



HAL
open science

propriétés mécaniques de treillis auxétiques hybrides

Frédéric Albertini

► **To cite this version:**

Frédéric Albertini. propriétés mécaniques de treillis auxétiques hybrides. Mécanique des matériaux [physics.class-ph]. HESAM Université, 2021. Français. NNT : 2021HESAE026 . tel-03677608

HAL Id: tel-03677608

<https://pastel.hal.science/tel-03677608>

Submitted on 24 May 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

École doctorale n° 432 : Sciences des Métiers de l'Ingénieur

Doctorat ParisTech

THÈSE

pour obtenir le grade de docteur délivré par

Arts et Métiers ParisTech

Spécialité doctorale "Mécanique - Matériaux"

présentée et soutenue publiquement le 05 Juillet 2021 par

Frédéric ALBERTINI

Propriétés mécaniques de treillis auxétiques hybrides

Directeur de thèse : Cyrille SOLLOGOUB

Co-encadrant de thèse : Justin DIRRENBARGER

Co-encadrant de thèse : Andrey MOLOTNIKOV

Jury

Carole NADOT-MARTIN,	Professeure des universités, ISAE-ENSMA, Institut Pprime	Présidente
Nicolas AUFFRAY,	Maître de conférences HDR, Université Gustave Eiffel, MSME	Rapporteur
Fabrice BARBE,	Maître de conférences HDR, INSA Rouen, GPM	Rapporteur
Christelle COMBESCURE,	Maîtresse de conférences, Écoles de Saint-Cyr Coëtquidan	Examinatrice
Samuel FOREST,	Directeur de recherche, Mines ParisTech, Centre des Matériaux	Examineur
Cyrille SOLLOGOUB,	Professeur des universités, CNAM, PIMM	Examineur
Justin DIRRENBARGER,	Maître de conférences HDR, CNAM, PIMM	Examineur
Andrey MOLOTNIKOV,	Associate Professor, RMIT University	Examineur

Arts et Métiers ParisTech

Laboratoire de Procédés et Ingénierie en Mécanique et Matériaux (PIMM)

UMR CNRS 8006, 75013 Paris, France

Remerciements

Si ces années de thèse n'ont pas été des plus évidentes à bien des égards, celles-ci se terminent par l'écriture de cette page que l'on pourra considérer comme un happy ending.

Pour cela je me dois de remercier le jury qui a accepté de se constituer pour la soutenance de mes travaux : tout d'abord Carole Nadot-Martin pour avoir accepté de présider, puis les rapporteurs Nicolas Auffray et Fabrice Barbe pour leurs critiques du manuscrit qui m'ont permis de l'amener vers sa version finale. Un grand merci également à Samuel Forest, qui tout au long de nos quelques contacts avant (et après) la thèse a toujours été disponible et de bon conseil.

Évidemment, et même si nos relations ont connu des hauts et des bas, ces travaux n'auraient certainement pas abouti sans la persévérance de mes encadrants. Spécifiquement, je remercie Cyrille pour avoir accepté d'être le directeur (si seulement il avait su dans quoi il s'embarquait!), pour sa bonne humeur et son humour quotidien, Andrey pour sa sympathie, sa présence aux innombrables "skype meeting" et pour l'accueil dans les différents locaux de Melbourne, et enfin Justin pour m'avoir proposé ce sujet et pour m'avoir transmis le virus des matériaux architecturés, dont les symptômes incluent un intérêt spontané pour tout type de pattern géométrique.

D'immenses remerciements se doivent également d'être adressés aux collègues. Bien sûr le bureau du DRG, dont les occupant.e.s permanent.e.s ou temporaires ont eu la charge de me supporter : Antoine-Emmanuel (que j'ai côtoyé de Cachan jusqu'au Chili, pour finir au Pimm!), Pierre Lapouge, Anne, Hajar, Zhige et Rachel ainsi que les stagiaires fort sympathiques Théophile (Peepoodo) et Flavien. Mais également le bureau 9 3/4, lieu privilégié de mes pauses café par l'occupation du bureau d'Eeva, avec Coco et Romain (le collègue puis le colloc!) qui n'ont certes pas favorisé ma productivité (et vice-versa) mais ont été précieux durant ces années. Un merci aussi aux doctorant.e.s et post-doc de la Halle 4, et dans une moindre mesure à celles et ceux de la Halle 3 (même s'il y en a qui sont biens et à peu près fréquentables). Le soutien des anciens a aussi été important : Maxime, Antoine, Clemy et Tiphaine. De grands remerciements à Christophe, Paulo, Anne, Cyril, Bruno, Alain, Frédéric et Véronique pour l'aide et le soutien, sous des formes différentes. A Melbourne, je remercie celles et ceux qui m'ont aidé dans mes travaux, ou plus simplement les personnes avec qui j'ai pu partager des repas et discuter autour d'un café : Ezgi, Kai, Alexander et Erin à Monash ainsi que Georgia et Phillip au RMIT.

Impossible également de ne pas remercier la Fût Gueuze, pour son rôle de soutien moral et pour l'importante cohésion qu'elle permet parmi les doctorant.e.s, post-doc et permanent.e.s. Malgré cela, je ne sais pas si je dois remercier Juliette pour tous les shooters offerts...

Cette thèse n'aurait également pas été la même sans le soutien de tous les jours des colocataires de la Bikok, à savoir Cheddar, Richard, Daphné, Baluche, Chatan, Fr6, Lala, Alice(s), Pepette, Stophe et Nico, avec une mention particulière pour le soutien de Marion. Non moins importants, les ami.e.s de "Cachan", de l'Aspique et de Toulon, et particulièrement Marylou pour son aide et son soutien dans les moments difficiles.

Table des matières

Introduction	1
1 Revue Bibliographique	5
1.1 Matériaux architecturés	6
1.1.1 Généralités	6
1.1.2 Les treillis	8
1.1.3 Méthodes de fabrication	17
1.1.4 Méthodes de caractérisation des propriétés mécaniques	20
1.2 Matériaux architecturés hybrides	22
1.2.1 Exemples classiques de matériaux architecturés hybrides	22
1.2.2 Les treillis hybrides	24
1.3 Conclusion	33
2 Méthodes et Matériaux	35
2.1 Stratégie globale	36
2.2 Procédés de fabrication	37
2.2.1 Fabrication additive métallique	37
2.2.2 Fabrication additive polymère	38
2.2.3 Fabrication des treillis hybrides métal-polymère	39
2.3 Matériaux	40
2.3.1 Ti-6Al-4V	40
2.3.2 Polyuréthane	42
2.3.3 VeroWhite	43
2.3.4 TangoBlack+	44
2.4 Caractérisation mécanique	46
2.4.1 Essais mécaniques	46
2.4.2 Calcul de la dissipation d'énergie	47
2.4.3 Imagerie <i>in-situ</i>	48
2.5 Stratégie numérique	51
2.5.1 Génération des structures	51
2.5.2 Maillage	53
2.6 Calculs des propriétés mécaniques effectives	54
2.6.1 Calculs des propriétés élastiques effectives par homogénéisation	54
2.6.2 Représentation des propriétés élastiques	56

2.6.3	Simulations du comportement élastoplastique	57
2.7	Organisation des chapitres suivants	59
3	Étude numérique du comportement homogénéisé de treillis architecturés	61
3.1	Résumé en français	62
3.2	Abstract	63
3.3	Introduction	63
3.4	Auxetic lattices	64
3.4.1	Parametric description	65
3.5	Computational strategy	67
3.6	Computational homogenization	68
3.7	Results	71
3.7.1	Hexaround cell	71
3.7.2	Inverse hexaround cell	74
3.8	Extension to elastoplasticity	78
3.8.1	Material properties	78
3.8.2	Dissipated energy comparison	78
3.9	Discussion	80
3.10	Conclusion and perspectives	81
3.11	Conclusions en français	83
3.12	Supplementary notes	84
3.12.1	Struts design	84
3.12.2	Mesh convergence analysis	84
4	Étude expérimentale et numérique du comportement de matériaux auxétiques architecturés avec matrice élastomère	87
4.1	Résumé en français	88
4.2	Abstract	90
4.3	Introduction	90
4.3.1	Nomenclature	92
4.4	Experimental procedures	92
4.4.1	Design of auxetic composite lattice structure	92
4.4.2	Materials and methods	94
4.4.3	Experimental testing	94
4.5	Computational homogenization	96
4.5.1	Computational experiments	97
4.6	Results and discussions	97
4.6.1	Numerical estimation of elastic properties	97
4.6.2	Compression tests	99
4.7	Crashworthiness evaluation	104
4.8	Discussions	105
4.9	Conclusions and perspectives	106
4.10	Conclusions en français	108
4.11	Supplementary notes	109

4.11.1 Mesh convergence analysis	109
4.12 Elastic stiffness maps for lattices	109
4.12.1 Complete Experimental curves	109
5 Etude expérimentale et numérique de matériaux auxétiques hybrides	113
5.1 Introduction	114
5.2 Choix du treillis et réalisation des éprouvettes	114
5.3 Évaluation numérique des propriétés élastiques effectives	117
5.3.1 Module d'Young normalisé	117
5.3.2 Coefficient de Poisson	119
5.4 Étude expérimentale	120
5.4.1 Essais de compression	121
5.4.2 Simulation numérique des essais de compression	122
5.4.3 Observations par tomographie à rayons X	126
5.5 Conclusions	131
Conclusions	133
Références	136

Introduction

Le contexte environnemental et énergétique actuel pousse les réglementations et les industriels à viser une diminution des dépenses énergétiques et de l'empreinte carbone. Dans le domaine des transports, la réduction des dépenses énergétiques passe par la réduction des masses embarquées. A ces nouvelles contraintes s'ajoutent bien sûr celles, toujours présentes, du dimensionnement mécanique de ces systèmes. Les matériaux architecturés sont une classe de matériaux capables de répondre aux contraintes sans cesse croissantes des besoins industriels. Ces matériaux permettent d'atteindre des propriétés spécifiques élevées ramenées à leur masse, par le choix réfléchi de la topologie des matériaux constitutifs [1]. Un exemple de matériau architecturé très employé, les composites fibreux, ont participé à réduire la masse de la dernière génération de turboréacteurs développés par Safran. Le moteur LEAP affiche ainsi une masse réduite de 450 kg pour un mono-couloir par rapport à son prédécesseur, le CFM56. L'usage de matériaux composites dans l'industrie aéronautique connaît une hausse considérable depuis les années 70, passant d'environ 5% à plus de 50% pour les avions récents.

L'avènement et le développement de nouvelles méthodes de fabrication dites additives, définies par opposition aux méthodes soustractives traditionnelles telles que l'usinage, ont permis un renouvellement conséquent des libertés géométriques dans la conception de pièces et ensembles mécaniques. Ils permettent en particulier la réalisation de matériaux architecturés complexes.

La possibilité d'optimiser certaines pièces ou ensembles mécaniques est alors rendue possible par ces nouvelles libertés géométriques. Ainsi, des objectifs autrefois inatteignables, tels qu'une réduction de la masse d'un système tout en conservant les propriétés mécaniques requises, sont alors rendus possibles. Un exemple classique d'optimisation géométrique d'une pièce consiste à remplacer des parties monolithiques (pleines) par une version évidée, comme le montre la Figure 1 pour divers exemples.

Dans les exemples illustrés ici, l'optimisation remplit des critères différents : l'optimisation de la plaque (a) par son évidement en forme de nid d'abeille permet un gain de masse tout en conservant une partie des propriétés mécaniques visées, notamment la rigidité. L'exemple (b) d'architecture de la prothèse de hanche ne vise pas uniquement un gain de masse, mais permet également l'émergence de nouvelles propriétés, notamment une meilleure bio-intégration de la prothèse dans cet exemple.

L'architecture interne complexe de la prothèse de hanche est constituée d'un réseau de poutres organisées appelé structure treillis ou *lattice*. Ces structures sont majoritairement produites en faisant appel aux méthodes de fabrication additive. Le développement relativement récent et l'engouement actuel pour ces méthodes de fabrication permettent un accroissement de l'usage des treillis. Ces structures apparaissent aujourd'hui comme des candidats sérieux au remplacement de parties massives sur des pièces mécaniques, grâce notamment à leurs propriétés mécaniques élevées ramenées à leur masse.

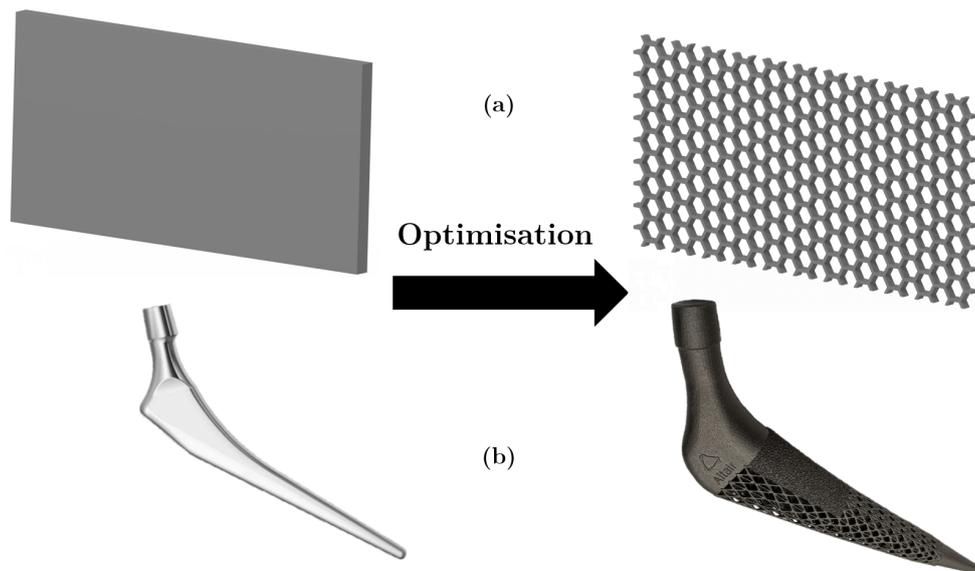


FIGURE 1 – Deux exemples d’optimisation selon des critères spécifiques : (a) plaque; (b) prothèse de hanche [2]

Cependant les treillis, de par leurs géométries et leurs modes de fabrication, présentent des modes de déformations et des défauts qui peuvent mener à une ruine rapide de la structure. Les poutres sollicitées en compression peuvent être sujettes à du flambage, puis se déformer rapidement jusqu’à la rupture. En ajoutant une deuxième phase remplissant le treillis, on peut s’attendre à ce que la déformation de celui-ci soit modifiée : en particulier, le matériau ajouté pourrait soutenir les poutres, et potentiellement retarder le flambage comme l’avancent les travaux de Li *et al.* [3]. A l’interface, la matrice peut remplir les interstices laissés vacants par les imperfections de fabrication, augmentant l’interface de contact et l’adhérence des deux phases [4]. Les propriétés intrinsèques à la phase ajoutée peuvent s’additionner à celles du treillis : hystérésis dans le cas d’une matrice élastomère, rigidité pour un epoxy, etc. Enfin, les propriétés mécaniques des structures hybrides peuvent être déclinées et adaptées à volonté par le choix de la géométrie des treillis et du couple de matériaux sélectionné, permettant de satisfaire des cahiers des charges variés [5].

Ces travaux de thèse s’inscrivent ainsi pleinement dans l’exploration des nouvelles possibilités issues de la fabrication additive. Outre les déjà très étudiées structures treillis, ces travaux sont centrés sur la combinaison de celles-ci avec un matériau aux propriétés différentes. L’espace vacant au sein du treillis est ainsi rempli par un matériau de nature différente, l’ensemble étant appelé structure *hybride*. La Figure 2 illustre le concept de treillis hybride développé dans ces travaux.

Cependant, ces nouveaux matériaux hybrides soulèvent toutefois un certain nombre de questions :
 Comment les concevoir, comment les modéliser? Comment les fabriquer?
 Quelle est l’influence de la géométrie du treillis sur les propriétés mécaniques?
 Quelle est l’influence du choix des matériaux constitutifs sur les propriétés mécaniques?
 L’interface treillis-matrice, et notamment l’adhérence des phases, joue-t-elle un rôle important dans les propriétés mécaniques?

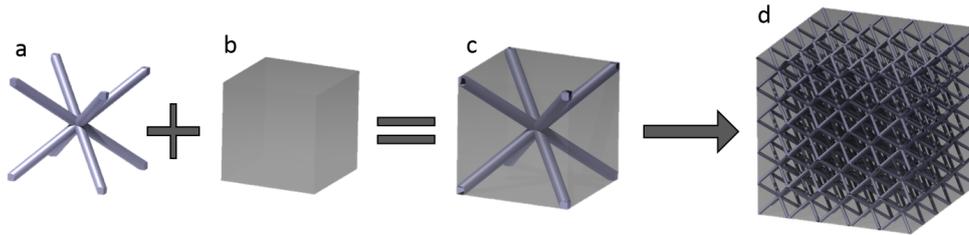


FIGURE 2 – (a) cellule d'un treillis; (b) autre matériau; (c) cellule hybride; (d) treillis hybride

Ce manuscrit se propose d'explorer les mécanismes de renfort des structures treillis par une matrice élastomère, au travers de 5 chapitres.

Le premier chapitre consiste en une étude bibliographique présentant les travaux antérieurs issus de la littérature. Les matériaux architecturés sont d'abord définis en s'appuyant sur les travaux d'Ashby [6], pour montrer comment cette nouvelle classe de matériaux peut permettre d'atteindre des propriétés mécaniques inaccessibles jusqu'alors par les matériaux monolithiques. Parmi ce groupe de matériaux, les structures treillis proposent des propriétés mécaniques spécifiques élevées relativement à leur densité [7]. Une typologie de treillis est décrite [8], basée sur le critère de Maxwell. Les problématiques de dissipation d'énergie sont abordées, ainsi que les critères permettant d'évaluer les capacités de dissipation des treillis. Les structures auxétiques, potentielles candidates aux applications nécessitant de bonnes propriétés en dissipation d'énergie, sont ensuite présentées. Enfin, le concept de matériaux architecturés hybrides [9] est défini, et l'état de l'art sur les treillis hybrides est exposé.

Le deuxième chapitre détaille les méthodes et matériaux employés lors de ces travaux de thèse. Dans une première partie, les méthodes de fabrication additive utilisées sont décrites : la technologie SLM (*Selective Laser Melting*, ou fusion sélective par laser) pour les structures métalliques et la photopolymérisation pour les structures polymériques. Les modèles de machines ainsi que les paramètres d'impression sont donnés. Ensuite, les matériaux utilisés dans cette étude sont présentés : un alliage de titane (TA6V) qui est associé avec un polyurethane élastomère, et deux photopolymères, l'un rigide (VeroWhite), et l'autre souple (TangoBlack+). La composition de chaque matériau est donnée, ainsi que les lois de comportement identifiées à l'aide d'essais expérimentaux.

Enfin, la stratégie numérique est explicitée. Les logiciels utiles à la conception de structures treillis, à la génération des maillages, le code éléments finis ainsi que leurs méthodologies d'emploi sont présentés. Afin d'étudier les propriétés élastiques effectives des treillis et treillis hybrides, une stratégie d'homogénéisation numérique avec conditions aux limites périodiques est utilisée. Celle-ci permet l'identification des tenseurs des modules élastiques des treillis et treillis hybrides étudiés.

Le troisième chapitre introduit deux nouvelles géométries de treillis auxétiques, nommées Hexaround et Inverse Hexaround, dérivées de la cellule classique FCC (treillis inspiré de la structure cristalline du même nom) et des travaux de Dirrenberger *et al.* [10]. Ces structures de symétrie cubique sont constituées de poutres curvilignes en forme d'arc de cercle. L'orientation des arcs vers le centre géométrique de la cellule permet d'orienter la déformation de celles-ci, de manière à obtenir un coefficient de Poisson négatif. Les propriétés élastiques effectives des treillis sont calculées par homogénéisation numérique en utilisant

des conditions aux limites périodiques, pour différents paramètres géométriques, permettant d'étudier leur influence. Le matériau constitutif est un alliage de titane imprimé (TA6V). Le module d'Young normalisé E^* et le coefficient de Poisson ν sont cartographiés, révélant les directions de chargement qui maximisent E et celles qui minimisent ν .

Enfin, l'influence des propriétés élastiques sur la dissipation d'énergie est étudiée numériquement au travers de 3 essais de compression en élasto-plasticité selon 3 différentes directions : celle qui maximise le module d'Young, celle qui minimise le coefficient de Poisson et selon un des axes cubiques. L'énergie dissipée est comparée pour différentes valeurs de densité relative pour les deux cellules.

Le quatrième chapitre présente l'étude comparative de 2 treillis auxétiques et de leur version hybride, par l'utilisation d'outils numériques et d'essais expérimentaux. Le matériau constitutif des treillis est un polymère rigide, le VeroWhite, tandis que la matrice est un élastomère, le TangoBlack+. Les cellules sont décrites géométriquement et leurs propriétés élastiques effectives calculées par homogénéisation numérique pour différentes densités relatives. Une comparaison des propriétés effectives est faite entre les treillis et les treillis hybrides. Des éprouvettes cubiques sont réalisées afin d'être testées mécaniquement en compression. Les courbes contrainte-déformations sont détaillées, et les mécanismes d'endommagement sont analysés. Les propriétés en dissipation d'énergie sont comparées, notamment la dissipation spécifique et l'efficacité d'absorption.

Le cinquième chapitre expose l'analyse du comportement mécanique de treillis auxétiques métalliques et treillis hybrides métal-polymère. Les matériaux constitutifs sont cette fois le TA6V pour le treillis et un polyurethane élastomère pour la matrice, ces deux matériaux présentant un contraste de propriétés élastiques bien plus élevé que pour le chapitre précédent. Deux cellules sont étudiées, adaptées de l'Hexaround pour être fabricables par le procédé SLM. Une comparaison des propriétés élastiques effectives est faite entre les treillis et les treillis hybrides. Les éprouvettes fabriquées sont soumises à des essais de compression incluant des observations *in-situ* par tomographie rayons X, permettant l'analyse et la comparaison des mécanismes d'endommagement. Les sections radiographiées des treillis permettent de comparer l'endommagement avec et sans matrice. Enfin, la présence de défauts de fabrication est abordée.

Enfin, une conclusion est apportée, faisant le bilan de l'ensemble de ces travaux et permettant d'établir des perspectives pour les futurs travaux de recherches sur les treillis hybrides.

Chapitre 1

Revue Bibliographique

Sommaire

1.1 Matériaux architecturés	6
1.1.1 Généralités	6
1.1.2 Les treillis	8
1.1.3 Méthodes de fabrication	17
1.1.4 Méthodes de caractérisation des propriétés mécaniques	20
1.2 Matériaux architecturés hybrides	22
1.2.1 Exemples classiques de matériaux architecturés hybrides	22
1.2.2 Les treillis hybrides	24
1.3 Conclusion	33

1.1 Matériaux architecturés

1.1.1 Généralités

Les matériaux architecturés sont une classe de matériaux émergents qui offrent de nouvelles possibilités en termes de propriétés fonctionnelles, comblant les lacunes et repoussant les limites des cartes de performance des matériaux d'Ashby [11]. Le terme "matériaux architecturés" a été popularisé dans les années 2000, notamment avec les travaux de Deshpande [12], Fleck [13] ou Bouaziz [14]. Celui-ci englobe tout matériau obtenu grâce à un processus de conception visant à répondre à un ensemble spécifique d'exigences, en termes de fonctionnalité, de comportement ou de performance, induisant une morphologie particulière, c'est-à-dire l'organisation géométrique spatiale d'un ou plusieurs matériaux [14; 15]. Les propriétés physiques de ces matériaux architecturés peuvent ainsi être supérieures à celles des matériaux constitutifs pris séparément. Les matériaux biologiques sont des exemples de matériaux architecturés performants [16], pour lesquels les combinaisons de matériaux, de géométries, la taille et la disposition des différentes phases sont adaptées pour produire une vaste gamme de propriétés, représentant une importante source d'inspiration dans la conception de matériaux structurels artificiels.

Ashby *et al.* [6] ont montré l'intérêt de représenter les propriétés matérielles à l'aide de cartes de performance, permettant ainsi de comparer différents matériaux homogènes sur la base d'un critère. Un exemple classique de carte revient à représenter le module d'Young sur l'axe des ordonnées, et la masse volumique sur l'axe des abscisses (cf Figure 1.1). Les différents matériaux sont alors représentés par des "bulles", positionnées en fonction de leurs propriétés physiques respectives.

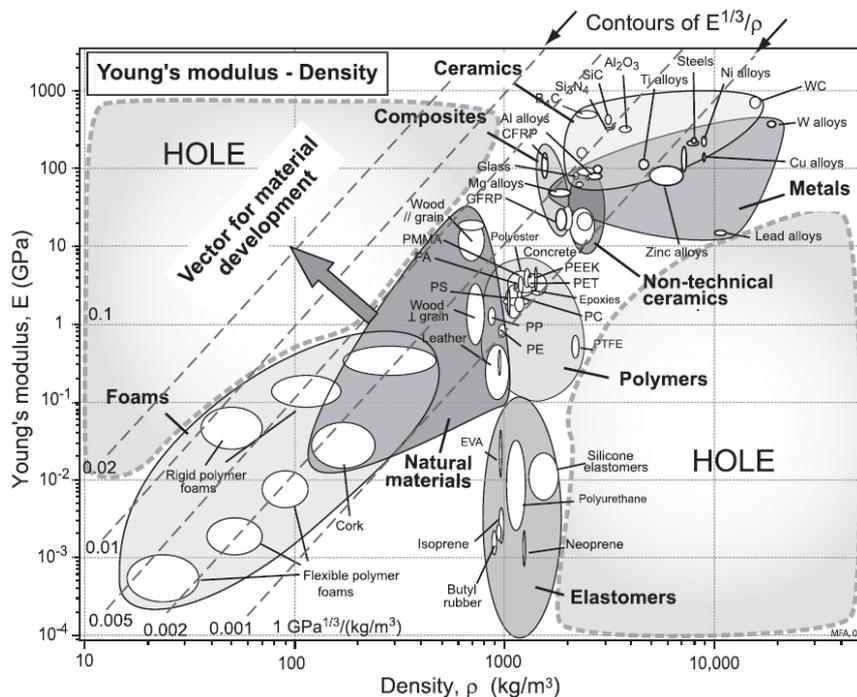


FIGURE 1.1 – Carte de performance d'Ashby : Module d'Young / masse volumique. Carte issue de [11]

On observe sur cette carte de performance la présence de lacunes ou "trous", notamment en haut à gauche, qui représente un objectif pour le développement de futurs matériaux : une importante rigidité

pour une masse volumique faible.

Les matériaux architecturés semblent être de bons candidats pour occuper les trous des cartes de performance : en associant des matériaux dont les positions sur les cartes sont éloignées, le matériau résultant peut occuper une place non-occupée par les matériaux monolithiques. L'organisation géométrique a une importante influence sur les propriétés mécaniques d'un matériau architecturé : un exemple structurel issu de la nature est le squelette de l'éponge de mer *Euplectella aspergillum*, présentée sur la Figure 1.2. Celui-ci, constitué majoritairement de silice amorphe hydratée associée à des protéines, s'organise sur plusieurs échelles [17; 18] dans le but de résister aux multiples sollicitations mécaniques issues de son milieu.

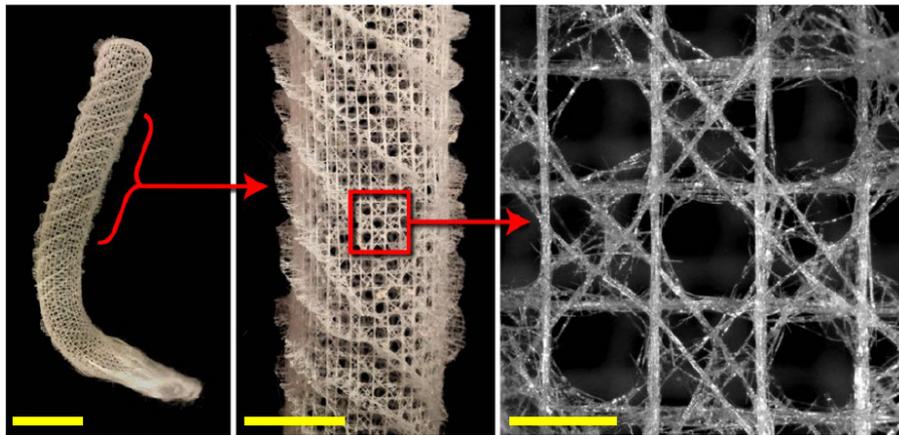


FIGURE 1.2 – Squelette d'éponge marine à différentes échelles, issue de [19]

S'inspirant de la géométrie en échiquier de l'organisation structurelle du squelette, composée d'éléments horizontaux, verticaux mais aussi obliques, Fernandes *et al.* [19] ont montré que ce design particulier permet une résistance accrue au flambage structural lors d'une sollicitation de compression, mais également dans le cas d'une flexion 3 points, comme illustré sur la Figure 1.3.

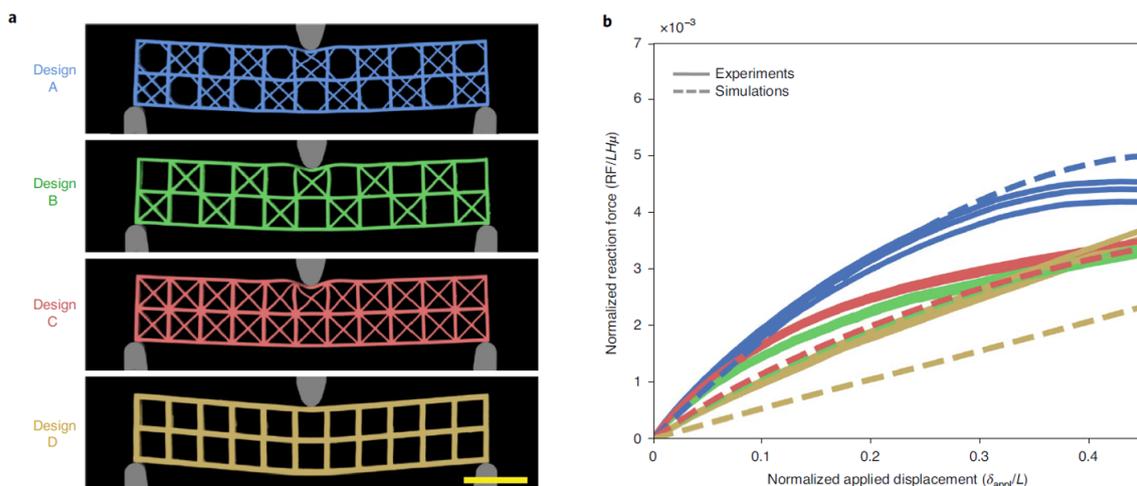


FIGURE 1.3 – Flexion 3 points appliquée sur différents designs (a), résultats expérimentaux (b) (bio-inspiré en bleu), issue de [19]

Cet exemple illustre l'importance prépondérante de la géométrie pour les propriétés mécaniques d'un

matériau architecturé. Or, le développement récent des méthodes de fabrication additive [20] favorise l'essor de ces matériaux, grâce aux nouvelles libertés géométriques induites. Des formes qui n'étaient alors pas envisageables à partir des méthodes de fabrication traditionnelles telles que l'usinage ou le soudage, deviennent réalisables et renouvellent les possibilités offertes aux concepteurs [21].

En effet, les possibilités d'architecture sont quasi-infinies, tant la variété des formes possibles et des matériaux est importante. Ashby [22] dresse un aperçu des possibilités d'architecture et des fonctionnalités attendues, exposées dans la Figure 1.4.

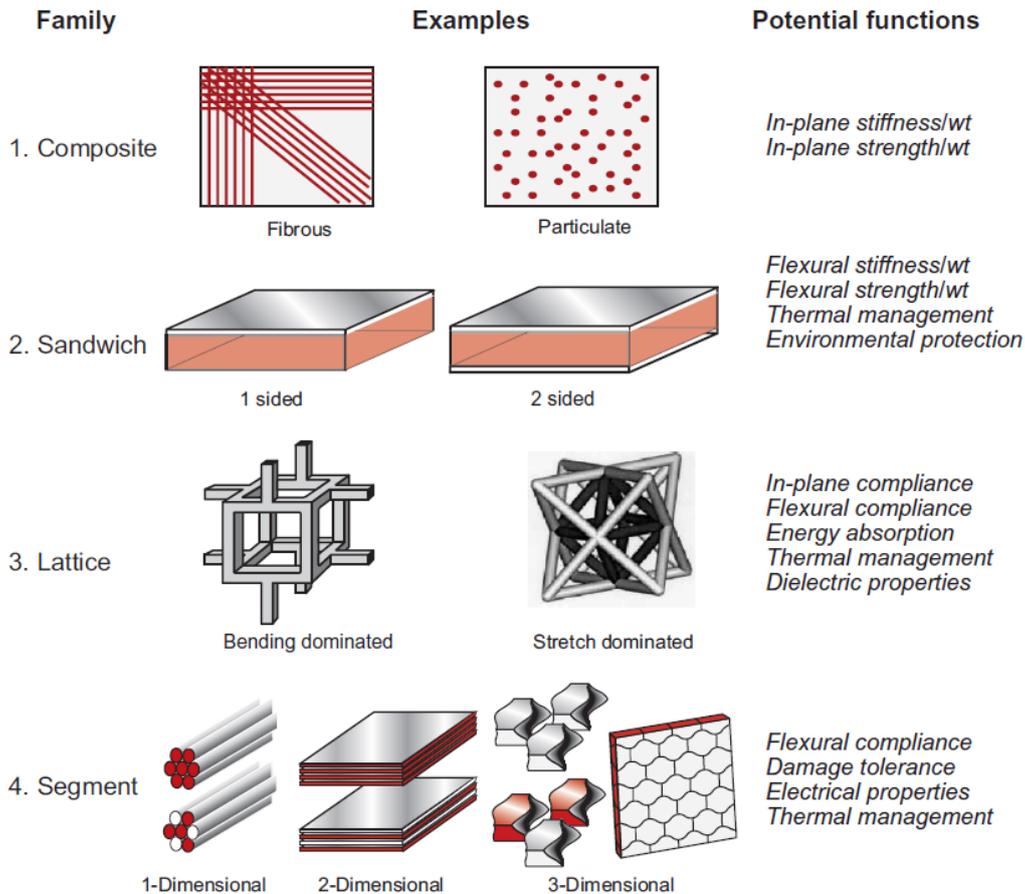


FIGURE 1.4 – Familles de matériaux architecturés et leurs fonctions potentielles, issue de [22]

Certaines de ces possibilités sont déjà largement appliquées à une échelle industrielle, comme les structures sandwich pour l'aéronautique [23], ou les éléments filaires dans les câbles [24]. L'une des familles de matériaux architecturés à fort potentiel dont la production s'est récemment trouvée grandement facilitée par les progrès des méthodes de fabrication sont les structures treillis [25].

1.1.2 Les treillis

Parmi les matériaux architecturés, les structures treillis, aussi appelées *lattices*, sont une combinaison de matériau et de vide. On considère ici les treillis dont l'échelle caractéristique est le *mm* (on parle également de *micro-treillis*). Les treillis sont des structures composées d'un réseau connecté de barres, qui peuvent être organisées périodiquement dans l'espace [26], ou non. Les barres sont connectées entre elles par des

"noeuds", désignant le volume d'intersection entre plusieurs poutres. Historiquement, l'étude des treillis s'inscrit dans la continuité de la recherche sur les matériaux cellulaires, dont la compréhension des propriétés mécaniques remonte aux années 80. On trouve notamment les travaux de Gibson *et al.* portant sur les matériaux cellulaires en 2D [27], puis ceux en 3D [28]. Les procédés de fabrication étaient alors limités, et permettaient la fabrication de matériaux cellulaires stochastiques (mousses) par différentes méthodes [29]. Dans les années 90 sont fabriqués les premiers treillis (en tant que réseaux de poutres 3D), par électro-déposition [30] ou par moulage [31].

Ces structures sont alors généralement utilisées dans les cas où il y a un besoin de structures porteuses rigides utilisant le moins de matériaux possible [7], ou dans le cas où la structure doit être la plus légère possible [32; 33]. Ces structures trouveront plus tard des applications aussi variées que pour des prothèses biomédicales [34] ou dans la dissipation thermique [35]. Afin d'optimiser davantage certaines propriétés mécaniques, on trouve également des structures dérivées des treillis, comme les structures hiérarchiques [36; 37], les treillis creux [38; 39], les structures à gradient de fraction volumique [40] ou les treillis plaques [41].

La dénomination d'une partie des treillis prend son origine dans la cristallographie, par analogie avec le nom des mailles élémentaires cristallines. Le nom de certains treillis élémentaires est donné aux structures qui présentent un noeud en lieu et place d'un atome de la maille correspondante. On peut citer les exemples des mailles cristallines cubique, BCC (Body-centered cubic : cubique centré) ou FCC (Face-centered cubic : cubique face centré), dont les treillis équivalents sont présentés sur la Figure 1.5. D'autres structures tirent leur nom d'arrangements atomiques spécifiques, tel que la structure du diamant [42; 43], ou simplement d'études empiriques, comme l'Octet truss [44]. L'association de différents motifs permet également la création de nouvelles cellules (voir "cellule composée" sur la Figure 1.5), de même que la composition de différentes cellules au sein d'une structure permet des propriétés originales [45]. Ces différents motifs permettent la construction de structures périodiques par la reproduction répétée de ceux-ci dans les différentes directions de l'espace.

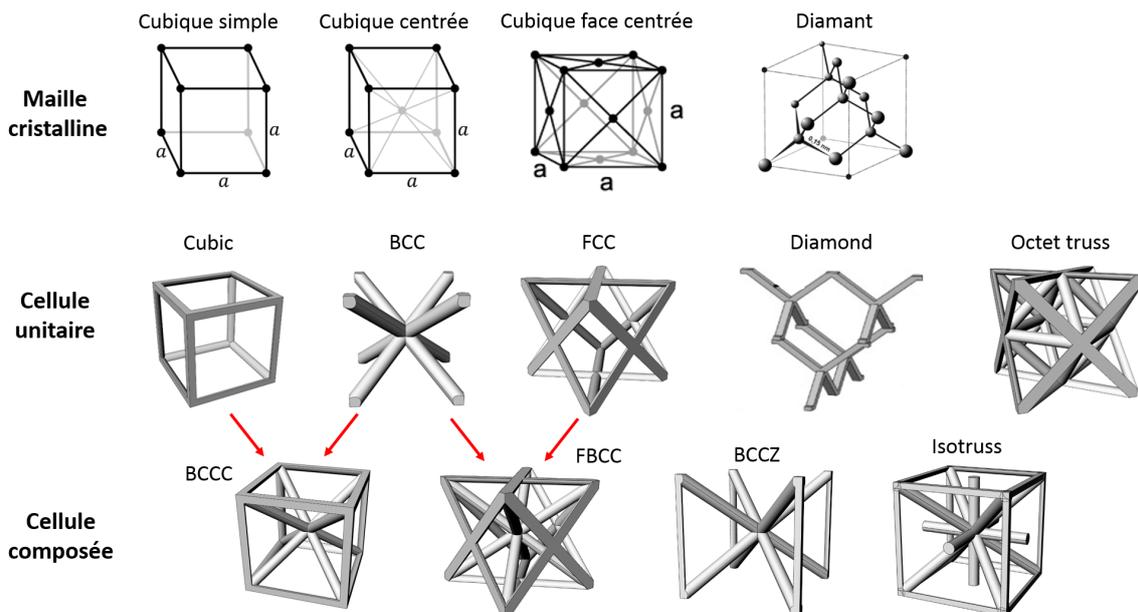


FIGURE 1.5 – Exemples de treillis issus de mailles cristallines, ou non.

Un treillis périodique peut être caractérisé par sa période, appelée cellule unitaire, définie par au moins 3 dimensions (x,y,z sur la Figure 1.6 pour une cellule parallélépipédique) dans un espace tridimensionnel. La cellule élémentaire est alors géométriquement suffisante pour décrire la structure entière, pouvant définir un Volume Élémentaire Représentatif (VER) pour certaines propriétés. En homogénéisation, l'objectif est généralement d'identifier les propriétés effectives d'un matériau. Un VER réfère alors au volume élémentaire qui produit, en moyenne (dans le cas d'un milieu stochastique), les propriétés effectives du milieu étudié [46]. Cependant, une cellule unitaire ne constitue pas nécessairement un VER pour le calcul des propriétés mécaniques des treillis périodiques, comme cela a été montré par Viard *et al.* [47] pour la propagation d'instabilités matérielles dans des treillis 2D, ou pour les conditions de flambage des structures par Vigliotti *et al.* [48]. Pour un milieu stochastique, la taille du VER dépend de plusieurs facteurs, tels que la morphologie étudiée, ses propriétés physiques, le contraste de propriétés de ses constituants dans le cas d'un composite, ainsi que leur répartition volumique, d'après Kanit *et al.* [49].

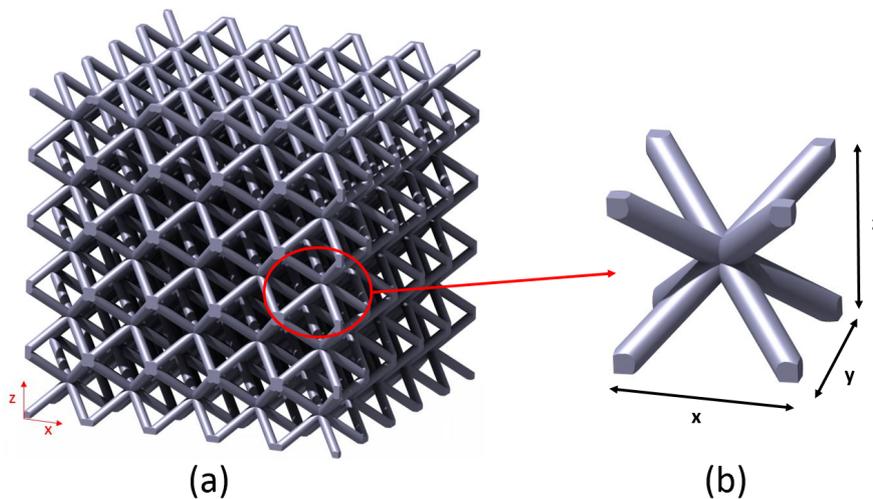


FIGURE 1.6 – Exemple d'une structure treillis BCC : (a) réseau de treillis périodique; (b) cellule unitaire ou VER du réseau BCC

Les propriétés mécaniques des treillis périodiques sont dominées par 3 facteurs : la géométrie de la cellule unitaire, sa fraction volumique et les propriétés du matériau constitutif [50]. De manière générale, les treillis présentent des propriétés anisotropes [51], cependant il est possible d'atteindre l'isotropie en élasticité par des choix géométriques [52; 53].

L'exemple donné en Figure 1.6 de la cellule unitaire BCC est un treillis comportant 8 poutres pour 1 nœud central et 1 nœud par coin. Le nombre de poutres se joignant à un nœud dans une cellule unitaire permet de définir sa connectivité, celle-ci ayant une influence directe sur les propriétés mécaniques du réseau [8]. Latture *et al.* [54] ont également montré que la géométrie des nœuds peut influencer les propriétés mécaniques des treillis, l'ajout d'un arrondi à l'intersection des poutres permet notamment de diminuer les concentrations de contraintes.

La fraction volumique ρ^* (aussi notée V_f) d'une cellule unitaire correspond au volume de la cellule rapporté au volume parallélépipédique circonscrit à celle-ci. La Figure 1.7 illustre les volumes considérés dans le calcul de la fraction volumique de la cellule unitaire d'un treillis BCC. La relation liant ces volumes est donnée par la formule (1.1).

On peut également définir le module normalisé E^* d'une structure comme le rapport du module d'élasti-

cité de celle-ci par le produit du module d'Young du matériau constitutif avec la fraction volumique de la structure, tel que décrit par la formule (1.2). Le calcul de ce module permet l'évaluation de la performance de cette structure en s'affranchissant de celle du matériau constitutif, et permet ainsi de comparer entre elles les différentes cellules unitaires.

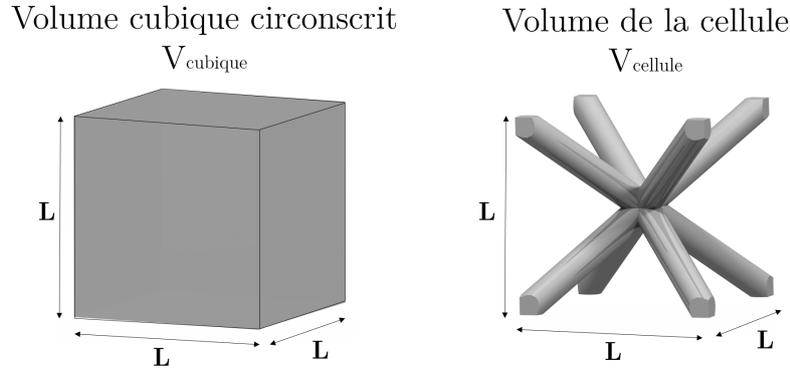


FIGURE 1.7 – Volume circonscrit à la cellule (gauche), cellule unitaire (droite)

$$0 < \rho^* = \frac{V_{\text{cellule}}}{V_{\text{cubique}}} \leq 1 \quad (1.1)$$

$$E^* = \frac{E_{\text{structure}}}{E_{\text{matériau}} \cdot \rho^*} \quad (1.2)$$

L'étude des propriétés mécaniques résultantes de la géométrie des treillis trouve sa source loin dans le passé, lorsque JC Maxwell a posé les bases d'une méthode d'analyse statique des "portiques" (assemblage de poutres rigides) en 1864 [55]. Celle-ci s'appuie notamment sur le principe de conservation de l'énergie, l'énergie élastique stockée dans une poutre est considérée égale à la somme des travaux mécaniques des forces extérieures appliquées sur celle-ci. Ces travaux ont été généralisés au cadre des structures treillis par Calladine *et al.* [56], et ont finalement abouti à la création d'un critère [8] permettant de séparer les treillis en deux groupes distincts, en se basant sur la connectivité de leur réseau. Dans le cas d'un réseau de poutres en 3D, le critère de Maxwell M est décrit par la relation (1.3) :

$$M = b - 3j + 6 = s - m \quad (1.3)$$

Avec b le nombre de poutres dans la cellule unitaire, j le nombre de sommets ou noeuds, s le nombre d'éléments auto-contraints (les poutres présentant des contraintes internes en l'absence d'efforts extérieurs), et m le nombre de mécanismes (système présentant un degré de liberté). Les quantités s et m peuvent être calculés à partir de l'analyse de la matrice d'équilibre de la structure, selon la méthode donnée par Pellegrino *et al.* [57].

Ainsi, les treillis sont dits "dominés par la traction-compression" lorsque $M \geq 0$ ou "dominés par la flexion" lorsque $M < 0$. Un exemple de structures et du critère de Maxwell associé en fonction des poutres qui les composent est donné sur la Figure 1.8. L'importance de la connectivité est ainsi illustrée : une structure composée de 4 poutres jointes par des noeuds rigides va se déformer par flexion lorsque soumise à une force de compression (voir Figure 1.8(a)) et l'ajout d'une poutre à cet ensemble augmente sa connectivité

et fait changer son comportement : les poutres sont alors soumises à de la compression ou de la traction (voir Figure 1.8(b)). Chacun de ces groupes présente des caractéristiques mécaniques propres, et ainsi une courbe contrainte/déformation typique, associée à des mécanismes d'endommagement permettant des applications spécifiques.

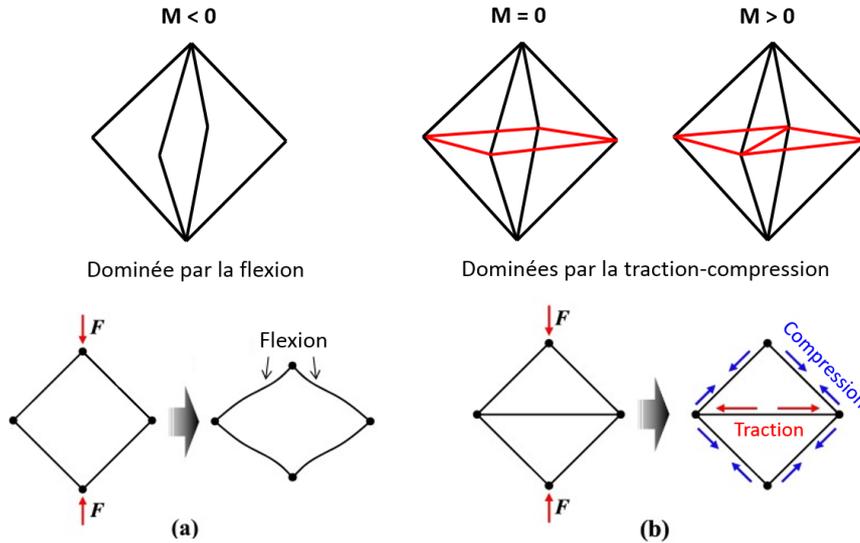


FIGURE 1.8 – Typologie des structures et critère de Maxwell associé, illustration inspirée de [50] et [58]

Treillis dominés par la flexion

Caractérisées par une connectivité faible, les structures dominées par la flexion présentent généralement un long plateau de contrainte.

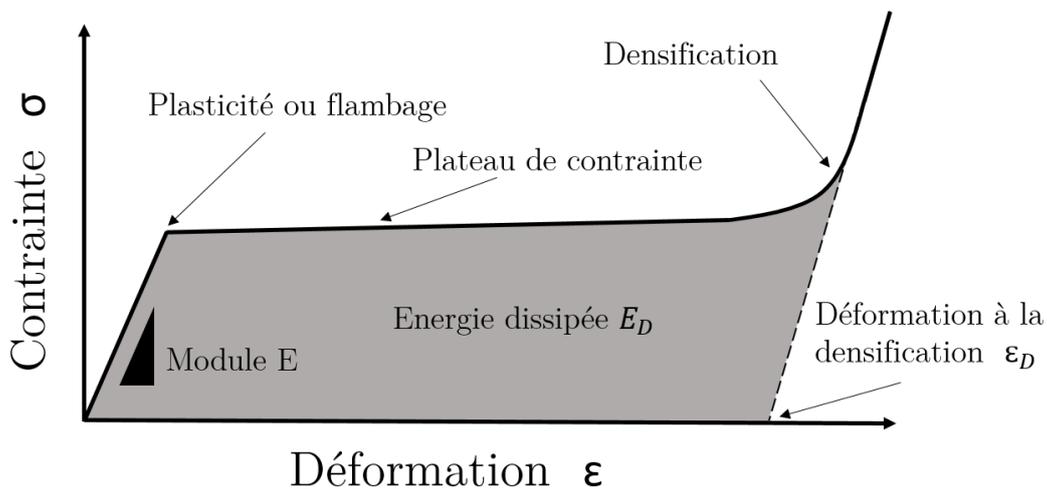


FIGURE 1.9 – Courbe contrainte-déformation typique d'une structure dominée par la flexion, illustration inspirée de [50]

La Figure 1.9 correspond à la courbe contrainte-déformation en compression typique des structures dominées par la flexion. Le comportement est élastique linéaire, de module E jusqu'à sa limite d'élasticité.

A ce point, la structure plastifie ou flambe localement, voire se rompt. La structure continue alors à s'endommager à un niveau de contrainte quasi constant, représenté par un long plateau de contrainte, jusqu'à ce que les poutres constitutives entrent en contact et interagissent les unes avec les autres, entraînant une hausse rapide de la contrainte, c'est le phénomène de densification.

Gibson et Ashby [59] ont établi analytiquement une relation de proportionnalité liant le module relatif E^* (même notation mais définition différente de celle vue précédemment : il se calcule comme le module identifié E divisé par le module d'Young du matériau constitutif) à la fraction volumique ρ^* des structures dominées par la flexion :

$$E^* \propto (\rho^*)^2 \quad (1.4)$$

Treillis dominés par la traction-compression

Ces structures, caractérisées par une connectivité élevée, présentent un module d'Young généralement plus élevé que celles dominées par la flexion.

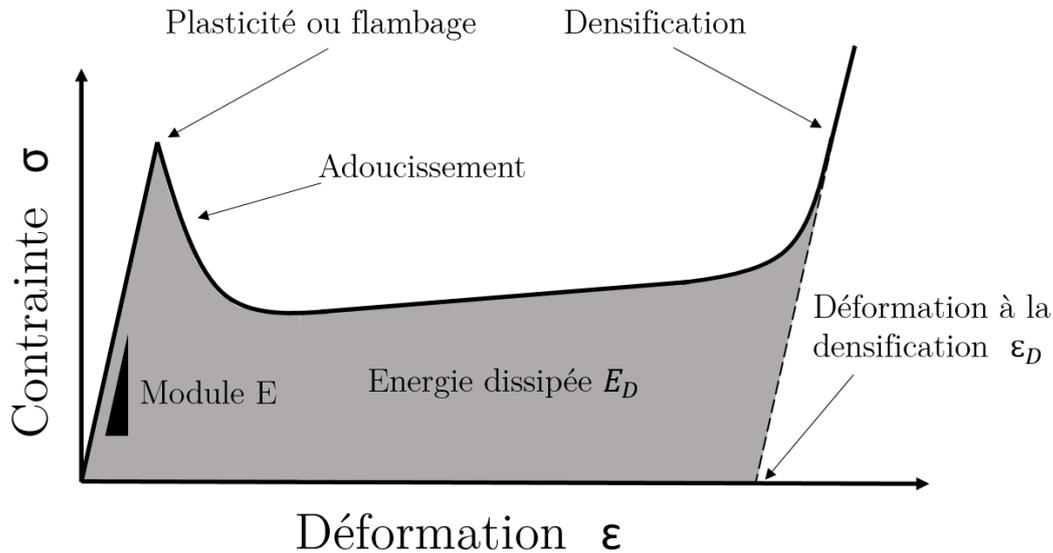


FIGURE 1.10 – Courbe contrainte-déformation typique d'une structure dominée par la traction-compression, illustration inspirée de [50]

La Figure 1.10 illustre la courbe contrainte-déformation en compression typique des structures dominées par la traction-compression. De la même manière, la courbe débute par une élasticité linéaire, de module E , jusqu'à atteindre un pic de contrainte, provoqué par la plasticité ou le flambage local de la structure. S'ensuit un adoucissement, avant une montée progressive de la contrainte jusqu'à la densification. Le module relatif E^* est supérieur à celui des structures dominées par la flexion à fraction volumique équivalente, comme établi analytiquement par [59] :

$$E^* \approx \frac{1}{3}(\rho^*) \quad (1.5)$$

De par leur module supérieur, les structures dominées par la traction-compression sont de bonnes candidates pour les applications structurales qui requièrent une faible masse [60]. Cependant, leurs méca-

nismes de déformation étant principalement la traction et la compression, l'apparition de la plasticité est suivie d'un adoucissement qui rend ces structures moins adaptées à des applications en dissipation d'énergie. En effet, le plateau de contrainte observé pour les structures dominées par la flexion offre une variation de dissipation quasi-constante, bien plus souhaitable lorsque l'on veut contrôler la quantité d'énergie dissipée par une pièce en fonction de sa déformation [61].

Parmi les structures dominées par la flexion candidates aux applications en dissipation d'énergie, on retrouve les structures auxétiques, dont la propriété mécanique contre-intuitive ouvre un large champ d'applications.

Structures auxétiques

Les matériaux auxétiques désignent un groupe parmi les matériaux architecturés qui présentent un domaine de valeurs de coefficient de Poisson négatif [62]. Cette propriété permet à ces matériaux de devenir plus large lorsqu'ils sont étirés, et à l'inverse lorsqu'ils sont compressés, de mincir. Ce phénomène est illustré sur la Figure 1.11, en opposition aux matériaux isotrope conventionnels affichant un coefficient de Poisson positif.

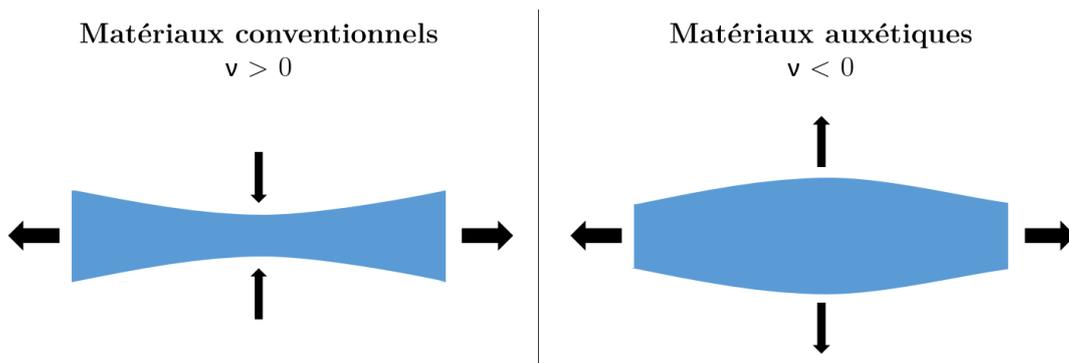


FIGURE 1.11 – Comparaison matériaux conventionnels / auxétiques

Dans le cadre de l'élasticité isotrope tridimensionnelle, des relations peuvent être établies entre le coefficient de Poisson ν et le module d'Young E , avec le module de cisaillement μ et le module de compressibilité K :

$$\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (1.6)$$

$$K = \frac{E}{3(1 - 2\nu)} \quad (1.7)$$

A partir de ces relations, on constate que ν peut varier entre -1 (non cisailable) et 0.5 (incompressible), même si la majorité des matériaux conventionnels présentent un coefficient de Poisson positif.

L'étude des matériaux auxétiques a débuté dans les années 1980. En 1984, Herakovitch *et al.* montrent analytiquement la possibilité d'obtenir des valeurs négatives du coefficient de Poisson pour des composites laminés graphite-epoxy [63]. Almgren décrit alors géométriquement en 85 une structure exhibant un coefficient de Poisson de -1 [64] qui sera par la suite qualifiée de nid d'abeille inversé ou motif "ré-entrant", présentée sur la Figure 1.12 (à gauche). Celle-ci se déforme en se repliant sur elle-même lorsqu'elle est compressée,

ou en se dépliant lorsqu'étirée. Lakes [65] présente en 87 une mousse auxétique obtenue en comprimant triaxialement une mousse polymérique classique alors que celle-ci est chauffée à une température supérieure à celle de "ramollissement" du matériau. Howell *et al.* [66] montrera en 94 qu'une mousse auxétique en polyuréthane possède des propriétés d'absorption acoustique supérieure à des mousses conventionnelles, pour des fréquences comprises entre 100 et 1600 Hz. Prall et Lakes présenteront par la suite en 97 un motif chiral [67] dont le comportement auxétique repose sur un mécanisme d'enroulement. Les mécanismes de déformation ré-entrant et d'enroulement sont décrits sur la Figure 1.12.

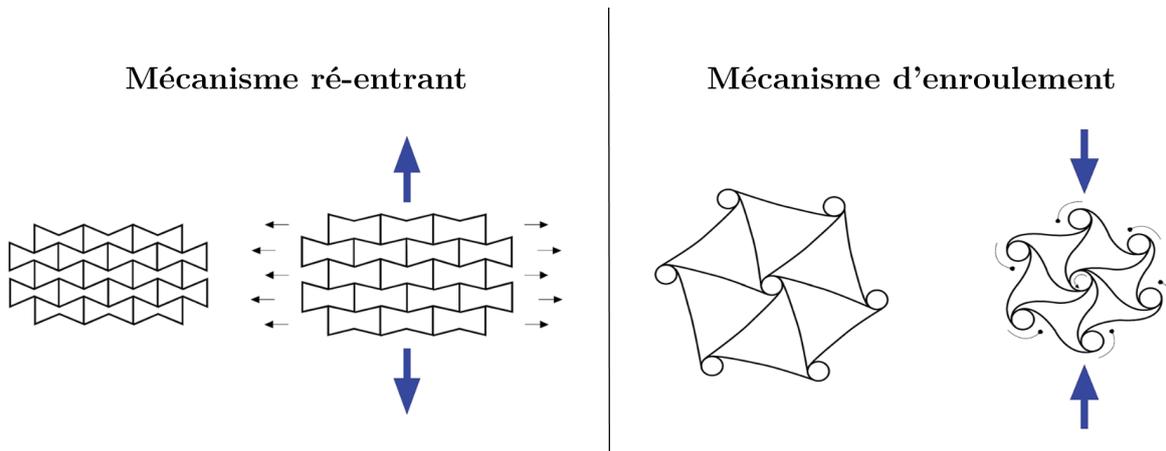


FIGURE 1.12 – Mécanismes de déformations auxétiques, illustrations inspirées de [68]

Les structures auxétiques sont majoritairement dominées par la flexion [69] afin de permettre ces mécanismes de déformations ré-entrant [70] ou d'enroulement [67]. Ainsi le formalisme d'étude des structures treillis est particulièrement utile pour la conception de structures auxétiques. Un choix pertinent de topologie structurelle permet d'atteindre ces propriétés mécaniques spécifiques [11; 59; 71]. En effet, d'autres mécanismes de déformation permettant l'auxétisme peuvent être exploités pour des structures 3D, tels que le flambage [72], ou tirant profit d'autres instabilités structurelles [73–78]. Un exemple de comportement auxétique atteint à l'aide d'instabilités élastiques est donné dans la Figure 1.13, pour lequel une plaque en silicone élastomère perforée de perçages circulaires est sollicitée en compression.

Parmi les applications potentielles des structures auxétiques, on trouve l'amortissement vibratoire [79] ou acoustique [80], montré expérimentalement dans plusieurs travaux [66; 81–83], ou leur emploi en tant que guide d'ondes [84–86]. La résistance à l'indentation d'un matériau est également influencée par son coefficient de Poisson. En élasticité isotrope, la force de résistance élastique à l'indentation peut s'exprimer mathématiquement en fonction du module d'Young E et du coefficient de Poisson ν de la façon suivante [87] :

$$F \propto \left[\frac{E}{(1 - \nu^2)} \right]^\lambda \quad (1.8)$$

Avec λ un coefficient dépendant des conditions d'indentation (pression uniforme, contact de Hertz, etc). Ainsi, un matériau dont le coefficient de Poisson tendrait vers -1 bénéficierait d'une résistance importante à l'indentation, comme observé dans [10; 88]. Pour ces matériaux, la matière "converge" vers la zone d'indentation tel qu'illustré sur la Figure 1.14 à l'inverse des matériaux conventionnels, pour lesquels la matière "s'écarte", diminuant la densité locale et ainsi la résistance à l'indentation. Il est cependant à noter que la plupart des structures auxétiques sont anisotropes, et ne suivent donc pas nécessairement la

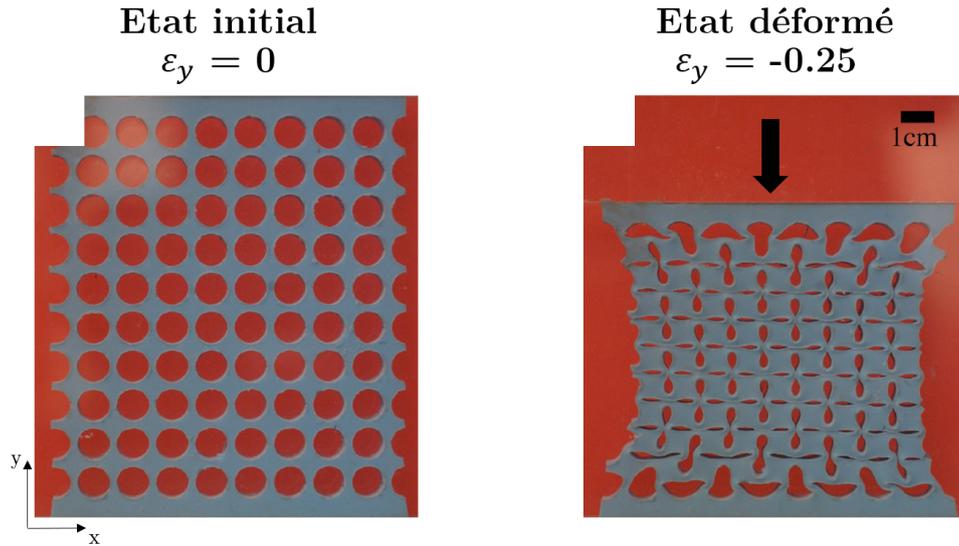


FIGURE 1.13 – Plaque perforée sollicitée en compression, illustrations issues de [73]

relation (1.8).

