Variational calculus on Wiener space

Kevin Hartmann

2016-ENST-0049

EDITE - ED 130

Doctorat ParisTech

T H È S E

pour obtenir le grade de docteur délivré par

TELECOM ParisTech

Spécialité « Informatique et Réseaux »

présentée et soutenue publiquement par

Kévin HARTMANN

le 23 septembre 2016

Calcul variationnel sur l'espace de Wiener

Directeur de thèse : **Ali Süleyman ÜSTÜNEL**

Jury

M. Yoann DABROWSKI, Maître de conférences, Université Lyon I, France	Examinateur
M. Laurent DECREUSEFOND, Professeur, Telecom Paristech, France	Examinateur
M. Shizan FANG, Professeur, Université de Bourgogne, France	Rapporteur
M. Samy TINDEL, Professeur, Purdue University, Etats-Unis	Rapporteur
M. Ali Süleyman ÜSTÜNEL, Professeur, Bilkent University, Turquie	Directeur de thèse
M. Frederi G. VIENS, Professeur, Michigan State University, Etats-Unis	Président

T H È S E

TELECOM ParisTech
école de l'Institut Mines-Télécom - membre de ParisTech
46 rue Barrault 75013 Paris - (+33) 1 45 81 77 77 - www.telecom-paristech.fr

Remerciements

Je remercie chaleureusement Ali Süleyman Üstünel d'avoir accepté de diriger mes recherches, son exigence et sa hauteur de vue m'ont beaucoup aidé durant cette thèse. Je tiens également à remercier Laurent Decreusefond pour ses nombreux conseils et la pertinence de ses remarques. Je remercie aussi le directeur du département infres Gérard Memmi, sans qui le financement de cette thèse n'aurait pas été possible.
Je remercie les membres du jury, présidé par Frederi G. Viens, de me permettre de présenter mes résultats devant eux. Je remercie les rapporteurs Shizan Fang et Samy Tindel pour leur lecture attentive et leurs remarques avisées. Je remercie aussi Yoann Dabrowski pour ses nombreuses suggestions de correction.
Je remercie aussi mes professeurs en classes préparatoires Serge Francinou et Richard Elie, qui m'ont donné les solides bases en mathématiques nécessaires à la bonne poursuite de mes études dans cette voie. Je remercie enfin mes amis et ma famille, et plus particulièrement mes parents, pour leur soutien durant cette période.

Contents

Chapter 1

Résumé

Notons $\mathbb{W}$ l'espace des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}^n$ et H l'espace de Cameron-Martin associé, constitué des éléments de $\mathbb{W}$ qui admettent une densité dans L^2. Notons aussi μ la mesure de Wiener, W le processus des coordonnée tet $(\mathcal{F}_t)$ la filtration canonique de W complètée par rapport μ. W est un mouvement Brownien sous μ. Soit f une fonction bornée inférieurement de $\mathbb{W}$ dans $\mathbb{R}$. Dans [5], Dupuis and Ellis prouvent que

$$-\log \mathbb{E}_\mu \left[e^{-f}\right] = \inf_\theta \left(\mathbb{E}_\theta \left[f\right] + H(\theta|\mu)\right) \tag{1.0.1}$$

où l'infimum est pris sur l'ensemble des probabilités θ sur $\mathbb{W}$ qui sont absoluement continues par rapport à μ et dont l'entropie relative $H(\theta|\mu)$ est égale à $\mathbb{E}_\mu\left[\frac{d\theta}{d\mu}\log\frac{d\theta}{d\mu}\right]$. Dans [1], Boué et Dupuis utilise cette relation pour obtenir la formule variationnelle

$$-\log \mathbb{E}_\mu \left[e^{-f}\right] = \inf_u \mathbb{E}_\mu \left[f \circ (W+u) + \frac{1}{2}\int_0^1 |\dot{u}(s)|^2 ds\right] \tag{1.0.2}$$

où l'infimum est pris sur les fonctions L^2 de $\mathbb{W}$ dans H dont la densité est adaptée à $(\mathcal{F}_t)$. Cette formulation variationnelle est utile pour obtenir des grandes déviations asymptotiques telles que des principes de Laplace pour des diffusions avec bruit faible par exemple. Ce résultat a été étendu plus tard par Budhiraja et Dupuis aux mouvements browniens à valeurs dans des espaces de Hilbert dans [2], et ensuite par Zhang aux espaces de Wiener abstraits dans [27], en utilisant le cadre développé par Üstünel et Zakai dans [21].

La première formulation du théorème de Prékopa-Leindler a été donnée par Prékopa dans [17] et survient dans le domaine de la programmation stochastique où de nombreux problmes d'optimization non-linéaire nécécitent des hypothèses de convexité. Dans [8], Huu Hariya utilise la formulation variationelle pour retrouver un théorème de Prékopa-Leindler theorem pour l'espace de Wiener, semblable au résultat de Üstünel et Feyel dans [7] sur les mesures log-concaves. D'autres inégalités fonctionnelles peuvent %tre obtenues de 2.0.2, par exemple par Lehec dans [15].

Hyndman et Wang ont montr dans [13] que

$$-\log \mathbb{E}_\mu \left[e^{-f}\middle|\, \mathcal{F}_t\right] = \inf_\theta \left(\mathbb{E}_\theta \left[f|\mathcal{F}_t\right] + \mathbb{E}_\theta\left[\log\frac{d\theta}{d\mu}\middle|\, \mathcal{F}_t\right]\right) \tag{1.0.3}$$

où l'infimum est pris sur les mesures de probabilité θ qui sont absoluement continues par rapport à μ et vérifient $\mathbb{E}_\mu\left[\frac{d\theta}{d\mu}|\mathcal{F}_t\right] = 1$. Ils relient cette formulation aux équations différentielles stochastiques

forward-backward et l'appliquent à divers problèmes d'évaluation de zero-coupons.
L'hypothèse bornée inférieurement a été significativement affaiblie par Üstünel dans [25], elle a été remplacée par la condition

$$\mathbb{E}_\mu \left[f e^{-f} \right] < \infty$$

et l'existence d'entier naturels conjugués p et q tels quea

$$f \in L^p(\mu), e^{-f} \in L^q(\mu)$$

Ces hypothèse relaxées ont permis de nouvelles applications. La possibilité d'utiliser des functions non-bornées est essentielle dans les application de Dabrowski de 2.0.2 à l'entropie libre dans [4].
L'approche d'Üstünel s'appuie sur l'étude des perturbations de l'identité de$\mathbb{W}$, qui est le processus coordonnée, et de leur inversibilité. La question de l'inversibilité d'une perturbation adaptée de l'identité est liée à la représentabilité des mesures et a été mis en lumière par le célèbre exemple de Tsirelson [20]. Üstünel a montr'e que si $u \in L^2(\mu, H)$ et sa densité est adaptée, $I_{\mathbb{W}} + u$ est μ-p.s. inversible si et seulement si

$$H((I_{\mathbb{W}} + u)\mu|\mu) = \frac{1}{2}\mathbb{E}_\mu \left[|u|_H^2 \right]$$

Si u satisfait les hypothèses du théorème de Girsanov, cela donne un critère d'existence de solutions fortes d'équations différentielles stochastiques. En effet, Üstünel montre dans [24] que si $I_{\mathbb{W}} + u$ est inversible, son inverse V est une solution forte de l'équation différentielle stochastique

$$dV(t) = -\dot{u}(t) \circ V dt + dW(t)$$

Pour prouver 2.0.2 avec les hypothèses d'intégrabilité spécifiées au précédemmentw, Üstünel utilise le fait que les perturbations qui son H-C^1, c'est à dire les perturbations qui sont p.s. Fréchet-différentiables sur H avec une différentielle de Fréchet p.s. continue sur H, sont p.s. inversibles, et que toute perturbation peut être approchée par des perturbations H-C^1 en utilisant le semigroupe d'Ornstein-Uhlenbeck.

Notre premier papier traite des fonctions H-C^1 functions, dont l'utilité a été discutée précédemment dans les problèmes d'inversibilité. La dérivée de malliavin usuelle ∇ est définie comme la dérivée faible dans les directions de H sur les fonctions cylindriqueside la forme $F(W_{t_1}, ..., W_{t_m})$: si f est cylindrique et h appartient à H

$$\nabla_h f(w) = \left. \frac{d}{d\lambda} f(w + \lambda h) \right|_{\lambda=0}$$

Le théorème de Riesz assure que ∇f peut être vu comme un élément de H. ∇ est fermable et on définit $\mathbb{D}_{p,1}$ comme le complété de l'ensemble des fonctions cylindrique pour la norme

$$|.|_{p,1} f :\mapsto |f|_{L^p(\mu)} + |\nabla f|_{L^p(\mu,H)}$$

Par récurrence, on peut définir les dérivées faibles ou fortes d'ordre supérieur dans les directions de H. Il est bien sûr plus difffcile de montrer qu'unequ'une fonction est $H - C^d$ que de prouver qu'elle appartient à un $\mathbb{D}_{p,d}$. Le semi-groupe d'Ornstein-Uhlenbeck (P_t) est définis comme suit

$$P_t f(w) = \int_{\mathbb{W}} f\left(e^{-t} w + \sqrt{1 - e^{-2t}} y \right) \mu(dy)$$

En se basant sur le travail de Kusuoka dans [14], Üstünel a montré dans [22] que si une fonction f est dans un $L^p(\mu)$, alors $P_t f$ est $H - C^\infty$ et même analytique dasns les directions de H. Nous utilisons ce résulatat pour donner un critère relativement simple pour obtenir la différentiabilité forte dans les directions de H: si f appartient à un $\mathbb{D}_{p,d}$ et $\nabla^d f$ est μ-p.s. uniformemment continue sur toute boule de H centrée en zéro, alors f est $H - C^d$ et ses dérivées fortes jusquà l'ordre n sont égales à ses dérivées faibles du même ordre.

Notre second papier est centré sur l'obtention d'une formulation variationnelle similaire à 2.0.2 dans le cas d'une diffusion V qui vérifie une équation différentielle stochastique

$$V(t) = c + \int_0^t \sigma(V(s))dB(s) + \int_0^t b(V(s))ds$$

où B est un mouvement brownien, généralisant donc le cas d'un mouvement brownien. Nous affaiblissons aussi les hypothèses d'intégrabilité sur f puisque nous supposons seulement que$\mathbb{E}[fe^{-f}] < \infty$ et $f \in L^p(\mu)$ pour un certain $p > 1$. La preuve d'Üstünel's consiste à approcher f avec des fonctions H-C^1 et d'ensuite utiliser des perturbations H-C^1, qui sont inversibles, obtenues en utilisant ces fonctions. Cette abroche est profondemment encrée dans le modèle brownien, parce qu'elle s'appuie sur des outils sophistiqu‘'es d'analyse stochastique développés dans le cadre gaussien. Ici nous écrivons la densité $\frac{e^{-f}}{\mathbb{E}[e^{-f}]}$ comme une exponentielle de Wick d'un certain v puis approchons v avec des perturbations rettardées qui sont inversibles. Comme nous travaillonosu la loi d'une diffusion et non la mesure de Wiener, les perturbations considéreées ne sont pas affines. Nous travaillons sur $\mathbb{W}$ muni de la mesure image de (V, B) que nous notons $\mu^{\mathbb{X}}$ et nous construisons un mouvement brownien $\beta_{\mathbb{X}}$ qur W qui vérifie

$$W(t) = c + \int_0^t \sigma(W(s))d\beta_{\mathbb{X}}(s) + \int_0^t b(W(s))ds$$

Nous considérons uniquement les perturbations qui vérifient la condition de Girsanov. Si u est une telle eprturbation, nous notons X^u la solution de l' q̀uation différentielle stochastique

$$X^u = c + \int_0^t \sigma(X^u(s))d\left(\beta_{\mathbb{X}} + u\right)(s) + \int_0^t b(X^u(s))ds$$

et $\mathbb{X}^u = (X^u, \beta_{\mathbb{X}} + u)$. $\mathbb{X}^u$ joue le même rôle que $W + u$ dans le cas brownien et est inversible si et seulement si

$$H(\mathbb{X}^u \mu^{\mathbb{X}} | \mu^{\mathbb{X}}) = \frac{1}{2}\mathbb{E}_{\mu^{\mathbb{X}}}\left[|u|_H^2\right]$$

Nous concluons le papier avec une discussion sur l'atteignabilité de l'infimum dans la formulation variationnelle.

Notre troisième papier présente un cadre général pour obtenir une formulation variationnelle pour $-\log \mathbb{E}_\nu[e^{-f}]$ pour une large classe de mesures ν. Nous donnons un ensemble de conditions pour qu'un ensemble de processus (W^u) puisse agir comme des perturbations de W. L'idée principale est d'être capable de faire un changement de variable similaire à celui de Girsanov par rapport à un mouvement brownien β pour passer de W à W^u. Dans un premier temps nous voulons avoir un cadre minimal permettant d'obtenir la formulation variationelle, nous considérons seulemet les u dont la densité est p.s. bornée et nous montrons que

$$-\log \mathbb{E}_\nu\left[e^{-f}\right] = \inf_u \mathbb{E}_\nu\left[f \circ W^u + \frac{1}{2}|u|_H^2\right]$$

où l'infimum est pris sur les u dont la densité est p.s. bornée, donnant donc une description plus fine de l'infimum. Les hypothèses d'intégrabiité sur f restent les même que dans le cas d'une diffusion. Dans un second temps, nous étudions les possibilités d'extension du domaine sur lequel l'infimum est pris, pour obtenir des résultats de calcul variationnel, portant principalement sur l'atteignabilité de l'infimum, et des résultats d'inversibilité. En effet, nous prouvons encore une fois que W^u est inversible si et seulement si

$$H(W^u\nu|\nu) = \frac{1}{2}\mathbb{E}_\nu\left[|u|_H^2\right]$$

and in case of invertibility its inverse is of the form W^v. De plus, l'inversibilité de W^u peut être reliée à l'existence de solutions fortes d'équations différentielle stochastiques. Si W^u peut être écrit $W + w^u$, avec $w^u \in L^0(\nu, H)$ adapté, et est inversible, son inverse W^v vérifie

$$dW^v(t) = -\dot{\widehat{w^u}}(t) \circ W^v dt + dW(t)$$

Nous démontrons aussi un théorème de Prékopa-Leindler sur $\mathbb{W}$ pour la mesure ν, cependant la complexité des hypothèses semble contraingnante.
Nous appliquons ce cadre général à de nombreux exemples. Nous retrouvons d'abord le cas de la mesure image d'une diffusion du second papier, et nous étudions ensuite le cas de la mesure image d'un pont Brownien, d'une mesure de boucle, et finalement de la mesure image d'un ensemble de particules qui diffusent. Le comportement de particules qui diffusent satisfait un système différentiel stochastique étudié par Cépa an et Lepingle dans [3], ainsi que Rogers et Shi dans [19]. Nous nous focalisons sur le cas où le système différentiel stochastique vérifié par les particules$(Z_1, ..., Z_n)$ est de la forme

$$\begin{aligned}
Z_1(t) &= z_1(0) + \sigma B_1(t) + b\int_0^t Z_1(s)ds + ct + \gamma \sum_{j\in\{1,\dots,n\}\setminus\{1\}} \int_0^t \frac{ds}{Z_1(s) - Z_j(s)} \\
&\vdots \\
Z_n(t) &= z_n(0) + \sigma B_n(t) + b\int_0^t Z_n(s)ds + ct + \gamma \sum_{j\in\{1,\dots,n\}\setminus\{n\}} \int_0^t \frac{ds}{Z_n(s) - Z_j(s)}
\end{aligned}$$

où $(B_1, ..., B_n)$ est un mouvement brownien à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ et $\sigma^2 \leq 2\gamma$, ce qui garantie l'absence de collisions.
Notre quatrième papier se focalise sur l'obtention d'une formulation variationnelle pour $-\log\mathbb{E}_\nu\left[e^{-f}|\mathcal{F}_\tau\right]$, où τ est un temps d'arrêt. La relation 2.0.3, obtenue pour un temps déterministes t, est très semblable à 2.0.1, on se pose donc naturellement trois questions: peut-on obtenir une relation similaire à 2.0.2 pour l'espérance conditionnelle, peut-on l'étendre à d'autres mesures avec le cadre développé dans notre troisième papier, et finalement ces relations restent-elles valides si on remplace t par un temps d'arrêt τ? Notre papier répond affirmativement à ces trois questions. Nous gardons les notations de notre troisième papier et montrons que

$$-\log\mathbb{E}_\nu\left[e^{-f}\middle|\mathcal{F}_\tau\right] = \inf_\theta\left(\mathbb{E}_\nu\left[f|\mathcal{F}_\tau\right] + \mathbb{E}_\nu\left[\frac{d\theta}{d\nu}\log\frac{d\theta}{d\nu}\middle|\mathcal{F}_\tau\right]\right) \tag{1.0.4}$$

$$-\log\mathbb{E}_\nu\left[e^{-f}\middle|\mathcal{F}_\tau\right] = \inf_u \mathbb{E}_\nu\left[f\circ W^u + \frac{1}{2}|u|_H^2\middle|\mathcal{F}_\tau\right] \tag{1.0.5}$$

Dans 2.0.4 nous supposons que $\mathbb{E}_\nu\left[fe^{-f}\right] < \infty$ et l'infimum est pris sur l'ensemble des mesures de probabilité θ sur W qui sont absolument continues sur $\mathbb{W}$ par rapport à ν et telles que$\mathbb{E}_\nu\left[\frac{d\theta}{d\nu}|\mathcal{F}_t\right] = 1$. Dans 2.0.5, l'infimum est pris sur les u e W dans H, avec densité adapté, qui sont dans L^2 et tels que $1_{t\leq\tau}\dot{u}(t) = 0$, et nous supposons qu'il existe deux entiers naturels conjugués p et q tels que $f \in L^p(\nu)$ et $e^{-f} \in L^q(\nu)$. Remarquons que nous avons du renforcer les hypothèses d'intégrabilité sur f par rapport au cas non-conditionnel. En fait les hypothèses d'int‘'egrabilité sur f sont les même que dans[25]. Comme dans notre troisième papier, nous obtenons un résultat similaire au théorème de Prékopa-Leindler theorem pour l'espérance conditionnelle, mais les hypothèses d(intégrabilité semblent contraignantes. Notons $\mathbb{W}$ l'espace des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}^n$ et H l'espace de Cameron-Martin associé, constitué des éléments de $\mathbb{W}$ qui admettent une densité dans L^2. Notons aussi μ la mesure de Wiener, W le processus des coordonnée tet $(\mathcal{F}_t)$ la filtration canonique de W complètée par rapport μ. W est un mouvement Brownien sous μ. Soit f une fonction bornée inférieurement de $\mathbb{W}$ dans $\mathbb{R}$. Dans [5], Dupuis and Ellis prouvent que

$$-\log \mathbb{E}_\mu\left[e^{-f}\right] = \inf_\theta \left(\mathbb{E}_\theta\left[f\right] + H(\theta|\mu)\right) \tag{1.0.6}$$

où l'infimum est pris sur l'ensemble des probabilités θ sur $\mathbb{W}$ qui sont absoluement continues par rapport à μ et dont l'entropie relative $H(\theta|\mu)$ est égale à $\mathbb{E}_\mu\left[\frac{d\theta}{d\mu}\log\frac{d\theta}{d\mu}\right]$. Dans [1], Boué et Dupuis utilise cette relation pour obtenir la formule variationnelle

$$-\log \mathbb{E}_\mu\left[e^{-f}\right] = \inf_u \mathbb{E}_\mu\left[f\circ(W+u) + \frac{1}{2}\int_0^1 |\dot{u}(s)|^2 ds\right] \tag{1.0.7}$$

où l'infimum est pris sur les fonctions L^2 de $\mathbb{W}$ dans H dont la densité est adaptée à $(\mathcal{F}_t)$. Cette formulation variationnelle est utile pour obtenir des grandes déviations asymptotiques telles que des principes de Laplace pour des diffusions avec bruit faible par exemple. Ce résultat a été étendu plus tard par Budhiraja et Dupuis aux mouvements browniens à valeurs dans des espaces de Hilbert dans [2], et ensuite par Zhang aux espaces de Wiener abstraits dans [27], en utilisant le cadre développé par Üstünel et Zakai dasn [21].

La première formulation du théorème de Prékopa-Leindler a été donnée par Prékopa dans [17] et survient dans le domaine de la programmation stochastique où de nombreux problmes d'optimization non-linéaire nécécitent des hypothèses de convexité. Dans [8], Huu Hariya utilise la formulation variationelle pour retrouver un théorème de Prékopa-Leindler theorem pour l'espace de Wiener, semblable au résultat de Üstünel et Feyel dans [7] sur les mesures log-concaves. D'autres inégalités fonctionnelles peuvent %tre obtenues de 2.0.2, par exemple par Lehec dans [15].

Hyndman et Wang ont montr dans [13] que

$$-\log \mathbb{E}_\mu\left[e^{-f}\middle|\mathcal{F}_t\right] = \inf_\theta \left(\mathbb{E}_\theta\left[f|\mathcal{F}_t\right] + \mathbb{E}_\theta\left[\log\frac{d\theta}{d\mu}\middle|\mathcal{F}_t\right]\right) \tag{1.0.8}$$

où l'infimum est pris sur les mesures de probabilité θ qui sont absoluement continues par rapport à μ et vérifient $\mathbb{E}_\mu\left[\frac{d\theta}{d\mu}|\mathcal{F}_t\right] = 1$. Ils relient cette formulation aux équations différentielles stochastiques forward-backward et l'appliquent à divers problèmes d'évaluation de zero-coupons.

L'hypothèse bornée inférieurement a été significativement affaiblie par Üstünel dans [25], elle a été remplacée par la condition

$$\mathbb{E}_\mu\left[fe^{-f}\right] < \infty$$

et l'existence d'entier naturels conjugués p et q tels quea

$$f \in L^p(\mu), e^{-f} \in L^q(\mu)$$

Ces hypothèse relaxées ont permis de nouvelles applications. La possibilité d'utiliser des functions non-bornées est essentielle dans les application de Dabrowski de 2.0.2 à l'entropie libre dans [4]. L'approche d'Üstünel s'appuie sur l'étude des perturbations de l'identité de$\mathbb{W}$, qui est le processus coordonnée, et de leur inversibilité. La question de l'inversibilité d'une perturbation adaptée de l'identité est liée à la représentabilité des mesures et a été mis en lumière par le célèbre exemple de Tsirelson [20]. Üstünel a montr'e que si $u \in L^2(\mu, H)$ et sa densité est adaptée, $I_{\mathbb{W}} + u$ est μ-p.s. inversible si et seulement si

$$H((I_{\mathbb{W}} + u)\mu|\mu) = \frac{1}{2}\mathbb{E}_\mu\left[|u|_H^2\right]$$

Si u satisfait les hypothèses du théorème de Girsanov, cela donne un critère d'existence de solutions fortes d'équations différentielles stochastiques. En effet, Üstünel montre dans [24] que si $I_{\mathbb{W}} + u$ est inversible, son inverse V est une solution forte de l'équation différentielle stochastique

$$dV(t) = -\dot{u}(t) \circ V dt + dW(t)$$

Pour prouver 2.0.2 avec les hypothèses d'intégrabilité spécifiées au précédemmentw, Üstünel utilise le fait que les perturbations qui son H-C^1, c'est à dire les perturbations qui sont p.s. Fréchet-différentiables sur H avec une différentielle de Fréchet p.s. continue sur H, sont p.s. inversibles, et que toute perturbation peut être approchée par des perturbations H-C^1 en utilisant le semigroupe d'Ornstein-Uhlenbeck.

Notre premier papier traite des fonctions H-C^1 functions, dont l'utilité a été discutée précédemment dans les problèmes d'inversibilité. La dérivée de malliavin usuelle ∇ est définie comme la dérivée faible dans les directions de H sur les fonctions cylindriqueside la forme $F(W_{t_1}, ..., W_{t_m})$: si f est cylindrique et h appartient à H

$$\nabla_h f(w) = \left.\frac{d}{d\lambda} f(w + \lambda h)\right|_{\lambda=0}$$

Le théorème de Riesz assure que ∇f peut être vu comme un élément de H. ∇ est fermable et on définit $\mathbb{D}_{p,1}$ comme le complété de l'ensemble des fonctions cylindrique pour la norme

$$|.|_{p,1} f :\mapsto |f|_{L^p(\mu)} + |\nabla f|_{L^p(\mu,H)}$$

Par récurrence, on peut définir les dérivées faibles ou fortes d'ordre supérieur dans les directions de H. Il est bien sûr plus difffcile de montrer qu'unequ'une fonction est $H - C^d$ que de prouver qu'elle appartient à un $\mathbb{D}_{p,d}$. Le semi-groupe d'Ornstein-Uhlenbeck (P_t) est définis comme suit

$$P_t f(w) = \int_{\mathbb{W}} f\left(e^{-t}w + \sqrt{1 - e^{-2t}}y\right)\mu(dy)$$

En se basant sur le travail de Kusuoka dans [14], Üstünel a montré dans [22] que si une fonction f est dans un $L^p(\mu)$, alors $P_t f$ est $H - C^\infty$ et même analytique dasns les directions de H. Nous utilisons ce résulatat pour donner un critère relativement simple pour obtenir la différentiabilité forte dans

les directions de H: si f appartient à un $\mathbb{D}_{p,d}$ et $\nabla^d f$ est μ-p.s. uniformemment continue sur toute boule de H centrée en zéro, alors f est $H - C^d$ et ses dérivées fortes jusquà l'ordre n sont égales à ses dérivées faibles du même ordre.
Notre second papier est centré sur l'obtention d'une formulation variationnelle similaire à 2.0.2 dans le cas d'une diffusion V qui vérifie une équation différentielle stochastique

$$V(t) = c + \int_0^t \sigma(V(s))dB(s) + \int_0^t b(V(s))ds$$

où B est un mouvement brownien, généralisant donc le cas d'un mouvement brownien. Nous affaiblissons aussi les hypothèses d'intégrabilité sur f puisque nous supposons seulement que$\mathbb{E}[fe^{-f}] < \infty$ et $f \in L^p(\mu)$ pour un certain $p > 1$. La preuve d'Üstünel's consiste à approcher f avec des fonctions H-C^1 et d'ensuite utiliser des perturbations H-C^1, qui sont inversibles, obtenues en utilisant ces fonctions. Cette abroche est profondemment encrée dans le modèle brownien, parce qu'elle s'appuie sur des outils sophistiqu''es d'analyse stochastique développés dans le cadre gaussien. Ici nous écrivons la densité $\frac{e^{-f}}{\mathbb{E}[e^{-f}]}$ comme une exponentielle de Wick d'un certain v puis approchons v avec des perturbations rettardées qui sont inversibles. Comme nous travaillonosu la loi d'une diffusion et non la mesure de Wiener, les perturbations considéreées ne sont pas affines. Nous travaillons sur $\mathbb{W}$ muni de la mesure image de (V, B) que nous notons $\mu^{\mathbb{X}}$ et nous construisons un mouvement brownien $\beta_{\mathbb{X}}$ qur W qui vérifie

$$W(t) = c + \int_0^t \sigma(W(s))d\beta_{\mathbb{X}}(s) + \int_0^t b(W(s))ds$$

Nous considérons uniquement les perturbations qui vérifient la condition de Girsanov. Si u est une telle eprturbation, nous notons X^u la solution de l'q̂uation différentielle stochastique

$$X^u = c + \int_0^t \sigma(X^u(s))d\left(\beta_{\mathbb{X}} + u\right)(s) + \int_0^t b(X^u(s))ds$$

et $\mathbb{X}^u = (X^u, \beta_{\mathbb{X}} + u)$. $\mathbb{X}^u$ joue le même rôle que $W + u$ dans le cas brownien et est inversible si et seulement si

$$H(\mathbb{X}^u \mu^{\mathbb{X}} | \mu^{\mathbb{X}}) = \frac{1}{2}\mathbb{E}_{\mu^{\mathbb{X}}}\left[|u|_H^2\right]$$

Nous concluons le papier avec une discussion sur l'atteignabilité de l'infimum dans la formulation variationnelle.
Notre troisième papier présente un cadre général pour obtenir une formulation variationnelle pour $-\log \mathbb{E}_\nu[e^{-f}]$ pour une large classe de mesures ν. Nous donnons un ensemble de conditions pour qu'un ensemble de processus (W^u) puisse agir comme des perturbations de W. L'idée principale est d'être capable de faire un changement de variable similaire à celui de Girsanov par rapport à un mouvement brownien β pour passer de W à W^u. Dans un premier temps nous voulons avoir un cadre minimal permettant d'obtenir la formulation variationelle, nous considérons seulemet les u dont la densité est p.s. bornée et nous montrons que

$$-\log \mathbb{E}_\nu\left[e^{-f}\right] = \inf_u \mathbb{E}_\nu\left[f \circ W^u + \frac{1}{2}|u|_H^2\right]$$

où l'infimum est pris sur les u dont la densité est p.s. bornée, donnant donc une description plus fine de l'infimum. Les hypothèses d'intégrabiité sur f restent les même que dans le cas d'une diffusion.

Dans un second temps, nous étudions les possibilités d'extension du domaine sur lequel l'infimum est pris, pour obtenir des résultats de calcul variationnel, portant principalement sur l'atteignabilité de l'infimum, et des résultats d'inversibilité. En effet, nous prouvons encore une fois que W^u est inversible si et seulement si

$$H(W^u\nu|\nu) = \frac{1}{2}\mathbb{E}_\nu\left[|u|_H^2\right]$$

and in case of invertibility its inverse is of the form W^v. De plus, l'inversibilité de W^u peut être reliée à l'existence de solutions fortes d'équations différentielle stochastiques. Si W^u peut être écrit $W + w^u$, avec $w^u \in L^0(\nu, H)$ adapté, et est inversible, son inverse W^v vérifie

$$dW^v(t) = -\overbrace{w^u}^{\cdot}(t) \circ W^v dt + dW(t)$$

Nous démontrons aussi un théorème de Prékopa-Leindler sur $\mathbb{W}$ pour la mesure ν, cependant la complexité des hypothèses semble contraingnante.
Nous appliquons ce cadre général à de nombreux exemples. Nous retrouvons d'abord le cas de la mesure image d'une diffusion du second papier, et nous étudions ensuite le cas de la mesure image d'un pont Brownien, d'une mesure de boucle, et finalement de la mesure image d'un ensemble de particules qui diffusent. Le comportement de particules qui diffusent satisfait un système différentiel stochastique étudié par Cépa an et Lepingle dans [3], ainsi que Rogers et Shi dans [19]. Nous nous focalisons sur le cas où le système différentiel stochastique vérifié par les particules$(Z_1, ..., Z_n)$ est de la forme

$$\begin{aligned}
Z_1(t) &= z_1(0) + \sigma B_1(t) + b\int_0^t Z_1(s)ds + ct + \gamma \sum_{j\in\{1,\ldots,n\}\setminus\{1\}} \int_0^t \frac{ds}{Z_1(s) - Z_j(s)} \\
&\vdots \\
Z_n(t) &= z_n(0) + \sigma B_n(t) + b\int_0^t Z_n(s)ds + ct + \gamma \sum_{j\in\{1,\ldots,n\}\setminus\{n\}} \int_0^t \frac{ds}{Z_n(s) - Z_j(s)}
\end{aligned}$$

où $(B_1, ..., B_n)$ est un mouvement brownien à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ et $\sigma^2 \leq 2\gamma$, ce qui garantie l'absence de collisions.
Notre quatrième papier se focalise sur l'obtention d'une formulation variationnelle pour $-\log \mathbb{E}_\nu\left[e^{-f}|\mathcal{F}_\tau\right]$, où τ est un temps d'arrêt. La relation 2.0.3, obtenue pour un temps déterministes t, est très semblable à 2.0.1, on se pose donc naturellement trois questions: peut-on obtenir une relation similaire à 2.0.2 pour l'espérance conditionnelle, peut-on l'étendre à d'autres mesures avec le cadre développé dans notre troisième papier, et finalement ces relations restent-elles valides si on remplace t par un temps d'arrêt τ? Notre papier répond affirmativement à ces trois questions. Nous gardons les notations de notre troisième papier et montrons que

$$-\log \mathbb{E}_\nu\left[e^{-f}\middle|\mathcal{F}_\tau\right] = \inf_\theta\left(\mathbb{E}_\nu\left[f|\mathcal{F}_\tau\right] + \mathbb{E}_\nu\left[\frac{d\theta}{d\nu}\log\frac{d\theta}{d\nu}\middle|\mathcal{F}_\tau\right]\right) \tag{1.0.9}$$

$$-\log \mathbb{E}_\nu\left[e^{-f}\middle|\mathcal{F}_\tau\right] = \inf_u \mathbb{E}_\nu\left[f\circ W^u + \frac{1}{2}|u|_H^2\middle|\mathcal{F}_\tau\right] \tag{1.0.10}$$

Dans 2.0.4 nous supposons que $\mathbb{E}_\nu\left[fe^{-f}\right] < \infty$ et l'infimum est pris sur l'ensemble des mesures de probabilité θ sur W qui sont absolument continues sur $\mathbb{W}$ par rapport à ν et telles que$\mathbb{E}_\nu\left[\frac{d\theta}{d\nu}|\mathcal{F}_t\right] = 1$.

Dans 2.0.5, l'infimum est pris sur les u e W dans H, avec densité adapté, qui sont dans L^2 et tels que $1_{t\leq\tau}\dot{u}(t) = 0$, et nous supposons qu'il existe deux entiers naturels conjugués p et q tels que $f \in L^p(\nu)$ et $e^{-f} \in L^q(\nu)$. Remarquons que nous avons du renforcer les hypothèses d'intégrabilité sur f par rapport au cas non-conditionnel. En fait les hypothèses d'int''egrabilité sur f sont les même que dans[25]. Comme dans notre troisième papier, nous obtenons un résultat similaire au théorème de Prékopa-Leindler theorem pour l'espérance conditionnelle, mais les hypothèses d(intégrabilité semblent contraignantes. Notons $\mathbb{W}$ l'espace des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}^n$ et H l'espace de Cameron-Martin associé, constitué des éléments de $\mathbb{W}$ qui admettent une densité dans L^2. Notons aussi μ la mesure de Wiener, W le processus des coordonnée tet $(\mathcal{F}_t)$ la filtration canonique de W complètée par rapport μ. W est un mouvement Brownien sous μ. Soit f une fonction bornée inférieurement de $\mathbb{W}$ dans $\mathbb{R}$. Dans [5], Dupuis and Ellis prouvent que

$$-\log \mathbb{E}_\mu\left[e^{-f}\right] = \inf_\theta \left(\mathbb{E}_\theta\left[f\right] + H(\theta|\mu)\right) \tag{1.0.11}$$

où l'infimum est pris sur l'ensemble des probabilités θ sur $\mathbb{W}$ qui sont absoluement continues par rapport à μ et dont l'entropie relative $H(\theta|\mu)$ est égale à $\mathbb{E}_\mu\left[\frac{d\theta}{d\mu}\log\frac{d\theta}{d\mu}\right]$. Dans [1], Boué et Dupuis utilise cette relation pour obtenir la formule variationnelle

$$-\log \mathbb{E}_\mu\left[e^{-f}\right] = \inf_u \mathbb{E}_\mu\left[f\circ(W+u) + \frac{1}{2}\int_0^1 |\dot{u}(s)|^2 ds\right] \tag{1.0.12}$$

où l'infimum est pris sur les fonctions L^2 de $\mathbb{W}$ dans H dont la densité est adaptée à $(\mathcal{F}_t)$. Cette formulation variationnelle est utile pour obtenir des grandes déviations asymptotiques telles que des principes de Laplace pour des diffusions avec bruit faible par exemple. Ce résultat a été étendu plus tard par Budhiraja et Dupuis aux mouvements browniens à valeurs dans des espaces de Hilbert dans [2], et ensuite par Zhang aux espaces de Wiener abstraits dans [27], en utilisant le cadre développé par Üstünel et Zakai dasn [21].

La première formulation du théorème de Prékopa-Leindler a été donnée par Prékopa dans [17] et survient dans le domaine de la programmation stochastique où de nombreux problmes d'optimization non-linéaire nécécitent des hypothèses de convexité. Dans [8], Huu Hariya utilise la formulation variationelle pour retrouver un théorème de Prékopa-Leindler theorem pour l'espace de Wiener, semblable au résultat de Üstünel et Feyel dans [7] sur les mesures log-concaves. D'autres inégalités fonctionnelles peuvent %tre obtenues de 2.0.2, par exemple par Lehec dans [15].

Hyndman et Wang ont montr dans [13] que

$$-\log \mathbb{E}_\mu\left[e^{-f}\middle|\,\mathcal{F}_t\right] = \inf_\theta \left(\mathbb{E}_\theta\left[f|\mathcal{F}_t\right] + \mathbb{E}_\theta\left[\log\frac{d\theta}{d\mu}\middle|\,\mathcal{F}_t\right]\right) \tag{1.0.13}$$

où l'infimum est pris sur les mesures de probabilité θ qui sont absoluement continues par rapport à μ et vérifient $\mathbb{E}_\mu\left[\frac{d\theta}{d\mu}|\mathcal{F}_t\right] = 1$. Ils relient cette formulation aux équations différentielles stochastiques forward-backward et l'appliquent à divers problèmes d'évaluation de zero-coupons.

L'hypothèse bornée inférieurement a été significativement affaiblie par Üstünel dans [25], elle a été remplacée par la condition

$$\mathbb{E}_\mu\left[fe^{-f}\right] < \infty$$

et l'existence d'entier naturels conjugués p et q tels quea

$$f \in L^p(\mu), e^{-f} \in L^q(\mu)$$

Ces hypothèse relaxées ont permis de nouvelles applications. La possibilité d'utiliser des functions non-bornées est essentielle dans les application de Dabrowski de 2.0.2 à l'entropie libre dans [4]. L'approche d'Üstünel s'appuie sur l'étude des perturbations de l'identité de$\mathbb{W}$, qui est le processus coordonnée, et de leur inversibilité. La question de l'inversibilité d'une perturbation adaptée de l'identité est liée à la représentabilité des mesures et a été mis en lumière par le célèbre exemple de Tsirelson [20]. Üstünel a montr'e que si $u \in L^2(\mu, H)$ et sa densité est adaptée, $I_{\mathbb{W}} + u$ est μ-p.s. inversible si et seulement si

$$H((I_{\mathbb{W}} + u)\mu|\mu) = \frac{1}{2}\mathbb{E}_\mu\left[|u|_H^2\right]$$

Si u satisfait les hypothèses du théorème de Girsanov, cela donne un critère d'existence de solutions fortes d'équations différentielles stochastiques. En effet, Üstünel montre dans [24] que si $I_{\mathbb{W}} + u$ est inversible, son inverse V est une solution forte de l'équation différentielle stochastique

$$dV(t) = -\dot{u}(t) \circ V dt + dW(t)$$

Pour prouver 2.0.2 avec les hypothèses d'intégrabilité spécifiées au précédemmentw, Üstünel utilise le fait que les perturbations qui son H-C^1, c'est à dire les perturbations qui sont p.s. Fréchet-différentiables sur H avec une différentielle de Fréchet p.s. continue sur H, sont p.s. inversibles, et que toute perturbation peut être approchée par des perturbations H-C^1 en utilisant le semigroupe d'Ornstein-Uhlenbeck.

Notre premier papier traite des fonctions H-C^1 functions, dont l'utilité a été discutée précédemment dans les problèmes d'inversibilité. La dérivée de malliavin usuelle ∇ est définie comme la dérivée faible dans les directions de H sur les fonctions cylindriqueside la forme $F(W_{t_1}, ..., W_{t_m})$: si f est cylindrique et h appartient à H

$$\nabla_h f(w) = \left.\frac{d}{d\lambda} f(w + \lambda h)\right|_{\lambda=0}$$

Le théorème de Riesz assure que ∇f peut être vu comme un élément de H. ∇ est fermable et on définit $\mathbb{D}_{p,1}$ comme le complété de l'ensemble des fonctions cylindrique pour la norme

$$|.|_{p,1} f :\mapsto |f|_{L^p(\mu)} + |\nabla f|_{L^p(\mu,H)}$$

Par récurrence, on peut définir les dérivées faibles ou fortes d'ordre supérieur dans les directions de H. Il est bien sûr plus difffcile de montrer qu'unequ'une fonction est $H - C^d$ que de prouver qu'elle appartient à un $\mathbb{D}_{p,d}$. Le semi-groupe d'Ornstein-Uhlenbeck (P_t) est définis comme suit

$$P_t f(w) = \int_{\mathbb{W}} f\left(e^{-t}w + \sqrt{1 - e^{-2t}}y\right)\mu(dy)$$

En se basant sur le travail de Kusuoka dans [14], Üstünel a montré dans [22] que si une fonction f est dans un $L^p(\mu)$, alors $P_t f$ est $H - C^\infty$ et même analytique dasns les directions de H. Nous utilisons ce résulatat pour donner un critère relativement simple pour obtenir la différentiabilité forte dans les directions de H: si f appartient à un $\mathbb{D}_{p,d}$ et $\nabla^d f$ est μ-p.s. uniformemment continue sur toute boule de H centrée en zéro, alors f est $H - C^d$ et ses dérivées fortes jusquà l'ordre n sont égales à ses dérivées faibles du même ordre.

Notre second papier est centré sur l'obtention d'une formulation variationnelle similaire à 2.0.2 dans le cas d'une diffusion V qui vérifie une équation différentielle stochastique

$$V(t) = c + \int_0^t \sigma(V(s))dB(s) + \int_0^t b(V(s))ds$$

où B est un mouvement brownien, généralisant donc le cas d'un mouvement brownien. Nous affaiblissons aussi les hypothèses d'intégrabilité sur f puisque nous supposons seulement que$\mathbb{E}[fe^{-f}] < \infty$ et $f \in L^p(\mu)$ pour un certain $p > 1$. La preuve d'Üstünel's consiste à approcher f avec des fonctions H-C^1 et d'ensuite utiliser des perturbations H-C^1, qui sont inversibles, obtenues en utilisant ces fonctions. Cette abroche est profondemment encrée dans le modèle brownien, parce qu'elle s'appuie sur des outils sophistiqu''es d'analyse stochastique développés dans le cadre gaussien. Ici nous écrivons la densité $\frac{e^{-f}}{\mathbb{E}[e^{-f}]}$ comme une exponentielle de Wick d'un certain v puis approchons v avec des perturbations rettardées qui sont inversibles. Comme nous travaillonosu la loi d'une diffusion et non la mesure de Wiener, les perturbations considéreées ne sont pas affines. Nous travaillons sur $\mathbb{W}$ muni de la mesure image de (V, B) que nous notons $\mu^{\mathbb{X}}$ et nous construisons un mouvement brownien $\beta_{\mathbb{X}}$ qur W qui vérifie

$$W(t) = c + \int_0^t \sigma(W(s))d\beta_{\mathbb{X}}(s) + \int_0^t b(W(s))ds$$

Nous considérons uniquement les perturbations qui vérifient la condition de Girsanov. Si u est une telle eprturbation, nous notons X^u la solution de l'q̆uation différentielle stochastique

$$X^u = c + \int_0^t \sigma(X^u(s))d\left(\beta_{\mathbb{X}} + u\right)(s) + \int_0^t b(X^u(s))ds$$

et $\mathbb{X}^u = (X^u, \beta_{\mathbb{X}} + u)$. $\mathbb{X}^u$ joue le même rôle que $W + u$ dans le cas brownien et est inversible si et seulement si

$$H(\mathbb{X}^u \mu^{\mathbb{X}} | \mu^{\mathbb{X}}) = \frac{1}{2}\mathbb{E}_{\mu^{\mathbb{X}}}\left[|u|_H^2\right]$$

Nous concluons le papier avec une discussion sur l'atteignabilité de l'infimum dans la formulation variationnelle.

Notre troisième papier présente un cadre général pour obtenir une formulation variationnelle pour $-\log \mathbb{E}_\nu[e^{-f}]$ pour une large classe de mesures ν. Nous donnons un ensemble de conditions pour qu'un ensemble de processus (W^u) puisse agir comme des perturbations de W. L'idée principale est d'être capable de faire un changement de variable similaire à celui de Girsanov par rapport à un mouvement brownien β pour passer de W à W^u. Dans un premier temps nous voulons avoir un cadre minimal permettant d'obtenir la formulation variationelle, nous considérons seulemet les u dont la densité est p.s. bornée et nous montrons que

$$-\log \mathbb{E}_\nu\left[e^{-f}\right] = \inf_u \mathbb{E}_\nu\left[f \circ W^u + \frac{1}{2}|u|_H^2\right]$$

où l'infimum est pris sur les u dont la densité est p.s. bornée, donnant donc une description plus fine de l'infimum. Les hypothèses d'intégrabiité sur f restent les même que dans le cas d'une diffusion. Dans un second temps, nous étudions les possibilités d'extension du domaine sur lequel l'infimum est pris, pour obtenir des résultats de calcul variationnel, portant principalement sur l'atteignabilité

de l'infimum, et des résultats d'inversibilité. En effet, nous prouvons encore une fois que W^u est inversible si et seulement si

$$H(W^u\nu|\nu) = \frac{1}{2}\mathbb{E}_\nu\left[|u|_H^2\right]$$

and in case of invertibility its inverse is of the form W^v. De plus, l'inversibilité de W^u peut être reliée à l'existence de solutions fortes d'équations différentielle stochastiques. Si W^u peut être écrit $W + w^u$, avec $w^u \in L^0(\nu, H)$ adapté, et est inversible, son inverse W^v vérifie

$$dW^v(t) = -\dot{\overbrace{w^u}}(t) \circ W^v dt + dW(t)$$

Nous démontrons aussi un théorème de Prékopa-Leindler sur $\mathbb{W}$ pour la mesure ν, cependant la complexité des hypothèses semble contraingnante.

Nous appliquons ce cadre général à de nombreux exemples. Nous retrouvons d'abord le cas de la mesure image d'une diffusion du second papier, et nous étudions ensuite le cas de la mesure image d'un pont Brownien, d'une mesure de boucle, et finalement de la mesure image d'un ensemble de particules qui diffusent. Le comportement de particules qui diffusent satisfait un système différentiel stochastique étudié par Cépa an et Lepingle dans [3], ainsi que Rogers et Shi dans [19]. Nous nous focalisons sur le cas où le système différentiel stochastique vérifié par les particules$(Z_1, ..., Z_n)$ est de la forme

$$\begin{aligned}
Z_1(t) &= z_1(0) + \sigma B_1(t) + b\int_0^t Z_1(s)ds + ct + \gamma \sum_{j\in\{1,\ldots,n\}\setminus\{1\}} \int_0^t \frac{ds}{Z_1(s) - Z_j(s)} \\
&\vdots \\
Z_n(t) &= z_n(0) + \sigma B_n(t) + b\int_0^t Z_n(s)ds + ct + \gamma \sum_{j\in\{1,\ldots,n\}\setminus\{n\}} \int_0^t \frac{ds}{Z_n(s) - Z_j(s)}
\end{aligned}$$

où $(B_1, ..., B_n)$ est un mouvement brownien à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ et $\sigma^2 \leq 2\gamma$, ce qui garantie l'absence de collisions.

