



**HAL**  
open science

# Dimensionnement à l'effort tranchant des éléments de structure en béton armé en présence d'un effort axial de traction-compression

Amal Wahbi

## ► To cite this version:

Amal Wahbi. Dimensionnement à l'effort tranchant des éléments de structure en béton armé en présence d'un effort axial de traction-compression. Matériaux et structures en mécanique [physics.class-ph]. École des Ponts ParisTech, 2021. Français. NNT : 2021ENPC0023 . tel-03541690

**HAL Id: tel-03541690**

**<https://pastel.hal.science/tel-03541690>**

Submitted on 24 Jan 2022

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



École des Ponts  
ParisTech

# THÈSE DE DOCTORAT de l'École des Ponts ParisTech

## Dimensionnement à l'effort tranchant des éléments de structure en béton armé en présence d'un effort axial de traction-compression

École doctorale N° 531, Sciences, Ingénierie et Environnement (SIE)

Spécialité du doctorat : Structures et Matériaux

Thèse préparée au sein du laboratoire Navier, UMR 8205,  
Équipe Multi-échelle

---

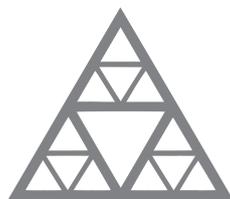
Thèse soutenue le 02/11/2021, par  
**Amal WAHBI**

---

Composition du jury :

François, BUYLE-BODIN Professeur des universités, Université Lille 1	<i>Président</i>
Aurelio, MUTTONI Professeur, EPFL	<i>Rapporteur</i>
Mohammed, HJIAJ Professeur, INSA de Rennes	<i>Rapporteur</i>
Anne-Sophie, COLAS Ingénieure de recherche, Université Gustave Eiffel	<i>Examinatrice</i>
Duc Toan, PHAM Ingénieur de recherche, CSTB	<i>Encadrant</i>
Ghazi, HASSEN Chargé de recherche, École des Ponts ParisTech	<i>Encadrant</i>
Patrick, de BUHAN Professeur, École des Ponts ParisTech	<i>Directeur de thèse</i>





École des Ponts

ParisTech

École doctorale SIE

THÈSE

présentée pour l'obtention du diplôme de

DOCTEUR

de l'École des Ponts ParisTech

Spécialité : Structures et Matériaux

par

**Amal WAHBI**

intitulée

# Dimensionnement à l'effort tranchant des éléments de structure en béton armé en présence d'un effort axial de traction-compression

soutenue le 2 novembre 2021, devant le jury composé de :

PR. AURELIO MUTTONI	EPFL	Rapporteur
PR. MOHAMMED HJIAJ	INSA de Rennes	Rapporteur
PR. FRANÇOIS BUYLE-BODIN	Université Lille 1	Président du jury
DR. ANNE-SOPHIE COLAS	Université Gustave Eiffel	Examinatrice
DR. DUC TOAN PHAM	CSTB	Encadrant
DR. GHAZI HASSEN	École des Ponts ParisTech	Encadrant
PR. PATRICK DE BUHAN	École des Ponts ParisTech	Directeur de thèse



# Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier Pr. Aurelio Muttoni, Pr. Mohammed Hjiiaj, Pr. François Buyle-Bodin et Dr. Anne Sophie Colas, pour avoir accepté de faire partie de mon jury de thèse et pour le temps qu'ils ont consacré à l'examen de mon travail.

Je remercie vivement Pr. Patrick de Buhan, que j'ai eu le privilège d'avoir comme Professeur à l'École des Ponts ParisTech puis comme directeur de thèse. Son encadrement scientifique de haut niveau et sa bienveillance m'ont permis de réaliser ma thèse dans les meilleures conditions. Un grand merci à mon encadrant au CSTB, Dr. Duc Toan Pham, pour sa disponibilité, ses encouragements, ses précieux conseils, son écoute attentive et sa grande générosité. Je remercie également mon ancien professeur et encadrant au laboratoire Navier, Dr. Ghazi Hassen, pour son aide et pour le temps qu'il a consacré à ma formation sur la partie numérique. Je remercie aussi Dr. Romain Mège et Dr. Denis Garnier pour l'intérêt qu'ils ont porté à mes travaux.

J'ai eu le plaisir de travailler avec de nombreuses personnes au CSTB pour la réalisation de deux campagnes expérimentales : Philippe Rivillon, Pierre-Yves Mertz, Etienne Bruchet, Pierre-Jean Degiovanni, Souhaib Remich, Éric Degiovanni, Fabrice Maurice, Jean-Clotaire Akue Ondo, Vincent Sandoz, Rémi Mercier, Jean Christophe Caillot, Philippe Girault, Pierre Rutowski, Faustin Mundele Nsingi, Hubert Auster, Fisiipeau loko Logona, Jean-Paul Grosnom, Lam Nguyen Lang... Je garderai un très bon souvenir de la bonne ambiance du hall d'essais.

Je souhaite remercier chaleureusement toute l'équipe EA2R du CSTB avec qui j'ai passé trois belles années : Alan, Amine, Anca, Axelle, Benoît-Louis, Dhionis, El Mehdi, Emilie, Érich, Gabriel, Karine, Laure, Manuel, Mara, Nicolas, Olivier, Paul, Pauline, Quentin, Renato, Seddik, Yahia... Je pense aussi à toutes les personnes que j'ai pu rencontrer au CSTB durant la thèse ou mon précédent stage : Abdessamad, Alexandre, Angel, Armand, David, Élodie, Étienne, Loic, Marion, Miah, Philippe...

Un grand merci à tous les doctorants du CSTB et de l'École des Ponts, avec qui j'ai passé de très bons moments : Miora pour ses gentilles attentions et les fous rires partagés ensemble, Aya pour son humour et sa joie de vivre, Nihal pour sa douceur et ses encouragements, Nagham pour sa grande gentillesse et sa serviabilité, Bunthan pour ses blagues drôles mais souvent stressantes, Élodie et Alma pour avoir été les meilleures

---

voisines de bureau, Omar pour ses bons conseils, Charlotte pour sa bonne humeur, Fatima pour son grand sourire contagieux, et enfin Insaf, Kadidja et Yassine pour la bonne ambiance à l'école.

Pour finir, je remercie Thomas, mes parents, mes soeurs, mon frère, toute ma famille au Maroc et en France, et mes amis, pour leur soutien inconditionnel et leurs encouragements.

\*      \*

      \*

# Résumé

Ce manuscrit présente des méthodes de dimensionnement d'éléments soumis d'une part à un chargement transversal et d'autre part à une charge axiale et un moment fléchissant appliqués aux extrémités. Ces méthodes permettent in fine de prédire la résistance à l'effort tranchant en tenant compte de l'influence de la traction et de la compression axiales, ainsi que du moment fléchissant. Pour cela, il est choisi de se baser sur l'approche cinématique de la théorie du *calcul à la rupture* qui offre un cadre rigoureux pour la détermination, de manière rapide et directe, d'estimations par excès des charges ultimes. A cet effet, différents mécanismes de ruine virtuels sont proposés permettant l'élaboration de méthodes de calculs semi-analytiques par l'extérieur du domaine de résistance. Afin d'explorer des champs de vitesses virtuelles plus riches que ceux étudiés dans ces calculs semi-analytiques, l'approche cinématique est également mise en œuvre numériquement dans le cadre d'une méthode du type éléments finis.

Par ailleurs, deux campagnes expérimentales sont réalisées, visant l'étude de poutres en béton armé, renforcées ou non avec des armatures transversales, et soumises à la même combinaison de chargement considérée dans les calculs semi-analytiques et numériques. Ces essais permettent de mettre en évidence expérimentalement l'influence de la charge axiale et du moment sur la résistance à l'effort tranchant, ainsi que d'identifier les mécanismes de fissuration des poutres à travers une analyse par corrélation d'images numériques. De plus la confrontation entre les résultats expérimentaux et les prédictions de certains codes de construction permet d'évaluer leur pertinence dans le dimensionnement vis-à-vis des chargements étudiés.

Finalement, les approches proposées sont comparées aux résultats expérimentaux obtenus dans le cadre de ce travail, ainsi que ceux disponibles dans la littérature. Les méthodes sont également confrontées aux estimations obtenues par des formules analytiques proposées dans la littérature sur la base de l'approche cinématique par l'extérieur également, ainsi qu'aux résultats numériques fournis par un logiciel commercial de calculs par éléments finis basé aussi sur le même principe.

**Mots-clés :** Béton armé, résistance, chargement combiné, effort tranchant, effort axial, moment fléchissant, calcul à la rupture, calcul semi-analytique, éléments finis, essais.



# Abstract

The present work deals with design methods for reinforced concrete (RC) elements subjected to a transverse load, combined with an axial load and a bending moment both applied at their ends. Using these methods, the shear strength of RC elements can be estimated taking into account the influence of axial tension and compression, as well as the applied bending moment. For that purpose, several semi-analytical methods are proposed based on the kinematic approach of the yield design theory. Using different virtual failure mechanisms, this approach makes it possible to compute upper estimations of the ultimate loads, and consequently the resistance domain, of the studied structure. In order to consider a larger field of virtual failure mechanisms, the kinematic approach is implemented numerically by means of a finite element method.

Besides, two experimental campaigns are performed on RC beams, with and without shear reinforcements, subjected to the same combination of loadings considered in the proposed semi-analytical and numerical methods. The analysis of the results makes it possible to identify the influence of the applied loads on the shear strength of RC elements. In addition, the use of Digital Image Correlation technique provides important information on the evolution of the cracking of the beams. Moreover, the comparison of the experimental results with the predictions of some design codes allows to evaluate their accuracy in the shear design of RC elements subjected to such loading configuration.

Finally, the proposed design methods are compared to the experimental results of these two campaigns, as well as to the results of some tests available in the literature. The methods are also confronted to the predictions of some analytical methods proposed by other researchers on the basis of an upper-bound approach as well, in addition to the numerical estimations of a finite-element commercial software based also on this method.

**Keywords :** Reinforced concrete, resistance, shear force, axial force, bending moment, yield design theory, semi-analytical method, finite elements, tests.



# Table des matières

Table des figures	xiii
Liste des tableaux	xix
<b>1 Introduction</b>	<b>1</b>
1.1 Contexte et objectif de la thèse . . . . .	3
1.2 Aperçu des méthodes d'analyse actuelles . . . . .	6
1.2.1 Codes de construction . . . . .	6
1.2.2 Études expérimentales . . . . .	9
1.2.3 Méthodes de dimensionnement analytiques ou semi-analytiques . . . . .	12
1.2.4 <i>Calcul à la rupture</i> . . . . .	17
1.3 Rappel du principe du <i>calcul à la rupture</i> . . . . .	18
1.3.1 Données du problème : géométrie, mode de chargement et critères de résistance . . . . .	18
1.3.2 Définition du domaine des chargements potentiellement supportables	20
1.3.3 Approche statique par l'intérieur . . . . .	21
1.3.4 Approche cinématique par l'extérieur . . . . .	22
1.4 Méthodes basées sur le <i>calcul à la rupture</i> . . . . .	26
1.4.1 Méthode de Ganwei et Nielsen (1988, 1990) . . . . .	26
1.4.2 Méthode de Zhang (1997) . . . . .	27
1.4.3 Méthode de Koechlin (2007) et Koechlin <i>et al.</i> (2008) . . . . .	28
1.5 Organisation du mémoire . . . . .	30

<b>2</b>	<b>Estimations semi-analytiques des capacités de résistance de poutres soumises à la combinaison de chargements transversal et axial et d'un moment fléchissant</b>	<b>33</b>
2.1	Introduction . . . . .	35
2.2	Position du problème de <i>calcul à la rupture</i> . . . . .	36
2.2.1	Géométrie et conditions aux limites . . . . .	36
2.2.2	Critères de résistance des matériaux constitutifs . . . . .	37
2.2.3	Mode de chargement . . . . .	39
2.2.4	Implémentation de l'approche cinématique . . . . .	41
2.3	Exemples . . . . .	48
2.3.1	Domaines de résistance dans l'espace $(F_x, F_y, m)$ . . . . .	48
2.3.2	Domaines de résistance $(F_x, F_y)_{m=0}$ . . . . .	50
2.4	Études paramétriques . . . . .	53
2.4.1	Influence d'un moment supplémentaire . . . . .	53
2.4.2	Influence du rapport $a/h$ . . . . .	56
2.4.3	Influence du renforcement longitudinal . . . . .	58
2.4.4	Influence du renforcement transversal . . . . .	60
2.5	Mise en oeuvre d'autres mécanismes . . . . .	62
2.5.1	Mise en oeuvre de plusieurs surfaces de discontinuité planes . . . . .	62
2.5.2	Mise en oeuvre d'une surface de discontinuité courbe . . . . .	64
2.5.3	Comparaison des résultats obtenus par les différents mécanismes . . . . .	67
2.5.4	Remarques sur les problèmes numériques rencontrés . . . . .	69
2.6	Calcul en contraintes planes . . . . .	74
2.6.1	Implémentation de l'approche cinématique en contraintes planes . . . . .	74
2.6.2	Comparaison des résultats du problème en contraintes planes avec ceux du problème initial analysé par des mécanismes de déformation planes . . . . .	75
2.7	Homogénéisation du béton renforcé par des armatures transversales . . . . .	79
2.7.1	Principe de la démarche (Averbuch, 1996; Averbuch et de Buhan, 1999) . . . . .	79
2.7.2	Application aux mécanismes proposés . . . . .	80
2.7.3	Comparaison des résultats . . . . .	81
2.8	Conclusions . . . . .	82

<b>3</b>	<b>Mise au point d'une méthode numérique appliquée à l'approche cinématique par l'extérieur du problème</b>	<b>85</b>
3.1	Introduction . . . . .	87
3.2	Modélisations mécanique et numérique de la poutre en béton armé . . . . .	88
3.3	Mise en œuvre de l'approche cinématique . . . . .	89
3.3.1	Description des champs de vitesse . . . . .	90
3.3.2	Calcul de la puissance résistance maximale . . . . .	93
3.3.3	Résolution du problème d'optimisation engendré par l'approche cinématique discrétisée . . . . .	96
3.4	Comparaison entre les résultats des méthodes numériques et semi-analytiques	97
3.5	Conclusions . . . . .	107
<b>4</b>	<b>Étude expérimentale</b>	<b>109</b>
4.1	Introduction . . . . .	110
4.2	Description des essais . . . . .	111
4.2.1	Caractéristiques des corps d'épreuve . . . . .	111
4.2.2	Dispositif d'essais . . . . .	117
4.2.3	Programme de chargement . . . . .	120
4.3	Résultats des essais et discussions . . . . .	123
4.3.1	Courbes force-déplacement . . . . .	123
4.3.2	Évolution des fissures . . . . .	126
4.3.3	Charges ultimes . . . . .	132
4.3.4	Comparaison avec les prévisions de codes de construction . . . . .	137
4.4	Conclusions . . . . .	140
<b>5</b>	<b>Comparaisons et validations</b>	<b>143</b>
5.1	Introduction . . . . .	144
5.2	Comparaisons avec des méthodes analytiques disponibles dans la littérature	145
5.3	Comparaisons avec les résultats obtenus par l'utilisation du logiciel OptumG2	149
5.4	Première validation des méthodes proposées à partir de résultats expérimentaux	154
5.4.1	Essais réalisés dans le cadre de cette thèse (chapitre 4) . . . . .	155
5.4.2	Essais de <i>Pham et al. (2020a,b)</i> . . . . .	160
5.4.3	Essais de <i>Madsen et al. (2011)</i> . . . . .	164
5.4.4	Essais de <i>Jørgensen et al. (2013)</i> . . . . .	166
5.4.5	Récapitulatif des comparaisons entre calculs et résultats d'essais . . . . .	168
5.5	Conclusions . . . . .	170

<b>6 Conclusions et Perspectives</b>	<b>173</b>
6.1 Conclusions . . . . .	173
6.2 Perspectives . . . . .	175
<b>Annexes</b>	<b>177</b>
<b>A Plateau de la charge transversale</b>	<b>177</b>
<b>B Domaines de résistance pour les essais de <i>Pham et al. (2020a,b)</i></b>	<b>179</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>185</b>

# Table des figures

1.1	Rupture des poutres de l'entrepôt AMC du Wilkins Air Force (États-Unis, 1955) (Collins <i>et al.</i> , 2008) . . . . .	3
1.2	Photo de la plateforme offshore Sleipner A et schéma du <i>tricell</i> (Arnold, 2009)	4
1.3	Exemples de concomitance entre des contraintes de compression et de cisaillement dans (a) un poteau sous charge sismique, (b) un caisson de pont et (c) un mur à centrage automatique (figures adaptées de Xie <i>et al.</i> (2011)) . . . . .	5
1.4	Modèle des bielles et tirants avec angle d'inclinaison fixé à 45° . . . . .	13
1.5	Modèle des bielles et tirants avec angle d'inclinaison variable . . . . .	13
1.6	Principe de la MCFT (figure adaptée de Bentz <i>et al.</i> (2006)) . . . . .	16
1.7	Distribution des déformations longitudinales et des contraintes de cisaillement dans le modèle en couches d'une poutre (figure adaptée de Sadeghian et Vecchio (2018)) . . . . .	16
1.8	Données nécessaires à la résolution d'un problème par la théorie du <i>calcul à la rupture</i> . . . . .	18
1.9	Estimation par défaut du domaine $K$ par l'approche statique par l'intérieur	21
1.10	Interprétation géométrique de l'approche cinématique par l'extérieur . . . . .	24
1.11	Estimation par excès du domaine $K$ par l'approche cinématique par l'extérieur du <i>calcul à la rupture</i> . . . . .	25
1.12	Encadrement du domaine $K$ par les estimations par excès et par défaut des deux approches du <i>calcul à la rupture</i> . . . . .	26
1.13	Mécanisme de ruine virtuel proposé par Ganwei et Nielsen (1988, 1990) . . . . .	27
1.14	Mécanisme de ruine virtuel proposé par Zhang (1997) . . . . .	28
1.15	Mécanisme de ruine virtuel proposé par Koechlin (2007) et Koechlin <i>et al.</i> (2008) (figure adaptée de Koechlin <i>et al.</i> (2008)) . . . . .	29
1.16	Domaine de résistance obtenu par Koechlin (2007) et Koechlin <i>et al.</i> (2008) (figure tirée de Koechlin (2007)) . . . . .	30

2.1	Poutre en béton armé . . . . .	37
2.2	Courbe intrinsèque du critère de résistance du béton . . . . .	38
2.3	Mode de chargement à trois paramètres de la poutre en béton armé . . . . .	40
2.4	Mécanisme de ruine considéré dans l'approche cinématique par l'extérieur . . . . .	42
2.5	Projection de la discontinuité de vitesse sur l'axe des armatures . . . . .	43
2.6	Optimisation par trajets de chargement radiaux . . . . .	47
2.7	Optimisation par trajets de chargement radiaux pour $m$ fixé (coupe du domaine de résistance par le plan d'équation $m = C^{\text{ste}}$ ) . . . . .	47
2.8	Domaine de résistance $(F_x, F_y, m)$ de la poutre n°1 . . . . .	49
2.9	Domaine de résistance $(F_x, F_y, m)$ de la poutre n°2 . . . . .	49
2.10	Domaine de résistance $(F_x, F_y, m)$ de la poutre n°3 . . . . .	50
2.11	Domaines de résistance des trois poutres dans le plan $(F_x, F_y)_{m=0}$ . . . . .	51
2.12	Contribution du béton (en gris), des armatures longitudinales (en rouge) et des armatures transversales (en jaune) à la puissance résistante maximale. Cas des poutres (a) n°2 et (b) n°3 . . . . .	52
2.13	Influence du moment supplémentaire $m$ sur le domaine de résistance de la poutre n°2 . . . . .	55
2.14	Influence du moment supplémentaire $m$ sur le domaine de résistance de la poutre n°3 . . . . .	56
2.15	Influence du rapport $a/h$ sur le domaine de résistance de la poutre n°1 . . . . .	57
2.16	Influence du rapport $a/h$ sur le domaine de résistance de la poutre n°2 . . . . .	57
2.17	Influence du rapport $a/h$ sur le domaine de résistance de la poutre n°3 . . . . .	58
2.18	Domaines de résistance d'une poutre en béton armé avec $a/h = 3$ , $\Phi_w = 0,6$ et pour différents degrés de renforcement longitudinal $\Phi$ . . . . .	59
2.19	Mécanisme optimal associé à la valeur du plateau horizontal du domaine de résistance . . . . .	60
2.20	Domaines de résistance d'une poutre en béton armé avec $a/h = 3$ , $\Phi = 0,6$ et pour différents degrés de renforcement transversal $\Phi_w$ . . . . .	61
2.21	Mécanisme 2 à plusieurs surfaces de discontinuité planes . . . . .	62
2.22	Zoom sur la $i^{\text{ème}}$ surface de discontinuité de vitesse . . . . .	63
2.23	Discontinuité de vitesse au travers d'une spirale logarithmique . . . . .	65
2.24	Zoom sur un point M de la spirale logarithmique . . . . .	66
2.25	Domaines de résistance pour $m = 0$ de la poutre n°1 pour les mécanismes avec une discontinuité de vitesse selon un, deux et trois plans et une surface courbe (spirale logarithmique) . . . . .	71

2.26	Lignes de discontinuité obtenues pour la poutre n°1 en considérant (a) un, deux et trois plans et (b) une surface courbe (spirale logarithmique) et trois plans . . . . .	71
2.27	Domaines de résistance pour $m = 0$ de la poutre n°2 pour les mécanismes avec une discontinuité de vitesse selon un, deux et trois plans et une surface courbe (spirale logarithmique) . . . . .	72
2.28	Lignes de discontinuité obtenues pour la poutre n°2 en considérant (a) un, deux et trois plans et (b) une surface courbe (spirale logarithmique) et trois plans . . . . .	72
2.29	Domaines de résistance pour $m = 0$ de la poutre n°3 pour les mécanismes avec une discontinuité de vitesse selon un, deux et trois plans et une surface courbe (spirale logarithmique) . . . . .	73
2.30	Lignes de discontinuité obtenues pour la poutre n°1 en considérant (a) un, deux et trois plans et (b) une surface courbe (spirale logarithmique) et trois plans . . . . .	73
2.31	Domaines de résistance de la poutre n°1 obtenus par les mécanismes en déformation plane (CP) et en contrainte plane (CP) . . . . .	77
2.32	Domaines de résistance de la poutre n°2 obtenus par les mécanismes en déformation plane (CP) et en contrainte plane (CP) . . . . .	77
2.33	Domaines de résistance de la poutre n°3 obtenus par les mécanismes en déformation plane (CP) et en contrainte plane (CP) . . . . .	78
2.34	Lignes de discontinuité obtenues par les mécanismes en déformation plane (DP) et en contrainte plane (CP) pour (a) les poutres n°1 et 2 et (b) la poutre n°3 . . . . .	78
2.35	Homogénéisation du béton renforcée par des armatures transversales régulièrement espacées . . . . .	80
2.36	Comparaisons entre les domaines de résistance de la poutre n°3 obtenus par le mécanisme 1 avec discrétisation des cadres et pour les trois mécanismes proposés par homogénéisation du milieu renforcé . . . . .	82
3.1	Modélisation mixte de la poutre et discrétisation par éléments finis . . . . .	89
3.2	Élément fini triangulaire $e$ de nœuds $k = 1, 2$ et $3$ . . . . .	90
3.3	Discontinuités de vitesse aux nœuds $j$ (dédoublé en $j^-$ et $j^+$ ) et $k$ (dédoublé en $k^-$ et $k^+$ ) de l'interface $i$ entre deux éléments adjacents $e^+$ et $e^-$ . . . . .	91
3.4	Élément linéique $e$ de l'armature longitudinale . . . . .	92
3.5	Discontinuité de vitesse au nœud $k$ commun à deux éléments $e^-$ et $e^+$ . . . . .	92
3.6	Exemples de maillages (a) fin ( $f = 0,01$ m) et (b) grossier ( $f = 0,05$ m) de la poutre étudiée . . . . .	98

3.7	Comparaison des résultats numériques et semi-analytiques relatifs à la poutre n°1 en béton seul . . . . .	99
3.8	Exemples de déformées obtenues par les calculs numériques pour la poutre n°1 sous les hypothèses de (a) déformation plane et de (b) contrainte plane . . . . .	100
3.9	Comparaison des résultats numériques et semi-analytiques de la poutre n°2 pour un moment supplémentaire nul . . . . .	101
3.10	Exemples de déformées obtenues par les calculs numériques pour la poutre n°2 sous les hypothèses de (a) déformation plane et de (b) contrainte plane . . . . .	102
3.11	Exemple de déformée obtenue par le calcul numérique pour la poutre n°2 sous l'hypothèse de déformation plane au niveau d'un point du plateau horizontal . . . . .	103
3.12	Comparaison des résultats numériques et semi-analytiques de la poutre n°3 pour un moment supplémentaire nul . . . . .	104
3.13	Déformées obtenues par les calculs numériques pour la poutre n°3 sous les hypothèses de (a) déformation plane et de (b) contrainte plane . . . . .	104
3.14	Comparaison des résultats numériques et semi-analytiques de la poutre n°2 pour un moment supplémentaire maximal négatif et positif . . . . .	106
3.15	Comparaison des résultats numériques et semi-analytiques de la poutre n°3 pour un moment supplémentaire maximal négatif et positif . . . . .	106
4.1	Schéma des poutres testées . . . . .	111
4.2	Exemples d'éprouvettes cubiques et cylindriques pour la caractérisation du béton de la deuxième campagne . . . . .	112
4.3	Détails de l'extrémité des poutres . . . . .	114
4.4	Schémas (longueurs en mm) et photos du ferrailage des poutres NS et S . . . . .	115
4.5	Dispositifs de caractérisation des armatures (a) transversales et (b) longitudinales . . . . .	116
4.6	Dispositif d'essai et chargements appliqués (Pham <i>et al.</i> , 2020c) . . . . .	118
4.7	(a) Photo et (b) schéma (Pham <i>et al.</i> , 2020c) du dispositif expérimental complet . . . . .	119
4.8	Etapes d'application des chargements . . . . .	121
4.9	Courbes (force verticale, déplacement vertical) pour les essais des séries I et II des poutres sans cadres . . . . .	124
4.10	Courbes (force vertical, déplacement verticale) pour les essais des séries I et II des poutres avec cadres . . . . .	125
4.11	Exemple de fissures verticales dans la partie supérieure de la poutre NS-15 provoquées par l'application d'un moment négatif . . . . .	126

4.12	Exemple de fissures verticales dans la partie inférieure de la poutre NS-15 provoquées par l'application du chargement transversal . . . . .	127
4.13	Exemple d'une fissure inclinée dans la poutre NS-15 . . . . .	127
4.14	Propagation horizontale de la fissure inclinée dans les parties supérieure et inférieure de la poutre NS-15 . . . . .	128
4.15	Évolution de l'angle d'inclinaison des fissures en fonction de la charge de compression axiale . . . . .	129
4.16	Fissures des poutres sans cadres . . . . .	130
4.17	Fissures des poutres avec cadres . . . . .	131
4.18	Projection des résultats expérimentaux sur le plan $(F_x, F_y)$ . . . . .	134
4.19	Contribution des armatures transversales à la résistance à l'effort tranchant des poutres de (a) la série I et de (b) la série II . . . . .	135
4.20	Influence de la charge axiale sur la résistance à l'effort tranchant des poutres (a) NS et (b) S . . . . .	136
4.21	Influence du moment supplémentaire sur la résistance à l'effort tranchant des poutres (a) NS et (b) S . . . . .	136
4.22	Comparaison des résultats expérimentaux des poutres NS avec les prédictions de l'Eurocode 2 et du Model Code . . . . .	138
4.23	Comparaison des résultats expérimentaux des poutres S avec les prédictions de l'Eurocode 2 et du Model Code . . . . .	139
5.1	Comparaison des résultats des méthodes numériques et semi-analytiques proposées avec les méthodes analytiques trouvées dans la bibliographie pour la poutre n°1 . . . . .	146
5.2	Comparaison des résultats des méthodes numériques et semi-analytiques proposées avec les méthodes analytiques trouvées dans la bibliographie pour la poutre n°2 . . . . .	147
5.3	Comparaison des résultats des méthodes numériques et semi-analytiques proposées avec les méthodes analytiques dans la bibliographie pour la poutre n°3 . . . . .	148
5.4	Exemples de modélisation par OptumG2 des poutres (a) n°2 et (b) n°3 . . . . .	150
5.5	Comparaison entre les résultats semi-analytiques et numériques des méthodes proposées et les résultats d'OptumG2 pour les poutres n°1, 2 et 3 sous $m = 0$ 151	
5.6	Exemples de déformées des poutres (a) n°1, (b) n°2 et (c) n°3 . . . . .	153
5.7	Comparaison entre les résultats semi-analytiques et numériques des méthodes proposées et les résultats d'OptumG2 pour les poutres (a) n°2 et (b) n°3 pour $m = \pm m_{max}$ . . . . .	154

5.8	Comparaison des résultats semi-analytiques et numériques avec les résultats des essais NS.I (a) sans et (b) avec réduction de la résistance à la compression du béton . . . . .	156
5.9	Comparaison des résultats semi-analytiques et numériques avec les résultats des essais NS.II (a) sans et (b) avec réduction de la résistance à la compression du béton . . . . .	157
5.10	Comparaison des résultats semi-analytiques et numériques avec les résultats des essais S.I (a) sans et (b) avec réduction de la résistance à la compression du béton . . . . .	158
5.11	Comparaison des résultats semi-analytiques et numériques avec les résultats des essais S.II (a) sans et (b) avec réduction de la résistance à la compression du béton . . . . .	159
5.12	Comparaison des résultats semi-analytiques et numériques avec les résultats expérimentaux de <i>Pham et al. (2020a)</i> (a) sans et (b) avec réduction de la résistance à la compression du béton . . . . .	162
5.13	Comparaison des résultats semi-analytiques et numériques avec les résultats expérimentaux de <i>Pham et al. (2020b)</i> (a) sans et (b) avec réduction de la résistance à la compression du béton . . . . .	164
5.14	Comparaison des résultats semi-analytiques et numériques avec les résultats expérimentaux de <i>Madsen et al. (2011)</i> (a) sans et (b) avec réduction de la résistance à la compression du béton . . . . .	165
5.15	Comparaison des résultats semi-analytiques et numériques avec les résultats expérimentaux de <i>Jørgensen et al. (2013)</i> sans (figures de gauche) et avec (figures de droites) réduction de la résistance à la compression du béton . .	167
B.1	Domaines de résistance numériques et semi-analytiques pour les poutres sans cadres de <i>Pham et al. (2020a)</i> . . . . .	180
B.2	Domaines de résistance numériques et semi-analytiques pour les poutres avec cadres ( $\phi 6, s = 20$ cm) de <i>Pham et al. (2020b)</i> . . . . .	181
B.3	Domaines de résistance numériques et semi-analytiques pour les poutres avec cadres ( $\phi 6, s = 15$ cm) de <i>Pham et al. (2020b)</i> . . . . .	182
B.4	Domaines de résistance numériques et semi-analytiques pour les poutres avec cadres ( $\phi 8, s = 20$ cm) de <i>Pham et al. (2020b)</i> . . . . .	183

# Liste des tableaux

1.1	Comparaison entre les codes de construction . . . . .	8
1.2	Comparatif de quelques campagnes expérimentales disponibles dans la littérature . . . . .	11
4.1	Composition du béton . . . . .	112
4.2	Caractéristiques des poutres . . . . .	113
4.3	Résultats expérimentaux . . . . .	133
5.1	Prédictions des méthodes proposées pour les essais de la thèse et de la bibliographie . . . . .	168



# Chapitre 1

## Introduction

**Résumé :** *L'objet de ce chapitre est de mettre en évidence les difficultés liées au dimensionnement des structures en béton armé, de type poutres, soumises à la combinaison d'un effort tranchant (engendré par l'application d'un chargement transversal) et d'un effort axial de traction ou de compression. Des exemples de méthodes d'analyse proposées dans les codes de construction ou dans la littérature, ainsi que les résultats de quelques études expérimentales sont présentés brièvement. Ensuite, la théorie du calcul à la rupture, sur laquelle repose les travaux de cette thèse, est décrite, ainsi que quelques méthodes de dimensionnement basées sur cette théorie.*

### Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Contexte et objectif de la thèse</b> . . . . .	<b>3</b>
<b>1.2</b>	<b>Aperçu des méthodes d'analyse actuelles</b> . . . . .	<b>6</b>
1.2.1	Codes de construction . . . . .	6
1.2.2	Études expérimentales . . . . .	9
1.2.3	Méthodes de dimensionnement analytiques ou semi-analytiques . . . . .	12
1.2.4	<i>Calcul à la rupture</i> . . . . .	17
<b>1.3</b>	<b>Rappel du principe du <i>calcul à la rupture</i></b> . . . . .	<b>18</b>
1.3.1	Données du problème : géométrie, mode de chargement et critères de résistance . . . . .	18
1.3.2	Définition du domaine des chargements potentiellement supportables	20
1.3.3	Approche statique par l'intérieur . . . . .	21
1.3.4	Approche cinématique par l'extérieur . . . . .	22
<b>1.4</b>	<b>Méthodes basées sur le <i>calcul à la rupture</i></b> . . . . .	<b>26</b>
1.4.1	Méthode de Ganwei et Nielsen (1988, 1990) . . . . .	26

1.4.2	Méthode de Zhang (1997) . . . . .	27
1.4.3	Méthode de Koechlin (2007) et Koechlin <i>et al.</i> (2008) . . . . .	28
<b>1.5</b>	<b>Organisation du mémoire . . . . .</b>	<b>30</b>

---

## 1.1 Contexte et objectif de la thèse

Historiquement, l'influence des efforts axiaux n'était pas prise en compte dans le dimensionnement à l'effort tranchant des éléments en béton armé. Toutefois, la rupture partielle de l'entrepôt AMC du Wilkins Air Force aux États-Unis en août 1955 (Collins *et al.*, 2008), a soulevé plusieurs questions sur la pertinence des méthodes traditionnelles de dimensionnement à l'effort tranchant proposées notamment dans les différents codes de construction. En effet, les poutres de cet entrepôt ont rompu pour une contrainte de cisaillement de 0,50 MPa, alors que le code américain de l'époque prévoyait une résistance de 0,62 MPa (soit 24% plus élevée par rapport à la valeur réelle à la rupture) (Bhide et Collins, 1989).



FIGURE 1.1 – Rupture des poutres de l'entrepôt AMC du Wilkins Air Force (États-Unis, 1955) (Collins *et al.*, 2008)

Des essais réalisés par Portland Cement Association (PCA) sur des poutres similaires à celles de l'entrepôt (poutres en béton de résistance à la compression égale à 20 MPa, non renforcées transversalement et légèrement renforcées longitudinalement), ont montré que l'application de contraintes axiales de traction de 1,4 MPa réduisait jusqu'à 50% la résistance à l'effort tranchant des poutres (Elstner et Hognestad, 1957; Anderson, 1957). C'est ce phénomène qui s'est produit dans les poutres de l'entrepôt, dont la résistance à l'effort tranchant a été réduite en raison des contraintes de traction développées dans les éléments, dues à l'empêchement du retrait du béton et des déformations thermiques (Feld et Carper, 1997). Cet incident a déclenché une série de recherches dont les premières conclusions étaient que les efforts axiaux de traction diminuent la résistance à l'effort

tranchant, tandis que l'effet inverse pouvait être attribué aux efforts axiaux de compression. Dès lors, les codes de construction se sont adaptés pour prendre en compte l'influence des efforts axiaux dans les méthodes de dimensionnement à l'effort tranchant.

Néanmoins, en août 1991 dans le Gandsfjord (Norvège), un autre accident s'est produit tendant à montrer que les codes de construction pouvaient être non sécuritaires. Il s'agit du naufrage de la plateforme pétrolière offshore Sleipner A (Jakobsen et Rosendahl, 1994), la rupture par effort tranchant la plus couteuse de l'histoire (environ 700 millions de dollars) (Sadeghian et Vecchio, 2018). Cette plateforme avait été dimensionnée à l'aide du code norvégien de 1977 (NS 3473, 1977), lui-même basé sur le code américain de 1971 (ACI 318-71, 1971). Lors de la mise en eau de la plateforme, une rupture s'est produite au niveau d'un mur en béton armé de l'un des *tricells* (mur triangulaire placé entre les cellules, représenté sur la Figure 1.2), pour une profondeur d'eau de 65 m, alors que les codes de dimensionnement prévoyaient une résistance pour au moins 70 m de fond (Selby et al., 1997). Les recherches menées par Selby et al. (1997) à travers des calculs numériques conduits à l'aide du logiciel SPARCS développé à l'université de Toronto (Vecchio et Selby, 1991; Selby, 1993), ainsi que les résultats des études expérimentales réalisées par Gupta (1993), ont montré que les anciennes versions des codes de construction américain et norvégien surestimaient l'effet favorable de charges de compression importantes sur la résistance à l'effort tranchant des éléments en béton armé. C'était d'ailleurs l'une des raisons qui explique la rupture de la plateforme.

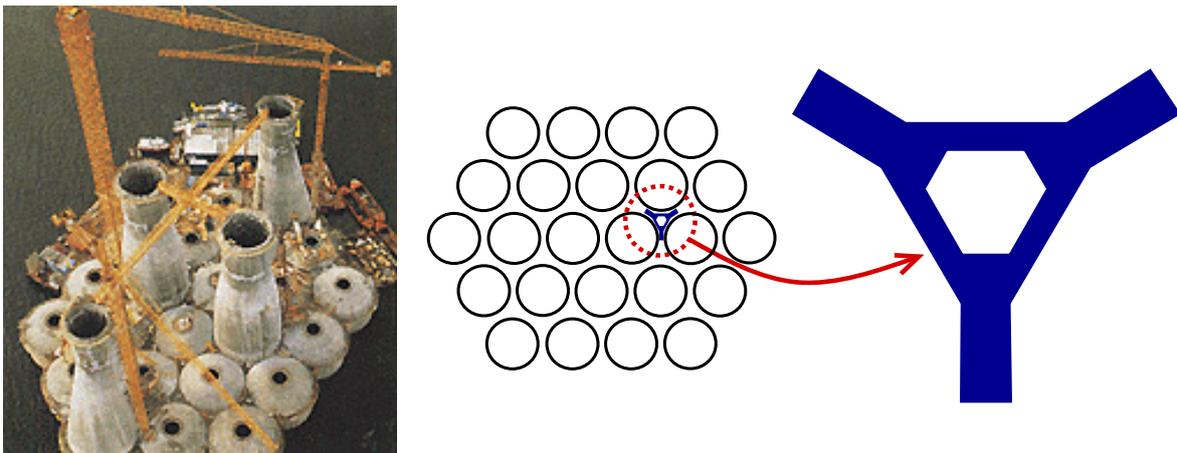


FIGURE 1.2 – Photo de la plateforme offshore Sleipner A et schéma du *tricell* (Arnold, 2009)

Au delà des exemples spectaculaires cités précédemment, la combinaison de chargement constituée d'un effort tranchant et d'un effort axial de compression ou de traction peut être rencontrée dans de nombreux cas, en particulier lors de situations accidentelles. Ainsi, par exemple, des contraintes de traction peuvent apparaître durant un incendie dues aux déformations thermiques empêchées dans des éléments en béton armé initialement soumis à un effort tranchant. De même, lors d'un séisme, un effort tranchant peut être appliqué aux poteaux soumis initialement à des efforts de compression (Figure 1.3a). De plus, lors de tornades, les poteaux peuvent également subir un effort tranchant important en plus de la charge axiale de compression. La concomitance de ces chargements peut être également rencontrée dans des cas plus courants tels que la précontrainte par post-tension des éléments en béton armé, souvent utilisée dans la construction des ouvrages d'art (Figure 1.3b) ou des murs à centrage automatique (mur qui retourne à la position verticale initiale centrée sur lui-même après passage d'un séisme (Chancellor *et al.*, 2014), voir Figure 1.3c) (Xie *et al.*, 2011). Cette opération de mise en précontrainte crée en effet des contraintes de compression dont l'effet sur la résistance à l'effort tranchant devrait être pris en compte pour optimiser le dimensionnement du renforcement. Pour toutes ces raisons, il apparaît essentiel de développer des méthodes de dimensionnement précises et les plus rigoureuses possible pour estimer l'effet des efforts axiaux de traction et de compression sur la résistance à l'effort tranchant des éléments en béton armé.

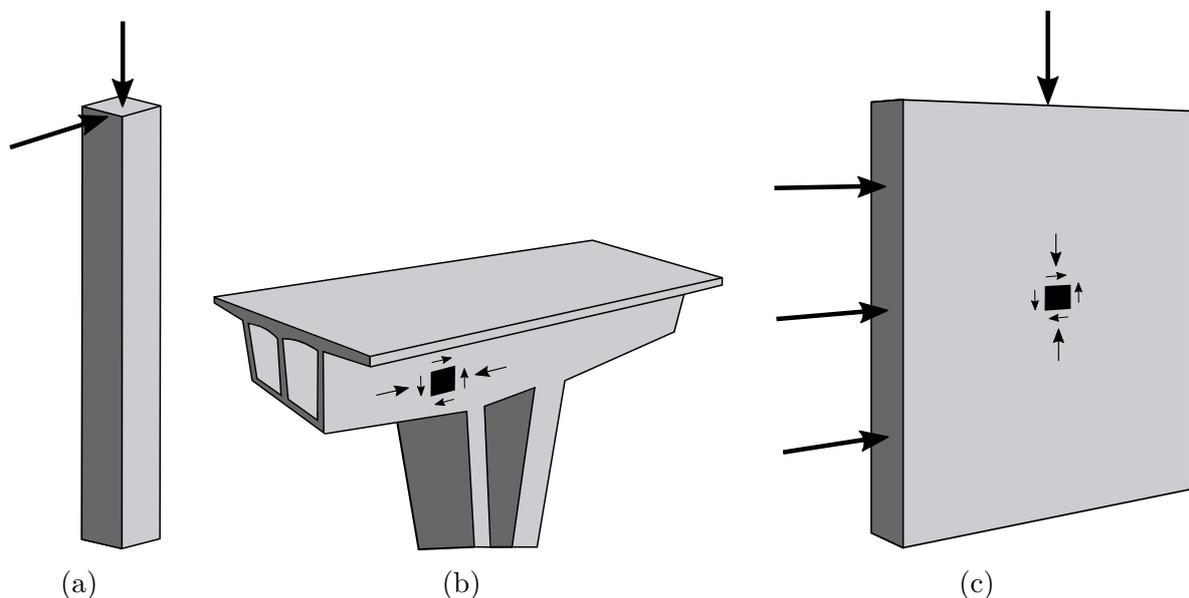


FIGURE 1.3 – Exemples de concomitance entre des contraintes de compression et de cisaillement dans (a) un poteau sous charge sismique, (b) un caisson de pont et (c) un mur à centrage automatique (figures adaptées de Xie *et al.* (2011))

À ce jour, le nombre important de paramètres qui intervient dans l'analyse du problème, ainsi que la dispersion des résultats expérimentaux sur lesquels ces méthodes de dimensionnement peuvent s'appuyer, n'ont pas permis l'établissement d'une méthode de calcul fiable pour le dimensionnement des poutres en béton armé soumises à l'action combinée d'une force axiale et d'un effort tranchant. En effet, la complexité des champs de contrainte induits par ce type de chargement, la présence et la position des armatures de renforcement longitudinales et transversales, ainsi que les différents modes de chargement sont autant de paramètres qui compliquent l'analyse du problème et l'interprétation des résultats.

Dans ce contexte, l'objectif de la présente thèse est de développer une méthode complète de dimensionnement à l'effort tranchant des poutres en béton armé en présence d'un effort normal. La méthode choisie repose très largement sur la théorie du *calcul à la rupture* dont l'objet est la détermination directe des charges de ruine d'une structure à partir de l'analyse des conditions assurant la compatibilité entre l'équilibre de la structure (la poutre) et le respect en tout point d'un critère de résistance des matériaux constitutifs.

## 1.2 Aperçu des méthodes d'analyse actuelles

### 1.2.1 Codes de construction

Sur le plan international, on trouve de grandes différences entre les codes de construction vis-à-vis des méthodes de dimensionnement des éléments en béton armé à l'effort tranchant en présence d'efforts axiaux. La majorité des codes de construction (voir par exemple [EN 1992-1-1 \(2005\)](#), [BAEL \(2000\)](#), [ACI 318-14 \(2014\)](#), [CSA 23.3-04 \(2004\)](#) et [Model Code fib \(2012\)](#)) propose des approches empiriques ou semi-empiriques. Toutefois, l'utilisation de telles approches reste limitée au cadre dans lequel elles ont été développées, ce qui restreint leur utilisation à un certain nombre de configurations pour lesquelles elles ont été validées. Ce problème a été d'ailleurs soulevé par [Zhang \*et al.\* \(2017\)](#). Ces derniers indiquent également que les approches empiriques ne permettent pas de représenter les interactions entre les efforts développés dans les éléments en béton armé en cisaillement et donc d'approcher leur comportement réel sous effort tranchant : voir aussi [EI-Chabib \*et al.\* \(2006\)](#), [Haddadin \*et al.\* \(1971\)](#), [Selby \*et al.\* \(1996\)](#) et [Wei \*et al.\* \(2011\)](#).

Par ailleurs, la dispersion des résultats expérimentaux sur lesquels ces approches sont le plus souvent fondées, ainsi que les différences entre les méthodes utilisées (purement empiriques ou semi-empiriques, combinées à des méthodes analytiques ou semi-analytiques) entraînent des différences dans les formules proposées pour le calcul de la résistance à l'effort tranchant. Par exemple, le **BAEL (2000)** et l'**ACI 318-08 (2008)** sont basés sur la méthode des bielles et tirants, l'**EN 1992-1-1 (2005)** repose sur la méthode des bielles à angle variable, le **CSA 23.3-04 (2004)** et le Model Code **fib (2012)** sont issus de la MCFT (voir plus loin la description de ces méthodes). Ceci engendre des estimations qui peuvent être très différentes d'un code à l'autre. En effet, les prédictions de la résistance à l'effort tranchant obtenues par ces différents codes peuvent varier d'un facteur supérieur à deux en l'absence d'un effort axial (**Bentz *et al.*, 2006**), et même supérieur à trois pour des efforts axiaux de compression importants par exemple (**Xie *et al.*, 2011**).

Chaque code prescrit d'ailleurs des exigences différentes en terme de prise en compte des efforts axiaux dans le dimensionnement à l'effort tranchant. Par exemple, l'Eurocode 2 (**EN 1992-1-1, 2005**) limite les efforts axiaux de compression qui peuvent être appliqués aux éléments renforcés transversalement à la direction de compression, tandis qu'ils sont limités à 20% de la résistance en compression pour des éléments sans armatures transversales (contrairement aux autres codes cités plus haut). La charge axiale de traction est limitée dans l'Annexe Nationale Française (**NF EN 1992-1-1/AN, 2005**) à la résistance en traction du béton pour des éléments renforcés transversalement. Dans le code américain (**ACI 318-14, 2014**), la résistance à l'effort tranchant apportée par le béton est directement prise égale à 0 lorsque des charges axiales de traction "importantes" (selon le jugement de l'ingénieur) sont appliquées. Une méthode détaillée permettant de déterminer plus précisément la contribution du béton dans ce cas est également proposée, où la traction est limitée à 500 psi (environ 3,5 MPa). L'effet de ces efforts de traction plus faibles est cependant négligé. Dans le **BAEL (2000)**, la charge axiale de traction est également prise en compte dans le dimensionnement à l'effort tranchant, mais celle-ci reste très limitée. En revanche, dans le code canadien (**CSA 23.3-04, 2004**) et le Model Code (**fib, 2012**), aucune restriction n'est formulée quand à celle-ci.

Par ailleurs, l'effet du moment fléchissant sur la résistance à l'effort tranchant n'est considéré dans presque aucun des codes de construction. En effet, celui-ci n'est pas pris en compte dans l'Eurocode 2 (**EN 1992-1-1, 2005**), ni dans le **BAEL (2000)**, tandis que le code américain (**ACI 318-14, 2014**) considère l'influence du moment fléchissant dans la méthode de dimensionnement détaillée. Il en est de même pour la méthode générale

du code canadien ([CSA 23.3-04, 2004](#)), ainsi que pour le niveau d'approximation III du Model Code ([fib, 2012](#)), où la valeur du moment fléchissant intervient dans le calcul de la déformation longitudinale de l'élément, nécessaire pour le calcul de la résistance à l'effort tranchant. En revanche, le moment fléchissant étant dépendant de l'effort tranchant, ce calcul implique une résolution à l'aide d'une méthode itérative.

D'autres différences entre les codes de construction viennent s'ajouter à celles identifiées précédemment. Dans les codes de construction cités dans cette section, la résistance à l'effort tranchant est attribuée au béton et/ou aux armatures transversales. Dans l'Eurocode 2, celle-ci est calculée par une formule qui tient compte soit du béton, soit des armatures transversales, tandis que dans les codes canadien, américain et le Model Code, la résistance est donnée par la somme de deux termes, associés respectivement au béton et aux armatures transversales. Par ailleurs, certains codes tiennent compte de l'influence des armatures longitudinales dans le dimensionnement à l'effort tranchant. Par exemple, dans la méthode générale du code canadien ou la méthode détaillée du code américain, le renforcement longitudinal intervient dans le calcul de la déformation longitudinale de l'élément.

Le tableau ci-après résume les différences entre les codes cités précédemment. Il ressort clairement de ces quelques comparaisons que les codes de construction n'ont pas permis le développement d'une méthode de dimensionnement unifiée, qui permette de prendre en compte les différents chargements et paramètres pouvant influencer la résistance à l'effort tranchant des éléments en béton armé.

TABLEAU 1.1 – Comparaison entre les codes de construction

Code	EC2	BAEL	CSA/MC	ACI
<b>Méthode</b>	Bielles à angle variable	Bielles et tirants	MCFT	Bielles et tirants
<b>Effort axial de traction</b>	Annexe Nationale	✓	✓	✓
<b>Effort axial de compression</b>	✓	✓	✓	✓
<b>Moment fléchissant</b>	×	×	✓	✓
<b>Béton</b>	✓	✓	✓	✓
<b>Armatures longitudinales</b>	×	×	✓	✓
<b>Armatures transversales</b>	✓	✓	✓	✓

### 1.2.2 Études expérimentales

De nombreuses campagnes expérimentales ont été réalisées durant ces 60 dernières années afin d'évaluer l'influence des chargements axiaux sur la résistance à l'effort tranchant des éléments en béton armé. Ces essais ont permis l'élaboration de méthodes de dimensionnement empiriques ou semi-empiriques, utilisées notamment dans les codes de construction. Comme indiqué dans la section précédente, le domaine d'application de telles méthodes reste cependant limité en raison de la complexité du comportement sous effort tranchant et de la fourchette étroite de variation des paramètres expérimentaux. En revanche, de tels essais constituent un élément indispensable à la validation des méthodes de dimensionnement théoriques qui peuvent être développées, ainsi qu'à la détermination de l'influence de certains paramètres sur la résistance à l'effort tranchant.

En effet, plusieurs études expérimentales ont montré l'effet défavorable des charges axiales de traction sur la résistance à l'effort tranchant. Parmi celles-ci figure la campagne citée précédemment, réalisée par [Elstner et Hognestad \(1957\)](#) suite à la rupture de l'entrepôt du Wilkins Air Force. Ces essais consistaient à tester des poutres (faiblement renforcées en flexion) sous plusieurs charges transversales appliquées en travée, ainsi qu'à des charges axiales de traction et des charges transversales appliquées aux extrémités. L'analyse des résultats expérimentaux a permis de conclure que les charges axiales de traction peuvent réduire de façon significative la résistance à l'effort tranchant. L'étude menée par [Sørensen \*et al.\* \(1981\)](#) a également permis d'identifier cet effet défavorable de la traction axiale, à travers la réalisation d'essais sur des éléments en béton renforcés uniquement longitudinalement soumis à une charge transversale entre et en dehors des appuis, en plus de charges axiales de traction. Les résultats de ces essais ont permis de constater que les prédictions fournies par le code américain ([ACI 318-83, 1983](#)) sont très sécuritaires ([Bhide et Collins, 1989](#)). En revanche, les essais réalisés par [Jørgensen \*et al.\* \(2013\)](#) sur des poutres également sans armatures transversales soumises à une flexion trois points et des efforts axiaux de traction ont semblé montrer que la résistance à l'effort tranchant est d'abord quasiment constante et indépendante de la charge axiale lorsque celle-ci présente des valeurs relativement faibles, puis diminue légèrement pour une traction importante. La comparaison des résultats avec les prédictions de l'Eurocode 2 ([EN 1992-1-1, 2008](#)) a montré que le code est très sécuritaire pour des valeurs de traction importantes. Plus récemment, des essais ont été réalisés sur des poutres sans ([Pham \*et al.\*, 2020a](#)) et avec des armatures transversales ([Pham \*et al.\*, 2020b](#)), soumises à une flexion trois points en plus

de charges axiales de traction et de moments fléchissants négatifs appliqués aux extrémités. Ces essais ont été réalisés à l'aide d'un dispositif expérimental innovant (Pham *et al.*, 2020c) qui sera décrit dans la section 4.2.2 du chapitre 4. Ce dispositif a l'avantage de pouvoir appliquer des moments fléchissants uniformes dans l'élément, ce qui n'est pas le cas de la plupart des essais disponibles dans la littérature. Comme nous le verrons, les résultats de ces essais ont mis en évidence un faible effet défavorable de la traction sur la résistance à l'effort tranchant, contrairement aux résultats obtenus par Elstner et Hognestad (1957). Ceci peut être expliqué par le fait que les poutres testées par Pham *et al.* (2020a,b) ont un taux de renforcement longitudinal important.

D'autres campagnes expérimentales ont visé l'étude de l'influence de la compression sur la résistance à l'effort tranchant, comme celle de Gupta et Collins (2001). Dans leurs travaux, plusieurs éléments en béton armé renforcés longitudinalement et transversalement ont été soumis à des niveaux différents de compression axiale, à un effort tranchant et aussi à des moments opposés appliqués aux extrémités. L'analyse des résultats a montré que la procédure détaillée recommandée par le code américain ACI 318-99 (1999) pour la détermination de la résistance à l'effort tranchant d'éléments soumis à une compression axiale importante peut engendrer un dimensionnement non sécuritaire. En revanche, la méthode simplifiée de ce code et l'AASHTO-LRFD (1998) peuvent donner des estimations sécuritaires et cohérentes par rapport aux résultats expérimentaux. Plus tard, les essais de Madsen *et al.* (2011) réalisés sur des poutres sans cadres soumises à une flexion trois points et à des charges de compression a permis de montrer l'effet favorable de la compression axiale, même lorsque celle-ci dépasse le seuil prescrit par l'Eurocode 2 (EN 1992-1-1, 2005) de 20% de la résistance à la compression de la poutre en béton seul.

Les travaux de Bara (1971) se sont intéressés à la détermination de l'influence à la fois de la traction et de la compression sur la résistance à l'effort tranchant. Plusieurs poutres en béton armé renforcées par des armatures longitudinales et transversales ont été soumises à des charges axiales et des charges transversales entre et en dehors des appuis. Les essais ont permis de confirmer l'effet défavorable de la traction et favorable de la compression sur la résistance à l'effort tranchant. L'étude a relevé également l'importance du renforcement longitudinal lorsque des charges axiales de traction sont appliquées. Les mêmes conclusions quant à l'effet des charges axiales sur la résistance à l'effort tranchant ont été tirées par Haddadin *et al.* (1971) pour des poutres en T, renforcées longitudinalement et transversalement. De plus, il a été constaté que l'élancement de la poutre a également un effet défavorable sur la résistance à l'effort tranchant (plus l'élancement est grand plus

## 1.2. Aperçu des méthodes d'analyse actuelles

l'effort tranchant est faible). Plus tard, des essais réalisés par [Xie \(2009\)](#) sur des poutres (en I) soumises à un effort tranchant et des efforts axiaux de traction et de compression ont permis d'aboutir aux mêmes conclusions quant à leurs effets sur la résistance à l'effort tranchant. Par ailleurs, la comparaison des résultats de ces essais avec les prédictions du code américain ([ACI 318-08, 2008](#)) a montré que ce dernier est très sécuritaire pour des charges de traction et non sécuritaire pour des charges de compression. En revanche, il a été montré que le code canadien ([CSA 23.3-04, 2004](#)) fournit de bonnes prédictions pour les poutres soumises à une compression et des résultats légèrement sécuritaires pour celles soumises à une traction. Concernant le code européen, il a été constaté que celui-ci est très sécuritaire pour tous leurs essais.

Le tableau ci-après présente un comparatif entre les campagnes expérimentales décrites précédemment.

TABLEAU 1.2 – Comparatif de quelques campagnes expérimentales disponibles dans la littérature

Essais	Chargement	Section	Cadres
	Traction		
<a href="#">Elstner et Hognestad (1957)</a>	+ Charges transversales en travée et aux extrémités	Rectangle	Non
<a href="#">Haddadin <i>et al.</i> (1971)</a>	Traction/Compression + Flexion 3 points	T	Oui
<a href="#">Bara (1971)</a>	Traction/Compression + Flexion 4 points ou charges transversales entre et en dehors des appuis	Rectangle	Oui
	Traction		
<a href="#">Sørensen <i>et al.</i> (1981)</a>	+ Charges transversales entre et en dehors des appuis	Rectangle	Non
	Compression		
<a href="#">Gupta et Collins (2001)</a>	+ Effort tranchant + Moment aux extrémités	Rectangle	Oui
<a href="#">Xie (2009)</a>	Traction/Compression + Charges transversales entre et en dehors des appuis	I	Oui

<i>Madsen et al. (2011)</i>	Compression + Flexion 3 points	Rectangle	Non
<i>Jørgensen et al. (2013)</i>	Traction + Flexion 3 points	Carré	Non
<i>Pham et al. (2020a)</i>	Traction + Flexion 3 points + Moment aux extrémités	Rectangle	Non
<i>Pham et al. (2020b)</i>	Traction + Flexion 3 points + Moment aux extrémités	Rectangle	Oui

### 1.2.3 Méthodes de dimensionnement analytiques ou semi-analytiques

#### Méthode des bielles et tirants (Strut and Tie Method)

Depuis plus d'un siècle, différentes méthodes de dimensionnement des éléments en béton armé vis-à-vis de l'effort tranchant ont été proposées. Au fil des années, ces méthodes ont progressivement évolué afin de prendre en compte différents paramètres, en particulier l'influence des efforts axiaux.

La première méthode de dimensionnement à l'effort tranchant proposée dans les codes de construction est la méthode des bielles et tirants avec un angle constant de  $45^\circ$ . Elle a été initialement développée par *Ritter (1899)*, puis modifiée par *Mörsch (1920, 1922)* pour le dimensionnement à la torsion des éléments en béton armé. Dans ce modèle, on suppose que la poutre en béton armé reprend les chargements qui lui sont appliqués par le biais de champs de contraintes de compression inclinées d'un angle de  $45^\circ$  par rapport à l'axe longitudinal de l'élément. Ces champs de contraintes de compression délimitent des bielles de béton qui résistent en compression et des tirants (les armatures longitudinales et transversales) qui résistent à la traction (Figure 1.4). L'équilibre des forces au niveau des nœuds (intersection entre les bielles et les tirants) permet de déterminer les efforts dans chaque élément et donc de déduire la résistance à l'effort tranchant.

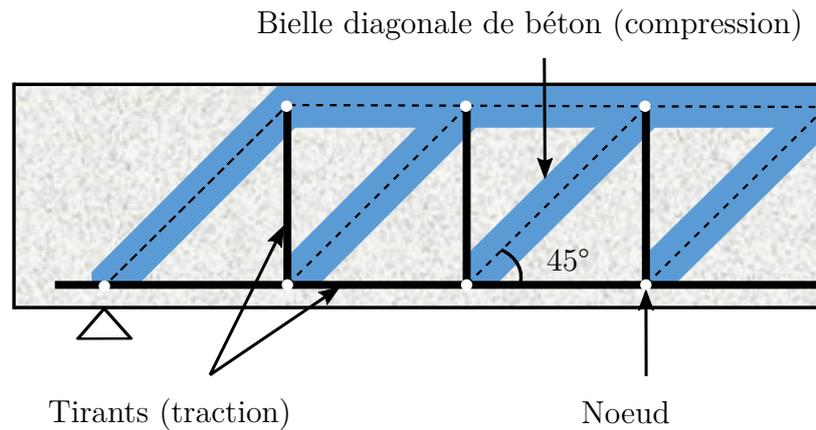


FIGURE 1.4 – Modèle des bielles et tirants avec angle d'inclinaison fixé à 45°

De nombreuses poutres ont été testées par [Leonhardt et Walther \(1966\)](#) à l'Université de Stuttgart dans les années 1960. Les résultats ont montré que la méthode traditionnelle des bielles et tirants est très sécuritaire. Cela a été également observé par [Withey \(1907, 1908\)](#) et confirmé par [Talbot \(1909\)](#). Deux approches ont donc été développées pour optimiser le renforcement transversal, ainsi qu'une approche combinant les deux. La première consiste à ajouter la contribution du béton à celle des armatures transversales en gardant l'hypothèse des bielles inclinées de 45°, comme c'est le cas de l'[ACI 318-95 \(1995\)](#). La deuxième approche considère que les bielles de béton supérieures peuvent être inclinées, permettant ainsi des valeurs de l'angle d'inclinaison des bielles de béton inférieures à 45° (Figure 1.5).

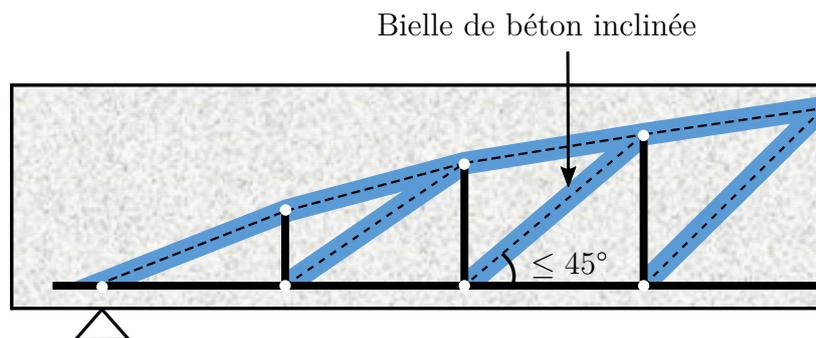


FIGURE 1.5 – Modèle des bielles et tirants avec angle d'inclinaison variable

Des limites arbitraires ont d'abord été considérées pour l'angle des bielles afin de prendre en compte le comportement fragile du béton. Une solution a été par la suite proposée par [Kupfer \(1964\)](#) en supposant un comportement élastique des éléments et en négligeant la

résistance à la traction du béton. Avec le développement de la théorie de la plasticité à des matériaux non ductiles (Nielsen et Braestrup, 1975; Muller, 1978; Marti, 1980), d'autres limites théoriques ont pu être déterminées.

Ces deux méthodes de dimensionnement avec un angle constant ou variable constituent encore la base de plusieurs codes de construction comme c'est le cas du BAEL (2000), de l'Eurocode 2 (EN 1992-1-1, 2005) et de l'ACI (ACI 318-14, 2014).

### Approches basées sur la mécanique de la rupture

En raison du comportement fragile du béton, plusieurs chercheurs se sont intéressés à la mécanique de la rupture comme moyen pour dimensionner les éléments en béton armé à l'effort tranchant. La méthode la plus connue est probablement celle proposée par Hillerborg *et al.* (1976) basée sur la détermination d'une relation entre la résistance à la traction du béton et la largeur des macrofissures. Ces macrofissures sont représentées de manière discrète, et ne permettent donc pas de prendre en compte l'effet des microfissures sur le comportement sous effort tranchant (Sadeghian et Vecchio, 2018). D'autres modèles ont également été proposés comme le Crack Band Model développé par Bazant (1983) et Bazant et Kim (1984) dans lequel la surface de la fracture consiste en une zone de microfissures. Plus tard, Van Mier (1996) a montré que des contraintes de traction résiduelles existent au niveau des fissures. Toutefois toutes ces méthodes basées sur la mécanique de la rupture nécessitent des hypothèses préalables sur le trajet des fissures et le mécanisme de rupture (Sadeghian et Vecchio, 2018).

### Méthodes CFT, MCFT, DSFM et SMCFT

**CFT** D'autres méthodes ont vu le jour par la suite. On cite par exemple la méthode CFT (Compression Field Theory) proposée d'abord par Mitchell et Collins (1974) pour le dimensionnement à la torsion, puis par Collins (1978) pour le cisaillement. Il s'agit d'une procédure analytique itérative qui permet de prédire la réponse au cisaillement d'éléments en béton armé. Elle repose sur la résolution d'un problème formulé à partir de l'équilibre et la compatibilité entre les contraintes et les déformations (exprimée en fonction des contraintes et des déformations moyennes dans l'élément). La CFT suppose que le béton fissuré ne résiste pas en traction et que l'effort tranchant est repris par une

bielle diagonale comprimée. Contrairement aux méthodes traditionnelles des bielles et tirants, l'angle d'inclinaison des bielles de béton comprimé est déterminé à partir des conditions de déformation dans l'élément. Il s'agit d'une approche similaire à la TFT (Tension Field Theory) proposée par [Wagner \(1929\)](#) pour la détermination de la résistance à l'effort tranchant en post-flambement des poutres métalliques minces ([Sadeghian et Vecchio, 2018](#)). Toutefois, la CFT se révèle moins efficace pour des éléments avec un faible renforcement transversal ([ACI-ASCE Committee 445, 1999](#)).

**MCFT** Par la suite, [Vecchio et Collins \(1986\)](#) ont proposé une modification de la CFT avec le développement de la MCFT (Modified Compression Field Theory). Cette méthode constitue la base du code canadien ([CSA 23.3-04, 2004](#)), du Model Code ([fib, 2012](#)) et de l'[AASHTO-LRFD \(2014\)](#). Elle repose sur les résultats d'une grande campagne expérimentale réalisée à l'université de Toronto ([Vecchio et Collins, 1986](#)).

A partir d'essais sur des éléments membranes soumis à des contraintes de cisaillement pures ou à la combinaison de contraintes axiales et de cisaillement, ils ont proposé une loi de comportement empirique pour le béton fissuré (Figure 1.6). D'autres nouveautés également dans cette méthode par rapport à la version précédente sont la prise en compte de la réduction de la résistance à la compression du béton due aux fissures transversales, de la résistance à la traction du béton après fissuration et des conditions locales en contraintes sur la surface fissurée ([Sadeghian et Vecchio, 2018](#)).

Sur la base de cette méthode, [Vecchio et Collins \(1988\)](#) ont développé une procédure itérative pour la détermination de la résistance à l'effort tranchant des poutres en béton armé. Elle consiste à "diviser" la section en béton armé en différentes couches et à calculer les déformations et les contraintes dans chacune de celles-ci, afin de pouvoir en déduire les efforts dans l'élément ([Sadeghian et Vecchio, 2018](#)) (Figure 1.7). Bentz a ensuite implémenté la procédure dans le logiciel Response-2000 ([E. C. Bentz](#)) qui permet de faire des analyses non-linéaires sur des sections d'éléments en béton armé. La MCFT a été également implémentée dans plusieurs logiciels de calcul par éléments finis dont VecTor ([University of Toronto](#)) qui consiste en six logiciels d'analyse non-linéaire, chacun spécialisé dans un type d'élément.