Des travaux tendent également à affirmer que les matériaux à coefficients de Poisson négatifs présenteraient de bonnes capacités de dissipation d'énergie [89; 90]. Scarpa *et al.* [91] montrent au travers d'essais de compression en dynamique qu'une mousse auxétique de polyuréthane présente une résilience accrue vis-à-vis d'une mousse conventionnelle, permettant d'envisager son usage pour de l'amortissement, Liu [92] et Novak [93] confirmeront plus tard ces résultats par d'autres essais dynamiques sur des structures auxétiques.

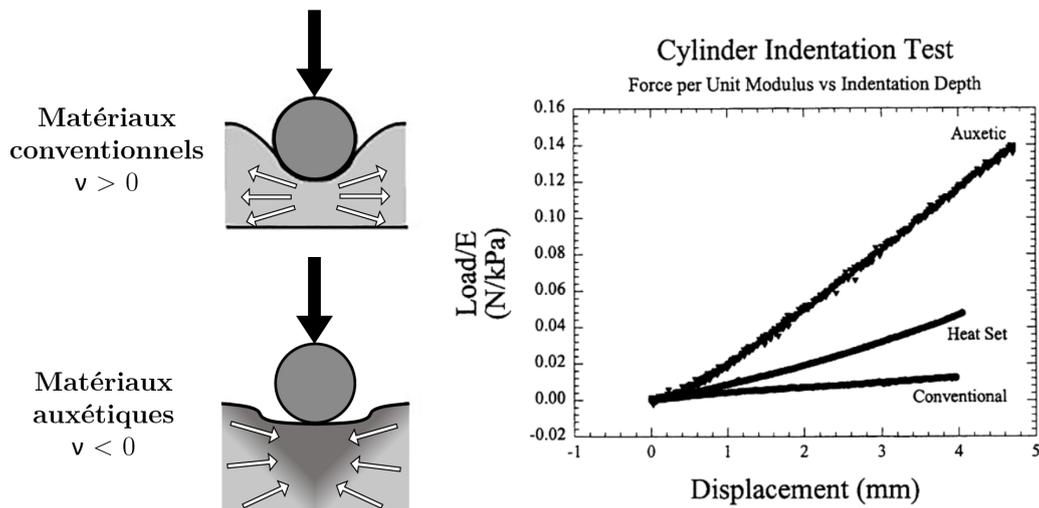


FIGURE 1.14 – Comparaison mécanismes d'indentation, schémas et courbes issues de [88]

Les matériaux auxétiques ont dès lors fait l'objet d'une attention particulière [94–106] et demeurent très étudiés en raison de leurs utilités potentielles éclectiques, telles que pour des panneaux sandwichs à double courbure [107], pour des dispositifs de fretage [108], des ailes à géométries variables [109], des stents [110] ou des films souples bio-inspirés [111].

1.1.3 Méthodes de fabrication

Les structures treillis, de par leur géométries complexes, peuvent être difficiles à fabriquer. Il existe aujourd'hui de multiples méthodes de fabrication pour réaliser ces structures, parmi lesquelles on peut citer :

- La coulée de précision : ce procédé de moulage permet l'obtention d'une pièce métallique à partir d'un modèle généralement en cire ou en polymère. Le modèle permet la création d'un moule, puis est éliminé par chauffage pendant l'opération de coulée du métal liquide. Bien que peu coûteux pour la production en petites séries, ce procédé se révèle inadapté à la production en grande série. Il permet la réalisation de treillis avec une très bonne précision [112]. La Figure 1.15 montre les étapes de création du moule, ainsi qu'un exemple de structure produite par ce procédé.

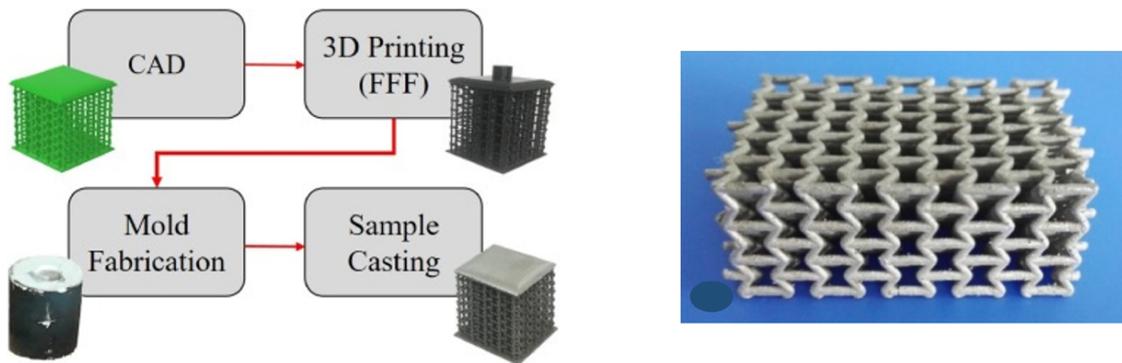


FIGURE 1.15 – Etapes de fabrication d'un treillis par moulage (gauche), exemple de treillis obtenu par ce procédé (droite), illustrations issues de [112; 113]

- Le tissage de fil : ce procédé utilise du fil métallique mis en forme de manière à créer des structures. Les géométries de treillis ainsi produites ne sont que des reproductions imparfaites des modèles théoriques. De plus, de par l'importante déformation requise pour la mise en forme des fils ainsi que des opérations de brasage nécessaires à la création des noeuds, il résulte que les structures produites proposent des propriétés mécaniques dégradées par rapport aux treillis "idéaux" [114]. Le procédé de fabrication d'un type de treillis ainsi que différentes structures et leur cellule unitaire sont présentés sur la Figure 1.16.
- La fabrication basée sur les procédés traditionnels : à partir de plaques qui sont perforées, pliées, assemblées puis soudées, il est possible de produire des treillis métalliques [116; 117]. La section de ces structures est par conséquent nécessairement un quadrilatère. Le procédé de fabrication et d'assemblage est explicité sur la Figure 1.17, ainsi que le treillis résultant. On constate que les noeuds issus de l'assemblage ont une géométrie spécifique, due à leur moyen d'obtention.
- La fabrication additive : c'est la méthode qui permet la plus grande diversité tant dans le choix des géométries, que des matériaux constitutifs. Des treillis en polymère peuvent par exemple être obtenus par dépôt de filaments fondus [119], par photopolymérisation (polymérisation provoquée par un rayonnement UV) [120], tandis que des treillis métalliques peuvent être obtenus par fusion de poudre [121], par dépôt direct de métal [122] et par d'autres méthodes. Ces différentes méthodes peuvent engendrer des microstructures cristallines très différentes. De plus, certains de ces procédés présentent davantage de limitations géométriques.

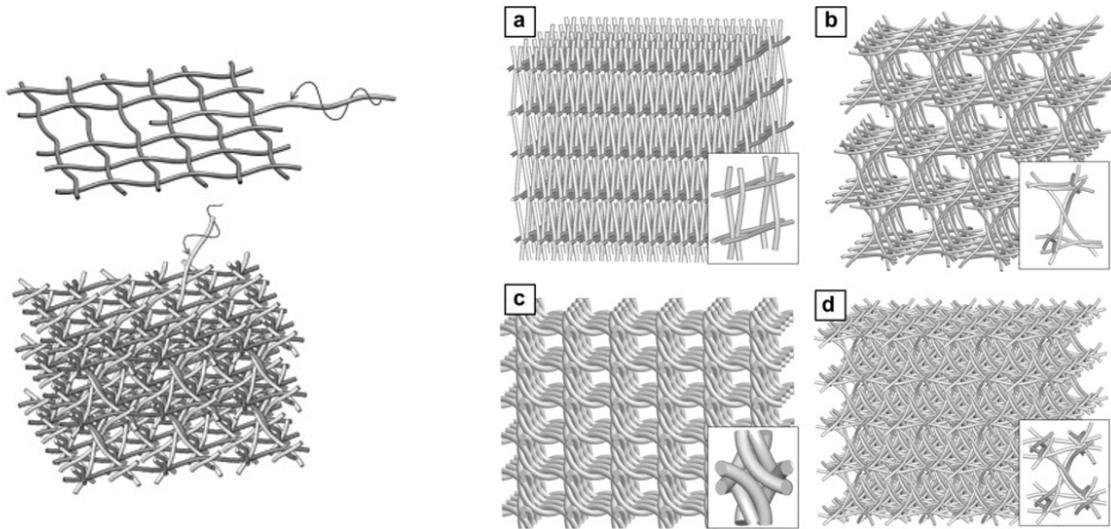


FIGURE 1.16 – Procédé d'assemblage des fils (gauche), différents treillis et leur cellule unitaire (droite), illustrations issues de [114; 115]

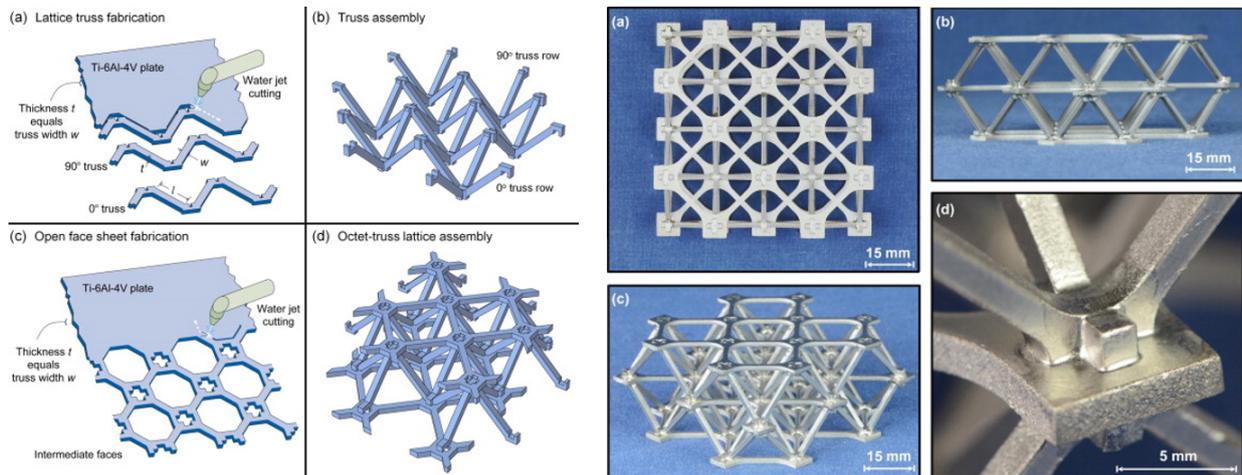


FIGURE 1.17 – Mode de fabrication de treillis (gauche), treillis fabriqué (droite), illustrations issues de [118]

Fabrication additive métallique

Les méthodes d'impression 3D par fusion de lit de poudre sont les plus couramment utilisées pour la réalisation de pièces métalliques [123], même s'il existe d'autres méthodes telles que le dépôt direct de métal (Direct Metal Deposition) [124] ou par projection de métal à froid (Cold Spraying) [125]. On peut citer parmi celles-ci la technologie SLM (Selective Laser Melting) ou EBM (Electron Beam Melting), toutes deux présentant des spécificités propres.

Le procédé SLM est utilisé pour créer des objets en 3 dimensions, couche par couche, à partir de poudres métalliques qui sont fondues localement grâce à la densité de puissance d'un faisceau laser. Le procédé se faisant en atmosphère neutre (argon), les problématiques d'oxydation sont évitées. La Figure 1.18(a) illustre le fonctionnement d'une machine d'impression 3D métallique de type SLM.

Parmi les paramètres cruciaux du procédé, on retrouve la puissance du laser, le diamètre du faisceau, la hauteur de couche, la vitesse de balayage et l'espacement entre 2 passes successives. Ces différents para-

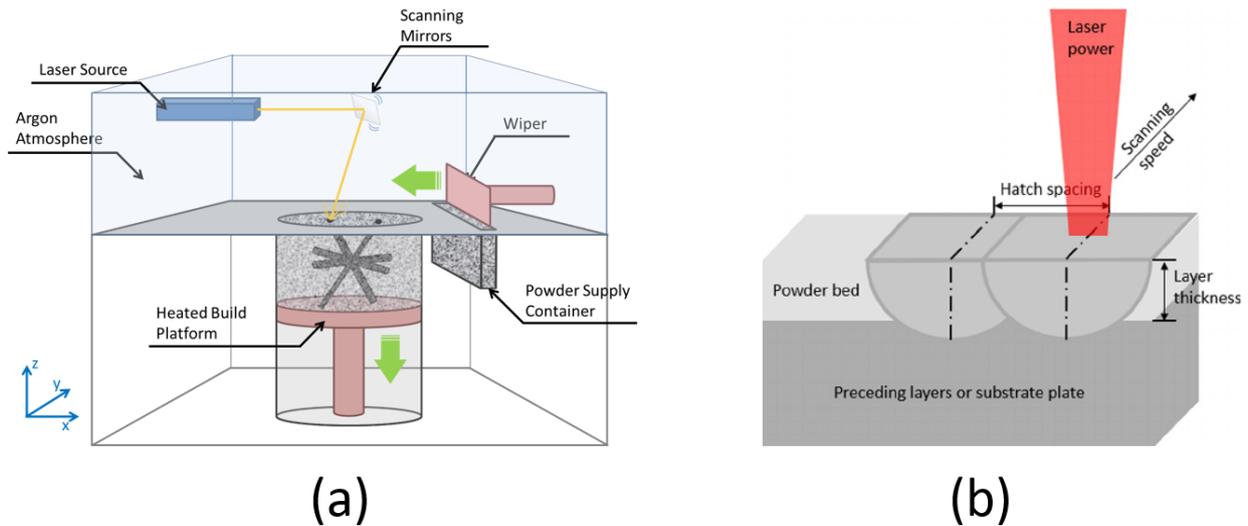


FIGURE 1.18 – Schématisation du procédé SLM (a) [126], paramètres du procédé (b) [127]

mètres sont explicités sur la Figure 1.18(b). Ces paramètres ont une forte influence sur le résultat d'impression [128], notamment sur la microstructure cristalline (induisant de l'anisotropie), la rugosité de surface ou la porosité [129]. Par exemple, pour imprimer rapidement une pièce, la possibilité d'utiliser une vitesse de balayage élevée du laser ainsi qu'une importante hauteur de couche sont des solutions envisageables, cependant cela peut engendrer une forte rugosité ainsi qu'une fraction élevée de porosité [130].

Malgré la substantielle amélioration de la liberté géométrique permise par le procédé SLM comparée aux procédés de fabrication traditionnels, celui-ci ne permet pas une liberté absolue. En effet, chaque couche repose sur la précédente (voir Figure 1.19) et par conséquent, une couche ou une partie de couche ne reposant sur aucune couche peut alors s'effondrer.

Pour une structure treillis, cette limitation se traduit par l'existence d'un angle de poutre limite formé entre la poutre et le plan du plateau : si l'angle de la poutre est inférieur à cette valeur limite, celle-ci a de fortes chances de s'effondrer, on parle de poutre non auto-portante. S'il est toutefois possible d'imprimer des poutres supports pour garantir l'imprimabilité d'une pièce, l'impossibilité de retirer ces dernières à l'intérieur d'un treillis complexe rend cette option inenvisageable.

Un angle de 20° est considéré par Mazur *et al.* [132] comme limite inférieure : cela implique que certaines géométries de structure ne sont pas réalisables. Par exemple, dans la Figure 1.19, les poutres orientées à 35.3° (en vert), 45° (en jaune) et 90° (en rouge) relativement au plan du plateau sont ainsi imprimables par le procédé SLM alors que les poutres orientées à 0° (en bleu) ne le sont pas.

L'angle des poutres implique également la présence de défauts d'impression allant des défauts d'aspect à une variation de la rugosité de surface [121]. La rugosité de surface, due à la présence de poudres partiellement fondus à la surface de la pièce imprimée (voir Figure 1.19), dépend fortement des paramètres d'impression, mais également du diamètre des poudres utilisées. Cette rugosité de surface peut avoir une incidence forte sur les propriétés mécaniques des pièces imprimées, pouvant entraîner une rupture prématurée de celle-ci, comme il a été constaté par la diminution de la durée de vie en fatigue par Hrabec *et al.* [133] et Vayssette *et al.* [134].

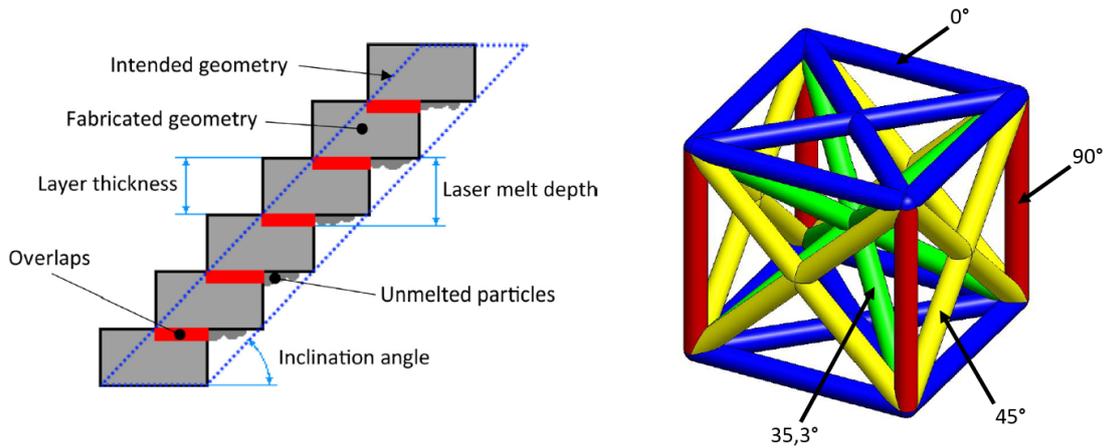


FIGURE 1.19 – Schématisation d'une poutre fabriquée par SLM [131] (gauche), possibilités de treillis et angles associés [121]

Afin d'exploiter les possibilités offertes par les matériaux architecturés, et permettre un usage industriel de ceux-ci, des modèles de comportement mécanique effectifs sont nécessaires.

1.1.4 Méthodes de caractérisation des propriétés mécaniques

Méthodes expérimentales

L'étude expérimentale des propriétés mécaniques des treillis dans la littérature est majoritairement composée d'essais de compression. L'une des raisons en est que la sollicitation d'un treillis en traction nécessite d'inclure dès la fabrication une zone de préhension pour les mors de la machine [135], rendant la tenue de tels essais plus complexes. Dans le cas des essais de compression, les paramètres ayant une influence sur la mesure des propriétés mécaniques peuvent être : la géométrie de l'éprouvette (parallélépipédique ou cylindrique), le nombre et la taille des cellules qui la constituent et les conditions de frottement aux plateaux. Gavazzoni *et al.* [136] utilisent des éprouvettes parallélépipédiques et constatent une influence du nombre de cellules constituant la section des éprouvettes sur les propriétés mesurées, à fraction volumique et taille de cellules constantes. Si le module d'Young reste relativement inchangé, la déformation à rupture est impactée. Les frottements au niveau des plateaux de compression peuvent avoir une forte influence sur les essais mécaniques. Afin de maîtriser ces conditions aux limites, certaines études font le choix de bloquer le glissement des poutres sur le plateau [137], d'autres préfèrent favoriser le glissement, en graissant les plateaux par exemple [138].

Une machine d'homogénéisation expérimentale pour matériaux architecturés, reproduisant expérimentalement des conditions aux limites de type KUBC a notamment été proposée par Dassonville *et al.* [139].

Les modes d'endommagement des treillis lors d'essais de compression ont été analysés par Mazur *et al.* [132]. Le mode d'endommagement par bande de cisaillement est prédominant pour la majorité des géométries étudiées, avec pour exception un mode d'endommagement étage par étage. Ces modes d'endommagement sont présentés sur la Figure 1.20.

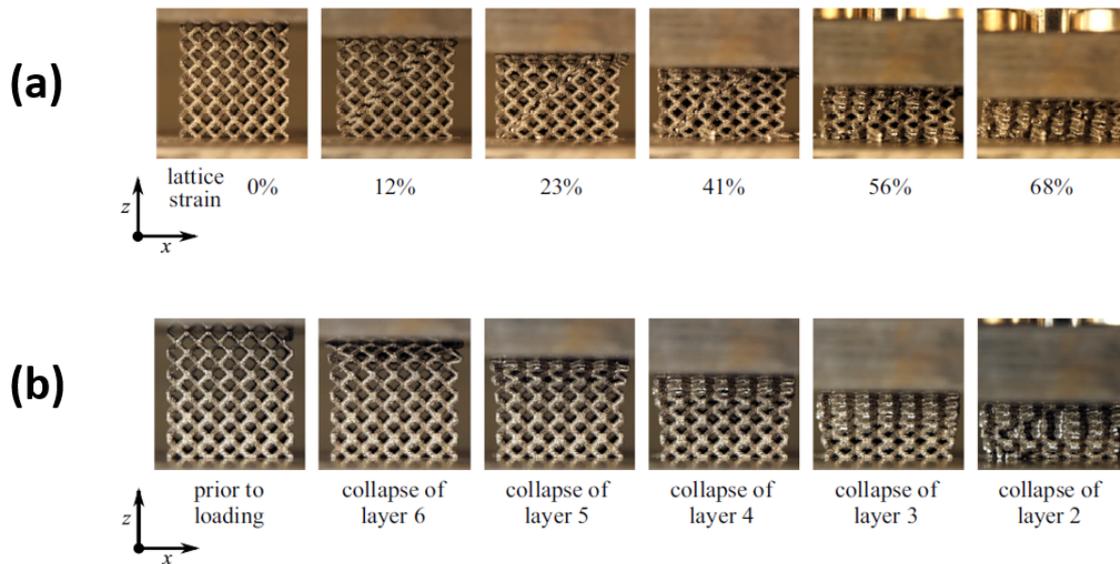


FIGURE 1.20 – Exemples de modes d’endommagement : Bande de cisaillement (a), étage par étage (b). Illustrations issues de [140]

Méthodes numériques

Afin de calculer les propriétés mécaniques effectives de treillis périodiques, l’homogénéisation numérique semble être une stratégie adéquate [141]. Celle-ci consiste à remplacer une micro-structure complexe par un milieu homogène équivalent [142–144] (voir Figure 1.21). Afin d’identifier des propriétés proches du milieu effectif considéré, l’homogénéisation doit s’effectuer sur un Volume Élémentaire Représentatif (une cellule unitaire dans le cas d’un milieu périodique). Dans le cadre de l’homogénéisation de structures périodiques, 4 types de conditions aux limites sont applicables à une cellule unitaire : KUBC (déformation uniforme au contour), SUBC (contrainte uniforme aux limites), mixtes et périodiques. Dans le cadre de l’élasticité et de l’élastoplasticité, Jiang *et al.* [145] ont montré que les conditions aux limites périodiques et mixtes sont celles qui se rapprochent le plus des propriétés effectives. L’homogénéisation numérique avec conditions aux limites périodiques a été utilisée pour étudier des structures auxétiques [146–148].

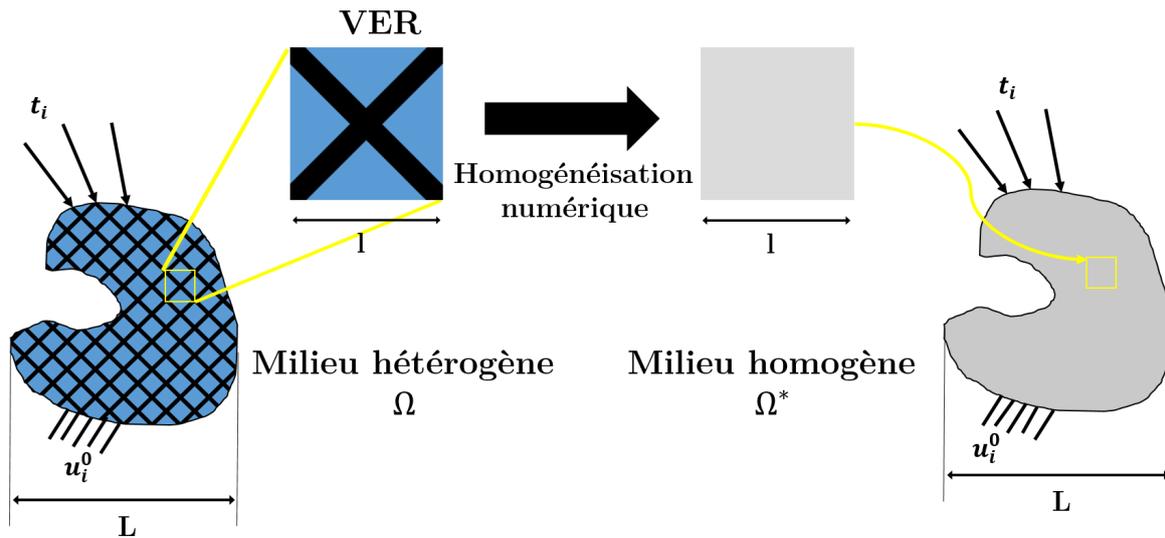


FIGURE 1.21 – Stratégie d’homogénéisation sur micro-structure périodique

1.2 Matériaux architecturés hybrides

1.2.1 Exemples classiques de matériaux architecturés hybrides

Les matériaux architecturés hybrides peuvent être décrits comme la combinaison de matériaux de natures différentes [22], organisée de manière ingénieuse, permettant d’atteindre des propriétés synergiques à même de remplir les espaces vides des tables de propriétés des matériaux. Ashby dresse des exemples de combinaisons de matériaux dans la Figure 1.22.

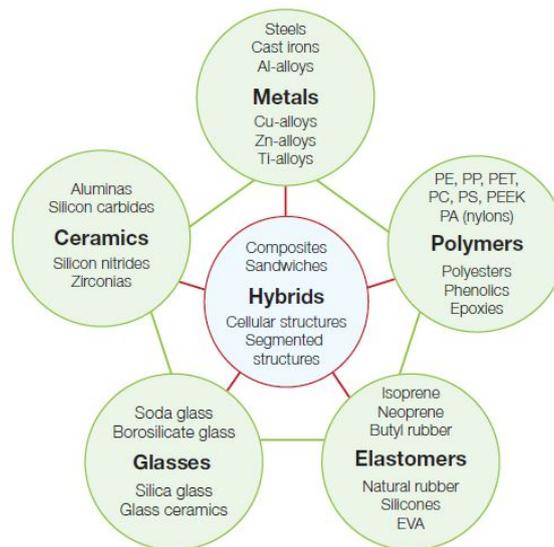


FIGURE 1.22 – Schéma des possibilités d’hybridation, illustration issue de [22]

Il existe de nombreux exemples de matériaux architecturés hybrides dans la nature, qui est une importante source d’inspiration en raison des propriétés spécifiques élevées et des caractéristiques adaptatives des matériaux biologiques [149]. Les exemples de matériaux biologiques servant d’inspiration pour la

conception de matériaux artificiels architecturés sont nombreux, et l'on peut citer les mécanismes auto-nettoyant résultant de l'hydrophobicité des feuilles de lotus [150], la capacité d'adhérence aux surfaces des membres du gecko [151], les capacités hygro-adaptatives de certaines plantes [152], ou les mécanismes de déformation de la carapace de tortue [153].

Un exemple très étudié de matériau architecturé hybride biologique est la nacre. Celle-ci est constituée d'un assemblage de type brique et mortier, dont les briques sont constituées d'une bio-céramique très rigide mais très fragile, l'aragonite, liées entre elles par des interfaces faites d'un bio-polymère souple, la chitine [154]. Malgré la faible ductilité de l'aragonite, l'arrangement géométrique des deux constituants, s'organisant sur plusieurs échelles, confère à la nacre une grande ténacité. La Figure 1.23 détaille l'arrangement géométrique ainsi que des courbes de traction comparant l'aragonite seule à la nacre.

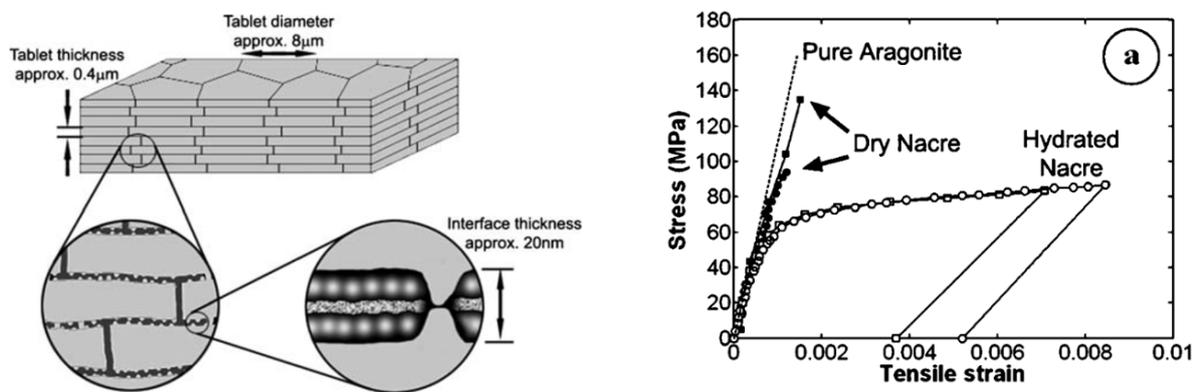


FIGURE 1.23 – Composition de la nacre (gauche), courbes de traction (droite). Illustrations issues de [154]

Ainsi, l'architecturation confère à ce matériau hybride une ténacité supérieure à celle de ses deux constituants pris séparément. Dès lors, de nouveaux matériaux architecturés hybrides s'inspirant de la nacre ont été conçus, optimisant la géométrie des briques et permettant l'obtention de propriétés mécaniques supérieures, notamment une ténacité supérieure à celle obtenues avec des géométries de briques classiques [155; 156].

Parmi les matériaux architecturés hybrides artificiels, on retrouve les composites fibreux [157], très utilisés pour leur haute rigidité rapportée à une masse réduite, ainsi que les composites particulaires [158], dont le mécanisme de percolation confère une forte rigidité. Les améliorations des technologies de fabrication additive ont rendu possible la production de composites périodiques, comme les composites co-continus, appelés IPC (*Interpenetrating Phase Composite*) [159–161] dont la morphologie structurale rappelle celle de matériaux biologiques comme les os [162] ou celle des oursins [163].

S'inspirant des matériaux biologiques hybrides [164; 165], la possibilité d'hybrider les treillis apparaît, motivée par la possibilité de stabiliser les structures, comme il est observé pour des matériaux cellulaires en alliage d'aluminium remplis par du silicone par Vesenjak *et al.* [166]. Ces derniers observent une augmentation de la déformation à densification du matériau cellulaire lorsqu'il est rempli par du silicone, passant de $\epsilon_d = 0.46$ à $\epsilon_d = 0.65$ en sollicitation quasi-statique. Cependant, l'énergie dissipée par unité de masse est diminuée, passant de 19.95 J/g à 9.88 J/g, conséquence de l'augmentation de la masse due au remplissage. D'autres études ont également montré une augmentation de certaines propriétés mécaniques (mo-

dule d'Young et limite d'élasticité notamment) lorsque des mousses métalliques sont remplies de polymères [167–169], comme celle de Kwon *et al.* qui étudient l'influence du remplissage d'une mousse d'aluminium par un élastomère et rapportent une augmentation d'environ 25% de la rigidité relative par le remplissage. Une amélioration des propriétés en dissipation d'énergie spécifique est également rapportée par Weaver *et al.* [170]. Ces derniers s'intéressent au comportement d'un alliage de titane poreux et constate une augmentation de l'énergie dissipée par unité de masse de l'ordre de 170% à 50% de déformation lorsque les pores sont remplis par du PMMA.

1.2.2 Les treillis hybrides

Les treillis hybrides consistent en l'association d'un treillis avec un matériau monolithique d'une nature différente. La première étude portant sur des structures treillis périodiques hybrides métal-polymère est réalisée par Gümruk *et al.* [171] en 2015. Des treillis basés sur la cellule BCC sont fabriqués par le procédé SLM en acier 316L. Ces structures sont composées de cellules cubiques de dimension 1.25 mm et 2.5 mm, avec un diamètre de poutre constant de 0.2 mm. La fabrication des treillis hybrides se fait par moulage sous pression, introduisant trois élastomères différents : un caoutchouc naturel, un silicone et un caoutchouc néoprène. Des essais de compression quasi-statiques sont effectués pour comparer les treillis seuls aux différents treillis hybrides. La cellule BCC étant dominée par la flexion, les structures présentent toutes deux un long plateau de contrainte, lequel est moins élevé pour la cellule de plus grande dimension, étant de fraction volumique inférieure. Lorsque remplies par un élastomère, les structures de fraction volumique inférieure montrent une augmentation monotone de la contrainte tout au long de la déformation : la densification de la structure intervient quasi immédiatement (sans plateau), ce qui rend ces hybrides potentiellement impropres aux applications en dissipation d'énergie. Les structures aux cellules plus petites voient leur plateau de contrainte augmenter d'un rapport 2 lorsque remplies par le silicone ou le caoutchouc néoprène, mais densifier très rapidement avec le caoutchouc naturel. Les propriétés élastiques et la dissipation massique d'énergie des treillis hybrides n'ont pas été étudiées dans cet article, mais celui-ci montre que l'hybridation des treillis peut permettre une augmentation du plateau de contrainte et ainsi de la capacité à dissiper l'énergie. Néanmoins, l'article met également en lumière un phénomène de densification globale précoce des treillis hybrides : la contrainte augmente fortement sans que le treillis lui-même ne densifie. L'origine de ce phénomène pourrait être une contribution en contrainte trop importante du polymère de soutien, lequel empêcherait la déformation de la structure.

Une piste d'amélioration des propriétés de dissipation d'énergie des treillis [172–174] peut donc consister en leur hybridation : la matrice, par son effet de renfort, peut augmenter les plateaux de contraintes. Mais elle peut également permettre une stabilisation du treillis, comme le montrent les études de Bernal-Ostos *et al.* [175] et Ramirez *et al.* [176]. Celles-ci s'intéressent au flambage des poutres d'un treillis en polymère lorsqu'il est rempli par des mousses de polyuréthane. Dans l'étude de Bernal-Ostos, des structures treillis à cellules pyramidales sont fabriquées par photopolymérisation de thiol-ène, avant d'être remplies de mousse de polyuréthane. À l'aide de mesures par tomographie rayons-X, il est effectivement constaté une diminution significative du flambage des poutres d'une cellule unitaire mise en compression, lorsque celle-ci est remplie par de la mousse, comme le montre la Figure 1.24. Les courbes expérimentales contrainte-déformation rapportent une augmentation du module d'élasticité, de la contrainte pic et du niveau de contrainte dans le cas des treillis remplis, l'augmentation étant plus importante pour la mousse la plus dense.

L'évolution des propriétés mécaniques de treillis hybrides constitue également l'objet d'une étude de

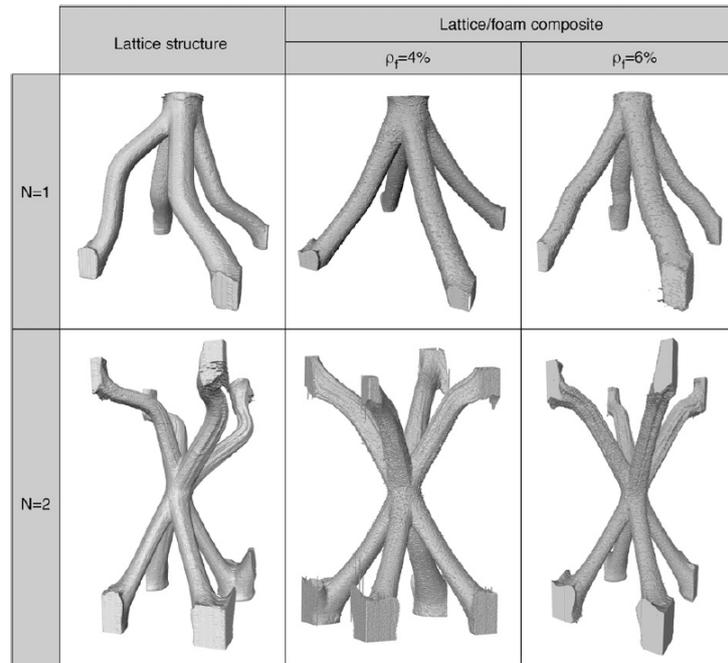


FIGURE 1.24 – Imagerie rayons X de la déformation en compression de treillis remplis ou non par des mousses de densité différentes. Illustration issue de [175]

Hedayati *et al.* [177], qui ont cherché à reproduire l'influence mécanique de la présence de tissus biologiques colonisant une prothèse osseuse. Dans cet article, des structures treillis métalliques en alliage Ti-6Al-4V sont fabriqués par le procédé SLM en se basant sur la cellule unitaire Diamond et sont produites à trois fractions volumiques différentes ($\rho^* = 0.15, 0.19$ et 0.23). Les structures sont alors remplies par moulage, à l'aide de quatre polymères rigides (un epoxy et trois résines polyuréthanes) aux propriétés mécaniques différentes (modules compris entre 0.7 et 1.5 GPa). Les treillis seuls et hybrides sont alors testés en compression et compressions cycliques et leurs courbes contrainte-déformation sont comparées en fonction du matériau de remplissage. Dans cette étude, les auteurs constatent une augmentation de certaines propriétés mécaniques (module d'Young, limite d'élasticité, niveau de contraintes, comme montré par les courbes de la Figure 1.25), liée au remplissage du treillis par les différents polymères. Cette augmentation des propriétés est plus importante pour les treillis de plus faible fraction volumique. Ce constat est attendu dans le sens où les propriétés mécaniques des polymères sont supérieures à celles des treillis seuls (module d'Young entre 5 et 1.5 fois supérieur, limite d'élasticité entre 4 et 1.5 fois supérieur). La tenue en fatigue est également considérablement améliorée, montrant l'intérêt pour une prothèse osseuse artificielle d'intégrer efficacement les tissus biologiques.

Seetoh *et al.* [178] s'intéressent également à l'intérêt d'ajouter une phase supplémentaire dans un treillis, se penchant sur l'influence du rapport de module d'élasticité des différentes phases sur celui du matériau hybride. S'appuyant sur les différents modes de déformation des treillis, Seetoh *et al.* comparent deux géométries de cellule : l'octet-truss, dominé par la traction-compression, et la cellule de Kelvin, dominée par la flexion, afin d'étudier l'intérêt pour chacun des types d'ajouter une phase de renfort. Expérimentalement, les treillis sont fabriqués en polymère ("grey resin", Formlabs) par stéréolithographie avant d'être remplis par moulage par un PDMS (Sylgard 184, Dow Corning). On constate l'intérêt d'ajouter une matrice lorsque la structure se déforme localement par flexion, comme décrit par la Figure 1.26.

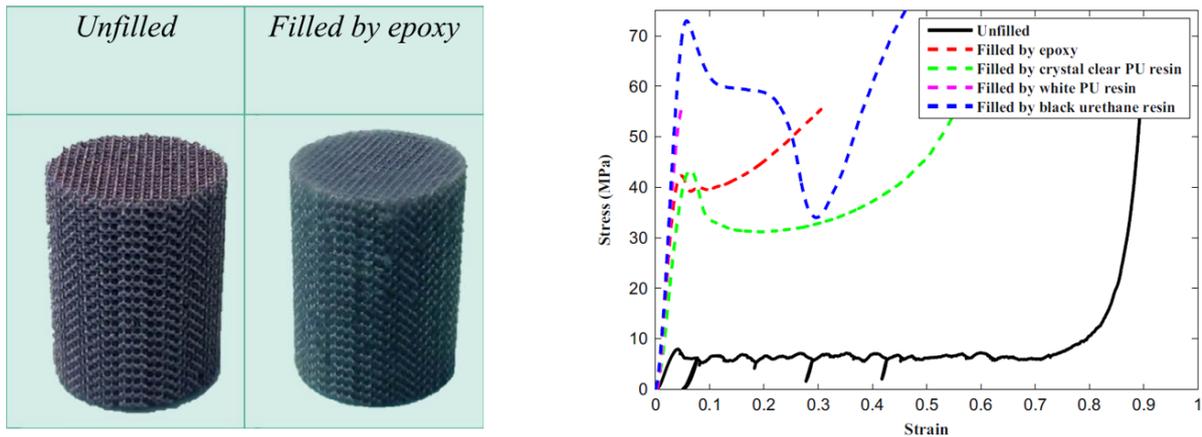


FIGURE 1.25 – Structures treillis et hybride (gauche), courbes contraintes déformations (droite), issues de [177]

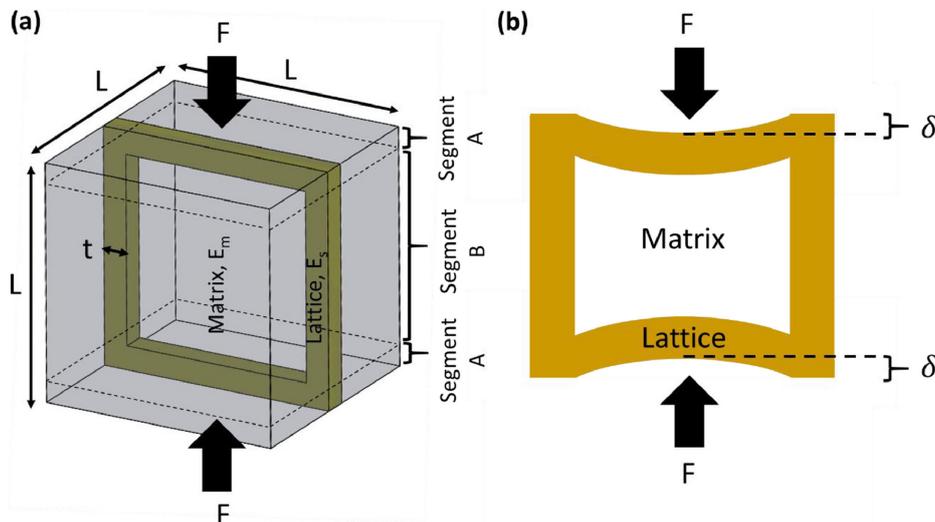


FIGURE 1.26 – Schématisation d'une structure avec matrice (a), mécanisme de support en flexion (b), illustration issue de [178]

Les auteurs remarquent que l'effet de renfort est bien plus important pour la structure dominée par la flexion, avec notamment une influence plus forte sur son module d'élasticité. Cependant, lorsque le module de la matrice atteint ou dépasse 20% de celui de la structure, les deux cellules cessent de se comporter différemment et présentent un module proche. Cette valeur critique de module est considérée comme celle qui empêche les poutres de la cellule de Kelvin de flamber, pour se déformer de manière plus homogène. Cet article souligne l'importance cruciale du rapport de module $E_{treillis}/E_{matrice}$ sur le module d'élasticité de la structure hybride correspondante mais également sur la manière dont celle-ci va se déformer.

Cherchant à analyser les mécanismes de renfort de structures treillis par une matrice rigide, Li *et al.* [3] comparent les propriétés mécaniques de 3 différents treillis en acier 4130 imprimés par SLM. Les treillis sont composés des cellules unitaires cubique, BCC et octet-truss, remplis par moulage par un polymère rigide (EpoxiCure, Buehler de module d'élasticité de 2.7 GPa). L'étude s'intéresse en premier lieu au comportement d'une poutre individuelle en compression et à l'influence de la présence du polymère sur la force nécessaire au flambage de celle-ci, représenté sur la Figure 1.27.

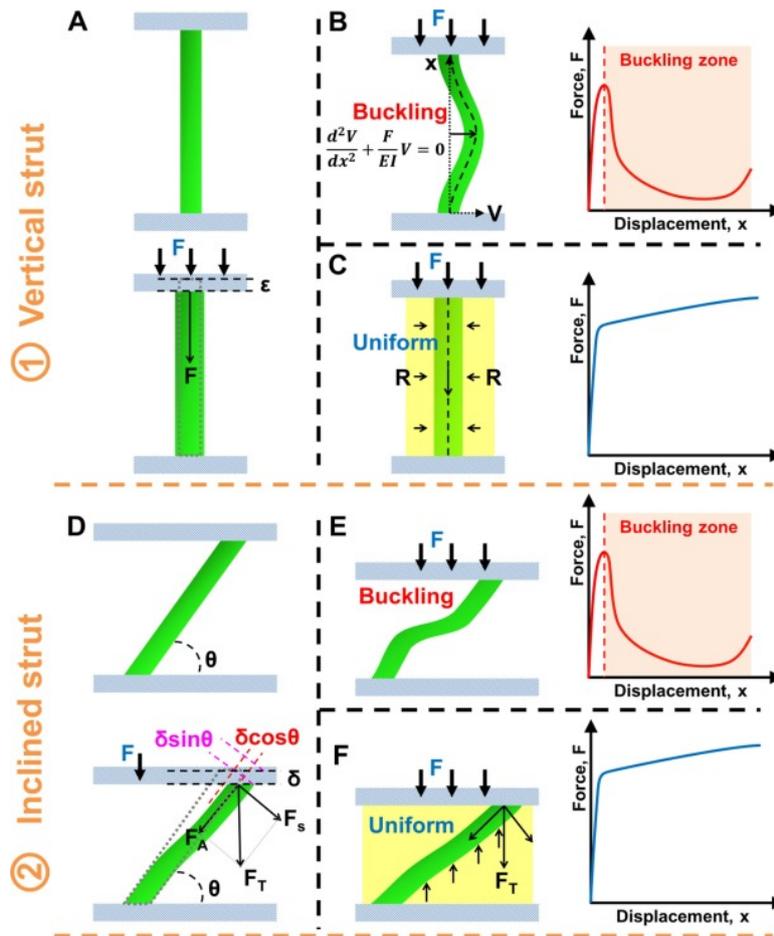


FIGURE 1.27 – Comparaison schématisée poutre / poutre hybride pour différentes orientations de poutres, illustrant l'effet de l'hybridation par des courbes force / déplacement. Illustration issue de [3]

Postulant que la présence du polymère permet d'améliorer la résistance au flambage du treillis, le développement analytique du cas d'une poutre droite soumise à un chargement axial est fait, avec et sans polymère de renfort. La force critique de flambage est alors plus importante dans le cas de la poutre hybride, la force de résistance du polymère (notée R dans la Figure 1.27) venant s'ajouter à la charge critique de la poutre seule. La question de l'évaluation de cette force de résistance reste cependant entière, et devrait dépendre des propriétés mécaniques du matériau de renfort, en accord avec Seetoh *et al.* [178]. Lorsque cette force de résistance est suffisamment importante, le flambage n'intervient plus, et la structure peut se déformer de manière homogène.

Expérimentalement, Li *et al.* observent une augmentation importante du niveau de contrainte pour les 3 géométries de treillis hybrides : la contrainte de compression des treillis hybrides est ainsi supérieure à la somme de chaque contribution, structure et polymère pris séparément, comme le montrent les courbes de la Figure 1.28. Cependant, il est également constaté une diminution du module relatif des treillis hybrides comparés aux structures seules.

L'augmentation des niveaux de contraintes permet une augmentation importante de l'énergie spécifique dissipée, surclassant d'autres résultats de la littérature portant sur des structures non-hybrides (voir Fig 1.28). Enfin, Li *et al.* s'intéressent à l'effet de l'adhérence à l'interface treillis/matrice sur les propriétés

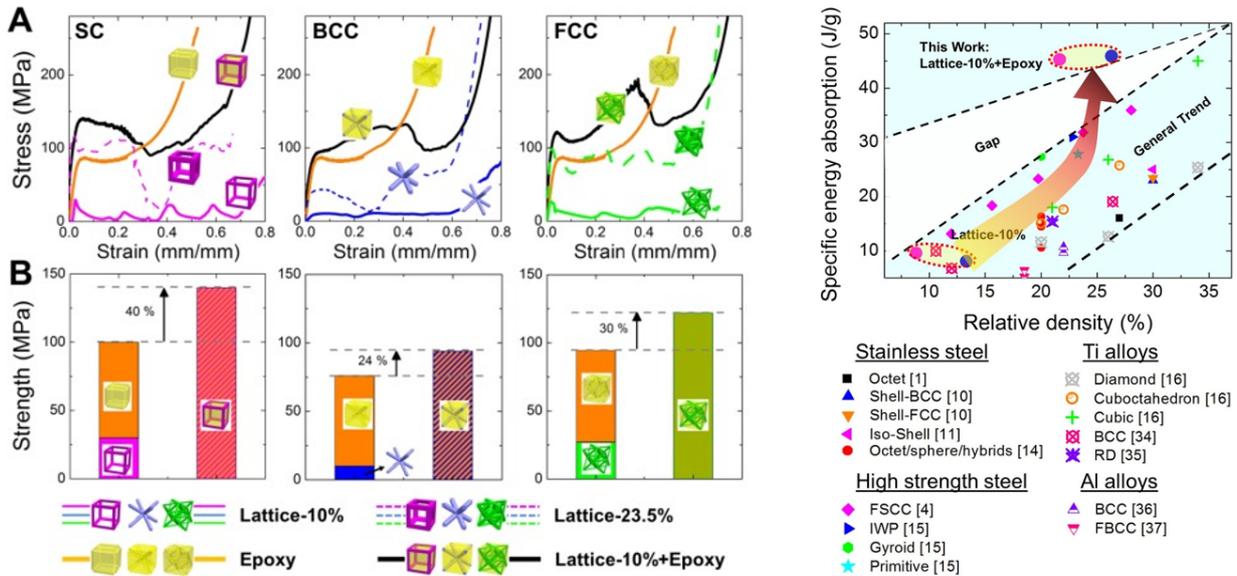


FIGURE 1.28 – Résultats expérimentaux des tests de compression pour différentes géométries de treillis (gauche), comparaison de l'énergie dissipée spécifique avec la littérature (droite), issue de [3]

mécaniques des treillis hybrides. En effet, la rugosité de surface observée sur les treillis obtenus par fabrication additive peut devenir un atout dans le cas des matériaux architecturés hybrides : en associant une pièce métallique imprimée avec un polymère, celui-ci peut s'infiltrer dans les anfractuosités, augmentant l'interface de contact entre les deux matériaux et améliorant leur adhérence. Kim *et al.* [179] ont mesuré l'adhérence d'une couche de polymère sur un substrat métallique, et reportent une augmentation de la force d'adhérence lorsque la rugosité est plus importante. Kleffel *et al.* [180] soulignent davantage l'effet de l'interpénétration des deux phases pour leur adhérence, affirmant que la rugosité seule ne permet pas d'expliquer le phénomène d'adhérence. Une autre étude proposée par Imam *et al.* [181] montre que l'interconnexion et l'interpénétration de deux phases d'un composite (métal-polymère) améliore le transfert de charge entre ces phases en s'appuyant sur des mécanismes de contact-frottement, comparativement à un composite stratifié.

Xue *et al.* [182] avancent en ce sens que l'adhérence et les frottements entre treillis et matrice seraient, au moins partiellement, responsables de l'augmentation des propriétés mécaniques de treillis composite aluminium/polymères, constatant notamment une résistance accrue à la compression ainsi qu'un module d'Young supérieur. Cependant, Li *et al.* ont étudié numériquement l'influence de l'adhérence entre une structure treillis en Acier 4130 et une matrice epoxy, en comparant 3 essais numériques de compression pour différents cas d'adhérence. Les cas comparés sont les cas à adhérence parfaite (pas de décohésion possible), une adhérence égale à celle mesurée expérimentalement et aucune adhérence (pas de frottements). La comparaison ne permet pas de trouver d'apport significatif de l'adhérence sur les propriétés mécaniques, comme le montre la Figure 1.29. Une étude expérimentale et numérique plus approfondie de l'influence de la rugosité de surface et de l'adhérence des phases paraît nécessaire afin de répondre à ces interrogations.

Osman *et al.* [183] réalisent une étude similaire à Li *et al.*, sur une même géométrie de structure, l'octet-truss (fabriquée par SLM en acier 316L), et un polymère d'hybridation différent, de la résine acrylique coulée par moulage. Cependant, ces résultats sont en contradiction avec ceux obtenus par Li *et al.* [3] : malgré

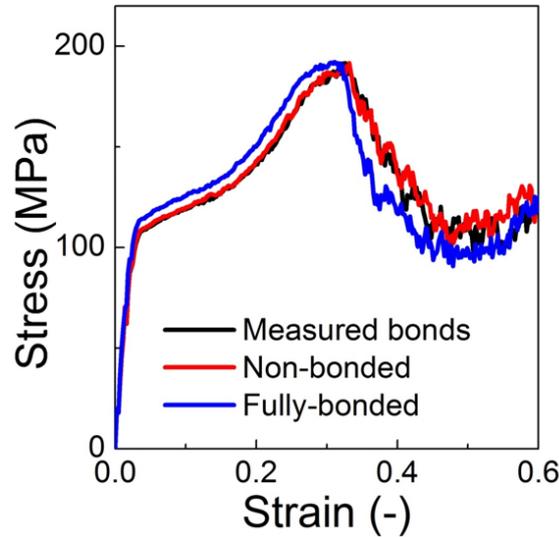


FIGURE 1.29 – Comparaison numérique de la compression de treillis hybrides, différents cas d'adhérence entre les phases. Courbes issues de [3]

l'augmentation du niveau de contrainte, l'énergie spécifique dissipée par les treillis hybrides est inférieure aux treillis seuls. Osman *et al.* attribuent la diminution de l'énergie spécifique dissipée à la densification rapide des treillis hybrides, provoquée par le "manque de place" due à la présence du polymère rigide qui empêche la structure de se déformer.

Si un polymère trop rigide empêche rapidement le treillis de se déformer, le remplissage des treillis par un élastomère semble une alternative intéressante : sa présence augmenterait la charge critique de flambage, et son faible module à petite déformation ne provoquerait pas de densification précoce en empêchant complètement la déformation des poutres. C'est le choix fait par Xue *et al.* [182], avec une étude portant sur l'étude de structures auxétiques remplies par différents polymères souples. Le treillis étudié est une adaptation 3D de la cellule ré-entrante (voir Figure 1.12), fabriquée par moulage en aluminium à trois fractions volumiques différentes ($\rho^* = 0.20, 0.28$ et 0.37). Les polymères d'hybridation sont des mélanges de plusieurs composants (Epoxy E44 + flexibilisateur / MMT) qui présentent des propriétés hyperélastiques, et sont coulés à l'intérieur des structures par moulage sous pression. L'étude expérimentale rapporte une augmentation importante des plateaux de contraintes pour les structures hybrides, s'expliquant par une répartition plus homogène de la contrainte dans la structure, appuyée par une analyse numérique. De plus, le caractère auxétique du treillis semble permettre une compression bi-axiale de l'élastomère incompressible, rendant la déformation des poutres beaucoup plus difficile. Une augmentation importante du module d'élasticité des structures hybrides comparativement aux treillis seuls est ainsi constatée, augmentation d'autant plus importante que la fraction volumique du treillis est élevée (multiplication du module initial par un rapport 2.7 et 4.7 à $\rho^* = 0.37$ en fonction du polymère de remplissage). La présence du polymère rend la structure hybride moins auxétique, la déformation de la structure étant gênée par le polymère.

L'énergie dissipée par les structures hybrides est logiquement supérieure aux treillis seuls, bien que la limite de mesure (densification) choisie ne soit pas spécifiée. Cependant, aucune mesure de l'énergie spécifique dissipée n'est faite, la masse des échantillons et des composants n'étant pas donnée.

On peut s'attendre à ce que l'effet de support de l'hybridation soit d'autant plus efficace lorsque le mode de déformation principal de la structure est le flambage. Cette option est retenue dans le travail expérimental de Novak *et al.* [184], dans lequel une structure métallique auxétique est remplie par un élastomère. Le treillis étudié, fabriqué en cuivre par le procédé SEBM, tient sa géométrie du 10^{ème} mode propre de la cellule cubique [185; 186] et son comportement est dominé par la flexion ($M = -6$). Les poutres ont la forme d'un sinus, comme illustré dans la Figure 1.30, et permettent d'orienter la déformation de celles-ci lorsque la structure est soumise à une sollicitation mécanique. Les treillis hybrides sont obtenus par moulage sous vide des structures métalliques par du silicone. Les treillis seuls et hybrides sont alors soumis à des essais de compression quasi-statique et dynamique.

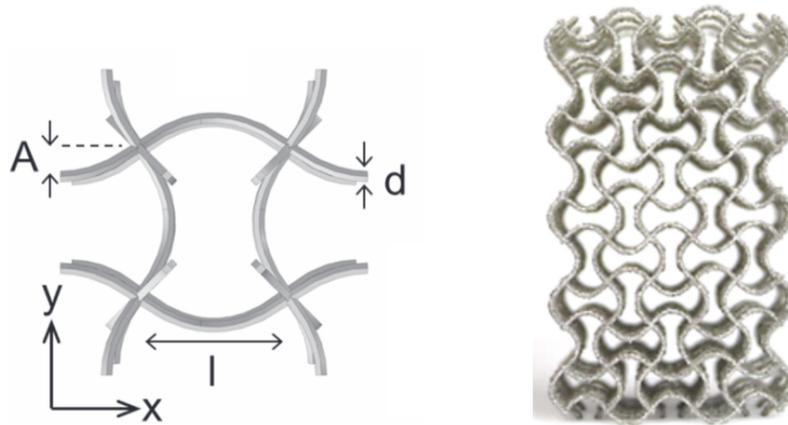


FIGURE 1.30 – Cellule unitaire (gauche), structure auxétique (droite). Illustrations issues de [186]

Dans cette étude, une augmentation de l'énergie dissipée dans le cas du treillis hybride est bien constatée aux grandes déformations ($\epsilon > 40\%$), mais pas aux faibles déformations, pour lesquelles le treillis seul présente de meilleurs résultats. Ce phénomène peut s'expliquer par l'évolution des propriétés mécaniques de l'élastomère : à faible déformation il est relativement souple comparé au treillis, n'apportant que peu de support. A plus grande déformation, l'élastomère se rigidifie et résiste davantage à la déformation de la structure.

Le choix d'une structure auxétique semble pertinent : lors d'une sollicitation de compression verticale, le treillis se comprime également dans les directions transverses, venant compresser l'élastomère dans plusieurs directions. Celui-ci étant incompressible, cette sollicitation multi-axiale le rend d'autant plus efficace comme support.

Le coefficient de Poisson de structures hybrides en fonction des propriétés mécaniques de ses matériaux constitutifs est étudié numériquement dans [187; 188]. Peng *et al.* s'intéressent à la cellule ré-entrante 2D hybride, faisant varier numériquement le module d'élasticité des matériaux constitutifs. Il est ainsi constaté que le coefficient de Poisson de la structure hybride est fortement dépendant du rapport de ces modules : on observe sur la Figure 1.31 que plus le contraste de module d'élasticité est prononcé, plus l'hybride est auxétique. A l'inverse, lorsque les deux matériaux ont un module proche, le coefficient de Poisson est positif.

D'autres travaux portent sur des treillis en 2 dimensions remplis par des élastomères [89; 189; 190]. En particulier, Li *et al.* comparent quatre cellules 2D imprimées en VeroWhite (polymère rigide) par photopoly-

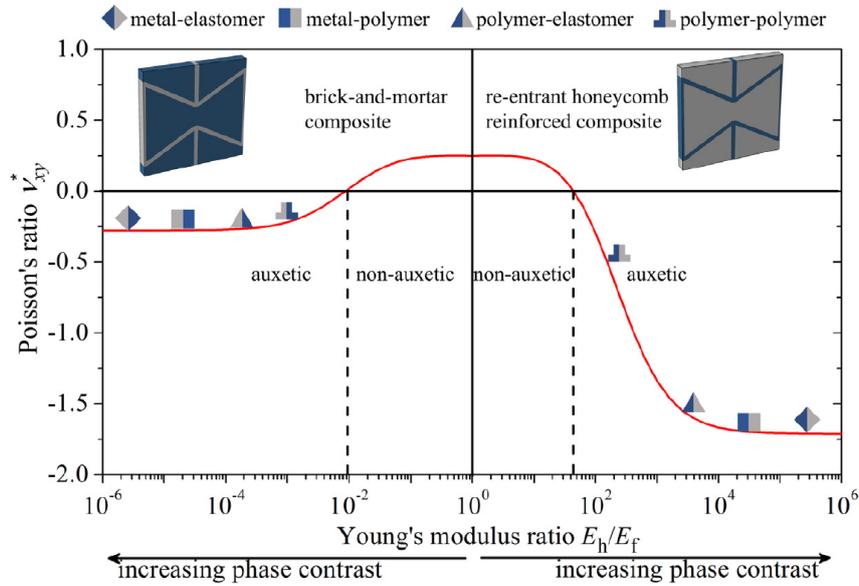


FIGURE 1.31 – Coefficient de Poisson en fonction du rapport des modules, issue de [187]

mérisation, dont deux treillis auxétiques, avec ces mêmes treillis remplis par un élastomère, du TangoPlus. Il est ainsi observé que la structure hybride qui dissipe le plus d'énergie est la structure ré-entrante, celle présentant le coefficient de Poisson le plus négatif. La comparaison des structures est présentée sur la Figure 1.32.

Un récapitulatif des études portant sur des treillis hybrides associant une structure auxétiques à une matrice élastomérique est présenté dans le tableau 1.1.

