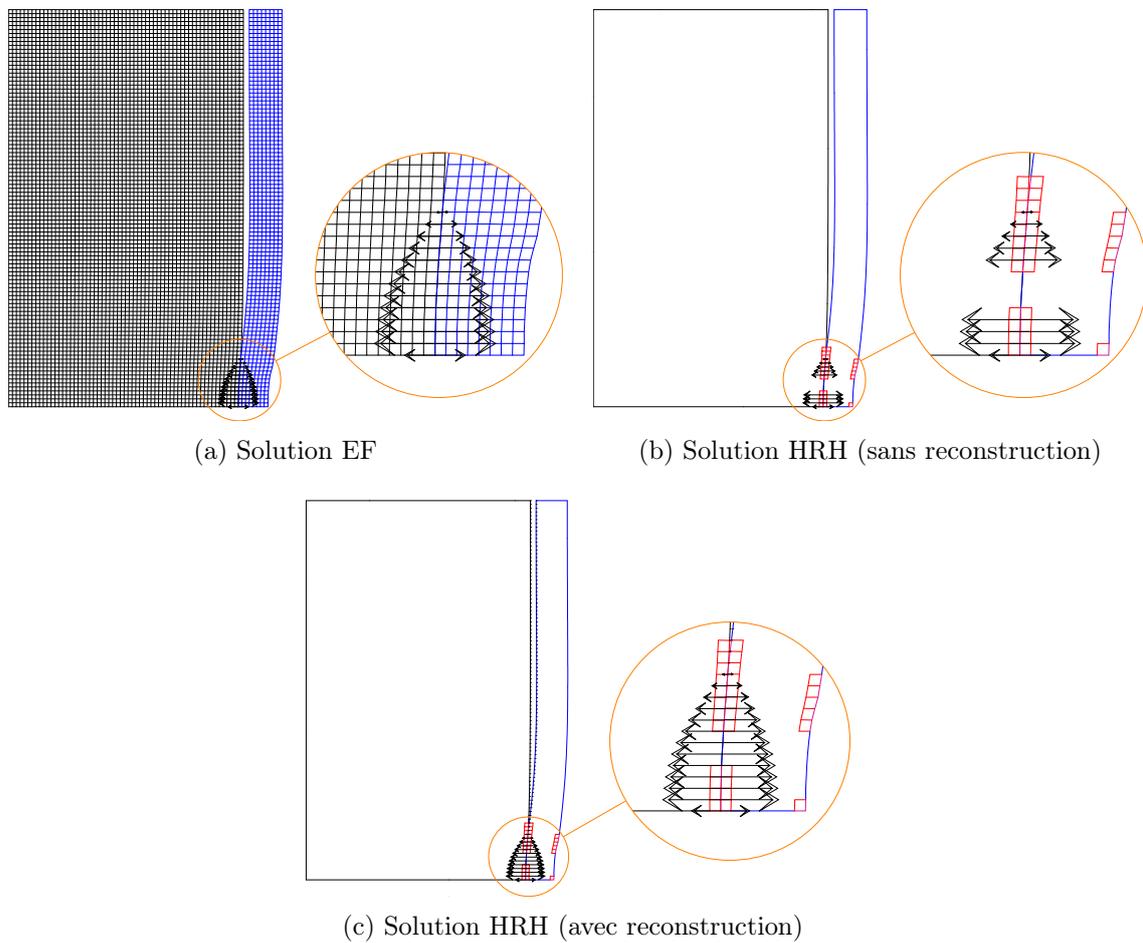


FIGURE III.19 – Cas test 2D élastique – Comparaison des forces de contact (zoomées) EF et HRH, sans puis avec reconstruction, tracées sur les déformées en maillage avec un jeu amplifié par un facteur 50

On trace sur la figure III.20a la différence en valeur absolue entre les solutions primales obtenues par HRH et par EF. Nous pouvons voir que l'erreur primaire est localisée sur la surface de contact et plus particulièrement au niveau de la zone de changement de statut. On trace également sur la figure III.20b la différence en valeur absolue entre les solutions en contrainte selon σ_{rr} obtenues par HRH et par EF. La valeur tracée est l'interpolation au barycentre des éléments. L'erreur en contrainte est localisée aux mêmes endroits que l'erreur en déplacement, tout en étant légèrement plus étendue du fait qu'elle soit directement liée au

gradient du déplacement.

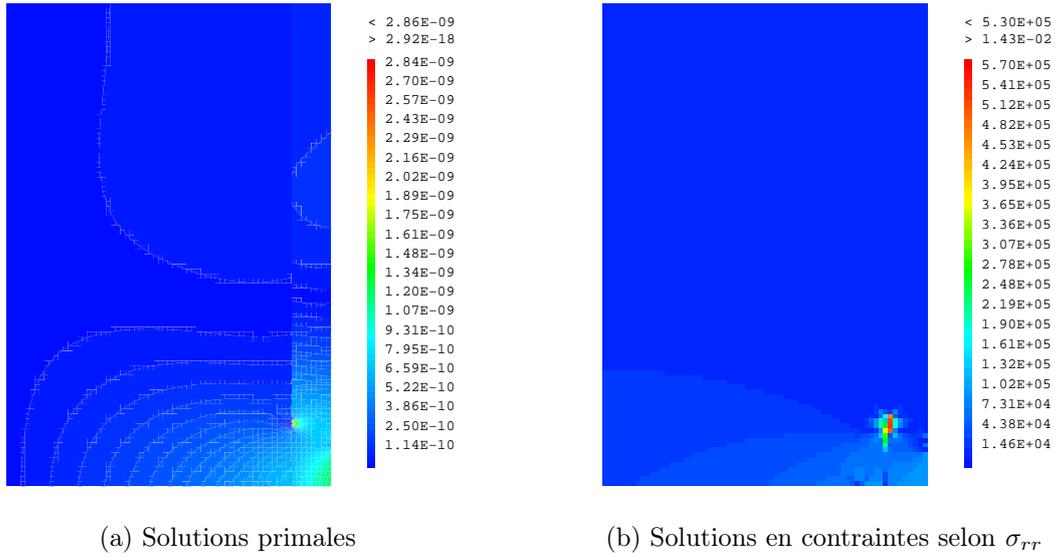


FIGURE III.20 – Cas test 2D élastique – Différence en valeur absolue entre les solutions obtenues par HRH et par EF pour les solutions primales et en contraintes selon σ_{rr}

Intéressons-nous maintenant à la comparaison des solutions EF et HRH dans l'espace paramétrique ($P_1 \in [160,240]$ MPa, $h_1 \in [0.4,0.8]$ mm) sur une grille régulière de taille 20×20 notée \mathcal{S} . L'espace paramétrique auquel nous nous intéressons est alors plus grand pour la variable h_1 , variable pour laquelle le modèle est particulièrement sensible. Pour rappel, l'espace paramétrique utilisé pour la réalisation des snapshots était ($P_1 \in [160,240]$ MPa, $h_1 \in [0.5,0.7]$ mm).

On trace en figure III.21 l'erreur primale de référence, calculée sur Ω et en norme 2, ainsi que l'erreur duale de référence, calculée sur Γ_A^C et en norme 2, pour l'ensemble des points de \mathcal{S} . On peut voir que l'erreur devient importante dès que l'on s'éloigne de l'espace où les snapshots ont été réalisés. Pour la partie de l'espace paramétrique couverte par les snapshots, l'erreur est très basse comme pour le cas particulier du point ($P_1 = 190$ MPa, $h_1 = 0.62$ mm) vu précédemment (cf. figures III.18 et III.19).

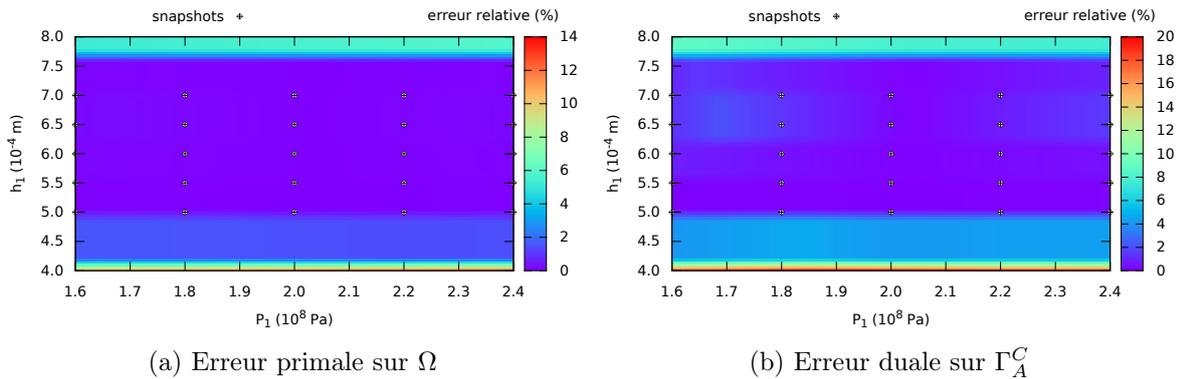


FIGURE III.21 – Cas test 2D élastique – Erreur de référence en norme 2 commise par l'HRH. Les snapshots sont représentés dans l'espace par le symbole “ \diamond ”.

On trace figure III.22 le temps CPU de la résolution EF, moyenné sur 40 exécutions pour lisser le résultat, ainsi que le nombre d'itérations de la méthode des statuts associé pour l'ensemble des points de \mathcal{S} . On constate que les deux figures sont directement corrélées : le temps CPU augmente comme le nombre d'itérations de la méthode des statuts. De la même

manière, on trace figure III.23 le temps CPU de la résolution HRH moyenné sur 40 calculs ainsi que le nombre d'itérations de la méthode des statuts associé. Le temps de la résolution HRH (figure III.23) est bien moindre que celui de la résolution EF (figure III.22) pour un nombre d'itérations de la méthode des statuts légèrement inférieur. Le temps CPU d'une itération de la méthode des statuts est beaucoup plus important pour la résolution EF que pour la résolution HRH. Sinon, les figures III.22 et III.23 n'ont pas grand chose en commun, ce qui montre que les deux problèmes sont bien distincts. Par ailleurs le temps CPU de la projection pour la méthode HRH n'est pas représenté car il est à peu près constant autour de 51 ms quand moyenné sur 40 calculs.

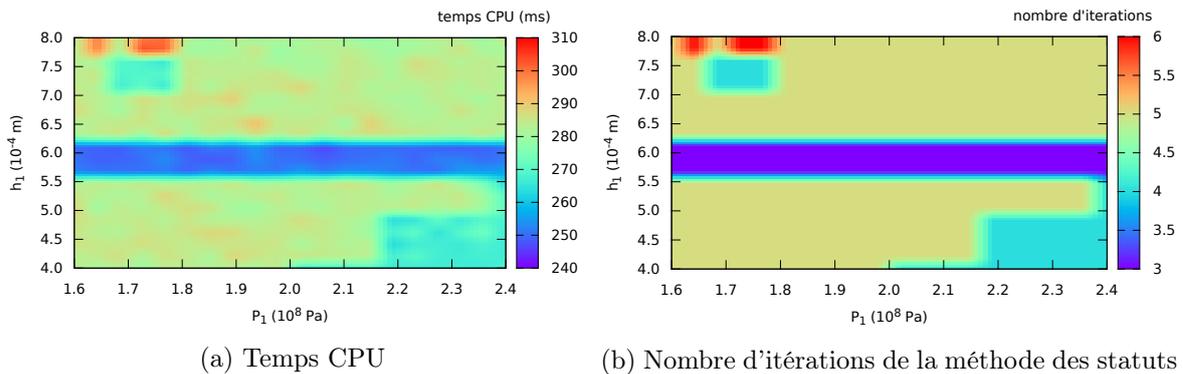


FIGURE III.22 – Cas test 2D élastique – Temps CPU (moyenné sur 40 calculs) et nombre d'itérations de la méthode des statuts lors de la résolution du modèle EF

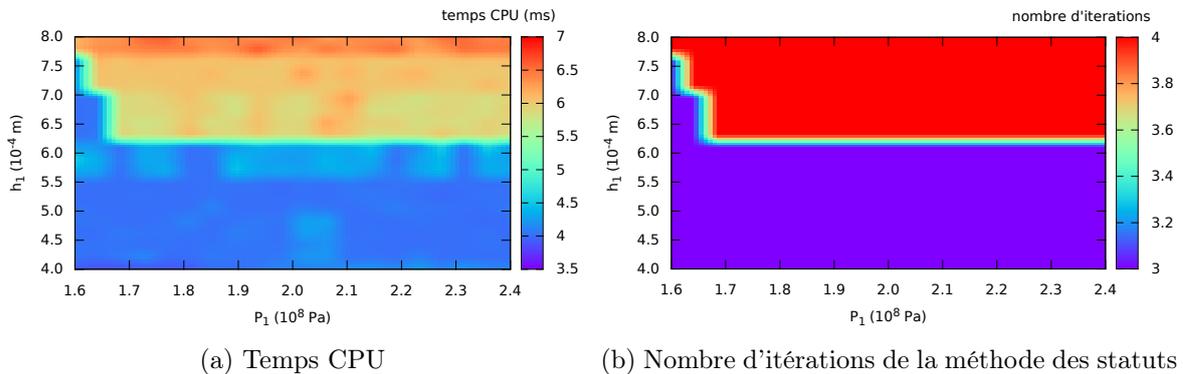


FIGURE III.23 – Cas test 2D élastique – Temps CPU (moyenné sur 40 calculs) et nombre d'itérations de la méthode des statuts lors de la résolution du modèle HR

La méthode HRH donne de très bons résultats en 2D avec l'implémentation générique qui a été réalisée dans Cast3M. Cela valide la possibilité d'implémenter dans un code EF existant notre méthode. De plus nous avons montré qu'il est important de bien définir l'espace des snapshots pour obtenir une approximation.

III.4.4 Étude de la condition LBB en fonction des ddl EF

Dans la section précédente, nous avons ajouté autant de ddl EF qu'il y avait de contacts potentiels. Cela permet d'assurer que le problème est bien posé et ainsi obtenir une meilleure stabilité et de meilleurs résultats. Cependant, pour un grand nombre de contacts potentiels, cela peut coûter cher en temps CPU. Voyons si la condition LBB étendue introduite en section III.1.2 nous permet de ne pas tous les activer et dans ce cas, étudions les ddl optimaux à activer.

Pour rappel, pour vérifier la condition LBB étendue, il faut que la matrice $\underline{B}[\mathcal{A}_\lambda, \mathcal{A}_c] \underline{V}[\mathcal{A}_c, :]$ soit de rang plein en ligne. Une condition nécessaire est alors qu'elle ait plus de colonnes que de lignes, $l \geq N_\lambda^C$. Pour réaliser le calcul du rang de cette matrice, nous utilisons la méthode SVD de la librairie LinAlg de Python. Nous nous focalisons sur le point dans l'espace paramétrique défini par $P_1 = 190$ MPa et $h_1 = 0.62$ mm pour les résultats qui suivent.

Commençons par ne pas activer de ddl EF. Sans rajout, la BR primale et le RID construits dans les sections III.4.2.a et III.4.2.b nous donnent $l = 8$ et $N_\lambda^C = 11$. Dans ce cas, la condition LBB étendue n'est pas vérifiée ($l < N_\lambda^C$). La non-vérification de la condition LBB permet tout de même d'obtenir une bonne solution primale, l'erreur primale sur Ω en norme 2 vaut 0.077 %. Par contre la solution duale n'est pas du tout satisfaisante. Comme nous pouvons le voir sur la figure III.24, certaines forces de contact sont nulles à des endroits où le jeu est nul et sont compensées par d'autres forces de contact non nulles qui vont être plus grandes. Cet exemple nous permet de constater qu'il est possible *a posteriori* de vérifier que le rang de la matrice $\underline{B}[\mathcal{A}_\lambda, \mathcal{A}_c] \underline{V}[\mathcal{A}_c, :]$ n'est pas plein.

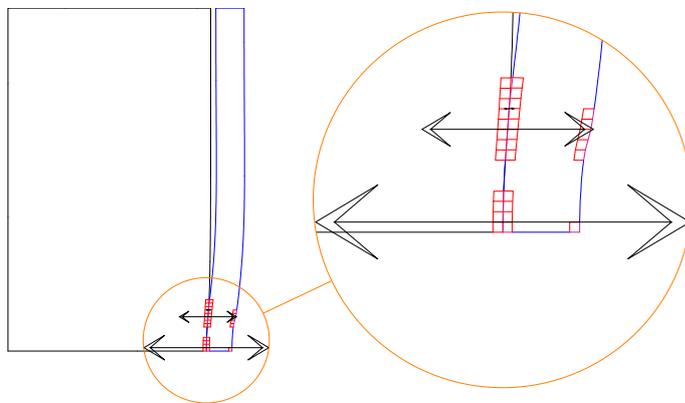


FIGURE III.24 – Cas test 2D élastique – Forces de contact HRH (zoomées) tracées sur la déformée avec jeu amplifié lorsque aucun ddl EF n'est activé et qu'ainsi la condition LBB n'est pas vérifiée

La différence en valeur absolue entre les solutions primales obtenues par HRH et par EF est tracée sur la figure III.25a. L'erreur locale est plus élevée que pour le cas où tous les ddl EF étaient activés, notamment sur la surface de contact, voir figure III.20a. Comme nous pouvons le voir sur la figure III.25b, l'erreur en contraintes sur la composante σ_{rr} est également plus élevée que l'erreur en contraintes sur σ_{rr} représentée en figure III.25b lorsque tous les ddl EF étaient activés. Cette erreur plus importante en contraintes est due à la variation du déplacement mais plus directement à la mauvaise approximation des forces de contact. L'erreur sur les forces de contact est une bonne indication de la qualité des contraintes obtenues. Cela confirme l'intérêt d'avoir une bonne approximation de la solution duale.

Il nous faut rajouter au moins 3 ddl EF à la BR primale pour vérifier la condition nécessaire ($l \geq N_\lambda^C$). Cela suffit pour que le rang de la matrice soit plein en ligne pour un seuil de 10^{-14} mais on constate qu'il y a encore des forces de contact nulles à des endroits de contacts actifs. Cela n'est en fait pas suffisant, la détermination de la valeur du zéro numérique pour déterminer le seuil n'est pas aisée. Nous allons augmenter le seuil pour calculer le rang avec la SVD. Ce dernier détermine à partir de quelle valeur une valeur singulière est trop faible pour augmenter le rang. À partir de ces calculs où varie le nombre de ddl EF activés, on fixe empiriquement ce seuil à 10^{-4} . Pour ce seuil, il faut activer au minimum 6 ddl EF car le rang de $\underline{B}[\mathcal{A}_\lambda, \mathcal{A}_c] \underline{V}[\mathcal{A}_c, :]$ vaut initialement 5. Nous proposons de présenter les résultats obtenus pour quelques-unes des configurations minimales possibles, soit 6 ddl EF activés. Les différentes configurations sont représentées sur la figure III.26 où les points sur lesquels sont activés les ddl EF sont marqués d'une croix rouge. Pour ces différentes configurations, l'erreur

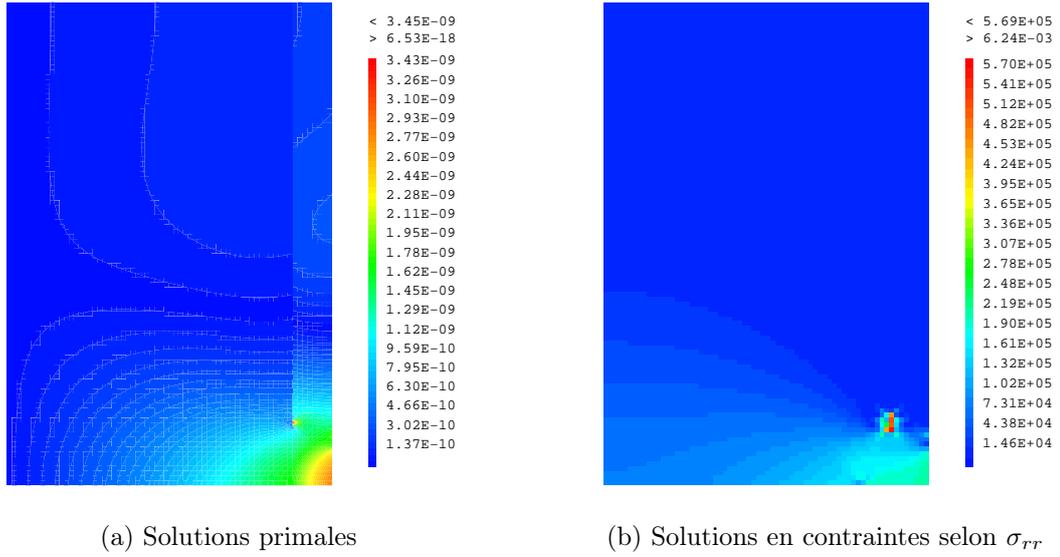


FIGURE III.25 – Cas test 2D élastique – Différence en valeur absolue entre les solutions obtenues par HRH et par EF pour les solutions primales et en contraintes selon σ_{rr}

primale sur Ω en norme 2 vaut environ 0.034 %. L'erreur duale va par contre varier comme on peut le voir sur la figure III.27. On remarque par ailleurs que là où sont placés les ddl EF, la solution duale HRH approxime toujours très bien la solution duale EF. L'erreur est la plus petite pour la configuration 1 pour laquelle les ddl EF sont concentrés sur le bas du RID. La solution duale obtenue pour cette dernière est d'ailleurs très proche de la solution EF.

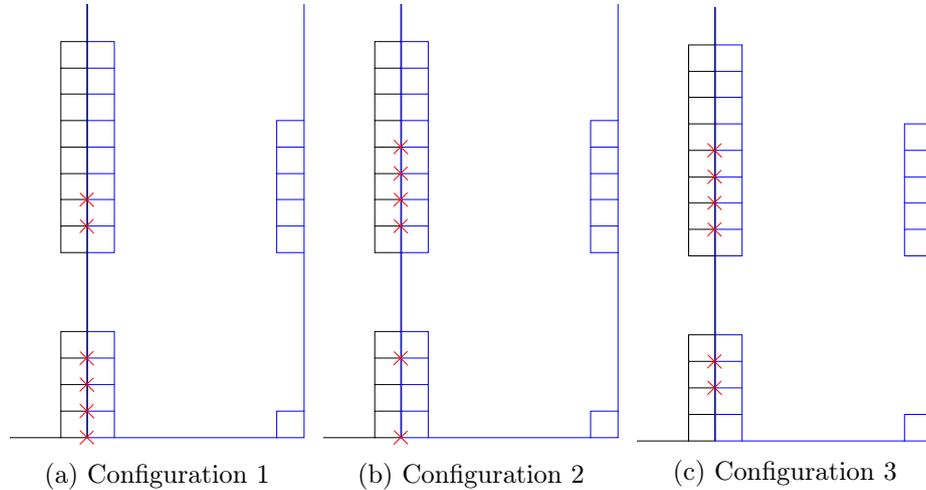


FIGURE III.26 – Cas test 2D élastique – Différentes configurations où 6 ddl sur la zone de contact sont traités par EF. Zoom sur le domaine réduit où des croix rouges indiquent leur emplacement.

La problématique est alors de savoir quels ddl EF il faut activer pour obtenir l'erreur duale la plus petite possible. Pour cela nous nous intéressons au conditionnement de la matrice $\underline{B}[\mathcal{A}_\lambda, \mathcal{A}_c] \underline{V}[\mathcal{A}_c, :]$.

Pour la norme de Frobenius, le conditionnement d'une matrice \underline{A} s'écrit :

$$\kappa(\underline{A}) = \frac{\sigma_{\max}(\underline{A})}{\sigma_{\min}(\underline{A})} \quad (\text{III.20})$$

où σ_{\max} et σ_{\min} sont les valeurs singulières maximale et minimale de \underline{A} . Le conditionnement étant bon lorsque κ est proche de 1, il faut donc que σ_{\min} ne soit pas trop petit devant σ_{\max}

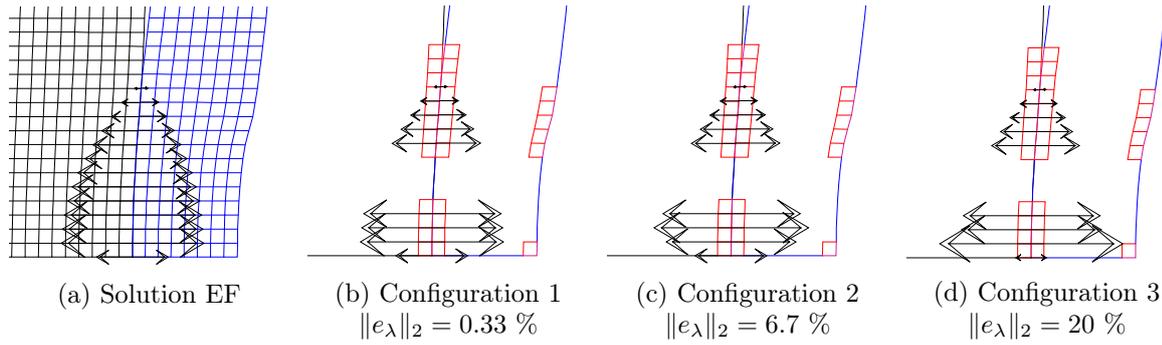


FIGURE III.27 – Cas test 2D élastique – Solutions duales pour les différentes configurations des ddl EF

pour que \underline{A} soit bien conditionnée.

En augmentant le seuil permettant de calculer le rang de notre matrice, nous demandons d'une certaine manière à ce que le conditionnement soit meilleur puisque l'on constate que la valeur singulière maximale change très peu lorsque l'on rajoute des ddl EF alors que la valeur singulière minimale sélectionnée va augmenter.

En rassemblant dans le tableau III.3 l'erreur duale de référence commise sur Γ_A^C ainsi que le conditionnement de la matrice $\underline{B}[\mathcal{A}_\lambda, \mathcal{A}_c] \underline{V}[\mathcal{A}_c, :]$ pour les différentes configurations étudiées (cf. figure III.26) où 6 ddl EF sont activés, il apparaît clairement que plus le conditionnement est proche de 1, plus l'erreur duale est petite.

	Configuration 1	Configuration 2	Configuration 3
$\ e_\lambda\ _2$ sur Γ_A^C (%)	0.33	6.7	20
$\kappa(\underline{B}[\mathcal{A}_\lambda, \mathcal{A}_c] \underline{V}[\mathcal{A}_c, :])$	66.9	347	1065

TABLEAU III.3 – Cas test 2D élastique – Erreur duale sur Γ_A^C et conditionnement en fonction des ddl EF ajoutés

Nous proposons alors de choisir les ddl EF à l'aide d'un algorithme glouton basé sur la minimisation du conditionnement de $\underline{B}[\mathcal{A}_\lambda, \mathcal{A}_c] \underline{V}[\mathcal{A}_c, :]$. La stratégie est décrite dans l'algorithme III.1. Dans ce dernier, le conditionnement maximum κ_{\max} en entrée doit rester raisonnable et ne doit donc pas être trop proche de 1 au risque de ne pas trouver de solution. Nous traçons sur la figure III.28 les ddl EF obtenus avec cet algorithme pour $\kappa_{\max} = 100$ et la solution duale obtenue avec ces derniers. L'algorithme glouton permet de trouver également 6 ddl EF (alors que dans l'algorithme glouton le nombre de ddl EF n'est pas imposé) pour lesquels le conditionnement et la solution duale sont meilleurs que pour les configurations précédentes où 6 ddl EF étaient activés (cf. tableaux III.3 et III.4). Le tableau III.4 permet également de comparer le calcul avec les 6 ddl EF trouvés par optimisation et le calcul où tous les ddl EF sont activés sur la zone de contact. La comparaison montre qu'il est possible d'activer moins de ddl EF pour gagner en temps de calcul tout en ayant une erreur duale faible et que l'algorithme III.1 proposé est un bon moyen pour obtenir ces ddl EF.

Cette solution permettant d'activer un nombre minimum de ddl EF sur la zone de contact n'a pas été mise en place de manière systématique. Dans la suite, et sauf mention contraire, les résultats sont obtenus en utilisant une base primale hybride contenant tous les ddl EF de la zone de contact potentiel.

Algorithme III.1 : Algorithme glouton pour la sélection des ddl EF qui minimisent le conditionnement de la matrice de rigidité de contact projetée

Entrées : matrices $\underline{\underline{B}}$ et $\underline{\underline{V}}$, conditionnement maximum κ_{\max} , ensemble des ddl EF possibles sur la zone de contact $\{i_1, \dots, i_n\}$

Sorties : ensemble des ddl EF à activer $\mathcal{L} = \{i_{j_1}, \dots, i_{j_k}\}$, base réduite $\underline{\underline{V}}$

$\mathcal{L} = \emptyset$;

$\kappa_{\min} = \kappa(\underline{\underline{B}}[\mathcal{A}_\lambda, \mathcal{A}_c] \underline{\underline{V}}[\mathcal{A}_c, :])$;

$k = 0$;

tant que $\kappa_{\min} > \kappa_{\max}$ **faire**

$k = k + 1$;

pour $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$ **faire**

$\underline{\underline{V}} = [\underline{\underline{V}} \ e_{i_p}]$;

si $\kappa(\underline{\underline{B}}[\mathcal{A}_\lambda, \mathcal{A}_c] \underline{\underline{V}}[\mathcal{A}_c, :]) < \kappa_{\min}$ **alors**

$\kappa_{\min} = \kappa(\underline{\underline{B}}[\mathcal{A}_\lambda, \mathcal{A}_c] \underline{\underline{V}}[\mathcal{A}_c, :])$;

$i_{j_k} = i_p$;

$\underline{\underline{V}} = [\underline{\underline{V}} \ e_{i_{j_k}}]$;

$\mathcal{L} = \{\mathcal{L} \ i_{j_k}\}$;

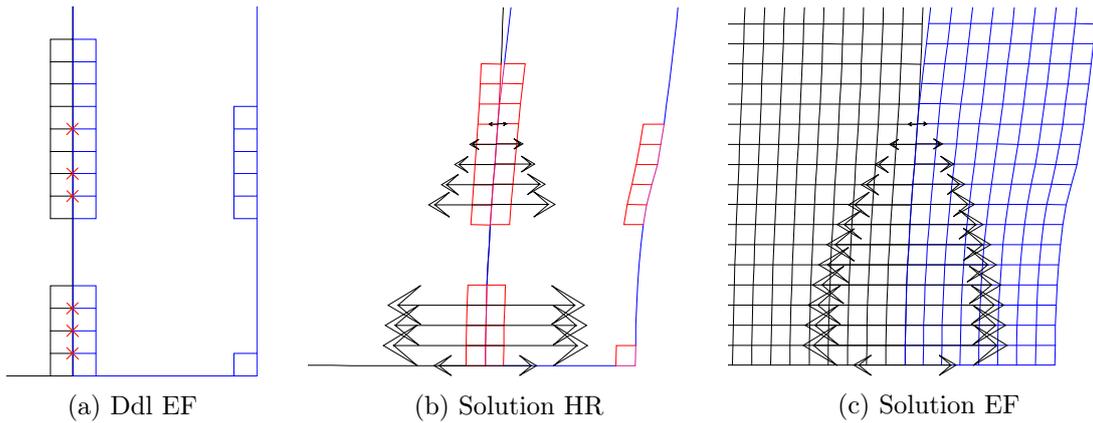


FIGURE III.28 – Cas test 2D élastique – Ddl EF sélectionnés par un algorithme glouton minimisant le conditionnement et solution duale associée

	Tous les ddl EF	Minimum de ddl EF
nombre de ddl EF	11	6
$\ e_\lambda\ _2$ sur Γ_A^C (%)	0.21	0.32
$\kappa(\underline{\underline{B}}[\mathcal{A}_\lambda, \mathcal{A}_c] \underline{\underline{V}}[\mathcal{A}_c, :])$	1.44	27.7
accélération du temps CPU	50	63

TABLEAU III.4 – Cas test 2D élastique – Comparaison entre le calcul avec les 6 ddl EF trouvés par optimisation et le calcul où tous les ddl EF sont activés sur la zone de contact

III.4.5 Traitement d'un espace paramétrique plus grand et comparaison avec la PBM

Pour le cas test étudié précédemment, l'espace paramétrique ($P_1 \in [160,240]$ MPa, $h_1 \in [0.5,0.7]$ mm) était relativement petit et il comptait au maximum seulement 13 contacts actifs avec le FOM. Pour un petit nombre de contacts actifs sur l'ensemble de l'espace paramétrique d'étude, une BR duale comptant peu de colonnes est capable de fournir une bonne approximation. Nous allons complexifier le cas test 2D en augmentant la taille de l'espace paramétrique, en particulier en agrandissant considérablement la hauteur h_1 sur laquelle s'applique la pression P_1 de manière à avoir un plus grand nombre de contacts actifs, mais également en considérant une petite pression P_1 pour avoir une zone de l'espace paramétrique où il n'y a aucun contact actif. Les dimensions, les conditions aux limites et les maillages restent les mêmes. L'espace paramétrique d'étude \mathcal{P} est maintenant défini par $P_1 \in [5,200]$ MPa (2 fois plus grand), $h_1 \in [0.6,6]$ mm (27 fois plus grand).

III.4.5.a Comparaison de l'HRH avec la PBM pour des snapshots sur une grille régulière

Pour la construction du modèle d'ordre réduit, 10×10 snapshots sont pris régulièrement pour discrétiser \mathcal{P} . La BR primale est constituée de $l = 20$ modes POD sélectionnés pour un seuil $\epsilon_{\text{tol}} = 10^{-6}$. Pour la construction du RID, l'algorithme DEIM est appliqué à la BR primale mais également à une base POD associée aux multiplicateurs de Lagrange construite pour un seuil valant $\epsilon_{\text{tol}} = 10^{-4}$. Nous représentons sur la figure III.29a le maillage initial et sur la figure III.29b le maillage réduit obtenu. Ce dernier, bien que morcelé, recouvre une partie de la zone où la pression P_1 est appliquée ainsi qu'une partie de la zone maximale de contact actif. Le RID compte alors 121 éléments et 35 contacts potentiels contre 6800 et 101 pour le maillage initial. Nous rajoutons des ddl EF pour l'ensemble des contacts potentiels, soit 35.

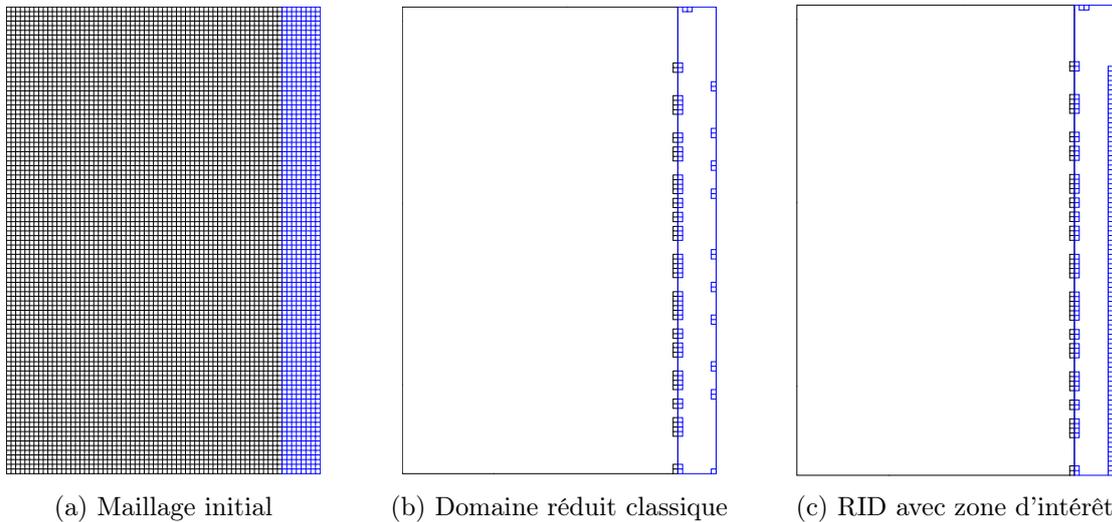


FIGURE III.29 – Cas test 2D élastique – Maillage initial et domaine réduit sans puis avec le rajout d'une zone d'intérêt

Comparons les résultats obtenus avec les FOM et ROM pour un point dans \mathcal{P} , défini par $P_1 = 170$ MPa et $h_1 = 3.2$ mm, qui n'a pas été pris dans les snapshots. On trace les déformées et solutions duales sur les figures III.30a et III.30b avec un jeu amplifié par un facteur 50 de manière à identifier la zone de contact actif. Bien que les solutions primale et duale obtenues par HRH semblent très bien approximer celles EF, les erreurs de référence primale sur Ω et

duale sur Γ_A^C commises par l'HRH valent respectivement 7.0 % et 17 %. En regardant de plus près, on constate que les forces de contact n'arrivent pas à la bonne hauteur. L'erreur est donc due à une mauvaise prise en compte de la pression P_1 sur la hauteur h_1 .