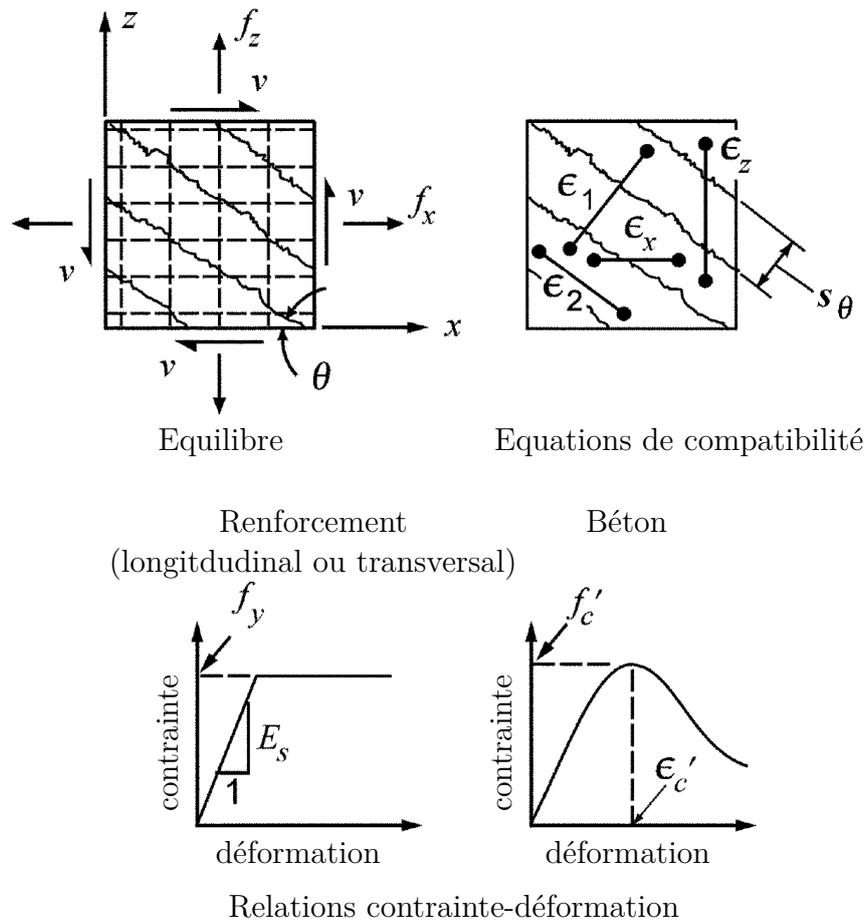


FIGURE 1.6 – Principe de la MCFT (figure adaptée de *Bentz et al. (2006)*)

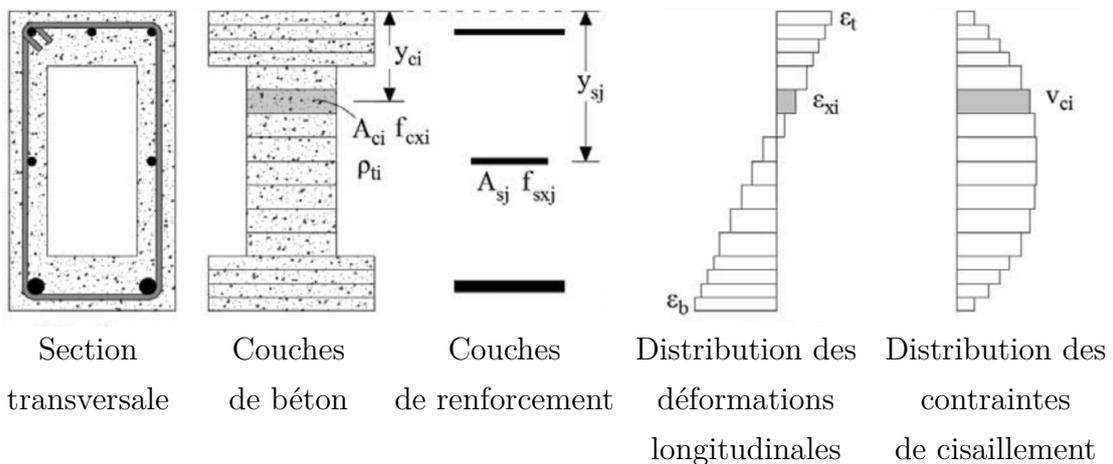


FIGURE 1.7 – Distribution des déformations longitudinales et des contraintes de cisailment dans le modèle en couches d'une poutre (figure adaptée de *Sadeghian et Vecchio (2018)*)

**DSFM** Après avoir constaté certaines défaillances dans la MCFT, Vecchio (2000) a proposé une extension de cette méthode en développant la DSFM (Disturbed Stress Field Model) (Sadeghian et Vecchio, 2018). En effet, il a été constaté que la MCFT sous-estime la résistance à l'effort tranchant dans certains cas particuliers comme pour des panneaux très renforcés ou des panneaux soumis à un effort tranchant et à une compression bi-axiale. En revanche, dans le cas de panneaux faiblement renforcés, la méthode a tendance à surestimer la résistance à l'effort tranchant. Ceci est dû à des hypothèses simplificatrices (les orientations des contraintes principales et des déformations principales restent constantes et les déformations de glissement de cisaillement le long de la surface de la fissure sont négligées), qui ont été retirées dans le nouveau modèle permettant ainsi l'amélioration de la précision de ces prédictions.

**SMCFT** La MCFT étant une méthode itérative fastidieuse, elle nécessite une résolution avec un programme adapté comme le logiciel Response-2000 (E. C. Bentz). Pour éviter cela, Bentz *et al.* (2006) l'ont simplifié en proposant la SMCFT (Simplified Modified Compression Field Theory). Cette nouvelle méthode propose des équations plus simples, qui peuvent ainsi être résolues à la main.

### 1.2.4 Calcul à la rupture

D'autres approches de dimensionnement des éléments en béton armé à l'effort tranchant en présence des efforts axiaux ont été proposées dans la littérature sur la base de la théorie du *calcul à la rupture* (ou de *l'analyse limite*). Cette méthode permet de fournir, de façon directe et rapide, des évaluations des charges de ruine d'une structure à partir de la compatibilité entre l'équilibre de celle-ci et les critères de résistance des matériaux constitutifs (béton, acier, ...). Elle permet donc d'éviter de longs calculs itératifs, tels que ceux utilisant des lois de comportement des matériaux (comme dans la MCFT par exemple). Les avantages qu'offre la théorie du *calcul à la rupture* ont ainsi permis son utilisation pour le dimensionnement de divers ouvrages de génie civil (voir par exemple, pour ne citer que les applications les plus récentes aux structures en béton armé, Bleyer (2015), Pham *et al.* (2015), Simões *et al.* (2016), Yang (2018) et Vincent (2018)).

Après une description générale de la théorie du *calcul à la rupture* (et de la différence avec la méthode de *l'analyse limite*) dans la section suivante (1.3), quelques méthodes

proposées dans la littérature, reposant sur cette théorie pour le dimensionnement à l'effort tranchant en présence d'un effort axial, sont présentées (section 1.4).

### 1.3 Rappel du principe du *calcul à la rupture*

#### 1.3.1 Données du problème : géométrie, mode de chargement et critères de résistance

La résolution d'un problème par la théorie du *calcul à la rupture* nécessite dans un premier lieu la détermination de la géométrie du système mécanique étudié. On considère pour cela un repère orthonormé  $Oxyz$ , dans lequel on note  $\Omega$  le domaine occupé par le système et  $\partial\Omega$  son bord (Figure 1.8). Par ailleurs, on se place dans le cadre de l'hypothèse des petites perturbations. Les changements de géométrie jusqu'au déclenchement de la ruine du système, sont donc négligeables, et la géométrie initiale  $\Omega$  peut être confondue avec sa géométrie actuelle du système soumis à son chargement (Salençon, 1983, 2013; de Buhan, 2007).

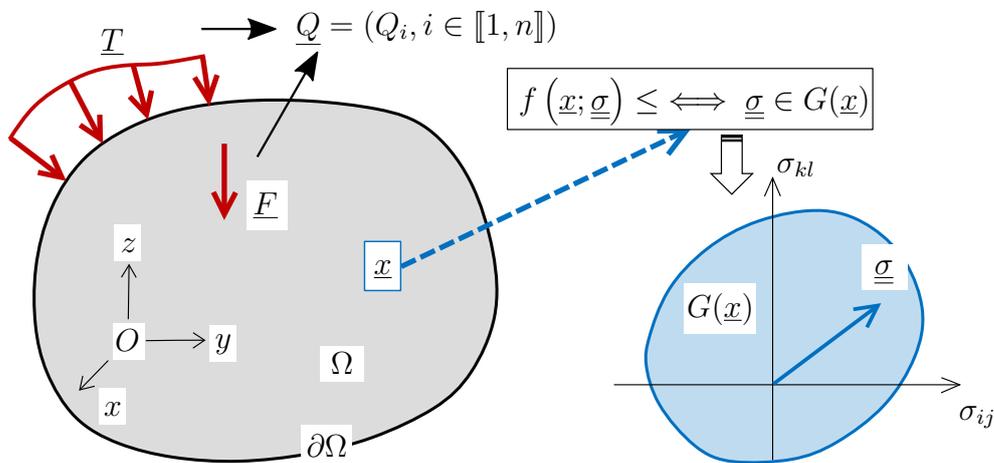


FIGURE 1.8 – Données nécessaires à la résolution d'un problème par la théorie du *calcul à la rupture*

On suppose en second lieu que le système est soumis à un mode de chargement à  $n$  paramètres représenté par un vecteur  $\underline{Q} = (Q_i, i \in \llbracket 1, n \rrbracket)$ . Ce vecteur comprend deux types de chargement :

### 1.3. Rappel du principe du *calcul à la rupture*

---

- des forces volumiques appliquées à distance (comme la pesanteur), caractérisées par un champ vectoriel  $\rho \underline{F}$  ( $\rho$  étant la masse volumique du système) ;
- des distributions d'efforts surfaciques  $\underline{T}$  appliquées sur le contour  $\partial\Omega$ .

Outre les données associées à la géométrie et aux chargements appliqués à la structure, une troisième donnée essentielle à un problème de *calcul à la rupture* est la connaissance du critère de résistance des matériaux constitutifs, et ce en tout point  $\underline{x} \in \Omega$ . Celui-ci peut être exprimé à travers une condition portant sur l'état de contrainte  $\underline{\sigma}$  en tout point la structure (Salençon, 1983, 2013) :

$$\forall \underline{x} \in \Omega, f(\underline{\sigma}(\underline{x})) \leq 0 \iff \underline{\sigma}(\underline{x}) \in G(\underline{x}) \quad (1.1)$$

où  $G(\underline{x})$  représente le *domaine de résistance* en un point  $\underline{x}$  dans l'espace des contraintes, et  $f$  est une fonction à valeur scalaire du tenseur des contraintes locales telle que :

$$f(\underline{\sigma}(\underline{x})) \begin{cases} < 0 & \text{si } \underline{\sigma}(\underline{x}) \text{ est intérieur à } G(\underline{x}) \\ = 0 & \text{si } \underline{\sigma}(\underline{x}) \text{ est sur la frontière de } G(\underline{x}) \\ > 0 & \text{si } \underline{\sigma}(\underline{x}) \text{ est extérieur à } G(\underline{x}) \end{cases} \quad (1.2)$$

La troisième condition dans la formulation précédente est en réalité physiquement impossible, contrairement aux deux premières conditions. Dans ces derniers cas,  $\underline{\sigma}(\underline{x}) \in G(\underline{x})$  et le champ de contrainte est dit *admissible* dans le sens du *calcul à la rupture*.

On admet généralement que le domaine de résistance  $G(\underline{x})$  possède les deux propriétés suivantes :

- il contient l'origine, c'est-à-dire que le matériau résiste à l'état de contrainte nul :

$$\forall \underline{x} \in \Omega : \underline{\sigma} = \underline{0} \in G(\underline{x}) \quad (1.3)$$

- c'est un ensemble convexe, ce qui est en pratique toujours vérifié (Salençon, 2002) :

$$\forall \underline{x} \in \Omega, \forall \underline{\sigma}^1(\underline{x}), \underline{\sigma}^2(\underline{x}) \in G(\underline{x}) \implies (1 - \lambda)\underline{\sigma}^1(\underline{x}) + \lambda\underline{\sigma}^2(\underline{x}) \in G(\underline{x}), \forall \lambda \in [0, 1] \quad (1.4)$$

### 1.3.2 Définition du domaine des chargements potentiellement supportables

On définit le domaine  $K$  des chargements potentiellement supportables (Salençon, 2013) comme l'ensemble des chargements  $\underline{Q}$  tels qu'il est possible de mettre en évidence un champ de contrainte statiquement admissible (S.A.) avec  $\underline{Q}$  qui vérifie, en tout point de  $\Omega$ , le critère de résistance (1.1) du matériau constitutif :

$$\underline{Q} \in K \iff \begin{cases} \exists \underline{\sigma} \text{ S.A. avec } \underline{Q} & \text{(condition d'équilibre)} \\ \underline{\sigma} \in G(\underline{x}) \forall \underline{x} \in \Omega & \text{(condition de résistance)} \end{cases} \quad (1.5)$$

Un champ de contrainte est statiquement admissible s'il respecte les équations d'équilibre locales, les équations de continuité du vecteur-contrainte à la traversée de surfaces de discontinuité du champ de contrainte et les conditions aux limites en efforts du problème.

La condition  $\underline{Q} \in K$  est une condition nécessaire de stabilité de la structure au sens du *calcul à la rupture*. De plus, il est important de noter que le domaine  $K$  possède les mêmes propriétés que celles admises en tout point pour le domaine  $G$ . En effet,  $K$  contient le chargement nul puisque le champ de contrainte uniformément nul ( $\forall \underline{x} \underline{\sigma}(\underline{x}) = \underline{0}$ ) est statiquement admissible avec le vecteur des forces généralisées  $\underline{Q} = \underline{0}$  et vérifie en tout point le critère de résistance. Le domaine  $K$  est également convexe en raison de la convexité de  $G$  et de la linéarité des équations d'équilibre.

La méthode de l'*analyse limite* repose sur la même démarche que celle du *calcul à la rupture*, à la différence que dans la première méthode le critère de résistance est un critère de plasticité parfaite, les matériaux obéissant au principe du travail plastique maximal (Hill, 1950). Dans ce cas, le domaine  $K$  défini par (1.5) est le domaine des chargements effectivement supportés. En effet, les théorèmes généraux d'élastoplasticité garantissent que tout chargement appartenant au domaine  $K$  peut être atteint le long d'un trajet de chargement. Dans le cas de matériaux, tel que le béton, dont le comportement est plutôt fragile (et non ductile comme l'acier), un chargement appartenant à  $K$  ne peut être qualifié que de "potentiellement" supportable. En revanche, tout chargement situé à l'extérieur de  $K$  sera certainement non supporté.

### 1.3.3 Approche statique par l'intérieur

L'approche statique par l'intérieur du domaine des chargements potentiellement supportables consiste à appliquer directement la définition du domaine  $K$ , donnée par l'expression (1.5). Il s'agit pour tout chargement  $\underline{Q}$  donné, de mettre en évidence (de façon analytique ou numérique) un champ de contrainte en équilibre avec ce chargement, et qui vérifie en plus le critère de résistance en tout point du domaine  $\Omega$ . Dans ce cas, le chargement  $\underline{Q}$  appartient au domaine  $K$ .

De cette manière, il est possible de construire un ensemble de chargements potentiellement supportables, représenté par le nuage de points sur la Figure 1.9. L'enveloppe convexe  $K^s$  de ces chargements (définie comme le plus petit convexe les contenant) est (par convexité) incluse dans le domaine  $K$  ( $K^s \subseteq K$ ), d'où l'appellation d'approche par l'intérieur.

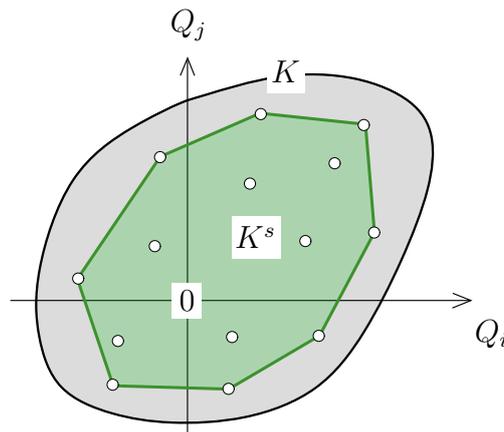


FIGURE 1.9 – Estimation par défaut du domaine  $K$  par l'approche statique par l'intérieur

Si on considère un trajet de chargement donné (radial par exemple), la valeur maximale obtenue par l'approche statique représente un minorant ou une estimation par défaut du chargement de ruine de la structure le long de ce trajet de chargement (valeur située sur la frontière du domaine  $K$ ).

Il importe de souligner que la méthode des bielles et tirants présentée précédemment (section 1.2.3) s'apparente en réalité à l'approche statique du *calcul à la rupture*, où les champs de contrainte choisis sont les champs 3D dans les bielles et 1D dans les tirants. Toutefois, cette méthode présente une difficulté dans le raccordement de tels champs 3D-1D au niveau des nœuds.

### 1.3.4 Approche cinématique par l'extérieur

L'approche cinématique par l'extérieur de la théorie du *calcul à la rupture* consiste à déterminer une majoration ou une estimation par excès du domaine des chargements potentiellement supportables  $K$ . Il s'agit en fait d'identifier des chargements qui n'appartiennent pas à ce domaine. Cette approche repose sur la dualisation de l'équilibre par le principe des puissances virtuelles.

#### Principe des puissances virtuelles

On considère un champ de vitesses virtuelles  $\underline{U}$  cinématiquement admissible (C.A, c'est-à-dire vérifiant les conditions aux limites en vitesse sur le bord de la structure  $\partial\Omega$ ) quelconque, pouvant en particulier présenter des discontinuités notées  $[\underline{U}]$  au travers de surfaces  $\Sigma$ . La puissance virtuelle des efforts extérieurs appliqués au système  $\Omega$  est donnée par :

$$P_{ext}(\underline{U}) = \int_{\Omega} \rho \underline{F} \cdot \underline{U} d\Omega + \int_{\partial\Omega} \underline{T} \cdot \underline{U} dS \quad (1.6)$$

qui peut s'écrire sous la forme suivante :

$$P_{ext}(\underline{U}) = \underline{Q} \cdot \underline{\dot{q}}(\underline{U}) \quad (1.7)$$

où  $\underline{\dot{q}}$  est le vecteur des paramètres cinématiques en dualité avec le vecteur des paramètres de chargement  $\underline{Q}$ .

Le principe des puissances virtuelles (P.P.V.) permet de dualiser les équations d'équilibre du système par l'écriture de l'égalité entre la puissance virtuelle des efforts extérieurs  $P_{ext}$  et de la puissance virtuelle de déformation  $P_{def}$  :

$$\underline{\sigma} \text{ S.A. avec } \underline{Q} \iff \begin{cases} \forall \underline{U} \text{ C.A. avec } \underline{\dot{q}}(\underline{U}) \\ \underline{Q} \cdot \underline{\dot{q}} = P_{def}(\underline{U}) \end{cases} \quad (1.8)$$

La puissance virtuelle de déformation est donnée par la formule suivante :

$$P_{def}(\underline{U}) = \int_{\Omega} (\underline{\sigma} : \underline{\underline{d}}) d\Omega + \int_{\Sigma} (\underline{\sigma} \cdot \underline{n}) \cdot [\underline{U}] d\Sigma \quad (1.9)$$

où  $\Sigma$  représente l'ensemble des surfaces de discontinuité de vitesse et  $\underline{n}$  le vecteur unitaire normal à  $\Sigma$  et  $\underline{d}$  désigne le taux de déformation virtuel associé au champ  $\underline{U}$  :

$$\underline{d} = \frac{1}{2} (\underline{\text{grad}}\underline{U} + {}^t\underline{\text{grad}}\underline{U}) \quad (1.10)$$

### Puissance résistance maximale

On introduit la fonctionnelle puissance résistante maximale qui correspond à la valeur maximale de la puissance virtuelle de déformation compte tenu du critère de résistance considéré. Elle est donnée par l'expression suivante :

$$P_{rm}(\underline{U}) = \int_{\Omega} \pi(\underline{d}) \, d\Omega + \int_{\Sigma} \pi(\underline{n}, [\underline{U}]) \, d\Sigma \quad (1.11)$$

où  $\pi$  sont les fonctions d'appui du domaine de résistance  $G$ , définies pour un taux de déformation :

$$\pi(\underline{d}) = \sup \{ \underline{\sigma} : \underline{d} ; \underline{\sigma} \in G \} \quad (1.12)$$

et pour une discontinuité du champ de vitesse :

$$\pi(\underline{n}, [\underline{U}]) = \sup \{ (\underline{\sigma} \cdot \underline{n}) \cdot [\underline{U}] ; \underline{\sigma} \in G \} \quad (1.13)$$

Cette puissance résistance maximale constitue un majorant de la puissance de déformation où le champ de contrainte vérifie en tout point le critère de résistance :

$$\forall \underline{U} \quad P_{def}(\underline{U}) \leq P_{rm}(\underline{U}) \quad (1.14)$$

Il est important de noter que les fonctions d'appui (1.12) et (1.13) sont toujours positives ou nulles, vu que l'état de contrainte nulle appartient au domaine de résistance  $G$ . Par conséquent, la puissance résistance maximale est également positive ou nulle.

### Approche cinématique par l'extérieur

Compte tenu des équations (1.5), (1.8) et (1.14), il apparaît que la puissance virtuelle d'un chargement potentiellement supportable  $\underline{Q}$ , dans un champ de vitesse virtuelle

cinématiquement admissible  $\underline{U}$ , est majorée par la puissance résistante maximale  $P_{rm}(\underline{U})$  :

$$\underline{Q} \in K \implies \forall \underline{U} \text{ C.A avec } \underline{\dot{q}} : \underline{Q} \cdot \underline{\dot{q}} \leq P_{rm}(\underline{U}) \quad (1.15)$$

Cette dernière inégalité peut être interprétée géométriquement comme suit : pour un champ de vitesse virtuelle  $\underline{U}$  donné, le domaine  $K$  est inclus dans le demi-espace contenant l'origine et délimité par l'hyperplan d'équation (Figure 1.10) :

$$\underline{Q} \cdot \underline{\dot{q}} = P_{rm}(\underline{U}) \quad (1.16)$$

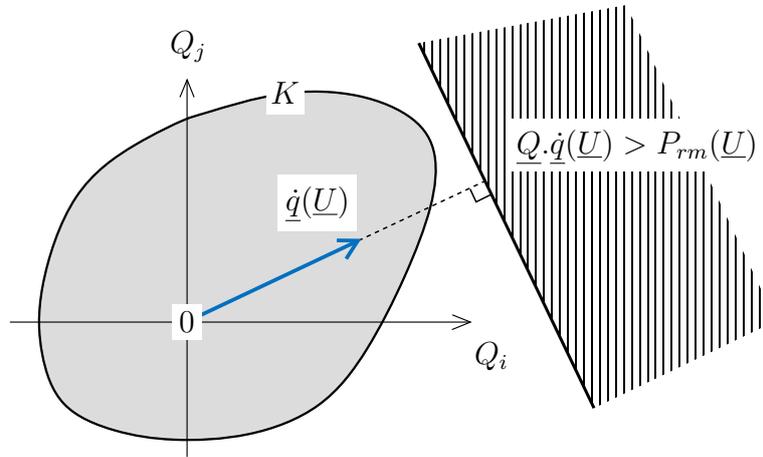


FIGURE 1.10 – Interprétation géométrique de l'approche cinématique par l'extérieur

La mise en œuvre de cette approche pour différents champs de vitesse virtuelle cinématiquement admissibles permet d'obtenir plusieurs demi-espaces dont l'intersection forme un domaine convexe qui contient le domaine des chargements potentiellement supportables ( $K \subseteq K^c$ ). L'approche cinématique du *calcul à la rupture* permet ainsi d'approcher par l'extérieur le domaine  $K$  à travers la détermination de majorants ou d'estimations par excès des charges extrêmes appliquées au système (Figure 1.11).

### Condition de pertinence des champs de vitesse

Les fonctions d'appui  $\pi$  introduites précédemment par les équations (1.12) et (1.13) peuvent dans certains cas (selon la valeur du tenseur du taux de déformation ou de la discontinuité du champ de vitesse par rapport à la surface de discontinuité) prendre des

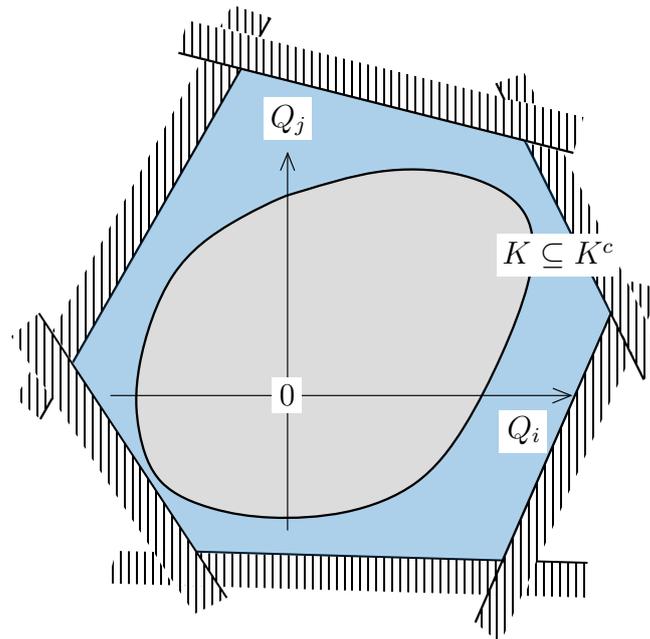


FIGURE 1.11 – Estimation par excès du domaine  $K$  par l’approche cinématique par l’extérieur du *calcul à la rupture*

valeurs infinies qui conduisent à une valeur infinie de la puissance résistance maximale. Par conséquent, les plans délimitant les demi-espaces associés à ces champs de vitesse tendent vers l’infini, ce qui ne permet pas de fournir une estimation pertinente d’un majorant du domaine de résistance. Afin d’éviter ce problème et d’obtenir des majorants effectifs (c’est-à-dire finis) des chargements extrêmes, il est nécessaire de vérifier les deux conditions suivantes relatives aux champs de vitesse virtuelle considérés :

- la puissance des efforts extérieurs pour le champ de vitesse choisi doit être non nulle ;
- la puissance résistante maximale (et donc les fonctions d’appui  $\pi$ ) doit prendre des valeurs finies.

La dernière condition, appelée condition de pertinence, est liée uniquement à la possibilité ou non de pouvoir calculer les fonctions d’appui. Elle ne correspond nullement au caractère "physiquement réaliste" des champs de vitesse virtuelle, ces derniers n’ayant rien à connaître des limitations imposées aux mouvement réels (de Buhan, 2007; Salençon, 2013).

En général, la mise en œuvre des approches statique et cinématique ne permet pas de trouver exactement le domaine  $K$ . Il est souvent nécessaire de combiner les deux approches afin de pouvoir déterminer un encadrement de ce domaine (Figure 1.12).

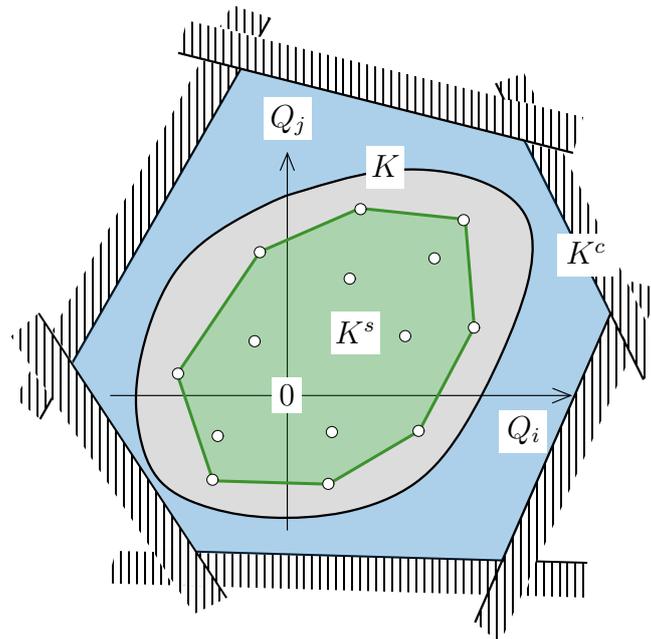


FIGURE 1.12 – Encadrement du domaine  $K$  par les estimations par excès et par défaut des deux approches du *calcul à la rupture*

## 1.4 Méthodes basées sur le *calcul à la rupture*

Se réclamant explicitement de la théorie du *calcul à la rupture* (ou de l'*analyse limite*) décrite précédemment, différentes méthodes de dimensionnement des structures soumises à la combinaison d'un effort tranchant et d'un effort axial ont été proposées dans la littérature. Pour cela, une poutre soumise à un effort tranchant (à travers l'application d'une flexion quatre points par exemple) en plus d'une charge axiale appliquée aux extrémités, a été étudiée. L'application de l'approche cinématique par l'extérieur, en considérant différents critères de résistance pour le béton et différents mécanismes de ruine virtuels de la poutre, ont permis la détermination d'expressions analytiques pour la résistance à l'effort tranchant en fonction de l'effort axial. Les résultats obtenus par ces méthodes seront comparés à ceux de l'approche développée dans cette thèse au chapitre 5.

### 1.4.1 Méthode de Ganwei et Nielsen (1988, 1990)

Ganwei et Nielsen (1988, 1990) ont considéré un élément de poutre en béton armé (avec des armatures longitudinales et transversales) soumis à une flexion quatre points

en plus de charges axiales (de traction ou de compression) appliquées aux extrémités. Afin de mettre en œuvre l’approche par l’extérieur, un mécanisme de ruine virtuel a été considéré en étudiant uniquement la moitié de la poutre (le problème étant symétrique). Celui-ci consiste à diviser l’élément en deux blocs séparés par une ligne de discontinuité de vitesse inclinée d’un angle  $\alpha$  par rapport à l’axe longitudinal de la poutre (Figure 1.13). Le déplacement relatif  $[U]$  entre les deux blocs est supposé constant le long de la ligne de discontinuité et incliné d’un angle  $\alpha'$  par rapport à celle-ci. Le béton est supposé obéir à un critère de Mohr-Coulomb tronqué en traction. L’application de la démarche décrite dans la section 1.3.4 a permis d’obtenir des formules analytiques pour le calcul de la résistance à l’effort tranchant en fonction de la charge axiale.

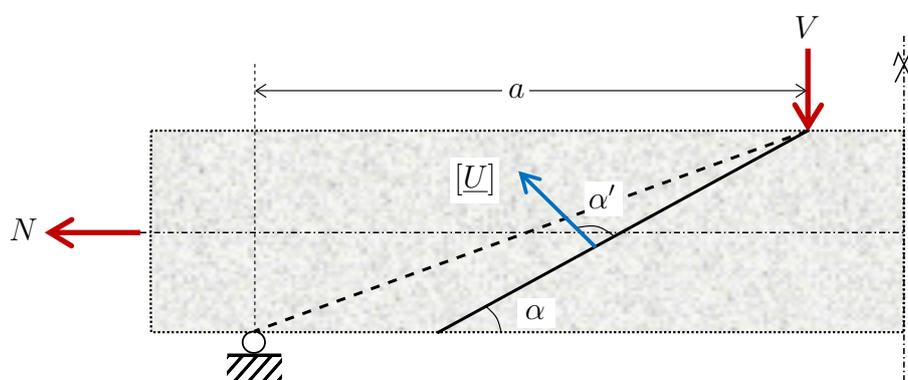


FIGURE 1.13 – Mécanisme de ruine virtuel proposé par Ganwei et Nielsen (1988, 1990)

### 1.4.2 Méthode de Zhang (1997)

En se basant sur les observations de Muttoni (1990) sur les fissures diagonales de cisaillement, Zhang (1997) a proposé un mécanisme de ruine différent pour l’étude de la résistance à l’effort tranchant d’éléments sans armatures transversales, soumis à une flexion quatre points et des efforts axiaux de compression uniquement. En effet, la mesure des déplacements le long d’une fissure diagonale a permis à Muttoni (1990) de conclure que, lors d’une rupture par effort tranchant, les discontinuité de déplacement ne sont plus perpendiculaires à la fissure, mais forment un angle inférieur à  $90^\circ$  par rapport à celle-ci. Ceci traduit un glissement ou des déplacements de cisaillement le long de la fissure. Ces remarques ont été prises en compte par Zhang (1997) dans son mécanisme de ruine. Comme dans le modèle de Ganwei et Nielsen (1988, 1990), le béton obéit à un critère de

Mohr-Coulomb tronqué en traction et le mécanisme de ruine virtuel consiste également à diviser la moitié de la poutre en deux blocs séparés par une ligne de discontinuité de vitesse inclinée. Toutefois, contrairement au modèle précédent, la discontinuité de vitesse est non seulement constante mais aussi verticale le long de la ligne de discontinuité ( $\alpha + \alpha' = 90^\circ$ ), comme représentée sur la Figure 1.14.

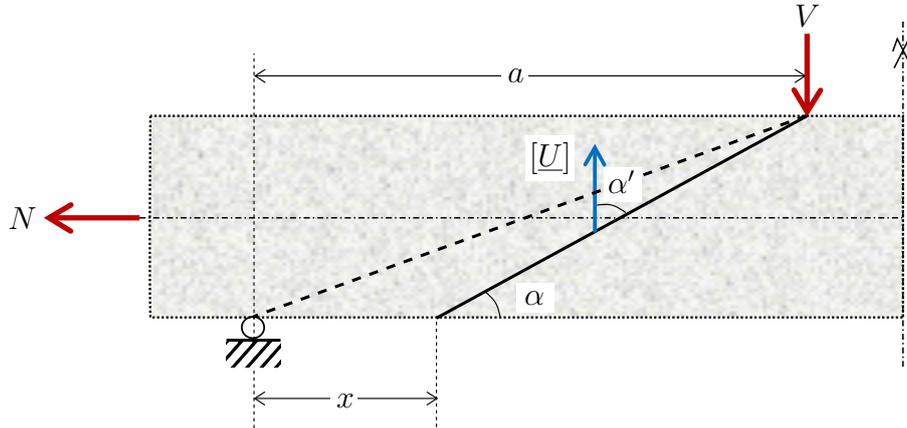


FIGURE 1.14 – Mécanisme de ruine virtuel proposé par Zhang (1997)

En plus de la résistance à l'effort tranchant notée  $V_u$  obtenue par cette méthode, Zhang (1997) a introduit un critère de fissuration  $V_{cr}$  qui permet d'identifier la position  $x$ , comprise entre 0 et  $a$ , de la ligne de cisaillement critique ( $a$  étant la distance entre le point d'application de la charge transversale et l'appui le plus proche). La valeur de  $x$  est obtenue par la résolution de l'égalité  $V_u(x) = V_{cr}(x)$ . La solution est ensuite comparée avec la distance  $a$  :

- si  $x \leq a$  : la résistance à l'effort tranchant est prise égale à  $V_{cr}(x)$  (ou bien  $V_u(x)$ );
- sinon : la résistance à l'effort tranchant est égale à  $V_u(a)$ .

Cette dernière valeur est d'ailleurs prise comme valeur maximale qui ne doit pas être dépassée par la résistance à l'effort tranchant calculée.

### 1.4.3 Méthode de Koechlin (2007) et Koechlin *et al.* (2008)

Koechlin (2007) et Koechlin *et al.* (2008) ont proposé des formulations analytiques pour la détermination d'un critère de rupture d'éléments en béton armé (renforcés longitudinalement et transversalement) soumis à la combinaison d'un effort axial, d'un

effort tranchant et d'un moment fléchissant. Pour cela, contrairement aux deux méthodes précédentes, le critère de résistance adopté pour le béton est un critère de Drucker-Prager non tronqué en traction. L'élément étudié est encore une fois divisé en deux blocs par un plan incliné. Un des deux blocs est immobile, tandis que l'autre est animé d'un mouvement de corps rigide de rotation et de translation dans les directions verticale et horizontale (Figure 1.15). La discontinuité de vitesse varie donc linéairement le long du plan de discontinuité, contrairement à ce qui se passe dans les deux approches précédentes. La mise en œuvre de l'approche cinématique du *calcul à la rupture* a permis de construire le domaine de résistance (Figure 1.16) à partir de huit parties distinctes caractérisées par des équations plus ou moins complexes et pouvant être regroupées comme suit :

- deux cylindres paraboliques ;
- quatre plans (qui sont indépendants du moment fléchissant) ;
- deux courbes paramétriques symétriques.

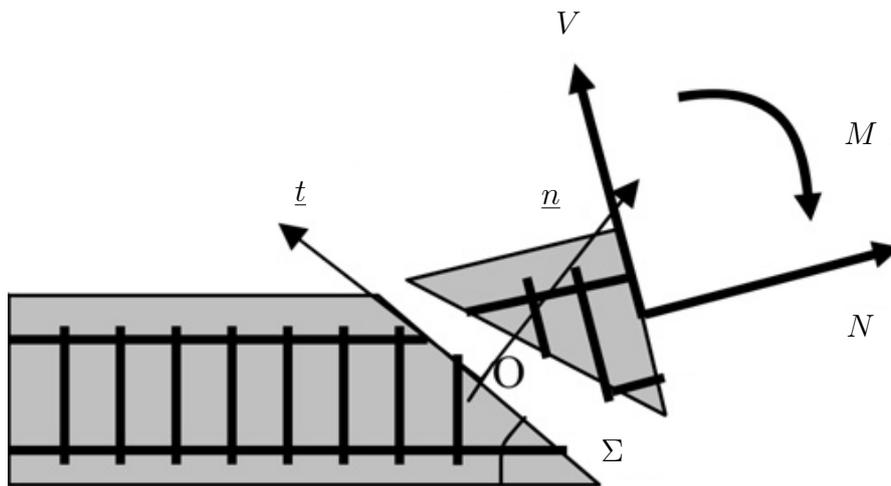


FIGURE 1.15 – Mécanisme de ruine virtuel proposé par Koechlin (2007) et Koechlin *et al.* (2008) (figure adaptée de Koechlin *et al.* (2008))

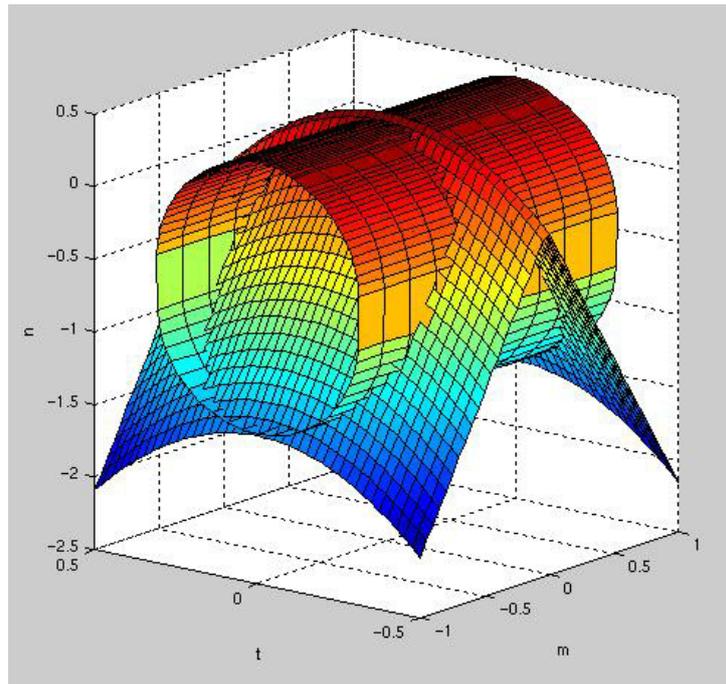


FIGURE 1.16 – Domaine de résistance obtenu par Koechlin (2007) et Koechlin *et al.* (2008) (figure tirée de Koechlin (2007))

## 1.5 Organisation du mémoire

Le présent travail propose différentes méthodes pour la détermination de la résistance à l'effort tranchant d'éléments en béton armé soumis non seulement à une charge axiale (de traction ou de compression) mais également à un moment fléchissant.

En se basant sur l'approche cinématique du *calcul à la rupture*, différentes méthodes de calcul semi-analytiques sont proposées dans le chapitre 2 permettant d'obtenir une évaluation par l'extérieur du domaine de résistance de poutres en béton armé soumises à une flexion trois points (charge transversale en travée), ainsi qu'à une charge axiale et un moment supplémentaire appliqués aux extrémités. Ces méthodes mettent en jeu différents mécanismes de ruine virtuels plus ou moins complexes. La relative facilité de mise en œuvre de l'approche proposée permet alors de réaliser plusieurs études paramétriques et d'analyser ainsi l'influence de certains paramètres sur le domaine de résistance.

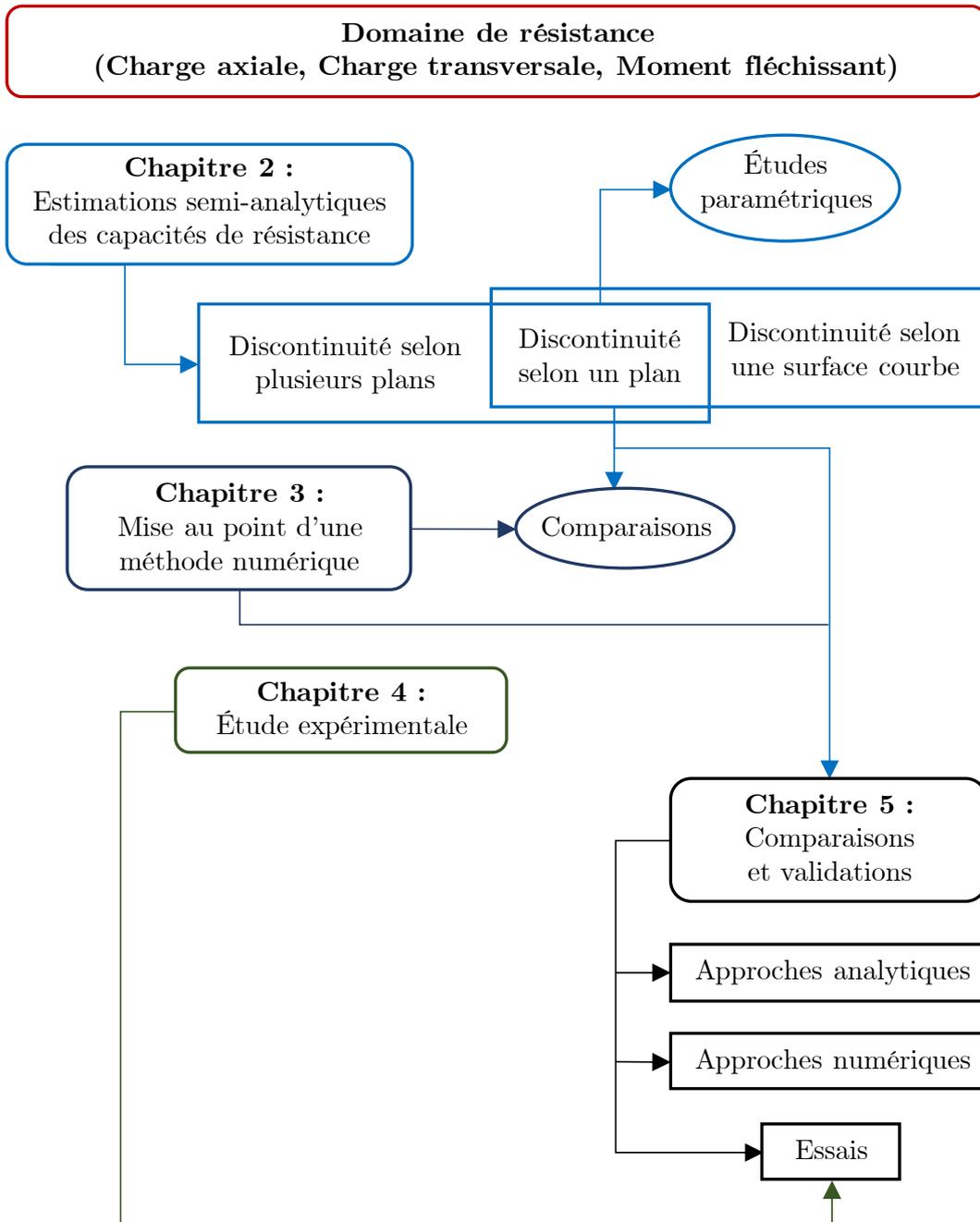
Dans le chapitre 3, une procédure d'implémentation numérique de l'approche cinématique du *calcul à la rupture* par la méthode des éléments finis est présentée. Cette méthode

permet d'explorer des champs de vitesse virtuelle bien plus riches que ceux considérés dans le chapitre 2. Des comparaisons entre les calculs semi-analytiques et numériques sont présentées dans le chapitre 3 mettant en évidence les différences entre les résultats et les améliorations possibles que permet la mise en œuvre d'une telle approche numérique.

Par ailleurs, deux campagnes expérimentales, utilisant un dispositif original, ont été réalisées dans le cadre de la thèse afin d'évaluer expérimentalement l'influence de l'effort axial de compression et du moment supplémentaire négatif sur la résistance à l'effort tranchant d'éléments renforcés ou non avec des armatures transversales (voir chapitre 4). La comparaison entre les résultats expérimentaux et les prédictions de certains codes de construction permet d'évaluer la pertinence de ces derniers. De plus, l'analyse par corrélation d'images numériques des poutres testées fournit des informations importantes sur le développement des fissures durant les essais, en particulier au moment de la rupture.

Afin d'obtenir des premières validations des méthodes semi-analytiques et numériques proposées dans ce travail, celles-ci sont confrontées dans le chapitre 5 aux résultats expérimentaux de la thèse, ainsi qu'à ceux de quelques campagnes disponibles dans la bibliographie. Les méthodes développées sont également confrontées aux prédictions d'autres méthodes (analytiques ou numériques utilisant un logiciel commercial de calcul par éléments finis) basées également sur l'approche par l'extérieur du *calcul à la rupture* ou de l'*analyse limite*.

Le schéma ci-après présente l'organisation du mémoire de thèse, qui repose sur trois principaux volets, semi-analytique (chapitre 2), numérique (chapitre 3) et expérimental (chapitre 4), en plus du chapitre 5 dédié aux comparaisons et validations des méthodes proposées (par des approches analytiques, numériques et par des essais dont ceux présentés dans le chapitre 4). Les méthodes de calculs semi-analytiques proposées sont basées sur différents mécanismes de ruine virtuels présentant une discontinuité de vitesse selon un plan courbe, plusieurs plans ou un seul plan. Ce dernier est d'ailleurs un cas particulier des deux premiers, il a l'avantage d'être plus simple et de fournir des résultats plus rapides. Il est donc retenue pour réaliser plusieurs études paramétriques (chapitre 2), ainsi que pour effectuer les différentes comparaisons et validations (chapitres 3 et 5).



\* \*  
\*

# Chapitre 2

## Estimations semi-analytiques des capacités de résistance de poutres soumises à la combinaison de chargements transversal et axial et d'un moment fléchissant

**Résumé :** *Ce chapitre présente une méthode de dimensionnement d'éléments en béton armé soumis à la combinaison de chargements transversal et axial et d'un moment fléchissant. Basée sur l'approche cinématique du calcul à la rupture à travers un mécanisme de ruine simple, cette méthode permet de fournir de manière rapide une bonne estimation par l'extérieur du domaine de résistance, en comparaison avec des mécanismes plus complexes. Sa simplicité et la rapidité des calculs permettent de réaliser des études paramétriques montrant l'influence des différents paramètres entrant en jeu.*

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>35</b>
<b>2.2</b>	<b>Position du problème de <i>calcul à la rupture</i></b>	<b>36</b>
2.2.1	Géométrie et conditions aux limites	36
2.2.2	Critères de résistance des matériaux constitutifs	37
2.2.3	Mode de chargement	39
2.2.4	Implémentation de l'approche cinématique	41

<b>2.3 Exemples</b>	<b>48</b>
2.3.1 Domaines de résistance dans l'espace $(F_x, F_y, m)$	48
2.3.2 Domaines de résistance $(F_x, F_y)_{m=0}$	50
<b>2.4 Études paramétriques</b>	<b>53</b>
2.4.1 Influence d'un moment supplémentaire	53
2.4.2 Influence du rapport $a/h$	56
2.4.3 Influence du renforcement longitudinal	58
2.4.4 Influence du renforcement transversal	60
<b>2.5 Mise en oeuvre d'autres mécanismes</b>	<b>62</b>
2.5.1 Mise en oeuvre de plusieurs surfaces de discontinuité planes	62
2.5.2 Mise en oeuvre d'une surface de discontinuité courbe	64
2.5.3 Comparaison des résultats obtenus par les différents mécanismes	67
2.5.4 Remarques sur les problèmes numériques rencontrés	69
<b>2.6 Calcul en contraintes planes</b>	<b>74</b>
2.6.1 Implémentation de l'approche cinématique en contraintes planes	74
2.6.2 Comparaison des résultats du problème en contraintes planes avec ceux du problème initial analysé par des mécanismes de déformation planes	75
<b>2.7 Homogénéisation du béton renforcé par des armatures transversales</b>	<b>79</b>
2.7.1 Principe de la démarche (Averbuch, 1996; Averbuch et de Buhan, 1999)	79
2.7.2 Application aux mécanismes proposés	80
2.7.3 Comparaison des résultats	81
<b>2.8 Conclusions</b>	<b>82</b>

---

## 2.1 Introduction

Afin d'évaluer l'influence de la force axiale sur la résistance à l'effort tranchant des éléments en béton armé, nous avons fait le choix d'étudier la configuration d'une poutre (décrite dans la section 2.2.1) soumise à une flexion trois points à travers l'application d'une charge transversale en travée, en plus d'une charge axiale appliquée à ses deux extrémités. Il est également considéré que la poutre est soumise à un moment fléchissant uniforme appliqué à ses deux extrémités (section 2.2.3).

Un mécanisme de ruine virtuel simple est choisi, consistant en deux blocs animés de mouvements rigidifiants séparés par une surface plane de discontinuité de vitesse. La mise en œuvre de l'approche cinématique du *calcul à la rupture* (décrite dans le chapitre précédent) pour ce mécanisme de ruine (section 2.2) permet de fournir une estimation semi-analytique par l'extérieur du domaine de résistance de la poutre exprimé dans l'espace des paramètres de chargement. Les critères de résistance adoptés pour les matériaux constitutifs de la poutre sont présentés dans la section 2.2.2.

A titre illustratif, trois poutres avec des schémas de renforcement différents sont considérées : une poutre constituée de béton seul, une poutre renforcée avec des armatures longitudinales et une autre renforcée avec des armatures longitudinales et transversales. Les domaines de résistance de ces trois poutres sont déterminés en 3D dans la section 2.3.1 en fonction des trois chargements appliqués (chargement transversal, chargement axial, moment supplémentaire), ainsi qu'en 2D dans la section 2.3.2 sous forme de coupes (chargement transversal, chargement axial) pour un moment supplémentaire nul.

La simplicité et la rapidité des calculs de la méthode proposée permettent de réaliser facilement des études paramétriques afin de déterminer l'influence des différents paramètres entrant en jeu. Dans la section 2.4, les domaines de résistance des poutres étudiées sont calculés pour différentes valeurs des paramètres importants, à savoir le moment supplémentaire, l'élanement de la poutre et les degrés de renforcement longitudinal et transversal, permettant ainsi d'évaluer leur effet sur la résistance à l'effort tranchant des éléments en béton armé sous un effort axial.

Les mises en œuvre de l'approche cinématique du *calcul à la rupture* à travers la prise en compte de mécanismes de ruine plus complexes que celui décrit dans la section 2.2, mettant en jeu une discontinuité de vitesse à travers plusieurs surfaces planes (section 2.5.1)

ou une spirale logarithmique (section 2.5.2), ainsi que la considération de l'hypothèse des contraintes planes (section 2.6) sont ensuite présentées.

Les domaines de résistance obtenus par les différentes méthodes sont comparés sur les exemples des trois poutres considérées, afin d'évaluer la pertinence et la performance du mécanisme simple considéré au départ (sections 2.5.3 et 2.6.2). Des exemples de surfaces de discontinuité optimales obtenues par ces méthodes sont également présentés, permettant d'analyser les résultats obtenus.

Enfin une procédure d'homogénéisation de la poutre renforcée transversalement est décrite (section 2.7.1) et appliquée aux mécanismes proposés (section 2.7.2). Les résultats de cette approche sont ensuite comparés aux résultats précédents (section 2.7.3).

## 2.2 Position du problème de *calcul à la rupture*

### 2.2.1 Géométrie et conditions aux limites

En se référant à un repère orthonormé  $Oxyz$ , la structure considérée représentée sur la Figure 2.1 est une poutre d'axe  $Ox$  et de longueur totale  $L$ . Elle est dotée d'une section rectangulaire de hauteur  $h$  selon l'axe  $Oy$  et d'épaisseur  $b$  selon l'axe  $Oz$ . La poutre est constituée d'un béton supposé homogène, qui est renforcé par :

- $K$  armatures longitudinales parallèles à l'axe  $Ox$ . La position de l'armature n° $k$  (de section  $A_{s,k}$  et constituée d'un acier de résistance en traction-compression  $\sigma_{y,k}$ ) est définie par la coordonnée  $\xi_k$  selon l'axe  $Oy$ , telle que  $-h/2 \leq \xi_k \leq h/2$ .
- $J$  étriers en acier (de section  $A_{sw,j}$  et constitués d'un acier de résistance en traction-compression  $\sigma_{yw,j}$ ), placés périodiquement le long de la poutre avec un espacement noté  $s$ . Ces étriers sont modélisés comme des armatures transversales orientées selon l'axe  $Oy$ , c'est-à-dire que l'on négligera la contribution des éléments des étriers orientés selon l'axe  $Oz$ .

La poutre est placée sur deux appuis simples espacés d'une distance  $l$ . Ces appuis empêchent les déplacements selon les directions  $y$  et  $z$  mais laissent libres les déplacements selon la direction  $x$  ainsi que les rotations autour de l'axe  $Oz$ . Les rotations autour des axes  $Ox$  et  $Oy$  ne sont pas non plus possibles de sorte que seuls les mouvements dans le plan  $Oxy$  sont autorisés.

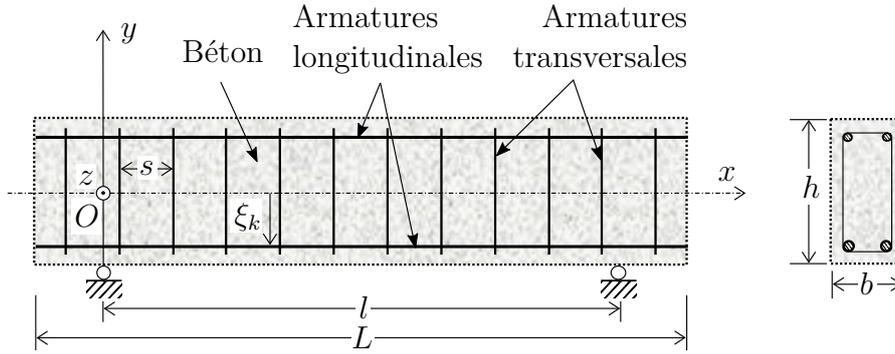


FIGURE 2.1 – Poutre en béton armé

## 2.2.2 Critères de résistance des matériaux constitutifs

### Critère de résistance du béton

La résistance locale du béton constitutif de la poutre est modélisée par un critère de Mohr-Coulomb entièrement tronqué en traction (sa résistance à la traction  $f_t$  est négligée) en raison de son comportement fragile sous des contraintes de traction (voir [Chen \(1982\)](#), [Marti \(1985\)](#), [Salençon \(2013\)](#), [Averbuch et de Buhan \(1999\)](#), [Nielsen et Hoang \(2011\)](#), ou plus récemment [Pham \*et al.\* \(2015\)](#)). Ce critère est défini par l'expression suivante :

$$f^b(\underline{\sigma}) = \sup_{i,j=1,2,3} \{ \sigma_i (1 + \sin \varphi) - \sigma_j (1 - \sin \varphi) - f_c (1 - \sin \varphi) ; \sigma_i \} \quad (2.1)$$

où  $\sigma_i, i = 1, 2, 3$  sont les valeurs principales du tenseur des contraintes,  $f_c$  est la résistance à la compression du béton et  $\varphi$  son angle de frottement interne. Cet angle peut être pris égal à  $37^\circ$  pour un béton ordinaire ([Chen \(1982\)](#), [Nielsen et Hoang \(2011\)](#)). La courbe intrinsèque de ce critère est représentée dans le plan de Mohr par la courbe bleue, formée par la courbe intrinsèque de Coulomb (deux demi-droites en pointillés) tronqué par le cercle de centre  $(-f_c/2, 0)$  et de diamètre  $f_c$  tangent à ces deux demi-droites (voir Figure 2.2).

La fonction d'appui (définie de manière générale par (1.12)) pour un tel critère de résistance associée à un taux de déformation de tenseur  $\underline{d}$  et de valeurs principales  $d_i, i = 1, 2, 3$  s'écrit comme suit :

$$\pi^b(\underline{d}) = \begin{cases} \frac{f_c}{2} \left[ \sum_{i=1}^3 |d_i| - \text{tr} \underline{d} \right] & \text{si } \text{tr} \underline{d} \geq \left( \sum_{i=1}^3 |d_i| \right) \sin \varphi \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.2)$$

et celle associée à un saut de vitesse  $[U]$  à la traversée d'une surface de discontinuité de vitesse de normale  $\underline{n}$  (définie par (1.13)) est donnée par l'équation ci-dessous :

$$\pi^b([U], \underline{n}) = \begin{cases} \frac{f_c}{2} (|[U]| - [U] \cdot \underline{n}) & \text{si } [U] \cdot \underline{n} \geq |[U]| \sin \varphi \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.3)$$

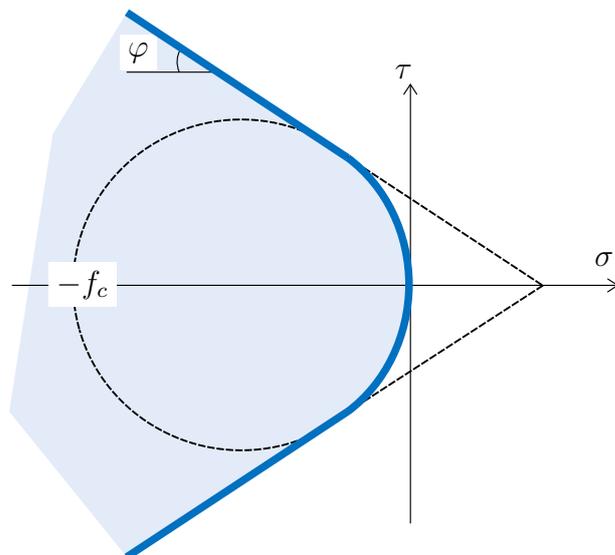


FIGURE 2.2 – Courbe intrinsèque du critère de résistance du béton

### Critère de résistance d'une armature d'acier

Les renforcements longitudinaux et transversaux en acier sont représentés par des éléments unidirectionnels permettant de reprendre uniquement des efforts de traction-compression. Leur résistance à l'effort tranchant et à la flexion est négligée. Leur critère de résistance portant donc uniquement sur la force axiale  $T$ , est défini par l'inégalité suivante :

$$|T| \leq T_0 \quad (2.4)$$

où  $T_0$  est le produit de la section de l'armature par la résistance en traction-compression de l'acier. Il est donc égal à  $\sigma_{y,k}A_{s,k}$  pour une armature longitudinale  $k$  et  $\sigma_{yw,j}A_{sw,j}$  pour une armature transversale  $j$ .

Les fonctions d'appui du critère de résistance des armatures s'écrivent donc pour un taux de déformation et une discontinuité de vitesse respectivement à l'aide des expressions suivantes :

$$\begin{aligned}\pi^r(\underline{d}) &= \sup \{T d_{tt}, |T| \leq T_0\} \\ &= T_0 |d_{tt}|\end{aligned}\tag{2.5}$$

$$\begin{aligned}\pi^r([\underline{U}], \underline{n}) &= \sup \{T[U_t], |T| \leq T_0\} \\ &= T_0 |[U_t]|\end{aligned}\tag{2.6}$$

où  $d_{tt}$  est le taux de déformation du renforcement orienté selon le vecteur unitaire  $\underline{t}$  et  $[U_t]$  la projection de la discontinuité de vitesse sur ce vecteur :

$$d_{tt} = \underline{t} \cdot \underline{\dot{d}} \cdot \underline{t}\tag{2.7}$$

$$[U_t] = [\underline{U}] \cdot \underline{t}\tag{2.8}$$

## Interface entre les armatures et le béton

Dans le cadre de ce travail, il est supposé pour des raisons de simplicité que les armatures longitudinales et transversales sont parfaitement adhérentes au béton environnant. La détermination d'un critère d'interface entre le béton et les armatures reste en effet difficile et nécessite par exemple une évaluation expérimentale.

### 2.2.3 Mode de chargement

La poutre étudiée est soumise à la combinaison de chargement suivante, représentée sur la Figure 4.8 :

- une flexion trois points, à travers l'application d'une charge transversale (verticale)  $F_y$  (comptée positivement vers le bas) à une distance  $a$  de l'appui de gauche, telle que  $a \leq l/2$ ;

- une charge axiale notée  $F_x$  (comptée positivement en traction) appliquée à chacune des deux extrémités de la poutre ;
- un moment de flexion constant  $m$  (compté positivement si, compte tenu du choix fait pour l'orientation positive de la poutre selon l'axe  $Ox$ , il tend ses fibres inférieures), appliqué également à ces deux extrémités ;
- des forces volumiques qui sont négligées dans le cadre de ces travaux.

La poutre est donc soumise à un mode de chargement à trois paramètres qui sont les efforts  $F_x$  et  $F_y$ , ainsi que le moment  $m$ .

Cette configuration de chargement permet non seulement de déterminer l'influence des efforts axiaux (de compression et de traction) sur la résistance à l'effort tranchant des éléments en béton armé, mais aussi l'effet d'un moment constant. Ce moment supplémentaire vient s'ajouter au moment de flexion engendrée en tout point par la charge transversale. Il est en général négatif et représente le cas où la poutre est continue sur plusieurs appuis ou le cas où les rotations autour des appuis ne sont pas entièrement libres.

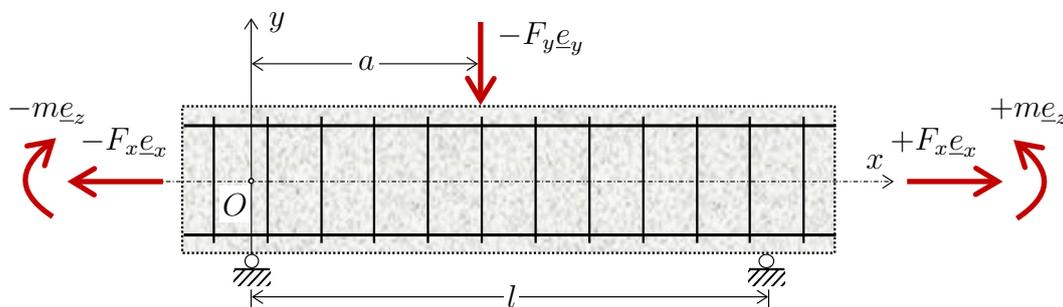


FIGURE 2.3 – Mode de chargement à trois paramètres de la poutre en béton armé

Dans ces conditions, les distributions d'efforts intérieurs sont les suivantes :

- un effort normal  $N = F_x$  qui est uniforme le long de la poutre ;
- un moment de flexion  $M(x)$  qui est maximal au niveau de la section d'application de la charge transversale ( $x = a$ ), donné par l'équation (2.9) ;
- un effort tranchant  $V(x)$  qui est maximal au niveau de la zone de longueur  $a$  ( $0 \leq x \leq a$ ), donné par l'équation (2.10).

$$M(x = a) = F_y \frac{(l - a)}{l} a + m \quad (2.9)$$

$$V = V(0 \leq x \leq a) = F_y \frac{(l - a)}{l} \quad (2.10)$$

Dans ce qui suit, une méthode est proposée pour obtenir une estimation par excès du domaine de résistance de la poutre étudiée en se basant sur l'approche cinématique par l'extérieur de la théorie du *calcul à la rupture* (décrite dans la section 1.3.4 du chapitre précédent). Des vues en perspective des domaines de résistance obtenus seront représentées dans l'espace des paramètres de chargement  $(F_x, F_y, m)$ . Ces résultats seront complétés par la représentation de différentes coupes des domaines obtenus pour différentes valeurs de  $m$ .

## 2.2.4 Implémentation de l'approche cinématique

### Mécanisme virtuel et puissance des efforts extérieurs

Afin de mettre en œuvre l'approche cinématique du *calcul à la rupture*, un premier mécanisme de ruine virtuel est choisi. Il s'agit d'un mécanisme plan mettant en jeu deux blocs rigides, notés 1 et 2, séparés par un plan passant par le point d'application de la charge transversale et incliné d'un angle  $\alpha$  par rapport à l'axe  $Ox$  (Figure 2.4). L'angle  $\alpha$  est un paramètre géométrique du mécanisme virtuel considéré dont la valeur peut varier entre les valeurs minimale  $\text{atan}(h/a)$  et maximale  $\pi/2$ .

Les deux blocs sont animés de mouvements rigidifiants définis au niveau des points de contact entre les blocs et les appuis de la poutre (points A et B pour les blocs 1 et 2 respectivement), par les éléments de réduction suivants :

- vitesses de translations horizontales selon l'axe  $Ox$  notées  $-\dot{\delta}_1 \underline{e}_x$  et  $+\dot{\delta}_2 \underline{e}_x$  pour les blocs 1 et 2 respectivement ;
- taux de rotations autour de l'axe  $Oz$  notés  $-\dot{\theta}_1 \underline{e}_z$  et  $+\dot{\theta}_2 \underline{e}_z$  pour les blocs 1 et 2 respectivement.

On vérifie aisément que le champ de vitesse virtuelle ainsi défini est cinématiquement admissible avec les données du problème puisqu'il vérifie les conditions aux limites cinématiques au niveau des appuis.

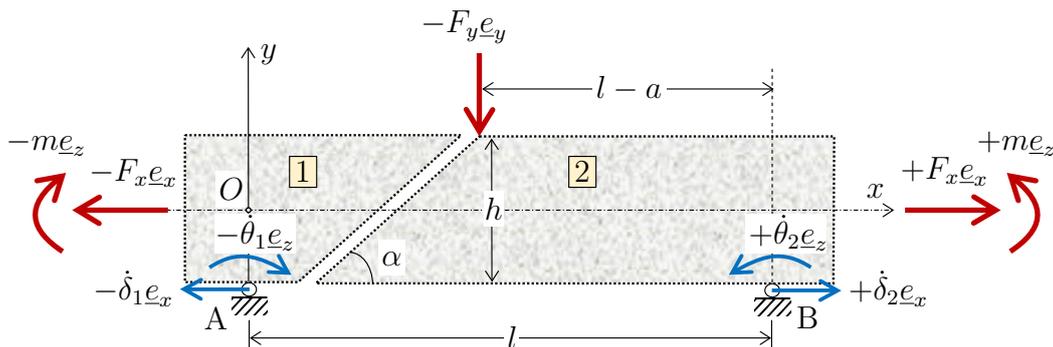


FIGURE 2.4 – Mécanisme de ruine considéré dans l'approche cinématique par l'extérieur

Il s'ensuit que la puissance virtuelle des efforts extérieurs dans le mécanisme considéré s'écrit :

$$P_{ext} = m(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) + F_y \dot{\theta}_2 (l - a) + F_x \left( (\dot{\delta}_1 + \dot{\delta}_2) - (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \frac{h}{2} \right) \quad (2.11)$$

faisant ainsi apparaître les trois paramètres cinématiques  $(\dot{\delta}_1 + \dot{\delta}_2, \dot{\theta}_1$  et  $\dot{\theta}_2)$ . On notera que cette puissance est indépendante de l'inclinaison de la surface de discontinuité.

### Discontinuité de vitesse et puissance résistante maximale

On considère un point M de coordonnées  $(x, y, z)$  de la surface de discontinuité de vitesse, c'est-à-dire appartenant à la fois au bloc 1 et au bloc 2. Les vitesses des points situés de part et d'autre de la surface de discontinuité sont données respectivement par les équations (2.12) et (2.13) :

$$\underline{U}^{(1)}(x, y) = \left[ -\dot{\delta}_1 + \dot{\theta}_1 \left( y + \frac{h}{2} \right) \right] \underline{e}_x - \dot{\theta}_1 x \underline{e}_y \quad (2.12)$$

$$\underline{U}^{(2)}(x, y) = \left[ \dot{\delta}_2 - \dot{\theta}_2 \left( y + \frac{h}{2} \right) \right] \underline{e}_x + \dot{\theta}_2 (x - l) \underline{e}_y \quad (2.13)$$

La discontinuité de vitesse en ce point est alors donnée par l'expression suivante :

$$\begin{aligned} [\underline{U}](x, y) &= \underline{U}^{(2)}(x, y) - \underline{U}^{(1)}(x, y) \\ &= \left[ (\dot{\delta}_1 + \dot{\delta}_2) - (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \left( y + \frac{h}{2} \right) \right] \underline{e}_x + [(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)x - \dot{\theta}_2 l] \underline{e}_y \end{aligned} \quad (2.14)$$

## 2.2. Position du problème de *calcul à la rupture*

où  $y$  peut être exprimé comme suit en tenant compte de l'équation de ladite surface :

$$y = (x - a) \tan \alpha + \frac{h}{2} \quad (2.15)$$

Pour simplifier, on adopte les notations suivantes pour les projections selon les axes  $Ox$  et  $Oy$  respectivement de la discontinuité de vitesse au point M :

$$[U_x](y) = (\dot{\delta}_1 + \dot{\delta}_2) - (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \left( y + \frac{h}{2} \right) \quad (2.16)$$

$$[U_y](x) = (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)x - \dot{\theta}_2 l \quad (2.17)$$

Il s'ensuit que la projection de la discontinuité de vitesse sur l'axe (horizontal) d'une armature longitudinale  $k \in \llbracket 1, K \rrbracket$  (Figure 2.5) s'écrit :

$$\begin{aligned} U_{l,k} &= [U_x](y = \xi_k) \\ &= (\dot{\delta}_1 + \dot{\delta}_2) - (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \left( \xi_k + \frac{h}{2} \right) \end{aligned} \quad (2.18)$$

tandis que sa projection sur l'axe d'une armature transversale  $j$  d'abscisse  $x_j$  (Figure 2.5) s'écrit :

$$\begin{aligned} U_{t,j} &= [U_y](x = x_j) \\ &= (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)x_j - \dot{\theta}_2 l \end{aligned} \quad (2.19)$$

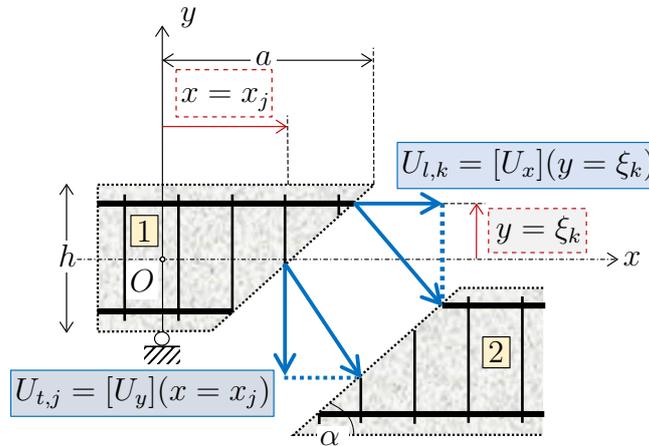


FIGURE 2.5 – Projection de la discontinuité de vitesse sur l'axe des armatures

L'abscisse  $x_j$  de l'armature transversale  $j$  doit vérifier l'inégalité suivante pour que l'armature soit intersectée par le plan de discontinuité de vitesse :

$$a - \frac{h}{\tan \alpha} \leq x_j \leq a \quad (2.20)$$

La puissance résistante maximale  $P_{rm}$  développée dans la poutre associée au mécanisme de ruine considéré est la somme de trois contributions différentes, à savoir celles du béton  $P_{rm}^b$ , des armatures longitudinales  $P_{rm}^l$  et des armatures transversales  $P_{rm}^t$  :

$$P_{rm} = P_{rm}^c + P_{rm}^l + P_{rm}^t \quad (2.21)$$

Celle-ci est calculée uniquement à partir de la discontinuité de vitesse, puisque le terme associé au taux de déformation est nul. En effet, dans le mécanisme de ruine choisi, il n'y a pas de déformation virtuelle dans les deux blocs, mais uniquement une discontinuité de vitesse entre eux.