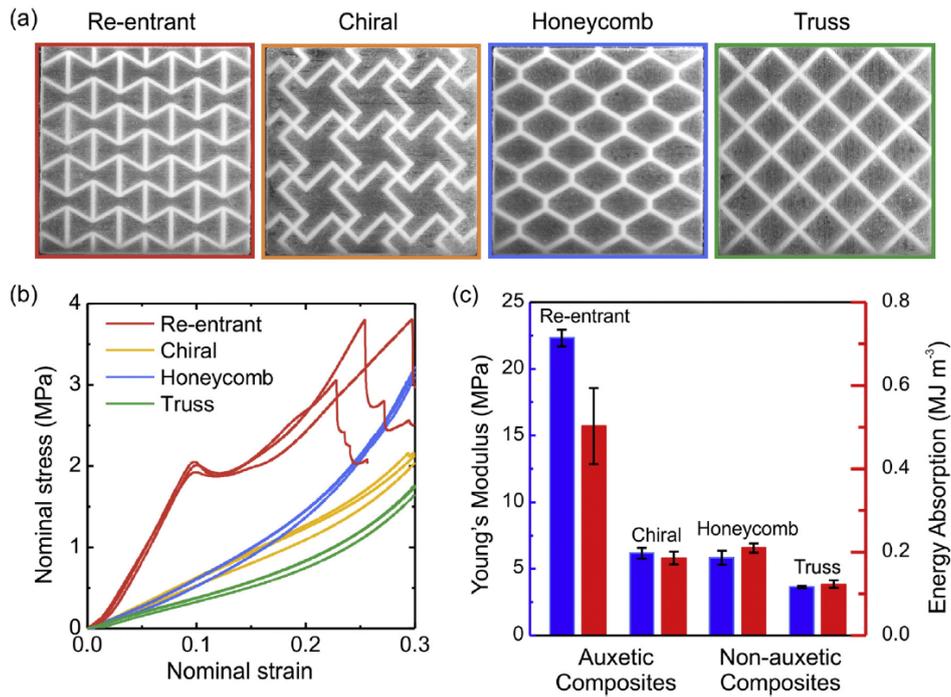


FIGURE 1.32 – Différentes structures hybrides étudiées (a), Courbes contrainte - déformation associées et propriétés mesurées (b). Illustrations issues de [89]

TABLEAU 1.1 – Récapitulatif des associations treillis auxétique + élastomère étudiées dans la littérature

Géométrie(s)	Matériaux	Procédés	Prop. étudiées	Référence
Re-entrant (2D)	Alu 2024-T4 (structure) + Viton-B (matrice)	Découpe jet d'eau + remplissage sous vide	E, $\tan(\delta)$	Murray <i>et al.</i> [189]
Re-entrant (2D/3D), "missing ribs" (2D)	Acier 316L (structure) + PU/gélatine (matrice)	SLS + remplissage	E_D	Fila <i>et al.</i> [190]
Re-entrant (2D), chiral truss (2D), honeycomb (2D), truss (2D)	VeroWhite (structure) + TangoPlus (matrice)	Photo-polymérisation	E, E_D	Li <i>et al.</i> [89]
Re-entrant (3D)	Aluminium (structure) + Epoxy E44 + flexibilisateur (matrice)	Moulage + remplissage sous pression	E, ν , E_D	Xue <i>et al.</i> [182]
Re-entrant (2D)	variable	numérique	E, ν	Peng <i>et al.</i> [187]
Cubic chiral	Cuivre (structure) + silicone (matrice)	SEBM + remplissage sous vide	E_D	Novak <i>et al.</i> [184]
"re-entrant fibre-networks" (3 types)	VeroWhite (structure) + TangoPlus (matrice)	numérique	E, ν	Zhang <i>et al.</i> [188]

1.3 Conclusion

Au travers de cette étude bibliographique, un état actuel de l'étude des treillis hybrides a été dressé, incluant les matériaux et méthodes utilisés pour leur réalisation, ainsi que les propriétés mécaniques résultantes.

Dans un premier temps, l'intérêt pour les matériaux architecturés est souligné, dans la mesure où ils permettraient d'atteindre des propriétés non accessibles aux matériaux monolithiques classiques. Parmi ce groupement de matériaux, les treillis exhibent de hautes propriétés mécaniques rapportées à leur masse. Ceux-ci présentent des mécanismes de déformation et d'endommagement dépendant de leur géométrie, selon le critère de Maxwell associé. Les treillis à faible connectivité, dominés par la flexion, semblent être les meilleurs candidats pour des applications en dissipation d'énergie, en raison du long plateau de leur courbe contrainte-déformation qui augmente l'énergie dissipée jusqu'à la densification, et notamment l'énergie spécifique dissipée et l'efficacité d'absorption. Au sein des structures dominées par la flexion, les treillis à coefficient de Poisson négatif semblent permettre une dissipation d'énergie supérieure aux structures conventionnelles, selon plusieurs études.

Afin d'améliorer les propriétés en dissipation des treillis, l'hybridation paraît être une piste prometteuse : en remplissant les structures par un autre matériau, il est possible de stabiliser celle-ci comme il a pu être observé sur des treillis remplis par de la mousse, retardant le flambage des poutres. La présence de cette matrice jouerait le rôle de renfort, augmentant la rigidité et le niveau de contrainte lors d'essais mécaniques. Il a cependant été observé que l'usage d'un matériau trop rigide en tant que support pouvait être contre-productif, entraînant une densification trop rapide des structures et diminuant alors l'énergie spécifique dissipée. Les propriétés des treillis hybrides semblent très dépendantes des matériaux constitutifs utilisés. Pour l'étude des propriétés mécaniques effectives des treillis périodiques, l'homogénéisation numérique par éléments finis utilisant des conditions aux limites périodiques sur une cellule unitaire semble constituer l'approche permettant de se rapprocher au plus des propriétés effectives comparativement aux autres types de conditions aux limites. Elle semble être l'option privilégiée pour l'étude des treillis périodiques hybrides.

Ces travaux de thèse portent sur l'étude des propriétés mécaniques de structures auxétiques à matrice élastomère. Il est attendu que les treillis à coefficient de Poisson négatifs s'appuient davantage sur le matériau support, en le sollicitant bi-axialement lors d'un essai de compression. En ce sens, des cellules auxétiques originales sont proposées et étudiées dans le troisième chapitre. Une matrice élastomère permet de ne pas provoquer de densification précoce, en laissant les poutres se déformer plus librement. Une étude expérimentale et numérique portant sur des treillis en polymère avec matrice élastomère est proposée dans le quatrième chapitre. L'utilisation de l'homogénéisation numérique par éléments finis avec conditions aux limites périodiques permettra de vérifier sa pertinence dans le cadre de l'étude des structures hybrides. Enfin, le cinquième chapitre porte sur l'étude de treillis métalliques avec matrice élastomère. Le contraste de propriétés est plus important. Des observations par tomographie rayons X visent à vérifier le rôle stabilisateur de la matrice souple.

Chapitre 2

Méthodes et Matériaux

Sommaire

2.1 Stratégie globale	36
2.2 Procédés de fabrication	37
2.2.1 Fabrication additive métallique	37
2.2.2 Fabrication additive polymère	38
2.2.3 Fabrication des treillis hybrides métal-polymère	39
2.3 Matériaux	40
2.3.1 Ti-6Al-4V	40
2.3.2 Polyuréthane	42
2.3.3 VeroWhite	43
2.3.4 TangoBlack+	44
2.4 Caractérisation mécanique	46
2.4.1 Essais mécaniques	46
2.4.2 Calcul de la dissipation d'énergie	47
2.4.3 Imagerie <i>in-situ</i>	48
2.5 Stratégie numérique	51
2.5.1 Génération des structures	51
2.5.2 Maillage	53
2.6 Calculs des propriétés mécaniques effectives	54
2.6.1 Calculs des propriétés élastiques effectives par homogénéisation	54
2.6.2 Représentation des propriétés élastiques	56
2.6.3 Simulations du comportement élastoplastique	57
2.7 Organisation des chapitres suivants	59

Ce chapitre présente, dans un premier temps, la stratégie globale de travail utilisée dans ces travaux. Par la suite, les procédés de fabrication employés pour réaliser les structures treillis et treillis hybrides sont décrits. Les matériaux utilisés sont ensuite détaillés, leur comportement mécanique est identifié et modélisé à l'aide de lois de comportement. Les méthodes de caractérisation mécanique utilisées sont données, notamment quant aux protocoles d'essais expérimentaux et pour l'imagerie *in situ*. Enfin, la stratégie numérique employée est exposée, ainsi que les moyens, logiciels et code éléments finis utilisés. La méthode de calcul des propriétés élastiques effectives est détaillée, ainsi que les méthodes de simulation du comportement élastoplastique.

2.1 Stratégie globale

La stratégie globale de ces travaux s'appuie sur un dialogue essais-calculs détaillé sur le diagramme 2.1. L'influence de la géométrie des treillis est analysée via des études paramétriques, les propriétés mécaniques des différentes configurations sont calculées par homogénéisation numérique. L'influence des propriétés des matériaux constitutifs est prise en compte par l'utilisation de modèles phénoménologiques de comportement, lesquels sont identifiés grâce à des essais expérimentaux (essais de traction ou compression uni-axiale sur des éprouvette de matériaux constitutifs). La connaissance des influences respectives de la géométrie et des matériaux constitutifs permet alors de mener des simulations numériques sur éprouvettes architecturées, lesquelles sont validées par des essais expérimentaux.

Dialogue essais-calculs

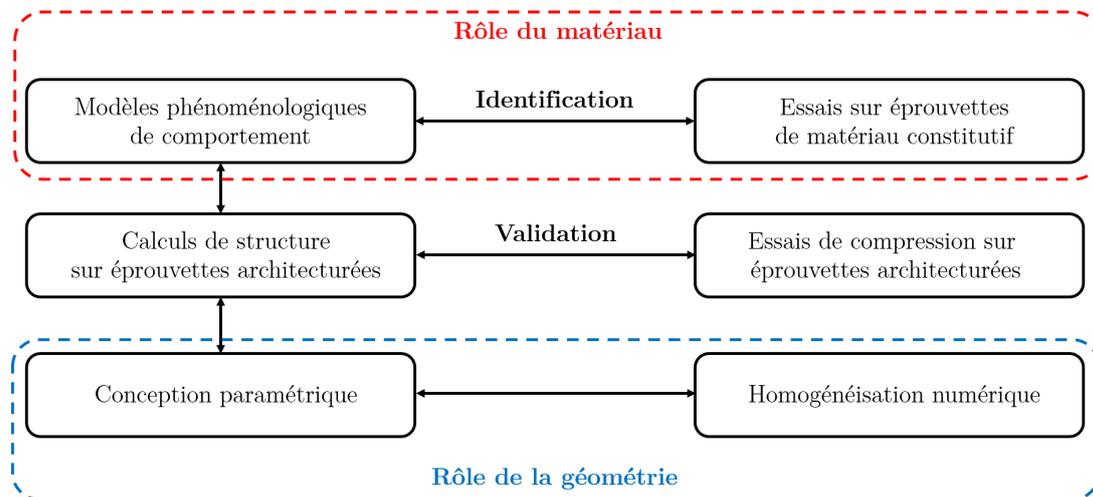


FIGURE 2.1 – Description de la stratégie globale employée dans ce manuscrit

L'étude des propriétés mécaniques de treillis hybrides s'appuie dans ces travaux sur deux types d'hybridation, permettant d'explorer l'effet de plusieurs combinaisons de matériaux constitutifs. Ces types d'hybridation sont catégorisés par la valeur du rapport des modules d'Young des matériaux constitutifs du treillis et de la matrice : une première étude porte sur un rapport dit "modéré" (un polymère rigide pour le treillis, associé avec un élastomère - on parle de treillis composites), tandis qu'une deuxième étude porte sur un

rapport dit "fort" (un alliage de titane pour le treillis, associé avec un élastomère - on parle de treillis hybrides).

2.2 Procédés de fabrication

Afin de réaliser des structures treillis aux géométries complexes, l'usage de la fabrication additive est l'option privilégiée dans ces travaux de thèse. L'impression 3D permet la réalisation de pièces aux formes complexes, jusqu'alors impossible à obtenir par les procédés classiques de fabrication tels que l'usinage ou la fonderie. Les progrès récents de ces techniques permettent un essor dans la conception et l'usage des matériaux architecturés. Il existe à ce jour de nombreuses méthodes de fabrication additive, présentant chacune des caractéristiques propres, et permettant l'usage d'une multitude de matières à mettre en œuvre. Dans le cadre de cette thèse, deux types de procédés ont été utilisés, afin d'imprimer des structures métalliques, mais également des structures hybrides en polymères.

2.2.1 Fabrication additive métallique

Dans le cadre de cette thèse, la méthode SLM (Selected Laser Melting) a été employée à l'aide des machines de la RMIT University (Melbourne, Australie) plus précisément dans les locaux du laboratoire Advanced Manufacturing Precinct (AMP). Pour ces travaux, une imprimante SLM system (250HL, SLM Solution GmbH) a notamment été utilisée, présentée sur la Figure 2.2.



FIGURE 2.2 – Imprimante SLM utilisée, avec son tamiseur de poudre PSM100

Afin d'imprimer du TA6V, la paramétrie machine utilisée est donnée dans le tableau 2.1. Celle-ci est issue d'une optimisation du procédé SLM par les équipes du laboratoire, consistant en un plan d'expérience visant à minimiser à la fois les défauts géométriques, les porosités du matériau imprimé, mais également la rugosité de surface.

TABLEAU 2.1 – Paramètres d'impression SLM du TA6V

Puissance du laser (W)	175
Vitesse de balayage (mm/s)	710
Espacement (μm)	120
Épaisseur de couche (μm)	30

2.2.2 Fabrication additive polymère

Pour l'impression de polymères, notre choix s'est porté sur un procédé par photopolymérisation de résines liquides, permettant une liberté géométrique accrue ainsi que la possibilité d'imprimer directement l'association treillis + matrice. Une imprimante 3D Connex Object350 de la marque Stratasys (AMP, Université de RMIT) a été employée, utilisant de la lumière dans le spectre de l'ultraviolet pour faire polymériser des résines photosensibles. La tête d'impression comprend plusieurs buses, permettant de pulvériser une multitude de résines différentes au cours d'une même impression.

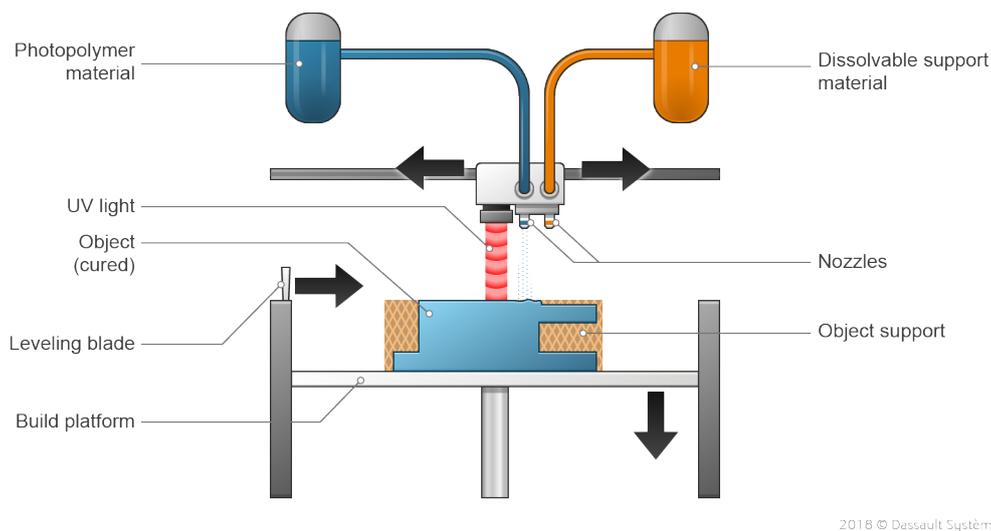


FIGURE 2.3 – Schématisation du procédé de photopolymérisation, illustration issue de [191]

La Figure 2.3 schématise le procédé d'impression 3D par photopolymérisation : les résines photosensibles sont pulvérisées en couches très fines sur un plateau, puis la couche est polymérisée par un faisceau de lumière UV. L'imprimante utilisée permet une épaisseur de couche minimale de l'ordre de $16\ \mu\text{m}$. La liberté géométrique supplémentaire liée à ce procédé réside dans la possibilité d'utiliser un matériau support, qui est soluble dans l'eau. Une fois la pièce achevée, le matériau support, semblable à de la cire, peut être enlevé par immersion et lavage au jet d'eau. Ainsi, dans le cas de la fabrication de structures treillis, même les poutres imprimées dans des plans parallèles au plateau (équivalent 0°) sont imprimables. De plus, la multitude de résines photosensibles utilisables, aux propriétés mécaniques diverses, permettent l'impression directe de matériaux architecturés composites.

Ce procédé possède cependant quelques inconvénients : les photopolymères sont très coûteux et leurs propriétés mécaniques peuvent évoluer dans le temps. A l'exemple du VeroWhite, pour lequel les effets du

vieillessement sont tels que celui-ci perd rapidement en ductilité, tandis que sa contrainte à la rupture tend à augmenter, d'après l'étude empirique de Bass *et al.* [192]. L'une des explications avancées pour la dégradation des photopolymères serait l'exposition à du rayonnement ultraviolet (notamment le rayonnement solaire), causant une réaction des radicaux avec l'oxygène (présent par diffusion) ou d'autres réactifs [20].

2.2.3 Fabrication des treillis hybrides métal-polymère

Contrairement aux treillis composites polymère-polymère, la fabrication de treillis hybrides métal-polymère ne peut pas être effectuée en une seule opération. Les treillis métalliques sont d'abord produits par le procédé SLM, puis sont hybridés dans un second temps. Dans notre cas, l'opération d'hybridation consiste à couler un polymère liquide (ici un mélange de résines polyuréthane, défini dans ce chapitre à la section "Matériaux") à l'intérieur du treillis à l'aide d'un moule afin de le remplir intégralement.

Les moules, conçus en deux parties amovibles pour faciliter le démoulage, sont fabriqués à l'aide d'une imprimante par dépôt de filament de polymère fondu (PLA). Les dimensions de l'empreinte sont légèrement supérieures à celles de la structure, de manière à pouvoir apposer préalablement un adhésif de Téflon qui adhère aux parois du moule mais pas à l'échantillon fabriqué, permettant un démoulage plus aisé. Un moule type est présenté en Figure 2.4.

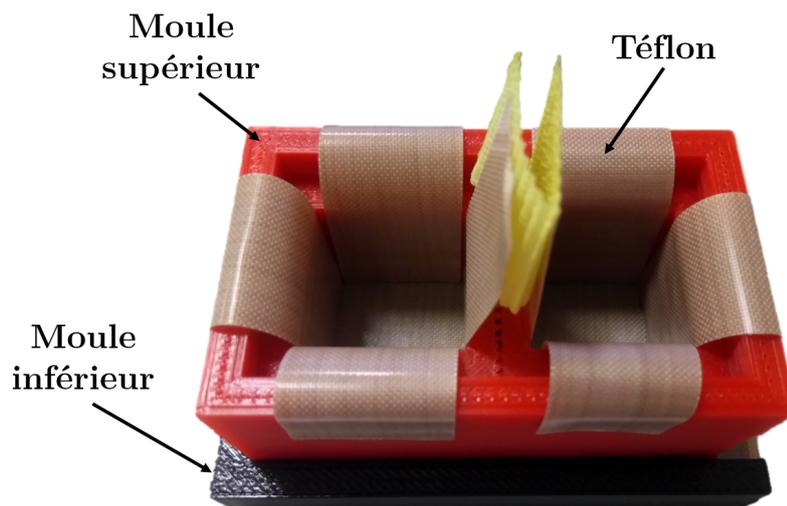


FIGURE 2.4 – Moule pour hybridation de structure treillis

Une fois la structure positionnée dans le moule, le polymère liquide est coulé très lentement afin d'éviter la formation de bulles, puis le moule est rapidement placé dans une pompe à vide pour une durée d'au minimum 4h à une pression relative de -0.2 bar. Celle-ci permet l'évacuation des gaz produits lors de la polymérisation, visible sur la Figure 2.5.

Une fois la polymérisation achevée, le démoulage se fait en séparant les deux parties du moule, puis en éjectant les échantillons hors des empreintes.

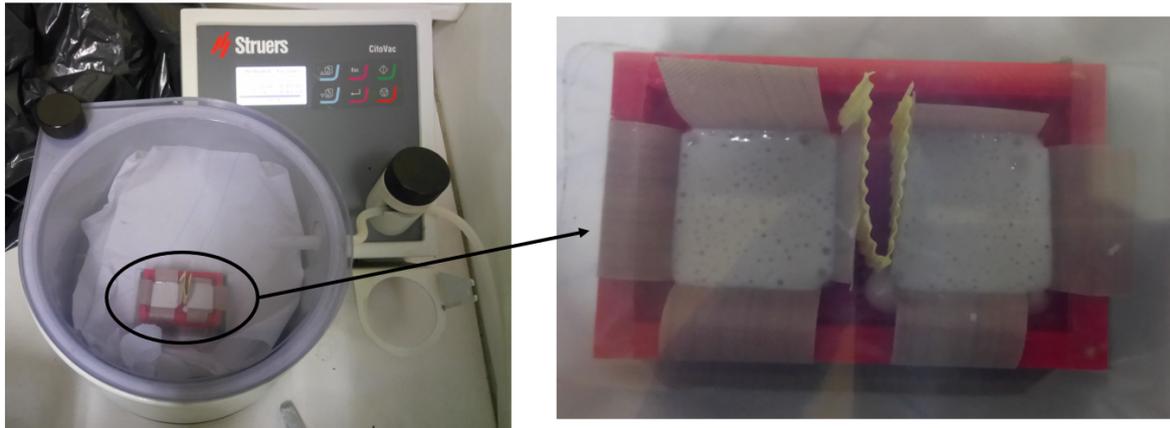


FIGURE 2.5 – Passage à la pompe à vide, remontée des bulles

2.3 Matériaux

Différents matériaux ont été utilisés durant cette thèse, notamment pour la fabrication de structures treillis imprimées en 3D. Pour l'impression de treillis métallique, le TA6V a été utilisé principalement pour sa disponibilité importante et la maîtrise de la paramétrie machine par l'équipe du RMIT, permettant d'imprimer ce matériau avec un minimum de porosité et une bonne fidélité géométrique vis-a-vis du modèle CAO. Les structures métalliques imprimées par SLM sont associées à un élastomère, du polyuréthane, qui est coulé dans la structure a posteriori à l'aide de moules également imprimés. Pour l'impression polymères, deux résines ont été utilisées, identifiées ici par leur nom commercial : le VeroWhite (polymère rigide) et le TangoBlack+ (élastomère).

2.3.1 Ti-6Al-4V

Le TA6V (Ti-6Al-4V, aussi nommé Ti64) est un alliage de titane très utilisé dans l'industrie, et notamment par l'industrie aéronautique pour ses propriétés mécaniques spécifiques rapportées à sa masse volumique, sa tenue à haute température, sa bonne résistance à la corrosion et au fluage. Il est également utilisé dans le domaine bio-médical pour la production de prothèse osseuse, le titane étant particulièrement biocompatible [193]. La poudre métallique utilisée pour l'impression, fournie par TLS Technik, est obtenue par atomisation. La distribution granulométrique de poudres est caractérisée à partir de la norme ISO 9276-2 :2014 [194]. Sa composition est donnée dans le tableau 2.2.

TABLEAU 2.2 – Composition chimique de la poudre de Ti-6Al-4V

Composé (%m)	Ti	N	C	H	Fe	O	Al	V
Poudre utilisée	reste	0.006	0.008	0.001	0.17	0.13	6.35	3.96
Norme	reste	max. 0.05	max. 0.08	max. 0.015	max. 0.4	max. 0.2	5.5-6.75	3.5-4.5

La simulation numérique de structures en TA6V nécessite de connaître le comportement mécanique de l'alliage après impression. Afin d'identifier la loi de comportement du TA6V imprimé, 4 éprouvettes ont été réalisées par procédé SLM, puis testées en traction. Le procédé SLM produit des micro-structures dont la composition varie en fonction de plusieurs facteurs, induisant une anisotropie des propriétés élastoplastiques pouvant être importante [195]. L'orientation de l'éprouvette peut avoir une forte influence sur les

propriétés mécaniques mesurées, comme c'est le cas pour la déformation à rupture et dans une moindre mesure le module d'élasticité et la limite d'élasticité. Pour ces travaux, le TA6V a été testé sur des éprouvettes orientées verticalement (à 90° du plateau). L'évaluation des propriétés mécaniques du TA6V imprimé a été réalisée selon la norme ASTM F3122-14 [196], faisant lui-même référence à la norme ASTM E8/E8M [197] notamment concernant la géométrie des éprouvettes de traction. Celles-ci ont été fabriquées en forme d'haltère, dont la longueur utile L est de 45 mm, la largeur W de 4.94 mm et l'épaisseur T de 4.9 mm. La déformation a été mesurée à l'aide d'un extensomètre. La vitesse de déplacement du mors supérieur est fixée à 0.5 mm/min.

Une loi de comportement élasto-plastique avec écrouissage isotrope non-linéaire à été choisie pour modéliser le comportement de l'alliage de titane. Le module élastique et la limite d'élasticité ont été mesurés sur la partie linéaire de la courbe contrainte-déformation vraie. Les coefficients de la loi d'écrouissage ont été identifiés en comparant la simulation à la courbe expérimentale. Cette comparaison est la courbe contrainte vraie - déformation plastique cumulée, tel qu'illustré sur la Figure 2.6.

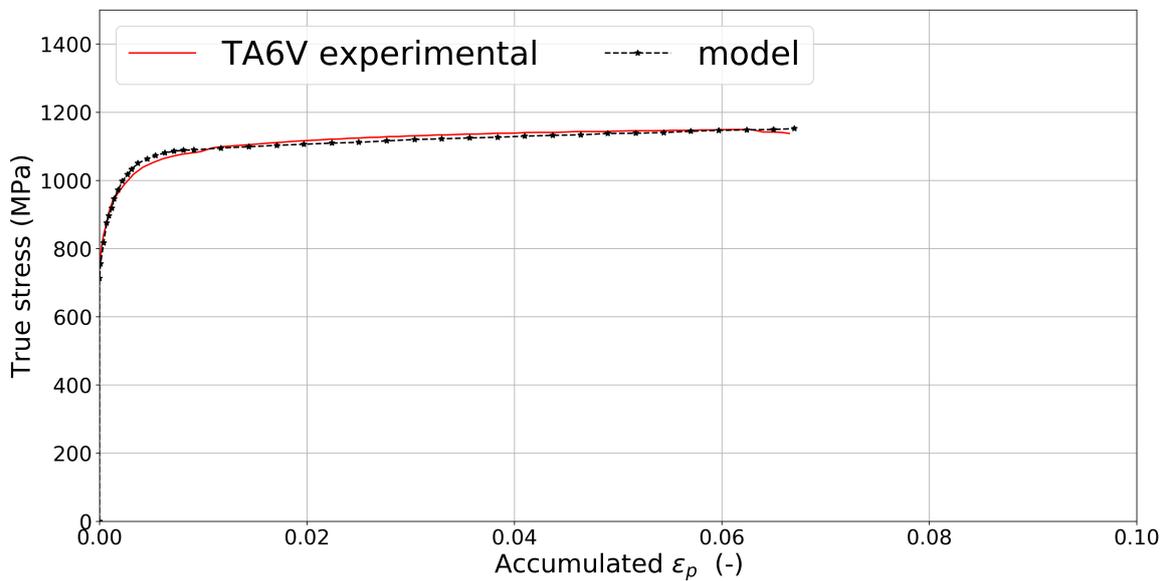


FIGURE 2.6 – Courbe contrainte vraie - déformation plastique cumulée du TA6V, loi de comportement identifiée

La loi d'écrouissage identifiée prend la forme décrite par l'équation 2.1, dont les paramètres sont listés dans le tableau 2.3.

$$R = R_0 + \sum_i^2 Q_i (1 - e^{-b_i p}) \tag{2.1}$$

TABLEAU 2.3 – Paramètres de la loi d'écrouissage du TA6V

TA6V	R_0 (MPa)	Q_1 (MPa)	b_1 (-)	Q_2 (MPa)	b_2 (-)
	759.0	331.0	332.0	259.0	5.8

La masse volumique du TA6V est de 4.43 g/cm³, en considérant un taux volumique de porosité pouvant valoir jusqu'à 3% (procédé optimisé), la masse volumique du TA6V imprimé est prise égale à 4.30 g/cm³.

Pour les simulations en élasticité linéaire, les propriétés mécaniques du TA6V sont considérées isotropes par hypothèse, leurs valeurs sont données dans le tableau 2.4.

TABLEAU 2.4 – Paramètres matériaux du TA6V en élasticité linéaire

TA6V (linéaire)	E_0 (MPa)	ν (-)
	97700.0	0.30

2.3.2 Polyuréthane

En association du TA6V, le choix de la matrice élastomère s'est portée sur une résine polyuréthane de la marque "Résines et Moulages". Celle-ci est obtenue par mélange de deux composants et nécessite un délai de polymérisation d'au moins 24h à température ambiante. Les composants sont une partie A, du cyanurate de mélamine et une partie B, du diisocyanate de toluène, le mélange se fait selon un rapport massique de 100:76. Les éprouvettes sont obtenues par moulage, à l'aide de moules spécifiques conçus pour accueillir les structures treillis à remplir, dont un exemple est présenté sur la Figure 2.4. Une fois le moule rempli du mélange de résines, celui-ci est rapidement placé dans une pompe à vide afin d'extraire l'air et éviter la formation de bulles.

Afin d'identifier les propriétés mécaniques de ce polymère, 3 éprouvettes cubiques de dimensions 20*20*20 mm ont été moulées, puis testées en compression sur une machine d'essais Instron 5581 équipée d'une cellule de force de 5 kN. Une vitesse de déformation de 0.001/s a été imposée sur la face supérieure des éprouvettes, les plateaux de compression ayant été préalablement lubrifiés à la graisse afin de réduire les frottements. La courbe contrainte-déformation du PU est donnée en Fig. 2.7.

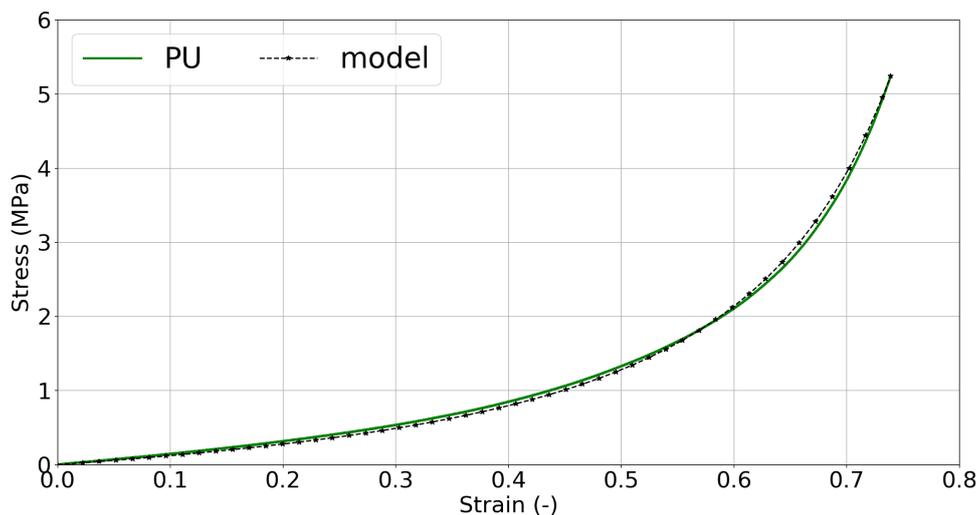


FIGURE 2.7 – Courbe contrainte déformation du polyuréthane, loi de comportement identifiée

Une loi de comportement du type Arruda-Boyce [198] a été utilisée pour modéliser le comportement hyperélastique du polyuréthane. Ce modèle, basé sur la physique des polymères, repose sur une modélisation en chaîne avec une distribution de chaînes selon 8 directions, correspondant aux 8 sommets d'un cube

inscrit dans une sphère de diamètre unitaire. Le modèle mis en oeuvre ici dispose d'un paramètre supplémentaire, d , pour le traitement de l'incompressibilité. Le modèle utilisé est décrit dans l'équation (2.2) par la densité d'énergie de déformation.

$$W(I_1, I_3) = nk\theta \left[\frac{1}{2}(I_3 - 3) + \frac{1}{20N}(I_1^2 - 9) + \frac{11}{1050N^2}(I_1^3 - 27) + \frac{19}{7000N^3}(I_1^4 - 81) + \frac{519}{673750N^4}(I_1^5 - 243) \right] + \frac{d}{2} [(I_3^2 - 1)/2 - \log(I_3)] \quad (2.2)$$

Avec I_1 et I_3 les premier et troisième invariants du tenseur des déformations de Green-Lagrange, $nk\theta = \mu$ le module caoutchouteux du matériau (fonction de la densité de chaîne n , de la constante de Boltzmann k et de la température θ) et $\sqrt{\lambda} = N$ le nombre de liens rigides connectés dans une chaîne. Les paramètres de la loi de comportement ainsi identifiés sont donnés dans le tableau 2.5.

TABLEAU 2.5 – Paramètres identifiés de la loi de comportement du PU

PU	μ (MPa)	λ (-)	d (-)
	0.37	9.00	0.40

La masse volumique de ce polyuréthane a été mesurée à l'aide d'une balance à densité et s'élève à 1.07 g/cm^3 . Pour les simulations en élasticité linéaire, les propriétés matérielles sont celles données dans le tableau 2.6. Le module d'Young est identifié à partir de la partie linéaire initiale de la courbe contrainte-déformation.

TABLEAU 2.6 – Paramètres matériaux du PU en élasticité linéaire

PU (linéaire)	E_0 (MPa)	ν (-)
	1.64	0.499

2.3.3 VeroWhite

Le VeroWhite est une résine photosensible développée par Stratasys. Il s'agit d'une formule acrylique contenant : de l'isobornyl acrylate, des monomères acrylates, de l'uréthane acrylate, de l'époxy acrylate, des oligomères acrylates et des photo-initiateurs. La masse volumique du VeroWhite imprimé est donnée égale à 1.175 g/cm^3 , selon la fiche technique du fabricant [199]. Ses propriétés mécaniques ont été identifiées par des tests de traction sur éprouvettes imprimées, suivant les préconisations de la norme ASTM D638 [200]. 4 éprouvettes en haltères (types V) ont été utilisées, dont la longueur utile L est de 10 mm, la largeur W de 3.18 mm et l'épaisseur T de 3 mm. La vitesse de déformation a été fixée à 0.005/s. Une courbe contrainte-déformation d'une éprouvette de VeroWhite est donnée en Figure. 2.8.

Une loi de comportement élasto-plastique avec écrouissage isotrope non-linéaire a également été choisie pour modéliser le comportement mécanique du VeroWhite, selon l'équation 2.3.

$$R = R_0 + \sum_i^3 Q_i (1 - e^{-b_i p}) \quad (2.3)$$

Les paramètres matériaux identifiés par comparaison entre la simulation et la courbe contrainte-déformation expérimentale sont listés dans le tableau 2.7.

Pour les simulations en élasticité linéaire, les propriétés utilisées sont listées dans le tableau 2.8.

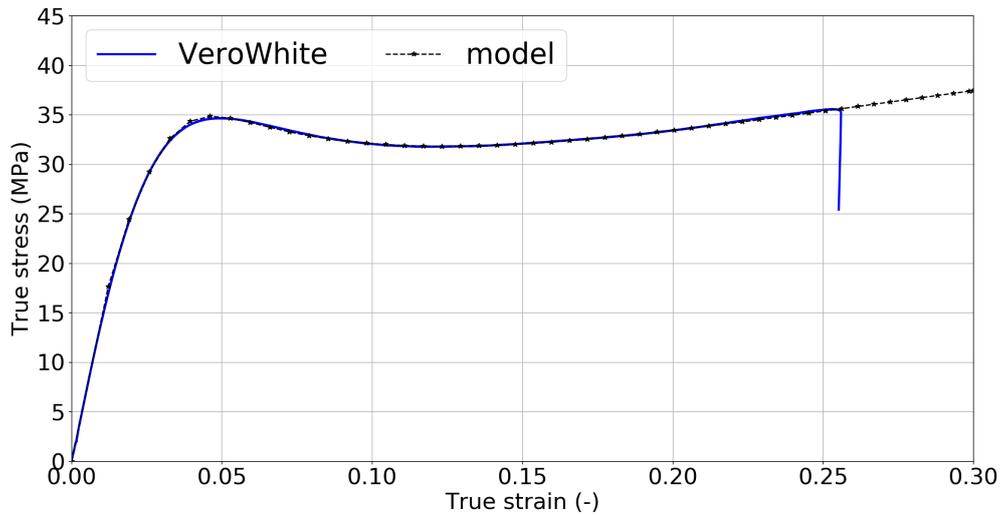


FIGURE 2.8 – Courbe contrainte déformation du Verowhite, loi de comportement identifiée

TABLEAU 2.7 – Paramètres de la loi d'écroutissage du VeroWhite

VeroWhite	R_0 (MPa)	Q_1 (MPa)	b_1 (-)	Q_2 (MPa)	b_2 (-)	Q_3 (MPa)	b_3 (-)
	20.0	19.3	137.7	-39.6	10.1	51.5	4.3

2.3.4 TangoBlack+

Le TangoBlack+ (TB+) est une résine photosensible développée par Stratasys. Il s'agit d'une formule acrylique contenant : des oligomères d'uréthane acrylate, de l'Exo-1,7,7-triméthylbicyclo [2.2.1] hept-2-yl acrylate, des oligomères de méthacrylate, de la résine polyuréthane et des photo-initiateurs. La masse volumique du TangoBlack+ imprimé est donnée égale à 1.145 g/cm^3 , selon la fiche technique du fabricant [201]. La température de transition vitreuse du TB+ est estimée à 2°C [202].

Ses propriétés mécaniques ont été identifiées par des tests de tractions sur éprouvettes imprimées, suivant les préconisations de la norme ASTM D638 [200]. 4 éprouvettes de types IV ont été utilisées, dont la longueur utile L est de 25 mm, la largeur W de 3 mm et l'épaisseur T de 1.6 mm. La vitesse de déformation a été fixée à 0.005/s. Une courbe contrainte-déformation d'une éprouvette de TangoBlack+ est donnée en Figure. 2.9.

Afin de modéliser le caractère hyperélastique du TangoBlack+, une loi de comportement du type Arruda-Boyce [198] a été choisie. Les paramètres matériaux identifiés pour cette loi sont listés dans le tableau 2.9.

Pour les simulations en élasticité linéaire, les propriétés utilisées sont listées dans le tableau 2.10. Le TB+ présentant une élasticité non-linéaire, le module d'Young est mesuré sur une plage linéaire en début de courbe contrainte-déformation.

TABLEAU 2.8 – Paramètres matériaux du VeroWhite en élasticité linéaire

VeroWhite (linéaire)	E_0 (MPa)	ν (-)
	1450.0	0.35

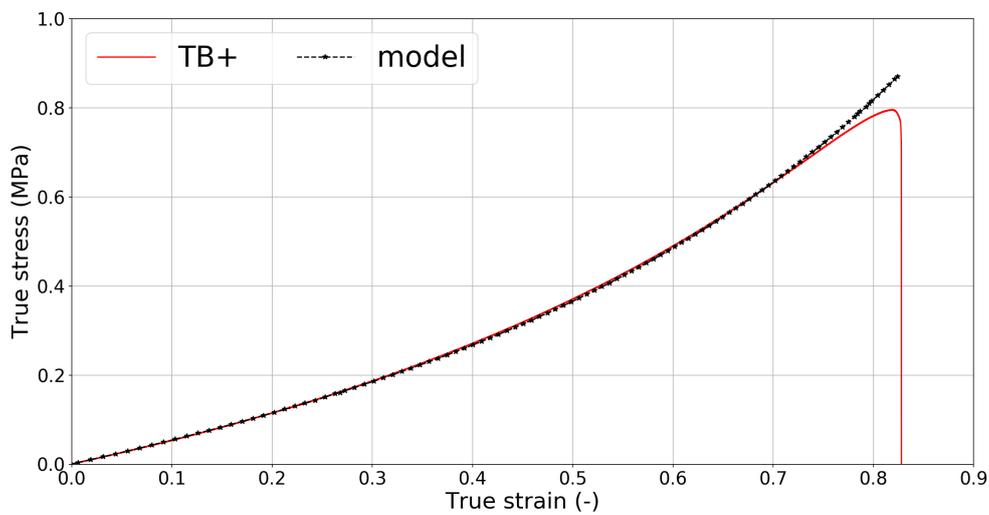


FIGURE 2.9 – Courbe contrainte-déformation du TangoBlack+, loi de comportement identifiée

TABLEAU 2.9 – Paramètres identifiés de la loi de comportement du TB+

TangoBlack+	μ (MPa)	λ (-)	d (-)
	0.155	2.87	0.30

TABLEAU 2.10 – Paramètres matériaux du TangoBlack+ en élasticité linéaire

TangoBlack+ (linéaire)	E_0 (MPa)	ν (-)
	0.65	0.499

2.4 Caractérisation mécanique

2.4.1 Essais mécaniques

L'identification du comportement et des propriétés mécaniques des matériaux et des structures étudiés dans ces travaux passe par des essais expérimentaux. Une partie de ces expériences ont été réalisées au laboratoire PIMM, et le reste dans les locaux de la RMIT University. Concernant les expérimentations réalisés au PIMM, les essais mécaniques ont été effectués à l'aide d'une machine Instron 5581 présentée sur la Figure 2.10. Celle-ci peut s'équiper avec deux cellules de force, 5 kN ou 50 kN, dépendamment de la nature du matériau ou de la structure à tester. Pour les essais de traction (RMIT), la déformation de l'éprouvette est mesurée à l'aide d'un extensomètre, tandis que pour les essais de compression (PIMM) celle-ci est calculée à partir du déplacement du plateau mobile.



FIGURE 2.10 – Machine d'essais utilisée pour la caractérisation expérimentale

En fonction du matériau à tester, les conditions d'essais (géométrie des éprouvettes, vitesse de déformation imposée, ...) suivent les préconisations des normes correspondantes. Pour l'identification des propriétés mécaniques des matériaux métalliques, la norme ASTM E8/E8M [197] est appliquée, alors que pour les propriétés en traction des polymères, il s'agit de la norme ASTM D638 [200].

En revanche, pour certains matériaux architecturés tels que les treillis et treillis hybrides, pour lesquels aucune norme n'existe à ce jour, les conditions d'essais ont été choisies de manière à pouvoir comparer ceux-ci équitablement. La vitesse de déformation en compression $\dot{\epsilon}$ est choisie égale à 0.001/s, ce qui pour nos échantillons dont les dimensions sont comprises entre 9 et 30 mm, donne une vitesse de déplacement du

plateau comprise entre 0.54 et 1.8 mm/min, conformément aux préconisations des normes relatives à la compression de matériaux polymères (ASTM D695 [203]), ou à la compression de matériaux métalliques (ASTM E9 [204]) pour les treillis en alliage de titane. Lors d'essais comparatifs entre treillis et treillis hybrides, les matériaux en contact avec les plateaux ne présentent pas les mêmes coefficients de frottement. Pour obtenir des conditions aux limites équivalentes, les plateaux de compression sont lubrifiés à la graisse, pouvant occasionner un léger glissement en début d'essai. Le glissement est retiré des courbes présentées dans ce manuscrit.

2.4.2 Calcul de la dissipation d'énergie

La dissipation d'énergie est une problématique récurrente dans de nombreux domaines industriels (automobile, aéronautique, packaging, etc). De manière générale, l'enjeu réside dans la nécessité de transformer une forme d'énergie en une autre, afin de pouvoir plus aisément la dissiper. Dans le domaine automobile par exemple, la crash-box [205] est une pièce mécanique (voir Figure 2.11) qui a pour fonction, en cas de forte collision, de dissiper le différentiel d'énergie cinétique du véhicule en la stockant sous forme de déformation plastique de la pièce, et/ou en la transformant en énergie thermique. Pour ce genre d'applications, on cherche ainsi à maximiser l'énergie dissipée mécaniquement sous forme de déformation plastique.

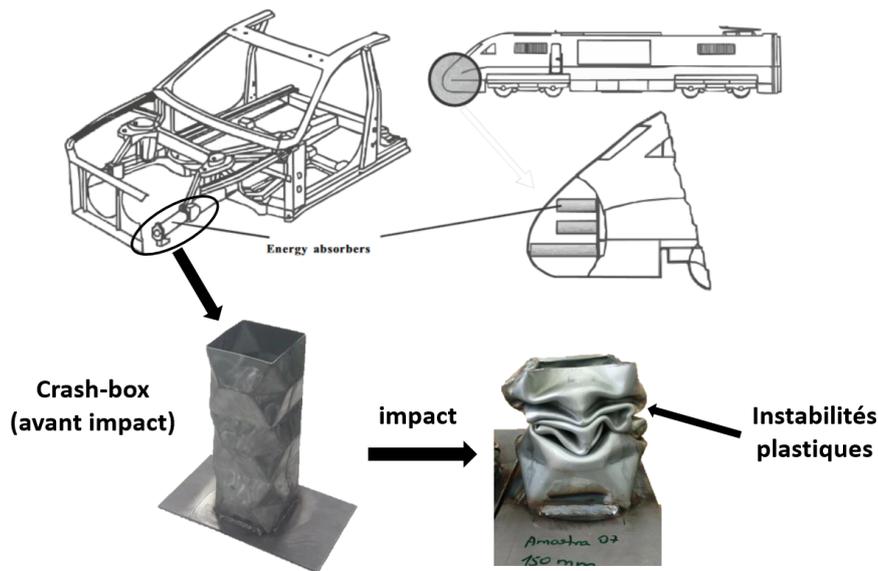


FIGURE 2.11 – Positionnement et géométrie d'une crash-box, mode de déformation plastique. Illustrations issues de [205] et [206]

L'énergie mécanique dissipée lors de la déformation d'un matériau élastoplastique est définie comme l'intégrale de la courbe contrainte/déformation évaluée jusqu'à une déformation finale, notée ϵ_f . Elle correspond au travail plastique total pour un chargement monotone. L'énergie dissipée se calcule selon l'équation (2.4), dans laquelle ϵ est la déformation appliquée et σ est la contrainte induite sur la pièce mécanique :

$$E_d(\epsilon) = \int_0^{\epsilon_f} \sigma(\epsilon) d\epsilon \quad (2.4)$$

Afin de pouvoir comparer la capacité de dissipation de différents ensembles mécaniques, il existe des critères d'évaluation tel que l'énergie spécifique dissipée (SEA) qui tient compte de la masse afin d'optimiser

le ratio énergie dissipée / masse embarquée. Cette quantité se calcule selon la relation 2.5, dans laquelle m est la masse de la pièce :

$$SEA = \frac{\int_0^{\varepsilon_f} \sigma(\varepsilon) d\varepsilon}{m} \quad (2.5)$$

Un autre critère, l'efficacité d'absorption (AE), notée η , tient compte de l'efficacité de dissipation vis-à-vis d'un absorbeur idéal. Celui-ci se calcule comme le rapport entre l'énergie effectivement dissipée et celle dissipée par un absorbeur idéal ayant le même pic de contrainte σ_p , explicitée sur la Figure 2.12.

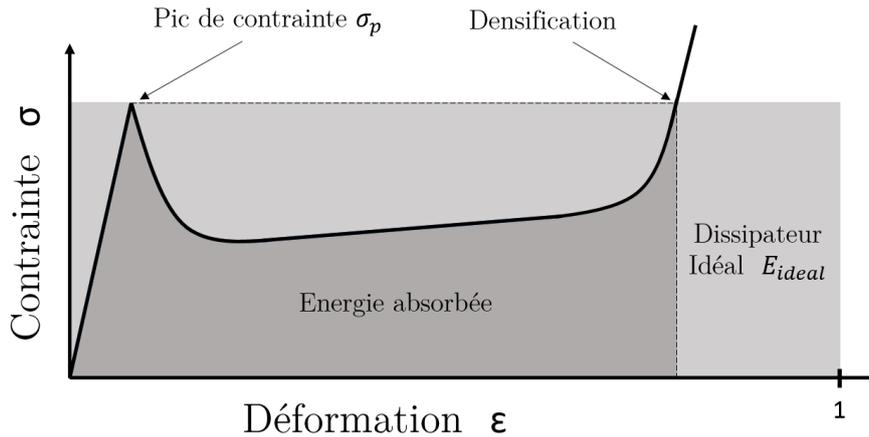


FIGURE 2.12 – Comparaison entre énergie dissipée et dissipateur idéal

$$\eta = \frac{\int_0^{\varepsilon_f} \sigma(\varepsilon) d\varepsilon}{\sigma_p \cdot 1} = \frac{E_D}{E_{ideal}} \quad (2.6)$$

2.4.3 Imagerie *in-situ*

Lors d'un essai mécanique sur un treillis complexe, l'observation de la déformation des poutres internes peut être rendue compliquée : seules les poutres en surface peuvent être observées. Dans le cas des treillis hybrides, pour lesquels les poutres sont cachées par un matériau opaque, aucune déformation du treillis ne peut être observée. L'observation des mécanismes de déformations internes des treillis doit alors se faire par l'intermédiaire d'une méthode différente.

La tomographie par rayons X est une technique d'imagerie permettant de voir "au travers" de certains matériaux et permet la reconstruction 3D d'un échantillon. En balayant à 360° l'échantillon par un faisceau de rayons X, il est possible de reconstituer une image volumique de celui-ci, comme l'illustre la Figure 2.13.

La source de rayons X émet un rayonnement dont l'intensité dépend de la tension d'accélération (en kV). Ce rayonnement se propage au travers des matériaux de l'éprouvette jusqu'à atteindre le récepteur avec une certaine atténuation, principalement due à l'absorption. C'est le contraste d'absorption entre deux matériaux qui permet de les distinguer. L'absorption étant dépendante du numéro atomique de l'élément traversé et de sa masse volumique, deux matériaux dont le numéro atomique est proche seront difficiles à discerner. Le rayonnement perçu par le récepteur est alors converti dans le domaine du visible par un scintillateur, puis numérisé par un capteur, sous la forme d'une image appelée radiographie. Un ensemble de radiographies prises en balayant l'échantillon à 360° permet, par une transformation inverse, de reconstituer une section (ou *slice*) de l'échantillon traversé. Le volume peut alors être reconstitué en empilant

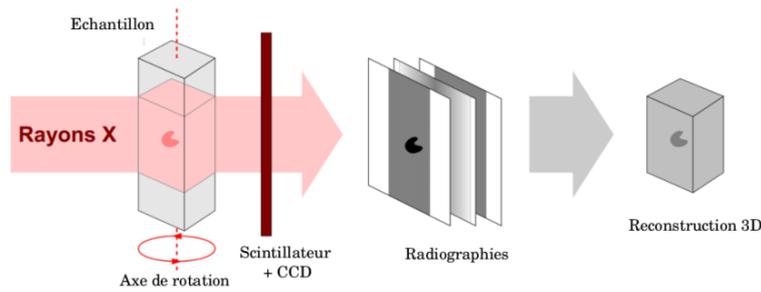


FIGURE 2.13 – Principe de fonctionnement d’un tomographe à rayons X pour la reconstitution d’un volume 3D. Illustration issue de [207]

les sections (on parle de *stack*). Dans certains tomographes, il est possible de placer un dispositif d’essais *in situ*, permettant de mettre l’échantillon sous contraintes mécaniques pendant l’acquisition volumique. C’est le cas du laboratoire MATEIS à Lyon, qui dispose de plusieurs tomographes dont un v|tome|x s produit par la société GE Sensing & Inspection Technologies Phoenix X|ray (voir Figure 2.14). Ce système dispose d’un tube RX de 160 kV avec une taille de foyer pouvant descendre jusqu’à 1 μm .



FIGURE 2.14 – Tomographe à rayons X v|tome|x s du MATEIS

Pour nos observations, un dispositif de compression mécanique a été placé à l’intérieur de l’enceinte du tomographe pour mettre en contrainte des treillis simples et hybrides. L’une des difficultés liée à l’usage de ce dispositif mécanique réside dans sa cellule de force, limitée à 2 kN. Les dimensions des échantillons ont donc été adaptées et sont composées de cubes de 3 cellules unitaires de côté. Dans notre cas, les treillis métalliques absorbent largement plus le rayonnement que la matrice polymère, permettant de les distinguer aisément. La tension source a été prise à 100 kV et la taille de voxel à 9 μm . Les volumes ont été reconstitués à partir de 1200 radiographies pour chaque échantillon, soit une radiographie tous les 0.3°. Les acquisitions volumiques ont été faites pour différents niveaux de déformation des échantillons : à l’état initial ($\epsilon = 0$), dans la zone élastique ($\epsilon \approx 0.05$), après endommagement plastique ($\epsilon \approx 0.17$) et enfin, pour les échantillons hybrides seulement, à grande déformation ($\epsilon \approx 0.35$). Le traitement des acquisitions s’est fait grâce aux logiciels ImageJ pour l’édition des sections et Paraview pour le visionnage 3D des volumes

reconstitués. Les treillis ainsi reconstitués sont présentés dans ce manuscrit par des sections volumiques mettant en lumière les éléments d'intérêts (mécanisme de déformation, ruptures).

L'édition des sections à l'aide du logiciel ImageJ a pour but de faciliter l'observation des déformations des poutres, en soustrayant aux images les artefacts de mesure, les particules résiduelles mais également une partie de la poudre semi-fondue attachée aux poutres. Le traitement comprend l'utilisation de différents outils, listés ici dans l'ordre de leur application sur l'empilement de sections. L'effet de ces opérations sur une section est illustré sur la Figure 2.15.

- "Binarization" : étape de seuillage, sépare les pixels en deux classes, noir (le vide ici) et blanc (la structure),
- "Close" : lisse les contours en refermant les petites aspérités,
- "Fill holes" : remplit les porosités et les trous (pixels noirs à l'intérieur d'un amas fermé de pixels blancs),
- "Erode" : lisse les contours à la manière d'une érosion et permet de supprimer les petites aspérités de surface,
- "Dilate" : dilate les contours et compense l'érosion.

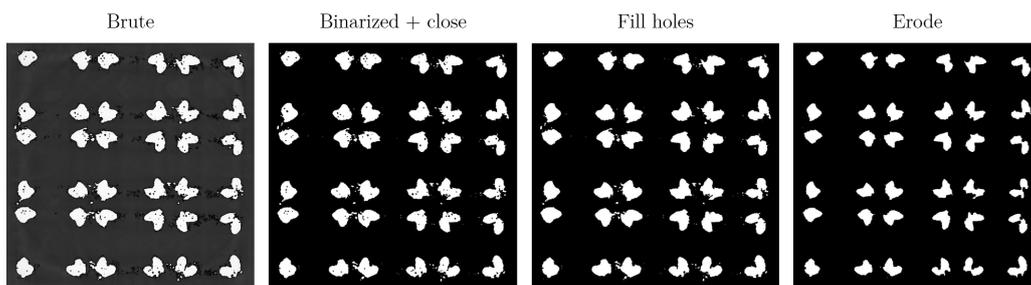


FIGURE 2.15 – Édition des sections, dans l'ordre d'application

La différence entre un treillis reconstitué avant et après édition est montrée sur la Figure 2.16.

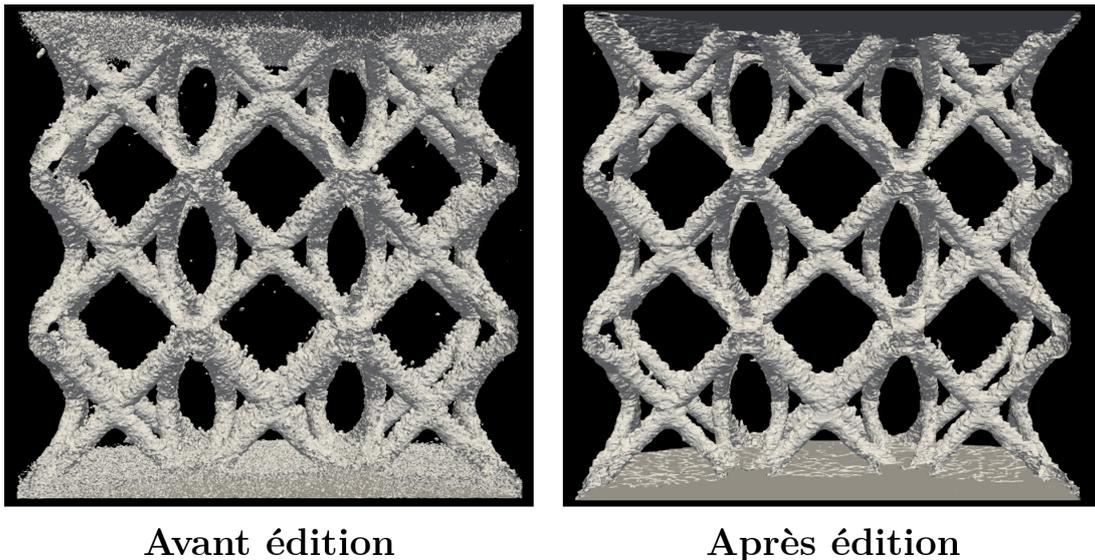


FIGURE 2.16 – Treillis reconstitué, avant et après édition

2.5 Stratégie numérique

Afin de rendre possible l'usage de matériaux architecturés complexes dans l'industrie, de la manière la plus simplifiée pour les concepteurs, l'existence de lois de comportement prêtes à l'emploi est une nécessité.

L'usage d'une stratégie d'homogénéisation va dans ce sens : remplacer la micro-structure complexe d'une pièce par un milieu homogène équivalent, permet de réduire la complexité des calculs par éléments finis, réduisant drastiquement le nombre de degrés de libertés, et ainsi le temps de calcul nécessaire. Dans ces travaux, l'étude des propriétés mécaniques des treillis et treillis hybrides se fera via une stratégie d'homogénéisation numérique par éléments finis, appliquant des conditions aux limites périodiques sur des cellules unitaires, mais également avec des calculs à champs complets afin de comparer les résultats obtenus. La rupture n'est pas prise en compte dans les modèles numériques utilisés dans ces travaux. Le code élément fini Z-Set¹, développé par l'École des Mines de Paris, l'ONERA et Northwest Numerics, est utilisé.

L'étude du comportement mécanique des matériaux architecturés s'est déroulé selon la stratégie décrite par la Figure. 2.17. Dans un premier temps, la génération géométrique des structures est effectuée à l'aide du logiciel de CAO Rhinocéros 3D et du plug-in Grasshopper. Les structures sont alors maillées par le logiciel Gmsh, le maillage résultant pouvant dès lors être importé dans Z-Set. Enfin, selon l'objectif (identification des propriétés élastiques, ou des propriétés élasto-plastiques), les calculs sont effectués sur le maillage, sur lequel des conditions aux limites périodiques sont appliquées. Ces étapes sont détaillées dans les sections suivantes.

2.5.1 Génération des structures

Le logiciel de CAO Rhinocéros 3D est utilisé pour générer les structures. Plus précisément, celui-ci est utilisé en association avec le plug-in Grasshopper, qui permet une conception paramétrique facilitée, de

1. <http://www.zset-software.com>

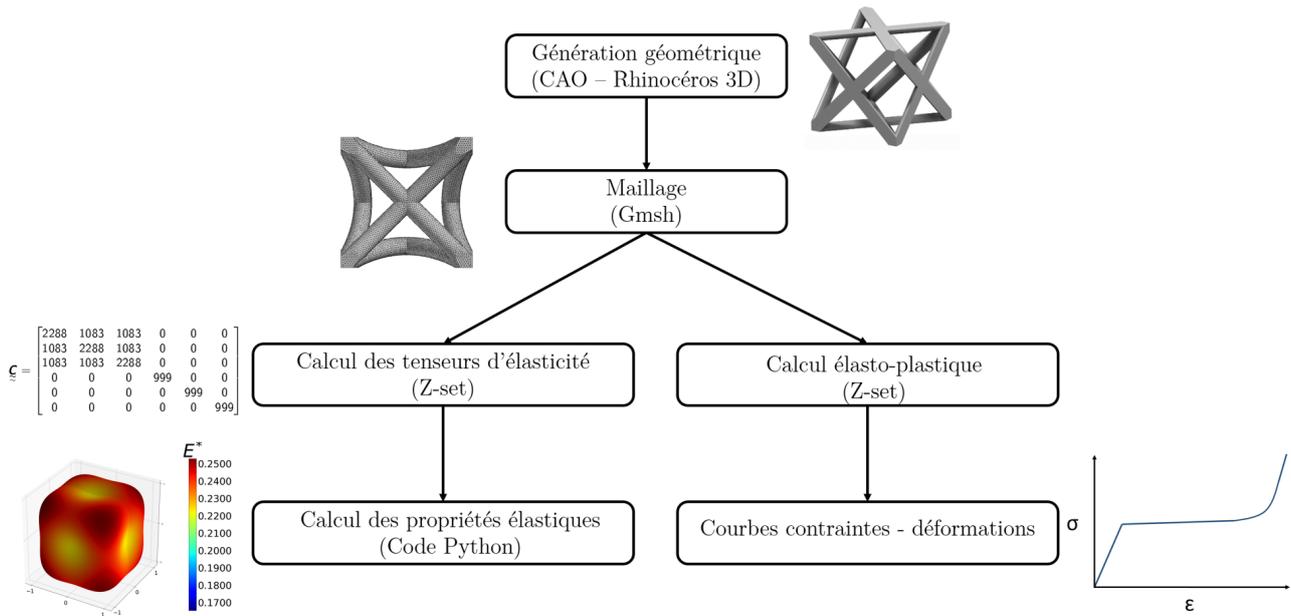


FIGURE 2.17 – Stratégie de calcul des propriétés mécaniques des treillis

par son aspect graphique.

La méthodologie de conception est (généralement) la suivante : un modèle filaire de la structure est d'abord réalisé, en liant des points par des droites/courbes. Le modèle filaire se voit alors attribuer une épaisseur, égale au diamètre des poutres, lequel est toujours constant au sein d'une structure dans ces travaux. Par une opération booléenne d'union, les différentes poutres sont assemblées en un seul volume. Enfin, afin de circonscrire la cellule unitaire à un cube de dimensions données, une opération booléenne d'intersection est appliquée entre le volume et un cube.

Les différentes étapes de la conception d'une cellule unitaire d'un treillis sont détaillées sur la Figure 2.18(a). L'exemple est celui d'une cellule FCC, qui est d'abord filaire (à gauche), puis volumique (au milieu) et enfin circonscrite à un cube (à droite). La construction sur Grasshopper nécessaire à l'obtention du treillis final est visible sur la Figure 2.18(b).

La fraction volumique de la cellule est alors mesurée en divisant son volume effectif par le volume du cube dans lequel elle est inscrite, permettant d'ajuster le diamètre des poutres afin d'obtenir une fraction volumique précise. Le volume correspondant peut alors être enregistré sous la forme d'un fichier géométrique au format STEP, compatible avec le logiciel de maillage Gmsh.

Enfin, la cellule unitaire hybride correspondante est réalisée en appliquant une opération booléenne de différence entre la structure et le cube dans lequel elle est inscrite (les volumes obtenus sont visibles sur la Figure 2.19). L'ensemble des deux volumes structure + matrice doit alors être enregistré au sein d'un même fichier STEP pour que le mailleur génère un maillage conforme à l'interface des volumes.

Afin de réduire le volume des fichiers utilisés et notamment de réduire le temps d'import du maillage dans le code éléments finis Z-set, seul $1/8^{\text{ème}}$ du volume des structures est généré, profitant des symétries des treillis utilisées, souvent cubiques. Le volume complet des structures est alors reconstitué par application de 3 symétries directement sur le maillage dans Z-Set.