Notre quatrième papier se focalise sur l'obtention d'une formulation variationnelle pour $-\log \mathbb{E}_\nu\left[e^{-f}|\mathcal{F}_\tau\right]$, où τ est un temps d'arrêt. La relation 2.0.3, obtenue pour un temps déterministes t, est très semblable à 2.0.1, on se pose donc naturellement trois questions: peut-on obtenir une relation similaire à 2.0.2 pour l'espérance conditionnelle, peut-on l'étendre à d'autres mesures avec le cadre développé dans notre troisième papier, et finalement ces relations restent-elles valides si on remplace t par un temps d'arrêt τ? Notre papier répond affirmativement à ces trois questions. Nous gardons les notations de notre troisième papier et montrons que

$$-\log \mathbb{E}_\nu\left[e^{-f}\middle|\mathcal{F}_\tau\right] = \inf_\theta \left(\mathbb{E}_\nu\left[f|\mathcal{F}_\tau\right] + \mathbb{E}_\nu\left[\frac{d\theta}{d\nu}\log\frac{d\theta}{d\nu}\middle|\mathcal{F}_\tau\right]\right) \tag{1.0.14}$$

$$-\log \mathbb{E}_\nu\left[e^{-f}\middle|\mathcal{F}_\tau\right] = \inf_u \mathbb{E}_\nu\left[f\circ W^u + \frac{1}{2}|u|_H^2\middle|\mathcal{F}_\tau\right] \tag{1.0.15}$$

Dans 2.0.4 nous supposons que $\mathbb{E}_\nu\left[fe^{-f}\right] < \infty$ et l'infimum est pris sur l'ensemble des mesures de probabilité θ sur W qui sont absolument continues sur $\mathbb{W}$ par rapport à ν et telles que$\mathbb{E}_\nu\left[\frac{d\theta}{d\nu}|\mathcal{F}_t\right] = 1$. Dans 2.0.5, l'infimum est pris sur les u e W dans H, avec densité adapté, qui sont dans L^2 et tels que $1_{t\leq\tau}\dot{u}(t) = 0$, et nous supposons qu'il existe deux entiers naturels conjugués p et q tels que

$f \in L^p(\nu)$ et $e^{-f} \in L^q(\nu)$. Remarquons que nous avons du renforcer les hypothèses d'intégrabilité sur f par rapport au cas non-conditionnel. En fait les hypothèses d'int''egrabilité sur f sont les même que dans[25]. Comme dans notre troisième papier, nous obtenons un résultat similaire au théorème de Prékopa-Leindler theorem pour l'espérance conditionnelle, mais les hypothèses d(intégrabilité semblent contraignantes. Notons $\mathbb{W}$ l'espace des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}^n$ et H l'espace de Cameron-Martin associé, constitué des éléments de $\mathbb{W}$ qui admettent une densité dans L^2. Notons aussi μ la mesure de Wiener, W le processus des coordonnée tet $(\mathcal{F}_t)$ la filtration canonique de W complètée par rapport μ. W est un mouvement Brownien sous μ. Soit f une fonction bornée inférieurement de $\mathbb{W}$ dans $\mathbb{R}$. Dans [5], Dupuis and Ellis prouvent que

$$-\log \mathbb{E}_\mu \left[e^{-f}\right] = \inf_\theta \left(\mathbb{E}_\theta\left[f\right] + H(\theta|\mu)\right) \tag{1.0.16}$$

où l'infimum est pris sur l'ensemble des probabilités θ sur $\mathbb{W}$ qui sont absoluement continues par rapport à μ et dont l'entropie relative $H(\theta|\mu)$ est égale à $\mathbb{E}_\mu\left[\frac{d\theta}{d\mu}\log\frac{d\theta}{d\mu}\right]$. Dans [1], Boué et Dupuis utilise cette relation pour obtenir la formule variationnelle

$$-\log \mathbb{E}_\mu \left[e^{-f}\right] = \inf_u \mathbb{E}_\mu \left[f \circ (W+u) + \frac{1}{2}\int_0^1 |\dot{u}(s)|^2 ds\right] \tag{1.0.17}$$

où l'infimum est pris sur les fonctions L^2 de $\mathbb{W}$ dans H dont la densité est adaptée à $(\mathcal{F}_t)$. Cette formulation variationnelle est utile pour obtenir des grandes déviations asymptotiques telles que des principes de Laplace pour des diffusions avec bruit faible par exemple. Ce résultat a été étendu plus tard par Budhiraja et Dupuis aux mouvements browniens à valeurs dans des espaces de Hilbert dans [2], et ensuite par Zhang aux espaces de Wiener abstraits dans [27], en utilisant le cadre développé par Üstünel et Zakai dasn [21].
La première formulation du théorème de Prékopa-Leindler a été donnée par Prékopa dans [17] et survient dans le domaine de la programmation stochastique où de nombreux problmes d'optimization non-linéaire nécécitent des hypothèses de convexité. Dans [8], Huu Hariya utilise la formulation variationelle pour retrouver un théorème de Prékopa-Leindler theorem pour l'espace de Wiener, semblable au résultat de Üstünel et Feyel dans [7] sur les mesures log-concaves. D'autres inégalités fonctionnelles peuvent %tre obtenues de 2.0.2, par exemple par Lehec dans [15].
Hyndman et Wang ont montr dans [13] que

$$-\log \mathbb{E}_\mu \left[e^{-f}\middle|\mathcal{F}_t\right] = \inf_\theta \left(\mathbb{E}_\theta\left[f|\mathcal{F}_t\right] + \mathbb{E}_\theta\left[\log\frac{d\theta}{d\mu}\middle|\mathcal{F}_t\right]\right) \tag{1.0.18}$$

où l'infimum est pris sur les mesures de probabilité θ qui sont absoluement continues par rapport à μ et vérifient $\mathbb{E}_\mu\left[\frac{d\theta}{d\mu}|\mathcal{F}_t\right] = 1$. Ils relient cette formulation aux équations différentielles stochastiques forward-backward et l'appliquent à divers problèmes d'évaluation de zero-coupons.
L'hypothèse bornée inférieurement a été significativement affaiblie par Üstünel dans [25], elle a été remplacée par la condition

$$\mathbb{E}_\mu\left[fe^{-f}\right] < \infty$$

et l'existence d'entier naturels conjugués p et q tels quea

$$f \in L^p(\mu), e^{-f} \in L^q(\mu)$$

Ces hypothèse relaxées ont permis de nouvelles applications. La possibilité d'utiliser des functions non-bornées est essentielle dans les application de Dabrowski de 2.0.2 à l'entropie libre dans [4]. L'approche d'Üstünel s'appuie sur l'étude des perturbations de l'identité de$\mathbb{W}$, qui est le processus coordonnée, et de leur inversibilité. La question de l'inversibilité d'une perturbation adaptée de l'identité est liée à la représentabilité des mesures et a été mis en lumière par le célèbre exemple de Tsirelson [20]. Üstünel a montr'e que si $u \in L^2(\mu, H)$ et sa densité est adaptée, $I_{\mathbb{W}} + u$ est μ-p.s. inversible si et seulement si

$$H((I_{\mathbb{W}} + u)\mu|\mu) = \frac{1}{2}\mathbb{E}_\mu \left[|u|_H^2\right]$$

Si u satisfait les hypothèses du théorème de Girsanov, cela donne un critère d'existence de solutions fortes d'équations différentielles stochastiques. En effet, Üstünel montre dans [24] que si $I_{\mathbb{W}} + u$ est inversible, son inverse V est une solution forte de l'équation différentielle stochastique

$$dV(t) = -\dot{u}(t) \circ V dt + dW(t)$$

Pour prouver 2.0.2 avec les hypothèses d'intégrabilité spécifiées au précédemmentw, Üstünel utilise le fait que les perturbations qui son H-C^1, c'est à dire les perturbations qui sont p.s. Fréchet-différentiables sur H avec une différentielle de Fréchet p.s. continue sur H, sont p.s. inversibles, et que toute perturbation peut être approchée par des perturbations H-C^1 en utilisant le semigroupe d'Ornstein-Uhlenbeck.

Notre premier papier traite des fonctions H-C^1 functions, dont l'utilité a été discutée précédemment dans les problèmes d'inversibilité. La dérivée de malliavin usuelle ∇ est définie comme la dérivée faible dans les directions de H sur les fonctions cylindriqueside la forme $F(W_{t_1}, ..., W_{t_m})$: si f est cylindrique et h appartient à H

$$\nabla_h f(w) = \left.\frac{d}{d\lambda} f(w + \lambda h)\right|_{\lambda=0}$$

Le théorème de Riesz assure que ∇f peut être vu comme un élément de H. ∇ est fermable et on définit $\mathbb{D}_{p,1}$ comme le complété de l'ensemble des fonctions cylindrique pour la norme

$$|.|_{p,1} f :\mapsto |f|_{L^p(\mu)} + |\nabla f|_{L^p(\mu,H)}$$

Par récurrence, on peut définir les dérivées faibles ou fortes d'ordre supérieur dans les directions de H. Il est bien sûr plus difffcile de montrer qu'unequ'une fonction est $H - C^d$ que de prouver qu'elle appartient à un $\mathbb{D}_{p,d}$. Le semi-groupe d'Ornstein-Uhlenbeck (P_t) est définis comme suit

$$P_t f(w) = \int_{\mathbb{W}} f\left(e^{-t}w + \sqrt{1 - e^{-2t}}y\right)\mu(dy)$$

En se basant sur le travail de Kusuoka dans [14], Üstünel a montré dans [22] que si une fonction f est dans un $L^p(\mu)$, alors $P_t f$ est $H - C^\infty$ et même analytique dasns les directions de H. Nous utilisons ce résulatat pour donner un critère relativement simple pour obtenir la différentiabilité forte dans les directions de H: si f appartient à un $\mathbb{D}_{p,d}$ et $\nabla^d f$ est μ-p.s. uniformemment continue sur toute boule de H centrée en zéro, alors f est $H - C^d$ et ses dérivées fortes jusquà l'ordre n sont égales à ses dérivées faibles du même ordre.

Notre second papier est centré sur l'obtention d'une formulation variationnelle similaire à 2.0.2 dans le cas d'une diffusion V qui vérifie une équation différentielle stochastique

$$V(t) = c + \int_0^t \sigma(V(s))dB(s) + \int_0^t b(V(s))ds$$

où B est un mouvement brownien, généralisant donc le cas d'un mouvement brownien. Nous affaiblissons aussi les hypothèses d'intégrabilité sur f puisque nous supposons seulement que$\mathbb{E}[fe^{-f}] < \infty$ et $f \in L^p(\mu)$ pour un certain $p > 1$. La preuve d'Üstünel's consiste à approcher f avec des fonctions H-C^1 et d'ensuite utiliser des perturbations H-C^1, qui sont inversibles, obtenues en utilisant ces fonctions. Cette abroche est profondemment encrée dans le modèle brownien, parce qu'elle s'appuie sur des outils sophistiqu''es d'analyse stochastique développés dans le cadre gaussien. Ici nous écrivons la densité $\frac{e^{-f}}{\mathbb{E}[e^{-f}]}$ comme une exponentielle de Wick d'un certain v puis approchons v avec des perturbations rettardées qui sont inversibles. Comme nous travaillonosu la loi d'une diffusion et non la mesure de Wiener, les perturbations considéreées ne sont pas affines. Nous travaillons sur $\mathbb{W}$ muni de la mesure image de (V, B) que nous notons $\mu^{\mathbb{X}}$ et nous construisons un mouvement brownien $\beta_{\mathbb{X}}$ qur W qui vérifie

$$W(t) = c + \int_0^t \sigma(W(s))d\beta_{\mathbb{X}}(s) + \int_0^t b(W(s))ds$$

Nous considérons uniquement les perturbations qui vérifient la condition de Girsanov. Si u est une telle eprturbation, nous notons X^u la solution de l'̧quation différentielle stochastique

$$X^u = c + \int_0^t \sigma(X^u(s))d\left(\beta_{\mathbb{X}} + u\right)(s) + \int_0^t b(X^u(s))ds$$

et $\mathbb{X}^u = (X^u, \beta_{\mathbb{X}} + u)$. $\mathbb{X}^u$ joue le même rôle que $W + u$ dans le cas brownien et est inversible si et seulement si

$$H(\mathbb{X}^u\mu^{\mathbb{X}}|\mu^{\mathbb{X}}) = \frac{1}{2}\mathbb{E}_{\mu^{\mathbb{X}}}\left[|u|_H^2\right]$$

Nous concluons le papier avec une discussion sur l'atteignabilité de l'infimum dans la formulation variationnelle.

Notre troisième papier présente un cadre général pour obtenir une formulation variationnelle pour $-\log \mathbb{E}_\nu[e^{-f}]$ pour une large classe de mesures ν. Nous donnons un ensemble de conditions pour qu'un ensemble de processus (W^u) puisse agir comme des perturbations de W. L'idée principale est d'être capable de faire un changement de variable similaire à celui de Girsanov par rapport à un mouvement brownien β pour passer de W à W^u. Dans un premier temps nous voulons avoir un cadre minimal permettant d'obtenir la formulation variationelle, nous considérons seulemet les u dont la densité est p.s. bornée et nous montrons que

$$-\log \mathbb{E}_\nu\left[e^{-f}\right] = \inf_u \mathbb{E}_\nu\left[f \circ W^u + \frac{1}{2}|u|_H^2\right]$$

où l'infimum est pris sur les u dont la densité est p.s. bornée, donnant donc une description plus fine de l'infimum. Les hypothèses d'intégrabiité sur f restent les même que dans le cas d'une diffusion. Dans un second temps, nous étudions les possibilités d'extension du domaine sur lequel l'infimum est pris, pour obtenir des résultats de calcul variationnel, portant principalement sur l'atteignabilité

de l'infimum, et des résultats d'inversibilité. En effet, nous prouvons encore une fois que W^u est inversible si et seulement si

$$H(W^u\nu|\nu) = \frac{1}{2}\mathbb{E}_\nu\left[|u|_H^2\right]$$

and in case of invertibility its inverse is of the form W^v. De plus, l'inversibilité de W^u peut être reliée à l'existence de solutions fortes d'équations différentielle stochastiques. Si W^u peut être écrit $W + w^u$, avec $w^u \in L^0(\nu, H)$ adapté, et est inversible, son inverse W^v vérifie

$$dW^v(t) = -\dot{\overbrace{w^u}}(t) \circ W^v dt + dW(t)$$

Nous démontrons aussi un théorème de Prékopa-Leindler sur $\mathbb{W}$ pour la mesure ν, cependant la complexité des hypothèses semble contraingnante.
Nous appliquons ce cadre général à de nombreux exemples. Nous retrouvons d'abord le cas de la mesure image d'une diffusion du second papier, et nous étudions ensuite le cas de la mesure image d'un pont Brownien, d'une mesure de boucle, et finalement de la mesure image d'un ensemble de particules qui diffusent. Le comportement de particules qui diffusent satisfait un système différentiel stochastique étudié par Cépa an et Lepingle dans [3], ainsi que Rogers et Shi dans [19]. Nous nous focalisons sur le cas où le système différentiel stochastique vérifié par les particules$(Z_1, ..., Z_n)$ est de la forme

$$\begin{aligned}
Z_1(t) &= z_1(0) + \sigma B_1(t) + b\int_0^t Z_1(s)ds + ct + \gamma \sum_{j\in\{1,\dots,n\}\setminus\{1\}} \int_0^t \frac{ds}{Z_1(s) - Z_j(s)} \\
&\vdots \\
Z_n(t) &= z_n(0) + \sigma B_n(t) + b\int_0^t Z_n(s)ds + ct + \gamma \sum_{j\in\{1,\dots,n\}\setminus\{n\}} \int_0^t \frac{ds}{Z_n(s) - Z_j(s)}
\end{aligned}$$

où $(B_1, ..., B_n)$ est un mouvement brownien à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ et $\sigma^2 \leq 2\gamma$, ce qui garantie l'absence de collisions.
Notre quatrième papier se focalise sur l'obtention d'une formulation variationnelle pour $-\log \mathbb{E}_\nu\left[e^{-f}|\mathcal{F}_\tau\right]$, où τ est un temps d'arrêt. La relation 2.0.3, obtenue pour un temps déterministes t, est très semblable à 2.0.1, on se pose donc naturellement trois questions: peut-on obtenir une relation similaire à 2.0.2 pour l'espérance conditionnelle, peut-on l'étendre à d'autres mesures avec le cadre développé dans notre troisième papier, et finalement ces relations restent-elles valides si on remplace t par un temps d'arrêt τ? Notre papier répond affirmativement à ces trois questions. Nous gardons les notations de notre troisième papier et montrons que

$$-\log \mathbb{E}_\nu\left[e^{-f}\middle|\mathcal{F}_\tau\right] = \inf_\theta\left(\mathbb{E}_\nu\left[f|\mathcal{F}_\tau\right] + \mathbb{E}_\nu\left[\frac{d\theta}{d\nu}\log\frac{d\theta}{d\nu}\middle|\mathcal{F}_\tau\right]\right) \tag{1.0.19}$$

$$-\log \mathbb{E}_\nu\left[e^{-f}\middle|\mathcal{F}_\tau\right] = \inf_u \mathbb{E}_\nu\left[f\circ W^u + \frac{1}{2}|u|_H^2\middle|\mathcal{F}_\tau\right] \tag{1.0.20}$$

Dans 2.0.4 nous supposons que $\mathbb{E}_\nu\left[fe^{-f}\right] < \infty$ et l'infimum est pris sur l'ensemble des mesures de probabilité θ sur W qui sont absolument continues sur $\mathbb{W}$ par rapport à ν et telles que$\mathbb{E}_\nu\left[\frac{d\theta}{d\nu}|\mathcal{F}_t\right] = 1$. Dans 2.0.5, l'infimum est pris sur les u e W dans H, avec densité adapté, qui sont dans L^2 et tels que $1_{t\leq\tau}\dot{u}(t) = 0$, et nous supposons qu'il existe deux entiers naturels conjugués p et q tels que

$f \in L^p(\nu)$ et $e^{-f} \in L^q(\nu)$. Remarquons que nous avons du renforcer les hypothèses d'intégrabilité sur f par rapport au cas non-conditionnel. En fait les hypothèses d'int''egrabilité sur f sont les même que dans[25]. Comme dans notre troisième papier, nous obtenons un résultat similaire au théorème de Prékopa-Leindler theorem pour l'espérance conditionnelle, mais les hypothèses d(intégrabilité semblent contraignantes. Notons $\mathbb{W}$ l'espace des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}^n$ et H l'espace de Cameron-Martin associé, constitué des éléments de $\mathbb{W}$ qui admettent une densité dans L^2. Notons aussi μ la mesure de Wiener, W le processus des coordonnée tet $(\mathcal{F}_t)$ la filtration canonique de W complètée par rapport μ. W est un mouvement Brownien sous μ. Soit f une fonction bornée inférieurement de $\mathbb{W}$ dans $\mathbb{R}$. Dans [5], Dupuis and Ellis prouvent que

$$-\log \mathbb{E}_\mu \left[e^{-f}\right] = \inf_\theta \left(\mathbb{E}_\theta\left[f\right] + H(\theta|\mu)\right) \tag{1.0.21}$$

où l'infimum est pris sur l'ensemble des probabilités θ sur $\mathbb{W}$ qui sont absoluement continues par rapport à μ et dont l'entropie relative $H(\theta|\mu)$ est égale à $\mathbb{E}_\mu\left[\frac{d\theta}{d\mu}\log\frac{d\theta}{d\mu}\right]$. Dans [1], Boué et Dupuis utilise cette relation pour obtenir la formule variationnelle

$$-\log \mathbb{E}_\mu \left[e^{-f}\right] = \inf_u \mathbb{E}_\mu\left[f\circ(W+u) + \frac{1}{2}\int_0^1 |\dot{u}(s)|^2 ds\right] \tag{1.0.22}$$

où l'infimum est pris sur les fonctions L^2 de $\mathbb{W}$ dans H dont la densité est adaptée à $(\mathcal{F}_t)$. Cette formulation variationnelle est utile pour obtenir des grandes déviations asymptotiques telles que des principes de Laplace pour des diffusions avec bruit faible par exemple. Ce résultat a été étendu plus tard par Budhiraja et Dupuis aux mouvements browniens à valeurs dans des espaces de Hilbert dans [2], et ensuite par Zhang aux espaces de Wiener abstraits dans [27], en utilisant le cadre développé par Üstünel et Zakai dasn [21].

La première formulation du théorème de Prékopa-Leindler a été donnée par Prékopa dans [17] et survient dans le domaine de la programmation stochastique où de nombreux problmes d'optimization non-linéaire nécécitent des hypothèses de convexité. Dans [8], Huu Hariya utilise la formulation variationelle pour retrouver un théorème de Prékopa-Leindler theorem pour l'espace de Wiener, semblable au résultat de Üstünel et Feyel dans [7] sur les mesures log-concaves. D'autres inégalités fonctionnelles peuvent %tre obtenues de 2.0.2, par exemple par Lehec dans [15].

Hyndman et Wang ont montr dans [13] que

$$-\log \mathbb{E}_\mu\left[e^{-f}\middle|\mathcal{F}_t\right] = \inf_\theta\left(\mathbb{E}_\theta\left[f|\mathcal{F}_t\right] + \mathbb{E}_\theta\left[\log\frac{d\theta}{d\mu}\middle|\mathcal{F}_t\right]\right) \tag{1.0.23}$$

où l'infimum est pris sur les mesures de probabilité θ qui sont absoluement continues par rapport à μ et vérifient $\mathbb{E}_\mu\left[\frac{d\theta}{d\mu}|\mathcal{F}_t\right] = 1$. Ils relient cette formulation aux équations différentielles stochastiques forward-backward et l'appliquent à divers problèmes d'évaluation de zero-coupons.

L'hypothèse bornée inférieurement a été significativement affaiblie par Üstünel dans [25], elle a été remplacée par la condition

$$\mathbb{E}_\mu\left[fe^{-f}\right] < \infty$$

et l'existence d'entier naturels conjugués p et q tels quea

$$f \in L^p(\mu), e^{-f} \in L^q(\mu)$$

Ces hypothèse relaxées ont permis de nouvelles applications. La possibilité d'utiliser des functions non-bornées est essentielle dans les application de Dabrowski de 2.0.2 à l'entropie libre dans [4]. L'approche d'Üstünel s'appuie sur l'étude des perturbations de l'identité de$\mathbb{W}$, qui est le processus coordonnée, et de leur inversibilité. La question de l'inversibilité d'une perturbation adaptée de l'identité est liée à la représentabilité des mesures et a été mis en lumière par le célèbre exemple de Tsirelson [20]. Üstünel a montr'e que si $u \in L^2(\mu, H)$ et sa densité est adaptée, $I_{\mathbb{W}} + u$ est μ-p.s. inversible si et seulement si

$$H((I_{\mathbb{W}} + u)\mu|\mu) = \frac{1}{2}\mathbb{E}_\mu\left[|u|_H^2\right]$$

Si u satisfait les hypothèses du théorème de Girsanov, cela donne un critère d'existence de solutions fortes d'équations différentielles stochastiques. En effet, Üstünel montre dans [24] que si $I_{\mathbb{W}} + u$ est inversible, son inverse V est une solution forte de l'équation différentielle stochastique

$$dV(t) = -\dot{u}(t) \circ V dt + dW(t)$$

Pour prouver 2.0.2 avec les hypothèses d'intégrabilité spécifiées au précédemmentw, Üstünel utilise le fait que les perturbations qui son H-C^1, c'est à dire les perturbations qui sont p.s. Fréchet-différentiables sur H avec une différentielle de Fréchet p.s. continue sur H, sont p.s. inversibles, et que toute perturbation peut être approchée par des perturbations H-C^1 en utilisant le semigroupe d'Ornstein-Uhlenbeck.

Notre premier papier traite des fonctions H-C^1 functions, dont l'utilité a été discutée précédemment dans les problèmes d'inversibilité. La dérivée de malliavin usuelle ∇ est définie comme la dérivée faible dans les directions de H sur les fonctions cylindriqueside la forme $F(W_{t_1}, ..., W_{t_m})$: si f est cylindrique et h appartient à H

$$\nabla_h f(w) = \frac{d}{d\lambda} f(w + \lambda h)\bigg|_{\lambda=0}$$

Le théorème de Riesz assure que ∇f peut être vu comme un élément de H. ∇ est fermable et on définit $\mathbb{D}_{p,1}$ comme le complété de l'ensemble des fonctions cylindrique pour la norme

$$|.|_{p,1} f :\mapsto |f|_{L^p(\mu)} + |\nabla f|_{L^p(\mu,H)}$$

Par récurrence, on peut définir les dérivées faibles ou fortes d'ordre supérieur dans les directions de H. Il est bien sûr plus difffcile de montrer qu'unequ'une fonction est $H - C^d$ que de prouver qu'elle appartient à un $\mathbb{D}_{p,d}$. Le semi-groupe d'Ornstein-Uhlenbeck (P_t) est définis comme suit

$$P_t f(w) = \int_{\mathbb{W}} f\left(e^{-t}w + \sqrt{1 - e^{-2t}}y\right)\mu(dy)$$

En se basant sur le travail de Kusuoka dans [14], Üstünel a montré dans [22] que si une fonction f est dans un $L^p(\mu)$, alors $P_t f$ est $H - C^\infty$ et même analytique dasns les directions de H. Nous utilisons ce résulatat pour donner un critère relativement simple pour obtenir la différentiabilité forte dans les directions de H: si f appartient à un $\mathbb{D}_{p,d}$ et $\nabla^d f$ est μ-p.s. uniformemment continue sur toute boule de H centrée en zéro, alors f est $H - C^d$ et ses dérivées fortes jusquà l'ordre n sont égales à ses dérivées faibles du même ordre.

Notre second papier est centré sur l'obtention d'une formulation variationnelle similaire à 2.0.2 dans le cas d'une diffusion V qui vérifie une équation différentielle stochastique

$$V(t) = c + \int_0^t \sigma(V(s))dB(s) + \int_0^t b(V(s))ds$$

où B est un mouvement brownien, généralisant donc le cas d'un mouvement brownien. Nous affaiblissons aussi les hypothèses d'intégrabilité sur f puisque nous supposons seulement que$\mathbb{E}[fe^{-f}] < \infty$ et $f \in L^p(\mu)$ pour un certain $p > 1$. La preuve d'Üstünel's consiste à approcher f avec des fonctions H-C^1 et d'ensuite utiliser des perturbations H-C^1, qui sont inversibles, obtenues en utilisant ces fonctions. Cette abroche est profondemment encrée dans le modèle brownien, parce qu'elle s'appuie sur des outils sophistiqu''es d'analyse stochastique développés dans le cadre gaussien. Ici nous écrivons la densité $\frac{e^{-f}}{\mathbb{E}[e^{-f}]}$ comme une exponentielle de Wick d'un certain v puis approchons v avec des perturbations rettardées qui sont inversibles. Comme nous travaillonosu la loi d'une diffusion et non la mesure de Wiener, les perturbations considéreées ne sont pas affines. Nous travaillons sur $\mathbb{W}$ muni de la mesure image de (V, B) que nous notons $\mu^{\mathbb{X}}$ et nous construisons un mouvement brownien $\beta_{\mathbb{X}}$ qur W qui vérifie

$$W(t) = c + \int_0^t \sigma(W(s))d\beta_{\mathbb{X}}(s) + \int_0^t b(W(s))ds$$

Nous considérons uniquement les perturbations qui vérifient la condition de Girsanov. Si u est une telle eprturbation, nous notons X^u la solution de l'q̀uation différentielle stochastique

$$X^u = c + \int_0^t \sigma(X^u(s))d\left(\beta_{\mathbb{X}} + u\right)(s) + \int_0^t b(X^u(s))ds$$

et $\mathbb{X}^u = (X^u, \beta_{\mathbb{X}} + u)$. $\mathbb{X}^u$ joue le même rôle que $W + u$ dans le cas brownien et est inversible si et seulement si

$$H(\mathbb{X}^u\mu^{\mathbb{X}}|\mu^{\mathbb{X}}) = \frac{1}{2}\mathbb{E}_{\mu^{\mathbb{X}}}\left[|u|_H^2\right]$$

Nous concluons le papier avec une discussion sur l'atteignabilité de l'infimum dans la formulation variationnelle.

Notre troisième papier présente un cadre général pour obtenir une formulation variationnelle pour $-\log \mathbb{E}_\nu[e^{-f}]$ pour une large classe de mesures ν. Nous donnons un ensemble de conditions pour qu'un ensemble de processus (W^u) puisse agir comme des perturbations de W. L'idée principale est d'être capable de faire un changement de variable similaire à celui de Girsanov par rapport à un mouvement brownien β pour passer de W à W^u. Dans un premier temps nous voulons avoir un cadre minimal permettant d'obtenir la formulation variationelle, nous considérons seulemet les u dont la densité est p.s. bornée et nous montrons que

$$-\log \mathbb{E}_\nu\left[e^{-f}\right] = \inf_u \mathbb{E}_\nu\left[f \circ W^u + \frac{1}{2}|u|_H^2\right]$$

où l'infimum est pris sur les u dont la densité est p.s. bornée, donnant donc une description plus fine de l'infimum. Les hypothèses d'intégrabiité sur f restent les même que dans le cas d'une diffusion. Dans un second temps, nous étudions les possibilités d'extension du domaine sur lequel l'infimum est pris, pour obtenir des résultats de calcul variationnel, portant principalement sur l'atteignabilité

de l'infimum, et des résultats d'inversibilité. En effet, nous prouvons encore une fois que W^u est inversible si et seulement si

$$H(W^u\nu|\nu) = \frac{1}{2}\mathbb{E}_\nu\left[|u|_H^2\right]$$

and in case of invertibility its inverse is of the form W^v. De plus, l'inversibilité de W^u peut être reliée à l'existence de solutions fortes d'équations différentielle stochastiques. Si W^u peut être écrit $W + w^u$, avec $w^u \in L^0(\nu, H)$ adapté, et est inversible, son inverse W^v vérifie

$$dW^v(t) = -\dot{\widehat{w^u}}(t) \circ W^v dt + dW(t)$$

Nous démontrons aussi un théorème de Prékopa-Leindler sur $\mathbb{W}$ pour la mesure ν, cependant la complexité des hypothèses semble contraingnante.
Nous appliquons ce cadre général à de nombreux exemples. Nous retrouvons d'abord le cas de la mesure image d'une diffusion du second papier, et nous étudions ensuite le cas de la mesure image d'un pont Brownien, d'une mesure de boucle, et finalement de la mesure image d'un ensemble de particules qui diffusent. Le comportement de particules qui diffusent satisfait un système différentiel stochastique étudié par Cépa an et Lepingle dans [3], ainsi que Rogers et Shi dans [19]. Nous nous focalisons sur le cas où le système différentiel stochastique vérifié par les particules$(Z_1, ..., Z_n)$ est de la forme

$$\begin{aligned}
Z_1(t) &= z_1(0) + \sigma B_1(t) + b\int_0^t Z_1(s)ds + ct + \gamma \sum_{j\in\{1,\dots,n\}\backslash\{1\}} \int_0^t \frac{ds}{Z_1(s) - Z_j(s)} \\
&\vdots \\
Z_n(t) &= z_n(0) + \sigma B_n(t) + b\int_0^t Z_n(s)ds + ct + \gamma \sum_{j\in\{1,\dots,n\}\backslash\{n\}} \int_0^t \frac{ds}{Z_n(s) - Z_j(s)}
\end{aligned}$$

où $(B_1, ..., B_n)$ est un mouvement brownien à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ et $\sigma^2 \leq 2\gamma$, ce qui garantie l'absence de collisions.
Notre quatrième papier se focalise sur l'obtention d'une formulation variationnelle pour $-\log \mathbb{E}_\nu\left[e^{-f}|\mathcal{F}_\tau\right]$, où τ est un temps d'arrêt. La relation 2.0.3, obtenue pour un temps déterministes t, est très semblable à 2.0.1, on se pose donc naturellement trois questions: peut-on obtenir une relation similaire à 2.0.2 pour l'espérance conditionnelle, peut-on l'étendre à d'autres mesures avec le cadre développé dans notre troisième papier, et finalement ces relations restent-elles valides si on remplace t par un temps d'arrêt τ? Notre papier répond affirmativement à ces trois questions. Nous gardons les notations de notre troisième papier et montrons que

$$-\log \mathbb{E}_\nu\left[e^{-f}\middle|\mathcal{F}_\tau\right] = \inf_\theta\left(\mathbb{E}_\nu\left[f|\mathcal{F}_\tau\right] + \mathbb{E}_\nu\left[\frac{d\theta}{d\nu}\log\frac{d\theta}{d\nu}\middle|\mathcal{F}_\tau\right]\right) \quad (1.0.24)$$

$$-\log \mathbb{E}_\nu\left[e^{-f}\middle|\mathcal{F}_\tau\right] = \inf_u \mathbb{E}_\nu\left[f\circ W^u + \frac{1}{2}|u|_H^2\middle|\mathcal{F}_\tau\right] \quad (1.0.25)$$

Dans 2.0.4 nous supposons que $\mathbb{E}_\nu\left[fe^{-f}\right] < \infty$ et l'infimum est pris sur l'ensemble des mesures de probabilité θ sur W qui sont absolument continues sur $\mathbb{W}$ par rapport à ν et telles que$\mathbb{E}_\nu\left[\frac{d\theta}{d\nu}|\mathcal{F}_t\right] = 1$.
Dans 2.0.5, l'infimum est pris sur les u e W dans H, avec densité adapté, qui sont dans L^2 et tels que $1_{t\leq\tau}\dot{u}(t) = 0$, et nous supposons qu'il existe deux entiers naturels conjugués p et q tels que

$f \in L^p(\nu)$ et $e^{-f} \in L^q(\nu)$. Remarquons que nous avons du renforcer les hypothèses d'intégrabilité sur f par rapport au cas non-conditionnel. En fait les hypothèses d'int''egrabilité sur f sont les même que dans[25]. Comme dans notre troisième papier, nous obtenons un résultat similaire au théorème de Prékopa-Leindler theorem pour l'espérance conditionnelle, mais les hypothèses d(intégrabilité semblent contraignantes. Notons $\mathbb{W}$ l'espace des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}^n$ et H l'espace de Cameron-Martin associé, constitué des éléments de $\mathbb{W}$ qui admettent une densité dans L^2. Notons aussi μ la mesure de Wiener, W le processus des coordonnée tet $(\mathcal{F}_t)$ la filtration canonique de W complètée par rapport μ. W est un mouvement Brownien sous μ. Soit f une fonction bornée inférieurement de $\mathbb{W}$ dans $\mathbb{R}$. Dans [5], Dupuis and Ellis prouvent que

$$-\log \mathbb{E}_\mu \left[e^{-f}\right] = \inf_\theta \left(\mathbb{E}_\theta\left[f\right] + H(\theta|\mu)\right) \tag{1.0.26}$$

où l'infimum est pris sur l'ensemble des probabilités θ sur $\mathbb{W}$ qui sont absoluement continues par rapport à μ et dont l'entropie relative $H(\theta|\mu)$ est égale à $\mathbb{E}_\mu\left[\frac{d\theta}{d\mu}\log\frac{d\theta}{d\mu}\right]$. Dans [1], Boué et Dupuis utilise cette relation pour obtenir la formule variationnelle

$$-\log \mathbb{E}_\mu \left[e^{-f}\right] = \inf_u \mathbb{E}_\mu \left[f \circ (W+u) + \frac{1}{2}\int_0^1 |\dot{u}(s)|^2 ds\right] \tag{1.0.27}$$

où l'infimum est pris sur les fonctions L^2 de $\mathbb{W}$ dans H dont la densité est adaptée à $(\mathcal{F}_t)$. Cette formulation variationnelle est utile pour obtenir des grandes déviations asymptotiques telles que des principes de Laplace pour des diffusions avec bruit faible par exemple. Ce résultat a été étendu plus tard par Budhiraja et Dupuis aux mouvements browniens à valeurs dans des espaces de Hilbert dans [2], et ensuite par Zhang aux espaces de Wiener abstraits dans [27], en utilisant le cadre développé par Üstünel et Zakai dasn [21].

La première formulation du théorème de Prékopa-Leindler a été donnée par Prékopa dans [17] et survient dans le domaine de la programmation stochastique où de nombreux problmes d'optimization non-linéaire nécécitent des hypothèses de convexité. Dans [8], Huu Hariya utilise la formulation variationelle pour retrouver un théorème de Prékopa-Leindler theorem pour l'espace de Wiener, semblable au résultat de Üstünel et Feyel dans [7] sur les mesures log-concaves. D'autres inégalités fonctionnelles peuvent %tre obtenues de 2.0.2, par exemple par Lehec dans [15].

Hyndman et Wang ont montr dans [13] que

$$-\log \mathbb{E}_\mu \left[e^{-f}\middle|\mathcal{F}_t\right] = \inf_\theta \left(\mathbb{E}_\theta\left[f|\mathcal{F}_t\right] + \mathbb{E}_\theta\left[\log\frac{d\theta}{d\mu}\middle|\mathcal{F}_t\right]\right) \tag{1.0.28}$$

où l'infimum est pris sur les mesures de probabilité θ qui sont absoluement continues par rapport à μ et vérifient $\mathbb{E}_\mu\left[\frac{d\theta}{d\mu}|\mathcal{F}_t\right] = 1$. Ils relient cette formulation aux équations différentielles stochastiques forward-backward et l'appliquent à divers problèmes d'évaluation de zero-coupons.

L'hypothèse bornée inférieurement a été significativement affaiblie par Üstünel dans [25], elle a été remplacée par la condition

$$\mathbb{E}_\mu\left[fe^{-f}\right] < \infty$$

et l'existence d'entier naturels conjugués p et q tels quea

$$f \in L^p(\mu), e^{-f} \in L^q(\mu)$$

Ces hypothèse relaxées ont permis de nouvelles applications. La possibilité d'utiliser des functions non-bornées est essentielle dans les application de Dabrowski de 2.0.2 à l'entropie libre dans [4]. L'approche d'Üstünel s'appuie sur l'étude des perturbations de l'identité de$\mathbb{W}$, qui est le processus coordonnée, et de leur inversibilité. La question de l'inversibilité d'une perturbation adaptée de l'identité est liée à la représentabilité des mesures et a été mis en lumière par le célèbre exemple de Tsirelson [20]. Üstünel a montr'e que si $u \in L^2(\mu, H)$ et sa densité est adaptée, $I_{\mathbb{W}} + u$ est μ-p.s. inversible si et seulement si

$$H((I_{\mathbb{W}} + u)\mu|\mu) = \frac{1}{2}\mathbb{E}_\mu\left[|u|_H^2\right]$$

Si u satisfait les hypothèses du théorème de Girsanov, cela donne un critère d'existence de solutions fortes d'équations différentielles stochastiques. En effet, Üstünel montre dans [24] que si $I_{\mathbb{W}} + u$ est inversible, son inverse V est une solution forte de l'équation différentielle stochastique

$$dV(t) = -\dot{u}(t) \circ V dt + dW(t)$$

Pour prouver 2.0.2 avec les hypothèses d'intégrabilité spécifiées au précédemmentw, Üstünel utilise le fait que les perturbations qui son H-C^1, c'est à dire les perturbations qui sont p.s. Fréchet-différentiables sur H avec une différentielle de Fréchet p.s. continue sur H, sont p.s. inversibles, et que toute perturbation peut être approchée par des perturbations H-C^1 en utilisant le semigroupe d'Ornstein-Uhlenbeck.

Notre premier papier traite des fonctions H-C^1 functions, dont l'utilité a été discutée précédemment dans les problèmes d'inversibilité. La dérivée de malliavin usuelle ∇ est définie comme la dérivée faible dans les directions de H sur les fonctions cylindriqueside la forme $F(W_{t_1}, ..., W_{t_m})$: si f est cylindrique et h appartient à H

$$\nabla_h f(w) = \left.\frac{d}{d\lambda} f(w + \lambda h)\right|_{\lambda=0}$$

Le théorème de Riesz assure que ∇f peut être vu comme un élément de H. ∇ est fermable et on définit $\mathbb{D}_{p,1}$ comme le complété de l'ensemble des fonctions cylindrique pour la norme

$$|.|_{p,1} f :\mapsto |f|_{L^p(\mu)} + |\nabla f|_{L^p(\mu,H)}$$

Par récurrence, on peut définir les dérivées faibles ou fortes d'ordre supérieur dans les directions de H. Il est bien sûr plus difffcile de montrer qu'unequ'une fonction est $H - C^d$ que de prouver qu'elle appartient à un $\mathbb{D}_{p,d}$. Le semi-groupe d'Ornstein-Uhlenbeck (P_t) est définis comme suit

$$P_t f(w) = \int_{\mathbb{W}} f\left(e^{-t} w + \sqrt{1 - e^{-2t}} y\right) \mu(dy)$$

En se basant sur le travail de Kusuoka dans [14], Üstünel a montré dans [22] que si une fonction f est dans un $L^p(\mu)$, alors $P_t f$ est $H - C^\infty$ et même analytique dasns les directions de H. Nous utilisons ce résulatat pour donner un critère relativement simple pour obtenir la différentiabilité forte dans les directions de H: si f appartient à un $\mathbb{D}_{p,d}$ et $\nabla^d f$ est μ-p.s. uniformemment continue sur toute boule de H centrée en zéro, alors f est $H - C^d$ et ses dérivées fortes jusquà l'ordre n sont égales à ses dérivées faibles du même ordre.

Notre second papier est centré sur l'obtention d'une formulation variationnelle similaire à 2.0.2 dans le cas d'une diffusion V qui vérifie une équation différentielle stochastique

$$V(t) = c + \int_0^t \sigma(V(s))dB(s) + \int_0^t b(V(s))ds$$

où B est un mouvement brownien, généralisant donc le cas d'un mouvement brownien. Nous affaiblissons aussi les hypothèses d'intégrabilité sur f puisque nous supposons seulement que$\mathbb{E}[fe^{-f}] < \infty$ et $f \in L^p(\mu)$ pour un certain $p > 1$. La preuve d'Üstünel's consiste à approcher f avec des fonctions H-C^1 et d'ensuite utiliser des perturbations H-C^1, qui sont inversibles, obtenues en utilisant ces fonctions. Cette abroche est profondemment encrée dans le modèle brownien, parce qu'elle s'appuie sur des outils sophistiqu''es d'analyse stochastique développés dans le cadre gaussien. Ici nous écrivons la densité $\frac{e^{-f}}{\mathbb{E}[e^{-f}]}$ comme une exponentielle de Wick d'un certain v puis approchons v avec des perturbations rettardées qui sont inversibles. Comme nous travaillonosu la loi d'une diffusion et non la mesure de Wiener, les perturbations considéreées ne sont pas affines. Nous travaillons sur $\mathbb{W}$ muni de la mesure image de (V, B) que nous notons $\mu^{\mathbb{X}}$ et nous construisons un mouvement brownien $\beta_{\mathbb{X}}$ qur W qui vérifie

$$W(t) = c + \int_0^t \sigma(W(s))d\beta_{\mathbb{X}}(s) + \int_0^t b(W(s))ds$$

Nous considérons uniquement les perturbations qui vérifient la condition de Girsanov. Si u est une telle eprturbation, nous notons X^u la solution de l'q̂uation différentielle stochastique

$$X^u = c + \int_0^t \sigma(X^u(s))d\left(\beta_{\mathbb{X}} + u\right)(s) + \int_0^t b(X^u(s))ds$$

et $\mathbb{X}^u = (X^u, \beta_{\mathbb{X}} + u)$. $\mathbb{X}^u$ joue le même rôle que $W + u$ dans le cas brownien et est inversible si et seulement si

$$H(\mathbb{X}^u \mu^{\mathbb{X}} | \mu^{\mathbb{X}}) = \frac{1}{2}\mathbb{E}_{\mu^{\mathbb{X}}}\left[|u|_H^2\right]$$

Nous concluons le papier avec une discussion sur l'atteignabilité de l'infimum dans la formulation variationnelle.

Notre troisième papier présente un cadre général pour obtenir une formulation variationnelle pour $-\log \mathbb{E}_\nu[e^{-f}]$ pour une large classe de mesures ν. Nous donnons un ensemble de conditions pour qu'un ensemble de processus (W^u) puisse agir comme des perturbations de W. L'idée principale est d'être capable de faire un changement de variable similaire à celui de Girsanov par rapport à un mouvement brownien β pour passer de W à W^u. Dans un premier temps nous voulons avoir un cadre minimal permettant d'obtenir la formulation variationelle, nous considérons seulemet les u dont la densité est p.s. bornée et nous montrons que

$$-\log \mathbb{E}_\nu\left[e^{-f}\right] = \inf_u \mathbb{E}_\nu\left[f \circ W^u + \frac{1}{2}|u|_H^2\right]$$

où l'infimum est pris sur les u dont la densité est p.s. bornée, donnant donc une description plus fine de l'infimum. Les hypothèses d'intégrabiité sur f restent les même que dans le cas d'une diffusion. Dans un second temps, nous étudions les possibilités d'extension du domaine sur lequel l'infimum est pris, pour obtenir des résultats de calcul variationnel, portant principalement sur l'atteignabilité

de l'infimum, et des résultats d'inversibilité. En effet, nous prouvons encore une fois que W^u est inversible si et seulement si

$$H(W^u\nu|\nu) = \frac{1}{2}\mathbb{E}_\nu\left[|u|_H^2\right]$$

and in case of invertibility its inverse is of the form W^v. De plus, l'inversibilité de W^u peut être reliée à l'existence de solutions fortes d'équations différentielle stochastiques. Si W^u peut être écrit $W + w^u$, avec $w^u \in L^0(\nu, H)$ adapté, et est inversible, son inverse W^v vérifie

$$dW^v(t) = -\overset{\cdot}{\overbrace{w^u}}(t) \circ W^v dt + dW(t)$$

Nous démontrons aussi un théorème de Prékopa-Leindler sur $\mathbb{W}$ pour la mesure ν, cependant la complexité des hypothèses semble contraingnante.
Nous appliquons ce cadre général à de nombreux exemples. Nous retrouvons d'abord le cas de la mesure image d'une diffusion du second papier, et nous étudions ensuite le cas de la mesure image d'un pont Brownien, d'une mesure de boucle, et finalement de la mesure image d'un ensemble de particules qui diffusent. Le comportement de particules qui diffusent satisfait un système différentiel stochastique étudié par Cépa an et Lepingle dans [3], ainsi que Rogers et Shi dans [19]. Nous nous focalisons sur le cas où le système différentiel stochastique vérifié par les particules$(Z_1, ..., Z_n)$ est de la forme

$$\begin{aligned}
Z_1(t) &= z_1(0) + \sigma B_1(t) + b\int_0^t Z_1(s)ds + ct + \gamma \sum_{j\in\{1,\ldots,n\}\setminus\{1\}} \int_0^t \frac{ds}{Z_1(s) - Z_j(s)} \\
&\vdots \\
Z_n(t) &= z_n(0) + \sigma B_n(t) + b\int_0^t Z_n(s)ds + ct + \gamma \sum_{j\in\{1,\ldots,n\}\setminus\{n\}} \int_0^t \frac{ds}{Z_n(s) - Z_j(s)}
\end{aligned}$$

où $(B_1, ..., B_n)$ est un mouvement brownien à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ et $\sigma^2 \leq 2\gamma$, ce qui garantie l'absence de collisions.
Notre quatrième papier se focalise sur l'obtention d'une formulation variationnelle pour $-\log \mathbb{E}_\nu\left[e^{-f}|\mathcal{F}_\tau\right]$, où τ est un temps d'arrêt. La relation 2.0.3, obtenue pour un temps déterministes t, est très semblable à 2.0.1, on se pose donc naturellement trois questions: peut-on obtenir une relation similaire à 2.0.2 pour l'espérance conditionnelle, peut-on l'étendre à d'autres mesures avec le cadre développé dans notre troisième papier, et finalement ces relations restent-elles valides si on remplace t par un temps d'arrêt τ? Notre papier répond affirmativement à ces trois questions. Nous gardons les notations de notre troisième papier et montrons que

$$-\log \mathbb{E}_\nu\left[e^{-f}\middle|\mathcal{F}_\tau\right] = \inf_\theta \left(\mathbb{E}_\nu\left[f|\mathcal{F}_\tau\right] + \mathbb{E}_\nu\left[\frac{d\theta}{d\nu}\log\frac{d\theta}{d\nu}\middle|\mathcal{F}_\tau\right]\right) \tag{1.0.29}$$

$$-\log \mathbb{E}_\nu\left[e^{-f}\middle|\mathcal{F}_\tau\right] = \inf_u \mathbb{E}_\nu\left[f\circ W^u + \frac{1}{2}|u|_H^2\middle|\mathcal{F}_\tau\right] \tag{1.0.30}$$

Dans 2.0.4 nous supposons que $\mathbb{E}_\nu\left[fe^{-f}\right] < \infty$ et l'infimum est pris sur l'ensemble des mesures de probabilité θ sur W qui sont absolument continues sur $\mathbb{W}$ par rapport à ν et telles que$\mathbb{E}_\nu\left[\frac{d\theta}{d\nu}|\mathcal{F}_t\right] = 1$. Dans 2.0.5, l'infimum est pris sur les u e W dans H, avec densité adapté, qui sont dans L^2 et tels que $1_{t\leq\tau}\dot{u}(t) = 0$, et nous supposons qu'il existe deux entiers naturels conjugués p et q tels que

$f \in L^p(\nu)$ et $e^{-f} \in L^q(\nu)$. Remarquons que nous avons du renforcer les hypothèses d'intégrabilité sur f par rapport au cas non-conditionnel. En fait les hypothèses d'int''egrabilité sur f sont les même que dans[25]. Comme dans notre troisième papier, nous obtenons un résultat similaire au théorème de Prékopa-Leindler theorem pour l'espérance conditionnelle, mais les hypothèses d(intégrabilité semblent contraignantes.

Chapter 2

Introduction

Denote $\mathbb{W}$ the space of continuous functions from $[0,1]$ to $\mathbb{R}^n$ and H the associated canonical Cameron-Martin space of elements of $\mathbb{W}$ which admit a density in L^2. Also denote μ the Wiener measure, W the coordinate process, and $(\mathcal{F}_t)$ the canonical filtration of W completed with respect to μ. W is a Brownian motion under μ. Set f a bounded from above measurable function from $\mathbb{W}$ to $\mathbb{R}$. In [5], Dupuis and Ellis prove that

$$-\log \mathbb{E}_\mu\left[e^{-f}\right] = \inf_\theta \left(\mathbb{E}_\theta\left[f\right] + H(\theta|\mu)\right) \tag{2.0.1}$$

where the infimum is taken over the probability measures θ on $\mathbb{W}$ which are absolutely continuous with respect to μ and the relative entropy $H(\theta|\mu)$ is equal to $\mathbb{E}_\mu\left[\frac{d\theta}{d\mu}\log\frac{d\theta}{d\mu}\right]$. In [1], Boué and Dupuis use it to derive the variational formulation

$$-\log \mathbb{E}_\mu\left[e^{-f}\right] = \inf_u \mathbb{E}_\mu\left[f\circ(W+u) + \frac{1}{2}\int_0^1 |\dot{u}(s)|^2 ds\right] \tag{2.0.2}$$

where the infimum is taken over L^2 functions from $\mathbb{W}$ to H whose density is adapted to $(\mathcal{F}_t)$. This variational formulation is useful to derive large deviation asymptotics as Laplace principles for small noise diffusions for instance. This result was later extended by Budhiraja and Dupuis to Hilbert-space-valued Brownian motions in [2], and then by Zhang to abstract Wiener spaces in [27], using the framework developed by Üstünel and Zakai in [21].
The Prékopa-Leindler theorem first formulation was given by Prékopa in [17] and arose in stochastic programming where a lot of non-linear optimization problems require concavity. In [8], Huu Hariya uses the variational formulation to retrieve a Prékopa-Leindler theorem for the Wiener space, similar to the formulation of Üstünel and Feyel in [7] with log-concave measures. Other functional inequalities can be derived from 2.0.2, see for instance Lehec in [15].
Hyndman and Wang proved in [13] that

$$-\log \mathbb{E}_\mu\left[e^{-f}\middle|\mathcal{F}_t\right] = \inf_\theta\left(\mathbb{E}_\theta\left[f|\mathcal{F}_t\right] + \mathbb{E}_\theta\left[\log\frac{d\theta}{d\mu}\middle|\mathcal{F}_t\right]\right) \tag{2.0.3}$$

where the infimum is taken over the probability measures θ which are absolutely continuous with respect to μ and verify $\mathbb{E}_\mu\left[\frac{d\theta}{d\mu}|\mathcal{F}_t\right] = 1$. They link it to forward-backward stochastic differential equations and apply it to various pricing problems for zero-coupon bonds.

The bounded from above hypothesis in 2.0.2 was weakened significantly by Üstünel in [25], it was replaced with the condition

$$\mathbb{E}_\mu \left[f e^{-f} \right] < \infty$$

and the existence of conjugate integers p and q such that

$$f \in L^p(\mu), e^{-f} \in L^q(\mu)$$

These relaxed hypothesis pave the way to new applications. The possibility of using unbounded functions is primordial in Dabrowski's application of 2.0.2 to free entropy in [4].
Üstünel's approach is routed in the study of the perturbations of the identity of $\mathbb{W}$, which is the coordinate process, and their invertibility. The question of the invertibility of an adapted perturbation of the identity is linked to the representability of measures and was put to light by the celebrated example of Tsirelson [20]. Üstünel proved that if $u \in L^2(\mu, H)$ and its density is adapted, $I_\mathbb{W} + u$ is μ-a.s. invertible if and only if

$$H((I_\mathbb{W} + u)\mu|\mu) = \frac{1}{2}\mathbb{E}_\mu \left[|u|_H^2 \right]$$

If u satisfies the hypothesis of Girsanov theorem, this gives a criteria of existence of strong solutions to some stochastic differential equations. Indeed, Üstünel proves in [24] that if such a $I_\mathbb{W} + u$ in invertible, its inverse V is a strong solution to the stochastic differential equation

$$dV(t) = -\dot{u}(t) \circ V dt + dW(t)$$

To prove 2.0.2 with the integrability conditions specified above, Üstünel uses the fact that H-C^1 shifts, meaning shifts that are a.s. Fréchet-differentiable on H with an a.s. continuous on H Fréchet derivative, are a.s. invertible, and that shifts can be approached with H-C^1 shifts using the Ornstein-Uhlenbeck semigroup.