Compte tenu de (2.3), la première contribution, relative au béton, est donnée par :

$$\begin{aligned} P_{rm}^b &= \int_S \pi^c ([U], \underline{n}) dS \\ &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{f_c}{2} \left( \sqrt{[U_x]^2 + [U_y]^2} - [U_x] \sin \alpha + [U_y] \cos \alpha \right) b \frac{dy}{\sin \alpha} \end{aligned} \quad (2.22)$$

sous réserve de la vérification de la condition de pertinence suivante en tout point du plan de discontinuité de vitesse :

$$[U_x] \sin \alpha - [U_y] \cos \alpha \geq \sqrt{[U_x]^2 + [U_y]^2} \sin \varphi \quad (2.23)$$

En tirant profit du caractère plan du mécanisme considéré (mécanisme en déformation plane dans  $Oxy$ ) et de la forme plane de la surface de discontinuité, la condition de pertinence pour le béton se réduit à la vérification de l'inégalité (2.23) aux deux extrémités de cette surface, c'est-à-dire aux points de coordonnées  $(a, h/2)$  et  $(a - h/\tan \alpha, -h/2)$ .

En ce qui concerne la contribution des armatures longitudinales,  $P_{rm}^l$  est donnée par une somme discrète des puissances résistantes maximales des  $K$  armatures longitudinales

mises en jeu dans le renforcement de la poutre étudiée :

$$P_{rm}^l = \sum_{k=1}^K A_{s,k} \sigma_{y,k} |U_{l,k}| \quad (2.24)$$

Quant aux armatures transversales, leur contribution à la puissance résistante maximale est égale à la somme des contributions des  $J_c \leq J$  armatures coupées par la surface de discontinuité :

$$P_{rm}^t = \sum_{j=1}^{J_c} A_{sw,j} \sigma_{yw,j} |U_{t,j}| \quad (2.25)$$

### Domaine de résistance semi-analytique

La comparaison des puissances virtuelles des efforts extérieurs (2.11) et de la puissance résistance maximale (2.21) permet de formuler une *condition nécessaire de stabilité* au sens du *calcul à la rupture*. Cette condition qui s'écrit comme suit :

$$P_{ext}(F_x, F_y, m, \dot{\delta}_1 + \dot{\delta}_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2) \leq P_{rm}(\alpha, \dot{\delta}_1 + \dot{\delta}_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2) \quad (2.26)$$

permet d'approcher par l'extérieur le chargement extrême donné par le triplet  $(F_x^+, F_y^+, m^+)$ .

En d'autres termes, pour un trajet de chargement radial fixé, défini par une direction de chargement  $(F_{x0}, F_{y0}, m_0)$  donnée, l'approche cinématique permet de mettre en évidence une approche par excès du chargement extrême correspondant, qui est ici de la forme :

$$(F_x^+, F_y^+, m^+) = \lambda^+ (F_{x0}, F_{y0}, m_0) \quad (2.27)$$

de laquelle l'on déduit aisément le majorant suivant du facteur de chargement extrême  $\lambda^+$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall (\dot{\delta}_1 + \dot{\delta}_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2) \text{ tel que } P_{ext}(F_{x0}, F_{y0}, m_0, \dot{\delta}_1 + \dot{\delta}_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2) > 0 \\ \lambda^+ \leq \frac{P_{rm}(\alpha, \dot{\delta}_1 + \dot{\delta}_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2)}{P_{ext}(F_{x0}, F_{y0}, m_0, \dot{\delta}_1 + \dot{\delta}_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2)} \end{array} \right. \quad (2.28)$$

Il est donc clair qu'il convient de minimiser le membre de droite de l'inégalité précédent afin de trouver le meilleur majorant<sup>1</sup> du facteur de charge extrême. Cette minimisation se fait par rapport aux quatre paramètres  $(\alpha, \dot{\delta}_1 + \dot{\delta}_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2)$ , sous les trois conditions suivantes :

- une condition géométrique portant sur l'inclinaison  $\alpha$  de la surface de discontinuité :  $\arctan(h/a) \leq \alpha \leq \pi/2$ ;
- une condition de pertinence exprimée par l'inégalité (2.23) ;
- la positivité de la puissance des efforts extérieurs.

Le domaine de résistance de la poutre en béton armé, soumise au mode de chargement à trois paramètres décrit en 2.2.3, peut alors être approché par l'extérieur par la mise en œuvre de l'approche cinématique décrite ci-dessus. On peut, par exemple, paramétrer l'orientation du trajet de chargement radial par deux angles  $\zeta$  et  $\gamma$  tels que :

$$(F_{x0}, F_{y0}, m_0) = (\cos \gamma \cos \zeta, \sin \gamma \cos \zeta, \sin \zeta) \quad (2.29)$$

où l'on fait varier  $\zeta$  et  $\gamma$  dans  $[-\pi/2, \pi/2]$  et  $[0, \pi]$  respectivement afin de balayer le demi-espace ( $F_y \geq 0$ ) (Figure 2.6). Ce premier paramétrage est adopté dans ce qui suit et donne lieu aux résultats présentés en 2.3.1. Ces résultats sont complétés dans les sections 2.3.2 et 2.4.1 par les domaines de résistance dans le plan  $(F_x, F_y)$  pour des valeurs du moment  $m = m_i$  fixées. Ces domaines pouvant être obtenus par un traitement des résultats de l'approche précédente en réalisant des coupes de l'approche par l'extérieur du domaine des chargements potentiellement supportables par les plans d'équations  $m = m_i$ .

Une alternative à ce traitement supplémentaire, consiste à considérer, dès le début, des trajets de chargement du plan d'équation  $m = m_i$ . En effet, le paramétrage adéquat est dans ce cas donné par :

$$(F_x, F_y) = \lambda (F_{x0} = \cos \tilde{\gamma}, F_{y0} = \sin \tilde{\gamma}) ; m = m_i \quad (2.30)$$

où l'angle  $\tilde{\gamma}$  variant entre 0 et  $\pi$  (voir Figure 2.7).

---

1. qui ne reste en général qu'un majorant, puisqu'on se limite ici à l'étude d'une classe particulière (sous-ensemble) de l'espace des mouvements virtuels

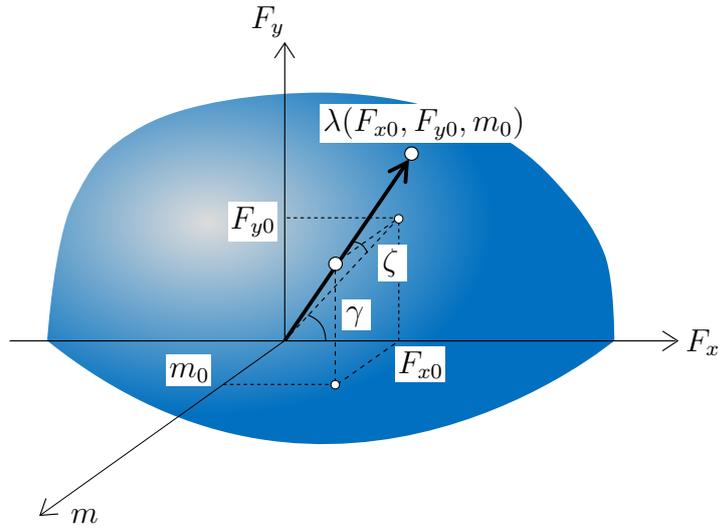


FIGURE 2.6 – Optimisation par trajets de chargement radiaux

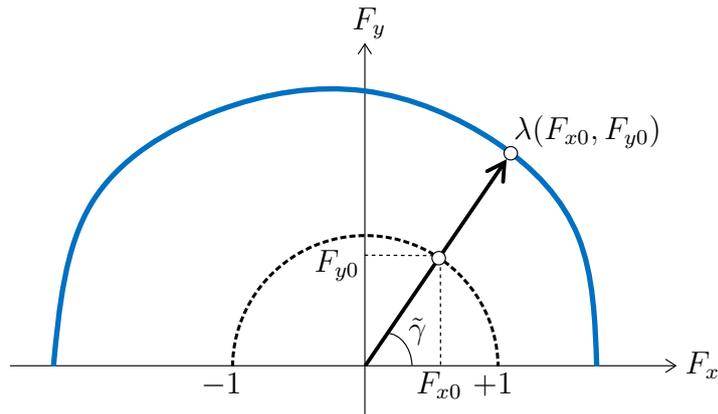


FIGURE 2.7 – Optimisation par trajets de chargement radiaux pour  $m$  fixé (coupe du domaine de résistance par le plan d'équation  $m = C^{ste}$ )

La puissance virtuelle des efforts extérieurs (2.11) s'écrit alors formellement dans ce cas par :

$$P_{ext}(F_x, F_y, m_i, \dot{\delta}_1 + \dot{\delta}_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2) = \lambda P_{ext}(F_{x0}, F_{y0}, 0, \dot{\delta}_1 + \dot{\delta}_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2) + P_{ext}(0, 0, m_i, \dot{\delta}_1 + \dot{\delta}_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2) \quad (2.31)$$

où le second terme du membre de droite est donné d'après (2.11) par :

$$P_{ext}(0, 0, m_i, \dot{\delta}_1 + \dot{\delta}_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2) = m_i(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \quad (2.32)$$

Compte tenu de (2.31) et (2.32), la mise en œuvre du théorème cinématique du *calcul à la rupture* permet alors d'avoir la majoration suivante du facteur de charge extrême  $\lambda^+$  :

$$\lambda^+ \leq \frac{P_{rm}(\alpha, \dot{\delta}_1 + \dot{\delta}_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2) - m_i(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)}{P_{ext}(F_{x0}, F_{y0}, 0, \dot{\delta}_1 + \dot{\delta}_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2)} \quad (2.33)$$

## 2.3 Exemples

On présente dans cette section la mise en œuvre du mécanisme de blocs rigides décrit dans 2.2. On considère pour cela une poutre en béton de résistance à la compression  $f_c = 30$  MPa, et de caractéristiques géométriques :

$$L = 6 \text{ m} ; l = 5 \text{ m} ; h = 0,5 \text{ m} ; b = 0,25 \text{ m} \quad (2.34)$$

Dans le but de quantifier l'apport des armatures d'acier sur les capacités de résistance de la poutre, les trois configurations suivantes sont étudiées :

- poutre n°1 : Il s'agit de la configuration de référence, correspondant au cas de la poutre non renforcée, c'est-à-dire constituée du béton seul ;
- poutre n°2 : La poutre est renforcée par deux lits symétriques de deux armatures longitudinales. Ces armatures, dont l'enrobage est égal à 34 mm, sont constituées d'un acier de résistance en traction-compression égale à  $\sigma_y = 700$  MPa et sont de même diamètre égal à 32 mm.
- poutre n°3 : Des armatures transversales sont employées ici en plus des armatures longitudinales de la poutre n°2. Plus précisément, des armatures transversales de diamètre 6 mm et de résistance en traction-compression  $\sigma_{yw} = 665$  MPa sont disposées régulièrement ( $s = 20$  cm) tout au long de la poutre.

### 2.3.1 Domaines de résistance dans l'espace $(F_x, F_y, m)$

Les figures suivantes représentent les domaines de résistance des poutres n°1 (Figure 2.8), n°2 (Figure 2.9) et n°3 (Figure 2.10) dans l'espace des chargements appliqués  $(F_x, F_y, m)$ .

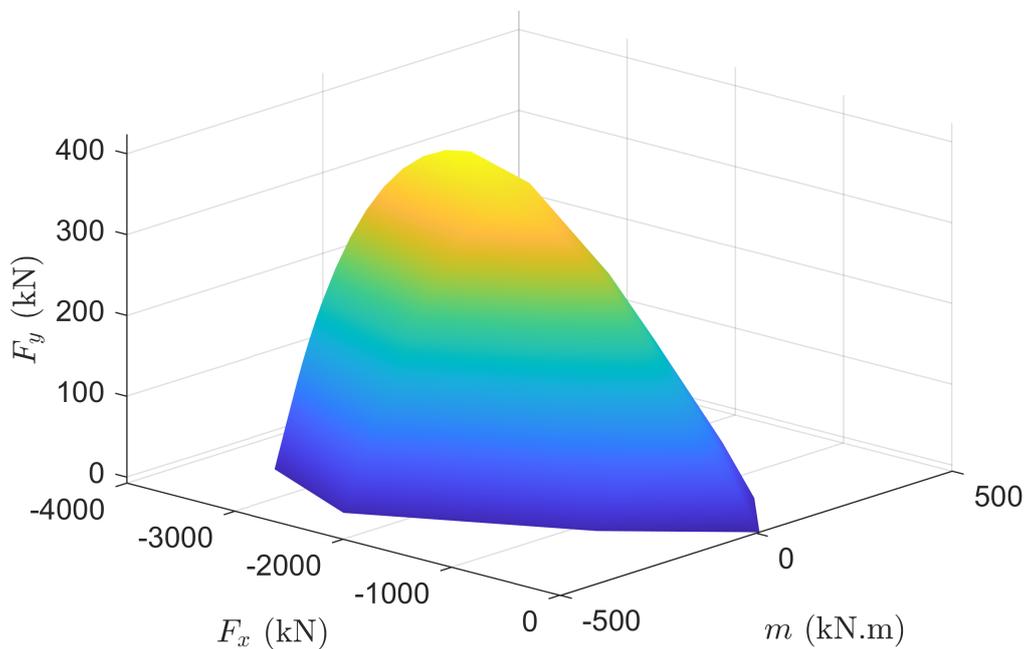


FIGURE 2.8 – Domaine de résistance  $(F_x, F_y, m)$  de la poutre n°1

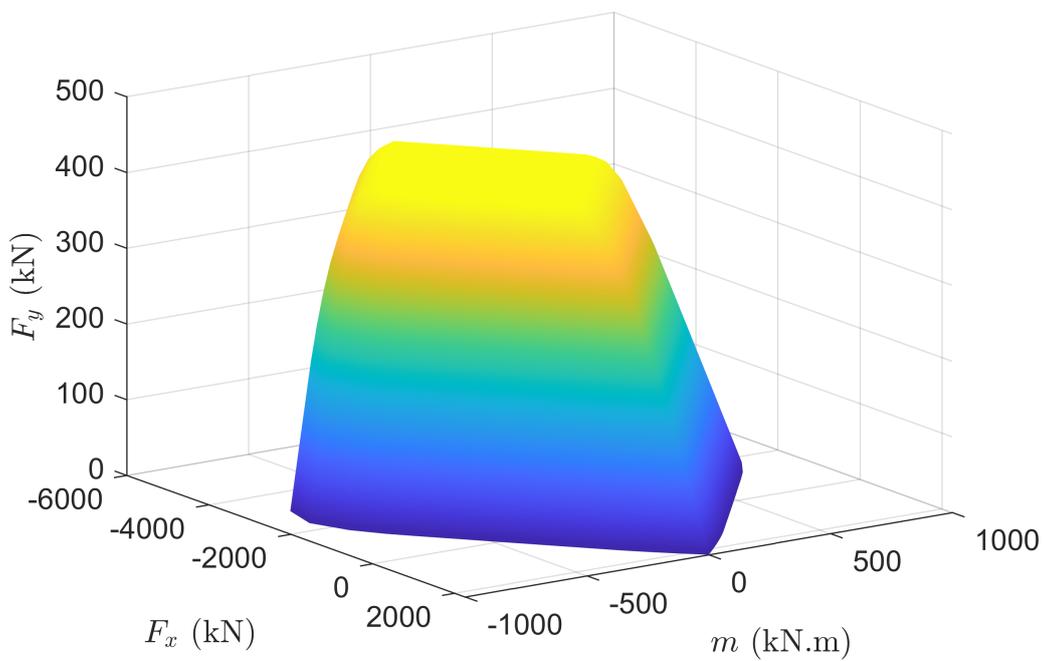


FIGURE 2.9 – Domaine de résistance  $(F_x, F_y, m)$  de la poutre n°2

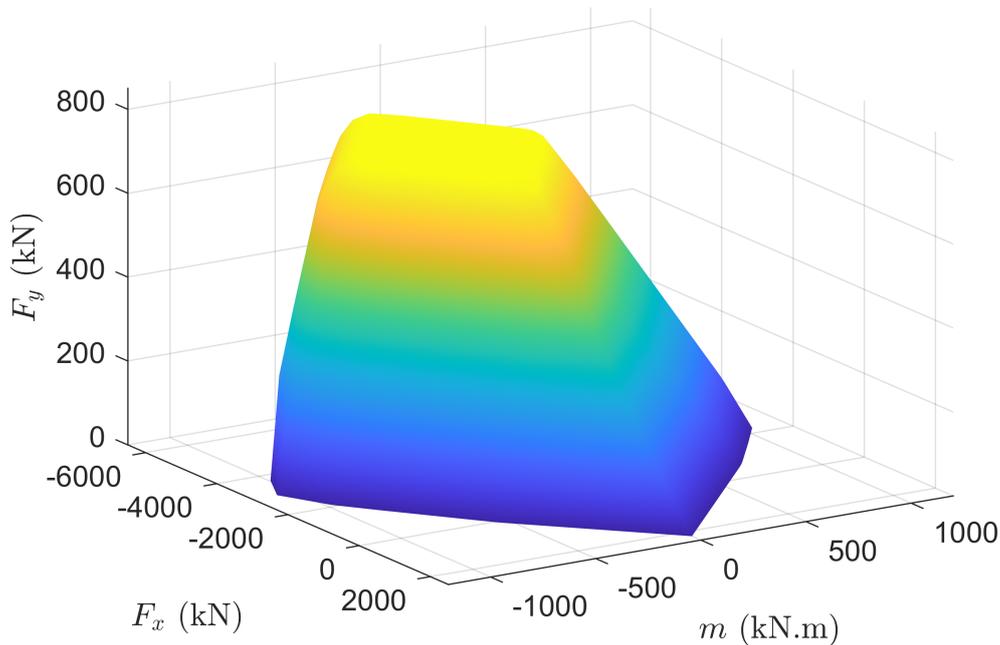


FIGURE 2.10 – Domaine de résistance  $(F_x, F_y, m)$  de la poutre n°3

### 2.3.2 Domaines de résistance $(F_x, F_y)_{m=0}$

La Figure 2.11 présente les coupes des domaines de résistance des trois poutres étudiées par le plan d'équation  $(m = 0)$ .

On peut voir, comme attendu, l'effet favorable des renforcements longitudinaux et transversaux sur les capacités de résistance de la poutre. La valeur de la charge transversale maximale est notamment améliorée d'environ 38% (respectivement 146%) grâce à la contribution des armatures longitudinales (respectivement longitudinales et transversales). Néanmoins, les armatures transversales semblent ne participer que très peu à la résistance à l'effort tranchant de la poutre soumises à des efforts axiaux de traction. Leur contribution devient même négligeable dans le cas de valeurs de traction importantes.

La figure permet également d'identifier l'influence du chargement axial sur la résistance à l'effort transversal pour chacune des trois poutres. En effet, on peut voir que l'augmentation de la charge axiale de traction entraîne une diminution de la charge transversale qui peut être supportée par les poutres n°2 et 3. La poutre n°1 quant à elle ne résiste pas à des

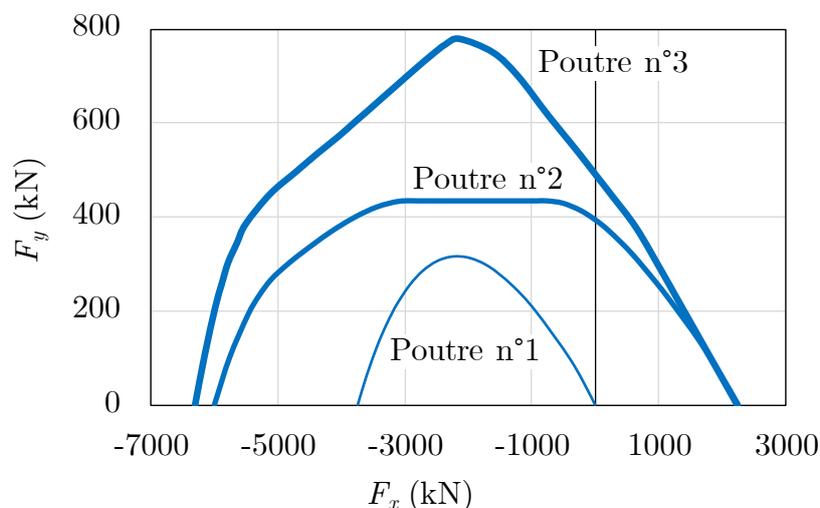


FIGURE 2.11 – Domaines de résistance des trois poutres dans le plan  $(F_x, F_y)_{m=0}$

charges axiales de traction en l'absence de renforcement. En revanche, l'augmentation de la charge axiale de compression engendre une augmentation de la résistance transversale, avant d'atteindre une valeur maximale, puis de diminuer pour des valeurs de compression importantes. Il apparaît que pour la poutre n°2 cette valeur maximale reste constante sur la plage des efforts de compression compris entre  $-750$  et  $-3090$  kN, représentant approximativement 20 et 82% de la résistance en compression de la poutre en béton seul. En ce qui concerne les poutres n°1 et n°3, les résistances transversales maximales sont obtenues pour des charges axiales peu différentes, égales à environ  $-2250$  kN pour la poutre n°1 et  $-2140$  kN pour la poutre n°3, soit environ 60% et 57% respectivement de la résistance en compression de la poutre en béton seul.

Les contributions relatives aux différents éléments constituant les poutres n°2 et 3 à la puissance résistante maximale sont représentées sous forme d'histogrammes sur les Figures 2.12a et b respectivement, afin d'évaluer le degré de participation de chaque élément à la résistance de la poutre. La contribution du béton y est représentée en gris tandis que celles des armatures longitudinales et transversales sont représentées en rouge et jaune respectivement.

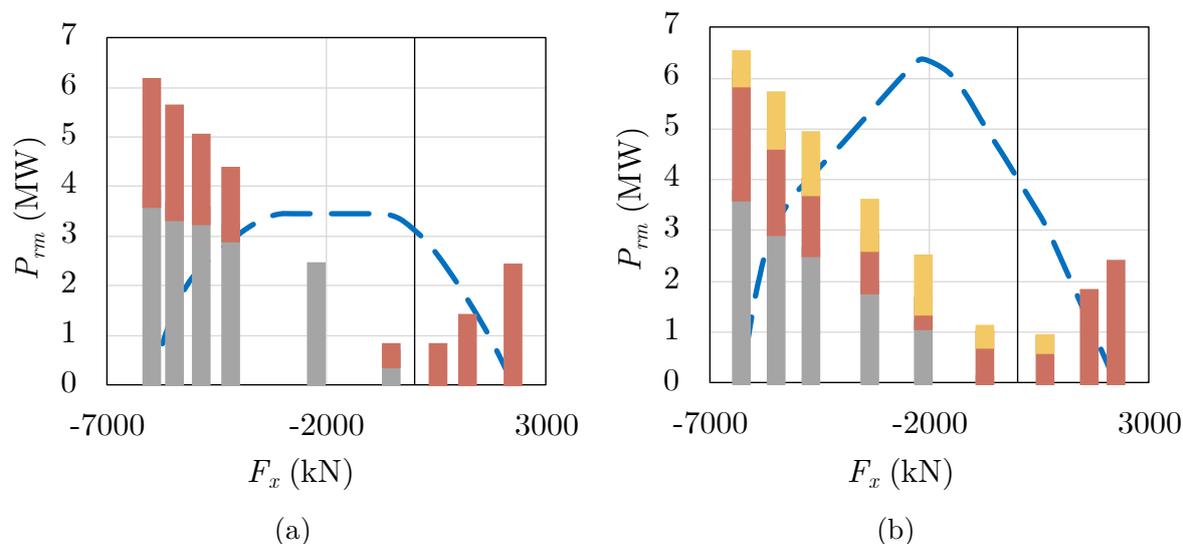


FIGURE 2.12 – Contribution du béton (en gris), des armatures longitudinales (en rouge) et des armatures transversales (en jaune) à la puissance résistante maximale. Cas des poutres (a) n°2 et (b) n°3

Il apparaît notamment que le béton seul participe à la valeur de la puissance résistante maximale de la poutre n°2 au niveau du plateau correspondant à la résistance transversale maximale. Ceci ne remet pas en question l'apport bénéfique des armatures sur la résistance transversale de la poutre, mais montre que la discontinuité de vitesse mise en jeu dans le mécanisme de ruine optimal est normale aux armatures d'acier. On peut voir également que la contribution des armatures longitudinales est plus importante que celles du béton et des armatures transversales (nulles ou très faibles) pour des charges axiales de traction. C'est aussi le cas pour des charges axiales de compression faibles (avant que la charge transversale n'atteigne sa valeur maximale). En revanche, pour des charges de compression importantes, c'est le béton qui participe le plus à la résistance de la poutre, suivi des armatures longitudinales, puis des armatures transversales. Cela est probablement dû au fait que la poutre n°3 contient un faible taux de renforcement transversal, contrairement au renforcement longitudinal dont le taux est relativement élevé. Toutefois, au niveau du pic de la charge transversale (atteinte pour une compression modérée), la contribution des armatures transversales est plus importante que celle des armatures longitudinales.

## 2.4 Études paramétriques

Dans ce qui suit, des études paramétriques sont réalisées sur les trois poutres décrites dans la section 2.3, afin d'analyser l'influence sur la résistance de la poutre, des différents paramètres entrant en jeu, à savoir :

- le moment supplémentaire appliqué aux extrémités de la poutre  $m$  ;
- l'élanement de la poutre défini par le rapport  $a/h$  ;
- le degré de renforcement longitudinal défini par le rapport  $\Phi = (A_s\sigma_y)/(f_cbh)$  ;
- le degré de renforcement transversal défini par le paramètre  $\Phi_w = (A_{sw}\sigma_{yw})/(f_cbs)$ .

En particulier, pour les trois poutres présentées dans la section précédente, ces paramètres correspondent à :

- $a/h = 3$  pour les trois poutres ;
- $\Phi = 0$  pour la poutre n°1 et  $\Phi = 0,6$  pour les poutres n°2 et 3 ;
- $\Phi_w = 0$  pour les poutres n°1 et 2 et  $\Phi_w = 0,025$  pour la poutre n°3.

De telles études paramétriques ont été présentées par [Ganwei et Nielsen \(1988, 1990\)](#) montrant également l'influence du rapport  $a/h$  et des degrés de renforcement longitudinal et transversal sur les domaines de résistance de poutres soumises à des charges transversales et axiales (en l'absence de moment fléchissant aux extrémités), à l'aide de leur méthode décrite dans la section 1.4.1 du chapitre 1.

### 2.4.1 Influence d'un moment supplémentaire

Afin d'évaluer l'influence du moment supplémentaire  $m$  sur les domaines de résistance des poutres en béton armé, on fait varier celui-ci entre ses résistances en flexion simple ( $-m_{max}$  et  $m_{max}$ ). La valeur de  $m_{max}$  a été estimée à l'aide de la méthode proposée, en considérant une poutre soumise uniquement au moment supplémentaire. Dans le cas des poutres n°2 et 3 considérées,  $m_{max}$  est égal à environ 480 kN.m. Les domaines de résistance obtenus pour  $m/m_{max} = -1, -0,5, 0, 0,5$  et 1 sont représentés sur la même figure pour chacune des deux poutres n°2 et 3 (Figures 2.13 et 2.14 respectivement) en fonction des chargements normalisés par la résistance en compression simple de la poutre en béton seul. La poutre n°1 n'est pas étudiée ici puisque sa résistance à la flexion simple est nulle.

On observe que l'application d'un moment supplémentaire positif à la poutre n°2 renforcée par des armatures longitudinales (Figure 2.13) entraîne une diminution de ses capacités de résistance vis-à-vis des deux autres paramètres de chargements  $F_x$  et  $F_y$  (rétrécissement du domaine de résistance). Le plateau horizontal observé pour un moment nul se rétrécit pour se réduire à un point, mais la valeur maximale, atteinte pour un moment  $m = 0,5m_{max}$ , reste constante (représentant un peu moins de 12% de la résistance à la compression de la poutre en béton seul). En revanche, dans le cas où  $m = m_{max}$ , le domaine de résistance atteint une valeur maximale plus faible, qui représente 73% de la valeur maximale du plateau initial, et ce pour une valeur de compression axiale plus élevée que celle du cas  $m = 0,5m_{max}$  ( $F_x = -0,60f_cbh$  au lieu de  $-0,46f_cbh$ ). On constate également que la poutre ne résiste plus à des charges axiales de traction lorsque  $m = m_{max}$ . Il semble de plus que ce domaine soit une translation le long de l'axe  $F_y$  de celui obtenu pour  $m = 0,5m_{max}$ .

Contrairement au cas où le moment supplémentaire est positif, la tendance n'est pas claire quant à l'effet du moment négatif. En effet, lorsque celui-ci est égal à  $m = -0,5m_{max}$ , le domaine de résistance présente un plateau horizontal avec une valeur égale à celle du cas sans moment supplémentaire. Néanmoins, celui-ci s'élargit. Il est atteint pour  $F_x$  compris entre  $0,07f_cbh$  et  $-1,10f_cbh$ , au lieu de  $-0,20f_cbh$  et  $-0,82f_cbh$  pour le cas sans moment supplémentaire. On remarque également que la résistance à la charge transversale sous des efforts axiaux de compression et de traction modérés devient plus importante. Ce n'est pas le cas pour des valeurs importantes de la charge axiale où la charge transversale diminue de manière brutale pour atteindre des valeurs de résistance en traction et en compression simples égales à celles de la poutre soumise au moment supplémentaire opposé ( $m = 0,5m_{max}$ ).

Lorsqu'on applique le moment maximal négatif ( $m = -m_{max}$ ), le domaine de résistance se rétrécit. En particulier, il apparaît que la poutre n'a plus de résistance sous des charges axiales de traction, comme observé dans le cas du moment supplémentaire maximal positif ( $m = m_{max}$ ). Le domaine présente également un plateau horizontal dont la valeur est identique à celle des autres cas ( $m = -0,5, 0$  et  $0,5m_{max}$ ). En revanche, celui-ci est plus étroit que celui correspondant au cas  $m = -0,5m_{max}$  ( $F_x$  compris entre  $0,03f_cbh$  et  $-f_cbh$ ), mais reste plus large que celui de la poutre sans moment supplémentaire. On en déduit donc, qu'à partir d'une certaine valeur du moment supplémentaire, le domaine de résistance de la poutre présente un plateau dont la valeur est indépendante du moment supplémentaire appliqué, mais dont la largeur en dépend.

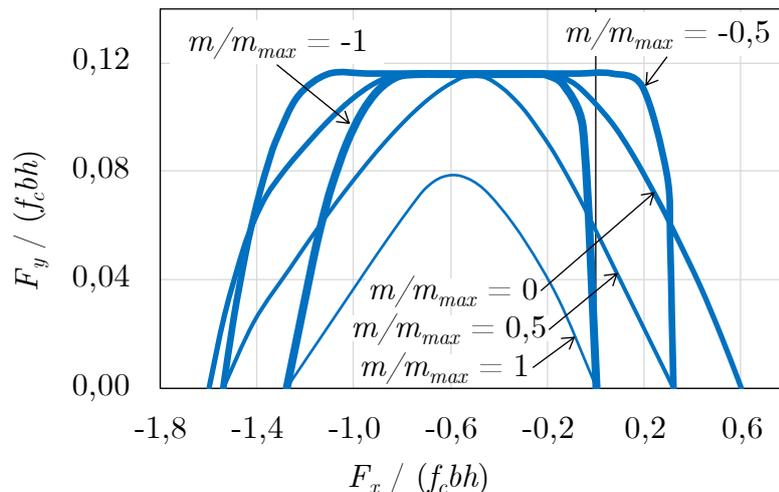


FIGURE 2.13 – Influence du moment supplémentaire  $m$  sur le domaine de résistance de la poutre n°2

En ce qui concerne la poutre n°3 renforcée par des armatures transversales en sus des armatures longitudinales (Figure 2.14), on peut observer également la même tendance de diminution du domaine de résistance due à l'augmentation du moment supplémentaire positif appliqué aux extrémités ( $m = 0,5m_{max}$  et  $m_{max}$ ). Les domaines semblent aussi être obtenus par translation verticale de celui correspondant au cas sans moment supplémentaire, en gardant la même forme avec un pic maximal de la charge transversale, égal à 83% (respectivement 63%) de la valeur du pic pour un moment nul pour le cas  $m = 0,5m_{max}$  (respectivement  $m = m_{max}$ ). Ces pics sont atteints pour des valeurs de compression augmentant légèrement à mesure qu'on augmente le moment positif appliqué. Il est atteint pour des charges axiales égales à  $-0,57$ ,  $-0,60$  et  $-0,67$  fois la résistance à la compression de la poutre en béton seul pour les cas  $m/m_{max} = 0, 0,5$  et  $1$  respectivement.

Cependant, lorsqu'un moment négatif est appliqué, on remarque l'apparition d'un plateau horizontal maximal de la charge transversale, avec une valeur très proche de la valeur maximale du domaine de résistance de la poutre sans moment supplémentaire. Contrairement à la tendance observée pour la poutre sans cadres de renforcement transversal, ce plateau s'élargit lorsque le moment négatif augmente (en valeur absolue). Il est atteint pour des valeurs de la charge axiale comprises entre  $-0,26f_c b h$  et  $-0,87f_c b h$  pour  $m = -0,5m_{max}$ , et entre  $0,12f_c b h$  et  $-1,11f_c b h$  pour  $m = -m_{max}$ . On remarque également que ces domaines présentent une diminution brutale de la charge transversale

ultime lorsque des efforts axiaux de traction et de compression importants sont appliqués. Les valeurs maximales des charges axiales sont d'ailleurs plus faibles lorsque le moment négatif est appliqué (et sont égales à celles obtenues pour les valeurs opposées du moment supplémentaire).

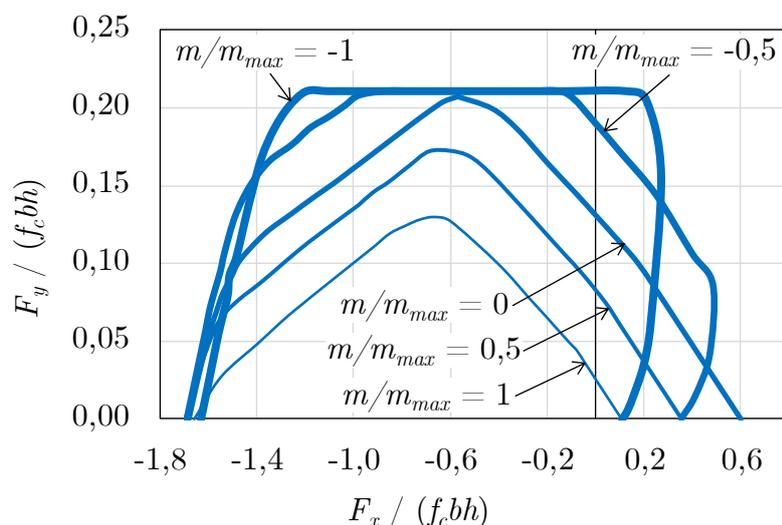


FIGURE 2.14 – Influence du moment supplémentaire  $m$  sur le domaine de résistance de la poutre n°3

## 2.4.2 Influence du rapport $a/h$

Sur les figures ci-après, l'influence de l'élanement  $a/h$  de la poutre sur son domaine de résistance est étudiée dans le cas d'un moment supplémentaire nul ( $m = 0$ ). Ce rapport varie entre 2 et 5 pour les trois exemples de poutres étudiées (Figures 2.15, 2.16 et 2.17 pour les poutres n°1, 2 et 3 respectivement). Pour une hauteur de la poutre fixée, augmenter le rapport  $a/h$  revient à appliquer la charge transversale de plus en plus loin de l'appui de gauche. La valeur 5 en l'occurrence, correspond à l'application de la charge au milieu de la poutre considérée.

On constate que l'augmentation du rapport  $a/h$  entraîne une diminution du domaine de résistance pour les poutres n°1 en béton seul (Figure 2.15) et n°2 renforcée par des armatures longitudinales (Figure 2.16). Cette diminution devient plus faible à mesure que l'on augmente la valeur du rapport  $a/h$ . En particulier, les cas  $a/h = 4$  et 5 conduisent à des résultats très proches. Si on s'intéresse par exemple à la valeur maximale de la charge

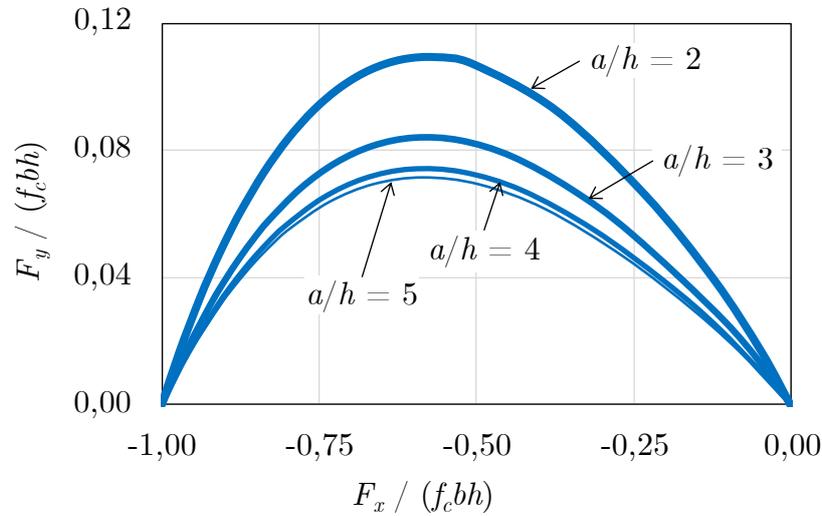


FIGURE 2.15 – Influence du rapport  $a/h$  sur le domaine de résistance de la poutre n°1

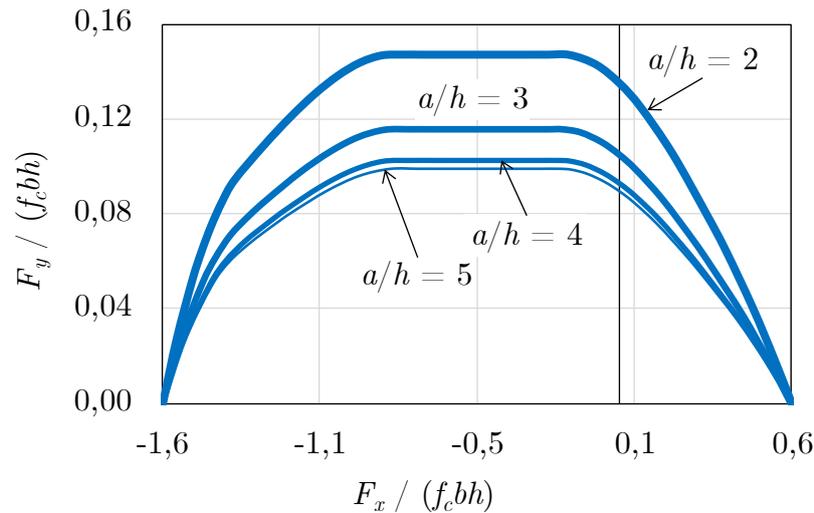


FIGURE 2.16 – Influence du rapport  $a/h$  sur le domaine de résistance de la poutre n°2

transversale, celle-ci diminue par rapport au cas  $a/h = 2$  de 23, 32 et 35% (respectivement 21, 30 et 33%) pour la poutre n°1 (respectivement n°2) lorsque  $a/h = 3, 4$  et 5. On remarque également que la forme des domaines de résistance reste quasiment la même, et que les courbes semblent être homothétiques l'une de l'autre sous l'effet de la variation du paramètre  $a/h$ . On observe la présence d'un plateau horizontal maximal de la charge transversale pour la poutre n°2 et d'un point maximal pour la poutre n°1. Ceux-ci sont atteints pour des valeurs très proches de la charge axiale pour les différents cas étudiés. En effet, pour la poutre n°1, la charge maximale est atteinte pour  $F_x = -0,56f_cbh$  pour le

cas  $a/h = 2$ ,  $-0,58f_cbh$  pour  $a/h = 5$  et  $-0,60f_cbh$  pour les deux autres cas. En ce qui concerne la poutre n°2, le plateau correspond à des charges axiales comprises entre environ  $-0,20$  et  $-0,75f_cbh$  quelle que soit la valeur du rapport  $a/h$ .

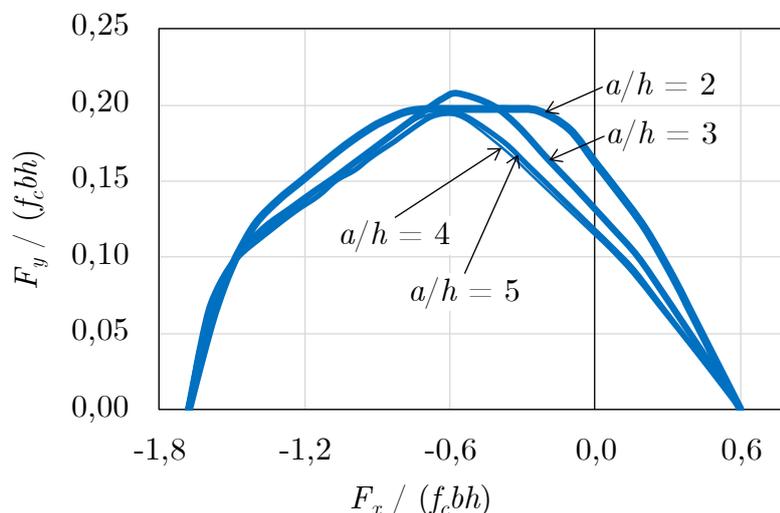


FIGURE 2.17 – Influence du rapport  $a/h$  sur le domaine de résistance de la poutre n°3

En revanche, cette tendance d'augmentation à l'agrandissement sous forme d'une homothétie du domaine de résistance sous l'effet de la diminution de  $a/h$  n'est plus vérifiée lorsque la poutre est renforcée par des armatures transversales (Figure 2.17). Il apparaît par exemple que lorsque  $a/h = 2$ , le domaine de résistance est certes élargi par rapport à ceux obtenus pour des valeurs d'élancement plus importantes, mais présente un plateau horizontal de valeur légèrement inférieure (d'environ 5%) par rapport à celle du pic du domaine de résistance pour un rapport de  $a/h = 3$ . De plus, on remarque que les cas de  $a/h = 4$  et 5 donnent pratiquement les mêmes résultats, comme cela a été déjà observé pour les poutres n°2 et 3, avec des pics qui atteignent la même valeur que celle du plateau de la poutre avec  $a/h = 2$ .

### 2.4.3 Influence du renforcement longitudinal

Dans cette partie, l'influence du degré de renforcement longitudinal  $\Phi$  sur le domaine de résistance est étudiée. Initialement fixé à 0,6 pour la poutre n°2, on fait varier celui-ci entre 0 (ce qui correspond à la poutre n°1) et 0,8.

D'après la Figure 2.18, il est clair que l'augmentation du degré de renforcement longitudinal entraîne une augmentation du domaine de résistance, comme attendu. On peut voir également, que pour des valeurs de renforcement longitudinal faibles, les domaines de résistance ne présentent pas de plateau horizontal. Celui-ci apparaît à partir d'un certain degré de renforcement ( $\Phi = 0,4$  dans cet exemple). On constate aussi qu'à mesure que le degré de renforcement augmente, le plateau s'élargit. En effet, ce plateau est atteint pour des charges axiales comprises entre  $-0,40f_cbh$  et  $-0,60f_cbh$  pour  $\Phi = 0,4$ , entre  $-0,20f_cbh$  et  $-0,75f_cbh$  pour  $\Phi = 0,6$ , et entre 0 et  $-0,94f_cbh$  pour  $\Phi = 0,8$ . Cependant, il présente la même valeur maximale d'environ  $0,12f_cbh$  qui reste indépendante du degré de renforcement longitudinal.

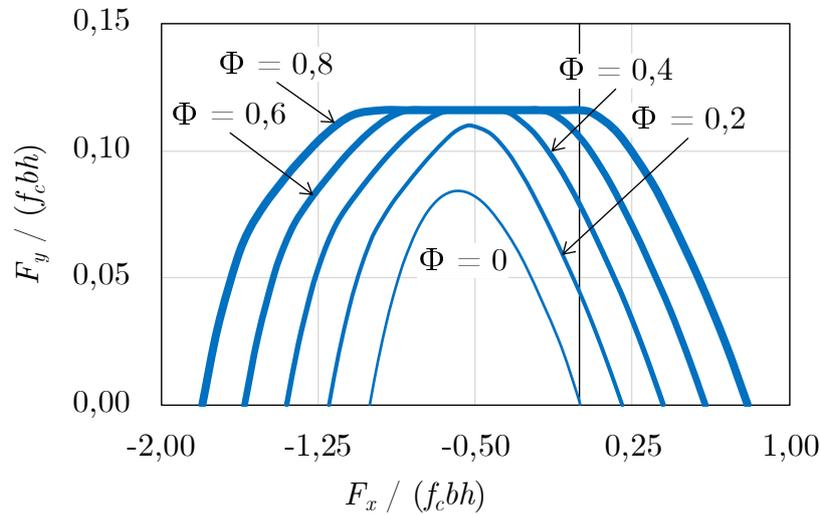


FIGURE 2.18 – Domaines de résistance d'une poutre en béton armé avec  $a/h = 3$ ,  $\Phi_w = 0,6$  et pour différents degrés de renforcement longitudinal  $\Phi$

On peut montrer que la valeur de la charge transversale maximale correspondant au plateau (ou plus précisément du majorant optimal obtenu par la minimisation décrite en 2.2.4) est donnée par la formule suivante (calculs détaillés dans l'annexe A), qui ne fait intervenir que la résistance à la compression du béton, comme déjà observé dans la section 2.3.2 :

$$F_{y,max} = \frac{1}{2} f_c b h \left( \sqrt{1 + \left(\frac{a}{h}\right)^2} - \frac{a}{h} \right) \frac{l}{l-a} \quad (2.35)$$

Cette expression peut être retrouvée également à partir de la résistance maximale à l'effort tranchant déterminée par Ganwei et Nielsen (1988, 1990) et Zhang (1997) à l'aide de leurs mécanismes décrits dans les sections 1.4.1 et 1.4.2 du chapitre 1.

L'approche cinématique décrite ci-dessus conduit en effet à un mécanisme de ruine optimal (représenté sur la Figure 2.19) qui coïncide avec celui considéré par Ganwei et Nielsen (1988, 1990) et par Zhang (1997). Ce mécanisme correspond à un plan de discontinuité de vitesse avec un angle d'inclinaison minimal par rapport au plan horizontal ( $\alpha = \alpha_{min}$ ), correspondant à la ligne reliant le point d'application de la charge transversale à l'appui de gauche. Les deux blocs sont animés de mouvements rigidifiants tels que les deux taux de rotation et les deux vitesses de translation au niveau des points de contact A et B entre les appuis et les blocs vérifient les équations suivantes :

$$\begin{cases} \dot{\theta}_1 = -\dot{\theta}_2 \\ \dot{\delta}_1 = -\dot{\delta}_2 \end{cases} \quad (2.36)$$

Dans ces conditions, la discontinuité de vitesse donnée par la formule (2.37), est bien constante le long du plan de discontinuité de vitesse et verticale, comme considéré par Ganwei et Nielsen (1988, 1990) et par Zhang (1997) :

$$[U] = -\dot{\theta}_2 l e_y \quad (2.37)$$

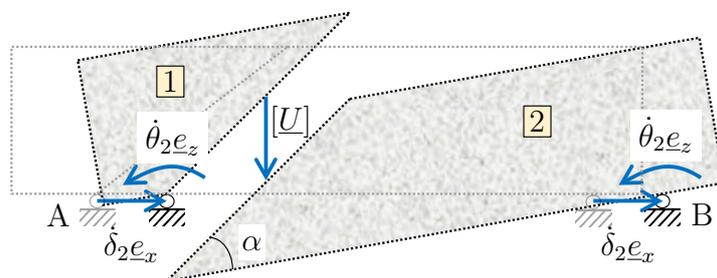


FIGURE 2.19 – Mécanisme optimal associé à la valeur du plateau horizontal du domaine de résistance

#### 2.4.4 Influence du renforcement transversal

Afin d'étudier l'influence du degré de renforcement transversal  $\Phi_w$  sur le domaine de résistance de la poutre étudiée, on fait varier celui-ci entre 0 (ce qui correspond à la poutre n°2) et 0,2 (soit huit fois le degré de renforcement de la poutre n°3).

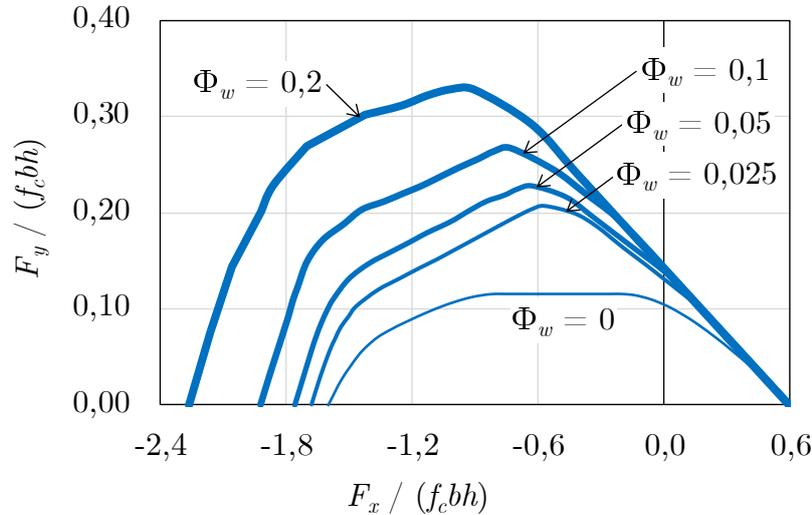


FIGURE 2.20 – Domaines de résistance d’une poutre en béton armé avec  $a/h = 3$ ,  $\Phi = 0,6$  et pour différents degrés de renforcement transversal  $\Phi_w$

On peut voir à partir de la Figure 2.20 que l’augmentation du degré de renforcement transversal entraîne une augmentation du domaine de résistance de la poutre, notamment dans le demi-plan correspondant à des chargements axiaux de compression. En particulier, il apparaît que le domaine de résistance, qui présente un plateau dans le cas d’une poutre sans cadres, fait apparaître un pic dès que la poutre est renforcée transversalement. La valeur de ces pics augmente avec l’augmentation du degré de renforcement puisque  $F_{y,max} = 0,21, 0,23, 0,27$  et  $0,33f_cbh$  pour  $\Phi_w = 0,025, 0,05, 0,1$  et  $0,2$  respectivement (soit une augmentation de 79, 97, 130 et 183% respectivement par rapport à la valeur maximale obtenue pour le cas sans armatures transversales). De plus, ces pics correspondent à des valeurs de la charge axiale de compression qui augmentent avec le degré de renforcement. En effet, ils sont obtenus pour des charges axiales de  $F_x = -0,57, -0,63, -0,73$  et  $-1,01f_cbh$  pour  $\Phi_w = 0,025, 0,05, 0,1$  et  $0,2$  respectivement.

En ce qui concerne la résistance de la poutre dans le demi-plan correspondant à des chargements axiaux de traction ( $F_x > 0$ ), on constate que l’ajout du renforcement transversal avec un degré de 0,025 a permis une augmentation du domaine de résistance, plus faible que celle observée dans le domaine des charges axiales de compression, et ce uniquement pour des valeurs de traction modérées (inférieures à 57% de la résistance à la traction de la poutre). De plus, la frontière du domaine de résistance reste quasiment inchangée lorsqu’on considère des degrés de renforcement plus élevés. La résistance en traction simple de la poutre semble par ailleurs indépendante du renforcement transversal.

## 2.5 Mise en oeuvre d'autres mécanismes

Dans la section 2.2, une première approche par l'extérieur du domaine de résistance a été présentée. Cette approche repose sur la mise en oeuvre d'un mécanisme de ruine virtuel mettant en jeu deux blocs rigides séparés par une surface plane. On présente dans cette section deux autres mécanismes plans, ainsi que leurs mises en oeuvre pour l'estimation des capacités de résistance des poutres n°1, 2 et 3 présentées en 2.3. Ces deux mécanismes se présentent comme deux généralisations possibles du premier mécanisme étudié, par l'emploi de plusieurs surfaces de discontinuités planes (2.5.1) ou d'une seule surface de discontinuité courbe (2.5.2).

### 2.5.1 Mise en oeuvre de plusieurs surfaces de discontinuité planes

Dans le mécanisme étudié dans cette partie, la surface de discontinuité de vitesse est constituée de  $(n - 1)$  surfaces planes parallèles à l'axe  $Oz$ . La Figure 2.21 donne une représentation dans le plan  $Oxy$  de ce mécanisme dans laquelle les surfaces de discontinuité de vitesse sont représentées par des segments de droites reliant  $n \geq 2$  points notés  $M_i (i \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket)$ . La surface ainsi construite, sépare la poutre en deux blocs animés des mêmes mouvements de corps rigides que ceux considérés dans la section 2.2.4. Il s'agit en fait d'une généralisation du mécanisme précédent, pouvant être retrouvé dans le cas particulier de  $n = 2$  points. C'est pour cette raison que l'on peut affirmer que les résultats obtenus par la mise en oeuvre de ce mécanisme, que l'on appellera désormais mécanisme 2, seront a priori meilleurs que ceux obtenus dans les deux sections précédentes.

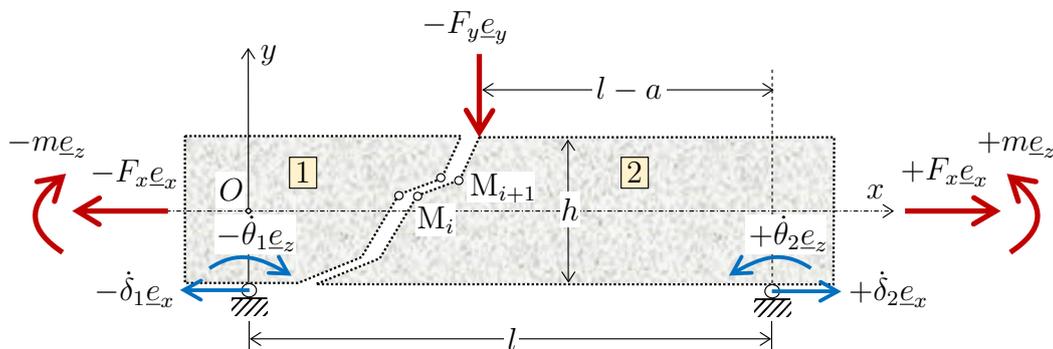


FIGURE 2.21 – Mécanisme 2 à plusieurs surfaces de discontinuité planes

Chaque surface de discontinuité de vitesse  $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ , et par suite chaque segment  $[M_i, M_{i+1}]$  du plan  $(Oxy)$ , est inclinée d'un angle  $\alpha_i \in [0, \pi/2]$  (Figure 2.22) par rapport à l'axe  $(Ox)$ . Notant par  $(x_i, y_i)$  les coordonnées du point  $M_i$  et supposant que ces points sont uniformément répartis selon  $Oy$ , il vient alors :

$$y_i = -\frac{h}{2} + (i-1)\frac{h}{n-1} \quad i \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad (2.38)$$

$$\begin{cases} x_i \in [0, a] & i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket \\ x_n = a \end{cases} \quad (2.39)$$

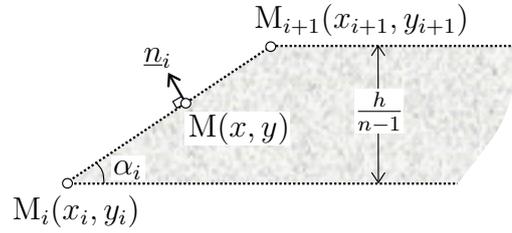


FIGURE 2.22 – Zoom sur la  $i^{\text{ème}}$  surface de discontinuité de vitesse

On considère un point  $M(x, y)$  se situant sur la droite de discontinuité  $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ . Ses coordonnées vérifient donc les équations suivantes :

$$y_i \leq y \leq y_{i+1} \quad (2.40)$$

$$x = \frac{y - y_i}{\tan \alpha_i} + x_i \quad (2.41)$$

La discontinuité de vitesse au niveau du point  $M$  s'écrit en utilisant les équations (2.14) et (2.41) comme suit :

$$\begin{aligned} [U](x, y) = & \overbrace{\left[ (\dot{\delta}_1 + \dot{\delta}_2) - (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \left( y + \frac{h}{2} \right) \right]}^{[U_x]} e_x \\ & + \underbrace{\left[ (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \left( \frac{y - y_i}{\tan \alpha_i} + x_i \right) - \dot{\theta}_2 l \right]}_{[U_y]} e_y \end{aligned} \quad (2.42)$$

La contribution totale du béton à la puissance résistance maximale développée dans ce mécanisme est obtenue en sommant les contributions de chaque surface de discontinuité vitesse de normale  $\underline{n}_i = \sin \alpha_i \underline{e}_x - \cos \alpha_i \underline{e}_y$  :

$$P_{rm}^b = b \frac{f_c}{2} \left( \sum_{i=1}^{n-1} \int_{y_i}^{y_{i+1}} (|[U]| - [U] \cdot \underline{n}_i) \frac{dy}{\sin \alpha_i} \right) \quad (2.43)$$

Cette équation est valable sous réserve de la vérification en tout point de la surface de discontinuité de la condition de pertinence du critère de Mohr-Coulomb entièrement tronqué en traction. Cette condition peut se limiter à sa vérification aux deux points extrémités  $M_i$  et  $M_{i+1}$  :

$$[U_x] \sin \alpha_i - [U_y] \cos \alpha_i \geq \sqrt{[U_x]^2 + [U_y]^2} \sin \varphi \quad (2.44)$$

Les expressions des puissances résistantes maximales apportées par les renforcements longitudinaux et transversaux restent inchangées et sont données par (2.24) et (2.25). Il en est de même pour l'expression de la puissance des efforts extérieurs (2.11). Comme on l'avait vu dans la section 2.2, cette dernière ne dépend pas de l'orientation de la surface de discontinuité de vitesse choisie, mais uniquement des paramètres cinématiques considérés.

Une estimation par l'extérieur du domaine de résistance est finalement obtenue en suivant la même démarche que celle détaillée dans la section 2.2.4, et en résolvant un problème d'optimisation non-linéaire par rapport aux paramètres suivants :

- les trois paramètres cinématiques  $(\dot{\delta}_1 + \dot{\delta}_2)$ ,  $\dot{\theta}_1$ ,  $\dot{\theta}_2 \in \mathbb{R}$  ;
- les  $n$  coordonnées  $x_i$  des points  $M_i$  délimitant les droites de discontinuité, vérifiant les équations (2.39) ;
- et les  $(n - 1)$  angles d'inclinaison  $\alpha_i \in [0, \pi/2]$  des droites,

et ce, sous les  $2(n - 1)$  contraintes non-linéaires imposées par la condition de pertinence du béton donnée par (2.44).

## 2.5.2 Mise en oeuvre d'une surface de discontinuité courbe

Il est intéressant également d'explorer un mécanisme mettant en jeu une discontinuité de vitesse selon une surface courbe, engendrée par la translation selon l'axe  $Oz$  d'une spirale logarithmique définie dans le plan  $Oxy$  (Figure 2.23). Cette spirale de centre

## 2.5. Mise en oeuvre d'autres mécanismes

$\Omega(x_\Omega, y_\Omega)$  coupe les faces inférieure et supérieure de la poutre aux points  $M_1$  et  $M_2$  de coordonnées polaires respectives  $(r_1, \omega_1)$  et  $(r_2, \omega_2)$  (Figure 2.23). Rappelons que, d'une manière générale, l'équation polaire d'une spirale logarithmique est donnée par :

$$r(\omega) = r_0 \exp(\omega \tan \beta) \quad (2.45)$$

avec :

- $r_0$  : le rayon de la spirale pour un angle  $\omega$  nul ;
- $\beta$  : l'angle formé entre la tangente à la spirale et le vecteur perpendiculaire au rayon de la spirale, comme indiqué sur la Figure 2.24.

On choisit par ailleurs de faire coïncider le point  $M_2$  avec le point d'application de la charge transversale  $F_y$ . Ce choix est motivé par une volonté de réduire le nombre d'inconnues et par suite le nombre de variables d'optimisation et donc le temps de calcul nécessaire. Les coordonnées polaires du point  $M_2$  s'expriment en fonction des coordonnées du centre de la spirale  $\Omega$  par :

$$\begin{cases} r_2 = \sqrt{(a - x_\Omega)^2 + \left(y_\Omega - \frac{h}{2}\right)^2} \\ \omega_2 = \arctan\left(\frac{a - x_\Omega}{y_\Omega - \frac{h}{2}}\right) \end{cases} \quad (2.46)$$

La surface de discontinuité de vitesse ainsi définie sépare donc la poutre en deux blocs qui sont animés des mêmes mouvements rigidifiants que ceux considérés dans les deux mécanismes étudiés précédemment (sections 2.2.4 et 2.5.1).

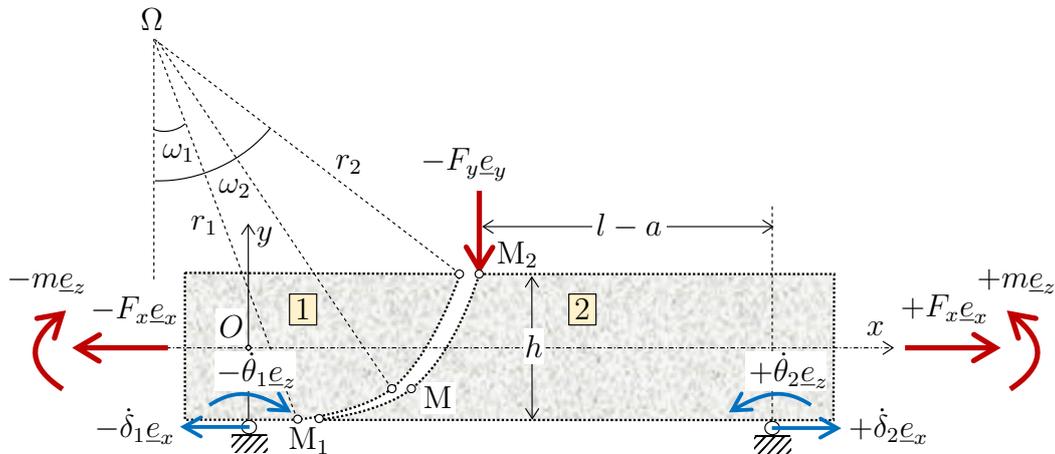


FIGURE 2.23 – Discontinuité de vitesse au travers d'une spirale logarithmique

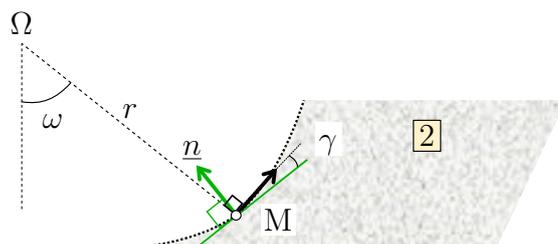


FIGURE 2.24 – Zoom sur un point M de la spirale logarithmique

On considère un point  $M(x, y)$  de la spirale logarithmique. Ses coordonnées cartésiennes et polaires sont reliées par les deux relations suivantes faisant intervenir les coordonnées du centre de la spirale  $\Omega$  :

$$\begin{cases} x = x_{\Omega} + r(\omega) \sin \omega \\ y = y_{\Omega} - r(\omega) \cos \omega + \frac{h}{2} \end{cases} \quad (2.47)$$

En utilisant les équations (2.16), (2.17) et (2.47), les projections de la discontinuité de vitesse au point M selon les axes  $Ox$  et  $Oy$  sont données respectivement par les expressions suivantes :

$$[U_x] = (\dot{\delta}_1 + \dot{\delta}_2) - (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) (y_{\Omega} + r(\omega) \cos \omega + h) \quad (2.48)$$

$$[U_y] = (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) (x_{\Omega} + r(\omega) \sin \omega) - \dot{\theta}_2 l \quad (2.49)$$

La contribution du béton à la puissance résistance maximale se réduit donc à celle de la discontinuité de vitesse à la traversée de la courbe (spirale logarithmique)  $M_1M_2$  de normale  $\underline{n} = -\sin(\omega - \beta)\underline{e}_x + \cos(\omega - \beta)\underline{e}_y$ . Elle est calculée en intégrant la fonction d'appui relative à la discontinuité de vitesse le long de la surface de discontinuité, c'est-à-dire pour des valeurs de  $z$  comprises entre 0 et  $b$  et des valeurs de  $\omega$  entre  $\omega_1$  et  $\omega_2$  :

$$P_{rm}^b = b \frac{f_c}{2} \int_{\omega_1}^{\omega_2} \left( \sqrt{[U_x]^2 + [U_y]^2} + [U_x] \sin(\omega - \beta) - [U_y] \cos(\omega - \beta) \right) \frac{r(\omega)}{\cos \beta} d\omega \quad (2.50)$$

Cette expression est valable si la condition de pertinence suivante est vérifiée en tout point de la spirale :

$$- [U_x] \sin(\omega - \beta) + [U_y] \cos(\omega - \beta) \geq \sqrt{[U_x]^2 + [U_y]^2} \sin \varphi \quad (2.51)$$

Les expressions de la contribution des armatures longitudinales et transversales à la puissance résistante maximale, ainsi que la puissance des efforts extérieurs sont inchangées et sont données respectivement par les équations (2.24), (2.25) et (2.11).

Une estimation par l'extérieur du domaine de résistance de la poutre peut dès lors être obtenue en utilisant la démarche décrite dans la section 2.2.4 faisant intervenir des trajets de chargements radiaux, en optimisant l'expression suivante :

$$\frac{P_{rm}(x_{\Omega}, y_{\Omega}, \omega_1, \beta, \dot{\delta}_1 + \dot{\delta}_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2)}{P_{ext}(F_{x0}, F_{y0}, m_0, \dot{\delta}_1 + \dot{\delta}_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2)} \quad (2.52)$$

par rapport aux sept paramètres suivants :

- les trois paramètres cinématiques  $(\dot{\delta}_1 + \dot{\delta}_2), \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2 \in \mathbb{R}$  ;
- les angles  $\omega_1, \beta \in [0, \pi/2]$  de la spirale ;
- les coordonnées  $(x_{\Omega}, y_{\Omega}) \in ]-\infty, a] \times [h, +\infty[$  du centre de la spirale  $\Omega$ ,

en respectant la condition de pertinence du béton donnée par la formule (2.51) et la condition géométrique portant sur la position du point  $M_1$  :

$$\begin{cases} 0 \leq x_{M_1} \leq a & \Rightarrow 0 \leq x_{\Omega} + r_1 \sin \omega_1 \leq a \\ y_{M_1} = 0 & \Rightarrow y_{\Omega} - r_1 \cos \omega_1 + \frac{h}{2} = 0 \end{cases} \quad (2.53)$$

On notera que ce mécanisme, que l'on appellera dans la suite de ce chapitre mécanisme 3, représente une généralisation du premier mécanisme présenté en 2.2.4. Ce dernier pouvant être retrouvé en faisant tendre le rayon  $r_0$  de la spirale logarithmique vers l'infini. On peut donc affirmer que l'étude de ce mécanisme (mécanisme 3) permettra, à coup sûr, d'améliorer les résultats présentés en 2.3.1 et 2.3.2.