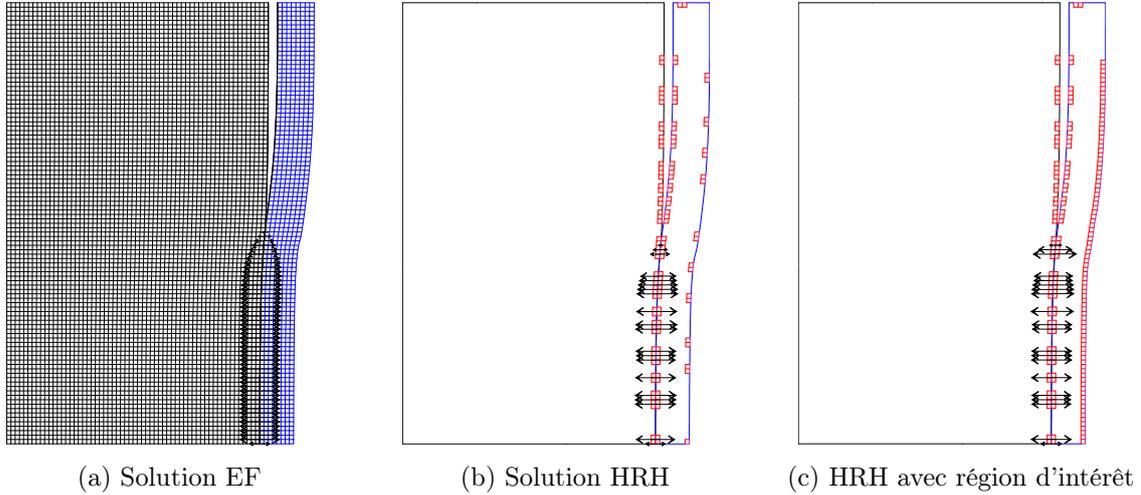


FIGURE III.30 – Cas test 2D élastique – Comparaison des forces de contact EF et HRH, sans puis avec le rajout d'une zone d'intérêt au RID, au point ($P_1 = 170$ MPa et $h_1 = 3.2$ mm) tracées sur les déformées. Le jeu est amplifié par un facteur 50.

Pour améliorer le résultat, nous rajoutons une région d'intérêt au RID se situant sur la surface externe de la gaine, sur la hauteur h_1 la plus grande possible (voir figure III.29c). Cela va permettre de bien capter la pression appliquée sur la gaine. Le RID compte alors 189 éléments et toujours 35 contacts potentiels. Les erreurs de référence primale sur Ω et duale sur Γ_A^C commises par l'HRH valent alors respectivement 2.7 % et 11 %. La région d'intérêt a donc permis de faire baisser considérablement les erreurs. La déformée et les forces de contact sont tracées sur la figure III.30c. Pour diminuer encore l'erreur, il faudrait que le RID couvre mieux la zone de contact actif. Mais cela voudrait dire plus de contacts à traiter dans le RID, soit plus ddl EF et donc une résolution plus longue. Nous remarquerons que même lorsque le RID ne recouvre pas la totalité de la zone de contact actif, nous obtenons une bonne approximation de la solution duale, surtout dans les zones où celle-ci est régulière.

Appliquons maintenant la PBM au même cas test à partir des mêmes snapshots. La BR primale est la même que la base POD utilisée par l'HRH précédemment. La BR duale est construite par NNMF de sorte qu'elle ait le même nombre de modes que la BR primale, $l_\lambda = l_u = 20$. On obtient avec ce ROM une erreur de référence primale sur Ω de 1.7 % et une erreur de référence duale sur Γ^C de 19 %. Les forces de contact sont représentées sur la déformée en figure III.31. La solution primale est meilleure que celle obtenue avec l'HRH mais la solution duale est bien moins approximée, surtout localement où la solution n'a pas la même forme que la solution EF. Ce qui est dû à l'utilisation d'une BR duale. Or il est important d'avoir une bonne approximation de la solution duale car l'état de contrainte local en dépend directement.

Cette application montre une nouvelle fois la difficulté d'approximation de la solution duale par un ROM. L'HRH permet d'obtenir une solution qui a un sens physique. Et pour peu que le RID permette de capter tous les paramètres influents sur la solution, elle est capable d'arriver à une solution très proche de la solution EF.

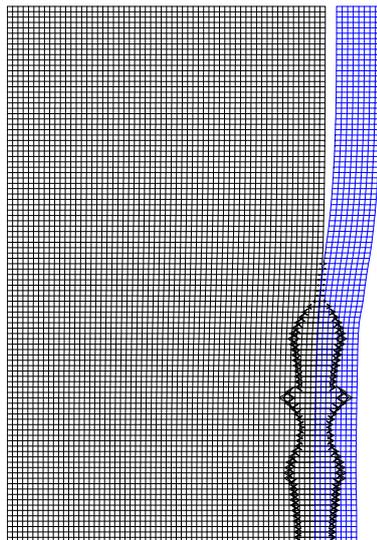


FIGURE III.31 – Cas test 2D élastique – Tracé des forces de contact obtenus avec la PBM au point ($P_1 = 170$ MPa et $h_1 = 3.2$ mm) sur la déformée en maillage. Jeu amplifié par un facteur 50.

III.4.5.b Construction du RID avec un algorithme glouton

Lorsque les snapshots sont pris sur une grille régulière, le RID est construit en une fois et n'est pas toujours suffisamment étendu pour capter toute la physique contenue dans l'espace paramétrique. Il est possible de l'étendre mais cette solution ne permet pas de cibler une région précise et aboutit à un RID très large si répété trop de fois. Il est également possible de rajouter une région d'intérêt, comme cela a été fait précédemment pour améliorer la prise en compte des conditions aux limites, mais cela demande un certain niveau de connaissance *a priori* du problème. Dans l'algorithme glouton III.1.4 utilisé pour la sélection des snapshots, le choix est fait de cumuler le RID obtenu à chaque itération afin d'obtenir un RID suffisamment large pour tenir compte des variations des paramètres.

Pour l'algorithme glouton, nous prenons comme seuil POD pour la BR primale $\epsilon_{\text{tol}} = 10^{-6}$ et pour la BR duale qui va servir à la construction du RID $\epsilon_{\text{tol}} = 10^{-4}$. Les indicateurs d'erreur primal et dual sont calculés en norme 2. Nous représentons sur la figure III.32 l'évolution du RID au cours de l'algorithme glouton, plus précisément aux itérations 5, 10, 20 et 40. Nous pouvons voir que le RID est très petit au début car peu de snapshots ont été sélectionnés, en effet le seuil POD est plus élevé que dans la section précédente. Puis il va croître jusqu'à contenir presque entièrement la surface où est appliquée la pression P_1 et la zone de contact actif. L'algorithme glouton permet ainsi de construire un RID capable de cibler très rapidement les zones les plus importantes.

Nous rassemblons dans le tableau III.5 les chiffres clés de l'HRH au point ($P_1 = 170$ MPa, $h_1 = 3.2$ mm) au cours des itérations de l'algorithme glouton pour la sélection des snapshots. Les erreurs de références primale sur Ω et duale sur Γ_A^C commises par l'HRH décroissent au cours des itérations de l'algorithme glouton. Par contre le niveau d'erreur de la solution HRH duale reste élevé. Cela est dû à un seuil POD pour la BR primale qui est relativement élevé, $\epsilon_{\text{tol}} = 10^{-6}$. Même si le RID est bon, la BR primale a également une responsabilité importante vis-à-vis à la fois de l'erreur primale mais également de l'erreur duale (problème mixte couplé). Pour ce qui est du facteur d'accélération en temps CPU, ce dernier décroît également au cours des itérations car la BR primale comme le RID deviennent de plus en plus grands.

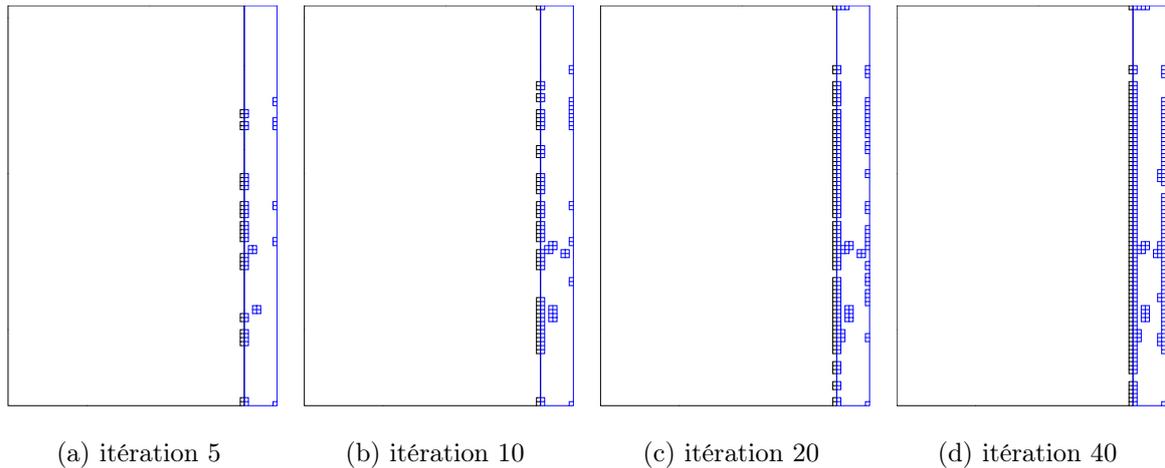


FIGURE III.32 – Cas test 2D élastique – Évolution du domaine réduit au cours des itérations de l'algorithme glouton

	itération 5	itération 10	itération 20	itération 40
$\ e_u\ _2$ sur Ω (%)	31	21	11	3.3
$\ e_\lambda\ _2$ sur Γ_A^C (%)	49	41	37	31
Accélération du temps CPU	40	14	5.2	5.1

TABLEAU III.5 – Cas test 2D élastique – Résultats de l'hyper-réduction hybride au point ($P_1 = 170$ MPa, $h_1 = 3.2$ mm) au cours des itérations de l'algorithme glouton pour la sélection des snapshots sélectionnés avec l'indicateur d'erreur η

III.5 Hyper-réduction hybride appliquée à un cas test 3D avec chargement thermique à l'aide de Cast3M

III.5.1 Cas représentatif de chargements thermo-mécaniques sur l'élément combustible

Ce cas test est très proche de la simulation mécanique 3D réalisée dans PLEIADES/ALCYONE, voir figure I.9. Pour rappel, en supposant que le combustible se fissure de façon régulière, la pastille peut être divisée en 8 fragments égaux. Et en raison des symétries, il est suffisant de modéliser 1/32-ème d'une pastille (cf. section I.1.4).

La géométrie ainsi que les conditions aux limites mécaniques sont représentées sur la figure III.33. Le combustible, qui a une forme cylindrique, possède un rayon de 4.1 mm et une hauteur de 14 mm. Puisque nous modélisons uniquement la partie basse du combustible, l'évidement et le chanfrein sont représentés uniquement sur la partie basse. La partie de la gaine l'entourant a pour épaisseur 0.57 mm. Nous considérons le combustible et la gaine comme deux solides élastiques isotropes. Le comportement du combustible est défini par $E = 190$ GPa, $\nu = 0.3$ et celui de la gaine par $E = 78$ GPa, $\nu = 0.34$.

La condition de contact au niveau de l'évidement est de type obstacle. La condition de contact qui va le plus nous intéresser est celle entre deux solides élastiques, à savoir entre la pastille et la gaine (IPG). Nous supposons que le contact est sans frottement et est traité par un algorithme nœud-à-nœud. Le jeu initial entre la pastille et la gaine est considéré comme

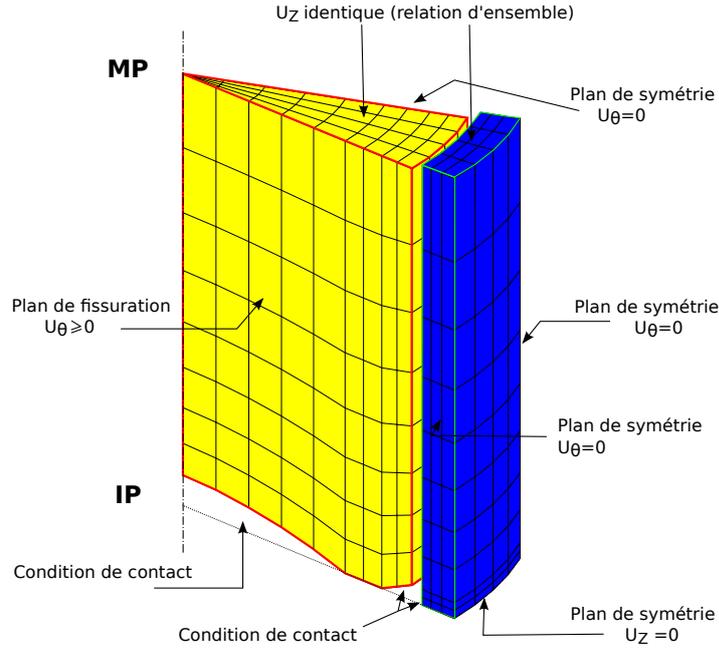


FIGURE III.33 – Cas test 3D de mécanique du contact entre solides élastiques avec ses conditions aux limites

un paramètre du problème, $d \in [10,40] \mu\text{m}$.

Un chargement de type dilatation thermique est appliqué comme chargement du problème mécanique. Pour ce faire, un calcul thermique est réalisé en amont de la mécanique. Une température de 600°K est imposée sur la surface extérieure de la gaine, soit la température du réfrigérant primaire. Le combustible et la gaine ont pour conductivité thermique respective 2.5 et $16 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$. La convection dans le jeu entre pastille et gaine a un coefficient d'échange de $50 \text{ kW.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$. Enfin, la densité linéique de puissance est laissée comme paramètre et va varier dans $P_{\text{lin}} \in [20,40] \text{ kW.m}^{-1}$. Un chargement thermique pour une densité linéique de puissance de 10 kW.m^{-1} est représenté sur la figure III.34a. Il s'agit donc d'un cas test thermo-mécanique où seul l'ordre du modèle mécanique va être réduit. L'ordre du modèle thermique pourrait également être réduit avec le même type de méthodes de réduction d'ordre de modèles étant donné que les équations de la thermique sont proches de celles de la mécanique mais cela n'a pas été réalisé.

Pour tenir compte du chargement thermique dans la mécanique, on commence par calculer la déformée thermique associée au champ de température T obtenu après résolution du problème thermique. La déformée thermique en chaque point s'écrit :

$$\underline{\underline{\underline{\varepsilon}}}^{\text{th}} = \alpha_T (T - T_0) \underline{\underline{\underline{I}}} \quad (\text{III.21})$$

avec α_T le coefficient de dilatation thermique fixé à 10^{-5} K^{-1} pour le combustible et 6.10^{-6} K^{-1} pour la gaine, et T_0 le champ de température initial qui est uniforme et d'une valeur de 293 K . En supposant la décomposition de manière additive de la déformation, on peut écrire :

$$\underline{\underline{\underline{\sigma}}} = \underline{\underline{\underline{C}}} : (\underline{\underline{\underline{\varepsilon}}}^{\text{tot}} - \underline{\underline{\underline{\varepsilon}}}^{\text{th}}). \quad (\text{III.22})$$

Ainsi on se ramène à un problème d'élasticité linéaire standard (II.28) avec comme terme source volumique :

$$f = -\text{div}(\underline{\underline{\underline{C}}} : \underline{\underline{\underline{\varepsilon}}}^{\text{th}}) \quad (\text{III.23})$$

Il faut juste faire attention à reconstruire $\underline{\underline{\underline{\sigma}}}$ à partir de la formule (III.22).

Pour résoudre le problème associé à (III.23), il faut calculer le champ de contraintes associé à la déformation thermique et enfin le champ de forces nodales résultant de ce champ

de contraintes. La déformation libre thermique induite par le chargement thermique de la figure III.34a est représentée en figure III.34b après amplification par un facteur 10. Nous pouvons reconnaître la forme de diabolo que prend le combustible, voir figure I.5. Du fait des conditions aux limites de non-pénétration pour représenter la fissuration, la répartition ortho-radiale des forces de contact entre la pastille et la gaine est non-uniforme.

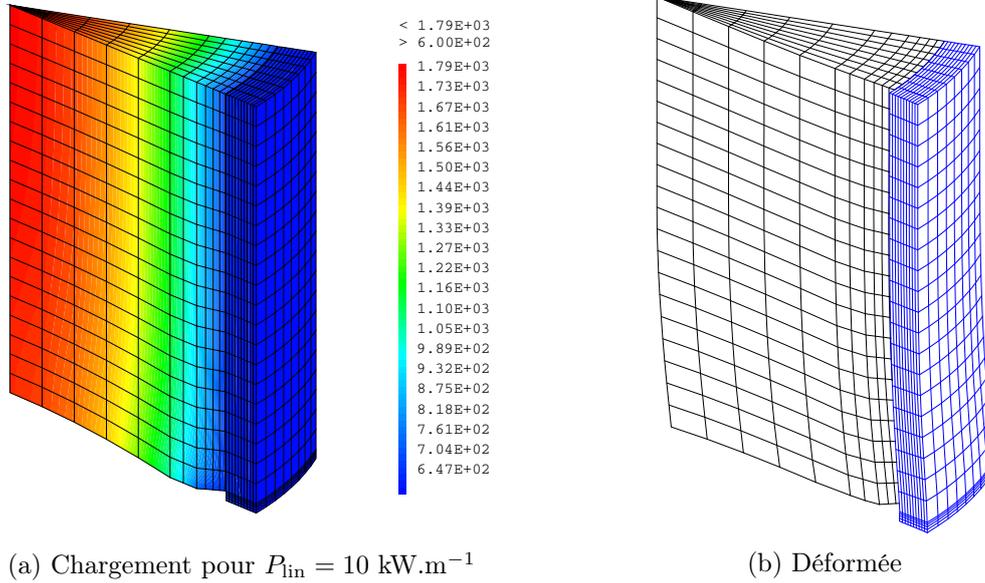


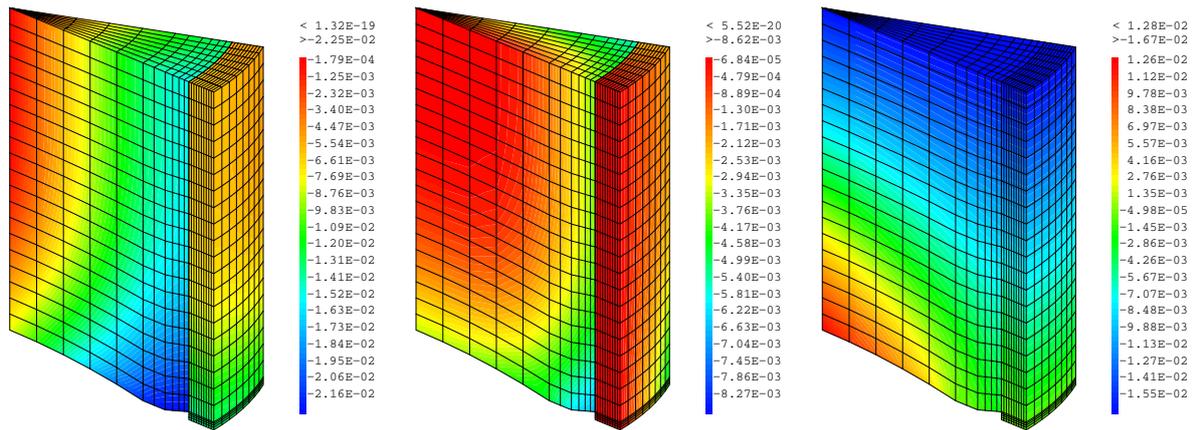
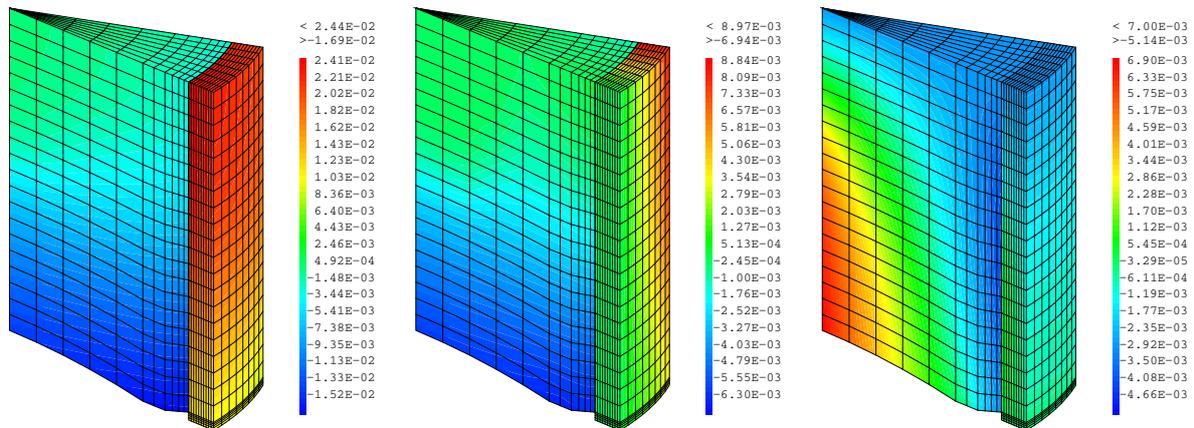
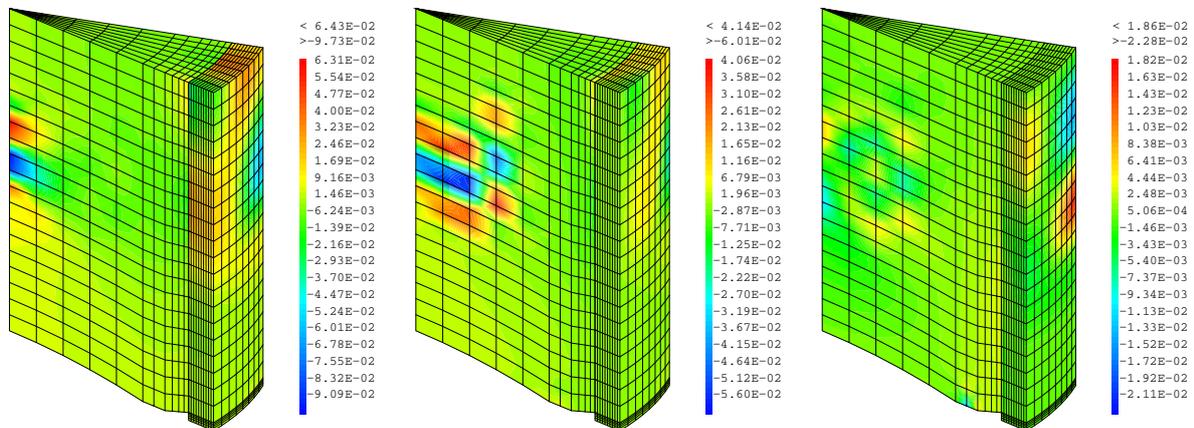
FIGURE III.34 – Cas test 3D thermo-mécanique élastique – Exemple de chargement thermique et déformation thermique associée amplifiée par un facteur 10

III.5.2 Construction de deux modèles par hyper-réduction hybride

Pour le cas test 3D présenté dans la section précédente, nous allons construire deux modèles avec l'HRH qui diffère par le RID choisi. Le modèle dépend de l'espace paramétrique \mathcal{P} , défini par $P_{\text{lin}} \in [20, 40] \text{ kW.m}^{-1}$ et $d \in [10, 40] \mu\text{m}$, avec P_{lin} la densité linéique de puissance et d le jeu pastille-gaine initial.

Les snapshots, au nombre de 10×10 , sont pris de manière à discrétiser régulièrement l'espace \mathcal{P} . La POD appliquée à la matrice de snapshots primale avec un seuil valant $\epsilon_{\text{tol}} = 10^{-8}$ fournit une BR primale composée de 10 modes. Une partie de ces modes est représentée sur la figure III.35. De même que pour le cas test 2D, nous pouvons voir la discontinuité au niveau de la zone de contact pour les premiers modes excepté pour la composante u_z . Sans ces discontinuités, le jeu ne pourrait pas évoluer. Ici encore, plus le numéro du mode POD est grand, plus il est localisé et présente de forts gradients.

Nous construisons maintenant deux RID différents qui vont donner deux modèles HRH différents. Pour construire les RID, en plus de la participation du déplacement, nous rajoutons une participation des déformations libres thermiques avec un seuil POD valant $\epsilon_{\text{tol}} = 10^{-10}$ pour mieux capter ce chargement. Ce qui différencie les RID, c'est la participation à ce dernier des forces de contact avec pour le premier un seuil POD valant $\epsilon_{\text{tol}} = 10^{-4}$, et pour le second un seuil POD valant $\epsilon_{\text{tol}} = 10^{-6}$. Cela va permettre de voir l'influence de la zone de contact incluse dans le RID. Le RID est ensuite élargi par une couche d'éléments pour les deux situations. Le maillage initial ainsi que les deux RID sont représentés sur la figure III.36. Le premier RID compte 432 éléments et 40 contacts potentiels et le second RID compte 670 éléments et 105 contacts potentiels pour un maillage initial de 3680 éléments et 189 contacts potentiels. Dans le premier cas, environ 20 % de la zone de contact est dans le RID alors que

(a) Mode POD 1 selon u_x , u_y et u_z (b) Mode POD 2 selon u_x , u_y et u_z (c) Mode POD 10 selon u_x , u_y et u_z FIGURE III.35 – Cas test 3D thermo-mécanique élastique – Modes POD contenus dans la BR primale selon u_x , u_y et u_z

pour le second, il s'agit d'environ 55 %, soit d'une très grande partie. Dans les deux situations, le RID est principalement concentré sur le bord de la surface de contact. Un certain nombre d'éléments des RID reposent également sur l'axe de révolution, où la température est la plus élevée. Afin de respecter la condition LBB étendue (cf. section III.1.2), un ddl EF primal selon la composante u_r est ajouté dans la BR primale au niveau de chaque contact potentiel contenu dans le RID.

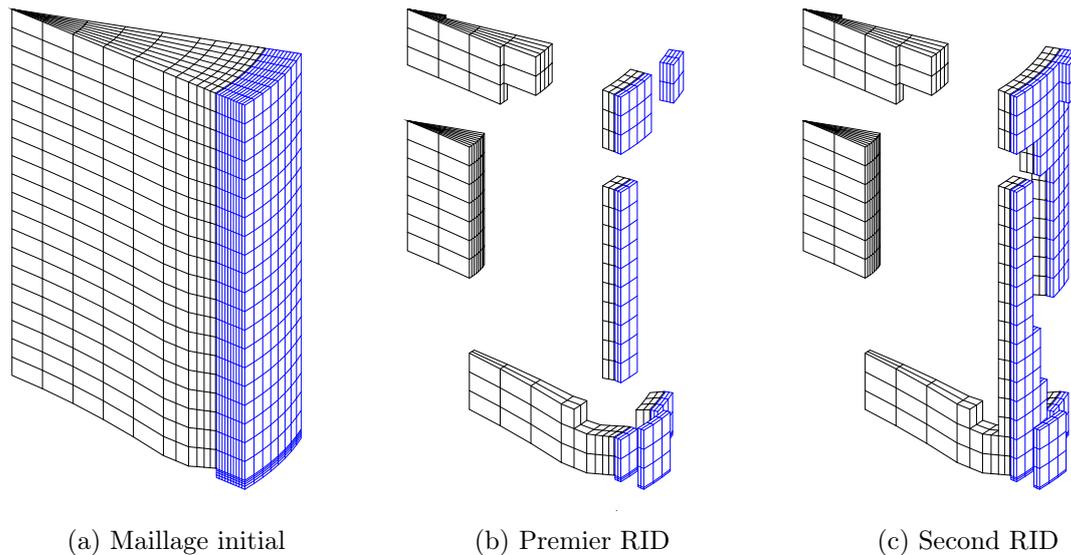


FIGURE III.36 – Cas test 3D thermo-mécanique élastique – Maillage initial et deux domaines réduits contenant plus ou moins la surface de contact

III.5.3 Application de l'hyper-réduction hybride

Nous allons comparer les solutions obtenues avec les FOM et ROM avec comme ROM les deux modèles HRH obtenus dans la section précédente pour des RID différents. Cette comparaison est réalisée en un point de \mathcal{P} , défini par ($P_{\text{lin}} = 35 \text{ kW.m}^{-1}$, $d = 20 \mu\text{m}$), qui n'a pas été pris pour les snapshots.

La figure III.37 représente la comparaison entre les solutions primales EF et HRH, construits d'une part avec le premier RID et d'une autre part avec le second RID. Cette représentation selon u_x , u_y et u_z permet de voir que les solutions primales HRH sont très proches de la solution primale EF quelque soit le RID. Les erreurs de référence sur la variable primale, calculée sur Ω et en norme 2, valent 3.6 % pour le premier RID et 1.3 % pour le second RID. L'agrandissement du RID sur la zone de contact permet ainsi d'accéder à une erreur plus petite sur la variable primale.

Nous traçons sur la figure III.38 les solutions duales EF et HRH, sans et avec reconstruction de la solution duale sur toute la zone de contact potentiel avec l'algorithme introduit en section III.1.3, pour les deux RID possibles. Pour le premier RID, la zone de contact incluse dans le RID est très petite. Seul le bas de la solution duale HRH semble bien approximer la solution duale EF, cf. figure III.38b. L'erreur duale de référence, calculée sur Γ_A^C et en norme 2, vaut 54 %. Après reconstruction sur Γ^C , l'erreur duale de référence en norme 2 vaut 50 %. On remarque tout de même que la solution duale reconstruite approxime bien les forces de contact EF sur la partie basse de la zone de contact, voir figure III.38c. Avec le modèle HRH construit avec le second RID, nous obtenons avec une très bonne représentation de la répartition non-uniforme des forces de contact, voir figure III.38d. L'erreur duale de référence, calculée sur Γ_A^C et en norme 2, vaut 10 %. Comme nous avons pu le voir section III.3, il est difficile d'approximer la solution duale et ce niveau d'erreur est déjà très bon. Après reconstruction sur Γ^C , l'erreur duale de référence en norme 2 vaut 8.4 %. Le post-traitement proposé pour la reconstruction permet d'obtenir une erreur moyenne sur Γ^C plus petite que sur Γ_A^C . Cela signifie que l'erreur de reconstruction hors du RID est encore plus basse.

Les modèles HRH, construits section III.5.2, permettent d'obtenir de bonnes approximations de la solution primale EF. Pour ce qui est de la solution duale, l'erreur duale commise par le modèle HRH avec le premier RID est plutôt élevée mais cela se comprend facilement car

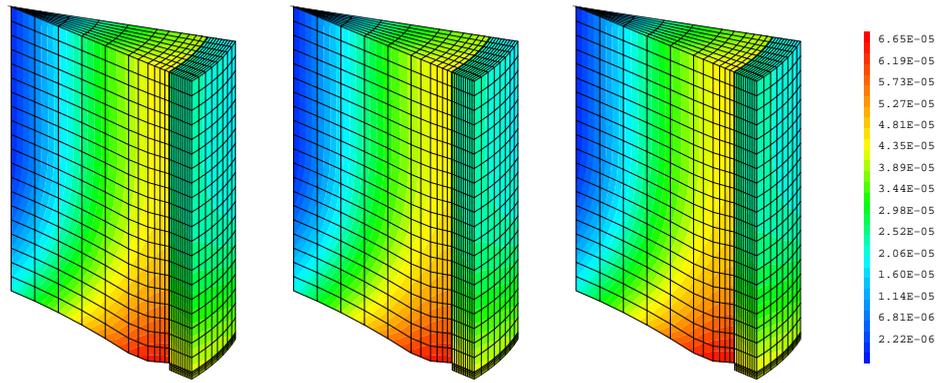
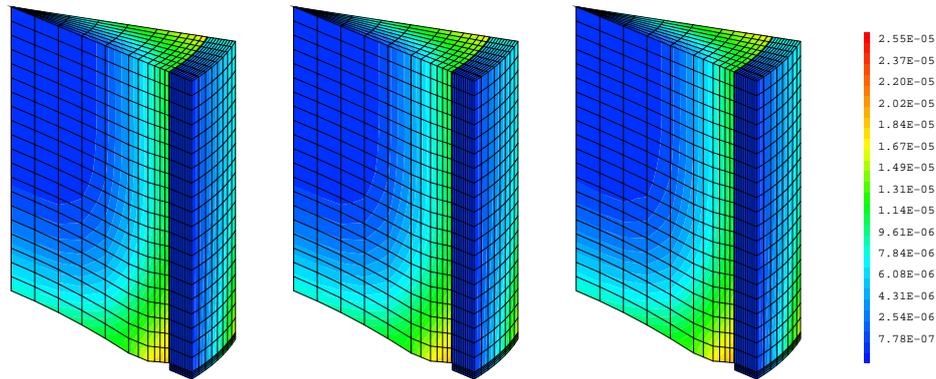
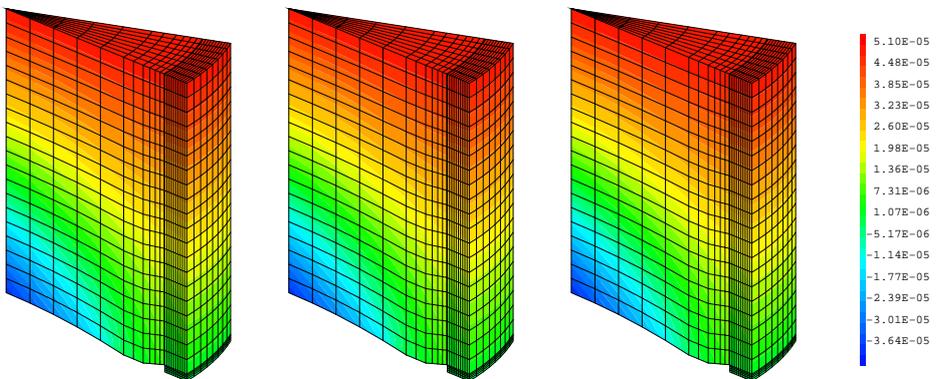
(a) Comparaison EF, HRH avec premier RID et HRH avec second RID selon u_x (b) Comparaison EF, HRH avec premier RID et HRH avec second RID selon u_y (c) Comparaison EF, HRH avec premier RID et HRH avec second RID selon u_z

FIGURE III.37 – Cas test 3D thermo-mécanique élastique – Comparaison des solutions primales EF et HRH obtenus avec les premier et second RID, selon u_x , u_y et u_z , au point ($P_{\text{in}} = 35 \text{ kW.m}^{-1}$, $d = 20 \text{ }\mu\text{m}$)

le RID ne comprend qu'une petite partie de la zone de contact. Par contre, avec ce modèle on obtient une accélération en temps CPU qui vaut 160, sans compter la projection qui peut être réalisée une fois pour toute dans \mathcal{P} ; excepté pour la force extérieure à cause du chargement thermique variable dans \mathcal{P} . Le modèle HRH avec le second RID permet d'accéder à une très bonne approximation de la solution duale EF mais l'accélération en temps de calcul est alors plus faible. Dans ce cas elle vaut 56, ce qui reste tout de même assez élevé. Pour le second RID, l'accélération décroît autant car un grand nombre de ddl EF est rajouté. Si le nombre de ddl EF rajoutés était optimisé avec le nombre de ddl minimum permettant de respecter la condition LBB étendue avec un bon conditionnement (cf. algorithme III.1 proposé), cela

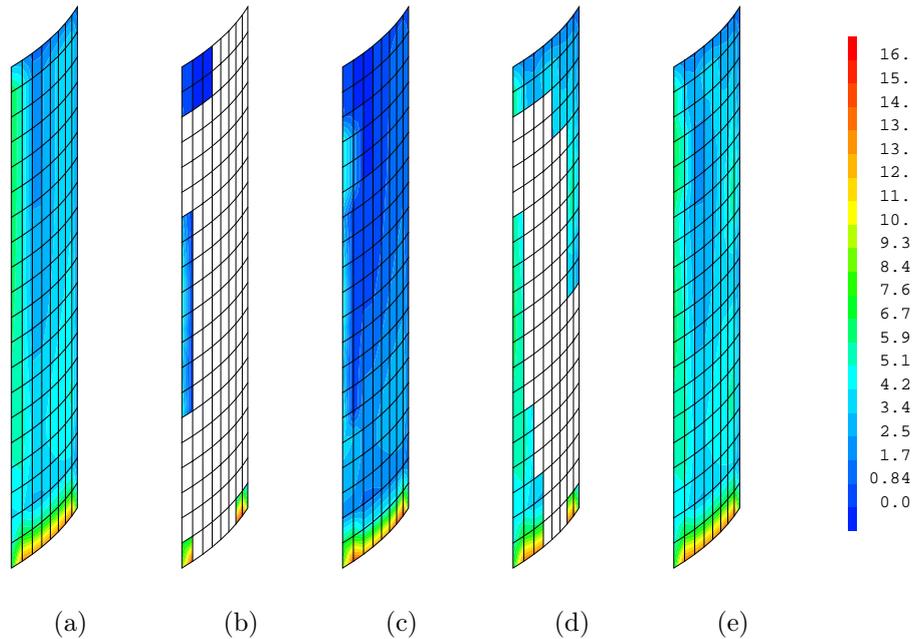


FIGURE III.38 – Cas test 3D thermo-mécanique élastique – Comparaison des solutions duales EF (a), HRH construit avec le premier RID sans (b) puis avec reconstruction (c) et HRH construit avec le second RID sans (d) puis avec reconstruction (e), le tout au point ($P_{\text{fin}} = 35 \text{ kW.m}^{-1}$, $d = 20 \mu\text{m}$)

permettrait une meilleure accélération en temps CPU. Une fois de plus, nous pouvons voir la forte influence du RID sur les erreurs primale et duale ainsi que sur l'accélération en temps de calcul.