Our first paper deals with H-C^1 functions, whose utility has been discussed before in invertibility problems. The usual Malliavin derivative ∇ is defined as a weak derivative in the directions of H on cylindrical functions of the form $F(W_{t_1}, ..., W_{t_m})$: if f is cylindrical and h belongs to H

$$\nabla_h f(w) = \left. \frac{d}{d\lambda} f(w + \lambda h) \right|_{\lambda=0}$$

Riesz theorem ensures that ∇f can be seen as an element of H. ∇ is a closable operator and we define $\mathbb{D}_{p,1}$ the closure of the set of the cylindrical functions for the norm

$$|.|_{p,1} f :\mapsto |f|_{L^p(\mu)} + |\nabla f|_{L^p(\mu,H)}$$

By recurrence, weak or strong derivative in the direction of H can be defined. Of course it is much harder to prove that a function is $H - C^d$ than to prove it is in some $\mathbb{D}_{p,d}$. The Ornstein-Uhlenbeck semigroup (P_t) is defined as follow

$$P_t f(w) = \int_\mathbb{W} f \left(e^{-t} w + \sqrt{1 - e^{-2t}} y \right) \mu(dy)$$

Elaborating on the work of Kusuoka in [14], Üstünel proved in [22] that if a function f is in any $L^p(\mu)$, then $P_t f$ is $H - C^\infty$ and even analytic in the directions of H. Using that, we gives a relatively simple criteria for deriving strong differentiability in the directions of H: if f is in some $\mathbb{D}_{p,d}$ and $\nabla^d f$ is μ-a.s. uniformly continuous on every zero-centered ball of H, then f is $H - C^d$ and its strong derivatives up to order d are equal to its weak derivatives of the same order.

Our second paper focuses on getting a variational formulation similar as 2.0.2 in the case of a diffusion V which verifies a stochastic differential equation

$$V(t) = c + \int_0^t \sigma(V(s))dB(s) + \int_0^t b(V(s))ds$$

where B is a Brownian motion, thus generalizing the case of the Brownian motion. We also weaken the integration hypothesis on f since we only require $\mathbb{E}[fe^{-f}] < \infty$ and $f \in L^p(\mu)$ for some $p > 1$. Üstünel's proof consists in approaching f with H-C^1 functions and then use H-C^1 shifts, which are invertible, obtained using those functions. This approach is deeply rooted in the Brownian motion specific case, since it relies on sophisticated stochastic analysis tools that were developed for a Gaussian framework. Here we write the density $\frac{e^{-f}}{\mathbb{E}[e^{-f}]}$ as the Wick exponential of some v and then approach v with retarded shifts which are invertible. Since we work under the law of a diffusion and not the Wiener measure, the perturbations of the identity we consider are not affine shifts. We work on $\mathbb{W}$ under the image measure of (V, B) that we denote $\mu^{\mathbb{X}}$ and we construct a Brownian motion $\beta_{\mathbb{X}}$ such that W verify

$$W(t) = c + \int_0^t \sigma(W(s))d\beta_{\mathbb{X}}(s) + \int_0^t b(W(s))ds$$

We only consider perturbations that verify the Girsanov condition. If u is such a perturbation, we denote X^u the solution of the stochastic differential equation

$$X^u = c + \int_0^t \sigma(X^u(s))d\left(\beta_{\mathbb{X}} + u\right)(s) + \int_0^t b(X^u(s))ds$$

and $\mathbb{X}^u = (X^u, \beta_{\mathbb{X}} + u)$. $\mathbb{X}^u$ plays the same role as $W + u$ in the Brownian case and it is invertible if and only if

$$H(\mathbb{X}^u \mu^{\mathbb{X}} | \mu^{\mathbb{X}}) = \frac{1}{2}\mathbb{E}_{\mu^{\mathbb{X}}}\left[|u|_H^2\right]$$

We conclude the paper with a discussion over the attainability of the infimum in the variational formulation.

Our third paper presents a general framework to derive a variational formulation for $-\log \mathbb{E}_\nu[e^{-f}]$ for a large class of measures ν. We give a set of conditions so that a set of processes (W^u) can act as perturbations of W. The main idea is to be able to do a Girsanov-like change of variable with respect to a Brownian motion β to go from W to W^u. At first we want to have a minimal setting to be able to compute the variational formula, we just consider the u whose density is a.s. bounded and we prove that

$$-\log \mathbb{E}_\nu\left[e^{-f}\right] = \inf_u \mathbb{E}_\nu\left[f \circ W^u + \frac{1}{2}|u|_H^2\right]$$

where the infimum is just taken over the u with a.s. bounded density, thus providing a clearer description of the infimum. The integrability hypothesis over f remain the same as in the case of a diffusion. In a second time, we study the possibilities to expand the domain over which the infimum is taken, for both variational calculus results, mainly concerning the attainability of the infimum, and invertibility results. Indeed, we prove that once again, W^u is invertible if and only if

$$H(W^u\nu|\nu) = \frac{1}{2}\mathbb{E}_\nu\left[|u|_H^2\right]$$

and in case of invertibility its inverse is of the form W^v. Furthermore, the invertibility of W^u can be related to the existence of strong solutions of stochastic differential equations in certain cases. If W^u can be written $W + w^u$, with $w^u \in L^0(\nu, H)$ adapted, and is invertible, its inverse W^v verify

$$dW^v(t) = -\overset{\cdot}{\overbrace{w^u}}(t) \circ W^v dt + dW(t)$$

We also prove a Prékopa-Leindler theorem on $\mathbb{W}$ for the measure ν, however the convexity hypothesis seem very restrictive.
We apply this framework to various examples. First we retrieve the case of the image measure of a diffusion of the second paper, and then we study the case of the image measure of a Brownian bridge, a loop measure, and finally the image measure of a set of diffusing particles. The behaving of diffusing particles satisfying a differential stochastic system was studied by Cépa and Lepingle in [3], and Rogers and Shi in [19]. We focus on the case where the stochastic differential system the particles $(Z_1, ..., Z_n)$ verify is of the form

$$\begin{aligned}
Z_1(t) &= z_1(0) + \sigma B_1(t) + b\int_0^t Z_1(s)ds + ct + \gamma \sum_{j\in\{1,...,n\}\setminus\{1\}} \int_0^t \frac{ds}{Z_1(s) - Z_j(s)} \\
&\vdots \\
Z_n(t) &= z_n(0) + \sigma B_n(t) + b\int_0^t Z_n(s)ds + ct + \gamma \sum_{j\in\{1,...,n\}\setminus\{n\}} \int_0^t \frac{ds}{Z_n(s) - Z_j(s)}
\end{aligned}$$

where $(B_1, ..., B_n)$ is a $\mathbb{R}^n$-valued Brownian motion and $\sigma^2 \leq 2\gamma$, which guarantee there is no collision.
Our fourth paper deals with deriving a variational formulation for $-\log \mathbb{E}_\nu\left[e^{-f}|\mathcal{F}_\tau\right]$, where τ is a stopping time. The relation 2.0.3, obtained for deterministic time t, is very similar to 2.0.1 so three questions arise naturally: can we obtain a relation similar to 2.0.2 for the conditional expectation, can we extend it to other measures with the framework we developed in our third paper, and finally are these relations still valid if we substitute t with a stopping time τ? Our paper answer affirmatively to these three questions. We keep the notations from our third paper and we prove that

$$-\log \mathbb{E}_\nu\left[e^{-f}\middle|\mathcal{F}_\tau\right] = \inf_\theta\left(\mathbb{E}_\nu\left[f|\mathcal{F}_\tau\right] + \mathbb{E}_\nu\left[\frac{d\theta}{d\nu}\log\frac{d\theta}{d\nu}\middle|\mathcal{F}_\tau\right]\right) \quad (2.0.4)$$

$$-\log \mathbb{E}_\nu\left[e^{-f}\middle|\mathcal{F}_\tau\right] = \inf_u \mathbb{E}_\nu\left[f\circ W^u + \frac{1}{2}|u|_H^2\middle|\mathcal{F}_\tau\right] \quad (2.0.5)$$

In 2.0.4 we assume that $\mathbb{E}_\nu\left[fe^{-f}\right] < \infty$ and the infimum is taken over the probability measure on $\mathbb{W}$ θ which are absolutely continuous with respect to ν and such that $\mathbb{E}_\nu\left[\frac{d\theta}{d\nu}|\mathcal{F}_t\right] = 1$. In 2.0.5, the infimum is taken over the u from W to H, with adapted density, which are in L^2 and such that $1_{t\leq\tau}\dot{u}(t) = 0$, and we assume that $\mathbb{E}_\nu\left[fe^{-f}\right] < \infty$ and that there exists a two conjugates integers p and q such that $f \in L^p(\nu)$ and $e^{-f} \in L^q(\nu)$. Observe that we had to increase the integrability hypothesis on f from what we had for the non-conditional case. In fact the integrability hypothesis on f here are the same as in [25]. As in our third paper, we obtain a result similar to Prékopa-Leindler theorem for the conditional expectation, but the integrability hypothesis still seem restrictive.

Chapter 3

A criteria of strong H-differentiability

We give a criteria for a Malliavin differentiable function to be strongly H-differentiable.

Keywords: Wiener space, H-C^1, strong differentiability, Malliavin derivative

3.1 Introduction

Let $\mathbb{W}$ be the classical Wiener space and H the associated Cameron-Martin space. A theory of a weak derivative over Wiener functional with respect to H directions has long been developed (see [23], [26]). More recently, Üstünel and Zakai, in [22], or Kusuoka, in [14] have studied a strong derivative for Wiener functional, using the Fréchet differentiability on H. A Wiener functional f is H-continuous, or H-C, if $h \mapsto f(w+h)$ is a.s. continuous on H, H-C^1 if $h \mapsto f(w+h)$ is a.s. Fréchet differentiable on H with H-continuous derivative. H-C^1 function are very useful in the study of invertibility of perturbations of the identity of Wiener space. Indeed if u is a measurable H-C^1 function from $\mathbb{W}$ to H, $I_{\mathbb{W}} + u$ is invertible. This has been used by Üstünel to establish the following variational representation, where B is a Brownian motion

$$-\log \mathbb{E}\left[e^{-f\circ B}\right] = \inf_u \mathbb{E}\left[f\circ(B+u) + \frac{1}{2}\int_0^1 |\dot{u}(s)|^2 ds\right]$$

for some unbounded functions f.

Of course it is way more difficult to establish that a function is H-C^1 than it is to establish it is weakly H-differentiable. In this paper, we give a criteria for a weakly H-differentiable function to be H-C^1, namely the weak H-derivative has to be a.s. uniformly continuous on every zero-centered ball of H.

First we recall the formal setting of weak and strong H-derivative, then we establish the criteria. Finally, we expand the criteria to higher order derivatives.

3.2 Framework

Set $n \in \mathbb{N}$ and let $\mathbb{W}$ be the canonical Wiener space $C([0,1], \mathbb{R}^n)$. Let H be the associated Cameron-Martin space

$$H = \left\{ \int_0^{\cdot} \dot{h}(s)ds, \dot{h} \in L^2([0,1]) \right\}$$

and for $m \in \mathbb{N}^*$, $B_m = \{h \in H, |h|_H \leq m\}$. Denote μ the Wiener measure and W the coordinate process. W is a Brownian motion under μ and we denote $(\mathcal{F}_t)$ the canonical filtration of W completed with respect to μ. Set Cyl the set of cylindrical functions

$$Cyl = \left\{ F(W_{t_1}, ..., W_{t_p}), p \in \mathbb{N}^*, F \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), 0 \leq t_1 < ... < t_p \leq 1 \right\}$$

where $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ denotes the set of Schwartz functions on $\mathbb{R}^n$.
For $f \in Cyl, w \in W$ and $h \in H$, we define

$$\nabla_h f(w) = \frac{d}{d\lambda} f(w + \lambda h)\Big|_{\lambda=0}$$

Riesz theorem enables us to consider ∇f as an element of H. For $1 < p < \infty$, we define

$$|.|_{p,1} : f \in Cyl \mapsto |f|_{L^p(\mu)} + |\nabla f|_{L^p(\nu,H)}$$

∇f is a closable operator and we define $\mathbb{D}_{p,1}$ the closure of Cyl for $|.|_{p,1}$.
Let δ be the adjoint operator of ∇ and $L^0_a(\mu, H)$ be the set of the element of $L^0(\mu, H)$ whose density are adapted to $(\mathcal{F}_t)$. $L^0_a(\mu, H)$ is a subset of the domain of δ, and for any $u \in L^0_a(\mu, H)$

$$\delta u = \int_0^1 \dot{u}(s)dW(s)$$

From now on for $u \in L^0_a(\mu, H)$, we will denote

$$\rho(\delta u) = \exp\left(\delta u - \frac{1}{2}\int_0^1 |\dot{u}(s)|^2 ds\right)$$

Now set X a separable Hilbert space and $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ an Hilbert base of X, define

$$Cyl(X) = \left\{ \sum_{k=1}^{p} f_i e_{i_k}, p \in \mathbb{N}^*, (i_k) \in \mathbb{N}^p, (f_i) \in Cyl^p \right\}$$

If $f = \sum_{k=1}^{p} f_i e_{i_k} \in Cyl(X)$, we define

$$\nabla f(w)[h] = \sum_{k=1}^{p} \nabla_h f_i e_{i_k}$$

and ∇f is an element of $X \otimes H$.
We define $|.|_{p,1}$, similarly as before and ∇ is once again a closable operator, we define $\mathbb{D}_{p,1}(X)$ the closure of $Cyl(X)$ for $|.|_{p,1}$. This enables us to define ∇^p for $p \geq 1$ by recurrence, we denote

$$|.|_{p,k} : f \mapsto |f|_{L^p(\mu,X)} + \sum_{k=1}^{p} \left|\nabla^k f\right|_{L^p(\mu, X\otimes H^{\otimes k})}$$

and $\mathbb{D}_{p,k}(X)$ the completion of $Cyl(X)$ for $|.|_{p,k}$.
Finally, we define the Ornstein-Uhlebeck semigroup (P_t) as follow: set $t > 0$ and $f \in L^p(\mu, X)$ for some $p \geq 1$

$$P_t f : w \in \mathbb{W} \mapsto \int_{\mathbb{W}} f\left(e^{-t}w + \sqrt{1-e^{-2t}}y\right) \mu(dy)$$

We will need the following technical results concerning P_t:

Proposition 3.2.1 *Set $t > 0$ and $f \in L^1(\mu, X)$. For $h \in H$, we have μ-a.s.*

$$P_t f(w+h) = P_t \left(\left(f\left((. + e^{-t}h \right) \right) (w)$$

If f belongs to some $\mathbb{D}_{p,1}(X)$, we have μ-a.s.

$$P_t \nabla f = e^t \nabla P_t f$$

Proof: For the sake of simplicity we address the case $X = \mathbb{R}$. The first assertion is an easy calculation.
For the second one, set $h \in H$, we have

$$\nabla \rho(\delta h) = h \rho(\delta h)$$

and

$$P_t \rho(\delta h) = \rho(\delta(e^{-t}h))$$

so

$$\begin{aligned} P_t \nabla \rho(\delta h) &= h\rho(\delta(e^{-t}h)) \\ &= e^t e^{-t} h \rho(\delta(e^{-t}h)) \\ &= e^t \nabla \rho(\delta(e^{-t}h)) \\ &= e^t \nabla P_t \rho(\delta h) \end{aligned}$$

and we conclude with density of the vector space generated by $\{\rho(\delta h), h \in H\}$ in $\mathbb{D}_{p,1}$. $\square$

For more details on this setting see [23] or [26].
Now we give the definitions of strongly H-differentiable functions.

Definition 3.2.1 *Set $u : \mathbb{W} \to X$ a measurable function. We say that*
(i) u is H-continuous (or H-C) if the map $h \mapsto u(w+h)$ is μ-a.s. continuous on H.
(ii) u is H-C^1 if the map $h \mapsto u(w+h)$ is μ-a.s. Fréchet-differentiable and its Fréchet derivative ∇f is an H-continuous map from $\mathbb{W}$ to $X \otimes H$.
(iii) Set $p \in \mathbb{N}$, by recurrence, u is H-C^p if it is H-C^{p-1} and its derivative of order p-1 is an H-C^1 map from $\mathbb{W}$ to $X \otimes H^{\otimes^{p-1}}$

We will need the following results concerning strong H-regularity for our main theorem, see [22] for their proof:

Proposition 3.2.2 *Set $u : \mathbb{W} \mapsto X$ such that $\nabla^k u$ is well-defined for every $k \in \mathbb{N}^*$. Assume there exists $p \in \mathbb{N}^*$ such that for every $\lambda \in \mathbb{R}_+$*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \left|\nabla^k u\right|_{L^p(\mu, X \otimes H^{\otimes k})} < \infty$$

Then μ-a.s. for every $h \in H$

$$u(w+h) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \nabla^k u(w) \left[h^{\otimes^k}\right]$$

Proposition 3.2.3 *Set $f \in L^p(\mu, X)$ for some $p > 1$, for every $t > 0$ and $\lambda \in \mathbb{R}_+$, we have*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \left|\nabla^k P_t f\right|_{L^p(\mu, X \otimes H^{\otimes k})} < \infty$$

3.3 Main theorem

Theorem 3.3.1 *Assume that $f : \mathbb{W} \to X$ is in $\mathbb{D}_{p,1}(X)$ for some $p > 1$. Assume that $h \mapsto \nabla f(w+h)$ uniformly continuous on every n-ball of H. Then f is $H - C^1$ and its H-derivative is ∇f.*

Proof: The hypothesis implies that $h \mapsto \nabla f(w+h)$ is separable so the uniform continuity hypothesis can be written:

$$\lim_{\epsilon \to 0} \sup_{h,k \in B_n, |h-k|_H \leq \epsilon} |\nabla f(w+h) - \nabla f(w+k)|_{X \otimes H} = 0 \ \ a.s.$$

As we just stated we can set $A \subset \mathbb{W}$ of full measure such that for every $w \in \mathbb{W}$ $h \mapsto \nabla f(w+h)$ is continuous.
Set $s > 0$ and $h \in H$. We know the action of P_s over the weak derivative:

$$P_s \nabla f(w+h) = e^s \nabla P_s f(w+h) \ \ a.s.$$

We also have:

$$P_s \nabla f(w+h) = P_s(\nabla f(. + e^{-s} h))(w) \ \ a.s.$$

Since both terms are analytic, the set on which these equalities hold does not depend on h. Now we denote, for $m, n \in \mathbb{N}^*$:

$$\theta_{nm}(w) = \sup_{h,k \in B_n, |h_k|_H \leq \frac{1}{m}} |\nabla f(w+h) - \nabla f(w+k)|_{X \otimes H}$$

Observe that for $h, k \in B_n$ verifying $|h-k|_H < \frac{1}{m}$, we have:

$$\left|P_s(\nabla f(. + e^{-s} h))(w) - P_s(\nabla f(. + e^{-s} k))(w)\right|_{X \otimes H} \leq P_s \theta_{nm}(w) \ \ a.s.$$

Since both terms have analytic modifications, the set of w on which this inequality stands is independent of h and k.
Set (s_i) a sequence decreasing towards 0 and H_0 a countable dense subset of H. We define:

$$\begin{array}{rcl}
A' & = & A \\
& \cap & \{w \in \mathbb{W} : P_{s_i}\nabla f(w+h) = e^{s_i}\nabla P_{s_i} f(w+h), \forall h \in H, \forall i \in \mathbb{N}\} \\
& \cap & \{w \in \mathbb{W} : P_{s_i}\nabla f(w+h) = P_{s_i}(\nabla f(. + e^{-s_i}h))(w), \forall h \in H, \forall i \in \mathbb{N}\} \\
& \cap & \left\{w \in \mathbb{W} : \lim_{i\to\infty} P_{s_i}\nabla f(w+h) = \nabla f(w+h) \ \ \forall h \in H_0\right\} \\
& \cap & \left\{w \in \mathbb{W} : \lim_{i\to\infty} P_{s_i}\theta_{nm}(w) = \theta_{nm}(w), \forall n, m \in \mathbb{N}\right\} \\
& \cap & \left\{w \in \mathbb{W} : \left|P_{s_i}(\nabla f(. + e^{-s_i}h))(w) - P_{s_i}(\nabla f(. + e^{-s_i}k))(w)\right|_{X\otimes H} \leq P_{s_i}\theta_{nm}(w),\right. \\
& & \forall h, k \in B_n, |h-k|_H < 1/m, \forall i \in \mathbb{N}\} \\
& \cap & \left\{w \in \mathbb{W} : \lim_{m\to\infty} \theta_{nm}(w) = 0, \forall n \in \mathbb{N}\right\} \\
& \cap & \left\{w \in \mathbb{W} : P_{s_i}\nabla f(w+h) = P_{s_i}\nabla f(w) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}\nabla^k P_{s_i}\nabla f(w)\left[h^{\otimes^k}\right], \forall h \in H, \forall i \in \mathbb{N}\right\} \\
& \cap & \left\{w \in \mathbb{W} : \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{(k+1)!}\left|\nabla^{k+1} P_{s_i} f(w+h)\right|_{X\otimes H^{\otimes k+1}} < \infty, \forall h \in H, \forall x \in \mathbb{R}_+, \forall i \in \mathbb{N}\right\}
\end{array}$$

Observe that we know from [22] that $\left\{w \in \mathbb{W} : \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^n}{(k+1)!}\left|\nabla^{k+1}P_s f(w)\right|_{H^{\otimes k+1}} < \infty, \forall x \in \mathbb{R}_+\right\}$ and $\left\{w \in \mathbb{W} : P_{s_i}\nabla f(w+h) = P_{s_i}\nabla f(w) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}\nabla^k P_{s_i}\nabla f(w)\left[h^{\otimes^k}\right], \forall h \in H\right\}$ are of full measure and H-invariant.

Set $w \in A'$, $i \in \mathbb{N}$, $h \in H$ and $h' \in H_0$ such that $|h-h'| \leq \frac{1}{m}$ and $n \in \mathbb{N}$ such that $B\left(h, \frac{1}{m}\right) \subset B_n$,we have:

$$\begin{array}{rcl}
|P_{s_i}\nabla f(w+h) - \nabla f(w+h)|_{X\otimes H} & \leq & |P_{s_i}\nabla f(w+h) - P_{s_i}\nabla f(w+h')|_{X\otimes H} \\
& & +|P_{s_i}\nabla f(w+h') - \nabla f(w+h')|_{X\otimes H} \\
& & +|\nabla f(w+h') - \nabla f(w+h)|_{X\otimes H} \\
& \leq & |P_{s_i}((\nabla f(. + e^{-s_i})h)(w) - P_{s_i}(\nabla f(. + e^{-s_i}h'))(w)|_{X\otimes H} \\
& & +|P_{s_i}\nabla f(w+h') - \nabla f(w+h')|_{X\otimes H} \\
& & +|\nabla f(w+h') - \nabla f(w+h)|_{X\otimes H} \\
& \leq & P_{s_i}\theta_{nm} + |P_{s_i}\nabla f(w+h') - \nabla f(w+h')|_{X\otimes H} + \theta_{nm}
\end{array}$$

This proves that:

$$\lim_{i\to\infty} P_{s_i}\nabla f(w+h) = \nabla f(w+h) \ \ \forall h \in H$$

Now observe that for $w \in \mathbb{W}$ such that $(\theta_{n,m}(w))_{m\in\mathbb{N}}$ converges toward 0, $h \mapsto \nabla f(w+h)$ is uniformly continuous on B_n hence bounded. So for $h, k \in B_n$:

$$\begin{array}{rcl}
|f(w+h) - f(w+k)|_X & = & \left|\int_0^1 \nabla f(w + \lambda h + (1-\lambda)k)[k-h]dt\right| \\
& \leq & \sup_{h'\in B_n} |\nabla f(w+h')|_{X\otimes H}|h-k|_H
\end{array}$$

So the hypothesis imply that

$$\lim_{\epsilon\to 0}\sup_{h,k\in B_n,|h-k|_H\le\epsilon}|f(w+h)-f(w+k)|_X=0\ \ a.s.$$

where this supremum is a measurable random variable since $f\in\mathbb{D}_{p,1}(X)$ and we can construct a full measure $A''\subset\mathbb{W}$ similar to A' where f takes the role of ∇f. We denote $\tilde{A}=A'\cap A''$. We have $\mu(\tilde{A})=1$ and for every $w\in\tilde{A}$ and $h\in H$:

$$\begin{aligned}&\lim_{i\to\infty}P_{s_i}f(w+h)=f(w+h)\\&\lim_{i\to\infty}P_{s_i}\nabla f(w+h)=\nabla f(w+h)\end{aligned}$$

Set $i,j\ge max(i_0,i_1,i_2)$, we have:
Now we can prove the differentiability of $h\mapsto f(w+h)$. Set $w\in\tilde{A}$ and $h\in H$, we aim to prove that:

$$\lim_{h'\to 0}\frac{1}{|h'|_H}\left|f(w+h+h')-f(w+h)-\nabla f(w+h)[h']\right|_X=0$$

Set $h'\in H$, we have:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{|h'|_H}\left|f(w+h+h')-f(w+h)-\nabla f(w+h)[h']\right|_X\\ \le\ &\frac{1}{|h'|_H}\left|f(w+h+h')-f(w+h)-(P_{s_i}f(w+h+h')-P_{s_i}f(w+h))\right|_X\\&+\frac{1}{|h'|_H}\left|P_{s_i}f(w+h+h')-P_{s_i}f(w+h)-\nabla P_{s_i}f(w+h)[h']\right|_X\\&+\frac{1}{|h'|_H}\left|\nabla P_{s_i}f(w+h)[h']-\nabla f(w+h)[h']\right|_X\end{aligned}$$

We denote these three terms $A_{h'},B_{h'}$ and $C_{h'}$and we deal with each one of them separately.

$$\begin{aligned}C_{h'}&\le\left|\nabla P_{s_i}f(w+h)-\nabla f(w+h)\right|_{X\otimes H}\\&\le\left|e^{-s_i}P_{s_i}\nabla f(w+h)-\nabla f(w+h)\right|_{X\otimes H}\\&\to 0\end{aligned}$$

now the second term:

$$\begin{aligned}B_{h'}&=\frac{1}{|h'|_H}\left|\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k!}\nabla^kP_{s_i}f(w+h)\left[h'^{\otimes^k}\right]\right|\\&\le\frac{1}{|h'|_H}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k!}\left|\nabla^kP_{s_i}f(w+h)\right|_{X\otimes H^{\otimes k}}|h'|_H^k\\&=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k+1)!}\left|\nabla^{k+1}P_{s_i}f(w+h)\right|_{X\otimes H^{\otimes k+1}}|h'|_H^k\\&\to 0\end{aligned}$$

since $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k+1)!}\left|\nabla^{k+1}P_{s_i}f(w+h)\right|_{X\otimes H^{\otimes k+1}}<\infty$.

$$\begin{aligned}&A_{h'}\\ =\;&\lim_{j\to\infty}\frac{1}{|h'|_H}\left|P_{s_j}f(w+h+h')-P_{s_j}f(w+h)-(P_{s_i}f(w+h+h')-P_{s_i}f(w+h))\right|_X\end{aligned}$$

We have

$$\begin{aligned}&\left|P_{s_j}f(w+h+h')-P_{s_j}f(w+h)-(P_{s_i}f(w+h+h')-P_{s_i}f(w+h))\right|_X\\ \leq\;&\sup_{\lambda\in[0,1]}\left|\nabla P_{s_j}f(w+h+\lambda h')-\nabla P_{s_i}f(w+\lambda h+\lambda h')\right|_{X\otimes H}|h'|_H\end{aligned}$$

Now set $\lambda\in[0,1]$, $\epsilon>0$. We can assume that $|h-h'|_H\leq\frac{1}{m}$, set $n\in\mathbb{N}$ such that $B\left(h,\frac{1}{m}\right)\subset B_n$. We have:

$$\begin{aligned}&\left|\nabla P_{s_j}f(w+h+\lambda h')-\nabla P_{s_i}f(w+h+\lambda h')\right|_{X\otimes H}\\ \leq\;&\left|\nabla P_{s_j}f(w+h+\lambda h')-\nabla P_{s_j}f(w+h)\right|_{X\otimes H}\\ &+\left|\nabla P_{s_j}f(w+h)-\nabla P_{s_i}f(w+h)\right|_{X\otimes H}\\ &+|\nabla P_{s_i}f(w+h)-\nabla P_{s_i}f(w+\lambda h+(1-\lambda)h')|_{X\otimes H}\\ \leq\;&\left|e^{-s_j}P_{s_j}(\nabla f(.+e^{-s_j}(h+\lambda h')))(w)-e^{-s_j}P_{s_j}(\nabla f(.+e^{-s_j}h))(w)\right|_{X\otimes H}\\ &+\left|\nabla P_{s_j}f(w+h)-\nabla P_{s_i}f(w+h)\right|_{X\otimes H}\\ &+\left|e^{-s_i}P_{s_i}(\nabla f(.+e^{-s_i}h))(w)-e^{-s_i}P_{s_i}(\nabla f(.+e^{-s_i}(h+\lambda h')))(w)\right|_{X\otimes H}\\ \leq\;&P_{s_i}\theta_{nm}(w+h)+P_{s_j}\theta_{nm}(w+h)+\left|\nabla P_{s_j}f(w+h)-\nabla P_{s_i}f(w+h)\right|_{X\otimes H}\end{aligned}$$

which is smaller than ϵ for i and j large enough. It ensures that $A_{h'}$ tends toward 0 when h' converges toward 0, which concludes the proof. □

3.4 Extension to higher order derivatives

Corollary 3.4.1 *Assume that $f:\mathbb{W}\to X$ is in $\mathbb{D}_{p,r}(X)$ for some $p>1$. Assume that $h\mapsto\nabla^k f(w+h)$ is μ-a.s. uniformly continuous on every B_n.*
Then f is $H-C^r$ and its H-derivatives up to order n are equal to its weak derivatives of the same order.

Proof: We prove this with a recurrence over n. The case $r=1$ is theorem 3.3.1. Now set $r\leq 2$ and assume that the result is proven for every integer up to k-1. Set $n\in\mathbb{N}$ and A a measurable subset of $\mathbb{W}$ such that $\mu(A)=1$ and for every $w\in A$ $h\mapsto\nabla^r f(w+h)$ is uniformly continuous on B_n. Set $w\in A$, B_n being closed, $h\mapsto\nabla^r f(w+h)$ is bounded is bounded on B_n. Consequently, $h\mapsto\nabla^{r-1}f(w+h)$ is lipschitz on B_n and so is uniformly continuous on B_n. The recurrence hypothesis ensures that f is H-C^{r-1} and that its H derivatives up to order r-1 are equals to its weak derivatives of the same order.
Applying theorem 3.3.1 to $\nabla^{r-1}f$, we get that it is H-C^1 and that its H-derivative is $\nabla^r f$, which conclude the proof. □

Chapter 4

Variational calculus for diffusions

We expand the classic variational formulation of $-\log \mathbb{E}\left[e^{-f}\right]$ to the case where f depends on a diffusion, and not only a on Brownian motion, while decreasing the integrability hypothesis on f. We also give an entropic characterisation of the invertibility of a perturbation of a diffusion and discuss the attainability of the infimum in the aforementioned variational formulation.

Keywords: Wiener space, invertibility, entropy, diffusion, variational formulation

4.1 Introduction

Denote $\mathbb{W}$ the space of continuous functions from $[0,1]$ to $\mathbb{R}^n$ and H the associated canonical Cameron-Martin space of elements of $\mathbb{W}$ which admit a density in L^2. Also denote μ the Wiener measure, W the coordinate process, and $(\mathcal{F}_t)$ the canonical filtration of W completed with respect to μ. W is a Brownian motion under μ. Set f a bounded from above measurable function from W to $\mathbb{R}$. In [5], Dupuis and Ellis prove that

$$-\log \mathbb{E}_\mu\left[e^{-f}\right] = \inf_\theta \left(\mathbb{E}_\theta\left[f\right] + H(\theta|\mu)\right) \tag{4.1.1}$$

where the infimum is taken over the probability measures θ on $\mathbb{W}$ which are absolutely continuous with respect to μ and the relative entropy $H(\theta|\mu)$ is equal to $\mathbb{E}_\mu\left[\frac{d\theta}{d\mu}\log\frac{d\theta}{d\mu}\right]$. In [1], Boué and Dupuis use it to derive the variational formulation

$$-\log \mathbb{E}_\mu\left[e^{-f}\right] = \inf_u \mathbb{E}_\mu\left[f\circ(W+u) + \frac{1}{2}\int_0^1 |\dot{u}(s)|^2 ds\right] \tag{4.1.2}$$

where the infimum is taken over L^2 functions from $\mathbb{W}$ to H whose density is adapted to $(\mathcal{F}_t)$. This variational formulation is useful to derive large deviation asymptotics as Laplace principles for small noise diffusions for instance. This result was later extended by Budhiraja and Dupuis to Hilbert-space-valued Brownian motions in [2], and then by Zhang to abstract Wiener spaces in [27], using the framework developed by Üstünel and Zakai in [21].
The bounded from above hypothesis in 4.1.2 was weakened significantly by Üstünel in [25], it was

replaced with the condition

$$\mathbb{E}_\mu\left[fe^{-f}\right] < \infty$$

and the existence of conjugate integers p and q such that

$$f \in L^p(\mu), e^{-f} \in L^q(\mu)$$

These relaxed hypothesis pave the way to new applications. The possibility of using unbounded functions is primordial in Dabrowski's application of 4.1.2 to free entropy in [4].
Üstünel's approach is routed in the study of the perturbations of the identity of $\mathbb{W}$, which is the coordinate process, and their invertibility. The question of the invertibility of an adapted perturbation of the identity is linked to the representability of measures and was put to light by the celebrated example of Tsirelson [20]. Üstünel proved that if $u \in L^2(\mu, H)$ and has an adapted density, $I_\mathbb{W} + u$ is μ-a.s. invertible if and only if

$$H((I_\mathbb{W} + u)\mu|\mu) = \frac{1}{2}\mathbb{E}_\mu\left[|u|_H^2\right]$$

To prove 4.1.2 with the integrability conditions specified above, Üstünel uses the fact that H-C^1 shifts, meaning shifts that are a.s. Fréchet-differentiable on H with an a.s. continuous on H Fréchet derivative, are a.s. invertible, and that shifts can be approached with H-C^1 shifts using the Ornstein-Uhlenbeck semigroup.
This paper focuses on getting a variational formulation similar as the one above in the case of a diffusion V which satisfies a stochastic differential equation

$$V(t) = c + \int_0^t \sigma(V(s))dB(s) + \int_0^t b(V(s))ds$$

where B is a Brownian motion, thus generalizing the case of the Brownian motion. We also weaken the integration hypothesis on f since we only require $\mathbb{E}[fe^{-f}] < \infty$ and $f \in L^p(\mu)$ for some $p > 1$. Üstünel's proof consists in approaching f with H-C^1 functions and then use H-C^1 shifts, which are invertible, obtained using those functions. This approach is deeply rooted in the Brownian motion specific case, since it relies on sophisticated stochastic analysis tool that were developed for a Gaussian framework. Here we write the density $\frac{e^{-f}}{\mathbb{E}[e^{-f}]}$ as the Wick exponential of some v and then approach v with retarded shifts which generate invertible perturbations of the identity. Since we work under the law of a diffusion and not the Wiener measure, the perturbations of the identity we consider are not affine shifts. We work on $\mathbb{W}$ under the image measure of (V, B) that we denote $\mu^\mathbb{X}$ and we construct a Brownian motion $\beta_\mathbb{X}$ such that W verifies

$$W(t) = c + \int_0^t \sigma(W(s))d\beta_\mathbb{X}(s) + \int_0^t b(W(s))ds$$

We only consider perturbations that verify the Girsanov condition. If u is such a perturbation, we denote X^u the solution of the stochastic differential equation

$$X^u = c + \int_0^t \sigma(X^u(s))d\left(\beta_\mathbb{X} + u\right)(s) + \int_0^t b(X^u(s))ds$$

and $\mathbb{X}^u = (X^u, \beta_\mathbb{X} + u)$. $\mathbb{X}^u$ plays the same role as $W + u$ in the Brownian case and it is invertible if and only if

$$H(\mathbb{X}^u\mu^\mathbb{X}|\mu^\mathbb{X}) = \frac{1}{2}\mathbb{E}_{\mu^\mathbb{X}}\left[|u|_H^2\right]$$

We conclude the paper with a discussion over the attainability of the infimum in the variational formulation.

4.2 Framework

Set $m \leq d \in \mathbb{N}^*$, $c \in \mathbb{R}^m$, $\sigma : \mathbb{R}^m \to \mathcal{M}_{m,d}(\mathbb{R})$ and $b : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ bounded and lipschitz functions. σ_i will denote the i-th column of σ. Notice that every matrix will be identified with its canonical linear operator. Set $(\Omega, R, (\mathcal{G}_t))$ a probability space, V a R-Brownian motion on Ω with values in $\mathbb{R}^d$. Set Y a $\mathbb{R}^m$-valued strong solution of the stochastic differential equation:

$$Y(t) = c + \int_0^t \sigma(Y(s))dV(s) + \int_0^t b(Y(s))ds$$

on $(\Omega, R, (\mathcal{G}_t), B)$. The hypotheses on σ and b ensure the existence and uniqueness of Y if we impose its paths to be continuous.
We denote μ the Wiener measure on $C([0,1], \mathbb{R}^d)$ and μ^X the image measure of X. We denote $\mathbb{W} = C([0,1], \mathbb{R}^{m+d})$ and we consider the measure $\mu^X \times \mu$ on $\mathbb{W}$.
We define the processes X and B on $\mathbb{W}$ by:

$$\begin{aligned} X(t) &: (w, w') \in \mathbb{W} \mapsto w(t) \in \mathbb{R}^m \\ B(t) &: (w, w') \in \mathbb{W} \mapsto w'(t) \in \mathbb{R}^d \end{aligned}$$

Under $\mu^X \times \mu$, the law of X is μ^X, B is a Brownian motion and they are independent. We denote X_i and B_i the i-th coordinates of x and B. Define $M = X - c - \int_0^{\cdot} b(X(s))ds$ and $a = \sigma\sigma^T$. For $1 \leq i \leq d$, $M^i = X^i - c_i - \int_0^{\cdot} b^i(X(s))ds$ is a local martingale and we have:

$$\langle M^i, M^j \rangle = \int_0^{\cdot} a^{ij}(X(s))ds$$

Now set $y \in \mathbb{R}$. observe that

$$\tilde{\sigma}(y) : \begin{array}{rcl} ker(\sigma(y))^{\perp} & \to & im(\sigma(y)) \\ e & \mapsto & \sigma(y)(e) \end{array}$$

is an isomorphism and set $\theta(y)$ the unique element of $\mathcal{M}_{d,m}(\mathbb{R})$ which is equal to $\tilde{\sigma}(y)^{-1}$ on $im(\sigma(y))$ and 0 on $im(\sigma(y))^{\perp}$ and $\eta(y)$ the unique element of $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ which is equal to 0 on $\ker(\sigma(y))^{\perp}$ and to the identity on $\ker(\sigma(y))$.
Notice that we have $(\theta\sigma + \eta)(y) = I_d(\mathbb{R})$.
We define

$$\beta_{\mathbb{X}} = \int_0^{\cdot} \theta(X(s))dM(s) + \int_0^{\cdot} \eta(X(s))dB(s)$$

$\beta_{\mathbb{X},i}$ will denote the i-th coordinate of $\beta_{\mathbb{X}}$.
$\beta_{\mathbb{X}}$ is a Brownian motion. Indeed, it is clearly a local martingale and since m and B are independent:

$$\begin{aligned} (\langle \beta_{\mathbb{X},i}, \beta_{\mathbb{X},j} \rangle (t))_{i,j} &= \int_0^t (\theta(X(s)) \;\; \eta(X(s))) \begin{pmatrix} a(X(s)) & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} (\theta(X(s)) \;\; \eta(X(s)))^T ds \\ &= \int_0^t \theta(X(s))\sigma(X(s))\sigma(X(s))^T\theta(X(s))^T + \eta(X(s))\eta(X(s))^T ds \\ &= tI_d(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

Moreover $M=\int_0^\cdot \sigma(X(s))d\beta_{\mathbb{X}}(s)$. Indeed, $M-\int_0^\cdot \sigma(X(s))d\beta_{\mathbb{X}}(s)$ is a local martingale and:

$$
\begin{aligned}
& \left(\left\langle M-\int_0^\cdot \sigma(X(s))d\beta_{\mathbb{X}}(s), M-\int_0^\cdot \sigma(X(s))d\beta_{\mathbb{X}}(s)\right\rangle(t)\right)_{i,j} \\
= & \int_0^t \left(\sigma(X(s))\theta(X(s))+I \quad \sigma(X(s))\eta(X(s))\right) \\
& \begin{pmatrix} a(X(s)) & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \left(\sigma(X(s))\theta(X(s))+I \quad \sigma(X(s))\eta(X(s))\right)^T ds \\
= & \int_0^t \left(\sigma(X(s))\theta(X(s))+I\right)\sigma(X(s))\sigma(X(s))^T\left(\sigma(X(s))\theta(X(s))-I\right)^T \\
& +\sigma(X(s))\eta(X(s))\eta(X(s))^T\eta(X(s))^T ds \\
= & \ 0
\end{aligned}
$$

This construction of $\beta_{\mathbb{X}}$ is taken from [18].
We denote

$$\mathbb{X}=(X,\beta_{\mathbb{X}})$$

and $\mu^{\mathbb{X}}$ its image measure. X is a $\mu^{\mathbb{X}}$ path-continuous strong solution of the stochastic differential equation

$$X = \quad c+\int_0^\cdot \sigma(X(s))d\beta_{\mathbb{X}}(s)+\int_0^\cdot b(X(s))ds$$

The filtration of a process m will be denoted $(\mathcal{F}_t^m)$, the filtration of $\mathbb{X}$ will be simply denoted $(\mathcal{F}_t)$. Except if stated otherwise, every filtration considered is completed with respect to $\mu^{\mathbb{X}}$. If m is a martingale and v admits a density $\dot{v}$ whose stochastic integral with respect to m is well defined we will denote

$$\delta_m v=\int_0^1 \dot{v}(s)dm(s)$$

We also denote the Wick exponential as follow

$$\rho(\delta_m v)=\exp\left(\int_0^1 \dot{v}(s)dm(s)-\frac{1}{2}\int_0^1 |\dot{v}(s)|^2 d\langle m\rangle(s)\right)$$

and for $p\geq 0$ we denote

$$
\begin{aligned}
L_a^p(\mu^{\mathbb{X}},H) &= \left\{u\in L^p(\mu^{\mathbb{X}},H), \dot{u}\ is\ (\mathcal{F}_t)-adapted\right\} \\
\\
G_p(\mu^{\mathbb{X}},m) &= \left\{u\in L_a^p(\mu^{\mathbb{X}},H), \mathbb{E}_{\mu^{\mathbb{X}}}\left[\rho(-\delta_m u)\right]=1\right\}
\end{aligned}
$$

We denote $H=\left\{\int_0^\cdot \dot{h}(s)ds, \dot{h}\in L^2([0,1],\mathbb{R}^d)\right\}$. For $u\in G_0(\mu^{\mathbb{X}},\beta_{\mathbb{X}})$, we define $\beta_{\mathbb{X}}^u:=\beta_{\mathbb{X}}+u$ and X^u a path-continuous strong solution of the stochastic differential equation

$$X^u=c+\int_0^\cdot \sigma(X^u(s))d\beta_{\mathbb{X}}^u(s)+\int_0^\cdot b(X^u(s))ds$$

on $(W,\mu^{\mathbb{X}},(\mathcal{F}_t),\beta_{\mathbb{X}})$. Once again the hypotheses on σ ensure the existence and $\mu^{\mathbb{X}}$-path uniqueness of X^u. We also denote

$$M^u=X^u-c-\int_0^\cdot b(X^u(s))ds=\int_0^\cdot \sigma(X^u(s))d\beta_{\mathbb{X}}^u(s)$$

and

$$\mathbb{X}^u \quad = \quad (X^u, \beta_{\mathbb{X}} + u)$$

We have a Girsanov-like change of measure theorem relative to $\mu^{\mathbb{X}}$:

Proposition 4.2.1 *Set $u \in G_0(\mu^{\mathbb{X}}, \beta_{\mathbb{X}})$, for every bounded Borel function f:*

$$\mathbb{E}_{\mu^{\mathbb{X}}}[f] = \mathbb{E}_{\mu^{\mathbb{X}}}[f \circ \mathbb{X}^u \rho(-\delta_{\beta_{\mathbb{X}}} u)]$$

Proof: Set f a bounded Borel function and $u \in G_0(\mu^{\mathbb{X}}, \beta_{\mathbb{X}})$, denote θ the probability on $\mathbb{W}$ defined by

$$\frac{d\theta}{d\mu^{\mathbb{X}}} = \rho(-\delta_{\beta_{\mathbb{X}}} u)$$

According to the Girsanov theorem, the law of $\beta_{\mathbb{X}} + u$ under θ is the same as the law of $\beta_{\mathbb{X}}$ under $\mu^{\mathbb{X}}$. Consequently, the law of X^u under θ is the same as the law of X under $\mu^{\mathbb{X}}$ and

$$\mathbb{E}_{\mu^{\mathbb{X}}}[f \circ \mathbb{X}] = \mathbb{E}_{\mu^{\mathbb{X}}}[f \circ \mathbb{X}^u \rho(-\delta_{\beta_{\mathbb{X}}} u)]$$

□

Theorem 4.2.1 *Set $u \in G_0(\mu^{\mathbb{X}}, \beta_{\mathbb{X}})$, we have*

$$\mathbb{X}^u \mu^{\mathbb{X}} \sim \mu^{\mathbb{X}}$$

Proof: Set $f \in C_b(\mathbb{W})$ and set θ the measure on $\mathbb{W}$ given by

$$\frac{d\theta}{d\mu^{\mathbb{X}}} = \rho(-\delta_{\beta_{\mathbb{X}}} u)$$

We have

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\mathbb{X}^u \theta}[f] &= \mathbb{E}_{\theta}[f \circ \mathbb{X}^u] \\
&= \mathbb{E}_{\mu^{\mathbb{X}}}[f \circ \mathbb{X}^u \rho(-\delta_{\beta_{\mathbb{X}}} u)] \\
&= \mathbb{E}_{\mu^{\mathbb{X}}}[f]
\end{aligned}$$

so $\mathbb{X}^u \theta = \mu^{\mathbb{X}}$.
Since $\theta \sim \mu^{\mathbb{X}}$, $\mathbb{X}^u \theta \sim \mathbb{X}^u \mu^{\mathbb{X}}$, which conclude the proof. □

Set $u, v \in G_0(\mu^{\mathbb{X}}, \beta_{\mathbb{X}})$, this theorem ensures that if g is a random variable defined on $\mathbb{W}$, the composition $g \circ \mathbb{X}^v$ is well-defined. Indeed set $\tilde{g}$ and $\hat{g}$ in the same equivalence class in $L^0(\mu^{\mathbb{X}})$. Then

$$\mu^{\mathbb{X}}(\hat{g} \circ \mathbb{X}^v = \tilde{g} \circ \mathbb{X}^v) = \mathbb{X}^v \mu^{\mathbb{X}}(\tilde{g} = \hat{g}) = 1$$

since $\mathbb{X}^v \mu^{\mathbb{X}} \ll \mu^{\mathbb{X}}$.
In particular the compositions $u \circ \mathbb{X}^v$ and $\mathbb{X}^u \circ \mathbb{X}^v$ are well-defined since u and $\mathbb{X}^u$ are random variables defined on W with values in H and W respectively.

4.3 Action of the composition by $\mathbb{X}^u$ and invertibility results

Proposition 4.3.1 *Set $u \in G_0(\mu^{\mathbb{X}}, \beta_{\mathbb{X}})$. We have $\mu^{\mathbb{X}}$-a.s.:*

$$\begin{aligned} M^u &= M \circ \mathbb{X}^u \\ \beta^u_{\mathbb{X}} &= \beta_{\mathbb{X}} \circ \mathbb{X}^u \end{aligned}$$

Proof: We have

$$\begin{aligned} M \circ \mathbb{X}^u &= \left(X - c - \int_0^{\cdot} b(X(s))ds \right) \circ \mathbb{X}^u \\ &= X^u - c - \int_0^{\cdot} b(X^u(s))ds \\ &= M^u \end{aligned}$$

Now,

$$\begin{aligned} \beta_{\mathbb{X}} \circ \mathbb{X}^u &= \left(\int_0^{\cdot} \theta(X(s))dM(s) + \int_0^{\cdot} \eta(X(s))dB(s) \right) \circ \mathbb{X}^u \\ &= \int_0^{\cdot} \theta(X^u(s))dM^u(s) + \int_0^{\cdot} \eta(X^u(s))d\beta^u_{\mathbb{X}}(s) \\ &= \int_0^{\cdot} \theta(X^u(s))\sigma(X^u(s))d\beta^u_{\mathbb{X}}(s) + \int_0^{\cdot} \eta(X^u(s))d\beta^u_{\mathbb{X}}(s) \\ &= \beta^u_{\mathbb{X}} \end{aligned}$$

Proposition 4.3.2 *Set $u, v \in G_0(\mu^{\mathbb{X}}, \beta_{\mathbb{X}})$ such that $v + u \circ \mathbb{X}^u \in G_0(\mu^{\mathbb{X}}, \beta_{\mathbb{X}})$, we have $\mu^{\mathbb{X}}$-a.s.:*

$$\mathbb{X}^u \circ \mathbb{X}^v = \mathbb{X}^{v + u \circ \mathbb{X}^v}$$

We have

$$\mathbb{X}^u \circ \mathbb{X}^v = (X^u \circ \mathbb{X}^v, (\beta_{\mathbb{X}} + u) \circ \mathbb{X}^v) = (X^u \circ \mathbb{X}^v, \beta_{\mathbb{X}} + v + u \circ \mathbb{X}^u)$$

Now,

$$\begin{aligned} X^u \circ \mathbb{X}^v &= \left(c + \int_0^{\cdot} \sigma(X^u(s))d\beta^u_{\mathbb{X}}(s) + \int_0^{\cdot} b(X^u(s))ds \right) \circ \mathbb{X}^v \\ &= \left(c + \int_0^{\cdot} \sigma(X^u(s))d\beta_{\mathbb{X}}(s) + \int_0^{\cdot} \sigma(X^u(s))du(s) + \int_0^{\cdot} b(X^u(s))ds \right) \circ \mathbb{X}^v \\ &= c + \int_0^{\cdot} \sigma(X^u(s) \circ \mathbb{X}^v)d\beta^v_{\mathbb{X}}(s) + \int_0^{\cdot} \sigma(X^u(s) \circ \mathbb{X}^v)\dot{u}(s) \circ \mathbb{X}^v ds + \int_0^{\cdot} b(X^u(s) \circ \mathbb{X}^v)ds \\ &= c + \int_0^{\cdot} \sigma(X^u(s) \circ \mathbb{X}^v)d\beta^{v+u\circ\mathbb{X}^v}_{\mathbb{X}}(s) + \int_0^{\cdot} b(X^u(s) \circ \mathbb{X}^v)ds \end{aligned}$$

$X^u \circ \mathbb{X}^v$ and $X^{v+u\circ\mathbb{X}^v}$ are path continuous strong solutions to the same stochastic differential equation so they are equal $\mu^{\mathbb{X}}$-a.s.
Finally, we have $\mu^{\mathbb{X}}$-a.s.

$$\mathbb{X}^u \circ \mathbb{X}^v = (X^{v+u\circ\mathbb{X}^v}, \beta_{\mathbb{X}} + v + u \circ \mathbb{X}^v) = \mathbb{X}^{v+u\circ\mathbb{X}^v}$$

□

4.4 Invertibility results

Definition 4.4.1 *A measurable map $U : \mathbb{W} \to \mathbb{W}$ is said to be $\mu^{\mathbb{X}}$-a.s. left-invertible if and only if $U\mu^{\mathbb{X}} \ll \mu^{\mathbb{X}}$ and there exists a measurable map $V : \mathbb{W} \to \mathbb{W}$ such that $V \circ U = I_{\mathbb{W}}$ $\mu^{\mathbb{X}}$-a.s.*
A measurable map $U : \mathbb{W} \to \mathbb{W}$ is said to be $\mu^{\mathbb{X}}$-a.s. right-invertible if and only if there exists a measurable map $V : \mathbb{W} \to \mathbb{W}$ such that $V\mu^{\mathbb{X}} \ll \mu^{\mathbb{X}}$ and $U \circ V = I_{\mathbb{W}}$ $\mu^{\mathbb{X}}$-a.s.