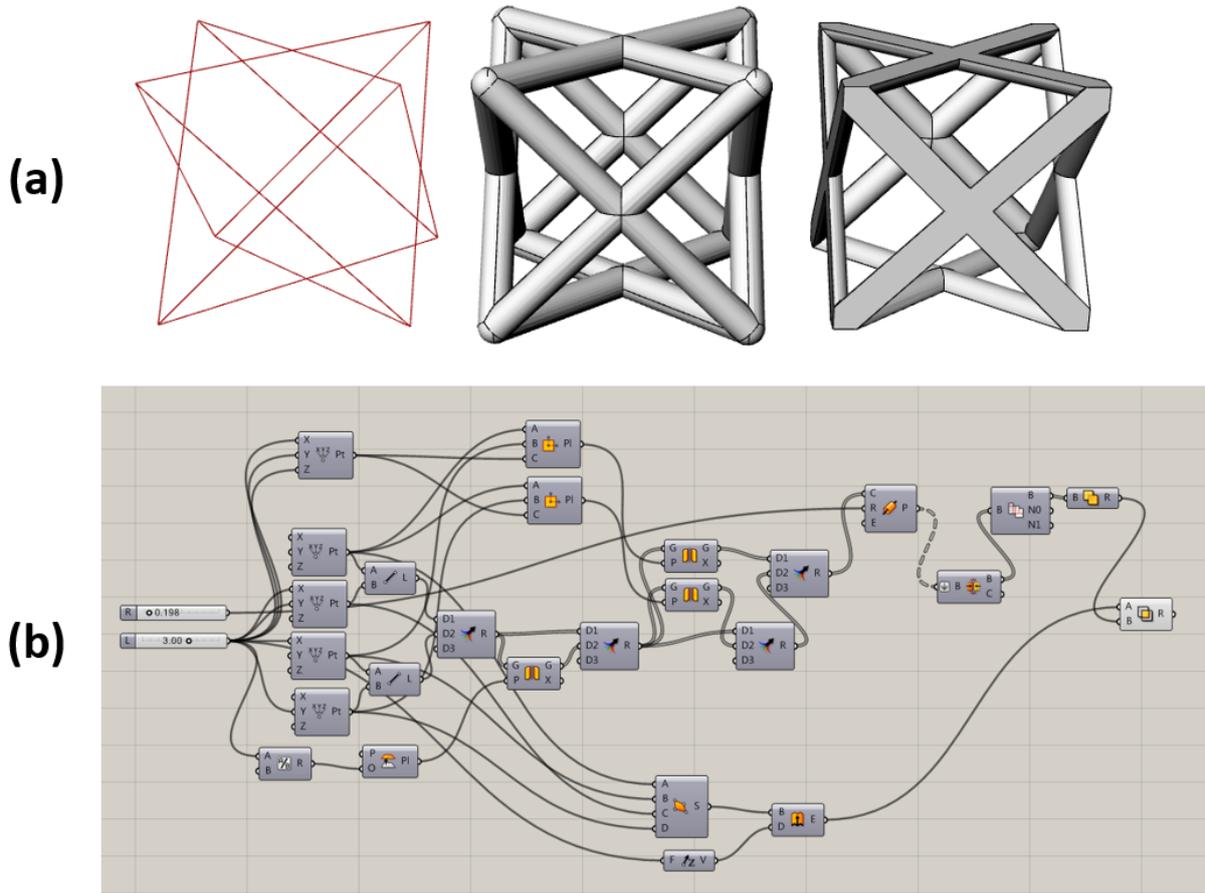


FIGURE 2.18 – (a) Etapes du design d’une cellule unitaire d’un treillis; (b) interface Grasshopper correspondante

2.5.2 Maillage

Afin de mailler les structures générées, le mailleur Gmsh [208] est utilisé. Celles-ci sont maillées avec des éléments tétraédriques quadratiques (ordre 2), soit des éléments de type C3D10.

Afin de garantir l’interaction entre le treillis et la matrice dans le cas des treillis hybrides, le maillage doit être conforme à l’interface, comme présenté sur la Figure 2.20. Dans les simulations de structures hybrides, l’interface est considérée parfaitement adhérente, le décollement de la matrice est considérée inexistant et n’est donc pas pris en compte. Cette hypothèse semble confirmée par l’étude numérique faite par [3], laquelle ne montre qu’une influence négligeable de l’adhérence des deux phases sur les propriétés mécaniques des treillis hybrides calculées numériquement.

Une étude de convergence de maillage est réalisée préalablement aux calculs numériques, afin de vérifier que la taille des éléments n’a pas d’influence sur le résultat du calcul par éléments finis. Un maillage est considéré exploitable lorsque celui-ci produit une erreur inférieure à 0.5% sur le calcul d’une propriété mécanique établie comme référence, vis-à-vis d’une solution excessivement raffinée exploitant au maximum les capacités de nos ordinateurs de calcul (Intel Xeon E5-2640 v4, fréquence CPU 2.4 GHz, RAM 300Gb).

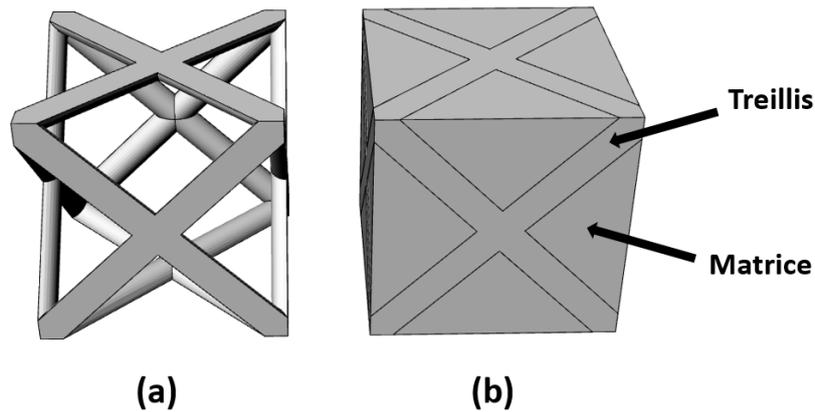


FIGURE 2.19 – (a) Cellule unitaire d'un treillis FCC; (b) cellule unitaire hybride

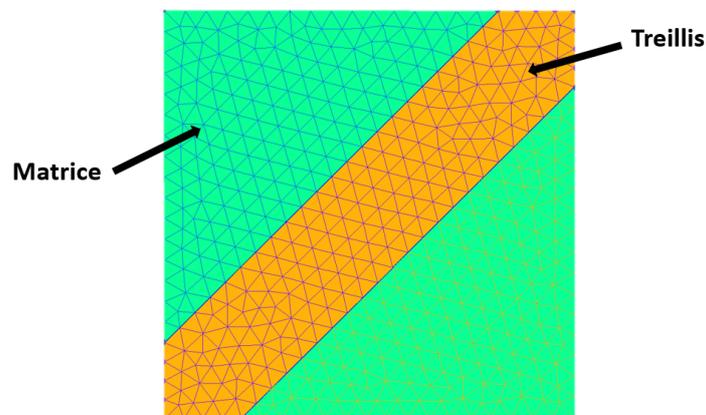


FIGURE 2.20 – Maillage conforme à l'interface treillis / matrice

2.6 Calculs des propriétés mécaniques effectives

Afin de calculer les propriétés mécaniques effectives des structures treillis et treillis composites/hybrides, une stratégie numérique d'homogénéisation est employée. Celle-ci s'appuie sur l'utilisation de conditions aux limites périodiques, et permet notamment le calcul des propriétés élastiques effectives par l'identification du tenseur des modules élastiques, décrit dans la première partie. Ce tenseur permet alors le calcul des propriétés élastiques pour toutes les directions de sollicitation, la méthode étant détaillée dans la seconde partie. La troisième partie expose les méthodes de simulation du comportement élasto-plastique, en détaillant le calcul des contraintes et des déformations.

2.6.1 Calculs des propriétés élastiques effectives par homogénéisation

Dans le but de calculer les propriétés élastiques de matériaux architecturés périodiques, l'homogénéisation numérique avec conditions aux limites périodiques [141] est l'option privilégiée dans ces travaux. En effet, parmi les conditions aux limites applicables sur une cellule d'un treillis pour calculer ses propriétés élastiques (Dirichlet, Neumann, mixtes, périodiques, ...), les conditions aux limites périodiques permettent de se rapprocher davantage des propriétés mécaniques effectives [145].

Les champs de contraintes et déformations locaux peuvent s'exprimer à partir de la loi de Hooke généralisée, en se plaçant sous une hypothèse de petites déformations :

$$\underline{\boldsymbol{\sigma}}(\underline{x}) = \underline{\boldsymbol{c}}(\underline{x}) : \underline{\boldsymbol{\epsilon}}(\underline{x}) \quad (2.7)$$

En considérant un élément de volume V représentatif (une cellule périodique dans notre cas), les tenseurs macroscopiques de contraintes et de déformations $\underline{\boldsymbol{\Sigma}}$ et $\underline{\boldsymbol{E}}$ sont définis par les moyennes spatiales sur V des champs de contraintes locale $\underline{\boldsymbol{\sigma}}$ et de déformations locale $\underline{\boldsymbol{\epsilon}}$.

$$\underline{\boldsymbol{\Sigma}} := \langle \underline{\boldsymbol{\sigma}} \rangle = \frac{1}{V} \int_V \underline{\boldsymbol{\sigma}} dV \quad (2.8)$$

$$\underline{\boldsymbol{E}} := \langle \underline{\boldsymbol{\epsilon}} \rangle = \frac{1}{V} \int_V \underline{\boldsymbol{\epsilon}} dV \quad (2.9)$$

A partir des équations (2.7), (2.8) et (2.9), on peut calculer le tenseur des modules élastiques effectifs $\underline{\boldsymbol{C}}$:

$$\underline{\boldsymbol{\Sigma}} = \underline{\boldsymbol{C}} : \underline{\boldsymbol{E}} \quad (2.10)$$

Pour les conditions aux limites périodiques, le champ de déplacement \underline{u} peut être dissocié en une partie donnée par le tenseur des déformations macroscopiques $\underline{\boldsymbol{E}}$, et un champ de fluctuation périodique \underline{v} pour tout point matériel \underline{x} de V , tel que :

$$\underline{u} = \underline{\boldsymbol{E}} \cdot \underline{x} + \underline{v} \quad \forall \underline{x} \in V \quad (2.11)$$

Le vecteur des fluctuations périodiques \underline{v} prend la même valeur sur deux points homologues \underline{x}^+ et \underline{x}^- de ∂V , représentés sur la Figure 2.21. De plus, le vecteur contrainte $\underline{t} = \underline{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \underline{n}$ remplit des conditions anti-périodiques en accord avec l'équilibre des forces, telles que décrit dans l'équation (2.12).

$$\begin{aligned} \underline{\boldsymbol{\sigma}}^+ \cdot \underline{n}^+ + \underline{\boldsymbol{\sigma}}^- \cdot \underline{n}^- &= \underline{\mathbf{0}} \\ \underline{v}^+ - \underline{v}^- &= \underline{\mathbf{0}} \end{aligned} \quad (2.12)$$

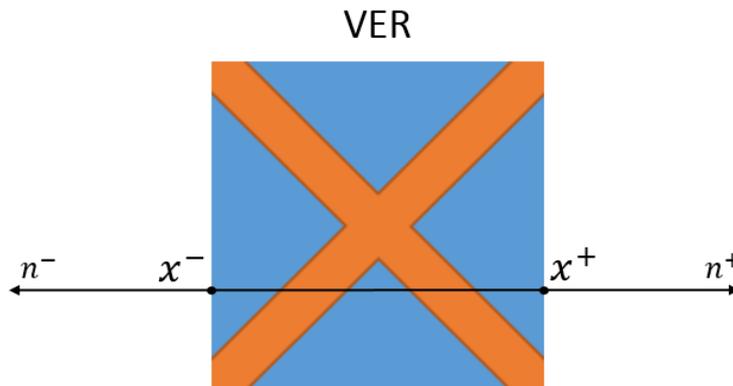


FIGURE 2.21 – Représentation de deux points homologues sur une cellule VER

Le tenseur des modules élastiques $\underline{\boldsymbol{C}}$ peut alors être entièrement identifié en appliquant successivement 6 chargements macroscopiques unitaires : 3 extensions pures et 3 cisaillements purs.

Le tenseur des modules élastiques est identifié en appliquant la déformation macroscopique $\underline{\mathbf{E}}$, de sorte qu'en utilisant la notation de Voigt :

$$\begin{bmatrix} \Sigma_{11} \\ \Sigma_{22} \\ \Sigma_{33} \\ \Sigma_{23} \\ \Sigma_{31} \\ \Sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ E_{33} \\ 2E_{23} \\ 2E_{31} \\ 2E_{12} \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

Dans le cas où le volume considéré présente des symétries géométriques, certains coefficients du tenseur des modules élastiques sont alors égaux, réduisant le nombre de calculs nécessaires à l'identification complète du tenseur. Dans ces travaux, la plupart des structures présentent une symétrie cubique, ainsi leur identification complète se réduit à 3 composantes.

$$\underline{\underline{\mathbf{C}}}_{cubique} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

2.6.2 Représentation des propriétés élastiques

Les angles d'Euler-Bunge [209] ϕ , ψ et θ , comme illustrés par la Figure 2.22, permettent de définir 3 vecteurs orthogonaux \underline{l} , \underline{m} et \underline{n} , tels que :

$$\underline{l} = \begin{bmatrix} \cos \phi \cos \psi - \sin \phi \sin \psi \cos \theta \\ \sin \phi \cos \psi + \cos \phi \sin \psi \cos \theta \\ \sin \psi \sin \theta \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

$$\underline{m} = \begin{bmatrix} -\cos \phi \sin \psi - \sin \phi \cos \psi \cos \theta \\ -\sin \phi \cos \psi + \cos \phi \sin \psi \cos \theta \\ \cos \psi \sin \theta \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

$$\underline{n} = \begin{bmatrix} \sin \phi \sin \theta \\ -\cos \phi \sin \theta \\ \cos \theta \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

En utilisant les tenseurs de contraintes macroscopiques $\underline{\underline{\Sigma}}(\phi, \theta, \psi)$ et de déformations macroscopiques $\underline{\underline{\mathbf{E}}}(\phi, \theta, \psi)$, le module d'Young effectif $E(\underline{l})$ et le coefficient de Poisson $\nu^*(\underline{l}, \underline{m})$ se définissent comme suit :

$$E = \frac{\underline{l} \cdot \underline{\underline{\Sigma}} \cdot \underline{l}}{\underline{l} \cdot \underline{\underline{\mathbf{E}}} \cdot \underline{l}} \quad (2.18)$$

$$\nu^* = \frac{-\underline{m} \cdot \underline{\underline{\mathbf{E}}} \cdot \underline{m}}{\underline{l} \cdot \underline{\underline{\mathbf{E}}} \cdot \underline{l}} \quad (2.19)$$

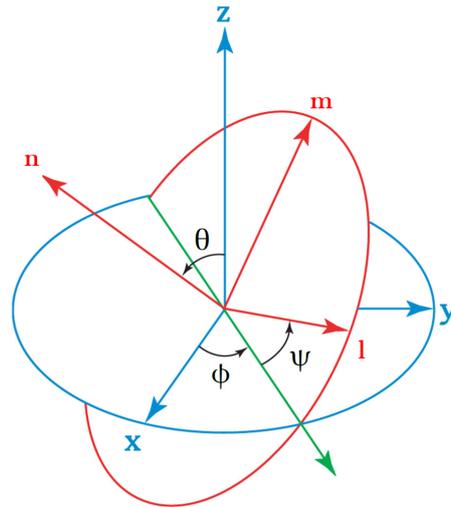


FIGURE 2.22 – angles d'Euler-Bunge

Enfin, pour calculer les propriétés effectives d'une structure indépendamment des propriétés du matériau qui la compose (E_0, ν_0), on peut calculer les propriétés normalisées :

$$E^* = \frac{1}{E_0 \rho^*} E \quad (2.20)$$

E étant le module d'Young effectif calculé via la relation 2.18, E_0 le module d'Young du matériau constitutif, et ρ^* la fraction volumique de la structure.

Une fois le module d'Young normalisé calculé pour toutes les directions spatiales, il est alors possible de tracer une carte 3D, obtenue via un script en python.

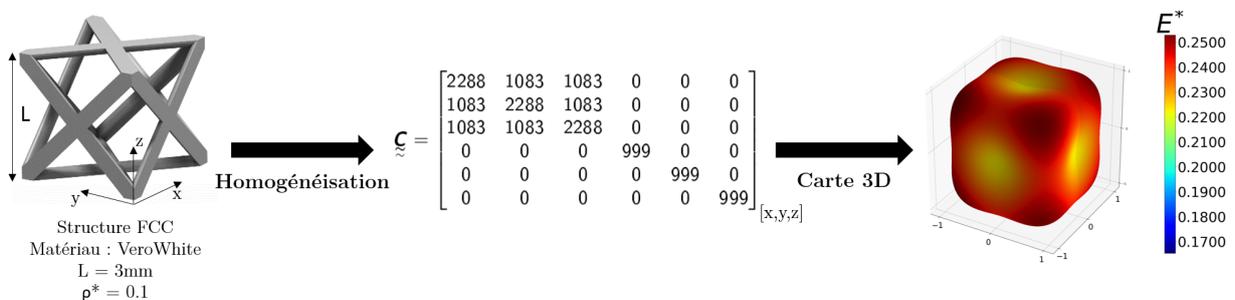


FIGURE 2.23 – Exemple d'une structure FCC, et la carte 3D du module d'Young normalisé

Un exemple est donné sur la Figure 2.23. Une structure de type FCC y est détaillée avec le tenseur des modules élastiques calculé par homogénéisation, et enfin la carte 3D du module d'Young normalisé. De la même manière, il est possible de tracer le coefficient de Poisson effectif en fonction de la direction de chargement l ainsi que celle transverse m , permettant de tracer le coefficient de Poisson dans un plan.

2.6.3 Simulations du comportement élastoplastique

Pour la simulation du comportement élastoplastique des treillis et treillis hybrides, deux méthodes sont utilisées dans ces travaux : la simulation sur cellule unitaire en appliquant des conditions aux limites péri-

diques ainsi que la simulation en champ complet. Dans les deux cas, le formalisme des grandes déformations est utilisé, les niveaux de déformation appliqués lors des simulations numériques étant importants. Les lois de comportement élasto-plastiques employées sont celles décrites dans la section Matériaux. Le solveur MUMPS² (MULTifrontal Massively Parallel Solver) est employé.

Simulations sur cellule unitaire

Ces simulations portent sur une seule cellule et sont utilisées lorsque la structure étudiée est composée de sub-entités périodiques, une cellule constituant ainsi un VER. Des conditions aux limites périodiques (cf equ.(2.11) et equ.(2.12)) sont appliquées sur le maillage de la cellule.

Afin de simuler un essai de compression, les degrés de liberté correspondants (déformation macroscopique) sont imposés sur l'ensemble des éléments du maillage. En sortie, le fichier test contient (selon ce qui est demandé), pour chaque pas de temps du calcul, les déformations dans les différentes directions ainsi que les sommes des réactions nodales dans les différentes directions. La contrainte homogénéisée (nominale ou vraie) s'obtient par post-traitement des fichiers de calculs, selon la formulation choisie (voir partie Calcul des contraintes ci-dessous).

Simulations en champ complet

Ces simulations portent sur le maillage complet de la structure étudiée. Lorsque la géométrie de celle-ci le permet, le maillage est divisé en tirant profit des symétries. Par exemple, le maillage d'une structure composée de 5 cellules dans chaque direction peut être réduit à un maillage composé de $2.5 \times 2.5 \times 5$ cellules ($x \times y \times z$ pour une sollicitation dans la direction z), des conditions de symétries sont alors appliquées sur les faces créées lors de la division du volume. Afin de simuler un essai de compression proche des conditions expérimentales, les degrés de libertés correspondants sont imposés sur les noeuds des éléments présents sur une face de la structure (équivalent au contact du plateau mobile de la machine d'essai). Sur les noeuds de la surface opposée (équivalent au contact du plateau fixe) un déplacement nul dans la direction de la sollicitation est imposé. Pour reproduire une situation expérimentale présentant des frottements entre la structure et les plateaux, un ou deux déplacements dans le plan des plateaux sont bloqués sur les faces considérées. En sortie, le fichier test contient pour chaque pas de temps du calcul les sommes des réactions nodales du set de noeuds considéré dans les différentes orientations du repère principal, le calcul des contraintes se fait selon la formulation choisie (voir partie Calcul des contraintes ci-dessous).

Calcul des contraintes et déformations

Plusieurs types de contraintes sont calculées dans ce manuscrit : nominales ou "vraies" en fonction de la situation.

Lors d'un essai expérimental sur un treillis, la variation de section des barres est généralement inaccessible à la mesure (sauf moyen spécifique), le calcul de la contrainte ne peut donc se référer qu'à la section initiale des barres, on calcule alors la contrainte nominale en divisant l'effort mesuré par la section initiale du treillis. Afin de comparer cette contrainte nominale à une simulation éléments finis, on utilise le tenseur des contraintes de Boussinesq \mathcal{S} (ou premier tenseur de Piola-Kirchhoff), calculé comme la pondération des forces de réaction macroscopiques notées RE par le volume du VER dans la configuration initiale, notée V_{VER} [210] :

2. <http://mumps.enseiht.fr/>

$$\underline{\mathbf{S}} = \frac{1}{V_{\text{VER}}} \underline{\mathbf{RE}}^{total} \quad (2.21)$$

Lors de l'identification de la loi de comportement d'un matériau, par le biais d'un essai de traction uni-axial sur une éprouvette classique par exemple, on calcule la contrainte vraie pour tenir compte de l'évolution de la section au cours de l'essai. Afin de comparer cette contrainte vraie à une simulation éléments finis, on utilisera la contrainte de Cauchy $\underline{\Sigma}$, calculée comme la pondération des forces de réaction macroscopiques RE par le volume du VER dans la configuration déformée noté V_{ver} :

$$\underline{\Sigma} = \frac{1}{V_{ver}} \underline{\mathbf{RE}}^{total} \quad (2.22)$$

Les déformations calculées sont les déformations de Green-Lagrange.

2.7 Organisation des chapitres suivants

La suite du manuscrit est répartie en 3 chapitres suivie par une partie de conclusions et perspectives. Les trois chapitres sont composées d'études distinctes, la première permettant de choisir des géométries de treillis d'intérêts, tandis que les deux suivantes permettent l'étude de deux types d'hybridation, qui dépendent des propriétés des matériaux constituant le treillis et la matrice (rapport de module "modéré" ou "fort" entre le matériau du treillis et le matériau de la matrice).

Chaque chapitre fait l'objet d'un article publié ou non à la date de ce manuscrit :

- Le troisième chapitre propose deux nouveaux treillis auxétiques qui seront utilisés dans les chapitres suivants. Les propriétés de ces structures sont étudiées de manière paramétrique par homogénéisation numérique.
- Le quatrième chapitre présente l'étude numérique et expérimentale des propriétés mécaniques de treillis composites polymère(rigide)-polymère(souple). Les deux matériaux constitutifs présentent un rapport de module d'Young "modéré".
- Le cinquième chapitre présente l'étude numérique et expérimentale des propriétés mécaniques de treillis hybrides métal-polymère(souple). Les deux matériaux constitutifs présentent un rapport de module d'Young "fort".

Les chapitres ayant fait l'objet d'un article publié (à ce jour) sont directement composés du manuscrit de celui-ci en langue anglaise, et sont précédés par une introduction en français et suivis par une conclusion en français.

Chapitre 3

Étude numérique du comportement homogénéisé de treillis architecturés

Sommaire

3.1 Résumé en français	62
3.2 Abstract	63
3.3 Introduction	63
3.4 Auxetic lattices	64
3.4.1 Parametric description	65
3.5 Computational strategy	67
3.6 Computational homogenization	68
3.7 Results	71
3.7.1 Hexaround cell	71
3.7.2 Inverse hexaround cell	74
3.8 Extension to elastoplasticity	78
3.8.1 Material properties	78
3.8.2 Dissipated energy comparison	78
3.9 Discussion	80
3.10 Conclusion and perspectives	81
3.11 Conclusions en français	83
3.12 Supplementary notes	84
3.12.1 Struts design	84
3.12.2 Mesh convergence analysis	84

3.1 Résumé en français

Ce chapitre détaille l'étude mécanique de deux nouveaux micro-treillis auxétiques. Ces structures présentent la spécificité d'exhiber un coefficient de Poisson négatif grâce à la géométrie en arc de cercle de ses poutres constitutives. L'étude porte sur deux treillis, obtenus par modification de la cellule classique FCC : en arrondissant les poutres constitutives de cette cellule vers son centre géométrique, il est attendu que celle-ci se déforme vers l'intérieur lorsque compressée.

Dans un premier temps, les structures étudiées sont décrites géométriquement, les paramètres descriptifs sont donnés, ainsi que leurs valeurs limites. Les propriétés élastiques effectives des structures (le module d'Young normalisé E^* et le coefficient de Poisson ν ici) sont étudiées par éléments finis, en utilisant une stratégie d'homogénéisation avec conditions aux limites périodiques. La stratégie d'homogénéisation est explicitée.

Le matériau constitutif considéré est un alliage de titane imprimé en 3D, le Ti-6Al-4V. Une loi de comportement élasto-plastique avec écrouissage isotrope non-linéaire est identifiée à partir de tests de traction réalisés sur des éprouvettes imprimées.

L'influence des paramètres géométriques sur les propriétés élastiques effectives est alors étudiée : le module d'Young normalisé est cartographié afin de révéler l'anisotropie et d'identifier les orientations spatiales d'intérêt. Le coefficient de Poisson effectif est calculé pour diverses configurations géométriques afin de caractériser l'auxétisme, il est tracé dans un plan contenant sa valeur minimale.

Enfin, l'influence des propriétés élastiques effectives sur la dissipation d'énergie sous compression est explorée pour des treillis élasto-plastiques avec différentes directions de chargement, en utilisant des simulations par éléments finis. L'énergie dissipée, calculée comme le travail total plastique pour une déformation plastique de 10%, est tracée en fonction de différentes valeurs de fractions volumiques, pour les deux cellules.

Les résultats suggèrent que le paramètre d'amplitude de flambage a a une forte influence sur le coefficient de Poisson, l'anisotropie et le module d'Young. Le chargement de cellules auxétiques le long de leur direction la plus rigide semble maximiser la dissipation d'énergie.

Ce chapitre a fait l'objet d'un article publié dans la revue *Journal of Applied Mechanics* en novembre 2019 :

— F.Albertini, J.Dirrenberger, A.Molotnikov and C.Sollogoub, *Computational investigation of the effective mechanical behavior for 3D pre-buckled auxetic lattices*, J. Appl. Mech., 2019

3.2 Abstract

Abstract

Negative Poisson's ratio materials, or auxetics, have drawn attention for the past 30 years. The auxetic effect could lead to improved mechanical properties such as acoustic damping, indentation resistance or crash-worthiness. In this work, two 3D auxetic lattices are introduced. Auxeticity is achieved by design through pre-buckling of the lattice struts. The influence of geometrical parameters on the effective elastic properties is investigated using computational homogenization method with periodic boundary conditions. Effective Young's modulus is 3D mapped in order to reveal anisotropy, and identify spatial orientations of interest. The effective Poisson ratio is computed for various geometric configurations in order to characterize auxeticity. Finally, the influence of effective elastic properties on energy dissipation under compression is explored for elastoplastic lattices with different loading directions, using finite element simulations. Results suggest that loading 3D auxetic lattices along their stiffest direction maximizes their crashworthiness.

3.3 Introduction

Architected materials are a rising class of advanced materials that bring new possibilities in terms of functional properties, filling the gaps and pushing the limits of Ashby's materials performance maps [6]. The term architected materials encompasses any material obtained through a design process aiming at fulfilling a specific set of requirements, in terms of functionality, behavior, or performance, induced by a particular morphology, *i.e.* the relative topological arrangement between multiple phases, such that some of its materials properties, *e.g.* yield strength/density, are improved in comparison to those of its constituents, due to structure and composite effects [6; 14; 15; 211; 212].

Auxetics are a subclass of architected materials exhibiting a negative Poisson's ratio, *i.e.* they become larger when stretched, and thinner when compressed, contrary to conventional materials with positive Poisson's ratio. Material stability requires the tensor of elastic moduli to be positive definite, resulting in positive Young's modulus, E , and Poisson's ratio ν ranging from -1 , for unsharable materials, and 0.5 for incompressible or rubber-like materials, in the case of three-dimensional isotropic elasticity. Although, most materials naturally exhibit a positive Poisson's ratio, auxetics [62] have been engineered since the 1980s [63–65]. These materials have been drawing attention since then [10; 67; 77; 94–106; 146; 147], and a number of potential applications were proposed [79; 107–109; 111; 213]. Auxetic materials can also enhance acoustic damping [80], which was shown experimentally in [66; 81–83]. The use of auxetics as building blocks for wave-guiding metamaterials has also been investigated in [84–86; 214]. Moreover, experiments on deterministic and stochastic auxetic foams seem to provide evidence of improved crashworthiness [89; 91–93], as well as better indentation resistance [10; 88] in comparison to conventional cellular materials.

In order to exploit the possibilities offered by auxetics, effective mechanical behavior models are needed for such materials to be used in industrial structural applications, *i.e.* to be considered from an equivalent continuum viewpoint in structural calculations. To do so, analytical strategies are usually favored due to their efficiency and easy implementation. Nevertheless, they rely on strong hypotheses that can be limiting in terms of applicability to complex cell topologies, as well as nonlinear constitutive behavior. In order to study the elastoplastic response of metallic auxetics as it has been done numerically [147; 148] and experimentally [215], it appears that full-field finite element analysis combined with computational homogenization is a powerful approach [141–145; 216; 217].

The present work introduces two novel three-dimensional periodic auxetic structures. Auxetic behavior

is achieved by design, considering unit-cells with pre-buckled struts. Computational homogenization using periodic boundary conditions is considered here in the case of periodic architected materials in order to determine the effective elastic properties of the two proposed auxetic cells with varying geometrical parameters.

First, a parametric geometrical description of the unit-cells is given. After introducing the computational strategy, the influence of parameters on the effective elastic properties is examined based on computational homogenization. An extension to elastoplasticity is explored in order to evaluate the interest of the pre-buckled auxetic designs on plastic work and crashworthiness. Results are then discussed and put into perspective with the available literature on auxetics. Finally, conclusions are drawn and perspectives on further extensions of the present work are made.

Throughout this work, the following notation is used : x for scalars, \underline{x} for vectors, $\underline{\underline{x}}$ for 2nd-order tensors, $\underline{\underline{\underline{x}}}$ for 4th-order tensors, \cdot for dot product, $:$ for doubly-contracted dot product.

3.4 Auxetic lattices

Among architected materials, lattices are a combination of material and space. They are structures composed of a connected network of struts, that may be organized periodically in space, or not. They are generally used in cases where there is a need for high specific stiffness, or high specific strength [7; 8; 25; 26; 32; 33; 36; 41; 50; 52–54; 117].

In 1864, J.C. Maxwell gave the first general method for the static analysis of truss frameworks [55], based on the thermodynamical considerations of energy conservation, and Clapeyron's theorem, *i.e.* the elastic energy of a strut being equal to the sum of the mechanical works of external forces. Following Maxwell, and the generalisation of his criterion for self-stressed truss frameworks by [56], [8] showed that depending on the network connectivity, lattice structures can be broken down into 2 separate groups : stretch-dominated and bending-dominated structures. Such that, for 3D lattices it yields Eq. 3.1 :

$$M = b - 3j + 6 = s - m \quad (3.1)$$

with b the number of struts in a cell, j the number of friction-less vertices, s the number of self-stressed members, and m the number of mechanisms, both of the latter can be determined by finding the rank of the equilibrium matrix describing the framework in a full structural analysis [57]. If $M < 0$ the structure is bending-dominated; if $M \geq 0$ the structure is stretch-dominated.

Auxetic lattices are known to be bending-dominated in order to enable reentrant or rolling-in mechanisms [69; 70]. Therefore, mechanical analysis of truss frameworks can be useful for guiding the design process of auxetics. Pertinent choice of morphology and/or topology design can be made in order to attain specific mechanical properties [1; 59; 71]. The design of these two novel unit-cells was inspired by the works of Dirrenberger *et al.* [10] and Warmuth *et al.* [72]. In [72], the authors create an auxetic unit-cell based on the analysis of eigen-modes for a cubic unit-cell. The unit-cell created was therefore buckled by design, in order to grant auxetic properties. Buckling-induced auxeticity, *i.e.* taking advantage of structural instabilities, has also been explored in the literature [73; 75–78]. In this work, we are considering two periodic pre-buckled unit-cells that stem from the face-centered cubic (FCC) unit-cell, as shown in Fig. 3.1.

By curving all struts of the FCC cell inwards (see equations on appendix. 3.12.1), it is expected that the resulting design will exhibit negative Poisson's ratio, as for the hexatruss cell developed in [10] : by enforcing buckling orientations of the constituting struts, it is possible to select and tune the deformation behavior of

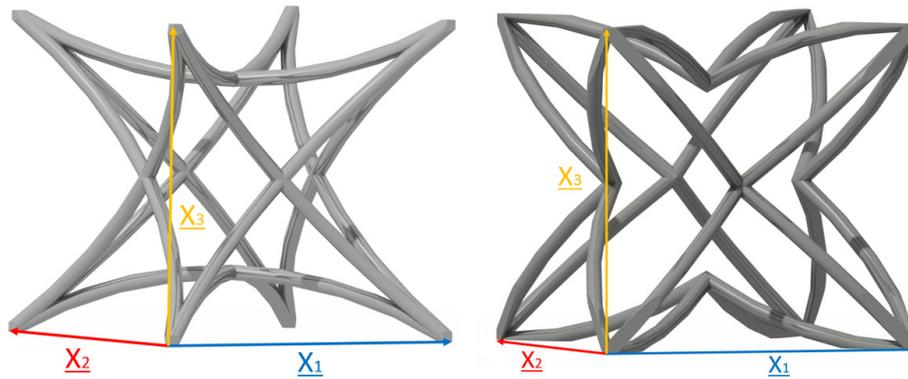


FIGURE 3.1 – Hexaround (left) and inverse hexaround (right) unit-cells, with their periodicity vectors X_i

the unit-cells. Since they are already buckled, it is also expected that those cells will be softer than a regular FCC cell, with an influence of the pre-buckling amplitude.

These assumptions will be assessed using computational homogenization method in order to identify elastic moduli tensors for different geometric configurations of the cells.

3.4.1 Parametric description

In this subsection, both unit-cells and limiting values are described with regards to their geometrical parameters.

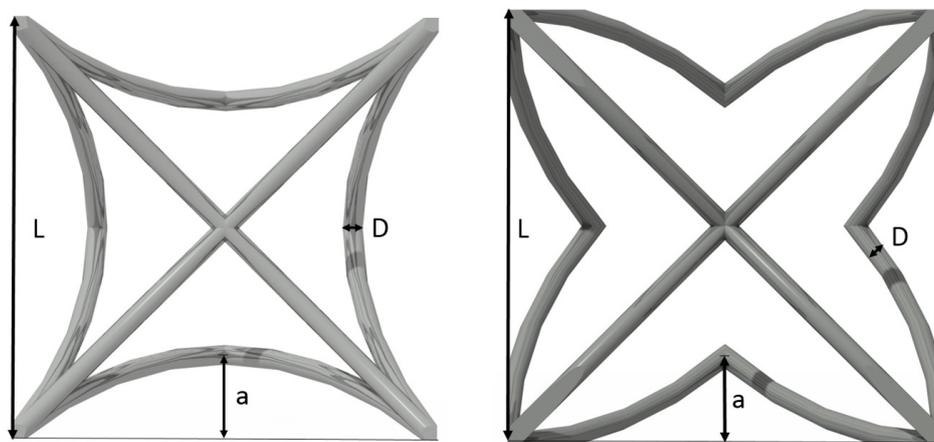


FIGURE 3.2 – Hexaround (left) and inverse hexaround (right) geometric descriptions

Hexaround unit-cell

This cell is composed of cylindric struts that are curvilinear, arc-shaped. The arcs are oriented inwards, thus creating a re-entrant effect when the structure is being compressed. Conversely, the struts are expected to straighten when stretched.

The hexaround unit-cell can be described using 3 parameters : L , side length of the cubic cell, a , distance between top and bottom of arcs, and D , diameter of the struts (see Fig.3.2). These parameters are limited by

the following geometrical boundaries :

$$L \in]0 ; +\infty[\quad (3.2)$$

$$a \in]0 ; L/4] \quad (3.3)$$

$$D \in]0 ; 2a] \quad (3.4)$$

Parameter a represents the buckling amplitude : for $a = 0$, the cell correspond to a regular FCC cell. For $a = L/4$, struts are merged in the corners of the cell. From $a > L/4$, intersection of the struts occurs, thus generating a new geometry (see Fig.3.3) with different mechanical behavior, out of the scope of the present study. Even though every combinations inside these parameter ranges are geometrically possible, some of them also lead to geometrical configurations presenting non-auxetic behavior.

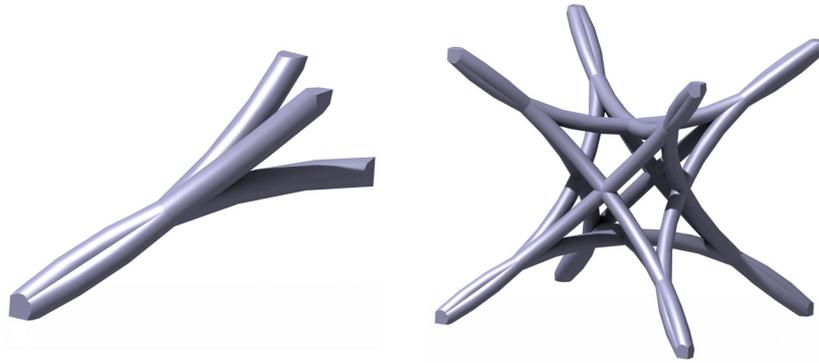


FIGURE 3.3 – 1/8 of cell with intersection (left), and resulting cell (right)

Inverse hexaround unit-cell

The inverse hexaround unit-cell has been obtained starting from the hexaround by reversing the curvature; struts are then intersecting at the center of sides, at the buckling amplitude a . The inverse hexaround unit-cell is described using the same 3 parameters : L , a and D (see Fig.3.2). Again, the parameters can vary within the following ranges :

$$L \in]0 ; +\infty[\quad (3.5)$$

$$a \in]0 ; L/2[\quad (3.6)$$

$$D \in]0 ; 2a] \quad (3.7)$$

In the same way as the hexaround cell, when $a = 0$ this cell corresponds to a regular FCC cell. From $a > L/2$, the topology and nodal connectivity change due to strut intersection. Every combination within the parameter ranges are geometrically possible, but some of them also lead to geometries exhibiting non-auxeticity.

Having introduced the two unit-cell geometries, and range of varying parameters, it is noteworthy that the effective elastic properties of periodic auxetic materials, as for any lattice structure, are generally anisotropic [10; 146; 218–220]. This is directly related to the symmetry type exhibited by the lattice, cubic symmetry in the present cases. By means of finite element analysis combined with computational homogenization, the anisotropic response of the regular and inverse hexaround cells will be explored.

3.5 Computational strategy

Sample step files were generated using Catia V5R20 (Dassault Systèmes). The first step consists in defining a parametric line-model of the cells. Lines are then transformed into struts by assigning them a circular thickness. Boolean intersection operation is used to circumscribe the cell inside a cubic volume of side L . Since the unit-cells present a cubic symmetry, only a $1/8$ of the cell needs to be modeled. The entire cell is reconstituted subsequently by applying symmetry directly onto the mesh.

CAD files (STEP format) are meshed (see Fig.3.4) using GMSH software [208] with tetrahedral quadratic elements (C3D10). A maximal mesh size of 0.05 mm is applied, ensuring the presence of at least 5 elements in the thickness of struts, even for the smallest volume fraction. This mesh size have been validated through convergence analysis, ensuring an error inferior to 0.5%, compared to a converged mesh (see Appendix. 3.12.2).

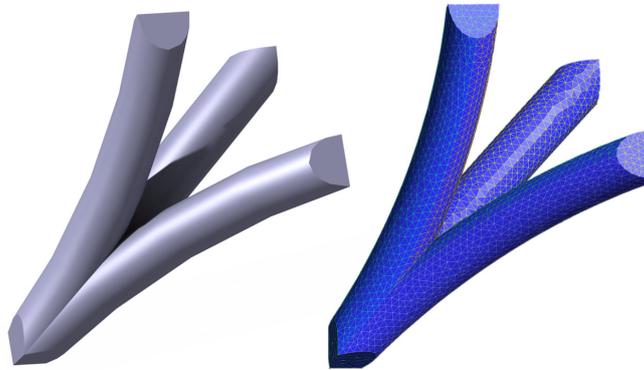


FIGURE 3.4 – $1/8$ hexaround cell CAD (left), and its corresponding mesh (right)

Those mesh files can then be imported into Z-set finite element package ¹, and converted into the native mesh format. Finally, sets of corresponding nodes are created on the outer boundary of the mesh, in order to implement periodic boundary conditions later on.

A total of 70 parametric configurations, *i.e.* virtual samples, are generated for computing the effective elastic properties. Computation time is dependent on the mesh size, which is directly linked to the relative density of the cell. The data presented in Tab. 3.1 corresponds to single-threading on a Intel Xeon E5-2640 v4 CPU running at 2.4 GHz. The computation time corresponds to the time spent in order to identify the full elastic moduli tensor for one unit-cell configuration. For instance, the computation of a 0.05 relative density configuration requires 695 seconds to import the mesh, and 32 seconds per computation (6 computations are needed).

1. <http://www.zset-software.com>

ρ^*	Nb of Elements	Memory (MB)	Comp. time (s)
0.05	52k	1700	887
0.10	97k	4700	1620
0.15	157k	9800	2568
0.20	207k	16100	3415
0.25	270k	26300	4397

TABLEAU 3.1 – Computation time and mesh size depending on the cell density

3.6 Computational homogenization

Computational homogenization consists in identifying the effective properties of a heterogeneous medium, by computing the volume averaged response under a physical stimulus over a virtual sample that is considered as a representative volume element (RVE). In the present work, we rely on full-field finite element mechanical analysis using periodic boundary conditions. For the case of elastic periodic lattices, the RVE consists in the periodic unit-cell defined by its periodicity vectors (\underline{X}_i with $i = 3$ for three-dimensional structures, as shown on Fig.3.1).

Periodic boundary conditions are considered for studying the behavior of auxetic lattice structures as they found to be optimal for determining the effective properties of an infinite medium made of periodic unit-cells [221; 222]. Actually, the periodic boundary conditions are not only compatible with the periodic lattice morphology, but the boundary layer effects vanish with such conditions. The application of periodic boundary conditions allows for the identification of the overall response of architected materials with vanishing boundary layer effects, which is very useful if one wants to use the identified response as the constitutive behavior of a continuum element in a larger-scale simulations.

Periodic boundary conditions are enforced by multiple-point constraints applied on sets of corresponding mesh nodes that are separated by periodicity vectors, as depicted in Fig. 3.1, or by a linear combination of periodicity vectors with integer coefficients. Another main interest of computational homogenization resides in obtaining an equivalent constitutive model that can be implemented in a finite element analysis, saving extensive computation time by avoiding to explicitly represent and account for the underlying microstructure. This strategy is commonly used for architected materials [212], allowing for fast computation of their effective properties. In this work, linear elastic properties of auxetics are investigated first, before extending the study to elastoplasticity.

Considering the small deformation hypothesis, constitutive relations are expressed locally in a linear elasticity framework using the generalized Hooke law :

$$\underline{\boldsymbol{\sigma}}(\underline{x}) = \underline{\underline{\underline{c}}}(\underline{x}) : \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}(\underline{x}) \quad (3.8)$$

with $\underline{\boldsymbol{\sigma}}$ the second-order symmetric Cauchy stress tensor, $\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}$ the second-order symmetric engineering strain tensor, and $\underline{\underline{\underline{c}}}$ fourth-order positive definite tensor of elastic moduli. Considering a volume element V , the macroscopic stress and strain tensors $\underline{\underline{\boldsymbol{\Sigma}}}$ and $\underline{\underline{\boldsymbol{E}}}$ are defined by the spatial averages over V of local stress $\underline{\boldsymbol{\sigma}}$

and strain $\underline{\epsilon}$ fields.

$$\underline{\Sigma} := \langle \underline{\sigma} \rangle = \frac{1}{V} \int_V \underline{\sigma} \, dV \quad (3.9)$$

$$\underline{\mathbf{E}} := \langle \underline{\epsilon} \rangle = \frac{1}{V} \int_V \underline{\epsilon} \, dV \quad (3.10)$$

From the two previous equations, it yields the tensor of effective elastic moduli $\underline{\mathbf{C}}$:

$$\underline{\Sigma} = \underline{\mathbf{C}} : \underline{\mathbf{E}} \quad (3.11)$$

For periodic boundary conditions, the displacement field \underline{u} can be dissociated into a part given by the macroscopic strain tensor $\underline{\mathbf{E}}$ and a periodic fluctuation field \underline{v} for any material point \underline{x} of V , such that :

$$\underline{u} = \underline{\mathbf{E}} \cdot \underline{x} + \underline{v} \quad \forall \underline{x} \in V \quad (3.12)$$

with \underline{v} the periodic fluctuations vector, *i.e.* taking the same value on two homologous points \underline{x}^+ and \underline{x}^- of ∂V . Furthermore, the traction vector $\underline{t} = \underline{\sigma} \cdot \underline{n}$ fulfills antiperiodic conditions such that,

$$\underline{\sigma}^+ \cdot \underline{n}^+ + \underline{\sigma}^- \cdot \underline{n}^- = \underline{0} \quad (3.13)$$

$$\underline{v}^+ - \underline{v}^- = \underline{0} \quad (3.14)$$

The elastic moduli tensor $\underline{\mathbf{C}}$ can then be fully identified by applying successively 6 fundamental macroscopic loading, 3 pure extensions and 3 pure shears. Although the hexaround and inverse hexaround cells present cubic symmetry, 6 independent computations are run since the developed methodology is generic and automated. The elastic moduli tensor is identified by applying the macroscopic strain $\underline{\mathbf{E}}$, such that using Voigt's notation :

$$\begin{bmatrix} \Sigma_{11} \\ \Sigma_{22} \\ \Sigma_{33} \\ \Sigma_{23} \\ \Sigma_{31} \\ \Sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ E_{33} \\ 2E_{23} \\ 2E_{31} \\ 2E_{12} \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

Linear relations thus appear between macroscopic stress and strain, and can readily be used to build up effective elastic moduli tensors for a given microstructure. The formalism is similar for any linear property, *e.g.* thermal conductivity. In order to implement periodic boundary conditions, we rely on the following specific finite element approach. It consists in adding global degrees of freedom (DOFs) shared by all elements. These DOFs correspond to the macroscopic strain components E_{ij} for displacements v_i , in addition to the classical nodal DOFs.

The finite element problem left to solve concerns the homogeneous strain tensor E_{ij} and its dual R_{ij} , which corresponds to the macroscopic reaction stress. Prescribing E_{ij} corresponds to the macroscopic strain approach, while prescribing R_{ij} leads to the macroscopic stress approach. In that way, mixed macroscopic problems, *e.g.* tension, can be solved with periodic boundary conditions.

We note the fact that effective elastic properties varying with orientations as tension, we should rather refer to elastic modulus functions or Poisson's ratio functions. Nevertheless, for the sake of simplicity and comparison with most of the literature on auxetics, we will use the conventional denomination of Young's modulus and Poisson's ratio, although these are, by definition, isotropic.

Computing the elastic moduli tensor $\underline{\underline{C}}$ is done for every set of parameters considered for both unit-cells. The resulting data can be represented spatially by expressing elastic properties within a particular coordinates framework. Using the Euler-Bunge [209] angles ϕ , θ , and ψ , as shown on Fig. 3.5, let us define the 3 orthogonal vectors \underline{l} , \underline{m} , and \underline{n} , such that :

$$\underline{l} = \begin{bmatrix} \cos \phi \cos \psi - \sin \phi \sin \psi \cos \theta \\ \sin \phi \cos \psi + \cos \phi \sin \psi \cos \theta \\ \sin \psi \sin \theta \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

$$\underline{m} = \begin{bmatrix} -\cos \phi \sin \psi - \sin \phi \cos \psi \cos \theta \\ -\sin \phi \cos \psi + \cos \phi \sin \psi \cos \theta \\ \cos \psi \sin \theta \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

$$\underline{n} = \begin{bmatrix} \sin \phi \sin \theta \\ -\cos \phi \sin \theta \\ \cos \theta \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

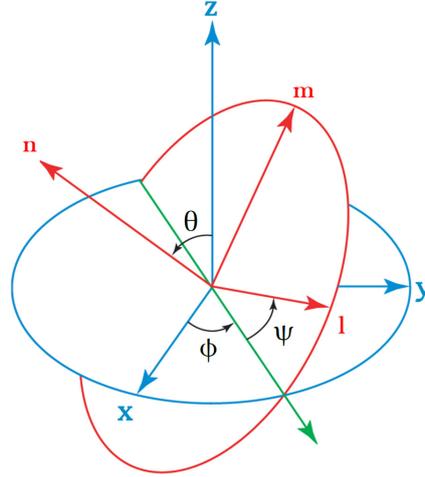


FIGURE 3.5 – Euler-Bunge angles

Using the macroscopic stress $\underline{\underline{\Sigma}}(\phi, \theta, \psi)$ and strain $\underline{\underline{E}}(\phi, \theta, \psi)$ tensors, effective Young's modulus $E(\underline{l})$ and Poisson's ratio $\nu^*(l, m)$ are defined as follows :

$$E = \frac{\underline{l} \cdot \underline{\underline{\Sigma}} \cdot \underline{l}}{\underline{l} \cdot \underline{\underline{E}} \cdot \underline{l}} \quad (3.19)$$

$$\nu^* = \frac{-\underline{m} \cdot \underline{\underline{E}} \cdot \underline{m}}{\underline{l} \cdot \underline{\underline{E}} \cdot \underline{l}} \quad (3.20)$$

In order to compare the different geometrical configurations to each other, normalized elastic properties need to be defined, based on the properties of the constitutive material, considered here to be a Ti-6Al-4V titanium alloy ($E_0 = 97$ GPa, $\nu_0 = 0.3$), and the relative density ρ^* of each configuration. The normalized Young modulus is defined as follows :

$$E^* = \frac{1}{E_0 \rho^*} E \quad (3.21)$$

The relative density of a cell can be defined as the actual volume of the cell V_{lattice} divided by the cubic volume circumscribed to the cell ($V_{\text{cubic}} = L^3$), as depicted in Fig. 3.6, yielding the following definition :

$$\rho^* = \frac{V_{\text{lattice}}}{V_{\text{cubic}}} \quad (3.22)$$

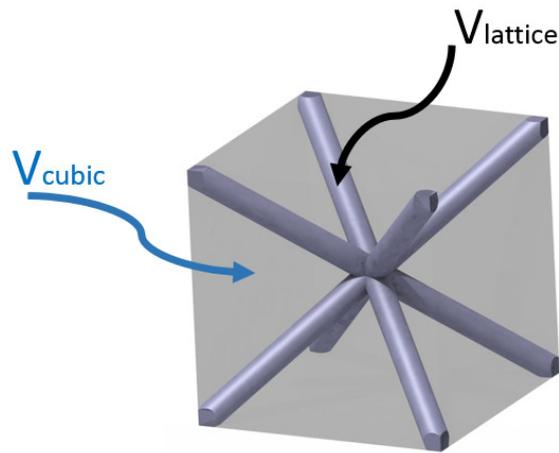


FIGURE 3.6 – Definition of $V_{lattice}$ and V_{cubic}

3.7 Results

Effective elastic properties have been computed for both unit-cells, considering all combinations of parameters, for $L = 3 \text{ mm}$, $a \in [0.10; 0.75] \text{ mm}$, and $\rho^* \in [0.05; 0.25]$, which corresponds to the variation of D , the strut diameter.

3.7.1 Hexaround cell

As mentioned in Section 3.4, it is expected that a pre-buckled cell will exhibit auxetic properties. In order to investigate the pre-buckling effect on effective elastic properties, parameter a is varied. Effect of the relative density ρ^* is also explored by adjusting the radius of the struts. Fig. 3.7 illustrates the fact that struts are merging at the corners of the hexaround cell. For an equivalent density, longer struts corresponding to higher values of a require a lower radius. This trend persists until $a = 0.5 \text{ mm}$, before reversing for higher values of a , as a consequence of struts merging in the corner of the cell.

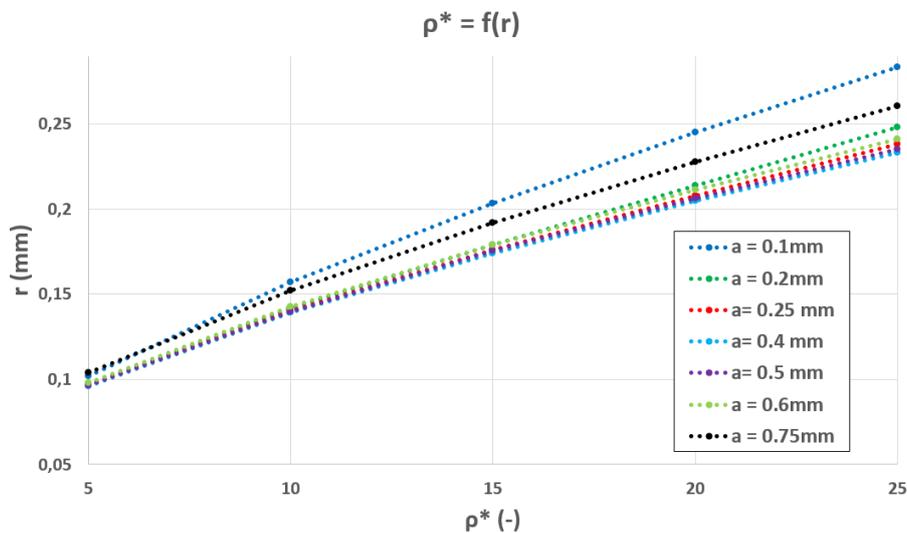


FIGURE 3.7 – Effect of the strut radius on the relative density for the hexaround cell

Young's modulus

For all configurations investigated, the elastic moduli tensor $\underline{\underline{C}}$ is computed. These moduli are exploited in order to evaluate the dependence of the normalized Young's modulus and its anisotropy. For the sake of conciseness, the data is only represented as three-dimensional maps for extreme values for parameters a and ρ^* , as shown in Fig. 3.8. On the one hand, this figure confirms that increasing the relative density of the lattice, *i.e.* the strut diameter, increases its stiffness, and decreases the elastic anisotropy. On the other hand, increasing the buckling amplitude a results in decreasing the elastic modulus in every direction, but also increases anisotropy. Pre-buckling consequences on stiffness are expected : since the struts are not straight anymore and not directly oriented along the applied loading, stiffness is inevitably reduced. Fig. 3.8 also indicates that for all configurations explored, the direction maximizing the Young Modulus is $\langle 111 \rangle$, by analogy with Miller indices in crystallography, *i.e.* all equivalent directions corresponding to the diagonal of the cubic cell.

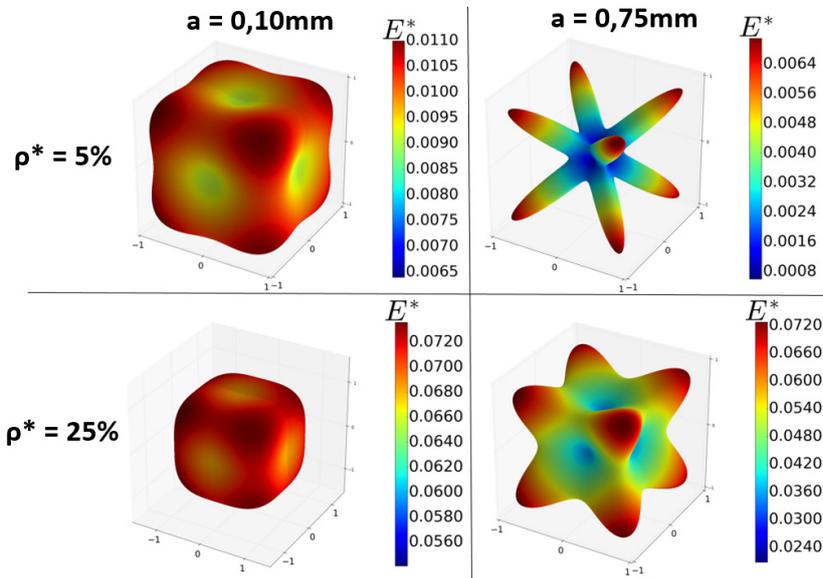


FIGURE 3.8 – 3D maps of normalized Young's modulus for various relative density ρ^* and pre-buckling amplitude a for the hexaround cell

The maximal values of normalized Young's modulus, *i.e.* along $\langle 111 \rangle$, have been computed for all configurations, as shown on Fig. 3.9. From this figure, it yields that the maximal stiffness of the hexaround cell increases monotonously while increasing relative density ρ^* . On the contrary, the evolution of the maximal stiffness is non-monotonous with a : at first E^* decreases while increasing a , but for $a = 0.75$ mm stiffness increases again due to the struts merging at the corner of the cell. Merging of the struts also takes place while increasing relative density, which explains the convergence of stiffness observed for $\rho^* = 0.25$. These last two remarks justify the use of full-field finite element simulations to study the behavior of auxetic lattices, as reasonably simple analytical models would not be able to account for such geometrical effects.

Poisson's ratio

Effective Poisson's ratio is computed in the $(\underline{l}, \underline{m})$ plane, which includes the direction \underline{l} of applied load. For the sake of clarity, the effective Poisson ratio ν^* is represented within one plane, for specific orientations, in Fig. 3.10, for different values of a but density fixed at $\rho^* = 0.05$. As a matter of fact, the auxetic character

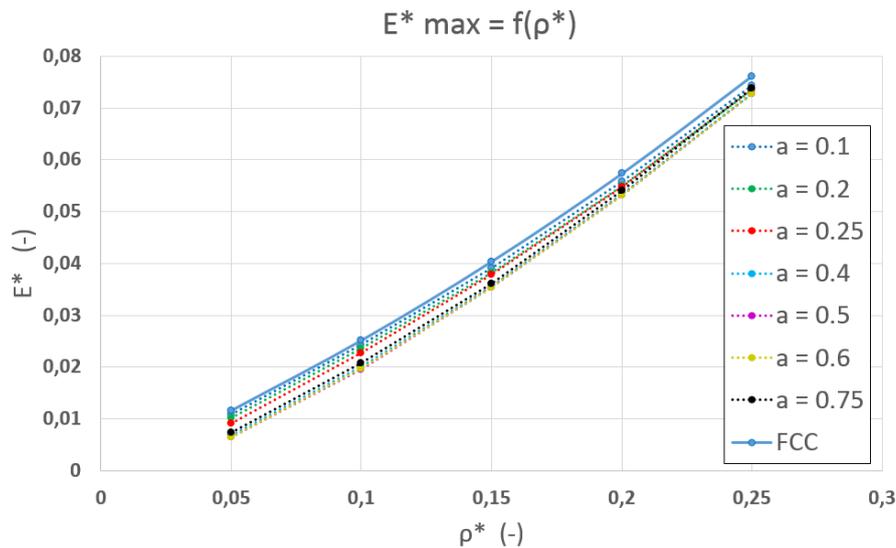


FIGURE 3.9 – Hexaround maximal effective Young’s modulus with respect to relative density ρ^* and pre-buckling amplitude a

of the hexaround lattice is due to its re-entrant topology, that is less effective for higher densities. Computations have showed that the minimal Poisson ratio is to be found within the (100) plane, following the crystallographic analogy. From Fig. 3.10 it can be observed that auxetic behavior is achieved through pre-buckled design for a certain angular range, *i.e.* $[\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}] \pm \frac{\pi}{2}$. The influence of the pre-buckling distance a is critical : increasing a results in a lower negative Poisson ratio at $\psi = \frac{\pi}{4}$, and a higher positive one at $\psi = 0[2\pi]$, hence resulting in a higher anisotropy for the Poisson ratio. For the configuration with $a = 0.1$ mm, no auxetic behavior is observed, while the effect is maximal for $a = 0.75$ mm, with $\nu^* = -0.73$. The minimal Poisson ratio is obtained for the $(0, 0, \frac{\pi}{4} \pm \frac{\pi}{2})$ direction within the (100) plan, which corresponds to the $\langle 110 \rangle$ equivalent directions.

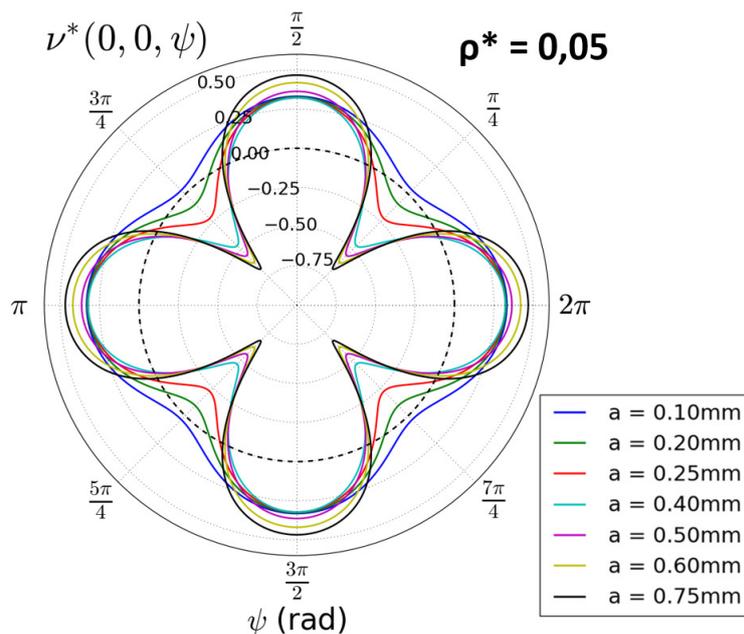


FIGURE 3.10 – Hexaround Poisson’s ratio within the (100) plane, for various a and $\rho^* = 0.05$

The most negative values of Poisson's ratio, *i.e.* along the $\langle 110 \rangle$ equivalent directions, have been computed for every parametric configurations of the hexaround cell, and plotted in Fig. 3.11. The increase of relative density results in an increase of the Poisson ratio. As mentioned hereabove, this was expected due to the vanishing of the lattice re-entrant topological character with increasing density.

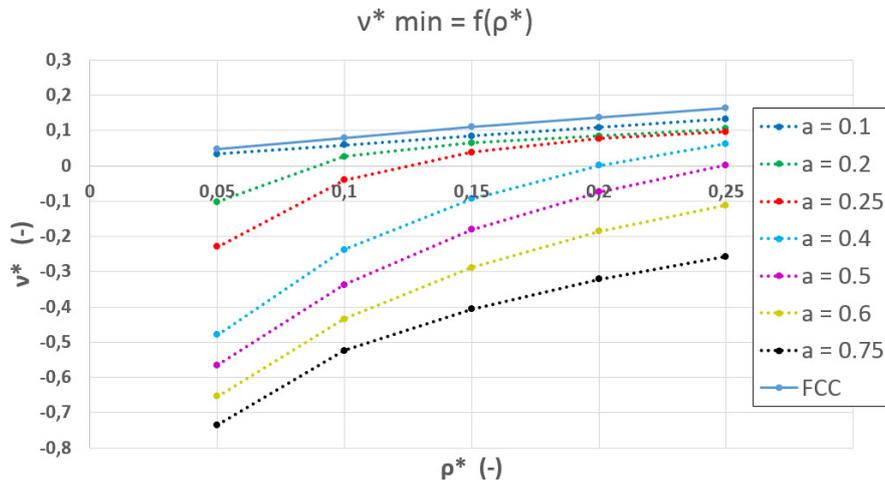


FIGURE 3.11 – Most negative Poisson's ratio values for the hexaround lattice with respect to a and ρ^*

3.7.2 Inverse hexaround cell

As for the hexaround cell, effective elastic properties are investigated depending on parameters a and ρ^* . Also, the same type of strut merging phenomenon is evidenced for higher density inverse hexaround lattice structures, through a larger strut radius, as represented in Fig. 3.12.