III.5.4 Erreur du modèle HRH en fonction du seuil POD

On considère dans cette section le même espace paramétrique et les mêmes snapshots que ceux de la section III.5.2. Nous allons construire différents ROM avec l'HRH en modifiant le seuil POD pour la construction de la BR primale, ce qui modifie également le RID directement. Une participation au RID des déformations libres thermiques avec un seuil POD valant $\epsilon_{\text{tol}} = 10^{-10}$ et des forces de contact avec un seuil POD valant $\epsilon_{\text{tol}} = 10^{-6}$ est ajoutée. De plus le RID est élargi par une couche d'éléments. On trace sur la figure III.39 l'évolution de la moyenne de l'erreur de référence primale commise par le modèle HRH, sur l'ensemble des points où les snapshots ont été réalisés, en fonction du seuil POD associé à la BR primale. Nous pouvons voir dans la partie gauche de cette figure que l'erreur diminue lorsque le seuil POD diminue. Ce qui est le comportement attendu puisque l'on augmente la taille de la BR primale et par la même occasion la taille du RID. Par contre lorsque l'on continue de diminuer le seuil POD, l'erreur remonte. La raison de ce phénomène est que l'on introduit des modes qui ne sont pas physiques et qui ressemblent plutôt à du bruit. De plus, aucune relation d'importance n'existe entre les ddl utilisés pour la combinaison des modes, de sorte que les ddl associés aux plus petits modes peuvent être prédominants.

Le seuil POD à partir duquel l'erreur se met à remonter dépend du cas test ainsi que de l'espace paramétrique. Il n'est donc pas évident en général de savoir jusqu'à quel seuil POD on peut descendre dans le but d'améliorer l'approximation du ROM. Cette difficulté ne concerne pas seulement l'HRH mais toutes les méthodes qui utilisent une BR construite par POD. On la retrouve en particulier avec la PBM.

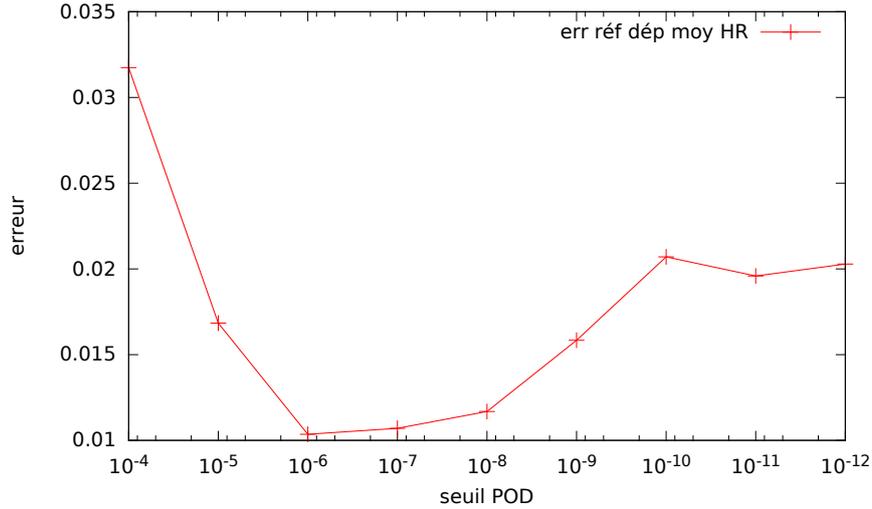


FIGURE III.39 – Cas test 3D thermo-mécanique élastique – Erreur de référence primale commise par le modèle HRH en fonction du seuil POD

Conclusions

Nous avons proposé une méthode de réduction d'ordre de modèles, l'hyper-réduction hybride introduite en section III.1, qui permet de traiter avec précision les problèmes de mécanique du contact résolus avec des multiplicateurs de Lagrange. Cette bonne approximation est due à la fois à la conservation de la base EF (restreinte au RID) pour la variable duale ainsi qu'à une BR primale hybride enrichie par des ddl EF. Cette méthode a été validée sur des cas test élastiques de différentes dimensions, à savoir 1D (cf. section III.3), 2D (cf. section III.4) et 3D (cf. section III.5), mais aussi pour différents types de chargements et différentes variations de paramètres. Les principaux outils numériques ont été développés grâce aux bibliothèques Python, voir section III.2.1, et le modèle a été intégré dans un solveur EF existant (Cast3M [Cast3M]) de façon très peu intrusive, cf. section III.2.2.

Pour des raisons de symétrie du problème de point-selle obtenu par HRH (III.8), le traitement du contact se fait avec un algorithme nœud-à-nœud. Pour que les résultats obtenus via cette stratégie soient corrects, par exemple sans interpénétration, il faut donc que les maillages potentiellement en contact soient conformes, c'est-à-dire en vis-à-vis, et que le déplacement tangent à la surface de contact soit très petit. Comme on a pu le voir, plus la dimension et la complexité du problème augmentent, plus il est difficile de construire un maillage conforme sur la surface de contact. C'est pourquoi pour être plus générique, il faudrait développer l'HRH pour un contact traité avec un algorithme de type nœud-à-surface ou surface à surface.

Aussi, plus l'espace paramétrique est grand, plus il est difficile de fournir un ROM capable de bien approximer l'ensemble des solutions et d'obtenir cette approximation avec des temps de calcul faibles. D'ailleurs, nous avons montré qu'en voulant grandement augmenter le nombre de modes POD pour tenter de mieux approximer la solution sur un certain espace paramétrique, il se pouvait que l'erreur se mette à croître. C'est un problème connu en réduction d'ordre de modèles pour lequel une solution est de diviser l'espace paramétrique en morceaux afin de construire sur chacun une BR locale capable de bien approximer l'espace des solutions associé à cet espace paramétrique réduit [Amsallem *et al.*, 2012].

Chapitre IV

Hyper-réduction hybride pour la mécanique du contact avec non-linéarités matérielles

Pour résoudre un problème de mécanique avec un comportement non-linéaire, l'idée est de se ramener à un problème linéarisé qui va être résolu itérativement jusqu'à convergence. De la même manière que le problème élastique a été hyper-réduit, il est possible d'hyper-réduire le problème linéarisé résolu à chaque itération.

Dans un premier temps, nous formulons l'hyper-réduction hybride pour un problème de mécanique avec un comportement non-linéaire. Dans un second temps, nous étendons cette formulation pour un problème de mécanique non-linéaire avec un contact traité par multiplieurs de Lagrange.

La méthode d'hyper-réduction hybride est ensuite appliquée à un cas test 2D axisymétrique de mécanique du contact dans Cast3M avec pour le premier solide (ici le combustible) une loi de comportement élasto-plastique de type écrouissage isotrope linéaire et pour le second solide (ici la gaine) une loi de comportement visco-plastique de type Norton permettant d'obtenir du fluage.

Sommaire

IV.1	Hyper-réduction hybride pour un matériau non-linéaire	97
IV.1.1	Résolution par éléments finis avec un comportement non-linéaire	97
IV.1.2	Hyper-réduction hybride pour un matériau non-linéaire	100
IV.2	Hyper-réduction hybride pour le contact avec des matériaux non-linéaires	101
IV.2.1	Mécanique du contact avec un comportement non-linéaire	101
IV.2.2	Hyper-réduction hybride en mécanique du contact pour un comportement non-linéaire	101
IV.3	Implémentation dans Cast3M	102
IV.4	Application de l'hyper-réduction hybride à un cas test 2D avec Cast3M	103
IV.4.1	Cas test 2D non-linéaire	103
IV.4.2	Réduction de l'ordre du modèle	105
IV.4.3	Résultats obtenus avec le modèle hyper-réduit hybride	106

IV.1 Hyper-réduction hybride pour un matériau non-linéaire

Commençons par introduire le traitement de la non-linéarité matérielle avec la méthode des EF dans le cas d'un problème de mécanique sans contact.

IV.1.1 Résolution par éléments finis avec un comportement non-linéaire

IV.1.1.a Problème fort pour un comportement non-linéaire

La loi de comportement, appelée également équation constitutive, relie localement le tenseur des contraintes au tenseur des déformations. Pour un comportement non-linéaire, la relation peut s'écrire de manière générale :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \mathcal{F}(\underline{\underline{\varepsilon}}) \quad \text{dans } \Omega. \quad (\text{IV.1})$$

Pour simplifier la mise en équation, nous considérons que le chargement est décrit avec un seul pas de temps.

La formulation forte du problème quasi-statique, sous l'hypothèse des petites déformations, pour une loi de comportement non-linéaire (IV.1) s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}} = \underline{f} & \text{dans } \Omega, \\ \underline{\underline{\sigma}} = \mathcal{F}(\underline{\underline{\varepsilon}}) & \text{dans } \Omega, \\ \underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2} (\operatorname{grad} \underline{u} + (\operatorname{grad} \underline{u})^T) & \text{dans } \Omega, \\ \underline{u} = \underline{u}_0 & \text{sur } \Gamma^D, \\ \underline{\underline{\sigma}} \underline{n} = \underline{g} & \text{sur } \Gamma^N. \end{array} \right. \quad (\text{IV.2})$$

avec les mêmes notations que dans la section II.2. Pour une présentation plus générale, il faut écrire le problème sous forme d'incrément de temps, voir [Besson *et al.*, 2009].

IV.1.1.b Formulation variationnelle pour un comportement non-linéaire

La formulation variationnelle primale du problème (IV.2) s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \underline{u} \in \mathcal{V} \text{ tel que} \\ R(\underline{u}, \underline{v}) = 0, \quad \forall \underline{v} \in \mathcal{V}_0, \end{array} \right. \quad (\text{IV.3})$$

où \mathcal{V} et \mathcal{V}_0 sont définis comme précédemment dans (II.30) et (II.29), à savoir $\mathcal{V} = \{v = r(\underline{u}_0) + \tilde{u} \mid \tilde{u} \in \mathcal{V}_0\}$ et $\mathcal{V}_0 = \{v \in (H^1(\Omega))^D \mid v = \underline{0} \text{ sur } \Gamma^D\}$ et R dénote le résidu sous forme intégrale défini par :

$$R(\underline{u}, \underline{v}) = \int_{\Omega} \mathcal{F}(\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u})) : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{v}) \, d\Omega - \int_{\Omega} \underline{f}^T \underline{v} \, d\Omega + \int_{\Gamma^N} \underline{g}^T \underline{v} \, d\Gamma. \quad (\text{IV.4})$$

Pour une loi de comportement non-linéaire (IV.1), le problème (IV.3) est non-linéaire en déformations et donc en déplacements. Sa résolution se fait alors en général à l'aide d'un algorithme itératif qui résout à chaque itération un problème linéarisé.

IV.1.1.c Algorithme de Newton

L'algorithme de Newton est classiquement employé pour la résolution de problèmes non-linéaires car il garantit une convergence quadratique de l'erreur. Il consiste à résoudre itérativement un problème de la forme :

$$\begin{cases} \text{Trouver } \underline{x} \text{ tel que} \\ f(\underline{x}) = 0. \end{cases} \quad (\text{IV.5})$$

L'idée est de construire un schéma itératif où \underline{x}^k tend vers \underline{x} , la solution du problème (IV.5), lorsque k devient grand. Pour cela, l'algorithme de Newton se base sur un développement limité de Taylor à l'ordre 1 de f autour de \underline{x}^{k-1} :

$$f(\underline{x}^k) \approx f(\underline{x}^{k-1}) + \left(\frac{\partial f}{\partial \underline{x}} \right)_{|\underline{x}^{k-1}} \delta \underline{x}^k, \quad \text{avec } \delta \underline{x}^k = \underline{x}^k - \underline{x}^{k-1}. \quad (\text{IV.6})$$

Puisque l'on cherche à annuler $f(\underline{x}^k)$, cela se ramène à résoudre un problème linéaire :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \underline{x}} \right)_{|\underline{x}^{k-1}} \delta \underline{x}^k = -f(\underline{x}^{k-1}). \quad (\text{IV.7})$$

L'algorithme IV.1 permet de résumer les différentes étapes de l'algorithme de Newton pour la résolution d'un problème non-linéaire.

Algorithme IV.1 : Algorithme de Newton pour la résolution de problèmes non-linéaires

Entrées : la fonction non-linéaire f , l'initialisation de l'algorithme \underline{x}^0 (nul par défaut), un seuil d'erreur ϵ_{cvg}

Sorties : une approximation de la solution \underline{x} du problème $f(\underline{x}) = 0$

Initialisation de \underline{x}^0 ;

Calcul de $f(\underline{x}^0)$;

$k = 0$;

tant que $f(\underline{x}^k) > \epsilon_{\text{cvg}}$, **faire**

$k = k + 1$;
Résoudre le problème linéaire (IV.7) ;
$\underline{x}^k = \underline{x}^{k-1} + \delta \underline{x}^k$;
Calcul de $f(\underline{x}^k)$;

IV.1.1.d Résolution de la mécanique non-linéaire par un processus itératif

Pour la résolution du problème (IV.3), on construit un processus itératif tel qu'à l'itération k on cherche à annuler le résidu $R(\underline{u}^k, v)$:

$$R(\underline{u}^k, v) = \int_{\Omega} \mathcal{F}(\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}^k)) : \underline{\underline{\varepsilon}}(v) \, d\Omega - \int_{\Omega} \underline{f}^T v \, d\Omega + \int_{\Gamma^N} \underline{g}^T v \, d\Gamma. \quad (\text{IV.8})$$

En appliquant un développement de Taylor à l'ordre 1 de l'équation constitutive (IV.1) autour de \underline{u}^{k-1} , on obtient :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}^k)) &\approx \mathcal{F}(\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}^{k-1})) + \underline{\underline{H}}_{|\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}^{k-1})} : (\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}^k) - \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}^{k-1})) \\ &\approx \mathcal{F}(\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}^{k-1})) + \underline{\underline{H}}_{|\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}^{k-1})} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\delta \underline{u}^k), \end{aligned} \quad (\text{IV.9})$$

avec $\underline{\underline{H}}$ la matrice jacobienne ou matrice tangente du comportement (en mécanique des solides) définie telle que :

$$\underline{\underline{H}} = \frac{\partial \underline{\underline{\sigma}}}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}}. \quad (\text{IV.10})$$

En remplaçant (IV.9) dans (IV.8), nous obtenons finalement un développement à l'ordre 1 de R autour de \underline{u}^{k-1} :

$$R(\underline{u}^k, \underline{v}) \approx R(\underline{u}^{k-1}, \underline{v}) + \int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{v}) : \underline{\underline{H}}|_{\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}^{k-1})} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\delta \underline{u}^k) \, d\Omega. \quad (\text{IV.11})$$

En annulant $R(\underline{u}^k, \underline{v})$ dans (IV.11), le problème linéaire à résoudre à chaque itération k s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \delta \underline{u}^k \in \mathcal{V}_0 \text{ tel que} \\ \int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{v}) : \underline{\underline{H}}|_{\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}^{k-1})} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\delta \underline{u}^k) \, d\Omega = -R(\underline{u}^{k-1}, \underline{v}), \quad \forall \underline{v} \in \mathcal{V}_0. \end{array} \right. \quad (\text{IV.12})$$

En particulier, la matrice jacobienne du résidu R utilisée dans l'algorithme de Newton classique IV.1 est approximée en mécanique des solides par la relation :

$$\left(\frac{\partial R}{\partial \underline{u}} \right)_{\underline{u}^{k-1}} \delta \underline{u}^k \approx \int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{v}) : \underline{\underline{H}}|_{\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}^{k-1})} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\delta \underline{u}^k) \, d\Omega \quad (\text{IV.13})$$

L'équation (IV.9) correspond à une prédiction linéaire de la contrainte. En effet, en notant $\underline{\underline{\sigma}}^{k-1} \equiv \mathcal{F}(\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}^{k-1}))$ et $\underline{\underline{\sigma}}^{*k}$ une prédiction de $\mathcal{F}(\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}^k))$, il est possible d'écrire :

$$\underline{\underline{\sigma}}^{*k} = \underline{\underline{\sigma}}^{k-1} + \underline{\underline{H}}|_{\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}^{k-1})} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\delta \underline{u}^k). \quad (\text{IV.14})$$

Les prédicteurs se différencient alors par l'opérateur de recherche $\underline{\underline{H}}$ utilisé. Dans le développement précédent, nous avons utilisé la matrice jacobienne (IV.10) qui permet d'obtenir un schéma itératif (IV.12) d'ordre 2. D'autres méthodes existent où il est possible d'utiliser comme opérateur de recherche :

- la matrice sécante ou module sécant. Les composantes de ce tenseur d'ordre 4 sont définies par :

$$\left(\underline{\underline{H}}|_{\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}^{k-1})} \right)_{ijkl} = \frac{(\underline{\underline{\sigma}}^{k-1})_{ij} - (\underline{\underline{\sigma}}^{k-2})_{ij}}{(\underline{\underline{\varepsilon}}^{k-1})_{kl} - (\underline{\underline{\varepsilon}}^{k-2})_{kl}}. \quad (\text{IV.15})$$

Cette méthode consiste à approximer l'opérateur tangent à partir des deux derniers itérés. Il est possible de montrer que cette méthode est super-linéaire et converge à l'ordre $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ – nombre d'or valant approximativement 1,62 – (voir [Isaacson et Keller, 1966] p. 99–101).

- la matrice élastique définie à partir du tenseur d'élasticité $\underline{\underline{C}}$:

$$\underline{\underline{H}} = \underline{\underline{C}}. \quad (\text{IV.16})$$

Ce choix est fait lorsque la matrice tangente du comportement n'est pas facile, voire impossible, à obtenir et lorsque l'on ne veut pas avoir à évaluer la matrice sécante à chaque itération. La matrice élastique se calcule directement à partir des coefficients de la loi de Hooke et est constante en itération. Cependant, dans ce cas, l'ordre de convergence de l'algorithme (IV.12) est simplement linéaire.

Le schéma itératif (IV.12) peut ainsi être vu comme un schéma de prédiction/correction, avec une étape de prédiction de la contrainte (IV.14) et une étape de correction qui consiste à mettre à jour le tenseur des contraintes $\underline{\underline{\sigma}}$ à partir d'une évaluation de l'équation constitutive locale (IV.1) :

$$\underline{\underline{\sigma}}^k = \mathcal{F}(\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}^k)) \quad (\text{IV.17})$$

Cette correction va être utilisée à l'itération suivante pour le calcul du second membre, voir (IV.12).

IV.1.1.e Formulation du problème éléments finis pour un comportement non-linéaire

En appliquant la méthode des EF, la discrétisation de la formulation faible du problème linéarisé (IV.12) s'écrit :

$$\begin{cases} \text{Trouver } \delta \underline{U}^k \in \mathbb{R}^N \text{ tel que} \\ \underline{\underline{K}}^{k-1} \delta \underline{U}^k = -\underline{R}^{k-1}, \end{cases} \quad (\text{IV.18})$$

avec $\delta \underline{U}^k = \underline{U}^k - \underline{U}^{k-1}$ et où $\underline{\underline{K}}^{k-1}$ et \underline{R}^{k-1} sont respectivement la matrice de rigidité et le résidu définis par :

$$(\underline{\underline{K}}^{k-1})_{ij} = \int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}(\varphi_i) : \underline{\underline{H}}_{|\underline{\underline{\varepsilon}}(\sum_{p=1}^N \varphi_p u_p^{k-1})} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\varphi_j) \, d\Omega, \quad \forall i, j \in \llbracket 1, N \rrbracket^2, \quad (\text{IV.19})$$

$$(\underline{R}^{k-1})_i = R \left(\sum_{p=1}^N \varphi_p u_p^{k-1}, \varphi_i \right), \quad \forall i \in \llbracket 1, N \rrbracket \quad (\text{IV.20})$$

$(u_p^{k-1})_{p=1}^N$ dénotent les ddl EF contenus dans \underline{U}^{k-1} .

Le résidu \underline{R} est en général intégré à l'aide d'une formule de quadrature de Gauss. À chaque itération k et à chaque point de Gauss, il faut évaluer la contrainte pour obtenir le nouveau résidu \underline{R}^k :

$$\underline{\underline{\sigma}}^k = \mathcal{F} \left(\underline{\underline{\varepsilon}} \left(\sum_{p=1}^N \varphi_p u_p^k \right) \right) \quad (\text{IV.21})$$

Notons que cette équation constitutive étant généralement sous la forme d'une équation différentielle en temps, divers algorithmes d'intégration temporelle (principalement implicites ou explicites) peuvent être utilisés, voir [Besson *et al.*, 2009]. Cette étape est souvent très lourde en temps de calcul.

IV.1.2 Hyper-réduction hybride pour un matériau non-linéaire

Nous avons introduit dans la section II.2 l'HR classique [Ryckelynck, 2009] pour un problème élastique. Or la méthode a initialement été proposée pour traiter des non-linéarités matérielles. De la même manière que le problème EF élastique (II.44) est hyper-réduit pour obtenir le problème (II.63), le problème EF linéarisé (IV.18) est hyper-réduit pour obtenir le problème défini, à l'itération k , par :

$$\begin{cases} \text{Trouver } \delta \underline{\gamma}^k \in \mathbb{R}^l \text{ tel que} \\ \underline{\underline{V}}[\mathcal{A}, :]^T \underline{\underline{K}}^{k-1}[\mathcal{A}, \mathcal{A} \cup \mathcal{I}] \underline{\underline{V}}[\mathcal{A} \cup \mathcal{I}, :] \delta \underline{\gamma}^k = -\underline{\underline{V}}[\mathcal{A}, :]^T \underline{R}^{k-1}[\mathcal{A}]. \end{cases} \quad (\text{IV.22})$$

À chaque itération, les projections de la rigidité $\underline{\underline{K}}^{k-1}$ et du résidu \underline{R}^{k-1} obtenues par EF sont réalisées après restriction au RID et l'intégration de la loi de comportement se fait uniquement sur le RID car \underline{R}^{k-1} n'a besoin d'être évalué que sur le RID. Le problème (IV.22) ne dépend

donc plus de la complexité du problème initial (IV.18). C'est ce qui permet à cette méthode d'être très intéressante en terme de temps de calcul lorsqu'il y a des non-linéarités matérielles.

Si le déplacement est obtenu partout par la relation $\underline{U} = \underline{V}\gamma$, ce n'est pas le cas des déformations et des contraintes qui ne sont définies que sur le RID. Il est alors possible de les reconstruire sur Ω à l'aide d'une BR associée à chacune des grandeurs en cherchant les ddl associés à la BR qui minimisent la différence entre la solution hyper-réduite et la combinaison linéaire de la BR sur le RID, voir [Ryckelynck *et al.*, 2015].

La différence entre l'HR classique et l'HRH que nous proposons section III.1.2 n'apparaît pas clairement dans l'équation (IV.22). Il s'agit du caractère hybride de la BR primale couplant modes POD et fonctions de formes EF, voir équation (III.12). Cette stratégie hybride permet de mieux traiter des zones de non-linéarité locales. Nous l'avons introduit section III.1.2 pour mieux traiter le contact mais cette stratégie peut également être utilisée pour traiter des non-linéarités matérielles, de l'endommagement ou des défauts ponctuels.

IV.2 Hyper-réduction hybride pour le contact avec des matériaux non-linéaires

Nous nous intéressons maintenant à la réduction d'ordre de modèles faisant intervenir à la fois des non-linéarités matérielles ainsi que des non-linéarités de contact avec un contact traité numériquement par multiplicateurs de Lagrange. Nous étendons pour cela la méthode d'hyper-réduction hybride proposée dans la section III.1 et étendue aux matériaux non-linéaires en section IV.1.

IV.2.1 Mécanique du contact avec un comportement non-linéaire

Pour traiter le contact par multiplicateurs de Lagrange avec un comportement non-linéaire des matériaux, nous reprenons les équations de contact pour un comportement élastique (II.75) auquel nous ajoutons la résolution itérative sur le déplacement (IV.18) avec \underline{K}^{k-1} et \underline{R}^{k-1} définis comme précédemment, cf. équations (IV.19) et (IV.20). Le problème linéaire EF à l'itération k s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\delta\underline{U}^k, \underline{\Lambda}) \in \mathbb{R}^N \times (\mathbb{R}^+)^{N_\lambda} \text{ tel que} \\ \underline{K}^{k-1} \delta\underline{U}^k + \underline{B}^T \underline{\Lambda} = -\underline{R}^{k-1} \\ \underline{\Lambda}^T (\underline{D} - \underline{B} \delta\underline{U}^k) = \underline{\Lambda}^T \underline{B} \underline{U}^{k-1} \\ \underline{B} \delta\underline{U}^k \leq \underline{D} - \underline{B} \underline{U}^{k-1} \end{array} \right. \quad (\text{IV.23})$$

À chaque itération de l'algorithme incrémental, on se retrouve à résoudre un problème mixte de contact (IV.23) comme pour un comportement élastique (II.75). L'algorithme de résolution du contact est indépendant de la résolution itérative permettant de traiter un matériau non-linéaire. Par ailleurs, l'intégration de la loi de comportement n'est pas modifiée par rapport à la formulation sans contact.

IV.2.2 Hyper-réduction hybride en mécanique du contact pour un comportement non-linéaire

Dans l'algorithme IV.2, nous explicitons les grandes étapes pour résoudre le problème de mécanique du contact pour un comportement non-linéaire à l'aide de l'hyper-réduction hy-

bride. Dans cet algorithme, le problème linéarisé à l'itération k s'obtient à partir du problème linéarisé EF (IV.23) par le même raisonnement que pour obtenir le problème HRH avec un comportement élastique (III.8). Après restriction sur le RID et projection sur la BR primale, il s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\delta\gamma^k, \underline{\Delta}[\mathcal{A}_\lambda]) \in \mathbb{R}^l \times (\mathbb{R}^+)^{N_\lambda^C} \text{ tel que} \\ \underline{V}[\mathcal{A},:]^T \underline{K}^{k-1}[\mathcal{A}, \mathcal{A} \cup \mathcal{I}] \underline{V}[\mathcal{A} \cup \mathcal{I},:] \delta\gamma^k \\ \quad + \underline{V}[\mathcal{A}_c, :]^T \underline{B}[\mathcal{A}_\lambda, \mathcal{A}_c]^T \underline{\Delta}[\mathcal{A}_\lambda] = -\underline{V}[\mathcal{A},:]^T \underline{R}^{k-1}[\mathcal{A}] \\ \underline{\Delta}[\mathcal{A}_\lambda]^T (\underline{D}[\mathcal{A}_\lambda] - \underline{B}[\mathcal{A}_\lambda, \mathcal{A}'_c] \underline{V}[\mathcal{A}'_c, :] \delta\gamma^k) = \underline{\Delta}[\mathcal{A}_\lambda]^T \underline{B}[\mathcal{A}_\lambda, \mathcal{A}'_c] \underline{V}[\mathcal{A}'_c, :] \gamma^{k-1} \\ \underline{B}[\mathcal{A}_\lambda, \mathcal{A}'_c] \underline{V}[\mathcal{A}'_c, :] \delta\gamma^k \leq \underline{D}[\mathcal{A}_\lambda] - \underline{B}[\mathcal{A}_\lambda, \mathcal{A}'_c] \underline{V}[\mathcal{A}'_c, :] \gamma^{k-1} \end{array} \right. \quad (\text{IV.24})$$

Les notations sont les mêmes que celles utilisées dans la section III.1.2.

Algorithme IV.2 : Résolution d'un problème de mécanique du contact pour un comportement non-linéaire avec l'hyper-réduction hybride

Entrées : matrices du problème EF linéarisé (IV.23), un critère de convergence, une initialisation de l'algorithme γ^0 de manière à vérifier les conditions aux limites de Dirichlet, un RID, une BR, une méthode d'intégration de l'équation constitutive aux points de Gauss

Sorties : une solution HRH ($\underline{U}, \underline{\Delta}[\mathcal{A}_\lambda]$) au problème de mécanique du contact pour un comportement non-linéaire

Initialisation de γ^0 ;

Calcul de $\underline{R}^0[\mathcal{A}]$;

$k = 0$;

tant que non vérification du critère de convergence faire

$k = k + 1$;

 Projection restreinte au RID des matrices \underline{K}^{k-1} , \underline{B} et \underline{R}^{k-1} sur la BR \underline{V} ;

 Résolution du problème de contact hyper-réduit hybride linéarisé (IV.24) ;

 Actualisation des ddl associés à la BR primale, $\gamma^k = \delta\gamma^k + \gamma^{k-1}$;

 Reconstruction des ddl primaux EF dans le RID, $\underline{U}[\mathcal{A} \cup \mathcal{I}] = \underline{V}[\mathcal{A} \cup \mathcal{I},:] \gamma^k$;

 Intégration de la loi de comportement sur le RID pour obtenir $\underline{R}^k[\mathcal{A}]$;

Calcul des ddl associés aux déplacements sur la base EF, $\underline{U} = \underline{V} \gamma^k$;

IV.3 Implémentation dans Cast3M

Pour résoudre le problème de mécanique avec un comportement non-linéaire, Cast3M utilise l'algorithme de type quasi-Newton pour lequel l'opérateur de recherche est la matrice de rigidité élastique invariante en itération et en temps, cf. équation (IV.16). Dans le cadre de la plate-forme PLÉIADES, la résolution mécanique non-linéaire est réalisée par la procédure INCREPL [Pascal, 2007] écrite en Gibiane. La procédure équivalente dans la version classique de Cast3M est INCREME. Cette dernière est appelée par PASAPAS qui s'occupe du chaînage temporel associé à l'historique du problème (thermo-)mécanique à résoudre. INCREPL, optimisé pour les lois de comportement utilisées pour la modélisation du combustible et de la gaine, permet de ne résoudre qu'un pas de temps et peut ainsi être couplé à d'autres phénomènes physiques (cf. figure I.10).

À chaque itération, le problème linéarisé est résolu à l'aide de la procédure RESO. Or l'implémentation de l'HRH pour un problème linéaire avec contact, réalisé en section III.2.2, a déjà permis d'appliquer l'HRH en prétraitement de cet opérateur. Pour cette étape nous

avons donc réutilisé la procédure écrite pour le cas élastique. Puisque Cast3M utilise comme opérateur de recherche la matrice de rigidité élastique, il est suffisant d'en obtenir la projection restreinte une fois par pas de temps. La rigidité de contact est projetée à chaque pas de temps. Seul le résidu restreint au RID doit être projeté à chaque itération.

Après résolution du problème HRH, on reconstruit le déplacement sur la base EF dans le RID. L'intégration de la loi de comportement est réalisée comme pour le problème EF, elle est seulement demandée sur le RID.

Pour vérifier la convergence dans l'algorithme de type quasi-Newton, nous utilisons un critère de convergence issu de [Michel *et al.*, 2018]. Ce dernier porte sur le résidu en contrainte au sens fort, soit l'erreur entre la contrainte prédite $\underline{\underline{\sigma}}^{*k}$ (IV.14) et la contrainte calculée $\underline{\underline{\sigma}}^k$ (IV.17) à l'itération k . Le critère de convergence s'écrit :

$$\max \left\{ \underline{\underline{R}}_{\sigma}^k + \epsilon_r \underline{\underline{\sigma}}^k \right\} < \epsilon_a \quad \text{avec} \quad \underline{\underline{R}}_{\sigma}^k = \underline{\underline{\sigma}}^k - \underline{\underline{\sigma}}^{*k} = \underline{\underline{\sigma}}^k - \left(\underline{\underline{\sigma}}^{k-1} + \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\delta \underline{\underline{u}}^k) \right) \quad (\text{IV.25})$$

où ϵ_a et ϵ_r sont respectivement les seuils associés à l'erreur absolue et l'erreur relative. Pour l'HRH, nous restreignons seulement le critère au RID.

À chaque nouveau pas de temps, les conditions initiales sont déduites de la solution obtenue après convergence du pas de temps précédent. Il faut par contre actualiser la rigidité de contact et le jeu initial associé en fonction du déplacement au pas de temps précédent pour le traitement du contact.

IV.4 Application de l'hyper-réduction hybride à un cas test 2D avec Cast3M

IV.4.1 Cas test 2D non-linéaire

Nous reprenons la géométrie du cas test 2D présenté section III.4. Les conditions aux limites sont légèrement changées afin de varier les exemples traités par HRH, voir figure IV.1. Plus précisément, la condition de type contact en bas du combustible est modifiée en une condition de Dirichlet homogène en u_z et la condition de Dirichlet homogène en u_z qu'il y avait en haut du combustible est retirée.

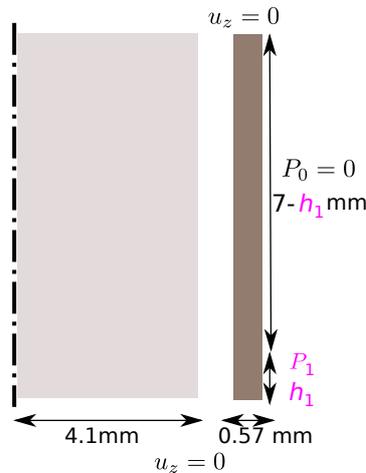


FIGURE IV.1 – Cas test 2D axisymétrique de mécanique du contact entre un solide élasto-plastique et un solide visco-plastique

Le comportement des matériaux est cette fois non-linéaire. Le problème est alors temporel et un historique de chargement doit être fourni. On considère une pression P_1 qui va croître

linéairement entre 0 et 200 MPa au cours du temps $t \in [0,1]$ s. La hauteur h_1 sur laquelle la pression P_1 est appliquée est fixée à 0.6 mm. Le combustible a un comportement élasto-plastique isotrope ($E = 190$ GPa, $\nu = 0.3$) de limite d'élasticité $\sigma_0 = 80$ MPa. Il suit une loi d'écoulement isotrope linéaire de module $H = 1$ GPa selon un critère d'écoulement de von Mises, voir section IV.4.1.a. La gaine est visco-plastique isotrope ($E = 78$ GPa, $\nu = 0.34$) suivant une loi de Norton avec comme paramètre $K = 10^3$ MPa.s $^{1/(n-1)}$ et comme coefficient $n = 5$, voir section IV.4.1.b. Cette dernière loi est sans écrouissage. En pratique, les lois de comportement et l'intégration associées sont générées par le logiciel MFRONT [Helfer *et al.*, 2015 ; MFront].

Les seuils pour le critère de convergence sont fixés à $\epsilon_r = 10^{-5}$ pour l'erreur relative et $\epsilon_a = 1$ MPa pour l'erreur absolue, cf. équation (IV.25).

IV.4.1.a Comportement non-linéaire du combustible

On suppose que le combustible suit une loi d'écoulement plastique avec écrouissage isotrope. Le domaine d'élasticité est alors défini tel que $f \leq 0$, f caractérisant la surface d'écoulement. Dans ce cas, f s'écrit :

$$f(\underline{\underline{\sigma}}, p) = \sigma_{\text{eq}} - \sigma_s(p) \quad (\text{IV.26})$$

où σ_{eq} représente la contrainte équivalente et $\sigma_s(p)$ le seuil de plasticité dépendant de l'état d'écrouissage. Nous prenons comme contrainte équivalente la contrainte de von Mises, définie par :

$$\sigma_{\text{eq}} = \left(\frac{3}{2} \underline{\underline{\underline{s}}} : \underline{\underline{\underline{s}}} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{IV.27})$$

où $\underline{\underline{\underline{s}}}$ est le déviateur des contraintes :

$$\underline{\underline{\underline{s}}} = \underline{\underline{\underline{\sigma}}} - \frac{1}{3} \text{tr}(\underline{\underline{\underline{\sigma}}}) \underline{\underline{\underline{I}}}. \quad (\text{IV.28})$$

Nous considérons un écrouissage linéaire :

$$\sigma_s(p) = \sigma_0 + Hp \quad (\text{IV.29})$$

avec σ_0 dénote le seuil d'élasticité initial, H le module d'écrouissage et p la déformation plastique cumulée. Les deux paramètres de la loi sont ainsi σ_0 et H .