Proposition 4.4.1 *Set $U, V : \mathbb{W} \to \mathbb{W}$ measurable maps such that $V \circ U = I_{\mathbb{W}}$ $\mu^{\mathbb{X}}$-a.s. and $V\mu^{\mathbb{X}} \ll \mu^{\mathbb{X}}$ Then $U \circ V = I_{\mathbb{W}}$ $U\mu^{\mathbb{X}}$-a.s., so if $U\mu^{\mathbb{X}} \sim \mu^{\mathbb{X}}$, we also have $U \circ V = I_{\mathbb{W}}$ $\mu^{\mathbb{X}}$-a.s. In that case, we will say that U is $\mu^{\mathbb{X}}$-a.s. invertible.*

Proof: There exists $A \subset W$ such that $\mu^{\mathbb{X}}(A) = 1$ and for every $w \in A$, $V \circ U(w) = w$. Consider such a set A, we have

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{U\mu^{\mathbb{X}}}\left[1_{U\circ V(w)=w}\right] &= \mathbb{E}_{\mu^{\mathbb{X}}}\left[1_{U\circ V\circ U(w)=U(w)}\right] \\
&= \mathbb{E}_{\mu^{\mathbb{X}}}\left[1_{U\circ V\circ U(w)=U(w)}1_{w\in A}\right] + \mathbb{E}_{\mu^{\mathbb{X}}}\left[1_{U\circ V\circ U(w)=U(w)}1_{w\notin A}\right] \\
&= \mathbb{E}_{\mu^{\mathbb{X}}}\left[1_{U(w)=U(w)}1_{w\in A}\right] \\
&= 1
\end{aligned}$$

□

4.5 Entropic characterisation of the invertibility of $\mathbb{X}^u$

In this section, we prove that the process $\mathbb{X}^u$ is left invertible if and only if the kinetic energy of the perturbation u is equal to the relative entropy of $\mathbb{X}^u\mu^{\mathbb{X}}$.

Proposition 4.5.1 *Set $u \in G_2(\mu^{\mathbb{X}}, \beta_{\mathbb{X}})$. We have:*

$$H(\mathbb{X}^u\mu^{\mathbb{X}}|\mu^{\mathbb{X}}) \leq \frac{1}{2}\mathbb{E}_{\mu^{\mathbb{X}}}\left[|u|_H^2\right]$$

Proof: Set $g \in C_b(\mathbb{W})$ and denote $L = \frac{d\mathbb{X}^u\mu^{\mathbb{X}}}{d\mu^{\mathbb{X}}}$, we have:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\mu^{\mathbb{X}}}\left[g \circ \mathbb{X}^u\right] &= \mathbb{E}_{\mu^{\mathbb{X}}}\left[gL\right] \\
&= \mathbb{E}_{\mu^{\mathbb{X}}}\left[g \circ \mathbb{X}^u L \circ \mathbb{X}^u \rho(-\delta_{\beta_{\mathbb{X}}} u)\right]
\end{aligned}$$

So $\mu^{\mathbb{X}}$-a.s.

$$L \circ \mathbb{X}^u \mathbb{E}_{\mu^{\mathbb{X}}}\left[\rho(-\delta_{\beta_{\mathbb{X}}} u) | \mathcal{F}_1^{\mathbb{X}^u}\right] = 1$$

and

$$\begin{aligned}
H(\mathbb{X}^u\mu^{\mathbb{X}}|\mu^{\mathbb{X}}) &= \mathbb{E}_{\mu^{\mathbb{X}}}\left[L \log L\right] \\
&= \mathbb{E}_{\mathbb{X}^u\mu^{\mathbb{X}}}\left[\log L\right] \\
&= \mathbb{E}_{\mu^{\mathbb{X}}}\left[\log L \circ \mathbb{X}^u\right] \\
&= -\mathbb{E}_{\mu^{\mathbb{X}}}\left[\log \mathbb{E}_{\mu^{\mathbb{X}}}\left[\rho(-\delta_{\beta_{\mathbb{X}}} u) | \mathcal{F}_1^{\mathbb{X}^u}\right]\right] \\
&\leq -\mathbb{E}_{\mu^{\mathbb{X}}}\left[\log \rho(-\delta_{\beta_{\mathbb{X}}} u)\right] \\
&\leq \frac{1}{2}\mathbb{E}_{\mu^{\mathbb{X}}}\left[|u|_H^2\right]
\end{aligned}$$

□

Now comes the criteria:

Theorem 4.5.1 *Set $u \in G_2(\mu^{\mathbb{X}}, \beta_{\mathbb{X}})$. The three following propositions are equivalent:*
(i) $H(\mathbb{X}^u\mu^{\mathbb{X}}|\mu^{\mathbb{X}}) = \frac{1}{2}\mathbb{E}_{\mu^{\mathbb{X}}}\left[|u|_H^2\right]$
(ii) There exists $v \in G_0(\mu^{\mathbb{X}}, \beta_{\mathbb{X}})$ such that $\mathbb{X}^v \circ \mathbb{X}^u = \mathbb{X}^u \circ \mathbb{X}^v = I_{\mathbb{W}}$ $\mu^{\mathbb{X}}$-a.s.
(iii) $\mathbb{X}^u$ is $\mu^{\mathbb{X}}$-a.s. left-invertible

Proof: We first prove $(i) \Rightarrow (ii)$. We still denote $L = \frac{d\mathbb{X}^u\mu^{\mathbb{X}}}{d\mu^{\mathbb{X}}}$ and as in the proof of last proposition we have $\mu^{\mathbb{X}}$-a.s.

$$L \circ \mathbb{X}^u \mathbb{E}_{\mu^{\mathbb{X}}}\left[\rho(-\delta_{\beta_{\mathbb{X}}}u)|\mathbb{X}^u\right] = 1$$

Using Jensen inequality we have $\mu^{\mathbb{X}}$-a.s.

$$\begin{aligned} 0 &= \log L \circ \mathbb{X}^u + \log \mathbb{E}_{\mu^{\mathbb{X}}}\left[\rho(-\delta_{\beta_{\mathbb{X}}}u)|\,\mathcal{F}_1^{\mathbb{X}^u}\right] \\ &\geq \log L \circ \mathbb{X}^u + \mathbb{E}_{\mu^{\mathbb{X}}}\left[\log \rho(-\delta_{\beta_{\mathbb{X}}}u)|\,\mathcal{F}_1^{\mathbb{X}^u}\right] \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} 0 &\geq \mathbb{E}_{\mu^{\mathbb{X}}}\left[\log L \circ \mathbb{X}^u\right] + \mathbb{E}_{\mu^{\mathbb{X}}}\left[\log \rho(-\delta_{\beta_{\mathbb{X}}}u)\right] \\ &\geq H(\mathbb{X}^u\mu^{\mathbb{X}}|\mu^{\mathbb{X}}) - \frac{1}{2}\mathbb{E}_{\mu^{\mathbb{X}}}\left[|u|_H^2\right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

So

$$\begin{aligned} 0 &= \log L \circ \mathbb{X}^u + \log \mathbb{E}_{\mu^{\mathbb{X}}}\left[\rho(-\delta_{\beta_{\mathbb{X}}}u)|\,\mathcal{F}_1^{\mathbb{X}^u}\right] \\ &= \log L \circ \mathbb{X}^u + \mathbb{E}_{\mu^{\mathbb{X}}}\left[\log\, \rho(-\delta_{\beta_{\mathbb{X}}}u)|\,\mathcal{F}_1^{\mathbb{X}^u}\right] \end{aligned}$$

and

$$\log \mathbb{E}_{\mu^{\mathbb{X}}}\left[\rho(-\delta_{\beta_{\mathbb{X}}}u)|\,\mathcal{F}_1^{\mathbb{X}^u}\right] = \mathbb{E}_{\mu^{\mathbb{X}}}\left[\log\, \rho(-\delta_{\beta_{\mathbb{X}}}u)|\,\mathcal{F}_1^{\mathbb{X}^u}\right]$$

The strict concavity of the function log gives

$$\mathbb{E}_{\mu^{\mathbb{X}}}\left[\rho(-\delta_{\beta_{\mathbb{X}}}u)|\,\mathcal{F}_1^{\mathbb{X}^u}\right] = \rho(-\delta_{\beta_{\mathbb{X}}}u)$$

Finally we have

$$L \circ \mathbb{X}^u \rho(-\delta_{\beta_{\mathbb{X}}}u) = 1 \tag{4.5.3}$$

Since $\beta_{\mathbb{X}}$ is a $\mu^{\mathbb{X}}$-Brownian motion, there exists $v \in G_0(\mu^{\mathbb{X}}, \beta_{\mathbb{X}})$ such that $L = \rho(-\delta_{\beta_{\mathbb{X}}}v)$.
We apply the logarithm to 4.5.3 to get:

$$0 = \delta_{\beta_{\mathbb{X}}}v \circ \mathbb{X}^u + \frac{1}{2}|v \circ \mathbb{X}^u|_H^2 + \delta_{\beta_{\mathbb{X}}}u + \frac{1}{2}|u|_H^2$$

We have:

$$\delta_{\beta_{\mathbb{X}}}v \circ \mathbb{X}^u = \int_0^1 \dot{v}(s) \circ \mathbb{X}^u d\beta_{\mathbb{X}}(s) + \langle v \circ \mathbb{X}^u, u\rangle_H$$

so finally we have:

$$0 = \delta_{\beta_{\mathbb{X}}}(v \circ \mathbb{X}^u + u) + \frac{1}{2}|v \circ \mathbb{X}^u + u|_H^2 \tag{4.5.4}$$

According to Girsanov theorem $\beta_{\mathbb{X}} + v$ is a $\mathbb{X}^u\mu^{\mathbb{X}}$-Brownian motion, so:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\mu^{\mathbb{X}}}[L \log L] &= \mathbb{E}_{\mathbb{X}^u\mu^{\mathbb{X}}}[\log L] \\
&= \mathbb{E}_{\mathbb{X}^u\mu^{\mathbb{X}}}\left[-\int_0^1 \dot{v}(s)d\beta_{\mathbb{X}}(s) - \frac{1}{2}\int_0^1 |\dot{v}(s)|^2 ds\right] \\
&= \frac{1}{2}\mathbb{E}_{\mathbb{X}^u\mu^{\mathbb{X}}}\left[\int_0^1 |\dot{v}(s)|^2 ds\right] \\
&= \frac{1}{2}\mathbb{E}_{\mu^{\mathbb{X}}}\left[|v \circ \mathbb{X}^u|_H^2\right]
\end{aligned}$$

So $v \circ \mathbb{X}^u \in L_a^2(\mu^{\mathbb{X}}, H)$ and we can take the expectation with respect to ν in 4.5.4 to obtain $u + v \circ \mathbb{X}^u = 0$ $\mu^{\mathbb{X}}$-a.s. and $\mathbb{X}^v \circ \mathbb{X}^u = I_{\mathbb{W}}$ $\mu^{\mathbb{X}}$-a.s. and $\mathbb{X}^v$ is a left-inverse of $\mathbb{X}^u$.
Since $\mathbb{X}^v\mu^{\mathbb{X}} \sim \mu^{\mathbb{X}}$, we also have $\mathbb{X}^u \circ \mathbb{X}^v = I_W$ $\mu^{\mathbb{X}}$-a.s. from proposition 4.4.1.
$(ii) \Rightarrow (iii)$ is immediate. Now we prove $(iii) \Rightarrow (i)$. We still denote $L = \frac{d\mathbb{X}^u\mu^{\mathbb{X}}}{d\mu^{\mathbb{X}}}$.

Assume that $\mathbb{X}^u$ admits a left inverse V. Set $v = -u \circ V$.
We have $\mu^{\mathbb{X}}$-a.s.

$$v \circ \mathbb{X}^u = -u$$

and

$$\mathbb{E}_{\mathbb{X}^u\mu^{\mathbb{X}}}\left[1_{\int_0^1 |\dot{v}(s)|^2 ds < \infty}\right] = \mathbb{E}_{\mu^{\mathbb{X}}}\left[1_{\int_0^1 |\dot{u}(s)|^2 ds < \infty}\right] = 1$$

so $v \in L^0(\mathbb{X}^u\mu^{\mathbb{X}}, H)$ and $v \in L^0(\mu^{\mathbb{X}}, H)$ since $\mathbb{X}^u\mu^{\mathbb{X}} \sim \mu^{\mathbb{X}}$.
Now set $\dot{v}^n = \max(n, \min(\dot{v}, -n))$, $\dot{v}^n \circ \mathbb{X}^u$ is adapted. Set $A \in L^2(dt \times d\mu^{\mathbb{X}})$ an adapted process, we have:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\mu^{\mathbb{X}}}\left[\rho(-\delta_{\beta_{\mathbb{X}}}u)\int_0^1 \dot{v}^n(s) \circ \mathbb{X}^u A(s) \circ \mathbb{X}^u ds\right] &= \mathbb{E}_{\mu^{\mathbb{X}}}\left[\int_0^1 \dot{v}^n(s)A(s)ds\right] \\
&= \mathbb{E}_{\mu^{\mathbb{X}}}\left[\int_0^1 \mathbb{E}_{\mu^{\mathbb{X}}}\left[\dot{v}^n(s)|\mathcal{F}^{\mathbb{X}}(s)\right]A(s)ds\right] \\
&= \mathbb{E}_{\mu^{\mathbb{X}}}\left[\rho(-\delta_{\beta_{\mathbb{X}}}u)\int_0^1 \mathbb{E}_{\mu^{\mathbb{X}}}\left[\dot{v}^n(s)|\mathcal{F}^{\mathbb{X}}(s)\right] \circ \mathbb{X}^u A(s) \circ \mathbb{X}^u ds\right]
\end{aligned}$$

So $\mathbb{E}_{\mu^{\mathbb{X}}}\left[\dot{v}^n(s)|\mathcal{F}^{\mathbb{X}}(s)\right] \circ \mathbb{X}^u = \dot{v}^n(s) \circ \mathbb{X}^u$ $dt \times d\mu^{\mathbb{X}}$-a.s. which implies $\mathbb{E}_{\mu^{\mathbb{X}}}\left[\dot{v}^n(s)|\mathcal{F}^{\mathbb{X}}(s)\right] = \dot{v}^n(s)$ $dt \times d\mu^{\mathbb{X}}$-a.s. since $\mathbb{X}^u\mu^{\mathbb{X}} \sim \mu^{\mathbb{X}}$.
An algebraic calculation gives $\mu^{\mathbb{X}}$-a.s.

$$\rho(-\delta_{\beta_{\mathbb{X}}}v) \circ \mathbb{X}^u \rho(-\delta_{\beta_{\mathbb{X}}}u) = 1$$

Now set $g \in C_b(W, \mathbb{R}_+)$, we have:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\mu^{\mathbb{X}}}[gL] &= \mathbb{E}_{\mu^{\mathbb{X}}}[g \circ \mathbb{X}^u] \\
&= \mathbb{E}_{\mu^{\mathbb{X}}}[g \circ \mathbb{X}^u \rho(-\delta_{\beta_{\mathbb{X}}}v) \circ \mathbb{X}^u \rho(-\delta_{\beta_{\mathbb{X}}}u)] \\
&\leq \mathbb{E}_{\mu^{\mathbb{X}}}[g\rho(-\delta_{\beta_{\mathbb{X}}}v)]
\end{aligned}$$

So $L \leq \rho(-\delta_{\beta_{\mathbb{X}}} v)$ and since $\mathbb{E}_{\mu^{\mathbb{X}}}\left[\rho(-\delta_{\beta_{\mathbb{X}}} v)\right] = 1$ we have

$$L \circ \mathbb{X}^u \rho(-\delta_{\beta_{\mathbb{X}}} u) = 1$$

and we can compute $H(\mathbb{X}^u \mu^{\mathbb{X}} | \mu^{\mathbb{X}})$:

$$\begin{aligned} H(\mathbb{X}^u \mu^{\mathbb{X}} | \mu^{\mathbb{X}}) &= \mathbb{E}_{\mu^{\mathbb{X}}}[L \log L] \\ &= \mathbb{E}_{\mu^{\mathbb{X}}}[\log L \circ \mathbb{X}^u] \\ &= \mathbb{E}_{\mu^{\mathbb{X}}}\left[-\log \rho(-\delta_{\beta_{\mathbb{X}}} u)\right] \\ &= \frac{1}{2}\mathbb{E}_{\mu^{\mathbb{X}}}[|u_H^2|] \end{aligned}$$

□

4.6 Approximation of absolutely continuous measures

Theorem 4.6.1 *If $\theta \sim \mu^{\mathbb{X}}$ is such that there exists $r > 1$ such that*

$$\frac{d\theta}{d\mu^{\mathbb{X}}} \log \frac{d\theta}{d\mu^{\mathbb{X}}} \in L^1(\mu^{\mathbb{X}})$$

and

$$\log \frac{d\theta}{d\mu^{\mathbb{X}}} \in L^r(\mu^{\mathbb{X}})$$

there exists $(u_n) \in L_a^\infty(\mu^{\mathbb{X}}, H)^{\mathbb{N}}$ such that for every n,

$$\begin{aligned} &\mathbb{X}^{u_n} \mu^{\mathbb{X}} \sim \mu^{\mathbb{X}} \\ &\mathbb{X}^{u_n} \ \ is \ \ \mu^{\mathbb{X}} - a.s. \ \ invertible \\ &\frac{d\mathbb{X}^{u_n} \mu^{\mathbb{X}}}{d\mu^{\mathbb{X}}} \log \frac{d\mathbb{X}^{u_n} \mu^{\mathbb{X}}}{d\mu^{\mathbb{X}}} \to \frac{d\theta}{d\mu^{\mathbb{X}}} \log \frac{d\theta}{d\mu^{\mathbb{X}}} \ \ in \ L^1(\mu^{\mathbb{X}}) \\ &\frac{d\mathbb{X}^{u_n} \mu^{\mathbb{X}}}{d\mu^{\mathbb{X}}} \log \frac{d\theta}{d\mu^{\mathbb{X}}} \to \frac{d\theta}{d\mu^{\mathbb{X}}} \log \frac{d\theta}{d\mu^{\mathbb{X}}} \ \ in \ L^1(\mu^{\mathbb{X}}) \end{aligned}$$

.

Proof: Denote

$$L = \frac{d\theta}{d\mu^{\mathbb{X}}}$$

Eventually sequentializing afterward, we have to prove that for any $\epsilon > 0$, there exists $u \in L_a^\infty(\mu^{\mathbb{X}}, H)$ such that $\mathbb{X}^u \mu^{\mathbb{X}} \sim \mu^{\mathbb{X}}$, $\mathbb{X}^u$ is $\mu^{\mathbb{X}}$-a.s. invertible and

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mu^{\mathbb{X}}}\left[\left|\frac{d\mathbb{X}^u \mu^{\mathbb{X}}}{d\mu^{\mathbb{X}}} \log \frac{d\mathbb{X}^u \mu^{\mathbb{X}}}{d\mu^{\mathbb{X}}} - L \log L\right|\right] &\leq \epsilon \\ \mathbb{E}_{\mu^{\mathbb{X}}}\left[\left|\frac{d\mathbb{X}^u \mu^{\mathbb{X}}}{d\mu^{\mathbb{X}}} \log L - L \log L_1\right|\right] &\leq \epsilon \end{aligned}$$

The proof is divided in five steps.
Step 1 : We approximate L with a density that is both lower and upper bounded.
Denote

$$\begin{aligned} \phi_n &= \min(L,n) \\ L_n &= \frac{\phi_n}{\mathbb{E}_{\mu^{\mathbb{X}}}[\phi_n]} \end{aligned}$$

The monotone convergence theorem ensures that $\mathbb{E}_{\mu^{\mathbb{X}}}[\phi_n] \to 1$ so for any $\alpha \in (0,1)$, there exists some $n_\alpha \in \mathbb{N}$ such that for any $n \geq n_\alpha$,

$$\mathbb{E}_{\mu^{\mathbb{X}}}[\phi_n] \geq \alpha$$

$(L_n \log L_n)$ converges $\mu^{\mathbb{X}}$-a.s. to $L \log L$ and if $n \geq n_\alpha$ and

$$\begin{aligned} |L_n \log L_n| &= \left|\frac{\phi_n}{\mathbb{E}_{\mu^{\mathbb{X}}}[\phi_n]} \log \frac{\phi_n}{\mathbb{E}_{\mu^{\mathbb{X}}}[\phi_n]}\right| 1_{\frac{\phi_n}{\mathbb{E}_{\mu^{\mathbb{X}}}[\phi_n]} \leq 1} + \left|\frac{\phi_n}{\mathbb{E}_{\mu^{\mathbb{X}}}[\phi_n]} \log \frac{\phi_n}{\mathbb{E}_{\mu^{\mathbb{X}}}[\phi_n]}\right| 1_{\frac{\phi_n}{\mathbb{E}_{\mu^{\mathbb{X}}}[\phi_n]} > 1} \\ &\leq e^{-1} 1_{\frac{\phi_n}{\mathbb{E}_{\mu^{\mathbb{X}}}[\phi_n]} \leq 1} + \left|\frac{L}{\alpha} \log \frac{L}{\alpha}\right| 1_{\frac{\phi_n}{\mathbb{E}_{\mu^{\mathbb{X}}}[\phi_n]} > 1} \\ &\leq e^{-1} + \left|\frac{L}{\alpha} \log \frac{L}{\alpha}\right| \end{aligned}$$

So the Lebesgue theorem ensures that $(L_n \log L_n)$ converge toward $L \log L$ in $L^1(\mu^{\mathbb{X}})$. Similarly, $(L_n \log L)$ converges $\mu^{\mathbb{X}}$-a.s. to $L \log L$ and if $n \leq n_\alpha$,

$$|L_n \log L| \leq \left|\frac{L}{\alpha} \log L\right|$$

and the Lebesgue theorem ensures that $(L_n \log L)$ converges to $L_n \log L$ in $L^1(\mu^{\mathbb{X}})$, so there exists $n_0 \in \mathbb{N}$ such that

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mu^{\mathbb{X}}}[|L_{n_0} \log L_{n_0} - L \log L|] &\leq \epsilon \\ \mathbb{E}_{\mu^{\mathbb{X}}}[|L_{n_0} \log L - L \log L|] &\leq \epsilon \end{aligned}$$

$\left(\frac{L_{n_0}+a}{1+a} \log \frac{L_{n_0}+a}{1+a}\right)$ converges $\mu^{\mathbb{X}}$-a.s. to $L_{n_0} \log L_{n_0}$ when a converges to 0. Set $a \in [0,1]$, we have

$$\begin{aligned} \left|\frac{L_{n_0}+a}{1+a} \log \frac{L_{n_0}+a}{1+a}\right| &= \left|\frac{L_{n_0}+a}{1+a} \log \frac{L_{n_0}+a}{1+a}\right| 1_{L_{n_0} \leq 1} + \left|\frac{L_{n_0}+a}{1+a} \log \frac{L_{n_0}+a}{1+a}\right| 1_{L_{n_0} > 1} \\ &\leq e^{-1} 1_{L_{n_0} \leq 1} + |L_{n_0} \log L_{n_0}| \, 1_{L_{n_0} > 1} \\ &\leq e^{-1} + |L_{n_0} \log L_{n_0}| \end{aligned}$$

So the Lebesgue theorem ensures that $\left(\frac{L_{n_0}+a}{1+a} \log \frac{L_{n_0}+a}{1+a}\right)$ converges to $L_{n_0} \log L_{n_0}$ in $L^1(\mu^{\mathbb{X}})$. Similarly, $\left(\frac{L_{n_0}+a}{1+a} \log L\right)$ converges $\mu^{\mathbb{X}}$-a.s. to $L_{n_0} \log L$ and

$$\left|\frac{L_{n_0}+a}{1+a} \log L\right| \leq |(L_{n_0}+1) \log L|$$

and the Lebesgue theorem ensures that $\left(\frac{L_{n_0}+a}{1+a}\log L\right)$ converges to $L_{n_0}\log L$ in $L^1(\mu^{\mathbb{X}})$ and there exists $a\in[0,1]$ such that

$$\mathbb{E}_{\mu^{\mathbb{X}}}\left[\left|\frac{L_{n_0}+a}{1+a}\log\frac{L_{n_0}+a}{1+a}-L_{n_0}\log L_{n_0}\right|\right]\leq\epsilon$$
$$\mathbb{E}_{\mu^{\mathbb{X}}}\left[\left|\frac{L_{n_0}+a}{1+a}\log L-L_{n_0}\log L\right|\right]\leq\epsilon$$

$\frac{L_{n_0}+a}{1+a}$ is both lower-bounded and upper-bounded in $L^\infty(\mu^{\mathbb{X}})$, we denote these bounds respectively d and D.
Also denote

$$M(t)=\mathbb{E}_{\mu^{\mathbb{X}}}\left[\frac{L_{n_0}+a}{1+a}\middle|\mathcal{F}_t\right]$$

We write

$$M(t)=\exp\left(\int_0^t\dot{\alpha}(s)d\beta_{\mathbb{X}}(s)-\frac{1}{2}\int_0^t|\dot{\alpha}(s)|^2\,ds\right)$$

with $\alpha\in L^0_a(\mu^{\mathbb{X}},H)$.
Step 2 : We prove that $\alpha\in L^2(\mu^{\mathbb{X}},H)$.
Set

$$T_n=\inf\left\{t\in[0,1],\int_0^t|\dot{\alpha}(s)|^2\,ds>n\right\}$$

(T_n) is a sequence of stopping times which increases stationarily toward 1. We have, using $M=1+\int_0^{\cdot}\dot{\alpha}(s)M(s)d\beta_{\mathbb{X}}(s)$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{\mu^{\mathbb{X}}}\left[(M(t\wedge T_n)-1)^2\right]&=\mathbb{E}_{\mu^{\mathbb{X}}}\left[\int_0^{t\wedge T_n}|\dot{\alpha}(s)|^2M(s)^2ds\right]\\&\geq d^2\mathbb{E}_{\mu^{\mathbb{X}}}\left[\int_0^{t\wedge T_n}|\dot{\alpha}(s)|^2\,ds\right]\end{aligned}$$

so

$$\mathbb{E}_{\mu^{\mathbb{X}}}\left[\int_0^{t\wedge T_n}|\dot{\alpha}(s)|^2\,ds\right]\leq\frac{1}{d^2}\mathbb{E}_{\mu^{\mathbb{X}}}\left[(M(t\wedge T_n)-1)^2\right]\leq\frac{2\left(D^2+1\right)}{d^2}$$

hence passing to the limit

$$\mathbb{E}_{\mu^{\mathbb{X}}}\left[\int_0^1|\dot{\alpha}(s)|^2\,ds\right]\leq\frac{2\left(D^2+1\right)}{d^2}$$

Step 3 : we approximate α with an element of $L^\infty(\mu^{\mathbb{X}},H)$.
Define

$$\alpha_n:(t,w)\in[0,1]\times\mathbb{W}\mapsto\int_0^t\dot{\alpha}(s,w)1_{[0,T_n]}(s,w)ds$$

and

$$M^n(t)\quad=\quad\exp\left(\int_0^t\dot{\alpha^n}(s)d\beta_{\mathbb{X}}(s)-\frac{1}{2}\int_0^t\left|\dot{\alpha^n}(s)\right|^2ds\right)$$

and clearly $(M^n(1)\log M^n(1))$ converges $\mu^{\mathbb{X}}$-a.s. to $M(1)\log M(1)$, $(M^n(1)\log L)$ converges to $M(1)\log L$ $\mu^{\mathbb{X}}$-a.s. and $M^n(1)=\mathbb{E}_{\mu^{\mathbb{X}}}\left[M(1)|\,\mathcal{F}_{T_n}\right]$, so $\mu^{\mathbb{X}}$-a.s.

$$\begin{aligned}|M^n(1)\log M^n(1)|&\leq\max\left(e^{-1},|D\log D|\right)\\|M^n(1)\log L|&\leq|D\log L|\end{aligned}$$

so the Lebesgue theorem ensures that $(M^n(1)\log M^n(1))$ converges to $M(1)\log M(1)$ in $L^1(\mu^{\mathbb{X}})$ and $(M_1^n \log L)$ converges to $M_1 \log L$ in $L^1(\mu^{\mathbb{X}})$ and there exists $n \in \mathbb{N}$ such that

$$\begin{aligned} |M^n(1)\log M^n(1) - M(1)\log M(1)| &\leq \epsilon \\ |M^n(1)\log L - M(1)\log L| &\leq \epsilon \end{aligned}$$

Step 4 : we approximate α^n with a retarded shift.
For $\eta > 0$ set

$$\gamma^\eta : (t,w) \in [0,1]\times\mathbb{W} \mapsto \int_0^t \dot{\alpha}^n(s-\eta)(w)1_{s>\eta}ds$$

$$N^\eta(t) = \exp\left(\int_0^t \dot{\gamma^\eta}(s)d\beta_{\mathbb{X}}(s) - \frac{1}{2}\int_0^t \left|\dot{\gamma^\eta}(s)\right|^2 ds\right)$$

$(N^\eta(1)\log N^\eta(1))$ converges in probability to $M^n(1)\log M^n(1)$.
To prove that $(N^\eta(1)\log N^\eta(1))$ is uniformly integrable, it is sufficient to prove it is bounded in any $L^p(\mu^{\mathbb{X}})$, set $p > 1$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mu^{\mathbb{X}}}\left[|N^\eta(1)|^p\right] &= \mathbb{E}_{\mu^{\mathbb{X}}}\left[\exp\left(p\int_0^1 \dot{\gamma^\eta}(s)d\beta_{\mathbb{X}}(s) - \frac{p}{2}\int_0^1 \left|\dot{\gamma^\eta}(s)\right|^2 ds\right)\right] \\ &= \mathbb{E}_{\mu^{\mathbb{X}}}\left[\exp\left(p\int_0^1 \dot{\gamma^\eta}(s)d\beta_{\mathbb{X}}(s) - \frac{p^2}{2}\int_0^1 \left|\dot{\gamma^\eta}(s)\right|^2 ds\right)\exp\left(\frac{p^2-p}{2}\int_0^1 \left|\dot{\gamma^\eta}(s)\right|^2 ds\right)\right] \\ &\leq \mathbb{E}_{\mu^{\mathbb{X}}}\left[\exp\left(\int_0^1 p\dot{\gamma^\eta}(s)d\beta_{\mathbb{X}}(s) - \frac{1}{2}\int_0^1 \left|p\dot{\gamma^\eta}(s)\right|^2 ds\right)\exp\left(\frac{p^2-p}{2}n\right)\right] \\ &\leq \exp\left(\frac{p^2-p}{2}n\right) \end{aligned}$$

so $(N^\eta(1)\log N^\eta(1))$ converges to $M^n(1)\log M^n(1)$ in $L^1(\mu^{\mathbb{X}})$. Furthermore, using Hölder inequality, we have

$$\mathbb{E}_{\mu^{\mathbb{X}}}\left[|N^\eta(1)\log L - M^n(1)\log L|\right] \leq |N^\eta(1) - M^n(1)|_{L^{r'}(\mu^{\mathbb{X}})} |\log L|_{L^r(\mu^{\mathbb{X}})}$$

where $\frac{1}{r'} + \frac{1}{r} = 1$.
Consequently there exists $\eta > 0$ such that

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mu^{\mathbb{X}}}\left[|N^\eta(1)\log N^\eta(1) - M^n(1)\log M^n(1)|\right] &\leq \epsilon \\ \mathbb{E}_{\mu^{\mathbb{X}}}\left[|N^\eta(1)\log L - M^n(1)\log L|\right] &\leq \epsilon \end{aligned}$$

using the triangular inequality, we have

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\mu^{\mathbb{X}}}\left[|L\log L - N^\eta(1)\log N^\eta(1)|\right] &\leq \mathbb{E}_{\mu^{\mathbb{X}}}\left[|L\log L - L_{n_0}\log L_{n_0}|\right] \\
&\quad + \mathbb{E}_{\mu^{\mathbb{X}}}\left[\left|L_{n_0}\log L_{n_0} - \frac{L_{n_0}+a}{1+a}\log\frac{L_{n_0}+a}{1+a}\right|\right] \\
&\quad + \mathbb{E}_{\mu^{\mathbb{X}}}\left[\left|\frac{L_{n_0}+a}{1+a}\log\frac{L_{n_0}+a}{1+a} - M^n(1)\log M^n(1)\right|\right] \\
&\quad + \mathbb{E}_{\mu^{\mathbb{X}}}\left[|M^n(1)\log M^n(1) - N^\eta(1)\log N^\eta(1)|\right] \\
&\leq 4\epsilon \\
\mathbb{E}_{\mu^{\mathbb{X}}}\left[|L\log L - N^\eta(1)\log L|\right] &\leq \mathbb{E}_{\mu^{\mathbb{X}}}\left[|L\log L - L_{n_0}\log L|\right] \\
&\quad + \mathbb{E}_{\mu^{\mathbb{X}}}\left[\left|L_{n_0}\log L - \frac{L_{n_0}+a}{1+a}\log L\right|\right] \\
&\quad + \mathbb{E}_{\mu^{\mathbb{X}}}\left[\left|\frac{L_{n_0}+a}{1+a}\log L - M^n(1)\log L\right|\right] \\
&\quad + \mathbb{E}_{\mu^{\mathbb{X}}}\left[|M^n(1)\log L - N^\eta(1)\log L|\right] \\
&\leq 4\epsilon
\end{aligned}$$

Step 5 : We prove that $\mathbb{X}^{-\gamma^\eta}$ is $\mu^{\mathbb{X}}$-a.s. left-invertible and is the solution to our problem.
We know $\mu^{\mathbb{X}}(\mathbb{X} = I_{\mathbb{W}}) = 1$ and that there exists a measurable function Φ such that $\mathbb{X} = \Phi(\beta_{\mathbb{X}})$ $\mu^{\mathbb{X}}$-a.s., so set $A \subset W$, such that $\mu^{\mathbb{X}}(A) = 1$ and for every $w \in A$, $\mathbb{X}(w) = w$ and $\mathbb{X}(w) = \Phi(\beta_{\mathbb{X}}(w))$.

Now set $w_1, w_2 \in W$ such that $\mathbb{X}^{-\gamma^\eta}(w_1) = \mathbb{X}^{-\gamma^\eta}(w_2)$. We have

$$\beta_{\mathbb{X}}(w_1) - \int_0^\cdot \dot{\gamma^\eta}(s)(w_1)ds = \beta_{\mathbb{X}}(w_2) - \int_0^\cdot \dot{\gamma^\eta}(s)(w_2)ds$$

For any $s \in [0,\eta]$, $\beta_{\mathbb{X}}(s,w_1) = \beta_{\mathbb{X}}(s,w_2)$, γ^η being adapted to filtration $(\mathcal{F}^{\beta_{\mathbb{X}}}_{t-\eta})$, it implies that for $t \in [0,2\eta]$

$$\int_0^t \dot{\gamma^\eta}(s,w_1)ds = \int_0^t \dot{\gamma^\eta}(s,w_2)ds$$

and

$$\beta_{\mathbb{X}}(t,w_1) = \beta_{\mathbb{X}}(t,w_2)$$

An easy iteration shows that $\beta_{\mathbb{X}}(w_1) = \beta_{\mathbb{X}}(w_2)$ hence

$$\begin{aligned}
w_1 &= \mathbb{X}(w_1) \\
&= \Phi(\beta_{\mathbb{X}}(w_1)) \\
&= \Phi(\beta_{\mathbb{X}}(w_2)) \\
&= \mathbb{X}(w_2) \\
&= w_2
\end{aligned}$$

So $\mathbb{X}^{-\gamma^\eta}$ is $\mu^{\mathbb{X}}$-a.s. injective and so $\mu^{\mathbb{X}}$-a.s. left-invertible and it is of the form $\mathbb{X}^{v^\eta}$ with $v^\eta \in G_0(\mu^{\mathbb{X}}, \beta_{\mathbb{X}})$. We have, for $f \in C_b(\mathbb{W})$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\mu^{\mathbb{X}}}\left[f \circ \mathbb{X}^{v^\eta}\right] &= \mathbb{E}_{\mu^{\mathbb{X}}}\left[f \circ \mathbb{X}^{v^\eta} \circ \mathbb{X}^{-\gamma^\eta}\rho\left(\delta_{\beta_{\mathbb{X}}}\gamma^\eta\right)\right] \\
&= \mathbb{E}_{\mu^{\mathbb{X}}}\left[fN^\eta(1)\right]
\end{aligned}$$

We have

$$\frac{d\mathbb{X}^{v^\eta}\mu^{\mathbb{X}}}{d\mu^{\mathbb{X}}} = N^\eta(1)$$

So $\mathbb{X}^{v^\eta}\mu^{\mathbb{X}} \sim \mu^{\mathbb{X}}$ and

$$\mathbb{X}^{v^\eta} \circ \mathbb{X}^{-\gamma^\eta} = \mathbb{X}^{-\gamma^\eta} \circ \mathbb{X}^{v^\eta} \quad \mu^{\mathbb{X}} - a.s.$$

and

$$\begin{aligned} |v^\eta|_H^2 &= |\gamma^\eta|_H^2 \circ \mathbb{X}^{v^\eta} \\ &\leq n \end{aligned}$$

$\mu^{\mathbb{X}}$-a.s. since $\mathbb{X}^{v^\eta}\mu^{\mathbb{X}} \sim \mu^{\mathbb{X}}$ and $|\gamma^\eta|_H^2 \leq n$ $\mu^{\mathbb{X}}$-a.s., hence $v^\eta \in L_a^\infty(\mu^{\mathbb{X}}, H)$. □

4.7 Variational problem

As stated in the beginning, we aim to provide a variational formulation of $-\log \mathbb{E}_{\mu^{\mathbb{X}}}\left[e^{-f}\right]$. This first result is from [25]:

Theorem 4.7.1 *Set $f : \mathbb{W} \to \mathbb{R}$ a measurable function verifying*

$$\mathbb{E}_{\mu^{\mathbb{X}}}\left[|f|(1+e^{-f})\right] < \infty$$

Denote $\mathcal{P}$ the set of probability measures on $(\mathbb{W}, \mathcal{F}_1)$ which are absolutely continuous with respect to $\mu^{\mathbb{X}}$, then

$$-\log \mathbb{E}_{\mu^{\mathbb{X}}}\left[e^{-f}\right] = \inf_{\theta \in \mathcal{P}} \left(\mathbb{E}_\theta[f] + H(\theta|\mu^{\mathbb{X}})\right)$$

and the unique supremum is attained at the measure

$$d\theta_0 = \frac{e^{-f}}{\mathbb{E}_{\mu^{\mathbb{X}}}\left[e^{-f}\right]} d\mu^{\mathbb{X}}$$

Proposition 4.7.1 *Set $f : \mathbb{W} \to \mathbb{R}$ a measurable function verifying $\mathbb{E}_{\mu^{\mathbb{X}}}\left[|f|(1+e^{-f})\right] < \infty$, then*

$$-\log \mathbb{E}_{\mu^{\mathbb{X}}}\left[e^{-f}\right] \leq \inf_{u \in G_2(\mu^{\mathbb{X}}, \beta_{\mathbb{X}})} \mathbb{E}_{\mu^{\mathbb{X}}}\left[f \circ \mathbb{X}^u + \frac{1}{2}|u|_H^2\right]$$

Here is the main result.

Theorem 4.7.2 *Set $p > 1$ and $f \in L^p(\mu^{\mathbb{X}})$ such that $\mathbb{E}_{\mu^{\mathbb{X}}}\left[(|f|+1)e^{-f}\right] < \infty$, then we have*

$$-\log \mathbb{E}_{\mu^{\mathbb{X}}}\left[e^{-f}\right] = \inf_{u \in L_a^\infty(\mu^{\mathbb{X}}, H), \mathbb{X}^u \ \mu^{\mathbb{X}}-a.s.\ invertible} \mathbb{E}_{\mu^{\mathbb{X}}}\left[f \circ \mathbb{X}^u + \frac{1}{2}|u|_H^2\right]$$

Proof: Using proposition 4.7.1, we have easily

$$-\log \mathbb{E}_{\mu^{\mathbb{X}}}\left[e^{-f}\right] \leq \inf_{u \in L_a^\infty(\mu^{\mathbb{X}}, H), \mathbb{X}^u \ \mu^{\mathbb{X}}-a.s.\ invertible} \mathbb{E}_{\mu^{\mathbb{X}}}\left[f \circ \mathbb{X}^u + \frac{1}{2}|u|_H^2\right]$$

Let θ_0 be the measure on $\mathbb{W}$ defined by

$$d\theta_0 = \frac{e^{-f}}{\mathbb{E}_{\mu^{\mathbb{X}}}\left[e^{-f}\right]} d\mu^{\mathbb{X}}$$

According to theorem 4.6.1, there exists $(u_n) \in L_a^\infty(\mu^{\mathbb{X}}, H)^{\mathbb{N}}$ such that for every $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{X}^{u_n}$ is $\mu^{\mathbb{X}}$-a.s. invertible and that

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbb{X}^{u_n}\mu^{\mathbb{X}}}{d\mu^{\mathbb{X}}} \log \frac{d\mathbb{X}^{u_n}\mu^{\mathbb{X}}}{d\mu^{\mathbb{X}}} &\to \frac{d\theta_0}{d\mu^{\mathbb{X}}} \log \frac{d\theta_0}{d\mu^{\mathbb{X}}} \\ \frac{d\mathbb{X}^{u_n}\mu^{\mathbb{X}}}{d\mu^{\mathbb{X}}} \log \frac{d\theta_0}{d\mu^{\mathbb{X}}} &\to \frac{d\theta_0}{d\mu^{\mathbb{X}}} \log \frac{d\theta_0}{d\mu^{\mathbb{X}}} \end{aligned}$$

in $L^1(\mu^{\mathbb{X}})$.
Since $\mathbb{X}^{u_n}$ is $\mu^{\mathbb{X}}$-a.s. invertible, we have

$$\mathbb{E}_{\mu^{\mathbb{X}}}\left[f \circ \mathbb{X}^{u_n} + \frac{1}{2}|u_n|_H^2\right] = \mathbb{E}_{\mu^{\mathbb{X}}}\left[f \frac{d\mathbb{X}^{u_n}\mu^{\mathbb{X}}}{d\mu^{\mathbb{X}}}\right] + \mathbb{E}_{\mu^{\mathbb{X}}}\left[\frac{d\mathbb{X}^{u_n}\mu^{\mathbb{X}}}{d\mu^{\mathbb{X}}} \log \frac{d\mathbb{X}^{u_n}\mu^{\mathbb{X}}}{d\mu^{\mathbb{X}}}\right]$$

When n goes to infinity, we have

$$\mathbb{E}_{\mu^{\mathbb{X}}}\left[\frac{d\mathbb{X}^{u_n}\mu^{\mathbb{X}}}{d\mu^{\mathbb{X}}} \log \frac{d\mathbb{X}^{u_n}\mu^{\mathbb{X}}}{d\mu^{\mathbb{X}}}\right] \to \mathbb{E}_{\mu^{\mathbb{X}}}\left[\frac{d\theta_0}{d\mu^{\mathbb{X}}} \log \frac{d\theta_0}{d\mu^{\mathbb{X}}}\right]$$

and since $f = -\log \frac{d\theta_0}{d\mu^{\mathbb{X}}} - \log \mathbb{E}_{\mu^{\mathbb{X}}}\left[e^{-f}\right]$,

$$\mathbb{E}_{\mu^{\mathbb{X}}}\left[f \frac{d\mathbb{X}^{u_n}\mu^{\mathbb{X}}}{d\mu^{\mathbb{X}}}\right] \quad \to \quad \mathbb{E}_{\mu^{\mathbb{X}}}\left[f \frac{d\theta_0}{d\mu^{\mathbb{X}}}\right]$$

So finally, when n goes to infinity,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mu^{\mathbb{X}}}\left[f \circ \mathbb{X}^{u_n} + \frac{1}{2}|u_n|_H^2\right] \quad &\to \quad \mathbb{E}_{\theta_0}[f] + H(\theta_0|\mu^{\mathbb{X}}) \\ &= \quad -\log \mathbb{E}_{\mu^{\mathbb{X}}}\left[e^{-f}\right] \end{aligned}$$

which conclude the proof. □

Corollary 4.7.1 *Set* $f : \mathbb{W} \to \mathbb{R}$ *such that* $\mathbb{E}_{\mu^{\mathbb{X}}}\left[(|f|+1)e^{-f}\right] < \infty$ *and*

$$-\log \mathbb{E}_{\mu^{\mathbb{X}}}\left[e^{-f}\right] = \inf_{u \in L_a^\infty(\mu^{\mathbb{X}}, H), \mathbb{X}^u \ \mu^{\mathbb{X}}-a.s.\ invertible} \mathbb{E}_{\mu^{\mathbb{X}}}\left[f \circ \mathbb{X}^u + \frac{1}{2}|u|_H^2\right]$$

We have

$$-\log \mathbb{E}_{\mu^{\mathbb{X}}}\left[e^{-f}\right] = \inf_{u \in G_2(\mu^{\mathbb{X}}, \beta_{\mathbb{X}})} \mathbb{E}_{\mu^{\mathbb{X}}}\left[f \circ \mathbb{X}^u + \frac{1}{2}|u|_H^2\right]$$

Theorem 4.7.3 *Set* $f : W \to \mathbb{R}$ *a measurable function verifying* $\mathbb{E}_{\mu^{\mathbb{X}}}\left[|f|(1+e^{-f})\right] < \infty$, *then if there exists some* $u \in G_2(\mu^{\mathbb{X}}, \beta_{\mathbb{X}})$ *such that* $\mathbb{X}^u$ *is* $\mu^{\mathbb{X}}$*-a.s. left-invertible and* $\frac{d\mathbb{X}^u\mu^{\mathbb{X}}}{d\mu^{\mathbb{X}}} = \frac{e^{-f}}{\mathbb{E}_{\mu^{\mathbb{X}}}[e^{-f}]}$, *then we have*

$$-\log \mathbb{E}_{\mu^{\mathbb{X}}}\left[e^{-f}\right] = \inf_{u \in G_2(\mu^{\mathbb{X}}, \beta_{\mathbb{X}})} \mathbb{E}_{\mu^{\mathbb{X}}}\left[f \circ \mathbb{X}^u + \frac{1}{2}|u|_H^2\right]$$

Proof: Since $\mathbb{X}^u$ is $\mu^{\mathbb{X}}$-a.s. left invertible and that $\frac{d\mathbb{X}^u\mu^{\mathbb{X}}}{d\mu^{\mathbb{X}}} = \frac{e^{-f}}{\mathbb{E}_{\mu^{\mathbb{X}}}[e^{-f}]}$. We have

$$\frac{1}{2}\mathbb{E}_{\mu^{\mathbb{X}}}\left[|u|_H^2\right] = H(\mathbb{X}^u\mu^{\mathbb{X}}|\mu^{\mathbb{X}}) = \mathbb{E}_{\mu^{\mathbb{X}}}\left[\frac{e^{-f}}{\mathbb{E}_{\mu^{\mathbb{X}}}\left[e^{-f}\right]}\log\left(\frac{e^{-f}}{\mathbb{E}_{\mu^{\mathbb{X}}}\left[e^{-f}\right]}\right)\right]$$

and

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{\mu^{\mathbb{X}}}\left[f\circ\mathbb{X}^u + \frac{1}{2}|u|_H^2\right] &= \mathbb{E}_{\mu^{\mathbb{X}}}\left[\frac{e^{-f}}{\mathbb{E}_{\mu^{\mathbb{X}}}\left[e^{-f}\right]}f + \frac{e^{-f}}{\mathbb{E}_{\mu^{\mathbb{X}}}\left[e^{-f}\right]}\log\left(\frac{e^{-f}}{\mathbb{E}_{\mu^{\mathbb{X}}}\left[e^{-f}\right]}\right)\right] \\ &= -\log\mathbb{E}_{\mu^{\mathbb{X}}}\left[e^{-f}\right]\end{aligned}$$

and we conclude the proof with last proposition. $\square$

Theorem 4.7.4 *Set $f : W \to \mathbb{R}$ a measurable function such that*

$$-\log\mathbb{E}_{\mu^{\mathbb{X}}}\left[e^{-f}\right] = \inf_{u\in G_2(\mu^{\mathbb{X}},\beta_{\mathbb{X}})}\mathbb{E}_\nu\left[f\circ\mathbb{X}^u + \frac{1}{2}|u|_H^2\right]$$

Denote this infimum J_*. It is attained at $u \in G_2(\mu^{\mathbb{X}}, \beta_{\mathbb{X}})$ if and only if $\mathbb{X}^u$ is $\mu^{\mathbb{X}}$-a.s. left-invertible and $\frac{d\mathbb{X}^u\mu^{\mathbb{X}}}{d\mu^{\mathbb{X}}} = \frac{e^{-f}}{\mathbb{E}_{\mu^{\mathbb{X}}}[e^{-f}]}$.