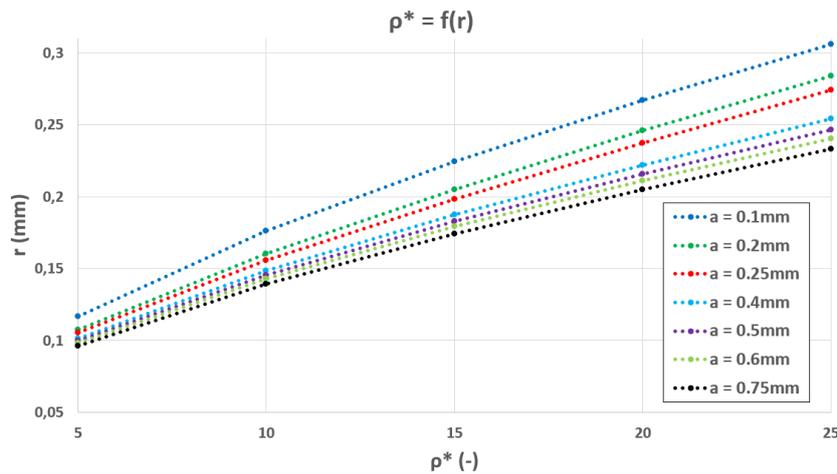


FIGURE 3.12 – Effect of the strut radius on the relative density for the inverse hexaround cell

Young's modulus

In the same fashion as for the hexaround cell analysis, the normalized Young modulus is obtained for any spatial orientation for the inverse hexaround cell based on the tensor of elastic moduli. Again, for the

sake of clarity and conciseness, only the data obtained for extreme parameters values have been plotted as 3D maps on Fig. 3.13, since intermediary values follow a monotonous trend. From this figure it can be seen that increasing the relative density results in increasing the stiffness and decreasing anisotropy, as for the hexaround lattice. Also, the effective elastic modulus is inversely proportional to the buckling amplitude a , without exception. On Fig.3.13, it can also be seen that the maximal effective Young modulus is found along the $\langle 111 \rangle$ equivalent directions, similarly to the hexaround cell.

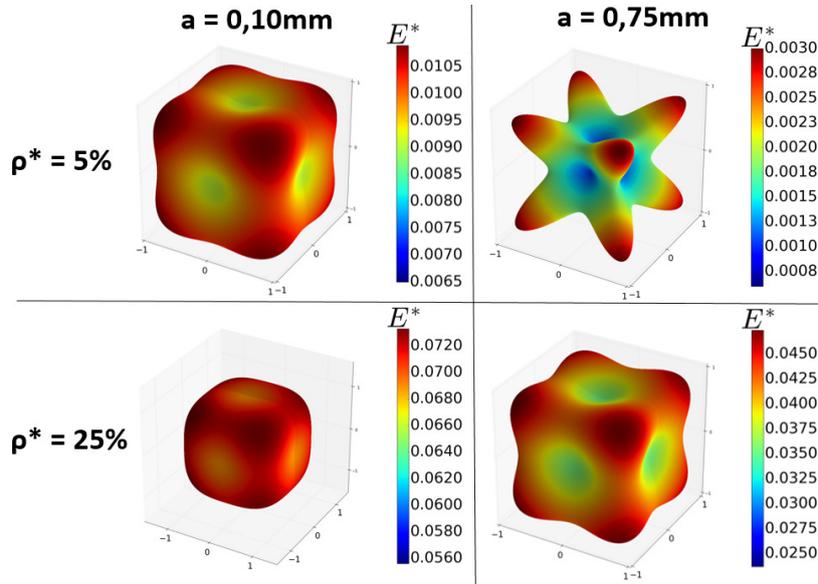


FIGURE 3.13 – 3D maps of normalized Young's modulus for various relative density ρ^* and pre-buckling amplitude a for the inverse hexaround cell

As for the previous lattice, the maximal effective Young modulus values, *i.e.* along the $\langle 111 \rangle$ directions, are plotted against the relative density ρ^* and buckling amplitude a in Fig. 3.14 for the inverse hexaround cell. From Fig. 3.14, it yields that maximal stiffness increases monotonously with relative density, while evolving inversely with buckling amplitude a . It appears that the effective Young modulus values do not converge towards a single value, mainly because the strut merging effect remains marginal with the inverse hexaround topology.

Poisson's ratio

As for the hexaround lattice, the effective Poisson ratio is computed in the (l, m) plane, which includes the direction \underline{l} of applied load. The Poisson ratio ν^* is represented within one plane, for specific orientations, in Fig. 3.15, for various values of a but density fixed at $\rho^* = 0.05$. Again, the auxetic effect is more pronounced for lower density. Also, as for the hexaround cell, computations revealed that the minimal Poisson ratio is to be found within the (100) plane. Exploiting Fig. 3.15 it can be seen that auxetic behavior is achieved for the same angular range as before, *i.e.* $[\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}] \pm \frac{\pi}{2}$. The same trend can be observed for the effect of pre-buckling amplitude a : increasing a yields a higher anisotropy, with a more negative Poisson ratio, *i.e.* a more pronounced auxetic effect, while not changing the maximum positive Poisson ratio value. A higher value of a is needed for the inverse hexaround lattice to exhibit an auxetic character. The auxetic effect is maximal for $a = 0.75$ mm, with $\nu^* = -0.70$, along the $(0, 0, \frac{\pi}{4} \pm \frac{\pi}{2})$ direction within the (100) plane, which corresponds to the $\langle 110 \rangle$ equivalent directions, as for the hexaround lattice.

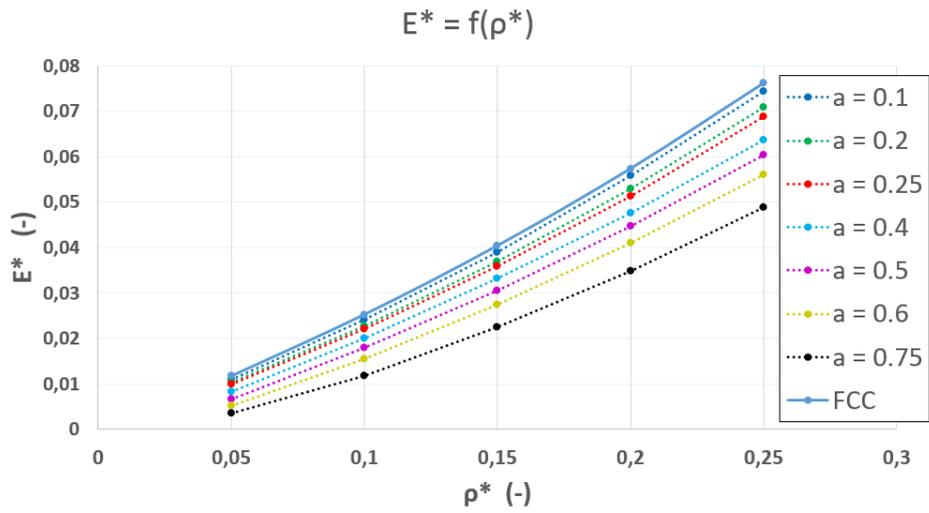


FIGURE 3.14 – Inverse hexaround maximal effective Young's modulus with respect to relative density ρ^* and pre-buckling amplitude a

The most negative Poisson ratio values have been computed for each parametric configurations of the inverse hexaround cell, and plotted in Fig. 3.16. As expected, increasing relative density increase ν^* .

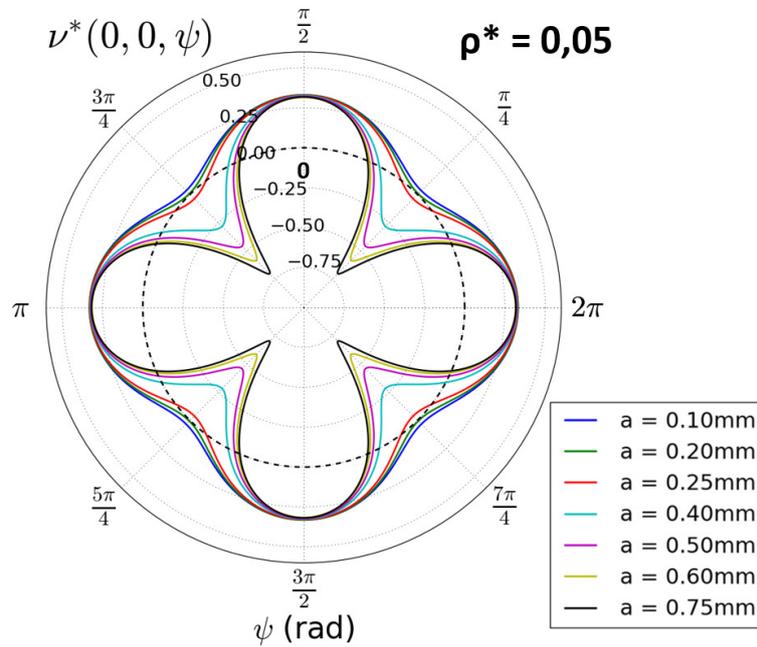


FIGURE 3.15 – Inverse hexaround Poisson's ratio within the (100) plane, for various a and $\rho^* = 0.05$

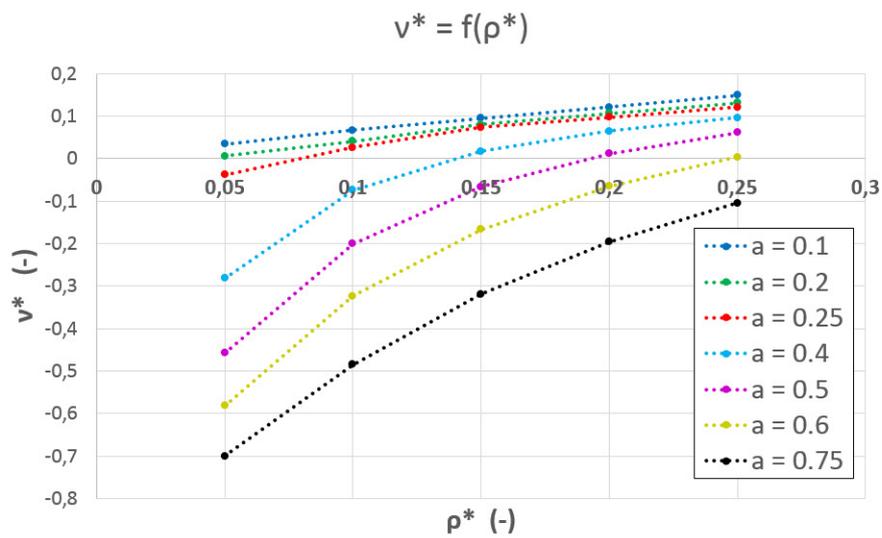


FIGURE 3.16 – Most negative Poisson's ratio values for the inverse hexaround lattice with respect to a and ρ^*

3.8 Extension to elastoplasticity

Studies have suggested that auxetic behavior could improve crashworthiness [89; 91–93]. In this section, the influence of the loading direction and relative density on the mechanical energy dissipation through plastic work will be explored in the case of an elastoplastic constitutive material. It has been shown in the previous section that various mechanical responses can be obtained for specific orientations in space due to anisotropy of the elastic behavior in lattice structures. Both unit-cells exhibit minimal effective Poisson's ratio when loaded along $\langle 110 \rangle$ equivalent directions, and maximal Young's modulus along $\langle 111 \rangle$. In order to investigate the relation between elastic properties, elastic anisotropy and mechanical energy dissipation, a series of computational experiments are conducted through finite element simulation. The energy dissipation is computed as the total plastic work up to 5% of macroscopic deformation under uniaxial compression. For the sake of simplicity, failure is not considered in the simulation. Thanks to the periodic element type introduced in Section 3.6, the compression state is obtained by applying a macroscopic stress tensor $\underline{\Sigma}$, such that :

$$\underline{\Sigma} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

The dissipated mechanical energy \mathcal{E}_d during the deformation of an elastoplastic material is defined as the integral of the stress-plastic strain curve evaluated up to a final strain, noted ε_f , as in Eq. 3.24, hence corresponding to the total plastic work for a monotonic loading. It is obtained as a local post-processing on each integration point within the simulation.

$$\mathcal{E}_d = \int_0^{\varepsilon_f} \sigma \, d\varepsilon^p \quad (3.24)$$

3.8.1 Material properties

The mechanical behavior of the constitutive material is extended to elastoplasticity. Let us consider a simple yield function :

$$f(\boldsymbol{\sigma}) = \sigma^{\text{eq}} - R \quad (3.25)$$

with the von Mises equivalent stress σ^{eq} such that :

$$\sigma^{\text{eq}} = \sqrt{\frac{3}{2} \boldsymbol{\sigma}^{\text{dev}} : \boldsymbol{\sigma}^{\text{dev}}} \quad (3.26)$$

where $\boldsymbol{\sigma}^{\text{dev}}$ is the deviatoric part of the stress tensor. In addition, an isotropic non-linear hardening model is adopted, as shown in Eq. 4.1 :

$$R = R_0 + \sum_i^2 Q_i (1 - e^{-b_i p}) \quad (3.27)$$

The actual constitutive material considered is a Ti-6Al-4V titanium alloy, considered elastoplastic, *i.e.* strain-rate independent, with material modeling parameters identified from tensile experiments available in the literature [223] : $E = 97 \text{ GPa}$; $\nu = 0.3$; $\sigma_Y = 759 \text{ MPa}$; $Q_1 = 331 \text{ MPa}$; $b_1 = 332$; $Q_2 = 259 \text{ MPa}$; $b_2 = 5.8$.

3.8.2 Dissipated energy comparison

In order to compare the amount of dissipated energy with respect to the loading orientation, three orientations have been considered for the lattices : principal orientation [100], minimal Poisson's ratio [110], and

maximal Young's modulus [111] orientations. Also, choice has been made to compare the dissipated energy for both cells at the configuration $a = 0.6mm$, which exhibits auxetic behavior for all ρ^* , only varying the relative density.

Hexaround cell

Numerical compression tests along three orientations have been done, keeping same parameter a and varying relative density. The dissipated energy has been measured following Eq. 3.24 up to 10% plastic strain, and plotted with respect to relative density in Fig. 3.17. The value of 10% plastic strain has been chosen for being representative of the level of deformation that could be sustained by the lattice in realistic applications, yielding the local strain level up to 25-30% which would induce failure of the constitutive material, *i.e.* Ti-6Al-4V. From this figure, it can be seen that energy dissipation is following a power-law dependence, at least between $\rho^* = 0.05$ and 0.25, for all three loading directions. The most efficient orientation for the hexaround lattice in order to dissipate energy through plastic work appears to be along the [111] direction, suggesting that Young's modulus is a critical parameter for energy dissipation through plastic work. Direction [110] also dissipates more than the principal [100] cubic orientation.

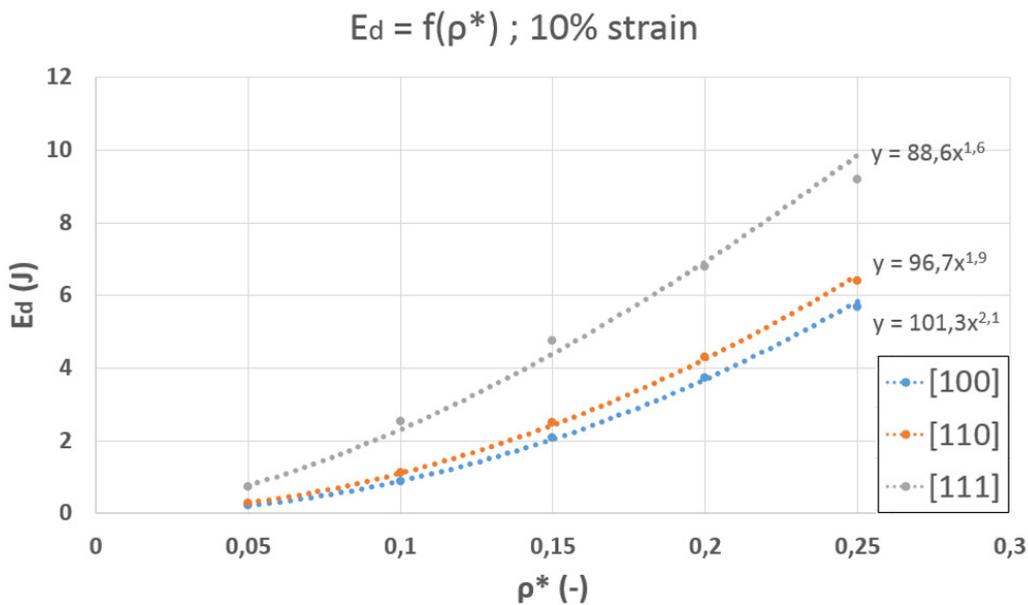


FIGURE 3.17 – Energy dissipated by the hexaround unit-cell during the compression testing through 3 different orientations, with respect to the relative density

Inverse hexaround cell

As for the hexaround lattice, the dissipated energy has been measured up to 10% plastic strain, and plotted against relative density in Fig. 3.18. Again, the energy dissipation evolves to the relative density, following a power-law relation on the investigated range of densities, and this for all three loading directions. Although the most efficient orientation is still along [111], there is a competition between the [110] and [100] directions : by extrapolating the results for higher densities, it seems that the minimal Poisson's ratio direction would be less efficient, although stiffer than [100].

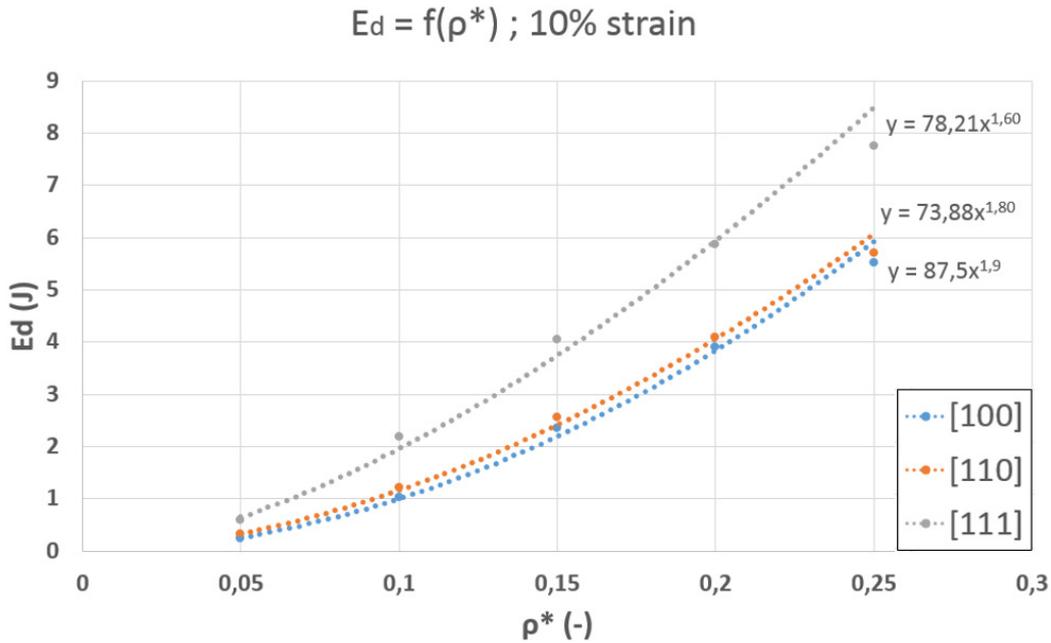


FIGURE 3.18 – Energy dissipated by the inverse hexaround unit-cell during the compression testing through 3 different orientations, with respect to the relative density

3.9 Discussion

Cellular auxetics appear as interesting candidates due to densification under indentation or compression loading, all things equal auxetics should behave better under impact, for instance when used as sandwich-core material to be mainly loaded in shear, due to the high relative shear modulus of linear isotropic auxetics. 35 years of auxetics research have shown that auxetics, either deterministic or stochastic, are bending dominated architectures, hence yielding a very soft response with respect to classical stretch-dominated lattices or shell-lattices [41]. This soft elastic response could result in a more progressive behavior in the elastoplastic regime, and potentially anisotropy that could be exploited to create bespoke materials with tailored mechanical behavior. Although auxetic behavior has been effectively obtained through pre-buckled design, as shown on Fig. 3.10 and Fig. 3.15, one can notice that the regular and inverse hexaround lattices are not as fully auxetic, *i.e.* auxetic in every direction, as for most auxetic lattices available in the literature. Only specific angular domains exhibit effective negative Poisson's ratio. It suggests that auxeticity is related to both shape and amplitude of buckling. Amplitude of buckling is the main parameter driving the Poisson ratio value, followed by the relative density. Both parameters also have a strong influence on the effective Young modulus : the higher the buckling amplitude, the lower the modulus and the more negative the Poisson ratio. Hexaround and inverse hexaround unit-cells exhibit similar effective elastic properties at same buckling amplitude for low relative density, but the hexaround lattice exhibits both higher modulus and more pronounced auxeticity at high relative density compared to the inverse hexaround lattice. Also, no influence of relative density on Poisson's ratio was observed in [224], most likely due to a small range of investigation for the relative density. In the present work, computational results on a wider range, from $\rho^* = 0.05$ to 0.25, show that the auxetic behavior of lattices depends strongly on the relative density. This claim is supported by other results in the literature on buckling-induced auxeticity [76; 78]. According to Figs. 3.13–3.16, it appears that the inverse hexaround lattice might be a better choice for application-

Cell	ρ^*	E*max	v*min	\mathcal{E}_d (J)
Hexaround	0.10	0.020	-0.435	2.53
Inv. hexaround	0.10	0.016	-0.329	2.20
Hexatruss	0.10	0.014	-0.533	1.80

TABLEAU 3.2 – Comparison for effective mechanical properties between hexatruss, regular, and inverse hexaround cells for a compression test along the [111] direction up to 10% of plastic strain.

oriented auxetic design, in the sense that its effective elastic properties evolve monotonously with respect to the geometrical parameters a and ρ^* , making it easier to draw design guidelines in comparison to the regular hexaround lattice.

Regarding applications, crashworthiness is a key performance expected from architected cellular materials such as auxetic lattices. By simulating the compression of both unit-cells along three different orientations ([100], [110], and [111]), one can observe from Figs. 3.17 and 3.18 that both the regular and inverse hexaround lattices exhibit the highest plastic work dissipation along the [111] loading direction, which is also the direction of maximal effective stiffness. This result is contradictory to [89], which reports in a quasi-2D orthotropic case, that the energy absorption is maximal for auxetic configurations that are not the stiffest. Although three-dimensional, the lattices structures introduced in the present work exhibit a higher degree of symmetry, therefore leading to cubic anisotropy, which drives the mechanical response of the lattice [85; 225; 226]. In order to conclude on the crashworthiness of the proposed lattices, an additional comparison was made with the hexatruss cell [10], also exhibiting a re-entrant topology, for the same buckling amplitude $a = 0.6$ mm and relative density $\rho^* = 0.1$, by compressing the cells along the [111] direction up to 5% of plastic strain. The data is reported in Tab. 3.2. It can be seen from Tab. 3.2 that the hexatruss lattice displays a more negative Poisson ratio than other cells, but also a lower maximal normalized Young modulus, and a lower dissipated energy up to 10% plastic strain. This observation is consistent with the one made for the regular and inverse hexaround cells : a higher energy dissipation is obtained for 3D elastoplastic auxetic lattices loaded along the direction of maximum effective stiffness. Finally, it can be noted that the straightness of constitutive struts, and sharps angles of the hexatruss design lead to stress concentrations, and premature localized plasticity.

3.10 Conclusion and perspectives

In this study, two new auxetic lattice designs have been proposed based on pre-buckled topology. The effective mechanical properties of the lattices have been investigated through computational homogenization, using periodic boundary conditions. These cells were conceived to exhibit negative Poisson's ratio thanks to a pre-buckled design, that consists of curvilinear cylindrical struts, curved inwards, *i.e.* towards the center of the cubic cell.

Computational homogenization results showed that auxetic behavior has effectively been achieved in this way. The influence of the geometrical parameters has been assessed, showing that the buckling amplitude a has a critical impact on effective elastic properties, increasing the effective Poisson ratio and elastic anisotropy, as well as lowering the overall stiffness of the cells. On the other hand, increasing the relative density ρ^* results in an increased stiffness, and a less and less auxetic as well as anisotropic lattice, as it could be expected by going from a thin lattice structure to a bulky porous material. The computational re-

sults also showed that the stiffest spatial orientation for both lattices are the $\langle 111 \rangle$ equivalent directions, while $\langle 110 \rangle$ yield the most negative Poisson ratio.

Finally, an investigation about the influence of lattice orientation and its corresponding elastic properties on energy dissipation have been carried on the regular and inverse hexaround, as well as the hexatruss auxetic lattices, assuming elastoplasticity for the constitutive material with nonlinear isotropic hardening, using computational experiments, *i.e.* compression test simulation using finite elements with periodic boundary conditions in a finite deformation framework. Three different lattice orientations have been considered for the test : [100], a principal cubic direction, [111], a direction of maximum Young's modulus, and [110], a direction yielding the most negative Poisson ratio. Energy dissipation was measured as the total of plastic work up to 10% of plastic strain, for different relative density. The results showed that the direction of maximal effective stiffness, [111], dissipates the most for all three cells. These results may suggest that the effective Young modulus is the most important elastic properties for 3D auxetic lattices when aiming for energy dissipation through elastoplasticity, as the results are consistent for the three lattice designs. The present work highlights the interest of investigating the influence of loading orientation and geometric parameters for crashworthiness performance evaluation, paving the way for tailored auxetic lattice materials designed for structural applications. Only monotonic loading has been considered in the present work ; also the current computational analysis does not account for any failure. In order to accurately estimate the dissipated energy, future investigations should incorporate damage, fatigue, and failure modeling.

Credit authorship contribution statement :

Frédéric Albertini : Investigation, Methodology, Software, Writing – original draft. Justin Dirrenberger : Conceptualization, Supervision, Methodology, Writing – review & editing. Cyrille Sollogoub : Supervision, Methodology, Writing – review & editing. Andrey Molotnikov : Conceptualization, Supervision, Methodology, Writing – review & editing.

3.11 Conclusions en français

Dans cette étude, deux nouvelles cellules auxétiques ont été proposées sur la base d'une géométrie de poutres en forme d'arc de cercle. Les propriétés mécaniques effectives des treillis ont été étudiées par homogénéisation numérique, en utilisant des conditions aux limites périodiques. Ces cellules ont été conçues pour présenter un coefficient de Poisson négatif grâce à une conception spécifique, qui consiste en l'utilisation de poutres cylindriques curvilignes, courbées vers le centre de la cellule cubique.

Les résultats de l'homogénéisation numérique ont montré que l'auxétisme a effectivement été atteint grâce à ce design. L'influence des paramètres géométriques a été évaluée, montrant que l'amplitude de flambement a a un impact prépondérant sur les propriétés élastiques effectives, augmentant le coefficient de Poisson effectif et l'anisotropie élastique, et diminuant la rigidité des cellules. En revanche, l'augmentation de la fraction volumique ρ^* se traduit par une rigidité accrue, et une cellule de moins en moins auxétique et anisotrope, comme on pouvait s'y attendre en passant d'une structure à poutres fines à un matériau poreux volumineux. Les résultats de calculs ont également montré que l'orientation spatiale la plus rigide pour les deux cellules sont les directions équivalentes $\langle 111 \rangle$, tandis que $\langle 110 \rangle$ donne le coefficient de Poisson le plus négatif.

Enfin, une étude de l'influence de l'orientation du treillis et des propriétés élastiques correspondantes sur la dissipation d'énergie a été menée sur la cellule Hexaround et Inverse, ainsi que sur le treillis auxétiques Hexatruss, pour comparaison. En supposant l'élastoplasticité et considérant un matériau constitutif à écrouissage isotrope non linéaire, l'énergie dissipée est calculée à l'aide de simulations de test de compression utilisant les éléments finis avec des conditions aux limites périodiques en grandes déformations. Trois orientations de réseau différentes ont été considérées pour les essais : $[100]$, la direction cubique principale, $[111]$, la direction maximisant le module d'Young, et $[110]$, la direction minimisant le coefficient de Poisson. La dissipation d'énergie a été mesurée comme le travail plastique total jusqu'à 10% de déformation plastique, pour différentes fractions volumiques. Les résultats ont montré que la direction de rigidité effective maximale, $[111]$, dissipe le plus pour les trois cellules. Ces résultats suggèrent que le module d'Young effectif est la propriété élastique la plus importantes pour les treillis auxétiques 3D lorsque l'on vise la dissipation d'énergie par élastoplasticité, les résultats étant cohérents pour les trois structures.

Le présent travail met en évidence l'intérêt d'étudier l'influence de l'orientation de chargement et des paramètres géométriques pour l'évaluation des performances en dissipation d'énergie, ouvrant la voie à la conception de matériaux auxétiques pour des applications structurelles. Seul des chargements monotones ont été considérés dans ces travaux, ne modélisant pas la rupture. Les études futures devraient alors intégrer la modélisation de l'endommagement, de la fatigue et de la rupture afin d'estimer avec précision l'énergie dissipée.

3.12 Supplementary notes

3.12.1 Struts design

The equations used to generate the lattice-cell design rely on the geometrical description given in Fig.3.19.

The Hexaround cell struts axes are obtained by fitting a circle through 3 points (P1, P2 and P3), C being its center. Then, only the arc starting at P1, finishing at P3 and passing through P2 is conserved. The radius of the circle has a direct influence on the buckling amplitude a : the smaller the radius, the higher the buckling amplitude.

The equation for the corresponding circle is such that :

$$\left(x - \frac{L}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(y - \left(\frac{a}{2} - \frac{L^2}{4a}\right)\right)^2 = r^2 \quad (3.28)$$

The inverse Hexaround cell struts axis are obtained by fitting a circle through 2 points (P1 and P2), using the same radius than the Hexaround circle. Only the arc starting at P1 and finishing at P2 is kept. This arc is then symmetrized with a plane of reflection. Influence of the radius on the buckling amplitude remains the same.

Equation of the circle that fit through P1 and P2 is the following :

$$x^2 + (y - r)^2 = r^2 \quad (3.29)$$

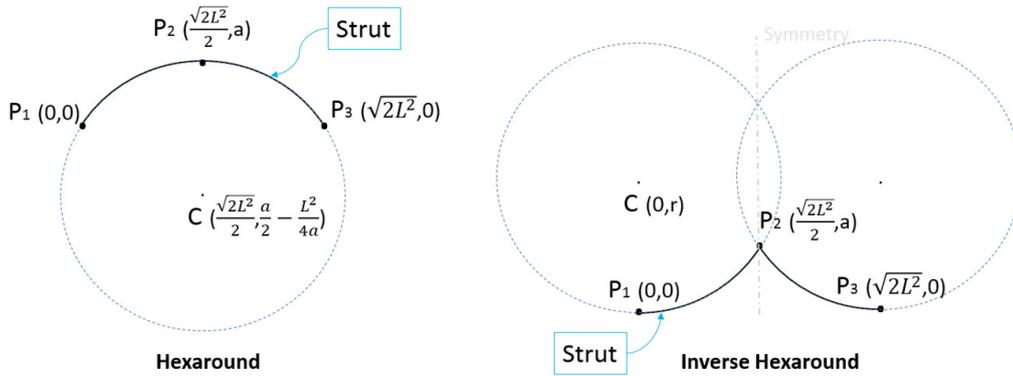


FIGURE 3.19 – Geometries used to define the struts of Hexaround cell (left), and Inverse Hexaround cell (right)

3.12.2 Mesh convergence analysis

In order to ensure a mesh-independent response, a mesh sensitivity analysis has been performed, as shown in Fig.3.20. The mesh used in this work exhibit an error lower than 0.5% on the [100] elastic modulus of the hexaround lattice compared to the maximal mesh density attainable with our current computational means, *i.e.* using 300 GB of RAM.

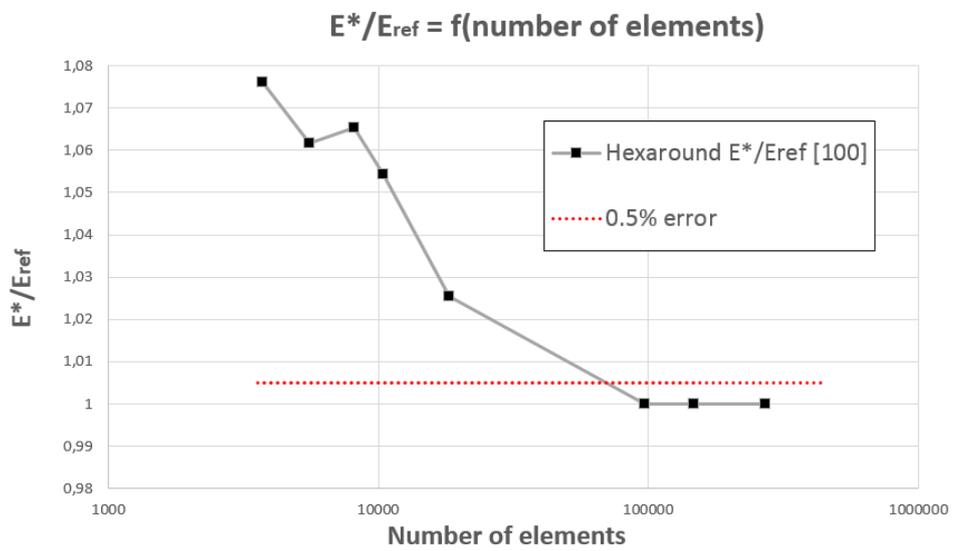


FIGURE 3.20 – Mesh sensitivity study for an Hexaround cell with $a=0.75\text{mm}$ and $\rho^* = 0.10$. E_{ref} is the converged normalized Young's modulus for a high mesh density (271k elements).

Chapitre 4

Étude expérimentale et numérique du comportement de matériaux auxétiques architecturés avec matrice élastomère

Sommaire

4.1 Résumé en français	88
4.2 Abstract	90
4.3 Introduction	90
4.3.1 Nomenclature	92
4.4 Experimental procedures	92
4.4.1 Design of auxetic composite lattice structure	92
4.4.2 Materials and methods	94
4.4.3 Experimental testing	94
4.5 Computational homogenization	96
4.5.1 Computational experiments	97
4.6 Results and discussions	97
4.6.1 Numerical estimation of elastic properties	97
4.6.2 Compression tests	99
4.7 Crashworthiness evaluation	104
4.8 Discussions	105
4.9 Conclusions and perspectives	106
4.10 Conclusions en français	108
4.11 Supplementary notes	109
4.11.1 Mesh convergence analysis	109
4.12 Elastic stiffness maps for lattices	109
4.12.1 Complete Experimental curves	109

4.1 Résumé en français

Ce chapitre s'intéresse à l'évolution des propriétés mécaniques de structures rigides auxétiques lorsqu'elles sont remplies par une matrice élastomérique, par l'utilisation d'outils numériques et d'essais expérimentaux sur éprouvettes imprimées. On parle ici de treillis composites car les treillis et la matrice sont composées d'un polymère (différent pour les deux), le rapport de module de ces deux polymères est considéré "modéré".

L'étude porte sur deux treillis auxétiques : la cellule Hexaround décrite dans le chapitre précédent et la cellule issue des travaux de Warmuth *et al.* [186].

Dans un premier temps, les structures étudiées sont décrites géométriquement, les valeurs de leurs paramètres constitutifs sont données pour différentes fractions volumiques (5, 10, 15, 20 et 25%). Les propriétés élastiques effectives des structures (le module d'Young relatif E^* et le coefficient de Poisson ν) sont étudiées par éléments finis, en utilisant une stratégie d'homogénéisation avec conditions aux limites périodiques. La stratégie d'homogénéisation est donnée. Une comparaison est faite entre les treillis et les treillis composites, pour les différentes fractions volumiques treillis / matrice.

Pour la réalisation de la partie expérimentale, des échantillons ont été fabriqués à l'aide d'une imprimante 3D multi-matériaux par photopolymérisation (Connex350 Object, de la marque Stratasys). Les matériaux utilisés sont le VeroWhite (polymère rigide) pour les structures, et le TangoBlack+ (élastomère) pour la matrice. Les propriétés mécaniques des matériaux sont évaluées par des tests de traction sur des éprouvettes imprimées, permettant d'identifier des lois de comportement utiles à la modélisation numérique. Une loi de comportement élasto-plastique avec écrouissage isotrope non-linéaire est choisie pour le VeroWhite, tandis qu'un modèle d'Arruda-Boyce est utilisé pour le comportement hyperélastique du TangoBlack+.

Les éprouvettes consistent en des cubes de 5 cellules unitaires de côté selon les directions (x, y, z) dont la fraction volumique de treillis est fixée à 20%, et sont testés en compression. 4 éprouvettes de chaque type (16 au total) sont testées. Les profils contraintes-déformations sont analysés et comparés entre eux, ainsi qu'à du TangoBlack+ seul.

Une analyse des propriétés en dissipation d'énergie est alors faite utilisant les critères d'énergie spécifique dissipée et d'efficacité d'absorption. L'énergie spécifique dissipée est tracée en fonction de la déformation des structures et comparée à celle des structures composites. Il est fait de même pour l'efficacité d'absorption.

Les résultats suggèrent que le remplissage des structures pourrait augmenter le module d'Young, la contrainte maximale et retarder la densification du treillis, améliorant ainsi à la fois l'énergie spécifique dissipée et l'efficacité d'absorption des matériaux architecturés considérés. Ces améliorations découlent directement de la présence de la matrice agissant comme un support structurel, modifiant le mode de rupture des treillis. Ces résultats peuvent aider à concevoir de nouveaux dispositifs d'absorption d'énergie basés sur des matériaux architecturés hybrides.

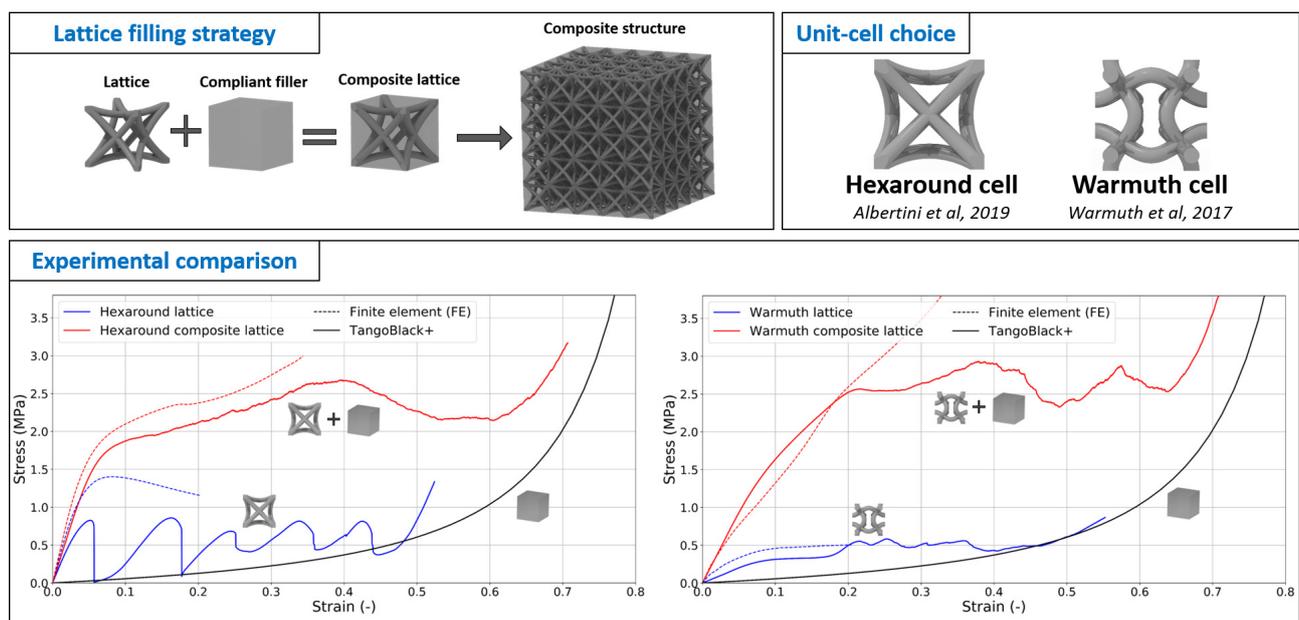
Ce chapitre a fait l'objet d'un article publié dans la revue *Additive Manufacturing* en septembre 2021 :
— F. Albertini, J. Dirrenberger, C. Sollogoub, T. Maconachie, M. Leary, A. Molotnikov *Experimental and computational analysis of the mechanical properties of composite auxetic lattices structures*, Additive

Manufacturing, 2021

4.2 Abstract

In this work, the influence of a compliant hyperelastic polymeric phase infiltrated inside stiff auxetic lattices is studied through experimental and numerical approaches. Samples were fabricated using material jetting technology (MJT). The design principle mimics examples of biological materials which combine stiff and compliant materials to attain high superior mechanical properties exceeding the rule of mixtures of both constituent. Two negative Poisson's ratio lattice designs are considered, namely Hexaround and Warmuth cell. Their effective elasto-mechanical properties are investigated through finite element method (FEM) using a homogenization strategy with periodic boundary conditions. A comparison of mechanical properties between lattices and composite lattices, for multiple lattice/matrix volume fractions is discussed and numerical models are validated through a series of compression tests. Results suggest that filling lattices could increase Young's modulus, peak stress, plateau stress and delayed densification of the lattice, hence improving both specific energy absorption (SEA) and absorption efficiency of the considered architected materials. The improvements are attributed to the presence of the matrix acting as a structural support, modifying lattice failure mode from layerwise to shear band breaking. These results expand the design principles for new energy absorption devices based on architected materials.

Graphical Abstract



4.3 Introduction

Architected materials are a rising class of advanced materials that open up new opportunities to populate unoccupied areas of Ashby's materials performance maps [6] and expand their functional properties. The term architected materials encompasses any material obtained through a design process that aims to fulfill a specific set of requirements, in terms of functionality, behaviour, or performance, induced by a particular morphology, *i.e.* the relative topological arrangement between multiple phases, such that some of its materials properties, *e.g.* yield strength/density, are improved in comparison to those of its constituents, due to structure and composite effects [6; 14; 15; 211]. Among novel properties associated with a special

shape are auxetic materials, which are considered as promising candidate for future engineering applications [10; 65; 67; 77; 84; 91; 96–98; 100–102; 104; 105; 146; 147; 227; 228].

Auxetics designate a group of architected materials that exhibit negative Poisson's ratio. Such property implies that auxetics expand transversely when stretched, and shrink when compressed, contrary to conventional materials. In the case of three-dimensional isotropic elasticity, Poisson's ratio ν is ranging from -1 (unshearable) to 0.5 (incompressible, rubber-like). However, most known natural and engineered materials exhibit a positive Poisson's ratio. Studies about auxetic behaviour started in the 80's [63–65], drawing increasing attention since then [10; 67; 77; 94–102; 104; 146; 147]. Reported properties of negative Poisson's ratio materials cover a large spectrum of applications, including acoustic damping [80], improved indentation resistance compared to conventional cellular materials [10; 88], improved fracture toughness [229], or as wave-guiding medium [84; 86]. Recently, the auxetics have been explored as an energy absorbing medium in order to improve crashworthiness [89; 91–93]. While typically metals or composite materials are used to absorb energy either due to plastic deformation [230] or complex failure modes [231], much less attention is given to the morphology of the parts. Often rectangular boxes or axial tubes are utilised due to the ease of manufacturing. However, the use of hybrid or composite materials and selective placement of materials in a part could further enhance the energy absorption capability of these new materials. Ashby and Bréchet [6] defined hybrids as "the combination of two (or more) existing materials so as to allow a superposition of their properties". This definition encompasses many strategies to produce a hybrid material including combination of architected materials with monolithic ones, referred in this paper as multi-material architected material. Multi-material architected materials aim at combining the benefits from architecture, e.g. lightweight with superior mechanical properties, with those of monolithic materials. It is hypothesized that crashworthiness can be tailored by combining "stiff and compliant" material which is the focus of the present work.

Examples of architected materials that associate stiff and compliant materials can be found in numerous biological materials. The well-studied brick-and-mortar structure of nacre [165; 232–234], exhibit high strength and toughness, far exceeding the properties of its constituents. Another example is turtle shell which consists of the assembly of stiff scales joined by compliant interfaces, providing flexibility under small deformations, but high stiffness under larger deformations [164; 235]. Among stiff/compliant engineered architected materials, one can cite stochastic composites, as fibrous composites [157; 236] that confer high stiffness for reduced mass, particulate composites [158] increasing stiffness through percolation, or composite metallic foams [167; 169] that present increased stiffness, yield stress and dissipated energy compared to simple lattices.

Recently, advances in additive manufacturing technologies (especially resolution and availability to combine multiple materials in the same build) opened up a possibility of manufacturing deterministic composites, such as Interpenetrated Phase Composites (IPC) [159; 160] or 2D composite structures [89; 189; 190] that all report increased stiffness, yield stress and dissipated energy compared to single material structures. Combination of stochastic foams with lattice structures have also been investigated in [175], showing that foam addition stabilizes lattices from buckling, therefore increasing post-buckling strength and exhibiting energy absorption capacity higher than that of both components taken separately.

Fewer studies focused on the combination of hard lattice structures with compliant hyperelastic materials [182; 184]. For instance, in the study by Novak *et al.* [184], auxetic metallic lattices are filled with silicone and it was demonstrated that these composites have a higher elastic modulus and improved compressive strength. However, the study did not investigate the influence of volume fraction and elastic properties of

the constitutive phases on the mechanical properties.

Previous studies have also numerically investigated the effect of filling lattices with soft materials and shown its influences on the auxetic properties [187; 188; 237–239]. In other studies, it was reported that it can lead to a delayed buckling of struts and postponement of densification and failure and therefore increasing the elastic modulus and peak stress [3; 182; 184; 190].

In this work, we study the influence of a compliant hyperelastic polymeric phase infiltrated inside stiff auxetic lattices. Specifically, two different auxetic lattices, namely Hexaround [240] and cubic anti-chiral [72] (referred to as Warmuth cell in this work) are designed and manufactured using Polyjet technology. Firstly, we will investigate the effect of elastomeric filling on the elastic behavior of lattices by the means of computational homogenization. Secondly, finite element simulation based on a finite-strain framework will be performed in order to address the nonlinear mechanical behavior of auxetic lattices, and compare these results to mechanical tests are performed on additively manufactured samples.

4.3.1 Nomenclature

Throughout this work, the following notation is used : x for scalars, \underline{x} for vectors, $\underline{\underline{x}}$ for 2nd-order tensors, $\underline{\underline{\underline{x}}}$ for 4th-order tensors, \cdot for dot product, $:$ for doubly-contracted dot product, $\langle x \rangle$ for spatial average, and \bar{x} for ensemble average.

4.4 Experimental procedures

4.4.1 Design of auxetic composite lattice structure

In this work, two types of lattice unit cells are selected due to their ability to show auxetic behaviour, see Fig. 4.1(a) and Fig. 4.1(b). The Hexaround geometry was proposed by some of the coauthors of the present paper in [240], while the Warmuth cell is a well-known lattice cell with both computational [72] and experimental [186] data available, making it an adequate point of comparison. Unit-cells have been generated using Rhinoceros 3D¹ with the Grasshopper plug-in. The obtained CAD files were exported to STEP and STL files to be used for finite element (FE) modelling and additive manufacturing. Unit-cells are described with respect to geometrical parameters. In the present study, side length of the cubic unit-cells has been chosen equal for both cells, as well as waviness amplitude, for comparison purpose. Only diameter of struts differs, so that each unit-cells could be compared at the same volume fraction ρ^* , as defined by Eq. 4.3.

A full description of the Hexaround cell is given in [240]. Struts of the cell are arc-shaped, and negative Poisson ratio (PR) is achieved through inward orientation of arcs. It can be described using 3 parameters : L , side length of the cubic cell, a , waviness amplitude, and D , diameter of the struts (see Fig. 4.1). The different sets of geometrical parameters result in volume fraction that are displayed in Table 4.1.

TABLEAU 4.1 – Hexaround cell geometrical parameters for different volume fraction

V_f (-)	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25
L (mm)	6.0	6.0	6.0	6.0	6.0
a (mm)	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
D (mm)	0.39	0.56	0.70	0.83	0.94

1. <https://www.mcneel.com>

Similarly, the Warmuth cell is generated using the 13th eigen-mode of the regular cubic unit-cell as described in [186] and [185]. The struts are sinusoidal with a circular cross-section. It can be described using 3 parameters : L , side length of the cubic cell, a , the amplitude of sine, and D , diameter of the struts (see Fig.1b). The different sets of geometrical parameters result in volume fraction that are displayed in Table 4.2.

TABLEAU 4.2 – Warmuth cell geometrical parameters for different volume fraction

V_f (-)	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25
L (mm)	6.0	6.0	6.0	6.0	6.0
a (mm)	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
D (mm)	0.41	0.59	0.73	0.85	0.96

Once the lattice structure are defined, their composite counterpart is obtained by filling the voids in the geometry with a soft polymer, see Fig. 4.1(c).

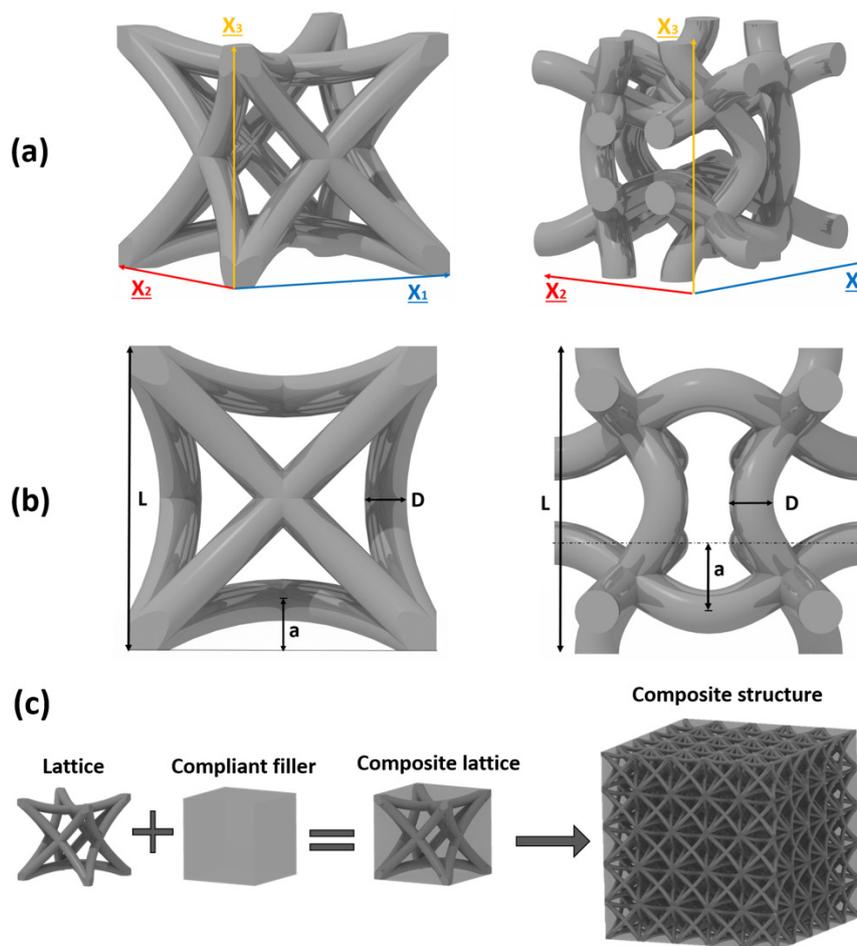


FIGURE 4.1 – Hexaround (left) and Warmuth (right) unit-cells, with their periodicity vectors X_i (a), and geometric descriptions (b), and the strategy to create composite lattice structures (c)

4.4.2 Materials and methods

Samples have been manufactured using a Stratasys Connex Objet350 printer (multi-material Polyjet material jetting technology). Polyjet technology is based on a liquid droplet deposition method, it can achieve a printing resolution of 600 dpi in both the X- and Y-axes, 1600 dpi in the Z-axis, and a minimum layer thickness of 16 μm [241]. Recent studies have shown its ability to manufacture multi-material composites in a single process [242; 243] without porosities between phases. Materials used are VeroWhite (composition : isobornyl acrylate, acrylate monomers, urethane acrylate, epoxy acrylate , acrylate oligomers and photo-initiators) for lattices and TangoBlack+ (urethane acrylate oligomers, Exo-1,7,7-trimethylbicyclo [2.2.1] hept-2-yl acrylate, methacrylate oligomers, polyurethane resin and photo-initiators) as matrix. Such materials have been used to produce triply periodic minimal surface-based Interpenetrated Phase Composites [159; 160] or topological interlocking structures [156]. A full factorial experiment is made, using a total of 16 samples, 4 repetitions of each lattice design and type (Hexaround / Warmuth; lattice / composite lattices). Each sample consists of a cube of 5 unit-cells per side, corresponding to a 30*30*30 mm cube, as can be seen on Fig.4.2.

VeroWhite is used as constituent for the stiff lattice phase. It's behaviour is considered elasto-plastic, and can be modeled through an isotropic non-linear hardening model [47], given by Eq. 4.1 :

$$R = R_0 + \sum_i^3 Q_i (1 - e^{-b_i p}) \quad (4.1)$$

Material parameters of VeroWhite's model have been identified from tensile testings (see Fig.4.3 (a)) : $E = 1.45 \text{ GPa}$; $\nu = 0.35$; $\sigma_Y = 20.0 \text{ MPa}$; $Q_1 = 19.3 \text{ MPa}$; $b_1 = 137.7$; $Q_2 = -39.6 \text{ MPa}$; $b_2 = 10.1$; $Q_3 = 51.5 \text{ MPa}$; $b_3 = 4.3$. VeroWhite's density is 1.175 g.cm^{-3} .

TangoBlack+ is used as the compliant phase. Its behaviour is hyperelastic and have been modeled using the Arruda-Boyce model [198]. Fitting experimental results from tensile testings, following parameters of A-B model has been identified (see Fig.4.3 (b)) : $\mu = 0.155 \text{ MPa}$; $\lambda = 2.87 \text{ MPa}$; $d = 0.30$. TangoBlack's density is 1.141 g.cm^{-3} .

A separate study was undertaken to investigate the manufacturability of these composite structures and it was shown that lattices with 20% volume fraction could be manufactured reliably and will be used for the validation of the proposed numerical methods. Due to the nature of Polyjet 3D material jetting process, all lattice samples were filled with support material (a water soluble, wax-like material) that needed to be removed before testing. All lattices were cleaned in an ultrasonic bath with heated solution of caustic soda (5% in concentration), for half an hour, before being rinsed using water jet in order to remove the support material. On the other hand, the composite lattices only required a surface cleaning.

Manufactured samples have been weighed to compare with theoretical weights obtained from CAD designs. The measured weights are shown in Table 4.3. It can be seen that the manufactured lattices and composites are slightly heavier than the theoretically calculated values based on CAD files which is associated with manufacturing spatial accuracy, and minor absorption of moisture from water and environment due to the cleaning process.

4.4.3 Experimental testing

Mechanical behaviour of both manufactured lattice and composite samples has been investigated through compressive tests. An Instron 5969 tensile machine with a 50 kN load cell was used, plates being

TABLEAU 4.3 – Theoretical (CAD) and average measured mass of manufactured samples

Sample	Mass :	CAD (g)	manufactured (g)
Hexaround (lattice)		6.35	6.75 (± 0.11)
Warmuth (lattice)		6.35	6.68 (± 0.13)
Hexaround (composite lattice)		30.99	31.55 (± 0.09)
Warmuth (composite lattice)		30.99	31.49 (± 0.10)



FIGURE 4.2 – Lattice samples of Hexaround and Warmuth structures after manufacturing (left side) shown in red and their composite counterparts filled with TangoBlack+ hyperelastic materials (right side)

lubricated in order to reduce friction, using "Super Lube" grease. The applied strain rate was 0.001/s, corresponding to a displacement speed of the plate of 1.8 mm/min. Strain was calculated using recorded plate displacement. Average stress σ have been computed as the applied load F divided by sample cross section $S = (5.L).(5.L)$, with $S = 900 \text{ mm}^2$ in our case.

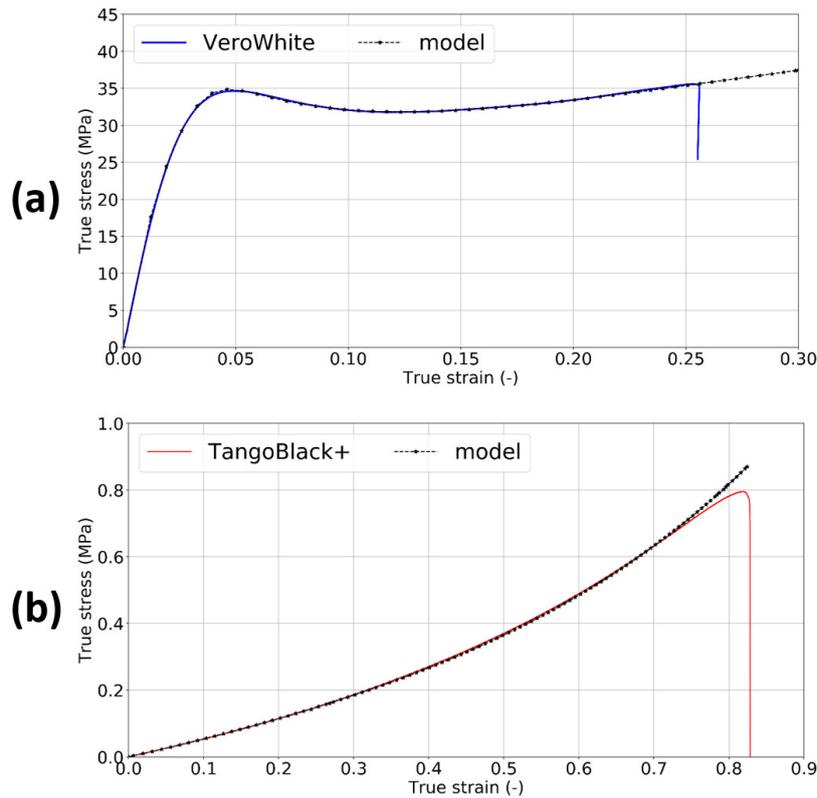


FIGURE 4.3 – VeroWhite stress-strain curve and associated model (a); Tango-black+ stress-strain curve and associated model (b)

4.5 Computational homogenization

In this work, computational homogenization is used to predict the effective elastic properties of lattices and composites.

CAD files (STEP format) are meshed using GMSH software [208] with tetrahedral quadratic elements (C3D10). FE analysis has been conducted using Z-Set FE package². A mesh sensitivity study has been performed to ensure numerical accuracy, and is presented in Appendix A.

By computing the volume averaged response under a physical stimulus over a virtual sample that is considered a representative volume element (RVE), one can identify the effective properties of a heterogeneous medium [212; 244–247].

(This section being very similar to Chap.3 "Computational homogenization" section, it has been removed from this chapter to avoid redundancy.)

Normalized modulus of cellular and architected materials are defined with respect to its constitutive material Young's modulus E_0 , and its volume fraction V_f :

$$E^* = \frac{1}{E_0 V_f} E \quad (4.2)$$

volume fraction V_f being defined as the volume occupied by a periodic cell V_{lattice} divided by the cubic

2. <http://www.zset-software.com>

volume circumscribed by the cell ($V_{\text{cubic}} = L^3$) as shown on Fig.4.4.

$$V_f = \frac{V_{\text{lattice}}}{V_{\text{cubic}}} \quad (4.3)$$

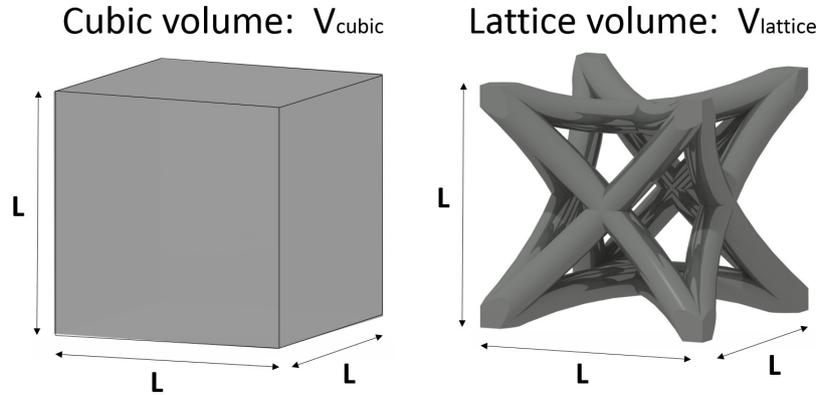


FIGURE 4.4 – Representation of V_{cubic} and V_{lattice}

4.5.1 Computational experiments

In addition to computational homogenization of elastic properties for the lattices, a full-field finite element simulation using nonlinear material models within a finite deformation framework. The objective here is to simulate the compression experiments for comparison. The stress measured is the Boussinesq or 1st Piola-Kirchhoff stress, while the corresponding strain measure is the Green-Lagrange strain. Computations are performed on unit-cells, applying periodic boundary conditions and prescribing macroscopic uniaxial strain component. The choice of working on a periodic unit-cell instead of the full sample geometry is driven by the computational cost of such calculation, which is already very intensive, e.g. 1.2 million degrees of freedom for a composite lattice unit-cell, taking up to 100 hours of computation running on a Intel Xeon E5-2640 v4 CPU at 2.4 GHz using 8 cores and 180 GB of RAM. All simulations are performed using tetrahedral quadratic elements (C3D10) and their sizes were determined using mesh convergence analysis, that can be found in 3.12.2. The implicit solver MUMPS³ (MULTifrontal Massively Parallel Solver) is used. Materials behaviour is identified from experimental curves shown in Fig.4.3, as presented in Section 4.4.2. In the context of the present work, no damage was considered in the modelling. This will be the focus a forthcoming paper.

4.6 Results and discussions

4.6.1 Numerical estimation of elastic properties

In this section, a comparison of numerically computed effective elastic properties (normalized Young's modulus E^* and Poisson's ratio ν in this study) with and without compliant matrix is made. Numerical results have been obtained through homogenization for different volume fraction of the presented unit-cells, only varying the diameter of the struts D to generate five different volume fraction values V_f : [5, 10, 15, 20, 25 %].

3. <http://mumps.enseiht.fr/>

In order to compute the elastic properties, the behaviour of both constitutive materials is considered purely elastic isotropic using experimentally identified properties displayed in Table 4.4.

TABLEAU 4.4 – Identified Elastic properties of VeroWhite and TangoBlack+

Material	E (MPa)	ν (-)
VeroWhite	1450.0	0.35
TangoBlack+	0.65	0.499

Normalized modulus

Normalized modulus have been computed for both lattices and composite lattices, plotted in $(0,0,\psi)$ plan, with regards to the volume fraction of lattices. As both lattices exhibit cubic elastic behaviour -even the Warmuth cell which is not properly cubic from a geometrical viewpoint- only 1/4 of the plane is represented (ψ is taken between 0 and 90°). A complete 3D map for elastic stiffness of lattices is given in 4.12. Normalized modulus for both lattice design are displayed in Fig.4.5(a) and (c). Normalized volume fractions are obtained by varying the lattice strut diameter, while maintaining waviness amplitude and cell size. The composite lattices normalized modulus is computed considering a rule of mixture for constitutive material E_0 . This corresponds to a theoretical maximum value for composites, hence making it adequate for normalizing the results :

$$E_0 = V_f \cdot E_{VW} + (1 - V_f) \cdot E_{TB+} \quad (4.4)$$

Constitutive materials Young's modulus E_{VW} and E_{TB+} are defined in Table 4.4.

Evolution of Hexaround normalized modulus depending on the loading orientation is presented on Fig.4.5(a). It shows that on the plane $(0,0,\psi)$, maximum normalized modulus is obtained for $\psi = 45^\circ$, for all densities. Maximum normalized modulus for Hexaround lattice is $E^* = 0.058$ at $V_f = 5\%$, and $E^* = 0.243$ at $V_f = 25\%$, respectively. The composite Hexaround lattices show a maximum normalized modulus of $E^* = 0.167$ at $V_f = 5\%$, and $E^* = 0.250$ at $V_f = 25\%$. It is noteworthy that the maximum value of normalized modulus for the Hexaround cell is not found in the plane $(0,0,\psi)$ but rather in $(0, \frac{\pi}{4}, \psi)$, along $[111]$ loading orientation as reported in [240].