IV.4.1.b Comportement non-linéaire de la gaine

On utilise pour la gaine une loi de comportement visco-plastique, qui dépend donc du temps. La relation de comportement s'écrit :

$$\underline{\underline{\underline{\sigma}}} = \underline{\underline{\underline{C}}} : (\underline{\underline{\underline{\epsilon}}} - \underline{\underline{\underline{\epsilon}}}^{\text{VP}}) \quad (\text{IV.30})$$

où $\underline{\underline{\underline{\epsilon}}}^{\text{VP}}$ dénote alors la déformation visco-plastique. Nous nous plaçons dans le cas où la loi de fluage est de type Norton. La vitesse de déformation visco-plastique suit alors une loi en puissance :

$$\underline{\underline{\underline{\dot{\epsilon}}}}^{\text{VP}} = \frac{3}{2\sigma_{\text{eq}}} \left(\frac{\sigma_{\text{eq}}}{K} \right)^{n-1} \underline{\underline{\underline{s}}}. \quad (\text{IV.31})$$

avec K la consistance viscoplastique du matériau, n le coefficient de sensibilité à la vitesse de déformation, σ_{eq} la contrainte équivalente (IV.27) et $\underline{\underline{\underline{s}}}$ le déviateur des contraintes (IV.28). Les deux paramètres de la loi sont K et n .

IV.4.2 Réduction de l'ordre du modèle

Ici, le paramètre sera le jeu initial d . L'espace paramétrique \mathcal{P} est défini par $d \in [5,15] \mu\text{m}$. Pour collecter les snapshots, nous effectuons deux simulations aux extrémités de \mathcal{P} , soit pour $d = 5$ et $d = 15 \mu\text{m}$. Les snapshots sont pris à chaque pas de temps, soit 20 par simulation.

Pour construire la BR primale, nous appliquons la POD aux snapshots de la variable primale pour un seuil POD $\epsilon_{\text{tol}} = 10^{-10}$ suffisamment petit pour bien approximer les non-linéarités matérielles. La base POD pour ce seuil est composée de 30 vecteurs. Quelques modes POD de la BR primale sont représentés sur la figure IV.2. Comparons ces derniers à ceux obtenus pour le cas 2D élastique, voir figure III.16. La forme des premiers modes selon u_z est assez différente à cause des conditions aux limites qui diffèrent. Ensuite nous pouvons remarquer que contrairement au dernier mode du cas 2D élastique (cf. figure III.16d) où les grands gradients sont localisés sur la zone de contact, pour ce cas ils sont également localisés sur les zones où l'on va trouver de la plasticité (cf. figure IV.2d). Les non-linéarités sont difficiles à capter dans les modes, c'est pourquoi un grand nombre de modes est nécessaire pour ce cas test.

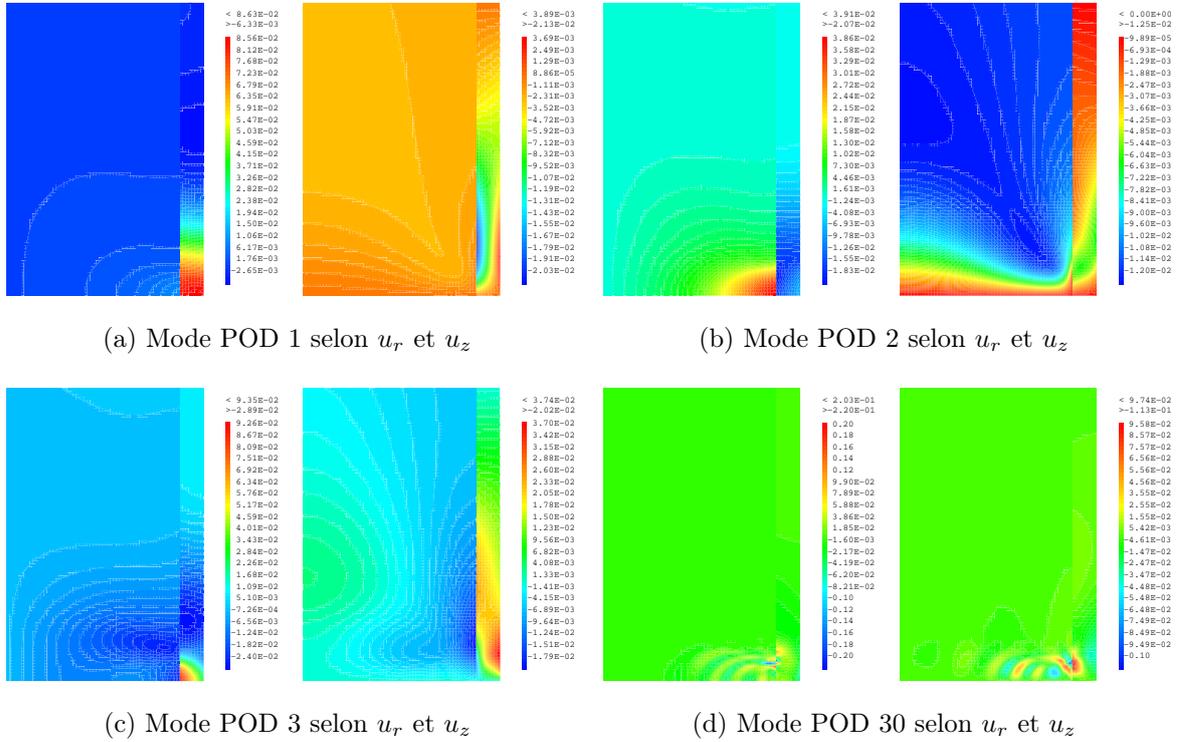


FIGURE IV.2 – Cas test 2D élasto-visco-plastique – Modes POD associés au déplacement représentés selon u_r et u_z

Pour construire le RID, l'algorithme DEIM est appliqué à une base POD associée aux multiplicateurs de Lagrange construite pour un seuil POD $\epsilon_{\text{tol}} = 10^{-8}$. Nous ajoutons également une participation des contraintes au RID dans le but de bien tenir compte des non-linéarités. L'algorithme DEIM est appliqué à la base POD associée aux contraintes construite pour un seuil POD $\epsilon_{\text{tol}} = 10^{-10}$. Le RID est élargi à deux reprises par une bande d'éléments pour encore mieux capter les non-linéarités. Aussi nous rajoutons une zone d'intérêt sur le bord extérieur de la gaine où est appliquée la pression P_1 pour une bonne prise en compte de ce chargement. Le domaine réduit obtenu, à comparer avec le maillage initial, est représenté figure IV.3. Il compte 420 éléments et 22 contacts potentiels contre 6800 et 101 pour le maillage initial. Contrairement au cas 2D élastique où le RID était uniquement concentré sur la zone de contact et la surface extérieure de la gaine où est appliquée la pression (cf. figure III.17),

le RID pour le cas test 2D non-linéaire est plus étendu dans les parties basses du combustible et de la gaine où est concentrée la plasticité.

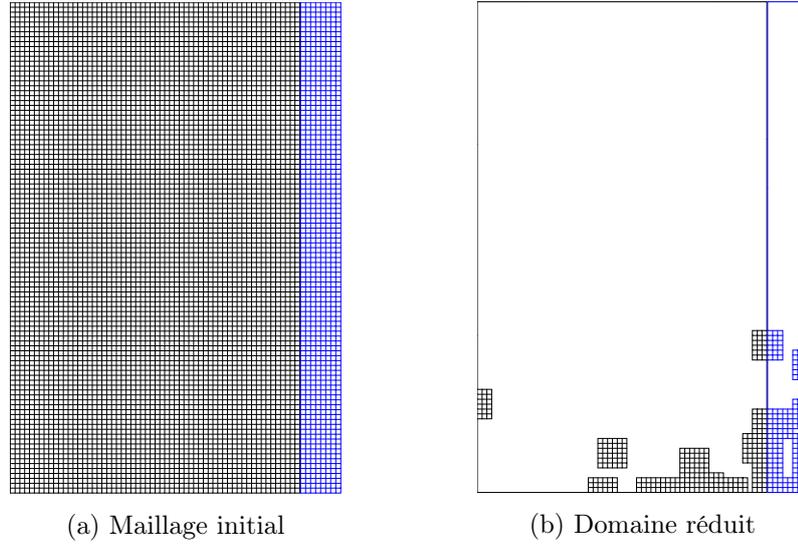


FIGURE IV.3 – Cas test 2D élasto-visco-plastique – Maillage initial et domaine réduit

Dans Cast3M, comme expliqué section IV.3, l'opérateur de recherche dans l'algorithme de type quasi-Newton est la matrice de rigidité élastique invariante en itération et en temps. Il est donc possible de projeter cette dernière une seule fois sur la BR primale. Dans ce cas, comparé à une méthode de réduction d'ordre de modèles de type projection classique, comme la PBM, l'intérêt de l'HRH se trouve à chaque itération dans le gain en temps de calcul lors de l'intégration de la loi de comportement sur le RID et de la projection réduite du second membre mais pas dans la projection restreinte de l'opérateur de recherche.

IV.4.3 Résultats obtenus avec le modèle hyper-réduit hybride

Nous comparons maintenant les solutions obtenues avec les FOM et ROM pour un jeu initial de $10 \mu\text{m}$ avec comme ROM celui construit avec l'HRH dans la section précédente. 40 pas de temps sont considérés contre 20 pour la réalisation des snapshots.

On trace sur la figure IV.4 les déformations plastiques cumulées EF et HRH à la fin du pas de temps 8, le dernier pas de temps avant que les deux solides ne rentrent en contact. Comme nous pouvons le voir sur cette figure, la déformation plastique cumulée obtenue par HRH apparaissant uniquement dans la gaine approxime très bien celle EF. Cela montre que la méthode HRH peut être en particulier appliquée à un problème de mécanique sans contact comprenant un comportement non-linéaire et permet d'arriver à de très bons résultats.

Comparons maintenant les solutions EF et HRH obtenues à la fin du dernier pas de temps, le numéro 40. Nous représentons respectivement sur les figures IV.5 et IV.6 les solutions primale et duale, obtenues avec les FOM et ROM. Les erreurs de référence primale et duale, calculée sur Ω et Γ_A^C en norme 2, valent respectivement 5.7 % et 11 %. L'erreur duale est concentrée sur la zone de changement de statut. Nous représentons également sur les figures IV.7 et IV.8 les déformations plastiques cumulées et les contraintes σ_{rr} , obtenues avec les FOM (cf. figures IV.7a et IV.8a) et ROM (cf. figures IV.7b et IV.8b). Nous pouvons ainsi voir que le ROM permet de très bien approximer le FOM malgré les fortes et diverses non-linéarités. Les erreurs de référence pour la déformation plastique cumulée et la contrainte sur σ_{rr} , calculées sur Ω_A aux points de Gauss et en norme 2, valent respectivement 10 % et 5.2 %. À titre d'exemple, nous reconstruisons la déformation plastique cumulée et la composante σ_{rr}

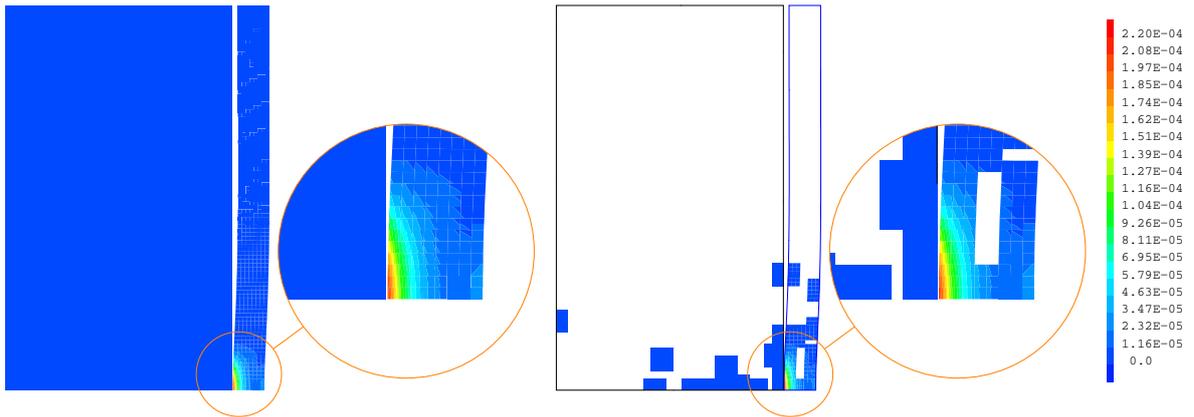


FIGURE IV.4 – Cas test 2D élasto-visco-plastique – Comparaison des déformations plastiques cumulées EF et HRH (zoomées) avant contact (pas de temps 8) tracées sur les déformées avec un jeu amplifié par un facteur 10

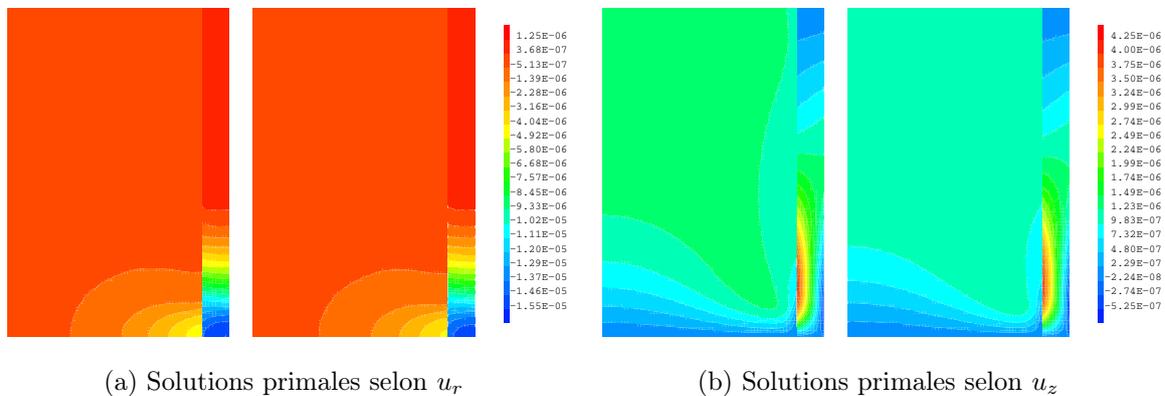


FIGURE IV.5 – Cas test 2D élasto-visco-plastique – Comparaison des solutions primales EF et HRH à la fin de l'historique de chargement selon u_r et u_z

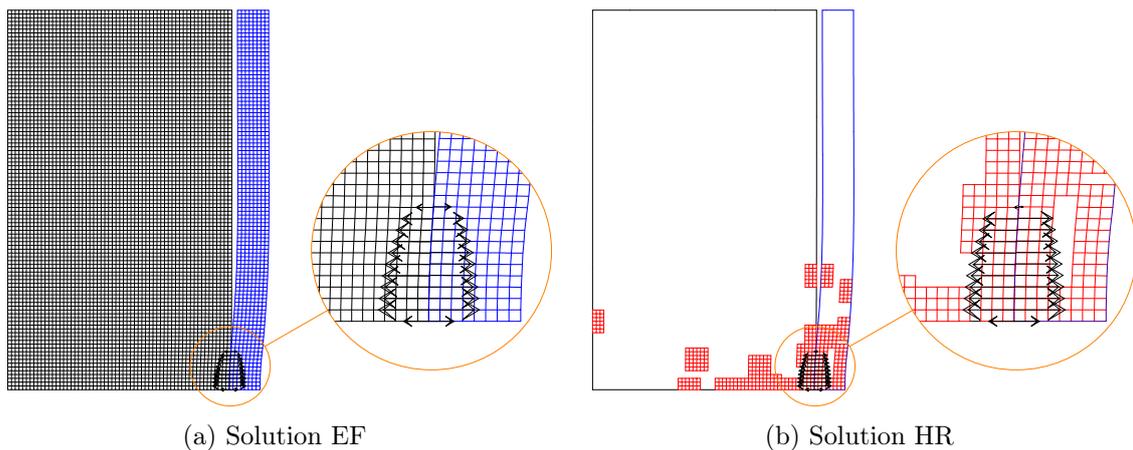


FIGURE IV.6 – Cas test 2D élasto-visco-plastique – Comparaison des forces de contact EF et HRH à la fin de l'historique de chargement tracées sur les déformées avec un jeu amplifié par un facteur 10

de la contrainte sur tout le domaine Ω à l'aide d'une BR pour chacune des grandeurs. Les deux BR obtenues par POD sont construites pour un seuil valant $\epsilon_{\text{tol}} = 10^{-10}$. La BR associée à la contrainte est alors la restriction de celle utilisée pour la construction du RID à la composante σ_{rr} . La déformation plastique cumulée et la composante σ_{rr} de la contrainte obtenues

par HRH sont représentées après reconstruction sur les figures IV.7c et IV.7c. Les erreurs de référence associées à ces figures, calculées sur Ω aux points de Gauss et en norme 2, valent respectivement 12 % et 6.6 %. L'erreur après reconstruction calculée sur Ω est alors légèrement plus élevée que celle avant reconstruction calculée sur Ω_A . Les solutions reconstruites sont bien cohérentes avec les solution HRH puisque sur le RID, la solution en déformation plastique reconstruite présente une erreur de 10 % et celle sur σ_{rr} vaut 4.6 %.

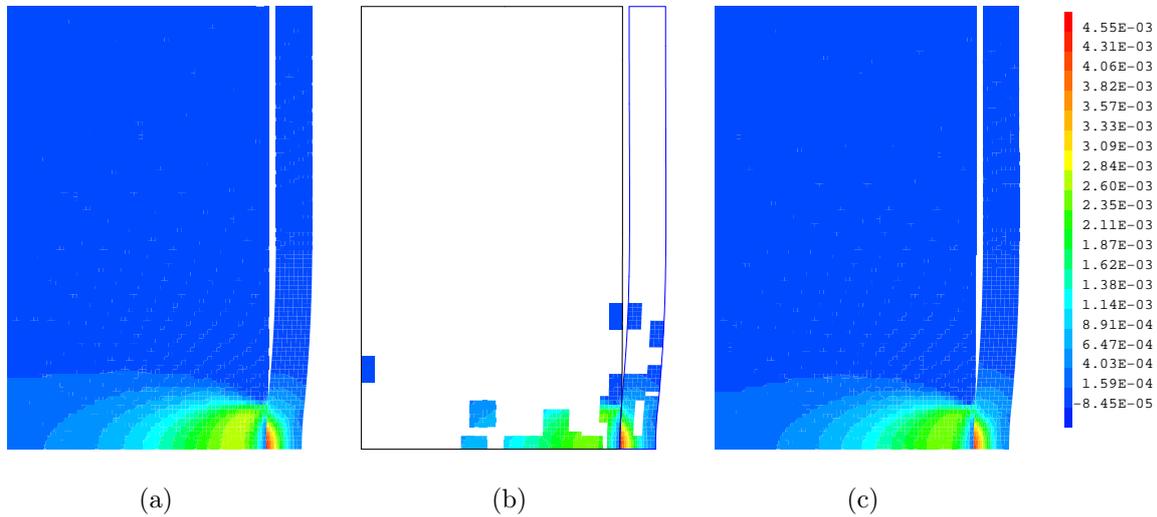


FIGURE IV.7 – Cas test 2D élasto-visco-plastique – Comparaison des déformations plastiques cumulées EF (a) et HRH, sans (b) puis avec reconstruction (c), à la fin de l'historique de chargement tracées sur les déformées avec un jeu amplifié par un facteur 10

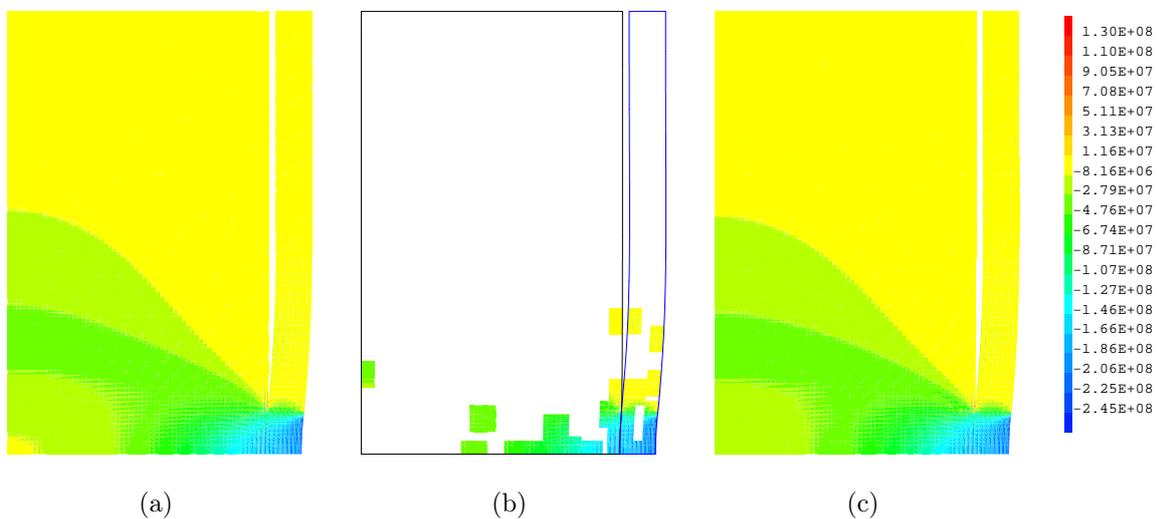


FIGURE IV.8 – Cas test 2D élasto-visco-plastique – Comparaison des contraintes selon σ_{rr} EF (a) et HRH, sans (b) puis avec reconstruction (c), à la fin de l'historique de chargement tracées sur les déformées avec un jeu amplifié par un facteur 10

Pour cette simulation, le gain en temps de calcul vaut environ 4 mais une grande marge de progression existe en améliorant la programmation. En particulier il est possible de réduire le temps de calcul associé aux projections des différentes grandeurs car certaines peuvent être réalisées seulement à chaque pas de temps ou encore une seule fois pour tout le calcul. Le nombre d'itérations de l'algorithme de type quasi-Newton est légèrement inférieur pour la simulation HRH par rapport à celle EF pour les pas de temps où le nombre d'itérations est

grand. Les itérations sont donc plus rapides avec l'HRH.

Conclusions

Nous avons proposé une méthode d'hyper-réduction hybride pour les problèmes de mécanique avec des matériaux non-linéaires. Puis, nous avons étendue cette dernière à la mécanique du contact. Les détails de la mise en œuvre numérique de celle-ci dans un algorithme de type Newton ont été fournis. Cette méthode a été implémentée dans le logiciel EF Cast3M. Nous avons ensuite appliquée la méthode HRH à un cas test 2D de mécanique du contact entre deux solides suivant des lois de comportement caractéristiques des comportements du combustible et de la gaine. Nous avons obtenu de bons résultats en erreur et une accélération en temps de calcul déjà intéressante. Ces résultats restent à consolider et une marge de progression existe pour encore accélérer le temps de calcul.

Conclusions et perspectives

Nous avons introduit dans ce document une méthode de réduction d'ordre de modèles pour les problèmes de contact. L'approche retenue est une méthode de type *a posteriori*, c'est à dire qui repose sur une collecte de données puis de son traitement pour permettre la construction d'un modèle d'ordre réduit (ROM) pouvant être résolu plus rapidement que le modèle d'ordre plein (FOM), obtenu ici par la méthode des éléments finis (EF). La méthode proposée peut être vue comme le prolongement de la méthode d'hyper-réduction (HR) avec domaine d'intégration réduit (RID), que l'on sait efficace pour un comportement non-linéaire, pour la mécanique du contact. Le développement de la méthode a été réalisé dans un contexte où le contact est traité numériquement par multiplicateurs de Lagrange mais l'hyper-réduction hybride (HRH) pourrait être facilement adaptée à un contact traité par pénalité ou Lagrangien augmenté.

Contrairement aux autres méthodes de la littérature qui font le choix de projeter la variable duale – les multiplicateurs de Lagrange – sur une base réduite (BR), nous proposons de les traiter sur la base du FOM (discrétisation standard) restreinte au RID afin d'obtenir une meilleure approximation de la solution duale (directement liée à la contrainte locale). Ce choix est justifié par le fait que le ROM est résolu sur un RID, ce qui implique un nombre de contacts à traiter moindre comparé au FOM. Dû à la non-projection sur une BR duale, le ROM vérifie toutes les conditions de contact du FOM dans le RID. C'est à la fois cette non-projection qui donne le nom d'HR hybride (HRH) à la méthode proposée mais également le fait que la BR primale est enrichie avec des fonctions de la base primale du FOM. Le problème ainsi posé n'est symétrique qu'à la condition de traiter le contact avec un algorithme de type nœud-à-nœud.

Puisque la BR primale est définie partout, il est possible d'avoir une approximation primale sur tout le domaine par une combinaison linéaire de la BR primale avec les ddl associés à la variable primale obtenus en résolvant le ROM obtenu par HRH. La BR duale hybride étant restreinte au RID, elle ne permet pas d'obtenir une approximation duale sur toute la zone de contact potentiel. C'est pourquoi nous proposons un post-traitement permettant la construction d'une solution duale définie partout. Le post-traitement proposé repose sur la solution obtenue par HRH et l'ensemble des snapshots de la variable duale réalisés. Les applications montrent qu'il permet d'obtenir de très bons résultats.

Pour pouvoir choisir les snapshots de manière plus intelligente à l'aide d'un algorithme glouton, un indicateur d'erreur simple mais efficace adapté à l'HRH a été proposé. Ce dernier repose sur une résolution du FOM dans le RID pour des conditions aux limites interpolées. Dans le cadre de l'HRH, cette stratégie a comme intérêt de proposer une approximation de l'erreur commise par l'HRH sur les solutions primale et duale. La partie applicative a montré que l'indicateur d'erreur permettait de sélectionner efficacement les snapshots faisant

rapidement décroître l'erreur d'approximation commise par le modèle HRH et ainsi rendre la méthode HRH plus robuste.

Différents cas tests de mécanique du contact ont permis d'illustrer l'application de l'HRH. Ces derniers ont été ordonnés par niveau de difficulté dans ce document pour permettre une compréhension plus approfondie de la méthode et des choix qui ont été réalisés.

L'HRH a d'abord été appliquée avec succès à un cas test 1D élastique de la bibliographie. Ce cas test a permis un développement rapide de la méthode et des outils associés. Pour ce cas test, une comparaison détaillée a été proposée avec une méthode de projection existante. Cette comparaison a permis de mettre en évidence la capacité de l'HRH à particulièrement bien approximer la solution duale.

L'implémentation de l'HRH a ensuite été réalisée dans le logiciel EF Cast3M avec une démarche faite en prétraitement de l'opérateur classiquement utilisé pour la résolution des problèmes de contact et à l'aide d'opérateurs existants. Cela montre le caractère peu intrusif de la méthode proposée. Deux cas tests 2D et 3D ayant un comportement élastique ont ainsi été étudiés dans Cast3M. La méthode proposée est facilement adaptable quelle que soit la dimension. Ces deux cas tests sont plus représentatifs des conditions de simulation de l'élément combustible en réacteur nucléaire. Le cas test 2D a permis, entre autres, une étude de l'influence des ddl traités par EF dans la BR primale hybride sur la solution, notamment duale. Le cas test 3D de type thermo-mécanique a permis de tenir compte de l'influence de la dilatation libre thermique. Pour un comportement élastique, l'HRH a donné de très bons résultats pour différentes géométries, chargements, paramètres.

Enfin, des développements ont été réalisés dans Cast3M pour appliquer l'HRH au cas de matériaux ayant un comportement non-linéaire. La méthode a alors été appliquée à un cas test 2D de mécanique du contact entre un solide (le combustible) ayant un comportement élasto-plastique et un autre solide (la gaine) ayant un comportement visco-plastique. Cette dernière application montre qu'il est possible d'obtenir de bons résultats avec l'HRH pour des matériaux avec un comportement non-linéaire dans le cadre d'un problème de mécanique du contact et également lorsqu'il n'y a pas contact. L'implémentation de l'HRH pour des matériaux non-linéaires reste cependant à approfondir, notamment en terme de performance.

Une perspective importante de ce travail est la prise en compte, dans la méthode proposée, d'un traitement du contact de type nœud-à-surface ou surface-à-surface qui est beaucoup plus générique que la gestion du contact nœud-à-nœud utilisé actuellement. Cela pourrait permettre de traiter des problèmes avec des géométries plus complexes mais également des problèmes avec une hypothèse de grandes transformations. La possibilité de traiter un contact frottant constituerait également une avancée majeure.

Un objectif à plus long terme est l'intégration de l'HRH dans la plate-forme PLÉIADES de simulation multi-physiques du combustible nucléaire. La méthode proposée pourrait être utilisée pour l'accélération des études paramétriques (vérification/validation) et/ou la prise en compte de nouvelles situations dans la simulation du combustible nucléaire.

Annexe A

Article

Nous trouvons dans cette annexe la version soumise de l'article [Fauque *et al.*, 2018a] publié dans le journal scientifique "International Journal for Numerical Methods in Engineering".

Dans cet article est introduite la méthode de réduction d'ordre de modèles appelée hyper-réduction hybride (HRH) sous certaines hypothèses : un comportement élastique et un contact sans frottement, traité par multiplicateurs de Lagrange avec un algorithme de type nœud à nœud. La méthode proposée est appliquée à un cas test 1D élastique de la littérature [Haasdonk *et al.*, 2012] et les résultats sont comparés à ceux obtenus avec une autre méthode [Balajewicz *et al.*, 2016]. Les résultats obtenus montrent que l'HRH permet d'accéder à une bonne approximation de la solution EF avec un gain de temps important. De plus, la comparaison met en évidence la très bonne approximation de la solution duale, particulièrement difficile à approcher, grâce à son aspect hybride. L'HRH est également appliquée à un cas test 3D élastique pour montrer le caractère indépendant de la méthode à la dimension de l'espace.

Les bons résultats obtenus avec l'HRH pour des comportements linéaires nous ont permis d'envisager une extension de la méthode aux comportements non-linéaires.

Hybrid hyper-reduced modeling for contact mechanics problems

J. FAUQUE^{1,2} | I. RAMIÈRE*¹ | D. RYCKELYNCK²

¹CEA, DEN, DEC, SESC, LSC, Bât.
151, F-13108 Saint-Paul Lez
Durance, France

²MINES ParisTech, PSL research
university, Centre des Matériaux,
CNRS UMR 7633, 91003 Evry,
France

Correspondence

*Email: isabelle.ramire@cea.fr

Summary

The model reduction of mechanical problems involving contact remains an important issue in computational solid mechanics. In this article, we propose an extension of the hyper-reduction method based on a reduced integration domain to frictionless contact problems written by a mixed formulation. As the potential contact zone is naturally reduced through the reduced mesh involved in hyper-reduced equations, the dual reduced basis is chosen as the restriction of the dual full-order model basis. We then obtain a hybrid hyper-reduced model combining empirical modes for primal variables with finite element approximation for dual variables. If necessary, the inf-sup condition of this hybrid saddle point problem can be enforced by extending the hybrid approximation to the primal variables. This leads to a hybrid hyper-reduced/full-order model strategy. By this way, a better approximation on the potential contact zone is furthermore obtained. A post-treatment dedicated to the reconstruction of the contact forces on the whole domain is introduced. In order to optimize the offline construction of the primal reduced basis, an efficient error indicator is coupled to a greedy sampling algorithm. The proposed hybrid hyper-reduction strategy is successfully applied to a one-dimensional static obstacle problem with a two-dimensional parameter space and also to a three-dimensional contact problem between two linearly elastic bodies. The numerical results show the efficiency of the reduction technique, especially the good approximation of the contact forces compared to other methods.

KEYWORDS:

model order reduction, hyper-reduction, reduced integration domain (reduced mesh), contact mechanics, mixed formulation, hybrid order model.

1 | INTRODUCTION

The numerical solution of partial differential equations (PDE), and especially variational inequalities, can become really expensive when accurate predictions are required. The size of the full-order model (FOM) obtained by standard discretization methods (finite difference, finite element, finite volume) is proportional to the number of discrete unknowns. To tackle this limitation, some techniques based on reduced bases (RB) have been developed since the 1970's and generalized to various systems. The principle of this kind of technique is to restrict the solution space to a smaller subspace defined from the RB [1]. The reduced-order model (ROM) is then obtained by projecting the initial

PDE on the RB. For nonlinear PDE, one of the most popular method to *a posteriori* construct the RB is the snapshot proper orthogonal decomposition (POD) [2, 3].

We focus here on model reduction of mechanical problems involving contact written by a mixed formulation (saddle point problem) and numerically solved using Lagrange multipliers that physically represent the contact forces [4, 5]. Building a dual RB (for the Lagrange multipliers) with POD is not convenient because of their positivity constraint. Two recent articles [6, 7] focus on the construction of a positive dual RB. The first article [6] consists in extending the so-called reduced basis method [8] to variational inequalities solved thanks a mixed formulation. Similarly to the primal RB (for the displacements), the dual RB is directly composed of well chosen Lagrange multipliers snapshots. This dual RB represents precisely the contact forces but can rapidly become of large dimension. In [7], the projection-based (PB) method proposes two different approaches to build the primal RB and dual RB. In this method, an efficient primal RB is obtained thanks to the POD. The dual RB is built applying the non-negative matrix factorization algorithm (NNMF) [9] to the Lagrange multipliers snapshots. This latter algorithm guarantees positive basis vectors and a limited RB dimension but the obtained dual RB is far less accurate than the primal RB.

In this paper, we propose to extend another type of model order reduction method called hyper-reduction (HR) [10, 11, 12] to contact problems. Hyper-reduction methods have been proposed to limit to few entries the computation of implicit nonlinear balanced equations and hence to speed-up the computation time. Various approaches have been developed for that purpose:

- interpolation methods that estimate the nonlinear terms of interest by interpolating their values at a few spatial locations. For the empirical interpolation method (EIM) [10] and the discrete EIM (DEIM) [13], the set of interpolation points is generated by the method itself using respectively the snapshots and a POD basis. In some other model reduction techniques as missing point estimation [14] or Gauss–Newton with approximated tensors [15], the construction is done using the gappy POD method [16]. The EIM and respectively the DEIM have been recently extended to variational inequalities treated by penalty methods in [17, 18];
- cubature methods [12, 19] that estimate the spacial integrals involved in the weak formulation, by using only few un-assembled elemental contributions. The elements of interest and their weighting coefficients to the global contribution are determined using an optimization process;
- boundary value problems restricted to a reduced integration domain (RID) [20]. The RID usually involve elements connected to interpolation points computed by the DEIM algorithm [13], by considering several POD reduced bases including the primal one.

We adopt the last approach as it had been successfully applied to elastoplastic problems [20, 21] that usually appear under extreme contact conditions, although we restrict our attention in this paper to elastic problems. For simplicity, the HR-RID approach is termed HR in the sequel. As for the classical hyper-reduction method, the primal solution is obtained on the whole domain since the related reduced basis is defined on the whole domain.

The proposed extension of the HR method to contact problems consists in conserving a few vectors of the FOM dual basis as the number of contacts is naturally reduced by the RID. Hence, only the contacts in the RID are treated but with a local high fidelity. A strategy based on the solution of a non-negative least squares (NNLS) problem is introduced to reconstruct contact forces on the whole domain by post-processing the HR predictions. As for the previous cited ROM for mixed contact problems, the so-called LBB (Ladyzenskaia-Babuška-Brezzi) [22, 23] or inf-sup condition has to be respected to ensure the obtained ROM mixed problem to have a unique solution. The condition imposes the projected contact matrix restrained to the active contacts to have full row rank. As the active contacts are *a priori* unknown, we propose to extend the condition to the potential contact. For the proposed hybrid HR method for contact problems, the verification of this condition depends on the primal RB and the RID. If required, the respect of this condition can be enforced by coupling the hyper-reduced approximation to a restricted FOM approximation thanks to a domain decomposition technique of the RID as proposed in [24]. Originally, hybrid reduced-order/full-order models have been proposed in the literature to circumvent the lack of accuracy of RB approximations, see for example [25] for elliptic problem in elasticity, [26, 27] for nonlinear structural problems involving plasticity or damage, or [24] for Navier-Stokes equations. The method introduced here can be viewed as a hybrid HR/FOM approach to deal with contact problems solved with a mixed formulation.

In order to choose pertinent snapshots, a greedy sampling algorithm can be applied as initially proposed in [28, 29]. This strategy ensures the robustness of the ROM with respect to variations of the model parameters. A simple but efficient error indicator adapted to the HR is proposed. This indicator consists in the difference between the FOM solved on the RID submitted to interpolated Dirichlet boundary conditions and the HR solution.

The article is structured as follows. The next section is devoted to the introduction of some notations. In Section 3, the contact problem written by a mixed formulation and its solution with the finite element method (FEM) is briefly recalled. Section 4 emphasizes the main points of the HR method while section 5 is devoted to the extension of the HR method to contact problems. In Section 6, the proposed hybrid HR approach is verified on a one-dimensional (obstacle type inequality) test case derived from the litterature [6, 7, 17]. A comparison between the hybrid HR method and the projection-based method introduced in [7] is done. Finally, in Section 7, a two elastic solids unilateral contact 3D problem is treated with the proposed approach.