Proof: The direct implication is given by last theorem. Conversely, if $\mathbb{X}^u$ is not $\mu^{\mathbb{X}}$-a.s. left-invertible, $H(\mathbb{X}^u\mu^{\mathbb{X}}|\mu^{\mathbb{X}}) < \frac{1}{2}\mathbb{E}_{\mu^{\mathbb{X}}}\left[|u|_H^2\right]$ and

$$\begin{aligned}-\log\mathbb{E}_{\mu^{\mathbb{X}}}\left[e^{-f}\right] = \inf_{\theta\in\mathcal{P}(W)}\left(\mathbb{E}_\theta[f] + H(\theta|\mu^{\mathbb{X}})\right) &\le \inf_{\alpha\in G_2(\mu^{\mathbb{X}},\beta_{\mathbb{X}})}\mathbb{E}_{\mathbb{X}^\alpha\mu^{\mathbb{X}}}\left[f\right] + H(\mathbb{X}^\alpha\mu^{\mathbb{X}}|\mu^{\mathbb{X}}) \\ &\le \mathbb{E}_{\mathbb{X}^u\mu^{\mathbb{X}}}\left[f\right] + H(\mathbb{X}^u\mu^{\mathbb{X}}|\mu^{\mathbb{X}}) \\ &< \mathbb{E}_{\mu^{\mathbb{X}}}\left[f\circ\mathbb{X}^u + \frac{1}{2}|u|_H^2\right]\end{aligned}$$

which is a contradiction.
We get $\frac{d\mathbb{X}^u\mu^{\mathbb{X}}}{d\mu^{\mathbb{X}}} = L$ by uniqueness of the minimizing measure of $\inf_{\theta\in\mathcal{P}(W)}\left(\mathbb{E}_\theta[f] + H(\theta|\mu^{\mathbb{X}})\right)$.

$\square$

Chapter 5

A general framework for variational calculus on Wiener space

We provide a framework to derive a variational formulation for $-\log \mathbb{E}_\nu\left[e^{-f}\right]$ for a large class of measures ν. We use a family of perturbations of the identity (W^u) whose invertibility we characterize thanks to entropy. This yields results of strong existence for various stochastic differential equations. We also discuss the attainability of the infimum in the variational formulation and we derive a Prékopa-Leindler theorem for the measure ν.

Keywords: Wiener space, variational formulation, entropy, invertibility, Brownian bridge, loop measure, diffusing particles, stochastic differential equations, Prékopa-Leindler theorem

5.1 Introduction

Denote $\mathbb{W}$ the space of continuous functions from $[0,1]$ to $\mathbb{R}^n$ and H the associated canonical Cameron-Martin space of elements of $\mathbb{W}$ which admit a density in L^2. Also denote μ the Wiener measure, W the coordinate process, and $(\mathcal{F}_t)$ the canonical filtration of W completed with respect to μ. W is a Brownian motion under μ. Set f a bounded from above measurable function from $\mathbb{W}$ to $\mathbb{R}$. In [5], Dupuis and Ellis prove that

$$-\log \mathbb{E}_\mu\left[e^{-f}\right] = \inf_\theta \left(\mathbb{E}_\theta\left[f\right] + H(\theta|\mu)\right) \tag{5.1.1}$$

where the infimum is taken over the probability measures θ on $\mathbb{W}$ which are absolutely continuous with respect to μ and the relative entropy $H(\theta|\mu)$ is equal to $\mathbb{E}_\mu\left[\frac{d\theta}{d\mu}\log\frac{d\theta}{d\mu}\right]$. In [1], Boué and Dupuis use it to derive the variational formulation

$$-\log \mathbb{E}_\mu\left[e^{-f}\right] = \inf_u \mathbb{E}_\mu\left[f\circ(W+u) + \frac{1}{2}\int_0^1 |\dot{u}(s)|^2 ds\right] \tag{5.1.2}$$

where the infimum is taken over L^2 functions from $\mathbb{W}$ to H whose density is adapted to $(\mathcal{F}_t)$. This variational formulation is useful to derive large deviation asymptotics as Laplace principles for small noise diffusions for instance. This result was later extended by Budhiraja and Dupuis to Hilbert-space-valued Brownian motions in [2], and then by Zhang to abstract Wiener spaces in [27], using the framework developed by Üstünel and Zakai in [21].
The Prékopa-Leindler theorem first formulation was given by Prékopa in [17] and arose in stochastic programming where a lot of non-linear optimization problems require concavity. In [8], Huu Hariya uses the variational formulation to retrieve a Prékopa-Leindler theorem for Wiener space, similar to the formulation of Üstünel and Feyel in [7] with log-concave measures. Other functional inequalities can be derived from 5.1.2, see for instance Lehec in [15].
The bounded from above hypothesis in 5.1.2 was weakened significantly by Üstünel in [25], it was replaced with the condition

$$\mathbb{E}_\mu\left[fe^{-f}\right] < \infty$$

and the existence of conjugate integers p and q such that

$$f \in L^p(\mu), e^{-f} \in L^q(\mu)$$

These relaxed hypothesis pave the way to new applications. The possibility of using unbounded functions is primordial in Dabrowski's application of 5.1.2 to free entropy in [4].
Üstünel's approach is routed in the study of the perturbations of the identity of $\mathbb{W}$, which is the coordinate process, and their invertibility. The question of the invertibility of an adapted perturbation of the identity is linked to the representability of measures and was put to light by the celebrated example of Tsirelson [20]. Üstünel proved that if $u \in L^2(\mu, H)$ has an adapted density, $I_{\mathbb{W}} + u$ is μ-a.s. invertible if and only if

$$H((I_{\mathbb{W}} + u)\mu|\mu) = \frac{1}{2}\mathbb{E}_\mu\left[|u|_H^2\right]$$

If u satisfies the hypothesis of Girsanov theorem, this gives a criteria of existence of strong solutions to some stochastic differential equations. Indeed, Üstünel proves in [24] that if such a $I_{\mathbb{W}} + u$ in invertible, its inverse V is a strong solution to the stochastic differential equation

$$dV(t) = -\dot{u}(t) \circ V dt + dW(t)$$

To prove 5.1.2 with the integrability conditions specified above, Üstünel uses the fact that H-C^1 shifts, meaning shifts that are a.s. Fréchet-differentiable on H with a a.s. continuous on H Fréchet derivative, are a.s. invertible, and that shifts can be approached with H-C^1 shifts using the Ornstein-Uhlenbeck semigroup.
In [10] we give a variational formulation similar as 5.1.2 for diffusions which are solutions of stochastic differential equations, while lowering the integrability hypothesis on f. This paper also focus on the invertibility of certain perturbations of the identity that are not affine shifts since the measure considered is not the same. However, contrary to what Üstünel does in [25], we do not approach f to derive invertible shift from those approached functions. We write $\frac{e^{-f}}{\mathbb{E}[e^{-f}]}$ as the Wick exponential of some v, and then approach v to obtain shifts that generate invertible perturbations of the identity. Our method relies on the fact that we have a Girsanov-like change of variable formula with the perturbations of the identity, with relatiowith respect to a particular Brownian motion. It does not

use any tool that is specific to Gaussian measures.
Two questions arise from this: can this method be applied to other measures, and can invertibility results be linked to the existence of strong solutions for some stochastic differential equations?
This paper presents a general framework to be able to similarly derive a variational formulation for $-\log \mathbb{E}_\nu[e^{-f}]$ for a large class of measures ν. We give a set of conditions so that a set of processes (W^u) can act as perturbations of W and allow a Girsanov-like change of variable with respect to a Brownian motion β. At first we want to have a minimal setting to be able to compute the variational formula, and we just consider the u whose density is a.s. bounded and we prove that

$$-\log \mathbb{E}_\nu \left[e^{-f}\right] = \inf_u \mathbb{E}_\nu \left[f \circ W^u + \frac{1}{2}|u|_H^2\right]$$

where the infimum is just taken over the u with a.s. bounded density, thus providing a clearer description of the infimum. The integrability hypothesis over f remain the same as in the case of a diffusion. In a second time, we study the possibilities to expand the domain over which the infimum is taken, for both variational calculus results, mainly concerning the attainability of the infimum, and invertibility results. Indeed, we prove that once again, W^u is invertible if and only if

$$H(W^u\nu|\nu) = \frac{1}{2}\mathbb{E}_\nu \left[|u|_H^2\right]$$

and in case of invertibility its inverse is of the form W^v. Furthermore, the invertibility of W^u can be related to the existence of strong solutions of stochastic differential equations in certain cases. If W^u can be written $W + w^u$, with $w^u \in L^0(\nu, H)$ having an adapted density, and is invertible, its inverse W^v verify

$$dW^v(t) = -\overset{\cdot}{\overbrace{w^u}}(t) \circ W^v dt + W(t)$$

We also prove a Prékopa-Leindler theorem on $\mathbb{W}$ for the measure ν, however the convexity hypothesis seem very restrictive.
We apply this framework to various examples. First we retrieve the case of the image measure of a diffusion of [10], and then we study the case of the image measure of a Brownian bridge, a loop measure, and finally the image measure of a set of diffusing particles. The behaving of diffusing particles satisfying a differential stochastic system was studied by Cépa and Lepingle in [3], and Rogers and Shi in [19]. We focus on the case where the stochastic differential system the particles $(Z_1, ..., Z_n)$ verify is of the form

$$\begin{aligned}
Z_1(t) &= z_1(0) + \sigma B_1(t) + b\int_0^t Z_1(s)ds + ct + \gamma \sum_{j\in\{1,\dots,n\}\setminus\{1\}} \int_0^t \frac{ds}{Z_1(s) - Z_j(s)} \\
&\vdots \\
Z_n(t) &= z_n(0) + \sigma B_n(t) + b\int_0^t Z_n(s)ds + ct + \gamma \sum_{j\in\{1,\dots,n\}\setminus\{n\}} \int_0^t \frac{ds}{Z_n(s) - Z_j(s)}
\end{aligned}$$

where $(B_1, ..., B_n)$ is a $\mathbb{R}^n$-valued Brownian motion and $\sigma^2 \leq 2\gamma$, which guarantee there is no collision.

5.2 Framework

Set $n \in \mathbb{N}^*$, we denote $\mathbb{W} = C([0,1], \mathbb{R}^n)$ the canonical Wiener space, $H = \left\{ \int_0^{\cdot} \dot{h}(s)ds, \dot{h} \in L^2([0,1]) \right\}$ the associated Cameron-Martin space and $(W(t))$ is the coordinate process.
We assume that $\mathbb{W}$ is equipped with a probability measure ν. The filtration of a process m will be denoted $(\mathcal{F}_t^m)$, the filtration of W will be simply denoted $(\mathcal{F}_t)$. Except if stated otherwise, every filtration considered is completed with respect to ν. We denote, for $p \in \mathbb{R}_+$,

$$L_a^p(\nu, H) = \{u \in L^p(\nu, H), \dot{u} \; is \; (\mathcal{F}_t) - adapted\}$$

and

$$\mathcal{D} = \left\{u \in L_a^0(\nu, H), \dot{u} \; is \; d\nu \times dt - a.s. \; bounded\right\}$$

If m is a martingale and v has a density whose stochastic integral with respect to m is well defined we will denote

$$\delta_m v = \int_0^1 \dot{v}(s)dm(s)$$

We also denote the Wick exponential as follow

$$\rho(\delta_m v) = \exp\left(\int_0^1 \dot{v}(s)dm(s) - \frac{1}{2}\int_0^1 |\dot{v}(s)|^2 \, d\langle m\rangle(s)\right)$$

and for $p \geq 0$ we denote

$$G_p(\nu, m) = \{u \in L_a^p(\nu, H), \mathbb{E}_\nu\left[\rho(-\delta_m u)\right] = 1\}$$

We assume there exists a family of processes $(W^u)_{u \in \mathcal{D}}$ and a ν-Brownian motion β which verify the following conditions:
(i) β is a ν-Brownian motion whose canonical filtration is identical to the canonical filtration of $(W(t))$
(ii) $W^0 = W$
(iii) For every $u \in \mathcal{D}$, the law of W^u under $\tilde{\nu}^u$ is the same as the law of W under ν, where $\tilde{\nu}^u$ is defined by $\frac{d\tilde{\nu}^u}{d\nu} = \rho(-\delta_\beta u)$
(iv) For every $u \in \mathcal{D}$,

$$\beta \circ W^u = \beta + u$$

(v) For every $u, v \in \mathcal{D}$,

$$W^u \circ W^v = W^{v + u \circ W^v} \;\; \nu - a.s.$$

Remark: Clearly $\mathcal{D} \subset L_a^\infty(\nu, H)$, so if $u \in \mathcal{D}$, $\mathbb{E}_\nu\left[\rho(-\delta_\beta u)\right] = 1$ and $\tilde{\nu}^u$ which was defined in condition (iii) is indeed a probability measure.
Condition (iii) can be written as follow:

Proposition 5.2.1 *Set $u \in \mathcal{D}$, for every bounded measurable function f, we have:*

$$\mathbb{E}_\nu\left[f\right] = \mathbb{E}_\nu\left[f \circ W^u \rho(-\delta_\beta u)\right]$$

Next proposition ensures that the compositions written in (iv) and (v) are well defined.

Proposition 5.2.2 *Set $u \in \mathcal{D}$, we have*

$$W^u \nu \sim \nu$$

Proof: Set $f \in C_b(\mathbb{W})$ bounded and measurable, we have, using proposition 5.2.1

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{W^u \tilde{\nu}^u}[f] &= \mathbb{E}_{\tilde{\nu}^u}[f \circ W^u] \\ &= \mathbb{E}_{\nu}[f \circ W^u \rho(-\delta_\beta u)] \\ &= \mathbb{E}_{\nu}[f]\end{aligned}$$

so $W^u \tilde{\nu}^u = \nu$.
Since $\tilde{\nu}^u \sim \nu$, we have $W^u \tilde{\nu}^u \sim W^u \nu$ which conclude the proof. □

5.3 Invertibility results

5.3.1 First results

Definition 5.3.1 *A measurable map $U : \mathbb{W} \to \mathbb{W}$ is said to be ν-a.s. left-invertible if and only if $U\nu \ll \nu$ and there exists a measurable map $V : \mathbb{W} \to \mathbb{W}$ such that $V \circ U = I_{\mathbb{W}}$ ν-a.s.*
A measurable map $U : \mathbb{W} \to \mathbb{W}$ is said to be ν-a.s. right-invertible if and only if there exists a measurable map $V : \mathbb{W} \to \mathbb{W}$ such that $V\nu \ll \nu$ and $U \circ V = I_{\mathbb{W}}$ ν-a.s.

Proposition 5.3.1 *Set $U, V : \mathbb{W} \to \mathbb{W}$ measurable maps such that $V \circ U = I_{\mathbb{W}}$ ν-a.s. and $V\nu \ll \nu$ Then $U \circ V = I_{\mathbb{W}}$ $U\nu$-a.s., so if $U\nu \sim \nu$, we also have $U \circ V = I_{\mathbb{W}}$ ν-a.s. In that case, we will say that U is ν-a.s. invertible and we also have $V\nu \sim \nu$.*

Proof: There exists $A \subset W$ such that $\nu(A) = 1$ and for every $w \in A$, $V \circ U(w) = w$. Consider such a set A, we have

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{U\nu}\left[1_{U \circ V(w) = w}\right] &= \mathbb{E}_{\nu}\left[1_{U \circ V \circ U(w) = U(w)}\right] \\ &= \mathbb{E}_{\nu}\left[1_{U \circ V \circ U(w) = U(w)} 1_{w \in A}\right] + \mathbb{E}_{\nu}\left[1_{U \circ V \circ U(w) = U(w)} 1_{w \notin A}\right] \\ &= \mathbb{E}_{\nu}\left[1_{U(w) = U(w)} 1_{w \in A}\right] \\ &= 1\end{aligned}$$

Now assume that U is ν-a.s. invertible, set $A \in \mathcal{F}_1$ such that $V\nu(A) = 0$. We have $1_A \circ V = 0$ ν-a.s. and since $U\nu \sim \nu$, we have $1_A \circ V = 0$ $U\nu$-a.s. Finally,

$$\nu(A) = \mathbb{E}_{\nu}[1_A] = \mathbb{E}_{\nu}[1_A \circ V \circ U]$$

which concludes the proof. □

Theorem 5.3.1 *Set $u \in \mathcal{D}$ and assume there exists a measurable map $V : \mathbb{W} \to \mathbb{W}$ such that $V \circ W^u = I_{\mathbb{W}}$ ν-a.s. Denote $v = -u \circ V$. Then $W^u \circ V = I_{\mathbb{W}}$ ν-a.s., $v \in \mathcal{D}$ and $V = W^v$ ν-a.s. Moreover, we have*

$$\begin{aligned}\frac{dW^u \nu}{d\nu} &= \rho(-\delta_\beta v) \\ \frac{dW^v \nu}{d\nu} &= \rho(-\delta_\beta u)\end{aligned}$$

Proof: Set $f \in C_b(\mathbb{W})$, we have

$$\mathbb{E}_\nu[f \circ V] = \mathbb{E}_\nu[f \circ V \circ W^u \rho(-\delta_\beta u)] = \mathbb{E}_\nu[f \rho(-\delta_\beta u)]$$

So $V\nu \sim \nu$ and

$$\frac{dV\nu}{d\nu} = \rho(-\delta_\beta u)$$

Since $W^u\nu \sim \nu$, the first assertion comes from proposition 5.3.1.
Clearly $v \in L^0(\nu, H)$. Since $u \in \mathcal{D}$, there exists $n \in \mathbb{N}$ such that $d\nu \times dt$-a.s.

$$|\dot{u}(s,w)| \le n$$

Since $V\nu \ll \nu$, we have $d\nu \times dt$-a.s.

$$|\dot{v}(s,w)| \le n$$

Finally, let us prove that $\dot{v}$ is adapted. We have ν-a.s.

$$\dot{v} \circ W^u = -\dot{u} \circ V \circ W^u = -\dot{u}$$

hence $v \circ W^u$ is adapted. Set $A \in L^2(d\nu \times dt)$ an adapted process. We have:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_\nu\left[\rho(-\delta_\beta u)\int_0^1 \dot{v}(s) \circ W^u A(s) \circ W^u ds\right] &= \mathbb{E}_\nu\left[\int_0^1 \dot{v}(s)A(s)ds\right] \\
&= \mathbb{E}_\nu\left[\int_0^1 \mathbb{E}_\nu[\dot{v}(s)|\mathcal{F}_s]\, A(s)ds\right] \\
&= \mathbb{E}_\nu\left[\rho(-\delta_\beta u)\int_0^1 \mathbb{E}_\nu[\dot{v}(s)|\mathcal{F}_s] \circ W^u A(s) \circ W^u ds\right]
\end{aligned}$$

So $\mathbb{E}_\nu[\dot{v}(s)|\mathcal{F}_s] \circ W^u = \dot{v}(s) \circ W^u$ $ds \times d\nu$-a.s. which implies $\mathbb{E}_\nu[\dot{v}(s)|\mathcal{F}_s] = \dot{v}(s)$ $ds \times d\nu$-a.s. since $W^u\nu \sim \nu$.
We have

$$W^v \circ W^u = W^{u+v\circ W^u} = W^0 = I_{\mathbb{W}} \quad \nu - a.s.$$

and

$$V = W^v \circ W^u \circ V = W^v \quad \nu - a.s.$$

Finally, set $f \in C_b(\mathbb{W})$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_\nu[f \circ W^u] &= \mathbb{E}_\nu[f \circ W^u \circ W^v \rho(-\delta_\beta v)] \\
&= \mathbb{E}_\nu[f \rho(-\delta_\beta v)] \\
\mathbb{E}_\nu[f \circ W^v] &= \mathbb{E}_\nu[f \circ W^v \circ W^u \rho(-\delta_\beta u)] \\
&= \mathbb{E}_\nu[f \rho(-\delta_\beta u)]
\end{aligned}$$

which gives the final assertion. □

Remark: Set $u \in \mathcal{D}$, W^u is ν-a.s. invertible if and only if it is ν-a.s. left-invertible.

5.3.2 Entropic characterisation of the invertibility of W^u

In this section, we prove that the process W^u is left invertible if and only if the kinetic energy of the perturbation u is equal to the relative entropy of $W^u\nu$.

Proposition 5.3.2 *Set $u \in \mathcal{D}$. We have:*

$$H(W^u\nu|\nu) \leq \frac{1}{2}\mathbb{E}_\nu\left[|u|_H^2\right]$$

Proof: Set $g \in C_b(\mathbb{W})$ and denote $L = \frac{dW^u\nu}{d\nu}$, we have:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_\nu\left[g \circ W^u\right] &= \mathbb{E}_\nu\left[gL\right] \\
&= \mathbb{E}_\nu\left[g \circ W^u L \circ W^u \rho(-\delta_\beta u)\right]
\end{aligned}$$

Hence $L \circ W^u \mathbb{E}_\nu\left[\rho(-\delta_\beta u)|\,\mathcal{F}_1^{W^u}\right] = 1$ ν-a.s. and

$$\begin{aligned}
H(W^u\nu|\nu) &= \mathbb{E}_\nu\left[L\log L\right] \\
&= \mathbb{E}_{W^u\nu}\left[\log L\right] \\
&= \mathbb{E}_\nu\left[\log L \circ W^u\right] \\
&= -\mathbb{E}_\nu\left[\log \mathbb{E}_\nu\left[\rho(-\delta_\beta u)|\,\mathcal{F}_1^{W^u}\right]\right] \\
&\leq -\mathbb{E}_\nu\left[\log \rho(-\delta_\beta u)\right] \\
&\leq \frac{1}{2}\mathbb{E}_\nu\left[|u|_H^2\right]
\end{aligned}$$

□

The proof gives the following additional result

Corollary 5.3.1 *For $u \in \mathcal{D}$, we have*

$$L \circ W^u \mathbb{E}_\nu\left[\rho(-\delta_\beta u)|\,\mathcal{F}_1^{W^u}\right] = 1$$

Now comes the criteria:

Theorem 5.3.2 *Set $u \in \mathcal{D}$, then W^u is ν-a.s. invertible if and only if:*

$$H(W^u\nu|\nu) = \frac{1}{2}\mathbb{E}_\nu\left[|u|_H^2\right]$$

Proof: Assume that the inequality hold. We still denote $L = \frac{dW^u\nu}{d\nu}$ and as in last proof we have ν-a.s.

$$L \circ W^u \mathbb{E}_\nu\left[\rho(-\delta_\beta u)|\,\mathcal{F}_1^{W^u}\right] = 1$$

Using Jensen inequality we have ν-a.s.

$$\begin{aligned}
0 &= \log L \circ W^u + \log \mathbb{E}_\nu\left[\rho(-\delta_\beta u)|\,\mathcal{F}_1^{W^u}\right] \\
&\geq \log L \circ W^u + \mathbb{E}_\nu\left[\log \rho(-\delta_\beta u)|\,\mathcal{F}_1^{W^u}\right]
\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} 0 &\geq \mathbb{E}_\nu\left[\log L\circ W^u\right]+\mathbb{E}_\nu\left[\log\rho(-\delta_\beta u)\right] \\ &\geq H(W^u\nu|\nu)-\frac{1}{2}\mathbb{E}_\nu\left[|u|_H^2\right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

So

$$\begin{aligned} 0 &= \log L\circ W^u+\log\mathbb{E}_\nu\left[\rho(-\delta_\beta u)|\,\mathcal{F}_1^{W^u}\right] \\ &= \log L\circ W^u+\mathbb{E}_\nu\left[\log\,\rho(-\delta_\beta u)|\,\mathcal{F}_1^{W^u}\right] \end{aligned}$$

and

$$\log\mathbb{E}_\nu\left[\rho(-\delta_\beta u)|\,\mathcal{F}_1^{W^u}\right]=\mathbb{E}_\nu\left[\log\,\rho(-\delta_\beta u)|\,\mathcal{F}_1^{W^u}\right]$$

The strict concavity of the function log gives

$$\mathbb{E}_\nu\left[\rho(-\delta_\beta u)|\,\mathcal{F}_1^{W^u}\right]=\rho(-\delta_\beta u)$$

Finally we have

$$L\circ W^u\rho(-\delta_\beta u)=1 \tag{5.3.3}$$

Since β is a ν-Brownian motion, there exists $v\in L_a^0(\nu,H)$ such that $L=\rho(-\delta_\beta v)$. We apply the logarithm to 5.3.3 to get:

$$0 \;=\; \delta_\beta v\circ W^u+\frac{1}{2}|v\circ W^u|_H+\delta_\beta u+\frac{1}{2}|u|_H$$

We have:

$$\delta_\beta v\circ W^u \;=\; \int_0^1\dot v(s)\circ W^u d\beta(s)+\langle v\circ W^u,u\rangle_H$$

so finally we have:

$$0=\delta_\beta(v\circ W^u+u)+\frac{1}{2}|v\circ W^u+u|_H^2 \tag{5.3.4}$$

According to Girsanov theorem $\beta+v$ is a $W^u\nu$-Brownian motion, so:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_\nu\left[L\log L\right] &= \mathbb{E}_{W^u\nu}\left[\log L\right] \\ &= \mathbb{E}_{W^u\nu}\left[-\int_0^1\dot v(s)d\beta(s)-\frac{1}{2}\int_0^1|\dot v(s)|^2ds\right] \\ &= \frac{1}{2}\mathbb{E}_{W^u\nu}\left[\int_0^1|\dot v(s)|^2ds\right] \\ &= \frac{1}{2}\mathbb{E}_\nu\left[|v\circ W^u|_H^2\right] \end{aligned}$$

So $v\circ W^u\in L_a^2(\nu,H)$ and we can take the expectation with respect to ν in 5.3.4 to obtain $u+v\circ W^u=0$ ν-a.s. which implies $v\in\mathcal{D}$. So ν-a.s.

$$W^v\circ W^u=W^{u+v\circ W^u}=W^0=I_{\mathbb{W}}$$

Conversely, assume that W^u admits an inverse V and set $v = -u \circ V$. According to theorem 5.3.1, $v \in D$ and $W^v = V$ ν-a.s. Once again, denote $L = \frac{dW^u\nu}{d\nu}$. We know that $L = \rho(-\delta_\beta v)$. Observe that

$$\begin{aligned}\log L \circ W^u &= \left(-\int_0^1 \dot v(s)d\beta(s) - \frac{1}{2}\int_0^1 \dot v(s)^2 ds\right) \circ W^u \\ &= -\log \rho(-\delta_\beta u)\end{aligned}$$

So finally

$$\begin{aligned}H(W^u\nu|\nu) &= \mathbb{E}_\nu[L\log L] = \mathbb{E}_\nu[\log L \circ W^u] \\ &= \mathbb{E}_\nu\left[-\log\rho(-\delta_\beta u)\right] \\ &= \frac{1}{2}\mathbb{E}_\nu[|u|_H^2]\end{aligned}$$

□

The proof gives the following additional result:

Corollary 5.3.2 *Set $u \in \mathcal{D}$ such that W^u is ν-a.s. left-invertible, we have*

$$L \circ W^u \rho(-\delta_\beta u) = 1$$

The following corollary is an immediate consequence of theorems 5.3.1 and 5.3.2.

Corollary 5.3.3 *Set $u \in \mathcal{D}$, we have*

$$H(W^u\nu|\nu) = \frac{1}{2}\mathbb{E}_\nu\left[|u|_H^2\right]$$

if and only if there exists $v \in \mathcal{D}$ such that

$$W^v \circ W^u = W^u \circ W^v = I_{\mathbb{W}}\ \nu - a.s.$$

Definition 5.3.2 *We define $\mathcal{D}^i$ as*

$$\mathcal{D}^i = \{u \in D, W^u \textit{ is } \nu - a.s. \textit{ invertible}\}$$

5.4 Variational problem

5.4.1 Approximation of absolutely continuous measures

Theorem 5.4.1 *If $\theta \sim \nu$ is such that there exists $r > 1$ such that*

$$\frac{d\theta}{d\nu}\log\frac{d\theta}{d\nu} \in L^1(\nu)$$

and

$$\log\frac{d\theta}{d\nu} \in L^r(\nu)$$

there exists $(u_n) \in \left(\mathcal{D}^i\right)^{\mathbb{N}}$ such that,

$$\begin{aligned}&\frac{dW^{u_n}\nu}{d\nu}\log\frac{dW^{u_n}\nu}{d\nu} \to \frac{d\theta}{d\nu}\log\frac{d\theta}{d\nu} \ \ in\ \ L^1(\nu) \\ &\frac{dW^{u_n}\nu}{d\nu}\log\frac{d\theta}{d\nu} \to \frac{d\theta}{d\nu}\log\frac{d\theta}{d\nu} \ \ in\ \ L^1(\nu)\end{aligned}$$

Proof: Denote

$$L = \frac{d\theta}{d\nu}$$

Eventually sequentializing afterward, we have to prove that for any $\epsilon > 0$, there exists $u \in \mathcal{D}^i$ such that

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_\nu\left[\left|\frac{dW^u\nu}{d\nu}\log\frac{dW^u\nu}{d\nu} - L_1\log L_1\right|\right] &\leq \epsilon\\ \mathbb{E}_\nu\left[\left|\frac{dW^u\nu}{d\nu}\log L_1 - L_1\log L_1\right|\right] &\leq \epsilon\end{aligned}$$

The proof is divided in six steps.
Step 1 : We approximate L with a density that is both lower-bounded and upper bounded.
Denote

$$\begin{aligned}\phi_n &= \min(L,n)\\ L_n &= \frac{\phi_n}{\mathbb{E}_\nu[\phi_n]}\end{aligned}$$

The monotone convergence theorem ensures that $\mathbb{E}_\nu[\phi_n] \to 1$ so for any $\alpha \in (0,1)$, there exists some $n_\alpha \in \mathbb{N}$ such that for any $n \geq n_\alpha$,

$$\mathbb{E}_\nu[\phi_n] \geq \alpha$$

$(L_n \log L_n)$ converges ν-a.s. to $L\log L$ and if $n \geq n_\alpha$ and

$$\begin{aligned}|L_n\log L_n| &= \left|\frac{\phi_n}{\mathbb{E}_\nu[\phi_n]}\log\frac{\phi_n}{\mathbb{E}_\nu[\phi_n]}\right|1_{\frac{\phi_n}{\mathbb{E}_\nu[\phi_n]}\leq 1} + \left|\frac{\phi_n}{\mathbb{E}_\nu[\phi_n]}\log\frac{\phi_n}{\mathbb{E}_\nu[\phi_n]}\right|1_{\frac{\phi_n}{\mathbb{E}_\nu[\phi_n]}>1}\\ &\leq e^{-1}1_{\frac{\phi_n}{\mathbb{E}_\nu[\phi_n]}\leq 1} + \left|\frac{L}{\alpha}\log\frac{L}{\alpha}\right|1_{\frac{\phi_n}{\mathbb{E}_\nu[\phi_n]}>1}\\ &\leq e^{-1} + \left|\frac{L}{\alpha}\log\frac{L}{\alpha}\right|\end{aligned}$$

So the Lebesgue theorem ensures that $(L_n\log L_n)$ converge toward $L\log L$ in $L^1(\nu)$. Similarly, $(L_n \log L)$ converges ν-a.s. to $L\log L$ and if $n \leq n_\alpha$,

$$|L_n\log L| \leq \left|\frac{L}{\alpha}\log L\right|$$

and the Lebesgue theorem ensures that $(L_n\log L)$ converges to $L_n \log L$ in $L^1(\nu)$, so there exists $n_0 \in \mathbb{N}$ such that

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_\nu[|L_{n_0}\log L_{n_0} - L\log L|] &\leq \epsilon\\ \mathbb{E}_\nu[|L_{n_0}\log L - L\log L|] &\leq \epsilon\end{aligned}$$

$\left(\frac{L_{n_0}+a}{1+a}\log\frac{L_{n_0}+a}{1+a}\right)$ converges ν-a.s. to $L_{n_0}\log L_{n_0}$ when a converges to 0. Set $a \in [0,1]$, we have

$$\begin{aligned}\left|\frac{L_{n_0}+a}{1+a}\log\frac{L_{n_0}+a}{1+a}\right| &= \left|\frac{L_{n_0}+a}{1+a}\log\frac{L_{n_0}+a}{1+a}\right|1_{L_{n_0}\leq 1} + \left|\frac{L_{n_0}+a}{1+a}\log\frac{L_{n_0}+a}{1+a}\right|1_{L_{n_0}>1}\\ &\leq e^{-1}1_{L_{n_0}\leq 1} + |L_{n_0}\log L_{n_0}|\,1_{L_{n_0}>1}\\ &\leq e^{-1} + |L_{n_0}\log L_{n_0}|\end{aligned}$$

So the Lebesgue theorem ensures that $\left(\frac{L_{n_0}+a}{1+a}\log\frac{L_{n_0}+a}{1+a}\right)$ converges to $L_{n_0}\log L_{n_0}$ in $L^1(\nu)$. Similarly, $\left(\frac{L_{n_0}+a}{1+a}\log L\right)$ converges ν-a.s. to $L_{n_0}\log L$ and

$$\left|\frac{L_{n_0}+a}{1+a}\log L\right| \quad \leq \quad |(L_{n_0}+1)\log L|$$

and the Lebesgue theorem ensures that $\left(\frac{L_{n_0}+a}{1+a}\log L\right)$ converges to $L_{n_0}\log L$ in $L^1(\nu)$ and there exists $a \in [0,1]$ such that

$$\mathbb{E}_\nu\left[\left|\frac{L_{n_0}+a}{1+a}\log\frac{L_{n_0}+a}{1+a} - L_{n_0}\log L_{n_0}\right|\right] \leq \epsilon$$
$$\mathbb{E}_\nu\left[\left|\frac{L_{n_0}+a}{1+a}\log L - L_{n_0}\log L\right|\right] \leq \epsilon$$

$\frac{L_{n_0}+a}{1+a}$ is both lower-bounded and upper-bounded in $L^\infty(\nu)$, denote these bounds respectively d and D.
Also denote

$$M(t) = \mathbb{E}_\nu\left[\left.\frac{L_{n_0}+a}{1+a}\right|\mathcal{F}_t\right]$$

We write

$$M(t) = \exp\left(\int_0^t \dot\alpha(s)d\beta(s) - \frac{1}{2}\int_0^t |\dot\alpha(s)|^2\,ds\right)$$

with $\alpha \in L^0_a(\nu, H)$.
Step 2 : We prove that $\alpha \in L^2(\nu, H)$.
Set

$$T_n = \inf\left\{t\in[0,1], \int_0^t |\dot\alpha(s)|^2\,ds > n\right\}$$

(T_n) is a sequence of stopping times which increases stationarily toward 1. We have, using $M = 1 + \int_0^{\cdot}\dot\alpha(s)M(s)d\beta(s)$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_\nu\left[(M(t\wedge T_n)-1)^2\right] &= \mathbb{E}_\nu\left[\int_0^{t\wedge T_n}|\dot\alpha(s)|^2 M(s)^2 ds\right]\\ &\geq d^2\mathbb{E}_\nu\left[\int_0^{t\wedge T_n}|\dot\alpha(s)|^2\,ds\right]\end{aligned}$$

so

$$\mathbb{E}_\nu\left[\int_0^{t\wedge T_n}|\dot\alpha(s)|^2\,ds\right] \leq \frac{1}{d^2}\mathbb{E}_\nu\left[(M(t\wedge T_n)-1)^2\right] \leq \frac{2\left(D^2+1\right)}{d^2}$$

hence passing to the limit

$$\mathbb{E}_\nu\left[\int_0^1 |\dot\alpha(s)|^2\,ds\right] \leq \infty$$

Step 3 : we approximate α with an element of $L^\infty(\nu, H)$.
Define

$$\alpha_n(t,w) \in \mathbb{R}\times W \mapsto \int_0^t \dot\alpha(s,w)1_{[0,T_n]}(s,w)ds$$

and

$$M^n(t) \quad = \quad \exp\left(\int_0^t \dot{\alpha^n}(s)d\beta(s) - \frac{1}{2}\int_0^t \left|\dot{\alpha^n}(s)\right|^2 ds\right)$$

and clearly $(M^n(1)\log M^n(1))$ converges ν-a.s. to $M(1)\log M(1)$, $(M^n(1)\log L)$ converges ν-a.s. to $M(1)\log L$ and $M^n(1) = \mathbb{E}_\nu\left[M(1)|\,\mathcal{F}_{T_n}\right]$, so ν-a.s.

$$\begin{aligned}
|M^n(1)\log M^n(1)| &\leq \max\left(e^{-1}, |D\log D|\right)\\
|M^n(1)\log L| &\leq |D\log L|
\end{aligned}$$

so the Lebesgue theorem ensures that $(M^n(1)\log M^n(1))$ converges to $M(1)\log M(1)$ in $L^1(\nu)$ and $(M_1^n\log L)$ converges to $M_1\log L$ in $L^1(\nu)$ and there exists $n\in\mathbb{N}$ such that

$$\begin{aligned}
|M^n(1)\log M^n(1) - M(1)\log M(1)| &\leq \epsilon\\
|M^n(1)\log L - M(1)\log L| &\leq \epsilon
\end{aligned}$$

Step 4 : We approximate α^n with an element of $\mathcal{D}$.
Define

$$\xi^{n,m} : (t,w)\in[0,1]\times\mathbb{W}\mapsto \int_0^t \max\left(\min\left(\dot{\alpha}^n(s,w), m\right), -m\right)ds$$

and

$$M^{n,m}(t) = \exp\left(\int_0^t \dot{\xi^{n,m}}(s)d\beta(s) - \frac{1}{2}\int_0^t \left|\dot{\xi^{n,m}}(s)\right|^2 ds\right)$$

$(M^{n,m}(1)\log M^{n,m}(1))$ and $(M^{n,m}(1)\log L)$ converges respectively to $M^n(1)\log M^n(1)$ and $M^n(1)\log L$ in probability. To prove that $(M^{n,m}(1)\log M^{n,m}(1))$ is uniformly integrable, it is sufficient to prove it is bounded in any $L^p(\nu)$, set $p>1$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_\nu\left[|M^{n,m}(1)|^p\right] &= \mathbb{E}_\nu\left[\exp\left(p\int_0^1 \dot{\xi^{n,m}}(s)d\beta(s) - \frac{p}{2}\int_0^1\left|\dot{\xi^{n,m}}(s)\right|^2 ds\right)\right]\\
&= \mathbb{E}_\nu\left[\exp\left(p\int_0^1 \dot{\xi^{n,m}}(s)d\beta(s) - \frac{p^2}{2}\int_0^1\left|\dot{\xi^{n,m}}(s)\right|^2 ds\right)\exp\left(\frac{p^2-p}{2}\int_0^1\left|\dot{\xi^{n,m}}(s)\right|^2 ds\right)\right]\\
&\leq \mathbb{E}_\nu\left[\exp\left(\int_0^1 p\dot{\xi^{n,m}}(s)d\beta(s) - \frac{1}{2}\int_0^1\left|p\dot{\xi^{n,m}}(s)\right|^2 ds\right)\exp\left(\frac{p^2-p}{2}n\right)\right]\\
&\leq \exp\left(\frac{p^2-p}{2}n\right)
\end{aligned}$$

so $(M^{n,m}(1)\log M^{n,m}(1))$ converges to $M^n(1)\log M^n(1)$ in $L^1(\nu)$. Furthermore, set p such that $p^{-1}+r^{-1}=1$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_\nu\left[|M^{n,m}(1)\log L - M^n(1)\log L|\right] &\leq |M^{n,m}(1) - M^n(1)|_{L^p(\nu)}\,|\log L|_{L^r(\nu)}\\
&\to 0
\end{aligned}$$

and there exists some $m>0$ such that

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_\nu\left[|M^{n,m}(1)\log M^{n,m}(1) - M^n(1)\log M^n(1)|\right] &\leq \epsilon\\
\mathbb{E}_\nu\left[|M^{n,m}(1)\log L - M^n(1)\log L|\right] &\leq \epsilon
\end{aligned}$$

Step 5 : we approximate $\xi^{n,m}$ with a retarded shift.
For $\eta > 0$ set

$$\dot{\gamma^\eta}(t,w) \in [0,1] \times W \mapsto \dot{\xi^{n,m}}(t-\eta)(w) 1_{t>\eta}$$

$$N^\eta(t) = \exp\left(\int_0^1 \dot{\gamma^\eta}(s) d\beta(s) - \frac{1}{2} \int_0^1 \left|\dot{\gamma^\eta}(s)\right|^2 ds \right)$$

We have for any $\eta > 0$, $d\nu \times ds$-a.s.,

$$\left|\dot{\gamma^\eta}(s)\right| \leq m$$

i.e. $\gamma^\eta \in \mathcal{D}$.
Similarly as before $(N^\eta(1) \log N^\eta(1))$ converges in probability to $M^{n,m}(1) \log M^{n,m}(1)$ and $(N^\eta(1))$ is bounded in every $L^p(\nu)$ hence $(N^\eta(1) \log N^\eta(1))$ is uniformly integrable and converges in $L^1(\nu)$ to $M^{n,m}(1) \log M^{n,m}(1)$
Furthermore, using Holder inequality, we have

$$\mathbb{E}_\nu \left[|N^\eta(1) \log L - M^{n,m}(1) \log L| \right] \leq |N^\eta(1) - M^{n,m}(1)|_{L^p(\nu)} \left|\log L\right|_{L^r(\nu)}$$

where $\frac{1}{p} + \frac{1}{r} = 1$.
Consequently there exists $\eta > 0$ such that

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_\nu \left[|N^\eta(1) \log N^\eta(1) - M^{n,m}(1) \log M^{n,m}(1)| \right] &\leq \epsilon \\ \mathbb{E}_\nu \left[|N^\eta(1) \log L - M^{n,m}(1) \log L| \right] &\leq \epsilon \end{aligned}$$

using triangular inequality, we have

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_\nu \left[|L \log L - N^\eta(1) \log N^\eta(1)| \right] &\leq \mathbb{E}_\nu \left[|L \log L - L_{n_0} \log L_{n_0}| \right] \\ &\quad + \mathbb{E}_\nu \left[\left| L_{n_0} \log L_{n_0} - \frac{L_{n_0} + a}{1+a} \log \frac{L_{n_0} + a}{1+a} \right| \right] \\ &\quad + \mathbb{E}_\nu \left[\left| \frac{L_{n_0} + a}{1+a} \log \frac{L_{n_0} + a}{1+a} - M^n(1) \log M^n(1) \right| \right] \\ &\quad + \mathbb{E}_\nu \left[|M^n(1) \log M^n(1) - M^{n,m}(1) \log M^{n,m}(1)| \right] \\ &\quad + \mathbb{E}_\nu \left[|M^{n,m}(1) \log M^{n,m}(1) - N^\eta(1) \log N^\eta(1)| \right] \\ &\leq 5\epsilon \\ \mathbb{E}_\nu \left[|L \log L - N^\eta(1) \log L| \right] &\leq \mathbb{E}_\nu \left[|L \log L - L_{n_0} \log L| \right] \\ &\quad + \mathbb{E}_\nu \left[\left| L_{n_0} \log L - \frac{L_{n_0} + a}{1+a} \log L \right| \right] \\ &\quad + \mathbb{E}_\nu \left[\left| \frac{L_{n_0} + a}{1+a} \log L - M^n(1) \log L \right| \right] \\ &\quad + \mathbb{E}_\nu \left[|M^n(1) \log L - M^{n,m}(1) \log L| \right] \\ &\quad + \mathbb{E}_\nu \left[|M^{n,m}(1) \log L - N^\eta(1) \log L| \right] \\ &\leq 5\epsilon \end{aligned}$$

Step 6 : We prove that $W^{-\gamma^\eta}$ is ν-a.s. left-invertible and is the solution to our problem.
Set $A \subset \mathbb{W}$ such that $\nu(A) = 1$ and for every $w \in A$, $\beta \circ W^{-\gamma^\eta}(w) = \beta(w) - \gamma^\eta(w)$ and set $w_1, w_2 \in A$

such that $W^{-\gamma^\eta}(w_1) = W^{-\gamma^\eta}(w_2)$. We have

$$\begin{aligned} \beta \circ W^{-\gamma^\eta}(w_1) &= \beta \circ W^{-\gamma^\eta}(w_2) \\ \beta(w_1) - \int_0^{\cdot} \dot{\gamma^\eta}(s, w_1) ds &= \beta(w_2) - \int_0^{\cdot} \dot{\gamma^\eta}(s, w_2) ds \end{aligned}$$

For any $s \in [0, \eta]$, $\beta(s, w_1) = \beta(s, w_2)$, γ^η being adapted to filtration $(\mathcal{F}^\beta_{s-\eta})$, it implies that for $s \in [0, 2\eta]$

$$\int_0^s \dot{\gamma^\eta}(r, w_1) ds = \int_0^s \dot{\gamma^\eta}(r, w_2) ds$$

and

$$\beta(s, w_1) = \beta(s, w_2)$$

An easy iteration shows that $\beta(w_1) = \beta(w_2)$.

Since β and W have the same filtrations, and β is ν-a.s. path-continuous, we can write $W(t) = \phi_t(\beta(s), s \in [0, t] \cap \mathbb{Q})$ ν-a.s. for every $t \in [0, 1]$, with ϕ a measurable function from $\mathbb{R}^Q Q$ to $\mathbb{R}$, see [16]. Consequently, we can write $(W(t), t \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}) = \phi\left(\beta(t), t \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}\right)$ ν-a.s., with ϕ a measurable function from $\mathbb{R}^{\mathbb{Q}}$ to $\mathbb{R}^{\mathbb{Q}}$. Denote

$$A' = A \cap \{w \in \mathbb{W}, (W(t, w), t \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}) = \phi\left(\beta(t, w), t \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}\right)\}$$

$\nu(A') = 1$. Set $w_1, w_2 \in A'$ such that $W^{-\gamma^\eta}(w_1) = W^{-\gamma^\eta}(w_2)$. We have $\beta(w_1) = \beta(w_2)$ so

$$\begin{aligned} (W(t, w_1), t \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}) &= (W(t, w_2), t \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}) \\ (w_1(t), t \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}) &= (w_2(t), t \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}) \end{aligned}$$

w_1 and w_2 are continuous and coincide on $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$ so they are equal.
$W^{-\gamma^\eta}$ is ν-a.s. injective and so ν-a.s. left-invertible, its inverse is of the form W^{v^η}, with $v^\eta \in \mathcal{D}$ and we have

$$\frac{dW^{v^\eta}\nu}{d\nu} = L_1^{\eta,n}$$

So $W^{v^\eta}\nu \sim \nu$ and

$$W^{v^\eta} \circ W^{-\gamma^\eta} = W^{-\gamma^\eta} \circ W^{v^\eta} \quad \nu - a.s.$$

$\square$

5.4.2 Main theorem

As stated in the beginning, we aim to provide a variational representation of $-\log \mathbb{E}_\nu\left[e^{-f}\right]$. This first result is from [25]:

Theorem 5.4.2 *Set $f : \mathbb{W} \to \mathbb{R}$ a measurable function verifying*

$$\mathbb{E}_\nu\left[|f|(1 + e^{-f})\right] < \infty$$

Denote $\mathcal{P}$ the set of probability measures on $(\mathbb{W}, \mathcal{F})$ which are absolutely continuous with respect to ν, then

$$-\log \mathbb{E}_\nu\left[e^{-f}\right] = \inf_{\theta \in \mathcal{P}} \left(\mathbb{E}_\theta[f] + H(\theta|\nu)\right)$$

and the unique supremum is attained at the measure

$$d\theta_0 = \frac{e^{-f}}{\mathbb{E}_\nu\left[e^{-f}\right]} d\nu$$

Proposition 5.4.1 *Set $f : \mathbb{W} \to \mathbb{R}$ a measurable function verifying $\mathbb{E}_\nu\left[|f|(1+e^{-f})\right] < \infty$, then*

$$-\log \mathbb{E}_\nu\left[e^{-f}\right] \leq \inf_{u \in \mathcal{D}} \mathbb{E}_\nu\left[f \circ W^u + \frac{1}{2}|u|_H^2\right]$$

Proof: Set $u \in \mathcal{D}$

$$\begin{aligned} -\log \mathbb{E}_\nu\left[e^{-f}\right] &\leq \mathbb{E}_{W^u\nu}[f] + H(W^u\nu|\nu) \\ &= \mathbb{E}_\nu\left[f \circ W^u + \frac{1}{2}|u|_H^2\right] \end{aligned}$$

□

Here is the main result.

Theorem 5.4.3 *Set $p > 1$ and $f \in L^p(\nu)$ such that $\mathbb{E}_\nu\left[(|f|+1)e^{-f}\right] < \infty$, then we have*

$$-\log \mathbb{E}_\nu\left[e^{-f}\right] = \inf_{u \in \mathcal{D}^i} \mathbb{E}_\nu\left[f \circ W^u + \frac{1}{2}|u|_H^2\right]$$

Proof: Using proposition 5.4.1, we have easily

$$-\log \mathbb{E}_\nu\left[e^{-f}\right] \leq \inf_{u \in \mathcal{D}^i} \mathbb{E}_\nu\left[f \circ W^u + \frac{1}{2}|u|_H^2\right]$$

Let θ_0 be the measure on $\mathbb{W}$ defined by

$$d\theta_0 = \frac{e^{-f}}{\mathbb{E}_\nu\left[e^{-f}\right]} d\nu$$

According to theorem 5.4.1, there exists $(u_n) \in \mathcal{D}^i$ such that for every $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \frac{dW^{u_n}\nu}{d\nu} \log \frac{dW^{u_n}\nu}{d\nu} &\to \frac{d\theta_0}{d\nu} \log \frac{d\theta_0}{d\nu} \\ \frac{dW^{u_n}\nu}{d\nu} \log \frac{d\theta_0}{d\nu} &\to \frac{d\theta_0}{d\nu} \log \frac{d\theta_0}{d\nu} \end{aligned}$$

in $L^1(\nu)$.
Since W^{u_n} is ν-a.s. invertible, we have

$$\mathbb{E}_\nu\left[f \circ W^{u_n} + \frac{1}{2}|u_n|_H^2\right] = \mathbb{E}_\nu\left[f \frac{dW^{u_n}\nu}{d\nu}\right] + \mathbb{E}_\nu\left[\frac{dW^{u_n}\nu}{d\nu} \log \frac{dW^{u_n}\nu}{d\nu}\right]$$

When n goes to infinity, we have

$$\mathbb{E}_\nu\left[\frac{dW^{u_n}\nu}{d\nu} \log \frac{dW^{u_n}\nu}{d\nu}\right] \to \mathbb{E}_\nu\left[\frac{d\theta_0}{d\nu} \log \frac{d\theta_0}{d\nu}\right]$$

and since $f = -\log \frac{d\theta_0}{d\nu} - \log \mathbb{E}_\nu\left[e^{-f}\right]$,

$$\mathbb{E}_\nu\left[f\frac{dW^{u_n}\nu}{d\nu}\right] \quad \to \quad \mathbb{E}_\nu\left[f\frac{d\theta_0}{d\nu}\right]$$

So finally, when n goes to infinity,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_\nu\left[f\circ W^{u_n} + \frac{1}{2}|u_n|_H^2\right] \quad &\to \quad \mathbb{E}_{\theta_0}[f] + H(\theta_0|\nu) \\ &= \quad -\log \mathbb{E}_\nu\left[e^{-f}\right]\end{aligned}$$

which conclude the proof. □

5.4.3 Retrieving the Prékopa-Leindler theorem

Definition 5.4.1 *We denote*

$$H_b = \left\{h \in H, \dot{h} \text{ is } dt - a.s. \text{ bounded}\right\}$$

Remark: Observe that $H_b \subset \mathcal{D}$ and that if $u \in \mathcal{D}$, $u(w) \in H_b$ ν-a.s.