Evolution of Warmuth normalized modulus depending on the loading orientation is presented on Fig.4.5(c). It shows that on the plane $(0,0,\psi)$, maximal normalized modulus is obtained for $\psi = 0^\circ \pmod{90^\circ}$ [186] at all volume fractions. Maximal normalized modulus for Warmuth lattice is $E^* = 0.009$ at $V_f = 5\%$, and $E^* = 0.053$ at $V_f = 25\%$. Concerning Warmuth composite lattices, maximal normalized modulus is $E^* = 0.030$ at $V_f = 5\%$, and $E^* = 0.059$ at $V_f = 25\%$.

Influence of filling on normalized modulus

Results show that adding a compliant filling material inside lattices has the obvious effect of stiffening them. However, the stiffening effect seems not only affected by modulus of both phase, but also by the volume fraction distribution between lattice and matrix. It can be seen on Fig.4.6 (a) and (c) that the filling influence is decreasing with the increase of lattice volume fraction V_f . At $V_f = 0.05$, Hexaround normalized modulus increase by 198%, but at $V_f = 0.25$ it only increase by 3%. The same trend is observed with Warmuth lattice, suggesting that the modulus ratio between compliant (matrix) and stiff phase (lattice) is

critical. Consequence is that filling a lattice may present low influence on its normalized Young's modulus if the lattice is too stiff compared to the filling material, as can be seen for the Hexaround lattice at 25% volume fraction.

Poisson's ratio

Poisson's ratio (PR) of both lattices and composites have been evaluated in plane containing their minimal values, as reported in [240] and [186], *i.e.* the $(0,0,\psi)$ plan, for each design regarding lattice volume fraction. As for the modulus, only 1/4 of the plane is represented due to the elastic moduli tensor symmetry. PR of both lattice designs are displayed in Fig.4.5 (b) and (d).

Evolution of Hexaround PR depending on the loading orientation is presented on Fig.4.5(b). It shows that on the plane $(0,0,\psi)$, minimal PR is reached for $\psi = 45^\circ$ for all volume fractions. Minimal PR for Hexaround lattice is $\nu^* = -0.60$ at $V_f = 5\%$, and $\nu^* = -0.01$ at $V_f = 25\%$. Concerning Hexaround composite lattices, minimal PR is $\nu^* = -0.01$ at $V_f = 5\%$, and $\nu^* = 0.04$ at $V_f = 25\%$. As can be seen on Fig.4.6(b), incorporating a soft phase into a rigid lattice structure shows a non-monotonic influence over Hexaround PR, but its influence is decreasing with the increase of lattice volume fraction V_f .

Evolution of Warmuth PR depending on the loading orientation is presented on Fig.4.5(d). It shows that on the plane $(0,0,\psi)$, minimal PR is found for $\psi = 0^\circ (\text{mod } 90^\circ)$ at all volume fractions. Minimal PR for Warmuth lattice is $\nu^* = -0.35$ at $V_f = 5\%$, and $\nu^* = -0.32$ at $V_f = 25\%$. Concerning Warmuth composite lattices, minimal PR is $\nu^* = 0.44$ at $V_f = 5\%$, and $\nu^* = -0.20$ at $V_f = 25\%$. In contrast to Hexaround structure incorporation of a soft phase into the Warmuth lattice structure strongly increases Warmuth PR at low volume fraction, but its influence is decreasing while lattice volume fraction V_f increases.

Influence of filling on Poisson's ratio

One can observe on Fig.4.6(b) and (d) that filling increases Poisson's ratio value, making it closer to TangoBlack+ and thus reducing auxeticity of the lattices. It can be explained by the presence of the elastomer that hinders the deformation of the lattice. However, the influence of the filling is non-monotonic. A strong influence of lattice volume fraction can be observed : the higher the lattice volume fraction, the lesser the effect of filling on Poisson's ratio.

4.6.2 Compression tests

Results of compression tests are presented on Fig.4.9, displaying lattice, composite lattices and pure TangoBlack+ stress/strain curves. In order to make a relevant comparison, TB+ curve is a FE compression simulation of a TB+ cube of same dimensions as experimental composite samples are compared. TB+ behaviour used for simulations was identified from experimental testings, shown in Fig.4.3. The complete experimental records are displayed in 4.12.1. These results are compared with those from the corresponding computational experiment.

Hexaround cell

Hexaround lattices present a layerwise failure, each bump corresponding to the collapse of one floor. The average peak stress is 0.83 MPa, average densification occurs at 47% strain. The average measured Young's modulus is 22.15 MPa. Hexaround composite lattices compression test begins with a linear part

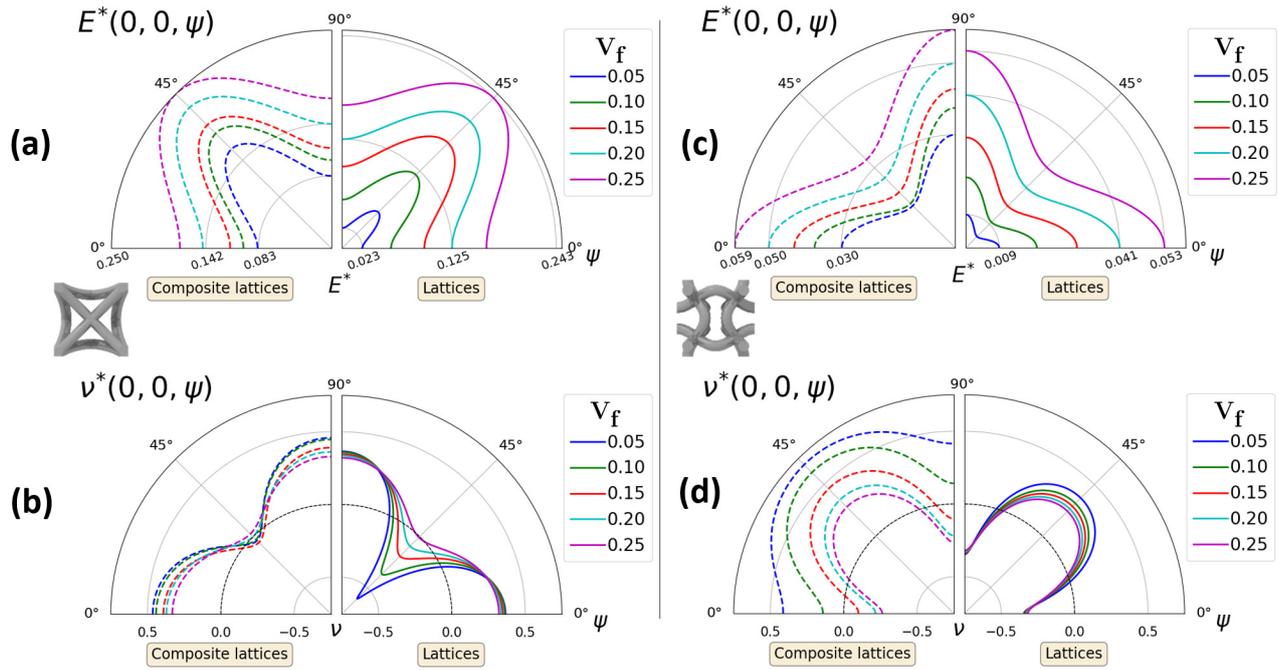


FIGURE 4.5 – Hexaround (left) and Warmuth (right) elastic properties depending on loading orientation and lattice volume fraction

with an average measured Young's modulus of 31.04 MPa, followed by plastic deformation and failure of the lattice due to the formation of shear band. An average peak stress of 2.63 MPa is reached, then densification occurs at 65% strain. It can be seen on Fig. 4.7 that the composite lattice displays very different behaviour and instead of layerwise failure a shear band formation and failure is observed. This difference can be explained by the presence of the matrix that prevents the lattice to collapse layerwise, delaying deformation of the struts and distributing stress more evenly as shown by FE simulations in Fig. 4.8. Average peak stress is increased from 0.83 to 2.63 MPa (a 217% increase), and densification is delayed from an average 47% to 65% strain. Measured Young's modulus is increased by 40%.

Warmuth cell

Warmuth lattice compression behaviour starts with a linear elastic part, followed by a plateau. Damage occurs resulting in stress peaks until densification. An average peak stress of 0.58 MPa is reached and densification occurs around 49% strain. From the linear elastic part, the average measured Young's modulus is 3.75 MPa. Composite lattices compression behaviour begins with a small linear part until 2.5% strain, followed by non-linear elasticity. Plateau, damage and densification followed. An average peak stress of 2.83 MPa is reached, then densification occurs at an approximate 61% strain. Average measured Young's modulus is 19.05 MPa. For this design, peak stress is increased from 0.58 to 2.83 MPa (a 388% increase), and densification is delayed from 49% to 61% strain. Average measured Young's modulus is increased by 400%.

The influence of filling with a compliant phase on the Warmuth lattice mechanical properties has a more important effect compared to that of Hexaround composite lattice structure. This observation can be explained by the fact that Warmuth lattice properties are lower than the Hexaround, being 5.9 times more compliant. Therefore it can be concluded that the lower the lattice base modulus, the greatest the increase

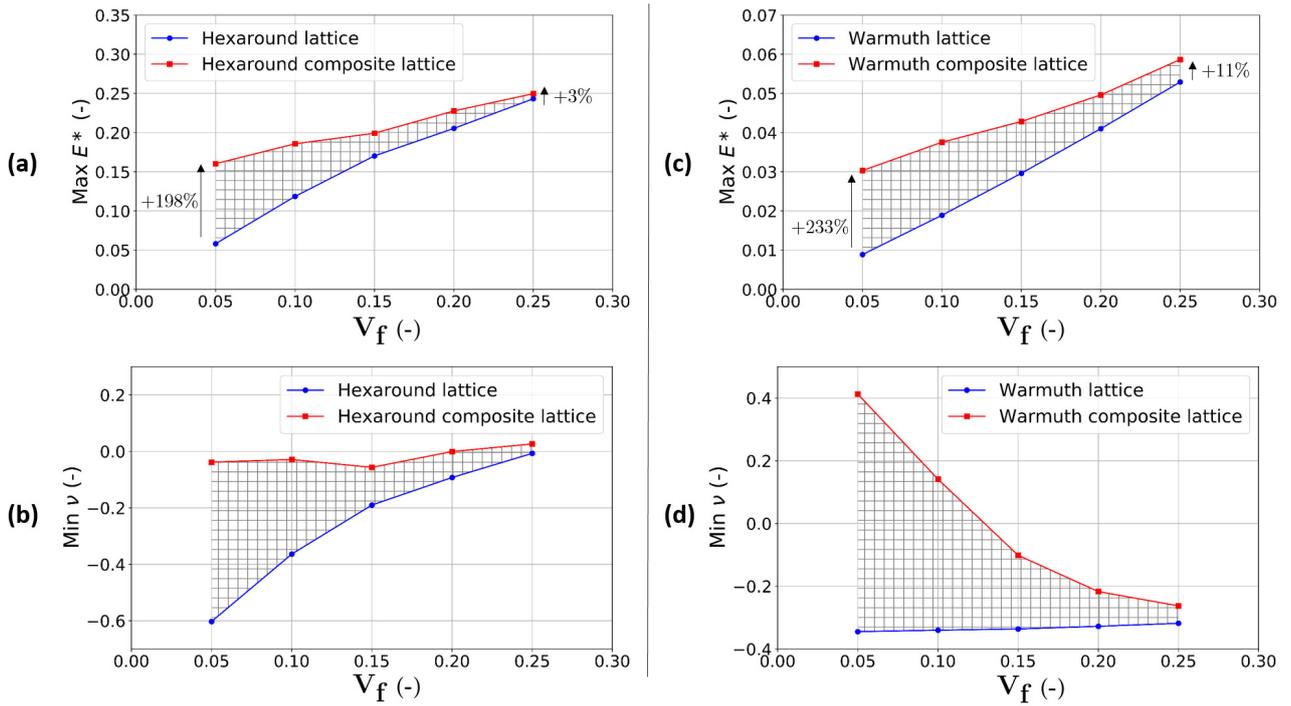


FIGURE 4.6 – Influence of the filling soft phase on maximum normalized modulus (a)(c) and minimal Poisson's ratio (b)(d), for different lattice volume fraction

of mechanical properties due to filling strategy. Table 4.5 provides a comparison of mechanical properties for all samples. Simulation is yielding an overestimation of the mechanical response for the lattices, due to defect-free nature of the computational samples, contrary to the actual experimental samples that were obtained through additive manufacturing. The small discrepancies between computational experiments and computational homogenization regarding the value of E is due to the nonlinear nature of the matrix phase, which is not taken into account properly in the computational homogenization scheme, due to the linear hypothesis.

TABLEAU 4.5 – Comparison between lattices and composite lattices properties

Sample	\bar{E}_{exp} (MPa)	E_{hom} (MPa)	E_{simul} (MPa)	$\bar{\xi}_d$ (-)	$\bar{\sigma}_{\text{peak}}$ (MPa)
Hexaround (lattice)	22.15 (± 1.3)	36.04	36.01	0.47 (± 0.04)	0.83 (± 0.05)
Hexaround (composite)	31.04 (± 0.9)	42.24	39.13	0.65 (± 0.04)	2.63 (± 0.09)
Warmuth (lattice)	3.75 (± 0.3)	11.08	10.96	0.49 (± 0.05)	0.58 (± 0.05)
Warmuth (composite)	19.05 (± 1.1)	20.75	20.72	0.61 (± 0.07)	2.83 (± 0.10)

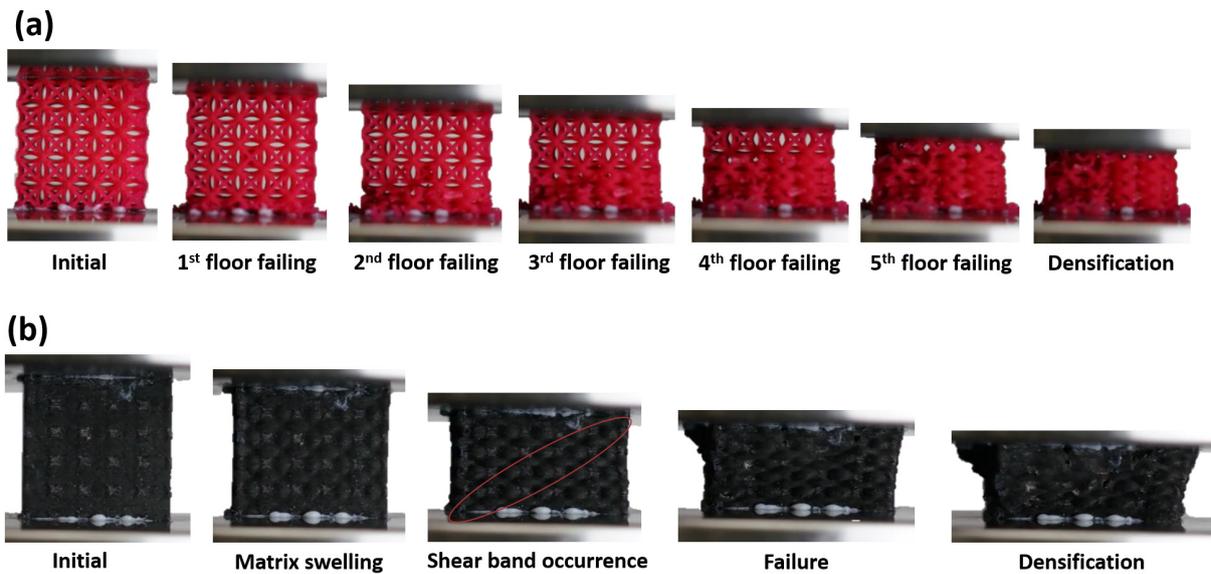


FIGURE 4.7 – Change in the mode of failure from layerwise for the hexaround lattice (a) to shear band for the composite hexaround lattice (b). Plates have been lubricated in order to minimize friction in both simple lattice and composite lattice compression tests.

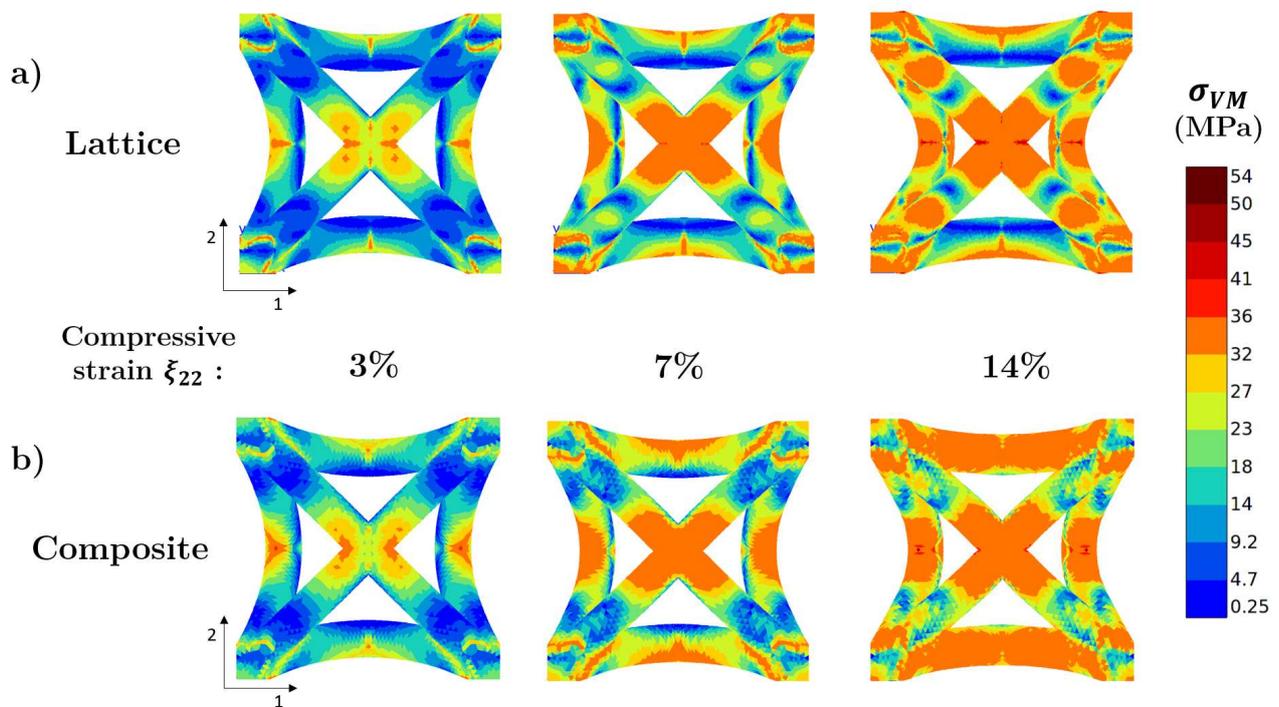


FIGURE 4.8 – Von Mises equivalent stress maps within the truss for both simple (a) and composite (b) lattices at 3 levels of uniaxial compressive strain, resulting from FE simulations.

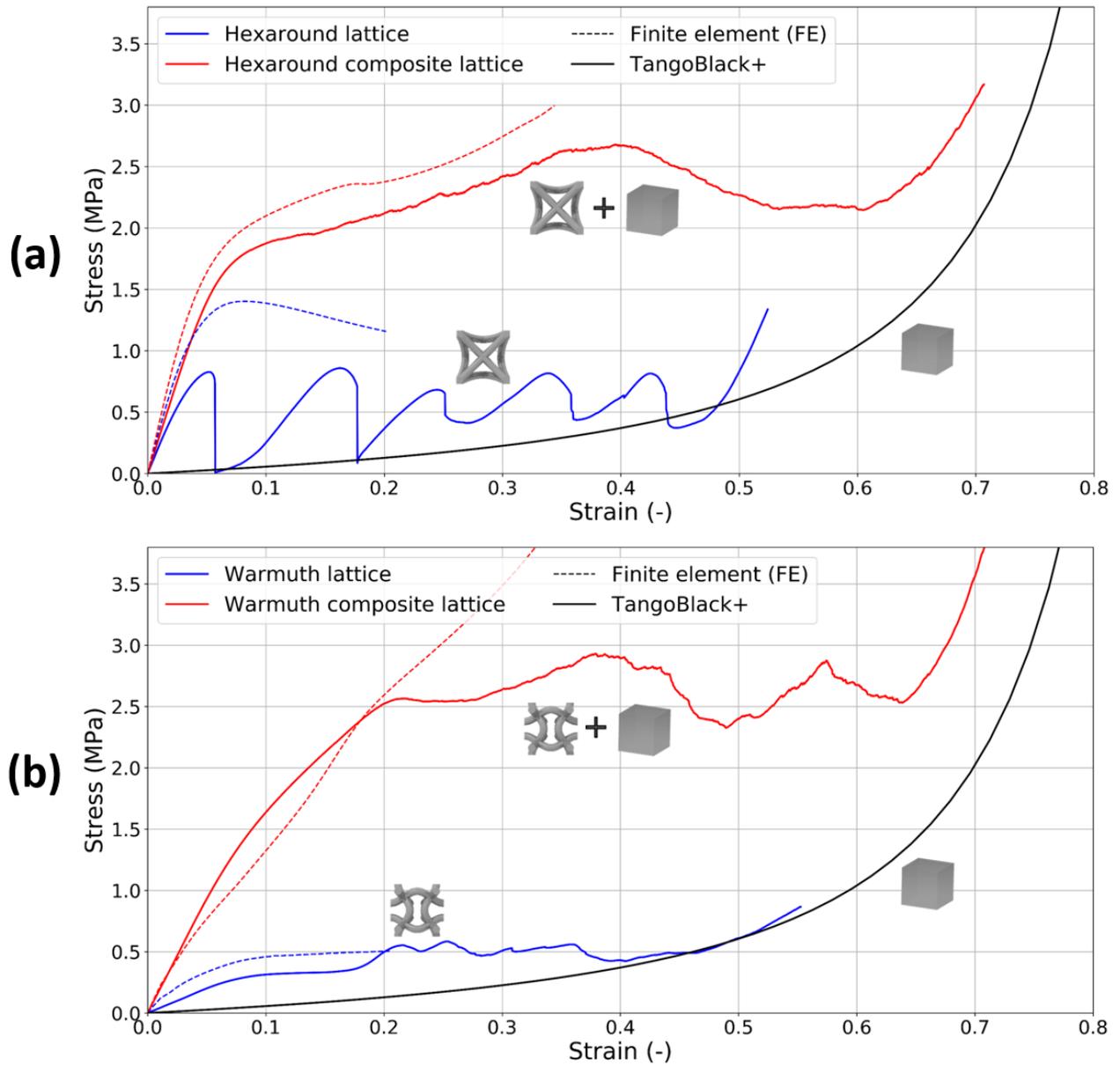


FIGURE 4.9 – Strain / stress plot, Hexaround (a) and Warmuth (b)

4.7 Crashworthiness evaluation

The experimental crashworthiness properties of lattices and composite lattices are compared using the Specific Energy Absorption (SEA). This measure is considered a reliable indicator to compare the Energy Absorption (EA) with regard to the weight of the samples. EA is calculated as the area under experimental stress-strain curves, yielding a mechanical work density, depending on the uniaxial strain ξ and principal stress measure σ in the following manner :

$$EA(\xi) = \int_0^{\xi} \sigma(\xi) d\xi \quad (4.5)$$

SEA is defined as the sum of the energy density dissipated and elastic energy density stored in the sample volume until densification, divided by the mass of the sample, m . Densification happens when cell struts reach contact with one another, and is achieved when peak stress value is reached a second time. Thus, SEA is expressed in $J.g^{-1}.cm^{-3}$, and can be calculated such that :

$$SEA = \frac{1}{m} \int_0^{\xi_d} \sigma(\xi) d\xi \quad (4.6)$$

VeroWhite and TangoBlack+ having very close density (respectively $1.175 g.cm^{-3}$ and $1.141 g.cm^{-3}$), and the lattice volume fraction being $V_f = 20\%$, one can infer that composite lattices are approximately 5 times heavier than lattices samples. Thus in order to dissipate more energy than the lattice, composite lattices must at least dissipate 5 times more energy.

Another pertinent criterion is the absorption efficiency η , expressed in equ.(4.7). It may be used to compare the efficiency of lattices and composite lattices, with regards to idealized absorber in the case of a total uniaxial strain ξ of 100%.

$$\eta = \frac{\int_0^{\xi_d} \sigma(\xi) d\xi}{\sigma_{peak}.1} \quad (4.7)$$

Both energy criteria have been plotted on Fig.4.10, with Hexaround SEA and absorption efficiency on the left, and Warmuth ones on the right.

Hexaround cell

Despite the fact that composite Hexaround lattices exhibit higher stiffness and yield stress than simple ones, it can be seen in Fig.4.10 that lattices SEA is higher before densification happens. This can be explained by the fact that lattices samples are 5 times lighter than their composite counterparts. Average lattices SEA at densification is $1.00 J.g^{-1}.cm^{-3}$. However, as the filling material is delaying densification, Hexaround composite lattices SEA at densification is finally 22% higher than simple ones, reaching $1.22 J.g^{-1}.cm^{-3}$. Concerning absorption efficiency, Hexaround lattices reach an average 30.27% and composite lattices attain 52.73%. The increase efficiency can be explained by the delayed densification as well as the change of deformation behaviour : layerwise failure being less efficient than a plateau-like plasticity in this case.

Warmuth cell

In the case of the Warmuth cell, SEA of composite lattices are always higher than their simple lattice counterparts, being 60% higher at densification (see Fig.4.10). Warmuth lattices reach an average SEA of $0.77 J.g^{-1}.cm^{-3}$, and composite lattices an average $1.23 J.g^{-1}.cm^{-3}$. Increased modulus and yield stress and

especially delayed densification are responsible for increased SEA. The absorption efficiency of Warmuth lattices reaches an average 33.09% and composite lattices attain 48.31%. The increase efficiency occurs due to the delayed densification.

Experimental crashworthiness properties of both lattices and composite lattices are reported in Table 4.6. One can conclude that filling auxetic lattices with compliant material increases SEA at densification, but has a less pronounced effect for intermediate strains. Specifically, the observed increase in SEA is linked to the ability of the composite lattices to delay densification. A consequent increase in absorption efficiency is observed for both unit-cells, stemming from different mechanisms : the Hexaround lattice is subjected to a different deformation behaviour from filling and both lattices benefit from delayed densification.

TABLEAU 4.6 – Experimentally recorded crashworthiness properties

Sample	SEA $\xi = \xi_d$ (J.g ⁻¹ .cm ⁻³)	η (%)
Hexaround (lattice)	1.00 (\pm 0.05)	30.27 (\pm 2.1)
Hexaround (composite)	1.22 (\pm 0.09)	52.73 (\pm 2.5)
Warmuth (lattice)	0.77 (\pm 0.07)	33.09 (\pm 1.5)
Warmuth (composite)	1.23 (\pm 0.11)	48.31 (\pm 5.2)

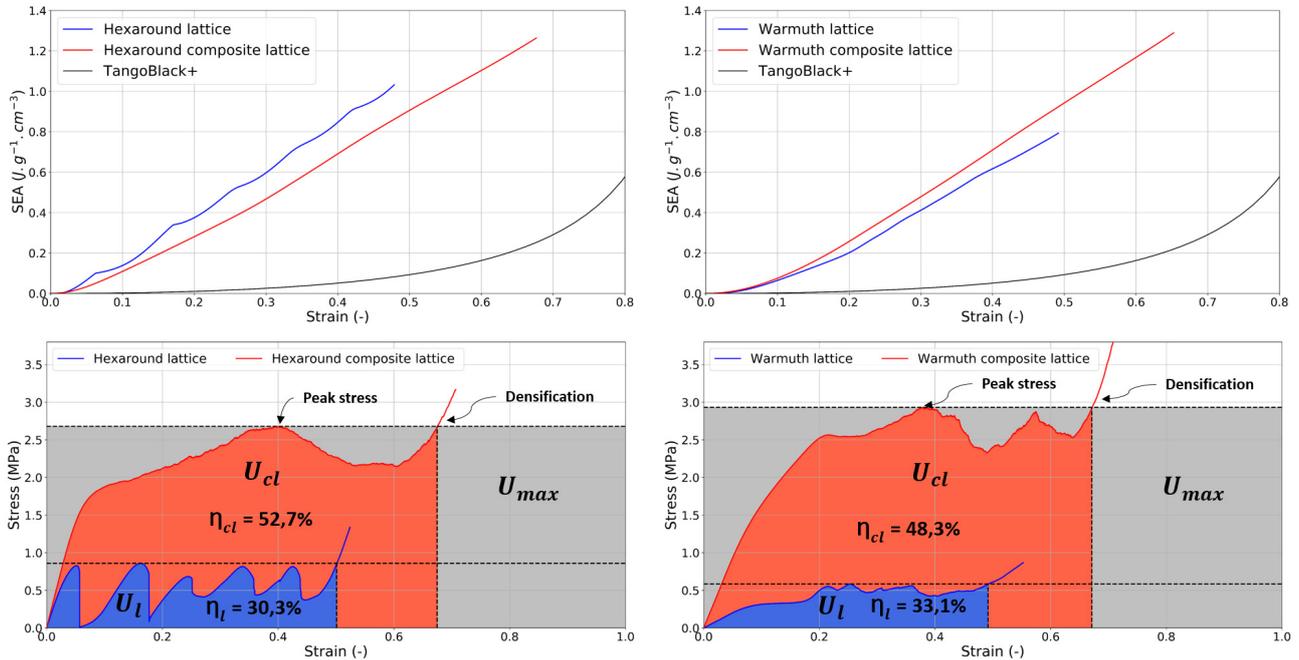


FIGURE 4.10 – SEA and Efficiency plot, Hexaround (left) and Warmuth (right)

4.8 Discussions

In this work, we studied the effect of filling a compliant material into two auxetic structures. It was shown that composite lattices exhibit increased stiffness compared to their monolithic counterparts and the

increase of the stiffness was varied depending on the lattice volume fraction. This observation is consistent with results reported in [184] and [182]. However, in [182] the elastic modulus tends to increase from filling with high volume fraction lattices, even with high lattice volume fraction, which is in contradiction to our results. This can be explained by the high stiffness of the elastomers used, being 3300 to 6000 times stiffer than TB+, therefore providing a more efficient support. On the other hand, when the lattice structure is infiltrated with a harder polymer than used for the struts, a decreased or no change in specific Young's modulus has been reported in [3] and [183]. Evolution of composite lattices Young's modulus seems to be very dependent on the base material constitutive properties, specifically the modulus ratio between lattice and matrix $E_{\text{lattice}}/E_{\text{matrix}}$.

When considering the Poisson's ratio our results indicate different trends to some earlier published work. For instance, Hexaround lattice minimal PR increases with volume fraction, until being completely non auxetic at high volume fraction. This trend is also followed by the composite Hexaround lattice structure where low volume fraction composite lattices show less auxeticity than simple lattices. Warmuth lattice minimal PR is less sensitive to the volume fraction evolution, but the maximal PR is higher for low volume fraction lattices. Composite Warmuth lattices exhibit lowest PR at high lattice volume fraction, where the matrix is having less influence on its behaviour. The presence of the soft phase tends to oppose auxetic deformation behaviour, making composite lattices less auxetic than simple ones. Increased PR from filling is also observed in [89], [190] and [182], but no investigation on the effect of lattice volume fraction was made. In [188], composite auxetics exhibit a similar trend to Hexaround lattice where matrix increases the composite PR at low lattice volume fraction but its influence is decreasing with higher lattice volume fraction. As well as for normalized Young's modulus, effective Poisson's ratio of composite lattice depends on modulus ratio $E_{\text{lattice}}/E_{\text{matrix}}$, as observed by [187]. While the present study only considered one pair of materials, further experiments could shed more light on the effect of different material properties ratio on the elastic properties of the composite lattice structures.

The compression tests revealed an important increase of stress level as well as peak stress resulting from filling with a soft phase. It showed that the composite stress level was not following a rule of mixture but demonstrated superior properties compared to its constituents. The stress resulting from the interaction between structure and matrix should be taken into account, as explained in [3]. Furthermore, it was observed that densification of lattices is postponed when filled with an elastomeric polymer. The opposite phenomenon has been observed on lattices filled with hard epoxy, in [3] and [183]. The delay in the densification was linked to a significant improvement in SEA and AE. In order to reveal mechanisms behind changes in deformation behaviour from filling further in-situ mechanical test using X-ray imaging should be conducted.

4.9 Conclusions and perspectives

In this work, mechanical properties of 2 different auxetic lattices filled with hyperelastic polymer are studied through both numerical and experimental approaches. Following conclusion can be drawn from this work :

1. Effective elastic properties (E^* and ν) of lattices and composites are compared using the numerical homogenization method, based on periodic boundary conditions. Five relative densities V_f of both

Hexaround and Warmuth cell, obtained by varying struts diameter D , are compared. Results showed an increase of normalized Young's modulus due to filling, dependently on lattice initial modulus : the Hexaround see low change of modulus at high volume fraction, but important increase at low volume fraction. Warmuth cell being more compliant, its stiffness is highly increased at all lattice volume fraction. TangoBlack+ being nearly incompressible with a Poisson ratio close to 0.5, composite lattices Poisson's ratio is increased compared to simple lattices, with a strong influence of lattice volume fraction. Therefore, the lower the volume fraction of the lattice structure the larger the increase in its stiffness.

2. Lattices and composite lattices samples have been manufactured using Connex350 with VeroWhite and TangoBlack+ materials. Lattices were both manufactured at 20% volume fraction V_f . Compression tests have been performed, showing that filling lattices with soft material induces an increase of Young's modulus (up to +316% for Warmuth cell, and +40% for Hexaround one), yield stress and peak stress, and delayed densification. Finite element analysis shows good agreement with composite lattices experiments in the linear elastic part, but deviated in the plasticity region since the material behaviour did not account for damage. Good agreement between experiments and computational homogenization validated the selected strategy over full-field analysis.
3. During compression tests, the Hexaround lattice exhibits a layerwise failure mode, that is represented on stress/strain curves by five "bumps", corresponding to the five floors breaking one after the other. Hexaround composite lattices exhibit a completely different failure, involving shear band breaking. Warmuth lattice also shows a progressive failure, floor crumbling one after the other, but it can not be clearly observed on stress/stress curves. Warmuth composite lattice exhibits structural buckling before a shear band breaking.
4. Comparison of Specific Energy Absorption and Absorption Efficiency η is carried between manufactured lattices and composite lattices. The Warmuth composite cell exhibits superior SEA at all strain, up to $1.23 \text{ J.g}^{-1}.\text{cm}^{-3}$ at densification, compared to simple lattice, which is not the case of the Hexaround that only displays superior SEA thanks to delayed densification, up to $1.22 \text{ J.g}^{-1}.\text{cm}^{-3}$. Both cells benefit of an increased absorption efficiency from filling, mainly because of delayed densification.

Credit authorship contribution statement :

Frédéric Albertini : Investigation, Methodology, Software, Writing – original draft. Justin Dirrenberger : Conceptualization, Supervision, Methodology, Writing – review & editing. Cyrille Sollogoub : Supervision, Methodology, Writing – review & editing. Tobias Maconachie : Investigation, Writing – review & editing. Martin Leary : Writing – review & editing, Supervision. Andrey Molotnikov : Conceptualization, Supervision, Methodology, Writing – review & editing.

4.10 Conclusions en français

Dans ce travail, les propriétés mécaniques de 2 différents treillis auxétiques ainsi que leur version remplies par un polymère hyperélastique sont étudiées à travers des approches numériques et expérimentales.

Les propriétés élastiques effectives (E^* et ν) des treillis et des composites sont comparées en utilisant une méthode d'homogénéisation numérique, basée sur les conditions aux limites périodiques. Cinq fractions relatives ρ^* des deux cellules, obtenues en faisant varier le diamètre des poutres D , sont comparées. Les résultats montrent une augmentation du module d'Young normalisé en raison du remplissage comparé au module initial du treillis. L'Hexaround voit un faible changement de module à haute fraction volumique, mais une augmentation importante à faible fraction volumique. La cellule de Warmuth étant moins rigide, son module d'Young est augmentée pour toute fraction volumique. Le TangoBlack+ étant quasiment incompressible avec un coefficient de Poisson proche de 0.5, le coefficient de Poisson des treillis composites est augmenté par rapport aux structures seules, avec une forte influence de la fraction volumique du treillis. Plus la fraction volumique est faible, plus l'augmentation est importante.

Des échantillons de treillis et de treillis composites ont été imprimés en utilisant une imprimante Connex350 utilisant les matériaux VeroWhite et TangoBlack+. Les treillis ont tous deux été imprimés à une fraction volumique de 20% ρ^* . Des tests de compression ont été effectués, montrant que le remplissage des structures avec un matériau hyperélastique souple induit une augmentation du module d'Young (jusqu'à +400% pour la cellule de Warmuth et +40% pour l'Hexaround), une augmentation de la limite d'élasticité et du pic de contrainte et une densification retardée. L'analyse par éléments finis montre un bon accord avec les expériences pour les treillis composites dans la partie élastique linéaire, mais pas avec la partie plastique endommagée puisque le comportement du matériau utilisé ne tient pas compte de la rupture. De bons accords entre les expériences et les simulations en conditions aux limites périodiques ont tendance à valider cette stratégie par rapport à des calculs à champs complets.

Lors des tests de compression, la cellule Hexaround présente un mode de rupture étage par étage, qui est représenté sur les courbes contrainte / déformation par cinq "bosses", correspondant aux cinq étages cédant les uns après les autres. Les treillis composites présentent une rupture complètement différente, par bande de cisaillement. La cellule de Warmuth montre également une défaillance progressive, les étages rompent les uns après les autres, bien que cela ne puisse pas être clairement observé sur les courbes contrainte / déformation. Le treillis composite de Warmuth présente un flambage structurel avant la rupture par bande de cisaillement.

Une comparaison de l'énergie spécifique dissipée et de l'efficacité d'absorption η est effectuée entre les treillis et les treillis composites. La cellule composite de Warmuth présente une SEA supérieure à la cellule seule pour tout niveau de déformation, atteignant 1.23 J/g à la densification. La cellule Hexaround composite présente un SEA supérieur atteignant 1.22 J/g uniquement à haut niveau de déformation, grâce à une densification retardée. Les deux cellules bénéficient d'une efficacité d'absorption accrue grâce au remplissage, principalement en raison de la densification retardée.

4.11 Supplementary notes

4.11.1 Mesh convergence analysis

To ensure a mesh-independent response, a mesh convergence analysis has been performed, as shown in Fig.4.11 and Fig.4.12. Here, the number of elements in a mesh is considered sufficient if an error lower than 0.5% compared to a converged mesh is computed, the [100] relative elastic modulus being the object of the comparison.

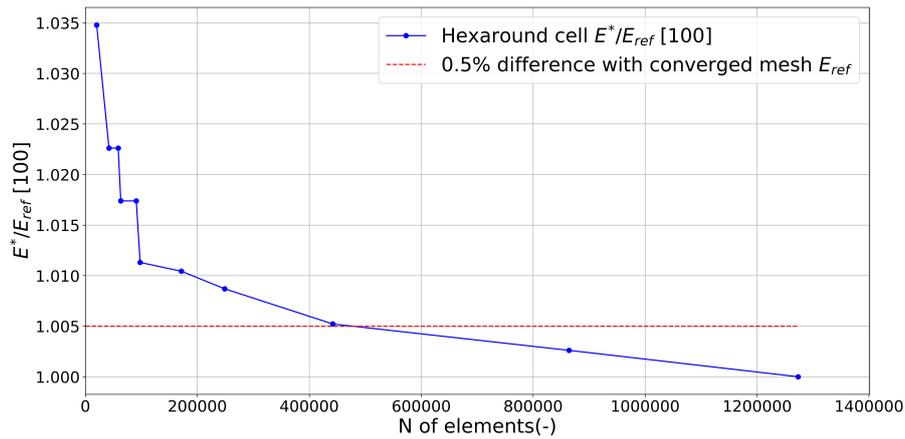


FIGURE 4.11 – Mesh sensitivity study for the Hexaround cell. E_{ref} being the converged normalized Young's modulus.

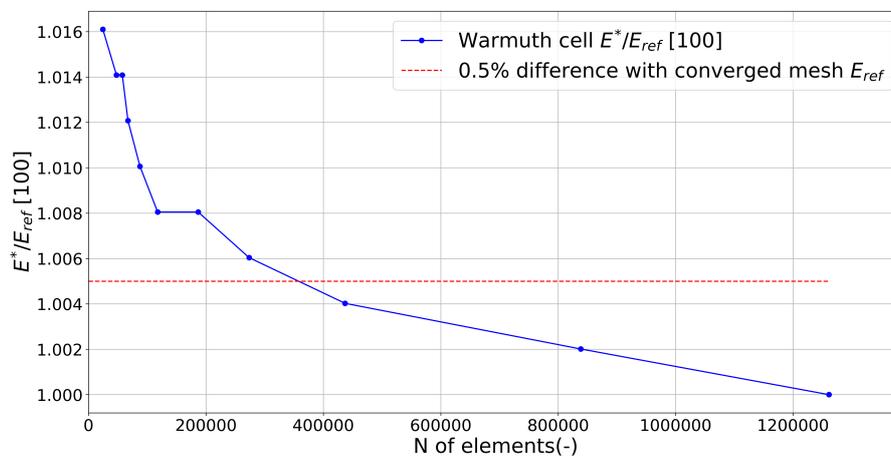


FIGURE 4.12 – Mesh sensitivity study for the Warmuth cell. E_{ref} being the converged normalized Young's modulus.

4.12 Elastic stiffness maps for lattices

4.12.1 Complete Experimental curves

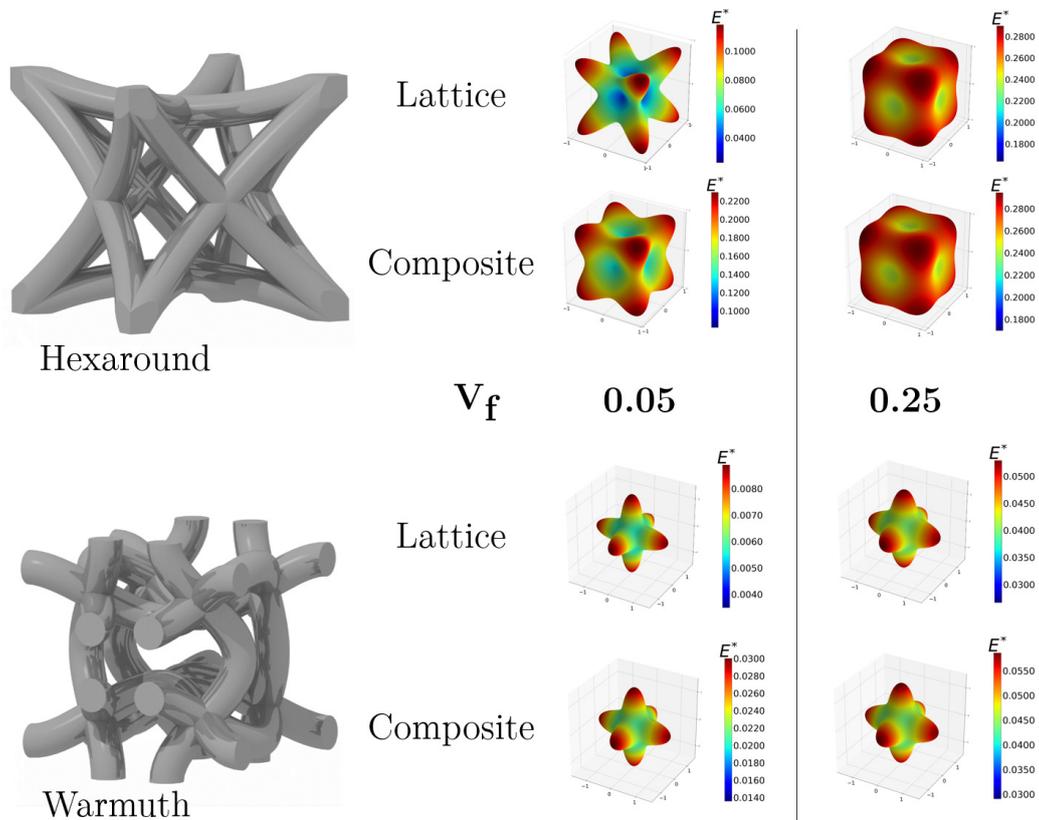


FIGURE 4.13 – 3D representation of the normalized directional elastic stiffness (Young’s modulus as a function of orientation) for Hexaround and Warmuth cells at 0.05 and 0.25 volume fraction for both truss and composite lattices.

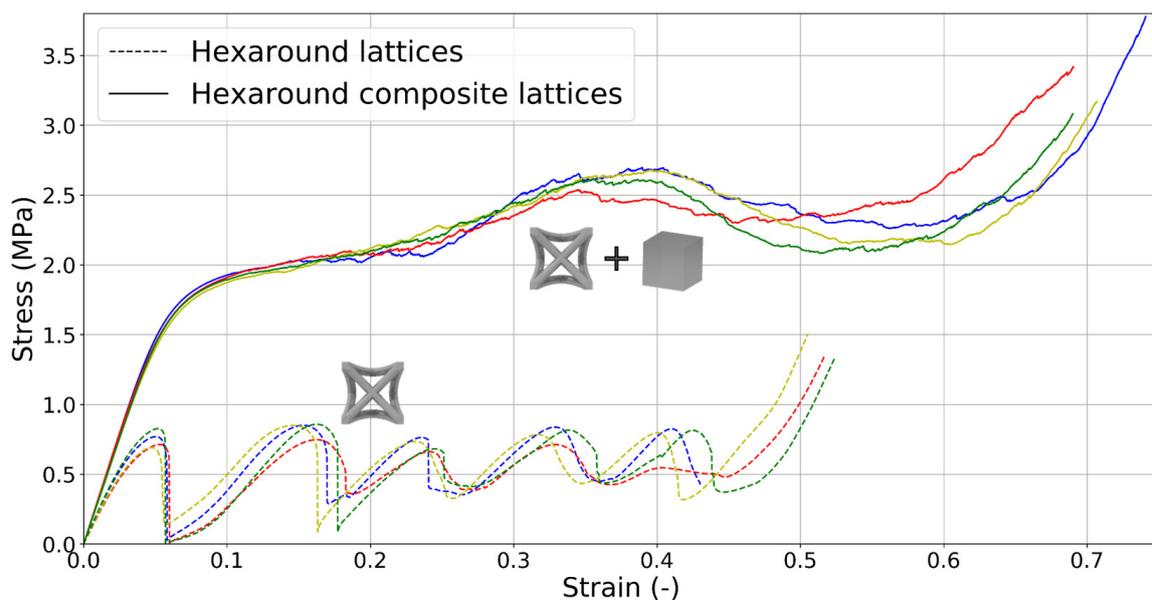


FIGURE 4.14 – Stress / strain plot, Hexaround lattices and composite lattices compression test

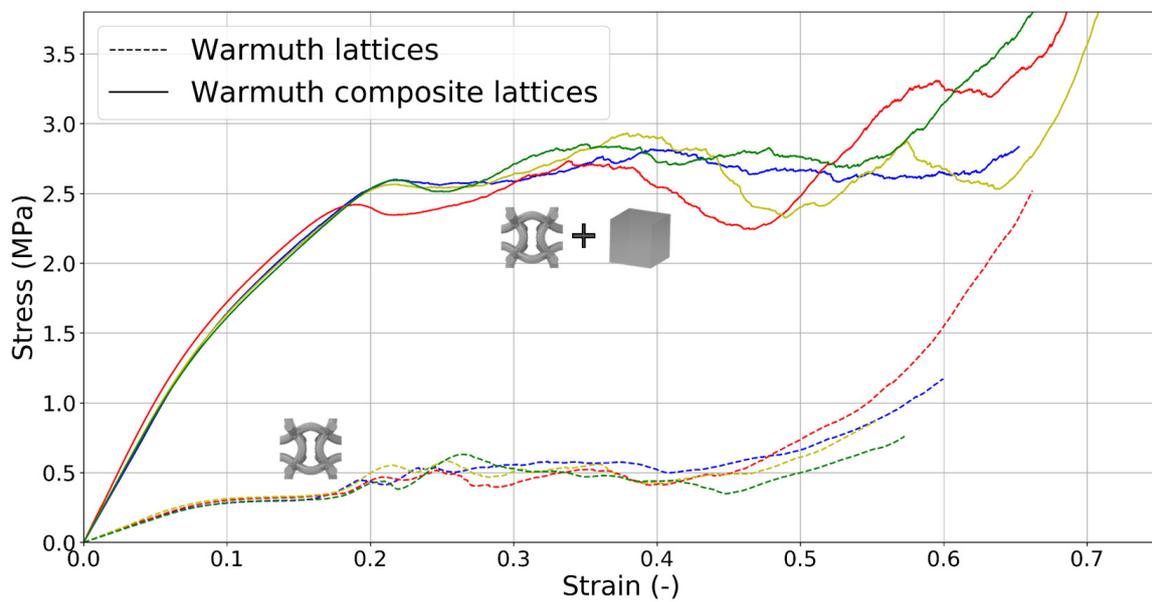


FIGURE 4.15 – Stress / strain plot, Warmuth lattices and composite lattices compression test

Chapitre 5

Etude expérimentale et numérique de matériaux auxétiques hybrides

Sommaire

5.1 Introduction	114
5.2 Choix du treillis et réalisation des éprouvettes	114
5.3 Évaluation numérique des propriétés élastiques effectives	117
5.3.1 Module d'Young normalisé	117
5.3.2 Coefficient de Poisson	119
5.4 Étude expérimentale	120
5.4.1 Essais de compression	121
5.4.2 Simulation numérique des essais de compression	122
5.4.3 Observations par tomographie à rayons X	126
5.5 Conclusions	131

Ce chapitre présente l'étude des propriétés mécaniques de structures treillis hybrides métal-polymère. On parle de treillis hybride car les matériaux constitutifs sont de natures différentes. Le rapport des modules de ces matériaux est considéré "fort".

Tout d'abord, une adaptation de la cellule Hexaround est présentée, permettant sa fabrication par le procédé SLM. La réalisation de structures hybrides TA6V/PU est ensuite détaillée. Les propriétés élastiques effectives des treillis seuls et hybrides sont alors calculées par homogénéisation numérique, puis une campagne d'essais expérimentaux est exposée, incluant des observations *in-situ* par tomographie à rayons X. Une comparaison des modes de déformations est faite, mettant en lumière les différences induites par la présence de l'élastomère au sein du treillis. La simulation numérique des essais expérimentaux est développée au travers de 4 conditions aux limites différentes, permettant de mieux appréhender les conditions expérimentales. Sont également abordés les défauts de fabrication, liés à la présence de bulles dans les treillis hybrides.

5.1 Introduction

Le choix des matériaux utilisés pour la fabrication des structures hybrides, et notamment le contraste de propriétés mécaniques entre ces matériaux, a une influence importante sur les propriétés mécaniques du composite résultant, comme le souligne l'étude de Peng *et al.* [187], ou comme le montre la diversité des études portant sur les structures hybrides [3; 182; 184]. Le chapitre précédent a permis de montrer comment l'ajout d'une phase souple au sein d'un treillis rigide permet d'en modifier les propriétés mécaniques telles que la rigidité, la contrainte pic ou la dissipation d'énergie spécifique. Le rapport des modules d'Young pour les deux polymères utilisés (VeroWhite et TangoBlack+) était alors d'environ 2200. Ce chapitre expose l'étude de deux structures hybrides similaires présentant un contraste de propriétés plus important, dont les matériaux constitutifs sont un alliage de titane pour le treillis et un polyuréthane élastomère pour la matrice. Le chapitre précédent avait également montré une évolution du mode de rupture de la cellule Hexaround, passant d'une rupture étage par étage lorsque le treillis était sollicité seul, à une rupture par bande de cisaillement lorsqu'il est associé à une matrice élastomérique. L'analyse comparative de la déformation en compression des treillis simples et hybrides est exposée dans ce chapitre au travers d'une campagne d'essais *in-situ* dans un tomographe.

5.2 Choix du treillis et réalisation des éprouvettes

Géométrie de la cellule

La structure choisie pour la réalisation de treillis hybrides métal-polymère est une adaptation de la cellule Hexaround présentée au chapitre 3. Afin de permettre sa réalisation par le procédé SLM, les poutres dont l'orientation est incompatible avec le procédé (selon les restrictions énoncées dans le Chapitre 1, voir notamment Mazur *et al.* [132]) sont soustraites. La cellule résultante n'est plus de symétrie cubique mais tétraogonale, sa géométrie est détaillée sur la Figure 5.1.

Définition des paramètres géométriques

Cette cellule présente les mêmes paramètres géométriques que la cellule Hexaround décrite précédemment : L , la longueur de la cellule cubique, a , l'amplitude d'arrondi, et D , le diamètre des poutres (voir sur

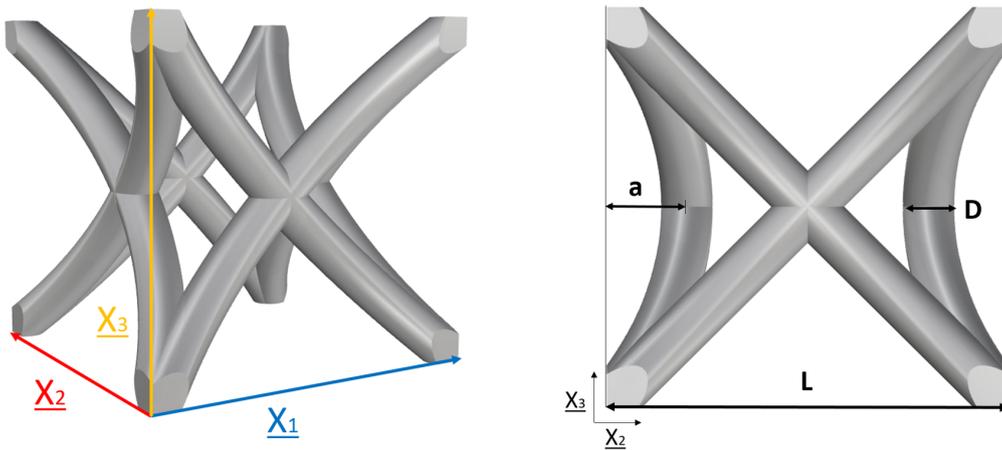


FIGURE 5.1 – Cellule adaptée avec ses vecteurs de périodicité (gauche) et ses paramètres géométriques (droite)

Figure 5.1 (droite)). Deux géométries de cellules ont été considérées pour cette étude, l'une avec $L = 3$ mm, désignée "L3" par la suite, et l'autre $L = 4$ mm, désignée "L4". Les différentes valeurs des paramètres utilisés donnent les fractions volumiques présentées sur les tableaux 5.1 et 5.2.

TABEAU 5.1 – Paramètres géométriques de la cellule L3 pour différentes fractions volumiques

ρ^* (-)	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25
L (mm)	3.00	3.00	3.00	3.00	3.00
a (mm)	0.60	0.60	0.60	0.60	0.60
D (mm)	0.24	0.35	0.43	0.51	0.58

TABEAU 5.2 – Paramètres géométriques de la cellule L4 pour différentes fractions volumiques

ρ^* (-)	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25
L (mm)	4.00	4.00	4.00	4.00	4.00
a (mm)	0.75	0.75	0.75	0.75	0.75
D (mm)	0.32	0.46	0.58	0.68	0.77

Fabrication des éprouvettes

Les structures ont été imprimées à l'aide d'une imprimante SLM system 250HL (SLM Solution GmbH). La paramétrie machine ainsi que la composition chimique de la poudre de Ti-6Al-4V (TLS Technik GmbH) sont détaillées dans le chapitre 2. Afin de ne pas excéder la limite supérieure de la cellule de force du dispositif mécanique placé dans le tomographe, les éprouvettes sont dimensionnées pour ne pas dépasser 2 kN en compression. Elles sont ainsi cubiques, composées de 3 cellules unitaires de côté. Un total de 12 éprouvettes ont été fabriquées : 6 pour chaque géométrie (L3 / L4) dont 3 treillis et 3 treillis hybrides. Les structures hybrides sont réalisées par remplissage des treillis par un polyuréthane élastomère, à l'aide de moules fabriqués sur mesure. Le procédé de remplissage ainsi que les propriétés mécaniques du PU sont décrits dans le Chapitre 2. Les treillis seuls et hybrides sont présentés en Figure 5.2, leurs masses ont été mesurées et comparées à la valeur théorique issues de la CAO dans le tableau 5.3. On remarque que les

treillis imprimés sont environ 50% plus lourds que prévu. Cette différence peut s'expliquer d'une part par la présence importante de poudres semi-fondues à la surface des poutres, et à l'accumulation importante de celles-ci aux noeuds. De plus, les poutres des treillis L3 présentent un diamètre en moyenne 7% plus important que la CAO. La poudre en surface peut s'observer sur la Figure 5.3, et peut expliquer également la différence de masse entre les échantillons hybrides et les valeurs CAO correspondantes.

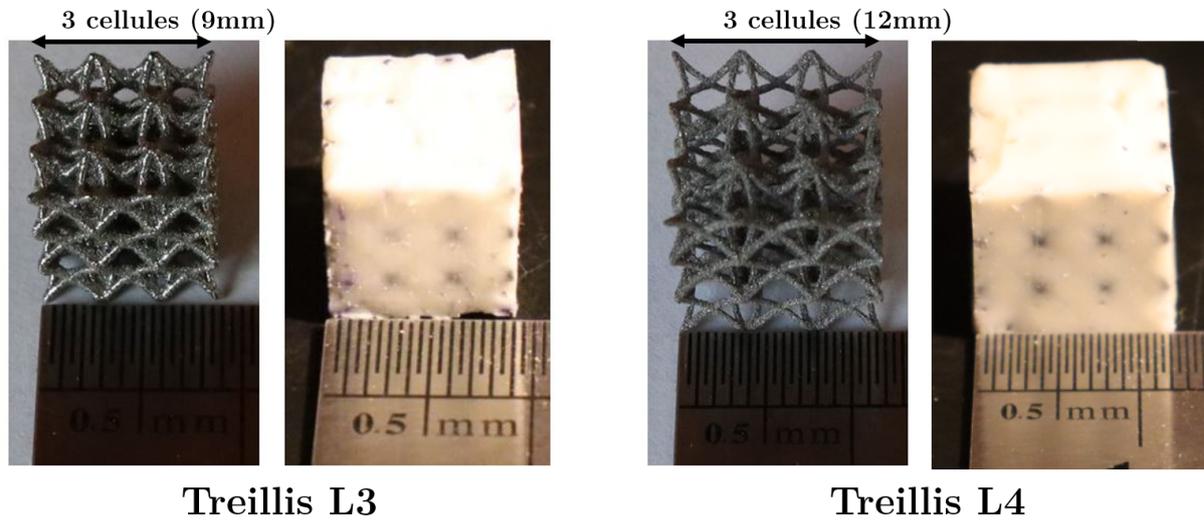


FIGURE 5.2 – Treillis et treillis hybrides : L3 (gauche) et L4 (droite)

TABLEAU 5.3 – Masse théorique (CAO) et moyenne mesurée pour les éprouvettes L3 et L4

Eprouvettes	Diamètre :	CAO (mm)	Imprimées (mm)	Masse :	CAO (g)	Imprimées (g)
L3		0.346	0.370 (± 0.006)		0.31	0.48 (± 0.03)
L3 hybrides					1.03	1.19 (± 0.05)
L4		0.315	0.315 (± 0.005)		0.38	0.58 (± 0.04)
L4 hybrides					2.15	2.22 (± 0.05)

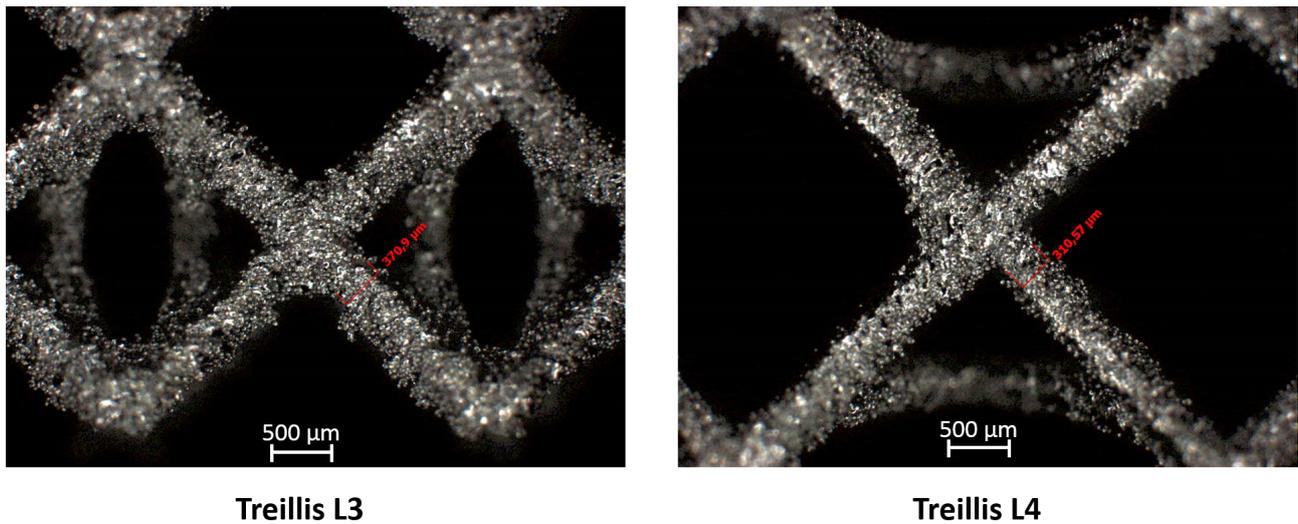


FIGURE 5.3 – Observations au microscope, mesure des poutres : L3 (gauche) et L4 (droite)

5.3 Évaluation numérique des propriétés élastiques effectives

Dans cette partie, une comparaison est faite entre les propriétés élastiques effectives des treillis et des treillis hybrides. En particulier, sont comparés le module d'Young normalisé E^* et le coefficient de Poisson ν dans un plan $(0, \pi/2, \psi)$. Les propriétés élastiques effectives sont obtenues via la stratégie d'homogénéisation numérique décrite dans le Chapitre 2, pour différentes valeurs de fraction volumique des treillis. L'influence de l'hybridation sur les valeurs minimales et maximales du module d'Young normalisé et sur la valeur minimale du coefficient de Poisson est ensuite étudiée. Les propriétés élastiques des matériaux considérés sont données dans le tableau 5.4.

TABLEAU 5.4 – Propriétés élastiques considérées pour le TA6V et le PU

Matériau	E_0 (MPa)	ν (-)
TA6V	97700	0.300
PU	1.64	0.499

5.3.1 Module d'Young normalisé

Il est attendu que la présence de l'élastomère comme matrice joue un rôle de support, augmentant le module normalisé du treillis. Afin de vérifier son influence, le module d'Young normalisé a été calculé pour les treillis et treillis hybrides, puis tracé dans un plan $(0, \pi/2, \psi)$ en fonction de la fraction volumique du treillis. Ce plan contient à la fois la valeur minimale (directions $[001]$) et la valeur maximale (directions $[111]$) du module d'Young normalisé. Les symétries de la cellule unitaire (tétraogonale) permettent de se restreindre à l'étude d'une partie du plan, prenant ψ compris entre 0 et 90° . Le module d'Young normalisé E^* pour les treillis L3 est tracé sur la Figure 5.4 (gauche) et pour les treillis L4 sur la Figure 5.5 (gauche). Une étude de l'influence de l'hybridation sur la valeur minimale et maximale du module normalisé est faite pour chaque fraction volumique, sur les Figures 5.4 et 5.5 (droite).