### 2.5.3 Comparaison des résultats obtenus par les différents mécanismes

Dans cette section, les estimations par excès des domaines de résistance pour  $m = 0$  des trois différentes poutres étudiées, obtenus par la mise en oeuvre des trois mécanismes décrits précédemment, sont présentés. On rappelle que ces mécanismes font intervenir deux blocs rigides séparés par une ou plusieurs surfaces de discontinuité de vitesse planes,

ou une surface courbe dont la section dans le plan  $Oxy$  est une spirale logarithmique.

Pour la poutre n°1 en béton seul, il apparaît que l'estimation du domaine de résistance est sensiblement améliorée par l'emploi des mécanismes n°2 et 3 à la place du premier (Figure 2.25). En ce qui concerne le mécanisme n°2, ces résultats montrent que l'emploi de deux ou trois surfaces de discontinuité de vitesse planes ne modifie pas les résultats de l'approche par l'extérieur du domaine de résistance de la poutre. Le mécanisme n°3 fournit une estimation quasi-identique à celle obtenue par l'emploi du mécanisme n°2.

Si l'on s'intéresse en particulier à la charge transversale maximale pouvant être supportée par la poutre (représentée par des points sur la Figure 2.25), on constate que l'emploi des mécanismes 2 et 3 a permis de réduire de 11% la valeur du majorant obtenu. Les surfaces de discontinuités optimales correspondantes sont représentées sur la Figure 2.26 ; on voit clairement sur cette figure que les mécanismes optimaux passent systématiquement par l'appui gauche de la poutre. Les surfaces de discontinuités mises en jeu dans les mécanismes 2 et 3 sont par ailleurs très proches, à l'image des estimations qu'elles ont permis de trouver.

En ce qui concerne la poutre n°2 renforcée par des armatures longitudinales (Figure 2.27), on observe comme pour la poutre en béton seul, que les mécanismes 2, avec emploi de deux ou trois surfaces de discontinuité, et 3 donnent des résultats très proches. Néanmoins, contrairement à la poutre n°1, ces mécanismes n'ont permis qu'une assez faible amélioration de l'approche par l'extérieur du domaine de résistance de la poutre présentée en 2.11. Cette amélioration relative est maximale pour le trajet de chargement radial représenté sur la Figure 2.27 pour lequel elle ne dépasse pas 4%.

La Figure 2.28 représente les surfaces de discontinuité de vitesse optimales obtenues par les trois approches cinématiques (mécanismes 1, 2 et 3) pour le trajet de chargement radial représenté sur la Figure 2.27. D'une manière analogue au cas de la poutre non renforcée, les quatre mécanismes optimaux passent par l'appui gauche de la poutre.

Contrairement aux cas des poutres 1 et 2, les mécanismes 2 et 3 ne donnent pas lieu à une amélioration de l'approche par l'extérieur du domaine de résistance de la poutre n°3 (Figure 2.29), puisque l'écart relatif entre les différentes estimations ne dépasse pas les quelques pour milles quelque soient les trajets radiaux considérés.

La Figure 2.30 représente les surfaces de discontinuité optimales associées aux valeurs extrêmes situées sur le trajet de chargement radial de la Figure 2.29, pour lesquelles il convient de noter que le point d'émergence sur la face inférieure de la poutre ne coïncide pas avec l'appui gauche. Malgré les écarts que l'on peut y observer entre les surfaces de discontinuité mises en jeu dans les mécanismes 1, 2 avec 2 ou 3 surfaces de discontinuité et le mécanisme 3, les résultats sont sensiblement identiques dans les trois cas. Ceci est sans doute dû à la part importante de la contribution des armatures d'acier à la puissance résistante maximale, qui est peu modifiée dans les quatre mécanismes étudiés, traversant le même nombre d'armatures.

Il est clair que l'emploi des mécanismes 2 et 3 a permis d'améliorer sensiblement l'approche par l'extérieur du domaine de résistance de la poutre non renforcée (poutre n°1). L'amélioration n'est pas aussi significative en ce qui concerne la poutre 2, renforcée par des armatures longitudinales, et quasiment négligeable pour la poutre 3 renforcée par des armatures longitudinales et des armatures transversales.

### 2.5.4 Remarques sur les problèmes numériques rencontrés

Il est important de noter que les fonctions à minimiser pour l'estimation du domaine de résistance, et ce pour les différents mécanismes de ruine considérés, ne sont pas convexes par rapport à leurs arguments. Par conséquent, la résolution des problèmes d'optimisation (même numériquement) est difficile. En particulier, les mécanismes 2 et 3 ont donné lieu à des problèmes d'optimisation plus délicats, car mettant en jeu nettement plus de variables d'optimisation que le mécanisme 1. Ceci se traduit par des temps de calculs plus importants. A titre d'exemple, l'approche cinématique du domaine de résistance de la poutre 2 obtenue par la mise en oeuvre du mécanisme 1 a nécessité environ 2 minutes de calculs sur un pc de bureau, alors que celles obtenues par le mécanisme 2, avec deux ou trois surfaces de discontinuité, ou le mécanisme 3 ont nécessité respectivement 20 minutes, 3h et 3h30 de calcul (courbe constituée d'une trentaine de points). Les temps de calcul sont encore plus importants lorsque des armatures transversales doivent être prises en compte. La résolution numérique du problème d'optimisation passe de 30 minutes pour le mécanisme 1, à 3h40 et 8h50 pour le mécanisme 2 avec respectivement deux et trois surfaces, et à 4h pour le mécanisme 3.

Les temps de calcul indiqués précédemment dépendent en grande partie des fonctions d'optimisation numériques utilisées. Dans le cas d'une discontinuité de vitesse selon un seul plan et d'une poutre sans armatures transversales, l'optimisation a été réalisée à l'aide de l'algorithme 'GlobalSearch' (MATLAB, b) sous MATLAB (MATLAB, 2014). En revanche, pour les autres cas, cette méthode tombe souvent sur des minimums locaux. Pour cela, l'algorithme 'Multistart' (MATLAB, d) sous MATLAB également, a été utilisé. Les deux méthodes font appel au solveur 'fmincon' (MATLAB, c) (fonction permettant de minimiser un problème sous des contraintes non-linéaires à partir d'un point de départ donné) et ce à partir de plusieurs points de départ. L'option 'sqp' (MATLAB, a) a été utilisée, ce qui permet de faire une minimisation à l'aide de la méthode de la programmation séquentielle quadratique. Cette approche permet de donner des résultats précis et rapides. Dans 'Multistart', les points de départ sont uniformément distribués dans le domaine des variables et sont tous testés pour trouver le minimum global. Un nombre important de points de départ est donc parfois nécessaire pour ne pas tomber sur un minimum local. En revanche, 'GlobalSearch' utilise un mécanisme spécifique de recherche des points de départ, en testant uniquement les points qui peuvent améliorer le minimum (MATLAB, e). Certains calculs ont été vérifiés à l'aide d'une autre fonction d'optimisation, 'scipy.optimize.differential\_evolution' (Python) sous Python (Van Rossum et Drake Jr, 1995), et ont donné les mêmes résultats que les calculs sous MATLAB. Cette méthode permet de trouver le minimum global à l'aide d'une approche stochastique permettant de tester plusieurs points candidats pour la minimisation du problème.

Compte tenu des difficultés rencontrées dans l'utilisation des mécanismes 2 et 3, et de la faible amélioration qu'ils apportent, on peut se contenter des résultats fournis par le mécanisme n°1.

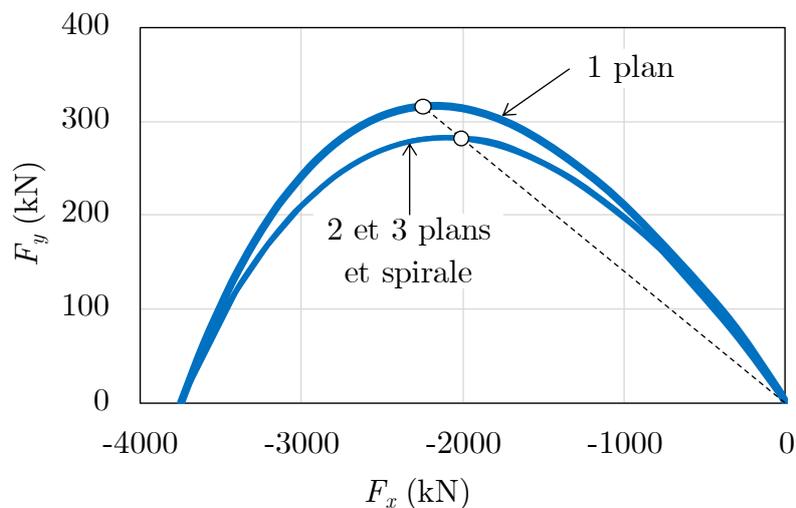


FIGURE 2.25 – Domaines de résistance pour  $m = 0$  de la poutre n°1 pour les mécanismes avec une discontinuité de vitesse selon un, deux et trois plans et une surface courbe (spirale logarithmique)

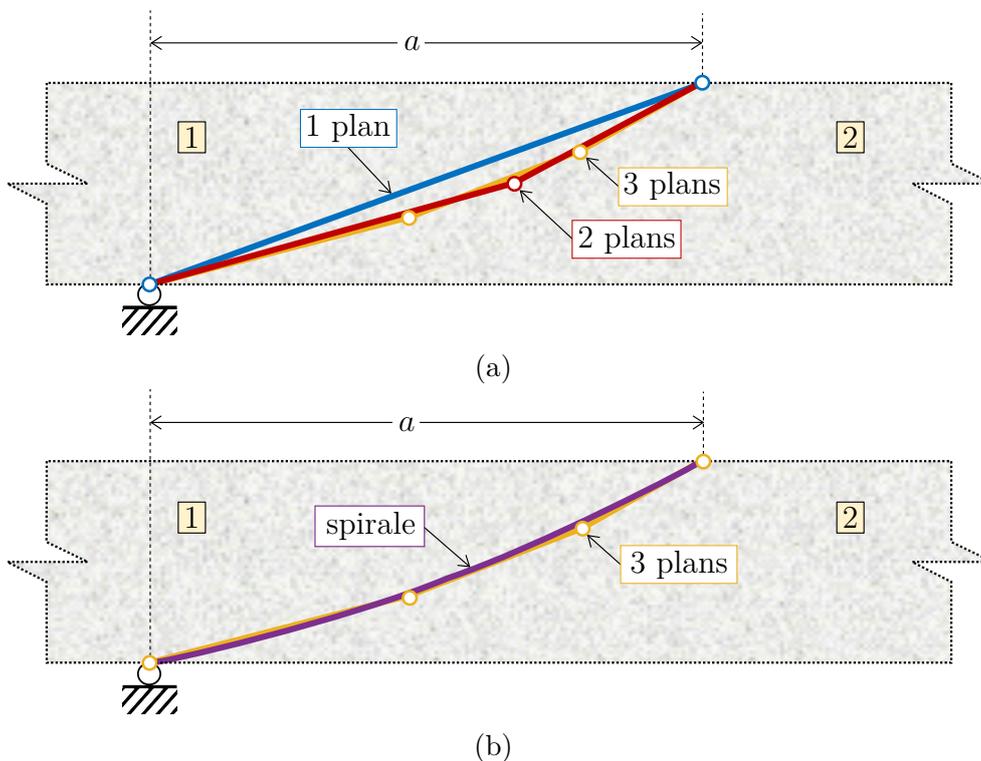


FIGURE 2.26 – Lignes de discontinuité obtenues pour la poutre n°1 en considérant (a) un, deux et trois plans et (b) une surface courbe (spirale logarithmique) et trois plans

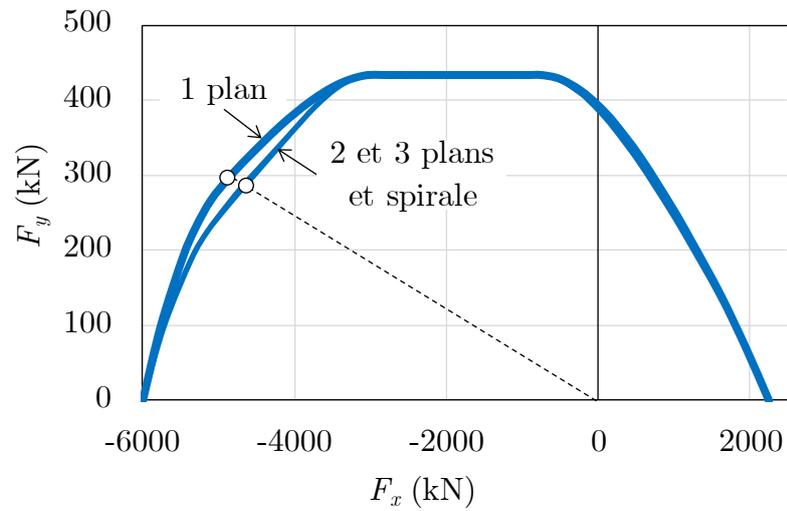


FIGURE 2.27 – Domaines de résistance pour  $m = 0$  de la poutre n°2 pour les mécanismes avec une discontinuité de vitesse selon un, deux et trois plans et une surface courbe (spirale logarithmique)

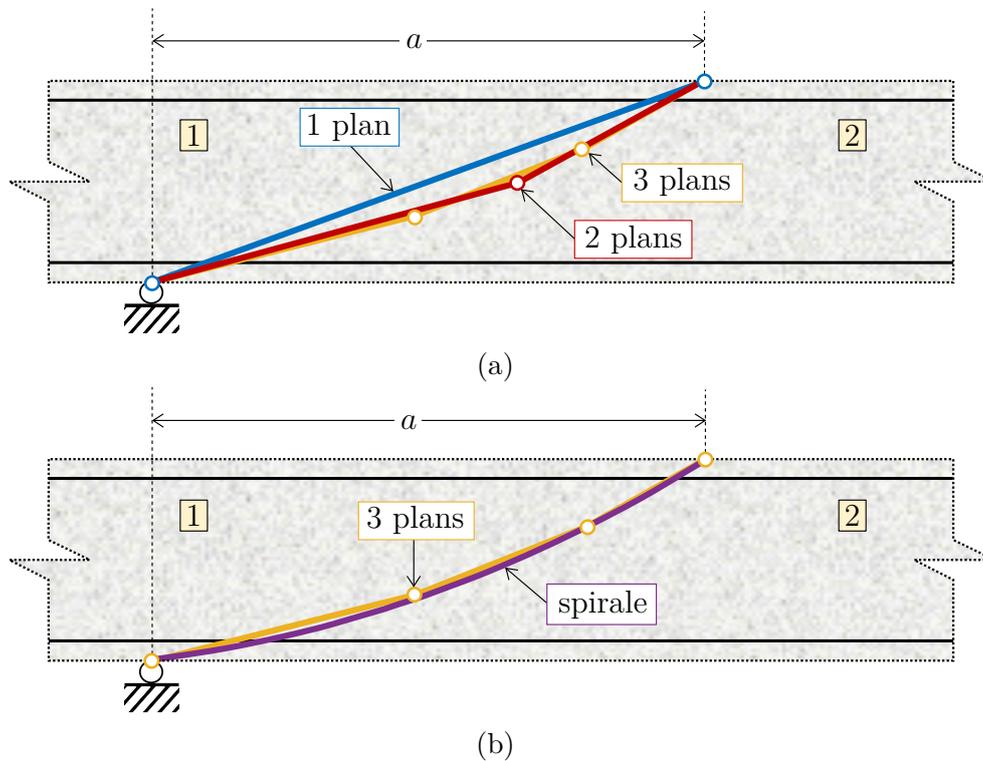


FIGURE 2.28 – Lignes de discontinuité obtenues pour la poutre n°2 en considérant (a) un, deux et trois plans et (b) une surface courbe (spirale logarithmique) et trois plans

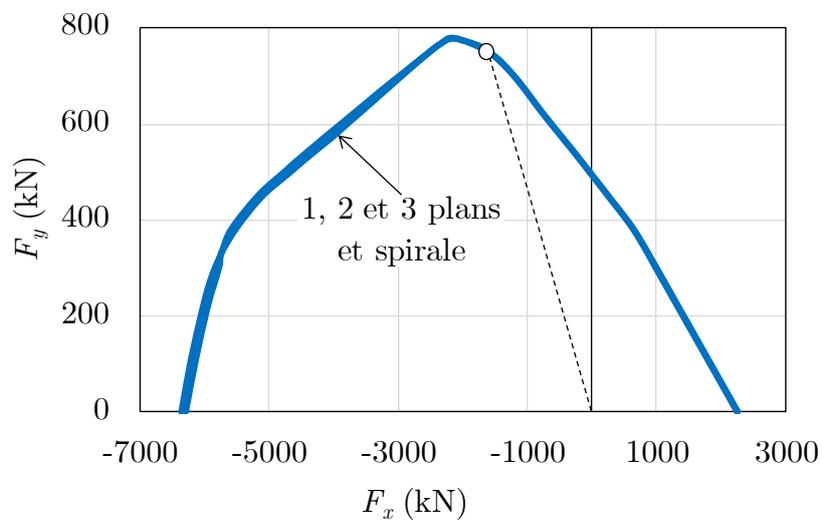


FIGURE 2.29 – Domaines de résistance pour  $m = 0$  de la poutre n°3 pour les mécanismes avec une discontinuité de vitesse selon un, deux et trois plans et une surface courbe (spirale logarithmique)

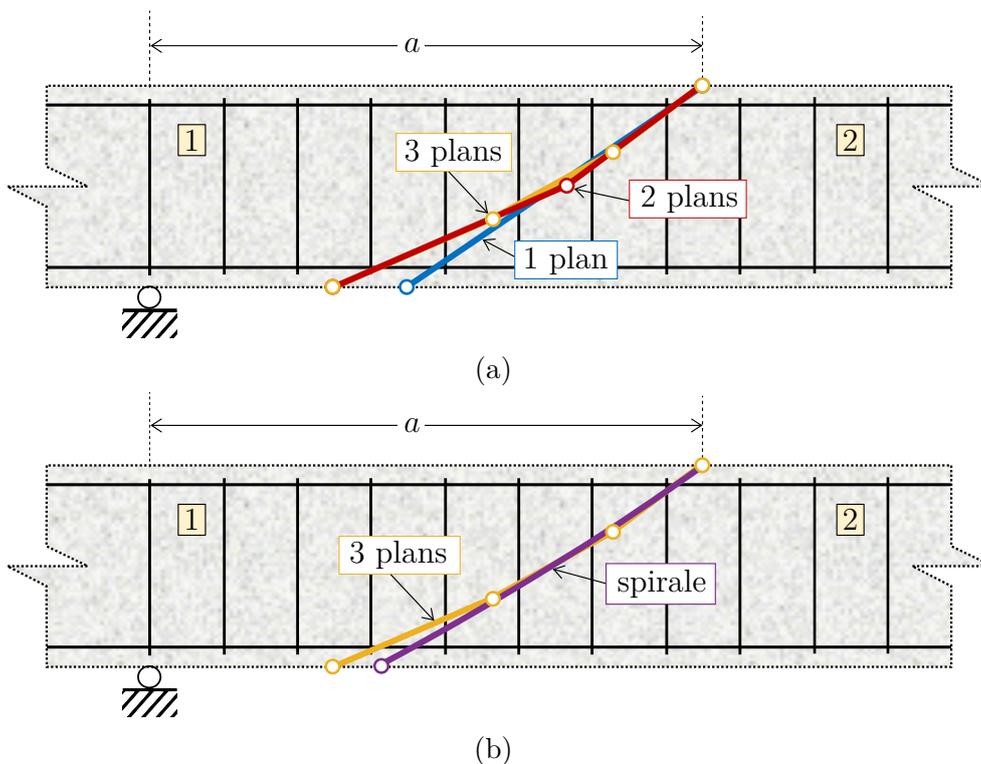


FIGURE 2.30 – Lignes de discontinuité obtenues pour la poutre n°1 en considérant (a) un, deux et trois plans et (b) une surface courbe (spirale logarithmique) et trois plans

## 2.6 Calcul en contraintes planes

### 2.6.1 Implémentation de l'approche cinématique en contraintes planes

Dans la méthode présentée dans la section 2.2.4, des cinématiques virtuelles tridimensionnelles ont été considérées et ont permis d'accéder à des approches par l'extérieur rigoureuses du domaine de résistance de la poutre en béton armé. Toutefois, dans l'étude d'éléments de type poutres, il peut être pertinent de supposer que les contraintes sont planes, comme dans les travaux d'Averbuch (1996) et d'Averbuch et de Buhan (1999) sur le dimensionnement des structures en béton armé. Sous cette hypothèse, la résolution du problème de *calcul à la rupture* ainsi défini constitue une approche par l'intérieur du problème 3D initial. Dans ce cas, les composantes selon l'axe  $Oz$  du tenseur des contraintes  $\underline{\underline{\sigma}}$  sont supposées nulles :

$$\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = \sigma_{zz} = 0 \quad (2.54)$$

Sous cette hypothèse, la fonction d'appui du critère de Mohr-Coulomb entièrement tronqué en traction, s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned} \pi^b(\underline{\underline{d}}) &= \sup \left\{ \sum_{k=1}^2 \sigma_k d_k; -f_c \leq \sigma_k \leq 0 \right\} \\ &= \sum_{k=1}^2 \sup \{ -f_c d_k; 0 \} \end{aligned} \quad (2.55)$$

où  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  désignent les deux contraintes principales dans le plan  $Oxy$ , tandis que  $d_1$  et  $d_2$  sont les valeurs principales du taux de déformation virtuel  $\underline{\underline{d}}$  dans ce même plan. La colinéarité de  $\underline{\underline{\sigma}}$  et  $\underline{\underline{d}}$  (coïncidence de leurs directions principales) découle en fait de la maximisation de leur produit scalaire  $\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{d}}$  et de l'isotropie du critère.

En ce qui concerne les discontinuités de vitesse  $[\underline{U}]$ , la fonction d'appui correspondante

est égale à celle relative au taux de déformation donné par :

$$\begin{aligned}
 \underline{n} \otimes^s [\underline{U}] &= \frac{1}{2} (\underline{n} \otimes [\underline{U}] + [\underline{U}] \otimes \underline{n}) \\
 &= \frac{1}{2} (\underline{n} \otimes ([U_n]\underline{n} + [U_t]\underline{t}) + ([U_n]\underline{n} + [U_t]\underline{t}) \otimes \underline{n}) \\
 &= [U_n]\underline{n} \otimes \underline{n} + [U_t]\underline{n} \otimes^s \underline{t}
 \end{aligned} \tag{2.56}$$

dont les valeurs propres sont :

$$d_1 = \frac{[U_n] + |[U]|}{2} \geq 0 \quad \text{et} \quad d_2 = \frac{[U_n] - |[U]|}{2} \leq 0 \tag{2.57}$$

Ce qui donne en utilisant l'équation (2.55) :

$$\begin{aligned}
 \pi(\underline{n}, [\underline{U}]) &= \sup \left\{ -f_c \frac{[U_n] + |[U]|}{2}; 0 \right\} + \sup \left\{ -f_c \frac{[U_n] - |[U]|}{2}; 0 \right\} \\
 &= \frac{f_c}{2} (|[U]| - [U_n])
 \end{aligned} \tag{2.58}$$

On en déduit que la fonction d'appui associée à une discontinuité de vitesse pour le critère de Mohr-Coulomb entièrement tronqué en traction dans l'hypothèse des contraintes planes, est identique à celle calculée en déformations planes mais *sans la condition de pertinence*. Cela vient du fait que le domaine de résistance en contraintes planes est borné.

Les mêmes résultats peuvent être obtenus directement en utilisant la fonction d'appui du critère de Rankine. En effet, le critère de Mohr-Coulomb entièrement tronqué en traction en contraintes planes coïncide exactement avec le critère de Rankine pour une résistance à la traction du béton nulle ( $f_t = 0$ ) (Vincent, 2018).

### 2.6.2 Comparaison des résultats du problème en contraintes planes avec ceux du problème initial analysé par des mécanismes de déformation planes

On présente dans cette section une comparaison entre les résultats obtenus en 2.3.2 par la mise en œuvre du mécanisme 1, mettant en jeu deux blocs rigides séparés par une surface de discontinuité plane, et ceux obtenus, par le biais de la même approche cinématique (i.e. le même mécanisme), lorsque le critère de résistance du béton est remplacé par celui de

Mohr-Coulomb tronqué en traction en contrainte plane.

On notera que les résultats présentés en 2.3.2 ont un statut rigoureux de majoration des capacités de résistance de la structure étudiée. En revanche, ceux issus des calculs en contrainte plane ne présentent aucun statut de borne pour les propriétés de résistance de la poutre renforcée (poutres 2 et 3). Il s'agit plus précisément d'une approche par l'extérieur rigoureuse du domaine de résistance de la poutre renforcée, dans laquelle chaque lit d'armatures a été remplacé par une plaque équivalente disposant des mêmes propriétés de résistance des armatures qu'elle modélise.

Par ailleurs, et compte tenu des résultats annoncés dans la section précédente concernant la fonction d'appui du domaine de résistance de Mohr-Coulomb entièrement tronqué en traction en contrainte plane, il est certain que les estimations des domaines de résistance obtenues dans le cadre de l'hypothèse de contrainte plane seront plus faibles que celles obtenues précédemment, mais, là encore, sans que l'on puisse leur attribuer un quelconque statut de majorant ou minorant pour le problème initial.

Les Figures 2.31, 2.32 et 2.33 représentent respectivement les différentes estimations des domaines de résistance en contraintes planes des poutres n°1, 2 et 3. L'estimation ainsi obtenue des capacités de résistance transversale maximale a diminué de 29% (respectivement de 17%) pour la poutre n°1 (respectivement n°3). En ce qui concerne la poutre n°2, les deux domaines sont identiques sauf dans le cas d'une compression importante (supérieure à environ 63% de la résistance à la compression simple de la poutre), où l'hypothèse des contraintes planes fournit des résultats plus faibles.

Ainsi, si l'on s'intéresse en particulier aux points représentés sur les domaines de résistance des poutres n°1 et 2, situés sur un même trajet de chargement radial (Figures 2.31 et 2.32 respectivement), on constate que les charges transversales et axiales de ruine ont diminué respectivement de 32 et 6% pour les poutres n°1 et 2. Les lignes de discontinuité de vitesse optimales obtenues pour ces deux poutres sont très différentes (Figure 2.34a). On observe en effet que la ligne obtenue sous l'hypothèse des contraintes planes est verticale, tandis que celle obtenue en 2.5 passe par l'appui de gauche, ce qui correspond à la valeur minimale de l'angle  $\alpha$ .

De plus, l'estimation de la résistance en traction-compression de la poutre n°3 obtenue sous l'hypothèse de contrainte plane coïncide avec celle de la poutre n°2 qui s'écrit comme la somme de la résistance de la poutre non renforcée augmentée de celles des armatures

longitudinales. Il n'en est pas de même pour les calculs présentés en 2.3 qui donnent lieu à une augmentation de ces résistances due à la présence des armatures transversales. L'écart entre les deux estimations peut être expliqué par le fait que les armatures transversales n'interviennent pas dans le mécanisme optimal en contraintes planes, tandis que trois d'entre elles sont traversées par la surface de discontinuité optimale dans l'autre cas (voir Figure 2.34b).

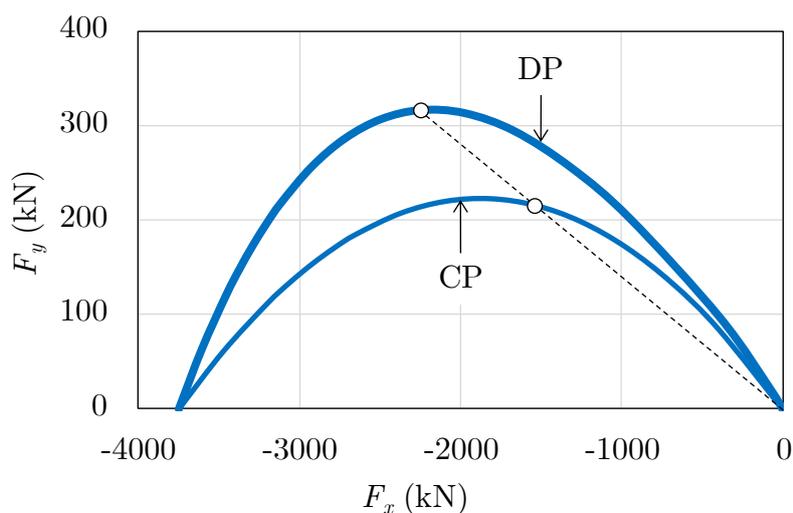


FIGURE 2.31 – Domaines de résistance de la poutre n°1 obtenus par les mécanismes en déformation plane (CP) et en contrainte plane (CP)

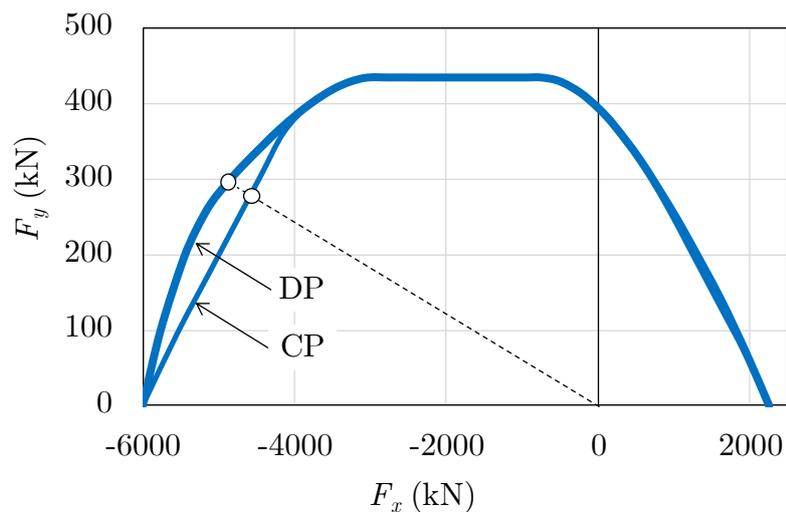


FIGURE 2.32 – Domaines de résistance de la poutre n°2 obtenus par les mécanismes en déformation plane (CP) et en contrainte plane (CP)

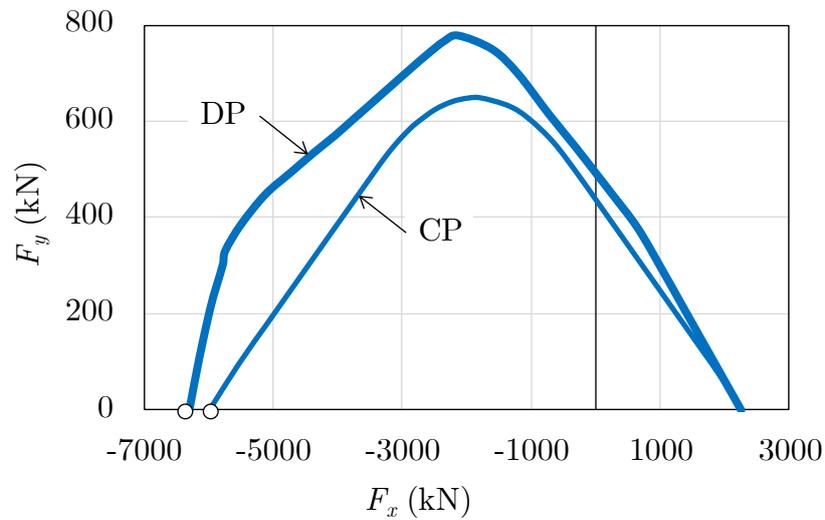


FIGURE 2.33 – Domaines de résistance de la poutre n°3 obtenus par les mécanismes en déformation plane (CP) et en contrainte plane (CP)

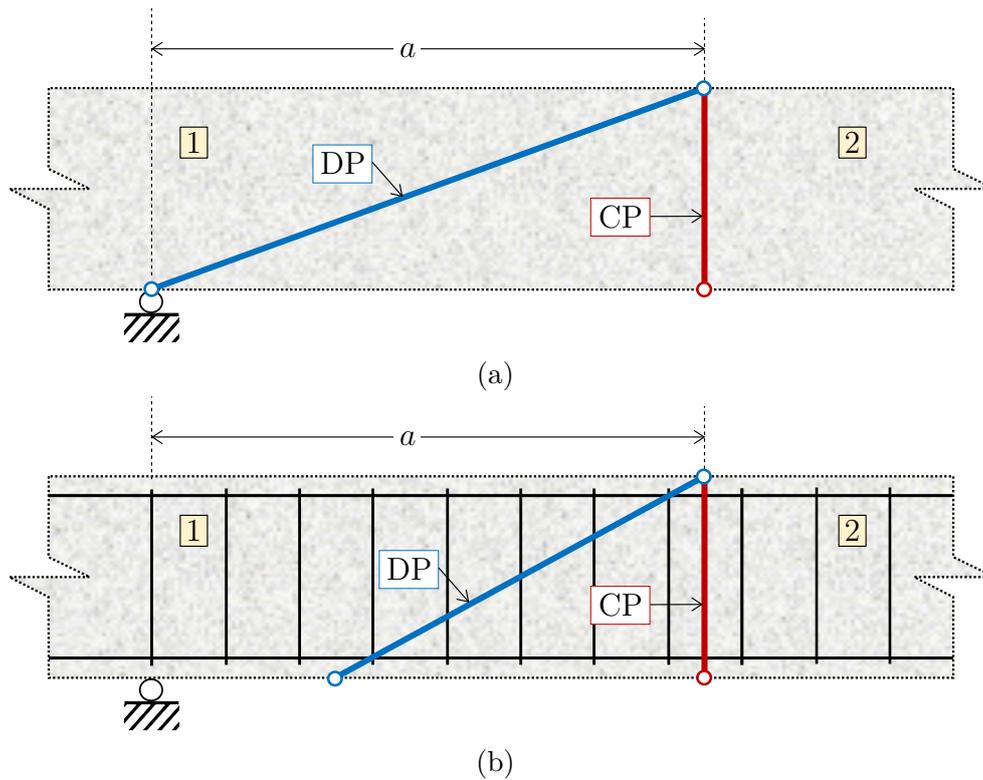


FIGURE 2.34 – Lignes de discontinuité obtenues par les mécanismes en déformation plane (DP) et en contrainte plane (CP) pour (a) les poutres n°1 et 2 et (b) la poutre n°3

## 2.7 Homogénéisation du béton renforcé par des armatures transversales

### 2.7.1 Principe de la démarche (Averbuch, 1996; Averbuch et de Buhan, 1999)

Comme constaté dans la section 2.5.3, la mise en œuvre des approches cinématiques proposées, avec une modélisation discrète des armatures transversales, donne lieu à un problème d'optimisation (plus ou moins) difficile à résoudre (selon la complexité du mécanisme de ruine considéré). Contrairement à la poutre sans cadres, le calcul du domaine de résistance de la poutre renforcée transversalement nécessite la prise en compte de plusieurs points de départ dans la fonction d'optimisation numérique, ce qui rend les calculs relativement plus lourds. Une solution pour éviter cela consiste à considérer que le béton renforcé par les armatures transversales peut être modélisé comme un milieu homogénéisé qui obéit à un critère de résistance macroscopique équivalent (Figure 2.35).

En tirant profit de la périodicité du renforcement transversal (les étriers sont régulièrement espacés d'une distance  $s$ ) et en supposant que la distance entre les étriers est suffisamment petite par rapport à la taille de la zone renforcée (rapport  $s/L$  faible), le domaine de résistance de la poutre peut être déterminée par la résolution du problème homogène associé au problème initial. Dans ce problème homogène associé, la poutre est dotée de la même géométrie et est soumise aux mêmes chargements que la poutre initiale. En revanche, le béton renforcé par des cadres est remplacé par un milieu homogène équivalent du point de vue des capacités résistantes.

Le critère de résistance macroscopique du milieu homogénéisé est caractérisé par les fonctions d'appui suivantes (Averbuch, 1996; Averbuch et de Buhan, 1999) :

$$\pi^{hom}(\underline{d}) = \pi^b(\underline{d}) + T_w |d_{tt}| \quad (2.59)$$

$$\pi^{hom}(\underline{n}, [\underline{U}]) = \pi^b(\underline{n}, [\underline{U}]) + T_w |[U_t]n_t| \quad (2.60)$$

où :

- $T_w = 2A_{sw}\sigma_{yw}/s$  est la résistance en traction/compression des armatures transversales par unité de longueur ;

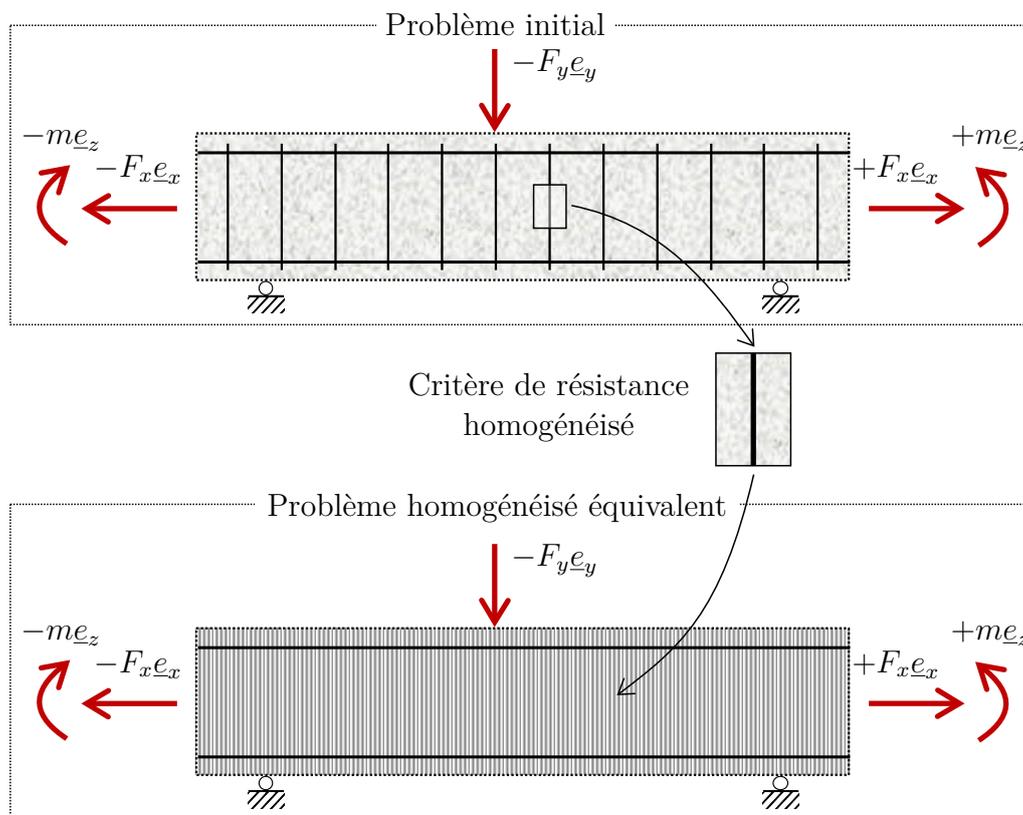


FIGURE 2.35 – Homogénéisation du béton renforcée par des armatures transversales régulièrement espacées

- $d_{tt}$  et  $[U_t]$  sont respectivement le taux de déformations du renforcement orienté selon le vecteur unitaire  $\underline{t}$  et la projection de la discontinuité de vitesse sur ce vecteur (équations (2.7) et (2.8) respectivement) ;
- $n_t$  est la projection de la normale à la surface de discontinuité sur  $\underline{t}$ .

La démarche pour obtenir ces fonctions d'appui a été notamment présentée en détail par de Buhan (1985).

### 2.7.2 Application aux mécanismes proposés

A partir de l'équation (2.60), la contribution du matériau homogénéisé (modélisant le béton renforcé par armatures transversales) à la puissance résistante maximale s'écrit :

$$P_{rm}^{hom} = P_{rm}^b + \int_{\Sigma} T_w |[U_t] n_t| d\Sigma \quad (2.61)$$

où  $P_{rm}^b$  est la puissance résistante maximale développée dans le béton seul et  $\Sigma$  la surface de discontinuité de vitesse.

Dans le cas de la poutre étudiée, les armatures transversales sont orientées selon l'axe  $Oy$ . La puissance résistance maximale du matériau homogénéisé s'écrit donc comme suit dans le cas du mécanisme 1 avec une discontinuité de vitesse selon un plan :

$$P_{rm}^{hom} = P_{rm}^b + \int_{-h/2}^{h/2} T_w |[U_y] \cos \alpha| \frac{dy}{\sin \alpha} \quad (2.62)$$

où  $P_{rm}^b$  est donné par (2.22) et  $[U_y]$  par (2.17).

De la même manière, l'équation (2.61) devient pour les mécanismes 2 (discontinuité selon plusieurs surfaces planes) et 3 (discontinuité selon une spirale) respectivement :

$$P_{rm}^{hom} = P_{rm}^b + \sum_{i=1}^{n-1} \int_{y_i}^{y_{i+1}} T_w |[U_y] \cos \alpha_i| \frac{dy}{\sin \alpha_i} \quad (2.63)$$

$$P_{rm}^{hom} = P_{rm}^b + \int_{\omega_1}^{\omega_2} T_w |[U_y] \cos(\omega - \beta)| \frac{r(\omega)}{\cos \beta} d\omega \quad (2.64)$$

où  $P_{rm}^b$  et  $[U_y]$  sont donnés respectivement par (2.43) et (2.42) dans l'équation (2.63), et par (2.50) et (2.49) dans l'équation (2.64).

### 2.7.3 Comparaison des résultats

Dans cette section, la méthode d'homogénéisation du béton renforcé par des cadres (décrite plus haut) est utilisée pour déterminer les domaines de résistance de la poutre n°3 (présentée en 2.3) pour les trois mécanismes proposés dans les sections précédentes (2.3.2, 2.5.3 et 2.6.2).

On peut voir à partir de la Figure 2.36 que les différents mécanismes donnent quasiment les mêmes résultats, qui sont également très proches du domaine obtenu par le mécanisme plan avec une modélisation discrète des armatures transversales (et donc aussi des deux autres mécanismes). Si on s'intéresse par exemple à la charge transversale maximale, une différence de moins de 3% est constatée entre le mécanisme 1 avec homogénéisation du béton renforcé et la méthode discrète initiale. Cette différence est encore plus faible lorsque le mécanisme 2 est considéré (environ 1%). En revanche, le calcul de ces domaines

en utilisant le milieu homogénéisé est nettement plus rapide. Les calculs (d'une courbe constituée d'une trentaine de points) prennent seulement 3 minutes, 2h, 5h30 et 3h30 pour les mécanismes avec une, deux, trois surfaces planes et une spirale respectivement (au lieu de 30 minutes, 3h40, 8h50 et 4h lorsque les armatures sont modélisées individuellement). Cela signifie que le calcul homogénéisé avec une seule surface de discontinuité plane, qui donne pratiquement le même résultat que des calculs plus sophistiqués à plusieurs surfaces ou à surface courbe, doit être retenu comme le plus performant dans les études paramétriques.

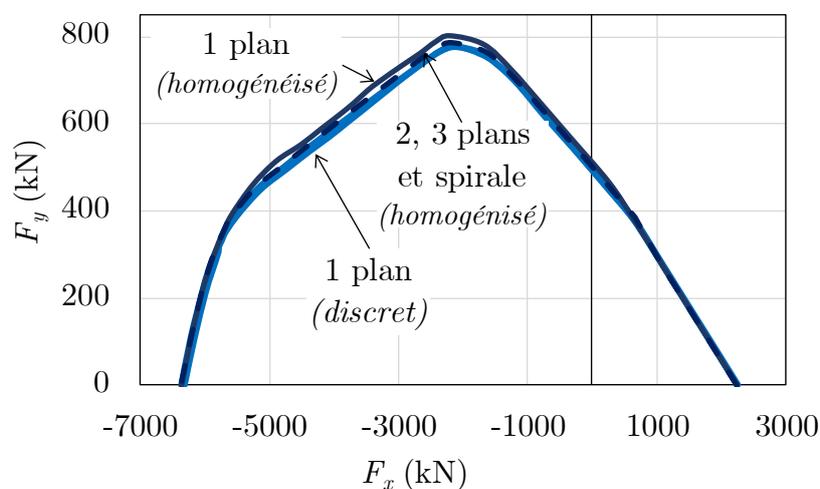


FIGURE 2.36 – Comparaisons entre les domaines de résistance de la poutre n°3 obtenus par le mécanisme 1 avec discrétisation des cadres et pour les trois mécanismes proposés par homogénéisation du milieu renforcé

## 2.8 Conclusions

Dans ce chapitre, une méthode de dimensionnement des poutres en béton armé soumises à l'action combinée d'un chargement transversal, d'un chargement axial et d'un moment supplémentaire est présentée. Basée sur l'approche cinématique de la théorie du *calcul à la rupture*, cette méthode permet de déterminer une approche par l'extérieur du domaine de résistance. Un mécanisme simple a été d'abord proposé, consistant à séparer la poutre en deux blocs par une surface plane de discontinuité de vitesse. L'implémentation de l'approche cinématique pour ce mécanisme de ruine a permis d'aboutir à une formulation analytique du problème qu'on peut optimiser numériquement par la méthode des trajets

de chargements radiaux pour obtenir une estimation par excès du domaine de résistance dans l'espace des chargements appliqués.

L'application de la méthode ainsi proposée à trois exemples de poutres avec des taux de renforcement différents, a permis de mettre en évidence l'effet défavorable d'un chargement axial de traction qui réduit considérablement la charge transversale pouvant être supportée par la poutre (et par conséquent sa résistance aux sollicitations d'effort tranchant), contrairement à l'application d'une charge axiale de compression qui a tendance à améliorer la résistance de la poutre vis-à-vis de la charge transversale, sauf pour des valeurs de compression importantes.

La simplicité et la rapidité de calcul de la méthode proposée ont également permis de réaliser plusieurs études paramétriques mettant en évidence l'influence du moment supplémentaire, de l'élanement de la poutre et des degrés de renforcement longitudinal et transversal sur le domaine de résistance de la poutre dans le plan des chargements axial et transversal.

Il est apparu en particulier qu'un moment supplémentaire positif a un effet défavorable sur la résistance de la poutre, contrairement au cas où un moment supplémentaire négatif est appliqué aux deux extrémités de la poutre.

En ce qui concerne l'élanement de la poutre, représenté par le rapport  $a/h$ , il apparaît avoir un effet défavorable sur le domaine de résistance : pour une hauteur de poutre fixe, le domaine de résistance diminue à mesure que la charge transversale s'éloigne de l'appui.

De plus, on pourrait s'attendre à ce que l'augmentation des taux de renforcement longitudinal et transversal permette d'augmenter 'indéfiniment' la résistance de la poutre. Ceci est contradictoire avec les résultats obtenus qui montrent que le taux de renforcement transversal n'influence pas la résistance de la poutre sous des charges axiales de traction importantes, et n'augmente que très peu avec l'ajout des armatures transversales pour des charges de traction plus faibles. De même pour les armatures longitudinales, où le domaine de résistance présente à partir d'un taux de renforcement longitudinal donné, un plateau de la charge transversale où celle-ci devient indépendante de la charge axiale et du degré de renforcement longitudinal. Une formulation analytique simple pour cette valeur maximale a pu être retrouvée, montrant la participation du seul béton à la résistance de la poutre dans cette zone.



# Chapitre 3

## Mise au point d'une méthode numérique appliquée à l'approche cinématique par l'extérieur du problème

**Résumé :** *Ce chapitre présente la mise en œuvre numérique par la méthode des éléments finis de l'approche cinématique du calcul à la rupture, permettant la détermination d'une estimation par excès du domaine de résistance de la poutre en béton armé analysée par voie semi-analytique au chapitre précédent. Les résultats sont présentés pour les trois exemples de poutre étudiés dans le chapitre 2, et confrontés aux résultats des calculs semi-analytiques obtenus précédemment. La représentation de quelques mécanismes de ruine permet de mettre en évidence les différences entre les résultats des méthodes numérique et semi-analytique proposées.*

### Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>87</b>
<b>3.2</b>	<b>Modélisations mécanique et numérique de la poutre en béton armé</b>	<b>88</b>
<b>3.3</b>	<b>Mise en œuvre de l'approche cinématique</b>	<b>89</b>
3.3.1	Description des champs de vitesse	90
3.3.2	Calcul de la puissance résistance maximale	93
3.3.3	Résolution du problème d'optimisation engendré par l'approche cinématique discrétisée	96

**3.4 Comparaison entre les résultats des méthodes numériques et  
semi-analytiques . . . . . 97**

**3.5 Conclusions . . . . . 107**

---

## 3.1 Introduction

Dans le chapitre 2, différentes méthodes semi-analytiques basées sur l'approche cinématique du *calcul à la rupture* ont été présentées et développées. Celles-ci ont permis de fournir des évaluations par l'extérieur du domaine de résistance des poutres en béton armé étudiées. Pour cela, plusieurs mécanismes de ruine simples ou plus complexes ont été considérés. Tous ces mécanismes mettaient en jeu deux blocs animés de mouvements rigidifiants présentant des sauts de vitesse au travers de différentes surfaces de discontinuité (un ou plusieurs plans ou une surface courbe). On peut espérer améliorer cette approche par l'extérieur par l'utilisation de mécanismes plus complexes incluant les mécanismes précédents. Mais la mise en œuvre par voie analytique ou semi-analytique se révèle difficile, voire impossible, en raison de la non-convexité de la fonction à minimiser et du grand nombre de variables impliquées dans une telle minimisation. Il apparaît donc nécessaire d'implémenter numériquement l'approche cinématique par la méthode des éléments finis afin de pouvoir construire des champs de vitesse beaucoup plus riches mettant en jeu à la fois des discontinuités de vitesse, mais aussi des taux de déformation dans la structure analysée. La fonction à minimiser étant cette fois-ci convexe par rapport au grand nombre de variables à minimiser, il est alors possible d'utiliser de puissants codes d'optimisation convexe sous contraintes, mis au point ces dernières années.

Ce chapitre présente donc une méthode d'implémentation numérique de l'approche cinématique (section 3.3) dans le cadre d'un calcul par éléments finis. Cette approche est présentée dans le cas particulier de la poutre en béton armé étudiée. Celle-ci est modélisée en 2D sous l'hypothèse de déformation plane ou de contrainte plane. Les armatures longitudinales sont prises en compte à travers une modélisation mixte (section 3.2) dans laquelle le béton est modélisé comme un milieu continu 2D tandis que les armatures sont modélisées comme des éléments unidimensionnels capables de reprendre des efforts de traction-compression uniquement. En ce qui concerne les armatures transversales, disposées périodiquement le long de la poutre et dont le nombre est relativement important, le recours à une méthode d'homogénéisation se présente comme une alternative intéressante à une modélisation 1D de ces armatures, permettant de réduire la dimension du problème d'optimisation et les temps de calcul qui en découlent. Les champs de vitesse sont d'abord décrits pour les éléments finis considérés, puis la mise en œuvre numérique de l'approche cinématique est expliquée en détail. Enfin, le problème est formulé sous la forme d'un problème d'optimisation conique quadratique et résolu à l'aide du solveur **MOSEK**.

L'application de cette méthode aux trois exemples de poutre étudiés dans le chapitre 2 permet de fournir des estimations numériques (par excès) de leurs domaines de résistance. Ceux-ci sont confrontés aux résultats semi-analytiques présentés dans la section 2.6.2 du chapitre précédent. Quelques exemples de mécanismes de ruine obtenus par ce code de calcul sont ensuite présentés, afin d'analyser les différences entre ces mécanismes et ceux considérés dans les calculs semi-analytiques.

## 3.2 Modélisations mécanique et numérique de la poutre en béton armé

Afin de simplifier l'implémentation numérique de l'approche cinématique, nous avons choisi de modéliser la poutre en 2D (dans le plan  $Oxy$ ). Pour cela, les hypothèses de déformation plane ou de contrainte plane sont admises. Toutefois, une estimation rigoureuse par excès n'est obtenue qu'en adoptant l'hypothèse de déformation plane, comme cela a été expliqué dans la section 2.6 du chapitre 2. En réalité, seule une modélisation tridimensionnelle de la poutre permettrait d'aboutir à de meilleurs résultats. En effet, une modélisation bidimensionnelle ne prend pas en compte certains éléments qui pourraient influencer les résultats comme la complexité de la géométrie des armatures ou la présence d'effets de confinement dues à celles-ci (Averbuch, 1996). Dans une modélisation bidimensionnelle, les armatures sont "distribuées" dans le béton comme des éléments plaques, ce qui ne correspond pas à la réalité.

Une méthode de modélisation mixte (Anthoine, 1989; Averbuch, 1996; Averbuch et de Buhan, 1999; de Buhan *et al.*, 2017) de la poutre en béton armé est adoptée. Celle-ci consiste à :

- modéliser le béton comme un milieu continu bidimensionnel (hypothèses de contrainte ou de déformation planes) ;
- modéliser les armatures longitudinales comme des milieux continus unidimensionnels noyés dans le béton ;

Cette dernière hypothèse est valable en raison de l'élancement des armatures longitudinales. Dans ce cas, une modélisation unidimensionnelle permet d'obtenir de bons résultats pour les problèmes traités dans le cadre de cette thèse.

### 3.3. Mise en œuvre de l’approche cinématique

---

Par ailleurs, tirant profit de la périodicité des armatures transversales et de leur espacement suffisamment petit devant la zone renforcée, les résultats de l’homogénéisation en *calcul à la rupture* donnés en 2.7.1 ont été mises en œuvre, permettant de définir un matériau homogène équivalent en termes de propriétés mécaniques et notamment ici de propriétés de résistance. Une modélisation unidimensionnelle des armatures transversales, comme pour les armatures longitudinales, est également possible. Néanmoins, dans le cas d’une poutre renforcée par plusieurs armatures transversales, la géométrie, le maillage et les calculs deviennent plus complexes, ce qui peut rendre la résolution du problème plus coûteuse et générer des résultats moins précis.

Dans le cadre d’une telle modélisation mixte, le milieu béton (homogénéisé dans le cas de la poutre renforcée transversalement) est classiquement discrétisé en  $N_b$  éléments triangulaires à trois nœuds, tandis que les armatures longitudinales sont discrétisées en  $N_r$  éléments linéiques (à deux nœuds). Les éléments finis mis en œuvre ici permettent de construire des champs de vitesse affines par morceaux. Un exemple de maillage de la poutre, ainsi discrétisée, est représenté schématiquement sur la Figure 3.1 ci-dessous.

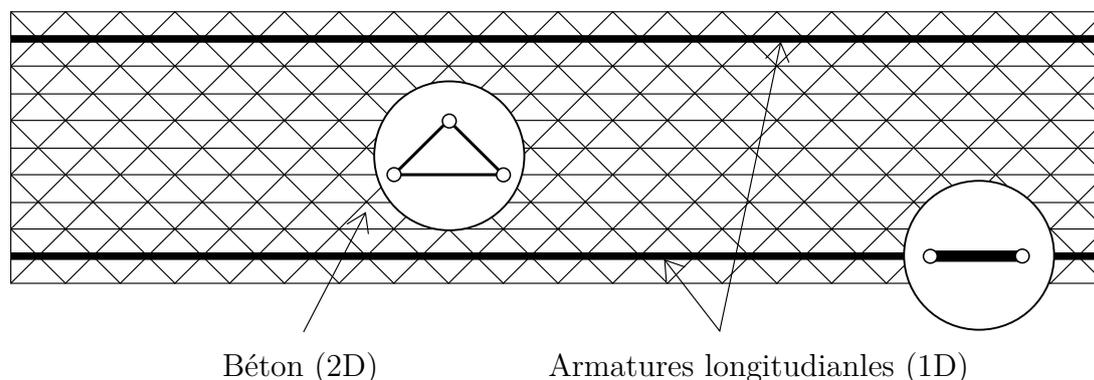


FIGURE 3.1 – Modélisation mixte de la poutre et discrétisation par éléments finis

### 3.3 Mise en œuvre de l’approche cinématique

Cette section présente la mise en œuvre numérique par éléments finis de l’approche cinématique par l’extérieur du *calcul à la rupture* dans le cas de la poutre en béton armé étudiée, en considérant le maillage décrit précédemment (Figure 3.1).

### 3.3.1 Description des champs de vitesse

#### Champ de vitesse dans le béton

Attachés à chacun des trois nœuds d'un élément triangulaire dans le béton, deux degrés de liberté sont considérés, correspondant aux vitesses de ce nœud selon les axes  $Ox$  et  $Oy$ . Le champ de vitesse dans chaque élément triangulaire  $e \in \llbracket 1, N_b \rrbracket$  est obtenu par interpolation linéaire sur ses trois nœuds  $k \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$  (Figure 3.2), soit :

$$\underline{u}_e(x, y) = \sum_{k=1}^3 N_k(x, y) \underline{u}_e^k \quad (3.1)$$

où  $\underline{u}_e^k$  est la vitesse du nœud  $k$  de l'élément  $e$  et les  $N_k(x, y)$  sont les fonctions d'interpolation linéaires classiques (voir par exemple [Nikishkov \(2004\)](#)).

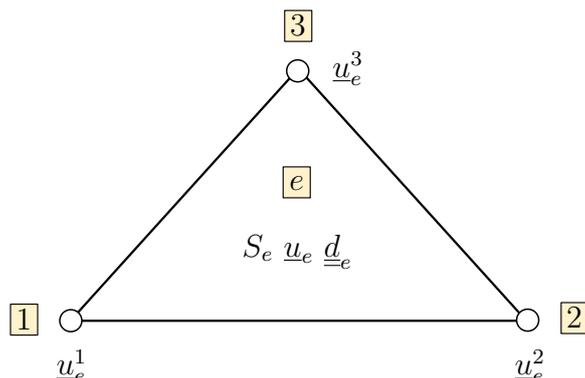


FIGURE 3.2 – Élément fini triangulaire  $e$  de nœuds  $k = 1, 2$  et  $3$

Le taux de déformation dans chaque élément  $e$  est obtenu à partir du champ de vitesse par l'équation suivante :

$$\underline{d}_e = \frac{1}{2} (\underline{\text{grad}} \underline{u}_e + {}^t \underline{\text{grad}} \underline{u}_e) \quad (3.2)$$

Étant donné l'interpolation linéaire du champ de vitesse considérée, le taux de déformation est constant dans chaque élément. Il est déterminé à partir des vitesses aux nœuds par des relations linéaires faisant intervenir les dérivés par rapport à  $x$  et  $y$  des fonctions d'interpolation.

### 3.3. Mise en œuvre de l'approche cinématique

Afin de prendre en compte de possibles discontinuités de vitesse entre les éléments, les nœuds de toutes les interfaces  $I_i (i \in \llbracket 1, N_{Ii} \rrbracket)$ , c'est-à-dire les arêtes communes à deux éléments triangulaires adjacents, sont dédoublés. Par exemple, la discontinuité de vitesse au niveau du nœud  $k$  (dédoublé en  $k^-$  et  $k^+$ ) de l'interface  $i$  entre deux éléments adjacents  $e^-$  et  $e^+$  (Figure 3.3) est donnée par :

$$[u_i^k] = \underline{u}^{k^+} - \underline{u}^{k^-} \quad (3.3)$$

où  $\underline{u}^{k^-}$  et  $\underline{u}^{k^+}$  sont les vitesses aux nœuds  $k^-$  et  $k^+$  appartenant aux éléments  $e^-$  et  $e^+$  respectivement.

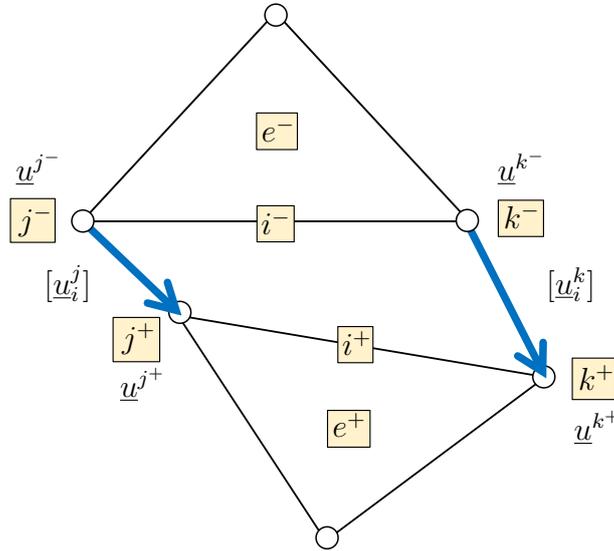


FIGURE 3.3 – Discontinuités de vitesse aux nœuds  $j$  (dédoublé en  $j^-$  et  $j^+$ ) et  $k$  (dédoublé en  $k^-$  et  $k^+$ ) de l'interface  $i$  entre deux éléments adjacents  $e^+$  et  $e^-$

#### Champ de vitesse dans les armatures longitudinales

En ce qui concerne les armatures longitudinales, le champ de vitesse est supposé affine par morceaux. Des vitesses selon les axes  $Ox$  et  $Oy$  sont considérées au niveau de chacun des deux nœuds des éléments linéiques. Le champ de vitesse au niveau de chaque élément  $e \in \llbracket 1, N_r \rrbracket$  est déterminé à partir de l'interpolation linéaire entre les vitesses en ses deux nœuds. Les armatures étant orientées selon l'axe  $Ox$  et ne résistant qu'à un effort normal de traction-compression (leur résistance à l'effort tranchant et à la flexion est négligée), on

s'intéresse uniquement à la composante selon  $Ox$  du champ de vitesse :

$$u_{e,x}(x) = \frac{x - x_j}{x_k - x_j} u_{e,x}^k + \frac{x - x_k}{x_j - x_k} u_{e,x}^j \quad (3.4)$$

où  $u_{e,x}^j$  et  $u_{e,x}^k$  sont respectivement les composantes selon  $Ox$  des vitesses aux nœuds  $j$  et  $k$  de l'élément  $e$ , et  $x_j$  et  $x_k$  leurs abscisses respectives (Figure 3.4).

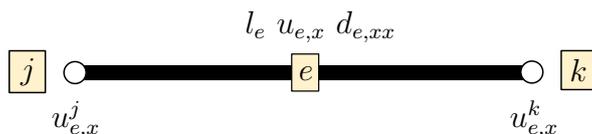


FIGURE 3.4 – Élément linéique  $e$  de l'armature longitudinale

Le taux de déformation dans cet élément (de longueur  $l_e$ ) est uniforme, il est donné par :

$$d_{e,xx} = \frac{u_{e,x}^k - u_{e,x}^j}{l_e} \quad (3.5)$$

Comme pour les éléments bidimensionnels du béton, les nœuds en commun entre deux éléments linéiques adjacents des armatures sont dédoublés pour permettre une possible discontinuité de vitesse entre eux. Celle-ci est donnée pour un nœud  $k$  (dédoublé en  $k^-$  et  $k^+$ ) commun à deux éléments linéiques  $e^-$  et  $e^+$  (Figure 3.5) par l'expression suivante :

$$[u_x^k] = u_x^{k^+} - u_x^{k^-} \quad (3.6)$$

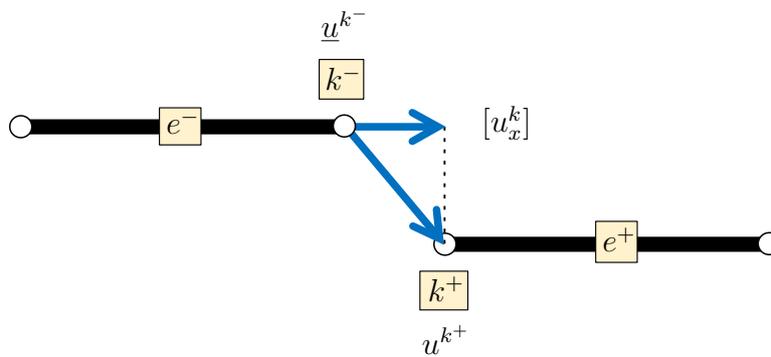


FIGURE 3.5 – Discontinuité de vitesse au nœud  $k$  commun à deux éléments  $e^-$  et  $e^+$

### 3.3.2 Calcul de la puissance résistance maximale

#### Contribution du béton

Le taux de déformation étant constant dans chaque élément du béton, la contribution de ce dernier à la puissance résistante maximale associée au taux de déformation s'obtient par la somme des contributions de chaque élément  $e \in \llbracket 1, N_b \rrbracket$  d'aire  $S_e$  et de taux de déformation  $\underline{d}_e$  :

$$P_{rm}^{b,def} = \sum_{e=1}^{N_b} \pi^b(\underline{d}_e) S_e \quad (3.7)$$

La contribution de la discontinuité de vitesse à la puissance résistante maximale est également calculée comme la somme des contributions au niveau de chaque interface  $\Sigma_i$  (de normale  $\underline{n}_i$ ) de deux éléments adjacents :

$$P_{rm}^{b,disc} = \sum_{i=1}^{N_I^b} \int_{\Sigma_i} \pi^b(\underline{n}_i, [\underline{u}_i]) dl \quad (3.8)$$

Puisque l'interpolation du champ de vitesse est linéaire et que la fonction d'appui du béton est convexe, on peut majorer l'intégrale dans l'équation précédente (3.8) par la moyenne des valeurs de la fonction  $\pi$  aux nœuds  $j$  et  $k$  de l'interface :

$$P_{rm}^{b,disc} \leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_I^b} \left( \pi^b(\underline{n}_i, [\underline{u}_i^j]) + \pi^b(\underline{n}_i, [\underline{u}_i^k]) \right) l_i \quad (3.9)$$

On rappelle que, dans le cas d'un critère de Mohr-Coulomb entièrement tronqué en traction, les fonctions d'appui associées à un taux de déformation et à une discontinuité de vitesse sont données respectivement par les équations suivantes pour un élément  $e$  et une interface  $i$  de nœuds  $k$  :

$$\pi^b(\underline{d}_e) = \frac{f_c}{2} \left( |d_{e,I}| + |d_{e,II}| - \text{tr}(\underline{d}_e) \right) \quad (3.10)$$

$$\pi^b(\underline{n}_i, [\underline{u}_i^k]) = \frac{f_c}{2} \left( |[u_i^k]| - [u_i^k] \cdot \underline{n}_i \right) \quad (3.11)$$

où  $d_{e,I}$  et  $d_{e,II}$  sont les composantes principales du tenseur du taux de déformation de l'élément  $e$  et  $\underline{n}_i$  est la normale unitaire à l'interface  $\Sigma_i$ .

Le calcul des fonctions d'appui par l'équation (3.10) (respectivement (3.11)) n'est valide que si la condition de pertinence (3.12) (respectivement (3.13)) est respectée au niveau de chaque élément (respectivement de chaque nœud de l'interface séparant deux éléments) :

$$\text{tr}(\underline{d}_e) \geq (|d_{e,I}| + |d_{e,II}|) \sin \varphi \quad (3.12)$$

$$[\underline{u}_i^k] \cdot \underline{n}_i \geq |[\underline{u}_i^k]| \sin \varphi \quad (3.13)$$

L'implémentation numérique du critère de résistance de Mohr-Coulomb entièrement tronqué en traction nécessite donc l'introduction de variables auxiliaires qui vérifient des conditions coniques du second ordre, afin de calculer les fonctions d'appui du critère de résistance et respecter les conditions de pertinence. Une description détaillée de la méthode a été notamment présentée par [Makrodimopoulos et Martin \(2007\)](#) et [Vincent \(2018\)](#).

### Contribution des armatures longitudinales

Les fonctions d'appui des armatures longitudinales associées à une déformation ou à une discontinuité de vitesse sont données respectivement par les expressions suivantes :

$$\pi^r(\underline{d}) = T_0 |d_{xx}| \quad (3.14)$$

$$\pi^r([\underline{u}]) = T_0 |[u_x]| \quad (3.15)$$

où  $T_0$  est le produit entre la section de l'armature  $A_s$  et la résistance en traction-compression de l'acier  $\sigma_y$ .

Les taux de déformation étant constant par élément, on déduit l'expression de la contribution des armatures longitudinales à la puissance résistance maximale comme la somme des contributions de chaque élément linéique, en plus des contributions des discontinuités de vitesse au niveau des  $N_{Ir}$  nœuds d'interface :

$$P_{rm}^r = \sum_{e=1}^{N_r} T_0 |d_{e,xx}| l_e + \sum_{i=1}^{N_{Ir}} T_0 |[u_{i,x}]| \quad (3.16)$$

Comme pour le calcul de la contribution du béton, le calcul de la contribution des armatures longitudinales peut se faire également avec l'introduction de variables auxiliaires

qui vérifient des conditions coniques quadratiques.

#### Interface béton-armatures longitudinales

Au niveau de l'interface entre le béton et les armatures longitudinales, une discontinuité de vitesse peut apparaître. En toute rigueur, un critère d'interface devrait être pris en compte pour rendre compte de la résistance de l'interface béton-armature. Pour simplifier, il a été supposé que la discontinuité de vitesse a lieu forcément dans le béton se situant juste au-dessus de l'armature.