Theorem 5.4.4 *Assume that for any $u \in \mathcal{D}$,*

$$W^u(w) = W^{u(w)}(w) \ \nu - a.s.$$

Set $a, b, c : \mathbb{W} \to \mathbb{R}$ positive and measurable such that for every $h, k \in H_b$ and $t \in [0,1]$ we have ν-a.s.

$$a\circ W^{th+(1-t)k}\exp\left(-\frac{1}{2}|th+(1-t)k|_H^2\right) \geq \left(b\circ W^h \exp\left(-\frac{1}{2}|h|_H^2\right)\right)^t \left(c\circ W^k \exp\left(-\frac{1}{2}|k|_H^2\right)\right)^{1-t}$$

then for any density d such that $h \in H_b \mapsto -\log d\circ W^h$ is ν-a.s. concave, if θ denotes the measure on $\mathbb{W}$ given by $\frac{d\theta}{d\nu} = d$, we have in $\bar{\mathbb{R}}$:

$$\mathbb{E}_\theta[a] \geq (\mathbb{E}_\theta[b])^t (\mathbb{E}_\theta[c])^{1-t}$$

Proof: First observe that eventually replacing a,b,c with da, db, dc we only need to prove the case $d = 1$ i.e. $\theta = \nu$

With the convention $\log(\infty) = \infty$ and $\log(0) = -\infty$, we denote

$$\tilde{a} = -\log a, \tilde{b} = -\log b, \tilde{c} = -\log c$$

We begin with the case where there exists $m, M > 0$ such that we have ν-a.s.

$$m \leq \tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c} \leq M$$

Set $t \in [0,1]$, for $h, k \in H_b$, we have ν-a.s.

$$\begin{aligned}&a\circ W^{th+(1-t)k}\exp\left(-\frac{1}{2}|th+(1-t)k|_H^2\right) \\ &\geq \left(b\circ W^h \exp\left(-\frac{1}{2}|h|_H^2\right)\right)^t \left(c\circ W^k \exp\left(-\frac{1}{2}|k|_H^2\right)\right)^{1-t}\end{aligned}$$

So for $u_1, u_2 \in \mathcal{D}^i$

$$
\begin{aligned}
& a \circ W^{tu_1+(1-t)u_2} \exp\left(-\frac{1}{2}\left|tu_1+(1-t)u_2\right|_H^2\right) \\
& \geq \left(b \circ W^{u_1} \exp\left(-\frac{1}{2}\left|u_1\right|_H^2\right)\right)^t \left(c \circ W^{u_2} \exp\left(-\frac{1}{2}\left|u_2\right|_H^2\right)\right)^{1-t}
\end{aligned}
$$

hence applying the logarithm function , changing the sign and taking the expectation

$$
\begin{aligned}
& \mathbb{E}_\nu\left[\tilde{a} \circ W^{tu_1+(1-t)u_2} + \frac{1}{2}\left|tu_1+(1-t)u_2\right|_H^2\right] \\
& \leq t\mathbb{E}_\nu\left[\tilde{b} \circ W^{u_1} + \frac{1}{2}\left|u_1\right|_H^2\right] + (1-t)\mathbb{E}_\nu\left[\tilde{c} \circ W^{u_2} + \frac{1}{2}\left|u_2\right|_H^2\right]
\end{aligned}
$$

So

$$
\inf_{u\in\mathcal{D}^i} \mathbb{E}_\nu\left[\tilde{a} \circ W^u + \frac{1}{2}|u|_H^2\right] \leq t\mathbb{E}_\nu\left[\tilde{b} \circ W^{u_1} + \frac{1}{2}\left|u_1\right|_H^2\right] + (1-t)\mathbb{E}_\nu\left[\tilde{c} \circ W^{u_2} + \frac{1}{2}\left|u_2\right|_H^2\right]
$$

According to theorem 5.4.3 we have

$$
-\log \mathbb{E}_\nu\left[e^{-\tilde{a}}\right] \quad \leq \quad t\mathbb{E}_\nu\left[\tilde{b} \circ W^{u_1} + \frac{1}{2}\left|u_1\right|_H^2\right] + (1-t)\mathbb{E}_\nu\left[\tilde{c} \circ W^{u_2} + \frac{1}{2}\left|u_2\right|_H^2\right]
$$

which implies

$$
\begin{aligned}
-\log \mathbb{E}_\nu\left[e^{-\tilde{a}}\right] \quad & \leq \quad t\mathbb{E}_\nu\left[\tilde{b} \circ W^{u_1} + \frac{1}{2}\left|u_1\right|_H^2\right] + (1-t) \inf_{v\mathcal{D}^i} \mathbb{E}_\nu\left[\tilde{c} \circ W^v + \frac{1}{2}|v|_H^2\right] \\
& = \quad t\mathbb{E}_\nu\left[\tilde{b} \circ W^{u_1} + \frac{1}{2}\left|u_1\right|_H^2\right] - (1-t)\log \mathbb{E}_\nu\left[e^{-\tilde{c}}\right]
\end{aligned}
$$

which implies once again

$$
\begin{aligned}
-\log \mathbb{E}_\nu\left[e^{-\tilde{a}}\right] \quad & \leq \quad \inf_{v\in\mathcal{D}^i}\left(t\mathbb{E}_\nu\left[\tilde{b} \circ W^v + \frac{1}{2}|v|_H^2\right]\right) - (1-t)\log \mathbb{E}_\nu\left[e^{-\tilde{c}}\right] \\
& = \quad -t\log \mathbb{E}_\nu\left[e^{-\tilde{b}}\right] - (1-t)\log \mathbb{E}_\nu\left[e^{-\tilde{c}}\right]
\end{aligned}
$$

taking the opposite and applying the exponential, we get

$$
\mathbb{E}_\nu\left[e^{-\tilde{a}}\right] \geq \left(\mathbb{E}_\nu\left[e^{-\tilde{b}}\right]\right)^t \left(\mathbb{E}_\nu\left[e^{-\tilde{c}}\right]\right)^{1-t}
$$

For the general case, denote for $n \in \mathbb{N}$ and $m \in \mathbb{N}^*$

$$
\begin{aligned}
& \tilde{a}_n = \tilde{a} \wedge n, \tilde{b}_n = \tilde{b} \wedge n, \tilde{c}_n = \tilde{c} \wedge n \\
& \tilde{a}_{nm} = \tilde{a}_n + \frac{1}{m}, \tilde{b}_{nm} = \tilde{b}_n + \frac{1}{m}, \tilde{c}_{nm} = \tilde{c}_n + \frac{1}{m}
\end{aligned}
$$

For every $h, k \in H_b$, we have ν-a.s.:

$$
\tilde{a}_{nm} \circ W^{th+(1-t)k} + \frac{1}{2}\left|th+(1-t)k\right|_H^2 \leq t\tilde{b}_{nm} \circ W^h + \frac{1}{2}|h|_H^2 + (1-t)\tilde{c}_{nm} \circ W^k + \frac{1}{2}|k|_H^2
$$

so the bounded case we treated above ensures that

$$
\mathbb{E}_\nu\left[e^{-\tilde{a}_{nm}}\right] \geq \left(\mathbb{E}_\nu\left[e^{-\tilde{b}_{nm}}\right]\right)^t \left(\mathbb{E}_\nu\left[e^{-\tilde{c}_{nm}}\right]\right)^{1-t}
$$

The monotone limit theorem enables us to take the limit with relation to m and then to take it again with respect to n to get the result. □

5.5 Extension of the map $u \mapsto W^u$

5.5.1 Extension of the map $u \mapsto W^u$ for invertibility results

Invertibility results can give stochastic differential equations solutions in certain cases, so it can be useful to extend these results to a larger domain.

Definition 5.5.1 *Set $\widetilde{\mathcal{D}}$ a subset of $G_0(\nu,\beta)$ such that the map $u \mapsto W^u$ can be extended to $\widetilde{\mathcal{D}}$ while verifying the following conditions:*
(i) $\mathcal{D} \subset \widetilde{\mathcal{D}} \subset G_0(\nu,\beta)$
(ii) For every $u \in \widetilde{\mathcal{D}}$, W^u is adapted.
(iii) For every $u \in \widetilde{\mathcal{D}}$, the law of W^u under $\tilde{\nu}^u$ is the same as the law of W under ν, where $\tilde{\nu}^u$ is defined by $\frac{d\tilde{\nu}}{d\nu} = \rho(-\delta_\beta\ u)$
(iv) For every $u \in \widetilde{\mathcal{D}}$,

$$\beta \circ W^u = \beta + u$$

(v) For every $u, v \in \widetilde{\mathcal{D}}$ such that $v + u \circ W^v \in \widetilde{\mathcal{D}}$

$$W^u \circ W^v = W^{v+u\circ W^v}\ \nu - a.s.$$

(vi) There exists $\widetilde{\widetilde{\mathcal{D}}}$ such that $\widetilde{\mathcal{D}} \subset \widetilde{\widetilde{\mathcal{D}}} \subset L^0_a(\nu,H)$, $\widetilde{\mathcal{D}} = \widetilde{\widetilde{\mathcal{D}}} \cap G_0(\nu,\beta)$ and for every $u \in \widetilde{\mathcal{D}}$ such that the equation $u + v \circ W^u$ has a solution in $G_0(\nu,\beta)$, this equation has a solution in $\widetilde{\widetilde{\mathcal{D}}}$.

Proposition 5.5.1 *Set $u \in \widetilde{\mathcal{D}}$, for every bounded measurable $f : W \to \mathbb{R}$*

$$\mathbb{E}_\nu[f] = \mathbb{E}_\nu[f \circ W^u \rho(-\delta_\beta u)]$$

Moreover

$$W^u\nu \sim \nu$$

Proof: The proof is the same as the case $u \in \mathcal{D}$, see section 5.2. □

Remark: $\mathcal{D}$ verify the set of conditions above.

Theorem 5.5.1 *For every $u \in \widetilde{\mathcal{D}} \cap L^2(\nu,H)$, we have*

$$H(W^u\nu|\nu) \le \frac{1}{2}\mathbb{E}_\nu\left[|u|^2_H\right]$$

and the three following propositions are equivalent:
1)$H(W^u\nu|\nu) = \frac{1}{2}\mathbb{E}_\nu\left[|u|^2_H\right]$
2)there exists $v \in \widetilde{\mathcal{D}}$ such that

$$W^u \circ W^v = W^v \circ W^u = I_{\mathbb{W}}\ \nu - a.s.$$

$$\begin{aligned} \frac{dW^u\nu}{d\nu} &= \rho(-\delta_\beta v) \\ \frac{dW^v\nu}{d\nu} &= \rho(-\delta_\beta u) \end{aligned}$$

3) W^u is ν-a.s. left-invertible

Proof: Set $u \in \mathcal{D}$, we prove that $H(W^u\nu|\nu) \leq \frac{1}{2}\mathbb{E}_\nu\left[|u|_H^2\right]$ exactly as in proposition 5.3.2

For the second assertion, we prove (1) $\Rightarrow$ (2) first. Exactly as in the proof of theorem 5.3.2, we obtain

$$L \circ W^u \rho(-\delta_\beta u) = 1 \tag{5.5.5}$$

Since β is a ν-Brownian motion, there exists $v \in G_0(\nu, \beta)$ such that $L = \rho(-\delta_\beta v)$.
We apply the exponential to 5.5.5 to get:

$$0 \quad = \quad \delta_\beta v \circ W^u + \frac{1}{2}|v \circ W^u|_H^2 + \delta_\beta u + |u|_H^2$$

We have:

$$\delta_\beta v \circ W^u \quad = \quad \int_0^1 \dot{v}(s) \circ W^u d\beta(s) + \langle v \circ W^u, u\rangle_H$$

so finally we have:

$$0 = \delta_\beta(v \circ W^u + u) + \frac{1}{2}|v \circ W^u + u|_H^2 \tag{5.5.6}$$

According to Girsanov theorem $\beta + v$ is a $W^u\nu$-Brownian motion, so:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_\nu\left[L \log L\right] &= \mathbb{E}_{W^u\nu}\left[\log L\right] \\
&= \mathbb{E}_{W^u\nu}\left[-\int_0^1 \dot{v}(s) d\beta(s) - \frac{1}{2}\int_0^1 |\dot{v}(s)|^2 ds\right] \\
&= \frac{1}{2}\mathbb{E}_{W^u\nu}\left[\int_0^1 |\dot{v}(s)|^2 ds\right] \\
&= \frac{1}{2}\mathbb{E}_\nu\left[|v \circ W^u|_H^2\right]
\end{aligned}$$

So $v \circ W^u \in L_a^2(\nu, H)$ and we can take the expectation with respect to ν in 5.5.6 to obtain $u + v \circ W^u = 0$ ν-a.s. Condition (vi) gives the existence of $\tilde{v} \in \widetilde{\widetilde{\mathcal{D}}}$ such that ν-a.s.

$$u + \tilde{v} \circ W^u = 0$$

We have $v = \tilde{v}$ $W^u\nu$-a.s. so $v = \tilde{v}$ ν-a.s. since $W^u\nu \sim \nu$, which implies $v \in \widetilde{\mathcal{D}}$ and condition (iv) gives ν-a.s.

$$W^v \circ W^u = I_{\mathbb{W}}$$

Proposition 5.3.1 gives ν-a.s.

$$W^u \circ W^v = I_{\mathbb{W}}$$

Finally, set $f \in C_b(\mathbb{W})$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_\nu\left[f \circ W^u\right] &= \mathbb{E}_\nu\left[f \circ W^u \circ W^v \rho(-\delta_\beta v)\right] \\
&= \mathbb{E}_\nu\left[f \rho(-\delta_\beta v)\right] \\
\mathbb{E}_\nu\left[f \circ W^v\right] &= \mathbb{E}_\nu\left[f \circ W^v \circ W^u \rho(-\delta_\beta u)\right] \\
&= \mathbb{E}_\nu\left[f \rho(-\delta_\beta u)\right]
\end{aligned}$$

which gives

$$\begin{aligned}\frac{dW^u\nu}{d\nu} &= \rho(-\delta_\beta v)\\ \frac{dW^v\nu}{d\nu} &= \rho(-\delta_\beta u)\end{aligned}$$

(2) ⇒ (3) is immediate. Now we prove (3) ⇒ (1). We still denote $L = \frac{dW^u\nu}{d\nu}$.
Assume that W^u admits a left inverse V. Set $v = -u \circ V$.
We have ν-a.s.

$$v \circ W^u = -u$$

and

$$\mathbb{E}_{W^u\nu}\left[1_{\int_0^1 |\dot{v}(s)|^2 ds < \infty}\right] = \mathbb{E}_\nu\left[1_{\int_0^1 |\dot{u}(s)|^2 ds < \infty}\right] = 1$$

so $v \in L^0(W^u\nu, H)$ and $v \in L^0(\nu, H)$ since $W^u\nu \sim \nu$.
Now set $\dot{v}^n = \max(n, \min(\dot{v}, -n))$, $\dot{v}^n \circ W^u$ is adapted. Set $A \in L^2(dt \times d\nu)$ an adapted process, we have:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_\nu\left[\rho(-\delta_\beta u)\int_0^1 \dot{v}^n(s) \circ W^u A(s) \circ W^u ds\right] &= \mathbb{E}_\nu\left[\int_0^1 \dot{v}^n(s) A(s) ds\right]\\ &= \mathbb{E}_\nu\left[\int_0^1 \mathbb{E}_\nu\left[\dot{v}^n(s) | \mathcal{F}(s)\right] A(s) ds\right]\\ &= \mathbb{E}_\nu\left[\rho(-\delta_\beta u)\int_0^1 \mathbb{E}_\nu\left[\dot{v}^n(s) | \mathcal{F}(s)\right] \circ W^u A(s) \circ W^u ds\right]\end{aligned}$$

So $\mathbb{E}_\nu\left[\dot{v}^n(s) | \mathcal{F}(s)\right] \circ W^u = \dot{v}^n(s) \circ W^u$ $ds \times d\nu$-a.s. which implies $\mathbb{E}_\nu\left[\dot{v}^n(s) | \mathcal{F}(s)\right] = \dot{v}^n(s)$ $ds \times d\nu$-a.s. since $W^u\nu \sim \nu$.
An algebraic calculation gives ν-a.s.

$$\rho(-\delta_\beta v) \circ W^u \rho(-\delta_\beta u) = 1$$

Now set $g \in C_b(W, \mathbb{R}_+)$, we have:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_\nu\left[gL\right] &= \mathbb{E}_\nu\left[g \circ W^u\right]\\ &= \mathbb{E}_\nu\left[g \circ W^u \rho(-\delta_\beta v) \circ W^u \rho(-\delta_\beta u)\right]\\ &\leq \mathbb{E}_\nu\left[g \rho(-\delta_\beta v)\right]\end{aligned}$$

So $L \leq \rho(-\delta_\beta v)$ ν-a.s. and since $\mathbb{E}_\nu\left[\rho(-\delta_\beta v)\right] = 1$, we have

$$L \circ W^u \rho(-\delta_\beta u) = 1$$

and we can compute $H(W^u\nu|\nu)$:

$$\begin{aligned}H(W^u\nu|\nu) &= \mathbb{E}_\nu[L \log L]\\ &= \mathbb{E}_\nu[\log L \circ W^u]\\ &= \mathbb{E}_\nu\left[-\log \rho(-\delta_\beta u)\right]\\ &= \frac{1}{2}\mathbb{E}_\nu[|u_H^2|]\end{aligned}$$

□

As in section 5.3.2, the proof of theorem 5.5.1 give the following additional results.

Corollary 5.5.1 *Set $u \in \widetilde{\mathcal{D}}$, we have*

$$L \circ W^u \mathbb{E}_\nu \left[\rho(-\delta_\beta u) | \, \mathcal{F}_1^{W^u} \right] = 1$$

and if W^u is ν-a.s. left-invertible, we have

$$L \circ W^u \rho(-\delta_\beta u) = 1$$

In certain cases invertibility results lead to the existence of a strong solutions of stochastic differential equations.

Theorem 5.5.2 *Assume that for every $u \in \widetilde{\mathcal{D}}$, we can write ν-a.s.*

$$W^u = I_{\mathbb{W}} + w^u$$

with $w^u \in L_a^0(\nu, H)$.
Set $u \in \widetilde{\mathcal{D}}$,

$$H(W^u \nu | \nu) = \frac{1}{2} \mathbb{E}_\nu \left[|u|_H^2 \right]$$

if and only if there exists $v \in \widetilde{\mathcal{D}}$ such that W^v is a strong solution to

$$dW^v(t) = -\overset{\cdot}{\overbrace{w^u}}(t) \circ W^v dt + dW(t)$$

Proof: Assume that $H(W^u \nu | \nu) = \frac{1}{2} \mathbb{E}_\nu \left[|u|_H^2 \right]$, according to theorem 5.5.1, there exists $v \in \widetilde{\mathcal{D}}$ such that ν-a.s.

$$W^v \circ W^u = W^u \circ W^v = W$$

Since $W^u = W + w^u$, we have

$$W^v + w^u \circ W^v = W$$

and W^v is a strong solution to

$$dW^v(t) = -\overset{\cdot}{\overbrace{w^u}}(t) \circ W^v dt + dW(t)$$

Conversely, assume the existence of $v \in \widetilde{\mathcal{D}}$ such W^v is a strong solution to

$$dW^v(t) = -\overset{\cdot}{\overbrace{w^u}}(t) \circ W^v dt + dW(t)$$

We have $W^u \circ W^v = I_W$ ν-a.s., and $W^v \circ W^u = I_W$ $W^v\nu$-a.s. Since $W^v \nu \sim \nu$, we can conclude with theorem 5.5.1. □

5.5.2 Extension of the map $u \mapsto W^u$ for variational calculus

Theorem 5.5.3 *For every measurable function $f : \mathbb{W} \to \mathbb{R}$ such that $\mathbb{E}_\nu \left[(|f| + 1) e^{-f} \right] < \infty$ and*

$$-\log \mathbb{E}_\nu \left[e^{-f} \right] = \inf_{u \in \mathcal{D}^i} \mathbb{E}_\nu \left[f \circ W^u + \frac{1}{2} |u|_H^2 \right]$$

we have

$$-\log \mathbb{E}_\nu \left[e^{-f} \right] = \inf_{u \in \widetilde{\mathcal{D}} \cap L_a^2(\nu, H)} \mathbb{E}_\nu \left[f \circ W^u + \frac{1}{2} |u|_H^2 \right]$$

Proof: For $u \in \widetilde{\mathcal{D}} \cap L_a^2(\nu, H)$, we have

$$\begin{aligned} -\log \mathbb{E}_\nu \left[e^{-f}\right] &\leq \mathbb{E}_{W^u\nu}[f] + H(W^u\nu|\nu) \\ &\leq \mathbb{E}_\nu \left[f \circ W^u + \frac{1}{2}|u|_H^2\right] \end{aligned}$$

So

$$\begin{aligned} -\log \mathbb{E}_\nu \left[e^{-f}\right] &\leq \inf_{u \in \widetilde{\mathcal{D}} \cap L_a^2(\nu,H)} \mathbb{E}_\nu \left[f \circ W^u + \frac{1}{2}|u|_H^2\right] \\ &\leq \inf_{u \in \mathcal{D}^i} \mathbb{E}_\nu \left[f \circ W^u + \frac{1}{2}|u|_H^2\right] \end{aligned}$$

□

Theorem 5.5.4 *Set $f : \mathbb{W} \to \mathbb{R}$ a measurable function verifying $\mathbb{E}_\nu\left[|f|(1+e^{-f})\right] < \infty$, then if there exists some $u \in \widetilde{\mathcal{D}} \cap L_a^2(\nu, H)$ such that W^u is ν-a.s. left-invertible and $\frac{dW^u\nu}{d\nu} = \frac{e^{-f}}{\mathbb{E}_\nu[e^{-f}]}$, then we have*

$$-\log \mathbb{E}_\nu \left[e^{-f}\right] = \inf_{u \in \widetilde{\mathcal{D}} \cap L_a^2(\nu,H)} \mathbb{E}_\nu \left[f \circ W^u + \frac{1}{2}|u|_H^2\right]$$

Proof: Since W^u is ν-a.s. left invertible and that $\frac{dW^u\nu}{d\nu} = \frac{e^{-f}}{\mathbb{E}_\nu[e^{-f}]}$. We have

$$\frac{1}{2}\mathbb{E}_\nu\left[|u|_H^2\right] = H(W^u\nu|\nu) = \mathbb{E}_\nu\left[\frac{e^{-f}}{\mathbb{E}_\nu\left[e^{-f}\right]} \log\left(\frac{e^{-f}}{\mathbb{E}_\nu\left[e^{-f}\right]}\right)\right]$$

and

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_\nu \left[f \circ W^u + \frac{1}{2}|u|_H^2\right] &= \mathbb{E}_\nu\left[\frac{e^{-f}}{\mathbb{E}_\nu\left[e^{-f}\right]} f + \frac{e^{-f}}{\mathbb{E}_\nu\left[e^{-f}\right]} \log\left(\frac{e^{-f}}{\mathbb{E}_\nu\left[e^{-f}\right]}\right)\right] \\ &= -\log \mathbb{E}_\nu\left[e^{-f}\right] \end{aligned}$$

and we conclude the proof with last proposition. □

Theorem 5.5.5 *Set $f : \mathbb{W} \to \mathbb{R}$ a measurable function such that*

$$-\log \mathbb{E}_\nu \left[e^{-f}\right] = \inf_{u \in \widetilde{\mathcal{D}} \cap L_a^2(\nu,H)} \mathbb{E}_\nu \left[f \circ W^u + \frac{1}{2}|u|_H^2\right]$$

Denote this infimum J_*. It is attained at $u \in \widetilde{\mathcal{D}} \cap L_a^2(\nu, H)$ if and only if W^u is ν-a.s. left-invertible and $\frac{dW^u\nu}{d\nu} = \frac{e^{-f}}{\mathbb{E}_\nu[e^{-f}]}$.

Proof: The direct implication is given by last theorem. Conversely, if W^u is not ν-a.s. left-invertible, $H(W^u\nu|\nu) < \frac{1}{2}\mathbb{E}_\nu\left[|u|_H^2\right]$ and

$$\begin{aligned} -\log \mathbb{E}_\nu \left[e^{-f}\right] = \inf_{\theta \in \mathcal{P}} \left(\mathbb{E}_\theta[f] + H(\theta|\nu)\right) &\leq \inf_{\alpha \in \widetilde{\mathcal{D}} \cap L_a^2(\nu,H)} \mathbb{E}_{W^\alpha\nu}[f] + H(W^\alpha\nu|\nu) \\ &\leq \mathbb{E}_{W^u\nu}[f] + H(W^u\nu|\nu) \\ &< \mathbb{E}_\nu\left[f \circ W^u + \frac{1}{2}|u|_H^2\right] \end{aligned}$$

which is a contradiction.
We get $\frac{dW^u \nu}{d\nu} = L$ by uniqueness of the minimizing measure of $\inf_{\theta \in \mathcal{P}} (\mathbb{E}_\theta[f] + H(\theta|\nu))$.

$\square$

5.6 Examples

In this section we discuss several examples that fit into the framework we elaborated. Each time, we prove that the conditions of section 5.2 and definition 5.5.1 are satisfied. This ensures that every result from section 5.2 to 5.5 apply, except theorems 5.4.4 and 5.5.2 which require additional hypothesis. We also discuss whether these theorems apply or not.

5.6.1 Diffusion

Set $m \leq d \in \mathbb{N}^*$ such that $m + d = n$, $c \in \mathbb{R}$, $\sigma : \mathbb{R}^m \to \mathcal{M}_{m,d}(\mathbb{R})$ and $b : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ bounded and lipschitz functions. σ_i will denote the i-th column of σ. Notice that every matrix will be identified with its canonical linear operator. Set $(\Omega, \theta, (\mathcal{G}_t))$ a probability space, V a θ-Brownian motion on Ω with values in $\mathbb{R}^d$. Set Y a $\mathbb{R}^m$-valued strong solution of the stochastic differential equation:

$$Y(t) = c + \int_0^t \sigma(Y(s))dV(s) + \int_0^t b(Y(s))ds$$

on $(\Omega, \theta, (\mathcal{G}_t), B)$. The hypothesis on σ and b ensure the existence and uniqueness of Y if we impose its paths to be continuous.
We denote μ the Wiener measure on $C([0,1], \mathbb{R}^d)$ and μ^X the image measure of Y.
We define the processes X and B on $\mathbb{W}$ by:

$$\begin{aligned} X(t) &: (w, w') \in \mathbb{W} \mapsto w(t) \in \mathbb{R}^m \\ B(t) &: (w, w') \in \mathbb{W} \mapsto w'(t) \in \mathbb{R}^d \end{aligned}$$

Proposition 5.6.1 *Under $\mu^X \times \mu$, the law of X is μ^X, B is a Brownian motion and they are independent. There exists θ, η such that if we define $\beta_{\mathbb{X}}$ as*

$$\beta_{\mathbb{X}} = \int_0^\cdot \theta(X(s))dM(s) + \int_0^\cdot \eta(X(s))dB(s)$$

$\beta_{\mathbb{X}}$ is a $\mu^X \times \mu$-Brownian motion and $\mu^X \times \mu$-a.s.

$$X = c + \int_0^\cdot \sigma(X(s))d\beta_{\mathbb{X}}(s) + \int_0^\cdot b(X(s))ds$$

Proof: See [10]. $\square$

This construction of $\beta_{\mathbb{X}}$ is taken from [18].

Definition 5.6.1 *We denote*

$$\mathbb{X} = (X, \beta_{\mathbb{X}})$$

and $\mu^{\mathbb{X}}$ its image measure.
X is a $\mu^{\mathbb{X}}$ path-continuous strong solution of the stochastic differential equation

$$X = \quad c + \int_0^{\cdot} \sigma(X(s))d\beta_{\mathbb{X}}(s) + \int_0^{\cdot} b(X(s))ds$$

For $u \in G_0(\mu^{\mathbb{X}}, \beta_X)$, set $\beta_{\mathbb{X}}^u = \beta + u$ and X^u the $\mu^{\mathbb{X}}$-a.s. path-continuous strong solution of the stochastic differential equation

$$X^u = c + \int_0^{\cdot} \sigma(X^u(s))d\beta_{\mathbb{X}}^u(s) + \int_0^{\cdot} b(X^u(s))ds$$

Finally, we denote

$$\mathbb{X}^u \quad = \quad (X^u, \beta_{\mathbb{X}} + u)$$

Theorem 5.6.1 *$\left(\mathbb{W}, \mu^{\mathbb{X}}, \beta_{\mathbb{X}}, (\mathbb{X}^u)_{u\in\mathcal{D}}\right)$ verify the conditions of section 5.2. $\left(\mathbb{W}, \mu_a, \beta_{\mathbb{X}}, (\mathbb{X}^u)_{u\in G_0(\mu^{\mathbb{X}},\beta_{\mathbb{X}})}\right)$ verify the conditions of definition 5.5.1.*

Proof: See [10]. □

Corollary 5.6.1 *It is clear that for every $u \in \mathcal{D}$, we clearly have $\mu^{\mathbb{X}}$-a.s.*

$$\mathbb{X}^u(w) = \mathbb{X}^{u(w)}(w)$$

so theorem 5.4.4 applies.

Corollary 5.6.2 *Assume that $\sigma \in \mathbb{R}$, then theorem 5.5.2 applies. Set $u \in G_2(\mu^{\mathbb{X}}, \beta_{\mathbb{X}})$ and denote*

$$\dot{\overbrace{w_{\mathbb{X}}^u}}(t) = (\dot{u}(t) + b(X^u(t)) - b(X(t)), \dot{u}(t))$$

We have $\mu^{\mathbb{X}}$-a.s.

$$\mathbb{X}^u = I_{\mathbb{W}} + w_{\mathbb{X}}^u$$

so

$$H(\mathbb{X}^u\mu^{\mathbb{X}}|\mu^{\mathbb{X}}) = \frac{1}{2}\mathbb{E}_{\mu^{\mathbb{X}}}\left[|u|_H^2\right]$$

if and only if there exists $v \in G_0(\mu^{\mathbb{X}}, \beta_{\mathbb{X}})$ such that $\mathbb{X}^v$ is a strong solution to the stochastic differential equation:

$$d\mathbb{X}^v(t) = -\dot{\overbrace{w_{\mathbb{X}}^u}}(t)dt \circ \mathbb{X}^v + dW(t)$$

5.6.2 Brownian bridge

We still denote μ the Wiener measure on $\mathbb{W}$. Set $a \in \mathbb{R}^n$, we denote μ_a the measure on $\mathbb{W}$ such that for any bounded measurable function f we have

$$\mathbb{E}_{\mu_a}[f] = \mathbb{E}_{\mu}[f|W_1 = a]$$

μ_a can also be defined as follow : let $\mathcal{E}_a$ be the Dirac measure in a, $\mathcal{E}_a(W_1)$ is a positive Wiener distributions hence it defines a Radon measure ν_a on $\mathbb{W}$, then

$$\mu_a = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \nu_a$$

We recall the definition of a Brownian bridge:

Definition 5.6.2 *Set* $(\Omega, \mathcal{G}, Q)$ *a probability space. An a-Brownian bridge X under a probability Q is a path-continuous Gaussian process such that* $\mathbb{E}_Q[X(t)] = at$ *and* $cov(X(s), X(t)) = ((s \wedge t) - st)\, I_d$

Proposition 5.6.2 *W is an a-Brownian bridge under* μ_a*, and the process* β_a *defined as*

$$\beta_a(t) = W(t) - at + \int_0^t \frac{W(s) - as}{1-s} ds$$

is a Brownian motion under μ_a *and the filtrations of* β_a *and W completed with respect to* μ_a *are equal. Moreover, we have*

$$W(t) = at + (1-t)\int_0^t \frac{d\beta_a(s)}{1-s}$$

Proof: It is easy to verify that the process Z given by $Z(t) = W(t) + at - tW_1$ is an a-Brownian bridge under μ and is independent of W_1. If f is a bounded continuous function on W, we have

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_\mu[f(Z)] &= \mathbb{E}_\mu[f(Z)|W_1 = a] \\ &= \mathbb{E}_\mu[f(W)|W_1 = a] \\ &= \mathbb{E}_\mu[f|W_1 = a] \\ &= \mathbb{E}_{\mu_a}[f] \\ &= \mathbb{E}_{\mu_a}[f(W)] \end{aligned}$$

So W is indeed an a-Brownian bridge under μ_a.
Now consider the process X given by

$$X(t) = (1-t)W\left(\frac{t}{1-t}\right) + at$$

It is easy again to verify that X is a Brownian bridge under μ. Now consider

$$M = \int_0^{\cdot} \frac{dW(s)}{1-s}$$

M is a continuous martingale under μ and

$$\langle M_i, M_j\rangle(t) = \delta_{ij}\int_0^t \frac{ds}{(1-s)^2} = \delta_{ij}\frac{t}{1-t}$$

So the Dubins-Schwartz theorem ensures that M and $W(\frac{\cdot}{1-\cdot})$ have the same distribution under μ, so X and $\tilde{X}$ have the same distribution, where $\tilde{X}$ is given by

$$\begin{aligned} \tilde{X}(t) &= (1-t)\int_0^t \frac{dW(s)}{1-s} + at \\ &= W(t) - \int_0^t \frac{\tilde{X}(s) - as}{1-s} ds + at \end{aligned}$$

the last equality coming from Ito's formula.
W is a Brownian motion under μ and the law of $(\tilde{X}, W)$ under μ is the same as the law of (W, β_a) under μ_a so $(\beta_a(t), t \in [0,1))$ is a Brownian motion under μ_a.

We recall that the filtrations we are considering are all completed with respect to μ_a. From the expression of β_a, we have clearly for any $t \in [0,1)$,

$$\mathcal{F}_t^{\beta_a} \subset \mathcal{F}_t^W$$

Furthermore, $s \mapsto \frac{1}{1-s}$ being lipschitz on any $[0,t]$ with $t<1$, W is the strong solution of a stochastic differential equation relative to β_a and we have for any $t<1$,

$$\mathcal{F}_t^W \subset \mathcal{F}_t^{\beta_a}$$

W being μ_a-a.s. path continuous, we have

$$\bigcup_{t<1} \mathcal{F}_t^W = \mathcal{F}_1^W$$

On the other hand, since $(\beta_a(t), t \in [0,1))$ is a Brownian motion, $(\langle \beta_a \rangle (t), t \in [0,1))$ is bounded by 1, so $\beta_a(t)$ converges μ_a-a.s. and in $L^2(\mu_a, \mathbb{R}^n)$. Denote $\beta_a(1)$ the limit, for $s \in [0,1)$ we have

$$Cov(\beta_a(s), \beta_a(t)) = \lim_{t' \to 1} Cov(\beta_a(s), \beta_a(t')) = s \wedge t'$$

So

$$\bigcup_{t<1} \mathcal{F}_t^{\beta_a} = \mathcal{F}_1^{\beta_a}$$

$(\beta_a(t), t \in [0,1])$ is a μ_a-Brownian motion and β_a and W have the same filtration. □

The following remark will be useful in next section.
Remark: For $a \in \mathbb{R}^n$ and $t \in [0,1]$, we have μ_a-a.s.

$$\beta_a(t) = W_t + \int_0^t \frac{W_s - a}{1-s} ds$$

Definition 5.6.3 *For $u \in G_0(\mu_a, \beta_a)$, we denote $\beta_a^u = \beta_a + u$.*

Proposition 5.6.3 *Set $u \in G_0(\mu_a, \beta_a)$, then there exists a unique μ_a-a.s. path continuous process W_a^u such that*

$$W_a^u(t) = \beta_a^u(t) + at - \int_0^t \frac{W_a^u(s) - as}{1-s} ds$$

Furthermore, we have

$$\begin{aligned} W_a^u(t) &= at + (1-t)\int_0^t \frac{d\beta_a^u(s)}{1-s} \\ &= W(t) + \int_0^t \left(\dot{u}(s) - \int_0^s \frac{\dot{u}(r)}{1-r} dr \right) ds \end{aligned}$$

Proof: Set $u \in G_0(\mu_a, \beta_a)$, for $t<1$, straight calculation gives

$$at + (1-t)\int_0^t \frac{d\beta_a^u(s)}{1-s} = W + \int_0^t \left(\dot{u}(s) - \int_0^s \frac{\dot{u}(r)}{1-r} dr \right) ds$$

Define W_a^u on $[0,1)$ as

$$W_a^u(t) = at + (1-t)\int_0^t \frac{d\beta_a^u(s)}{1-s}$$

The Ito formula gives

$$W_a^u(t) = \beta_a^u(t) + at - \int_0^t \frac{W_a^u(s) - as}{1-s} ds$$

$x \mapsto \frac{1}{1-x}$ being lipschitz on every $[0,t]$ for $t < 1$, the μ_a-a.s. pathwise uniqueness is true on every $[0,t]$, hence on $[0,1)$.
It remains to prove that there is no explosion in 1. Set $\tilde{\mu}_a^u$ the measure on $\mathbb{W}$ defined by

$$\frac{d\tilde{\mu}_a^u}{d\mu_a} = \rho(-\delta_{\beta_a} u)$$

Since $u \in G_0(\mu_a, \beta_a)$, it is clear that the law of W_a^u under $\tilde{\mu}_a^u$ is the same as the law of W_a under μ_a so

$$\tilde{\mu}_a^u\left(\limsup_{t\to 1} |W_a^u(t)| = \infty\right) = \mu_a\left(\limsup_{t\to 1} |W_a(t)| = \infty\right) = 0$$

$\tilde{\mu}_a^u \sim \mu_a$ so

$$\mu_a\left(\limsup_{t\to 1} |W_a^u(t)| = \infty\right) = 0$$

□

Theorem 5.6.2 $(\mathbb{W}, \mu_a, \beta_a, (W_a^u)_{u\in\mathcal{D}})$ *verify the conditions of section 5.2.* $\left(\mathbb{W}, \mu_a, \beta_a, (W_a^u)_{u\in G_0(\mu_a,\beta_a)}\right)$ *verify the conditions of definition 5.5.1.*

Proof: We have $W_a^0 = W$ and β_a is a μ_a-Brownian motion. Now we just have to verify the conditions of definition 5.5.1 since those imply conditions (iii) to (v) of section 5.2.
(i), (ii) and (iii) are clear, so is (vi) taking $\tilde{\tilde{\mathcal{D}}} = G_0$.
Set $u \in G_0(\mu_a, \beta_a)$, we have

$$\begin{aligned}
\beta_a \circ W_a^u(t) &= \left(W(t) - at + \int_0^t \frac{W(s) - as}{1-s} ds\right) \circ W_a^u \\
&= W_a^u(t) - at + \int_0^t \frac{W_a^u(s) - as}{1-s} ds \\
&= \beta_a^u(t)
\end{aligned}$$

so condition (iv) is verified. Now set $v \in G_0(\mu_a, \beta_a)$ such that $v + u \circ W^v \in G_0(\mu_a, \beta_a)$, we have

$$\begin{aligned}
W_a^u(t) \circ W_a^v &= \left(W(t) + \int_0^t \left(\dot{u}(s) - \int_0^s \frac{\dot{u}(r)}{1-r} dr\right) ds\right) \circ W_a^v \\
&= W_a^v(t) + \int_0^t \left(\dot{u}(s) \circ W_a^v - \int_0^s \frac{\dot{u}(r) \circ W_a^v}{1-r} dr\right) ds \\
&= W(t) + \int_0^t \left(\dot{v}(s) + \dot{u}(s) \circ W_a^v - \int_0^s \frac{\dot{v}(r) + \dot{u}(r) \circ W^v(r)}{1-r} dr\right) ds \\
&= W^{v + u\circ W_a^v}
\end{aligned}$$

which gives condition (v). □

Corollary 5.6.3 *It is clear that for every $u \in \mathcal{D}$, we clearly have μ_a-a.s.*

$$W_a^u(w) = W_a^{u(w)}(w)$$

so theorem 5.4.4 applies.

Corollary 5.6.4 *Theorem 5.5.2 applies. Set $u \in G_2(\mu_a, \beta_a)$, we have μ_a-a.s.*

$$W_a^u = I_{\mathbb{W}} + \int_0^{\cdot} \dot{u}(t) - \int_0^t \frac{\dot{u}(s)}{1-s} ds dt$$

so

$$H(W_a^u \mu_a | \mu_a) = \frac{1}{2}\mathbb{E}_{\mu_a}\left[|u|_H^2\right]$$

if and only if there exists $v \in G_0(\mu_a, \beta_a)$ such that W_a^v is a strong solution to the stochastic differential equation:

$$dW_a^v(t) = -\left(\dot{u}(t) - \int_0^t \frac{\dot{u}(s)}{1-s} ds\right) dt \circ W_a^v + dW(t)$$

5.6.3 Loop measure

We keep the notations of last section. Denote

$$S = \{a \in \mathbb{R}^n, |a| = 1\}$$

and set $\alpha : S \to \mathbb{R}_+$ a locally lipschitz function such that $\{x, \alpha(x) \neq 0\}$ is of strictly positive measure for the Lebesgue measure on S and

$$\int_S \alpha(a) da = 1$$

We define the measure ν_l as follow: for any bounded measurable function f on W, we set

$$\mathbb{E}_{\nu_l}[f] = \int_S \alpha(a) \mathbb{E}_{\mu_a}[f] da$$

For more on loop measures, see Fang's work in [6].

Definition 5.6.4 *We denote*

$$\begin{aligned} h_a : (t,x) &\in [0,1) \times \mathbb{R}^n \mapsto \left(\frac{1}{\pi(1-t)}\right)^{\frac{n}{2}} \exp\left(\frac{-|x-a|^2}{2(1-t)}\right) \\ h : (t,x) &\in [0,1) \times \mathbb{R}^n \mapsto \int_S \alpha(a) h_a(t,x) da \end{aligned}$$

Proposition 5.6.4 *Set $a \in \mathbb{R}^n$ and $t \in [0,1)$, then*

$$\left.\frac{d\mu_a}{d\mu}\right|_{\mathcal{F}_t^W} = h_a(t, W_t)$$

Proof: For convenience we consider the case $n = 1$, the general proof is the same. Every $\mathcal{F}_t^W$ measurable $f : \mathbb{W} \to \mathbb{R}$ is a function of $W(. \wedge t)$, hence of $\beta_a(. \wedge t)$. $\beta_a(. \wedge t)$ is a Brownian motion on $[0,t]$ under μ_a. Now denote $\tilde{\mu}$ the probability measure on $\mathbb{W}$ given by

$$\frac{d\tilde{\mu}}{d\mu} = \exp\left(-\int_0^t \frac{W(s)-a}{1-s} dW(s) - \frac{1}{2}\int_0^t \left(\frac{W(s)-a}{1-s}\right)^2 ds\right)$$

According to Girsanov theorem, $\beta_a(.\wedge t)$ is also a Brownian motion under $\tilde{\mu}$ and

$$\begin{aligned} \left.\frac{d\mu_a}{d\mu}\right|_{\mathcal{F}_t^W} &= \left.\frac{d\tilde{\mu}}{d\mu}\right|_{\mathcal{F}_t^W} \\ &= \exp\left(-\int_0^t \frac{W(s)-a}{1-s}dW(s) - \frac{1}{2}\int_0^t \left(\frac{W(s)-a}{1-s}\right)^2 ds\right) \end{aligned}$$

Finally, Ito formula gives

$$\left(\frac{1}{\pi(1-t)}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{-\left|W(s)-a\right|^2}{2(1-t)}\right) = \exp\left(-\int_0^t \frac{W(s)-a}{1-s}dW(s) - \frac{1}{2}\int_0^t \left(\frac{W(s)-a}{1-s}\right)^2 ds\right)$$

$\square$

Proposition 5.6.5 *Set* $t \in [0,1)$, *we have*

$$\left.\frac{d\nu}{d\mu}\right|_{\mathcal{F}_t^W} = h(t, W_t)$$

Proof: Set $C \in \mathcal{F}_t^W$, Fubini-Tonelli theorem gives

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_\nu\left[1_C\right] &= \int_S \alpha(a)\mathbb{E}_{\mu_a}\left[1_C\right] da \\ &= \int_S \alpha(a)\mathbb{E}_\mu\left[1_C h_a(t, W(t))\right] da \\ &= \mathbb{E}_\mu\left[1_C \int_S \alpha(a) h_a(t, W(t)) da\right] \\ &= \mathbb{E}_\mu\left[1_C h(t, W(t))\right] \end{aligned}$$

$\square$

Proposition 5.6.6 *Define*

$$\beta_{lp}(t) = W(t) - \int_0^t \frac{h'(s, W(s))}{h(s, W(s))} ds$$

where h' designates the partial derivative of h with respect to x.
Then β_{lo} *is a* ν_l *Brownian motion and the filtration of W and* β_{lp} *completed with respect to* ν_l *are equal.*

Proof: Notice that every filtration we consider here is completed with respect to ν_l. The fact that $(\beta_{lp}(t), t \in [0,1))$ is a ν-Brownian motion is direct consequence of proposition 5.6.4 and the expression of β_{lp} gives that for $t > 1$,

$$\mathcal{F}_t^{\beta_{lp}} \subset \mathcal{F}_t^W$$

On the other hand, for $t < 1$ since $s \mapsto \frac{h'(s,x)}{h(s,x)}$ is lipschitz on $[0, t]$ and $x \mapsto \frac{h'(s,x)}{h(s,x)}$ is lipschitz on $\{x \in \mathbb{R}^n, |x| \leq k\}$ for any $k > 0$ so W is the strong solution of a stochastic differential equation relative to β_{lo} and

$$\mathcal{F}_t^W \subset \mathcal{F}_t^{\beta_{lp}}$$

W being μ_a-a.s. path continuous, we have

$$\bigcup_{t<1} \mathcal{F}_t^W = \mathcal{F}_1^W$$

On the other hand, since $(\beta_{lo}(t), t \in [0,1))$ is a Brownian motion, $(\langle \beta_{lo} \rangle (t), t \in [0,1))$ is bounded by 1, so $\beta_{lo}(t)$ converges μ_{lo}-a.s. and in $L^2(\nu_l, \mathbb{R}^n)$. Denote $\beta_{lo}(1)$ the limit, for $s \in [0,1)$ we have

$$Cov(\beta_{lo}(s), \beta_{lo}(t)) = \lim_{t' \to 1} Cov(\beta_{lo}(s), \beta_{lo}(t')) = s \wedge t'$$

and finally

$$\bigcup_{t<1} \mathcal{F}_t^{\beta_{lo}} = \mathcal{F}_1^{\beta_{lo}}$$

$(\beta_{lo}(t), t \in [0,1])$ is a ν_l-Brownian motion and β_{lo} and W have the same filtrations. □

Definition 5.6.5 *For $u \in G_0(\nu_l, \beta_{lo})$, we denote $\beta_{lp}^u = \beta_{lp} + u$.*

Proposition 5.6.7 *Set $u \in G_0(\nu_l, \beta_{lo})$, then there exists a unique ν_l-a.s. path continuous process W_{lp}^u such that*

$$W_{lp}^u(t) = \beta_{lp}^u(t) + \int_0^t \frac{h'(s, W_{lo}^u(s))}{h(s, W_{lo}^u(s))} ds$$

Proof: Set $t < 1$, since $s \mapsto \frac{h'(s,x)}{h(s,x)}$ is lipschitz on $[0,t]$ for any $t < 1$ and $x \mapsto \frac{h'(s,x)}{h(s,x)}$ is lipschitz on $\{x \in \mathbb{R}^n, |x| \leq k\}$ for any $k > 0$, there exists a unique ν_l-a.s. path-continuous process $(W_{lo}^u, u \in [0,1))$ such that for any $t < 1$,

$$W_{lp}^u(t) = \beta_{lp}^u(t) + \int_0^t \frac{h'(s, W_{lo}^u(s))}{h(s, W_{lo}^u(s))} ds$$

It remains to prove that there is no explosion in 1. Set $\tilde{\nu}_l^u$ the measure on $\mathbb{W}$ defined by

$$\frac{d\nu_l^u}{d\nu_l} = \rho(-\delta_{\beta_{lo}} u)$$

Since $u \in G_0(\nu_l, \beta_{lo})$, it is clear that the law of W_{lp}^u under ν_l^u is the same as the law of W_{lp} under ν_l so

$$\nu_l^u \left(\limsup_{t \to 1} \left| W_{lp}^u(t) \right| = \infty \right) = \nu_l \left(\limsup_{t \to 1} |W_{lp}(t)| = \infty \right) = 0$$

$\tilde{\nu}_l^u \sim \nu_l$ so

$$\nu_l \left(\limsup_{t \to 1} \left| W_{lp}^u(t) \right| = \infty \right) = 0$$

□

Theorem 5.6.3 $\left(\mathbb{W}, \nu_l, \beta_{lp}, (W_{lp}^u)_{u \in \mathcal{D}}\right)$ *verify the conditions of section 5.2.*
$\left(\mathbb{W}, \nu_l, \beta_{lo}, \left(W_{lp}^u\right)_{u \in G_0(\nu_l, \beta_{lo})}\right)$ *verify the conditions of definition 5.5.1.*

Proof: We have $W_{lp}^0 = W$ and β_{lp} is a ν_l-Brownian motion. Now we just have to verify the conditions of definition 5.5.1 since those imply conditions (iii) to (v) of section 5.2.
(i), (ii) and (iii) are clear, so is (vi) taking $\tilde{\tilde{\mathcal{D}}} = G_0$.
Set $u \in G_0(\nu_l, \beta_{lo})$, we have

$$\begin{aligned} \beta_{lp} \circ W_{lp}^u(t) &= \left(W(t) - \int_0^t \frac{h'(s, W(s))}{h(s, W(s))} ds \right) \circ W_{lp}^u \\ &= W_{lo}^u(t) - \int_0^t \frac{h'(s, W_{lo}^u(s))}{h(s, W_{lo}^u(s))} ds \\ &= \beta_{lp}^u(t) \end{aligned}$$

so condition (iv) is verified. Now set $v \in G_0(\nu_l, \beta_{lo})$ such that $v + u \circ W^v \in G_0(\nu_l, \beta_{lo})$, we have

$$\begin{aligned} W_{lp}^u(t) \circ W_{lp}^v &= \left(\beta_{lo}^u(t) + \int_0^t \frac{h'(s, W(s))}{h(s, W(s))} ds \right) \circ W_{lp}^v \\ &= \beta_{lo}(t) + v(t) + u(t) \circ W_{lo}^v + \int_0^t \frac{h'(s, W_{lo}^u(s))}{h(s, W_{lo}^u(s))} ds \end{aligned}$$

$W^u \circ W^v$ and $W^{v+u\circ W^v}$ are both ν_l-a.s. path continuous so the uniqueness result in proposition 5.6.7 gives ν_l-a.s.

$$W^u \circ W^v = W^{v+u\circ W^v}$$

and condition (v) is verified. □

Corollary 5.6.5 *It is clear that for every $u \in \mathcal{D}$, we clearly have ν_l-a.s.*

$$W_{lo}^u(w) = W_{lo}^{u(w)}(w)$$

so theorem 5.4.4 applies.