2 | NOTATION

Tensors and hypermatrices are underlined as many times as their order. For example, vectors are once underlined $\underline{\cdot}$, whereas matrices are twice underlined $\underline{\underline{\cdot}}$, etc. Moreover $\underline{0}$ (resp. $\underline{\underline{0}}$) identifies a vector (resp. a matrix) of zeros. Subscripts identify the components of a tensor. For example, $(\underline{\underline{A}})_{ij}$ denotes the component located at the i -th row and j -th column of the matrix $\underline{\underline{A}}$.

$\underline{\underline{I}}_N$ denotes the identity matrix of size $N \times N$.

We use the Python notation to restrict vectors/matrices to some rows or columns. For example, the restriction of a matrix $\underline{\underline{A}}$ to some rows with the set of indices \mathcal{L} is written $\underline{\underline{A}}[\mathcal{L}, :]$.

We denote by \odot the element-wise multiplication. For example, $(\underline{\underline{A}} \odot \underline{\underline{B}})_{ij} = (\underline{\underline{A}})_{ij}(\underline{\underline{B}})_{ij}$ or $(\underline{\underline{a}} \odot \underline{\underline{B}})_{ij} = (\underline{\underline{a}})_i(\underline{\underline{B}})_{ij}$.

The symbol \cdot designates the double inner product which consists in a double contraction over the last two indices of the first tensor and the first two indices of the second tensor. For example, $\underline{\underline{A}} : \underline{\underline{B}} = \sum_{ij} (\underline{\underline{A}})_{ij}(\underline{\underline{B}})_{ij}$ is a scalar while $\underline{\underline{C}} : \underline{\underline{B}} = \sum_{kl} (\underline{\underline{C}})_{ijkl}(\underline{\underline{B}})_{kl}$ gives a matrix.

The positive and negative part of $x \in \mathbb{R}$ are respectively defined as $[x]_+ = \max(x, 0)$ and $[x]_- = \min(x, 0)$, and for a vector $\underline{x} \in \mathbb{R}^N$ as $[\underline{x}]_+ = (([\underline{x}]_+)_{i=1})^N$ and $[\underline{x}]_- = (([\underline{x}]_-)_{i=1})^N$.

The Euclidian norm or 2-norm of a vector is denoted by $\|\cdot\|_2$:

$$\|\underline{u}\|_2 = (\underline{u}^T \underline{u})^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_i (\underline{u}_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (1)$$

where the superscript T designates the transpose operation.

The L^2 inner product defined on Ω is denoted by $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2(\Omega)}$, such that:

$$\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} \underline{u}^T \underline{v} \, d\Omega \quad (2)$$

The related L^2 norm defined over the domain Ω is denoted by $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$ and defined as

$$\|\underline{u}\|_{L^2(\Omega)} = \left(\langle \underline{u}, \underline{u} \rangle_{L^2(\Omega)} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_{\Omega} \underline{u}^T \underline{u} \, d\Omega \right)^{\frac{1}{2}}$$

whereas the H^1 norm writes

$$\|\underline{u}\|_{H^1(\Omega)} = \left(\|\underline{u}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{k=1}^D \|\partial_{x_k} \underline{u}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

with D the space dimension.

Let's E denote a Hilbert space and F its dual space. Their inner products are respectively denoted $\langle \cdot, \cdot \rangle_E$, $\langle \cdot, \cdot \rangle_F$. Introducing a basis of E , $\{\beta_i\}_{i=1}^H$, we can write $\forall \underline{u}, \underline{u}' \in E$, $\langle \underline{u}, \underline{u}' \rangle_E = \xi_u^T \underline{\underline{M}}^E \xi_{u'}$ with ξ_u and $\xi_{u'}$ the coefficients associated to \underline{u} and \underline{u}' in the E basis and $\underline{\underline{M}}^E = (\langle \beta_i, \beta_j \rangle_E)_{i,j=1}^H$. We have then $\langle \underline{v}, \underline{v}' \rangle_F = \xi_v^T (\underline{\underline{M}}^E)^{-1} \xi_{v'}$, $\forall \underline{v}, \underline{v}' \in F$ and with ξ_v and $\xi_{v'}$ the coefficients associated to \underline{v} and \underline{v}' in the F basis.

3 | CONTACT PROBLEM - FINITE ELEMENT METHOD

We are interested in the solution of elastic frictionless unilateral contact problems inherently nonlinear, involving variational inequalities and constrained minimizations.

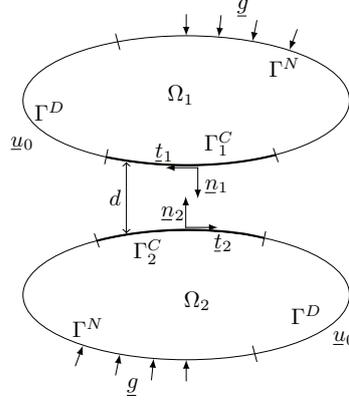


FIGURE 1 Geometry of a generic two-body contact problem.

For the sake of clarity and without any loss of generality, we consider here a model problem involving two deformable elastic bodies defined by the two open bounded domain $\Omega_1 \in \mathbb{R}^D$ and $\Omega_2 \in \mathbb{R}^D$ with D the dimension of the problem. The whole domain is defined by $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, see Figure 1. We denote $\partial\Omega = \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2$ the boundary of Ω . This boundary can be divided in three parts $\Gamma^D, \Gamma^N, \Gamma^C$ such that $\partial\Omega = \Gamma^D \cup \Gamma^N \cup \Gamma^C$ with $\Gamma^D \cap \Gamma^N = \emptyset$ and $\Gamma^D \cap \Gamma^C = \emptyset$:

- on Γ^D displacement conditions are imposed (Dirichlet boundary conditions).
- on Γ^N surface forces are applied (Neumann boundary conditions).
- Γ^C is the possible and *a priori* unknown contact zone (contact boundary conditions). We have $\Gamma^C = \Gamma_1^C \cup \Gamma_2^C$ with $\Gamma_i^C, i \in \{1, 2\}$ the potential contact boundary on $\Omega_i, i \in \{1, 2\}$.

Let \underline{n}_i denote the external unit normal to Ω_i on Γ^C . We take \underline{u}_i (resp. $\underline{\sigma}_i$) to denote the displacement field (resp. stress field) in Ω_i . The points on Γ^C are paired by minimal distance in order to evaluate the gap denoted by u_N on each point of Γ^C . Let us denote $\{\underline{x}, \underline{x}'\}$ a pair of coupled points between Γ_1^C and Γ_2^C . Then the gap u_N writes

$$u_N = \underline{u}_1(\underline{x})^T \underline{n}_1(\underline{x}) + \underline{u}_2(\underline{x}')^T \underline{n}_2(\underline{x}'), \quad \forall \text{ paired couple } \{\underline{x}, \underline{x}'\} \in (\Gamma_1^C, \Gamma_2^C). \quad (3)$$

Under small perturbations hypothesis $\underline{n}_1(\underline{x}) = -\underline{n}_2(\underline{x}'), \forall \{\underline{x}, \underline{x}'\} \in (\Gamma_1^C, \Gamma_2^C)$. The unknown contact forces \underline{F}^i on Γ_i^C are decomposed into normal and tangential parts

$$\underline{F}^i(\underline{x}) = \underline{\sigma}_i(\underline{x}) \underline{n}_i = F_N^i(\underline{x}) \underline{n}_i(\underline{x}) + \underline{F}_T^i(\underline{x}), \quad \forall \underline{x} \in \Gamma_i^C. \quad (4)$$

In this paper, we restrict our attention to frictionless contact. The Signorini's law of unilateral contact [30] is given on Γ^C by

$$\underline{F}_T^i = \underline{0} \quad (\text{frictionless}), \quad (5)$$

$$u_N \leq d \quad (\text{non-penetration}), \quad (6)$$

$$F_N = F_N^1 = F_N^2 \leq 0 \quad (\text{non-adhesion}), \quad (7)$$

$$(u_N - d)F_N = 0 \quad (\text{complementary slackness}), \quad (8)$$

where d generically denotes the initial gap on each node of Γ^C .

The strong formulation of the elastostatic frictionless unilateral contact problem can then be expressed as

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\operatorname{div} \underline{\sigma} = \underline{f} & \text{in } \Omega, \\ \underline{\sigma} = \underline{C} : \underline{\varepsilon} & \text{in } \Omega, \\ \underline{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\operatorname{grad} \underline{u} + (\operatorname{grad} \underline{u})^T) & \text{in } \Omega, \\ \underline{u} = \underline{u}_0 & \text{on } \Gamma^D, \\ \underline{\sigma} \underline{n} = \underline{g} & \text{on } \Gamma^N, \\ u_N \leq d, F_N \leq 0, (u_N - d)F_N = 0 & \text{on } \Gamma^C, \\ \underline{\sigma} \underline{n} = F_N \underline{n} & \text{on } \Gamma^C. \end{array} \right. \quad (9)$$

The primal variational formulation of (9) can be written as a variational inequality [31]

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Find } \underline{u} \in \mathcal{V}_C \text{ such that} \\ a(\underline{u}, \underline{v} - \underline{u}) \geq l(\underline{v} - \underline{u}), \quad \forall \underline{v} \in \mathcal{V}_C \end{array} \right. \quad (10)$$

with $\mathcal{V}_C = \{\underline{v} \in \mathcal{V} \mid v_N \leq d \text{ on } \Gamma^C\}$, $\mathcal{V} = \{\underline{v} = \underline{r}(\underline{u}_0) + \tilde{\underline{u}} \mid \tilde{\underline{u}} \in \mathcal{V}_0\}$, $\underline{r}(\underline{u}_0)$ the lifting of \underline{u}_0 over Ω , $\mathcal{V}_0 = \{\underline{v} \in (H^1(\Omega))^D \mid \underline{v} = \underline{0} \text{ on } \Gamma^D\}$ and

$$a(\underline{u}, \underline{v}) = \int_{\Omega} \underline{\varepsilon}(\underline{u}) : \underline{C} : \underline{\varepsilon}(\underline{v}) \, d\Omega, \quad (11)$$

$$l(\underline{v}) = \int_{\Omega} \underline{f}^T \underline{v} \, d\Omega + \int_{\Gamma^N} \underline{g}^T \underline{v} \, d\Gamma. \quad (12)$$

Due to the variational inequality, the unilateral contact problem is nonlinear. In [31], it is demonstrated that the solution of inequality (10) can be obtained by minimizing the potential energy

$$\min_{\underline{v} \in \mathcal{V}_C} J(\underline{v}) = \frac{1}{2} a(\underline{v}, \underline{v}) - l(\underline{v}). \quad (13)$$

The minimization of J is then equivalent to a saddle-point problem when introducing Lagrange multipliers [32, 33].

The saddle-point problem can be written as:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Find } (\underline{u}, \lambda) \in \mathcal{V} \times \mathcal{W} \text{ such that} \\ a(\underline{u}, \underline{v}) + b(\underline{v}, \lambda) = l(\underline{v}), \quad \forall \underline{v} \in \mathcal{V}_0 \\ b(\underline{u}, \kappa - \lambda) \leq \langle d, \kappa - \lambda \rangle_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma^C), H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma^C)}, \quad \forall \kappa \in \mathcal{W} \end{array} \right. \quad (14)$$

with $\mathcal{W} = \{\kappa \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma^C) \mid \kappa \geq 0\}$ where $H^{-\frac{1}{2}}$ denotes the dual of $H^{\frac{1}{2}}$, $b(\underline{v}, \kappa) = \langle v_N, \kappa \rangle_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma^C), H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma^C)}$ and $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H^{\frac{1}{2}}, H^{-\frac{1}{2}}}$ the duality product. We can notice that the solution (\underline{u}, λ) recover the complementary slackness condition. Also, the resulting Lagrange multiplier is physically representative of the contact forces, $\lambda = -F_N$.

We now apply the finite element method. The shape functions of the FE basis are denoted by $(\varphi_j)_{j=1}^m$ with m the number of discretization nodes. For the displacement discretization, we introduce $\varphi_i = \varphi_j \underline{e}_k$ with $i = (j-1)D + k$, $j \in \{1, \dots, m\}$, $k \in \{1, \dots, D\}$ and \underline{e}_k the canonical vectors of a Cartesian coordinate system. The decomposition of the displacement on the $(\varphi_i)_{i=1}^N$, $N = mD$ basis is written as

$$\underline{u}_h = \underline{r}(\underline{u}_0) + \sum_{i=1}^N \varphi_i u_i \quad (15)$$

where \underline{u}_h is the approximate finite element solution and $\underline{U} = (u_i)_{i=1}^N$ the vector of the related dofs.

The non-homogeneous Dirichlet condition is treated using usual techniques existing in the FE solvers (Lagrange multipliers, penalty, elimination, lifting, etc). For the sake of clarity, it will not appear in the discrete approximations written in the following of paper. The FOM, with N the total number of primal dofs and N_λ the total number of potentially

active contacts, can be written as

$$\begin{cases} \text{Find } (\underline{U}, \underline{\Lambda}) \in \mathbb{R}^N \times (\mathbb{R}^+)^{N_\lambda} \text{ such that} \\ \underline{K}\underline{U} + \underline{B}^T \underline{\Lambda} = \underline{F} \\ \underline{\Lambda} \odot (\underline{B}\underline{U} - \underline{D}) = 0 \\ \underline{B}\underline{U} \leq \underline{D} \end{cases} \quad (16)$$

where $\underline{K} \in \mathbb{R}^{N \times N}$, $\underline{B} \in \mathbb{R}^{N_\lambda \times N}$, $\underline{F} \in \mathbb{R}^N$, $\underline{D} \in \mathbb{R}^{N_\lambda}$, \underline{U} , $\underline{\Lambda}$ are respectively the discretization of a , b , l , d , u and λ in (14). \underline{K} is commonly called the stiffness matrix and \underline{B} is the potential contact matrix where each line is associated to a potential contact node.

4 | HYPER-REDUCTION METHOD

A common approach for model order reduction is projection-based reduction which aim to reduced the number of dofs by projecting the balance equation on a smaller subspace. Here, hyper-reduction is applied in the framework of *a posteriori* model reduction methods. In this category of methods, it is common to follow a decomposition of computational tasks into two phases offline/online. The offline phase is the part where parameter-independent quantities like RB or RID are precomputed. It is time consuming because it requires solutions of the FOM for different parameters but permits to the online phase, where the ROM is used, to be faster. This kind of method becomes useful for real time simulation or when a large number of simulations needs to be done like for a parametric study or the solution of an optimization problem.

The hyper-reduction (HR) [21] method uses projection on RB to reduce the number of dofs but it also uses the fact that solving the equations on a reduced mesh is sufficient to find the reduced dofs. This particularity improves the computational time savings, especially for nonlinearities that can not be precomputed offline. Indeed the RID, built during the offline part, reduces the cost of the projections to get the reduced non-constant stiffness matrix from the Jacobian matrix.

4.1 | Reduced basis construction

For nonlinear problems, the most famous method to build a RB is the proper orthogonal decomposition (POD) method. It gives the optimal low rank approximation of the minimization problem which consists in compressing the simulation data generated during the offline phase. This method will hence be used here to reduce the primal basis. The 2-norm POD basis can be easily computed by collecting snapshots and applying the singular value decomposition (SVD) algorithm or computing the eigendecomposition of the correlation matrix. Let us consider a snapshot matrix \underline{S} of dimension $N \times N_s$. Computing the singular value decomposition (SVD) on \underline{S} give:

$$\underline{S} = \underline{V}_s \underline{\Sigma}_s \underline{W}_s^T \quad (17)$$

where $\underline{V}_s \in \mathbb{R}^{N \times N}$ and $\underline{W}_s \in \mathbb{R}^{N_s \times N_s}$ are orthonormal matrices and $\underline{\Sigma}_s \in \mathbb{R}^{N \times N_s}$ is a diagonal matrix containing singular values σ_j ordered by decreasing size. The 2-norm POD basis of rank l_s is then denoted \underline{V} and obtained, according to the Eckart-Young theorem [34], by taking the l_s first left singular vectors, $\underline{V} = \underline{V}_s[:, \{1, \dots, l_s\}]$. To choose l_s , we introduce the information rate $\mathcal{E}(l_s)$ of the l_s first singular vectors defined as follows:

$$\mathcal{E}(l_s) = \frac{\sum_{j=1}^{l_s} \sigma_j^2}{\sum_{j=1}^{\min(N, N_s)} \sigma_j^2}. \quad (18)$$

l_s is then obtained by solving $\underset{l_s \in \mathbb{N}}{\operatorname{argmin}} (\mathcal{E}(l_s) \geq 1 - \epsilon_{tol})$ with ϵ_{tol} a given threshold.

By this way we obtain a RB composed of few vectors able to approximate the space spanned by the snapshots. The finite element basis enables to recover the continuous empirical modes denoted by $(\underline{\psi}_k)_{k=1}^{l_s}$:

$$\underline{\psi}_k = \sum_{i=1}^N \varphi_i v_{ik} \quad \text{with} \quad v_{ik} = (\underline{V})_{ik}. \quad (19)$$

4.2 | RID construction

There are different ways to build a RID. One of them is to use a manufacturing construction knowing important zones needed to be included. A more generic method, used in this article, is based on the DEIM procedure [13]. The procedure takes as input a RB, denoted $\underline{\underline{V}} \in \mathbb{R}^{N \times l_s}$, and returns a set of interpolation indices \mathcal{L} selected so that each of them correspond to the entry with largest magnitude of the error between each vector of the input basis and its approximation doing an empirical interpolation of the vectors already treated. The final number of indices is equal to the number of vectors in the RB: $\text{card}(\mathcal{L}) = l_s$. A POD basis is a suitable choice for this algorithm as the vectors are ordered by importance. An important result is that the restriction of the RB $\underline{\underline{V}}$ to the interpolation indices list \mathcal{L} , $\underline{\underline{V}}[\mathcal{L}, :] \in \mathbb{R}^{l_s \times l_s}$, is a full rank matrix and then any extension of the interpolation indices list \mathcal{L}_{ext} of size $l_{ext} \geq l_s$ would keep retain $\underline{\underline{V}}[\mathcal{L}_{ext}, :] \in \mathbb{R}^{l_{ext} \times l_s}$ a RB.

The RID is defined as

$$\Omega_A = \cup_{i \in \mathcal{L}} \text{supp}(\varphi_i). \quad (20)$$

where $\text{supp}(\varphi_i)$ denotes the finite element basis φ_i support. Usually, as proposed in [21], the DEIM algorithm is applied to several RB, including reduced bases related to dual variables, to obtain a RID apprehending more informations. If required to improve the accuracy of the HR predictions, the RID can also be supplemented by one or several layer of connected elements, as well as a region of interest.

We denote by Ω_B the counterpart of Ω_A such that $\Omega = \Omega_A \cup \Omega_B$ and $\Gamma^I = \Omega_A \cap \Omega_B$, where Γ^I is the interface between the two subdomains. We introduce \mathcal{I} as

$$\mathcal{I} = \left\{ i \in \{1, \dots, N\} \mid \int_{\Gamma^I} \varphi_i^T \varphi_i d\Gamma \neq 0 \right\}. \quad (21)$$

We introduce \mathcal{A} which denotes the set of all dofs that are not connected to Ω_B :

$$\mathcal{A} = \left\{ i \in \{1, \dots, N\} \mid \int_{\Omega_B} \varphi_i^T \varphi_i d\Omega = 0 \right\} \quad (22)$$

and $\underline{\psi}_k^A$ the setting to 0 of $\underline{\psi}_k$ over Ω_B :

$$\underline{\psi}_k^A(x) = \sum_{i \in \mathcal{A}} \varphi_i(x) v_{ik}, \quad \forall x \in \Omega. \quad (23)$$

The counterpart of the restricted mode $\underline{\psi}_k^A$ is denoted by $\underline{\psi}_k^B$ such that:

$$\underline{\psi}_k^B(x) = \underline{\psi}_k(x) - \underline{\psi}_k^A(x), \quad \forall x \in \Omega, k = 1, \dots, l_s. \quad (24)$$

4.3 | Usual hyper-reduced balance equations without contact conditions

Let's consider the Problem (9) without contact ($\Gamma^C = \emptyset$). The primal variational formulation reads:

$$\begin{cases} \text{Find } \underline{u} \in \mathcal{V} \text{ such that} \\ a(\underline{u}, \underline{v}) = l(\underline{v}), \quad \forall \underline{v} \in \mathcal{V}_0 \end{cases} \quad (25)$$

with a, l defined as before in (11), (12).

In [21], the setting of the hyper-reduced balance equations starts by defining a surrogate space for \mathcal{V} in order to solve a reduced problem in Ω_A . This subspace reads $\mathcal{V}_{HR}^{\Omega_A} = \{v = r_{\Omega_A}(u_0) + \tilde{r}_{\Omega_A}(u_I) + \tilde{u} \mid \tilde{u} \in \text{span}\{\underline{\psi}_k^A\}_{k=1}^{l_u}\}$ with \underline{u}_I an additional boundary condition on Γ^I , $\tilde{r}_{\Omega_A}(u_I)$ its lifting over Ω_A , $r_{\Omega_A}(u_0)$ the restriction of $r(u_0)$ to Ω_A and $\{\underline{\psi}_k^A\}_{k=1}^{l_u}$

the primal restricted POD modes. The proposed hyper-reduced balance equation is defined as:

$$\begin{cases} \text{Find } \underline{u} \in \mathcal{V}_{HR}^{\Omega_A} \text{ such that} \\ a_{\Omega_A}(\underline{u}, \underline{v}) = l_{\Omega_A}(\underline{v}), \quad \forall \underline{v} \in \text{span}\{\underline{\psi}_k^A\}_{k=1}^{l_u} \end{cases} \quad (26)$$

where a_{Ω_A} and l_{Ω_A} denote the forms a and l where the integration is reduced to Ω_A since v vanishes on Ω_B . Then the approximate displacement reads:

$$\underline{u}(\underline{x}) = \tau_{\Omega_A}(\underline{u}_0)(\underline{x}) + \tilde{\tau}_{\Omega_A}(\underline{u}_I)(\underline{x}) + \sum_{k=1}^{l_u} \psi_k^A(\underline{x}) \gamma_k, \quad \forall \underline{x} \in \Omega_A. \quad (27)$$

In the standard HR method [21], the lifting of \underline{u}_I is setup over Ω by:

$$\tilde{\tau}(\underline{u}_I)(\underline{x}) = \sum_{k=1}^{l_u} \psi_k^B(\underline{x}) \gamma_k^B, \quad \forall \underline{x} \in \Omega \quad (28)$$

where γ_k^B are additional parameters chosen as $\gamma_k^B = \gamma_k, k = 1, \dots, l_u$ in order to recover the usual RB approximation. In particular, $\tilde{\tau}_{\Omega_A}(\underline{u}_I)$ is the restriction to Ω_A of $\tilde{\tau}(\underline{u}_I)$ and \underline{u}_I is the trace on Γ^I of $\tilde{\tau}(\underline{u}_I)(\underline{x})$:

$$\underline{u}_I(\underline{x}) = \sum_{k=1}^{l_u} \psi_k^B(\underline{x}) \gamma_k^B \quad \underline{x} \in \Gamma^I. \quad (29)$$

Then the approximate displacement is defined over Ω by

$$\underline{u}(\underline{x}) = \tau(\underline{u}_0)(\underline{x}) + \sum_{k=1}^{l_u} \psi_k(\underline{x}) \gamma_k, \quad \forall \underline{x} \in \Omega. \quad (30)$$

Then $u \in \mathcal{V}_{POD} = \{v = \tau(\underline{u}_0) + \tilde{u} \mid \tilde{u} \in \text{span}\{\psi_k\}_{k=1}^{l_u}\}$.

After discretization, we obtain the Problem (31) written with a Petrov-Galerkin formulation.

$$\begin{cases} \text{Find } \gamma \in \mathbb{R}^{l_u} \text{ such that} \\ \underline{V}[\mathcal{A}, :]^T \underline{K}[\mathcal{A}, \mathcal{A} \cup \mathcal{I}] \underline{V}[\mathcal{A} \cup \mathcal{I}, :] \gamma = \underline{V}[\mathcal{A}, :]^T \underline{F}[\mathcal{A}]. \end{cases} \quad (31)$$

Remark: the restriction of $\underline{V}\gamma$ on $\mathcal{A} \cup \mathcal{I}$ is due to the structure of \underline{K} . The support of the FE basis functions implies that only dofs in $\mathcal{A} \cup \mathcal{I}$ are connected to dofs in \mathcal{A} through \underline{K} .

5 | EXTENSION OF THE HYPER-REDUCTION METHOD TO CONTACT PROBLEMS

5.1 | Additional boundary for the HR model

For contact problems, with the standard RID construction described Section 4.2, the gap may be not computable on all points contained in $\Gamma^C \cap \partial\Omega_A$, see Figure 2 . We then need to extend Γ^I to Γ_I^C which denotes the part of $\Gamma^C \cap \partial\Omega_A$ where the gap can not be computed because of missing opposite points, or in other words when only one point of the pair of coupled points is in $\Gamma^C \cap \partial\Omega_A$. Indeed, no Lagrange multiplier can be computed on a boundary where the gap

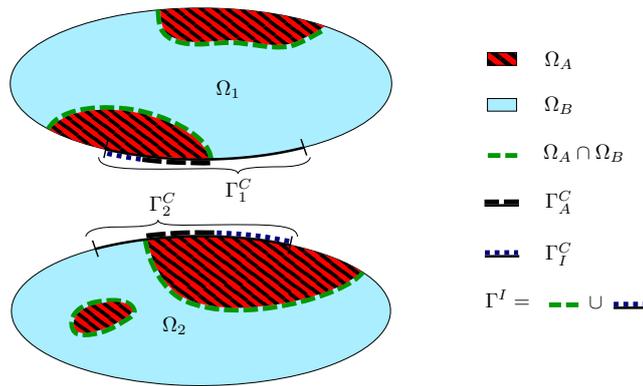


FIGURE 2 RID representation for a generic two-body contact problem.

can not be estimated. The extended interface permits to enforce additional pseudo-Dirichlet boundary conditions, see

Equation (18), on Γ_I^C instead of writing balance conditions. It reads:

$$\Gamma^I = (\Omega_A \cap \Omega_B) \cup \Gamma_I^C \quad (32)$$

We must then adapt the definition of \mathcal{A} . The convenient restriction reads:

$$\mathcal{A} = \left\{ i \in \{1, \dots, N\} \mid \int_{\Omega_B} \varphi_i^T \varphi_i d\Omega + \int_{\Gamma_I^C} \varphi_i^T \varphi_i d\Gamma = 0 \right\} \quad (33)$$

where \mathcal{A} is the set of all displacement dofs that are neither connected to Ω_B nor located on Γ_I^C . Then, the reduced Hertz-Signorini-Moreau equations are set only over $\Gamma_A^C = (\Gamma^C \cap \partial\Omega_A) \setminus \Gamma_I^C$, see Figure 2 .

5.2 | Hybrid hyper-reduced balance equations for contact

We propose to extend the HR method to mixed contact problem by preserving a local FE approximation of the Lagrange multipliers. The number of Lagrange multipliers is then bounded by construction thanks to the restriction of the potential contact zone to the RID.

The hybrid HR saddle-point problem reads:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Find } (\underline{u}, \lambda) \in \mathcal{V}_{HR}^{\Omega_A} \times \mathcal{W}_{HR}^{\Omega_A} \text{ such that} \\ a_{\Omega_A}(\underline{u}, \underline{v}) + b_{\Gamma_A^C}(\underline{v}, \lambda) = l_{\Omega_A}(\underline{v}), \quad \forall \underline{v} \in \text{span}\{\underline{\psi}_k^A\}_{k=1}^{L_u} \\ b_{\Gamma_A^C}(\underline{u}, \kappa - \lambda) \leq \langle d, \kappa - \lambda \rangle_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_A^C), H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_A^C)}, \quad \forall \kappa \in \mathcal{W}_{HR} \end{array} \right. \quad (34)$$

with $\mathcal{W}_{HR}^{\Omega_A} = \{\kappa \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_A^C) \mid \kappa \geq 0\}$ and $b_{\Gamma_A^C}(\underline{v}, \kappa) = \langle u_N, \kappa \rangle_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_A^C), H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_A^C)}$. By this way, the solution \underline{u} verify $\langle u_N - d, \lambda \rangle_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_A^C), H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_A^C)} = 0$.

We introduce \mathcal{A}_c as the set of dofs of \mathcal{A} located on the potential contact zone, \mathcal{A}_λ as the set of dual dofs connected to \mathcal{A}_c by the matrix \underline{B} and \mathcal{A}'_c as the set of primal dofs connected to \mathcal{A}_λ by \underline{D} :

$$\mathcal{A}_c = \{j \in \mathcal{A} \mid \exists i \in \{1, \dots, N_\lambda\} \text{ s.t. } \underline{B}_{ij} \neq 0\} \quad (35)$$

$$\mathcal{A}_\lambda = \{i \in \{1, \dots, N_\lambda\} \mid \exists j \in \mathcal{A}_c \text{ s.t. } \underline{B}_{ij} \neq 0\} \quad (36)$$

$$\mathcal{A}'_c = \{j \in \{1, \dots, N\} \mid \exists i \in \mathcal{A}_\lambda \text{ s.t. } \underline{D}_{ij} \neq 0\} \quad (37)$$

Then, we have $\mathcal{A}_c \subseteq \mathcal{A}'_c$ but not necessarily $\mathcal{A}'_c \subseteq \mathcal{A}$. If the contact problem is an obstacle problem (see Section 6.1) or the contact is numerically treated with a node-to-node algorithm requiring matching meshes, then $\mathcal{A}'_c = \mathcal{A}_c$. We denote by N_λ^C the cardinal of \mathcal{A}_λ .

After discretization, we obtain the Problem (38) to be solved in the online phase.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Find } (\underline{\gamma}, \underline{\Delta}[\mathcal{A}_\lambda]) \in \mathbb{R}^{L_u} \times (\mathbb{R}^+)^{N_\lambda^C} \text{ such that} \\ \underline{V}[\mathcal{A}, :]^T \underline{K}[\mathcal{A}, \mathcal{A} \cup \mathcal{I}] \underline{V}[\mathcal{A} \cup \mathcal{I}, :] \underline{\gamma} + \underline{V}[\mathcal{A}_c, :]^T \underline{B}[\mathcal{A}_\lambda, \mathcal{A}_c] \underline{\Delta}[\mathcal{A}_\lambda] = \underline{V}[\mathcal{A}, :]^T \underline{F}[\mathcal{A}] \\ \underline{\Delta}[\mathcal{A}_\lambda] \odot (\underline{B}[\mathcal{A}_\lambda, \mathcal{A}'_c] \underline{V}[\mathcal{A}'_c, :] \underline{\gamma} - \underline{D}[\mathcal{A}_\lambda]) = 0 \\ \underline{B}[\mathcal{A}_\lambda, \mathcal{A}'_c] \underline{V}[\mathcal{A}'_c, :] \underline{\gamma} \leq \underline{D}[\mathcal{A}_\lambda] \end{array} \right. \quad (38)$$

where $\underline{B}[\mathcal{A}_\lambda, :]$, $\underline{D}[\mathcal{A}_\lambda]$ and $\underline{\Delta}[\mathcal{A}_\lambda]$ are respectively the potential contact matrix, the vector of the initial gap and the approximation of the Lagrange multipliers restricted to \mathcal{A}_λ . One of the benefit of this formulation is that we are verifying the Signorini contact conditions in the RID (without projection).

Property 1. In the case $\mathcal{A}'_c = \mathcal{A}_c$, if $\underline{B}[\mathcal{A}_\lambda, \mathcal{A}_c] \underline{V}[\mathcal{A}_c, :]$ has full row rank then the Problem (38) is consistent with the FE formulation (16).

Proof. We suppose $\mathcal{A}'_c = \mathcal{A}_c$. A necessary condition for the saddle-point contact Problem (38) to be well posed is given by the so-called inf-sup or LBB condition which is equivalent to say that $\underline{B}[\mathcal{A}_{\lambda, \text{active}}, \mathcal{A}_c] \underline{V}[\mathcal{A}_c, :]$ must have full row rank, where $\mathcal{A}_{\lambda, \text{active}}$ denotes the dofs of \mathcal{A}_λ associated to an active contact ($\underline{B}[\mathcal{A}_{\lambda, \text{active}}, \mathcal{A}_c] \underline{V}[\mathcal{A}_c, :] = \underline{D}[\mathcal{A}_{\lambda, \text{active}}]$). As

the active contacts are a priori unknowns, we extend that condition to a stronger one which is $\underline{B}[\mathcal{A}_\lambda, \mathcal{A}_c] \underline{V}[\mathcal{A}_c, :]$ having full row rank. A necessary condition for verifying the discrete extended LBB is $l_u \geq N_\lambda^C$. If the discrete LBB condition is verified, and because the term $\underline{V}[\mathcal{A}, :]^T \underline{K}[\mathcal{A}, \mathcal{A} \cup \mathcal{I}] \underline{V}[\mathcal{A} \cup \mathcal{I}, :]$ is well defined by the classical HR (see Section 4.3), then the Problem (38) admits a unique solution. Moreover, the Problem (38) is founded on the FE formulation (16) by restraining matrices and vectors to the RID, projecting the balanced equation on $\underline{V}[\mathcal{A}, :]$ and then replacing $\underline{U}[\mathcal{A} \cup \mathcal{I}]$ by $\underline{V}[\mathcal{A} \cup \mathcal{I}, :]\underline{\gamma}$. \square

If the extended LBB condition ($\underline{B}[\mathcal{A}_\lambda, \mathcal{A}_c] \underline{V}[\mathcal{A}_c, :]$ has full row rank) is not verified, we propose to adopt a hybrid full-order/reduced-order model strategy [24, 26, 27]. This approach follows the usual principles of HR method by using a mixed primal RB. The mixed primal RB contains the usual POD modes and few finite element shape functions. The selected finite element shape functions have to be related to the nodes on Γ_A^C in order to increase the rank of $\underline{B}[\mathcal{A}_\lambda, \mathcal{A}_c] \underline{V}[\mathcal{A}_c, :]$. We denote by $(i_\alpha^c)_{\alpha=1}^{\text{card}(\mathcal{A}_c)}$ the indices in \mathcal{A}_c . Then the mixed primal reduced basis reads:

$$\underline{\psi}_k = \begin{cases} \psi_k & \text{if } k \leq l_u \\ \varphi_{i_{k-l_u}^c} & \text{if } l_u < k \leq \bar{l}_u \end{cases}, \quad k = 1, \dots, \bar{l}_u \quad (39)$$

with $\text{card}(\mathcal{A}) \geq \bar{l}_u \geq \max(l_u, N_\lambda^C)$ defined such that $\underline{B}[\mathcal{A}_\lambda, \mathcal{A}_c] \underline{V}[\mathcal{A}_c, :]$ has full row rank, the matrix $\underline{V}[\mathcal{A}_c, :]$ being defined as the discretization of $\underline{\psi}_k$:

$$\underline{V} = \left(\underline{V} \mid \underline{I}_N \left[:, (i_{k-l_u}^c)_{k=l_u+1}^{\bar{l}_u} \right] \right). \quad (40)$$

The Problem (38) is then defined with \underline{V} playing the role of \underline{V} .

When $D > 1$ and the number of nodes on Γ_A^C is small enough, it may be interesting to treat every primal dofs on the potential contact zone with finite element shape functions in order to simply ensure the full row rank condition, a good stability and accurate solutions on the contact zone.

5.3 | Reconstruction of the Lagrange multipliers from hyper-reduced solution

Thanks to the choice of the lifting of u_I (28), the primal solution is defined everywhere by $\underline{U} = \underline{V}\underline{\gamma}$. However, a drawback of the proposed HR approach is that the non-penetration condition (6) may be not verify outside the RID.

The proposed reduced model (38) gives contact forces inside the RID only. The reconstruction of the contact forces over Ω is possible with a postprocessing but brings us back to the problem of finding a reliable dual RB. We propose here a postprocessing that consists in extracting from the dual snapshots N_s linearly independent snapshots such that $N_s \leq N_\lambda^C + N_\lambda$ and we denote it \underline{s}_λ . Our strategy is to find the coefficients $\underline{\gamma}_\lambda$, with positivity constraints to ensure the non-adhesion condition, associate to \underline{s}_λ minimizing the complementary slackness condition as well as the distance with the solution obtained by solving the HR model. The proposed reconstruction is obtained by solving the non-negative least squares Problem (41) where \underline{U} and $\underline{\Delta}[\mathcal{A}_\lambda]$ are the primal and the dual solution obtained by solving the HR model (38).

$$\min_{\underline{\gamma}_\lambda} \left\| \begin{pmatrix} \underline{s}_\lambda[\mathcal{A}_\lambda, :] \\ [\underline{B}\underline{U} - \underline{D}]_- \odot \underline{s}_\lambda \end{pmatrix} \underline{\gamma}_\lambda - \begin{pmatrix} \underline{\Delta}[\mathcal{A}_\lambda] \\ \underline{0} \end{pmatrix} \right\|_2^2 \quad \text{subject to } \underline{\gamma}_\lambda \geq 0 \quad (41)$$

The Lagrange multipliers are then defined outside the RID thanks to the relation $\underline{\Delta}[\{1, \dots, N_\lambda\} \setminus \mathcal{A}_\lambda, :] = \underline{s}_\lambda[\{1, \dots, N_\lambda\} \setminus \mathcal{A}_\lambda, :]\underline{\gamma}_\lambda$.