#### Contribution des armatures transversales

Dans le cas d'une poutre contenant plusieurs armatures transversales, la modélisation individuelle de chaque armature peut être fastidieuse et le calcul devient plus difficile et peut prendre beaucoup de temps. Cela a été notamment constaté dans les méthodes semi-analytiques proposées dans le chapitre 1. L'homogénéisation du matériau, comme présenté dans la section 2.7.1 du chapitre 2, permet dans ce cas de simplifier la modélisation de la poutre et de réduire le temps de calcul. Pour cela, il est supposé que les armatures transversales sont suffisamment proches, c'est-à-dire que l'espacement entre les renforcements est suffisamment petit en comparaison avec la taille de la zone renforcée. En tirant profit de la périodicité du renforcement transversal, un critère de résistance macroscopique du milieu homogénéisé est déterminé. Dans notre cas, les fonctions d'appui du critère homogénéisé sont données par les équations (2.59) et (2.60), présentées dans le chapitre 2.

La contribution du béton renforcé ainsi homogénéisé à la puissance résistante maximale est donc calculée comme suit pour la discrétisation considérée :

$$P_{rm}^{hom} = P_{rm}^b + \sum_{e=1}^{N_b} T_{0w} |d_{e,yy}| S_e + \sum_{i=1}^{N_{Ib}} T_{0w} |n_{i,y} d_{i,yy}| l_i \quad (3.17)$$

où  $T_{0w} = 2A_{sw}\sigma_{yw}/s$  est la résistance du renforcement transversal par unité de longueur transversale ( $A_{sw}$  et  $\sigma_{yw}$  sont respectivement la section et la résistance en traction-compression d'une armature transversale).

### 3.3.3 Résolution du problème d'optimisation engendré par l'approche cinématique discrétisée

En vue d'implémenter numériquement l'approche cinématique, on introduit le vecteur des inconnues du problème  $\{X\}$  constitué à partir des composantes du champ de vitesse aux nœuds, des taux de déformation dans chacun des éléments et des discontinuités de vitesse aux nœuds des interfaces, ainsi que des variables auxiliaires. Toutes ces variables sont reliées entre elles par des équations linéaires, que l'on peut écrire sous la forme générale :

$$[B]\{X\} = \{C\} \quad (3.18)$$

Ces équations prennent également en compte les conditions aux limites.

Comme indiqué précédemment, les variables auxiliaires introduites dans le vecteur des inconnues sont nécessaires au calcul des puissances résistantes maximales pour la contribution du béton et des armatures, ainsi qu'à la vérification des conditions de pertinence. Les conditions portant sur ces variables sont formulées sous la forme de conditions coniques de second ordre :

$$E(\{X\}) \leq 0 \quad (3.19)$$

L'expression de la puissance résistante maximale se ramène finalement à une forme linéaire des variables d'optimisation  $\{X\}$  que l'on peut écrire :

$$P_{rm} = {}^t\{A\}\{X\} \quad (3.20)$$

Il en est de même de la puissance des efforts extérieurs qui peut se mettre sous la forme :

$$P_{ext} = {}^t\{D\}\{X\} \quad (3.21)$$

Par ailleurs, on considère que les chargements appliqués à la poutre sont proportionnels à des chargements de référence avec un facteur multiplicatif  $\lambda \in \mathbb{R}^+$  (comme décrit dans la section 2.2.4 pour la résolution avec des trajets de chargement radiaux), et que la puissance des chargements de référence est fixée égale à 1. La résolution du problème se ramène finalement à la détermination d'un majorant  $\lambda_c$  du multiplicateur  $\lambda^+$  correspondant au

chargement de ruine de la poutre. Celui-ci est obtenu par la résolution du problème de minimisation conique de second ordre (3.22) à l'aide du solveur **MOSEK** :

$$\begin{aligned} \lambda^+ \leq \lambda_c = \min \quad & {}^t\{A\}\{X\} \\ \text{t.q.} \quad & [B]\{X\} = \{C\} \\ & {}^t\{D\}\{X\} = 1 \\ & E(\{X\}) \leq 0 \end{aligned} \tag{3.22}$$

La présentation de la mise en œuvre numérique de l'approche cinématique donnée ici concerne les problèmes bidimensionnels en déformation plane. Comme indiqué dans la section 2.6.1 du chapitre précédent, la résolution du problème sous l'hypothèse de contrainte plane dans le cas d'un critère de Mohr-Coulomb entièrement tronqué en traction, revient finalement à suivre exactement la même procédure que celle décrite plus haut, en omettant simplement les conditions de pertinence (équations (3.12) et (3.13)).

## 3.4 Comparaison entre les résultats des méthodes numériques et semi-analytiques

Dans cette partie, les trois exemples de poutres présentés au chapitre 2 (section 2.3) sont considérés pour l'application de l'approche cinématique numérique décrite précédemment. Pour cela, les deux hypothèses de déformation et de contrainte planes sont successivement adoptées.

La Figure 3.6 présente la géométrie de la poutre considérée pour les calculs effectués dans cette partie. Les appuis de la poutre, ainsi que la zone d'application de la charge transversale sont définis sur de petites zones de 1 mm de large. Cette distance a été choisie de manière à ce qu'elle soit très faible par rapport aux dimensions de la poutre, afin d'approximer au mieux des appuis et une charge transversale ponctuels, comme dans les méthodes semi-analytiques proposées au chapitre précédent. Elle est également suffisamment large pour éviter le développement de mécanismes de ruine locaux.

La finesse du maillage a été déterminée de sorte à avoir de bons résultats en un temps raisonnable. Pour les calculs en déformation plane, un maillage homogène fin est adopté

(taille caractéristique des éléments  $f = 0,01$  m). Lorsque l'hypothèse de contrainte plane est retenue, un tel maillage fin induit parfois le développement de mécanismes locaux qui donnent de mauvaises estimations des charges de ruine. Un maillage plus grossier est donc adopté dans ce cas ( finesse de maillage comprise entre  $f = 0,01$  et  $0,05$  m). Les Figures 3.6a et b présentent deux exemples de maillage utilisés, obtenus à l'aide de gmsh, un logiciel open source, développé par Geuzaine et Remacle (2009), qui permet de générer des maillages par éléments finis.

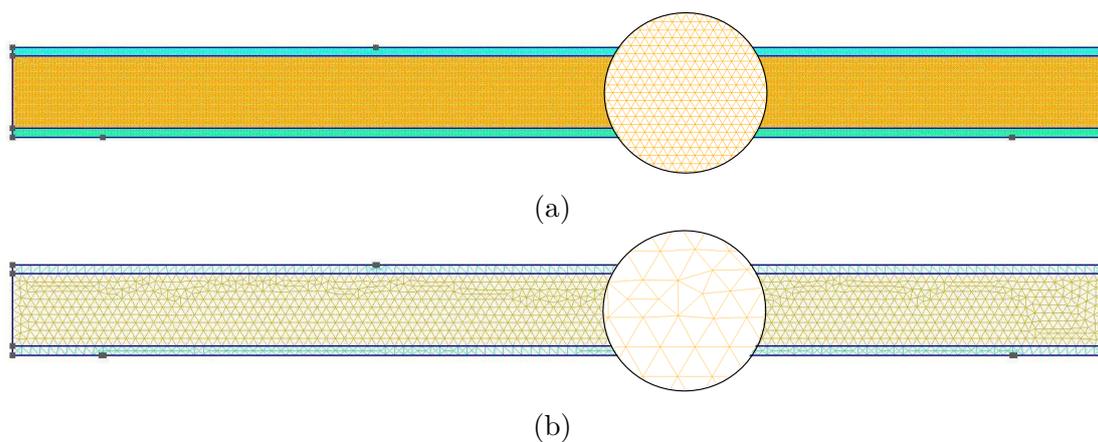


FIGURE 3.6 – Exemples de maillages (a) fin ( $f = 0,01$  m) et (b) grossier ( $f = 0,05$  m) de la poutre étudiée

Pour la poutre n°1 en béton non renforcé, seul le domaine de résistance sans moment supplémentaire est présenté sur la Figure 3.7. Pour les deux autres poutres (n°2 renforcée par des armatures longitudinales et n°3 renforcée par des armatures longitudinales et transversales), les domaines de résistance sont calculés pour des moments supplémentaires nul (Figures 3.9 et 3.12 pour les poutres 2 et 3 respectivement) et maximaux négatif et positif ( $m = -m_{max}$  et  $m_{max}$ ) (Figures 3.14 et 3.15 pour les poutres 2 et 3 respectivement). Les domaines de résistance semi-analytiques, obtenus pour le mécanisme 1 (discontinuité de vitesse selon une surface plane) sous les hypothèses de déformations et de contraintes planes (section 2.6.2), sont également représentés sur les mêmes figures afin de comparer les différents résultats semi-analytiques et numériques.

Concernant la poutre n°1 (Figure 3.7), il apparaît que le calcul numérique par l'approche cinématique en déformation plane a permis une amélioration de l'estimation par excès du domaine de résistance par rapport à celui obtenu par la méthode semi-analytique sous la même hypothèse de déformation plane. Comme attendu, celui-ci reste tout de même

### 3.4. Comparaison entre les résultats des méthodes numériques et semi-analytiques

supérieur aux estimations obtenues sous l'hypothèse de contrainte plane, où les deux domaines obtenus par voies semi-analytique et numérique coïncident.

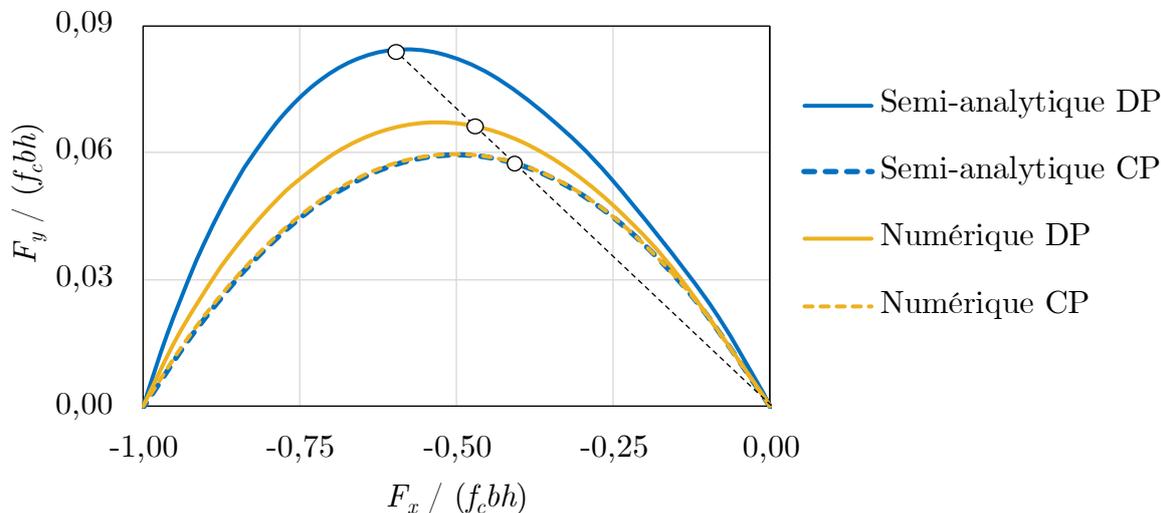


FIGURE 3.7 – Comparaison des résultats numériques et semi-analytiques relatifs à la poutre n°1 en béton seul

S'intéressant plus particulièrement au trajet de chargement représenté sur la figure (également analysé dans la section 2.6.2 du chapitre 2), on constate que les charges transversale et axiale extrêmes situées sur ce trajet, estimées par la méthode numérique en déformation plane, sont plus faibles de 21% par rapport à celles obtenues par la méthode semi-analytique en déformation plane, mais sont plus élevées de 16% par rapport aux calculs semi-analytique et numérique en contrainte plane. Les Figures 3.8a et b présentent les déformées optimales obtenues pour ces chargements par les calculs numériques respectivement sous les hypothèses de déformation plane et de contrainte plane. Celui obtenu par le calcul en déformation plane consiste en des mouvements rigidifiant loin de la zone d'application de la charge transversale. Cette dernière quant à elle subit des taux de déformation, contrairement au mécanisme obtenu dans les calculs semi-analytiques (discontinuité de vitesse selon un plan incliné passant par le point d'application de la charge transversale et l'appui de gauche, Figure 2.34a). En contrainte plane, des discontinuités de vitesse apparaissent dans la partie supérieure le long de la poutre et dans la partie inférieure en dessous de la zone d'application de la charge transversale. Ce mécanisme ne correspond pas non plus à celui obtenu dans les calculs semi-analytiques consistant en une discontinuité de vitesse selon un plan vertical au niveau du point d'application de la charge transversale (Figure 2.34b).

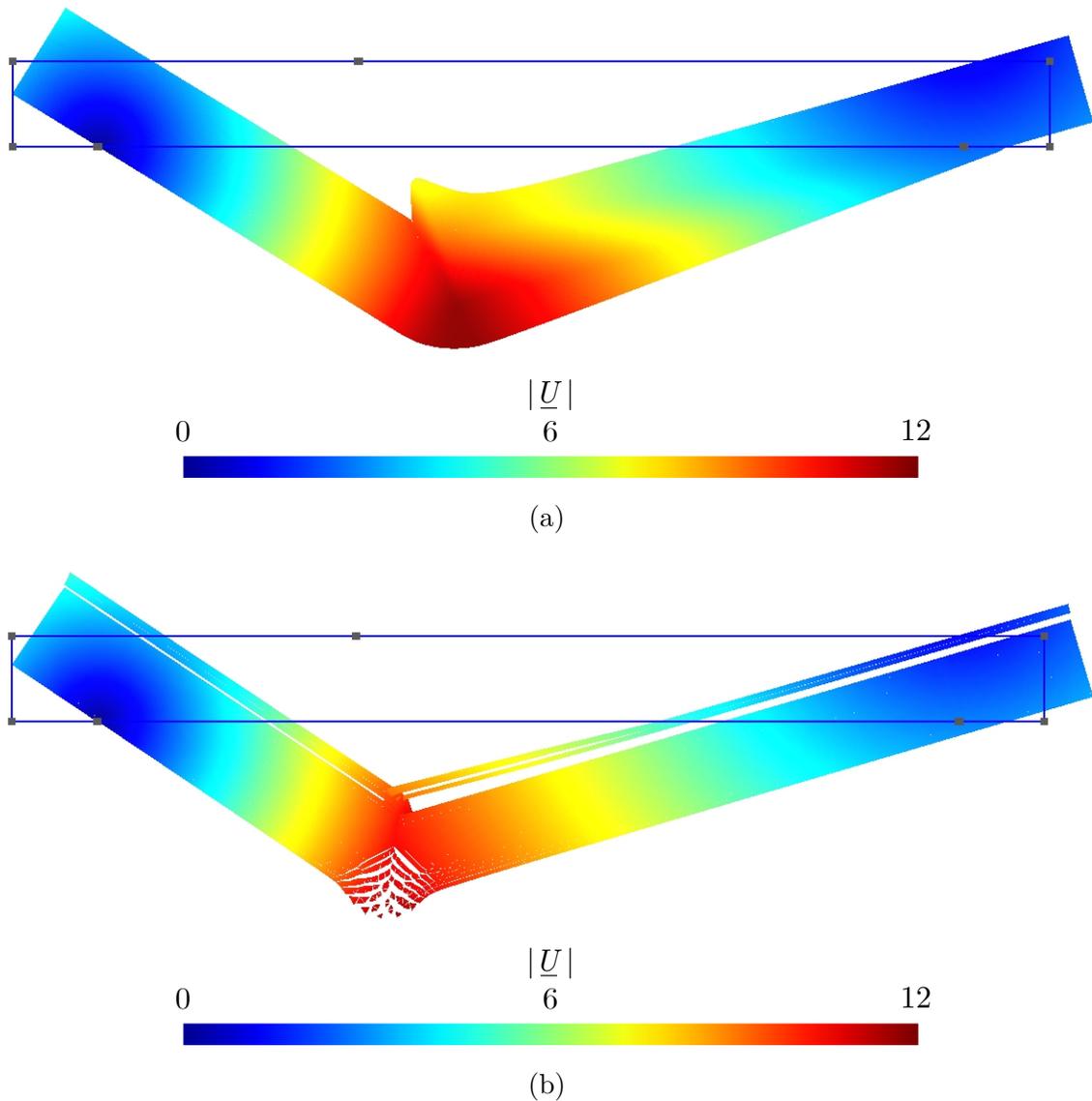


FIGURE 3.8 – Exemples de déformées obtenues par les calculs numériques pour la poutre n°1 sous les hypothèses de (a) déformation plane et de (b) contrainte plane

Contrairement à la poutre n°1, le calcul numérique en déformation plane n'aboutit qu'à une faible amélioration de l'évaluation par excès du domaine de résistance de la poutre n°2 par rapport au calcul semi-analytique sous la même hypothèse, et ce uniquement pour des valeurs de compression axiale importantes (supérieures à environ  $f_c b h$ ). Ces résultats se rapprochent d'ailleurs de ceux obtenus par les calculs semi-analytiques et numériques en contrainte plane, qui une nouvelle fois donnent des résultats très proches (Figure 3.9).

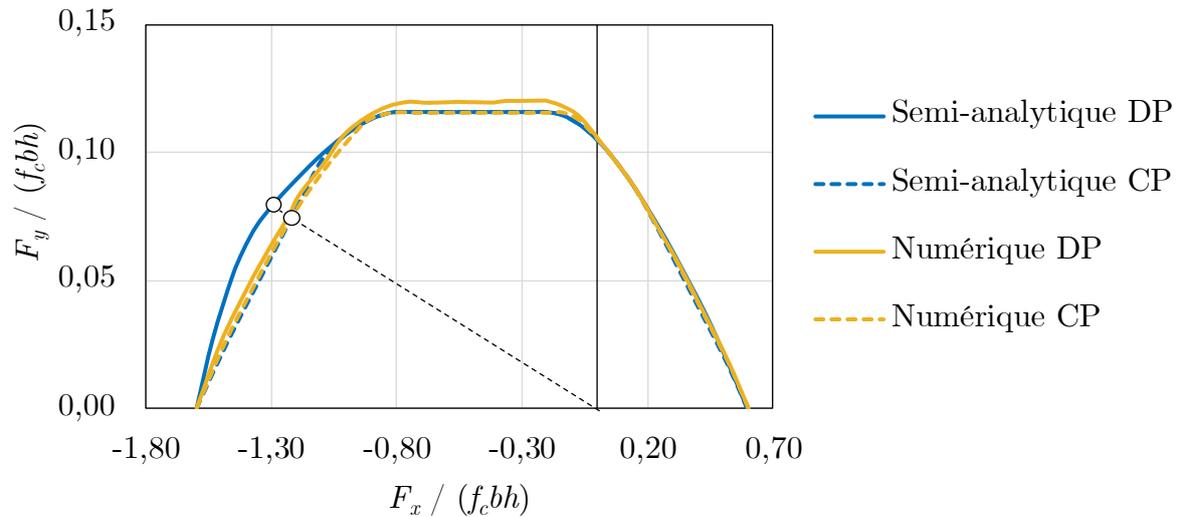
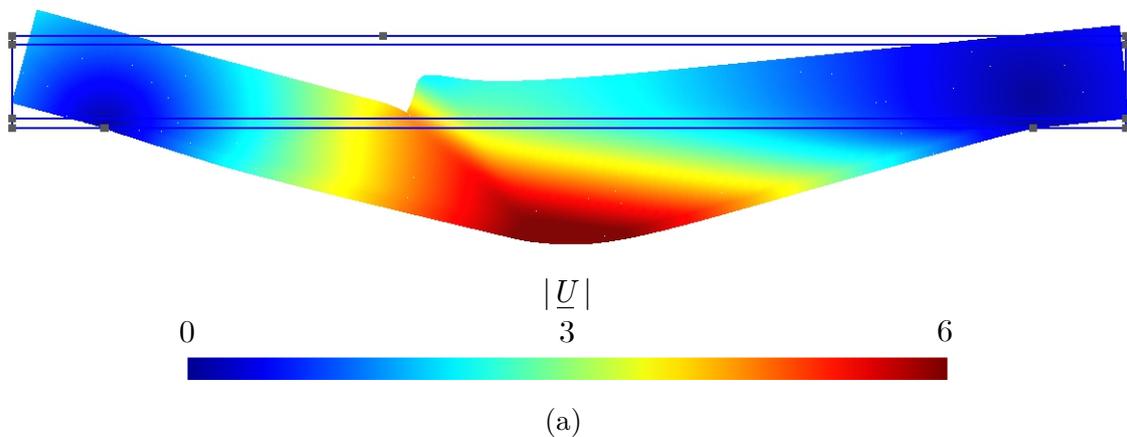


FIGURE 3.9 – Comparaison des résultats numériques et semi-analytiques de la poutre n°2 pour un moment supplémentaire nul

En l’occurrence, le trajet de chargement représenté sur la figure indique une diminution des charges transversale et axiale de ruine de 5% par rapport au calcul semi-analytique en déformation plane, et plus élevé de seulement 1% par rapport au calcul semi-analytique en contrainte plane. Les mécanismes de ruine optimaux obtenus par les approches numériques au niveau de ces points sont représentés sur les Figures 3.10a et b en déformation et en contrainte planes respectivement. On observe que les mécanismes sont différents : taux de déformation pour les résultats en déformation plane, et taux de déformation et discontinuités de vitesse pour les résultats en contrainte plane. Ces mécanismes diffèrent également de ceux proposés pour le calcul semi-analytique (Figure 2.34a).



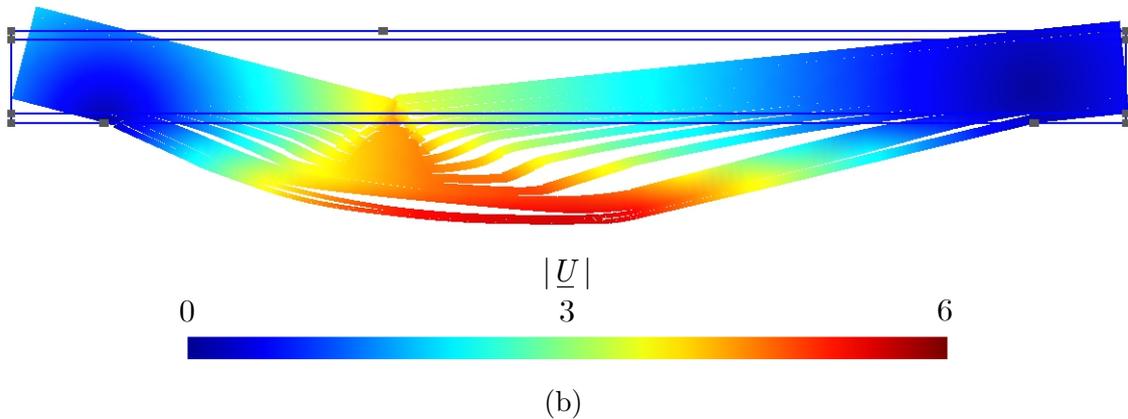


FIGURE 3.10 – Exemples de déformées obtenues par les calculs numériques pour la poutre n°2 sous les hypothèses de (a) déformation plane et de (b) contrainte plane

Par ailleurs, en ce qui concerne le plateau horizontal supérieur, on observe que le calcul numérique en déformation plane donne une valeur légèrement plus élevée (de seulement 3%) par rapport à celles estimées par les autres méthodes de calcul (semi-analytique en déformation et en contrainte plane et numérique en contrainte plane). Nous avons pu observer que cette différence diminue lorsque la largeur des appuis et de la zone d'application de la charge transversale est réduite, s'approchant ainsi de la modélisation considérée dans les calculs semi-analytiques où la charge transversale et les appuis sont ponctuels.

Le mécanisme de ruine optimal obtenu correspondant à un chargement situé sur le plateau (Figure 3.11) consiste en des déformations qui se localisent dans une zone étendue passant par le point d'application de la charge transversale et l'appui de gauche. Ce mécanisme rappelle celui obtenu dans les calculs semi-analytiques où une discontinuité de vitesse a lieu selon un plan passant également par ces points (Figure 2.19).

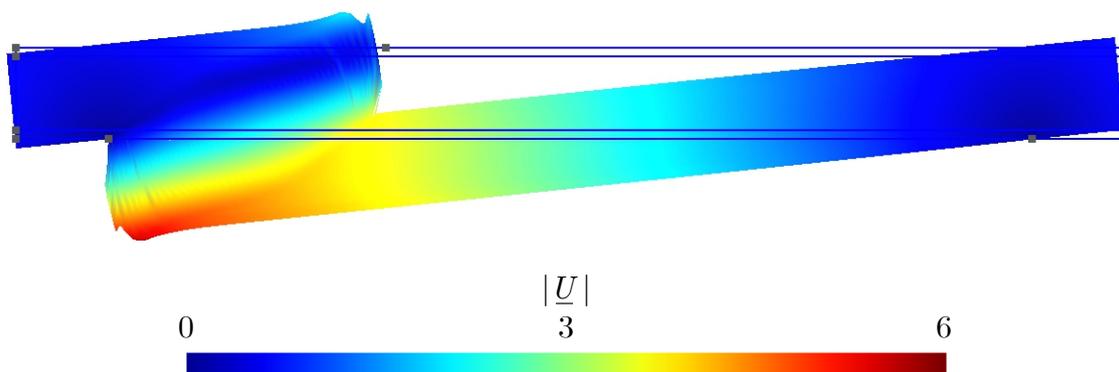


FIGURE 3.11 – Exemple de déformée obtenue par le calcul numérique pour la poutre n°2 sous l'hypothèse de déformation plane au niveau d'un point du plateau horizontal

Comme pour la poutre n°1, le domaine de résistance de la poutre n°3 estimé par l'approche numérique en déformation plane est plus réduit que celui estimé par le calcul semi-analytique sous la même hypothèse. En particulier, les points des domaines de résistance représentés sur la Figure 3.12 situés le long du trajet de chargement indiqué sur celle-ci, montrent une diminution des estimations des charges de ruine transversale et axiale d'environ 8%. De plus, le calcul numérique en contrainte plane donne, comme pour les poutres n°1 et 2, des évaluations très proches du calcul semi-analytique également en contrainte plane, qui sont plus faibles que ceux inférieures à celles obtenues par le calcul numérique en déformation plane, mais uniquement pour des valeurs de compression axiale supérieures à environ  $0,17f_cbh$ . Les estimations des charges de ruine en contrainte plane le long du trajet de chargement représenté sur la figure sont d'ailleurs inférieures de 12% à celles du calcul numérique en déformation plane.

Les mécanismes de ruine optimaux obtenus par les deux méthodes numériques en déformation et en contrainte planes sont représentés sur les Figures 3.13a et b respectivement. On peut voir une nouvelle fois que le mécanisme obtenu numériquement sous l'hypothèse de déformation plane n'est pas pris en compte par l'approche semi-analytique. En revanche, le mécanisme obtenu sous l'hypothèse de contrainte plane se rapproche du mécanisme obtenu par le calcul semi-analytique sous la même hypothèse (Figure 2.34b), où des mouvements rigidifiant de deux blocs, séparés par un plan vertical, peuvent être distingués.

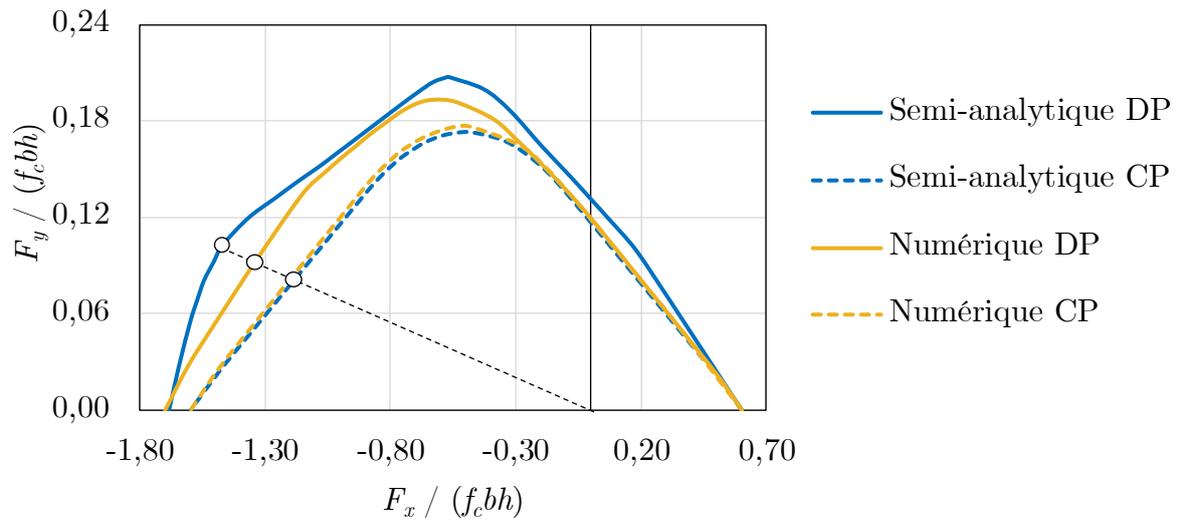


FIGURE 3.12 – Comparaison des résultats numériques et semi-analytiques de la poutre n°3 pour un moment supplémentaire nul

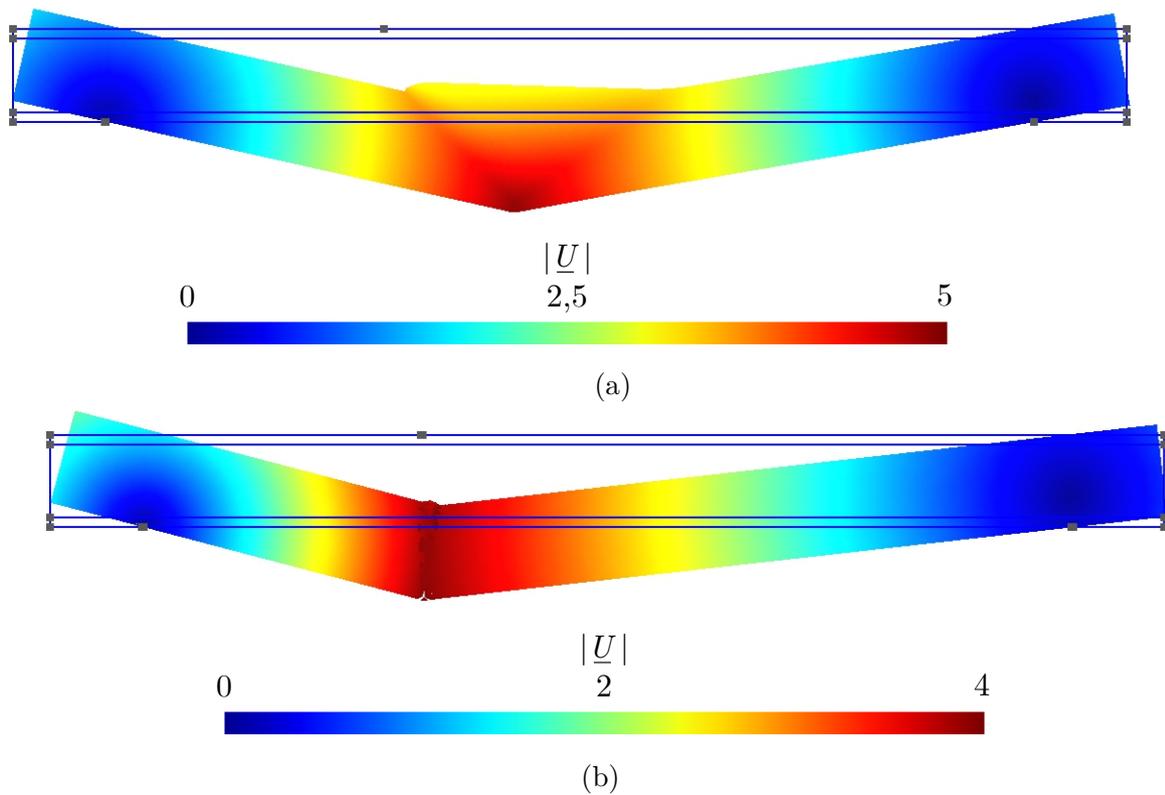


FIGURE 3.13 – Déformées obtenues par les calculs numériques pour la poutre n°3 sous les hypothèses de (a) déformation plane et de (b) contrainte plane

Lorsqu'un moment supplémentaire maximal positif ( $m = m_{max}$ ) est appliqué aux extrémités des poutres n°2 et 3, on peut faire les mêmes observations que précédemment concernant l'amélioration de l'estimation du domaine de résistance avec la méthode numérique en déformation plane par rapport au calcul semi-analytique sous la même hypothèse (Figures 3.14 et 3.15). Ce dernier reste toutefois plus grand que les domaines obtenus sous l'hypothèse de contrainte plane par les méthodes numérique et semi-analytique, qui fournissent une nouvelle fois des résultats très proches.

En revanche, lorsque les poutres sont soumises à un moment maximal négatif ( $m = -m_{max}$ ), le calcul numérique en contrainte plane fournit une meilleure évaluation du domaine de résistance que le calcul semi-analytique sous la même hypothèse, notamment pour des charges axiales de compression importantes en ce qui concerne la poutre n°2 (compression supérieure à environ  $f_c b h$ ), et en outre pour des charges axiales de traction en ce qui concerne la poutre n°3. Il apparaît d'ailleurs lorsque l'on se réfère aux résultats des approches numériques, que la poutre n°3 ne résiste plus à des charges axiales de traction lorsque le moment maximal négatif est appliqué (comme la poutre n°2), contrairement aux résultats semi-analytiques. De plus, la valeur du plateau horizontal du domaine de résistance de la poutre n°2 estimée par la méthode numérique en déformation plane est, comme observé dans le cas sans moment supplémentaire, légèrement plus élevée que celle obtenue par les autres méthodes de calculs (différence d'environ 4%). La tendance inverse a été observée pour la poutre n°3 où les calculs numériques en déformation et en contrainte planes ont donné la même valeur du plateau qui est légèrement inférieure à celle obtenue par les calculs semi-analytiques (différence d'environ 3%).

**Temps de calcul** Le temps de calcul d'un domaine de résistance constitué d'une trentaine de points dépend de la finesse du maillage. Par exemple, en déformation plane avec une finesse de 0,01 m, les calculs durent quelques heures (environ 1h pour la poutre 1 et 3h pour les poutres 2 et 3). Pour les calculs en contrainte plane avec une finesse de 0,05 m, les calculs ne prennent que quelques minutes.

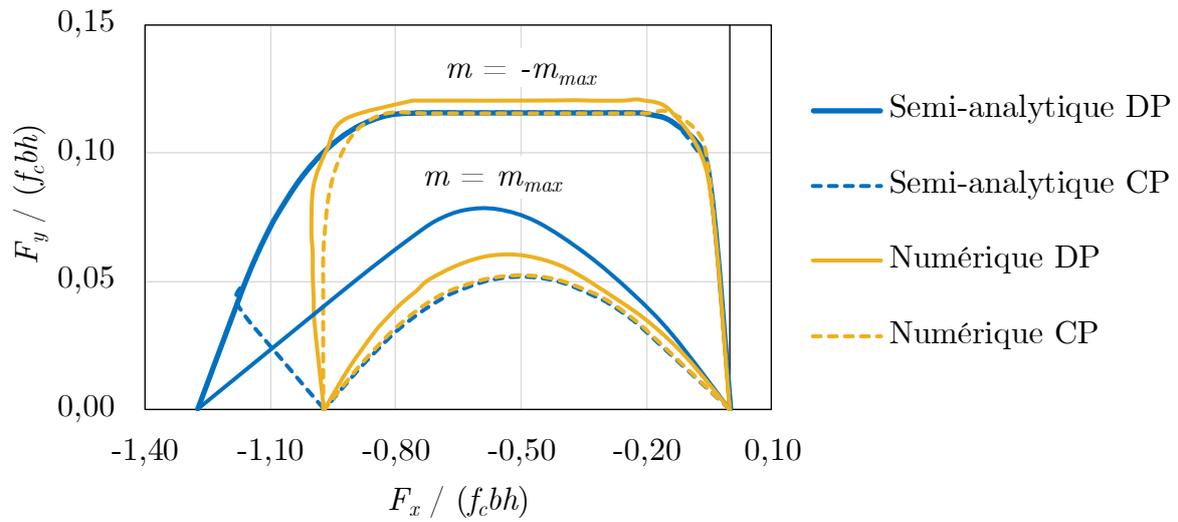


FIGURE 3.14 – Comparaison des résultats numériques et semi-analytiques de la poutre n°2 pour un moment supplémentaire maximal négatif et positif

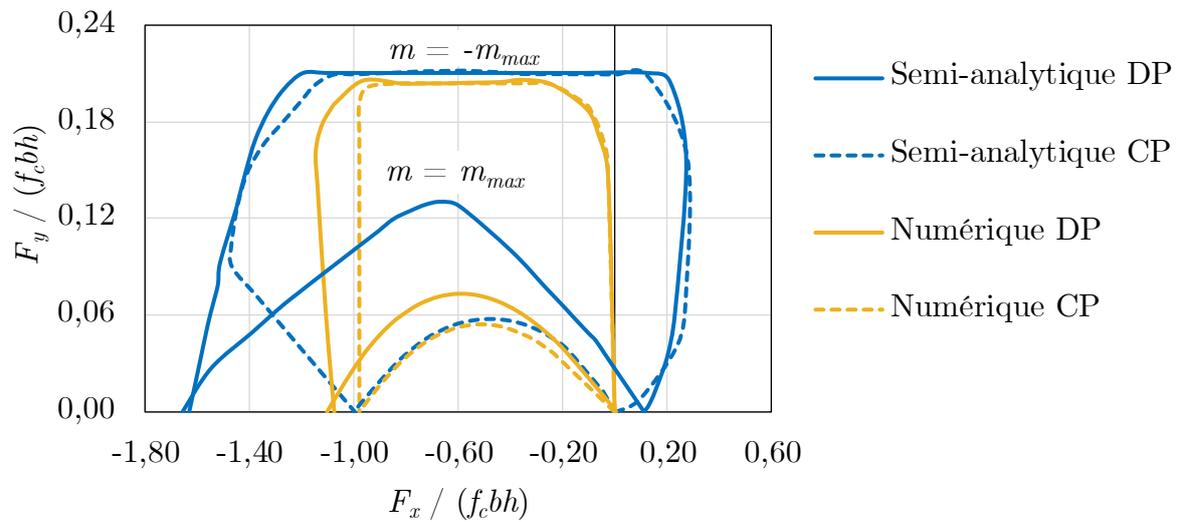


FIGURE 3.15 – Comparaison des résultats numériques et semi-analytiques de la poutre n°3 pour un moment supplémentaire maximal négatif et positif

## 3.5 Conclusions

Dans ce chapitre, une démarche d'implémentation numérique par la méthode des éléments finis de l'approche cinématique du *calcul à la rupture* est présentée. En considérant les hypothèses de déformation ou de contrainte planes, une modélisation mixte de la poutre étudiée a été adoptée, où le béton est considéré comme un milieu continu bidimensionnel, tandis que les armatures longitudinales sont modélisées comme des éléments continus unidimensionnels. Quant aux renforcements transversaux, ils ont été pris en compte à travers une procédure d'homogénéisation du milieu "béton renforcé par des cadres" pour constituer un matériau homogénéisé équivalent. Une discrétisation des éléments finis a été ensuite adoptée utilisant des éléments triangulaires à trois nœuds pour le milieu béton (éventuellement homogénéisé) et des éléments linéiques pour les armatures longitudinales, avec des interpolations linéaires des champs de vitesse et des discontinuités de vitesse entre les éléments. Finalement, un problème d'optimisation quadratique conique a été formulé et résolu numériquement à l'aide du solveur **MOSEK**.

Les résultats de cette approche numérique sous les hypothèses de déformation et de contrainte planes ont été par la suite comparés aux résultats des calculs semi-analytiques sous les mêmes hypothèses utilisant des mécanismes mettant en jeu une discontinuité de vitesse selon une surface plane (mécanisme 1), et ce pour les trois exemples de poutres considérés dans le chapitre 2. Les comparaisons ont mis en évidence l'intérêt des approches numériques qui permettent l'amélioration de l'estimation des domaines de résistance, due au fait que l'espace des mécanismes explorés par la discrétisation en éléments finis est plus vaste que celui utilisé dans l'approche semi-analytique. En général, l'approche numérique en contrainte plane donne quasiment les mêmes résultats que le calcul semi-analytique également en contrainte plane, sauf dans le cas de poutres soumises à un moment supplémentaire maximal négatif, où le calcul numérique permet une amélioration de l'estimation du domaine de résistance. Dans le cas de l'hypothèse de déformation plane, le calcul numérique fournit une meilleure évaluation des domaines de résistance que le calcul semi-analytique sous la même hypothèse, hormis en ce qui concerne le plateau horizontal des charges transversales maximales de la poutre renforcée longitudinalement sans ou avec moment supplémentaire négatif, dont la valeur est légèrement plus élevée. Il a été d'ailleurs constaté que la valeur de ce plateau diminue lorsque la largeur des appuis et de la zone d'application de la charge transversale est réduite.

Les résultats numériques des trois différentes poutres étudiées ont été de plus illustrés par quelques exemples de mécanismes de ruine optimaux obtenus par ces approches cinématiques numériques. Ces mécanismes présentent en général des champs de vitesse virtuelle différents des mécanismes analytiques proposés dans le chapitre 2, ce qui confirme l'intérêt de l'utilisation de ces approches numériques.

Afin d'obtenir une estimation par défaut (et donc un encadrement) du domaine de résistance des poutres étudiées, l'approche statique par l'intérieur *calcul à la rupture* peut être également mise en œuvre numériquement par la méthode des éléments finis en 2D sous les hypothèses de déformation et de contrainte plane. D'autre part, une modélisation 3D de la structure peut être adoptée en vue d'obtenir de meilleurs estimations des domaines de résistance à l'aide des approches statique et cinématique.

\*       \*  
      \*  
      \*

# Chapitre 4

## Étude expérimentale

**Résumé :** *Ce chapitre présente deux campagnes expérimentales réalisées sur des poutres avec et sans armatures transversales. La configuration de chargement est similaire à celle considérée dans les chapitres précédents. Les propriétés des poutres, le dispositif de chargement ainsi que le programme des essais sont décrits de façon détaillée. Les résultats des essais sont ensuite présentés et analysés afin d'identifier l'influence du moment supplémentaire et de la force axiale de compression sur la résistance à l'effort tranchant des poutres en béton armé. Par ailleurs, un dispositif de traitement par corrélation d'images numériques a été utilisé durant les essais pour suivre l'évolution des fissures et déterminer l'effet des chargements sur la propagation des fissures jusqu'à la rupture.*

### Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>110</b>
<b>4.2</b>	<b>Description des essais</b>	<b>111</b>
4.2.1	Caractéristiques des corps d'épreuve	111
4.2.2	Dispositif d'essais	117
4.2.3	Programme de chargement	120
<b>4.3</b>	<b>Résultats des essais et discussions</b>	<b>123</b>
4.3.1	Courbes force-déplacement	123
4.3.2	Évolution des fissures	126
4.3.3	Charges ultimes	132
4.3.4	Comparaison avec les prévisions de codes de construction	137
<b>4.4</b>	<b>Conclusions</b>	<b>140</b>

---

## 4.1 Introduction

Ce chapitre présente deux campagnes d'essais visant à étudier expérimentalement l'influence de la charge axiale de compression et du moment supplémentaire négatif appliqués aux extrémités, sur la résistance à l'effort tranchant (engendré par un chargement transversal) des poutres en béton armé renforcées ou non avec des armatures transversales. Ces essais viennent compléter les deux campagnes expérimentales déjà réalisées par [Pham \*et al.\* \(2020a,b\)](#), à l'aide du même dispositif de chargement, sur des poutres similaires soumises quant à elles à une charge axiale de traction ainsi qu'à un moment supplémentaire négatif.

Dans un premier temps, les poutres testées et leurs matériaux constitutifs sont décrits de façon détaillée dans la section [4.2.1](#). Le dispositif expérimental innovant utilisé, développé par [Pham \*et al.\* \(2020c\)](#), est ensuite présenté (section [4.2.2](#)). Celui-ci permet d'appliquer le même chargement que celui décrit dans les deux chapitres précédents. Différentes combinaisons de valeurs de compression axiale et de moment supplémentaire négatif ont été testées. Le programme de chargement des deux campagnes expérimentales et les protocoles d'application de ces charges sont présentés dans la section [4.2.3](#).

La deuxième partie de ce chapitre (section [4.3](#)) est consacrée à la présentation et à l'analyse des résultats des essais. En particulier, l'évolution de la force verticale (chargement transversal) appliquée en fonction du déplacement vertical mesuré durant les essais est étudiée dans le but d'analyser le comportement des poutres durant le chargement (section [4.3.1](#)). Le développement des fissures enregistré par un système de corrélation d'images numériques est également analysé afin de déterminer le rôle des chargements, ainsi que la présence des armatures transversales, sur le processus de fissuration des poutres en particulier au moment de la rupture (section [4.3.2](#)). Enfin, l'analyse des charges ultimes appliquées aux poutres permet d'identifier expérimentalement l'influence de la charge axiale de compression et du moment supplémentaire négatif sur la résistance à l'effort tranchant des poutres, aussi bien dans le cas où seules des armatures longitudinales sont employées, que dans le cas où des armatures transversales sont également mises en œuvre (section [4.3.3](#)).

Les valeurs maximales de l'effort tranchant sont finalement comparées aux prédictions de l'Eurocode 2 ([EN 1992-1-1, 2005](#)) ainsi que du fib Model Code ([fib, 2012](#)) afin d'évaluer la pertinence de ces codes de construction dans le dimensionnement à l'effort tranchant

des éléments en béton armé (section 4.3.4).

Les résultats de ces deux campagnes expérimentales, en plus de ceux présentés par [Pham \*et al.\* \(2020a,b\)](#) et par d'autres études expérimentales disponibles dans la littérature (présentées dans le chapitre 1), constituent des bases de données importantes pour obtenir les premières validations (chapitre 5) des méthodes de calcul semi-analytiques et numériques proposées dans les deux chapitres précédents.

## 4.2 Description des essais

### 4.2.1 Caractéristiques des corps d'épreuve

Les essais ont été réalisés sur 36 poutres identiques qui mesurent 3,92 m de long, dotées d'une section rectangulaire de largeur  $b = 0,2$  m et de hauteur  $h = 0,3$  m. Ces poutres sont placées en position horizontale sur deux appuis simples séparés d'une distance  $l = 2,2$  m. Elles sont conçues de façon à favoriser la rupture par effort tranchant dans la zone étudiée de longueur  $a = 1$  m. Cette longueur est prise égale à environ quatre fois la hauteur effective  $d$  (distance entre la face supérieure de la poutre et l'axe du renforcement longitudinal inférieur) de la poutre ( $a/d = 3,9$ ) pour éviter ou minimiser le transfert direct des charges sur les appuis ([Pham \*et al.\*, 2020c](#)). En effet, pour des valeurs du rapport  $a/d$  inférieures à environ 2,5 à 3,0, un effet de voûte ("arch action") peut se produire, débouchant sur la transmission directe vers les appuis des charges transversales appliquées, à travers la formation d'une bielle de béton comprimé ([Hawkins \*et al.\*, 2005](#)).

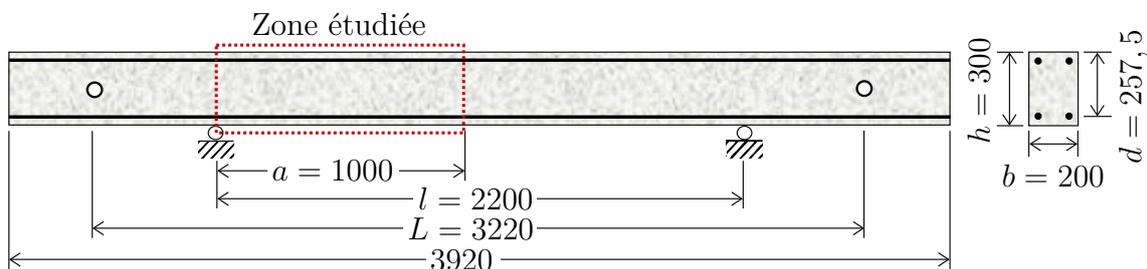


FIGURE 4.1 – Schéma des poutres testées

Pour construire les 36 poutres, 20 gâchées de béton présentant la composition donnée dans le Tableau 4.1 ont été utilisées.

TABLEAU 4.1 – Composition du béton

Composant	Quantité (kg/m <sup>3</sup> )
Ciment	420
Sable 0/6.3	852
Aggrégats 4/14	804
Eau	220
Superplastifiant	1,8

Pour chaque gâchée, neuf éprouvettes ont été réalisées afin de caractériser la résistance du béton (voir Figure 4.2 par exemple) :

- six éprouvettes cubiques de 150 mm de côté pour la mesure de la résistance à la compression, dont trois ont été testées à 28 jours, tandis que les trois autres ont été testées le jour des essais sur les poutres fabriquées avec la gâchée correspondante. Les valeurs à retenir sont estimées en appliquant un coefficient correctif égal à 0,925 à la résistance mesurée sur des cubes (NF EN 13369, 2018).
- trois éprouvettes cylindriques de 160 mm de diamètre et 320 mm de hauteur pour la mesure de la résistance à la traction (par un essai de fendage), le jour de l'essai sur les poutres concernées.



FIGURE 4.2 – Exemples d'éprouvettes cubiques et cylindriques pour la caractérisation du béton de la deuxième campagne

Les résultats des essais de caractérisation sont donnés dans le Tableau 4.2.

4.2. Description des essais

TABLEAU 4.2 – Caractéristiques des poutres

N° poutre	Béton			Armatures longitudinales		Armatures transversales	
	$f_{c,cyl,28j}$ (MPa)	$f_{c,cyl,test}$ (MPa)	$f_{t,test}$ (MPa)	$f_y$ (MPa)	$f_r$ (MPa)	$f_{yw}$ (MPa)	$f_{rw}$ (MPa)
NS-1	29,6	30,0	2,1				
NS-2	29,6	30,0	2,1				
NS-3	35,2	35,3	3,0				
NS-4	35,2	35,3	3,0				
NS-5	34,6	35,1	2,6				
NS-6	34,6	35,1	2,6				
NS-7	34,3	36,2	2,0				
NS-8	34,3	36,2	2,0				
NS-9	34,2	36,1	2,5				
NS-10	36,0	37,8	3,0	525	635		
NS-11	36,0	37,8	3,0				
NS-12	38,3	39,4	2,7				
NS-13	38,3	39,4	2,7				
NS-14	31,9	33,5	2,3				
NS-15	31,9	33,5	2,3				
NS-16	38,0	39,6	2,4				
NS-17	38,0	39,6	2,4				
NS-18	37,6	39,0	3,0				
S-1	34,8	38,1	3,1				
S-2	34,0	36,5	3,2				
S-3	34,0	36,5	3,2				
S-4	34,8	37,8	2,9				
S-5	34,8	37,8	2,9	510	640		
S-6	34,0	38,7	2,9				
S-7	34,0	38,7	2,9				
S-8	35,0	36,3	3,2				
S-9	35,0	36,3	3,2				
S-10	32,7	35,3	3,1			509	615
S-11	33,9	34,2	2,9				
S-12	33,9	34,2	2,9				
S-13	32,6	34,5	2,8				
S-14	32,6	34,5	2,8	591	711		
S-15	31,9	32,9	2,3				
S-16	31,9	32,9	2,3				
S-17	30,1	31,3	2,4				
S-18	30,1	31,3	2,4				

Ils montrent que la résistance à la compression du béton mesurée à 28 jours varie entre 29,6 et 38,3 MPa. Le jour des essais, cette résistance a légèrement augmenté et varie entre 30,0 et 39,6 MPa, tandis que la résistance à la traction varie entre 2,0 et 3,2 MPa.

Avant de couler le béton dans le coffrage des poutres, deux réservations cylindriques de 60 mm de diamètre et de 200 mm de hauteur (traversant toute la largeur des poutres) ont été réalisées à une distance de 330 mm des deux extrémités des poutres (Figure 4.3). Ces réservations sont destinées à recevoir un dispositif spécifique pour l'application des charges, qui sera présenté dans la section suivante.

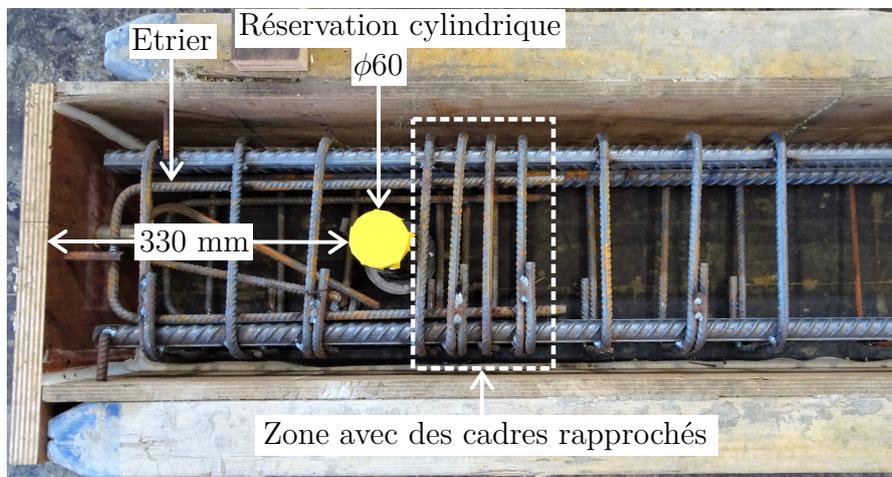
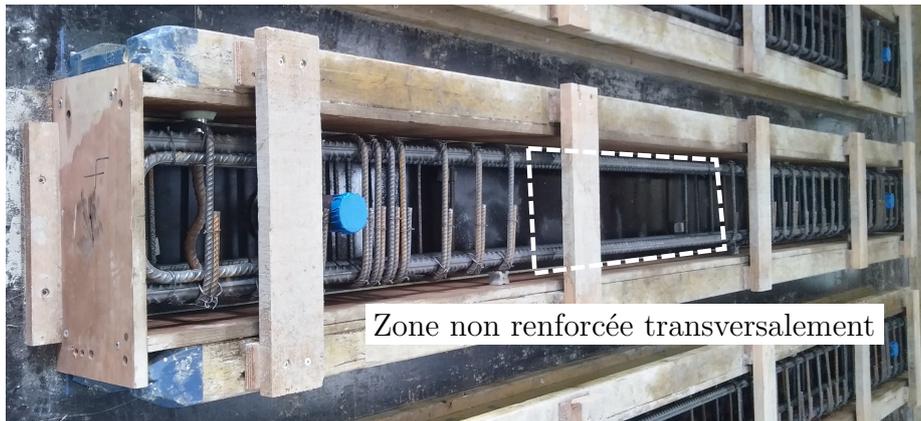
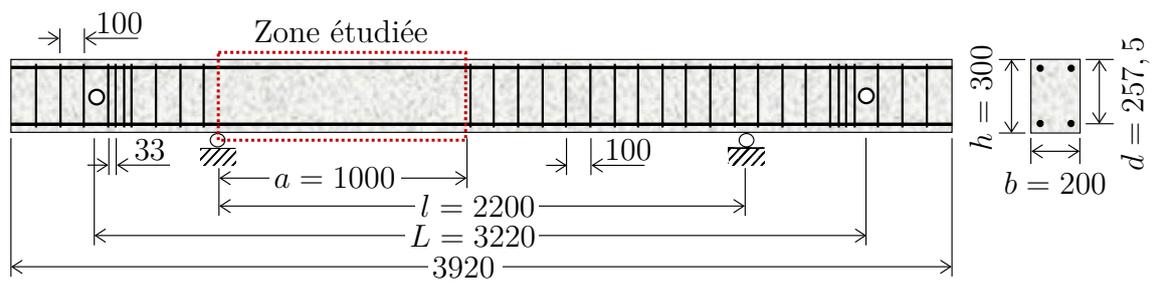


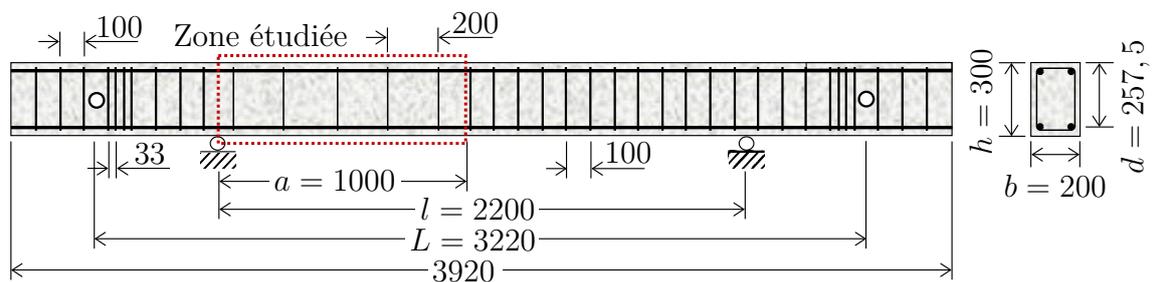
FIGURE 4.3 – Détails de l'extrémité des poutres

La moitié des poutres, testée dans une première campagne expérimentale appelée NS (comme "Non-Shear"), ne contenait pas d'armatures transversales dans la zone étudiée (de longueur  $a$ , Figure 4.4a). L'autre moitié des poutres, testée durant la seconde campagne expérimentale appelée S (comme "Shear"), a été renforcée dans cette zone avec des cadres en acier de  $\phi_w = 6$  mm de diamètre avec un espacement régulier de  $s = 200$  mm (Figure 4.4b). Trois échantillons de ces armatures ont été testés à l'aide du dispositif présenté sur la Figure 4.5a (machine de traction), montrant une limite d'élasticité de  $f_{yw} = 509$  MPa et une limite à la rupture de  $f_{rw} = 615$  MPa. Néanmoins, afin d'éviter une rupture qui pourrait se produire de manière accidentelle en dehors de la zone étudiée, les deux types de poutres NS et S ont été renforcées avec des armatures transversales de 10 mm de diamètre, régulièrement espacés de 100 mm. Cet espacement a été réduit à environ 33 mm dans la zone située à proximité des réservations cylindriques, pour éviter l'écrasement local du béton due à une forte compression (voir Figures 4.3 et 4.4).

## 4.2. Description des essais



(a) Poutres NS



(b) Poutres S

FIGURE 4.4 – Schémas (longueurs en mm) et photos du ferrailage des poutres NS et S

Les poutres étaient également renforcées longitudinalement avec deux lits symétriques de deux armatures en acier à haute adhérence de  $\phi = 25$  mm de diamètre, avec un enrobage de 30 mm. Ces barres provenaient de trois lots différents. Des essais de caractérisation ont été réalisés sur trois échantillons de barres pour chaque lot à l'aide du dispositif présenté sur la Figure 4.5b (dispositif spécial pour la caractérisation de barres de diamètre important). Pour les poutres NS (sans cadres), toutes les barres provenaient du même lot (lot 1). Les résultats ont montré une limite d'élasticité de  $f_y = 525$  MPa et une limite à la rupture de  $f_r = 635$  MPa. Pour les poutres S (avec cadres), les barres provenaient de deux lots différents (lots 2 et 3), qui présentaient une limite d'élasticité de  $f_y = 510$  MPa (respectivement  $f_y = 591$  MPa) et une limite à la rupture de  $f_r = 640$  MPa (respectivement  $f_r = 711$  MPa) pour le lot 2 (respectivement le lot 3). Le ratio du renforcement longitudinal (rapport entre la section totale du renforcement longitudinal et la section de la poutre) est de 3,3% par rapport à la section brute de la poutre.

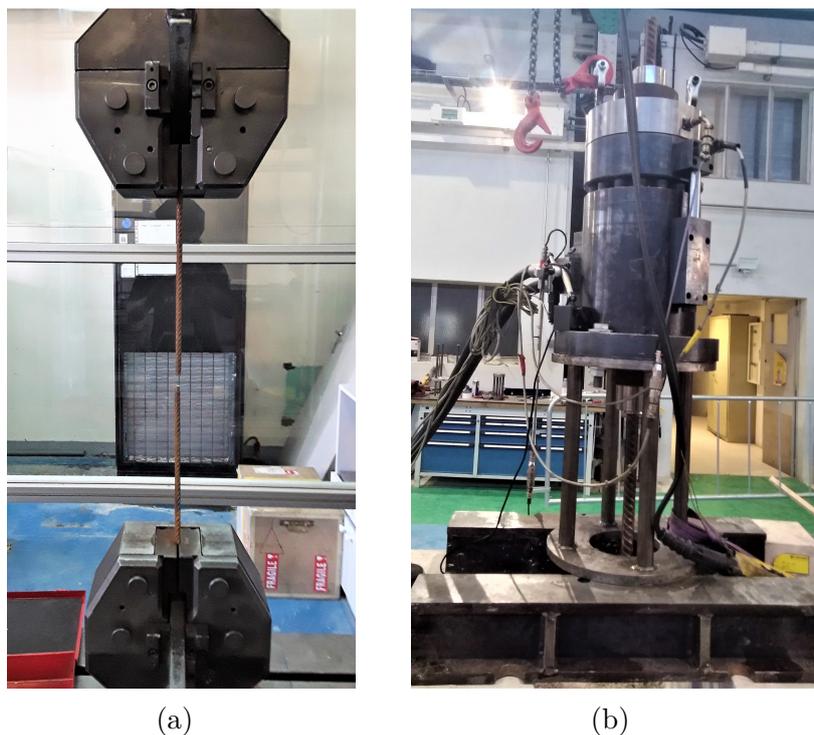


FIGURE 4.5 – Dispositifs de caractérisation des armatures (a) transversales et (b) longitudinales

Par ailleurs, deux étriers de diamètre 16 mm (respectivement 12 mm) ont été disposés au niveau des deux extrémités des poutres NS (respectivement S), fixant ensemble chaque

armature longitudinale du haut avec celle opposée en bas, dans le but d'assurer un bon ancrage des armatures longitudinales dans le béton (Figure 4.3).

## 4.2.2 Dispositif d'essais

Les poutres ont été soumises à la combinaison d'un effort transversal, d'un moment fléchissant et d'un effort axial de compression à travers l'application d'une flexion trois points et d'un couple de chargement. Le dispositif utilisé pour appliquer un tel chargement (Figure 4.7 : efforts représentés par les flèches rouges) a été développé par [Pham et al. \(2020c\)](#).

Ce dispositif utilise trois vérins hydrauliques (Figure 4.6) :

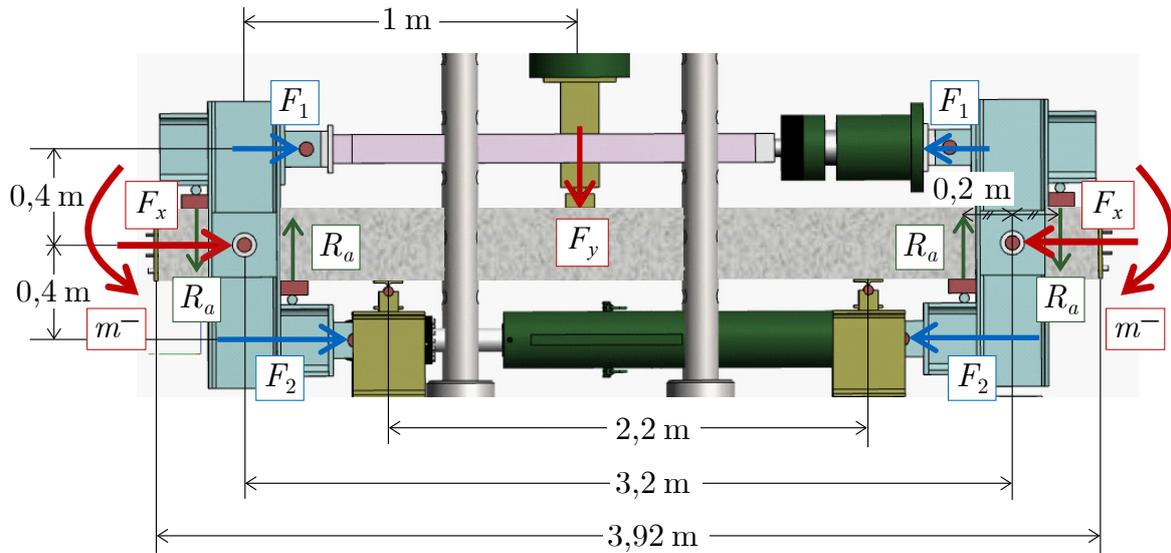
- un vérin vertical (capacité de 2400 kN) pour la flexion trois points à travers l'application d'une charge transversale verticale  $F_y$  à une distance  $a = 1$  m de l'appui de gauche. On désigne par  $m^+$  le moment maximal créé par cette charge au niveau de sa section d'application ( $x = a$ ) et par  $V$  la valeur absolue de l'effort tranchant qui est constant dans la zone étudiée ( $0 \leq x \leq a$ ) (donnés dans le chapitre 2 par les équations (2.9) et (2.10) respectivement) ;
- deux vérins horizontaux (capacité de 600 kN pour le vérin du haut et de 250 kN pour le vérin du bas) pour l'application de deux forces horizontales  $F_1$  et  $F_2$  aux deux extrémités de la poutre telles que  $F_2 \leq F_1$ . Ces forces sont imposées avec un excentrement de  $e = \pm 0,4$  m par rapport à la mi-hauteur de la poutre, ce qui permet d'engendrer de manière simultanée et uniforme tout au long de la poutre une charge axiale de compression  $F_x$  et un moment fléchissant constant négatif  $m^-$ , donnés respectivement par les expressions suivantes :

$$F_x = F_1 + F_2 \leq 0 \quad (4.1)$$

$$m^- = (F_2 - F_1)e \leq 0 \quad (4.2)$$

Il est important de noter que la poutre est soumise à un moment négatif additionnel dû au poids propre du dispositif d'application des forces horizontales. Ce moment est égal à  $m_p = -5,25$  kN.m. Le moment total maximal généré dans la poutre au niveau de la section d'application de la charge transversale est donc :

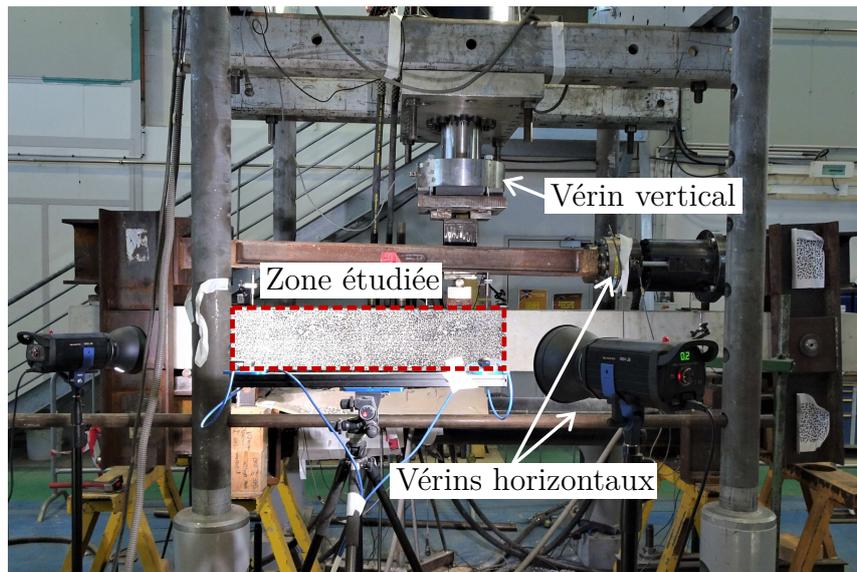
$$M(x = a) = m^+ + m^- + m_p \quad (4.3)$$

FIGURE 4.6 – Dispositif d'essai et chargements appliqués (Pham *et al.*, 2020c)

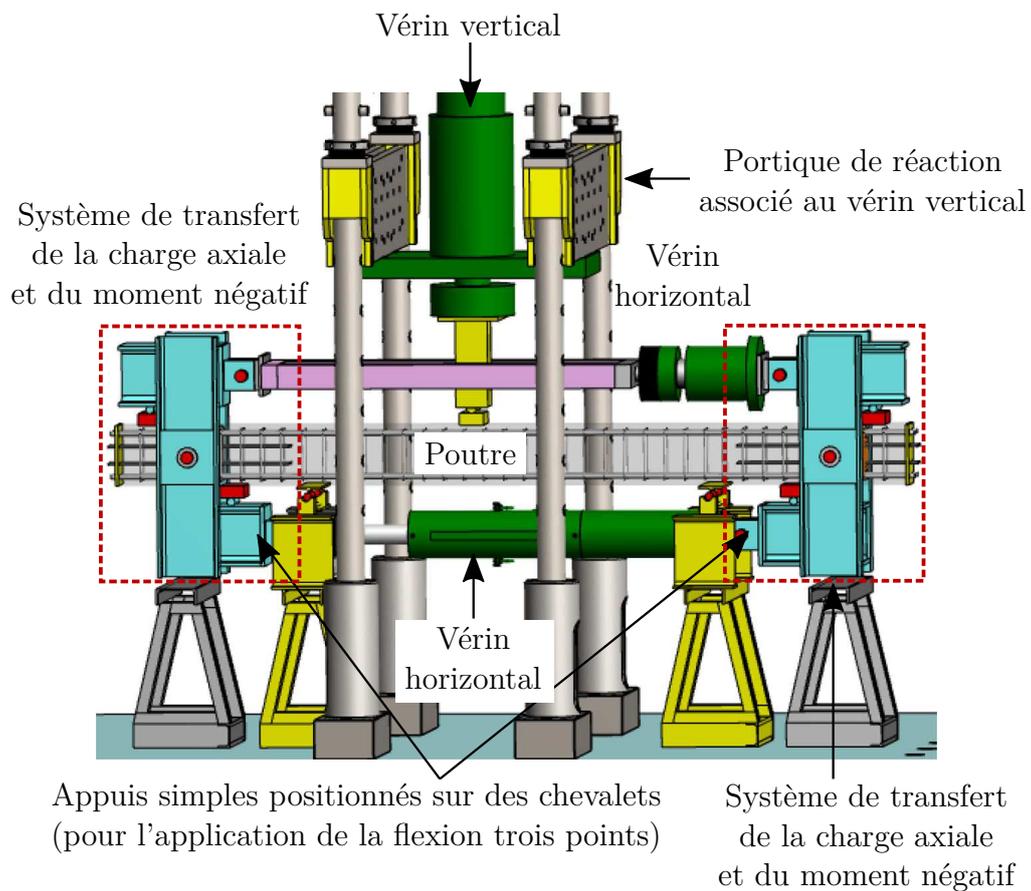
Des capteurs de déplacement de type LVDT ont été placés sur la face supérieure de la poutre au niveau des appuis et de la zone d'application de la charge transversale, afin d'enregistrer les déplacements verticaux de la poutre dans ces zones.