Corollary 5.6.6 *Theorem 5.5.2 applies. Set $u \in G_2(\nu_l, \beta_{lo})$, we have ν_l-a.s.*

$$W_{lo}^u = W + \int_0^{\cdot} \dot{u}(t) + \frac{h'(t, W_{lo}^u(t))}{h(t, W_{lo}^u(t))} - \frac{h'(t, W(t))}{h(t, W(t))} dt$$

so

$$H(W_{lo}^u \nu_l | \nu_l) = \frac{1}{2} \mathbb{E}_{\nu_l} \left[|u|_H^2 \right]$$

if and only if there exists $v \in G_0(\nu_l, \beta_{lo})$ such that W_{lo}^v is a strong solution to the stochastic differential equation:

$$dW_{lo}^v(t) = -\left(\dot{u}(t) + \frac{h'(t, W_{lo}^u(t))}{h(t, W_{lo}^u(t))} - \frac{h'(t, W(t))}{h(t, W(t))} \right) dt \circ W_{lo}^v + dW(t)$$

5.6.4 Diffusing particles without collision

Set $\sigma, b, \delta, \gamma \in \mathbb{R}$ such that

$$\sigma^2 \leq 2\gamma$$

The proof of the following theorem can be found in [19] or [3].

Theorem 5.6.4 *Set $(\Omega, \theta, (\mathcal{G}_t))$ a filtered probability space, $(z_1(0), ..., z_n(0)) \in \mathbb{R}^n$ and $B = (B_1, ..., B_n)$ a $\mathbb{R}^n$-valued θ-Brownian motion. We consider the following stochastic differential system:*

$$\begin{aligned}
Z_1(t) &= z_1(0) + \sigma B_1(t) + b\int_0^t Z_1(s)ds + ct + \gamma \sum_{j\in\{1,...,n\}\backslash\{1\}} \int_0^t \frac{ds}{Z_1(s) - Z_j(s)} \\
&\vdots \\
Z_n(t) &= z_n(0) + \sigma B_n(t) + b\int_0^t Z_n(s)ds + ct + \gamma \sum_{j\in\{1,...,n\}\backslash\{n\}} \int_0^t \frac{ds}{Z_n(s) - Z_j(s)}
\end{aligned}$$

under the condition that θ-a.s. for every $t \in [0, \infty)$

$$Z_1(t) \leq ... \leq Z_n(1)$$

This system admits a unique strong solution on $(\Omega, \theta, (\mathcal{G}_t), B)$ and the first collision time is θ-a.s. equal to ∞.

Consider $(\Omega, \theta, (\mathcal{G}_t))$ a filtered probability space, $(z_1(0), ..., z_n(0)) \in \mathbb{R}^n$ and $B = (B_1, ..., B_n)$ a $\mathbb{R}^n$-valued θ-Brownian motion, and Z the strong solution of the stochastic differential system of theorem 5.6.4. Denote $\nu_{pa} = Z$ the image measure of Z. For $1 \leq i \leq n$, denote $W_1, ..., W_n$ the coordinates of W and define

$$M_i(t) = W_i(t) - z_i(0) - b\int_0^t W_i(s)ds - ct - \gamma \sum_{j\in\{1,...,n\}\backslash\{i\}} \int_0^t \frac{ds}{W_i(s) - W_j(s)}$$

and

$$M = (M_1, ..., M_n)$$

M is a local martingale and

$$\langle M_i, M_j \rangle(t) = \sigma^2 t$$

Define

$$\beta_{pa} = \frac{1}{\sigma} M$$

Levy theorem clearly ensures that β is a ν_{pa}-Brownian motion and we clearly have for every $1 \leq i \leq n$,

$$W_i(t) = z_i(0) + \sigma\beta_{pa,i}(t) + b\int_0^t W_i(s)ds + ct + \gamma \sum_{j\in\{1,...,n\}\backslash\{i\}} \int_0^t \frac{ds}{W_i(s) - W_j(s)}$$

For $u \in G_0(\nu_{pa}, \beta_{pa})$ denote

$$\beta^u_{pa} = \beta_{pa} + u$$

and ν^u_{pa} the probability measure given by

$$\frac{d\nu^u_{pa}}{d\nu_{pa}} = \rho(-\delta_{\beta_{pa}} u)$$

According to Girsanov theorem, $\beta_{pa} + u$ is a Brownian motion under ν^u_{pa}, so according to theorem 5.6.4, there exists a unique ν^u_{pa}-a.s. continuous process $W^u_{pa} = (W^u_{pa,1}, ..., W^u_{pa,n})$ such that ν^u_{pa}-a.s. for every $1 \leq i \leq n$

$$W^u_{pa,i}(t) = z_i(0) + \sigma\beta^u_{pa,i}(t) + b\int_0^t W^u_{pa,i}(s)ds + ct + \gamma \sum_{j\in\{1,...,n\}\backslash\{i\}} \int_0^t \frac{ds}{W^u_{pa,i}(s) - W^u_{pa,j}(s)}$$

and ν^u_{pa}-a.s. for every $t \in [0,1]$

$$W^u_{pa,1}(t) \leq ... \leq W^u_{pa,n}(t)$$

Since $\nu^u_{pa} \sim \nu_{pa}$, W^u is ν_{pa}-a.s. continuous and ν_{pa}-a.s. for every $1 \leq i \leq n$

$$W^u_{pa,i}(t) = z_i(0) + \sigma\beta^u_{pa,i}(t) + b\int_0^t W^u_{pa,i}(s)ds + ct + \gamma \sum_{j\in\{1,\dots,n\}\setminus\{i\}} \int_0^t \frac{ds}{W^u_{pa,i}(s) - W^u_{pa,j}(s)}$$

and ν_{pa}-a.s. for every $t \in [0,1]$

$$W^u_{pa,1}(t) \leq ... \leq W^u_{pa,n}(t)$$

Theorem 5.6.5 $(\mathbb{W}, \nu_{pa}, \beta_{pa}, (W^u_{pa})_{u\in\mathcal{D}})$ *verify the conditions of section 5.2.* $\left(\mathbb{W}, \nu_{pa}, \beta_{pa}, \left(W^u_{pa}\right)_{u\in G_0(\nu_{pa},\beta_{pa})}\right)$ *verify the conditions of definition 5.5.1.*

Proof: (i), (ii), (iii) and (vi) are clear. Set $u \in G_0(\nu_{pa}, \beta_{pa})$, a straight calculation gives ν_{pa}-a.s.

$$\beta_{pa} \circ W^u_{pa} = \beta^u_{pa}$$

hence (iv).
Now we prove condition (v). Set $u, v \in G_0(\nu_{pa}, \beta_{pa})$ such that $v + u \circ W^v_{pa} \in G_0(\nu_{pa}, \beta_{pa})$, we have ν_{pa}-a.s.

$$\begin{aligned}
& W^u_{pa,i}(t) \circ W^v_{pa} \\
= \; & z_i(0) \\
& + \left(\sigma\left(\beta_{pa,i}(t) + u(t)\right) + b\int_0^t W^u_{pa,i}(s)ds + ct + \gamma \sum_{j\in\{1,\dots,n\}\setminus\{i\}} \int_0^t \frac{ds}{W^u_{pa,i}(s) - W^u_{pa,j}(s)}\right) \circ W^v_{pa} \\
= \; & z_i(0) + \sigma\left(\beta^v_{pa,i}(t) + u(t)\circ W^v_{pa}\right) + b\int_0^t W^u_{pa,i}(s)\circ W^v_{pa} ds + ct \\
& \qquad + \gamma \sum_{j\in\{1,\dots,n\}\setminus\{i\}} \int_0^t \frac{ds}{W^u_{pa,i}(s)\circ W^v_{pa} - W^u_{pa,j}(s)\circ W^v_{pa}} \\
= \; & z_i(0) + \sigma\beta^{v+u\circ W^v_{pa}}_{pa,i}(t) + b\int_0^t W^u_{pa,i}(s)\circ W^v_{pa} ds + ct \\
+ \; & \qquad \gamma \sum_{j\in\{1,\dots,n\}\setminus\{i\}} \int_0^t \frac{ds}{W^u_{pa,i}(s)\circ W^v_{pa} - W^u_{pa,j}(s)\circ W^v_{pa}}
\end{aligned}$$

so the uniqueness of theorem 5.6.4 gives ν_{pa}-a.s.

$$W^u_{pa} \circ W^v_{pa} = W^{v+u\circ W^v_{pa}}_{pa}$$

□

Corollary 5.6.7 *It is clear that for every $u \in \mathcal{D}$, we clearly have ν_{pa}-a.s.*

$$W^u_{pa}(w) = W^{u(w)}_{pa}(w)$$

so theorem 5.4.4 applies.

Corollary 5.6.8 *Theorem 5.5.2 applies. Set $u \in G_2(\nu_{pa}, \beta_{pa})$, for $i \in \{1, ..., n\}$, define*

$$\dot{\overbrace{w^u_{pa,i}}}(t) = \dot{u}_i(t) + b\left(W^u_{pa,i}(t) - W(t)\right) + \gamma \sum_{j \in \{1,\ldots,n\} \setminus \{i\}} \left(\frac{1}{W^u_{pa,i}(t) - W^u_{pa,j}(t)} - \frac{1}{W_i(t) - W_j(t)} \right)$$

We have ν_{pa}-a.s.

$$W^u_{pa} = I_{\mathbb{W}} + w^u_{pa}$$

so

$$H(W^u_{pa}\nu_{pa}|\nu_{pa}) = \frac{1}{2}\mathbb{E}_{\nu_{pa}}\left[|u|^2_H\right]$$

if and only if there exists $v \in G_0(\nu_{pa}, \beta_{pa})$ such that W^v_{pa} is a strong solution to the stochastic differential system:

$$\begin{aligned} dW^v_{pa,1}(t) &= \dot{\overbrace{w^u_{pa,1}}}(t)dt \circ W^v_{pa} + dW_1(t) \\ &\vdots \\ dW^v_{pa,n}(t) &= \dot{\overbrace{w^u_{pa,n}}}(t)dt \circ W^v_{pa} + dW_n(t) \end{aligned}$$

Chapter 6

Variational calculus on Wiener space with respect to conditional expectations

We give a variational formulation for $-\log \mathbb{E}_\nu \left[e^{-f}|\mathcal{F}_t\right]$ for a large class of measures ν. We give a refined entropic characterization of the invertibility of some perturbations of the identity. We also discuss the attainability of the infimum in the variational formulation and obtain a Prékopa-Leindler theorem for conditional expectations.

Keywords: Wiener space, variational formulation, entropy, invertibility, Brownian bridge, loop measure, diffusing particles, conditional expectation, Prékopa-Leindler theorem

6.1 Introduction

Denote $\mathbb{W}$ the space of continuous functions from $[0,1]$ to $\mathbb{R}^n$ and H the associated canonical Cameron-Martin space of elements of W which admit a density in L^2. Also denote μ the Wiener measure, W the coordinate process, and $(\mathcal{F}_t)$ the canonical filtration of W completed with respect to μ. W is a Brownian motion under μ. Set f a bounded from above measurable function from $\mathbb{W}$ to $\mathbb{R}$. In [5], Dupuis and Ellis prove that

$$-\log \mathbb{E}_\mu \left[e^{-f}\right] = \inf_\theta \left(\mathbb{E}_\theta \left[f\right] + H(\theta|\mu)\right) \tag{6.1.1}$$

where the infimum is taken over the probability measures θ on $\mathbb{W}$ which are absolutely continuous with respect to μ and the relative entropy $H(\theta|\mu)$ is equal to $\mathbb{E}_\mu \left[\frac{d\theta}{d\mu} \log \frac{d\theta}{d\mu}\right]$. In [1], Boué and Dupuis use it to derive the variational formulation

$$-\log \mathbb{E}_\mu \left[e^{-f}\right] = \inf_u \mathbb{E}_\mu \left[f \circ (W+u) + \frac{1}{2}\int_0^1 |\dot{u}(s)|^2 ds\right] \tag{6.1.2}$$

where the infimum is taken over L^2 functions from $\mathbb{W}$ to H whose density is adapted to $(\mathcal{F}_t)$. This variational formulation is useful to derive large deviation asymptotics as Laplace principles for small noise diffusions for instance. This result was later extended by Budhiraja and Dupuis to Hilbert-space-valued Brownian motions in [2], and then by Zhang to abstract Wiener space in [27], using the framework developed by Üstünel and Zakai in [21].
The Prékopa-Leindler theorem first formulation was given by Prékopa in [17] and arose in stochastic programming where a lot of non-linear optimization problems require concavity. In [8], Huu Hariya uses the variational formulation to retrieve a Prékopa-Leindler theorem for Wiener space, similar to the formulation of Üstünel in [7] with log-concave measures. Other functional inequalities can be derived from 6.1.2, see for instance Lehec in [15].
The bounded from above hypothesis in 6.1.2 was weakened significantly by Üstünel in [25], it was replaced with the condition

$$\mathbb{E}_\mu \left[f e^{-f} \right] < \infty$$

and the existence of conjugate integers p and q such that

$$f \in L^p(\mu), e^{-f} \in L^q(\mu)$$

These relaxed hypothesis pave the way to new applications. The possibility of using unbounded functions is primordial in Dabrowski's application of 6.1.2 to free entropy in [4].
Üstünel's approach is routed in the study of the perturbations of the identity of $\mathbb{W}$, which is the coordinate process, and their invertibility. The question of the invertibility of an adapted perturbation of the identity is linked to the representability of measures and was put to light by the celebrated example of Tsirelson [20]. Üstünel proved that if $u \in L^2(\mu, H)$ and its density is adapted, $I_{\mathbb{W}} + u$ is μ-a.s. invertible if and only if

$$H((I_{\mathbb{W}} + u)\mu|\mu) = \frac{1}{2}\mathbb{E}_\mu \left[|u|_H^2 \right]$$

To prove 6.1.2 with the integrability conditions specified above, Üstünel uses the fact that H-C^1 shifts, meaning shifts that are a.s. Fréchet-differentiable on H with a μ-a.s. continuous on H Fréchet derivative, are a.s. invertible, and that shifts can be approached with H-C^1 shifts using the Ornstein-Uhlenbeck semigroup.
In [10] we give a variational formulation similar as 6.1.2 for diffusions solutions of stochastic differential equations, while lowering the integrability hypothesis on f.
In [11] we present a general framework to be able to similarly derive a variational formulation for $-\log \mathbb{E}_\nu[e^{-f}]$ for a large class of measures ν, without increasing the integrability hypothesis on f. We give a set of conditions so that a set of processes (W^u) can act as perturbations of W and allow a Girsanov-like change of variable with respect to a Brownian motion β. We write $\frac{e^{-f}}{\mathbb{E}[e^{-f}]}$ as the Wick exponential of some v, and then approach v to obtain invertible perturbations of the identity.
Hyndman and Wang proved in [13] that

$$-\log \mathbb{E}_\mu \left[e^{-f} \middle| \mathcal{F}_t \right] = \inf_\theta \left(\mathbb{E}_\theta \left[f | \mathcal{F}_t \right] + \mathbb{E}_\theta \left[\log \frac{d\theta}{d\mu} \middle| \mathcal{F}_t \right] \right) \tag{6.1.3}$$

where the infimum is taken over the probability measures θ which are absolutely continuous with respect to μ and verify $\mathbb{E}_\mu \left[\frac{d\theta}{d\mu} | \mathcal{F}_t \right] = 1$. They link it to forward-backward stochastic differential equations and apply it to various pricing problems for zero-coupon bonds.

The relation 6.1.3, obtained for a deterministic time t, is very similar to 6.1.1 so three questions arise naturally: can we obtain a relation similar to 6.1.2 for the conditional expectation, can we extend it to other measures with the framework we developed in our third paper, and finally are these relations still valid if we substitute t with a stopping time τ? Our paper answers affirmatively to these three questions. We keep the notations from our [11] and we prove that

$$-\log \mathbb{E}_\nu\left[e^{-f}\middle|\mathcal{F}_\tau\right] = \inf_\theta\left(\mathbb{E}_\nu\left[f|\mathcal{F}_\tau\right] + \mathbb{E}_\nu\left[\frac{d\theta}{d\nu}\log\frac{d\theta}{d\nu}\middle|\mathcal{F}_\tau\right]\right) \tag{6.1.4}$$

$$-\log \mathbb{E}_\nu\left[e^{-f}\middle|\mathcal{F}_\tau\right] = \inf_u \mathbb{E}_\nu\left[f\circ W^u + \frac{1}{2}|u|_H^2\middle|\mathcal{F}_\tau\right] \tag{6.1.5}$$

In 6.1.4 we assume that $\mathbb{E}_\nu\left[fe^{-f}\right] < \infty$ and the infimum is taken over the probability measures θ on $\mathbb{W}$ which are absolutely continuous with respect to ν and such that $\mathbb{E}_\nu\left[\frac{d\theta}{d\nu}|\mathcal{F}_t\right] = 1$. In 6.1.5, the infimum is taken over the u from W to H, with adapted density, which are in L^2 and such that $1_{t\leq\tau}\dot{u}(t) = 0$, and we assume that $\mathbb{E}_\nu\left[fe^{-f}\right] < \infty$ and that there exists two conjugate integers p and q such that $f \in L^p(\nu)$ and $e^{-f} \in L^q(\nu)$. Observe that we had to increase the integrability hypothesis on f from what we had for the non-conditional case. In fact the integrability hypothesis on f here are the same as in [25]. Finally, we discuss the attainability of the infimum in 6.1.5 and we obtain a analog of Prékopa-Leindler type theorem for the conditional expectation with respect to μ. However, similarly as in [11], the convexity hypothesis seem quite restrictive.

6.2 Framework

Set $n \in \mathbb{N}^*$, we denote $\mathbb{W} = C([0,1],\mathbb{R}^n)$ the canonical Wiener space, $H = \left\{\int_0^\cdot \dot{h}(s)ds, \dot{h} \in L^2([0,1])\right\}$ the associated Cameron-Martin space and W is the coordinate process. We denote $(\mathcal{F}_t)$ its filtration. Set τ a stopping time.

We assume that $\mathbb{W}$ is equipped with a probability measure ν. For $p \geq 0$, we denote

$$L_a^p(\nu,H) = \{u \in L^p(\nu,H), \dot{u}\ is\ (\mathcal{F}_t) - adapted\}$$

and

$$\mathcal{D} = \left\{u \in L_a^0(\nu,H), \dot{u}\ is\ d\nu\times dt - a.s.\ bounded\right\}$$

For $t \in [0,1]$, we define

$$\pi_t : u \in L_a^0(\nu,H) \mapsto \int_0^\cdot \dot{h}(s)1_{s\leq t}ds$$

Similarly, we define

$$\begin{aligned}
\pi_\tau &: u \in L_a^0(\nu,H) \mapsto \int_0^\cdot \dot{h}(s)1_{s\leq\tau}ds \\
I-\pi_\tau &: u \in L_a^0(\nu,H) \mapsto \int_0^\cdot \dot{h}(s)1_{s>\tau}ds
\end{aligned}$$

Notice that

$$\begin{aligned}
\pi_\tau\mathcal{D} &\subset \mathcal{D} \\
(I-\pi_\tau)\mathcal{D} &\subset \mathcal{D}
\end{aligned}$$

and define

$$\mathcal{D}_\tau = (I - \pi_\tau)\mathcal{D}$$

The filtration of a process m will be denoted $(\mathcal{F}_t^m)$, the filtration of W will be simply denoted $(\mathcal{F}_t)$. Except if stated otherwise, every filtration considered is completed with respect to ν. If m is a martingale and v has a density whose stochastic integral with respect to m is well defined we will denote

$$\delta_m v = \int_0^1 \dot{v}(s) dm(s)$$

We also denote the Wick exponential as follow

$$\rho(\delta_m v) = \exp\left(\int_0^1 \dot{v}(s) dm(s) - \frac{1}{2}\int_0^1 |\dot{v}(s)|^2 \, d\langle m\rangle(s)\right)$$

and for $p \geq 0$ we denote

$$G_p(\nu, m) = \{u \in L_a^p(\nu, H), \mathbb{E}_\nu\left[\rho(-\delta_m u)\right] = 1\}$$

We assume there exists a family of adapted processes $(W^u)_{u\in\mathcal{D}}$ and a ν-Brownian motion β which verify the following conditions:
(i) β is a ν-Brownian motion whose canonical filtration is identical to the canonical filtration of W
(ii) $W^0 = W$
(iii) For every $u \in \mathcal{D}$, the law of W^u under $\tilde{\nu}^u$ is the same as the law of W under ν, where $\tilde{\nu}^u$ is defined by $\frac{d\tilde{\nu}^u}{d\nu} = \rho(-\delta_\beta u)$
(iv) For every $u \in \mathcal{D}$,

$$\beta \circ W^u = \beta + u$$

(v) For every $u, v \in \mathcal{D}$,

$$W^u \circ W^v = W^{v + u\circ W^v} \ \nu - a.s.$$

(vi) For every $u \in \mathcal{D}$

$$(W^u(s \wedge \tau), s \leq 1) = (W^{\pi_\tau u}(s \wedge \tau), s \leq 1)$$

Remark: Clearly $\mathcal{D} \subset L_a^\infty(\nu, H)$, so if $u \in \mathcal{D}$, $\mathbb{E}_\nu\left[\rho(-\delta_\beta u)\right] = 1$ and $\tilde{\nu}^u$ which was defined in condition (iii) is indeed a probability measure.
Condition (iii) can be written as follow:

Proposition 6.2.1 *Set $u \in \mathcal{D}$, for every bounded measurable function f, we have:*

$$\mathbb{E}_\nu\left[f\right] = \mathbb{E}_\nu\left[f \circ W^u \rho(-\delta_\beta u)\right]$$

Next proposition ensures that the compositions written in (iv) and (v) are well defined.

Proposition 6.2.2 *Set $u \in \mathcal{D}$, we have*

$$W^u \nu \sim \nu$$

Proof: Set $f \in C_b(\mathbb{W})$ bounded and measurable, we have, using proposition 6.2.1

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{W^u \tilde{\nu}^u}[f] &= \mathbb{E}_{\tilde{\nu}^u}[f \circ W^u] \\ &= \mathbb{E}_{\nu}[f \circ W^u \rho(-\delta_\beta u)] \\ &= \mathbb{E}_{\nu}[f] \end{aligned}$$

so $W^u \tilde{\nu}^u = \nu$.
Since $\tilde{\nu} \sim \nu$, we have $W^u \tilde{\nu} \sim W^u \nu$ which conclude the proof. □

Definition 6.2.1 *Set $\widetilde{\mathcal{D}}$ a subset of $G_0(\nu, \beta)$ such that the map $u \in \mathcal{D} \mapsto W^u$ can be extended to $\widetilde{\mathcal{D}}$ while verifying the following conditions.*
(i) $\mathcal{D} \subset \widetilde{\mathcal{D}} \subset G_2(\nu, \beta)$
(ii) For any $u \in \widetilde{\mathcal{D}}$, W^u is adapted.
(iii) For every $u \in \widetilde{\mathcal{D}}$, the law of W^u under $\tilde{\nu}^u$ is the same as the law of W under ν, where $\tilde{\nu}^u$ is defined by $\frac{d\tilde{\nu}}{d\nu} = \rho(-\delta_\beta \nu)$
(iv) For every $u \in \widetilde{\mathcal{D}}$,

$$\beta \circ W^u = \beta + u$$

(v) For every $u, v \in \widetilde{\mathcal{D}}$ such that $v + u \circ W^v \in \widetilde{\mathcal{D}}$

$$W^u \circ W^v = W^{v+u\circ W^v} \ \nu - a.s.$$

(vi) There exists $\widetilde{\widetilde{\mathcal{D}}}$ such that $D'' \subset \widetilde{\widetilde{\mathcal{D}}} \subset L^0_a(\nu, H)$, $\widetilde{\mathcal{D}} = \widetilde{\widetilde{\mathcal{D}}} \cap G_2(\nu, \beta)$ and for every $u \in \widetilde{\mathcal{D}}$ such that the equation $u + v \circ W^u$ has a solution in $G_0(\nu, \beta)$, this equation has a solution in $\widetilde{\widetilde{\mathcal{D}}}$.
(vii) For every $u \in \widetilde{\mathcal{D}}$ such that $\pi_\tau u \in \widetilde{\mathcal{D}}$,

$$(W^u(s \wedge \tau), s \leq 1) = (W^{\pi_\tau u}(s \wedge \tau), s \leq 1)$$

Remark: $\mathcal{D}$ verify the set of condition above.

Proposition 6.2.3 *Set $u \in \widetilde{\mathcal{D}}$. For every bounded measurable function f, we have*

$$\mathbb{E}_\nu[f] = \mathbb{E}_\nu[f \circ W^u \rho(-\delta_\beta u)]$$

Furthermore,

$$W^u \nu \sim \nu$$

Proof: The first assertion is condition (iii). The proof of the second assertion is the same as the case $u \in \mathcal{D}$. □

Definition 6.2.2 *We define $\widetilde{\mathcal{D}}_\tau$ as*

$$\widetilde{\mathcal{D}}_\tau = \widetilde{\mathcal{D}} \cap (I - \pi_\tau) L^0_a(\nu, H)$$

6.3 Conditional expectation results

We need the abstract Bayes formula for a stopping time:

Lemma 6.3.1 *Set θ a probability measure on $(\mathbb{W}, \mathcal{F})$ such that $\theta \ll \nu$. Denote*

$$L = \frac{d\theta}{d\nu}$$

For every measurable $f : \mathbb{W} \to \mathbb{R}$ we have

$$\mathbb{E}_\theta \left[f | \mathcal{F}_\tau \right] = \frac{\mathbb{E}_\nu \left[fL | \mathcal{F}_\tau \right]}{\mathbb{E}_\nu \left[L | \mathcal{F}_\tau \right]}$$

Proof: We can assume f is positive. Denote for $s \in [0,1]$

$$L(s) = \mathbb{E}_\nu \left[L | \mathcal{F}_s \right]$$

The martingale stopping theorem gives

$$L(\tau) = \mathbb{E}_\nu \left[L | \mathcal{F}_\tau \right]$$

Set $A \in \mathcal{F}_\tau$, we need to prove that

$$\mathbb{E}_\nu \left[1_A L(\tau) \mathbb{E}_\theta \left[f | \mathcal{F}_\tau \right] \right] = \mathbb{E}_\nu \left[1_A \mathbb{E}_\nu \left[fL | \mathcal{F}_\tau \right] \right]$$

We have

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_\nu \left[1_A L(\tau) \mathbb{E}_\theta \left[f | \mathcal{F}_\tau \right] \right] &= \mathbb{E}_{\nu|_{\mathcal{F}_\tau}} \left[1_A L(\tau) \mathbb{E}_\theta \left[f | \mathcal{F}_\tau \right] \right] \\
&= \mathbb{E}_{\theta|_{\mathcal{F}_\tau}} \left[1_A \mathbb{E}_\theta \left[f | \mathcal{F}_\tau \right] \right] \\
&= \mathbb{E}_\theta \left[1_A \mathbb{E}_\theta \left[f | \mathcal{F}_\tau \right] \right] \\
&= \mathbb{E}_\theta \left[1_A f \right] \\
&= \mathbb{E}_\nu \left[1_A f L \right] \\
&= \mathbb{E}_\nu \left[1_A \mathbb{E}_\nu \left[fL | \mathcal{F}_\tau \right] \right]
\end{aligned}$$

□

Proposition 6.3.1 *Set $u \in \widetilde{\mathcal{D}}$ and $f \in L^0(\nu)$ an $\mathcal{F}_\tau$-measurable function. Then ν-a.s.*

$$f \circ W^u = f \circ W^{\pi_\tau u}$$

Consequently, if $u \in \widetilde{\mathcal{D}}_\tau$, we have ν-a.s.

$$f \circ W^u = f$$

Proof: For $s \in [0,1]$, we have

$$\begin{aligned}
\beta(s) \circ W^u &= \beta(s) + u(s) \\
&= \beta(s) + \pi_s u(s) \\
&= \beta(s) \circ W^{\pi_s u}
\end{aligned}$$

Consequently, for $h \in H$

$$\rho(\delta_\beta \pi_s h) \circ W^u = \rho(\delta_\beta \pi_s h) \circ W^{\pi_s u}$$

and

$$\rho(\delta_\beta \pi_\tau h) \circ W^u = \rho(\delta_\beta \pi_\tau h) \circ W^{\pi_\tau u}$$

Denote

$$L^2(\nu, \mathcal{F}_\tau) = \{f \in L^2(\nu), f \ is \ \mathcal{F}_\tau - measurable\}$$

$(\rho(\delta_\beta \pi_s h), s \in [0,1])$ being a closed martingale, we have

$$\mathbb{E}_\nu \left[\rho(\delta_\beta h) | \mathcal{F}_\tau\right] = \rho(\delta_\beta \pi_\tau h)$$

Since β and W have the same filtration, the vector space generated by $\{\rho(\delta_\beta h), h \in H\}$ is dense in $L^2(\nu)$. $g \in L^2(\nu) \mapsto \mathbb{E}_\nu [g|\mathcal{F}_\tau]$ being a continuous surjection from $L^2(\nu)$ to $L^2(\nu, \mathcal{F}_\tau)$, the vector space generated by $\{\rho(\delta_\beta \pi_\tau h), h \in H\}$ is dense in $L^2(\nu, \mathcal{F}_\tau)$. We denote E this vector space.
Assume that f is bounded, there exists $(f_n) \in E^{\mathbb{N}}$ which converges to f ν-a.s. Since $W^u \nu \ll \nu$ and $W^{\pi_\tau u} \nu \ll \nu$, $(f_n \circ W^u)$ converges ν-a.s. to $f \circ W^u$ and $(f_n \circ W^{\pi_\tau u})$ converges ν-a.s. to $f \circ W^{\pi_\tau u}$, which ensures the result in this case
Finally, if f is only supposed to be $\mathcal{F}_\tau$-measurable, there exists a sequence of bounded $\mathcal{F}_\tau$-measurable functions which converges to f and we proceed as above. □

Proposition 6.3.2 *Set L a density on* $(\mathbb{W}, \nu, \mathcal{F})$ *such that* $L > 0$ *ν-a.s. Denote,*

$$M(s) = \mathbb{E}_\nu \left[L \,|\mathcal{F}_s\right]$$

and set $v \in L^0_a(\nu, H)$ *such that*

$$M(s) = \rho(-\delta_\beta \pi_s v)$$

Then the two following propositions are equivalent:
(i) $\pi_\tau v = 0$ *ν-a.s.*
(ii) $\mathbb{E}_\nu \left[L \,|\mathcal{F}_\tau\right] = 1$ *ν-a.s.*

Proof: The direct implication is trivial. Conversely, M is a martingale with unit expectation and since

$$M(s) = 1 + \int_0^s M(r)\dot{v}(r) d\beta(r)$$

We have

$$\langle M - 1 \rangle = \int_0^{\cdot} \left(M(r)\dot{v}(r)\right)^2 dr$$

Proposition(ii) gives $(M(s \wedge \tau) - 1, s \leq 1) = 0$ ν-a.s., so $(\langle M - 1 \rangle (s \wedge \tau), s \leq 1) = 0$ ν-a.s., $L > 0$ so ν-a.s. $M(s) > 0$ for any $s \in [0,1]$ and we have proposition (i). □

Lemma 6.3.2 *Set* $u \in \widetilde{\mathcal{D}}_\tau$ *and denote* $L = \frac{dW^u \nu}{d\nu}$. *We have*

$$\mathbb{E}_\nu \left[L \,|\mathcal{F}_\tau\right] = 1$$

Consequently, for any $f \in L^1(W^u \nu)$, *we have*

$$\mathbb{E}_{W^u \nu} \left[f \,|\mathcal{F}_\tau\right] = \mathbb{E}_\nu \left[f \circ W^u \,|\mathcal{F}_\tau\right] = \mathbb{E}_\nu \left[fL \,|\mathcal{F}_\tau\right]$$

Proof: Set $B \in \mathcal{F}_\tau$, we have

$$\mathbb{E}_\nu\left[1_B L\right] = \mathbb{E}_\nu\left[1_B \circ W^u\right] = \mathbb{E}_\nu\left[1_B \circ W^{\pi_\tau u}\right] = \mathbb{E}_\nu\left[1_B\right]$$

Then the second assertion is a direct consequence of Bayes formula. □

6.4 Invertibility results

Definition 6.4.1 *A measurable map $U : \mathbb{W} \to \mathbb{W}$ is said to be ν-a.s. left-invertible if and only if $U\nu \ll \nu$ and there exists a measurable map $V : \mathbb{W} \to \mathbb{W}$ such that $V \circ U = I_{\mathbb{W}}$ ν-a.s.*
A measurable map $U : \mathbb{W} \to \mathbb{W}$ is said to be ν-a.s. right-invertible if and only if there exists a measurable map $V : \mathbb{W} \to \mathbb{W}$ such that $V\nu \ll \nu$ and $U \circ V = I_{\mathbb{W}}$ ν-a.s.

Proposition 6.4.1 *Set $U, V : \mathbb{W} \to \mathbb{W}$ measurable maps such that $V \circ U = I_{\mathbb{W}}$ ν-a.s. and $V\nu \ll \nu$ Then $U \circ V = I_{\mathbb{W}}$ $U\nu$-a.s., so if $U\nu \sim \nu$, we also have $U \circ V = I_{\mathbb{W}}$ ν-a.s. In that case, we will say that U is ν-a.s. invertible and we also have $V\nu \sim \nu$.*

Proof: See [11]. □

Proposition 6.4.2 *Set $u \in \widetilde{\mathcal{D}}_\tau \cap L_a^2(\nu, H)$. If W^u is ν-a.s. left-invertible. Then there exists $v \in \widetilde{\mathcal{D}}_\tau$ such that ν-a.s.*

$$W^v \circ W^u = W^u \circ W^v = I_{\mathbb{W}}$$

and

$$\begin{aligned} \frac{dW^u\nu}{d\nu} &= \rho(-\delta_\beta v) \\ \frac{dW^v\nu}{d\nu} &= \rho(-\delta_\beta u) \end{aligned}$$

Proof: Everything is already known from [11] except the fact that $\pi_\tau v = 0$. This arises from the relation

$$\dot{v}(s) = -\dot{u}(s) \circ W^v$$

□

Now we recall two very useful lemmas, see [11] for the proof

Lemma 6.4.1 *Set $u \in \widetilde{\mathcal{D}} \cap L_a^2(\nu, H)$ and denote $L = \frac{dW^u\nu}{d\nu}$, we have ν-a.s.*

$$L \circ W^u \mathbb{E}_\nu\left[\rho(-\delta_\beta u) \middle| \mathcal{F}_1^{W^u}\right] = 1$$

Theorem 6.4.1 *Set $u \in \widetilde{\mathcal{D}} \cap L_a^2(\nu, H)$ and denote $L = \frac{dW^u\nu}{d\nu}$. Then W^u is ν-a.s. left-invertible if and only if*

$$\mathbb{E}_\nu\left[L \log L\right] = \frac{1}{2}\mathbb{E}_\nu\left[|u|_H^2\right]$$

Moreover, if W^u is ν-a.s. left-invertible, we have ν-a.s.

$$L \circ W^u \rho\left(-\delta_\beta u\right) = 1$$

Now we give the results relative to the invertibility of W^u when $\pi_\tau u = 0$.

Proposition 6.4.3 *Set $u \in \widetilde{\mathcal{D}}_\tau \cap L^2_a(\nu, H)$ and denote $L = \frac{dW^u\nu}{d\nu}$. We have ν-a.s.:*

$$\mathbb{E}_\nu \left[L \log L \,|\mathcal{F}_\tau \right] \leq \frac{1}{2}\mathbb{E}_\nu \left[|u|_H^2 \,|\mathcal{F}_\tau \right]$$

Proof: We have $\left(W^u(s \wedge \tau)\right)_{s \leq 1} = \left(W(s \wedge \tau)\right)_{s \leq 1}$ hence

$$\mathcal{F}_\tau = \mathcal{F}_\tau^{W^u} \subset \mathcal{F}_1^{W^u}$$

Consequently, using lemma 6.4.1 and Jensen inequality, we have:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_\nu \left[L \log L \,|\mathcal{F}_\tau \right] &= \mathbb{E}_\nu \left[\log L \circ W^u \,|\mathcal{F}_\tau \right] \\
&\leq -\mathbb{E}_\nu \left[\log \mathbb{E}_\nu \left[\rho(-\delta_\beta u) \left| \mathcal{F}_1^{W^u} \right. \right] \middle| \mathcal{F}_\tau \right] \\
&\leq -\mathbb{E}_\nu \left[\mathbb{E}_\nu \left[\log \rho(-\delta_\beta u) \left| \mathcal{F}_1^{W^u} \right. \right] \middle| \mathcal{F}_\tau \right] \\
&\leq -\mathbb{E}_\nu \left[\log \rho(-\delta_\beta u) \,|\mathcal{F}_\tau \right] \\
&\leq \frac{1}{2}\mathbb{E}_\nu \left[|u|_H^2 \,|\mathcal{F}_\tau \right]
\end{aligned}$$

□

Theorem 6.4.2 *Set $u \in \widetilde{\mathcal{D}}_\tau \cap L^2_a(\nu, H)$ and denote $L = \frac{dW^u\nu}{d\nu}$. Then W^u is ν-a.s. left-invertible, if and only if ν-a.s.*

$$\mathbb{E}_\nu \left[L \log L \,|\mathcal{F}_\tau \right] = \frac{1}{2}\mathbb{E}_\nu \left[|u|_H^2 \,|\mathcal{F}_\tau \right]$$

Proof: Assume that the equality holds, taking the expectation we have

$$\mathbb{E}_\nu \left[L \log L \right] = \frac{1}{2}\mathbb{E}_\nu \left[|u|_H^2 \right]$$

so according to theorem 6.4.1 W^u is ν-a.s. left invertible.
Conversely, using again theorem 6.4.1, we have

$$L \circ W^u \rho\left(-\delta_\beta u\right) = 1$$

So, since $\pi_\tau u = 0$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_\nu \left[L \log L \,|\mathcal{F}_\tau \right] &= \mathbb{E}_\nu \left[\log L \circ W^u \,|\mathcal{F}_\tau \right] \\
&= \mathbb{E}_\nu \left[-\log \rho(-\delta_\beta u) \,|\mathcal{F}_\tau \right] \\
&= \frac{1}{2}\mathbb{E}_\nu \left[|u|_H^2 \,|\mathcal{F}_\tau \right]
\end{aligned}$$

□

Definition 6.4.2 *We denote*

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}^i &= \{u \in \mathcal{D}, W^u \text{ } is \text{ } \nu - a.s. \text{ } invertible\} \\
\mathcal{D}^i_\tau &= \mathcal{D}_\tau \cap \mathcal{D}^i
\end{aligned}$$

6.5 Approximation of absolutely continuous measures

Theorem 6.5.1 *If $\theta \sim \nu$ is such that there exists $p > 1$ such that*

$$\frac{d\theta}{d\nu} \in L^p(\nu)$$

and ν-a.s.

$$\mathbb{E}_\nu \left[\frac{d\theta}{d\nu} \middle| \mathcal{F}_\tau \right] = 1$$

There exists $(u_n) \in \left(\mathcal{D}^i_\tau\right)^{\mathbb{N}}$ such that,

$$\frac{dW^{u_n}\nu}{d\nu} \to \frac{d\theta}{d\nu} \text{ in } L^p(\nu)$$

Proof: Eventually sequentializing afterward, we have to prove that for any $\epsilon > 0$, there exists $u \in \mathcal{D}^i_\tau$ such that

$$\left| \frac{dW^u\nu}{d\nu} - \frac{d\theta}{d\nu} \right|_{L^p(\nu)} \leq \epsilon$$

The proof is divided in six steps.
Step 1 : We approximate $\frac{d\theta}{d\nu}$ with a density that is both lower and upper bounded.
Denote

$$L(s) = \mathbb{E}_\nu \left[\frac{d\theta}{d\nu} \middle| \mathcal{F}_s \right]$$

and for $n \in \mathbb{N}$,

$$T_n = \inf \{s \in [0,1], L(s) \geq n\}$$

$L(1) = \frac{d\theta}{d\nu}$ and L being a closed martingale, $L^{T_n}(.)$ is still a closed martingale which converges in L^1 to $L(T_n) = \mathbb{E}_\nu [L(1) | \mathcal{F}_{T_n}]$, so

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_\nu [L(T_n)|\mathcal{F}_\tau] &= \mathbb{E}_\nu \left[L^{T_n}(1) \middle| \mathcal{F}_\tau \right] \\
&= L^{T_n}(\tau) \\
&= L(\tau \wedge T_n) \\
&= \mathbb{E}_\nu [L(1) | \mathcal{F}_{\tau \wedge T_n}] \\
&= \mathbb{E}_\nu [\mathbb{E}_\nu [L(1) | \mathcal{F}_\tau] | \mathcal{F}_{\tau \wedge T_n}] \\
&= 1
\end{aligned}$$

Furthermore, since L is a closed martingale, $(\mathbb{E}_\nu [L(1) | \mathcal{F}_{T_n}])_{n \in \mathbb{N}}$ is also a closed martingale so is uniformly integrable. $(L(T_n))$ converges to L_1 ν-a.s. and Jensen inequality gives

$$0 \leq L(T_n)^p = \mathbb{E}_\nu [L(1) | \mathcal{F}_{T_n}]^p \leq \mathbb{E}_\nu [L(1)^p | \mathcal{F}_{T_n}]$$

So $(L(T_n)^p)$ is uniformly integrable and $(L(T_n))$ converges in $L^p(\nu)$ to $L(1)$, so there exists $n_0 \in \mathbb{N}$ such that

$$|L(T_{n_0}) - L(1)|_{L^r(\nu)} \leq \epsilon$$

$\left(\frac{L(T_{n_0})+a}{1+a}\right)$ converges ν-a.s. to $L(T_{n_0})$ when a converges to 0. Set $a \in [0,1]$, we have

$$0 \leq \frac{L(T_{n_0})+a}{1+a} \leq L(T_{n_0})+1$$

$L(T_{n_0})+1 \in L^p(\nu)$ so according to the Lebesgue theorem, $\left(\frac{L(T_{n_0})+a}{1+a}\right)$ converges to $L(T_{n_0})$ in $L^p(\nu)$ and there exists $a \in [0,1]$ such that

$$\left|\frac{L(T_{n_0})+a}{1+a} - L(T_{n_0})\right|_{L^p(\nu)} \leq \epsilon$$

$\frac{L(T_{n_0})+a}{1+a}$ is both lower-bounded and upper-bounded in $L^\infty(\nu)$, denote these bounds respectively d and D.
Denote

$$M(s) = \mathbb{E}_\nu\left[\left.\frac{L(T_{n_0})+a}{1+a}\right|\mathcal{F}_s\right]$$

We can write

$$M = \exp\left(\int_0^\cdot \dot{\alpha}(r)d\beta(r) - \frac{1}{2}\int_0^\cdot |\dot{\alpha}(r)|^2\,dr\right)$$

with $\alpha \in (I-\pi_\tau)L_a^0(\nu, H)$ since

$$\mathbb{E}_\nu\left[M(1)|\mathcal{F}_\tau\right] = \frac{\mathbb{E}_\nu\left[L_{T_{n_0}}\middle|\mathcal{F}_\tau\right]+a}{1+a} = 1$$

Step 2 : we prove that $\alpha \in (I-\pi_\tau)L_a^2(\nu, H)$
Set

$$S_n = \inf\left\{s \in [0,1], \int_0^s |\dot{\alpha}(r)|^2\,dr > n\right\}$$

(S_n) is a sequence of stopping times which increases stationarily toward 1. We have, using $M = 1 + \int_0^\cdot \dot{\alpha}(r)M(r)d\beta(r)$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_\nu\left[(M(s\wedge S_n)-1)^2\right] &= \mathbb{E}_\nu\left[\int_0^{s\wedge S_n}|\dot{\alpha}(r)|^2 M(r)^2 dr\right]\\ &\geq d^2\mathbb{E}_\nu\left[\int_0^{s\wedge S_n}|\dot{\alpha}(r)|^2\,dr\right]\end{aligned}$$

so

$$\mathbb{E}_\nu\left[\int_0^{s\wedge S_n}|\dot{\alpha}(r)|^2\,dr\right] \leq \frac{1}{d^2}\mathbb{E}_\nu\left[(M(s\wedge S_n)-1)^2\right] \leq \frac{2\left(D^2+1\right)}{d^2}$$

hence passing to the limit

$$\mathbb{E}_\nu\left[\int_0^1 |\dot{\alpha}(r)|^2\,dr\right] \leq \infty$$

Step 3 : We approximate α with an element of $(I-\pi_\tau)L_a^\infty(\nu, H)$.
Define

$$\alpha^n(s,w) \in [0,1]\times\mathbb{W} \mapsto \int_0^s \dot{\alpha}(r,w)1_{[0,S_n]}(r,w)dr$$

and

$$M^n(s) \quad = \quad \exp\left(\int_0^s \dot{\alpha^n}(r)d\beta(r) - \frac{1}{2}\int_0^s \left|\dot{\alpha^n}(r)\right|^2 dr\right)$$

$\alpha^n \in (I-\pi_\tau)L^\infty(\nu, H)$ and $M^n(1) = \mathbb{E}_\nu\left[M(1)\,|\mathcal{F}_{S_n}\right]$ so $(M^n(1))_{n\in\mathbb{N}}$ is a closed martingale since M is one, hence it converges ν-a.s. to $M(1)$ and it is uniformly integrable. Jensen inequality gives

$$0 \leq |M^n(1)|^p \leq \mathbb{E}_\nu\left[M(1)\,|\mathcal{F}_{S_n}\right]^p \leq \mathbb{E}_\nu\left[M(1)^p\,|\mathcal{F}_{S_n}\right]$$

So $(|M^n(1)|^r)$ is uniformly integrable and $(M^n(1))$ converges to $M(1)$ in $L^p(\nu)$. Consequently, there exists $n \in \mathbb{N}$ such that

$$|M^n(1) - M(1)|_{L^p(\nu)} \quad \leq \quad \epsilon$$

Step 4 : we approximate α^n with an element of $\mathcal{D}_\tau$
Define

$$\xi^{n,m} : (s,w) \in [0,1]\times\mathbb{W} \mapsto \int_0^s \max\left(\min\left(\dot{\alpha}^n(r,w), m\right), -m\right) dr$$

and

$$M^{n,m}(s) = \exp\left(\int_0^s \dot{\xi^{n,m}}(r)d\beta(s) - \frac{1}{2}\int_0^s \left|\dot{\xi^{n,m}}(r)\right|^2 dr\right)$$

$\xi^{m,n} \in \mathcal{D}_\tau$ and $(M^{n,m}(1))$ and converges to $M^n(1)$ in probability. To prove that $((M^{n,m}(1)^p)$ is uniformly integrable, it is sufficient to prove that $(M^{n,m}(1))$ is bounded in every $L^q(\nu)$ with $q > 1$. Set $q > 1$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_\nu\left[|M_1^{n,m}|^q\right] &= \mathbb{E}_\nu\left[\exp\left(q\int_0^1 \dot{\xi^{n,m}}(s)d\beta(s) - \frac{q}{2}\int_0^1 \left|\dot{\xi^{n,m}}(s)\right|^2 ds\right)\right] \\
&= \mathbb{E}_\nu\left[\exp\left(q\int_0^1 \dot{\xi^{n,m}}(s)d\beta(s) - \frac{q^2}{2}\int_0^1 \left|\dot{\xi^{n,m}}(s)\right|^2 ds\right)\exp\left(\frac{q^2-q}{2}\int_0^1 \left|\dot{\xi^{n,m}}(s)\right|^2 ds\right)\right] \\
&\leq \mathbb{E}_\nu\left[\exp\left(\int_0^1 q\dot{\xi^{n,m}}(s)d\beta(s) - \frac{1}{2}\int_0^1 \left|p\dot{\xi^{n,m}}(s)\right|^2 ds\right)\exp\left(\frac{q^2-q}{2}n\right)\right] \\
&\leq \exp\left(\frac{q^2-q}{2}n\right)
\end{aligned}$$

so $(M^{n,m}(1), m \in \mathbb{N})$ converges to M_1^n in $L^p(\nu)$ and there exists some $m > 0$ such that

$$|M^{n,m}(1) - M^n(1)|_{L^p(\nu)} \quad \leq \quad \epsilon$$

Step 5 : We approximate $\xi^{n,m}$ with a retarded shift γ^η, so that W^{γ^η} is ν-a.s. invertible.
For a given $\eta > 0$, set

$$\gamma^\eta(s,w) \in [0,1]\times W \mapsto \int_0^s \dot{\xi^{n,m}}(r-\eta)1_{r\geq\eta}ds$$

and

$$N^\eta(s) \quad = \quad \exp\left(\int_0^s \dot{\gamma^\eta}(r)d\beta(r) - \frac{1}{2}\int_0^s \left|\dot{\gamma^\eta}(r)\right|^2 dr\right)$$

Clearly $\gamma^\eta \in \mathcal{D}_\tau$ and $\gamma^\eta \to \xi^{n,m}$ in $L^2(\nu, H)$ when $\eta \to 0$, which ensures that $(N^\eta(1), \eta > 0)$ converges to $M^{n,m}(1)$ in probability.
As in step 4, $(N^\eta(1), \eta > 0)$ is bounded in every $L^q(\nu)$ and so $(N^\eta(1)^p, \eta > 0)$ is uniformly integrable and $(N^\eta(1), \eta > 0)$ converges to $M^{n,m}(1)$ in $L^p(\nu)$. There exists $\eta > 0$ such that

$$|N^\eta(1) - M^{n,m}(1)|_{L^p(\nu)} \quad \leq \quad \epsilon$$

Using triangular inequality, we have

$$\begin{aligned}
\left|\frac{d\theta}{d\nu} - N^\eta(1)\right|_{L^p(\nu)} \quad &\leq \quad \left|\frac{d\theta}{d\nu} - L(T_{n_0})\right|_{L^p(\nu)} + \left|L(T_{n_0}) - \frac{L(T_{n_0}) + a}{1+a}\right|_{L^p(\nu)} \\
&\quad + \left|\frac{L_(T_{n_0}) + a}{1+a} - M^n(1)\right|_{L^p(\nu)} \\
&\quad + |M^n(1) - M^{n,m}(1)|_{L^p(\nu)} \\
&\quad + |M^{n,m}(1) - N^\eta(1)|_{L^p(\nu)} \\
&\leq \quad 5\epsilon
\end{aligned}$$

Step 6 : We prove that $W^{-\gamma^\eta}$ is ν-a.s. left-invertible and is the solution to our problem.
Set $A \subset \mathbb{W}$ such that $\nu(A) = 1$ and for every $w \in A$, $\beta \circ W^{-\gamma^\eta}(w) = \beta(w) - \gamma^\eta(w)$ and set $w_1, w_2 \in A$ such that $W^{-\gamma^\eta}(w_1) = W^{-\gamma^\eta}(w_2)$. We have

$$\begin{aligned}
\beta \circ W^{-\gamma^\eta}(w_1) \quad &= \quad \beta \circ W^{-\gamma^\eta}(w_2) \\
\beta(w_1) - \int_0^{\cdot} \dot{\gamma^\eta}(s, w_1) ds \quad &= \quad \beta(w_2) - \int_0^{\cdot} \dot{\gamma^\eta}(s, w_2) ds
\end{aligned}$$

For any $s \in [0, \eta]$, $\beta(s, w_1) = \beta(s, w_2)$, γ^η being adapted to filtration $(\mathcal{F}^\beta_{s-\eta})$, it implies that for $s \in [0, 2\eta]$

$$\int_0^s \dot{\gamma^\eta}(r, w_1) ds = \int_0^s \dot{\gamma^\eta}(r, w_2) ds$$

and

$$\beta(s, w_1) = \beta(s, w_2)$$

An easy iteration shows that $\beta(w_1) = \beta(w_2)$.