5.4 | Greedy algorithm coupled with an error indicator

The reliability of a RB strictly depends on the snapshots, see Section 4.1 for a RB made of POD modes. In order to accurately choose the snapshots, two possibilities are at least possible. The first possibility is to take the snapshots in the parameter space randomly or uniformly distributed. The second possibility is to apply a greedy algorithm [35] which is going to select iteratively the snapshots maximizing an error indicator. The greedy algorithm is usually used as it enables to choose pertinent snapshots and to obtain a minimal robust RB. However, this algorithm may be slow (but in the offline part) and requires an error indicator. This error indicator will be used to have a stopping criterion.

In [7], the error indicator used is based on the non-satisfaction of the contact conditions. However, for the hybrid HR model (38) proposed here, the contact conditions are respected by construction on the RID. We propose hence a

simple but efficient *a posteriori* error indicator for HR. We first interpolate at $\underline{\mu} \in \mathcal{S}$ the primal snapshots collection $\mathcal{S}_{\text{snap}} \subset \mathcal{S}$ restricted to the dofs \mathcal{I} located on Γ^I (see Equation (21)):

$$\tilde{U}(\underline{\mu})[\mathcal{I}] = \sum_{\rho \in \mathcal{S}_{\text{snap}}} \alpha_{\rho}(\underline{\mu}) U(\rho)[\mathcal{I}] \quad (42)$$

with $\alpha_{\rho}(\underline{\mu})$ the interpolation coefficients. The interpolated solution is imposed as Dirichlet boundary condition on the RID interface Γ^I . We can then solve the FOM problem defined on Ω_A , in order to obtain an approximation of the reference displacements and contact forces reference solutions inside the RID. The primal and dual approximations are respectively denoted $\tilde{U}[\mathcal{A}]$ and $\tilde{\Delta}[\tilde{\mathcal{A}}_{\lambda}]$ with $\tilde{\mathcal{A}}_{\lambda} \subseteq \mathcal{A}_{\lambda}$ since the problem is directly defined on Ω_A . The reduced FE approximation tends to the FOM approximation as the interpolation error tends to zero. Our error indicator is the relative discrepancy between the HR solution $(\underline{U}_{hr}, \underline{\Delta}_{hr})$ and the reduced FE approximation in the RID, where $(H^1)'$ denotes the dual of H^1 .

$$\eta(\underline{\mu}) = \eta_u(\underline{\mu}) + \eta_{\lambda}(\underline{\mu}) \quad \text{with} \quad \eta_u(\underline{\mu}) = \frac{\|(\underline{U}_{hr} - \tilde{U})(\underline{\mu})[\mathcal{A}]\|_{H^1}}{\|\tilde{U}(\underline{\mu})[\mathcal{A}]\|_{H^1}}, \quad \eta_{\lambda}(\underline{\mu}) = \frac{\|(\underline{\Delta}_{hr} - \tilde{\Delta})(\underline{\mu})[\tilde{\mathcal{A}}_{\lambda}]\|_{(H^1)'}}{\|\tilde{\Delta}(\underline{\mu})[\tilde{\mathcal{A}}_{\lambda}]\|_{(H^1)'}}. \quad (43)$$

In the following applications, we use a bilinear interpolation in the parameter space but it could be interesting to use an interpolation on the manifold as proposed in [36].

6 | ACADEMIC TEST CASE

6.1 | Model

The application we will focus on comes from [6] and has been used in [7, 17]. It is a one-dimensional static obstacle problem. We consider a 1D elastic rope described by the Problem (9) with $\sigma = \nu \text{grad } u$ in $\Omega = [0, 1]$. Homogeneous Dirichlet boundary conditions are applied on $\Gamma^D = \{0, 1\}$. Moreover, $\Gamma^N = \emptyset$ and $\Gamma^C =]0, 1[$. The function f is non-parametric and corresponds to a gravity, $f(x) = -1$. The problem depends on a parameter vector $\underline{\mu}$ living in the domain $\mathcal{S} = [0.05, 0.25] \times [-0.05, 0.5]$. The elasticity function ν depends on the first parameter μ_1 as:

$$\nu(x, \mu_1) = \mu_1 1_{[0,0.5]}(x) + 0.15 \times 1_{]0.5,1]}(x) \quad \text{with} \quad 1_{\Xi}(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in \Xi \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}$$

The second parameter μ_2 controls the obstacle function involved in the gap:

$$d(x, \mu_2) = 0.2(\sin(\pi x) - \sin(3\pi x)) + 0.5 - \mu_2(x - 0.5), \quad \forall x \in \Omega.$$

We represent on Figure 3 primal and dual solutions of the FOM obtained using linear FE for different parameters $\underline{\mu}$ in \mathcal{S} . The choice of the parameters μ_1, μ_2 then influences the active contact zone and the magnitude of the contact forces. The domain Ω is discretized in 100 nodes uniformly distributed.

6.2 | Active-set algorithm

All contact saddle point problems (e.g. (16), (38) and (43)) are solved here with an active-set strategy. This strategy of resolution consists in explicitly verifying the complementary slackness condition by imposing contact condition $((\underline{BU})_i = (\underline{D})_i)$ where Lagrange multipliers are active. The set of active Lagrange multipliers is updated thanks to the violation of the Signorini laws. Lagrange multipliers are respectively activate and deactivate where the non-penetration $((\underline{BU})_i \leq (\underline{D})_i)$ and the non-adhesion $((\underline{\Delta})_i \geq 0)$ conditions are violated.

6.3 | Projection-based method

We briefly recall the projection-based (PB) method introduced in [7] as we are going to compare the proposed hybrid hyper-reduction method for contact to this method. No comparison between the hybrid hyper-reduction and the reduced basis method introduced in [6] is done here as this latter method does not use data compression to build the RB (like POD) and so can lead to a large RB when using a lot of snapshots, as explained in [7]. The projection-based method, introduced for contact problems, is based on the POD to construct the primal RB \underline{V}_u and on the NNMF

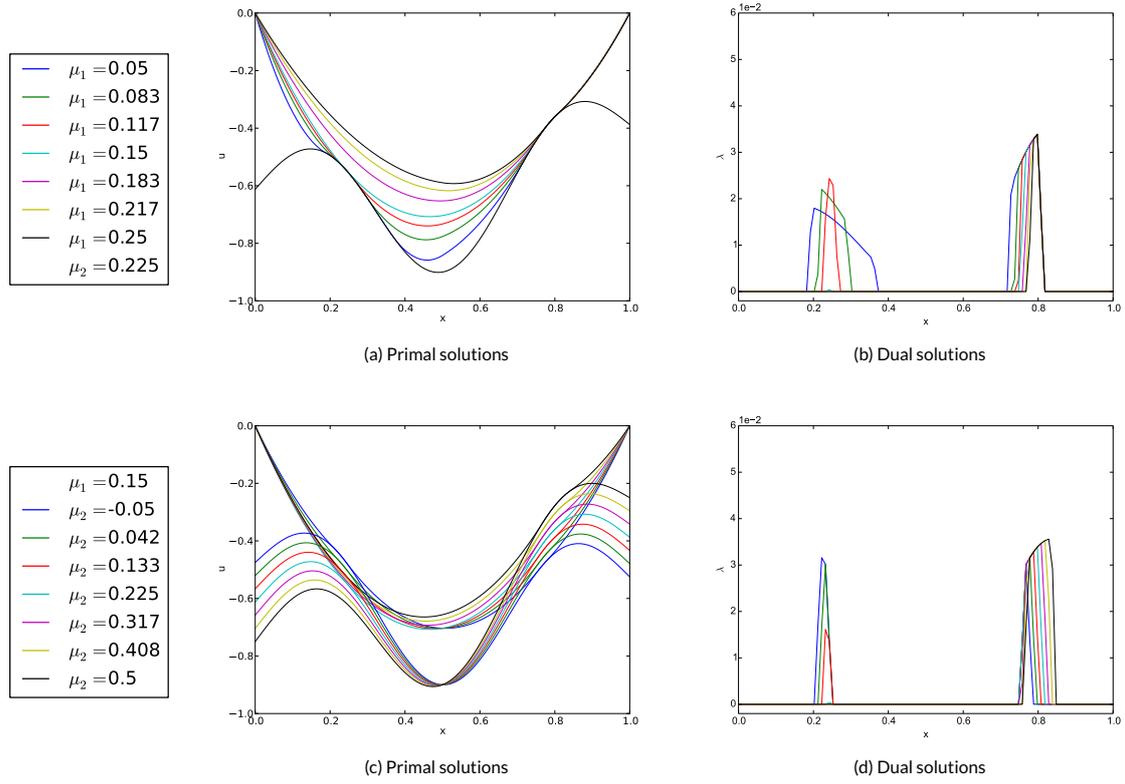


FIGURE 3 FOM solutions, (a) and (b): variations of the parameter μ_1 in $[0.05, 0.25]$, (c) and (d): variations of μ_2 in $[-0.05, 0.5]$.

algorithm to build a dual RB \underline{V}_λ which preserves the positivity of Lagrange multipliers after projection. The integers l_u and l_λ denotes respectively the number of vectors in \underline{V}_u and \underline{V}_λ . The Galerkin projection of the FOM (16) on these two bases gives

$$\begin{cases} \text{Find } (\gamma_u, \gamma_\lambda) \in \mathbb{R}^{l_u} \times (\mathbb{R}^+)^{l_\lambda} \text{ such that} \\ \underline{V}_u^T \underline{K} \underline{V}_u \gamma_u + \underline{V}_u^T \underline{B}^T \underline{V}_\lambda \gamma_\lambda = \underline{V}_u^T \underline{F} \\ \gamma_\lambda \odot (\underline{V}_\lambda^T \underline{B} \underline{V}_u \gamma_u - \underline{V}_\lambda^T \underline{D}) = 0 \\ \underline{V}_\lambda^T \underline{B} \underline{V}_u \gamma_u \leq \underline{V}_\lambda^T \underline{D} \end{cases} \quad (44)$$

The displacement field and Lagrange multipliers are finally obtained by $\underline{U} = \underline{V}_u \gamma_u$ and $\underline{\Delta} = \underline{V}_\lambda \gamma_\lambda$. The NNMF takes as input the number of vectors in the RB. In order to have the largest number of dual dofs while respecting the extended necessary condition ($l_u \geq l_\lambda$), we impose $l_\lambda = l_u$ for this method.

Using these RB approximations, only the non-adhesion condition on $\underline{\Delta}$ is ensured by the positive dual RB \underline{V}_λ built with NNMF. The non-penetration and complementary slackness conditions are not verified for \underline{U} and $\underline{\Delta}$. Indeed, one can prove that $\underline{\Delta}^T (\underline{B} \underline{U} - \underline{D}) = 0$ but not componentwise ($\underline{\Delta} \odot (\underline{B} \underline{U} - \underline{D}) = 0$) since $\underline{B} \underline{U} - \underline{D}$ is not necessarily negative or zero.

Unlike the POD and its unique factorization, there is no unique NNMF factorization. Moreover, NNMF algorithms can converge to different local minima (and even this convergence to local minima is not guaranteed), that is why initialization of the algorithm becomes critical [37].

The method used here for the computation of the NNMF dual RB is an alternating non-negative least squares matrix factorization using projected gradient (bound constrained optimization) method for each subproblem. It can be found in the Python library introduced in [38]. This method takes as input several parameters as the initialization, the rank

approximation, the maximum number of factorization iterations, the number of runs of the algorithm, etc. We opte for a NNDSVD initialization [39].

6.4 | On the difficulty of finding a reliable dual RB

In order to illustrate the difficulty of finding a reliable dual RB, we consider snapshots taken on a coarse grid of 10×12 points uniformly distributed in \mathcal{S} . The difficulty of the dual FOM solutions to be approximated by a RB can be understood looking at Figure 4 where we draw the relative error in Frobenius norm between the snapshots and its k -rank approximation by a RB. For the POD RBs built with the SVD, this is equivalent to $1 - \mathcal{E}(k)$ as defined in the Equation (18). Compared to primal POD RB, the dual POD RB needs much more vectors to reach the same error threshold. The POD giving an optimal k -rank basis, any other algorithm would give a less decreasing curve as we can see for the dual NNMF RB. For this latter algorithm, we study the influence of the maximum number of factorization iterations. Two maximum have been tested: 10^2 and 10^4 iterations as reported on Figure 4. For low k , whatever the maximum number of factorization iterations, the approximation errors done by the dual NNMF RB are really close to the one done by the dual POD RB. Differences appear for large k , where the level of stagnation error varies with the maximum number of factorization iterations. As low k correspond to the domain of interest for model order reduction, and because the CPU time for the construction of the dual NNMF RB grows with the number of iterations, we set the maximum number of factorization iterations to 10^2 in the sequel of the article.

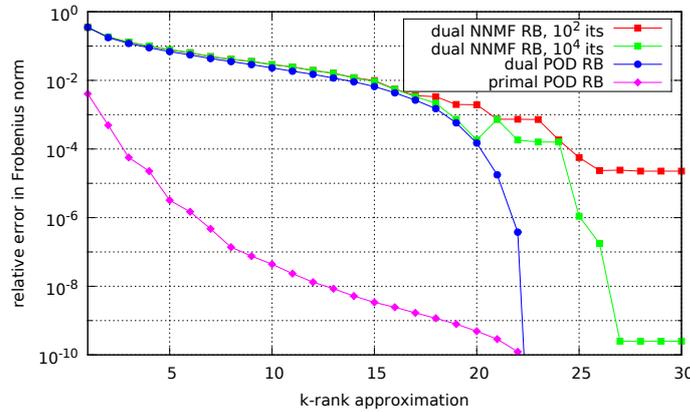


FIGURE 4 Relative error between snapshots and best approximation using the RB.

6.5 | Hyper-reduction method

In order to illustrate the construction of the hybrid HR model for the rope test case, we first consider snapshots taken on the coarse grid of 10×12 points as introduced in Section 6.4. The verification of the hypothese of Property 1 implies that $\bar{l}_u = N_\lambda^C$ in the contact problem with obstacle under study ($\underline{B} = \underline{I}_{\text{card}(\mathcal{A})}$). The chosen full order dofs have to ensure that $\underline{\bar{V}}$ has full row rank.

6.5.1 | Primal RB and RID construction

The primal RB is built with the POD. We draw on Figure 5 some of the $l_u = 9$ first POD modes selected for a POD threshold $\epsilon_{tol} = 10^{-7}$. In practice, the higher the mode number is, the higher there are gradients in the mode.

We detail here the procedure used to construct the RID. We first apply the DEIM algorithm on the primal RB. We next apply the DEIM on the POD basis obtained for the Lagrange multipliers to make sure most important contact zones are included in the RID. In this example, we take a dual POD threshold $\epsilon_{tol} = 10^{-1}$ giving $l_\lambda = 1$ vector. The RID is then the union of the two domains obtained with the DEIM. The RID does not need to be extended. Because it is an

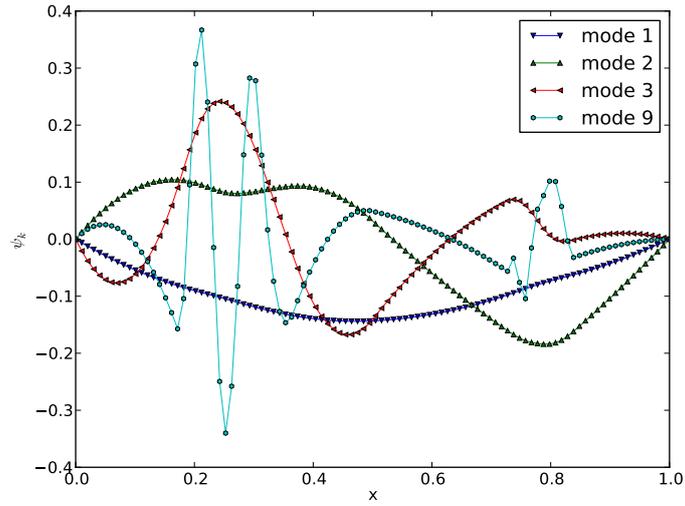


FIGURE 5 POD modes contained in the primal RB built by using 10×12 snapshots.

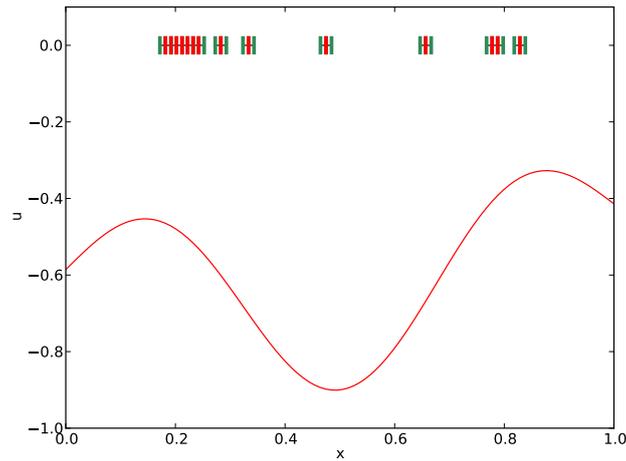


FIGURE 6 Top: RID built by using 10×12 snapshots, red ticks represent the set \mathcal{A} while green ticks the set \mathcal{I} .
Bottom: example of the obstacle for $\mu_2 = 0.17$.

obstacle problem, the gap can be evaluated in all points of the RID. We represent at top of Figure 6 the RID obtained and at the bottom an example of the obstacle ($\mu_2 = 0.17$). The reduced mesh is located where the obstacle is at the higher position, so the RID seems include the most part of the contact zone. In this case, the RID contains 28 nodes in Ω_A including 14 in Γ_A^C (the red dots) while the initial domain count 100 nodes. To respect the extended necessary condition, 5 primal dofs are treated as full order dofs.

6.5.2 | Results obtained using the hybrid HR model

On a fine grid of 100×120 points uniformly distributed in \mathcal{S} we compare the solutions obtained with the reference FOM and with the HR model. We represent on Figure 7 the 2-norm relative errors over the parameter space for both displacements and contact forces. The mean and maximum relative error for the displacements over Ω respectively

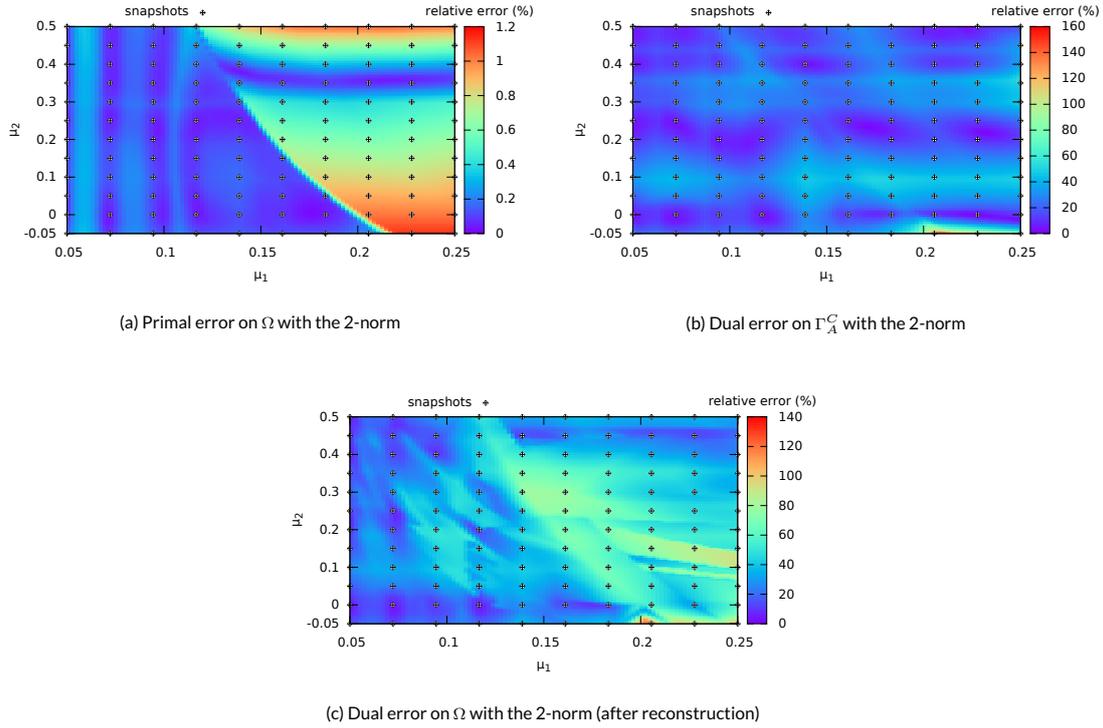


FIGURE 7 Errors of the hybrid HR model compared to the FOM generated by using 10×12 snapshots. The snapshots are represented with the symbol \diamond .

read 0.34% and 1.13% (Figure 7 a) while the mean and maximum relative error for the contact forces over Γ_A^C respectively read 24% and 148% (Figure 7 b). We can conclude that the regular snapshots grid has not caught the maximum relative error for the contact forces.

Using the reconstruction strategy introduced in Section 5.3, the average and maximum relative error for the contact forces over Ω respectively read 39% and 127% (Figure 7 c). The mean relative error over Ω is higher than before reconstruction but is still satisfactory. The proposed reconstruction seems efficient and reliable.

6.6 | Comparison between HR and PB method

6.6.1 | Regular grid

We first compare the hybrid HR model introduced in the previous section with two equivalent models made thanks the PB method. The primal RB, built with the POD for the two methods, is made of $l_u = 9$ ($\epsilon_{tol} = 10^{-7}$) vectors for the HR. Due to the inf-sup condition to be respected, the hybrid HR model may have a hybrid primal basis with 5 more vectors. The two PB models are respectively built with $l_u = 9$ ($\epsilon_{tol} = 10^{-7}$) and $l_u = 14$ ($\epsilon_{tol} = 6.0 \times 10^{-9}$) vectors in the primal RB. The dual RB is constructed by NNMF with the same number of vectors as the primal RB while the FOM dual basis is maintained in the HR.

We respectively draw on Figure 8 and 9 the HR and PB solutions to be compared with the FOM solutions for $\underline{\mu} = (0.07, 0.17)^T$ not taken in the sample of snapshots. Details on the calculus are presented in Table 1. As we can see in Figure 8 a and 9 a, the primal solutions for both methods are truly accurate. Concerning the dual solutions obtained with the PB method and represented in Figure 9 b, the Lagrange multipliers are non-null at similar locations but magnitudes are significantly different compared to the FOM dual solution. In comparison, the dual HR model solution drawn in Figure 8 b is better due to the non-projection on a dual compressed RB. The speed-up obtained (see Table 1) are rather close to each other if the post-treatment to reconstruct the HR dual solution everywhere using

snapshots basis is not taken into account. These speed-up are strongly dependent on the number of iterations of the active-set method. We can see in Table 1 that the error on contact forces is of 13% compared to 23% for the PB method with the same number of unknowns. This confirms that the proposed hybrid HR model is really efficient.

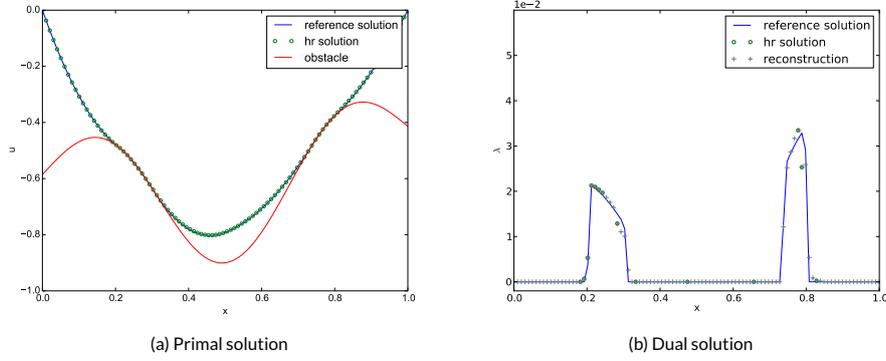


FIGURE 8 HR solution compared to FOM solution for $(\mu_1, \mu_2) = (0.07, 0.17)$.

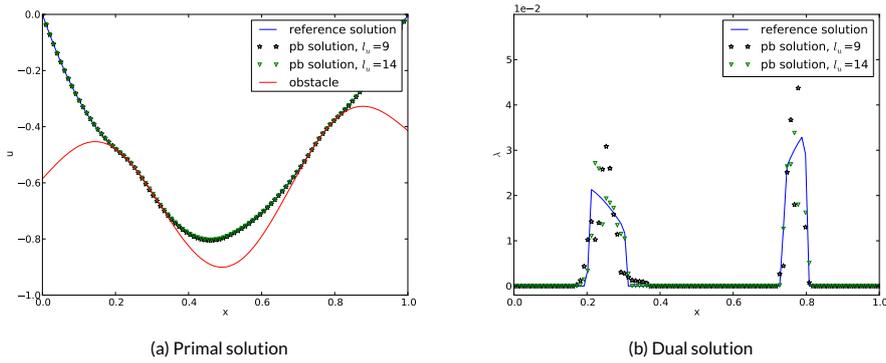


FIGURE 9 Two PB solutions built with $l_u = 9$ and $l_u = 14$ compared to FOM solution for $(\mu_1, \mu_2) = (0.07, 0.17)$.

	HR ($l_u = 9$)	PB ($l_u = 9$)	PB ($l_u = 14$)
Total number of unknowns	28	18	28
Speed-up	8.5/5.9	8.4	9.1
Active-set iterations	4	6	5
Displacements 2-norm relative error (%)	0.15	0.32	0.04
Contact forces 2-norm relative error (%)	13/12	44	23

TABLE 1 Comparison of the methods for $(\mu_1, \mu_2) = (0.07, 0.17)$.

In the HR column, we specify the results without/with the contact forces reconstruction.

6.6.2 | Greedy algorithm

In order to compare both approaches using a greedy algorithm, we will compare the results obtained by choosing the snapshots thanks to either the error indicator introduced in this paper, see Equation (43) and dedicated to the HR method, or to the error indicator introduced as $\mathcal{I}(\gamma, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ in [7] based on the non-verification of the Signorini conditions and dedicated to the PB method. We will use in this comparison only the error indicator based on the non-penetration $\mathcal{I}(\gamma, 1, 0, 0)$ as it is the cheapest and gives the most accurate approximation following [7]. It reads

$$I(\underline{\mu}) = \left\| \left[\underline{B}(\underline{\mu}) \underline{V} \gamma(\underline{\mu}) - \underline{D}(\underline{\mu}) \right]_+ \right\|_2. \quad (45)$$

The primal POD threshold is set at $\epsilon_{tot} = 10^{-10}$ for both methods. The dual POD threshold for the HR-RID construction is set to $5 \cdot 10^{-2}$ while the number of vectors of the dual RB for the projection-based method is set to the number of vectors of the primal RB. POD thresholds are taken smaller than for the regular grid in order to have a good RID from the beginning of the algorithm. During the greedy algorithm iteration, the RID can only be enlarged: the RID used in the HR model is then the union of the previous iteration RID and the current iteration RID. The greedy algorithm is stopped at the 50th iteration.

We draw in Figure 10 the evolution of the average relative error for both methods using the snapshots obtained thanks to the error indicator η (Equation (43)) applied to the HR method. In this figure, reference error means the error between the ROM and the FOM. The HR reference error corresponds to the relative error on Ω for the primal solution and on Γ_A^C for the dual solution while the HR reference reconstruction error corresponds to the relative error on Ω for the dual solution. The error indicators are overestimating the reference errors as the HR model converges faster to the FOM than the FE approximation based on the boundary conditions interpolation. This convergence is directly related to the POD threshold which is rather small here. In the H^1 norm, the primal HR model error is clearly smaller than the primal PB model error as we can see in Figure 10 a whereas it is slightly smaller for the 2-norm (see Figure 10 c). This means that the HR model better approximates the gradient of the displacement (strain) than the PB model. In accordance with the Table 1, the fact that the HR model 2-norm error is slightly smaller is probably due to a larger number of primal dofs ($\bar{l}_u \geq l_u$). The dual $(H^1)'$ norm HR model error is equivalent to the dual PB model error (except for high number of iterations) as we can see in Figure 10 b. Because the $(H^1)'$ norm is difficult to apprehend, we also plot the dual relative error obtained with the 2-norm in Figure 10 d. With this norm, the dual HR model error is clearly better than the dual PB model error even after reconstruction on Γ^C . We recover here the quantitative first conclusions drawn from Figure 8 and 9

We draw in Figure 11 the evolution of the average relative error for both methods using snapshots obtained with the error indicator $I(\underline{\mu})$ applied to the PB method. The HR reference average relative errors obtained are decreasing faster than in Figure 10 but are more unstable. One more time, the HR model errors are much smaller than the PB model errors, especially for contact forces. However, we can see that the error indicator $I(\underline{\mu})$ estimates very well the reference PB error as already shown in [7].

At the end of the greedy algorithm, we report in Figure 12 the 2-norm reference relative errors obtained with the HR model built with its associated error indicator. A fine grid of 100×120 points uniformly distributed in S is used. The mean and maximum relative error for the displacements over Ω respectively read 0.004% and 0.077% (Figure 12 a) while the mean and maximum relative error for the contact forces over Γ_A^C respectively read 0.34% and 10% (Figure 12 b). We can see that the error is highly smoother than with a regular grid (see Figure 7). It demonstrates the effectiveness of the proposed error indicator η used in the greedy algorithm. The highest error for both displacements and contact forces is localised where μ_1 is small, e.g. where the active contact zone is the most important. Reconstructing the contact forces on Ω gives an average and maximum relative error which respectively read 1.3% and 18% over Ω (Figure 12 c). The error is then higher than before reconstruction and spread to all small μ_1 except on snapshots.

The results obtained with the hybrid HR model give confidence in the proposed method. The hybrid HR model error is generally equivalent to the PB model error or even better depending on the norm, especially to approximate contact forces.

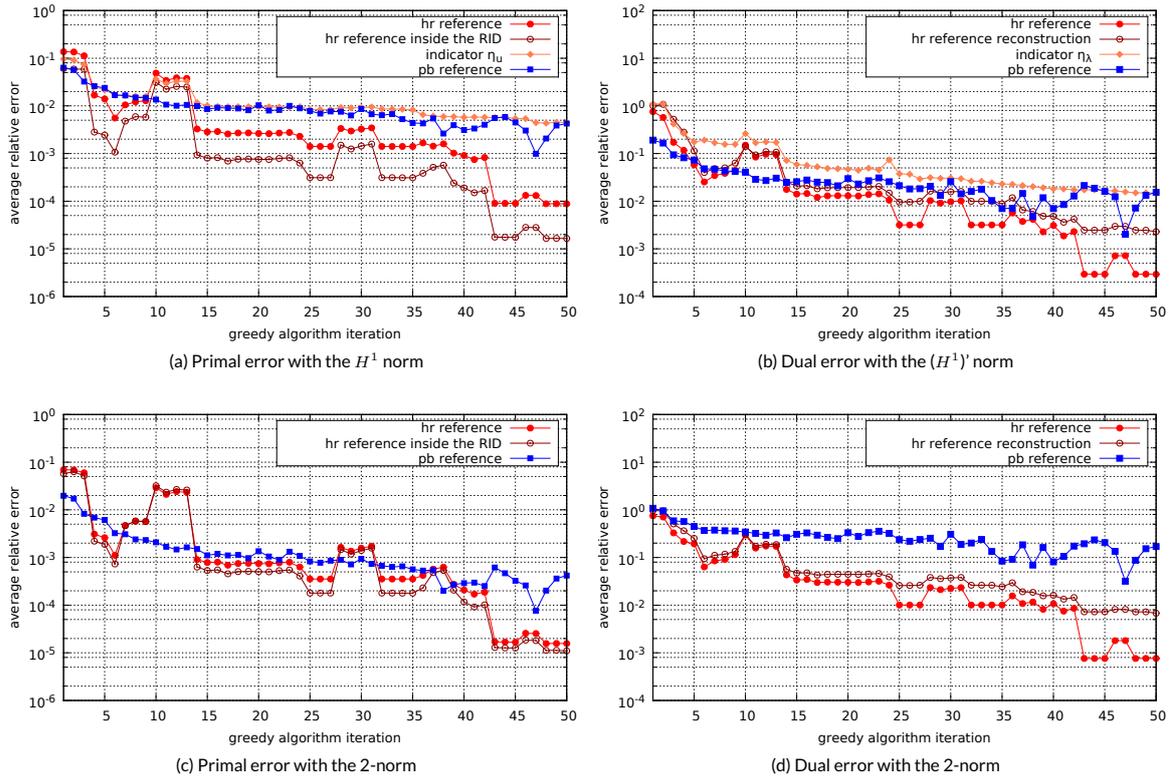


FIGURE 10 Decrease of the average relative errors during the greedy algorithm based on the error indicator η applied to the HR method.

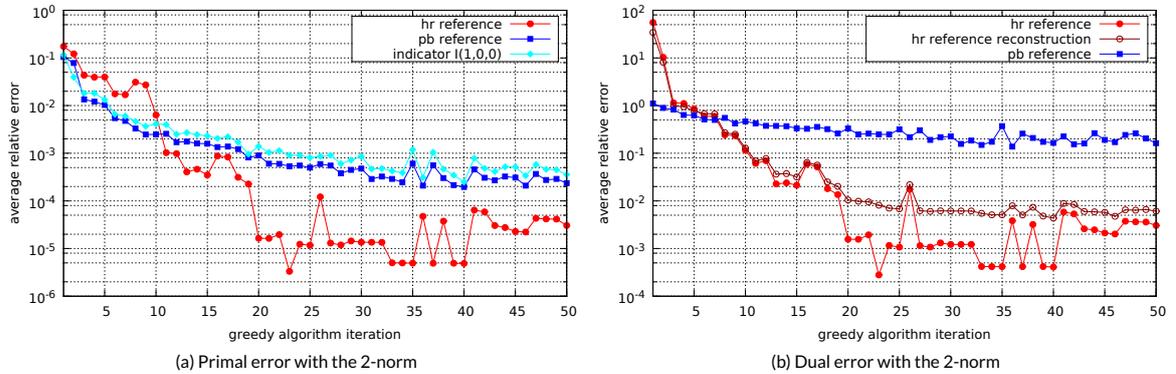


FIGURE 11 Decrease of the average relative error during the greedy algorithm based on the error indicator $I(\underline{\mu})$ applied to the PB method.

7 | APPLICATION TO A 3-DIMENSIONAL PROBLEM ($D = 3$)

This 3-dimensional example aims to show the supply of the proposed hybrid HR model for 3D contact problems. We will especially focus on the RID construction which predict to have benefit for nonlinear behaviours. We assume a node-to-node contact.

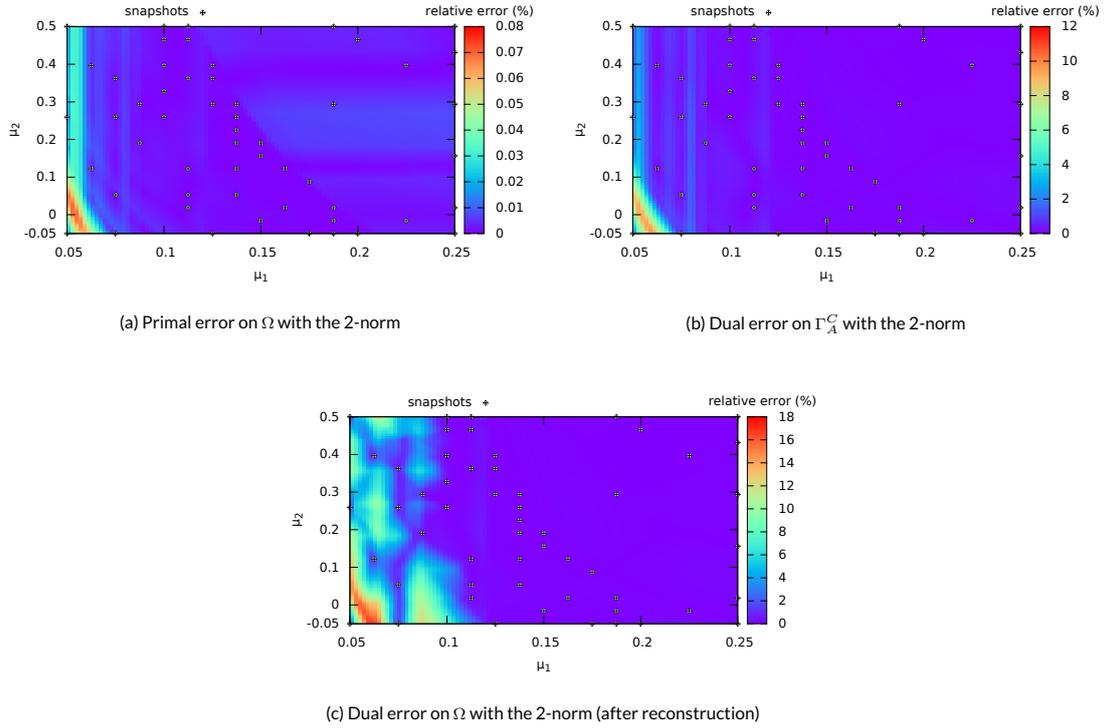


FIGURE 12 Errors of the hybrid HR model compared to the FOM generated by using 10×12 snapshots. The snapshots are represented with the symbol \diamond .