Par ailleurs, un dispositif de corrélation d'images numériques a été utilisé pour enregistrer le développement des fissures dans les poutres durant les essais. Pour cela, un mouchetis noir a été appliqué sur la face latérale de la zone étudiée de la poutre et deux caméras espacées de 750 mm ont été placées devant la poutre à une distance de 1500 mm. Durant les essais, quatre images ont été prises toutes les secondes pour les poutres NS afin d'enregistrer chaque étape du processus de fissuration des poutres, en particulier à l'instant de la rupture même si elle a eu lieu de manière relativement brutale. En ce qui concerne les poutres S, une image a été prise toutes les deux secondes durant la phase d'application des charges horizontales. La fréquence a été ensuite augmentée à deux images par seconde lorsque la charge verticale était appliquée. Cette fréquence reste inférieure à celle utilisée pour les poutres NS puisque la rupture des poutres S a eu lieu pour des valeurs de chargement plus importantes et surtout de manière moins brutale par rapport aux poutres précédentes, en raison de la présence du renforcement transversal qui confère une certaine ductilité à la poutre.

## 4.2. Description des essais



(a)



(b)

FIGURE 4.7 – (a) Photo et (b) schéma (Pham *et al.*, 2020c) du dispositif expérimental complet

### 4.2.3 Programme de chargement

Dans ce qui suit, les poutres sont divisées en deux séries selon la valeur du moment supplémentaire négatif appliqué :

- série I contenant 18 poutres (dont 9 poutres NS et 9 poutres S) soumises à un moment supplémentaire faible  $m^- = -4$  kN.m qui représente environ 2,8% de la résistance de la poutre en flexion simple ;
- série II contenant 18 poutres (dont 9 poutres NS et 9 poutres S) soumises à un moment négatif important  $m^- = -40$  kN.m représentant environ 28% de la résistance des poutres en flexion simple. Il faut noter que trois poutres sans cadres ont été soumises à un moment un peu plus élevé de  $m^- = -44$  kN.m.

Dans chaque série, trois différents essais ont été réalisés selon le niveau de la charge axiale appliquée  $F_x = 0, -250$  et  $-400$  kN, notés respectivement I.1, I.2 et I.3 pour la série I, et II.1, II.2 et II.3 pour la série II. Elles correspondent respectivement à des contraintes axiales moyennes de 0,  $-4,2$  et  $-6,7$  MPa sur la section de la poutre. Celles-ci représentent environ 0, 12 et 19% de la valeur moyenne de la résistance à la compression uniaxiale du béton des poutres mesurée le jour des essais. Au total, six combinaisons de chargement différentes ont été appliquées et chaque combinaison a été testée sur trois poutres afin de vérifier la répétabilité des résultats.

L'application des trois charges ( $F_y, F_1, F_2$ ) a été réalisée selon trois étapes décrites ci-après et représentées sur la Figure 4.8. Ces protocoles de chargement dépendent de la combinaison de chargement considérée, et ont été déterminés de façon à appliquer à tout instant de l'essai, une combinaison de chargements qui soit en deça de celle pouvant causer la rupture en flexion-compression des poutres (valeur estimée par le diagramme d'interaction ( $N, M$ ) de la poutre, voir [Pham \*et al.\* \(2015\)](#)).

Dans le cas d'un chargement axial nul (séries I.1 et II.1), les vérins horizontaux sont déclenchés avec l'augmentation de la charge supérieure  $F_1$  et la diminution de la charge inférieure  $F_2$  avec le même taux, jusqu'à ce qu'elles aient atteint des valeurs cibles opposées. Par conséquent, un moment négatif est ainsi créé au niveau de chaque extrémité de la poutre. Dans la série I.1, les valeurs des charges horizontales étaient très faibles ( $F_1 = -F_2 = 5$  kN), ce qui a engendré un moment négatif faible  $m^- = -4$  kN.m. En revanche, pour la série II.1, les charges horizontales ont atteint des valeurs plus élevées ( $F_1 = -F_2 = 50$  kN) générant un moment plus important, égal à 10 fois le moment précédent ( $m^- = -40$  kN.m). Durant

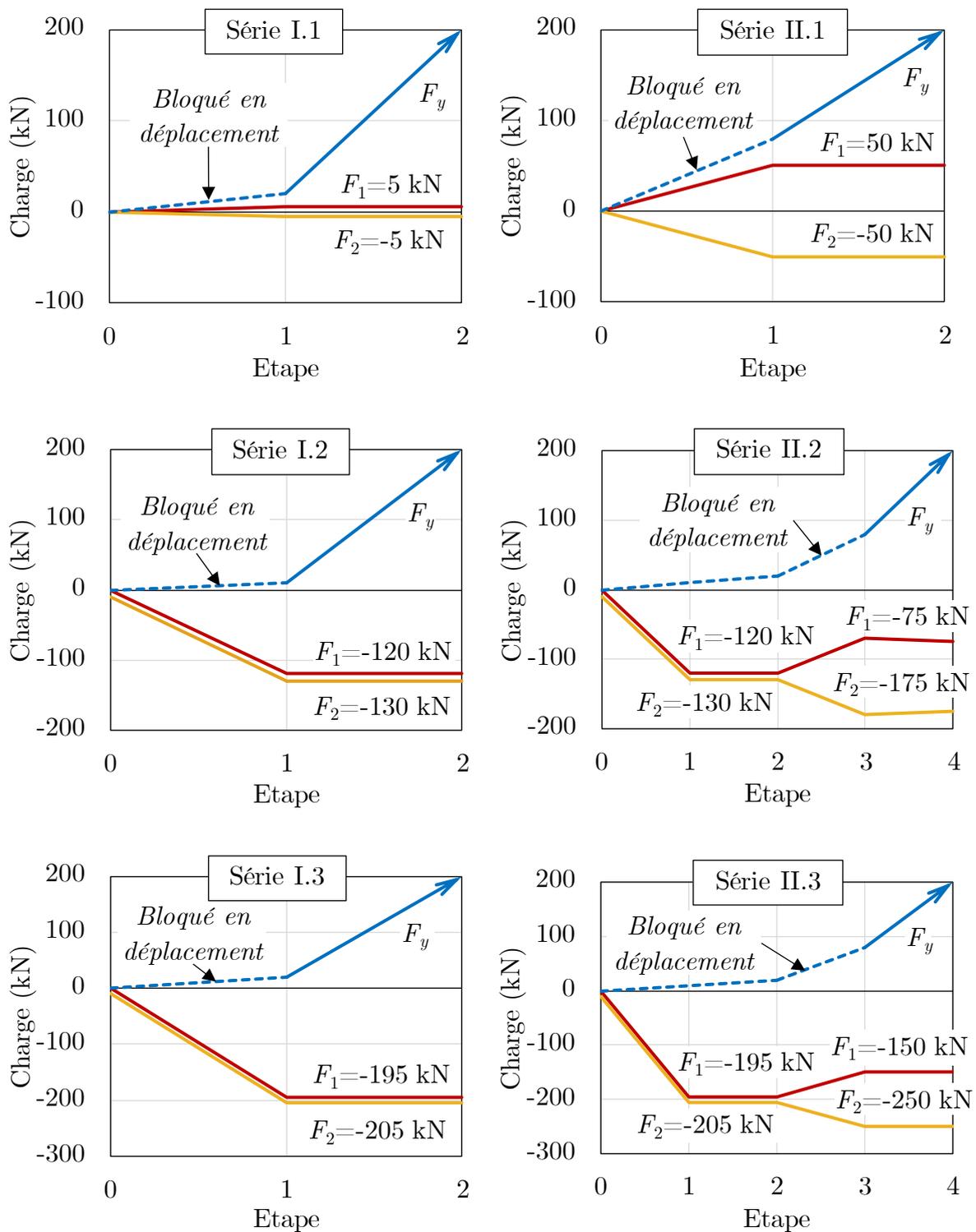


FIGURE 4.8 – Etapes d’application des chargements

la phase d'augmentation ou de diminution des charges horizontales, le vérin vertical étant bloqué en déplacement, la réaction verticale  $F_y$  correspondante a augmenté en raison de l'application du moment négatif. Les forces horizontales ayant atteint leurs valeurs cibles, elles sont alors maintenues constantes, tandis que la force verticale est augmentée jusqu'à la rupture de la poutre.

On distingue deux cas de chargement pour les essais avec des charges de compression plus élevées ( $F_x = -250$  ou  $-400$  kN) selon la valeur du moment supplémentaire appliqué.

Lorsqu'un moment négatif faible de  $m^- = -4$  kN.m est visé (séries I.2 et I.3), les deux forces horizontales sont diminuées jusqu'à ce qu'elles aient atteint des valeurs négatives proches, avec une différence de 10 kN. Les forces horizontales atteignent les valeurs ( $F_1 = -120$  kN,  $F_2 = -130$  kN) et ( $F_1 = -195$  kN,  $F_2 = -205$  kN) respectivement pour les séries I.2 et I.3. Durant cette étape, le vérin vertical est bloqué en déplacement. Tout au long de ces essais, il est indispensable de maintenir une différence d'au moins 10 kN entre les forces horizontales afin d'assurer le contact entre le système d'application des charges horizontales et la poutre.

Lorsqu'un moment négatif important est visé (séries II.2 et II.3), les mêmes étapes précédentes sont suivies, en plus de l'étape supplémentaire suivante. Après avoir atteint les valeurs intermédiaires précédentes, la charge  $F_1$  est augmentée et la charge  $F_2$  diminuée de la même valeur a une différence de 100 kN ( $F_1 = -75$  kN,  $F_2 = -175$  kN) pour la série II.2 et ( $F_1 = -150$  kN,  $F_2 = -250$  kN) pour la série II.3) engendrant un moment égal à  $m^- = -40$  kN.m. Toutefois, les poutres NS de la série II.2 ont été accidentellement testées pour un moment négatif plus important de  $m^- = -44$  kN.m ( $F_1 = -145$  kN,  $F_2 = -255$  kN). Tout comme pour les autres séries d'essais, lorsque les deux charges horizontales atteignent leurs valeurs cibles, elles sont ensuite maintenues constantes, tandis que la force verticale est augmentée jusqu'à la rupture de la poutre.

## 4.3 Résultats des essais et discussions

### 4.3.1 Courbes force-déplacement

Durant les essais, le déplacement vertical au niveau de la zone d'application de la charge transversale a été mesuré à l'aide d'un capteur de déplacement placé sur une pièce métallique positionnée entre la face supérieure de la poutre et le vérin vertical. Ce déplacement vertical est considéré comme étant positif pour un mouvement vers le bas. La charge transversale a été également enregistrée durant les essais à l'aide d'un capteur de force connecté directement au vérin vertical. Les Figures 4.9 et 4.10 présentent respectivement l'évolution de la charge verticale en fonction du déplacement vertical pour les poutres NS et S.

On peut voir que pour les essais de la série II, les courbes présentent d'abord des valeurs négatives du déplacement vertical. Ceci correspond à la phase où le vérin vertical est bloqué en déplacement, tandis que les charges horizontales sont appliquées avec un excentrement. Les poutres ont donc tendance à fléchir en raison du moment négatif appliqué ce qui induit des déplacements vers le haut au niveau de la zone d'application de la charge verticale. Ces déplacements ont été mesurés malgré le fait que le vérin vertical soit bloqué en déplacement, puisque le capteur utilisé pour la mesure ne se trouve pas exactement sur la surface d'application de la charge verticale. De plus, trois différentes phases peuvent être identifiées dans les courbes des deux séries d'essais.

La première phase montre un comportement quasiment linéaire des poutres, avec une courbe qui peut être approximée par des droites inclinées. La pente de ces droites reflète une augmentation importante de la charge verticale en fonction du déplacement vertical. Pour les poutres S, la pente de ces droites et donc la raideur globale des poutres semble augmenter légèrement lorsque la charge axiale de compression est appliquée et présente environ la même valeur pour les deux cas de compression axiale  $F_x = -250$  et  $-400$  kN. En ce qui concerne les poutres NS, la même remarque peut être faite pour les essais avec un moment supplémentaire négatif faible (série I). En revanche, pour les essais de la série II avec moment supplémentaire important, la pente des poutres NS reste pratiquement inchangée lorsque les charges de compression sont appliquées. De plus, le moment négatif ainsi que la présence du renforcement transversal semblent ne pas avoir d'influence sur la raideur des poutres.

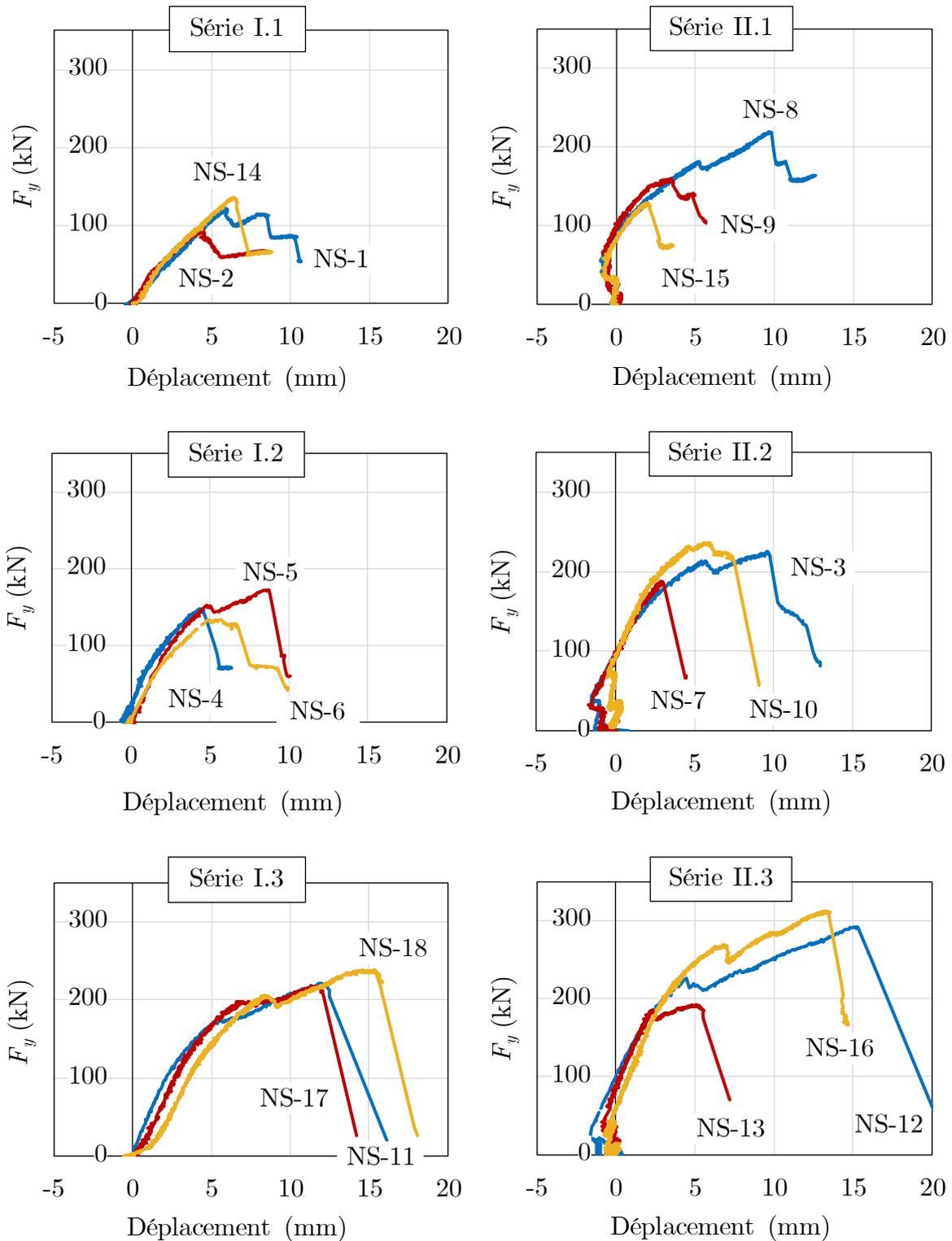


FIGURE 4.9 – Courbes (force verticale, déplacement vertical) pour les essais des séries I et II des poutres sans cadres

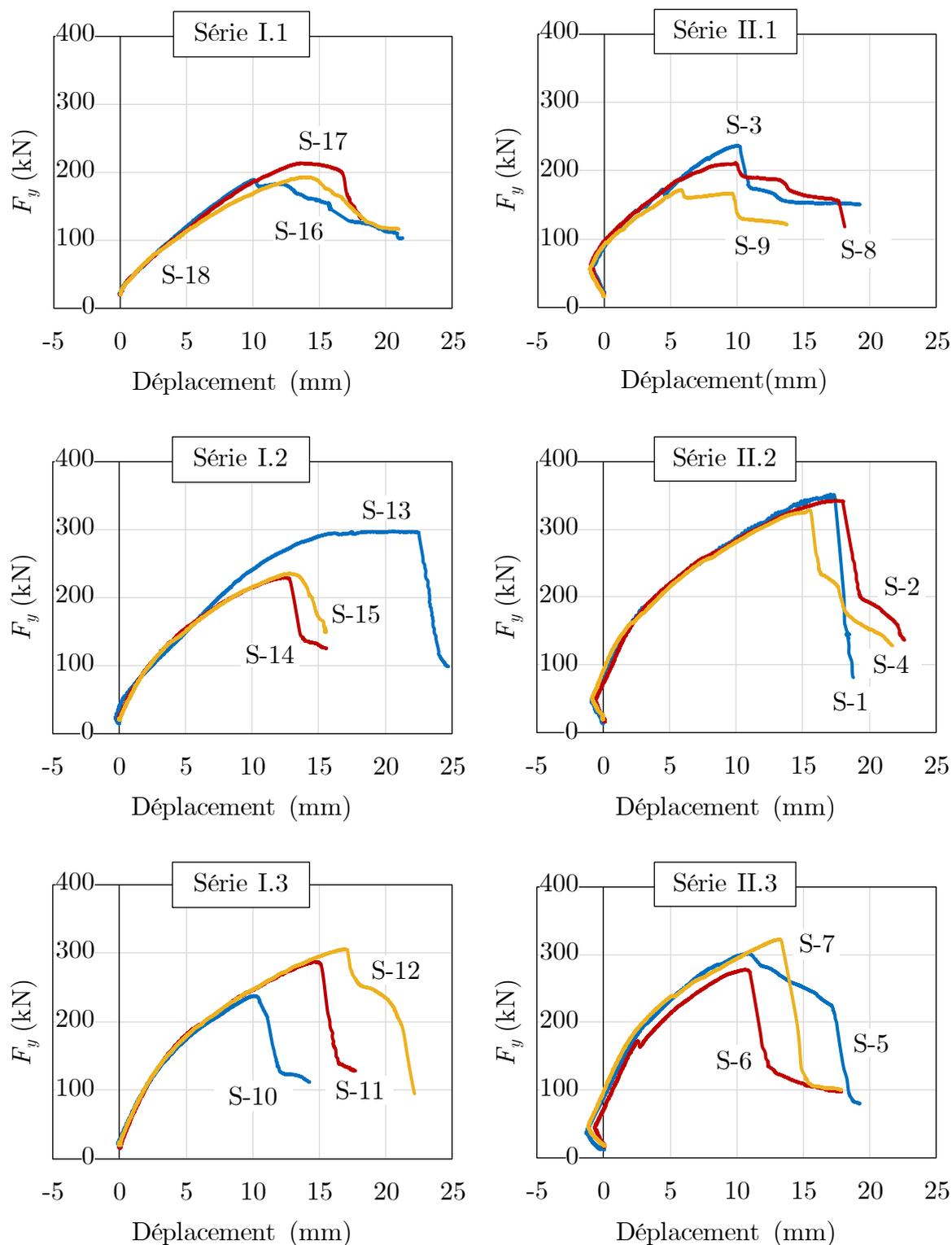


FIGURE 4.10 – Courbes (force verticale, déplacement verticale) pour les essais des séries I et II des poutres avec cadres

La seconde partie des courbes correspond à un comportement non-linéaire des poutres, avec un taux d'accroissement de la force verticale qui diminue au fur et à mesure de l'augmentation du déplacement vertical. La dernière phase correspond enfin à la rupture des poutres avec une diminution plus ou moins brutale de la charge verticale. L'analyse de cette dernière phase montre qu'en général lorsqu'on augmente la charge de compression axiale ou le moment négatif (en valeur absolue), les courbes semblent atteindre un plateau pour des valeurs importantes du déplacement vertical. Ceci suggère une augmentation de la ductilité des poutres. On observe la même tendance concernant l'influence des cadres puisqu'il apparaît que l'ajout de ces renforcements transversaux entraîne une augmentation de la ductilité des poutres.

### 4.3.2 Évolution des fissures

L'évolution de la fissuration des poutres dans la zone étudiée a été enregistrée durant les essais à l'aide de la technique de corrélation d'images numériques. Le traitement de ces images a été réalisé à l'aide du logiciel VIC-3D (*Correlated Solutions*), afin d'identifier les différents mécanismes de fissuration des poutres qui apparaissent durant les essais.

L'analyse de l'évolution des fissures créées dans les poutres dues à l'application du chargement révèle la présence de trois principales étapes de fissuration.

La première étape apparaît uniquement dans les essais de la série II pour les poutres NS et S, et ce durant la phase d'application des charges horizontales. Pendant cette phase, quelques fissures verticales apparaissent dans les parties supérieures des poutres en raison de l'application du moment supplémentaire négatif qui crée des contraintes de traction en partie supérieure des poutres (voir Figure 4.11).

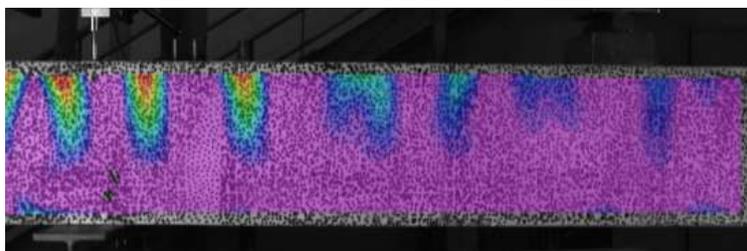


FIGURE 4.11 – Exemple de fissures verticales dans la partie supérieure de la poutre NS-15 provoquées par l'application d'un moment négatif

Dans une seconde phase, des fissures verticales apparaissent cette fois-ci dans la partie inférieure des poutres lorsque la charge verticale est appliquée (Figure 4.12). Elles sont provoquées par le moment positif associé à la charge transversale appliquée, qui engendre des contraintes de traction en partie inférieure des poutres. Toutes ces fissures verticales apparaissant en partie supérieure ou inférieure des poutres sont restées relativement fermées tout au long des essais.

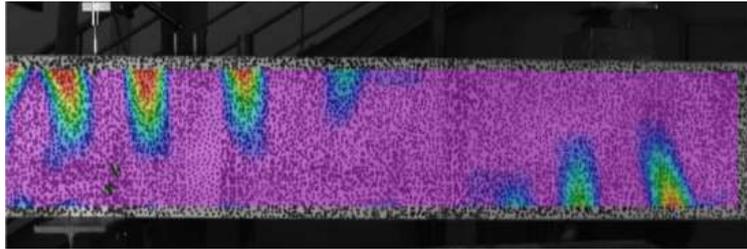


FIGURE 4.12 – Exemple de fissures verticales dans la partie inférieure de la poutre NS-15 provoquées par l'application du chargement transversal

La dernière phase de fissuration correspond à la formation d'une (ou plusieurs) fissure(s) inclinée(s) et orientée(s) de la zone d'application de la charge verticale vers l'appui de gauche (Figure 4.13). Durant cette phase, la longueur et la largeur de ces fissures augmentent graduellement jusqu'à la rupture des poutres correspondant à l'ouverture rapide de ces fissures. On peut remarquer que la formation de ces fissures inclinées est retardée par l'application d'une compression axiale ou d'un moment supplémentaire négatif importants, ainsi que par la présence d'armatures transversales dans la zone étudiée. Il est important de noter que pour les poutres NS, une seule fissure inclinée est apparue dans tous les essais de la série I avec un moment négatif faible, alors que deux fissures inclinées se sont formées dans plusieurs poutres de la série II, même si une seule d'entre elles a provoqué la rupture de la poutre. La même observation peut être faite pour les poutres S et pour les deux séries d'essais I et II, où les poutres ont souvent présenté plus d'une fissure inclinée.

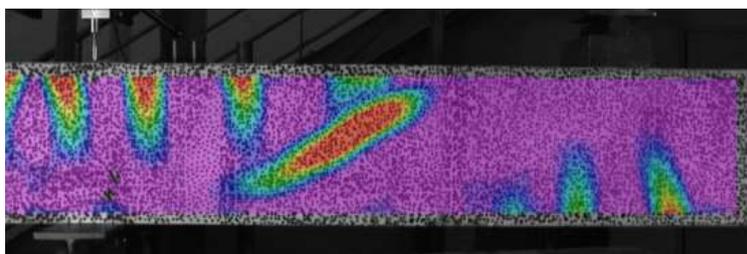


FIGURE 4.13 – Exemple d'une fissure inclinée dans la poutre NS-15

Dans la plupart des cas, ces fissures inclinées se sont propagées horizontalement le long des armatures supérieures et/ou inférieures (Figure 4.14).

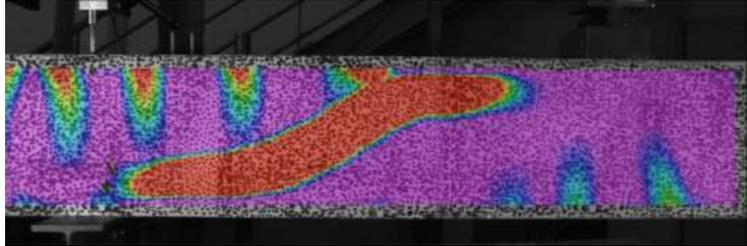
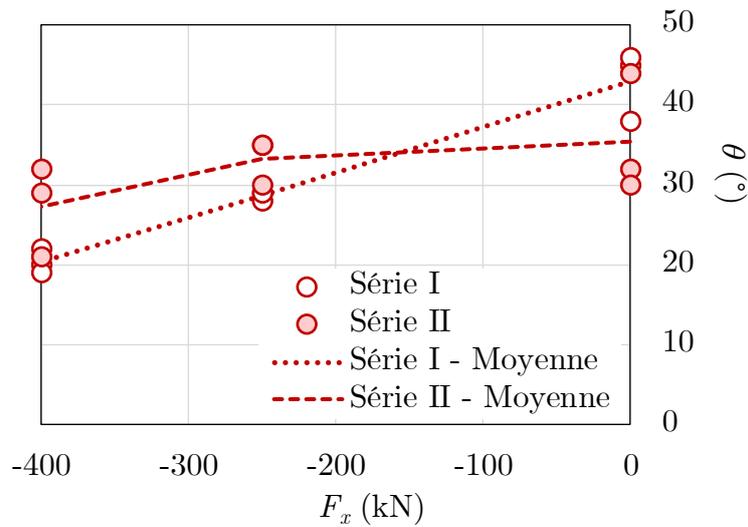


FIGURE 4.14 – Propagation horizontale de la fissure inclinée dans les parties supérieure et inférieure de la poutre NS-15

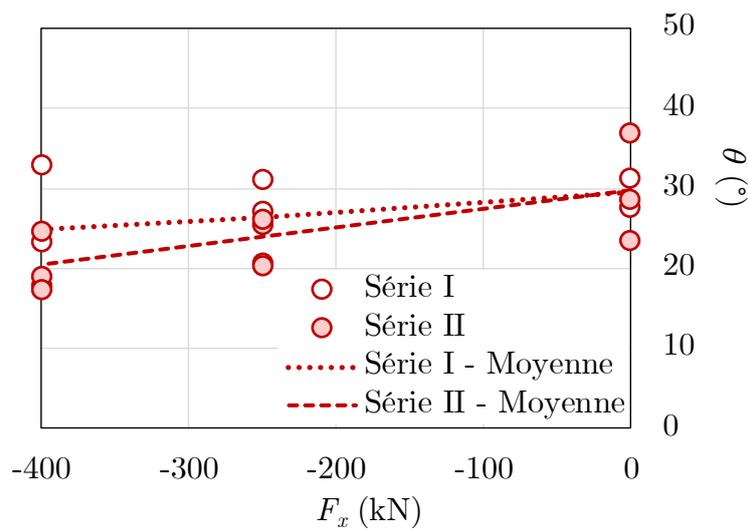
L'angle d'inclinaison  $\theta$  de ces fissures par rapport à l'axe horizontal a été mesuré dans la partie centrale de la zone étudiée de la poutre. Les images utilisées pour cette mesure correspondent à l'instant où la force verticale a atteint sa valeur maximale (pic d'effort) juste avant la rupture des poutres (Figures 4.16 et 4.17 pour les poutres NS et S respectivement).

On constate que l'angle de ces fissures varie entre 19 et 46° pour les poutres NS et entre 17 et 37° pour les poutres S. Il apparaît également que l'augmentation de la charge de compression axiale réduit considérablement l'angle d'inclinaison des fissures (Figures 4.15a et b pour les poutres NS et S respectivement). Cette diminution est plus importante pour les poutres NS sous un moment négatif faible (série I), contrairement aux poutres S pour lesquelles cette diminution est plus prononcée lorsqu'un moment négatif important est appliqué (série II). Plus généralement, on observe que la diminution de l'angle due à la compression axiale est plus importante pour les poutres NS. En effet, l'angle des fissures de ces poutres diminue d'environ 33 et 53% pour la série I, et de 6 et 23% pour la série II lorsque  $F_x$  passe de 0 à -250 et -400 kN respectivement. Alors que pour les poutres S, l'angle diminue de seulement 11 et 16% pour la série I, et de 19 et 31% pour la série II, pour  $F_x = -250$  et -400 kN respectivement.

Contrairement à la charge axiale de compression, aucune tendance claire n'a pu être identifiée quant à l'effet du moment supplémentaire négatif sur l'angle d'inclinaison des fissures. En effet, si l'angle des fissures des poutres NS augmente à cause du moment négatif pour les essais avec des charges de compression importantes (augmentation d'environ 16 et 34% pour les cas de  $F_x = -250$  et -400 kN respectivement), l'effet inverse se produit pour les essais sans charge axiale avec une diminution de 18%.



(a) Poutres NS (sans cadres)



(b) Poutres S (avec cadres)

FIGURE 4.15 – Évolution de l'angle d'inclinaison des fissures en fonction de la charge de compression axiale

Néanmoins, pour les poutres S, on remarque que le moment négatif n'a pas d'effet significatif sur l'angle des fissures. Lorsqu'aucune charge axiale n'est appliquée, les valeurs moyennes des angles d'inclinaison des fissures sont égales entre les deux séries d'essais et valent environ  $30^\circ$ . Cependant, on constate que le moment négatif entraîne une faible diminution de l'angle quand une charge de compression est appliquée. Les angles ont diminué d'environ 9 et 18% lorsque  $F_x = -250$  et  $-400$  kN respectivement, ce qui reste faible en comparaison avec les poutres S soumises aux mêmes combinaisons de chargement.

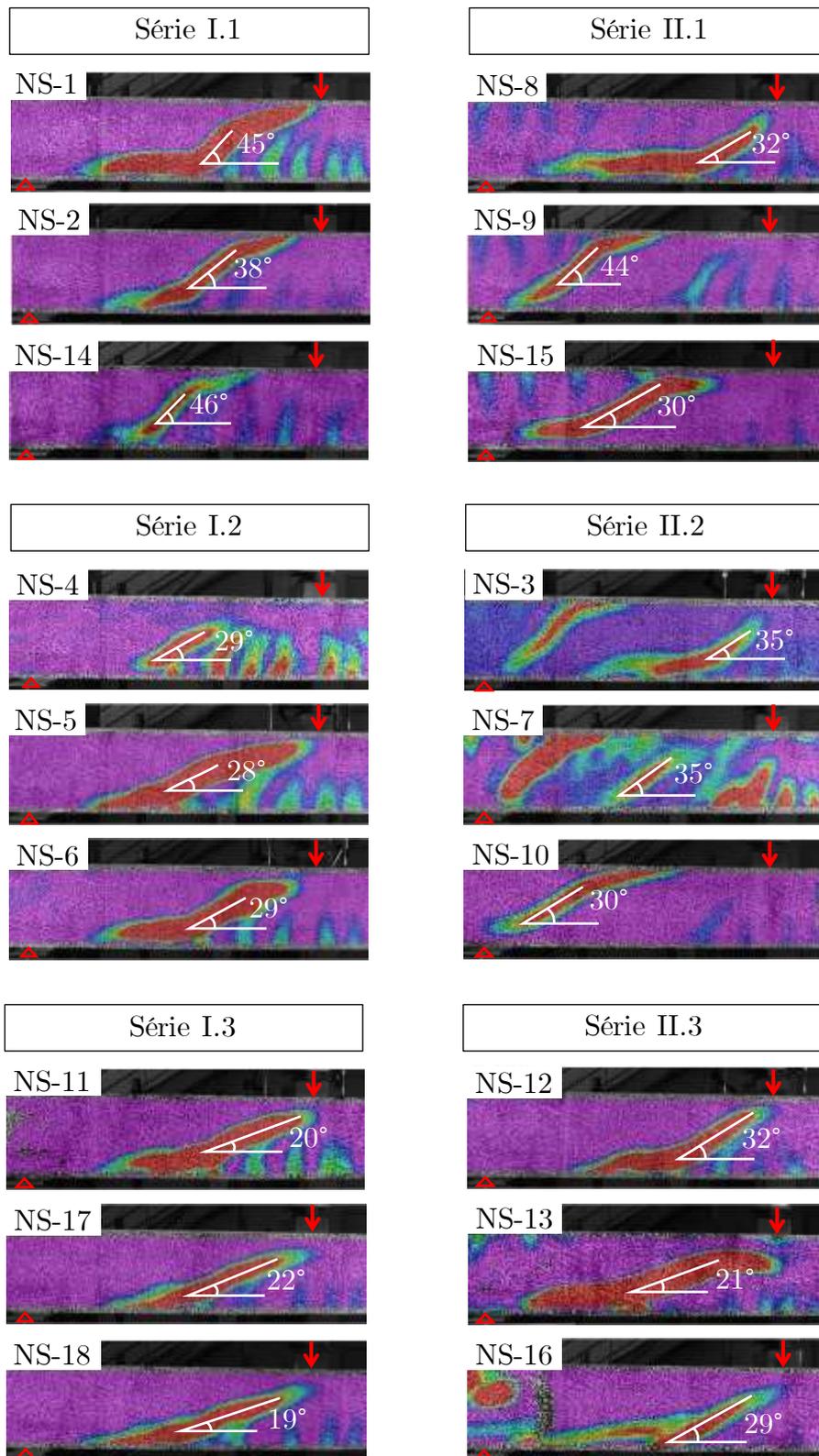


FIGURE 4.16 – Fissures des poutres sans cadres

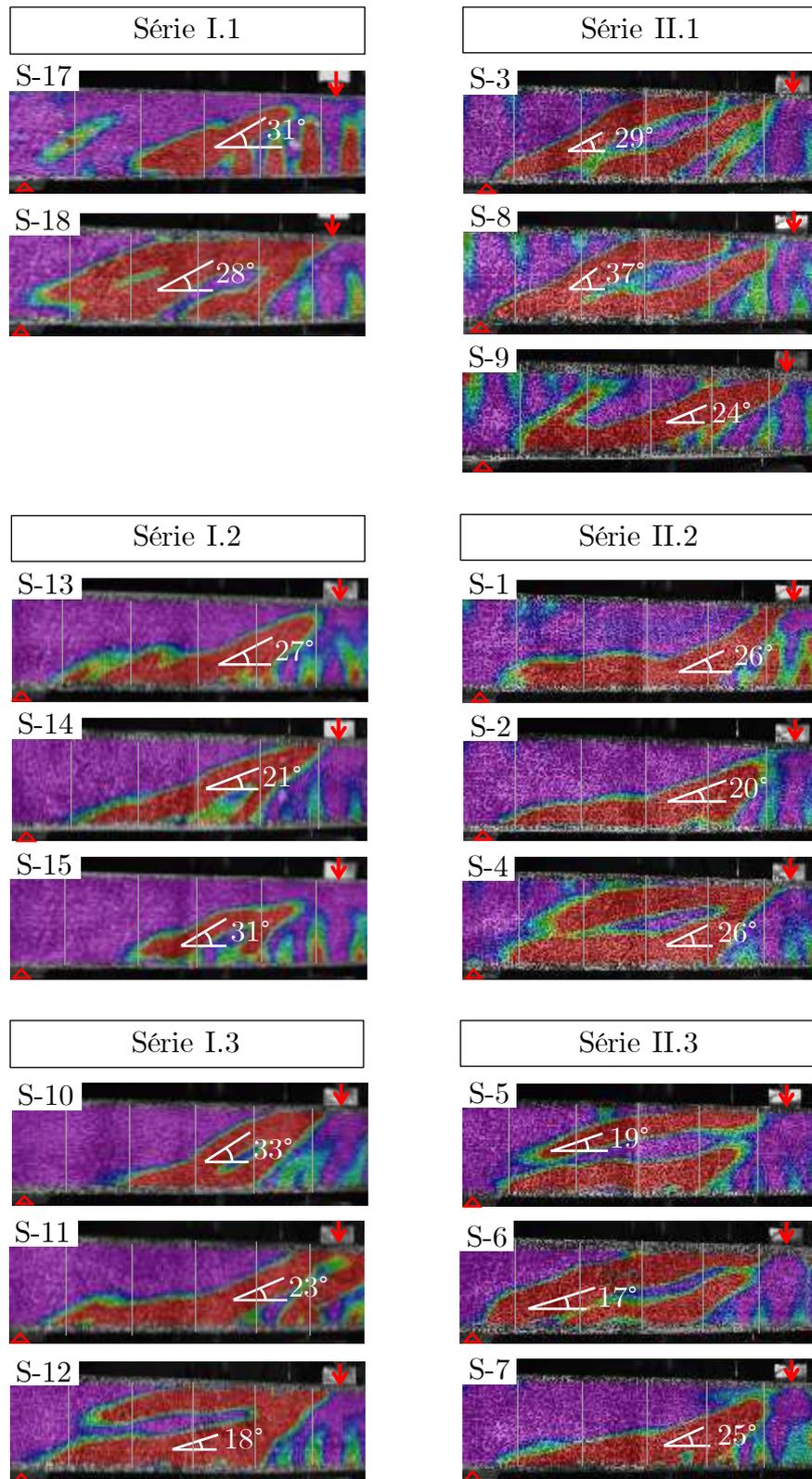


FIGURE 4.17 – Fissures des poutres avec cadres

### 4.3.3 Charges ultimes

Le Tableau 4.3 résume pour les 36 poutres testées, les valeurs des chargements appliqués (charge axiale et moment supplémentaire) et les résultats expérimentaux : la charge transversale maximale, les valeurs correspondantes de l'effort tranchant maximal dans la zone étudiée ( $0 \leq x \leq a$ ) et le moment fléchissant maximal en  $x = a$ , et l'angle des fissures. Les poutres testées sous les mêmes combinaisons de chargement ont été choisies de façon à avoir des bétons de résistances les plus proches possibles (globalement les 20 gâchées utilisées pour fabriquer les poutres présentent des valeurs de résistances proches).

Les Figures 4.18a et b montrent les projections des résultats expérimentaux dans le plan  $(F_x, F_y)$  pour les poutres NS et S respectivement. La tendance de ces courbes est également représentée sur ces mêmes figures sous la forme de traits pointillés reliant les valeurs moyennes des résultats expérimentaux pour chacune des configurations de chargement étudiée. On observe dans un premier temps que la répétabilité des résultats est assez bonne aussi bien pour les poutres NS de la série I que pour les poutres S de la série II. Les résultats sont en revanche plus dispersés pour les poutres NS de la série II et les poutres S de la série I. C'est également le cas pour les résultats présentés dans les sections précédentes (angle d'inclinaison des fissures et courbes force verticale-déplacement vertical). Cependant ces dispersions restent assez faibles. Il est d'ailleurs connu que les résultats expérimentaux obtenus dans le cas de ruptures par effort tranchant d'éléments en béton armé peuvent présenter une importante dispersion (voir par exemple [Sangiorgio et al. \(2016\)](#)).

Comme attendu, il est clair à partir de la comparaison des Figures 4.18a et b que les cadres permettent une augmentation importante de la résistance à l'effort tranchant des poutres pour les deux cas de moment supplémentaire faible (série I) et important (série II). Cette augmentation est néanmoins plus importante pour la série I (augmentation de 69, 68 et 23% de la charge verticale maximale pour  $F_x = 0, -250$  et  $-400$  kN respectivement) par rapport à la série II (augmentation de 22, 57 et 13% de la charge verticale maximale pour  $F_x = 0, -250$  et  $-400$  kN respectivement) (voir figure 4.19).

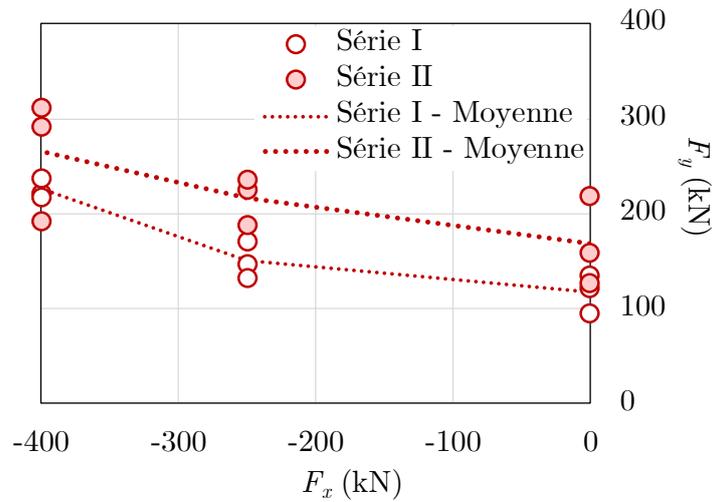
En ce qui concerne les poutres NS (Figure 4.18a), il apparaît que l'augmentation de la force de compression axiale dans les deux cas d'essais (séries I et II) entraîne une augmentation de la résistance à l'effort tranchant. En effet, l'augmentation de la compression axiale de 0 à 12% ( $F_x = -250$  kN) et 19% ( $F_x = -400$  kN) de la valeur

### 4.3. Résultats des essais et discussions

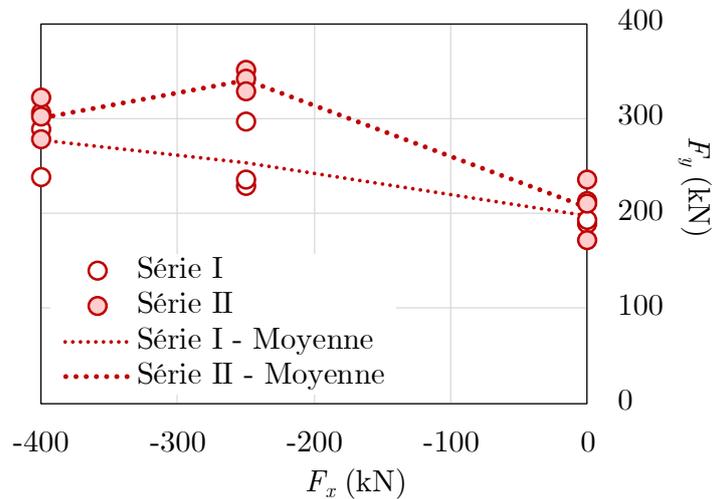
TABLEAU 4.3 – Résultats expérimentaux

Poutre	Série	N°	$F_x$ (kN)	$F_y$ (kN)	$V$ (kN)	$m^-$ (kN.m)	$m^+$ (kN.m)	$M$ (kN.m)	$\theta$ (°)
NS	I.1	NS-1	0	122	66	-4	66	57	45
		NS-2	0	95	52	-4	52	43	38
		NS-14	0	136	74	-4	74	65	46
	I.2	NS-4	-250	147	80	-4	80	71	29
		NS-5	-250	172	94	-4	94	84	28
		NS-6	-250	133	73	-4	73	63	29
	I.3	NS-11	-400	222	121	-4	121	112	20
		NS-17	-400	218	119	-4	119	109	22
		NS-18	-400	238	130	-4	130	121	19
	II.1	NS-8	0	219	120	-40	120	74	32
		NS-9	0	160	87	-40	87	42	44
		NS-15	0	128	70	-40	70	25	30
	II.2	NS-3	-250	226	123	-44	123	74	35
		NS-7	-250	188	103	-44	103	53	35
		NS-10	-250	237	129	-44	129	80	30
	II.3	NS-12	-400	292	159	-40	159	114	32
		NS-13	-400	192	105	-40	105	60	21
		NS-16	-400	312	170	-40	170	125	29
S	I.1	S-16	0	188	103	-4	103	94	*
		S-17	0	213	116	-4	116	107	31
		S-18	0	193	105	-4	105	96	28
	I.2	S-13	-250	297	162	-4	162	153	27
		S-14	-250	229	125	-4	125	116	21
		S-15	-250	235	128	-4	128	119	31
	I.3	S-10	-400	238	130	-4	130	120	33
		S-11	-400	289	158	-4	158	148	23
		S-12	-400	306	167	-4	167	157	18
	II.1	S-3	0	236	129	-40	129	83	29
		S-8	0	211	115	-40	115	70	37
		S-9	0	172	94	-40	94	49	24
	II.2	S-1	-250	351	191	-40	191	146	26
		S-2	-250	342	187	-40	187	141	20
		S-4	-250	328	179	-40	179	134	26
II.3	S-5	-400	301	164	-40	164	119	19	
	S-6	-400	278	152	-40	152	106	17	
	S-7	-400	322	176	-40	176	131	25	

\* Valeur non disponible en raison d'un problème lors de l'acquisition des images de la poutre S-16 durant les essais.



(a) Poutres NS (sans cadres)



(b) Poutres S (avec cadres)

 FIGURE 4.18 – Projection des résultats expérimentaux sur le plan  $(F_x, F_y)$ 

moyenne de la résistance à la compression de la poutre en béton seul, entraîne une augmentation de respectivement 28 et 92% de la résistance à l'effort tranchant pour la série I, et de 28 et 57% pour la série II (Figure 4.20a). Cette augmentation est donc identique pour les deux séries d'essais pour  $F_x = -250$  kN, mais elle est plus importante pour  $F_x = -400$  kN lorsqu'un moment négatif faible est appliqué. De plus, la figure montre que l'augmentation du moment négatif (en valeur absolue) entraîne également une amélioration de la résistance à l'effort tranchant. Lorsqu'un moment négatif important est appliqué, la charge transversale maximale augmente en effet de 44% pour  $F_x = 0$  et  $-250$  kN et de 18% pour  $F_x = -400$  kN (Figure 4.21a).

En ce qui concerne les poutres S (Figure 4.18b), l'application d'une charge axiale de compression semble également augmenter la résistance à l'effort tranchant, à l'exception du cas où un moment négatif important (série II) est combiné avec une charge axiale de compression importante de  $F_x = -400$  kN, où l'effet inverse est observé. En effet, dans la série I, l'application d'une compression de  $F_x = -250$  kN (respectivement  $F_x = -400$  kN) a permis une augmentation de la charge transversale maximale de 28% (respectivement 40%). Cependant, dans la série II, l'application de la charge axiale de  $F_x = -250$  kN a entraîné une augmentation de la charge transversale de 65% en comparaison avec 46% lorsque  $F_x = -400$  kN (représentant une diminution de 12% par rapport au cas de  $F_x = -250$  kN) (Figure 4.20b). Par ailleurs, tandis que le moment négatif a un effet favorable important sur la résistance à l'effort tranchant des poutres NS et ce pour les trois cas de chargement axial, il en est pas de même pour les poutres S. On constate en effet que le moment négatif a un effet favorable important sur la résistance à l'effort tranchant lorsque  $F_x = -250$  kN avec une augmentation de 34% de la charge transversale maximale. En revanche, on observe une faible influence du moment supplémentaire lorsque  $F_x = 0$  et  $-400$  kN avec une augmentation de la charge transversale maximale de seulement 4 et 8% respectivement (Figure 4.21b).

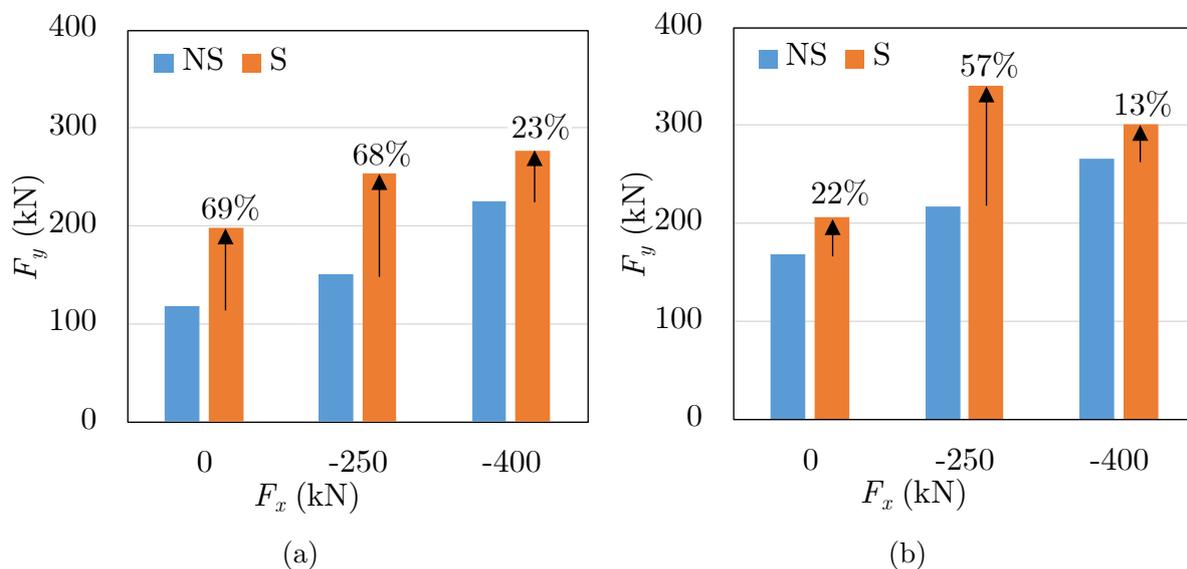


FIGURE 4.19 – Contribution des armatures transversales à la résistance à l'effort tranchant des poutres de (a) la série I et de (b) la série II

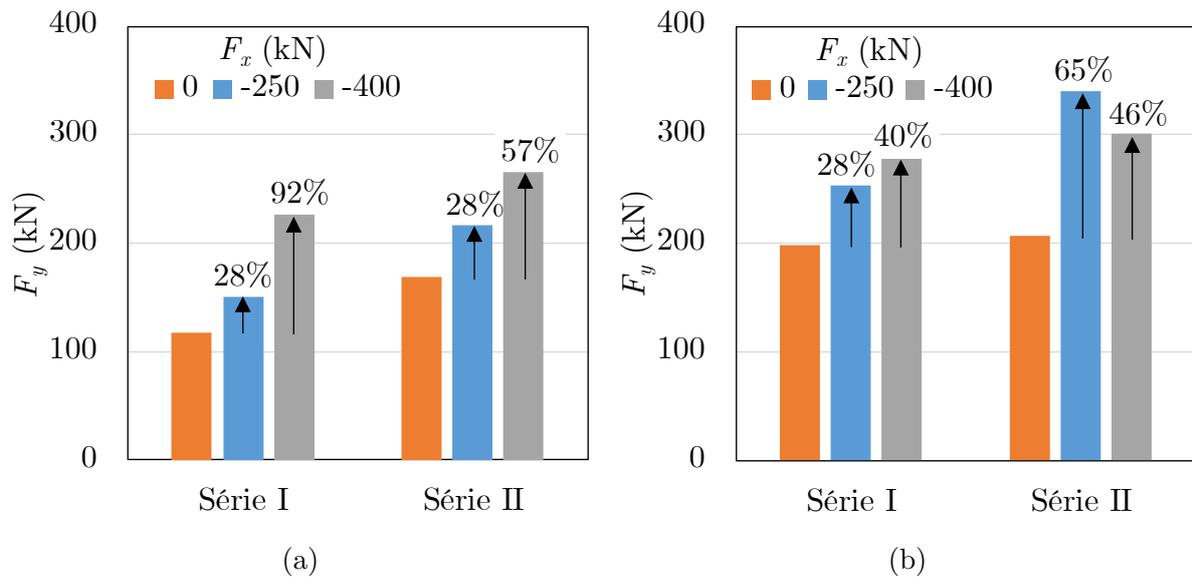


FIGURE 4.20 – Influence de la charge axiale sur la résistance à l’effort tranchant des poutres (a) NS et (b) S

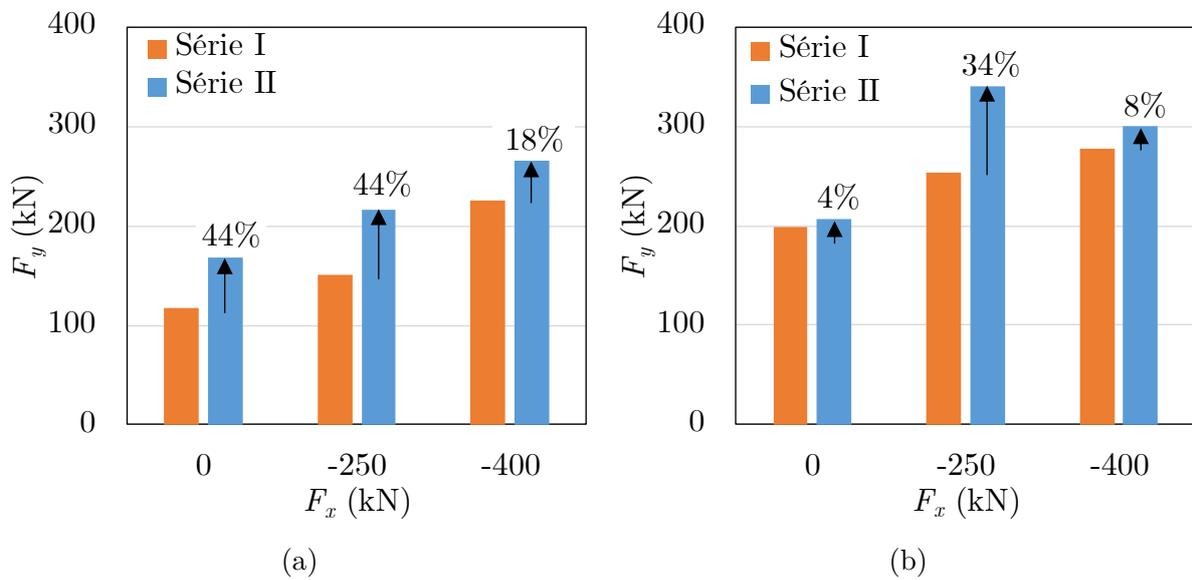


FIGURE 4.21 – Influence du moment supplémentaire sur la résistance à l’effort tranchant des poutres (a) NS et (b) S

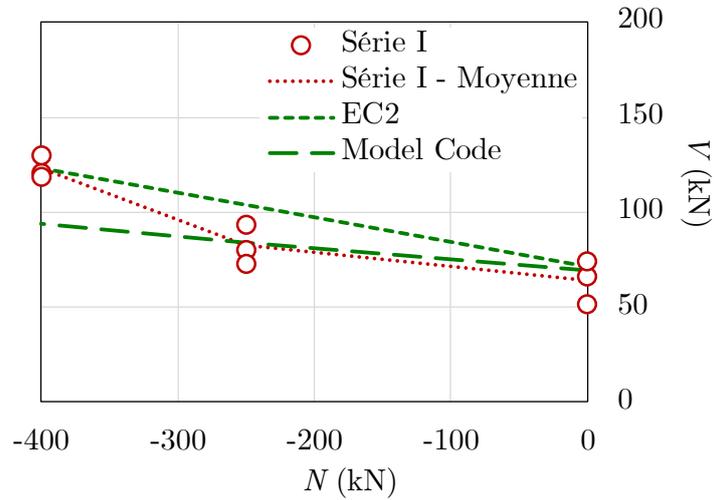
#### 4.3.4 Comparaison avec les prévisions de codes de construction

Les Figures 4.23a et b (respectivement 4.22a et b) présentent les résultats des prédictions de l'Eurocode 2 (EN 1992-1-1, 2005) et le Model Code (fib, 2012) de la résistance à l'effort tranchant des poutres sans cadres (respectivement avec cadres) soumises à un moment supplémentaire faible et important respectivement. Les calculs ont été réalisés pour des coefficients de sécurité égaux à un. Dans les Figures 4.22a et b, les résultats de l'Eurocode 2 sont données pour les deux cas en supposant que la résistance est apportée par le béton ( $V_{Rd,c}$ ) ou par les armatures transversales ( $V_{Rd,s}$ ).

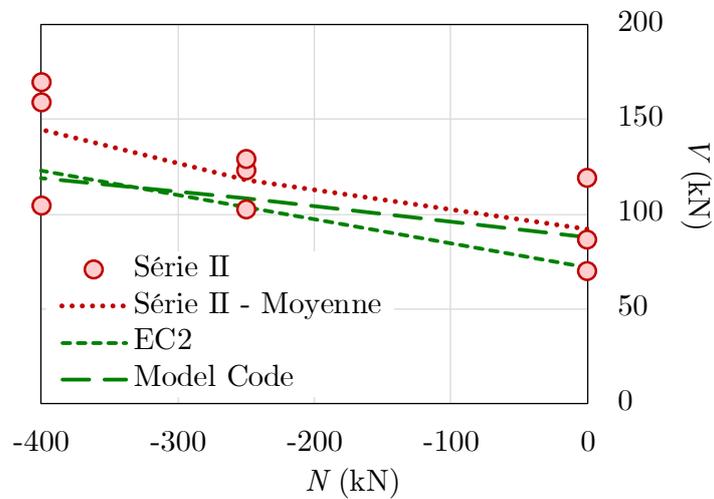
Concernant les poutres NS soumises à un moment supplémentaire faible (série I), il apparaît que l'Eurocode 2 et le Model Code sont non sécuritaires pour plusieurs essais. En effet, toutes les poutres sauf deux (une soumise à  $F_x = 0$  et une à  $F_x = -400$  kN) ont rompu pour un effort tranchant inférieur à celui prédit par l'Eurocode 2, et quatre poutres (dont deux soumises à  $F_x = 0$  et deux à  $F_x = -250$  kN) pour le Model Code. Ils ne sont pas non plus tout le temps sécuritaires lorsqu'un moment supplémentaire important est appliqué (Série II). En effet, l'estimation de l'Eurocode 2 est en déca du résultat expérimental lorsque  $F_x = -400$  kN. Le Model Code sous-estime aussi la résistance dans les trois cas de charge.

Contrairement aux poutres NS, les deux codes sont sécuritaires pour quasiment toutes les poutres S, à l'exception de deux essais sans effort axial et sous moment supplémentaire négatif important pour lesquels le Model Code est non sécuritaire.

Les figures montrent également que les deux codes prédisent une augmentation de la résistance à l'effort tranchant sous l'effet de l'augmentation de la compression axiale. Il semble de plus, qu'en général, la tendance estimée par l'Eurocode 2 est en adéquation avec les résultats expérimentaux. En revanche, seul le Model Code prédit l'effet positif du moment supplémentaire. De plus, on constate que les deux codes ne prédisent pas la diminution de la résistance à l'effort tranchant obtenue expérimentalement pour les poutres S sous un moment supplémentaire important et un chargement axial important ( $m^- = -40$  kN.m et  $F_x = -400$  kN).

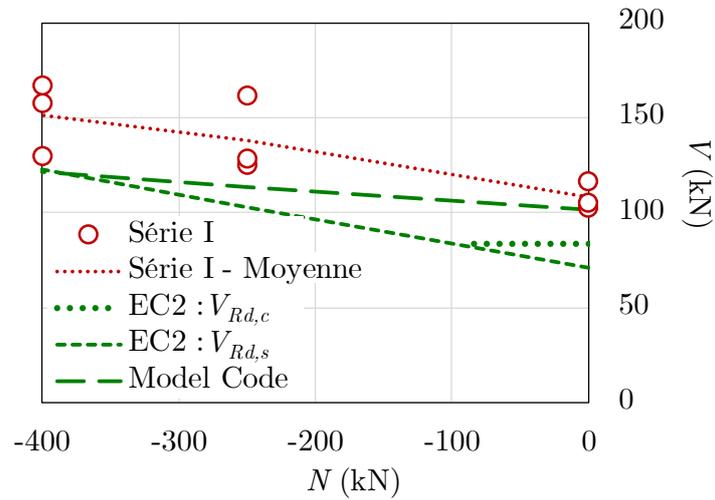


(a) Série I (moment faible)

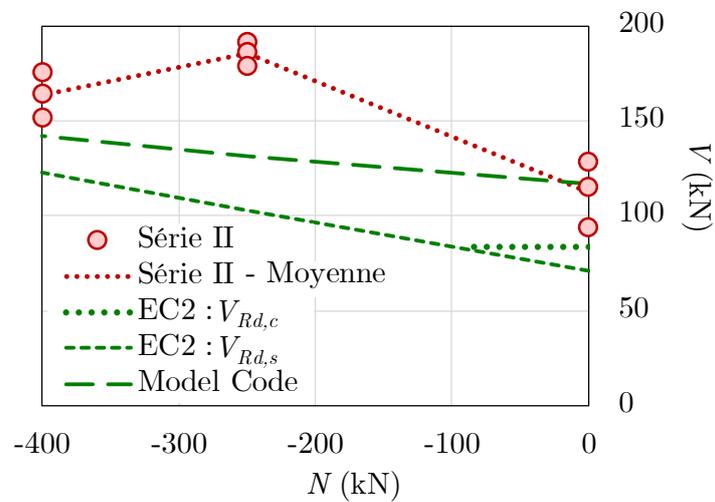


(b) Série II (moment important)

FIGURE 4.22 – Comparaison des résultats expérimentaux des poutres NS avec les prédictions de l’Eurocode 2 et du Model Code



(a) Série I (moment faible)



(b) Série II (moment important)

FIGURE 4.23 – Comparaison des résultats expérimentaux des poutres S avec les prédictions de l’Eurocode 2 et du Model Code

## 4.4 Conclusions

Dans ce chapitre, deux campagnes expérimentales sont présentées. Elles ont été réalisées sur 36 poutres au total. Seule une moitié était renforcée avec des armatures transversales dans la zone étudiée. Les poutres étaient soumises à l'action combinée d'un chargement transversal, un chargement axial de compression (trois valeurs) et un moment supplémentaire négatif (faible ou important). Au total, six combinaisons de chargement différentes ont été considérées et chaque combinaison a été testée trois fois pour vérifier la répétabilité des résultats.

Concernant les poutres sans cadres, il est apparu que les résultats des essais avec un moment négatif important sont plus dispersés que ceux avec un moment négatif faible. La tendance inverse a été constatée concernant les essais sur les poutres avec cadres (dispersion des résultats plus importantes pour un moment négatif faible comparé à un moment négatif important). Cependant, la répétabilité de tous les essais reste relativement bonne en comparaison avec la forte dispersion qu'on obtient généralement dans le cas de rupture par effort tranchant d'éléments en béton armé.

Les courbes force verticale-déplacement vertical enregistrées durant les essais ont montré que l'augmentation de la charge de compression et le moment négatif semblent engendrer une augmentation de la ductilité des poutres. La même tendance a été observée quant à l'influence du renforcement transversal. En ce qui concerne la raideur des poutres, elle semble être indépendante des armatures transversales et du moment négatif. En revanche, la charge de compression semble légèrement augmenter la raideur des poutres, à l'exception des poutres sans cadres soumises à un moment négatif important.

L'analyse des fissures à l'aide de la technique de corrélation d'images numériques a permis de constater l'apparition de fissures verticales dans la partie inférieure des poutres, et également dans la partie supérieure dans le cas d'un moment supplémentaire important. En revanche la rupture des poutres a eu lieu selon des fissures inclinées, dont l'angle dépend de la charge de compression appliquée. Lorsque celle-ci augmente, l'angle d'inclinaison des fissures diminue. Cette diminution est plus importante pour les poutres sans cadres. Quant à l'effet du moment négatif, aucune tendance claire n'a pu être identifiée pour les poutres sans cadres où celui-ci génère une augmentation de l'angle lorsque la charge axiale est nulle et l'inverse lorsqu'elle est non nulle. Toutefois, pour les poutres avec cadres, il est apparu que le moment négatif n'a pas d'effet sur l'angle des fissures lorsqu'aucune compression





# Chapitre 5

## Comparaisons et validations

**Résumé :** *Dans ce chapitre, les méthodes semi-analytiques (chapitre 2) et numériques (chapitre 3) proposées sont comparées à différentes méthodes analytiques (disponibles dans la littérature) également basées sur les théories du calcul à la rupture ou de l'analyse limite. Les approches proposées sont également confrontées aux résultats numériques d'un logiciel de calcul par éléments finis basé sur ces théories. Le chapitre présente de plus une première validation de ces méthodes faite à partir des résultats expérimentaux présentés dans le chapitre 4, ainsi que des résultats de campagnes expérimentales disponibles dans la littérature.*

### Sommaire

---

<b>5.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>144</b>
<b>5.2</b>	<b>Comparaisons avec des méthodes analytiques disponibles dans la littérature</b>	<b>145</b>
<b>5.3</b>	<b>Comparaisons avec les résultats obtenus par l'utilisation du logiciel OptumG2</b>	<b>149</b>
<b>5.4</b>	<b>Première validation des méthodes proposées à partir de résultats expérimentaux</b>	<b>154</b>
5.4.1	Essais réalisés dans le cadre de cette thèse (chapitre 4)	155
5.4.2	Essais de <a href="#">Pham et al. (2020a,b)</a>	160
5.4.3	Essais de <a href="#">Madsen et al. (2011)</a>	164
5.4.4	Essais de <a href="#">Jørgensen et al. (2013)</a>	166
5.4.5	Récapitulatif des comparaisons entre calculs et résultats d'essais	168
<b>5.5</b>	<b>Conclusions</b>	<b>170</b>

---

## 5.1 Introduction

Afin d'évaluer la pertinence des méthodes semi-analytiques (chapitre 2) et numériques (chapitre 3) proposées, les estimations par excès des domaines de résistance fournies par ces méthodes, pour les trois exemples de poutres étudiés précédemment (présentés dans la section 2.3 du chapitre 2), sont comparées aux résultats de différentes méthodes analytiques disponibles dans la littérature (section 5.2). Ces méthodes, présentées dans le chapitre 1, sont également basées sur l'approche cinématique de la théorie du *calcul à la rupture* ou de l'*analyse limite*. Ceci permet de comparer les approches que nous proposons ici avec des méthodes basées sur les mêmes principes théoriques, même si la mise en œuvre peut différer. Néanmoins, ces approches ne prenant pas en compte le moment supplémentaire, seules des coupes des domaines de résistance pour un moment supplémentaire nul sont ici analysées.

Dans un second temps, les méthodes proposées sont confrontées aux prédictions numériques obtenues à l'aide d'un logiciel de calcul par éléments finis basé également sur la théorie du *calcul à la rupture* (ou de l'*analyse limite*) (section 5.3). Ce logiciel, validé pour le dimensionnement d'ouvrages divers, permet donc d'évaluer les méthodes proposées à travers la comparaison entre les estimations de différentes coupes des domaines de résistance des trois poutres étudiées précédemment, et ce pour différentes valeurs du moment supplémentaire appliqué.