Since β and W have the same filtrations and β is μ-a.s. path-continuous, we can write $W(t) = \phi_t(\beta(s), s \in [0, t] \cap \mathbb{Q})$ ν-a.s. for every $t \in [0, 1]$, with ϕ_t a measurable function from $\mathbb{R}^{\mathbb{Q}}$ to $\mathbb{R}$, see [16]. Consequently, we can write $(W(t), t \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}) = \phi(\beta(t), t \in [0, 1] \cap \mathbb{Q})$ ν-a.s., with ϕ a measurable function from $\mathbb{R}^{\mathbb{Q}}$ to $\mathbb{R}^{\mathbb{Q}}$. Denote

$$A' = A \cap \{w \in \mathbb{W}, (W(t, w), t \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}) = \phi(\beta(t, w), t \in [0, 1] \cap \mathbb{Q})\}$$

$\nu(A') = 1$. Set $w_1, w_2 \in A'$ such that $W^{-\gamma^\eta}(w_1) = W^{-\gamma^\eta}(w_2)$. We have $\beta(w_1) = \beta(w_2)$ so

$$\begin{aligned}
(W(t, w_1), t \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}) \quad &= \quad (W(t, w_2), t \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}) \\
(w_1(t), t \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}) \quad &= \quad (w_2(t), t \in [0, 1] \cap \mathbb{Q})
\end{aligned}$$

w_1 and w_2 are continuous and coincide on $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$ so they are equal.

$W^{-\gamma^\eta}$ is ν-a.s. injective and so ν-a.s. left-invertible, its inverse is of the form W^{v^η}, with $v^\eta \in \mathcal{D}_\tau$ and we have

$$\frac{dW^{v^\eta}\nu}{d\nu} = L_1^{\eta,n}$$

So $W^{v^\eta}\nu \sim \nu$ and

$$W^{v^\eta} \circ W^{-\gamma^\eta} = W^{-\gamma^\eta} \circ W^{v^\eta} \quad \nu - a.s.$$

□

Corollary 6.5.1 *If $\theta \sim \nu$ is such that there exists $q, p > 1$ such that $p^{-1} + q^{-1} = 1$ and*

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{d\nu} &\in L^p(\nu) \\ \log \frac{d\theta}{d\nu} &\in L^q(\nu) \end{aligned}$$

and ν-a.s.

$$\mathbb{E}_\nu \left[\frac{d\theta}{d\nu} \middle| \mathcal{F}_\tau \right] = 1$$

there exists $(u_n) \in \left(\mathcal{D}_\tau^i\right)^{\mathbb{N}}$ such that

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_\nu \left[\frac{dW^{u_n}\nu}{d\nu} \log \frac{dW^{u_n}\nu}{d\nu} \middle| \mathcal{F}_\tau \right] &\to \mathbb{E}_\nu \left[\frac{d\theta}{d\nu} \log \frac{d\theta}{d\nu} \middle| \mathcal{F}_\tau \right] \quad \nu - a.s. \\ \mathbb{E}_\nu \left[\frac{dW^{u_n}\nu}{d\nu} \log \frac{d\theta}{d\nu} \middle| \mathcal{F}_\tau \right] &\to \mathbb{E}_\nu \left[\frac{d\theta}{d\nu} \log \frac{d\theta}{d\nu} \middle| \mathcal{F}_\tau \right] \quad \nu - a.s. \end{aligned}$$

Proof: From theorem 6.5.1, there exists $(u_n) \in \left(\mathcal{D}_\tau^i\right)^{\mathbb{N}}$ such that for every n,

$$\frac{dW^{u_n}\nu}{d\nu} \to \frac{d\theta}{d\nu} \quad in\ L^r(\nu)$$

This implies

$$\frac{dW^{u_n}\nu}{d\nu} \log \frac{dW^{u_n}\nu}{d\nu} \to \frac{d\theta}{d\nu} \log \frac{d\theta}{d\nu} \quad in\ L^1(\nu)$$

Holder inequality gives

$$\begin{aligned} \left| \frac{dW^{u_n}\nu}{d\nu} \log \frac{d\theta}{d\nu} - \frac{d\theta}{d\nu} \log \frac{d\theta}{d\nu} \right|_{L^1(\nu)} &\leq \left| \frac{dW^{u_n}\nu}{d\nu} - \frac{d\theta}{d\nu} \right|_{L^p(\nu)} \left| \log \frac{d\theta}{d\nu} \right|_{L^q(\nu)} \\ &\to 0 \end{aligned}$$

The corresponding conditional expectations converges similarly in $L^1(\nu)$ since $\mathbb{E}_\nu[.|\mathcal{F}_\tau]$ is a bounded operator with norm 1 in $L^1(\nu)$. Finally we can extract a subsequence of (u_n) to get the two desired almost sure convergences. □

6.6 Variational problem

As stated in the beginning, we aim to provide a variational representation of $-\log \mathbb{E}_\nu\left[e^{-f}\middle|\mathcal{F}_\tau\right]$.

Definition 6.6.1 *We denote $\mathcal{P}_\tau$ the set of probability measures θ on $(\mathbb{W},\mathcal{F})$ such that*

$$\begin{aligned}\theta &\sim \nu\\ \mathbb{E}_\nu\left[\frac{d\theta}{d\nu}\middle|\mathcal{F}_\tau\right] &= 1\end{aligned}$$

Theorem 6.6.1 *Set $f:\mathbb{W}\to\mathbb{R}$ a measurable function verifying*

$$\mathbb{E}_\nu\left[|f|(1+e^{-f})\right]<\infty$$

Then

$$-\log \mathbb{E}_\nu\left[e^{-f}\middle|\mathcal{F}_\tau\right]=\inf_{\theta\in\mathcal{P}_\tau}\mathbb{E}_\theta\left[f+\log\frac{d\theta}{d\nu}\middle|\mathcal{F}_\tau\right]\quad \nu-a.s.$$

and the unique infimum is attained at the measure

$$d\theta_0=\frac{e^{-f}}{\mathbb{E}_\nu\left[e^{-f}\middle|\mathcal{F}_\tau\right]}d\nu$$

Proof: Set $\theta\in\mathcal{P}_\tau$, denote

$$L(s)=\left.\frac{d\theta}{d\nu}\right|_{\mathcal{F}_s}$$

$L(\tau)=1$ ν-a.s. since $\theta\in\mathcal{P}_\tau$ so using the Bayes formula:

$$\begin{aligned}\log\mathbb{E}_\nu\left[e^{-f}|\mathcal{F}_\tau\right] &= \log\mathbb{E}_\nu\left[e^{-f}\frac{L(1)}{L(1)}\middle|\mathcal{F}_\tau\right]\\ &= \log\mathbb{E}_\theta\left[e^{-f}\frac{L(\tau)}{L(1)}\middle|\mathcal{F}_\tau\right]\\ &= \log\mathbb{E}_\theta\left[\frac{e^{-f}}{L(1)}\middle|\mathcal{F}_\tau\right]\end{aligned}$$

Jensen inequality gives

$$\begin{aligned}-\log\mathbb{E}_\theta\left[\frac{e^{-f}}{L(1)}\middle|\mathcal{F}_\tau\right] &\leq \mathbb{E}_\theta\left[-\log\frac{e^{-f}}{L(1)}\middle|\mathcal{F}_\tau\right]\\ &\leq \mathbb{E}_\theta\left[f|\mathcal{F}_\tau\right]+\mathbb{E}_\theta\left[\log L(1)|\mathcal{F}_\tau\right]\\ &\leq \mathbb{E}_\theta\left[f|\mathcal{F}_\tau\right]+\mathbb{E}_\theta\left[\log L(1)|\mathcal{F}_\tau\right]\end{aligned}$$

A straightforward calculation gives

$$\mathbb{E}_{\theta_0}\left[f+\log\frac{d\theta_0}{d\nu}\middle|\mathcal{F}_\tau\right]=-\log\mathbb{E}_\nu\left[e^{-f}|\mathcal{F}_\tau\right]$$

and the reverse inequality. □

Proposition 6.6.1 *Set $f:\mathbb{W}\to\mathbb{R}$ a measurable function verifying $\mathbb{E}_\nu\left[|f|(1+e^{-f})\right]<\infty$, then*

$$-\log\mathbb{E}_\nu\left[e^{-f}\middle|\mathcal{F}_\tau\right]\leq\inf_{u\in\widetilde{\mathcal{D}}_\tau\cap L^2_a(\nu,H)}\mathbb{E}_\nu\left[f\circ W^u+\frac{1}{2}|u|_H^2\middle|\mathcal{F}_\tau\right]\quad \nu-a.s.$$

Proof: Denote $\mathcal{P}'_\tau$ the set of the elements S of $\mathcal{P}_\tau$ such that there exists some $u \in \widetilde{\mathcal{D}}_\tau$ which verifies $S = W^u\nu$.
Set $\theta \in \mathcal{P}'_\tau$ and denote $L = \frac{d\theta}{d\nu}$. Since $\mathbb{E}_\nu\left[L|\mathcal{F}_\tau\right] = 1$, we have using Bayes formula

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_\theta\left[f|\mathcal{F}_\tau\right] &= \mathbb{E}_\nu\left[fL|\mathcal{F}_\tau\right] \\
&= \mathbb{E}_\nu\left[f\circ W^u|\,\mathcal{F}_\tau\right] \\
\mathbb{E}_\theta\left[\log L|\mathcal{F}_\tau\right] &= \mathbb{E}_\nu\left[L\log L|\mathcal{F}_\tau\right] \\
&\leq \frac{1}{2}\mathbb{E}_\nu\left[|u|_H^2\right|\mathcal{F}_\tau\left.\right]
\end{aligned}$$

So since $\mathcal{P}'_\tau \subset \mathcal{P}_\tau$, we have

$$\begin{aligned}
-\log\mathbb{E}_\nu\left[e^{-f}\middle|\,\mathcal{F}_\tau\right] &= \inf_{\theta\in\mathcal{P}_\tau}\left(\mathbb{E}_\theta[f|\mathcal{F}_\tau] + \mathbb{E}_\theta\left[\log\frac{d\theta}{d\nu}\middle|\,\mathcal{F}_\tau\right]\right) \\
&\leq \inf_{\theta\in\mathcal{P}'_\tau}\left(\mathbb{E}_\gamma[f|\mathcal{F}_\tau] + \mathbb{E}_\theta\left[\log\frac{d\theta}{d\nu}\middle|\,\mathcal{F}_\tau\right]\right) \\
&\leq \inf_{u\in\widetilde{\mathcal{D}}_\tau\cap L_a^2(\nu,H)} \mathbb{E}_\nu\left[f\circ W^u + \frac{1}{2}|u|_H^2\middle|\,\mathcal{F}_\tau\right]
\end{aligned}$$

□

Here is the main result.

Theorem 6.6.2 *Set $f : \mathbb{W} \to \mathbb{R}$ measurable and $p, q > 1$ such that $p^{-1} + q^{-1} = 1$ and $f \in L^p(\nu)$, $e^{-f} \in L^q(\nu)$, then we have*

$$-\log\mathbb{E}_\nu\left[e^{-f}\middle|\,\mathcal{F}_\tau\right] = \inf_{u\in\mathcal{D}_\tau^i}\mathbb{E}_\nu\left[f\circ W^u + \frac{1}{2}|u|_H^2\middle|\,\mathcal{F}_\tau\right] \quad \nu - a.s.$$

Proof: The inequality

$$-\log\mathbb{E}_\nu\left[e^{-f}\middle|\,\mathcal{F}_\tau\right] \leq \inf_{u\in\mathcal{D}_\tau^i}\mathbb{E}_\nu\left[f\circ W^u + \frac{1}{2}|u|_H^2\middle|\,\mathcal{F}_\tau\right]$$

is an easy consequence of proposition 6.6.1. Let θ_0 be the measure on W defined by

$$d\theta_0 = \frac{e^{-f}}{\mathbb{E}_\nu\left[e^{-f}\middle|\,\mathcal{F}_\tau\right]}d\nu$$

According to corollary 6.5.1, there exists $(u_n) \in \left(\mathcal{D}_\tau^i\right)^{\mathbb{N}}$ such that ν-a.s.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_\nu\left[\frac{dW^{u_n}\nu}{d\nu}\log\frac{dW^{u_n}\nu}{d\nu}\middle|\,\mathcal{F}_\tau\right] &\to \mathbb{E}_\nu\left[\frac{d\theta_0}{d\nu}\log\frac{d\theta_0}{d\nu}\middle|\,\mathcal{F}_\tau\right] \\
\mathbb{E}_\nu\left[\frac{dW^{u_n}\nu}{d\nu}\log\frac{d\theta_0}{d\nu}\middle|\,\mathcal{F}_\tau\right] &\to \mathbb{E}_\nu\left[\frac{d\theta_0}{d\nu}\log\frac{d\theta_0}{d\nu}\middle|\,\mathcal{F}_\tau\right]
\end{aligned}$$

Denote $L_n = \frac{dW^{u_n}\nu}{d\nu}$, since W^{u_n} is ν-a.s. invertible, we have

$$\mathbb{E}_\nu\left[f\circ W^{u_n} + \frac{1}{2}|u_n|_H^2\middle|\,\mathcal{F}_\tau\right] = \mathbb{E}_\nu\left[L_n|\mathcal{F}_\tau\right] + \mathbb{E}_\nu\left[L_n\log L_n|\mathcal{F}_\tau\right]$$

When n goes to infinity, we have ν-a.s.

$$\mathbb{E}_\nu\left[L_n \log L_n|\mathcal{F}_\tau\right] \to \mathbb{E}_\nu\left[\frac{d\theta_0}{d\nu}\log\frac{d\theta_0}{d\nu}\middle|\mathcal{F}_\tau\right]$$

and since $f = -\log\frac{d\theta_0}{d\nu} - \log\mathbb{E}_\nu\left[e^{-f}\middle|\mathcal{F}_\tau\right]$, ν-a.s.

$$\mathbb{E}_\nu\left[fL_n|\mathcal{F}_\tau\right] \quad\to\quad \mathbb{E}_\nu\left[f\frac{d\theta_0}{d\nu}\middle|\mathcal{F}_\tau\right]$$

So finally, when n goes to infinity, ν-a.s.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_\nu\left[f\circ W^{u_n} + \frac{1}{2}|u_n|_H^2\middle|\mathcal{F}_\tau\right] &\to \mathbb{E}_{\theta_0}[f] + \mathbb{E}_\nu\left[\frac{d\theta_0}{d\nu}\log\frac{d\theta_0}{d\nu}\middle|\mathcal{F}_\tau\right]\\ &= -\log\mathbb{E}_\nu\left[e^{-f}\middle|\mathcal{F}_\tau\right]\end{aligned}$$

which conclude the proof. □

Theorem 6.6.3 *Set $f:\mathbb{W}\to\mathbb{R}$ a measurable function verifying $\mathbb{E}_\nu\left[|f|(1+e^{-f})\right]<\infty$, then if there exists some $u\in\widetilde{\mathcal{D}}_\tau\cap L_a^2(\nu,H)$ such that W^u is ν-a.s. left-invertible and $\frac{dW^u\nu}{d\nu} = \frac{e^{-f}}{\mathbb{E}_\nu[e^{-f}|\mathcal{F}_\tau]}$, then we have*

$$-\log\mathbb{E}_\nu\left[e^{-f}\middle|\mathcal{F}_\tau\right] = \inf_{u\in\widetilde{\mathcal{D}}_\tau\cap L_a^2(\nu,H)}\mathbb{E}_\nu\left[f\circ W^u + \frac{1}{2}|u|_H^2\middle|\mathcal{F}_\tau\right] \quad \nu-a.s.$$

Proof: Since W^u is ν-a.s. left invertible and that $\frac{dW^u\nu}{d\nu} = \frac{e^{-f}}{\mathbb{E}_\nu[e^{-f}|\mathcal{F}_\tau]}$. We have

$$\frac{1}{2}\mathbb{E}_\nu\left[|u|_H^2\middle|\mathcal{F}_\tau\right] = \mathbb{E}_\nu\left[\frac{e^{-f}}{\mathbb{E}_\nu\left[e^{-f}|\mathcal{F}_\tau\right]}\log\left(\frac{e^{-f}}{\mathbb{E}_\nu\left[e^{-f}|\mathcal{F}_\tau\right]}\right)\middle|\mathcal{F}_\tau\right]$$

and

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_\nu\left[f\circ W^u + \frac{1}{2}|u|_H^2\middle|\mathcal{F}_\tau\right] &= \mathbb{E}_\nu\left[\frac{e^{-f}}{\mathbb{E}_\nu\left[e^{-f}|\mathcal{F}_\tau\right]}f + \frac{e^{-f}}{\mathbb{E}_\nu\left[e^{-f}|\mathcal{F}_\tau\right]}\log\left(\frac{e^{-f}}{\mathbb{E}_\nu\left[e^{-f}|\mathcal{F}_\tau\right]}\right)\middle|\mathcal{F}_\tau\right]\\ &= -\log\mathbb{E}_\nu\left[e^{-f}\middle|\mathcal{F}_\tau\right]\end{aligned}$$

and we conclude the proof with proposition 6.6.1. □

Theorem 6.6.4 *Set $f:\mathbb{W}\to\mathbb{R}$ a measurable function such that*

$$-\log\mathbb{E}_\nu\left[e^{-f}\middle|\mathcal{F}_\tau\right] = \inf_{u\in\widetilde{\mathcal{D}}_\tau\cap L_a^2(\nu,H)}\mathbb{E}_\nu\left[f\circ W^u + \frac{1}{2}|u|_H^2\middle|\mathcal{F}_\tau\right] \quad \nu-a.s.$$

Denote this infimum J_*. It is attained at $u\in\widetilde{\mathcal{D}}_\tau\cap L_a^2(\nu,H)$ if and only if W^u is ν-a.s. left-invertible and $\frac{dW^u\nu}{d\nu} = \frac{e^{-f}}{\mathbb{E}_\nu[e^{-f}|\mathcal{F}_\tau]}$.

Proof: Denote $L = \frac{dW^u\nu}{d\nu}$. The direct implication is given by last theorem. Conversely, if W^u is not ν-a.s. left-invertible, $\mathbb{E}_\nu\left[L\log L|\mathcal{F}_\tau\right] < \frac{1}{2}\mathbb{E}_\nu\left[|u|_H^2\middle|\mathcal{F}_\tau\right]$ and

$$\begin{aligned}-\log\mathbb{E}_\nu\left[e^{-f}\middle|\mathcal{F}_\tau\right] &\leq \inf_{\alpha\in\widetilde{\mathcal{D}}_\tau\cap L_a^2(\nu,H)}\mathbb{E}_\nu\left[f\circ W^\alpha + \frac{dW^\alpha\nu}{d\nu}\log\frac{dW^\alpha\nu}{d\nu}\middle|\mathcal{F}_\tau\right]\\ &\leq \mathbb{E}_\nu\left[f\circ W^u + L\log L|\mathcal{F}_\tau\right]\\ &< \mathbb{E}_\nu\left[f\circ W^u + \frac{1}{2}|u|_H^2\middle|\mathcal{F}_\tau\right]\end{aligned}$$

which is a contradiction.
We get $L = \frac{e^{-f}}{\mathbb{E}_\nu[e^{-f}|\mathcal{F}_\tau]}$ by uniqueness of the minimizing measure of $\inf_{\theta\in\mathcal{P}_\tau} \mathbb{E}_\theta\left[f + \log\frac{d\theta}{d\nu}\middle|\mathcal{F}_\tau\right]$. $\square$

6.7 Prékopa-Leindler theorem for conditional expectations

Definition 6.7.1 *We denote*

$$H_b = \left\{h \in H, \dot{h} \text{ is } dt - a.s. \text{ bounded}\right\}$$

Remark: Observe that $H_b \subset \mathcal{D}$ and that if $u \in \mathcal{D}$, $u(w) \in H_b$ ν-a.s.

Theorem 6.7.1 *Assume that for any $u \in \mathcal{D}$,*

$$W^u(w) = W^{u(w)}(w) \ \nu - a.s.$$

Set $t \in [0,1]$. Set $a, b, c : \mathbb{W} \to \mathbb{R}$ positive and measurable such that for every $h, k \in H$ and $s \in [0,1]$ we have ν-a.s.

$$a\circ W^{sh+(1-s)k}\exp\left(-\frac{1}{2}|sh+(1-s)k|_H^2\right) \geq \left(b\circ W^h\exp\left(-\frac{1}{2}|h|_H^2\right)\right)^s\left(c\circ W^k\exp\left(-\frac{1}{2}|k|_H^2\right)\right)^{1-s}$$

then for any density d such that $h \in H_b \mapsto -\log d\circ W^h$ is ν-a.s. concave and $\mathbb{E}_\nu[d|\mathcal{F}_\tau] = 1$, if θ denotes the measure on W given by $\frac{dS}{d\nu} = d$, we have in $\bar{\mathbb{R}}$:

$$\mathbb{E}_\theta[a\,|\mathcal{F}_\tau] \geq (\mathbb{E}_\theta[b\,|\mathcal{F}_\tau])^s\,(\mathbb{E}_\theta[c\,|\mathcal{F}_\tau])^{1-s}$$

Proof: First observe that eventually replacing a,b,c with da, db, dc and using Bayes formula we only need to prove the case $d = 1$ i.e. $\theta = \nu$

With the convention $\log(\infty) = \infty$ and $\log(0) = -\infty$, we denote

$$\tilde{a} = -\log a, \tilde{b} = -\log b, \tilde{c} = -\log c$$

We begin with the case where there exists $m, M > 0$ such that we have ν-a.s.

$$m \leq \tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c} \leq M$$

Set $s \in [0,1]$ for $h, k \in H$, we have

$$\begin{aligned}&a\circ W^{sh+(1-s)k}\exp\left(-\frac{1}{2}|sh+(1-s)k|_H^2\right)\\ &\geq \left(b\circ W^h\exp\left(-\frac{1}{2}|h|_H^2\right)\right)^s\left(c\circ W^k\exp\left(-\frac{1}{2}|k|_H^2\right)\right)^{1-s}\end{aligned}$$

So for $u_1, u_2 \in \mathcal{D}^i_\tau$

$$\begin{aligned}&a\circ W^{su_1+(1-s)u_2}\exp\left(-\frac{1}{2}|su_1+(1-s)u_2|_H^2\right)\\ &\geq \left(b\circ W^h\exp\left(-\frac{1}{2}|h|_H^2\right)\right)^s\left(c\circ W^k\exp\left(-\frac{1}{2}|k|_H^2\right)\right)^{1-s}\end{aligned}$$

hence applying the logarithm function, changing the sign and taking the conditional expectation relative to $\mathcal{F}_\tau$ we obtain

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}_\nu\left[\tilde{a}\circ W^{su_1+(1-s)u_2}+\frac{1}{2}\left|su_1+(1-s)u_2\right|_H^2\middle|\mathcal{F}_\tau\right]\\&\leq s\mathbb{E}_\nu\left[\tilde{b}\circ W^{u_1}+\frac{1}{2}\left|u_1\right|_H^2\middle|\mathcal{F}_\tau\right]+(1-s)\mathbb{E}_\nu\left[\tilde{c}\circ W^{u_2}+\frac{1}{2}\left|u_2\right|_H^2\middle|\mathcal{F}_\tau\right]\end{aligned}$$

So

$$\begin{aligned}\inf_{u\in\mathcal{D}^i_\tau}\quad&\mathbb{E}_\nu\left[\tilde{a}\circ W^{u}+\frac{1}{2}|u|_H^2\middle|\mathcal{F}_\tau\right]\\&\leq s\mathbb{E}_\nu\left[\tilde{b}\circ W^{u_1}+\frac{1}{2}\left|u_1\right|_H^2\middle|\mathcal{F}_\tau\right]+(1-s)\mathbb{E}_\nu\left[\tilde{c}\circ W^{u_2}+\frac{1}{2}\left|u_2\right|_H^2\middle|\mathcal{F}_\tau\right]\end{aligned}$$

According to theorem 6.6.2 we have

$$-\log\mathbb{E}_\nu\left[e^{-\tilde{a}}\middle|\mathcal{F}_\tau\right]\quad\leq\quad s\mathbb{E}_\nu\left[\tilde{b}\circ W^{u_1}+\frac{1}{2}\left|u_1\right|_H^2\middle|\mathcal{F}_\tau\right]+(1-s)\mathbb{E}_\nu\left[\tilde{c}\circ W^{u_2}+\frac{1}{2}\left|u_2\right|_H^2\middle|\mathcal{F}_\tau\right]$$

which implies

$$\begin{aligned}-\log\mathbb{E}_\nu\left[e^{-\tilde{a}}\middle|\mathcal{F}_\tau\right]\quad&\leq\quad s\mathbb{E}_\nu\left[\tilde{b}\circ W^{u_1}+\frac{1}{2}\left|u_1\right|_H^2\middle|\mathcal{F}_\tau\right]\\&\qquad+(1-s)\inf_{v\in\mathcal{D}^i_\tau}\mathbb{E}_\nu\left[\tilde{c}\circ W^{v}+\frac{1}{2}\left|v\right|_H^2\middle|\mathcal{F}_\tau\right]\\&=\quad s\mathbb{E}_\nu\left[\tilde{b}\circ W^{u_1}+\frac{1}{2}\left|u_1\right|_H^2\middle|\mathcal{F}_\tau\right]-(1-s)\log\mathbb{E}_\nu\left[e^{-\tilde{c}}\middle|\mathcal{F}_\tau\right]\end{aligned}$$

which implies once again

$$\begin{aligned}-\log\mathbb{E}_\nu\left[e^{-\tilde{a}}\middle|\mathcal{F}_\tau\right]\quad&\leq\quad s\inf_{v\in\mathcal{D}^i_\tau}\mathbb{E}_\nu\left[\tilde{b}\circ W^{v}+\frac{1}{2}\left|v\right|_H^2\middle|\mathcal{F}_\tau\right]\\&\qquad-(1-s)\log\mathbb{E}_\nu\left[e^{-\tilde{c}}\middle|\mathcal{F}_\tau\right]\\&=\quad -s\log\mathbb{E}_\nu\left[e^{-\tilde{b}}\middle|\mathcal{F}_\tau\right]-(1-s)\log\mathbb{E}_\nu\left[e^{-\tilde{c}}\middle|\mathcal{F}_\tau\right]\end{aligned}$$

taking the opposite and applying the exponential, we get

$$\mathbb{E}_\nu\left[e^{-\tilde{a}}\middle|\mathcal{F}_\tau\right]\geq\left(\mathbb{E}_\nu\left[e^{-\tilde{b}}\middle|\mathcal{F}_\tau\right]\right)^s\left(\mathbb{E}_\nu\left[e^{-\tilde{c}}\middle|\mathcal{F}_\tau\right]\right)^{1-s}$$

For the general case, denote for $n\in\mathbb{N}$ and $m\in\mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned}&\tilde{a}_n=\tilde{a}\wedge n,\tilde{b}_n=\tilde{b}\wedge n,\tilde{c}_n=\tilde{c}\wedge n\\&\tilde{a}_{nm}=\tilde{a}_n+\frac{1}{m},\tilde{b}_{nm}=\tilde{b}_n+\frac{1}{m},\tilde{c}_{nm}=\tilde{c}_n+\frac{1}{m}\end{aligned}$$

For every $h,k\in H$, we have ν-a.s.:

$$\tilde{a}_{nm}\circ W^{sh+(1-s)k}+\frac{1}{2}\left|sh+(1-s)k\right|_H^2\leq s\tilde{b}_{nm}\circ W^h+\frac{1}{2}\left|h\right|_H^2+(1-s)\tilde{c}_{nm}\circ W^k+\frac{1}{2}\left|k\right|_H^2$$

so the bounded case we treated above ensures that

$$\mathbb{E}_\nu\left[e^{-\tilde{a}_{nm}}\middle|\mathcal{F}_\tau\right]\geq\left(\mathbb{E}_\nu\left[e^{-\tilde{b}_{nm}}\middle|\mathcal{F}_\tau\right]\right)^s\left(\mathbb{E}_\nu\left[e^{-\tilde{c}_{nm}}\middle|\mathcal{F}_\tau\right]\right)^{1-s}$$

The monotone limit theorem enables us to take the limit with relation to m and then to take it again with respect to n to get the result. □

6.8 Examples

In this section we discuss several examples that fit into the framework we elaborated. Each time, we prove that the conditions of section 6.2 and definition 6.2.1 are satisfied, which ensure that every result from section 6.2 to 6.7 apply. We also discuss weather theorem 6.7.1 applies or not. See [10] for the omitted proofs concerning the diffusion, [11] for the omitted proofs concerning the other examples.

6.8.1 Diffusion

Set $m \leq d \in \mathbb{N}^*$ such that $m + d = n$, $c \in \mathbb{R}$, $\sigma : \mathbb{R}^m \to \mathcal{M}_{m,d}(\mathbb{R})$ and $b : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ bounded and lipschitz functions. σ_i will denote the i-th column of σ. Notice that every matrix will be identified with its canonical linear operator. Set $(\Omega, \theta, (\mathcal{G}_t))$ a probability space, V a θ-Brownian motion on Ω with values in $\mathbb{R}^d$. Set Y a $\mathbb{R}^m$-valued strong solution of the stochastic differential equation:

$$Y(t) = c + \int_0^t \sigma(Y(s))dV(s) + \int_0^t b(Y(s))ds$$

on $(\Omega, \theta, (\mathcal{G}_t), B)$. The hypothesis on σ and b ensure the existence and uniqueness of Y if we impose its paths to be continuous.
We denote μ the Wiener measure on $C([0,1], \mathbb{R}^d)$ and μ^X the measure on $C([0,1], \mathbb{R}^m)$ the image measure of Y.
We define the processes X and B on $\mathbb{W}$ by:

$$\begin{aligned} X(t) &: (w, w') \in \mathbb{W} \mapsto w(t) \in \mathbb{R}^m \\ B(t) &: (w, w') \in \mathbb{W} \mapsto w'(t) \in \mathbb{R}^d \end{aligned}$$

Proposition 6.8.1 *Under $\mu^X \times \mu$, the law of X is μ^X, B is a Brownian motion and they are independent. There exists θ, η such that if we define $\beta_{\mathbb{X}}$ as*

$$\beta_{\mathbb{X}} = \int_0^{\cdot} \theta(X(s))dM(s) + \int_0^{\cdot} \eta(X(s))dB(s)$$

$\beta_{\mathbb{X}}$ is a $\mu^X \times \mu$-Brownian motion and $\mu^X \times \mu$-a.s.

$$X = c + \int_0^{\cdot} \sigma(X(s))d\beta_{\mathbb{X}}(s) + \int_0^{\cdot} b(X(s))ds$$

This construction of $\beta_{\mathbb{X}}$ is taken from [18].

Definition 6.8.1 *We denote*

$$\mathbb{X} = (X, \beta_{\mathbb{X}})$$

and $\mu^{\mathbb{X}}$ its image measure.
X is a $\mu^{\mathbb{X}}$ path-continuous strong solution of the stochastic differential equation

$$X = \quad c + \int_0^{\cdot} \sigma(X(s))d\beta_{\mathbb{X}}(s) + \int_0^{\cdot} b(X(s))ds$$

For $u \in G_0(\mu^{\mathbb{X}}, \beta_X)$, set $\beta^u_{\mathbb{X}} = \beta + u$ and X^u the $\mu^{\mathbb{X}}$-a.s. path-continuous strong solution of the stochastic differential equation

$$X^u = c + \int_0^{\cdot} \sigma(X^u(s))d\beta^u_{\mathbb{X}}(s) + \int_0^{\cdot} b(X^u(s))ds$$

Finally, we denote

$$\mathbb{X}^u \quad = \quad (X^u, \beta_{\mathbb{X}} + u)$$

Theorem 6.8.1 $\left(\mathbb{W}, \mu^{\mathbb{X}}, \beta_{\mathbb{X}}, (\mathbb{X}^u)_{u\in\mathcal{D}}\right)$ *verify the conditions of section 6.2.* $\left(\mathbb{W}, \mu_a, \beta_{\mathbb{X}}, (\mathbb{X}^u)_{u\in G_0(\mu^{\mathbb{X}},\beta_{\mathbb{X}})}\right)$ *verify the conditions of definition 6.2.1.*

Proof: (vii) of definition 6.2.1 is clear, see [10] for the remainder of the proof. □

Corollary 6.8.1 *It is clear that for every $u \in \mathcal{D}$, we clearly have $\mu^{\mathbb{X}}$-a.s.*

$$\mathbb{X}^u(w) = \mathbb{X}^{u(w)}(w)$$

so theorem 6.7.1 applies.

6.8.2 Brownian bridge

We still denote μ the Wiener measure on $\mathbb{W}$. Set $a \in \mathbb{R}^n$, we denote μ_a the measure on $\mathbb{W}$ such that for any bounded measurable function f we have

$$\mathbb{E}_{\mu_a}[f] = \mathbb{E}_{\mu}[f|W_1 = a]$$

μ_a can also be defined as follow : let $\mathcal{E}_a$ be the Dirac measure in a, $\mathcal{E}_a(W_1)$ is a positive Wiener distributions hence it defines a Radon measure ν_a on $\mathbb{W}$, then

$$\mu_a = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \nu_a$$

We recall the definition of a Brownian bridge:

Definition 6.8.2 *Set $(\Omega, \mathcal{G}, Q)$ a probability space. An a-Brownian bridge X under a probability Q is a path-continuous Gaussian process such that $\mathbb{E}_Q[X(t)] = at$ and $cov(X(s), X(t)) = ((s \wedge t) - st)\, I_d$*

Proposition 6.8.2 *W is an a-Brownian bridge under μ_a, and the process β_a defined as*

$$\beta_a(t) = W(t) - at + \int_0^t \frac{W(s) - as}{1-s} ds$$

is a Brownian motion under μ_a and the filtrations of β_a and W completed with respect to μ_a are equal. Moreover, we have

$$W(t) = at + (1-t)\int_0^t \frac{d\beta_a(s)}{1-s}$$

The following remark will be useful in next section.
Remark: For $a \in \mathbb{R}^n$ and $t \in [0,1]$, we have μ_a-a.s.

$$\beta_a(t) = W_t + \int_0^t \frac{W_s - a}{1-s} ds$$

Definition 6.8.3 *For $u \in G_0(\mu_a, \beta_a)$, we denote $\beta_a^u = \beta_a + u$.*

Proposition 6.8.3 *Set $u \in G_0(\mu_a, \beta_a)$, then there exists a unique μ_a-a.s. path continuous process W_a^u such that*

$$W_a^u(t) = \beta_a^u(t) + at - \int_0^t \frac{W_a^u(s)}{1-s} ds$$

Furthermore, we have

$$\begin{aligned} W_a^u(t) &= at + (1-t) \int_0^t \frac{d\beta_a^u(s)}{1-s} \\ &= W(t) + \int_0^t \left(\dot{u}(s) - \int_0^s \frac{\dot{u}(r)}{1-r} dr \right) ds \end{aligned}$$

Theorem 6.8.2 *$(\mathbb{W}, \mu_a, \beta_a, (W_a^u)_{u \in \mathcal{D}})$ verify the conditions of section 6.2. $\left(\mathbb{W}, \mu_a, \beta_a, (W_a^u)_{u \in G_0(\mu_a, \beta_a)}\right)$ verify the conditions of definition 6.2.1.*

Proof: (vii) of definition 6.2.1 is clear, see [11] for the remainder of the proof. □

Corollary 6.8.2 *It is clear that for every $u \in \mathcal{D}$, we clearly have μ_a-a.s.*

$$W_a^u(w) = W_a^{u(w)}(w)$$

so theorem 6.7.1 applies.

6.8.3 Loop measure

We keep the notations of last section. Denote

$$S = \{a \in \mathbb{R}^n, |a| = 1\}$$

and set $\alpha : S \to \mathbb{R}_+$ a locally lipschitz function such that $\{x, \alpha(x) \neq 0\}$ is of strictly positive measure for the Lebesgue measure on S and

$$\int_S \alpha(a) da = 1$$

We define the measure ν_l as follow: for any bounded measurable function f on W, we set

$$\mathbb{E}_{\nu_l}[f] = \int_S \alpha(a) \mathbb{E}_{\mu_a}[f] da$$

For more on loop measures, see Fang's work in [6].

Definition 6.8.4 *We denote*

$$\begin{aligned} h_a : (t,x) &\in [0,1) \times \mathbb{R}^n \mapsto \left(\frac{1}{\pi(1-t)}\right)^{\frac{n}{2}} \exp\left(\frac{-|x-a|^2}{2(1-t)}\right) \\ h : (t,x) &\in [0,1) \times \mathbb{R}^n \mapsto \int_S \alpha(a) h_a(t,x) da \end{aligned}$$

Proposition 6.8.4 *Set $a \in \mathbb{R}^n$ and $t \in [0,1)$, then*

$$\left.\frac{d\mu_a}{d\mu}\right|_{\mathcal{F}_t^W} = h_a(t, W_t)$$

Proposition 6.8.5 *Set $t \in [0,1)$, we have*

$$\left.\frac{d\nu}{d\mu}\right|_{\mathcal{F}_t^W} = h(t, W_t)$$

Proposition 6.8.6 *Define*

$$\beta_{lp}(t) = W(t) - \int_0^t \frac{h'(s, W(s))}{h(s, W(s))} ds$$

where h' designates the partial derivative of h with respect to x.
Then β_{lp} is a ν_l Brownian motion and the filtrations of W and β_{lp} completed with respect to ν_l are equal.

Definition 6.8.5 *For $u \in G_0(\nu_l, \beta_{lo})$, we denote $\beta_{lp}^u = \beta_{lp} + u$.*

Proposition 6.8.7 *Set $u \in G_0(\nu_l, \beta_{lo})$, then there exists a unique ν_l-a.s. path continuous process W_{lp}^u such that*

$$W_{lp}^u(t) = \beta_{lp}^u(t) + \int_0^t \frac{h'(s, W_{lo}^u(s))}{h(s, W_{lo}^u(s))} ds$$

Theorem 6.8.3 $\left(\mathbb{W}, \nu_l, \beta_{lp}, (W_{lp}^u)_{u \in \mathcal{D}}\right)$ *verify the conditions of section 6.2.* $\left(\mathbb{W}, \nu_l, \beta_{lo}, \left(W_{lp}^u\right)_{u \in G_0(\nu_l, \beta_{lo})}\right)$ *verify the conditions of definition 6.2.1.*

Proof: (vii) of definition 6.2.1 is clear, see [11] for the remainder of the proof. □

Corollary 6.8.3 *It is clear that for every $u \in \mathcal{D}$, we clearly have ν_l-a.s.*

$$W_{lo}^u(w) = W_{lo}^{u(w)}(w)$$

so theorem 6.7.1 applies.

6.8.4 Diffusing particles without collision

Set $\sigma, b, \delta, \gamma \in \mathbb{R}$ such that

$$\sigma^2 \leq 2\gamma$$

The proof of the following theorem can be found in [19] or [3].

Theorem 6.8.4 *Set $(\Omega, \theta, (\mathcal{G}_t))$ a filtered probability space, $(z_1(0), ..., z_n(0)) \in \mathbb{R}^n$ and $B = (B_1, ..., B_n)$ a $\mathbb{R}^n$-valued θ-Brownian motion. We consider the following stochastic differential system:*

$$\begin{aligned} Z_1(t) &= z_1(0) + \sigma B_1(t) + b\int_0^t Z_1(s)ds + ct + \gamma \sum_{j\in\{1,...,n\}\setminus\{1\}} \int_0^t \frac{ds}{Z_1(s) - Z_j(s)} \\ &\vdots \\ Z_n(t) &= z_n(0) + \sigma B_n(t) + b\int_0^t Z_n(s)ds + ct + \gamma \sum_{j\in\{1,...,n\}\setminus\{n\}} \int_0^t \frac{ds}{Z_n(s) - Z_j(s)} \end{aligned}$$

under the condition that θ-a.s. for every $t \in [0, \infty)$

$$Z_1(t) \leq ... \leq Z_n(1)$$

This system admits a unique strong solution on $(\Omega, \theta, (\mathcal{G}_\sqcup), B)$ and the first collision time is θ-a.s. equal to ∞.

Consider $(\Omega, \theta, (\mathcal{G}_t))$ a filtered probability space, $(z_1(0), ..., z_n(0)) \in \mathbb{R}^n$ and $B = (B_1, ..., B_n)$ a $\mathbb{R}^n$-valued θ-Brownian motion, and Z the strong solution of the stochastic differential system of theorem 6.8.4. Denote $\nu_{pa} = Z$ the image measure of Z. For $1 \leq i \leq n$, denote $W_1, ..., W_n$ the coordinates of W and define

$$M_i(t) = W_i(t) - z_i(0) - b\int_0^t W_i(s)ds - ct - \gamma \sum_{j\in\{1,...,n\}\setminus\{i\}} \int_0^t \frac{ds}{W_i(s) - W_j(s)}$$

and

$$M = (M_1, ..., M_n)$$

M is a local martingale and

$$\langle M_i, M_j\rangle(t) = \sigma^2 t$$

Define

$$\beta_{pa} = \frac{1}{\sigma}M$$

Levy theorem clearly ensures that β is a ν_{pa}-Brownian motion and we clearly have for every $1 \leq i \leq n$,

$$W_i(t) = z_i(0) + \sigma\beta_{pa,i}(t) + b\int_0^t W_i(s)ds + ct + \gamma \sum_{j\in\{1,...,n\}\setminus\{i\}} \int_0^t \frac{ds}{W_i(s) - W_j(s)}$$

For $u \in G_0(\nu_{pa}, \beta_{pa})$ denote

$$\beta_{pa}^u = \beta_{pa} + u$$

and ν_{pa}^u the probability measure given by

$$\frac{d\nu_{pa}^u}{d\nu_{pa}} = \rho(-\delta_{\beta_{pa}} u)$$

According to Girsanov theorem, $\beta_{pa} + u$ is a Brownian motion under ν_{pa}^u, so according to theorem 6.8.4, there exists a unique ν_{pa}^u-a.s. continuous process $W_{pa}^u = (W_{pa,i}^u, ..., W_{pa,n}^u)$ such that ν_{pa}^u-a.s. for every $1 \leq i \leq n$

$$W_{pa,i}^u(t) = z_i(0) + \sigma\beta_{pa,i}^u(t) + b\int_0^t W_{pa,i}^u(s)ds + ct + \gamma \sum_{j\in\{1,...,n\}\setminus\{i\}} \int_0^t \frac{ds}{W_{pa,i}^u(s) - W_{pa,j}^u(s)}$$

and ν^u_{pa}-a.s. for every $t \in [0,1]$

$$W^u_{pa,1}(t) \leq ... \leq W^u_{pa,n}(t)$$

Since $\nu^u_{pa} \sim \nu_{pa}$, W^u is ν_{pa}-a.s. continuous and ν_{pa}-a.s. for every $1 \leq i \leq n$

$$W^u_{pa,i}(t) = z_i(0) + \sigma\beta^u_{pa,i}(t) + b\int_0^t W^u_{pa,i}(s)ds + ct + \gamma \sum_{j\in\{1,...,n\}\setminus\{i\}} \int_0^t \frac{ds}{W^u_{pa,i}(s) - W^u_{pa,j}(s)}$$

and ν_{pa}-a.s. for every $t \in [0,1]$

$$W^u_{pa,1}(t) \leq ... \leq W^u_{pa,n}(t)$$

Theorem 6.8.5 $\left(\mathbb{W}, \nu_{pa}, \beta_{pa}, (W^u_{pa})_{u\in\mathcal{D}}\right)$ *verify the conditions of section 6.2.*
$\left(\mathbb{W}, \nu_{pa}, \beta_{pa}, \left(W^u_{pa}\right)_{u\in G_0(\nu_{pa},\beta_{pa})}\right)$ *verify the conditions of definition 6.2.1.*

Proof: (vii) of definition 6.2.1 is clear, see [11] for the remainder of the proof. □

Corollary 6.8.4 *It is clear that for every $u \in \mathcal{D}$, we clearly have ν_{pa}-a.s.*

$$W^u_{pa}(w) = W^{u(w)}_{pa}(w)$$

so theorem 6.7.1 applies.

Bibliography

[1] M. Boué, P. Dupuis: *A variational formulation for certain functional of Brownian motion*. Ann. Probab. 26, 1641-1659, 1998.

[2] A. Budhiraja, P. Dupuis: *A variational formulation for positive functionals of infinite Brownian motion*. Probab. Math. Statist. 20, 39-61, 2000.

[3] E. Cépa, D. Lépingle: *Diffusing particles with electrostatic repulsion*. Probab. Theory Relat. Fields 107, 429-449, 1997.

[4] Y. Dabrowski: *A Laplace principle for hermitian Brownian motion and free entropy*, 2016.

[5] P. Dupuis, R. Ellis: *A weak convergence appoach to the theory of large deviation*, Wiley, 1997.

[6] S. Fang: *Integration by parts fomula and logarithmic Sobolev inequality on the path space over loop group*. Ann. Probab., 27, 2, 664-683, 1999.

[7] D. Feyel, A.S. Üstünel: *Log-concave measures*. TWMS Journal of Pure and Applied Mathematics, 1, 92-105, 2010.

[8] Y. Hariya: *A variational formulation and Prékopa theorem for Wiener functionals*, 2015.

[9] K. Hartmann: *A criteria of strong H-differentiability*, 2016.

[10] K. Hartmann: *Variational calculus for diffusions*, 2016.

[11] K. Hartmann: *A general framework for variational calculus on Wiener space*, 2016.

[12] K. Hartmann: *Variational calculus on Wiener space with respect to conditional expectations*, 2016.

[13] C.B. Hyndman, R. Wang: *Optimal measure transformation problems*, 2015.

[14] S. Kusuoka: *On the foundations of Wiener-Riemannian manifolds*. Stochastic Analysis, Path Integration and Dynamics, eds. K.D. Elworthy and J.C. Zambrini, Pitman research notes in Math. Longman Scientific, 1989.

[15] J. Lehec: *Short probabilistic source of the Brascamp-Lieb and Barthe theorem*, 2013.

[16] J. Neveu: *Bases mathématiques du calcul des probabilités*. Masson & Cie, 1970.

[17] A. Prékopa: *Logarithmic concave measures with application to stochastic program- ming*. Acta Sci. Math.,32 , 301316, 1971.

[18] L.C.G. Rogers, D. Williams: *Diffusions, Markov processes and Martingales*. Cambridge Mathematical Library, 2nd edition, 2000.

[19] L.C.G. Rogers, Z. Shi: *Interacting Brownian particles and the Wigner law*. Prob. Theory Relat. Fields 95, 555-570, 1993.

[20] B.S. Tsirelson *An example of stochastic differential equation having no strong solution*. Theor. Prob. Appl. 20, 416-418, 1975.

[21] A.S. Üstünel, M. Zakai: *The construction of filtrations on abstract Wiener space*. J. Funct. Ana. 143, 10-32, 1997.

[22] A. S. Üstünel and M. Zakai: *Transformation of Measure on Wiener Space*. Springer Verlag, 1999.

[23] A. S. Üstünel: *Analysis on Wiener Space and Applications*. http://arxiv.org/abs/1003 1649, 2010.

[24] A.S. Üstünel: *Entropy, invertibility and variational calculus od adapted shifts on Wiener space*. J. of Funct. Ana., 257, 11, 3655-3689, 2009.

[25] A.S. Üstünel: *Variational calculation of Laplace transforms via entropy on Wiener space and applications*. J. of Funct. Ana., 267, 8, 2014.

[26] S. Watanabe: *Lectures on Stochastic Differential equations and the Malliavin Caculus*. Lect. Math. Phys., Math., Tata Ins. Fundam. Res. 73, Springer 1984

[27] X. Zhang: *A variational formulation for random functionals on abstract Wiener spaces*. J. Math Kyoto Univ. 49, 475-490, 2009.

Calcul variationnel sur l'espace de Wiener

Kévin HARTMANN

RESUME : Ce travail vise à étendre la représentation variationnelle classique du logarithme de l'espérance de e^{-f} par rapport à la mesure de Wiener à des mesures plus générales. Nous donnons d'abord une condition suffisante de différentiabilité forte sur l'espace de Cameron-Martin. Dans un second temps nous étendons la formulation variationnelle à la mesure image d'une diffusion, puis nous utilisons cet exemple pour généraliser la représentation à un large ensemble de mesure. Nous diminuons aussi les hypothèses d'intégrabilité sur f et prouvons de nouveaux résultats sur l'inversibilité stochastique et l'existence de solutions fortes pour certaines équations différentielles stochastiques. Finalement, nous étendons encore une fois la représentation

ABSTRACT : This work aims at extending the classical variational formulation of the logarithm of the expectation of e^{-f} with respect to the Wiener measure to more general measures. First we give a sufficient criteria for functions to be strongly differentiable over the Cameron-Martin space. Then we extend the variational formulation to the case of the image measure of a diffusion, and we use this example to generalize the variational formulation to a wide set of measures, while reducing the integrability hypothesis over f and obtaining new results concerning stochastic invertibility and existence of strong solutions of stochastic differential equations. Finally, we extend once more this formulation by considering conditional expectations with respect to the same set of measures.