7.1 | Elastic model

The test case, derived from nuclear fuel simulations, is a 3D extension of the one we can find in [40]. We consider a cylindrical pellet (13.5 mm height), in a cladding (4.1 mm internal radius, 4.7 mm external radius). To account for symmetries, only one eighth of the mechanical system is simulated, as shown in Figure 13 . An axial pressure p_A (5 Mpa)

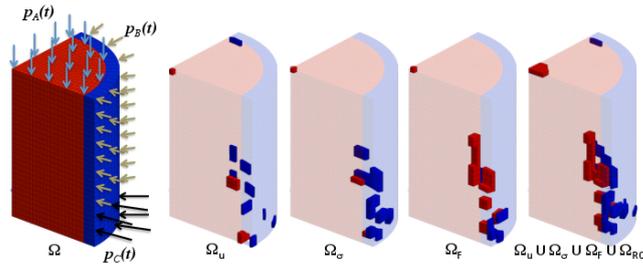


FIGURE 13 On top left the reference geometry and the Neumann boundary condition, on the right various contribution to the reduced integration domain.

is imposed on the top of the pellet and two radial pressures p_B (50 MPa for $z > 2\text{mm}$) and p_C (250 MPa for $z < 2\text{mm}$) are imposed on the cladding. Three radius of the pellet are considered to investigate the effect of the initial gap on the stresses: radius 4.1 mm (no initial gap), 4.02 mm, 4.06 mm. The related finite element simulation are denoted S1, S2 and S3. The pellet and the cladding have the same elastic properties: 10^5 MPa for the Young's modulus and 0.3 for the Poisson coefficient. The loading conditions are applied with 25 time steps according to a linear ramp.

7.2 | Empirical modes and reduced integration domain

Empirical modes for displacements, stresses and generalized forces are generated by using the numerical results of simulations S1 and S2 at every time step. Generalized forces denote the Lagrange multipliers and the external forces. Then, the POD method gives 17 displacement modes ($\epsilon_{tol} = 10^{-5}$). The first six displacement modes and the last mode are shown in Figure 14, over the cladding only. As we already saw, the higher the mode number is, the higher there

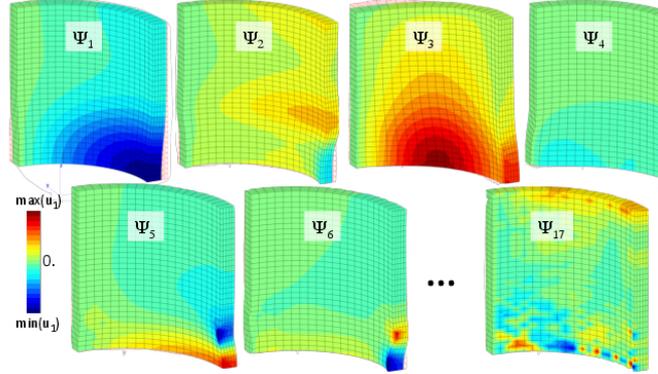


FIGURE 14 Empirical modes for displacement approximation, over the cladding only.

are large gradients in the mode. Similar results are obtained for empirical modes related to stresses and generalized forces. We obtain 20 modes for stresses and 21 for the generalized forces with the POD used to build the RID only.

In Figure 13, we show various contributions to the RID. Ω_u is the domain covered by elements connected to the 17 interpolation indices obtained with DEIM algorithm applied to the 17 empirical modes related to displacements. These elements are spread on all the domain, either in the pellet or in the cladding. Similar remarks can be drawn for Ω_σ and Ω_F generated by the interpolation indices related to stress modes and generalized force modes respectively. The elements in Ω_F are on both side of the contact surface and also on the symmetry plans and surfaces submitted to pressure loading. A region of interest on the top of the pellet is added as Ω_{ROI} in order to better account inhomogeneous Neumann conditions. The domain $\Omega_A = \Omega_u \cup \Omega_\sigma \cup \Omega_F \cup \Omega_{ROI}$ is shown on the right of Figure 13.

We can observe that it is not possible to compute the gap for many nodes on the contact surface ($\Gamma^C \cap \partial\Omega_A$) on the red and blue domains. The domain Ω_A is hence extended by elements on Γ^C having a node at a distance less than $d = 0.1\text{mm}$ of one node on $\Gamma^C \cap \partial\Omega_A$. If a layer of elements connected to Ω_A is added to this domain, then we obtain the RID shown on the right of the Figure 15 for the cladding and on the right of the Figure 16 for pellet and cladding. We have clearly increased the number of nodes where the gap can be computed.

7.3 | Hyper-reduced predictions

The hyper-reduced order model obtained by using the simulation results of S1 and S2 is used to predict the numerical results of S3 restrained to the RID. In the hybrid hyper-reduced model, each primal dof on the potential contact zone is treated with the finite element shape function associated. Here, the hyper-reduced simulation is 10 times faster than S3. As for the 1D elastic rope, the hyper-reduced predictions are more accurate for displacements than for stresses. The maximum error over the RID is respectively 1% and 5%. Since the RID contains the region of active contacts, these results are satisfactory. The predictions related to S3 and the hyper-reduced simulation are shown in Figure 15 and Figure 16 for the components u_1 and σ_{11} of displacements and stresses respectively.

Without the extension of the RID with respect to the d distance, the hyper-reduced prediction are twice less accurate. This is due to the fact that less contact conditions can be correctly treated by the hybrid HR model.

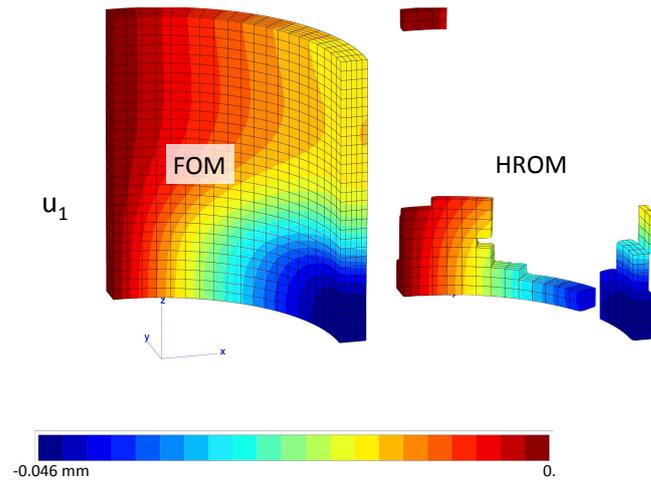


FIGURE 15 Displacement u_1 over the cladding, HROM versus FEM.

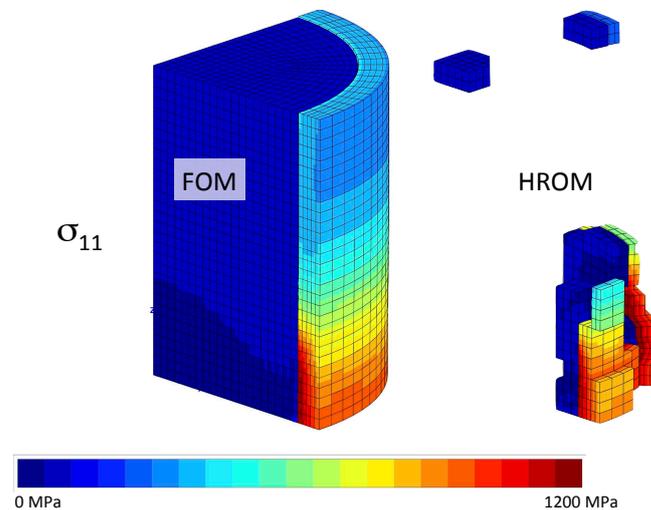


FIGURE 16 Stress σ_{11} , HROM versus FEM.

8 | CONCLUSION

We introduced an extension of the hyper-reduction method based on a reduced integration domain able to deal with contact mechanics problems solved thanks to a mixed formulation. This method is hybrid because the dual basis related to the contact forces is only a restriction of the FOM one. It enables us to obtain a good approximation of the contact forces. If necessary, a hybrid reduced-order/full-order approach is also used for the displacement in order to ensure the inf-sup condition. We propose an efficient error indicator to be coupled with a greedy algorithm in order to choose snapshots to be done. The method has been tested on an academic test case, a reference 1D elastic rope obstacle problem, and compared with the projection-based method. Results show the efficiency of the proposed strategy in terms of accuracy of the solution (especially contact forces) compared to the projection-based method. A 3D test case implying two elastic bodies in contact confirms that the RID must account for the contribution of interpolation points related to contact forces. Moreover, it shows the importance for a contact between solids of extending the RID to the elements allowing the computation of the gap. The obtained results enable to appreciate the efficiency of the hybrid HR-contact strategy. A future work will consist in applying the hybrid HR-contact strategy to reduce a node-to-surface

contact problem. As the HR method has already shown its capacity to successfully deal with nonlinear mechanical behaviours, the next step will consist in the extension of the HR-contact strategy to viscoplastic behaviours.

ACKNOWLEDGMENTS

The authors are grateful to the PLEIADES project, financially supported by CEA, EDF and Framatome, that funded this research work.

References

- [1] Almroth B. O., Stern P., Brogan F. A.. Automatic Choice of Global Shape Functions in Structural Analysis. *AIAA Journal*. 1978;16(5):525–528.
- [2] Lumley J. L.. The Structure of Inhomogeneous Turbulent Flows. In: Yaglom A.M., Tatarski V.I., eds. *Atmospheric turbulence and radio propagation*, Moscow: Nauka 1967 (pp. 166–178).
- [3] Sirovich L.. Turbulence and the dynamics of coherent structures. Parts I–III. *Quarterly of Applied Mathematics*. 1987;45(3):561–590.
- [4] Alart P., Curnier A.. A mixed formulation for frictional contact problems prone to Newton like solution methods. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 1991;92(3):353–375.
- [5] Wriggers Peter. *Computational Contact Mechanics*. Springer Science & Business Media; 2006.
- [6] Haasdonk B., Salomon J., Wohlmuth B.. A reduced basis method for parametrized variational inequalities. *SIAM Journal on Numerical Analysis*. 2012;50(5):2656–2676.
- [7] Balajewicz Maciej, Amsellem David, Farhat Charbel. Projection-based model reduction for contact problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 2016;106(8):644–663.
- [8] Quarteroni Alfio, Manzoni Andrea, Negri Federico. *Reduced basis methods for partial differential equations: an introduction*. Springer; 2015.
- [9] Lee D. D., Seung H. S.. Learning the parts of objects by non-negative matrix factorization. *Nature*. 1999;401(6755):788–791.
- [10] Barrault M., Maday Y., Nguyen N. C., Patera A.. An 'empirical interpolation' method: application to efficient reduced-basis discretization of partial differential equations. *Comptes Rendus Mathématique*. 2004;339(9):667–672.
- [11] Ryckelynck D.. A priori hyperreduction method: an adaptive approach. *Journal of Computational Physics*. 2005;202(1):346–366.
- [12] An Steven S., Kim Theodore, James Doug L.. Optimizing Cubature for Efficient Integration of Subspace Deformations. *ACM Trans. Graph.* 2008;27(5):165–175.
- [13] Chaturantabut Saifon, Sorensen Danny C.. Nonlinear Model Reduction via Discrete Empirical Interpolation. *SIAM Journal on Scientific Computing*. 2010;32(5):2737–2764.
- [14] Astrid P., Weiland S., Willcox K., Backx T.. Missing Point Estimation in Models Described by Proper Orthogonal Decomposition. *IEEE Transactions on Automatic Control*. 2008;53(10):2237–2251.
- [15] Carlberg K., Bou-Mosleh C., Farhat C.. Efficient non-linear model reduction via a least-squares Petrov-Galerkin projection and compressive tensor approximations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 2011;86(2):155–181.
- [16] Everson R., Sirovich L.. Karhunen-Loève procedure for gappy data. *Journal of the Optical Society of America A*. 1995;12(8):1657–1664.
- [17] Bader E., Zhang Z., Veroy K.. An empirical interpolation approach to reduced basis approximations for variational inequalities. *Mathematical and Computer Modelling of Dynamical Systems*. 2016;22(4):345–361.
- [18] Balajewicz Maciej, Toivanen Jari. Reduced order models for pricing European and American options under stochastic volatility and jump-diffusion models. *Journal of Computational Science*. 2017;20:198–204.
- [19] Farhat C., Avery P., Chapman T., Cortial J.. Dimensional reduction of nonlinear finite element dynamic models with finite rotations and energy-based mesh sampling and weighting for computational efficiency. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 2014;98(9):625–662.
- [20] Ryckelynck D.. Hyper reduction of mechanical models involving internal variables. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 2009;77(1):75–89.
- [21] Ryckelynck D., Lampoh K., Quilicy S.. Hyper-reduced predictions for lifetime assessment of elasto-plastic structures. *Meccanica*. 2016;51(2):309–317.
- [22] Babuška I.. The finite element method with Lagrangian multipliers. *Numerische Mathematik*. 1973;20(3):179–192.
- [23] Brezzi F.. On the existence, uniqueness and approximation of saddle-point problems arising from Lagrangian multipliers. *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis - Modélisation Mathématique et Analyse Numérique*. 1974;8(R2):129–151.

- [24] Baiges J., Codina R., Idelson S.. A domain decomposition strategy for reduced order models. Application to the incompressible Navier-Stokes equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2013;267:23–42.
- [25] Ammar A., Chinesta F., Cueto E.. Coupling finite elements and proper generalized decompositions. *International Journal for Multiscale Computational Engineering*. 2011;9(1).
- [26] Kerfriden P., Passieux J. C., Bordas S.. Local/global model order reduction strategy for the simulation of quasi-brittle fracture. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 2012;89(2):154–179.
- [27] Radermacher A., Reese S.. Model reduction in elastoplasticity: proper orthogonal decomposition combined with adaptive sub-structuring. *Computational Mechanics*. 2014;54(3):677–687.
- [28] Prud'Homme Christophe, Rovas Dimitrios V, Veroy Karen, et al. Reliable real-time solution of parametrized partial differential equations: Reduced-basis output bound methods. *Journal of Fluids Engineering*. 2002;124(1):70–80.
- [29] Prud'Homme Christophe, Rovas Dimitrios V, Veroy Karen, Patera Anthony T. A mathematical and computational framework for reliable real-time solution of parametrized partial differential equations. *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis*. 2002;36(5):747–771.
- [30] Signorini A.. Questioni di elasticità non linearizzata e semilinearizzata. *Rendiconti di Matematica e delle sue applicazioni*. 1959;5:95–139.
- [31] Duvaut G., Lions J.-L.. *Inequalities in mechanics and physics*. Springer Science & Business Media; 1976.
- [32] Kikuchi N., Oden J. T.. *Contact problems in elasticity: a study of variational inequalities and finite element methods*. SIAM; 1988.
- [33] Chabrand P., Dubois F., Raous M.. Various numerical methods for solving unilateral contact problems with friction. *Mathematical and computer modelling*. 1998;28(4):97–108.
- [34] Eckart Carl, Young Gale. The approximation of one matrix by another of lower rank. *Psychometrika*. 1936;1(3):211–218.
- [35] Maday Y., Patera A., Turinici G.. A priori convergence theory for reduced-basis approximations of single-parameter elliptic partial differential equations. *Journal of Scientific Computing*. 2002;17(1-4):437–446.
- [36] Amsallem David, Cortial Julien, Carlberg Kevin, Farhat Charbel. A method for interpolating on manifolds structural dynamics reduced-order models. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 2009;80(9):1241–1258.
- [37] Langville Amy Nicole, Meyer Carl Dean, Albright Russell, Cox James, Duling David. Algorithms, Initializations, and Convergence for the Non-negative Matrix Factorization. In: Proceedings of the 12th ACM SIGKDD International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining; 2014; New York, NY, USA.
- [38] Zitnik M., Zupan B.. Nimfa: A Python Library for Nonnegative Matrix Factorization. *Journal of Machine Learning Research*. 2012;13:849–853.
- [39] Boutsidis C., Gallopoulos E.. SVD based initialization: A head start for nonnegative matrix factorization. *Pattern Recognition*. 2008;41(4):1350–1362.
- [40] Liu H., Ramière I., Lebon F.. On the coupling of local multilevel mesh refinement and ZZ methods for unilateral frictional contact problems in elastostatics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2017;323(Supplement C):1–26.

Liste des figures

I.1	Représentation des différents circuits d'un réacteur à eau pressurisée	13
I.2	Schéma d'un assemblage combustible 17×17 d'un réacteur à eau pressurisée et d'une grappe de contrôle	14
I.3	Schéma d'un crayon combustible d'un réacteur à eau pressurisée avec les dimensions d'un réacteur 900 MWe	14
I.4	Dimensions d'une pastille de combustible d'un réacteur à eau pressurisée . .	15
I.5	Déformation d'une pastille sous forme de diabolo	15
I.6	Schématisation de la fracturation des pastilles, de la mise en diabolo et de l'évolution du jeu entre les pastilles et la gaine au cours de l'irradiation . . .	16
I.7	Modélisation 1,5D d'un crayon combustible dans ALCYONE	17
I.8	Modélisations $2Drz$ ou $2Dr\theta$ d'une pastille de combustible nucléaire et du morceau de gaine correspondant dans ALCYONE	18
I.9	Modélisation 3D d'une pastille de combustible nucléaire et du morceau de gaine correspondant dans ALCYONE	18
I.10	Schéma de couplage des applications PLÉIADES	19
II.1	Image originale classiquement utilisée en traitement d'images puis approximations successives par SVD de rang 5, 10, 20, 50 et 100	33
II.2	Décroissance de l'erreur relative en norme de Frobenius au carré entre les matrices originale et approximée par SVD de rang inférieur, la matrice originale correspondant à la première image de la figure II.1	33
II.3	Géométrie d'un problème de contact générique entre deux solides	42
II.4	Loi de contact de Hertz-Signorini-Moreau	44
II.5	Décroissance de l'erreur relative en norme de Frobenius au carré entre les matrices originale et approximée par SVD ainsi que par NNMF de rang inférieur pour deux nombres d'itérations maximum, la matrice originale correspondant à la première image de la figure II.6	50
II.6	Image originale classiquement utilisée en traitement d'images puis approximations successives par NNMF de rang 5, 10, 20, 50 et 100	51
III.1	Problème de contact entre deux solides sur un domaine réduit	55
III.2	Révision du RID	56
III.3	Représentation de la construction du ROM à l'aide de Cast3M	63
III.4	Cas test 1D élastique – Déplacements et forces de contact obtenus avec le FOM pour une élasticité variable ($\mu_1 \in [0.05, 0.25]$) et un obstacle fixe ($\mu_2 = 0.225$)	65
III.5	Cas test 1D élastique – Déplacements et forces de contact obtenus avec le FOM pour une élasticité fixe ($\mu_1 = 0.15$) et un obstacle variable ($\mu_2 \in [-0.05, 0.5]$)	65
III.6	Cas test 1D élastique – Modes POD contenus dans la BR primale construite à partir de 10×12 snapshots pris sur une grille régulière	66
III.7	Cas test 1D élastique – En haut : RID construit à partir de 10×12 snapshots pris sur une grille régulière, les traits rouges représentent l'ensemble \mathcal{A} et les verts l'ensemble \mathcal{I} . En bas : exemple d'obstacle pour $\mu_2 = 0.17$	66

III.8	Cas test 1D élastique – Erreurs de références en norme 2 aux 100×120 points de \mathcal{S} pour un ROM construit avec l’HRH à partir des 10×12 snapshots pris dans $\mathcal{S}_{\text{snap}}$	68
III.9	Cas test 1D élastique – Solution HRH pour des snapshots pris sur une grille régulière, à comparer avec la solution EF, au point $(\mu_1, \mu_2) = (0.07, 0.17)$ dans \mathcal{P}	69
III.10	Cas test 1D élastique – Deux solutions obtenues par PBM avec $l_u = 9$ et $l_u = 14$ pour des snapshots pris sur une grille régulière, à comparer avec la solution EF, au point $(\mu_1, \mu_2) = (0.07, 0.17)$ dans \mathcal{P}	69
III.11	Cas test 1D élastique – Décroissance des erreurs relatives moyennes au cours de la sélection des snapshots avec l’algorithme glouton basé sur l’indicateur d’erreur η appliqué à l’HRH	71
III.12	Cas test 1D élastique – Décroissance des erreurs relatives moyennes au cours de la sélection des snapshots avec l’algorithme glouton basé sur l’indicateur d’erreur I appliqué à la PBM	72
III.13	Cas test 1D élastique – Erreurs relatives entre le ROM construit avec l’HRH, à partir de l’algorithme glouton couplé à l’indicateur d’erreur η , et le FOM	73
III.14	Cas test 2D axisymétrique de mécanique du contact entre deux solides élastiques	74
III.15	Cas test 2D élastique – Décroissance de l’erreur relative en norme de Frobenius au carré entre la matrice des snapshots et son approximation en fonction du rang de l’approximation	74
III.16	Cas test 2D élastique – Modes POD associés au déplacement représentés selon u_r et u_z	75
III.17	Cas test 2D élastique – Maillage initial et domaine réduit	76
III.18	Cas test 2D élastique – Comparaison des solutions primales EF et HRH selon u_r et u_z avec les mêmes échelles	77
III.19	Cas test 2D élastique – Comparaison des forces de contact (zoomées) EF et HRH, sans puis avec reconstruction, tracées sur les déformées en maillage avec un jeu amplifié par un facteur 50	77
III.20	Cas test 2D élastique – Différence en valeur absolue entre les solutions obtenues par HRH et par EF pour les solutions primales et en contraintes selon σ_{rr}	78
III.21	Cas test 2D élastique – Erreur de référence en norme 2 commise par l’HRH	78
III.22	Cas test 2D élastique – Temps CPU (moyenné sur 40 calculs) et nombre d’itérations de la méthode des statuts lors de la résolution du modèle EF	79
III.23	Cas test 2D élastique – Temps CPU (moyenné sur 40 calculs) et nombre d’itérations de la méthode des statuts lors de la résolution du modèle HR	79
III.24	Cas test 2D élastique – Forces de contact HRH (zoomées) tracées sur la déformée avec jeu amplifié lorsque aucun ddl EF n’est activé et qu’ainsi la condition LBB n’est pas vérifiée	80
III.25	Cas test 2D élastique – Différence en valeur absolue entre les solutions obtenues par HRH et par EF pour les solutions primales et en contraintes selon σ_{rr}	81
III.26	Cas test 2D élastique – Différentes configurations où 6 ddl sur la zone de contact sont traités par EF. Zoom sur le domaine réduit où des croix rouges indiquent leur emplacement.	81
III.27	Cas test 2D élastique – Solutions duales pour les différentes configurations des ddl EF	82
III.28	Cas test 2D élastique – Ddl EF sélectionnés par un algorithme glouton minimisant le conditionnement et solution duale associée	83
III.29	Cas test 2D élastique – Maillage initial et domaine réduit sans puis avec le rajout d’une zone d’intérêt	84
III.30	Cas test 2D élastique – Comparaison des forces de contact EF et HRH, sans puis avec le rajout d’une zone d’intérêt au RID, au point ($P_1 = 170$ MPa et $h_1 = 3.2$ mm) tracées sur les déformées	85

III.31	Cas test 2D élastique – Tracé des forces de contact obtenus avec la PBM sur la déformée en maillage	86
III.32	Cas test 2D élastique – Évolution du domaine réduit au cours des itérations de l'algorithme glouton	87
III.33	Cas test 3D de mécanique du contact entre solides élastiques avec ses conditions aux limites	88
III.34	Cas test 3D thermo-mécanique élastique – Exemple de chargement thermique et déformation thermique associée amplifiée par un facteur 10	89
III.35	Cas test 3D thermo-mécanique élastique – Modes POD contenus dans la BR primale selon u_x , u_y et u_z	90
III.36	Cas test 3D thermo-mécanique élastique – Maillage initial et deux domaines réduits contenant plus ou moins la surface de contact	91
III.37	Cas test 3D thermo-mécanique élastique – Comparaison des solutions primales EF et HRH obtenus avec les premier et second RID, selon u_x , u_y et u_z , au point ($P_{\text{lin}} = 35 \text{ kW.m}^{-1}$, $d = 20 \text{ }\mu\text{m}$)	92
III.38	Cas test 3D thermo-mécanique élastique – Comparaison des solutions duales EF et HRH construits avec les deux RID, sans puis avec reconstruction, le tout au point ($P_{\text{lin}} = 35 \text{ kW.m}^{-1}$, $d = 20 \text{ }\mu\text{m}$)	93
III.39	Cas test 3D thermo-mécanique élastique – Erreur de référence primale commise par le modèle HRH en fonction du seuil POD	94
IV.1	Cas test 2D axisymétrique de mécanique du contact entre un solide élasto-plastique et un solide visco-plastique	103
IV.2	Cas test 2D élasto-visco-plastique – Modes POD associés au déplacement représentés selon u_r et u_z	105
IV.3	Cas test 2D élasto-visco-plastique – Maillage initial et domaine réduit	106
IV.4	Cas test 2D élasto-visco-plastique – Comparaison des déformations plastiques cumulées EF et HRH (zoomées) avant contact (pas de temps 8) tracées sur les déformées avec un jeu amplifié par un facteur 10	107
IV.5	Cas test 2D élasto-visco-plastique – Comparaison des solutions primales EF et HRH à la fin de l'historique de chargement selon u_r et u_z	107
IV.6	Cas test 2D élasto-visco-plastique – Comparaison des forces de contact EF et HRH à la fin de l'historique de chargement tracées sur les déformées avec un jeu amplifié par un facteur 10	107
IV.7	Cas test 2D élasto-visco-plastique – Comparaison des déformations plastiques cumulées EF et HRH, sans puis avec reconstruction, à la fin de l'historique de chargement tracées sur les déformées avec un jeu amplifié par un facteur 10	108
IV.8	Cas test 2D élasto-visco-plastique – Comparaison des contraintes selon σ_{rr} EF et HRH, sans puis avec reconstruction, à la fin de l'historique de chargement tracées sur les déformées avec un jeu amplifié par un facteur 10	108

Liste des tableaux

I.1	Différentes filières de réacteurs nucléaires	12
III.1	Cas test 1D élastique – Comparaison des méthodes HRH et PBM pour le point $(\mu_1, \mu_2) = (0.07, 0.17)$, pour des snapshots pris sur une grille régulière	70
III.2	Cas test 1D élastique – Valeurs moyenne et maximum des erreurs de références en norme 2 du modèle HRH, construit à partir de snapshots sélectionnés à l’aide d’un algorithme glouton basé sur l’indicateur d’erreur η associé, sur une grille régulière fine \mathcal{S}	72
III.3	Cas test 2D élastique – Erreur duale sur Γ_A^C et conditionnement en fonction des ddl EF ajoutés	82
III.4	Cas test 2D élastique – Comparaison entre le calcul avec les 6 ddl EF trouvés par optimisation et le calcul où tous les ddl EF sont activés sur la zone de contact	83
III.5	Cas test 2D élastique – Résultats de l’hyper-réduction hybride au point ($P_1 = 170$ MPa, $h_1 = 3.2$ mm) au cours des itérations de l’algorithme glouton pour la sélection des snapshots sélectionnés avec l’indicateur d’erreur η	87

Liste des algorithmes

II.1	Forme faible de l’algorithme glouton pour la sélection des snapshots	30
II.2	Algorithme utilisé par la méthode d’interpolation empirique discrète (DEIM) pour la sélection des indices d’interpolation	40
II.3	Algorithme des statuts pour le traitement du contact par multiplicateurs de Lagrange	46
III.1	Algorithme glouton pour la sélection des ddl EF qui minimisent le conditionnement de la matrice de rigidité de contact projetée	83
IV.1	Algorithme de Newton pour la résolution de problèmes non-linéaires	98
IV.2	Résolution d’un problème de mécanique du contact pour un comportement non-linéaire avec l’hyper-réduction hybride	102

Références bibliographiques

- [Abide *et al.*, 2016] ABIDE, S., BARBOTEU, M. et DANAN, D. (2016). Analysis of two active set type methods to solve unilateral contact problems. *Applied Mathematics and Computation*, 284(C):286–307. Cité à la page 46.
- [Akkari, 2012] AKKARI, N. (2012). *Mathematical study of the sensitivity of the POD method (Proper orthogonal decomposition)*. Thèse de doctorat, Université de La Rochelle. Cité à la page 27.
- [Akkari *et al.*, 2014] AKKARI, N., HAMDOUNI, A., LIBERGE, E. et JAZAR, M. (2014). On the sensitivity of the pod technique for a parameterized quasi-nonlinear parabolic equation. *Advanced Modeling and Simulation in Engineering Sciences*, 1(1):14. Cité à la page 27.
- [Almroth *et al.*, 1981a] ALMROTH, B. O., STEHLIN, P. et BROGAN, F. A. (1981a). Use of global functions for improvement in efficiency of nonlinear analysis. Cité à la page 26.
- [Almroth *et al.*, 1981b] ALMROTH, B. O., STEHLING, P. et BROGAN, F. A. (1981b). Global function approach in structural analysis : Basic approach, numerical results. Cité à la page 26.
- [Almroth *et al.*, 1978] ALMROTH, B. O., STERN, P. et BROGAN, F. A. (1978). Automatic choice of global shape functions in structural analysis. *AIAA Journal*, 16(5):525–528. Cité à la page 26.
- [Ammar *et al.*, 2011] AMMAR, A., CHINESTA, F. et CUETO, E. (2011). Coupling finite elements and proper generalized decompositions. *International Journal for Multiscale Computational Engineering*, 9(1). Cité à la page 58.
- [Ammar *et al.*, 2006] AMMAR, A., MOKDAD, B., CHINESTA, F. et KEUNINGS, R. (2006). A new family of solvers for some classes of multidimensional partial differential equations encountered in kinetic theory modeling of complex fluids. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 139(3):153 – 176. Cité à la page 24.
- [Ammar *et al.*, 2007] AMMAR, A., MOKDAD, B., CHINESTA, F. et KEUNINGS, R. (2007). A new family of solvers for some classes of multidimensional partial differential equations encountered in kinetic theory modelling of complex fluids. Part II : Transient simulation using space-time separated representation. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 144(2):98–121. Cité à la page 24.
- [Amsallem et Nordström, 2016] AMSALLEM, D. et NORDSTRÖM, J. (2016). Energy stable model reduction of neurons by nonnegative discrete empirical interpolation. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 38(2):B297–B326. Cité à la page 47.
- [Amsallem *et al.*, 2012] AMSALLEM, D., ZAHR, M. J. et FARHAT, C. (2012). Nonlinear model order reduction based on local reduced-order bases. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 92(10):891–916. Cité à la page 94.
- [An *et al.*, 2008] AN, S. S., KIM, T. et JAMES, D. L. (2008). Optimizing cubature for efficient integration of subspace deformations. *ACM Trans. Graph.*, 27(5):165–175. Cité à la page 28.

- [Anderson *et al.*, 1992] ANDERSON, E., BAI, Z., BISCHOF, C., DEMMEL, J., DONGARRA, J., DU CROZ, J., GREENBAUM, A., HAMMARLING, S., MCKENNEY, A., OSTROUCHOV, S. et SORENSEN, D. (1992). *LAPACK's User's Guide*. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA, USA. Cité à la page 61.
- [Arnoldi, 1951] ARNOLDI, W. E. (1951). The principle of minimized iterations in the solution of the matrix eigenvalue problem. *Quarterly of Applied Mathematics*, 9(1):17–29. Cité à la page 25.
- [Astrid *et al.*, 2008] ASTRID, P., WEILAND, S., WILLCOX, K. et BACKX, T. (2008). Missing point estimation in models described by proper orthogonal decomposition. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 53(10):2237–2251. Cité à la page 28.
- [Aubry *et al.*, 1988] AUBRY, N., HOLMES, P., LUMLEY, J. L. et STONE, E. (1988). The dynamics of coherent structures in the wall region of a turbulent boundary layer. *Journal of Fluid Mechanics*, 192:115–173. Cité à la page 27.
- [Babuška, 1973] BABUŠKA, I. (1973). The finite element method with Lagrangian multipliers. *Numerische Mathematik*, 20(3):179–192. Cité aux pages 46, 57.
- [Babuška et Rheinboldt, 1978] BABUŠKA, I. et RHEINBOLDT, W. C. (1978). A-posteriori error estimates for the finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 12(10):1597–1615. Cité à la page 30.
- [Bader *et al.*, 2016] BADER, E., ZHANG, Z. et VEROY, K. (2016). An empirical interpolation approach to reduced basis approximations for variational inequalities. *Mathematical and Computer Modelling of Dynamical Systems*, 22(4):345–361. Cité aux pages 19, 47 et 64.
- [Baiges *et al.*, 2013] BAIGES, J., CODINA, R. et IDELSON, S. (2013). A domain decomposition strategy for reduced order models. Application to the incompressible Navier-Stokes equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 267:23–42. Cité à la page 58.
- [Bailly *et al.*, 1997] BAILLY, H., MÉNESSIER, D. et PRUNIER, C. (1997). *Le combustible nucléaire des réacteurs à eau sous pression et des réacteurs à neutrons rapides : conception et comportement*. Collection du Commissariat à l'énergie Atomique. Eyrolles. Cité à la page 13.
- [Balajewicz *et al.*, 2016] BALAJEWICZ, M., AMSALLEM, D. et FARHAT, C. (2016). Projection-based model reduction for contact problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 106(8):644–663. Cité aux pages 19, 47, 48, 49, 53, 59, 64, 71 et 113.
- [Balajewicz et Toivanen, 2017] BALAJEWICZ, M. et TOIVANEN, J. (2017). Reduced order models for pricing european and american options under stochastic volatility and jump-diffusion models. *Journal of Computational Science*, 20:198 – 204. Cité à la page 47.
- [Ballani *et al.*, 2018] BALLANI, J., HUYNH, D., KNEZEVIC, D., NGUYEN, L. et PATERA, A. (2018). A component-based hybrid reduced basis/finite element method for solid mechanics with local nonlinearities. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 329: 498–531. Cité aux pages 47, 58.
- [Banerjee et Butterfield, 1981] BANERJEE, P. K. et BUTTERFIELD, R. (1981). *Boundary element methods in engineering science*, volume 17. McGraw-Hill London. Cité à la page 23.
- [Banerjee *et al.*, 1998] BANERJEE, S., COLE, J. V. et JENSEN, K. F. (1998). Nonlinear model reduction strategies for rapid thermal processing systems. *IEEE Transactions on Semiconductor Manufacturing*, 11(2):266–275. Cité à la page 27.
- [Barrault *et al.*, 2004] BARRAULT, M., MADAY, Y., NGUYEN, N. C. et PATERA, A. (2004). An 'empirical interpolation' method : application to efficient reduced-basis discretization of partial differential equations. *Comptes Rendus Mathématique*, 339(9):667–672. Cité à la page 27.