Treillis L3

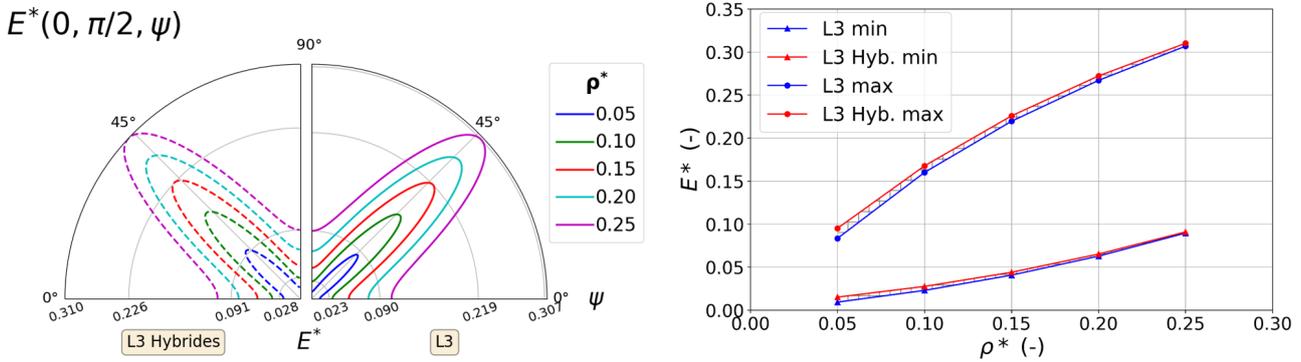


FIGURE 5.4 – Comparaison entre le module normalisé des treillis L3 et L3 hybrides, dans un plan (gauche) et valeurs minimales et maximales (droite)

Pour les treillis L3, on observe une très faible influence du PU sur le module à forte fraction volumique (à $\rho^* = 0.25$) : le module minimal du treillis est de 0.090 tandis que celui du treillis hybride est de 0.091, le module maximale du treillis est de 0.307 tandis que celui du treillis hybride est de 0.310 soit une augmentation d'environ 1%. A faible fraction volumique (à $\rho^* = 0.05$), l'influence de l'hybridation est plus importante : le module minimal du treillis est de 0.009 tandis que celui du treillis hybride est de 0.015 (augmentation de 62%), le module maximal du treillis est de 0.084 tandis que celui du treillis hybride est de 0.095 (augmentation de 14%).

Treillis L4

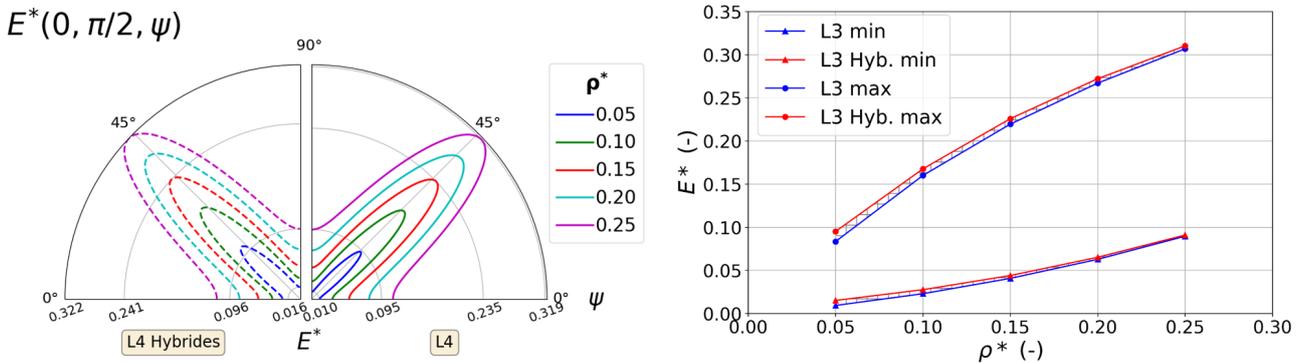


FIGURE 5.5 – Comparaison entre le module normalisé des treillis L4 et L4 hybrides, dans un plan (gauche) et valeurs minimales et maximales (droite)

De même que pour les treillis L3, on observe une très faible influence du PU sur le module à forte fraction volumique (à $\rho^* = 0.25$) : le module minimal du treillis est de 0.095 tandis que celui du treillis hybride est de 0.096, le module maximale du treillis est de 0.319 tandis que celui du treillis hybride est de 0.322, soit une augmentation d'environ 1%. A faible fraction volumique (à $\rho^* = 0.05$), l'influence de l'hybridation est également plus importante : le module minimal du treillis est de 0.010 tandis que celui du treillis hybride est de 0.016 (augmentation de 66%), le module maximal du treillis est de 0.093 tandis que celui du treillis hybride est de 0.107 (augmentation de 16%).

5.3.2 Coefficient de Poisson

Le polyuréthane élastomère étant proche de l'incompressibilité avec ν avoisinant 0.5, il est attendu que sa présence au sein du treillis provoque une augmentation du coefficient de Poisson comparée à la structure seule. Afin de vérifier son influence sur le coefficient de Poisson, celui-ci a été calculé pour différentes orientations pour les treillis et treillis hybrides, puis tracé dans un plan $(0, \pi/2, \psi)$ (contenant la valeur minimale) en fonction de la fraction volumique du treillis. Les symétries de la cellule unitaire permettent de ne tracer qu'une partie du plan, prenant ψ compris entre 0 et 90° . Le coefficient de Poisson ν pour les treillis L3 est tracé sur la Figure 5.6 (gauche) et pour les treillis L4 sur la Figure 5.7 (gauche). Une étude de l'influence de l'hybridation sur la valeur minimale du coefficient de Poisson est faite sur les Figures 5.6 et 5.7 (droite).

Treillis L3

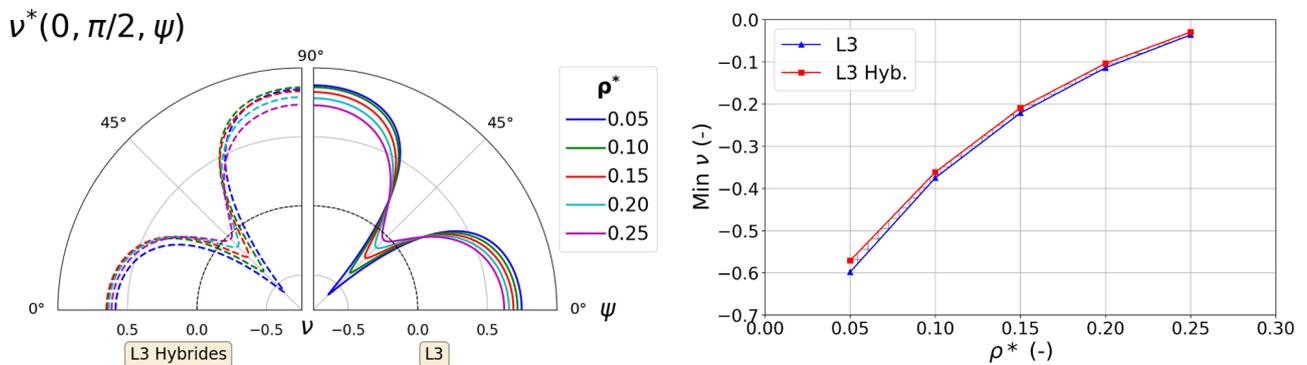


FIGURE 5.6 – Comparaison pour les treillis L3 et L3 hybrides de la valeur maximale du module d'Young normalisé (gauche) et coefficient de Poisson minimale (droite)

L'hybridation n'a que peu d'influence sur le coefficient de Poisson des treillis L3, notamment à haute fraction volumique. Pour $\rho^* = 0.25$, l'augmentation est faible, le coefficient de Poisson minimal du treillis est de -0.036 et de -0.030 pour l'hybride. Pour $\rho^* = 0.05$, le coefficient de Poisson minimal du treillis est de -0.598 et de -0.571 pour l'hybride.

Treillis L4

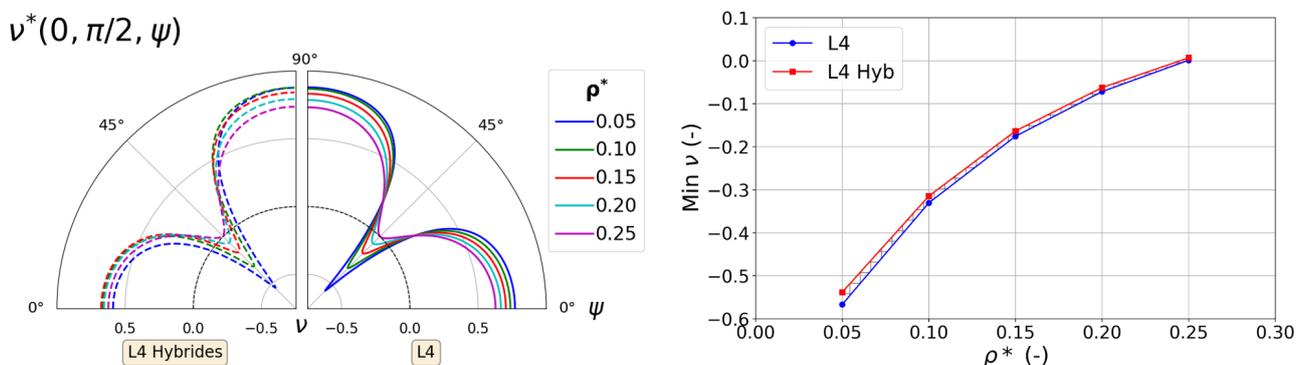


FIGURE 5.7 – Comparaison pour les treillis L4 et L4 hybrides de la valeur maximale du module d'Young normalisé (gauche) et coefficient de Poisson minimale (droite)

De même que pour le treillis L3, l'augmentation du coefficient de Poisson par la présence de la matrice élastomère est plutôt faible. Pour $\rho^* = 0.25$, le coefficient de Poisson minimal du treillis est de 0.001 et de 0.007 pour l'hybride. Pour $\rho^* = 0.05$, le coefficient de Poisson minimal du treillis est de -0.567 et de -0.538 pour l'hybride.

Conclusions sur l'évolution des propriétés élastiques effectives

Au travers de l'analyse des résultats issus de l'homogénéisation numérique en élasticité des treillis et treillis hybrides, il ressort que l'hybridation semble avoir une influence négligeable sur les propriétés élastiques des treillis à haute fraction volumique. Ce résultat peut s'expliquer par l'importante différence de rigidité entre les treillis les plus denses et la matrice élastomérique. A plus faible fraction volumique, la matrice renforce effectivement le treillis, avec des augmentations du module d'Young de l'ordre de 65% pour les directions les moins rigides des treillis les moins denses, et des augmentations plus modestes dans les directions de rigidité maximale. Cependant, ces augmentations sont à mettre en balance avec l'important accroissement de masse des treillis après hybridation, d'environ 200% pour les L3 et 400% pour les L4. L'auxétisme des treillis n'est que peu impacté par le remplissage, le coefficient de Poisson augmentant légèrement.

5.4 Étude expérimentale

Le comportement mécanique des treillis et treillis hybrides a été étudié via des essais de compression. Afin d'observer les mécanismes de déformation internes des structures, une éprouvette de chaque type a été soumise à compression à l'intérieur d'un tomographe à rayons X.

Les autres éprouvettes ont été testées sur une machine d'essais Instron 5581, équipée d'une cellule de force de 5 kN. Les plateaux de compression ont été lubrifiés afin de réduire les frottements. Une vitesse de déformation de 0.001/s a été appliquée, correspondant à une vitesse de déplacement du plateau de 0.54 mm/min pour les échantillons L3 et de 0.72 mm/min pour les L4. La déformation est calculée à partir du déplacement mesuré du plateau, tandis que la contrainte moyenne σ est calculée en divisant la force mesurée par la section initiale des éprouvettes (9*9 mm² pour les échantillons L3, 12*12 mm² pour les L4). Des modélisations par éléments finis ont également été effectuées, selon différents sets de conditions aux limites, afin de tenir compte au mieux des conditions expérimentales. Ainsi, pour chaque type d'éprouvettes, 4 conditions aux limites différentes sont appliquées : périodiques sur cellule unitaire, sans frottements, avec frottements moyens et avec frottements forts en champ complet. Le calcul est ici non-linéaire : le TA6V est considéré élastoplastique et le PU est hyperélastique, selon les modèles présentés au Chapitre 2. Les paramètres utilisés sont rappelés dans le tableau 5.5. La rupture n'est pas modélisée.

TABLEAU 5.5 – Paramètres de la loi d'écrouissage du TA6V, et du modèle d'Arruda-Boyce du PU

TA6V	R ₀ (MPa)	Q ₁ (MPa)	b ₁ (-)	Q ₂ (MPa)	b ₂ (-)
	759.0	331.0	332.0	259.0	5.8
PU	μ (MPa)	λ (-)	d (-)		
	0.37	9.00	0.40		

5.4.1 Essais de compression

Les résultats des essais de compression sont présentés sur la Figure 5.8, incluant les courbes contraintes-déformations des treillis seuls et hybrides ainsi que du PU seul, pour les treillis L3 (a) et L4 (b).

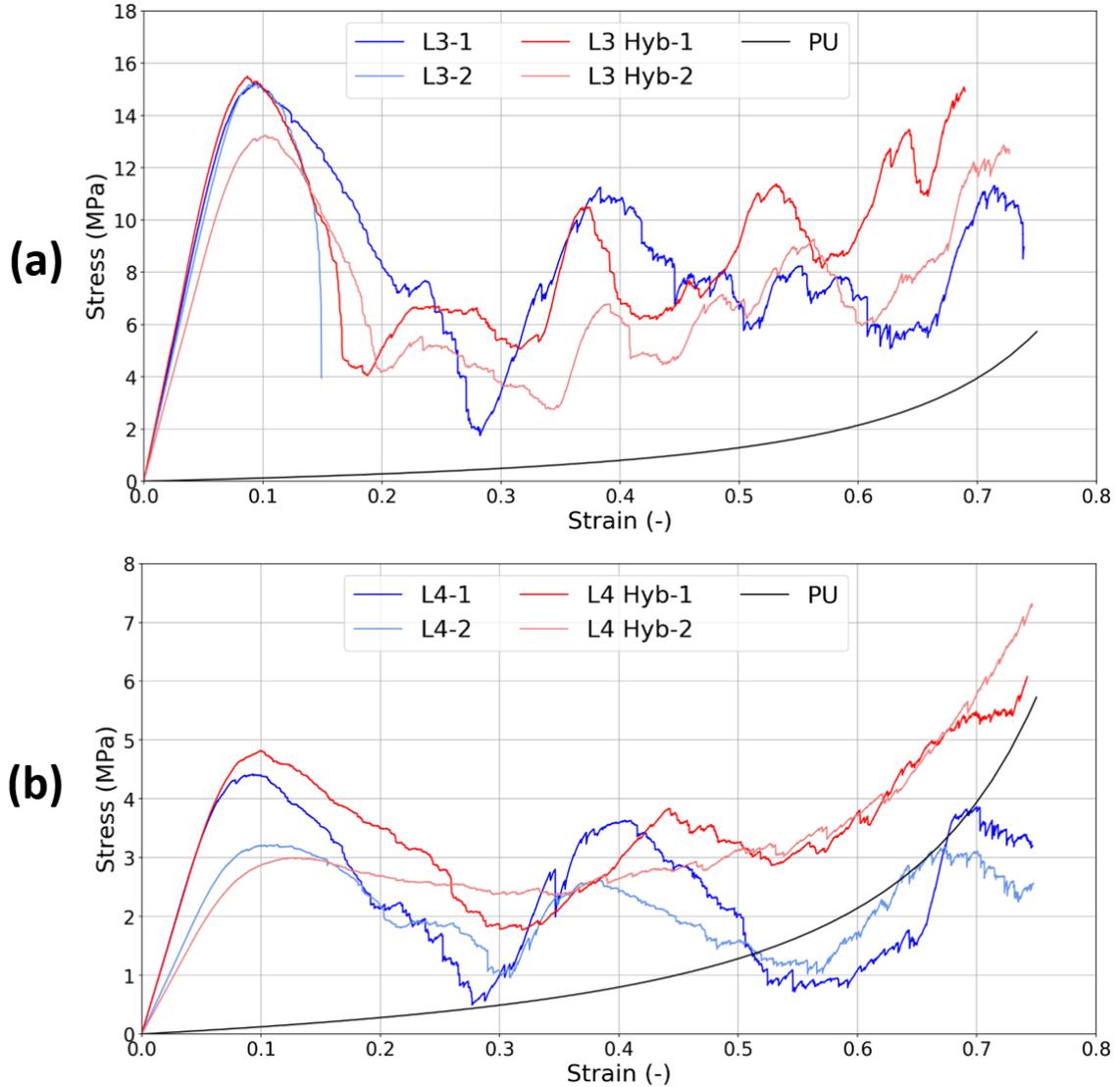


FIGURE 5.8 – Courbes contrainte-déformation expérimentales des treillis et treillis hybrides L3 (a) et L4 (b)

Treillis L3

Les treillis L3 présentent une rupture par bande de cisaillement, suivi par la rupture de poutres individuelles de la structure (le treillis L3-2 subit une rupture catastrophique après la bande de cisaillement). A partir de la partie élastique-linéaire, le module d'Young mesuré pour l'éprouvette L3-1 est de 213 MPa, et la contrainte pic de 15.2 MPa. Pour l'éprouvette L3-2, le module est mesuré à 200 MPa et la contrainte pic à 15.2 MPa, l'essai se termine prématurément sur une rupture catastrophique. La densification de la structure n'est pas observée.

Les treillis hybrides présentent également une rupture par bande de cisaillement, suivi par des ruptures de poutres, visibles par des "bosses" sur les courbes. Un module d'Young de 222 MPa est identifié pour

l'éprouvette L3 Hyb-1, ainsi qu'une contrainte pic de 15.5 MPa. L'éprouvette L3 Hyb-2 présente une rigidité inférieure, à 169 MPa ainsi qu'une contrainte pic plus faible, de 13.2 MPa. La contrainte augmente avec l'augmentation de la déformation pour les deux éprouvettes hybrides, avec une densification observable en fin de courbes.

Treillis L4

Les treillis L4 présentent un mode de rupture étage par étage : chaque "bosse" de la courbe contrainte-déformation représente la rupture d'un étage (au nombre de 3). Pour l'éprouvette L4-1, la contrainte pic est de 4.4 MPa, et le module d'Young mesuré sur la partie élastique-linéaire est de 67 MPa. L'éprouvette L4-2 présente un module bien moins important de 44 MPa, et une contrainte pic de 3.2 MPa. La densification des structures n'est pas observée.

Les treillis L4 hybrides présentent une rupture par bande de cisaillement. L'éprouvette L4 Hyb-1 présente un module d'Young identifié de 67 MPa et une contrainte pic de 4.8 MPa. Pour l'éprouvette L4 Hyb-2, le profil de contrainte est sensiblement différent, avec un long plateau observé après plastification, suivie d'une densification. Son module d'Young mesuré est nettement inférieur, de 36 MPa, et la contrainte pic de 3.0 MPa. Il est intéressant de noter un changement dans le mode de rupture, qui contrairement au treillis seul, celui-ci intervient par une bande de cisaillement suivie d'une densification à environ 66% de déformation (éprouvette L4 Hyb-1) et 54% (éprouvette L4 Hyb-2).

5.4.2 Simulation numérique des essais de compression

Pour chaque type d'éprouvettes, différentes simulations sont présentées dans cette partie, appliquant des conditions aux limites spécifiques. Une simulation sur cellule unitaire avec conditions aux limites périodiques, notée "PBC", et 3 simulations en champ complet (*Full-Field*) : sans frottement notée "FF", avec frottements moyens (blocage des surfaces haute et basse selon la direction X) notée "FF BX" et avec frottements forts (blocage des surfaces haute et basse selon les directions X et Y) notée "FF BXY". Les Figures 5.9 et 5.10 présentent la comparaison entre les courbes expérimentales et les résultats numériques pour les treillis seuls (a) et les treillis hybrides (b).

Treillis L3

Concernant les treillis seuls, la modélisation EF avec condition aux limites périodiques présente un module d'Young très proche des résultats expérimentaux à 224 MPa, mais plastifie plus rapidement, avec une contrainte pic bien plus basse à 9.0 MPa. En l'absence de modélisation de la rupture, la simulation ne peut pas reproduire les mécanismes de déformation observés expérimentalement. Les simulations en champ complet permettent d'observer une augmentation de la rigidité avec l'augmentation des frottements (203 MPa sans frottements, 380 MPa avec frottements moyens et 663 MPa en frottements forts). La même tendance est observée pour la contrainte pic (8.2 MPa sans frottements, 10.3 MPa avec frottements moyens et 12.0 MPa avec frottements forts), sans toutefois que celle-ci atteigne les niveaux expérimentaux.

Pour les treillis hybrides, la modélisation avec condition aux limites périodiques présente également un module d'Young très proche de l'expérimental, légèrement supérieur aux treillis seuls, à 228 MPa. La contrainte pic est également inférieure à celle du treillis, atteignant 9.2 MPa. Les modélisations en champ complet suivent la même tendance que pour les treillis seuls, les frottements augmentant le module (245 MPa sans frottements, 450 avec frottements moyens et 769 avec frottements forts) et la contrainte pic (non observable

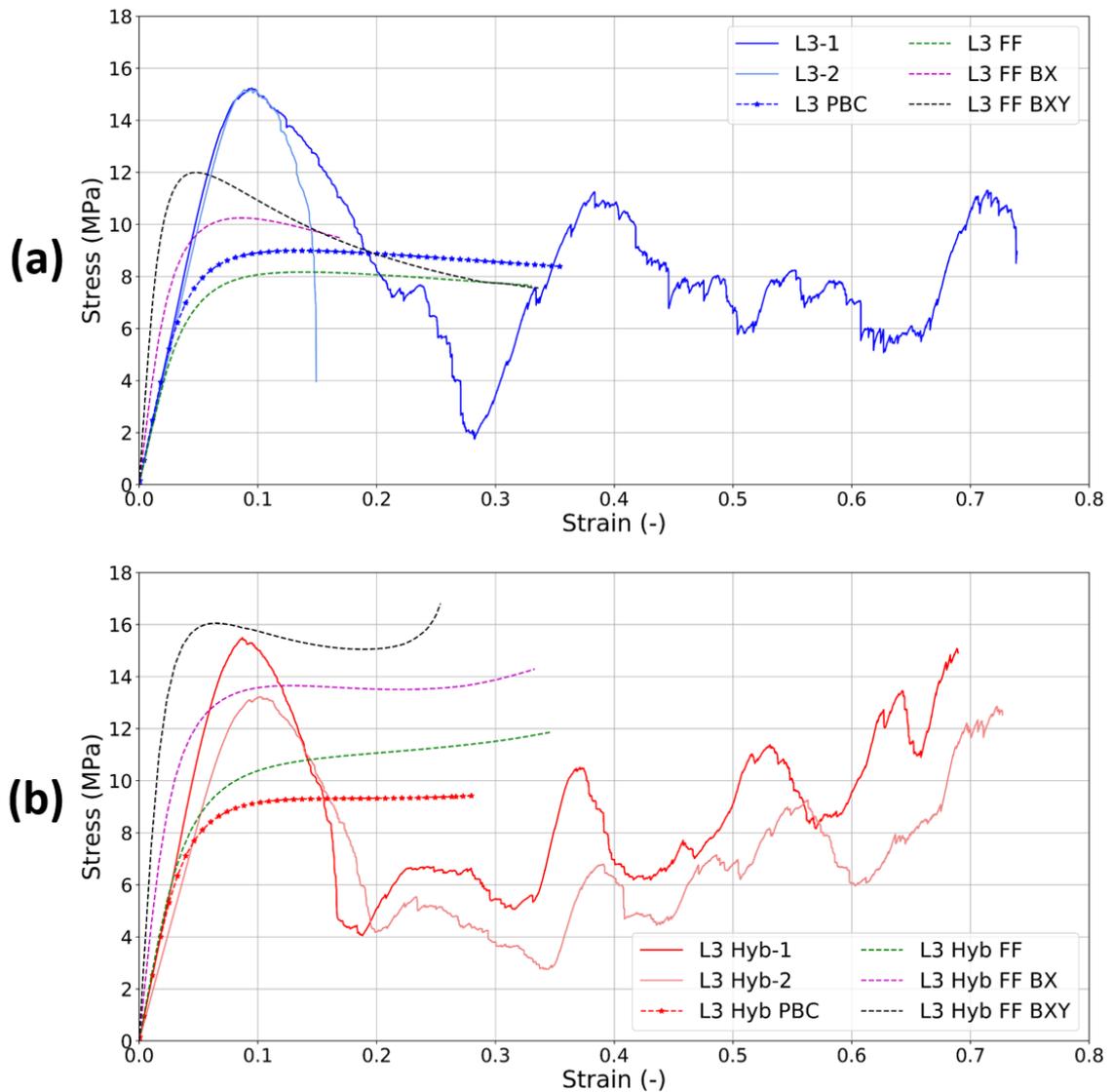


FIGURE 5.9 – Courbes contrainte-déformation numériques des treillis L3 (a) et treillis hybrides L3 (b)

sans frottements, de 13.6 MPa avec frottements moyens et 16.1 MPa avec frottements forts), permettant cette fois d'atteindre les niveaux expérimentaux.

Treillis L4

Concernant les treillis seuls, la modélisation EF avec conditions aux limites périodiques présente un module d'Young très proche de l'éprouvette L4-2 à 48 MPa, mais plastifie plus rapidement, avec une contrainte pic bien plus basse à 2.6 MPa. A nouveau, en l'absence de modélisation de la rupture, la simulation ne peut pas reproduire les mécanismes de déformations observés expérimentalement. De la même manière que décrit précédemment, les simulations en champ complet mettent en lumière l'effet des frottements : augmentation de la rigidité (44 MPa sans frottements, puis 98 MPa avec frottements moyens et 183 MPa avec frottements forts) et de la contrainte pic (2.4 MPa sans frottements, puis 2.9 MPa avec frottements moyens et 3.4 MPa avec frottements forts, se plaçant entre les deux courbes expérimentales).

Pour les treillis hybrides, la modélisation EF avec conditions aux limites périodiques présente un module

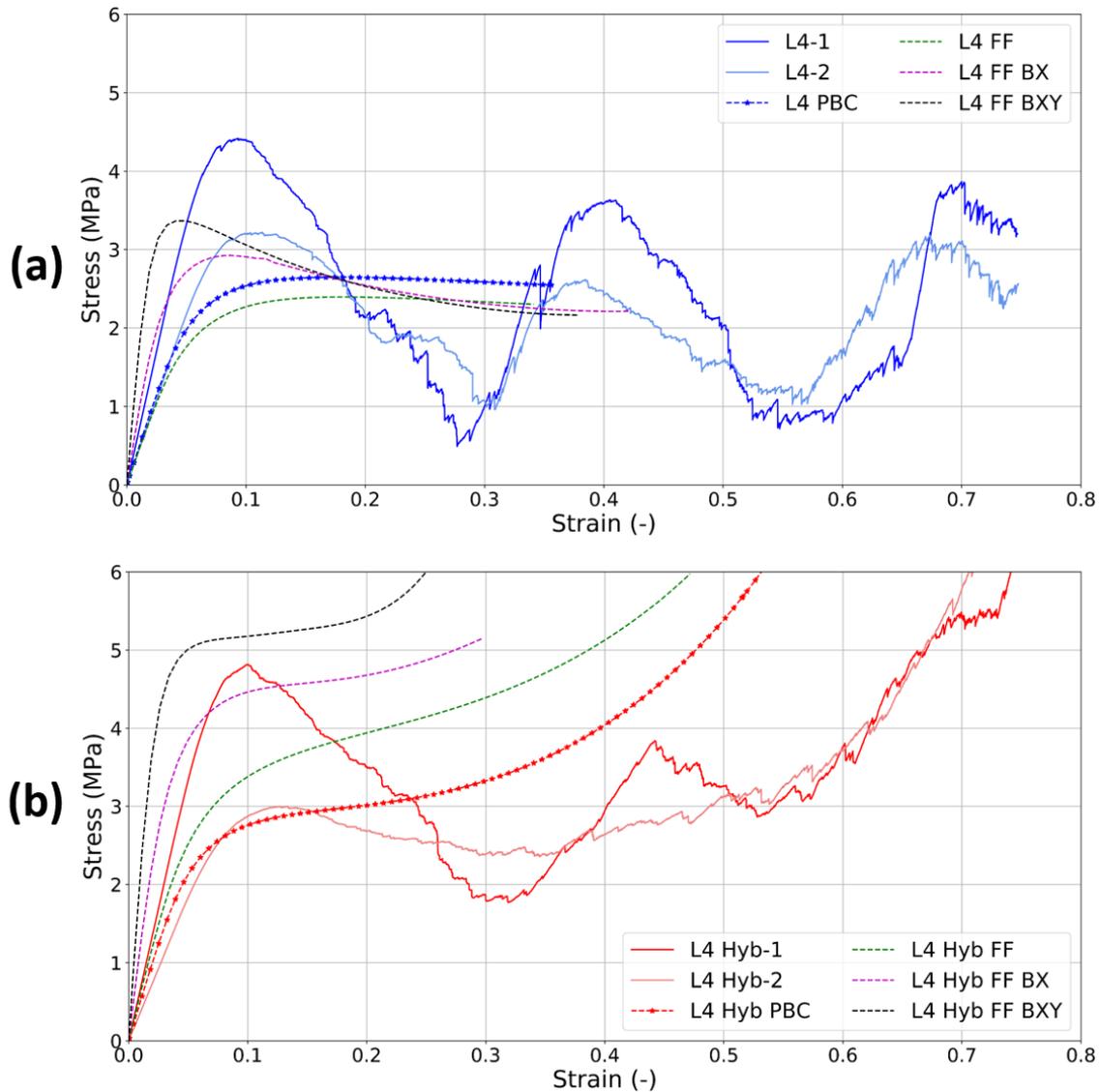


FIGURE 5.10 – Courbes contrainte-déformation numériques des treillis L4 (a) et treillis hybrides L4 (b)

d'Young très proche de l'expérimental et légèrement supérieur au treillis seuls, à 52 MPa. La contrainte pic est également supérieure à celle du treillis, atteignant 2.9 MPa. A la plasticité du treillis succède une rapide hausse de la contrainte correspondante à la compression du PU. Les simulations en champ complet montrent également une augmentation du module d'Young (62 MPa sans frottements puis 128 MPa avec frottements moyens et 230 MPa avec frottements forts) et de la contrainte pic (non observable sans frottements, puis 4.5 MPa avec frottements moyens et 5.1 MPa avec frottements forts, dépassant les valeurs expérimentales).

Bilan des essais numériques et expérimentaux sur Instron

Il est constaté sur les courbes expérimentales que l'hybridation n'induit pas nécessairement une augmentation des propriétés élastiques (modules d'Young des treillis et des hybrides souvent quasi-égaux, voire inférieurs pour hybride), comme prévu par les simulations en élasticité linéaire. Une comparaison des modules d'Young expérimentaux et simulés est faite dans le Tableau 5.6. On observe une bonne cohérence

entre les valeurs expérimentales et celles homogénéisées pour les treillis L3, avec cependant un manque de répétabilité notamment pour les hybrides. De manière attendue, la rigidité augmente fortement avec le niveau de frottement. La contrainte pic varie peu expérimentalement dans le cas des treillis L3, elle est moins répétable pour les treillis L4. Le mode de rupture est généralement la bande de cisaillement, à l'exception du treillis L4 dont la rupture se fait étage par étage. On ne constate pas d'augmentation importante de la contrainte due à l'hybridation : cette combinaison de matériaux et de treillis ne semble pas pertinente pour des applications en dissipation d'énergie lorsque que le critère de la masse est important. L'augmentation de l'énergie dissipée (uniquement sur la configuration L4) ne compense pas l'importante augmentation de masse due à l'hybridation, engendrant une énergie spécifique dissipée inférieure. Les valeurs de l'énergie dissipée et de l'énergie spécifique dissipée sont données dans Tableau 5.7.

Si les résultats de modélisation EF avec conditions aux limites périodiques montrent des valeurs de module identifiés proches des valeurs expérimentales (notamment les simulations avec lois de comportement non-linéaires), il n'en est pas de même pour le pic de contrainte. Cette différence peut s'expliquer par le faible nombre de cellules dans les éprouvettes, avec seulement 3 cellules par côté pour les éprouvettes étudiées. Or, comme observé expérimentalement par Gavazzoni *et al.* [136], le nombre de cellule dans la section de l'éprouvette a une influence sur le niveau de contrainte après l'apparition de la plasticité : la contrainte est plus faible pour un grand nombre de cellules. Les conditions aux limites périodiques permettent virtuellement de simuler un milieu périodique infini, soit une situation très éloignée de nos expériences. Les simulations en champ complet avec frottements permettent de se rapprocher bien plus des pics de contraintes observés expérimentalement, ce qui suggère que malgré l'utilisation de lubrifiant sur les plateaux de compression, des frottements d'intensité variable ont influencé les essais expérimentaux, pouvant expliquer le manque de répétabilité sur certain essais. La présence de frottements peut également être à l'origine d'un flambage important des poutres au contact des plateaux, comme le montre les simulations sur la Figure 5.11(b) dans le cas d'un treillis L4 avec frottements forts, comparativement au cas sans frottement (a). Les frottements entraînent en conséquence une répartition différente des contraintes dans la structure, pouvant mener à une rupture prématurée.

TABLEAU 5.6 – Comparaison des modules d'Young expérimentaux et simulés, pour treillis et treillis hybrides

Module d'Young (MPa)	L3	L3 Hybride	L4	L4 Hybride
Expérimental - 1	213	222	67	67
Expérimental - 2	200	169	44	36
Homogénéisation linéaire PBC	224	269	48	80
Simulation non-linéaire PBC	224	228	48	52
Simulation FF	203	245	44	62
Simulation FF BX	380	450	98	128
Simulation FF BXY	663	769	183	231

TABLEAU 5.7 – Comparaison de l'énergie dissipée et de l'énergie spécifique dissipée, pour treillis et treillis hybrides

Pour une déformation $\epsilon = 0.75$	L3	L3 Hybride	L4	L4 Hybride
Energie dissipée ($J.cm^{-3}$)	6.3	6.0	1.7	2.5
Energie spécifique dissipée ($J.g^{-1}.cm^{-3}$)	13.1	5.0	2.9	1.1

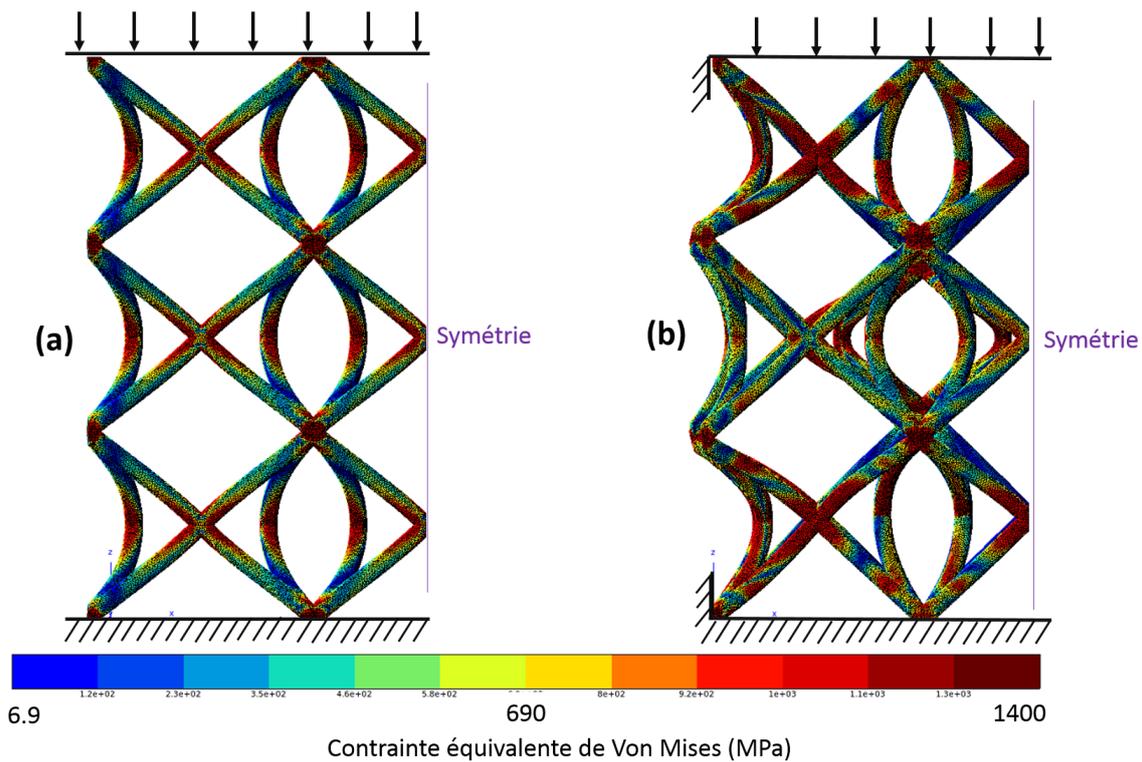


FIGURE 5.11 – Comparaisons des champs de contrainte et déformations du treillis L4 en compression, sans frottement (a) et avec frottements forts (b), pour une déformation d'environ 10%

5.4.3 Observations par tomographie à rayons X

Des essais de compression en tomographie *in-situ* ont été effectués sur des treillis seuls et hybrides, à raison d'un essai par type d'éprouvette. La machine utilisée est un tomographe v|tome|x s (GE Sensing & Inspection Technologies Phoenix X|ray), dont la tension de la source est réglée à 100 kV, et la taille de voxel fixée à 9 μm . Le tomographe a été équipée d'une machine d'essais dont la taille réduite permet l'insertion dans l'enceinte de radioprotection de celui-ci. Cependant, il est à noter que ce dispositif d'essais présente une rigidité structurelle bien inférieure à celle d'une machine Instron conventionnelle. Les acquisitions volumiques ont été faites pour différents niveaux de déformations des échantillons : à l'état initial ($\epsilon = 0$), dans la zone élastique ($\epsilon \approx 0.05$), après endommagement plastique ($\epsilon \approx 0.17$) et enfin, pour les échantillons hybrides seulement, à grande déformation ($\epsilon \approx 0.36$).

Les courbes contrainte-déformation pour les éprouvettes L3 sont données en Figure 5.12, celles des éprouvettes L4 en Figure 5.15. Les différentes acquisitions volumiques sont notifiées et numérotées dans l'ordre chronologique sur les courbes, les valeurs numériques précises en contraintes/déformations lors des acquisitions sont détaillées dans le tableau 5.8 pour les éprouvettes L3 et le tableau 5.9 pour les L4.

Treillis L3

La reconstitution des structures L3 pour les différentes acquisitions sont données dans la Figure 5.13. Entre le treillis seul et hybride, on ne peut pas constater de différences sur les acquisitions n°1 et n°2. Cependant, sur l'acquisition n°3 on observe une bande de cisaillement assez prononcée pour le treillis seul,

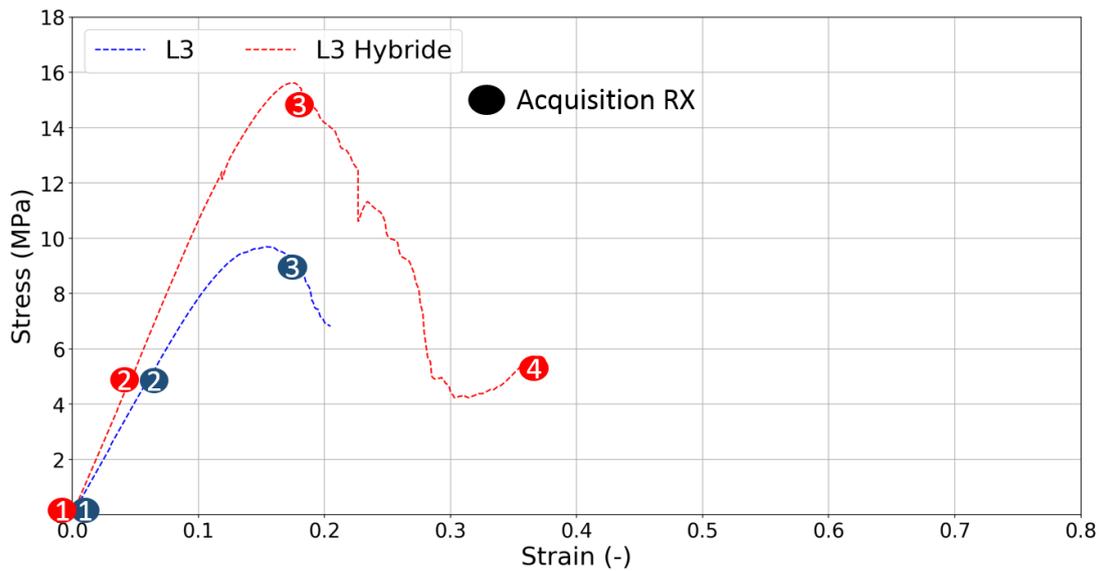


FIGURE 5.12 – Courbes contraintes-déformations des treillis et treillis hybrides L3 sous tomographe

TABLEAU 5.8 – Contraintes et déformations lors des acquisitions volumiques, treillis L3

Type / N° acquisition	2 (partie élastique)		3 (endommagement)		4 (grande déformation)	
	σ (MPa)	ϵ (-)	σ (MPa)	ϵ (-)	σ (MPa)	ϵ (-)
Treillis L3	5.0	0.06	9.2	0.17	/	/
Treillis L3 Hybride	5.0	0.05	15.5	0.18	5.5	0.36

plus avancée et visible que pour le treillis hybride, ce qui pourrait indiquer que la matrice a effectivement retardé la déformation des poutres. Sur l'acquisition n°4 de l'éprouvette hybride, on constate la rupture au niveau de la bande de cisaillement, ainsi que des ruptures locales du treillis. Les bandes de cisaillement sont représentées par des bandes en pointillés sur la Figure 5.14, et les ruptures locales par des cercles.

Treillis L4

TABLEAU 5.9 – Contraintes et déformations lors des acquisitions volumiques, treillis L4

Type / N° acquisition	2 (partie élastique)		3 (endommagement)		4 (grande déformation)	
	σ (MPa)	ϵ (-)	σ (MPa)	ϵ (-)	σ (MPa)	ϵ (-)
Treillis L4	2.8	0.07	3.6	0.17	/	/
Treillis L4 Hybride	2.8	0.07	4.5	0.16	3.1	0.37

La reconstitution des structures L4 pour les différentes acquisitions sont données dans la Figure 5.16. Entre le treillis seul et hybride, on ne peut pas constater de différences sur les acquisitions n°1 et n°2. Comme pour les treillis L3, l'acquisition n°3 permet l'observation d'une bande de cisaillement plus prononcée et visible sur le treillis seul.

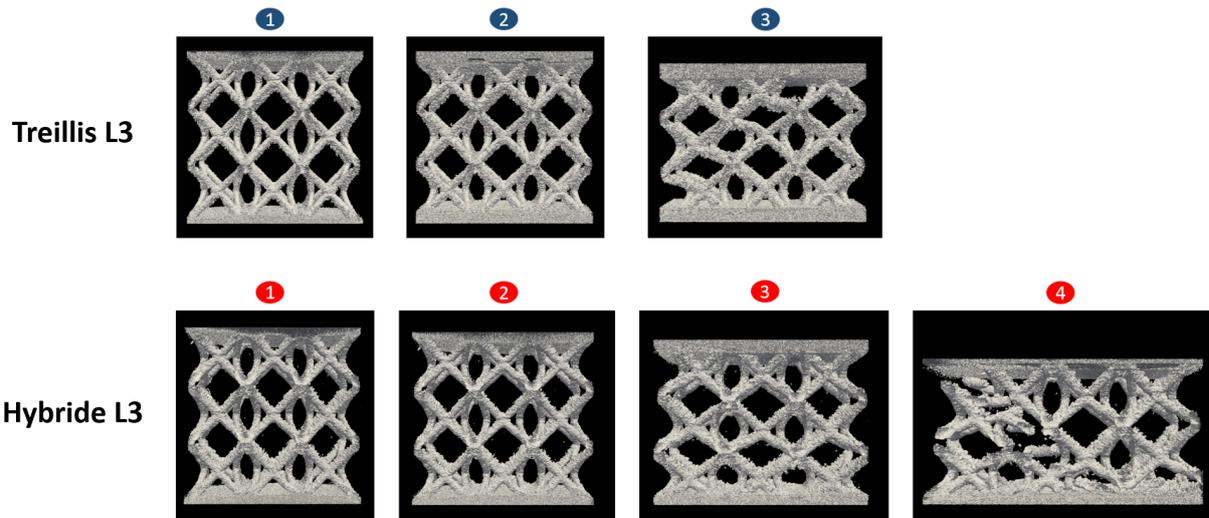


FIGURE 5.13 – Reconstitutions volumiques des acquisitions des treillis L3

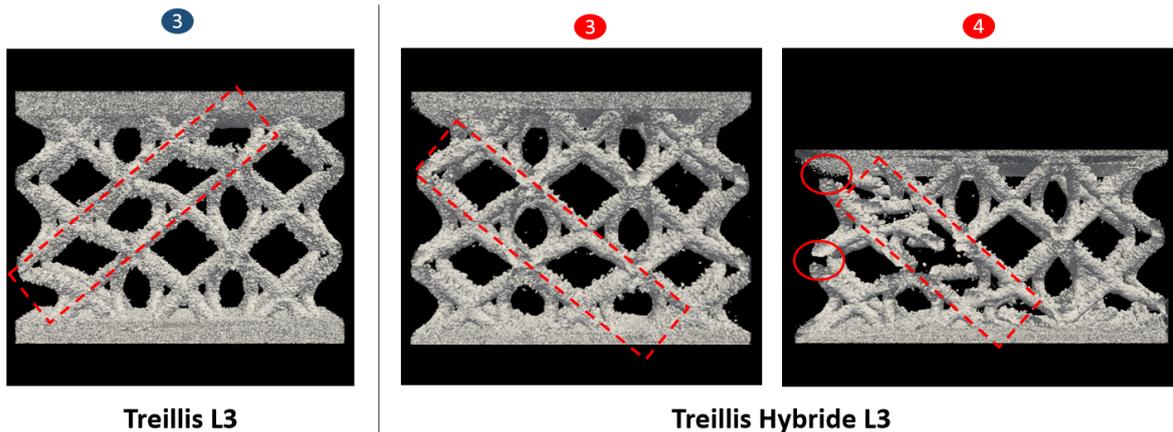


FIGURE 5.14 – Comparaison de la rupture des treillis L3, bandes de cisaillement et ruptures locales

Bilan des observations sous tomographe

Les essais mécaniques *in-situ* ont permis de révéler les mécanismes de déformations des treillis et treillis hybrides. La totalité des éprouvettes se déforme selon une bande de cisaillement, suivie par la rupture sur cette bande accompagnée par des ruptures locales. Si ces observations s'accordent assez bien avec celles issues des essais mécaniques sur machine Instron, la déformation du treillis L4 fait exception, ne présentant pas ici de rupture étage par étage. Cette différence pourrait s'expliquer par une différence dans les conditions aux limites expérimentales.

Une différence de déformations entre les treillis et treillis hybrides lors de l'acquisition n°3 semble confirmer que la présence du polymère à l'intérieur du treillis permet bien de ralentir la déformation de celui-ci. Les bandes de cisaillement sont ainsi nettement moins marquées sur les treillis hybrides à déformation équivalente.

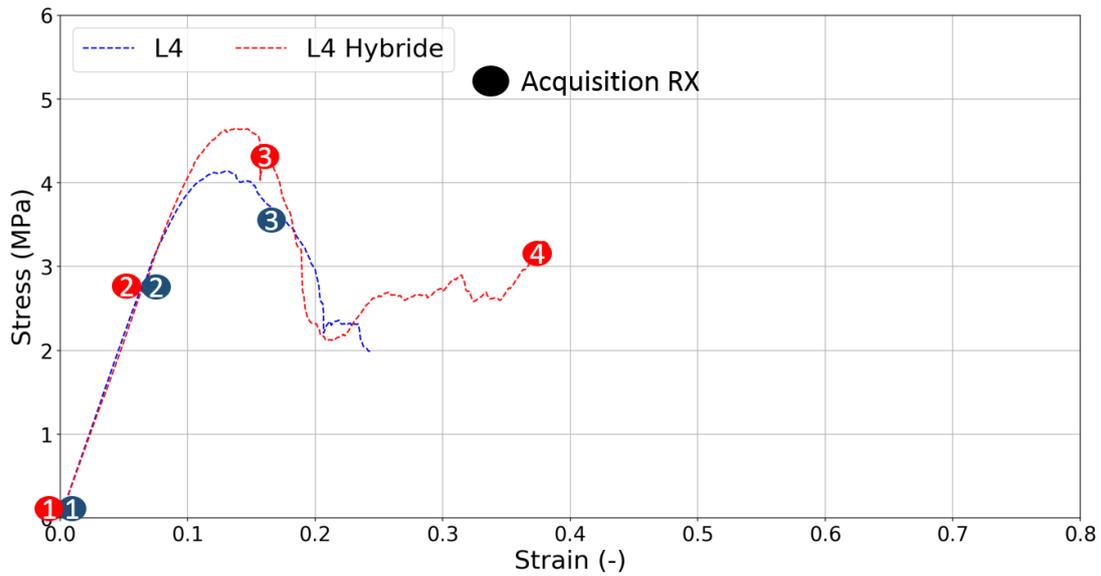


FIGURE 5.15 – Courbes contraintes-déformations des treillis et treillis hybrides L4 sous tomographe

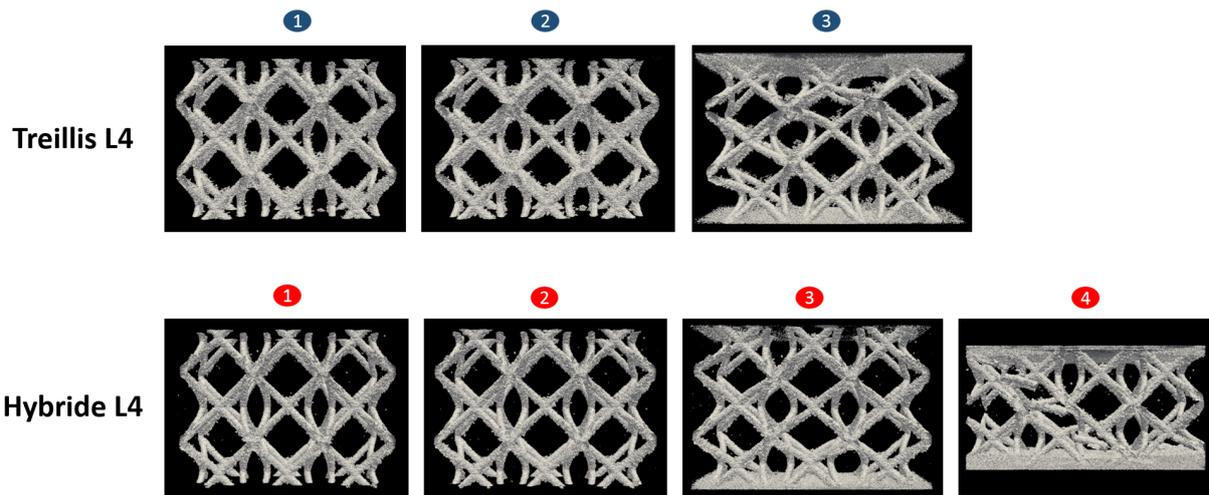


FIGURE 5.16 – Reconstitutions volumiques des acquisitions des treillis L4

Défauts de fabrication

L'observation des treillis hybrides au tomographe a permis d'observer des défauts de fabrication à l'intérieur des treillis hybrides. Des bulles de tailles importantes ont été constatées, probablement formées lors de la polymérisation du polyuréthane, et qui n'ont pu être extraites malgré l'utilisation de la pompe à vide. La taille réduite des treillis pourrait être la raison pour laquelle les bulles n'ont pas pu s'échapper.

Les bulles sont observables sur les sections reconstituées des éprouvettes hybrides. Toutes les sections ne comportant pas de bulles, les sections avec le plus de bulles sont rapportées sur la Figure 5.18, avec à gauche le treillis hybride L3, et à droite le L4. On peut remarquer la présence de petites bulles en surface des éprouvettes, et de larges bulles à l'intérieur, coincées à l'intérieur des cellules.

La présence de larges bulles peut permettre d'expliquer l'importante variabilité dans les courbes contrainte-déformation des treillis hybrides. Afin d'éviter la présence de ces bulles, deux solutions sont possibles : utiliser un élastomère plus fluide (l'importante viscosité de celui-ci a pu freiner la remontée des bulles) ou

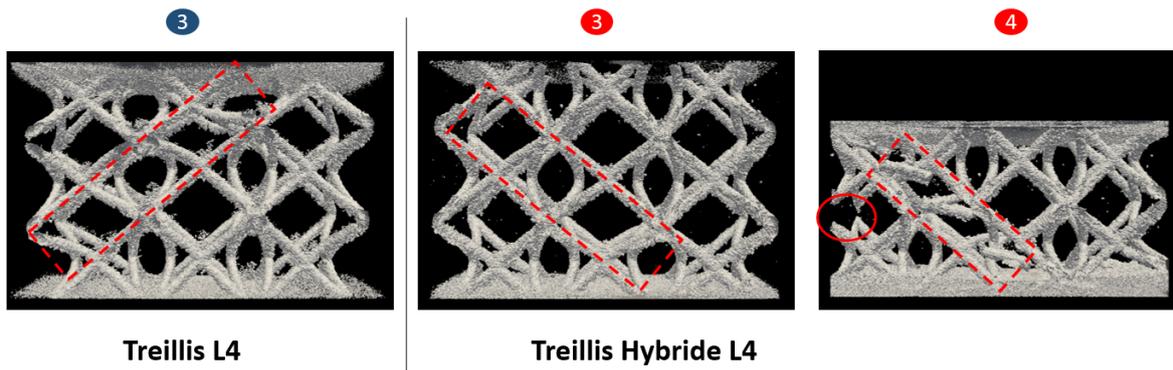


FIGURE 5.17 – Comparaison de la rupture des treillis L4, bandes de cisaillement et ruptures locales

utiliser des lattices dont la dimension des cellules unitaires est plus importante, laissant passer les bulles plus aisément.

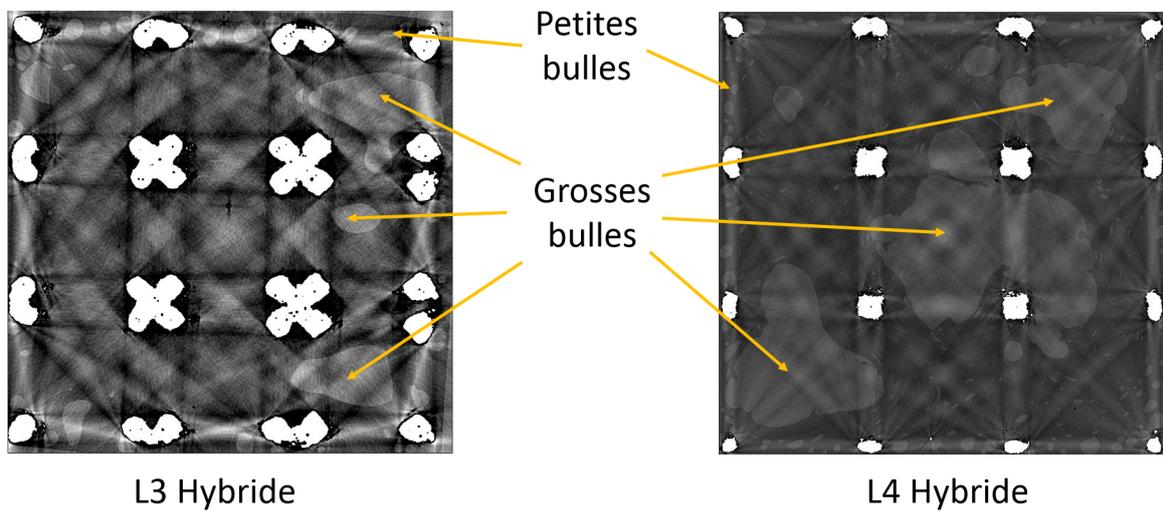


FIGURE 5.18 – Sections des treillis hybrides, présence de bulles à tailles variables

5.5 Conclusions

Dans ce chapitre, les propriétés mécaniques de deux treillis auxétiques en alliage de titane et leur version hybride, remplis par du polyuréthane élastomère, sont étudiées à l'aide de méthodes numériques et expérimentales.

Les propriétés élastiques effectives (E^* et ν) des treillis et des hybrides sont comparées en utilisant une stratégie d'homogénéisation numérique avec conditions aux limites périodiques, et des lois de comportement élastiques linéaires. Cinq fractions volumiques ρ^* des deux cellules, obtenues en faisant varier le diamètre des poutres D , sont comparées à leur équivalent hybride. Les résultats montrent une augmentation du module d'Young normalisé à faible fraction volumique, notamment dans les directions les moins rigides. Cependant, à haute fraction volumique, l'augmentation est quasi inexistante quelle que soit la direction. La présence du polyuréthane élastomère à l'intérieur des treillis augmente très légèrement le coefficient de Poisson. L'évolution très faible des propriétés élastiques peut s'expliquer par la grande différence de rigidité séparant les treillis du polyuréthane utilisé, avec des rapports E_{L3}/E_{PU} d'environ 136 et E_{L4}/E_{PU} d'environ 29.

Des éprouvettes treillis ont été imprimées en TA6V par la méthode SLM, une partie d'entre elles ont été remplies avec du polyuréthane à l'aide de moules spécifiques. Les treillis L3 ont été imprimés à une fraction volumique de 10%, ceux L4 de 5%. Des tests de compression ont été effectués, montrant que l'hybridation n'induit pas nécessairement une augmentation du module d'Young, ni de la contrainte pic. Les treillis et treillis hybrides L3 présentent un mode de rupture par bande de cisaillement. Les treillis L4 présentent un mode de rupture étage par étage, qui est représenté sur les courbes contrainte / déformation par 3 "bosses", correspondant aux trois étages cédant les uns après les autres. Cependant les treillis L4 hybrides présentent une rupture complètement différente, par bande de cisaillement. Les simulations numériques sur cellule unitaire sont proches des résultats expérimentaux quant à la rigidité, mais plastifient à une contrainte moins élevée possiblement à cause du faible nombre de cellules dans la section des éprouvettes, et de l'absence de la prise en considération des frottements avec les plateaux de compression. Les simulations en champ complet avec différents niveaux de frottements permettent d'obtenir des niveaux de pics de contraintes similaires à ceux observés expérimentalement, suggérant la présence de frottement variables lors des essais expérimentaux, pouvant provoquer un flambage important des poutres au contact des plateaux.

La faible augmentation de la contrainte par l'hybridation semble indiquer que ces treillis hybrides TA6V-PU ne sont pas des options viables comme dissipateur d'énergie lorsque le critère masse doit être optimisé : la masse des hybrides est nettement plus importante que celle des treillis, l'énergie spécifique dissipée est ici largement diminuée. Afin d'augmenter l'intérêt de lattices hybrides métal-polymère pour des applications en dissipation d'énergie, une solution pourrait être de diminuer l'écart de rigidité entre les deux matériaux, en utilisant un polymère rigide.

Des tests de compression *in-situ* au tomographe à rayons X ont été effectués afin d'observer les mécanismes de déformation interne des treillis et treillis hybrides. Les images reconstituées montrent que tous les treillis se déforment selon une bande de cisaillement. La formation de la bande de cisaillement sur les treillis hybrides semble freinée par la présence du polymère à l'intérieur du lattice. Le treillis L4 se comporte différemment que lors des essais mécaniques sur machine Instron, probablement due à des conditions aux

limites différentes. Enfin, des bulles de taille importante ont été observées, pouvant remettre en cause les résultats expérimentaux. Il est recommandé d'utiliser un polymère plus fluide pour remplir des lattices de faibles dimensions, ou d'utiliser des lattices dont la cellule unitaire serait plus grande pour faciliter l'évacuation des bulles lors de la polymérisation.

Conclusions

Les enjeux industriels actuels sont fortement liés à la minimisation des dépenses énergétiques et requièrent à cette fin l'optimisation des systèmes employés. C'est le cas par exemple dans le domaine des transports, où la réduction des masses embarquées est une nécessité pour atteindre les objectifs de diminution des dépenses énergétiques. Les systèmes visant à dissiper de l'énergie mécanique n'y font pas exceptions. Dans cette optique, les structures treillis font preuve de capacités de dissipation élevées relativement à leur masse, et sont donc candidates pour le remplacement des pièces mécaniques en usage. Parmi les treillis, les structures à coefficient de Poisson négatif permettraient une dissipation supérieure aux structures conventionnelles. Néanmoins, ces structures sont soumises à des modes de déformation, d'endommagement et de rupture pouvant nuire à leurs performances.

Ces travaux de thèses s'inscrivent dans l'exploration des possibilités visant à améliorer les propriétés mécaniques spécifiques des treillis périodiques, notamment pour la dissipation d'énergie, par une stratégie d'hybridation consistant à remplir le volume vacant des treillis par un matériau de nature différente. Cette stratégie, relativement récente pour les treillis, induit des questionnements : comment fabriquer des treillis hybrides ? Comment modéliser leur propriétés mécaniques ? Quelle est l'influence du choix des matériaux constitutifs et de la géométrie des treillis sur ces propriétés ?

L'état de l'art présenté dans le premier chapitre permet de comparer les méthodes et matériaux utilisés pour la réalisation de treillis hybrides, ainsi que leurs propriétés mécaniques. Il est constaté que lorsque le matériau d'hybridation choisi est trop rigide, la déformation des poutres peut être empêchée, la densification intervient pour une déformation plus faible, réduisant la longueur du plateau de contrainte et ainsi la dissipation d'énergie et l'efficacité d'absorption. La stratégie d'hybridation est particulièrement efficace pour les treillis auxétiques, augmentant considérablement le module d'élasticité. Cette augmentation peut résulter d'un effet de support plus important de la matrice lorsque la structure se déforme en opposition à celle-ci.

Afin d'exploiter cet effet de renfort, deux structures dont les géométries permettent d'induire une déformation rentrante, et donc un coefficient de Poisson négatif lorsqu'elles sont sollicitées dans certaines directions, sont présentées dans le troisième chapitre. La stratégie d'homogénéisation numérique avec conditions aux limites périodiques permet d'identifier les propriétés élastiques effectives des treillis, et ainsi d'établir un lien entre les paramètres géométriques et ces propriétés. Le coefficient de Poisson est fortement lié au paramètre de pré-déformation des poutres, de même que le module d'Young. Enfin, une étude en élastoplasticité visant à comparer l'effet des propriétés élastiques effectives sur la dissipation d'énergie montre que la direction de chargement qui maximise le module d'Young est celle qui maximise l'énergie dissipée, pour une déformation plastique de 10%. Néanmoins, l'extrapolation de ce résultat à plus haute

déformation est périlleux en l'absence d'une modélisation de la rupture.