Enfin, une première validation des méthodes proposées est obtenue par la comparaison des prédictions semi-analytiques et numériques avec les résultats expérimentaux des deux campagnes d'essais présentées dans le chapitre 4 (section 5.4.1) sur des poutres renforcées ou non par des armatures transversales, et soumises à des charges axiales de compression combinées à des moments supplémentaires négatifs. Les méthodes proposées sont également confrontées aux résultats d'autres campagnes expérimentales disponibles dans la littérature, réalisées sur des poutres en béton armé (avec ou sans armatures transversales) soumises à des combinaisons de chargement proches de celles étudiées dans le cadre de ces travaux. Celles-ci consistent en l'application d'une charge transversale en plus d'une charge axiale de traction et d'un moment supplémentaire négatif (section 5.4.2), ou uniquement de charges transversale et axiale de compression (section 5.4.3) ou de traction (section 5.4.4).

## 5.2 Comparaisons avec des méthodes analytiques disponibles dans la littérature

Dans cette section, les approches semi-analytiques (pour le mécanisme 1 avec une discontinuité de vitesse selon une surface plane) et numériques proposées dans les chapitres 2 et 3 respectivement (sous les hypothèses de contrainte ou de déformation planes) sont confrontées à des approches analytiques disponibles dans la littérature. Ces méthodes sont également basées sur l'approche cinématique de la théorie du *calcul à la rupture* ou de l'*analyse limite*. Elles ont été présentées dans la section 1.4 du chapitre 1. Il s'agit notamment des formulations proposées par Ganwei et Nielsen (1988, 1990), Zhang (1997), Koechlin (2007) et Koechlin *et al.* (2008).

Puisque les approches proposées dans la littérature ne prennent pas en compte l'application d'un moment supplémentaire, seules les coupes des domaines de résistance par le plan d'équation  $m = 0$  sont analysées. Les Figures 5.1, 5.2 et 5.3 présentent respectivement les résultats obtenus par les différentes approches pour les poutres n°1, 2 et 3 (étudiées dans les deux chapitres précédents et présentées dans la section 2.3 du chapitre 2). Il importe de bien noter que les domaines sont représentés en fonction de l'effort normal (constant tout au long de la poutre et égal à la charge axiale appliquée) et de l'effort tranchant maximal (calculé au niveau de la zone située entre le point d'application de la charge transversale et l'appui de gauche, à partir de la charge transversale par l'équation (2.10)), normalisés par la résistance à la compression simple de la poutre en béton seul ( $N/(f_cbh)$ ,  $V/(f_cbh)$ ). Cette représentation est donc réalisée dans le plan des efforts intérieurs et non des chargements appliqués comme dans les deux chapitres précédents. Ceci est dû au fait que les chargements considérés dans les approches de Ganwei et Nielsen (1988, 1990) et Zhang (1997) consistent en une flexion quatre points de la poutre, tandis que dans la méthode proposée, une flexion trois points est considérée. De plus, dans l'approche ici proposée par Koechlin (2007) et Koechlin *et al.* (2008), les domaines de résistance sont déterminés directement sur les effort intérieurs (effort normal  $N$ , effort tranchant  $V$ , moment fléchissant  $M$ ). Par ailleurs, l'approche proposée par Zhang (1997) ne concernant pas les poutres renforcées transversalement, elle ne peut être appliquée à la poutre n°3.

Il est important de noter que les méthodes proposées par Ganwei et Nielsen (1988, 1990) et Zhang (1997) incorporent un coefficient de réduction de la résistance à la compression

du béton, destiné à tenir compte de la fragilité du béton à la rupture et permettant ainsi d'effectuer les comparaisons avec les résultats expérimentaux. Un tel coefficient sera donc pris égal à un pour permettre la comparaison entre notre approche et celles des différents auteurs ci-dessus.

Dans le cas de la poutre en béton seul (Figure 5.1), il apparaît que le domaine de résistance obtenu par Koechlin (2007) et Koechlin *et al.* (2008) englobe largement ceux estimés par les autres méthodes. En particulier, dans le cas d'une traction simple, la résistance de la poutre estimée par cette méthode représente 25% de la résistance à la compression du béton, alors que les autres méthodes prédisent une résistance nulle. Cette différence importante résulte du critère de résistance du béton considéré, qui est un critère de Drucker-Prager non tronqué en traction, alors que les autres approches considèrent un critère de Mohr-Coulomb entièrement tronqué en traction. Ce dernier critère représente mieux le caractère fragile du béton sous des sollicitations de traction.

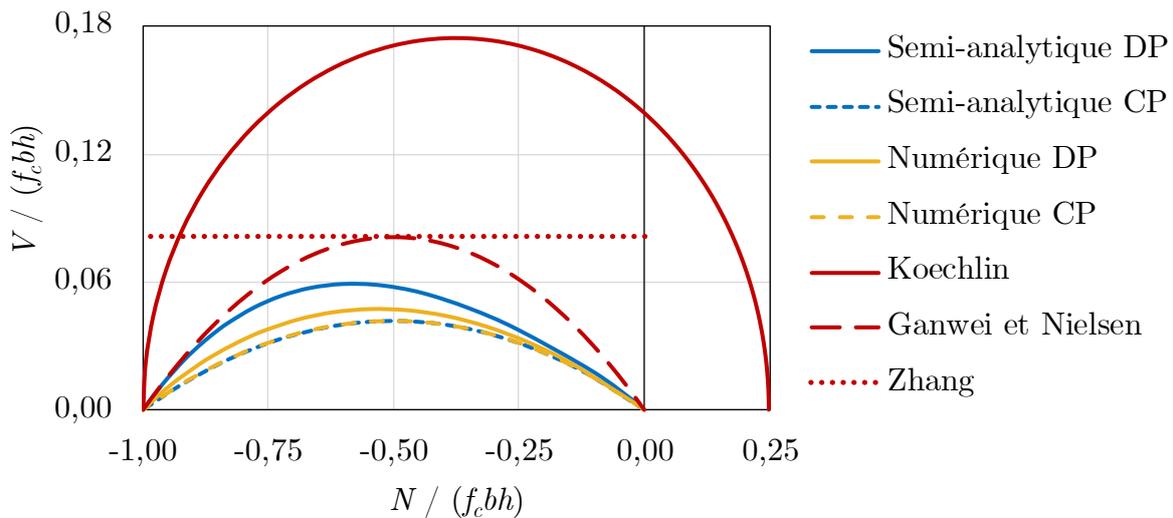


FIGURE 5.1 – Comparaison des résultats des méthodes numériques et semi-analytiques proposées avec les méthodes analytiques trouvées dans la bibliographie pour la poutre n°1

Le domaine de résistance obtenu par Ganwei et Nielsen (1988, 1990) présente une forme similaire à celles obtenues par les calculs numériques en déformation et en contrainte planes ou semi-analytique en contrainte plane, avec des valeurs plus élevées de la résistance à l'effort tranchant. Ceci résulte du mécanisme de ruine virtuel considéré par Ganwei et Nielsen (1988, 1990) qui représente un cas particulier du mécanisme 1 proposé dans la section 2.2.4 du chapitre 2. En effet, la discontinuité de vitesse dans le mécanisme proposé

peut varier le long du plan de discontinuité de vitesse, alors que celle-ci est constante dans la méthode de [Ganwei et Nielsen \(1988, 1990\)](#) (Figure 1.13). Le mécanisme considéré par [Zhang \(1997\)](#) est également un cas particulier du mécanisme proposé dans le cadre de la thèse, mais aussi de celui utilisé par [Ganwei et Nielsen \(1988, 1990\)](#), puisqu’il consiste en une discontinuité de vitesse non seulement uniforme le long du plan de discontinuité mais aussi verticale (Figure 1.14). Le domaine obtenu (prévu uniquement pour des charges de compression), prédit une valeur de la résistance à l’effort tranchant qui est indépendante de la charge axiale (droite horizontale en pointillés). Cette valeur est d’ailleurs égale à la valeur maximale atteinte par le domaine de résistance évalué par la méthode de [Ganwei et Nielsen \(1988, 1990\)](#).

Dans le cas de la poutre n°2 renforcée longitudinalement (Figure 5.2), le domaine prédit par la méthode de [Koechlin \(2007\)](#) et [Koechlin et al. \(2008\)](#) est, comme pour le cas de la poutre 1, nettement plus grand que les domaines estimés par les autres méthodes, mais présente la même forme que ces domaines (à l’exception du domaine calculé avec la méthode de [Zhang \(1997\)](#)). Ces domaines présentent en particulier une valeur maximale de la charge transversale (et donc de l’effort tranchant associé) qui est atteinte au niveau d’un plateau, où celle-ci est constante et indépendante de la charge axiale.

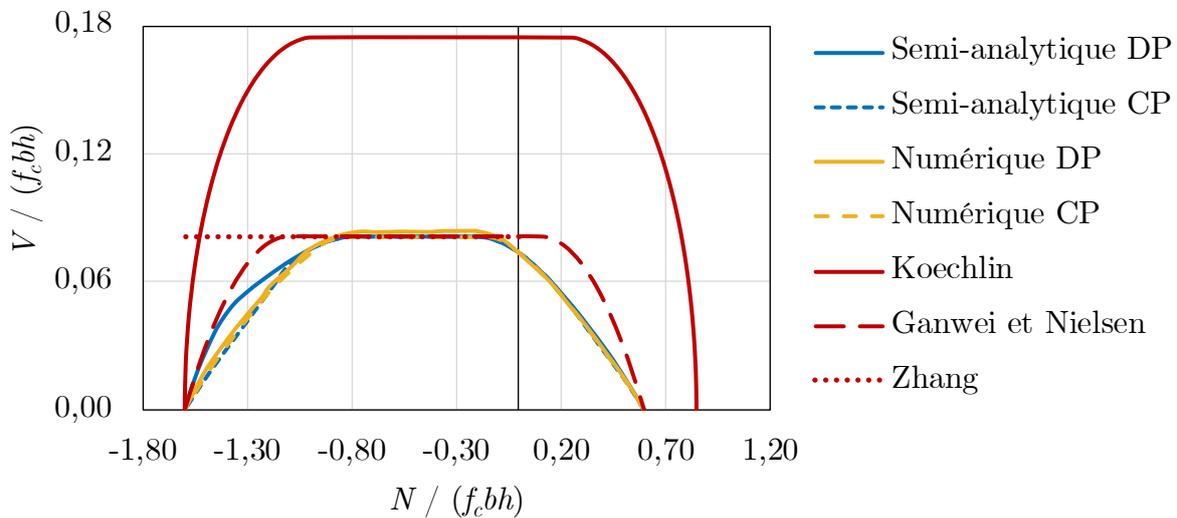


FIGURE 5.2 – Comparaison des résultats des méthodes numériques et semi-analytiques proposées avec les méthodes analytiques trouvées dans la bibliographie pour la poutre n°2

La valeur du plateau estimée par [Ganwei et Nielsen \(1988, 1990\)](#) est égale à celle obtenue par les méthodes proposées (hormis l’approche numérique en déformation plane qui donne

une valeur légèrement plus élevée, comme indiqué dans le chapitre 3). En revanche, ce plateau est plus large, puisqu'il correspond à des valeurs de charges axiales comprises entre environ  $-1,14$  et  $0,14f_cbh$  au lieu de  $-0,75$  et  $-0,20f_cbh$  pour les autres méthodes proposées. La méthode de Zhang (1997) prévoit quant à elle, comme pour le cas de la poutre en béton seul, une valeur constante de l'effort tranchant maximal égale à celle des plateaux prédits par les autres méthodes. La formulation analytique permettant de déterminer cette valeur maximale a été retrouvée dans la section 2.4.3 du chapitre 2 (équation 2.35), et a été également déterminée auparavant par Ganwei et Nielsen (1988, 1990) et Zhang (1997).

Concernant enfin la poutre n°3 renforcée longitudinalement et transversalement (Figure 5.3), il apparaît comme pour les deux poutres précédentes, que le domaine de résistance estimé par les formules proposées par Koechlin (2007) et Koechlin *et al.* (2008) est encore une fois nettement plus grand que les autres domaines (la résistance à la traction simple de la poutre est notamment plus élevée de 42% par rapport à celle obtenue par toutes les autres méthodes et égale à  $0,6f_cbh$  dans cet exemple). Il présente en revanche la même forme que celui estimé par la méthode de Ganwei et Nielsen (1988, 1990), avec un plateau horizontal, à la différence des domaines obtenus par les méthodes proposées.

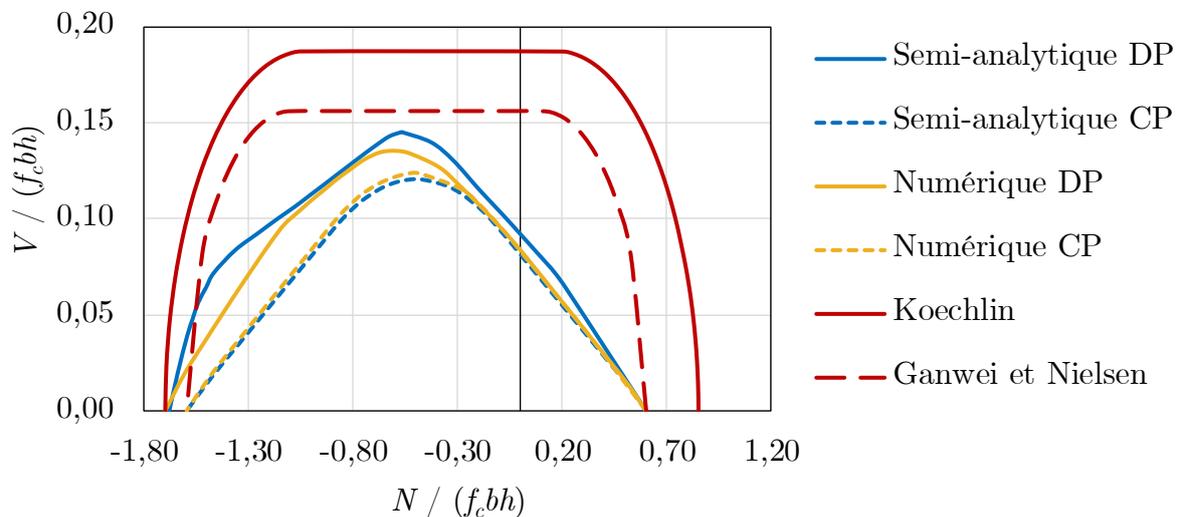


FIGURE 5.3 – Comparaison des résultats des méthodes numériques et semi-analytiques proposées avec les méthodes analytiques dans la bibliographie pour la poutre n°3

Contrairement aux poutres n°1 et 2, le domaine obtenu par la méthode de Ganwei et Nielsen (1988, 1990) présente pour des charges axiales de compression très importantes,

des valeurs plus faibles de l'effort tranchant maximal que celles obtenues par les calculs semi-analytique (compression supérieure à  $1,54f_cbh$ ) et numérique (compression supérieure à  $1,57f_cbh$ ) en déformation plane. Il prédit d'ailleurs la même résistance à la compression simple de la poutre (égale à  $(1 + \Phi)f_cbh$ , soit  $1,6f_cbh$  dans cet exemple), que celle obtenue par les approches semi-analytique et numérique proposées sous l'hypothèse de contrainte plane. Ce n'est pas le cas lorsque les calculs sont réalisés avec les approches proposées en déformation plane, ou par la méthode de [Koechlin \(2007\)](#) et [Koechlin et al. \(2008\)](#).

## 5.3 Comparaisons avec les résultats obtenus par l'utilisation du logiciel OptumG2

Afin d'évaluer la pertinence des méthodes proposées, celles-ci sont comparées dans cette section aux résultats obtenus par OptumG2 ([Krabbenhoft, 2018](#)). Il s'agit d'un logiciel développé par OptumCE. Destiné initialement à réaliser des calculs de stabilité d'ouvrages géotechniques, OptumG2 permet également de réaliser des calculs pour d'autres types d'applications, à travers la possibilité d'inclure différents critères de résistance pour les matériaux, ainsi que différents types d'éléments (barres, poutres, interfaces...). Pour cela, OptumG2 se base sur l'implémentation numérique par la méthode des éléments finis des approches statique et cinématique de la théorie du *calcul à la rupture* (ou de *l'analyse limite*). OptumG2 permet également d'effectuer des calculs élastoplastiques. Par ailleurs, la résolution des problèmes est réalisée en 2D, sous l'hypothèse de déformation plane ou d'axisymétrie.

Dans cette partie, les calculs réalisés à l'aide d'OptumG2 sont issus, comme pour les approches proposées dans les chapitres précédents, de l'approche cinématique. Pour cela, l'hypothèse de déformation plane est adoptée et la géométrie présentée dans la Figure 5.4 ci-après est considérée.

Le béton est donc modélisé comme un milieu bidimensionnel et les armatures longitudinales et transversales sont modélisées à l'aide d'éléments unidimensionnels (de type "plate") qui résistent uniquement à des efforts axiaux de traction-compression (leur résistance à l'effort tranchant et à la flexion est nulle). Les armatures sont de plus parfaitement adhérentes au béton environnant (comme supposé dans les approches numériques et semi-analytiques proposées). La charge transversale et les appuis sont imposés sur de petites zones mesurant

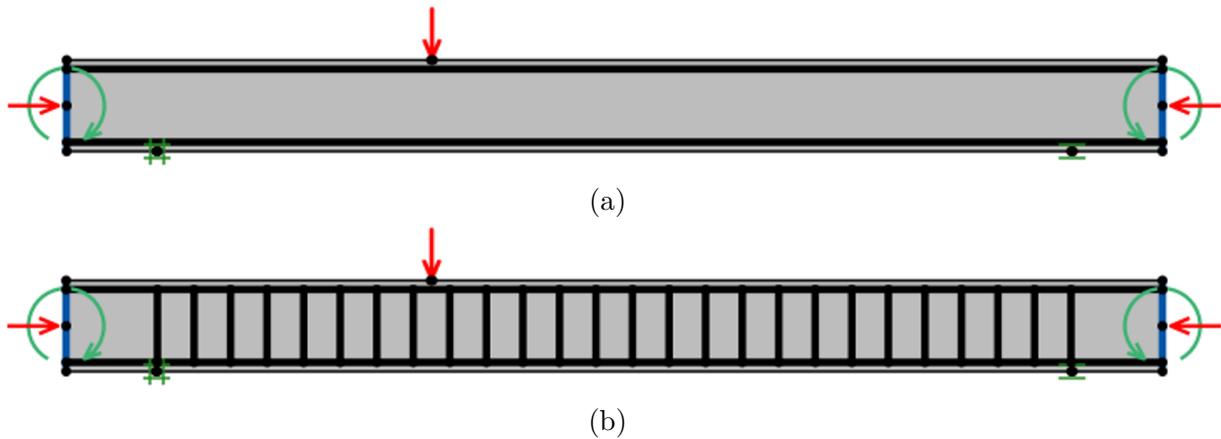


FIGURE 5.4 – Exemples de modélisation par OptumG2 des poutres (a) n°2 et (b) n°3

seulement 1 cm. Des largeurs encore plus faibles ont été testées, mais ont conduit dans certains cas au développement de mécanismes locaux situés dans ces zones.

Par ailleurs, une procédure itérative (disponible dans le logiciel) a été utilisée, permettant de raffiner le maillage après chaque itération dans les zones pertinentes et donc d'améliorer l'estimation par excès des charges limites. En général, trois itérations ont été considérées avec un nombre d'éléments initial de 4000 et un nombre final de 6000.

La Figure 5.5 présente la comparaison entre les résultats obtenus avec OptumG2 et les résultats des approches semi-analytiques (mécanisme 1) et numériques proposées pour les trois poutres étudiées pour un moment supplémentaire nul ( $m = 0$ ).

On constate que, pour la poutre n°1 (en béton seul), le domaine de résistance obtenu par OptumG2 est très proche de celui estimé par l'approche numérique proposé sous l'hypothèse de déformation plane (et donc inférieur à celui estimé par l'approche semi-analytique en déformation plane, mais supérieur à ceux estimés par les approches semi-analytique et numérique en contrainte plane).

Concernant la poutre n°2 (renforcée longitudinalement), il apparaît qu'OptumG2 conduit là encore à un domaine très proche de ceux obtenus par toutes les méthodes proposées, hormis le calcul semi-analytique en déformation plane pour une compression importante (qui donne des résultats plus élevés). Concernant le plateau horizontal, OptumG2 prédit une valeur qui est égale à celle estimée par les méthodes proposées, à l'exception de la méthode numérique en déformation plane qui donne une valeur légèrement plus élevée.

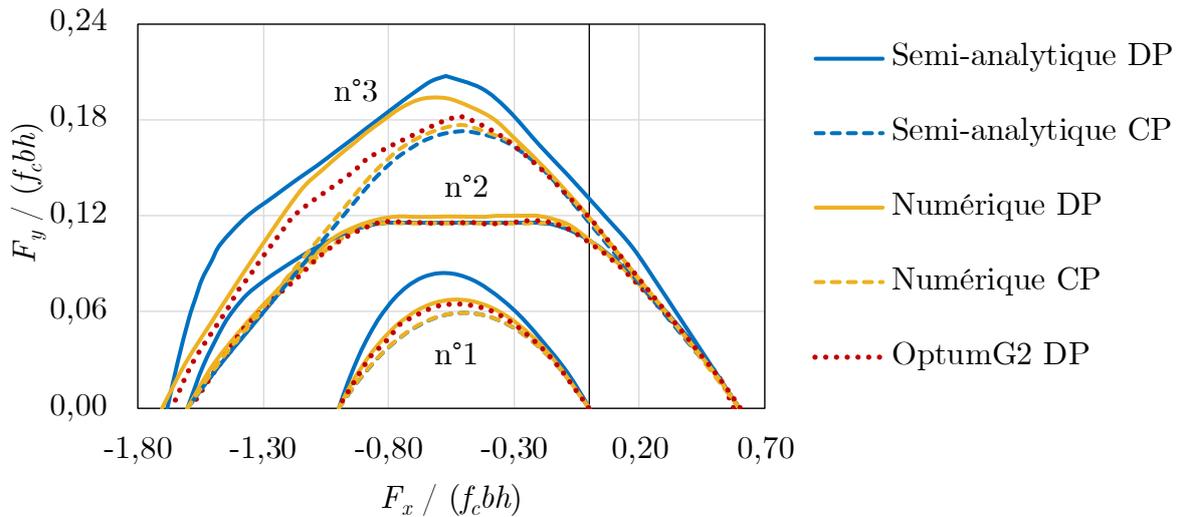


FIGURE 5.5 – Comparaison entre les résultats semi-analytiques et numériques des méthodes proposées et les résultats d'OptumG2 pour les poutres n°1, 2 et 3 sous  $m = 0$

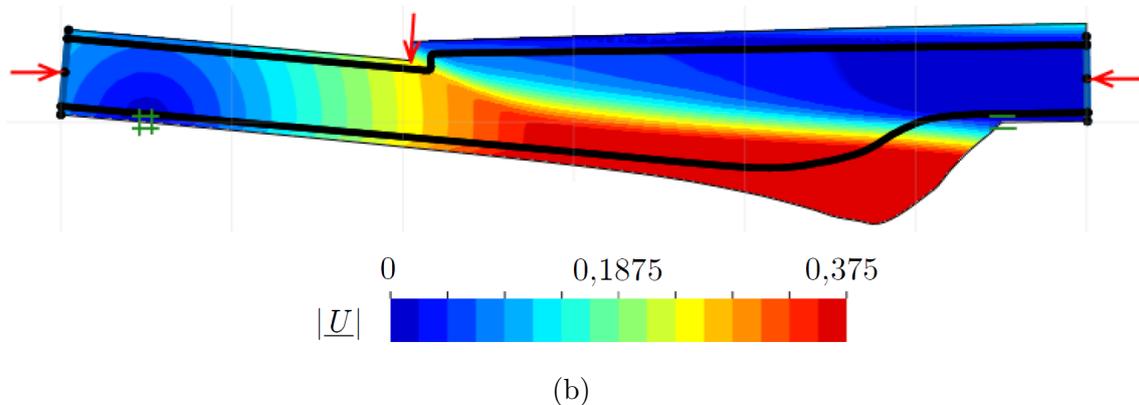
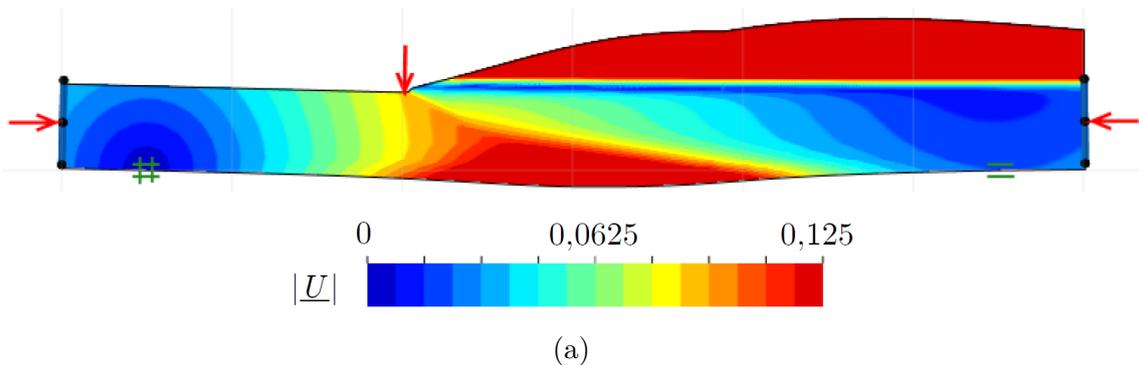
Toutefois, il a été observé que lorsque les appuis où la zone d'application de la charge transversale sont plus larges, cette valeur augmente (la même remarque a été également faite pour le calcul numérique proposé en déformation plane).

Pour la poutre n°3 (renforcée longitudinalement et transversalement), OptumG2 conduit à une évaluation du domaine de résistance plus petite que celle donnée par le calcul semi-analytique en déformation plane. Le domaine est également inclus dans celui obtenu par le calcul numérique en déformation plane et ce pour des valeurs de charges axiales de compression supérieures à environ  $0,2f_c b h$ . En dehors de cette zone, ces deux domaines sont quasiment identiques. Cette différence entre les deux domaines pourrait résulter de la modélisation des armatures transversales qui est implémentée par une procédure d'homogénéisation du milieu "béton renforcé avec des cadres" dans le calcul numérique proposé, alors que ces armatures sont modélisées individuellement par des éléments unidimensionnels dans OptumG2, la procédure d'homogénéisation n'étant pas disponible dans ce dernier logiciel. De plus, dans OptumG2, une procédure itérative de raffinement automatique du maillage dans les zones pertinentes (où les déformations sont importantes) permet d'améliorer l'estimation du domaine de résistance par rapport à la méthode numérique proposée qui utilise des maillages réguliers. On observe aussi qu'OptumG2 donne une estimation de la résistance à la compression simple de la poutre qui est, comme pour les calculs proposés en déformation plane, légèrement plus élevée que la valeur prédite par les calculs en contrainte plane (d'environ 4%).

En conclusion, il apparaît que pour les trois poutres étudiées, les résultats obtenus par OptumG2 fournissent des domaines de résistance qui sont encadrés par ceux fournis par les calculs semi-analytique et numérique sous l'hypothèse de contrainte plane et ceux obtenus en déformation plane.

Les Figures 5.6a, b et c représentent des exemples de déformées obtenues par OptumG2 pour les poutres n°1, 2 et 3 respectivement sans moment supplémentaire ( $m = 0$ ), et ce pour les chargements étudiés dans la section 3.4 du chapitre 3.

On constate que ces déformées sont proches de celles obtenues par les calculs réalisés avec la méthode numérique proposée sous l'hypothèse de déformation plane (voir les Figures 3.8a, 3.10a et 3.13a pour les poutres n°1, 2 et 3 respectivement). Néanmoins, dans les mécanismes obtenus par OptumG2 pour les poutres 1 et 3, des déformations importantes apparaissent dans la couche de béton au dessus de l'armature supérieure, et ce dans toute la zone située entre le point d'application de la charge transversale et l'extrémité droite (la plus éloignée) de la poutre.



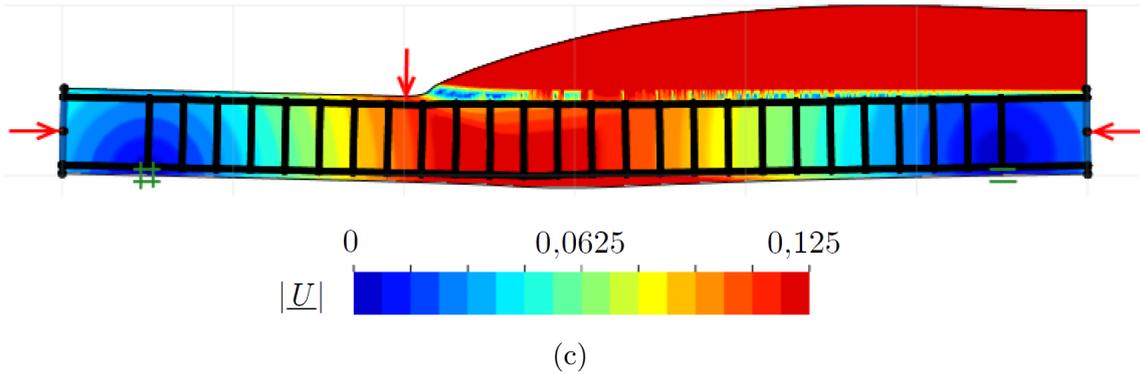
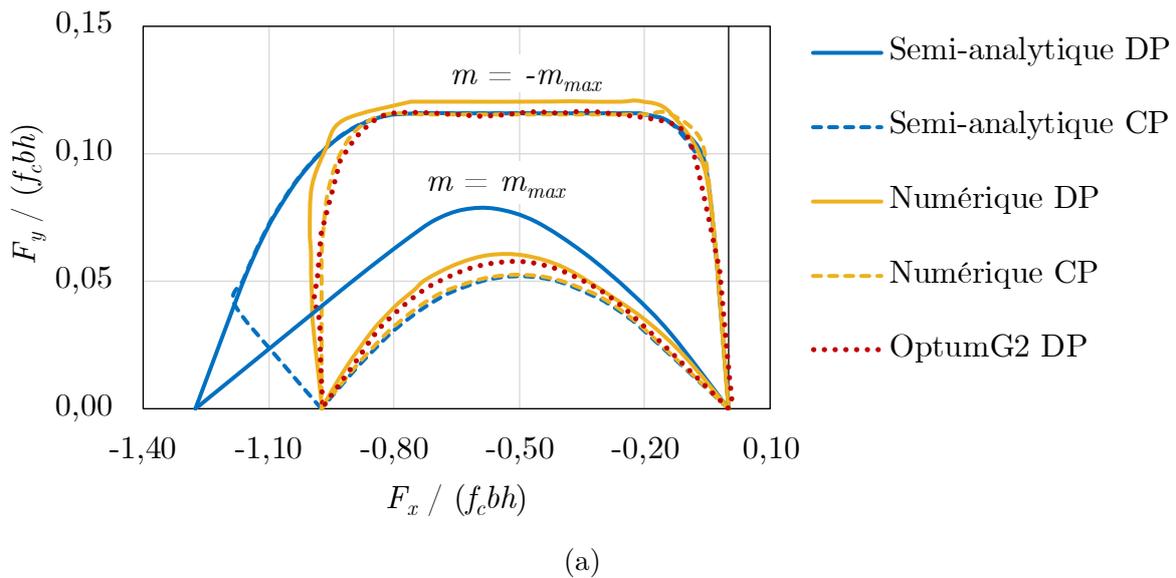


FIGURE 5.6 – Exemples de déformées des poutres (a) n°1, (b) n°2 et (c) n°3

Lorsque les poutres n°2 et 3 sont soumises à des moments supplémentaires maximaux négatif ou positif ( $m = \pm m_{max}$ ), les domaines de résistance estimées par OptumG2 sont proches des résultats numériques des méthodes proposées, malgré quelques différences (Figure 5.7). En général, OptumG2 donne des résultats légèrement meilleurs (c'est-à-dire inférieurs) que ceux donnés par le calcul numérique réalisé sous la même hypothèse de déformation plane, et supérieurs à ceux donnés par le calcul numérique sous l'hypothèse de contrainte plane. En revanche, dans le cas de la poutre n°3 soumise à un moment maximal négatif ( $m = -m_{max}$ ), le plateau horizontal obtenu par OptumG2 correspond à une valeur plus faible que celle fournie par les calculs numériques en contrainte et en déformation planes d'environ 7%.



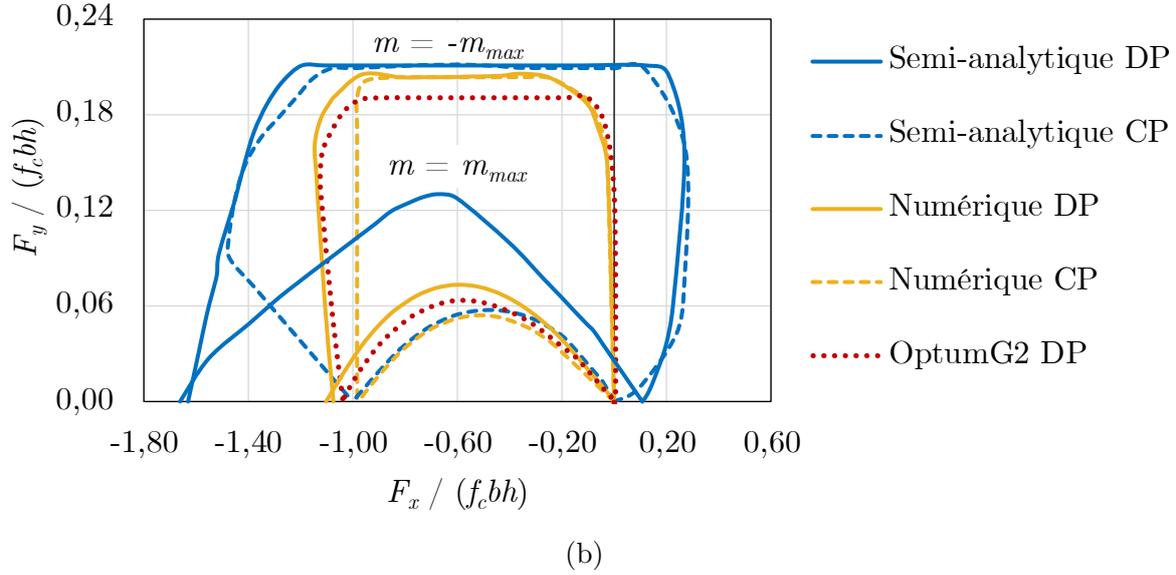


FIGURE 5.7 – Comparaison entre les résultats semi-analytiques et numériques des méthodes proposées et les résultats d'OptumG2 pour les poutres (a) n°2 et (b) n°3 pour  $m = \pm m_{max}$

De plus, il apparaît que les domaines fournis par OptumG2 pour les deux poutres soumises au moment négatif sont inclus dans ceux obtenus par les calculs semi-analytiques, non seulement en déformation plane mais aussi en contrainte plane (contrairement aux cas sans moment ou avec moment positif).

## 5.4 Première validation des méthodes proposées à partir de résultats expérimentaux

La comparaison des différentes approches semi-analytiques et numériques développées dans ce travail avec certaines méthodes analytiques disponibles dans la littérature ainsi que le logiciel OptumG2 (Krabbenhoft, 2018) ont permis de montrer leur pertinence dans le dimensionnement à la rupture de poutres en béton armé soumises aux chargements considérés. Toutefois, afin d'obtenir une première validation de ces méthodes, il est indispensable de les confronter à des résultats expérimentaux. Plusieurs études expérimentales, disponibles dans la littérature, se sont intéressées à la détermination de la résistance à l'effort tranchant (par des essais de flexion trois ou quatre points) d'éléments en béton armé soumis en outre à des charges axiales. Dans cette section, les essais considérés correspondent donc à

la combinaison de chargements précédemment étudiée, à savoir une flexion trois points combinée à une charge axiale (de compression ou de traction) et éventuellement un moment supplémentaire négatif. Il s'agit des essais effectués dans le cadre de cette thèse, présentés au chapitre 4 (section 5.4.1), ainsi que des essais réalisés par [Pham \*et al.\* \(2020a,b\)](#) (section 5.4.2), [Madsen \*et al.\* \(2011\)](#) (section 5.4.3) et [Jørgensen \*et al.\* \(2013\)](#) (section 5.4.4).

Tous les calculs ont été effectués en considérant la résistance moyenne à la compression du béton pour chaque type d'essai, ainsi que les limites à la rupture des aciers des différentes armatures longitudinales et transversales (si disponibles, sinon la limite d'élasticité de l'acier a été retenue).

Afin de tenir compte du phénomène de réduction de la résistance à la compression du béton fissuré à l'effort tranchant, un coefficient de réduction ( $\nu < 1$ ) a été adopté, permettant de déterminer une résistance effective du béton ( $\nu f_c$ ). En effet, la résistance à la compression du béton peut être fortement diminuée avec l'apparition des microfissures dues notamment au retrait du béton (avant même l'application des chargements) ou aux chargements appliqués, ainsi qu'aux macrofissures également générées par les chargements appliqués ([Nielsen et Hoang, 2011](#)). Différentes expressions de ce coefficient sont proposées dans la littérature ([Zhang \(1997\)](#), [Nielsen et Hoang \(2011\)](#)). Dans le cadre de ce travail, nous avons choisi d'adopter le coefficient proposé dans l'Eurocode 2 [EN 1992-1-1 \(2005\)](#) :

$$\nu = 0,6 \left( 1 - \frac{f_c}{250} \right) \quad (5.1)$$

où  $f_c$  est en MPa.

### 5.4.1 Essais réalisés dans le cadre de cette thèse (chapitre 4)

Les Figures 5.8a et b présentent les prédictions obtenues par les approches semi-analytiques (mécanisme 1) et numériques correspondant aux essais réalisés sur les poutres NS (sans cadres) soumises à un moment supplémentaire faible (essais NS.I), respectivement sans ( $\nu = 1$ ) ou avec ( $\nu < 1$ ) application du coefficient de réduction de la résistance à la compression du béton (estimé par l'équation 5.1).

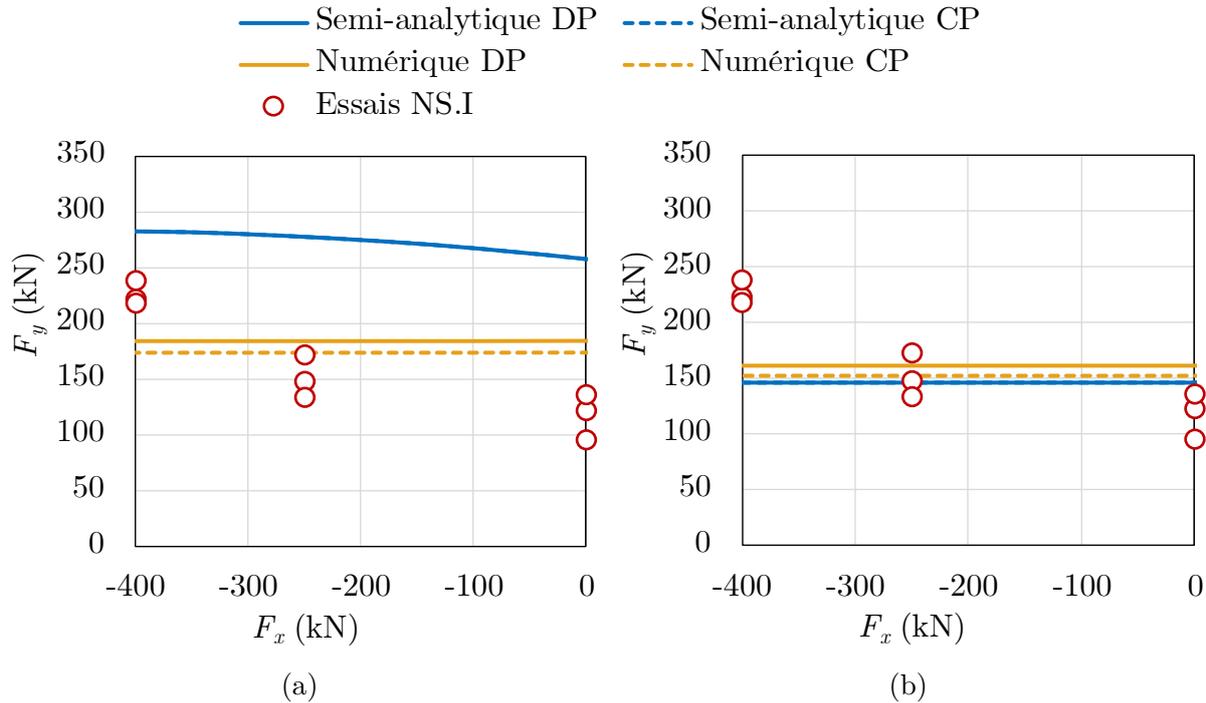


FIGURE 5.8 – Comparaison des résultats semi-analytiques et numériques avec les résultats des essais NS.I (a) sans et (b) avec réduction de la résistance à la compression du béton

On observe que dans les deux cas ( $\nu = 1$  et  $\nu < 1$ ), les calculs semi-analytiques en déformation et en contrainte planes donnent les mêmes résultats. Ce n'est pas le cas des calculs numériques où l'hypothèse de contrainte plane donne des résultats légèrement plus faibles que ceux obtenus sous l'hypothèse de déformation plane (d'environ 6% pour  $\nu = 1$  et 5% pour  $\nu < 1$ ). Par ailleurs, lorsque la résistance du béton n'est pas réduite ( $\nu = 1$ ), le calcul semi-analytique prédit un majorant des résultats expérimentaux (le rapport entre les prédictions et les essais variant entre 1,2 et 2,2) avec une tendance qui suit celle des essais, à savoir une augmentation de la charge transversale avec l'augmentation de la compression axiale. En revanche, si le coefficient de réduction est pris en compte ( $\nu < 1$ ), le calcul semi-analytique prédit une charge transversale de ruine constante (les résultats des essais sont situés sur le plateau horizontal). C'est également le cas des calculs numériques pour les deux situations, avec et sans réduction de la résistance du béton, où la charge transversale maximale prédite est constante. Ces plateaux présentent des valeurs plus faibles que certains résultats d'essais. En effet, hormis le domaine semi-analytique obtenu pour  $\nu = 1$ , les autres résultats ne constituent pas toujours un majorant pour les résultats d'essais, en particulier pour ceux réalisés sous des charges axiales de compression

importantes (tous les essais pour  $F_x = -400$  kN et certains essais pour  $F_x = -250$  kN).

Les Figures 5.9a et b présentent les résultats obtenus pour les essais NS.II (poutres sans cadres soumises à un moment supplémentaire négatif important). Comme pour les essais précédents, les estimations des calculs semi-analytiques donnent les mêmes résultats en considérant les hypothèses de contrainte ou de déformation planes, alors que les calculs numériques en contrainte plane donnent des résultats légèrement plus faibles que ceux réalisés en déformation plane. Par ailleurs, les domaines de résistance obtenus par les différentes méthodes prédisent une valeur constante de la charge transversale (quasi-constante pour le calcul semi-analytique en déformation plane où une très faible augmentation de la charge transversale est constatée lorsque la charge axiale passe de 0 à  $-250$  kN). La valeur du plateau est supérieure aux charges de ruine expérimentales (hormis pour l'essai sous  $F_x = -400$  kN) pour les calculs semi-analytiques sans réduction de la résistance du béton ( $\nu = 1$ ), et plus faible que la majorité des essais pour les autres calculs (hormis quelques essais sous  $F_x = 0$ ).

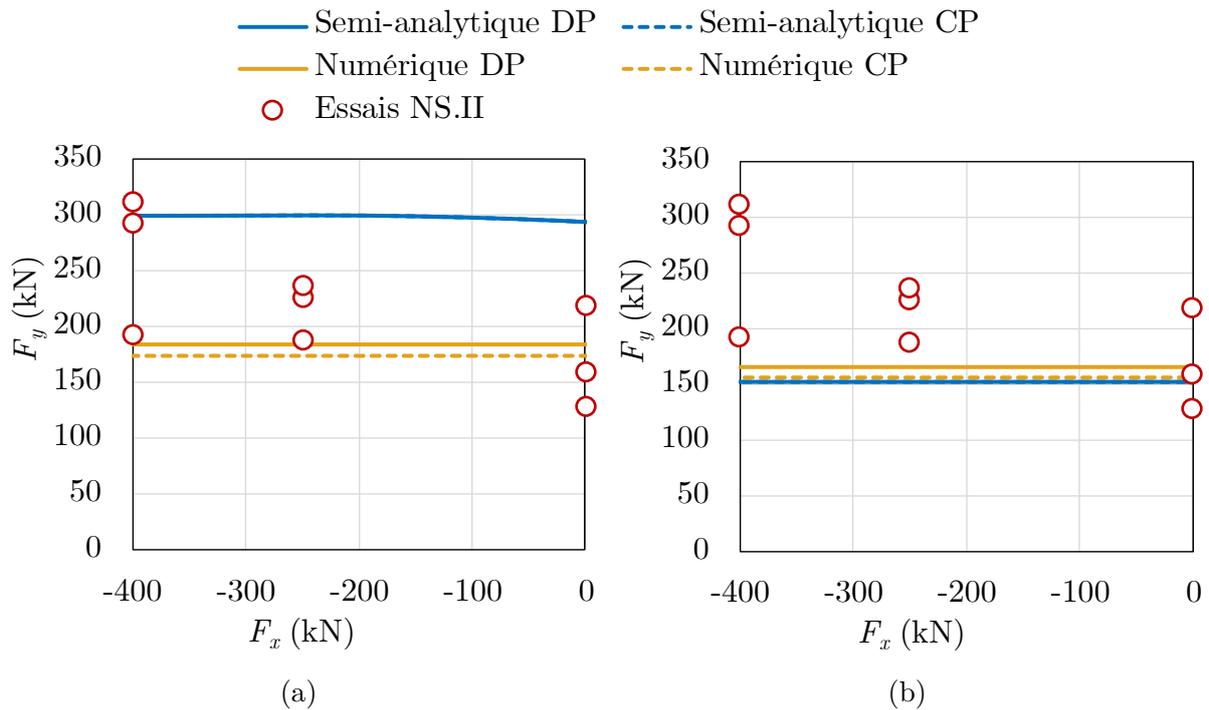


FIGURE 5.9 – Comparaison des résultats semi-analytiques et numériques avec les résultats des essais NS.II (a) sans et (b) avec réduction de la résistance à la compression du béton

La comparaison entre les résultats obtenus pour les essais NS.I et NS.II montre que les

calculs semi-analytiques prédisent une augmentation de la charge transversale de ruine due à l'effet favorable du moment négatif. Cette augmentation est plus importante lorsque le coefficient de réduction du béton n'est pas pris en compte. Ce n'est pas le cas des calculs numériques, dont les prédictions des calculs se trouvent sur le plateau horizontal de la charge transversale maximale qui est indépendant du moment négatif appliqué.

Concernant les poutres S (renforcées par des cadres transversaux) soumises à un moment négatif faible (essais S.I), on observe d'après la Figure 5.10a que les calculs semi-analytiques et numériques, en déformation et en contrainte planes pour  $\nu = 1$ , prédisent bien une augmentation de la charge transversale de ruine en fonction de la compression axiale, celle-ci étant nettement supérieure aux résultats expérimentaux (le rapport entre les prédictions et les essais varie entre 1,5 et 1,8 pour le calcul semi-analytique en déformation plane qui donne le domaine le plus grand et entre 1,2 et 1,5 pour le calcul numérique en contrainte plane qui donne le domaine le plus petit). Les prédictions (semi-analytiques

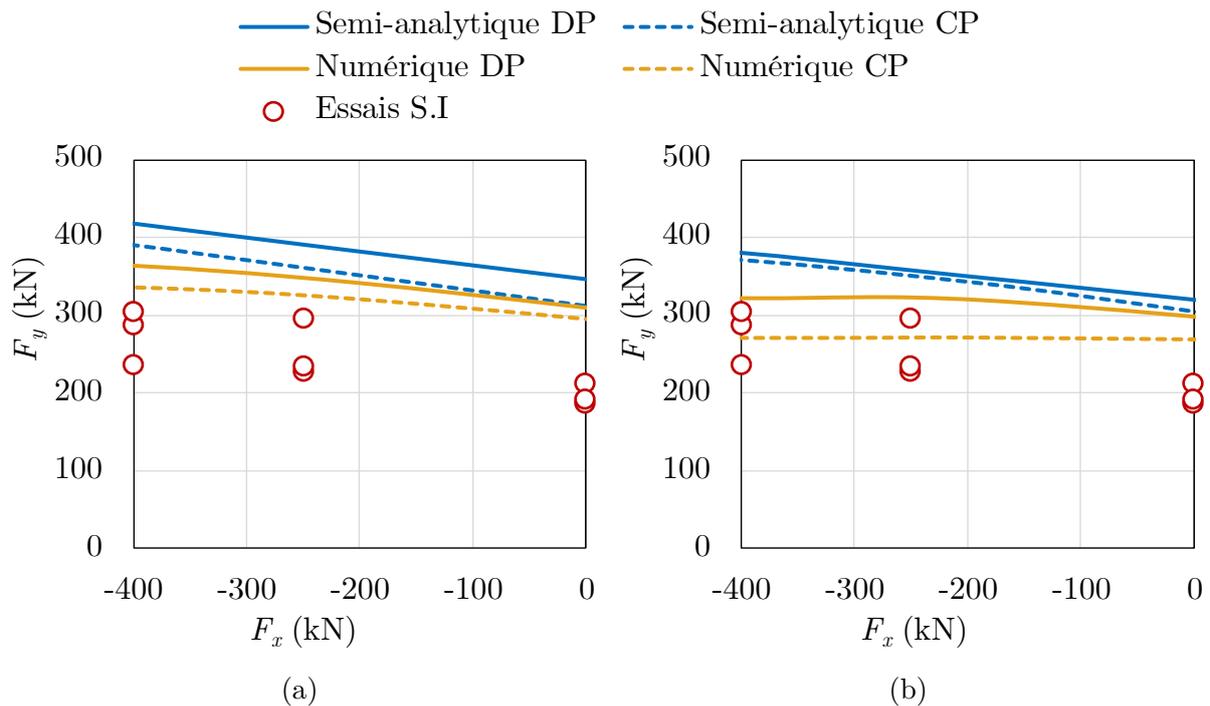


FIGURE 5.10 – Comparaison des résultats semi-analytiques et numériques avec les résultats des essais S.I (a) sans et (b) avec réduction de la résistance à la compression du béton

ou numériques) sous l'hypothèse de contrainte plane sont légèrement plus faibles que les prédictions sous l'hypothèse de déformation plane (contrairement aux poutres NS pour lesquels les prédictions des calculs semi-analytiques en déformation et en contrainte

planes sont identiques). De plus, il apparaît que les résultats numériques sont plus proches des résultats expérimentaux. La réduction de la résistance à la compression du béton (Figure 5.10b) a permis de se rapprocher encore plus des résultats expérimentaux en gardant cette même tendance à l'augmentation de la charge transversale de ruine avec la compression dans le cas des calculs semi-analytiques. Les calculs numériques, en revanche, prévoient soit une faible augmentation de la charge transversale de ruine dans l'hypothèse de déformation plane, soit une valeur constante de la charge transversale dans le cas de la contrainte plane.

Lorsqu'un moment supplémentaire négatif important est appliqué aux poutres renforcées avec des cadres (essais S.II, Figures 5.11a et b), il apparaît (comme pour les essais S.I) que les calculs semi-analytiques dans le cas de  $\nu = 1$  conduisent à une majoration des résultats expérimentaux. Ces domaines correspondants font apparaître une augmentation de la

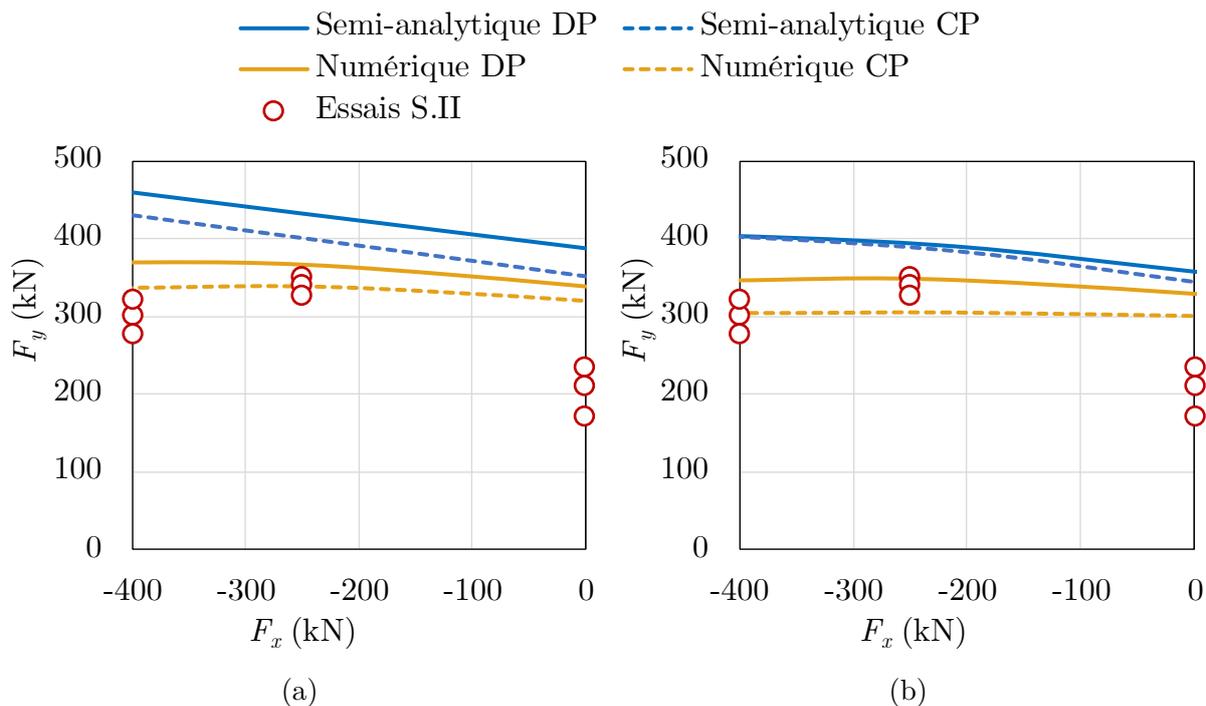


FIGURE 5.11 – Comparaison des résultats semi-analytiques et numériques avec les résultats des essais S.II (a) sans et (b) avec réduction de la résistance à la compression du béton

charge transversale de ruine en fonction de la compression axiale. Ceci n'est pas le cas des résultats expérimentaux, où la charge transversale augmente lorsque la compression axiale augmente de 0 à 250 kN, puis diminue légèrement lorsqu'une compression de 400 kN est appliquée. On peut voir que les calculs numériques prédisent quant à eux d'abord

une très faible augmentation de la charge transversale, puis une valeur constante qui se rapproche plus des résultats expérimentaux. Ils constituent d'ailleurs des majorants des résultats expérimentaux sous l'hypothèse de déformation plane. La réduction de la résistance du béton permet une nouvelle d'obtenir des estimations plus proches des résultats expérimentaux.

Comme pour les essais réalisés sur les poutres sans cadres, la comparaison entre les prédictions des méthodes proposées pour les essais réalisés sur les poutres avec cadres, soumises à un moment supplémentaire faible ou important, permet ici encore d'identifier l'effet favorable du moment négatif sur l'augmentation de la résistance au chargement transversal, à l'exception des essais sous charge axiale nulle où les résultats expérimentaux n'ont pas permis de mettre en évidence un tel effet.

#### 5.4.2 Essais de **Pham *et al.* (2020a,b)**

Dans cette partie, les approches proposées sont confrontées aux résultats expérimentaux obtenus par **Pham *et al.* (2020a,b)**. Ces essais ont été réalisés avec le même dispositif expérimental que celui utilisé dans les essais de la thèse (décrit dans la section 4.2.2). De plus, toutes les poutres testées présentaient la même géométrie que celles de la thèse ( $b = 0,2$  m,  $h = 0,3$  m,  $L = 3,2$  m,  $a = 1$  m,  $l = 2,2$  m).

Dans la première campagne expérimentale (**Pham *et al.*, 2020a**) réalisée sur des poutres sans armatures transversales, la résistance à la compression du béton variait entre 32,5 et 35,0 MPa, et la résistance à la traction entre 2,6 et 3,9 MPa. Les poutres étaient renforcées par deux lits d'armatures longitudinales de 25 mm de diamètre avec une limite d'élasticité de  $f_y = 550$  MPa et une contrainte limite à la rupture de  $f_r = 670$  MPa. L'enrobage était égal à 30 mm en haut et en bas. En dehors de la zone étudiée (de longueur  $a = 1$  m), les poutres étaient renforcées, tout comme celles utilisées dans la thèse, par des armatures transversales (de diamètre 10 mm et avec un espacement horizontal de 100 mm). Ces poutres étaient soumises à différentes valeurs de charges axiales de traction valant environ 0, 150, 300, 400 et 600 kN, appliquées simultanément à des moments supplémentaires négatifs valant environ  $-104$ ,  $-88$ ,  $-68$ ,  $-57$  et  $-48$  kN.m.

Dans la seconde campagne expérimentale (**Pham *et al.*, 2020b**), les poutres testées étaient renforcées par des armatures transversales (en plus des armatures longitudinales)

#### 5.4. Première validation des méthodes proposées à partir de résultats expérimentaux

---

dans la zone étudiée. La majorité de ces poutres contenait des armatures transversales de 6 mm de diamètre, espacées de  $s = 20$  cm (15 poutres), ou de  $s = 15$  cm (8 poutres). Ces armatures présentaient des limites d'élasticité et à la rupture respectivement égales à  $f_{yw} = 550$  MPa et  $f_{rw} = 620$  MPa. L'autre partie des poutres (trois) était renforcée avec des armatures  $\phi 8$  avec  $s = 20$  cm,  $f_{yw} = 575$  MPa et  $f_{rw} = 665$  MPa. Ces poutres étaient également renforcées par les mêmes armatures transversales en dehors de la zone étudiée et les mêmes armatures longitudinales que les poutres sans cadres de la première campagne expérimentale. Quant au béton utilisé pour fabriquer les poutres, sa résistance à la compression variait entre 33,5 et 35,5 MPa et sa résistance à la traction entre 2,7 et 3,9 MPa. Les essais sur les poutres renforcées avec des cadres ( $\phi 6$ ,  $s = 20$  cm) consistaient respectivement en des charges axiales d'environ 0, 150, 300, 400 et 600 kN, avec des moments supplémentaires d'environ  $-104$ ,  $-88$ ,  $-69$ ,  $-57$  et  $-50$  kN.m respectivement. Les poutres renforcées avec des cadres ( $\phi 6$ ,  $s = 15$  cm) étaient soumises quant à elles à des charges axiales d'environ 150, 300 et 400 kN, accompagnées de moments négatifs d'environ  $-88$ ,  $-68$  et  $-57$  kN.m respectivement. Enfin les essais sur les poutres renforcées avec des cadres ( $\phi 8$ ,  $s = 20$  cm) ont été testées avec une charge axiale d'environ 150 kN et un moment supplémentaire d'environ  $-88$  kN.m.

La Figure 5.12 (pour les poutres sans cadres) et les Figures 5.13a à f (pour les poutres avec cadres) présentent les résultats des prédictions des méthodes proposées pour les essais décrits plus haut, et ce en prenant en compte (figures de droite) ou non (figures de gauche) un coefficient de réduction pour la résistance à la compression du béton. Ces figures sont déduites des domaines de résistance calculés pour les différentes coupes à moment constant représentées dans l'annexe B.

On observe que lorsque les poutres ne sont pas renforcées avec des cadres, les résultats des calculs semi-analytiques et numériques réalisés pour  $\nu = 1$  (Figure 5.12a) surestiment notablement les valeurs expérimentales. En particulier, les approches semi-analytiques prédisent d'abord une valeur constante de la charge transversale de ruine puis une diminution de celle-ci pour des charges axiales importantes (supérieures à environ 350 kN). En revanche, les approches numériques donnent des valeurs de la charge de ruine qui sont indépendantes de la charge axiale de traction ainsi que du moment supplémentaire négatif appliqués. Celles-ci sont plus proches des résultats expérimentaux que celles données par les calculs semi-analytiques. En effet, le rapport entre les prédictions numériques en déformation plane (respectivement en contrainte plane) et les résultats expérimentaux varie entre 1,4 et 1,8 (respectivement entre 1,3 et 1,7), contre 1,9 et 2,6 pour les calculs

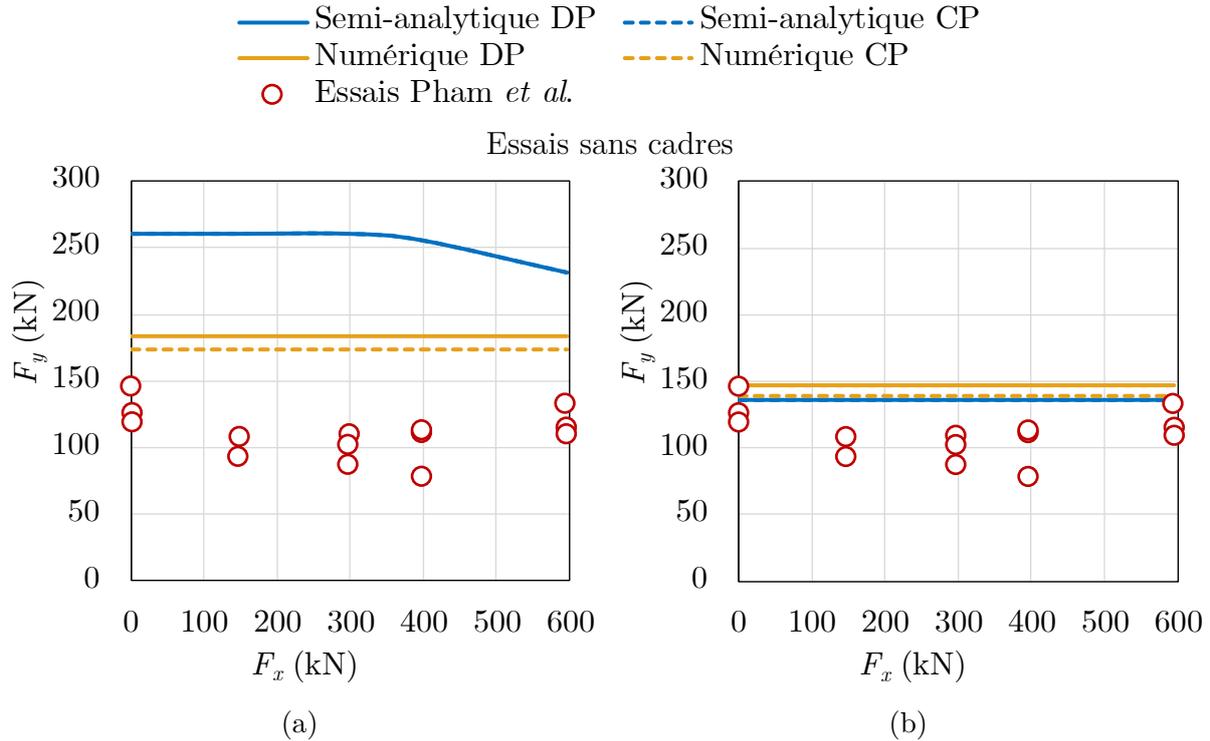


FIGURE 5.12 – Comparaison des résultats semi-analytiques et numériques avec les résultats expérimentaux de [Pham \*et al.\* \(2020a\)](#) (a) sans et (b) avec réduction de la résistance à la compression du béton

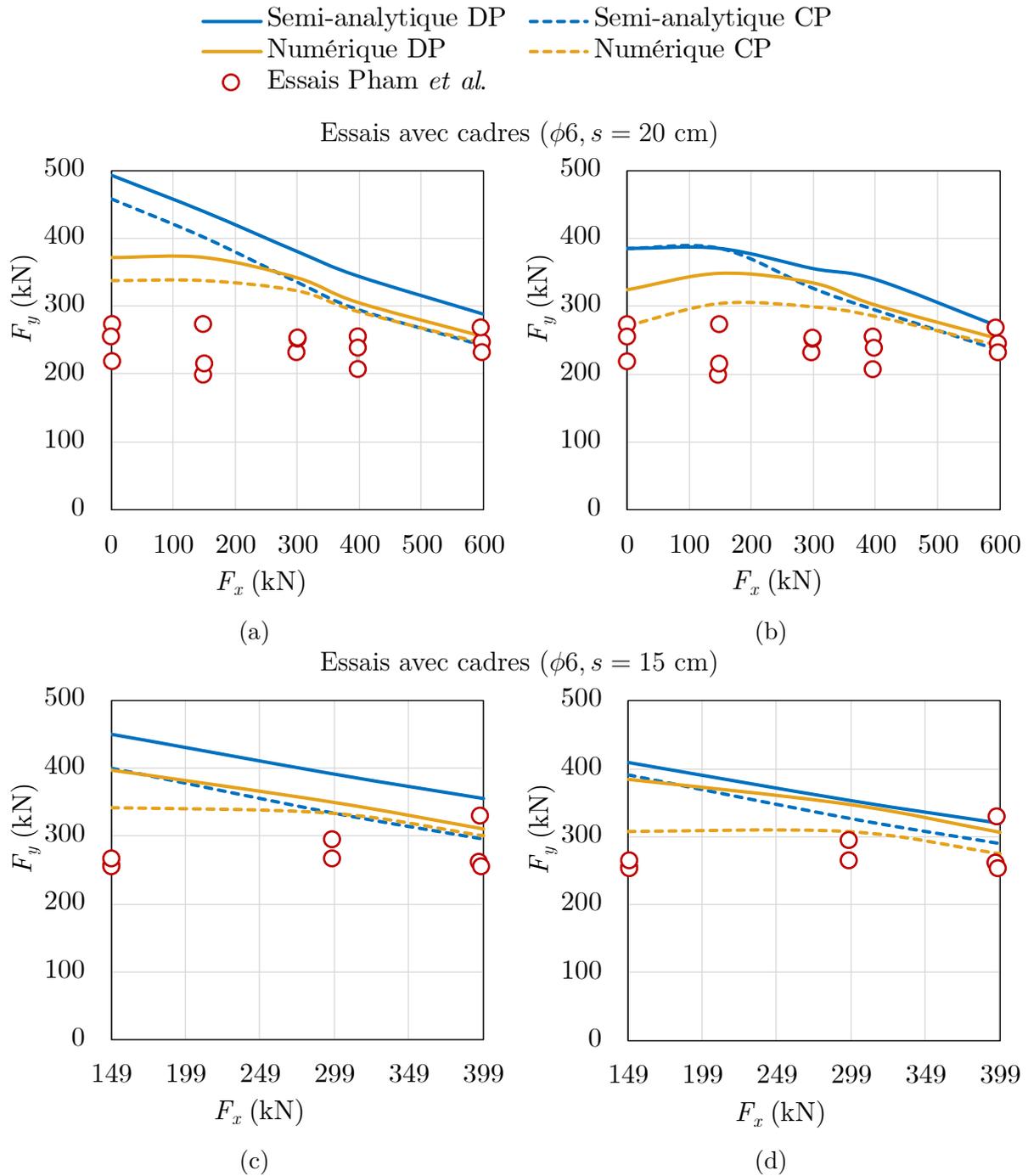
semi-analytiques (en déformation et en contrainte planes, qui donnent les mêmes résultats).

Lorsque la résistance du béton est réduite (Figure 5.12b), toutes les approches proposées prévoient une charge transversale de ruine constante, la valeur prédite par les calculs semi-analytiques (la même pour les calculs en déformation et en contrainte planes) étant légèrement plus faible que celle prédite par les approches numériques (différence de seulement 8% entre la valeur semi-analytique et la valeur numérique en déformation plane et 2% en contrainte plane). Comme attendu, les nouveaux calculs sont plus proches des résultats expérimentaux. A titre d'exemple, le rapport entre les prédictions des calculs semi-analytiques et les essais varient entre 1,0 et 1,4.

En ce qui concerne les poutres renforcées par des cadres (Figures 5.13a à f), il apparaît comme pour les poutres sans cadres, que les prédictions des différentes méthodes sont supérieures à la plupart des résultats expérimentaux (hormis pour quelques essais). Il apparaît également, comme observé précédemment, que les calculs numériques, notamment dans l'hypothèse de contrainte plane, sont en meilleur accord avec les résultats expérimentaux.

#### 5.4. Première validation des méthodes proposées à partir de résultats expérimentaux

taux, notamment lorsqu'un coefficient de réduction de la résistance en compression du béton est pris en compte. En effet, le rapport entre les prédictions numériques en contrainte plane pour  $\nu < 1$  et les résultats expérimentaux varie entre 1,0 et 1,3 (contre 1,0 et 1,5 lorsque  $\nu = 1$ ).