- [Beltrami, 1873] BELTRAMI, E. (1873). Sulle funzioni bilineari. *Giornale di Matematiche ad Uso degli Studenti Delle Universita*, 11(2):98–106. Cité à la page 31.
- [Bentejac et Hourdequin, 2004] BENTEJAC, F. et HOURDEQUIN, N. (2004). Toutatis : An application of the cast3m finite element code for pci three-dimensional modeling. pages 495–506. Cité à la page 17.
- [Berry *et al.*, 2007] BERRY, M. W., BROWNE, M., LANGVILLE, A. N., PAUCA, V. P. et PLEMMONS, R. J. (2007). Algorithms and applications for approximate nonnegative matrix factorization. *Computational Statistics & Data Analysis*, 52(1):155–173. Cité à la page 49.
- [Besson *et al.*, 2009] BESSON, J., CAILLETAUD, G., CHABOCHE, J.-L. et FOREST, S. (2009). *Non-linear mechanics of materials*, volume 167. Springer Science & Business Media. Cité aux pages 97, 100.
- [Blanc, 2009] BLANC, V. (2009). *Thermo-mechanical behaviour modelling of particle fuels using a multiscale approach*. Thèse de doctorat, Université de Provence - Aix-Marseille I. Cité à la page 20.
- [Boutsidis et Gallopoulos, 2008] BOUTSIDIS, C. et GALLOPOULOS, E. (2008). SVD based initialization : A head start for nonnegative matrix factorization. *Pattern Recognition*, 41(4):1350–1362. Cité à la page 50.
- [Brand, 2002] BRAND, M. (2002). Incremental singular value decomposition of uncertain data with missing values. In HEYDEN, A., SPARR, G., NIELSEN, M. et JOHANSEN, P., éditeurs : *Computer Vision — ECCV 2002*, pages 707–720, Berlin, Heidelberg. Springer. Cité à la page 33.
- [Brezzi, 1974] BREZZI, F. (1974). On the existence, uniqueness and approximation of saddle-point problems arising from Lagrangian multipliers. *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis - Modélisation Mathématique et Analyse Numérique*, 8(R2):129–151. Cité aux pages 46, 57.
- [Capaldo, 2015] CAPALDO, M. (2015). *A new approximation framework for PGD-based non-linear solvers*. Thèse de doctorat, Université Paris-Saclay. Cité à la page 25.
- [Carlberg *et al.*, 2011] CARLBERG, K., BOU-MOSLEH, C. et FARHAT, C. (2011). Efficient non-linear model reduction via a least-squares Petrov-Galerkin projection and compressive tensor approximations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 86(2): 155–181. Cité à la page 28.
- [Carlberg *et al.*, 2013] CARLBERG, K., FARHAT, C., CORTIAL, J. et AMSALLEM, D. (2013). The GNAT method for nonlinear model reduction : Effective implementation and application to computational fluid dynamics and turbulent flows. *Journal of Computational Physics*, 242:623–647. Cité à la page 28.
- [Cast3M] CAST3M. <http://www-cast3m.cea.fr>. Cité aux pages 1, 17, 18, 45, 53, 61 et 94.
- [CEA, 2016] CEA (2016). Livret thématique n°6 – Les réacteurs nucléaires. Cité à la page 12.
- [Chabrand *et al.*, 1998] CHABRAND, P., DUBOIS, F. et RAOUS, M. (1998). Various numerical methods for solving unilateral contact problems with friction. *Mathematical and computer modelling*, 28(4):97–108. Cité à la page 45.
- [Chaturantabut, 2011] CHATURANTABUT, S. (2011). *Nonlinear Model Reduction via Discrete Empirical Interpolation*. Thèse de doctorat, Rice University. Cité à la page 28.
- [Chaturantabut et Sorensen, 2010] CHATURANTABUT, S. et SORENSEN, D. C. (2010). Non-linear model reduction via discrete empirical interpolation. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 32(5):2737–2764. Cité à la page 28.
- [Chaturantabut et Sorensen, 2012] CHATURANTABUT, S. et SORENSEN, D. C. (2012). A state space error estimate for pod-deim nonlinear model reduction. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 50(1):46–63. Cité à la page 31.

- [Chinesta *et al.*, 2010] CHINESTA, F., AMMAR, A. et CUETO, E. (2010). Recent advances and new challenges in the use of the proper generalized decomposition for solving multidimensional models. *Archives of Computational methods in Engineering*, 17(4):327–350. Cité à la page 24.
- [Chinesta *et al.*, 2013a] CHINESTA, F., KEUNINGS, R. et LEYGUE, A. (2013a). *The proper generalized decomposition for advanced numerical simulations : a primer*. Springer Science & Business Media. Cité à la page 24.
- [Chinesta et Ladevèze, 2014] CHINESTA, F. et LADEVÈZE, P. (2014). Separated Representations and PGD-Based Model Reduction. *Fundamentals and Applications, International Centre for Mechanical Sciences, Courses and Lectures*, 554. Cité à la page 24.
- [Chinesta *et al.*, 2011] CHINESTA, F., LADEVÈZE, P. et CUETO, E. (2011). A short review on model order reduction based on proper generalized decomposition. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 18(4):395. Cité à la page 24.
- [Chinesta *et al.*, 2013b] CHINESTA, F., LEYGUE, A., BORDEU, F., AGUADO, J. V., CUETO, E., GONZALEZ, D., ALFARO, I., AMMAR, A. et HUERTA, A. (2013b). PGD-Based Computational Vademecum for Efficient Design, Optimization and Control. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 20(1):31–59. Cité à la page 24.
- [Ciarlet, 1978] CIARLET, P. G. (1978). *The Finite Element Method for Elliptic Problems*, volume 4 de *Studies in Mathematics and Its Applications*. Elsevier. Cité à la page 23.
- [Cundall et Strack, 1979] CUNDALL, P. A. et STRACK, O. D. L. (1979). A discrete numerical model for granular assemblies. *Géotechnique*, 29(1):47–65. Cité à la page 23.
- [Devarajan, 2008] DEVARAJAN, K. (2008). Nonnegative Matrix Factorization : An Analytical and Interpretive Tool in Computational Biology. *PLoS Computational Biology*, 4(7):e1000029. Cité à la page 49.
- [Dong et Roychowdhury, 2003] DONG, N. et ROYCHOWDHURY, J. (2003). Piecewise polynomial nonlinear model reduction. In *Proceedings of the 40th Annual Design Automation Conference, DAC'03*, pages 484–489, New York, NY, USA. ACM. Cité à la page 27.
- [Drohmann *et al.*, 2012] DROHMANN, M., HAASDONK, B. et OHLBERGER, M. (2012). Reduced basis approximation for nonlinear parametrized evolution equations based on empirical operator interpolation. *SIAM Journal of Scientific Computing*, 34(2):937–969. Cité à la page 28.
- [Dureisseix et Ladevèze, 1998] DUREISSEIX, D. et LADEVÈZE, P. (1998). A 2-level and mixed domain decomposition approach for structural analysis. *Contemporary mathematics*, 218(1): 238–245. Cité à la page 25.
- [Duvaut et Lions, 1976] DUVAUT, G. et LIONS, J.-L. (1976). *Inequalities in mechanics and physics*. Springer Science & Business Media. Cité à la page 45.
- [Eckart et Young, 1936] ECKART, C. et YOUNG, G. (1936). The approximation of one matrix by another of lower rank. *Psychometrika*, 1(3):211–218. Cité aux pages 31, 35 et 50.
- [Edmonds, 1971] EDMONDS, J. (1971). Matroids and the greedy algorithm. *Mathematical Programming*, 1(1):127–136. Cité à la page 29.
- [Eftang *et al.*, 2010] EFTANG, J. L., GREPL, M. A. et PATERA, A. T. (2010). A posteriori error bounds for the empirical interpolation method. *Comptes Rendus Mathématique*, 348(9):575 – 579. Cité à la page 31.
- [Everson et Sirovich, 1995] EVERSON, R. et SIROVICH, L. (1995). Karhunen-Loève procedure for gappy data. *Journal of the Optical Society of America A*, 12(8):1657–1664. Cité à la page 27.
- [Eymard *et al.*, 2000] EYMARD, R., GALLOUËT, T. et HERBIN, R. (2000). Finite volume methods. In *Solution of Equation in \mathbb{R}^n (Part 3), Techniques of Scientific Computing (Part 3)*, volume 7 de *Handbook of Numerical Analysis*, pages 713–1018. Elsevier. Cité à la page 23.

- [Farhat *et al.*, 2014] FARHAT, C., AVERY, P., CHAPMAN, T. et CORTIAL, J. (2014). Dimensional reduction of nonlinear finite element dynamic models with finite rotations and energy-based mesh sampling and weighting for computational efficiency. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 98(9):625–662. Cité à la page 28.
- [Fauque *et al.*, 2016] FAUQUE, J., RAMIÈRE, I. et RYCKELYNCK, D. (2016). Hyper-reduction method for mechanical contact problems. 3rd Workshop on Order Reduction Methods. Cité à la page 19.
- [Fauque *et al.*, 2017a] FAUQUE, J., RAMIÈRE, I. et RYCKELYNCK, D. (2017a). **Méthode d’hyper-réduction pour le traitement d’un problème de contact unilatéral entre solides élastiques**. Club utilisateur Cast3M. Cité à la page 19.
- [Fauque *et al.*, 2017b] FAUQUE, J., RAMIÈRE, I. et RYCKELYNCK, D. (2017b). Hyper-reduction method for mechanical contact problems. VII International Conference on Coupled Problems in Science and Engineering, session Model Reduction for Coupled Problems in Material Science. Cité à la page 19.
- [Fauque *et al.*, 2018a] FAUQUE, J., RAMIÈRE, I. et RYCKELYNCK, D. (2018a). Hybrid hyper-reduced modeling for contact mechanics problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 115(1):117–139. Cité aux pages 19, 64 et 113.
- [Fauque *et al.*, 2018b] FAUQUE, J., RAMIÈRE, I. et RYCKELYNCK, D. (2018b). Hybrid hyper-reduced modeling for contact problems in elastostatics. Symposium on Model order reduction of coupled systems. Cité à la page 19.
- [Fauque *et al.*, 2018c] FAUQUE, J., RAMIÈRE, I. et RYCKELYNCK, D. (2018c). Hybrid hyper-reduction method applied to contact mechanics with non-linear material behavior. 13th World Congress in Computational Mechanics, session Model Reduction, Big Data and Dynamic Data-Driven Systems. Cité à la page 20.
- [Feyel et Chaboche, 2000] FEYEL, F. et CHABOCHE, J.-L. (2000). FE2 multiscale approach for modelling the elastoviscoplastic behaviour of long fibre SiC/Ti composite materials. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 183(3):309–330. Cité à la page 20.
- [Fichera, 1973] FICHERA, G. (1973). *Boundary Value Problems of Elasticity with Unilateral Constraints*, pages 391–424. Springer, Berlin, Heidelberg. Cité à la page 45.
- [Fritzen et Hodapp, 2016] FRITZEN, F. et HODAPP, M. (2016). The finite element square reduced (FE^{2R}) method with GPU acceleration : towards three-dimensional two-scale simulations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 107(10):853–881. Cité à la page 20.
- [Galbally *et al.*, 2010] GALBALLY, D., FIDKOWSKI, K., WILLCOX, K. et GHATTAS, O. (2010). Non-linear model reduction for uncertainty quantification in large-scale inverse problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 81(12):1581–1608. Cité à la page 28.
- [Gallimard *et al.*, 1996] GALLIMARD, L., LADEVÈZE, P. et PELLE, J. P. (1996). Error estimation and adaptivity in elastoplasticity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 39(2):189–217. Cité à la page 30.
- [Garcia *et al.*, 2002] GARCIA, P., STRUZIK, C., AGARD, M. et LOUCHE, V. (2002). Monodimensional mechanical modelling of fuel rods under normal and off-normal operating conditions. *Nuclear Engineering and Design*, 216(1):183–201. Cité à la page 17.
- [Giacoma *et al.*, 2016] GIACOMA, A., DUREISSEIX, D. et GRAVOUIL, A. (2016). An efficient quasi-optimal space-time pgd application to frictional contact mechanics. *Advanced Modeling and Simulation in Engineering Sciences*, 3(1):12. Cité à la page 47.
- [Giacoma *et al.*, 2014] GIACOMA, A., DUREISSEIX, D., GRAVOUIL, A. et ROCHETTE, M. (2014). A multiscale large time increment/FAS algorithm with time-space model reduction

- for frictional contact problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 97(3):207–230. Cité à la page 47.
- [Gittus, 1972] GITTUS, J. (1972). Theoretical analysis of the strains produced in nuclear fuel cladding tubes by the expansion of cracked cylindrical fuel pellets. *Nuclear Engineering and Design*, 18(1):69–82. Cité à la page 15.
- [Glowinski *et al.*, 1978] GLOWINSKI, R., LIONS, J.-L. et TRÉMOLIÈRES, R. (1978). Analyse numérique des inéquations variationnelles. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 58(10):473–473. Cité à la page 44.
- [Goldbronn *et al.*, 2016] GOLDBRONN, P., BOULORÉ, A., CASTELIER, E., FILLAUX, C., HELFER, T., JULIEN, J., MARELLE, V., MASSON, R., MER-NKONGA, K., MICHEL, B., NOIROT, L., RAMIÈRE, I., SERCOMBE, J. et CASELLA, M. (2016). ALCYONE V2.0 : Notice de présentation. Rapport technique CEA/DEN/CAD/DEC/SESC/LSC NT 16-031, CEA. Cité aux pages 17, 18.
- [Golub et Van Loan, 1983] GOLUB, G. H. et VAN LOAN, C. F. (2012,1983). *Matrix computations*, volume 3. JHU Press, 4ème édition. Cité à la page 31.
- [Gram, 1883] GRAM, J. P. (1883). Ueber die entwicklung reeller functionen in reihen mittelst der methode der kleinsten quadrate. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 94:41–73. Cité à la page 48.
- [Grepl, 2012] GREPL, M. A. (2012). Certified reduced basis methods for nonaffine linear time-varying and nonlinear parabolic partial differential equations. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 22(3):1150015. Cité à la page 28.
- [Grepl *et al.*, 2007] GREPL, M. A., MADAY, Y., NGUYEN, N. C. et PATERA, A. T. (2007). Efficient reduced-basis treatment of nonaffine and nonlinear partial differential equations. *ESAIM : M2AN*, 41(3):575–605. Cité à la page 28.
- [Grepl et Patera, 2005] GREPL, M. A. et PATERA, A. T. (2005). A posteriori error bounds for reduced-basis approximations of parametrized parabolic partial differential equations. *ESAIM : M2AN*, 39(1):157–181. Cité à la page 31.
- [Grätsch et Bathe, 2005] GRÄTSCH, T. et BATHE, K.-J. (2005). A posteriori error estimation techniques in practical finite element analysis. *Computers & Structures*, 83(4):235–265. Cité à la page 30.
- [Guillet *et al.*, 2008] GUILLET, J.-L., GUÉRIN, Y. et BONIN, B. (2008). *Les combustibles nucléaires*. E-den, Une monographie de la Direction de l'énergie nucléaire. CEA Saclay et Groupe Moniteur. Cité à la page 13.
- [Haasdonk *et al.*, 2012] HAASDONK, B., SALOMON, J. et WOHLMUTH, B. (2012). A reduced basis method for parametrized variational inequalities. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 50(5):2656–2676. Cité aux pages 2, 19, 47, 48, 53, 64 et 113.
- [Hackbusch et Kühn, 2009] HACKBUSCH, W. et KÜHN, S. (2009). A new scheme for the tensor representation. *Journal of Fourier Analysis and Applications*, 15(5):706–722. Cité à la page 33.
- [Helfer *et al.*, 2015] HELFER, T., MICHEL, B., PROIX, J.-M., SALVO, M., SERCOMBE, J. et CASELLA, M. (2015). Introducing the open-source mfront code generator : Application to mechanical behaviours and material knowledge management within the pleiades fuel element modelling platform. *Computers & Mathematics with Applications*, 70(5):994 – 1023. Cité à la page 104.
- [Hernández *et al.*, 2014] HERNÁNDEZ, J., OLIVER, J., HUESPE, A., CAICEDO, M. et CANTE, J. (2014). High-performance model reduction techniques in computational multiscale homogenization. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 276:149 – 189. Cité à la page 28.

- [Hotelling, 1933] HOTELLING, H. (1933). Analysis of a complex statistical variables into principal components. *Journal of Educational Psychology* 24, pages 417–441. Cité à la page 34.
- [Isaacson et Keller, 1966] ISAACSON, E. et KELLER, H. B. (2012,1966). *Analysis of numerical methods*. Courier Corporation. Cité à la page 99.
- [Jolliffe, 1986] JOLIFFE, I. T. (1986). Principal component analysis. *Springer-Verlag*. Cité à la page 34.
- [Kamon et al., 2000] KAMON, M., WANG, F. et WHITE, J. (2000). Generating nearly optimally compact models from Krylov-subspace based reduced-order models. 47:239–248. Cité à la page 25.
- [Karhunen, 1946] KARHUNEN, K. (1946). Zur spektral theorie stochastischer prozesse. *Annales Academiæ Scientiarum Fennicæ, Ser A1*, 34. Cité à la page 34.
- [Karush, 1939] KARUSH, W. (1939). Minima of functions of several variables with inequalities as side conditions. Mémoire de D.E.A., Department of Mathematics, University of Chicago, Chicago, IL, USA. Cité à la page 43.
- [Kerfriden et al., 2012] KERFRIDEN, P., PASSIEUX, J. C. et BORDAS, S. (2012). Local/global model order reduction strategy for the simulation of quasi-brittle fracture. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 89(2):154–179. Cité à la page 58.
- [Kikuchi et Oden, 1988] KIKUCHI, N. et ODEN, J. T. (1988). *Contact problems in elasticity : a study of variational inequalities and finite element methods*. SIAM. Cité à la page 45.
- [Krylov, 1931] KRYLOV, A. (1931). On the numerical solution of the equation by which in technical questions frequencies of small oscillations of material systems are determined. *Izvestija AN SSSR (News of Academy of Sciences of the USSR), Otdel. mat. i estest. nauk*, 7(4):491–539. Cité à la page 25.
- [Kuhn et Tucker, 1951] KUHN, H. W. et TUCKER, A. W. (1951). Nonlinear programming. In *Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, pages 481–492, Berkeley, California. University of California Press. Cité à la page 43.
- [Ladevèze, 1999] LADEVÈZE, P. (1999). *Nonlinear computational structural mechanics : new approaches and non-incremental methods of calculation*. Springer Verlag. Cité à la page 24.
- [Ladevèze, 1985] LADEVÈZE, P. (1985). Sur une famille d’algorithmes en mécanique des structures. *Comptes-rendus des séances de l’Académie des sciences*, 300(2):41–44. Cité à la page 24.
- [Ladevèze, 1996] LADEVÈZE, P. (1996). *Mécanique non linéaire des structures*. Hermès, Paris. Cité à la page 24.
- [Ladevèze et Leguillon, 1983] LADEVÈZE, P. et LEGUILLON, D. (1983). Error estimate procedure in the finite element method and applications. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 20(3):485–509. Cité à la page 30.
- [Lanczos, 1950] LANZOS, C. (1950). An iteration method for the solution of the eigenvalue problem of linear differential and integral operators. *Journal of Research of the National Bureau of Standards*, 45(4):255–282. Cité à la page 25.
- [Langville et al., 2014] LANGVILLE, A. N., MEYER, C. D., ALBRIGHT, R., COX, J. et DURLING, D. (2014). Algorithms, initializations, and convergence for the nonnegative matrix factorization. In *In : Proceedings of the 12th ACM SIGKDD International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining*, Proceedings of the 12th ACM SIGKDD International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining, New York, NY, USA. Cité à la page 49.
- [Largenton, 2012] LARGENTON, R. (2012). *MOX fuel effective behavior modeling by a micro-mechanical nonuniform transformation field analysis*. Thèse de doctorat, Université de Provence Aix-Marseille 1. Cité à la page 20.

- [Lathauwer *et al.*, 2000] LATHAUWER, L. D., MOOR, B. D. et VANDEWALLE, J. (2000). A multilinear singular value decomposition. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 21(4):1253–1278. Cité à la page 33.
- [Lee et Seung, 1997] LEE, D. et SEUNG, H. (1997). Unsupervised learning by convex and conic coding. pages 515–521. cited By 72. Cité à la page 49.
- [Lee et Seung, 1999] LEE, D. D. et SEUNG, H. S. (1999). Learning the parts of objects by non-negative matrix factorization. *Nature*, 401(6755):788–791. Cité à la page 49.
- [Liang *et al.*, 2002] LIANG, Y. C., LEE, H. P., LIM, S. P., LIN, W. Z., LEE, K. H. et WU, C. G. (2002). Proper orthogonal decomposition and its applications—Part I : Theory. *Journal of Sound and vibration*, 252(3):527–544. Cité à la page 34.
- [Liberge et Hamdouni, 2010] LIBERGE, E. et HAMDOUNI, A. (2010). Reduced order modelling method via proper orthogonal decomposition (pod) for flow around an oscillating cylinder. *Journal of Fluids and Structures*, 26(2):292 – 311. Cité à la page 27.
- [Liu *et al.*, 2017] LIU, H., RAMIÈRE, I. et LEBON, F. (2017). On the coupling of local multilevel mesh refinement and zz methods for unilateral frictional contact problems in elastostatics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 323(Supplement C):1–26. Cité à la page 73.
- [Loève, 1955] LOÈVE, M. (1955). Probability theory. *Van Nostrand*. Cité à la page 34.
- [Lopez *et al.*, 2018] LOPEZ, E., GONZALEZ, D., AGUADO, J. V., ABISSET-CHAVANNE, E., CUETO, E., BINETRUY, C. et CHINESTA, F. (2018). A manifold learning approach for integrated computational materials engineering. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 25(1):59–68. Cité à la page 60.
- [Lumley, 1967] LUMLEY, J. L. (1967). The Structure of Inhomogeneous Turbulent Flows. In YAGLOM, A. et TATARSKI, V., éditeurs : *Atmospheric turbulence and radio propagation*, pages 166–178. Nauka, Moscow. Cité à la page 34.
- [Maday et Mula, 2013] MADAY, Y. et MULA, O. (2013). *A Generalized Empirical Interpolation Method : Application of Reduced Basis Techniques to Data Assimilation*, pages 221–235. Springer Milan, Milano. Cité à la page 27.
- [Maday *et al.*, 2009] MADAY, Y., NGUYEN, N. C., PATERA, A. T. et PAU, S. H. (2009). A general multipurpose interpolation procedure : the magic points. *Communications on Pure and Applied Analysis*, 8(1):383–404. Cité à la page 27.
- [Maday *et al.*, 2002a] MADAY, Y., PATERA, A. T. et TURINICI, G. (2002a). Global a priori convergence theory for reduced-basis approximations of single-parameter symmetric coercive elliptic partial differential equations. *Comptes Rendus Mathématique*, 335(3):289–294. Cité à la page 26.
- [Maday *et al.*, 2002b] MADAY, Y., PATERA, A. T. et TURINICI, G. (2002b). A priori convergence theory for reduced-basis approximations of single-parameter elliptic partial differential equations. *Journal of Scientific Computing*, 17(1-4):437–446. Cité à la page 26.
- [Maday et Rønquist, 2002] MADAY, Y. et RØNQUIST, E. M. (2002). A reduced-basis element method. *Journal of Scientific Computing*, 17(1):447–459. Cité à la page 26.
- [Mahoney, 2011] MAHONEY, M. W. (2011). Randomized algorithms for matrices and data. *Foundations and Trends® in Machine Learning*, 3(2):123–224. Cité à la page 33.
- [Maier, 2015] MAIER, D. (2015). *On the use of model order reduction techniques for the elasto-hydrodynamic contact problem*. Thèse de doctorat, INSA de Lyon. Cité à la page 27.
- [Melville et Sindhwani, 2010] MELVILLE, P. et SINDHWANI, V. (2010). *Recommender Systems*, pages 829–838. Springer US, Boston, MA. Cité à la page 49.
- [MFront] MFRONT. <http://tfel.sourceforge.net/>. Cité à la page 104.

- [Michel *et al.*, 2018] MICHEL, B., HELFER, T., RAMIÈRE, I. et ESNOL, C. (2018). A new numerical methodology for simulation of unstable crack growth in time independent brittle materials. *Engineering Fracture Mechanics*, 188:126 – 150. Cité à la page 103.
- [Michel *et al.*, 2013] MICHEL, B., NONON, C., SERCOMBE, J., MICHEL, F. et MARELLE, V. (2013). Simulation of pellet-cladding interaction with the PLEIADES fuel performance software environment. *Nuclear Technology, volume 182*. Cité à la page 18.
- [Michel *et al.*, 2008a] MICHEL, B., SERCOMBE, J. et THOUVENIN, G. (2008a). A new phenomenological criterion for pellet–cladding interaction rupture. *Nuclear Engineering and Design*, 238(7):1612–1628. Cité à la page 18.
- [Michel *et al.*, 2008b] MICHEL, B., SERCOMBE, J., THOUVENIN, G. et CHATELET, R. (2008b). 3d fuel cracking modelling in pellet cladding mechanical interaction. *Engineering Fracture Mechanics*, 75(11):3581–3598. Local Approach to Fracture (1986–2006) : Selected papers from the 9th European Mechanics of Materials Conference. Cité à la page 18.
- [Nagy, 1979] NAGY, D. A. (1979). Modal representation of geometrically nonlinear behavior by the finite element method. *Computers & Structures*, 10(4):683–688. Cité à la page 26.
- [Nguyen *et al.*, 2008] NGUYEN, N. C., PATERA, A. T. et PERAIRE, J. (2008). A ‘best points’ interpolation method for efficient approximation of parametrized functions. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 73(4):521–543. Cité à la page 28.
- [Nguyen et Peraire, 2008] NGUYEN, N. C. et PERAIRE, J. (2008). An efficient reduced-order modeling approach for non-linear parametrized partial differential equations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 76(1):27–55. Cité à la page 28.
- [Nonon *et al.*, 2004] NONON, C., LANSIART, S., STRUZIK, C., PLANCQ, D., MARTIN, S., DECROIX, G., RABUILLE, O., BEGUIN, S. et JULIEN, B. (2004). Differential PCI behaviour of PWR fuel rods under transient conditions. In *Proceedings of the 2004 International Meeting on LWR Fuel Performance*, pages 311–322. Cité à la page 17.
- [Noor, 1981] NOOR, A. K. (1981). Recent advances in reduction methods for nonlinear problems. *Computers & Structures*, 13(1):31–44. Cité à la page 26.
- [Noor, 1982] NOOR, A. K. (1982). On making large nonlinear problems small. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 34(1):955 – 985. Cité à la page 26.
- [Noor et Peters, 1980] NOOR, A. K. et PETERS, J. M. (1980). Reduced basis technique for nonlinear analysis of structures. *AIAA Journal*, 18(4):455–462. Cité à la page 26.
- [Olivier, 2017] OLIVIER, C. (2017). *Tensor decompositions and factorizations of intensive computing applied to the calibration of nonlinear constitutive material laws*. Thèse de doctorat, PSL Research University. Cité à la page 33.
- [Oseledets et Tyrtyshnikov, 2010] OSELEDETS, I. et TYRTYSHNIKOV, E. (2010). TT-cross approximation for multidimensional arrays. *Linear Algebra and its Applications*, 432(1):70 – 88. Cité à la page 33.
- [Paatero et Tapper, 1994] PAATERO, P. et TAPPER, U. (1994). Positive matrix factorization : A non-negative factor model with optimal utilization of error estimates of data values. *Environmetrics*, 5(2):111–126. Cité à la page 49.
- [Pascal, 2007] PASCAL, S. (2007). Notice de développement de la version 2.0 du composant mécanique de PLEIADES : INCREPL. Rapport technique 07-022/A, CEA. Cité à la page 102.
- [Pearson, 1901] PEARSON, K. (1901). On lines and planes of closest fit to systems of points in space. *Philosophical Magazine*, 2(6):559–572. Cité à la page 34.
- [Plancq *et al.*, 2004] PLANCQ, D., THOUVENIN, G., RICAUD, J., STRUZIK, C., HELFER, T., BENTEJAC, F., THÉVENIN, P. et MASSON, R. (2004). PLEIADES : a unified environment for multi-dimensional fuel performance modeling. In *International meeting on LWR fuel performance*, Florida. Cité à la page 17.

- [Prud'Homme *et al.*, 2002] PRUD'HOMME, C., ROVAS, D. V., VEROY, K. et PATERA, A. T. (2002). A mathematical and computational framework for reliable real-time solution of parametrized partial differential equations. *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 36(5):747–771. Cité à la page 26.
- [Prud'Homme *et al.*, 2002] PRUD'HOMME, C., ROVAS, D. V., VEROY, K., MACHIELS, L., MADAY, Y., PATERA, A. T. et TURINICI, G. (2002). Reliable real-time solution of parametrized partial differential equations : Reduced-basis output bound methods. *Journal of Fluids Engineering*, 124(1):70–80. Cité à la page 31.
- [Quarteroni *et al.*, 2015] QUARTERONI, A., MANZONI, A. et NEGRI, F. (2015). *Reduced basis methods for partial differential equations : an introduction*. Springer. Cité à la page 26.
- [Radermacher et Reese, 2014] RADERMACHER, A. et REESE, S. (2014). Model reduction in elastoplasticity : proper orthogonal decomposition combined with adaptive sub-structuring. *Computational Mechanics*, 54(3):677–687. Cité à la page 58.
- [Ramière *et al.*, 2017] RAMIÈRE, I., BERNAUD, S. et MASSON, R. (2017). Mise en place d'un schéma de calcul mécanique à deux échelles (EF²) dans PLÉIADES V2.0. Rapport technique CEA/DEN/CAD/DEC/SESC/LSC NT 17-015, CEA. Cité à la page 20.
- [Raous, 1999] RAOUS, M. (1999). Quasistatic signorini problem with coulomb friction and coupling to adhesion. In WRIGGERS, P. et PANAGIOTOPOULOS, P., éditeurs : *New Developments in Contact Problems*, pages 101–178. Springer Vienna. Cité à la page 44.
- [Raous *et al.*, 1988] RAOUS, M., CHABRAND, P. et LEBON, F. (1988). Numerical methods for frictional contact problems and applications. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 7:111–128. Cité à la page 44.
- [Rewieński, 2003] REWIEŃSKI, M. J. (2003). *A Trajectory Piecewise-Linear Approach to Model Order Reduction of Nonlinear Dynamical Systems*. Thèse de doctorat, Massachusetts Institute of Technology. Cité aux pages 25, 27.
- [Roza, 2005] ROZZA, G. (2005). *Shape design by optimal flow control and reduced basis techniques : applications to bypass configurations in haemodynamics*. Thèse de doctorat, École Polytechnique Fédérale de Lausanne, Suisse. Cité à la page 58.
- [Ryckelynck, 2002] RYCKELYNCK, D. (2002). Réduction a priori de modèles thermomécaniques. *Comptes Rendus Mécanique*, 330(7):499–505. Cité à la page 25.
- [Ryckelynck, 2005] RYCKELYNCK, D. (2005). A priori hyperreduction method : an adaptive approach. *Journal of Computational Physics*, 202(1):346–366. Cité à la page 25.
- [Ryckelynck, 2009] RYCKELYNCK, D. (2009). Hyper reduction of mechanical models involving internal variables. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 77(1):75–89. Cité aux pages 2, 19, 29 et 100.
- [Ryckelynck *et al.*, 2006] RYCKELYNCK, D., CHINESTA, F., CUETO, E. et AMMAR, A. (2006). On the a priori model reduction : Overview and recent developments. *Archives of Computational methods in Engineering*, 13(1):91–128. Cité à la page 25.
- [Ryckelynck *et al.*, 2015] RYCKELYNCK, D., GALLIMARD, L. et JULES, S. (2015). Estimation of the validity domain of hyper-reduction approximations in generalized standard elastoviscoplasticity. *Advanced Modeling and Simulation in Engineering Sciences*, 2(1):6. Cité aux pages 31, 59, 66, 75 et 101.
- [Ryckelynck *et al.*, 2016] RYCKELYNCK, D., LAMPOH, K. et QUILICY, S. (2016). Hyper-reduced predictions for lifetime assessment of elasto-plastic structures. *Meccanica*, 51(2):309–317. Cité aux pages 2, 25, 40 et 41.
- [Schmidt, 1907] SCHMIDT, E. (1907). Zur theorie der linearen und nichtlinearen integralgleichungen. *Mathematische Annalen*, 63(4):433–476. Cité à la page 48.
- [Sercombe *et al.*, 2012] SERCOMBE, J., AUBRUN, I. et NONON, C. (2012). Power ramped cladding stresses and strains in 3D simulations with burnup-dependent pellet-clad friction. *Nuclear Engineering and Design*, 242:164–181. Cité à la page 18.

- [Sirovich, 1987] SIROVICH, L. (1987). Turbulence and the dynamics of coherent structures. Parts I–III. *Quarterly of Applied Mathematics*, 45(3):561–590. Cité aux pages 25, 34.
- [Smith, 1965] SMITH, G. (1985,1965). *Numerical Solution of Partial Differential Equations : Finite Difference Methods*. Oxford University Press. Clarendon Press, 3ème édition. Cité à la page 23.
- [Stewart, 1993] STEWART, G. W. (1993). On the early history of the singular value decomposition. *SIAM Review*, 35(4):551–566. Cité à la page 31.
- [Thouvenin *et al.*, 2006] THOUVENIN, G., RICAUD, J., MICHEL, B., PLANCO, D. et THEVENIN, P. (2006). ALCYONE : the PLEIADES fuel performance code dedicated to multidimensional PWR studies. *Proceedings of Top Fuel*. Cité à la page 17.
- [Verfürth, 1999] VERFÜRTH, R. (1999). A review of a posteriori error estimation techniques for elasticity problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 176(1): 419 – 440. Cité à la page 30.
- [Veroy *et al.*, 2003] VEROY, K., PRUD’HOMME, C., ROVAS, D. et PATERA, A. (2003). A posteriori error bounds for reduced-basis approximation of parametrized noncoercive and nonlinear elliptic partial differential equations. In *16th AIAA Computational Fluid Dynamics Conference*, page 3847. Cité aux pages 26, 31.
- [Vince, 2002] VINCE, A. (2002). A framework for the greedy algorithm. *Discrete Applied Mathematics*, 121(1):247–260. Cité à la page 29.
- [Wild *et al.*, 2004] WILD, S., CURRY, J. et DOUGHERTY, A. (2004). Improving non-negative matrix factorizations through structured initialization. *Pattern Recognition*, 37(11):2217 – 2232. Cité à la page 49.
- [Willcox, 2006] WILLCOX, K. (2006). Unsteady flow sensing and estimation via the gappy proper orthogonal decomposition. *Computers & Fluids*, 35(2):208 – 226. Cité à la page 28.
- [Wirtz *et al.*, 2014] WIRTZ, D., SORENSEN, D. C. et HAASDONK, B. (2014). A posteriori error estimation for deim reduced nonlinear dynamical systems. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 36(2):A311–A338. Cité à la page 31.
- [Wriggers, 2006] WRIGGERS, P. (2006). *Computational Contact Mechanics*. Springer Science & Business Media. Cité à la page 44.
- [Xu *et al.*, 2003] XU, W., LIU, X. et GONG, Y. (2003). Document clustering based on non-negative matrix factorization. In *Proceedings of the 26th annual international ACM SIGIR conference on Research and development in information retrieval*, pages 267–273. ACM. Cité à la page 49.
- [Zienkiewicz *et al.*, 1971] ZIENKIEWICZ, O. C., TAYLOR, R. L. et ZHU, J. Z. (2013,1971). *Finite element method : its basis and fundamentals*. Butterworth-Heinemann, 7ème édition. Cité à la page 23.
- [Zienkiewicz et Zhu, 1987] ZIENKIEWICZ, O. C. et ZHU, J. Z. (1987). A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 24(2):337–357. Cité à la page 30.
- [Zitnik et Zupan, 2012] ZITNIK, M. et ZUPAN, B. (2012). Nimfa : A Python Library for Nonnegative Matrix Factorization. *Journal of Machine Learning Research*, 13:849–853. Cité aux pages 50, 61.

Résumé

La réduction d'ordre de modèles d'un problème de contact demeure un sujet de recherche important en mécanique numérique des solides.

Nous proposons une extension de l'hyper-réduction avec domaine d'intégration réduit à la mécanique du contact sans frottement s'écrivant à l'aide d'une formulation mixte. Comme la zone de contact potentiel se limite au domaine réduit, nous faisons le choix de prendre comme base réduite pour la variable duale (représentative des forces de contact) la base du modèle d'ordre plein restreinte.

Nous obtenons ainsi un modèle hyper-réduit hybride avec une approximation de la variable primale par des modes empiriques et de la variable duale par les fonctions de base des éléments finis. Si nécessaire, la condition inf-sup de ce modèle peut être forcée par une approximation hybride la variable primale. Cela mène à une stratégie hybride combinant un modèle d'ordre hyper-réduit et un modèle d'ordre plein permettant l'obtention d'une meilleure approximation de la solution sur la zone de contact.

Un post-traitement permettant la reconstruction des multiplicateurs de Lagrange sur l'ensemble de la zone de contact est également introduit.

De manière à optimiser la sélection des snapshots, un indicateur d'erreur simple et efficace est avancé pour être couplé à un algorithme glouton.

Mots Clés

Réduction d'ordre de modèles, mécanique du contact, formulation mixte, hyper-réduction hybride, domaine d'intégration réduit (maillage réduit), matériaux non-linéaires.

Abstract

The model order reduction of mechanical problems involving contact remains an important issue in computational solid mechanics.

An extension of the hyper-reduction method based on a reduced integration domain to frictionless contact problems written by a mixed formulation is proposed. As the potential contact zone is naturally reduced through the reduced domain, the dual reduced basis is chosen as the restriction of the dual full-order model basis.

A hybrid hyper-reduced model combining empirical modes for primal variables with finite element approximation for dual variables is then obtained. If necessary, the inf-sup condition of this hybrid saddle point problem can be enforced by extending the hybrid approximation to the primal variables. This leads to a hybrid hyper-reduced/full-order model strategy. By this way, a better approximation on the potential contact zone is furthermore obtained.

A post-treatment dedicated to the reconstruction of the contact forces on the whole domain is introduced.

In order to optimize the snapshots selection, an efficient error indicator is coupled to a greedy sampling algorithm leading to a robust reduced-order model.

Keywords

Model order reduction, contact mechanics, mixed formulation, hybrid hyper-reduction, reduced integration domain (reduced mesh), nonlinear materials.