Pour vérifier l'effet de renfort d'une matrice élastomère, une campagne expérimentale et numérique comparant mécaniquement deux treillis en polymère avec leurs équivalents composites est présentée dans le quatrième chapitre. Les éprouvettes sont fabriquées par photopolymérisation à l'aide d'une imprimante 3D, les matériaux utilisés sont un polymère rigide (VeroWhite) pour le treillis et un polymère souple (Tango-Black+) pour la matrice. Ce procédé permet virtuellement de réaliser n'importe quelle géométrie de treillis, grâce à la possibilité d'imprimer un matériau support provisoire. Il est particulièrement efficace pour la fabrication de treillis composites car il permet d'imprimer simultanément l'association treillis + matrice, évitant les problématiques de bulles d'air. Les propriétés élastiques effectives sont calculées par la méthode d'homogénéisation périodique, et la comparaison treillis / composite permet de constater une augmentation du module d'Young et du coefficient de Poisson plus importante à faible fraction volumique de treillis. Une campagne expérimentale confirme l'augmentation du module d'Young, permet d'observer une augmentation des plateaux de contraintes et un retardement de la densification pour les composites, augmentant la dissipation d'énergie spécifique malgré la considérable augmentation de la masse. Pour la cellule Hexaround, la rupture du treillis se fait étage par étage, tandis qu'en présence de la matrice, les éprouvettes présentent une bande de cisaillement.

L'influence du contraste de propriétés est exploré dans le cinquième chapitre, par l'étude du comportement mécanique de treillis métallique en TA6V et de treillis rempli par un polyuréthane élastomère. Les treillis sont obtenus par fabrication additive par la méthode SLM, les treillis hybrides sont remplis à l'aide de moules spécifiques. Le contraste du module d'Young des matériaux est beaucoup plus important que pour le chapitre précédent. La comparaison des propriétés élastiques effectives obtenues par homogénéisation montre une influence beaucoup plus faible de l'hybridation. Une campagne expérimentale confirme une évolution du module d'Young faible ou inexistante, cependant les résultats présentent une mauvaise reproductibilité. L'hybridation ne permet pas une augmentation significative des niveaux de contraintes. Une modification du mode rupture est observée sur le treillis L4 lorsqu'il est rempli. L'observation *in-situ* par tomographie à rayons X permet de révéler les mode de déformations des treillis et treillis hybrides. Tous présentent une bande de cisaillement, qui apparaît plus tardivement pour les éprouvettes hybrides, suggérant un effet retardant de la matrice. Des défauts de fabrication sont observés par la présence de bulles dans la matrice. Les bulles peuvent être à l'origine de la mauvaise répétabilité des essais expérimentaux, et leur accumulation peut s'expliquer par la dimension des cellules unitaires ne permettant pas leur évacuation, malgré le passage par la pompe à vide.

Ces travaux confirment que l'hybridation peut être une piste viable pour augmenter les propriétés mécaniques spécifiques des treillis, et notamment l'énergie spécifique dissipée. La fabrication directe des treillis hybrides par photopolymérisation s'est montrée bien plus efficace que la stratégie de remplissage *a posteriori* des structures métalliques. La présence de bulles doit cependant pouvoir être évitée en adoptant un processus de remplissage inspirée de l'infiltration sous vide des composites fibreux. La fluidité du polymère de remplissage doit être importante pour s'infiltrer efficacement. La stratégie de modélisation par l'application de conditions aux limites sur cellule unitaire semble efficace, même si elle surestime la rigidité des treillis. Cependant, les conditions périodiques peuvent être inadaptées à la modélisation de treillis dont le nombre de cellules unitaires est faible, ces derniers étant plus influencés

par les conditions aux limites. Ce constat est renforcé par des résultats suggérant une influence du nombre de cellules sur les propriétés élastoplastiques mesurées expérimentalement [136].

La densification retardée observée sur les treillis hybrides en polymères permet un plus long plateau de contraintes. Cependant, les résultats suggèrent également qu'un fort contraste de propriétés entre les matériaux constitutifs peut atténuer largement l'accroissement des propriétés.

Les perspectives offertes par ces travaux sont les suivantes :

- Les simulations élastoplastiques sur cellule unitaire utilisant des conditions aux limites périodiques ont montré de bonnes capacités de modélisation des treillis périodiques. Cependant, l'absence de modélisation de la rupture ne permet pas une estimation numérique de la dissipation d'énergie, et des essais expérimentaux potentiellement coûteux restent nécessaires.
- Afin d'explorer davantage l'influence du contraste de propriétés entre les matériaux constitutifs, une campagne d'essais numériques comparant un grand nombre de matériaux présentant des rapports $E_{treillis}/E_{matrice}$ très variés peut être envisagée. Cette campagne serait d'autant plus intéressante si la rupture y est modélisée.
- Dans ces travaux, l'influence de la rugosité de surface du treillis sur l'adhérence et les frottements entre structure et matrice n'a pas été traitée. Afin de vérifier l'effet de la rugosité, une campagne expérimentale peut être envisagée. Il a été montré par Lhuissier *et al.* [248] que la rugosité de surface des treillis peut être réduite par un traitement chimique consistant à tremper la structure dans une solution acide. Plus le temps de trempage est important, plus la rugosité obtenue est faible. La comparaison des propriétés mécaniques de plusieurs treillis hybrides dont la rugosité de surface est variable pourrait permettre de répondre à ce questionnement. Il est à noter que les propriétés mécaniques des treillis évolue lors du traitement chimique, gagnant notamment en rigidité. Il faut également tenir compte de la fluidité du matériau de remplissage : si celui-ci est trop visqueux, il peut ne pas s'infiltrer dans les anfractuosités. Celui-ci doit être choisi le moins visqueux possible.
- Les variations géométriques autour des treillis devraient être expérimentées : treillis hiérarchiques hybrides, treillis à gradient de fraction volumique ou matrice à gradient (mousse de densité variable), treillis creux hybrides, voire hybridation à plus de deux matériaux.
- Les propriétés en dissipation cyclique des treillis hybride à matrice élastomère pourrait être examinée. Les élastomères présentent un hystérésis élastique qui peut être exploitée en le plaçant au sein d'un treillis auxétiques. En compression cyclique, le treillis exercerait une compression multi-axiale sur la matrice, tirant davantage profit de son hystérésis.
- Le choix de la cellule unitaire pourrait faire l'objet d'une optimisation topologique au lieu d'un choix "intuitif".

Bibliographie

- [1] M. F. Ashby. Designing architected materials. *Scripta Materialia*, 68(1) :4–7, 2013. [1](#), [64](#)
- [2] Y. He, D. Burkhalter, D. Durocher, and J. M. Gilbert. Solid-Lattice Hip Prosthesis Design : Applying Topology and Lattice Optimization to Reduce Stress Shielding From Hip Implants. 2018 Design of Medical Devices Conference, 2018. [2](#)
- [3] X. Li, Y. Hao Tan, P. Wang, X. Su, H. Jean Willy, T. Seng Heng, and J. Ding. Metallic microlattice and epoxy interpenetrating phase composites : Experimental and simulation studies on superior mechanical properties and their mechanisms. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, 2020. [2](#), [26](#), [27](#), [28](#), [29](#), [53](#), [92](#), [106](#), [114](#)
- [4] W.-S. Kim, I.-H. Yun, J.-J. Lee, and H.-T. Jung. Evaluation of mechanical interlock effect on adhesion strength of polymer–metal interfaces using micro-patterned surface topography. *International Journal of Adhesion and Adhesives*, 30(6) :408–417, September 2010. [2](#)
- [5] P. Baracchini, C. Guillebaud, F.-X. Kromm, and H. Wargnier. Multi-material design in the case of a coupled selection of architectures and materials : Application to embedded electronic packaging. *Journal of Materials Engineering and Performance*, 28(12) :7248–7258, 2019. [2](#)
- [6] M. F. Ashby and Y. Bréchet. Designing hybrid materials. *Acta Materialia*, 51 :5801–5821, 2003. [3](#), [6](#), [63](#), [90](#), [91](#)
- [7] V. S. Deshpande, N. A. Fleck, and M. F. Ashby. Effective properties of the octet-truss lattice material. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 49(8) :1747–1769, 2001. [3](#), [9](#), [64](#)
- [8] V. S. Deshpande, M. F. Ashby, and N. A. Fleck. Foam topology : bending versus stretching dominated architectures. *Acta Materialia*, 49(6) :1035–1040, 2001. [3](#), [10](#), [11](#), [64](#)
- [9] M. F. Ashby and Y. Bréchet. Designing hybrid materials. *Acta materialia*, 51(19) :5801–5821, 2003. [3](#)
- [10] J. Dirrenberger, S. Forest, and D. Jeulin. Effective elastic properties of auxetic microstructures : anisotropy and structural applications. *International Journal of Mechanics and Materials in Design*, 9(1) :21–33, March 2013. [3](#), [15](#), [63](#), [64](#), [66](#), [81](#), [91](#)
- [11] M. F. Ashby. Designing architected materials. *Scripta Materialia*, 68(1) :4–7, January 2013. [6](#), [15](#)
- [12] V. S. Deshpande and N. A. Fleck. Energy absorption of an egg-box material. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 51(1) :187–208, 2003. [6](#)

- [13] N. A. Fleck and V. S. Deshpande. The resistance of clamped sandwich beams to shock loading. *J. Appl. Mech.*, 71(3) :386–401, 2004. [6](#)
- [14] O. Bouaziz, Y. Bréchet, and J. D. Embury. Heterogeneous and architected materials : A possible strategy for design of structural materials. *Advanced Engineering Materials*, 10(1-2) :24–36, February 2008. [6](#), [63](#), [90](#)
- [15] Y. Bréchet and J. D. Embury. Architected materials : Expanding materials space. *Scripta Materialia*, 68(1) :1–3, January 2013. [6](#), [63](#), [90](#)
- [16] F. Barthelat. Architected materials in engineering and biology : fabrication, structure, mechanics and performance. *International Materials Reviews*, 60(8) :413–430, November 2015. [6](#)
- [17] J. C. Weaver, J. Aizenberg, G. E. Fantner, D. Kisailus, A. Woesz, P. Allen, K. Fields, M. J. Porter, F. W. Zok, P. K. Hansma, P. Fratzl, and D. E. Morse. Hierarchical assembly of the siliceous skeletal lattice of the hexactinellid sponge *Euplectella aspergillum*. *Journal of Structural Biology*, 158(1) :93–106, April 2007. [7](#)
- [18] J. W. C. Dunlop and P. Fratzl. Multilevel architectures in natural materials. *Scripta Materialia*, 68(1) :8–12, January 2013. [7](#)
- [19] M. C. Fernandes. Mechanically robust lattices inspired by deep-sea glass sponges. *Nature Materials*, page 6, September 2020. [7](#)
- [20] I. Gibson, D. W. Rosen, B. Stucker, et al. *Additive manufacturing technologies*, volume 17. Springer, 2014. [8](#), [39](#)
- [21] B. H. Jared, M. A. Aguilo, L. L. Beghini, B. L. Boyce, B. W. Clark, A. Cook, B. J. Kaehr, and J. Robbins. Additive manufacturing : Toward holistic design. *Scripta Materialia*, 135 :141–147, 2017. [8](#)
- [22] M. F. Ashby. Hybrids to fill holes in material property space. *Philosophical Magazine*, 85(26-27) :3235–3257, 2005. [8](#), [22](#)
- [23] B. Castanie, C. Bouvet, and M. Ginot. Review of composite sandwich structure in aeronautic applications. *Composites Part C : Open Access*, 1 :100004, August 2020. [8](#)
- [24] T. Worzyk. Submarine power cables and their design elements. In *Submarine Power Cables*, pages 9–50. Springer, 2009. [8](#)
- [25] N. A. Fleck, V. S. Deshpande, and M. F. Ashby. Micro-architected materials : past, present and future. *Proceedings of the Royal Society A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 466(2121) :2495–2516, September 2010. [8](#), [64](#)
- [26] F. W. Zok, R. M. Latture, and M. R. Begley. Periodic truss structures. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 96 :184–203, 2016. [8](#), [64](#)
- [27] L. J. Gibson, M. F. Ashby, G. S. Schajer, and C. I. Robertson. The mechanics of two-dimensional cellular materials. *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences*, 382(1782) :25–42, 1982. [9](#)

- [28] L. J. Gibson and M. F. Ashby. The mechanics of three-dimensional cellular materials. *Proceedings of the royal society of London. A. Mathematical and physical sciences*, 382(1782) :43–59, 1982. [9](#)
- [29] G. J. Davies and S. Zhen. Metallic foams : their production, properties and applications. *Journal of Materials science*, 18(7) :1899–1911, 1983. [9](#)
- [30] S. T. Brittain, Y. Sugimura, O. J. A. Schueller, A. G. Evans, and G. M. Whitesides. Fabrication and mechanical performance of a mesoscale space-filling truss system. *Journal of Microelectromechanical Systems*, 10(1) :113–120, 2001. [9](#)
- [31] A. G. Evans. Lightweight materials and structures. *MRS bulletin*, 26(10) :790–797, 2001. [9](#)
- [32] A. G. Evans, J. W. Hutchinson, N. A. Fleck, M. F. Ashby, and H. N. G. Wadley. The topological design of multifunctional cellular metals. *Progress in Materials Science*, 46(3-4) :309–327, 2001. [9](#), [64](#)
- [33] A. Vigliotti and D. Pasini. Stiffness and strength of tridimensional periodic lattices. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 229 :27–43, 2012. [9](#), [64](#)
- [34] L. E. Murr, S. M. Gaytan, F. Medina, H. Lopez, E. Martinez, B. I. Machado, D. H. Hernandez, L. Martinez, M. I. Lopez, R. B. Wicker, et al. Next-generation biomedical implants using additive manufacturing of complex, cellular and functional mesh arrays. *Philosophical Transactions of the Royal Society A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 368(1917) :1999–2032, 2010. [9](#)
- [35] H. N. G. Wadley. Multifunctional periodic cellular metals. *Philosophical Transactions of the Royal Society A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 364(1838) :31–68, 2006. [9](#)
- [36] A. Vigliotti and D. Pasini. Mechanical properties of hierarchical lattices. *Mechanics of Materials*, 62 :32–43, 2013. [9](#), [64](#)
- [37] R. Oftadeh, B. Haghpanah, D. Vella, A. Boudaoud, and A. Vaziri. Optimal fractal-like hierarchical honeycombs. *Physical review letters*, 113(10) :104301, 2014. [9](#)
- [38] D. T. Queheillalt and H. N. G. Wadley. Cellular metal lattices with hollow trusses. *Acta Materialia*, 53(2) :303–313, 2005. [9](#)
- [39] A. G. Evans, M. He, V. S. Deshpande, J. W. Hutchinson, A. J. Jacobsen, and W. B. Carter. Concepts for enhanced energy absorption using hollow micro-lattices. *International Journal of Impact Engineering*, 37(9) :947–959, 2010. [9](#)
- [40] H. Niknam and A. H. Akbarzadeh. Graded lattice structures : Simultaneous enhancement in stiffness and energy absorption. *Materials & Design*, 196 :109129, 2020. [9](#)
- [41] C. Bonatti and D. Mohr. Mechanical performance of additively-manufactured anisotropic and isotropic smooth shell-lattice materials : Simulations & experiments. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 122 :1–26, 2019. [9](#), [64](#), [80](#)
- [42] W. H. Bragg and W. L. Bragg. The structure of the diamond. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, 89(610) :277–291, 1913. [9](#)
- [43] C. Neff, N. Hopkinson, and N. B. Crane. Experimental and analytical investigation of mechanical behavior of laser-sintered diamond-lattice structures. *Additive Manufacturing*, 22 :807–816, 2018. [9](#)

- [44] R. Buckminster Fuller. Synergetic building construction, May 30 1961. US Patent 2,986,241. [9](#)
- [45] S. Yin, W. Guo, H. Wang, Y. Huang, R. Yang, Z. Hu, D. Chen, J. Xu, and R. O. Ritchie. Strong and tough bioinspired additive-manufactured dual-phase mechanical metamaterial composites. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 149 :104341, 2021. [9](#)
- [46] R. Hill. Elastic properties of reinforced solids : some theoretical principles. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 11(5) :357–372, 1963. [10](#)
- [47] A.-E. Viard, J. Dirrenberger, and S. Forest. Propagating material instabilities in planar architected materials. *International Journal of Solids and Structures*, 202 :532 – 551, 2020. [10](#), [94](#)
- [48] A. Vigliotti, V. S. Deshpande, and D. Pasini. Non linear constitutive models for lattice materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 64 :44–60, March 2014. [10](#)
- [49] T. Kanit, S. Forest, I. Galliet, V. Mounoury, and D. Jeulin. Determination of the size of the representative volume element for random composites : statistical and numerical approach. *International Journal of Solids and Structures*, 40(13) :3647–3679, June 2003. [10](#)
- [50] M. F. Ashby. The properties of foams and lattices. *Philosophical Transactions of the Royal Society A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 364(1838) :15–30, 2006. [10](#), [12](#), [13](#), [64](#)
- [51] S. Xu, J. Shen, S. Zhou, X. Huang, and Y. M. Xie. Design of lattice structures with controlled anisotropy. *Materials and Design*, 93 :443–447, 2016. [10](#)
- [52] R. M. Latture, M. R. Begley, and F. W. Zok. Design and mechanical properties of elastically isotropic trusses. *Journal of Materials Research*, 33(3) :249–263, 2018. [10](#), [64](#)
- [53] T. Tancogne-Dejean and D. Mohr. Elastically-isotropic truss lattice materials of reduced plastic anisotropy. *International Journal of Solids and Structures*, 138 :24–39, 2018. [10](#)
- [54] R. M. Latture, R. X. Rodriguez, L. R. Holmes Jr, and F. W. Zok. Effects of nodal fillets and external boundaries on compressive response of an octet truss. *Acta Materialia*, 149 :78–87, 2018. [10](#), [64](#)
- [55] J. C. Maxwell. On the calculation of the equilibrium and stiffness of frames. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 27(182) :294–299, 1864. [11](#), [64](#)
- [56] C. R. Calladine. Buckminster Fuller's "tensegrity" structures and Clerk Maxwell's rules for the construction of stiff frames. *International Journal of Solids and Structures*, 14(2) :161–172, 1978. [11](#), [64](#)
- [57] S. Pellegrino and C. R. Calladine. Matrix analysis of statically and kinematically indeterminate frameworks. *International Journal of Solids and Structures*, 22(4) :409–428, 1986. [11](#), [64](#)
- [58] D. Kang, S. Park, Y. Son, S. Yeon, S. H. Kim, and I. Kim. Multi-lattice inner structures for high-strength and light-weight in metal selective laser melting process. *Materials & Design*, 175 :107786, 2019. [12](#)
- [59] L. J. Gibson and M. F. Ashby. *Cellular Solids*. Cambridge University Press, 2 edition, 1999. [13](#), [15](#), [64](#)

- [60] X. Zheng, H. Lee, T. H. Weisgraber, M. Shusteff, J. DeOtte, E. B. Duoss, J. D. Kuntz, M. M. Biener, Q. Ge, J. A. Jackson, et al. Ultralight, ultrastiff mechanical metamaterials. *Science*, 344(6190) :1373–1377, 2014. [13](#)
- [61] J. Zhang and M. F. Ashby. Mechanical selection of foams and honeycombs used for packaging and energy absorption. *Journal of Materials Science*, 29(1) :157–163, 1994. [14](#)
- [62] K. E. Evans, M. A. Nkansah, I. J. Hutchinson, and S. C. Rogers. Molecular network design. *Nature*, 353 :124, September 1991. [14](#), [63](#)
- [63] C. T. Herakovich. Composite laminates with negative through-the-thickness poisson's ratios. *Journal of Composite Materials*, 18(5) :447–455, November 1984. [14](#), [63](#), [91](#)
- [64] R. E. Almgren. An isotropic three-dimensional structure with Poisson's ratio=-1. *Journal of Elasticity*, 15 :427–430, 1985. [14](#)
- [65] R. S. Lakes. Foam Structures with a Negative Poisson's Ratio. *Science*, 235 :1038–1040, February 1987. [15](#), [63](#), [91](#)
- [66] B. Howell, P. Prendergast, and L. Hansen. Examination of acoustic behavior of negative poisson's ratio materials. *Applied Acoustics*, 43(2) :141–148, 1994. [15](#), [63](#)
- [67] D. Prall and R. S. Lakes. Properties of a Chiral Honeycomb with a Poisson's Ratio of -1. *International Journal of Mechanical Sciences*, 39(3) :305–314, 1997. [15](#), [63](#), [91](#)
- [68] H. M. A. Kolken and A. A. Zadpoor. Auxetic mechanical metamaterials. *RSC advances*, 7(9) :5111–5129, 2017. [15](#)
- [69] H. Mitschke, F. Schury, K. Mecke, F. Wein, M. Stingl, and G. E. Schröder-Turk. Geometry : The leading parameter for the poisson's ratio of bending-dominated cellular solids. *International Journal of Solids and Structures*, 100-101 :1–10, 2016. [15](#), [64](#)
- [70] D. Rayneau-Kirkhope. Stiff auxetics : Hierarchy as a route to stiff, strong lattice based auxetic metamaterials. *Scientific Reports*, 8 :12437, 2018. [15](#), [64](#)
- [71] P. M. Weaver and M. F. Ashby. The optimal selection of material and section-shape. *Journal of Engineering Design*, 7(2) :129–150, 1996. [15](#), [64](#)
- [72] F. Warmuth, M. Wormser, and C. Körner. Single phase 3d phononic band gap material. *Scientific Reports*, 7(1) :3843, 2017. [15](#), [64](#), [92](#)
- [73] K. Bertoldi, P. M. Reis, S. Willshaw, and T. Mullin. Negative Poisson's Ratio Behavior Induced by an Elastic Instability. *Advanced Materials*, 22(3) :361–366, 2010. [15](#), [16](#), [64](#)
- [74] K. Bertoldi. Harnessing instabilities to design tunable architected cellular materials. *Annual Review of Materials Research*, 47 :51–61, 2017.
- [75] S. Babaei, J. Shim, J.C. Weaver, E.R. Chen, N. Patel, and K. Bertoldi. 3D soft metamaterials with Negative Poisson's Ratio. *Advanced Materials*, 25(36) :5044–5049, 2013. [64](#)

- [76] X. Ren, J. Shen, A. Ghaedizadeh, H. Tian, and Y. M. Xie. Experiments and parametric studies on 3d metallic auxetic metamaterials with tuneable mechanical properties. *Smart Materials and Structures*, 24(9) :095016, 2015. [80](#)
- [77] C. Körner and Y. Liebold-Ribeiro. A systematic approach to identify cellular auxetic materials. *Smart Materials and Structures*, 24(2) :025013, 2015. [63](#), [91](#)
- [78] X. Ren, J. Shen, P. Tran, T. D. Ngo, and Y. M. Xie. Design and characterisation of a tuneable 3d buckling-induced auxetic metamaterial. *Materials & Design*, 139 :336–342, 2018. [15](#), [64](#), [80](#)
- [79] F. Agnese, C. Remillat, F. Scarpa, and C. Payne. Composite chiral shear vibration damper. *Composite Structures*, 132 :215–225, 2015. [15](#), [63](#)
- [80] A. W. Lipsett and A. I. Beltzer. Reexamination of dynamic problems of elasticity for negative poisson's ratio. *Journal of the Acoustical Society of America*, 84(6) :2179–2186, 1988. [15](#), [63](#), [91](#)
- [81] C. P. Chen and R. S. Lakes. Micromechanical analysis of dynamic behavior of conventional and negative Poisson's ratio foams. *Journal of Engineering Materials and Technology*, 118(3) :285–288, 1996. [15](#), [63](#)
- [82] F. Scarpa, L. G. Ciffo, and J. R. Yates. Dynamic properties of high structural integrity auxetic open cell foam. *Smart Materials and Structures*, 13(1) :49, 2004.
- [83] I. Chekkal, M. Bianchi, C. Remillat, F.-X. Becot, L. Jaouen, and F. Scarpa. Vibro-acoustic properties of auxetic open cell foam : Model and experimental results. *Acta Acustica united with Acustica*, 96(2) :266–274, March 2010. [15](#), [63](#)
- [84] A. Spadoni, M. Ruzzene, S. Gonella, and F. Scarpa. Phononic properties of hexagonal chiral lattices. *Wave Motion*, 46(7) :435–450, November 2009. [15](#), [63](#), [91](#)
- [85] N. Auffray, J. Dirrenberger, and G. Rosi. A complete description of bi-dimensional anisotropic strain-gradient elasticity. *International Journal of Solids and Structures*, 69-70 :195–210, 2015. [81](#)
- [86] G. Rosi and N. Auffray. Anisotropic and dispersive wave propagation within strain-gradient framework. *Wave Motion*, 63 :120–134, 2016. [15](#), [63](#), [91](#)
- [87] S. Timoshenko and J. N. Goodier. *Theory of elasticity*. Engineering Societies Monographs. McGraw-Hill, 2nd edition, 1951. [15](#)
- [88] N. Chan and K. E. Evans. Indentation Resilience of Conventional and Auxetic Foams. *Journal of Cellular Plastics*, 34(3) :231–260, May 1998. [15](#), [16](#), [63](#), [91](#)
- [89] T. Li, Y. Chen, X. Hu, Y. Li, and L. Wang. Exploiting negative Poisson's ratio to design 3d-printed composites with enhanced mechanical properties. *Materials & Design*, 142 :247–258, 2018. [16](#), [30](#), [32](#), [63](#), [78](#), [81](#), [91](#), [106](#)
- [90] I. P. Seetoh, X. Liu, K. Markandan, L. Zhen, and C. Q. Lai. Strength and energy absorption characteristics of Ti6Al4V auxetic 3D anti-tetrachiral metamaterials. *Mechanics of Materials*, page 103811, February 2021. [16](#)

- [91] F. Scarpa, J. R. Yates, L. G. Ciffo, and S. Patsias. Dynamic crushing of auxetic open-cell polyurethane foam. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers Part C-Journal of Mechanical Engineering Science*, 216(12) :1153–1156, 2002. [16](#), [63](#), [78](#), [91](#)
- [92] W. Liu, N. Wang, T. Luo, and Z. Lin. In-plane dynamic crushing of re-entrant auxetic cellular structure. *Materials & Design*, 100 :84–91, June 2016. [16](#)
- [93] N. Novak, L. Starčević, M. Vesenjajak, and Z. Ren. Blast response study of the sandwich composite panels with 3d chiral auxetic core. *Composite Structures*, 210 :167–178, February 2019. [16](#), [63](#), [78](#), [91](#)
- [94] R. J. Bathurst and L. Rothenburg. Note on a random isotropic granular material with negative Poisson's ratio. *International Journal of Engineering Science*, 26(4) :373–383, 1988. [16](#), [63](#), [91](#)
- [95] B. D. Caddock and K. E. Evans. Microporous materials with negative Poisson's ratios : I. Microstructure and mechanical properties. *Journal of Physics D : Applied Physics*, 22 :1877–1882, 1989.
- [96] R. S. Lakes. Deformation mechanisms in negative Poisson's ratio materials : structural aspects. *Journal of Materials Science*, 26 :2287–2292, 1991. [91](#)
- [97] G. W. Milton. Composite Materials with Poisson's Ratios Close to -1. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 40(5) :1105–1137, 1992.
- [98] W. Yang et al. Review on auxetic materials. *Journal of Materials Science*, 39 :3269–3279, 2004. [91](#)
- [99] T. P. Hughes, A. Marmier, and K. E. Evans. Auxetic frameworks inspired by cubic crystals. *International Journal of Solids and Structures*, 47 :1469–1476, 2010.
- [100] A. Alderson, K. L. Alderson, D. Attard, K. E. Evans, R. Gatt, J. N. Grima, W. Miller, N. Ravirala, C. W. Smith, and K. Zied. Elastic constants of 3-, 4- and 6-connected chiral and anti-chiral honeycombs subject to uniaxial in-plane loading. *Composites Science and Technology*, 70(7) :1042–1048, July 2010. [91](#)
- [101] E. Pasternak and A.V. Dyskin. Materials and structures with macroscopic negative Poisson's ratio. *International Journal of Engineering Science*, 52 :103–114, 2012.
- [102] J. C. Alvarez Elipe and A. Diaz Lantada. Comparative study of auxetic geometries by means of computer-aided design and engineering. *Smart Materials and Structures*, 21 :105004, 2012. [91](#)
- [103] V. V. Krasavin and A. V. Krasavin. Auxetic properties of cubic metal single crystals. *physica status solidi (b)*, 251(11) :2314–2320, 2014.
- [104] N. T. Kaminakis, G. A. Drosopoulos, and G. E. Stavroulakis. Design and verification of auxetic microstructures using topology optimization and homogenization. *Archive of Applied Mechanics*, 85(9) :1289–1306, 2015. [91](#)
- [105] K. K. Saxena, R. Das, and E. P. Calius. Three decades of auxetics research– materials with negative Poisson's ratio : a review. *Advanced Engineering Materials*, 18(11) :1847–1870, 2016. [91](#)
- [106] X. Ren, R. Das, P. Tran, T. D. Ngo, and Y. M. Xie. Auxetic metamaterials and structures : A review. *Smart Materials and Structures*, 27(2) :023001, 2018. [16](#), [63](#)

- [107] K. E. Evans. The design of doubly curved sandwich panels with honeycomb cores. *Composite Structures*, 17(2) :95–111, 1991. [16](#), [63](#)
- [108] J. B. Choi and R. S. Lakes. Design of a Fastener Based on Negative Poisson's Ratio Foam. *Cellular Polymers*, 10(3) :205–212, 1991. [16](#)
- [109] J. Martin, J.-J. Heyder-Bruckner, C. Remillat, F. Scarpa, K. Potter, and M. Ruzzene. The hexachiral prismatic wingbox concept. *Physica Status Solidi (b)*, 245(3) :570–577, 2008. [16](#), [63](#)
- [110] M. N. Ali, J. J. C. Busfield, and I. U. Rehman. Auxetic oesophageal stents : structure and mechanical properties. *Journal of Materials Science : Materials in Medicine*, 25(2) :527–553, February 2014. [16](#)
- [111] K.-I. Jang, H. U. Chung, S. Xu, C. H. Lee, H. Luan, J. Jeong, H. Cheng, G.-T. Kim, S. Y. Han, J. W. Lee, J. Kim, M. Cho, F. Miao, Y. Yang, H. N. Jung, M. Flavin, H. Liu, G. W. Kong, K. J. Yu, S. I. Rhee, J. Chung, B. Kim, J. W. Kwak, M. H. Yun, J. Y. Kim, Y. M. Song, U. Paik, Y. Zhang, Y. Huang, and J. A. Rogers. Soft network composite materials with deterministic and bio-inspired designs. *Nature Communications*, 6 :6566, 2015. [16](#), [63](#)
- [112] V. H. Carneiro, S. D. Rawson, H. Puga, J. Meireles, and P. J. Withers. Additive manufacturing assisted investment casting : A low-cost method to fabricate periodic metallic cellular lattices. *Additive Manufacturing*, 33 :101085, 2020. [17](#)
- [113] Y. Xue, X. Wang, W. Wang, X. Zhong, and F. Han. Compressive property of al-based auxetic lattice structures fabricated by 3-d printing combined with investment casting. *Materials Science and Engineering : A*, 722 :255–262, 2018. [17](#)
- [114] K.-J. Kang. Wire-woven cellular metals : The present and future. *Progress in Materials Science*, 69 :213–307, 2015. [17](#), [18](#)
- [115] M. G. Lee, K. W. Lee, H. K. Hur, and K. J. Kang. Mechanical behavior of a wire-woven metal under compression. *Composite Structures*, 95 :264–277, 2013. [18](#)
- [116] H. N. G. Wadley, N. A. Fleck, and A. G. Evans. Fabrication and structural performance of periodic cellular metal sandwich structures. *Composites science and technology*, 63(16) :2331–2343, 2003. [17](#)
- [117] G. W. Kooistra, V. S. Deshpande, and H. N. Wadley. Compressive behavior of age hardenable tetrahedral lattice truss structures made from aluminium. *Acta Materialia*, 52(14) :4229–4237, 2004. [17](#), [64](#)
- [118] L. Dong, V. S. Deshpande, and H. Wadley. Mechanical response of ti-6al-4v octet-truss lattice structures. *International Journal of Solids and Structures*, 60 :107–124, 2015. [18](#)
- [119] R. Gautam, S. Idapalapati, and S. Feih. Printing and characterisation of kagome lattice structures by fused deposition modelling. *Materials & Design*, 137 :266–275, 2018. [17](#)
- [120] J. Zhang and P. Xiao. 3d printing of photopolymers. *Polymer Chemistry*, 9(13) :1530–1540, 2018. [17](#)
- [121] M. Leary, M. Mazur, J. Elambasseril, M. McMillan, T. Chirent, Y. Sun, M. Qian, M. Easton, and M. Brandt. Selective laser melting (SLM) of AlSi12Mg lattice structures. *Materials & Design*, 98 :344–357, 2016. [17](#), [19](#), [20](#)

- [122] M. Sharma, H. Dobbstein, M. Thiele, and A. Ostendorf. Laser metal deposition of lattice structures by columnar built-up. *Procedia CIRP*, 74 :218–221, 2018. [17](#)
- [123] W. E. King, A. T. Anderson, R. M. Ferencz, N. E. Hodge, C. Kamath, S. A. Khairallah, and A. M. Rubenchik. Laser powder bed fusion additive manufacturing of metals; physics, computational, and materials challenges. *Applied Physics Reviews*, 2(4) :041304, 2015. [18](#)
- [124] G. K. Lewis and E. Schlienger. Practical considerations and capabilities for laser assisted direct metal deposition. *Materials & Design*, 21(4) :417–423, 2000. [18](#)
- [125] H. Assadi, H. Kreye, F. Gärtner, and T. Klassen. Cold spraying—a materials perspective. *Acta Materialia*, 116 :382–407, 2016. [18](#)
- [126] <https://blogs.nottingham.ac.uk/innovate/2015/08/10/can-we-3d-print-an-electric-motor/>. [19](#)
- [127] C. Y. Yap, C. Chua, Z. Dong, Z. Liu, D. Zhang, L. E. Loh, and S. L. Sing. Review of selective laser melting: Materials and applications. *Applied Physics Reviews*, 2 :041101, 12 2015. [19](#)
- [128] S. A. Khairallah, A. T. Anderson, A. Rubenchik, and W. E. King. Laser powder-bed fusion additive manufacturing : Physics of complex melt flow and formation mechanisms of pores, spatter, and denudation zones. *Acta Materialia*, 108 :36–45, 2016. [19](#)
- [129] E. O. Olakanmi, R. F. Cochrane, and K. W. Dalgarno. A review on selective laser sintering/melting (SLS/SLM) of aluminium alloy powders : Processing, microstructure, and properties. *Progress in Materials Science*, 74, 2015. [19](#)
- [130] C. Qiu, C. Panwisawas, M. Ward, H. C. Basoalto, J. W. Brooks, and M. M. Attallah. On the role of melt flow into the surface structure and porosity development during selective laser melting. *Acta Materialia*, 96 :72–79, 2015. [19](#)
- [131] T. Maconachie, M. Leary, B. Lozanovski, X. Zhang, M. Qian, O. Faruque, and M. Brandt. SLM lattice structures : Properties, performance, applications and challenges. *Materials & Design*, 183, 2019. [20](#)
- [132] M. Mazur, M. Leary, S. Sun, M. Vcelka, D. Shidid, and M. Brandt. Deformation and failure behaviour of Ti-6Al-4V lattice structures manufactured by selective laser melting (SLM). *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 2015. [19](#), [20](#), [114](#)
- [133] N. W. Hrabe, P. Heintz, B. Flinn, C. Körner, and R. K. Bordia. Compression-compression fatigue of selective electron beam melted cellular titanium (Ti-6Al-4V). *Journal of Biomedical Materials Research Part B : Applied Biomaterials*, 99B(2) :313–320, 2011. [19](#)
- [134] B. Vayssette, N. Saintier, C. Brugger, and M. El May. Surface roughness effect of SLM and EBM Ti-6Al-4V on multiaxial high cycle fatigue. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 108, August 2020. [19](#)
- [135] F. Brenne, T. Niendorf, and H. J. Maier. Additively manufactured cellular structures : Impact of microstructure and local strains on the monotonic and cyclic behavior under uniaxial and bending load. *Journal of Materials Processing Technology*, 213(9) :1558–1564, 2013. [20](#)

- [136] M. Gavazzoni, L. Boniotti, and S. Foletti. Influence of specimen size on the mechanical properties of microlattices obtained by selective laser melting. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, 2019. [20](#), [125](#), [135](#)
- [137] D. Qi, H. Yu, M. Liu, H. Huang, S. Xu, Y. Xia, G. Qian, and W. Wu. Mechanical behaviors of slm additive manufactured octet-truss and truncated-octahedron lattice structures with uniform and taper beams. *International Journal of Mechanical Sciences*, 163 :105091, 2019. [20](#)
- [138] R. Gümürük and R. A. W. Mines. Compressive behaviour of stainless steel micro-lattice structures. *International Journal of Mechanical Sciences*, 68 :125–139, 2013. [20](#)
- [139] T. Dassonville, M. Poncelet, and N. Auffray. Toward a homogenizing machine. *International Journal of Solids and Structures*, 191 :534–549, 2020. [20](#)
- [140] I. Maskery, N. T. Aboulkhair, A. O. Aremu, C. J. Tuck, I. A. Ashcroft, R. D. Wildman, and R. J. M. Hague. A mechanical property evaluation of graded density Al-Si10-Mg lattice structures manufactured by selective laser melting. *Materials Science and Engineering : A*, 670 :264–274, July 2016. [21](#)
- [141] M. Bornert, T. Bretheau, and P. Gilormini. *Homogénéisation en mécanique des matériaux, Tome 1 : Matériaux aléatoires élastiques et milieux périodiques*. Hermès, 2001. [21](#), [54](#), [63](#)
- [142] J. Besson, G. Cailletaud, J.-L. Chaboche, S. Forest, and M. Blétry. *Non-Linear Mechanics of Materials*, volume 167 of *Solid Mechanics and Its Applications*. Springer, 2010. [21](#)
- [143] F. Fritzen, S. Forest, D. Kondo, and T. Böhlke. Computational homogenization of porous materials of green type. *Computational Mechanics*, 52(1) :121–134, 2013.
- [144] M. G. D. Geers and J. Yvonnet. Multiscale modeling of microstructure–property relations. *MRS Bulletin*, 41(8) :610–616, 2016. [21](#)
- [145] M. Jiang, I. Jasiuk, and M. Ostoja-Starzewski. Apparent elastic and elastoplastic behavior of periodic composites. *International Journal of Solids and Structures*, 39(1) :199–212, 2002. [21](#), [54](#), [63](#)
- [146] J. Dirrenberger, S. Forest, D. Jeulin, and C. Colin. Homogenization of periodic auxetic materials. *Procedia Engineering*, 10 :1847–1852, 2011. 11th International Conference on the Mechanical Behavior of Materials (ICM11). [21](#), [63](#), [66](#), [91](#)
- [147] J. Dirrenberger, S. Forest, and D. Jeulin. Elastoplasticity of auxetic materials. *Computational Materials Science*, 64 :57–61, November 2012. [63](#), [91](#)
- [148] R. Gilat and J. Aboudi. Behavior of elastoplastic auxetic microstructural arrays. *Materials*, 6(3) :726–737, 2013. [21](#), [63](#)
- [149] Z. Jia, Y. Yu, and L. Wang. Learning from nature : Use material architecture to break the performance tradeoffs. *Materials & Design*, 168 :107650, April 2019. [22](#)
- [150] W. Barthlott and C. Neinhuis. Purity of the sacred lotus, or escape from contamination in biological surfaces. *Planta*, 202(1) :1–8, 1997. [23](#)
- [151] K. Autumn, Y. A. Liang, S. T. Hsieh, W. Zesch, et al. Adhesive force of a single gecko foot-hair. *Nature*, 405(6787) :681, 2000. [23](#)

- [152] M. J. Harrington, K. Razghandi, F. Ditsch, L. Guiducci, M. Rueggeberg, J. W. C. Dunlop, P. Fratzl, C. Neinhuis, and I. Burgert. Origami-like unfolding of hydro-actuated ice plant seed capsules. *Nature communications*, 2 :337, 2011. [23](#)
- [153] S. Krauss, E. Monsonego-Ornan, E. Zelzer, P. Fratzl, and R. Shahar. Mechanical function of a complex three-dimensional suture joining the bony elements in the shell of the red-eared slider turtle. *Advanced Materials*, 21(4) :407–412, 2009. [23](#)
- [154] F. Barthelat and H. D. Espinosa. An experimental investigation of deformation and fracture of nacre-mother of pearl. *Experimental mechanics*, 47(3) :311–324, 2007. [23](#)
- [155] L. Djumas, A. Molotnikov, G. P. Simon, and Y. Estrin. Enhanced mechanical performance of bio-inspired hybrid structures utilising topological interlocking geometry. *Scientific Reports*, 6 :26706, 2016. [23](#)
- [156] L. Djumas, G. P. Simon, Y. Estrin, and A. Molotnikov. Deformation mechanics of non-planar topologically interlocked assemblies with structural hierarchy and varying geometry. *Scientific Reports*, 7(1) :11844, 2017. [23](#), [94](#)
- [157] D. W. Schaefer, J. Zhao, H. Dowty, M. Alexander, and E. B. Orler. Carbon nanofibre reinforcement of soft materials. *Soft Matter*, 4(10) :2071, 2008. [23](#), [91](#)
- [158] S. Bapari and A. H. Chokshi. The role of the soft phase in rigidity enhancements in a particulate composite. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, 123 :114–122, 2019. [23](#), [91](#)
- [159] O. Al-Ketan, R. K. A. Al-Rub, and R. Rowshan. Mechanical Properties of a New Type of Architected Interpenetrating Phase Composite Materials. *Advanced Materials Technologies*, 2(2) :n/a–n/a, 2017. [23](#), [91](#), [94](#)
- [160] O. Al-Ketan, M. A. Adel Assad, and R. K. A. Al-Rub. Mechanical properties of periodic interpenetrating phase composites with novel architected microstructures. *Composite Structures*, 176(Supplement C) :9–19, 2017. [91](#), [94](#)
- [161] T. Li, Y. Chen, and L. Wang. Enhanced fracture toughness in architected interpenetrating phase composites by 3d printing. *Composites Science and Technology*, 167 :251–259, 2018. [23](#)
- [162] K. Tai, M. Dao, S. Suresh, A. Palazoglu, and C. Ortiz. Nanoscale heterogeneity promotes energy dissipation in bone. *Nature materials*, 6(6) :454–462, 2007. [23](#)
- [163] M. Lai, A. N. Kulak, D. Law, Z. Zhang, F. C. Meldrum, and D. J. Riley. Profiting from nature : macroporous copper with superior mechanical properties. *Chemical communications*, (34) :3547–3549, 2007. [23](#)
- [164] J.W.C. Dunlop, R. Weinkamer, and P. Fratzl. Artful interfaces within biological materials. *MaterialsToday*, 14(3) :70–78, 2011. [23](#), [91](#)
- [165] U. G. Wegst, H. Bai, Tomsia A. P. Saiz, E and, and R. O. Ritchie. Bioinspired structural materials. *Nature Materials*, 14(1) :23, 2015. [23](#), [91](#)

- [166] M. Vesenjak, L. Krstulović-Opara, Z. Ren, A. Öchsner, and Ž. Domazet. Experimental Study of Open-Cell Cellular Structures with Elastic Filler Material. *Experimental Mechanics*, 49(4) :501, October 2008. [23](#)
- [167] Y. W. Kwon, R. E. Cooke, and C. Park. Representative unit-cell models for open-cell metal foams with or without elastic filler. *Materials Science and Engineering : A*, 343(1) :63–70, February 2003. [24](#), [91](#)
- [168] Y. Su, Z. Li, X. Gong, Q. Ouyang, Q. Guo, C. Guo, J. Zhang, and D. Zhang. Structural modeling and mechanical behavior of Metal-Porous-Polymer-Composites (MPPCs) with different polymer volume fractions. *Composite Structures*, 153 :673–681, 2016.
- [169] S. Liu, A. Li, and P. Xuan. Mechanical behavior of aluminum foam/polyurethane interpenetrating phase composites under monotonic and cyclic compression. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, 116 :87–97, 2019. [24](#), [91](#)
- [170] J. S. Weaver, S. R. Kalidindi, and U. G. Wegst. Structure-processing correlations and mechanical properties in freeze-cast Ti-6Al-4V with highly aligned porosity and a lightweight Ti-6Al-4V-PMMA composite with excellent energy absorption capability. *Acta Materialia*, 132 :182–192, 2017. [24](#)
- [171] R. Gümrük, U. Mazlum, and R. A. W. Mines. Compressive mechanical behaviors of hybrid composite materials based on micro lattice structure and rubberlike materials. *Rubber Chemistry and Technology*, 88(1) :147–162, 2015. [24](#)
- [172] T. Tancogne-Dejean, A. B. Spierings, and D. Mohr. Additively-manufactured metallic micro-lattice materials for high specific energy absorption under static and dynamic loading. *Acta Materialia*, 116 :14–28, 2016. [24](#)
- [173] S. Yuan, C. K. Chua, and K. Zhou. 3D-Printed Mechanical Metamaterials with High Energy Absorption. *Advanced Materials Technologies*, 4(3) :1800419, 2019.
- [174] T. A. Schaedler, C. J. Ro, A. E. Sorensen, Z. Eckel, S. S. Yang, W. B. Carter, and A. J. Jacobsen. Designing metallic microlattices for energy absorber applications. *Advanced Engineering Materials*, 16(3) :276–283, 2014. [24](#)
- [175] J. Bernal Ostos, R. G. Rinaldi, C. M. Hammett, G. D. Stucky, F. W. Zok, and A. J. Jacobsen. Deformation stabilization of lattice structures via foam addition. *Acta Materialia*, 60(19) :6476–6485, November 2012. [24](#), [25](#), [91](#)
- [176] B. J. Ramirez, U. Misra, and V. Gupta. Viscoelastic foam-filled lattice for high energy absorption. *Mechanics of Materials*, 127 :39–47, 2018. [24](#)
- [177] R. Hedayati, S. Janbaz, M. Sadighi, M. Mohammadi-Aghdam, and A. A. Zadpoor. How does tissue regeneration influence the mechanical behavior of additively manufactured porous biomaterials? *Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials*, 65 :831–841, 2017. [25](#), [26](#)
- [178] I. Seetoh, K. Markandan, and C. Q. Lai. Effect of Reinforcement Bending on the Elastic Properties of Interpenetrating Phase Composites. *Mechanics of Materials*, page 103071, 2019. [25](#), [26](#), [27](#)

- [179] W.-S. Kim, I.-H. Yun, J.-J. Lee, and H.-T. Jung. Evaluation of mechanical interlock effect on adhesion strength of polymer–metal interfaces using micro-patterned surface topography. *International Journal of Adhesion and Adhesives*, 30(6) :408–417, 2010. [28](#)
- [180] T. Kleffel and D. Drummer. Investigating the suitability of roughness parameters to assess the bond strength of polymer-metal hybrid structures with mechanical adhesion. *Composites Part B : Engineering*, 117 :20–25, 2017. [28](#)
- [181] M. R. Imam and T. Sain. Effects of cohesive interfaces and polymer viscoelasticity on improving mechanical properties in an architected composite. *International Journal of Solids and Structures*, 159 :289–300, 2019. [28](#)
- [182] Y. Xue, W. Wang, and F. Han. Enhanced compressive mechanical properties of aluminum based auxetic lattice structures filled with polymers. *Composites Part B : Engineering*, 171 :183–191, August 2019. [28](#), [29](#), [32](#), [91](#), [92](#), [106](#), [114](#)
- [183] M. M. Osman, M. Shazly, E. A. El-Danaf, P. Jamshidi, and M. M. Attallah. Compressive behavior of stretched and composite microlattice metamaterial for energy absorption applications. *Composites Part B : Engineering*, 184 :107715, 2020. [28](#), [106](#)
- [184] N. Novak, L. Krstulović-Opara, Z. Ren, and M. Vesenjak. Mechanical properties of hybrid metamaterial with auxetic chiral cellular structure and silicon filler. *Composite Structures*, page 111718, 2019. [30](#), [32](#), [91](#), [92](#), [106](#), [114](#)
- [185] C. Körner and Y. Liebold-Ribeiro. A systematic approach to identify cellular auxetic materials. *Smart Materials and Structures*, 24(2) :025013, 2015. [30](#), [93](#)
- [186] F. Warmuth, F. Osmanlic, L. Adler, M. A. Lodes, and C. Körner. Fabrication and characterisation of a fully auxetic 3d lattice structure via selective electron beam melting. *Smart Materials and Structures*, 26(2) :025013, 2017. [30](#), [88](#), [92](#), [93](#), [98](#), [99](#)
- [187] X.-L. Peng, C. Soyarslan, and S. Bargmann. Phase contrast mediated switch of auxetic mechanism in composites of infilled re-entrant honeycomb microstructures. *Extreme Mechanics Letters*, 35 :100641, 2020. [30](#), [31](#), [32](#), [92](#), [106](#), [114](#)
- [188] Z. Zhang, H. Zhu, R. Yuan, S. Wang, T. Fan, Y. Rezugui, and D. Zhang. Auxetic interpenetrating composites : A new approach to non-porous materials with a negative or zero Poisson’s ratio. *Composite Structures*, 243 :112195, July 2020. [30](#), [32](#), [92](#), [106](#)
- [189] G. J. Murray and F. Gandhi. Auxetic honeycombs with lossy polymeric infills for high damping structural materials. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 24(9) :1090–1104, 2013. [30](#), [32](#), [91](#)
- [190] T. Fíla, P. Zlámal, O. Jiroušek, J. Falta, P. Koudelka, D. Kytýř, T. Doktor, and J. Valach. Impact Testing of Polymer-filled Auxetics Using Split Hopkinson Pressure Bar. *Advanced Engineering Materials*, 19(10) :n/a–n/a, 2017. [30](#), [32](#), [91](#), [92](#), [106](#)
- [191] <https://make.3dexperience.3ds.com/processes/material-extrusion>. [38](#)

- [192] L. Bass, N. A. Meisel, and C. B. Williams. Exploring variability of orientation and aging effects in material properties of multi-material jetting parts. *Rapid Prototyping Journal*, 22(5) :826–834, 2016. 39
- [193] S. G. Steinemann. Metal implants and surface reactions. *Injury*, 27(Supplement 3) :S/C16–S/C22, 1996. 40
- [194] TIOF Standardization. Iso 9276-2 : 2014 representation of results of particle size analysis—part 2 : Calculation of average particle sizes/diameters and moments from particle size distributions. 2014. 40
- [195] D. Agius, K. I. Kourousis, C. Wallbrink, and T. Song. Cyclic plasticity and microstructure of as-built SLM Ti-6Al-4V : The effect of build orientation. *Materials Science and Engineering : A*, 701 :85–100, July 2017. 40
- [196] ASTM. *Standard Guide for Evaluating Mechanical Properties of Metal Materials Made via Additive Manufacturing Processes*. ASTM International, 2014. 41
- [197] ASTM. Standard test methods for tension testing of metallic materials. *Annual book of ASTM standards*. ASTM, 2013. 41, 46
- [198] E. M. Arruda and M. C. Boyce. A three-dimensional constitutive model for the large stretch behavior of rubber elastic materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 41(2) :389–412, 1993. 42, 44, 94
- [199] <https://www.stratasys.com/fr/materials/search/vero>. 43
- [200] ASTM. Standard test method for tensile properties of plastics. 2008. 43, 44, 46
- [201] <https://www.stratasys.com/fr/materials/search/tango>. 44
- [202] J. Wu, C. Yuan, Z. Ding, M. Isakov, Y. Mao, T. Wang, M. L. Dunn, and H. J. Qi. Multi-shape active composites by 3d printing of digital shape memory polymers. *Scientific reports*, 6 :24224, 2016. 44
- [203] ASTM. Standard test method for compressive properties of rigid plastics. 2002. 47
- [204] ASTM. Standard test methods of compression testing of metallic materials at room temperature. 2009. 47
- [205] J. Fang, G. Sun, N. Qiu, N. H. Kim, and Q. Li. On design optimization for structural crashworthiness and its state of the art. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 55(3) :1091–1119, 2017. 47
- [206] M. Boreanaz, G. Belingardi, and C. D. F. Maia. Application of the origami shape in the development of automotive crash box. *Material Design & Processing Communications*, 2(4) :e181, 2020. 47
- [207] J. Lachambre. *Développement d'une Méthode de Caractérisation 3D des Fissures de Fatigue à l'aide de la Corrélation d'Images Numériques obtenues par Tomographie X*. PhD thesis, INSA de Lyon, 2014. 49
- [208] C. Geuzaine and J.-F. Remacle. Gmsh : A 3-D finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 79(11) :1309–1331, 2009. 53, 67, 96

- [209] H. J. Bunge. *Texture Analysis in Materials Science*. Butterworths, 1982. [56](#), [70](#)
- [210] Alexandre Iltchev. *Homogénéisation périodique d'un matériau cellulaire en élasto-plasticité et application au calcul de structures : des petites aux grandes déformations*. Theses, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, December 2014. [58](#)
- [211] J. Dirrenberger. Towards an integrated approach for the development of architected materials, 2018. [63](#), [90](#)
- [212] J. Dirrenberger, S. Forest, and D. Jeulin. Computational homogenization of architected materials. In Y. Estrin, Y. Bréchet, J. Dunlop, and P. Fratzl, editors, *Architected Materials in Nature and Engineering*, volume 282 of *Springer Series in Materials Science*, chapter 4, pages 89–139. Springer, 2019. [63](#), [68](#), [96](#)
- [213] K. Bertoldi, P.M. Reis, S. Willshaw, and T. Mullin. Negative poisson's ratio behavior induced by an elastic instability. *Advanced Materials*, 22(3) :361–366, 2010. [63](#)
- [214] M. Poncelet, A. Somera, C. Morel, C. Jailin, and N. Auffray. An experimental evidence of the failure of Cauchy elasticity for the overall modeling of a non-centro-symmetric lattice under static loading. *International Journal of Solids and Structures*, 147 :223–237, 2018. [63](#)
- [215] A. Ghaedizadeh, J. Shen, X. Ren, and Y. M. Xie. Tuning the performance of metallic auxetic metamaterials by using buckling and plasticity. *Materials*, 9(54) :1–17, 2016. [63](#)
- [216] G. Cailletaud, S. Forest, D. Jeulin, F. Feyel, I. Galliet, V. Mounoury, and S. Quilici. Some elements of microstructural mechanics. *Computational Materials Science*, 27 :351–374, 2003. [63](#)
- [217] Z. Yuan and J. Fish. Toward realization of computational homogenization in practice. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 73(3) :361–380, 2008. [63](#)
- [218] A. Bacigalupo and L. Gambarotta. Homogenization of periodic hexa- and tetrachiral cellular solids. *Composite Structures*, 116 :461–476, 2014. [66](#)
- [219] A. Bacigalupo and M. L. De Bellis. Auxetic anti-tetrachiral materials : equivalent elastic properties and frequency band-gaps. *Composite Structures*, 131 :530–544, 2015.
- [220] T. Mukhopadhyay and S. Adhikari. Effective in-plane elastic properties of auxetic honeycombs with spatial irregularity. *Mechanics of Materials*, 95 :204–222, 2016. [66](#)
- [221] K. Sab. On the homogenization and the simulation of random materials. *European Journal of Mechanics, A/Solids*, 11(5) :585–607, 1992. [68](#)
- [222] T. Kanit, S. Forest, I. Galliet, V. Mounoury, and D. Jeulin. Determination of the size of the representative volume element for random composites : Statistical and numerical approach. *International Journal of Solids and Structures*, 40 :3647–3679, 2003. [68](#)
- [223] S. Pouzet, P. Peyre, C. Gorny, O. Castelnau, T. Baudin, F. Brisset, C. Colin, and P. Gadaud. Additive layer manufacturing of titanium matrix composites using the direct metal deposition laser process. *Materials Science and Engineering : A*, 677 :171–181, 2016. [78](#)

- [224] F. Warmuth, F. Osmanlic, L. Adler, M. A. Lodes, and C. Körner. Fabrication and characterisation of a fully auxetic 3d lattice structure via selective electron beam melting. *Smart Materials and Structures*, 26(2) :025013, 2016. [80](#)
- [225] N. Auffray. Analytical expressions for odd-order anisotropic tensor dimension. *Comptes Rendus Mécaniques*, 342(5) :284–291, 2014. [81](#)
- [226] N. Auffray, Q. C. He, and H. Le Quang. Complete symmetry classification and compact matrix representations for 3D strain gradient elasticity. *International Journal of Solids and Structures*, 159 :197–210, 2019. [81](#)
- [227] Z.-P. Wang, L. H. Poh, J. Dirrenberger, Y. Zhu, and S. Forest. Isogeometric shape optimization of smoothed petal auxetic structures via computational periodic homogenization. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 323 :250–271, 2017. [91](#)
- [228] Z.-P. Wang, L. H. Poh, Y. Zhu, J. Dirrenberger, and S. Forest. Systematic design of tetra-petals auxetic structures with stiffness constraint. *Materials & Design*, 170 :107669, 2019. [91](#)
- [229] J. B. Choi and R. S. Lakes. Fracture toughness of re-entrant foam materials with a negative Poisson's ratio : experiment and analysis. *International Journal of Fracture*, 80 :73–83, 1996. [91](#)
- [230] H. C. Kim, D. K. Shin, J. J. Lee, and J. B. Kwon. Crashworthiness of aluminum/cfrp square hollow section beam under axial impact loading for crash box application. *Composite Structures*, 112 :1–10, 2014. [91](#)
- [231] Ian Maskery, Nesma T Aboulkhair, AO Aremu, CJ Tuck, and IA Ashcroft. Compressive failure modes and energy absorption in additively manufactured double gyroid lattices. *Additive Manufacturing*, 16 :24–29, 2017. [91](#)
- [232] G. M. Luz and J. F. Mano. Biomimetic design of materials and biomaterials inspired by the structure of nacre. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 367(1893) :1587–1605, 2009. [91](#)
- [233] Z. Yin, A. Dastjerdi, and F. Barthelat. Tough and deformable glasses with bioinspired cross-ply architectures. *Acta biomaterialia*, 75 :439–450, 2018.
- [234] Z. Yin, F. Hannard, and F. Barthelat. Impact-resistant nacre-like transparent materials. *Science*, 364(6447) :1260–1263, 2019. [91](#)
- [235] S. Krauss, E. Monsonego-Orsan, E. Zelzer, P. Fratzl, and R. Shahar. Mechanical function of a complex three-dimensional suture joining the bony elements in the shell of the red-ear ed slider turtle. *Advanced Materials*, 21 :407–412, 2009. [91](#)
- [236] J. Dirrenberger, S. Forest, and D. Jeulin. Towards gigantic RVE sizes for stochastic fibrous networks. *International Journal of Solids and Structures*, 51(2) :359–376, 2014. [91](#)
- [237] Tomasz Strek, Hubert Jopek, and Eligiusz Idczak. Computational design of two-phase auxetic structures. *Physica status solidi (b)*, 253(7) :1387–1394, 2016. [92](#)

- [238] Hubert Jopek. Finite element analysis of tunable composite tubes reinforced with auxetic structures. *Materials*, 10(12) :1359, 2017.
- [239] Hubert Jopek and Tomasz Stręk. Thermoauxetic behavior of composite structures. *Materials*, 11(2) :294, 2018. [92](#)
- [240] F. Albertini, J. Dirrenberger, A. Molotnikov, and C. Sollogoub. Computational Investigation of the Effective Mechanical Behavior for 3D Pre-Buckled Auxetic Lattices. *Journal of Applied Mechanics*, 86(11) :111003, November 2019. [92](#), [98](#), [99](#)
- [241] Stratasys. [94](#)
- [242] GH Loh, E Pei, D Harrison, and MD Monzón. An overview of functionally graded additive manufacturing. *Additive Manufacturing*, 23 :34–44, 2018. [94](#)
- [243] YL Tee, P Tran, M Leary, P Pille, and M Brandt. 3d printing of polymer composites with material jetting : Mechanical and fractographic analysis. *Additive Manufacturing*, 36 :101558, 2020. [94](#)
- [244] D. Jeulin. *Caractérisation Morphologique et Modèles de Structures Aléatoires*, volume 1 of *Homogénéisation en Mécanique des Matériaux*, chapter 4, pages 95–132. Hermès, 2001. [96](#)
- [245] S. Torquato. *Random Heterogeneous Materials*. Springer, 2001.
- [246] Mohamed Assidi and Jean-François Ganghoffer. Composites with auxetic inclusions showing both an auxetic behavior and enhancement of their mechanical properties. *Composite Structures*, 94(8) :2373–2382, 2012.
- [247] K El Nady, F Dos Reis, and JF Ganghoffer. Computation of the homogenized nonlinear elastic response of 2d and 3d auxetic structures based on micropolar continuum models. *Composite Structures*, 170 :271–290, 2017. [96](#)
- [248] P. Lhuissier, C. de Formanoir, G. Martin, R. Dendievel, and S. Godet. Geometrical control of lattice structures produced by ebm through chemical etching : Investigations at the scale of individual struts. *Materials & Design*, 110 :485–493, 2016. [135](#)

Titre : Propriétés mécaniques de treillis auxétiques hybrides

Mots-clés : Matériaux architecturés, Treillis, Auxétique, Composites, Treillis hybrides, Homogénéisation numérique

Résumé : Les matériaux architecturés, dont l'organisation géométrique d'un ou plusieurs matériaux permet des propriétés mécaniques élevées ramenées à leur masse, forment un groupe de matériaux idéal pour répondre aux problématiques industrielles actuelles. Ces travaux s'intéressent aux propriétés mécaniques d'un nouveau groupe de matériaux architecturés, les treillis hybrides, composés de l'association d'un treillis avec une matrice de nature différente, dont la fabrication est rendue possible par les méthodes de fabrication additives. Pour cela, des structures auxétiques sont proposées et étudiées par homogénéisation numérique. Les géométries choisies montrent un coefficient de Poisson négatif pour certaines orientations de chargement, et l'orientation de chargement maximisant la dissipation d'énergie en compression uni-axiale est identifiée. Deux types de structures hybrides sont fa-

briquées et étudiées : des composites polymère rigide-élastomère, et des hybrides métal-élastomère. L'influence de la matrice élastomère sur les propriétés élastiques des treillis polymère et métallique est examinée numériquement, tandis que des essais de compression expérimentaux sont effectués sur des éprouvettes imprimées. Les essais expérimentaux sur les composites montrent une augmentation de la dissipation d'énergie ramenée à la masse, notamment par une modification de la déformation des treillis et par une répartition des contraintes plus homogène.

Ces travaux permettent une meilleure compréhension des propriétés mécaniques des treillis hybrides, et pavent la voie pour leur utilisation pour des applications structurales et/ou pour la dissipation d'énergie mécanique.

Title : Mechanical properties of hybrid auxetic lattices

Keywords : Architected materials, Lattices, Auxetic, Composites, Hybrid lattices, Computational homogenization

Abstract : Architected materials is a group of materials whose geometric organization of one or more materials allows high mechanical properties when compared to their mass, thus matching current industrial challenges. This work focus on the mechanical properties of a new group of architected materials named hybrid lattices, composed of the association of a lattice with a matrix of a different nature. The manufacturing of such hybrid structures is made possible by recent progress in additive manufacturing. First, two novel auxetic structures are proposed and studied by computational homogenization. The chosen geometries show a negative Poisson's ratio for specific loading orientations, and the loading orientation that maximizes the compressive energy dissipation is identified. Then, two types of hybrid structures are manufac-

tured and studied : rigid polymer-elastomer composites, and metal-elastomer hybrids. The influence of the elastomeric matrix on the elastic properties of polymer and metal lattices is examined computationally, while experimental compression tests are carried out on printed specimens. Composite experimental compression tests showed an increase in the energy dissipation when compared to the mass, that can be explained by a change in the deformation behavior of the lattices as well as by more evenly distributed stress.

This work provides a better understanding of the mechanical properties of hybrid lattices, and paves the way for their use for structural applications and / or energy dissipation.