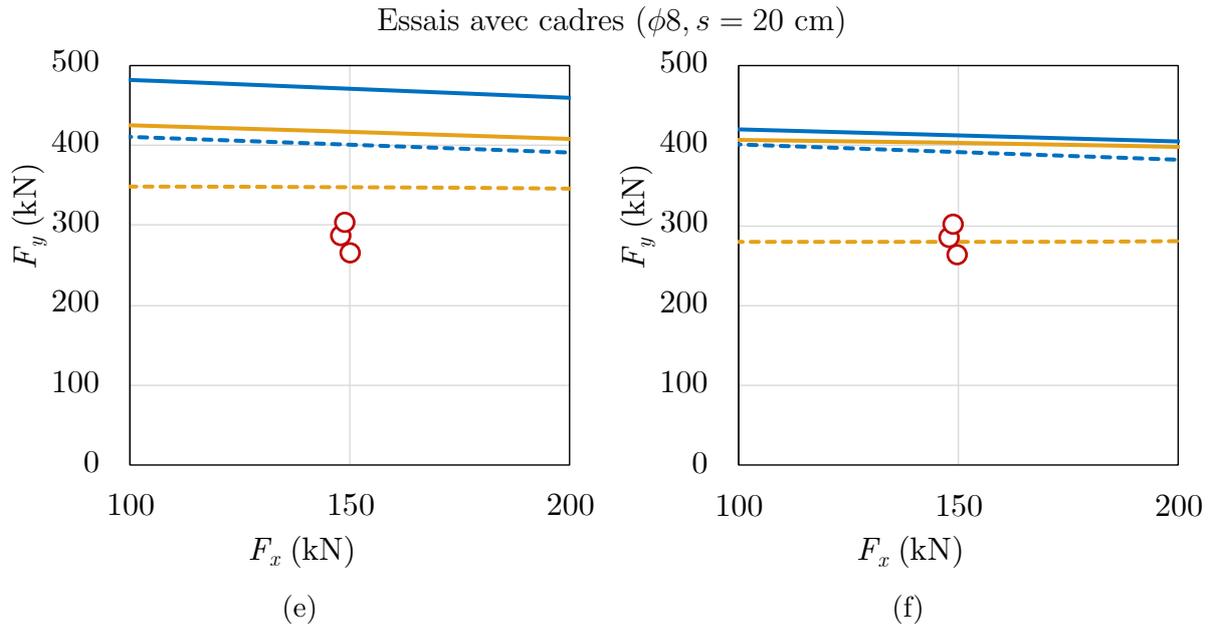


FIGURE 5.13 – Comparaison des résultats semi-analytiques et numériques avec les résultats expérimentaux de [Pham \*et al.\* \(2020b\)](#) (a) sans et (b) avec réduction de la résistance à la compression du béton

### 5.4.3 Essais de [Madsen \*et al.\* \(2011\)](#)

Les essais de [Madsen \*et al.\* \(2011\)](#) ont été réalisés sur un total de 20 poutres en béton armé longitudinalement, mais non renforcé par des armatures transversales. Ces poutres ont été soumises à la combinaison de charges transversale et axiale de compression (allant jusqu'à 85% de la résistance à la compression de la poutre en béton). Les poutres testées présentaient une section rectangulaire de hauteur  $h = 0,2 \text{ m}$  et de largeur  $b = 0,15 \text{ m}$ . La valeur moyenne de la résistance à la compression du béton était égale à  $f_c = 21 \text{ MPa}$ . Les poutres étaient renforcées par deux lits d'armatures longitudinales de 25 mm de diamètre, avec une limite d'élasticité de  $f_y = 625 \text{ MPa}$  et un enrobage de 12,5 mm en haut et en bas. Les poutres étaient soumises à une flexion trois points (portée totale de la poutre  $l = 1,2 \text{ m}$ ) avec une charge transversale appliquée en leur milieu ( $a = 0,6 \text{ m}$ ), en plus de charges axiales de compression appliquées aux deux extrémités.

Sur les Figures 5.14a et b, les résultats de ces essais sont confrontés aux prédictions des différentes approches proposées pour  $\nu = 1$  et  $\nu < 1$  respectivement.

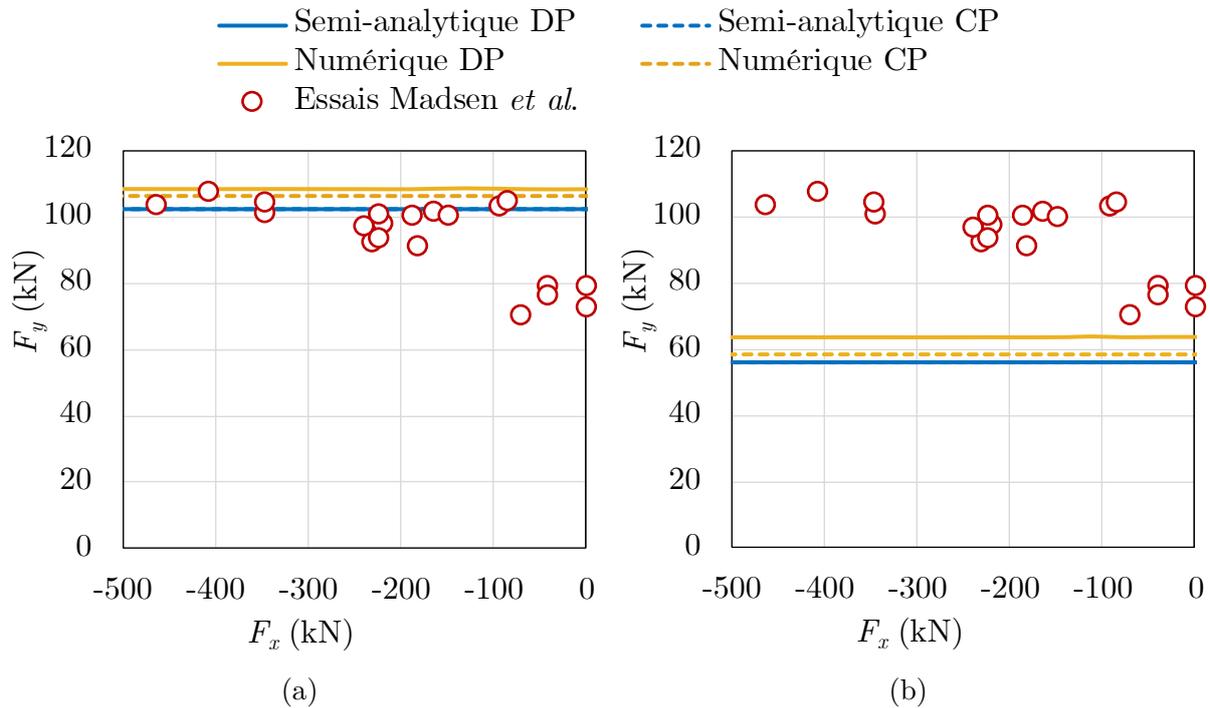


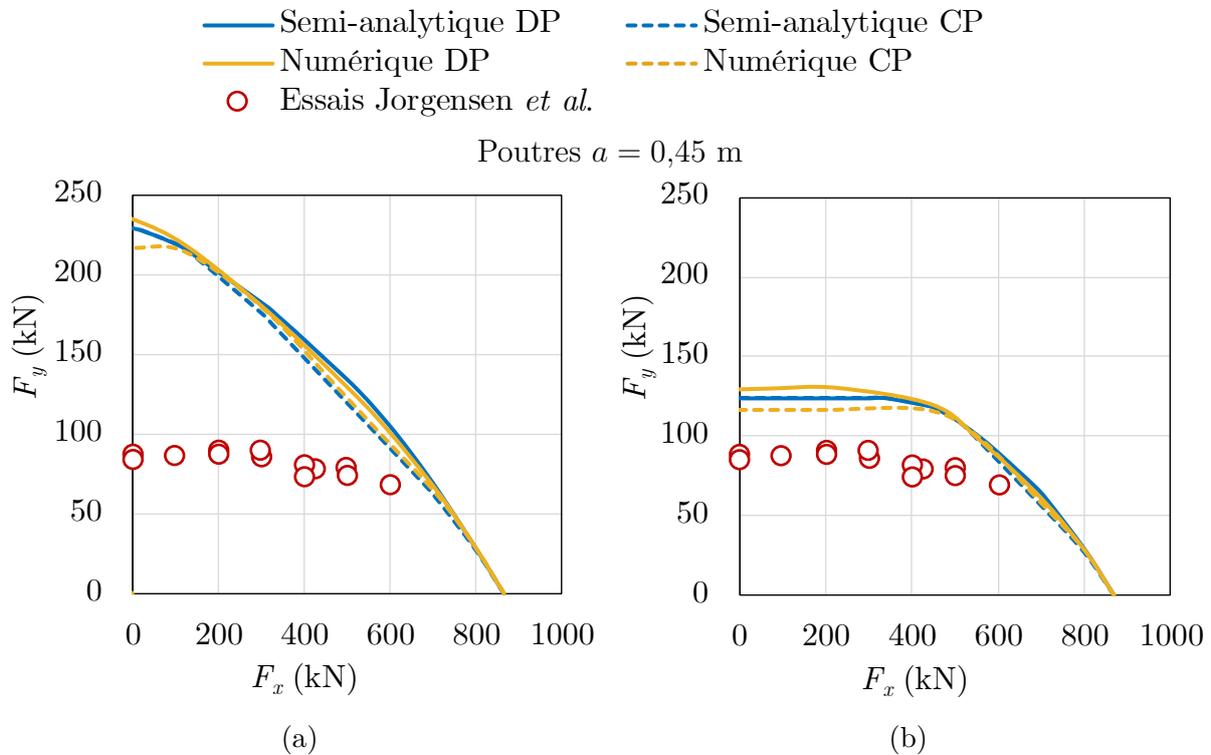
FIGURE 5.14 – Comparaison des résultats semi-analytiques et numériques avec les résultats expérimentaux de [Madsen \*et al.\* \(2011\)](#) (a) sans et (b) avec réduction de la résistance à la compression du béton

On peut voir que toutes les méthodes de calcul prédisent un plateau horizontal, c'est-à-dire que la charge transversale de ruine est indépendante de la charge axiale de compression, et ce pour les deux cas  $\nu = 1$  et  $\nu < 1$ . Ces plateaux présentent d'ailleurs des valeurs très proches. La différence entre la valeur estimée par les calculs semi-analytiques en déformation et en contrainte planes (qui fournissent la valeur la plus faible) et le calcul numérique en déformation plane (qui fournit la valeur la plus élevée) est de seulement 6% dans le cas de  $\nu = 1$  et 13% dans le cas de  $\nu < 1$ . A l'inverse, les résultats expérimentaux semblent montrer tout d'abord une légère augmentation de la charge transversale de ruine sous l'effet de faibles charges axiales de compression (inférieures à 100 kN), puis une tendance à rester constante, comme prédit par les méthodes de calcul. On observe cependant que les calculs sans coefficient de réduction fournissent des valeurs plus proches des résultats expérimentaux. Par exemple, le rapport entre les valeurs prédites par les calculs semi-analytiques (en déformation et contrainte planes) et les essais varie entre 0,9 et 1,4, comparés aux calculs avec  $\nu < 1$  qui ne constituent plus un majorant des résultats expérimentaux puisque le rapport varie entre 0,5 et 0,8.

#### 5.4.4 Essais de Jørgensen *et al.* (2013)

Les essais de Jørgensen *et al.* (2013) ont été réalisés sur 23 poutres en béton armé sans armatures transversales, soumises également à une flexion trois points (à travers l'application d'une charge transversale au milieu des poutres) et à des charges axiales de traction (comprises entre 0 et 50% de la résistance à la compression de la poutre en béton) appliqués aux extrémités. Les poutres avaient une section carrée de côté  $b = h = 0,2$  m. Elles étaient renforcées avec deux lits d'armatures longitudinales de 15 mm de diamètre, avec une limite d'élasticité de  $f_y = 1027$  MPa et une limite à la rupture de  $f_r = 1227$  MPa. L'enrobage était de 28 mm en haut et en bas. La longueur totale des poutres était de 1,6 m et la portée (distance entre les appuis) était soit égale à  $l = 0,9$  m ( $a = 0,45$  m), ou égale à  $l = 1,1$  m ( $a = 0,55$  m). Les valeurs moyennes de la résistance à la compression de ces poutres étaient de  $f_c = 27,3$  et 29,2 MPa pour les cas  $l = 0,9$  et  $l = 1,1$  m respectivement.

Les Figures 5.15a à d présentent les prédictions des approches théoriques proposées pour les essais avec  $a = 0,45$  m (Figures 5.15a et b pour  $\nu = 1$  et  $\nu < 1$  respectivement) et 0,55 m (Figures 5.15c et d pour  $\nu = 1$  et  $\nu < 1$  respectivement).



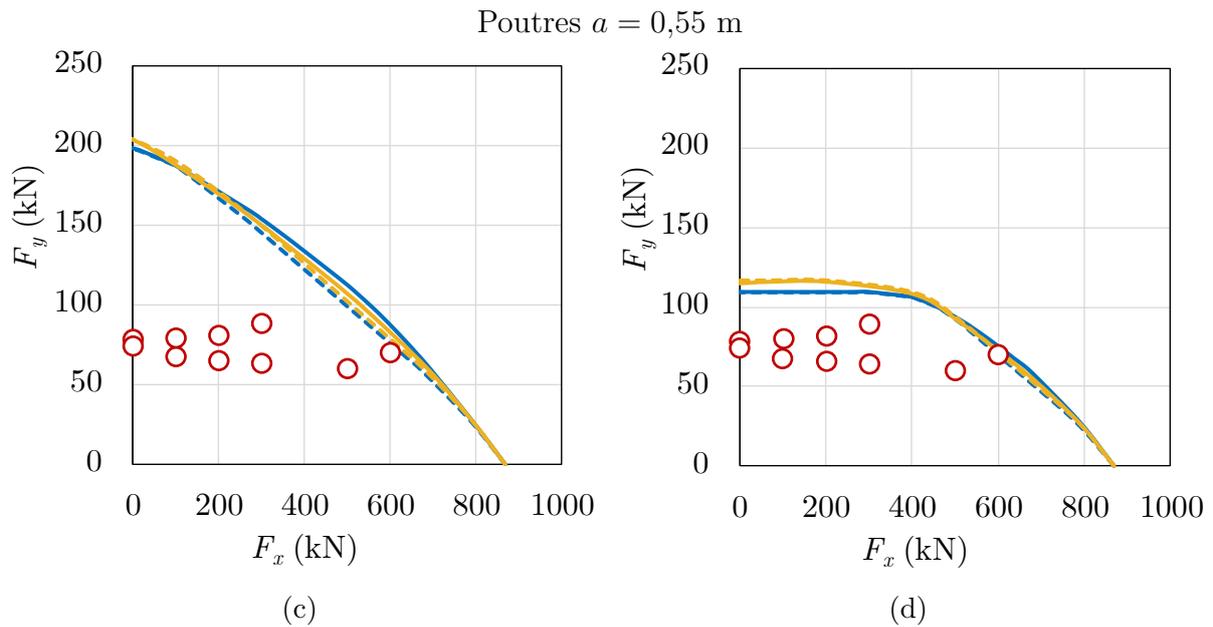


FIGURE 5.15 – Comparaison des résultats semi-analytiques et numériques avec les résultats expérimentaux de *Jørgensen et al.* (2013) sans (figures de gauche) et avec (figures de droites) réduction de la résistance à la compression du béton

On constate que les prédictions des différentes approches théoriques (semi-analytiques et numériques) sont très proches, et ce pour les deux cas de valeurs du coefficient  $\nu$ . On observe également que les calculs réalisés pour  $\nu = 1$  prévoient une diminution de la charge transversale limite lorsque la charge axiale de traction augmente, à l'inverse des résultats expérimentaux. Les prédictions prenant en compte un facteur de réduction inférieur à un correspondent mieux aux résultats expérimentaux. Elles font apparaître un plateau horizontal de la charge transversale pour des valeurs de traction faibles (inférieures à environ 400 kN), suivi d'une diminution de la charge transversale pour des valeurs plus élevées. Les prédictions donnent également des valeurs plus proches des résultats expérimentaux qu'avec les calculs réalisés sous  $\nu = 1$ . Les rapports entre les calculs numériques en contrainte plane par exemple et les essais varient entre 1,1 et 2,7 lorsque  $\nu = 1$ , et entre 1,0 et 1,6 lorsque  $\nu < 1$ .

### 5.4.5 Récapitulatif des comparaisons entre calculs et résultats d'essais

Le Tableau 5.1 ci-après regroupe l'ensemble des résultats expérimentaux des essais réalisés dans le cadre de la thèse, ainsi que des essais disponibles dans la littérature analysés dans ce chapitre. Le tableau comporte les valeurs moyennes des charges axiales  $F_{x,m}$  et des moments négatifs appliqués (tenant compte du poids du système d'application des charges horizontales  $M^- = m^- + m_p$ ), et les valeurs moyennes des charges transversales de ruine  $F_{y,m}$  et leurs écart-types (notés EC). Les rapports entre les prédictions de la charge transversale limite obtenues par les différentes approches théoriques proposées (semi-analytique (SA) et numérique (N), en déformation plane (DP) et en contrainte plane (CP)) et les résultats expérimentaux  $F_{y,cal}/F_{y,m}$  sont également reportés, d'abord sans adopter de coefficient de réduction de la résistance à la compression du béton ( $\nu = 1$ ) puis en considérant un coefficient ( $\nu < 1$ ).

TABLEAU 5.1 – Prédictions des méthodes proposées pour les essais de la thèse et de la bibliographie

Essais	$M^-$ (kN.m)	$F_{x,m}$ (kN)	$F_{y,m}$ (kN)	EC (kN)	$F_{y,cal}/F_{y,m}$							
					$\nu = 1$				$\nu < 1$			
					SA DP	SA CP	N DP	N CP	SA DP	SA CP	N DP	N CP
Thèse NS.I	-9	0	117	17	2,2	2,2	1,6	1,5	1,2	1,2	1,4	1,3
	-9	-250	151	16	1,9	1,9	1,2	1,2	1,0	1,0	1,1	1,0
	-9	-400	226	9	1,2	1,2	0,8	0,8	0,6	0,6	0,7	0,7
Thèse NS.II	-45	0	169	38	1,7	1,7	1,1	1,0	0,9	0,9	1,0	0,9
	-49	-250	217	21	1,4	1,4	0,8	0,8	0,7	0,7	0,8	0,7
	-45	-400	265	52	1,1	1,1	0,7	0,7	0,6	0,6	0,6	0,6
Thèse S.I	-9	0	198	11	1,8	1,6	1,6	1,5	1,6	1,5	1,5	1,4
	-9	-250	254	31	1,5	1,4	1,4	1,3	1,4	1,4	1,3	1,1
	-9	-400	277	29	1,5	1,4	1,3	1,2	1,4	1,3	1,2	1,0
Thèse S.II	-45	0	206	26	1,9	1,7	1,6	1,6	1,7	1,7	1,6	1,5
	-45	-250	340	9	1,3	1,2	1,1	1,0	1,2	1,1	1,0	0,9
	-45	-400	301	18	1,5	1,4	1,2	1,1	1,3	1,3	1,2	1,0
Pham <i>et al.</i> sans cadres	-104	1	131	12	2,0	2,0	1,4	1,3	1,0	1,0	1,1	1,1
	-88	148	101	7	2,6	2,6	1,8	1,7	1,3	1,3	1,5	1,4
	-68	297	100	9	2,6	2,6	1,8	1,7	1,4	1,4	1,5	1,4
	-57	397	101	16	2,5	2,5	1,8	1,7	1,3	1,3	1,4	1,4
	-49	595	120	10	1,9	1,9	1,5	1,5	1,1	1,1	1,2	1,2

5.4. Première validation des méthodes proposées à partir de résultats expérimentaux

Pham <i>et al.</i> $\phi 6, 20$ cm	-104	1	249	23	2,0	1,8	1,5	1,4	1,6	1,6	1,3	1,1
	-88	149	229	32	1,9	1,8	1,6	1,5	1,7	1,7	1,5	1,3
	-69	299	245	10	1,6	1,4	1,4	1,3	1,5	1,3	1,4	1,2
	-57	397	233	20	1,5	1,3	1,3	1,3	1,5	1,3	1,3	1,2
	-50	597	248	15	1,2	1,0	1,0	1,0	1,1	1,1	1,0	1,0
Pham <i>et al.</i> $\phi 6, 15$ cm	-88	149	259	5	1,7	1,5	1,5	1,3	1,6	1,5	1,5	1,2
	-68	297	281	15	1,4	1,2	1,2	1,2	1,3	1,2	1,2	1,1
	-57	397	282	34	1,3	1,0	1,1	1,1	1,1	1,0	1,1	1,0
Pham <i>et al.</i> $\phi 8, 20$ cm	-88	149	284	16	1,7	1,4	1,5	1,2	1,5	1,4	1,4	1,0
		0	76	3	1,3	1,3	1,4	1,4	0,7	0,7	0,8	0,8
Madsen <i>et al.</i>		-41	78	1	1,3	1,3	1,4	1,4	0,7	0,7	0,8	0,7
		-70	71	-	1,4	1,4	1,5	1,5	0,8	0,8	0,9	0,8
		-85	105	-	1,0	1,0	1,0	1,0	0,5	0,5	0,6	0,6
		-93	103	-	1,0	1,0	1,0	1,0	0,5	0,5	0,6	0,6
		-149	100	-	1,0	1,0	1,1	1,1	0,6	0,6	0,6	0,6
		-165	102	-	1,0	1,0	1,1	1,0	0,6	0,6	0,6	0,6
		-185	96	5	1,1	1,1	1,1	1,1	0,6	0,6	0,7	0,6
		-223	98	3	1,0	1,0	1,1	1,1	0,6	0,6	0,7	0,6
		-231	92	-	1,1	1,1	1,2	1,1	0,6	0,6	0,7	0,6
		-240	97	-	1,0	1,0	1,1	1,1	0,6	0,6	0,7	0,6
		-346	103	2	1,0	1,0	1,0	1,0	0,5	0,5	0,6	0,6
		-408	108	-	0,9	0,9	1,0	1,0	0,5	0,5	0,6	0,5
		-464	104	-	1,0	1,0	1,0	1,0	0,5	0,5	0,6	0,6
	Jørgensen <i>et al.</i> $a = 45$ cm		0	86	2	2,7	2,7	2,7	2,5	1,4	1,4	1,5
		97	87	-	2,5	2,5	2,6	2,5	1,4	1,4	1,5	1,3
		200	89	1	2,2	2,2	2,3	2,3	1,4	1,4	1,5	1,3
		300	88	2	2,1	2,0	2,0	2,0	1,4	1,4	1,4	1,3
		401	78	4	2,0	1,9	2,0	2,0	1,6	1,6	1,6	1,5
		427	79	-	1,9	1,8	1,9	1,8	1,5	1,5	1,5	1,5
		500	77	2	1,7	1,5	1,7	1,6	1,4	1,4	1,4	1,4
		602	69	-	1,5	1,3	1,4	1,3	1,3	1,2	1,2	1,3
Jørgensen <i>et al.</i> $a = 55$ cm		0	77	2	2,6	2,6	2,7	2,7	1,4	1,4	1,5	1,5
		100	74	6	2,5	2,5	2,5	2,6	1,5	1,5	1,6	1,6
		200	74	8	2,3	2,3	2,3	2,3	1,5	1,5	1,6	1,6
		301	77	13	2,0	1,9	2,0	2,0	1,4	1,4	1,5	1,5
		500	60	-	1,9	1,6	1,8	1,7	1,6	1,5	1,5	1,5
		600	70	-	1,2	1,1	1,2	1,1	1,1	1,0	1,0	1,0

## 5.5 Conclusions

Dans ce chapitre, les méthodes semi-analytiques et numériques proposées ont tout d'abord été confrontées à des méthodes analytiques disponibles dans la littérature, également basées sur l'approche cinématique de la théorie du *calcul à la rupture* ou de l'*analyse limite*. Les comparaisons ont montré que les domaines de résistance des poutres en béton seul ou en béton renforcé longitudinalement obtenus par les méthodes ici développées sont inclus dans ceux obtenus par les autres méthodes. Ceci résulte soit du critère de résistance du béton adopté (critère de Drucker-Prager sans troncature pour la méthode de [Koechlin \(2007\)](#); [Koechlin et al. \(2008\)](#)), soit du mécanisme de ruine virtuel utilisé (méthodes de [Ganwei et Nielsen \(1988, 1990\)](#) et de [Zhang \(1997\)](#)) qui représente un cas particulier du mécanisme proposé dans le calcul semi-analytique. En ce qui concerne la poutre en béton armé renforcée par des armatures transversales, l'évaluation du domaine de résistance par les méthodes proposées est également meilleure, sauf pour des valeurs de compression importantes où les valeurs estimées sont légèrement supérieures à celles obtenues par le modèle de [Ganwei et Nielsen \(1988, 1990\)](#). Il a été également observé que le plateau horizontal de charge transversale maximale dans le cas de la poutre renforcée longitudinalement présente la même valeur que les méthodes proposées par [Ganwei et Nielsen \(1988, 1990\)](#) et [Zhang \(1997\)](#).

La comparaison entre les méthodes numériques ici développées et les calculs réalisés à l'aide du logiciel OptumG2 (également avec l'approche cinématique) a montré que les estimations des domaines de résistance des trois différentes poutres étudiées sont proches, surtout lorsque l'hypothèse de déformation plane est considérée. En effet, OptumG2 réalise des calculs en déformation plane, ce qui fournit des résultats comparables à ceux obtenus par l'approche numérique proposée sous la même hypothèse. La comparaison entre quelques mécanismes de ruine obtenus par OptumG2 avec ceux obtenus par la méthode numérique en déformation plane a permis de confirmer ces observations. Comme on pouvait s'y attendre, le calcul numérique en contrainte plane fournit dans la plupart des cas des résultats plus faibles que ceux obtenus par OptumG2 (sauf au niveau du plateau horizontal du domaine de la poutre renforcée transversalement et soumise au moment maximal négatif). Quant aux calculs semi-analytiques, il a été observé que les résultats en déformation plane sont plus élevés que les estimations d'OptumG2, mais en général plus faibles en contrainte plane (sauf pour les poutres soumises au moment maximal négatif).

Enfin, la confrontation entre les prédictions des approches proposées et les essais réalisés dans cette thèse sur des poutres renforcées avec des cadres a montré qu'en général les calculs représentent bien une majoration des résultats expérimentaux. Il a été également montré que les méthodes proposées s'approchent mieux de ces résultats lorsque la résistance effective à la compression du béton est considérée par le biais d'un coefficient de réduction. Ceci n'est pas vrai pour les poutres sans cadres, où l'application de ce coefficient de réduction a fourni de moins bonnes évaluations du domaine de résistance que les calculs effectués sans prendre en compte ce coefficient. Les essais de [Madsen \*et al.\* \(2011\)](#), réalisés également sur des poutres sans cadres soumises à des efforts de compression, ont permis de tirer ces mêmes conclusions : les estimations obtenues sans réduction de la résistance du béton sont plus proches des résultats expérimentaux. En revanche, lorsque des charges axiales de traction sont appliquées, comme dans les essais de [Jørgensen \*et al.\* \(2013\)](#), les résultats fournis par les approches proposées en tenant compte de la réduction de la résistance du béton, conduisent à des domaines de résistance qui suivent la tendance observée expérimentalement (plateau horizontal puis faible diminution de la charge transversale pour une traction importante), avec des valeurs proches des essais (contrairement aux calculs sans ce coefficient). Par ailleurs, les essais de [Pham \*et al.\* \(2020a,b\)](#), également réalisés sur des poutres soumises à des charges axiales de traction, en plus de moments supplémentaires négatifs, ont montré que les calculs sont en bon accord avec les résultats expérimentaux, notamment lorsque un coefficient de réduction est pris en compte, et ce pour les deux types de poutres, avec et sans cadres.

\*       \*  
\*



# Chapitre 6

## Conclusions et Perspectives

### 6.1 Conclusions

Le présent travail a eu comme objectif de proposer des méthodes de dimensionnement à l'effort tranchant d'éléments en béton armé en présence d'un effort axial et d'un moment fléchissant, en s'appuyant sur la théorie du *calcul à la rupture*. L'analyse s'est focalisée, tant au plan théorique qu'expérimental, sur une poutre en béton armé (renforcée longitudinalement et transversalement), soumise à en une flexion trois points, en plus d'une charge axiale et d'un moment supplémentaire appliqués à ses extrémités.

En se basant plus spécifiquement sur l'approche cinématique par l'extérieur du *calcul à la rupture*, différentes méthodes de calcul semi-analytiques ont été développées permettant d'approcher par l'extérieur le domaine de résistance de la poutre dans l'espace des paramètres de chargement. Celles-ci ont été mises en œuvre en considérant divers mécanismes de ruine virtuels, mettant en jeu une discontinuité de vitesse selon une ou plusieurs surfaces planes ou courbes. De plus, les calculs ont été effectués selon les deux hypothèses de déformation et de contrainte planes. Trois exemples de poutres avec des ratios de renforcement longitudinal et transversal différents ont été considérés, permettant de comparer les différentes méthodes proposées. Il a été constaté, comme attendu, que les calculs en contrainte plane fournissent des estimations du domaine de résistance plus faibles que celles obtenues en déformation plane. Par ailleurs, les méthodes élaborées pour une discontinuité de vitesse selon des surfaces de formes plus complexes (plusieurs plans

ou surface courbe) permettent en général une amélioration de l'estimation du domaine de résistance par rapport à la méthode utilisant une discontinuité selon un seul plan. Toutefois, elles nécessitent plus de temps de calcul, surtout lorsque des armatures transversales sont employées. Dans ce dernier cas, une procédure d'homogénéisation du milieu "béton + armatures transversales" a permis de réduire le temps de calcul et de fournir des résultats très proches de ceux obtenus par la modélisation discrète des armatures de renforcement transversales.

Afin d'explorer de plus grands ensembles de mécanismes de ruine, l'approche cinématique du *calcul à la rupture* a été implémentée numériquement dans le cadre d'une méthode du type éléments finis consistant à engendrer des champs de vitesse par discrétisation du problème. Pour cela, une démarche de modélisation mixte a été adoptée, où le béton est représenté par un milieu continu 2D, tandis que les armatures longitudinales sont modélisées comme des éléments 1D. Les armatures transversales ont été prises en compte, quant à elles, à travers une procédure d'homogénéisation du béton renforcé transversalement. Comme pour les calculs semi-analytiques, l'approche cinématique a été mise en œuvre sous les deux hypothèses de déformation et de contrainte planes. La comparaison entre les calculs semi-analytiques et numériques a permis de confirmer l'utilité de développer numériquement de telles approches. En effet, les évaluations du domaine de résistance fournies par les approches cinématiques numériques s'avèrent globalement meilleures que celles obtenues par les calculs semi-analytiques.

Ces méthodes semi-analytiques et numériques ont été par la suite comparées à d'autres méthodes analytiques, antérieures au présent travail, également basées sur l'approche par l'extérieur du *calcul à la rupture*. La comparaison entre les résultats obtenus pour les trois exemples de poutres considérés a montré l'avantage des méthodes ici proposées qui fournissent de meilleures estimations du domaine de résistance, sauf dans le cas particulier d'une compression importante appliquée à une poutre renforcée longitudinalement et transversalement. Par ailleurs, la comparaison avec un logiciel commercial de calcul par éléments finis, également basé sur l'approche cinématique de l'*analyse limite*, a montré une bonne adéquation entre les différentes prédictions.

En plus des études numériques et semi-analytiques, ce mémoire a présenté une étude expérimentale portant sur deux campagnes d'essais réalisées dans le cadre de ce travail de thèse. Plusieurs poutres renforcées ou non avec des armatures transversales ont été soumises à différentes combinaisons de chargement transversal, compression axiale et

moment supplémentaire négatif, ces trois paramètres de chargement pouvant être pilotés indépendamment les uns des autres, grâce à un dispositif expérimental original développé par ailleurs. Les résultats des essais ont permis d'identifier en général un effet favorable de la compression et du moment négatif sur la résistance à l'effort tranchant des poutres. Des comparaisons avec les prédictions de l'Eurocode 2 et du Model Code ont montré que ces codes ne sont pas sécuritaires pour la majorité des poutres sans cadres. Dans le cas des poutres avec cadres, les deux codes ont fourni des estimations sécuritaires qui sont en bonne adéquation avec la majorité des résultats expérimentaux.

Enfin, dans le but d'obtenir une première validation des méthodes semi-analytiques et numériques développées dans ce travail, celles-ci ont été confrontées aux résultats expérimentaux de la thèse, ainsi qu'aux résultats d'autres campagnes expérimentales disponibles dans la littérature. De manière générale, les estimations données par les méthodes ici proposées sont, comme attendu, supérieures à la majorité des résultats expérimentaux. L'application d'un coefficient relatif à la réduction de la résistance à la compression du béton due à la présence de fissures, selon la formule proposée dans l'Eurocode 2, a permis de fournir dans la plupart des cas des résultats plus proches de ceux des essais (sauf pour les poutres sans cadres soumises à une compression).

## 6.2 Perspectives

Les approches proposées dans le cadre de ce travail ont permis d'aboutir à des estimations par l'extérieur du domaine de résistance de poutres en béton armé en fonction du chargement transversal, du chargement axial et du moment supplémentaire. Il serait pertinent de mettre en œuvre également une approche statique par l'intérieur afin d'aboutir à une estimation par défaut, et donc à un encadrement rigoureux du domaine de résistance. Cette approche étant plus difficile à mettre en œuvre analytiquement ou semi-analytiquement, elle peut être implémentée numériquement par la méthode des éléments finis. Concernant les structures en béton armé, une telle mise en œuvre numérique a été réalisée par [Averbuch \(1996\)](#) dans le cadre d'une modélisation en contraintes planes, et plus récemment par [Bleyer \(2015\)](#) et [Vincent \(2018\)](#).

Par ailleurs, d'autres mécanismes de ruine virtuels peuvent être mis en œuvre semi-analytiquement présentant par exemple deux surfaces de discontinuité de vitesse inclinées

de part et d'autre du point d'application de la charge transversale, ou bien encore des mécanismes mettant en jeu des zones en déformation. Ces améliorations ou bien ces extensions permettraient de fournir de meilleures estimations du domaine de résistance, mais rendraient probablement les calculs de minimisation beaucoup plus lourds. Les méthodes semi-analytiques proposées peuvent également être généralisées au cas de poutres ayant des sections non rectangulaires (en T ou circulaire...), ou soumises à des configurations de chargement différentes (par exemple une flexion quatre points, chargements uniformément répartis...).

En ce qui concerne, les calculs numériques par l'approche cinématique, on pourrait améliorer les résultats en utilisant des éléments finis plus complexes que les éléments triangulaires considérés, et des fonctions d'interpolation de degré supérieur à celles utilisées. Enfin, le problème considéré étant en toute rigueur un problème tridimensionnel (y compris dans le cas de poutres de section rectangulaire), il sera nécessaire de développer numériquement les approches statique et cinématique dans un tel cadre, comme cela a été réalisé par [Vincent \(2018\)](#).

La comparaison des méthodes proposées avec d'autres essais expérimentaux permettrait également d'avoir davantage d'information sur leur pertinence et leur fiabilité en tant que méthodes de dimensionnement. Il serait d'ailleurs nécessaire d'explorer notamment le cas de poutres soumises à des charges de compression importantes et d'autres valeurs du moment supplémentaire (en l'occurrence positives).

Dans le cadre de ce travail, la comparaison entre les méthodes proposées et les essais a été réalisée en appliquant à la résistance à la compression du béton un coefficient de réduction proposé dans l'Eurocode 2. Il serait intéressant de tester d'autres formules disponibles dans la littérature (voir par exemple [Zhang \(1997\)](#) et [Nielsen et Hoang \(2011\)](#)).

\*       \*  
\*  
\*

---

# Annexe A

## Plateau de la charge transversale

Au niveau du plateau horizontal des domaines de résistance représentés dans la Figure 2.18 (pour des poutres renforcées uniquement longitudinalement), le mécanisme de ruine optimal décrit dans la section 2.4.3 correspond à une discontinuité de vitesse constante et verticale (équation (2.37)) le long du plan de discontinuité passant par le point d'application de la charge transversale et l'appui de gauche (voir Figure 2.19).

La puissance des efforts extérieurs s'écrit dans ce cas :

$$P_{ext} = F_y \dot{\theta}_2 (l - a) \quad (\text{A.1})$$

La contribution des armatures longitudinales à la puissance résistante maximale est nulle puisque la composante de la discontinuité de vitesse selon leur axe est nulle. La puissance résistante maximale est donc apportée uniquement par le béton :

$$P_{rm}^b = \frac{1}{2} f_c b h \left( |\dot{\theta}_2| - \dot{\theta}_2 \cos \alpha \right) \frac{1}{\sin \alpha} l \quad (\text{A.2})$$

avec :

$$\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + h^2}} ; \sin \alpha = \frac{h}{\sqrt{a^2 + h^2}} \quad (\text{A.3})$$

En supposant que  $\dot{\theta}_2 \geq 0$ , la condition nécessaire de stabilité de la structure (2.26) conduit à l'inégalité ci-après dont le second membre représente la valeur maximale de la

charge transversale au niveau du plateau horizontal :

$$F_y \leq \frac{1}{2} f_c b h \left( \sqrt{1 + \left( \frac{a}{h} \right)^2} - \frac{a}{h} \right) \frac{l}{l - a} \quad (\text{A.4})$$

---

## Annexe B

Domaines de résistance pour les  
essais de **Pham *et al.* (2020a,b)**

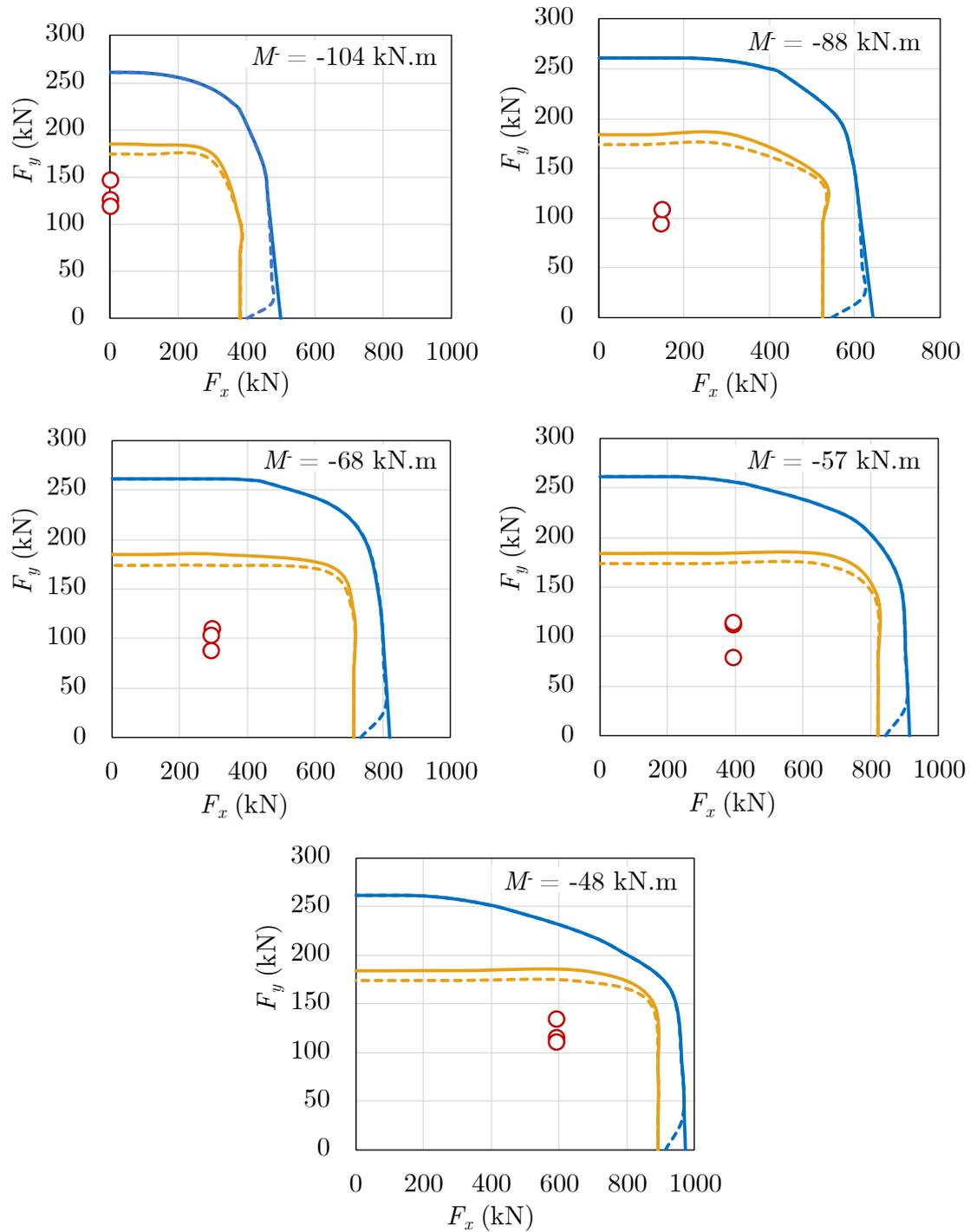


FIGURE B.1 – Domaines de résistance numériques et semi-analytiques pour les poutres sans cadres de *Pham et al. (2020a)*

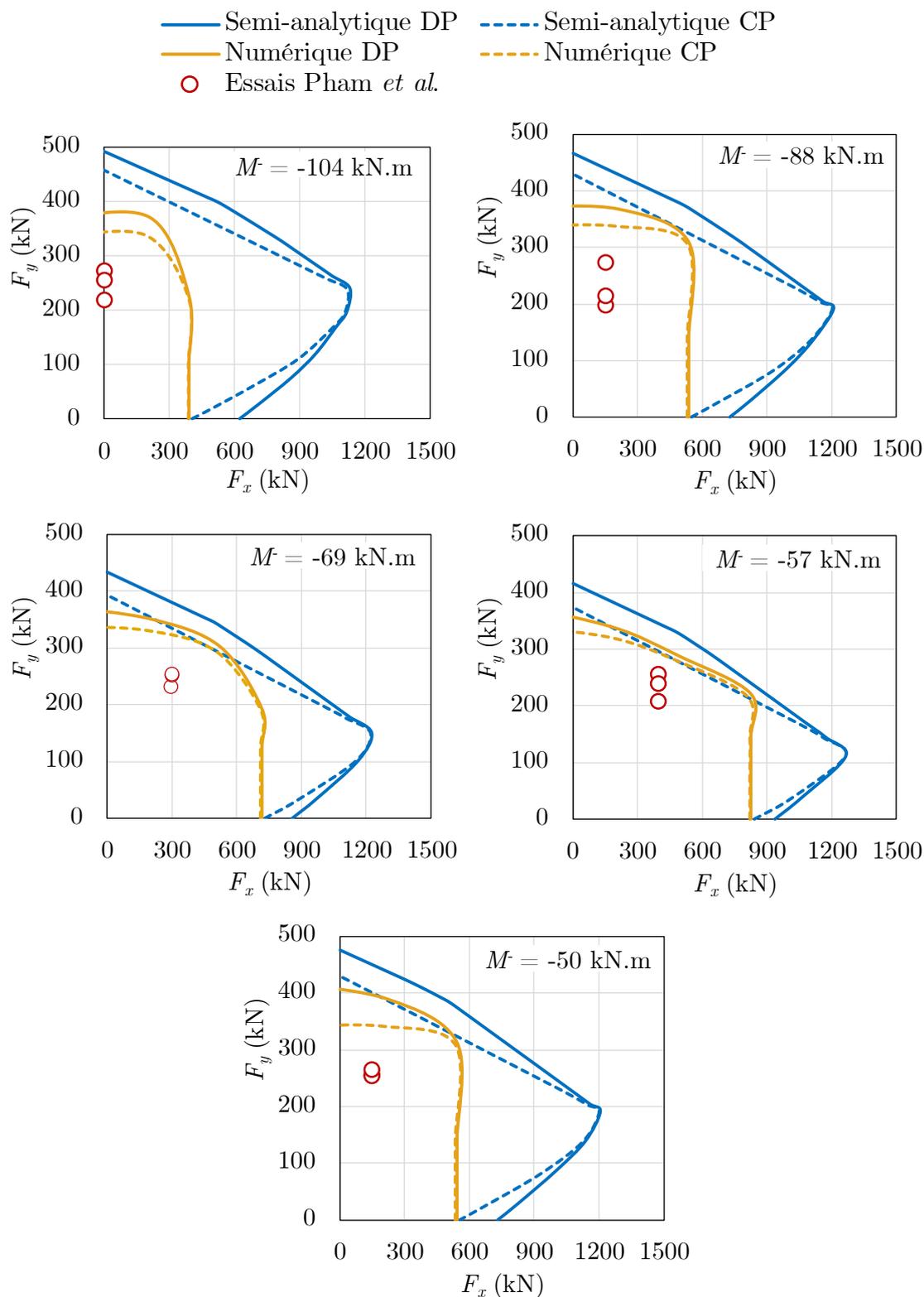


FIGURE B.2 – Domaines de résistance numériques et semi-analytiques pour les poutres avec cadres ( $\phi 6, s = 20$  cm) de Pham *et al.* (2020b)

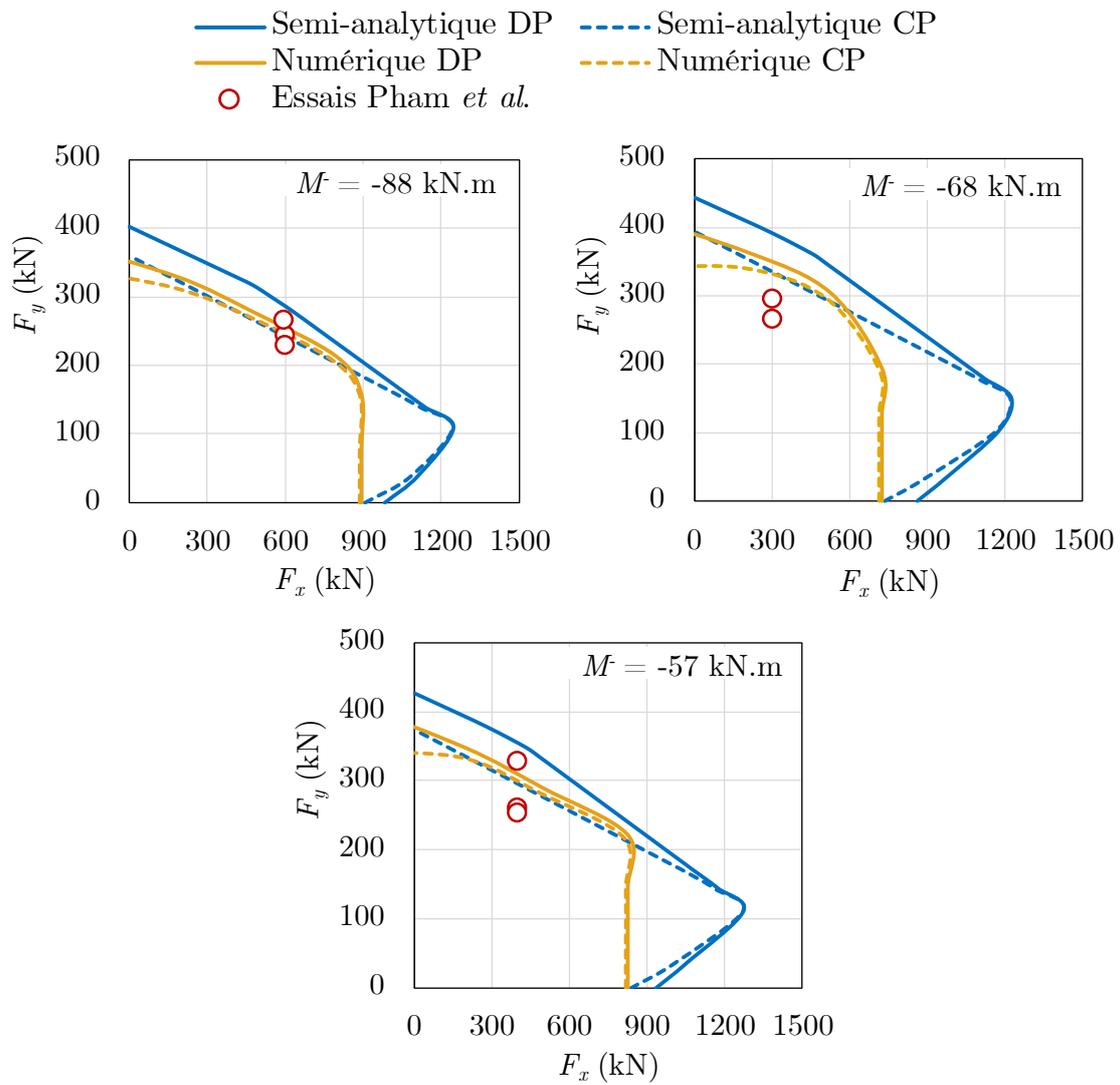


FIGURE B.3 – Domaines de résistance numériques et semi-analytiques pour les poutres avec cadres ( $\phi 6, s = 15 \text{ cm}$ ) de *Pham et al.* (2020b)

- Semi-analytique DP      - - - Semi-analytique CP
- Numérique DP            - - - Numérique CP
- Essais Pham *et al.*

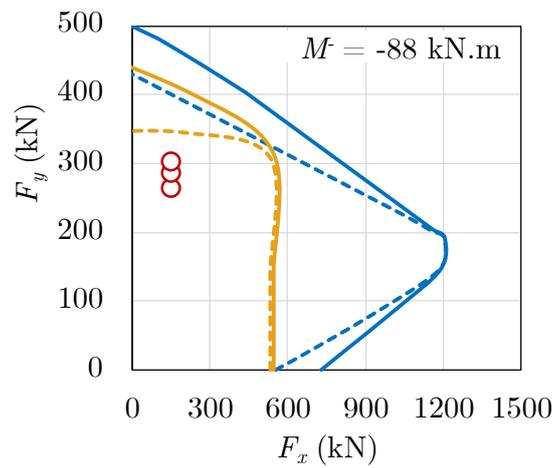


FIGURE B.4 – Domaines de résistance numériques et semi-analytiques pour les poutres avec cadres ( $\phi 8, s = 20 \text{ cm}$ ) de Pham *et al.* (2020b)



# Bibliographie

AASHTO-LRFD : Bridge Design Specifications and Commentary. *American Association of State Highway and Transportation Officials*, 1998. with 199 and 2000 updates.

AASHTO-LRFD : Bridge Design Specifications. *American Association of State Highway and Transportation Officials*, 2014.

ACI 318-08 : Building Code Requirements for Structural Concrete. *American Concrete Institute*, 2008.

ACI 318-14 : Building Code Requirements for Structural Concrete and Commentary. *American Concrete Institute*, 2014.

ACI 318-71 : Building Code Requirements for Reinforced Concrete. *American Concrete Institute*, 1971.

ACI 318-83 : Building Code Requirements for Reinforced Concrete. *American Concrete Institute*, 1983.

ACI 318-95 : Building code requirements for structural concrete. *American Concrete Institute*, 1995.

ACI 318-99 : Building Code Requirements for Reinforced Concrete. *American Concrete Institute*, 1999.

ACI-ASCE COMMITTEE 445 : Recent Approaches to Shear Design of Structural Concrete. *American Concrete Institute*, 1999.

B. G. ANDERSON : Rigid Frame Failures. *ACI Journal*, 53(1):625–636, janvier 1957. ISSN 0002-8061.

- 
- A. ANTHOINE : Mixed Modelling of Reinforced Soils within the Framework of the Yield Design Theory. *Computers and Geotechnics*, 7(1):67–82, 1989. ISSN 0266-352X. Special Issue on Soil Reinforcement.
- D. N. ARNOLD : The Sinking of the Sleipner A Offshore Platform, 2009. URL <https://www-users.cse.umn.edu/~arnold/disasters/sleipner.html>.
- D. AVERBUCH : *Approche du dimensionnement des structures en béton armé par le calcul à la rupture*. Thèse de doctorat, École Nationale des Ponts et Chaussées, juillet 1996. URL <https://pastel.archives-ouvertes.fr/tel-00523025>.
- D. AVERBUCH et P. de BUHAN : Shear Design of Reinforced Concrete Deep Beams : A Numerical Approach. *Journal of Structural Engineering*, 125(3):309–318, mars 1999.
- BAEL : Règles techniques de conception et de calcul des ouvrages et constructions en béton armé suivant la méthode des états limites, 2000.
- H. C. BARA : *Investigation on the Effect of Axial Loads on the Shear Strength of Reinforced Concrete Beams*. Thèse de doctorat, Imperial College, London, mars 1971.
- Z. P. BAZANT : Crack Band Theory for Fracture of Concrete. *ACI Materials and Structures*, pages 155–177, mai 1983. ISSN 1359-5997.
- Z. P. BAZANT et J. K. KIM : Size Effect in Shear Failure of Longitudinally Reinforced Beams. *ACI Journal Proceedings*, 81(5):456–468, janvier 1984. ISSN 0002-8061.
- E. C. BENTZ, M. P. COLLINS et F. J. VECCHIO : Simplified Modified Compression Field Theory for Calculating Shear Strength of Reinforced Concrete Elements. *ACI Structural Journal*, 103(4), janvier 2006.
- S. B. BHIDE et M. P. COLLINS : Influence of Axial Tension on the Shear Capacity of Reinforced Concrete Members. *Structural Journal*, 86(5):570–581, septembre 1989. ISSN 0889-3241.
- J. BLEYER : *Méthodes numériques pour le calcul à la rupture des structures de génie civil*. Thèse de doctorat, Univeristé Paris-Est, juillet 2015.
- Nathan CHANCELLOR, Matthew EATHERTON, David ROKE et Tugce AKBAS : Self-Centering Seismic Lateral Force Resisting Systems : High Performance Structures for the City of Tomorrow. *Buildings*, 4:520–548, octobre 2014.

- W. F. CHEN : Plasticity in Reinforced Concrete. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 31:363, 1982.
- M. P. COLLINS : Towards a Rational Theory for RC Members in Shear. *Journal of the Structural Division*, 104(4):649–666, 1978.
- M. P. COLLINS, E. C. BENTZ, E. SHERWOOD et L. XIE : An Adequate Theory for the Shear Strength of Reinforced Concrete Structures. *Magazine of Concrete Research*, 60:635–650, janvier 2008.
- CORRELATED SOLUTIONS : Vic-3d. URL <https://www.correlatedsolutions.com/vic-3d/>.
- CSA 23.3-04 : Design of Concrete Structures, 2004.
- P. de BUHAN : Critère de rupture macroscopique d'un matériau renforcé par armatures. 1985. C. R. Acad. Se. Paris, t. 301, Série II, n° 9.
- P. DE BUHAN : *Plasticité et calcul à la rupture*. Presses de l'École nationale des Ponts et Chaussées, Paris, 2007. ISBN 978-2-85978-432-4.
- P. de BUHAN, J. BLEYER et G. HASSEN : *Elastic, Plastic and Yield Design of Reinforced Structures*. Elsevier, 2017. ISBN 978-1-78548-205-2.
- E. C. BENTZ : Response-2000. URL <http://www.ecf.utoronto.ca/~bentz/r2k.htm>.
- H. EI-CHABIB, M. NEHDI et A. SAÏD : Predicting the Effect of Stirrups on Shear Strength of Reinforced Normal-Strength Concrete (nsc) and High-Strength Concrete (hsc) Slender Beams using Artificial Intelligence. *Canadian Journal of Civil Engineering*, 33:933–944, 2006.
- R. C. ELSTNER et E. HOGNESTAD : Laboratory Investigation of Rigid Frame Failure. *ACI Journal*, 53(1):637–668, janvier 1957. ISSN 0002-8061.
- EN 1992-1-1 : Eurocode 2 : Calcul des structures en béton. Partie 1-1 : Règles générales et règles pour les bâtiments, 2005.
- EN 1992-1-1 : Eurocode 2 : Calcul des structures en béton. Partie 1-1 : Règles générales et règles pour les bâtiments, 2008.
- J. FELD et K. L. CARPER : *Construction Failure*. Wiley-Interscience, 2ème édition, 1997. ISBN 978-0-471-57477-4.

- 
- FIB : *Model Code 2010*. Lausanne, Switzerland, 2012.
- C. GANWEI et M. P. NIELSEN : *Plastic Analysis of Shear in Beams, Deep Beams and Corbels*. ABK, 1988. ISBN 978-87-7740-003-2.
- C. GANWEI et M. P. NIELSEN : *A Short Note on Plastic Shear Solutions of Reinforced Concrete Columns*. Numéro n°s 258 à 266. Danmarks Tekniske Universitet, 1990. ISBN 87-7740-045-3.
- C. GEUZAINÉ et J. F. REMACLE : Gmsh : a three-dimensional finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 79(11):1309–1331, 2009. ISSN 00295981.
- P. R. GUPTA : *Behavior of Reinforced Concrete Members Subjected to Shear and Compression*. Thèse de doctorat, University of Toronto, 1993.
- P. R. GUPTA et M. P. COLLINS : Evaluation of Shear Design Procedures for Reinforced Concrete Members under Axial Compression. *Structural Journal*, 98(4):537–547, juillet 2001. ISSN 0889-3241.
- M. J. HADDADIN, S. T. HONG et A. H. MATTOCK : Stirrup Effectiveness in Reinforced Concrete Beams with Axial Force. *Journal of the Structural Division*, septembre 1971.
- N. HAWKINS, D. KUCHMA, R. MAST, M. MARSH et K. REINECK : Simplified Shear Design of Structural Concrete Members : Appendixes. 2005. Transportation Research Board of the National Academies.
- R. HILL : *The Mathematical Theory of Plasticity*. Clarendon Press, Oxford, 1950.
- A. HILLERBORG, M. MODÉER et P. PETERSSON : Analysis of Crack Formation and Crack Growth in Concrete by means of Fracture Mechanics and Finite Elements. *Cement and Concrete Research*, 1976.
- B. JAKOBSEN et F. ROSENDAHL : The Sleipner Platform Accident. *Structural Engineering International*, 4(3):190–193, août 1994. ISSN 1016-8664.
- H. JØRGENSEN, L. HOANG, L. FABRIN et J. MAAGAARD : Influence of High Axial Tension on the Shear Strength of non-shear RC Beams. *IABSE Symposium Report*, 99, mai 2013.

- P. KOECHLIN : *Modèle de comportement membrane-flexion et critère de perforation pour l'analyse de structures minces en béton armé sous choc mou*. Thèse de doctorat, Université Paris VI, janvier 2007.
- P. KOECHLIN, S. ANDRIEUX, A. MILLARD et S. POTAPOV : Failure Criterion for Reinforced Concrete Beams and Plates Subjected to Membrane Force, Bending and Shear. *European Journal of Mechanics A-solids*, 27:1161–1183, novembre 2008.
- K. KRABBENHOFT : Optum G2 Theory. Optum Computational Engineering. 2018. URL <https://optumce.com/products/optumg2/>.
- H. KUPFER : Erweiterung der Mörsch schen Fachwerkanalogie mit Hilfe des Prinzips vom Minimum der Formänderungsarbeit (Generalization of Mörsch's Truss Analogy Using the Principle of Minimum Strain Energy). *Comité Euro-International du Béton, Bulletin d'Information*, (40):44–57, 1964.
- F. LEONHARDT et R. WALTHER : *Wardetiger Trager*. Numéro 178. Wilhelm Ernst und Sohn, Berlin, 1966. Deutscher Ausschuss für Stahlbeton.
- M. B. MADSEN, S. HANSEN, L. HOANG et J. MAAGARD : NV Interaction in Reinforced Concrete Elements without Stirrups. *Procedia Engineering*, 14:2511–2518, décembre 2011.
- A. MAKRODIMOPOULOS et C. M. MARTIN : Upper Bound Limit Analysis Using Simplex Strain Elements and Second-Order Cone Programming. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 31(6):835–865, 2007. ISSN 1096-9853.
- P. MARTI : *On Plastic Analysis of Reinforced Concrete*. Numéro 104. Institute of Structural Engineering, ETH, Zurich, 1980.
- P. MARTI : Truss Models in Detailing. *Concrete International*, 7:66–73, 1985.
- MATLAB : Choosing the Algorithm - MATLAB & Simulink, a. URL <https://www.mathworks.com/help/optim/ug/choosing-the-algorithm.html>.
- MATLAB : Find global minimum - MATLAB, b. URL <https://www.mathworks.com/help/gads/globalsearch.html>.

- 
- MATLAB : Find minimum of constrained nonlinear multivariable function - MATLAB fmincon, c. URL [https://www.mathworks.com/help/optim/ug/fmincon.html#busoq0w-2\\_head](https://www.mathworks.com/help/optim/ug/fmincon.html#busoq0w-2_head).
- MATLAB : Find multiple local minima - MATLAB, d. URL <https://www.mathworks.com/help/gads/multistart.html>.
- MATLAB : How GlobalSearch and MultiStart Work - MATLAB & Simulink, e. URL <https://www.mathworks.com/help/gads/how-globalsearch-and-multistart-work.html>.
- MATLAB : *version 8.3.0.532 (R2014a)*. The MathWorks Inc., Natick, Massachusetts, 2014.
- D. MITCHELL et M. P. COLLINS : Diagonal Compression Field theory-A Rational Model For Structural Concrete in Pure Torsion. *Journal Proceedings*, 71(8):396–408, août 1974. ISSN 0002-8061.
- MOSEK : URL <https://www.mosek.com/>.
- E. MÖRSCH : *Der Eisenbetonbau-Seine Theorie und Anwendung (Reinforced Concrete Construction—Theory and Application)*, volume 1. Wittwer, Stuttgart, 5ème édition, 1920.
- E. MÖRSCH : *Der Eisenbetonbau-Seine Theorie und Anwendung*, volume 1. Wittwer, Stuttgart, 5ème édition, 1922.
- P. MULLER : *Plasticity Analysis of Reinforced Concrete Wall and Beams*. Numéro 83. Institute of Structural Engineering, ETH, Zurich, 1978.
- A. MUTTONI : *Die Anwendbarkeit der Plastizitätstheorie in der Bemessung von Stahlbeton*. Institut für Baustatik und Konstruktion ETH Zürich, janvier 1990.
- NF EN 13369 : Règles communes pour les produits préfabriqués en béton, 2018.
- NF EN 1992-1-1/AN : Annexe Nationale de la norme NF EN 1992-1-1 : 2004/Calcul des structures en béton. Partie 1-1 : Règles générales et règles pour les bâtiments, 2005.
- M. P. NIELSEN et N. W. BRAESTRUP : *Plastic Shear Strength of Reinforced Concrete Beams*, volume 46. Technical University of Denmark, 1975.

- M. P. NIELSEN et L. C. HOANG : *Limit Analysis and Concrete Plasticity*. CRC Press, Taylor and Francis Group, 3ème édition, 2011. ISBN 978-1-4398-0396-7.
- G. P. NIKISHKOV : *Introduction to the Finite Element Method*. University of Aizu, Japan, 2004.
- NS 3473 : Concrete Structures. Design Rules. *Norges Byggstandardiseringsrad*, février 1977.
- D. T. PHAM, P. de BUHAN, C. FLORENCE, J.-V. HECK et H. H. NGUYEN : Interaction Diagrams of Reinforced Concrete Sections in Fire : A Yield Design Approach. *Engineering Structures*, 90:38–47, 2015. ISSN 0141-0296.
- D. T. PHAM, B. FOURÉ, N. PINOTEAU, S. ABOURI et R. MÈGE : Influence of Axial Tension on the Shear Strength of RC Beams Without Stirrups. *Structural Concrete*, août 2020a.
- D. T. PHAM, B. FOURÉ, N. PINOTEAU, S. ABOURI et R. MÈGE : Influence of Axial Tension on the Shear Strength of Transversally Reinforced Concrete Beams. *Structural Concrete*, août 2020b.
- D. T. PHAM, N. PINOTEAU, B. FOURÉ, S. ABOURI, M. CHENAF, P. RIVILLON et R. MÈGE : A New Protocol for Testing RC Beams in Combined Shear and Tension Loading Conditions. *Materials and Structures*, 53(1):10, janvier 2020c. ISSN 1871-6873.
- PYTHON : `scipy.optimize.differential_evolution` — SciPy v1.6.3 Reference Guide. URL [https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.optimize.differential\\_evolution.html](https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.optimize.differential_evolution.html).
- W. RITTER : Die Bauweise Hennebique. *Schweizerische Bauzeitung*, 33(7):59–61, 1899.
- V. SADEGHIAN et F. J. VECCHIO : The Modified Compression Field Theory : Then and Now. *Special Publication*, 328, septembre 2018.
- J. SALENÇON : *De l'élasto-plasticité au calcul de la rupture*. Éditions de l'École Polytechnique, Paris, janvier 2002.
- J. SALENÇON : *Calcul à la rupture et analyse limite*. Ponts et Chaussées Press, Paris, 1983. ISBN 978-2-85978-059-3.
- J. SALENÇON : *Yield Design*. John Wiley & Sons, Ltd, mai 2013. ISBN 9781848215405.

- 
- F. SANGIORGIO, J. SILFWERBRAND et G. MANCINI : Scatter in the Shear Capacity of Slender RC Members Without Web Reinforcement : An Overview Study. *Structural Concrete*, 17(1):11–20, 2016. ISSN 1751-7648.
- R. G. SELBY : *Three-Dimensional Constitutive Relations for Concrete*. Thèse de doctorat, University of Toronto, 1993.
- R. G. SELBY, F. J. VECCHIO et M. P. COLLINS : Analysis of Reinforced Concrete Members Subject to Shear and Axial Compression. *Structural Journal*, 93(3):306–315, mai 1996. ISSN 0889-3241.
- R. G. SELBY, F. J. VECCHIO et M. P. COLLINS : The Failure of an Offshore Platform. *Concrete International*, 19(8):28–35, août 1997. ISSN 0162-4075.
- J. SIMÕES, D. FARIA, M. FERNÁNDEZ RUIZ et A. MUTTONI : Strength of Reinforced Concrete Footings Without Transverse Reinforcement According to Limit Analysis. *Engineering Structures*, 112:146–161, avril 2016.
- K. SØRENSEN, Ø. LØSET et T. O. OLSEN : *Investigation of the Influence of Axial Tensile Forces on the Transverse Shear Strength*. Numéro PPI-1-5. Det Norske Veritas, Oslo, 1981.
- A. N. TALBOT : *Tests of Reinforced Concrete Beams : Resistance to Web Stresses. Series of 1907 and 1908*. Bulletin 29. University of California Libraries, Urbana, Ill., 1909.
- UNIVERSITY OF TORONTO : Vector. URL <http://vectoranalysisgroup.com/>.
- J. G. M. VAN MIER : *Fracture Processes in Concrete*. CRC Press, U.S.A, 1996.
- G. VAN ROSSUM et F. L. DRAKE JR : *Python tutorial*. Centrum voor Wiskunde en Informatica Amsterdam, Netherlands, 1995.
- F. J. VECCHIO : Disturbed Stress Field Model for Reinforced Concrete : Formulation. *Journal of Structural Engineering*, 126(9):1070–1077, septembre 2000. ISSN 0733-9445.
- F. J. VECCHIO et M. P. COLLINS : The Modified Compression-Field Theory for Reinforced Concrete Elements Subjected to Shear. *ACI Journal Proceedings*, 83(2):219–231, mars 1986. ISSN 0002-8061.
- F. J. VECCHIO et M. P. COLLINS : Predicting the Response of Reinforced Concrete Beams Subjected to Shear Using the Modified Compression Field Theory. *Structural Journal*, 85(3):258–268, mai 1988. ISSN 0889-3241.

- F. J. VECCHIO et R. G. SELBY : Towards Compression Field Analysis of Reinforced Concrete Solids. *ASCE Journal of Structural Engineering*, 117(6):1740–1758, juin 1991.
- H. VINCENT : *Développement d'un modèle de calcul de la capacité ultime d'éléments de structure (3D) en béton armé, basé sur la théorie du calcul à la rupture*. Thèse de doctorat, Université Paris-Est, novembre 2018.
- H. WAGNER : *Ebene Blechwandträger mit sehr dünnem Stegblech*, volume 20. Motorluftschiffahrt, Berlin, Germany, 1929.
- W. W. WEI, J. X. GONG et Y. CHE : Shear Strength Model for Reinforced Concrete Beams with Web Reinforcement. *Magazine of Concrete Research*, 63(6):423–431, juin 2011. ISSN 0024-9831.
- M. O. WITHEY : Tests on Plain and Reinforced Concrete : Series of 1906. 4(1), 1907.
- M. O. WITHEY : Tests on Plain and Reinforced Concrete : Series of 1907. *Bulletin of the University of Wisconsin, Engineering Series*, 4(2), 1908.
- L. XIE : *The Influence of Axial Load and Prestress on The Shear Strength of Web-shear Critical Reinforced Concrete Elements*. Thèse de doctorat, University of Toronto, septembre 2009.
- L. XIE, Evan C. BENTZ et M. P. COLLINS : Influence of Axial Stress on Shear Response of Reinforced Concrete Elements. *ACI Structural Journal*, 108:745–754, novembre 2011.
- M. YANG : *Analyse de la stabilité au feu des murs en béton armé par l'approche calcul à la rupture*. These de doctorat, Université Paris-Est, décembre 2018.
- J. P. ZHANG : Diagonal Cracking and Shear Strength of Reinforced Concrete Beams. *Magazine of Concrete Research*, 49(178):55–65, mars 1997.
- T. ZHANG, P. VISINTIN et D. OEHLERS : Shear Strength of RC Beams Subjected to Axial Load. *Australian Journal of Civil Engineering*, pages 1–17, septembre 2017.